UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E APLICADAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

MARIA DEUSA FERREIRA DA SILVA

PROBLEMAS E MODELOS QUE CONTRIBUÍRAM COM O DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: DOS GREGOS A NEWTON

NATAL/RN
2010

MARIA DEUSA FERREIRA DA SILVA

Tese apresentada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação. Linha de Pesquisa: Educação Matemática, do centro de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade federal do Rio Grande do Norte, para a obtenção do título de doutora em Educação.
Orientador: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

NATAL/RN
2010

Catalogação da Publicação na Fonte.
UFRN / Biblioteca Setorial do CCSA

Silva, Maria Deusa Ferreira da.
Problemas e modelos que contribuíram com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral: dos gregos a Newton / Maria Deusa Ferreira da Silva. - Natal, RN, 2010.
239 f.

Orientador: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes.
Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Programa de Pós-graduação em Educação. Linha de pesquisa: Educação matemática.

1. Educação - Tese. 2. Conhecimento matemático - Tese. 3. Cálculo diferencial e integral - Tese. 4. Desenvolvimento conceitual do cálculo – Tese. 5. História do cálculo - Tese. I. Mendes, Iran Alves Abreu. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/BS/CCSA CDU: 37.016(043.2)

MARIA DEUSA FERREIRA DA SILVA

PROBLEMAS E MODELOS QUE CONTRIBUÍRAM COM O DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: DOS GREGOS A NEWTON

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Iran Abreu Mendes – Presidente da Banca
Universidade Federal do Rio Grande do Norte/UFRN

____
Prof. Dr. Adilson Oliveira do espírito Santo
Universidade Federal do Pará/UFPA

____
Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/PUC-SP

____
Profa. Dra. Claudianne Amorim Noronha
Universidade Federal do Rio Grande do Norte/UFRN

____
Prof. Phd. Jonh Andrew Fossa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte/UFRN

NATAL/RN
2010

Dedico este trabalho a Ferdinand (Ferd), René (Re) e Ana Luiza (Ninha, tê-los em minha vida faz toda diferença

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus Su o qual procuro colocar como centro de minha vida e minhas decisões

Aos mestres pelos ensinamentos divinos que me conduzem para o caminho da verdadeira sabedoria: a espiritual

Ao Prof. Dr. Iran Abreu Mendes pela amizade, compreensão e orientação segura e efetiva. Um grande pesquisador. Alguém que merece ser chamado de ser humano

Aos meus pais e sogros, irmãos, irmãs, cunhados, cunhadas, sobrinhos, sobrinhas, ETA! como é gente, mesmo distante o apoio deles é muito presente

Aos irmãos de espiritualidade pelo apoio e torcida constante

Aos amigos de ontem e de hoje

Aos professores, colegas e pessoal da Secretaria de Pós-Graduação em Educação da UFRN, pela receptividade, convivência e apoio dispensado durante nossa estadia em natal e na UFRN, especialmente aos pertecentes à base de pesquisa em Educação Matemática

Meus agradecimentos especiais a Profa. Dra. Rosa Lúcia S. Baroni da Universidade Estadual Paulista/UNESP-RC, pela leitura deste trabalho ainda na fase inicial de sua construção e pelas valiosas contribuições dadas para que sequência ao mesmo

Aos membros da banca examinadora pelas inestimáveis contribuições e sugestões

À Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB e SAEB pelo apoio financeiro

Aos colegas do Departamento de Ciências Exatas/UESB – Vitória da Conquista (BA) pelo apoio

RESUMO

Esta tese de Doutorado teve como objetivo fazer uma (re)construção histórica do desenvolvimento Conceitual do Cálculo Diferencial e Integral olhando-o como uma construção de modelos, dos gregos a Newton. Tais modelos eram gerados a partir de problemas que foram sendo propostos ao longo da história e iam sendo modificados à medida que novos problemas eram postos e o conhecimento matemático avançava. Nessa perspectiva, busco também mostrar que esse processo envolveu uma legião de matemáticos/filósofos da natureza, tendo início com as especulações de natureza científica e filosófica dos antigos gregos e culmina com o trabalho de Newton, no século XVII. Além disso, nesse processo de reconstrução do desenvolvimento conceitual do cálculo apresento e analiso os problemas propostos (questões em aberto), modelos gerados (questões respondidas) bem como as condições sociais, econômicas, políticas e religiosas envolvidas no processo. O trabalho está dividido em seis capítulos mais as considerações finais. No capítulo 1 apresento como a pesquisa se configurou a partir das minhas motivações e experiências. Delineio os caminhos percorridos para o refinamento da pergunta diretriz e apresento o objeto de e os objetivos da pesquisa e fecho o capítulo apresentando os campos teóricos em que a pesquisa se fundamenta, os quais denominei de Campos Teóricos de Investigação (CTI). No capítulo 2 discorro sobre cada um dos Campos Teóricos de Investigação, introduzidos no final do primeiro capítulo. Nessa discussão procuro ligar os CTI com a pesquisa. No capítulo 3 delimito e discuto as escolhas metodológicas com base nos campos teóricos em que a pesquisa se assenta. Então, nos capítulos 4,5 e 6, apresento o *corpus* principal da pesquisa, ou seja, reconstruo a história do cálculo numa perspectiva de construção de modelos (questões respondidas) a partir a dos problemas geradores (questões e aberto), analisando as contribuições dos gregos antigos (capítulo 4), pós-gregos, especialmente, a contribuição dos romanos, indus, árabes e as contribuições na Idade Média (capítulo 5). Retomo o renascimento europeu e as contribuições dos filósofos/cientistas até culminar com o trabalho de Newton (capítulo 6). Finalmente, nas considerações finais, relato minhas impressões sobre o desenvolvimento da pesquisa e de como asseguro que a pergunta diretriz e os objetivos foram alcançados. Por último, delineio uma

proposta de curso de Cálculo Diferencial e Integral tendo como eixo os três últimos capítulos da tese.

ABSTRACT

This article refers to a research which tries to historically (re)construct the conceptual development of the Integral and Differential calculus, taking into account its constructing model feature, since the Greeks to Newton. These models were created by the problems that have been proposed by the history and were being modified by the time the new problems were put and the mathematics known advanced. In this perspective, I also show how a number of nature philosophers and mathematicians got involved by this process. Starting with the speculations over scientific and philosophical natures done by the ancient Greeks, it culminates with Newton's work in the 17th century. Moreover, I present and analyze the problems proposed (open questions), models generated (questions answered) as well as the religious, political, economic and social conditions involved. This work is divided into 6 chapters plus the final considerations. Chapter 1 shows how the research came about, given my motivation and experience. I outline the ways I have gone trough to refine the main question and present the subject of and the objectives of the research, ending the chapter showing the theoretical bases by which the research was carried out, naming such bases as Investigation Theoretical Fields (ITF). Chapter 2 presents each one of the theoretical bases, which was introduced in the chapter 1's end. In this discuss, I try to connect the ITF to the research. *T*he Chapter 3 discusses the methodological choices done considering the theoretical fields considered. So, the Chapters 4, 5 and 6 present the main *corpus* of the research, i.e., they reconstruct the calculus history under a perspective of model building (questions answered) from the problems given (open questions), analyzing since the ancient Greeks' contribution (Chapter 4), pos-Greek, especially, the Romans' contribution, Hindus, Arabian, and the contribution on the Medium Age (Chapter 5). I relate the European reborn and the contribution of the philosophers and scientists until culminate with the Newton's work (Chapter 6). In the final considerations, it finally gives an account on my impressions about the development of the research as well as the results reached here. By the end, I plan out a propose of curse of Differential and Integral Calculus, having by basis the last three chapters of the article.

LISTA DE FLUXOGRAMAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

"Renda-se, como eu me rendi. Mergulhe no que você não conhece como eu mergulhei. Não se preocupe em entender, viver ultrapassa qualquer entendimento".
Clarice Lispector

Capítulo 1

E O PROJETO VIROU TESE

Neste capítulo, traço os caminhos que me conduziram a realizar esta pesquisa. Inicio fazendo um breve um relato de minha trajetória como docente do ensino superior e pesquisadora em educação matemática, uma vez que foi no bojo dessa trajetória que a pesquisa começou a se delinear. Apresento também como a pergunta diretriz foi sendo construída e como cheguei aos objetivos.

1.1 MOTIVAÇÕES

Esta pesquisa nasceu inicialmente como resultado de minha inserção na Educação Matemática, na qual venho atuando desde meados da década de 1990 e que culminou com a realização do mestrado em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista – UNESP – Rio Claro, concluído em 1999[1]. Em seguida, com minha inserção na docência no ensino superior, a partir de 1999[2], especialmente atuando como professora nas disciplinas de Cálculo nos cursos de Matemática e Física, e nas disciplinas de Matemática Aplicada para os cursos de Agronomia, Administração, Economia e Engenharia Florestal. Essas experiências permitiram ampliar meus conhecimentos sobre os aspectos conceituais do cálculo, bem como perceber o leque de aplicações do cálculo em outras áreas do conhecimento além da Matemática e da Física. Assim, como professora de Cálculo[3], dois aspectos me motivaram: conhecer os problemas que envolveram o desenvolvimento conceitual do Cálculo, isto é, a história desse desenvolvimento, e um grande interesse em dar às disciplinas, sobretudo, às em serviço[4], um caráter aplicativo, ou seja, aplicar os conteúdos da disciplina em situações mais próximas dos cursos acima mencionados.

Foi, então, a partir desses dois aspectos motivadores da minha prática pedagógica como professora de Cálculo: 1) **Um interesse peculiar em Conhecer o desenvolvimento conceitual do Cálculo:** sua história, problemas motivadores, modelos iniciais, precursores, etc. e, 2) **Modos de aplicar os conteúdos do Cálculo em situações em que estivessem mais próximas dos interesses dos alunos** que esta pesquisa tomou forma. Em relação ao primeiro, inicialmente fiquei restrita aos estudos pessoais sobre elementos da história e, posteriormente, os relatava durante as aulas, apenas como elemento motivador e curiosidades que compartilhava com os alunos.

---

[1] Para maiores detalhes, ver Silva (1999).

[2] - Na Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC (1999-2000) como professora substituta e em 2001 me efetivando como professora Assistente na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

[3] Para evitar repetições de termos, a partir de agora usarei apenas Cálculo para me referir ao Cálculo Diferencial e Integral.

[4] As disciplinas em serviço são aquelas oferecidas em cursos superiores para não-matemáticos.

Quanto ao segundo, pude por em prática algumas experiências em modelagem, nas quais envolvi os alunos em projetos que visaram aplicar em situações próximas da realidade[5] ou, poderíamos dizer, problemas não-matemáticos nascidos do interesse dos próprios alunos, para serem matematizados com base nos conteúdos estudados na disciplina[6]. Partes dessas experiências estão relatadas em o uso da Modelagem Matemática no curso de elementos de cálculo para engenharia. (SILVA, 2006 e 2007).

Visando ainda ampliar meu conhecimento sobre modelagem matemática e estar a par dos debates teóricos que vinham sendo travados, participei de alguns eventos sobre o tema, nos quais tive a oportunidade de relatar as experiências que vinha desenvolvendo (SILVA, 2007) e compartilhar das experiências desenvolvidas por outros pesquisadores. A realização destas atividades, além de aumentar o meu interesse, ampliou meus conhecimentos sobre a modelagem, passando a "olhá-la" de uma perspectiva histórica e epistemológica, buscando analisar e compreender o processo construtivo de alguns modelos. Por exemplo, modelos clássicos propostos em momentos diferentes da história – e sua importância para o ensino da Matemática e para o desenvolvimento da ciência.

Assim, posso resumir que o meu envolvimento com a modelagem matemática foi bem mais efetivo do que com a história do Cálculo. Efetivamente pude utilizá-la como uma proposta metodológica em sala de aula. Quanto ao uso da história, como já me referir anteriormente, meu envolvimento ficou apenas restrito ao interesse por questões histórico-epistemológicas do Cálculo que vez ou outra compartilhava como meus alunos.

Porém, tal fato não diminuiu meu interesse pela história. Ao contrário abriu novas perspectivas que me fizeram perceber que a história do cálculo, embora tenha sido amplamente divulgada, ainda possui lacunas e fatos não bem explicitados que me permitem por meio desta pesquisa trazer à tona. Nos inúmeros trabalhos pesquisados, tanto em história da matemática quanto em

---

[5] Este ponto será mais bem explicitado no próximo capítulo.
[6] Aqui também será explicitado mais detalhadamente no próximo capítulo.

modelagem matemática, percebi o quanto esses temas se mostravam distantes um do outro, parecendo se constituir em entes opostos.

Percebi, então, a possibilidade de uni-los. Sendo assim, nesta pesquisa busco unificar esses dois pontos de interesse já mencionados, ou seja, compreender e reconstruir alguns aspectos da história do desenvolvimento conceitual do Cálculo como uma história de construção de modelos. Modelos esses que, de acordo com o período em que foram propostos, visaram responder a uma série de problemas intrigantes e instigantes e, por cerca de dois séculos, envolveram um número considerável de mentes curiosas. Subjacentes a esses modelos, encontramos uma série de problemas que desafiaram os cientistas. Sejam originários de suas próprias intuições, sejam herdados de outros, sejam nascidos das necessidades humanas e da observação da natureza, percebemos que essa "história" pode ser reescrita com base no já aqui exposto e nas premissas que serão apresentadas e defendidas nesta pesquisa.

Isso implica que nesta pesquisa buscarei responder à seguinte pergunta: ***De que modo modelos matemáticos foram sendo construídos, desde os gregos, e quais problemas estavam subjacentes a esses modelos que contribuíram com o desenvolvimento conceitual do cálculo diferencial e integral proposto por Newton no século XVII?***

Responder a essa pergunta central implica também em responder a uma série de perguntas derivadas dela, uma vez que a história não pode ser contada ou entendida sem levarmos em conta seus personagens, os diferentes contextos sociais, culturais e econômicos[7] em que ela ocorreu. A história, assim a entendo, só pode ser compreendida dentro de um espectro amplo de acontecimentos e fatos, em que fatores múltiplos estão envolvidos formando uma "teia" de acontecimento que não podem ser analisados separadamente ou simplesmente ignorados.

Desse modo é que percebo que, subjacente à pergunta diretriz, se fazem necessários os seguintes questionamentos que podem me ajudar a

---

[7] Tomaremos por referência a matemática produzida na Europa

respondê-la com mais propriedade: 1) Quais personagens contribuíram na elaboração dos modelos e quais contribuições deram?; 2) Em que condições sociais, culturais e econômicas viviam os cientistas para que pudessem propor tais problemas?; 3) Quais conhecimentos matemáticos utilizaram e quais conseguiram produzir?; 4) quais eram os debates emergentes das ciências que instigaram os cientistas?; 5) Quais situações práticas queriam entender?

Enfim, todos esses questionamentos se fizeram necessários para me permitir "cercar" e, consequentemente, ter elementos suficientes para responder à pergunta diretriz. Ainda na direção dos questionamentos, propus o objeto de pesquisa e alguns objetivos que também me guiaram na condução do trabalho, na escolha metodológica, na escolha das fontes de pesquisa e nas contribuições mais específicas que a pesquisa pretende fornecer.

Na sequência, apresento esses objetivos e as justificativas para propô-los, ou seja, o que pretendi atingir com cada objetivo.

1.2 "CAMINHOS" PARA A DEFINIÇÃO DA PERGUNTA DIRETRIZ E DOS OBJETIVOS

Em qualquer pesquisa, o ponto de partida é a inquietação do pesquisador. Ele se interroga, formula questões em torno de sua linha de interesse, formula alguns questionamentos, até que lhe surge uma pergunta diretriz que, a princípio, guiará a pesquisa. Neste caso não foi diferente. Tinha interesses, conforme já mencionei na introdução deste trabalho. Entretanto, para definir efetivamente o que iria pesquisar foi um processo gradual que envolveu um "olhar" atento e perseverante.

Assim, a pergunta diretriz, bem como os questionamentos em torno dela e dos objetivos a serem alcançados não vieram de uma única vez. Passaram por um longo processo de "idas e vindas", reformulações e novas reformulações. Também me perguntei diversas vezes: será que os objetivos estão de acordo com pergunta diretriz? Será que terei elementos para alcançá-los? Será que a minha proposta de fato vai trazer elementos inéditos para a comunidade científica, em especial para a Educação Matemática?

As decisões que tomei e os caminhos que segui não foram solitários. Fizeram parte de um processo de negociação que envolveu as discussões com o orientador, as discussões em grupo, as leituras em torno do tema, as reflexões no decorrer das disciplinas que tive a oportunidade de fazer. Enfim, para chegar à pergunta diretriz, aos objetivos e à tese que defendo, passei por um processo de “amadurecimento intelectual”. Para isso, fiz uso de todos os instrumentos que pudessem me dar suporte, sobretudo o aprofundamento teórico acerca do tema desejado. Portanto, os objetivos que descrevo a seguir são o “fruto” desse processo de amadurecimento intelectual pelo qual passa o pesquisador na construção e defesa de suas ideias.

1.3 NADA SE CONSTRÓI SEM OBJETIVOS... ENTÃO VAMOS A ELES

Diante da pergunta diretriz e dos questionamentos inerentes a ela, estabeleci como objeto de pesquisa a ***Reconstrução histórica do cálculo diferencial e integral na perspectiva da modelagem matemática, considerando os principais problemas que contribuíram para o seu desenvolvimento.*** A partir desse objeto de estudo, viso mostrar que é possível reconstruir ou retomar os principais problemas históricos, olhando-os sob a perspectiva da modelagem matemática, que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Além disso, defendo que o uso deles pode se constituir em elementos essenciais para a abordagem didática no ensino de cálculo. E, mais, sob a perspectiva da modelagem, é possível utilizar a história como um agente de cognição nas aulas de cálculo.

Dos objetivos a serem alcançados com o trabalho:

Geral:

- Mostrar que a história do Cálculo Diferencial e Integral pode ser reconstruída e/ou ressignificada sob uma perspectiva da modelagem matemática, a partir da retomada dos grandes problemas geradores, dos processos utilizados na resolução dos mesmos e dos modelos emergentes dessas soluções.Com esse objetivo procuro focar sobre a pergunta diretriz trazendo à luz os problemas geradores e os modelos propostos que antecederam ao que hoje conhecemos como cálculo diferencial e integral. Para tanto, faço um levantamento dos personagens diretos (e às vezes indiretos) que contribuíram nesse processo, busco situar cada uma das contribuições na epistemologia do conhecimento, no contexto sóciocultural em que foram propostos, nos modelos propostos como solução dos problemas. Argumento sobre os conhecimentos matemáticos que utilizaram e alavancaram, sobre os debates teóricos que propiciaram e sua contribuição para o desenvolvimento do Cálculo conforme proposto por Newton, e finalizo discutindo as possibilidades de sua utilização no ensino de cálculo hoje.

Desse modo, para que esse objetivo seja alcançado também se faz necessário delinear objetivos específicos, pois eles contemplam os “pormenores” da pesquisa:

Objetivos específicos:

- Delinear dentro de uma sequência cronológica fatos e acontecimentos que ocasionaram o surgimento de problemas e a consequente formulação/elaboração de modelos que contribuíram com o desenvolvimento do cálculo por Newton.

Com esse objetivo, busco traçar uma cronologia de fatos e acontecimentos que contribuíram para fomentar o debate sobre as grandes questões que afligiram os cientistas, tomando como referência aproximadamente seis séculos antes de Cristo (séc. VI a.C.) até a metade do século dezessete depois de Cristo (séc. XVII d.C). Período este marcado por um grande desenvolvimento da Matemática, em particular, e, da ciência em geral, que contribuiu decisivamente para o desenvolvimento do cálculo newtoniano. Apresento ainda a visão de mundo prevalecente e as interferências advindas de questões sociais, econômicas, políticas e religiosas que contribuíram ou interferiram no desenvolvimento científico.

- Evidenciar os personagens e seus respectivos trabalhos que contribuíram na proposição e solução dos problemas que precederam o desenvolvimento do cálculo.

Esse objetivo visa evidenciar quais foram os personagens e seus respectivos trabalhos que contribuíram de modo significativo para que Newton pudesse estabelecer os fundamentos do cálculo no século XVII. Como o próprio Newton declarou: “se longe enxerguei é porque me apoiei em ombros de gigantes”. Então, desejo mostrar quem foram esses “gigantes” e, sobretudo, especificar quais foram suas contribuições e as limitações de seus modelos. De certo modo, esse objetivo liga-se ao anterior, uma vez que as limitações eram impostas pelas condições anteriormente especificadas.

- Justificar, de acordo com a época, as limitações dos modelos.

Este objetivo também está em estreita ligação com os anteriores. Além disso, traz à tona o conhecimento matemático existente que dava suporte aos cientistas na solução dos problemas propostos bem como das limitações impostas pela própria falta de instrumental matemático.

- Apresentar uma proposta de abordagem didática para o ensino de Cálculo que faça uso dos problemas e modelos analisados e, assim, subsidiar o ensino de cálculo a partir desses modelos, numa perspectiva de ensino-aprendizagem que faça uso da história.

Esse último objetivo específico atende à segunda parte do objetivo geral deste estudo, que é apontar a possibilidade de abordagem para o ensino de cálculo com base nos problemas e modelos propostos. Desse modo, finalizo o estudo mostrando que modelagem matemática e história da matemática podem se constituir em tendências conexas e úteis no ensino da matemática em qualquer espaço onde ela ocorra.

1.4 DAS FONTES**:** seleção do material de estudo

A escolha do material de estudo se constitui em um dos componentes principais em qualquer pesquisa, especialmente quando se trata de uma pesquisa em história, uma vez que quase tudo o que será abordado já está escrito. Sendo assim, todas as fontes já existem, cabe ao pesquisador garimpá-las e extrair delas elementos novos que serão relevantes para dar as respostas à pergunta diretriz e que atendam aos objetivos propostos sem que a pesquisa se torne uma mera repetição.

Segundo Gavroglu (2007), os historiadores das ciências se deparam com as fontes por meio das questões que colocam. Assim sendo, o seu encontro com elas é uma relação extremamente complexa em que é pouco provável descrever com precisão o perfil “ideal” de historiador. Cabe ao historiador decidir como vai avaliar as fontes que vai utilizar. Para ele,

> os historiadores não revelam e não constroem o passado exclusivamente mediante a detecção e a leitura dos documentos. A dimensão fundamental da investigação histórica tem a ver com as escolhas das respectivas fontes, dos fatos históricos, das interpretações adequadas e significativas – escolhas essas que frequentemente estão contidas nas perguntas que formulamos. (GAVROGLU, 2007, p.127).

Ainda:

> Quando abordamos nossas fontes, já conhecemos os pormenores de muitos trabalhos de investigação similares – trabalhos cuja elaboração se apoiou na utilização das mesmas fontes às quais também recorremos. (GAVROGLU, 2007, p.128).

Portanto, para o autor, “não somos conhecedores passivos dessa bibliografia” (2007, p.127). Tomamos posição sobre tudo que lemos. Percebemos que algumas pesquisas já responderam perguntas similares às que propomos, ou que nos interessam. O que nos diferencia, porém, é nem sempre aceitarmos as respostas que são dadas, elas não nos convencem e/ou, então, a nossa necessidade de ir além movidos pelas nossas próprias inquietações. Logo, as perguntas que formulamos revelam nossas teorizações mais gerais, nosso pensar e nosso refletir investigativo, os quais são únicos. Desse modo é que escolhemos o gênero de fontes que devemos consultar. Isso não significa que já possuímos as respostas, mas que escolhemos as fontes mais adequadas a nos ajudarem em nossas respostas.

Assim, a escolha que fiz das fontes levou em conta as reflexões anteriormente expostas. Elas não foram isentas de uma análise prévia. Mas fruto de minhas teorizações mais gerais, do meu pensar reflexivo, do meu “olhar” investigativo, das “brechas” encontradas em trabalhos similares e das expectativas que eu tinha em relação à pesquisa, ou seja, daquilo que me propunha a responder.

Na escolha das fontes, muitos historiadores (ARÓSTEGUI, 2006; GAVROGLU, 2007; PINSKY, 2006) costumam classificá-las em Fontes Primárias e Fontes Secundárias[8]. Sendo que a cada uma dessas duas naturezas de fontes é atribuído um valor, "um lugar" na pesquisa; "existe uma hierarquização desses elementos e os historiadores das ciências começam sempre com a pergunta que está sob investigação" (AROSTEGUI, 2006, p. 127). Nesse tocante, nesta pesquisa assumo que as fontes específicas sobre história são todas secundárias. Além disso, conforme requer a pergunta diretriz da investigação, faço uso de fontes que não são de história. Sendo assim, optei em classificá-las em categorias que também denomino de **Campos Teóricos de Investigação (CTI)[9]**, atribuindo a cada um deles um valor na pesquisa, a saber.

- **CTI - 1 – *Campo Teórico sobre História e Filosofia das Ciências***

Esse campo teórico contempla o uso da história das ciências e fiz uso dele para me situar no âmbito geral da ciência e assim compreender os caminhos que esta percorreu ao longo de seu desenvolvimento; identificar os acontecimentos e as necessidades emergentes da própria sociedade; entender as condições sociais, culturais, políticas e religiosas que envolveram o desenvolvimento das ciências em cada momento estudado. Nesta pesquisa, em particular, o uso da história das ciências foi importante para entender todo o processo que antecedeu o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral e,

---

[8] É comum nas pesquisas em história as fontes bibliográficas serem classificadas em Fontes Primárias e Fontes Secundárias. Fontes primárias são aquelas que foram geradas no período em que o historiador está interessado, nelas estão compreendidas as obras de autoria dos próprios personagens implicados na questão em estudo, tais como obras inéditas, manuscritos, anotações, cartas recebidas ou enviadas, cadernos de apontamentos. Já Fontes Secundárias são as obras que foram geradas mais tarde e, que, no geral, incluem as análises das primeiras. Nelas estão incluídas obras inéditas ou em forma de manuscritos nas quais se encontram referências diretas feitas por contemporâneos ou posteriores aos envolvidos na questão.

[9] - Proponho o termo Campos Teóricos de Investigação (**CTI**) para designar os campos teóricos em que a pesquisa se assenta. Não identifiquei na literatura o uso desse termo anteriormente.

sobretudo, compreender porque este foi um acontecimento importante para a história das ciências a partir do século XVII.

- **CTI - 2 – *Campo Teórico sobre História da Matemática e História na Educação Matemática***

Nesse segundo campo teórico, faço uso da literatura sobre história da Matemática. Juntamente com o primeiro, constituem eixos centrais na pesquisa, pois contemplam a visão dos fatos históricos daquilo que estou investigando. A história da Matemática traz fatos e acontecimentos que, na maioria das vezes, só diz respeito à própria matemática e, portanto, por si só não responde a todas as nossas perguntas. Por outro lado, esses fatos e acontecimentos inerentes à própria matemática também são imprescindíveis à pesquisa que ora empreendemos. Como por exemplo, só a história da matemática propicia uma visão cronológica do desenvolvimento dessa ciência e nos permite identificar os personagens e suas contribuições com maior riqueza de detalhes. Sendo assim, é no uso da história da matemática que vamos assentar uma boa parte de nossa investigação.

- **CTI - 3** – ***Campo Teórico sobre a história do desenvolvimento conceitual do Cálculo Diferencial e Integral***

O terceiro campo abrange textos específicos sobre a história do cálculo. Neles pude analisar em mais detalhes os problemas e as soluções apresentadas, identificar as limitações dos modelos e compará-los com as questões mais gerais em volta do tema estabelecido. Foi possível também estabelecer conexões entre o problema proposto e a solução apresentada frente ao conhecimento matemático utilizado.

- **CTI - 4** – ***Campo Teórico sobre os personagens e suas contribuições que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento do cálculo***

Já o quarto campo inclui os textos específicos dos personagens envolvidos na história do cálculo, suas contribuições e história de vida. Eles vêm se somar aos textos de história da matemática e história do cálculo, fornecendo elementos mais pormenorizados do trabalho de cada personagem da história. Fornecem detalhes que muitas vezes escapam aos textos mais gerais. Portanto, foram importantes para compreender detalhes no desenvolvimento do cálculo, analisando o trabalho de cada um que tomou parte nessa história.

- **CTI - 5** – ***Campo Teórico sobre Construção de Modelos e Modelagem Matemática***

Nesse campo teórico, situei as fontes que abordam a discussão sobre a construção de modelos e modelagem matemática, uma vez que defendo que o desenvolvimento do cálculo envolveu a construção de modelos. Sendo assim, nesse campo teórico busquei analisar essas fontes, buscando nelas as respostas para entender como se processa a construção de um modelo e como a modelagem matemática se constituiu em uma ferramenta para a compreensão e construção do pensamento matemático. Analisando as discussões do presente no campo teórico da modelagem, busquei compreender as ideias do passado, os métodos utilizados na resolução dos problemas e, sobretudo, compreender porque utilizavam tal método quando propunham um problema.

- **CTI - 6** – ***Campo Teórico sobre História e Ensino de Matemática***

Finalmente, nesse último campo teórico situo as fontes que abordam e discutem o uso da história como uma ferramenta para a sala de aula, útil ao ensino e um agente de cognição no ensino da matemática. Essas pesquisas, ao defenderem o uso da história na sala de aula apontam as várias direções que este pode tomar. Assim, como um dos objetivos desta pesquisa é delinear um conjunto de atividades para o ensino de cálculo que faça uso dos problemas e modelos nela levantados, se torna de fundamental importância conhecer as discussões propostas pela comunidade de historiadores da Matemática e da Educação Matemática sobre esse tema. Daí a inclusão desse campo teórico.

É na história do conhecimento que vamos identificar as distorções e os novos caminhos possíveis. Obviamente, essa história não pode se restringir a uma visão parcial, epistemologicamente comprometida. Torna-se, assim, necessário o diálogo que começa entre as ciências e as tradições.

Ubiratan D'ambrosio

Capítulo 2

AS FONTES NAS QUAIS "MERGULHEI": um passeio pela história das ideias

Neste capítulo, delineio as perspectivas teóricas que conduziram à investigação em consonância com os campos teóricos de investigação apresentados na última seção do capítulo precedente[10]. Inicio fazendo uma discussão sobre a importância da história da ciência, ou seja, conhecendo a história da ciência podemos compreender como se deu o desenvolvimento científico e, nesse contexto, como se deu o desenvolvimento do Cálculo. Na sequência, faço uma análise acerca da importância do fato histórico, ressaltando o significado do acontecimento histórico para o historiador e para quem faz uso da história, e também porque o fato histórico é digno de ser registrado.

Num terceiro momento, lanço uma discussão sobre modelagem matemática e construção de modelos matemáticos e como estes estão relacionados ao desenvolvimento da ciência. Além disso, enfatizo as atuais discussões sobre modelagem matemática e construção de modelos dentro de uma perspectiva teórico-epistemológica e as consequências no ensino. Daí em diante, enfatizo a pesquisa em história da matemática, em especial aquelas que apontam o uso da história como útil para ressignificar o ensino da matemática, onde quer que ocorra. Finalizo, indicando que é possível estabelecer uma relação entre o desenvolvimento histórico do cálculo e teoria da modelagem matemática como uma perspectiva de abordagem didática para o ensino de cálculo.

[10] Não necessariamente na mesma ordem.

2.1 COMPREENDENDO O PAPEL DA HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

O desenvolvimento científico que experimentamos atualmente é fruto da atividade humana que, ao longo de sua história, procurou compreender a natureza e tentar explicar os fenômenos observados por meio de teorias ou modelos. A história da ciência[11] nos mostra que muitos caminhos foram percorridos até chegarmos a uma explicação plausível de um fenômeno. Segundo Aróstegui, se nos detivermos à "arquitetura" do método da ciência, diremos:

> Toda busca parte de uma pergunta; que para tentar respondê-la se começa observando a realidade pertinente ao caso e elaborando conceitos (...). Logo se constroem enunciados ou proposições, quer dizer, se fazem afirmações ou negações sobre as coisas e as relações entre elas, se emitem julgamentos. Finalmente, o conhecimento que pretende chegar às últimas consequências propõe certas explicações. (2006, p. 59).

Assim, um importante papel da história das ciências é que ela nos remete aos fatos, aos locais e às condições sociais, culturais, econômicas, políticas e religiosas em que aconteceram. Por meio dela, podemos compreender ou tentar compreender "os porquês". Porque se deu dessa forma e não daquela. Porque Giordano Bruno foi condenado à morte e Galileu não. Sem a dimensão histórica, a compreensão dos fatos fica cheia de vieses que dificultam uma visão mais ampla e crítica dos acontecimentos do passado e o entendimento do presente.

Por outro lado, também precisamos entender a história de uma forma multifacetada, uma vez que ela mesma é dinâmica. Isto é, os fatos têm sido interpretados de formas diferentes, em épocas diferentes e por diferentes historiadores, que por sua vez também são movidos por convicções ideológicas, políticas e religiosas. Por terem os historiadores percepções diferentes sobre o mesmo fato, somos submetidos a explicações diferentes

---

[11] Me referirei à História das Ciências em geral. Em alguns momentos, estará particularizado à história das ciências físicas e matemáticas. Vale também ressaltar que as discussões acerca da ciência nos reporta a épocas em que o conceito de ciência ainda não existia. O conceito de ciência conforme o aplicamos hoje só começou a tomar forma em finais do século XIX.

sobre os mesmos acontecimentos. Além disso, a forma de analisar um fato histórico está sujeita aos embates político-ideológicos em diferentes momentos da própria história das sociedades humanas. Por isso mesmo, a história é dinâmica e está constantemente sendo reescrita (ARÓSTEGUI, 2006; FOUCAULT, 2007; GAVROGLU, 2007).

Desse modo, não podemos nos basear em verdades absolutas, mas relativas. Aquilo em que acreditamos hoje pode vir a ser interpretado de outro modo daqui a algum tempo. Para Gavroglu, "a história das ciências é a história dos homens que se esforçam por investigar e compreender a estrutura e funcionamento da natureza" (2007, p. 21). Nesse sentido, muitos homens tentaram convencer outros tantos sobre aquilo que acreditavam ser verdadeiro, "transmitir o seu entendimento relativamente aos tipos de funcionamento da natureza e, frequentemente, legitimar os modos como os tinham entendido em locais e condições temporais particulares" (Ibidem, p. 21).

Ainda segundo Gavroglu (2007), a ciência adquiriu forma a partir das ideias, das técnicas e das práticas empreendidas por aqueles homens que buscaram compreender o funcionamento da natureza, estabelecer leis para facilitar essa compreensão e propor modelos que descrevessem os fenômenos estudados. Assim, a ciência também caminha com base em pontos de vista ideológicos, filosóficos, estéticos, religiosos e políticos. Portanto, a história das ciências também precisa ser compreendida sob essas perspectivas, posto que tem por objeto a ciência *como um fenômeno social e cultural.*

Além disso, para Gavroglu (2007), precisamos analisar e entender a história da ciência com uma percepção de que esta não visa apenas conscientizar-nos dos erros que os cientistas cometeram no passado, que por sua vez devem ser evitados no futuro. Tão pouco visa "apontar teorias e propostas verdadeiras, que ao longo dos tempos foram formuladas a respeito da natureza" (Ibidem, p. 24). Para o historiador das ciências, o problema de teorias científicas serem verdadeiras ou falsas não deve ter importância, uma vez que para compreender a historia das ciências não cabe descrevê-la como um conjunto de verdades parciais que se foram amontoando e revelando em número cada vez maior de partes. O historiador das ciências deve compreender a história como um encadeamento de propostas, modelos e teorias, “cujo avanço no tempo culminou na atual e indiscutível concepção “mais correta” que temos a respeito da natureza” (Ibidem, p. 424).

Portanto, cabe ao historiador das ciências colocar em evidência o fato de que, no passado, homens se esforçaram em expor a outros homens a verdade de suas ideias e teorias e, ao defenderam essas ideias, algumas vezes, viram-se envolvidos em polêmicas e controvérsias de todo tipo. Ainda que essas ideias e teorias mais tarde se revelassem equivocadas. Assim, devemos compreender a história das ciências sob a ótica segundo a qual a “verdade” de diversas ideias e teorias foram aceitas apenas “no âmbito de um concreto espaço-temporalidade teórica, social e cultural, e não com base em critérios que carecem de historicidade” (Ibidem, p. 25).

A título de exemplo, Gavoglu (2007) cita que hoje os historiadores das ciências se interessam em compreender porque o modelo heliocêntrico, que segundo nossos padrões atuais é “absolutamente verdadeiro”, independente de pressupostos culturais, de componentes sociais e de preconceitos ideológicos, demorou 150 anos para ser aceito na Europa ocidental. Enquanto que o modelo geocêntrico de Ptolomeu, que se mostrou totalmente equivocado, segundo nossos critérios atuais, prevaleceu durante 1.500 anos e, mesmo após a proposta heliocêntrica de Copérnico, continuou exercendo fascínio e influência durante mais de 100 anos. Com esse exemplo, percebemos que o historiador hoje se preocupa mais em compreender os fatos e, dessa forma, escrever a história com base nessa compreensão, do que simplesmente narrar os fatos tal e qual se apresentam.

Foucault (2007), em suas incursões sobre o estudo da história das ideias, se mostra um defensor da possibilidade de reescrita da história. Para Foucault, a história não é estática e nem contínua. Ele defende a descontinuidade dos fatos abrindo para a possibilidade de empreendermos um novo olhar e novas interrogações sobre o mesmo acontecimento, descortinando o que já parecia pronto. Para ele, tudo está aberto à repetição. Mas, lógico, não da mesma forma, nem com o mesmo olhar. Nas palavras de Foucault:

> É preciso que nos inquietemos diante de certos recortes ou grupamentos que já nos são familiares. É possível admitir, tais como são, a distinção dos grandes tipos de discurso, ou a das formas ou dos gêneros que opõem, umas às outras, ciência, literatura, filosofia, religião, história, ficção, etc. e que as tornam espécies de grandes individualidades históricas? Nós próprios não estamos seguros do uso dessas distinções no nosso mundo de discursos, e ainda mais quando se trata de analisar conjuntos de enunciados que eram, na época de sua formulação, distribuídos, repartidos e caracterizados de modo inteiramente diferente. (FOUCAULT, 2007, p. 31)

Não podemos pensar em “falhas” na escrita da história ou que seus grandes “enunciados” não condizem com a verdade dos fatos, mas que os escritos da história estão repletos de valores que se constituíram em verdades à época em que foram escritos, mas estão abertos “à repetição, à transformação, à reativação; finalmente porque está ligado não apenas a situações que o provocam, e a consequências por ele ocasionadas, mas, ao mesmo tempo, e segundo uma modalidade inteiramente diferente, a enunciados que o precedem e o seguem” (Ibidem, p. 32).

Do exposto, me permito afirmar que o estudo da história nos leva a compreender a complexidade dos fatos e verdades que foram sendo postos, e adquirir um conhecimento mais profundo das ideias e como estas foram sendo construídas e reelaboradas ao longo dos tempos, ora aceitas como verdades absolutas, ora refutadas parcial ou totalmente. Mas também nos abre a possibilidade de reescrever a história a partir de novos olhares sobre acontecimentos aparentemente já imobilizados pela história. Portanto, sob essa ótica, devemos pensar a história como um fato em constante mutação e que o historiador tem a tarefa de reconstruí-la sem perder de vista seus objetivos, suas convicções ideológicas, etc. Sendo assim, é possível afirmar que a história é sempre “nova”, vai sempre ter um “ar” de originalidade.

Nesse sentido, é que me “embrenhei” na tarefa de revisitar a história do cálculo, convicta de que essa história já foi escrita e que já existem diversos olhares sobre ela. Todavia, o que busquei foi dar um “novo” olhar levando em conta os objetivos já apresentados e defendidos anteriormente, que espero terem sido alcançados.

2.2 O FENÔMENO HISTÓRICO: COMO ELE SE CONSTITUI E PORQUE O NARRAMOS

Sendo a história da ciência um fenômeno social e cultural, e o historiador da ciência aquele que investiga esse fenômeno. cabe-nos interrogar que fenômenos são dignos de serem historiados? De que acontecimentos o historiador e a história se ocupam? As duas interrogações poderiam desencadear discussões polêmicas, tais como a existência de uma história oficial e uma não-oficial e também sobre as diferentes posições ideológicas sobre o porquê de relatarmos os fatos.

Neste texto limitarei minhas considerações às argumentações de Aróstegui (2006) sobre "o evento ou acontecimento". Esse autor afirma que existem razões suficientes para se afirmar que o "*acontecimento*" é o elemento determinante no processo histórico. Isto é, o acontecimento marca ou desencadeia o fato histórico. Ele é "o produtor da história". Poderíamos pensar em acontecimento como o "instante". Entretanto, para Aróstegui, o acontecimento se refere a muito mais elementos do que o instante. Na acepção de H. Von Wrigth, "um acontecimento consiste em um par de estados sucessivos" (*apud* ARÓSTEGUI, 2006, p. 332). Isso significa que:

> No sentido lógico, acontecimento poderia ser assimilado ao instante, mas o conceito de acontecimento inclui mais elementos do que o instante, posto que, em boa medida, o acontecimento é atribuição de unidade no tempo e no significado a uma ruptura cujo equivalente temporal não é fixo (...). Acontecimento, podemos acrescentar, significa a expressão tangível e, ao mesmo tempo, em certo sentido, a *unidade mínima identificável de movimento*. Todo movimento se compõe de um conjunto de acontecimentos. O tipo de movimento que chamamos de *processo* é igualmente uma sequência de acontecimentos que falando rigorosamente, estão sujeitos a uma lei de comportamento. (ARÓSTEGUI, 2006, p. 333).

Desse modo, podemos assinalar que o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral foi um importante acontecimento para a ciência do século XVII. Quando Newton (1642-1727) publicou em 1687 seu *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Princípios Matemáticos da Filosofia da Natureza),* constituiu-se um divisor de águas para a ciência de então e para o desenvolvimento da matemática em particular. Na concepção atual de história da ciência, significou o fim de um período que durou cerca de 150 anos de história, denominado de *Revolução Científica*[12], culminando com o que hoje conhecemos como o nascimento das *ciência modernas*. Nessa importante obra, Newton traz os fundamentos da Mecânica Clássica e uma formulação matemática do cálculo Diferencial e Integral[13].

Segundo Aróstegui (2006), no sentido sócio-histórico, "acontecimento é qualquer tipo de mudança, mas não qualquer tipo de movimento". Um acontecimento no sentido histórico se relaciona com um fato marcante: "é aquilo que tem efeito, por mais breve que seja de suspender, ou ao menos de interromper o normal". Portanto, para que um acontecimento seja histórico, ele precisa produzir uma pequena ou grande mudança. Além disso, nas palavras de Aróstegui, "o acontecimento é um elemento da experiência cuja explicação só damos significado se o integramos na própria estrutura da realidade que modificou" (2006, p. 334).

Desse modo, na esteira do desenvolvimento científico do século XVII, o desenvolvimento do cálculo foi um importante acontecimento para a ciência em geral e para a matemática em particular, uma vez que desencadeou profundas mudanças na forma de se pensar a ciência até então, e abriu caminho para uma grande revolução no desenvolvimento da própria matemática. Entretanto, para que se chegasse ao "instante" da criação do cálculo houve todo um processo anterior que nos remete a séculos de desenvolvimento da ciência e da matemática, também motivados pela curiosidade do cientista, por questões sócioculturais, etc. Para compreendermos o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral como um acontecimento digno de ser um fato histórico, é preciso conhecer todo o movimento que antecedeu a esse desenvolvimento.

Nesta pesquisa, busquei mostrar esse percurso tomando como referência os trabalhos já produzidos especificamente sobre o tema, textos

---

[12] - A designação Revolução Científica aplica-se convencionalmente ao período de cerca de 150 anos que vai desde a publicação da obra de Copérnico *De Revolutionibus Orbitum Coelestium* (Sobre a Revolução das Esferas Celestes), em 1543, até a publicação da obra de Newton, acima citada. Quem primeiro utilizou essa designação foi provavelmente o historiador das ciências Alexandre Koiré (1892-1964).

[13] - Isso será tratado em mais detalhes no próximo capítulo.

gerais de história da matemática e textos gerais sobre história das ciências, para, desse modo, ter uma visão global dos fatos que cercaram o desenvolvimento do cálculo para bem antes do século XVII. Além disso, busco ir além das discussões já postas sobre o desenvolvimento do cálculo, defendendo que é possível reconstruir essa história analisando os fatos do ponto de vista dos problemas que motivaram os cientistas e dos modelos matemáticos que propuseram como solução e explicação aos problemas propostos.

2.3 MODELOS E MODELAGEM MATEMÁTICA: PERSPECTIVAS TEÓRICAS

A ideia de modelo olhando do ponto de vista do senso comum pode nos levar a pensar em uma bela mulher que desfila nas passarelas, ou também pensar em um modelo de carro, relógio, da roupa da última moda, enfim a uma infinidade de coisas. Por isso mesmo é que o termo 'modelo' tem sido largamente usado na literatura para expressar uma variedade de situações e coisas.

Nas ciências, a ideia de modelo está associada à busca de uma "fórmula" ou expressão (no geral, uma equação matemática) que sirva para explicar fenômenos naturais, sociais e culturais, ou para confirmar uma hipótese e gerar uma nova teoria. É o "modelo" que dá consistência ao fenômeno estudado. Ele representa uma generalização da situação inicialmente proposta – o problema. A elaboração de modelos faz parte da prática dos cientistas. A ciência se desenvolveu e se firma a partir da capacidade de criar modelos gerais que sirvam de explicação para uma situação em particular e que também possam ser transportados para outros contextos.

O processo de modelar um fenômeno por meio de uma expressão matemática geral (o modelo matemático) vem sendo chamado de Modelagem Matemática e se constitui na essência da Matemática Aplicada e em linha de pesquisa para a Educação Matemática[14]. Sendo uma prática comum, desde os resquícios mais antigos da presença da matemática nas atividades humanas, a Modelagem Matemática não é uma atividade nova. Além disso, não podemos negar, uma parte considerável da matemática se desenvolveu graças à curiosidade humana na busca de resolver problemas advindos da realidade (BIEBEMGUT; HEIN, 2000). Essa prática tem se confundido com o próprio desenvolvimento da matemática e da ciência e a percebo ora como uma atividade meio, ora como uma atividade fim.

Como atividade meio, o processo de Modelagem Matemática se configura a partir da necessidade de resolver problemas, não postos intencionalmente, mas oriundos das necessidades "reais", advindos da observação de fenômenos naturais, na qual o papel do cientista é o de um observador curioso que se deixa levar pela sua intuição e imaginação. O modelo matemático surge então como resultado da curiosidade do cientista, do grau de conhecimento matemático que possui e de seu grau de intuição e imaginação. É nesse sentido que percebo o desenvolvimento do cálculo. Já como atividade fim, a Modelagem se constitui na essência do trabalho, o problema proposto é intencional; não nasce da observação inquietadora do cientista ou do pesquisador, mas é quase que projetado em sua mente[15], ele sabe que precisa resolver esse problema e propor um modelo.

Diante dessas observações, me vejo compelida em explicitar de forma clara e precisa o que vem a ser um modelo, em especial um modelo matemático, pois esse é o meu objeto de estudo, uma vez que objetivo revisitar a história do cálculo e reconstruí-la como uma história de construção de modelos. Compreender o processo de construção de um modelo requer

---

[14] A modelagem como campo de pesquisa em Educação Matemática, nas últimas décadas, vem ganhando destaque e abrindo novas discussões e proposições no campo teórico da Educação Matemática. Desse modo, muitos pesquisadores da Modelagem Matemática na Educação Matemática têm contribuído para fomentar o debate teórico sobre essa linha de pesquisa, dentre eles, destacamos Queiroga (1990 e 2007); Niss (1991); Kaiser-Mesmer (1991); Barbosa (2002a, 2003b, 2007) e Araújo (2002 e 2007). Portanto, revisitando o trabalho desses pesquisadores, podemos compreender como anda o debate teórico e ter uma completa dimensão de como as pesquisas em Modelagem Matemática na Educação Matemática vem se configurando.

[15] Todavia, o pesquisador/modelador tem a liberdade de escolher o problema que deseja resolver e modelar. A modelagem como fim tem sido o foco dos pesquisadores em Educação Matemática que optam por essa linha de pesquisa.

investigar as condições, os problemas, os interesses pessoais e coletivos que motivaram o cientista. Para isso, é necessário compreender a própria história, mergulhando nos locais, desvelando as condições sociais, econômicas, ideológicas e culturais que motivaram a elaboração do modelo.

Para chegar ao modelo, parto da conceituação de *modelagem,* uma vez que ela nos remete ao ponto de partida, desvenda o processo, sem o qual é impossível se chegar ao *modelo*. Recorro a algumas definições propostas por pesquisadores que vêm trabalhando com ela. Em Bassanezi, encontramos a seguinte definição: *A Modelagem matemática – consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real* (2002, p.16). Com isso, espera-se que, ao se traduzir a linguagem natural em linguagem matemática, esta se revele deixando de ser algo pronto e estático para torna-se uma (re)descoberta ou mesmo uma construção.

D'Ambrosio (1986) caracteriza a modelagem matemática como uma "realidade-reflexão sobre a realidade" resultante de uma ação planejada por meio da construção de modelos sobre os quais o indivíduo opera. Para o autor, é no ciclo "realidade-reflexão-ação-realidade" que incide o ponto mais importante, ou seja, o esforço que o indivíduo empreende para compreender o mundo à sua volta. Portanto, ao construir um modelo, este se tornar o elo entre as informações que o indivíduo capta do mundo e a forma como as processa. Assim, a modelagem é processo, é o caminho percorrido para se chegar a um modelo.

Para Bienbemgut, *a modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo* (2000, p.12). A autora vê a modelagem como um processo artístico, uma vez que para se elaborar um modelo, além do conhecimento de matemática, o modelador precisa de uma dose significativa de criatividade e intuição para saber interpretar o contexto, saber discernir qual o conteúdo matemático que melhor se adapta e também ter senso lúdico para saber jogar/manipular com as variáveis envolvidas.

Desse modo, podemos conceber a modelagem como o processo de obtenção de um modelo, ou seja, é o “trabalho” ou “o caminho percorrido” para se obter o referido modelo. Para isso, em muitos casos, necessita de um conhecimento matemático já consolidado; em outros, conduz a uma nova formulação matemática, ou seja, um novo conceito. O produto final, o modelo matemático, pode ser definitivo ou temporário; vai depender de novas proposições e novos olhares sobre um problema já posto. Assim, todo modelo pode estar sujeito à reformulação. Portanto, podemos pensar a construção de um modelo como fenômeno histórico: definitivo ou transitório. No momento de sua proposição continha verdades incontestáveis, mas ao ser submetido a um novo olhar mostrou-se inconsistente, sendo reformulado ou refutado.

Além dessa discussão, podemos, ainda, nos remeter às considerações filosóficas em torno da construção do conhecimento matemático, ou mais precisamente, afirmar que a busca por um modelo matemático, numa visão platônica, pode estar no mundo das ideias, existindo *a priori*, necessitando apenas ser "descoberto" pelo modelador. Enquanto que em uma visão construtivista do conhecimento, pode ser um processo que envolve percepção, curiosidade, intuição e um conhecimento prévio. Assim, podemos pensar que, independente da visão que permeia o ato de modelar, existe uma "intencionalidade", nem sempre explícita, mas que impulsiona a tarefa de identificar e investigar um problema, mesmo que este esteja apenas na mente de um idealizador curioso.

Feitas algumas considerações sobre o processo de modelagem e apresentadas algumas definições sobre ela, passo, então, a definir "modelo". A literatura o apresenta como um termo ambíguo, sendo utilizado nas mais diversas situações. Segundo o Dicionário da Língua Portuguesa, de Aurélio Buarque de Holanda, "modelo designa uma representação de alguma coisa (uma maquete, por exemplo), um padrão ou ideal a ser alcançado (uma pessoa), ou um tipo particular dentro de uma série (um modelo de carro)".

Para Gilbert & Boulter, "um modelo pode ser definido como uma representação de uma ideia, um objeto, um evento, um processo ou um sistema" (1998, p.13). Os autores apresentam vários tipos de modelo correntes na literatura em educação: *modelo mental, modelo expresso, modelo consensual*. Para eles:

> o grande valor dos modelos é que possibilitam a visualização, de ideias, objetos, eventos, processos ou sistemas que são complexos, ou em escalas diferentes daquilo que é normalmente percebido, ou abstrato – ou alguma combinação dessas três características. (GILBERT; BOULTER, 1998, p. 16).

Ainda para os autores, um modelo pode ser visto como instrumento de ligação entre as abstrações teóricas e as ações concretas da experimentação, que por sua vez ajudam a fazer predições e a guiar a investigação. Tendo isso em vista, podemos dizer que, mesmo sem dominá-la ou conhecê-la, os cientistas e/ou matemáticos criadores do cálculo tenham se baseado nas teorias dos modelos para criar sua matemática. Será verdadeira essa afirmação?

Na tese que ora defendo, cujo foco recai sobre *o estudo histórico do cálculo visto como a construção de modelos matemáticos,* limitar-me-ei ao uso do termo “modelo” designando “modelo matemático” e o utilizarei conforme proposto por Bassanezi (2002 p. 19-20), ou seja, como a representação de um sistema, sendo descrito como dois tipos:

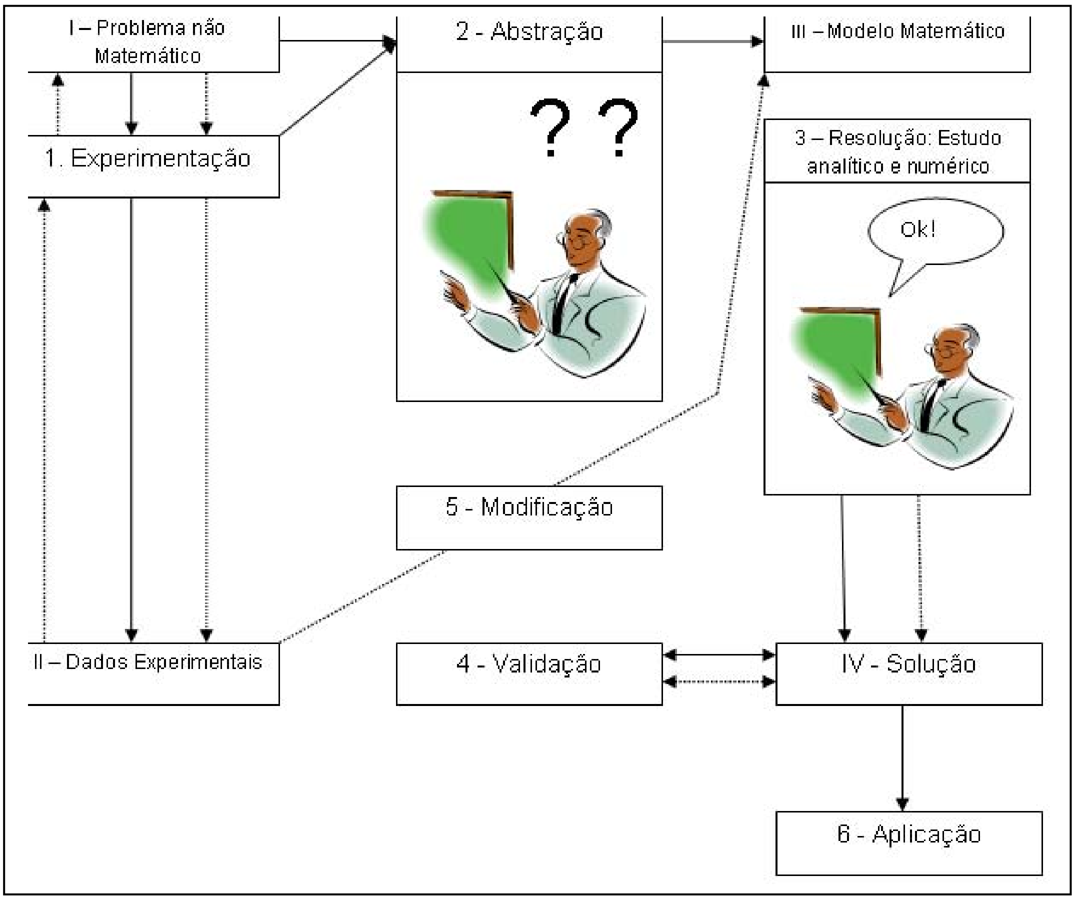
> - Modelo objeto: é representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis (..).
> - Modelo teórico: é aquele vinculado a uma teoria geral existente – será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação (...).

Chamarei simplesmente de *modelo* a representação de um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de algum modo o objeto estudado e seu funcionamento. Por exemplo, o modelo de regressão linear, bastante utilizado nas pesquisas em modelagem matemática, consiste em ajustar por meio de uma curva de tendência comparando duas variáveis envolvidas no processo ou detectadas no problema em estudo. Segundo Bassanezi:

> O termo regressão linear surgiu n século XIX, utilizado por Sir Francis Galton que estudou a relação entre altura de pais e filhos, observando que, na média, havia um decréscimo nos valores encontrados entre as duas gerações. Ele considerou esta tendência

como sendo uma regressão genérica e por algum motivo, não muito claro, chamou este fato de "*regression to mediocrity".* (2002, p.54).

O processo de modelagem usando regressão linear, segundo Bassanezi, "é bastante útil para a formulação simplificada dos dados ou verificação de alguma tendência entre eles" (Ibidem, p. 54). Esse exemplo serve para ilustrar apenas um caminho utilizado para se analisar e propor um modelo quando duas variáveis estão em jogo. Entretanto, a escolha do caminho mais apropriado para se propor uma forma de "leitura" dos dados, depende do tipo de problema em análise. Desse modo, Bassanezi, apresenta um quadro detalhando cada fase do processo de modelagem, que vai desde o problema que é posto até a aplicação do modelo, conforme segue:



Fluxograma 1 – Esquema de uma modelagem: as setas contínuas indicam a primeira aproximação. A busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado torna o processo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas (BASSANEZI, 2002, p.27).

Esse esquema, proposto por Bassanezi, nos coloca diante de um processo que poderíamos denominar de "processo estendido" ou completo.

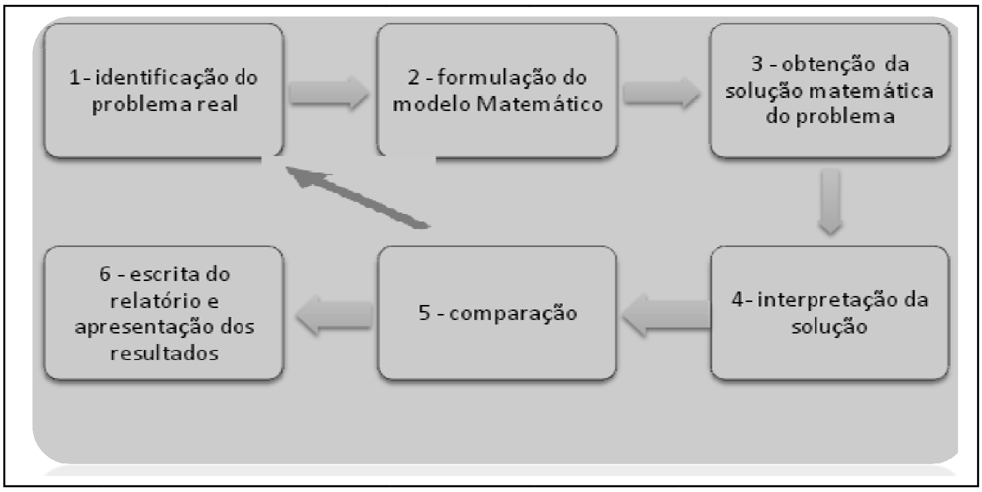
Representa todo o “desenrolar” intelectual do modelador. Esse processo se inicia com o “problema do mundo real” ou um problema não-matemático (I). Diante desse problema, o modelador inicia a fase de experimentação e recolhe todo tipo informação necessária, ou seja, compõe os dados (2); abstrai em torno dos dados obtidos e formula hipóteses (2). Daí surge um primeiro modelo matemático (III); o problema é resolvido em termos analíticos e numérico (3) e é apresentada uma primeira solução (IV). Após essa solução, o modelo é validado (4). Entretanto, os dados podem novamente serem examinados (II), ou seja, o problema passa por uma nova experimentação e aí pode ser modificado (5). Só então o problema inicial pode ser aplicado e generalizado (6).

Importante observar nesse processo é que ele abre um novo olhar sobre o modelo inicialmente proposto, ou seja, o modelo inicial pode ser modificado após nova experimentação. Por que isso ocorre? Para Bassanezi (2002), as razões podem ser várias: podem surgir novas hipóteses, do modelador inicial ou de um observador atento as informações (dados) podem ter sido obtidas de forma incorreta; a interpretação do modelador estava incorreta; pode ter havido erro no desenvolvimento matemático formal e/ou a teoria matemática existente quando o modelo foi proposto não era suficiente para garantir o modelo. Reafirmando essas posições, o autor argumenta que:

> O aprofundamento da teoria implica na reformulação dos modelos. Nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado, e agora poderíamos dizer que um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos. A reformulação de modelos é uma das partes fundamentais do processo de modelagem e isto pode ser evidenciado se considerarmos que:
>
> - Os fatos conduzem constantemente a novas situações;
> - Qualquer teoria é passível de modificações;
> - As observações são acumuladas gradualmente de modo que novos fatos suscitem novos questionamentos;
> - A própria evolução da Matemática fornece novas ferramentas para traduzir a realidade (...). (BASSANEZI, 2002, p. 31).

Dos argumentos de Bassanezi posso asseverar que foi isso que aconteceu com o desenvolvimento do cálculo e é disso que tratarei mais adiante na sequência do trabalho. Veremos que no cálculo proposto por Newton, vários modelos contribuíram e foram sendo modificados para que tivéssemos então um modelo definitivo.

Esquemas mais simplificados do processo de modelagem também são apresentados por outros autores. Por exemplo, temos o esquema de Edwards & Hamson (1990 *apud* BARBOSA, 2002), conforme segue:



Fluxograma 2 – Processo simplificado de modelagem matemática

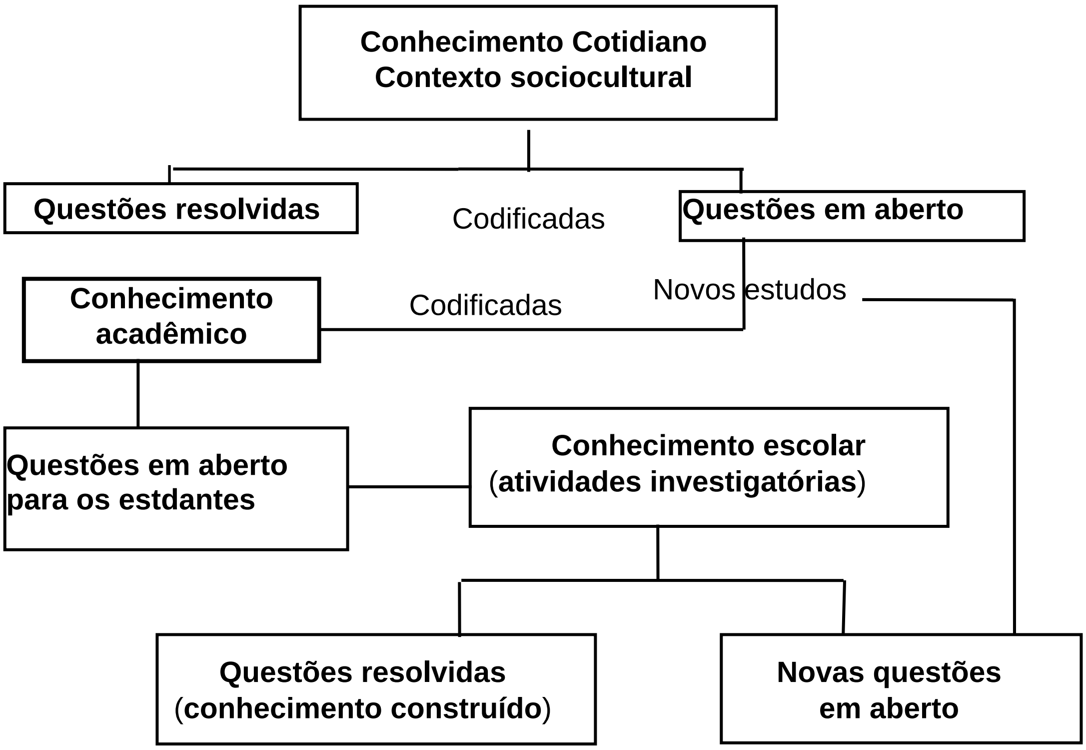
Conforme exposto por Barbosa, o esquema de Edwards & Hamson mostrado anteriormente é constituído de seis fases, sendo que as cinco primeiras são cíclicas, ou seja, percebe-se que o autor retorna ao problema inicialmente proposto após interpretar a solução e compará-lo com realidade, antes de apresentar os resultados à comunidade científica e às pessoas não familiarizadas com a matemática. Entretanto, a limitação desse esquema é que ele parece não prever uma completa reformulação do modelo inicialmente proposto, ou talvez parta do princípio que a teoria existente dê conta de garantir o modelo.

Portanto, das discussões sobre modelagem e modelos matemáticos parece perceptível que tanto as correntes filosóficas que têm servido de explicação para a construção do arcabouço matemático, quanto aos dois esquemas anteriormente propostos servem para nos mostrar que há uma relação entre o processo de modelagem e o conhecimento matemático esperado/produzido. Isso nos leva a uma reflexão sobre o a forma e o tempo transcorrido para que muitos conceitos matemáticos fossem construídos.

Nesse processo destaco o desenvolvimento conceitual do Cálculo como meu objeto de estudo.

Isso me remete a uma incursão na investigação em história para entender como o conhecimento matemático foi gerado e organizado. Para tanto, recorro a Mendes quando ele aborda essa questão, dizendo que o conhecimento matemático construído ao longo da história se configurou de duas maneiras: “as questões resolvidas” e as “questões em aberto”. A primeira se configura *“a partir da solução de respostas aos problemas gerados no contexto da sociedade e da cultura”,* que geram subsídios e viabilizam a busca por respostas aos problemas surgidos posteriormente. Já a segunda, “são as lacunas deixadas durante a tentativa de responder às questões geradas no cotidiano e que, por sua vez, constituem-se em fontes provocadoras para novos estudos” (MENDES, 2003, p. 5).

Para Mendes, o conhecimento matemático gerado e organizado a partir das questões abertas, surgidas no contexto sóciocultural, oriundas dos saberes da tradição, desempenha um importante papel na elaboração de novos saberes e nas estratégias de pensamento. Quando essas “questões” são totalmente resolvidas, se tornam saberes institucionalizados ou formalizados passíveis de uso pela comunidade científica. E, assim, chegam às salas de aula como conhecimento acadêmico. Para melhor comunicar seu pensamento sobre as questões resolvidas e em aberto, Mendes propõe o seguinte esquema:



Fluxograma 3 – A Institucionalização do conhecimento matemático a partir das questões resolvidas e em aberto, conforme Mendes (2003, p.7)

Desse modo, para Mendes (2003), as questões respondidas irão se constituir em instrumentos ou ferramentas matemáticas que serão utilizadas na solução de novos problemas surgido, ou para contribuir com a busca de solução a novas interrogações matemáticas. Também como instrumento para negar os modelos já estabelecidos ou, ainda, reafirmá-los, adaptando-os a uma linguagem matemática mais avançada, conforme exigência de cada época. Fazendo um paralelo entre os esquemas mencionados por Mendes e Bassanezi, podemos considerar que tanto no processo de modelagem quanto na investigação histórica o objetivo final é a construção de um conhecimento matemático institucionalizado e/ou um conhecimento que possibilite a abertura de novas questões. É um processo cíclico.

Podemos dizer que foi assim com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. As questões abertas ou modelos preliminares do cálculo surgiram da necessidade de resolver problemas práticos gerados no contexto da sociedade e da cultura, bem como nascidos da curiosidade dos filósofos e cientistas que não se conformaram em estarem imersos na natureza e não conseguirem compreendê-la. Desse modo, decifrar os enigmas da natureza, explicar os fenômenos do céu e da terra, resolver problemas de natureza prática, se constituíram em desafios que os cientistas e filósofos não se furtaram em solucionar. Nesse processo, propuseram modelos, reavaliaram esses modelos, levantaram novas questões, realizaram novas observações, propuseram novas teorias e lançaram novos modelos. Foi nesse processo, que atravessou séculos e envolveu uma legião de cientistas, que o cálculo, conforme o estudamos hoje, se configurou.

Tendo Newton resolvido a “questão”, ou seja, o cálculo passou a ser um problema resolvido e um conhecimento institucionalizado, aceito como conhecimento científico. Os modelos para a diferenciação e para a integração passaram a ser úteis para responder muitos problemas de natureza prática, problemas “reais” novamente, nascidos no contexto sóciocultural, e úteis à explicação de fenômenos naturais. O cálculo foi também conhecimento chave para a compreensão e explicação de todo tipo de movimento, pois é base para a compreensão da Mecânica Clássica de Newton que, durante mais de dois séculos, foi suficiente para explicar o funcionamento do universo até que fosse substituída pela Mecânica Quântica.

Nesta pesquisa trato da evolução dos problemas e modelos do cálculo. Isso significa que vou me reportar a questões iniciais, inicialmente abertas aos problemas surgidos no contexto sóciocultural e aos problemas oriundos da observação da natureza. A partir das questões respondidas, apresentar os modelos gerados; discutir porque esses modelos foram aceitos em um determinado período e depois refutados diante de novas questões. Isso vai culminar com o modelo formalizado e institucionalizado por Newton no século XVII.

2.4 A PESQUISA EM HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO UM AGENTE DE COGNIÇÃO NA SALA DE AULA

Quando tratamos de História da Matemática, somos levados a colocá-la em lugar de destaque entre as pesquisas em história das ciências em geral, pois sua história é muito mais antiga do que a de qualquer outra ciência. Os registros deixados sobre essa ciência são bem anteriores a qualquer outra, talvez com exceção da astronomia. O interesse pela história da matemática há muito vem despertando a curiosidade dos matemáticos, sendo um importante campo de pesquisa. Entretanto, temos nos perguntado qual o papel da história no ensino da matemática e detectamos diferentes posicionamentos. Entre as questões postas para se estudar a história da matemática podemos destacar: Para se aprender história? Para que aprender matemática? A compreensão da história da matemática facilita o aprendizado da matemática?

No geral, o conhecimento matemático vem sendo transmitido apenas como um conjunto de generalizações, modelos prontos, passíveis de aplicação em muitos campos. O processo de criação, a origem, são deixados de lado, são ignorados como tendo importância menor. É esse conhecimento que chega às salas de aula com apenas o resultado, o produto final, o modelo. Nas palavras de Ponczek:

> O pensamento científico evolui de forma bem mais complexa a partir de como é divulgado por nossos textos de Física básica, nos quais a ciência aparece quase sempre como muito clara, objetiva, retilínea e produzida por lampejos isolados de gênios descomprometidos com a sociedade e o passado. (2002, p. 24).

