UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

RECONCEITUALIZAÇÃO DAS CATEGORIAS DE SKEMP DE COMPREENSÃO RELACIONAL E COMPREENSÃO INSTRUMENTAL COMO CRITÉRIOS GLOBAIS

GEORGIANE AMORIM SILVA

NATAL
2013

GEORGIANE AMORIM SILVA

RECONCEITUALIZAÇÃO DAS CATEGORIAS DE SKEMP DE COMPREENSÃO RELACIONAL E COMPREENSÃO INSTRUMENTAL COMO CRITÉRIOS GLOBAIS

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial a obtenção do título de doutor.

Orientador: Dr. John Andrew Fossa.

NATAL

2013

RECONCEITUALIZAÇÃO DAS CATEGORIAS DE SKEMP DE COMPREENSÃO RELACIONAL E COMPREENSÃO INSTRUMENTAL COMO CRITÉRIOS GLOBAIS

Divisão da Publicação na Fonte.
UFRN / Biblioteca Setorial do CCSA

Silva, Georgiane Amorim.
Reconceitualização das categorias de Skemp de compreensão relacional e compreensão instrumental como critérios globais / Georgiane Amorim Silva. – Natal, RN, 2013.

151 f.: il.

Orientador (a): Prof. Dr. John Andrew Fossa.

Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Educação. Programa de Pós-graduação em Educação.

1. Compreensão relacional – Tese. 2. Compreensão instrumental – Tese. 3. Quaternos Pitagóricos – Tese. 4. Esquema.– Tese. I. Fossa, John Andrew. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/BS/CCSA CDU 37.091.3:51

GEORGIANE AMORIM SILVA

RECONCEITUALIZAÇÃO DAS CATEGORIAS DE SKEMP DE COMPREENSÃO RELACIONAL E COMPREENSÃO INSTRUMENTAL COMO CRITÉRIOS GLOBAIS

BANCA EXAMINADORA

____

Dr. John Andrew Fossa (Orientador) - UFRN

____

Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo (Examinador Externo) - UFPB

____

Dra. Lilian Nasser (Examinador Externo) – UFRJ/ CETIQT

____

Dr. Iran Abreu Mendes (Examinador Interno) – UFRN

____

Dra. Giselle Costa de Sousa (Examinador Interno) – UFRN

____

Natal

2013

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado à bênção maior que Deus me concedeu no período em que estive envolvida com essa investigação: meu filho Romero.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sempre estar comigo iluminando minhas ideias e meus caminhos.

A minha família que mesmo distante sempre estiveram perto, em especial meus pais, minhas sobrinhas Emily e Melissa, e minhas irmãs Georgia e Gildeane.

A o meu amado filho Romero por cada sorriso.

A Fossa, meu orientador, fica meu eterno agradecimento, pela confiança e por compreender as decisões pessoais que tomei enquanto estive engajada nessa investigação.

A o meu querido amigo Lluís que apesar de ainda termos um oceano nos separando sempre se mostrou presente. ¡Muchas gracias!

A s amizades que conquistei através do meu convívio na UFRN (PPGENCM e PPGEd), as quais respeito e valorizo.

A o amigo João Paulo Attie o qual admiro enquanto pessoa e enquanto educador matemático.

As amizades que consquistei em terras arraianas (TO) e que terei o prazer em manter seja onde for.

A o professor Dr. Iran Abreu Mendes, a quem tenho tamanho apreço e admiração enquanto pessoa e profissional.

A Dra. Liliane Gutierre e a Dra. Rogéria Gaudêncio do Rêgo por me enviarem suas respectivas produções.

A os alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Arraias-TO que fizeram parte dessa investigação.

"Eu aprendi a ler e escrever. Já sei somar a alegria e prazer. Sei diminuir tristeza e multiplicar a paz. Mas o mais importante que eu aprendi, foi dividir o amor". (Tia Cecéu)

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma descrição sistemática acerca do que significa, segundo Skemp (1980,1989), compreensão relacional e compreensão instrumental, no âmbito da aprendizagem matemática, sendo que tivemos como norte à sua compreensão sobre esquema. Sobretudo, analisamos alguns trabalhos acadêmicos, na área de Educação Matemática, que fizeram uso das categorias de compreensão relacional e compreensão instrumental enquanto instrumento avaliativo e detectamos que na maioria dos casos a análise é pontual. Diante disso, considerando que o esquema inerente à compreensão relacional apresenta uma rede de ideias conectadas e não isoladas, investigamos se a análise global, na qual considera-se a compreensão da diversidade de conceitos contributivos à formação do conceito a ser aprendido, é mais apropriada que a pontual, na qual considera a compreensão de conceitos de modo isolado. Para tanto, aplicamos um módulo de ensino, tendo como conteúdo principal os quaternos pitagóricos utilizando a História da Matemática e a obra de Bahier (1916). Com o referido módulo de ensino obtivemos os dados para realizarmos tanto a análise global quanto a pontual, utilizando como modalidade de pesquisa o Estudo de Caso, e consequentemente realizamos nossas inferências acerca dos níveis de compreensão apresentados pelos sujeitos o que nos possibilitou investigarmos a apropriação da análise global em detrimento da análise pontual. Na oportunidade, comprovamos a tese que defendemos no decorrer do estudo e, além disso, apontamos como contribuição da nossa pesquisa a evidência da necessidade de um ensino de Matemática que promova a compreensão relacional e que avaliação a ser realizada deve ser global, sendo necessário levar em consideração a noção de esquema e consequentemente conhecer o diagrama esquemático do conceito a ser avaliado.

Palavras-chave: Compreensão Relacional; Compreensão Instrumental; Esquema; Quaternos Pitagóricos.

ABSTRACT

The thesis presents a systematic description about the meaning, as Skemp, relational understanding and understanding instrumental, in the context of mathematics learning, being that we had as a guide his understanding of the schema. Especially, we analyze some academic productions, in the area of Mathematics Education, who used the categories of understanding relational and instrumental understanding how evaluative instrument and we see that in most cases the analysis is punctual. Being so, whereas the inherent understanding relational schema has a network of connected ideas and non-insulated, we investigated if the global analysis, where it is the understanding of the diversity of contributory concepts for formation of the concept to be learned, is more appropriate than the punctual, where does the understanding of concepts so isolated. For this, we apply a teaching module, having as main content the Quaternos Pythagoreans using History of Mathematics and the work of Bahier (1916). With the data we obtained the teaching module to use the global analysis and the punctual analysis, using research methodology the Case Study, and consequently we conduct our inferences about the levels of understanding of the subject which has made it possible for us to investigate the ownership of global analysis at the expense of punctual analysis. On the opportunity, we prove the thesis that we espouse in the course of the study and, in addition, we highlight as a contribution of our research evidence of need for a teaching of mathematics that entices the relational understanding and that evaluation should be global, being necessary to consider the notion of schema and therefore know the schematic diagram of the concept that will be evaluated.

Keywords: Relational Understanding; Instrumental Understanding; Schema; Quaternos Pythagoreans.

LISTA DE FIGURAS, ILUSTRAÇÕES E QUADROS

Figura 1: Selos emitidos pela Grécia ------------------------------------- **35**

Figura 2: Selo emitido pela Nicarágua ------------------------------------- **36**

Figura 3: Distância entre dois pontos em duas dimensões ------------------------------------- **39**

Figura 4: Distância entre dois pontos em três dimensões ------------------------------------- **39**

Figura 5: Relação entre Álgebra e Geometria ------------------------------------ **42**

Figura 6: Diagonal do prisma ------------------------------------ **61**

Figura 7: Quaterno Pitagórico (1,2,2,3) ----------------------------------- **70**

Figura 8: Quaterno Pitagórico (1,8,4,9) ----------------------------------- **70**

Figura 9: Quaterno Pitagórico (2,9,6,11) ----------------------------------- **71**

Figura 10: Quaterno Pitagórico (2,4,4,6) ----------------------------------- **71**

Figura 11: Quaterno Pitagórico (3,6,6,9) ----------------------------------- **72**

Figura 12: Quaterno Pitagórico (3,2,6,7) ----------------------------------- **72**

Figura 13: Quaterno Pitagórico (3,4,12,13) ----------------------------------- **74**

Figura 14: Resposta de R à questão 4 ----------------------------------- **81**

Figura 15: Esboço contido no vídeo ----------------------------------- **85**

Figura 16: Resposta de R à questão 9a ----------------------------------- **87**

Figura 17 : Resposta de M à questão 11 ----------------------------------- **90**

Figura 18: Resposta de R à questão 17 ----------------------------------- **95**

Figura 19: Resposta de R à questão 19 ----------------------------------- **96**

Figura 20: Resposta de R à questão 21 ----------------------------------- **97**

Figura 21: Resposta de J à questão 22 ----------------------------------- **98**

Figura 22: Resposta de R à questão 22 ----------------------------------- **98**

Figura 23: Resposta de J à questão 23 ----------------------------------- **99**

Figura 24: Resposta de M à questão 23 ---------------------------------- **100**

Figura 25: Resposta de R à questão 23 ----------------------------------- **101**

Ilustração 1: Distância entre dois pontos em duas dimensões no geoplano ------------------------------------- **56**

Ilustração 2: Distância entre dois pontos, em duas dimensões, na barra de sabão ----------------------------------- **57**

Ilustração 3: Distância entre dois pontos, em três dimensões, na barra de sabão ------------------------------------ **58**
Ilustração 4: Material confeccionado com madeira ------------------------------------- **60**
Ilustração 5: Cálculo da diagonal do paralelepípedo retângulo ------------------------------------- **62**

Quadro 1: Estrutura dos esquemas associados aos dois níveis de compreensão (CR e CI) -------------------------------------- **28**
Quadro 2: Diagrama esquemático dos quaternos pitagóricos -------------------------------------- **42**
Quadro 3: Teses e dissertações analisadas -------------------------------------- **47**
Quadro 4: Ternos pitagóricos primitivos ------------------------------------- **101**
Quadro 5: Níveis de compreensão dos sujeitos ------------------------------------ **113**

SUMÁRIO

RESUMO
ABSTRACT
LISTA DE FIGURAS, ILUSTRAÇÕES E QUADROS

1. INTRODUÇÃO -- **13**
1.1 Justificativa -- **15**
1.2 Objetivos -- **17**
1.2.1 Objetivo Geral -- **17**
1.2.2 Objetivos Específicos -- **17**
1.3 Estudo de caso: metodologia de investigação que nos norteou para definir os instrumentos e os procedimentos para análise dos dados ------------------------ **17**

2. REDE DE IDEIAS CONTRIBUTIVAS -- **21**
2.1 Compreensão Relacional e Compreensão Instrumental à luz de Skemp ----- **22**
2.1.1 Estrutura do esquema e suas implicações nos níveis de compreensão------ **25**
2.2 História da Matemática enquanto aliada na promoção da compreensão relacional -- **29**
2.3 Quaternos Pitagóricos: uma importante ferramenta pedagógica para relacionar o conceito de distância entre dois pontos, em três dimensões, e o Teorema de Pitágoras -- **35**

3. A COMPREENSÃO RELACIONAL E A COMPREENSÃO INSTRUMENTAL NO ÂMBITO DA AVALIAÇÃO --------------------- **45**

4. CONSTRUÇÃO DOS DADOS PARA REALIZAR A ANÁLISE GLOBAL E A ANÁLISE PONTUAL DOS DADOS --------------------------- **51**
4.1 Contexto -- **52**
4.2 Etapa I: Questionário --- **53**
4.3 Etapa II: Desenvolvimento das atividades -------------------------------------- **55**
4.3.1 Encontro I --- **55**
4.3.2 Encontro II -- **58**
4.3.3 Encontro III --- **64**
4.3.4 Encontro IV --- **68**
4.3.5 Encontro V -- **73**
4.4 Etapa III: Aplicação da avaliação escrita -------------------------------------- **75**

5. ANÁLISE DA AVALIAÇÃO ESCRITA EM SEUS ASPECTOS GLOBAIS E PONTUAIS --- **76**
5.1 Análise global dos dados -- **77**
5.1.1 Inferências quanto ao nível de compreensão ---------------------------------- **102**
5.2 Análise pontual dos dados --- **105**

5.2.1 Inferências quanto ao nível de compreensão ----------------------------------- **113**
5.3 Qual análise é mais apropriada: a global ou a pontual? --------------------- **115**

6. IDEIAS CONTRIBUTIVAS DA NOSSA INVESTIGAÇÃO -------------- 119

REFERÊNCIAS --- 125

ANEXOS E APÊNDICES-- 130

APÊNDICE A - Lista dos links diretos que dão acesso às 11 produções acadêmicas que analisamos Questionário **--- 131**

APÊNDICE B - Material do minicurso - Ternos Pitagóricos: uma ferramenta histórica para compreensão do Teorema de Pitágoras **--------------------------- 132**

APÊNDICE C – Roteiro das Atividades **-- 138**

ANEXO A – Conteúdo contido em três livros didáticos ao abordar o cálculo da diagonal do paralelepípedo retângulo **--- 146**

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O psicólogo e matemático inglês Richard Skemp em sua obra intitulada *Psicologia del aprendizaje de las matemáticas* (1980) autodenomina-se matemático convertido em psicólogo porque que iniciou sua carreira profissional como professor de matemática e a partir da sua prática docente, gradualmente se interessou pelos problemas relacionados à aprendizagem e ao ensino de matemática. Tal interesse o conduziu à graduação de psicologia.

Com o intuito de justificar sua necessidade em se deter a aspectos psicológicos, Skemp (1980, p. 18) afirma que *Os problemas de ensino e aprendizagem são psicológicos, e antes que possamos fazer um grande progresso no ensino da matemática, necessitamos nos aprofundar mais sobre como se aprende*. Todavia, ao ministrar aulas de psicologia na Universidade de Manchester, seu interesse de investigação centrou-se nos problemas da aprendizagem da matemática.

Skemp (1989) categoriza a aprendizagem dos conceitos matemáticos em dois níveis, a saber: o nível de compreensão instrumental e o nível de compreensão relacional. Sendo que enquanto que na compreensão instrumental ocorre a assimilação de algo novo sob um esquema simples, na compreensão relacional ocorre a assimilação de novos conceitos sob esquemas mais ricos, consequentemente, não tão simples.

Todavia, na compreensão instrumental, o aluno domina uma coleção isolada de regras e algoritmos aprendidos por meio da repetição, sem estabelecer relações entre conceitos. Já na compreensão relacional o aluno é capaz de realizar uma grande variedade de atividades com criatividade e inteligência, permitindo relacionar diferentes conceitos em um só esquema.

Entretanto, é válido ressaltar que compreensão instrumental e compreensão relacional não correspondem a dois tipos disjuntos de compreensão, mas sim, conforme destaca Fossa (2001), dois estágios de um mesmo processo de conhecimento, havendo uma sequência gradativa em que a compreensão instrumental se torna relacional. Sendo assim, no capítulo destinado à discussão teórica discutiremos detalhadamente os dois níveis de compreensão.

Diante do exposto, em nosso estudo, nos detivemos ao problema de como detectar se houve compreensão relacional ou compreensão instrumental tendo como base as ideias de Skemp (quando trata o que é compreensão e como adquiri-la), ou seja, focaremos a avaliação. Porém, como Skemp não deixa explícito como devemos proceder na avaliação, a partir das suas ideias acreditamos que se nos detivermos na noção de esquema, poderemos ter maior clareza se houve ou não compreensão relacional.

Para tanto, aplicamos um módulo de ensino cujo conteúdo central foi os quaternos pitagóricos, evidenciando sua completude e aspectos históricos. Por sua vez, a escolha dos quaternos pitagóricos se deveu à sua completude e riqueza de conexões entre diversos conceitos matemáticos. Na oportunidade, analisamos se os participantes do módulo de ensino compreenderam relacionalmente ou instrumentalmente os quaternos pitagóricos.

Em relação à estrutura textual, esta pesquisa será configurada por meio de seis capítulos que se apresentarão conectados entre si, com o intuito de compor um esquema relacional de ideias contributivas à nossa investigação. Sendo assim, no capítulo introdutório apresentamos nossa questão de estudo, bem como sua relevância para a Educação Matemática e a metodologia de pesquisa utilizada. O capítulo II destinamos à apresentação dos pressupostos teóricos que norteiam nossa investigação.

No capítulo III apresentaremos uma discussão teórica especificamente sobre a tese que ora defendemos, a saber: para inferir quanto aos níveis de compreensão relacional ou instrumental, destacados pelo psicólogo da matemática Richard Skemp, a análise global é mais apropriada que a pontual. Por sua vez, o capítulo IV será destinado à retomada da teoria à luz da prática através da descrição da aplicação do módulo de ensino intitulado *Quaternos Pitagóricos: aplicação do Teorema de Pitágoras em três dimensões*, o referido capítulo nos servirá para construir os dados que necessitamos para realizar a análise global e a análise pontual.

O capítulo V apresentará tanto a análise global quanto a análise pontual dos dados da avaliação escrita, aplicada no final do módulo de ensino, com a finalidade de sustentar a nossa tese. Por conseguinte, o sexto e último capítulo será destinado às considerações finais.

1.1 Justificativa

Na nossa dissertação de mestrado intitulada *Estudo Histórico e Pedagógico sobre Ternos Pitagóricos à luz de Eugène Bahier (2009)*, ao analisarmos a obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*, publicada em 1916, do francês Eugène Bahier, tendo como objeto do nosso estudo os ternos pitagóricos e como categorias utilizadas no processo de avaliação as categorias de compreensão dadas por Skemp (1980, 1989), evidenciou-se certa dificuldade em entender bem esse instrumento de avaliação.

Particularmente, acreditamos que o referido instrumento avaliativo também não é bem explicado por outros estudiosos que se propuseram a utilizá-lo em suas respectivas investigações. Por exemplo, diversos trabalhos acadêmicos produzidos no âmbito da UFRN que fizeram uso das categorias de compreensão relacional e compreensão instrumental difundidas por Skemp para avaliarem se houve ou não compreensão relacional apresentam uma análise contemplando critérios específicos para cada questão contida na avaliação escrita elaborada pelos mesmos, a qual denominamos análise pontual.

Contudo, desconfiamos que as categorias de compreensão instrumental e compreensão relacional dadas por Skemp (1980, 1989) não são apropriadas no campo pontual. Todavia, acreditamos que para ser apropriada é necessário um maior entendimento da aquisição do conhecimento obtida pelo sujeito avaliado.

Com isso, considerando que para investigar se houve ou não compreensão do conceito é necessário uma análise do todo, e não isoladamente, acreditamos que a análise global, a qual contempla critérios gerais, pode ser mais apropriada que a análise pontual. Sobretudo, dado que os esquemas inerentes à compreensão relacional são ricos em uma diversidade de pontes entre conceitos, nos parece equivocado a realização da análise pontual para inferir quanto ao nível de compreensão.

Portanto, posto às evidências supracitadas, acreditamos que se faz necessário investigar de forma mais contundente as categorias de compreensão relacional e de compreensão instrumental enquanto instrumento avaliativo, no âmbito da Educação Matemática. Nesse contexto, emerge nossa pergunta diretriz, a saber: o que podemos inferir quanto aos níveis de compreensão relacional ou instrumental, destacados pelo psicólogo da matemática Richard Skemp, acerca da análise global e da análise pontual?

Para tanto, utilizaremos a extensão do Teorema de Pitágoras, em três dimensões, denominados por nós, quaternos pitagóricos, como laboratório para nossa investigação, dado que possivelmente os alunos conhecem o Teorema de Pitágoras, mas não sua extensão em três dimensões. Todavia, por levarmos em consideração a completude e a diversidade de conceitos conectados que compõe o esquema relacionado aos quaternos pitagóricos, dispomos da pergunta secundária: Como o esquema relacionado aos quaternos pitagóricos pode ser nosso aliado na busca de, a título de exemplo, responder nossa pergunta diretriz?

Por fim, conforme a análise prévia da obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*, de Bahier (1916), que realizamos no decorrer do mestrado, evidenciou-se que sua estrutura e suas ideias apresentadas, podem ser consideradas como uma importante contribuição nas reflexões acerca dos problemas relacionados aos triângulos retângulos em números inteiros e, por sua vez, à Educação Matemática. Logo, emerge a necessidade de responder a mais uma pergunta, a saber: qual o potencial pedagógico da obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entier*, no que diz respeito aos quaternos pitagóricos?. No mais, isto nos permitirá utilizar atividades estruturadas baseadas na História da Matemática e na obra de Bahier (1916), como feito na dissertação.

1.2 Objetivos

Na presente sessão, apresentaremos os objetivos traçados para nosso estudo.

1.2.1 Objetivo Geral

- Investigar se a análise global é mais apropriada que a análise pontual para inferir o nível de compreensão de um conceito matemático.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Elaborar e aplicar um módulo de ensino sobre os quaternos pitagóricos, junto a um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática, utilizando a História da Matemática e a obra de Bahier (1916);
- Avaliar a compreensão dos sujeitos em termos globais e em termos pontuais;
- Comparar as inferências provenientes da análise global e da análise pontual com a finalidade de verificar qual é a mais apropriada.

1.3 Estudo de caso: metodologia de investigação que nos norteou para definir os instrumentos e os procedimentos para análise dos dados

A metodologia utilizada não serviu para validar a intervenção pedagógica e sim para apresentar de forma mais rica a concepção teórica da compreensão relacional como propriedade global em detrimento da pontual. Ou seja, nossa intenção maior não era indicar como proceder no ensino dos quaternos pitagóricos e sim investigar a análise global e a análise pontual como elementos para realizar inferências quanto aos níveis de compreensão relacional e instrumental destacados por Skemp (1980,1989).

Nesse contexto, na presente sessão discorreremos acerca do estudo de caso enquanto metodologia que utilizamos para realizar nossa investigação em consonância com os objetivos delineados. Todavia, por corroboramos com (LUDKE e ANDRÉ, 1986), ao afirmar que para se realizar uma pesquisa é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele, descreveremos como a referida metodologia nos auxiliou para definir tanto os instrumentos quanto os procedimentos para análise dos dados.

Com o intuito de apresentar uma comparação entre as abordagens metodológicas qualitativas e quantitativas, Bogdan e Biklen (1994) apontam algumas vantagens da primeira em detrimento da segunda, dentre as quais destacamos que as propostas qualitativas são muito mais flexíveis do que as propostas quantitativas, sendo que as qualitativas representam especulações ponderadas acerca da estruturação da investigação e da direção em que se orientará o estudo. Com isso, posta a necessidade de que nosso plano de investigação fizesse parte de um processo evolutivo, no qual as perguntas que fossem colocadas e os dados que fossem construídos decorressem do próprio processo da investigação, nossa abordagem metodológica assumiu um caráter qualitativo.

No mais, corroboramos com Borba e Araújo (2006), ao afirmarem que pesquisar

> [...] não se resume a listar uma série de procedimentos destinados à realização de uma coleta de dados, que, por sua vez, serão analisados por meio de um quadro teórico estabelecido antecipadamente para responder a uma dada pergunta. (BORBA, ARAÚJO, 2006, p. 45)

Com isso, ao nos preocuparmos com as práticas inerentes à educação, não podemos recorrer a simples métodos estáticos para quantificar as ações, mas sim priorizar a atribuição de significado às ações através do entendimento e da explicação dos fenômenos.

Particularmente, ao caracterizar a pesquisa qualitativa, Bogdan e Biklen (1994) apontam que as abordagens de pesquisa dessa natureza contemplam alguns aspectos, tais como: (i) preocupação do pesquisador com o processo mais do que com o produto; (ii) os dados coletados são predominantemente descritivos; (iii) a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo. Sobretudo, D'Ambrosio (2006, p.21) afirma que a pesquisa qualitativa "[...] é o caminho para escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos".

Há várias formas que uma pesquisa qualitativa pode assumir, tais como: Pesquisa Participante, Pesquisa-ação, Pesquisa Etnográfica, Pesquisa Bibliográfica, Pesquisa Histórica e Estudo de Caso. No entanto, conforme descreveremos a seguir, o estudo de caso foi o tipo de estudo mais indicado aos nossos objetivos.

Segundo Ventura (2007), há diferentes posicionamentos que relatam as origens do estudo de caso, como, por exemplo, o evidenciado a seguir.

> O estudo de caso tem origem na pesquisa médica e na pesquisa psicológica, com a análise de modo detalhado de um caso individual que explica a dinâmica e a patologia de uma doença dada. Com esse procedimento se supõe que se pode adquirir conhecimento do fenômeno estudado a partir da exploração intensa de um único caso. (BECKER 1994, apud VENTURA, 2007, p. 384)

Porém, independente da sua origem, atualmente, nota-se que o estudo de caso é aplicado em diversos ramos do conhecimento, tais como Medicina, Direito, Economia e Educação se configurando como importante modalidade de pesquisa.

Com isso, nesse contexto, dada a potencialidade do estudo de caso para investigações inerentes à prática educacional, nos detemos especificamente à Educação Matemática. Sobretudo, no âmbito da Educação Matemática, Ponte (2006) destaca que o Estudo de Caso tem se configurado de modo significativo no desenvolvimento do conhecimento em Educação Matemática. No mais, em especial, Ludke e André (1986, p. 58) evidenciam que, "no calor da corrente vital apreendida pelo caso, o pesquisador propõe suas próprias explicações, baseadas em tudo o que sabia antes de começá-lo, mas, sobretudo em tudo o que aprendeu ao realizá-lo".

Segundo Ludke e André (1986), o estudo de caso como estratégia de pesquisa é o estudo de um caso, simples e específico ou complexo e abstrato. Porém, o caso deve ser bem delimitado de modo que possibilite à busca circunstanciada de informações. Todavia, mesmo realizando o estudo de uma unidade, é imprescindível, no estudo de caso, perceber o que o caso sugere a respeito do todo. Além disso, considerando que é possível adquirir conhecimento do fenômeno estudado a partir da exploração intensa de um único caso, optamos desenvolver o estudo de caso de três avaliações as quais analisaremos de modo global e pontual com a finalidade de verificarmos a tese que ora defendemos.

Com relação às vantagens do estudo de caso, Ventura (2007) destaca algumas, a saber:

> [...] estimulam novas descobertas, em função da flexibilidade do seu planejamento; enfatizam a multiplicidade de dimensões de um problema, focalizando-o como um todo e apresentam simplicidade nos procedimentos, além de permitir uma análise em profundidade dos processos e das relações entre eles. (VENTURA, 2007, p.386)

Como o estudo de caso que realizamos está inserido na pesquisa qualitativa, o cunho descritivo foi preservado. Contudo, em nosso estudo, foi necessário haver um profundo delineamento analítico, posto que corroboramos com Bogdan e Biklen (1994) ao afirmarem que a tendência é seguir um processo indutivo, pois eles não são, e não podem ser, recolhidos apenas para confirmar hipóteses elaboradas previamente. Ao contrário, a compreensão dos dados é construída pelo pesquisador à medida que os mesmos vão se agrupando e dando sentido ao objeto de análise. Além disso, Ponte (2006) destaca que são os estudos de cunho mais analítico os que podem proporcionar avanço mais significativo do conhecimento pelo fato de que segundo Yin (1984, apud PONTE 2006, p.119) os estudos de casos “não generalizam para um universo, ou seja, não fazem uma generalização em extensão, mas sim para a teoria, isto é, ajudam a fazer surgir novas teorias ou a confirmar ou infirmar as teorias existentes”.

Particularmente, o estudo contemplou três etapas, a saber: 1. Fase exploratória consistindo a aplicação do módulo de ensino; 2. Construção dos dados; 3. Análise dos dados. Entretanto, ao descrevermos as análises global e pontual das três avaliações escritas e posteriormente indutivamente realizarmos nossas inferências, além de verificarmos nossa tese, consequentemente contribuímos para construção de novos conhecimentos.

Com relação aos instrumentos metodológicos, consideramos que estes dependem do tipo de problema a ser estudado. Logo, para o estudo de caso que realizamos, em consonância com os objetivos da nossa investigação, fizemos uso do registro escrito (avaliação escrita) e para realizarmos a análise global da mesma, também recorremos à entrevista por permitir um maior aprofundamento das informações obtidas, complementando os dados.

Todavia, na análise global, os estudos de cada caso são de natureza qualitativa sendo que os critérios para interpretar os dados e realizar nossas inferências foram elaborados tendo como base a noção de esquema. Por sua vez, na análise pontual, os estudos de cada caso recorreram a caráter misto, ou seja, qualitativamente categorizamos todas as respostas e quantitativamente, conforme a incidência dos níveis de compreensão realizamos nossas inferências.

Por fim, Ludke e André (1986, p.49), ao discutirem sobre a análise de dados baseada na perspectiva interpretativa, consideram ser necessário entender que “a análise interpretativa não pode limitar-se ao que está explícito no material, precisa aprofundar-se para desvelar mensagens subentendidas e as dimensões contraditórias existentes”. Sendo assim, se faz necessário que o pesquisador vá além, ultrapassando a mera descrição, buscando realmente acrescentar algo à discussão já existente sobre o assunto focalizado.

Capítulo 2

REDE DE IDEIAS CONTRIBUTIVAS

O presente capítulo é destinado a apresentar as ideias que contribuem para sustentar a nossa tese. Para tanto, discorreremos acerca do que significa, segundo Skemp, compreensão relacional e compreensão instrumental, sendo que teremos como norte a sua compreensão sobre esquema.

Por sua vez, consideramos que, no âmbito da educação, para obtermos resultados satisfatórios em atividades avaliativas necessitamos de metodologias de ensino que subsidiem o ensino. Particularmente, na Educação Matemática, há tendências metodológicas que contribuem para o entendimento e a solução de problemas relacionados ao ensino de Matemática, proporcionando a efetivação de uma Educação Matemática com significado. Dentre elas, Mendes (2006) destaca seis, a saber: 1. O uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática; 2. Etnomatemática; 3. Resolução de problemas; 4. Modelagem Matemática; 5. História da Matemática; 6. Computadores e calculadoras no ensino de matemática.

É evidente a importância de cada uma das tendências metodológicas supracitadas, uma vez que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor. Em relação às características, princípios pedagógicos e modos de abordagens, Mendes (2006) destaca que cada tendência apresenta suas particularidades, cabendo ao professor analisar as possibilidades de uso de cada uma delas. Entretanto, no presente estudo, proporcionaremos uma discussão acerca da participação da História no ensino de Matemática como agente cognitivo através de atividades via redescoberta, posto que para cada conceito matemático há uma evolução histórica que nos revela uma rede de conceitos contributivos.

Por fim, posta a diversidade de conceitos contributivos inerentes à formação do conceito de quaternos pitagóricos, apresentaremos uma discussão acerca do referido conceito matemático, o que posteriormente nos subsidiará para realizar tanto uma análise global como uma análise pontual, ambas com o intuito de realizar inferências quanto ao nível de compreensão e, assim, comprovar ou não a tese que ora defendemos.

Diante do exposto, intencionamos, no presente capítulo, proporcionar uma discussão relacional, cujas ideias a serem discutidas serão conectadas através de uma rede cujas pontes conectoras são as sessões que apresentaremos a seguir.

2.1 Compreensão Relacional e Compreensão Instrumental à luz de Skemp

Em decorrência das suas investigações na Universidade de Manchester, Skemp inicialmente se deteve à distinção entre aprendizagem habitual e aprendizagem inteligente. A aprendizagem habitual, foco de muitos psicólogos anteriores a ele, corresponde à aprendizagem que pode ser verificada em animais ditos de laboratórios, pautada na memorização. Por sua vez, aprendizagem inteligente é intrínseca ao homem e significa a formação de estruturas conceituais, comunicadas e manipuladas por meio de símbolos. Sobretudo, a aprendizagem inteligente emerge como meio de destacar a devida relevância da interação entre inteligência e aprendizagem.

Para definir o que é inteligência, Skemp (1980) recorre à definição dada por Vernon (1969, apud SKEMP 1980, p. 20), a saber: “Inteligência B é a acumulação total dos planos ou esquemas mentais construídos através da interação do indivíduo com seu ambiente na medida em que sua equipe constitucional o permite”. Todavia, a Matemática é um exemplo claro de inteligência B dado às aplicações da matemática a uma infinidade de problemas inerentes aos diversos ramos do conhecimento como instrumento altamente desenvolvido para tratar com o ambiente físico. A título de exemplo, Skemp (1980) menciona os problemas de ciências naturais, de tecnologia e de comércio.

Para Skemp (1980), considerando que a aprendizagem inteligente é a aprendizagem que implica compreensão, é evidente que a aprendizagem da matemática deve ser com compreensão. Para tanto, Skemp assume o seguinte problema básico: o que é compreensão e por quais meios podemos adquiri-la?

Sobretudo, Skemp aponta que, no ensino da matemática, se faz necessário compreender o que é compreensão, dado que correntemente há dois significados para o referido termo. Segundo o autor, para muitos alunos e professores a posse de regras sem motivo, e a capacidade de usá-las, é o que eles querem dizer por compreensão. Em contrapartida, o referido autor defende que compreensão significa saber tanto o que fazer e o porquê. Para distinguir esses dois significados, Skemp faz uso do termo compreensão instrumental para o primeiro sentido e compreensão relacional para o segundo sentido.

Segundo o próprio Skemp, os termos compreensão relacional e compreensão instrumental, bem como as primeiras inferências acerca da necessidade de refletir acerca do uso devido da palavra compreensão, se devem a Stieg Mellin-Olsen, da Universidade de Bergen. A primeira vez em que Skemp publicou sobre os termos compreensão relacional e compreensão instrumental foi em 1976, em um artigo na revista *Mathematics Teaching*.

Skemp nos convida a experimentar o exercício de procurar e identificar exemplos de explicações que conduzem à compreensão instrumental (uso de regras sem razões), tanto em textos como em sala de aula. Segundo o autor, isto nos trará três benefícios, a saber: (i) Fornece evidências de quão disseminada é a abordagem instrumental; (ii) Através de exemplos repetidos nos ajuda a consolidar os dois conceitos contrastantes; (iii) É uma boa preparação para tentar formular a diferença em termos gerais entre compreensão relacional e compreensão instrumental.

O ensino que promove a compreensão instrumental envolve uma multiplicidade de regras, ou melhor, habilita o aluno em uma série de técnicas matemáticas baseada na memorização em detrimento do entendimento do que está sendo feito. Logo, se o professor fizer uma pergunta que não se encaixa perfeitamente à regra, é necessário a inserção de mais de uma regra para obter a resposta correta.

Se o que se quer é uma página de respostas corretas o ensino ideal é aquele que prioriza a compreensão instrumental. Sobretudo, na compreensão instrumental, é possível, muitas vezes, obter a resposta de certa forma mais rápida e confiável fazendo com que as recompensas sejam mais imediatas e aparentes. No entanto, se o propósito do ensino for proporcionar um entendimento do funcionamento das regras memorizadas, a compreensão instrumental se torna limitada, sendo necessário um ensino baseado na compreensão relacional, ou seja, que envolva mais conhecimento e promova um melhor entendimento do que está sendo feito.

Todavia, o ensino que prioriza a compreensão relacional demanda mais tempo e torna mais difícil a ocorrência da prendizagem. Porém, uma vez aprendido, é mais fácil de lembrar. Essa vantagem é exemplificada por Skemp pelo ensino da área do triângulo, dado que é certamente mais fácil para os alunos aprenderem que a área de um triângulo é $\frac{1}{2}$ base $\times$ altura, do que aprender porque é assim. Mas então eles têm de aprender regras distintas para os triângulos, retângulos, paralelogramos, trapézios. Contudo, no caso da área do triângulo, a compreensão relacional consiste em parte em ver tudo isso em relação à área de um retângulo.

Ainda é desejável conhecer as regras específicas para não ter que derivá-las novamente toda vez. Mas saber também como elas estão inter-relacionadas capacita recordá-las como partes de um todo unido, que é mais fácil. Logo, há mais para aprender - as conexões, bem como as regras distintas - mas o resultado, uma vez aprendido, é mais duradouro. Portanto, há menos que aprender a fazer; e, em longo prazo, o tempo necessário pode ser bem menor.

Outra vantagem é que a compreensão relacional pode ser eficaz como um fim em si mesmo. Este é um fato empírico, baseado em evidências de experimentos controlados utilizando materiais não matemáticos. A necessidade de recompensas e punições externas é bastante reduzida, fazendo o que é frequentemente chamado de motivacional - o trabalho de um professor é muito mais fácil. Segundo Skemp (1989), esta vantagem está relacionada com o fato de que esquemas relacionais são orgânicos de qualidade. Sobretudo, a satisfação do entendimento relacional, não está apenas na tentativa de entender relacionalmente novo material, mas também buscar ativamente novos materiais e explorar novas áreas, muito parecido com uma árvore que estende as suas raízes.

Um professor individual pode fazer uma escolha de ensinar, fundamentada na promoção da compreensão instrumental ou da compreensão relacional. Para tanto, se faz necessário considerar as metas alternativas de compreensão instrumental e relacional nos seus méritos e em relação a uma situação particular. Para fazer uma escolha informada deste tipo implica a consciência da distinção, e na compreensão relacional da própria matemática. Assim, Skemp evidencia quatro fatores situacionais que contribuem para a dificuldade dos professores em priorizar a compreensão relacional ao ensinar matemática, a saber: 1. O efeito retroativo dos exames; 2. Currículos sobrecarregados; 3. Dificuldade de avaliar se o sujeito compreende relacionalmente ou instrumentalmente; 4. A grande dificuldade psicológica para os professores de acomodação (reestruturação) dos seus esquemas existentes e de longa data, mesmo para a minoria que conhece a necessidade de, querer fazê-lo e ter tempo para estudar.

Particularmente, com base no terceiro fator situacional, destacado por Skemp, direcionaremos nossa investigação à tentativa de preencher essa lacuna. Com isso, na próxima sessão, considerando que o ideal é um ensino de matemática com significado, que promova a compreensão relacional, discutiremos acerca dos esquemas existentes quando o nível de compreensão é instrumental e quando o nível de compreensão é relacional, com o intuito de obtermos fundamentos que nos auxiliem em nossa investigação.

2.1.1 Estrutura do esquema e suas implicações nos níveis de compreensão

Quando uma pessoa pensa em determinado conceito, há outros conceitos que são habitualmente associados com este, posto que dois conceitos quaisquer podem ser concebidos como ligados por algum tipo de relação. Sobretudo, Skemp (1980) destaca que, para construir a compreensão de uma ideia, se faz necessário relacioná-la com outras ideias, emergindo, assim, a formação de estruturas conceituais denominadas esquemas. Todavia, considerando que certos conjuntos de ideias são organizados por várias hierarquias e/ou classificações, constituindo assim um esquema, também convém definir esquema como sendo uma rede de ideias inter-relacionadas.

Com base em Skemp, Fossa (2001), assegura que a respeito da construção de esquemas, a união de vários conceitos ultrapassa a soma de todas as partes implicando em um salto qualitativo. Sobretudo, as principais funções do esquema são integrar conhecimento existente e servir como instrumento mental para aquisição de novo conhecimento.

Sendo assim, como uma primeira aproximação podemos dizer que:

1. A compreensão de conceitos é a assimilação destes em esquemas apropriados. O esquema pode ser considerado apropriado quando permite que o sujeito atue com sucesso no seu meio.

Desse modo, até o ponto em que o esquema atende as necessidades ele é estável. Por sua vez, o surgimento de alguma novidade impulsiona a necessidade de mudança, o que requer acomodação. Piaget afirma que a novidade causa desequilíbrio sendo que o equilíbrio é conquistado novamente na acomodação por um novo esquema. Contudo, defendemos a extensão do esquema e não necessariamente a substituição.

2. A aprendizagem de novos conceitos consiste na integração de conceitos novos em esquemas já existentes, ou seja, na integração de mais um elemento na rede de ideias inter-relacionadas. Sobretudo, a rede está sempre em construção através de um processo dinâmico.

Em geral, o conceito não é formado primeiro e só depois integrado em um esquema. A formação e a integração do conceito são processos que interagem mutuamente em um processo único de aprendizagem.

Contudo, a diversificação de conceitos e as ligações existentes entre eles determinam a estrutura do esquema, podendo ela ser pobre ou rica. Em especial, a estrutura do esquema está atrelada com o nível de compreensão, sendo esquema com estrutura pobre apresentada na compreensão instrumental e esquema com estrutura rica apresentada na compreensão relacional.

