UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

CLAUDIANNY AMORIM NORONHA

AS GEOMETRIAS URBANA E ISOPERIMÉTRICA: UMA ALTERNATIVA DE USO EM SALA DE AULA

Natal – RN

2006

CLAUDIANNY AMORIM NORONHA

AS GEOMETRIAS URBANA E ISOPERIMÉTRICA: UMA ALTERNATIVA DE USO EM SALA DE AULA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, para fins de obtenção do grau de Doutora em Educação.

Orientador: John Andrew Fossa, PhD

NATAL – RN
2006

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Setorial do CCSA
Divisão de Serviços Técnicos

Noronha, Claudianny Amorim.
As geometrias urbana e isoperimétrica: uma alternativa de uso em sala de aula / Claudianny Amorim Noronha. – Natal, 2006.
190 f. : il.

Orientador: Prof. Phd. John Andrew Fossa.
Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Programa de Pós-Graduação em Educação.

1. Educação - Tese. 2. Geometria Isoperimétrica - Tese. 3. Ensino - Tese. 4. Circunferência - Tese. 5. Elipse - Tese. I. Fossa, John Andrew. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/BS/CCSA CDU 371.13 (043.3)

CLAUDIANNY AMORIM NORONHA

AS GEOMETRIAS URBANA E ISOPERIMÉTRICA: UMA ALTERNATIVA DE USO EM SALA DE AULA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, para fins de obtenção do grau de Doutora em Educação.

Aprovado em 28 de junho de 2006.

BANCA EXAMINADORA

John Andrew Fossa (Orientador)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Pedro Franco de Sá (Examinador Externo)
Universidade do Estado do Pará – UEPA / Universidade da Amazônia – UNAMA

Isabel Cristina Rodrigues de Lucena (Examinadora Externa)
Universidade Federal do Pará – UFRN

Iran Abreu Mendes (Examinador Interno)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Francisco Peregrino Rodrigues Neto (Examinador Interno)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Maria Gilvanise de Oliveira Pontes (Suplente Externo)
Universidade Estadual do Ceará – UEC

Bernadete Barbosa Morey (Suplente Interno)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Este trabalho contou com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Para

Anofria Amorim Noronha, minha mãe,

e Claudio Gomes Noronha, meu pai.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela oportunidade e iluminação nas horas de decisões.

À minha família, pelas orações e força.

A John Andrew Fossa, pela compreensão e apoio.

À Wallkim Spencer, pelas horas de paciência e carinho.

Aos professores, que contribuíram para o enriquecimento de meus conhecimentos, não apenas profissionais, mas também pessoais; em especial, a Iran Abreu Mendes, pelo incentivo, contribuição e apoio que proporcionou desde a graduação.

Aos professores e alunos da Escola Estadual Floriano Cavalcante, pela oportunidade de desenvolvermos nosso trabalho.

A todos os amigos do Programa de Pós-graduação em Educação do qual faço parte.

À Claudia Lima pelas horas de conversa e trocas de idéias.

A todos os amigos com quem pude contar e que não me deixaram saber o que é solidão.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é propor uma abordagem metodológica do ensino da Geometria e, mais particularmente, de construção dos conceitos de circunferência e elipse por alunos de 7ª e 8ª série. Desenvolvemos um estudo teórico-prático, baseado na modelagem matemática e nas Geometrias Urbana e Isoperimétrica, a fim de oportunizar aos alunos construir o seu entendimento sobre circunferência e elipse. A análise dessa construção foi realizada com base na Teoria da Equilibração de Jean Piaget. Foi enfatizado o uso da intuição que estes estudantes já tinham acumulado em situações cotidianas. Eles foram encorajados a levantar hipóteses, testar, discutir com os colegas e tirar suas conclusões. No entanto, o uso das Geometrias Urbana e Isoperimétrica implica que os gráficos das circunferência e elipse tomem formas diferentes. A comparação dessas formas às produzidas na Geometria Euclidiana foi usada para consolidar o entendimento desses conceitos, desde que são idênticos, independente das métricas. A intervenção foi efetivada mediante o uso de uma série de atividades cumpridas em pequenos grupos. Ao final do estudo percebemos que os 53 alunos da 7ª e 55 da 8ª série, participantes do mesmo, foram capazes de obter um melhor entendimento dos conceitos de circunferência e elipse.

Palavras-chave: Geometria Urbana, equilibração, circunferência, elipse.

ABSTRACT

The main goal of the present study is to propose a methodological approach to the teaching of Geometry and, in particular, to the construction of the concepts of circle (circumference) and ellipse by 7th and 8th grade students. In order to aid the students in the construction of these concepts, we developed a module based on mathematical modeling, and both Urban Geometry (Taxicab Geometry) and Isoperimetric Geometry. Our analysis was based on Jean Piaget's Equilibrium Theory. Emphasizing the use of intuition based on accumulated past experiences, the students were encouraged to come up with a hypothesis, try it out, discuss it with their peers, and derive conclusions. Although the graphs of circles and ellipses assume different shapes in Urban and Isoperimetric Geometry than they do in the standard Euclidian Geometry, their definitions are identical regardless of the metric used. Thus, by comparing the graphs produced in the different metrics, the students were able to consolidate their understanding of these concepts. The intervention took place in a series of small group activities. At the end of the study, the 53 seventh grade and the 55 eighth grade students had a better understanding of the concepts of circle and ellipse.

Key words: Urban Geometry, equilibrium, circumference, ellipse.

RÉSUMÉ

Ce travail se fixe objectif principal de proposer une réflexion concernant la méthodologie de l'enseignement de la géométrie et, notamment, l'élaboration de concepts de circonférence et d'ellipse pour les élèves de cinquième et quatrième. On a développé un éthéorique et expérimental, basé sur la modélisation mathématique et sur les Géométries Urbaine et Isopérimétrique, afin d'offir aux élèves l'opportunité de construire leur entendement à propos de la circonférence et de l'ellipse. L'analyse de cette construction a été réalisée ayant comme base la Théorie de l'Equilibration de Jean Piaget. On a souligné l'usage de l'intuiton que ces élèves avaient réuni dans des situations quotidiennes. Ils ont été encouragés à émettre des hypothèses, à tester, discuter avec leurs collègues et d'en tirer des conclusions. En revanche, l'usage des Géometries Urbaine et Isopérimétriqui suppose que les graphiques de la circonférence et de l'ellipse aient des formes différentes. La comparaison de ces formes avec celles produites dans la Géométrie Euclidienne a été utilissée pour affemir l'entendement de ces concepts, mais il faut qu'ils soient identiques, indentiques, indépendamment des métriques. L'intervention a été effectuée par le biais d'activités réalisées en pettis groupes. A la fin de l'étude, on a constaté que les cinquième et les cinquantecinq de la quatrième qui ont participé à cette enquête ont été capables d'obtenir un meilleur entendement des concepts de circonférence et d'ellipse.

Mots-clés : géométrie urbaine, équilibration, circonférence, ellipse.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino da Geometria tem despertado o interesse de educadores matemáticos da atualidade, cujos estudos se dispõem a buscar, principalmente, a melhoria no ensino desse conteúdo. Isso ocorre devido ao reconhecimento da importância que tais estudos têm para o processo de aprendizagem do sujeito, despertando capacidades como, por exemplo, "a percepção espacial, a criatividade e o raciocínio hipotético-dedutivo" (PAVANELLO, 1995, p. 14).

Na perspectiva de contribuir com mais um trajeto para o avanço do ensino da Geometria, nosso estudo converge para a compreensão das definições de circunferência e elipse, cujas propriedades têm considerável importância para a construção de instrumentos que facilitam a vida de um grande número de pessoas e cujas formas são vistas cotidianamente. A elipse, por exemplo, tem uma propriedade usada na construção de refletores odontológicos, aparelhos de emissão de certos raios, usados em medicina, ou nas salas de sussurros existentes "em certos museus americanos de ciência e nos castelos de alguns monarcas europeus" (VALLADARES, 1998, p. 24). A circunferência, por sua vez, tem sua forma constantemente presente em objetos que povoam nosso ambiente, a exemplo de pneus, engrenagens de máquinas, faróis de carros, girador (rótula) de encontro de vias e outros. Entretanto, ao serem abordadas nas escolas, estas são vistas apenas como gráficos derivados de uma determinada função.

O estudo proposto surgiu a partir dos resultados observados em nossa dissertação de mestrado intitulada *A Modelagem e a Geometria Urbana: uma proposta para a construção dos conceitos de cônicas*, na qual verificamos a possibilidade de aprofundar a pesquisa ora realizada. No referido estudo, percebemos que os alunos, ao se depararem com a circunferência quadrada, passavam pelo que Piaget, em sua Teoria da Equilibração, denomina de desequilíbrio. Assim, pensamos na possibilidade de utilizar as Geometrias Urbanas e Isoperimétrica de forma a provocar, propositadamente, o desequilíbrio em nossos alunos, bem como uma reequilibração.

Assim, buscamos propor uma abordagem metodológica do ensino da Geometria. Para isso, construímos um estudo teórico-prático que implica no uso da modelagem matemática, visto que utilizamos as Geometrias Urbanas e Isoperimétrica para modelar o espaço urbano. O objetivo geral da análise desse estudo constitui-se em:

✍ apresentar e avaliar uma proposta de ensino que visa oportunizar ao aluno do 4° ciclo do ensino fundamental a construção dos conceitos de circunferência e elipse a partir do uso de sua intuição.

Durante a sua elaboração, alguns objetivos específicos nos pareceram interessantes para o trabalho, tais como:

✍ possibilitar ao aluno uma compreensão melhor do que define circunferência e elipse e da variação de suas formas em relação a definição de distância que se pretende utilizar;

✍ verificar a possível diferença, no nível cognitivo, entre os alunos das séries que compõem o 4º ciclo;

✍ utilizar os espaços urbano e isoperimétrico como instrumento para provocar o desequilíbrio, visando chegar a equilibração majorante (reequilibração com melhoramento obtido);

✍ discutir a utilização das propriedades das circunferência e elipse no desenvolvimento tecnológico e em outras áreas, a exemplo da Geografia.

A fim de atender aos nossos objetivos, elaboramos atividades (APÊNDICE C) baseadas na formulação de problemas, que possibilitaram ao aluno levantar hipóteses, testar, discutir com os colegas e tirar suas conclusões.

Nas atividades os alunos puderam perceber, a partir do uso de sua intuição, que a distância mais curta entre dois pontos nem sempre é uma linha reta. Isto foi possível a partir do uso da *Taxicab Geometry* ou Geometria do Taxista (G_T) (KRAUSE, 1986, p. 2) e os dois espaços utilizados por ela: o espaço quadricular, utilizado na Geometria do Quarteirão (G_Q) ou Geometria Urbana (G_U), e o espaço triangular, usado na Geometria do Triângulo (G_{TR}) ou Geometria Isoperimétrica (G_I), abordados no Capítulo 1.

Foram apresentadas situações-problema que apontaram o uso da modelagem matemática – "conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir de alguma forma, um problema em questão ou problema de situação real" (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p. 12). Em outras palavras, utiliza-se da representação de algo que já se conhece, mas que nem sempre é representado em sua essência e, sim, como uma *imitação*, modelo para resolver problemas que, porém, requerem um raciocínio matemático.

Aquelas baseadas na Geometria Urbana, por exemplo, envolverão o modelo de uma cidade bem planejada, cujos quarteirões têm o mesmo tamanho e as ruas são percorridas no sentido norte-sul e leste-oeste. Já as situações-problema que utilizam a Geometria Isoperimétrica são direcionadas à realidade virtual, ao mundo dos super-heróis, em que os alunos simulam um ambiente urbano com ruas organizadas de forma diferente daquelas em que estão acostumados. Nesta, as ruas formam triângulos eqüiláteros.

Ressaltamos que não objetivamos distanciar os alunos da Geometria Euclidiana, admitida pela escola como padrão. Apenas utilizamos uma métrica diferente da usual e mais condizente com a realidade do indivíduo, para chegarmos ao conteúdo adotado para o currículo e efetivar a aprendizagem.

Como já citamos anteriormente, as atividades foram aplicadas com alunos do 4° ciclo (7ª e 8ª série), no qual é estudada a definição de circunferência, bem como os conceitos de raio e diâmetro. A elipse é abordada superficialmente, dando ênfase a sua forma. O referido ciclo, como sabemos, corresponde ao último ciclo do ensino fundamental, servindo como *ponte* para o ingresso no nível médio, quando o assunto será visto mais profundamente.

A construção do conhecimento, focada na compreensão dos conceitos que envolvem as circunferência e elipse, é analisada com base na Teoria da Equilibração de Jean Piaget. De acordo com esta teoria o sujeito passa por constantes desequilíbrios e reequilibrações chegando ao que Piaget chama de equilibração majorante, ou seja, a uma reequilibração com melhoramento obtido que ocorre através de processos de regulação.

Dessa forma, o resultado desta pesquisa encontra-se disposto em cinco capítulos, os quais mencionamos a seguir:

No *Viajando por diferentes espaços* apresentamos um estudo bibliográfico de assuntos, cuja abordagem julgamos interessante para uma melhor compreensão do leitor, a saber: o conceito intuitivo de distância; a história da Geometria do Taxista; uma pequena descrição sobre as Geometrias Urbana e Isoperimétrica, enfatizando algumas apresentações das cônicas nessas métricas; e algumas relações entre a Geometria do Taxista e a Geometria Euclidiana.

Em *Na corda bamba* continuamos a investigação bibliográfica com ênfase na teoria que nos serviu de base para análise de nossa pesquisa, ou seja, a Teoria da Equilibração, de Jean Piaget; apresentamos uma breve reflexão desta teoria e de sua relação com a prática educacional; bem como de sua abrangência neste trabalho.

Os itens que tratam da metodologia de pesquisa utilizada, da instituição em que foi realizado o experimento, da nossa clientela e da descrição das atividades desencadeadas durante o curso são apresentados em *Tecendo caminhos.*

Em *Siga em frente!* apresentamos nossa análise a respeito da aplicação das atividades, as conclusões desta aplicação com base na Teoria da Equilibração e as referentes ao alcance dos objetivos propostos, bem como algumas sugestões, que podem ser consideradas de acordo com os objetivos dos interessados em trabalhar a atividade proposta.

A importância da apresentação deste estudo para a educação – e, principalmente, para a Educação Matemática – consiste na contribuição que ele proporciona para a prática de ensino do professor e, ainda, para a formação do indivíduo como ser social, consciente do seu papel como agente transformador de sua realidade.

1

VIAJANDO POR DIFERENTES ESPAÇOS

Somos seres de transformação e não de adaptação.

Paulo Freire

1 VIAJANDO POR DIFERENTES ESPAÇOS

1.1 Conceito intuitivo de distância

O direito de ir e vir faz parte de nossas vidas juntamente à nossa capacidade de refletir sobre nossas ações e a reflexão sobre nossas idas e vindas nos fez desenvolver, entre outros, uma certa percepção de distância.

A nível intuitivo, nossa percepção de distância poderá depender de fatores como, por exemplo, a falta de conhecimento de um determinado caminho. Pois, ao ser percorrido duas vezes por nós, freqüentemente, a primeira vez o trajeto nos parece ser maior do que quando foi percorrido a segunda vez. Um outro fator que costumeiramente levamos em consideração quando queremos nos referir a distância é o tempo. No interior do nordeste, por exemplo, se perguntarmos onde mora fulano? Podemos obter como resposta: - Ele mora daqui a dois cachimbos, ou seja, para chegar na casa de fulano você levará o tempo de fumar dois cachimbos. Há também casos mais comuns de uso do fator tempo para determinar distância, por exemplo, quando perguntamos a alguém se João Pessoa-PB é longe de Natal-RN e obtemos como resposta que João Pessoa fica a duas horas e meia de Natal, ou, se perguntamos qual a distância de Belém-PA para Breves-PA e a resposta dada é que depende do barco. No entanto, de modo geral concordamos que a distância entre dois pontos é a menor separação existente entre estes.

Buscando abstrair destas considerações, a ciência expressa as noções intuitivas sobre o conceito de distância, que será representada pela função d(x, y), através dos seguintes axiomas (LIMA, 2005):

a) $d(x, y) \geq 0$

b) $d(x, y) = 0$ se, e somente se $x = y$

c) $d(x, y) = d(y, x)$

d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Tais condições são usadas para estabelecer uma métrica, desde que um espaço métrico *M* é um conjunto de pontos com uma função de distância associada. Dessa forma, para todo *x*, *y*, *z* em *M*, em que esta função é exigida, a distância entre pontos distintos é positiva, a distância de *x* para *y* é igual à distância de *y* para *x* e ir primeiro de *x* para *y*, e então de *y* para *z* não pode ter distância menor que ir diretamente de x para z. Na Geometria Euclidiana isto é fácilmente verificado.

1.2 A localização dos pontos por um par de coordenadas e a formalização de distância na Geometria Euclidiana

Tem se tornado comum ver diagramas cartesianos no dia-a-dia, nos programas de televisão, nos jornais impressos, revistas, nas cartas geográficas e outros, com objetivo de nos mostrar linha de produção, oscilação do índice de inflação, localizações geográficas etc. Como nos mostra Radice (1971, p. 74), a idéia que está escondida neste gráfico foi exposta pela primeira vez, de modo sistemático e praticamente útil, por um grande contemporâneo de Galileu Galilei, o filósofo e matemático francês René Descartes que, segundo o autor, em 1600 também era conhecido por *Cartesius*, devido a uma prática comum de traduzir nomes ou mesmo apelidos para o latim que era uma língua muito usada pelos doutos na época.

Inicialmente, para entendermos melhor a idéia e utilidade do sistema de coordenadas cartesianas, podemos nos referir a grande contribuição que essa união da álgebra à geometria trouxe para a cartografia. Como exemplo prático, pensamos na localização de um determinado local no mapa-múndi (Figura 1) que, por sua vez, está dividido em traçados horizontais paralelos ao Equador e traçados verticais paralelos ao meridiano de Greenwich, ambos divididos por igual distância, marcadas em graus, o primeiro em 180°, chamados graus de latitude, numerados a partir do Equador no sentido Norte e Sul até os Pólos, o segundo divide o Equador e todos os seus paralelos em 360 partes numerados de 0º a 180° para Leste ou Oeste a partir de Greenwich, chamados graus de longitude[1].

[1] Ambos os traçados circulam a Terra. No entanto, os relativos a longitude, por exemplo, apesar de se apresentarem paralelos nas cartas de projeção se encontram nos pólos. Isto pode causar, como mostra Hogben (1952, p. 424), um erro bem avultado quando se calculam longas distâncias e que o nauta resolve repudiando as projeções planas e recorrendo aos triângulos esféricos.

Figura 1 – Mapa-múndi
Fonte: http://www.esg.br/cee/mapa_mundi/Thumbnails.html

Enfim, o que a divisão dos mapas têm a ver com o gráfico cartesiano? Considerando o mundo como uma superfície plana, podemos localizar um determinado lugar indicando os números a que este corresponde no mapa em termos de sua latitude e longitude, as quais são representadas em graus (°), minutos (’) e segundos (”). Por exemplo, a cidade de Natal, localizada a Oeste (W) do hemisfério Sul (S) tem, segundo dados do IDEMA-RN (Instituto de Desenvolvimento Econômico e Meio Ambiente do Rio Grande do Norte), como coordenada geográfica: latitude 5°47’42” Sul e longitude 35°12’34” Oeste.

Os dois números usados para localizar um determinado ponto no plano cartesiano são chamados de coordenadas cartesianas. A primeira coordenada é chamada *abscissa* ou *eixo horizontal* ou *eixo x*, uma vez que a abscissa de um ponto qualquer é indicada habitualmente com a letra *x*, e corresponde à coordenada horizontal de um ponto em um sistema plano de coordenadas cartesianas, cuja medida corresponde a distância do eixo vertical a esse ponto, de acordo com o exemplo dado anteriormente nos referimos aos 35°12’34” de longitude Oeste em que se encontra Natal. A segunda, chamada *ordenada* ou *eixo vertical* ou *eixo y* do ponto uma vez que a ordenada de um ponto qualquer é indicada habitualmente com a letra *y*, é obtida medindo a distância do ponto ao eixo das abscissas, corresponde a uma das coordenadas que, no sistema cartesiano, definem a posição de um ponto num plano ou no espaço e, de acordo com o exemplo dado anteriormente, refere-se ao 5°47’42” de latitude Sul em que se encontra Natal. A *origem* é o ponto de encontro dos dois eixos, correspondendo no mapa à intersecção entre o meridiano de Greenwich com a linha do Equador.

A distância entre dois pontos no plano cartesiano será expressa de acordo com a unidade de medida utilizada, ou seja, será expressa em centímetros se tivermos decidido considerar como unidade de medida o centímetro; em metros, se preferimos considerar como unidade de medida o metro; em quarteirões se quisermos considerar como unidade de medida o quarteirão, em graus como no caso do mapa e assim por diante.

À parte do plano em que associamos números (coordenadas), que medem respectivamente as distâncias de um determinado ponto *P* ao eixo vertical e ao horizontal, chamamos *quadrante*, que corresponde a um quarto do plano. A divisão do plano em quadrantes é importante para que não corramos o risco de atribuir a mesma coordenada a pontos diferentes deste. Assim, atribuímos valores positivos às distâncias dos pontos do eixo horizontal à direita da origem e às do eixo vertical à cima da origem e valores negativos às distâncias dos pontos do eixo horizontal à esquerda da origem e às do eixo vertical a baixo da origem. Segundo Hogben (1952) o uso dos sinais de + ou – para significar posição, é resultado natural de seu primitivo sentido aditivo e subtrativo.

Podemos simplificar dizendo que o plano fica dividido pelo eixo *x* e pelo eixo *y* em quatro quadrantes. Sendo que, no 1º quadrante, um ponto tem abscissa positiva e ordenada positiva; no 2º quadrante, um ponto tem abscissa negativa e ordenada positiva; no 3º quadrante, um ponto tem abscissa negativa e ordenada negativa; no 4º quadrante, um ponto tem abscissa positiva e ordenada negativa (Figura 2).

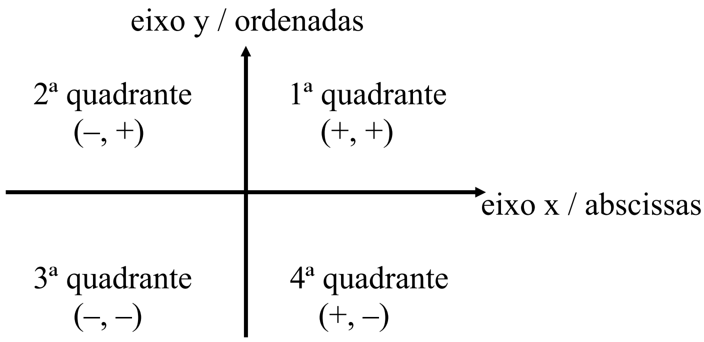


Figura 2 – Divisão do plano cartesiano em quadrantes

A partir do que já conhecemos do plano cartesiano, podemos dar as coordenadas de qualquer ponto, as quais deverão ser indicadas entre parênteses, na seguinte ordem: primeiro as abscissas e depois as ordenadas (x, y). Na Figura 3, por exemplo, podemos verificar que o ponto *P* está localizado a 4 unidades em relação ao eixo *x* e a 2 unidades em relação ao eixo *y*, portanto, a coordenada de *P* é (4, 2); o ponto *Q* está localizado a -4 unidades em relação ao eixo *x* e a 2 unidades em relação ao eixo *y*, portanto, a coordenada de Q (-4, 2) – note que se não houvesse a divisão do plano cartesiano em quadrantes, os pontos *P* e *Q* teriam coordenadas iguais –; e *R* está localizado a 0 unidade em relação ao eixo *x* e a -2 unidades em relação ao eixo *y*, portanto, a coordenada de R (0, -2).

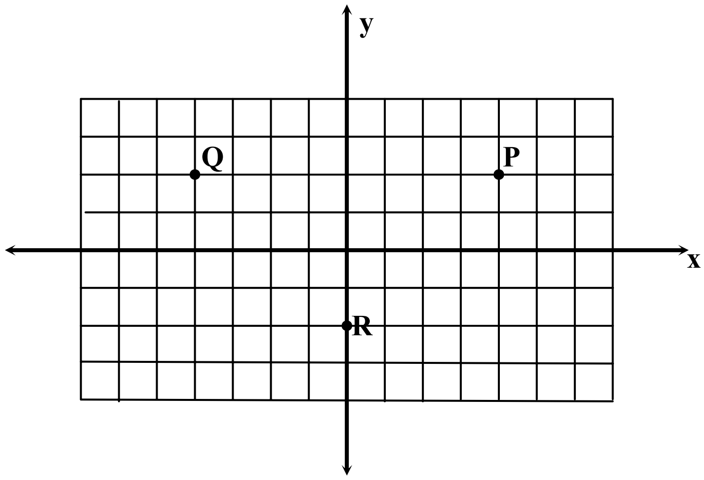
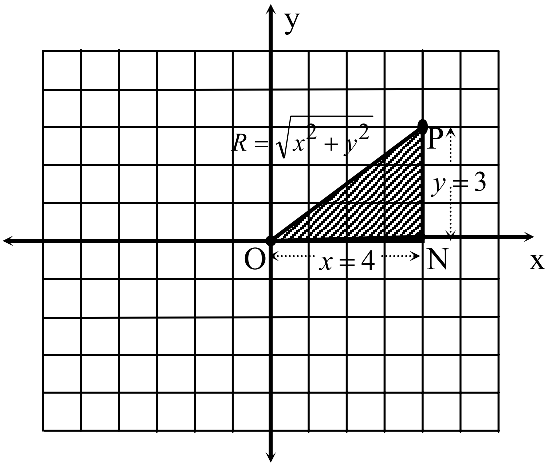


Figura 3 – Pontos localizados no plano cartesiano

Para sabermos a distância entre dois pontos localizados horizontalmente basta encontrarmos a diferença entre os valores das abscissas, ou seja, entre os valores dos eixos *x* desses pontos, isto é $d((x_1, y_1), (x_2, y_1))$ é $|x_2 - x_1|$. O mesmo ocorre para pontos localizados verticalmente, sendo que, para estes, temos que buscar a diferença entre os valores das ordenadas, ou seja, entre os valores dos eixos *y* desses pontos, assim $d((x_1, y_1), (x_1, y_2))$ é $|y_2 - y_1|$. Portanto, na Figura 4 a distância entre os pontos O(0, 0) e N(4, 0) é igual a 4 e entre este último e o ponto P(4, 3) a distância é igual a 3.

Em casos em que o segmento que une os dois pontos corta o plano diagonalmente, como podemos observar com o segmento *R* que liga os pontos *O* e *P* (Figura 4), para encontrarmos a distância entre estes fazemos uso do Teorema de Pitágoras, pois, consideramos esse segmento como a hipotenusa de um triângulo retângulo. Dessa forma, na Figura 4 temos um triângulo retângulo com hipotenusa *R* e catetos $\overline{ON}$ igual a 4 e $\overline{NP}$ igual a 3. Assim, a distância entre os pontos *O* e *P*, ou seja, o valor de *R* é igual a 5.



Sendo O(0, 0) e N(4, 0), então:
$d(O,N) = x_2 - x_1$
$d(O,N) = 4 - 0$
$d(O,N) = 4$

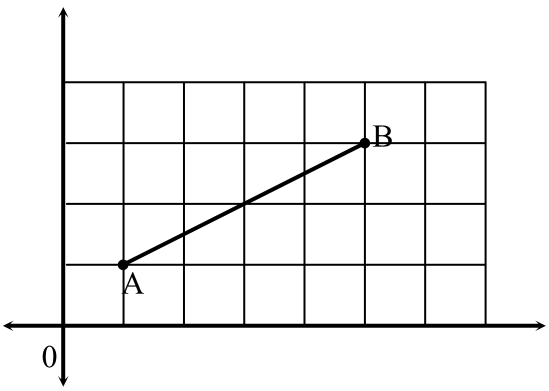
Sendo N(4, 0) e P(4, 3), então:
$d(N,P) = y_2 - y_1$
$d(N,P) = 3 - 0$
$d(O,N) = 3$

Sendo O (0, 0) e P (4, 0), então, usando o Teorema de Pitágoras, temos que
$R^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$
$R^2 = 4^2 + 3^2$
$R = \sqrt{16 + 9}$
$R = \sqrt{25} = 5$

Figura 4 – Distância entre pontos no plano cartesiano

A partir do que acabamos de ver, a distância euclidiana (d_E) pode ser definida analíticamente da seguinte maneira: Sejam A = (x_1, y_1) e B = (x_2, y_2), então $d_E(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, ou seja, a distância entre os pontos *A* e *B* é a soma do quadrado da diferença de abscissas e ordenadas. Dessa forma, as regras dadas anteriormente para encontrar a distância euclidiana entre dois pontos, são casos especiais desta última, pois, sejam A = (x_1, y_1) e B = (x_2, y_1) então $d_E(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$. O mesmo ocorre para o caso C = (x_1, y_1) e B = (x_1, y_2).

Assim, por exemplo, se quisermos saber a distância euclidiana entre os pontos A (1,1) e B (5,3), faremos da seguinte forma (Figura 5):



Sendo A(1, 1) e B(5, 3) então:
$d_E(A,B) = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2}$
$d_E(A,B) = \sqrt{(4)^2 + (2)^2}$
$d_E(A,B) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Figura 5 – Distância euclidiana entre pontos

Este é o método mais conhecido para encontrar a distância entre dois pontos, visto que a Geometria Euclidiana é a geometria que temos acesso na maioria de nossas classes e muitas vezes a única em todo o período escolar, desde o ensino básico até o superior. No entanto, sabemos que outras geometrias são igualmente importantes para o estudo científico e que utilizam funções de distância diferentes, sem deixarem de ser reconhecidas como espaços métricos.

A função de distância pode ser representada por uma malha de figuras geométricas que cobre o plano, o plano cartesiano, por exemplo, pode ser representado por uma malha de quadrados. Porém, há outras funções de distância que podem ser representadas por outras malhas? Para tal investigação torna-se necessário que as figuras que formam estas malhas sejam iguais e se ajustem umas às outras, sem deixar buracos, ou seja, que formem uma malha sem deixar espaços vagos de modo que haja sempre uma distância entre todo par de pontos. No item a seguir veremos que figuras podem ser usadas para cobrir o plano e quais as geometrias que as utilizam.

1.3 O modelo matemático a partir do recobrimento do plano

Geralmente consideramos a distância entre dois pontos como o menor comprimento que percorremos entre estes. Tal caminho pode ser representado por um segmento de reta que liga estes pontos, a exemplo do caminho percorrido por um pássaro, ou por nós através de estradas, ferrovias ou do mar, quando viajamos de navio, ou até mesmo quando, ao nos depararmos com um espaço sem edificações, uma quadra de esportes ou um campo de futebol, o percorremos na diagonal.

Os percursos exemplificados podem ser modelados pela geometria euclidiana já demonstrada anteriormente. Porém, será que todas as situações de nossa realidade podem ser modelados por esta geometria? Por exemplo, como poderemos nos deslocar de um ponto para outro em uma cidade se não podemos voar sobre seus edifícios?

Parece que vamos precisar de outras formas de modelar esta noção de distância. Porém, quais as possibilidades de recobrir o plano para representar distância? Podemos começar o recobrindo com uma malha de retângulos como a da Figura 6.

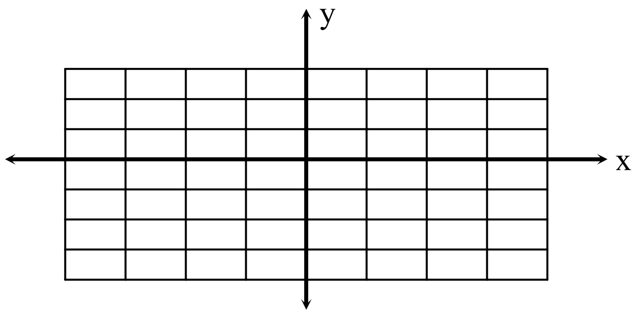


Figura 6 – Espaço formado por retângulos.

A malha retangular pode ser formada por linhas paralelas ao eixo *y* mais distantes uma das outras do que as linhas paralelas ao eixo *x*, como mostra a Figura 6, ou viceversa. Porém, esta característica não corresponde a noção intuitiva de distância, pois com esta malha teremos que trabalhar com duas unidades de medida diferentes, haja vista que a distância Norte-Sul terá uma unidade de medida distinta da distância Leste-Oeste. Assim, optamos por uma unidade de medida única e isto implica no uso de polígonos com lados iguais no recobrimento do plano.

Se considerarmos o plano cartesiano como uma tela quadriculada possível de ser manuseada e recebendo, assim, uma leve pressão para a direita de forma a inclinar um de seus eixos como, por exemplo, o eixo *y*, este passará a formar um ângulo menor que 90º com o lado positivo do eixo *x* e um ângulo maior que 90º com o lado negativo do respectivo eixo, como podemos verificar na Figura 7. Obtemos assim, uma malha formada por losango que, como sabemos, é um tipo de paralelogramo com lados iguais e ângulos opostos de mesma medida (Figura 7).

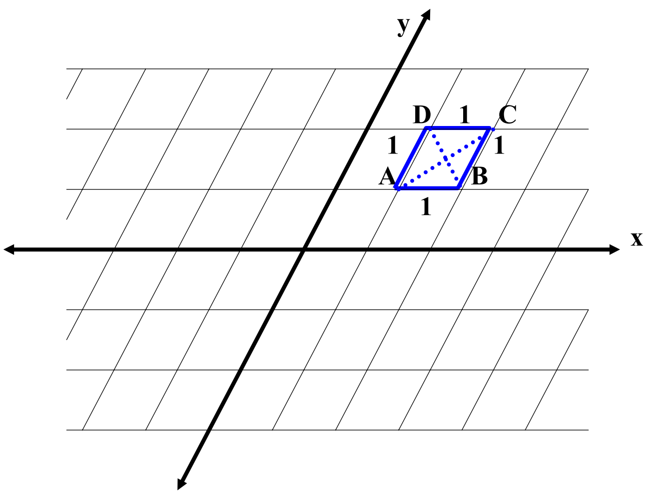


Figura 7 – Espaço formado por losangos

No entanto, ao observarmos a Figura 7, podemos verificar que as diagonais do losango são de tamanhos diferentes. Mas, intuitivamente, queremos $AC = BD$. Assim, o losango não parece uma figura geométrica apropriada para a formação de um espaço métrico. Assim sendo, que outro polígono poderíamos usar para tecelar o plano?

Há três polígonos regulares que podem cobrir o plano, são eles: o triângulo eqüilátero, o quadrado e o hexágono regular. Estes polígonos, como podemos observar nas Figuras 8, 9 e 10, cobrem totalmente o plano de forma a não deixar espaços entre os mesmos. Observamos, porém, que o hexágono pode ser decomposto em triângulos eqüiláteros. Isso pode nos levar a considerar as malhas formadas por triângulos eqüiláteros e por quadrados como as principais.

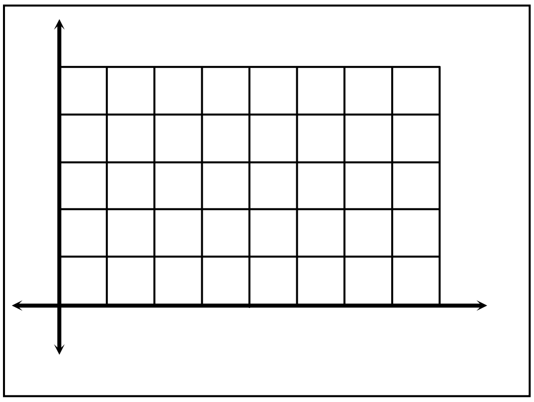


Figura 8 – Espaço formado por quadrados.

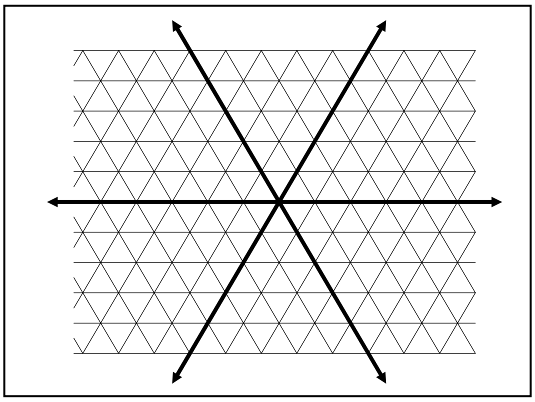


Figura 9 – Espaço formado por triângulos.

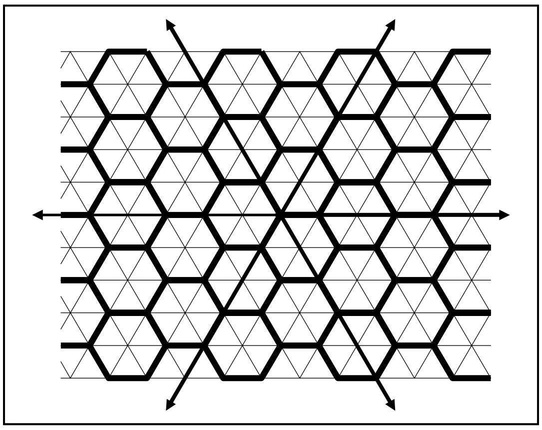


Figura 10 – Espaço formado por hexágonos.

A geometria que trabalha com estes espaços, formados por quadrados e triângulos eqüiláteros, e que nos mostra que a distância mais curta entre dois pontos nem sempre é uma linha reta, é denominada *Taxicab Geometry* ou *Geometria do Taxista* (G_T). Nos próximos itens apresentaremos esta geometria e os dois espaços utilizados por ela, o espaço quadricular utilizado na *Geometria do Quarteirão* (G_Q) ou *Geometria Urbana* (G_U) e o espaço triangular usado na *Geometria do Triângulo* (G_{TR}) ou *Geometria Isoperimétrica* (G_I).

1.4 Um pouco da história da Geometria do Taxista

Desde criança aprendemos que a distância mais curta entre dois pontos é uma linha reta, não é mesmo? No entanto, não é apenas isso, nem sempre o espaço mais curto que se pode percorrer para ir de um ponto ao outro é uma linha reta. Se considerarmos um ambiente urbano, por exemplo, onde temos que andar pelas ruas, visto que não podemos voar sobre os prédios, casas e muros, haverá situações em que a distância a ser percorrida não poderá ser numa linha reta. Assim, temos que concordar que a função de distância euclidiana não seria a melhor opção para modelar situações de deslocamento em um espaço urbano onde pessoas, como, por exemplo, o taxista, só podem percorrer pelas ruas.

Em casos como o que acabamos de apresentar podemos recorrer a *Taxicab Geometry* ou Geometria do Taxista, por utilizar como espaço uma malha quadriculada, podendo modelar uma cidade bem planejada com quarteirões perfeitos, onde percorremos ruas que são apresentadas como segmentos horizontais e verticais, e dobramos no final dos quarteirões.