Ainda segundo Ponczek, essa forma equivocada de se transmitir o conhecimento científico se reflete nas salas de aula, mesmo nos cursos de graduação, nos quais os alunos se limitam a ler textos preparados especialmente para treiná-los em problemas-padrão, a partir de teorias aceitas como corretas representações da natureza. Para o autor:

> é muito raro que um estudante seja incentivado por seus professores e orientadores a ler textos originais dos grandes pensadores (as chamadas fontes primárias) ou livros de história e filosofia da ciência. Este procedimento pedagógico, levado aos estágios da formação de um cientista, faz com que este adquira um conhecimento parcial da ciência, sendo levado a acreditar, erroneamente, que no passado a evolução do pensamento ocorreu de forma linear até chegar, sem traumas, as ideias e práticas científicas em vigor, e que no presente estas mesmas práticas sejam possíveis e imagináveis. (PONCZEK, 2002, p. 25).

Os cursos de graduação, na sua maioria, refletem o que está nos livros-texto; apresentam uma ciência linear, como se as ideias fluíssem naturalmente das mentes dos cientistas como lampejos de gênios. Seguem uma tendência que, na visão do pesquisador, servem para formar profissionais altamente capacitados a resolverem os problemas apresentados nos livros-texto, mas incapazes de questionamentos críticos acerca da ciência em vigor ou ainda de saber lidar com problemas práticos do mundo real. Essa maneira de apresentar as ideias científicas transpassa uma visão de ciência fragmentada e estática na qual os estudantes não conseguem estabelecer relação entre passado, presente e futuro e, mesmo, entre as diferentes correntes científicas.

Desse modo, conhecer e fazer uso da história da ciência é importante para percebermos que o desenvolvimento científico não se deu a partir de “lampejos de gênios”, mas na busca de interpretar, compreender, melhorar as condições de vida, obter novas conquistas, novos territórios. O desenvolvimento científico também é fruto da ambição humana. Segundo D’Ambrosio, é preciso “entender a história da ciência como a história da espécie humana em busca da sobrevivência e de transcendência nos diversos ambientes por ela ocupados” (2004, p. 172).

Especificamente em relação à matemática, sua história nos remete, de certo modo, a compreender a evolução da humanidade, uma vez que essa ciência teve e continua tendo papel central no desenvolvimento científico e tecnológico. Por isso, conhecer como se deu a evolução das ideias matemáticas também é importante para entendermos o passado, o presente e planejarmos o futuro. A história pode nos levar a dar respostas de como se deu o processo de construção do que assistimos no presente e, a partir dela, podemos fazer a reescrita da própria história, bem como dos fatos a ela remetidos.

Infelizmente, na maioria das salas de aula, o ensino da matemática não é diferente do que ocorre com outras disciplinas. Ela é apresentada aos alunos como um corpo linear de conhecimentos muito bem estruturado. Em pouquíssimas situações os alunos são envolvidos em uma metodologia de ensino que os leve a uma visão epistemológica do conhecimento matemático;

em que possam traçar a trajetória do conhecimento matemático produzido; seja a partir de situações práticas, da resolução de problemas ou de situações que retomem a fatos históricos interessantes.

De acordo com Mendes (2006), o pouco de história que aparece nos livros didáticos de matemática traz, na maioria das vezes, informações históricas sobre personagens e acontecimentos irrelevantes do conhecimento matemático, que para os alunos são apenas fatos curiosos. Essa forma como a história é abordada não permite que seja um instrumento útil aos alunos na construção do conhecimento matemático. Nas palavras de Mendes, o verdadeiro uso da história é tomá-la “como um recurso favorável à construção das noções matemáticas pelos alunos, durante suas atividades escolares” (2006, p. 84).

A defesa do uso da história da matemática como instrumento de ressignificação do conhecimento matemático vem sendo requerida por muitos historiadores da matemática, que veem nessa perspectiva uma forma concreta de os alunos se apropriarem do conhecimento matemático, dando significado àquilo que aprendem. A partir da perspectiva histórica é possível conhecer os processos de formação dos conceitos, das regras, das fórmulas prontas que para os alunos são como “fórmulas mágicas”. Na concepção de Valdez,

> A visão histórica transforma meros fatos sem alma em porções de conhecimento buscadas ansiosamente, e em muitas ocasiões com genuína paixão por homens (e mulheres – crivo nosso) de carne e osso que se alegraram imensamente quando pela primeira vez se depararam com elas. Quantos desses teoremas, que em nossos dias têm aparecido para os estudantes como verdades que saem da obscuridade e se dirigem para o nada, têm mudado de aspecto para nós ao adquirir um perfeito sentido dentro da teoria, depois de havê-la estudado mais a fundo, incluído seu contexto histórico biográfico? (VALDEZ, 2006, p.15).

Historiadores da matemática, em especial os do campo da história e educação matemática (FAUVEL, 1991; MIGUEL, 1993; FAUVEL e MANEN, 2000; MENDES, 2001c, 2006), defendem o uso da história como um elemento pedagógico. Nesse sentido, ressaltam o uso de elementos da história (fatos históricos) que podem ser convertidos em atividades para a sala de aula. São tais atividades que vão permitir aos alunos, nos diversos níveis de ensino, fazer uma releitura da história da matemática, e desse modo, esta se torna um instrumento de cognição na aprendizagem matemática.

Para tanto, os historiadores apontam diversos modos de desenvolver tais atividades, e o que foi proposto há muito tempo ganha um novo sentido quando abordado nos dias atuais. Segundo Mendes (2006), é nesse sentido que fazemos uma releitura da história da matemática. A partir dessa releitura, reorganizarmos essa produção. Para esse pesquisador, o conhecimento matemático construído esteve quase sempre associado a situações práticas do cotidiano e impregnado pelas condições sóciocognitivas e culturais do contexto em que foi gerado. A releitura permite, então, que tome sentido hoje, de acordo com as condições socioculturais do momento, não sendo simplesmente um retorno ao passado.

Nas palavras de Mendes:

> Se fizermos uma releitura histórica dessa produção, veremos que a matemática produzida e organizada socialmente pode ser redescoberta pela humanidade, no sentido de (re)utilizá-la para responder às questões atuais surgidas no contexto social. Podemos, assim, considerar que essa atitude sóciocognitiva é concebida como uma retomada da matemática a partir da valorização dos elementos socioculturais e políticos presentes na sua geração, organização e difusão. (2006, p. 82).

Essa visão, que objetiva uma releitura da produção do conhecimento matemático e procura estabelecer relação entre os contextos social, cultural e político, que contribuíram para que esse conhecimento emergisse, é bem diferente da forma com que a matemática é ensinada. No geral, ainda é ensinada partindo-se de definições e teoremas que necessitam de provas e demonstrações formais. Para comprovar a veracidade das definições, propõem-se exercícios-padrão.

Herrera (2003), no prólogo do seu livro *Árquimedes al redor del círculo”,* nos alerta, também, sobre a forma de como a história da matemática muitas vezes é usada de forma equivocada e que os matemáticos contemporâneos mostram pouco interesse por ela. Quando fazem uso dessa história, referem-se a fatos que servem apenas para depreciá-la, tais como “Pítágoras foi criador de uma seita de vegetarianos e sacrificava bois"[16]; Newton e Leibniz disputaram a paternidade da invenção do cálculo. Dessa forma, perde-se a relação que esse conhecimento tem com a sociedade, com os fatos, com o passado. Isso a torna uma ciência alheia ao presente, distante dos fatos sociais e faz dos matemáticos, ou daqueles que conseguem apreendê-la, seres quase inatingíveis.

Entretanto, não relegando os conceitos e teoremas aceitos a partir de demonstrações formais, é preciso compreender que boa parte da matemática que conhecemos hoje se originou das necessidades humanas, na busca de resolver problemas simples do cotidiano em diferentes culturas e povos. Nesse tocante, o uso da história pode nos remeter ao momento da criação, às condições em que as ideias foram gestadas, aos problemas que eram colocados à sociedade. Enfim, a história nos possibilita (re)construir a matemática, a partir da reconstituição dos acontecimentos, dos fatos, locais, datas, nomes.

Segundo Mendes, os acontecimentos dignos de memória surgem através de filtros que selecionamos quando buscamos historiar os acontecimentos. Para ele, "um fato histórico da matemática é digno de memória quando exerce ou exerceu, na sociedade, uma função desencadeadora de acontecimentos matemáticos úteis à sociedade" (2006, p. 82). Por exemplo, o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, o qual teve sua consolidação no século XVII, por Newton (1642-1727) e Leibniz (1642-1716), que independente de quem primeiro o formalizou, tem uma história que se inicia bem antes deles.

Reescrever a história do desenvolvimento do cálculo pode nos remeter a várias histórias dentro da história e percebermos que o modo como os conceitos surgiram passaram por várias etapas e várias mãos. Podemos chegar a descobertas de fatos e situações que nos permitam entender as condições socioculturais que levaram à elaboração de um conhecimento tão útil ao desenvolvimento da humanidade e de suma importância para

[16] Livre tradução minha.

explicarmos muitos fenômenos físicos, socioculturais, econômicos e políticos de hoje.

Se tomarmos a frase atribuída a Newton: *"Se longe enxerguei é porque estive apoiado em ombros de gigantes"* (apud PONCZEK, 2002, p. 23), podemos conjecturar que para chegar às suas descobertas sobre taxas de variação, Newton também se fundamentou em estudos, observações e modelos já postos anteriormente, supostamente desde os gregos aos estudos de Galileu Galilei (1564-1642). Assim, parece ser o reconhecimento pelo feito daqueles que o antecederam e também o reconhecimento de que o conhecimento não se constrói do nada, mas a partir de situações já postas e ainda passíveis de novas leituras e reescritas.

Nas palavras de Valdez:

> Do ponto de vista do conhecimento mais profundo da própria matemática, a história nos proporciona um quadro no qual os elementos aparecem em sua verdadeira perspectiva, o que resulta em um grande enriquecimento, tanto para o matemático-técnico, como para o que ensina. Se cada parte de conhecimento matemático de nossos livros-textos tivesse escrito o número de séculos ao qual se pudesse atribuir alguma aproximação, veríamos saltar loucamente os números, às vezes dentro da mesma página ou do mesmo parágrafo, conjuntos, números naturais, sistemas de numeração, números racionais, reais, complexos... dezenas de séculos de distância atrás, até adiante, outra vez até trás, vertiginosamente. (2006, p.16).

Portanto, com base nas considerações de Mendes (2006) e Valdez (2006), vemos que, ao fazer uso da história da matemática, temos a oportunidade de nos remeter aos vários contextos socioculturais, às circunstâncias sociais, ambientais, dos prejuízos e limitações do momento em que ela foi produzida e utilizada. Podemos, ainda, obter um melhor aprofundamento de como ela foi construída, das condições postas e das necessidades humanas que estavam em evidência para que se concebesse tal conjunto de conhecimentos.

A essência do que foi até agora discutido é perceber e entender a história das ciências, compreender os processos de formação das teorias e dos conceitos a elas atrelados que, em muitos casos, servem para explicar os fenômenos naturais e, sobretudo, não tratar tais conceitos e teorias como modelos prontos e imutáveis que servem apenas para serem reproduzidos nas salas de aula, adestrando os alunos na resolução de problemas-padrão, sem uma visão crítica da ciência, da sociedade e de suas implicações para o progresso científico e tecnológico.

Capítulo 3

O DESIGN DA TESE SE CONFIGUROU

Neste capítulo, delineio os "caminhos" metodológicos da pesquisa, desde a escolha das fontes de estudo e do "olhar" sobre essas fontes. Apresento como organizo o estudo, com base na pergunta diretriz e nos objetivos. Também apresento a forma de analisar os dados provenientes das fontes, e finalizo indicando qual será a contribuição da tese para o ensino.

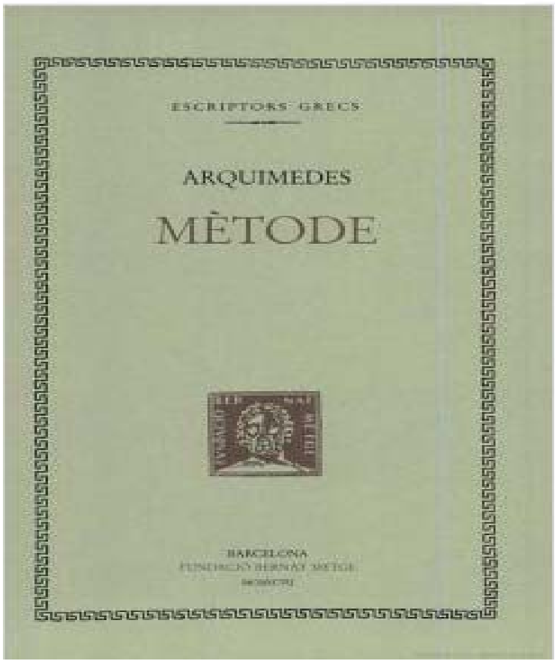
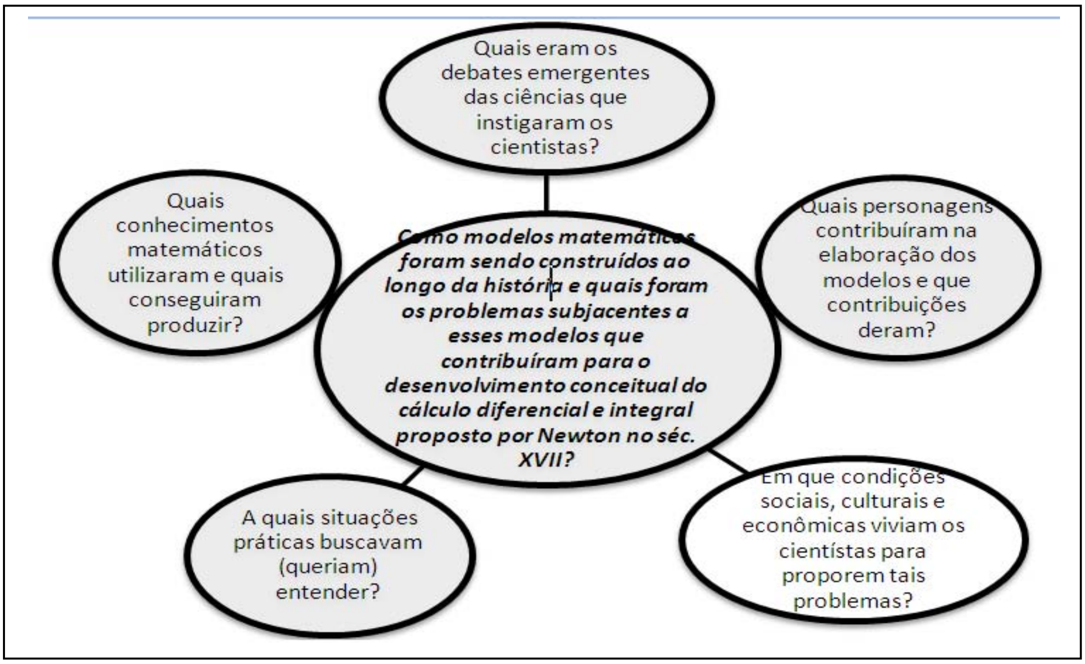


Figura 1 – Minha Biblioteca. Google Contas: http://books.google.com.br/bo acesso em 05/05/2010

3.1 A FORMA DE ORGANIZAÇÃO DA INVESTIGAÇÃO NO CAMPO TEÓRICO DA HISTÓRIA

Situado o problema e definidos os campos teóricos de estudo, o passo seguinte foi definir a forma de organização da pesquisa. Foi a partir de um intenso processo de reflexão sobre como gostaria de apresentar o trabalho que me ocorreu a necessidade de "centrar" o problema[17] e no entorno dele colocar todos os elementos que iriam contribuir para sua resolução. Foi dessa forma que surgiram os esquemas que serão mostrados e discutidos nas páginas a seguir. É claro que essa maneira de organizar as informações não surgiu de modo imediato; também passou por várias modificações até chegar à forma ora apresentada. Para defini-la também foi necessário um processo de amadurecimento do objeto de estudo, dos objetivos e da definição do campo teórico de investigação. Enfim, envolveu uma série de procedimentos que contribuíram para a constituição do *corpus* da pesquisa e a forma como é apresentada.

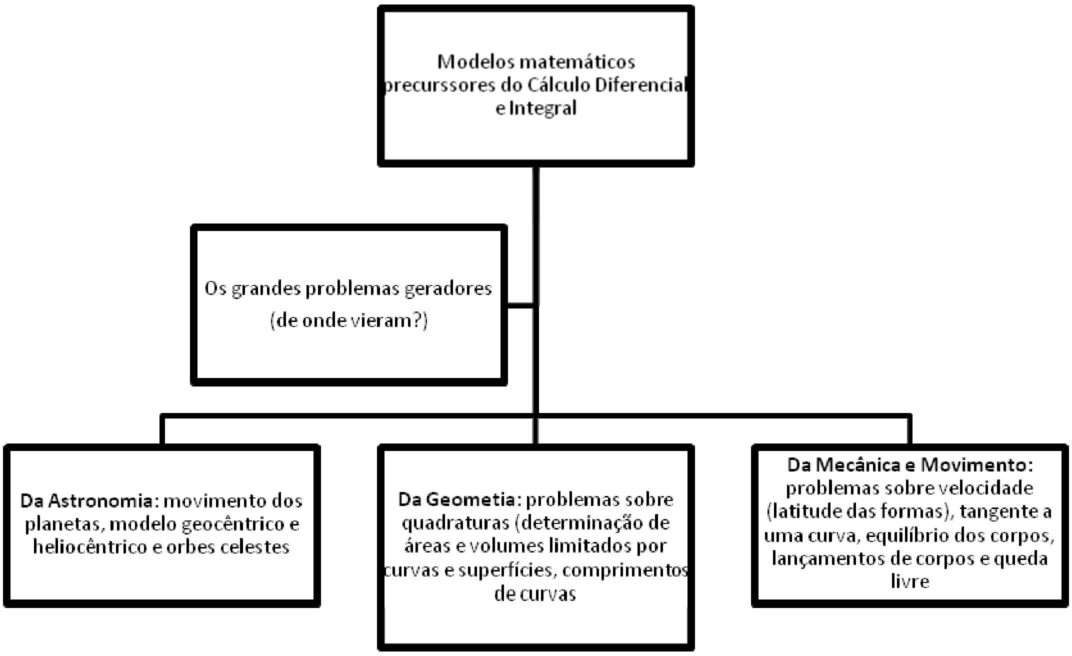
O primeiro passo foi centrar a pergunta diretriz, e ao redor dela as perguntas subjacentes, conforme Fluxograma 1, a seguir:



[17] Digo, a pergunta diretriz.

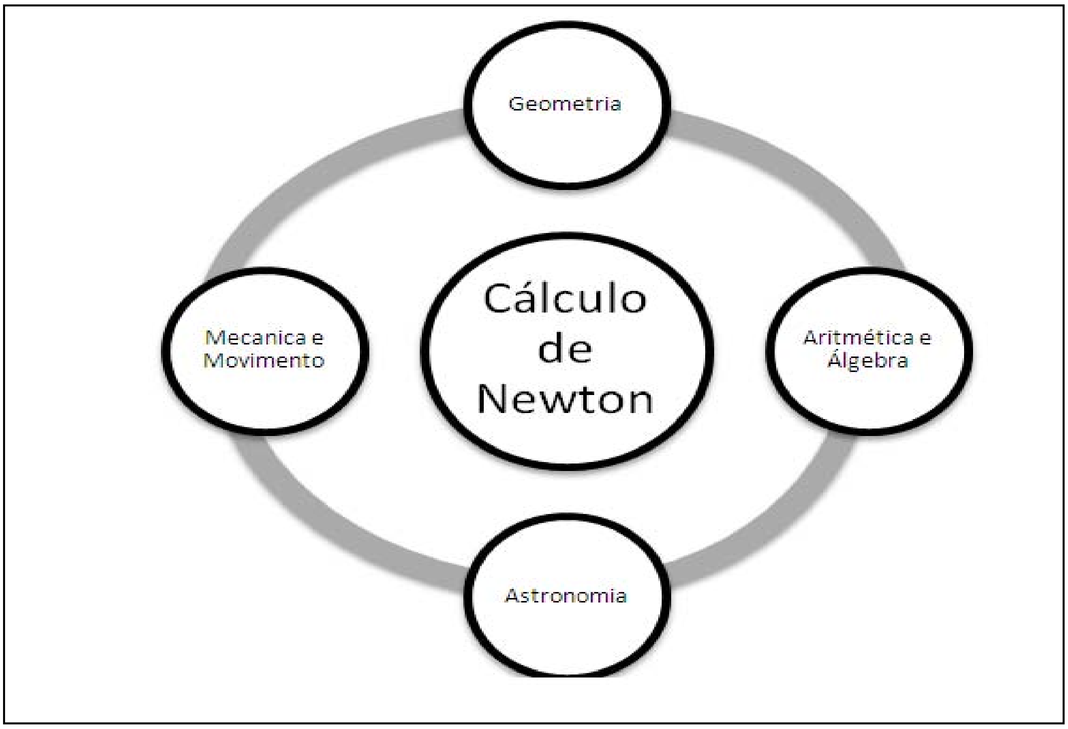
Fluxograma 4– a pergunta diretriz e as questões dela derivadas.

Esse fluxograma centra a pergunta diretriz e ao redor dela estão as perguntas adjacentes. Isso serviu para visualizar melhor aquilo que desejava responder. A partir do todo, visualizar as partes, e, a partir das partes, obter uma compreensão do todo. Foi desse olhar atento sobre essas questões que defini o Fluxograma 2, conforme segue:



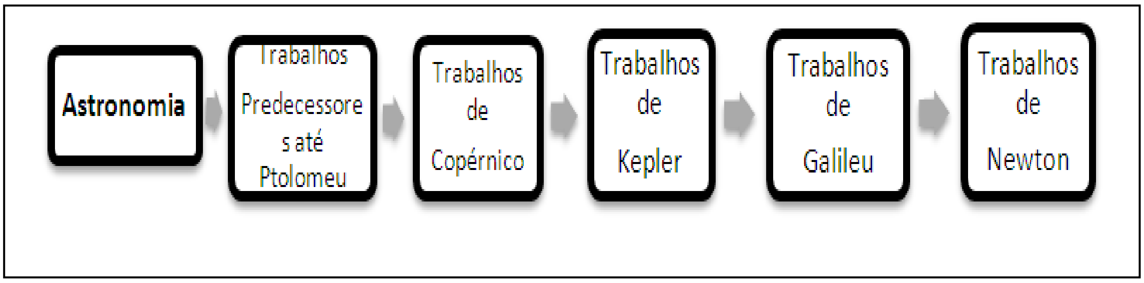
Fluxograma 5– Modelos, problemas e temas geradores que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo.

Desse modo, nesse fluxograma, a partir da pergunta diretriz e das perguntas adjacentes a ela, busquei associar aos modelos e aos grandes problemas geradores as grandes áreas que serviram de fontes provocadoras aos cientistas, ou seja, procurei situar os problemas de acordo com o campo de conhecimento associado a eles, conforme os entendemos hoje. Isso me levou à proposição do Fluxograma 3, no qual visualizo que no cálculo proposto por Newton essas três grandes áreas sempre estiveram articuladas, conforme segue:

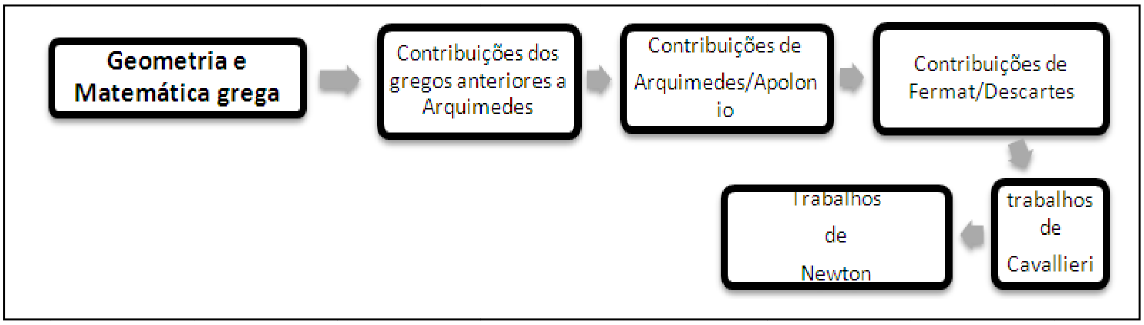


Fluxograma 6 – No centro está o cálculo newtoniano, para o seu desenvolvimento estão as três grandes áreas que lhe serviram como fonte de provocação; articuladas entre si, elas estiveram no cerne do debate para a compreensão do mundo.

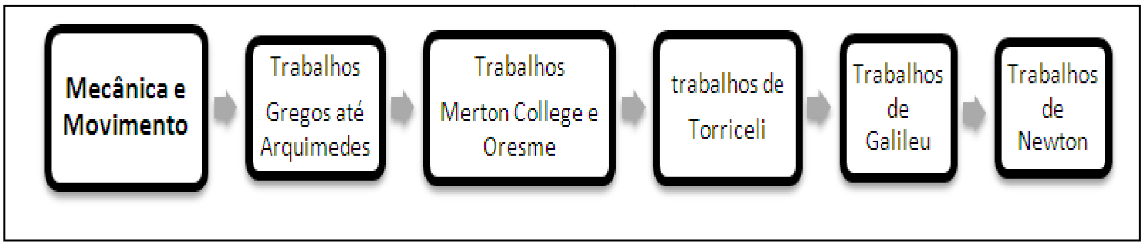
A partir da compreensão de que essas três grandes áreas se articularam entre si e contribuem efetivamente com o desenvolvimento do cálculo, passei, então, à definição dos principais personagens e seus respectivos trabalhos que contribuíram nesse processo, em suas respectivas áreas de atuação. Isso me conduziu a situar os personagens em ordem cronológica e de acordo com suas contribuições, conforme Fluxogramas 4,5 e 6:



Fluxograma 7 – ordem cronológica dos personagens e suas contribuições para a astronomia.

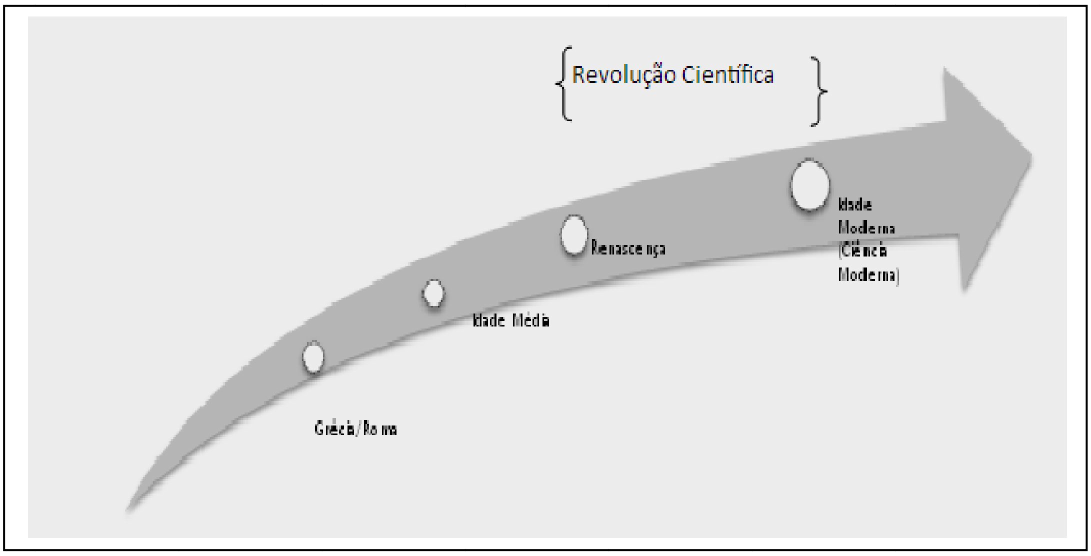


Fluxograma 8 – ordem cronológica de contribuições da geometria e da Álgebra.



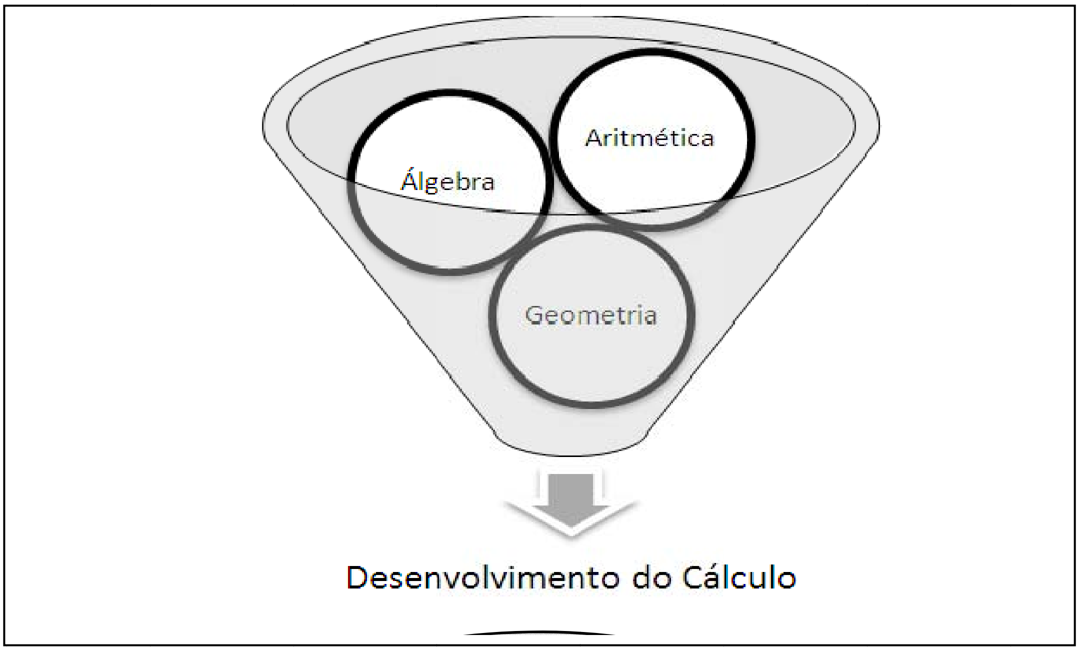
Fluxograma 9 – ordem cronológica de contribuições da Mecânica e Movimento.

Em consonância com os fluxogramas descritos, proponho mais um no qual situo as contribuições em cada momento da história das ciências, a saber:



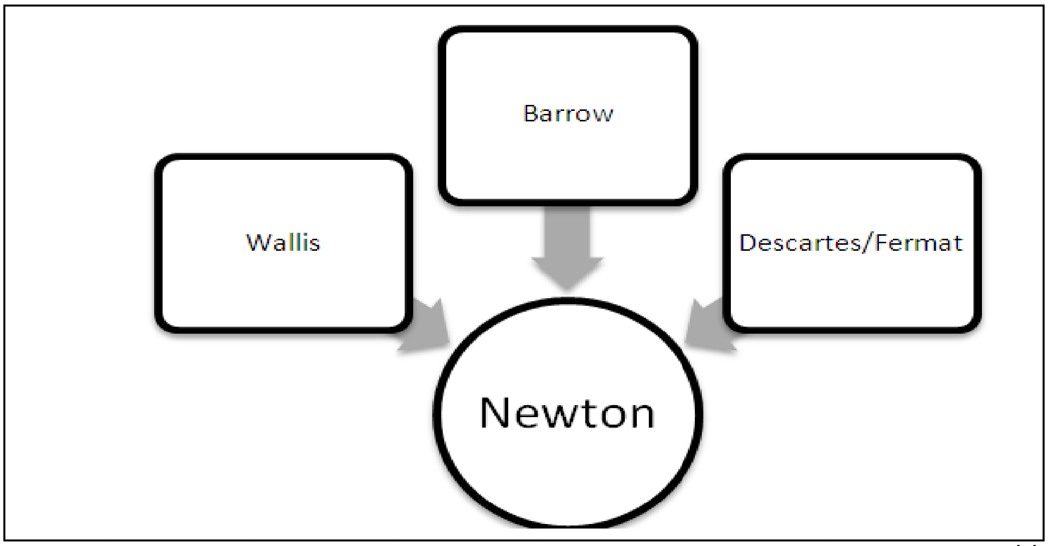
Fluxograma 10 – épocas abordadas na investigação.

No cálculo proposto por Newton pela primeira vez aparece uma formulação matemática mais detalhada, assim, para a formulação matemática do cálculo, ele se valeu de um conhecimento matemático já mais elaborado. Desse modo, no campo da Matemática também três grandes áreas contribuíram para o desenvolvimento do cálculo newtoniano, conforme o Fluxograma 11:



Fluxograma 11 - Contribuições da Matemática para a formulação do Cálculo Newtoniano.

Por último, apresento o fluxograma mostrando os personagens e suas contribuições que mais de perto influenciaram Newton para que ele pudesse desenvolver seus estudos no campo da matemática, é o que está no Fluxograma 12:



Fluxograma 12 – Neste fluxograma aparecem os principais matemáticos e seus estudos nos quais Newton buscou inspiração para desenvolver suas próprias ideias matemáticas e que culminaram com o desenvolvimento do Cálculo.

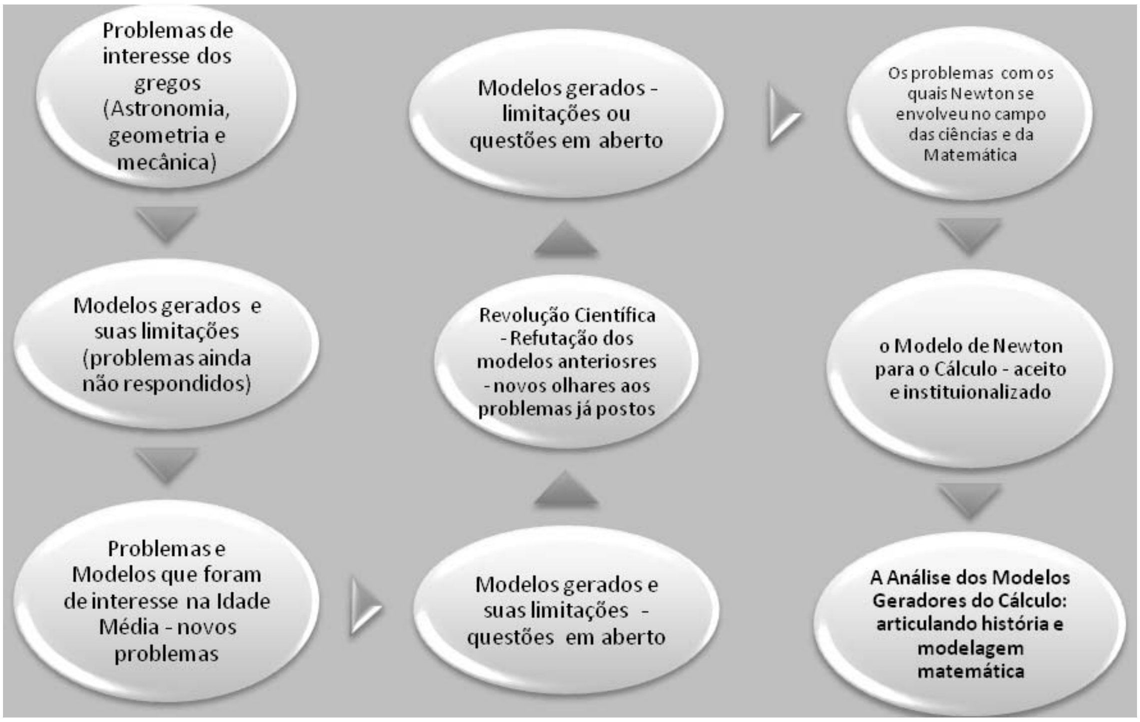
Portanto, as construções desses fluxogramas me permitiram compreender e analisar o processo histórico do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, identificar os grandes problemas geradores, estabelecer a forma de organização e análise da investigação e selecionar o material de estudo no campo da História e no campo da modelagem matemática.

3.2 A ANÁLISE DOS MODELOS GERADORES DO CÁLCULO: ARTICULANDO HISTÓRIA E MODELAGEM MATEMÁTICA

Mais uma vez, focalizando a pergunta diretriz, bem como os objetivos da pesquisa, foi preciso construir um “modelo”[18] para analisar os problemas e os modelos propostos que precederam o desenvolvimento do cálculo, tomando como referência os pressupostos teóricos da modelagem matemática, conforme vêm sendo discutidos nas pesquisas atuais. Para tanto, me apropriei dos esquemas de Edwards & Hamsom (1990) e Bassanezi (2002), nos quais estão descritos os procedimentos ou caminhos em um trabalho de modelagem, e do esquema proposto por Mendes (2002, 2003)[19] para abordar como muitas vezes historicamente um conceito se desenvolve e se institucionaliza. Com base na interpolação desses esquemas é que surgiu o fluxograma a seguir:

---

[18] Aqui utilizo a palavra modelo para me referir a esquema, perspectiva de análise dos modelos matemáticos estudados.
[19] Os esquemas de Edwards & Hamsom, Bassanezi e Mendes foram detalhados no capítulo anterior.

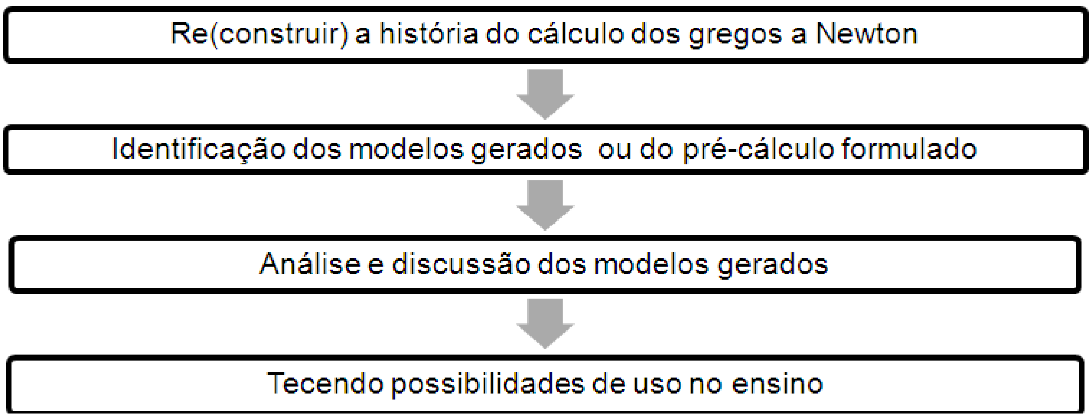


Fluxograma 13 – Esquema para análise e discussão dos modelos que antecederam o desenvolvimento do cálculo newtoniano.

Com essa perspectiva metodológica aqui delineada, empenhar-me-ei em identificar na história do cálculo os problemas e os modelos gerados a partir de uma sequência cronológica, que se iniciou com os estudos dos gregos chegando até Newton, no século XVII. Com isso, viso mostrar que o desenvolvimento do cálculo foi um longo processo que atravessou séculos e envolveu gerações de cientistas. Também viso mostrar que na medida em que “novos olhares” recaíram sobre problemas já postos, e ao mesmo tempo o conhecimento matemático avançava, modelos mais elaborados iam sendo propostos, ou seja, o conhecimento matemático e o conhecimento científico sempre estiveram entrelaçados.

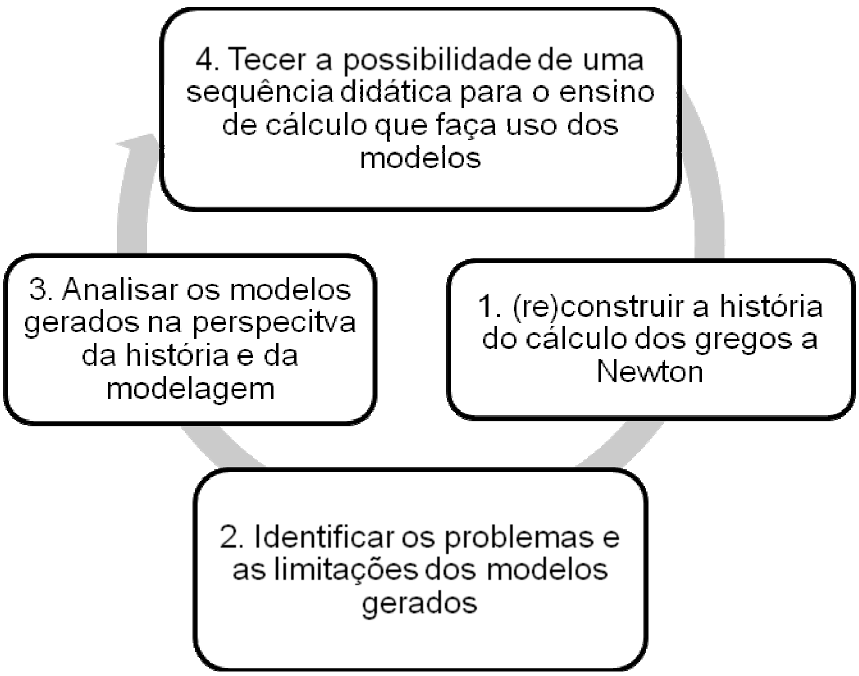
3.3 ARTICULANDO UMA POSSIBILIDADE DE USO NO ENSINO DE CÁLCULO

No geral, toda pesquisa visa a um resultado prático que vai além de considerações teóricas, especialmente quando são pesquisas voltadas para o ensino. Sendo assim, um dos objetivos desta pesquisa é propor uma sequência didática que possa ser utilizada no ensino de cálculo, tomando por base toda a construção e discussão delineada na seção anterior. Essas atividades serão, portanto, os resultados ou o produto desta pesquisa. Como isso será feito? Qual é minha proposta? Se observarmos o que veio sendo proposto até agora, é possível identificar as seguintes etapas:



Fluxograma 14 – Sequência metodológica da pesquisa.

Fechando o ciclo da pesquisa, vem a sugestão de atividades para o ensino inicial de cálculo (ou pré-cálculo) a partir dos problemas geradores e dos modelos propostos. Com isso, espero atingir os objetivos deste estudo e, ao final do trabalho, apresentar a seguinte configuração:



Fluxograma 15 – Ciclo metodológico da pesquisa.

Além isso, propondo essa sequência didática, espero contribuir com uma perspectiva de ensino-aprendizagem de cálculo que considera a história, em especial os problemas e modelos gerados, como elementos importantes para a construção de um conhecimento sólido e crítico. Também viso, de certo modo, questionar a forma como o cálculo é normalmente ensinado, ou seja, considerando-o apenas a partir das proposições de Newton e Leibniz (também exposto como um conjunto de teoremas e regras), desconsiderando-se todo o processo histórico envolvido nesse processo construtivo.

De acordo com os historiadores da matemática, sobretudo aqueles que têm devotado seus estudos ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral (BARON, 1987; BOYER, 1959), esse desenvolvimento não transcorreu de forma linear. Ao contrário, seguiu um caminho longo e irregular que se estendeu dos estudos filosóficos dos gregos, passando pelas demonstrações clássicas de Arquimedes e se estendeu até o século XVII. Além disso, é coerente afirmar que não só a Matemática contribuiu nessa caminhada, mas sim que outras áreas do conhecimento também contribuíram para esse desenvolvimento.

Nesse sentido é que defendo a história do cálculo como sendo também uma história de construção de modelos que visavam ser a solução para problemas de naturezas diversas. Entretanto, conforme está no Fluxograma 2, três grandes áreas influenciaram direta ou indiretamente esse desenvolvimento, pois propiciaram problemas e modelos. Alguns problemas ficaram em aberto, ou sua resolução não foi aceita como definitiva. Assim, abriam para novas questões e novas soluções. Esse debate atravessou séculos e envolveu dezenas de filósofos da natureza e matemáticos.

Vale ressaltar que essas três grandes áreas em muitos momentos estiveram articuladas, pois resolver um problema proposto por uma requeria o uso da outra. Desse modo, o interesse dos cientistas da natureza que buscavam compreender o funcionamento desta e explicá-la em termos físicos e analíticos, também não estava restrito a uma área. Eles buscavam ter uma visão do todo, claro, considerando o conhecimento científico e matemático disponível em cada época. Mas, por outro lado, se não havia um conhecimento suficientemente estruturado para responder a determinadas questões, isso era motivo para a proposição de novas teorias.

Portanto, é possível fazer um paralelo com as ideias de Bassanezi (2002) e Mendes (2003), anteriormente expostas, afirmando que se constituía em um processo cíclico, ou seja, um novo problema, depois de resolvido, gerava um modelo, que poderia ser provisório ou definitivo, mas suficiente para gerar uma nova teoria. Uma nova teoria possibilitava a proposição de novos problemas, novamente questões em aberto. Assim, o conhecimento é construído de forma cíclica e dinâmica. Seguindo a linha do tempo, muitos conceitos e leis matemáticas hoje estabelecidos e de uso corrente nas ciências, foram edificados de acordo com esse processo cíclico. É o caso do Cálculo Diferencial e Integral.

Retomando como as três grandes áreas *Astronomia, Geometria e Movimento/Mecânica* contribuíram com o desenvolvimento do cálculo, percebemos que os problemas por elas alavancados foram cruciais, pois permitiram um constante “movimento” em busca do ainda não explicado, uma busca incessante para desvendar os mistérios da natureza, expressando-a por meio de um modelo matemático, ou seja, leis universais que estivessem além de previsões místicas e deuses inatingíveis. Desde as primeiras especulações dos gregos jônicos, por volta do século VI a.C. até os dias de Newton, um longo caminho foi percorrido para chegar a uma definição mais precisa do que hoje entendemos como cálculo diferencial.

Por exemplo, a Astronomia sempre despertou o interesse dos observadores curiosos, atentos ao movimento do Sol, da Lua, dos planetas e das estrelas. Esses observadores curiosos se inquietaram com a imensidão e os mistérios do universo e se indagaram: o que existe além das estrelas? Qual o lugar da terra e do homem no universo? Sendo a Astronomia uma das mais antigas ciências, permitiu estudos criteriosos, gerando muitas explicações e modelos. Para chegar a essas explicações e modelos, os pesquisadores precisaram desenvolver e aperfeiçoar instrumentos de medida, ampliar seus conhecimentos sobre a geometria, ajudar a criar e consolidar outros campos da matemática, como foi o caso da trigonometria.

A Geometria também serviu para fornecer explicações de natureza prática a partir de necessidades imediatas do dia-a-dia, desde tempos remotos, tais como a medição de áreas e construções de todo o tipo. Seu estudo foi fundamental para o desenvolvimento das sociedades humanas e da matemática em particular. A mecânica e o movimento também foram de fundamental importância para compreender e explicar fenômenos simples e complexos, tais como uma pedra lançada para o alto, uma folha que cai de uma árvore, os funcionamentos de aparatos usados nos meios de transporte, desde a invenção da roda, a construção de instrumentos bélicos e de navegação. Enfim, de vários modos essas áreas estiveram articuladas e foram determinantes para o desenvolvimento das sociedades humanas.

Em especial para o desenvolvimento do cálculo, podemos destacar que:

A Astronomia contribuiu com os modelos gerados para a explicação do universo, a compreensão do Sistema Solar, a posição da Terra e dos demais planetas nesse sistema. As discussões em torno do modelo geocêntrico e heliocêntrico, os movimentos de rotação da Terra e dos planetas, a observação das estrelas. Assim, direta ou indiretamente, o estudo da astronomia, como um campo de interesse de uma legião de cientistas, atravessou séculos e trouxe contribuições inestimáveis para o desenvolvimento científico e da matemática, em especial para o desenvolvimento do cálculo.

A Geometria – Para os gregos antigos, que tinham como meta o estudo da natureza, era evidente que os princípios da geometria estavam representados na estrutura completa do universo. Dessa forma, o estudo do espaço e das figuras espaciais contribuiu de forma efetiva para a representação da natureza. Para tanto, inúmeros modelos geométricos foram propostos como sendo a representação do universo. A geometria foi, portanto, uma aliada constante da astronomia.

Em particular, para o desenvolvimento do cálculo, foi importante o estudo sobre áreas e volumes, sobretudo, obter o volume de uma figura não-regular tomando por base um volume já conhecido. O passo inicial consistiu em resolver os problemas sobre área e volume reduzindo-os a um modelo algébrico conhecido. Historicamente, o problema geométrico e o modelo algébrico gerado exerceram papel central no desenvolvimento do cálculo. A diferenciação desenvolveu-se em consonância com os problemas de construção de tangentes a curvas. Se uma curva representa a trajetória de um corpo em movimento, então *a tangente dá a direção do movimento num determinado instante*. A integração desenvolveu-se a partir de problemas de *quadraturas de curvas*. Isto é, determinação da área de regiões limitadas por curvas. Outros problemas geométricos, tais como a determinação de comprimentos de curvas, podiam ser todos reduzidos a quadraturas e resolvidos por cálculo integral (BARON, 1987; WUSSING, 1998).

Os problemas de quadraturas e tangentes foram estudados separadamente durante séculos, só sendo relacionados no século XVII. Para o desenvolvimento do cálculo, os **Problemas e Modelos da Geometria** são tangentes a curvas (por exemplo: trajetória de um corpo em movimento); curvaturas (medidas de comprimento, área e volumes).

Mecânica e Movimento – contribuíram com problemas envolvendo velocidade e trajetória dos corpos em movimento. Foram imprescindíveis para o desenvolvimento dos meios de transporte, da navegação, construção de instrumentos bélicos, agrícolas e tantos outros. Desse modo, pôr ou cessar o movimento de um corpo que se desloca em uma determinada trajetória necessitou de um conhecimento sobre as leis do movimento que, por sua vez, possibilitou a construção de modelos matemáticos e, consequentemente, contribuiu para gerar conhecimento matemático. Portanto, compreender e estabelecer as leis que regem o movimento dos corpos, seja no âmbito da Terra, seja fora dela, sempre atraiu o interesse dos cientistas. Assim, mecânica e movimento foram de importância fundamental para o desenvolvimento científico e da matemática, em particular do cálculo.

Minha meta nos próximos capítulos é contar (ou ressignificar), conforme já especifiquei em momentos anteriores, a história do cálculo como uma história de construção de modelos, mostrando a contribuição de cada uma dessas áreas, seguindo a “linha” do tempo que remonta da antiga Grécia até o século XVII com os trabalhos de Isaac Newton. Convido a todos para realizarem comigo essa viagem no tempo.

Capítulo 4

AS DESTREZAS DOS GREGOS E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA O DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO

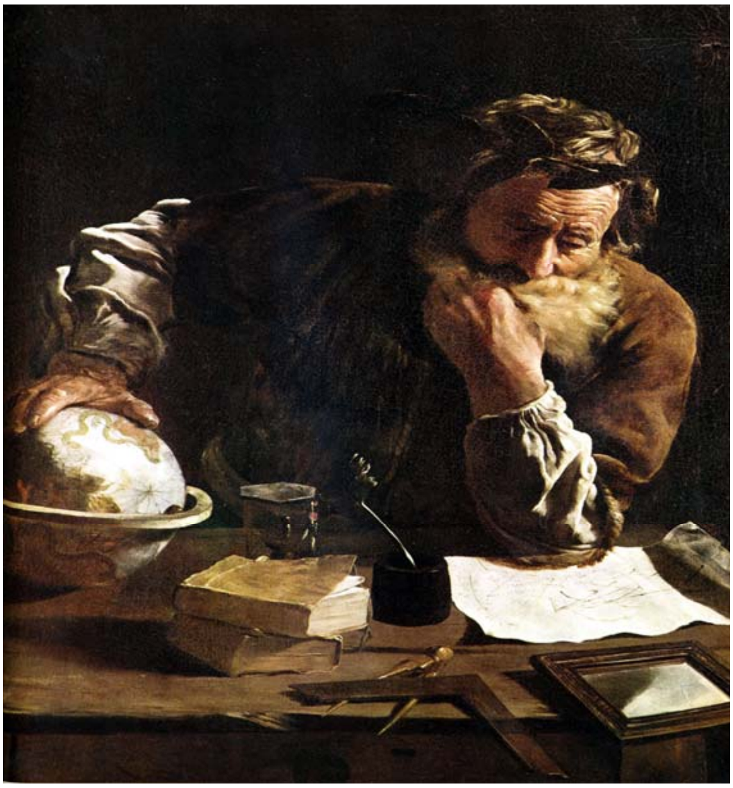


Figura 2 Arquimedes de Siracusa, 1620. Óleo sobre tela de Domenico Fetti (Disponível em: <http://pt.wikiquote.org/wiki/Arquimedes>. Acesso em: 3 maio

Neste capítulo, faço uma abordagem sobre o desenvolvimento da ciência grega e apresento as contribuições para o desenvolvimento do cálculo, resgatando o que foi possível para os gregos edificarem e os problemas que ficaram abertos para a história, só totalmente elucidados séculos mais tarde.

4.1 COMPREENDENDO OS CÉUS E A NATUREZA DAS COISAS: UM DESFILE DE MODELOS DOS GREGOS ANTIGOS

4.1.1 O nascimento da Astronomia como ciência

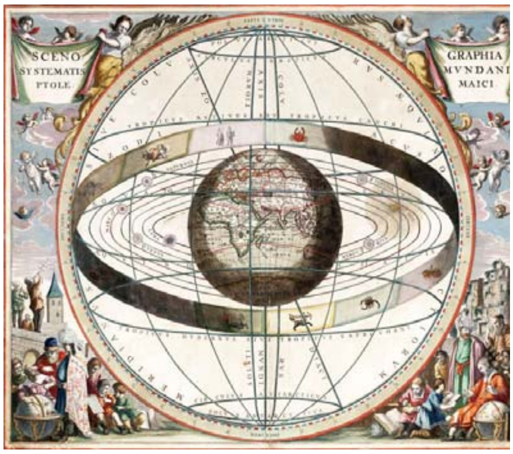
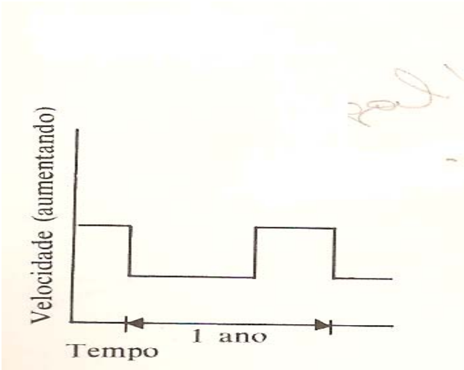


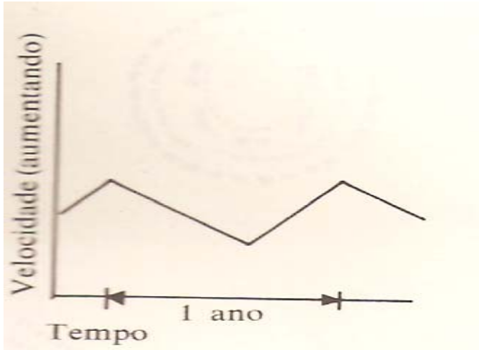
Figura 3 – Representação artística do modelo geocêntrico de Ptolomeu, no ano de 1600 (Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Cellarius_ptolemaic_system_c2.jpg>. Acesso em: 3 maio 2010.)

Ao falar de Astronomia como ciência, é certo afirmar que foram os gregos os primeiros a começar a teorizar sobre a forma e o início do nosso mundo. Entretanto, é certo afirmar também que os conhecimentos astronômicos dos antigos gregos tiveram por base as observações realizadas pelos babilônios e egípcios.

Assim como na história da matemática, os primeiros vestígios de observações dos fenômenos do céu e da terra, bem como algumas leis que regem o universo são atribuídos a esses povos. Entre outras coisas, foram os babilônios os primeiros a estabelecerem um calendário e a prever eclipses do Sol e da Lua. Segundo Ronan (1983), os babilônios, ainda na época dos caldeus, realizaram uma série de observações da Lua e dos planetas. Apesar de não teorizarem sobre os planetas, construíram tabelas detalhadas de movimentos planetários, de modo que podiam prever movimentos passados e futuros. Para fazer suas tabelas, os babilônios se utilizaram de aritmética, que os auxiliou a calcular as velocidades variáveis com que os planetas se moviam no céu. Esse método pode ser mais bem compreendido graficamente, conforme pode ser visto nas figuras 4.a e 4.b, a seguir:



4.a – Movimento do Sol pelo céu, visão mais antiga, proposta pelos caldeus.



4.b - Movimento do Sol pelo céu, visão modificada, posteriormente, de acordo com novas observações.

Figura 4 – Movimento Solar visão dos Babilônios (Fonte: RONAN, Colin A. *História Ilustrada da Ciência*. Universidade de Cambrigde. 1983. V.I. p. 51, tradução Jorge Eneias Fortes.

As primeiras tentativas de calcular os movimentos do Sol, realizadas pelos babilônios, por exemplo, basearam-se na suposição de que ele tinha duas velocidades: maior no inverno e menor no verão (Figura 4.a). Depois, a partir de novas observações, simplificaram bastante seus cálculos (Figura 4.b). “Essas “funções de ziguezague” foram elaboradas matematicamente, usando a aritmética para o Sol, para a Lua e os planetas. Essa descoberta representou algo novo e verdadeiramente científico, só seria retomada bem mais tarde, na Europa ocidental” (RONAN, 1983. V.I, p. 51).

Coube aos egípcios fixar as grandes constelações e identificar os cinco primeiros planetas visíveis a olho nu: Mercúrio, Marte, Vênus, Júpiter e Saturno. Os conhecimentos astronômicos dos egípcios e babilônios também visavam a atender as necessidades imediatas de sobrevivência, uma vez que lhes possibilitavam fazer previsões para escolher a época certa para o plantio e para a colheita, bem como se protegerem de catástrofes naturais.

Portanto, a partir desses conhecimentos iniciais obtidos do contato com babilônios e egípcios, os gregos começaram a fazer observação sistemática dos céus, fazer previsões, fornecer explicações lógicas, fornecer modelos do universo com cálculos aritméticos e representações geométricas. Sendo assim, pode-se afirmar que foram os gregos que deram à Astronomia um caráter científico. Nas palavras de Kline[20]:

> Os gregos não foram somente os primeiros com audácia suficiente para conceber uma lei e uma ordem ao caos dos fenômenos, foram também os primeiros com gênio suficiente para descobrir alguns dos caminhos (modos) sob os quais a natureza aparentemente se ajusta. Assim, eles buscaram e encontraram o plano subjacente ao maior espetáculo que ao homem é dado contemplar, o movimento do Sol brilhante, as mudanças de fases da Lua multicolor, o brilho dos planetas, o vasto panorama de luzes da abóboda das estrelas e o aparentemente milagroso eclipse do Sol e da Lua. (1985, p. 10).

Para Kline, foram os filósofos jônicos do século VI. a.C. que iniciaram o estudo sistemático dos céus, visando obter uma explicação racional da natureza e do funcionamento do universo.

Segundo, ainda, alguns historiadores das ciências (KLINE, 1985; DORCE, 2006[21]; RONAN, 1987), na antiguidade grega três nomes se destacaram. O primeiro, Tales de Mileto (aproximadamente século VII a.C.), a quem entre tantas coisas é atribuído o primeiro estudo sistemático dos eclipses lunares desde o ano de 747 a.C., o que o levou a prever o eclipse ocorrido em 28 de maio de 585 a.C. O segundo, Anaximandro (século VI a.C.), a quem se atribui ter sido o primeiro a utilizar um gnomo para medir as horas do dia e o primeiro a estabelecer medidas concretas do universo. Anaximandro afirmou que a Terra era o centro de tudo e flutuava devido à equidistância com todas as coisas. O Sol era um grande anel cujo raio era vinte e sete vezes o raio da Terra; o mesmo formato tinha a Lua, cujo raio era dezenove vezes o raio da Terra. Também é atribuído a Anaximandro o desenho de um mapa da Terra, contendo as terras habitadas e as não habitadas[22]. Fechando esse ciclo, temos o terceiro filósofo grego Anaxímenes de Mileto (século VI a.C.), para quem a Terra flutuava no ar e o Sol, a Lua e as estrelas eram feitos de fogo. Esses três filósofos gregos foram os primeiros a teorizar sobre o início do nosso mundo.

---

[20] Tradução nossa da primeira edição em espanhol, conforme especificado nas referências bibliográficas.
[21] Segundo Dorce, trata-se de estudos até o seculo VI a.C e não há registros escritos dessa época, apenas referências feitas bem depois desse período, nem mesmo há certezas da existência desses personagens.
[22] Antes dele, os egípcios já haviam proposto o desenho de um mapa contendo apenas as terras habitadas.

De acordo com Kline (1985), os filósofos jônicos empreenderam uma série de audaciosas especulações, conjecturas atrevidas e brilhantes intuições resultantes de extensas e cuidadosas investigações científicas. Desse modo, puderam traçar um panorama mais completo do universo desfazendo as antigas explicações místicas baseadas na mitologia, nos deuses, nos demônios, anjos e demais agentes mitológicos, substituindo-as por explicações objetivas e materialistas baseadas na investigação e nas explicações racionais. Para Kline:

> O passo decisivo para desvendamento do mistério, do misticismo e do caos aparente nos acontecimentos da natureza e para sua substituição por um modelo compreensível foi a aplicação da matemática. Os gregos desenvolveram neste caso uma intuição tão fértil e original como o descobrimento da força da razão. O universo obedece a um modelo matemático e mediante a matemática o homem pode descobrir esse modelo. (1985, p. 11).

Entretanto, antes que apresentemos esse modelo, e para continuarmos compreendendo as ideias de mundo que culminaram com o legado de Ptolomeu à Astronomia, reconhecidamente o maior astrônomo da antiguidade, é preciso evidenciar muitos outros personagens e seus feitos. Dentre eles, destacamos os pitagóricos, escola dirigida por Pitágoras de Samos (aproximadamente 550 a.C.)[23]. Para alguns historiadores gregos foram os pitagóricos (ou o próprio Pitágoras) os primeiros a atribuírem um modelo geométrico para a Terra, afirmando que ela possuía forma esférica. A essa escola é ainda atribuída a constatação de que a estrela matutina e a vespertina é a mesma: Vênus. Também podem ter sido os pitagóricos os primeiros a

---

[23] Segundo Dorce, bem como outros historiadores das ciências, sobretudo os especialistas em história da ciência grega, há muitas perguntas sem respostas sobre a obra e a vida desse personagem. Muitos dos feitos atribuídos a ele podem ser méritos de seus seguidores. Portanto, o que há dito sobre ele são apenas especulações, uma vez que não existe registro da época e, sim, comentários feitos por outros filósofos gregos, muito tempo depois da sua morte, por exemplo, o feito de ter sido o primeiro a afirmar que a Terra é esférica também é atribuído a Parmênides, discípulo de Pitágoras, segundo o historiador grego Teofásio. O grande legado de Pitágoras ou da escola pitagórica foi a busca incessante para decifrar os números, inclusive mostrando que as leis do universo também eram regidas pela beleza e harmonia dos números.

afirmar que “os planetas têm movimento próprio e não seguem a rotação diária das estrelas fixas” (DORCE, 2006, p. 14).

De acordo com Dorce (2006), se foi Pitágoras ou seus discípulos, parece certo que a partir da segunda metade do século VI a.C., os gregos começaram a se aproximar da astronomia atual. Perceberam que a Lua não tinha luz própria, era iluminada pelo Sol e, entre os dois, situavam-se os cinco planetas visíveis do resto das estrelas por seu movimento. Parece certo também que “o primeiro modelo pitagórico de mundo era geocêntrico” (2006, p. 15).

Já para Kline (1985), o que chamou a atenção em relação aos pitagóricos é o fato de que para eles os fenômenos mais diversos do ponto de vista qualitativo apresentavam idênticas propriedades matemáticas. Assim, as propriedades matemáticas deviam se constituir na essência dos fenômenos. De modo concreto, os pitagóricos encontraram essa essência no número e nas relações numéricas[24]. O número era o elemento básico em sua explicação da natureza. “Todos os objetos eram feitos de partículas elementares de matéria ‘*unidades de existência’* combinadas de acordo com as distintas figuras geométricas... o número era a matéria e a forma do universo” (KLINE, 1985, p. 11). Portanto, uma explicação para os fenômenos do universo só poderia ser possível com a ajuda dos números.

Dorce (2006), fazendo menção à obra aristotélica *Sobre o Céu,* diz que é possível que a escola pitagórica tenha adotado um modelo no qual a Terra não estava no centro, mas que lá havia fogo, também de fogo eram constituído os limites superiores do universo. Nessa obra, apresenta a Terra como um astro que se movia em círculo ao redor de si mesma, produzindo dessa formas os dias e as noites. Ainda para Dorce, Pitágoras idealizou um mundo harmônico de acordo com a beleza dos números que tanto admirava; propôs cálculos aritméticos, estéticos aos seus olhos, para determinar que a distância da Terra ao Sol era o dobro da distância da Lua, a distância a Vênus era o triplo, a de Mercúrio o quádruplo e, assim, sucessivamente.

---

[24] - Na sequência do capítulo, abordaremos em maiores detalhes a escola pitagórica.

Ainda de acordo com Dorce, as primeiras referências astronômicas originais são encontradas nos diálogos de Platão (século IV a.C.). Neles, a Terra é mantida no centro do universo, a qual gira ao redor de si mesma diariamente. O universo, por sua vez, é revestido por uma capa esférica sobre a qual se assentam pequenos círculos nos quais estão as estrelas fixas, o Sol, a Lua e o resto dos planetas. Estes são então transportados pela rotação diária da Terra, e tendo suas trajetórias complementadas por um movimento circular contrário ao da rotação. Para o autor, uma comprovação disso está no diálogo de Fédon, no qual se pode ver claramente a convicção de Platão de que a Terra está no centro do universo. Nesse diálogo, lemos na tradução para o espanhol:

> "si la Tierra, siendo una esfera, está en medio de los cielos, no necesita (...) ningún tipo de fuerza que evite que caiga ya que la uniformidad de La sustancia Del cielo en todas sus partes y el o equilibrio de la Tierra en si misma, son suficientes para maternela". (DORCE, 2006, p. 15)[25].

A ordem com relação às distâncias da Terra se mantém iguais às pitagóricas: Lua, Sol, Vênus, Mercúrio, Marte, Júpiter e Saturno, "sendo que Vênus e Saturno acompanham o Sol em sua trajetória anual ao redor da Terra" (DORCE, 2006, p. 16). Em outro diálogo, o Timeo, Platão apresenta um preciso sistema harmônico baseado inteiramente em modelos matemáticos, distingue "eclíptica como um círculo inclinado em relação ao Equador" e segue as ideias pitagóricas em relação às distâncias dos astros à Terra. Essas distâncias são medidas em termos de progressões geométricas 1, 2, 4 e 8; 1, 3, 9 e 27. Desse modo, se a distância entre a Terra e a Lua é 1; entre a Terra e o Sol é 2, a Terra e Vênus, 3; a Mercúrio, 4; a Marte, 8; a Júpiter, 9, e a Saturno, 27.

Portanto, para Dorce, desde as ideias mais primitivas até aproximadamente o século IV a.C, vários modelos foram introduzidos e discutidos até que se tivesse um mais ou menos consistente. O importante a ressaltar é que os gregos, para além do seu misticismo religioso e seus deuses,

[25] - Se a Terra, sendo uma esfera, está no meio dos céus, não necessita (...) de nenhum tipo de força que evite que caia, já que a uniformidade da Sustentação do Céu em todas as suas partes e o equilíbrio da Terra em si mesma são suficientes para mantê-la [tradução nossa]..

conseguiram ir dando uma forma ao universo e acreditaram firmemente que a Terra ocupava o centro deste universo, e ao redor dela giravam a Lua e o Sol. Observavam que o Sol surgia no Oriente a cada manhã, descrevia uma trajetória mais ou menos circular e se punha no horizonte ocidental, o mesmo se dava com a Lua. Além disso, havia os cinco planetas perfeitamente visíveis e distinguíveis das estrelas fixas. Esses também giravam ao redor da Terra, cada um com um movimento de translação próprio.

Ainda na esteira das afirmações de Dorce (2006), a partir do século IV a.C., os gregos começaram a dar uma consistência física ao universo; o primeiro a se aventurar nessa tarefa foi Eudoxo (408-355 a.C.)[26], discípulo de Platão. Eudoxo, a partir das ideias platônicas, idealizou um universo formado por um sistema de esferas concêntricas para explicar o movimento do cosmos[27]. Mantém o modelo totalmente geocêntrico, sendo:

> Constituído de uma sucessão de esferas concêntricas (...) nas quais estavam dispostos os astros. Cada esfera tinha seu próprio polo de rotação, e, cada astro se situava no equador da mesma. Os polos de cada uma das esferas estavam situados sobre a esfera superior de modo que eram transportados em sua rotação. Assim, cada esfera não só tinha seu movimento particular como também se viam influenciados pelo movimento da esfera superior. (DORCE, 2006, p. 17, 18).

Portanto, em Dorce, vemos que Eudoxo previu em seu modelo que o número de total de esferas necessárias a esse sistema era de vinte e sete, e para as estrelas fixas, vinte e seis. O Sol e a Lua deviam seus movimentos a três esferas cada um, com polos e velocidades de rotação bem definidos. Enquanto que os planetas, para executarem seus movimentos, necessitavam de quatro esferas cada um.

---

[26] Mais adiante apresentaremos mais detalhes da vida e obra desse personagem.

[27] Tomamos conhecimento desse sistema por meio da Metafísica de Aristóteles, em *Sobre o Céu*, obra da qual só existem comentários, pois o original foi perdido.

4.1.2 Os modelos aristotélicos: astronomia e movimento

O pensamento cosmológico de Aristóteles forneceu as ideias básicas para os filósofos da Idade Média, uma vez que seu sistema de mundo atendia às necessidades, sobretudo da Igreja romana. Em a *Metafísica*[28], Aristóteles descreve o modelo de Eudoxo e, embora gostando desse modelo, decidiu melhorá-lo. Discordou do fato de que se um planeta tinha suas esferas dentro do outro, o movimento do primeiro não seria afetado pelo segundo. Para contestar esses movimentos, deduziu um sistema de esferas elevando o número delas para cinquenta e cinco, contra as vinte e sete de Eudoxo. As esferas de Aristóteles eram concêntricas em relação à Terra. Esses orbes concêntricos, tendo a Terra como centro, não conseguiam explicar as variações observadas nas distâncias dos planetas. Esses problemas só foram parcialmente resolvidos por Ptolomeu com seus modelos geométricos de excêntricos e epicíclicos (GRANT, 2002).