Particularmente, no caso das crianças e/ou principiantes os esquemas são pobres, ou ainda, o nível de compreensão é instrumental. No entanto, dado que a compreensão instrumental é uma etapa natural na construção da compreensão relacional, ao adquirir esquemas ricos o nível de compreensão instrumental se torna insuficiente, sendo assim, estendido pelo nível de compreensão relacional. No mais, o processo que leva à compreensão faz parte de um caminho contínuo, sendo possível existir esquema intermediário, no qual a compreensão relacional está em construção.

Um bom exemplo é a atividade de resolução de problemas. O aluno que aprende a resolver certo tipo de problema por um dado método, ao se deparar com uma pequena modificação no problema, percebe que o método é inapropriado, e só obterá sucesso se for capaz de procurar outro caminho, ou melhor, se o esquema for ampliado.

Particularmente, a proposta dos PCNs (BRASIL, 1998), tem como linha estrutural levar o aluno a ampliar seus esquemas de compreensão. Sobretudo, o esquema rico, com muitos conceitos e muitas ligações, permite o desenvolvimento de outros caminhos.

Em termos de compreensão, o que ocorre quando os esquemas são ricos ou pobres há equivalência com o exemplo supracitado. Segundo Skemp (1980), na compreensão relacional, não sabendo apenas que o método funciona, mas também o porquê, possibilita relacionar o método a novos problemas. Na compreensão instrumental, necessita-se memorizar para quais problemas o método funciona e não para que, além de aprender um método diferente para cada nova classe de problemas.

A seguir discutiremos sobre três princípios que consideramos serem fortes implicadores na estrutura do esquema e, por consequência, nos níveis de compreensão, ou seja, na compreensão instrumental ou na compreensão relacional.

i. Assimilação dos conceitos

Segundo Skemp (1980), pode ser que a própria assimilação de um conceito a um determinado esquema ou constitui uma ponte com outro esquema onde o conceito já existe ou provoca a construção de uma ponte por apontar para uma relação até então despercebida, sendo que o contrário também pode acontecer.

Logo, acreditamos que na assimilação de um grande número de conceitos, o esquema é considerado rico, o que implica na compreensão relacional; caso contrário o esquema será pobre, implicando na compreensão instrumental.

ii. Inter-relações entre as ideias que compõe o esquema

As pontes entre os conceitos são mais importantes do que o número de conceitos. Sobretudo, Skemp destaca que se faz necessário a posse de um número grande de esquemas com muitas pontes entre si para que o sujeito seja capaz de enfrentar situações novas com sucesso.

Logo, quanto maior for o número de pontes entre os conceitos, mais rico será o esquema. No mais, acreditamos que o termo compreensão relacional tenha se originado levando em consideração a capacidade de conectar/relacionar os conceitos.

iii. Organização interna

Visto que é sempre possível fazer várias relações entre quaisquer dois conceitos, a quantidade delas não é tudo. Pode até ser empecilho se leva a pessoa a pensar em conceitos que não são relevantes ao problema, ou seja, há ligações entre os conceitos mas a maneira de filtrar as inúmeras ligações leva o sujeito a um caminho impróprio contendo obstáculos que não levam a lugar nenhum.

Contudo, quando o esquema é rico, as relações existentes entre os conceitos são frutíferas por permitirem o desenvolvimento de uma compreensão que faz com que o sujeito possa agir no mundo com sucesso, enfrentando as novidades de modo reflexivo. Logo, se faz necessário promover a fertilidade das pontes estabelecidas com outros esquemas, com o propósito de alcançar o nível de compreensão relacional.

Em suma, podemos inferir que no nível de compreensão instrumental os esquemas existentes apresentam estrutura pobre, compostos com poucos conceitos, poucas pontes e poucas relações frutíferas. Em contrapartida, no nível de compreensão relacional os esquemas são mais ricos, apresentando muitos conceitos, muitas pontes e muitas relações frutíferas. A seguir, um quadro comparativo (Quadro 1) para ilustrar essas inferências.

Quadro 1: Estruturas dos esquemas associados aos dois níveis de compreensão (CR e CI)[1]

ESTRUTURA POBRE ⟷ CI	ESTRUTURA RICA ⟷ CR
poucos conceitos	muitos conceitos
poucas pontes	muitas pontes
poucas relações frutíferas	muitas relações frutíferas

No que diz respeito ao esquema ser rico ou pobre, há certa relação com a ampliação ou não do mapa cognitivo. Segundo Skemp, o tipo de aprendizagem que leva à matemática instrumental consiste no conhecimento de um número crescente de planos fixos, porém limitado, pelos quais os alunos podem encontrar sua maneira particular de pontos de partida (os dados) para requeridos pontos de terminação (as respostas às perguntas). O plano lhe diz o que fazer em cada ponto de escolha, e o que tem de ser feito em seguida é determinado puramente pela situação local, por simplesmente haver um conjunto limitado de planos fixos.

Em contrapartida, o aprendizado da matemática relacional consiste na construção de uma estrutura conceitual (esquema) na qual o possuidor pode (em princípio) produzir um número significativo de planos para começar a partir de qualquer ponto de partida dentro de seu esquema para qualquer ponto de chegada, ampliando, assim, o mapa cognitivo. Skemp apresenta alguns benefícios que contribuem para defesa de que este tipo de aprendizagem é diferente em várias maneiras de aprender instrumentalmente, a saber:

1. Os meios tornam-se independentes dos fins particulares a serem alcançados.

[1] Abreviamos os termos compreensão relacional e compreensão instrumental, respectivamente por CR e CI.

2. A construção de um esquema dentro de uma determinada área do conhecimento se torna uma meta intrinsecamente satisfatória em si mesmo.

3. Quanto mais completo o esquema de um aluno, maior o seu sentimento de confiança em sua própria capacidade de encontrar novas formas de chegar lá, sem ajuda externa.

4. Um esquema nunca é completo. À medida que nossos esquemas se ampliam, nossa consciência das possibilidades é alargada. Assim, o processo muitas vezes se torna autocontínuo, e autogratificante.

Diante do exposto, em oposição ao ensino que prioriza a memória, ou seja, a manipulação de símbolos e regras de modo memorístico, emerge a aprendizagem esquemática como meio para promover a compreensão relacional. A aprendizagem esquemática é caracterizada pela prática de construção de esquemas relacionais, ou seja, esquemas onde os conceitos estão inter-relacionados. Todavia, na aprendizagem baseada na memorização a recompensa é imediata e temporária, porém, na aprendizagem esquemática a recompensa, mesmo que tardia, quando conquistada é duradoura.

Conforme o propósito do ensino, a aprendizagem memorística pode ser suficiente ou não. Na Educação Matemática são vários os exemplos que podem ilustrar tal fato. Por exemplo, se no ensino de equações, logaritmos, progressão aritmética, progressão geométrica, entre outras, é esperado que o aluno simplesmente aprenda a manipular e memorizar as regras para responder um elenco de exercícios repetitivos, a aprendizagem memorística satisfaz. No entanto, se o objetivo do ensino for fazer com que o aluno aprenda os conceitos matemáticos de modo significativo, entendendo não só o *como* mas também o *porquê* dos métodos e regras utilizadas para ensinar tais conceitos, promovendo, assim, a possibilidade de enfrentar situações novas com sucesso, a aprendizagem esquemática se torna imprescindível.

Logo, corroboramos com Skemp sobre a necessidade da elaboração de estratégias de ensino que promovam a aprendizagem esquemática com a finalidade de promover a compreensão relacional. Com isso, na próxima sessão discorreremos acerca da viabilidade do uso da História da Matemática como metodologia para auxiliar na promoção da compreensão relacional.

2.2 História da Matemática enquanto aliada na promoção da compreensão relacional

Na presente sessão, evidenciaremos o quanto a História da Matemática contribui para a promoção da compreensão relacional. Além disso, também discorreremos acerca da potencialidade pedagógica do uso da História da Matemática como fonte para ampliação do conhecimento matemático do aluno.

A ideia de que a Matemática é linear, pronta e acabada ainda é corrente. Porém, se nos detivermos ao desenvolvimento histórico da Matemática, seremos conduzidos à inferência de que o conhecimento matemático é vivo, dinâmico, sendo construído e modificado ao longo do tempo, e, por conseguinte a referida ideia é desmistificada.

Também como contribuição à desmistificação da ideia supracitada, com relação à História da Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) apresentam que através dela a Matemática é expressa como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos. Sendo assim, a nosso ver, a História da Matemática é de vital importância para entendermos a propagação do pensamento matemático em diferentes contextos culturais e, consequentemente, para entendermos o pensamento matemático difundido nos tempos de hoje.

Particularmente, a estrutura histórica e contínua do conhecimento matemático nos revela que para a composição de muitos conceitos matemáticos foi imprescindível a recorrência de conceitos matemáticos instituídos anteriormente. Sobretudo, ao considerar que quando cada indivíduo constrói novos conceitos há uma rede de conceitos já estabelecidos e que se estruturam sob a forma de esquema, Skemp (1980) denomina conceito contributivo como sendo todo conceito que se faz necessário para formar um novo conceito.

Desse modo, através das ideias direcionadas à psicologia da Matemática, é notória a contribuição de Skemp à desmistificação da ideia que enunciamos no início da presente sessão. Especialmente, Skemp (1980) destaca que

> Na aprendizagem da matemática, mesmo que tenhamos de criar todos os conceitos novamente em nossas próprias mentes, só somos aptos para fazê-los mediante o emprego dos conceitos construídos por matemáticos anteriores. (SKEMP, 1980, p. 39).

Tal evidência destaca que os conceitos do passado, trabalhosamente abstraídos e acumulados lentamente por gerações sucessivas, podem ajudar a cada novo indivíduo a formar seu próprio sistema conceitual. Sobretudo, a título de exemplo, Skemp (1980) destaca o conceito de gravidade, que fora desenvolvido por Newton, o qual necessitou das estruturas conceituais desenvolvidas por matemáticos e cientistas que o antecederam.

Particularmente, Mendes (2009), apresenta argumentos que convergem aos de Skemp (1980), ao destacar a manipulação de ideias matemáticas já estabelecidas socialmente como uma forma de buscar estabelecer novas ideias matemáticas. Na oportunidade, dentre os exemplos apresentados pelo referido autor, destaca-se a percepção de Euler com relação à utilização da trigonometria como elemento de apresentação das funções complexas.

Logo, considerando que a evolução histórica dos conceitos matemáticos nos revela diversas redes de conceitos contributivos, destacamos a viabilidade da promoção da compreensão relacional da Matemática através do uso da História da Matemática. Sobretudo, consideramos que para que a Matemática seja compreendida relacionalmente, se faz necessário saber estabelecer as relações entre os conceitos contributivos à formação do conceito a ser compreendido, relações estas que foram constituídas historicamente.

Diante das considerações supracitadas julgamos necessário nos detivermos à potencialidade pedagógica do uso da História da Matemática enquanto metodologia de ensino. Todavia, corroboramos com Mendes (2009, p.76) ao afirmar que "É prudente discutir de que maneira a história poderá ser usada como um recurso favorável à construção das noções matemáticas pelos estudantes, durante as suas atividades escolares".

Sendo assim, posta a diversidade de possibilidades de abordagem do uso da História da Matemática no ensino de Matemática, no presente estudo discorreremos acerca de duas possibilidades, as quais conforme seus respectivos objetivos, atribui à História da Matemática o papel de ser: (i) elemento motivador e (ii) agente de cognição.

Particularmente, vários autores consideram que os textos históricos exercem um papel motivador no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Sobretudo, a História como fonte de motivação para o ensino-aprendizagem da Matemática é justificada por promover o despertar do interesse do aluno em estudar o conteúdo matemático que lhe está sendo ensinado.

Entretanto, por provocar certo distanciamento do aspecto formal e rigoroso do conhecimento matemático, o poder motivador é questionado por diversos autores. Miguel e Miorim (2004), por exemplo, se contrapõem à existência de um suposto potencial motivador inerente à História, a partir de duas considerações. A primeira delas destaca que se fosse esse o caso, o ensino da própria História seria automotivador. A segunda consideração é de cunho psicológico, a qual aborda que a motivação tem caráter individual e não universal e o que é motivador para um indivíduo pode não ser para outro.

Por sua vez, Nobre e Baroni (1999), refutam a simples função de motivação atribuída à História da Matemática ao afirmarem que

> Sua amplitude extrapola o campo da motivação e engloba elementos cujas naturezas estão voltadas a uma interligação entre o conteúdo e sua atividade educacional. Essa interligação se fortalece a partir do momento que o professor de matemática tem o domínio da história do conteúdo que ele trabalha em sala de aula. (NOBRE; BARONI, 1999, p.132)

Com isso, é imprescindível ter cautela para não incorrer no erro de simplesmente assumir a História da Matemática como elemento motivador ao desenvolvimento do conteúdo, posto que a motivação não é o único fator responsável para a inserção da história no ensino da Matemática.

Particularmente, Fossa (2001), designa como Uso Ornamental quando as informações históricas são utilizadas como meros acessórios ou ornamentos através da simples acumulação de fatos. Todavia, para o referido autor, no Uso Ornamental, por apenas enfocar notas históricas, requer a delimitação do seu papel para evitar falsas expectativas e, ao mesmo tempo, aproveitar ao máximo tudo que seu o uso nos tem a oferecer.

Com isso, em vez de utilizar a História da Matemática apenas como elemento motivador, se faz necessário considerar a História da Matemática como um instrumento que pode promover significado e compreensão no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, e, consequentemente, contribuir para ampliação do próprio conhecimento matemático. Diante disso, em especial, norteados pela função geradora de conhecimento matemático atribuído à História da Matemática, diversos autores apontam o potencial pedagógico existente na relação entre a História da Matemática, a cognição matemática e a aprendizagem matemática. Dentre esses autores destacamos Fossa (2008) e Mendes (2009), os quais nos apresentam uma discussão rica acerca do uso da História da Matemática como fonte para ampliação do conhecimento matemático, atuando, assim, como agente de cognição. Segundo Fossa (2008),

> O ser humano aprende na medida em que ele constrói, de forma ativa, o seu próprio conhecimento e, portanto, as metodologias mais eficazes de ensino serão as que estão de acordo com a natureza dos processos cognitivos humanos. (FOSSA, 2008, p.11)

Todavia, a compreensão de conceitos matemáticos promovida pelo uso da História da Matemática quando utilizada enquanto agente de cognição, por estarem em consonância com os processos cognitivos, é uma compreensão que ocorre através de relações entre conceitos contributivos que foram constituídos historicamente. Sendo assim, há a construção de conhecimento via compreensão relacional.

Para tanto, considerando a potencialidade do uso de atividades como recurso para a aprendizagem da Matemática, Fossa (2008) e Mendes (2009) discutem com muita propriedade acerca do uso de atividades centradas na investigação histórica. Particularmente, Mendes (2009) destaca que

> A investigação histórica como ação empreendida em sala de aula pode implicar em aprendizagem com significado e materializa-se por meio de atividades centradas no desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos. (MENDES, 2009, p.14)

Sendo assim, posto que a investigação histórica pode ser considerada como alternativa pedagógica para a concretização de um ensino de Matemática com significado, devemos destacar a potencialidade da proposta de uso didático da história da Matemática tendo como suporte a investigação histórica via atividades.

Ainda acerca das atividades investigatórias, Mendes (2009) afirma que as mesmas se configuram como sendo

> [...] o encaminhamento didático dado ao processo de geração de conhecimento matemático, que provoca a criatividade e o espírito desafiador do aluno para encontrar respostas às suas indagações cognitivas e construir suas ideias sobre o que pretende aprender (MENDES, 2009, p. 7)

Nesse contexto, as atividades históricas investigatórias assumem a natureza da redescoberta inerente às atividades construtivistas.

Sobretudo, Fossa (2008) aponta que a consonância com o preceito construtivista existente nas atividades estruturadas via redescoberta promovidas através da investigação histórica se deve ao fato de que tais atividades levam o aluno a construir estruturas matemáticas por si mesmo, e ainda elucida que o termo 'redescoberta' é devido ao fato de que os alunos são conduzidos a redescobrir estruturas matemáticas já conhecidas pela comunidade matemática.

Ainda sobre o caráter investigativo próprio das atividades históricas estruturadas via redescoberta, Fossa (2008) aponta que ao participar dessas atividades o aluno

> [...] está fazendo pesquisa sobre a matemática, pois está investigando – geralmente num esforço colaborativo com seus colegas – questões problemáticas sobre as quais não sabe a resposta, nem o modo correto de proceder; são exatamente esses aspectos que serão descobertos nas atividades. (FOSSA, 2008, p.11)

Por sua vez, Mendes (2009), ao discorrer acerca da concepção de redescoberta, afirma que a mesma

> [...] baseia-se no pressuposto de que a aprendizagem do aluno torna-se plena, significativa e sólida na medida em que ele é provocado intelectualmente, o que significa despertar sua curiosidade, levando-o em busca de (re) construção da Matemática já elaborada historicamente. (MENDES, 2009, p.15)

Desse modo, é possível conduzir o aprendiz a uma construção constante dos conceitos matemáticos presentes em cada atividade.

Diante do exposto, destacamos que o caráter investigatório que é estimulado pela utilização da história no ensino de Matemática é de grande importância para o professor, dada a complexidade da prática docente. Todavia, é essencial que o professor dê importância à devida estruturação das atividades, as quais, segundo Mendes (2009), devem ter características de continuidade, mantendo conexão entre si, de modo que, ao final, se processe a construção da aprendizagem prevista por esse tipo de abordagem didática.

Ainda sobre a prática docente, corroboramos com Miguel e Miorim (2004) ao destacarem que ao se utilizar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática que visa à compreensão e a significação, é necessário levantar e discutir os porquês, o que, segundo os referidos autores são as “razões para a aceitação de certos fatos, raciocínios e procedimentos por parte do estudante”. Jones (1969, apud MIGUEL; MIORIM, 2004) aponta que os porquês cronológicos, os porquês lógicos e os porquês pedagógicos, devem ser levados em consideração por todos os que se propõem a ensinar Matemática, sendo que os porquês cronológicos se justificam por razões de cunhos histórico, cultural, casual e convencional, os porquês lógicos se justificam em decorrência lógica de proposições previamente aceitas e os porquês pedagógicos se justificam por razões de ordem pedagógica.

Contudo, além das vantagens, também se faz necessário considerar alguns empecilhos ao uso didático da História da Matemática. Miguel e Miorim (2004) destacam a ausência de literatura adequada, a natureza imprópria da literatura disponível, a história como um fato complicador e a ausência do sentido de progresso histórico. Entretanto há outros, tais como a questão de cunho filosófico que envolve a ideia de que História não é Matemática, a falta de destreza de habilidade do professor e também o fato de haver estudantes que não gostam de História e, por conseguinte, de História da Matemática. Entretanto, Miguel e Miorim (2004) ressaltam que esses argumentos não devem ser considerados como enfraquecedores e sim pontos de partida para estimular o desenvolvimento de novos estudos e pesquisas, na tentativa de sanar tais dificuldades.

Conforme discutimos na presente sessão, uma alternativa para utilizar a História da Matemática como uma ferramenta capaz de desenvolver um ensino de Matemática compreensivo, significativo e dinâmico para o aluno é quando se considera o potencial pedagógico da História da Matemática enquanto agente cognitivo. Ainda, utilizando a História da Matemática como agente cognitivo através de atividades investigativas via redescoberta, o ensino de Matemática se torna mais agradável através da promoção da compreensão via relações instituídas historicamente entre conceitos contributivos, corroborando com o objetivo maior do ensino que é a promoção da compreensão relacional da Matemática.

2.3 Quaternos Pitagóricos: uma importante ferramenta pedagógica para relacionar o conceito de distância entre dois pontos, em três dimensões, e o Teorema de Pitágoras

Um dos mais importantes e famosos Teoremas da Matemática é o Teorema de Pitágoras. Sobretudo, não só matemáticos se preocuparam em demonstrá-lo, como, por exemplo, as demonstrações oferecidas por Leonardo da Vinci (1452-1519) e o pelo ex-presidente americano James Abram Garfield (1831-1881).

Como prova do reconhecimento não só da fama, como também da importância do Teorema de Pitágoras, em 1955, a Grécia emitiu quatro selos (Fig. 1) para comemorar o 2500º aniversário de Pitágoras, sendo que dois deles correspondem a uma estátua de Pitágoras, um a ilha de Samos, onde supostamente nasceu Pitágoras, e outro ilustra o Teorema de Pitágoras.

Figura 1 - Selos emitidos pela Grécia[2]

[2] Fonte: http://esdica.com.sapo.pt/pagnet/curiosidades.htm

No mais, em 1971, na Nicarágua, quando lançada uma série de selos postais para homenagear as dez fórmulas matemáticas mais importantes do mundo, um dos selos (Fig. 2) fora dedicado ao Teorema de Pitágoras.

Figura 2 - Selo emitida pela Nicarágua[3]

Particularmente, com relação à homenagem realizada pela Nicarágua, Eves (1997) afirma que

> Deve ser extremamente gratificante para cientistas e matemáticos ver suas fórmulas assim homenageadas, pois essas fórmulas certamente contribuíram muito mais para o desenvolvimento da humanidade do que os feitos de reis e generais que muitas vezes se estampam em selos postais. (EVES,1997, p. 347)

Indicativo do quanto à Matemática e a ciência são importantes para o desenvolvimento da sociedade.

Especialmente, podemos citar dois importantes exemplos em que o Teorema de Pitágoras serviu como fonte inspiradora. O primeiro deles diz respeito ao chamado Último Teorema de Fermat, segundo o qual se questiona sobre a possibilidade de existir um terno de números inteiros (a, b, c) tal que $a^n+b^n = c^n$, sendo n maior ou igual a 3.

O segundo exemplo diz respeito ao fato de que assim como outros teoremas da Geometria Plana, o Teorema de Pitágoras, em sua forma pura, não é aplicável na superfície esférica, porém, foi o ponto de partida para entendimento do universo. Sobretudo, ilustres personalidades como Gauss, Riemann e Einstein iniciaram importantes estudos envolvendo

[3] Fontes: http://www.arrakis.es/~mcj/sellospitagoras.htm http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2009/10/as-10-formulas-matematicas-que-mudaram.html

geometrias não euclidianas, sendo que um fato importante era fazer uma comparação dos resultados válidos na geometria euclidiana e dos resultados válidos na geometria não euclidiana, no qual um desses resultados era o Teorema de Pitágoras.

Gauss deu uma visão matemática ao estudo da superfície redonda da Terra, tendo como objetivo verificar como o espaço na Terra era diferente da superfície de um plano. Para isso, ele mediu triângulos desenhados na Terra. Por sua vez, Riemann descobriu princípios de espaço conhecidos como Geometria de Riemann, depois de estudar com Gauss.

Particularmente, a teoria da relatividade desenvolvida por Einstein consiste em descobrir o que é que curva o universo. Para tanto, sua teoria física do espaço curvo começou com a matemática de Gauss e de Riemann. Todavia, o astrônomo Robert Kirshner, professor da Universidade de Harvard, no documentário *O Legado de Pitágoras – Desafiando Pitágoras*, veiculado pela TV ESCOLA, destaca que foi Einstein que desenvolveu o conceito de espaço que começou com um triângulo numa superfície plana.

No documentário supracitado, Choe Jaigyong, professor do Instituto Coreano de Estudos Avançados, enfatiza que agora a raça humana olha o Cosmos, contudo, sempre que olharmos para o universo devemos nos lembrar humildemente que foi um simples triângulo que desvendou os segredos do nosso planeta e daquilo além dele. Sobretudo, como forma de destacar que é fácil ver que a sabedoria encontrada nas civilizações que se desenvolveram no último milênio começou com os triângulos e que através desses triângulos encontramos novos espaços e um mundo maior, Choe Jaigyong afirma que

> Usamos termos na Geometria como distância, comprimento, volume e ângulos. Todos esses são conceitos para medir o espaço. E o Teorema de Pitágoras é o ponto inicial de todos eles. Através desse Teorema podemos determinar comprimento e tamanho, calcular volume e medir ângulos. Mesmo na Geometria não-Euclidiana precisamos usar o Teorema de Pitágoras para definir os conceitos de medida. O Teorema de Pitágoras é o ponto de partida para todos os espaços (Transcrição nossa da fala de Choe Jaigyong contida no documentário)

Forte indício de que a Matemática dos triângulos e o Teorema de Pitágoras foram as ferramentas essenciais para o entendimento do espaço em que vivemos.

Em especial, no âmbito da História da Matemática, ao definir que um fato histórico da matemática é digno de memória quando exerce ou exerceu na sociedade uma função desencadeadora de uma série de acontecimentos matemáticos úteis à humanidade e que ainda podem gerar muito mais, Mendes (2009) afirma que o Teorema de Pitágoras é um bom exemplo de um fato memorável, dado que

> [...] a partir de sua elaboração desencadeou-se o estudo da distância, levando-se a criação do sistema de coordenadas, até a elaboração da geometria analítica, o que nos conduziu ao cálculo diferencial, provocando assim finalmente o aparecimento da Análise, entre outros. (MENDES, 2009, p.72)

Em suma, sua importância fundamental se deve a sua relação com o conceito de distância, o que o torna um importante instrumento matemático para a investigação do mundo.

Diante do exposto, corroboramos com Silva e Fossa (no prelo) ao afirmar que o Teorema de Pitágoras é um dos mais importantes assuntos da Matemática escolar. Contudo, no âmbito do ensino, embora os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) apontem a necessidade de verificações experimentais, aplicações e demonstração do Teorema de Pitágoras, habitualmente, no ensino se prioriza a compreensão instrumental, ou seja, a simples manipulação de fórmulas sem significado. A abordagem do Teorema de Pitágoras é simplesmente a de afirmar que as medidas dos lados de um triângulo retângulo, ou seja, a, b, c, com c sendo a hipotenusa, são relacionados pela fórmula $a^2+b^2 = c^2$.

Todavia, diversas pesquisam evidenciam a deficiência existente no ensino desse conceito. Almouloud e Bastian (2003), por exemplo, enfatizam a grande dificuldade dos alunos no que se refere à aplicação do Teorema de Pitágoras como ferramenta na resolução de problemas, enquanto Lorenzoni e Silva (2002, p. 117) destacam que os livros didáticos, em geral, “apresentam o teorema de Pitágoras numa visão muito limitada e não exploram as suas potencialidades, tanto históricas quanto de aplicações, sendo que as demonstrações, habitualmente são algébricas”. Por sua vez, Silva (2009) indica que a mecanização do ensino do referido teorema, desprovida do desenvolvimento histórico e da construção significativa, contribui para com a deficiência no ensino do mesmo.

Particularmente, Silva e Fossa (no prelo) destacam que a abordagem formalística do Teorema de Pitágoras, puramente algébrica e mecânica, pode contribuir para que sua importância fundamental para o embasamento do conceito de distância não seja aprendida pelo aluno. No entanto, há, evidentemente, várias maneiras de superar o referido problema, entre as quais uma delas, é, na formação inicial de professores, destacar a relação do Teorema de Pitágoras com o conceito de distância entre dois pontos, não só em duas dimensões, mas também em três dimensões.

Em duas dimensões, a distância *d* entre os pontos A e B é a medida do segmento AB (Fig. 3). Como o triângulo destacado é retângulo, posto que a distância *d* é a hipotenusa do referido triângulo, aplicando o Teorema de Pitágoras temos: $d = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$.

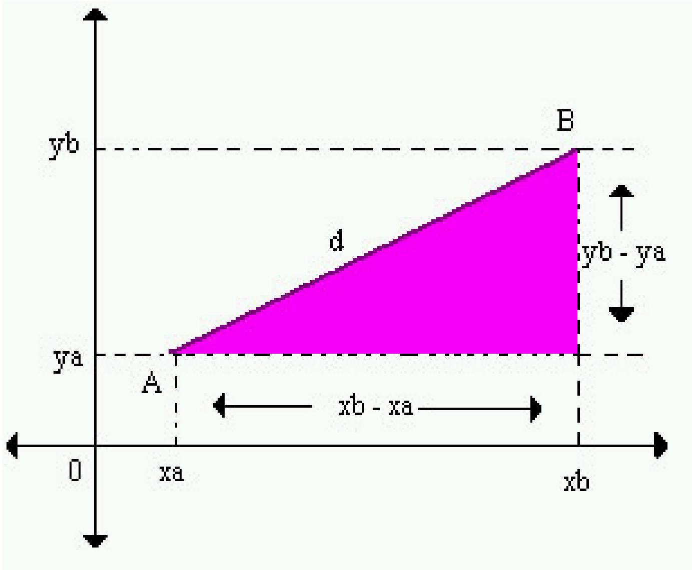


Figura 3 - Distância entre dois pontos em duas dimensões.

Por sua vez, o processo de atribuir quatro valores que satisfazem o Teorema de Pitágoras nos conduz a noção de distância, dado que ao calcularmos a distância de dois pontos (G e E) em três dimensões verificamos que o Teorema de Pitágoras se estende naturalmente a esse espaço ao considerarmos um paralelepípedo retângulo e sua diagonal (Fig. 4). Todavia, é válido ressaltar que mesmo nesta situação o Teorema de Pitágoras continua em duas dimensões, pois os pontos que verificam as condições do Teorema estão em um mesmo plano determinado pelos pontos AGE onde A é vértice do paralelepípedo.

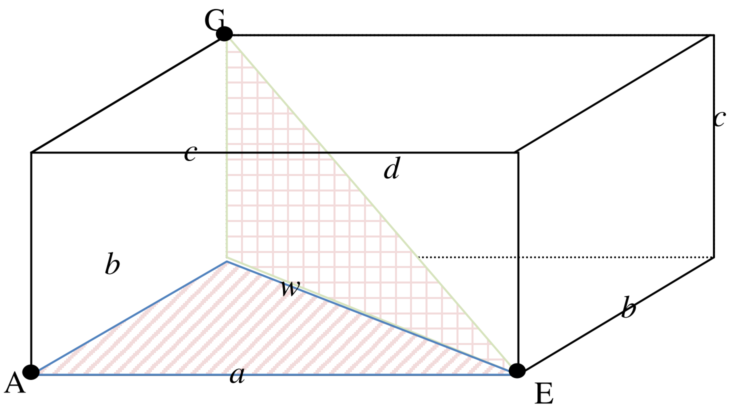


Figura 4 - Distância entre dois pontos em três dimensões

Conforme podemos verificar (Fig. 4), a distância entre os pontos G e E, ambos contidos em dois vértices opostos do prisma ilustrado, coincide com a diagonal d do prisma. Por sua vez, aplicando o Teorema de Pitágoras d^2 pode ser expresso como sendo c^2+w^2, dado que d corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são c (altura do prisma) e w (diagonal da base do prisma). Como w corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são b (largura do prisma) e a (comprimento do prisma), w^2 pode ser expresso por b^2+a^2. Logo, temos que $a^2+b^2+c^2 = d^2$.

Por consequência, a relação supracitada remete ao estudo dos quaternos pitagóricos, assim denominado em analogia aos ternos pitagóricos, como sendo o conjunto de quatro números inteiros que satisfazem o Teorema de Pitágoras, sendo expresso por (a, b, c, d), partindo da relação $a^2+b^2+c^2 = d^2$. Por sua vez, d é denominado número diagonal.

Particularmente, a obra intitulada *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers* de autoria de Bahier (1916), apontada por Silva (2009) como relevante para a Educação Matemática, devido sua completude, originalidade e o resgate histórico da Teoria dos Triângulos Retângulos em Números Inteiros, destina um capítulo para realizar o estudo da equação indeterminada $a^2+b^2+c^2 = d^2$. Bahier (1916) destaca que investigar as soluções em números inteiros da referida equação é tão importante quanto investigar as soluções em números inteiros da equação indeterminada a dois termos, $a^2+b^2 = c^2$, e de suas propriedades.

Não obstante, Bahier (1916) enfatiza que é fácil de estabelecer que a um valor qualquer tomado como o número a sempre corresponderá um número ilimitado de grupos de valores para b, c e por consequência d. Sobretudo, em $a^2+b^2+c^2 = d^2$, pelo menos dois dos três números a, b, c são sempre pares, posto que

1º a, b e c não podem ser ímpares todos os três.

Em outros termos, a soma dos quadrados de três números ímpares jamais pode ser um quadrado.

Com efeito, o quadrado de todo número ímpar é da forma $8p+1$. Portanto, a soma de três números quadrados dessa forma é um número ímpar da forma $8p+3$, que jamais pode ser quadrado.

2º a e b, ambos, não podem ser ímpares, mesmo se c for par.

Com efeito, se a e b fossem ímpares, a soma a^2+b^2 seria um número simplesmente par, ou seja, não múltiplo de 4. Como c^2 é múltiplo de 4, a soma $a^2+b^2+c^2$ seria um número simplesmente par, e por consequência, jamais poderia ser o quadrado de um número inteiro par d.

Particularmente, por analogia com as relações em dois termos, Bahier (1916) define relação primitiva ou irredutível como sendo toda relação em três termos na qual todos os três números do primeiro membro a, b, c, não têm um mesmo divisor comum. No mais, notadamente, Bahier (1916) nos apresenta alguns métodos para obter soluções em números inteiros da equação $a^2+b^2+c^2 = d^2$, obtidos quando o número a, é dado. A seguir, descreveremos trê métodos apresentados por Bahier (1916).

1º MÉTODO: $a+b = d \rightarrow (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = d^2 \rightarrow 2ab = c^2$.

a é um número inteiro qualquer → o valor de b depende que o produto $a\times 2b$ seja um quadrado.

Se $a = 1 \rightarrow 2b = c^2$

Se n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $b = 2n^2$.

Logo: $c = 2n$ e $d = 1+2n^2$.

Quaterno pitagórico correspondente: $(1, 2n^2, 2n, 1+2n^2)$

Se $a = 2 \rightarrow 4b = c^2$.

Se n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $b = (2n+1)^2$.

Logo: $c = 2(2n+1)$ e $d = 2+(2n+1)^2$

Quaterno pitagórico correspondente: $[2, (2n+1)^2, 2(2n+1), 2+(2n+1)^2]$

Se $a> 2$ → Todas as outras soluções possíveis se reduzem a um dos casos precedentes.

Em $a^2+b^2 +c^2 = d^2$, todos os três números a, b, c não podem ser iguais, mas dois deles podem ser iguais.

Caso particular: $b = c = 2\text{a} \rightarrow d = 3a$

Quaterno pitagórico correspondente: $(a, 2a, 2a, 3a)$

2º MÉTODO: Identidade (1): $m = 2n+1 = (n+1)^2-n^2$ → Todo número ímpar é a diferença dos quadrados de dois números inteiros consecutivos.

Se n for ímpar → m será da forma $4p+3$

Se n for par → m será da forma $4p+1$

Todo número primo da forma $4p+1$ e, também, todo número composto ímpar, que só admite como fatores primos números da forma $4p+1$, é uma soma de dois quadrados.

Se m satisfaz essa condição → $m = a^2+b^2$

Comparando $m = a^2+b^2$ com (1), temos:

$m = 2n+1 = (n+1)^2-n^2$

$(n+1)^2-n^2 = a^2+b^2 \rightarrow a^2+b^2+n^2 = (n+1)^2$

Quaterno pitagórico correspondente: $(a, b, n, n+1)$

O número n e um dos dois números a ou b são pares.

3º MÉTODO: a e de b são os dois catetos de um triângulo retângulo em números inteiros e γ é a hipotenusa. Tem-se, portanto (2) $a^2+b^2 = \gamma^2$.

Todos os números γ assim considerados figuram como valores de um dos catetos em um ou vários triângulos retângulos em números inteiros.

Com isso, podemos fazer (3) $\gamma^2+c^2 = d^2$ como sendo um desses triângulos e a partir de (2) e (3) temos (4) $a^2+b^2+c^2 = d^2$.

Particularmente, no âmbito da Educação Matemática, corroboramos com Skemp (1980) quando o mesmo afirma que antes que tentemos comunicar um novo conceito devemos encontrar quais são seus conceitos contributivos, e, por consequência se torna importante conhecer o diagrama esquemático relacionado aos conceitos matemáticos a serem ensinados.

Com isso, construímos o diagrama esquemático relacionado aos quaternos pitagóricos conceito matemático em foco, considerando dois ramos da matemática que contribuem para formação deste conceito, conforme exposto a seguir (Fig. 5).

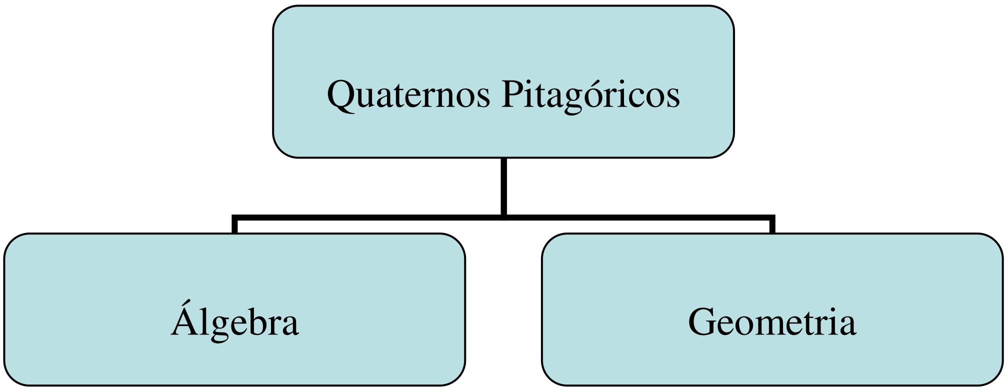


Figura 5: Relação entre Álgebra e Geometria

Expandindo os dois grandes blocos, Álgebra e Geometria, obtemos uma diversidade de conceitos contributivos, conforme ilustrado a seguir (Quadro 2).

Quadro2: Diagrama Esquemático dos Quaternos Pitagóricos

QUATERNOS PITAGÓRICOS	
ÁLGEBRA	GEOMETRIA
Teorema de Pitágoras	
Ternos Pitagóricos	

o números inteiros positivos o paridades o número composto o números simplesmente pares o números primos o quadrado perfeito o equação o incógnitas o produtos notáveis o relação $a^2 + b^2 = c^2$ o relação primitiva o relação secundária o máximo divisor comum o múltiplos o relação $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$ o número gerador x o número gerador y o equação indeterminada $a^2+b^2+c^2 = d^2$ o número diagonal d o relação irredutível	o triângulo retângulo o cateto o hipotenusa o ângulo o ponto o reta o tridimensionalidade o bidimensionalidade o distância entre dois pontos o prisma reto de base retangular o diagonal o plano cartesiano o par ordenado

Notoriamente, os quaternos pitagóricos corresponde à extensão dos ternos pitagóricos, que por sua vez, conforme destacado por Silva (2009) é uma importante ferramenta pedagógica e histórica para o ensino do Teorema de Pitágoras. No mais, também podemos verificar a completude dos quaternos pitagóricos através da riqueza de conexões entre diversos conceitos, ou seja, pontes frutíferas entre diversos conceitos.

Portanto, mesmo que os quaternos pitagóricos e a distância entre dois pontos em três dimensões não compunham diretamente o elenco de conteúdos do currículo escolar, e por consequência dos livros didáticos, no ensino, os referidos conteúdos podem ser expostos quando for ensinado o cálculo da diagonal do paralelepípedo retângulo. Todavia, sejam na exposição do conteúdo ou nos exercícios propostos, os livros didáticos, ao remeterem ao cálculo da diagonal do paralelepípedo retângulo, fazem pouca relação entre a Álgebra e a Geometria. Todavia, ao analisarmos o conteúdo apresentado por três livros didáticos distintos, Paiva (2005) e Giovanni et al. (1994) do Ensino Médio, e Bigode (2000) do Ensino

Fundamental, constatamos que o Teorema de Pitágoras é mencionado, porém não há nenhuma menção ao conceito de distância entre dois pontos em três dimensões.

Sendo assim, ressaltamos que o ensino do Teorema de Pitágoras não deve se limitar apenas aos procedimentos algébricos, mas sim também aos geométricos, especialmente considerando sua relação com o conceito de distância em duas e três dimensões. Sobretudo, acreditamos que o Teorema de Pitágoras enriquece o ensino de Geometria, dado que o referido teorema abre caminho para esta área ao ser o ente básico da noção de distância no espaço euclidiano.