Considerando que a malha quadriculada utilizada por esta geometria é igual a empregada para representar o plano cartesiano usado na G_E, a forma utilizada para localizar pontos também será. No entanto, a distância entre dois pontos passa a ser calculada de forma diferente e a unidade de medida usada será o *quarteirão* ou lado de um quadrado. Devido a isto, figuras que derivam do conceito de distância, tais como as cônicas, passam a se apresentarem com aspectos diferentes, no entanto, com definições análogas a da Geometria Euclidiana, como, por exemplo, um círculo com formato de um quadrado. Contudo, essa geometria não deixa de possuir uma métrica, como podemos verificar em Fossa (2003, p. 114) e Sowell (1989, p. 239), pois satisfaz as quatro propriedades mencionadas no item 1.1.

De acordo com Menger[2] (1979, p. 217 *apud* POWELL, 2003, p. 5), foi Hermann Minkowski (1864-1909) que em sua coleção de tratados (1911/1967), *Gesammelte*

[2] Menger, K. **Selected papers in logic and foundations, didactics, economics**. Dordrecht: D. Reidel, 1979.

Abhandlungen[3], publicados postumamente no início do século XX, quem definiu um conceito de métrica e, a partir deste, demonstrou que círculo parece um quadrado. Segundo Golland (1990), Karl Menger iniciou o desenvolvimento sistemático da distância geométrica abstrata, em 1928, com seus quatro *Untersuchungen Über Allgemeine Metrik*[4] e ao apresentar uma geometria estabelecida por ele no *Museum of Science and Industry of Chicago*[5], em 1952, o matemático e filósofo exibiu um folheto intitulado *You Will Like Geometry*[6], em que o termo *Taxicab Geometry* foi usado pela primeira vez. Após esta apresentação o nome permaneceu associado à essa geometria e despertou o interesse de muitos estudiosos dessa área, a exemplo de Krause (1973), Laatsh (1982), Schattschneider (1984), Sowell (1989), Banchoff e Giblin (1994) e Fossa (2003). Recebeu também diferentes denominações, a exemplo de Geometria Urbana (FOSSA, 2001), Métrica Reticular, Métrica do Quarteirão, Geometria de Manhattan (ABREU e BARROSO, 1982) e outras.

Golland (1990) nos informa que o professor de geometria Karl Menger fazia parte de um grupo ou círculo de discussão filosófica agora conhecido como *Wiener Kreis* ou Círculo de Viena, onde a filosofia que desenvolveu para suas reuniões foi o positivismo lógico, ou alternativamente, como muitos deles preferiam, empirismo lógico. Segundo a autora (GOLLAND, 1990) a *Taxicab Geometry* foi desenvolvida neste contexto, em que se tinha uma intensa antipatia pela metafísica tradicional, característica desse grupo e de sua filosofia, principalmente, pelo fato desta geometria apresentar um círculo que convencionalmente parece um quadrado, o que não é uma idéia comum. Esta afirmação é reforçada por Menger[7] (1979, p. 217 *apud* GOLLAND, 1990, p. 326)

> Square circles or round squares have haunted many diverse philosophical writers as the archetype of the impossible and the absurd; they were assigned a place near – or rather below – golden mountains, unicorns and mermaids. They have been discussed by Thomists, existentialists and linguistic philosophers as well as by Herbart, Bergson, Russell and many, many others.[8]

---

[3] Coleção de Tratados (Tradução nossa).
[4] Estudo Geral sobre Métrica (Tradução nossa).
[5] Museu de Ciência e Industria de Chicago (Tradução nossa).
[6] Você Gostará de Geometria (Tradução nossa).
[7] Menger, K. **Selected papers in logic and foundations, didactics, economics**. Dordrecht: D. Reidel, 1979.
[8] Círculos quadrados ou quadrados redondos têm perseguido muitos dos diversos escritores filósofos como o arquétipo da impossibilidade e do absurdo; eles foram vistos como algo próximo – ou bastante abaixo – de montanhas douradas, unicórnios e sereias. Eles têm sido discutidos por Thomists, filósofo existencialista e lingüístico bem como por Herbart, Bergson, Russell e muitos, muitos outros. (Tradução nossa)

Na citação anterior Menger faz uma analogia do tratamento dado pelos filósofos ao círculo quadrado ou quadrado circular, com o dado por estes a seres imaginados como montanhas de ouro, unicórnios e sereias. Tal exemplo mostra como este assunto era tratado como um exemplo de absurdo, sendo julgado pelos filósofos como *meaningless*, ou seja, como algo sem sentido, mesmo tendo significado para os matemáticos. Para Menger (1979, p. 4 *apud* POWELL, 2003, p. 5)[9]

> Round squares or square circles have been considered as the pinnacle of absurdity and the quintessence of impossibility by practically all philosophers and philosophical schools in antiquity, in the middle ages and in modern times. In fact, their inconceivability has been one of the few points of universal consensus, even after Minkowski in the early 1900's proved their existence in a new non-Euclidean geometry, then considered as ivory tower mathematics. But, years ago, I brought square circles literally to the man in the street. I showed that in a modern city the end points of all taxi rides starting at the same point and having the same length (as proved by fares)—in other words, the points of a circle in the taxicab geometry—lie on a square.[10]

Menger, na citação acima, mostra, como verdadeiro positivista, não apenas a importância da discussão de um significado que os filósofos tradicionais atribuem como algo sem sentido, mas também apresenta uma aplicação prática para a *Taxicab Geometry* ligada a realidade do taxista, o que pode significar uma importância educacional dada a este estudo, por parte do autor citado. No entanto, a importância pedagógica e matemática desta geometria foi discutida mais profundamente por Eugene F. Krause (1973/1986) que, por sua vez, enfatizou a proximidade desta com a Geometria Euclidiana, além de que, o fato desta modelar a realidade de centros urbanos bem planejados, facilitaria a sua aplicação em sala de aula.

Atualmente, devido a utilização do modelo urbano, há relatos de aplicação da G_T em estudos da Geografia Urbana, como o citado por Abreu e Barroso (1982), que destacam a importância desta geometria na análise de traçados das vias urbanas, como o plano urbano de

---

[9] Menger, K. **Selected papers in logic and foundations, didactics, economics**. Dordrecht: D. Reidel, 1979.

[10] Quadrados redondos ou círculos quadrados têm sido considerados como o cume do absurdo e a quintessência da impossibilidade por praticamente todos os filósofos e escolas filosóficas da Antigüidade, da Idade Média e dos tempos modernos. De fato, inconcebê -los tem sido um dos poucos pontos de consenso universal, até mesmo depois que Minkowski, por volta de 1900, provou a existência deles em uma nova geometria não-Euclidiana, então considerada como a torre de marfim da matemática. Mas, anos atrás, eu trouxe o círculo quadrado literalmente para o homem na rua. Eu mostrei que em uma cidade moderna o ponto final de todo passeio de táxi, partindo de algum ponto e tendo algum comprimento (como provado pela tarifa) – em outras palavras, os pontos de um círculo na geometria do taxista – ficam num quadrado. (Tradução nossa).

quadrícula[11] usado por egípcios, chineses, romanos e, na atualidade, em cidades do porte de Nova York, Chicago, São Francisco, Filadélfia, Curitiba, Belo Horizonte etc.[12]

No entanto, a G_T, como vimos anteriormente, não utiliza apenas o espaço quadricular, apesar deste ter sido o espaço utilizado no estudo inicial desta geometria. Há também o espaço triangular. Nos itens a seguir veremos um pouco mais sobre estes e sobre como figuras que derivam do conceito de distância, tais como as cônicas, se comportam quando aplicadas a este espaço.

1.5 Conhecendo a Geometria do Quarteirão (G_Q) ou Geometria Urbana (G_U)

1.5.1 A função de distância (d_Q)

A Geometria do Quarteirão, como vimos no item 1.3, refere-se a Geometria do Taxista, que utiliza como espaço uma malha quadriculada igual ao plano cartesiano. Portanto, como já mencionamos, a forma utilizada para localizar pontos através de coordenadas é igual ao usado na G_E.

No entanto, o percurso de menos distância entre dois pontos na G_Q só será um segmento de reta se estes se encontrarem na mesma vertical ou horizontal. Pois, como já mencionamos, devido ao espaço desta modelar uma cidade bem planejada, não poderemos voar sobre seus edifícios, tendo que andar nas ruas e dobrar no final dos *quarteirões*. Assim, para calcularmos a distância entre dois pontos que não estão na mesma vertical ou horizontal teremos que somar os segmentos horizontais e verticais percorridos ou, simplesmente, contar os *quarteirões* que teremos que percorrer de um para o outro. Um exemplo desta forma diferente de calcular a distância entre dois pontos e que utiliza o *quarteirão* ou lado de um quadrado como unidade de medida poderá ser observada na Figura 11, em que a distância entre os pontos A e B é de 6 quarteirões.

---

[11] O plano urbano de quadrícula consiste em ruas que se cruzam em ângulo reto, formando quadrados ou retângulos. Para mais detalhes ver Abreu e Barroso (1982, p. 33) e Noronha (2003, p.70-71).

[12] Em sua dissertação de mestrado (NORONHA, 2003) a autora apresenta um estudo mais detalhado sobre a importância da Geometria do Taxista no estudo de vias urbanas.

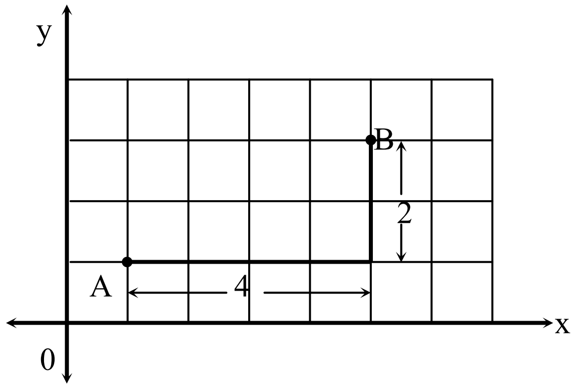


Figura 11 - Distância entre pontos na G_Q

Sabendo a localização dos pontos no plano podemos definir a distância entre dois pontos, analiticamente, em termos das coordenadas. Assim como na G_E, a distância horizontal *x* entre quaisquer dois pontos é a diferença entre os valores das coordenadas de *x* desses pontos. Semelhante, a distância vertical *y* é a diferença entre os valores correspondentes de *y*.

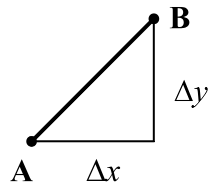


Figura 12 – d_Q (x,y) = $\Delta x + \Delta y$.

Assim, na G_Q a distância (d_Q) entre dois pontos será $\Delta x + \Delta y$, onde Δ significa a diferença. Desta forma, a definição analítica para a d_Q, é formulada da seguinte forma:

Sejam A = (x_1,y_1) e B = (x_2, y_2), então:

$$d_Q(A,B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| .$$

O módulo, ou seja, o valor absoluto, da diferença é usado para garantir que a distância seja não-negativa. Dessa forma, $d_Q(A,B) \geq 0$.

Podemos agora encontrar a distância entre os pontos A(1, 1) e B(5, 3) da Figura 11, em termos de suas coordenadas, da seguinte forma:

$$d_Q(A,B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$
$$d_Q(A,B) = |5-1| + |3-1|$$
$$d_Q(A,B) = 4 + 2$$
$$d_Q(A,B) = 6$$

Como a G_E, a G_Q também é um espaço métrico, pois, conforme demonstração feita por Fossa (2003), esta atende as propriedades citadas no item 1.1.

Devido ao uso de uma definição de distância diferente, figuras como as cônicas, que também dependem de uma expressão de distância, apresentam algumas diferenças quando estudadas na G_Q. No item a seguir faremos uma breve apresentação destas figuras nesta métrica, fazendo algumas comparações com as da G_E. No entanto, vale lembrar, que não temos o objetivo de nos aprofundarmos a respeito destas formas, mas de mostrar ao leitor suas características principais para que este possa compará-las com as de outras geometrias e ter uma visão melhor de nossos objetivos. Portanto, se o leitor preferir buscar um estudo mais detalhado a respeito destas deverá ver Fossa (2003), Noronha (2003) ou Krause (1973, 1975/ 1986).

1.5.2 As cônicas na G_Q

1.5.2.1 A Q-circunferência

Chamamos de circunferência ao conjunto de pontos eqüidistantes de um dado ponto, H, seu centro. Podendo representá-la da seguinte forma:

$$C = \{P / d(P, H) = r\}$$

Na G_E, ao considerarmos a definição de circunferência e a função de distância desta geometria, obtemos uma figura já bastante conhecida, com formato redondo, a qual chamamos de circunferência euclidiana C_E como a da Figura 13 que tem raio de medida 5.

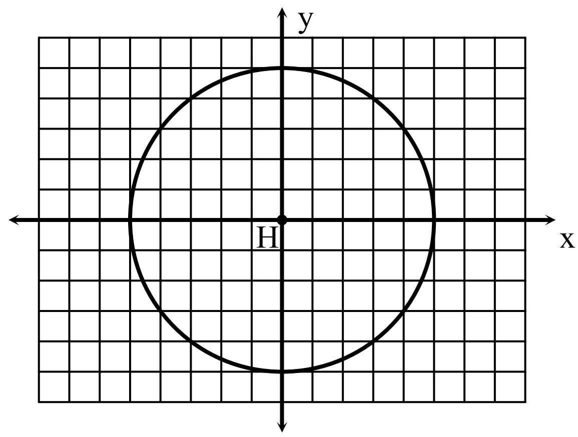


Figura 13 – C = {P/d (P, (0, 0)) = 5}

Mas, uma circunferência apresentar-se-ia da mesma forma na Geometria do Quarteirão? Acontece que o uso de uma fórmula de distância diferente da geometria usual, resultará numa figura com forma também diferente. No entanto, a definição permanecerá a mesma daquela utilizada pela G_E.

Quando usamos a função de distância da G_Q, por exemplo, obteremos uma Q-circunferência e, se juntarmos a esta os pontos do seu interior, o resultado será um Q-círculo. Na Figura 14 podemos observar uma Q-circunferência de raio 5 e centro (1, 1), a qual mais parece um quadrado.

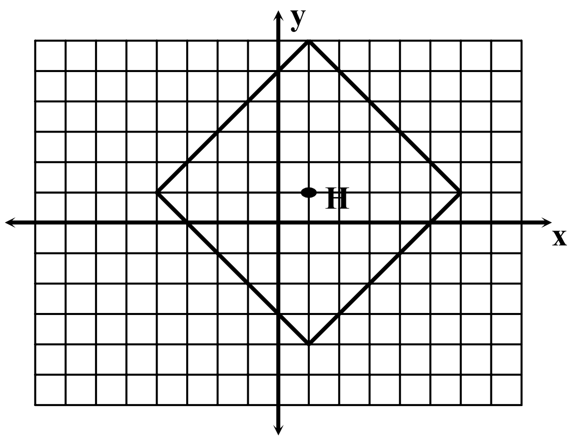


Figura 14 – C = {P / d_Q (P (1, 1)) = 5}

Partindo de sua definição de distância a Q-circunferência apresenta como expressão analítica o seguinte: sejam P = (x, y) e H = (h, k). Então a Q-circunferência será dada por

$$|x - h| + |h - k| = r$$

É interessante notar a aparência dos raios de uma Q-circunferência, pois eles podem ser representados, graficamente, não apenas por um só segmento de reta, mas por vários, como é verificado nas figuras abaixo, com C_Q de r = 3.

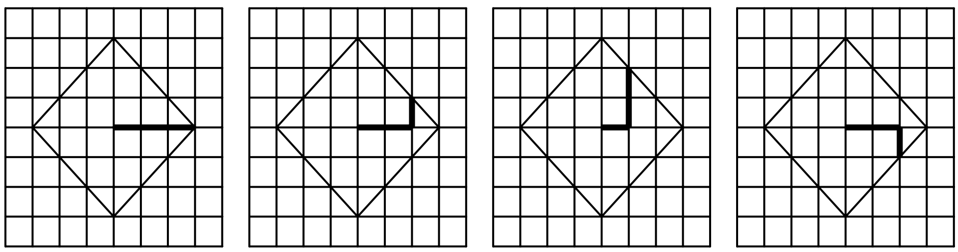


Figura 15 – Os vários tipos de raio de uma Q-circunferência.

O diâmetro de uma Q-circunferência é uma corda fixa no centro que, como podemos observar nas figuras abaixo, assim como o raio, nem sempre é um segmento de reta, mas corta a Q-circunferência em duas partes congruentes.

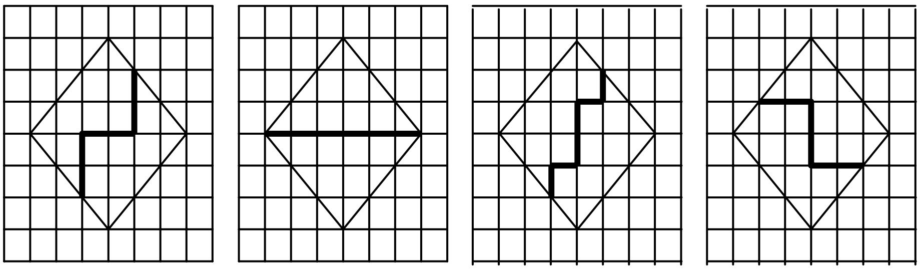


Figura 16 – Os vários tipos de diâmetro de uma Q-circunferência

Uma Q-circunferência pode ficar tangente em um número infinito de pontos (Figura 17) ou em um único ponto (Figura 18).

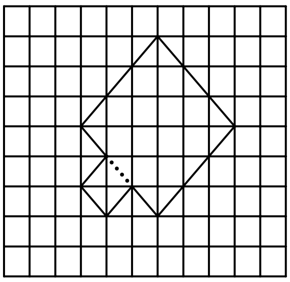


Figura 17 – Q-circunferências tangentes em muitos pontos

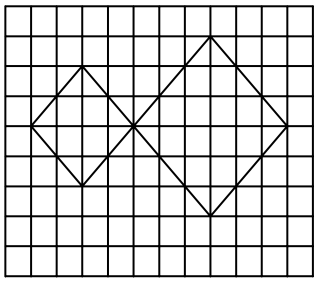


Figura 18 – Q-circunferências tangentes em um único ponto.

Como podemos perceber, são muitas as diferenças entre a circunferência da métrica urbana e a da métrica euclidiana. No entanto, esta não é a única cônica a se modificar quando aplicada a uma métrica diferente. No item a seguir trataremos da elipse na métrica do quarteirão.

1.5.2.2 A Q-elipse

A elipse é definida como o lugar geométrico dos pontos *P* de um plano, tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados focos, é constante *s*. Estas figuras, quando aplicadas na métrica euclidiana, podem ter formas mais arredondadas ou mais achatadas, isso depende da distância entre os focos. Por exemplo, quanto mais distantes os focos, mais achatada é a elipse. Quando eles se aproximam, ela se arredonda, avizinhando-se de uma circunferência. Em particular, se coincidem, isto é, se a distância entre eles é zero, obtemos a circunferência que, por sua vez, é uma variação de elipse. Isso nos leva a *excentricidade de uma elipse*. Na Figura 19 temos uma elipse da G_E, em Noronha (2003) o leitor poderá ver mais detalhes sobre a elipse.

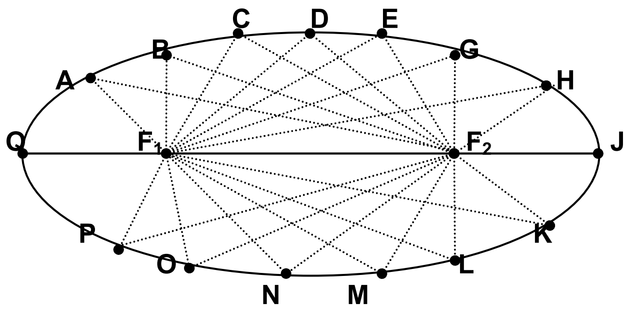


Figura 19 – Elipse euclidiana.

Na G_Q a elipse mantém a definição dada na G_E, sendo expressa da seguinte forma:

$$\{p \mathbin{/} d_Q(P, F_1) + d_Q(P, F_2) = s\}.$$

Sejam os pontos A = (f, g) e B = (l, m), qualquer ponto P = (x, y), que satisfaz a equação $|x - f| + |x - 1| + |y - g| + |y - m| = s$, pertencerá à elipse.

No entanto, devido a métrica diferente, a elipse, que passa a ser chamada Q-elipse nesta geometria, apresenta-se com forma diferente da que conhecemos na G_E, podendo inclusive assumir a forma de um octógono regular desta geometria, como podemos observar na Figura 20, em que temos uma elipse com focos em A(2, 2) e B(6, 6) e com s = 12. Nesta, todos os lados têm comprimento de quatro unidades. A exemplo do segmento *CD*, em que temos:

$$d_Q(C, D) = d_Q((0,6),(2,8)) = |2-0| + |8-6| = 4\,.$$

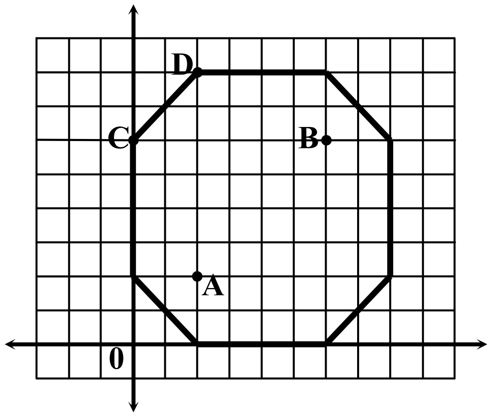


Figura 20 – Q-elipse na forma de um Q-octógono regular

Assim como na G_E, se aproximarmos os focos de forma a deixá-los sobre o mesmo horizontal ou sobre o mesmo vertical, o formato da Q-elipse poderá mudar, como no seguinte exemplo, para A = (0, 0), B = (1, 0) e s = 9.

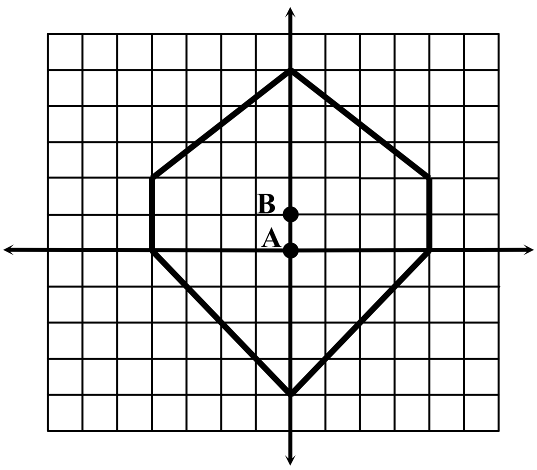


Figura 21 – Q-elipse

Podemos observar na Figura 21 que, quanto mais aproximados os focos, mais a Q-elipse se parece com uma Q-circunferência. Dessa forma, percebemos que o índice de *excentricidade da elipse* também se apresenta na G_Q.

A hipérbole também é uma cônica que sofre muitas modificações quando aplicada a métrica do quarteirão. No próximo item mostraremos um pouco sobre esta figura.

1.5.2.3 A Q-hipérbole

A hipérbole é definida na G_E como o conjunto de pontos de um plano, tal que a diferença de suas distâncias a dois pontos fixos, focos, é constante. Na Figura 22 podemos observar os pontos de uma hipérbole com focos F_1 e F_2. Para mais detalhes sobre esta cônica ver Noronha (2003).

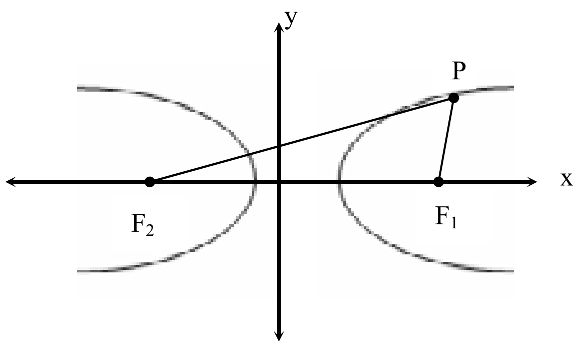


Figura 22 – Hipérbole euclidiana

Na G_Q a hipérbole mantém a mesma definição daquela vista na G_E, a qual poderá ser expressa nessa métrica por

$$\{P \,/\, |d_Q(P, F_1) - d_Q(P, F_2)| = s\}.$$

A Q-hipérbole pode apresentar-se de várias formas. Se investigarmos a família de hipérboles de mesmo foco, dada através da expressão

$$\{H \,/\, H = \{P/\,|\,d_Q(P, F_1) - d_Q(P, F_2)\,| = s\}\},$$

perceberemos que, a cada vez que especificarmos um valor para *s*, teremos uma hipérbole da família. Por exemplo, observaremos nas Figuras 23, 24 e 25, como seriam as Q-hipérboles com focos iguais, A (-3, -1) e B (2, 2), e com constantes s = 4, s = 1 e s = 0.

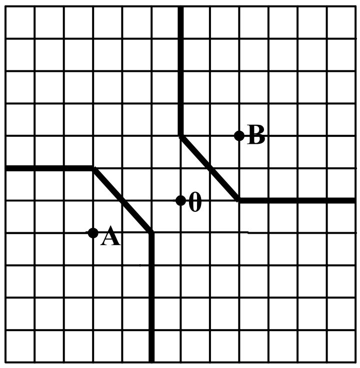


Figura 23 (Q-hipérbole com s = 4)

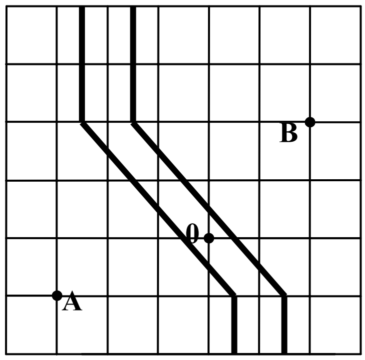


Figura 24 (Q-hipérbole com s = 1)

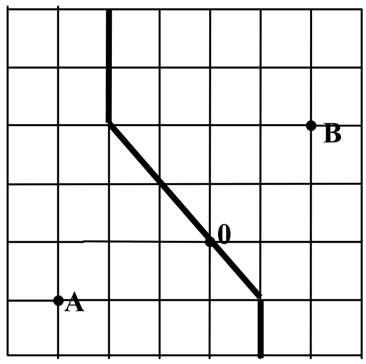


Figura 25 (Q-hipérbole com s = 0)

Como podemos verificar nas Figuras 23, 24 e 25 as hipérboles podem ter um ou dois ramos. Ainda há casos de hipérboles que possuem não apenas ramificações, como também preenchem regiões no plano (Figura 26).

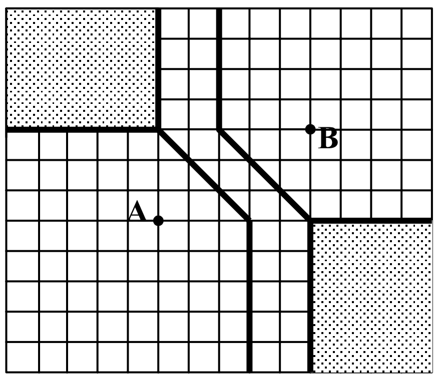


Figura 26 – Q-hipérbole com s = 2

A parábola é uma outra cônica que terá forma bastante variada na métrica do quarteirão as quais apresentaremos no item a seguir.

1.5.2.4 A Q-parábola

A parábola é definida na G_E como o lugar geométrico dos pontos do plano eqüidistantes de uma reta fixa, diretriz, e de um ponto fixo, foco, não pertencente à diretriz.

Na Figura 27 podemos observar os pontos de uma parábola com foco *F* e diretriz *d*. Para mais detalhes sobre esta cônica ver Noronha (2003)**.**

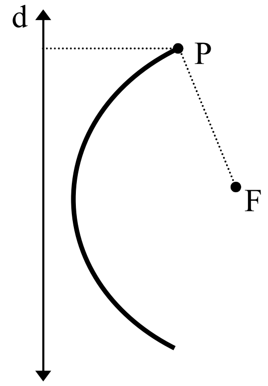


Figura 27 – Parábola euclidiana

A Q-parábola, como as outras cônicas já citadas, tem a mesma definição da parábola euclidiana. Por exemplo, se quisermos que a distância de um ponto *P* quaisquer do plano ao foco *F* seja igual à distância deste ponto a diretriz *d*, tendo como conjunto de solução $\{P \ / \ d_Q (P, F) = d_Q (P, d)\}$, poderemos determinar dois desses pontos, considerando que $d_Q (F, d) = 4$, cortando esta distância ao meio. Assim, julgamos os pontos *A* e *B*, tais que $d_Q (A, F) = 2 = d_Q (A, d)$ e $d_Q (B, F) = 2 = d_Q (B, d)$.

O segmento *AB* é uma intersecção e todos os pontos pertencentes a este segmento são eqüidistantes de *F* e *d* e, assim, este faz parte da solução desejada. Do ponto *B*, cada passo que fazemos para cima conserva a condição de eqüidistância. O mesmo acontece indo de *A* para a esquerda.

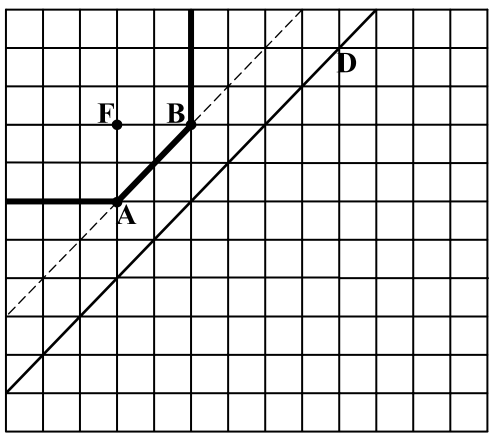


Figura 28 – Q-parábola

A parábola na Geometria Urbana tem seu formato modificado de acordo com a inclinação da reta e, como as outras cônicas desta métrica, suas formas também são bastante diferentes das encontradas na Geometria Euclidiana, variando de acordo com a posição da diretriz, do foco e da constante estabelecida.

No entanto, além da Geometria Urbana, há também outras variações da Geometria do Taxista, a exemplo da Geometria do Triângulo (G_{TR}) ou Geometria Isoperimétrica (G_I) desenvolvida em um espaço formado por triângulos eqüiláteros (Figura 9). No item a seguir apresentaremos esta geometria. Observamos que, apesar de não termos o objetivo de apresentar um estudo mais aprofundado desta, ao realizarmos nossa pesquisa nos deparamos com algumas situações no que se refere ao estudo da função de distância (d_I), as quais gostaríamos que fizesse parte do novo leque de conhecimento de nosso leitor e, portanto, apresentaremos no próximo item.

1.6 Conhecendo a Geometria Isoperimétrica (G_I)

1.6.1 A função de distância (d_I)

A Geometria Isoperimétrica (G_I) é uma variação da Geometria do Taxista cujo espaço, como mencionamos no item 1.3, é modelado por uma malha de triângulos eqüiláteros. Mas, quais as implicações causadas por essa mudança de espaço?

Iniciamos refletindo a respeito da localização de pontos neste espaço. Ao contrário do que verificamos com a Geometria Urbana, o espaço utilizado pela Geometria Isoperimétrica é visivelmente diferente do plano cartesiano, utilizado para localizar pontos através de coordenadas na Geometria Euclidiana. Sendo assim, como faremos para localizar pontos neste espaço? Podemos dizer que o uso do triângulo acarretará na existência de três eixos? Caso haja três eixos, o ponto será localizado neste espaço através de três ordenadas?

Para responder tais questionamentos, primeiramente, representamos os possíveis três eixos por x, y e y', que dividem o plano em seis partes, as quais chamamos de sextantes, numerados em sentido anti-horário (ver Figura 29), começando com a parte superior direita.

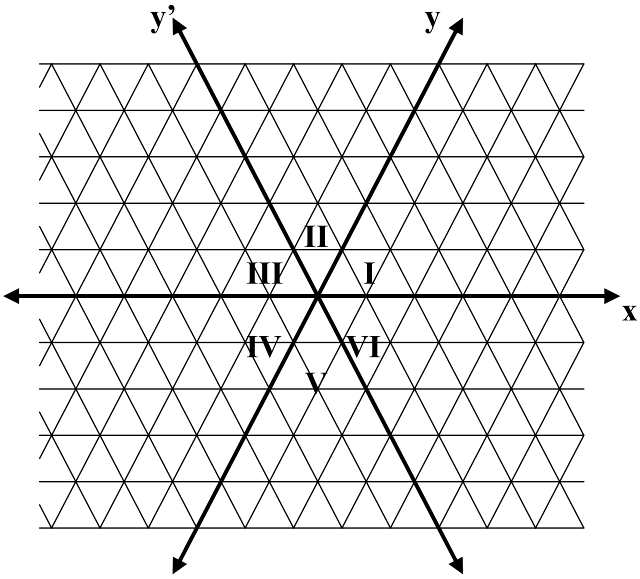


Figura 29 – Espaço triangular dividido em sextantes.

Após algumas verificações concluímos que a existência de três eixos não indica que hajam três coordenadas, pois isso faria com que os pontos parecessem superdeterminados, ou seja, com mais de uma coordenada, resultado de haver mais de uma forma de "andarmos" no eixo. Na Figura 30, por exemplo, para irmos da origem para o ponto *A* poderemos fazer dois caminhos que resultarão em valores diferentes para *x*, *y* e *y'*, respectivamente: no primeiro caminho, representado na figura pelo traçado azul, percorremos uma unidade do eixo *x*, uma unidade do eixo *y* e nenhuma do eixo *y'*, resultando na coordenada (1, 1, 0) para *A*; no segundo caminho, representado pelo traçado vermelho, percorremos duas unidades do eixo *x*, nenhuma unidade do eixo *y* e uma unidade do eixo *y'*, resultando na coordenada (2, 0, 1) para *A*.

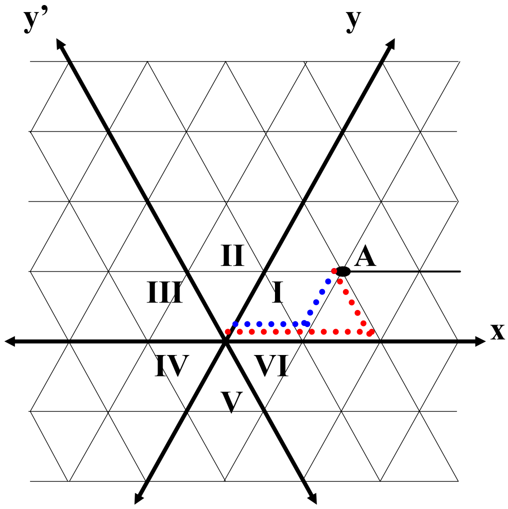
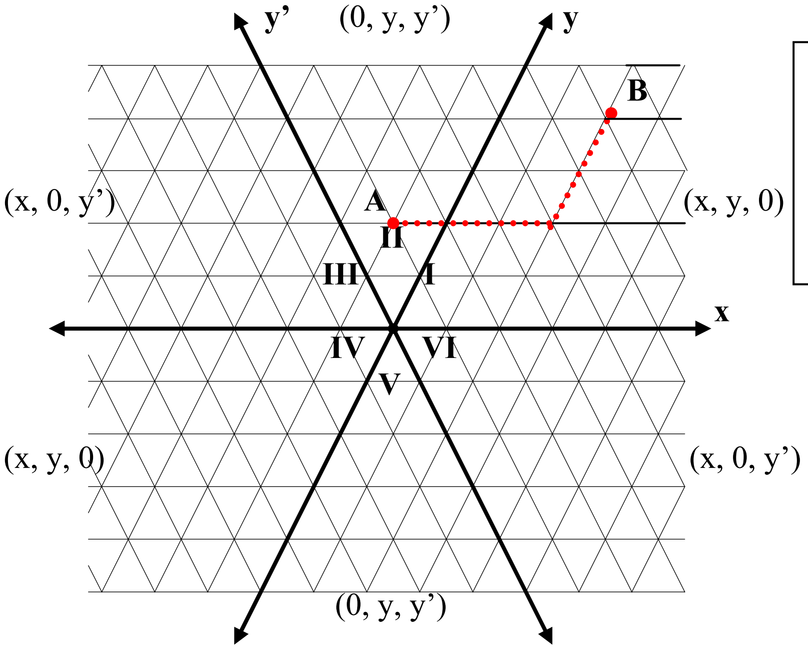


Figura 30 – As linhas azuis e vermelhas mostram o "caminho" para encontrar (1, 1, 0) e (2, 0, 1), respectivamente.

Se considerarmos o conceito informal de menor separação entre origem e o ponto verificamos que este requer que usemos (x, y, 0) para a sextante I, (0, y, y') para a sextante II, (x, 0, y') para a sextante III, (x, y, 0) para a sextante IV, (0, y, y') para a sextante V e (x, 0, y') para a sextante VI. Dessa forma, ao buscarmos localizar os pontos no espaço da G_I, passamos a atribuir valores apenas a duas coordenadas, dependendo da sextante em que estaria o ponto.

No entanto, verificamos que o uso desse método não é eficaz para obtermos a distância através da diferença das coordenadas, como acontece na G_Q, pois encontraremos valores de distância diferentes dos encontrados através da contagem de unidades. Isso pode ser confirmado no exemplo da Figura 31.



$$d_I = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |y'_2 - y'_1|$$
$$d_I = |2 - 0| + |4 - 1| + |0 - 1|$$
$$d_I = 2 + 3 + 1$$
$$d_I = 6$$

Figura 31 – Distância entre os pontos A (0, 1, 1) e B (2, 4, 0).

Como podemos observar através do tracejado vermelho que representa as unidades "percorridas" entre os pontos A (0, 1, 1) e B (2, 4, 0), mostrados na Figura 31, a distância entre esse pontos é de 5 unidades. Entretanto, ao aplicarmos o valor absoluto da diferença, obtemos distância de 6 unidades entre os mesmos.

Há duas razões que explicam o resultado obtido: a primeira, é que o zero que representa a coordenada a mais tende a aumentar a distância quando os pontos estão localizados em regiões diferentes; a segunda, é que a presença de um terceiro eixo reduz a abrangência dos números negativos e impede que este desempenhe seu papel nas localizações de pontos.

Respondendo o questionamento anteriormente feito, concluímos que é melhor não termos três eixos para esta geometria, mas apenas dois, como nas G_E e G_Q. No entanto, verificamos na G_I a presença de um sub-eixo, que não será utilizado como um item a mais na localização de pontos. Assim, para encontrarmos as coordenadas de um ponto qualquer no espaço isoperimétrico da G_I deveremos considerar apenas um par ordenado que poderá se referir aos eixos *x* e *y*, ou *y* e *y'*, ou *x* e *y'* e o que não for usado para o par ordenado será o sub-eixo.