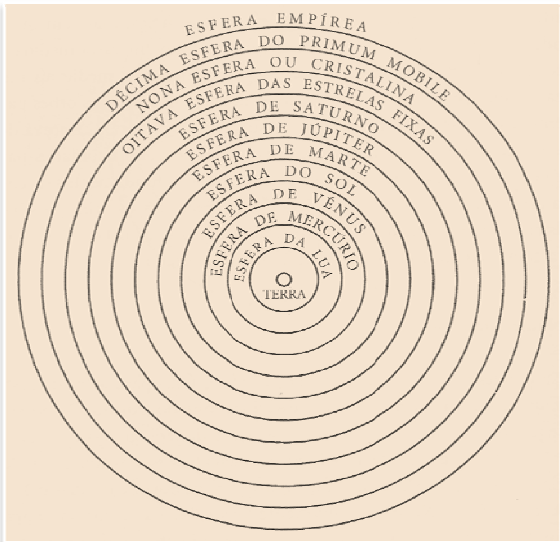


Figura 5 – Uma representação esquemática típica das esferas totais. (Fonte: GRANT, 2002, p.126; figura-5).

Aristóteles não propôs nenhum modelo geométrico ou matemático para descrever seu sistema cosmológico. Esse era apenas descritivo. Entretanto, um modelo de esferas totais, como mostra a figura 5 (ao lado), foi proposto, não se sabe exatamente quando, para entendermos geometricamente o pensamento aristotélico sobre o cosmo.

[28] É nessa obra onde se encontram as bases do pensamento cosmológico de Aristóteles. Além dessa, o pensamento cosmológico de Aristóteles pode ser encontrado em outras obras suas, tais como Sobre os Céus, Física e Meteorologia.

Seguindo as ideias aristotélicas do universo (DORCE, 2006; GRANT, 2002; RONAN, 1987), encontramos que Aristóteles dividiu o universo em dois mundos: o sublunar ou terrestre – que se estendia desde o centro da Terra até a esfera lunar e, a supralunar ou celeste – que abarcava tudo, desde a Lua até as estrelas fixas; com a órbita da Lua servindo de fronteira entre esses dois mundos. No sublunar ou terrestre, a observação e a experiência mostravam que a mudança ocorria de forma incessante, era um mundo governado pelos elementos simples e com movimentos retilíneos, no qual a água tendia para baixo, para o centro da Terra, enquanto que o ar e o fogo iam para cima. Era um mundo mutante e corruptível, onde não existia a perfeição

Enquanto que no mundo supralunar ou celeste, a mudança era quase imperceptível; era o mundo da perfeição, onde o único movimento aceitável era o circular uniforme, próprio os elementos imutáveis e perfeitos e formava as estrelas que ele chamou de "Éter". Desse modo, combinados, esses dois movimentos eram os únicos concebíveis para o universo.

Assim, vamos abrir um parênteses para conhecer um pouco mais sobre a ciência do movimento de Aristóteles, conforme Grant (2002); Ronan (1987) e Vaquero (2003). Para Aristóteles havia princípios particulares na mecânica a partir dos quais se deduziam e se demonstravam diferentes ideias sobre o movimento. Esses movimentos, segundo meu entendimento, se resumem em:

- Todo movimento – *natural* como uma pedra que cai do alto ou *violento* como um projétil disparado de um canhão – necessita de um motor, ou seja, algo que o mova.
- Os movimentos naturais são verticais no mundo terrestre (sublunar), e circulares no mundo celeste (supralunar). Por isso, os planetas que estão no mundo celeste se movem em círculos.
- O movimento violento (não natural) é causado pela ação contínua de um motor. Por exemplo, uma cadeira sendo arrastada dentro de uma casa, o movimento quando a pessoa que a arrasta para.
- O vácuo é impossível, não é possível existir na natureza.

As ideias aristotélicas eram expressas apenas em linguagem natural sem o uso de equação matemática. Entretanto, se fôssemos expressar algumas dessas ideias, especialmente sobre o movimento, por meio de fórmulas matemáticas (modelos), chegaríamos aos seguintes modelos:

> (...)$F = mv$, onde m é a massa do objeto, F a força que exercemos sobre ele e v, a velocidade que adquire. Assim, para Aristóteles "a velocidade de um móvel é proporcional à força exercida sobre ele" (...). Outras vezes a lei do movimento de Aristóteles foi escrita como: $k\frac{F}{R}$, onde K é uma constante, F a força resistente ao meio. Essa equação indica que a velocidade de um corpo era proporcional à força que exerce sobre ele e que a velocidade do corpo depende da resistência que se poria ao meio quando o movimento estava sendo realizado. Se o meio oferecia muita resistência, a velocidade era menor. Se o meio oferecia pouca resistência, a velocidade seria maior. Além disso, na ideia de Aristóteles, se a resistência fosse maior que a força, o corpo não se movia. Assim, para haver movimento *F>R,* ou seja, a força deveria ser maior que a resistência (...) (VAQUERO, 2003, p. 56)

É fato que a física aristotélica não se parece em nada com a que conhecemos hoje. As ideias eram expressas apenas em linguagem natural sem o uso de equação matemática. Entretanto, foi a partir dela que se deu início ao estudo do movimento de forma mais concreta. Essas premissas sobre movimento de Aristóteles só foram refutadas completamente séculos mais tarde, por Galileu Galilei.

Retomemos novamente a visão aristotélica sobre o universo. A teoria aristotélica do universo, bem como das de seus predecessores gregos, prevaleceu sobre o mundo ocidental até o século XVII, quando Kepler e Galileu[29] deram um novo rumo à Astronomia europeia.

O modelo de Eudoxo e as reformulações propostas por Aristóteles não sobreviveram sem críticas, uma vez que Eudoxo nunca explicou precisamente como seria o funcionamento físico de toda essa engrenagem de esferas. Também manteve invariável a distância da Terra a cada um dos planetas. No entanto, com base na observação, era perceptível que o brilho a cada noite era

---

[29] Sobre os feitos desses dois cientistas nos ocuparemos mais adiante.

diferente, parecendo estar ora mais próximo, ora mais distante e, de acordo com a estação do ano, a essa altura o período de cada estação já era perfeitamente identificado pelos astrônomos, essa mudança era ainda mais nítida.

Para solucionar o problema, entra em cena outro astrônomo, Apolônio de Perga (265-190 a.C.)[30], que introduz no sistema os *epiciclos e deferentes.* Enquanto Eudoxo utilizou os esquemas das esferas concêntricas, Apolônio propôs como modelo alternativo o movimento epiciclo-deferente. Nesse modelo, assumia-se que um planeta P se move uniformemente ao redor de um pequeno círculo (o epiciclo), cujo centro é o Sol (S), por sua vez, o pequeno círculo se move uniformemente ao redor de um círculo maior (o deferente) com centro na Terra (T), conforme a figura 6:

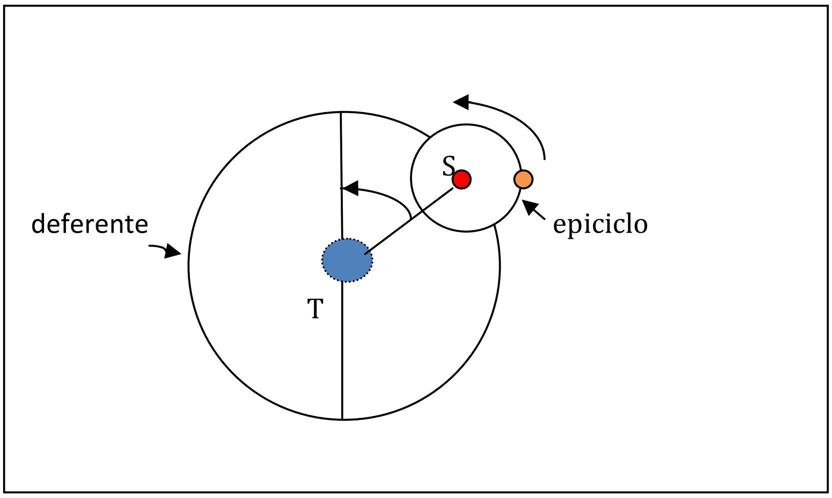


Figura 6 - Modelo Epiciclo-deferente (DORCE. 2003, p.19.).

Não é possível e nem necessário detalhar aqui todas as contribuições e respectivos personagens que contribuíram para o desenvolvimento da Astronomia. Preocupei-me apenas apresentar um panorama geral, conforme exposto em Dorce, do que foi esse desenvolvimento, com algumas das teorias

[30] Sobre este personagem pouco se sabe sobre sua vida, parece ter vivido entre 262-190 a.C, entretanto junto com Arquimedes e Euclides é considerado um dos grandes matemáticos gregos da Idade Helenística. Deve-se a esses três grandes matemáticos gregos a chamada "Idade Áurea" da matemática grega. Apolônio nasceu em Perga, mas parece ter estudado e trabalhado em Alenxandria, principal centro cultural e científico do Período helenístico. Dentre as inúmeras contribuições de Apolônio para a matemática destacamos os oito livros sobre cônicas, além de *Lugares Planos*, *Dividir em uma Razão, Cortar uma área, Sobre Secção determinada.* Sendo as Cônicas sua grande obra matemática. Para mais detalhes sobre a obra e vida deste personagem consultar Boyer (1996).

e modelos propostos para a explicação do universo, bem como os personagens que de alguma forma contribuíram com esse desenvolvimento, desde o século VI a.C. até Ptolomeu. Esse pensador grego, no século II d.C, ajudou a construir um enorme avanço na Astronomia, especialmente pelos modelos matemáticos dados, o que resultou em significativas contribuições para a própria matemática, sobretudo para a trigonometria. Daí ser considerado o maior astrônomo da antiguidade. Sobre ele trataremos em mais detalhes no próximo capítulo desta tese.

4.2 AS CONTRIBUIÇÕES DA MATEMÁTICA GREGA PARA O DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO

4.2.1 Modelos geométricos e o início da matemática grega

As contribuições da geometria grega para o desenvolvimentos do cálculo estão gravadas, sobretudo, nos trabalhos de Eudoxo de Cnido (408-355?) e Arquimedes, envolvendo o método da exaustão. Entretanto, é impossível nos remetermos diretamente aos trabalhos desses dois matemáticos da antiguidade, sem antes compreendermos o próprio desenvolvimento da geometria e da Matemática grega.

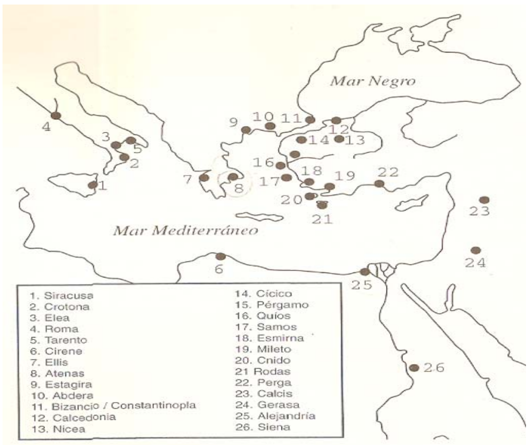


Figura 7 - A expansão dos gregos pelo Mediterrâneo e as principais cidades em que trabalharam os Matemáticos gregos. (HERRERA, 2003, p.5).

Vimos nas seções anteriores deste capítulo que os gregos buscaram dar uma explicação racional para os fenômenos da natureza e para compreender o funcionamento do universo. Sem dúvida, não o fizeram sem recorrer à matemática. Ao observar a natureza, o homem se deu conta das formas geométricas e passou a reproduzi-las nas construções, nas vestimentas, nos artefatos de trabalho, nos meios de transporte, nas peças de arte, etc. Também observou que a forma geométrica era determinante para facilitar a vida diária.

Sendo assim, começou a utilizá-la a seu favor para determinar limites, áreas aráveis, enfim, a geometria acompanha o desenvolvimento da humanidade e desenvolveu-se junto com ela.

Contudo, podemos afirmar que a geometria não foi uma invenção dos gregos. As primeiras noções de cálculos geométricos envolvendo áreas de regiões planas de que temos conhecimento se devem aos povos babilônios, egípcios, hindus e chineses. Os cálculos realizados de forma elementar serviam para atender às necessidades do dia-a-dia do homem comum. Eram principalmente para cálculos topográficos empíricos.

Entretanto, por volta do século VII a.C., a Grécia antiga, mais precisamente com os filósofos jônicos, desponta como principal polo científico do mundo e marca o início da matemática grega e do nascimento de uma legião de matemáticos e filósofos que vão influenciar profundamente o desenvolvimento matemático e científico a partir de então. Conforme já mencionado, o primeiro nome que merece destaque é Tales de Mileto (aproximadamente 624-547 a.C.).

Com seus trabalhos em Geometria, se firmou como um inovador no estudo dessa área. Introduziu os primeiros métodos de demonstração teórica para um modelo geométrico. Calculou a altura de uma pirâmide do Egito comparando sua sombra com a sombra de um bastão. Para esse cálculo usou as propriedades envolvendo semelhança de triângulos. O que parece provável que já tivesse conhecimento de que triângulos semelhantes são proporcionais. Assim, muitos de seus conhecimentos podem ter sido adquiridos de seu contato com os egípcios.

Segundo Herrera (2003), por volta do ano 600 a.C, a Grécia ainda não tinha uma unidade política, sendo formada por cidades-estados independentes: Atenas, Corinto, Esparta, Mileto, Samos, Siracusa, etc.(conforme o mapa da Figura 4.1.1). Isso a tornou vulnerável aos constantes ataques de outros povos, estando sempre envolvida em guerras para defender seus territórios. Uma dessas guerras, contra os persas, durou meio século. Findado o conflito, Péricles[31] assume o poder em Atenas, governando a cidade por 30 anos, fazendo dela o principal centro cultural do mundo. Entretanto, enquanto os atenienses lutavam para se defender dos persas, no confronto que durou quase meio século, a ciência naquela cidade se viu interrompida, sendo transferida para o sul da atual Itália, conforme veremos a seguir.

4.2.2 Modelos matemáticos na escola pitagórica: contribuições para a matemática e para o cálculo

Longe dali, ao sul da atual Itália, o destaque é para a escola pitagórica; alheia ao que acontecia, continuava desenvolvendo suas atividades normalmente e passa ser então o novo centro do saber. Como mencionado anteriormente, a escola fundada por Pitágoras de Samos[32] (aproximadamente 570-550 a.C.), guarda muitos mistérios, sendo considerada não apenas uma escola de matemáticos, filósofos e astrônomos, mas, sobretudo, uma seita que incluía ritos religiosos, atividades políticas, musicais e artísticas.

Em relação ao desenvolvimento da Matemática, do que chegou até nossos dias, sabe-se que os pitagóricos tinham fascinação pelos números e suas principais contribuições para a matemática estão relacionadas a eles. Por exemplo, as primeiras noções de quantidades "infinitamente pequenas" ou "indivisíveis" parecem vir deles. O número detinha papel central nessa escola, pois acreditavam que tudo no universo podia ser expresso em números. Atribuíam ao ponto o número *um*; à reta, o número *dois*; a uma superfície, o

---

[31] **Atenas na época de Péricles (**495-429 a.C) – de 490 a 470 a.C Atenas e Esparta uniram-se e derrotaram os persas. Terminada a guerra, Atenas transformou sua marinha de guerra em frota mercantil e se tornou uma das maiores cidades mercantis do mundo antigo com um importante porto marítimo, permitindo, assim, o encontro de muitos povos de diversos cultos e costumes. Essa nova condição de Atenas favoreceu que ela aos poucos se tornasse um grande centro de desenvolvimento da ciência; "a matemática florescia com a crescente complexidade do intercâmbio, e a astronomia, com a crescente audácia da navegação" (DURANT, 1996, p. 30). Nesse ínterim, Atenas foi governada por Péricles, um grande protetor das ciências e das artes. Sob seu governo, Atenas se transformou no maior centro cultural e artístico do mundo, pois trouxe para a cidade os maiores talentos reconhecidos em todas as áreas, provenientes de todas as cidades gregas, os quais encontraram ali o ambiente propício para o estudo e a investigação. Assim, Atenas se transformou na maior concentração de gênios do mundo antigo, situação que perdurou por quase 150 anos e formou gerações de célebres cientistas.

[32] Pitágoras tornou-se uma figura legendária: filósofo, profeta, sábio, místico e político. Há controvérsias sobre seus feitos, pois não há registros dessa época, apenas informações obtidas muito tempo depois, às vezes, séculos depois (BARON, 1985).

número *três,* e a um sólido, o *quatro.* “O somatório de pontos gerava retas, o de retas, superfícies e o de superfícies, sólidos; com os seus *um*, *dois*, *três* e *quatro* eles podiam construir o universo” (BARON, 1985, p. 16).

Os pitagóricos também revolucionaram a Geometria, uma vez que buscaram construir um sistema coerente onde todos os teoremas fossem deduzidos a partir de poucos axiomas bem definidos. Se os axiomas fossem verdadeiros, o seria também o restante das proposições. Os pitagóricos, ao proporem uma geometria logicamente coerente, deixaram a seus sucessores aberto o caminho para continuarem seus trabalhos. Tanto é verdade que, mais de um século e meio depois, Euclides[33] (325-265 a.C.), em os *Elementos*, criou um sistema lógico para a Geometria que nada mais foi do que uma revisão ampliada do sistema proposto pelos pitagóricos (HERRERA, 2003).

Sem dúvida, diante dos objetivos desta pesquisa, merece destaque a fascinação da escola pitagórica pelos números, em especial os trabalhos com os números figurados, ou seja, o uso de figuras para expressar números. Por exemplo, números triangulares, quadrados, pentagonais, e assim por diante. Além desses, os números lineares, números planos, números poligonais e números sólidos de todas as espécies. Os números figurados exerceram bastante influência sobre o estudo da matemática até o século XVII.

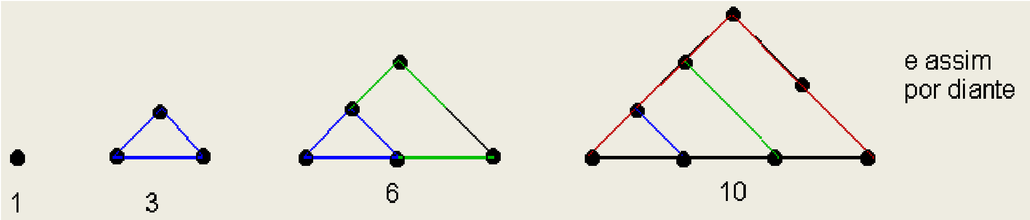
Segundo Baron, a melhor descrição histórica dos números figurados foi encontrada no livro *Introduction arithmetica,* de Nicômano de Gerasa (100 d.C). Parte deles[34] está como segue:

- *Números triangulares*

---

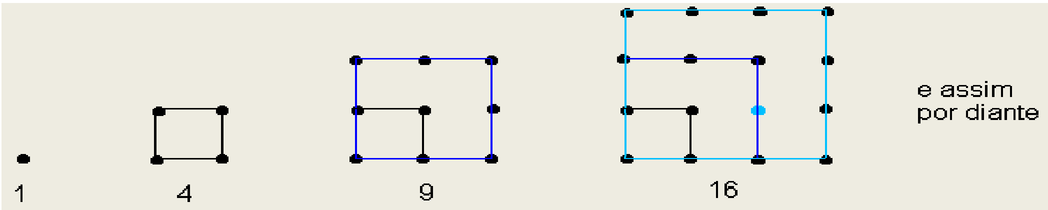
[33] De Euclides se sabe que viveu aproximadamente entre 325-265 a.C e que foi o primeiro diretor do departamento de matemática do Museu de Alexandria. Por volta do ano 300 a.C, já se encontrava nessa cidade e foi considerado um dos grandes gênios de sua época. Com certeza, não foi o mais original, todavia conseguiu recompilar e organizar todo o conhecimento matemático existente até então, cuja obra conhecemos como *Os Elementos.* Portanto, foi Euclides quem estabeleceu as bases firmes sobre as quais se construiu grande parte do edifício matemático posterior (HERRERA, 2003).

[34] EVES, H. Introdução à História da Matemática, 1997. p. 100-103.



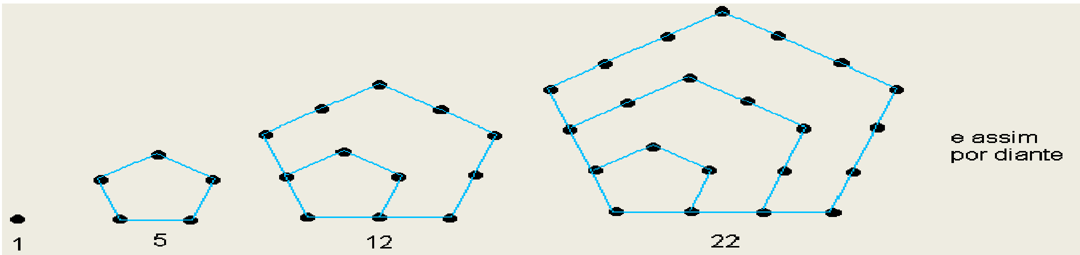
(EVES, 1997, 100)

- *Números quadrados*



(EVES, 1997, p. 100)

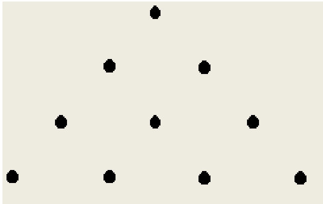
- *Números pentagonais*



(EVES, 1997, p.101)

De acordo com Eves (1997), muitos teoremas sobre os *números figurados* foram propostos. Os pitagóricos podem ter se encarregado disso, utilizando e provando alguns dos teoremas relativos a esses números, conforme veremos a seguir:

- Teorema I: *O número triangular T_n é igual à soma dos n primeiros inteiros positivos.*



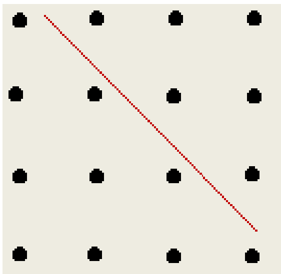
Numa notação moderna teremos:

- Teorema II: *Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos*.

Usando uma notação moderna:

$$S_{n=}n^2$$

Observamos ainda que um número quadrado na sua forma geométrica pode ser dividido como na figura abaixo.



A prova do teorema é dada algebricamente por:

"Seja o $n - ésimo$ número triangular T_n, dado pela soma da progressão aritmética, temos":

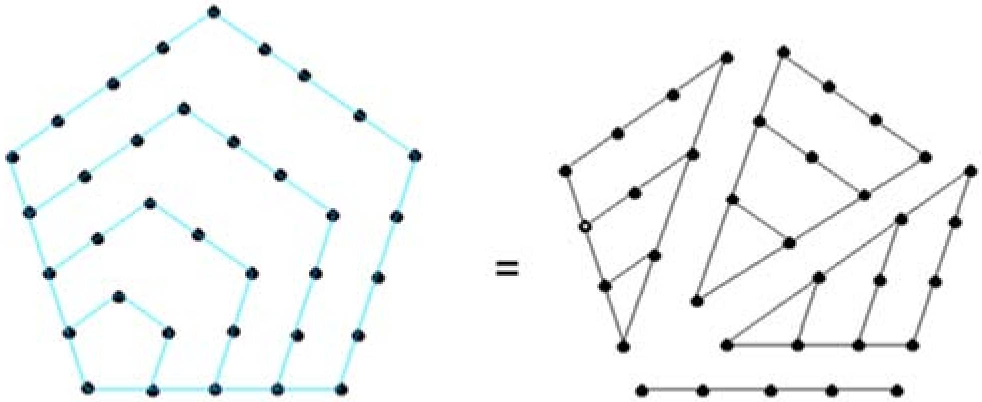
$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

"Seja também o $n - ésimo$ número quadrado S_n igual à n^2, temos":

$$S_n = n^2 = \frac{n \times (n+1)}{2} + \frac{n \times (n-1)}{2} = T_n + T_{n-1}$$

(BARON, 1985, p.16-17)

1. Teorema III: *O enésimo número pentagonal é igual a n mais três vezes o (n-1)-enésimo número triangular*.



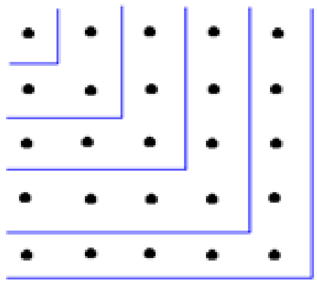
Prova algébrica:

"Seja o enésimo número pentagonal, P_n, dado pela soma de uma progressão aritmética", no qual temos:

$$P_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n \times (3n - 1)}{2} = n + \frac{(3n) \times (n - 1)}{2} = n + 3T_n$$

(EVES, 1997, p.101)

Teorema IV: *A soma dos n primeiros inteiros ímpares, começando com 1, é o quadrado de n*.



Calculando a soma da progressão aritmética, temos:

$$1 + 3 + 5 + (2n - 1) = \frac{n(2n)}{2} = n^2$$

O que demonstra o teorema.

(EVES, 1997, p.102)

De acordo com Baron (1985), é possível estender essas construções também para três dimensões, obtendo-se:

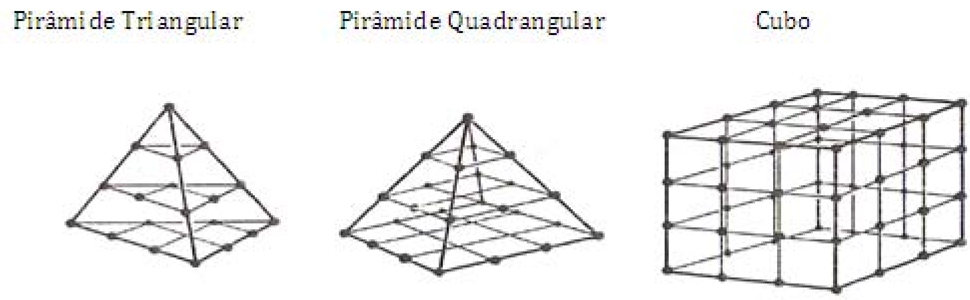


Figura 8 – Números figurados em três dimensões (BARON, 1985, V1, p.17)

Fazendo algumas convenções, é possível estabelecer algumas relações com esses sólidos, vejamos o que propõe Baron (1985, p.18):

Δ Para Pirâmide Triangular	$\square$ Para Pirâmide Quadrada	C Para Cubo
$\Delta_1 = 1$	$\square_1 = 1$	$C_1 = 1$
$\Delta_2 = 1 + 3 = 4$	$\square_2 = 1 + 4 = 5$	$C_2 = 2^3 = 8$
$\Delta_3 = 1 + 3 + 6 = 10$	$\square_3 = 1 + 4 + 9 = 14$	$C_3 = 3^3 = 27$
Δ_4	$\square_4 = 1 + 4 + 9 + 16$	$C_4 = 4^3 = 64$

Usando as notações aqui utilizadas, podemos obter a seguinte tabela:

N	T	S	P	Δ	□	*C*	E
1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	4	5	8	9
3	6	9	12	10	14	27	36
4	10	16	22	20	30	64	100
5	15	25	35	35	55	125	225
6	21	36	51	56	91	216	441
7	28	49	70	84	140	343	784
8	36	64	92	120	204	512	1296
9	45	81	117	165	285	729	2025
10	55	100	145	220	385	1000	3025
11	66	121	176	286	506	1331	4356
12	78	144	210	364	650	1728	6084

(Conforme Baron, 1985, p. 18 e por mim ampliada)

E a partir da tabela anterior, algumas relações podem ser estabelecidas, por exemplo, conforme segue:

$$T_n + S_n + C_n = 3\square_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{1}^{n} r^2$$

(BARON, 1985, V.1, p.19)

Na coluna E da mesma tabela está a soma dos cubos, pode-se perceber ainda que em cada linha a soma dos cubos é igual ao quadrado de T naquela linha, isto é:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

(BARON, 1985, V.1, p.19)

Assim, “os números figurados constituem uma ferramenta útil para se estabelecer muitas propriedades fundamentais dos números naturais e, em particular, nos permitem escrever as fórmulas equivalentes”, a seguir:

$$\sum_1^n r = \frac{n(n+1)}{2}; \sum_1^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ e } \sum_1^n r^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

(BARON, 1985, V.1, p.19)

Essas fórmulas foram constantemente utilizadas nos métodos de integração de Arquimedes.

Os filósofos que sucederam a escola pitagórica também continuaram com interesse em compreender a natureza e o universo, e também acreditavam que, para compreender os fenômenos naturais, era preciso descobrir o modelo matemático subjacente a eles. Assim, não se distanciaram em demasia dos seus predecessores, mas questionaram se era possível explicar tudo por meio de números conforme a escola pitagórica. É o que abordaremos a seguir.

4.2.3 Os indivisíveis e os paradoxos de Zenão

De acordo com Baron (1985) e Boyer (1998), ainda em relação aos números figurados, encontramos também a coleção “de unidades geometricamente arrumadas e disponíveis para se formar outras coleções”. Daí provém a ideia de “Indivisíveis”. Os elementos indivisíveis começaram a ser discutidos com a doutrina materialista do atomismo físico, surgida em Abdera, na Trácia (aproximadamente 430 a.C.), tendo como precursor Leucipo e difundida posteriormente por seu discípulo, Demócrito (ca. 460-370 a.C.). Para os atomistas, o universo era composto de átomos e do espaço vazio. Os átomos eram infinitamente pequenos, rígidos e possuindo as mais variadas formas, já o universo era infinitamente grande; infinitos também eram os números de átomos.

De acordo com Baron (1985), o grego Demócrito (460-? a.C.) teria escrito sobre vários aspectos da matemática e da Física. Ainda, segundo Baron

(1985), Arquimedes, muito tempo depois, atribuiu a Demócito as importantes proposições[35]:

> O volume de uma pirâmide de base poligonal qualquer é um terço do volume do prisma de mesma base e mesma altura e, o volume do cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e mesma altura (BARON, 1985, p. 20).

Também, segundo Baron (1985) há indícios de Demócrito propôs a noção de sólido como sendo composto por seções planas paralelas à base. “Seções estas iguais ou diferentes”. Se iguais, o cone será um cilindro; se diferentes, não será um cone, mas uma coleção de finos cilindros. “Segue-se que o cone não pode nunca existir” (BARON, 1985, p.20).

A citação a seguir do historiador Plutarco (46-120 d.C), de acordo com Baron, apresenta o dilema proposto por Demócrito em relação às secções planas:

> Se cortarmos um cone por um plano paralelo à base [plano bem próximo à base], o que podemos dizer das superfícies que formam as secções? Elas são iguais ou diferentes? Se elas são diferentes, elas tornarão o cone irregular, cheio de dentes, como degraus, e imparidades; mas se elas são iguais, as secções serão iguais, e parece que o cone terá a propriedade do cilindro de ser constituído por círculos iguais e não diferentes: o que é um grande absurdo. (BARON, 1985, p. 20).

Do exposto, percebe-se que Demócrito propôs o conceito de sólido como sendo constituído de secções planas (talvez um número infinito delas?), paralelas à base. Esse conceito foi bastante útil, sendo mais tarde utilizado por Arquimedes – século II a.C. e Cavalieri – século XVII d.C, sobre os quais trataremos mais adiante, na sequência do trabalho. Entretanto, o atomismo geométrico de Demócrito se deparou com problemas, tais como: se a pirâmide ou o cone é feita de infinitas secções infinitamente finas, triangulares ou circulares, paralelas à base, a consideração de duas quaisquer lâminas adjacentes cria um paradoxo: se são iguais em área, a totalidade será o prisma ou o cilindro; se são desiguais, então a totalidade será uma pirâmide ou um

---

[35] Essas proposições encontram-se demonstradas em *Os Elementos* (Livro XII) de Euclides.

cone em degraus, portanto, não serão sólidos lisos e uniformes como imaginamos.

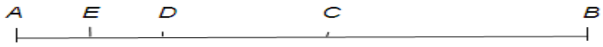
Assim, conceitos como indivisíveis, infinitamente grande, infinitamente pequeno ainda não eram claros para os gregos de então. Por isso mesmo geram paradoxos e muitas controvérsias. Podemos pensar nesses paradoxos como questões não resolvidas (ou em aberto) que ficaram para a história, de acordo com Mendes (2003). Sabemos que essas questões só foram inteiramente explicitadas séculos depois, conforme veremos mais adiante.

Entretanto, os gregos não desistiram de buscar explicações para o não explicado. Munida de mentes curiosas e ávidas que usavam fortemente a intuição, a matemática grega continuou a gerar novos problemas e novos paradoxos. Assim, merecem destaque Os *Paradoxos de Zenão de Eleia* (aproximadamente 460 a.C.), que trataram de problemas envolvendo *tempo* e *espaço* e, sobretudo, lidavam com a natureza das quantidades contínuas. Isso porque, desde antigamente, já se sabia que em matemática se identificavam dois tipos de grandezas: as grandezas discretas (que também tem quantidade), envolvendo a contagem de elementos discretos, separados e indivisíveis e; as grandezas contínuas, envolvendo as medidas e, essas duas, estavam sempre relacionadas.

Segundo Baron (1985), as grandezas *tempo* e *espaço* têm ocupado grande parte dos trabalhos em matemática e, por isso mesmo, gerado a maioria dos modelos que conhecemos. Sendo assim, Zenão utilizou ambas e em seu argumento idealizou assim: “ou o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis, isto é divisíveis sem fim, ou existe um menor elemento indivisível de tempo (um instante) e de espaço (o ponto)” (BARON, 1985. V.1, p. 23). Dois dos paradoxos apresentam o mesmo raciocínio: a *Dicotomia* e *Aquiles*. Neles, Zenão argumenta que “se o tempo e o espaço são divisíveis, o movimento seria impossível”. Vejamos detalhes desses paradoxos utilizando uma linguagem moderna:

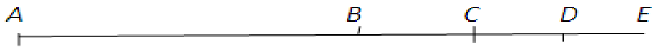
> 1. *A dicotomia*
>
> Imagine que distância AB deva ser percorrida por um objeto. Antes da distancia AB ser percorrida, percorre-se a metade de AB, isto é, a distância AC, mas antes de percorrer a distância AC, percorre-se a

metade de AC, isto é, a distancia AD e assim por diante. Se esse processo continua *ad infinitum*, dai conclui-se que o movimento não de inicia ou não pode existir.



2. *Aquiles e a tartaruga*

Imagine que Aquiles aposta corrida com uma tartaruga e dá a esta o direito de sair com certa vantagem. O argumento é que por mais que Aquiles corra nunca alcança a tartaruga, pois quando Aquiles está em A, a tartaruga está em B, quando Aquiles alcança a posição B, a tartaruga já está na posição C e quando Aquiles chega em C, a tartaruga está em D. Desse modo, a tartaruga vai estar sempre à frente de Aquiles e nunca é alcançada por ele. O movimento também transcorre *ad infinitum.*



(N.M, seguindo BARON,1985. p.22-23; BOYER, 1998, p. 51)

Podemos observar que a diferença entre os dois está em o primeiro apresentar uma progressão regressiva, enquanto no segundo ser progressiva. Nos outros dois paradoxos, a *flecha* e o *estádio,* Zenão adota um raciocínio diferente, dizendo que *se o tempo e o espaço não são infinitamente divisíveis, então, existe uma menor unidade indivisível de tempo (o instante) e uma unidade indivisível para o espaço (o ponto)*. Vejamos como seria no caso da flecha:

3. A flecha

Imaginemos uma flecha que em pleno voo em um dado instante se encontrará em um determinado ponto, portanto estará ocupando um espaço igual a si mesma, mas um objeto que ocupa um espaço igual a si mesmo não está em movimento. Logo, a flecha que voa estará sempre parada, portanto, seu movimento é uma ilusão.

(N.M, seguindo BARON,1985. p.22-23; BOYER, 1998, p. 51)

Todavia, com base nesses paradoxos, temos então um dilema. Sendo ambas as hipóteses corretas, levam a conclusões que contrariam o bom-senso: Pode haver movimento? Aquiles pode alcançar a tartaruga? Segundo Baron, devemos ter em mente que nos paradoxos de Zenão ideias sobre movimento instantâneo, séries infinitas e limites ainda não existiam, portanto essas questões, não “respondidas a contento”, permaneceram em aberto por muito tempo, mas instigaram os gregos a continuarem investigando e intuindo sobre a matemática.

Além dos mencionados, outros aspectos da matemática grega direta ou indiretamente também contribuíram para o desenvolvimento do cálculo, por exemplo, a descoberta dos irracionais e o tratado sobre proporções[36]. Esse último foi determinante para abordagens com sequências numéricas e progressões. Vejamos, a seguir, como se constituíram essas discussões.

4.2.4 Das grandezas incomensuráveis à descoberta dos irracionais: um "desfile" de modelos matemáticos

Encontramos em muitos estudos sobre a história do cálculo e a história da Matemática (TOEPLITZ, 1963; BOYER, 1949, 1996; BARON, 1985; KLINE, 1985; HAHN, 1997; WUSSING, 1998) a importância que teve a descoberta dos números irracionais para o desenvolvimento da matemática, em particular do cálculo. Vimos que a escola pitagórica tinha sua base matemática nos números inteiros e na crença de que tudo mais poderia ser expresso ou explicado por meio deles. Contudo, em algum momento, não se sabe exatamente quando, os próprios pitagóricos se defrontaram com grandezas que não podiam ser medidas em termos de números inteiros. Isso, segundo os historiadores, pode ter conduzido a sérias rupturas dentro da escola pitagórica, e mesmo levado à sua ruína.

Vejamos em bases matemáticas o significado dessa descoberta.

Inicialmente, tomemos o Teorema de Pitágoras[37], conforme conhecemos hoje:

> Dado um triângulo retângulo de lados *a, b e c,* sendo *b e c* os lados menores *e a* o lado maior (hipotenusa), conforme mostra a figura:

---

[36] Ver, por exemplo, os Elementos de Euclides, Livro VII.

[37] Esse teorema é atribuído aos pitagóricos (ou à pessoa), pois foram eles que primeiro o propuseram formalmente, mas já era conhecido dos egípcios e Pitágoras pode ter tomado conhecimento dele em contato com esse povo.

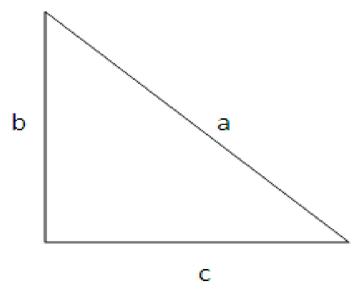
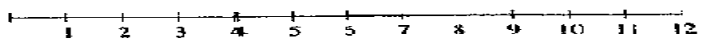


Figura 9 – Triângulo pitagórico

a relação $a^2 = b^2 + c^2$ é satisfeita. Também podemos obter essa relação de modo inverso. Se em um triângulo qualquer a relação $a^2 + b^2 = c^2$ é observada, então o triângulo é retângulo, onde *a* e *b* são os lados e *c* a hipotenusa do triângulo.

Essa bem conhecida relação pode ter sido obtida pela primeira vez da seguinte situação: de um pedaço de "corda esticada" de 12 unidades de comprimento, conforme figura



Formamos o triângulo da figura conforme segue:

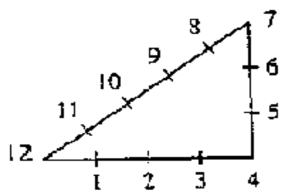


Figura 10 – Triângulo retângulo padrão

Assim, do triângulo da figura 10, de acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

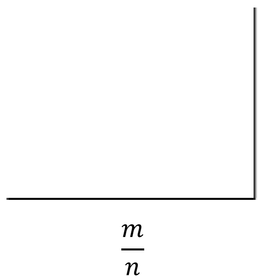
$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

Isso nos dá o triângulo de lados 5, 4 e 3, respectivamente. O teorema de Pitágoras assegura-nos que o ângulo em 4 é um ângulo reto e, portanto, o triânulo é retângulo. Outras relações podem conduzir a triângulos retângulos. Esse ficou conhecido como *triângulo retângulo padrão.* (HAHN, 1997, p.4).

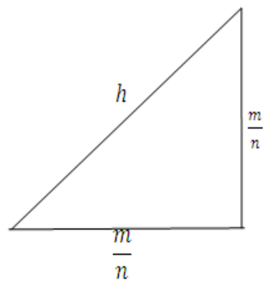
Mas onde entram os irracionais nessa história? Como os pitagóricos tomaram conhecimento deles? Apresentarei aqui duas demonstrações encontradas em Toeplitz (1969) e Hahn (1997). O início de tudo pode ter sido a tentativa de encontrar a medida exata da diagonal de um quadrado, ou seja, em linguagem moderna, um valor para a diagonal que pudesse ser expresso em termos de m/n com m e n inteiros positivos. Dois tratamentos foram dados ao problema. O primeiro, de natureza algébrica, considerando números pares e ímpares e, o segundo, de natureza geométrica. Trataremos a seguir de cada um deles.

Vejamos inicialmente o tratamento matemático dado à primeira situação, conforme Hahn (1997, p. 4-5):

> Tomando μ como alguma unidade de comprimento, conforme segmento, a seguir, μ (Unidades de comprimento)
>
> Diremos que o segmento de reta é mensurável em μ se seu comprimento em unidades é $\frac{m}{n}$, onde *m* e *n* são inteiros positivos. Então, o segmento é mensurável se seu comprimento pode ser expresso precisamente como um inteiro ou uma fração de μ. Por exemplo, se a unidade de μ é a polegada, então o segmento de comprimento $26\frac{4}{7}=\frac{186}{7}$ polegadas, assim como $53\frac{14}{29}=\frac{1551}{29}$ polegadas e $1726\frac{951}{3657}=\frac{6312933}{3657}$ são mensuráveis.
> A questão com que nos deparamos é então que todo segmento pode ser mensurável em μ unidades. Vamos então agora assumir que o segmento acima μ possui comprimento igual a $\frac{m}{n}$ e vamos tomar outro segmento de medida igual e colocá-lo perpendicular a μ, formando um ângulo reto, conforme figura a seguir:



> E, em seguida, formamos o triângulo retângulo conforme a figura:



Com base nesse triângulo, a pergunta que fazemos é: A hipotenusa *h* é mensurável em termos de μ? Os pitagóricos podem ter chegado à conclusão que não, tentando medi-la. Assim, seguindo Hahn (1997, p.4-5), vejamos a demonstração:

> Assumindo que *h* seja mensurável e que é algum valor $\frac{r}{s}$ de inteiros positivos. Pelo teorema de Pitágoras, temos que:
>
> $$\left(\frac{r}{s}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2\left(\frac{m}{n}\right)^2$$
>
> Igualando os denominadores, obtemos:
>
> $$r^2n^2 = 2m^2s^2$$
>
> Fazendo $x = rn$ e $y = m$s, temos então que $x^2 = 2y^2$. Fatorando 2 de *x* quantas vezes for possível, obtemos $x = 2^a x_1$, com $x_1$ímpar; do mesmo modo obtemos $y = 2^b y_1$, com $y_1$ímpar.(Por exemplo, se $x = 172$ então fatorando, temos $172 = 2.86 = 2.2.43$, onde $a = 2$ e $x_1 = 43$). Fazendo a substituição em *x* e *y*, obtemos $(2^a x_1)^2 = 2(2^a y_1)^2$. Assim, pela regra da potenciação:
>
> $$2^{2a}x_1^2 = 2^{2b+1}y_1^2$$
>
> Notemos que $2a \neq 2b + 1$, então $2a$ é par e $2b + 1$ é impar. Portanto, se $2a > 2b + 1$ ou $2a < 2b + 1$
>
> Temos duas situações:
>
> 1. Assumindo que $2a > 2b + 1$ é ímpar. Assim, $2^{2a-(2b+1)}x_1^2 = y_1^2$. Daí segue que y_1^2 é par. Então y_1 é ímpar e tem a forma $y_1 = 2k + 1$ para algum inteiro k. Por outro lado, $y_1^2 = 4k^2 + 4k + 1$, que é a soma de um inteiro par mais 1. Isso significa que y_1^2 é ímpar. Isso é impossível, pois, y_1^2 não pode ser ao mesmo tempo par e ímpar.
> 2. Assumimos agora que $2a < 2b + 1$. Isto implica que $x_1^2 = 2^{(2b+1)-2a}y_1^2$. Pelo argumento do passo-1, agora é x_1^2 que é um número par e um número ímpar ao mesmo tempo. Mas isso também leva a uma impossibilidade.

Portanto, de acordo com Hahn (1997), uma reflexão que pode ser feita sobre a discussão precedente, ou seja, supondo que *h* seja mensurável em termos de μ, e este, por sua vez, expresso na forma $\frac{m}{n}$, com *m* e *n* inteiros positivos, nos leva a uma conclusão de que esse número não existe. A prova acima, demonstrada por argumentos lógicos convincentes, chega a essa conclusão. É importante argumentar que, segundo Hahn, a demonstração precedente não foi retirada de nenhum texto grego. Todavia, poderia ter sido desenvolvida pelos gregos, pois está perfeitamente de acordo com o "espírito da matemática grega". De tudo isso, permanece a hipótese de que *h* pode ser obtido por meio de uma construção geométrica, mas não pode ser expresso como um número pitagórico.

A segunda demonstração, de acordo com Toeplitz (1969; p. 5), sobre a impossibilidade de se medir a diagonal de um quadrado em termos de $\frac{m}{n}$, com *m* e *n* inteiros positivos, utiliza de argumentos geométricos, conforme esse mesmo autor (1969, p. 4):

> No quadrado da figura-1 abaixo, marca-se sobre a diagonal, partindo de B, o ponto D, tal que a medida do segmento BD seja igual à medida do lado AB. De D traça-se uma perpendicular à diagonal encontrando o lado AC em B'. Une- se B' e B por um segmento de reta, obtendo os triângulos ABB' e DBB' congruentes entre si. Então, os dois pares de lados correspondentes são iguais e, os ângulos opostos ao lado maior também são iguais; portanto AB'=DB. O ângulo ACB é um ângulo reto em A, daí B'CD é um triângulo isósceles reto e, DB'=DC. Disso segue que
>
> $$AB' = B'D = CD \qquad (1.1)$$
>
> Novamente traçamos em C a perpendicular ao segmento CD e desenhamos através de B' uma paralela à CD, a qual encontra a perpendicular em A'. Um quadrado $A'B'CD$ é obtido, este é menor do que o quadrado original. Assim, a diagonal B'C já é coberta por um dos lados do quadrado original. Neste novo quadrado aplicamos os mesmos procedimentos feitos no primeiro quadrado, ou seja, marcamos um segmento B'D' sobre a diagonal igual ao comprimento do lado A'B' e em D' erguemos a perpendicular à diagonal encontrando o lado A'C em B''. Então, como anteriormente
>
> $$A'B'' = B''D' = D'C \qquad (1.2)$$
>
> Assim, fica claro que o procedimento continua infinitamente e nunca termina, ao invés disso, cada vez que mais permanece um pedaço da diagonal menor do que o anterior, isto é:
>
> $$CD > CD' > CD'' > CD''' \dots \qquad (1.3)$$

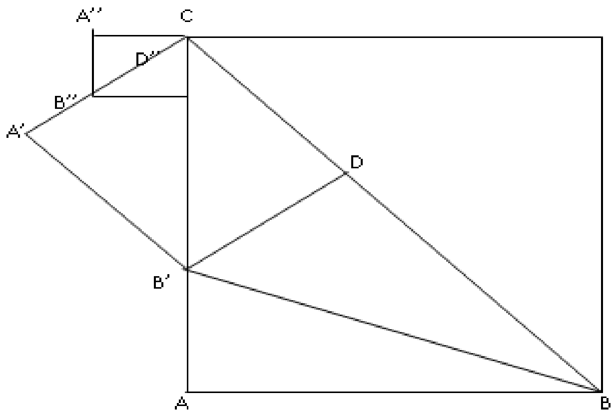


Figura 11 – Quadrado original e quadrados sucessivos.

> Cada um desses pedaços remanescentes é a diferença da diagonal e o lado de um dos sucessivos quadrados, isto é:
>
> $$CD = CB - AB,\ CD' = CB' - A'B',\ CD'' = CB'' - A''B'', \dots \qquad (1.4)$$

Ainda, segundo Toeplitz, essa consideração geométrica é apenas uma preliminar da prova; a prova mesmo é indireta, conforme segue (1969, p. 5):

> Vamos supor que o lado e a diagonal do quadrado sejam mensuráveis, isto é, que existe uma medida comum para os dois - um intervalo *E* é um dado múltiplo exato que se igualaria ao lado do quadrado e há outro múltiplo exato que se igualaria à diagonal. Então basta somente observar (ver a seguir) que a diferença de qualquer dos dois intervalos os quais são ambos múltiplos exatos de *E* é também um múltiplo exato de *E.* Assim, se *CB* e *AD* são múltiplos exatos de *E*, então da equação (1.4) *CD* também é. E, assim, *A'B'* é então um múltiplo exato de *E*. A diagonal *CB'* do quadrado *A'B'CD* é tal que $CB^{'} = CA - AB^{'} = AB - CD$ - Isto pela equação (1.1) – e *CB'*, sendo a diferença de dois múltiplos exatos de *E*, é, portanto, um múltiplo exato de múltiplo exato de *E.*

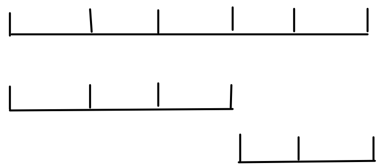


Figura-12 – Representação gráfica dos intervalos (TOEPLITZ, 1969. p. 5)

Assim, Toeplitz assegura que a prova anteriormente descrita foi feita para o lado e a diagonal do quadrado *A'B'CD*, o mesmo poderia ser empregado para todos os outros quadrados. Essa prova indireta pode então ser completada utilizando um argumento por contradição, conforme segue:

> Os intervalos que aparecem em (1.3) baseiam-se na suposição de que existe uma medida comum para o lado e a diagonal do quadrado original e que todos devem ser múltiplos exatos de *E*. Por outro lado, a equação (1.4) afirma que os múltiplos de *E* decrescem continuamente, num processo sem fim e, sem se tornarem zero. Mas isto é impossível para múltiplos de um intervalo fixo, assim, se o termo inicial foi 1000 vezes *E*, então C'D seria um pequeníssimo múltiplo exato de *E* – no máximo 999 vezes *E.* Até o milionésimo membro desta sequência poderia ser menor do que *E*, e, ainda assim, um múltiplo de *E,* e, portanto, zero vezes E, contrário ao que já havia sido provado. Esta é a contradição à qual nós já havíamos conduzido na suposição de que existe uma medida comum do lado e diagonal de um quadrado, a suposição é, portanto, impossível (TOEPLITZ, 1969, p. 5-6).

Ainda, segundo Toeplitz, há uma completa incerteza sobre a origem dessa primeira impossibilidade de prova. "Esta grande descoberta, mais do que todas as outras inaugurou o caráter da matemática moderna" (TOEPLITZ, 1969, p. 6). É bastante provável que a escola pitagórica não tratou dessas questões. Centrou seus interesses na natureza de grandezas mensuráveis e que pudessem ser explicadas por meio de números inteiros e fracionários. Foi esse o seu maior legado para a história da matemática.

Portanto, segundo Toeplitz, permanece uma incerteza sobre o passado da descoberta dos incomensuráveis. “As mais antigas e mínimas evidências ambíguas foram encontradas em Platão e Aristóteles” (Ibidem, p. 6). Sendo que em Aristóteles aparece repetidamente referências ao assunto, sobretudo, alusões à primeira das provas mencionadas, que depois aparecem novamente em Euclides. Platão também destina uma considerável ênfase sobre a natureza fundamental da descoberta dos incomensuráveis.

Em *As Leis*[38], especialmente no diálogo dedicado à memória de um dos grandes matemáticos gregos, Teaetetus[39] traz informações sobre outro matemático grego, bastante admirado por Platão, Teodoro de Cirene[40], que contribuiu para o desenvolvimento inicial da teoria das grandezas incomensuráveis. Nesse diálogo, há a referência de uma descoberta recente, o que hoje conhecemos como $\sqrt{2}$. Platão assegura ter sido Teodoro de Cirene o primeiro a provar a incomensurabilidade das raízes quadradas de inteiros não-quadrados de 3 a 17. Não se sabe como fez e porque foi só até a raiz de 17, mas ao que tudo indica, é igual ao que consta do Livro X, de *Os Elementos* (BOYER, 1998; TOEPLITZ, 1969).

Das discussões precedentes, restam dúvidas se foram os pitagóricos, de fato, os primeiros a se darem conta dos números irracionais e os desconsideraram. Entretanto, é a partir da descoberta das grandezas incomensuráveis, que por sua vez deu origem aos irracionais, que foi “aberta a porta” para estudos mais consistentes sobre os processos de natureza infinita; grandezas que crescem ou decrescem infinitamente, ou ainda, se aproximam de um valor exato, fundamentais para o desenvolvimento do cálculo.

Retomando as considerações de Mendes (2003) sobre questões em aberto e questões resolvidas, discutidas no capítulo 2, é possível afirmar que os pitagóricos, e os gregos posteriores a eles, em relação às grandezas incomensuráveis, deixaram questões em aberto que só foram totalmente elucidadas, ou resolvidas, no curso da história. Hoje sabemos que, no triângulo

---

[38] Uma das obras de Platão que ficaram conhecidas.
[39] Teaetetus (414-369 a.C) – É atribuída a ele a primeira construção dos sólidos platônicos.
[40] Pouco se sabe sobre esse matemático grego da antiguidade.

retângulo descrito na situação matemática apresentada anteriormente, $m = n = 1$, a hipotenusa h é igual a $\sqrt{2}$ que é um número irracional. Por outro lado, segundo Hahn (1997, p. 5), sabemos que:

$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots = 1 + 4\frac{1}{10} + 1\frac{1}{100} + 4\frac{1}{1000} + 2\frac{2}{100000} + \cdots$, então, $\sqrt{2}$ [41] pode ser construído em termos de uma expansão decimal. Esse processo infinito nos possibilita marcar qualquer número sobre a reta real. Fixando-se a unidade de comprimento e tomando-se a linha reta que abre infinitamente em ambas as direções, conforme figura a seguir:

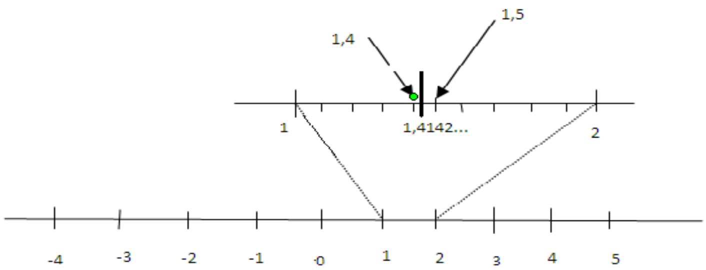


Figura 13 – Representação na reta real de um número irracional (HAHN, 1997, p. 5).

Entretanto, os gregos não trabalharam com construções na reta real. Isso só ocorreu séculos mais tarde, por volta do século XVI. Eles também não trabalharam com coordenadas cartesianas no plano. Portanto, eles não puderam fazer gráficos de equações algébricas fazendo uso da interface entre álgebra e geometria. Sendo assim, vemos que, embora os gregos tenham deixado contribuições inestimáveis para a matemática, também deixaram muitas questões em aberto. Os “incomensuráveis” é uma delas.

4.2.5 Dos incomensuráveis ao cálculo de área de regiões curvas: os problemas sobre lúnulas e a teoria das proporções

As questões deixadas em aberto sobre grandezas incomensuráveis fomentaram os trabalhos sobre processos de natureza infinita. Além disso, as

---

[41] Logicamente os gregos desconheciam essa notação, mas isso é outra história.

inúmeras soluções propostas para um dos três problemas clássicos da antiguidade, *a quadratura do círculo*[42], motivou o desenvolvimento de modelos que apontassem para uma crescente discussão sobre problemas envolvendo cálculo de áreas de regiões delimitadas por linhas curvas. Segundo Baron (1995), regiões de formatos lunares deram origem às primeiras tentativas de resolver problemas envolvendo o cálculo de áreas de figuras curvas. As primeiras soluções foram feitas transformando essas regiões em quadrados equivalentes, tarefa que não foi muito fácil, pois, nem todas as *lúnulas*, como eram chamadas, eram passíveis de ser reduzidas a quadrados.

Todavia, como é sabido, o essencial da matemática grega antiga é encontrado em *Os Elementos* de Euclides, escrito por volta de 300 a.C. Nesses escritos, porém, bem como nos comentadores da obra de Euclides, só aparece o conteúdo matemático não a história do seu desenvolvimento. Assim, muito da história do desenvolvimento de conceitos matemáticos bem como dos processos empregados ficou perdido, restando apenas a solução aparentemente definitiva. Desse modo, segundo Toeplitz (1969), no trabalho de Euclides restam apenas alguns fragmentos sobre o início da discussão matemática sobre processos de natureza infinita. Tais fragmentos são encontrados em poucas páginas referentes a um antigo livro-texto de matemática grega, provavelmente, escritas por Hipócrates (aproximadamente 450 A.C.). Nele aparece que (apud TOEPLITZ, 1969, p. 6):

> Hipócrates dividiu ao meio um círculo de diâmetro *AB* e, então, tomando o ponto médio *M* do semicírculo de baixo como centro desenhou um círculo passando através de *A* e *B* [figura 14a– notação redefinida]. Hipócrates afirmou que a *"área compreendida entre os dois círculos* [região pintada na figura 14b, notação nossa] *é equivalente à área do quadrado construído sobre o raio MB*".

[42] Os outros dois são a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo (Cf. BOYER, 1998).

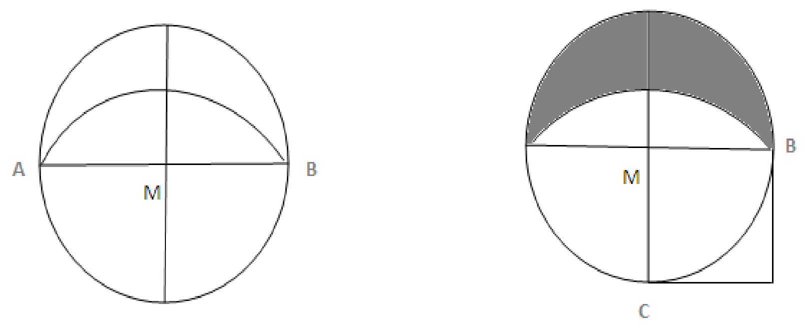


Figura 14 – Círculos de Hipócrates (14a esquerda e 14b direita)

Ainda, segundo Toeplitz (1969) a prova apóia-se sobre um lema, mas sobre este não há nenhuma referência sobre o que o originou, ou pelo menos não consta das referidas páginas. Assim, o lema é apresentado:

> “As áreas de dois círculos estão para si, assim como os quadrados de seus raios” (TOEPLITZ, 1969, p. 7) [Figura 15 - conforme classificação minha].

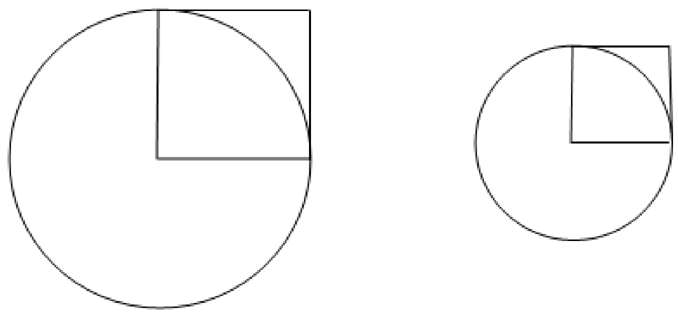


Figura 15 – Círculos de raios diferentes

> Como consequência disso, segue que “segmentos de dois diferentes círculos com ângulos internos iguais estão para si assim como os quadrados de seus raios” (figura a seguir –N.M)

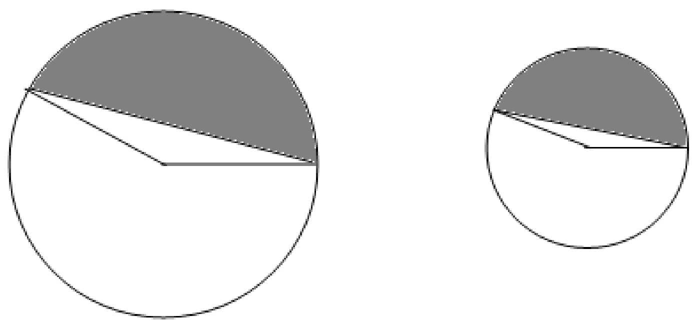


Figura 16 – Círculos de raios diferentes e ângulos internos iguais

De acordo com Toeplitz, a prova dada por Hipócrates, para esse lema é feita inicialmente considerando-se um ângulo definido, e depois generalizada para ângulos quaisquer. No passo seguinte (TOEPLITZ, 1969, p. 7):

> Hipócrates conectou o ponto médio D do semicírculo superior com A e B encontrou que estas linhas tocam o comprimento do círculo em A e B. A consequência disso é que o circulo superior fica dividido em três áreas α, β, γ [conforme figura 17 N.M].

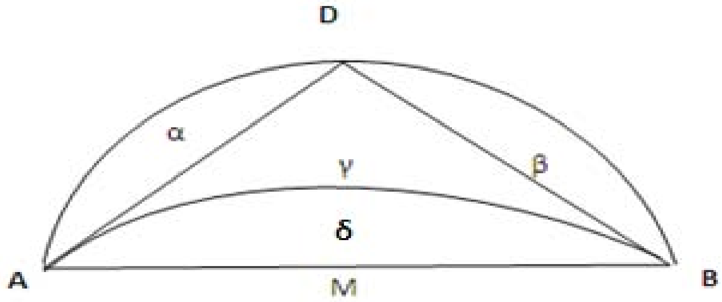


Figura 17 – Semicírculo de Hipócrates

> α é um segmento cuja área equivale a $1/4$ do ângulo total do círculo superior. Valor igual tem o segmento β; enquanto que δ é segmento cuja área correspondendo também $^1/_4$ do ângulo total do círculo inferior. De acordo com o Lema anteriormente dado *α e δ estão um para o outro assim como os quadrados dos raios dos dois círculos*, isto é $AM^2 : AD^2$, como evidentemente $1:2$. Então α e β são a metade de δ, o que significa $\alpha + \beta + \gamma = \delta + \gamma = \text{área do triângulo } ABD = BM^2$.

A importância desse resultado e, consequentemente, para o desenvolvimento do cálculo integral, é que ele tornou possível calcular o valor de áreas limitadas por linhas curvas, tomando por base o cálculo de áreas limitadas por linhas retas. Assim, o problema da “quadratura do círculo” deve grande parte de seu surgimento a essa descoberta. Além disso, poder realizar para uma figura curvilínea o que tinha sido já feito para figuras retas foi um avanço significativo no desenvolvimento da matemática e demandou tempo, engenhosidade, envolvendo uma legião de matemáticos por quase dois mil anos e fascina até hoje. Portanto, com Hipócrates teve início as discussões de problemas sobre quadraturas, mas problemas dessa natureza ganharam contornos muito maiores, e sobre eles retornarei na sequência deste trabalho.

Contemporâneo de Hipócrates, o sofista Antífono também trabalhou com a quadratura do círculo. Segundo Toeplitz, nos relatos de Aristóteles sobre Antífono, consta que ele inscreveu num círculo um quadrado e, a partir dos lados do quadrado, construiu triângulos isósceles formando um octógono regular, depois, um polígono de dezesseis lados, e observou que quanto maior fosse o número de lados do polígono regular inscrito no círculo mais próximo estava sua área da área do círculo. Dessas considerações constatei que até chegar a uma formalização mais precisa da quadratura do círculo muitas soluções foram apresentadas.

Portanto, no desenvolvimento da matemática, a aparente resolução de um problema ou a sua não-resolução levou a novas considerações e novos problemas. Foi o que aconteceu com a possível descoberta dos incomensuráveis pelos pitagóricos e com as tentativas de calcular a área do círculo. A descoberta das grandezas incomensuráveis deu início ao trabalho com as proporções. Por sua vez, o estudo das proporções teve papel de destaque na matemática grega e, também, foi importante no desenvolvimento das sequências e séries fundamentais para o desenvolvimento do cálculo integral. Assim, vamos clarear mais sobre o trabalho com as proporções.

Segundo Toeplitz, a descoberta de segmentos incomensuráveis representou uma revolução em toda a geometria. Um exemplo claro disso é o fornecido pelo teorema (TOEPLITZ, 1969, p.8):

> *as áreas de dois triângulos de mesma altura estão uma para a outra assim como suas bases"* , $A:B = a:b$(figura – 18). Para o caso $a = b$ o teorema é logo provado, pois triângulos de bases e alturas iguais têm áreas iguais. Disso também, o teorema é facilmente provado para o caso em que a e b são comensuráveis (por exemplo: $a:b = 3:2$); se em seguida tomamos A para um triângulo de base a e B para dois outros triângulos de base b, os dois resultando em triângulos que têm bases iguais (para $a:b = 3:2$ significa nada mais do que $2a:3b$) e assim, áreas iguais, isto é, $2A = 3B$, ou ainda, $A:B = 3:2$, (conforme figuras 18 e 19 - N.M)

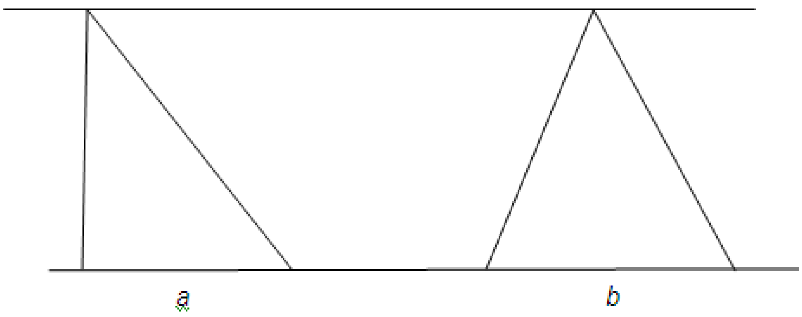


Figura 18 – Teoria das Proporções (1ª parte)

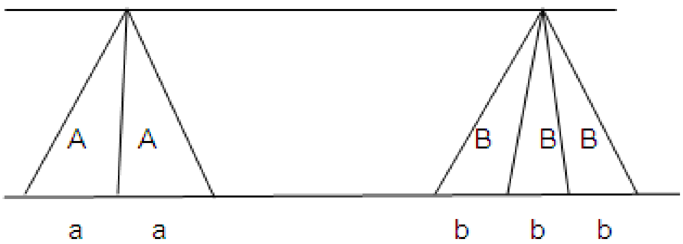


Figura 19 – Teoria das Proporções (2ª parte)

Seguindo as ideias de Toeplitz, sobre os estudos gregos no campo das proporções, com a descoberta dos irracionais (segmentos incomensuráveis) todas as provas de teoremas geométricos relacionados às proporções tornaram-se questionáveis. Assim, muitas das definições sobre proporcionalidade foram revistas e os matemáticos gregos de então tiveram que rever até mesmo afirmações de que, por exemplo, *"as áreas de dois triângulos A e B estão uma para a outra assim como suas bases a e b".* Além disso, historicamente não se sabe exatamente quando essa crise começou, ou como ela foi superada. O certo é que as proporções constam de várias proposições de *Os Elementos* de Euclides. No livro V encontramos o edifício final dessa teoria que, ainda hoje, embora transformada, se constitui na base do conceito de número e da teoria dos processos infinitos.

Toeplitz (1969, p. 10-11) apresenta um breve relato do capítulo do livro de Euclides sobre a teoria das proporções, o qual começa com duas definições estabelecidas para se contrapor às dificuldades apresentadas pela incomensurabilidade:

Se para dois números naturais p e q as três relações $qa < pb$, $qa = pb$ e $qa > pb$ implicam, respectivamente, $qA < pB$, $qA = pB$ e $qA > pB$, nós dizemos que $a : b = A : B$;

Se existe um único par de números naturais q_0, p_0 para o qual $q_0 a < p_0 b$, onde $q_0 A > p_0 B$, nós dizemos que $a : b < A : B$ ou $A : B > a : b$. Para o caso de grandezas comensuráveis, a Definição-1 comporta a antiga definição, pois a segunda das três possibilidades é assegurada. A definição-1 aplicada ao exemplo acima dos triângulos não somente salva o conceito de proporção, mas também permite a reorganização da prova. Pois, se *p* e *q* dois números naturais quaisquer e se *q* triângulos de base *a* são colocados lado a lado e, *p* triângulos de base *b*, então uma das três possibilidades deve ser satisfeita:

$qa < pb$, $qa = pb$, $qa > pb$

Agora facilmente obtemos o seguinte lema: *Se dois triângulos U e V têm alturas iguais, mas bases diferentes, com $u < v$, então $U < V$* (figura-15). Porém, se colocarmos sobre *v* um pequeno segmento *u* haverá sobre *u* um triângulo de área *U* que, entretanto, é somente uma parte de *V* e, assim, menor do que *V*. Mas se, $qa < pb$ as áreas dos triângulos maiores terão o mesmo raio da desigualdade, isto é $qA < pB$, e assim por diante.

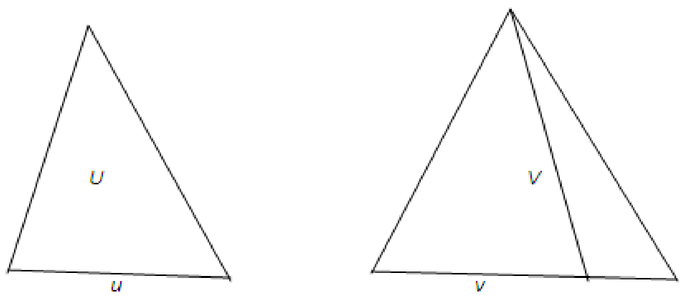


Figura 20 – Teoria das proporções (3ª parte)

Segundo Toeplitz, as duas definições anteriores não foram suficientes para dar respaldo a toda teoria das proporções. Euclides, em seus quatro primeiros livros, deu início à sua teoria a qual consta de um conjunto de definições, postulados e axiomas, ou seja, afirmações que não são provadas. É no livro V que Euclides apresenta uma teoria geral de quantidades e proporções trabalhando sobre segmentos, áreas, volumes, intervalos de tempo e conjuntos numéricos. Nesse novo tratado, ele abdicou completamente de qualquer prova que fosse baseada explícita ou implicitamente sobre gráfico de figuras ou sobre a intuição.

Para um grau até bem superior ao planejado, Euclides se sentiu forçado a listar completamente todos os princípios sobre os quais repousava sua teoria. Para melhor fundamentar sua teoria, Euclides apresentou o que hoje podemos denominar de "*axioma da continuidade*": *Se* A *e* B *são duas quantidades do mesmo gênero, dizemos dois segmentos, ou dois intervalos de tempo e, se* A *é o menor dos dois, então, é sempre possível achar um múltiplo de* A, nA *que é maior do que* B (TOEPLITZ, 1969, p.11*).* Ainda, de acordo com Toeplitz, esse axioma e as duas afirmações anteriormente apresentadas constituem a base sobre as quais Euclides erigiu toda a sua teoria das proporções. A grande importância dessa teoria para a gênese dos processos infinitos são as aplicações desse resultado no método da exaustão. O método da exaustão, conforme conhecemos hoje tornou-se a base sobre a qual Arquimedes elaborou seu trabalho sobre áreas, posteriormente base para o cálculo integral. Assim, na sequência, veremos em detalhes as contribuições de Arquimedes para o desenvolvimento do cálculo.

