Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística
Mestrado em Matemática Aplicada e Estatística

Dualidades: de Birkhoff à N4-reticulados limitados

Paulo Roberto Beltrão Maia

Natal-RN
Fevereiro de 2017

Paulo Roberto Beltrão Maia

Dualidades: de Birkhoff à N4-reticulados limitados

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.
Área de Concentração: Modelagem Matemática.
Linha de Pesquisa: Matemática Computacional

Orientadora Profª. Drª. Elaine Gouvêa Pimentel

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE – UFRN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA E ESTATÍSTICA – PPGMAE

Natal-RN

Fevereiro de 2017

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Maia, Paulo Roberto Beltrão.
Dualidades: de Birkhoff à N4-reticulados limitados / Paulo Roberto Beltrão Maia. - 2017.
75f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística. Natal, 2017.
Orientadora: Elaine Gouvêa Pimentel.
Coorientador: Umberto Rivieccio.

1. Matemática computacional - Dissertação. 2. Dualidade de Birkhoff - Dissertação. 3. Dualidade de Stone - Dissertação. 4. Dualidade de Priestley - Dissertação. 5. N4-reticulados - Dissertação. 6. Estruturas twist - Dissertação. I. Pimentel, Elaine Gouvêa. II. Rivieccio, Umberto. III. Título.

RN/UF/CCET CDU 519.6

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Dissertação de Mestrado sob o título *Dualidades: de Birkhoff à N4-reticulados limitados* apresentada por Paulo Roberto Beltrão Maia e aceita pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Profª. Elaine Gouvêa Pimentel
Orientadora
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Umberto Rivieccio
Co-orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Alexey Kuzmin
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Mario Sergio Ferreira Alvim Jr
Universidade Federal de Minas Gerais

Natal-RN, Fevereiro de 2017.

Aos meus familiares, amigos e TOP3.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais pelo carinho, incentivo, apoio e presença constante ao longo de minha caminhada. Que nem sempre tudo foi fácil, pequenos desafios surgiram quando eu ainda estava sendo alfabetizado. Como ter sucesso em uma matéria tão difícil como matemática? Momentos preocupantes e desafiadores existiram, principalmente no início de minha vida adulta e acadêmica. As incertezas e imaturidade marcaram presença nesse período. Foi através desses momentos que pude contar o apoio de amigos/irmãos, os quais me acompanham desde muito cedo. Quando os desafios foram se tornando maiores e as decisões mais difíceis, amigos/primos preocupados e incentivadores, me estenderam a mão de uma forma muito especial. A esses amigos, minha gratidão e carinho. Tenho tido também apoio de profissionais dedicados e que veem me acompanhando com muito carinho. A eles sou muito grato.

Desde bem cedo tive excelentes professores, principalmente na minha disciplina favorita, a matemática. Durante a graduação não foi diferente. Tive boas oportunidades de desenvolvimento, como também pude conhecer outras culturas. E isso se deve aos professores com quem convivi durante o curso de Matemática. Hoje, estou cercado de boas lembranças e grato a essas pessoas que ao longo do tempo se tornaram meus amigos de profissão. Agradeço também aos familiares e amigos que de alguma forma contribuíram para o êxito de minha caminhada acadêmica e pessoal.

Um agradecimento muito especial se faz necessário. Ele vai para uma pessoa, que desde a minha seleção para o mestrado foi uma presença incentivadora. Foram dois anos de convivência com minha orientadora. O carinho, apoio incansável, críticas construtivas e compreensão, estiveram sempre presentes. Quem me conhece sabe que não é de meu feitio nomear as pessoas a quem sou grato. Porém, muito obrigado Elaine.

Para finalizar, tirando um pouco da seriedade, tenho que agradecer por algo que sem ele não teria conseguido fazer nada do que fiz até hoje. Muito obrigado Café.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES). Agradeço também ao PPgMAE-UFRN por esta oportunidade.

'A cardinal principle of modern mathematical research maybe be stated as a maxim: "One must always topologize" '.

Marshall H. Stone

Dualidades: de Birkhoff à N4-reticulados limitados

Autor: Paulo Roberto Beltrão Maia
Orientadora: Profª. Elaine Gouvêa Pimentel

Resumo

O trabalho tem como objetivo apresentar a dualidade de Birkhoff, estendendo para dualidade de Stone e por seguinte a dualidade de Priestley, assim como os conceitos básicos para o entendimento das mesmas. Feito isso, será colocado um operador modal positivo e mostrado que a dualidade de Priestley continua valendo agora para espaços de Priestley com um certo tipo de relação. Finalmente será apresentada uma dualidade entre N4-limitados e NE-Sp, utilizando a equivalência entre N4-limitados e TWIST-limitados como atalho. Além de apresentar algumas idéias sobre bireticulados no apêndice.

Palavras-chave: Dualidade de Birkhoff, Dualidade de Stone, Dualidade de Priestley, N4-reticulados, Estruturas twist.

Dualities: From Birkhoff to bounded N4-lattices

Abstract

The present study aims to introduce the Birkhoff duality, extending for Stone duality and followed by Priestley duality, as well as the basic concepts for understanding them. It will then be introduced a positive modal operator and shown that Priestley duality applies for Priestley spaces with a certain type of relation. After that, it will be done a duality among bounded N4 and NE-Sp, using the equivalence between bounded N4 and bounded TWIST as a shortcut. In addition to presenting some ideas about non-involutive bilattices in the appendix.

Keywords: Birkhoff duality, Stone duality, Priestley duality, N4-lattices, Twist-structure.

Conteúdo

Introdução

Em 1936, Marshall Stone publicou um notável artigo [Stone 1936]. Stone procurava entender as álgebras booleanas, e o que ele descobriu foi uma representação de todas as álgebras booleanas, o que deu aos algebristas uma compreensão muito útil da sua estrutura. Usando espaços topológicos ele mostrou que toda álgebra booleana é isomorfa à álgebra de todos os clopens de um certo espaço topológico compacto totalmente ordem desconexo, atualmente conhecidos por Espaços de Stone.

De fato, Stone provou muito mais que essa representação. Ele mostrou que todos os homomorfismos entre álgebras booleanas correspondem precisamente às funções contínuas entre espaços de Stone. Em uma linguagem categórica, ele provou que a categoria das álgebras booleanas é dualmente equivalente à categoria dos espaços de Stone. Considerada uma das noções mais poderosas da teoria de categorias, permitindo herdar resultados da categoria original para a dual e vice-versa, as dualidades têm se mostrado útil no estudo de várias estruturas, tais como reticulados e frames, entre outras, que podem ser vistas através de estruturas por vezes mais simples. Tornando-se assim uma ferramenta singular em diversas áreas, como análise funcional e lógica, permitindo o estudo da semântica através de estruturas matemáticas, por vezes mais apropriadas.

Outros dois resultados apareceram quase simultaneamente. Em [Birkhoff et al. 1937], Garrett Birkhoff, filho de George Birkhoff, orientador de Stone, conseguiu uma representação para reticulados distributivos finitos através de posets finitos. E L. Pontryagin em [Pontryagin 1934a] e [Pontryagin 1934b] apresentou uma dualidade para grupos abelianos, permitindo trabalhar com essas estruturas algébricas através de espaços topológicos, onde se tem mais intuições geométricas.

Estes três resultados plantaram sementes para uma considerável variedade de novas dualidades, criando praticamente um novo ramo de pesquisa. Uma das mais notáveis dualidades se deve a Hilary Priestley em [Priestley 1970] e [Priestley 1972], onde foram combinados os teoremas de Stone e de Birkhoff para mostrar a dualidade entre a categoria de todos os reticulados distributivos limitados e a categoria de todos espaços totalmente ordem desconexos, conhecidos por Espaços de Priestley. A importância da Dualidade de

Priestley para a lógica é explicada pelo fato de que os objetos resultantes desta estão intimamente ligados com a semântica de Kripke.

A descoberta de Priestley iniciou uma grande quantidade de resultados paralelos, tais como: [Hofmann, Mislove e Stralka 1974] para semireticulados com 1, para álgebras de De Morgan[Davey e Werner 1980], [Davey e Werner 1980] para álgebras de Kleene, grupos abelianos e álgebras quase-primas, entre vários outros.

Mais recentemente, em [Odintsov 2010], foi apresentada uma dualidade estilo Priestley para $N4^{\perp}$-reticulados. Lembrando que os $N4^{\perp}$-reticulados fornecem uma semântica algébrica para a lógica N4, a variante paraconsistente da lógica de Nelson com negação forte, essa dualidade é uma ferramenta para investigação da classe das extensões $N4^{\perp}$. Por exemplo, para estudar o círculo de questões relacionadas com a admissibilidade das regras de inferência ou estudar a semântica generalizada de Kripke, que pode ser usada para técnicas canônicas para esta classe de lógicas. Para tal dualidade foi necessário a utilização da dualidade de Esakia (dualidade para álgebras de Heyting)[Esakia 1974] e da dualidade de De Morgan [Cornish e Fowler 1977].

No entanto, em [Jansana e Rivieccio 2013], foi mostrada uma dualidade para N4-reticulados (agora não necessariamente limitados) que se utiliza apenas da dualidade de Esakia [Esakia 1974], fornecendo espaços bem mais simples do que os propostos em [Odintsov 2010]. Para isso foi utilizado como resultado fundamental a representação feita em [Odintsov 2004], ou seja, que cada N4-reticulado pode ser representado através de uma estrutura twist.

À vista disto, este trabalho tem como primeiro objetivo apresentar as dualidades de Stone, de Birkhoff e de Priestley, tendo os 3 primeiros capítulos destinados aos conceitos básicos para tal entendimento. Feito isso, será colocado um operador modal positivo e mostrado que a dualidade de Priestley continua valendo agora para espaços de Priestley com um certo tipo de relação, baseado nas notas [Jansana 2009]. E finalmente, será apresentada a dualidade encontrada em [Jansana e Rivieccio 2013], entre $N4^{\perp}$ e NE-Sp.

Por fim, apresentamos no apêndice os primeiros resultados para bireticulados não involutivos, como por exemplo, sua representação através de estruturas twist e equivalência categórica.

1 Conceitos Algébricos

Os três primeiros capítulos deste trabalho conterão todos os pre-requisitos de maneira clara e completa para uma total compreensão do assunto de dualidades, a ser desenvolvido nesse trabalho. Este primeiro capítulo é destinado aos conceitos algébricos.

Como cronologicamente a primeira dualidade feita em [Stone 1936] foi uma dualidade para álgebras booleanas, nada mais natural do que começar por tal estrutura.

Na literatura, encontra-se várias definições para álgebra booleana. Definições que em geral utilizam um número grande de propriedades. A definição a seguir, elaborada por Huntington em 1904, corresponde a um conjunto minimal de axiomas, isto é, nenhum deles pode ser derivado a partir dos demais.

Qualquer sistema algébrico que satisfaça os 4 axiomas abaixo é uma álgebra Booleana. Mais adiante será provado como a propriedade associativa (frequentemente incorporada a definição de álgebra booleana) e várias outras podem ser derivadas a partir dos seguintes axiomas.

Definição 1. *Seja* $\langle A, +, \times, ^{-}, 0, 1\rangle$ *uma estrutura algébrica na qual* A *é um conjunto,* $+$ *e* $\times$ *são operações binárias sobre* A, $^{-}$ *é uma operação unária em* A *e* 0 *e* 1 *são dois elementos distintos em* A. *O sistema algébrico* $\langle A, +, \times, ^{-}, 0, 1\rangle$ *é dito uma* álgebra booleana *se os seguintes axiomas são satisfeitos:*

1. *As operações* $+$ *e* $\times$ *são comutativas, ou seja, para todo* x *e* y *em* A, $x + y = y + x$ *e* $x \times y = y \times x$.

2. *Cada operação é distributiva sobre a outra, isto é, para todo* x, y *e* z *em* A, $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ *e* $x + (y \times z) = (x + y) \times (x + z)$.

3. *Os elementos* 0 *e* 1 *são os elementos identidade, ou seja, para todo* $x \in A$, $x + 0 = x$ *e* $x \times 1 = x$.

4. *Todo elemento $x \in A$ possui um complemento $\bar{x}$, ou seja, $x + \bar{x} = 1$ e $x \times \bar{x} = 0$.*

Teorema 1. *Seja $\langle A, +, \times, \bar{}, 0, 1\rangle$ uma álgebra booleana. Então,*

1. *Os elementos 0 e 1 são únicos.*
2. *Para todo elemento $x \in A$, $x + x = x$ e $x \times x = x$.*
3. *Para todo $x \in A$, $x + 1 = 1$ e $x \times 0 = 0$.*
4. *$\bar{1} = 0$ e $\bar{0} = 1$.*
5. *Para todo $x, y \in A$, $x + (x \times y) = x$ e $x \times (x + y) = x$.*
6. *O complemento de qualquer elemento $x \in A$ é único, isto é, se $x + y = 1$ e $x \times y = 0$ para algum $y \in A$, então $y = \bar{x}$.*
7. *Para todo $x \in A$, $\bar{\bar{x}} = x$.*
8. *Para quaisquer $x, y, z \in A$, $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$.*
9. *Para quaisquer $x, y \in A$, $\overline{(x + y)} = \bar{x} \times \bar{y}$ e $\overline{x \times y} = \bar{x} + \bar{y}$.*

Prova

1. Suponha que existem dois elementos zero, $0'$ e $0''$. Sejam x' e x'' dois elementos quaisquer em A. Por $A3$, temos que $x' + 0' = x'$ e $x'' + 0'' = x''$. Tome, em particular, $x' = 0''$ e $x'' = 0'$. Assim tem-se $0'' + 0' = 0''$ e $0' + 0'' = 0'$. Por $A1$ e a transitividade de $=$, resulta que $0' = 0''$.
   Analogamente se mostra que o 1 também é único.
2. $x + x = (x + x) \times 1 = (x + x) \times (x + \bar{x}) = x + x \times \bar{x} = x + 0 = x$.
   $x \times x = (x \times x) + 0 = (x \times x) + (x \times \bar{x}) = x \times (x + \bar{x}) = x \times 1 = x$
3. $x + 1 = 1 \times (x + 1) = (x + \bar{x}) \times (x + 1) = x + (\bar{x} \times 1) = x + \bar{x} = 1$. Analogamente $x \times 0 = 0$
4. $\bar{1} = \bar{1} \times 1 = 0$. Analogamente $\bar{0} = 1$.
5. $x + (x \times y) = (x \times 1) + (x \times y) = x \times (1 + y) = x \times 1 = x$.Analogamente para o outro caso.

□

Já nota-se com estas propriedades a semelhança dessa estrutura algébrica com a lógica proposicional. Porém, agora pode-se fazer as demonstrações algebricamente.
A partir de agora, para evitar confusões quanto a notação, em vez do $+$ e do $\times$ utilizado anteriormente, vou utilizar $\oplus$ e $\otimes$ respectivamente, para denotar as operações da álgebra booleana. Assim como em vez de $\bar{x}$ será utilizado $\neg x$.

Definição 2. *Um grupo $(G, +)$ é um conjunto G e uma operação binária $+$ definida sobre G, que satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *Associatividade: $\forall a, b, c \in G$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.*
2. *Existência do elemento neutro: Existe um elemento 0 em G tal que $0 + a = a + 0 = a \forall a \in G$.*
3. *Existência do elemento simétrico: Para qualquer elemento a em G, existe outro elemento a' em G, tal que, $a+a' = a'+a = 0$, onde 0 é o elemento neutro previamente mencionado.*

Quando um grupo tem a propriedade comutativa, ou seja, $a+b = b+a$ para todos $a, b \in G$, ele é dito grupo abeliano.

Exemplo 1. *O conjunto $\{1, -1\}$ é um grupo abeliano relativamente à multiplicação usual.*

Exemplo 2. *Seja $(A, \oplus, \otimes, \neg, 0, 1)$ uma álgebra booleana. Se definirmos $a+b = (a \otimes \neg b) \oplus (\neg a \otimes b)$ temos que $(A, +)$ é um grupo abeliano.*

Definição 3. *Um anel $(A, +, *)$ é um conjunto A e com duas operações binárias definidas sobre A, $+$ e $*$, que satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *$(A, +)$ é um grupo abeliano,*
2. *Para quaisquer elementos $a, b, c \in A$ tem-se $a * (b * c) = (a * b) * c$,*
3. *Para quaisquer elementos $a, b, c \in A$ tem-se $a * (b + c) = a * b + a * c$ e $(a + b) * c = a * c + b * c$.*

Exemplo 3. *$(\mathbb{Z}, +, \times)$ com as operações usuais é um anel.*

Exemplo 4. *Uma álgebra booleana com a soma antes definida e $a \times b = a \otimes b$, para todo a e b, é um anel.*

Se existir $b \in A$ tal que para qualquer elemento $a \in A$, $a * b = b * a = a$, diz-se que A é anel com identidade e denotaremos b por 1.

Se para quaisquer $a, b \in A$ tiver $a * b = b * a$, diz-se que A é anel comutativo.

Consideremos um anel comutativo com identidade $A = \langle A, +, \times, 0, 1\rangle$. Sempre assumiremos $0 \neq 1$.

Definição 4. *Um **ideal** de A é um subconjunto I de A tal que*

- $\langle I, +, 0\rangle$ *é subgrupo de* $\langle A, +, 0\rangle$*;*
- *Para todo elemento $x \in I$ e $y \in A$, tem-se que $x \times y \in I$.*

Claramente A é um ideal dele mesmo. Um ideal diferente de A é chamado ***ideal próprio***.

Definição 5. *Um ideal próprio I é chamado um **ideal maximal** se não existe um outro ideal próprio J tal que I é um subconjunto de J.*

Definição 6. *Um ideal próprio I é chamado um **ideal primo** se para qualquer x e y em A com $x \times y$ em I, então $x \in I$ ou $y \in I$.*

Pela definição de álgebra booleana e pelo Teorema 1, pode-se dizer que uma álgebra booleana é um anel A comutativo com identidade tal que todo elemento é idempotente para multiplicação. Ou seja $x \times x = x$ para todo $x \in A$.

Seja A uma álgebra booleana. Pode-se definir a seguinte relação de ordem $\leq$: para todo elemento x e y de A, $x \leq y$ se $x + y = y$. Como $x + y = y$, se e somente se, $x \times y = x$, pode-se dizer que a operação $+$ representa o supremo e a operação $\times$ representa o ínfimo.

O texto a seguir vai mostrar que pode-se ver uma álgebra booleana como outro tipo de estrutura algébrica: os reticulados. Mais especificamente, que uma álgebra booleana é um reticulado distributivo e complementado. Mais a frente será retirada a complementação dos reticulados distributivos e será visto o que acontece quando isso é feito.

Definição 7. *Uma relação binária $\leq$ sobre A é uma ordem parcial com as propriedades*

- *(Reflexiva) $x \leq x$ para todo $x \in A$.*
- *(Anti-simétrica) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$, para todo $x, y \in A$.*

- *(Transitiva) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$, para todo $x, y, z \in A$.*

Se $\leq$ é uma ordem parcial em A, então o $(A, \leq)$ é denominado um cojunto parcialmente ordenado (ou *poset*).
Exemplo de dois posets são os números reais com a relação $\leq$ de ordem usual e o conjunto das partes de qualquer conjunto com a ordem $\subseteq$ de inclusão usual. Além disso, uma álgebra booleana com a relação de ordem definida anteriormente também é um poset. A relação $\leq$ definida anteriormente é uma relação de ordem parcial. De fato, pela lei de idempotêcia $x+x = x$ temos que $x \leq x$ para todo $x \in A$ se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x+y = x$ e $y+x = y$, pela comutatividade tem-se $x = y$. Se $x \leq y$ e $y \leq z$ então,

$$z \geq y + z \geq (x + y) + z = x + (y + z) \geq x + z, \text{ assim } x \leq z.$$

Definição 8. *Seja $(A, \leq)$ um poset e seja $X \subseteq A$.*

- *Chama-se de menor elemento de A um elemento $0 \in A$ tal que $0 \leq x$ para todo $x \in A$.*

- *Chama-se de maior elemento de A um elemento $1 \in A$ tal que $x \leq 1$ para todo $x \in A$.*

- *Chama-se ínfimo de X em A o maior elemento dos limitantes inferiores de X em A. O ínfimo de X é denotado $\bigwedge X$. O ínfimo de x, y é denotado $x \wedge y$. O operador $\wedge$ é chamado conjunção.*

- *Chama-se supremo de X em A o menor elemento dos limitantes superiores de X em A. O supremo de X é denotado $\bigvee X$. O supremo de x, y é denotado $x \vee y$. O operador $\vee$ é chamado união.*

Definição 9. *Um reticulado é um poset $(A, \leq)$ no qual cada par de elementos possui um ínfimo e um supremo em A, ou seja, para quaisquer $x, y \in A, x \vee y$ e $x \wedge y$ estão em A.*

Definição 10. *Um reticulado $(A, \leq)$ é distributivo se as operações de união $(\wedge)$ e conjuncão $(\vee)$ são distributivas, isto é, para quaisquer x, y e z em A, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ e $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.*

Definição 11. *Um reticulado $(A, \leq)$ com 0 e 1 é complementado se todo elemento em A possui um complemento, isto é, para todo $x \in A$ existe $\tilde{x}$ tal que $x \vee \tilde{x} = 1$ e $x \wedge \tilde{x} = 0$.*

Definição 12. *Sejam P, Q posets e $f : P \longrightarrow Q$. Diz-se que f é um homomorfismo de posets se f preserva ordem, ou seja, dados $a, b \in P$ com $a \leq b$ então $f(a) \leq f(b)$.*

Se f for uma bijeção, e f^{-1} também preservar ordem, f é dito isomorfismo de posets.

Definição 13. *Sejam L, M reticulados e $f : L \longrightarrow M$. Diz-se que f é um homomorfismo de reticulados se $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ e $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ para todos $a, b \in L$.*

Um homomorfismo de reticulados bijetor é dito isomorfismo de reticulados.

Definição 14. *Sejam A, A' álgebras booleanas e $f : A \longrightarrow A'$. Diz-se que f é um homomorfismo booleano se $f(1_A) = 1_{A'}$, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ e $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ para todos $a, b \in A$.*

Um homomorfismo booleano bijetor é dito isomorfismo booleano.

Definição 15. *Sejam P um poset e $U \subseteq P$. U é dito* upset *se para todo $x, y \in U$ com $x \leq y$ e $x \in U$ então $y \in U$.*

Exemplo 5. *Seja P um poset e $a \in P$. O conjunto $\uparrow a = \{p \in P : a \leq p\}$ é um upset.*

Definição 16. *Sejam P um poset e $D \subseteq P$. D é dito* downset *se para todo $x, y \in D$ com $y \leq x$ e $x \in D$ então $y \in D$.*

Exemplo 6. *Seja P um poset e $a \in P$. O conjunto $\downarrow a = \{p \in P : p \leq a\}$ é um downset.*

É fácil ver que o complementar de um upset é um downset.

Teorema 2. *Um reticulado $(A, \leq)$ distributivo e complementado é uma álgebra booleana.*

Prova Considere um reticulado distributivo e complementado $(A, \leq)$ com as operações de união $\vee$ e conjunção $\wedge$ como definidos anteriormente, e complementação. Claramente $\vee$ e $\wedge$ definem operações binárias em A. Sejam ainda 0 e 1 o menor e o maior elementos de $(A, \leq)$.
Vamos verificar que os axiomas de Huntington são satisfeitos. As operações $\vee$ e $\wedge$ são comutativas por definição; são distributivas pois o reticulado é distributivo; o Axioma 4 é satisfeito pois o reticulado é complementado, e o Axioma 3 é satisfeito pois $x \vee 0 = x$ e $x \wedge 1 = x$ para qualquer $x \in A$. $\square$

Teorema 3. *Seja A um reticulado e I um subconjunto de A. I é um ideal (lembre-se que todo ideal é próprio) se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

- *Para todos $x, y \in I$, $x \vee y \in I$.*
- *Para todo $x \in I$ e $y \in A$, se $y \leq x$ então $y \in I$.*

O conceito dual ao de Ideal é chamado Filtro.