Diante do exposto, na esfera da Formação Inicial de Professores, o estudo dos quaternos pitagóricos, ao fazer com que o futuro professor saiba estabelecer valores diferentes dos apresentados nos livros didáticos quando trata sobre o cálculo da diagonal do paralelepípedo retângulo, evidencia o fato que devido à necessidade de responder adequadamente os diversos desafios que serão levantados no decorrer da sua prática docente, o futuro professor necessita de um conhecimento mais amplo, aquém do que irá ensinar.

Capítulo 3

A COMPREENSÃO RELACIONAL E A COMPREENSÃO INSTRUMENTAL NO ÂMBITO DA AVALIAÇÃO

Com o propósito de sabermos como as categorias de compreensão instrumental e compreensão relacional difundidas por Skemp são utilizadas como instrumento de avaliação, julgamos necessário analisar alguns trabalhos acadêmicos em que isso ocorre. Para tanto, nos detemos a analisar a utilização de tais categorias enquanto instrumento avaliativo em todas as dissertações e teses defendidas nos dois programas de pós- graduação da UFRN que produzem na área de Educação Matemática, são eles: Programa de Pós Graduação em Educação (PPGEd) e Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECNM).

Em todas as produções analisadas, os autores seguem o seguinte roteiro: discussão teórica sobre compreensão instrumental e compreensão relacional à luz de Skemp, apresentação de um módulo de ensino, aplicação do módulo de ensino e análise das respostas apresentadas pelos sujeitos das pesquisas com base nas categorias de compreensão instrumental e compreensão relacional difundidas por Skemp.

Analisamos doze produções, cujos links diretos que dão acesso as mesmas encontram-se em anexo (Apêndice A), sendo cinco teses e três dissertações defendidas pelo PPGEd e quatro dissertações pelo PPGECNM nos períodos entre 1998 e 2010. A primeira produção foi a tese defendida por Rodrigues Neto (1998) e a última foi a dissertação defendida por Sousa (2010) ambas sob orientação do professor John Fossa. No que diz respeito às obras que foram utilizadas como referência para discutir acerca dos níveis de compreensão instrumental e compreensão relacional, apenas Bezerra (2008) utilizou somente Skemp como referência sendo que os demais além de Skemp também utilizaram Fossa (1996) no caso de Rodrigues Neto (1998) e Rêgo (2000); e Fossa (2001) nos demais casos, para embasar a discussão teórica. No mais, com relação às obras de Skemp, somente Rodrigues Neto (1998), Rêgo (2000), Silva (2006) e Dias (2009) não se limitaram apenas obra de 1980.

Conforme a análise que realizamos, notamos que em todos os casos ao avaliar se o nível de compreensão alcançado pelos sujeitos da pesquisa foi relacional ou instrumental, seus respectivos autores realizaram uma análise pontual, ou seja, se limitaram a analisar questão por questão do módulo de ensino sem levar em consideração a conexão existente entre elas. A seguir um resumo (Quadro 3) das produções que analisamos.

Quadro 3: Teses e dissertações analisadas

Autor, ano	T:tese D: dissertação	Programa	Obra (s) utilizada (s)	AP análise pontual AG: análise global
Rodrigues Neto, 1998	T	PPGEd	Skemp (1978, 1980) Fossa (1996)	AP
Rêgo, 2000	T	PPGEd	Skemp (1978, 1980) Fossa (1996)	AP
Gutierre, 2003	D	PPGEd	Skemp (1980) Fossa (2001)	AP
Azevedo, 2005	D	PPGEd	Skemp (1980) Fossa (2001)	AP
Rodrigues, 2006	D	PPGECNM	Skemp (1980) Fossa (2001)	AP
Souza, 2006	T	PPGEd	Skemp (1980) Fossa (2001)	AP
Silva, 2006	T	PPGEd	Skemp (1978,1979, 1980, 1981) Fossa (2001)	AP
Bezerra, 2008	D	PPGECNM	Skemp (1980)	AP
Dias, 2009	D	PPGEd	Skemp (1980, 1976) Fossa (2001)	AP
Azevedo, 2009	T	PPGEd	Skemp (1980) Fossa (2001)	AP
Silva, 2009	D	PPGECNM	Skemp (1980) Fossa (2001)	AP
Sousa, 2010	D	PPGECNM	Skemp (1980) Fossa (2001)	AP

Nesse contexto, as contribuições teóricas de Fossa sobre compreensão instrumental e compreensão relacional, consideradas como categorias de instrumento avaliativo, não se limitam apenas a obra publicada em 2001, mas também sob forma de orientação ou exame das produções defendidas na UFRN. Sendo assim, através de diálogos com o referido autor surgiu a tese que ora nos propomos investigar: para inferir quanto aos níveis de compreensão relacional ou instrumental, destacados pelo psicólogo da matemática Richard Skemp, a análise global é mais apropriada que a pontual. Sobretudo, acreditamos que, em especial, dois equívocos contribuem com a análise pontual apresentada nos trabalhos acadêmicos que analisamos, a saber:

1. Em muitos casos, na discussão teórica que antecede a análise dos dados, há uma ligeira discussão sobre esquema à luz de Skemp, sendo que, em geral, os autores apresentam, sem aprofundamento, o fato de que na compreensão relacional os esquemas são mais ricos que na compreensão instrumental. Contudo, ao analisar as respostas apresentadas pelos sujeitos das pesquisas, tal discussão não se mostra evidente.

2. Os critérios específicos para diferenciar compreensão instrumental e compreensão relacional no campo de estudo que é apresentado, não são suficientes para inferir o nível de compreensão. Todavia, essa diferenciação se faz necessária dado que compreensão relacional e compreensão instrumental são pontos opostos de um único processo, ou seja, não há linha divisória sendo que uma (compreensão instrumental) é uma mudança gradual para outra (compreensão relacional) cujo salto é qualitativo e não quantitativo.

Particularmente, Azevedo (2009) foi a autora que se mostrou mais criteriosa ao analisar os dados. No mais, em muitos dos trabalhos analisados seus autores propugnam que internalização e automatização influem no nível de compreensão. A internalização independe de haver compreensão instrumental ou compreensão relacional, que, por sua vez, dependem dos esquemas existentes. É frequentemente útil internalizar para ficar livre para fazer outras coisas conscientemente. Mas, compreensão relacional permite ao sujeito recorrer à consciência o que foi internalizado sempre que necessário. Assim, a tabuada de multiplicação é automatizada, mas para decidir se, por exemplo, *noves fora* sempre funciona, pode ser necessário refletir sobre o processo de multiplicação, atividade difícil para quem a compreendeu instrumentalmente, mas não para quem a compreendeu relacionalmente.

Muitas vezes o caso da troca de marcha de um automóvel é utilizada para exemplificar a influência da internalização e da automatização no nível de compreensão. No entanto, esse é um mau exemplo porque a questão não envolve internalização ao ponto de ser automático, sendo que o ponto crucial é se o esquema é pobre ou rico. Assim, é possível o sujeito agir instrumentalmente mesmo compreendendo relacionalmente como também é possível agir automaticamente compreendendo relacionalmente, sendo que, a ação instrumental é mecânica e automática ocorrendo a utilização de um esquema pobre na dada situação.

No que diz respeito à avaliação, seu propósito é determinar se a pessoa detém compreensão instrumental ou relacional, ou seja, quer saber algo sobre a própria constituição mental da pessoa (esquema). No entanto, qualquer avaliação só consegue determinar se a pessoa está ou não agindo na situação da avaliação de forma instrumental ou relacional. Assim, a consecução da proposta é sempre uma inferência. Com isso, levando em consideração que agir envolve interação com o meio e que compreender envolve estrutura mental, para realizar as devidas inferências, a avaliação deve ser bem elaborada e norteada pela ideia de que para avaliar a compreensão só é possível através das suas ações.

Ainda sobre a avaliação, nos posicionamos com base na postura construtivista. Nesse sentido, Fossa (1998) argumenta que, do ponto de vista epistemológico, o objetivo do construtivismo, é fazer com que o aluno realize certos tipos de construções conceituais. No entanto, o referido autor argumenta que dada a subjetividade dessas construções, em que o professor tem apenas o conhecimento indireto sobre as construções do aluno, "o professor pode apenas desenvolver uma teoria sobre as construções de cada aluno" (p. 32). Sendo assim, o objetivo da avaliação é verificar os graus de adequação da teoria adotada pelo professor para alcançar o desenvolvimento cognitivo de cada aluno.

Diante do exposto, apontamos que para teorizar a construção sobre a aprendizagem de cada aluno nos deteremos na distinção dada por Skemp à compreensão relacional e à compreensão instrumental, com base no esquema de cada aluno. Sobretudo, conforme destacamos anteriormente, a maneira em que vários conceitos são relacionados pelo sujeito epistemológico implica em um dos dois níveis de compreensão apontados por Skemp: compreensão instrumental ou compreensão relacional.

Logo, na avaliação, considerando que toda teoria consiste na explicação de um conceito em termos de outros conceitos e não de conceitos isolados, para saber se o nível de compreensão alcançado é ou não relacional, a análise a ser realizada deve ser global. Sobretudo, deve ser levada em consideração a compreensão de todos os conceitos que estão inter-relacionados na rede. No mais, a promoção da compreensão relacional ocorre através da construção de esquemas relacionais, ou seja, esquemas onde os conceitos estão inter-relacionados.

Em suma, no âmbito da avaliação, acreditamos que dois princípios primordiais devem ser considerados, a saber: o número de conceitos e a quantidade de conexões existentes entre vários conceitos. Sendo que, para compreender relacionalmente, faz-se necessário haver conexões frutíferas entre vários conceitos, ou seja, esquemas ricos. No mais, corroboramos com Skemp (1989) ao afirmar que ideias necessárias para compreender um tema em particular revelam-se fundamentais para a compreensão de muitos outros temas também. Porém, muitas vezes seus benefícios potenciais são frequentemente perdidos, sendo ensinados como tópicos separados, ao invés de conceitos fundamentais pelos quais áreas inteiras da Matemática podem ser inter-relacionadas. Sobretudo, a abordagem fragmentada, possivelmente, se justifica pelos problemas relacionados à Formação Inicial a qual não proporciona aos futuros professores essa visão em rede.

Diante do exposto, considerando que a construção de esquemas relacionais, ou seja, esquemas nos quais os conceitos estão inter-relacionados, é inerente da compreensão relacional, com o propósito de exemplificar que os níveis de compreensão instrumental e relacional são detectados de modo mais apropriado através da análise global do que através da análise pontual, na próxima sessão nos deteremos ao caso dos quaternos pitagóricos. Todavia, acreditamos que o referido conceito configura como sendo um ótimo exemplo para analisar se houve compreensão relacional ou compreensão instrumental, em termos globais, pelo fato de que o esquema relacionado aos quaternos pitagóricos é uma extensão do esquema dos ternos pitagóricos, ou seja, um esquema ampliado e mais rico com pontes frutíferas entre vários conceitos, ou melhor, inter-relações entre diversos conceitos.

Capítulo 4

CONSTRUÇÃO DOS DADOS PARA REALIZAR A ANÁLISE GLOBAL E A ANÁLISE PONTUAL DOS DADOS

O esquema relacionado aos quaternos pitagóricos é uma extensão do esquema dos ternos pitagóricos, ou seja, um esquema ampliado e mais rico com pontes frutíferas entre vários conceitos, ou melhor, inter-relações entre diversos conceitos. Logo, considerando que a construção de esquemas relacionais, ou seja, esquemas onde os conceitos estão inter-relacionados, é inerente da compreensão relacional, os quaternos pitagóricos se apresentam como um conceito eficiente para inferir se a evidência da compreensão relacional e da compreensão instrumental é mais apropriada em termos globais do que em termos pontuais.

O presente capítulo é destinado à descrição da aplicação do módulo de ensino intitulado *Quaternos Pitagóricos: aplicação do Teorema de Pitágoras em três dimensões* que realizamos como atividade didática operacionalizada com três alunos do curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal do Tocantins – Campus de Arraias no semestre 2012.1. Todavia, posto que no presente estudo não intencionamos validar a intervenção pedagógica referente aos quaternos pitagóricos, e sim apresentar de forma mais rica a concepção teórica da compreensão relacional como propriedade global em detrimento da pontual, tendo a título de exemplo o caso dos quaternos pitagóricos, no final do módulo de ensino, aplicamos uma avaliação escrita, cujas análises global e pontual serão realizadas no próximo capítulo. Em outras palavras, a análise global e a análise pontual dos dados da avaliação escrita concernem a parte fundamental para comprovar nossa tese.

Particularmente, o módulo de ensino tem como objetivo principal proporcionar aos participantes a relação do Teorema de Pitágoras com o conceito de distância entre dois pontos em três dimensões através do estudo das representações algébricas $a^2+b^2+c^2 = d^2$ e (a, b, c, d) e da representação geométrica. Para tanto, teremos como aliados a História da Matemática e a obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*, de Eugène Bahier, em que o conceito é estudado de forma sistemática.

4.1 Contexto

Antes de aplicarmos o módulo de ensino sobre os quaternos pitagóricos, aplicamos na IX Semana Acadêmica de Matemática da UFT- Campus de Arraias, no semestre 2012.1, para 15 alunos do curso de Matemática da UFT – Campus de Arraias o minicurso intitulado *Ternos Pitagóricos: uma ferramenta histórica para compreensão do Teorema de Pitágoras*. O referido minicurso é decorrente do estudo que realizamos no mestrado. No mais, o minicurso sobre os ternos pitagóricos corresponde à apresentação dos conhecimentos prévios para compreender os quaternos pitagóricos. Em anexo (Apêndice B) consta o material do minicurso.

Ao término do minicurso três alunos se disponibilizaram a participar do módulo de ensino sobre os quaternos pitagóricos. Os referidos alunos não fazem parte da mesma turma, sendo matriculados nos seguintes períodos: quinto (Renata), sexto (Júlio) e sétimo (Marcos). Por questões éticas esses nomes são fictícios.

A intervenção pedagógica foi dividida em três etapas, a saber: aplicação de um questionário, desenvolvimento das atividades que projetamos, cujo roteiro encontra-se em anexo (Apêndice C) e aplicação de uma avaliação escrita. A seguir discorreremos sobre as três etapas.

4.2 Etapa I: Questionário

O questionário que aplicamos foi composto por dez questões. Conforme os objetivos, criamos três blocos para enquadrar as questões. Sendo que o Bloco A contava com duas questões relacionadas ao uso da História da Matemática no ensino da Matemática, o Bloco B sete questões sobre os ternos pitagóricos e o Bloco C uma questão que contemplava a distância entre dois pontos em três dimensões e sua relação com o Teorema de Pitágoras. Sobretudo, houve mais questões relacionadas aos ternos pitagóricos pelo fato de que o conhecimento das definições e propriedades inerentes do referido conceito compõe os conhecimentos prévios necessários para compreender os quaternos pitagóricos. A seguir, os três blocos, os enunciados das questões contidas em cada bloco e uma análise geral das respostas dadas pelos sujeitos.

Questões do Bloco A:

1. Em relação ao uso da História da Matemática no ensino da matemática, aponte três argumentos favoráveis para sua utilização.

2. Porque o uso da História da Matemática no ensino da matemática não deve apenas se limitar como elemento motivador?

As questões do bloco em foco intencionavam averiguar se os sujeitos conheciam a potencialidade do uso da História da Matemática para o ensino de Matemática para além do caráter motivador. Por meio das suas respostas, os três sujeitos apontaram como vantagens: demonstração que a Matemática é feita pelo homem e entendimento de alguns porquês advindos do desenvolvimento histórico de alguns conceitos. Além disso, também houve menção à contextualização e à transdisciplinaridade.

Com relação ao caráter motivador, coincidentemente todos os três sujeitos em vez de explicarem o porquê não considerar a História da Matemática apenas como elemento motivador, simplesmente apresentaram argumentos favoráveis ao caráter motivador.

Questões do Bloco B:

As questões contidas no bloco B condizem com o conteúdo do minicurso sobre os ternos pitagóricos de que os sujeitos participaram. Todavia, conforme mencionamos anteriormente, essas questões intencionam investigar se os sujeitos possuem os conhecimentos prévios necessários para entendimento dos quaternos pitagóricos.

1. Para você, o estudo dos ternos pitagóricos para o ensino do Teorema de Pitágoras, é importante? Justifique sua resposta.

2. Historicamente, como os ternos pitagóricos e o Teorema de Pitágoras estão inter-relacionados?

3. Comente sobre a seguinte afirmação: Outros povos antes dos gregos conheciam o Teorema de Pitágoras.

4. Qual a definição de triângulo primitivo e de triângulo secundário? (Além da definição aponte exemplos).

5. Porque no desenvolvimento do módulo de ensino enfatizamos mais os ternos primitivos?

6. Vimos que $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$ é uma importante relação no estudo dos ternos pitagóricos. Suponhamos que um colega seu faltou no dia em que essa relação foi desenvolvida em classe, o que você diria para explicá-lo sobre:

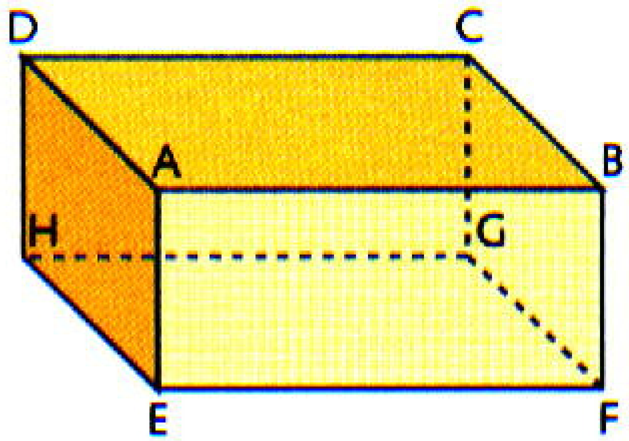
a. A importância dessa relação;

b. Quais são as condições dos termos x e y; E como são denominados?

7. Imagine que você está em uma sala de aula, ensinando sobre o Teorema de Pitágoras. Suponhamos que com o intuito de exemplificar triângulos que satisfazem o Teorema de Pitágoras, ao olhar para suas anotações, você percebe que sua irmã pintou de esmalte preto, os números correspondentes aos catetos e as hipotenusas dos três triângulos primitivos que você havia copiado do livro didático que você esqueceu em cima da sua cama. Considerando que o professor é um artista, que necessita de criatividade para agir de acordo com sua necessidade, descreva o que você faria para exemplificar três triângulos primitivos diferentes do (3, 4, 5) sem contar com o livro didático em mãos. Objetivo da questão: descrever o que você faria para exemplificar os três triângulos primitivos diferentes do (3, 4, 5).

Pelas respostas apresentadas pelos sujeitos R, J e M, notamos que somente R apresentou certa dificuldade em responder algumas questões.

Questão do Bloco C: Determine o valor de $\overline{HF}$ e de $\overline{DF}$ em função de arestas contidas no paralelepípedo retângulo ilustrado a seguir.



A questão em foco tem o seguinte objetivo: verificar se os sujeitos conhecem as interpretações algébrica e geométrica do Teorema de Pitágoras em três dimensões tendo como referencial um prisma. Os sujeitos J e M conseguiram fazer o que fora solicitado sendo que os cálculos algébricos apresentados por M foram mais diretos do que os apresentados por J. Por sua vez, R só conseguiu representar o valor de $\overline{HF}$.

4.3 Etapa II: Desenvolvimento das atividades

As atividades que projetamos foram desenvolvidas no decorrer de cinco encontros de três horas aula cada. A seguir descreveremos cada encontro.

4.3.1 Encontro I

O encontro I foi dividido em cinco momentos.

No primeiro momento discutimos acerca da potencialidade pedagógica do uso da História da Matemática como fonte para ampliação do conhecimento matemático do aluno via redescoberta com caráter investigativo. Ou seja, discutimos acerca da necessidade da História da Matemática ser utilizada no ensino da Matemática além do caráter motivacional.

No segundo momento reproduzimos o documentário *O Legado de Pitágoras – desafiando Pitágoras*, no Brasil veiculado pela TV Escola, com duração de 46 minutos.

À guisa de informação, segue a sinopse presente no site da TV Escola: Episódio da série O Legado de Pitágoras que questiona o teorema elaborado por esse matemático, mostrando que sua aplicação funciona apenas em superfícies planas. O episódio fala de

Aristóteles e de sua descoberta sobre o formato arredondado da Terra, sobre Euler e seu diagrama, sobre Einstein e sua teoria da relatividade. Destaca também a importância da matemática dos triângulos e do teorema de Pitágoras para o entendimento do universo.

No terceiro momento discutimos sobre as ideias expostas no documentário, evidenciando a importância do Teorema de Pitágoras para a formação de diversos conceitos. Em especial, discutimos com os sujeitos acerca da relevância da frase *O Teorema de Pitágoras é o ponto de partida para todos os espaços*.

No quarto momento, discutimos o caso do ensino do Teorema de Pitágoras muitas vezes se restringir à representação algébrica em detrimento da representação geométrica. O aluno Marcos destacou que *de fato quando o Teorema de Pitágoras é ensinado o professor apenas passa exercícios onde nos triângulos retângulos é dado valores para dois lados e pergunta qual o valor do terceiro lado*.

Ainda, evidenciamos que o ensino do referido conceito de modo puramente algébrico pode acarretar no fato de não haver a relação do Teorema de Pitágoras com o conceito de distância. Com isso, construímos com os sujeitos geoplanos (Ilustração 1) utilizando isopor, tachinhas e elásticos, para ilustrar o cálculo da distância entre dois pontos em duas dimensões como aplicação do Teorema de Pitágoras.

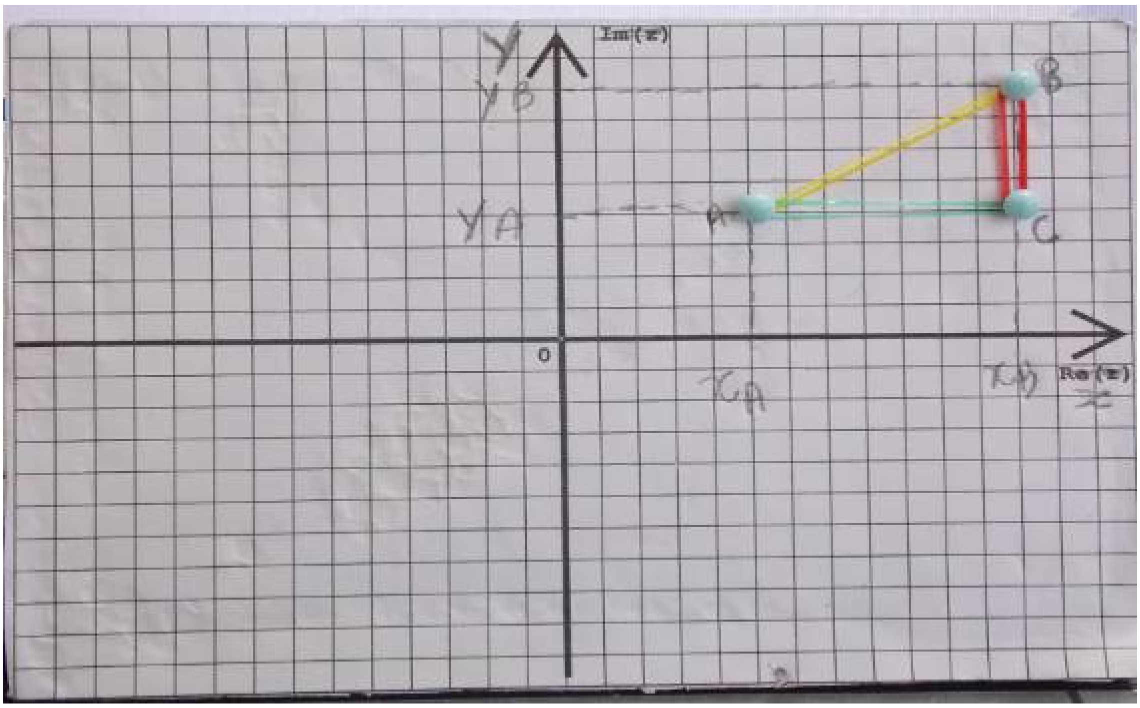


Ilustração 1 - Distância entre dois pontos em duas dimensões no geoplano

Em seguida, entregamos uma barra de sabão para cada sujeito e após relacionarmos o referido objeto com um paralelepípedo retângulo, solicitamos que cada sujeito espetasse duas tachinhas em dois vértices de tal modo que os vértices estivessem contidos na mesma face e fossem opostos, como indicado a seguir (Ilustração 2).

Ilustração 2 - Distância entre dois pontos, em duas dimensões, na barra de sabão

Assim como no geoplano, rapidamente os sujeitos verificaram que para calcular a distância entre dois pontos (representados pelas tachinhas), em duas dimensões, basta utilizar o Teorema de Pitágoras. Contudo, ao solicitar que os alunos explicassem a referida aplicação em termos dos entes geométricos pertencentes ao prisma em questão, após uma discussão entre eles, a aluna Renata afirmou que *calcular a distância entre as duas tachinhas é o mesmo que calcular o valor da diagonal da face do prisma; e que aplicando o Teorema de Pitágoras verificamos que essa diagonal é igual a raiz quadrada da soma dos quadrados da largura e do comprimento do prisma*. O aluno Júlio acrescentou que *basta saber os valores dessas duas dimensões e calculamos a diagonal, ou seja, sabemos qual a distância entre esses dois pontos*.

Em seguida, indagamos os sujeitos quanto ao cálculo da distância entre dois pontos no espaço em três dimensões. Como os sujeitos se mostraram confusos, para auxiliar, espetamos duas tachinhas em dois vértices opostos do prisma (Ilustração 3), representado pelo sabão, e questionamos qual a menor distância entre os dois pontos representados pelas tachinhas.

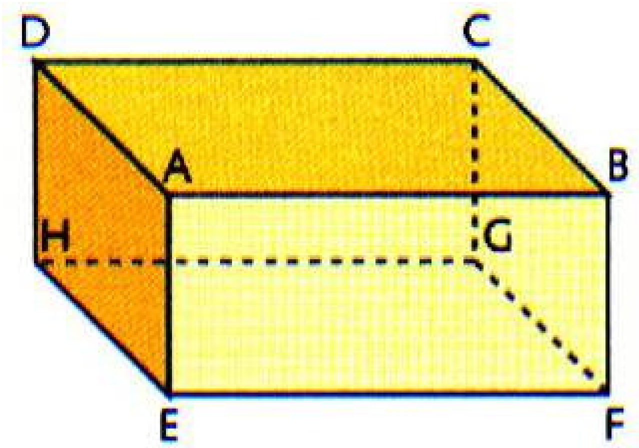
Ilustração 3 - Distância entre dois pontos, em três dimensões,
na barra de sabão

O primeiro sujeito que se manifestou foi Renata, ao afirmar que *basta somar o valor da diagonal da face e a altura do prisma*. Em seguida, Júlio refutou o argumento de Renata ao afirmar que *não é tão simples assim; por que se fosse pensar assim, na hora de calcular a distância dos pontos da face do sabão, bastava somar a largura e o comprimento do prisma*. Marcos acrescentou: *em vez disso, a gente viu que como o que estávamos querendo saber era a diagonal da face e que isso era a hipotenusa de um triângulo retângulo, aplicamos o Teorema de Pitágoras e obtemos a raiz quadrada da soma das duas dimensões, ou seja, dos catetos*.

Por fim, solicitamos que os alunos refletissem para o próximo encontro se o argumento dado por Renata estava ou não correto.

4.3.2 Encontro II

Diante dos argumentos apresentados no encontro anterior, verificamos que os alunos precisavam estar cientes de que calcular a distância entre dois pontos no espaço em três dimensões consistia em calcular a diagonal do prisma em questão e que assim como em duas dimensões, isto também se trata de uma aplicação do Teorema de Pitágoras. Com isso, com o propósito de fazer com que os alunos constatassem tal fato, iniciamos esse encontro entregando aos alunos uma sequência de atividades para que eles, com o nosso auxílio, preenchessem os espaços em branco. A seguir, apresentaremos as referidas atividades e suas respectivas respostas (dentro dos retângulos).



Paralelepípedo retângulo

O paralelepípedo retângulo tem:

6 faces retangulares: [DABC],[HEFG],[ADHE],[CBFG],[ABFE],[DHGC]

8 vértices: A,B,C,D,E,F,G,

12 arestas: $\overline{AD}, \overline{DC}, \overline{CB}, \overline{AB}, \overline{DH}, \overline{HE}, \overline{AE}, \overline{BF}, \overline{EF}, \overline{HG}, \overline{GF}, \overline{CG}$

Além disso:

As faces que se intersectam estão contidas em planos perpendiculares

As faces opostas estão contidas em planos paralelos

Dois vértices que não pertençam à mesma face dizem-se opostos

São opostos: {(A, G), (B, H), (C, E), (D, F)}.

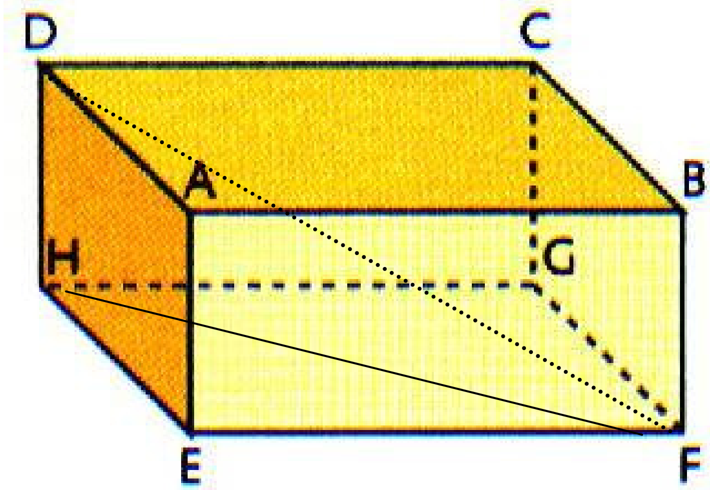
Não são opostos, por exemplo:

(A, C) uma vez que pertencem à mesma face [ABCD]

(A, F) uma vez que pertencem à mesma face [AEFB]

O segmento de reta que une dois vértices opostos de um paralelepípedo retângulo denomina-se diagonal . Então, [BH] [CE] [DF] [AG] são diagonais .

Trace a diagonal DF na figura a seguir, em seguida determine seu valor em função das três dimensões do prisma.



A diagonal DF é hipotenusa do triângulo retângulo DHF, cujos catetos são DH (altura) e HF (diagonal da base), ou seja, $(DF)^2 = (DH)^2+(HF)^2$. Por sua vez, HF é hipotenusa do triângulo retângulo HEF, cujos catetos são HE (largura) e EF (comprimento), ou seja, $(HF)^2 = (HE)^2+(EF)^2$. Logo, por substituição temos que $(DF)^2 = (DH)^2+(HE)^2+(EF)^2$, ou seja, $(\text{diagonal})^2 = (\text{altura})^2+(\text{largura})^2+(\text{comprimento})^2$.

Com o intuito de auxiliar os alunos na resolução desse exercício, usamos o material concreto (Ilustração 4) a seguir.

Ilustração 4 - Material concreto confeccionado com madeira

O referido material nos serviu como dispositivo concreto para ilustrar a representação a seguir (Fig. 6).

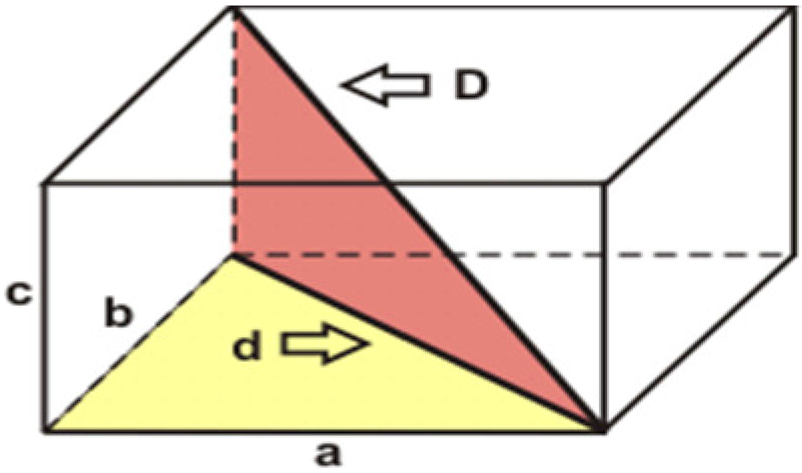
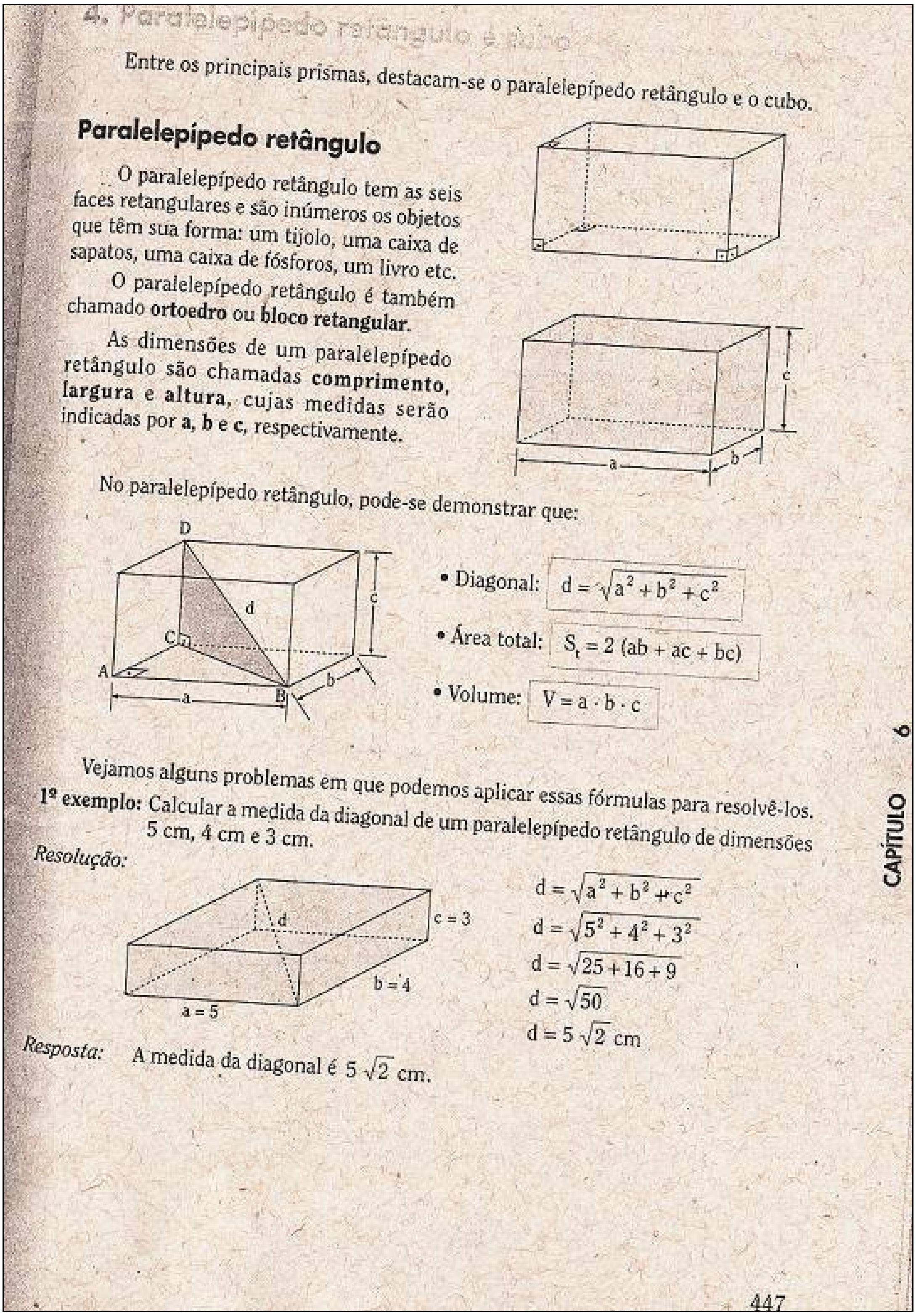


Figura 6 - Diagonal do prisma

Com isso, verificamos que a distância entre dois pontos opostos (representados por dois pregos), corresponde à diagonal do prisma em foco. Em seguida, evidenciamos a possibilidade da expressão $a^2+b^2+c^2 = d^2$ poder ser expressa por (a,b,c,d) denominado quaterno pitagórico, cuja definição consiste em quatro números inteiros que satisfazem o Teorema de Pitágoras, sendo *d* denominado, segundo Bahier (1916), número diagonal.

Além disso, destacamos que posto que o processo de atribuir quatro valores que satisfazem o Teorema de Pitágoras pode ser associado a um fato geométrico que conduz à noção de distância, constatamos que ao calcularmos a distância de dois pontos em três dimensões o Teorema de Pitágoras se estende naturalmente ao espaço de três dimensões quando imaginamos um bloco retangular e sua diagonal. Particularmente, por ser o ente básico da noção de distância nos espaços euclidiano e tridimensional, o referido Teorema fortalece o relacionamento da Álgebra com a Geometria.

No mais, a guisa de informação, dado que a interpretação geométrica da relação $a^2+b^2+c^2$, em número inteiros, consiste no fato de que *d* corresponde à diagonal do prisma reto de base retangular, apresentamos aos sujeitos, por meio de slides, o modo com que o tópico *cálculo da diagonal do paralelepípedo retângulo* é apresentado nos livros didáticos, tendo a título de exemplo o conteúdo contido em três livros, a saber: Giovanni et al. (1994), Bigode (2000), Paiva (2005). A seguir ilustraremos (Ilustração 5) conteúdo apresentado em Giovanni et al. (1994), sendo que em anexo (Anexo A) apresentamos o conteúdo dos três livros didáticos.



4. Paralelepípedo retângulo e cubo

Entre os principais prismas, destacam-se o paralelepípedo retângulo e o cubo.

Paralelepípedo retângulo

O paralelepípedo retângulo tem as seis faces retangulares e são inúmeros os objetos que têm sua forma: um tijolo, uma caixa de sapatos, uma caixa de fósforos, um livro etc.

O paralelepípedo retângulo é também chamado **ortoedro** ou **bloco retangular**.

As dimensões de um paralelepípedo retângulo são chamadas **comprimento**, **largura** e **altura**, cujas medidas serão indicadas por **a**, **b** e **c**, respectivamente.

No paralelepípedo retângulo, pode-se demonstrar que:

- Diagonal: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Área total: $S_t = 2\,(ab + ac + bc)$
- Volume: $V = a \cdot b \cdot c$

Vejamos alguns problemas em que podemos aplicar essas fórmulas para resolvê-los.

1º exemplo: Calcular a medida da diagonal de um paralelepípedo retângulo de dimensões 5 cm, 4 cm e 3 cm.

Resolução:

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$d = \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2}$

$d = \sqrt{25 + 16 + 9}$

$d = \sqrt{50}$

$d = 5\sqrt{2}$ cm

Resposta: A medida da diagonal é $5\sqrt{2}$ cm.

CAPÍTULO 6

447

Ilustração 5: Cálculo da diagonal do paralelepípedo retângulo

Conforme, podemos verificar, mesmo correspondendo um conteúdo que envolve Geometria, a abordagem algébrica é mais valorizada que a geométrica, tanto na exposição do conceito quanto nos exercícios. Todavia, nada é mencionado sobre os quaternos pitagóricos nem sobre o cálculo da distância entre dois pontos em três dimensões. Com isso, destacamos que, embora os quaternos pitagóricos não sejam mencionados explicitamente nos livros didáticos, ao apresentar o cálculo da diagonal do paralelepípedo retângulo, percebe-se o quanto é importante que o atual e futuro professor de matemática tenham conhecimento de métodos que forneçam valores para os termos a, b, c e d que compõem quaternos pitagóricos. Diante de tal fato, mostramos aos sujeitos que as condições de existência são tais que em $a^2+b^2+c^2 = d^2$, pelo menos dois dos três números a, b, c são sempre pares.