4.3 ARQUIMEDES: AS CONTRIBUIÇÕES DE UM GÊNIO

> *Entre tots els treballs referents a les disciplines matemàtiques, sembla que el primer lloc pot ésser reivindicat pels descobriments d'Arquimedes, que confonen les ànimes pel miracle de la seva subtilesa.*
>
> TORRICELLI, *Opera geometrica*, Florència, 1644.

4.3.1 Uma vida para a ciência

Historiadores da matemática em diversas épocas não hesitaram em afirmar que Arquimedes foi o maior e o mais ilustre dos matemáticos gregos antigos. Suas contribuições, sem dúvida, não se limitaram à matemática, talvez por essa razão tenha dado tanta contribuição ao desenvolvimento dessa disciplina. Seu prestígio científico se deve ao seu censo intuitivo e rigoroso, bem como ao seu grande talento técnico e criativo a serviço de sua pátria. Sua genialidade o levou a desenvolver vários tipos de aparatos mecânicos, o que lhe deu fama e notoriedade entre seus conterrâneos siracusanos, mais do que suas descobertas científicas e matemáticas. Nas palavras de Wussing

> Com Arquimedes a Matemática da antiguidade alcançou seu ponto culminante. Sua riqueza de pensamento em todas as áreas da matemática, em astronomia, mecânica e técnica lhe permitiu alcançar, em sua época, uma reputação, aumentada ainda mais graças à invenção de armas defensivas sumamente eficazes, com cuja ajuda, sua cidade natal, Siracusa, na Sicília, pode resistir ao assédio romano por dois anos. (WUSSING, 1998, p. 56).

Arquimedes foi um matemático que hoje chamaríamos de “puro” e um físico experimentalista convicto, interessado em resolver problemas práticos. Isso fica claro nos manifestos de Plutarco[43]: “Numerosos trabalhos de Arquimedes estão vinculados à experiência, de modo que muitas de suas investigações e descobrimentos provêm da necessidade de resolver problemas práticos”. (apud URBANEJA, 1992, p. 15).

Para Urbaneja (1992), Arquimedes propunha e resolvia problemas que não constavam da geometria tradicional, sobretudo a que constava *dos Elementos* de Euclides. Nesses problemas, utilizava raciocínios análogos aos utilizados para resolver problemas de mecânica. Por exemplo, o raciocínio utilizado para obter a quadratura da parábola (como veremos mais adiante). Desse modo é que, para muitos historiadores, a forma como Arquimedes propunha e resolvia seus problemas, com demonstrações rigorosas, vai superar consideravelmente a obra de Euclides e dos matemáticos gregos que o antecederam.

Sobre os inventos de Arquimedes são encontrados comentários nas obras de Vitrúvio (aproximadamente I a.C.), Heron de Alexandria (aproximadamente 100), Papus de Alexandria (aproximadamente 300) e Teão de Alexandria (aproximadamente 370). E também em obras históricas de

---

[43] Plutarco (50-125 d.C) nasceu em Querona (Grécia) dentro de uma próspera família de comerciantes. Aos vinte anos se mudou para Atenas para estudar retórica e ciências. Viajou também para o Egito e residiu algum tempo em Roma. Ali foi professor de Adriano, que posteriormente se tornou imperador de Roma. Regressou à sua cidade natal onde escreveu suas obras, a maioria delas perdidas. As mais conhecidas são vidas paralelas, coleção de biografias de grandes personagens gregos e romanos e obras morais.

Políbio (200-118 a.C.), Cícero (ca. 106-43 d.C) e Plutarco (ca. 46-122 d.C). Nesses comentários, contraditórios e esparsos, muitos pontos não esclarecidos totalmente e cada um desses comentadores parece dar a sua própria versão dos fatos. Assim, muitos desses inventos ficaram para a história como anedotas.

Nessa perspectiva, Urbaneja (1992) afirma que muitos historiadores citam e comentam o mais famoso deles, a forma como ele descobriu o conhecido *Princípio de Arquimedes*[44].

Também destacam trabalhos na construção de catapultas e outros inventos menores que ajudaram a salvar a cidade de Siracusa do ataque das tropas do imperador romano Marcelo. Nesse ponto, muitos dos grandes escritores da antiguidade são unânimes em afirmar que a genialidade de Arquimedes, na invenção de instrumentos de guerra, permitiu que Siracusa resistisse durantes dois anos ao cerco romano. Em Urbaneja encontramos declarações sobre o pensamento dos historiadores a respeito do espírito criativo de Arquimedes:

> Um espírito tão elevado, um ânimo tão profundo e tanta riqueza especulativa possuía Arquimedes, que não devemos tratar suas descobertas, que lhe deram tanto nome e glória, apenas como advindo de uma inteligência humana, mas como sendo algo divino. (Ibid. p. 17)

O conhecimento sobre a obra matemática de Arquimedes deveu, sobretudo, aos comentários realizados por Eustócio de Escalão (ca. 480 d.C) e “pela reunião dos manuscritos arquimedianos realizados pelo matemático” Leão de Tessalonia no século IX. Conforme Mügler:

> Certos tratados que Arquimedes enviou um a um a seus colegas geômetras de Alexandria, em intervalos de tempos às vezes bastante longos, como o mostram as cartas endereçadas a Conon, Dositeo e Eratóstenes, colocadas no seu início, aparecem pela primeira vez reunidos num manuscrito do século IX, o codex A

---

[44] Nesse princípio, uma das leis fundamentais da hidrostática, Arquimedes faz uma admirável descoberta na tentativa de solucionar o problema da coroa do rei Heron. Desconfiado de seu ourives, o rei Heron lhe confiou a tarefa de verificar se não havia sido enganado na confecção de uma nova coroa que deveria ser toda em ouro. Então, segundo a história, enquanto tomava banho, Arquimedes encontrou a solução do problema; empolgado por essa descoberta, teria saído da banheira e, nu, correu pelas ruas de Siracusa dizendo heureka! heureka! Muitos historiadores afirmam que isso não passa de lenda. Outros destacam como a mais pura verdade.

> (Heiberg), composto em Constantinopla por iniciativa de Leão, o matemático, nomeado diretor da Universidade de Bizâncio, por Bardas, em 863. (...) após a batalha de Bénévent, em 1266, o manuscrito foi oferecido ao Papa, por Carlos d.Anjou, talvez com um outro manuscrito, o codex £, segundo a notação de Heiberg 51que compreendia alguns tratados de Arquimedes, ao lado de outros trabalhos, sobre a mecânica e a óptica. Em 1491, o codex A é propriedade do humanista italiano G. Valla, que o mostra a Janus Lascaris. Valla morre sem realizar a edição que parece ter projetado; porém, um inventário desse tempo mostra que o manuscrito A incluía os tratados: Sobre a esfera e o cilindro, A medida do círculo, Sobre os conoides e os esferoides, Espirais, Do equilíbrio das figuras planas, O Arenário, A quadratura da parábola de Arquimedes, os Comentários de Eutócio e o tratado Das Medidas de Herão de Alexandria. Adquirido, após a morte de Valla, pelo preço de 800 peças de ouro pela família do príncipe Pio, o codex A desaparece na segunda metade do século XVI e não foi encontrado até hoje. Mesmo Heiberg, grande caçador de manuscritos, não teve êxito em encontrar vestígios desse manuscrito. Felizmente para nós, o Codex A foi copiado ou traduzido várias vezes, inteira ou parcialmente, antes de seu desaparecimento. (apud BALIEIRO, 2004, p. 50)

De acordo com Balieiro (2004), embora existindo essas traduções, a obra de Arquimedes não estava completa, “pois faltavam os tratados *O método* e *Sobre os corpos flutuantes”*, somente encontrados pelo dinamarquês Johan Ludvig Heiberg (1854-1928), em 1906, na cidade de Istambul, procedente do Santo Sepulcro de Jerusalém, em um palimpsesto[45].

Desse modo, Arquimedes nos legou uma vasta obra, abarcando vários domínios do conhecimento matemático e científico de sua época, tais como: geometria, aritmética, mecânica, astronomia, óptica, estática e hidrostática. Em relação à obra matemática de Arquimedes, o seu trabalho foi ímpar e influenciou matemáticos que vieram séculos depois dele, como é o caso de Galileu, conforme veremos mais adiante. Segundo Balieiro (2004), o caráter

---

[45] Palimpsestos, do grego. *palin* (de novo) + *psestos*, do verbo *yavw* = raspar: Os pergaminhos eram raspados e sobre eles os copistas escreviam. Na Idade Média, a produção dos pergaminhos era um dos privilégios dos monges, passando depois a ser ofício de todos os que a ele quisessem dedicar-se. Em seu preparo eram utilizadas peles de vários animais, como carneiros, ovelhas, novilhos, combinadas com alume - sulfato duplo de alumínio e de potássio. A Idade Média deu preferência ao emprego do pergaminho - *membrana pergamena, pergamenum* - assim denominado por ser um processo da cidade de Pérgamo. Acontecia então que a produção do pergaminho não bastava para o consumo, oferecendo grandes dificuldades aos copistas. Estes se valiam em tais apertos do expediente de raspar ou de lavar os pergaminhos já escritos, cujos assuntos pareciam de pouca importância ou de interesse secundário. Como se pode constatar, para os monges eram mais importantes os assuntos eucológicos (do grego. *euklologion*: coleção de orações), isto é, uma coleção de orações e liturgias usadas na Igreja Ortodoxa Oriental e, assim, sacrificaram muitos textos clássicos da antiguidade para sobre eles copiarem passagens dos salmos, orações e crônicas do mosteiro. Mas felizmente a técnica digital tem modernamente conseguido fazer aparecer os primitivos caracteres (BALIEIRO, 2004, p.5 1-52).

inovador de Arquimedes marca um rompimento com a matemática grega de então, em especial, a tratada *nos Elementos.* Isso porque, para Balieiro:

> Com a tradição grega geométrica encaminhada a determinar medidas (áreas e volumes) e analogias entre essas medidas (quadratura, cubaturas e retificações de curvas) estabelecidas pelos geômetras do século III a.C. e, em particular, por Euclides de Alexandria; assim, a geometria arquimediana procurou considerar e demonstrar proposições sobre áreas e volumes limitadas por novas linhas ou superfícies curvas (quadratura da parábola e espirais, cubaturas da esfera, cilindro, conoides e esferoides), equilíbrio de planos e seus centros de gravidade, sobre corpos flutuantes. Para estabelecer seus resultados, Arquimedes utilizava-se de procedimentos heurísticos, isto é, recursos provenientes das investigações mecânicas, pois suas descobertas geométricas estão fundadas e relacionadas com postulados e proposições de estática e hidrostática, formuladas nos tratados *Sobre o equilíbrio dos planos* e *Sobre os corpos flutuantes*, que não só permitem elaborar um esboço prévio das soluções ou demonstrações de alguns problemas ou teoremas geométricos, mas sugerem um delineamento plausível que possibilitará facultar essas soluções ou demonstrações por meio de um raciocínio, rigorosamente lógico, firmado em verdades desde logo aceitas sem demonstração e em outras verdades de antemão demonstradas em conformidade com os padrões clássicos da geometria grega, através do *método de exaustão.* (BALIEIRO, 2004, p. 54).

Ainda de acordo com Wussing (1998), é na obra *Sobre a Quadratura da Parábola* que Arquimedes obtém o cálculo exato da superfície de um segmento parabólico – tornando-se um método consistente para o cálculo de áreas limitadas por regiões curvas e, assim, o método precursor do cálculo integral. O cálculo preciso da medida do segmento parabólico foi obtido somando uma série geométrica infinita. Todavia, segundo Wussing, durante muito tempo se questionou como pode Arquimedes resolver uma quantidade significativa de problemas tão complicados. Para ele, é também em *o Método* que encontramos a explicação, pois nele verificamos que Arquimedes obteve os resultados de seus teoremas a partir de considerações mecânico-físicas e por analogias. Arquimedes disse a respeito:

> Estou (...) convencido de que o método não é menos útil na demonstração dos próprios teoremas. Algumas das coisas que a mim me parecem evidentes nesta forma “mecânica” têm depois de serem demonstradas de forma geométrica, pois as considerações deste tipo (“mecânico”) estão desprovidas de força demonstrativa (rigorosa). Porém é mais fácil se levar a cabo uma demonstração se se tem conseguido previamente, de uma forma mecânica uma ideia do assunto do qual não se possui nenhum conhecimento prévio. (apud WUSSING, 1998, p. 56).

É provável também que Arquimedes tenha escrito *O método* especialmente com o objetivo de auxiliar outros matemáticos contemporâneos seus a compreenderem suas descobertas. Conforme Baron (1985, V.1 p. 50), nessa obra aparecem notas dirigidas a Erástones (ca. 250 a.C.); nelas Arquimedes justifica seus procedimentos:

> Vendo em você, como digo, um estudante sério, um homem de considerável eminência em filosofia e um admirador da matemática, pensei em escrever-lhe explicando em detalhes, no mesmo livro, as peculiaridades de um certo método, pelo qual será possível iniciá-lo na investigação de alguns problemas de matemática, através da mecânica. Este procedimento é de muita utilidade, mesmo para as demonstrações dos teoremas; certas coisas tornam-se claras para mim; primeiro por um processo mecânico, embora eles tenham que ser demonstrados depois por argumentos geométricos, pois a investigação pelo método citado não fornece uma demonstração. Uma visão antecipada, obtida pelo método, do teor das questões contribui para o processo de demonstração mais do que se não possuíssemos nenhum conhecimento prévio.(BARON, 1985, V.1, p.50),

Desse modo, em *O método*, Arquimedes encontra por meio de considerações mecânicas, e depois por considerações geométricas, a área do segmento parabólico o qual será apresentado em detalhes na sequência deste trabalho. Portanto, das considerações feitas sobre o trabalho de Arquimedes, nos diversos ramos da ciência, é possível afirmar que suas contribuições para o desenvolvimento do cálculo, sobretudo o integral, foram inestimáveis. Sendo assim, desse conjunto de obras de Arquimedes, destaco:

- O conjunto de obras cujo principal objetivo foi a determinação de teoremas relativos ao cálculo de áreas e volumes de figuras limitadas por curvas e superfícies. Nelas, incluímos os trabalhos *sobre a curvatura da parábola, sobre a esfera e o cilindro, sobre espirais, sobre conoides e esferoides e sobre a medida do círculo.*

- O conjunto de obras relativas aos problemas envolvendo Estática e Hidrostática. Nelas, destacamos sobre o equilíbrio dos planos, sobre o método dos teoremas mecânicos (conhecido como O Método) e sobre a quadratura da parábola.

Porém, antes de entrar nos métodos de Arquimedes, vou detalhar primeiramente o *método da exaustão* proposto por Eudoxo, outro grande nome da matemática grega antiga. *O Método da Exaustão* comporta os antecedentes históricos de grande parte do trabalho de Arquimedes. Vamos conhecer mais detalhes sobre ele.

4.3.2 O método da exaustão[46]: modelo de Eudoxo

O *método da exaustão*, também conhecido por *Princípio de Eudoxo-Arquimedes*, leva essa denominação por ter na sua base a teoria das proporções, apresentada por Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.), e por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) ter sido o matemático que maior visibilidade lhe deu. O termo foi usado pela primeira vez no século XVII por Gregório de São Vicente. A teoria das proporções já foi tratada neste trabalho.

O método da exaustão teve também origem na tentativa de calcular áreas de regiões curvas. Surgiu a partir de uma crise das grandezas incomensuráveis, uma vez que sobre grandezas incomensuráveis restou um problema não resolvido: “o da comparação de configurações curvas e retilíneas”. Talvez tenha sido também o passo seguinte dado na busca de resolver problemas desse gênero, utilizando um método mais sofisticado do que o da quadratura de lúnulas de Hipócrates, que se constituiu basicamente em circunscrever e inscrever quadrados na figura curva. Assim, como a teoria das proporções, não se sabe exatamente se o que hoje denominamos *método da* exaustão já era conhecido dos matemáticos pitagóricos ou se foi, de fato, primeiramente proposto por Eudoxo (BARON, 1985; TOEPLITZ, 1969).

Segundo historiadores da matemática, o tratamento dado no livro XII de *Os Elementos de Euclides*, é devido a Eudoxo. Nele, Euclides começa com a demonstração à seguinte proposição: *“as áreas de círculos estão para si assim como os quadrados de seus diâmetros”* (BARON, 1985, p. 37). Ainda segundo Baron, essa proposição XII.2 é apresentada logo em seguida à demonstração da proposição XII.1, que havia sido usada para mostrar que, se inscrevermos polígonos semelhantes em dois círculos, *“as áreas estão para si assim como os quadrados dos diâmetros”*. A demonstração é feita por semelhança de

[46] É só a partir do século XIX que passou a ter esse nome.

triângulos e o resultado de XII.1 é usado diretamente na demonstração de XII.2. Assim, segue a demonstração (ver figura 21, seguindo N.M).

1.Círculos estão para si assim como os quadrados dos diâmetros

Sejam os círculos $ABCD$ e$EFGH$ e seus diâmetros BD e FH.

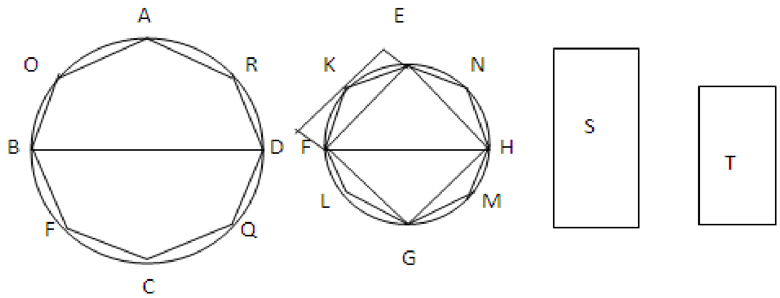


Figura -21 –Método da Exaustão de Eudoxo

Digo que assim como o círculo $ABCD$ está para o círculo $EFGH$, o quadrado de diâmetro BD está para o quadrado de diametro FH.

2. Pois se o quadrado de diâmetro BD não está para o quadrado de diâmetro FH assim como o círculo $ABCD$ está para o círculo $EFGH$, e como o quadrado de BD está para o quadrado de FH.

3. Então o círculo $ABCD$ está para alguma área menor do que o círculo $EFGH$, ou uma maior. Primeiro suponhamos que está para uma área menor S.

4. Inscrevemos o quadrado $EFGH$ no círculo $EFGH$; vemos que o quadrado inscrito é maior do que a metade do círculo $EFGH$, além disso, se traçamos tangentes ao círculo pelos E, F, G, H, o quadrado $EFGH$ é a metade do quadrado que circunscreve o círculo, e o círculo é menor do que o quadrado circunscrito; então, o quadrado inscrito $EFGH$ é maior do que a metade do círculo $EFGH$. Dividimos ao meio os arcos de circunferência EF, FG, GH, HE nos pontos K, L, M, N, e sejam os segmentos $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE$; portanto, cada um dos triângulos EKF, FLG, GMH, HNE é também maior do que a metade do segmento do círculo no qual está inscrito; além disso, se traçarmos tangentes ao círculo nos pontos K, L, M, N e completamos os paralelogramos sobre os segmentos de retas EF, FG, GH, HE, cada um dos triângulos EKF, FLG, GMH, HNE será metade do paralelogramo que o contém, enquanto que o segmento do círculo em questão é menor do que o paralelogramo; então cada um dos

triângulos EKF, FLG, GMH, HNE é maior do que a metade do segmento de círculo que os circunscreve.

5. Assim, utilizando esse processo de bisseção dos arcos de circunferências restantes e ligando os pontos obtidos por segmentos de retas, continuamente, deixamos alguns segmentos do círculo que serão menores do que a diferença entre o círculo $EFGH$ e a área S. Pois provou-se no primeiro teorema do décimo livro que se temos duas grandezas distintas, e da maior subtrairmos uma outra, maior do que sua metade, e desta que restou subtrairmos uma outra maior do que sua metade e assim sucessivamente, obteremos alguma grandeza que será menor do que a menor grandeza em questão. Sejam deixados setores como descrevemos, e sejam os setores do círculo $EFGH$ subtendidos por $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE$ menores do que a diferença entre o círculo $EFGH$ e a área S.

6. Logo, o polígono $EKFLGMHN$ restante é maior do que a área S. Inscrevamos também no círculo $ABCD$ o polígono $AOBPCQDR$ semelhante ao polígono $EKFLGMHN$; como o quadrado de BD está para o quadrado de FH, então o polígono $AOBPCQDR$ está para o polígono $EKFLGMHN$ (XII, 1).

Mas o quadrado de BD está para o quadrado de FH, então também o círculo $ABCD$ está para a área S; assim, também, como o círculo $ABCD$ está para a área S, o polígono $AOBPCQDR$ está para o polígono $EKFLGMHN$ (V, 11).

Logo, como o círculo $ABCD$ está para o polígono inscrito nele, então a área S está para o polígono $EKFLGMHN$ (V, 16).

7. Mas o círculo $ABCD$ é maior do que o polígono inscrito nele, portanto a área S é maior do que o polígono $EKFLGMHN$.

8. Mas ela também é menor: o que é impossível. Portanto, como o quadrado de BD está para o quadrado de FH, então o círculo $ABCD$ não está para nenhuma área menor do que o círculo $EFGH$.

9. Do mesmo modo podemos provar que nem o círculo $EFGH$ está para nenhuma área menor do que o círculo $ABCD$ nem o quadrado de FH está para o quadrado de BD.

Eu digo agora que nem o círculo $ABCD$ está para qualquer área maior do que o círculo $EFGH$, nem o quadrado de BD está para o de FH. Pois, se possível, suponhamos que ele assim esteja relacionado a uma área maior, S.

Logo, inversamente, como o quadrado de FH está para o quadrado de DB, então a área S está para o círculo $ABCD$;

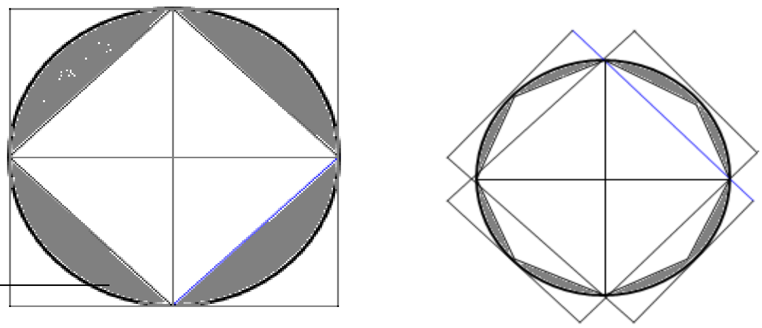
> 10. Assim também, como o quadrado de FH está para o quadrado de DB, então o círculo $EFGH$ está para alguma área menor do que a do círculo $ABCD$, (V, 11), que demonstramos não ser possível.
>
> Portanto, como o quadrado de BD está para o quadrado de FH, então o círculo $ABCD$ não está para nenhuma área maior do que o círculo $EFGH$.
>
> 11. Como já provamos que nenhum se relaciona com uma área menor do que o círculo $EFGH$, concluímos que o quadrado de BD está para o quadrado de FH, logo o círculo $ABCD$ está para o círculo $EFGH$.
>
> Logo, etc.
>
> C.Q.D.
>
> (BARON, 1985, p.38)

Podemos dizer que esse foi mais um passo dado na tentativa de melhorar a resolução de problemas sobre áreas de regiões curvas. Assim, *os problemas sobre quadratura*, ao invés de serem resolvidos reduzindo-se a figura circular ou lunar a um quadrado equivalente, tornou-se mais simples (ou mais preciso) aproximar a área de um círculo à área de um polígono regular com um número de lados cada vez maior. Tais polígonos eram sucessivamente inscritos na circunferência. Quanto maior o número de lados do polígono, mais próxima estava a área desse polígono da área do círculo. Foi dessa forma o início da matemática infinitesimal grega.

Entretanto, Toeplitz (1969) argumenta que a prova de Euclides apresentada acima foi baseada no *axioma da continuidade* e a ideia foi a mesma que o grego Antífono já tinha proposto para a quadratura do círculo. A proposição de Antífono era matematicamente sustentável, ou seja, que um polígono regular com um número suficientemente grande de lados inscrito no círculo tem área igual à do círculo. Desse modo, o lema *“as áreas estão para si assim como os quadrados dos diâmetros”,* anteriormente especificado, poderia, de fato, ser proposto pelo raciocínio mostrado anteriormente.

Novamente, Toeplitz (1969) afirma que a geometria trata de linhas ideais e não de desenhos físicos; esse raciocínio não é o bastante para a prova, sendo necessária uma prova detalhada. Essa prova viria mostrar que o lema não é invalidado pelo fato de sempre existir uma diferença entre a área do círculo e a do polígono inscrito, não importando quão grande seja o número de lados desse polígono. Para superar essa e outras dificuldades, os matemáticos gregos aplicaram o axioma da continuidade e propuseram uma prova logicamente clara. O axioma da continuidade é apresentado a seguir, já reformulado:

> Se inicialmente $\alpha > \epsilon$, e então diminuído de pelo menos sua metade, e o restante novamente diminuído de pelo menos sua metade, e assim por diante, um ponto será alcançado onde o remanescente é menor do que ϵ.[47]
>
> Desse modo, segundo o axioma da continuidade, existe um múltiplo $n\epsilon$ de ϵ que é maior do que α. Então 2ϵ é o dobro de ϵ e 3ϵ é menor do que duas vezes este dobro, isto é, menor do que $2^2\epsilon$, de modo similar, $4\epsilon < 2^2\,\epsilon$ e assim por diante; logo:
>
> $\alpha < n\epsilon \leq 2^{n-1}\epsilon$
>
> Portanto, ϵ pode ser duplicado tanto quanto, com frequência, tornar-se $> \alpha$, ou, em outras palavras, α pode ser dividido dessa maneira. Então o remanescente é menor do que ϵ, e se, em vez disso, ele é dividido a cada passo por mais do que sua metade, o resultado esperado é alcançado.
>
> Este lema permite-nos estimar o erro envolvido em cada passo do procedimento de Antífono. Ele inscreveu quadrados no círculo, conforme mostrado na figura-22. Já o quadrado circunscrito foi obtido a partir do inscrito, formando-se quatro triângulos isósceles construídos sobre os lados do quadrado inscrito. Todos os triângulos possuindo áreas iguais. Também iguais são os quatro triângulos que compõem o quadrado inscrito. A região hachurada é somente parte do total dos quatro triângulos somados; assim, estes são iguais ao quadrado inscrito; a região hachurada deve, portanto, ser menor do que o quadrado inscrito. Desse modo, a diferença entre o quadrado e o círculo é menor do que metade da área do círculo.



[47] De outro modo o axioma chegou até nós: "Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrair-se uma parte não menor que sua metade, e esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie" (BOYER, 1998, p. 63).

Figuras 22 e 23 – Quadraturas do círculo de Eudoxo

No caso do octógono, um triângulo isósceles é construído sobre cada lado do quadrado inscrito, cada triângulo sendo metade da caixa retangular construída sobre os lados quadrado inscrito (figura-23). A área hachurada representa a diferença entre o octógono regular inscrito e o círculo. Este é menor do que a metade da caixa retangular e, assim, menor do que a soma dos quatro triângulos adicionados quando o quadrado foi alterado para um octógono. Em outras palavras, se o quadrado é cortado fora do disco circular, ele perde mais do que metade de sua área, se os quatro triângulos também são eliminados (isto é todo o octógono), o círculo novamente perde mais do que metade da área remanescente. Continuando esse processo para um polígono regular de dezesseis lados, nós novamente cortamos mais do que metade da área remanescente e, desse modo, o processo pode ser continuado indefinidamente.

Portanto, o axioma da continuidade permite-nos concluir que, se ϵ é a área de um pequeno quadrado, a continuação do processo de corte descrito acima levará ao mesmo tempo a uma área remanescente menor do que ϵ. Seja f a área do polígono de n-lados para o qual $k-f<\epsilon$, onde K representa a área de um dos dois círculos do lema. Seja ainda a área de outro círculo e r e s os respectivos raios. Devemos agora provar que $K:L=r^2:s^2$. Se isso for falso, K terá então que ser maior ou menor do que essa proporção. Assumindo a alternativa de que K é maior do que a proporção – então haveria uma pequena área $K-\delta$ que satisfaz a proporção:

$(K-\delta):L=r^2:s^2$

Agora atribuiremos ao, ainda indeterminado, pequeno quadrado ϵ, mencionado anteriormente, um valor menor ou igual ao excesso de área δ e, com a ajuda do axioma da continuidade, afirmamos que o polígono regular de *n-lados*, cuja área é $k-f$, satisfaz a inequação:

$K-f<\epsilon\leq\delta$ ou $K-\delta\leq f$

Agora seja g a área do polígono regular de mesmo número de lados que n inscrito em outro círculo de área L; portanto $g<L$, então g é somente uma parte de L. Desse modo, temos ambos $f>K-L$ e $g<L$; assim,

$f:g>(K-\delta):L=r^2:s^2$

Por outro lado, a proporção $f:g=r^2:s^2$válida para polígonos, como posto inicialmente. Então nossa prova indireta mostrou que a afirmação:

$K:L>r^2:s^2$

> leva a uma contradição. A afirmação $K:L < r^2:s^2$ seria contraditória também, se simplesmente os dois círculos, cujos papéis são intrinsecamente o mesmo, fossem trocados.
>
> (TOEPLITZ, 1966, p.12).

É dessa forma, segundo Toeplitz, que é dada uma prova indireta e, assim, o "mistério" que envolve os processos infinitos é abarcado pelo axioma da continuidade. A partir da aceitação definitiva desse axioma, não foi mais necessário recorrer em cada prova a um novo e vago processo intuitivo. Isso foi o significado dado ao hoje conhecido como *método da exaustão* dos gregos.

Sem dúvida, o passo dado por Eudoxo foi de suma importância para a solução de problemas envolvendo processos infinitos, uma vez que o modelo por ele desenvolvido apresentou uma solução mais geral a esses problemas. Contudo, para que Eudoxo chegasse à sua teoria sobre magnitudes que lhe permitiu resolver, de modo provisório, mas rigoroso, problemas sobre processos infinitos, ele recorreu às ideias de Aristóteles. Segundo Urbaneja (1997), na obra aristototélica *A Física* há uma exposição sobre sua concepção sobre o infinito, continuidade, divisibilidade de grandezas e sobre o movimento. Aristóteles teria apresentado o axioma da continuidade anteriormente ao princípio de Eudoxo quando afirma:

> Adicionando continuamente a uma quantidade finita esta sobrepassará toda quantidade finita, e, igualmente, subtraindo continuamente de uma quantidade restará uma quantidade menor do qualquer outra. (URBANEJA, 1992, p. 58).

Segundo Urnbaneja, alguns historiadores atribuem a Aristóteles um tratado sobre problemas infinitesimais, com o título *Sobre as Linhas Indivisíveis*. No entanto, mesmo não sendo confirmada a autenticidade dessa obra, os problemas nela contidos teriam sido motivo de controvérsia entre os filósofos do Liceu e os da Academia de Platão, especialmente, na pessoa de Xenócrates, que naquele momento dirigia a academia platônica. Enquanto os platônicos defendiam os indivisíveis fixos, acreditando que podiam ser resolvidos com os paradoxos de Zenão, os do Liceu faziam especulações sobre a natureza do infinito, a existência dos indivisíveis ou infinitesimais e a divisibilidade de quantidades contínuas e, ainda, mantinham a contínua divisibilidade de entes geométricos: “o que é infinitamente divisível é contínuo” (URBANEJA, 1992, p. 58). Ainda, conforme está em Urbaneja[48]:

> Aristóteles considera finita toda magnitude, porém, admite a infinita divisibilidade, rejeita o atomismo geométrico. Resolve a antinomia entre rejeição e aceitação do infinito trabalhando com os termos real e potencial. Um infinito “em ação” é um conjunto constituído por uma infinidade real de coisas dadas, não pode ser pensado como algo compreensível; no entanto, pode ser pensado como uma magnitude crescente que exceda, “em potencial” todo limite, ou em uma série de magnitudes cada vez menores que “em potência” podem ser menores do que qualquer magnitude. Porém esses valores não são dados como um infinito acabado, ou seja, são objetos que se estendem, “tanto quanto se quiser”, podem ser consideras grandezas infinitas “em potencial”. (Ibidem, p. 59).

Todavia, segundo Urbaneja, as considerações de Arquimedes foram consideradas equivocadas, sobretudo por razões metafísicas quando aplicadas ao número, pois não especificam a extensão do infinito e lhe negam a divisibilidade indefinida. Esse equívoco pode ser constatado em uma passagem de *A Física*, onde Aristóteles aplica sinteticamente sua teoria sobre real e potencial:

> O número, em um processo de redução ao mínimo tem um fim. Enquanto que em um processo de aumento sempre ultrapassa qualquer valor que se toma. Com as magnitudes, ao contrário, o oposto acontece, porque em um processo que tende a um mínimo, ultrapassa todas as quantidades; enquanto que em um processo de crescimento não há uma grandeza infinita. Nesse caso, o fato é que o número é um ser único e indivisível, como por exemplo, um homem é um só homem e não muitos. E, ainda, o número é, diversas vezes, uma quantidade determinada; por isso, é necessário que se pare no individual. Porque o número dois ou o três são parônimos, ou números derivados, e, igualmente, é qualquer outro número. De fato, em um processo para mais, o número é sempre compreensível, enquanto que a magnitude pode ser dividida indefinidamente pela metade. Por essa razão existe o infinito em potencial, de modo algum em ato. (URBANEJA, 1992, p. 59).

Para Urbaneja, Aristóteles via o infinito como uma ilusão do pensamento que sempre pode ultrapassar potencialmente um limite prefixado e, além disso, soube distinguir o infinitamente grande do infinitamente pequeno nas grandezas e nos números. Aristóteles ainda ocupou-se amplamente dos paradoxos de Zenão e tentou rebatê-los baseando-se no senso comum e na

---

[48] Livre tradução nossa.

sua doutrina sobre atual e potencial. Portanto, independente do fato de essa teoria sobre os indivisíveis ser de Aristóteles ou não, ela foi de grande utilidade para que Eudoxo ampliasse a sua percepção sobre os processos infinitos e, portanto, útil na resolução de problemas sobre infinito e no método da exaustão por ele proposto.

Além disso, antes mesmo de Arquimedes apontar suas importantes contribuições ao cálculo de áreas e volumes de regiões curvas – precursoras do cálculo integral –, podemos identificar, olhando numa perspectiva atual, que os trabalhos de Antífono e Eudoxo já assinalam para conceitos do cálculo diferencial e integral, ou seja, é possível identificar noções intuitivas de:

- De limite – ao inscrever e circunscrever polígonos com um número de lados cada vez maior – ou seja, tomando n tendendo ao infinito a diferença entre os polígonos inscritos e circunscritos tende para zero. Assim, obteremos o valor o mais próximo possível da área do círculo;
- Variável - n pode assumir infinitos valores;
- Tangência (ao círculo) – Se aumentamos o número de lados do polígono inscrito, obteremos uma infinidade de semirretas onde o ponto inicial e final estão cada vez mais próximos, ou seja, o limite é um conjunto de pontos; por cada ponto passa uma única reta tangente. Conceito que conhecemos como derivada no ponto.

Logo, o que posso concluir é que, embora esses conceitos não tenham sido postos na mesma nomenclatura (ou simbologia) que conhecemos hoje, os gregos conseguiram formalizá-los numa forma bem próxima da atual. Será que esses conceitos foram observados primeiramente por Arquimedes e depois pelos matemáticos dos séculos XVI e XVII? É provável que sim. Por outro lado, também questiono se esses problemas ficaram como questões em aberto, conforme Mendes (2003), em função das limitações impostas pela própria matemática – falta de instrumentos matemáticos que os respondessem completamente? Também é provável que sim.

4.3.3 Os modelos de Arquimedes: o método da exaustão e os modelos para o cálculo de áreas e volumes

Como já foi dito no início da seção, com Arquimedes a matemática da antiguidade alcançou sua maior projeção, uma vez que sua riqueza de pensamento em várias áreas do conhecimento o tornou o mais célebre dos matemáticos gregos, e o mais estudado a partir do século XIV da era cristã. Em relação ao desenvolvimento do cálculo, sobretudo o integral, foi sem dúvida determinante para a alavancada dos estudos mais avançados nesse campo até alcançar um formato mais próximo do atual e proposto por Newton e Leibniz, no século XVII.

Seguindo os estudos de Baron (1985), Urbaneja (1992) e Wussing (1998), os métodos usados por Arquimedes para determinar centros de gravidade, áreas de regiões curvas, volumes de regiões limitadas por superfícies estão espalhados em vários de seus trabalhos, não sendo possível apreendê-los em sua totalidade em uma única exposição. Na sua obra mais conhecida "*a Quadratura da Parábola",* Arquimedes obtém a medida exata de um segmento parabólico somando uma série geométrica infinita. Já em o *Tratado do Método*[49]*,* a medida do segmento parabólico é obtida por meio de considerações mecânicas.

Além do mais, muitos dos resultados obtidos por Arquimedes na determinação de centros de gravidade, áreas e volumes (esfera, conoides, paraboloides, etc.) são obtidos através do método exaustão. Entretanto, de acordo com Balieiro (2004), conforme apresentaremos em mais detalhes na sequência deste trabalho, esse método exigia um conhecimento prévio do resultado que se buscava demonstrar. Assim, para Balieiro, é válida a pergunta: "como Arquimedes conhecia e obtinha esses resultados que logo demonstrava rigorosamente?" (2004, p. 54). Em seus escritos, com exceção de o *Método*, nada é revelado sobre os procedimentos por ele utilizados para obter tais resultados.

---

[49] Ver também Urbaneja (1992).

Balieiro ainda comenta:

> Como, por exemplo, Arquimedes sabia previamente que o segmento do paraboloide de revolução é uma vez e meia o cone de igual base e altura? Ou que a cunha cilíndrica é um sexto do paralelepípedo circunscrito nesse cilindro? Ou que toda esfera é igual a quatro vezes o cone que tem base igual ao círculo máximo da esfera e altura igual ao raio da esfera? E é aqui que entra em cena o método heurístico mecânico de descobertas, formalizado através dos postulados e proposições demonstradas no tratado *Sobre o equilíbrio de planos.* (BALIEIRO, 2004, p. 55).

O certo é que, em todos esses problemas, Arquimedes utilizou o *Método da Exaustão*. Por meio desse método, ele primeiro fazia os cálculos utilizando procedimentos mecânicos para então formalizá-los por meio de proposições. Posteriormente, fazia a demonstração utilizando procedimentos geométricos, baseado em raciocínio lógico e rigoroso. Seus procedimentos geométricos apoiavam-se em postulados e proposições trazidas da estática e da hidrostática, formuladas nos tratados *Sobre o equilíbrio dos planos* e *Sobre os corpos,* no qual também expõem o método da balança*.*

O método da balança (processo mecânico proposto por Arquimedes para o cálculo do volume de alguns sólidos) afirma que, ao seccionar um sólido em um grande número de discos, cujo volume se deseja calcular, e suspendê-lo numa das extremidades de uma balança imaginária, de modo que ele equilibre outro sólido, cujo volume e centro de gravidade sejam conhecidos, é possível obter o volume do referido sólido (BALIEIRO, 2004, p.54). Usando esse procedimento mecânico, Arquimedes resolvia os problemas que visavam calcular o volume de alguns sólidos, para então demonstrá-los de modo formal e nos rigores da geometria grega.

A seguir, apresentamos os pormenores do *Princípio da Balança* aplicado no cálculo do volume da esfera, do tratado arquimediano *Sobre o Equilíbrio de Planos.*

> No tratado *Sobre o equilíbrio de planos*, proposição 6, Arquimedes estabelece que *Dois pesos comensuráveis se equilibram a distâncias inversamente proporcionais a eles* e completa na próxima proposição que *o teorema é também válido quando os pesos são incomensuráveis*. Assim, numa linguagem moderna, observa-se na figura 24 [N.M] uma haste rígida equilibrada sobre um cutelo chamado ponto de apoio, sob a ação de duas forças, F_1 e F_2. Se as forças F_1 e F_2 estão distantes d_1 e d_2, respectivamente, do ponto de

apoio, então, $F_1 \times d_1 = F_2 \times d_2$. Desse modo, Arquimedes usa esse princípio da estática para calcular o volume da esfera, (figura 24, conforme N.M):

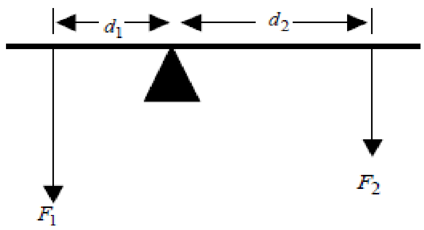


Figura 24 – Principio da Estática (Figura 1 conforme BALIEIRO, 2004, p. 54

Pode-se afirmar, em termos modernos, que Arquimedes encontrou o volume de uma esfera comparando a massa de uma esfera e de um cone com a de um cilindro. Ele considerou inicialmente os sólidos mostrados na figura 24: uma esfera de raio *r*, um cilindro circular reto com uma base de raio 2*r* e altura 2*r* e um cone circular reto com uma base de raio 2*r* e altura 2*r*,

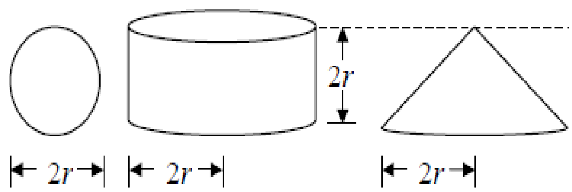


Figura 25 – Sólidos usados por Arquimedes (Figura 2 conforme BALIEIRO, 2004, p. 54)

Arquimedes mostrou que a esfera e o cone equilibravam o cilindro sobre o braço de uma alavanca onde *o* é o ponto de apoio, como mostra a (figura 26 – N.M).

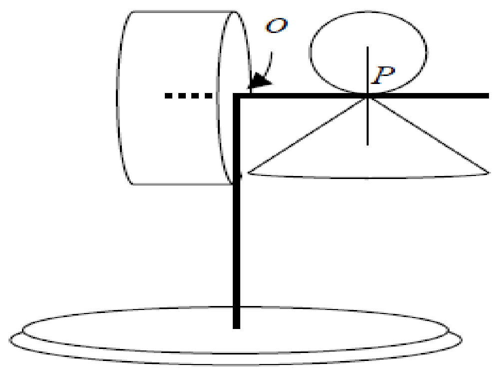


Figura 26 – Princípio da Alavanca (Figura 3 conforme BALIEIRO, 2004, p. 54)

Em seguida, Arquimedes demonstrou que o momento de uma fina partição do cilindro a uma distância *x* do ponto de apoio *o* equilibraria a soma dos momentos de cada uma das finas partições da esfera e do cone a uma distância *x* do ponto *P.* Usando esse fato, ele mostrou que o cilindro equilibraria a esfera e o cone, conforme figura 27.

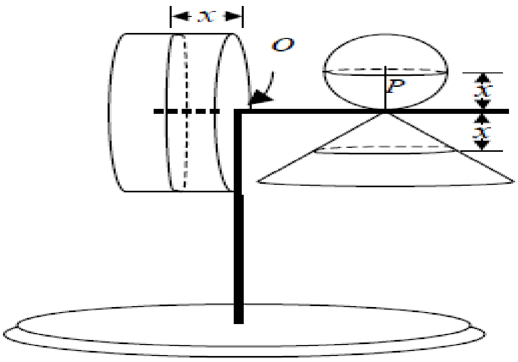


Figura 27 – Partição de Arquimedes (Figura 4 conforme BALIEIRO, 2004, p. 55)

Desse modo, seguindo esses argumentos, uma interpretação da demonstração de Arquimedes seria a seguinte: a espessura de cada fina partição é Δx, onde Δx é muito pequena. Assim, a fina partição do cilindro é um círculo de raio 2*r* e a espessura dessa partição é Δx e, então, o volume desta fina partição do cilindro será $V_C = \pi 2r)^2 \Delta x = 4\pi r^2$, como mostra a figura 28 (figura 5 conforme BALIEIRO, 2004, p. 54).

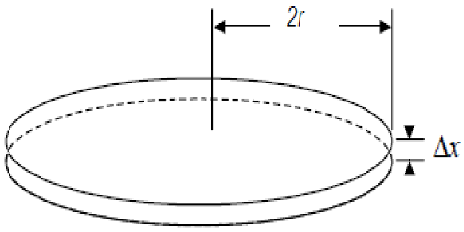


Figura 28 – Fino disco imaginado por Arquimedes

Considerando a esfera, sua fina partição tem raio igual a $\sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{2rx - x^2}$. Então, o volume desta fina partição da esfera será $V = \pi(2xr - x^2)\Delta x = 2\pi xr\Delta x - \pi x^2 \Delta x$, como mostra a figura 29. N.M, (figura 6, conforme BALIEIRO, 2004, p. 56).

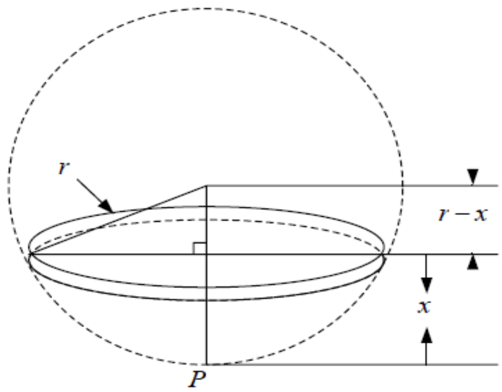


Figura 29 – Fina partição da Esfera

Por fim, a altura do cone é igual ao raio da base e o raio da partição é igual a *x*, então, o volume desta partição do cone será $V_k = \pi x^2 \Delta x$, como mostra a figura 30, seguindo N.M, (figura 7 conforme BALIEIRO, 2004, p. 57).

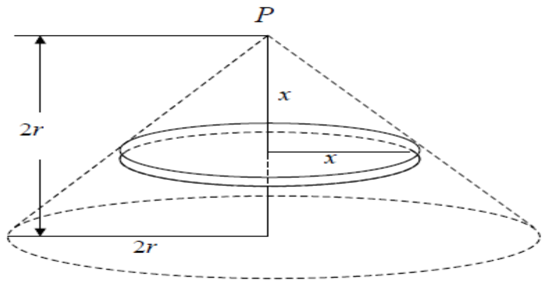


Figura 30 - Fino disco do Cone

Supõem-se que os três sólidos são feitos do mesmo material homogêneo e que a massa de cada um, por unidade de volume, seja igual a 1. A força da gravidade sobre as massas de cada fina partição circular pode ser considerada como atuando nos centros dessas finas partições circulares. Para a fina partição do cilindro o centro de gravidade está a x unidades do ponto de apoio *o*. Os centros de gravidade das finas partições da esfera e do cone estão sobre uma linha vertical que passa pelo ponto *P*, o qual está situado a 2*r* unidades do ponto de apoio *o*. Portanto, o momento da fina partição do cilindro próximo do ponto de apoio *o* é igual a $4\pi r^2 \Delta x$. A soma dos momentos das finas partições da esfera e do cone próximas do ponto de apoio *o* é igual a $[\pi(2rx - x^2)\Delta x + x^2 \Delta x]2r = (2\pi r x \Delta x)2r = 4\pi r^2 \Delta x(x)$.

Assim, considerando que os momentos são iguais e opostos, a fina partição do cilindro equilibra as finas partições da esfera e do cone combinadas. Então, Arquimedes considerou o cilindro como a soma de um grande número de finas partições, como mostra a figura 31. O momento de cada uma dessas finas partições próximas do ponto *o* é igual à soma dos momentos correspondentes das finas partições da esfera e do cone.

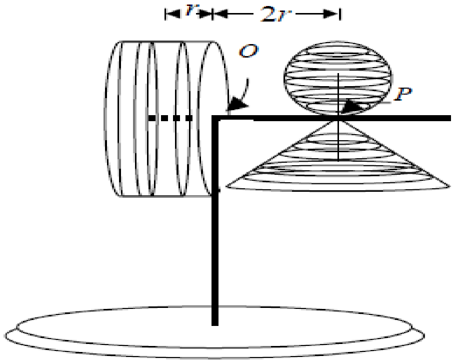


Figura 31 – Cilindro, cone e esfera em finas partições

> A soma dessas finas partições produzirá o cilindro, a esfera e o cone (figura 31 – N.M, Figura 1 conforme BALIEIRO, 2004, p. 57)
> Então, a partir dessa comparação, Arquimedes conclui que o momento do cilindro próximo do ponto de apoio *o* era igual à soma dos momentos da esfera e do cone próximas do ponto de apoio *o*. A força da gravidade sobre um sólido simétrico pode ser considerada como a que atua em seu centro geométrico. O centro do cilindro está a *r* unidades do ponto de apoio *o*. Os centros da esfera e do cone estão sobre uma linha vertical a uma distância 2*r* do ponto de apoio *o*. (BALIEIRO, 2004, p. 57-63).

Era assim que Arquimedes resolvia os problemas de forma mecânica, para depois resolvê-los de modo formal aplicando o método da exaustão. Além disso, o *método da exaustão* era aplicado de diversas maneiras, sendo classificado em dois tipos fundamentais: o *"método da compreensão e o método da comparação"* (URBANEJA, 1992, p.73)[50]. De acordo com Urbaneja (1992) e Balieiro (2004), esse modo de Arquimedes desenvolver seus raciocínios, baseados na heurística, sugere um delineamento sustentável que lhe possibilitou encontrar soluções e fazer demonstrações por meio de um raciocínio, rigorosamente lógico, firmado em verdades aceitas sem

---

[50] *O Método da Compreensão* nos diz que: dada uma grandeza geométrica A, seu comprimento, área ou volume é igual a outra grandeza B cujo comprimento, área ou volume já é conhecido. A demonstração é feita a partir da seguinte consideração: toma-se por base a geometria da figura A, a partir dela se constrói duas sucessões $\{I_n\}$ monótona crescente e $\{C_n\}$ monótona decrescente, tal que $I_n < A < C_n$". Com base nessa definição, Urbaneja (1992, p. 73-74), utilizando uma linguagem moderna, apresenta a demonstração formal. Arquimedes aplica o método da compreensão nas proposições 1, de sobre a medida do círculo, 22, 26, 28 e 30 de sobre conoides e esferoides; 24 e 25 de sobre as espirais, 16 de sobre a quadratura da parábola; 15 do método sobre teoremas mecânicos. Já o *Método da Aproximação* afirma que: "dada uma grandeza geométrica A, seu comprimento, área ou volume é igual a uma grandeza B cujo comprimento, área ou volume seja conhecido. Daí, com base na geometria da figura A, se constrói uma sucessão $s_1, s_{2,}s_3, \dots, s_n$ de grandezas, tal que:

1. $S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n$ de grandezas tais que a diferença $A - S_n$ seja tão pequena quanto possível para n suficientemente grande...

demonstração e em outras verdades de antemão demonstradas em conformidade com os padrões clássicos da geometria grega.

Usando o *método de exaustão,* apresentarei neste trabalho dois exemplos que já foram abordados em vários textos de história da matemática que tratam do tema. Os exemplos aqui apresentados estão em consonância com esses textos e são calcados em bases formais, conforme propostos por Arquimedes; o primeiro, utilizando o método da aproximação e aplicado no cálculo da área de um segmento parabólico (a quadratura da parábola); o segundo, utilizando o método da compreensão, e aplicado no cálculo da área da primeira volta da espiral (a quadratura da espiral). Vejamos então cada um deles:

- Exemplo 1 - *A quadratura da Parábola*[51]*: o* problema consiste em determinar a área delimitada por um segmento de parábola (a curva parabólica) e o segmento de reta AC, conforme figura 32.

A Hipótese de Arquimedes:

> *"Uma seção de parábola excede em $\frac{1}{3}$ a área do triângulo inscrito de mesma base da seção de parábola e cujo vértice é o mesmo da parábola". Isto é, a área do segmento parabólico é $\frac{4}{3}$ a área do triângulo inscrito na parábola, de mesma base e mesmo vértice.*

Em notação algébrica moderna, temos:

$$\boxed{A_{\cap ABC} = \frac{4}{3} A_{\Delta ABC}}$$

A prova de Arquimedes:

Prova: Dado o segmento de parábola *ABC,* conforme figura-32,

---

[51] A demonstração aqui apresentada está em conformidade com (HERRERA, 2003, p. 63-67). Embora esteja em conformidade com o exposto por Arquimedes é apresentado utilizando uma linguagem moderna. De acordo com a tradição da matemática grega antiga e com os recursos da época foi feito com régua e compasso. Na versão moderna utilizamos um software gráfico.

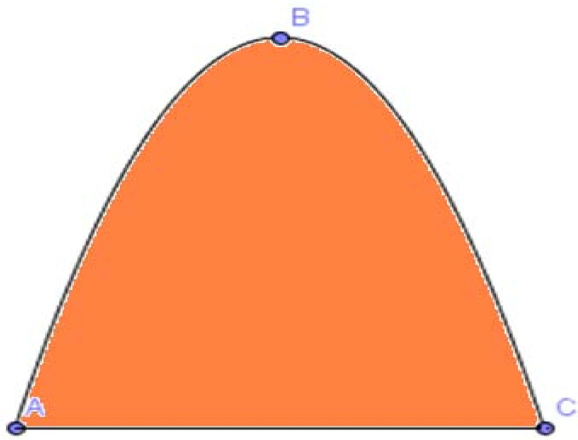


Figura 32 Segmento de Parábola *ABC*

Passo 1 – Traçar os segmentos de reta unindo os pontos AB, BC e AC e delimitar o triângulo inscrito à parábola de mesma base da parábola. Calcular a área desse triângulo. Conforme figura 33.

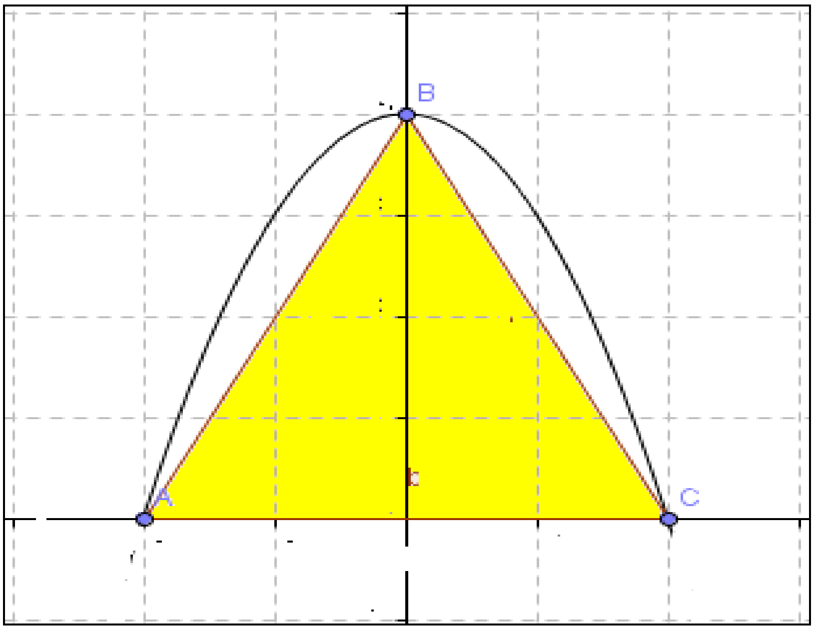


Figura 33 –Triângulo inscrito à parábola

Passo 2 -Traçar por A uma reta paralela ao vértice B e por C uma reta tangente à parábola nesse ponto. A reta tangente a C deve cortar a reta tangente a A no ponto Z. Unir, com retas, os pontos AC, AB e BC, formando o triângulo ΔABC, de acordo com figura-34 (seguindo N.M)

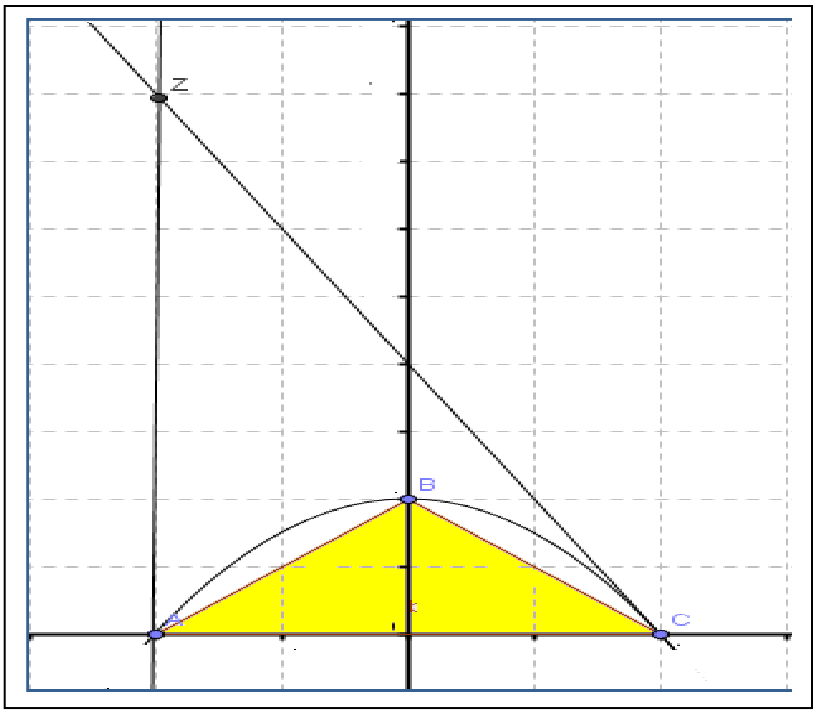


Figura 34 – Referente ao passo 2

Passo 3 – Construir uma reta entre a reta que passa por A e o vértice e que seja paralela ao vértice. Esta reta corta a base da parábola no ponto X, a parábola no ponto O, em M a reta tangente ao ponto C, em N a reta CB e em K, a reta AZ, conforme figura 35:

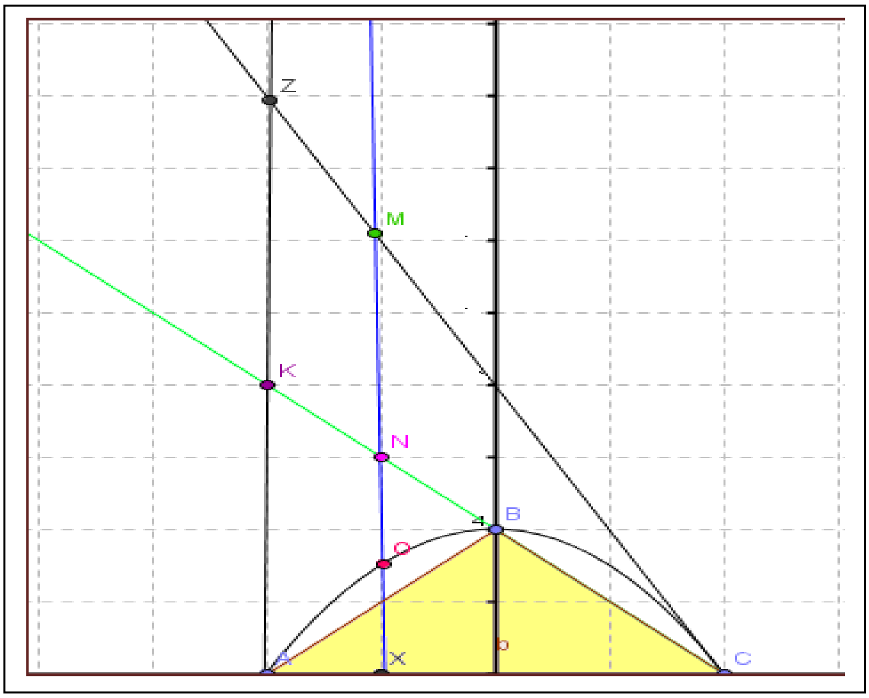


Figura 35 – Resultante do passo 3

A partir da figura 35, Arquimedes deduziu as seguintes relações envolvendo o produto de segmentos, ou seja, ele deduziu que:
$OX.AC = AX.XM$

e que

$OX.KC = KN.XM$

Além disso, essas relações o levaram fazer a seguinte consideração: Se prolongarmos a reta BKC até um ponto D, tal que a distância KC seja igual à distancia KD e colocar sobre essa reta um segmento de longitude igual a OX no ponto D, obtemos a figura 36 (N.M):

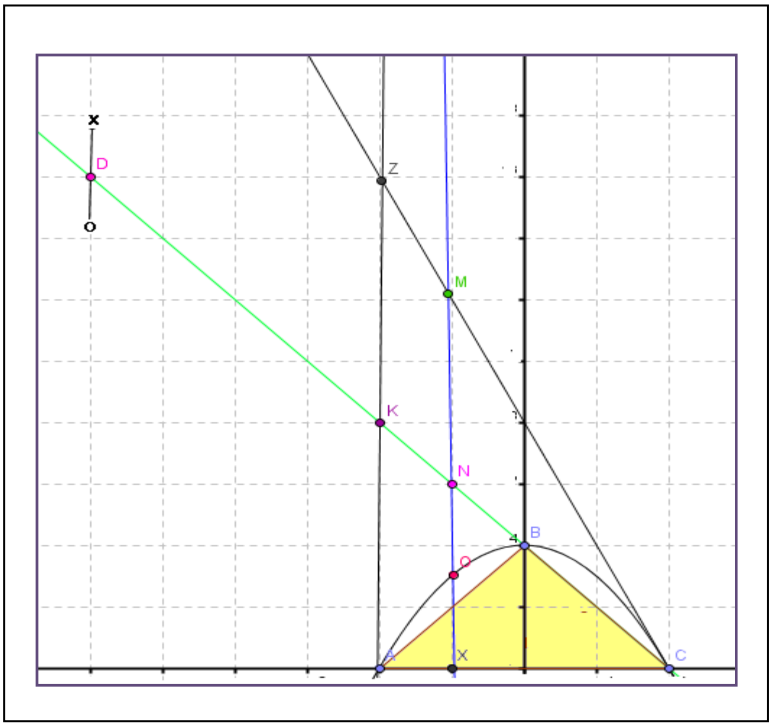


Figura 36 – Determinação do segmento OX (leis da balança)

Segundo Arquimedes, utilizando as Leis da Balança, este segmento equilibrará MX com respeito ao ponto K. Então:
a soma de todos os segmentos OX corresponderá à área da superfície do segmento parabólico ABC e a soma de todas as retas MX é a área total do triângulo ACZ.

Assim, a superfície de segmento OX, cujo centro de gravidade está em D, equilibra a superfície do triângulo ACZ, que tem seu centro de gravidade em G, ponto este situado sobre a reta KC, e a uma distância de K de $\frac{1}{3}$ de KC. Portanto, a superfície de segmentos XO, isto é $A_{\cap ABC}$é $\frac{1}{3}$ da área do ΔACZ. Desse modo, podemos ver que a área do ΔACZ é quatro vezes a área do triângulo ΔABC, já que $ZK = AK$ e $AE = EC$ e também se verificam as proporções:

$$\frac{EC}{AC} = \frac{EB}{AK}$$

Daí fica fácil deduzirmos que $EB = \frac{AK}{2} = \frac{AZ}{4}$. Feito isso, é possível afirmar que a altura do triângulo ΔACZ é quatro vezes o triângulo

ΔACB e suas bases são iguais a *AC.* Portanto, a área do segmento parabólico *ABC* é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo ΔABC.

Assim, nessa demonstração, Arquimedes utilizou métodos mecânicos baseado no princípio da balança. Em seguida, fez a demonstração rigorosa usando a soma de uma série infinita[52], conforme está em Wussing (1998, p. 57):

Em uma sucessão geométrica com razão $\frac{1}{4}$ a soma de todos os termos, aumentada na terça parte do termo menor é $\frac{4}{3}$ do termo maior.
Sejam $a, b, c, d, e, \ldots$ Termos da sucessão. Tem-se que:

$$b + \frac{1}{3}b - \frac{4}{3}b - \frac{1}{3}a,\ c + \frac{1}{3}c - \frac{4}{3}c - \frac{1}{3}b, \ldots$$

Somando, segue que:

$$b + c + d + e + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d + \frac{1}{3}e = \frac{1}{3}(a + b + c + d)$$

Somando a e restando $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}c$, $\frac{1}{3}d$, $\frac{1}{3}e$ se obtém

$$a + b + c + d + e + \frac{1}{3}e = \frac{4}{3}a$$

c.q.d.

Portanto, de acordo com Wussing, na essência esse resultado, numa concepção moderna, nada mais é do que "o cálculo efetivo do limite de uma sucessão de somas parciais que se diferencia de uma quantidade finita em menos do que uma quantidade arbitrariamente pequena" (1998, p. 57). De acordo com Wussing (1998, p. 58):

No segmento parabólico (fig. 37) AC se inscreve o triângulo ABC; H divide AC em duas partes iguais, HB é paralelo ao eixo da parábola. AB e AC dão lugar a novos segmentos parabólicos, aos quais se aplica o procedimento anterior. Obtêm-se, assim, os triângulos ADB e BEC. Das propriedades da parábola segue que ΔABC é quatro vezes a soma dos outros triângulos. No passo seguinte se obtém quatro triângulos, cuja soma é um quarto da área dos anteriores, etc.

[52] Naturalmente, Arquimedes não usou a expressão soma de uma série infinita.

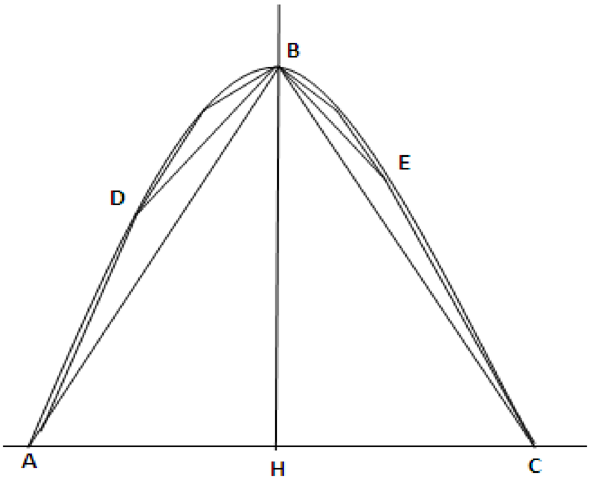


Figura- 37- Quadratura da Parábola por aproximação de triângulos inscritos conduzida por Arquimedes (WUSSING, 1998, p.58).

Supondo que proposição seja falsa, se teria então que a área do segmento parabólico deveria ser maior ou menor do que $\frac{4}{3}$ da área K do triângulo ABC. Suponhamos primeiro que a área é $> \frac{4}{3}\Delta$. Por meio do procedimento de inscrever triângulos,

"será possível continuar (...) até que a soma dos segmentos resultantes seja menor do que a diferença na qual o segmento supera a área K. De onde segue que o polígono inscrito [isto é, uma soma parcial $a + b + \cdots + e$, N.A] será maior que a área K. Porém, isso é impossível, pois então existem áreas que formam uma sucessão geométrica de razão $\frac{1}{4}, \ldots,$ e é claro que a soma de todas as áreas que $\frac{4}{3}$ a maior de todas" (L 4.2, pp. 27-28, apud WUSSING, 1998, p. 58).

Exemplo 2 – A quadratura da Espiral[53]

A aplicação do método da compreensão recai sobre a quadratura da primeira volta da espiral, a qual Arquimedes sustenta na proposição 24, em trabalho *Sobre as Espirais*:

Proposição 24

"A área compreendida entre a espiral descrita na primeira volta e a primeira das retas na posição inicial de giro é equivalente a um terço do primeiro círculo". (URBANEJA, 1992, p. 78).

Assim, Arquimedes dedica toda uma obra sobre as espirais a uma corda que posteriormente levou o seu nome e que, primeiramente, foi apresentada em termos de composição de movimento, conforme segue:

---

[53] Para a Quadratura da Espiral optamos pela descrição conforme exposto por Urbaneja (1992, p. 73-78).

> Se uma linha reta traçada em um plano gira um número de vezes qualquer com movimento uniforme estando fixo um de seus extremos e retornando à posição inicial, enquanto que, sobre a linha de rotação, um ponto se move uniformemente com ela a partir de um extremo fixo, o ponto descreverá uma espiral no plano [ver figura 38. N.M). (URBANEJA, 1992, p. 74).

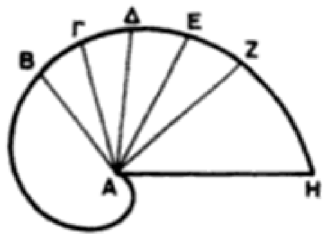


Figura 38– Sobre as espirais.

A partir dessa definição, ao longo do tratado sobre as espirais, Arquimedes vai calculando as quadraturas das diversas áreas relacionadas com a espiral. Isso consta das definições 4, 5 e 7, respectivamente. Arquimedes define “a primeira volta da espiral” (figura 39), “a primeira reta (que une o ponto inicial com o final), “a primeira área” E (região delimitada pela corda e a primeira reta) e o “primeiro círculo” C (com centro na origem da espiral e o raio da primeira reta). Em seguida, Arquimedes propõe diversas proposições e corolários; por fim, demonstra a proposição 24.

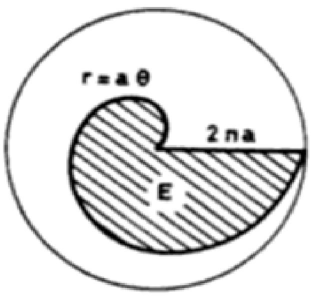


Figura 39 – Sobre as espirais (raio r, área E e o círculo C).

Disso, Arquimedes obtém, conforme a figura 39, o seguinte resultado fundamental:

$$a(E) = \frac{1}{3}a(C) = \frac{1}{3}r(2ra)^2 \qquad (1)$$

Nessa prova (1), Arquimedes utilizou resultados prévios, os quais constam da proposição 10 e que são equivalentes às fórmulas para a soma de inteiros consecutivos e seus quadrados e, por fim, levando a certas desigualdades necessárias para que seja empreendido o método da exaustão. A seguir, a proposição 10:

> Se diversas linhas em qualquer número que sucessivamente excedem umas às outras em uma mesma magnitude, em seguida são colocadas umas sobre as outras, sendo o excesso igual à menor e, tendo o mesmo número das outras linhas iguais à maior das anteriores, os quadrados construídos sobre estas últimas, juntamente com o quadrado da maior e o retângulo delimitado pela menor e uma linha formada por todas as linhas que igualmente se excedem, valem o triplo de todos os quadrados construídos sobre estas
> (...) desvinculemos essa proposição de seu caráter geométrico e de sua linguagem retórica e o analisemos em termos modernos como uma a expressão algébrica. Isso nos leva à progressão geométrica. (URBANEJA, 1997, p. 76).
>
> $a, 2a, 3a, \dots, na$
>
> para a qual Arquimedes demonstrou a seguinte relação:
>
> $$(a^2n^2 + a^2n^2 + \dots^n \dots + a^2n^2) + a^2n^2 + a(a + 2a + \dots^n \dots + na) = 3[a^2 + (2a)^2 + \dots^n \dots (na)^2]$$
>
> , resultado equivalente à fórmula para a soma dos n primeiros quadrados inteiros
>
> $$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (2)$$

Na sequência, Arquimedes apresenta o corolário referente à proposição 10 (URBANEJA, 1997, p. 77), conforme segue:

> a soma dos quadrados construídos sobre as linhas é igual ou maior do que três vezes o menor dos quadrados construídos sobre as linhas que se excedem sucessivamente na mesma magnitude, porque a primeira soma seria o triplo da segunda si se adiciona a primeira daqueles valores, e é maior do que o triplo da si se subtrai o triplo do quadrado da linha maior, aumentou porque a primeira soma é maior do que o triplo do quadrado da linha maior. Portanto, se os valores são construídos em linhas semelhantes que superam umas às outras na mesma magnitude, e aproximadamente igual à maior, a soma das figuras construídas ao longo desta serão três vezes menor do que as construídas sobre as linhas desiguais, e a primeira soma é três vezes maior do que a segunda si se subtrai o triplo da figura construída sobre a linha maior, porque se estes valores são semelhantes têm a mesma razão que o quadrado de que falamos anteriormente. [Euclides VI.20].