Definição 17. *Seja A um reticulado e F um subconjunto de A. F é um filtro (lembre-se que todo filtro é próprio) se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

- *Para todos $x, y \in F$, $x \wedge y \in F$.*
- *Para todo $x \in F$ e $y \in A$, se $x \leq y$ então $y \in F$.*

Teorema 4. *Seja L um reticulado distributivo e $a \in L$. Então $\uparrow a$ é um filtro.*

Prova Para $\uparrow a$ ser filtro tem-se que ter

1. Se $x \in \uparrow a$ e $x \leq y$, então $y \in \uparrow a$, e isso é óbvio pela definição de $\uparrow a$.
2. Seja $x, y \in \uparrow a$. Tem-se $c = x \wedge y = (a \vee x) \wedge (a \vee y) = a \vee (x \wedge y) = a \vee c$. Assim a $a \leq c$, logo, $c \in \uparrow a$.

Portanto, $\uparrow a$ é um filtro. $\square$

De maneira análoga, prova-se que se L é um reticulado distributivo com $a \in L$, $\downarrow a$ é um ideal.

Definição 18. *Um filtro maximal é chamado Ultrafiltro.*

Definição 19. *Um filtro P tal que para todos $x, y \in P$ tem-se que, $x \vee y \in P$ implica $x \in P$ ou $y \in P$, é chamado Filtro Primo.*

Definição 20. *Seja L um reticulado distributivo limitado. Denota-se $X(L)$ o conjunto de todos filtros primos de L, ou seja, $X(L) = \{P \subseteq L : P \text{ é filtro primo}\}$. E denota-se $\varphi(a)$ o conjunto de todos os filtros primos que contém a, ou seja, $\varphi(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}$.*

Definição 21. *Seja L um reticulado e $A \subseteq L$. Diz-se que $[A] := \{x : a \wedge b \leq x \text{ com } a, b \in S\}$ é filtro gerado por A em L. Analogamente define-se ideal gerado por um conjunto.*

Teorema 5. *Para qualquer ideal I de uma álgebra booleana B, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

1. *I é um ideal primo.*
2. *I é um ideal maximal próprio, isto é, para qualquer ideal próprio J, se I está contido em J então $I = J$.*

3. *Para todo elemento a de B, I contém exatamente um de $\{a, \neg a\}$.*

Prova (1 $\implies$ 3) Se I é um ideal primo, então $0 = a \wedge \neg a \in I \forall a \in B$, logo $a \in A$ ou $\neg a \in I$. Suponha $a \in A$, então $\neg a \notin I$, pois caso contrário $a \vee \neg a = 1 \in I$, donde I não seria ideal primo. De maneira análoga, se $\neg a \in I$, então $a \notin I$. Assim, I contém exatamente um de $\{a, \neg a\}$.

(3 $\implies$ 2) Se para todo $a \in B$ tem-se que I contém exatamente um de $\{a, \neg a\}$. Seja I e J não vazios, J ideal com $I \subset J$ com $J \neq I$. Então $\neg a \in J$ para algum $a \in I$, logo o ideal gerado por $I \cup \{\neg a\}$ está contido em J. Ou seja, $a \vee \neg a = 1 \in J$, donde $J = B$. Sendo assim, I um ideal maximal.

(2 $\implies$ 1) Sejam I um ideal maximal e $a \wedge b \in I$. Se $a \notin I$, então o ideal gerado por $I \cup \{a\}$ é B, assim, $b \in I$. Analogamente para $b \notin I$, tem-se $a \in I$. Assim, I é primo. $\square$

O resultado também segue para filtros:

Teorema 6. *Para qualquer filtro F de uma álgebra booleana B, os seguintes são equivalentes:*

1. *F é um filtro primo.*

2. *F é um filtro maximal próprio, isto é, para qualquer filtro próprio J, se F está contido em J então $F = J$.*

3. *Para todo elemento a de B, F contém exatamente um de $\{a, \neg a\}$.*

Teorema 7. *Sejam L reticulado distributivo e $J, G \subseteq L$ ideal e filtro respectivamente tal que $J \cap G = \emptyset$, então existe ideal primo I com $J \subseteq I$ e $G \cap I = \emptyset$.*

Prova Defina $X = \{K \subseteq L \text{ ideal } : J \subseteq K \text{ e } K \cap G = \emptyset\}$.

Note que por hipótese X é não vazio, pois $J \in X$. Tome $\Lambda = \{X_\lambda\}$ uma cadeia de elementos de X e defina K a união dos K_λ com $\lambda \in \Lambda$.
Tomando $a, b \in K$, existe $\lambda, \mu \in \Lambda$ tais que $\lambda \in K_\lambda$ e $\mu \in K_\mu$. Como K é cadeia assuma $K_\lambda \subseteq K_\mu$, assim $a, b \in K_\mu$ que é ideal de L logo $a \vee b \in K_\mu \subseteq K$.
Agora tome $a \in L$ e $b \in K$ tal que $a \leq b$. Como $b \in K$ ele pertence a algum K_λ e sendo K_λ ideal $a \in K_\lambda \subseteq K$.
Assim temos que K é ideal.
Como K_λ é ideal para todo $\lambda \in \Lambda$ é ideal com $K_\lambda \cap G = \emptyset$ temos que $K \cap G = \emptyset$, fazendo de K uma conta superior para X que é um conjunto parcialmente ordenado pela inclusão,

logo pelo Lema de Zorn, possui um elemento maximal I.
A tarefa agora é mostrar que I é um ideal primo. Suponha, por absurdo, $x, y \in L$ com $x \wedge y \in I$, $x \notin I$ e $y \notin I$. Daí, os ideais gerados por $I \cup \{x\}$ e $I \cup \{y\}$ contém propriamente I e possuem interseção não vazia com G já que I é maximal. Assim existem $a, b \in I$ e $c, d \in G$ tais que $c \leq (x \vee b)$ e $d \leq (y \vee a)$. Como $a \vee b \in I$ e $x \wedge y \in I$, segue que $(a \vee b) \vee (x \wedge y) \in I \cap G$, um absurdo, pois I e G são disjuntos. $\square$
De maneira análoga prova-se o terema de Stone-Birkhoff:

Teorema 8. *Sejam L reticulado distributivo e $J, G \subseteq L$ ideal e filtro respectivamente tal que $J \cap G = \emptyset$, então existe um filtro primo F com $G \subseteq F$ e $J \cap F = \emptyset$.*

Corolário 1. *Seja L um reticulado distributivo limitado. Então $\varphi(a) = \varphi(b)$ se, e somente se, $a = b$.*

Prova Seja $a \neq b$. Suponha $a \not\leq b$. Seja $F = \uparrow a$ e $I = \downarrow b$, tem-se que $F \cap I = \emptyset$. Pelo Teorema de Stone-Birkhoff, existe P filtro primo tal que $F \subseteq P$ e $P \cap I = \emptyset$. Assim, $P \in \varphi(a)$ e $P \notin \varphi(b)$, mostrando que $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. $\square$

Teorema 9. *Seja L um reticulado distributivo limitado. Então $\bigcap \varphi(a) = \uparrow a$.*

Prova Como $\uparrow a$ é filtro e contém a, então $\bigcap \varphi(a) \subseteq \uparrow a$. Seja $x \in \uparrow a$, então $a \leq x$ e como todo $\varphi(a)$ são filtros, são upsets, e como todos contém a, todos eles contém x.Assim,$\uparrow a \subseteq \bigcap \varphi(a)$. Logo, $\bigcap \varphi(a) = \uparrow a$. $\square$

2 Conceitos Topológicos

Como falado anteriormente, iremos "transformar" estruturas algébricas em estruturas topológicas. Para isso, se faz necessário alguns conceitos básicos de topologia, que serão encontrados neste capítulo.

Definição 22. *Diz-se que uma topologia sobre um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X tendo as seguintes propriedades:*

1. *$\emptyset$ e X estão na coleção τ.*
2. *A união de elementos de qualquer subcoleção de τ está em τ.*
3. *A interseção finita de elementos de qualquer subcoleção de τ está em τ.*

Assim, o par (X, τ) é chamado *Espaço Topológico*. Quando a topologia τ for clara usaremos somente X em vez de (X, τ). E os elementos $U \in \tau$ são chamados abertos de τ.

Exemplo 7. *A topologia em que todos subconjuntos de X são abertos, ou seja, todo subconjunto $U \subseteq X$ temos $U \in \tau$. Claramente é uma topologia e é chamada Topologia Discreta.*

Exemplo 8. *Quando $\tau = \{\emptyset, X\}$. É chamada Topologia Trivial.*

Exemplo 9. *A topologia de todos subconjuntos $U \subseteq X$ tais que, $X \backslash U$ ou é vazio ou é finito. Claramente também é uma topologia e é chamada Topologia do Complementar Finito.*

Exemplo 10. *$X = \{a, b\}$ e $\tau = \{\emptyset, X, a\}$. É chamada topologia de Sierspinsk.*

Como pode-se ver nos exemplos, podem existir várias topologias sobre o mesmo conjunto. Então é necessário descrever toda a coleção τ de abertos. O que vamos ver é que pode-se descrever uma topologia a partir de um coleção menor de abertos, o que iremos chamar de base para uma topologia e seus elementos de abertos básicos.

Definição 23. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $B \subseteq \tau$. A família B é uma base de τ se, e somente se*

1. *Para todo $x \in X$, existe pelo menos um $U \in B$ que o contém.*

2. *Para todo $B_1, B_2 \in B$, se $x \in B_1 \cap B_2$, então, existe $B_3 \in B$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Teorema 10. *Seja X um conjunto, e seja β uma base para a topologia τ em X. Então τ é igual a coleção de todas as uniões de elementos básicos de β.*

Prova Seja $U \in \tau$ temos que para todo $x \in U$ existe $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x$ e $B_x \subseteq U$. Assim, $U = \bigcup_{x \in U} B_x$. Logo, U é a união de elementos de β. $\square$

Diz-se que τ é uma topologia gerada por B quando τ são todas possíveis uniões de B.

Definição 24. *Os conjuntos $U \in \tau$ tal que $x \in U$ são chamados vizinhança do ponto x. De modo mais geral qualquer aberto que contenha x é considerado uma vizinhança de x.*

Definição 25. *$S \subset \tau$ é dito uma sub-base de τ se a coleção de interseções finitas de elementos de S formam uma base para τ.*

Definição 26.
1. *$x \in X$ é um ponto interior a V se existe U vizinhança de x tal que $x \in U \subset V$. O conjunto dos pontos interiores a A é denotado por Int A.*

2. *$x \in X$ é um ponto exterior a V se é interior a $X \backslash V$. O conjunto dos pontos exteriores a A é denotado por Ext A.*

3. *$x \in X$ é um ponto aderente a V se para toda vizinhança U de x tem-se $U \cap V \neq$. O conjunto dos pontos aderentes a A é denotado por $\bar{A}$ e é chamado fecho.*

4. *$x \in X$ é um ponto de acumulação a V se para toda vizinhança U de x tem-se $(U - x) \cap V \neq \emptyset$. O conjunto dos pontos de acumuação de A é denotado por* A'.

5. *$x \in X$ é um ponto da fronteira de V se é aderente a V e a $X \backslash V$, ou seja, para toda vizinhança V de x tem-se pontos em V e $X \backslash V$. O conjunto de todos os pontos da fronteira de V e denotado por: ∂V.*

6. *$x \in X$ é um ponto isolado de V se x é vizinhança de x. Um conjunto onde todos os pontos são isolados é chamado discreto.*

7. *$V \subset X$ é dito denso se $\bar{V} = X$*

Teorema 11. *A é aberto se, e somente se, $A = Int(A)$.*

Definição 27. *Um espaço topológico* (X,τ) *é dito* Hausdorff *se para todo* $x, y \in X$ *com* $x \neq y$*, existem abertos* U *e* V *disjuntos, tais que* $x \in U$ *e* $y \in V$*.*

Definição 28. *Seja* $F \subset X$ *e* (X,τ) *um espaço topológico. Então* F *é dito* fechado *se* $X \backslash F$ *é aberto.*

Definição 29. *Seja* $C \subset X$ *e* (X,τ) *um espaço topológico. Então* C *é chamado* clopen *se é aberto e fechado ao mesmo tempo.*

Definição 30. *Seja* $K \subseteq X$ *e* (X,τ) *um espaço topológico.* K *é dito* compacto *se toda cobertura por abertos de* K *admite uma subcobertura finita.*

Teorema 12. *Um espaço topológico* X *é compacto se, e somente se, qualquer cobertura de* X *por abertos de uma subbase desse espaço admitir um subcobertura finita.*

Teorema 13. *Seja* X *um espaço topológico Hausdorff, então todo subespaço compacto é fechado.*

Prova Seja $A \subseteq X$ compacto. Tome $x \notin A$. Como X é Hausdorff para todo $a \in A$ existem abertos U_a com $a \in U_a$ e $x \in V_a$ tais que U_a e V_a são disjuntos. Claramente $A \subseteq \bigcup_{a\in A} U_a$, como A é compacto então $A \subseteq \bigcup_{a\in A'} U_a$, logo $\bigcap_{a\in A'} V_a$ é vizinhança aberta de x em A. $\square$

Teorema 14. *Todo subespaço fechado de um espaço compacto também é compacto.*

Prova Sejam X compacto e $F \subseteq X$ fechado. Tome U uma cobertura de F. Como F é fechado então $X \backslash F$ será aberto e $U \cup (X \backslash F)$ será uma cobertura de X. Como X é compacto, admite uma subcobertura $U' \subseteq U$ tal que $U' \cup (X \backslash F)$ é subcobertura finita de X.Logo, $F \subset U'$ e portanto compacto. $\square$

Definição 31. *Uma família* $\mathcal{F}$ *de subconjuntos de um conjunto* X *possui a propriedade da interseção finita (p.i.f.) se, para qualquer* $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ *finita, verificar* $\bigcap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$*.*

Teorema 15. *Um espaço topológico* X *é compacto se, e somente se, qualquer família de fechados de* X *com a p.i.f. possuir intersecção não vazia.*

Definição 32. *Sejam* (X,τ_X) *e* (Y,τ_Y) *espaços topológicos. Uma função* $f : X \longrightarrow Y$ *é dita contínua se a imagem inversa de qualquer aberto de* Y *for aberto de* X*.*

Teorema 16. *Sejam* (X,τ_X) *e* (Y,τ_Y) *espaços topológicos e* β *uma base de* τ_Y*. Então* $f : X \longrightarrow Y$ *é contínua se, e somente se, para todo* $V \in \beta$ *tem-se* $f^{-1}(V) \in \tau_x$*.*

Prova Como β é base de τ_Y, todo aberto V de τ_Y é união de elementos de β, ou seja, $V = \bigcup V_i$ para alguns $V_i \in \beta$. Sendo f é contínua, $f^{-1}(A)$ é aberto de τ_x para todo aberto de β. Reciprocamente, se para todo $A \in \beta$ tem-se $f^{-1}(A)$ aberto em τ_x, $f^{-1}(V_i) \in \tau_x$ para todo i, logo $f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup V_i) = \bigcup f^{-1}(V_i) \in \tau_x$, sendo assim f contínua. $\square$

Definição 33. *Um* espaço topológico ordenado *é uma tripla* $(X, \leq, \tau)$ *onde* $(X, \leq)$ *é um conjunto parcialmente ordenado.*

Definição 34. *Um espaço topológico parcialmente ordenado é dito* totalmente desconexo *se para cada* $x, y \in X$ *tal que* $x \nleq y$ *então existe um clopen upset* $U \subseteq X$ *tal que* $x \in U$ *e* $y \notin U$.

3 Conceitos de Teoria de Categorias

A dualidade é fundamentalmente um conceito da Teoria de Categorias. Assim, volto à teoria de categorias para encontrar um contexto onde as noções, a terminologia e os fatos necessários estejam disponíveis para construir uma teoria geral de dualidades. Ao mesmo tempo, vale a pena salientar que a quantidade de teoria de categorias por si que é realmente necessária para desenvolver este trabalho é muito pequena. Neste capítulo será apresentado esse pequeno pedaço da teoria das categorias, como funtores, transformações naturais e outras coisas importantes na teoria das dualidades.

Definição 35. *Dizemos que C é uma categoria se possui:*

1. *Uma coleção de objetos chamado $C -$ objetos.*
2. *Uma coleção de morfismos chamados $C-$morfismos. O conjunto de morfismos entre C-objetos a e b será denotado por $C\left(a,b\right)$.*
3. *Operações que para cada C-morfismo f associam um C-objeto $dom(f)$ (domínio de f) e um C-objeto $cod(f)$ (contradomínio de f), tais que se $a = dom(f)$ e $b = cod(f)$ representaremos $f : a \to b$.*
4. *Uma operação que para cada par $\langle g, h\rangle$, de C-morfismo com $dom(g) = cod(f)$, associa um C-morfismo $g \circ f$, a composição de f e g, possui $dom(g \circ f) = dom(f)$ e $cod(g \circ f) = cod(g)$, ou seja, $g \circ f : dom(f) \to cod(g)$ e $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*
5. *Além disso, para cada C-objeto existe um C-morfismo $1_b : b \to b$, chamado* identidade*, tal que para qualquer f $C -$ morfismo tem-se $1_b \circ f = f$ e $f \circ 1_b = f$.*

Exemplo 11. *A categoria dos Posets, onde os objetos são posets e os morfismos funções crescentes com a lei de composição usual.*

Exemplo 12. *A categoria dos Grupos, onde os objetos são grupos e os morfismos são os homomorfismos de grupo com a lei de composição usual.*

Exemplo 13. *A categoria dos Anéis, onde os objetos são anéis e os morfismos são os homomorfismos de anéis com a lei de composição usual.*

Definição 36. *C é uma subcategoria de uma categoria D, se*

1. *Todo C-objeto é um D-objeto.*

2. *Se a e b são C-objetos, $C(a,b) \subseteq D(a,b)$.*

E C será dita subcategoria plena se $C(a,b) = D(a,b)$, para quaisquer a e b.

Definição 37. *Um C-morfismo $f : a \to b$ será dito* isomorfismo *se existe um morfismo $g : b \to a$ tal que $g \circ f = 1_a$ e $f \circ g = 1_b$.*

Nota-se que, no caso da categoria dos reticulados distributivos limitados onde os morfismos são os homomorfismos de reticulados, um isomorfismo nada mais é que um homomorfismo bijetor f, pois $f^{-1} \circ f = 1_a$ e $f \circ f^{-1} = 1_b$.

Definição 38. *Dada uma categoria C, chama-se categoria* oposta *ou categoria* dual *de C a categoria C^{op} cuja classe de objetos é exatamente os C-objetos e com $C^{op}(A,B) := C(B,A)$, sendo a lei de composição definida à custa da lei de composicão de C, ou seja, em vez de $g \circ f$ será $f \circ g$.*

Definição 39. *Em uma categoria C é um diagrama* comuta*, se para cada par de vertices X e Y, todo caminho de X até Y são iguais. Por exemplo, diz-se que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & Z \\ \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ W & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

comuta se satisfaz $f \circ g' = g \circ f'$.

Definição 40. *Seja C e D categorias. Um* funtor *(covariante) $F : C \longrightarrow D$ é uma aplicação que cada C-objeto A é levado em um D-objeto $F(A)$ e cada C-morfismo $f : A \to B$ é levado em um D-morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ satisfazendo*

1. *$F(1_A) = 1_{F(A)}$*

2. *$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$*

Um funtor é dito contravariante se $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Definição 41. *Sejam* $F, G : C \to D$ *dois funtores. Dizemos que* $\eta : F \to G$ *é uma transformação natural se* $\eta = \{\eta_a : F_a \to G_a\}$ *faz o diagrama*

$$
\begin{array}{ccc}
F_a & \xrightarrow{\eta_a} & G_a \\
\big\downarrow{\scriptstyle F_f} & & \big\downarrow{\scriptstyle G_f} \\
F_b & \xrightarrow{\eta b} & G_b
\end{array}
$$

comutar. Quando η_a *é um isomorfismo, para cada* $a \in Ob(C)$, η *é dito isomorfismo natural.*

Definição 42. *Duas categorias* C *e* D *são equivalentes se existem funtores,* $F : C \to D$ *e* $G : D \to C$, *junto com os isomorfismos naturais*

$$\eta : Id_C \to (G \circ F) \ e \ \mu : Id_D \to (F \circ G).$$

O par (F, G) *é chamado equivalência entre* C *e* D*(Notação* $C \cong D$*). Se* F *e* G *são contravariantes* (C, D) *são ditas* duais.

4 Dualidade de Birkhoff

A dualidade de Birkhoff é uma dualidade entre a categoria dos reticulados distributivos finitos, FDL, e a categoria dos posets finitos $FPos$.

Seja L um reticulado distributivo limitado. $p \in L$ chama-se *supremo primo* se $p \leq a \vee b$ então $p \leq a$ ou $p \leq b$. Seja $JP(L)$ o conjunto dos supremos primos de L. Pode-se ordenar $JP(L)$ por pRq se $q \leq p$, o tornando um poset. Pois,

1. aRa, já que $a \leq a$.

2. aRb e bRa, tem-se $b \leq a$ e $a \leq b$, logo, $a = a$.

3. aRb e bRc, tem-se $b \leq a$ e $c \leq b$, logo, $c \leq a$, assim aRc.

E note que pRq se, e somente se, $\uparrow p \subseteq \uparrow q$, já que $q \leq p$.

Para um poset $(X, \leq)$ denota-se por $U(X, \leq)$ o conjunto de todos upsets de $(X, \leq)$. Com respeito a união e interseção, $U(X, \leq)$ é um reticulado distributivo limitado com top e bottom sendo X e $\emptyset$, respectivamente.

Lema 1. *Seja L um reticulado distributivo finito. Se P é um filtro de L, então P é filtro primo se, e somente se, $P = \uparrow p$ para algum p supremo primo.*

Prova Seja L um reticulado distributivo finito e P um filtro. Assim, $\bigwedge P \in L$. Seja $p \in \bigwedge P$, então é claro que $\uparrow p = P$. Suponha P primo. Para ver que $P \in JP(L)$, suponha $p \leq a \vee b$. Como $a \vee b \in P$, tem-se $a \in P$ ou $b \in P$. Logo, $p \leq a$ ou $p \leq b$, pois P é filtro e p é o menor elemento de P. Assim, p é supremo primo. Agora suponha que $P = \uparrow p$ para algum p supremo primo. Seja $a, b \in L$ com $a \vee b \in P$. Então $p \leq a \vee b$, como p é supremo primo tem-se que $p \leq a$ ou $p \leq b$, assim, $a \in P$ ou $b \in P$. Logo, P é primo. $\square$

Teorema 17. *Seja L um reticulado distributivo finito. Então $F_L : L \longrightarrow U(JP(L), R)$ definido por $F_L(a) = \{p \in JP(L) : p \leq a\}$ é um isomorfismo de reticulados.*

Prova Sabe-se que $\uparrow a = \bigcap \varphi(a)$. Se $\varphi(a) = \{p_1, ..., p_r\}$ e se $P_i = \uparrow p_i$ com $p_i \in JP(L)$ tem-se $\uparrow a = P_1 \cap ... \cap P_r = \uparrow p_1 \cap ... \cap \uparrow p_r$.

Afirmação: $\uparrow p_1 \cap ... \cap \uparrow p_r = \uparrow (p_1 \vee ... \vee p_r)$

De fato, claramente dado $x \in \uparrow (p_1 \vee ... \vee p_r)$ tem-se que $x \in \uparrow p_1 \cap ... \cap \uparrow p_r$, pois $p_i \leq p_1 \vee ... \vee p_r \forall i \in \{1, ..., r\}$. Ou seja, $\uparrow (p_1 \vee ... \vee p_r) \subseteq \uparrow p_1 \cap ... \cap \uparrow p_r$.

Agora tome $x \in \uparrow p_1 \cap ... \cap \uparrow p_r$. Assim, $x \in \uparrow p_i$, ou seja, $p_1 \leq x$, assim $p_1 \vee p_2 \leq x \vee p_2$, como $x \in \uparrow p_1 \cap ... \cap \uparrow p_r$ tem-se $x \vee p_2 = x$, ou seja, $p_1 \vee p_2 \leq x$. Repetindo o procedimento um número finito de vezes tem-se que $p_1 \vee ... \vee p_r \leq x$. Ou seja, $x \in \uparrow (p_1 \vee ... \vee p_r)$. Assim, $\uparrow p_1 \cap ... \cap \uparrow p_r \subseteq \uparrow (p_1 \vee ... \vee p_r)$, provando a afirmação.