Com intuito de verificar se as condições de existência supracitadas são válidas, com o nosso auxílio, os sujeitos chegaram às seguintes conclusões:

1º a, b e c não podem ser ímpares todos os três. Em outros termos, a soma dos quadrados de três números ímpares jamais pode ser um quadrado. Com efeito, o quadrado de todo número ímpar é da forma $8p+1$. Portanto, a soma de três números quadrados dessa forma é um número ímpar da forma $8p+3$, que jamais pode ser quadrado.

2º a e b, ambos, não podem ser ímpares, mesmo se c for par. Com efeito, se a e b fossem ímpares, a soma a^2+b^2 seria um número simplesmente par, ou seja, não múltiplo de 4. Como c^2 é múltiplo de 4, a soma $a^2+b^2+c^2$ seria um número simplesmente par, e por consequência, jamais poderia ser o quadrado de um número inteiro par d.

Em seguida, informamos que, por analogia com as relações em dois termos, Bahier (1916) define relação primitiva ou irredutível como sendo toda relação em três termos na qual todos os três números do primeiro membro a, b, c, não têm um mesmo divisor comum. No mais, destacamos que se multiplicarmos o quaterno pitagórico primitivo (a,b,c,d) por qualquer número inteiro k, o quaterno $k(a,b,c,d)$ também será um quaterno pitagórico cuja denominação é secundário ou redutível.

Por fim, informamos aos sujeitos que Bahier (1916) nos apresenta três métodos capazes de determinar soluções em números inteiros da equação $a^2+b^2+c^2 = d^2$, obtidos quando o número a, é dado, e que, no caso do módulo de ensino, nos próximos encontros apresentaremos um por encontro. Particularmente, Bahier (1916) nos apresenta esses métodos no último capítulo da sua obra. Com isso, considerando que os conhecimentos prévios para entender o conteúdo do último capítulo estão nos capítulos precedentes, Bahier (1916) é bastante objetivo na descrição dos métodos. Logo, no decorrer do módulo de ensino, nos detemos a apresentar uma descrição detalhada de cada método, contendo exemplos numéricos e inferências sobre os quaternos que são gerados. Todavia, nossa preocupação com a descrição detalhada de cada método converge para um ensino relacional, dado que corroboramos com Skemp (1980), ao enfatizar que não basta conhecer e memorizar as fórmulas e sim, compreender porque funciona e quando funciona.

4.3.3 Encontro III

No presente encontro, apresentamos e discutimos o primeiro método, dentre os três que reservamos para o módulo de ensino em foco. Sobretudo, assim como no encontro anterior, no encontro que ora descrevemos e nos subseguintes, entregamos para os sujeitos material impresso contendo espaços em branco para serem preenchidos após questionarmos e refletirmos sobre o que deveria ser feito.

Iniciamos o referido encontro informando que o primeiro método requer que a soma dos termos a e b seja igual a d. Em seguida, auxiliamos os sujeitos a preencherem os retângulos contidos no material que foi entregue. Logo, a seguir, apresentamos o material que foi entregue aos sujeitos, contendo as respostas que os mesmos apresentaram.

$$a+b = d \rightarrow \quad c^2 = ?$$

$$\boxed{a+b = d \rightarrow (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = d^2 \rightarrow 2ab = c^2}$$

Portanto, $\boldsymbol{c^2} =$ $\boxed{2ab}$

Se a é um número inteiro qualquer, o valor de b depende que o produto $a \times 2b$ seja um

$\boxed{\text{quadrado}}$

Se $a = 1 \rightarrow \boxed{2b} = c^2$ (i)

b é par ou ímpar? Resposta: b é $\boxed{\text{par}}$ (ii)

Justificativa: Se $a = 1$, a é ímpar. Como pelo menos dois dos três termos a, b, c devem ser pares, b é par.

Se n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $b = 2n^2$ ou $b = (2n)^2$?

Vimos que $a \times 2b$ deve ser um quadrado, ou seja, c^2 deve ser quadrado. Com isso, no caso de $a = 1$, sendo $2b = c^2$, basta verificar se $b = 2n^2$ ou $b = (2n)^2$ satisfaz essa condição.

n	b = 2n²	c² = 2b
1	2	4
2	8	16
3	18	36

n	b = (2n)²	c² = 2b
1	4	8
2	16	32
3	36	72

Logo, s n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $b = 2n^2$.

Portanto, se n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $\boxed{b = 2n}$

Com isso, quais são os valores de c e d em função de n?

$b = 2n^2$, substituindo em (i) $2b = c^2$, temos: $2(2n^2) = c^2$. Logo, $c = 2n$.

Como $a+b = d$, $a = 1$, temos: $1+2n^2 = d^2$.

Qual o quaterno pitagórico e a relação algébrica correspondente?

$$\boxed{(1,2n^2,2n,1+2n^2) \text{ e } 1^2+(2n^2)^2+(2n)^2 = (1+2n^2)^2}$$

Determine, nos casos a seguir, os quaternos pitagóricos e as relações correspondentes:

n = 1	n = 2	n = 3
(1, 2, 2, 3) $1^2+2^2+2^2 = 3^2$ 1+4+4 = 9 (v)	(1, 8, 4, 9) $1^2+8^2+4^2 = 9^2$ 1+64+16 = 81 (v)	(1, 18, 6, 19) $1^2+18^2+6^2 = 19^2$ 1+324+36 = 361 (v)

Se $a = 2 \rightarrow \boxed{4b} = c^2$.

Quais são os primeiros valores possíveis para c^2?

c^2 deve ser quadrado. Logo, basta atribuir valores ímpares para b na igualdade $4b = c^2$ e verificar em quais casos c^2 é quadrado e obter os primeiros valores possíveis para c^2.

b	4b = c²	
1	4	x
3	12	
5	20	
7	28	
9	36	x
11	44	
. . .		
25	100	x
49	196	x

Logo, os primeiros valores possíveis para c^2 são: 4, 36, 100, 196 ....

Se n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $b = (2n+1)^2$?

Basta verificar na sequência dos quatro primeiros valores de c^2 se o valor de b é $(2n+1)^2$.

Para $c^2 = 4$, temos que $b = 1$, ou ainda, $b = 1^2$;

Para $c^2 = 36$, temos que $b = 9$, ou ainda, $b = 3^2$;

Para $c^2 = 100$, temos que $b = 25$, ou ainda, $b = 5^2$;

Para $c^2 = 196$, temos que $b = 49$, ou ainda, $b = 7^2$;

Logo, temos que se n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $b = (2n+1)^2$.

Com isso, quais são os valores de c e d em função de n?

Sabemos que $b = (2n+1)^2$. Com isso, substituindo $b = (2n+1)^2$ em $4b = c^2$, temos: $4(2n+1)^2 = c^2$. Logo, $c = 2(2n+1)$;

Como $a+b = d$, temos que $2+(2n+1)^2 = d$.

Qual o quaterno pitagórico e a relação algébrica correspondente?

$$[2, (2n+1)^2, 2(2n+1), 2+(2n+1)^2]$$

$$2^2+[(2n+1)^2]^2+[2(2n+1)]^2 = [2+(2n+1)^2]^2$$

Determine, nos casos a seguir, os quaternos pitagóricos e as relações correspondentes:

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$2^2+9^2+6^2 = 11^2$ $4+81+36 = 121$ (v) (2, 9, 6, 11)	$2^2+25^2+10^2 = 27^2$ $4+625+100 = 729$ (v) (2, 25, 10, 27)	$2^2+49^2+14^2 = 51^2$ $4+2401+196 = 2601$ (v) (2, 49, 14, 51)

Se $a > 2$, todas as outras soluções possíveis se reduzem a um dos casos precedentes.

Em $a^2+b^2+c^2 = d^2$, todos os três números a, b, c não podem ser iguais, mas dois deles podem ser iguais.

Caso particular: $b = c = 2a \rightarrow d = ?$

$$a+b = d$$
$$a+2a = d$$
$$3a = d$$

Quaterno pitagórico e relação correspondente:

$(a,2a,2a,3a)$ e $a^2+(2a)^2+(2a)^2 = (3a)^2$

Determine, nos casos a seguir, os quaternos pitagóricos e as relações correspondentes:

$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$
(1,2,2,3) $1^2+2^2+2^2 = 3^2$	(2,4,4,6) $2^2+4^2+4^2 = 6^2$	(3,6,6,9) $3^2+6^2+6^2 = 9^2$

Para finalizar a exposição do primeiro método, apresentamos aos sujeitos o software SketchUP e algumas ferramentas que ele possui. O referido software, pertencente ao grupo Google, foi criado com a finalidade de possibilitar que profissionais como arquitetos, designers de móveis, desenhistas técnicos, engenheiros civis, engenheiros mecânicos, designers de produtos, escultores, game designers, e diversos outros profissionais relacionadas aos trabalhos que necessitem visualizações em 3D, construam modelos em 3D no computador.

No mais, ressaltamos, aos sujeitos, que mesmo que o software SketchUP não tenha sido criado para fins educativos, o mesmo emerge como uma importante ferramenta no ensino dos quaternos pitagóricos. Sobretudo, posto que os quaternos pitagóricos, ou seja, o conjunto de quatro números inteiros a, b, c e d, que satisfazem o Teorema de Pitágoras podem ser relacionados a entes geométricos que fazem parte do paralelepípedo retângulo, sendo a, b, c as três dimensões e d a diagonal do prisma, utilizamos o referido software para verificar se geometricamente, considerarmos os termos a, b e c fornecidos pelos referidos métodos, o valor d é de fato a diagonal do prisma construído com o auxílio do software em tela.

Para tanto, evidenciamos que no próximo encontro, iríamos realizar algumas verificações utilizando como referenciais alguns quaternos pitagóricos gerados pelos métodos 1 e 2.

4.3.4 Encontro IV

Para apresentar o Método 2, seguimos a mesma metodologia que utilizamos para apresentar o Método 1, ou seja, entregamos um material impresso contendo espaços em branco para serem preenchidos pelos alunos, com o nosso auxílio. Logo, a seguir, transcreveremos o referido material e suas respectivas respostas, sendo que as mesmas se encontram nos retângulos.

Identidade (1): $m = 2n+1 = (n+1)^2 - n^2 \rightarrow$ Todo número ímpar é a diferença dos quadrados de dois números inteiros consecutivos.

Se n for ímpar $\rightarrow$ m será da forma $\boxed{4p+3}$

Se n for par $\rightarrow$ m será da forma $\boxed{4p+1}$

Todo número primo da forma $4p+1$ e, também, todo número composto ímpar, que só admite como fatores primos números da forma $4p+1$, é uma soma de dois quadrados.

Se m satisfaz essa condição $\rightarrow$ $\boxed{m = a^2+b^2}$

Comparando $m = a^2+b^2$ com (1), temos:

$$m = 2n+1 = (n+1)^2-n^2$$
$$(n+1)^2-n^2 = a^2+b^2 \rightarrow a^2+b^2+n^2 = (n+1)^2$$

Quaterno pitagórico correspondente: $(a, b, n, n+1)$

O número n e um dos dois números a ou b são pares.

Exemplos numéricos:

1º $m = 5$

$$n = 2,\ a = 1,\ b = 2 \rightarrow 1^2+2^2+2^2 = 3^2 \rightarrow (1, 2, 2, 3)$$

2º $m = 13$

$$n = 6,\ a = 2,\ b = 3 \rightarrow 2^2+3^2+6^2 = 7^2 \rightarrow (2, 3, 6, 7)$$

3º $m = 65$

$n = 32$. Como $65 = 1^2+8^2 = 4^2 + 7^2$, temos duas relações. São elas:

$$1^2+8^2+32^2 = 33^2 \rightarrow (1, 8, 32, 33)$$
$$4^2 + 7^2+32^2 = 33^2 \rightarrow (4, 7, 32, 33)$$

Por fim, destinamos o último momento do encontro em tela para que os sujeitos construíssem com o auxílio do software SketchUP alguns paralelepípedos retângulos cujas dimensões deveriam coincidir com os números inteiros a, b, c pertencentes a alguns quaternos pitagóricos gerados através dos métodos 1 e 2. Sobretudo, o objetivo principal das construções era fazer com que os sujeitos verificassem, geometricamente, se os números diagonais de cada quaterno pitagórico, de fato, coincidem com o valor da medida da diagonal do prisma relacionado.

Contudo, posto à limitação de espaço da tela, com o referido software é mais viável realizar as construções a partir de quaternos pitagóricos com números inteiros pequenos do que com valores muito grandes. Com isso, os sujeitos realizaram as verificações com seis quaternos, a saber: (1,2,2,3), (1,8,4,9), (2,9,6,11), (2,4,4,6) e (3,6,6,9) e (3,2,6,7).

A seguir, apresentamos as construções que os sujeitos realizaram para verificar se o número diagonal de cada quaterno supracitado, gerado através dos métodos 1 e 2, de fato, coincide com a diagonal do prisma construído com o auxílio do software SketchUP.

Construção realizada (Fig. 7) tendo como referencial os termos *a*, *b* e *c* do quaterno pitagórico (1,2,2,3):

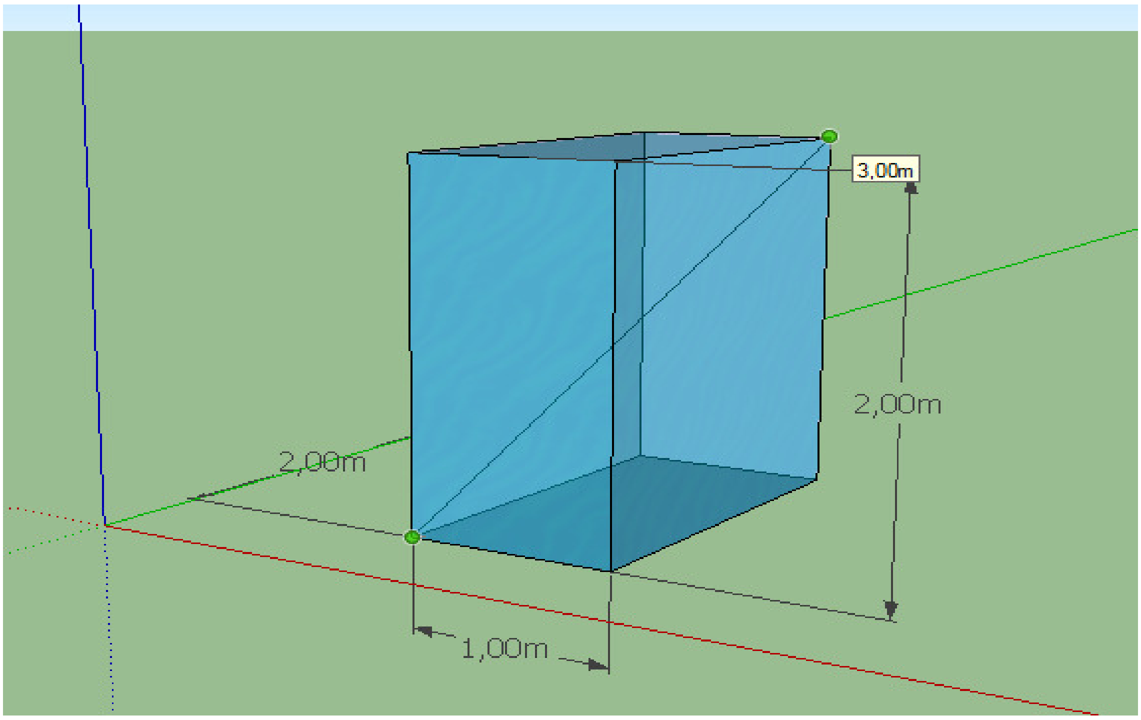


Figura 7: quaterno pitagórico (1,2,2,3)

Construção realizada (Fig. 8) tendo como referencial os termos *a*, *b* e *c* do quaterno pitagórico (1,8,4,9):

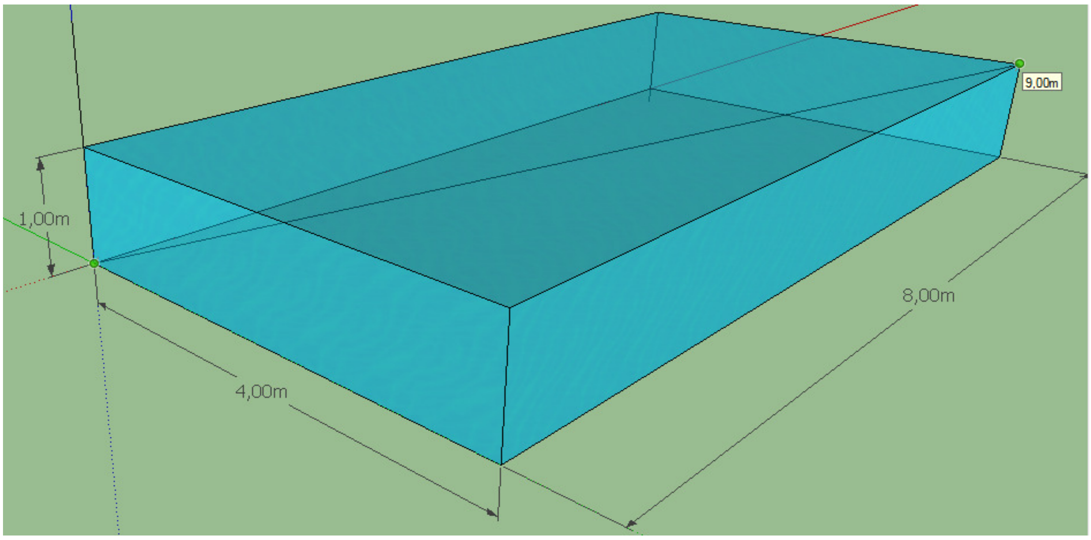


Figura 8: quaterno pitagórico (1,8,4,9)

Conforme podemos verificar, o número diagonal, nesse caso o 9, coincide com a medida da diagonal do prisma construído.

Construção realizada (Fig. 9) tendo como referencial os termos *a*, *b* e *c* do quaterno pitagórico (2,9,6,11):

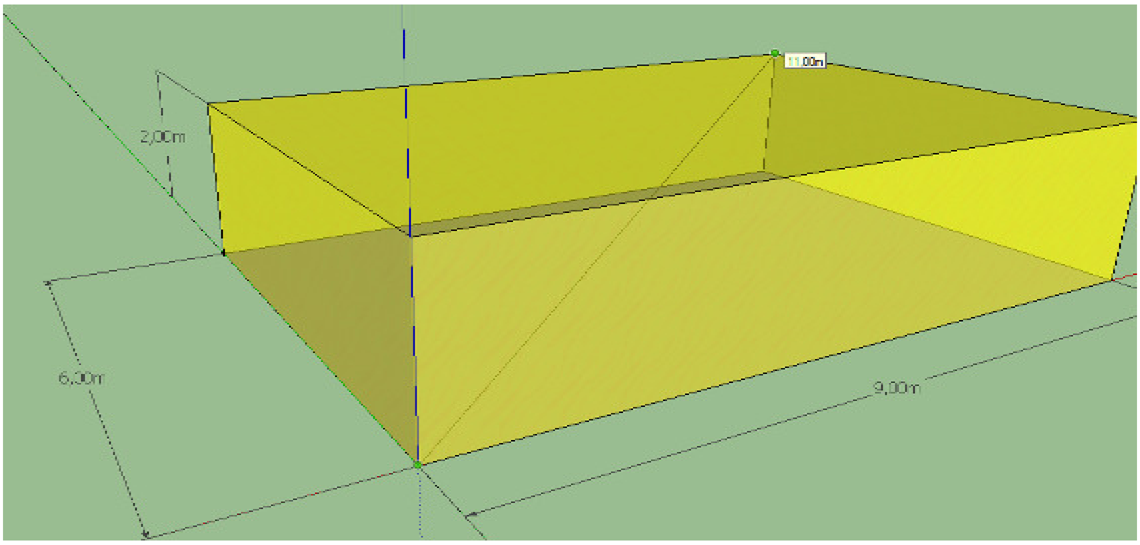


Figura 9: quaterno pitagórico (2,9,6,11)

Conforme podemos verificar na figura anterior, o número diagonal, nesse caso o 11, coincide com a medida da diagonal do prisma construído.

Construção realizada (Fig. 10) tendo como referencial os termos *a*, *b* e *c* do quaterno pitagórico (2,4,4,6):

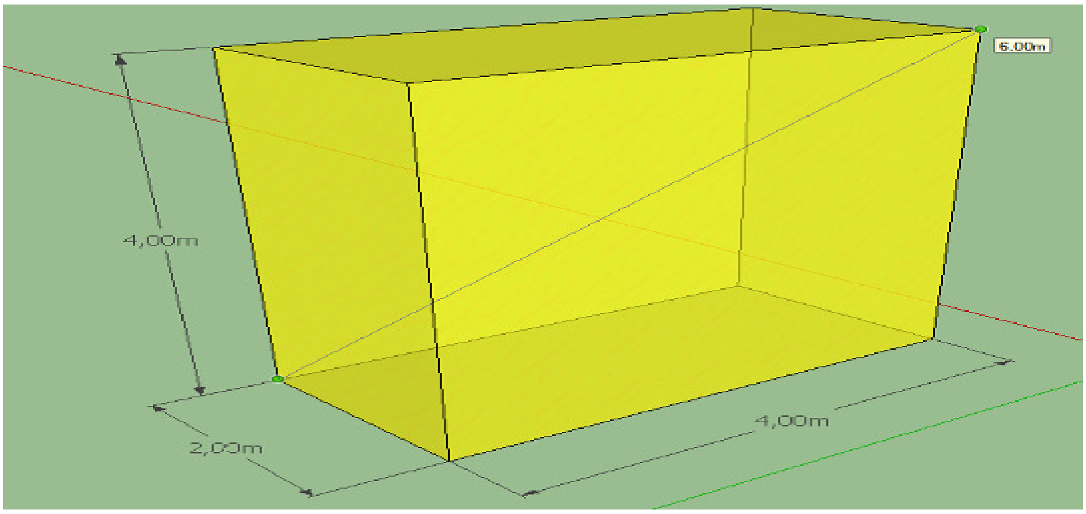


Figura 10: quaterno pitagórico (2,4,4,6)

Conforme podemos verificar na figura anterior, o número diagonal, nesse caso o 6, coincide com a medida da diagonal do prisma construído.

Construção realizada (Fig. 11) tendo como referencial os termos *a*, *b* e *c* do quaterno pitagórico (3,6,6,9):

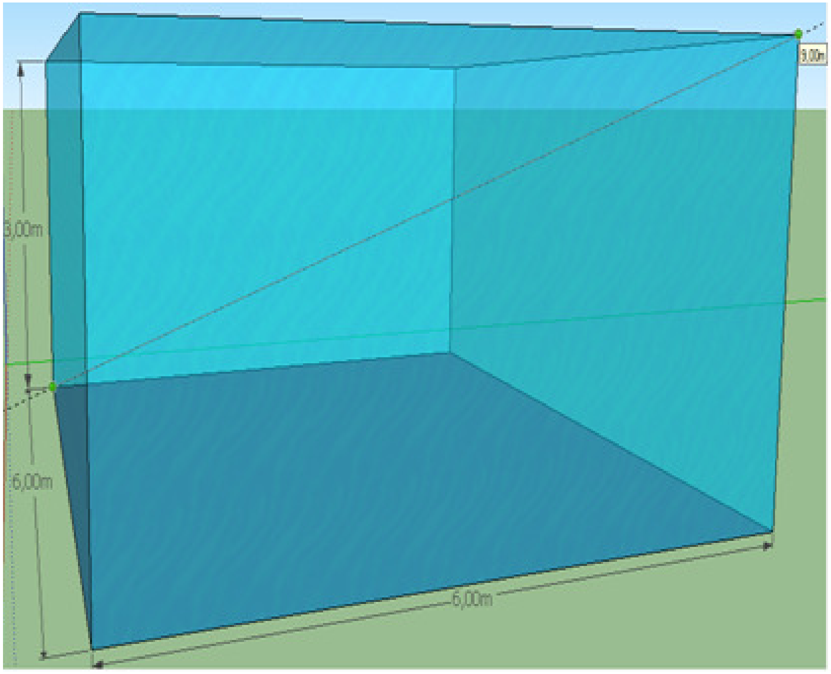


Figura 11: quaterno pitagórico (3,6,6,9)

Conforme podemos verificar na figura anterior, o número diagonal, nesse caso o 9, coincide com a medida da diagonal do prisma construído.

Construção realizada (Fig. 12) tendo como referencial os termos *a*, *b* e *c* do quaterno pitagórico (3,2,6,7):

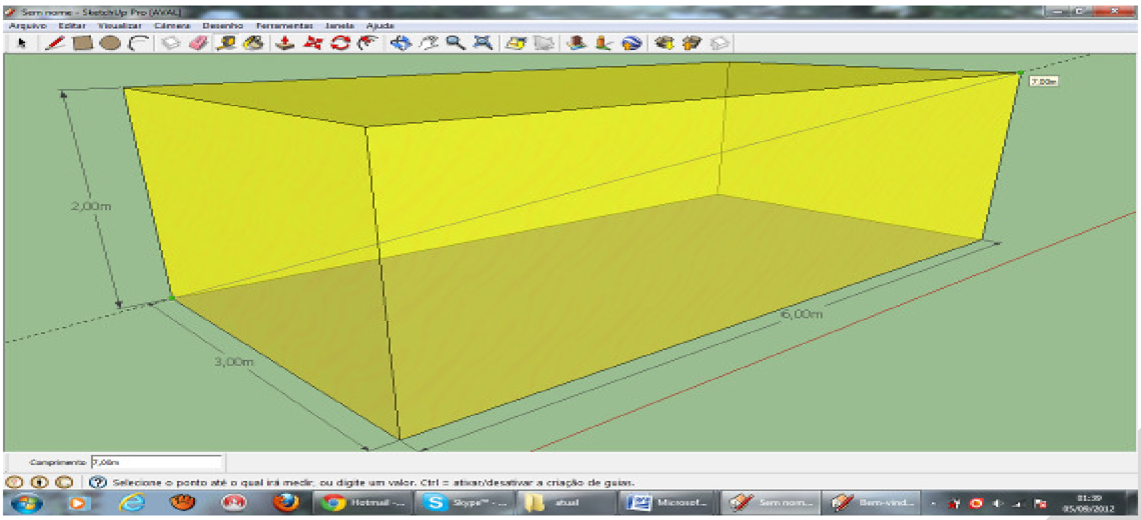


Figura 12: quaterno pitagórico (3,2,6,7)

Conforme podemos verificar na figura anterior, o número diagonal, nesse caso o 7, coincide com a medida da diagonal do prisma construído.

Por fim, depois que os sujeitos verificaram que em todos os quaternos pitagóricos o número diagonal de cada quaterno coincide com a medida de cada diagonal dos prismas construídos, evidenciamos que a utilização do software SketchUP pode ser considerada uma ferramenta pedagógica para destacar a importante relação entre Álgebra e Geometria no estudo dos quaternos pitagóricos, em contraposição do ensino puramente algébrico.

4.3.5 Encontro V

A presente sessão é destinada a apresentar o conteúdo trabalhado com os sujeitos referente ao Método 3. Todavia, assim como nos outros dois métodos, para o Método 3 também entregamos para os sujeitos um material impresso contendo espaços em branco que foram preenchidos com o nosso auxílio. Com isso, a seguir apresentamos o referido material sendo que as respostas que os sujeitos apresentaram estão contidas nos retângulos.

Ao considerarmos que *a* e *b* são os dois catetos de um triângulo retângulo em números inteiros e γ é a hipotenusa, tem-se, portanto $\boxed{(1) \quad a^2+b^2 = \gamma^2}$

Posto que todos os números γ assim considerados figuram como valores de um dos catetos em um ou vários triângulos retângulos em números inteiros, podemos fazer

$$\boxed{(2) \quad \gamma^2+c^2 = d^2}$$

A partir de (1) e (2) temos $\boxed{(3) \quad a^2+b^2+c^2 = d^2}$

Exemplos numéricos

1º O menor triângulo retângulo em números inteiros é $\boxed{3^2+4^2 = 5^2}$

Sua hipotenusa $\boxed{5}$ é cateto do triângulo $\boxed{5^2+12^2 = 13^2}$

Tem-se, portanto $\boxed{3^2+4^2+12^2 = 13^2 \rightarrow (3, 4, 12, 13)}$

2º O número 25 é hipotenusa de $\boxed{2}$ triângulos e cateto de $\boxed{2}$ outros triângulos.

Obtém-se, portanto, com o referido número, as $\boxed{4}$ relações:

$$7^2+24^2+60^2 = 65^2 \rightarrow (7, 24, 60, 65)$$
$$15^2+20^2+60^2 = 65^2 \rightarrow (15, 20, 60, 65)$$
$$7^2+24^2+312^2 = 313^2 \rightarrow (7, 24, 312, 313)$$
$$15^2+20^2+312^2 = 313^2 \rightarrow (15, 20, 312, 313)$$

Após realizarmos todos os cálculos algébricos, dentre os quaternos pitagóricos que, na oportunidade, obtivemos através do Método 3, tomamos como referência o (3,4,12,13), para verificar, com o auxílio do software Sketchup, se o número diagonal coincide com o mesmo valor da medida da diagonal do prisma correspondente. Todavia, os demais quaternos pitagóricos possuem números grandes que fazem com que seus respectivos sólidos não possam ser visualizados por completo na tela. A seguir apresentamos (Fig. 13) a construção que fora realizada pelos sujeitos.

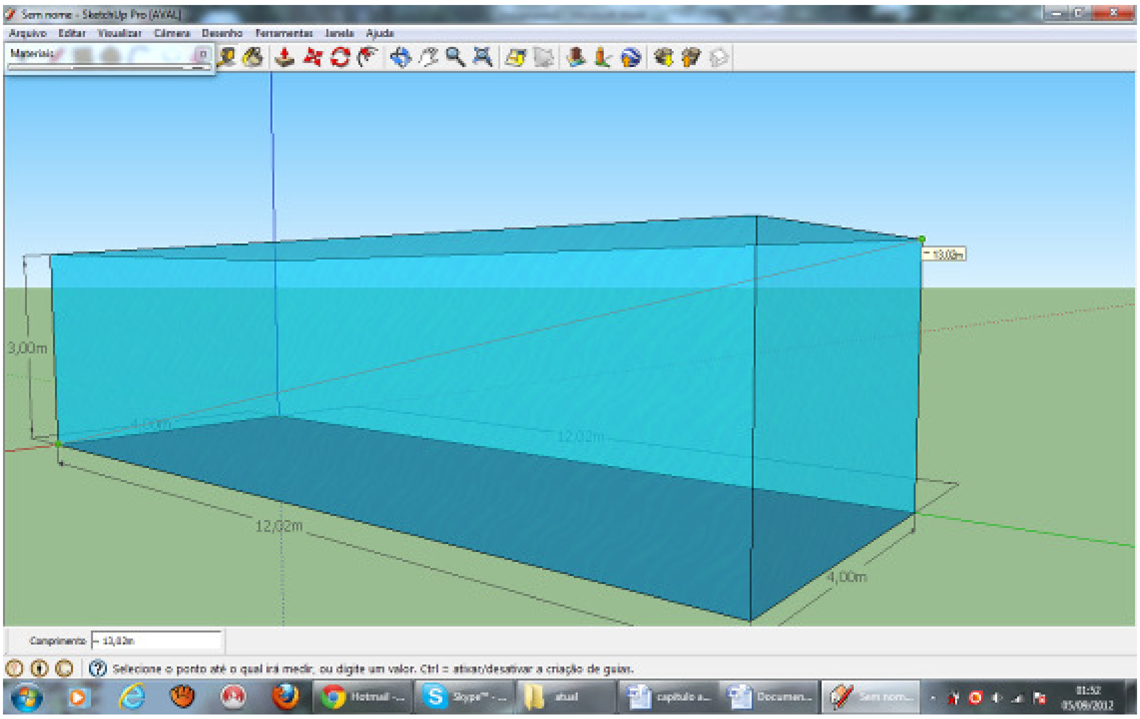


Figura 13: quaterno pitagórico (3,4,12,13)

Conforme podemos verificar na figura anterior, o número diagonal, nesse caso o 13, coincide com a medida da diagonal do prisma construído.

Por fim, discutimos mais uma vez com os sujeitos a importância do estudo dos quaternos pitagóricos para a formação inicial e continuada de professores de matemática. Em seguida, informamos aos sujeitos que nos encontraríamos para aplicar uma avaliação escrita cujo objetivo era verificar qual a compreensão deles acerca dos quatro números inteiros que satisfazem o Teorema de Pitágoras.

4.4 Etapa III: Aplicação da avaliação escrita

A avaliação escrita que elaboramos, tendo como conteúdo principal os quaternos pitagóricos, contém vinte e três questões. Conforme mencionamos no início do capítulo em tela, a análise da avaliação escrita corresponde à comprovação da tese que ora defendemos. Com isso, destinaremos o próximo capítulo à exposição das questões contidas na referida avaliação escrita bem como à análise global e análise pontual dos dados construídos.

Capítulo 5

ANÁLISE DA AVALIAÇÃO ESCRITA EM SEUS ASPECTOS GLOBAIS E PONTUAIS

Com o propósito de comprovar a tese que ora defendemos, o presente capítulo será destinado a apresentar a análise da avaliação escrita, em termos globais e pontuais, com o propósito de inferir quanto ao nível de compreensão, relacional ou instrumental, apresentado pelos três sujeitos integrantes da investigação. Por fim, sustentaremos nossa tese confrontando as inferências realizadas com base na análise global e na análise pontual. Sobretudo, nossa tese será comprovada se constatarmos que a análise global é mais apropriada do que a pontual para inferir se o nível de compreensão apresentado é relacional ou instrumental.

5.1 Análise Global dos dados

Tendo como conteúdo principal os quaternos pitagóricos, discorreremos, na sessão em tela, acerca dos critérios que adotaremos para analisar, de modo global, a avaliação escrita que aplicamos para podermos inferir quanto ao nível de compreensão apresentado pelos sujeitos. Sendo assim, concomitantemente, com base nos critérios estabelecidos e nas respostas esperadas, realizaremos a análise global das avaliações escritas dos sujeitos R, J e M. Todavia, é válido ressaltar que ao realizarmos uma análise global dos dados que dispomos, nossa tese se contrapõe às análises pontuais que são adotadas por muitos pesquisadores que utilizam as categorias de compreensão relacional e compreensão instrumental enquanto instrumento avaliativo.

Sobretudo, por considerarmos que, não só para a formação de conceitos matemáticos, mas também para a formação de quaisquer outros conceitos, há uma rede de outros conceitos que contribuem para tal formação, denominados por Skemp (1980) conceitos contributivos. Acreditamos que a análise global, leva em consideração a diversidade de conceitos envolvidos na formação de um determinado conceito, se faz necessária para inferir se o nível de compreensão é relacional ou instrumental.

Sendo assim, considerando que esquema corresponde a uma rede de ideias conectadas e, conforme destacado por Skemp (1980, 1989), no nível de compreensão relacional os esquemas são mais ricos que no nível de compreensão instrumental, ou melhor, o número de conceitos e de relações frutíferas estabelecidas nos esquemas referentes à compreensão relacional é maior do que na compreensão instrumental, com base no diagrama esquemático relacionado aos quaternos pitagóricos, delimitaremos os critérios que utilizaremos para realizar a análise global.

Todavia, o esquema relacionado aos quaternos pitagóricos é formado por uma diversidade de conceitos contributivos, conforme destacado no diagrama esquemático que esboçamos anteriormente.

Considerando que o esquema relacionado à compreensão relacional é mais rico e amplo que o da compreensão instrumental, na análise global, nos deteremos a verificar as relações frutíferas entre os conceitos contributivos externalizados pelos sujeitos, tendo como base o diagrama esquemático dos quaternos pitagóricos. Todavia, elaboramos uma rede razoavelmente complexa posto que quiçá outros conceitos anteriores ou complementares possam ser externalizados de modo que a rede de conceitos seja relativa a cada sujeito.

Diante do exposto, em consonância com o ponto de vista construtivista, em que as estruturas construídas pelo aluno não podem ser avaliadas diretamente, mas só por meio do desenvolvimento de um projeto de pesquisa referente a cada aluno, inferimos quanto ao nível de compreensão dos sujeitos envolvidos na pesquisa, acerca dos quaternos pitagóricos, detendo-nos à ideia de esquema e no diagrama esquemático dos quaternos pitagóricos. Sendo assim, a seguir, apresentamos os critérios que adotamos para analisarmos, de modo global, a avaliação escrita, objetivando verificar se houve compreensão relacional ou compreensão instrumental para o caso do conceito em tela.

A compreensão relacional dos quaternos pitagóricos será evidente nos casos em que o sujeito:

(i) Fizer a conexão entre a interpretação algébrica e a interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras, em três dimensões, posto que no esquema relacionado aos quaternos pitagóricos a relação entre a Álgebra e Geometria é imprescindível para formação deste conceito. Além disso, a referida relação deve ser evidenciada em contraposição à abordagem puramente algébrica, cuja consequência pode ser a falta de significado e compreensão do conceito.

(ii) Souber retomar o conceito do Teorema de Pitágoras em duas dimensões para obter as representações algébrica e geométrica, em três dimensões, dado que o esquema relacionado aos quaternos pitagóricos é uma extensão do esquema dos ternos pitagóricos. No mais, os ternos pitagóricos assim como os Quaternos Pitagóricos, correspondem a uma importante ferramenta histórica e pedagógica para a compreensão do Teorema de Pitágoras enquanto aplicação para determinar a menor distância entre dois pontos, respectivamente em duas e em três dimensões.

Nos casos em que os critérios (i) e (ii), supracitados, não forem contemplados, o nível de compreensão apresentado será instrumental. Sobretudo, acreditamos que os critérios (i) e (ii) são bons implicadores quanto à amplitude ou não do esquema. Ou seja, dado que o critério (i) se refere à diversidade de representações de um mesmo conceito e que o critério (ii) se refere à extensão do Teorema de Pitágoras de duas dimensões para três dimensões, tais critérios, quando contemplados, correspondem ao nível de compreensão relacional por implicarem em um esquema mais rico e por consequência mais amplo do que o esquema inerente ao nível de compreensão instrumental.

Por fim, para preencher eventuais lacunas encontradas no registro escrito, sempre que preciso, obteremos mais elementos para inferirmos o nível de compreensão por meio da realização de entrevistas individuais. Sobretudo, metodologicamente utilizando o Estudo de Caso, através de instrumento como registro escrito (avaliação escrita) e entrevista verificam, de modo global, se os sujeitos apresentaram compreensão relacional ou compreensão instrumental acerca dos quaternos pitagóricos.

A seguir, apresentaremos os enunciados das questões contidas na avaliação escrita; algumas considerações acerca das respostas esperadas; as respostas dadas pelos sujeitos R, J e M e a análise global das mesmas.

Questão 1: As dimensões de um paralelepípedo retângulo são 20 cm, 12 cm e 9 cm. Calcule a medida de uma diagonal desse paralelepípedo.

Para determinar o valor da diagonal desse paralelepípedo basta extrair a raiz quadrada da soma dos quadrados das três dimensões desse sólido, posto que se conhecermos as três dimensões, consequentemente poderemos obter a diagonal. No entanto, há dois caminhos para se chegar a esta resposta, sendo que o mais rápido consiste em simplesmente realizar os cálculos algébricos e obter a resposta. O segundo caminho, mais detalhado, além de realizar os cálculos algébricos consiste em recorrer a meios geométricos também.

Nas três respostas houve, além dos cálculos algébricos que conduziram ao valor exato da diagonal, também a representação geométrica do paralelepípedo retângulo relacionado à questão. Desse modo, os sujeitos aliaram álgebra e geometria. No entanto, no que diz respeito às incompletudes, os sujeitos R e J não tracejaram alguns entes geométricos internos dos sólidos, sendo que no caso de J só foi a diagonal.

Sendo assim, mostramos aos sujeitos R e J as respostas que os mesmos apresentaram e questionamos se eles notaram alguns equívocos no desenho geométrico apresentado. De imediato J apontou que deveria ter tracejado a diagonal do sólido. Porém, R apenas afirmou que se esquecera de tracejar a diagonal, esquecendo-se de mencionar as três arestas internas, apresentando assim, dificuldade no que diz respeito à representação geométrica.