Como podemos perceber através do tracejado vermelho da Figura 31, para irmos de um ponto para o outro no espaço triangular, obedecendo ao conceito intuitivo de distância de menor separação entre origem e o ponto, percorremos ruas paralelas a dois dos eixos e que podem ser comparadas aos lados adjacentes de um paralelogramo. Então, fizemos algumas verificações a respeito da possibilidade de encontrar a distância entre os pontos através do valor absoluto da diferença, ou seja, através de $d_I(A,B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$, utilizando coordenadas que terão como par ordenado estes eixos paralelos a lados adjacentes do paralelogramo.

Para isso, encontramos as coordenadas usando o mesmo processo utilizado nas G_E e G_Q, sendo que, como já informamos, na G_I o par ordenado poderá variar. Assim, a escala de valores que irá numerar os eixos desta geometria será igual à utilizada no plano cartesiano. Os valores negativo ou positivo irão depender da posição desses pontos e do par ordenado utilizado[13], assim:

a) se o par ordenado for (x, y) o primeiro elemento dos pontos que estiverem a direita do eixo *y* será positivo e dos que estiverem a esquerda deste será negativo; e o segundo elemento dos pontos que estiverem acima do eixo dos *x* será positivo, os que estiverem abaixo será negativo (Figura 32);

[13] Se concebermos a G_I como um espaço vetorial, as três possibilidades assinaladas no texto correspondem a três bases diferentes do espaço.

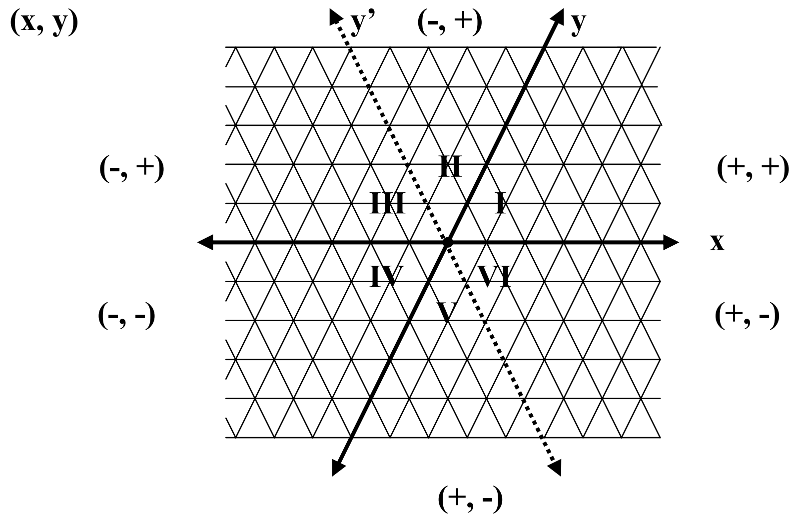


Figura 32 – Par ordenado (x, y).

b) se o par ordenado for (x, y') o primeiro elemento dos pontos que estiverem a direita do eixo do *y'* será positivo, os que estiverem a esquerda deste será negativo; e o segundo elemento dos pontos que estiverem acima da eixo *x* será positivo, os que estiverem abaixo será negativo (Figura 33);

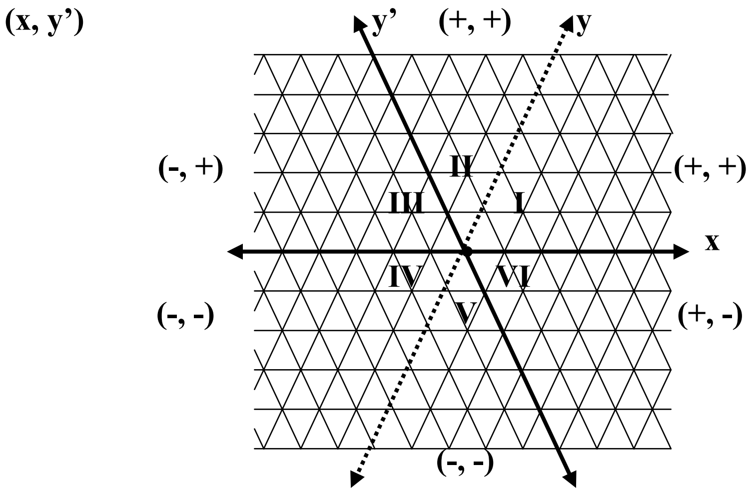


Figura 33 – Par ordenado (x, y').

c) se o par ordenado for (y, y') o primeiro elemento dos pontos que estiverem a direita do eixos *y'* será positivo e os que estiverem a esquerda será negativo; e o segundo elemento dos pontos que estiverem a direita de *y* será negativo, os que estiverem a esquerda será positivo (Figura 34).

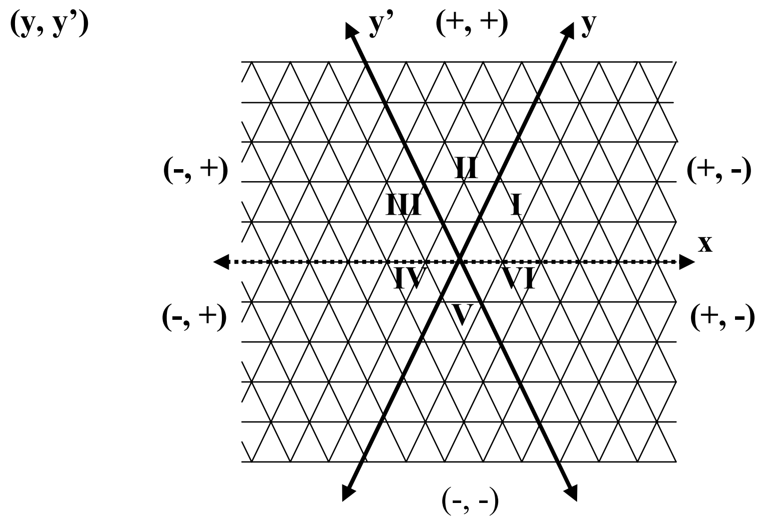


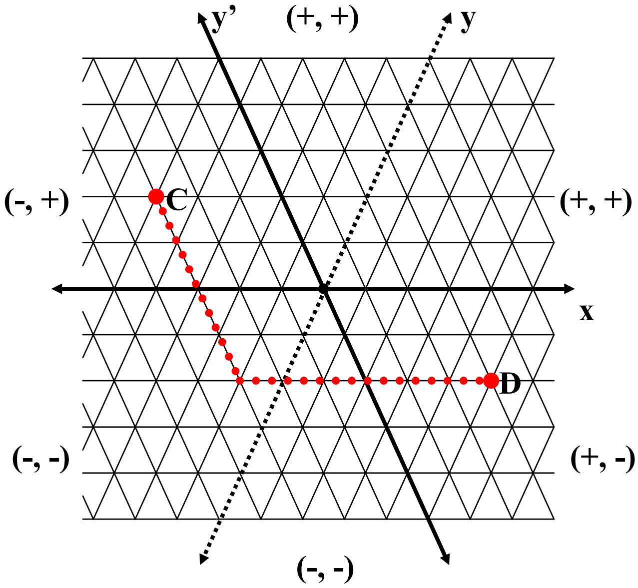
Figura 34 – Par ordenado (y, y').

Desse modo, para encontrarmos a distância entre os pontos *A* e *B* da Figura 31, primeiramente, verificamos que o *caminho* entre estes parece com os lados adjacentes de um paralelogramo, os quais se encontram paralelos aos eixos *x* e *y*, assim, o par ordenado considerado será (x, y), portanto, as coordenadas de *A* serão (-1, 2) e de *B* serão (2, 4). Usando o valor absoluto da diferença, temos:

$$d_I(A,B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$
$$d_I(A,B) = |2+1| + |4-2|$$
$$d_I(A,B) = 3 + 2$$
$$d_I(A,B) = 5$$

cujo resultado coincide com a contagem de unidades que separa os ponto.

Utilizamos o mesmo processo para encontrar a distância entre os pontos *C* e *D* (Figura 35).

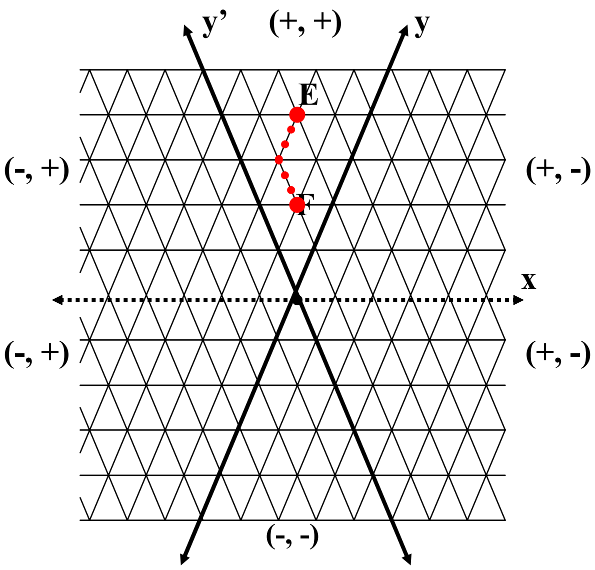


Sendo C(-3, 2) e D (3, -2), então:

$$d_I = |x_2 - x_1| + |y'_2 - y'_1|$$
$$d_I = |3 - (-3)| + |-2 - 2|$$
$$d_I = 6 + 4$$
$$d_I = 10$$

Figura 35 – Par ordenado (x, y').

Como podemos perceber na Figura 35 o *caminho* entre os pontos *CD* corresponde aos lados adjacentes de um paralelogramo, os quais são paralelos, respectivamente aos eixos *x* e *y'*. Portanto, o par ordenado usado para encontrar a distância entre os pontos usando o valor absoluto das diferenças, foi (x, y'). Utilizamos o mesmo método para encontrar a distância entre os pontos *E* e *F* (Figura 36).



Sendo E (2, 2) e F(1, 1), então:

$$d_I = |y_2 - y_1| + |y'_2 - y'_1|$$
$$d_I = |2 - 1| + |2 - 1|$$
$$d_I = 1 + 1$$
$$d_I = 2$$

Figura 36 – Par ordenado (y, y')

No caso acima, os lados adjacentes ao paralelogramo são paralelos aos eixos *y* e *y'*, assim o par ordenado usado para encontrar a distância entre os pontos foi (y, y').

No entanto, o estabelecimento de um único par ordenado seria o mais indicado para encontrarmos a distância entre dois pontos no espaço triangular através do valor absoluto da diferença. Estabelecemos, portanto, o par (x, y) como padrão também nesta métrica. No entanto, ao utilizar este par para encontrarmos a distância entre os pontos *C* e *D* da Figura 35 e entre os pontos *E* e *F* da Figura 36, temos que

Considerando como par ordenado (x, y), temos C (-5, 2) e D (5, -2), então: $d_I = \lvert x_2 - x_1 \rvert + \lvert y_2 - y_1 \rvert$ $d_I = \lvert 5-(-5) \rvert + \lvert -2-2 \rvert$ $d_I = 10 + 4 = 14$	Considerando como par ordenado (x, y), temos E (-2, 4) e D (-1, 2), então: $d_I = \lvert x_2 - x_1 \rvert + \lvert y_2 - y_1 \rvert$ $d_I = \lvert -1-(-2) \rvert + \lvert 2-4 \rvert$ $d_I = 1 + 2 = 3$

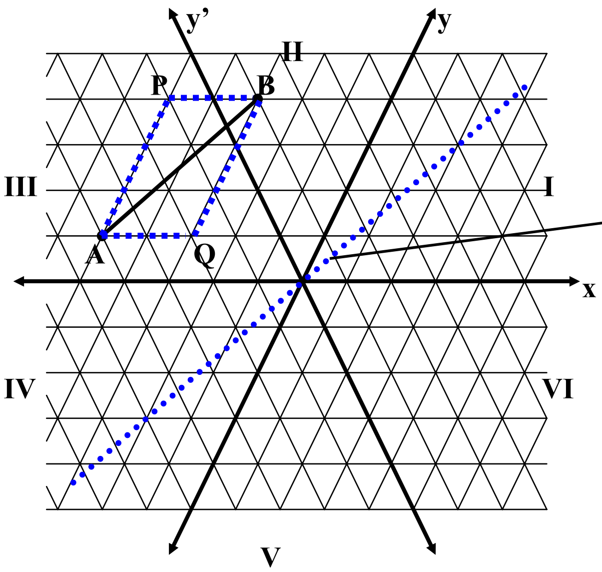
como podemos verificar, não obtemos um resultado correto.

Sowell (1989) resolve este problema apresentando um outro método para encontrar a distância entre dois pontos no espaço triangular: o uso de três funções de distância. Estas funções dependem da sextante e da orientação em que os pontos estarão localizados, ou seja, a distância entre dois pontos dependerá da orientação a que estes correspondem, que poderá ser de I-IV, de II-V ou de III-VI, cada qual correspondendo a uma fórmula de distância diferente.

Neste caso, para que possamos saber em que orientação se encontram os dois pontos, podemos traçar uma linha que passa pela origem e que é paralela ao segmento que liga estes pontos. As sextantes atingidas pela linha traçada nos indicam a orientação desses pontos (Figuras 37, 38 e 39). Verificamos, dessa forma, que a importância do sub-eixo dá-se na divisão do plano em sextantes e, conseqüentemente, na designação de uma orientação para aplicação da fórmula de distância correta[14]. Assim, temos:

1°) se os dois pontos têm orientação de I-IV (Figura 37) então d_I (A, B) = $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$;

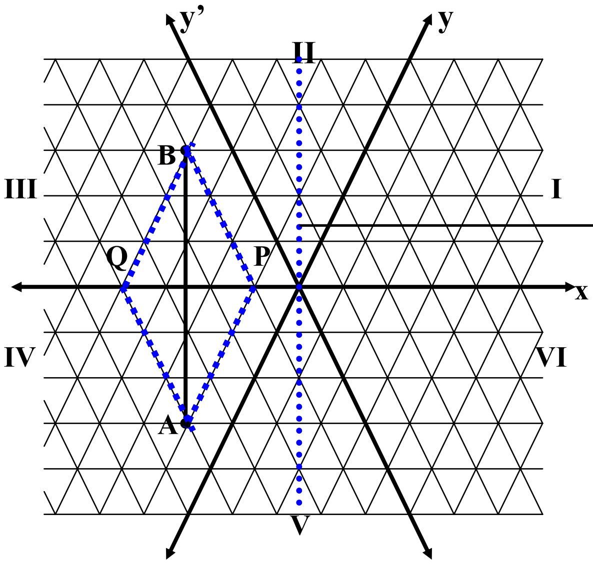
[14] A G_I se comporta de modo semelhante ao espaço dos losangos, discutidos acima, pois a distância AC = 2, enquanto a BD = 1. Nesta, porém, esta diferença faz sentido porque a existência do sub-eixo adiciona novos caminhos ao espaço. É como se certos pontos fossem ligados por atalhos.



Reta paralela ao segmento que liga os pontos *A* e *B*, passando pelas sextantes I e IV. Portanto, os pontos *A* e *B* têm orientação I-IV. Assim, $d_I = |x_2-x_1| + |y_2-y_1|$.

Figura 37 – Distância entre *A* e *B*.

2°) se os dois pontos têm orientação de II-V (Figura 38) então d_I (A, B) = $|y_1 - y_2|$;



Reta paralela à reta que liga os pontos *A* e *B*, passando pelas sextantes II e V. Portanto, os pontos *A* e *B* têm orientação II-V. Assim, $d_I = |y_2-y_1|$.

Figura 38 - Distância entre *A* e *B*.

3º) se os dois pontos têm orientação de III-VI (Figura 39) então d_I (A, B) = | x_1 - x_2|.

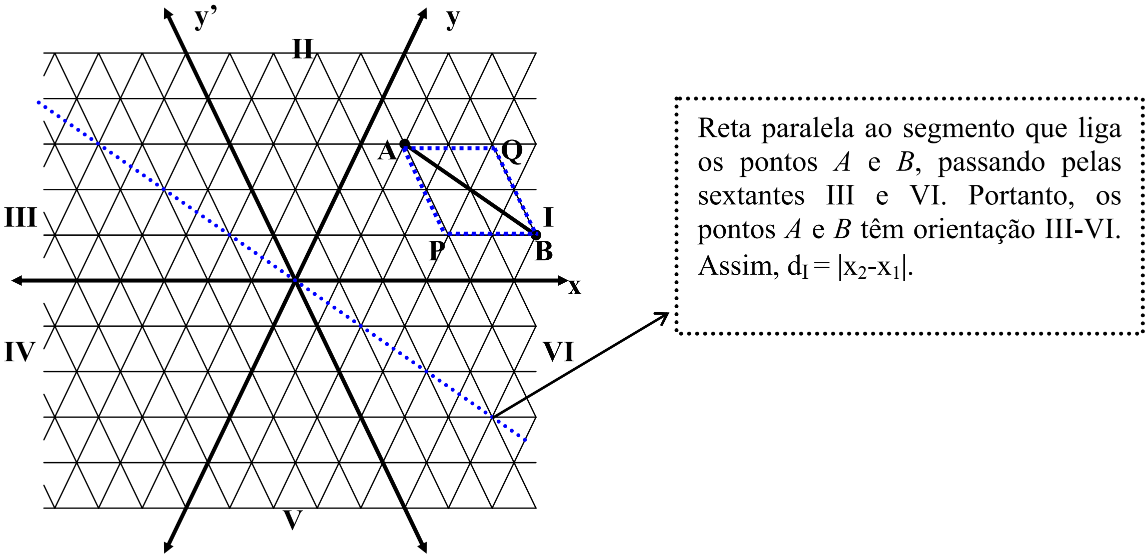


Figura 39 – Distância entre *A* e *B*.

No entanto, nem sempre estaremos com a figura disponível para encontrarmos a orientação dos pontos. Neste caso, como saber que fórmula aplicar? Para resolver este problema a solução que encontramos foi a seguinte: para A (x_1, y_1) e B (x_2, y_2), temos que[15]:

1º) para $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ a expressão analítica usada será d_I (A, B) = $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$;

Ex: Para a d_I entre A (-5,1) e B (-3,4), Figura 37, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{-3-(-5)} = \frac{3}{2} > 0$$

Então:

$$d_I(A,B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$
$$d_I(A,B) = |-3-(-5)| + |4-1|$$
$$d_I(A,B) = 2+3 = 5$$

2º) para $\frac{\Delta y}{\Delta x} < -1$ ou $\Delta x = 0$ a expressão analítica usada será d_I (A, B) = $|y_1 - y_2|$;

Ex: Para a d_I entre A (-1,-3) e B (-4,3), Figura 38, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4-(-1)}{3-(-3)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} < -1$$

[15] Para mais detalhes ver NORONHA e FOSSA (a aparecer).

Então:

$$d_I(A,B) = |y_2 - y_1|$$
$$d_I(A,B) = |3-(-3)| = 6$$

3º) para $-1 \leq \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ a expressão analítica usada será d_I (A, B) =| x_1 - x_2|.

Ex: Para a d_I entre A (1,3) e B (5,1), Figura 39, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{5-1} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$
$$-1 \leq \frac{-1}{2} \leq 0$$

Então:

$$d_I(A,B) = |x_2 - x_1|$$
$$d_I(A,B) = |1-5| = 4$$

Podemos observar nas Figuras 37, 38 e 39 que a distância entre os pontos *A* e *B* pode ser facilmente encontrada não apenas através da fórmula de distância, como também através da contagem do número de unidades ao longo de qualquer um dos dois lados adjacentes do paralelogramo *AQBP*.

Assim como na G_Q, a G_I também é rica em segmentos, representados, na Figura 40, pelos triângulos menores. Isso por que, os pontos são formados por qualquer par de números reais. Por exemplo, sejam os pontos A (2/3, 2/3) e B (4/3, 10/3), então o segmento $\overline{AB}$ (Figura 40) é igual a 10/3.

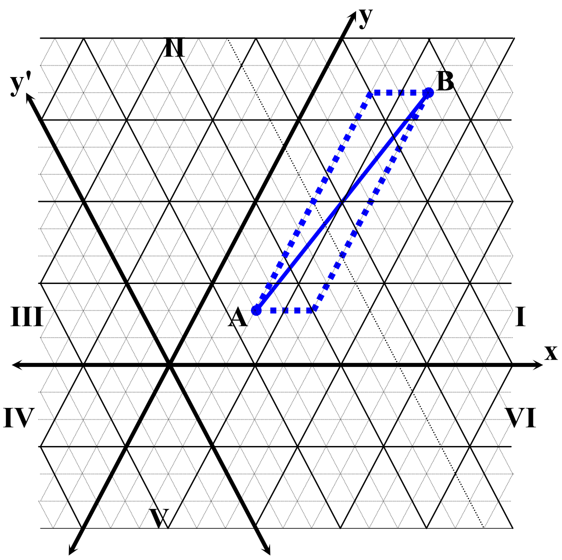


Figura 40 – Distância entre os pontos *A* e *B*.

A d_I entre A (2/3, 2/3) e B (4/3, 10/3) é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{10}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{3}.\frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4 > 0$$

Então:

$$d_I(A,B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$
$$d_I(A,B) = \left|\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right| + \left|\frac{10}{3} - \frac{2}{3}\right|$$
$$d_I(A,B) = \frac{2}{3} + \frac{8}{3}$$
$$d_I(A,B) = \frac{10}{3}$$

A G_I, assim como a G_Q e a G_E, é um espaço métrico, pois, como menciona Sowell (1989), esta atende as propriedades citadas no item 1.1.

Quando tratamos da Geometria Urbana vimos que o uso de um espaço e, conseqüentemente, de uma fórmula de distância diferente faz com que figuras como as cônicas apresentem-se de formas bastante variadas e diferentes, quando comparadas às da Geometria Euclidiana. No item a seguir veremos como as cônicas se apresentam quando aplicadas a métrica do triângulo. No entanto, não é nosso objetivo apresentar um estudo detalhado destas figuras no espaço triangular, mas apresentar algumas de suas características, para que o leitor possa compreender melhor o trabalho em questão.

1.6.2 As cônicas na Geometria Isoperimétrica

1.6.2.1 A I-circunferência

Vimos no item que trata da Q-circunferência que esta se apresenta com aspecto bastante diferente da circunferência euclidiana, porém com a mesma definição desta última, ou seja, é o conjunto de pontos eqüidistantes de um dado ponto, *H*, seu centro. Quando usamos a função d_I, não é diferente. Obtemos uma figura com a mesma definição, porém, com forma diferente tanto daquela encontrada na métrica euclidiana quanto da encontrada na métrica do quarteirão, a qual chamamos *I-circunferência* (C_I). Se juntarmos a esta os pontos do seu interior, o resultado será um *I-círculo*. Na Figura 41 temos uma I-circunferência de raio 5 e centro (1, 1) que, como podemos observar, é semelhante a um hexágono da G_E.

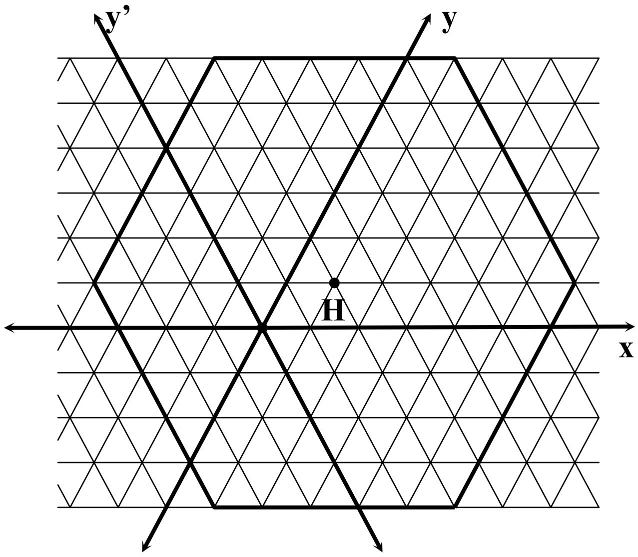


Figura 41 – I-circunferência de raio 5 e centro (1, 1)

A I-circunferência será dada pela seguinte expressão analítica:

$$C_I = \{(x, y) / d_I((x, y), (h, k)) = r\},$$

Onde P = (x, y) e H = (h, k). Na referida expressão, no entanto, a fórmula a ser usada para d_I depende, para cada ponto *P*, da orientação do segmento $\overline{PH}$, conforme explicado acima.

Assim como na G_Q, podemos notar também diferentes aparências nos raios e, conseqüentemente, nos diâmetros das circunferências da G_I. Exemplos dessas mudanças podem ser vistos nas Figuras 42 a 45. Percebe-se que os raios podem ser formados por um ou vários segmentos de reta, o que não acontece na G_E. O diâmetro contém o centro e divide a figura em duas partes congruentes.

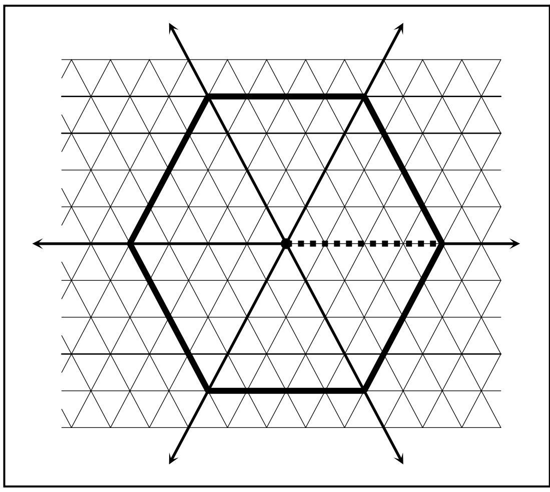


Figura 42 – Raio de uma I-circunferência

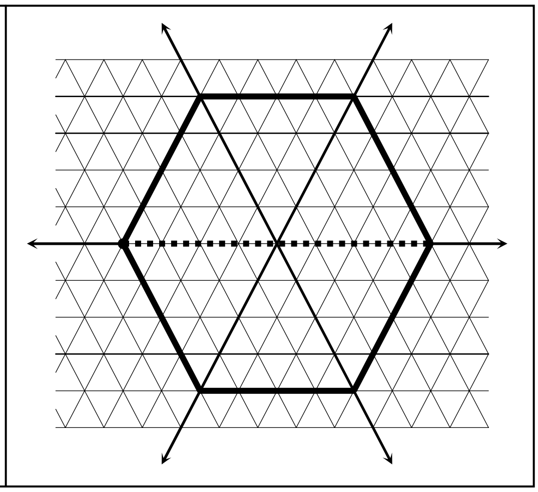


Figura 43 – Diâmetro de uma I-circunferência

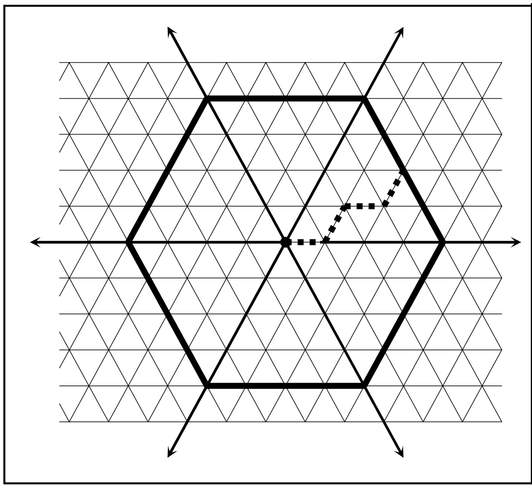


Figura 44 – Raio de uma I-circunferência

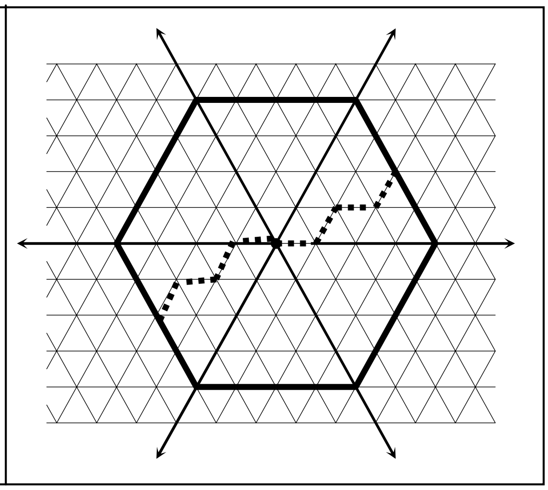


Figura 45 – Diâmetro de uma I-circunferência

Em relação aos tipos de tangências, as circunferências das duas métricas também coincidem. A C_I tem dois tipos de tangências: as que podem ficar tangente em um único ponto (Figura 46) ou em um número infinito de pontos (Figura 47).

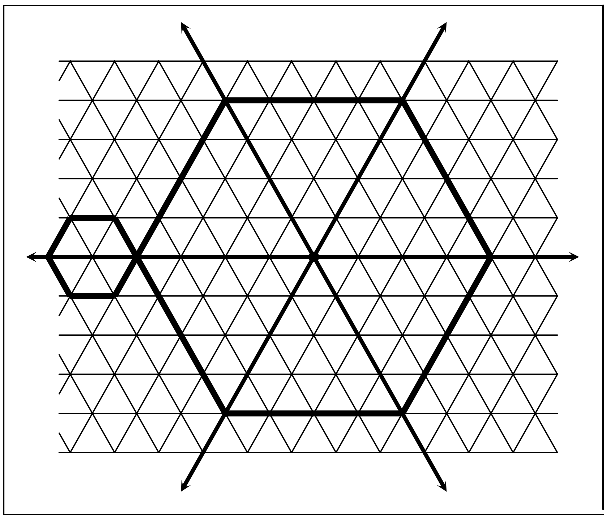


Figura 46 – C_I tangentes em um único ponto.

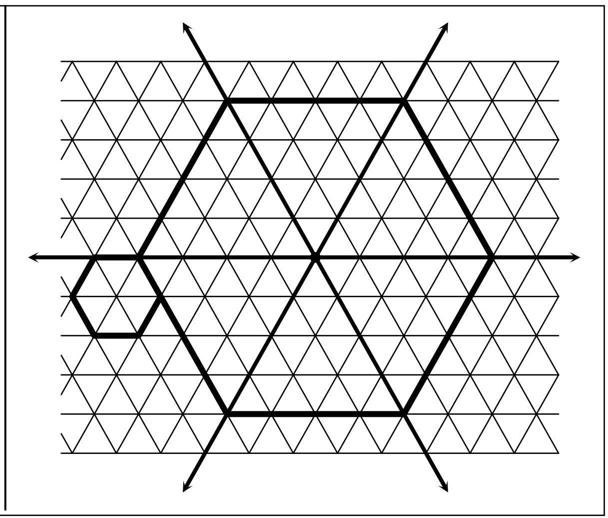


Figura 47 – C_I tangentes em muitos pontos.

Para a G_I, podemos tomar o triângulo da malha como a unidade de área. Dessa forma, quando o raio (r) é inteiro, como na Figura 48, cada triângulo como *OAB* é composto da soma dos r primeiros números ímpares. Assim, a área do triângulo *OAB* é r^2 e a da circunferência é

$$A_I = 6.r^2$$

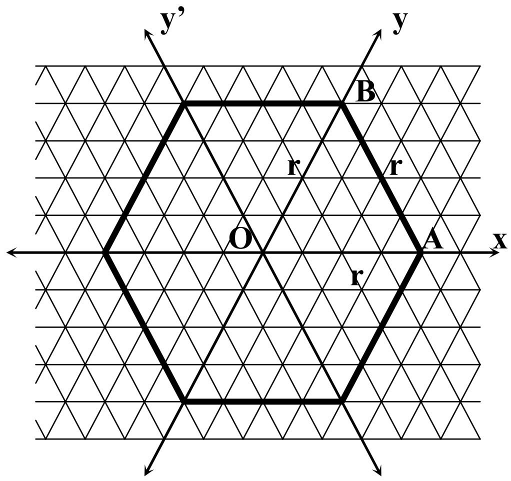


Figura 48 – I-circunferência

Sabendo que π é a razão entra a circunferência e o diâmetro, temos que

$$\pi = \frac{C_I}{d_I} = \frac{6r}{2r} = 3$$

pois o triângulo *OAB* é eqüilátero e, portanto, o lado do hexágono é r. Assim, usando $\pi = 3$, a fórmula para a circunferência é $C_I = \pi d$, como na Geometria Euclidiana. No entanto, a fórmula para a área se torna $A = 2\pi r^2$. Segundo Fossa (2003), a fórmula $C = \pi d$, na G_Q, implica que $\pi = 4$ e $A = ½\pi r^2$.

A I-circunferência não é a única cônica a sofrer transformações, principalmente, na aparência quando aplicada a métrica do triângulo. No item a seguir apresentaremos a elipse da G_I.

1.6.2.2 A I-elipse

A elipse da G_I, chamada *I-elipse*, mantém a mesma definição dada às elipses da G_E e da G_Q, ou seja, é o lugar geométrico dos pontos de um plano, tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados focos, é constante. Esta definição pode ser expressa na G_I da seguinte forma:

$$\{P \,/\, d_I\,(P, A) + d_I\,(P, B) = s\}.$$

No entanto, o uso de uma função de distância diferente nos leva a encontrar elipses com formas dessemelhantes das encontradas nas duas métricas já citadas. Considerando que os pontos de uma I-elipse poderão estar localizados em diferentes posições do plano, não podemos esquecer que, dada a expressão analítica que a define, para encontrarmos a d_I entre os pontos e os focos teremos que aplicar uma das três expressões de distância da Geometria Isoperimétrica, citadas no item 1.6.1, para depois somarmos o resultado das distâncias encontradas. Na Figura 49 temos um exemplo de uma I-elipse com focos A (-1, 0) e B (1,0) e constante s = 6, os triângulos menores representam os *meios de caminhos*.

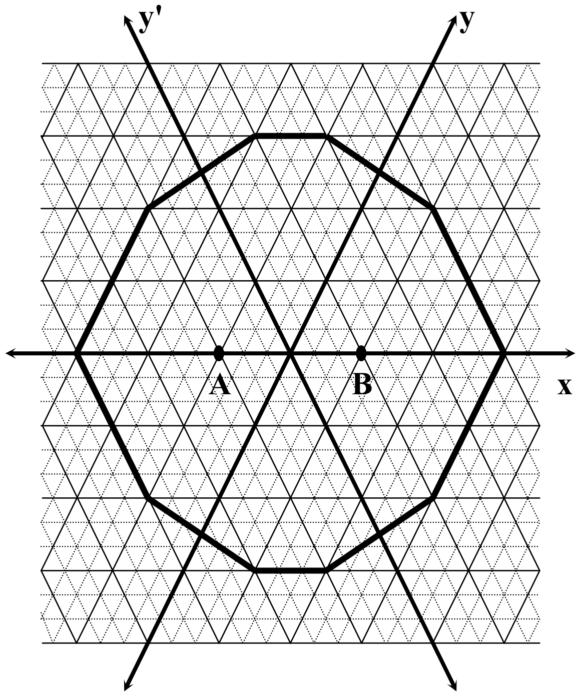


Figura 49 – I-elipse com focos A (-1, 0) e B (1,0) e constante s = 6.
Figura com dez lados.

As variadas aparências de uma I-elipse podem ser comparadas com a forma de um decágono (Figura 49), dodecágono (Figura 50) ou octógono (Figura 51), sendo que esta última ocorre quando a constante *s* corresponde ao dobro da distância entre os focos e estes se encontram alinhados paralelamente a um dos eixos.

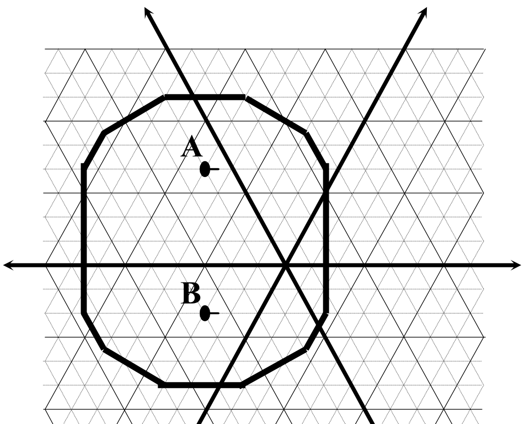


Figura 50 – Figura dom doze lados.

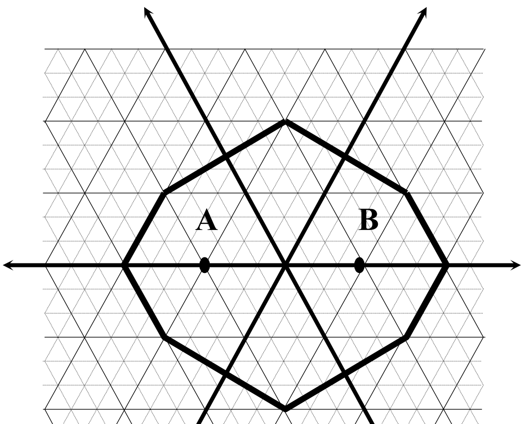


Figura 51 – Figura com oito lados.

A I-elipse também apresenta alguns *casos degenerados* como os da Q-elipse apresentados em Fossa (2003). Estes casos referem-se a elipses cuja distância entre os focos é igual a constante *s*, ou seja, d_I (A, B) = s, resultando em I-elipses com formas diferentes das convencionais, a exemplo da apresentada na Figura 52, em que todo ponto *P* do interior da figura pertencerá à I-elipse, ou casos como o da Figura 53 em que a I-elipse é um segmento de reta, isto ocorre porque a d_I (A, B) = s. No entanto, se d_I (A, B) > s, a I-elipse será um conjunto vazio.

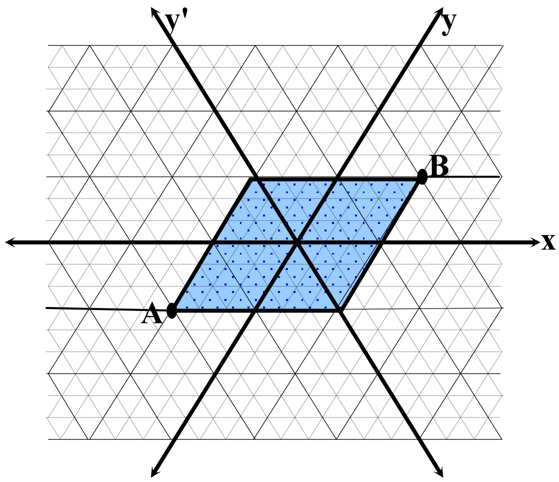


Figura 52 – A (-1, -1), B (1, 1), s = 4

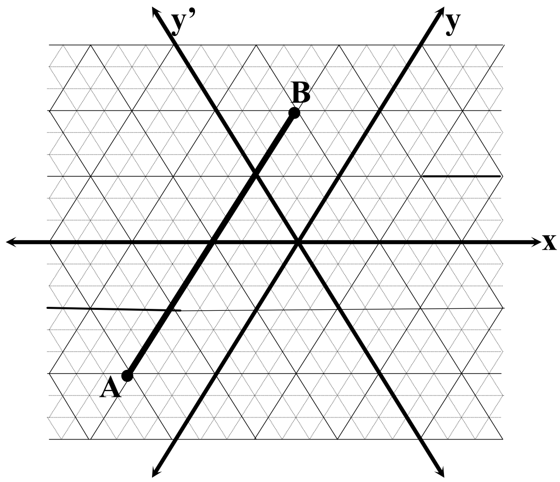


Figura 53 – A (-1, -2), B (-1, 2), s = 4

No item a seguir veremos alguns dos aspectos da hipérbole no espaço triangular.