Novamente, desvinculando o corolário de Arquimedes de seu caráter retórico e geométrico, e expressando-o em linguagem algébrica, podemos escrevê-lo como (URBANEJA, 1997, p. 78):

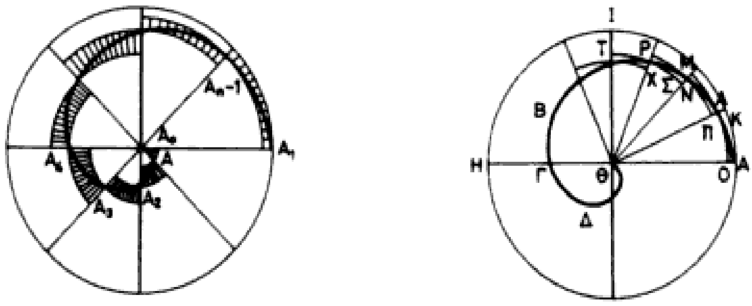
$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \qquad (3)$$

Este resultado poderia ser obtido expressando (2) da seguinte forma:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

A partir daqui Arquimedes abre o caminho para resolver diversos problemas envolvendo figuras habituais (neste caso, setores circulares inscritos e circunscritos). É o que faz na proposição 21, 22 e 23 para, finalmente, na proposição 24 aplicar o método da exaustão com todo rigor nos moldes da geometria grega (URBANEJA, 1997, p.78).

Analisando o raciocínio de Arquimedes em uma linguagem mais algébrica, teríamos (URBANEJA, 1997, p. 76-80):

> Como a figura 40 (similar a 39, utilizada por Arquimedes na proposição 21 de *Sobre as Espirais*) divide o círculo C em n setores, que se interceptam com a espiral nos pontos $O, A_1, A_2, \dots, A_n$, fazendo $OA_1 = c$, resulta: $OA_1 = c, OA_2 = 2c, \dots, OA_n = nc$.
>
> 
>
>
> Figura 40 – Área da primeira volta da espiral
>
> Temos, assim, que a região espiral E contém uma região P, formada por setores circulares inscritos P_i de raio: $c, 2c, \dots, (n-1)c$. E está contida em uma região Q, formada por setores circulares circunscritos Q_i, de raio: $c, 2c, \dots nc$. Trivialmente, as áreas de P, E e Q verificam: $\alpha(P) < \alpha(E) < \alpha(Q)$. Além disso, a quantidade $\alpha(Q) - \alpha(P)$ é igual à área de um setor circular e, portanto, pode ser tão pequena quanto desejada, tomando n suficientemente grande, de modo que, conhecendo primeiramente o resultado (1) da quadratura, isso se configurará com todo rigor pela dupla redução ao absurdo do método da exaustão.
>
> De fato, supondo $\alpha(E) < \left(\frac{1}{3}\right)\alpha(C)$ e, escolhendo n suficientemente grande para que se verifique: $\alpha(Q) - \alpha(P) < \left(\frac{1}{3}\right)\alpha(C) - \alpha(E)$, como $\alpha(P)$ é menor do que $\alpha(E)$, temos:

$$a(Q) < \left(\frac{1}{3}\right)a(C) \qquad (4)$$

No entanto, a razão entre as áreas de setores circulares semelhantes é igual à razão dos quadrados de seus raios [Euclides, XII. 2], isto é:

$$\frac{a(Q_i)}{a(C_i)} = \frac{(ic)^2}{(nCc)^2} i = 1,2,3,\ldots,n \quad (5)$$

Onde C_i são os setores círculo C circunscrito na espiral. A partir de (5), aplicando as propriedades da soma das proporções [Euclides, V.12], obtemos:

$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{c^2+(2c)^2+\cdots+(nc)^2}{n(nc)^2} = \frac{1^2+2^2+\cdots n^2}{n^3} > \frac{1}{3} \qquad (6)$$

Sendo esta última desigualdade uma cosequência de (3).

A partir de (6) obtemos o resultado $a(Q) > \left(\frac{1}{3}\right)a(C)$, contraditório com (4); portanto, não podemos ter $c(E)$ seja inferior a um terço de $a(C)$.

Agora, supondo que $a(E) > \left(\frac{1}{3}\right)a(C)$; escolhendo n suficientemente grande verificamos que: $a(Q) - a(P) < a(E) - \left(\frac{1}{3}\right)a(C)$. Como $a(Q)$ é maior do que $a(E)$, temos:

$$a(P) > \left(\frac{1}{3}\right)a(C) \qquad (7)$$

Mas o raciocínio é análogo ao caso anterior:

$$\frac{a(P)}{a(C)} = \frac{c^2+(2c)^2+\cdots+[(n-1)]^2}{n(nc)^2} = \frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{3} \qquad (8)$$

Sendo a última desigualdade consequência de (3).

A partir de (8) obtemos o resultado $a(P) < \left(\frac{1}{3}\right)a(C)$, contraditório com (7); portanto, não podemos ter $a(E)$ seja maior do que $\left(\frac{1}{3}\right)a(C)$. Necessariamente, portanto, devemos ter:

$$a(E) = \left(\frac{1}{3}\right)a(C)$$

C.q.d

Desse modo, descrevi como foi feita a demonstração do cálculo da primeira volta da espiral. Esses dois exemplos se consolidaram como os mais significativos modelos de aplicação do método da exaustão dos gregos na resolução de problemas sobre quadraturas. Além disso, esses dois trabalhos de Arquimedes tiveram influência decisiva sobre os métodos de quadraturas aritméticas do século XVII.

Arquimedes também desenvolveu modelos para o cálculo do volume de sólidos de revolução. A título de ilustração de um desses desenvolvimentos, vamos apresentar o método utilizado por ele para calcular o volume de um segmento parabólico que gira em torno de um eixo – *o Paraboloide de Revolução*. Conforme Baron (1985), analisando o problema do ponto de vista moderno, trata-se da rotação da parábola $y^2 = kx$ em torno do eixo-x. Assim, de acordo com Baron (1985, unidade I, p. 42), Arquimedes teria resolvido o problema primeiro provando o resultado para um caso bem geral, conforme segue:

Dada uma seção obtida de um paraboloide ou hiperboloide de revolução pela intersecção de um plano, ou uma seção de um esferoide, menor do que a metade do esferoide, também obtida por interseção de um plano, é possível inscrever na seção uma figura sólida e circunscrever em torno dela uma outra figura sólida, cada uma delas construída de cilindros ou tronco de cilindros com alturas iguais de tal maneira que o volume da figura circunscrita exceda o volume da figura inscrita por um volume menor do que o volume de qualquer sólido dado. (Proposições 19, 20, Sobre conoides e esferóides, ver figura 41 – N.M).

1.

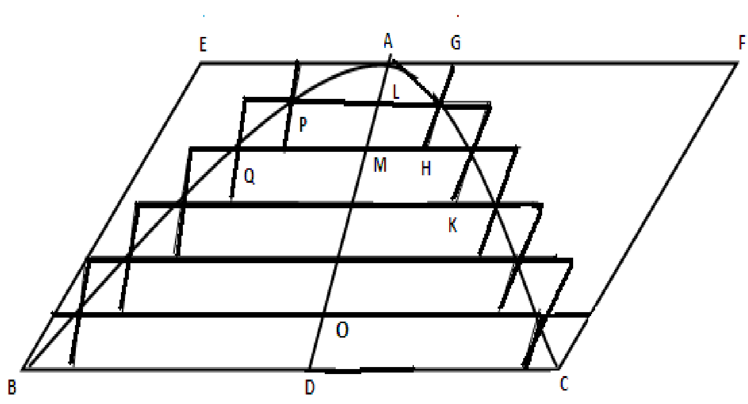


Figura 41 – Partição do paraboloide de revolução

2. Dividindo este cilindro, ou tronco, continuamente em partes iguais, por planos paralelos à base, chegaremos a um cilindro ou tronco, cujo volume é menor do que o volume de qualquer sólido

dado. Seja este cilindro, ou tronco, aquele cujo eixo é OD e seja AD dividido em partes iguais a OD, em L, M,... Por L, M,... trace retas paralelas a BC encontrando a cônica em $P, Q, \dots$, por estas retas trace planos à base do segmento . Estas cortarão o conoide ou o esferoide em círculos ou elipses semelhantes.

Em cada um desses círculos ou elipses descreva dois ou troncos de cilindros, cada um com eixo igual à OD, um deles permanecendo na direção de A e o outro na direção de D, como vemos na figura 41.

Então os cilindros ou troncos de cilindros desenhados na direção de A, formam uma figura circunscrita e aqueles na direção O, uma figura inscrita, em relação ao segmento

3. Também o cilindro ou tronco PG na figura circunscrita é igual ao cilindro, ou tronco PH na figura inscrita, QI na figura circunscrita é igual a QK na figura inscrita, e assim por diante. Portanto, por adição

$$(figura\ circunscrita) = (figura\ inscrita) + (cilindro\ ou\ tronco\ cujo\ eixo\ é\ OD).$$

Mas o cilindro, ou tronco cujo eixo é OD, é menor do que a figura sólida ; daí segue-se a proposição[54]:

Proposição 21, 22 de Sobre Conoides e Esferoides

---

[54] No problema proposto por Arquimedes, ele desejava provar que para quaisquer dos sólidos mencionados a diferença entre o volume de um sólido circunscrito e o volume de um sólido inscrito pode assumir valores menores do que o volume de qualquer sólido dado. Assim, para melhor compreendermos o problema exposto por Arquimedes, de acordo com visão moderna, Baron (1985) apresenta algumas considerações, conforme segue: 1) Não devemos nos preocupar com o eixo oblíquo do diagrama, pois a base BC não é perpendicular ao eixo AD e o resultado independe disto. Ele é igualmente válido quando a base é perpendicular ao eixo e A é o vértice da parábola; 2) A construção exige que se corte o sólido em secções, por planos equidistantes cada um dos quais paralelos à base. Então inscrevemos e circunscrevemos discos cilíndricos finos a cada pedaço. Agora temos quatro sólidos para considerar: o sólido inscrito (neste caso um conoide), o próprio sólido, o sólido circunscrito (obtido da soma de discos circunscritos) e o cilindro envolvente (obtido de discos cilíndricos, cada um com diâmetro BC); 3) Para melhorar a compreensão do problema podemos introduzir alguma notação algébrica, ou seja:

$$I_n = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n$$

$$C_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

$$E = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n$$

Onde n indica o número de planos secionados, I_n, C_n, E representam o sólido inscrito, o sólido circunscrito e o cilindro envolvente respectivamente, e i_r, c_r, e_r as fatias correspondentes de cada um. Da figura $i_1 = 0$, $i_2 = c_i$, $i_3 = c_2$,..., $i_n = c_{n-1}$ e $e_1 = e_{2=}e_3 = \cdots = e_n = c_n$, logo, $C_n = I_n + c_n = I_n + e_n$, e $C_n - I_n = e_n$. Por uma escolha apropriada de n, segue-se que as diferenças entre as figuras circunscritas e inscritas podem ser arbitrariamente pequenas.

Qualquer segmento de um paraboloide de revolução é novamente metade do cone ou segmento de um cone que tem a mesma base e o mesmo eixo.

1. Suponha que a base do segmento é perpendicular ao plano do papel e suponha que o plano do papel seja o plano que passa pelo eixo do paraboloide que corta a base do segmento em ângulos retos em BC e torna a seção parabólica BAC.

Seja EF aquela tangente à parábola que é paralela a BC e seja A o ponto de contato.

Então (1), se o plano da base do segmento é perpendicular ao eixo do paraboloide, este eixo é a reta AD que bisseta BC, mas não em ângulos retos.

2. Trace por EF um plano paralelo à base do segmento. Este tocará o paraboloide em A, que será o vértice do segmento e AD o seu eixo. A base do segmento será um círculo com diâmetro BC ou uma elipse com eixo maior $B'C$.

3. Pode-se encontrar um cilindro, ou tronco de um cilindro, passando pelo círculo ou elipse e tendo como eixo AD (proposição 9); do mesmo modo, pode-se traçar um cone ou um segmento de um cone passando pelo círculo ou elipse tendo como vértice A e como eixo AD (proposição 8).

Seja X um cone igual a $^3/_2$ (cone ou segmento de cone ABC).

4. O cone X é, portanto, igual à metade do cilindro ou tronco de um cilindro EC (proposição 10).

Mostraremos que o volume do segmento do paraboloide é igual a X. Caso contrário, o segmento deve ser maior ou menor do que X.

5. Suponha que o segmento seja maior que X.

Podemos então inscrever e circunscrever, como na última proposição, figuras constituídas de cilindros ou troncos de cilindro com mesma altura e tais que

6. $(figura\ circunscrita) - (figura\ inscrita) < (segmento) - X.$

Seja o maior dos cilindros ou tronco formando a figura circunscrita aquele cuja base é o círculo ou a elipse ao longo de BC, com eixo OD, e seja o menor deles aquele cuja base é o círculo ou a elipse ao longo de BC, com eixo OD, e seja o menor deles aquele cuja base é o círculo ou a elipse ao longo de PP' com eixo AL.

Seja o maior dos cilindros ou tronco formando a figura inscrita aquele cuja base é o círculo ou a elipse ao longo de RR' com eixo OD com eixo LM.

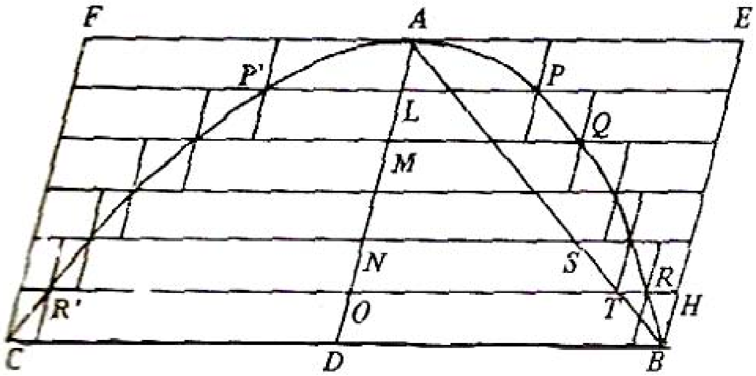


Figura 42 – Partição cubatura do paraboloide

Faça com que todos os planos das bases dos cilindros ou troncos interceptem a superfície do cilindro completo ou tronco EC.

$$(figura\ circunscrita) - (figura\ inscrita) < (segmento) - X.$$

Segue-se que

(figura inscrita) > X .... (α)

Agora, comparando sucessivamente os cilindros ou troncos com alturas iguais a OD e formando respectivamente as partes do cilindro ou tronco EC e da figura inscrita, temos:

7. $(primeiro\ cilindro\ ou\ tronco\ em\ EC):(primeira\ figura\ inscrita)$

$$= BD^2:RO^2$$

$$= AD:AO$$

$= BD:TO$, onde AB intercepta OR em T

E

$(segundo\ cilindro\ ou\ tronco\ em\ EC):(segunda\ figura\ inscrita)$

$= HO:SN$, da mesma maneira, e assim por diante.

8. Então (proposição 1)

$(cilindro\ ou\ tronco\ EC):(figura\ inscrita)$
$$= (BD + HO + \cdots):(TO + SN + \cdots)$$

Onde $BD, HO, \ldots,$ são todos iguais, e $BD, TO, SN, \ldots,$ decrescem em progressão aritmética.

9. Portanto,

$(cilindro\ ou\ tronco\ EC) > 2\,(figura\ inscrita)$ ou $X > (figura\ inscrita)$

; o que é impossível por (α) acima.

10. Se possível, seja o segmento menor que X. Neste caso inscrevemos e circunscrevemos figuras como antes, mas de tal modo que:

$$(figura\ circunscrita) - (figura\ inscrita) < X - (segmento).$$

E daí segue-se que:

11. $(figura\ circunscrita) < X \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$

E, comparando os cilindros ou troncos que constituem o cilindro completo ou tronco CE e a figura circunscrita respectivamente, temos:

$$(primeiro\ cilindro\ ou\ tronco\ CE):(primeiro\ na\ figura\ circunscrita) = BD^2:BD^2 = BD:BD$$

12. (segundo em *CE*): (segundo na figura circunscrita)

$= HO^2:RO^2$

$= AD:AO$

$= HO:TO$

E, assim, sucessivamente. Então (pela proposição 1)

(cilindro ou tronco CE):(figura circunscrita)

$= (BD + HO + \cdots):(BD + TO + \cdots),$

$< 2:1$ (lema que precede a proposição 1)

E daí segue-se que :

$$X < (figura\ circunscrita);$$

13. Isso é impossível por (β),

14. Assim, o segmento, não sendo nem menor nem maior do X, tem que ser igual a ele e, portanto, a $\frac{3}{2}(cone\ ou\ segmento\ do\ cone\ ABC)$.

Segundo Baron, toda essa longa descrição é característica nos trabalhos de Arquimedes. No caso específico da descrição mostrada no exemplo anterior, ela foi feita para demonstrar a construção de um conoide ou um paraboloide de revolução “devemos ter em mente que a apresentação introduzida nestas proposições é inteiramente verbal e geométrica” (BARON, 1985, V.1, p. 49). Arquimedes usou relações geométricas especiais, ou seja, para cada problema fazia uma descrição, ao invés de uma demonstração geral que se aplicasse aos casos especiais. Assim, podemos pensar não em um modelo geral, mas em vários modelos (ou descrições) que se aplicavam a cada problema, no entanto, mantinham uma raiz comum.

4.4 OS MODELOS DE ARQUIMEDES E AS CONTRIBUIÇÕES PARA O DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO

Do recorte feito dos trabalhos de Arquimedes, vimos que eles foram decisivos para o desenvolvimento do cálculo integral. Suas contribuições durante muito tempo ficaram esquecidas, só sendo retomadas a partir do século XIV. Além disso, podemos questionar o que ficou de concreto para o desenvolvimento do cálculo, em especial para a integração, e que foi aproveitado pelos matemáticos dos séculos XVI e XVII? Novamente, em consonância com as análises feitas no final da seção anterior, podemos pontuar as principais contribuições de Arquimedes, do ponto de vista atual e dos modelos que gerou, tomando a quadratura da parábola, e que podem ser estendidas para os outros problemas sobre área e volume.

- Novamente o conceito intuitivo de limite está presente – ao determinar o segmento D conforme está no problema da quadratura da parábola usando o princípio da balança – com argumentos geométricos, e, posteriormente, usando argumentos lógicos. Esse limite, exposto de forma implícita, permite calcular a área da região compreendida entre a curva da parábola e a semireta AC de um modo bastante preciso.
- O conceito de Tangência – o triângulo retângulo inscrito na parábola pode ser tão pequeno quanto quisermos, isto é, o cateto oposto e adjacente podem se aproximar mais e mais de zero, daí tendendo a um ponto sobre a curva, ou a tangente.
- A relação entre tangente a um ponto e medida de área está presente, embora essa relação não seja percebida.

Portanto, numa análise mais detalhada, percebemos que dos modelos apresentados por Arquimedes para o cálculo de área sob uma curva poderia emergir o conceito de limite e de tangência a um ponto sobre a curva. Contudo, essa relação não foi percebida. Concordando com Mendes (2003), podemos considerá-las como questões em aberto, uma vez que careciam de uma formulação matemática só totalmente alcançada bem depois. Os matemáticos posteriores a Arquimedes e que, de fato, consolidaram o cálculo se aperceberam disso? De certo que sim, mas antes propuseram novos problemas com novas questões em aberto, até alcançar um modelo consolidado – um problema resolvido.

Analisando de um modo geral, reafirmo que as contribuições dos gregos foram determinantes para o desenvolvimento da matemática infinitesimal, da teoria dos números e da análise. Como expus no início do capítulo, foi por volta do século VII a.C. que a Grécia antiga, mais precisamente com os filósofos jônicos, desponta como principal polo científico do mundo e marca o início da matemática grega e do nascimento de uma legião de matemáticos e filósofos que vão influenciar profundamente o desenvolvimento matemático e científico a partir de então.

Entretanto, os filósofos desse período não abandonam totalmente as questões práticas da matemática. Primeiramente, do contato com a matemática egípcia e babilônica trocaram experiências que ajudaram os gregos a edificarem sua própria matemática. Segundo, tinham uma “sede” de poder explicar as leis que regiam o universo. Nesse período, começaram a abandonar crenças místicas baseadas em deuses e demônios e começaram a explicar os fenômenos naturais baseados em leis matemáticas. Portanto, acreditaram que a matemática podia ser a chave para compreender o funcionamento do universo. Desse modo, não havia uma separação entre o estudo da matemática e o estudo das leis da natureza. Também não havia separação entre a produção do conhecimento matemático e as especulações de natureza filosófica (HERRERA, 1999; DORCE, 2006; GRANT, 2002).

Os gregos antigos queriam compreender o funcionamento do universo e suas leis misteriosas, pois entendiam que dominando essas leis podiam prever a ocorrência de fenômenos como os eclipses do Sol e da Lua. Para isso, não economizaram esforços em estabelecer medidas e realizar cálculos para determinar a distância da Terra ao Sol e desta à Lua. Também realizaram cálculos para determinar as datas em que tais eclipses ocorreriam; realizaram medidas para calcular o perímetro da Terra e fizeram desenho de mapas da

Terra e do sistema planetário. Assim, a matemática continuou tendo um forte componente prático.

Portanto, desde as primeiras discussões de natureza filosófica sobre a natureza, a descoberta das grandezas incomensuráveis, passando pela teoria das proporções, pela tentativa de resolver problemas sobre quadratura de lúnulas, círculos e parábolas, culminando com o método da exaustão, primeiramente proposto por Eudoxo e, finalmente, completamente demonstrado por Arquimedes, um longo caminho foi percorrido. Cada modelo proposto atendeu às condições e conhecimentos de cada época, mas deixou lacunas – questões em aberto – que pouco a pouco foram sendo preenchidas ou respondidas, a partir de novas percepções sobre o mesmo problema. Assim, o edifício matemático foi se estruturando e, nesse bojo, o desenvolvimento do cálculo.

Finalizo este capítulo, ressaltando que, com os gregos da antiguidade, o conhecimento matemático aos poucos deixa de ser um mero conhecimento prático e começa a despontar como um corpo de conhecimento formal. Preocuparam-se em estabelecer leis gerais – modelos matemáticos – para representar tanto o mundo físico como entes abstratos e, ainda, tais modelos foram apresentados por meio de provas rigorosas, tanto geométricas, quanto usando argumentos lógicos. Assim sendo, se constituem em uma parte imprescindível para acompanharmos a construção do edifício matemático.

Capítulo 5

Do Império Romano ao Renascimento: compreensão sociológica do desenvolvimento da ciência e da matemática no ocidente e no oriente

Figura 43 - Deus criando o universo através de princípios geométricos. Capa da *Bíblia Moralisée*, 1215. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:God-Architect.jpg.>. Acesso em: 4 maio 2010.

Neste capítulo, faço uma explanação histórica do fim do domínio grego no Ocidente, das suas últimas contribuições para a ciência e a matemática, das implicações para o desenvolvimento da ciência em geral, e da matemática em particular, do Império Romano ao Renascimento.

5.1 DECLÍNIO DA CULTURA GREGA E ASCENSÃO DO IMPÉRIO ROMANO: ÚLTIMAS CONTRIBUIÇÕES GREGAS PARA A MATEMÁTICA

Por volta do século II a.C, chega ao fim quase seis séculos de domínio grego. “A majestosa civilização grega foi destruída por várias forças” (KLINE, 1985, p. 32). Romanos e egípcios aos poucos foram estendendo seu poder político na Grécia até que os romanos finalmente conquistam o mundo grego, dando início ao Império Romano no Ocidente, e posteriormente no Oriente. Mais do que uma simples conquista de domínio territorial, foi um duro golpe na cultura grega clássica que, aos poucos, se viu perdendo toda a gigantesca contribuição dada à ciência, à matemática, às artes e à filosofia.

No quarto século da era cristã, o “Império Romano era um colosso geográfico que se estendia do oceano Atlântico a ocidente à Pérsia a oriente” (GRANT, 2002, p. 1). Com a ascensão dos romanos ao poder, começou um período de transformações rápidas e radicais na Matemática, tanto em seu conteúdo, como na forma de concebê-la. Essas mudanças mais uma vez estiveram atreladas às novas condições econômicas, sociais, políticas e culturais impostas pelo modo romano de governar e, é claro, por sua visão sobre essas questões. Por exemplo, o imperador Diocleciano (245-313) diferenciava Geometria de Matemática. A importância dada à Geometria foi grande a ponto de ser ensinada nas escolas públicas, enquanto que o ensino da Matemática foi proibido, situação que perdurou até a Idade Média.

Desse modo, a grandiosa herança cultural, filosófica e matemática deixada pelos gregos, com sua eterna sede de conhecimento, aos poucos foi sendo abandonada e substituída por uma matemática mais voltada para as necessidades práticas do modo de vida dos cidadãos romanos. Se a geometria foi considerada imprescindível, se deve ao fato de ser útil à construção civil. Os romanos destinaram esforços ímpares na construção de palácios, templos, casas de banho, urbanização das cidades e construção de arenas para as práticas esportivas da época, etc.

O nome mais importante desse período foi o do arquiteto romano Vitrúvio (ca. século I a. C). Ele se dedicou à construção de máquinas de guerra e sua maior obra foi um tratado de Arquitetura em dez volumes que também se constituiu em uma importante obra de Matemática. Era um manual prático de construção civil que trazia bastante conteúdo matemático, sendo utilizado até depois da Idade Média como livro de Arquitetura e de Matemática. Para Vitrúvio, os três grandes descobrimentos matemáticos foram o triângulo retângulo, de lados 3, 4 e 5, a irracionalidade da diagonal do quadrado de lado 1 (um) e a solução de Arquimedes dada ao problema da coroa do rei Heron (HERRERA, 2003).

É sabido que os romanos não deram contribuição significativa ao desenvolvimento da Matemática e da ciência, pelo menos nos moldes como os gregos fizeram. Para eles, a ciência pura e a Matemática não tinham nenhum valor, conforme vemos nas palavras de Herrera: “sua incapacidade para desenvolver a matemática se baseava fundamentalmente no fato de que para governar um grande império, o que buscavam era a resolução de problemas práticos” (2003, p. 52).

Com a ascensão do cristianismo no mundo grego-romano, por volta do século II da era cristã, a cultura grega sofreu mais um duro golpe. Embora os dirigentes cristãos tenham adotado alguns costumes e crenças da cultura pagã grega, o mesmo não aconteceu com a forma de conceber o conhecimento matemático e científico. Ao contrário, argumenta-se que as condições para o desenvolvimento científico foram pioradas em consequência da nova ordem religiosa dominante.

Na visão cristã, “os humanos, pecadores por natureza, só poderiam alcançar a felicidade eterna caso se desviassem das coisas do mundo e cultivassem as do reino espiritual eterno” (GRANT, 2002, p. 1). Com base nesse pensamento, milhares de livros foram queimados, entre eles clássicos da Matemática grega, sob a alegação de que incitavam à cultura pagã e afastavam o homem de Deus. A filosofia grega e a Matemática foram consideradas conhecimento pagão e, portanto, deveriam ser banidos do meio social e do “homem pecador”. A pouca produção que permaneceu se confinou aos mosteiros que se multiplicaram por toda a Europa ocidental durante fins do Império Romano e toda a Idade Média.

O golpe definitivo à civilização grega foi dado pela conquista do Egito pelos mulçumanos no ano de 640 d.C. Os mulçumanos trataram de destruir o que havia sobrado da biblioteca de Alexandria, após sucessivos ataques. Os livros restantes foram queimados sob a alegação de que tudo o que o homem precisava ler para conduzir sua vida estava contido no *Alcorão*, livro sagrado dos mulçumanos. Dentre as milhares de obras queimadas estavam também clássicos gregos.

Todavia, surge um questionamento: o que merece destaque na ciência e Matemática grega durante os primeiros séculos do Império Romano? No campo das ciências do século I d.C, surgiram importantes obras de Heron de Alexandria com seus tratados sobre pneumática, óptica e Matemática. Nicômano escreveu sobre aritmética pitagórica; Teodósio e Menelau escreveram sobre geometria esférica. Também nesse período foram escritas as maiores obras sobre astronomia por Claudio Ptolomeu (século II d.C). Por volta do século III, surgem as contribuições mais significativas desse período para a Matemática com os trabalhos de Diofanto e Pappus[55], especialmente para o posterior desenvolvimento do cálculo. Vejamos um substrato do que foi o trabalho de Ptolomeu e Diofanto.

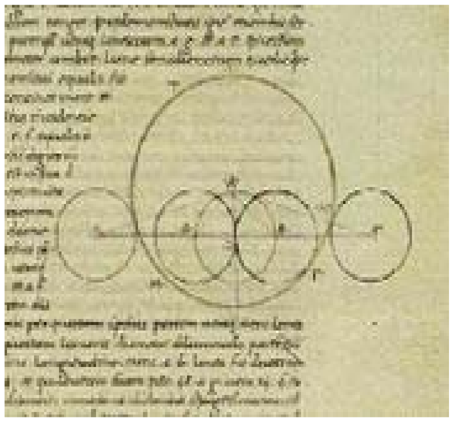


Figura 44 Página do *Almagesto* - uma tradução do grego em latim de 1451, feita por George Trebizond.. Disponível em: <http://www.on.br/site_edu_dist_2008/site/conteudo/modulo1/2-cosmologia-grega/9-escola-de-alexandria.html>. Acesso em: 4 maio 2010.

5.1.1 A astronomia ptolomaica

Segundo Grant (2002), as ideias cosmológicas de Ptolomeu encontram-se, sobretudo, em *Hipóteses dos Planetas*. O Modelo geocêntrico de Eudoxo e Aristóteles, com as contribuições de Apolônio foi, em parte, aceito por

[55] Pappus é considerado o último matemático de destaque da Antiguidade, também se destacou como geógrafo e astrônomo. Fez comentários sobre o *Almagesto* e o livro X de os *Elementos*. A principal obra de Pappus foi o seu *Collectio* (Coletânea Matemática), parcialmente conservado. Nessa obra, Pappus fez numerosos comentários às obras matemáticas gregas anteriores, muitas das quais tiveram os textos originais perdidos, também traz trabalhos originais, dentre eles, o início da geometria projetiva com o conhecido teorema de Pappus.

Ptolomeu[56]. Ele compartilhou alguns conceitos básicos de Aristóteles. Por exemplo, ambos acreditavam que cada um dos sete planetas estava incrustado na sua própria esfera que o arrastava consigo.

Concordaram, ainda, que as estrelas fixas estivessem localizadas numa única esfera que as rodeava e continha todos os orbes planetários e, por fim, concordaram "que cada esfera planetária consistia numa pluralidade de subesferas, necessárias para explicar o movimento e a posição resultante do planeta que ia sendo arrastado" (GRANT, 2002, p. 122). Assim, Aristóteles e Ptolomeu idealizaram um sistema planetário com uma pluralidade de esferas concêntricas, ou melhor, "camadas esféricas, encaixadas umas nas outras". Aristóteles previu um número de cinquenta e cinco, enquanto Ptolomeu quarenta e nove dessas esferas.

Apesar de algumas semelhanças, o sistema planetário de Ptolomeu e o de Aristóteles diferem em muitos pontos, antes de tudo, os antecessores de Ptolomeu se limitaram a dar explicações no campo teórico, da retórica[57] – comum à época – e arriscaram alguns modelos geométricos, como foi o caso das esferas concêntricas e o modelo epiciclo-deferente. No sistema aristotélico, as esferas eram concêntricas em relação à Terra. Já as de Ptolomeu eram excêntricas[58] e epicíclicas[59]. Contudo, ao considerar os orbes concêntricos, com a Terra no centro, não era possível explicar as variações observadas nas distâncias dos planetas. No *Almagesto*[60], Ptolomeu descreve um sistema de

---

[56] Cláudio Ptolomeu foi a maior referência astronômica até o séc. XVII, quando finalmente o modelo geocêntrico caiu por terra. Nasceu em alguma cidade egípcia, provavelmente no ano 100 da era cristã. Não há nenhum registro marcante sobre sua vida. Ptolomeu dedicou-se à Matemática, à Astronomia, à Geografia e à Astrologia. Das suas realizações no campo dessas ciências, destacamos *as Tabelas Manuais, o Tetrabiblos, a Geografia, as Hipóteses Planetárias, o Planisfério, o Analema, as Fases das Estrelas Fixas, a Óptica, e a Harmônica.*

[57] A retórica, ou arte de convencer e persuadir, surgiu em Atenas, na Grécia antiga, por volta de 427 a.C.; quando os atenienses já haviam consolidado na prática os princípios do legislador Sólon e estavam vivenciando a primeira experiência de democracia de que se tem notícia na história. A primeira tarefa da retórica clássica tinha natureza heurística – método de análise que visa ao descobrimento e ao estudo de verdades científicas.

[58] Excêntrica significa que o Sol ocupa uma posição excêntrica na elipse, ou seja, fica deslocado da posição central, num ponto chamado foco.

[59] Vem de epiciclo; pequeno círculo descrito por um astro em torno de um ponto imaginário que, por sua vez, descreve outro círculo.

[60] O *Almagesto* sem dúvida é a maior obra de Ptolomeu. Nela estão as bases matemáticas da astronomia ptolomaica e é composto de 13 livros ou volumes. Para realizar seus cálculos matemáticos, utilizou de um generoso conhecimento de Trigonometria esférica e tabelas trigonométricas com um grau de precisão

orbes excêntricos e epicíclicos para explicar essas variações. Ver modelo a seguir mostrado na figura 45:

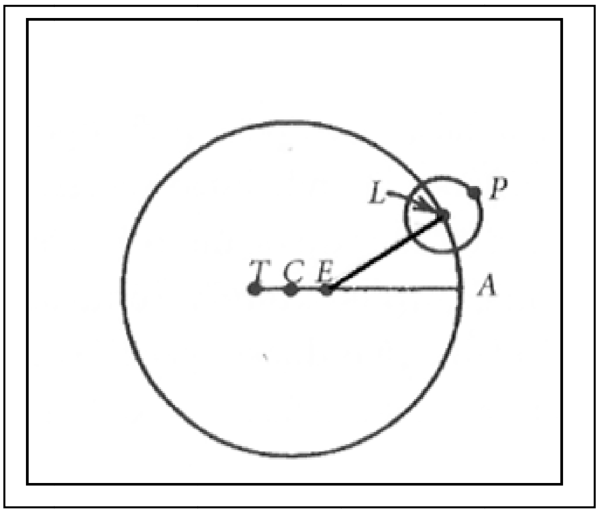


Figura 45 - Epiciclo em círculo excêntrico. A distância do planeta (P) relativamente à Terra varia com a sua posição no epiciclo. “o movimento do centro (L) do epiciclo que transportava o planeta (P) era encarado como uniforme e não em relação ao centro © do deferente [isto é, a trajetória circular descrita por (L)] ou da Terra, mas relativamente a um outro ponto (E), denominado ‘equanto’ , ou seja considerava-se que $\angle LEA$ aumentava uniformemente. Localizando corretamente os pontos E, C e T, determinando a razão dos diâmetros do epiciclo e do seu deferente e escolhendo direções, velocidades e inclinações para os vários círculos, eram eliminados as aparentes irregularidades”.(Segundo Grant, 2002, p. 122, a figura e a legenda que acompanha foram reimpressas, com a permissão da Havard University Press, de A Source Book in Greek Science de Morris R. Cohen e Israel Drabkin, Havard University Press, 1958, p. 129, coube ao autor a descrição entre colchetes).

Portanto, coube a Ptolomeu estabelecer as bases técnicas, matemáticas e geométricas do modelo geocêntrico, completamente estabelecidas no século II da era cristã e expostas na obra ptolomaica mais famosa, *o Almagesto*. Segundo Dorce, Ptolomeu inicia o seu Almagesto apresentando a visão de mundo aristotélica e isso fica claro na introdução da obra, conforme a citação a seguir:

---

muito próximo da utilizada hoje. Desse modo, o *Almagesto*, antes de ser uma obra sobre Astronomia, é um tratado de matemática, tornando-se base nos estudos em matemática e a principal referência astronômica até o séulo. XVII. Os métodos geométricos utilizados por Ptolomeu no *Almagesto* destinam-se apenas a explicar as posições planetárias, não sendo encarados como uma verdadeira representação do mundo físico. Foi na obra *Hipóteses dos Planetas* que Ptolomeu tentou descrever o mundo físico e as relações entre seus orbes celestes (GRANT, 2002; CROWE, 2001).

> La discusión [de su obra] cubre las siguientes materias: el cielo tiene forma esférica y si mueve como una esfera; la Tierra también es esférica (…) y está situada en medio de los cielos de los que es el centro; su tamaño es como un punto comparada con la esfera de las estrellas fijas y no tiene ningún tipo de movimiento.
>
> (DORCE, 2006, p. 51).

Feita essa “apresentação” do Almagesto, Ptlomeu passa a descrever o universo, supondo que todas as afirmações acima são realidades verdadeiras e foram observadas pelos seus antecessores. A sua contribuição será estabelecer os cálculos matemáticos (modelos matemáticos) que venham a confirmar essas verdades, pois os filósofos que o antecederam “através de suas observações viram como o Sol, a Lua e as estrelas se moviam no céu de leste a oeste descrevendo círculos paralelos entre eles”.

Desse modo, Ptolomeu reafirma a esfericidade dos céus, dizendo que isso só é possível graças a uma conjunção de fatores, tais como o movimento circular das estrelas circumpolares; o funcionamento dos relógios de Sol; o livre movimento dos astros, sendo associado ao círculo, figura que, segundo a tradição grega, possui o mais livre de todos os movimentos. Todos esses argumentos levaram à certeza da esfericidade dos céus. Certo disso, o astrônomo passou então às explicações físicas sobre a esfericidade do céu, baseado na tradição aristotélica e no fato de o éter ser o elemento constituinte das esferas celestes.

De acordo com historiadores (CROWE, 2001; DORCE, 2006), estando Ptolomeu completamente satisfeito com a explicação aristotélica da esfericidade dos céus, passa então a também justificar a esfericidade da Terra e sua posição em relação ao sistema. Para Ptolomeu, a Terra era esférica, opinião já defendida por seus antecessores. No entanto, faltava confirmar isso por meio de argumentos teóricos e cálculos matemáticos. A principal razão para admitir que a Terra fosse esférica é que nem o Sol, nem a Lua e nem as estrelas nascem e se põem simultaneamente em todos os cantos da Terra. Sendo assim, a justificativa plausível para isso era o fato de a Terra ser esférica.

Àquela altura, os astrônomos já sabiam que os eclipses do Sol e da Lua, quando ocorriam, eram observados em diferentes momentos dependo da localização. Por exemplo, um observador no Ocidente via primeiro do que um observador no Oriente. Isso se dava em função da diferença de fuso horário entre os observadores, e a diferença de horas entre um observador e o outro era proporcional à distância em que se encontravam. Esses argumentos eram suficientes para comprovar teoricamente a esfericidade da Terra.

Na sequência, Ptolomeu reafirma que a Terra é o centro do universo, e, para provar que de fato ela está no centro, apresenta três hipóteses que considera falsas; a demonstração dessas hipóteses leva a contradições perante os fenômenos observados. Para provar suas “falsas hipóteses”, usa argumentos geométricos. Além dessas hipóteses, utiliza também as observações sobre os eclipses lunares. “Estes eclipses só acontecem quando Sol, Terra e Lua estão alinhados. Se a Terra não estivesse no centro do universo, os eclipses ocorreriam em ouros pontos nos quais o Sol e a Lua não estariam diametralmente opostos, situação não observada em nenhum caso” (DORCE, 2006, p. 55).

Após isso, Ptolomeu afirma que a Terra é um ponto se comparada com o restante do universo. Para essa conclusão, utiliza duas ideias. A primeira se baseia na imobilidade das estrelas do céu entre si, por mais que um observador se mova na Terra de um extremo a outro, a distância relativa entre elas permanece inalterado. A segunda argumenta que, se não for assim, o plano horizontal, referência do observador, dividiria a esfera celeste em duas metades desiguais. Assim, Ptolomeu *construiu* um universo no qual situou as estrelas fixas e cujo centro é ocupado por uma Terra minúscula se comparada ao próprio Universo

Ptolomeu ainda afirma que a Terra está imóvel e que o movimento diário das estrelas fixas se deve ao movimento da esfera celeste sobre si mesma. A imobilidade da Terra se deve ao fato de que:

> A Terra é muito pequena comparada com as esferas celestes e isto significa que está sujeita a uma grande pressão exercida pelas moléculas do éter. Estas moléculas rodeiam a Terra e estão em toda

> parte, fazendo com que sua pressão sustente a Terra em um equilíbrio perfeito. (DORCE, 2006, p. 56).

Para assegurar sua teoria, Ptolomeu se defende daqueles que afirmam que a Terra gira ao redor do seu eixo de rotação dizendo que, por meio das observações possíveis, tanto ele quanto os outros astrônomos que o antecederam poderiam estar corretos. Entretanto, contra-argumenta, dizendo que se a Terra tivesse algum tipo de movimento estaria sujeita a grandes fenômenos atmosféricos, uma vez que as nuvens não seguiriam a rotação da Terra.

Finalmente, Ptolomeu conclui seu modelo geocêntrico do universo, dizendo que os céus têm dois tipos de movimento. Um movimento circular uniforme no sentido leste-oeste, levando consigo todas as estrelas contidas nele e descrevendo círculos paralelos, e um segundo tipo de movimento, que é o próprio de cada um dos planetas, do Sol e da Lua no sentido oeste-leste. A título de exemplo, vejamos o movimento do Sol: “este se move em um círculo cuja interseção com o equador se dá em um dos pontos antipodais, o qual é chamado de eclíptica. As interseções entre ambos os círculos se chama *equinócio de primavera* e *equinócio de outono*” (DORCE, 2006, p. 57).

Até esse ponto visei mostrar um pouco do caminho percorrido pela Astronomia desde a Grécia antiga até o século II da era cristã, quando o mundo grego já estava em pleno declínio e o império romano avançava cada vez mais.

Lembro as indagações feitas no capítulo 1 desta pesquisa: Qual a contribuição da Astronomia grega para o Cálculo Diferencial e Integral séculos depois? Que conhecimento produziu e em que condições? Que modelos foram gerados desde aproximadamente século IV a.C ao século II d.C com as contribuições de Ptolomeu? Dentro do que me propus investigar, asseguro que a resposta a esses questionamentos foi estabelecida quando investiguei e relatei que, para serem criadas condições teóricas explicativas da astronomia, bem como dos modelos gerados (modelos planetários) por ela, foi necessário apoiar-se nos conhecimentos geométrico, trigonométrico, sobre movimento dos corpos (retilíneo e circular) e, em especial, os movimentos e a trigonometria relacionados à Astronomia ptolomaica.

O Almagesto, antes de ser um tratado de astronomia, é uma importante obra matemática que durante cerca de quinze séculos serviu de base para a formação matemática dos filósofos da natureza. Nesse sentido, a Geometria e a Trigonometria se desenvolveram bastante, tendo como foco os estudos astronômicos, sobretudo no mundo árabe, a partir do século VII[61].

Com suas observações astronômicas, os antigos gregos, embora de modo simples, conseguiram fazer previsão de eclipses do Sol e da Lua; determinaram as medidas da Terra ao Sol e da Terra a Lua; construíram instrumentos para a observação; realizaram cálculos aritméticos, e estabeleceram modelos geométricos, propondo, sobretudo, modelos planetários que ao longo do tempo foram se aperfeiçoando.

Sem dúvida, a Astronomia contribuiu para aguçar a curiosidade dos filósofos na busca incessante de compreensão do movimento dos corpos celestes e dos fenômenos terrestres. O modelo geocêntrico, por exemplo, construído pelos gregos, sobretudo por Aristóteles, e matematizado por Ptolomeu, e que durante mais de quinze séculos da era cristã reinou absoluto, sofreu uma (re)discussão de modo a causar grande impacto na ciência, na filosofia e na religião a partir do século XIV. Sobre esse aspecto, tratemos mais adiante. Por essas razões, a Astronomia prestou grande contribuição ao desenvolvimento da ciência moderna e, em particular, para o desenvolvimento do cálculo.

[61] Trataremos sobre isso em maiores detalhes na sequência do trabalho.

5.1.2 Os trabalhos de Diofanto

Depois de Arquimedes, a tendência da Matemática grega voltou-se para as aplicações práticas mais do que para desenvolvimentos teóricos. Nenhum matemático grego chegou tão próximo dos métodos do cálculo integral (métodos infinitesimais) quanto Arquimedes. Todavia, os trabalhos de Arquimedes não foram, no todo, abandonados pelos matemáticos gregos posteriores a ele.

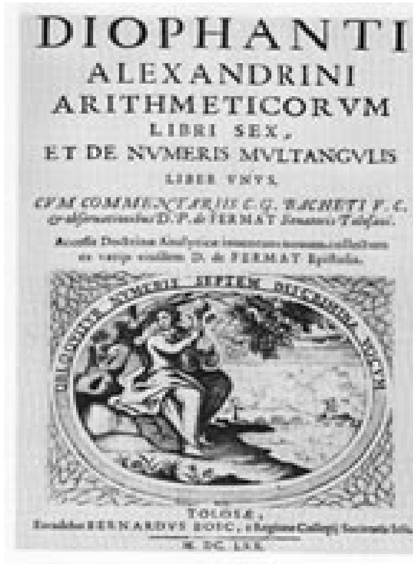


Figura 46 - Capa da tradução da *Arithmética* de Diofanto, feita por Claude Gaspar Bachet. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/fermat/teoria_dos_numeros.htm>. Acesso em: 4 maio 2010.

No final do século III de nossa era, num período de declínio da Matemática grega, o geômetra Pappus demonstrou grande familiaridade com os métodos de Arquimedes. Fez comentários sobre o livro X de os *Elementos* de Euclides e sobre o *Almagesto* de Ptolomeu. Propôs, também, uma nova conclusão acerca dos estudos sobre retas paralelas, apresentando-a em sua obra *Collectio*, o que ficou conhecido como Teorema de Pappus:

> Se sobre duas retas g_1e g_2, paralelas ou não se tomam três pontos, respectivamente, A, B, C de g_1 e A', B' e C' de g_2, então os pontos de corte X, Y e Z das retas AB', BA'; AC', CA'; BC', CB' estão sobre uma reta. (WUSSING, 1998, p. 65).

Nesse teorema, Pappus acrescentou uma nova discussão ao trabalho de Arquimedes sobre o centro de gravidade. Contudo, avanços mais significativos nos métodos geométricos iniciados com os gregos estiveram dependentes de avanços mais significativos em outros ramos da Matemática. Um desses ramos viria a ser o desenvolvimento de uma álgebra simbólica com a introdução da noção de variável e função, o que só foi conseguido amplamente bem mais tarde. Nesse período, em relação ao avanço da Matemática simbólica, é salutar destacarmos o trabalho de Diofanto, que introduziu em seus trabalhos uma “álgebra simplificada” quando comparada ao que conhecemos hoje.

Com a obra de Diofanto, a Matemática grega recupera uma linha já quase esquecida do desenvolvimento matemático. Ela mostra que, apesar do longo período de tempo decorrido, o pensamento algébrico da Mesopotâmia pode ser seguido e cultivado, “uma prova de que a cultura universal do helenismo, incluindo o âmbito científico, surgiu necessariamente de estreito contato com as diferentes culturas regionais” (WUSSING, 1998, p. 63). A forma como Diofanto desenvolve seu pensamento matemático demonstra sua familiaridade com o pensamento algébrico desenvolvido na Mesopotâmia.

Das obras matemáticas de Diofanto (pelo menos três), a mais importante é uma coletânea de *Aritmética* dividida em treze partes, boa parte dela conservada em diferentes versões, algumas em grego, outras em árabe. No primeiro volume apresenta uma breve explicação de seu método algébrico. Reporta-se a um ser, talvez fictício, denominado Dionísio. Assim, inicia sua explicação:

> Tendo me inteirado, querido Dionísio, que estás ansioso por conhecer a solução de problemas aritméticos, quero te explicar a ciência da aritmética começando com o mais elementar. Talvez o material te resulte difícil, pois não está familiarizado com ele e os principiantes pecam por falta de confiança em si mesmos. (L. 4.4, p.5 apud. WUSSING, p. 63).

Em seguida, expõe seu método para resolver equações:

> Se agora em um problema qualquer aparecem as mesmas expressões gerais em ambos os lados de uma igualdade, porém com coeficientes distintos, então, você deve subtrair o igual do igual até que ao final a expressão de um membro seja comparável com o do outro. Si se quer que haja expressões gerais quaisquer em um lado ou em ambos os lados como quantidades que se tem de subtrair, então se tem que somar a mesma quantidade a ambos os lados, de maneira que em cada lado só se encontrem quantidades que se adicionem. Depois se subtrai de novo o igual do igual até que em cada lado reste uma única expressão. Continua-se seguindo este procedimento com o problema até que, se possível, sobre de cada lado somente um termo. Depois (...) mostrarei como se resolve definitivamente o problema, convertendo finalmente uma expressão de dois termos em um só termo. (L.44, pp. 7-8 apud WUSSING, 1998, p. 63).

Portanto, de acordo com Wussing, Diofanto introduziu uma linguagem e utilizou símbolos para expressar equações e, ainda, trabalhou com potências que iam de x^6 até x^{-6}. Do mesmo modo, utilizou símbolos para a soma e para a subtração. Além disso, Diofanto adotou procedimentos próprios para estudar equações quadráticas, cúbicas, biquadráticas, equações com coeficientes fracionários e equações de várias variáveis (equações indeterminadas que mais tarde levaram seu nome – *Equações Diofantinas*). A obra de Diofanto se constituiu, portanto, em uma importante referência para a fundamentação da matemática moderna nos séculos XVI e XVII e, consequentemente, para o cálculo infinitesimal.

5.2 A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA NA IDADE MÉDIA – SÉCULOS VI AO XII

A divisão do Império Romano em Império do Ocidente, com a capital em Roma, e Império do Oriente, com capital em Constantinopla, acirrou o enfraquecimento da parte ocidental que não sobreviveu muito, chegando ao fim em 476, marco do início da Idade Média[62], um período hostil para o desenvolvimento da ciência e da matemática na Europa Ocidental, sobretudo no período que vai do século V ao século XII. A pouca produção matemática e científica se restringiu aos mosteiros[63], que, a partir de então, se tornaram os guardiões da cultura e das artes. Mesmo dentro deles, eram poucos os que tinham acesso à sempre bem guardada biblioteca. Porém, nem tudo o que estava nos livros poderia ser de conhecimento público, uma vez que podiam incitar a condutas contrárias aos princípios cristãos[64].

Mesmo assim, a tradição científica de eras anteriores, embora restrita, conseguiu sobreviver durante e após o Império Romano, uma vez que os

---

[62] A Idade Média inicia-se no ano de 476, com a queda do Império Romano do Ocidente, e se estende até o ano de 1453 com a queda de Constantinopla. Essa divisão cronológica é repleta de fatos políticos e econômicos importantes que, de certo modo, influenciaram o desenvolvimento da Matemática no Ocidente.
[63] Os mosteiros também funcionavam como escolas e era nesse ambiente que os poucos cidadãos que tinham acesso ao saber se instruíam.
[64] Esse tema é tratado com bastante riqueza de detalhes no livro "O Nome da Rosa", de Umberto Eco, que posteriormente também virou um clássico do cinema.

cidadãos romanos de classe elevada "alimentaram-se" nos clássicos gregos. Além de se constituir em uma questão de honra e poder, também serviu para preservar os interesses culturais dos romanos de poder econômico elevado. Sendo assim, não faltou quem buscasse a todo custo preservar aquela enorme herança cultural, mesmo nas situações mais adversas. Assim:

> os romanos que sabiam grego consultavam diretamente os manuais gregos, mas a maioria absorvia conhecimento através de traduções ou súmulas em latim. Não tardou que os autores latinos começassem a compilar os seus próprios manuais sobre ciência. (GRANT, 2002, p. 13).

Desse modo, o principal trabalho dos eruditos desse período foi fazer compilações de obras antigas, com pouca produção original, por meio de enciclopédias. Essas enciclopédias se tornaram grandes manuais onde se encontrava de tudo um pouco, tais como tratados filosóficos, sobretudo relativos às obras de Aristóteles e Platão; matemática; ciências naturais e da saúde; arquitetura e construção; normas jurídicas, etc.

Dos séculos IV ao VIII os autores enciclopédicos produziram uma série de obras em latim que causaram uma grande influência na Idade Média, pelo menos até cerca de 1200, uma vez que eram as únicas fontes de consulta para quem desejava se instruir. Especialmente em Matemática, os enciclopedistas compilaram textos a partir dos clássicos gregos, em particular basearam-se nas obras de Nicômano de Gerasa, enfatizando sobre o misticismo dos números e a arte de contar. Desse modo, o conteúdo dos primeiros textos matemáticos em latim compunha o *Quadrivium*, e formava com o *Trivium* as sete artes liberais[65] – base do que se ensinava nas escolas (COLLETE, 1985; GRANT, 2002).

---

[65] As "sete artes liberais" abrangiam disciplinas tanto verbais como matemáticas. As três primeiras conhecidas como "*trívium*", que incluía gramática, retórica e a lógica (ou dialética); enquanto as quatro últimas compunham o "*quadrivium*", que abrangia aritmética, geometria, astronomia e música. Essas sete disciplinas se constituíam na base do ensino no Império Romano e toda a Baixa Idade Média, sendo uma herança da cultura clássica grega.

Entre os maiores enciclopedistas desse período, estão Calcídio, Macróbio, Marciano Capela, Boécio, Cassiodoro, Santo Isidoro de Sevilha e Beda (O Venerável). Dentre esses, Âncio Mânlio Boécio (ca. 480-524) foi considerado um dos melhores enciclopedistas latinos, pois dominava bem o grego e soube fazer uso desse conhecimento. Coube a Boécio escrever sobre o "*quadrivium*", termo que utilizou pela primeira vez para se referir às quatro ciências matemáticas dentro das sete artes liberais. Também "traduziu a obra *Introdução à Aritmética* de Nicômano e ainda acrescentou comentários sobre os tratados lógicos de Aristóteles, sobre *os Elementos* e, possivelmente, sobre obras de Arquimedes" (GRANT, 2002, p. 15).

Depois da conquista do Egito pelos mulçumanos, a maioria dos sábios gregos buscou abrigo em Constantinopla, que havia se tornado a capital do Império Bizantino em 376, após a mencionada divisão do Império Romano em Império do Ocidente e Império do Oriente. Todavia, manter a atividade intelectual nos moldes do pensamento grego não foi tarefa fácil, uma vez que o ambiente se tornou cada vez mais hostil sob a égide cristã de Bizâncio. Mesmo assim, nesse ambiente, os estudiosos conseguiram manter um relativo acervo de obras gregas de forma segura, obras essas que só chegaram à Europa Ocidental 800 anos mais tarde, onde o ambiente era muito mais hostil.

A unidade do Império Bizantino se baseou na cultura helênica, assim, soube preservar "os tesouros" da Antiguidade grega bem mais do que a parte ocidental do Império Romano, uma vez que o grego era a língua corrente. As principais contribuições matemáticas bizantinas referem-se, em sucessivos comentários, aos clássicos gregos. Os principais matemáticos (comentadores) desse período são *Isidoro de Mileto*, um dos últimos diretores da academia de Platão, a qual se manteve em funcionamento até 529; *Antônio de Tralles*, *Juan Filopón*, dentre outros. Por exemplo, Isidoro de Mileto trabalhou sobre as obras de Arquimedes e Apolônio. Assim, a grande contribuição dos matemáticos bizantinos foi manter viva a herança do que restou dos clássicos gregos (KLINE, 1985; WUSSING, 1998).

Portanto, diante do quadro sócio-político-econômico-religioso vivido pela Europa Ocidental durante a Idade Média, bem como as dificuldades dos matemáticos bizantinos em manter acesa a chama do conhecimento herdado dos gregos, coube à Índia e à Arábia contribuírem com a continuidade da atividade matemática alcançando o brilhantismo de introduzir importantes métodos e conhecimentos matemáticos de largo alcance, que até hoje se constituem em componentes imprescindíveis para o ensino da matemática atual. Especialmente nos países sob influência mulçumana, a matemática se desenvolveu bem mais até os séculos XIII-XIV do que se comparada aos países sob domínio cristão.

Os hindus, influenciados de algum modo pela obras gregas, deram importantes contribuições no campo da aritmética (primeiros a utilizarem o sistema decimal posicional), trigonometria e da álgebra (sobretudo na resolução de problemas envolvendo regra de três, bem como diversos problemas envolvendo expressões algébricas, equações quadráticas, etc.) que só chegaram à Europa depois de 1200.

Os árabes, cujo império em seu apogeu se estendia por todas as terras que faziam fronteiras entre o mar Mediterrâneo e o Oriente Próximo e Oriente Médio, abarcando muitos povos unidos pela religião mulçumana, conseguiram absorver parte das contribuições gregas e hindus e também fizeram grandes progressos no campo da álgebra, Astronomia, Geografia e Óptica. Também criaram escolas e universidades, como a casa da Sabedoria (Bait AL-hikma), fundada em cerca do ano 800 de nossa Era, em Bagdá, atual Iraque, sendo considerada pelos historiadores como comparável ao Museu de Alexandria. À casa da Sabedoria foram atraídos muitos sábios e eruditos, e foi nesse ambiente cultural que o gosto pela matemática pode ser mantido e muitas obras clássicas gregas foram traduzidas para o árabe, dentre elas *Os Elementos*.

Nesse centro de estudos trabalhou *ibu-Musa AL-Khowarizmi*, cujo personagem se tornou tão conhecido quanto Euclides. Entre os trabalhos de AL-Khowarizmi, consta uma completa exposição do sistema de numeração hindu ou o sistema de numeração decimal posicional. Sendo essa obra posteriormente traduzida para o latim e difundida na Europa depois de 1200. AL-Khowarizmi, algumas vezes, foi considerado equivocadamente como o criador desse novo sistema de numeração, que mais tarde veio a prevalecer sobre todos os outros e tornando-se o sistema oficial de uso em toda a Europa pela sua praticidade de uso, sobretudo nas atividades comerciais e econômicas.

AL-Khowarizmi também escreveu uma obra sob o título *AL-jabr Wa'lmuqabalah*[66], cujo nome deu origem ao termo *álgebra* e foi essa obra que chegou à Europa, sendo traduzida para o latim e consolidando a álgebra como um ramo da Matemática. A versão latina de *Álgebra* de Al-Khowarizmi se inicia com a explanação introdutória sobre o princípio posicional para números, e depois introduz a resolução de seis tipos de equações divididas em seis capítulos e formadas por três espécies de quantidades: "raízes, quadrados e números (isto é x, x^2 e números)" (BOYER, 1998; p. 157). Vejamos então do que tratam esses seis capítulos:

> O cap. 1, em três parágrafos curtos, abrange o caso de quadrados iguais a raízes, expresso em notação moderna como $x^2 = 5x$, $\frac{x^2}{3} = 4x$ e $5x^2 = 10x$ dando as respostas $x = 5$, $x = 12$e $x = 2$, respectivamente. (A raiz $x = 0$ não era reconhecida). O cap. II abrange o caso de quadrados iguais a números e o cap. III resolve o caso de raízes iguais a números, sempre com três ilustrações por capítulo para os casos em que o coeficiente do termo variável é igual a, maior que, ou menor que. Os cap. IV e V e VI são mais interessantes, pois abrangem sucessivamente os três clássicos de equações quadráticas com três termos: (1) quadrados e raízes iguais a números, (2) quadrados e números iguais a raízes, e (3) raízes e números iguais a quadrados. As soluções são dadas por regras, "culinárias" para "completar o quadrado", aplicadas a exemplos específicos. O cap. IV, por exemplo, contém as três ilustrações $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$ e $\left(\frac{1}{2}\right)x^2 + 5x = 28$. Em cada caso só é dada a resposta positiva. No cap. V só é usado um exemplo - $x^2 + 21 = 10x$ - mas ambas as raízes, 3 e 7, são dadas, correspondendo à regra $x = 5\sqrt{25 - 21}$. (...). No cap. VI novamente o autor usa um só exemplo - $3x + 4 = x^2$ - pois quando o coeficiente de

[66] Não se sabe exatamente o que significam os termos *AL-jabr* e *muqabalah*. Todavia, a interpretação usual que se dá é que a palavra Al-jabr significa "restauração" ou "complementação" e parece referir-se à transposição de termos subtraídos para outro lado da equação, já a palavra *muqalbalah*, refere-se a "redução" ou "equilíbrio" – ou seja, refere-se ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação (BOYER, 1998, p. 156).

> x^2 não for a unidade, o autor nos lembra de dividir primeiro por esse coeficiente (como no cap. IV). Mais uma vez os passos para completar o quadrado são meticulosamente indicados, sem justificação, o processo sendo equivalente à solução $x = 1\frac{1}{2} + \sqrt{(1\frac{1}{2})^2 + 4}$. Também aqui só uma raiz é dada, porque a outra é negativa. (BOYER, 1998; p. 157).

Portanto, esses seis casos “esgotam as possibilidades” no estudo de equações lineares com raiz positiva. AL-Khowarizmi as expõe de forma tão clara que se torna quase impossível não compreendê-las com algum estudo. Por isso, muitas vezes, é considerado o pai da álgebra. Todavia, não há certeza de que as ideias de AL-khowarizmi tenham sido originais, é possível que as tenha ampliado a partir de obras indianas ou chinesas. Mesmo assim, foi o trabalho de AL-khowarizmi que se tornou conhecido, difundido e ampliado pelos matemáticos ocidentais, tempos depois e, juntamente com o trabalho de Diofanto, serviu de base para um estudo mais sistemático sobre equações, variações e, posteriormente, o salto para as funções. Fundamentais para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII.

De todo o exposto, vimos que a divisão do Império Romano, em finais do século III, em Império do Ocidente e Império do Oriente, trouxe importantes consequências para o desenvolvimento intelectual e científico e serviu para que hindus e árabes pudessem continuar a desenvolver a ciência com importantes contribuições. Enquanto os árabes preservavam a herança clássica grega, por meio de uma vasta tradução de obras gregas para o árabe, o conhecimento da língua grega no Ocidente tornou-se cada vez mais raro, sendo ainda cultivada no Império Bizantino.

Para que um tratado científico grego se tornasse acessível ao Ocidente latino era necessário que primeiro fosse traduzido do grego para o latim. “Poucos tratados o foram. Além de um pequeno número de tratados médicos hipocráticos e das poucas traduções conduzidas por estudiosos como Calcídio e Boécio” (GRANT, 2002, p. 21). À exceção também de alguns dos trabalhos dos enciclopedistas, conforme já mencionados. Essa situação se estendeu dos séculos IV ao IX, pois a maioria dos centros urbanos da Europa Ocidental vivia um clima de declínio econômico e apatia intelectual. Nas palavras de Grant:

> um período que abrange o Baixo Império Romano e a Alta Idade Média, por vários motivos, incluindo as lutas civis pela sucessão imperial que conduziram a um império dividido em duas partes, ocidental e oriental, a crise econômica por causa do comércio em declínio e dos impostos esmagadores, as migrações em massa e as invasões dos povos germânicos e celtas em áreas anteriormente dominadas por Roma. Com o declínio da urbe, a educação e o conhecimento acolheram-se nos pequenos e grandes mosteiros que surgiram nas áreas rurais da Europa (...). (2002, p. 21-22)

E nas palavras de Wussing:

> Se formou assim, entre os séculos V e o século XI o feudalismo europeu, que se caracterizou por sua economia natural, a ligação dos campesinos com a terra (servidão), a pressão extraeconômica e um ínfimo nível de técnica. Devemos acrescentar a isto que, nos primeiros séculos, a postura anticientífica, ou ao menos de marcado desinteresse científico, da Igreja Cristã. Esta encontrou nos chamados Padres da Igreja (séculos II-V) sua expressão pragmática. Tertuliano via na filosofia, ou seja, na ciência helenística, a verdadeira fonte da heresia e acentuava a inquestionável diferença entre crer e saber: *o desejo de uma curiosidade intelectual não nos é necessário desde Jesus Cristo; a investigação tão pouco desde o evangelho.* (1998, p. 88).

Diante desse cenário, o desenvolvimento da matemática na Europa feudal alcançou seu pior momento, se limitando ao cálculo elementar com o uso do ábaco, um complicado sistema de cálculo com os dedos, um uso elementar na agrimensura e o cálculo de dias de datas festivas da igreja, especialmente a Páscoa. Portanto, não era de esperar que grandes contribuições fossem dadas ao desenvolvimento científico e matemático, pois a luta pela sobrevivência, a manutenção dos territórios já conquistados e a fidelidade aos princípios cristãos eram mais importantes.

Mas como a Europa conseguiu emergir e superar essa situação? Que fatores vieram influenciar uma mudança radical de postura para que passasse novamente a ser o centro de produção de conhecimento? Isso é o que veremos!

5.3 UM NOVO INÍCIO: O DAS GRANDES TRADUÇÕES

Por volta do século IX, são registradas as últimas invasões ao território europeu do Ocidente. Finda essa ameaça constante, uma nova Europa começa a emergir, marcada pelo surgimento de novas instituições, aumento do setor comercial e industrial, e uma significativa melhoria no sistema de produção agrícola, o que veio a amenizar um dos problemas recorrentes de épocas anteriores: a fome. Isso favoreceu também o aumento da população urbana com o surgimento de muitas vilas e cidades por toda a Europa. As melhores condições de vida proporcionaram a abertura de escolas, melhorando o nível intelectual da população e, consequentemente, favorecendo o desenvolvimento da ciência.

Esse novo momento, no transcorrer dos séculos XI e XII, permitiu que a sociedade feudal europeia alcançasse o auge de sua prosperidade econômica. Além disso, o significativo aumento na produção material e agrícola e, em especial, na produção artesanal, fez com que todas as partes da Europa Ocidental, Meridional e Central se transformassem em importantes centros econômicos e, assim:

> A atividade artesanal se especializou em novas formas de organização: os grêmios. O intercâmbio comercial, amplamente estendido pôs o mundo cristão em estreita relação com a cultura islâmica, especialmente na Espanha e na Sicília; ali os europeus conheceram, entre outras coisas, os resultados da matemática islâmica. (WUSSING, 1998, p. 89).

Esse renovado ambiente também favoreceu que as escolas monásticas das cidades de Paris, Orleães, Toledo, Chartres, Colônia, dentre outras, se transformassem em grandes centros intelectuais e, com isso, conseguiram atrair uma grande quantidade de mestres e alunos de todas as partes da

Europa. Essas escolas passaram então a preparar os alunos para o ensino, daí surgiram grandes mestres. Entre eles, figura Gerberto de Aurilaac (c. 946-1003), posteriormente papa Silvestre II (999-1003), que se destacou como um dos grandes mestres de escolas catedrais. Gerberto (papa Silvestre II) fez contatos com a Igreja na Espanha Setentrional e, desses contatos, obteve traduções latinas de tratados árabes. A partir de tais traduções, tomou conhecimento do ábaco e do astrolábio. Assinala Wussing:

> Um dos casos mais significativos do encontro da Idade Média latina com o mundo do Islam no campo da matemática se faz com o monge francês Gerberto, que no ano de 999 subiu ao trono papal com o nome de Silvestre II. Na Espanha conheceu os números árabes, embora os usasse ainda de forma absurda, pois os escrevia nas fichas de cálculo do ábaco. De qualquer modo temos que agradecer a Gerberto que nos proporcionou a primeira representação por escrito do cálculo com ábaco. (1998, p. 90).

Assim, como professor na escola catedral de Reims, Gerberto ensinou as sete artes liberais e deu especial atenção à Matemática e à Astronomia. Embora não sendo original, adquiriu a admiração de seus alunos e, estes, continuaram a expandir os seus ensinamentos, realçando a ciência como parte integrante das sete artes liberais. “Muitas escolas catedrais que adquiriram proeminência nos séculos XI e XII, substituindo as escolas monásticas como centros de estudo, foram fundadas ou revivificadas por discípulos de Gerberto” (GRANT, 2002, p. 23).

Todavia, segundo Grant, diante da falta de textos científicos coerentes e passíveis de se constituir em desafio, no interior das escolas catedrais o interesse recaía sobre temas seculares e científicos. Isso ficou demonstrado na troca de correspondência sobre Matemática, por volta de 1025, entre Ragimboldo de Colônia e Radolfo de Liége. Essas cartas trataram de temas matemáticos. Partindo de Radolfo, uma série de problemas de Matemática foi posta e amplamente discutida entre eles, com a participação de outros que atuaram como juízes.

Pelo nível de discussão travada e das soluções apresentadas, ficou evidente que o conteúdo matemático de que dispunham se limitava em um pouco conhecimento de geometria retirado de manuais romanos de agrimensura e dos escritos de Boécio, demonstrando um total desconhecimento da matemática grega e árabe. “Nenhum deles tinha qualquer conceito de demonstração geométrica” (GRANT, 2002, p. 23). Independente dos resultados obtidos, isso demonstrou um crescente interesse por questões científicas e veio aflorar um debate que se encontrava amorfo. Esse “espírito positivo” demonstrado pelas atitudes de Ragimboldo e Radolfo em relação à matemática no século XI encontrou eco na filosofia natural do século XII.

Com esse “espírito” renovado, questões relativas à natureza começaram a ser fortemente postas. Contribuiu para isso, especialmente, a leitura de obras como *o Timeu* de Platão e textos latinos dos enciclopedistas. Esse material “mais substancial” sobre filosofia natural abriu caminho para maiores questionamentos sobre a natureza e o seu funcionamento, independente da visão da Igreja Cristã de então. Com isso, os filósofos naturais começaram a despertar para:

> a ideia de que Deus era a causa direta e imediata de tudo cedeu perante uma interpretação do mundo que partia do princípio de que os objetos naturais eram susceptíveis de atuar diretamente uns sobre os outros. Deus conferira à natureza o poder e a capacidade para ser a causa de todas as coisas. Fizera dela uma entidade auto-operante. A natureza, ou o cosmo, era assim, objetivada e concebida como um todo harmonioso, regido por leis, bem ordenado e autossuficiente, que podia ser investigado pela inteligência humana. (GRANT, 2002, p. 24).