Questão 2: Dado dois pontos G e E, para calcularmos a menor distância entre esses dois pontos, em duas e em três dimensões podemos recorrer ao Teorema de Pitágoras. Em duas dimensões há um terno pitagórico (x, y, z) correspondente, e em três dimensões há um quaterno pitagórico (a, b, c, d) correspondente. Geometricamente, quais dimensões podem ser associadas aos números inteiros que compõem o terno pitagórico (x, y, z) e o quaterno pitagórico (a, b, c, d)?

Dentre as expectativas do que é esperado para uma resposta relacional da questão em tela, uma delas é a capacidade de generalizar o que fora pedido na questão 1, ou seja, que haja evidências da importante relação entre álgebra e geometria. No mais, além de generalizar o sujeito deverá (i) evidenciar a extensão dos ternos pitagóricos para os quaternos pitagóricos por meio de entes geométricos; (ii) relacionar o cálculo da menor distância entre dois pontos, tanto em duas dimensões como em três dimensões, aos ternos pitagóricos e aos quaternos pitagóricos, respectivamente.

Somente J não apresentou representação geométrica e apenas M se deteve a representar os pontos G e E posto que no enunciado da questão houve menção ao fato da menor distância entre esses pontos. No mais, no que diz respeito às dimensões que podem ser relacionadas aos ternos pitagóricos, R e J, ao considerar o triângulo retângulo como referência, descreveram cateto e hipotenusa como sendo dimensões.

Contudo, durante a entrevista, solicitamos que J representasse geometricamente o terno pitagórico (x,y,z) e o quaterno pitagórico (a,b,c,d) evidenciando, nos dois casos, a distância entre os pontos G e E. Na oportunidade, J não apresentou dificuldade em representar o que fora pedido.

Em seguida, perguntamos a J no caso do triângulo retângulo, quais dimensões estão relacionadas ao terno pitagórico (x,y,z) e o referido sujeito mencionou que *se considerarmos esse triângulo como sendo a metade de um retângulo, x e y podem ser a largura e o comprimento do retângulo e z a diagonal do retângulo.*

Por sua vez, como R havia apresentado uma representação geométrica sem explicitar os pontos G e E, mostramos ao referido sujeito seu esboço e solicitamos que o mesmo situasse os pontos G e E. Diante dessa solicitação, R apontou corretamente onde deveria situar os pontos G e E, porém, ao questionarmos se no caso do triângulo, cateto e hipotenusa são dimensões, o referido sujeito afirmou que sim.

Questão 3: Qual a definição de quaternos pitagóricos?

O objetivo da questão é que o sujeito apresente uma definição para os quaternos pitagóricos que melhor corresponda ao nível de compreensão relacional. O ideal é que seja evidenciada não só a representação algébrica, mas também a geométrica.

Nenhuma resposta se deteve à representação geométrica. Sobretudo, apenas R e M em suas respostas destacaram (a,b,c,d) e $a^2+b^2+c^2 = d^2$.

Na entrevista, mencionamos aos três sujeitos que há mais de uma maneira de representar os quaternos pitagóricos e solicitamos que após verificar suas respectivas respostas à avaliação escrita, os sujeitos apontassem se haviam esquecido de alguma representação.

Em resposta à indagação supracitada, R afirmou que (a,b,c,d) e $a^2+b^2+c^2 = d^2$ são as duas maneiras possíveis. Contudo, J e M além de mencionar (a,b,c,d) e $a^2+b^2+c^2 = d^2$, também mencionaram a representação geométrica.

Questão 4: Por que o número d do quaterno (a,b,c,d) é denominado número diagonal?

É esperado que o sujeito consiga evidenciar que essa denominação se deve à representação geométrica dos quaternos pitagóricos.

J e M conseguiram determinar que a denominação de número diagonal dada ao d do quaterno (a,b,c,d) se deve à sua representação geométrica. Porém, conforme podemos verificar a seguir (Fig. 14), R não apresentou resposta adequada.

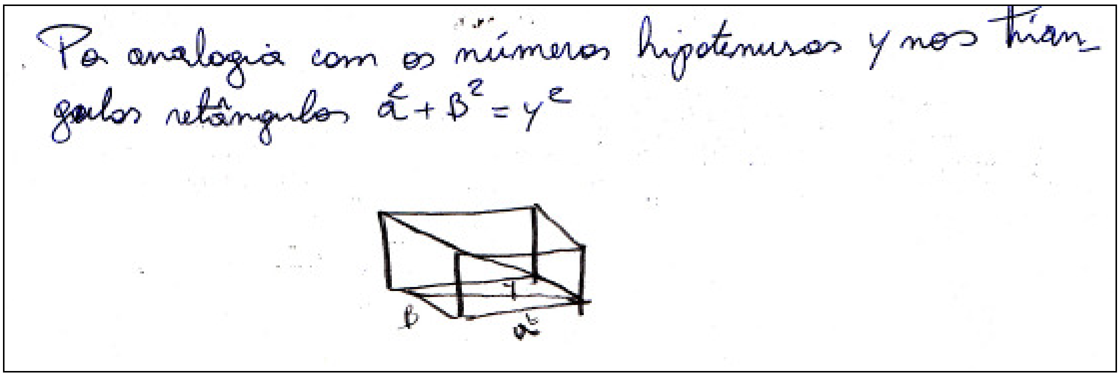


Figura 14: Resposta de R à questão 4.

Sendo assim, na entrevista, mostramos a R a referida resposta e perguntamos por que em vez de utilizar os termos a, b, c, d, o sujeito se deteve aos termos a, β e y. R disse *na hora de responder me confundi com o Método 3. É nele que fala de número hipotenusa. Diante dessa resposta, solicitamos que R tentasse nos explicar porque o número d do quaterno (a,b,c,d) é denominado número diagonal.* Na oportunidade, R disse *sinceramente não me lembro*.

Com isso, solicitamos que R representasse geometricamente o quaterno pitagórico (a,b,c,d). Como a representação apresentada por R foi correta, em seguida, fizemos a seguinte pergunta: *o termo d coincide com que ente geométrico do sólido que você desenhou? Será que a denominação número diagonal para d tem a ver com isso?* Assim, após parar pensar, R afirmou: *d é a diagonal do paralelepípedo. Acredito que é daí que vem o nome número diagonal para d.*

Questão 5: Represente geometricamente o quaterno pitagórico (x, y, z, w).

Essa questão corresponde a mais uma em que é preciso que sejam evidenciadas as representações algébrica e geométrica dos quaternos pitagóricos, sendo que é dado a algébrica e solicitada a geométrica.

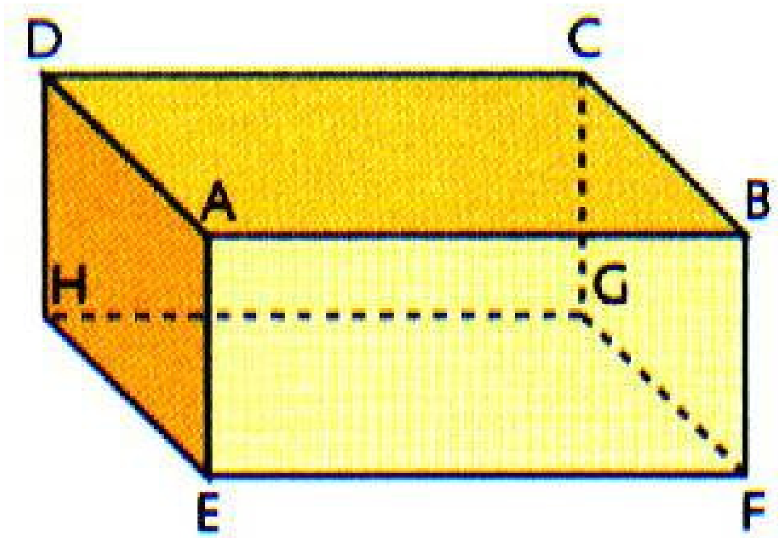
M relacionou corretamente cada termo do quaterno pitagórico (x, y, z, w) às três dimensões e à diagonal (w) do paralelepípedo retângulo. Em contrapartida, em suas respostas, J e R mantiveram a representação com o mesmo erro apresentando anteriormente, a saber: R não tracejou nenhum ente geométrico interno do sólido; J não tracejou a diagonal. Todavia, apenas R apresentou uma representação algébrica, mesmo que no enunciado da questão fosse pedido apenas a representação geométrica.

Como J já havia reconhecido anteriormente a necessidade de tracejar a diagonal, não foi necessário questioná-lo sobre a resposta da questão em foco. Contudo, como R não havia reconhecido a necessidade de tracejar entes geométricos internos do sólido, na entrevista perguntamos se há outros elementos do sólido, além da diagonal, que devem ser tracejados. Por sua vez, R contestou que poderia tracejar as três arestas que não são visíveis.

Questão 6: Determine, em função das dimensões do paralelepípedo retângulo ilustrado a seguir, a menor distância entre os pontos:

a. H e F

b. D e F

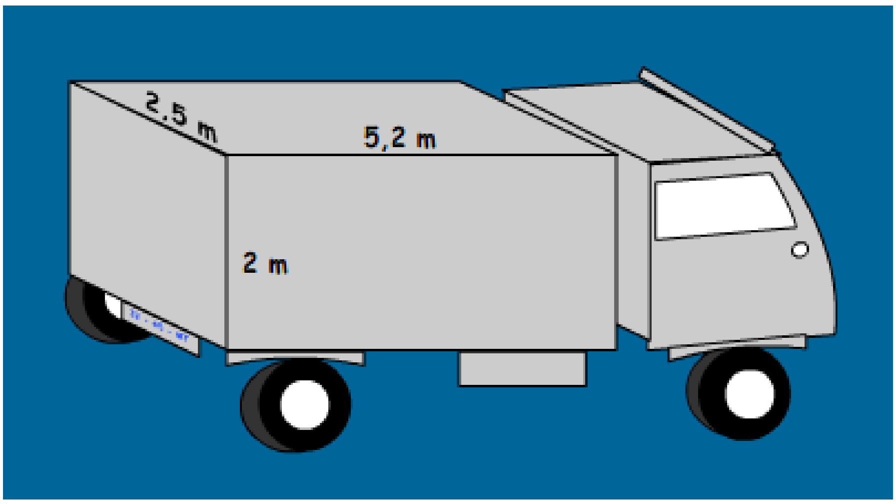


A questão em tela contempla todos os critérios apontados nas questões de 1 a 5, sendo que, nesse caso, há o esboço de um paralelepípedo retângulo para auxiliar. Consideramos que o sujeito que conseguisse responder esta questão aliando o pensamento algébrico ao geométrico e associando esta relação ao cálculo da menor distância entre dois pontos e tivesse correspondido às expectativas das questões precedentes, estaria trilhando o caminho que conduz à compreensão relacional dos quaternos pitagóricos.

Os três sujeitos conseguiram realizar corretamente os cálculos algébricos para determinar a menor distância entre os pontos pedidos. Porém, J e R foram puramente algébricos em suas respostas, sendo que apenas M se deteve aos entes geométricos para dar sua explicação algébrica.

Diante disso, na entrevista nos detivemos a questionar aos sujeitos J e R sobre a possibilidade de representar os valores de $\overline{HF}$ e $\overline{DF}$ em função das dimensões do sólido. Uma vez que na avaliação escrita, ambos apresentaram que $\overline{HF} = \sqrt{\overline{HE}^2 + \overline{EF}^2}$ e $\overline{DF} = \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{EH}^2 + \overline{EF}^2}$, questionamos quais são as dimensões que podem ser associados aos segmentos que estão dentro das raízes. Os dois sujeitos afirmaram que, no caso da distância entre os pontos H e F, as dimensões relacionadas são a largura e o comprimento do sólido e que, no caso da distância entre os pontos D e F, as dimensões relacionadas são a largura, o comprimento e a altura do sólido.

Questão 7: Certa transportadora foi contratada para transportar uma estátua feita de madeira cuja altura é 6,1 m. A figura a seguir representa o caminhão que a referida transportadora dispõe para tal serviço. Com base na figura, verifique se é possível realizar o serviço. Se for possível, de que modo a estátua deve ser colocada no caminhão?



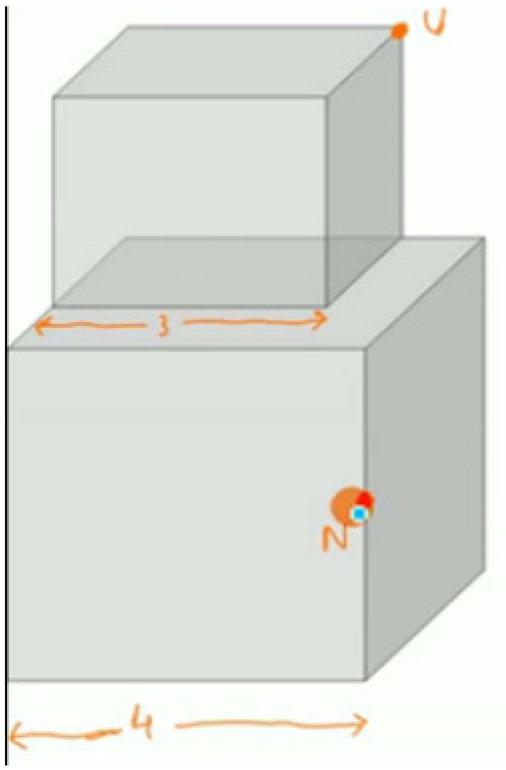
A situação problema supracitada é um exemplo de aplicação dos quaternos pitagóricos, de modo que para solucioná-la se faz necessário, assim como nas questões precedentes, evidenciar a importante inter-relação entre as representações algébrica e geométrica dos quaternos pitagóricos.

Todos os três sujeitos apresentaram respostas adequadas à questão em foco. No entanto, ao verificarmos o caminho trilhado por cada um, notamos que somente M se deteve a descrever o fato de que se conhecermos as três dimensões podemos determinar o valor da diagonal. Os demais, primeiro calcularam o valor relacionado à diagonal da base em seguida calcularam o valor relacionado à diagonal do caminhão, sendo que somente J traçou a diagonal da base na ilustração contida na questão em tela.

Diante do exposto, para sabermos se J e R compreenderam que se conhecermos as três dimensões podemos determinar o valor da diagonal, na entrevista pedimos aos referidos sujeitos que resolvessem a questão novamente, porém, sem calcular o valor da diagonal da base. Na oportunidade, ambos responderam a questão sem se ater ao valor da base.

Desse modo, podemos inferir que os sujeitos tanto souberam solucionar a questão utilizando um caminho mais curto do que o caminho em que é necessário primeiro recorrer à distância entre dois pontos em duas dimensões antes de verificar em três dimensões.

Questão 8: Observando a figura a seguir, sabendo que a aresta do cubo maior é 4, a do cubo menor é 3 e N é um ponto que está contido em uma das arestas, sendo o ponto médio da mesma, determine o valor da distância entre os pontos N e U.



Na questão em tela, é esperado que o sujeito apresente um pensamento geométrico apurado a ponto de compreender que a solução dessa questão envolve quaternos pitagóricos.

Em especial, antes de entregarmos a avaliação escrita, informamos aos sujeitos que quando estivessem respondendo a questão 8, se não conseguissem solucioná-la nos avisassem para que mostrássemos o vídeo[4] contendo sua resolução. Optamos por apresentar esse auxílio aos sujeitos que não conseguissem resolver, posto que mesmo tendo acesso à resposta, reproduzir o que é mostrado no vídeo não seria tão simples caso o sujeito não tivesse participado do módulo de ensino.

Segue a representação contida no referido vídeo (Fig. 15).

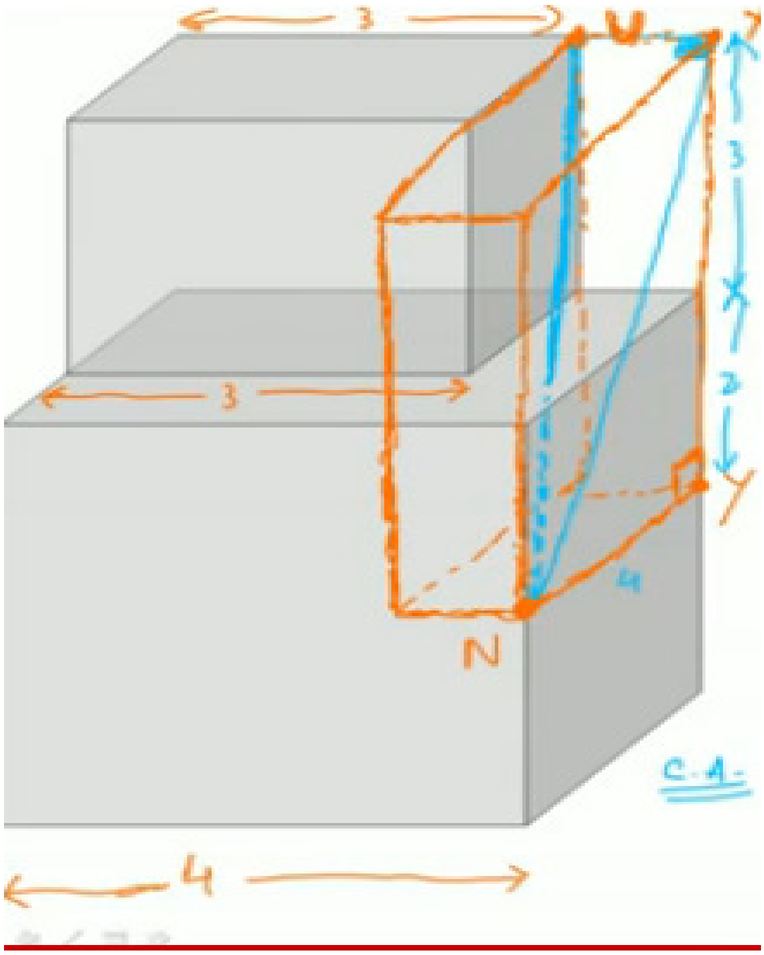


Figura 15: Esboço contido no vídeo

Todos os três sujeitos solicitaram, ver o vídeo, ou seja, os sujeitos não conseguiram solucionar a questão sem ter como auxílio o vídeo.

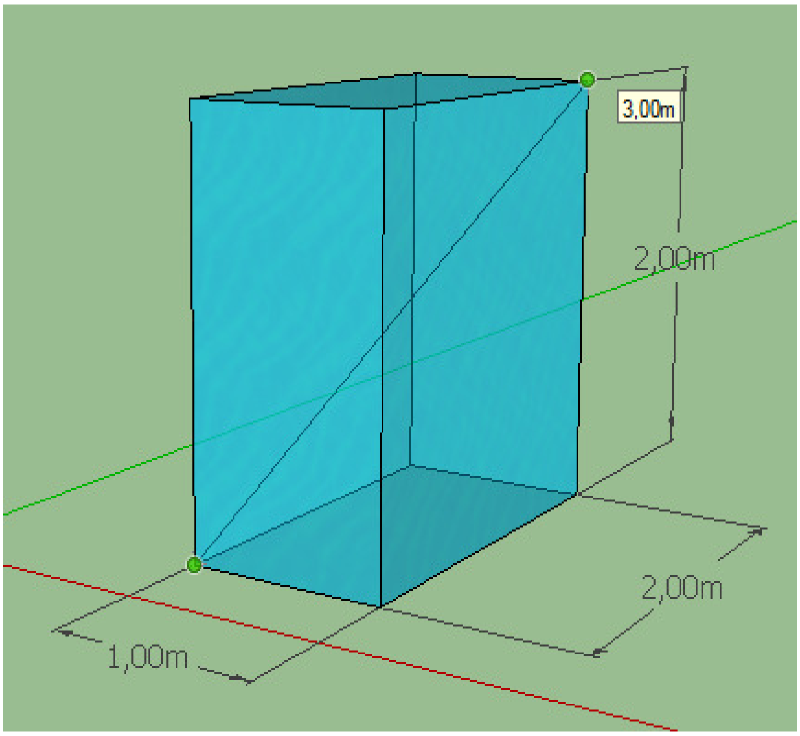
[4] Fonte: http://www.youtube.com/watch?v=-bxvpjOakek.

Conforme verificamos, R não conseguiu realizar representações geométricas de modo que houvesse a necessidade de aplicar o Teorema de Pitágoras e o conhecimento dos quaternos pitagóricos. Todavia, o referido sujeito apresentou os cálculos algébricos. Em outras palavras, R memorizou os cálculos algébricos apresentados no vídeo sem apresentar compreensão dos mesmos.

Em contrapartida, os sujeitos J e M através de suas respostas demonstraram não só nos cálculos algébricos, mas também no uso da representação geométrica, que a referida questão remete aos quaternos pitagóricos.

Na entrevista, mostramos a R a resposta que o mesmo apresentou e solicitamos que fosse completada a representação geométrica. Todavia, ele afirmou que não saberia fazer o que fora solicitado e pediu para ver o vídeo novamente. Contudo, mesmo depois de rever o vídeo, R manteve a postura de que não conseguiria realizar o esboço.

Questão 9: Observe a imagem a seguir, e responda as questões propostas.



Item a: Qual o quaterno pitagórico relacionado?

É esperado que o sujeito saiba relacionar o sólido geométrico ao quaterno pitagórico correspondente. Nesse caso, as representações algébrica e geométrica serão evidenciadas tendo como referência à geométrica.

Todos os três sujeitos apresentaram respostas adequadas. Curiosamente, conforme podemos verificar a seguir (Fig. 16), R necessitou recorrer a representação geométrica para atribuir valores genéricos e assim em sua resposta, além de apresentar o quaterno pitagórico (1,2,2,3), também apresentou o (a,b,c,d).

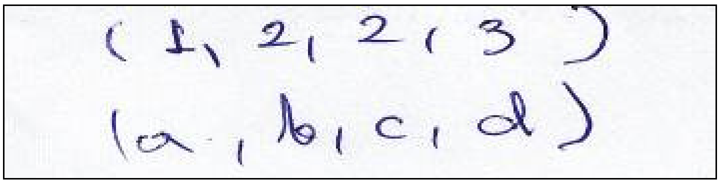


Figura 16: Resposta de R à questão 9a

Em decorrência das informações supracitadas, na entrevista julgamos necessário questionar aos sujeitos se os quaternos pitagóricos (2,2,1,3) e (2,1,2,3) podem ou não ser relacionados à ilustração contida na questão em foco. Os três sujeitos afirmaram que é possível. Em especial, M disse *somente a diagonal 3 deve ser fixo no lugar do último termo do quaterno*.

Item b: Com os métodos 1 e 2 podemos obter o quaterno representado no sólido geométrico?

É esperado que os sujeitos conheçam as condições estabelecidas através dos métodos 1 e 2, e assim, possam perceber se o quaterno pitagórico relacionado ao sólido em foco pode ser ou não um caso possível de ser gerado pelos referidos métodos.

Todos os três sujeitos conseguiram inferir que pelos métodos 1 e 2 é possível obter o quaterno pitagórico representado no sólido em questão. Porém, dentre as explicações que foram dadas, somente R não explicitou o fato de c e d serem consecutivos e assim, satisfazerem a condição do Método 2.

Na entrevista perguntamos a R qual a relação entre os termos c e d e olhando a resposta que apresentara na avaliação escrita, R destacou que escreveu que $d = c+1$ *e que isso é o mesmo que dizer que eles são consecutivos.*

Item c: Considerando os dois pontos evidenciados no sólido qual o valor da menor distância entre esses dois pontos? A referida distância coincide com que ente geométrico contido no sólido?

Nesse item é esperado que os sujeitos demonstrassem conhecimento acerca da relação do cálculo da menor distância entre dois pontos, em três dimensões, e os quaternos pitagóricos.

Os três sujeitos apresentaram respostas adequadas ao destacarem que a menor distância corresponde a 3 m que, por sua vez, coincide com a diagonal do sólido.

Item d: De que modo podemos calcular a distância entre os dois pontos e evidenciados no sólido e resultar em 5m?

É esperado perceber se os sujeitos conseguem verificar outra maneira de calcular a distância entre dois pontos sem aplicar o Teorema de Pitágoras e se conseguem evidenciar que, de fato, para obter a menor distância se faz necessário aplicar o referido Teorema.

Todos os três sujeitos apresentaram respostas apontando a necessidade de realizar a adição 1+2+2 para resultar em 5m. Porém, R apenas apresentou o cálculo sem remeter os valores 1, 2 e 2 às dimensões do sólido em tela. No mais, nenhum sujeito evidenciou que a menor distância entre dois pontos é uma aplicação do Teorema de Pitágoras.

Sendo assim, na entrevista realizamos as seguintes perguntas aos três sujeitos: O cálculo da menor distância entre dois pontos, em três dimensões, é aplicação de que teorema matemático? Em vez de fazermos 1+2+2, o que devemos fazer? Todos os sujeitos responderam que para isso é necessário aplicar o Teorema de Pitágoras extraindo a raiz quadrada de $1^2+2^2+2^2$.

No mais, perguntamos a R acerca das relações dos termos 1, 2 e 2 às dimensões do sólido e obtivemos uma reposta adequada, na qual o referido sujeito afirmou que esses termos são a altura, largura e comprimento do sólido.

Questão 10: Sabemos que se (a, b, c, d) é um quaterno pitagórico, k(a, b, c, d) também será. Com isso, responda:

Item a: O que devemos fazer para calcular o volume do prisma representado pelo quaterno pitagórico (a, b, c, d)?

É esperado que o sujeito saiba como realizar o cálculo do volume de um sólido e que as dimensões que necessita para esse fim configuram como termos do quaterno pitagórico (a, b, c, d).

Todos os três sujeitos apontaram que é necessário realizar o produto $a \times b \times c$. Porém, R não associou esses termos às dimensões de um paralelepípedo retângulo. Na entrevista mostramos a R a resposta que apresentara na avaliação escrita e indagamos quais são as dimensões relacionadas ao paralelepípedo retângulo contidas no produto $a \times b \times c$. Diante disso, R destacou que a, b e c correspondem à altura, largura e comprimento do paralelepípedo retângulo.

Item b: Para calcular o volume do prisma representado pelo quaterno pitagórico k(a, b, c, d) basta considerar o cálculo que você indicou e acrescentar o fator k?

É esperado que o sujeito, além de corresponder às expectativas do item precedente, seja capaz de evidenciar um entendimento acerca da relação entre quaternos pitagóricos redutíveis e irredutíveis.

Em suas respostas, J e R recorreram ao volume de um quaterno pitagórico específico, em ambos os casos (1,2,2,3), possivelmente por ser o menor quaterno pitagórico, e o volume de alguns quaternos pitagóricos redutíveis a (1,2,2,3) . Porém, não conseguiram apresentar a fórmula correta para representar o volume associado ao quaterno pitagórico (ka,kb,kc,kd) posto que os referidos sujeitos consideraram o volume associado ao quaterno pitagórico (1,2,2,3) até na generalização ao afirmarem que o novo volume seria $(ka)^3 \times 4$. Em contrapartida, M destacou que para calcular o volume do prisma representado pelo quaterno pitagórico $k(a, b, c, d)$ não basta multiplicar $a \times b \times c$ por k, mas sim por k^3.

Na entrevista, pedimos a J e R que nos explicassem porque o novo volume seria $(ka)^3$ $\times 4$, ao que J disse *Eu pensei que basta multiplicar um k ao cubo por 4. Quatro é o volume do inicial (1,2,2,3).* Em seguida, perguntamos a J se o que ele havia dito estava correto. Após pensar um pouco, J demonstrou constatar o equívoco que cometera ao dizer *Eita, eu me confundi! Na verdade o inicial é (a, b, c, d) e o redutível é (ka,kb,kc,kd). Daí o volume tem que ser a multiplicação dos três termos ka×kb×kc. Agora sim... tem que multiplicar a×b×c não por k e sim por* k^3.

Por sua vez, R afirmou que não saberia explicar porque o novo volume seria $(ka)^3 \times 4$. Com isso, em seguida, indagamos ao referido sujeito o que significa o 4 nesse produto e obtemos a resposta de que 4 corresponde ao volume de (1,2,2,3). Com o intuito de verificarmos se R saberia ou não indicar o novo volume, indagamos a R qual seria o volume do quaterno pitagórico $k(a,b,c,d)$ e obtemos a resposta que seria necessário fazer $k \times a \times b \times c$. Diante disso, posto que R não multiplicou todos os termos por k, verificamos que R não compreendera a definição de quaterno irredutível, e consequentemente, não conseguiu estabelecer corretamente qual o volume do sólido relacionado ao quaterno pitagórico $k(a,b,c,d)$.

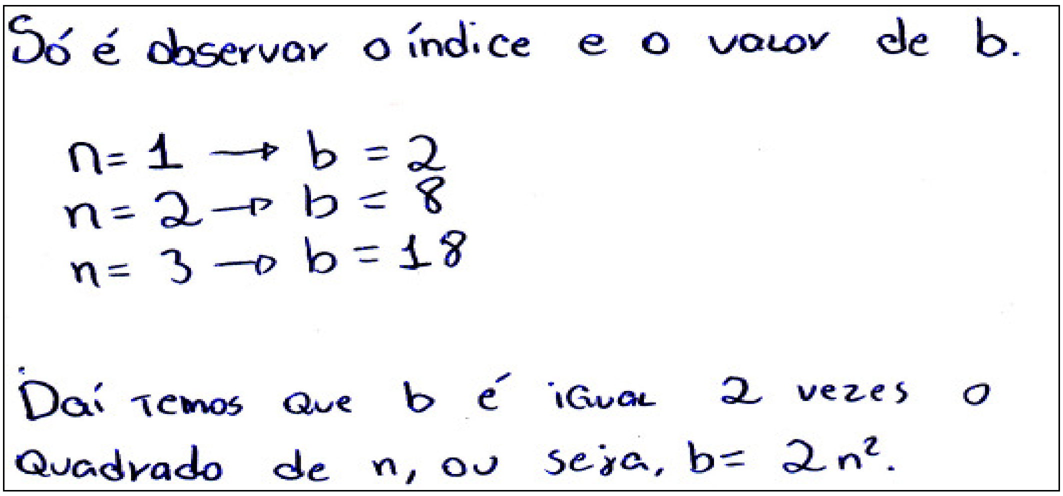
As questões posteriores se referem aos três métodos que apresentamos como meio para determinar os valores de a, b, c e d que compõem o quaterno pitagórico (a, b, c, d), sendo distribuídas da seguinte maneira: 11 a 13 – Método 1; 14 e 15 – Método 2; 16 a 23 – Método 3. Poderemos inferir se o nível de compreensão alcançado será relacional se for demonstrado que houve conhecimento capaz de entender o porquê de cada método em detrimento da simples manipulação de regras e fórmulas inerentes à compreensão instrumental.

As questões 11 e 12 são análogas, porém relacionadas a métodos diferentes. As referidas questões exigem que os sujeitos deduzam a fórmula relacionada a cada Método através do padrão existente nos quaternos pitagóricos que são gerados por cada método. Todavia, poderemos verificar a capacidade ou não dos sujeitos em deduzirem as fórmulas utilizando outros conceitos matemáticos além dos quaternos pitagóricos.

Questão 11: Complete a tabela a seguir. Em seguida, analise os quaternos pitagóricos gerados pelo Método 1, quando $a = 1$, e determine Q_n.

	a	b	c	d	(a,b,c,d)	Relação
Q_1	1	2	2	3		
Q_2	1	8	4	9		
Q_3	1	18	6	19		
Q_4						
Q_n						

Todos os sujeitos conseguiram chegar à generalização do Método 1. Porém, em nenhum caso houve descrição de como se chegar ao fato do termo b poder ser expresso por $2n^2$. Na entrevista, indagamos aos três sujeitos qual o procedimento que os mesmos adotaram para inferir que $b = 2n^2$. Na oportunidade, R após pensar por um tempo, afirmou que não saberia fazer, sendo que os demais sujeitos apresentaram respostas adequadas. A guisa de ilustração, a seguir (Fig. 17) consta a resposta dada por M:


Só é observar o índice e o valor de b.

$n = 1 \rightarrow b = 2$
$n = 2 \rightarrow b = 8$
$n = 3 \rightarrow b = 18$

Daí temos que b é igual 2 vezes o quadrado de n, ou seja, $b = 2n^2$.

Figura 17: Resposta de M à questão 11.

Questão 12: Complete a tabela a seguir. Em seguida, analise os quaternos gerados pelo Método 1, quando $a = 2$, e determine Q_n.

	a	b	c	d	(a,b,c,d)	Relação
Q_1	2	9	6	11		
Q_2	2	25	10	27		
Q_3	2	49	14	51		
Q_4						
Q_n						

M e J conseguiram explicitar corretamente os caminhos que os conduziram às inferências dos termos b, c e d em função de n e a como sendo 2. Por sua vez, R apresentou respostas adequadas para os termos a, b e d, sendo que para o termo c, o referido sujeito realizou cálculos algébricos que o conduziu a inferir que $c^2 = 4b$ e no preenchimento da tabela pôs que $c = 2(2n+1)^2$.

Na entrevista, após mostrarmos a R a resposta que o mesmo apresentou na avaliação escrita, solicitamos ao referido sujeito que verificasse se a igualdade $c = 2(2n+1)^2$ está correta. Na oportunidade, após substituir n por alguns valores específicos, R afirmou que a igualdade não é verdadeira e sim $2(2n+1)$. Com isso, em seguida, fizemos a seguinte pergunta a R: Como podemos proceder para inferir que $c = 2(2n+1)$? e obtivemos a seguinte resposta: *Não sei*!

Questão 13: A figura geométrica relacionada ao quaterno $(a,2a,2a,3a)$ é um cubo? Caso não seja, indique a que sólido geométrico esse quaterno pode ser relacionado e qual o quaterno que pode ser relacionado ao cubo.

A referida questão explora a associação do cubo com um quaterno que não é pitagórico, posto que o valor de sua diagonal não é um número inteiro. Com isso, é esperado que os sujeitos possam, além de compreender esse fato, conseguir: (i) Expressar algebricamente o quaterno relacionado ao cubo. (ii) Entender, com ou sem auxílio do esboço geométrico, quais as características do sólido geométrico relacionado ao quaterno pitagórico $(a,2a,2a,3a)$.

Os três sujeitos afirmaram que o quaterno pitagórico $(a,2a,2a,3a)$ não pode ser relacionado ao cubo, uma vez que para isso seria necessário que os três primeiros termos fossem iguais. No entanto, somente R e M apresentaram o termo associado à diagonal do cubo. No mais, somente M se deteve ao fato de que o quaterno relacionado ao cubo não é pitagórico.

Na entrevista, solicitamos que o sujeito J determinasse qual o quaterno relacionado ao cubo e verificasse se o mesmo é pitagórico. Na oportunidade, o referido sujeito realizou os cálculos algébricos corretamente para determinar o valor da diagonal do cubo e afirmou que o quaterno relacionado ao cubo não é pitagórico pelo fato da diagonal não ser expressa por um número inteiro. Por sua vez, ao questionarmos a R se o quaterno relacionado ao cubo é pitagórico, o referido sujeito disse que *não pode ser por que o valor de d não é inteiro.*

Por fim, no que diz respeito às inferências acerca das características do sólido geométrico relacionado ao quaterno pitagórico (a,2a,2a,3a), mesmo sem esboçar o sólido, apenas M afirmou que o sólido em questão é um paralelepípedo retângulo com duas faces quadradas.

Com o auxílio do esboço, J mencionou as duas faces quadradas do sólido, porém se equivocou ao afirmar que isso só é possível se a largura e a altura forem 2a. Na avaliação escrita, mostramos a resposta que ele apresentou na avaliação escrita e em seguida fizemos a seguinte pergunta: O que acontece se a altura for a?. Na oportunidade, J esboçou o sólido sendo a altura igual a a e afirmou que também teria duas faces quadradas e acrescentou que para o quaterno pitagórico destacado na questão em foco, o sólido relacionado sempre terá duas faces quadradas.

No mais, com o intuito de entendermos porque na avaliação escrita J não verificou a possibilidade da altura ser a e assim constatar que também se tratava de um sólido que possui duas faces quadradas, ainda na avaliação escrita, fizemos a seguinte pergunta: No sólido relacionado ao quaterno pitagórico (a,b,c,d), qual termo corresponde à altura? e obtivemos a seguinte resposta: *Quando fiz a prova pensava que tinha que ser o terceiro termo. Agora vejo que não importa... Se for o segundo ou o primeiro, o sólido é o mesmo... É como se virasse o sólido*.

Por sua vez, R, também com o auxílio do esboço, afirmou que o sólido geométrico relacionado ao quaterno pitagórico (a,2a,2a,3a) corresponde ao prisma de faces quadradas. Desse modo, R apresentou uma contradição, posto que se de fato o sólido geométrico em foco fosse um prisma de faces quadradas, o mesmo seria um cubo. Porém, o próprio sujeito afirmou que esse não é o quaterno relacionado ao cubo.

Na entrevista, solicitamos a R que verificasse se sua resposta estava correta. Na oportunidade, após pintar com lápis as faces quadradas do sólido que desenhara, ele afirmou que havia apenas 2 faces quadradas e não todas.

Questão 14: Com base no Método 2, complete a tabela a seguir.

m	*n*	*a*	*b*	*c*	*d*	*(a,b,c,d)*	*Relação*
65							

Na referida questão, é esperado que os sujeitos saibam apresentar (i) as duas formas de representação que são solicitadas e (ii) o artifício utilizado para expressar o número 65 como soma de dois quadrados.

Os três sujeitos apresentaram respostas adequadas à questão em foco, contemplando a diversidade de representação associadas aos quaternos pitagóricos. Porém, somente M explicitou o artifício que utilizou para representar o número 65 como soma de dois quadrados.

Sendo assim, na entrevista, fizemos a seguinte pergunta aos sujeitos J e R: Que artifício podemos utilizar para inferir que $65 = 1^2+8^2$ e $65 = 4^2+7^2$? Na oportunidade, R disse: *Sinceramente não sei dizer! Na prova fiz de cabeça! Não usei o papel pra fazer isso*. Por sua vez, R conseguiu explicitar o que fora pedido, afirmando: *Basta calcularmos todos os números quadrados menores que 65 e vermos se tem um caso ou mais que é possível somar dois quadrados e dar 65*.

Questão 15: Para *m* = 65, obtemos os quaternos (1,8,32,33) e (4,7,32,33). Logo, quais são as coincidências entre os sólidos geométricos relacionados aos referidos quaternos?

É esperado que os sujeitos possam associar os valores dos quaternos pitagóricos às dimensões de seus respectivos sólidos e consigam perceber as coincidências existentes entre estes.

Nenhum dos três sujeitos apresentou esboços para representar os sólidos em foco, porém, todos expressaram que entenderam que os dois sólidos possuem uma dimensão em comum e o mesmo valor para diagonal. Contudo, R e J se limitaram a afirmar que a dimensão coincidente é a altura, em vez de afirmar que é uma dimensão quaisquer.

Na avaliação escrita, fizemos as seguintes perguntas aos sujeitos J e R - Qual termo pertencente ao quaterno pitagórico (*a*,*b*,*c*,*d*) é relacionado à altura de um paralelepípedo retângulo? É possível que seja quaisquer dos três primeiros termos?

Na entrevista relacionada à questão 13, J explicitou que o termo relacionado a altura não é fixo. Porém, julgamos necessário questioná-lo a esse respeito, posto que na questão em foco o referido sujeito cometeu equívocos.

Na oportunidade, R afirmou que o ideal é que a altura seja o terceiro termo. Perguntamos se é possível que a altura se transforme em largura ou comprimento. Após pensar por certo tempo, R afirmou que se virarmos o sólido, isso é possível. Por sua vez, ao questionarmos a J se o terceiro termo que compõe um quaterno pitagórico corresponde à altura do sólido correspondente, rapidamente obtivemos a seguinte resposta: *Se permutarmos os valores das três dimensões o sólido é o mesmo*.

Particularmente, para o Método 3 destinamos um maior número de questões (16 a 23) posto que dentre os três métodos trabalhados no módulo de ensino, consideramos que o referido Método é o mais importante por ser o que mais estimula o entendimento da relação entre os ternos pitagóricos e os quaternos pitagóricos.

Questão 16: Suponhamos que um colega seu faltou no encontro em que discutimos acerca do Método 3, como você descreveria para ele tal Método?

É esperado que os sujeitos sejam capazes de descrever com clareza o referido Método.