1.6.2.3 A I-hipérbole

Na G_I temos a *I-hipérbole*, cuja definição é a mesma dada na G_E e na G_Q, ou seja, é o conjunto de pontos de um plano, tal que a diferença de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados focos, é constante. Esta definição é representada na métrica do triângulo pela seguinte expressão analítica:

$$\{P \;/\; |d_I(P, A) - d_I(P, B)| = s\}.$$

Não podemos esquecer que para encontrar os pontos de uma I-hipérbole, dada a expressão que a define, teremos que aplicar uma das três expressões de distância dessa métrica (d_I), que poderão variar de acordo com a posição do ponto no plano, como mostramos no item 1.6.1 que trata da Geometria Isoperimétrica, para depois encontrarmos a diferença entre as distâncias. Nas Figuras 54, 55 e 56 temos exemplos de I-hipérboles com diferentes focos e mesma constante, s = 0.

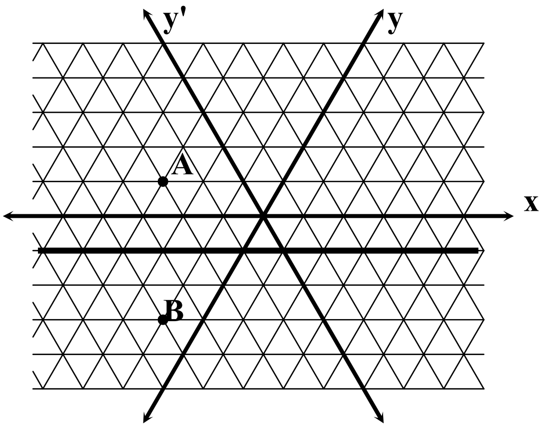


Figura 54 – I-hipérbole com focos A (-3, 1) e B (-1, -3) e s = 0

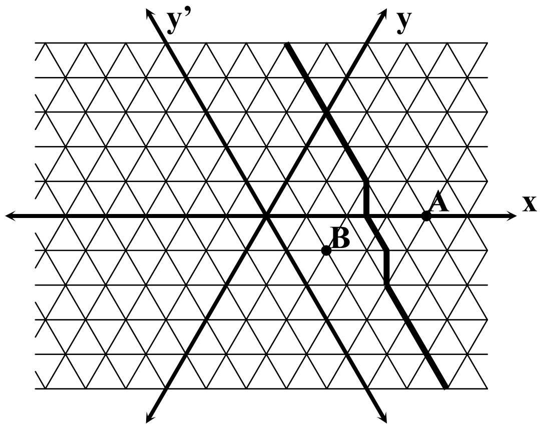


Figura 55 – I-hipérbole com focos A (5, 0) e B (2, -1) e s = 0

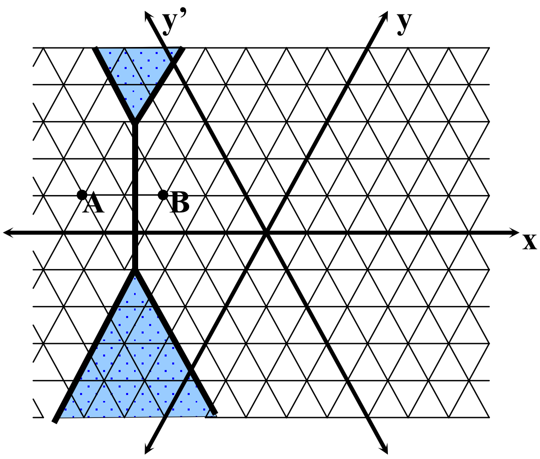


Figura 56 – I-hipérbole com focos A (-5, 1)e B (-3, 1) e s = 0

Como podemos perceber nas figuras anteriores, a I-hipérbole também se apresenta com diferentes aspectos. Para uma melhor apreciação dessa variação de forma apresentamos na Figura 57 exemplos de I-hipérboles de mesma distância entre os focos e constantes de valores diferentes.

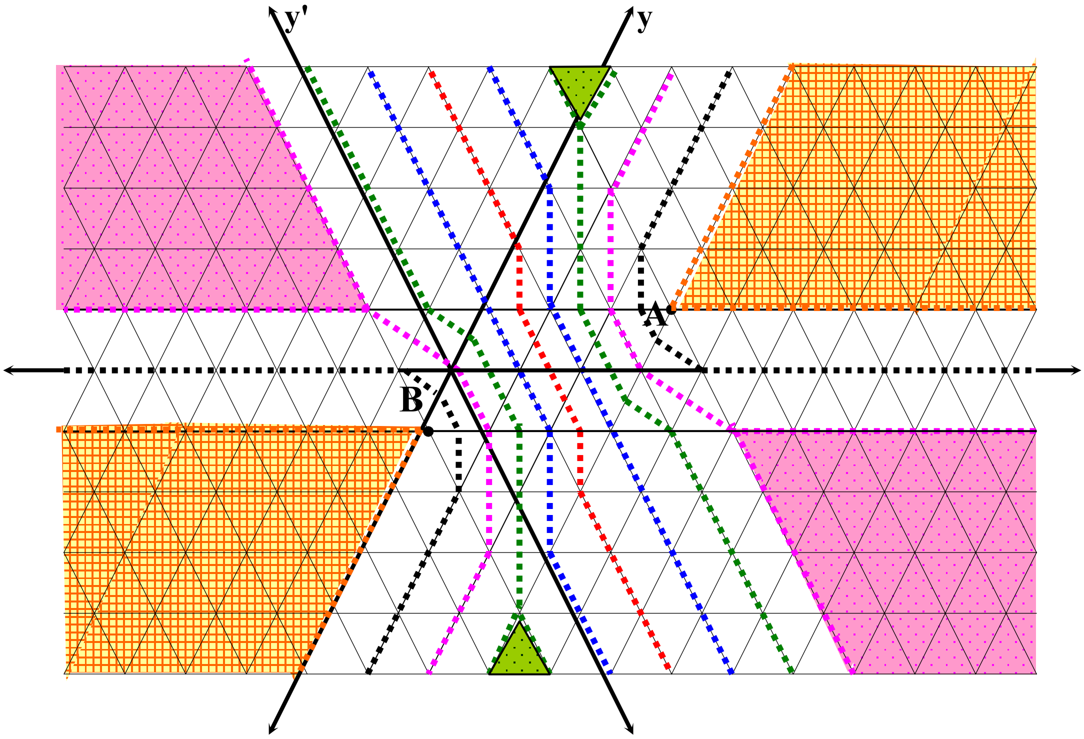


Figura 57 – I-hipérbole com focos A (3, 1) e B (0, -1)

I-hipérbole com s = 0	I-hipérbole com s = 3
I-hipérbole com s = 1	Área de abrangência da I-hipérbole com s = 3
I-hipérbole com s = 2	I-hipérbole com s = 4
Área de abrangência da I-hipérbole com s = 2	I-hipérbole com s = d_I (A, B) = 5

Na família das hipérboles com d_I entre os focos *A* e *B* igual a 5 unidades, apresentadas na Figura 57, percebemos que para cada valor de constante, entre *0* e *5*, tivemos uma hipérbole diferente. No entanto, se unirmos nossas observações a respeito das hipérboles das Figuras 54, 55 e 56 com as das hipérboles da Figura 57, concluímos que as mudanças de forma não ocorrem apenas quando há mudança de focos, mas também quando o valor absoluto é modificado. Contudo, as modificações não alteram alguns aspectos:

1º) Para s = 0 a hipérbole tem um ramo único, central, algumas vezes formado por um (Figura 54) ou mais segmentos de reta (Figura 55), ou formado por uma reta e duas regiões (área de abrangência) (Figura 56);

2º) Para 0 > s < 2 a I-hipérbole passa a ter dois ramos formados por segmentos de reta (Figura 57);

3º) Para 2 ≤ s < 5 a I-hipérbole tem dois ramos formados apenas por segmentos de reta ou por segmentos de retas e uma região (Figura 57);

4º) Para s = 5 = d_I (A, B) a I-hipérbole tem dois ramos em que cada um é formado por uma região (Figura 57).

No item a seguir veremos a parábola na métrica do triângulo.

1.6.2.4 A I-parábola

Na G_I chamamos de *I-parábola* ao conjunto de pontos de um plano eqüidistante de um ponto fixo, chamado foco, e uma reta, denominada diretriz. Como podemos perceber, esta figura, tem a mesma definição da parábola euclidiana e da Q-parábola, no entanto, apresenta-se com aspectos diferentes de ambas. A expressão analítica que representa tal definição é

$$\{P \,/\, d_I\,(P, F) = d_I\,(P, D)\},$$

onde *F* é o foco e *D* é a diretriz.

A I-parábola pode apresentar variados aspectos. Mas, como podemos observar na Figura 58 isso não é uma conseqüência da mudança do foco, pois, nesta figura temos exemplos de I-parábolas com mesma diretriz *D* e diferentes focos *F*, as quais não apresentam diferença de forma, apenas no tamanho dos segmentos, que varia de acordo com a distância entre foco e diretriz.

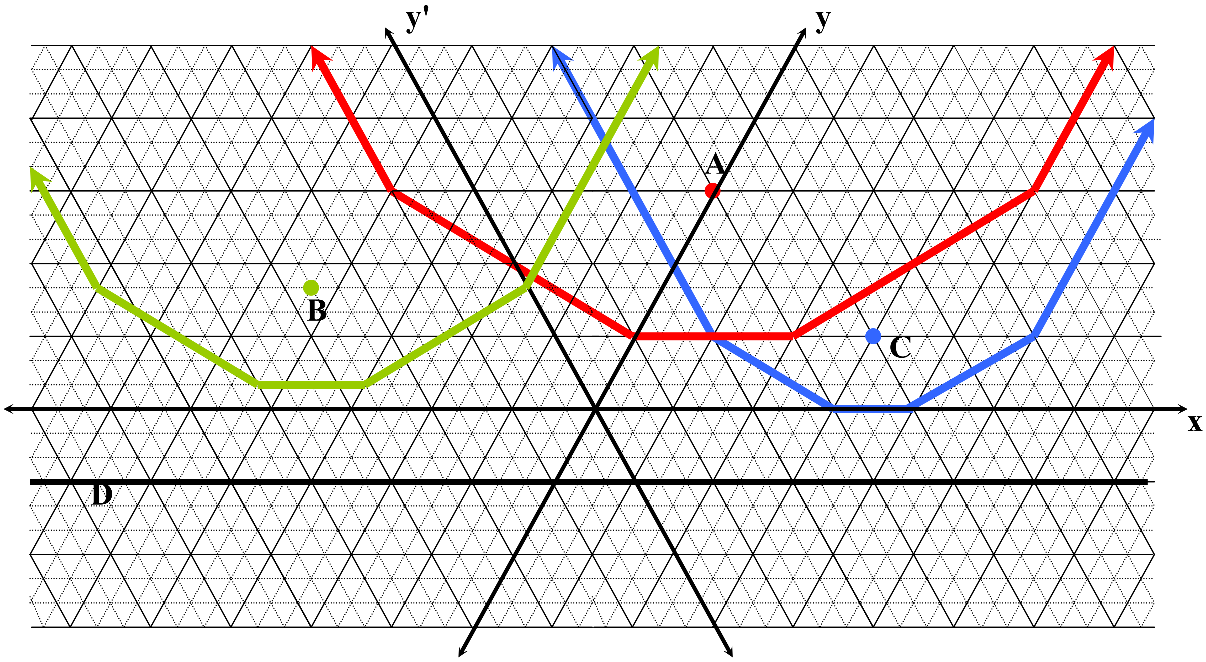


Figura 58 – I-parábolas com mesma diretriz e diferentes focos.

(vermelho)	I-parábola de diretriz *D* e foco A (0, 3)
(verde)	I-parábola de diretriz *D* e foco B (13/3, 5/3)
(azul)	I-parábola de diretriz *D* e foco C (3, 1)

No entanto, ao observarmos I-parábolas de mesmo foco *F* e diferentes diretriz *D*, a exemplo das apresentadas na Figura 59, verificamos que a inclinação desta última também não é um fator que influi no aspecto desta figura, desde que esteja paralela a um dos eixos ou ao sub-eixo, ocorrendo variações apenas de tamanho.

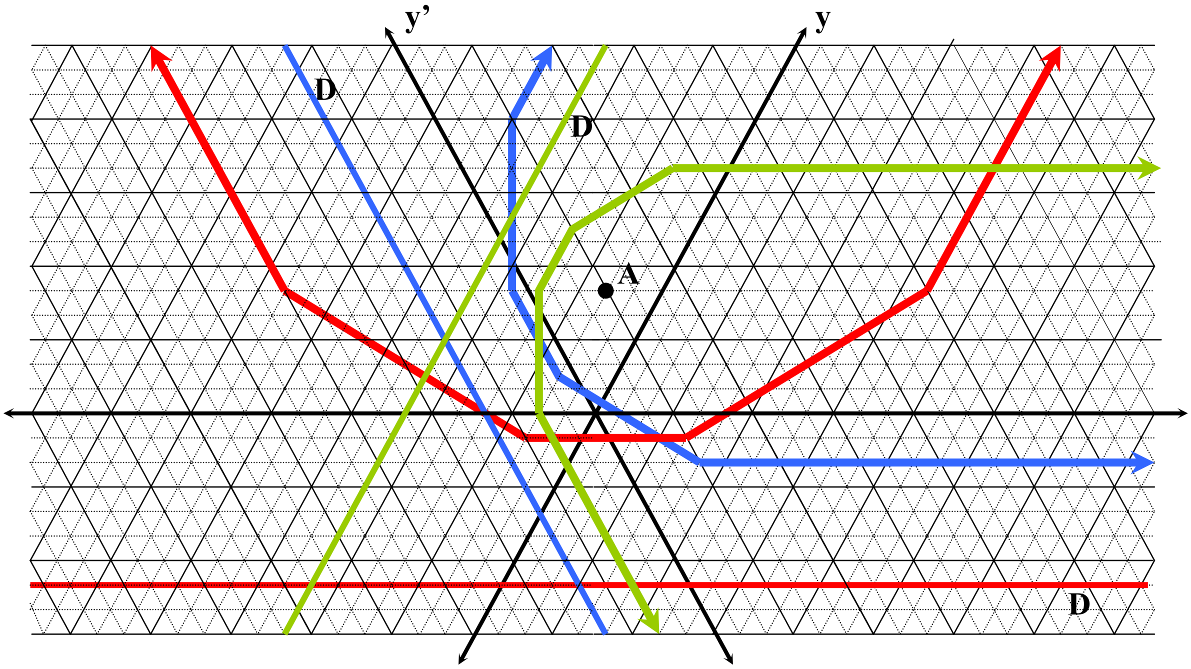


Figura 59 – I-parábolas de mesmo foco e diferentes diretriz.

Como podemos observar nas Figuras 58 e 59, cada uma das I-parábolas apresentadas são formadas por três segmentos e dois raios não paralelos e o "vértice", nestes casos, é um desses segmentos.

No item a seguir apresentamos algumas reflexões a respeito das relações entre a Geometria do Taxista e a Geometria Euclidiana.

1.7 A Geometria do Taxista e a Geometria Euclidiana

Como podemos perceber nos itens anteriores, os espaços com que a Geometria do Taxista trabalha nos levam a repensar alguns conhecimentos que já possuíamos e compreendê-los melhor. Isso por que a maior parte do conhecimento matemático que possuímos, quando não todo, tem como referência a Geometria Euclidiana.

Vimos nos itens anteriores, referentes a Geometria Urbana e a Isoperimétrica, que a mudança de espaço e, conseqüentemente, da definição de distância geram algumas mudanças, tais como as ocorridas com as cônicas, as quais passam a apresentar muitas diferenças quando comparadas àquelas vistas na G_E. No entanto, de modo geral, vimos que tais mudanças não ocorrem em termo do que define estas formas, mas, dizem respeito, principalmente, aos seus aspectos.

Infelizmente, não temos conhecimento e nem nos foi possível realizar um estudo que nos mostre como se comportam, na G_I, propriedades importantes das cônicas euclidianas, a exemplo das propriedades de reflexão da parábola que são usadas no funcionamento dos espelhos parabólicos, dos fornos solares, das antenas parabólicas, dos faróis de navegação, automóveis e outros tipos de projetores; ou ainda, a propriedade focal da hipérbole, importante na construção de telescópios; ou da elipse que, além de sua excentricidade, que teve grande influência nas descobertas astronômicas, tem uma propriedade usada na construção de refletores odontológicos e aparelhos que emitem certos raios, usados em medicina. Para mais detalhes a respeito destas propriedades, ver Noronha (2003).

Apesar de algumas restrições, como as de considerar uma *cidade ideal*, onde as ruas não têm larguras, os prédios são representados por pontos e as ruas correm diretamente no sentido Norte/Sul e Leste/Oeste, sabemos que as cônicas da G_Q têm contribuído para resolver problemas da geografia urbana relativos "a 'Localização Óptima de Empresas e de Organismos de Utilidade Pública', divisões de participações de áreas, determinação de áreas de mercado, determinação de 'Passo Mínimo'" (ABREU; BARROSO, 1982, p. 32) sendo um modelo bastante prático e válido no mundo real. Abaixo temos exemplo de uso da Geometria Urbana na localização de um posto distrital (Figura 60).

Problema: O Corpo de Bombeiros deseja localizar um Posto Distrital a quatro quarteirões de um Hospital H (-5, 0) e a dois quarteirões da caixa d'água do bairro C (-3, 4). Onde deve ser localizado o Posto Distrital?

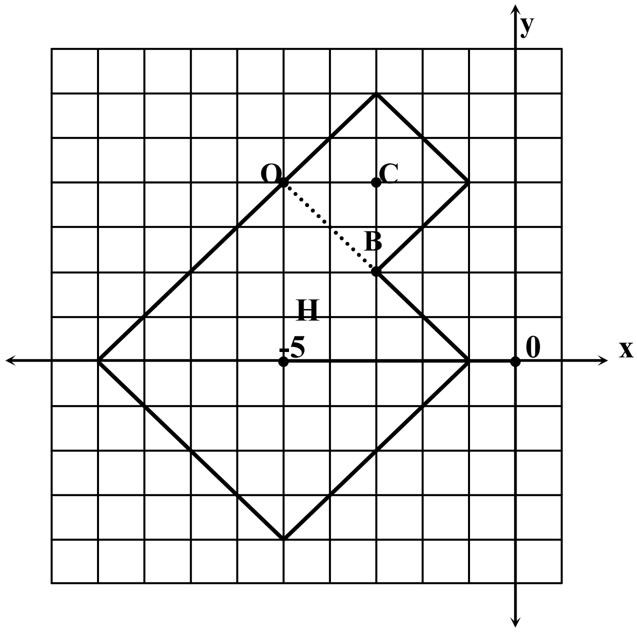


Figura 60 – Exemplo de aplicação da métrica urbana
Fonte: Revista Geografia e Ensino (1982, p. 36)

Solução: o Posto Distrital poderá localizar-se em qualquer ponto desde o ponto O (-5, 4) até o ponto B (-3, 2), localizados entre as circunferências de raio 2 e centro *C* e raio 4 e centro *H*.

Um ponto que nos deixou curiosos nos textos referentes a Geometria do Taxista foi que, ao citarem as semelhanças e diferenças entre as métricas do taxista e a euclidiana, alguns autores, como Sowell (1989) e Krause (1973), se referem a esta primeira como uma geometria não-euclidiana. Sabemos que as chamada geometrias não-euclidianas surgiram a partir das várias tentativas de demonstrar o 5º postulado de Euclides a partir dos outros quatro, portanto, buscamos nestes e noutros autores algo que se referisse a este assunto, no entanto nada encontramos.

Haja vista que não foi encontrada qualquer demonstração de que esta rejeita o referido postulado, supomos que estes usam o termo *não-euclidiana* devido a associação que costumamos fazer da geometria euclidiana a uma função analítica de distância geralmente baseada no Teorema de Pitágoras, resultado do fato de queremos usar o plano como uma primeira aproximação ao mundo físico, onde nossa intuição é que a menor distância entre dois pontos é determinada por uma reta. Entretanto, ao utilizarmos o espaço da Geometria do Taxista somos levados a aplicar uma função de distância diferente, residindo aí a principal diferença entre as geometrias.

No capítulo que segue descreveremos nosso estudo bibliográfico a respeito da teoria da Equilibração, também, importante para o presente estudo.

2

NA CORDA BAMBA

O ideal da educação não é aprender ao máximo, maximizar os resultados, mas antes de tudo aprender a aprender; é aprender a se desenvolver e aprender a continuar a se desenvolver depois da escola.

Jean Piaget

2 NA CORDA BAMBA

Como citamos anteriormente, nosso trabalho de pesquisa encontra-se sustentado, principalmente, sobre dois suportes: as Geometrias Urbana e Isoperimétrica, tratadas no capítulo anterior, e, como aporte para o desenvolvimento do conhecimento, em que temos como foco a compreensão dos conceitos que envolvem as circunferência e elipse, nos baseamos na Teoria da Equilibração de Jean Piaget, a qual trataremos neste capítulo.

Conhecer a Teoria da Equilibração mais profundamente, a fim de saber como esta poderia contribuir para a construção de uma proposta de ensino das cônicas, foi uma intenção que surgiu durante o desenvolvimento de nossa pesquisa de mestrado (NORONHA, 2003), ao percebermos que, ao conhecerem a circunferência urbana e suas relações com o que já sabiam a respeito da circunferência euclidiana, os alunos passavam pelo que Piaget chama de desequilíbrio, antes de alcançarem uma melhor compreensão a respeito do que define esta forma, ou seja, uma reequilibração (equilibração majorante) do conceito de circunferência.

Considerando, portanto, que vínhamos desenvolvendo um trabalho voltado para aplicação da Geometria Urbana na sala de aula, percebemos naquela teoria a possibilidade de assegurar a eficácia de uma proposta de ensino das cônicas com base na referida geometria.

Faremos a seguir uma panorâmica do que trata a Teoria da Equilibração a fim de ajudar o leitor a compreender qual a contribuição desta para a nossa pesquisa.

2.1 O Processo de Equilibração de Jean Piaget

Considerado uma das grandes autoridades mundiais nas ciências psicológicas, o grande cientista suíço, Jean Piaget (1896-1980), criou uma psicologia nova, colocando-a no contexto geral da interação entre o sujeito e o meio, e dedicou grande parte de sua obra à análise da evolução do pensamento infantil.

De acordo com Campos (1996) as atividades específicas de Piaget e seus colaboradores correspondem resumidamente a três categorias: a primeira refere-se a investigação do espaço, tempo, probabilidade, movimento etc., em que tarefas quantitativas (constância de massa, peso e volume) são usadas como instrumento diagnóstico para uma análise teórica das operações concretas, formais e das relações entre ambas; a segunda diz respeito a experiência sobre a percepção; e na terceira categoria destaca-se um estudo sistemático, teórico e experimental dos problemas da epistemologia genética.

Em 1950, Piaget fundou em Genebra o Centro Internacional de Epistemologia Genética, cujo objetivo é o estudo de problemas de natureza genético-epistemológica. Entre seus estudos mais importantes temos o do processo central de equilibração, um "processo (de onde o termo 'equilibração') que conduz de certos estados de equilíbrio aproximado a outros, qualitativamente diferentes, passando por múltiplos desequilíbrios e reequilibrações" (PIAGET, 1976a, p. 11), a que recorreu buscando explicar o desenvolvimento e a formação do conhecimento.

O modelo de equilíbrio de Piaget norteou nosso trabalho à medida que o utilizamos para fundamentar as atividades que aplicamos na pesquisa. No entanto, sendo este estudo um pouco vasto e complexo, rendendo ao autor e seus colaboradores a publicação de várias obras que tratam deste assunto, a exemplo de *Recherches sur la contradiction: les relations entre affirmatins et négations*[16] (1974), *L'Equilibration dês strutures cognitives*[17] (1975), *Epistémologie genétique et équilibration*[18] (1976), *Recherches Sur L'abstraction Réfléchissante – L'abstraction des relations lógico-arithmétiques Recherches Sur L'abstraction Réfléchissante – L'abstraction de l'ordre dês relations spatiales*[19] (1977) e outros nos reteremos aqui a fazer uma sucinta apresentação desta teoria, com base em algumas obras de Piaget e de outros autores, estudiosos deste, que tratam do tema proposto.

A noção de equilíbrio, segundo Piaget (1976b), é utilizada por quase todas as escolas psicológicas cognitivistas, para explicação das condutas. Como informa Piaget (1976b, p.93)

> É assim que P. Janet invocava esta noção na sua teoria das regulações afetivas e que Freud a utilizava, igualmente, neste mesmo campo. Claparède considerava a necessidade como expressão de um desequilíbrio e a satisfação o índice de uma reequilibração; a sucessão das condutas lhe parecia, assim, como uma série de desequilíbrios momentâneos e de restabelecimento de equilíbrio. A teoria Gestalt estendeu êste modo de interpretação às estruturas cognitivas (percepção e inteligência) e K. Lewin a desenvolveu na psicologia social, especialmente, pelo emprêgo da teoria dos

[16] Piaget, Jean. **Recherches sur la contradiction**: les relations entre affirmatins et négations. Vol. XXXII, Paris: PRESS UNIVERSITAIRES DE FRANCE (PUF). Coleção Etudes d'Epistémologie Génétique.
[17] Piaget, Jean. **L'Equilibration des structures cognitives**. vol. XXXIII. Paris, França: PRESS UNIVERSITAIRES DE FRANCE (PUF), 1975. Série Etudes d'Epistémologie genétique.
[18] INHELDER, Barbel, GARCIA, Rolando, VONÈCHE, Jacques. **Epistémologie génétique et équilibration**. França: Delachaux et Niestlé Éditeurs, 1976.
[19] Piaget, Jean. **Recherches Sur L'abstraction Réfléchissante – L'abstraction des relations lógico-arithmétiques Recherches Sur L'abstraction Réfléchissante – L'abstraction de l'ordre dês relations spatiales**. Paris, França: PRESS UNIVERSITAIRES DE FRANCE (PUF), 1977.

> gráficos. As teorias da aprendizagem e do condicionamento encontram, naturalmente, o problema do equilíbrio a propósito da estabilização das condutas. Quanto à teoria do desenvolvimento em geral, nós próprios, constantemente, apelamos para a noção de equilíbrio para explicar a gênese das estruturas operatórias e a passagem das regulações pré-operatórias para as operações propriamente ditas.

Como podemos perceber na citação acima as noções de equilíbrio e de equilibração permeiam muitas teorias, mas, para Piaget, como afirmam Inhelder, Garcia e Vonèche (1976), estas sempre constituíram uma preocupação explícita em que este concebe a idéia de equilíbrio como uma relação entre o todo e as partes, e as partes entre si, fazendo desta, um problema que liga o lógico ao biológico. Assim, para ele, a inteligência consiste na capacidade individual de acomodação ao meio e, desta forma, o processo cognitivo teria início nos reflexos fortuitos e difusos do recém-nascido, desenvolvendo-se por estágios, até alcançar o nível adulto do raciocínio lógico. Esta afirmação é ressaltada na seguinte citação de Piaget (1976b, p. 11)

> O desenvolvimento psíquico, que começa quando nascemos e termina na idade adulta, é comparável ao crescimento orgânico: como êste, orienta-se, essencialmente, para o equilíbrio. Da mesma maneira que um corpo está em evolução até atingir um nível relativamente estável, – caracterizado pela conclusão do crescimento e pela maturidade dos órgãos –, também a vida mental pode ser concebida como evoluindo na direção de uma forma de equilíbrio final, representada pelo espírito adulto. O desenvolvimento, portanto, é uma equilibração progressiva, uma passagem contínua de um estado de menor equilíbrio para um estado de equilíbrio superior. Assim, do ponto de vista da inteligência, é fácil se opor a instabilidade e incoerência relativas das idéias infantis à sistematização do raciocínio do adulto. No campo da vida afetiva, notou-se, muitas vêzes, quanto o equilíbrio dos sentimentos aumenta com a idade. E, finalmente, também as relações sociais obedecem à mesma lei de estabilização gradual.

Na citação anterior o autor caracteriza os estágios da evolução mental como formas de equilíbrio, as quais vão progredindo continuamente. Apesar de fazer uma analogia do desenvolvimento da mente com o do corpo, é importante ressaltar que, para Piaget, a forma final de equilíbrio orgânico é mais estático e instável que daquele primeiro, de tal modo que concluída a evolução ascendente, automaticamente, inicia-se a evolução regressiva que leva à velhice. Certas funções psíquicas que dependem do estado dos órgãos, seguem o mesmo caminho, a exemplo da acuidade visual. Já as funções superiores da inteligência e da afetividade tendem, segundo o autor, a um *equilíbrio móvel*, ou seja, quanto mais estáveis, mais haverá mobilidade, visto que “nas almas sadias, o fim do crescimento não determina de modo algum o começo da decadência, mas, sim, autoriza um progresso espiritual que nada possui de contraditório com o equilíbrio interior” (PIAGET, 1976b, p. 12).

Piaget (1976b, p.12-13), em seu livro *Seis Estudos de Psicologia*, descreve a evolução da criança e do adolescente em termos de equilíbrio, observando que

> Do ponto de vista funcional, isto é, considerando as motivações gerais da conduta e do pensamento, existem funções constantes e comuns a todas as idades. Em todos os níveis, a ação supõe sempre um interesse que a desencadeia, podendo se tratar de uma necessidade fisiológica, afetiva ou intelectual (a necessidade apresenta-se nesse último caso sob a forma de uma pergunta ou de um problema). Em todos os níveis, a inteligência procura compreender, explicar, etc.; só que as funções de interêsse, da explicação etc. são comuns a todos os estágios, isto é, ‘invariáveis’ como funções, não é mesmo verdade – que ‘os interêsses’ (em oposição ao ‘interêsse’) variam, consideràvelmente, de um nível mental a outro, e que as explicações particulares (em oposição à função de explicar) assumem formas muito diferentes de acôrdo com o grau de desenvolvimento intelectual. Ao lado das funções – constantes, é preciso distinguir as estruturas variáveis, e é precisamente a análise dessas estruturas progressivas ou formas sucessivas de equilíbrio que marca as diferenças ou oposição de um nível da conduta para outro, desde os comportamentos elementares do lactente até à adolescência.

Compreendemos que as funções e estruturas fazem parte do desenvolvimento de todo indivíduo, sendo que as primeiras “consistem nos modos biologicamente herdados de interação do indivíduo com o ambiente, e, entre elas, duas são básicas: a função de organização e a função de adaptação” (KLEIN, 2005, p. 68). Ao longo do desenvolvimento, as funções, ao contrário do que costumamos acreditar, permanecem inalteradas enquanto que as estruturas seguem variando, desencadeando um *processo de equilíbrio*, resultando num estado de equilíbrio que, por ser progressivo, como bem coloca Klein (2005) pode deflagrar novas desequilibrações e, portanto, novo processo de busca de equilibração, dirigido por um mecanismo de auto-regulação. Este processo é contínuo e estimulado diante das novas demandas colocadas pelo meio ambiente.

Com base na variação dessas estruturas sucessivamente construídas, Piaget (1976b) distingue seis estágios ou períodos de desenvolvimento. Os três primeiros estágios são aqueles que fazem parte do *período da lactância* (PIAGET, 1976b, p. 13), que corresponde ao período que vai até 1 ano e 6 meses a 2 anos e que antecedem o desenvolvimento da linguagem e do pensamento, são eles: o *primeiro* é o estágio dos reflexos, ou mecanismos hereditários, assim como também das primeiras tendências instintivas (nutrições) e das primeiras emoções; o *segundo* é o estágio dos primeiros hábitos motores e das primeiras percepções organizadas, como também dos primeiros sentimentos diferenciados; o *terceiro* é o estágio da inteligência senso-motora ou prática (anterior à linguagem), das regulações afetivas elementares e das primeiras fixações exteriores da afetividade. O *quarto* corresponde ao período de dois a sete anos, ou segunda parte da primeira infância, é o estágio da inteligência intuitiva, dos sentimentos interindividuais espontâneos e das relações sociais de submissão ao adulto. O *quinto* estágio ocorre dos sete aos onze-doze anos, é nesse momento que se dá as operações intelectuais concretas (começo da lógica) e dos sentimentos morais e sociais de cooperação. No *sexto* e último estágio o ser humano desenvolve as operações intelectuais abstratas, forma a personalidade e se insere afetiva e intelectualmente na sociedade dos adultos, corresponde a fase da adolescência. Piaget (1976b) coloca que cada um desses estágios constitui, pela estrutura que os definem, uma forma particular de equilíbrio, efetuando-se a evolução mental no sentido de uma equilibração sempre mais completa. É importante deixar claro que a periodização desses estágios são apenas indícios e não regras, como muitos enganosamente acreditam e, portanto, podem variar de indivíduo para indivíduo.

O equilíbrio psicológico não é concebido para Piaget (1976b) como um balanceamento de forças em estado de repouso, mas, é definido amplamente pela compensação proveniente das atividades do sujeito em resposta às perturbações exteriores. Para o autor, o importante na explicação psicológica, não é o equilíbrio enquanto estado, mas, sim, o próprio processo de equilibração. “O equilíbrio é apenas um resultado, enquanto que o processo, como tal, apresenta maior poder explicativo” (PIAGET, 1976b, p. 94).

De acordo com Dolle (1993) para tentar responder às principais questões concernentes à maneira pela qual nossos conhecimentos são adquiridos e desenvolvidos, Piaget considerou na atividade do sujeito tanto o que vem dele, como o que vem do objeto. Daí, segundo o autor, a distinção feita por Piaget – a despeito de suas limitações – entre o que ele chama abstração empírica e abstração reflexionante (*réfléchissante*). Hermann[20] (apud Dolle, 1993, 18), descreve que esta primeira “tira sua informação dos próprios objetos, como no caso em que o sujeito de qualquer idade consegue fixar, entre os resultados da ação de sopesar um sólido, unicamente o peso do objeto, negligenciando sua cor, suas dimensões, etc.” e a

[20] Hermann, **Adaptation vitale et psychologie de L’intelligence**. Paris: s. e., 1974, p. 81.

segunda “é tirada, não dos objetos, mas das coordenações de ações (ou de operações), portanto, das atividades do sujeito”.

Segundo Piaget (1976a) os sistemas cognitivos são ao mesmo tempo abertos num sentido (o de trocas com o meio) e fechados em outros, enquanto *ciclos*. Chamemos A, B, C etc., as partes constituintes de um determinado ciclo, e A', B', C' etc., os elementos do meio necessário a sua alimentação; estamos então em presença de uma estrutura, cuja forma esquemática é: (A x A') → B; (B x B') → C; ... ; (Z x Z') → A etc. Assim, as formas de equilíbrio referem-se

> às ações conservadoras que os elementos ou os subsistemas exercem uns sobre outros, em oposição às forças de sentidos contrários que estão em balanço num equilíbrio mecânico (notemos que num sistema lógico, mesmo as afirmações e as negações se implicam ou se conservam mutuamente). Em particular, uma tal ação conservadora é aplicada ao sistema total pelos subsistemas ou seus elementos, e reciprocamente, o que equivale a dizer que o equilíbrio se refere entre outras coisas a uma solidariedade da diferenciação e da integração. (PIAGET, 1976a, p. 12).

Desse modo, em caso de *perturbação exterior*, a uma substituição de B" a B', ou esta conservação do todo se torna impossível ou há modificação compensadora e ocorre adaptação com sobrevida, no caso de um organismo ou novo equilíbrio do sistema cognitivo, ou seja, “com possibilidade de que o sistema anterior continue válido a título de subestrutura para a classe de objetos B' e engendre uma nova subestrutura para os objetos B" ”. (PIAGET, 1976a, p. 12-13).

Os dois processos fundamentais que constituem os componentes de todo o equilíbrio cognitivo são: a assimilação e a acomodação.

A *assimilação* é a “incorporação de um elemento exterior (objeto, acontecimento etc.) em um esquema sensório motor ou conceitual do sujeito” (PIAGET, 1976a, p. 13), em outras palavras, é o processo pelo qual os elementos do ambiente são alterados, a fim de poderem ser incorporados. Trata-se, não apenas da relação entre os A', B', C', ... e os A, B, C, ...; como também, da assimilação recíproca quando dois esquemas ou dois subsistemas se aplicarem aos mesmos objetos (por exemplo, olhar e pegar) ou se coordenarem sem mais necessidade de conteúdo atual.

O segundo processo é a *acomodação*, isto é, “a necessidade em que se acha a assimilação de levar em conta as particularidades próprias dos elementos a assimilar”

(PIAGET, 1976a, p. 14), ou seja, são os esquemas ou estruturas do indivíduo que se modificam para se adaptarem ao ambiente. O esquema de pegar, por exemplo, não se aplica da mesma maneira a objetos muito pequenos e a grandes objetos. No que refere às relações entre os subsistemas e aquelas que unam sua diferenciação e a integração numa mesma totalidade, se as assimilações recíprocas não se acompanhassem de acomodações igualmente recíprocas, haveria, o que Piaget chama de *fusão deformante* e não mais coordenação entre os sistemas a religar. Por exemplo,

> a síntese das estruturas numéricas e espaciais, à qual conduz toda a métrica, supõe a divisão do conteúdo em unidades, mas sem eliminar, por isso, a continuidade, etc. Mas é claro que se a acomodação está continuamente subordinada à assimilação (pois é sempre a acomodação de um esquema de assimilação), esta subordinação é mais estreita e sobretudo mais previsível no caso destas acomodações recíprocas que no das adaptações aos objetos exteriores A', B', C', etc., quando novos dados observáveis surgem de maneira inesperada sob a pressão da experiência. (PIAGET, 1976a, p. 14).

Desta forma, os processos de assimilação e acomodação, apesar de distintos em nível conceitual, são indissociáveis na realidade concreta de qualquer ato adaptativo. Toda assimilação de um objeto ao organismo supõe, ao mesmo tempo, uma acomodação do organismo ao objeto e; inversamente, toda acomodação é, ao mesmo tempo, uma modificação assimilativa do objeto ao qual o organismo se acomoda. Pois, conforme ressalta Piaget (1976a, p. 95-96), levando em conta a interação fundamental entre fatores internos (maturação) e externos (ações do meio), "tôda conduta é uma *assimilação* do dado a esquemas anteriores (assimilações a esquemas hereditários em graus diversos de profundidade) e tôda conduta é, ao mesmo tempo, *acomodação* destes esquemas à situação atual". Assim, temos que toda conduta recorre, necessariamente, a noção de equilíbrio entre os fatores internos e externos ou, mais em geral, entre assimilação e acomodação.