Como $\uparrow a = \uparrow (p_1 \vee ... \vee p_r)$, tem-se que $a \in \uparrow (p_1 \vee ... \vee p_r)$, ou seja $p_1 \vee ... \vee p_r \leq a$. De modo análogo, $a \leq p_1 \vee ... \vee p_r$. Assim, $a = p_1 \vee ... \vee p_r$.

A definição de F_L mostra que $F_L(a)$ é um upset, pois, se $p \leq a$ e pRq, então $q \leq a$, ou seja, $q \in F_L(a)$.

$a = \bigvee F_L(a) \forall a \in L$. Agora, seja $F_L(a) = F_L(b)$, então $\bigvee F_L(a) = \bigvee F_L(b)$, por um lado $a = \bigvee F_L(a)$ e por outro $b = \bigvee F_L(b)$, já que $a, b \in L$, então $a = b$, assim F_L é injetiva.

Seja $U \in U(JP(L), R)$ e $a = \bigvee U$. Se $U = \{p_1, ..., p_k\}$ então $a = p_1 \vee ... \vee p_k$ daí cada $P_i \in F_L(a)$. Isso mostra que $U \subseteq F_L(a)$. Seja $q \in F_L(a)$, então $q \leq a$ e como $q \in JP(L)$ tem-se que $q \leq p_i$ para algum i. Assim, $p_i R q$. Como U é um upset, $q \in U$, ou seja, F_L é sobrejetiva.

Como é claro que F_L é um homomorfismo de reticulados, tem-se que é um isomorfismo.

$\square$

Agora consideremos a situação via categorias. Já tem-se $JP : FDL \longrightarrow FPos$ definida para objetos. E para aplicações, se $f : L \longrightarrow M$ é um homomorfismo de reticulados, defina $JP(f) : JP(M) \longrightarrow JP(L)$ por $JP(f)(q) = \bigwedge f^{-1}(\uparrow q)$. Falta mostrar que $JP(f)(q) \in JP(L)$. Seja $q \in JP(M)$, então $\uparrow q \in X(M)$.

Afirmação: $f^{-1}(\uparrow q) \in X(L)$.

Seja $x \in f^{-1}(\uparrow q)$ e $x \leq y$, então $f(x) \in \uparrow q$. Como $f(x) \leq f(x) \vee f(y)$, tem-se que $f(x) \vee f(y) \in \uparrow q$, mas $f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) = f(y)$, logo, $f(y) \in \uparrow q$. Portanto, $y \in f^{-1}(\uparrow q)$. Ou seja, $f^{-1}(\uparrow q)$ é um upset.

Sejam $x, y \in f^{-1}(\uparrow q)$. Então $f(x), f(y) \in \uparrow q$. Como $\uparrow q$ é filtro, $f(x) \wedge f(y) \in \uparrow q$, mas $f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y)$. Logo, $x \wedge y \in f^{-1}(\uparrow q)$. Sendo $f^{-1}(\uparrow q)$ um filtro.

Seja $x \vee y \in f^{-1}(\uparrow q)$, então $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \in \uparrow q$, ou seja, $q \leq f(x) \vee f(y)$, como q é supremo primo, $q \leq f(x)$ ou $q \leq f(y)$. Assim, $x \in f^{-1}(\uparrow q)$ ou $y \in f^{-1}(\uparrow q)$. Sendo assim $f^{-1}(\uparrow q) \in X(L)$.

Como $f^{-1}(\uparrow q) \in X(L)$, tem-se que $f^{-1}(\uparrow q) = \uparrow p$ para algum $p \in JP(L)$. Como $p = \bigwedge \uparrow p$ tem-se que $p = \bigwedge f^{-1}(\uparrow q)$, isso motiva a definição anterior e prova que $\bigwedge f^{-1}(\uparrow q) \in JP(L)$.

Assim $JP : FDL \longrightarrow FPos$ é um funtor contravariante.

Para obter um funtor na direção contrária, define-se $U : FPos \longrightarrow FDL$ para objetos. E para aplicações, se $g : (X, \leq) \longrightarrow (Y, \leq)$ é uma aplicação de posets, ou seja, preservam ordem, define-se $U(g) : U(Y, \leq) \longrightarrow U(X, \leq)$ por $U(g) = g^{-1}$. Em outras palavras $U(g)(V) = g^{-1}(V)$, para todo upset V de Y, pois $g^{-1}(V)$ é um upset em X. Seja $x \in g^{-1}(V)$ com $x \leq y$. Então $g(x) \leq g(y)$ e $g(x) \in V$, logo $g(y) \in V$, ou seja, $y \in g^{-1}(V)$.

E a aplicação $U(g)$ define um homomorfismo de reticulados, pois $U(g)(A \cup B) = g^{-1}(A \cup B) = g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B) = U(g)(A) \cup U(g)(B)$. De maneira análoga, $U(g)(A \cap B) = U(g)(A) \cap U(g)(B)$.

Proposição 1. *Seja $(X, \leq)$ um poset finito. Então $G_X : (X, \leq) \to (JP(U(X, \leq)), R)$ definido por $G_X(x) = \uparrow x$ é um isomorfismo de posets.*

Prova Primeiramente, olhando $U(X, \leq)$ como reticulado, $U \leq V$ quando $U \cup V = V$, ou seja, $U \subseteq V$. Afirmação: $\uparrow x \in (JP(U(X, \leq)), R)$. De fato, se $\uparrow x \subseteq U \cup V$ com $U, V \in U(X, \leq)$, então $x \in U$ ou $x \in V$. Como U e V são upsets de X, $\uparrow x \subseteq U$ ou $\uparrow x \subseteq V$. Logo, $\uparrow x \in (JP(U(X, \leq)), R)$. Assim, G_X está bem definida. Seja $G_X(x) = G_X(y)$, ou seja, $\uparrow x = \uparrow y$. Tem-se que $\uparrow x \subseteq \uparrow y$, logo $y \leq x$. De maneira análoga, $x \leq y$, logo $x = y$. Assim, G_X é injetiva. Seja $U \in (JP(U(X, \leq)), R)$. Tem-se que $U = \bigcup_{x \in U} \uparrow x$. Logo, $\uparrow x \subseteq U$, $\forall x \in U$. Por outro lado, $U \subseteq \bigcup_{x \in U} \uparrow x$. Como U é supremo primo, $U \subseteq \uparrow x$ para algum $x \in U$. Logo, $U = \uparrow x$ para algum $x \in U$. Portanto, G_X é sobrejetiva e, portanto, uma bijeção. Sejam $x, y \in X$ com $x \leq y$. Então $\uparrow y \subseteq \uparrow x$, assim $(\uparrow x) R (\uparrow y)$. Sejam $\uparrow x, \uparrow y \in (JP(U(X, \leq)), R)$ com $(\uparrow x) R (\uparrow y)$, logo, $\uparrow y \subseteq \uparrow x$, assim, $x \leq y$. Isso prova que G_X e ${G_X}^{-1}$ preservam ordem. Logo, G_X é um isomorfismo de posets. $\square$

Teorema 18. *As categorias FDL e FP_{os} são duais.*

Prova Defina $F : Id_{FDL} \to U(JP)$ por $F_L : L \to U(JP(L))$ que manda a em $F_L(a) = \{p \in U(JP(L));\ p \leq a\}$. Foi visto que F_L é um isomorfismo. Afirmação: F é uma transformação natural. De fato, seja $f : L \to M$ um homomorfismo de reticulados finitos. Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{F_L} & U(JP(L)) \\ \downarrow f & & \downarrow U(JP(f)) \\ M & \xrightarrow{F_M} & U(JP(M)) \end{array}$$

Tem-se que

$$(U(JP(f)) \circ F_L)a = U(JP(f))F_L(a) = JP(f)^{-1}F_L(a) =$$

$$\{q \in U(JP(M));\ JP(f)q \in F_L(a)\} = \{q \in U(JP(M));\ JP(f)q \leq a\}.$$

Na outra direção, $(F_M \circ f)a = \{q \in U(JP(M));\ q \leq f(a)\}$. Mas, dado $q \leq f(a) \Leftrightarrow f(a) \in \uparrow q \Leftrightarrow a \in f^{-1}(\uparrow q)$ (como $f^{-1}(\uparrow q) = \uparrow p$, para algum $p \in JP(L)$) $\Leftrightarrow a \in \uparrow p \Leftrightarrow p \leq a \Leftrightarrow \bigwedge \uparrow p \leq a \Leftrightarrow \bigwedge f^{-1}(\uparrow q) \leq a \Leftrightarrow JP(f)q \leq a$. Ou seja, o diagrama comuta. Portanto, F induz uma transformação natural. Mais do que isso, F induz um isomorfismo natural, já que foi provado que F_L é um isomorfismo.

Agora, defina a seguinte transformação natural $G : Id_{FP_{os}} \to JP \circ U$ por $G_X : (X, \leq) \to JP(U(X, \leq))$ com $G_X(x) = \uparrow x$, que já foi provado isomorfismo. Afirmação: G é uma transformação natural. Com efeito,

$$(JP(U(g)) \circ\ G_X)x = \bigcap \{U(g)^{-1}(\{U \in U(X, \leq);\ \uparrow x \subseteq U\})\} =$$

$$\bigcap \{V \in U(Y, \leq);\ \uparrow x \subseteq U(g)V\} = \bigcap \{V \in U(Y, \leq);\ \uparrow x \subseteq g^{-1}(V)\}.$$

Como $\uparrow x \subseteq g^{-1}(V) \Leftrightarrow x \in g^{-1}(V)$ e g preserva ordem,

$$\bigcap \{V \in U(Y, \leq);\ \uparrow x \subseteq g^{-1}(V)\} =$$

$$\bigcap \{V \in U(Y, \leq);\ x \in g^{-1}(V)\} =$$

$$\bigcap \{V \in U(Y, \leq);\ g(x) \in V\} =$$

$$\uparrow g(x) = G_X(g(x)) = (G_X \circ g)(x).$$

Assim o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(X,\leq) & \xrightarrow{G_X} & JP(U(X,\leq)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle g} & & \Big\downarrow{\scriptstyle JP(U(g))} \\
(Y,\leq) & \xrightarrow{G_Y} & JP(U(Y,\leq))
\end{array}$$

Comuta, sendo G um isomorfismo natural. Portanto, FDL e $FPos$ são duais. $\square$

Seja L um reticulado distributivo finito. Foi provado que $X(L) = \{\uparrow p;\ p \in JP(L)\}$. Como $\uparrow p \subseteq \uparrow q$ se, e somente se, $q \leq p$, ou seja, pRq, temos que $f : (JP(L), R) \to (X(L), \subseteq)$ definido por $f(p) = \uparrow (p)$ é um isomorfismo de posets.

Olhando adiante será visto que a dualidade de Birkhoff é um caso especial da dualidade de Priestley. Em geral, não será usado $JP(L)$, e sim $X(L)$. Pois, filtros primos em reticulados distributivos gerais não são necessariamente principais.

5 Dualidade de Stone

Seja L um reticulado distributivo limitado. Seja τ a topologia em $X(L)$ gerada pela sub-base $\mathcal{B} = \{\varphi(a);\ a \in L\} \cup \{\varphi(b)^c;\ b \in L\}$. Note que $\varphi(0) = \emptyset$ e $\varphi(1) = X(L)$.

Tem-se que $\varphi(a) \cup \varphi(b) \subseteq \varphi(a \vee b)$ e $\varphi(a \wedge b) \subseteq \varphi(a) \cap \varphi(b)$, já que filtros são upsets. E $\varphi(a) \cap \varphi(b) \subseteq \varphi(a \wedge b)$, já que filtros são fechados para ínfimos finitos. E se $P \in \varphi(a \vee b)$, tem-se $a \vee b \in P$, como P é primo, $a \in P$ ou $b \in P$, assim, $P \in \varphi(a) \cup \varphi(b)$. Portanto, $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b)$ e $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$. Logo, $\{\varphi(a) \cap \varphi(b)^c;\ a, b \in L\}$ é uma base para τ.

Proposição 2. *$\beta = \{\varphi(a) \cap \varphi(b)^c;\ a, b \in L\}$ é uma base de clopens para τ.*

Prova

$$(\varphi(a) \cap \varphi(b)^c)^c = \varphi(a)^c \cup \varphi(b) = \varphi(b) \cup \varphi(a)^c,\ \forall a, b \in L.$$

Assim, $\varphi(a) \cap \varphi(b)^c$ é fechado, $\forall a, b \in L$. Logo, β é uma base de clopens. □

Proposição 3. *$(X(L), \tau)$ é Hausdorff.*

Prova Sejam $P, Q \in X(L)$ com $P \neq Q$. Então $P \nsubseteq Q$ ou $Q \nsubseteq P$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $P \nsubseteq Q$. Então existe $q \in Q$ tal que $q \notin P$. Assim, $Q \in \varphi(q)$ e $P \in \varphi(q)^c$. Como $\varphi(q)$ e $\varphi(q)^c$ são abertos disjuntos, tem-se que $(X(L), \tau)$ é Hausdorff. □

Proposição 4. *$(X(L), \tau)$ é compacto.*

Prova Para $(X(L), \tau)$ ser compacto, é suficiente mostrar que qualquer cobertura por uma sub-base possua subcobertura finita.

Seja $X(L) = \bigcup \varphi(a_i) \cup \bigcup \varphi(b_j)^c$ uma cobertura pela sub-base $\mathcal{B}$. $(\bigcup \varphi(b_j)^c)^c \subseteq \bigcup \varphi(a_i)$, assim, $\bigcap \varphi(b_j) \subseteq \bigcup \varphi(a_j)$. Defina I o ideal gerado pelos $a_i's$ e F o filtro gerado pelos $b_j's$. Suponha que $I \cap F = \emptyset$. Então, existe $P \in X(L)$ tal que $F \subset P$ e $I \cap P = \emptyset$. De fato, como $F \subset P$, $\{b_j\}_j \subset P$, assim, $\bigcap \varphi(b_j) \subseteq P$ e como $\bigcap \varphi(b_j) \subseteq \bigcup \varphi(a_i)$

tem-se que $P \cap \bigcup \varphi(a_i) \neq \emptyset$, logo $P \in \varphi(a_i)$, para algum a_i. Logo, $a_i \in P$, um absurdo, pois $P \cap I = \emptyset$. Assim, $I \cap F \neq \emptyset$. Seja $q \in I \cap F$. Como $q \in I$, $q \leq a_1 \vee ... \vee a_m$ e como $q \in F$, $b_1 \wedge ... \wedge b_n \leq q$, pela transitividade, $b_1 \wedge ... \wedge b_n \leq a_1 \vee ... \vee a_m$. Seja $Q \in X(L)$. Se $q \in Q$, tem-se que $a_1 \vee ... \vee a_m \in Q$, logo, $Q \in \varphi(a_1 \vee ... \vee a_m) = \varphi(a_1) \cup ... \cup \varphi(a_m)$. Se $q \notin Q$, então $b_1 \wedge ... \wedge b_n \notin Q$, pois caso contrário, como $b_1 \wedge ... \wedge b_n \leq q$, q pertenceria a Q. Como $b_1 \wedge ... \wedge b_n \notin Q$, tem-se que $Q \notin \varphi(b_1 \wedge ... \wedge b_n) = \varphi(b_1) \cap ... \cap \varphi(b_n)$. Logo, $Q \in (\varphi(b_1) \cap ... \cap \varphi(b_n))^c = \varphi(b_1)^c \cup ... \cup \varphi(b_n)^c$.

Logo, $\varphi(a_1) \cup ... \cup \varphi(a_m) \cup \varphi(b_1)^c \cup ... \cup \varphi(b_n)^c$ formam uma cobertura finita de $X(L)$. Portanto, $(X(L), \tau)$ é compacto. $\square$

Definição 43. *Um espaço topológico é dito de Stone se é compacto, Hausdorff e possui base de clopens.*

Assim, foi provado que para L reticulado distributivo limitado, $(X(L), \tau)$ é espaço de Stone.

Denota-se por BA a categoria das álgebras booleanas. E por $Stone$ a categoria dos espaços de Stone onde os morfismos são funções contínuas. A dualidade de Stone é a dualidade entre BA e $Stone$.

Defina $X : BA \rightarrow Stone$ que manda o BA-objeto B em $X(B)$ e para os homomorfismos booleanos $f : B \rightarrow C$, $X(f) : X(C) \rightarrow X(B)$ por $Q \mapsto f^{-1}(Q)$. Afirmação: $f^{-1}(Q)$ é filtro primo.

1. Sejam $a, b \in f^{-1}(Q)$. Então $f(a) \in Q$ e $f(b) \in Q$. Como Q é filtro, $f(a) \wedge f(b) \in Q$, mas $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b)$. Logo, $a \wedge b \in f^{-1}(Q)$.
2. Seja $a \in f^{-1}(Q)$ e $a \leq b$. Tem-se que $f(a) \in Q$ e como f preserva ordem $f(a) \leq f(b)$, logo, Q sendo filtro, $f(b) \in Q$. Assim, $b \in f^{-1}(Q)$.
3. Seja $a \vee b \in f^{-1}(Q)$. Então $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \in Q$. Como Q é filtro primo, $f(a) \in Q$ ou $f(b) \in Q$. Assim, $a \in f^{-1}(Q)$ ou $b \in f^{-1}(Q)$.

Logo, $f^{-1}(Q)$ é filtro primo e a função $X(f)$ está bem definida.

Afirmação: $X(f) : X(C) \rightarrow X(B)$ é contínua. De fato, seja $\varphi(a) \cap \varphi(b)^c$ um aberto básico de $(X(B), \tau)$. Temos que

$$X(f)^{-1}(\varphi(a) \cap \varphi(b)^c) = \{Q \in X(C);\ X(f)Q \in \varphi(a) \cap \varphi(b)^c\} =$$

$$\{Q \in X(C);\ X(f)Q \in \varphi(a)\} \cap \{Q \in X(C);\ X(f)Q \in \varphi(b)^c\} =$$

$$\{Q \in X(C);\ f^{-1}(Q) \in \varphi(a)\} \cap \{Q \in X(C);\ f^{-1}(Q) \in \varphi(b)^c\} =$$

$$\{Q \in X(C);\ a \in f^{-1}(Q)\} \cap \{Q \in X(C);\ b \notin f^{-1}(Q)\} =$$

$$\{Q \in X(C);\ f(a) \in Q\} \cap \{Q \in X(C);\ f(b) \notin Q\} =$$

$$\varphi(f(a)) \cap \varphi(f(b))^c.$$

Como a imagem inversa de um aberto básico é aberto, tem-se que $X(f)$ é contínua. Seja X um espaço de Stone e seja $C(X)$ o conjunto dos clopens de X. Afirmação: $C(X)$ é uma álgebra booleana em relação a união, interseção e complementação.

- $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$, $\forall A, B \in C(X)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\forall A, B, C \in C(X)$.
- $A \cup \emptyset = A$ e $A \cup X = X$, $\forall A \in C(X)$.
- $A \cup (X - A) = X$ e $A \cap (X - A) = \emptyset$, $\forall A \in C(X)$.

Portanto, $C(X)$ é uma álgebra booleana.

Defina $C : \mathit{Stone} \to BA$ em objetos por $X \mapsto C(X)$ e em aplicações, se $f : X \to Y$ for contínua entre espaços de Stone, $C(f) : C(Y) \to C(X)$ definida por $U \mapsto f^{-1}(U)$. Afirmação: $C(f)$ é um homomorfismo booleano. Com efeito,

- $C(f)Y = f^{-1}(Y) = X$.
- Seja $U \cup V \in C(Y)$. Tem-se $C(f)(U \cup V) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = C(f)(U) \cup C(f)(V)$.
- Seja $U \cap V \in C(Y)$. Tem-se $C(f)(U \cap V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = C(f)(U) \cap C(f)(V)$.

Logo, $C(f)$ é um homomorfismo booleano.

É claro que X e C são funtores contravariantes. O próximo passo é usá-los para mostrar a dualidade entre BA e *Stone*.

Lema 2. *Seja C um clopen de $X(B)$. Então $C = \varphi(a)$, para algum $a \in B$.*

Prova Se $C = \emptyset$, então temos que $C = \varphi(0)$. Agora, se $C \neq \emptyset$, seja $P \in C$. Como C é aberto, ele é a união de abertos básicos e como é compacto, podemos supor que a união é finita. Ou seja, $C = \bigcup_1^n \left(\varphi(a_i) \cap \varphi(b_i)^C\right)$. Como B é álgebra booleana $\varphi(b)^C = \varphi(\neg b)$. Assim, $C = \bigcup_1^n (\varphi(a_i) \cap \varphi(\neg b_i)) = \bigcup_1^n \varphi(a_i \wedge \neg b_i) = \varphi\left(\bigvee_1^n (a_i \wedge \neg b_i)\right)$. Seja $a = \bigvee_1^n (a_i \wedge \neg b_i)$. Então $C = \varphi(a)$. □

Proposição 5. *Seja* B *uma álgebra booleana. Então a aplicação* $F_B : B \to C(X(B))$ *definida por* $F_B(b) = \varphi(b)$ *é um isomorfismo de álgebras booleanas.*

Prova Como $X(B)$ é espaço de Stone, já foi provado que $C(X(B))$ é uma álgebra booleana. E F_B está bem definida e é injetiva pelo corolário do Teorema de Stone-Birkhoff. Pelo Lema tem-se que F_B é sobrejetiva. Como $F_B(a \vee b) = \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b) = F_B(a) \cup F_B(b)$, $F_B(a \wedge b) = \varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b) = F_B(a) \cap F_B(b)$ e $F_B(1) = X(B)$ tem-se que F_B é um homomorfismo booleano. Logo, F_B é um isomorfismo booleano. □

Proposição 6. *Seja* S *um espaço de Stone. Então a aplicação* $G_S : S \to X(C(S))$ *definida por* $G_S(x) = \{U \in C(X) ; x \in U\}$ *é um homeomorfismo.*

Prova Sejam $U, V \in G_S(x)$. Então $x \in U$ e $x \in V$, logo $x \in U \cap V$ assim, $U \cap V \in G_S(x)$. Seja $U \in G_S(x)$ e $U \subseteq V$. Então $x \in U \subseteq V$, logo $x \in V$, assim $V \in G_S(x)$. Seja $U \cup V \in G_S(x)$. Então $x \in U \cup V$, logo $x \in U$ ou $x \in V$. Assim, $U \in G_S(x)$ ou $V \in G_S(x)$. Portanto, $G_S(x)$ é filtro primo e G_S está bem definida. Agora, para mostrar a continuidade de G_S, tome um aberto básico $\varphi(a) \cap \varphi(b)^c$, com $a, b \in C(S)$.

$$G_S{}^{-1}(\varphi(a) \cap \varphi(b)^c) = \{s \in S;\ G_S(s) \in \varphi(a) \cap \varphi(b)^c\} =$$

$$\{s \in S; G_S(s) \in \varphi(a)\} \cap \{s \in S; G_S(s) \in \varphi(b)^c\} =$$

$$\{s \in S;\ a \in G_S(s)\} \cap \{s \in S;\ b \notin G_S(s)\} =$$

$$\{s \in S;\ s \in a\} \cap \{s \in S;\ s \notin b\} = a \cap b^c.$$

Como a é aberto e b é fechado, $a \cap b^c$ é aberto. Portanto, G_S é contínua.