Todos os três sujeitos apresentaram com clareza o Método 3. Contudo, apenas R se deteve a apresentar exemplos numéricos. Todavia, apresentar ou não exemplos numéricos não implica na compreensão ou não do referido método, dado que nas sessões subseguintes serão explorados exemplos numéricos específicos.

Questão 17: Com o Método 3, como podemos notar a importância dos ternos pitagóricos para gerar quaternos pitagóricos? Justifique sua resposta.

É esperado que os sujeitos consigam externalizar a importante relação dos ternos pitagóricos com os quaternos pitagóricos.

Os sujeitos M e J explicitaram com clareza a importância da relação entre os ternos pitagóricos e os quaternos pitagóricos no caso do Método 3. Porém, conforme podemos verificar a seguir (Fig. 18), R se deteve a descrever o procedimento algébrico relacionado ao Método 3 e a esboçar a situação geométrica que justifica a relação $a^2+b^2+c^2 = d^2$.

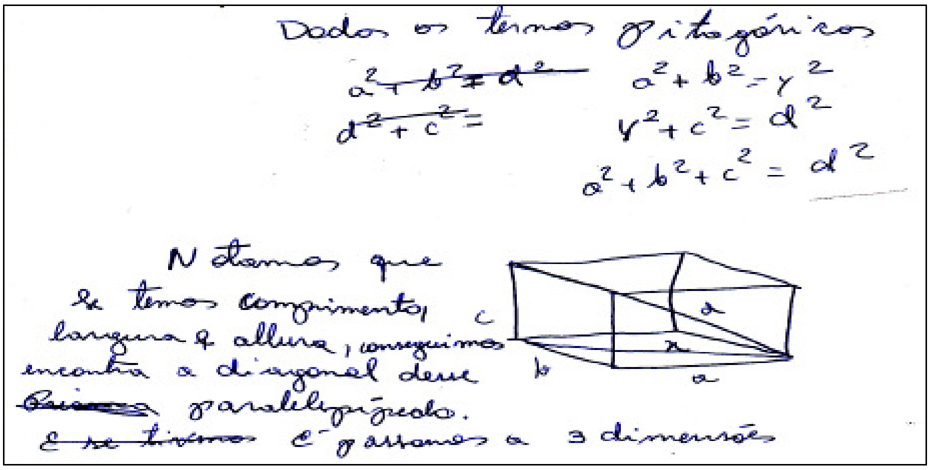


Figura 18: Resposta de R à questão 17.

Solicitamos a R que verificasse a descrição do Método 3 que o mesmo apresentou na avaliação escrita e nos apontasse a importância dos ternos pitagóricos para gerar quaternos pitagóricos através do Método 3. Na oportunidade, o referido sujeito simplesmente disse: *Precisamos de dois ternos para ter um quaterno*.

Questão 18: Quais são as condições necessárias para que dado dois ternos pitagóricos possamos obter um quaternos pitagóricos?

É esperado que os sujeitos explicitem adequadamente quais são as condições necessárias para que dado dois ternos pitagóricos possamos obter um quaterno pitagórico.

Em especial, todos os sujeitos apresentaram respostas adequadas referentes à questão em foco.

Questão 19: Podemos obter um quaterno pitagórico partindo de um γ sendo um número par e hipotenusa de um triângulo primitivo?

É esperado que os sujeitos pensem relacionalmente, utilizando algumas propriedades dos ternos pitagóricos e compreendam que para obter um quaterno pitagórico γ sendo um número par, é necessário que γ configure como sendo hipotenusa de um triângulo secundário. Com isso, notamos que se assim for feito, o sujeito conseguirá fazer uso de diversos conceitos contributivos, além de implicitamente poder perceber a importante relação existente entre os ternos pitagóricos e os quaternos pitagóricos.

Todos os sujeitos apresentaram respostas alegando sobre a impossibilidade de γ ser um número par e hipotenusa de um triângulo primitivo, sendo que J e M, em suas respectivas respostas, enunciaram o teorema que diz respeito às condições dos termos a, b e c dos ternos pitagóricos (a,b,c). Todavia, é provável que R tenha simplesmente olhado a tabela que constava no final da avaliação escrita. Essa dúvida se deve ao fato de que abaixo da resposta apresentada por R, há a seguinte expressão: *Olha Tabela*, conforme ilustrado a seguir (Fig. 19).

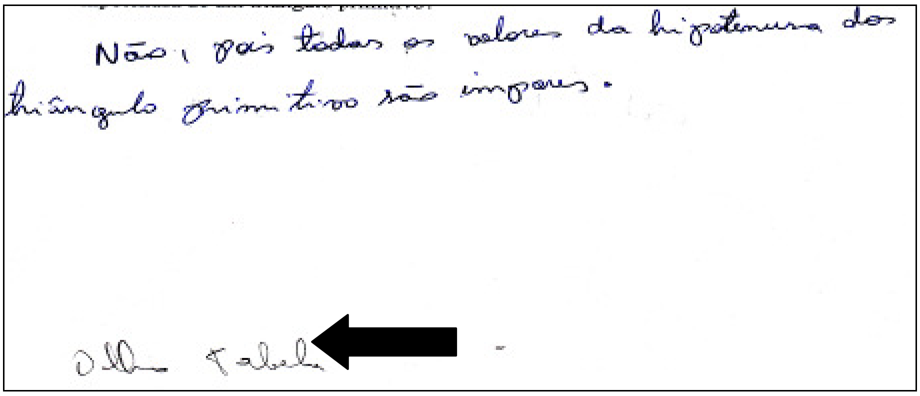


Figura 19: Resposta de R à questão 19.

Na entrevista fizemos a seguinte pergunta a R: Porque podemos afirmar que todos os valores da hipotenusa dos triângulos primitivos são ímpares? e obtivemos a seguinte resposta: *Basta olhar a tabela dos ternos primitivos que podemos ver que em todos os casos isso acontece*.

Questão 20: Com base nos ternos pitagóricos (15,36,39), (39,252,255) e (39,760,761) quantos quaternos pitagóricos podemos obter? Quais são eles?

J e M apresentaram os dois quaternos pitagóricos que satisfazem à questão em foco. Todavia, R apresentou as relações em vez dos quaternos pitagóricos solicitados. Na entrevista pedimos a R que nos indicasse quais são os quaternos pitagóricos que satisfazem à questão em foco e obtivemos respostas adequadas. No mais, R declarou que havia esquecido de escrever os quaternos pitagóricos.

Questão 21: Determine os quaternos pitagóricos sendo $\gamma = 65$ e $\gamma = 52$.

É esperado que os sujeitos sejam capazes de através de casos particulares, estabelecer os quaternos pitagóricos que satisfazem a questão em tela.

J e M apresentaram quaternos pitagóricos que satisfazem à questão em foco. Porém, os referidos sujeitos, para $\gamma = 65$, não se detiveram ao fato de que considerando o terno pitagórico primitivo (5,12,13) podemos obter dois ternos pitagóricos secundários em que o número 65 pode surgir, a saber: multiplicando (5,12,13) por 5 e também multiplicando (5,12,13) por 13.

Na entrevista, mostramos a esses sujeitos às respostas que eles apresentaram e questionamos sobre a possibilidade de gerar mais quaternos pitagóricos além dos que eles evidenciaram. Na oportunidade, tanto J quanto M notaram a incompletude da resposta e apresentaram todos os quaternos pitagóricos que satisfazem a questão em tela.

Por sua vez, conforme podemos verificar a seguir (Fig. 20), R apresentou resposta inadequada a essa questão.

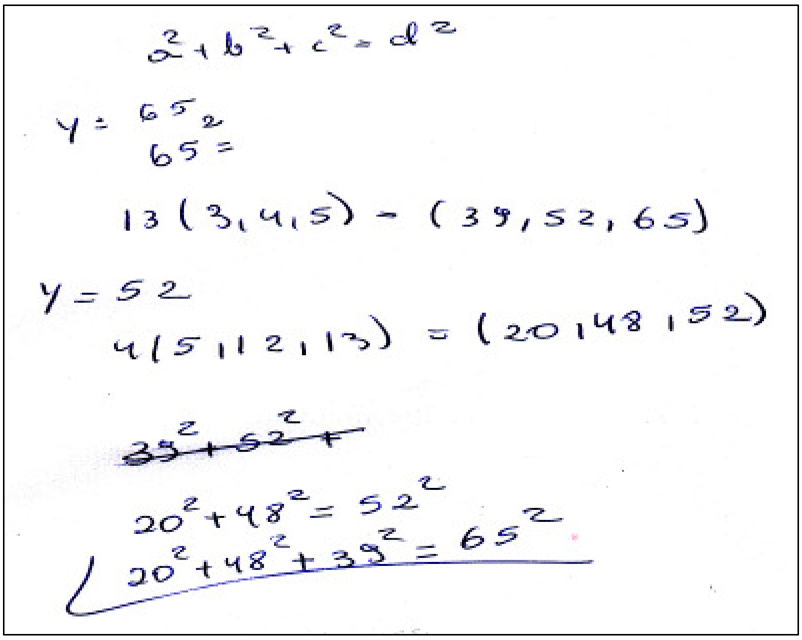


Figura 20: Resposta de R à questão 21.

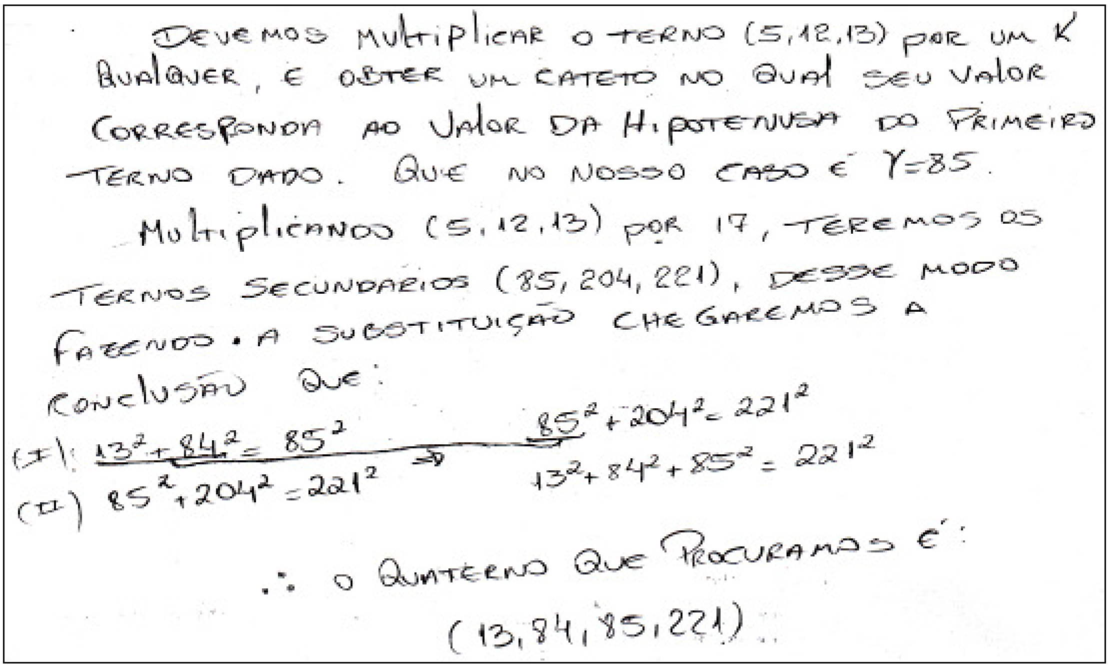
Na entrevista, solicitamos a R que nos explicasse como procedeu para resolver a questão em tela e constatamos que ele se equivocou ao pensar que tanto o cateto quanto a hipotenusa deveriam ser igual a 52.

Posteriormente, uma vez esclarecido que γ sempre corresponderá ao número hipotenusa, solicitamos que respondesse novamente essa questão. Na oportunidade, R apresentou resposta adequada para $\gamma = 52$ e não conseguiu apresentar resposta completa para $\gamma = 65$, posto que não foi capaz de determinar o terno primitivo (65,2112,2113). Esse terno pitagórico primitivo não consta na tábua contida na avaliação escrita. Com isso, para obtê-lo seria necessário verificar o comportamento da tábua ou conhecer as propriedades dos ternos pitagóricos.

Questão 22: Para $\gamma = 85$, um dos ternos pitagóricos é o (13,84,85). Nesse caso, o que devemos fazer para obter um quaterno pitagórico partindo do terno pitagórico (5,12,13). Qual seria o quaterno pitagórico?

É esperado, através de um caso específico, que os sujeitos possam determinar qual o quaterno pitagórico adequado.

M apresentou resposta adequada. Porém, conforme podemos verificar a seguir (Fig. 21), J desenvolveu a resposta corretamente, porém, no final não apresentou o quaterno pitagórico que de fato satisfaz o que fora pedido.



DEVEMOS MULTIPLICAR O TERNO (5,12,13) POR UM K QUALQUER, E OBTER UM CATETO NO QUAL SEU VALOR CORRESPONDA AO VALOR DA HIPOTENUSA DO PRIMEIRO TERNO DADO. QUE NO NOSSO CASO É Y=85.

MULTIPLICANDO (5,12,13) POR 17, TEREMOS OS TERNOS SECUNDÁRIOS (85,204,221), DESSE MODO FAZENDO A SUBSTITUIÇÃO CHEGAREMOS A CONCLUSÃO QUE:

(I): $13^2+84^2=85^2$ $\Rightarrow$ $85^2+204^2=221^2$

(II) $85^2+204^2=221^2$ $\qquad 13^2+84^2+85^2=221^2$

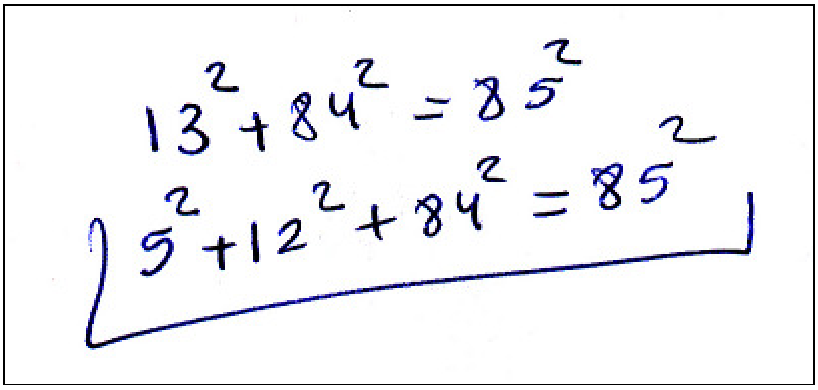
$\therefore$ O QUATERNO QUE PROCURAMOS É:

(13,84,85,221)

Figura 21: Resposta de J à questão 22.

Na entrevista, solicitamos a J que analisasse se (13,84,85,221) é um dos quaternos pitagóricos que satisfazem à questão. Na oportunidade, o referido sujeito reconheceu o equívoco que cometera ao dizer *Foi falta de atenção minha! Pois o 85² eu já tinha substituído por 13²+84². Daí eu tinha que colocar o 204*.

Por sua vez, R apresentou resposta inadequada (Fig. 22).



$$13^2+84^2=85^2$$
$$5^2+12^2+84^2=85^2$$

Figura 22: Resposta de R à questão 22.

Diante do exposto, na entrevista, solicitamos a R que verificasse se de fato a relação $5^2+12^2+84^2 = 85^2$ e, consequentemente, o quaterno pitagórico (5,12,84,85) de fato satisfaz a questão em tela. Na oportunidade, R não reconheceu o equívoco que cometera posto que explicitou que basta tomar como referência os dois ternos pitagóricos que constam no enunciado da questão em vez de obter o secundário para (5,12,13), de modo que um dos catetos fosse igual a 85.

Questão 23: Geometricamente, como podemos descrever o Método 3?

Particularmente, a questão em tela é uma importante aliada para verificar de modo geral, se o sujeito consegue relacionar as representações algébrica e geométrica dos quaternos pitagóricos. Sobretudo, os sujeitos deverão descrever geometricamente um método algébrico.

J e M apresentaram com clareza como geometricamente o Método 3 pode ser explicado, conforme podemos verificar a seguir (Fig. 23 e Fig. 24).

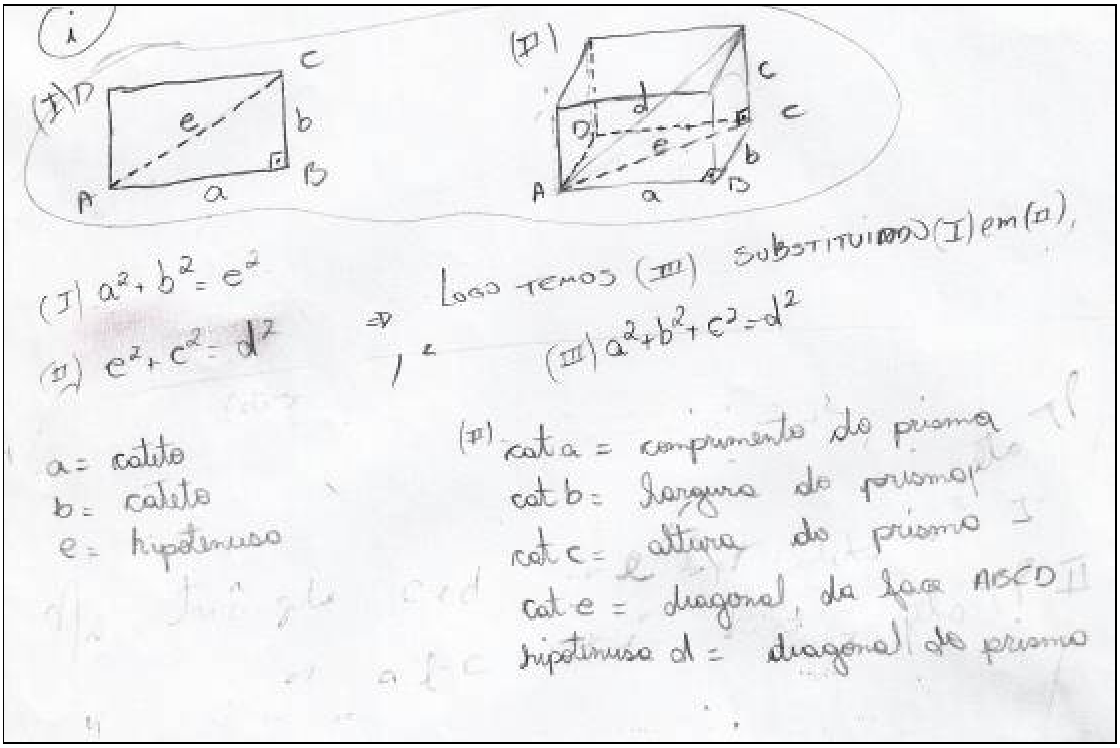
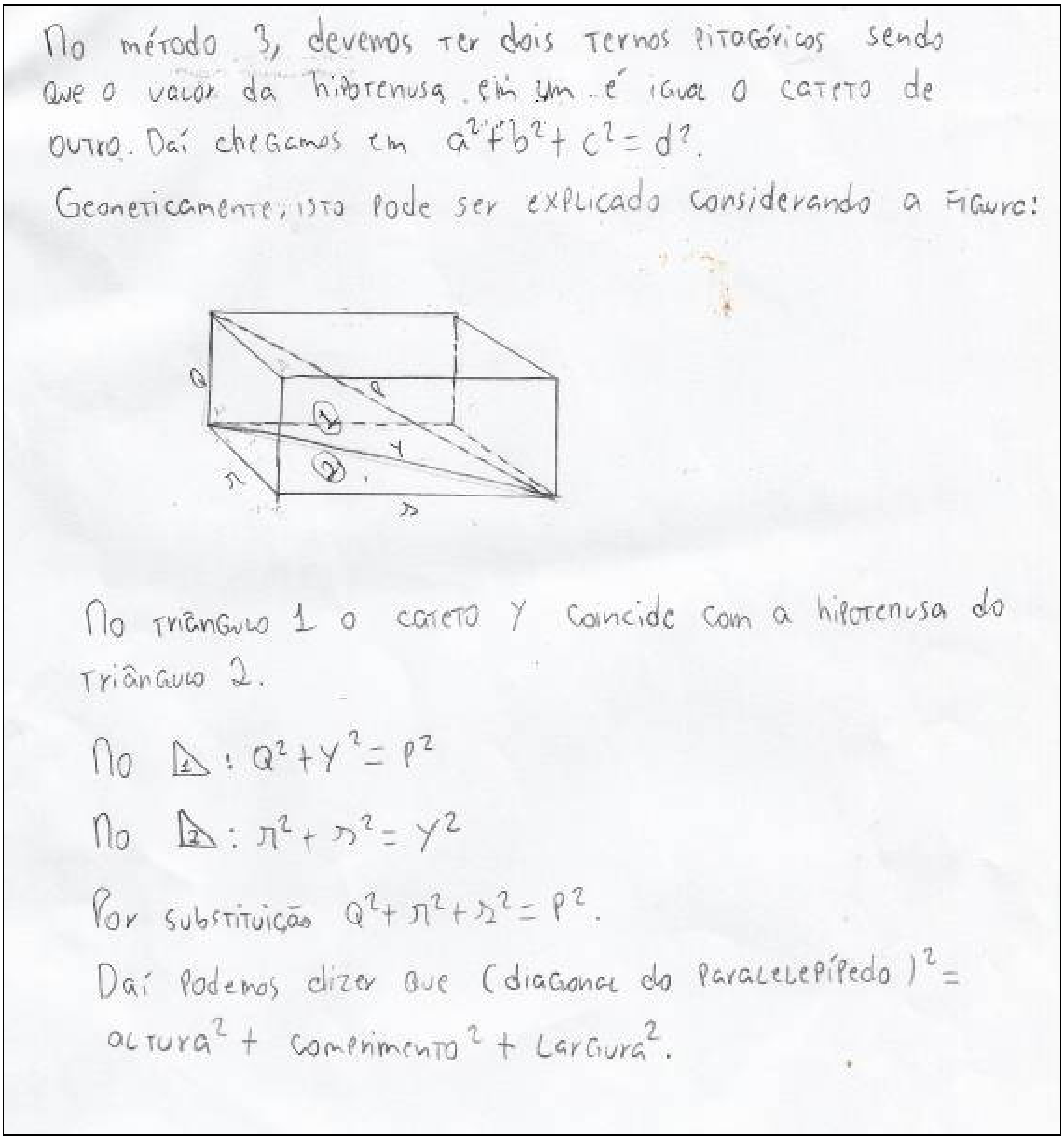


Figura 23: Resposta de J à questão 23.



No método 3, devemos ter dois ternos pitagóricos sendo que o valor da hipotenusa em um é igual o cateto de outro. Daí chegamos em $a^2+b^2+c^2=d^2$.

Geometricamente, isto pode ser explicado considerando a figura:

No triângulo 1 o cateto Y coincide com a hipotenusa do triângulo 2.

No $\triangle_1$: $Q^2+Y^2=P^2$

No $\triangle_2$: $\pi^2+\eta^2=Y^2$

Por substituição $Q^2+\pi^2+\eta^2=P^2$.

Daí podemos dizer que $(\text{diagonal do paralelepípedo})^2 = \text{altura}^2 + \text{comprimento}^2 + \text{largura}^2$.

Figura 24: Resposta de M à questão 23.

Em contrapartida, conforme ilustrado a seguir (Fig. 25), R simplesmente esboçou um paralelepípedo retângulo, uma das suas diagonais e a diagonal da base sem associar essa figura ao Método 3.

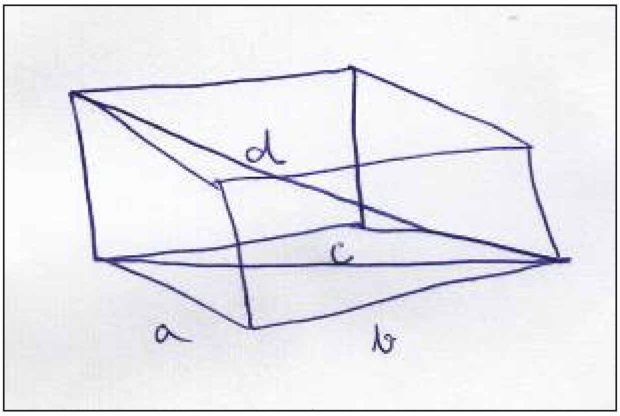


Figura 25: Resposta de R à questão 23.

Diante do exposto, solicitamos a R que com base em seu esboço o mesmo descrevesse o Método 3. Na oportunidade, ele simplesmente descreveu algebricamente o Método 3 sem conseguir associar à aspectos geométricos.

Por fim, segue a Tábua que serviu para auxiliar os sujeitos nas questões relacionadas ao Método 3 (Quadro 4).

Quadro 4: Ternos Pitagóricos Primitivos

x	$y = x - 1$	$2(x-1)$	$(x-1)+x$	$2(x-1)x$	$b+1$	
			a	b	c	(a,b,c)
1	0	0	1	0	1	(1,0,1)
2	1	2	3	4	5	(3,4,5)
3	2	4	5	12	13	(5,12,13)
4	3	6	7	24	25	(7,24,25)
5	4	8	9	40	41	(9,40,41)
6	5	10	11	60	61	(11,60,61)
7	6	12	13	84	85	(13,84,85)
8	7	14	15	112	113	(15,112,113)
9	8	16	17	144	145	(17,144,145)
10	9	18	19	180	181	(19,180,181)
11	10	20	21	220	221	(21,220,221)
12	11	22	23	264	265	(23,264,265)
13	12	24	25	312	313	(25,312,313)
14	13	26	27	364	365	(27,364,365)
15	14	28	29	420	421	(29,420,421)

16	15	30	31	480	481	(31,480,481)
17	16	32	33	544	545	(33,544,545)
18	17	34	35	612	613	(35,612,613)
19	18	36	37	684	685	(37,684,685)
20	19	38	39	760	761	(39,760,761)
21	20	40	41	840	841	(41,840,841)
22	21	42	43	924	925	(43,924,925)
23	22	44	45	1012	1013	(45,1012,1013)
24	23	46	47	1104	1105	(47,1104,1105)
25	24	48	49	1200	1201	(49,1200,1201)

5.1.1 Inferências quanto ao nível de compreensão

Na sessão anterior, apresentamos uma análise global da avaliação escrita sobre quaternos pitagóricos realizadas por três alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, Campus de Arraias. Com base na análise global que realizamos, na presente sessão apresentaremos nossas inferências acerca do nível de compreensão dos sujeitos envolvidos na pesquisa acerca dos quaternos pitagóricos. Sobretudo, ressaltamos que os dados construídos correspondem aos obtidos na avaliação escrita e na entrevista individual.

Com a entrevista, intencionamos verificar se os sujeitos reconheciam ou não os equívocos cometidos na avaliação escrita, tais como incompletude ou até mesmo resposta inadequada. Sendo assim, posto que na avaliação escrita M apresentou, em sua maioria, respostas completas, com clareza e adequadas, poucas foram as perguntas que fizemos ao referido sujeito.

Particularmente, em todas as perguntas que fizemos a M, na entrevista, em nenhuma houve indícios de dificuldade ou falta de compreensão. Todavia, o número de perguntas realizadas na entrevista foi maior para os sujeitos J e R, porém, mais correntes para R, sendo que as perguntas destinadas a J, em sua maioria, se devem ao fato de esclarecer alguns equívocos cometidos por ele, as quais em sua maioria, foram identificados, pelo mesmo, de imediato. Em contrapartida, na avaliação escrita, R, além de cometer muitos equívocos, apresentou muitas respostas incompletas e, em sua maioria, na entrevista apresentou as mesmas dificuldades.

Diante do exposto, as inferências que discorremos acerca do nível de compreensão dos sujeitos J, R e M, sobre os quaternos pitagóricos, em consonância com a análise global que realizamos, serão baseadas na ideia de esquema, ou seja, levaremos em consideração que a maioria dos conceitos matemáticos estão conectados com outros conceitos, denominados por Skemp (1980) por conceitos contributivos. Para tanto, com base no diagrama esquemático dos quaternos pitagóricos, consideramos dois critérios globais, a saber: (i) Conexão entre Álgebra e Geometria; (ii) Conexão entre os ternos pitagóricos e os quaternos pitagóricos.

Sendo assim, apontamos que R demonstra possuir os pensamentos algébrico e geométrico limitados, posto que, em suas respostas, por muitas vezes apresenta uma compreensão isolada, sem conexão entre os campos algébricos e geométricos. De modo geral, com relação às representações algébrica e geométrica dos quaternos pitagóricos, o referido sujeito apresenta resposta adequada quando é solicitada apenas uma representação e quando é imprescindível que haja conexão entre as referidas representações, R apresenta muita dificuldade tanto na avaliação escrita quanto na entrevista.

Desse modo, evidenciamos que com relação à conexão entre Álgebra e Geometria, R apresentou dificuldade em evidenciar tal relação no que diz respeito ao conceito de quaternos pitagóricos. Sobretudo, dois exemplos que ilustram bem esse fato dizem respeito à dificuldade do sujeito em expressar geometricamente um método algébrico e a dificuldade em compreender o porquê da denominação *número diagonal* atribuída ao quarto número que compõe o quaterno pitagórico (a,b,c,d).

Com relação ao pensamento algébrico explicitado por R, houve fortes indícios de que em vez de apresentar entendimento, o referido sujeito apenas memorizou os procedimentos algébricos, posto que muitas vezes na avaliação escrita apresentou o desenvolvimento dos cálculos algébricos obtendo uma solução diferente da resposta que apresentou à questão, ou ainda, quando, na entrevista, foi solicitado que o mesmo explicasse o procedimento algébrico adotado não soube explicar. Em especial, destacamos o Método 3, cuja descrição algébrica o referido sujeito soube realizar, porém apresentou muita dificuldade no que diz respeito à aplicação do método. Outro exemplo que ilustra bem o caso de memorização por parte de R diz respeito à questão na qual os sujeitos puderam assistir a um vídeo contendo a resolução cujo desenvolvimento algébrico haviam apresentado corretamente, porém sem associarem ao sólido geométrico contido na questão.

Por sua vez, com relação ao pensamento geométrico de R, acerca dos quaternos pitagóricos, ele muitas vezes apresentou dificuldade na representação. Em especial, destacamos a dificuldade de R em ao esboçar o paralelepípedo retângulo e não tracejar os entes geométricos internos do sólido.

Contudo, R não apresentou limitação somente em estabelecer pontes entre os conceitos algébricos e geométricos inerentes ao esquema dos quaternos pitagóricos, como também apresentou limitação com relação da compreensão acerca da (i) importante relação entre os ternos pitagóricos e os quaternos pitagóricos, e da (ii) relação do cálculo da menor distância entre dois pontos, tanto em duas dimensões como em três dimensões, aos ternos pitagóricos e aos quaternos pitagóricos, respectivamente.

Diante das inferências supracitadas, temos que o esquema associado aos quaternos pitagóricos de R é pobre em conceitos contributivos, assim como as relações entre os mesmos são infrutíferas, o que nos leva a inferir que o nível de compreensão alcançado pelo referido sujeito foi instrumental.

Com relação a J, conforme destacado anteriormente, na entrevista respondeu a um número significativo de perguntas. Entretanto, diferente de R, em suas respostas, J conseguiu estabelecer relações entre os conceitos contributivos inerentes aos quaternos pitagóricos, de modo que o mesmo apresentou respostas adequadas. Devido a esse fato, e as justificativas que teceremos a seguir, assim como M, J alcançou um nível de compreensão relacional.

Ao responder às questões contidas na avaliação escrita, tanto J quanto M apresentaram não só domínio dos algoritmos, mas também entendimento do porquê de cada procedimento, tanto algébrico quanto geométrico, em sua maioria, providos por uma diversidade de conceitos contributivos.

Os sujeitos J e M, em suas respostas, demonstraram não apenas o entendimento das representações algébrica e geométrica dos quaternos pitagóricos, mas, também, como tais representações podem estar conectadas e, além disso, apresentaram certo entendimento sobre como os ternos pitagóricos podem ser estendidos aos quaternos pitagóricos. Consequentemente, tanto J quanto M, conseguiram aliar o pensamento algébrico ao geométrico e associar esta relação ao cálculo da menor distância entre dois pontos.

Diante do exposto, os sujeitos J e M, demonstraram que os seus respectivos esquemas associados aos quaternos pitagóricos são ricos em conexões entre diversos conceitos, nos quais há livre circulação entre os campos algébricos e geométricos, o que consequentemente implica que, conforme mencionado anteriormente, eles atingiram um nível de compreensão relacional.

5.2 Análise pontual dos dados

Na presente sessão nos deteremos a analisar pontualmente a avaliação escrita, analisada globalmente no capítulo em tela. Sobretudo, a análise pontual que realizamos seguiu o script utilizado na maioria dos trabalhos acadêmicos que fazem uso das categorias de compreensão instrumental e compreensão relacional enquanto instrumento avaliativo.

Para tanto, para cada questão contida na avaliação escrita, discorreremos alguns critérios que nos conduziram a inferir se na questão analisada o sujeito apresentou ter compreendido relacionalmente ou instrumentalmente. Todavia, para as questões em que não houve respostas ou as respostas forem inadequadas indicaremos que não houve compreensão.

Questão 1: Se o sujeito determinar, com ou sem auxílio da representação geométrica, que a medida da diagonal do paralelepípedo enunciado na questão corresponde a 25cm, corresponde a compreensão relacional. Todavia, se o sujeito não realizar os cálculos corretamente o nível de compreensão apresentado será instrumental.

Em suas respostas todos os três sujeitos esboçaram o sólido e determinaram o valor correto para a diagonal. Logo, na questão em foco, todos apresentaram ter compreendido relacionalmente.

Questão 2: O nível de compreensão será relacional se o sujeito determinar corretamente, com ou sem esboço geométrico, quais dimensões podem ser associadas aos números inteiros que compõe o terno pitagórico (x, y, z) e o quaterno pitagórico (a, b, c, d). Em contrapartida, se o sujeito apresentar apenas respostas corretas para um dos casos, o nível de compreensão será instrumental.

M, além de apresentar esboço geométrico, mencionou as dimensões corretas, satisfazendo assim, o nível de compreensão relacional. Em contrapartida, J e R apresentaram respostas correta ao tratarem do quaterno pitagórico (a, b, c, d) e quanto ao terno pitagórico (x, y, z) consideraram cateto e hipotenusa como sendo dimensões, sendo assim, associados ao nível de compreensão instrumental.

Questão 3: Se o sujeito definir quaternos pitagóricos como sendo o conjunto de quatro números inteiros que satisfazem o Teorema de Pitágoras corresponderá ao nível de compreensão relacional. Por sua vez, caso o sujeito não explicite que todos os quatro números devem ser inteiros ou que devam satisfazer o Teorema de Pitágoras, corresponderá ao nível de compreensão instrumental.

Os três sujeitos apresentaram definições correspondentes ao nível de compreensão relacional conforme as condições supracitadas.

Questão 4: O nível de compreensão será relacional se o sujeito explicitar que a denominação *número diagonal* do número d que compõe o quaterno pitagórico (a,b,c,d) se deve a sua correspondência geométrica com a diagonal do paralelepípedo retângulo. Todavia, o nível de compreensão será instrumental se o sujeito não explicitar tal correspondência.

J e M explicitaram a correspondência supracitada referente a compreensão relacional. Porém, R em vem disso, destacou que a denominação *número diagonal* se deve à analogia com os números hipotenusas. Desse modo, como a resposta dada por R não apresentou indícios de que tal denominação se deve à representação geométrica dos quaternos pitagóricos, a referida resposta aponta que R não compreendeu o porquê dessa denominação.

Questão 5: Para que corresponda ao nível de compreensão relacional, é preciso que o sujeito represente o quaterno pitagórico (x, y, z, w), de tal modo que x, y e z correspondam às três dimensões de um paralelepípedo retângulo e w corresponda a diagonal. Caso o sujeito não explicite as devidas correspondências o nível de compreensão apresentado será instrumental.

Todos os três sujeitos relacionaram, corretamente, cada termo do quaterno pitagórico (x, y, z, w) às três dimensões e à diagonal (w) do paralelepípedo retângulo, correspondendo assim, o nível de compreensão relacional. No mais, J e R deixaram de tracejar alguns entes geométricos internos do sólido, o que possivelmente corresponde a falta de atenção dos mesmos e não indícios de que compreenderam instrumentalmente.

Questão 6: Com o auxílio de um paralelepípedo retângulo contido no enunciado da questão é esperado que o sujeito através de cálculos algébricos determine a menor distância entre dois pontos específicos do sólido. Com isso, se o sujeito realizar corretamente os cálculos algébricos para determinar a menor distância entre os pontos pedidos corresponderá ao nível de compreensão relacional. Todavia, se o sujeito apresentar cálculos algébricos que não conduzam à resposta correta corresponderá ao nível de compreensão instrumental.

Os três sujeitos apresentaram cálculos algébricos que conduziram à resposta correta. Logo, todos compreenderam relacionalmente a questão em tela.

Questão 7: Se os sujeitos calcularem a medida da diagonal do caminhão e constatarem que a estátua deve ser transportada ocupando a diagonal do veículo, o nível de compreensão será relacional. Por sua vez, se o sujeito não conseguir fazer tais relações e apresentar erros nos cálculos, corresponderá assim, ao nível de compreensão instrumental.

Em suas respostas, todos os três sujeitos satisfizeram os critérios supracitados à compreensão relacional.

Questão 8: Se o sujeito (i) indicar que a distância entre os dois pontos destacados no esboço geométrico contido no enunciado da questão em tela corresponde à diagonal de um prisma auxiliar e (ii) desenvolver corretamente os cálculos algébricos de modo que possa determinar a distância entre esses dois pontos o nível de compreensão será relacional. Todavia, se, em sua resposta, o sujeito apenas explicitar um desses dois itens, o nível de compreensão será instrumental.

J e M, em suas respostas, contemplaram os dois itens supracitados, correspondendo assim, ao nível de compreensão relacional. Contudo, R apenas apresentou os cálculos algébricos sem apresentar correspondência ao esboço geométrico. Com isso, posto que no ato da avaliação escrita, todos os sujeitos tiveram a oportunidade de assistir a um vídeo no qual constava a resolução dessa questão e que R desenvolveu os cálculos algébricos sem esboçar um prisma auxiliar, supostamente o referido sujeito apenas memorizou os cálculos algébricos sem compreender o porquê, apresentando assim, o nível de compreensão instrumental.

Questão 9a: Se o sujeito indicar que o quaterno pitagórico (1,2,2,3) corresponde ao quaterno pitagórico relacionado ao o sólido geométrico contido no enunciado da questão em tela, o nível de compreensão será relacional. Por sua vez, se o sujeito apresentar um ou mais termo errado do quaterno pitagórico (1,2,2,3), o nível de compreensão será instrumental.

Todos os três sujeitos apontaram (1,2,2,3) como sendo o quaterno pitagórico relacionado ao sólido geométrico contido no enunciado. Logo, todos compreenderam relacionalmente essa questão.

Questão 9b: Se o sujeito demonstrarem que compreenderam as condições estabelecidas através dos métodos 1 e 2, e assim, indicar que o quaterno pitagórico (1,2,2,3) pode ser um caso possível de ser gerado pelos referidos métodos, o nível de compreensão apresentado será relacional. Por sua vez, se o sujeito não explicitar a relação das condições dos métodos 1 e 2 com o quaterno pitagórico (1,2,2,3), o nível de compreensão apresentado será instrumental.

Todos os três sujeitos conseguiram inferir que através dos métodos 1 e 2 é possível obter o quaterno pitagórico (1,2,2,3). Sendo assim, todos compreenderam relacionalmente essa questão.

Questão 9c: O nível de compreensão será relacional se o sujeito (i) determinar que 3m corresponde a menor distância entre os dois pontos destacados no sólido geométrico contido no enunciado dessa questão e ainda, (ii) indicar que a diagonal do sólido coincide com a menor distância entre tais pontos. Todavia, se o sujeito explicitar apenas um desses dois critérios, o nível de compreensão será instrumental.

Os três sujeitos apresentaram respostas adequadas ao destacarem que a menor distância corresponde a 3 m, que por sua vez coincide com a diagonal do sólido. Sendo assim, todos compreenderam relacionalmente a questão em tela.