Considerando tal interação, Campos (1996) destaca a função das fases de assimilação e acomodação no processo de aprendizagem ressaltando que, esta primeira já poderá produzir um fenômeno de aprendizagem, sob a forma de transferência de reação, como ocorre no processo de condicionamento, em que a reação a um excitante incondicionado passa a ser produzida por um excitante novo. Neste caso, a condição de desencadeamento do comportamento é constituída pela incorporação ativa de um estímulo ambiental novo a uma estrutura que o sujeito já possui. "Se não existir no sujeito um esquema de ação pronto para assimilar o excitante, não se desencadeará nenhuma modificação, portanto nenhuma aprendizagem ocorrerá" (CAMPOS, 1996, p. 264). A segunda fase, a de acomodação, "corresponde ao processo de aprendizagem sob a forma, mais geral, de modificação do esquema de reação propriamente dito, sob o efeito do êxito" (CAMPOS, 1996, p. 264). Assim, a satisfação da necessidade é conseguida através da experiência.

As fases referidas no parágrafo anterior deixam claro, não apenas a importância da ação para a efetivação da aprendizagem, como também a necessidade de se trabalhar, no âmbito escolar, os assuntos a partir de uma seqüência de aplicações a fim de que os alunos possam ter esquemas prontos para que, com a absorção de novas experiências, possa ocorrer a aprendizagem. Podemos, ainda, remeter a importância do estudo de Piaget numa perspectiva interdisciplinar, em que os conhecimentos, importantes para a maturação do sujeito, não são fatos isolados.

De acordo com Campos (1996, p. 167), "Piaget considera as reações cognitivas e emocionais como interdependentes em seu funcionamento". Assim,

> Na fase de acomodação, o esquema reacional não podendo modificar a realidade, para incorporá-la, tem necessidade de se modificar e o sujeito precisa aprender um novo esquema, por meio da própria ação que satisfaz sua necessidade. Igualmente, na incorporação da realidade pela assimilação, só são assimilados os objetos capazes de satisfazer a necessidade implicada no esquema reativo do sujeito, não sendo essa necessidade outra coisa senão o aspecto conativo ou afetivo de um esquema, enquanto reclamando a realidade que é capaz de assimilar. (CAMPOS, 1996, p. 167).

Assim, nas suas interações com o meio, o sujeito se estrutura e reestrutura ou se desequilibra e reequilibra. Para isso, ele procede, primeiramente, por assimilação das propriedades dos objetos às suas estruturas; posteriormente, qualquer resistência a essa ação vai provocar uma espécie de reavaliação dessas estruturas e vai constrangê-las a se modificarem, a se transformarem por acomodação para virem a assimilar de novo, ou seja, para vencerem a dificuldade representada por esta resistência. Dessa forma, há uma procura constante, por parte do sujeito, pelo equilíbrio entre assimilações e acomodações com os objetos sobre os quais incide, se autoconstruindo, autotransformando, auto-regulando e, assim, adquirindo sempre conhecimentos novos e mais complexos.

Para elaborar uma teoria da equilibração Piaget (1976a) ressalta a importância de se considerar dois postulados:

1º postulado: “Todo esquema de assimilação tende a alimentar-se, isto é, a incorporar elementos que lhe são exteriores e compatíveis com sua natureza” (PIAGET, 1976a, p. 14). Neste postulado vemos clara a necessidade de uma atividade do sujeito, mas, segundo o autor, não implica por si só na construção de novidades, pois um sistema amplo, como o de *seres*, poderia assimilar todo o universo sem modificá-lo nem enriquecer-se de compreensão.

2º postulado: “Todo esquema de assimilação é obrigado a se acomodar aos elementos que assimila, isto é, a se modificar em função de suas particularidades, mas, sem com isso, perder sua continuidade (portanto, seu fechamento enquanto ciclo de processos interdependentes), nem seus poderes anteriores de assimilação” (PIAGET, 1976a, p. 14). Este postulado afirma a necessidade de um equilíbrio entre a assimilação e a acomodação, na medida em que a acomodação é bem sucedida e permanece compatível com o ciclo, modificado ou não. Isto implica, segundo o autor, em afirmar a presença necessária de acomodações nas estruturas de ciclos e a conservação de tais estruturas em caso de acomodações bem sucedidas.

De acordo com Piaget há três formas de equilibração. A primeira ocorre em “função da interação fundamental de início entre o sujeito e os objetos[21], há primeiramente a equilibração entre a assimilação destes a esquemas de ações e a acomodação destes últimos aos objetos” (PIAGET, 1976a, p. 15). Nesta, é possível notar um começo de conservação mútua em que se percebe a necessidade do objeto para que haja a ação e, como afirma o autor, reciprocamente, é o esquema da assimilação que confere sua significação ao objeto, transformando-o (deslocamento, utilização etc.) graças a esta ação.

A segunda forma consiste em “uma equilibração a assegurar às interações entre os sistemas. Ela está longe de ser automática ou manifesta desde a partida, porque os subsistemas podem evidenciar esquemas de início independentes.” (PIAGET, 1976a, p. 15-16). Segundo o autor, efetivamente, a incorporação a um esquema de todos os elementos que a ele se atribuem, tal como descreve o primeiro postulado, não funciona se não progressivamente, sobretudo no caso das assimilações recíprocas; e, por outro lado, os subsistemas se constroem comumente em velocidades diferentes havendo, aí, razões de desequilíbrios possíveis e a necessidade de uma equilibração. No entanto, esta é do tipo diferente da primeira, pois se a acomodação dos esquemas à realidade exterior está exposta à intervenção de múltiplos obstáculos inesperados, a assimilação recíproca de dois subsistemas

[21] Segundo Klein (2005, p. 79), Piaget aposta demasiado na existência autônoma do objeto, pois, se a coisa depende da consciência individual para permanecer existindo – como coisa –, o objeto tem sua existência inteiramente determinada pelas relações sociais.

válidos e sua acomodação recíproca, cedo ou tarde serão bem sucedidas e conduzirão, pois, a uma conservação mútua.

A terceira corresponde ao "equilíbrio progressivo da diferenciação e da integração, logo das relações que unem subsistemas a uma totalidade que os engloba" (PIAGET, 1976a, p. 16). Este tipo acrescenta, em relação ao segundo, uma hierarquia às relações colaterais. De acordo com Piaget (1976a, p. 16) "uma totalidade é caracterizada por suas leis próprias de composição, constituindo um ciclo de operações interdependentes e de ordem superior aos caracteres particulares dos subsistemas". Por exemplo, no caso do referencial exterior a um móvel como um trem e o referencial interno de um passageiro no trem em marcha. Neste caso, a integração em um todo é tarefa da assimilação e a diferenciação exige acomodação. No entanto, há conservação mútua do todo e das partes e, assim, assimilações e acomodações recíprocas, mas segundo uma dimensão de hierarquia e não mais colateral. Para Piaget (apud INHELDER, GARCIA e VONÈCHE, 1976) esta equilibração é a mais difícil e a mais tardia a realizar-se sob formas, aliás, sempre provisórias, já que, seja qual for a forma de equilíbrio ela será sempre ultrapassada.

Os três tipos de equilibrações de que trata o autor, como podemos perceber, referem-se ao equilíbrio entre a assimilação e a acomodação e de conduzir os caracteres positivos pertencentes aos esquemas, subsistemas ou totalidades em jogo. Mas, há algo mais, segundo Piaget (1976a), a equilibração de cada uma das estruturas consideradas comporta, ainda, uma certa correspondência, da qual se tratará de determinar a natureza, entre as afirmações e as negações, ou os caracteres positivos e negativos, sendo estes necessários à delimitação dos caracteres positivos. Assim, os três tipos de equilibração resultam do ajustamento progressivo da assimilação e da acomodação (primeiro e segundo postulados), podendo efetuar-se de maneira espontânea e intuitiva, por *tateamentos sucessivos*, eliminando os fracassos e retendo os sucessos mas, à medida que o sujeito tenta obter uma estabilidade coerente, torna-se então necessário utilizar as exclusões a fim de assegurar ao equilíbrio uma correspondência exata das afirmações e das negações.

Algo que não podemos deixar de enfatizar é a importância dada por Piaget aos sistemas de ações internas ou externas. Nesse sentido, Campos (1996) explica que Piaget aplica o modelo de equilíbrio aos sistemas de ações, internas ou externas, que o sujeito realiza no ambiente de objetos e acontecimentos, considerando que estes formam sistemas equilibrados, os quais a autora diz tratar de "equilíbrios dinâmicos, distintos do estado estático, obtido com o equilíbrio de uma balança" (CAMPOS, 1996, p. 259).

Para Campos (1996, p.262), visto que

> a aprendizagem para Piaget também se caracteriza como uma aquisição realizada pela experiência anterior, mas sem controle sistemático e dirigido pelo próprio aprendiz, como querem outros. Naturalmente, se as modificações nas estruturas resultam da adaptação, que se faz pelos processos de assimilação e acomodação, atuantes conforme os esquemas existentes no sujeito, não é possível a este sujeito exercer um controle sistemático da experiência. As estruturas vão se construindo como verdadeiros extratos de ação, entre sujeito e objeto ou situação a que necessita se adaptar.

Dessa forma, podemos concluir que o processo de aprendizagem concebido por Piaget contrapõe-se à aquisição por *insight*, percepção imediata sem aproveitamento da experiência anterior, e à aquisição por indução, de controle mais ou menos sistemático por parte do sujeito, manifestando-se como uma modificação da conduta. Mas, como afirma Campos (1996), trata-se de um esquema de ação cuja tendência inicial é de assimilar objetos, incorporando-os a certo padrão de conduta existente, mas que pode transformar-se, sob o efeito de uma tendência compensatória de acomodação aos objetos após o êxito da ação, ou seja, da satisfação proporcionada a uma necessidade preexistente.

O *desequilíbrio*, por sua vez, desempenha um importante papel no processo de equilibração, pois é visto como uma fonte de progresso no desenvolvimento dos conhecimentos, haja vista que estes, segundo Piaget (1976a, p. 18) "por si sós obrigam um sujeito a ultrapassar seu estado atual e a procurar o que quer que seja em direções novas".

Dessa forma os desequilíbrios estão entre os principais pontos da pesquisa representando um papel de desencadeamento. Assim, a reequilibração pode ser vista como a fonte do progresso, num sentido não de retorno a forma anterior de equilíbrio, mas ao melhoramento desta, conseguido através do desequilíbrio, chegando ao que Piaget chama de *equilibração majorante* (reequilibração com melhoramento obtido). Na perspectiva construtivista de Piaget, o inatismo e a maturação desempenham um papel no desenvolvimento cognitivo insuficiente para explicar as novidades que geram, sendo estas atribuídas pelo psicólogo (INHELDER; GARCIA; VONÈCHE, 1976) a uma equilibração majorante.

Os desequilíbrios são mais dificilmente superados nos estágios iniciais, a razão disso, de acordo com Piaget (1976a, p. 21) é que "consistindo a marcha espontânea do espírito em centrar-se sobre as afirmações e os caracteres positivos dos objetos, ações ou mesmo operações, as negações são então negligenciadas ou não se constroem senão secundária e laboriosamente" e, como afirma o autor, como elas são necessárias a todas as formas de equilibração, estas não se realizam senão através de múltiplas dificuldades, e sua elaboração ocupa longos períodos. Assim, como ressalta Campos (1996), a interpretação de equilibração-equilíbrio é concebida como algo muito geral, que supõe as condições causais da maturação e da aprendizagem, como também inclui ambas.

No que se refere as negações, Piaget (1976a, p. 22)enfatiza, ainda, que, sob o ponto de vista psicológico,

> os únicos casos em que a negação é precoce são aqueles onde o sujeito não tem que construí-la, porque ela é imposta de fora: por exemplo um desmentido dos fatos em resposta a uma previsão falsa (ou efetivamente uma recusa, quando de um conflito com uma vontade contrária). Mas, mesmo quando um acontecimento invalida uma previsão, ou de modo geral quando há fracasso nos ensaios de acomodação a um objeto, ocorre que para compreender as razões do fracasso e sobretudo para transformá-lo em sucesso, é preciso distinguir as propriedades positivas *A* e sua ausência *não-A* com justificação desta negação.

Além dessas situações, há outras construções que levam ao resultado operatório da coordenação das negações e das operações positivas. O Piaget (1976a) aconselha, portanto, esperar a formação das *operações concretas* (início aos 7-8 anos) para chegar a esta elaboração das negações.

Enfim, a equilibração que, em suas diversas formas, parece constituir o fator fundamental do desenvolvimento cognitivo, não é simplesmente um dos aspectos e nem um aspecto cujo grau de importância ou de necessidade permaneceria mais ou menos constante em todos os níveis. Mas, conforme explica Piaget (1976a, p. 23), é exatamente o contrário, pois "durante os períodos iniciais existe uma razão sistemática de desequilíbrio, que é a assimetria das afirmações e das negações, o que compromete não só o equilíbrio entre o sujeito e os objetos, entre os subsistemas, como também entre o sistema total e as partes". Assim, a equilibração progressiva é um processo indispensável do desenvolvimento e um processo cujas manifestações se modificarão, de estágio em estágio, no sentido de um melhor equilíbrio em sua estrutura qualitativa como em seu campo de aplicação, devido a construção e ao aprimoramento das negações.

Piaget explica o *como* da equilibração e das reequilibrações através do processo das regulações. De acordo com Piaget (1976a, p. 24), fala-se de regulação, de modo geral,

> Quando a retomada A' de uma ação de A é modificada pelos resultados desta, logo quando de um efeito contrário dos resultados de A sobre seu novo desenvolvimento A'. A regulação pode, então, manifestar-se por um correção de A (*feedback* negativo) ou por um reforçamento (*feedback* positivo), mas neste caso com possibilidade de um crescimento do erro (como ilustra o modelo material de um incêndio) ou de sucesso (formação dos hábitos, etc). Compreender a equilibração será o mesmo que apelar para certas regulações, mas não todas, e ficará ainda por explicar esta escolha, assim como precisar a formação dos reguladores que comandam a direção das regulações.

Para Piaget (1976a), do ponto de vista do sujeito, um esquema de assimilação confere uma certa significação aos objetos assimilados, o que determina, assim, objetivos definidos às ações que a eles se relacionam. Definindo uma perturbação como um obstáculo a uma assimilação, todas as regulações (portanto, equilibração) são, do ponto de vista do sujeito, reações a perturbações.

Piaget distingue duas grandes classes de perturbações. "A primeira compreende as que se opõem às acomodações: resistências do objeto, obstáculo às assimilações recíprocas de sistemas e subsistemas etc." (PIAGET, 1976a, p. 25), são as causas dos fracassos e dos erros e as regulações que lhe correspondem comportam *feedbacks* negativos. "A segunda classe de perturbações, fontes de desequilíbrios, consiste, ao contrário, em lacunas, que deixam as necessidades insatisfeitas e se traduzem pela insuficiente alimentação de um esquema". No entanto, a lacuna só é uma perturbação "quando se trata da ausência de um objeto ou das condições de uma situação que seriam necessárias para construir uma ação, ou ainda da carência de um conhecimento que seria indispensável para resolver um problema" (PIAGET, 1976a, p. 25). Sendo assim, a lacuna enquanto perturbação é relativa a um esquema de assimilação já ativado e o tipo de regulação correspondente comporta um *feedback* positivo[22] ou reforço (primeiro postulado).

Vale ressaltar que não há regulação (portanto, equilibração) em casos cuja perturbação: provoca uma simples repetição da ação, sem qualquer mudança; ou leva ao cessar da ação; ou mesmo quando há mudança na direção da atividade, por parte do sujeito interessado por um aspecto imprevisto da perturbação.

Os estados de equilíbrio estão sempre sendo ultrapassados devido a uma razão muito positiva, pois, "todo conhecimento tende a levantar novos problemas à medida que resolve os

[22] No entanto, para Piaget (1976a) a dualidade entre *feedbacks* positivos e negativos só é de fato dicotômica quando se trata de casos isoláveis de um comportamento de conjunto, tal como a formação de uma estrutura, mas que nesta formação como tal ambos intervêm, o primeiro consistindo em reforços e o segundo em correções, ambos necessários ao funcionamento de uma conduta.

precedentes” (PIAGET, 1976a, p. 34), a exemplo do que ocorre nos domínios lógico-matemáticos, citados pelo autor, pois, nestes, mesmo o equilíbrio sendo maximizado, visto que é uma verdade adquirida por demonstração, portanto, permanente, ele não constitui ponto de parada, haja vista que uma estrutura acabada pode dar lugar a exigência de diferenciações em novas subestruturas ou a integração em estruturas mais amplas.

Segundo Campos (1996) a equilibração equivale ao processo pelo qual as estruturas mudam de um estado a outro, sendo o equilíbrio o resultado deste processo. Para Piaget (1976a, p. 34-35).

> a razão deste melhoramento necessário de todo o equilíbrio cognitivo está em que o processo da equilibração acarreta de modo intrínseco uma necessidade de construção, logo de ultrapassagem, pelo próprio fato de que ele não assegura uma certa conservação estabilizadora senão no interior de transformações das quais esta última constitui somente o resultante: em outras palavras compensação e construção são sempre indissociáveis.

Assim, um sistema não constitui jamais um acabamento absoluto dos processos de equilibração e novos objetivos derivam sempre de um equilíbrio atingido, instável ou estável. Portanto, a equilibração será sempre uma estrutura direcionada a um melhor equilíbrio, não permanecendo, conforme o autor, num estado definido nenhuma estrutura equilibrada, mesmo que ela conserve suas características especiais sem modificações.

Piaget menciona três categorias de enriquecimentos devido às regulações e às equilibrações resultante, entre as quais temos: em primeiro lugar, que “à medida que os elementos perturbadores são assinalados ao esquema que não podia até então a ele se acomodar, a extensão do esquema é por isto mesmo acrescida”; em segundo lugar, “o sucesso das regulações compensadoras resulta em diferenciações, em compreensões e não somente em extensão” (PIAGET, 1976a, p. 35) e em terceiro lugar a ampliação ao mesmo tempo das normas de acomodação e favorecimento a formação de novos subsistemas, com o que eles comportam de novas conexões e de revitalização necessária.

No referente às variedades de equilibração majorante que constituem progresso tirado das estruturas das regulações, o progresso mais geral é o da construção gradual das negações de diversas ordens que, por sua vez, consiste “o mais importante enriquecimento” (PIAGET, 1976a, p. 38), posto que elas constituem uma condição necessária ao equilíbrio e que “sua carência inicial, com relação a um primado sistemático das afirmações, constituía a razão dos desequilíbrios tão numerosos, profundos e difíceis de superar, próprios aos estágios pré-operatórios” (PIAGET, 1976a, p. 38).

Considerando o que vimos até aqui sobre a Teoria da Equilibração, podemos concluir que, para Piaget, a necessidade de conhecer não é uma propriedade intrínseca desde o princípio, desse modo, ressalta-se a necessidade de, no processo de educação, serem valorizadas concepções da aprendizagem que priorizam os impulsos de exploração, as necessidades das realizações de atividades sensoriais etc., admitindo o conhecimento como uma construção dependente da atividade do sujeito, na relação com o objeto e negando a existência de uma realidade pronta, independente e imposta ao sujeito. No subitem seguinte faremos uma reflexão sobre o processo educativo com base em nossa leitura a respeito do processo de equilibração.

2.2 Pensar a educação a partir da Teoria da Equilibração

Pensar a educação considerando a teoria piagetiana aqui apresentada é considerar uma formação em que o sujeito é ativo na construção de seu conhecimento, o qual acontece em um ambiente estimulador, onde este pode experimentar, trocar idéias e desenvolver regulações. Pois, “o ideal da educação não é aprender ao máximo, maximizar os resultados, mas antes de tudo aprender a aprender; é aprender a se desenvolver e aprender a continuar a se desenvolver depois da escola” (PIAGET[23] apud DAVIS, NUNES e SILVA, 2004, p. 51). Aprender a aprender para Piaget consiste em incentivar a criança a reconstruir conceitos através, principalmente, da interação com o professor, com os objetos, com os colegas e com situações-problema que dêem a ela os recursos cognitivos e o estímulo intelectual necessário para essa reconstrução.

Conforme Davis, Nunes e Silva (2004, p. 44)

> Há, evidentemente, na proposta piagetiana de desenvolvimento cognitivo, uma fertilidade educacional ímpar: por seu intermédio, é possível derivar uma teoria de aprendizagem e, dessa última, uma teoria de ensino que se fundamentem, ambas, nos processos que permitem a construção de

[23] PIAGET, Jean. **Biologia e conhecimento**: ensaio sobre as relações entre as regulações orgânicas e os processos cognoscitivos. Petrópolis: Vozes, 1973.

> conhecimentos novos (mais amplos e superiores do que os precedentes). Faz-se importante, ao mesmo tempo, que não se esqueça que essa construção só ocorre quando há condições para tal.

Entendemos, assim, que cabe à escola – local socialmente definido como encarregado da função de educar – e aos responsáveis pela educação que ofereçam à sua clientela condições adequadas a sua aprendizagem.

Uma dessas condições é a ação impulsionada por afetos, de modo que são estes que movem a cognição, sem esquecer da importância da relação entre membros mais e menos experientes; entre os que ensinam e os que aprendem e entre os aspectos materiais e sociais. Nesse sentido Freitag (1993, p. 28) afirma que

> a concepção defendida por Piaget e pelos pós-piagetianos é a de que as estruturas do pensamento, do julgamento e da argumentação são o resultado de uma construção realizada por parte da criança em longas etapas de reflexão, de remanejamento. Poderíamos dizer que essas estruturas resultam da ação da criança sobre o mundo e da interação da criança com seus pares e interlocutores.

Como podemos perceber, no comentário da autora, a importância da interação do sujeito é demonstrada também por Piaget e pelos pós-piagetianos que acreditam que não apenas a interação da criança com os sujeitos que a cercam, mas também a sua ação sobre o mundo, ou seja, os experimentos que ela fará, permitirão uma melhor estruturação de seus pensamentos.

Em várias de suas obras Piaget deixa claro a importância da criança, como organismo vivo, agir no e sobre o mundo e interagir com o mundo para que ocorra o que ele denominou de *assimilação* e *acomodação* das estruturas de pensamento. A respeito disso Freitag (1993, p. 32) nos diz que

> A ação em pensamento não é outra coisa senão a ação refletida, interiorizada nas estruturas mentais. Se ela não age, não pode pensar, porque não pode internalizar, interiorizar formas de ação concretizadas que se transformarão em operações mentais e, futuramente, em previsões, em planejamento, em deduções de realidades ainda não vividas.

Ou seja, os resultados das experiências que a criança adquire ao interagir com o mundo e com os colegas impõem uma organização interna dos pensamentos necessária para que ela possa planejar suas ações futuras.

Freitag (1993), baseada em estudos sobre Piaget, nos diz que este, apesar de não privilegiar o social sobre o individual, ou seja, a ação do mundo sobre a criança, acredita que somos produtos de nosso meio, por sermos co-estruturados pelas estruturas macro e microsociais, mas, não somos meros reflexos dessas estruturas. Segundo Freitag (1993, p.30), "em seus estudos sobre pensamento e linguagem, Piaget defende a necessidade da contradição, do conflito com outros, para construirmos nosso pensamento, nossa competência argumentativa e nossa competência de julgamento".

Dessa forma, entendemos que para que o ser humano possa compreender melhor o mundo social e, até mesmo, intervir sobre este, é necessário que haja a influência de outros, para que assim, esse possa contrastar, analisar suas idéias e as daqueles.

Uma das atitudes da qual o sujeito vai tendo consciência em relação à sua sociedade é a da capacidade de ser acolhido ou recriminado por esta, a partir de suas ações e mediante a valores tidos como necessários para classificá-lo como um *bom* ou *mau* cidadão.

Para Moretto (1999), constantemente o sujeito analisa a simetria entre a realidade objetivada pela sociedade e a construída por ele a partir do processo de socialização. Se este paralelo é perfeito, dizemos que tem bons conhecimentos. Portanto, é um indivíduo ajustado a sociedade. Segundo o autor, neste caso, o processo pode tornar-se tão forte, que o indivíduo toma a realidade socialmente construída como uma realidade ontológica, passando a aceitar informações não vivenciadas por ele, mas apresentadas pela sociedade, como verdadeiras.

Quando esta realidade se rompe, ocorre o que Kuhn (1989, p. 275) afirma ser características de "revoluções", "episódios – exemplificados nas suas formas mais extremas e facilmente reconhecidas pelo advento do copernicanismo, darwinismo ou einsteinianismo – em que uma comunidade científica abandona o caminho, outrora venerado, de olhar para o mundo e de exercer a ciência a favor de outra abordagem da sua disciplina, em geral incompatível".

A sociedade também se responsabiliza por dividir socialmente os indivíduos, realizando a "distribuição social dos conhecimentos, em função do papel de cada indivíduo na sociedade, ou seja, os conhecimentos de um padeiro, não são os mesmos de um médico, e os deste não são os mesmos de um padre" (MORETTO, 1999, p. 24). Não podemos desconsiderar que todos têm um papel importante, o que não quer dizer que tenha que se estabelecer fronteiras entre saberes. Dessa forma, cabe a escola proporcionar ao sujeito a oportunidade de uma formação ampla, que dê possibilidades a este de, no momento certo, poder escolher o caminho com o qual este se identifique melhor.

No que concerne à relação entre professor e aluno, Moretto (1999, p. 105-106) afirma que esta tem sido afetada pela freqüente dicotomia entre as *concepções prévias*, conceituadas pelo autor como a "estrutura cognitiva formada por idéias e concepções ligadas ao senso comum de seu meio social e às representações que ele mesmo constrói em função de suas próprias experiências" e as *concepções escolares*, designadas como conjunto de saberes, o *saber oficial* proposto pela escola. A respeito dessa dicotomia o autor expõe que, por serem originadas a partir do senso comum, as concepções prévias acabam sendo tidas como erradas ou de pouca importância. Dessa forma, elas são excluídas para dar lugar às concepções escolares, o *saber correto*, ou seja, é desconsiderado o ponto de partida do processo da construção do conhecimento pelo aluno.

Atitudes como esta fazem, muitas vezes, o aluno acreditar por acreditar, ter como verdade, porque foi algo afirmado pelo professor, ou, até mesmo, responder questões em certas situações, como a de uma prova, apenas o que sabe que o professor quer, quando, intimamente, acredita que a verdade pode ser outra. Um exemplo disso pode ser verificado, quando um aluno resolve uma atividade matemática aplicando fórmulas de áreas das figuras planas sem, pelo menos, ter qualquer idéia de como estas são aplicadas na prática, mas, apenas por ter decorado as fórmulas.

A fim de incentivar o professor a repensar o seu papel no processo de ensino e aprendizagem, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) ressaltam a importância deste profissional desenvolver seu trabalho sob uma perspectiva que considere a criança como *protagonista da construção de sua aprendizagem*, a exemplo do *professor organizador da aprendizagem*, *consultor*, *mediador*, *controlador* e *incentivador da aprendizagem*. Estudiosos, como Jean Piaget, Richard R. Skemp, L. S. Vygotsky e outros, por sua vez, enfatizam em seus trabalhos a importância do professor ter alguma compreensão da forma como o sujeito cognoscente aprende, para que possa agir de forma eficaz, proporcionando que seus alunos alcancem o aprendizado desejado.

Todas estas funções designadas ao professor são importantes, pois não podemos formar um indivíduo crítico, se durante as aulas o aluno não tiver espaço para questionar, expor seu ponto de vista; nem podemos formar um aluno reflexivo, se não lhe for oferecido diferentes alternativas para chegar a um resultado, a fim de que ele escolha qual a mais adequada; assim como também não se formará cidadão cooperativo, se o indivíduo não for estimulado a trabalhar em grupo; não se formará cidadão responsável, se não houver cobrança na realização de trabalho ou no tempo de entrega deste.

Partindo desta concepção, o professor poderá, portanto, tornar o ensino um processo de elaboração de situações pedagógicas e didáticas que facilitem a aprendizagem, criando situações que sejam suficientemente simples (permitindo que se parta do que se sabe) e suficientemente difíceis para provocarem desequilíbrios (constituindo, portanto, desafios para os alunos), favorecendo, assim, a construção de relações entre os conhecimentos, tornando esse momento mais significativo para o aluno.

Dessa forma, explorar informações que os estudantes já possuem sobre determinado assunto pode ser a melhor "ponte" para que o professor inicie o trabalho com determinado conteúdo, ajudando, até mesmo, com que aquele explore melhor e estabeleça relações entre os conhecimentos, tornando-os mais significativos.

No entanto, para partir do *conhecimento prévio* do aluno, torna-se necessário também que o professor conheça o meio social em que vive, para que possa usar linguagem, exemplos e atividades adequados; conheça sua estrutura cognitiva, para saber como atuar, ou seja, se o aluno se encontra num estágio de desenvolvimento em que precisa de materiais concretos para abstrair; conheça os conteúdos de sua disciplina, assim como as relações que os ligam às experiências vividas por eles; saiba intervir, de forma a permitir que os estudantes formem os conhecimentos significativos e contributivos para sua formação como cidadão, utilizando-se, para isso, dos mais variados recursos e técnicas pedagógicas.

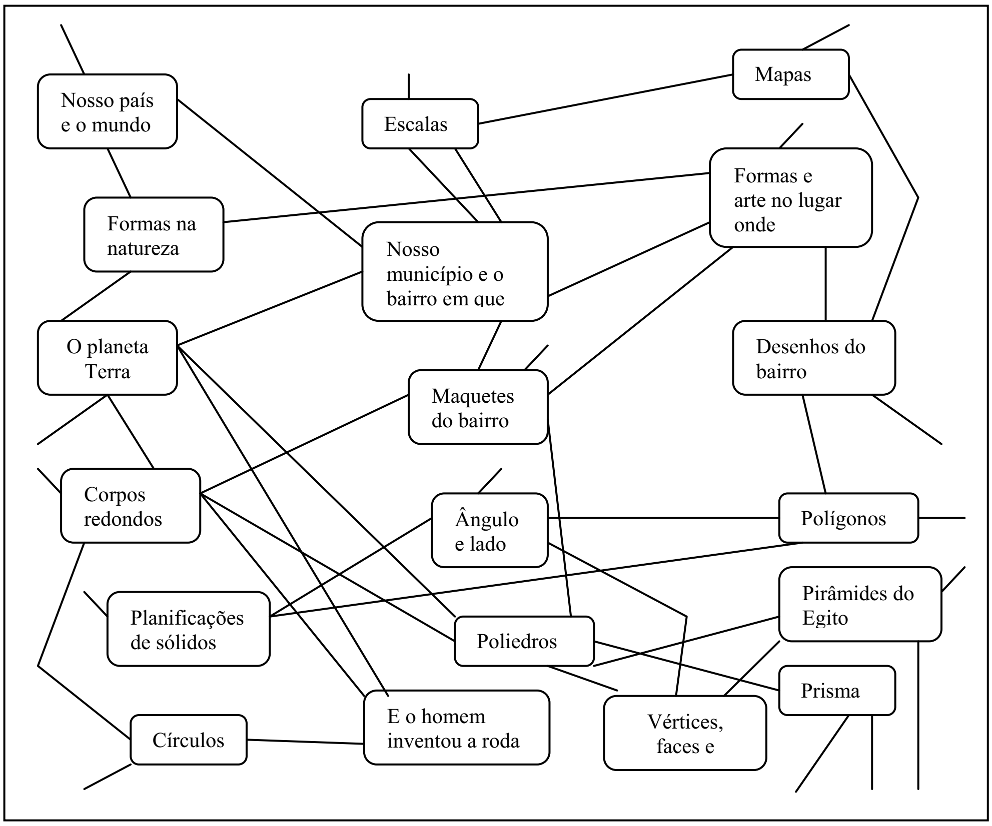
Como ressaltamos anteriormente, é importante que se analisem os diferentes modos de conhecer e lidar com a realidade como ponto de partida para a organização de atitudes também diferentes. Para que tal análise seja completa, ainda há muito a ser feito para a contribuição de uma prática pedagógica que possibilite fazer dos alunos sujeitos reflexivos, capazes de atuar em grupo, de adequar-se a novas situações ou, até mesmo, de iniciá-las (de mudar de paradigmas).

A escolha dos conteúdos adequados também é um fator relevante a considerar em um ambiente com condições de aprendizagem. A idéia de "ponte", ou seja, de conexão entre os conteúdos é algo que deve ser considerado se o objetivo for proporcionar aos alunos esquemas adequados para a construção de um determinado conceito.

A ligação entre vários esquemas é, para Fossa (2001), de importância fundamental para a Educação Matemática, tanto na construção de estruturas matemáticas, quanto em atividades de resolução de problemas. Entendemos que isto se dá não apenas pelo fato de os conteúdos matemáticos estarem interligados, mas também por surgirem a partir da busca de resolução para um problema ligado, geralmente, às mais variadas situações.

Dessa forma, achamos interessante que, no processo ensino-aprendizagem, não apenas da Matemática, mas também de outras disciplinas, buscássemos reconhecer quais os conteúdos necessários para que haja um melhor entendimento de um dado novo e, a medida do possível, revisá-lo, buscando manter uma relação entre o que se aprende com o que já foi trabalhado, dando, assim, mais significado ao aprendizado.

Como exemplo de conteúdos que podem ser interligados para facilitar a compreensão de outros, mostramos o quadro 1, retirado dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (BRASIL, 1998, p. 141) para o ensino de *Espaço e formas: o lugar em que vive, os objetos do entorno*.



Quadro 1 – Esquema de relação entre conteúdos

Como podemos perceber no Quadro 1, os conhecimentos estão interligados, possibilitando que sejam trabalhados não apenas conceitos relacionados à Matemática, mas também os da área social, geográfica, artística etc., permitindo a realização de um trabalho transdisciplinar.

Uma das formas que se pode trabalhar, não apenas para facilitar a conexão entre conteúdos que se complementam, mas também para propiciar a interação das idéias entre os sujeitos, é através da discussão, uma vez que o simples ato de comunicar idéias parece ajudar a classificá-las. Havendo isto, ocorre a ligação entre palavras (ou outros símbolos), tornando as informações mais conscientes para os que aprendem. Além disso, a discussão também estimula novas idéias.

Fossa (2001, p. 79) enfatiza essa informação, ao afirmar que "o aluno deveria verbalizar seu entendimento da atividade tanto para favorecer a primeira abstração para o conceito da própria atividade quanto para fortalecer a integração do novo conceito com os conceitos já construídos". Como podemos observar, no comentário do autor, a verbalização, ou seja, o ato de comunicar suas idéias, pode ser importante para o aluno, principalmente, para que haja uma melhor acomodação, não apenas do novo conceito e do que ele já havia assimilado anteriormente, mas também para que haja uma melhor compreensão da relação entre estes.

Fornecer ao educando condições de resolver diferentes tipos de problemas, por meio do desenvolvimento de atividades metacognitivas, que favoreçam a reflexão e o questionamento, em oposição ao ensino memorístico e expositivo, também é algo que merece destaque do desenvolvimento da aprendizagem. Nessa perspectiva, antes de iniciar uma tarefa, o aluno pode buscar a solução adequada, levantando hipóteses, testando-as, tirando conclusões e discutindo-as com os colegas.

Para isso, como ressalta Mendes (2006), é necessário que o professor desenvolva uma série de orientações na resolução de problemas tendo em vista superar todas as possibilidades de fracasso das primeiras experiências, principalmente, nas séries iniciais, bem como, no caso das séries finais do ensino fundamental e no ensino médio, é importante que seja dada ênfase ao processo investigatório, de modo a favorecer o exercício de levantamento e testagem de hipóteses e na elaboração de todos os algoritmos possíveis na busca da solução para um problema.

Nesse sentido vê-se também a necessidade de um processo de avaliação que corresponda aos métodos utilizados pelo professor, tendo essa que ser caracterizada como um processo que deve incluir análise e discussão com os alunos a respeito de equívocos cometidos. Tal atitude permite, segundo Davis, Nunes e Silva (2004, p. 47) ver nos erros uma forma importante de aprendizagem "permitindo-lhes tomar consciência dos pontos frágeis e fortes do seu raciocínio, buscar auxílio para enfrentar as dificuldades e esforçar-se para as superar".

Desse modo torna-se necessário que o professor, ao incentivar o conhecimento, propicie ao aluno a reflexão sobre as formas como este é alcançado, através de inferências, como: *Por que está fazendo assim?*; *Há outra forma de fazer isso?*; *Com base em quais evidencias concluiu isso?*; *Por que acha que obteve este resultado?* etc. Assim, estará fazendo o aluno refletir sobre a atividade, os procedimentos tomados, sem a necessidade de utilizar *macetes* que o levam a repetição sem ênfase a compreensão.

Procedimentos como este, só têm a contribuir para o desenvolvimento intelectual, haja vista que, como afirmam Davis, Nunes e Silva (2004, p. 50), é "no âmbito da coordenação das ações, ou seja, na lógica dos esquemas que o pensamento ganha coerência, regularidade, capacidade de antecipação, reversibilidade etc.". Dessa forma, os alunos poderão criar uma auto-estima que certamente irá contribuir para sua auto-afirmação como ser competente na construção do conhecimento e, consequentemente, com o seu progresso durante o período escolar e após este.

Portanto, conhecer o processo de equilibração implica em ver o aluno como sujeito de suas aprendizagens. Para isso, ressalta-se a necessidade de práticas pedagógicas que propiciem ao educando, como um ser atuante na aprendizagem, deparar-se com situações que haja cooperação intelectual, confrontação de pontos de vista, reflexão sobre os diferentes caminhos trilhados a fim de que aconteça, de fato, seu desenvolvimento intelectual.

Para isso, devemos pensar numa prática que permita ao aluno desempenhar os processos de acomodação e assimilação com sucesso, considerando fatores interno (maturação) e externos (ação do meio), ou seja, que o leve a agir e a pensar de forma *meta* sobre sua ação. Não podemos esquecer da importância de se fazer ligações de ações anteriores de modo a permitir uma melhor acomodação da situação atual, o que abre espaço inclusive para o trabalho interdisciplinar, em que, como já mencionamos, os conhecimentos, importantes para a maturação do sujeito, não são fatos isolados. Enfim, aprender a aprender porque a equilibração é um processo contínuo e será sempre uma estrutura direcionada a um melhor equilíbrio.

Nessa perspectiva, para que a escola desempenhe seu papel de formar cidadãos competentes, é necessário que ela esteja consciente das habilidades que o aluno precisa desenvolver, oferecendo aos docentes a assistência adequada para o desenvolvimento de seu trabalho.

No item a seguir buscamos delimitar nossa pesquisa em termos da Teoria da Equilibração.

2.3 Pensar a pesquisa a partir da Teoria da Equilibração

Pensar a pesquisa a partir da Teoria da Equilibração e conhecer esta teoria mais profundamente, a fim de saber como a mesma poderia contribuir para a construção de uma proposta de ensino dos conceitos de circunferência e elipse, foi uma intenção que, como já mencionamos, surgiu durante o desenvolvimento de nossa pesquisa de dissertação (NORONHA, 2003).