Sejam $x, y \in S$ com $x \neq y$. Como S é Hausdorff e possui base de clopens, existem clopens $A, B \subset S$ tais que $x \in A$ e $y \in B$ com $A \cap B = \emptyset$. Logo, $\{U \in C(S);\ x \in U\} \neq \{U \in C(S);\ y \in U\}$, ou seja, $G_S(x) \neq G_S(y)$. Assim, G_S é injetiva. Seja P um filtro primo de $C(S)$. P é uma coleção de fechados de S, e como este último é compacto, segue que $\bigcap P \neq \emptyset$. Suponha que $x, y \in \bigcap P$ com $x \neq y$. Então existe um clopen V tal que $x \in V$ e $y \in (S - V)$. Então ou V ou $S - V$

pertencem a P. De fato, se V e $S-V$ pertencessem a P, então $V \cap (S-V) = \emptyset \in P$, e P não seria filtro primo. Mas se $V \in P$, então $y \notin P$, um absurdo. Da mesma maneira se $(S-V) \in P$. Logo, $\bigcap P = \{x\}$. Assim, $P \subseteq G_S(x)$. Como P e $G_S(x)$ são filtros primos de uma álgebra booleana, são maximais, logo $G_S(x) = P$. Assim, G_S é sobrejetiva. Portanto, G_S é uma função contínua bijetiva. Como X é compacto e $X(C(S))$ é Hausdorff, segue que G_S é um homeomorfismo. □

Teorema 19. *BA e $Stone$ são duais.*

Prova Defina o isomorfismo $F : Id_{BA} \to C \circ X$, para B álgebra booleana, $F_B : B \to C(X(B))$ com $F_B(b) = \varphi(b)$. Já foi provado que F_B é um isomorfismo para todo B álgebra booleana. E seja $f : A \to B$ um homomorfismo booleano.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F_A"] \arrow[d, "f"] & C(X(A)) \arrow[d, "C(X(f))"] \\ B \arrow[r, "F_B"] & C(X(B)) \end{tikzcd}$$

Seja $a \in A$.

$$C(X(f))(F_A(a)) = C(X(f))(\varphi(a)) = X(f)^{-1}(\varphi(a)) =$$

$$\{Q \in X(B);\ X(f)Q \in \varphi(a)\} = \{Q \in X(B);\ f^{-1}(Q) \in \varphi(a)\} =$$

$$\{Q \in X(B);\ a \in f^{-1}(Q)\} = \{Q \in X(B);\ f(a) \in Q\} = F_B(f(a)).$$

Assim, o diagrama comuta, e F é um isomorfismo natural. Defina $G : Id_{Stone} \to X \circ C$ tal que $G_x : X \to X(C(X))$ com $G_x(x) = \{U \in C(X);\ x \in U\}$. Foi provado que G_x é um isomorfismo. E seja uma função contínua $g : X \to Y$. Tem-se o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "G_x"] \arrow[d, "g"] & X(C(X))) \arrow[d, "X(C(g))"] \\ Y \arrow[r, "G_y"] & X(C(Y)) \end{tikzcd}$$

Seja $a \in X$.

$$X(C(g))G_x(a) = C(g)^{-1}(\{U \in C(X);\ a \in U\}) =$$

$$\{Q \in C(Y);\ C(g)Q \in \{U \in C(X);\ a \in U\}\} =$$

$$\{Q \in C(Y);\ g^{-1}(Q) \in \{U \in C(X);\ a \in U\}\} =$$

$$\{Q \in C(Y);\ a \in g^{-1}(Q)\} = \{Q \in C(Y);\ g(a) \in Q\} = G_y(g(a)).$$

Logo, o diagrama comuta, fazendo de G um isomorfismo natural. Portanto, BA e $Stone$ são duais. $\square$

6 Dualidade de Priestley

Nesta seção será estendido o conceito de dualidade de Stone, no lugar de álgebras booleanas, serão utilizados reticulados distributivos não necessariamente complementados, para obter a dualidade de Priestley.

Seja L um reticulado distributivo limitado, não se recorrerá à L por $C(X(L))$, como feito na dualidade de Stone, que produz álgebras booleanas. Assim, L será recorrido por $FU(X(L)$, como veremos adiante. Note que se $a \in L$ e $Q \in \varphi(a)$, então $P \in \varphi(a)$ se P é filtro primo e $Q \subseteq P$. Resultando em uma ordem parcial, em que para $P, Q \in X(L)$ tem-se $P \leq Q$ se $P \subseteq Q$.

Definição 44. *Seja $(X, \leq)$ um espaço de Stone parcialmente ordenado. Se $(X, \leq)$ é totalmente ordem desconexo, ele é dito Espaço de Priestley.*

Considere a categoria PS dos espaços de Priestley, onde os morfismos são funções contínuas que preservam ordem.

A dualidade de Priestley será entre PS e BDL, onde BDL é a categoria dos reticulados distributivos limitados com morfismos sendo homomorfismos entre reticulados.

Lema 3. *Seja L um reticulado distributivo limitado. Então $(X(L), \leq)$ é um espaço de Priestley.*

Prova Já foi provado que $X(L)$ é um espaço de Stone. Basta mostrar que é totalmente ordem desconexo. Sejam $P, Q \in X(L)$ com $P \not\subseteq Q$. Seja $a \in P$ com $a \notin Q$, $P \in \varphi(a)$ e $Q \notin \varphi(a)$. Sendo $\varphi(a)$ um clopen upset que contém P e não contém Q, tem-se que $(X(L), \leq)$ é totalmente ordem desconexo, assim um espaço de Priestley. $\square$

Lema 4. *Os clopens upsets de $X(L)$ são exatamente os conjuntos $\varphi(a)$ para $a \in L$.*

Prova Já sabe-se que $\varphi(a)$ é um clopen upset. Agora, tome U clopen upset de $X(L)$. Para cada $P \in U$ e $Q \notin U$, tem-se $P \subseteq Q$, já que U é upset. Assim, seja $a_{PQ} \in L$ tal que $a_{PQ} \in P$ e $a_{PQ} \notin Q$. Logo, $P \in \varphi(a_{PQ})$ e $Q \notin \varphi(a_{PQ})$. Assim, $X(L) - U = \bigcup_{Q \notin U} \varphi(a_{PQ})^c$. Como $X(L) - U$ é fechado e $X(L)$ compacto, $X(L) - U$ é compacto, logo $X(L) - U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(a_{PQ_i})^c = (\bigcap_{i=1}^{n} \varphi(a_{PQ_i}))^c = \varphi(a_p)^c$, com $a_p = a_{PQ_1} \wedge ... \wedge a_{PQ_n}$. Assim, $\varphi(a_p) \subseteq U$. Logo, $U = \bigcup_{p \in P} \varphi(a_p)$, pela compacidade, $U = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(a_{p_i})$. Portanto, $U = \varphi(a_{p_1} \vee ... \vee a_{p_n})$. $\square$

Se $(X, \leq)$ é um espaço de Priestley, denota-se por $FU(X, \leq)$ o conjunto dos clopens upsets de $(X, \leq)$. Note que $FU(X, \leq)$ é um reticulado distributivo limitado em relação a união e interseção.

Proposição 7. *Seja L um reticulado distributivo limitado. Então a aplicação $F_L : L \to FU(X(L), \leq)$ definida por $F_L(l) = \varphi(l)$ é um isomorfismo de reticulados.*

Prova Do Lema anterior e do corolário do Teorema de Stone-Birkhoff, F_L está bem definida e é injetiva e sobrejetiva. Como $F_L(a \vee b) = \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b) = F_L(a) \cup F_L(b)$ e $F_L(a \wedge b) = \varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b) = F_L(a) \cap F_L(b)$, para todos $a, b \in L$, F_L é um homomorfismo de reticulados. Portanto, F_L é um isomorfismo de reticulados. $\square$

Proposição 8. *Seja $(X, \leq)$ um espaço de Pristley. Então $G_X : (X, \leq) \to X(FU(X, \leq), \subseteq)$ definida por $G_X(x) = \{U \in FU(X, \leq);\ x \in U\}$ é um isomorfismo de espaços de Priestley.*

Prova $G_X(x)$ é um filtro primo por argumentos similares ao da demonstração no caso da dualidade de Stone. Agora, seja $x \leq y$ e $U \in G_X(x)$. Então $x \in U$, logo $y \in U$, já que U é upset, logo $U \in G_X(y)$. Assim, $G_X(x) \subseteq G_X(y)$. Portanto, G_X preserva ordem. Seja $\varphi(A) \cap \varphi(B)^c$ com $A, B \in FU(X, \leq)$ um aberto básico de $X(FU(X, \leq), \subseteq)$.

$$G_X{}^{-1}(\varphi(A) \cap \varphi(B)^c) = \{x \in X;\ G_X(x) \in \varphi(A) \cap \varphi(B)^c\} =$$

$$\{x \in X;\ G_X(x) \in \varphi(A)\} \cap \{x \in X;\ G_X(x) \in \varphi(B)^c\} =$$

$$\{x \in X;\ A \in G_X(x)\} \cap \{x \in X;\ B \notin G_X(x)\} =$$

$$\{x \in X;\ x \in A\} \cap \{x \in X;\ x \notin B\} = A \cap B^c,$$

que é um aberto. Logo, G_X é contínua. Sejam $x, z \in X$ tal que $z \not\leq x$, então existe um upset U tal que $z \in U$ e $x \notin U$. Assim, $\uparrow z = \bigcap G_X(z)$. Se $G_X(x) = G_X(y)$ tem-se $\bigcap G_X(x) = \bigcap G_X(y)$, logo $\uparrow x = \uparrow y$, daí $x = y$, sendo G_X injetiva. E se $G_X(x) \subseteq G_X(y)$, tem-se que $\bigcap G_X(y) \subseteq \bigcap G_X(x)$, logo $\uparrow y \subseteq \uparrow x$, daí $x \leq y$.

Seja $P \in (FU(X, \leq), \subseteq)$. Tem-se que $P \cup \{X - V;\ V \notin P\}$ com V aberto tem p.i.f., pois caso contrário existiria $U \in P$ (P é fechado para interseções finitas) e $V_1, ..., V_n \notin P$

com $U \cap (X - V_1) \cap ... \cap (X - V_n) = \emptyset$. Daí, $U \subseteq V_1 \cup ... \cup V_n$. Assim, como P é upset, $V_1 \cup ... \cup V_n \in P$. Como P é primo, algum $V_i \in P$, um absurdo.

Como para todo $K \in P$ tem-se $K \in FU(X, \leq)$, K é fechado. E $X - V$ é fechado para todo V aberto. Assim, pela compacidade de X, $J = \{P \cup \{X - V;\ V \notin P\}\} \neq \emptyset$. Seja $x \in J$. Tem-se que $P \subseteq G_X(x)$, pois $P \subseteq FU(X, \leq)$ e $x \in P$. Agora, seja $Q \in G_X(x)$, $Q \in FU(X, \leq)$ e $X \in Q$. Se $Q \notin P$, $x \in (X - Q)$, um absurdo, pois $x \in Q$. Logo, $Q \in P$. Assim, $G_X(x) \subseteq P$. Portanto, $G_X(x) = P$, sendo G_X sobrejetiva. Assim, G_X é uma bijeção contínua e isomorfismo de posets, além disso como X é compacto e $X(FU(X, \leq), \subseteq)$, é Hausdorff tem-se que G_X é um homeomorfismo. Assim, G_X é um isomorfismo de espaços de Priestley. $\square$

Já tem-se que $X : BDL \to PS$ definida para objetos. Para aplicações defina para $f : L \to M$ um homomorfismo de reticulados $X(f) : X(M) \to X(L)$ por $X(f)(Q) = f^{-1}(Q)$. É fácil ver que X é um funtor contravariante. Agora, como já tem-se que $FU : PS \to BDL$ definida para objetos, defina para $g : X \to Y$ morfismos de Priestley, $FU(g) : FU(Y) \to FU(X)$ por $FU(g)(V) = g^{-1}(V)$, também percebe-se que FU é um funtor contravariante.

Teorema 20. *BDL e PS são duais.*

Prova Defina $F : Id_{BDL} \to FU \circ X$ por $F_L : L \to FU(X(L))$ definida por $F_L(l) = \varphi(l)$. F_L já foi provado isomorfismo. E seja $f : L \to M$ um homomorfismo de reticulados. Tem-se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{F_L} & FU(X(L)) \\ \downarrow f & & \downarrow FU(X(f)) \\ M & \xrightarrow{F_M} & FU(X(M)) \end{array}$$

Seja $l \in L$.

$$FU(X(f))F_L(l) = X(f)^{-1}(\varphi(l)) =$$

$$\{Q \in X(M);\ X(f)Q \in \varphi(l)\} = \{Q \in X(M);\ f^{-1}(Q) \in \varphi(l)\} =$$

$$\{Q \in X(M);\ l \in f^{-1}(Q)\} = \{Q \in X(M);\ f(l) \in Q\} = F_L(f(l)).$$

Logo, F é um isomorfismo natural. Defina $G : Id_{PS} \to X \circ FU$ por $G_X : X \to X(FU(X, \leq), \subseteq)$ com $G_X(x) = \{U \in FU(X, \leq);\ x \in U\}$. Já foi provado que G_X é isomorfismo. E seja $g : X \to Y$ um morfismo de Priestley. Tem-se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{G_X} & X(FU(X)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g} & & \Big\downarrow{\scriptstyle X(FU(g))} \\ Y & \xrightarrow{G_Y} & X(FU(Y)) \end{array}$$

Seja $x \in X$.

$$X(FU(g))G_X(x) = \{V \in FU(Y);\ g^{-1}(V) \in G_X(x)\} =$$

$$\{V \in FU(Y);\ x \in g^{-1}(V)\} = \{V \in FU(Y);\ g(x) \in V\} = G_Y(g(x)).$$

Assim, G é um isomorfismo natural. Portanto, BDL e PS são duais. $\square$

7 Dualidade de Priestley com Operador

Seja $A = \{A, \wedge, \vee, \Diamond, 0, 1\}$ uma álgebra onde $A^- = \{A, \wedge, \vee, 0, 1\}$ é um reticulado distributivo limitado e

- $\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b$
- $\Diamond 0 = 0$.

Essas álgebras serão chamadas de *reticulados distributivos com operador.*

Proposição 9. *Seja A um reticulado distributivo com operador. Então $\Diamond$ é uma aplicação monótona, ou seja, $\forall a, b \in A$ tem-se que $a \leq b \Rightarrow \Diamond a \leq \Diamond b$.*

Prova Sejam $a, b \in A$ com $a \leq b$. Então $a \vee b = b$, daí, $\Diamond b = \Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b$, logo, $\Diamond a \leq \Diamond b$. $\square$

Sendo A um reticulado distributivo com operador, pode-se expandir A^- com a operação binária $R_\Diamond$ no conjunto $X(A^-)$ definida por

$$PR_\Diamond Q \Leftrightarrow Q \subseteq \Diamond^{-1}(P)$$

Assim, $PR_\Diamond Q$ se, e somente se, $\forall q \in Q$, $\Diamond q \in P$.

Agora, defina a operação unitária $\Diamond_{R_\Diamond}$ no conjunto dos upsets dos filtros primos de A^-, ou seja, em $U(X(A^-))$.

$$\Diamond R_\Diamond(U) = {R_\Diamond}^{-1}(U) := \{P \in X(A^-);\ (\exists Q \in U) PR_\Diamond Q\}.$$

Note que $\Diamond R_\Diamond(U)$ é upset, pois dado $A \in \Diamond_{R_\Diamond}(U)$ e $A \subseteq B$, tem-se que existe $Q \in U$ tal que $AR_\Diamond Q$, daí, $\forall q \in Q$, $\Diamond q \in A$, logo, $\Diamond q \in B$ $\forall q \in Q$, donde $BR_\Diamond Q$, logo $B \in \Diamond_{R_\Diamond}(U)$.

Desde que $B \in X(A^-)$, a função $\Diamond_{R_\Diamond} : U(X(A^-)) \to U(X(A^-))$ está assim bem definida.

Lema 5. *O reticulado* $U(X(L^-))$ *com a aplicação* $\Diamond_{R_\Diamond}$ *é um reticulado distributivo com operador.*

Prova Sejam $A, B, C \in U(X(L^-))$. É fácil ver que $U(X(L^-))$ é um poset por $\subseteq$.

- $x \in A \cup B$. Se $y \in X(L^-)$ com $x \leq y$, como A é upset, $y \in A$, logo $y \in A \cup B$. Assim $A \cup B \in U(X(L^-))$.
- $x \in A \cap B$. Se $y \in X(L^-)$ com $x \leq y$, como A é upset, $y \in A$. Como B é upset $y \in B$. Logo $y \in A \cap B$. Assim, $A \cap B \in U(X(L^-))$.
- Tem-se também que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Além disso limitado por L. Logo, $U(X(A^-))$ é um reticulado distributivo limitado. É óbvio que $\Diamond_{R_\Diamond}(\emptyset) = \emptyset$. E $\Diamond_{R_\Diamond}(A \cup B) = {R_\Diamond}^{-1}(A \cup B) = {R_\Diamond}^{-1}(A) \cup {R_\Diamond}^{-1}(B) = \Diamond_{R_\Diamond}(A) \cup \Diamond_{R_\Diamond}(B)$.

□

Denota-se por $U(X(A))$ a expansão do reticulado $U(X(A^-))$ com o operador $\Diamond_{R_\Diamond}$.

Lema 6. *Seja* A *um reticulado distributivo com operador. Se* $P \in X(A^-)$ *e* $\Diamond a \in P$*, então existe* $Q \in X(A^-)$ *tal que* $a \in Q \subseteq \Diamond^{-1}(P)$*.*

Prova Seja I o ideal gerado por $(\Diamond^{-1}(P))^c$. Tem-se que $\uparrow a \cap I = \emptyset$. Pois, caso exista $c \in \uparrow a \cap I$, então $a \leq c$ e existem $c_1, c_2 \in (\Diamond^{-1}(P))^c$ tais que $c \leq c_1 \vee c_2$, logo $\Diamond c \leq \Diamond c_1 \vee \Diamond c_2$ e como $\Diamond a \leq \Diamond c$, tem-se $\Diamond a \leq \Diamond c_1 \vee \Diamond c_2$, assim $\Diamond c_1 \vee \Diamond c_2 \in P$, pois P é upset. Como P é primo, $\Diamond c_1 \in P$ ou $\Diamond c_2 \in P$, um absurdo pois $c_1, c_2 \in (\Diamond^{-1}(P))^c$. Assim, $\uparrow a \cap I = \emptyset$. Logo, pelo Teorema de Stone-Birkhoff existe um filtro primo Q tal que $\uparrow a \subseteq Q$ e $Q \cap I = \emptyset$. Logo, $a \in Q \subseteq \Diamond^{-1}(P)$. □

Lema 7. *Seja* $a \in A$*. Então* $\varphi(\Diamond a) = \Diamond_{R_\Diamond}(\varphi(a))$*.*

Prova Seja $P \in \varphi(\Diamond a)$. Então $\Diamond a \in P$. Pelo Lema anterior, existe $Q \in X(A^-)$ tal que $a \in Q \subseteq \Diamond^{-1}(P)$, ou seja, $Q \in \varphi(a)$ e $P R_\Diamond Q$. Assim, $P \in \Diamond_{R_\Diamond}(\varphi(a))$.

Agora, seja $P \in \Diamond_{R_\Diamond}(\varphi(a))$. Então existe $Q \in \varphi(a)$ tal que $P R_\Diamond Q$, ou seja, para todo $q \in Q$, $\Diamond q \in P$. Como $a \in Q$, $\Diamond a \in P$. Logo, $P \in \varphi(\Diamond a)$. □

Assim a função $F_L : A \to FU(X(A))$ definida por $F_L(a) = \varphi(a)$ é um isomorfismo, pois já foi provado na dualidade de Priestley que F_L é um isomorfismo de reticulados e agora que preserva $\Diamond$. E como os clopens upsets são da forma $\varphi(a)$, a inversa também preserva $\Diamond$. Assim F_L é um isomorfismo de reticulados com operador.

Definição 45. *Seja $(X, \leq, \tau)$ um espaço de Priestley. Diz-se que a estrutura $(X, \leq, \tau, R)$ é um espaço de Priestley com $\Diamond$-relação se R é uma relação binária com as seguintes propriedades:*

(1) $(\leq^{-1} \circ R \circ \leq^{-1}) \subseteq R$;

(2) $R(x)$ *é fechado,* $\forall x \in X$;

(3) $R^{-1}(U)$ *é clopen upset,* $\forall U \in FU(X)$.

Proposição 10. *$R_\Diamond$ torna um espaço de Priestley $(X(A), \leq, \tau)$ em um espaço de Priestley com $\Diamond$-relação.*

Prova

(1) Seja $B \subseteq A$, $Q \subseteq \Diamond^{-1}(B)$ e $P \subseteq Q$, ou seja, $A \subseteq^{-1} B$, $BR_\Diamond Q$ e $Q \subseteq^{-1} P$. Como $P \subseteq Q$, $P \subseteq \Diamond^{-1}(B) \subseteq \Diamond^{-1}(A)$, já que $B \subseteq A$. Assim, $AR_\Diamond P$. Logo, $(\subseteq^{-1} \circ R_\Diamond \circ \subseteq^{-1}) \subseteq R_\Diamond$.

(2) Seja $P \in X(A)$. Suponha que $Q \notin R_\Diamond(P)$. Então $Q \not\subseteq \Diamond^{-1}(P)$, ou seja, existe $q \in Q$ tal que $\Diamond q \notin P$. Mas $Q \in \varphi(b)$, logo $\varphi(q) \cap R_\Diamond(P) = \emptyset$. Pois, se existe $Q' \in \varphi(q)$ tal que $PR_\Diamond Q'$, teríamos que para todo $q' \in Q'$ $\Diamond q' \in P$, mas $q \in Q'$ e $\Diamond q \notin P$. Como $Q \in \varphi(b)$ e $\varphi(b) \in \tau$, tem-se que $Q \notin \overline{R_\Diamond(P)}$. Logo, $R_\Diamond(P)$ é fechado.

(3) Sabe-se que os clopen upsets de $X(A)$ são $\{\varphi(a);\ a \in A\}$. Dos resultados anteriores ${R_\Diamond}^{-1}(\varphi(a)) = \Diamond_{R_\Diamond}(\varphi(a)) = \varphi(\Diamond a)$. Logo, ${R_\Diamond}^{-1}(U)$ é um clopen upset, para todo U clopen upset.

$\square$

Lema 8. *Se X é um espaço de Priestley com $\Diamond$-relação, então $R(x)$ é clopen downset, $\forall x \in X$.*

Prova Sabe-se que $R(x)$ é clopen, por definição. Seja $c \leq y$ para algum $y \in R(x)$, ou seja, $y \leq^{-1} c$ para algum y tal que xRy. É preciso provar que $c \in R(x)$. Como $x \leq^{-1} x$, tem-se que $c \in R(x)$, já que $(\leq^{-1} \circ R \circ \leq^{-1}) \subset R$. Logo, $R(x)$ é um downset. $\square$

Defina $\Diamond_R(U) = R^{-1}(U)$, $\forall U \in FU(X)$, X espaço de Priestley com $\Diamond$-relação.

Proposição 11. *Seja $(X, \leq, \tau, R)$ um espaço de Priestley com $\Diamond$-relação. A aplicação $G_X : X \to X(FU(X))$ definida por $G_X(x) = \{U \in FU(X);\ x \in U\}$ é um isomorfismo de posets com $\Diamond$-relação e homeomorfismo.*

Prova Da dualidade de Priestley, G_X é um isomorfismo de posets e homeomorfismo. Falta mostrar que preserva R. Seja xRy. Seja $U \in G_X(y)$, então $y \in U$, como xRy, $x \in \Diamond_R(U)$, logo, $\Diamond_R(U) \in G_X(x)$, assim, $G_X(y) \subseteq {\Diamond_R}^{-1}(G_X(x))$. Logo, $G_X(x) R_{\Diamond_R} G_X(y)$. Agora seja $G_X(x) R_{\Diamond_R} G_X(y)$, ou seja, $G_X(y) \subseteq {\Diamond_R}^{-1}(G_X(x))$, e $y \notin R(x)$. Como $R(x)$ é um downset, para cada $z \in R(x)$ segue que $y \not\leq z$. Para cada $z \in R(x)$ tome o clopen upset U_z tal que $y \in U_z$ e $z \notin U_z$. Então $R(x) \subseteq \bigcup_{z \in R(x)} (U_z)^c$. Pela compacidade de $R(x)$, existem $z_1, ..., z_n \in R(x)$ tal que $R(x) \subseteq (U_{z_1})^c \cup ... \cup (U_{z_n})^c$. Então $y \in U_{z_1} \cap ... \cap U_{z_n}$ e $U_{z_1} \cap ... \cap U_{z_n}$ é clopen upset, logo $y \in G_X(y)$. Além disso, $U_{z_1} \cap ... \cap U_{z_n} \in {\Diamond_R}^{-1}(G_X(x))$, logo, $\Diamond_R(U_{z_1} \cap ... \cap U_{z_n}) \in G_X(x)$. Então $x \in R^{-1}(U_{z_1} \cap ... \cap U_{z_n})$, daí existe $z \in X$ tal que xRz e $z \in U_{z_1} \cap ... \cap U_{z_n}$. Mas, como $R(x) \subseteq (U_{z_1} \cap ... \cap U_{z_n})^c$, tem-se que $R(x) \cap (U_{z_1} \cap ... \cap U_{z_n}) = \emptyset$, uma contradição. Logo, $y \in R(x)$. Ou seja, xRy. $\square$

Sejam $(X, \leq_X, \tau_X, R_X)$ e $(Y, \leq_Y, \tau_Y, R_Y)$ espaços de Priestley com $\Diamond$-relação. Uma aplicação $f : X \to Y$ é dita *p-morfismo* se

(1) f é monótona entre $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$;

(2) f é contínua;

(3) Se xR_Xy então $f(x)R_Yf(y)$, $\forall x, y \in X$;

(4) Se $f(x)R_Yz$, então existe $y \in X$ tal que $z \leq_Y f(y)$ e xRy, $\forall x \in X$ e $z \in Y$.