A percepção sobre o mundo, visto como uma entidade imprevisível e fortuita mudou para enxergá-lo agora como um mecanismo de funcionamento regular, ou “máquina”, como passou a ser comumente chamado no século XII. A partir de então, prevaleceu o conceito de “curso normal da natureza”, por meio do qual ela funcionava de forma rotineira e regular, só tendo seu “curso natural” afetado por intervenção divina. Todavia, essa “recém-desperta” maneira de perceber a natureza já se mostrou ameaçadora aos interesses da Igreja e, logo, teólogos fiéis à tradição se puseram a questionar e denunciar o que chamaram “incessantes investigações sobre a “*composição do globo”*, a natureza dos elementos, a localização das estrelas, a natureza dos animais, a violência do vento" (GRANT, 2002, p. 25). Na defesa dos filósofos naturais falou Guilherme de Conches, ao declarar que:

> Ignorantes eles próprios das forças da natureza e querendo ser acompanhados na sua ignorância, não querem que as pessoas investiguem sobre coisa alguma; querem que acreditemos como camponeses sem nos interrogarmos quanto ao motivo por detrás de todas as coisas (...) Mas nós dizemos que o motivo por detrás de todas as coisas deve ser procurado (...). Se sabem de alguém assim inquisitivo logo chamam que é um herético, dando mais confiança à sua atitude monástica do que à sabedoria. (CHENU, 1968 apud GRANT, 2002, p. 25)[67].

Os filósofos naturais, na pessoa de Guilherme, insistiram que suas ideias e necessidades de investigar a natureza não diminuíam o poder de Deus; ao contrário, esse poder era aumentado, uma vez que atribuíam o funcionamento da natureza a causas secundárias. Assim, aqueles imbuídos em compreender o funcionamento da natureza defendiam que cabia aos fiéis descobrir as leis que a faziam funcionar. "A natureza, ou o cosmo, era uma entidade que devia ser estudada a fim de se compreender melhor a criação de Deus" (Ibidem, p. 25).

Portanto, vimos que uma nova forma de conceber o mundo e a natureza havia emergido e, embora ainda fosse baseada nas obras dos enciclopedistas latinos e no *Timeu* de Platão, não tardou que o interesse por outras obras da antiguidade grega fosse cada vez mais crescente, como também crescente foi a influência da ciência e da filosofia natural produzidas no mundo islam. Assim:

> O desejo pela aquisição do conhecimento grego-árabe (ou grego-islâmico) cresceu a partir de uma reverência pelo conhecimento e sabedoria antigos, na medida em que os estudiosos do século XII reconheciam a sua dívida incalculável para com seus predecessores (...) A notícia de tratados que existiam em grego ou em árabe, mas que no ocidente apenas se conheciam pelo título, ou nem isso, despertou a curiosidade e a apetência dos estudiosos ocidentais, ao

[67] Conforme Grant (2002, p. 25), citado do original:*Nature, Man and Society in the Twelfth Century*: Essays on the New Theological Perspectives in the Latin West de M. D. Chenu, selecionado, editado e traduzido por Jerome Taylor e Lester K. Litle (Chicago: University of Chicago Press, 1968; originalmente publicado na França em 1957, p. 10).

> mesmo tempo em que reforçou ainda mais uma sensação de enorme privação intelectual (Ibidem, p. 26).

Tudo isso levou os eruditos da Europa durante o século XII a experimentarem uma nova etapa no conhecimento: a das grandes traduções. A partir de então:

> Começaram a traduzir obras do grego e do árabe para o latim porque, como frequentemente afirmam nos seus prefácios, queriam apresentar os tesouros do Oriente ao Ocidente e, assim, aliviar a "pobreza dos latinos" em tantos campos do saber. (...) As suas traduções constituem um dos verdadeiros pontos de virada na história da ciência e filosofia natural ocidentais. (Ibidem, p. 6).

Portanto, os séculos XII e XIII propiciaram uma revolução no pensamento científico em função das traduções, as quais, sem dúvida, foram determinantes para o progresso da ciência nos séculos subsequentes e para tirar definitivamente a Europa do marasmo científico em que se encontrava. Esse momento ímpar na história das traduções foi motivado pelo recuo dos mulçumanos na Espanha[68], com a queda da cidade de Toledo em 1085, e a conquista da Sicília em 1091. Daí, uma "Europa Ocidental revigorada tomou posse de significativos centros de conhecimento árabe" (Ibidem, p. 27)[69].

O grande interesse dos tradutores recaiu sobre obras de natureza científica e filosófica. Nesse bojo, figuram traduções de importantes obras matemáticas, como a álgebra de AL-Khowarizmi, traduzida por volta de 1140, por João de Sevilha; uma antologia árabe de Euclides, traduzida em 1150, por Adelardo de Bath e Gerardo de Cremona. Este último fez também importantes traduções das obras de Aristóteles (*Física, Sobre os Céus e o Mundo, Sobre a geração e a Corrupção e Meteorologia*), dos *Elementos* de Euclides, do

---

[68] A expansão territorial do Islam chegou até a Espanha; ali, na Idade Média, se concentrou um conjunto multicultural de sabres que aos poucos foram transmitidos também aos reinos cristãos da Espanha (CASALDERREY, 2000).

[69] Toledo – Espanha se tornou o principal centro de traduções e um importantíssimo centro cultural, após a expulsão dos mulçumanos. Para essa cidade se dirigiram estudiosos de todas as partes da Europa. O caráter internacional desse extraordinário momento vivido pela história da ciência fica evidenciado pelos nomes de alguns dos grandes tradutores que para lá se dirigiram: Platão de Tivoli, Gerardo de Cremona, Pedro Alfonso, Saravorda e João de Sevilha, Alfredo Sareshel (ou Alfredo o Inglês) e Hermann, o Alemão (CASALDERREY, 2000; GRANT, 2002).

Alamgesto, de Ptolomeu e a *Geometria dos Três Irmãos,* que contém importantes técnicas matemáticas de Arquimedes (WUSSING, 1998; GRANT, 2002).

Na medida em que avançavam as traduções, um novo mundo se descortinou àqueles estudiosos "sedentos" por novos conhecimentos. Esse "novo mundo" trouxe ímpeto às ciências naturais e à Matemática[70], cujas consequências foram marcantes para o desenvolvimento científico nos séculos XIV, XV e XVI, e em particular para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Notadamente, as traduções, difusão e assimilação das obras de Aristóteles transformaram a vida intelectual da Europa Ocidental. Tanto no campo da ciência, quanto no da religião, esse legado foi fundamental. Conforme Grant:

> Com a lógica e a filosofia natural de Aristóteles como seu núcleo, o novo conhecimento veio prover as necessidades do currículo das universidades então emergentes, que formaram um dos mais duradouros legados institucionais da Idade Média. (GRANT, 2002, p. 37).

O século XII viu nascerem as primeiras universidades[71] europeias. Isso se deveu a vários fatores, os quais já foram amplamente descritos. A nova realidade econômica (o nível de comércio e manufatura vivendo o auge – surgimento de uma economia monetária), o aumento populacional com a expansão de vilas e cidades e, o mais importante, o novo momento intelectual vivido pela Europa. Cabe ressaltar que na linha de frente do movimento de

---

[70] Ainda nos séculos XII e XIII encontramos resquícios de um avanço na matemática europeia. Como as cidades de Gênova, Pisa, Veneza e Milão se firmaram como importantes polos comercias, estabelecendo relações com o Oriente Próximo passando pelo Oriente Médio e norte da África. Dessas relações comerciais tomaram conhecimento do sistema indo-arábico e do modo como hindus e árabes faziam e registravam seus cálculos aritméticos. Por meio do mercador Leonardo Fibonacci de Pisa, que em 1202 escreveu seu livro *Liber abaci (*Livro do ábaco), esse sistema se tornou conhecido nessas cidades e, posteriormente, no restante da Europa. A obra de Fibonacci foi um divisor de águas no cálculo aritmético realizado com algarismos romanos, e o cálculo, bem mais simples, utilizado pelos hindus e árabes, bem como foi uma importante obra de matemática comercial e contábil, sendo bastante difundida até o século XVII. Além disso, serviu para mostrar que o conhecimento científico não devia se limitar somente ao clero e às escolas monásticas. Na Europa medieval uma nova classe emergiu: a burguesia, que também ansiava em desfrutar do saber e ter acesso ao conhecimento (WUSSING, 1998; CASALDERRY, 2000).

[71] "Universidade" do latim *universitas* tem como origem as associações comerciais nascidas no bojo do desenvolvimento europeu vivido no século XII. Eram organizações ou corporações que atuavam em um mesmo ramo comercial que se organizaram para defender seus negócios e interesses frente às autoridades governamentais constituídas. A essas organizações os advogados denominaram de *universitas.*

revitalização intelectual e cultural da Europa do século XII estavam os mestres e os estudantes. Eles se destacaram como parte vital da sociedade e, assim, puderam se estabelecer em importantes escolas em várias catedrais da Europa Ocidental.

Todavia, nesses ambientes, nem sempre encontravam o respaldo necessário para desenvolverem suas ideias, pois ainda estavam submetidos aos ditames governamentais ou, em especial, aos eclesiais. Além disso, esses “mestres e estudantes eram, na sua maioria, estrangeiros nas cidades onde ensinavam e, consequentemente, não tinham direitos nem privilégios” (GRANT, 2002, p. 41). Desse modo, perceberam que, agindo individualmente, era difícil negociar com as autoridades constituídas as condições de ensino sob as quais estavam submetidos. Isso motivou que:

> Em Paris e noutros locais, mestres e estudantes viram as vantagens de uma associação e usaram a *universitas* de um negócio ou mister como modelo para a sua própria organização. No final do século XII já havia várias dessas organizações “de fato” de mestres, estudantes, ou mistas, conhecidas por “universidades” (por exemplo: *universitas magistrorum* ou “universidade de mestres”, *universitas scholarium* ou “universidade de estudantes” e *universitas magistrorum et scholarium* ou “universidade de mestres e estudantes”. Consequetemente, o termo veio, por si só, a ser suficiente para identificar uma instituição educacional. (GRANT, 2002; p. 41).

Portanto, as universidades[72] já “nascem” revestidas de profundos significados e logo se transformam nos principais centros de criação e difusão do conhecimento científico, suplantando as escolas catedrais. No início de sua formação, em meados do século XIII, todas as instituições que já possuíam o *status* de universidade, tais como Paris, Oxford e Bolonha, eram classificadas como instituições de *studium generale* (estudos gerais) por possuírem pelo menos três das quatro faculdades tradicionais (artes, teologia, direito e medicina).

---

[72] As primeiras universidades são as de Paris (1160), Oxford, Cambridge e Bolonha (ca. 1200).

No início, nessas instituições se formou uma prática científica denominada *escolástica*, ou mais comumente ciência escolar, uma vez que o ensino se fazia por meio de "apresentação sistemática do material científico em forma de lições e intercambio de opiniões" (WUSSING, 1998, p. 91), que eram lidos, interpretados e apresentados usando a linguagem retórica. Enquanto que o currículo era dividido em duas partes: uma base comum a todos os cursos, constituído pelas sete artes liberais[73], e uma parte específica para cada curso.

Na faculdade de Artes, antes da introdução dos trabalhos de Aristóteles, o currículo era constituído basicamente das sete artes liberais. Todavia, com o conhecimento da filosofia aristotélica e da ciência grego-árabe, no final do século XII e no século XIII, cessou a primazia das sete artes liberais e, naquela faculdade, assim como já acontecia com os cursos de direito e medicina, as sete artes liberais se tornaram apenas preparação básica para estudos mais avançados em filosofia natural (GRANT, 2002). A filosofia aristotélica, a partir de então, vai prestar grande contribuição ao desenvolvimento das ciências naturais, incluindo a Matemática.

5.4 EM CENA NOVAMENTE AS "CAUSAS DO MOVIMENTO" DE ARISTÓTELES

O estudo sistemático da filosofia aristotélica pelos filósofos naturais, no século XIII e início do XIV, foi de fundamental importância para a ciência, em especial marcou a transição da Idade Média, pelo menos no campo científico, para o Renascimento. Mas qual foi o legado aristotélico, ainda na Idade Média, para o desenvolvimento da ciência natural, em especial da matemática e do Cálculo Diferencial e Integral?

Segundo Grant (2002), muitos dos princípios e conceitos aristotélicos, os quais já descrevi no capítulo anterior, foram mantidos na Idade Média. Esses conceitos sobre:

[73] Conforme já tratamos anteriormente.

> elemento composto, matéria, forma, doutrina dos contrários, quatro tipo de mudanças, incorruptibilidade celeste e outros – eram demasiado fundamentais para serem abandonados ou mesmo alterados de forma significativa. (GRANT, 2002, p. 101).

Entretanto, a maioria das proposições aristotélicas foram substancialmente revisadas e modificadas, na medida em que os filósofos não mais viam consistência nas suas ideias. Nas palavras de Grant:

> As transformações mais significativas na filosofia natural aristotélica durante a Baixa Idade Média, sob o ponto de vista da história da ciência, deram-se no modo como tratava o movimento (...). As explicações de Aristóteles relativas ao movimento natural e violento foram em grande parte abandonadas, em especial as que dizem respeito ao movimento violento. (Ibdem, p. 101).

Assim, retomando a discussão feita anteriormente sobre o movimento aristotélico, vimos que:

> Para Aristóteles, $V \alpha F/R$, em que V é velocidade, F a força motriz e R a resistência total oposta à força aplicada, uma quantidade que, presumivelmente, inclui o sujeito ou o corpo resistente mais a resistência do meio externo em que o movimento se dá. Para duplicar V, R podia ser reduzida à metade e F mantida constante; ou F duplicada e R mantida constante. Para reduzir V à metade, F podia ser reduzida à metade e R mantida constante; ou R duplicada e F mantida constante. (Ibdem, p. 101).

Nessas condições, os críticos de Aristóteles perceberam que, para ele conseguir manter sua lei do movimento, seria necessário promover uma “descontinuidade entre o processo físico e função matemática contínua” (p. 101). Assim, sucessivamente, as ideias de Aristóteles foram sendo contestadas e modificadas, trazendo à tona novas proposições e modelos matemáticos para a explicação das causas do movimento.

Especialmente para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, os conceitos de velocidade média e velocidade instantânea foram cruciais. Desse modo, é nas “causas do movimento” aristotélico que estão as raízes desses conceitos, sobretudo em relação à cinemática do movimento, ou dinâmica. Foi justamente nesse ponto que os filósofos naturais da Idade Média mais se afastaram das ideias de Aristóteles. A alavancada dessa discussão se deu no interior das universidades e envolveu uma legião de filósofos.

Dentre as muitas discussões feitas, encontramos as travadas nos anos de 1325-13350, no Merton College (Universidade de Oxford). Ali, um grupo de professores ingleses (também conhecidos como *os calculadores*) – cujos membros mais importantes foram Thomas Bradwardine (fl. 1290-1349), Willian Heytesbury (fl.1330-1371), John Dumbleton e Richard Swineshead (fl.1344-1354) – deram importantes contribuições à 'ciência do movimento', ou cinemática. Trataram das "variações de velocidade, ou movimento local, do mesmo modo que variações na intensidade de uma qualidade" (GRANT, 2002, p. 117)[74]. Estavam interessados em observar se: "a intensidade de uma velocidade aumentava com a rapidez, precisamente como a vermelhidão de uma maçã aumentava com a maturação" (Ibdem, p. 117). Essas discussões perduraram por quase três séculos e constam de quase todos os tratados sobre variáveis e velocidades, bem como dos tratados sobre intenção e remissão das formas (ou latitude das formas) e qualidades.

As contribuições mais significativas foram as definições dadas à velocidade uniforme e movimento uniformemente acelerado, mais de dois séculos depois, trabalhadas por Galileu Galilei, conforme veremos na sequência deste trabalho. Mas como foram definidos pelos mertonianos o movimento uniforme e movimento acelerado? Conforme Vaquero:

> - Regra do movimento local (Richard Swineshead):
>
> "*Portanto, o movimento local uniforme é aquele no qual toda fração de tempo igual, vem descrito por uma distância igual".*
>
> - Teorema do valor Médio e Teorema da Velocidade Média (Mertonianos):
>
> "*Se se percorre certa velocidade com um movimento acelerado, a mesma distância se percorrerá com um movimento uniforme se sua velocidade é a velocidade "média" do movimento acelerado.*

[74] Ver também: VAQUERO, J. M. *La Nueva Física*: *Galileo* (Colecions: Científicos para La História, V. 16). Madri: Nivola Libros e Ediciones, 2003.

- Teorema das Distâncias (Willian Heytesbury):

"*Se um móvel acelera uniformemente seu movimento desde o grau zero até um grau qualquer durante uma hora, na segunda meia hora percorrerá precisamente três vezes a distância percorrida na primeira hora".*. (apud VAQUERO, 2003, p. 58).

Com essas definições, os mertonianos conseguiram aplicar a definição de movimento uniforme ao tipo mais simples de velocidade variável, e ainda estabeleceram uma definição precisa de aceleração uniforme, ou seja, chegaram ao que hoje é conhecido como *teorema da velocidade média*. Tentaram também estabelecer um conceito para velocidade instantânea, o que dependia de uma formulação do conceito de limite só alcançada bem mais tarde. Todavia, essa foi uma contribuição admirável que serviu de fundamento para os trabalhos de Galileu e Newton e, sem dúvida, essencial para o cálculo newtoniano.

As contribuições dos mertonianos não foram expressas por meio de modelos matemáticos, apenas em linguagem retórica[75], uma vez que não era ainda uma prática recorrente na época apresentar conceitos físicos por meio de linguagem matemática. No entanto, numa linguagem atual, poderíamos expressar matematicamente os teoremas mertonianos como:

- O teorema da velocidade média:

"vamos supor um que, partindo do repouso, se move com uma aceleração constante que chamaremos a. No tempo t o espaço percorrido será s:

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

A velocidade final do corpo será $v_{final} = at$. Podemos definir a velocidade média como

$$v_{média} = \frac{v_f - v_0}{2}$$

---

[75] As quais de acordo com Grant (2003) são difíceis de compreendermos atualmente. No trecho retirado do original: Regras para Resolver Sofismas (*Regule solvendi sophismata)* de Willian Heytesbury, escrito por volta de 1335, está em Grant (2003, p. 119): "Porque ela [ou seja a latitude ou o aumento de velocidade] comece em zero graus quer em algum outro grau [finito], cada latitude, desde que termine num grau finito, e desde que seja adquirida ou perdida uniformemente, corresponderá ao seu grau médio [de velocidade]. Assim, o corpo em movimento, adquirindo ou perdendo essa latitude uniformemente durante algum determinado período de tempo, percorrerá uma distância exatamente igual à que percorreria em igual período de tempo se se movesse uniformemente com o seu grau médio [de velocidade]".

Recordando que a velocidade inicial era 0, teremos que

$$v_{média} = \frac{1}{2} v_{final} = \frac{1}{2} at$$

Agora vamos imaginar um corpo que se move com velocidade v constante. Em um tempo t, o espaço x que foi percorrido é $x = vt$. Se fazemos a velocidade v justamente igual à velocidade média que havíamos definido teremos:

$$x = vt = v_{média} . t = \frac{v_{final}}{2} . t = \frac{1}{2} at.t = \frac{1}{2} at^2 = s$$

- O teorema das distâncias:

“Vamos supor um móvel que, partindo do repouso, se move com um movimento uniformemente acelerado durante um intervalo de tempo t, que dividiremos em dois intervalos t_1 e t_2. O espaço percorrido pelo móvel no primeiro intervalo será s_1 e o segundo intervalo será s_2. Teremos:

$$s_1 = v_{01} t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \text{ e } s_2 = v_{02} t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2$$

Se levarmos em conta que $v_{01} = 0$, $v_{02} = a(t_1)^2\ y t_1 = t_2$, teremos:

$$s_1 = \frac{3}{2} a t_1^2 \quad s_2 = a t_2 . t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 = \frac{3}{2} a t_2^2$$

Assim, o espaço s_2 percorrido no segundo intervalo de tempo é três vezes maior que o espaço s_1 percorrido no primeiro intervalo de tempo:

$$s_2 = \frac{3}{2} a t_2^2 = 3 \frac{1}{8} a t_a^2 = 3 s_1.$$

Ainda, conforme Grant, essas mesmas definições podem ser entendidas como:

$S = 1/2 V_f t$, em que S é distância percorrida, V_f a velocidade e t o intervalo de tempo associado ao movimento acelerado. Dado que se considera que o movimento é uniformemente acelerado, $V_f = at$, em que a é aceleração uniforme, obtemos por substituição $S = 1/2at^2$, a fórmula habitual para a distância percorrida num movimento uniformemente acelerado a partir da situação de repouso. Quando, em vez de partir do repouso, o movimento uniformemente acelerado se inicia a partir de qualquer velocidade específica V_0, uma situação frequentemente discutida, a versão medieval pode ser representada como $S = [V_0 + \frac{V_f - V_0}{2}]^t$, ou simplesmente, $S = V_0\, t + (1/2)at^2$, dado que $V_f - V_0 = at$. (GRANT, 2003, p. 118).

Portanto, essa importante formulação conceitual sobre movimento foi tema de estudo durante o transcorrer dos séculos XIV-XV. Dela participaram vários estudiosos. Eles tentaram fazer demonstrações aritméticas e geométricas, mas, na maioria das vezes, sem sucesso – talvez tenha faltado o arcabouço matemático. No entanto, uma das tentativas mais bem-sucedida foi a do professor da Universidade de Paris Nicolas de Oresme (1323-1382), que em seu trabalho pela primeira vez utilizou modelos gráficos para representar velocidade, espaço e tempo (GRANT, 2003; VAQUERO, 2003).

Grant afirma que o trabalho de Nicolas de Oresme foi apresentado pela primeira vez por volta de 1350, na obra "*Configurações de Qualidade e Movimentos*" (p. 119) e, nele, Oresme apresenta o tratamento mais original até à época sobre intensão (de intensidade) remissão das qualidades – ou latitude das formas. A seguir, consta a discussão dos principais pontos do trabalho de Oresme:

> Na figura [seguindo minha notação 5.3.2], tomemos a linha AB como representando o tempo e as perpendiculares erguidas a partir de AB como representando a velocidade de um corpo, Z, partindo da situação de repouso em B e aumentando a sua velocidade uniformemente até uma certa velocidade máxima em AC. A totalidade das intensidades da velocidade contida no triângulo CBA foi concebida como representando a distância total percorrida por Z ao deslocar-se de B para C ao longo da linha BC no intervalo AB. Tomemos a linha DE como representando a velocidade instantânea que Z adquire no instante médio do tempo tal como é medido ao longo de AB. Se Z se movesse agora uniformemente com a velocidade que tivesse em DE, a distância total que percorreria ao mover-se de G para F ao longo da linha GF no tempo AB é representada pelo retângulo AFGB. Se pudermos verificar que a área do triângulo CBA é igual à do retângulo AFGB, ter-se-á demonstrado que um corpo uniformemente acelerado a partir da situação de repouso percorreria a mesma distância que um corpo que se movesse durante o mesmo intervalo de tempo a uma velocidade uniforme igual à velocidade atingida no instante médio do movimento uniformemente acelerado. Ou seja, $s = \frac{1}{2} v_f t$, a distância percorrida por Z num movimento uniformemente acelerado. Demonstramos que as duas áreas são iguais do seguinte modo: dado que $\sphericalangle BEG = \sphericalangle CEF$ (ângulos verticalmente opostos são iguais), que $\sphericalangle BGE = \sphericalangle CFE$ (são, ambos, ângulos retos) e que $GE = EF$ (alinha DE divide a linha GF em duas partes iguais), os triângulos $ERFC$ e

EGB são iguais (segundo *Elementos* de Euclides, Livro I, proposição 26). Se cada um destes retângulos se adiciona a área $BEFA$ para formar o triângulo CBA e o retângulo $AFGB$, torna-se imediato óbvio que as áreas do triângulo CBA e do retângulo $AFGB$ são iguais. (GRANT, 2002, p. 119-120).

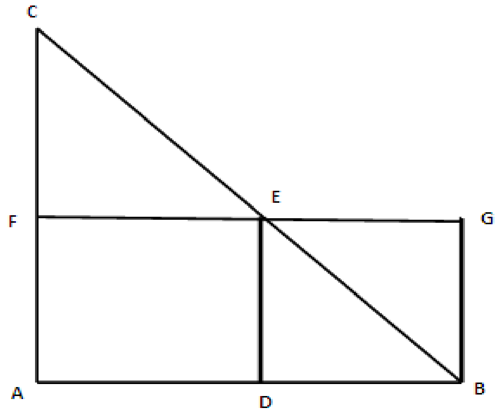


Figura 46 – Modelo geométrico de Oresme para o cálculo de velocidade, espaço e tempo (GRANT, 2002, p. 120).

De acordo com Grant, essa demonstração geométrica de Oresme foi bastante difundida na Europa durante os séculos XIV e XV, especialmente na Itália. Sendo assim, é bem provável que Galileu tenha tomado conhecimento dela e a tenha usado, pois em sua obra *Discursos sobre Duas novas Ciências* apresenta uma demonstração para velocidade média bem próxima da demonstração de Oresme, conforme veremos na sequência desta pesquisa.

Outras formas gráficas para representar distância, velocidade e tempo são encontradas no trabalho de Oresme, conforme Baron:

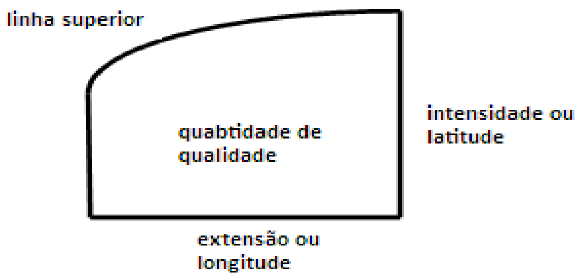


Figura 47 – Representação bidimensional sobre movimento (BARON, 1985, p. 60).

Os termos *longitude* e *latitude* eram usados para designar o que hoje conhecemos como abscissa e ordenada.

Figura 48 – Representação geométrica do movimento de Oresme (Ibdem, p. 60).

Sucintamente pode-se dizer que através destas técnicas gráficas (que não foram inventadas por Oresme, mas por ele substancialmente desenvolvidas) os conceitos de movimento foram efetivamente relacionados em base intuitivas com a ordenada, a abscissa, o gradiente de curva (ou reta) e o espaço que os contém. Podemos agora enunciar o teorema da velocidade média (enunciado antes por Richard Suiseth no Colégio Merton) em termos da área de um triângulo ou trapézio, de acordo com o caso. (BARON, 1985, p. 60).

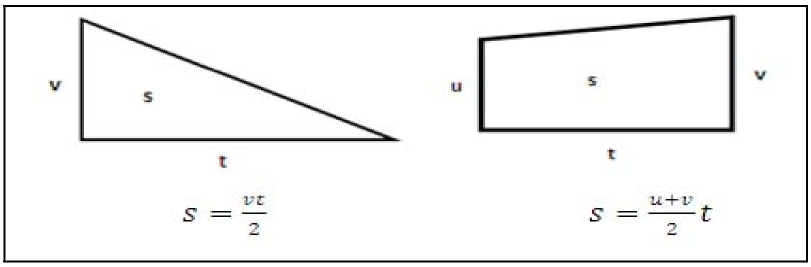


Figura 49 – Versão moderna para a representação geométrica do movimento de Oresme (Ibdem, p. 60).

5.5 OS MODELOS PROPOSTOS E AS CONTRIBUIÇÕES DOS MERTONIANOS PARA O DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO

O trabalho dos professores do Colégio Merton, acrescidos dos trabalhos de Oresme, foi o que de mais significativo acorreu entre os séculos XIII-XIV para o desenvolvimento do cálculo. Oresme foi também o primeiro a empregar o termo fluxões amplamente utilizado por Newton. Resumindo, as principais ideias contidas nesses trabalhos e, posteriormente, sistematicamente usadas e revistas pelos filósofos naturais do século XV e XVI incluem:

- Concentração de atenção especial nos estágios graduais da mudança de movimento – prenúncio no estudo da velocidade instantânea (ou movimento em um determinado instante – hoje obtemos facilmente por meio da derivada no ponto).
- Definição cuidadosa de movimento uniforme como sendo aquele em que o corpo descreve espaços iguais em tempos iguais – representação de uma qualidade física por uma superfície (área sobre uma curva, ou reta);
- Reconhecimento de que o movimento acelerado podia ser tanto uniforme quanto não-uniforme.
- Introdução do conceito de superfície como fluxo ou movimento de uma reta perpendicular a ela própria.
- Apresentação da ideia de gradiente (especialmente de retas, mas em alguns casos, também de curvas) como uma medida de variação de velocidade.

Numa análise mais substancial, reafirmo que as correntes de pensamento desenvolvidas na Idade Média, especialmente os trabalhos desenvolvidos pelo grupo de calculadores do Colégio Merton e Oresme, não foram determinantes para o desenvolvimento da matemática, mas influenciaram bastante os trabalhos de Galileu, Kepler, Cavalieri, Barrow, Newton e outros. Sendo assim, foram considerados significativos para o desenvolvimento do cálculo. Essa discussão ficará mais clara na próxima seção.

Já no campo da matemática, a produção original seguiu lenta. Como vimos, na faculdade de Artes, primeiramente, os estudantes tinham um ensino baseado nas sete artes liberais. Depois, os que seguiam os estudos se aprofundavam um pouco mais em ciências naturais e matemática. Basicamente, em matemática estudavam os *Elementos* de Euclides, o *Almagesto*, de Ptolomeu (recém-traduzido do árabe), e a matemática desenvolvida no mundo hindu-arábico.

Na Itália se difundiram as escolas de ábaco, que tinham como texto base o *Liber Abace*[76], o livro de Fibonacci. Nessas escolas se ensinavam quase tudo de conhecido à época. Os conteúdos continham aritmética prática e comercial, noções de aritmética teórica (posteriormente teoria dos números), geometria teórica e prática e álgebra. O currículo era dividido em três níveis:

> no nível mais elementar se ensinava a escrita e a leitura usando o sistema hindu-arábico e a representação destes com as mãos, as técnicas para calcular com os dedos, os algoritmos para realizar as operações com frações, a regra de três, os sistemas de moeda, de pesos e medidas e, certas noções de geometria prática[77]. No segundo nível se ensinava aritmética comercial, contabilidade e escrituração de livros (...)[78]. O terceiro nível se reservava para os aficionados pela matemática. Era também o nível que deviam seguir aqueles que queriam com o tempo se converter em professores de ábaco. (CASALDERREY, 2000, p. 41-42).

As escolas de ábaco fizeram tanto sucesso na Itália que depois se difundiram por toda a Europa. Nelas, inspirados no *Liber Abacci*, vários ouros tratados foram produzidos pelos mestres que passaram a produzir seu próprio material. As escolas de ábaco não produziram "matemática nova". Mas sua importância não foi menor para o desenvolvimento da matemática, uma vez que serviram de transição para grandes progressos na matemática, cuja alavancada vai ocorrer nos séculos seguintes (BARON, 1985; CASALDERREY, 2000; GRANT, 2003).

A grande alavancada da matemática a partir de então se deve, sobretudo, ao estudo sistemático dos clássicos gregos pelos matemáticos do século XVII, iImbuídos em compreender e aprofundar o pensamento matemático dos gregos da Antiguidade, especialmente, *os Elementos* de Euclides. *As Cônicas* de Apolônio, os trabalhos de Arquimedes, as equações de Diofanto e *a Aritmética* de Pappus. Disso iremos tratar no próximo capítulo.

---

[76] O *Liber Abace* (o Livro do ábaco) de Leonardo de Pisa Fibonacci (ca. 1170-1240) foi a obra sobre matemática mais importante do século XII, sendo esse sucesso se estendendo pelos dois séculos seguintes como referência para o ensino de matemática.

[77] Nesse nível estudavam os artesãos e os empregados dos teares.

[78] Iam até esse nível aqueles que desejavam uma qualificação para trabalhar nas grandes companhias comerciais.

Capítulo 6

E O CÁLCULO SE CONSOLIDA

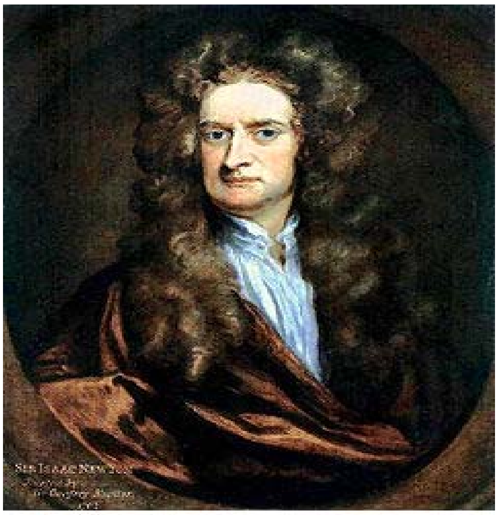


Figura 50 - Retrato de Isaac Newton, 1702. Óleo sobre tela de Sir Godfrey Kneller. Disponível em: <http://www.1st-art-gallery.com/Sir-Godfrey-Kneller/Portrait-Of-Sir-Isaac-Newton-1702.html>. Acesso em: 4 maio 2010.

"A Matemática é uma grande aventura nas ideias; a sua história reflete alguns dos mais nobres pensamentos de inúmeras gerações"

Dirk J. Struik

O "novo olhar" sobre os clássicos gregos vai (re)ssuscitar o pensamento científico e matemático com profundas implicações para a ciência em geral. Notadamente nas ciências, marca a reformulação do Sistema Planetário e das leis do Movimento; na matemática, o surgimento da álgebra simbólica, da geometria analítica e do cálculo infinitesimal. Tudo isso se constituiu em um novo tratamento dado a antigos problemas (já resolvidos), revigorando-os e, suscitando o aparecimento de novas questões (em aberto) para serem respondidas. Essa será a grande contribuição dos filósofos naturais/matemáticos do século XVII. É o que trataremos neste capítulo.

6.1 FLORESCE O RENASCIMENTO ... ENTRAMOS NOS TEMPOS DE KEPLER, GALILEU GALILEI, FERMAT, DESCARTES, CAVALIERI E TANTOS OUTROS

Três acontecimentos históricos ocorridos no século XV marcaram a revolução da cultura ocidental de um modo bastante significativo e foram decisivos para a entrada em um novo período da história: o Renascimento. Esses acontecimentos foram a queda da cidade de Constantinopla em 1453 – capital do Império Bizantino; a invenção da imprensa – em 1500 por Gutenberg, e a conquista da América, em 1492.

Alguns aspectos fundamentais caracterizam o Renascimento, o auge da produção artesanal – com a crescente influência da classe burguesa nas decisões econômicas e políticas; o progressivo abandono da economia natural substituída por uma economia monetária – favorecendo o florescimento das instituições bancárias, o nascimento de novas cidades e um significativo crescimento das já existentes; uma grande ebulição dos movimentos religiosos e espirituais – favorecendo um abandono da concepção medieval de mundo, e um extraordinário desenvolvimento das artes e da ciência. Esse período condiz também historicamente com o período da Revolução Científica – que se estende de meados do século XV ao final do século XVII – cerca de 150 anos. Período este de grande influência da Europa Ocidental sobre as restantes regiões do globo. Assim, o Renascimento[79] implicou em sentido natural em um "renascer" do conhecimento nas ciências, nas artes e na cultura (WUSSING, 1998; CASALDERREY, 2000; DEBUS, 2002; GRANT, 2003).

Segundo Wussing (1998), esse período foi importante para a matemática, para as artes e para as ciências em geral, uma vez que:

---

[79] Sobre o Renascimento, o que diz Engels: Foi a maior transformação progressiva que a humanidade havia vivido até então, uma época que precisava de gigantes e construiu gigantes, gigantes em capacidade de pensamento, paixão e caráter, em seu polifacetismo e erudição. Os homens que estabeleceram o moderno domínio da burguesia foram tudo menos gente de uma mentalidade limitadamente burguesa (...) Também o estudo da Natureza se mostrou, então, um meio da revolução geral, completamente revolucionário; tinha de ganhar-se, sem dúvida o desejo pela existência. (L.6.13, p. 312-313 apud WUSSING, p. 96).

> Os portadores do novo modo – poetas, eruditos, escritores e filósofos – os chamados *humanistas*, proclamavam uma concepção de mundo e um modo de vida a serviço do homem e suas necessidades vitais e terrenas. O regresso à pureza de pensamento antigo era possível somente recuperando os textos antigos no idioma original, submetidos a um exame crítico, o que fomentou o estudo da filosofia clássica e do pensamento filosófico e histórico. Assim, nos séculos, XV e XVI muitos escritos de Arquimedes, Ptolomeu, Euclides, Apolônio, Diofanto e muitos outros matemáticos da antiguidade chegaram até os eruditos europeus. A impressão de livros com tipos móveis, um invento crucial de Gutenberg, favoreceu a difusão relativamente rápida do saber antigo conhecido e do que se estava recuperando progressivamente. Também o materialismo social, em filosofia, sociologia e teoria política, em ética, pedagogia e literatura, se manifestava à transição para uma nova ordem social. Nicolas de Cuso e Giordano Bruno, Maquiavel e Tomas Moro, Tomas Müntzer,Ulrich Von Hutten e Erasmo de Roterdan. Martin Lutero e Phillipe Melanchthon, Petrarca, Miguel Angelo, Boccacio, Rabelais, Cervantes e Shakespeare contribuíram de essencial, cada um com sua contribuição particular, para a formação de uma nova visão de mundo. (WUSSING, 1998, p. 95-96).

Com essa nova condição propícia para o desenvolvimento das ciências naturais, incluindo a Matemática, é previsível que uma nova orientação foi dada à forma e ao conteúdo dessa disciplina. Marca o desenvolvimento dos métodos de quantificação, o uso cada vez maior desta como ferramenta para as ciências naturais, em especial a física; a retomada no estudo dos clássicos gregos diretamente de fontes originais, ou seja, sem a influência árabe revigoraram o pensamento matemático. Isso tudo favoreceu o desenvolvimento da Álgebra, da Teoria dos números, é lógico, também do Cálculo Diferencial e Integral.

Vejamos em mais detalhes os principais acontecimentos no campo científico e na própria Matemática, que nos séculos XVI e XVII direta ou indiretamente influenciaram o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

6.2 UMA ÉPOCA DE PROFUNDAS MUDANÇAS NAS CIÊNCIAS NATURAIS E SEUS REFLEXOS NA MATEMÁTICA

A publicação da obra *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (Revolução das Esferas Celestes) de Nicolau Copérnico (1453-1543), no ano de 1543, marca o início de um período de profundas mudanças na forma de pensamento científico na Europa Ocidental, sobretudo na forma de conceber o universo. O modelo ptolomaico do universo foi o que prevaleceu até meados do século XVII, uma vez que a completa aceitação do novo modelo heliocêntrico de Copérnico enfrentou fortes resistências no seio da Igreja. Intimidados pela posição da Igreja Católica, muitos optaram por abrir mão de suas convicções.

Todavia, para uma completa aceitação do modelo heliocêntrico foi necessária uma revisão do modelo geocêntrico de Aristóteles e Ptolomeu. Vale lembrar que o *Almagesto*[80] era uma obra capital para qualquer estudante em ciências naturais e Matemática nos últimos séculos, como também o era a filosofia aristotélica. Foi então necessária uma completa mudança de visão, o que demandou muito estudo, forte senso intuitivo e prático, desenvolvimento de novos instrumentos de observação[81] e, sobretudo, vontade.

Segundo Westfall (2001), dois temas centrais sobre o universo e a natureza dominavam nesse período:

> a tradição platônico-pitagórica, que encarava a natureza em termos geométricos – na convicção de que o cosmos se alicerçava em princípios de ordem matemática – e a filosofia mecanicista, que concebia a natureza como uma máquina gigantesca e procurava explicar os mecanismos que se ocultavam por detrás dos fenômenos. (WESTFALL, 2001, p. VI).

Era preciso entender bem essas duas visões para então propor novos conceitos e novos modelos. É sabido que após Copérnico reintroduzir a teoria de que o Sol estava no centro do universo, essa ideia levou quase 150 anos para ser completamente aceita. Nesse ínterim, muitos outros cientistas se debruçaram sobre as ideias de Copérnico verificando suas implicações do ponto de vista de uma investigação científica. Dentre as inúmeras contribuições, as mais significativas são as de Kepler e Galileu[82]. Os trabalhos desses dois grandes cientistas alcançaram grande repercussão, e, em

---

[80] O Almagesto, que chegou à Europa no século XII já havia sofrido revisões pelos cientistas do Islam. Na Europa foi novamente revisado por outros matemáticos. Entre as mais importantes revisões estão as de Regiomanto (1436-1476), importante matemático do século XV que realizou trabalhos significativos, sobretudo, em trigonometria.

[81] Por exemplo, a invenção do telescópio.

[82] Dos quais trataremos em detalhes nas seções subsequentes deste capítulo.

especial, para o desenvolvimento do cálculo foram de extrema utilidade, uma vez que foram os que mais influenciaram Newton.

Assim, neste trabalho é importante destacar os principais pontos de cada um deles. Porém, antes de entrarmos nos trabalhos de Kepler e Galileu, vamos ver o que de mais significativo foi deixado pelo modelo copernicano

6.2.1 Os principais pontos do modelo copernicano

Copérnico manteve os círculos deferentes de Ptolomeu e percebeu que não podia colocar o Sol exatamente no centro, tal como não podia ser a Terra. O Sol encontrava-se próximo, mas não exatamente no centro matemático do Universo (Figura 51) e estava rodeado pelos planetas, sendo a Terra um deles (tendo a Lua como sua vizinha situada em um epiciclo), implantados nas suas esferas cristalinas.

O Modelo do Sistema copernicano ainda era esférico com as estrelas fixas. Desse modo, muito próximo do modelo ptolomaico, a exceção foi retirar a Terra do centro. Para Copérnico, esse era um sistema mais simples e harmonioso do que os anteriores, e dava ao Sol seu devido lugar. Os círculos equantos[83] foram eliminados, bem como os epiciclos – que no sistema anterior eram necessários para explicar o movimento retrógrado dos planetas (conforme figura 52). Desse modo, o modelo copernicano também se mostrou mais simples na determinação das distâncias relativas dos planetas ao Sol usando métodos trigonométricos simples (conforme figuras- 53). De um modo geral, esse modelo de universo era mais simples e harmonioso (figura 54.).

---

[83] De equante: de um epiciclo (um pequeno círculo carregando o planeta) foi concebido para o movimento com uma velocidade uniforme a respeito da equante.

Figura 51 – Sistema Copernicano

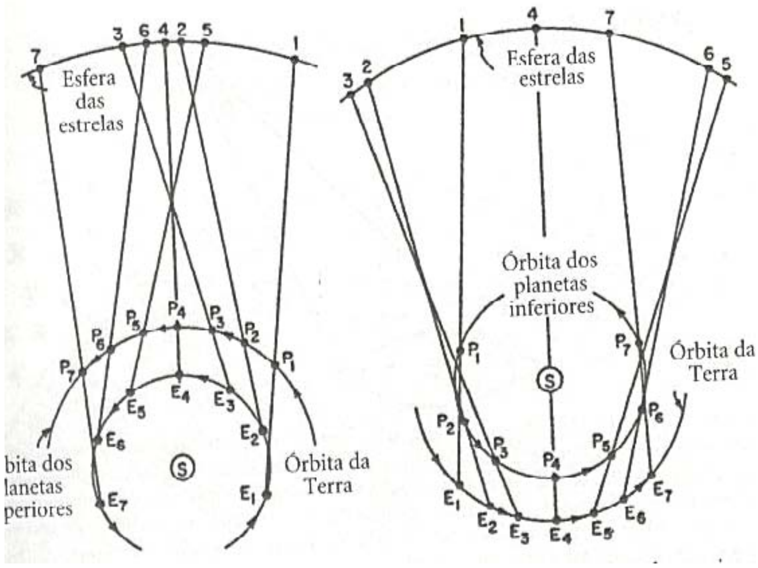


Figura 52 – Sistema Copernicano

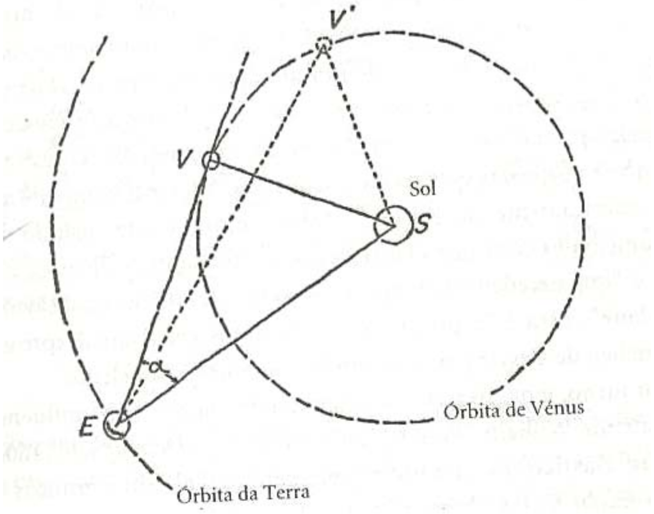


Figura 53 – Sistema Copernicano

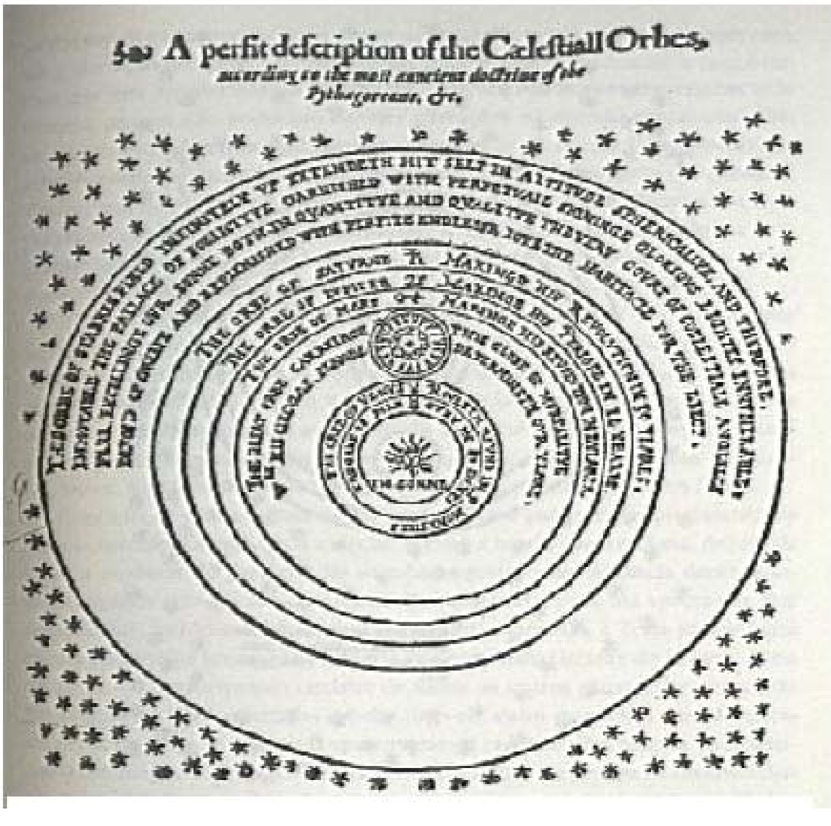
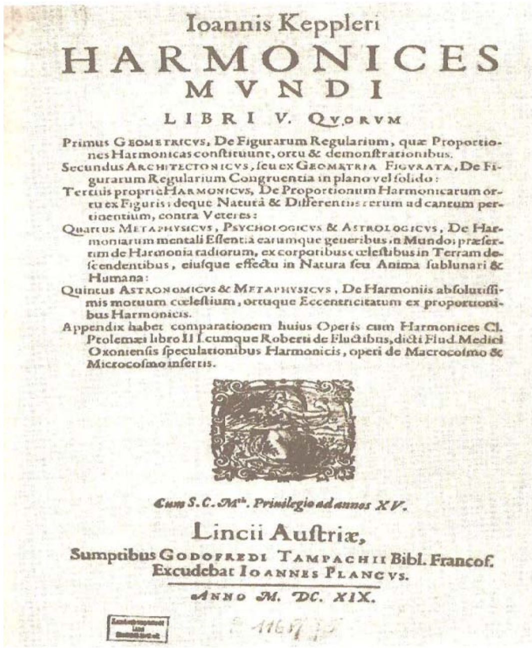


Figura 54 - Representação Esquemática Modelo Heliocêntrico

O reconhecimento da necessidade de um texto mais rigoroso de Ptolomeu levou à edição do *Epitome* – obra publicada em 1496. Por outro lado, o estudo cuidadoso da obra de Ptolomeu levou Copérnico a fazer reformulações na astronomia ptolomaica e, posteriormente, introduzir seu próprio modelo. Ao propor o modelo heliocêntrico, Copérnico introduziu um conjunto de novos problemas para os astrônomos e para os filósofos naturais, cuja solução seria motivo de debate por mais de um século. Nesse processo, a matemática mais uma vez foi uma importante ferramenta para ajudar na explicação e dar credibilidade ao trabalho dos cientistas.

6.2.2 Kepler e suas leis do movimento planetário

Antes de Johannes Kepler (1571-1630) estabelecer as leis do movimento planetário – que definitivamente explicam o movimento da Terra e dos planetas em torno do Sol, muitos cientistas se debruçaram sobre os sistemas Ptlomaico-Aristotélico e Copernicano, ora concordando com um, ora com outro, e propondo modificações pontuais em cada um deles. As leis do movimento de Kepler vieram pôr fim a essas discussões, e definitivamente influenciaram Galileu e Newton.



Ioannis Keppleri
HARMONICES
MVNDI
LIBRI V. QVORVM
Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas constituunt, ortu & demonstrationibus.
Secundus ARCHITECTONICVS, seu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel solido:
Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:
Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Essentiâ earumque generibus in Mundo; præsertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœlestibus in Terram descendentibus, eiusque effectu in Natura seu Anima sublunari & Humana:
Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis absolutissimis motuum cœlestium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.
Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III. cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud Medici Oxoniensis speculationibus Harmonicis, operi de Macrocosmo & Microcosmo insertis.
Cum S. C. Mtis. Privilegio ad annos XV.
Lincii Austriæ,
Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.
ANNO M. DC. XIX.

Figura 55 Página de rosto de Harmonice Mundi (Livro V – MOURAO, 2003, P.169)

Kepler dedicou boa parte de sua vida ao estudo do sistema planetário. O primeiro passo foi reformular a teoria ptolomaica e a copernicana. Isso o levou a promover três inovações: “o deslocamento do centro do sistema para o Sol; os planetas descrevendo suas órbitas aproximadamente num mesmo plano, sem oscilarem no espaço; o abandono da ideia de movimento uniforme” (MOURÃO, 2003, p. 118-119). Essas inovações, segundo Mourão, permitiram eliminar “diversos círculos que vinham dificultando o progresso das ideias cosmológicas desde Ptolomeu e transformando o Sistema de Copérnico em algo complexo” (Ibidem). Além disso, permitiram a Kepler obter sucesso em suas tentativas de compreender o Sistema Planetário e estabelecer suas leis.

Desse modo, formulou três leis. Entre a publicação da primeira lei (na verdade que hoje conhecemos como a segunda lei) e a terceira, quase vinte anos se passaram. Foram anos de muito estudo e investigação científica, com muitas idas e vindas em torno de um mesmo problema. Esses esforços fizeram com que ele passasse para a história como um dos grandes cientistas do século XVII. As três leis são:

> **Primeira lei** – (na verdade *Segunda Lei dos Movimentos Planetários*): o raio vetor que une o Sol a um planeta percorre superfícies iguais em tempos iguais [conforme figura 56 N.M]. (Mourão, 2003, p. 124).

Nesta lei, Kepler obteve um resultado correto observando que

> As velocidades da Terra no *afélio*[84] e no *periélio* são inversamente proporcionais às respectivas distâncias desses pontos ao Sol. Combinando duas leis falsas - forças inversamente proporcionais à distância e forças diretamente proporcionais à velocidade. (Ibidem, p. 125).

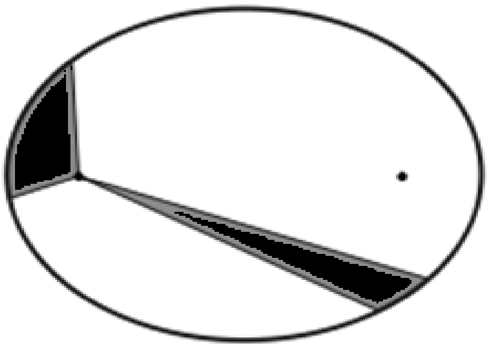


Figura 56 – Modelo Geométrico da Segunda Lei de Kepler (Fonte: http://pt.wikipedia.org)

> **Segunda lei – (hoje conhecida como primeira lei) – "**O planeta em órbita em torno do Sol descreve uma elipse em que o Sol ocupa um dos focos". (DEBUS, 2002, p. 93).

[84] *Afélio* é o ponto mais afastado do Sol, onde o planeta move-se mais lentamente, e *periélio* é o ponto mais próximo do Sol, onde o planeta orbita mais rapidamente.

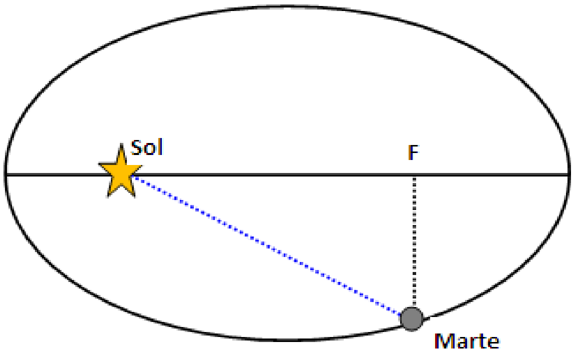


Figura 57 – Primeira lei de Kepler

Esta veio mostrar que as órbitas dos planetas descreviam elipses e não circunferências como se acreditava até então e como era largamente defendido nos modelos anteriores. Para que Kepler chegasse a essas conclusões foi um longo caminho percorrido – três anos entre a primeira lei e a segunda. O mais difícil foi abandonar conceitos anteriores sobre a circularidade do movimento. Para os cálculos geométricos, usou como fonte de pesquisa os trabalhos de Arquimedes e Apolônio, conforme Mourão: "Se o formato [da órbita] fosse uma elipse perfeita, todas as respostas [que procuro] estariam em Arquimedes e Apolônio" (2003, p. 127). Assim, essa lei é a segunda das grandes inovações introduzidas por Kepler no Sistema Planetário, que modifica substancialmente os anteriores.

> **Terceira Lei de Kepler** – "O quadrado dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer são proporcionais entre si e ao cubo das suas distâncias ao Sol" (Mourão, 2003, p. 177).
> Ou seja, [matematicamente teríamos- N.M] sendo **T** o período de revolução e **D** o eixo máximo da órbita de um planeta, tem-se:
> $\frac{T^2}{D^3} = k$, *com* k *constante*

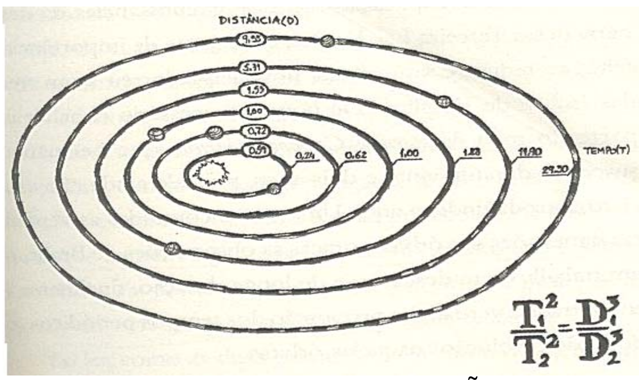


Figura 58 – Terceira Lei de Kepler (MOURÃO, 2003, p. 175).

Essa lei expressa que os planetas se movem com velocidades diferentes, dependendo da distância a que estão do Sol. Assim, decorrido quase vinte anos entre o enunciado da primeira lei e a terceira lei parecia estar completo o principal objeto de estudo da vida Kepler. Todavia, ao enunciar essas três leis, Kepler não pressentiu a sua real importância para a ciência. Newton soube reconhecer essa contribuição, pois viu nessas leis o prenúncio da Lei da Gravitação Universal (DEBUS, 2002; MOURÃO, 2003).

Comparando esse momento com os argumentos de Mendes (2003) sobre questões em aberto (não totalmente respondidas) e questões respondidas, conforme já tratamos neste texto – as leis do movimento de Kepler responderam às dúvidas que ainda pairavam sobre o Sistema Planetário, não aparentando deixar questões em aberto. Nesse sentido, a questão passou a ser considerada uma questão respondida, mas passível de suscitar novos problemas, ou seja, poderia gerar novas questões em aberto.

Kepler, em seus modelos geométricos e matemáticos, utilizou os trabalhos sobre elipses e cônicas de Apolônio e Arquimedes, ou seja, os entes ideais da geometria grega agora tinham uma existência real nas leis do movimento de Kepler. Além disso, os modelos propostos vieram responder questões ainda em aberto em relação ao movimento dos planetas, da Terra e do Sol. Todavia, permitiu que novas questões fossem postas sobre a ciência mecanicista, o que foi melhor elucidado com Galileu e Newton.

6.2.3 As leis do movimento do movimento de Galileu

Galileu Galilei (1564-1642) [85], sem dúvida, é um dos grandes nomes da história, cuja contribuição e obra já foram por muitos historiadores da ciência contempladas, contadas e escritas. Nesta tese, me detenho nas contribuições desse "gênio" sobre movimento, sem dúvida, um dos grandes interesses em toda a sua vida como investigador das ciências. Como todo estudioso ávido por novos conhecimentos, Galileu se debruçou sobre as obras do passado. Inicialmente, sobre a filosofia aristotélica, e logo percebeu que as leis do movimento de Aristóteles deveriam ser reformuladas, pois continham erros conceituais. Havia muitos pontos não bem respondidos nas leis de Aristóteles, especialmente sobre o lançamento de projéteis, a experiência não confirmava o movimento aristotélico. Eram questões em aberto que Galileu procurou elucidar.


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.
IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

Figura 59 – Capa do Livro de Galileu (Extraído de VAQUERO, 2003, p. 60).

Também é sabido que foi fortemente influenciado pelo trabalho de Arquimedes, pois via nele a chave para conduzir suas próprias investigações. Talvez tenha se apaixonado pelo gênio inventivo e investigativo de Arquimedes, o qual possuía também. Provavelmente teve acesso aos trabalhos

[85] Galileu foi um cientista de muitas facetas. Assim, como acontece com Arquimedes, recaem muitas lendas sobre seus inventos, não totalmente esclarecidas se verdadeiras ou falsas. Daí mais uma semelhança entre os dois. Uma delas é como Galileu teria feito sua primeira descoberta: o movimento do pêndulo. Em 1538, Galileu seguia estudando medicina em Pisa. Um domingo, enquanto assistia à celebração religiosa na catedral, Galileu fixou o olhar sobre uma lâmpada de azeite que caía do teto presa por um cabo. A corrente de ar fazia oscilar a lâmpada de um lado para outro. Galileu ficou absorto observando esse movimento de vai-e-vem. Deu-se conta de que esses movimentos eram tão regulares que podiam ser comparados com os batimentos do coração. E assim, Galileu se deu conta de que com um pêndulo (uma massa unida a uma delgada corda unida a um ponto fixo) se podia medir o pulso de um paciente e suas variações. Era um grande invento para um estudante! Quando Galileu chegou em casa, se pôs a provar com diferentes tamanhos de corda. Como resultado, construiu um aparelho médico que chamou de pulsilogia (VAQUERO, 2003, p. 70).

de Oresme e dos calculadores do Colégio Merton, e foi com base nas leis do movimento estabelecidas por eles que conduziu suas investigações sobre cinemática do movimento (VAQUERO, 2003).

Todavia, seu interesse pelas leis do movimento vão além da cinemática, pois também foi um astrônomo eficaz com importantes contribuições nesse campo também. Assim, seguindo a linha de interesse desta pesquisa, vamos pontuar as principais contribuições de Galileu sobre movimento que foram importantes para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

Galileu elaborou sua ciência do movimento com base nas leis do movimento aristotélico, discordando delas. "Sabemos disso, já que existe uma série de documentos conhecidos como *de Motu Antiquiora* ([escritos] antigos sobre o movimento) que correspondem aos primeiros escritos de Galileu sobre o movimento" (VAQUERO, 2003, p. 63).

Para Galileu impor suas conclusões sobre o movimento, teve que contrariar várias ideias da física aristotélica. De início, sofreu retaliações da comunidade científica da época, que ainda estava fortemente apoiada nas concepções de Aristóteles. Para vencer essas barreiras, ele realizou diversos experimentos e, pouco a pouco, suas ideias foram ganhando credibilidade porque podiam ser comprovadas. Ele realizou experimentos e demonstrou-os matematicamente.

As contribuições mais significativas de Galileu para a ciência do movimento não estão nesses escritos, mas na obra *Disccorsi* (Discurso), escrita por volta de 1604. Essa obra está dividida em três seções: a primeira trata do *movimento uniforme*; a segunda, do *movimento acelerado;* e a terceira, do *movimento de projéteis*.

Numa visão moderna, temos:

> partindo de uma definição de movimento uniforme (com o conceito de velocidade implícito a ela). Galileu dá, em sua linguagem geométrica e de proporções, as relações entre o espaço percorrido pelo móvel (que chamaremos s) o tempo empregado (que denominaremos t) e a velocidade constante (que chamaremos v). Tal equação é escrita como):

$$s = vt$$

(VAQUERO, 2003, p. 64.

Analisando, os os argumentos geométricos de Galileu são semelhantes aos de Oresme, expostos na seção anterior, ou seja, o móvel descreve espaços iguais em tempos iguais. Assim, teríamos a mesma representação gráfica:

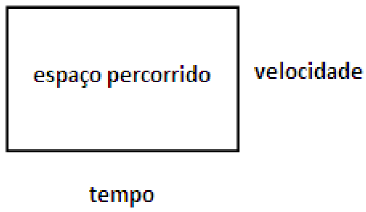


Figura 60 – Movimento Uniforme.

Disso, chega-se à conclusão de que a “velocidade cresce em proporção ao tempo” (VAQUERO, 2003, p. 64). E, assim: $v = at$, onde a é a aceleração - magnitude física ainda não conhecida por Galileu Portanto, nesse ponto, Galileu concordou com seus antecessores, uma vez que era bem mais simples de observar.

A segunda seção foi bem mais complexa do que a primeira. Nela discute o *movimento acelerado* (ou uniformemente acelerado). Nesse ponto, as discordâncias com seus antecessores, especialmente Aristóteles, foram bem maiores. Galileu apresentou sua definição reformulando a definição anteriormente proposta por Oresme e Aristóteles. Definiu: “movimento uniformemente acelerado é aquele que, partindo do repouso, adquire em tempos iguais momentos iguais de velocidade” (ARAÚJO, 2006, p. 56). No entanto, afirma que essa definição só seria verdadeira se:

> Os graus de velocidade alcançados por um mesmo móvel em planos diferentemente inclinados são iguais quando a altura desses planos também são iguais. (ARAÚJO, 2006, p. 56). [N.M – aqui introduz a demonstração geométrica usando planos inclinados conforme segue:]

Ele chama altura de um plano inclinado à perpendicular que, traçada do ponto superior desse plano, cai sobre a linha horizontal que é traçada pelo ponto inferior desse mesmo plano, cai sobre a linha horizontal que é traçada pelo ponto inferior desse mesmo plano inclinado; para melhor entendimento, seja a linha AB paralela ao horizonte, sobre a qual estão inclinados os dois planos CA e CD; a perpendicular CB que cai sobre a horizontal BA é chamada pelo autor de altura dos planos CA e CD.

Ele supõe que os graus de velocidade de um mesmo móvel que desce pelos planos inclinados CA e CD, adquiridos nos pontos finais A e D, são iguais, por ser a altura CB a mesma; e o mesmo é o grau de velocidade que alcançaria o mesmo móvel, se caísse do ponto C ao ponto B.

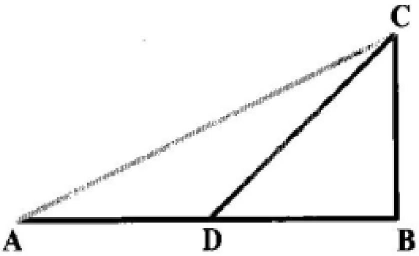
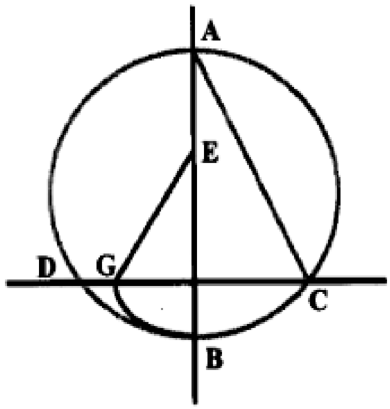


Figura 61 – Modelo Geométrico estabelecido por Galileu utilizando planos inclinados (conforme DUARTE, 2006, p.56).

Na sequência, Galileu apresenta novos argumentos geométricos, sem experimentá-los, com o propósito de aumentar o grau de confiabilidade do que acabara de afirmar, vejamos a figura 62:

N.M. segue demonstração . Imaginem que esta folha de papel é um muro vertical e que de um prego fixado nele pende uma bola de chumbo de uma ou duas onças, suspensa por um fio fino AB, com duas ou três braças de comprimento, perpendicular ao horizonte, e desenhem na parede uma linha horizontal DC que corte em ângulo reto a perpendicular AB, que estará separada de parede por aproximadamente dois dedos. Conduzindo posteriormente o fio AB com a bola até AC, soltem esta bola: num primeiro momento veremos que ela desce descrevendo o arco CBD e ultrapassa o ponto B tanto que, percorrendo o arco BD, chegará quase à paralela traçada CD, não chegando a tocá-la por um pequeno intervalo, o que é causado pela resistência que opõe o ar e o fio. Disto podemos perfeitamente concluir que o ímpeto adquirido pela bola no ponto B, ao transpor o arco CB, foi suficiente para elevá-la segundo um arco similar BD à mesma altura. Após efetuar e repetir muitas vezes esta experiência fixe no muro, próximo à perpendicular AB, por exemplo, em E um prego que sobressaia da parede cinco ou seis dedos, a fim de que o



fio AC, voltando a conduzir como antes a bola C pelo arco CB, encontre, quando chegar a B o prego E, sendo a bola obrigada a descrever a circunferência BG com centro em E. Constataremos assim o que pode fazer o mesmo ímpeto que, engendrado no ponto B, faz subir o móvel pelo arco BD até a altura da linha horizontal CD. Constataremos então com prazer que a bola chega até a linha horizontal no ponto G. Esta experiência não deixa lugar para duvidar da verdade da suposição; com efeito, sendo os dois arcos CB e DB iguais e simétricos, o momento adquirido durante a descida pelo arco CB é o mesmo que aquele adquirido pela descida segundo o arco DB; mas o momento adquirido em B segundo o arco CB é suficiente para erguer o mesmo móvel segundo o arco BD; portanto, também o momento adquirido durante a descida DB é igual àquele que ergue o móvel pelo mesmo arco de B até D. Assim, de modo geral, todo momento adquirido durante a descida por um arco é igual àquele que pode fazer subir o mesmo móvel pelo mesmo arco. Ora, todos os momentos que provocam uma subida através dos arcos BD e BG são iguais, visto que é produzido pelo mesmo momento adquirido durante a descida CB, como mostra a experiência; logo, todos os momentos que são adquiridos durante as descidas pelos arcos DB e GB são iguais.

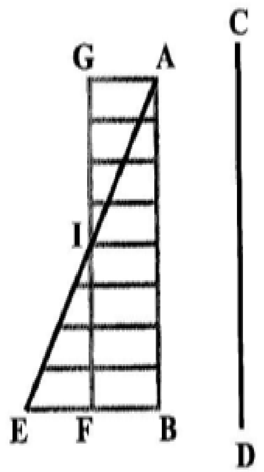
Figura 62. – Demonstração geométrica de Galileu (ARAÚJO, 2006, p. 57).

Para complementar seus raciocínios, Galileu ainda fez duas proposições, conforme segue:

Proposição I - O tempo no qual um determinado espaço é percorrido por um móvel que parte do repouso, com um movimento uniformemente acelerado é igual ao tempo no qual aquele mesmo espaço seria percorrido pelo mesmo móvel uniforme cujo grau de velocidade alcançado no movimento uniformemente acelerado. (ARAÚJO, 2006, p. 59).

O qual tem a seguinte demonstração geométrica:

Representemos por meio da linha AB o tempo durante o qual o móvel partido do repouso em C, percorrerá o espaço CD com um movimento uniformemente acelerado. Representemos o maior e último grau de velocidade adquirido durante o intervalo de tempo AB pela linha EB, formando um ângulo reto; traçada a linha AE, todas as linhas que partem de diferentes pontos de AB e são eqüidistantes e paralelas a BE representarão os graus crescentes de velocidade a partir do instante A.



Dividamos ao meio a linha BE no ponto F e tracemos FG paralela a BA e AG paralela a BF, formando assim o paralelogramo AGFB, igual ao triângulo AEB, visto que o lado GF divide ao meio o lado AE no ponto I. Se, por outro lado, prolongamos as linhas paralelas do triângulo AEB até IG, à soma de todas as paralelas contidas no quadrilátero será igual à soma das paralelas contidas no triângulo AEB, visto que as linhas paralelas do triângulo IEF são equivalentes às linhas contidas no triângulo GIA, e aquelas contidas no trapézio AIFB são comuns. Uma vez que cada um e todos os instantes do intervalo de tempo AB correspondem a cada um e a todos os pontos da linha AB, as linhas paralelas traçadas a partir desses pontos no interior do triângulo AEB representam os graus crescentes de velocidade, enquanto as paralelas contidas no paralelogramo representam os graus de velocidade que não crescem, mas se mantêm constantes; é evidente que a soma dos momentos de velocidade, no caso do movimento acelerado, é representado pelas paralelas crescentes do triângulo AEB, enquanto, no caso do movimento uniforme, é representada pelas paralelas iguais do paralelogramo AGFB. Com efeito, os momentos que faltam na primeira metade do movimento acelerado são compensados pelos momentos representados pelas paralelas do triângulo IEF. É, portanto, evidente que espaços iguais serão percorridos por tempos iguais por dois corpos, dos quais um partindo do repouso, se move com movimento uniformemente acelerado, enquanto outro que se move com velocidade uniforme, se desloca com um movimento que é igual à metade do momento máximo de velocidade atingido pelo primeiro; que é o que se queria demonstrar.

Figura 63 – Demonstração geométrica da Proposição I (ARAÚJO, 2006, p. 59-60).