Como vimos no item 2.1, deste capítulo, o desenvolvimento psíquico, segundo Piaget, permanece em constante evolução, orientando-se, essencialmente, para o equilíbrio. Portanto, o desenvolvimento, é uma equilibração progressiva, uma passagem contínua de um estado de menor equilíbrio para um estado de equilíbrio superior, estando, assim, presente em todas as fases de desenvolvimento do sujeito, o que é um fato importante, pois concluímos deste que estamos aprendendo sempre.

Duas funções que ocupam papel de destaque nesse processo são a assimilação e a acomodação. Isso por se referirem a noção de equilíbrio entre os fatores internos e externos. Assim, considerando que durante o processo de assimilação a condição de desencadeamento do comportamento é constituída pela incorporação ativa de um estímulo ambiental novo (fatores externos) a uma estrutura que o sujeito já possui (fatores internos) e que durante o de acomodação ocorre modificação do esquema de reação propriamente dito, sob o efeito do êxito, é imprescindível que, para haver aprendizagem, exista no sujeito um esquema de ação pronto para assimilar o excitante, bem como a experiência para satisfação da necessidade.

Nessa perspectiva, partimos do pressuposto de que a clientela com a qual buscamos desenvolver nosso estudo, ou seja, alunos do 4º ciclo do ensino fundamental, já apresentam o conhecimento básico do conteúdo com o qual vamos trabalhar, além de já viverem em um ambiente urbano, o que referencia o modelo usado pela Geometria Urbana. Assim, acreditamos que estes alunos têm um esquema de ação, ou seja, a estrutura interna necessária para que, ao incorporar um estímulo ambiental novo, desencadeie o processo de aprendizagem que, neste caso, compreende um melhor entendimento da definição que envolve as circunferência e elipse.

Nesse sentido, elaboramos atividades (APÊNDICE C) que foram apresentadas através de situações-problema e procuramos dispô-las de modo a obedecer uma seqüência. Assim, acreditamos que a cada questão resolvida os alunos formarão os esquemas necessários para a resolução da que segue. As referidas atividades, como já mencionamos, são baseadas nos espaços quadricular e isoperimétrico e direcionam os alunos a encontrarem figuras, circunferências e elipses, que, por sua vez, apresentam-se com um aspecto diferente daqueles já conhecidos pelos mesmos. Estas descobertas provocam, por assim dizer, o desequilíbrio necessário a efetivação das regulações, que podem ser alcançadas a partir de questões que levem os estudantes a analisar, refletir, propor soluções, discutir com os colegas e tirar conclusões.

Considerando os dois tipos de perturbações citados por Piaget, acreditamos que, em nosso trabalho de pesquisa, nossos alunos reagem aquela que consiste em lacunas, fontes de desequilíbrios, que deixam as necessidades insatisfeitas e se traduzem pela insuficiente alimentação de um esquema. É possível que isto ocorra porque nossos estudantes ainda não viveram experiências que, de fato, os proporcionassem condições de construir os conceitos que objetivamos alcançar.

Esta lacuna, em nosso caso, enquanto perturbação é relativa a um esquema de assimilação já ativado, considerando o conhecimento que os alunos já possuem do assunto em estudo. O tipo de regulação correspondente, por sua vez, comporta um *feedback* positivo ou reforço, correspondendo, assim, ao primeiro postulado considerado por Piaget ao elaborar a Teoria da Equilibração.

Acreditamos que o enriquecimento devido às regulações e às equilibrações resultantes que podem ser obtidos durante as atividades enquadra-se nas três categorias mencionadas por Piaget (ver 2.1). Entretanto, deixamos para o capítulo seguinte a descrição mais detalhada das atividades e do resultado da aplicação destas em sala de aula para que, posteriormente, possamos ter uma conclusão mais consistente a respeito da eficácia desta.

3

TECENDO CAMINHOS

Nada lhe posso dar que já não exista em você mesmo. Não posso abrir-lhe outro mundo de imagens, além daquele que há em sua própria alma. Nada lhe posso dar a não ser a oportunidade, o impulso, a chave. Eu o ajudarei a tornar visível o seu próprio mundo, e isso é tudo.

Hermann Hesse

3 TECENDO CAMINHOS

Como mencionamos na Introdução deste trabalho, temos como objetivo apresentar e avaliar uma proposta de ensino, baseada na relação entre a modelagem matemática e as Geometrias Urbana e Isoperimétrica, que visa oportunizar ao aluno do 4° ciclo do Ensino Fundamental a construção de seu entendimento de circunferência e elipse a partir do uso de sua intuição.

Neste capítulo, apresentamos um delineamento do estudo empírico que utilizamos para validação da referida proposta e alcance deste objetivo, bem como dos objetivos específicos também descritos na Introdução.

3.1 Delineando a pesquisa

Neste item, descrevemos a proposta de estudo que, como já nos referimos, direciona-se para a compreensão das definições que envolvem a circunferência e elipse, cujas propriedades, como constatamos em estudo anterior (NORONHA, 2003), têm considerável importância para a construção de instrumentos que facilitam a vida de um grande número de pessoas e cujas formas são vistas cotidianamente.

Buscando atender a nossos objetivos, elaboramos atividades (APÊNDICE C) baseadas na Resolução de Problemas como uma *perspectiva metodológica*, abordada por Diniz (2001), em que esta amplia o aspecto puramente metodológico de sua conceituação e inclui uma postura frente ao que é ensinar e ao que significa aprender. Assim, a Resolução de Problemas passa a tratar de "situações que não possuem solução evidente e que exigem que o resolvedor combine seus conhecimentos e decida pela maneira de usá-los em busca de solução" (DINIZ, 2001, p. 89).

Diniz (2001) destaca três principais características para essa perspectiva metodológica: a *primeira* consiste em considerar como problema toda situação que permita alguma problematização; a *segunda* consiste em incluir, além das ações de propor e resolver situações-problema, as ações de questionar as respostas obtidas e a própria situação inicial; e a *terceira* característica é a não separação entre conteúdo e metodologia.

Essas características nos levam a acreditar na importância dessa perspectiva para o desenvolvimento de uma proposta em que os discentes desempenhem um papel ativo na construção do conhecimento. Isso porque a mesma permite, não apenas a busca de novas alternativas de resoluções ao que foi problematizado, mas também a problematização do que foi respondido. Tal fato inclui um processo metacognitivo, pois o aluno pensa sobre o que se pensou ou fez, favorecendo a uma atividade reflexiva e questionadora, fator importante para um melhor desempenho nos processos de acomodação e assimilação, tratados no capítulo anterior.

Buscamos, nas situações-problema apresentadas, utilizar a modelagem matemática, para a qual adotamos a definição dada por Biembengut e Hein (2000, p. 12) – "conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir de alguma forma, um problema em questão ou problema de situação real". A representação de algo não em sua essência, mas como *imitação* pode ser verificada tanto nas atividades que envolvem a Geometria Urbana, quanto nas que utilizam a Geometria Isoperimétrica. Na primeira, por envolver situações que consideram o modelo de uma cidade bem planejada. Na segunda, por levar em conta acontecimentos que se passam em um mundo virtual, onde o ambiente urbano é organizado por ruas que, ao se cruzarem, formam triângulos eqüiláteros.

Criar modelos é uma ação que faz do cotidiano do ser humano, visto que este procura criar modelos, sempre que precisa recordar, comunicar, analisar uma ação e diversas outras situações. Assim, a modelagem, como o ato de modelar, faz parte de nossas vidas como resultado da razão e da ação. São variadas as situações cotidianas que requerem resolução, que exigem de nós um raciocínio matemático, como: atravessar uma avenida; saber o tempo que se leva para percorrer uma determinada distância; quanto de terreno é preciso para construir a casa dos sonhos etc. Todos esses exemplos podem ser considerados *modelos matemáticos*, que, segundo o conceito de Biembengut e Hein (2000, p. 12), seriam "o conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir de alguma forma, um problema em questão ou problema de situação real".

Dando ênfase à educação, que tem como um dos seus objetivos a formação do cidadão, o qual se encontra cercado por situações que podem ser explicadas matematicamente, utilizar estas situações para o ensino da matemática escolar passa a ser essencial.

Quando nos referimos à modelagem como um método de ensino, isto não é diferente, porque, como mencionamos anteriormente, este método é baseado em situações concretas vivenciadas pelos educandos. Sendo assim, o tema pode ser trabalhado em conjunto com outras disciplinas, compreendendo os conceitos matemáticos vinculados a outros significados, facilitando o entendimento e proporcionando, assim, o trabalho inter ou transdisciplinar. Segundo Taube Netto (2002),

> O uso da matemática em administração, economia, sociologia, engenharias e ciências é reconhecido como necessário. Nem por isso os profissionais dessas áreas deixam de se valerem da experiência e da intuição profissional para analisar seus problemas. Na confluência de conhecimentos, onde quantificação e ordenação são noções essenciais à análise de problemas, a matemática é recurso necessário, mas não suficiente, uma vez que a formalização matemática é precedida e sucedida de recursos lingüísticos e princípios profissionais para caracterização do problema em foco e para encaminhamento de suas soluções. Este processo de articulação de conhecimentos é chamado de 'modelagem e solução de problemas'. A 'modelagem matemática' é parte ou não da modelagem e solução de problemas, conforme os aspectos de quantificação e ordenação sejam mais ou menos complexos.

Vemos aí a presença da Resolução de Problemas na modelagem. Nesse sentido, como já mencionamos, buscamos empregar a proposição de Resolução de Problemas apontada por Diniz (2001).

Como ressaltamos na Introdução, não pretendíamos desvincular os alunos da métrica euclidiana, admitida como padrão no conteúdo escolar, mas possibilitar a eles que compreendessem a definição de circunferência e elipse em uma métrica diferente da usual e mais condizente com a sua realidade, além de possibilitar que percebessem a existência de outro espaço, que não o plano, em que essas figuras podem se apresentar.

Para fazer a conexão entre essas duas métricas, consideramos importante, ao planejarmos as atividades, proporcionar situações para a realização de pesquisas em que os alunos buscassem em livros didáticos e na *internet* as formas geométricas a serem trabalhadas nas atividades, permitindo-lhes que fizessem comparações e tirassem suas próprias conclusões. Isso porque, acreditamos que, na perspectiva de ensino, o professor pode substituir a forma tradicional de fornecer ao aluno informações importantes para aprendizagem do conteúdo a ser conhecido por ocasiões que lhe enseje buscá-las, atividade essa que exige desse estudante iniciativa e poder argumentativo.

Ao pesquisar sobre determinado assunto o estudante precisa lançar mão de um poder argumentativo ao expressar os resultados e, ainda, com a grande quantidade de informações que instrumentos como a *internet* pode oferecer, é necessário que ele desenvolva uma capacidade crítica para selecionar as informações mais significativas, bem como apontar questões que geraram dúvidas durante a pesquisa.

Esse tipo de abordagem parece mais interessante por estimular uma ação mais ativa do aluno, aproveitando a curiosidade natural, estimulando o aprender a pensar e a troca de experiência na sala de aula. Ressalta, ainda, o papel do professor como orientador da aprendizagem em lugar de um mero transmissor de conhecimentos, além do fato deste ter, em atividades como esta, a possibilidade de descobrir como o educando está pensando.

As atividades foram trabalhadas em grupos, nos quais os alunos tiveram liberdade para escolher os componentes de cada um destes, pois, como informa os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998, p. 39), "os alunos adolescentes/jovens atuam mais em grupo do que individualmente". Dessa forma, estimular a discussão entre os grupos em torno dos métodos encontrados para resolver os problemas foi uma estratégia que adotamos, a fim de estimular a troca de informações, de idéias, a interação, a cooperação e, até mesmo, a autonomia dos alunos, à medida que buscamos incentivá-los a encontrar os seus próprios meios de resolver os problemas, analisá-los e compará-los.

As atividades foram envolvidas dentro de um contexto, a exemplo das situações ocorridas em uma empresa de táxi, a *A Jato*, e da perspicácia dos heróis de um mundo virtual, chamados *Felicitons* que permeiam as atividades.

É importante ressaltar que nos preocupamos em obedecer a uma seqüência na disposição das atividades, de forma que uma dará subsídios para a resolução da próxima, possibilitando aos estudantes criarem os esquemas mentais necessários para um melhor entendimento.

Ao nos referirmos que o aluno fará uso de sua intuição para construir os conceitos que objetivamos, ressaltamos que não trabalhamos com a acepção atribuída por Kant, segundo a qual, de acordo com consideração feita por Fossa (2001, p.28), "a intuição é uma faculdade da mente que conhece imediatamente; isto é, a intuição não depende de qualquer meio para fazer o conhecimento". Mas, com a intuição, definida como "sentimento súbito (*insight*) de um caminho para a solução de um problema ou da descoberta de uma relação científica" (JAPIASSÚ; MARCONDES, 1996, p. 147), a percepção de alguma coisa estranha, não notada quando um objeto foi observado anteriormente. Para mais detalhes ver Noronha (2003).

Diante de nossas intenções, que incluem uma intervenção planejada em busca, principalmente, de uma melhor compreensão dos sujeitos no que se refere a definição das circunferência e elipse, buscamos manter um diálogo permanente através de entrevistas informais ou não-diretivas, como forma de colher informações baseadas no discurso livre do entrevistado. Este procedimento representou um papel importante para nos ajudar a "compreender a dinâmica dos atos e eventos, e recolher as informações a partir da compreensão e sentido que os atores atribuem aos seus atos" (CHIZZOTTI, 1998, p. 90). Assim, tivemos como fontes de coleta de dados os resultados das entrevistas informais e conversas, registrados em nosso caderno de campo, bem como os questionários preenchidos, as atividades feitas pelos alunos e fotos.

Os caminhos de nosso trabalho envolveram um planejamento de intervenção, coleta sistemática dos dados, análise fundamentada na literatura pertinente e relato dos resultados. A partir deste processo, orientamos, corrigimos e avaliamos nossas ações e decisões.

Desse modo, considerando as características expostas até aqui, justificamos na ótica de Chizzotti (1998), a adoção do termo *investigação qualitativa* para definir a metodologia de pesquisa deste trabalho, onde buscamos verificar a viabilidade da utilização das Geometrias Urbana e Isoperimétrica, com base na Teoria da Equilibração de Jean Piaget, para compreensão, por parte dos estudantes do 4º ciclo do Ensino Fundamental, da definição de circunferência e elipse.

Escolhemos o grupo de sujeitos, entre os quais temos: alunos de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, que fazem parte de uma mesma instituição, a qual descreveremos no item 3.2 deste capítulo. No entanto, não encaramos este dado a fim de partir do princípio que eles ali se encontravam por partilharem das mesmas concepções, valores ou conhecimentos. Mas, por levarmos em consideração que neste nível os alunos começam a se deparar com o conteúdo que objetivamos tratar mais sistematicamente. Além, do fato, destas séries serem a "ponte" para o nível médio, em que o estudo do referido conteúdo é visto com maior aprofundamento.

Estando traçado o delineamento da pesquisa, damos seguimento ao próximo item, no qual tratamos do desenvolvimento desta.

3.2 O processo de coleta de dados

A pesquisa em questão ocorreu no primeiro bimestre letivo de 2005 e abrangeu uma turma de 7ª série composta de 53 alunos e uma turma de 8ª série composta de 55 alunos de ambos os sexos, todos estudantes da Escola Estadual Floriano Cavalcante (FLOCA).

A referida instituição está situada em Mirassol, um bairro de classe média e média-alta, em Natal-RN. Apesar da localização, a mesma tem alunos que residem em diversos outros bairros, não apenas vizinhos, mas também mais afastados e de periferia que deram preferência a esta por ser reconhecida como uma das escolas públicas da cidade que tem mais alunos aprovados no vestibular.

A escola conta com turmas de todas as séries do Ensino Fundamental e Médio, nos turnos da manhã, tarde e noite. A grande demanda recebida por esta tem resultado numa enorme quantidade de alunos por sala de aula, como podemos perceber, anteriormente, ao citarmos a quantidade de alunos em cada turma a ser trabalhada.

Em nossa *primeira visita* ao colégio FLOCA, como é conhecido, tivemos contato com a equipe pedagógica da instituição, a qual inclui as professoras *J*, *D* e *M*; com os professores de Matemática da 7ª e 8ª séries, apresentados aqui, respectivamente, por *F* e *I*; e com a professora **G**, responsável pela sala de informática da escola.

Explicamos a equipe pedagógica e aos professores o nosso projeto de pesquisa e apresentamos o plano de aula (APÊNDICE A) em que especificamos os objetivos, os conteúdos a serem trabalhados, a metodologia, a avaliação e o período previsto para realização das aulas, bem como as atividades elaboradas. Verificamos a demonstração de interesse destes profissionais, não apenas pelos horários de aula dispostos para a realização do trabalho, como também pela boa recepção dada pelos mesmos.

Em nossa *segunda visita* a escola fomos apresentados às turmas por seus respectivos professores que as informaram que éramos colegas que estariam realizando um trabalho em conjunto com eles. Estes professores informaram, ainda, que durante as aulas que iríamos ministrar a freqüência dos alunos seria realizada normalmente e que a participação destes nas aulas iria contribuir para a nota da prova do bimestre.

Posteriormente, demos continuidade a apresentação contando um pouco a respeito da história da geometria e de como o desenvolvimento de estudos nesta área vem contribuindo para a criação de instrumentos que facilitam nossas vidas e que dessa forma buscávamos levar um pouco desse conhecimento para eles.

Em seguida entregamos um questionário de sondagem (APÊNDICE B) com questões que nos ajudaram a conhecer um pouco da clientela que trabalhamos e a fazer uma avaliação inicial a respeito de seus conhecimentos acerca do assunto a ser tratado. Os resultados desta etapa da pesquisa serão tratados no item a seguir.

3.2.1 Conhecendo nossa clientela

Como mencionamos no subitem anterior, em nossa segunda visita a escola, solicitamos aos alunos o preenchimento de um questionário de sondagem, entregue por nós. A partir dos resultados deste pudemos traçar um perfil de nossa clientela. Neste item buscamos descrever os resultados obtidos no referido questionário. O mesmo foi apresentado para as turmas das duas séries e foi respondido apenas pelos alunos presentes em sala de aula, dos quais temos: 50 alunos da 7ª e 44 da 8ª série.

O primeiro dado obtido refere-se a idade dos alunos (Gráfico 1). Os alunos da 7ª série compreendem faixa etária de 13 a 15 anos, enquanto que na 8ª série temos alunos de 14 a 17 anos, estando a grande maioria, de ambas as séries, com idade de 14 e 15 anos, ou seja, no auge da adolescência. Portanto, carregam consigo todas as implicações trazidas por esta fase, vista por muitos, simplesmente, como uma crise passageira, devida à puberdade, que separa a infância da idade adulta.

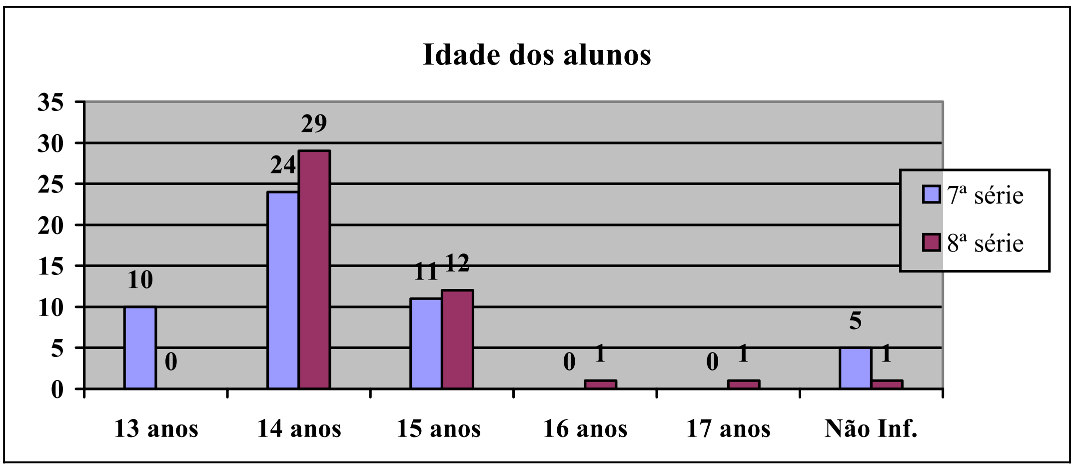


Gráfico 1 - Idade dos alunos

Cória-Sabini (2004, p. 91) ressalta que alguns teóricos defendem que a adolescência é um estágio de desenvolvimento do ego e da cognição, em que o indivíduo tem que cumprir várias tarefas (definição da identidade, escolha vocacional e autonomia moral) para continuar o desenvolvimento harmonioso do ego, além de, nesta fase, ocorrer mudanças marcantes de cognição.

No entanto, para Piaget (1976b, p. 61) "se há um desequilíbrio provisório, não se deve esquecer que tôdas as passagens de um estágio a outro são suscetíveis de provocar tais oscilações temporárias". De acordo com este autor, as conquistas próprias desta fase asseguram ao pensamento e à afetividade um equilíbrio superior ao que existia na segunda infância (de 7 a 12 anos de idade). Assim, ocorre que os adolescentes têm seus poderes multiplicados, o que, inicialmente, perturbam a afetividade e o pensamento, mas, depois, os fortalecem.

O fato de, em nossa sociedade, o adolescente comumente ser visto como alienado, desajustado, confusos e imprevisíveis em suas condutas é explicado, por Cória-Sabini (2004), como sendo conseqüência da popularização de termos como "cultura jovem" e "conflitos de gerações" que significam que o adolescente apresenta padrões diferentes daqueles observados nos sujeitos de outra faixa etária. De acordo com a autora a demasiada exploração desses termos na literatura, cinema e televisão, acarretou na criação de um "falso estereótipo da adolescência como período de tormentas e de revoluções" (CÓRIA-SABINI, 2004, p. 91).

Para esta autora, na adolescência o sentimento de identidade provém da coerência e da continuidade do autoconceito elaborado no passado. Assim, o perigo desta etapa está na existência de conflitos interiores quanto à identidade sexual ou mesmo aqueles originados em etapas anteriores e que não foram satisfatoriamente resolvidos, os quais podem ter origens diversas, tais como o sentimento de rejeição dos pais e dos companheiros ou o insucesso escolar. Segundo a mesma, estes problemas não-resolvidos podem provocar comportamentos desajustados, "porém isso pode ocorrer em qualquer etapa do desenvolvimento" (CÓRIA-SABINI, 2004, p. 92) concordando, assim, com a explicação dada por Piaget sobre o assunto.

No referente ao desenvolvimento cognitivo, para Piaget (1976b, p. 62), o adolescente é um indivíduo que "constrói sistemas e 'teorias'" e que desperta

> interêsse por problemas inatuais, sem relação com as realidades vividas no dia-a-dia, ou por aquêles que antecipam com uma ingenuidade desconcertante, as situações futuras do mundo, muitas vezes quiméricas. O que mais espanta, sobretudo, é a facilidade de elaborar teorias abstratas.

> Existem alguns que escrevem, que criam uma filosofia, uma política, uma estética ou outra coisa. Outros não escrevem, mas falam. A maioria, porém, fala pouco de suas produções pessoais, limitando-se a ruminá-las de maneira íntima e secreta. Mas todos têm teoria e sistemas que transformam o mundo, em um ponto ou noutro.

essas são características de uma nova forma de pensamento, com idéias gerais e abstratas. Por volta de 11 a 12 anos efetua-se uma transformação fundamental no pensamento, é a passagem do pensamento concreto para o *formal*, ou, como se conhece, *hipotético-dedutivo*.

Ainda segundo Piaget (1976b, p. 63), após os 11 ou 12 anos, o pensamento formal torna-se possível, isto é, “as manipulações lógicas começam a ser transpostas do plano de manipulação concreta para o das idéias, expressa em linguagem qualquer (a linguagem das palavras ou dos símbolos matemáticos, etc.), mas sem o apoio da percepção, da experiência, nem mesmo da crença”. Assim, o pensamento formal é, portanto, *hipotético-dedutivo*, isto é, capaz de deduzir as conclusões de hipóteses e não somente através de uma observação real. As operações formais fornecem ao pensamento o poder de construir a seu modo as reflexões e teorias, exercendo *a livre atividade da reflexão espontânea*, característica principal que difere a adolescência da infância.

Piaget destaca ainda que esta fase, assim como a do lactente e da primeira infância, não está livre da lei que afirma que “tôda nova capacidade da vida mental começa por incorporar o mundo em uma assimilação egocêntrica, para só depois atingir o equilíbrio, através de uma acomodação ao real” (PIAGET, 1976b, p. 64). Há, portanto, um egocentrismo intelectual do adolescente, que se manifesta pela crença na onipotência da reflexão, como se o mundo devesse se submeter aos sistemas e não estes à realidade. Mas, também nesta, o egocentrismo encontra, aos poucos, uma correção na reconciliação entre o pensamento formal e a realidade. “O equilíbrio é atingido quando a reflexão compreende que sua função não é contradizer, mas, se adiantar e interpretar a experiência” (PIAGET, 1976b, p. 65). Assim, este equilíbrio ultrapassa amplamente o do pensamento concreto, pois, além do mundo real, engloba as construções indefinidas da dedução racional e da vida interior.

No que refere a vida afetiva na adolescência, esta se afirma através da dupla conquista da personalidade e de sua inserção na sociedade adulta, sua função social é expandida à comunidade dos adultos. Deparam-se, como bem coloca Cória-Sabini (2004), com a exigência dos pais sob certa independência na tomada de decisões, na resolução de problemas, na capacidade de usar a tecnologia a seu dispor e, principalmente, na expectativa de que estes façam uma opção vocacional, problema este que mais absorve os jovens, apesar dos desafios impostos pela mudança física e maturidade sexual.

A repetência também é algo que deve ser levado em consideração visto que, além de causar sérios problemas no processo de aprendizagem, é a principal causa de evasão escolar e de um grande número de alunos cursando séries não compatíveis com a idade.

Gráfico 2 – Índice de repetência dos alunos

Como podemos verificar no Gráfico 2, em ambas as séries, o número de alunos repetentes é elevado, visto que, dos estudantes que responderam ao questionário, 65 já ficaram reprovados. Destes, 42, ou seja, a maioria, cursam a 7ª série.

Entre os alunos repetentes, buscamos saber quantos repetiram o ano mais de uma vez e obtivemos o seguinte (Gráfico 3):

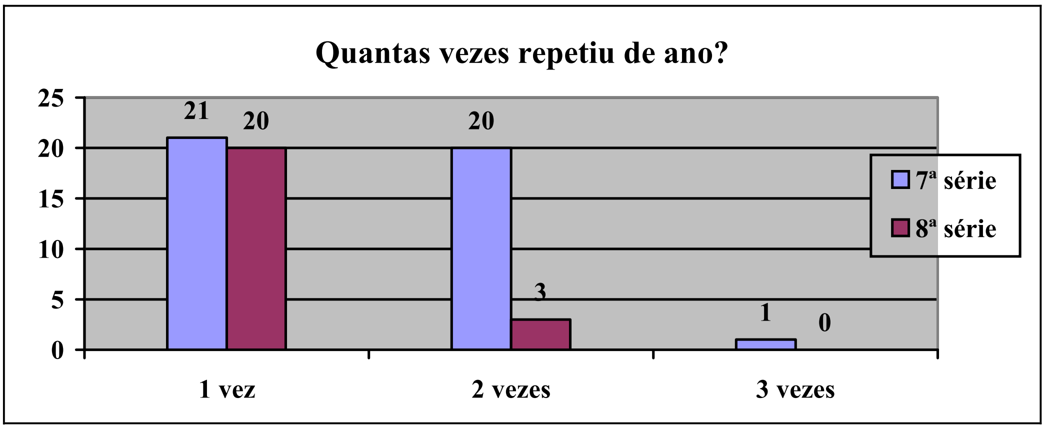


Gráfico 3 – Números de vezes que os alunos repetiram o ano.

Como podemos verificar a maioria dos alunos que já repetiram de ano mais de uma vez é maior entre os alunos da 7ª série (21). As séries em que ocorreram essas repetências podem ser vistas no Gráfico 4.

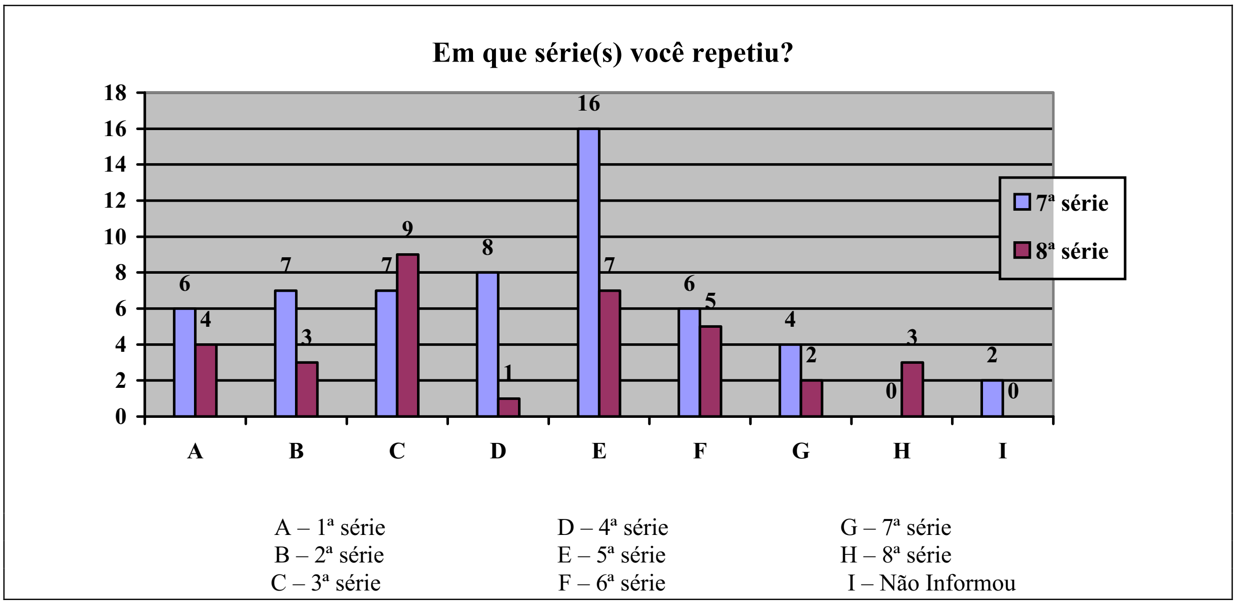


Gráfico 4 – Séries em que os alunos repetiram.

Observamos (Gráfico 4) que, entre os alunos da 7ª série, o maior índice de repetência (16 alunos) se deu na 5ª série. Já entre os alunos da 8ª série, a mais apontada foi a 3ª série, indicada por 9 alunos e em segundo lugar, a 5ª série, na qual 7 alunos já ficaram reprovados.

Considerando o total de alunos pesquisados em ambas as séries, temos que onde ocorreu o maior número de reprovação destes alunos foi na 5ª série, apontada por 23 do total de alunos reprovados que responderam ao questionário. A segunda mais apontada foi a 3ª série, com 16 indicações.

Estes dados implicam em afirmar que a maioria dos alunos que fazem parte da pesquisa, cursam séries não compatíveis com a idade. Tal fato deve-se, entre outros, a política brasileira de reprovação que, como coloca Gomes (2006) não parece melhorar o aproveitamento, antes o conduz a uma queda cada vez maior, à medida que amplia a distorção idade-série. No entanto, a adoção de certas formas de desseriação em algumas escolas brasileiras, o que não é o caso da nossa, como os ciclos e a progressão continuada que, como ressalta o autor, fogem ao modelo ortodoxo de promoção ou retenção ao fim de cada série anual, têm mantido o aproveitamento em níveis estatisticamente significativos, apesar de não ter resolvido a necessidade de aumentar o rendimento.

No que se refere a disciplina em que estes alunos têm maior índice de reprovação, temos que (Gráfico 5):

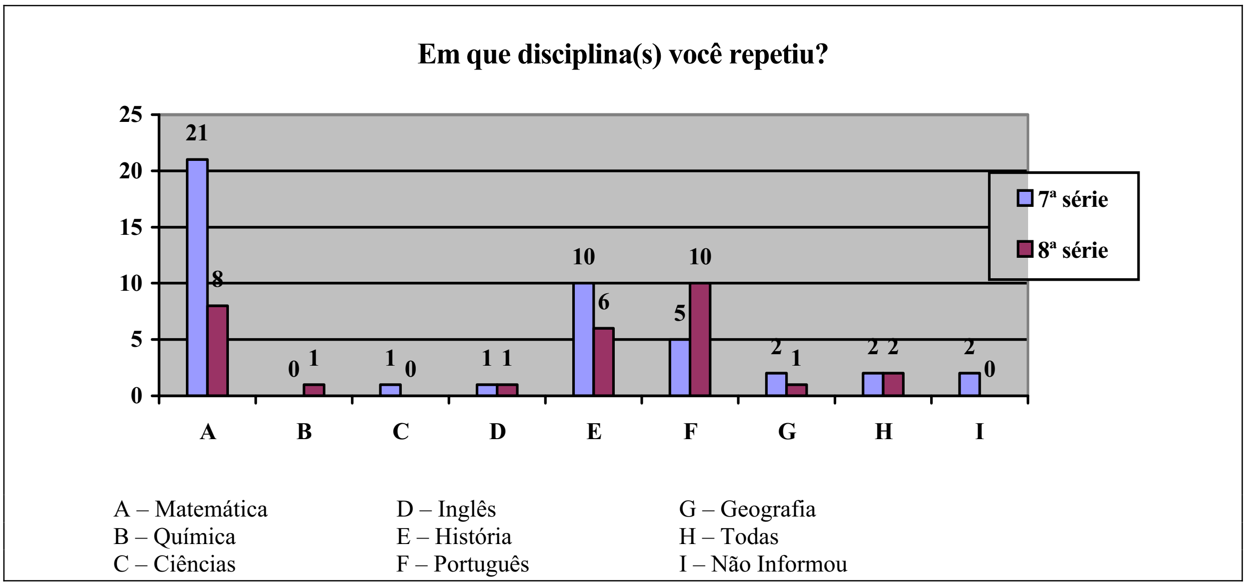


Gráfico 5 – Disciplinas em que estes alunos mais repetiram

Verificamos (Gráfico 5) que, entre os alunos da 7ª série, a Matemática foi a disciplina mais apontada, correspondendo a indicação de 21 dos alunos reprovados, e História foi a segunda disciplina mais apontada por estes alunos. Para a turma da 8ª série, Português foi a disciplina mais citada, com 10 indicações, enquanto que a Matemática foi a segunda mais citada, com 8 indicações.

No geral, considerando o total de alunos reprovados das duas turmas que responderam ao questionário, temos que: a disciplina Matemática foi a que estes alunos mais ficaram reprovados, apontada por 29 alunos; História foi a segunda mais citada, com 16 indicações e Português foi a terceira, indicada por 15 alunos.

Na quarta pergunta do questionário de pesquisa, buscamos saber quais os motivos que estes alunos alegam tê-los levados a repetirem o ano. Apresentamos nesta (ver Apêndice B), algumas alternativas pré-estabelecidas das quais os alunos poderiam marcar uma ou mais. Caso a justificativa para sua reprovação não estivesse entre as alternativas dadas, havia, ainda, a opção de acrescentar o motivo não encontrado.

Sendo nosso estudo voltado primordialmente para o ensino da Matemática, ao analisarmos os questionários respondidos separamos as justificativas dadas pelos alunos que, na questão anterior, afirmaram ter ficado reprovado em Matemática daquelas dadas pelos que ficaram nas demais disciplinas. As respostas podem ser vistas no Gráfico 6.

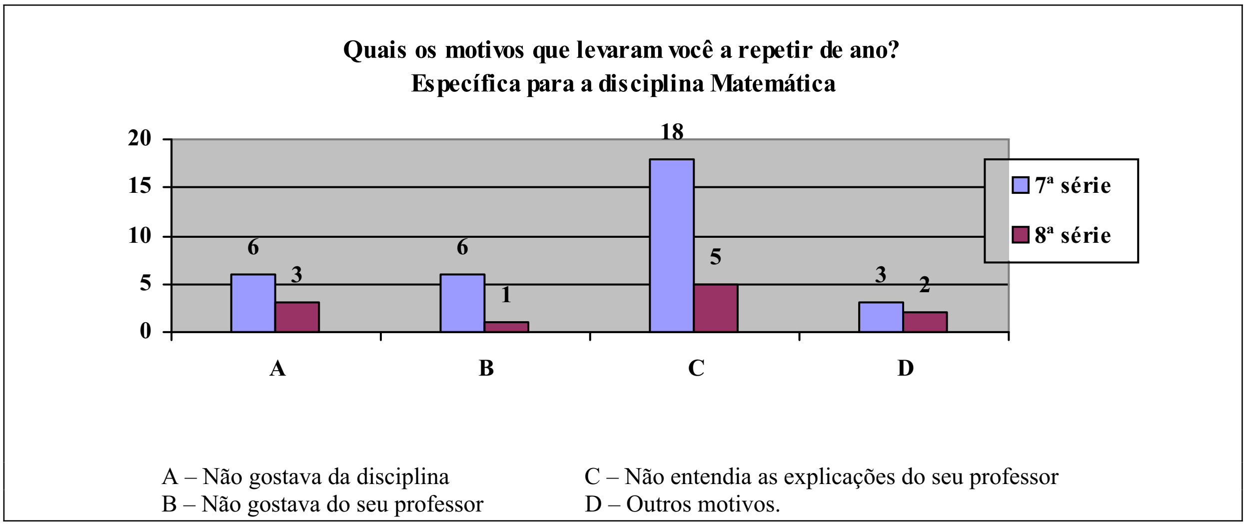


Gráfico 6 – Justificativas que os alunos atribuem a causa de sua repetência em Matemática.

Entre os motivos que os alunos apontaram ser a causa de sua reprovação em Matemática, temos: em primeiro lugar, opção dada por 23 alunos, “Não entendia as explicações de seu professor”; a segunda opção mais marcada, 9 alunos, foi “Não gostava da disciplina”; depois, com 7 indicações, vem o motivo “Não gostava do professor”. Na quarta opção, que refere aos *outros* motivos, assinalada por 5 alunos, foram dadas as seguintes justificativas: “eu não me interessava”; “eu mudei de cidade e perdi o ano”; “eu não tinha tempo de estudar porque precisava trabalhar” e “mudei de colégio”.