Proposição 12. *Sejam A e B reticulados distributivos com operador. E seja $h : A \to B$ um homomorfismo. A aplicação $X(h) : X(B) \to X(A)$ definida por $X(h)P = h^{-1}(P)$ é um p-morfismo.*

Prova Da dualidade de Priestley, (1) e (2) são satisfeitas. Agora, sejam $P, Q \in X(B)$ com PR_BQ. Tome $x \in h^{-1}(Q)$. Então $h(x) \in Q$, logo $h(x) \in {\Diamond_{R_B}}^{-1}(P)$, assim

$\Diamond_{R_B}(h(x)) \in P$. Como h é homomorfismo $\Diamond_{R_B}(h(x)) = h(\Diamond_{R_A}x) \in P$, logo, $\Diamond_{R_A}x \in h^{-1}(P) = X(h)P$. Assim, $x \in {\Diamond_{R_A}}^{-1}(X(h)P)$, logo, $h^{-1}(Q) = X(h)Q \subseteq {\Diamond_{R_A}}^{-1}(X(h)P)$, ou seja, $X(h)(P)R_AX(h)(Q)$.

Seja $X(h)(P)R_AQ$. Logo, $Q \subseteq {\Diamond_{R_A}}^{-1}(X(h)(P))$. Seja F o filtro gerado por $h(Q)$. Afirmação: $(\Diamond_{R_B}(P))^c$ é um ideal. De fato, seja $K \in {\Diamond_{R_B}}^{-1}(P)$ e $K \subseteq T$, $\Diamond_{R_{B(K)}} \in P$. Então

$$\Diamond_{R_B}(T) = \Diamond_{R_B}(K \cup T) = {R_B}^{-1}(K \cup T) = {R_B}^{-1}(K) \cup {R_B}^{-1}(T) = \Diamond_{R_B}(K) \cup \Diamond_{R_B}(T).$$

Assim, $\Diamond_{R_B}(K) \subseteq \Diamond_{R_B}(T)$ e como P é filtro, $\Diamond_{R_B}(T) \in P$. Logo, $\Diamond_{R_B}(P)$ é upset, sendo $(\Diamond_{R_B}(P))^c$ um downset. E seja $K \cup T \in ({\Diamond_{R_B}}^{-1}(P))^c$, $\Diamond_{R_B}(K \cup T) = \Diamond_{R_B}(K) \cup \Diamond_{R_B}(T) \notin P$. Assim um dos dois, K ou T, não está em ${\Diamond_{R_B}}^{-1}(P)$. Sendo $(\Diamond_{R_B}(P))^c$ um ideal. Afirmação: $F \cap ({\Diamond_{R_B}}^{-1}(P))^c = \emptyset$. Suponha $b \in F \cap ({\Diamond_{R_B}}^{-1}(P))^c$. Como F é o filtro gerado por $h(Q)$, existe $a \in Q$ tal que $h(a) \leq b$. Como $a \in Q$, $\Diamond_{R_A}a \in h^{-1}(P)$, logo, $h(\Diamond_{R_A}a) = \Diamond_{R_B}h(a) \in P$, assim $h(a) \in {\Diamond_{R_B}}^{-1}(P)$, $h(a) \vee b = b$. Logo, $\Diamond_{R_B}h(a) \vee \Diamond_{R_B}b = \Diamond_{R_B}b$, sendo $\Diamond_{R_B}h(a) \leq \Diamond_{R_B}b$. Como $\Diamond_{R_B}h(a) \in P$, tem-se $\Diamond_{R_B}b \in P$, um absurdo. Logo, a interseção é vazia. Assim, pelo Teorema de Stone-Birkhoff existe um filtro primo P' tal que $F \subset P'$ e $P' \subseteq {\Diamond_{R_B}}^{-1}(P)$, logo PR_BP' com $h(Q) \subseteq P'$, $Q \subseteq h^{-1}(P') = X(h)P'$. Assim, satisfazendo (4). $\square$

Proposição 13. *Sejam X e Y espaços de Priestley com $\Diamond$-relação. Seja $f : X \to Y$ um p-morfismo. Então a aplicação $FU(f) : FU(Y) \to FU(X)$ definida por $FU(f)U = f^{-1}(U)$ é um homomorfismo de reticulados distributivos com operador.*

Prova Seja $x \in f^{-1}(\Diamond_{R_Y}(U))$. Então $f(x) \in \Diamond_{R_Y}(U)$ e existe $z \in U$ com $f(x)R_Yz$. Como f é p-morfismo existe $y \in X$ tal que $z \leq_Y f(y)$ com xR_Xy. Como U é upset, $f(y) \in U$, assim $y \in f^{-1}(U)$, logo, $x \in {R_X}^{-1}(f^{-1}(U)) = \Diamond_{R_X}(FU(f)U)$. Assim, $FU(f)(\Diamond_{R_Y}(U)) \subseteq \Diamond_{R_X}(FU(f)U)$. Agora, seja $x \in \Diamond_{R_X}(FU(f)U) = \Diamond_{R_X}(f^{-1}(U))$ e seja $y \in f^{-1}(U)$ tal que xR_Xy. Como f é p-morfismo, $f(x)R_Yf(y)$ e como $y \in f^{-1}(U)$, $f(y) \in U$. Tem-se que $f(x) \in {R_Y}^{-1}(U)$, logo, $x \in f^{-1}({R_Y}^{-1}(U))$, ou seja, $x \in FU(f)(\Diamond_{R_Y}(U))$. Assim, $\Diamond_{R_X}(FU(f)U) \subseteq FU(f)(\Diamond_{R_Y}(U))$. Portanto, $FU(f)(\Diamond_{R_Y}(U)) = \Diamond_{R_X}(FU(f)U)$, sendo $FU(f)$ um homomorfismo de reticulados com operador. $\square$

Sejam PS_R a categoria dos espaços de Priestley com $\Diamond$-relação onde os morfismos são os p-morfismos e $BDL_\Diamond$ a categoria dos reticulados distributivos limitados com operador com morfismos sendo os homomorfismos.

Teorema 21. *PS_R e $BDL_\Diamond$ são duais pelos funtores FU e X, com diagramas similares ao caso sem operador.*

8 Equivalência entre $N4^{\perp}$-Reticulados e $TWIST^{\perp}$

Definição 46. *Seja* $(H, \vee, \wedge, 0, 1)$ *um reticulado distributivo limitado. Quando* $\rightarrow$ *definida* $\forall a, b \in H$ *por* $a \rightarrow b = \bigvee\{x : a \wedge x \leq b\}$ *está bem definida, diz-se que* $(H, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ *é uma álgebra de Heyting.*

Alguns resultados interessantes para álgebras de Heyting são:

1. $a \rightarrow a = 1\ \forall a \in H$
2. $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b\ \forall a, b \in H$
3. $(a \vee b) \rightarrow 0 = (a \rightarrow 0) \wedge (b \rightarrow 0)$
4. $(a \wedge b) \rightarrow 0 = (a \rightarrow 0) \vee (b \rightarrow 0)$

Definição 47. *Uma álgebra* $(A, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, 0, 1)$ *é chamada* $N4^{\perp}$*-Reticulado quando satisfaz:*

1. $(A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ *é um reticulado distributivo limitado e seguem as identidades:* $\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$ *e* $\sim\sim p = p$.
2. *A relação* $\preceq$, *onde* $a \preceq b$ *denota* $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b) = a \rightarrow b$, *é reflexiva e transitiva.*
3. *A relação* $\approx$, *onde* $a \approx b$ *se, e somente se,* $a \preceq b$ *e* $b \preceq a$, *é uma relação de congruência com respeito a* $\vee, \wedge, \rightarrow$ *e a álgebra quociente* $A_{\bowtie} := (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1) / \approx$ *é uma álgebra de Heyting.*
4. $\forall a, b \in A, \sim (a \rightarrow b) \approx a \wedge \sim b$.
5. $\forall a, b \in A, a \leq b$ *se, e somente se,* $a \preceq b$ *e* $\sim b \preceq \sim a$, *onde* $\leq$ *é a relação de ordem em* A.

Definição 48. *Seja* $A = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ *uma álgebra de Heyting.*

1. *Uma estrutura twist plena sobre A é a álgebra* $A^{\bowtie} = (A \times A, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, \perp, \top)$ *com as seguintes operações:*

   (a) $(a,b) \vee (c,d) = (a \vee c, b \wedge d)$,

   (b) $(a,b) \wedge (c,d) = (a \wedge c, b \vee d)$,

   (c) $(a,b) \rightarrow (c,d) = (a \rightarrow d, a \wedge d)$,

   (d) $\sim (a,b) = (b,a)$,

   (e) $\perp = (0,1)$,

   (f) $\top = (1,0)$.

2. *Uma estrutura twist sobre A é uma subalgebra B de $A^{\bowtie}$ tal que* $\pi_1(B) = A$.

3. *A classe de todas estruturas twist sobre A é denotada por* $S^{\bowtie}(A)$.

Note que uma estrutura twist sobre A é um $N4^{\perp}$-reticulado.

Seja A uma álgebra de Heyting, define-se $D(A) = \{a \in A : \ a \rightarrow 0 = 0\}$ o conjunto dos elementos densos de A.

Proposição 14. $D(A)$ *é um filtro.*

Prova Seja $a \in D(A)$ e $a \leq c$. Então $c \rightarrow 0 = (a \vee c) \rightarrow 0 = (a \rightarrow 0) \wedge (c \rightarrow 0) = 0 \wedge (c \rightarrow 0) = 0$. Logo, $c \in D(A)$. Sejam $a, b \in D(A)$. Tem-se que $(a \wedge b) \rightarrow 0 = (a \rightarrow 0) \vee (b \rightarrow 0)$. Como $a \rightarrow 0 = 0$ e $b \rightarrow 0 = 0$, tem-se $a \wedge b \rightarrow 0 = 0$, logo, $a \wedge b \in D(A)$, e segue que $D(A)$ é um filtro.

□

Proposição 15. $D(A) = \{a \vee (a \rightarrow 0) : \ a \in A\}$.

Prova Tem-se que mostrar que $\{a \in A : \ a \rightarrow 0 = 0\} = \{a \vee (a \rightarrow 0) : \ a \in A\}$. Seja $a \in \{a \in A : \ a \rightarrow 0 = 0\}$, logo $a = a \vee (a \rightarrow 0)$, assim $a \in \{a \vee (a \rightarrow 0) : \ a \in A\}$. Agora, seja $a \in \{a \vee (a \rightarrow 0) : \ a \in A\}$. $(a \vee (a \rightarrow 0)) \rightarrow 0 = (a \rightarrow 0) \wedge ((a \rightarrow 0) \rightarrow 0) = (a \rightarrow 0) \wedge 0 = 0$, assim, $a \in \{a \in A : \ a \rightarrow 0 = 0\}$. Portanto, $D(A) = \{a \vee (a \rightarrow 0) : \ a \in A\}$. □

Agora, considere o filtro $F \subset A$ tal que $D(A) \subset F$ e seja I um ideal de A. Denota-se

$$Tw(A, F, I) = \{(a,b) \in A \times A : \ a \vee b \in F \ \text{ e } \ a \wedge b \in I\}.$$

Proposição 16. *Sejam A uma álgebra de Heyting e F um filtro de A com $D(A) \subset F$ e I um ideal de A. Então $Tw(A, F, I)$ é uma estrutura twist sobre A.*

Prova Sejam $(a,b)\,,(c,d) \in Tw(A,F,I)$. Então $(a,b) \vee (c,d) = (a \vee c, b \wedge d)$. Note que $(a \vee c) \vee (b \wedge d) = (a \vee c \vee b) \wedge (a \vee c \vee d)$, como $a \vee b \in F$ então $(a \vee c \vee b) \in F$ e como $c \vee d \in F$ tem-se $(a \vee c \vee d) \in F$, donde $(a \vee c) \vee (b \wedge d) \in F$. E $(a \vee c) \wedge (b \wedge d) = (b \wedge d \wedge a) \vee (b \wedge d \wedge c)$, logo, tem-se que $(a \vee c) \wedge (b \wedge d) \in I$. Assim, $(a,b) \vee (c,d) \in Tw(A,F,I)$.

Analogamente $(a,b) \wedge (c,d) \in Tw(A,F,I)$.

Agora, como $(a,b) \to (c,d) = (a \to c, a \wedge d)$. Tem-se que mostrar que $(a \to c, a \wedge d) \in Tw(A,F,I)$. Com efeito, $(a \to c) \vee (a \wedge d) = ((a \to c) \vee a) \wedge ((a \to c) \vee d)$. Como $a \vee (a \to 0) \in F$ tem-se que $((a \to c) \vee a) \in F$. Se $d \in F$, $((a \to c) \vee d) \in F$. Se não, então $c \in F$.Como $a \wedge c \leq c$ tem-se que $c \leq a \to c$, logo, $a \to c \in F$, donde, $((a \to c) \vee d) \in F$ .Assim, $(a \to c) \vee (a \wedge d) \in F$. E como $(a \to c) \wedge (a \wedge d) = a \wedge c \wedge d$, tem-se que $(a \to c) \wedge (a \wedge d) \in I$. Logo, $(a,b) \to (c,d) \in Tw(A,F,I)$.

Não é difícil ver que $\sim (a,b) \in Tw(A,F,I)$ e $(0,1) \in Tw(A,F,I)$.

Seja $a \in A$. Note que $a \vee (a \to 0) \in D(A) \subset F$ e $a \wedge (a \to 0) = 0 \in I$. Logo, $(a, a \to 0) \in Tw(A,F,I)$, $\forall a \in A$. Assim $\pi_1(Tw(A,F,I)) = A$. Portanto, $Tw(A,F,I)$ é uma estrutura twist sobre A. $\square$

Assim, $Tw(A,F,I)$ também é um $N4^{\perp}$-reticulado.

Seja A uma álgebra de Heyting e $B \in S^{\bowtie}(A)$. Definem-se $I(B) = \{a \vee \sim a :\ a \in B\}$, $\nabla B = \pi_1(I(B))$ e $\Delta B = \pi_2(I(B))$.

Proposição 17. *Seja A uma álgebra de Heyting e $B \in S^{\bowtie}(A)$. Então*

(i) $B = \{(a,b) :\ a,b \in A,\ (a \vee b, a \wedge b) \in I(B)\}$;

(ii) $I(B) = \{(a \vee b, a \wedge b) :\ (a,b) \in B\} = \{(a,b) :\ (a,b) \in B,\ a \geq b\}$.

Prova Seja $(a,b) \in B$. Então $(a \vee b, a \wedge b) = (a,b) \vee \sim (a,b) \in I(B)$. Agora, seja $(a,b) \in A \times A$ com $(a \vee b, b \wedge a) \in I(B)$. Existe um elemento c em A tal que $(a,c) \in B$. Como $I(B) \subseteq B$, $(a \wedge b, a \vee b) = \sim (a \vee b, a \wedge b) \in B$. Logo, $(a,c) \to (a \wedge b, a \vee b) = (a \to (a \wedge b), a \wedge (a \vee b)) = (a \to b, a) \in B$. Daí, $(a \vee b, a \wedge b) \wedge (a \to b, a) = ((a \vee b) \wedge (a \to b), (a \wedge b) \vee a) = ((a \wedge b) \vee b, a) = (b,a)$. Assim, os elementos (b,a) e $\sim (b,a) = (a,b)$ estão em B, o que prova (i). (ii) segue do fato que $(a,b) \vee \sim (a,b) = (a \vee b, b \wedge a)$, $\forall (a,b) \in B$. E $(a,b) \vee \sim (a,b) = (a,b)$ quando $a \geq b$. $\square$

Proposição 18. $\Delta B = \{a \in A : (1,a) \in B\}$.

Prova Seja $(1,a) \in B$. Então $(1,a) \vee \sim (1,a) = (1,a) \in I(B)$, logo, $a \in \Delta B$. Agora, seja $a \in \Delta B$. Então, existe $d = (b,c) \in B$ tal que $\pi_2(d \vee \sim d) = a$, ou seja, $b \wedge c = a$. Como $(b,c) \in B$, então $(b,c) \to (b,c) = (1, b \wedge c) = (1,a) \in B$. □

Teorema 22. *ΔB é ideal de A.*

Prova Sejam $a,b \in \Delta B$. Pela proposição anterior, $(1,a),(1,b) \in B$. Tem-se $(1,a) \wedge (1,b) = (1, a \vee b) \in B$, logo $a \vee b \in \Delta B$. Sejam $a \in \Delta B$ e $b \in A$ tais que $b \leq a$. Seja $c \in A$ tal que $(c,b) \in B$. Tem-se que $(1,a) \vee (c,b) = (1, a \wedge b) = (1,b) \in B$, logo $b \in \Delta B$. Assim, ΔB é ideal de A. □

Proposição 19. *∇B é filtro e $D(A) \subseteq \nabla B$.*

Prova Sejam $a,b \in \nabla B$ e $c,d \in \Delta B$ tais que $(a,c),(b,d) \in I(B)$. Como $I(B) = \{(a \vee b, a \wedge b) : (a,b) \in B\}$, tem-se que $c \leq a$ e $b \leq d$ e, pelo resultado anterior, $(1, c \wedge d) \in I(B)$, donde $(a,c) \to (c \wedge d, 1) = (a \to (c \wedge d), a) \in B$. Também tem-se $(a \to (c \wedge d), a) \wedge (a,c) = (a \wedge c \wedge d, a \vee c) = (c \wedge d, a) \in B$. Assim, $(a, c \wedge d) \in I(B)$. Similarmente, $(b, c \wedge d) \in I(B)$. Logo, $(a, c \wedge d) \wedge (b, c \wedge d) = (a \wedge b, c \wedge d) \in B$. Como $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) = a \wedge b$ e $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = c \wedge d$ tem-se $(a \wedge b, c \wedge d) \in I(B)$. Logo, $a \wedge b \in \pi_1(I(B)) = \nabla B$. Agora, sejam $a \in \nabla B$ e $b \in A$ tais que $a \leq b$. Assim, existem elementos $c,d \in A$ tais que $a \geq c$, $(a,c) \in I(B)$ e $(b,d) \in B$. Assim $(a \vee b, c \wedge d) \in B$, mas $(a \vee b, c \wedge d) = (b, c \wedge d) \in B$. Além disso, $c \wedge d \leq a \leq b$, logo $(b, c \wedge d) \in I(B)$. Donde $b \in \nabla B$, e portanto este é filtro.

Sejam $a,b,c,d \in A$ tais que $(a,c),(b,d) \in B$, então $(a,c) \vee ((a,c) \to (b,d)) = (a \vee (a \to b), c \wedge a \wedge d) \in B$. E tem-se que $c \wedge a \wedge d \leq a \leq a \vee (a \to b)$, logo $a \vee (a \to b) \in \nabla B$. Assim, $D(A) \subseteq \nabla B$. □

Proposição 20. *$\nabla B = \{a \in A : (a,0) \in B\}$.*

Prova Seja $(a,0) \in B$, então $(a,0) \vee \sim (a,0) = (a,0) \in I(B)$, logo, $a \in \nabla B$. Agora, seja $a \in \nabla B$, então existe $c \in A$ tal que $(a,c) \in B$ com $c \leq a$. Assim, $(a,c) \to (0,1) = (a \to 0, a) \in B$, donde $(a \to 0, a) \wedge \sim (a,c) = ((a \to 0) \wedge c, a) = ((a \to 0) \wedge c \wedge a, a) = (0,a) \in B$. □

Teorema 23. *Seja A uma álgebra de Heyting e $B \in S^{\bowtie}(A)$, então $B = Tw(A, \nabla B, \Delta B)$.*

Prova Pela proposição 17, $B = \{(a,b) : a,b \in A, (a \vee b, a \wedge b) \in I(B)\}$ e $I(B) = \{(a,b) \in B : a \geq b\}$. Seja $(a,b) \in B$, então $(a \vee b, a \wedge b) \in I(B)$, logo $a \vee b \in \pi_1(I(B)) =$

∇B e $a \wedge b \in \pi_2(I(B)) = \Delta B$, ou seja, $(a,b) \in Tw(A, \nabla B, \Delta B)$. Agora seja $(\alpha, \beta) \in Tw(A, \nabla B, \Delta B)$, então, $\alpha \vee \beta \in \nabla B$ e $\alpha \wedge \beta \in \Delta B$, ou seja, $(\alpha \vee \beta, 0) \in B$ e $(1, \alpha \wedge \beta) \in B$. Assim, $(\alpha \vee \beta, 0) \wedge (1, \alpha \wedge \beta) = (\alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta) \in B$. Como $\alpha \wedge \beta \ \leq \alpha \vee \beta$, tem-se que $(\alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta) \in I(B)$, logo, $(\alpha, \beta) \in B$.

Portanto, $B = Tw(A, \nabla B, \Delta B)$. □

Proposição 21. *Seja* A *um* $N4^{\perp}$*-reticulado. Então* $i^{\bowtie} : A \to (A/\approx) \times (A/\approx)$ *definida por* $i^{\bowtie}(a) = ([a], [\sim a])$ *é uma imersão.*

Prova Seja $i^{\bowtie}(a) = i^{\bowtie}(b)$. Então $[a] = [b]$ e $[\sim a] = [\sim b]$. Então $a \preceq b$ e $\sim b \preceq \sim a$, assim $a \leq b$. Analogamente $b \leq a$.Portanto $a = b$, e $i^{\bowtie}$ é injetiva. Além disso,

$$i^{\bowtie}(a \vee b) = ([a \vee b], [\sim (a \vee b)]) = ([a] \vee [b], [\sim a] \wedge [\sim b]) = i^{\bowtie}(a) \vee i^{\bowtie}(b).$$

$$i^{\bowtie}(a \to b) = ([a \to b], [\sim (a \to b)]) = ([a \to b], [a \wedge \sim b]) = ([a] \to [b], [a] \wedge [\sim b]) = i^{\bowtie}(a) \to i^{\bowtie}(b).$$

De maneira análoga, $i^{\bowtie}$ preserva $\wedge$ e $\sim$. Por fim, temos que $i^{\bowtie}(0) = (0,1)$ e $i^{\bowtie}(1) = (1,0)$, o que conlui a demonstração.

□

Agora, pode-se ver um $N4^{\perp}$-reticulado como uma estrutura twist. $i^{\bowtie}$ é chamada imersão canônica.

Proposição 22. *Seja* A *um* $N4^{\perp}$*-reticulado. Defina*

$$\nabla_l(A) = [a \vee \sim a] \quad e \quad \Delta_l(A) = [a \wedge \sim a].$$

Então $D(A_{\bowtie}) \subseteq \nabla_l(A)$, $\nabla_l(A)$ *é um filtro de* $A_{\bowtie}$ *e* $\Delta_l(A)$ *é um ideal de* $A_{\bowtie}$*. Além disso,* $i^{\bowtie}(A) = Tw(A_{\bowtie}, \nabla_l(A), \Delta_l(A))$.

Prova Considere a twist estrutura $A' = i^{\bowtie}(A)$. Claramente, $A' \in S^{\bowtie}(A_{\bowtie})$ e tem a forma $A' = Tw(A_{\bowtie}, \nabla(A'), \Delta(A'))$ pelo resultado anterior. Seja $b \in A'$, $b = ([a], [\sim a])$, para algum $a \in A$. Assim,

$$b \vee \sim b = ([a], [\sim a]) \vee ([\sim a], [a]) = ([a \vee \sim a], [a \wedge \sim a]).$$

Como

$$\nabla(A') = \pi_1(I(A')) = \{[a \vee \sim a] : \ a \in A\} = \nabla_l(A) \quad e$$

$$\Delta(A') = \pi_2(I(A')) = \{[a \wedge \sim a] : \ a \in A\} = \Delta_l(A),$$

O resultado segue. $\square$

Agora, veja que $A \cong Tw(A_{\bowtie}, \nabla(A), \Delta(A))$ via $i^{\bowtie}$. Definindo

$$J_B : B \to Tw(B_{\bowtie}, \nabla(B), \Delta(B))$$

por $J_B(a) = i^{\bowtie}(a)$, tem-se que J_B é um isomorfismo de $N4^{\perp}$-reticulados.