> **Proposição II:** Se um móvel, partindo do repouso, cai com movimento uniformemente acelerado, os espaços por ele percorridos em qualquer tempo estão entre si na razão dupla dos tempos, a saber, como os quadrados dos mesmos tempos (ARAÚJO, 2006, p. 60).

Conforme demonstração geométrica:

Representemos o tempo que tem início no instante A por meio da linha reta AB, na qual tomamos dois intervalos quaisquer de tempo AD e AE. Seja a linha segundo a qual o móvel partindo do repouso em H, cairá com movimento uniformemente acelerado; seja HL o espaço percorrido durante o primeiro intervalo de tempo AD, e HM o espaço percorrido durante o intervalo de tempo AE. Afirmo que o espaço MH está para o espaço HL numa proporção dupla daquela que o tempo EA esta para o tempo AD; e podemos também afirmar que os espaços HM e HL têm a mesma proporção que os quadrados de EA e de AD. Tracemos a linha AC que forma um ângulo qualquer com a linha AB; e a partir dos pontos D e E tracemos as linhas paralelas DO e EP: se DO representa o grau máximo de velocidade adquirido no instante D do intervalo de tempo AD, PE representará, por definição a velocidade máxima obtida no instante E do intervalo de tempo AE.

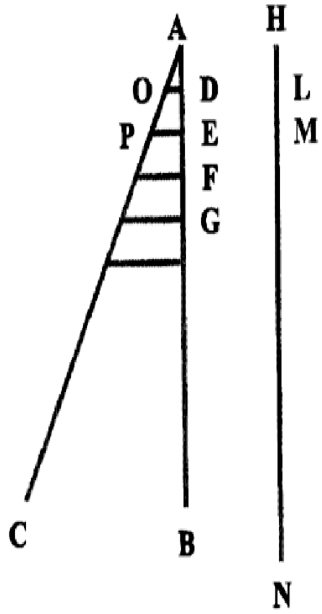


Figura 64– Demonstração geométrica da Proposição II (ARAÚJO, 2006, p. 60-61).

Desse modo, nas palavras de Vaquero:

> O grande mérito de Galileu se encontra em descobrir como varia o espaço percorrido por um móvel que tem este movimento em relação ao tempo que leva movendo-se [consegue isso – N.M] a partir da definição anterior e mediante seu formalismo geométrico de proporções. Assim, a *lei da proporção quadrática* ou *lei de queda*: os espaços percorridos em queda livre a partir do repouso são proporcionais aos quadrados dos tempos empregados em percorrê-los. (...) escrevemos normalmente como:

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

Ao realizar experimentos no plano inclinado para comprovar seus raciocínios, Galileu inaugura o que seria uma de suas características marcantes, comprovar por meio de experimentos reais e expressá-los por meio de modelos geométricos. Esse é um avanço em relação a seus antecessores. Se pensarmos no caso dos corpos em queda livre – cuja velocidade de queda é grande com uma aceleração de $9{,}8\ m/s^2$ – não conhecida à época de Galileu, ele não dispunha de instrumentos precisos de medida; assim, idealizou o plano inclinado e obteve resultados muito precisos.

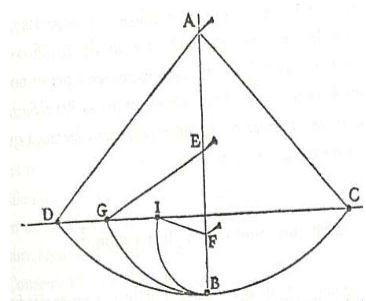


Figura 65.- Experiência do pêndulo de Galileu. De Galileu Galilei, *Discorsi e dimostrazioini matematiche [...]* Apud. DEBUS, 2002, p.109.

A terceira parte do movimento de Galileu recai sobre o lançamento de projéteis em que apresenta um de seus grandes resultados: "a trajetória de um projétil é parabólica" (Ibidem, p. 65). À época de Galileu essa era uma tarefa difícil, uma vez que, segundo Vaquero:

> Um canhão que lança projéteis era, no século XVI, um sistema modelo para estudar as ideias de Aristóteles sobre o movimento. Os engenheiros militares conheciam empiricamente que o lançamento de projéteis não parecia atender as ideias de Aristóteles. Algumas perguntas, por exemplo, não tinham contestação satisfatória. Como era possível que com um só instante de aplicação de uma força o projétil ascendesse durante uma parte de sua trajetória no ar? Porque os projéteis não pareciam cair com velocidade constante? (VAQUERO, 2003, p. 65).

Para entender melhor e responder a esses questionamentos, Galileu combinou os movimentos já tratados anteriormente e concluiu que *"um projétil se moverá combinando movimento horizontal uniforme e um vertical uniformemente acelerado*" (Ibidem, p.65). Hoje sabemos que essas duas equações são as seguintes:

> Se chamarmos x de alcance horizontal e y o alcance vertical, teremos
> $x = v_x t$ e $y = \frac{1}{2} g t^2$, onde v_x é a velocidade horizontal e g é chamada aceleração da gravidade. Se eliminarmos o tempo (desprezando t na primeira equação e introduzindo na segunda, por exemplo), obtemos a equação de uma parábola:
> $$y = \frac{g}{2v_x^2} x^2$$

Contudo, analisando matematicamente conforme Galileu tratou a situação à época, ou seja, ele não matematizou da forma mencionada anteriormente. Ele utilizou um pensamento matemático com base na geometria, na teoria das proporções – seguramente conhecia bem os *Elementos* de Euclides e já introduz um pensamento infinitesimal (no caso, movimentos instantâneos). Nesse ponto, utilizou métodos diferentes daqueles usados por Arquimedes (embora, como já disse, era um admirador das ideias deste). Se interpretarmos geometricamente o pensamento de Galileu, chegamos à figura 66:

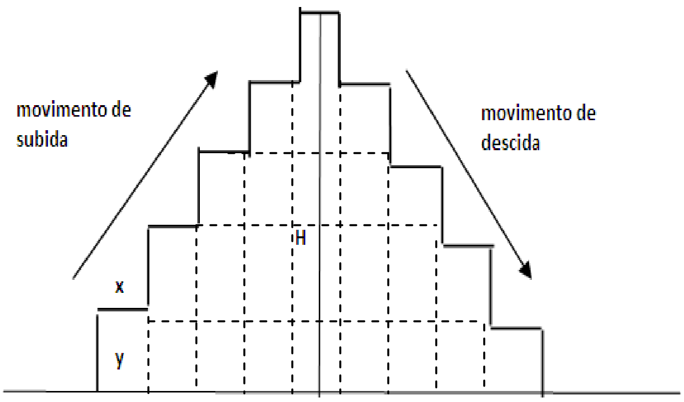


Figura 66 – Pensamento Geométrico de Galileu sobre lançamento de Projéteis [N.M].

Analisando o pensamento matemático de Galileu mais detalhadamente, veremos que ele não chegou exatamente às duas equações apresentadas anteriormente. Isso porque Galileu desconhecia g (a ação da gravidade) e não conseguiu modelar a equação de uma parábola. Embora tenha percebido que o movimento de um projétil não descrevia uma trajetória retilínea e nem era uniforme, como afirmara Aristóteles, mas executava um movimento (figura 67) na vertical – representado por y e, ao mesmo tempo, um movimento na horizontal – representado por x.

Após atingir a altura máxima H – movimento de subida, realizava o mesmo movimento na descida. Galileu sabia que esses movimentos aconteciam em instantes muito rápidos, ou seja, instantâneos. O que ele não conseguiu foi formular matematicamente esse pensamento – que é um pensamento infinitesimal. Assim, podemos reformular a figura 66 para a 67, a seguir:

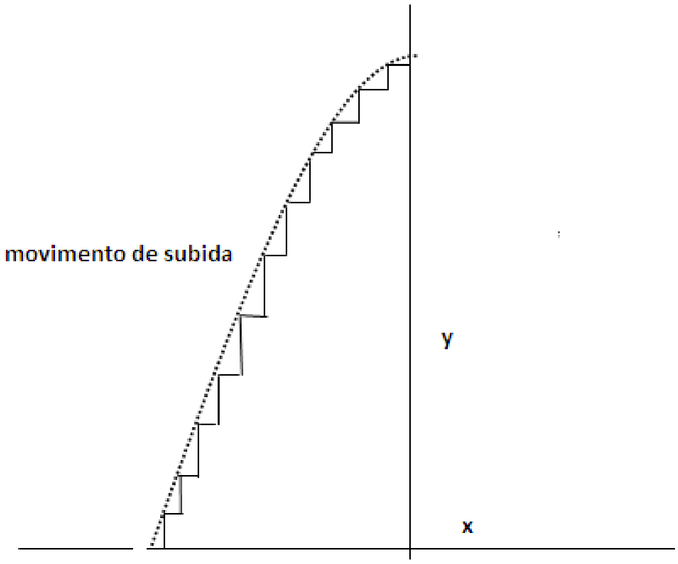


Figura 67. Pensamento Infinitesimal de Galileu [N.M].

Analisando essa figura, podemos considerar esses movimentos instantâneos imaginados por Galileu em que a projeção horizontal-x e a projeção vertical-y assumem valores cada vez menores, tão pequenos quanto pudermos imaginar. A figura 67 se aproxima mais e mais de uma curva parabólica (daí a equação quadrática). Hoje sabemos que, embora Galileu tenha chegado a essa conclusão, não conseguiu matematizá-la, faltou-lhe a ferramenta matemática. De um modo mais preciso, podemos tomar x e y tão pequenos quanto imaginarmos, ou seja, podemos tomar $x \to 0$ e $y \to 0$. Quando isso acontece, temos um conjunto infinito de pontos - lugar geométrico, que descreve uma curva parabólica.

Ainda podemos assinalar que esse tratamento geométrico de Galileu é semelhante ao tratamento dado por Arquimedes para calcular a quadratura da parábola. Todavia, devemos observar que, enquanto Galileu estava interessado em movimentos instantâneos ou velocidade instantânea (hoje derivada no ponto), Arquimedes queria calcular a área do segmento parabólico (hoje uma medida de integração), conforme descrito na seção 4.3. Portanto, em ambos os modelos gerados não conseguiram estabelecer a relação existente entre esses dois problemas. Permaneceu uma questão em aberto.

Finalizando, as ideias de Galileu influenciaram bastante Newton, uma vez que já continham formulações bem mais precisas sobre velocidade instantânea. Faltava um "pequeno passo" para um "grande salto" no pensamento matemático. Para isso, novas ferramentas matemáticas foram necessárias. Quais foram essas ferramentas? Isso é o que veremos na sequência.

6.3 A MATEMÁTICA DOS INFINITÉSIMOS... UM SALTO PARA O CÁLCULO

O conhecimento produzido nos séculos XV e XVI requereu dos matemáticos desse período se envolveram em uma variedade de problemas matemáticos voltados para as necessidades práticas: arte, mecânica, agrimensura, contabilidade, entre outros. Esse conhecimento, aos poucos, foi se ampliando. Para melhor atender às necessidades de uma ciência cada vez mais exigente, o estudo da matemática passou a ser fundamental. Como resultado disso, já nesse período, a produção do conhecimento matemático tomou três direções principais: a trigonometria caminhou até consolidar-se em um sistema completo; se simplificaram os métodos de cálculo aritmético – criação dos logaritmos; e, por último e mais importante, o próprio cálculo aritmético foi algebrizado[86] (BARON, 1985; WUSSING, 1998, p. 99).

Sem dúvida, com a introdução de métodos algébricos foi possível resolver muitos problemas que ainda se encontravam sem uma solução. A utilização de uma linguagem simbólica possibilitou apresentar soluções gerais aplicáveis a uma infinidade de problemas. Por exemplo, a solução das equações de terceiro e quarto grau. No entanto, para a consolidação do Cálculo Diferencial e Integral, proposto por Newton, dois avanços na matemática foram cruciais: o encontro da geometria com a álgebra e o estudo dos infinitésimos.

Para isso, segundo Baron (1985), problemas relacionados com o cálculo de áreas, volumes e a retificação de arcos (determinação da medida do comprimento de um arco) tomaram novos contornos e fascinaram os

---

[86] A álgebra simbólica tomou forma, sobretudo, com os trabalhos de Vieté (..) publicados pela primeira vez na obra *Arte Analítica* (Álgebra Nova) de 1635. O trabalho de Vieté influenciou Descartes e Fermat.

matemáticos italianos, franceses, ingleses e dos Países Baixos. Enquanto uns exaltavam os trabalhos de Arquimedes – ressaltando suas provas; outros se empenharam em resolver esses problemas utilizando novos métodos. Isso gerou um clima de intensa competição entre os matemáticos desse período.Entre os principais problemas amplamente discutidos e que, sem dúvida, foram fundamentais para o formato definitivo do Cálculo Diferencial e Integral, constam:

> 1. A integração (através da quadratura, cubatura e retificação de arcos);
> 2. À diferenciação (através dos métodos de tangentes relacionados com máximos e mínimos);
> *3.* O estabelecimento da *ligação entre integração e diferenciação* (através de retificação, cubatura, quadratura e tangente). (BARON, 1985, V.2, p. *3).*

Na sequência cronológica dos fatos, vou assinalar os mais significativos problemas e modelos tratados.

6.3.1 As retas e planos de Cavalieri

Bonaventtura Cavalieri (1598-1647), um aluno e associado de Galileu, trabalhou sobre problemas de áreas e volumes e transformou o uso da reta e da superfície desenvolvendo um método para comparar áreas e volumes. Esses trabalhos constam de dois livros: "*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Bolonha, 1635), e as *Exercitationes geometricae sex* (Bolonha, 1647)" (BARON, 1985, V.2, p. 12). Esses trabalhos foram amplamente difundidos pela comunidade científica europeia. Contudo, foram por uns criticados e por outros defendidos. Embora tenha introduzido métodos dos indivisíveis, Cavalieri considerou necessárias as demonstrações de Arquimedes.

O trabalho de Cavalieri consistiu em considerar:

> Que um plano era constituído de infinitas retas paralelas equidistantes, e um sólido de um número infinito de planos paralelos Uma reta (ou plano) chamada *regula* move-se paralelamente a si própria gerando intersecções (retas ou planos) em cada uma das figuras (plano ou sólido), até ela coincidir com suas bases. Estas interseções (segmentos de retas ou secções planas) constituem os elementos, ou indivisíveis, que compõem a totalidade das figuras. (BARON, 1985, V.2. p. 12).

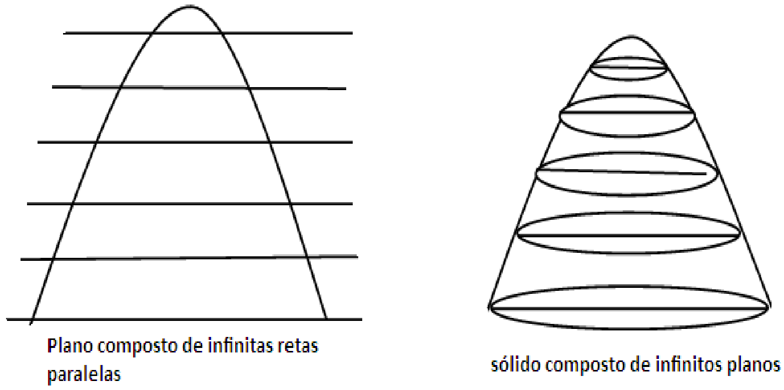


Figura 68 – Modelo geométrico de Cavalieri.

Em resumo, o pensamento de Cavalieri abria para a possibilidade de se calcular áreas e volumes (de regiões poligonais ou curvas) usando retas e planos, ou seja, uma área podia ser obtida traçando-se infinitas retas paralelas sobre o plano. Logo, a soma dessas infinitas retas daria o valor aproximado da área procurada. O mesmo valia para os sólidos, ou seja, um sólido é constituído de infinitos planos. A soma desses infinitos planos aproxima o volume do sólido Cavalieri provou seus resultados usando os métodos de *redução* (a soma de uma série geométrica, método semelhante ao de Arquimedes.no cálculo da quadratura da parábola).

Contudo, Cavalieri amplia os resultados de Arquimedes para curvas até o nono grau (x^9). Como sabemos, numa notação moderna, Arquimedes calculou a área do segmento parabólico $y = x^2$, compreendido entre a curva e o segmento de reta AB. Cavalieri, de modo análogo, resolve para $y = x^3$ e obtém o resultado conforme segue:

$$T_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^3,$$

$$S_n = \frac{1}{n}.\,0^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \text{ e}$$

$$T_n = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4}$$

Para a soma dos primeiros $n - cubos$ conheciam a fórmula:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

Para Cavalieri isto significou que:

$$T_n = \frac{\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2}{n^4} = \left[\frac{\frac{1}{n}(n+1)}{n^2}\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2$$

Então:

$$R = \lim_{n \to \infty} T_n = \frac{1}{4}$$

(TOEPLITZ, 1967, p. 52-53).

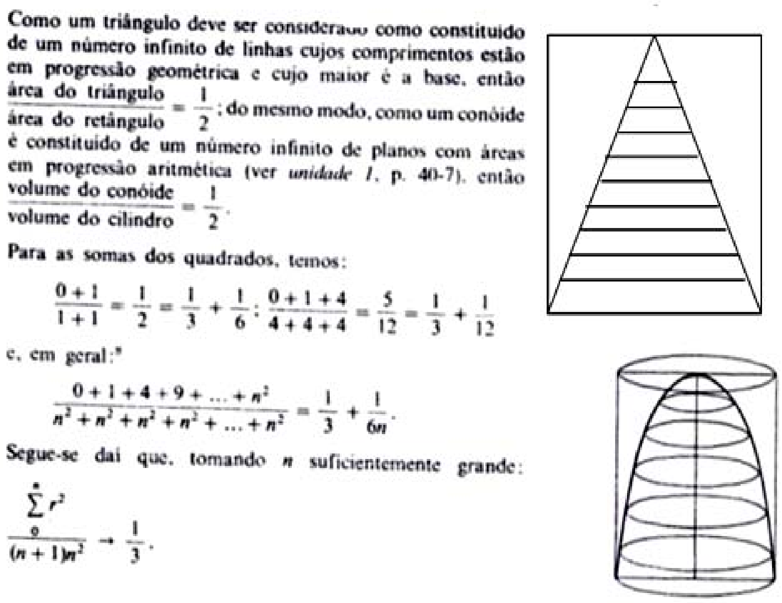
Analisando o resultado, vimos tratar-se de um número racional, como foram os resultados obtidos por Arquimedes e Hipócrates em relação à quadratura da parábola. No entanto, Cavalieri foi mais além. Ele fez para $y = x^4$ e encontrou $R = \frac{1}{5}$, para $y = x^5$, encontrou $R = \frac{1}{6}$ e continuou até $y = x^9$. Ele tentou fazer para $y = x^{10}$, esperando encontrar $R = \frac{1}{11}$, mas não conseguiu. Logo, estava provado para um k, com $k = 9$. Assim, estava posto um novo problema: e para valores de k maiores que 9? Uma questão que só foi respondida por Fermat, por volta de 1650.

De um modo imperceptível, o curso das descobertas havia tomado um novo rumo. Começou com a tentativa de medir áreas em geral e foi realizado para tipos muito especiais de áreas. Iniciando com os trabalhos de Eudoxo e Arquimedes, avançando para as curvas de Cavalieri. Nos trabalhos deste último, encontramos a transição do cálculo de área para a integral definida. Esses fatos estão expressos em dois lemas de Cavalieri, chamados *princípios de* Cavalieri[87] .

6.3.2 Os indivisíveis de Wallis

John Wallis (1616-1703) foi o representante inglês na discussão sobre métodos indivisíveis. Trabalhou extensamente sobre os trabalhos de Cavalieri, fez importantes anotações e apresentou novos problemas e novas soluções aos problemas de Cavalieri. Seu trabalho consta do livro *Arithmetica infinitorum* (1656). Vejamos os métodos de Wallis para o cálculo da área do triângulo e do conoide, conforme:

[87] Facilmente encontrados em livros modernos de Cálculo.



Como um triângulo deve ser considerado como constituído de um número infinito de linhas cujos comprimentos estão em progressão geométrica e cujo maior é a base, então $\dfrac{\text{área do triângulo}}{\text{área do retângulo}} = \dfrac{1}{2}$; do mesmo modo, como um conóide é constituído de um número infinito de planos com áreas em progressão aritmética (ver *unidade 1*, p. 40-7), então $\dfrac{\text{volume do conóide}}{\text{volume do cilindro}} = \dfrac{1}{2}$.

Para as somas dos quadrados, temos:

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6};\ \frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

e, em geral:[8]

$$\frac{0+1+4+9+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}.$$

Segue-se daí que, tomando n suficientemente grande:

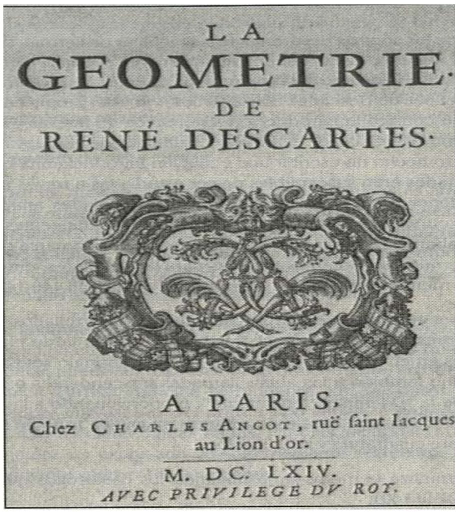
$$\frac{\sum_{0}^{n} r^2}{(n+1)n^2} \to \frac{1}{3}.$$

Figura 69 – Métodos de Wallis para o cálculo de áreas e volumes (BARON, 1985, V.2, p. 24).

Wallis empregou esses métodos em vários outros problemas envolvendo áreas e volumes, e procurou generalizar os resultados para potências inteiras e fracionárias até um grau p. Assim, a vantagem de Wallis sobre Cavalieri é que ele trabalhou sobre uma variedade maior de curvas e, portanto, obteve resultados mais amplos e mais simples do que os de Cavalieri. Foi mais um avanço nos métodos infinitesimais. Todavia, tanto Cavalieri como Walis só trabalharam sobre medidas de área e volume (métodos de integração). Ainda não fizeram qualquer associação com retificação de arcos (retas tangentes). Contudo, os trabalhos de Wallis serviram de fundamento para Newton quando começou a desenvolver seus próprios métodos até chegar ao Cálculo Diferencial e Integral.

6.4.O ENCONTRO DA GEOMETRIA COM A ÁLGEBRA NAS CONTRIBUIÇÕES DE FERMAT E DESCARTES

No início do século XVII, a teoria das cônicas ganhou um contorno definitivo. Na Antiguidade grega, elas tinham sido apenas um objeto ideal, puramente matemático. Com o desenvolvimento das ciências naturais e das forças produtivas, as cônicas passaram a ter uma “existência objetiva”. As elipses e as parábolas representam, respectivamente, as trajetórias do movimento dos corpos celestes, nas leis de Kepler, e da trajetória no lançamento de projéteis, cálculos sobre balística de Galileu. Assim, um problema tratado pelos matemáticos gregos tomou novos contornos em função do momento histórico marcado pelo franco desenvolvimento científico e tecnológico (WUSSING, 1998).


LA
GEOMETRIE.
DE
RENÉ DESCARTES.

A PARIS,
Chez CHARLES ANGOT, ruë saint Iacques
au Lion d'or.
M. DC. LXIV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Figura 70 Geometria de Descartes, Edição separada de *O Discurso do Método,* Paris, 1664 (conforme URBANEJA, 2008, p. 141.

Esse processo em estabelecer uma formatação definitiva para a teoria das cônicas deveu-se, sobretudo, aos trabalhos de Pierre de Fermat (1601-1665), outro grande nome da ciência ocidental. Fermat reconstruiu os livros V a VII das *cônicas de* Apolônio. Todavia, o grande mérito de Fermat, juntamente com René Descartes (1596-1650), foi por estabelecer os fundamentos da geometria analítica, “que se caracterizou pela fusão da álgebra e da Geometria” (WUSSING, 1998, p. 126). Os trabalhos foram produzidos na mesma época, mas publicados em épocas diferentes. Enquanto os de Descartes foram publicados em 1637, os de Fermat apenas depois da abertura de seu testamento, ou seja, após 1679. A seguir, descrevo e analiso o que de mais significativo resultou dos trabalhos desses dois grandes da ciência e que foram úteis ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

6.4.1 Descartes e o nascimento da Geometria Analítica

O trabalho matemático de Descartes surgiu de sua Filosofia Racionalista. Como todo estudioso do século XVII, a leitura dos clássicos gregos era obrigatória, “a fonte natural aonde todos iam beber”, num momento em que esses clássicos eram lidos com admiração, perplexidade e, sobretudo, com um novo olhar, o crítico. Descartes manifestou ser um desses críticos mais contundentes, uma vez que claramente expressou sua insatisfação com os métodos de descobrimento da Geometria grega. Isso fica claro em um trecho de sua obra *Regras para direção do espírito* (regra IV), conforme segue:

> Nas mais fáceis das ciências, a Aritmética e a Geometria vemos com toda clareza que os antigos geômetras tinham se servido de certa análise que estendiam à resolução de todos os problemas, se bem que a privaram à posteridade. E agora floresce certa classe de Aritmética que chamam de álgebra, para operar sobre os números o que os antigos faziam sobre as figuras (...) Quando pela primeira vez me dediquei à disciplina matemática, de imediato li por completo a maior parte do que frequentemente ensinam seus autores, e cultivei preferencialmente a Aritmética e a Geometria, porque as tinha como mais simples e um caminho para as demais. Porém não caiam em minhas mãos autores que me satisfizessem plenamente; lia coisas acerca dos números que não comprovava, fazendo cálculos, serem verdadeiros; e mesmo com respeito às figuras; (...). Porém porque isto era assim e como eram encontradas, não me parecia mostra, suficientemente, à mente, (...) Porém como depois pensasse porque acontecia que antigamente os primeiros criadores da Filosofia não quiseram admitir para o estudo da sabedoria quem não sabia a Matemática, (...) Tive a surpresa de que eles conheciam certa Matemática muito diferente da matemática vulgar de nosso tempo (...) E certamente me parece que vestígios desta verdadeira Matemática aparecem em Pappus e Diofanto, (...) E facilmente acreditaria que depois foi ocultada por certa audácia perniciosa pelos mesmos escritores; pois assim como é certo não ter muitos artistas com seus inventos, assim, eles temeram talvez, sendo tão fácil e simples, envelhecesse depois de divulgada; e para que os admirássemos preferiram apresentar em seu lugar, como produto de seus métodos, algumas verdades estéreis deduzidas com sutileza, em vez de nos ensinar os métodos mesmos que fizeram desaparecer por completo a admiração. Tem havido, finalmente, alguns homens de grande talento que estão se esforçando, neste século, em ressuscitá-la, uma vez que aquela arte não parece ser outra coisa, que com nome estrangeiro, chamam Álgebra, com tal podemos nos safar das múltiplas cifras e inexplicáveis figuras de que está carregada a fim de que não falte aquela a clareza e a facilidade que supomos ter na verdadeira Matemática. (R. IV. AT. X. 373-377 apud URBANEJA, 2008, p. 42-43)[88].

Como destaca Descartes na citação anterior, vimos renascer os métodos analíticos da geometria dos antigos gregos, agora revitalizados pelos instrumentos algébricos. Desse modo, com a álgebra se instaura uma nova tradição matemática, uma forma de pensar radicalmente diferente que é o pensamento algébrico. Conforme Urbaneja:

> A álgebra libera da necessidade de tratar casos particulares e exemplos concretos obtendo formulações gerais. O simbolismo literal propicia o tratar dos dados de um problema como parâmetros, e, daí sua generalidade, já que os parâmetros não permitem obter um resultado numérico concreto para as operações combinatórias que conduzem a resolução de uma equação, e sim uma solução simbólica que atrai a atenção sobre a estrutura da solução sob a estrutura da

[88] Livre tradução minha.

> equação. Desse modo, enquanto as soluções anteriores se aplicavam a cada caso concreto do problema, escravizando sua estrutura geométrica particular, a álgebra permite obter soluções gerais em função dos parâmetros. (URBANEJA, 2008, p. 45).

Nesse novo enfoque a atenção recaiu sobre as operações que conduziam às soluções, mais do que sobre as próprias soluções, ou seja, recaiu muito mais sobre o processo. A distinção entre parâmetros e variáveis ainda propiciou uma mudança de atitude frente aos problemas. Abriu caminho para se rediscutir desde a solução direta de um problema até a investigação teórica da estrutura da solução, introduzindo na matemática um mecanismo dotado de possibilidades de generalização que não possuíam os métodos clássicos.

Portanto, essa nova maneira de pensar matematicamente propiciou, no século XVII, uma reorientação metodológica, ou seja, tirou a atenção sobre a resolução de problemas particulares e mudou para a investigação de métodos gerais de solução, “elemento essencial do enfoque algoritmico que caracteriza o cálculo infinitesimal” (URBANEJA, 2008, p. 45). Na esteira desse novo enfoque, está figura de Descartes. Suas contribuições a essa nova matemática surgiu de sua filosofia racionalista. “Descartes se converteu assim em um lutador incansável em favor da aplicação consequente da simbologia matemática” (WUSSING, 1998, p. 127).

Assim, devemos a Descartes o uso de x e y como incógnitas. Ele também usou os símbolos + (mais) e – (menos) e a raiz quadrada ($\sqrt{}$). Por volta de 1637, aparece anonimamente, nos Países Baixos, a obra *Discurso do Método,* na qual Descartes apresenta os primeiros passos de seu método racionalista que, segundo ele, se aplicava a três áreas do conhecimento: a teoria das radiações, a teoria dos meteoros e dos fenômenos atmosféricos e a geometria. Nessa parte de o *Discurso* está o nascimento da geometria analítica. Mas em que consiste o método geométrico de Descartes?

Dada a representação geométrica, a seguir:

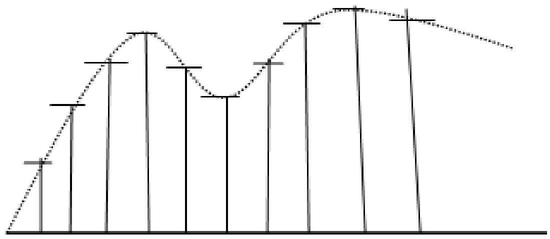


Figura 71 – Representação básica da Geometria de Descartes (WUSSING, 1998, p. 127).

Em seguida, a explicação literal:

> Um conjunto de linhas paralelas, não necessariamente equidistantes, corta sobre uma reta, não paralela às anteriores, segmentos medidos desde um ponto A (figura 5.4.16 N.M). Sobre cada paralela do conjunto se toma um segmento com um ponto extremo sobre a reta. Se de uma paralela a outra do conjunto existe uma relação não variável entre os segmentos medidos desde A e os segmentos sobre as paralelas, então a relação se diz se é uma equação da curva.

Descartes chamou os segmentos sobre a reta de *appliquées par ordre* (no latim *omnes ordinatim apllicatae* ou simplesmente *applicatae*). Assim, surgiram as palavras *applicate* e *ordinate* (hoje, abscissa e ordenada). Assim, estava estabelecido o prenúncio de um sistema de coordenadas que permitia marcar sobre um plano um ponto, uma curva e, mais importante, estabelecer a equação de uma curva a partir de um conjunto de pontos.

No início, o objetivo de Descartes com sua geometria era estabelecer uma base geométrica para a resolução de problemas algébricos. A partir dessa base teórica, distinguiu dois tipos de problemas:

> 1. *Problemas determinados*: em linguagem atual, isto significa a resolução de equações algébricas por meio de uma construção geométrica;
> 2. *Problemas Indeterminados:* hoje falamos da construção de lugares geométricos ou da equação de uma curva ou da dependência de variáveis. (WUUSING, 1998, p. 129).

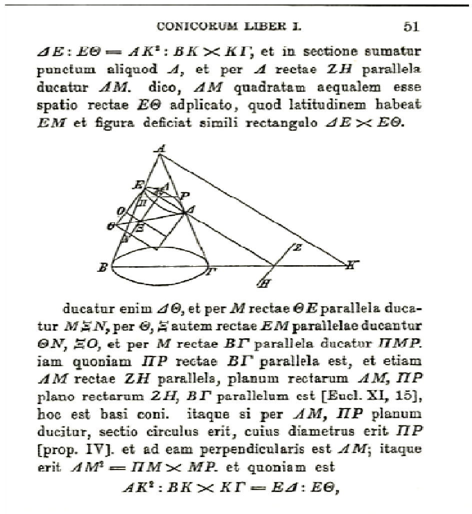
Além disso, a geometria de Descartes levou a uma terceira conclusão, separou as raízes de uma equação em soluções verdadeiras (raízes positivas) e falsas (raízes negativas) e, por último, formulou as seguintes regras (uma formulação inicial para a regra dos sinais):

> O total das raízes positivas de uma equação algébrica é igual, ou no máximo, igual ao número de mudança de sinal dos coeficientes. O número de raízes negativas é, no máximo, igual à mudança de sinal. (WUSSING, 1998, p. 129)[89].

Portanto, as contribuições de Descartes representaram mais um alicerce na construção do edifício matemático. Abriram para a possibilidade de se resolver problemas geométricos algebricamente e vice-versa, estabelecimento de um sistema de coordenadas e o nascimento da geometria analítica. Especialmente para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, veremos que Descartes e Fermat trabalharam com tangentes a curvas (retificação de arcos) e extremos. Este último, precursor do cálculo diferencial.

6.4.2 Fermat e seu trabalho com máximos e mínimos

Fermat deu um grande impulso no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral[90] quando desenvolveu seus métodos para trabalhar com tangentes a curvas, máximos e mínimos. Esse grande da ciência tinha uma forma peculiar de comunicar seus resultados, nunca os apresentava em forma escrita. Ele costumava enviar a seus contemporâneos, eruditos da ciência como ele, problemas para que resolvessem. Todavia, dizia possuir a solução dos mesmos, embora elas ficassem consigo ou as enviasse a alguns fiéis depositários. Isso fez com que a maioria dos seus trabalhos só fosse publicada após sua morte (URBANEJA, 2008)[91].



CONICORUM LIBER I. 51

$\Delta E : E\Theta = AK^2 : BK \times K\Gamma$, et in sectione sumatur punctum aliquod Λ, et per Λ rectae ZH parallela ducatur ΛM. dico, ΛM quadratam aequalem esse spatio rectae $E\Theta$ adplicato, quod latitudinem habeat EM et figura deficiat simili rectangulo $\Delta E \times E\Theta$.

ducatur enim $\Delta\Theta$, et per M rectae ΘE parallela ducatur $M\Xi N$, per Θ, Ξ autem rectae EM parallelae ducantur ΘN, ΞO, et per M rectae $B\Gamma$ parallela ducatur $\Pi M P$. iam quoniam ΠP rectae $B\Gamma$ parallela est, et etiam ΛM rectae ZH parallela, planum rectarum ΛM, ΠP plano rectarum ZH, $B\Gamma$ parallelum est [Eucl. XI, 15], hoc est basi coni. itaque si per ΛM, ΠP planum ducitur, sectio circulus erit, cuius diametrus erit ΠP [prop. IV]. et ad eam perpendicularis est ΛM; itaque erit $\Lambda M^2 = \Pi M \times MP$. et quoniam est

$$AK^2 : BK \times K\Gamma = E\Delta : E\Theta,$$

Figura 72 Fragmento da Proposição I.13 das Cônicas de Apolônio (conforme URBANEJA, 2008, p. 122).

---

[89] Tradução nossa. Segundo Wussing (1998), essas regras são válidas, porém só foram demonstradas em 1828 por Gauss.

[90] Sobretudo no Cálculo Diferencial.

[91] Um dos depositários dos trabalhos de Fermat foi o Padre Mersene, que foi seu amigo e professor. O Padre Mersene foi também o interlocutor entre Fermat e Descartes quando travaram uma das maiores polêmicas científicas. Descartes questionou os métodos geométricos de Fermat para calcular extremos e tangentes e tentou com veemência provar a invalidez dos métodos de Fermat. Todavia, toda a polêmica se

Desse modo, o interesse nesta tese recai sobre os problemas e modelos de Fermat sobre extremos e tangentes a curvas. Mas onde Fermat encontrou a base para desenvolver seus próprios métodos? Mais uma vez, a fonte primeira, norteadora de seu trabalho, estava na Antiguidade grega. os *Elementos* de Euclides, as Cônicas de Apolônio, as obras de Arquimedes, a *Aritmética* de Diofanto e a *Coleção Matemática* de Pappus foram algumas das fontes nas quais Fermat enriqueceu seu pensamento matemático. Além disso, como aluno da escola analítica de Vieté[92],também se baseou em seus trabalhos.

- Os métodos de Fermat sobre máximos e mínimos

Os métodos (Methodus) de Fermat chegaram até nós como as memórias de Fermat (ou *Oeuvres* de Fermat). Conforme já mencionei, ele nem sempre publicava seus resultados. Essas memórias, num total de cinco, têm como fonte primária de investigação as *Cônicas* de Apolônio, a *Aritmética* de Diofanto, a *Arte Analítica* de Viéte e a *Coleção Matemática* de Pappus. Em suma:

> Em o “*Methodus*”, Fermat oferece um algoritmo simples, um procedimento operativo para calcular máximos e mínimos que na história da matemática é conhecido como o “Método de Fermat para a obtenção de máximos e mínimos” (URBANEJA, 2008, p. 94).

De modo concreto, Fermat aplica seu método nos seguintes problemas ou “memórias” (URBANEJA, 2008, p. 94):

A. $ba - a^2$ de M1 (“Methodus”).
B. $ba^2 - a$ de M2.
C. $\frac{bz - ba + za - a^2}{ga - a^2}$ de M2.
D. $ba - 2a^2 + 2ca$ de M5.
E. $b^3 a + b^2 a^2 - ba^3 - a^4$ de M5

Em função da longa exposição contida nesses exemplos, me aterei apenas à parte mais próxima ao Cálculo Diferencial, conforme estudamos hoje.

---

tornou inócua, uma vez que ambos em seus trabalhos tinham como fundamento a teoria das equações de Vieté. Apenas diferenciavam no método e no estilo como expressavam suas ideias. No entanto, toda essa polêmica serviu para que Fermat se apressasse em publicar seus trabalhos sobre extremos e tangentes e, assim, não perder a validade de seus resultados (URBANEJA, 2008).

[92] Francçois Viète (1540-1603) foi o primeiro a estudar em profundidade as obras de Diofanto e Pappus após estas serem reintroduzidas na Europa Ocidental. Inspirado nessas obras, elabora sua *Arte Analítica*, onde aperfeiçoa o trabalho de Diofanto e dos árabes, e introduz o cálculo da álgebra simbólica mediante parâmetros que permitem obter a solução geral de equações mediante fórmulas que expressam as incógnitas em função dos parâmetros. O trabalho de Viète influencia Fermat e Descartes.

Assim, dos vários problemas propostos por Fermat, dois chamaram a atenção: o problema do cone e do cilindro inscritos em uma esfera, ou seja, o problema proposto foi: Qual a área máxima de um cone e de um cilindro que podem ser inscritos em uma esfera qualquer?

Reproduzindo o método de Fermat, teríamos: fazendo $a = x$ e a quantidade a maximizar ou minimizar $f(x)$, a regra do *"Methodus"* nos fornece (URBANEJA, 2008, p. 81):

4 e 5: $f(x+e) \cong f(x) \leftrightarrow f(x+e) - f(x) = 0$

6: $\frac{f(x+e)}{e} \cong \frac{f(x)}{e} \leftrightarrow \frac{f(x+e)-f(x)}{e} \cong 0$

7 e 8: $\left[\frac{f(x+e)}{e}\right]_{e=0} = \left[\frac{f(x)}{e}\right]_{e=0} \leftrightarrow \left[\frac{f(x+e)-f(x)}{e}\right]_{e==0} = 0$

Assim, interpretando o desenvolvimento de Fermat em termos atuais, diríamos que o valor de x para o qual a $f(x)$ assume um valor máximo é dado pela equação:

$$f'(x) = \lim_{e \to 0} \left[\frac{f(x+e) - f(x)}{e}\right] = 0$$

E, portanto, com essa interpretação Fermat se antecipou ao resultado introduzido por Cauchy em 1820 para a expressão da derivada:

$$f'(x) = \lim_{e \to 0} \left[\frac{f(x+e) - f(x)}{e}\right] = 0$$

Todavia, o "*Methodus*" de Fermat foi considerado por seus contemporâneos como um procedimento mecânico, desprovido de justificativa e fundamentação teórica, o que lhe rendeu muitas críticas. No entanto, a forma vaga e concisa com que Fermat se expressa em seu "Méthodus" é minimizada em função das inúmeras interpretações dadas ao método em termos do cálculo diferencial ou método de limites; nele está o prenuncio do cálculo de uma derivada que se iguala a zero. E, portanto, embora o método de Fermat carecesse de clareza e fundamentação teórica, uma vez que não se baseava em nenhum conceito de infinitesimais e, sim, em conceitos algébricos de quantidades finitas, derivados da teoria das equações de Viéte, muitos matemáticos franceses posteriores a ele o consideram como o inventor do Cálculo Diferencial.

Segundo Urbaneja (2008), das críticas ao “Méthodus”, as mais contundentes foram as de Descartes, gerando uma das maiores polêmicas das ciências. Face às críticas de Descartes, Fermat empenhou-se em mostrar com mais clareza a validade de seus métodos. Assim, entre os anos de 1626-29 empenhou-se em uma minuciosa “Investigação Analítica”, na qual fez uma revisão do “*Méthodus*”, e ainda apresentou novos resultados, dentre eles, o cálculo dos valores extremos para um segmento parabólico e “introdução aos lugares planos e sólidos”. Este último marca seus próprios desenvolvimentos em geometria analítica, trabalho elaborado com base na leitura de *Geometria* de Descartes.

Segundo Urbaneja (2008), o trabalho de Fermat sobre máximos e mínimos não passou despercebido na História da Matemática. Sendo considerado por muitos historiadores como, fato, inventor do cálculo diferencial, conforme expressam os comentários a seguir:

> O método para achar máximo e mínimo estabelecido por Fermat, expresso em linguagem moderna, consiste em calcular a função incremento, subtraindo-se a função, dividida pelo incremento da variável e eliminar todos os termos afetados pelo incremento da variável; a expressão resultante igualada a zero dá o valor da variável que torna máximo ou mínimo a função. (Em *História da matemática de* J.Rey Pastor e J. Barbini, p. 225-226, apud URBANEJA, 2008, p. 98).

Fermat não pensava em funções, mas em quantidades. Em outra transcrição:

> É importante assinalar que este método algoritmico é equivalente a calcular
>
> $$\lim_{e \to 0}\left[\frac{f(x+e)-f(x)}{e}\right]$$
>
> Todavia Fermat não conhecia o conceito de limite. Sem dúvida a mudança de variável de a para $a+e$, os valores próximos utilizados por Fermat constituem a essência da análise infinitesimal. (Em *História da Matemática* de J.P. Collete, tomo II, p. 29 apud URBANEJA, 2008, p. 99).

Porém, em nenhum momento Fermat se referiu a e como uma variável que tende a zero. Em mais uma citação, tem-se:

> Para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$ Fermat descobriu um método muito engenhoso para falar dos pontos em que a função toma um valor máximo ou mínimo. Fermat comparava o valor de $f(x)$

> em certo ponto com o valor $f(x+e)$ em um ponto próximo; em geral estes dois valores são claramente distintos, porém em um "cume" ou em um "fundo de um vale" de uma curva lisa, a diferença será quase imperceptível. Portanto, para saber os pontos que correspondem aos valores máximos e mínimos da função, Fermat iguala $f(x)$ a $f(x+e)$, levando em conta que estes valores, contudo, não são exatamente iguais, são "quase iguais". Quanto menor seja o intervalo entre os dois pontos, mais próxima estará dessa pseudo-igualdade de ser uma verdadeira equação; assim, Fermat, depois de dividir tudo por e, toma $e = 0$. O resultado lhe permite calcular as abscissas dos pontos máximos e mínimos da função polinomial. Aqui podemos ver já em essência o processo que agora chamamos de diferenciação, pois o método de Fermat é equivalente a calcular
>
> $$\lim_{e\to 0}\left[\frac{f(x+e)-f(x)}{e}\right]$$
>
> E igualar este limite a zero. Resultado completamente justo, portanto, devemos reconhecer a razão pela qual Laplace aclamou Fermat como o verdadeiro descobridor do cálculo diferencial. Obviamente Fermat não dispunha do conceito de limite, porém salvo isto, seu método para determinar máximos e mínimos seguiu um caminho completamente paralelo ao que podemos ver hoje nos livros de cálculo, exceto na mínima diferença de que hoje se utiliza o símbolo h ou x, em vez de e de Fermat para o incremento da variável. O procedimento de Fermat, que consiste em mudar ligeiramente o valor da variável para considerar valores próximos a um dado, tendo se constituído desde então a verdadeira essência da análise infinitesimal. (Em *História da Matemática* de C. B. Boyer, 1986 apud URBANEJA, 2008, p. 99-100).

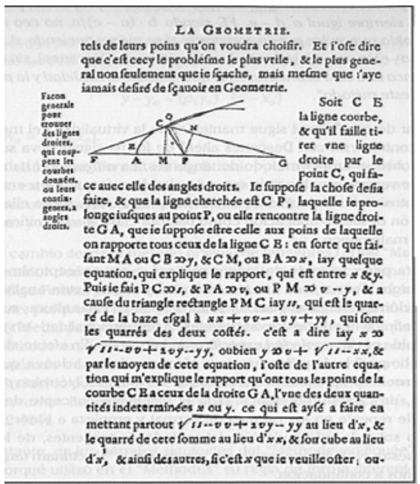
Ainda de acordo com Urbaneja (2008), Fermat elaborou seu "Méthodus" para calcular máximos e mínimos, com base na teoria das equações de Viète, melhorando o trabalho deste, conforme é mostrado passo a passo na "investigação analítica". Todavia, apesar do valor científico e apesar de se considerar Fermat como o legítimo descobridor do Cálculo Diferencial em seu "Méthodus", não devemos exagerar de forma anacrônica sobre o possível conteúdo infinitesimal nele contido, uma vez que, segundo Urbaneja:

> a) Fermat pensava em quantidades não em funções,
> b) (...) não concebia o incremento e como infinitesimal, nem sequer uma magnitude pequena; em mais de uma ocasião aplicou o método ao traçado de tangentes, lá toma e *ad libitum.*
> c) O método é puramente algébrico e não supõe em princípio nenhum conceito de limite. Para Fermat, o e não tende a zero, na realidade é igual a zero.
> d) (...)
> e) (...) não fazia nenhuma referência a que o método se deva somente a uma condição suficiente.
> f) (...) não distinguia entre extremos relativos e absolutos e não fazia referência à possibilidade de existir mais de um extremo.
> g) Na verdade, os problemas sobre máximos e mínimos de Fermat são problemas de construções geométricas mais do que otimização de quantidades [isto é, eram puramente matemáticos, não se aplicavam a problemas práticos sobre otimização N.M]. (2008, p. 105).

Com base nas citações apresentadas e nas considerações feitas por Urbaneja (2008) sobre os métodos de Fermat para calcular extremos, é possível afirmar que ele foi um precursor no Cálculo Diferencial. Contudo, seus métodos ainda não contemplaram o conceito de função (este ainda não havia sido formulado), nem tratou de grandezas infinitesimais (não tratou o incremento como limite). Todavia, além dos métodos para calcular valores extremos, Fermat também dedicou grande esforço na determinação de tangentes a curvas, o que se configurou como mais um passo no desenvolvimento do Cálculo Diferencial. É o que veremos na sequência a seguir.

6.4.3 Os métodos de Descartes e Fermat sobre retas tangentes

Os problemas que hoje facilmente resolvemos por processos de diferenciação foram inicialmente introduzidos por *construção de tangentes e problemas relacionados com máximos e mínimos*, conforme mostrado anteriormente. Vimos que os gregos foram os primeiros a introduzirem os métodos de tangentes, provando por *absurdo*, eles estabeleceram construções de tangentes a algumas curvas (círculo, parábola, elipse, hipérbole). Por exemplo, Arquimedes determinou a tangente à espiral (a qual ficou conhecida como espiral de Arquimedes). No século XVII, novamente problemas sobre tangentes despertaram o interesse dos matemáticos. Fermat e Descartes foram os que mais destaque deram ao problema (BARON, 1985).


LA GEOMETRIE.

tels de leurs poins qu'on voudra choiſir. Et i'oſe dire que c'eſt cecy le problèſme le plus vtile, & le plus general non ſeulement que ie ſçache, mais meſme que i'aye iamais deſiré de ſçauoir en Geometrie.

Façon generale pour trouuer des lignes droites, qui couppent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits.

Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie ſuppoſe la choſe deſia faite, & que la ligne cherchée eſt C P, laquelle ie prolonge iuſques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie ſuppoſe eſtre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E: en ſorte que faiſant M A ou C B ∞ y, & C M, ou B A ∞ x, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui eſt entre x & y. Puis ie fais P C ∞ s, & P A ∞ v, ou P M ∞ v − y, & a cauſe du triangle rectangle P M C iay ss, qui eſt le quarré de la baze eſgal à xx + vv − 2vy + yy, qui ſont les quarrés des deux coſtés. c'eſt a dire iay x ∞ $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien y ∞ v + $\sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oſte de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui eſt ayſé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete ſomme au lieu d'xx, & ſon cube au lieu d'x³, & ainſi des autres, ſi c'eſt x que ie veuille oſter; ou-

Figura 73 Página da edição de 1637 de *A Geometria* de Descartes – Traçado de retas normais a curvas – método do círculo (URBANEJA, 2008, p. 140).

Descartes apresentou seus resultados em 1637, no trabalho *A Geometria,* e Fermat realizou seus estudos paralelamente a Descartes, contudo foram publicados depois, em função das razões já explicitadas neste trabalho. Como esses dois matemáticos sempre estiveram envolvidos em introduzir métodos algébricos na geometria, os métodos de tangentes também foram expressos em notação algébrica. Assim, Descartes utilizava constantemente últimas letras do alfabeto ($x, y, z, \ldots, etc.$) para designar as distâncias de um ponto a um conjunto de retas[93],

Inicialmente, embora conhecesse os trabalhos com indivisíveis de Cavalieri, ele os distinguiu em dois tipos: "*métodos precisos*" e "*aproximações*" em matemática, uma vez que, para ele, método preciso era o algébrico, enquanto os indivisíveis se constituíam em aproximações. Com base nisso, Descartes desenvolveu um método para calcular a normal a uma curva a um ponto dado, no qual evitou o uso de quantidades infinitesimais, ao mesmo tempo forneceu um método exato para a construção *da tangente a uma curva*. A seguir, o método de Descartes (BARON, 1985, V.2, p. 33).

> Seja CE uma certa curva e de C tracemos uma reta fazendo um ângulo reto com CE. Suponhamos também que a reta CP intercepte a reta GA cujos pontos serão relacionados com os de CE. Então $MA\ [= CB] = y$; e $CM\,[= BA] = x$. Devemos encontrar uma equação relacionando x e y. Faço $PC = s$, $PA = v$, logo $PM = v - y$. Como PMC é um triângulo retângulo, vemos que s^2, o quadrado da hipotenusa é igual a $x^2 + v^2 - 2vy + y^2$, a soma dos quadrados dos catetos. Isto significa que $x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ ou $y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$. Por meio destas duas últimas equações, posso eliminar uma das duas quantidades x e y da equação que relacionou os pontos da curva CE e os da reta GA. Se queremos eliminar x não há problema, pois podemos trocá-lo, onde aparece, por $\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$, x^2 pelo quadrado desta expressão, x^3, pelo cubo, etc. Se queremos eliminar y, basta trocá-lo, onde aparece, por $v + \sqrt{s^2 - x^2}$, e $y^2, y^3, \ldots$ pelo quadrado, cubo, etc., desta expressão. O resultado será uma equação com apenas uma quantidade desconhecida, x ou y [a seguir representação geométrica do método de Descartes-N. M]

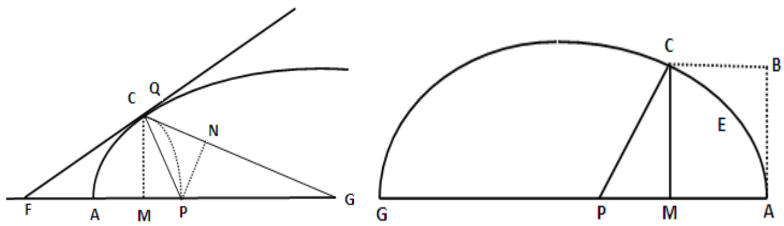


Figura 74 - Método das tangentes de Descartes

Descartes, em seguida, propõe alguns exemplos para mostrar como seu modelo funciona na prática, vejam o exemplo aplicado à parábola $x^2 = ky$.

[93] Se bem que ainda não utilizou esses símbolos conforme fazemos hoje, ou seja, x como abscissa e y como ordenada e os eixos não eram perpendiculares.

Tomemos a parábola $x^2 = ky$, onde $AM = y$ e $CM = x$ (na figura, a seguir, x é a ordenada e y é a abscissa):

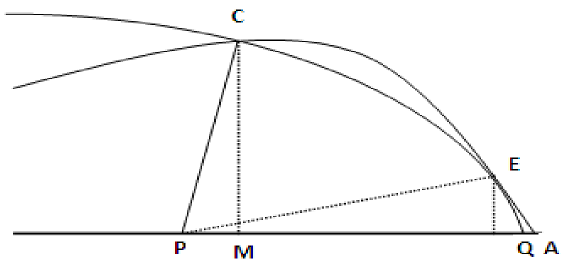


Figura 75 - Método de Descartes aplicado à parábola.

Na sequência apresentada a seguir, mostro como Descartes explica em detalhes seu método:

Depois de determinarmos uma tal equação, ela deve ser usada não para determinar x, y ou z, pois estes já são conhecidos uma vez que C é dado, mas para encontrar v ou s, com os quais determinaremos o ponto P desejado. Com isto em mente, observe que se o ponto P preenche as condições exigidas, o círculo centrado em P, passando por C, tocará mas não cruzará a curva CE; mas se este ponto P estiver mais perto ou mais longe de A, do que deve, este círculo cruzará a curva não somente em C, mas também em outro ponto. Agora, se o círculo cruza CE, a equação envolvendo x ou y como quantidades desconhecidas (supondo PA e PC conhecidos) deve possuir raízes distintas. Suponhamos, por exemplo, que o círculo cruze a curva nos pontos C e E. Trace EQ paralelo a CM. Então x e y podem ser usados para representar EQ e QA respectivamente, do mesmo modo que eles foram usados para representar CM e MA, como PE é igual a PC (pois são raios do mesmo círculo), se queremos EQ e QA (supondo PE e PA dados) deveremos obter a mesma equação que deveríamos obter ao procurarmos CM e MA (supondo PC e PA dados). Segue-se que o valor de x, ou y, ou qualquer outra quantidade dessas será duplo nesta equação, isto é, a equação possuirá duas raízes distintas. Se desejarmos o valor de x, uma das raízes será CM e a outra EQ; por outro lado, se quisermos y, uma raiz será MA e a outra QA. É verdade que se E não estiver do mesmo lado da curva que C, apenas uma destas será uma raiz verdadeira, a outra sendo traçada na direção oposta, ou menor do que zero. Quanto mais próximos forem tomados os pontos C e E, menor será a diferença entre as raízes; e quando os pontos coincidem, as raízes são exatamente iguais, isto quer dizer, o círculo que passa por C tocará a curva CE no ponto C sem cruzá-la.

Além disso, observe que quando uma equação tem duas raízes iguais, o seu membro esquerdo deve ter uma forma semelhante à expressão obtida por multiplicação da diferença entre a quantidade desconhecida e uma quantidade conhecida igual a ela; e assim, se a expressão resultante não for de grau tão alto como o da equação original, multiplicamo-la por outra expressão que a tornará do mesmo grau. Este último passo torna as expressões correspondentes termo a termo.

Figura 76 - Demonstração analítica do método de Descartes (conforme BARON, 1985, V.2, p. 34)

De acordo com Baron (1985, V.2, pp. 34-35), nesse problema,

> 1. Descartes usa x e y [...] para representar as variáveis no sentido geral.
> 2. O problema é determinar a *subnormal*, $MP = v - y$(ver figura).

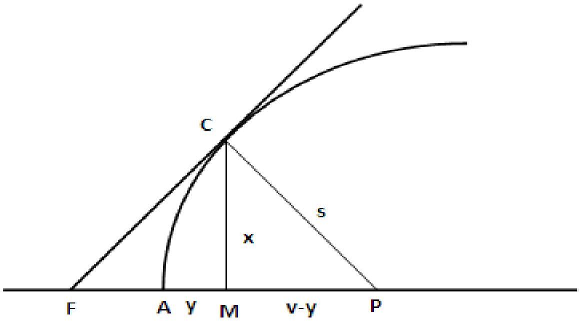


Figura 77 – Método geométrico tangente de Descartes

3. P é o centro de um círculo que toca a curva em C, e CP é o raio do círculo. Este círculo toca a curva e a tangente em C.
4. Se P não é o centro de um círculo que toca a curva em C, qualquer círculo que desenhemos, de centro P, cortará a curva em dois pontos distintos; logo as raízes de nossa equação quadrática em *y* serão distintas. Se CP é a *normal,* as raízes serão iguais.
5. Para Descartes, raízes "verdadeiras" eram raízes positivas, enquanto raízes "falsas" eram raízes negativas (...) [ver figura a seguir].

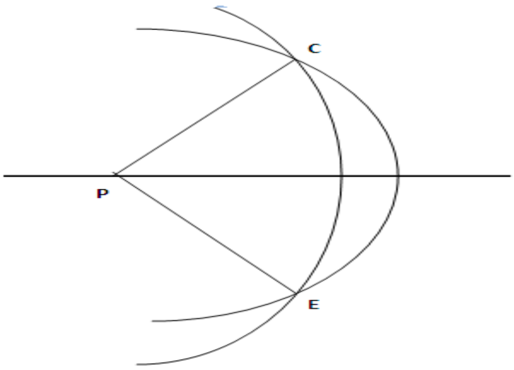


Figura 78 – Continuação método das tangentes de Descartes.

6 A *forma* de uma equação com duas raízes iguais é dada por $(y-e)^2 = 0$, ou, se o grau da equação for maior do que o segundo grau, por $(y-e)^2 p(x) = 0$, onde $p(x)$ é um polinômio em x

Assim, no exemplo, temos;

$$y^2 = y(k-2v) + (v^2 - s^2) = 0$$

No geral essa equação tem duas raízes distintas, isto é, existem dois valores y para s escolhido arbitrariamente. Se CP é a $normal$, então o círculo, centrado em, toca a curva em C, logo a equação tem duas raízes iguais. Comparando nossa equação com:

$$y^2 - 2ye + e^2 = 0,\ y = e,$$

Temos:

$$k - 2v = -2e = -2y,\ v - y = \frac{k}{2}$$

Donde segue que:

$$\frac{k}{2x} = \frac{x}{FM} \text{ e } FM = \frac{2x^2}{k} = 2y,\ FA = y$$

Portanto, do trabalho de Descartes em relação às tangentes é possível tecer as seguintes análises:

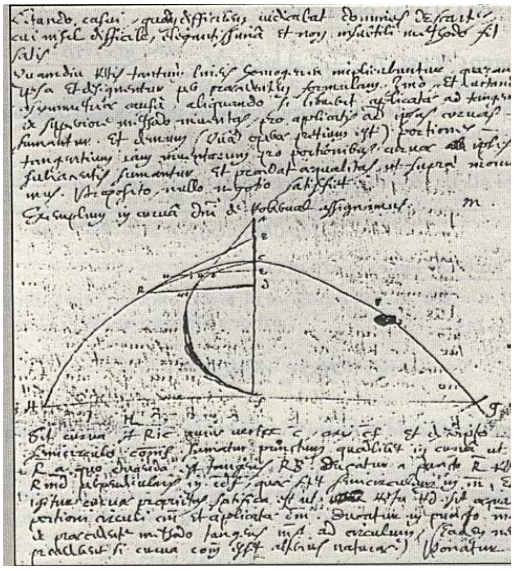


Figura 79 - Manuscrito de Fermat *"Doctrinam Tangentium"* de 1640 (URBANEJA, 2008, p. 152).

- È um método mais aperfeiçoado do cálculo da equação da tangente, uma vez que ao introduzir um círculo tocando a curva em um ponto C esclareceu melhor o significado de normal a uma curva.
- Definiu reta tangente como perpendicular à normal no ponto C (chamou de subnormal).
- Utilizou uma abordagem algébrica, o que, de certo modo, dificulta sua aplicação em casos mais complexos.
- E, o mais importante, Descartes apresenta uma nova abordagem ao Cálculo Diferencial, sem o uso de infinitesimais.

Passo agora aos métodos de tangentes de Fermat.

Fermat utiliza a segunda parte de seu "Méthodus" para traçar a tangente a uma parábola em um ponto. É sua primeira apresentação sobre tangentes. Com as palavras a seguir, ele apresenta seu método:

> trazemos do método anterior a invenção das tangentes em certos pontos de curvas quaisquer (apud URBANEJA, 2008, p.109).

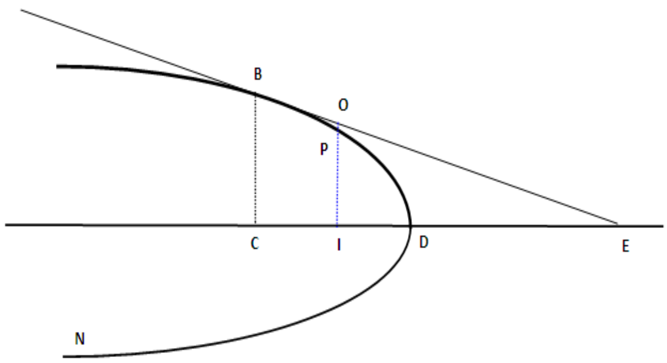


Figura 80 Tangente à parábola (URBANEJA, 2008, p. 109).

Em seguida, Fermat considera a parábola BDN (conforme figura 80) com vértice em D e diâmetro DC e traça uma tangente à parábola no ponto B que intercepta o eixo no ponto E. E, continua (URBANEJA, 2008, p. 110):

> *Se si toma sobre a reta BE um ponto qualquer O, dele se traça a reta OI, ao mesmo tempo em que se traça a ordenada BC desde o ponto B, se terá: $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, uma vez que o ponto O é exterior à parábola (...)*

Segundo Urbaneja (2008), nesse trecho de Fermat é possível detectar dois elementos significativos, o primeiro é "o ponto O sobre a reta pode ser qualquer". Tal afirmação contradiz, como já aconteceu, com máximos e mínimos vistos anteriormente, com as interpretações das construções de Fermat em termos de limites; segundo, "Fermat aplica implicitamente neste parágrafo a propriedade da geração das cônicas de Apolônio em forma de proporção".

> Seguindo Fermat, escolhamos no segmento tangente BE um ponto O qualquer e tracemos a ordenada OI, assim como a BC.
> Da propriedade da parábola teremos, segundo Apolônio (*Cônicas,* I.11):
> $$\frac{BC^2}{PI^2} = CD/DI,$$
> Ainda, $OI > PI$, portanto, se verifica:
> $$\frac{CD}{DI} > BC^2/OI^2$$
> Agora, da semelhança de triângulos retângulos BCE e OIE (*Elementos*, VI. 4), se tem:
> $$BC/OI = CE/IE$$
> Das duas últimas relações deduzimos finalmente:
> $$\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$$
> Fazemos $CD = d$, $CI = e$. Temos que determinar o segmento subtangente, $CE = a$
> A partir da última desigualdade, se tem:
> $$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}$$
> De onde resulta:
> $$d.(a-e)^2 > a^2.(d-e)$$
> E daqui:
> $$da^2 - 2dae + de^2 > da^2 - a^2e$$
> E manifesta:
> *"Adigualemos*[94] *segundo o método precedente; eliminando-se os termos comuns: $de^2 - 2dae \cong -a^2e$",*

[94] O termo *Adigualdade* - expressão introduzida por Fermat para igualar as duas expressões da esquerda às duas equações correlativas derivadas da equação que expressa o problema geral. A *Adigualdade* foi interpretada como um obstáculo conceitual introduzido deliberadamente por Fermat para disfarçar seu método.

Fermat continua transpondo termos e dividindo por e:

$$de + a^2 \cong 2da$$

Todavia, ignora o termo que contém e e obtém:

$$a^2 = 2da,$$

Donde obtém finalmente:

$$a = 2d$$

Fermat comenta o resultado:

"Temos provado desta forma que CE é o dobro de CD, o que é verdade",

E termina dizendo:

"Este método nuca falha e pode ser aplicado a um grande número de questões muito charmosas, com ele encontrei os centros de gravidade de figuras limitadas por linhas retas e curvas, assim como de sólidos e outras numerosas coisas que poderemos tratar em outra parte se eu tiver tempo para isso". (URBANEJA, 2008, p. 110-11).

Aplicando os resultados de Fermat numa linguagem atual, obteríamos a equação da tangente à parábola $y^2 = 2px$. Vejamos então como fica:

Seja m a reta tangente pedida no ponto B de coordenadas $B = (x_0, y_0)$, se obtém:

$$m = \frac{BC}{EC} = y_0 / 2x_0$$

De onde para a equação da tangente à parábola em B:

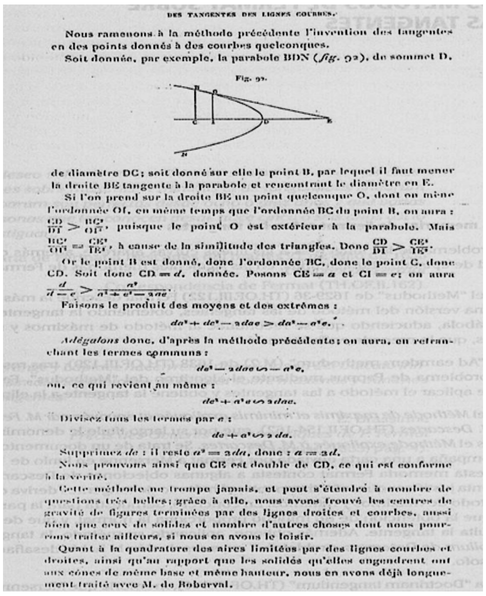
$$y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}.(x - x_0)$$

Ao fazer as operações resulta:

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

Equação habitual da parábola. (URBANEJA, 2008, p. 112).

Fermat resolveu o problema também para a equação da tangente à elipse. E reafirmou que seus métodos eram válidos para muitas outras curvas algébricas. Portanto, assim, como o ocorrido com o cálculo de extremos de curvas, os métodos para tangente vêm reforçar que a linguagem utilizada por Fermat condiz com a que hoje empregamos para o Cálculo Diferencial, salvo as devidas considerações já feitas anteriormente. Assim, ele merece o título como um dos inventores do Cálculo Diferencial, uma vez que foi o que mais se


DES TANGENTES DES LIGNES COURBES.

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN (*fig.* 92), de sommet D,

Fig. 92.

de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, on aura : $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, puisque le point O est extérieur à la parabole. Mais $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$, à cause de la similitude des triangles. Donc $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$.

Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD. Soit donc CD $= d$, donnée. Posons CE $= a$ et CI $= e$; on aura $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}$.

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Adégalons donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \backsim - a^2e,$$

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \backsim 2dae.$$

Divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \backsim 2da.$$

Supprimez de : il reste $a^2 = 2da$, donc : $a = 2d$.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité.

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs, si nous en avons le loisir.

Quant à la quadrature des aires limitées par des lignes courbes et droites, ainsi qu'au rapport que les solides qu'elles engendrent ont aux cônes de même base et même hauteur, nous en avons déjà longuement traité avec M. de Roberval.

Figura 81 Tangente à parábola em Oueuvres de Fermat (TH. OF.III 122-123, URBANEJA, 2008, p. 108).

aproximou das definições atuais e, sem dúvida, seu trabalho influenciou os matemáticos posteriores a ele.

Devo ressaltar ainda que a tradição matemática iniciada com Fermat e Descartes, afastando-a das questões práticas e tornando-a um objeto de estudo próprio, os aproximou novamente dos antigos gregos, uma vez que devemos atentar para o fato de que os problemas por eles abordados foram trazidos da tradição grega antiga que os gregos estudavam os entes matemáticos apenas movidos pelo desejo do saber. Além disso, aperfeiçoaram os métodos geométricos dos gregos introduzindo a linguagem simbólica por meio da álgebra. Porém, embora tenham conseguido avanços consideráveis em relação ao desenvolvimento do cálculo, seus esforços se limitaram ao Cálculo Diferencial; os problemas sobre quadraturas e cubaturas, utilizados para calcular áreas e volumes foram esquecidos.

Todavia, até a metade do século XVII, muitos outros matemáticos se dedicaram à tarefa de continuar os estudos sobre quadraturas e cubaturas, na forma como conduzidos por Cavalieri e Wallis, e avançaram bastante até estabelecerem os métodos de integração. De modo geral, problemas da forma $y = (fx)$, onde $f(x)$ denota um polinômio em x não mais representavam um desafio. Contudo, problemas sobre *retificação de arcos*, ou seja, *a determinação do comprimento de arcos,* permaneceu como um dos problemas mais complexos que os matemáticos tiveram pela frente. Embora tenham realizado inúmeras tentativas, esse problema só foi completamente resolvido por Newton.

6.5 - O TRABALHO DE NEWTON: PROBLEMAS INSPIRADORES QUE O LEVARAM AO DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO

Atribui-se ao Sr. Isaac Newton (1642-1727) ter sido um dos inventores[95] do Cálculo Diferencial e Integral. Essa afirmação encontra eco na seguinte afirmação de Struik:

---

[95] O outro inventor do Cálculo é Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) que, paralelamente a Newton, desenvolveu seus métodos de diferenciação e integração e chegou aos mesmos resultados de Newton, inclusive com o mérito de apresentá-los com uma simbologia conforme usamos hoje. A opção pelos trabalhos de Newton é em função dos objetivos desta tese, uma vez que Newton tinha interesse no

> Um método geral de diferenciação e integração, derivado da compreensão de que um é inverso do outro, somente pode ser descoberto por homens que dominaram o método geométrico dos gregos e de Cavalieri, assim, como os métodos algébricos de Descartes e Wallis (bem como de Fermat – N.M). Estes homens só poderiam ter aparecido depois de 1660. (STRUIK, 1989, p. 177).

Um desses homens ao qual Struik (1989) se refere é Newton. Ele conseguiu perceber a relação entre integração e derivação como sendo uma inversa da outra. Sobre isso é que recai meu interesse agora. Mas antes vou apresentar mais detalhes sobre esse gênio da ciência.

No ano de 1687, Newton publicou sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural),* que marca o início da Ciência Moderna. Nessa obra, ele apresenta os princípios de uma nova ciência fundamentada em princípios matemáticos bem elaborados que iriam revolucionar o pensamento científico da época. Por isso mesmo, os historiadores da ciência consideram 1687 um ano marco para o desenvolvimento da Ciência Moderna.