Como podemos verificar (Gráfico 5) a quantidade de alunos, considerando ambas as séries, que em algum momento de sua escolaridade já ficaram reprovados em Matemática é bastante significativo. Verificamos aí o quanto ainda é presente a dificuldade que os alunos têm nesta disciplina. Ao analisarmos os motivos indicados por estes alunos como causa de sua reprovação, podemos perceber que as dificuldades enfrentadas perpassam, entre outros, ao problema da formação do professor de Matemática muitas vezes deficientes que, ao serem postas em prática, refletem no desempenho deste profissional o que, por sua vez, influencia no desinteresse do aluno e na falta de empenho deste em aprender os conteúdos referentes a esta disciplina. No entanto, não nos cabe aqui discutir tais motivos mais profundamente deixando, assim, para uma próxima oportunidade.

Entre os motivos da reprovação de alunos em outras disciplinas, temos:

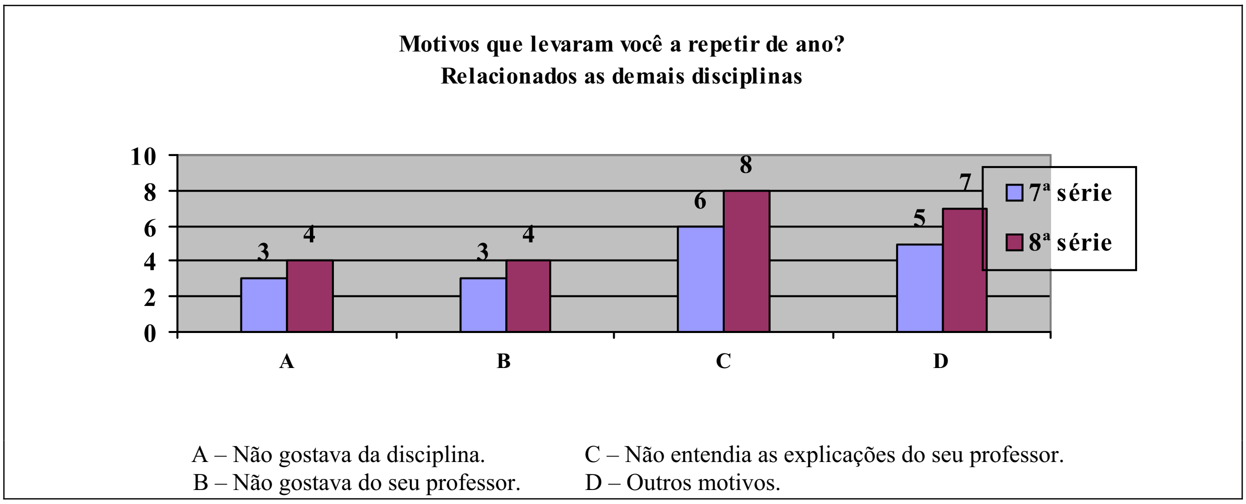


Gráfico 7 – Justificativas que os alunos atribuem a causa de sua repetência em outras disciplinas

Como podemos verificar no Gráfico 7, temos: em primeiro lugar, opção indicada por 14 alunos, "Não entendia as explicações do seu professor"; em segundo, assinalada por 12 alunos, a opção *outros* motivos, complementada por alguns alunos com justificativas que apontam desinteresse, doença, trabalho, mudança de colégio e desafeto pelo professor; em terceiro lugar os motivos "Não gostava da disciplina" e "Não gostava do seu professor", obtiveram mesmo índice de indicações, 7 para cada.

Ao compararmos as justificativas dadas pelos alunos, pudemos concluir que os problemas referentes ao ensino-aprendizagem são basicamente os mesmos tanto no que refere a disciplina de Matemática, quanto as demais disciplinas, a exemplo de Português e História, disciplinas em que estes alunos mais foram reprovados depois daquela primeira. Entretanto, em termos quantitativos verificamos que o índice de abrangência destes problemas são bem maiores no referente a Matemática.

Na quinta questão do questionário de pesquisa buscamos saber de todos os alunos participantes se estes gostam da aula de Matemática e o porquê de sua resposta positiva ou negativa.

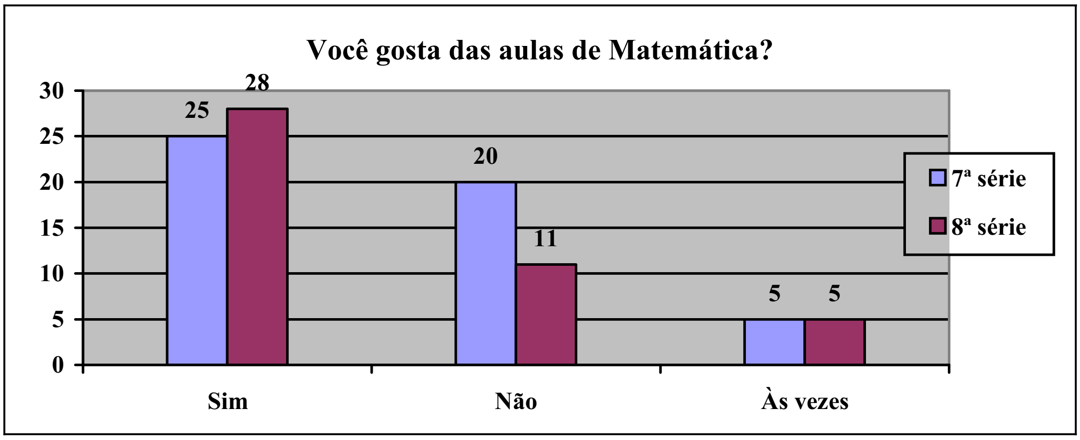


Gráfico 8 – Alunos que gostam ou não das aulas de Matemática.

Como podemos verificar no Gráfico 8, a opção mais assinalada, considerando as respostas dadas nas duas turmas, foi "Sim", ou seja, gostam da aula de Matemática (53 alunos). Entre as justificativas dadas para esta resposta, temos: "É legal"; "Aprendemos várias coisas novas"; "Facilita no dia-a-dia"; "Gosto de resolver problemas"; "É muito importante"; "Deixa a mente mais aberta"; "É fácil de aprender"; "Precisamos dessa disciplina"; "Hoje em dia tudo tem Matemática"; "Nas aulas há sempre soluções"; "Eu aprendo muito"; "Acho muito interessante"; "Os cálculos estão em toda parte"; "O professor explica bastante e eu aprendo muito"; "Porque me ajuda"; "Se eu não gostasse teria de aprender a gostar. Por que é o meu futuro"; "Por que é a matéria que quando se aprende realmente é a mais difícil de esquecer"; "Porque é preciso" e outras.

Aqueles que afirmaram não gostar das aulas de Matemática (31 alunos) deram as seguintes justificativas para sua posição: "Tem que ter muita paciência"; "Tem muito número"; "É um pouco difícil"; "Demoro a entender a disciplina"; "Tenho dificuldades"; "É muito complicado"; "Não gosto de cálculos"; "O professor é ótimo, mas tenho dificuldades"; "É muito chato"; "A maioria dos professores não tem paciência"; "A maioria dos professores não sabe ensinar"; "É muito cansativo" e outras.

Há ainda aqueles alunos que afirmam gostar das aulas de Matemática apenas algumas vezes – apesar de não haver esta opção no questionário –, no entanto, apenas alguns destes justificaram a resposta explicando que gostam das aulas desta disciplina apenas quando entendem a matéria.

A partir das respostas recebidas podemos concluir que os alunos têm consciência da importância do aprendizado da Matemática, não apenas para dar prosseguimento nos estudos, mas também por verem a utilidade da mesma em seu dia-a-dia. No entanto, é fato que muitos sentem dificuldades em entendê-la, em aprendê-la, o que acaba se tornando um entrave no interesse pela matéria, mostrando, assim, a necessidade de serem desenvolvidas técnicas de ensino que possam tornar esta disciplina mais atrativa e compreensível.

Este problema perpassa, ainda, ao fato de muitos professores não terem clareza da importância de se considerar os conhecimentos prévios para um melhor entendimento de um novo conceito, não apenas para proporcionar que o aluno faça relações entre o que já conhece com o que esta sendo trabalhado, mas também para não atropelar etapas. Isso é ponto importante a ser considerado, pois a falta de entendimento de um conhecimento, necessário a melhor compreensão do que vai ser introduzido, só faz dar continuidade ao processo de desentendimento e conseqüente desinteresse pela disciplina.

Na sexta questão do questionário buscamos saber se os alunos aplicam fora da escola o que estes aprendem nas aulas de Matemática e, no caso de uma resposta positiva, pedimos que estes dessem exemplos, a fim de sabermos onde ou como eles aplicam esses conhecimentos.

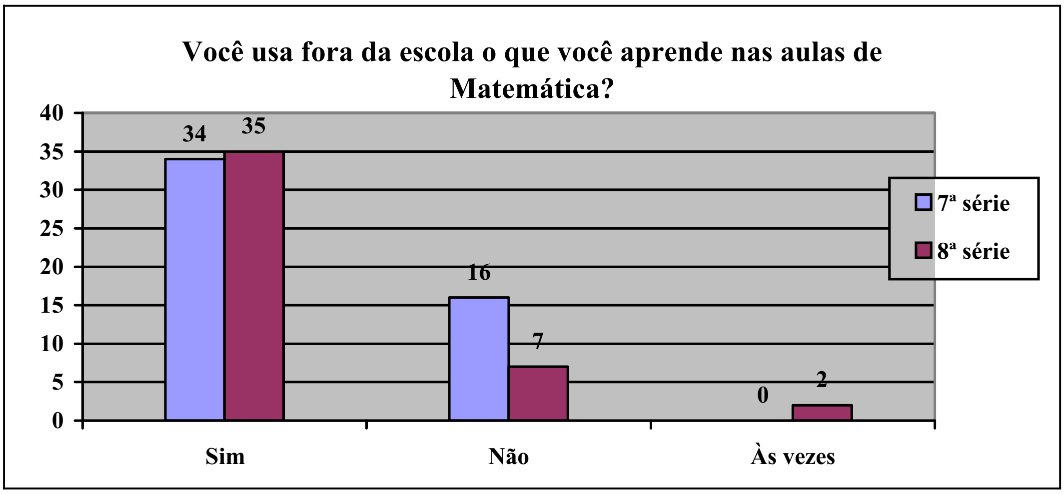


Gráfico 9 – Uso do conteúdo aprendido nas aulas de Matemática fora da escola.

Dos alunos que responderam ao questionário, em ambas as séries (Gráfico 9), a grande maioria (69 estudantes) responde que “Sim”, ou seja, que a usam o que aprendem nas aulas de Matemática fora da escola. Entre os exemplos dados por estes alunos, temos: “em contas fora da escola”; “multiplicando, dividindo e outros”; “ensinando irmão e vizinho”; “quando gasto minha mesada”; “nos números dos ônibus”; “calculando problemas matemáticos”; e outros. Nesta questão, 23 alunos afirmaram não usar o que aprendem nas aulas de Matemática fora da escola e 2 afirmaram usar algumas vezes, mas não exemplificaram quais. Essa resposta complementa a resposta da questão anterior, ou seja, os alunos não apenas ratificam a importância da Matemática, como também dão exemplos de aplicações de seus conhecimentos sobre a mesma em situações de seu cotidiano.

Em busca de conhecer as dificuldades que os alunos sentem na disciplina Matemática, perguntamos, na sétima questão, se estes se achavam bons em matemática e o porquê. Como observamos no Gráfico 10, uma boa quantidade de alunos (42) se julgam bons. Entre as justificativas destes, temos: "Presto atenção nas aulas"; "Procuro me esforçar"; "porque gosto de estudar Matemática"; "O professor explica bem e eu presto atenção"; "Os problemas têm um cálculo certo"; "Eu estudo pra isso"; "Me interessa"; "Tiro notas altas"; "Primeiro eu gosto, segundo eu consigo resolver os problemas" e outras.

Entretanto, a grande maioria afirma não ser bom aluno em Matemática por motivos, como: "Converso muito"; "Sou burra"; "Não sou bom em cálculo"; "Às vezes me confundo"; "É difícil e complicada"; "Porque não memorizo certas fórmulas"; "Não tiro notas boas nas provas"; "Não gosto de fazer contas"; "Às vezes não entendo"; "É uma matéria 'dor de cabeça'" e outros.

Houveram também aqueles que se julgam "mais ou menos" bons alunos em Matemática, resposta dada por 4 alunos, justificando que isto "depende das explicações".

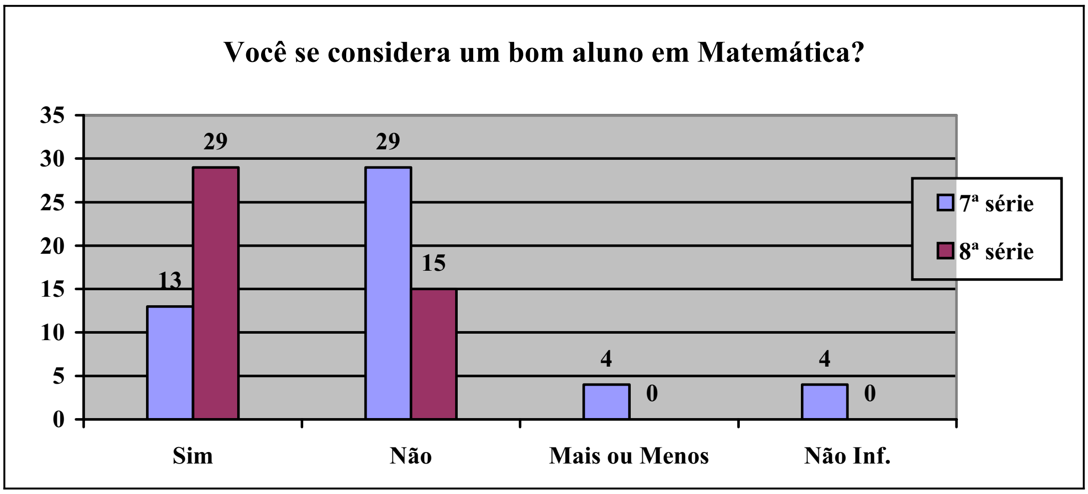


Gráfico 10 – Consideram-se bons alunos em Matemática

Como podemos constatar as dificuldades giram em torno do interesse. Para alguns alunos a matemática é apenas um punhado de cálculos e fórmulas que precisam ser decoradas, isso faz com que a mesma deixe de ser interessante para muitos estudantes, que deixam de concentrar seus esforços nesta disciplina, ou passem a se empenhar um pouco mais caso precisem conhecer o conteúdo para algum objetivo, como uma seleção para o CEFET.

A visão platônica da Matemática é tão forte entre os alunos que há até aqueles que se assumem "burros" por não conseguirem entendê-la. Mas, como também podemos verificar, há, também, aqueles que vêem sua dificuldade de entendimento relacionada às explicações do professor, o que nos faz, mais uma vez notar as dificuldades relacionadas à prática desenvolvida por este.

Como utilizamos atividades voltadas para a Resolução de Problemas, procuramos saber qual o nível de interesse dos alunos a respeito de atividades desse tipo. Como podemos notar no Gráfico 11, dos alunos que responderam ao questionário, 48 gostam de resolver problemas matemáticos. Entre as justificativas dadas por estes para esta resposta, temos: "Porque a pessoa pára e pensa o que vai fazer"; "É divertido"; "Todos têm cálculo definido"; "A gente aprende melhor"; "Porque quebra muito a cabeça"; "Usa raciocínio"; "Para treinar"; "Para testar o conhecimento das aulas anteriores"; "Depende, no colégio é ruim, na rua é mais fácil"; "Gosto de desafios"; "Gosto de resolver problemas para aprender a praticar"; "Quando sei resolver"; "Aprende mais"; "Treina a mente"; "Estimula a concentração"; "Quando tenho tempo e não bate o sono" e outras.

No entanto, 35 alunos responderam que não gostam de resolver problemas, por motivos como: "É muito enrolado"; "Não é meu hobby"; "São difíceis"; "É muito chato"; "É muito complicado"; "É cansativo"; "Sou péssima em cálculos"; "É um quebra-cabeça"; "Odeio! Fico muito confusa".

Os alunos que afirmam gostar algumas vezes e os que não responderam não justificaram sua resposta.

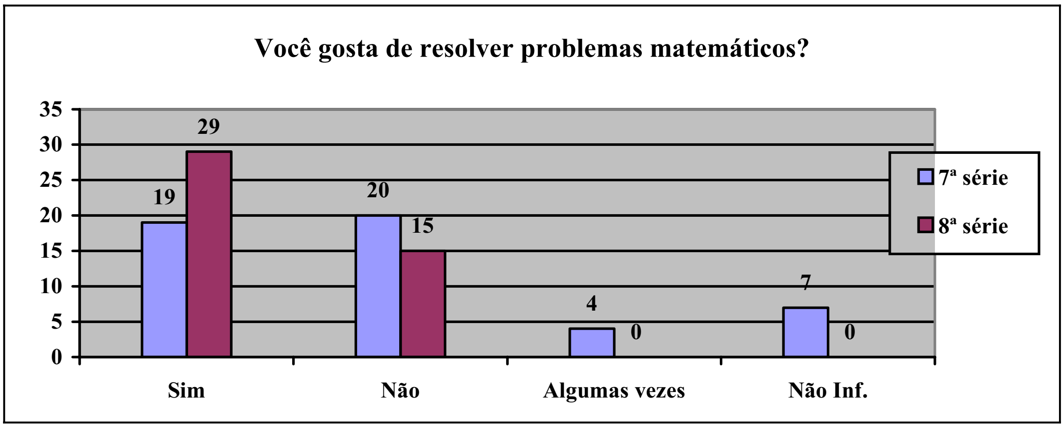


Gráfico 11 – Gostam de resolver problemas matemáticos.

Como podemos perceber, há aqueles que vêem nas situações problema um desafio e isto acaba sendo um estímulo nesse tipo de atividade. Entretanto, muitos, apesar de gostarem, vêem as situações problema apenas como um método de exercitar um conteúdo que já foi explicado pelo professor, ressaltando a não adoção da Resolução de Problemas como método de introduzir, ou mesmo construir um determinado conhecimento.

As respostas obtidas nas três últimas questões corroboram para uma prática que tem sido desenvolvida com pouco ou sem qualquer vinculação dos conteúdos de Matemática com a realidade dos alunos. Tal fato tem contribuído significativamente para que muitos estudantes criem aversão a esta disciplina. Este fato direciona-se para concepção da Matemática, mantida por muitos professores, como um corpo de conhecimento e não como uma atividade humana. Dessa forma, muitos alunos acabam não concebendo uma significação a matemática escolar.

No que se refere ao assunto que vamos trabalhar durante a intervenção, procuramos saber, a partir da nona questão, qual o conhecimento dos alunos a respeito do mesmo. Nestas, os alunos responderam se sabiam o que era uma circunferência, elipse, hipérbole, parábola, plano cartesiano e como encontrar pontos no plano cartesiano. Ressaltamos que, a fim de termos uma visão mais clara das respostas assinaladas, solicitamos aos alunos que, em caso de responderem "Sim" as referidas questões, complementassem ao lado escrevendo ou desenhando o que entendiam sobre aquilo que estava sendo perguntado.

No referente à circunferência (Gráfico 12), 21 alunos da 7ª e 29 da 8ª série, ou seja, a maioria dos alunos destas turmas, afirmam não conhecer uma circunferência e 11 alunos daquela primeira não responderam a questão. Entre os alunos que afirmaram saber o que é uma circunferência, 2 da 7ª série e 1 da 8ª série não desenharam a figura.

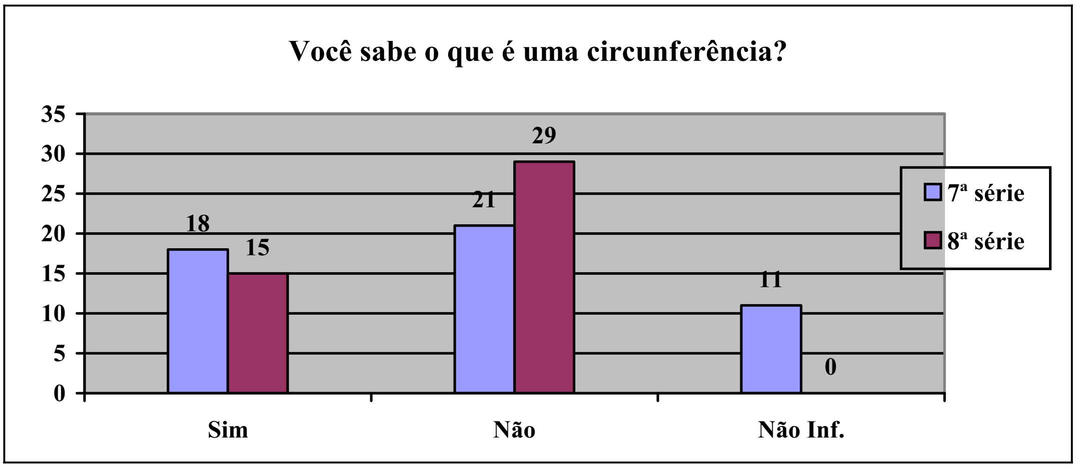


Gráfico 12 – Conhecimento a respeito da circunferência

Durante a pesquisa, verificamos que muitos daqueles alunos que estavam tanto entre os que afirmaram não saber, quanto entre os que afirmavam saber o que é circunferência, não sabiam distinguir entre círculo e circunferência.

Dos estudantes que desenharam a figura, 12 da 7ª série fizeram a que corresponde a forma (Figura 61) encontrada pelos mesmos no caderno de aula e no livro didático[24] adotado pela escola; 4 alunos da 7ª e 10 da 8ª série desenharam a Figura 62, que representa os pontos de uma circunferência; e 4 alunos da 8ª série desenharam a Figura 63, que corresponde aos pontos e ao centro de uma circunferência.

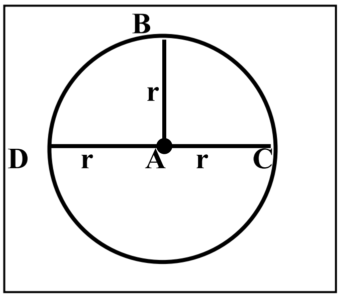


Figura 61 – Circunferência desenhada por alunos

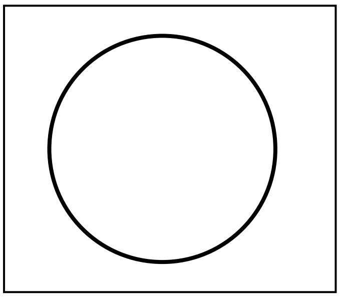


Figura 62 – Circunferência desenhada por alunos

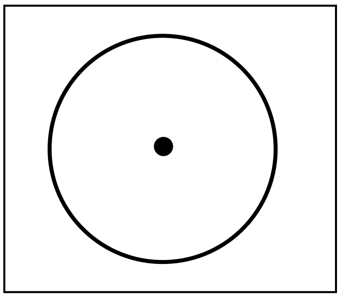


Figura 63 – Circunferência desenhada por alunos

Como podemos perceber, os alunos apresentam alguma noção do que seja circunferência, porém, não têm uma compreensão clara da definição desta figura e, até mesmo, da importância de itens como centro, raio e diâmetro. Durante as entrevistas, alguns alunos demonstraram acreditar que estes itens faziam parte da circunferência.

No que se refere à elipse (Gráfico 13), apenas um aluno da 7ª série afirma saber o que é esta figura e o desenho feito por este é similar ao da Figura 64. Além deste, houveram 3 alunos da 7ª série que não responderam e os demais afirmaram não saber o que é uma elipse.

[24] ANDRINI, Álvaro, ZAMPIROLO, Maria José de Vasconcelos. **Novo Praticando matemática**. 7ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 2002. – o livro dos mesmos autores foi adotado na 8ª série.

Gráfico 13 – Conhecimento a respeito da elipse

Este é um resultado que não esperávamos encontrar, visto que a elipse já teria sido tratado em anos anteriores, na disciplina de Geografia, ao serem estudados assuntos que envolvem os planetas e suas órbitas, ou mesmo em Matemática ou Arte, ao estudarem diferentes tipos de formas geométricas.

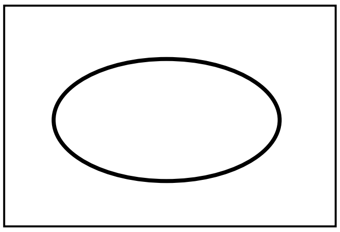


Figura 64 – Elipse desenhada por alunos

O fato das atividades serem voltadas para que os alunos descobrissem pontos, bem como a distância entre pontos nos espaços urbano e isoperimétrico, tornou viável o trabalho com o plano cartesiano, assunto que não é um privilégio da Matemática, visto que também é trabalhado na Geografia, em conteúdos que envolvem a cartografia.

Dessa forma, buscamos saber qual o conhecimento dos alunos em relação a este assunto. Nesta questão (Gráfico 14), apenas 2 alunos da 7ª e 4 da 8ª série afirmaram conhecer o que é um plano cartesiano sendo que, destes, apenas um desta primeira fez o desenho visto na Figura 65 e um aluno da 8ª série fez o desenho da Figura 66.

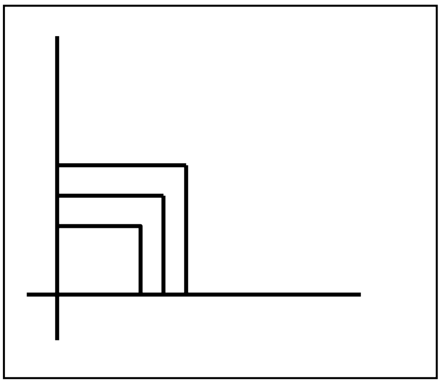


Figura 65 – Plano cartesiano desenhado por aluno da 7ª série

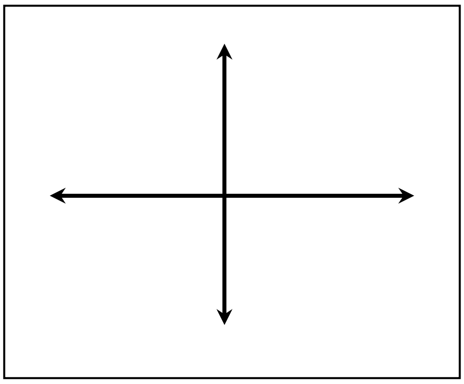


Figura 66 – Plano cartesiano desenhado por aluno da 8ª série

Os demais alunos afirmam não saber o que é um plano cartesiano. Na 8ª série, ao indagarmos, oralmente, os alunos se alguém conhecia o que era plano cartesiano, um aluno respondeu que conhecia apenas na brincadeira de batalha naval.

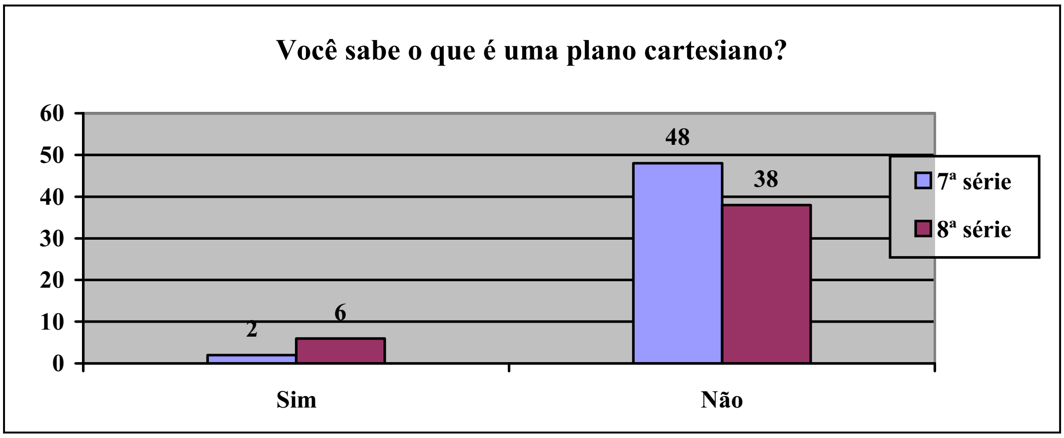


Gráfico 14 – Conhecimento a respeito de plano cartesiano.

Como podemos constatar, o número de alunos que afirma conhecer o plano cartesiano é muito baixo. Conseqüentemente, o resultado (Gráfico 15) obtido na questão que busca saber se estes sabem encontrar as coordenadas de pontos no plano também não foi diferente.

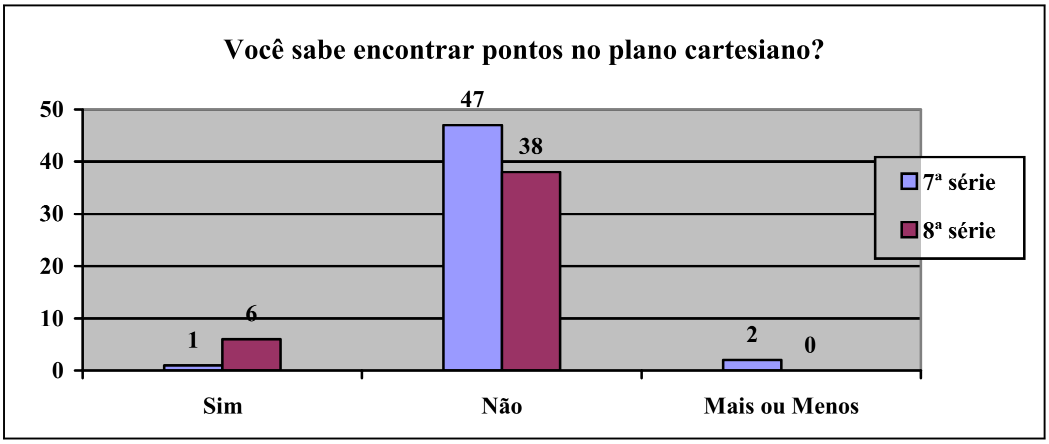


Gráfico 15 – Alunos que sabem encontrar as coordenadas de um ponto no plano cartesiano.

Nesta, mantém-se o baixo número de alunos que assinalaram "Sim", correspondendo a 1 na 7ª e 6 na 8ª série; desta primeira, 2 não responderam a questão e os demais afirmam não saber encontrar as coordenadas de um ponto no plano cartesiano. Entretanto, nenhum desses alunos complementou sua resposta com qualquer forma que demonstrasse esse conhecimento.

O resultado desta pesquisa foi importante por nos proporcionar um conhecimento mais consistente a respeito daqueles com os quais atuamos. Isso ajudou a refletir na prática que desenvolvemos em sala de aula e, assim, proporcionar um melhor resultado para construção dos conhecimentos por parte de nossa clientela e, ainda, garantir um resultado satisfatório em nosso estudo.

No item a seguir faremos uma descrição das atividades que fazem parte de nossa proposta.

3.2.2 Conhecendo as atividades

Como ressaltamos no início deste trabalho, utilizamos a relação entre a Modelagem e as Geometrias Urbana e Isoperimétrica para propor uma abordagem metodológica que visa construir com os alunos os conceitos de circunferência e elipse. Assim, apresentamos neste item a descrição das atividades elaboradas para este fim.

Na *primeira atividade* objetivamos fazer uma introdução de dois diferentes espaços em que a Matemática pode trabalhar, o espaço quadricular e o espaço triangular, a fim de que os alunos percebessem diferenças, tais como: as unidades de medidas de acordo com cada espaço e de como podemos localizar pontos nestes.

A primeira atividade é constituída de dez questões que visam alcançar nossos objetivos. Esta é iniciada com a história *Os taxistas de Barcarena* em que um turista solicita um táxi a uma empresa e é atendido por uma telefonista chamada Joana, também conhecida como dona Jô, que, por sua vez, fica indecisa a respeito de que motorista enviar de modo a atender o mais rápido possível seu cliente, mas decide-se por enviar o Taxista Mané.

Na primeira questão da atividade que tem um modelo do mapa da cidade com a localização dos dois taxistas e do hotel em que está hospedado o turista, o aluno é solicitado a medir com a régua a distância entre cada um dos taxistas e o hotel e verificar se dona Joana havia enviado o taxista correto. Nesta questão buscamos estimular os alunos a fazerem uso de sua intuição para descobrirem o caminho que deveria ser percorrido pelos taxistas e medi-los. Como se trata do mapa de uma cidade esperávamos que os alunos estivessem atentos ao fato de que os taxistas devem percorrer pelas ruas fazendo caminhos horizontais e verticais.

Após a terceira questão, apresentamos outra história que também envolve uma situação de distância, mas que se passa em uma cidade com espaço diferente do convencional. Trata-se de uma cidade do mundo virtual, onde a forma de organização das ruas forma triângulos eqüiláteros e, assim, em lugar de quarteirões, temos os *trieirões*. Nesta cidade vivem muitos super-heróis, mas também muitos vilões, e é nela que se passa a história *O mundo virtual dos Felicitons*, em que o radar da base de observação dos heróis, conectado a um computador bastante avançado, detecta um problema na cidade e, ao fazer seus cálculos matemáticos, decide acionar um dos dois defensores que fazia ronda nas proximidades da ocorrência, o conhecido Amigon.

Com base na referida história e na localização do local do crime e dos dois super-heróis no mapa da cidade que consta na atividade, nossos alunos terão que responder a quarta questão, em que deverão verificar se o computador enviou realmente o defensor que estava mais próximo do local do crime, utilizando para isso o mesmo procedimento usado na questão um, ou seja, a medição com a régua. Esta questão, assim como as anteriores, visa ajudar o aluno a refletir sobre o espaço em que está atuando e, através do uso da sua intuição, escolher o caminho mais viável para ser percorrido pelos heróis e medi-lo para poder responder a mesma.

Nas quatro primeiras questões desta atividade, buscamos oportunizar os alunos a trabalharem, não apenas com questões que envolvem medição (espaço, unidades de medidas), como também a pensarem, analisarem as situações e a criarem estratégias de resolução de problemas.

Na quinta e sétima questões, solicitamos aos alunos que verificassem, respectivamente, a distância em quarteirão e trieirão entre os pontos dados, a fim de que os mesmos exercitassem essas novas unidades de medida, bem como se familiarizassem com esses dois novos espaços; os alunos tiveram, ainda, a oportunidade de perceber que os pontos não precisam, necessariamente, estar localizado em uma *esquina*, ou seja, no vértice do quadrado ou do triângulo, podendo estar localizado em qualquer lugar dentro da malha, ou seja, nos *meios de caminhos*. Dessa forma, ao descobrirem a distância entre os pontos, os alunos trabalharam também com números decimais, além dos números naturais.

Nas questões seis e oito, pedimos aos alunos para encontrarem as coordenadas de cada um dos pontos dados na questão imediatamente anterior (APÊNDICE C) a cada uma dessas, ou seja, as questões cinco e sete, respectivamente. Naquelas, buscamos trabalhar Plano Cartesiano abrangendo sua função; seus eixos; a divisão do plano em quadrante e as funções dos eixos no plano; a localização de pontos em termos das coordenadas; e as variações dos conceitos envolvidos no Plano Cartesiano de acordo com o espaço em que é aplicado (quadricular ou triangular). Este é um assunto que consta no conteúdo escolar da 7ª série, no entanto, com base nos resultados dos questionários de pesquisa da 8ª série, em que verificamos que muitos alunos parecem desconhecer ou não lembrar deste assunto, não faremos distinção na metodologia de trabalho deste conteúdo entre as duas séries.

As questões nove e dez são contextualizadas, sendo que a primeira trabalha com espaço de quadrículas e a segunda com o de triângulos. Em ambas os alunos são incentivados a resolverem problemas em que, como nas questões cinco e sete, precisam encontrar as distâncias entre pontos localizados nos *meios de caminhos*, quer dizer, pontos que estão localizados em uma determinada parte do *quarteirão* ou do *trieirão* que não seja nas *esquinas*. Nestas, os alunos tiveram a oportunidade, não apenas de trabalhar com as unidades de medidas diferentes, como também com as partes fracionadas destas unidades precisando, algumas vezes, fazer operações com frações ou números decimais para responder a questão.

As questões relativas a *segunda atividade* estão voltadas para a construção do conceito de circunferência. Na primeira questão desta os alunos precisaram encontrar a distância entre um ponto localizado no centro do quadriculado e outros pontos que se encontram em locais diferentes. Apesar das diferentes localizações, esses pontos possuem a mesma distância para o ponto central, o que é uma característica da circunferência que já poderá ser notada. Esta atividade deu subsídios para que os alunos pudessem resolver as questões seguintes.

Na segunda questão, com base na história contada anteriormente, os alunos terão que encontrar, no espaço quadricular, todos os pontos em que se situarão os taxistas da *A Jato*, os quais deverão ficar sempre a uma distância de três quarteirões da referida empresa. A resolução desta questão proporcionará aos alunos a oportunidade de encontrar pontos de uma circunferência urbana, que como já sabemos, tem a mesma definição da tão conhecida circunferência euclidiana.

Na questão três perguntamos aos alunos que figura eles encontraram a fim de sabermos se estes perceberam alguma analogia da figura encontrada na questão anterior com a circunferência. Na quarta questão, perguntamos se estes alunos chamariam a figura encontrada de circunferência, a fim de que, caso não tenham percebido de imediato a relação entre a figura encontrada e a circunferência euclidiana, eles pudessem refletir sobre esta possibilidade.

Na quinta questão solicitamos aos alunos para encontrarem pontos com a mesma distância (cinco quarteirões) de um ponto central, sendo que nesta utilizamos o espaço formado por triângulos eqüiláteros. Dessa forma, buscamos alcançar os mesmos objetivos da questão dois e, ainda, ampliar o campo de conhecimento dos mesmos para o novo espaço.

Nas questões seis, sete e oito buscamos ajudar o aluno a refletir sobre a figura que ele encontrou, a fazer comparações com a encontrada na questão dois e com a circunferência que eles conhecem, para que este possa, através do uso de sua intuição, tomar suas conclusões a respeito das diferentes formas, espaço e da semelhança entre os métodos utilizados para encontrar os pontos.

Utilizamos a pesquisa, na nona questão, como um recurso que estimulasse os alunos a buscarem mais detalhes a respeito da circunferência, principalmente, aqueles não apreendidos quando o assunto foi tratado em outras aulas ou séries. Nesta questão, buscamos, ainda, que os alunos refletissem a respeito e fizessem comparações do que havia sido encontrado por eles durante a pesquisa e das respostas encontradas nas questões anteriores. As atividades de pesquisa foram realizadas através da *internet*.

Com as questões trabalhadas na *terceira atividade* buscamos ajudar o aluno a construir seu conhecimento a respeito da elipse. A atividade é iniciada com uma pequena introdução da descoberta das órbitas elípticas dos planetas. Através desta introdução, buscamos incentiva-los a buscarem saber o que é uma elipse, tarefa solicitada na primeira questão, em que os alunos precisaram fazer pesquisas a respeito desta figura, a fim de que estes descobrissem itens, como: definição, características, curiosidades e aplicações. A referida questão surgiu também para que os alunos pudessem ter subsídios cognitivos para resolver às questões que dão continuidade a atividade.