Denota-se por $N4^{\perp}$ a categoria de $N4^{\perp}$-reticulados com os morfismos sendo os homomorfismos de $N4^{\perp}$-reticulados. E a categoria $TWIST^{\perp}$ pelas triplas $A = (A, \nabla, \Delta)$ tal que A é uma álgebra de Heyting, ∇ um filtro tal que $D(A) \subseteq \nabla$, e Δ um ideal de A. Com os morfismos entre $(A_1, \nabla_1, \Delta_1)$ e $(A_2, \nabla_2, \Delta_2)$ sendo um homomorfismo h entre A_1 e A_2 tal que $h(\nabla_1) \subseteq \nabla_2$, $h(\Delta_1) \subseteq \Delta_2$ e preserva 0 e 1.

Agora, defina o funtor $T : N4^{\perp} \to TWIST^{\perp}$ por $T(B) := (B_{\bowtie}, \nabla B, \Delta B)$ para objetos e para $f : B_1 \longrightarrow B_2$, $N4^{\perp}$-homomorfismo, $T(f) : T(B_1) \longrightarrow T(B_2)$ por $T(f)([a]_{\approx_1}) = [f(a)]_{\approx_2}$. $T(f)$ está bem definida, pois se $a \approx_1 a'$ tem-se $f(a) \approx_2 f(a')$, pois f preserva $\to$. E $T(f)$ preserva 0 e 1, já que f preserva. Além disso, $T(f)$ preserva $\vee$ e $\wedge$, já que f preserva, sendo assim um morfismo entre $(B_1)_{\bowtie}$ e $(B_2)_{\bowtie}$.

Sendo assim, não é difícil ver que T é um funtor covariante. Agora, defina para cada estrutura twist $A = (A, \nabla, \Delta)$

$$N(A) := Tw(A, \nabla, \Delta).$$

Tem-se que $Tw(A, \nabla, \Delta)$ é um $N4^{\perp}$-reticulado. E sendo $h : A_1 \to A_2$ um morfismo entre as estruturas twist $A_1 = (A_1, \nabla_1, \Delta_1)$ e $A_2 = (A_2, \nabla_2, \Delta_2)$, define-se $N(h) : N(A_1) \to N(A_2)$ por

$$N(h)(a, b) = (h(a), h(b)).$$

A aplicação está bem definida, pois dado $(a, b) \in N(A_1)$ tem-se $(h(a), h(b)) \in N(A_2)$ e $N(h)$ é um homomorfismo entre $N4^{\perp}$-reticulados, pois $N(h)((a, b) \vee (c, d)) = N(h)(a \vee c, b \wedge d) = (h(a \vee c), h(b \wedge d)) = h(a, b) \vee h(c, d) = N(h)(a, b) \vee N(h)(c, d)$.

Analogamente, $N(h)$ preserva $\wedge$ e $\to$, além de $N(h)(0, 1) = (h(0), h(1)) = (0, 1)$ e $N(h)(1, 0) = (1, 0)$, provando que $N(h)$ é de fato um $N4^{\perp}$-homomorfismo.

Notando que dado um B $N4^{\perp}$-reticulado, tem-se $N(T(B)) = Tw(B_{\bowtie}, \nabla B, \Delta B)$, tem-se que $J_B : B \to N(T(B))$ é um isomorfismo na categoria $N4^{\perp}$.

Agora, sendo A uma estrutura twist, defina $\eta_A : A \to T(N(a))$ por $\eta_A(a) = [(a, a')]$, onde a' é um elemento escolhido para $(a,a') \in N(A) = Tw(A, \nabla A, \Delta A)$.

Note que a' existe, já que $\pi_1(N(A)) = A$. E está bem definida, pois se $[(a,a')] = [(b,b')]$, tem-se $(a,a') \preceq (b,b')$, donde $((a,a') \to (b,b')) \to ((a,a') \to (b,b')) = ((a \to b) \to (a,b), (a \wedge b') \wedge (a \to b)) = (1, (a \wedge b') \wedge (a \to b))$. Logo $a \to b = 1 \;\Leftrightarrow\; a \leq b$. De maneira análoga, como $(b,b') \preceq (a,a') \;\Leftrightarrow\; b \leq a$, temos que $a = b$. Ou seja, $[(a,a')] = [(b,b')] \;\Leftrightarrow\; a = b$.

Isso mostra que η_A está bem definida e é injetiva.

Proposição 23. *Para toda estrutura twist A, a aplicação $\eta_A : A \to T(N(A))$ é um $TWIST^{\perp}$-isomorfismo.*

Prova Já foi provado que η_A está bem definida e é injetiva. Seja $[(a,b)] \in T(N(A))$, ou seja, $(a,b) \in N(A)$. Tem-se que $(a,b) \approx (a,c)$, $\forall c \in A$, logo $[(a,b)] = [(a,a')] = \eta_A(a)$, sendo η_A sobrejetiva. Além disso, $\eta_A(a) \vee \eta_A(b) = [(a,a')] \vee [(b,b')] = [(a \vee b, a' \wedge b')] = [(a,a') \vee (b,b')] = \eta_A(a \vee b)$, similarmente para $\wedge$, $\to$, logo η_A é um homomorfismo e preserva 0 e 1. E

$$\nabla(N(A)) = \{[(a,b) \vee \sim (a,b)] : \; (a,b) \in N(A)\} = \{[(a \vee b, a \wedge b)] : \; (a,b) \in N(A)\}$$

$$= \{[(a \vee b, a \wedge b)] : \; a \vee b \in \nabla, \; a \wedge b \in \Delta\}$$

$$= \{[(c,d)] : \; c \in \nabla, \; d \in \Delta \;\; e \;\; d \leq c\}$$

$$= \{[(c,d)] : \; c \in \nabla\} = \eta_A(\nabla).$$

Similarmente, $\Delta(N(A)) = \eta_A(\Delta)$, e segue que η_A é um $TWIST^{\perp}$-isomorfismo. □

Teorema 24. *As categorias $N4^{\perp}$ e $TWIST^{\perp}$ são equivalentes pelos funtores N e T.*

Prova Seja $f : B_1 \to B_2$ um $N4^{\perp}$-homomorfismo, e já sabemos que J_B é um isomorfismo entre B e $N(T(B))$. Então, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{J_{B_1}} & N(T(B_1)) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle N(T(f))} \\ B_2 & \xrightarrow{J_{B_2}} & N(T(B_2)) \end{array}$$

Assim,

$$N(T(f)) \circ J_{B_1}(a) = N(T(f))([a]_{\approx_1}, [\sim a]_{\approx_1})$$

$$= (T(f)[a]_{\approx_1}, T(f)[\sim a]_{\approx_1})$$

$$= ([f(a)]_{\approx_2}, [\sim f(a)]_{\approx_2}) = J_{B_2} \circ f(a).$$

Ou seja, o diagrama comuta, sendo J um isomorfismo natural. Agora, seja h um $TWIST^{\perp}$-morfismo, e já sabemos que η_A é um isomorfismo entre A e $T(N(A))$. Então, temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\eta_{A_1}} & T(N(A_1)) \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle T(N(h))} \\ A_2 & \xrightarrow{\eta_{A_2}} & T(N(A_2)) \end{array}$$

Com

$$T(N(h)) \circ \eta_{A_1}(a) = T(N(h))[(a, a')]_{\approx_1}$$

$$= [N(h)[(a, a')]_{\approx_1}] = [(h(a), h(a'))]_{\approx_2} = \eta_{A_2} \circ h.$$

Assim, η é um isomorfismo natural. E como N e T são covariantes, segue que $N4^{\perp}$ e $TWIST^{\perp}$ são equivalentes. □

9 Dualidade entre $TWIST^{\perp}$ e NE-espaços

Definição 49. *Seja* $(X, \leq, \tau)$ *um espaço de Priestley. Se para todo* $U \subseteq X$, $\downarrow U$ *é clopen,* $(X, \leq, \tau)$ *é chamado de espaço de Heyting.*

Lema 9. *Seja* A *uma álgebra de Heyting. Então,* $\downarrow (\varphi(a) \cap \varphi(b)^c) = \varphi(a \to b)^c$.

Prova Sejam $a, b \in A$. Como $a \wedge (a \to b) \leq b$ tem-se que $\varphi(a) \cap \varphi(a \to b) \subseteq \varphi(b)$, logo $\varphi(b)^c \subseteq \varphi(a)^c \cup \varphi(a \to b)^c$, assim $\varphi(a) \cap \varphi(b)^c \subseteq \varphi(a \to b)^c$. Como $\varphi(a \to b)^c$ é downset tem-se $\downarrow (\varphi(a) \cap \varphi(b)^c) \subseteq \varphi(a \to b)^c$. Agora, seja $P \in \varphi(a \to b)^c$. Então P é um filtro primo com $a \to b \notin P$. Seja F o filtro gerado por $P \cup \{a\}$ e $I = \downarrow (a \to b)$. Se $a \to b \in F$, então existe $x \in P$ tal que $a \wedge x \leq a \to b$, logo, $a \wedge (a \wedge x) \leq b$, ou seja, $a \wedge x \leq b$, donde $x \leq a \to b$, um absurdo, pois $x \in P$ e $a \to b \notin P$. Assim, $a \to b \notin F$. Se $y \in \downarrow (a \to b) \cap F$, então $a \to b \in F$, logo $\downarrow (a \to b) \cap F = \emptyset$. Pelo teorema de Stone-Birkhoff, existe um filtro primo Q com $F \subseteq Q$ tal que $a \in Q$ e $a \to b \notin Q$, logo $b \notin Q$, pois caso $b \in Q$, $a \wedge b \in Q$ e $a \wedge b \leq b$, donde $b \leq a \to b$, um absurdo. Assim, $P \in \downarrow (\varphi(a) \cap \varphi(b)^c)$ e, portanto, $\downarrow (\varphi(a) \cap \varphi(b)^c) = \varphi(a \to b)^c$. $\square$

Proposição 24. *Seja* A *uma álgebra de Heyting. Então,* $(X(A), \subseteq, \tau)$ *é um espaço de Heyting.*

Prova Já foi provado que $X(A)$ é um espaço de Priestley. Agora, seja U clopen de $X(A)$. Então $U = \bigcup_{i=1}^{n} (\varphi(a_i) \cap \varphi(b_i)^c)$ para alguns $a_i, b_i \in A$. Assim, $\downarrow U = \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow (\varphi(a_i) \cap \varphi(b_i)^c) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(a_i \to b_i)^c$, um clopen. Assim, $(X(A), \subseteq)$ é um espaço de Heyting. $\square$

Proposição 25. *Seja* $(X, \leq, \tau)$ *um espaço de Heyting. Então o reticulado distributivo* $(FU(X), \cup, \cap, \emptyset, X)$ *é uma álgebra de Heyting. Além disso,* $U \to V = (\downarrow (U \cap V^c))^c$.

Prova Em um reticulado distributivo, tem-se que $a \to b = \bigvee \{x : \ a \wedge x \leq b\}$. Então $U \to V = \bigcup \{W \in FU(X) : \ U \cap W \subseteq V\}$. Seja $x \in \bigcup \{W \in FU(X) : \ U \cap W \subseteq V\}$.

Então $x \in W$ tal que $U \cap W \subseteq V$. Logo, $U \cap V^c \subseteq W^c$, como W^c é downset $\downarrow (U \cap V^c) \subseteq W^c$, donde, $W \subseteq (\downarrow (U \cap V^c))^c$, assim, $x \in (\downarrow (U \cap V^c))^c$. Agora, seja $x \in (\downarrow (U \cap V^c))^c$. Note que $(\downarrow (U \cap V^c))^c = (\downarrow U \cap \downarrow (V^c))^c$ e, como V é upset, V^c é downset. Logo, $(\downarrow U \cap \downarrow (V^c))^c = (\downarrow U)^c \cup (V^c)^c = (\downarrow U)^c \cup V$ Assim, $x \in (\downarrow U)^c \cup V$. Como $U \cap ((\downarrow U)^c \cup V) = U \cap V \subseteq V$. Como $(\downarrow U)^c \cup V \in FU(X)$, tem-se que $x \in \bigcup \{W \in FU(X) : U \cap W \subseteq V\}$. Logo $U \to V = (\downarrow (U \cap V^c))^c$. Assim, $\to$ está bem definida $\forall\, U, V \in FU(X)$ já que $(\downarrow (U \cap V^c))^c \in FU(X)$, logo $FU(X)$ é uma álgebra de Heyting. □

Proposição 26. *Seja A uma álgebra de Heyting e $P \in X(A)$. Então $D(A) \subseteq P$ se, e somente se, P é maximal no poset $(X(A), \subseteq)$.*

Prova ($\Rightarrow$) Se $D(A) \subseteq P$, seja $Q \in X(A)$ com $P \subseteq Q$ e $P \neq Q$. Então existe $a \in Q$ tal que $a \notin P$. Como $D(A) \subseteq P$, $a \vee (a \to 0) \in P$. Sendo P primo, tem-se que $a \to 0 \in P \subseteq Q$. Como $a, a \to 0 \in Q$, então $a \wedge (a \to 0) = 0 \in Q$. Assim, $Q = A$, sendo P maximal.

($\Leftarrow$) Seja P maximal em $X(A)$. Suponha que existe $a \in A$ tal que $a \vee (a \to 0) \notin P$. Como $a \leq a \vee (a \to 0)$ e $a \to 0 \leq a \vee (a \to 0)$ tem-se que $a, a \to 0 \notin P$. Seja F o filtro gerado por $P \cup \{a\}$. Note que $P \subseteq F$ e $P \neq F$. Seja $I = \downarrow (a \to 0)$. Suponha que $a \to 0 \in F$. Então existe $c \in P$ tal que $c \wedge a \leq a \to 0$, donde, $c \leq a \to (a \to 0) = a \to 0$, logo, $a \to 0 \in P$, um absurdo. Assim, $a \to 0 \notin F$, donde, $F \cap I = \emptyset$. Pelo teorema de Stone-Birkhoff existe $Q \in X(A)$ tal que $F \subseteq Q$ com $Q \cap I = \emptyset$. Isso contradiz o fato de P ser maximal em $X(A)$. Assim, $a \vee (a \to 0) \in P$, $\forall\, a \in A$. □

Definição 50. *Um NE-espaço é uma estrutura $X = (X, \leq, \tau, C, O)$ que satisfaz:*

(i) $(X, \leq, \tau)$ *é um espaço de Heyting;*

(ii) C *é um fechado tal que* $C \subseteq max(X) = \{x \in X : x$ *é maximal em* $X\}$*;*

(iii) O *é um aberto upset.*

Definição 51. *Sejam $X_1 = (X_1, \leq_1, \tau_1, C_1, O_1)$ e $X_2 = (X_2, \leq_2, \tau_2, C_2, O_2)$ NE-espaços. Um NE-morfismo é uma aplicação $f : X_1 \to X_2$ tal que:*

(i) f *é monótona, contínua e* $\forall\, x \in X_1, \uparrow f(x) \subseteq f(\uparrow x)$*;*

(ii) $f(C_1) \subseteq C_2$*;*

(iii) $f^{-1}(O_2) \subseteq O_1$.

Dados X_1, X_2, X_3 NE-espaços, $f : X_1 \to X_2$ e $g : X_2 \to X_3$ NE-morfismos, é fácil ver que $g \circ f$ é um NE-morfismo e a identidade é também um NE-morfismo. Assim, fica definida a categoria $NE - Sp$ dos NE-espaços com os NE-morfismos.

Teorema 25. *Seja* $A = (A, \nabla, \Delta)$ *uma estrutura twist. Então* $X(A) = (X(A), \tau, \subseteq, C_A, O_A)$*, onde* $C_A = \bigcap\{\varphi_A(a) : a \in \nabla\}$ *e* $O_A = \bigcup\{\varphi_A(a) : a \in \Delta\}$ *é um* NE*-espaço.*

Prova Já foi provado que $X(A)$ é um espaço de Priestley. Note que $\bigcap\{\varphi_A(a) : a \in \nabla\} = \{P \in X(A) : \nabla \subseteq P\}$. Como $\varphi_A(a)$ é fechado C_A é fechado e como $D(A) \subseteq \nabla \subseteq P$, P é maximal, assim $C_A \subseteq max(X(A))$. O_A é aberto upset, uma vez que $\varphi_A(a)$ é aberto upset $\forall\, a \in A$. Assim $X(A)$ é NE-espaço. $\square$

Dado $h : A_1 \to A_2$ um morfismo entre estruturas twist, defina, como na dualidade de Priestley, $X(h) : X(A_2) \to X(A_1)$ por $X(h)P = h^{-1}(P)$, $\forall\, P \in X(A_2)$.

Proposição 27. *Seja* $h : A_1 \to A_2$ *um morfismo entre estruturas twist* $A_1 = (A_1, \nabla_1, \Delta_1)$ *e* $A_2 = (A_2, \nabla_2, \Delta_2)$*. Então* $X(h) : X(A_2) \to X(A_1)$ *é um morfismo entre* NE*-espaços.*

Prova Seja $P \subseteq Q$, então $h^{-1}(P) \subseteq h^{-1}(Q)$, logo $X(h)$ é monótona. Seja $Q \in \uparrow X(h)P$, ou seja, $h^{-1}(P) \subseteq Q$, logo, $P \subseteq h(Q)$, assim $h(Q) \in \uparrow P$, ou seja, $Q \in h^{-1}(\uparrow P) = X(h)(\uparrow P)$.

$X(h)$ é contínua pelo caso da dualidade de Priestley.

Agora, seja $Q \in X(h)(C_{A_2})$, ou seja, $Q \in h^{-1}(C_{A_2})$. Então existe $Q' \in C_{A_2}$ tal que $h(Q') = Q$, ou seja, $h^{-1}(Q') = Q$. Como $Q' \in C_{A_2}$ tem-se que $\nabla_2 \subseteq Q'$ e como h é um morfismo entre estruturas twist, tem-se $h(\nabla_1) \subseteq \nabla_2$, logo, $h(\nabla_1) \subseteq Q'$, donde, $\nabla_1 \subseteq h^{-1}(Q') = Q$. Assim, $Q \in C_{A_1}$.

Note que $O_A = \{P \in X(A) : P \cap \Delta \neq Q\}$. Assim, seja $P \in X(h)^{-1}(O_1)$. Então $X(h)P \in O_1$, ou seja, $h^{-1}(P) \in O_1$. Então $\Delta_1 \cap h^{-1}(P) \neq \emptyset$. Seja $a \in \Delta_1 \cap h^{-1}(P)$, então $h(a) \in h(\Delta_1 \cap h^{-1}(P)) = h(\Delta_1) \cap P$. Como $h(\Delta_1) \subseteq \Delta_2$, tem-se $h(\Delta_1) \cap P \subseteq \Delta_2 \cap P$. Logo, $h(a) \in \Delta_2 \cap P$, ou seja, $\Delta_2 \cap P \neq \emptyset$, assim $P \in O_2$.

Portanto, $X(h)$ é um morfismo entre NE-espaços. $\square$

Assim, não fica difícil ver que X é um funtor contravariante entre $TWIST^{\perp}$ e $NE - Sp$.

Sejam $X = (X, \leq, \tau, C, O)$ um NE-espaço e $FU(X)$ a álgebra de Heyting dos clopen upsets de X. Defina $\nabla_C = \{U \in FU(X) : C \subseteq U\}$ para o fechado C.

Lema 10. ∇_C *é um ideal de* $FU(X)$ *e* $D(FU(X)) \subseteq \nabla_C$*.*

Prova Sejam $U \in \nabla_C$ e $V \in FU(X)$ tais que $U \subseteq V$. Logo, $C \subseteq U \subseteq V$, e assim $V \in \nabla_C$. Sejam $U, V \in \nabla_C$. Logo $C \subseteq U$ e $C \subseteq V$, assim $C \subseteq U \cap V$, e portanto $U \cap V \in \nabla_C$, sendo ∇_C ideal. Note que

$$D(FU(X)) = \{U \in FU(X) : \ U \to \emptyset = \emptyset\} = \{U \in FU(X) : \ (\downarrow (U \cap \emptyset^c))^c = \emptyset\}$$

$$= \{U \in FU(X) : \ (\downarrow U)^c = \emptyset\}.$$

Seja $U \in D(FU(X))$, então $(\downarrow U)^c = \emptyset$, logo, $\downarrow U = X$. Note que $max(X) = \bigcap\{U \in FU(X) : \downarrow U = X\}$. De fato, seja $x \in max(X)$. Para todo $U \in FU(X)$ com $\downarrow U = X$, tem-se que $x \in \downarrow U$. Logo, existe $y \in U$ tal que $x \leq y$. Pela maximalidade de x, tem-se $x = y$, logo $x \in U \subseteq \bigcap\{U \in FU(X) : \downarrow U = X\}$.

Agora, seja $x \in \bigcap\{U \in FU(X) : \downarrow U = X\}$. Suponha que $x \notin max(X)$. Então existe $y \in X$ tal que $x < y$, ou seja, $y \nleq x$. Como X é espaço de Priestley, existe um clopen upset V tal que $y \in V$ e $x \notin V$. Mas, $x \in \downarrow V$, logo, $x \notin (\downarrow V)^c$. Assim, $x \notin V \cup (\downarrow V)^c$. Mas, $\downarrow (V \cup (\downarrow V)^c) = X$, logo é um absurdo $x \notin V \cup (\downarrow V)^c$.

Agora, como $max(X) = \bigcap\{U \in FU(X) : \downarrow U = X\}$, tem-se que $C \subseteq U$, para todo $U \in D(FU(X))$. Assim $D(FU(X)) \subseteq \nabla_C$. □

Defina $\Delta_O = \{U \in FU(X) : \ U \subseteq O\}$.

Lema 11. Δ_O *é um ideal.*

Prova Sejam $U \in \Delta_O$ e $V \in FU(X)$ tais que $V \subseteq U$. Assim, $V \subseteq U \subseteq O$. Logo, $V \in \Delta_O$. Sejam $U, V \in \Delta_O$. Então $U \subseteq O$ e $V \subseteq O$, logo, $U \cup V \subseteq O$. Assim, $U \cup V \in \Delta_O$, sendo Δ_O um ideal. □

Portanto, temos que $(FU(X), \nabla_C, \Delta_O)$ é uma estrutura twist. Ou seja, para cada $NE-Sp$-objeto tem-se um $TWIST^{\perp}$ objeto. Agora, defina para $f : X_1 \to X_2$ NE-morfismo $FU(f) : FU(X_2) \to FU(X_1)$ por $FU(f)V = f^{-1}(V)$.

Proposição 28. *Seja* $f : X_1 \to X_2$ *um* NE*-morfismo. Então* $FU(f) : FU(X_2) \to FU(X_1)$*, definido como na dualidade de Priestley, é um morfismo de estruturas twist.*

Prova $FU(f)$ é um morfismo de álgebras de Heyting. Pois, sejam $U, V \in FU(X_1)$. Como $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(U \to V) = f^{-1}(U \cap (U \to V)) \subseteq f^{-1}(V)$ tem-se $f^{-1}(U \to V) \subseteq f^{-1}(U) \to f^{-1}(V)$. Agora suponha que $x \notin f^{-1}(U \to V)$. Como $U \to V = (\downarrow U \cap V^c)^c$ tem-se que $x \in f^{-1}(\downarrow U \cap V^c)$, logo $f(x) \in \downarrow U \cap V^c$. Então existe $y \in U \cap V^c$ tal que $f(x) \leq y$. Como $\uparrow f(x) \subseteq f(\uparrow x)$, tem-se que $y \in f(\uparrow x)$, ou seja, existe $z \in$

$\uparrow x$ tal que $f(z) = y$, assim, $z \in f^{-1}(U \cap V^c) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)^c$. Logo, $x \in \downarrow (f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)^c) = \downarrow f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)^c$. Logo $x \notin f^{-1}(U) \to f^{-1}(V) = FU(f)U \to FU(f)V$. Assim, $FU(f)$ é um morfismo de álgebras de Heyting. Para provar que é um morfismo de estruturas twist falta provar que $FU(f)\nabla_{C_2} \subseteq \nabla_{C_1}$ e $FU(f)\Delta_{O_2} \subseteq \Delta_{O_1}$.