Newton se apoiou em muitas ideias, sobretudo nas de Galileu e Kepler. Isso em função de, segundo Baron, dois conceitos importantes ganharem força no século XVII:

> - a ideia de que os corpos celestes pudessem estar sujeitos às mesmas leis dos corpos terrestres;
> - a ideia de que essas leis pudessem ser melhor compreendidas mediante a matemática. (1987, V. 3, p. 6).

Cálculo Diferencial e Integral como uma ferramenta para seus estudos dos fenos. Enquanto, Leibinz demonstrou mais interesse no pensamento puramente matemático, próximo ao de Descartes e Fermat. Como nesta pesquisa estou interessada também em problemas externos à Matemática que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, isso condiz mais com o pensamento adotado por Newton, que utilizou a Matemática como uma ferramenta para explicar os fenômenos físicos. Não pretendo nesta pesquisa entrar em qualquer polêmica sobre o desenvolvimento do Cálculo. Maiores detalhes sobre isso pode ser encontrado em (BARDI, J. S “A Guerra do Cálculo”. Tradução Aluizio Pestana da Costa, Record, 2008) de. A posição mais aceita hoje pela comunidade científica é que os dois chegaram aos mesmos resultados, na mesma época, contudo, adotaram linguagens diferentes. Portanto, reafirmo que o objeto desta pesquisa é (re)construir o desenvolvimento do Cálculo sob o ponto de vista dos modelos matemáticos e dos problemas geradores que contribuíram para esse desenvolvimento.

Ainda segundo Baron, antes da publicação do Principia, Newton já tinha produzido diversos outros trabalhos trazendo ensaios sobre o cálculo. Muitos desses trabalhos ficaram perdidos por quase meio século. Assim, o esforço de Newton foi trabalhar sobre as ideias de outros cientistas sobre essas questões anteriormente citadas e, a partir do seu contato com essas ideias, avançar no sentido de ampliar sua visão, conduzindo-o às suas próprias pesquisas e culminado com suas descobertas ímpares no campo da física e da matemática. Nas palavras de Baron, "os esforços de Newton no campo da matemática e das ciências foram herculanos e devemos ter em mente que a sua maior obra foi sem dúvida a magistral exposição do *Sistema de Mundo,* dada no *Principia"* (Ibidem, p. 7).

Para Baron é evidente que Newton teve acesso aos estudos matemáticos de Wallis e Descartes, no campo da Aritmética e Geometria, respectivamente. A partir de estudos sistemáticos das obras desses dois eminentes cientistas, fez inestimáveis contribuições com comentários e produzindo material suplementar. O que leva a historiadora a afirmar que Newton foi um autodidata em relação aos estudos das ciências em geral, em particular da matemática. Se fôssemos questionar em relação às anotações de Newton sobre quais temas deveriam merecer destaque para dar um tratamento quantitativo da natureza e da dedução das leis universais, deveríamos ter como resposta os seguintes itens:

> 1. Antes do séc. XVI os cientistas se concentravam com a discussão do porquê da ocorrência dos fenômenos. Entretanto, a nova linha de pensamento foi procurar fórmulas matemáticas que descrevessem o comportamento da natureza. Esse pensamento rejeitava a necessidade de deuses, demônios, etc. a fim de poder explicar os fenômenos.
>
> 2. Toda ciência moderna depende desse conhecimento quantitativo. O fundador desse pensamento foi Galileu, que rejeitou os métodos de Aristóteles e de Arquimedes.
>
> 3. Galileu isolou e mediu as propriedades mais fundamentais que apareciam como variáveis nas fórmulas. Aquelas características que ele escolheu – espaço, tempo, peso, etc. – não foram sempre as mais óbvias ou as mais facilmente mensuráveis.
>
> 4. Galileu esperava achar leis fundamentais que formassem o fundamento para a ciência. Isso ele fez e essas leis fundamentais incluíam certas leis do movimento. Mas devemos salientar que, embora ele estivesse interessado e fosse um vivo observador dos

> céus, suas leis de movimento foram apenas aplicáveis perto da superfície da terra.
> 5. Foi deixado a Newton deduzir as três leis de Kepler sobre o movimento planetário, a partir da lei universal da gravitação.
>
> (BARON, p. 9, v. 3).

Além de seu interesse incomum pela ciência do movimento, os estudos de Newton incluem muitas outras áreas de interesse De acordo com Baron, é sabido que fez investigações significativas sobre a teoria da luz, se ocupou durante muito tempo em transformar metais comuns em ouro. O interesse pelo cálculo veio como uma necessidade para explicar matematicamente os fenômenos observados. Portanto, há provas de que Newton fez estudos sistemáticos de temas relacionados à matemática de eminentes matemáticos da época e antecessores a ele. Teve acesso diretamente às obras desses autores. Sobre elas fez comentários cujas anotações foram deixadas em seus cadernos. A respeito disso, vejamos o que diz D. T. Whiteside, pesquisador e publicista dos trabalhos de Newton, citado por Baron:

> Um matemático precisa de uma notação adequada, um conhecimento competente sobre a estrutura matemática e a natureza da demonstração axiomática. Ele precisa estar bastante versado no núcleo sólido da matemática existente e precisa de certo sentido que lhe possibilite prever as linhas do avanço futuro. De maneira geral, Newton tomou seu simbolismo aritmético de Oughtread e o algébrico de Descartes. Mas, além disso, foi necessário – particularmente no desenvolvimento de seus métodos de cálculo – que impusesse novas modificações próprias. Formas tradicionais de demonstração ele aprendeu através de inúmeras leituras do *Euclides* de Barrow. Essas e a lógica escolástica elementar, que aprendeu na escola secundária e nos primeiros anos em Cambridge, deram-lhe um treinamento adequado em simples procedimentos dedutivos. Entretanto, parece que ele nunca gostou dos modelos de dedução mais complexos, particularmente do método de exaustão. (Ibidem, p. 10).

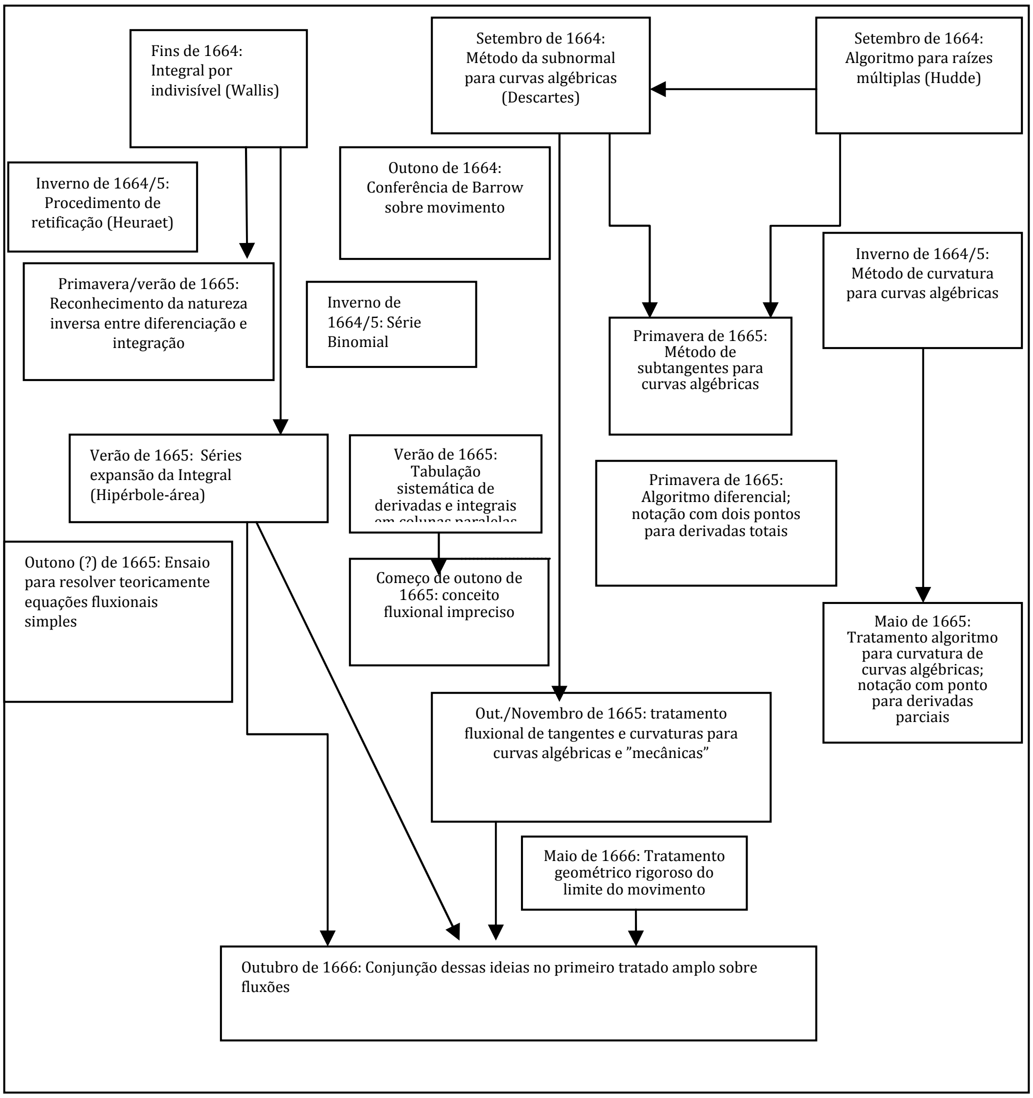
Baron ainda traz outra transcrição de Whiteside onde mostra que as investigações de Newton se desenvolveram a partir do estudo sistemático dos textos matemáticos de Wallis e Schoten[96]:

---

[96] Sobre Wallis já comentei, enquanto Frans van Shoten (1615-1660) foi um matemático e professor da Universidade de Leyden, que teve como mérito difundir os métodos cartesianos, traduzindo para o latim a geometria de Descartes. Também fez contribuições próprias sobre quadraturas, tangentes e centros de gravidade. Seus estudos foram fontes utilizadas por Newton, Leibniz e outros contemporâneos seus.

> Rapidamente ele avançou a fronteira dos conhecimentos existentes, cortando um longo caminho na nova paisagem matemática. Logo começou a preparar uma série de ensaios sobre a geometria analítica e o cálculo que iam além de qualquer coisa conhecida. O ímpeto inicial desse forte avanço serviu para dar continuidade ao seu futuro trabalho matemático. O preço que ele pagou pela profundidade de sua penetração foi, por um lado, o conflito eterno entre o instinto natural de se orgulhar de suas descobertas, vinculado ao desejo de publicá-las ao mundo, e por outro, o seu consciencioso conhecimento de que quão longe ele sobrepujou seus colegas matemáticos e a sua recusa em enfrentar os malentendidos. Esse impulso levou-o a mostrar seus ensaios não publicados àqueles cuja habilidade ele respeitava. Outro impulso impediu a comunicação pública dos trabalhos ao mundo (salvo algumas exceções notáveis). O resultante impasse conduziu a insuportável situação presente, na qual muitos dos seus ensaios decisivamente importantes ficaram na obscuridade por mais de dois séculos, desconhecidos e insuspeitos. (.WHITESIDE apud BARON, 1985, p. 10).

Finalmente, Baron apresenta um fluxograma, esboçado por Whiteside, onde apresenta as fontes com as quais Newton trabalhou para elaborar suas próprias ideias matemáticas:



Fluxograma 16 – Percurso cronológico dos estudos matemáticos de Newton que lhe serviram de sustentação para fundamentar o Cálculo Diferencial e Integral.

Esse quadro nos mostra o percurso cronológico de Newton para obter subsídios matemáticos e, assim, poder ampliar com ideias próprias a base matemática que lhe serviu para fundamentar o cálculo do ponto da vista da matemática.

6.5.1 Os trabalhos de Newton sobre o Cálculo[97]

De analysi per aequationes numero terminorum infinitum (Sobre a análise de equações com número limitado de termos) de 1669.

---

[97] -Ver BARON, 1985; WUSSING, 1998

1. *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (O método de Fluxões e séries infinitas) produzido entre 1671-72 e publicado em 1711.
2. *Tractatus dequadratura curvarum* (Um tratado sobre a quadratura de curvas) produzido por volta de 1676, publicado por volta de 1704.
3. *Principia* (1687).

Neste trabalho não vou detalhar toda a produção matemática de Newton, a qual é bastante extensa e fugiria aos objetivos da tese. Vou me deter naqueles pontos que considero mais importantes para as discussões que venho realizando, com base nos objetivos deste trabalho. Nas exposições a seguir, me aterei aos trabalhos de (BOYER, 1959; TOEPLITZ, 1669; BARON, 1985; HAHN, 1997). As exposições matemáticas que aparecem estão numa linguagem mais atual, segundo os autores, com o objetivo de facilitar nossa compreensão, com as quais estou de pleno acordo.

- Método das Séries Infinitas

Em sua extensa exposição sobre séries infinitas (estudo realizado por volta de 1664, portanto, aos 22 anos de idade), Newton amplia os estudos de Wallis nesse campo com o objetivo de utilizá-las no cálculo da quadratura do círculo e hipérbole; uma das contribuições é a apresentação da série binomial. Desse modo, o método das séries de Newton foi uma importante ferramenta para calcular a quadratura de muitas outras curvas, bem como para calcular a retificação de arcos (medida do comprimento de um arco) – um problema até então sem uma solução definitiva.

- Áreas sob curvas simples

Em 1669, Newton informa a seus colegas suas descobertas matemáticas contidas no manuscrito *De analysi per aequationes numero terminorum infinitum* (Sobre a análise de equações com número limitado de termos). Numa linguagem do século XVII, assim Newton se expressa:

> O Método geral que tenho esboçado há algum considerável tempo atrás para medir a quantidade de curvas por uma série infinita de termos você tem, a seguir, mais brevemente explicado do que demonstrado.

> Para a base AB de alguma curva AD façamos com que a coordenada BD seja perpendicular [ver figura] façamos com que AB seja chamado x e BD y. Façamos (...). (HAHN, 1997, p. 149; BARON, V. 3, p. 19).

Newton toma uma constante c qualquer e m e n inteiros e, assim, formula sua primeira regra:

> REGRA I: Se $cx^{\frac{m}{n}} = y$, então$\frac{cn}{n+m}x^{\frac{m+n}{n}}$ será a área ABD (ver figura conforme HANH, 1997, p. 150):

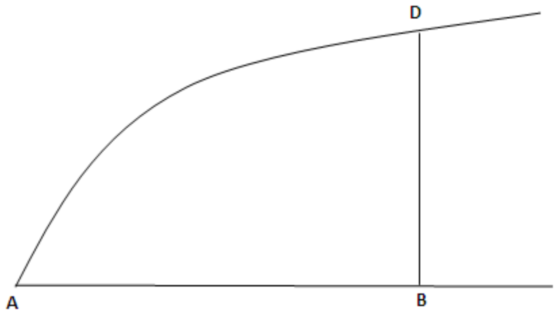


Figura 82 – Representação geomética da Regra I de Newton

Seguindo os argumentos de Newton, usando linguagem atual dizemos que ele considerou $c > 0$, assim, como $m > 0$ e $n > 0$. Denotou o racional $\frac{m}{n} = r$. Assim como: $\frac{m+n}{n} = \frac{m}{n} + 1 = r + 1$.

Agora, considerando a função (numa linguagem atual não usada por Newton):

$$f(x) = cx^r$$

Lembrando que $x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, isto é, a n-ésina raiz na m-ésima potência de x. De modo equivalente, podemos ainda considerar $x^r = x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \left(x^{1/n}\right)^m$ que significa a m-ésiam potência na n-ésima raiz de x. O gráfico de $f(x) = cx^r$. A forma do gráfico depende de r. Se $r < 1$, então teremos o gráfico apresentado por Newton, conforme segue:

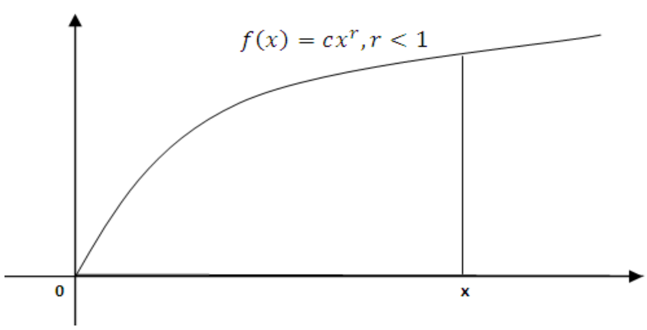


Figura 83 – Segunda representção geométrica da Regra I

Desse modo, focalizando sobre a função $f(x) = cx^r$, para ≥ 0. Tomemos $A(x)$ como a área sob o gráfico de f, no intervalo de 0 a x. Portanto, a primeira regra de Newton pode agora ser reescrita como:

> REGRA I: Se $f(x) = cx^r$, então sua área é a função $A(x) = \frac{c}{r+1}x^{r+1}$

Vamos ver agora como Newton conduziu a prova para essa regra. Newton inicia a prova primeiro considerando um caso especial:

> *Preparação para demonstração da primeira regra.*
>
> Tomemos então a curva $AD\delta$ a cuja base $AB = x$ e a ordenada perpendicular $BD = y$, e a área $ABD = z$, como no início. Façamos então $B\beta = 0$, $\beta K = v$; e o retângulo $B\beta HK(ov)$ igual ao espaço $B\beta\delta D$. Portanto, $A\beta = x + 0$, e, $A\delta\beta = z + 0$ (...) [conforme figura a seguir] (BARON, 1985, p. 19-22; HANH, 1997, p. 150-153).

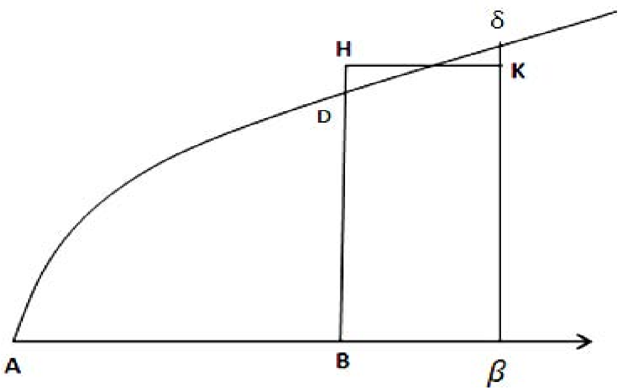


Figura 84 – Representação Infinitesimal da Regra I

Desse modo, Newton inicia sua preparação para a demonstração. Seguindo as considerações de Newton, vamos entendê-las colocando-as numa linguagem mais familiar.

> Considere a curva C mostrada na figura a seguir. Tomemos x como um número qualquer sobre o eixo horizontal com $x \geq 0$ e tomemos $D = (x, y)$ como um ponto sobre C. Na discussão que segue, x e D são fixos Como antes, tomemos $A(x)$ como a área sob a curva C de 0

a x. Agora tomemos Δx como um número positivo e considere o ponto $x + \Delta x$ (...)

Tracemos retas verticais através de x e $x + \Delta x$. Coloquemos o segmento HK paralelo ao eixo- x; agora colocamos um ponto sobre a curva C exatamente onde forme o retângulo de base x a $x + \Delta x$. Consideremos v a coordenada-y do ponto de intersecção de HK e C. Assim, v é altura deste retângulo Isto é ilustrado na figura a seguir:

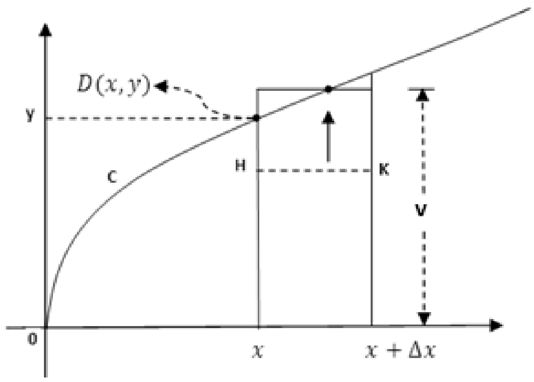


Figura 85 – Representação moderna da Regra I

Continuando a "preparação" para sua prova, Newton agora assume que a área sob C de 0 a x é dada por $A(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ (para qualquer $x \geq 0$) e faz a seguinte pergunta: Esta afirmação determina a curva C? Em caso afirmativo, exatamente qual é esta curva?

Em seguida, ele vai responder às suas perguntas. Começa observando que:

A área sob a curva de 0 a $x + \Delta x$ é igual a $A(x) + \Delta x.v$. Dada sua hipótese sobre a área da função, por outro lado, esta área é também igual a $A(x + \Delta x) = \frac{2}{3}(x + \Delta x)^{\frac{3}{2}}$. Então,

$$A(x) + \Delta x.v = A(x + \Delta x) = \frac{2}{3}(x + \Delta x)^{\frac{3}{2}}$$

Elevando-se ambos os lados da equação ao quadrado, obtemos:

$$(A(x))^2 + 2A(x).\Delta x.v + \Delta x^2 + v^2 = \frac{4}{9}(x + \Delta x)^3, \text{ ou}$$

$$\left(A(x)\right)^2 + 2A(x).\Delta x.v + \Delta x^2 + v^2 =$$

$$= \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2\Delta x + \frac{4}{3}x(\Delta x)^2 + \frac{4}{9}(\Delta x)^3.$$

Uma vez que $(A(x))^2 = 4/9x^{3/2}$. Ele obtém por cancelamento [é fácil ver isto – N.M]

$$2A(x).\Delta x.v + (\Delta x)^2 v^2 = \frac{4}{3}x^2\Delta x + \frac{4}{3}x(\Delta x)^2 + \frac{4}{9}(\Delta x)^3$$

Dividindo ambos os lados por Δx, obtém-se:

$$2A(x).v + \Delta x.v^2 = \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\Delta x + \frac{4}{9}(\Delta x)^2$$

Agora Newton faz Δx tender para zero em ambos os membros da equação. Observar na figura [anterior N.M] que v equivale a y, e portanto:

$$2A(x)y = \frac{4}{3}x^2$$

Como $A(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, temos que $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.y = \frac{4}{3}x^2$. Assim:

$$y = x^{1/2}$$

Portanto, as coordenadas do ponto $D = (x, y)$ sobre a curva C, satisfazem a equação $y = x^{1/2}$ que é a função $f(x) = x^{1/2}$

Acompanhando o raciocínio de Newton em sua "preparação" para a demonstração, vimos que ele primeiro tomou uma curva C e área $A(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, limitada pela referida curva e no intervalo de 0 a x e mostrou que C é o gráfico da função $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$. Ele pode então concluir que a área da função $A(x)$ para o gráfico de $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ é $A(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Essa solução equivale à definição de sua primeira regra, para $c = 1$ e $r = 1/2$.

Newton inicia então a demonstração da Regra I, usando uma estratégia idêntica à anterior. Contudo, para o caso geral, ao invés de seguirmos diretamente os argumentos de Newton, vamos dividi-los em seus dois componentes principais. O primeiro deles é a determinação da derivada de uma função f:

Seja f uma função qualquer dada pela regra da forma $f(x) = kx^s$, onde k é uma constante qualquer e s um número racional positivo (...)

Fixando $s = m/n$ com m e n inteiros positivos. Então o gráfico de f é o gráfico da equação $y = kx^{m/n}$. Elevando ambos os lados à n-ésima potência, $y^n = k^n x^m$. Uma vez que $Q = (x + \Delta x, y + \Delta y)$ está sobre o gráfico,

$$(y + \Delta y)^n = k^n (x + \Delta x)^m$$

Multiplicar os n fatores

$$(y + \Delta y)^n = (y + \Delta y).(y + \Delta y).(y + \Delta y) \dots .(y + \Delta y)$$

(...) o resultado dessa multiplicação será portanto:

$$(y + \Delta y)^n = y^n + ny^{n-1}\Delta x + \cdots \text{mais termos}.$$

Note que cada um dos termos adicionais deve conter pelo menos dois fatores de Δy (uma vez que os fatores que contém um ou nenhum Δy estão nos dois primeiros termos da soma). Fazendo a mesma coisa com $(x + \Delta x)^m$, Newton chegou à equação da forma:

$$y^n + ny^{n-1}\Delta y + \text{termos com } (\Delta y)^2 \text{como fator}$$

$$= k^n(x^m + mx^{m-1}\Delta x + \text{termoscom } (\Delta x)^2 \text{ como fator})$$

Como $P = (x, y)$ está sobre o gráfico, $y^n = k^n x^m$. Portanto, depois da subtração,

$$ny^{n-1}\Delta y + \text{termos com} (\Delta y^2 \text{como fator}$$

$$= k^n(mx^{m-1}\Delta x + \text{termos com } (\Delta x)^2 \text{como fator})$$

Agora dividimos ambos os termos por Δx, resulta

$$ny^{n-1}.\frac{\Delta y}{\Delta x} + \text{termos com } \Delta y.\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ como fator}$$

$$= k^n(mx^{m-1} + \text{termos com } \Delta x \text{ como fator}) \quad (*)$$

Finalmente, fazendo Δx e Δy tenderem a zero e Δy, todos os termos com $\Delta y.\frac{\Delta y}{\Delta x}$ como fator tenderam a zero e, portanto,

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m_p = f'(x)$, disso segue que $ny^{n-1}f'(x) = k^n m x^{m-1}$

Retomando que $y = kx^{\frac{m}{n}}$. Assim, por simples manipulação algébrica, obtemos que:

$y^{n-1} = k^{n-1}x^{\frac{m}{n}.(n-1)} = k^{n-1}x^m x^{-\frac{m}{n}}$

Substituindo esta equação na equação (*) acima, obtemos:

$$k^{n-1}x^{\frac{m}{n}.(n-1)}f'(x) = k^n m x^{m-1}$$

Depois de cancelar os termos obtemos $nx.x^{-\frac{m}{n}}f'(x) = km$. Como $\frac{m}{n} = s$.obtemos $nx^{1-s}f'(x) = km$. Assim:

$$f'(x) = k\frac{m}{n}.\frac{1}{x^{1-s}} = ksx^{s-1}$$

A fórmula anterior se mostrou válida para todo número racional s e não apenas para positivos. Para um $k = 1$, a fórmula garante que a derivada da função $f(x) = x^s = sx^{s-1}$.

Nesse processo operatório, vemos que Newton necessitou primeiro determinar a derivada de f. Assim, numa linguagem atual, o que Newton fez foi: fixar um ponto $P(x, y)$ sobre o gráfico de f; tomar um outro ponto $Q = (x + \Delta x, y + \Delta y)$ sobre o gráfico de f; unir os pontos P e Q por um segmento de reta e dizer que o $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m_p$, ou seja, dizer que isso é a inclinação da tangente ao gráfico de f em P . Formulando geometricamente, temos a figura a seguir:

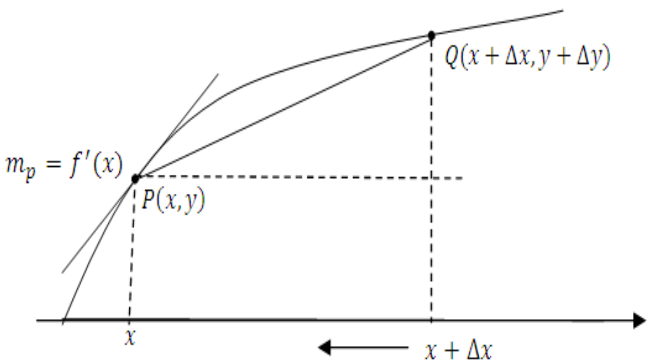


Figura 86 – Representação geométrica da inclinação da tangente

O segundo componente na verificação de Newton da regra I é o Teorema Fundamental do Cálculo. Cuja prova é dada na sequência:

Consideremos a função f que satisfaça $f(x) \geq 0$ para todo x. Para todo $x \geq 0$, tomemos $A(x)$ como a área sob o gráfico de f de 0 a x (ver figura 75), tomemos $x \geq 0$ um número qualquer e Δx uma distância qualquer e construímos o retângulo de altura v de tal modo que sua área seja igual à área sob o gráfico de 0 a $x + \Delta x$. Atentar para a figura a seguir e observar que:

$$A(x + \Delta x) = A(x) + v.\Delta x.$$

Portanto, $A(x + \Delta x) - A(x) = v\Delta x$, e, então:

$$v = \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x}$$

Mantendo x fixo e fazendo Δx tender a zero, observando que v, no processo, se aproxima de $f(x)$. Desse modo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x)$$

O Lado esquerdo é a derivada $A'(x)$ de $A(x)$.

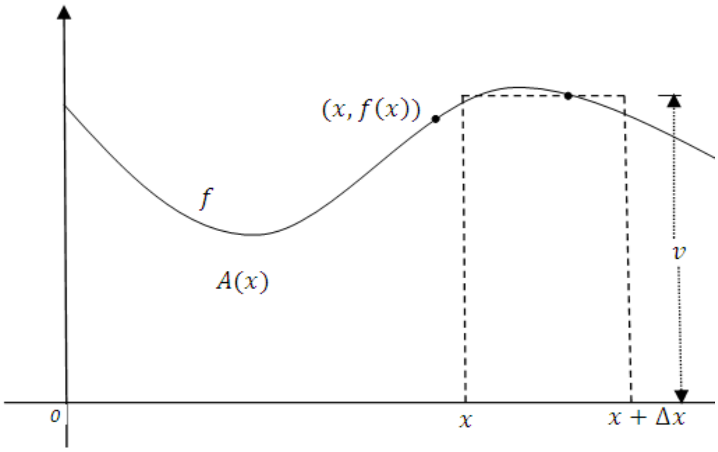


Figura 87 – Relação geométrica entre a área e a inclinação da tangente

Portanto, concluímos que a demonstração de Newton nos diz que a derivada $A'(x)$ da função área $A(x)$ é a função original $f(x)$. Dizendo de outro modo:

$$A \text{ função área } A \text{ de uma função } f \text{ é uma antiderivada de } f$$

Podemos então voltar à Regra I apresentada logo no início desta discussão e reformulá-la para um modo mais simples:

Se $F(x) - \frac{r}{r+1}x^{r+1}$ Pela regra da Antiderivação, $F'(x) - \frac{r}{r+1}(r+1)x^{r}$.
Então $F(x) = \frac{r}{r+1}x^{r+1}$ é uma antiderivada da função cx^{r}

A partir daqui, Newton mostra também que esse resultado é válido para uma soma de termos da forma cx^{r}, ou seja, regra da adição. Além disso, após provar que seus resultados para curvas simples, do *De Análise* (Sobre a análise de equações com número limitado de termos), ele se volta para a tarefa de ampliar esse trabalho estendendo-o para curvas mais complicadas, como por exemplo, curvas do tipo $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Com isso, demonstra novas regras para a integração definida[98].

Todavia, de toda a discussão feita em torno da Regra I apresentada por Newton, percebemos que ele[99] conseguiu estabelecer a relação existente entre a *Integração e a Derivação,* como operações inversas. Embora Newton tenha encontrado um longo caminho já percorrido por seus antecessores em relação a esses dois componentes, eles não conseguiram perceber essa relação. Assim, com o Teorema Fundamental do Cálculo, problemas sobre quadraturas, cubaturas (cálculo do volume de sólidos de revolução) e retificação de arcos se tornaram mais simples de executar. Ainda, pode ser estendido a uma variedade maior de curvas. Desse modo, questões antes respondidas parcialmente ou por processos muito complicados, por exemplo, utilizando o método das séries infinitas, puderam ser respondidas de modo mais simples. Por tudo isso, os trabalhos de Newton constituem um novo marco no pensamento matemático. Desculpem a repetição: “mais um pilar no edifício matemático”.

Também é certo afirmar que, quando Newton iniciou seus estudos em matemática, tinha também como objetivo resolver problemas sobre

---

[98] As quais não tratarei nesta tese, por razões de tempo e também porque a parte abordada em detalhes atende ao meu interesse de pesquisa.
[99] Bem como Leibniz.

movimento[100] (tratado sobre as fluxões ou fluentes), ou seja, rever os trabalhos de Galileu e Kepler, clarear os pontos que se mostravam ainda obscuros (não bem esclarecidos – questões em aberto para Newton). Desse modo, era preciso explicitá-los melhor, dar um tratamento matemático consistente, ou seja, apresentar ou explicar os fenômenos físicos observados por Galileu e Kepler por meio de uma formulação matemática. No entanto, faltavam as ferramentas matemáticas. O Cálculo Diferencial e Integral foi uma dessas ferramentas. Então, na sequência, vou apresentar partes desse trabalho.

- Pontos em Movimento (As Fluxões e os Fluentes)

Antes da produção do *De Analisi,* Newton experimentou outros tipos de exposição e outras notações. Um desses foi um tratado sobre geração de curvas por movimento. Esse tratado se constituiu em uma preliminar ao tratamento mais pormenorizado em seu trabalho, de 1671, "método das fluxões". Nesse tratado, Newton sugere vínculos com os trabalhos de Galileu, Torriceli e outros. Vejamos como Newton introduz esse trabalho:

> Falta agora como ilustração dessa arte analítica, explicarmos alguns problemas típicos e tão especiais como a natureza de curvas que os representam. Mas sobretudo eu observaria que as dificuldades dessa espécie podem ser todas reduzidas a somente dois problemas que proporei com vista ao percorrido por qualquer movimento local, acelerado ou retardado:
> (1) Dado o espaço percorrido continuamente (quer dizer em cada [instante do] tempo), ache a velocidade do movimento num instante qualquer.
> (2) Dada continuamente a velocidade do movimento, ache o comprimento do espaço percorrido num instante qualquer.
>
> (BARON, 1985, V. 3, p. 26; HANH, 1997, p 160).

O que Newton está querendo dizer nessas duas questões? Numa linguagem atual: vamos considerar um ponto ou uma partícula se movendo no plano cartesiano. Tomando-se um ponto inicial, no tempo $t = 0$, depois de algum tempo este ocupará alguma posição no plano. Digamos que a coordenada x do ponto seja $x(t)$ e a coordenada $y, y(t)$. Ainda, $x(t)$ e $y(t)$ são funções de t (Newton chamou tais funções de fluentes). A posição do ponto e,

[100] Movimento em suas várias modalidades.

portanto, as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ variarão com t. A figura a seguir expressa bem a situação:

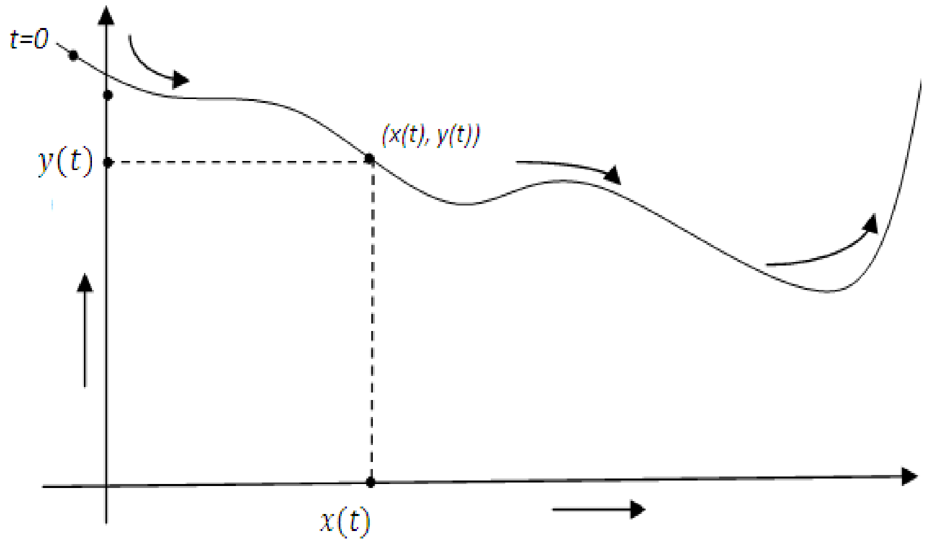


Figura 88 – Representação geométrica do movimento de um ponto sobre uma linha coordenada

Em x(t), y(t) o ponto terá uma velocidade na direção x e também na direção y. Newton chamou essas velocidades de *fluxões* de x(t) e y(t). Essas duas velocidades são também funções de t. Esses dois problemas escolhidos por Newton são:

> (1) Desde que conhecida aposição do ponto em um tempo qualquer determine sua velocidade nesse tempo. Por exemplo, sendo a função $x(t)$ conhecida explicitamente, determine a função que dá a velocidade na direção x.
>
> (2) Desde que conhecida a velocidade do ponto em um tempo qualquer, determine sua posição nesse tempo. Por exemplo, dada a função que descreve a velocidade na direção y, determine a função $y(t)$.
>
> (HAHN, 1997, p.160).

Nesse ponto, podemos nos remeter novamente aos trabalhos de Galileu sobre as leis do movimento discutidas no início deste capítulo. Vimos que Galileu não conseguiu matematizar a lei do movimento no lançamento de projéteis e a lei de queda livre dos corpos. Todavia, sabia como esses movimentos se processavam. Agora, Newton vai desenvolver a matemática que delineia esses movimentos; como já dissemos, era um de seus objetivos quando elaborou seu Cálculo Diferencial e integral. Em diversos problemas sobre fluxões e fluentes, Newton vai aplicar os conceitos de derivação e integração.

Em relação aos dois problemas apresentados anteriormente, se as funções $x(t)$ e $y(t)$ são bem entendidas, então o movimento do ponto fica compreendido. A matemática do movimento no plano se reduz ao deslocamento de um ponto ao longo de uma linha coordenada, o que condiz com a figura apresentada anteriormente. Vamos então a um exemplo (o caso geral) da matematização de Newton para o movimento de um ponto ao longo de uma linha coordenada.

Fixar algum instante $t_1 \geq 0$ e deixar decorrer um instante adicional Δt e considerar $t_1 + \Delta t$. Denotaremos o intervalo de tempo de $t_1 + \Delta t$ por $[t_1 + \Delta t]$. Temos:

$p(t_1) =$ a posição no tempo t_1

$p(t_1 + \Delta) =$ a posição no tempo $t_1 + \Delta$

$p(t_1 + \Delta) - p(t_1) =$ a mudança na posição após o intervalo $t_1 + \Delta$

=a distância percorrida pelo ponto no intervalo de tempo $t_1 + \Delta t$

$\frac{p(t_1+\Delta t)-p(t_1)}{\Delta t} =$ a distância percorrida, dividida pelo tempo que levou para percorrer essa distância = velocidade média durante o intervalo $[t_1 + \Delta t]$

Para qualquer ponto em movimento, considerar a razão

$$\frac{p(t_1+\Delta t)-p(t_1)}{\Delta t},$$

para valores de Δt cada vez menores..Esta é a velocidade média calculada sobre pequenos intervalos de tempo $[t_1 + \Delta t]$ próximo a t_1.Nesse processo $\frac{p(t_1+\Delta t)-p(t_1)}{\Delta t}$ é um número chamado *velocidade no instante* t_1; isto é denotado por $v(t_1)$. Esta é a razão na qual a posição muda no instante t_1. Isso é obtido fazendo Δt tender a zero e observando o que acontece com a razão $\frac{p(t_1+\Delta t)-p(t_1)}{\Delta t}$. Portanto,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t_1 + \Delta t) - p(t_1)}{\Delta t}$$

(HAHN, 1997, p.164).

Com esse resultado, Newton mostrou as duas questões referidas anteriormente. Ainda apresenta uma formulação matemática para movimentos, resolvendo, assim, o problema não conseguido por Galileu, uma vez que seu método se aplica ao lançamento de projéteis e aos corpos em queda livre ou a movimentos uniformemente acelerados e retardados. Poderia apresentar inúmeros exercícios práticos para aplicar esse modelo geral. Contudo, penso ser desnecessário, uma vez que esses são conteúdos presentes em qualquer livro atual de Cálculo Diferencial e Integral. Portanto, a partir do trabalho de Newton, o Cálculo Diferencial e Integral avançou no sentido de uma formalização infinitesimal mais analítica, com o desenvolvimento dos conceitos precisos de função e limite. Passo, agora, às considerações finais desta pesquisa.

Considerações Finais

Tendendo para as conclusões
Possibilidades, questões respondidas e caminhos abertos

Retomo agora, a pergunta diretriz, as questões formuladas em torno desta e os objetivos indicados no primeiro capítulo da tese e me pergunto se as questões e os objetivos lá postos foram contemplados ao longo da escrita deste texto? Espero que ambos tenham sido respondidos, dado que, ao longo deste trabalho procurei delinear os grandes problemas geradores, os modelos propostos e as condições sociais, culturais, políticas e religiosas que acompanharam o desenvolvimento da ciência, da Matemática e, em particular, do Cálculo Diferencial e integral, desde os gregos até Newton.

Nas contribuições dos antigos gregos, começando com primeiras indagações de natureza filosófica e suas tentativas de compreender e descrever o universo em que viviam me empenhei em identificar os primeiros problemas e modelos gerados. Identifiquei que nessa busca apresentaram o modelo geocêntrico – hegemônico até o século XV de nossa era. Além do modelo geocêntrico empenharam-se em compreender a matemática envolvida, realizando medidas (do Sol a Terra, da Terra a Lua, aos outros planetas, etc.) é o início de uma modelação matemática e geométrica.

Abordei, também, sobre os modelos aristotélicos para descrever os movimentos sub e supralunar. Assim, apresentei as leis do movimento aristotélico. Vimos que *o modelo ideal* de Aristóteles sobre o movimento não foi matematizado. Concentrei atenção à matemática produzida na Grécia antiga, especialmente, na escola pitagórica com sua obsessão pelos números, uma vez que dessa obsessão surgem as primeiras especulações (questões em aberto) e os primeiros modelos sobre grandezas incomensuráveis, ou seja, eram assim chamadas porque não podiam ser medidas com base nos métodos geométricos dos gregos. Essa discussão gerou modelos e deixou muitas questões em aberto, só totalmente respondidas séculos depois.

Dessas novas questões constam as envolvendo os processos infinitos – sobre o infinitamente grande ou infinitamente pequeno – nos paradoxos de Zenão se tem um bom exemplo. Novamente problemas são postos, modelos são gerados, permanecem questões em aberto e o conhecimento matemático avança. Os gregos se interessam em medir área e volume de regiões curvas, são os problemas sobre quadratura e cubatura; primeiro de lúnulas e círculos; depois avançando para curvas mais complexas como parábolas, elipses e espirais. O método da exaustão é sucessivamente feito e refeito – Os modelos vão sendo modificados sucessivamente por Eudoxo e Arquimedes. Com este último o *modelo da exaustão* torna-se referência para os matemáticos até o século XVII - é o prenuncio do Cálculo Integral.

Os modelos de Aristóteles se constituem na referencia para o modelo Geocêntrico de Ptolomeu. Para descrever seu modelo Geocêntrico, Ptolomeu apresenta formulações matemáticas consistentes – conceitos trigonométricos, geométricos e cálculo de medidas. Contudo o modelo ptolomaico vai ser reformulado pelos filósofos naturais/cientistas do século XIV e XV.

Ressaltei que até o século III de nossa era ouve um predomínio da cultura clássica grega no ocidente, portanto favorável ao desenvolvimento da ciência e da matemática. Do século VI ao XII o ocidente europeu viveu um período de quase estagnação científica, com pouca produção matemática – período conhecido como Idade Média. Explicitei as questões gerais envolvidas nesse processo. Também destaquei que na Idade Média o desenvolvimento científico e matemático se deslocou para o mundo hindu-arábico, apresentei parte de suas contribuições para e a ciência e a matemática, especialmente sobre a criação do sistema de numeração decimal posicional, que se tornou o padrão a partir do século XII-XIV, a resolução de equações por meio de símbolos e incógnitas – é o nascimento da álgebra.

Ainda na Idade Média, apontei os procedimentos usados pelos calculadores mertonianos e, especialmente, como Oresme tratou o movimento – propôs os primeiros modelos geométricos para representar velocidade média, movimento uniforme, uniformemente acelerado e retardado. Os modelos de Oresme e as leis do movimento aristotélico vão influenciar Kepler e Newton. Destaquei o período das grandes traduções e como elas foram importantes para o “renascimento” científico da Europa Ocidental

Assim, relatei como o Renascimento foi um período de importantes conquistas para a cultura em geral, em especial para a ciência e a matemática. Os filósofos/cientistas renascentistas se interessam novamente pelos clássicos da cultura grega, uma vez que veem neles “a chave” para a edificação de novos saberes e novas conquistas. Assim, vimos a reformulação do modelo geocêntrico de Ptolomeu – um novo modelo é proposto o Heliocêntrico de Copérnico. Destaquei que isso representou uma mudança de pensamento- um novo momento para ciência.

Mostrei que Kepler avançou na compreensão do modelo Heliocêntrico ao propor suas “leis do movimento” planetário, apresentados sob a forma geométrica e algébrica. Destaquei, ainda, as “leis do movimento” de Galileu, na sua tentativa de matematizá-los. Também a respeito desse período relatei o franco desenvolvimento da álgebra e da geometria analítica, respectivamente, com Viéte, Descartes e Fermat. Especialmente me concentrei nos métodos e modelos de Descartes e Fermat para tangentes e extremos (máximos e mínimos).

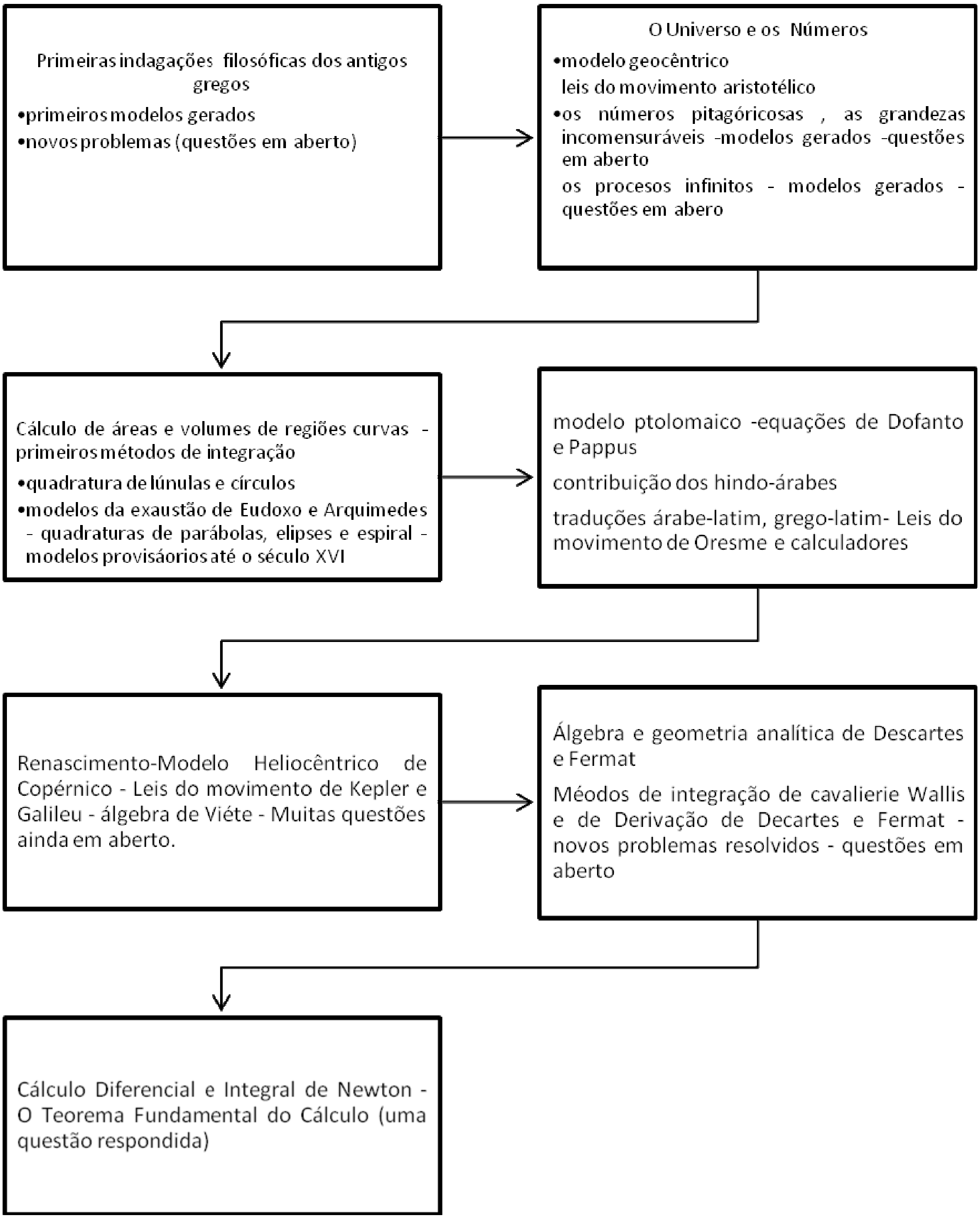
Com eles a álgebra simbólica ganha contorno definitivo. Ampliam-se as discussões sobre processos infinitos – infinitésimos – os modelos de Descartes e, principalmente de Fermat, marca o nascimento do Cálculo Diferencial. Novos modelos de medidas de integração são propostos por Cavalieri e Wallis. Os modelos do Cálculo Integral avançaram bastante, de modo a deixar de ser somente uma tentativa de calcular quadraturas e cubaturas e assim tornar-se uma técnica eficaz para calcular área e volume sob qualquer região curva.

Todavia, há um problema que permanecia em aberto: estabelecer a relação entre Diferencial e Integral, e perceber que se trata de grandezas inversas. Daí surgiu o trabalho de Newton[101] que conseguiu perceber essa relação, uma vez que tinha interesse em problemas sobre movimento e problemas sobre retificação de curvas, quadraturas – ou seja, melhorar os métodos de integração e formalizar matematicamente as leis do movimento Foi com o nascimento do Cálculo Diferencial e Integral, concretizado no Teorema Fundamental do Cálculo, que o modelo proposto por Newton se mostrou como uma técnica definitiva para se estabelecer a relação inversa e complementar entre derivada e integral.

---

[101] E de Leibniz

Por tudo que relatei e analisei asseguro que as questões e os objetivos estabelecidos para esta tese foram alcançados. Nesse processo percebi a necessidade e importância de resumi-las no seguinte fluxograma representado a seguir, caracterizando portanto, o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral dos gregos a Newton:



Fluxograma 17 – Apresentação resumida do que foi a Tese

Quando iniciei este trabalho pensei em muitas possibilidades, inclusive que ao final poderia propor uma sequência didática com atividades que atendessem aos objetivos da pesquisa, ou seja, de usar a história – por meio dos problemas propostos ao longo desta para ressignificar o ensino de cálculo. No entanto no transcorrer do trabalho tive que abandonar esta idéia, por questões de tempo, de interesse, etc. Mas agora me vejo na missão de querer fechar esse trabalho justificando porque ele é importante. Confesso que essa é uma tarefa muito difícil.

Poderia iniciar dizendo que pelo menos para mim ele foi importante, pois me levou a descobertas que pouco a pouco foram me surpreendendo e mudando minha visão sobre muitas coisas. Se me perguntassem a alguns anos atrás quem foram os inventores do cálculo provavelmente responderia sem titubear que foi Newton e Leibniz. Do mesmo modo se perguntarmos a um estudante de matemática ou mesmo a um professor da graduação eles vão responder a mesma coisa. Porque isso aconteceria? Penso que isso aconteceria pelo fato de a história não ocupar um lugar de destaque na formação dos nossos graduandos, seja nas licenciaturas ou nos bacharelados. E o que fica gravado em nossa mente é o fato consolidado. É a última etapa de um processo. O produto final!

Todavia me surpreendi e aprendi. Aprendi que cada conceito tem uma história e que essa história pode ser vista sob muitos aspectos. Aprendi que nenhum conceito nasceu como um ato intuitivo instantâneo. Intuição até existiu, e muito, mas ela também é fruto de investigação rigorosa que demanda tempo e determinação de muitos. Assim, se deu com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Foi uma construção humana que contou com a participação de muitos durante vários séculos.

De modo geral tudo isso me fez perceber que o edifício matemático foi se consolidando passo a passo, num intricado processo em que condições sociais, econômicas, religiosas e culturais influenciaram. A matemática influenciou e foi influenciada pelos acontecimentos da sociedade em cada época do seu desenvolvimento. Consolidou-se como uma importante ferramenta de uso em vários outros ramos do conhecimento.

Desse modo, modifiquei também minha forma de ver o ensino de matemática. Agora acredito e defenderei de ora em diante um melhor uso da história. Não como uma mera cronologia de nomes, datas e acontecimentos. Mas, um rico processo que pode abrir portas para a compreensão de muitos conceitos matemáticos, no específico, do Cálculo Diferencial e Integral. Acredito ainda, que o uso correto da história pode ser um agente de cognição no ensino-aprendizagem da matemática conforme defendido por Mendes e outros educadores matemáticos, me aliarei a eles de forma mais aproximada. Só por essas justificativas já me sentiria satisfeita com o trabalho produzido.

Gostaria também de ressaltar que ao longo da escrita deste trabalho nunca me senti entediada ou arrependida de tê-lo iniciado. Foi sempre um prazer enorme realizar cada etapa e me dar conta desse universo rico que é a história. Todavia me propus nos objetivos que ao final dele teceria possibilidades para uso da história, em especial da História do Cálculo sob a perspectiva dos modelos gerados (problemas resolvidos), a partir dos problemas geradores (questões em aberto). Outrossim, a porta aberta, na página inicial deste capítulo, significa as possibilidades que se abrem para um ensino de cálculo fazendo uso da história. Portanto, gostaria que este trabalho fosse visto como uma porta aberta a inúmeras possibilidades. Nesse sentido, apresento algumas das sugestões imaginadas após o estudo.

As sugestões, apresentadas na sequência, nasceram da pesquisa bem como dos anos como professora de cálculo, uma vez que me fizeram perceber que os conceitos fundamentais do cálculo não são apreendidos pela grande maioria dos estudantes. Nos cursos de cálculo ministrados fico com a sensação de que o que fica para os alunos é o conjunto de regras sobre limites, derivadas e integrais. Essas regras são muito bem memorizadas, uma vez que conseguem aplicá-las em vários problemas do tipo padrão.

Todavia, na essência poucos dominam os conceitos de limite, variação instantânea (derivada no ponto), tangencia a uma curva, gradiente, medida de área, comprimento e volume e, compreender o significado do Teorema Fundamental do Cálculo. Assim, vislumbro agora que eles poderiam melhor compreender esses conceitos se fizessem uso da história. Pra isso proponho as sugestões a seguir:

O curso pode ter início com um retorno a Grécia antiga e os alunos iam descobrir tudo que os gregos foram capazes de produzir e, assim, compreenderem o interesse que os gregos tinham pela ciência e pelo conhecimento em geral. Poderiam rever os problemas com os quais os gregos estavam envolvidos, por exemplo, as discussões sobre a natureza do universo, os números pitagóricos, os problemas sobre as grandezas incomensuráveis (e como esta abriu para a discussão sobre os processos infinitos).

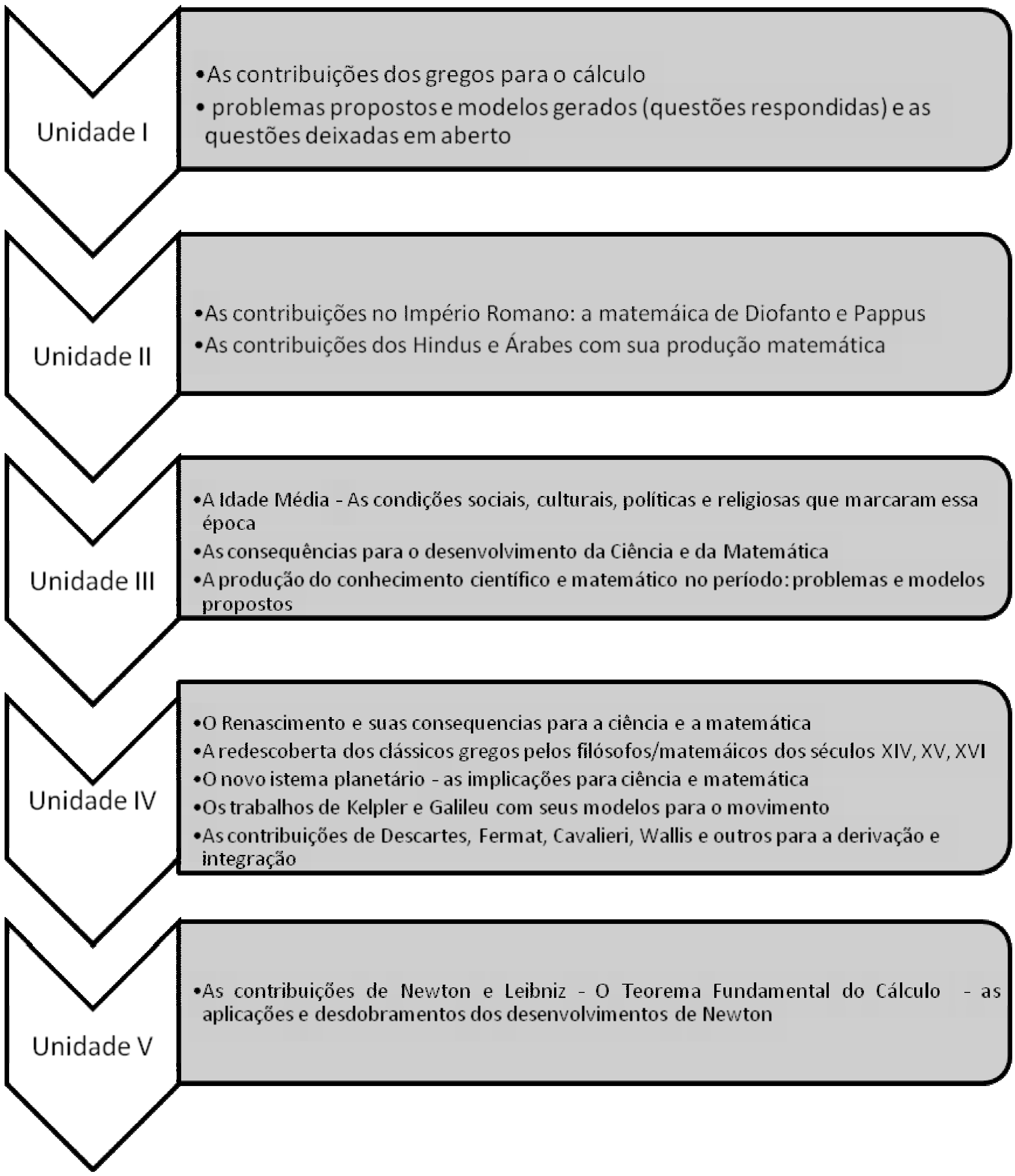
- Ainda na Grécia antiga poderiam conhecer os problemas sobre calculo de áreas sobre regiões curvas- primeiramente lúnulas e circunferências (ver, por exemplo, como esta demandou uma longa discussão sobre o valor de π (Pi)) e ai chegar até os trabalhos de Eudoxo e Arquimedes desenvolvendo o método da exaustão para o cálculo de quadraturas de parábolas e outras curvas. Compreendendo a limitação de cada modelo apresentado e as ferramentas matemáticas utilizadas. Estudar as leis de Aristóteles sobre movimento percebendo suas limitações.
- Da Grécia, migrar para as contribuições da escola alexandrina, especialmente conhecer os trabalhos de Euclides (conhecer os *Elementos*) e Ptolomeu (sobre sistema planetário),
- Em seguida conhecer as produções dos hindus e árabes (mais uma vez compreender os motivos econômico-sociais e religiosos envolvidos no processo)
- Retornando a Europa Ocidental do século XII-XIII-XIV compreender mais uma vez o novo momento sócio-político vivido, a nova forma de encarar a ciência, o mundo, compreender as mudanças ocorridas e, no bojo, a produção matemática e ai conhecer os problemas novos que suscitaram deste novo momento. Estudar os problemas sobre movimento, estudar também os problemas matemáticos que estavam em voga.

- Nos séculos XVI e XVII retomar os estudos sobre Universo – mudança de paradigma com a introdução do modelo heliocêntrico, conhecer as leis de Kepler para o movimento planetário e sua importância para a ciência, estudar as leis do movimento de Galileu e como este refutou as leis aristotélicas e quais as implicações para a ciência.

- Estudar os métodos de derivação e integração de Descartes, Fermat, Cavalieri, Wallis e outros. Compreender com eles como conseguiram clarear melhor às aproximações por meio de uma reta tangente (cálculo da equação da tangente) a uma curva, cálculo de valores extremos de curvas (máximos e mínimos), integração como medida de área e volume de curvas diversas (ampliando os trabalhos de Arquimedes sobre quadratura e cubatura), nesse processo identificando as questões em aberto.

- Estudar os trabalhos de Newton e Leibniz e perceber que suas “descobertas” não vieram ao acaso, foram sendo construídas ao longo de séculos. Finalmente, compreender a essência desses trabalhos contidos no Teorema Fundamental do Cálculo e seus desdobramentos.

Desse modo, o trabalho propondo o fluxograma a seguir, como uma ementa para um Curso de Cálculo Diferencial e Integral com base nas discussões travadas nesta tese.



Fluxograma 18 – Proposta de ementa para um Curso de Cálculo com na História.

Com isso, asseguro que certamente os alunos terão uma visão nova do que foi o desenvolvimento do Cálculo, bem como do desenvolvimento da matemática e da ciência. E sobre isso não há mais o que dizer.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANASTACIO, M. Q. A. Considerações sobre a Modelagem Matemática e a Educação Matemática. Dissertação (Mestrado) Mestrado em Educação Matemática – Unesp, Rio Claro, 1990.

ARAÚJO FILHO, W. D. A Gênese do Pensamento Galileano. Salvador. Editora Gráfica da Bahia, 2006

ARAÚJO, J. L. Cálculo, Tecnologias e Modelagem: as discussões dos alunos. 173p. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

ARAÚJO, J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática. **In: Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: perspectivas e práticas educacionais**. (Orgs. BARBOSA, J. C et. alii.). Coleção SBEM, 2007. V. 3. p. 17-32.

ARÓSTEGUI, J. Pesquisa Histórica: teoria e método. Bauru: EDUSC, 2006. 590p.

BALIEIRO, I. F. FILHO. Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya – Quatro episódios da história da heurística. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

BARBOSA, J. C. Concepções e experiências de futuros professores. 253f. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e a perspectiva sociocrítica. In. *SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2, 2003, Santos. Anais. São Paulo: SBEM, 2003.1 CD_ROM.

BARDI, J. S “A Guerra do Cálculo”. (Tradução Aluizio Pestana da Costa). Rio de Janeiro – São Paulo, Record, 2008)

BARON, M. Curso de História da matemática: Origens e desenvolvimento do cálculo. Brasília: Editora Universidade de Brasília,1985. Volumes 1-3.

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. & HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino.* São Paulo: Contexto, 2000

BIEMBENGUT, M. S. Qualidade no Ensino de Matemática: uma proposta metodológica e curricular. 1997. 305 f. Tese (Doutorado) – Curso de Engenharia de Produção e Sistemas, Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

BLAS, A. C. Descartes: Geometria y método. (Coleção: La Matemática em SUS personajes, v.8). Madri: Nivola, 2001.157p.

BONGIOVANNI, V. As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido: a teoria das proporções e o método da exaustão. **Revista Ibero-Americana de Educação Matemática**. Junho, 2005. N. 2, p. 91-110.

BOBBIO, N. et. alii. Dicionário de Política. 4ed. Brasília: Edunb, 1992. V.1. (Tradução Varrialle, C. C. et. alii).

BOYER, C. B. História da Matemática. 2ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. (Tradução Elza F. Gomide).

BOYER, C. B. The History of the Calculus and its conceptual development. New York: Dover Publications, 1949.

COLLETTE, J. P. História de las matemáticas I. Tradução Pilar González Gayoso. Madri: Siglo XXI Editores, 1985. (Coleção Ciência e Técnica).

CROWE, J. M. Theories of the world: from antiquity to the copernican *revolution.* 2ed. New York: Dover Publications, 2001. 226p.

D’AMBROSIO, U. Educação Matemática: da teoria à prática. 2ed. Papirus. Campinas, 1997. p.166.

______. Tendências Historiográficas na História da Ciência. In: *Escrevendo a História da Ciência*. (Orgs. ALFONSO-GOLDFARB, A M & BELTRAN, M. H.). São Paulo: EDUC/FAPESP, 2002. p. 165-200.

______. Grandeza e Forma: ingredientes para o Cálculo das Variações. In: *Anais do IV SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA*. Rio Claro (SP), 2001.

DEBUS, A. G. O Homem e a Natureza no renascimento. Porto: Porto Editora, 2002. 153p. (Tradução Fernando Magalhães).

EVES, H. (Tradução: Hygino H. Domingues): Introdução à História da Matemática. 2ed. Campinas, SP, 1997.

FOUCLAUT, Michel. A arqueologia do saber.(Tradução: Luiz Felipe Baeta Neves). 7. ed. Rio de Janeiro: Forense universitária, 2007.

GAMBA, L. M. B. Modelação Matemática no curso de contabilidade: uma proposta metodológica. Dissertação (Mestrado). . FURB, Blumenau, 1997.

GAZZETA, M. A Modelagem como estratégia de ensino em cursos de aperfeiçoamento de professores. Dissertação (Mestrado). UNESP, Rio Claro, 1988.

GILBERT, J. K. & BOULTLER, C. J. Aprendendo Ciências através de Modelos e Modelagem. In. *Modelos e Educação em Ciência* (Org. COLINVAUX, Dominique). Rio de Janeiro: Editora Ravil, 1998.

GAVROGLU, K. O Passado das Ciências como História. Porto: Porto Editora, 2007. (Tradução Custódio Magueijo).

GRANT, E. Os Fundamentos da Ciência Moderna na Idade Média. Porto: Porto Editora, 2002. (Tradução Carlos Grifo Babo).

HAHN, A. J. Básic Calculos: from Arquimedes to Newton to its Role in Science. Springer. New York, 1997. 203p.

HERRERA, R.T. Arquímedes alredor del círculo. (Coleção: La Matemática em Sus personajes, v.1). 2ed. Madri: Nivola, 2003. 132p.

JACOBINI, R. A modelação matemática aplicada no ensino de estatística em cursos superiores. Dissertação (Mestrado). UNESP, Rio Claro, 1999.

KLINE, M. Matemáticas La perdida de La certidumbre. Madri. Siglo XXI de Espanha Editores, 1985.

KUNH, T. S. A Estrutura das Revoluções Científicas. Coleção Debates. São Paulo: Editora Perspectiva, 1975. 258p.

MAYER, J. F. C. A Modelagem Matemática: do fazer ao pensar. *Anais IV ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Leopoldo, RS, 1998. p. 67-70.

MENDES, I. A. (c) Ensino da Matemática por atividades: uma aliança possível entre o construtivismo e a história da matemática*,* 283p. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2001.

______. A Investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula*.* In: *A história como um agente na educação matemática.* Porto Alegre: Sulina, 2006. p. 79-136.Org. Iran A. Mendes, Jonh A. Fossa e Juan E. Nápoles Valdez)

______. História no ensino da matemática: um enfoque transdisciplinar In: *XI Conferência Interamericana de Educação Matemática - XI CIAEM*, 2003, Blumenau. Blumenau: Editora FURB, 2003. CD-ROM.

MOURÃO, R. R. F. A Descoberta das leis do movimento planetário. São Paulo: Odysseus Editora, 2003.

PIRES, A. S. T. Evolução das Idéias da Física. Livraria da Física, SP, 2008

PONCZEK, R. I. L. Da Bíblia a Newton: uma visão humanista da mecânica*.* In: *Origem e Evolução das Ideias da Física* (Org. ROCHA, J. F.). Salvador: EDUFBA, 2002. p. 21-132.

QUEIROGA, M. A. Concepções de Matemática e de Realidade no processo de Modelagem Matemática: alguns apontamentos. In: *V CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÀO MATEMÁTICA*, 2007, Ouro Preto. Anais, 2007. p. 24-34 CD-ROM.

RONAN, Colin A. História Ilustrada da Ciência. (tradução: Jorge Eneias Fortes).Universidade de Cambrigde. 3 vol. 1. 1983

SANTONJA, J. M. Newton: El umbral de La ciência moderna. 2 ed. Madri (ES), 2005

SILVA, M. D. F O Uso da Modelagem Matemática num Curso de Matemática Aplicada para alunos de Economia e Administração. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática,** São Paulo. Ano 13 n. 20/21, p.64-68, Dezembro. 2006.

______. O Uso da Modelagem Matemática no Curso de Elementos de Cálculo para Engenharia Florestal. In: V CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÀO MATEMÁTICA, Ouro Preto. Anais, 2007. p. 706-721. 1 CD-ROM.

STRUIK, J. D. Sobre a Sociologia da Matemática. In. Sociologia da Matemática. Lisboa Cadernos de Educação e Matemática. (Org. Grupo TEM), 1998.

STRUIK, D. J. História Concisas das mathemáticas.Lisboa. Editora Gradiva, 1989

TOEPLITZ, O. The Calculus: a genetic approach. Chicago: The Chicago University Press, 1969. 193p.

VALDÉZ, J. E. N. A história como elemento unificador na Educação Matemática. In: *A história como um agente na educação matemática*. Porto Alegre: Sulina, 2006. p.15-78. (Org. Iran A. Mendes, Jonh A. Fossa e Juan E. N. Valdez)

URBANEJA, P. M. G. Fermat y los orígenes del cálculo diferencial. (Ciencia Aberta). Madri: Nivola, 2008. 174p.

URBANEJA, P.M. G eti ali. Método de Arquímedes. Fundació Bernat Metge - 1997 -.

VAQUERO, J. M. La Nueva Física: Galileo. (Científicos para la Historia, v.16). Madri: Nivola, 2003. 155p.

WESTFALL, R. S. A construção da Ciência Moderna (Tradução; Sérgio Duarte Silva). Porto Editora. Porto (PT), 2001.

WESTFALL, R. S A vida de Isaac Newton. (Tradução: Vera Ribeiro). Rio de Janeiro. Editora Nova Fronteira, 2008.

WUSSING, H. Leciones de História de las Matemáticas. (Tradução: Elena Ausejo, J. L. Escorihuela e Mariano Hormigó) Madri: Editora Siglo XXI de Espanha Editores, S.A., 1998.

Home Pages acessadas

http://books.google.com.br/bo acesso em 05/05/2010

http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Cellarius_ptolemaic_system_c2.jpg, acessado 03/05/2010 http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:God-Architect.jpg.>. Acesso em: 4 maio 2010.

http://www.on.br/site_edu_dist_2008/site/conteudo/modulo1/2-cosmologia-grega/9-escola-de-alexandria.html>. Acesso em: 4 maio 2010.

http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/fermat/teoria_dos_numeros.htm>. Acesso em: 4 maio 2010.

http://www.1st-art-gallery.com/Sir-Godfrey-Kneller/Portrait-Of-Sir-Isaac-Newton-1702.html, acesso em 03/10/2010