Questão 9d: Se os sujeitos indicarem uma maneira de determinar a distância entre os dois pontos destacados no enunciado da questão em tela, de modo que resulte em 5m, o nível de compreensão será relacional. Contudo, caso o sujeito não consiga explicitar como proceder para tal fim, o nível de compreensão será instrumental.

J e M indicaram que para realizar o cálculo que resultasse em 5m seria necessário considerar as três dimensões do sólido. Contudo, todos os três sujeitos apresentaram respostas apontando a necessidade de realizar a soma 1+2+2, para resultar em 5m. Logo, todos compreenderam relacionalmente a questão em tela.

Questão 10a: Se o sujeito indicar que para realizar o cálculo do volume de um sólido relacionado ao (a, b, c, d) basta realizar o produto $a \times b \times c$, o nível de compreensão será relacional. Por sua vez, se o sujeito ao apontar um produto tendo um ou dois fatores diferentes de a, b ou c, o nível de compreensão será instrumental.

Somente R não justificou sua resposta, porém, como todos os três sujeitos apontaram que é necessário realizar o produto $a \times b \times c$, temos que todos compreenderam relacionalmente a questão em tela.

Questão 10b: Se o sujeito conseguir apresentar a fórmula correta para representar o volume associado ao quaterno pitagórico (ka,kb,kc,kd) o nível de compreensão será relacional. Porém, se no desenvolvimento algébrico ou na resposta final o sujeito cometer erros, o nível de compreensão será instrumental.

M destacou que para calcular o volume do prisma representado pelo quaterno pitagórico $k(a, b, c, d)$ não basta multiplicar $a \times b \times c$ por k, mas sim por k^3. Logo, M compreendeu relacionalmente a questão em tela.

Em contrapartida, J e R verificaram o volume de alguns quaternos pitagóricos redutíveis a (1,2,2,3) e posteriormente concluíram que o volume associado ao quaterno pitagórico (ka,kb,kc,kd) é $(ka)^3 \times 4$ em vez de $(a \times b \times c) \times k^3$. Sendo assim, ambos compreenderam instrumentalmente a questão em tela.

Questão 11: Se o sujeito a partir de alguns quaternos pitagóricos que são gerados através do Método 1, quando $a = 1$, conseguir chegar à generalização do referido método, explicitando de modo claro o procedimento algébrico utilizado para inferir cada termo que compõe o quaterno pitagórico genérico (a,b,c,d), em função de n, o nível de compreensão será relacional. Todavia, se o sujeito não apresentar procedimento algébrico correto para determinar um ou mais termo do quaterno pitagórico genérico (a,b,c,d), o nível de compreensão será instrumental.

Todos os três sujeitos conseguiram chegar à generalização do método 1, sendo $a = 1$. Porém, em nenhum caso houve descrição de como se chegar ao fato do termo b poder ser expresso por $2n^2$. Portanto, como todos os sujeitos não explicitaram que procedimento adotou para inferir o valor de b em função de n, o nível de compreensão apresentado foi instrumental.

Questão 12: Assim como na questão anterior, na questão em tela é esperado que os três sujeitos consigam chegar à generalização do Método 1, porém, sendo $a = 2$. Sendo assim, os critérios inerentes à compreensão relacional e à compreensão instrumental são os mesmos utilizados na questão anterior.

M e J conseguiram explicitar corretamente os caminhos que os conduziram às inferências dos termos b, c e d em função de n e a como sendo 2. Logo, os referidos sujeitos compreenderam relacionalmente a questão em foco.

Por sua vez, R apresentou respostas adequadas para os termos a, b e d, e para o termo c, o referido sujeito realizou cálculos algébricos que o conduziu a inferir que $c^2 = 4b$ e no preenchimento da tabela pôs que $c = 2(2n+1)^2$. Com isso, posto que R apresentou dificuldade para inferir o valor de c em função de n, o mesmo compreendeu instrumentalmente a questão em foco.

Questão 13: O nível de compreensão será relacional se o sujeito (i) indicar e justificar que a figura geométrica relacionada ao quaterno ($a,2a,2a,3a$) não é um cubo, (ii) determinar que a diagonal do cubo é $a\sqrt{3}$ e que o quaterno relacionado ao cubo é ($a,a,a,a\sqrt{3}$), (iii) indicar qual sólido geométrico esse o quaterno pitagórico ($a,2a,2a,3a$) pode ser relacionado. Por sua vez, o nível será instrumental se o sujeito cometer equívocos em um ou mais dos três critérios descritos anteriormente.

Os três sujeitos afirmaram que o quaterno pitagórico ($a,2a,2a,3a$) não pode ser relacionado ao cubo posto que os três primeiros termos do quaterno não são iguais. Todavia, somente R e M apresentaram o termo associado à diagonal do cubo.

Por fim, com relação às características do sólido geométrico relacionado ao quaterno pitagórico ($a,2a,2a,3a$), somente M afirmou que o sólido em questão é um paralelepípedo retângulo com duas faces quadradas. J indicou que há duas faces quadradas no sólido, porém se equivocou ao afirmar que isso só é possível se a largura e a altura forem $2a$. Por sua vez, R indicou que o sólido geométrico relacionado ao quaterno pitagórico ($a,2a,2a,3a$) corresponde ao prisma de faces quadradas, ou seja, implicitamente o referido sujeito indicou que o sólido em destaque seria um cubo, mesmo tendo afirmado anteriormente que esse quaterno pitagórico não pode ser relacionado a um cubo, apresentando assim, uma contradição.

Diante do exposto temos que M compreendeu relacionalmente a questão em foco, sendo que J e R compreenderam instrumentalmente.

Questão 14: Se o sujeito apresentar as duas formas adequadas de representação que são solicitadas e explicitar o artifício utilizado para expressar o número 65 como soma de dois quadrados, o nível de compreensão será relacional. No entanto, se o sujeito satisfizer apenas um desses dois critérios, o nível de compreensão será instrumental.

Com relação às duas maneiras de representação relacionadas aos quaternos pitagóricos, os três sujeitos souberem indicar. Contudo, J e R apresentaram que $65 = 1^2+8^2$ e $65 = 4^2+7^2$ sem explicitar os meios utilizados para chegar a tais inferências e M explicitou o artifício que utilizou para representar o número 65 como soma de dois quadrados.

Diante do exposto, conforme os critérios definidos anteriormente, M apresentou ter compreendido relacionalmente e os sujeitos J e R compreenderam instrumentalmente.

Questão 15: Se o sujeito indicar quais são as coincidências entre os sólidos geométricos relacionados aos quaternos pitagóricos (1,8,32,33) e (4,7,32,33), o nível de compreensão será relacional. Entretanto, se ao responder a questão em foco, o sujeito apresentar equívocos, o nível de compreensão será instrumental.

Todos os três sujeitos evidenciaram que os dois sólidos possuem uma dimensão em comum e o mesmo valor para diagonal. Contudo, R e J se limitaram a afirmar que a dimensão coincidente é a altura, em vez de afirmar que é uma dimensão quaisquer.

Logo, somente M compreendeu relacionalmente e os demais compreenderam instrumentalmente.

Questão 16: Se o sujeito apresentar com clareza e objetividade a descrição do Método 3, o nível de compreensão será relacional. Por sua vez, se em sua resposta, o sujeito descrever o Método 3 de modo que não esteja compreensível para determinado sujeito que não participou do módulo de ensino, o nível de compreensão será instrumental.

Na oportunidade, em suas respostas, todos os três sujeitos apresentaram com clareza e objetividade o Método 3. Sendo assim, todos se enquadram no nível de compreensão relacional.

Questão 17: Se o sujeito dissertar com clareza e objetividade acerca da importância dos ternos pitagóricos para gerar quaternos pitagóricos através do Método 3, o nível de compreensão será relacional. Entretanto, se o sujeito não conseguir ser claro e objetivo, em sua resposta, o nível de compreensão será instrumental.

Os sujeitos M e J explicitaram com clareza a importância da relação entre os ternos pitagóricos e os quaternos pitagóricos no caso do Método 3. Porém, R se equivocou ao descrever o procedimento algébrico relacionado ao método 3 e a esboçar a situação geométrica que justifica a relação $a^2+b^2+c^2 = d^2$ em vez de destacar a importância da relação entre os ternos pitagóricos e os quaternos pitagóricos inerentes ao Método 3.

Diante do exposto, os sujeitos M e J compreenderam relacionalmente e R compreendeu instrumentalmente.

Questão 18: Se o sujeito apresentar quais são as condições necessárias para que dado dois ternos pitagóricos possamos obter um quaterno pitagórico, o nível de compreensão será relacional. No entanto, se o sujeito cometer equívocos, o nível de compreensão será instrumental.

Como todos os três sujeitos apresentaram respostas adequadas à questão em foco, todos compreenderam relacionalmente.

Questão 19: Se o sujeito indicar que não é possível obter um quaterno pitagórico partindo de um γ sendo um número par e hipotenusa de um triângulo primitivo posto que em todo triângulo primitivo a hipotenusa é ímpar, o nível de compreensão será relacional. Contudo, se o sujeito somente afirmar que é impossível, sem apresentar uma justificativa, o nível de compreensão será instrumental.

Em suas respostas, J e M enunciaram o teorema que diz respeito às condições dos termos a, b e c dos ternos pitagóricos (a,b,c), sendo assim, indicaram que não há possibilidade de termos um triângulo primitivo com a hipotenusa sendo um número par. Por sua vez, R não enunciou o teorema, porém assim como os demais, também explicitou sobre a necessidade da hipotenusa ser ímpar, ao afirmar: *Não, pois todos os valores da hipotenusa dos triângulos primitivos são ímpares*.

Diante do exposto, todos os sujeitos compreenderam relacionalmente a questão em foco.

Questão 20: Se o sujeito determinar quantos e quais são quaternos pitagóricos que podem ser gerados através dos ternos pitagóricos (15,36,39), (39,252,255) e (39,760,761), o nível de compreensão será relacional. Todavia, se o sujeito apresentar equívocos nos termos correspondentes de cada quaterno pitagórico que satisfaz a questão em foco, o nível de compreensão será instrumental.

J e M apresentaram os dois quaternos pitagóricos que satisfazem à questão em tela, apresentando assim, um nível de compreensão relacional. Por sua vez, R apresentou as relações em vez dos quaternos pitagóricos solicitados, porém, indicou que são dois o número de quaternos pitagóricos. No entanto, mesmo R não evidenciando os quaternos pitagóricos e sim suas relações, como os números contidos em cada relação estavam corretos e como o referido sujeito afirmou que são duas possibilidades, o nível de compreensão apresentado por R foi relacional.

Questão 21: Se os sujeitos determinarem todos os quaternos pitagóricos que podem ser gerados sendo $\gamma = 65$ e $\gamma = 52$, o nível de compreensão será relacional. Porém, se os sujeitos não apresentarem todos os quaternos pitagóricos quaternos pitagóricos, o nível de compreensão será instrumental.

Os sujeitos J e M apresentaram quaternos pitagóricos que satisfazem à questão em foco. Porém, para $\gamma = 65$, os referidos sujeitos apresentaram certa incompletude por não considerarem que o número 65 pode surgir multiplicando (5,12,13) por 5 e também multiplicando (5,12,13) por 13. Logo, tanto J quanto M compreenderam instrumentalmente a questão em foco.

Por sua vez, R apresentou resposta inadequada a essa questão, posto que o referido sujeito se equivocou ao solucionar à questão considerando tanto cateto e hipotenusa como sendo a 52. Com isso, assim como os demais sujeitos, R compreendeu instrumentalmente.

Questão 22: Se o sujeito determinar como proceder para a partir de $\gamma = 85$ e dos ternos pitagóricos (13,84,85) e (5,12,13), seja possível obter um quaterno pitagórico e além disso, indicar qual é o quaterno pitagórico, o nível de compreensão será relacional. Contudo, se o sujeito se equivocar no procedimento, e assim, indicar um quaterno pitagórico que não satisfaz à questão, o nível de compreensão será instrumental.

M apresentou resposta que contempla todos os critérios, descritos, inerentes à compreensão relacional. Entretanto, J e R compreenderam instrumentalmente, posto que J procedeu de modo correto, conforme o Método 3, porém, não apresentou o quaterno pitagórico que de fato satisfaz o que fora pedido. Por sua vez, R se equivocou ao considerar os dois ternos pitagóricos que constam no enunciado da questão em vez de obter o secundário para (5,12,13) de modo que um dos catetos fosse igual a 85.

Questão 23: Se o sujeito descrever com clareza o Método 3 geometricamente, o nível de compreensão será relacional. Contudo, se o sujeito não conseguir ser claro em sua explicação, o nível de compreensão será instrumental.

J e M conseguiram explicar com clareza um método algébrico de modo geométrico, apresentando assim, um nível de compreensão relacional. No entanto, R apenas esboçou um paralelepípedo retângulo, uma das suas diagonais e a diagonal da base sem apresentar nenhuma descrição de como o Método 3 pode ser explicado geometricamente. Logo, desse modo, R não compreendeu a questão em tela.

Por fim, com base na análise pontual que acabamos de realizar, na próxima sessão iremos inferir quanto aos níveis de compreensão dos sujeitos M, J e R.

5.2.1 Inferências quanto ao nível de compreensão

A presente sessão será destinada a apresentar nossas inferências acerca dos níveis de compreensão dos três sujeitos envolvidos na pesquisa acerca dos quaternos pitagóricos. Para tanto, tais inferências serão realizadas tendo como base a análise pontual que fizemos da avaliação escrita que fora aplicada no final do módulo de ensino. A seguir, apresentamos (Quadro 5) o nível de compreensão de cada questão contida na avaliação escrita dos sujeitos M, J e R, sendo que a primeira coluna corresponde às questões, as demais colunas correspondem o nível de compreensão apresentado pelos respectivos sujeitos e as siglas CR, CI e NC correspondem respectivamente à compreensão relacional, compreensão instrumental e não compreendeu.

Quadro 5: Níveis de compreensão dos sujeitos

	M	**J**	**R**
Q1	CR	CR	CR
Q2	CR	CI	CI
Q3	CR	CR	CR
Q4	CR	CR	NC
Q5	CR	CI	CI
Q6	CR	CR	CR
Q7	CR	CR	CR
Q8	CR	CR	CI
Q9a	CR	CR	CR
Q9b	CR	CR	CR
Q9c	CR	CR	CR
Q9d	CR	CR	CR
Q10a	CR	CR	CR
Q10b	CR	CI	CI
Q11	CI	CI	CI
Q12	CR	CR	CI

Q13	CR	CI	CI
Q14	CR	CI	CI
Q15	CR	CI	CI
Q16	CR	CR	CR
Q17	CR	CR	CI
Q18	CR	CR	CR
Q19	CR	CR	CR
Q20	CR	CR	CR
Q21	CI	CI	CI
Q22	CR	CI	CI
Q23	CR	CR	NC

Conforme podemos verificar na tabela ilustrada, dentre as 27 questões (o total se deve a cada item contido nas questões 9 e 10), em 25 o sujeito M apresentou um nível de compreensão relacional e em apenas 02 apresentou um nível de compreensão instrumental. Com relação ao sujeito J, houve 18 questões em que o nível de compreensão foi relacional e 9 questões em que o nível de compreensão foi instrumental. Por sua vez, o sujeito R apresentou um nível de compreensão relacional em 13 questões, um nível de compreensão instrumental em 12 questões e em 02 questões não apresentou compreensão.

Diante do exposto, com relação aos níveis de compreensão sobre os quaternos pitagóricos, concluímos que os sujeitos M e J atingiram um nível relacional, sendo capazes de ultrapassarem as mecanizações propostas nos livros didáticos, apresentando uma compreensão significativa acerca dos quatro números inteiros que satisfazem o Teorema de Pitágoras.

Entretanto, o sujeito R atingiu um nível de compreensão instrumental acerca dos quaternos pitagóricos posto que o número de questões em que o nível de compreensão foi instrumental somados às duas questões em que não apresentou compreensão supera o número de questões em que o nível de compreensão foi relacional.

No mais, considerando as inferências supracitadas, posto que as categorias de compreensão instrumental e de compreensão relacional foram difundidas por Skemp, cabe-nos discorrer acerca do esquema de cada sujeito, conforme as ideias defendidas pelo referido teórico. Com isso, particularmente, como J e M atingiram um nível de compreensão relacional e R um nível de compreensão instrumental, temos que no que diz respeito ao conceito dos quaternos pitagóricos, os sujeitos J e M possuem um esquema mais rico do que o do sujeito R.

Tal afirmação se deve ao fato de que Skemp (1980) destaca que na compreensão instrumental ocorre a assimilação de algo novo sob um esquema simples e na compreensão relacional ocorre a assimilação de novos conceitos sob esquemas mais ricos.

5.3: Qual análise é mais apropriada: a global ou a pontual?

Até o presente momento conduzimos nossa investigação com o intuito de comprovar a tese que ora defendemos, a saber: para inferir quanto aos níveis de compreensão relacional ou instrumental, destacados pelo psicólogo da matemática Richard Skemp, a análise global é mais apropriada que a pontual.

Todavia, tanto na análise global quanto na análise pontual que realizamos, foi constatado que os sujeitos J e M atingiram o nível de compreensão relacional e o sujeito R o nível de compreensão instrumental. Porém, mesmo apresentando os mesmos resultados, acreditamos que os critérios utilizados na análise pontual são sutis para realizar tais inferências com confiabilidade. Portanto, nesse contexto, a presente sessão representa o principal alicerce da nossa investigação, posto que, nesta ocasião, sustentaremos nossa tese ao argumentar em favor da análise global e ao refutar a análise pontual.

Particularmente, conforme verificado nos trabalhos acadêmicos que analisamos cujas análises apresentadas são pontuais, a maioria simplesmente menciona que o esquema associado ao nível de compreensão relacional é mais rico do que o associado ao nível de compreensão instrumental. Porém, assim como as análises pontuais apresentadas nos referidos trabalhos acadêmicos, a título de exemplo, a análise pontual que realizamos demonstra que a ideia de esquema não é considerada para criar critérios para realizar as inferências acerca dos níveis de compreensão.

Com isso, por não estabelecer critérios gerais, analisando pontualmente cada questão, sem considerar o esquema associado ao conceito matemático investigado, é inapropriado, na análise pontual, inferir os níveis de compreensão. Sobretudo, para formação de conceitos matemáticos se faz necessário a participação de conceitos contributivos, o que impulsiona a necessidade de verificar a compreensão de um determinado conceito matemático considerando a rede de conceitos que estão conectados ao mesmo e, a partir disso, criar critérios globais.

Sobretudo, como os níveis de compreensão dos sujeitos J, R e M apontados na análise global coincidiram com os apontados na análise pontual, sendo respectivamente relacional, instrumental e relacional, todos adquiriram compreensão, posto que tanto na compreensão relacional quanto na compreensão instrumental há compreensão. Diante disso, se pensássemos em atribuir medalhas aos referidos sujeitos, assim faríamos a distribuição: M – ouro, J – prata e R – bronze. Tais classificações poderiam ser justificadas na análise pontual posto que na tabela apresentada acerca dos níveis de compreensão de cada sujeito a incidência de CR obedece a essa ordem e na análise global, de modo geral, essa ordem pode ser considerada se considerarmos que no registro escrito o maior número de respostas adequadas se deve a M, em seguida a J e depois a R.

Contudo, as inferências supracitadas são bucólicas posto que ao tratarmos de *níveis* de compreensão, não podemos nos remeter a ordem, mas sim a graus. Sobretudo, corroboramos com Fossa (2001) ao destacar que há uma sequência gradativa, onde a compreensão instrumental se torna relacional, sendo que o salto de um nível para o outro é de cunho qualitativo e não quantitativo. Portanto, como os critérios utilizados na análise pontual não consideraram o esquema relacionado aos quaternos pitagóricos sendo que as inferências realizadas se detiveram à incidência de CI e de CR de cada sujeito nas respostas apresentadas às questões contidas na avaliação escrita, não poderemos, nesse caso, apontar em qual grau se encontra cada sujeito.

Na análise global foi levado em consideração o diagrama esquemático quaternos pitagóricos e, consequentemente, foram criados critérios gerais de modo que fosse possível verificar a existência da diversidade de conceitos contributivos inerentes aos quaternos pitagóricos, bem como as pontes frutíferas existentes entre os mesmos. Desse modo, poderemos inferir quanto à amplitude dos esquemas de cada sujeito e, consequentemente, apontar o grau de compreensão.

Com isso, conforme a análise global que realizamos, o sujeito R atingiu um nível de compreensão instrumental: (i) por apresentar dificuldade em estabelecer conexão entre as representações geométrica e algébrica dos quaternos pitagóricos; (ii) por apresentar tanto o pensamento algébrico quanto o geométrico limitado; (iii) por não reconhecer que os quaternos pitagóricos correspondem à extensão dos ternos pitagóricos e, consequentemente, (iv) por não relacionar o cálculo da menor distância entre dois pontos, tanto em duas dimensões como em três dimensões, aos ternos pitagóricos e aos quaternos pitagóricos, respectivamente.

Logo, temos que o referido sujeito apresenta um esquema associado aos quaternos pitagóricos limitado, pobre em conceitos e em conexões. Sendo assim, dentro do nível de compreensão instrumental R é estável, posto que não houve indícios de que o mesmo encontra-se em transição para o nível de compreensão relacional.

Por sua vez, os sujeitos J e M, representantes do nível de compreensão relacional, por satisfazer todos os critérios que estabelecemos, com base no diagrama esquemático dos quaternos pitagóricos, demonstraram que seus respectivos esquemas associados ao conceito matemático em tela são amplos, apresentando tanto uma diversidade de conceitos contributivos quanto de conexões frutíferas entre os mesmos. Todavia, conforme as respostas apresentadas pelos referidos sujeitos, na avaliação escrita e na entrevista, M possui os pensamentos algébrico e geométrico mais apurados do que J, levando-nos a concluir que o esquema de M é mais amplo do que o de J e, consequentemente, a concluirmos que gradativamente M é mais relacional do que J.

Todavia, é válido ressaltar que se, para inferirmos quanto ao grau de compreensão de J, considerássemos a análise pontual, na qual concluímos que das 27 questões houve 21 correspondentes à CI, poderíamos afirmar que o referido sujeito encontra-se na transição do nível de compreensão instrumental para o relacional. Contudo, conforme destacamos anteriormente, as inferências advindas da análise pontual, a qual não estabelece critérios com base no diagrama esquemático do conceito matemático a ser compreendido, não tem propriedade para tal fim.

Diante do exposto, acreditamos que, qualitativamente, a característica mais significativa inerente à análise global que nos auxilia a sustentar a tese de que ela é mais apropriada que a análise pontual, para inferir quanto aos níveis de compreensão, está relacionada à viabilidade de, na análise global, podermos inferir com segurança acerca do esquema de cada sujeito sobre o conceito matemático a ser investigado e, consequentemente, podermos inferir quanto ao grau de compreensão dentro dos níveis relacional e instrumental.

Contudo, com o intuito de testarmos a veracidade dos argumentos que até então apresentamos, favoráveis à tese que ora defendemos, nos reportamos como advogados do diabo e afirmamos que as inferências realizadas na análise pontual são mais frágeis do que as realizadas na análise global porque no primeiro caso não houve uso de entrevistas para complementar os dados. Diante disso, metaforicamente, a seguir agiremos como promotores e refutaremos tal afirmação.

Particularmente, a entrevista realizada para a análise global intencionou preencher lacunas deixadas pelos sujeitos na avaliação escrita. Sobretudo, com a entrevista buscamos identificar se os sujeitos reconheciam ou não os equívocos cometidos na avaliação escrita, tais como incompletude ou até mesmo resposta inadequada. Todavia, posto que os critérios estabelecidos na análise pontual foram frágeis, por não se deterem à ideia de esquema, acreditamos que mesmo se houvesse realizado a entrevista, as inferências acerca dos níveis de compreensão dos sujeitos não seriam confiáveis. Em contrapartida, como na análise global os critérios foram bem definidos com base na ideia de esquema e no diagrama esquemático relacionado aos quaternos pitagóricos, mesmo sem entrevista, as inferências acerca dos níveis de compreensão dos sujeitos seriam mais apropriadas do que as apresentadas pela análise pontual.

Sobretudo, destacamos que a entrevista, por ser um instrumento de análise e verificação dos objetivos da pesquisa, o qual nos serviu para complementar os dados que havíamos obtido na avaliação escrita, como todo instrumento, quando não utilizado corretamente não atinge o que se espera. No mais, conforme todos os argumentos apresentados, os resultados apontam que para inferir quanto aos níveis de compreensão relacional ou instrumental, destacados pelo psicólogo da matemática Richard Skemp, a análise global é mais apropriada que a pontual.

Capítulo 6

IDEIAS CONTRIBUTIVAS DA NOSSA INVESTIGAÇÃO

No presente capítulo discorreremos algumas considerações acerca da investigação que realizamos, sobretudo, as referidas considerações, que, por sua vez, representam os resultados gerais do nosso estudo, estão em consonância com o objetivo geral, com os objetivos específicos e com as perguntas que nos propomos responder.

Como laboratório para nossa investigação, elaboramos e aplicamos um módulo de ensino sobre os quaternos pitagóricos, em um grupo de três alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, Campus de Arraias, utilizando a História da Matemática e a obra de Bahier (1916). Sobretudo, com o referido módulo de ensino obtivemos os dados para realizarmos tanto a análise global quanto a pontual e consequentemente, elaboramos nossas inferências acerca dos níveis de compreensão apresentados pelos sujeitos, o que nos possibilitou investigarmos a eficácia da análise global em detrimento da análise pontual.

Na oportunidade, nos detivemos à noção de esquema defendida por Skemp, e consideramos que para a formação de um conceito se faz necessário recorrer a conceitos contributivos que, por sua vez, configuram-se como elementos de uma rede de conceitos conectados, ou seja, inter-relacionados. Sobretudo, também consideramos que a promoção da compreensão relacional ocorre através da construção de esquemas relacionais, ou seja, esquemas onde os conceitos estão inter-relacionados.

Com isso, como importante aliado para a busca da resposta da nossa pergunta diretriz - O que podemos inferir quanto aos níveis de compreensão relacional ou instrumental, destacados pelo psicólogo da matemática Richard Skemp, acerca da análise global e da análise pontual? - contamos com o esquema relacionado aos quaternos pitagóricos, posto que o mesmo é uma extensão do esquema dos ternos pitagóricos, ou seja, um esquema ampliado e mais rico com pontes frutíferas entre vários conceitos, ou melhor, rico em inter-relações entre diversos conceitos.

Sendo assim, estabelecemos dois critérios os quais adotamos para analisar globalmente os dados, a saber:

(i) Conexão entre a interpretação algébrica e a interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras, em três dimensões, posto que no esquema relacionado aos quaternos pitagóricos a relação entre a Álgebra e Geometria é imprescindível para formação deste conceito.

(ii) Retomada do conceito do Teorema de Pitágoras em duas dimensões para obter as representações algébrica e geométrica, em três dimensões, dado que o esquema relacionado aos quaternos pitagóricos é uma extensão do esquema dos ternos pitagóricos e consequentemente, reconhecer que os ternos pitagóricos assim como os quaternos pitagóricos, correspondem a uma importante ferramenta histórica e pedagógica para compreensão do Teorema de Pitágoras enquanto aplicação para determinar a menor distância entre dois pontos, respectivamente em duas dimensões e em três dimensões.

Portanto, na análise global, com base na noção de esquema, no diagrama esquemático dos quaternos pitagóricos e, consequentemente, nos critérios supracitados, constatamos que os níveis de compreensão acerca dos quaternos pitagóricos apresentados pelos sujeitos foram: J e M relacional e R instrumental.

Por sua vez, seguindo o script adotado na maioria das teses e dissertações que analisamos, as quais fazem uso das categorias de compreensão relacional e de compreensão instrumental enquanto instrumento avaliativo, analisamos pontualmente cada questão e conforme a incidência de CI e CR concluímos o nível de compreensão apresentado por cada sujeito. Na oportunidade, assim como na análise global, constatamos que os níveis de compreensão acerca dos quaternos pitagóricos apresentados pelos sujeitos foram: J e M relacional e R como sendo instrumental e, ainda, que, os esquemas associados aos quaternos pitagóricos de J e M são mais ricos do que o de R.

Entretanto, a análise pontual que realizamos demonstra que a ideia de esquema só é utilizada para afirmar que o esquema associado ao nível de compreensão relacional é mais rico do que o associado ao nível de compreensão instrumental. Contudo, diferentemente do que é feito na análise global, não é considerada a noção de esquema para criar critérios para realizar as inferências acerca dos níveis de compreensão. Logo, tanto as inferências acerca dos níveis de compreensão quanto sobre o esquema de cada sujeito, advindas da análise pontual, não são adequadas.

No mais, como na análise global podemos inferir com mais propriedade do que na análise pontual acerca do esquema de cada sujeito sobre o conceito matemático a ser investigado, apontamos que na análise global podemos inferir quanto ao grau de compreensão dentro dos níveis relacional e instrumental. Sendo assim, considerando o esquema de cada sujeito, notamos que M possui os pensamentos algébrico e geométrico mais apurados do que J, o que nos impulsiona a inferir que o esquema de M é mais amplo do que o de J e, consequentemente, M é mais relacional do que J. Por sua vez, posto que o esquema de R é muito limitado, o mesmo apresenta-se estável no nível de compreensão instrumental.

Com isso, os resultados indicam que para inferir quanto aos níveis de compreensão relacional ou instrumental, destacados pelo psicólogo da Matemática Richard Skemp, a análise global é mais apropriada que a pontual. Sobretudo, definimos, com base nas ideias difundidas por Skemp, compreensão relacional como sendo a compreensão em que há uma gama de relações estabelecidas entre conceitos contributivos à formação do conceito a ser aprendido.

Todavia, salientamos que a análise global requer uma averiguação mais profunda por parte do professor, a qual pode auxiliá-lo no planejamento, na execução do plano de aula e também na elaboração da avaliação. Em especial, ao analisar globalmente, de modo profundo, o professor poderá experienciar a prática de apreender de fato a compreensão apresentada pelo aluno. Sendo assim, quando o professor, através do seu ensino, considerando o planejamento, a execução do plano de aula e a avaliação preza, pela promoção da compreensão relacional, conceberá tanto o ato de ensinar quanto o de avaliar como uma prática recompensadora e prazerosa.

Particularmente, a avaliação não se limita apenas a atribuição de nota, mas também configura como um instrumento de aprendizagem. Sobretudo, com base no Construtivismo Radical, acreditamos que tudo que o sujeito tem construído na mente não está aberto para ser visto, sendo necessário que o professor pesquise o que cada um tem construído para que seja possível obter uma explicação apropriada acerca da compreensão do aluno. Ainda, a explicação só será apropriada quando proporcionar um maior entendimento do nível de compreensão alcançado pelo sujeito.

Sendo assim, apontamos que a compreensão que o professor adquire acerca do nível de compreensão alcançado pelo sujeito sobre determinado conceito, depende do tipo de explicação que é utilizado para inferir o nível de compreensão. Apontamos a existência de dois tipos de explicação, a saber: explicação relacional e explicação instrumental.

Ao utilizarmos critérios globais teremos uma explicação mais rica, denominada explicação relacional, a qual nos proporcionará uma compreensão relacional do conhecimento do sujeito. Por sua vez, ao utilizarmos critérios pontuais teremos uma explicação sutil, denominada explicação instrumental, a qual será inapropriada para obter uma compreensão relacional, mas sim, uma compreensão instrumental do conhecimento do sujeito.

A seguir, teceremos algumas contribuições da nossa investigação para professores e pesquisadores que acreditam que para que um ensino de Matemática seja efetivo e significativo é necessário à promoção da compreensão relacional dos conceitos a serem aprendidos. Tais contribuições que apontaremos são em decorrência dos resultados obtidos, bem como de aspectos que ficaram aparentes durante a investigação.

Mesmo que nosso intuito maior fora constatar se a análise global é mais apropriada que a análise pontual para realizar inferências quanto aos níveis de compreensão, ao obter êxito na referida constatação, consequentemente nossa pesquisa contribui com a demonstração de como deve ser uma análise global. Nesse contexto, apontamos que para realizar análise global, se faz necessário levar em consideração a noção de esquema e, consequentemente, conhecer o diagrama esquemático do conceito a ser avaliado.

Contudo, para que ao realizar a análise global de determinada avaliação o professor/pesquisador consiga de modo satisfatório que os alunos/sujeitos alcancem a compreensão relacional, indicamos que a noção de esquema bem como o conhecimento do diagrama esquemático do conceito a ser aprendido, norteie tanto o ensino quanto à elaboração da avaliação. Sobretudo, quando no ensino e na elaboração da avaliação é considerado que os conceitos são formados isoladamente, de modo desconexo, em vez de considerar a ideia de que os conceitos são formados através de uma rede de ideias conectadas, ao analisarmos globalmente, será pouco provável promovermos à compreensão relacional.

Ainda sobre o ensino de Matemática que promova a compreensão relacional, destacamos que, no âmbito das tendências metodológicas utilizadas no ensino de Matemática, conforme a investigação que realizamos, apontamos que a História da Matemática aliada a outras tendências metodológicas, contribui para a promoção de uma compreensão via relações. Com isso, conforme exemplificado em nossa investigação, se faz necessário conhecer as possibilidades e limitações de cada uma para que, sempre que for preciso, utilizar uma ou mais. No nosso caso, além da História da Matemática, fizemos uso do material concreto e do uso de softwares para promover a compreensão relacional dos quaternos pitagóricos.

Conforme destacado, nosso intuito não foi testar o módulo de ensino, mas sim verificarmos com como devem ser utilizadas as categorias de compreensão relacional e de compreensão instrumental como um instrumento avaliativo. Contudo, diante da investigação que realizamos, como o módulo de ensino que elaboramos, apresentou ideias acerca dos quaternos pitagóricos de modo compreensivo, significativo e dinâmico para os sujeitos, também apontamos como contribuição da nossa pesquisa a sequência didática contida no módulo de ensino, em sua maioria original. Sobretudo, é válido ressaltar que tal relevância se deve à obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entier* de Bahier (1916), a qual foi uma importante aliada na investigação, através da estrutura e das ideias apresentadas na referida obra, com sua sistematização e completude acerca do conceito matemático em tela.

Por fim, além das contribuições da nossa investigação, apontamos algumas questões em aberto, provenientes da investigação que realizamos, cujos caminhos a serem trilhados na busca de respostas apontam para uma continuidade de pesquisa, a saber: 1. Qual a potencialidade pedagógica do uso da História da Matemática na promoção da compreensão relacional; 2. Como o professor deve proceder para obter uma explicação apropriada acerca do nível de compreensão de cada aluno?

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A; BASTIAN, I. V. O Teorema de Pitágoras: Uma abordagem enfatizando o caráter necessário/suficiente. In: *Educação Matemática em Revista*. SBEM, 2003. Ano 10, n. 14, p. 45-53.

AZEVÊDO, I. L. *Reflexões sobre a Construção e Evolução de conceitos Geométricos nas séries intermediárias do Ensino Fundamental*. 2009. 253 p. il. Orientador: Dr. Francisco Peregrino Rodrigues Neto. Tese (Doutorado em Educação)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

_______________. *Geometrizando no segundo ciclo: Relato de uma intervenção pedagógica voltada à construção de conceitos geométricos*. 2005. 199 p. il. Orientador: Dr. Francisco Peregrino Rodrigues Neto. Dissertação (Mestrado em Educação)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2005.

BAHIER, E. *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*. France: A. Hermann et fils, 1916.

BEZERRA, M. C. A. *As quatro operações básicas: uma compreensão dos procedimentos algorítmicos*. 2008. 138 p. il. Orientador: Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008.

BIGODE, A. J. L. *Matemática hoje é feita assim*. 8ª série. São Paulo: FTD, 2000.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *A investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. de C; ARAÚJO, J. L. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. de C; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 2. ed. Belo *Horizonte*: Autêntica, 2006, 27-48.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. L. (orgs). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, 11-22.

DIAS, G.F. *Utilizando processos geométricos da história da matemática para o ensino de equações do 2 grau*. 2009. 162 p. il. Orientador: Dr. Francisco Peregrino Rodrigues Neto. Dissertação (Mestrado em Educação)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 2. ed. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1997.

FOSSA, J. A. Matemática, História e Compreensão In: *Revista Cocar*. Belém: EDUEPA, 2008, v. 2, n. 4, p. 7-15.

____________. *Ensaios sobre a Educação Matemática*. Belém: EDUEPA, 2001.

____________. *Teoria Intuicionista da Educação Matemática*. Natal: EDUFRN, 1998.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. *Matemática Fundamental*. Ensino Médio São Paulo: FTD, 1994, vol. único.

GUTIERRE, L. S. *Inter-relações entre História da Matemática, a Matemática e sua aprendizagem*. 2003. 261 p. il. Orientador: Dra. Bernadete Barbosa Morey. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2003.

LORENZONI, C. A.; SILVA, C. M. S. O velho conhecido Teorema de Pitágoras e suas demonstrações. In: *Revista História & Educação Matemática*. Rio Claro: SBHMat, 2002. v. 2, n. 2, p. 112-122.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MENDES, I. A. *Investigação histórica no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

_____________ *Matemática e Investigação em sala de aula:* tecendo redes cognitivas na aprendizagem. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. *História na Educação Matemática:* propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

NOBRE, S. A; BARONI, R. L A Pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. *Pesquisa em Educação Matemática:* Concepções e Perspectivas. 1. ed. São Paulo: Editora da UNESP, 1999, v.1, p. 129-136.

PAIVA, M. *Matemática*. Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2005, vol. único.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. In: *Bolema*, v. 19, n. 25, p. 105-132, 2006.

RÊGO, R. G. do. *Um estudo sobre a construção do conceito de função*. 2000. 239 p. il. Orientador: Dr. John Andrew Fossa. Tese (Doutorado em Educação)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2000.

RODRIGUES, M. dos S. *O ensino de medidas e grandezas através de uma abordagem investigatória*. 2006. 239 p. il. Orientador: Dr. Iran Abreu Mendes. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

RODRIGUES NETO, F. G. *Um estudo sobre aprendizagem de conceitos algébricos fundamentais*. 1998. Orientador: Dr. John Andrew Fossa. Tese (Doutorado em Educação)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 1998.

SILVA, G. A. *Estudo Histórico e Pedagógico sobre Ternos Pitagóricos à luz de Eugène Bahier*. 2009. 115 p. il. Orientador: Dr. John Andrew Fossa. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

SILVA, G. E. A. *Um estudo sobre a aprendizagem de números irracionais no ensino médio*. 2006. 180 p. il. Orientador: Dr. Francisco Peregrino Rodrigues Neto. Tese (Doutorado em Educação)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

SILVA, G.A. FOSSA, J. A. *Ternos Pitagóricos:* uma ferramenta pedagógica na formação de professores. (no prelo)

SKEMP, R. *Mathematics in the primary school. London*: Routledge, 1989.

__________*Psicologia del aprendizaje de las matemáticas*. Tradução Gonzalo Gonzalvo Mainar. Madrid: Ediciones Morata, S. A. 1980.

SOUSA, E. K. V. *Um estudo sobre o ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas*. 2010. 133 p. il. Orientador: Dr. John Andrew Fossa. Co-Orientador: Dra. Giselle Costa de Sousa. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

SOUZA, C. F. *Um estudo sobre a aprendizagem de alguns conceitos algébricos e geométricos*. 2006. 241 p. il. Orientador: Dr. Francisco Peregrino Rodrigues Neto. Tese (Doutorado em Educação)- Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

TV ESCOLA. *O Legado de Pitágoras:* Desafiando Pitágoras. Disponível em, < http://tvescola.mec.gov.br/index.php?option=com_zoo&view=item&item_id=1917> Acesso em: 05 de mai. 2011.

VENTURA, M. M. O estudo de caso como modalidade de pesquisa. In: *Revista SOCERJ*. SOCERJ: Rio de Janeiro, 2007, v. 20, n 5, p. 383-386.