Seja $U \in FU(f)\nabla_{C_2}$. Então existe $V \in \nabla_{C_2}$ tal que $FU(f)V = U$, ou seja, $f^{-1}(V) = U$. Como $C_2 \subseteq V$, tem-se $f^{-1}(C_2) \subseteq f^{-1}(V) = U$ e como $f(C_1) \subseteq C_2$, tem-se que $C_1 \subseteq f^{-1}(C_2)$, logo, $C_1 \subseteq U$. Assim, $U \in \nabla_{C_1}$, donde, $FU(f)\nabla_{C_2} \subseteq \nabla_{C_1}$.

Agora, seja $U \in FU(f)\Delta_{O_2}$. Então existe $V \in \Delta_{O_2}$ tal que $FU(f)V = U$, ou seja, $f^{-1}(V) = U$. Como $V \subseteq O_2$, tem-se $U = f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(O_2) \subseteq O_1$. Logo, $U \in \Delta_{O_1}$. Portanto, $FU(f)\Delta_{O_2} \subseteq \Delta_{O_1}$. Assim, $FU(f)$ é um morfismo de estruturas twist. $\square$

Agora, não é difícil ver que $FU : NE-Sp \to TWIST^{\perp}$ é um funtor contravariante.

Lema 12. *Seja* $A = (A, \nabla, \Delta)$ *uma estrutura twist. Então* $\varphi : A \to FU(X(A))$ *é um isomorfismo de estruturas twist.*

Prova Da dualidade de Priestley, já tem-se que φ é bijetiva e também um homomorfismo de reticulados distributivos limitados. Não é difícil ver que $\varphi(a \to b) = (\downarrow \varphi(a) \cap \varphi(b)^c)^c = \varphi(a) \to \varphi(b)$. Logo, φ é um homomorfismo de álgebras de Heyting. Falta provar que $\varphi(\nabla) = \nabla_{C_A}$ e $\varphi(\Delta) = \Delta_{C_A}$.

Seja $\varphi(a) \in \varphi(\nabla)$, logo $a \in \nabla$. Então $C_A \subseteq \varphi(a)$, ou seja, $\varphi(a) \in \nabla_{C_A}$. Assim, $\varphi(\nabla) \subseteq \nabla_{C_A}$.

Agora, seja $\varphi(a) \in \nabla_{C_A}$. Então $C_A \subseteq \varphi(a)$. Suponha que $a \notin \nabla$. Seja P um filtro primo tal que $\nabla \subseteq P$ e $a \notin P$. Então $P \in C_A$, mas $C_A \subseteq \varphi(a)$, logo, $a \in P$, um absurdo. Logo, $a \in \nabla$, assim, $\varphi(a) \in \varphi(\nabla)$. Portanto, $\varphi(\nabla) = \nabla_{C_A}$.

Seja $a \in \Delta$. Então $\varphi(a) \subseteq O_A$, assim $\varphi(a) \in \Delta_{O_A}$. Agora, seja $\varphi(a) \in \Delta_{O_A}$, ou seja, $\varphi(a) \subseteq O_A$. Suponha que $a \notin \Delta$. Então existe um filtro primo P tal que $a \in P$ e $P \cap \Delta = \emptyset$, logo $P \in \varphi(a)$ e $P \notin O_A$, logo $\varphi(a) \nsubseteq O_A$, um absurdo. Logo $a \in \Delta$, então $\varphi(a) \in \varphi(\Delta)$. Portanto, $\varphi(\Delta) = \Delta_{O_A}$.

Segue que $\varphi : A \to FU(X(A))$ é um isomorfismo de estruturas twist. $\square$

Lema 13. *Seja* $X = (X, \leq, \tau)$ *um espaço de Priestley e* $FD(X)$ *o conjunto dos clopens downsets de* X*. Então se* C *é fechado, tem-se* $\downarrow C = \bigcap\{V \in FD(X) : C \subseteq V\}$.

Prova Seja $x \notin \downarrow C$. Então $x \nleq y$. Logo existem V_y com $x \in V_y$ e $y \notin V_y$ $\forall y \in C$. Então $x \in \bigcap_{y \in C} V_y$ e $C \cap \bigcap_{y \in C} V_y = \emptyset$. Pela compacidade de X, $C \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i} = \emptyset$, para alguns $V_{y_i} \in C$. Seja $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Claramente $V \in FU(X)$ e como $V \cap C = \emptyset$, tem-se $V \cap \downarrow C = \emptyset$, donde, $x \notin V^c$ e $\downarrow C \subseteq V^c$. Como $V^c \in FD(X)$, tem-se que $\bigcap \{V \in FD(X) : \ C \subseteq V\} \subseteq \downarrow C$. Como a outra inclusão é óbvia, tem-se a igualdade. $\square$

Agora, seja $O \subseteq X$ aberto upset, então $O = \bigcup \{U \in FU(X) : \ U \subseteq O\}$. Já que O^c é um fechado downset, $O^c = (\bigcap \{V \in FD(X) : \ C \subseteq V\})^c$, logo, $O = \bigcup \{U \in FU(X) : \ U \subseteq O\}$.

Proposição 29. *Seja* $X = (X, \leq, \tau, C, O)$ *um* NE*-espaço. Então* $G_X : X \to X(FU(X))$ *definida por* $G_X(x) = \{U \in FU(X) : \ x \in U\}$ *é um isomorfismo de* NE*-espaços.*

Prova Da dualidade de Priestley, tem-se que G_X é um homeomorfismo monótono. Agora, seja $U \in \uparrow G_X(a)$. Então existe $V \in G_X(a)$ tal que $V \subseteq U$, logo, $a \in U$. Assim, $U \in G_X(a)$ e como U é upset $\uparrow a \subseteq U$, logo, $U \in G_X(\uparrow a)$. Analogamente para ${G_X}^{-1}$. Falta mostrar que $G_X(C) = C_{FU(X)}$ e $G_X(O) = O_{FU(X)}$.

Seja $U \in G_X(C)$. Então existe $c \in C$ tal que $G_X(c) = U$. Mas, para cada $V \in FU(X)$ tal que $C \subseteq V$ tem-se que $V \in G_X(c) = U$, logo, $\nabla_C \subseteq U$, ou seja, $U \in C_{FU(X)}$.

Seja $P \in C_{FU(X)}$. Então $\nabla_C \subseteq P$, ou seja, $\{U \in FU(X) : \ C \subseteq U\} \subseteq P$ e existe $x \in X$ tal que $G_X(x) = P$. Logo, $x \in U$, $\forall U \in FU(X)$ com $C \subseteq U$, ou seja, $x \in \bigcap \{U \in FU(X) : \ C \subseteq U\} = A$. Como A é fechado e $C \subseteq A$, pela maximalidade de C tem-se $A = C$. Logo $x \in C$, donde $P \in G_X(C)$. Assim, $G_X(C) = C_{FU(X)}$.

Seja $P \in G_X(O)$, então existe $x \in O$ tal que $G_X(x) = P$. Suponha que $\forall U \in FU(X)$ com $U \subseteq O$, $x \notin U$. Como O é upset aberto $O = \bigcup \{U \in FU(X) : \ U \subseteq O\}$, então $x \notin O$, absurdo. Assim, existe $U \in FU(X)$ com $U \subseteq O$ tal que $x \in U$, ou seja, $P \cap \Delta_O \neq \emptyset$, donde $G_X(O) \subseteq O_{FU(X)}$.

Agora seja $P \in O_{FU(X)}$. Ou seja, $P \in \bigcup \{\varphi(U) : \ U \in \Delta_O\}$. Seja $x \in X$ tal que $G_X(x) = P$. Então existe um clopen upset $U \subseteq O$ tal que $x \in U$. Portanto, $x \in O$, logo, $P \in G_X(O)$. Assim, $G_X(O) = O_{FU(X)}$.

Sendo G_X um isomorfismo entre NE-espaços. $\square$

Pela Dualidade de Priestley, sabe-se que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_{A_1}} & FU(X(A_1)) \\ \Big\downarrow h & & \Big\downarrow FU(X(h)) \\ A_2 & \xrightarrow{\varphi_{A_2}} & FU(X(A_2)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{G_{X_1}} & X(FU(X_1)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle X(FU(f))} \\ X_2 & \xrightarrow{G_{X_2}} & X(FU(X_2)) \end{array} .$$

Assim,

Teorema 26. *As categorias* $TWIST^{\perp}$ *e* $NE-Sp$ *são duais através dos funtores* X *e* FU*.*

Como as categorias $N4^{\perp}$ e $TWIST^{\perp}$ são equivalentes pelos funtores T e N, tem-se que

Teorema 27. $N4^{\perp}$ *e* $NE-Sp$ *são duais pelos funtores* $X \circ T : N4^{\perp} \to NE-Sp$ *e* $N \circ FU : NE-Sp \to N4^{\perp}$*.*

Referências

[Birkhoff et al. 1937]BIRKHOFF, G. et al. Rings of sets. *Duke Mathematical Journal*, Duke University Press, v. 3, n. 3, p. 443–454, 1937.

[Conradie e Palmigiano 2012]CONRADIE, W.; PALMIGIANO, A. Algorithmic correspondence and canonicity for distributive modal logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, Elsevier, v. 163, n. 3, p. 338–376, 2012.

[Cori 2000]CORI, D. L. R. *Mathematical Logic: A Course with Exercises Part I: Propositional Calculus, Boolean Algebras, Predicate Calculus, Completeness Theorems.* [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2000. ISBN 0198500483,9780198500483.

[Cornish e Fowler 1977]CORNISH, W. H.; FOWLER, P. R. Coproducts of de morgan algebras. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Cambridge Univ Press, v. 16, n. 01, p. 1–13, 1977.

[Davey e Werner 1980]DAVEY, B. A.; WERNER, H. *Dualities and equivalences for varieties of algebras.* [S.l.]: Gesamthochschule, 1980.

[Esakia 1974]ESAKIA, L. Topological kripke models. In: *Soviet Math. Dokl.* [S.l.: s.n.], 1974. v. 15, n. 1, p. 147–151.

[Hofmann, Mislove e Stralka 1974]HOFMANN, K. H.; MISLOVE, M.; STRALKA, A. *The Pontryagin duality of compact O-dimensional semilattices and its applications.* [S.l.: s.n.], 1974.

[Jansana 2009]JANSANA, R. Priestley Duality. *Notas de aula*, 2009.

[Jansana e Rivieccio 2013]JANSANA, R.; RIVIECCIO, U. Priestley duality for n4-lattices. In: ATLANTIS PRESS. *8th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-13).* [S.l.], 2013.

[Morandi 2005]MORANDI, P. Dualities in lattice theory. *Notas de aula*, 2005.

[Munkres 2000]MUNKRES, J. *Topology.* 2nd ed. ed. [S.l.]: Prentice Hall, Inc, 2000. ISBN 9780131816299,0131816292.

[Odintsov 2004]ODINTSOV, S. P. On the representation of n4-lattices. *Studia Logica*, Springer, v. 76, n. 3, p. 385–405, 2004.

[Odintsov 2010]ODINTSOV, S. P. Priestley duality for paraconsistent nelson's logic. *Studia Logica*, Springer, v. 96, n. 1, p. 65–93, 2010.

[Pierce 1991]PIERCE, B. C. *Basic category theory for computer scientists.* 1. ed. [S.l.]: MIT Press, 1991. (Foundations of computing). ISBN 0262660717,9780262660716.

[Pontryagin 1934a]PONTRYAGIN, L. Sur les groupes abéliens continus. *CR Acad. Sci. Paris*, v. 198, p. 238–240, 1934a.

[Pontryagin 1934b]PONTRYAGIN, L. The theory of topological commutative groups. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 361–388, 1934b.

[Priestley 1970]PRIESTLEY, H. A. Representation of distributive lattices by means of ordered stone spaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 2, n. 2, p. 186–190, 1970.

[Priestley 1972]PRIESTLEY, H. A. Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 3, n. 3, p. 507–530, 1972.

[Roman 2008]ROMAN, S. *Lattices and ordered sets*. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2008. ISBN 0387789006,9780387789002,9780387789019.

[Stone 1936]STONE, M. H. The theory of representation for boolean algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, JSTOR, v. 40, n. 1, p. 37–111, 1936.

10 Artigo premiado no ETMF

Neste capítulo serão apresentadas as primeiras ideias e resultados sobre bireticulados não involutivos, como por exemplo sua representação através de estruturas twist e equivalência categórica. E para as demonstrações técnicas de tais resultados, foram utilizadas ideias bem parecidas com as utilizadas na equivalência entre $N4^{\perp}$-Reticulados e $TWIST^{\perp}$, encontrada no texto aqui apresentado.

Tais ideias sobre bireticulados não involutivos resultaram na produção de um artigo, intitulado "Non-involutive Bilattices", feito por mim em colaboração com Umberto Rivieccio e Achim Jung. Trabalho o qual foi publicado nos anais da Escola de Informática Teórica e Métodos Formais (ETMF 2016) e foi premiado como melhor artigo desse evento. Então, obviamente nele se encontra ideias inéditas e interessantes sobre bireticulados não involutivos.

Mudanças ainda serão feitas e novos resultados, principalmente ligados a lógica estão sendo desenvolvidos. Provavelmente para uma publicação no "Special issue of Logic Journal of IGPL - Recovery Operators and Logics of Formal Consistency & Inconsistencies". Ou seja, este trabalho está rendendo frutos e ainda há muito o que ser feito.

Non-involutive bilattices

Paulo Maia[1] Umberto Rivieccio[2] Achim Jung[3]

[1] Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística, UFRN, Brazil
[2] Departamento de Informática e Matemática Aplicada, UFRN, Brazil
[3] School of Computer Science, University of Birmingham, UK

Abstract. One of the main intuitions behind bilattices is to view truth values as split into two components, representing respectively positive and negative evidence concerning a given proposition. Since positive and negative evidence do not need to be the complement of each other, this framework allows one to deal with partial as well as inconsistent information. On an algebraic level, this intuition is reflected in the fact that every bilattice can be represented as a special product of two lattices: positive-evidence lattice and the negative-evidence lattice. In principle, such lattices do not need to be related, that is, the domains of positive and negative evidence may coincide. In this work, we look at algebraic structures having a pre-bilattice reduct and a negation operator that is no longer required to be involutive, which we call non-involutive bilattices. Our contribution is threefold: (1) we show that non-involutive bilattices are a general framework that encompass many of the above-mentioned structures: namely, pre-bilattices, bilattices with an involutive negation, bilattices with implication and d-frames; (2) e provide equational presentations for the class of all non-involutive bilattices and the subclasses corresponding to bilattices with an involutive negation, bilattices with implication etc; (3) finally, for each of these we prove a representation theorem that allows us to view any algebra in the class as a bilattice product of two lattices.

1 Introduction

Nuel Belnap [2] gave a famous philosophical justification for considering two orders on truth value spaces, the information order and the logical order. In this respect he suggested that, in addition to the classical logical values *true* and *false*, it would be useful to have values $\top$ and $\bot$ for the information order, corresponding to the situation when there is contradicting information ($\top$) and lack of information ($\bot$).

Belnap's approach was generalized by Matthew Ginsberg [7], who introduced this generalization as a uniform framework for inference in Artificial Inteligence. Since then, the Belnap-bilattice formalism has found a variety of applications in quite different areas from the original ones. Nowadays the interest in bilattices has thus different sources, among others: computer science and A.I. [7], [1], logic programming [6], lattice theory and algebra [11], algebraic logic and topological duality theory [3], [4], [10], [5].

One of the main intuitions behind bilattices is to view truth values as split into two components, representing respectively positive and negative evidence concerning a given proposition. Since positive and negative evidence need not be the complement of each other, this framework allows one to deal with partial as well as inconsistent information. At the algebraic level, this intuition is reflected by the fact that every bilattice can be represented as a special product $L_1 \times L_2$ (called *bilattice product* or *twist-structure*) of two lattices (L_1 being the positive-evidence lattice and L_2 the negative-evidence lattice). In principle L_1 and

L_2 do not need to be related, that is, the domains of positive and negative evidence may not coincide. However, all bilattice-based logics considered in the literature so far (Ginsberg, Fitting, Arieli-Avron) rely on the assumption that L_1 and L_2 are isomorphic. This structural constraint is imposed by the presence of an involutive negation in the logical language, that is a negation that behaves classically in that any proposition φ is equivalent, in the strongest possible sense, to $\neg\neg\varphi$.

In this contribution, we look at algebraic structures having a *pre-bilattice* reduct (see e.g. [4]) and a negation operator that is no longer required to be involutive, which we call *non-involutive bilattices*. We believe these to be natural structures to be considered from the point of view of the the Belnap-Ginsberg original motivation, for there is no reason to assume that the domain of positive and that of negative evidence must coincide. Furthermore, non-involutive bilattices allow us to rigorously formulate a very natural and expected connection between bilattice-based logics and the topological setting of *d-frames* and *bitopological spaces* [9].

We show that non-involutive bilattices are a general framework that encompass many of the above-mentioned structures: namely, pre-bilattices, bilattices with an involutive negation, bilattices with implication [3] and d-frames. We provide equational presentations for the class of all non-involutive bilattices and the subclasses corresponding to bilattices with an involutive negation, bilattices with implication etc. For each of these we prove a representation theorem that allows us to view any algebra in the class as a bilattice product of two lattices and a categorical equivalence for non-involutive bilattices. The key to our generalized product bilattice construction is to consider pairs of lattices L_1, L_2 together with maps $n\colon L_1 \to L_2$, $p\colon L_2 \to L_1$ between them. These maps allow us to turn positive into negative evidence and vice versa, without requiring the two domains to be isomorphic. By imposing additional properties on the maps n and p (e.g. being meet-preserving) we are then able to recover various bilattice-type structures considered in the literature as special cases of our non-involutive bilattices.

This work is a generalization of [8], to which we also refer for further technical details on the product construction of non-involutive bilattices.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2 we introduce some basic concepts of bilattices; Section 3 presents non-involutive bilattices and gives a categorical interpretation for them, while in Section 4 we do the same for non-involutive implicative bilattices; finally, Section 5 concludes the paper.

2 Preliminaries

In what follows, we will introduce well known concepts of bilattices. See [6] for a gentle introduction to bilattices theory.

Definition 1. *A* pre-bilattice *is an algebra $B = \langle B, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup \rangle$ such that $\langle B, \wedge, \vee \rangle$ and $\langle B, \sqcap, \sqcup \rangle$ are both lattices.*

The lattice $\langle B, \wedge, \vee \rangle$ is called the truth lattice or t-lattice; its order is denoted by $\leq_t$ and is called the truth, $t-$order. The lattice $\langle B, \sqcap, \sqcup \rangle$ is called the knowledge lattice or k-lattice and its order $\leq_k$ the knowledge, $k-$order.

A pre-bilattice $B = \langle B, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup \rangle$ is called *interlaced* whenever each one of the four operations $\{\vee, \wedge, \sqcup, \sqcap\}$ is monotonic with respect to both orders $\leq_t$ and $\leq_k$.

Let $L_+ = \langle L_+, \wedge_+, \vee_+ \rangle$ or $L_= \langle L_-, \wedge_-, \vee_- \rangle$ be lattices with associated orders $\leq_+$ and $\leq_-$, respectively. The *product pre-bilattice* $\mathbf{L}_+ \odot \mathbf{L}_- = \langle L_+ \times L_-, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup \rangle$ is defined as follows. For all $(a, b), (c, d) \in L_+ \times L_-$:

1. $(a, b) \wedge (c, d) = (a \wedge_+ c, b \vee_- d)$.
2. $(a, b) \vee (c, d) = (a \vee_+ c, b \wedge_- d)$.
3. $(a, b) \sqcap (c, d) = (a \wedge_+ c, b \wedge_- d)$.
4. $(a, b) \sqcup (c, d) = (a \vee_+ c, b \vee_- d)$.

The algebra $\mathbf{L}_+ \odot \mathbf{L}_-$ is always an interlaced pre-billatice, and, from the definition, it follows that:

$$(a, b) \leq_t (c, d) \text{ iff } a \leq_+ c \text{ and } d \leq_- b$$

$$(a, b) \leq_k (c, d) \text{ iff } a \leq_+ c \text{ and } b \leq_- d$$

That is, a member $(x, y) \in \mathbf{L}_+ \odot \mathbf{L}_-$ can be thought as encoding evidence about some assertion: evidence for, x, and evidence against, y. Then an increase in information (knowledge) amounts to saying that evidence in general goes up. An increase in truth implies that *evidence for* increases while *evidence against* decreases.

3 Non-involutive product bilattices

Let $\mathbf{L}_+ = \langle L_+, \wedge_+, \vee_+ \rangle$ and $\mathbf{L}_- = \langle L_-, \wedge_-, \vee_- \rangle$ be lattices and let ${}^-\colon L_+ \to L_-$ and ${}^+\colon L_- \to L_+$ be maps between them. We can construct the **non-involutive product bilattice**

$$\mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_- = \langle L_+ \times L_-, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \neg \rangle$$

as follows: $\langle L_+ \times L_-, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup \rangle$ is the product pre-bilattice as defined above and

$$\neg \langle \alpha_+, \alpha_- \rangle := \langle (\alpha_-)^+, (\alpha_+)^- \rangle.$$

Definition 2. *A* non-involutive bilattice *is an interlaced pre-bilattice* $B = \langle B, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \neg \rangle$ *with the properties:*

$$\neg(x \wedge y) \equiv_+ \neg(x \sqcup y) \qquad \neg(x \wedge y) \equiv_- \neg(x \sqcap y)$$

where

$$\equiv_+ := \{\langle \alpha, \beta \rangle \in B \times B : \alpha \wedge \beta = \alpha \sqcup \beta\}$$

$$\equiv_- := \{\langle \alpha, \beta \rangle \in B \times B : \alpha \wedge \beta = \alpha \sqcap \beta\}.$$

Theorem 1. *Every non-involutive product bilattice* $\mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_- = \langle L_+ \times L_-, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \neg \rangle$ *is a non-involutive bilattice.*

Proof. Since $\mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_- = \langle L_+ \times L_-, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \neg \rangle$ is an interlaced pre-bilattice, the only thing we need to prove is that $\neg(x \wedge y) \equiv_+ \neg(x \sqcup y)$ and $\neg(x \wedge y) \equiv_- \neg(x \sqcap y)$.

Let $(a, b), (c, d) \in \mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_-$. Then,

$$\neg((a, b) \wedge (c, d)) = ((b \vee d)^+, (a \wedge c)^-) \text{ and } \neg((a, b) \sqcup (c, d)) = ((b \vee d)^+, (a \vee c)^-)$$

Thus,

$$\neg((a,b)\wedge(c,d))\wedge\neg((a,b)\sqcup(c,d)) = ((b\vee d)^{+}\wedge(b\vee d)^{+},(a\wedge c)^{-}\vee(a\vee c)^{-}) = ((b\vee d)^{+},(a\wedge c)^{-}\vee(a\vee c)^{-})$$

and

$$\neg((a,b)\wedge(c,d))\sqcup\neg((a,b)\sqcup(c,d)) = ((b\vee d)^{+}\vee(b\vee d)^{+},(a\wedge c)^{-}\vee(a\vee c)^{-}) = ((b\vee d)^{+},(a\wedge c)^{-}\vee(a\vee c)^{-})$$

That is,

$$\neg((a,b)\wedge(c,d))\wedge\neg((a,b)\sqcup(c,d)) = \neg((a,b)\wedge(c,d))\sqcup\neg((a,b)\sqcup(c,d))$$

Hence

$$\neg((a,b)\wedge(c,d)) \equiv_{+} \neg((a,b)\sqcup(c,d))$$

The proof of $\neg((a,b)\wedge(c,d)) \equiv_{-} \neg((a,b)\sqcup(c,d))$ is similar.

Therefore, $\mathbf{L}_{+} \bowtie \mathbf{L}_{-}$ is a non-involutive bilattice. □

We will denote for $[a]_{+}$ and $[a]_{-}$ the equivalence class of a in $B/\equiv_{+}$ and $B/\equiv_{+}$, respectively.

The proof of the following lemma is given in [4], Proposition 3.8.1.

Lemma 1. *Let $B = \langle B, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \neg\rangle$ a non-involutive bilattice. Then, $B/{\equiv_{+}}$ and $B/{\equiv_{-}}$ are lattices with the operations:*

$$[a]_{+} \sqcup [b]_{+} = [a \sqcup b]_{+}$$

$$[a]_{+} \sqcap [b]_{+} = [a \sqcap b]_{+}$$

$$[a]_{-} \sqcup [b]_{-} = [a \sqcup b]_{-}$$

$$[a]_{-} \sqcap [b]_{-} = [a \sqcap b]_{-}$$

Hence we have the following result.