ANEXOS E APÊNDICES

Apêndice A - Lista dos links diretos que dão acesso às 11 produções acadêmicas que analisamos

AZEVÊDO (2009): http://bdtd.bczm.ufrn.br/tedesimplificado/tde_arquivos/9/TDE-2010-08-12T012827Z-2793/Publico/IvanilkaLA_TESE_1_a_150.pdf

AZEVÊDO (2005): http://bdtd.bczm.ufrn.br/tedesimplificado/tde_arquivos/9/TDE-2006-08-03T042241Z-113/Publico/IvanilkaLA.pdf

BEZERRA (2008): http://bdtd.bczm.ufrn.br/tedesimplificado/tde_arquivos/36/TDE-2009-03-10T062513Z-1765/Publico/MariaCAB.pdf

DIAS (2009): http://bdtd.bczm.ufrn.br/tedesimplificado/tde_arquivos/9/TDE-2010-03-01T113509Z-2442/Publico/GracianaFD.pdf

GUTIERRE (2003) e RÊGO (2000): Pela dificuldade em encontrar as referidas produções eletronicamente, entramos em contato com os referidos autores os quais nos enviaram respectivamente gravado em CD e por e-mail suas produções.

RODRIGUES (2006): http://bdtd.bczm.ufrn.br/tedesimplificado/tde_arquivos/36/TDE-2008-02-08T054616Z-1065/Publico/MarianSR.pdf

RODRIGUES NETO (1998): A referida produção encontra-se na Biblioteca Setorial do CCSA (UFRN).

SILVA (2009): http://bdtd.bczm.ufrn.br/tedesimplificado/tde_arquivos/36/TDE-2010-05-03T012744Z-2594/Publico/GeorgianeAS.pdf

SILVA (2006): http://bdtd.bczm.ufrn.br/tedesimplificado/tde_arquivos/9/TDE-2007-04-26T220307Z-627/Publico/GratulianoEAS.pdf

SOUSA (2010): http://bdtd.bczm.ufrn.br/tedesimplificado/tde_arquivos/36/TDE-2011-05-24T065651Z-3438/Publico/EnneKVS_DISSERT.pdf

SOUZA (2006): http://bdtd.bczm.ufrn.br/tedesimplificado//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=1032

Apêndice B - Material do minicurso - Ternos Pitagóricos: uma ferramenta histórica para compreensão do Teorema de Pitágoras

Público Alvo: pesquisadores, professores, educadores e estudantes de Matemática e demais interessados que utilizam a Educação Matemática como trabalho;

I. Inter-relação histórica entre os Ternos Pitagóricos e o Teorema de Pitágoras

II. Noções Básicas

Problema: as propriedades dos conjuntos dos três números inteiros positivos que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$.

Definições e propriedades fundamentais

TRIÂNGULO RETÂNGULO EM NÚMEROS INTEIROS: todo triângulo retângulo cujos três catetos são mensuráveis conforme uma unidade convenientemente escolhida, podendo ser expressa por números inteiros e que traduzindo em linguagem aritmética, retoma oferecer a consideração das soluções através dos números inteiros da relação $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$ **(I),** que existe entre os três lados de um triângulo retângulo;

Condições dos termos de $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$ (I): *a*, *b* e *c* são inteiros, primos entre si, dois a dois;

RELAÇÃO PRIMITIVA OU TRIÂNGULO PRIMITIVO: toda relação (I), nas quais *a*, *b* e *c* são números inteiros primos entre si, dois a dois;

RELAÇÃO SECUNDÁRIA OU TRIÂNGULO SECUNDÁRIO: toda relação da forma (I) que pode ser reconduzida a uma relação primitiva, dividindo os três termos por seu máximo divisor comum, que é, portanto, um número maior que a unidade;

III. TEOREMA: Se entre três números inteiros *a*, *b*, *c*, primos entre si, dois a dois existe a relação $a^2 + b^2 = c^2$, os números *a* e *b* são sempre de paridades diferentes, e número *c* é sempre ímpar.

DEMONSTRAÇÃO

Para começar, a e b não podem ser todos os dois pares, se não eles não seriam primos entre si. Eles não podem ser todos os dois ímpares, sendo o quadrado de todo número ímpar é múltiplo de 8 aumentado de uma unidade.

Tem-se, portanto: $a^2 = 8p + 1$ e $b^2 = 8q + 1$.

A soma $a^2 + b^2$ seria um múltiplo de 8 aumentado de 2. O número c^2 seria então simplesmente par, ou seja, não múltiplo de 4, o que é impossível, pois todo número quadrado par é múltiplo de 4.

Portanto, os números a e b são de paridades diferentes. Logo, a soma de seus quadrados, ou seja, c^2 sempre será ímpar. Com isso, o número c é ímpar.

Com isso, podemos considerar, por conveniência, que é sempre possível supor que na relação primitiva$a^2 + b^2 = c^2$ *(I)*, o número a é ímpar; Logo, b será sempre par.

IV. IDENTIDADE

Dado a identidade $(X - Y)^2 + 4XY = (X + Y)^2$ (II), ao compararmos $X - Y = a$ e $X + Y = c$, temos: $X = c + a / 2$ e $Y = c - a / 2$; $4XY = c^2 + a^2$.

Portanto, nota-se que se a relação (I) existe entre três números inteiros a, b, c, primos entre si, dois a dois, sempre é possível determinar os valores de X e Y em função dos números a, b e c.

V. RELAÇÃO FUNDAMENTAL

A partir da identidade II $(X - Y)^2 + 4XY = (X + Y)^2$, surge a identidade III $\boldsymbol{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2}$, considerando x e y primos entre si e de paridades diferentes, podemos obter para a,b, c, valores inteiros para as relações: $a = (x^2 - y^2)^2$ (IV); $b= (2xy)^2$ (V); $c= (x^2 + y^2)^2$ (VI); sendo que esses valores verificam a relação primitiva da forma $a^2 + b^2 = c^2$.

Pode servir para estabelecer todas as relações primitivas da forma I: $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$

Exemplo: Se $x = 3$ e $y = 2$, temos que o terno pitagórico correspondente é o (5,12, 13).

Generalidade da relação fundamental: A todo número inteiro maior que dois, tomado por valor de a ou de b, sempre corresponde ao menos um triângulo retângulo em números inteiros, ou seja, um grupo de três números inteiros ligados pela relação $a^2 + b^2 = c^2$ (I).

VI. TRÊS CASOS PARTICULARES

1° caso particular: Se substituirmos y = 1 na relação fundamental $(x^2-y^2)^2+(2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$ (III), obtemos a relação $(x^2-1)^2+(2x)^2 = (x^2+1)^2$.

Exemplos numéricos para os três primeiros números pares:

Para $x = 2$, o triângulo correspondente é $3^2+4^2 = 5^2$ (menor triângulo retângulo em números inteiros);

Para $x = 4$, o triângulo correspondente é $15^2+8^2 = 17^2$;

Para $x = 6$, o triângulo correspondente é $35^2+12^2 = 37^2$.

Nesse caso, todo valor par atribuído à x, estará associado à valores de a, b e c, primos entre si, dois a dois, fornecendo assim, um triângulo primitivo.

2° caso particular: Se substituirmos $y = 2$ na relação fundamental $(x^2-y^2)^2+(2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$ (III), obtemos a relação $(x^2-4)^2+(4x)^2 = (x^2+4)^2$. Seguindo o mesmo procedimento do primeiro caso, os exemplos numéricos para os três primeiros números ímpares a partir de $x=3$, são os seguintes:

Para $x = 3$, o triângulo correspondente é $5^2+12^2 = 13^2$;

Para $x = 5$, o triângulo correspondente é $21^2+20^2 = 29^2$;

Para $x = 7$, o triângulo correspondente é $45^2+28^2 = 53^2$.

Nesse caso, todo valor ímpar atribuído à x, a partir de $x=3$, estará associado à valores de a, b e c, primos entre si, dois a dois, fornecendo assim, um triângulo primitivo.

3° caso particular: Se fizermos $x = y+1$, ou seja, dois números consecutivos, sendo x o sucessor de y, obtemos assim, $a = x^2-y^2 \rightarrow a = 2y+1$.

Com isso, observamos que os valores sucessivos de a, quando relacionados a valores de y pertencentes à seqüência natural dos números inteiros, corresponde a seqüência dos números ímpares, à partir de 3, e por conseqüência, todos os triângulos assim obtidos, são primitivos.

VII. ALGUMAS REFLEXÕES

1. Pode-se determinar rapidamente, os números a, b e c, em função de x, tomando todos os valores inteiros a partir de 2. Os valores de a são os números ímpares sucessivos, a partir do 3.

2. A partir da relação fundamental (III) $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$, esses três casos particulares, nos conduzem a possibilidade de construir uma Tábua que agrupa valores associados de a, b e c, em função do número gerador x.

3. Diante do exposto, surge uma ótima ferramenta pedagogógica: a construção de uma tábua, agrupando os valores associados de a, b e c, em função de x, permitindo calcular facilmente, os sucessores, considerando $1 \leq x \leq 25$.

4. Tendo os primitivos, é um bom e ótimo começo. Uma vez que, a partir dos primitivos, chegamos aos secundários.

VIII. TÁBUA QUE PODE SER CONSTRUÍDA

x	y = x -1	2(x – 1)	(x – 1) + x	2(x-1)x	b+1
			a	b	c
1	0	0	1	0	1
2	1	2	3	4	5
3	2	4	5	12	13
4	3	6	7	24	25
5	4	8	9	40	41
6	5	10	11	60	61
7	6	12	13	84	85
8	7	14	15	112	113
9	8	16	17	144	145
10	9	18	19	180	181
11	10	20	21	220	221
12	11	22	23	264	265
13	12	24	25	312	313
14	13	26	27	364	365
15	14	28	29	420	421
16	15	30	31	480	481
17	16	32	33	544	545
18	17	34	35	612	613
19	18	36	37	684	685
20	19	38	39	760	721
21	20	40	41	840	841
22	21	42	43	924	925
23	22	44	45	1012	1013
24	23	46	47	1104	1105
25	24	48	49	1200	1201

IX. DISCUSSÃO DA TÁBUA

i: As duas primeiras colunas são constituídas pela seqüência dos números naturais, a primeira a partir de 1, e a segunda a partir de 0;

ii: A terceira coluna é constituída pela seqüência dos números pares, a partir de 0. Portanto, os números dessa coluna são o dobro dos correspondentes da segunda coluna;

iii: A quarta coluna apresenta os valores sucessivos do número *a*: essa é a seqüência dos números ímpares;

iv: A quinta coluna apresenta os valores correspondentes de *b*. O número de cada linha é o produto dos dois números situados sob a mesma linha nas colunas 1 e 3;

v: A sexta coluna apresenta os valores correspondentes de *c*, obtidos adicionando uma unidade aos valores de *b* que se encontram na mesma linha;

vi: Os valores atribuídos ao número *a*, formados pela seqüência natural dos números ímpares, são terminados por 1, 3, 5, 7, 9, sucessivamente. Com isso, o valor das unidades se repetem por períodos de 5 números;

vii: Os valores atribuídos ao número *b*, nessa tábua, são terminados sucessivamente por 0, 4, 2, 4, 0 e os números *c* são sucessivamente terminados por 1, 5, 3, 5,1; Portanto, os números *b* e *c* se sucedem por períodos de 5, e esses períodos são simétricos em relação ao número médio das unidades;

viii: O número *b* sempre será terminado por 0, 2 ou 4, e que todo número *c* sempre será terminado por 1, 3 ou 5.

ix: A tábua em foco é fácil de ser construída, permitindo determinar rapidamente, todos os triângulos primitivos, para os valores ímpares de *a*. Com isso, através da multiplicação dos números *a*, *b* e *c* por um mesmo número inteiro, pode-se deduzir um número ilimitado de soluções secundárias.

X. REFERÊNCIAS

BAHIER, Eugène. Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers. France: A. Hermann et fils, 1916.

BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p. bbe .

EVES, H. Introdução à História de Matemática. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

FOSSA, J. A.; ERICKSON, G. W. O Algoritmo da Linha Dividida e a Matemática Pitagórica. In: John A. Fossa. (Org.). Presenças Matemáticas. Natal: Editora da UFRN, 2004, v., p. 241-253.

STRUIK**,** Dirk J. História Concisa das Matemáticas. Lisboa: Gradiva,1989

Apêndice C – Roteiro das atividades

Encontro I

1º Momento: Discussão acerca da potencialidade pedagógica do uso da História da Matemática como fonte para ampliação do conhecimento matemático do aluno via redescoberta com caráter investigativo;

2º Momento: Reprodução do documentário *O Legado de Pitágoras – desafiando Pitágoras*, no Brasil veiculado pela TV Escola, com duração de 46 minutos.

3º Momento: Discussão das ideias expostas no documentário, evidenciando a importância do Teorema de Pitágoras para a formação de diversos conceitos.

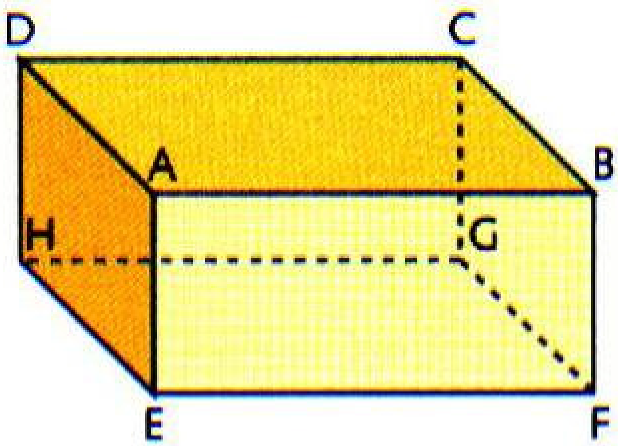
4º Momento: Discussão do caso do ensino do Teorema de Pitágoras muitas vezes se restringir à representação algébrica em detrimento da representação geométrica.

5º Momento: Construção de geoplanos utilizando isopor, tachinhas e elásticos, para ilustrar o cálculo da distância entre dois pontos em duas dimensões como aplicação do Teorema de Pitágoras.

6º Momento: Representação da distância entre dois pontos em duas e três dimensões utilizando barra de sabão e tachinhas.

Encontro II

1º Momento: Paralelepípedo Retângulo



Paralelepípedo retângulo

O paralelepípedo retângulo tem:

6 faces retangulares: [DABC],[HEFG],[ADHE],[CBFG],[ABFE],[DHGC]

8 vértices: A,B,C,D,E,F,G,

12 $\overline{AD}, \overline{DC}, \overline{CB}, \overline{AB}, \overline{DH}, \overline{HE}, \overline{AE}, \overline{BF}, \overline{EF}, \overline{HG}, \overline{GF}, \overline{CG}$

arestas:

Além disso:

As faces que se intersectam estão contidas em planos perpendiculares

As faces opostas estão contidas em planos paralelos

Dois vértices que não pertençam à mesma face dizem-se opostos

São opostos: {(A, G), (B, H), (C, E), (D, F)}.

Não são opostos, por exemplo:

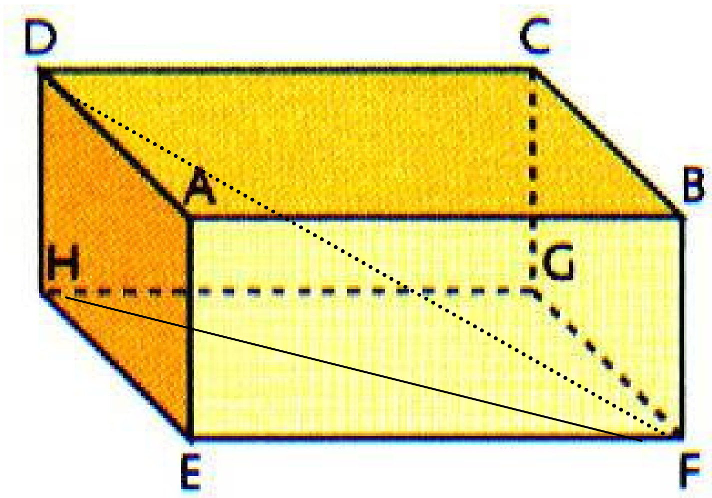
(A, C) uma vez que pertencem à mesma face [ABCD]

(A, F) uma vez que pertencem à mesma face [AEFB]

O segmento de reta que une dois vértices opostos de um paralelepípedo retângulo denomina-se diagonal . Então, [BH] [CE] [DF] [AG] são diagonais .

2º Momento: Distância entre dois pontos em três dimensões

Trace a diagonal DF na figura a seguir, em seguida determine seu valor em função das três dimensões do prisma.



A diagonal DF é hipotenusa do triângulo retângulo DHF, cujos catetos são DH (altura) e HF (diagonal da base), ou seja, $(DF)^2 = (DH)^2+(HF)^2$. Por sua vez, HF é hipotenusa do triângulo retângulo HEF, cujos catetos são HE (largura) e EF (comprimento), ou seja, $(HF)^2 = (HE)^2+(EF)^2$. Logo, por substituição temos que $(DF)^2 = (DH)^2+(HE)^2+(EF)^2$, ou seja, $(\text{diagonal})^2 = (\text{altura})^2+(\text{largura})^2+(\text{comprimento})^2$.

3° Momento: Definição de Quaternos Pitagóricos.

4º Momento: Condições de existência dos termos a, b, e c, na relação $a^2+b^2+c^2 = d^2$.

5º Momento: Definição de Relação primitiva ou irredutível; e de Relação secundária ou redutível.

Encontro III

1º Momento: Importância dos três métodos capazes para determinar soluções em números inteiros da equação $a^2+b^2+c^2 = d^2$

2º Momento: Discussão do Método 1

$$a+b = d \rightarrow \quad c^2 = ?$$

$$\boxed{a+b = d \rightarrow (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = d^2 \rightarrow 2ab = c^2}$$

Portanto, $\boldsymbol{c^2} = \boxed{2ab}$

Se a é um número inteiro qualquer, o valor de b depende que o produto $a\times 2b$ seja um

quadrado

Se $a = 1 \rightarrow \boxed{2b} = c^2$ (i)

b é par ou ímpar? Resposta: b é $\boxed{\text{par}}$ (ii)

Justificativa: Se $a = 1$, a é ímpar. Como pelo menos dois dos três termos a, b, c devem ser pares, b é par.

Se n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $b = 2n^2$ ou $b = (2n)^2$?

Vimos que $a \times 2b$ deve ser um quadrado, ou seja, c^2 deve ser quadrado. Com isso, no caso de $a = 1$, sendo $2b = c^2$, basta verificar se $b = 2n^2$ ou $b = (2n)^2$ satisfaz essa condição.

n	b = 2n²	c² = 2b
1	2	4
2	8	16
3	18	36

n	b = (2n)²	c² = 2b
1	4	8
2	16	32
3	36	72

Logo, s n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $b = 2n^2$.

Portanto, se n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $\boxed{b = 2n}$

Com isso, quais são os valores de c e d em função de n?

$b = 2n^2$, substituindo em (i) $2b = c^2$, temos: $2(2n^2) = c^2$. Logo, $c = 2n$.

Como $a+b = d$, $a = 1$, temos: $1+2n^2 = d^2$.

Qual o quaterno pitagórico e a relação algébrica correspondente?

$$\boxed{(1,2n^2,2n,1+2n^2) \text{ e } 1^2+(2n^2)^2+(2n)^2 = (1+2n^2)^2}$$

Determine, nos casos a seguir, os quaternos pitagóricos e as relações correspondentes:

n = 1	n = 2	n = 3
(1, 2, 2, 3) $1^2+2^2+2^2 = 3^2$ 1+4+4 = 9 (v)	(1, 8, 4, 9) $1^2+8^2+4^2 = 9^2$ 1+64+16 = 81 (v)	(1, 18, 6, 19) $1^2+18^2+6^2 = 19^2$ 1+324+36 = 361 (v)

Se $a = 2 \rightarrow \boxed{4b} = c^2$.

Quais são os primeiros valores possíveis para c^2?

c^2 deve ser quadrado. Logo, basta atribuir valores ímpares para b na igualdade $4b = c^2$ e verificar em quais casos c^2 é quadrado e obter os primeiros valores possíveis para c^2.

b	$4b = c^2$	
1	4	x
3	12	
5	20	
7	28	
9	36	x
11	44	
. . .		
25	100	x
49	196	x

Logo, os primeiros valores possíveis para c^2 são: 4, 36, 100, 196 ....

Se n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $b = (2n+1)^2$?

Basta verificar na sequência dos quatro primeiros valores de c^2 se o valor de b é $(2n+1)^2$.

Para $c^2 = 4$, temos que $b = 1$, ou ainda, $b = 1^2$;

Para $c^2 = 36$, temos que $b = 9$, ou ainda, $b = 3^2$;

Para $c^2 = 100$, temos que $b = 25$, ou ainda, $b = 5^2$;

Para $c^2 = 196$, temos que $b = 49$, ou ainda, $b = 7^2$;

Logo, temos que se n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $b = (2n+1)^2$.

Com isso, quais são os valores de c e d em função de n?

Sabemos que $b = (2n+1)^2$. Com isso, substituindo $b = (2n+1)^2$ em $4b = c^2$, temos: $4(2n+1)^2 = c^2$. Logo, $c = 2(2n+1)$;

Como $a+b = d$, temos que $2+(2n+1)^2 = d$.

Qual o quaterno pitagórico e a relação algébrica correspondente?

$$[2, (2n+1)^2, 2(2n+1), 2+(2n+1)^2]$$

$$2^2+[(2n+1)^2]^2+[2(2n+1)]^2 = [2+(2n+1)^2]^2$$

Determine, nos casos a seguir, os quaternos pitagóricos e as relações correspondentes:

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$2^2+9^2+6^2 = 11^2$ $4+81+36 = 121$ (v) (2, 9, 6, 11)	$2^2+25^2+10^2 = 27^2$ $4+625+100 = 729$ (v) (2, 25, 10, 27)	$2^2+49^2+14^2 = 51^2$ $4+2401+196 = 2601$ (v) (2, 49, 14, 51)

Se $a > 2$, todas as outras soluções possíveis se reduzem a um dos casos precedentes.

Em $a^2+b^2+c^2 = d^2$, todos os três números a, b, c não podem ser iguais, mas dois deles podem ser iguais.

Caso particular: $b = c = 2a \rightarrow d = ?$

$$a+b = d$$
$$a+2a = d$$
$$3a = d$$

Quaterno pitagórico e relação correspondente:

$(a,2a,2a,3a)$ e $a^2+(2a)^2+(2a)^2 = (3a)^2$

Determine, nos casos a seguir, os quaternos pitagóricos e as relações correspondentes:

$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$
(1,2,2,3) $1^2+2^2+2^2 = 3^2$	(2,4,4,6) $2^2+4^2+4^2 = 6^2$	(3,6,6,9) $3^2+6^2+6^2 = 9^2$

Encontro IV

1º Momento: Discussão do Método 2

Identidade (1): $m = 2n+1 = (n+1)^2 - n^2 \rightarrow$ Todo número ímpar é a diferença dos quadrados de dois números inteiros consecutivos.

Se n for ímpar $\rightarrow$ m será da forma $\boxed{4p+3}$

Se n for par $\rightarrow$ m será da forma $\boxed{4p+1}$

Todo número primo da forma $4p+1$ e, também, todo número composto ímpar, que só admite como fatores primos números da forma $4p+1$, é uma soma de dois quadrados.

Se m satisfaz essa condição $\rightarrow$ $\boxed{m = a^2+b^2}$

Comparando $m = a^2+b^2$ com (1), temos:

$$m = 2n+1 = (n+1)^2 - n^2$$
$$(n+1)^2 - n^2 = a^2+b^2 \rightarrow a^2+b^2+n^2 = (n+1)^2$$

Quaterno pitagórico correspondente: $\boxed{(a, b, n, n+1)}$

O número n e um dos dois números a ou b são pares.

Exemplos numéricos:

1º $m = 5$

$n = 2$, $a = 1$, $b = 2 \rightarrow 1^2+2^2+2^2 = 3^2 \rightarrow (1, 2, 2, 3)$

2º $m = 13$

$n = 6$, $a = 2$, $b = 3 \rightarrow 2^2+3^2+6^2 = 7^2 \rightarrow (2, 3, 6, 7)$

3º $m = 65$

$n = 32$. Como $65 = 1^2+8^2 = 4^2 + 7^2$, temos duas relações. São elas:

$$1^2+8^2+32^2 = 33^2 \rightarrow (1, 8, 32, 33)$$

$$4^2 + 7^2+32^2 = 33^2 \rightarrow (4, 7, 32, 33)$$

2º Momento: Construção com o auxílio do software SketchUP de alguns paralelepípedos retângulos cujas dimensões devem coincidir com os números inteiros a, b, c pertencentes a alguns quaternos pitagóricos gerados através dos métodos 1 e 2

Encontro V

1º Momento: Discussão do Método 3.

Ao considerarmos que a e b são os dois catetos de um triângulo retângulo em números inteiros e γ é a hipotenusa, tem-se, portanto $\boxed{(1) \quad a^2+b^2 = \gamma^2}$

Posto que todos os números γ assim considerados figuram como valores de um dos catetos em um ou vários triângulos retângulos em números inteiros, podemos fazer

$$\boxed{(2) \quad \gamma^2+c^2 = d^2}$$

A partir de (1) e (2) temos $\boxed{(3) \quad a^2+b^2+c^2 = d^2}$

Exemplos numéricos

1º O menor triângulo retângulo em números inteiros é $\boxed{3^2+4^2 = 5^2}$

Sua hipotenusa $\boxed{5}$ é cateto do triângulo $\boxed{5^2+12^2 = 13^2}$

Tem-se, portanto $\boxed{3^2+4^2+12^2 = 13^2 \rightarrow (3, 4, 12, 13)}$

2º O número 25 é hipotenusa de $\boxed{2}$ triângulos e cateto de $\boxed{2}$ outros triângulos.

Obtém-se, portanto, com o referido número, as $\boxed{4}$ relações:

$$\boxed{\begin{array}{l} 7^2+24^2+60^2 = 65^2 \rightarrow (7, 24, 60, 65) \\ 15^2+20^2+60^2 = 65^2 \rightarrow (15, 20, 60, 65) \\ 7^2+24^2+312^2 = 313^2 \rightarrow (7, 24, 312, 313) \\ 15^2+20^2+312^2 = 313^2 \rightarrow (15, 20, 312, 313) \end{array}}$$

2º Momento: Construção do paralelepípedo associado ao quaterno pitagórico (3,4,12,13) com o auxílio do software Sketchup.

Anexo A – Conteúdo contido em três livros didáticos ao abordar o cálculo da diagonal do paralelepípedo retângulo

1. Bigode (2000)

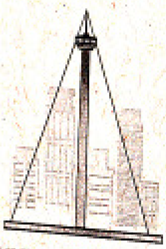
(i) Recorte do Sumário

10. Teorema de Pitágoras

Atividade experimental 213
A demonstração atribuída a Pitágoras 214
Problemas clássicos & o teorema de Pitágoras 216
Pitágoras e a calculadora 222

(ii) Apresentação do conteúdo

11. É comum sustentar torres de transmissão de ondas de rádio através de cabos de aço, como está indicado no desenho. Calcule a altura da torre, sabendo que o comprimento de um dos cabos de aço que a sustenta é 21 m, e a distância do ponto em que esse cabo está fixado no chão ao pé da torre é de 7 m.

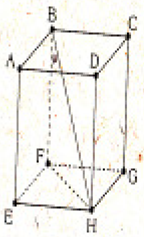


Calculando a medida de outras diagonais

Diagonal do cubo

Pode-se calcular a diagonal de um cubo em que é dada a medida dos lados.

A diagonal do cubo é a hipotenusa $\overline{BH}$ do triângulo retângulo BFH, no qual o lado $\overline{BF}$ do cubo é um dos catetos e a diagonal $\overline{FH}$ da face quadrada EFGH é o outro cateto.



$$(BH)^2 = (BF)^2 + (FH) \quad (I)$$

Sabemos que $BF = \ell$. Calculemos, então, a diagonal $\overline{FH}$.

$$(FH)^2 = \ell^2 + \ell^2 \rightarrow (FH)^2 = 2\ell^2 \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I):

$$(BH)^2 = \ell^2 + 2\ell^2 = 3\ell^2$$

$$BH = \ell\sqrt{3}$$

Assim, a diagonal do cubo de arestas medindo 5 cm é $5\sqrt{3}$ cm.

Diagonal do bloco retangular

Um bloco retangular é um prisma reto de base retangular.

Para determinar a medida da diagonal do bloco retangular, devemos calcular inicialmente a medida da diagonal de uma de suas faces.

Seja um bloco retangular de arestas a, b e c, seja d a medida da diagonal de uma das faces e D a medida da diagonal do bloco retangular.

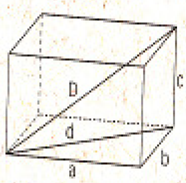
Pelo desenho, podemos escrever:

$$d^2 = a^2 + b^2 \quad (I)$$

$$D^2 = d^2 + c^2 \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

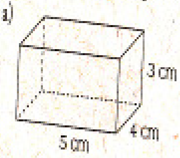


220

ATIVIDADES

12. Calcule a medida da diagonal de um bloco retangular de dimensões:

a)

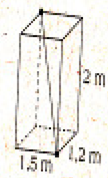


b) 1 m, 2 m e 3 m

c) 3 cm, 4 cm e 12 cm

d) 1 m, 1 m e 2 m

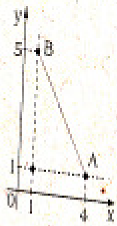
13. Um encanador tem que transportar através de um elevador pedaços de cano tão compridos quanto possível. As medidas do elevador são 1,2 m × 1,5 m por 2 m de altura. Qual é o maior cano que pode ser transportado?



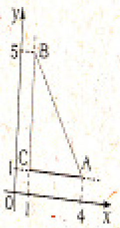
Distância entre dois pontos

É possível determinar a distância entre dois pontos A e B usando Pitágoras.

Acompanhe o exemplo em A(4, 1) e B(1, 5).



Basta considerar o segmento de extremidades A e B como hipotenusa de um triângulo retângulo ABC.



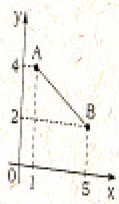
A distância entre os pontos A e B será designada por AB.

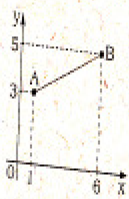
$$(BC)^2 + (CA)^2 = (AB)^2 \rightarrow 4^2 + 3^2 = (AB)^2 \rightarrow 16 + 9 = (AB)^2$$

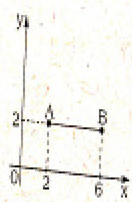
Daí, $(AB)^2 = 25 \rightarrow AB = 5$.

ATIVIDADES

14. Determine a distância entre os pontos A e B indicados no desenho:







221

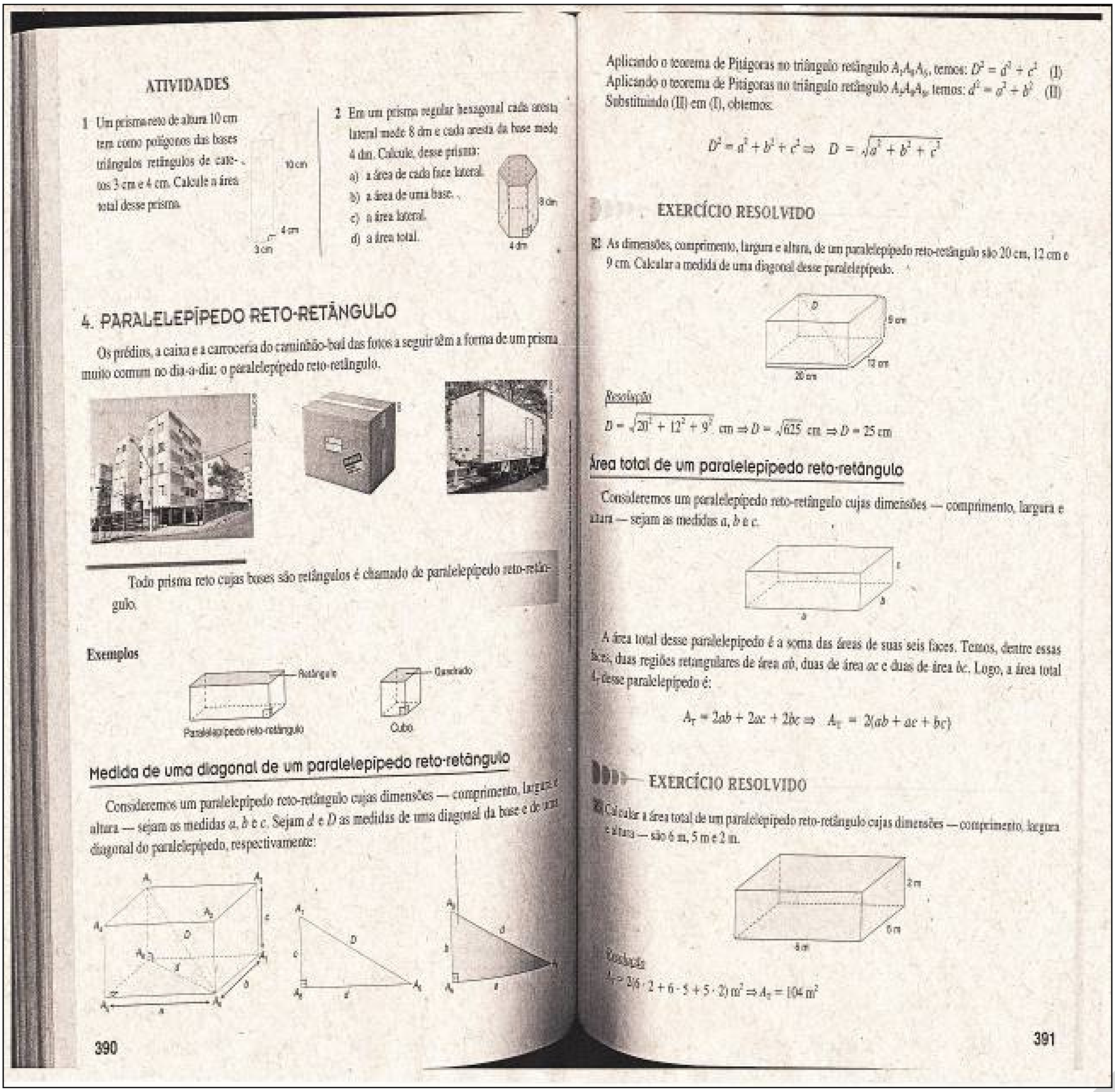
2. Paiva (2005)

(i) Recorte do Sumário

Capítulo 25 Prisma e pirâmide

1. Prisma 387
2. Prisma reto e prisma oblíquo 388
3. Prisma regular 389
4. Paralelepípedo reto-retângulo 390
5. Cubo 393
6. O princípio de Cavalieri e o cálculo do volume de um prisma 394
7. Pirâmide 396
8. Pirâmide regular 398
9. Volume da pirâmide 400
10. Tronco de pirâmide de bases paralelas 404
Leitura: Por que um bebê sente mais frio que um adulto?, 405

(ii) Apresentação do conteúdo



ATIVIDADES

1 Um prisma reto de altura 10 cm tem como polígonos das bases triângulos retângulos de catetos 3 cm e 4 cm. Calcule a área total desse prisma.

2 Em um prisma regular hexagonal cada aresta lateral mede 8 dm e cada aresta da base mede 4 dm. Calcule, desse prisma:

a) a área de cada face lateral.

b) a área de uma base.

c) a área lateral.

d) a área total.

4. PARALELEPÍPEDO RETO-RETÂNGULO

Os prédios, a caixa e a carroceria do caminhão-baú das fotos a seguir têm a forma de um prisma muito comum no dia-a-dia: o paralelepípedo reto-retângulo.

Todo prisma reto cujas bases são retângulos é chamado de paralelepípedo reto-retângulo.

Exemplos

Retângulo — Paralelepípedo reto-retângulo

Quadrado — Cubo

Medida de uma diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

Consideremos um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões — comprimento, largura e altura — sejam as medidas a, b e c. Sejam d e D as medidas de uma diagonal da base e de uma diagonal do paralelepípedo, respectivamente:

390

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $A_1A_6A_5$, temos: $D^2 = d^2 + c^2$ (I)

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $A_5A_6A_4$, temos: $d^2 = a^2 + b^2$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R1 As dimensões, comprimento, largura e altura, de um paralelepípedo reto-retângulo são 20 cm, 12 cm e 9 cm. Calcular a medida de uma diagonal desse paralelepípedo.

Resolução

$$D = \sqrt{20^2 + 12^2 + 9^2}\ \text{cm} \Rightarrow D = \sqrt{625}\ \text{cm} \Rightarrow D = 25\ \text{cm}$$

Área total de um paralelepípedo reto-retângulo

Consideremos um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões — comprimento, largura e altura — sejam as medidas a, b e c.

A área total desse paralelepípedo é a soma das áreas de suas seis faces. Temos, dentre essas faces, duas regiões retangulares de área ab, duas de área ac e duas de área bc. Logo, a área total A_T desse paralelepípedo é:

$$A_T = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow A_T = 2(ab + ac + bc)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R2 Calcular a área total de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões — comprimento, largura e altura — são 6 m, 5 m e 2 m.

Resolução

$$A_T = 2(6 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 2)\ m^2 \Rightarrow A_T = 104\ m^2$$

391

3. Giovanni et al. (1994)

(i) Recorte do Sumário

Geometria 408

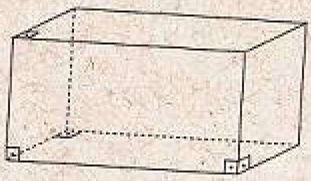
Capítulo **1** – Semelhança de figuras geométricas planas 409
Capítulo **2** – Relações métricas no triângulo retângulo 414
Capítulo **3** – Polígonos regulares inscritos na circunferência: relações métricas 421
Capítulo **4** – Área das figuras geométricas planas 426
Capítulo **5** – Noções sobre poliedros 438
Capítulo **6** – Estudo do prisma 442
Capítulo **7** – Estudo da pirâmide 452
Capítulo **8** – Estudo do cilindro 463
Capítulo **9** – Estudo do cone 468
Capítulo **10** – Estudo da esfera 476

(ii) Apresentação do conteúdo

4. Paralelepípedo retângulo e cubo

Entre os principais prismas, destacam-se o paralelepípedo retângulo e o cubo.

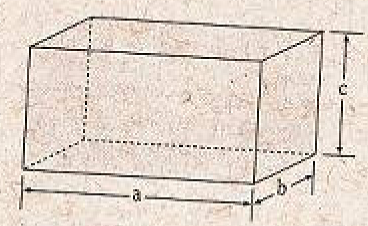
Paralelepípedo retângulo



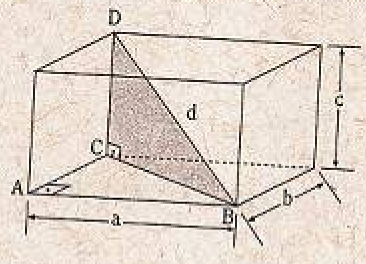
O paralelepípedo retângulo tem as seis faces retangulares e são inúmeros os objetos que têm sua forma: um tijolo, uma caixa de sapatos, uma caixa de fósforos, um livro etc.

O paralelepípedo retângulo é também chamado **ortoedro** ou **bloco retangular**.

As dimensões de um paralelepípedo retângulo são chamadas **comprimento**, **largura** e **altura**, cujas medidas serão indicadas por **a**, **b** e **c**, respectivamente.



No paralelepípedo retângulo, pode-se demonstrar que:

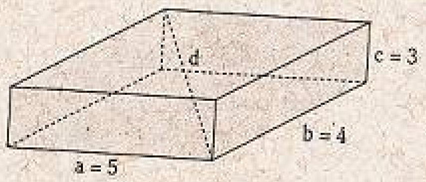


- Diagonal: $\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
- Área total: $\boxed{S_t = 2\,(ab + ac + bc)}$
- Volume: $\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$

Vejamos alguns problemas em que podemos aplicar essas fórmulas para resolvê-los.

1º exemplo: Calcular a medida da diagonal de um paralelepípedo retângulo de dimensões 5 cm, 4 cm e 3 cm.

Resolução:



$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$d = \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2}$$
$$d = \sqrt{25 + 16 + 9}$$
$$d = \sqrt{50}$$
$$d = 5\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Resposta: A medida da diagonal é $5\sqrt{2}$ cm.

CAPÍTULO 6

447