Lemma 2. *$B = \langle B, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \neg\rangle$ is a non-involutive bilattice iff $x \equiv_{+} y \Rightarrow \neg x \equiv_{-} \neg y$ and $x \equiv_{-} y \Rightarrow \neg x \equiv_{+} \neg y$.*

Proof. Let $B = \langle B, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \neg\rangle$ a non-involutive billatice and $\alpha \equiv_{+} \beta$, i.e. $\alpha \wedge \beta = \alpha \sqcup \beta$. Then,

$$\begin{aligned}
\neg\alpha &= \neg(\alpha \sqcap (\alpha \sqcup \beta)) && \text{lattice identities}\\
&= \neg(\alpha \sqcap (\alpha \wedge \beta)) && \alpha \wedge \beta = \alpha \sqcup \beta\\
&\equiv_{-} \neg(\alpha \wedge \alpha \wedge \beta) && \neg(x \wedge y) \equiv_{-} \neg(x \sqcap y)\\
&= \neg(\beta \wedge \alpha \wedge \beta) && \text{lattice identities}\\
&\equiv_{-} \neg(\beta \sqcap (\alpha \wedge \beta)) && \neg(x \wedge y) \equiv_{-} \neg(x \sqcap y)\\
&= \neg(\beta \sqcap (\alpha \sqcup \beta)) && \alpha \wedge \beta = \alpha \sqcup \beta\\
&= \neg\beta && \text{lattice identities.}
\end{aligned}$$

We conclude that $\neg\alpha \equiv_{-} \neg\beta$ as required.

Similarly, using $\neg(x \wedge y) \equiv_+ \neg(x \sqcap y)$ we have $\alpha \equiv_+ \beta$ implies $\neg\alpha \equiv_- \neg\beta$. This shows that, for every non-involutive bilattice, we have $x \equiv_+ y \Rightarrow \neg x \equiv_- \neg y$ and $x \equiv_- y \Rightarrow \neg x \equiv_+ \neg y$.

The converse is easy, because the interlacing conditions imply that e.g. $x \wedge y \equiv_+ x \sqcap y$ and so by applying the $\alpha \equiv_+ \beta \Rightarrow \neg\alpha \equiv_- \neg\beta$ we obtain e.g. $\neg(x \wedge y) \equiv_- \neg(x \sqcap y)$. Similarly, for $\neg(x \wedge y) \equiv_+ \neg(x \sqcup y)$. $\square$

Lemma 3. *Let* $\mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_- = \langle L_+ \times L_-, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \neg \rangle$ *a non-involutive product bilattice. Then,*

1. $[(\alpha_1, \alpha_2)]_+ = [(\beta_1, \beta_2)]_+$ *iff* $\alpha_1 = \beta_1$.
2. $[(\alpha_1, \alpha_2)]_- = [(\beta_1, \beta_2)]_-$ *iff* $\alpha_2 = \beta_2$.
3. $[(\alpha_1, \alpha_2)]_+ \leq [(\beta_1, \beta_2)]_+$ *iff* $\alpha_1 \leq \beta_1$.
4. $[(\alpha_1, \alpha_2)]_- \leq [(\beta_1, \beta_2)]_-$ *iff* $\alpha_2 \leq \beta_2$.

Proof. Let $[(\alpha_1, \alpha_2)]_+ = [(\beta_1, \beta_2)]_+$. Then, $(\alpha_1, \alpha_2) \wedge (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \sqcup (\beta_1, \beta_2)$, that is, $(\alpha_1 \wedge \beta_1, \alpha_2 \vee \beta_2) = (\alpha_1 \vee \beta_1, \alpha_2 \vee \beta_2)$, thus, $\alpha_1 \wedge \beta_1 = \alpha_1 \vee \beta_1$. Therefore $\alpha_1 = \beta_1$. The conversely is easy to see, and 2 is similar to 1.

Now, let $[(\alpha_1, \alpha_2)]_+ \leq [(\beta_1, \beta_2)]_+$. Then, $[(\alpha_1, \alpha_2)]_+ \sqcap [(\beta_1, \beta_2)]_+ = [(\alpha_1, \alpha_2)]_+$, that is, $[(\alpha_1 \wedge \beta_1, \alpha_2 \sqcap \beta_2)]_+ = (\alpha_1, \alpha_2)]_+$, thus, $\alpha_1 \wedge \beta_1 = \alpha_1$, i.e, $\alpha_1 \leq \beta_1$. 4 can be proved similarly. $\square$

Since $B/\equiv_+$ and $B/\equiv_-$ are lattices, we can define $(.)^+ : B/\equiv_- \longrightarrow B/\equiv_+$ and $(.)^- : B/\equiv_+ \longrightarrow B/\equiv_-$ by $([x]_-)^+ = [\neg x]_+$ and $([x]_+)^- = [\neg x]_-$.

Indeed, $(.)^+$ and $(.)^-$ are well-defined, because $x \equiv_+ y \Rightarrow \neg x \equiv_- \neg y$ and $x \equiv_- y \Rightarrow \neg x \equiv_+ \neg y$.

Then, we can see $B/\equiv_+ \bowtie B/\equiv_-$ for:

For all $([a],[b]),([c],[d]) \in B/\equiv_+ \times B/\equiv_-$,

1. $([a]_+, [b]_-) \vee ([c]_+, [d]_-) = ([a]_+ \sqcup [c]_+, [b]_- \sqcap [d]_-)$.
2. $([a]_+, [b]_-) \wedge ([c]_+, [d]_-) = ([a]_+ \sqcap [c]_+, [b]_- \sqcup [d]_-)$.
3. $([a]_+, [b]_-) \sqcup ([c]_+, [d]_-) = ([a]_+ \sqcup [c]_+, [b]_- \sqcup [d]_-)$.
4. $([a]_+, [b]_-) \sqcap ([c]_+, [d]_-) = ([a]_+ \sqcap [c]_+, [b]_- \sqcap [d]_-)$.
5. $\neg([a]_+, [b]_-) = (([b]_-)^+, ([a]_+)^-)$.

Theorem 2. *Let* $B = \langle B, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \neg \rangle$ *a non-involutive bilattice. Then,* $\eta_B : B \longrightarrow B/\equiv_+ \bowtie B/\equiv_-$ *defined for* $\eta_B(x) = ([x]_+, [x]_-)$ *is an isomorphism.*

Proof. η_B is injective, surjective and preserves $\wedge, \vee, \sqcup, \sqcap$ was proved in [[4], Proposition 3.8.6]. It remains to show, $\eta(\neg x) = \neg\eta(x)$. We have $\eta(\neg x) = ([\neg x]_+, [\neg x]_-)$ and $\neg\eta(x) = \neg([x]_+, [x]_-) = (([x]_-)^+, ([x]_+)^-)$. So $\eta(\neg x) = \neg\eta(x)$, since $= (([x]_-)^+, ([x]_+)^-) = ([\neg x]_+, [\neg x]_-)$. $\square$

We are going to see that η_B is in fact the unit of categorical equivalence between two naturally associated categories.

The category NIB has as objects non-involutive bilattices and as morphisms algebraic non-involutive bilattice homomorphisms. On the other side of our equivalence, the category $NIPB$ has as objects 4-tuples $L = (L_+, L_-, ()^+, ()^-)$ with L_+ and L_- lattices and $()^+$ and $()^-$ maps between then. A morphism between $NIPB$-objects are $h : (L_{1+}, L_{1-}, ()^+_1, ()^-_2) \rightarrow$

$(L_{2+}, L_{2-}, ()_{2^+}, ()_{2^-})$ such that h_+ and h_- are lattices homomorphisms and $h_+ \circ ()_1^+ = ()_2^+ \circ h_-$ and $h_- \circ ()_1^- = ()_2^- \circ h_+$.

We proceed to define functors $T : NIB \longrightarrow NIPB$ and $N : NIPB \longrightarrow NIB$ that will allow us to prove the equivalence between the two categories.

Given a non-involutive bilattice B, we let $T(B) := (B/{\equiv_+}, B/{\equiv_-}, ()^+, ()^-)$ with $([x]_-)^+ = [\neg x]_+$ and $([x]_+)^- = [\neg x]_-$ for all x. If $f : B_1 \longrightarrow B_2$ is a NIB-morphism, we define $T(f) : T(B_1) \longrightarrow T(B_2)$ as $T(f)([\alpha]_+, [\beta]_-) = ([f(\alpha)]_+, [f(\beta)]_-)$.

Lemma 4. *T is a covariant functor.*

Proof. Indeed $T(B_1)$ and $T(B_2)$ are NIPB-objects since B_1 and B_2 are non-involutive bilattices. It is to see that $T(f)$ is well-defined, $T(f)$ is a $NIPB$-morphism, $f(1_B) = 1_{T(B)}$ and $T(f \circ g)([\alpha]_+, [\beta]_-) = ([(f \circ g)(\alpha)]_+, [(f \circ g)(\beta)]_-) = ([f(g(\alpha))]_+, [f(g(\beta))]_-) = (T(f) \circ T(g))([\alpha]_+, [\beta]_-)$ for all α and β, that is $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$.

Therefore T is a covariant functor. □

Conversely, for $L = (L_+, L_-, ()^+, ()^-)$ a NIPB-object, we let $N(L) = L_+ \bowtie L_-$. We know by Theorem 3 that $L_+ \bowtie L_-$ is a non-involutive bilattice. For a morphism $h : L_1 \to L_2$ between NIPB-objects, we define the map $N(h) : N(L_1) \to N(L_2)$, for all $a, b \in L_1$, as $N(h)(a, b) := (h_+(a), h_-(b))$. Is easy to see that N is a covariant functor.

Therefore, by Theorem 7, for any B non-involutive bilattice, the map $\eta_B : B \to N(T(B))$ is an isomorphism.

Theorem 3. *For any NIPB-object L, the map $\varepsilon_L : L \to T(N(L))$ defined by $\varepsilon_L(a, b) = ([(a, b)]_+, [(a, b)]_-)$ is an isomorphism.*

Proof. Let $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in L$.

If $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ then $\varepsilon_L(a_1, b_1) = ([(a_1, b_1)]_+, [(a_1, b_1)]_-) = ([(a_2, b_2)]_+, [(a_2, b_2)]_-) = \varepsilon_L(a_2, b_2)$, that is ε_L is well-defined.

If $\varepsilon_L(a_1, b_1) = \varepsilon_L(a_2, b_2)$, we have $([(a_1, b_1)]_+, [(a_1, b_1)]_-) = ([(a_2, b_2)]_+, [(a_2, b_2)]_-)$ then $a_1 = a_2$ since $[(a_1, b_1)]_+ = [(a_2, b_2)]_+$ and $b_1 = b_2$ since $[(a_1, b_1)]_- = [(a_2, b_2)]_-$, that is $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. In other words, ε_L is injective.

Let $([(a_1, b_1)]_+, [(a_2, b_2)]_-) \in T(N(L))$. Since $([(a_1, b_1)]_+, [(a_2, b_2)]_-) = ([(a_1, b_2)]_+, [(a_2, b_2)]_-) = ([(a_1, b_2)]_+, [(a_1, b_2)]_-) = \varepsilon_L(a_1, b_2)$, ε_L is surjective.

Lastly, ε_L is a NIPB-morphism. Therefore, ε_L is an isomorphism. □

Theorem 4. *Let $f : B_1 \to B_2$ be an NIB-morphism. Then $N(T(f)) \circ \eta_{B_1} = \eta_{B_2} \circ f$.*

Proof. Let $x \in B_1$. Then $(N(T(f)) \circ \eta_{B_1})(x) = N(T(f))([x]_+, [x]_-) = (T(f)_+([x]_+), T(f)_-([x]_-)) = ([f(x)]_+, [f(x)]_-) = \eta_{B_2}(f(x)) = (\eta_{B_2} \circ f)(x)$.

Therefore, $N(T(f)) \circ \eta_{B_1} = \eta_{B_2} \circ f$. □

Theorem 5. *Let $h : L_1 \to L_2$ be an NIPB-morphism. Then $T(N(h)) \circ \varepsilon_{L_1} = \varepsilon_{L_2} \circ h$.*

Proof. Let $(x, y) \in L_1$. Then $(T(N(h)) \circ \varepsilon_{L_1})(x, y) = (T(N(h))([(x, y)]_+, [(x, y)]_-) = ([N(h)(x, y)]_+, [N(h)(x, y)]_-)) = ([(h_+(x), h_-(y))]_+, [(h_+(x), h_-(y))]_-) = ([h(x, y)]_+, [h(x, y)]_-) = \varepsilon_{L_2}(h(x, y)) = (\varepsilon_{L_2} \circ h)(x, y)$.

Therefore, $T(N(h)) \circ \varepsilon_{L_1} = \varepsilon_{L_2} \circ h$. □

Theorem 6. *Functors $T : NIB \to NIPB$ and $N : NIPB \to NIB$ stablish a natural equivalence between the category NIB and NIPB.*

$$\begin{array}{ccccccc}
B_1 & \xrightarrow{\eta_{B_1}} & N(T(B_1)) & \quad & L_1 & \xrightarrow{\epsilon_{L_1}} & T(N(L_1)) \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle N(T(f))} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle T(N(h))} \\
B_2 & \xrightarrow{\eta_{B_2}} & N(T(B_2)) & & L_2 & \xrightarrow{\epsilon_{L_2}} & T(N(L_2))
\end{array}$$

4 Non-involutive implicative product bilattices

A Brouwerian lattice is a lattice L with the property $c \wedge a \leq b$ iff $c \leq a \to b$ for all $a, b, c \in L$.

Suppose $\mathbf{L}_+ = \langle L_+, \wedge_+, \vee_+, \to_+\rangle$ and $\mathbf{L}_- = \langle L_-, \wedge_-, \vee_-, \to_-\rangle$ are Brouwerian lattices and $^- : L_+ \to L_-$ and $^+ : L_- \to L_+$ are maps between them. Then we can construct the **non-involutive implicative product bilattice**

$$\mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_- = \langle L_+ \times L_-, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \supset, \subset \neg\rangle$$

as follows: $\langle L_+ \times L_-, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup\rangle$ is the above-defined non-involutive product bilattice and

$$\langle \alpha_+, \alpha_-\rangle \supset \langle \beta_+, \beta_-\rangle := \langle \alpha_+ \to_+ \beta_+,\ (\alpha_+)^- \wedge_- \beta_-\rangle$$

$$\langle \alpha_+, \alpha_-\rangle \subset \langle \beta_+, \beta_-\rangle := \langle \alpha_+ \wedge_+ (\beta_-)^+,\ \beta_- \to_- \alpha_-\rangle$$

Definition 3. *A* non-involutive implicative bilattice $B = \langle B, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \neg, \to, \leftarrow\rangle$ *is a non-involutive bilattice such that $\langle B/\equiv_+, \wedge, \vee, \to\rangle$ and $\langle B/\equiv_-, \sqcap, \sqcup, \leftarrow\rangle$ are Browerian lattices, and:*

$$x \leftarrow y \equiv_+ x \sqcap \neg y$$

$$x \to y \equiv_- \neg x \sqcap y$$

.

Theorem 7. *Every $\mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_- = \langle L_+ \times L_-, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \neg, \supset, \subset\rangle$ non-involutive implicative product bilattice is a non-involutive implicative bilattice.*

Proof. It is easy to see that operations are compatible.

We need to show that $\mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_-/\equiv_+$ and $\mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_-/\equiv_-$ are Browerian lattices. Indeed, let $[(\alpha_1, \alpha_2)], [(\beta_1, \beta_2)], [(\gamma_1, \gamma_2)] \in \mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_-/\equiv_+$. If $[(\alpha_1, \alpha_2)] \sqcap [(\beta_1, \beta_2)] \leq [(\gamma_1, \gamma_2)]$, we have $[(\alpha_1, \alpha_2) \sqcap (\beta_1, \beta_2)] \leq [(\gamma_1, \gamma_2)]$, thus, $[(\alpha_1 \wedge_+ \beta_1, \alpha_2 \wedge_- \beta_2)] \leq [(\gamma_1, \gamma_2)]$, that is, $\alpha_1 \wedge_+ \beta_1 \leq \gamma_1$, then, $\alpha_1 \leq \beta_1 \to_+ \gamma_1$ since $\mathbf{L}_+$ is a Browerian lattice. Therefore, $[(\alpha_1, \alpha_2)] \leq [(\beta_1 \to_+ \gamma_1, (\beta_1)^- \wedge_- \gamma_2)]$, thus, $[(\alpha_1, \alpha_2)] \leq [(\beta_1, \beta_2) \supset (\gamma_1, \gamma_2)]$, that is, $[(\alpha_1, \alpha_2)] \leq [(\beta_1, \beta_2)] \supset [(\gamma_1, \gamma_2)]$, i.e., $\mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_-/\equiv_+$ is a Browerian lattice. Similarly, using the $\subset$ definition, we can prove that $\mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_-/\equiv_-$ is a Browerian lattice.

Now, let $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_-$. Then, $(\alpha_1, \alpha_2) \subset (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 \wedge_+ (\beta_2)^+, \beta_2 \to_- \alpha_2)$ and $(\alpha_1, \alpha_2) \sqcap \neg(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \sqcap ((\beta_2)^+, (\beta_1)^-) = (\alpha_1 \wedge_+ (\beta_2)^+, \alpha_2 \wedge_- (\beta_1)^-)$, that is, $(\alpha_1, \alpha_2) \subset (\beta_1, \beta_2) \equiv_+ (\alpha_1, \alpha_2) \sqcap \neg(\beta_1, \beta_2)$. Also $(\alpha_1, \alpha_2) \supset (\beta_1, \beta_2) = [\alpha_1 \to_+ \beta_1, (\alpha_1)^- \wedge_- \beta_2]$ and $\neg(\alpha_1, \alpha_2) \sqcap (\beta_1, \beta_2) = ((\alpha_2)^+ \wedge_+ \beta_1, (\alpha_1)^- \wedge_- \beta_2)$, that is, $(\alpha_1, \alpha_2) \supset (\beta_1, \beta_2) \equiv_- \neg(\alpha_1, \alpha_2) \sqcap (\beta_1, \beta_2)$.

Therefore, $\mathbf{L}_+ \bowtie \mathbf{L}_- = \langle L_+ \times L_-, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \neg, \supset, \subset\rangle$ is a non-involutive implicative billatice. $\square$

Now we can construct $B/{\equiv_+} \bowtie B/{\equiv_-}$ with the operations:

For all $([a],[b]),([c],[d]) \in B/{\equiv_+} \times B/{\equiv_-}$,

1. $([a]_+,[b]_-) \vee ([c]_+,[d]_-) = ([a]_+ \sqcup [c]_+, [b]_- \sqcap [d]_-)$.
2. $([a]_+,[b]_-) \wedge ([c]_+,[d]_-) = ([a]_+ \sqcap [c]_+, [b]_- \sqcup [d]_-)$.
3. $([a]_+,[b]_-) \sqcup ([c]_+,[d]_-) = ([a]_+ \sqcup [c]_+, [b]_- \sqcup [d]_-)$.
4. $([a]_+,[b]_-) \sqcap ([c]_+,[d]_-) = ([a]_+ \sqcap [c]_+, [b]_- \sqcap [d]_-)$.
5. $\neg([a]_+,[b]_-) = (([b]_-)^+, ([a]_+)^-)$.
6. $([a]_+,[b]_-) \supset ([c]_+,[d]_-) = ([a]_+ \rightarrow_+ [c]_+, ([a]_+)^- \sqcap [d]_-)$.
7. $([a]_+,[b]_-) \subset ([c]_+,[d]_-) = ([a]_+ \sqcap ([d]_-)^+, [b]_- \rightarrow_- [d]_-)$.

Theorem 8. *Let $B = \langle B, \wedge, \vee, \sqcap, \sqcup, \neg, \rightarrow, \leftarrow\rangle$ a non-involutive implicative bilattice. Then, $\eta_B : B \longrightarrow B/{\equiv_+} \bowtie B/{\equiv_-}$ defined for $\eta_B(x) = ([x]_+, [x]_-)$ is an isomorphism.*

Proof. We already know that η_B is injective, surjective and preserves $\wedge, \vee, \sqcup, \sqcap, \neg$. It remains to show $\eta_B(x \rightarrow y) = \eta_B(x) \supset \eta_B(y)$ and $\eta_B(x \leftarrow y) = \eta_B(x) \subset \eta_B(y)$.

Indeed, $\eta_B(x \rightarrow y) = ([x \rightarrow y]_+, [x \rightarrow y]_-) = ([x]_+ \rightarrow_+ [y]_+, [x \rightarrow y]_-)$ and $\eta_B(x) \supset \eta_B(y) = ([x]_+, [x]_-) \supset ([y]_+, [y]_-) = ([x]_+ \rightarrow_+ [y]_+, ([x]_+)^- \sqcap [y]_-) = ([x]_+ \rightarrow_+ [y]_+, ([\neg x]_- \sqcap [y]_-) = ([x]_+ \rightarrow_+ [y]_+, [\neg x \sqcap y]_-)$. Then, $\eta_B(x \rightarrow y) = \eta_B(x) \supset \eta_B(y)$.

Also, $\eta_B(x \leftarrow y) = ([x \leftarrow y]_+, [x \leftarrow y]_-) = ([x \leftarrow y]_+, [x]_- \rightarrow_- [y]_-)$ and $\eta_B(x) \subset \eta_B(y) = ([x]_+, [x]_-) \subset ([y]_+, [y]_-) = ([x \sqcap \neg y]_+, [x]_- \rightarrow_- [y]_-)$. Then, $\eta_B(x \leftarrow y) = \eta_B(x) \subset \eta_B(y)$.

Therefore, η_B is an isomorphism. □

5 Conclusion and future work

We provided equational presentations for the class of all non-involutive bilattices and the subclasses corresponding to bilattices with an involutive negation, bilattices with implication etc. For each of these we proved a representation theorem and a categorical equivalence for non-involutive bilattices, that allows us to view any algebra and their morphism in the class as a bilattice product of two lattices and their morphisms.

For future work we pretend to do a categorical equivalence for non-involutive implicative bilattices and non-involutive implicative product bilattices and also a topological duality for both. And characterize the congruences of non-involutive bilattices and non-involutive implicative bilattices.

References

1. Arieli, Ofer, and Arnon Avron, 'The value of the four values', *Artificial Intelligence*, 102 (1998), 1, 97–141.
2. Belnap Jr, Nuel D, 'A useful four-valued logic', in *Modern uses of multiple-valued logic*, Springer, 1977, pp. 5–37.
3. Bou, Félix, Ramon Jansana, and Umberto Rivieccio, 'Varieties of interlaced bilattices', *Algebra universalis*, 66 (2011), 1-2, 115–141.
4. Bou, Félix, and Umberto Rivieccio, 'The logic of distributive bilattices', *Logic Journal of IGPL*, 19 (2011), 1, 183–216.

5. Cabrer, Leonardo Manuel, Andrew P.K. Craig, and Hilary A Priestley, 'Product representation for default bilattices: an application of natural duality theory', *Journal of Pure and Applied Algebra*, 219 (2015), 7, 2962–2988.
6. Fitting, Melvin, 'Bilattices in logic programming', in *Multiple-Valued Logic, 1990., Proceedings of the Twentieth International Symposium on*, IEEE, 1990, pp. 238–246.
7. Ginsberg, Matthew L, 'Multivalued logics: A uniform approach to reasoning in artificial intelligence', *Computational intelligence*, 4 (1988), 3, 265–316.
8. Jakl, Tomáš, Achim Jung, and Aleš Pultr, 'Bitopology and four-valued logic', in Lars Birkedal, and Michael Mislove, (eds.), *32nd Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics*, 2016.
9. Jung, Achim, and M Andrew Moshier, 'On the bitopological nature of stone duality', *School of Computer Science Research Reports-University of Birmingham CSR*, 13 (2006).
10. Jung, Achim, and Umberto Rivieccio, 'Priestley duality for bilattices', *Studia Logica*, 100 (2012), 1-2, 223–252.
11. Mobasher, B, D Pigozzi, G Slutzki, and G Voutsadakis, 'A duality theory for bilattices', *Algebra universalis*, 43 (2000), 2-3, 109–125.