Na segunda questão, solicitamos aos alunos que, através do uso da Geometria Urbana, ou seja, do espaço quadriculado, encontrasse a órbita de um determinado planeta, o qual chamamos de *P*, tendo como pontos de referência os focos *A* e *B* e sabendo que a soma das distâncias destes para os pontos da órbita a ser encontrada deve ser sempre igual a 9. Assim, objetivamos que os alunos pudessem encontrar os pontos da órbita desse planeta utilizando um procedimento que pode ajudá-los a entender melhor a definição desta figura.

Na questão três buscamos incentivar os alunos a fazerem comparações entre o resultado da pesquisa sobre elipse (1ª questão) e a figura encontrada na segunda questão, de modo que descobrissem diferenças e semelhanças entre estas.

Na quarta questão foi solicitado aos alunos que mudassem a posição dos pontos *A* e *B*, ou seja, dos focos, de forma que a distância entre estes fosse de um quarteirão e que, posteriormente, descobrissem os pontos da elipse de modo que a soma da distância entre estes e os focos fosse a mesma usada na figura anterior (nove). Com esta atividade visamos ajudar o aluno a refletir sobre a mudança de aspecto da elipse de acordo com a proximidade dos focos verificando que, como na circunferência urbana, quanto mais os focos se aproximam, mais a aparência da elipse se aproxima a da circunferência, o que leva ao conceito da excentricidade da elipse.

Mudando de espaço, do quadricular para o triangular, solicitamos aos alunos, na quinta questão, que estes encontrassem a órbita do planeta Divertix, sendo que a soma dos pontos desta órbita para os dois focos seria sempre 6. Nesta, eles puderam comparar o procedimento utilizado para encontrar os pontos com o das questões quatro e dois, utilizando-o em um espaço diferente. Objetivando ajudar o aluno em suas reflexões e entendimento da definição de elipse, acrescentamos, nesta atividade, três perguntas que fazem parte da sexta questão. A pergunta *a* refere-se a figura encontrada na questão cinco, e busca saber do aluno que figura foi encontrada; na pergunta *b* buscamos fazer com que o aluno comparasse as figuras vistas nas questões 1 e 2 com a da questão 5 e encontrasse semelhanças; e na pergunta *c* buscamos saber se os alunos já podiam conceber a figura encontrada como sendo uma elipse e porquê.

3.2.3 Aplicando as atividades

Neste item buscamos esclarecer nossa atuação durante a aplicação das atividades de pesquisa. Acreditando que o conhecimento é algo que deve ser construído pelo sujeito, dessa forma, elaboramos atividades que permitissem que os alunos através do uso de sua intuição, da troca de idéias com os colegas e das atividades de pesquisa pudessem construir seu conhecimento. Neste contexto, como professores, desempenhamos a função de ajudar o aluno a aprender, a desenvolver seu próprio pensamento, através do incentivo ao desenvolvimento de processos metacognitivos.

Entretanto, não podemos dizer que durante as aulas fomos apenas professores orientadores, visto que algumas vezes sentimos a necessidade de intervir de forma direta, ministrando um determinado assunto sempre que necessário, fazendo analogias à realidade, utilizando material de apoio, mas também, sempre que possível, direcionando o aluno a níveis mais gerais de abstração.

No referente a avaliação, acreditamos que as respostas dadas pelos alunos nas atividades não seria suficiente para refletir o pensamento dos mesmos, portanto, optamos em manter um constante diálogo, a fim de tentar entender seus pensamentos e expectativas, de modo que fosse possível verificar as estruturas cognitivas construídas por eles para que, de fato, pudéssemos ajudá-los a construírem seus conhecimentos.

Assim, desenvolvemos nosso trabalho tendo como base as concepções descritas neste item, as quais não se baseiam em uma única teoria do conhecimento, mas em várias, a exemplo do Intuicionismo, do Construtivismo e sem abandonar o Tradicional, uma vez que somos um misto de teorias que se complementam.

Faremos, neste item, uma descrição paralela do resultado obtido com ambas as turmas, diferenciando apenas quando necessário, ou seja, no caso de haver disparidades. Descrevemos também os procedimentos metodológicos que utilizamos no decorrer das aulas, para explicação dos conteúdos, correção das atividades e orientações, bem como os materiais didáticos utilizados.

3.2.3.1 A primeira atividade

Nos horários tratados antecipadamente como os professores de cada uma das turmas, demos início a aplicação da primeira atividade. Participaram desta 47 alunos da 7ª série e 43 da 8ª série. Considerando a quantidade de alunos e o tamanho da sala de aula, que não era muito espaçosa, em ambas as turmas, não possibilitando um trabalho com grupos de mais de três alunos, pedimos aos estudantes que se reunissem em duplas ou trios para a realização da mesma.

Iniciamos explicando aos alunos os objetivos das atividades. A seguir, distribuímos réguas entre eles e pedimos que fizessem uma leitura da atividade. Posteriormente, solicitamos aos mesmos que, ao resolverem a primeira questão, além de responderem o que pedia o comando da mesma, também traçassem a distância medida no mapa. A complementação do comando desta questão tem por fim nos ajudar a entender melhor o raciocínio usado para medição, se estes entenderam os quadrados que formavam o mapa como quarteirões e, assim, mediram o trajeto correto do motorista.

Percebemos, durante as orientações, que nesta questão os alunos se depararam com a seguinte dúvida: Que unidade de medida usar? A dúvida estava em usar metros ou centímetros. O registro do valor obtido na medição e da unidade de medida (*m* ou *cm*), também representou uma dificuldade para muitos, bem como o uso da régua, pois alguns alunos não sabiam se no ponto inicial do trajeto eles deveriam colocar o *0* ou o *1* da régua para poder fazer a medição.

Tentando solucionar a questão, pedimos aos alunos que trocassem idéias com os colegas a respeito das medidas. No entanto, ao verificarmos que este problema atingia grande parte da turma para garantir o andamento da atividade, interrompemos para explicar de forma a atingir a todos. Esta situação foi observada em ambas as turmas.

É importante ressaltar que não solicitamos claramente, no comando da questão, que os alunos expusessem o registro das medidas obtidas, dando a estes a opção de registrá-las ou não. Entretanto, isto só foi percebido por nós durante a aplicação da atividade pela primeira vez, na 7ª série. Ao percebermos a preocupação de alguns alunos em registrar as medidas obtidas, passamos a incentivar a turma de modo que todos também o fizessem e, posteriormente, estendemos esse incentivo a turma da 8ª série. Assim, percebemos que esta é uma falha e que deve ser corrigida para uma próxima experiência, pois permite que os alunos possam exercitar a medição.

Durante a realização da atividade, as tão conhecidas perguntas: “O que é pra fazer aqui professora?”, ou, “O que é que a senhora quer que faça aqui?”, não deixaram de aparecer. Ao nos dirigirmos até estes alunos, verificamos que nem sequer haviam lido o texto, ressaltando a resistência que estes têm a leitura, o que reflete fortemente na interpretação das questões. Tentamos remediar pedindo que estes alunos lessem para nós todo o texto que antecedia a questão em que tinham dúvidas. A seguir, fizemos perguntas que os levassem a refletir sobre as questões objetivando que os mesmos encontrassem seus próprios caminhos.

Durante as orientações, poucos alunos perguntaram se a resposta poderia ser dada em quarteirão. Esta pergunta apareceu em ambas as séries e, quando isto ocorria, perguntávamos por que eles achavam que poderia ser em quarteirão, um aluno da 7ª responde: “se é uma cidade, tanto faz, se eu usar a régua vou ter que medir os quarteirões mesmo”, um aluno da 8ª, respondeu: “ah, professora, por que é melhor”. Então, pedimos que representassem a medida como achassem melhor. Durante a análise das atividades verificamos que 6 alunos da 7ª e 2 da 8ª série apresentaram a distância entre *ZH* e *MH* em quarteirão. No entanto, entre os alunos da 7ª série, três representaram a distância entre *ZH* por $\frac{6}{4}$ e entre $MH\frac{7}{4}$, ao perguntarmos o porquê daquele quatro, os alunos disseram que era 6 quarteirões e sete quarteirões, enfatizando aí um desconhecimento de fração.

Ao analisarmos as atividades verificamos que, no referente a primeira questão, 33 alunos da 7ª série responderam a questão corretamente, ou seja, o motorista Mané não estava mais próximo do hotel, destes 6 apresentaram as distâncias entre os pontos usando como unidade de medida o quarteirão; 7 não apresentaram a medida e os demais apresentaram a medida obtida com a régua sendo que 1 substitui o *cm* pelo *m*. Houveram 10 alunos que responderam errado, ou seja, que Mané era o motorista mais próximo ao hotel, destes 8 traçaram o caminho entre *MH* na diagonal, o que é errado, visto que este não seria um caminho possível de ser percorrido pelos taxistas em uma cidade e, conseqüentemente, apresentaram a medida deste caminho e 2 traçaram o caminho correto, mas mediram errado; 4 alunos não responderam esta questão.

Na 8ª série, 32 alunos responderam a primeira questão corretamente, destes 2 apresentaram as distâncias entre os pontos usando como unidade de medida o quarteirão; 14 não apresentaram medidas e os demais apresentaram em *cm*. Houveram 8 alunos que responderam errado a questão, destes 5 não traçaram o caminho a ser percorrido nem apresentaram medições; 2 traçaram e, conseqüentemente, mediram o caminho errado; e 1, apesar de ter traçado o caminho correto, mediu errado. Nesta turma, 3 alunos não responderam esta questão.

Observamos durante as orientações e análise das atividades que a representação de medidas foi um problema para muitos alunos, mesmo para aqueles que responderam corretamente. Verificamos na representação da medida entre *ZH*, por exemplo, como *6,0 c*, ou *5/9 cm*, ou *5,9 m* ou *0,59 cm*, alguns, na dúvida, optaram em escrever por extenso "centímetro" ou "metro", outros afirmavam que "Zé estava mais próximo por um décimo". Daí o fato de muitos optarem em não apresentar medidas.

Durante a realização da atividade, ao nos depararmos com os alunos que traçavam os caminhos corretamente (Figuras 67 e 68), ou seja, um segmento de reta entre *ZH* e dois ou até mais segmentos entre *MH*, bem como alguns que usavam como unidade de medida o quarteirão, perguntamos o porquê daquele caminho e todas as respostas obtidas se referiam ao fato de ser uma cidade, de ter que andar nas ruas, de que contar quarteirão era mais fácil que usar a régua etc. Ao perguntarmos se ao traçarmos uma reta entre *MH* não ficaria mais próxima à distância entre Mané e o Hotel, todos responderam que sim, mas que naquele caso não poderia ser feito. Assim, percebemos que a idéia de distância como o caminho mais curto entre dois pontos que não precisa, necessariamente, ser uma linha reta, como cotidianamente presenciamos em uma cidade, fazia parte da compreensão de alguns alunos.

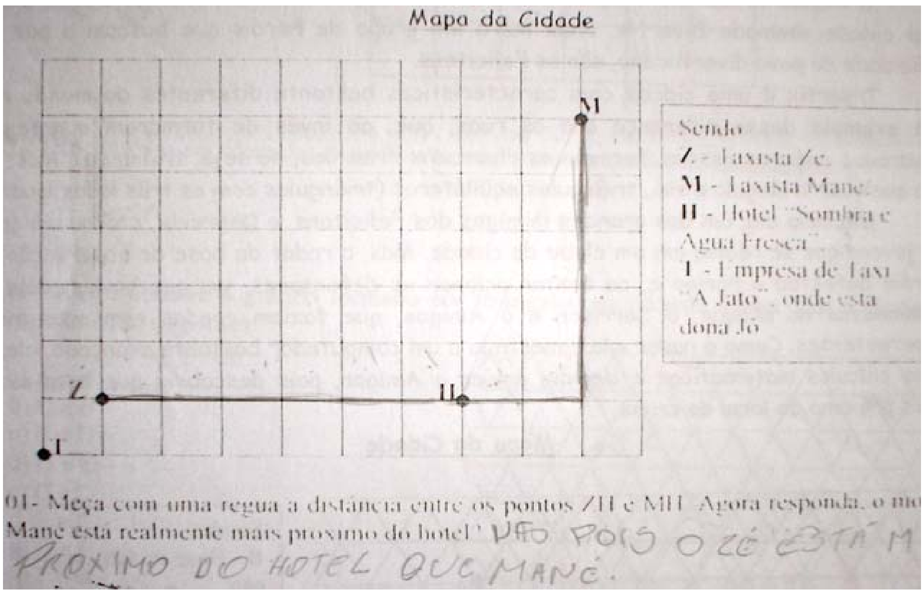


Figura 67 – Caminho certo traçado por um aluno
(com um segmento de reta entre ZH e dois segmentos entre MH)

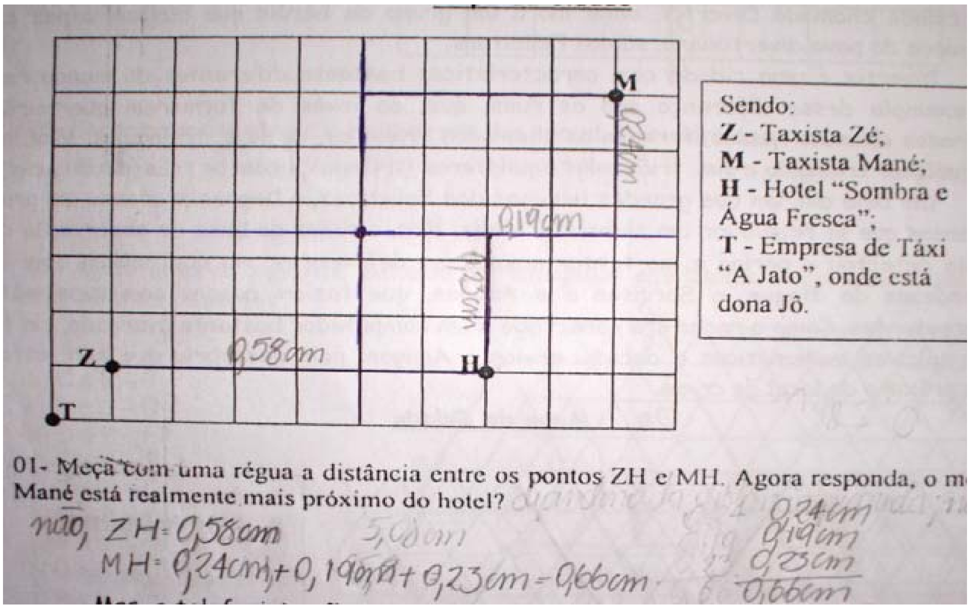


Figura 68 – Caminho certo traçado por um aluno
(com um segmento de reta entre *ZH* e três segmentos entre *MH*)

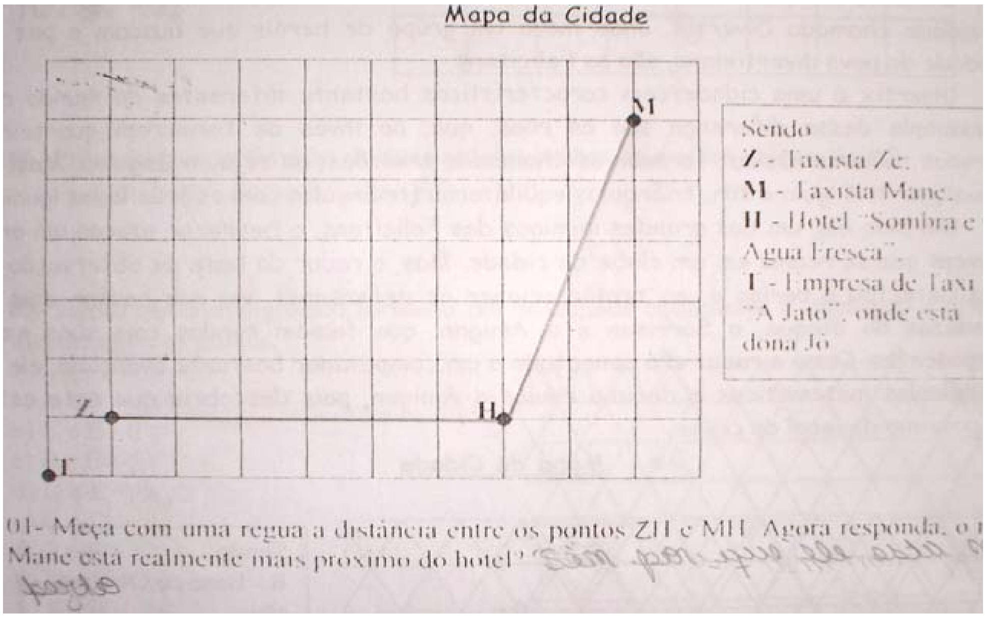


Figura 69 – Caminho errado traçado por um aluno
(O caminho entre *MH* é traçado na diagonal)

Ao conhecermos a Geometria Urbana, no Capítulo 1, vimos que por se tratar de um espaço urbano ou de quadrículas o caminho traçado na Figura 69 não está correto, visto que as pessoas e, principalmente, os motoristas, têm que andar pelas ruas e não voar sobre casas e prédios.

No referente a segunda questão, as respostas dadas pelos alunos foram coerentes com as respostas que estes encontraram na questão anterior, com exceção de 3 alunos da 7ª série, que responderam corretamente a primeira questão, afirmaram concordar com dona Jô e 5 da 8ª série, que responderam a primeira questão errado, afirmaram concordar com João, em ambos os casos, as respostas contradizem a resposta dada na questão anterior. Em alguns casos observados na sala de aula pudemos verificar que isto se deve a falta de atenção e, até mesmo, a problemas de interpretação, visto que mesmo orientando o aluno a refletir sobre o que ele fez na questão anterior, observar se havia relação desta com a segunda e depois responder, houveram casos em que a resposta não mudou.

Para alguns alunos, a terceira questão pareceu repetida, visto que quem concorda com João ou dona Jô, resposta dada na 2ª questão, já tem a solução para o problema no texto, mandar o taxista Zé ou Mané. No entanto, apareceram algumas respostas do tipo "Diria para João ser menos intrometido, mas continuar estudando" (2 alunos da 7ª série); "Mandaria os dois e via o que chegava mais rápido" (3 alunos da 7ª série); "Cancelaria corrida com Mané e mandaria Zé" (2 alunos da 8ª série); "Que João fizesse um ponto de táxi pra ele" (2 alunos da 8ª série); "Nenhuma, porque o taxista Mané já tinha recebido a ordem de ir para o local" (2 alunos da 8ª série). Apesar de fugirem da resposta que esperávamos não podemos responsabilizar os alunos, pois estes responderem o que havia sido perguntado, enfatizando aí a necessidade de uma melhor elaboração das questões, a fim de dar parâmetros mais definidos para respostas.

Assim como na primeira questão desta atividade achamos necessário complementar a quarta questão pedindo aos alunos que traçassem o caminho a ser medido que, desta vez, se referia ao caminho a ser percorrido por dois super-heróis até o local de um crime ocorrido na cidade Divertix, estendemos a esta também o incentivo ao registro das medidas.

Durante a aula percebemos que os alunos encontraram as mesmas dificuldades da primeira, em relação a medição e ao caminho traçado. No entanto, verificamos que nenhum aluno da 8ª série havia pensado no mapa dos Felicitons como o mapa de uma cidade, assim, consideramos ser cabível uma observação do tipo: "lembrem que vocês estão fazendo medições no mapa de uma cidade em que as ruas são organizadas de forma diferente", isto nos ajudou a ter algumas respostas positivas, principalmente, daqueles que haviam medido corretamente os caminhos na primeira questão.

Ao analisarmos as atividades verificamos que 38 alunos da 7ª e 35 da 8ª série responderam corretamente, ou seja, que o computador enviou o herói errado para o local do crime. Destes alunos, 11 de cada turma traçaram o caminho a ser medido de modo correto

(Figura 70), sendo que nenhum da 7ª série apresentou medida, enquanto que na 8ª série 5 não apresentaram medidas, 4 apresentaram medidas em *cm* e 2 apresentaram medidas em trieirões. Os demais alunos responderam a questão, mas não traçaram o caminho que os heróis percorreram até o local do crime, nem apresentaram medidas

Entre os alunos que responderam errado a quarta questão, temos 8 da 7ª e 7 da 8ª série. Destes, 1 aluno da 7ª série, apesar de ter traçado o caminho correto a ser medido, equivocou-se nas medidas e acabou dando razão ao computador da base dos heróis. Houveram 6 de cada turma que traçaram o caminho errado (Figura 71), destes 4 da 7ª e 5 da 8ª série, apesar de medirem corretamente, ao fazerem a medição do caminho errado, também responderam errado, os demais não apresentaram medidas; e 1 aluno, em ambas as turmas, não traçou e também não apresentou medidas.

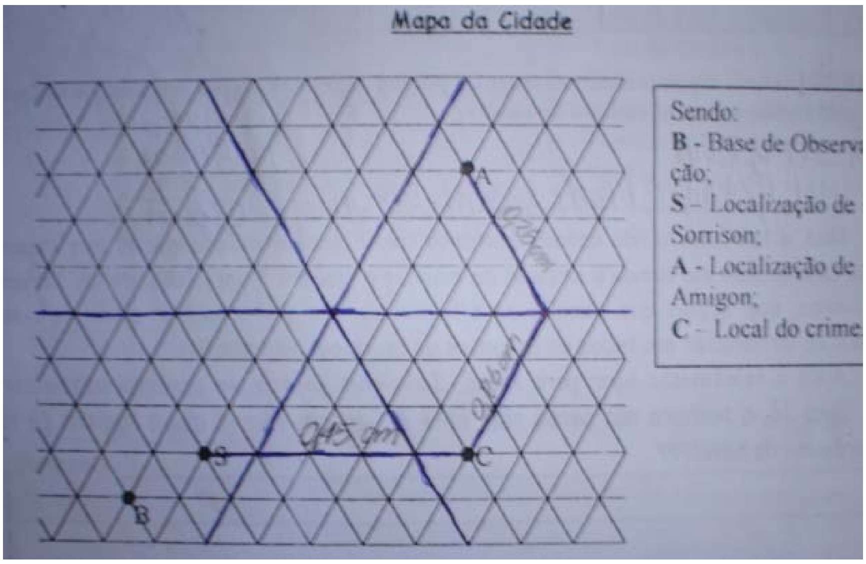


Figura 70 – Caminho certo traçado por um aluno
(com um segmento de reta entre *SC* e dois segmentos entre *AC*)

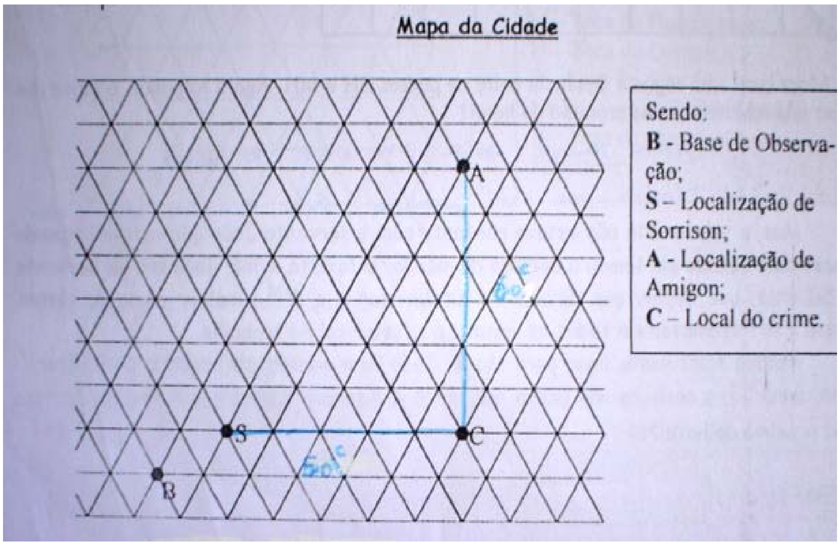


Figura 71 – Caminho errado traçado por um aluno
(com um segmento de reta entre *SC* e outro entre *MH*)

Como podemos perceber na Figura 70, o aluno que traça o caminho corretamente o faz seguindo os lados dos triângulos que seriam as ruas da cidade fictícia da história. No entanto, na Figura 72, vemos que o aluno traça uma linha reta entre os pontos *AC*, um trajeto não viável naquela cidade, pois, assim como na primeira questão, também se trata de um ambiente urbano, sendo que neste caso a disposição das vias formam "quarteirões" que aparentam ser triângulos eqüiláteros. No Capítulo 1 explicamos mais detalhadamente o porquê do caminho traçado na Figura 70 ser o correto no espaço triangular.

É importante informar que o fato de não solicitarmos, quer seja no comando da primeira, quer seja no da quarta questão, que os alunos registrassem os valores medidos foi uma falha. Pois, durante a realização das atividades, percebemos a necessidade deste dado, não apenas para nossa análise, como também para que os estudantes pudessem aprimorar seus conhecimentos sobre o assunto. Porém, mesmo fazendo esta solicitação verbalmente muitos não o fizeram.

Após o término das primeiras quatro questões desta atividade fizemos uma correção em grupo das questões, ou melhor, uma correção com a participação de toda a turma. Para isso, levamos para a aula dois painéis feitos de emborrachado (EVA), um com o desenho do espaço quadricular (Figura 72) e outro com o do espaço triangular (Figura 73). O uso deste material facilitou as explicações, além de evitar que gastássemos tempo desenhando no quadro. Para marcar os pontos no material utilizamos alfinetes coloridos e pequenas letras confeccionadas também de EVA.

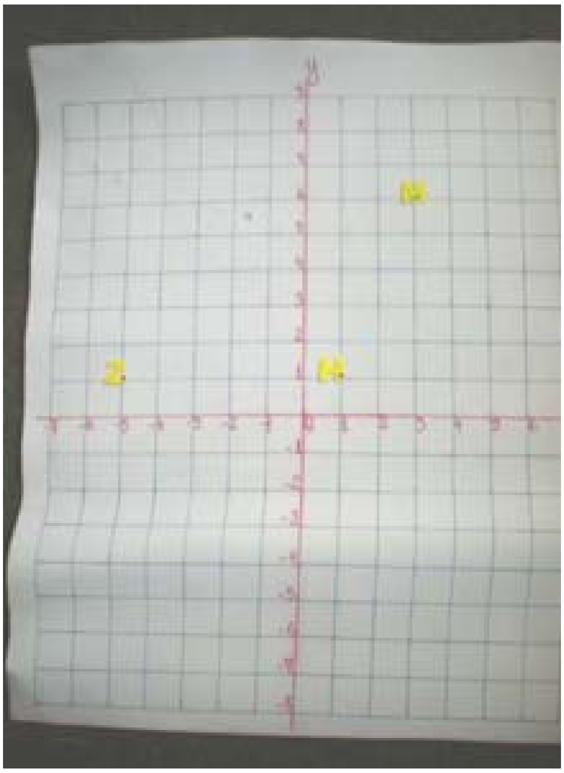


Figura 72 – Painel com espaço quadricular.

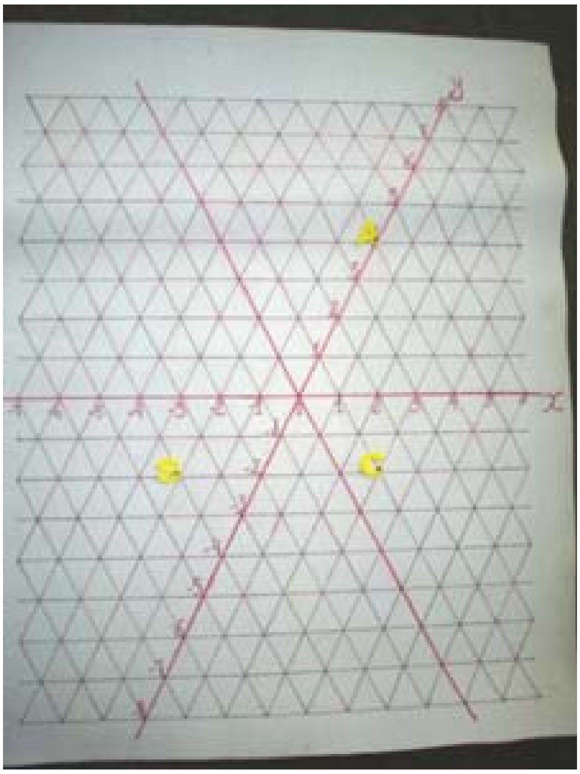


Figura 73 – Painel com espaço triangular.

Iniciamos a correção pedindo aos alunos para exporem suas respostas e justificativas destas. De início, constatamos certo constrangimento, mas ao explicarmos que o fato da resposta ser certa ou errada não afetaria na avaliação, mas que iríamos considerar a participação, alguns começaram a se manifestar. Após a colocação do aluno a turma debatia a solução dada pelo colega e outras soluções apareciam.

Com as respostas que apareceram tivemos a oportunidade de explicar sobre a origem das unidades de medidas e do porquê de padronizá-las, do uso da régua e da representação da medida obtida com o uso desse instrumento. No entanto, ressaltamos que não demos o aprofundamento destes conteúdos que muitos desses alunos precisavam, pois, para isso, precisaríamos de mais tempo e de outras atividades complementares.

Como cobramos dos alunos apenas a participação, não somente fazendo as atividades, mas também na socialização das respostas durante a correção em grupo, poucos alunos se preocuparam em, durante as correções, modificar na atividade a resposta registrada antes da correção. Isso, além de ser positivo para o aluno que, ao invés de se preocupar em escrever a resposta certa, preocupa-se em participação da discussão e tirar dúvidas durante a explicação, nos possibilitou verificar nos questionários uma considerável variedade de respostas.

Ressaltamos, ainda, que apesar do trabalho ser feito em dupla ou trio, todos os alunos que participaram da aula entregaram sua atividade, daí termos duas ou três atividades com respostas iguais, mesmo em casos de respostas subjetivas, como as encontradas na questão três.

Após a correção em grupo, como naquele dia não havia mais tempo para darmos continuidade a atividade, os alunos entregaram a mesma, pois não era nosso objetivo deixar que o aluno resolvesse em casa, visto que gostaríamos de acompanhar o progresso deste no processo de resolução, bem como saber suas angústias, a fim de avaliarmos melhor a metodologia proposta neste trabalho de forma a indicar alterações, caso necessário.

As questões que davam seguimento a atividade foram trabalhadas nas duas turmas no segundo dia de aula, que com a 7ª série ocorreu no segundo dia e com a 8ª série no sétimo dia após a primeira aula. Participaram desta etapa da atividade a mesma quantidade de alunos da etapa anterior.

Iniciamos a aula, em ambas as turmas, retomando o assunto a respeito das diferentes unidades de medidas para medir as diferentes grandezas, já tratado na aula anterior. Explicamos o respeito do espaço plano de Euclides, de como este espaço passou a ser adotado nos estudos matemáticos através da Geometria Euclidiana e da diferença entre este e os espaços que estávamos trabalhando (espaço quadricular e espaço triangular) e das diferentes geometrias que o utilizam (Geometria Urbana e Geometria do Triângulo). Após esta introdução pedimos aos alunos para darem início a quinta questão.

Durante as orientações, percebemos que alguns alunos da 7ª série apresentaram problemas de contagem, que podem ser relacionados a dificuldade relatada anteriormente a respeito do uso da régua. Os alunos começavam a contar os quarteirões a partir do ponto de partida, assim, ao responder a questão, eles sempre erravam a distância por uma unidade a mais, por exemplo, a distância entre A e B que era de quatro quarteirões ele respondia cinco, entre B e C que era de 6 quarteirões ele respondia sete etc. Com os alunos da 8ª série não percebemos este problema na questão.

Constatamos, ainda, em ambas as séries, que alguns alunos, ao invés de contarem os lados dos quadrados que deveriam ser "percorridos" de um ponto para o outro, contaram apenas o quadrado que estava entre os dois pontos e ignoravam os "meios de caminhos", um exemplo dessa contagem pode ser visto na Figura 74, onde os traços na diagonal marcam as quadrados contados pelo aluno.

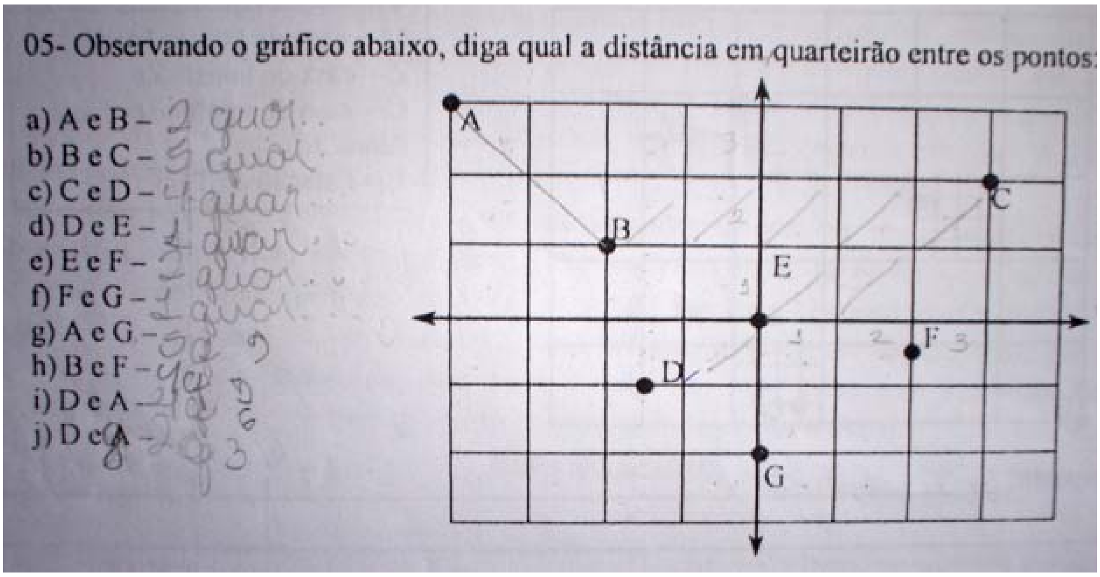


Figura 74 – Atividades de alunos que contavam os quadrados em lugar dos lados dos mesmos.

Outra dificuldade percebida em ambas as turmas durante as orientações, refere-se a representação da distância entre pontos localizados no meio do quarteirão, o problema se dava não apenas na contagem destas distâncias, como também na representação escrita desses valores que alguns optaram em arredondar para mais ou para menos, às vezes para os dois, o de uma resposta para mais o de outra para menos, outros colocaram os valores aleatoriamente, por exemplo, as distâncias entre *A* e *B = 2,9*; entre *B* e *C = 5,6*, ou seja, casas decimais que nem têm haver com a resposta, o que demonstra um total desconhecimento dos números racionais.

A fim de tirar as dúvidas a respeito desta questão e explicar melhor como encontrar a distância entre os pontos que estavam localizados no meio do caminho e, até mesmo, para propiciar o andamento da atividade, visto que o entendimento desta questão influenciaria na compreensão das demais, resolvemos fazer uma correção da mesma antes de darmos continuidade. Apesar dos alunos que não tiveram problemas com a atividade já terem dado início a resolução da questão seguinte.

Ao analisarmos as atividades verificamos (Tabela 1) que 12 da 7ª e 20 da 8ª série responderam todas as letras da 5ª questão corretamente. Entre os alunos que acertaram de 7 a 9 itens, verificamos que estes apenas se equivocaram durante a contagem, não demonstrando problemas além da falta de atenção. No entanto, no que se refere aos alunos com margem de acertos de 0 a 3 ou 4 a 6 itens, constatamos dificuldades, principalmente, relativas as representações de valores fracionados e a contagem, já citados.

Quantidades de acertos das questões	7ª Série	8ª Série
Não resolveu	5	4
Acertou de 0 a 3 itens	8	6
Acertou de 4 a 6 itens	7	6
Acertou de 7 a 9 itens	12	7
Acertou todas	15	20

Tabela 1 – Resultado de respostas obtidas na questão 5 da 1ª atividade.

Como verificamos no item 3.2.1 apenas 2 alunos da 7ª série afirmaram conhecer Plano Cartesiano, assunto que faz parte do conteúdo curricular desta série, mas que ainda não havia sido trabalhado e que apenas 6 alunos da 8ª série diziam conhecer tal assunto que teria sido trabalhado na série anterior. Dessa forma, após a correção da quinta questão, fizemos uma explanação sobre o referido assunto, visto que a atividade não havia sido planejada para introdução do mesmo, mas para fixação e ampliação dos conceitos envolvidos neste.

A explicação a respeito do Plano Cartesiano foi a mesma em ambas as turmas, ou seja, usamos a mesma metodologia e recursos tanto na 7ª quanto na 8ª série. Iniciamos a aula ilustrando um pouco a respeito de sua origem e, usando um painel (Figura 72), explicamos por que se divide em quadrantes, quais os seus eixos, suas utilidades – neste momento, utilizamos os catálogos telefônicos com mapas de Natal, levados pelos alunos[25] e alguns levados por nós e distribuído entre a turma, para que estes alunos localizassem sua escola, sua casa, a de parente ou amigos – e apresentamos um mapa nos referindo as coordenadas geográficas, paralelos e meridianos.

A seguir, demos alguns exemplos de localização de pontos no plano e, representação desta localização, na 7ª série podemos referenciar ao conteúdo que constava no livro de Matemática. Posteriormente, demos continuidade a explicação relembrando os alunos que há diferentes espaços e apresentamos como o Plano Cartesiano era tratado no espaço triangular, de como os eixos se apresentavam neste e como encontrar pontos nesse espaço.

Durante as orientações fomos tirando algumas dúvidas que permaneciam, a exemplo de como numerar o eixo; a respeito dos sinais de positivo (+) e negativo (-) e da representação das coordenadas (x, y) que os alunos algumas vezes trocavam.

[25] Solicitados em aula anterior.

No que concerne a sexta questão, na qual os alunos deveriam encontrar as coordenadas dos pontos dados na questão anterior, o índice de acertos observados nas atividades foi bom em ambas as turmas, pois dos sete pontos cujas coordenadas deveriam ser encontradas, temos que: 15 alunos da 7ª e 13 da 8ª série encontraram todas; 19 da 7ª e 12 da 8ª série tiveram entre 4 a 6 acertos, que também é um bom resultado; 8 da 7ª e 7 da 8ª série acertaram de 1 a 3 coordenadas; 3 da 7ª e 7 da 8ª série erraram todas e os demais não resolveram.

Entre as causas de erros observadas, a mais cometida foi a representação de sinais (12 alunos da 7ª e 8 da 8ª série), no entanto estes erros foram observados apenas nas coordenadas de algumas letras, parecendo mais uma falta de atenção. Apenas 1 aluno da 8ª série cometeu esse erro em todas as letras. Outro erro também bastante cometido (3 alunos da 7ª e 12 na 8ª série) foi o arredondamento de valores, os demais erros referem-se a inversão da posição de *x* e *y*, erro das coordenadas de pontos localizados nos "meios de caminho" e dificuldade em encontrar as coordenadas de pontos localizados em cima dos eixos.

Durante as orientações percebemos entre os alunos participantes da 8ª série que a maioria sabia localizar pontos no plano em termos das coordenadas, sendo que alguns precisavam apenas relembrar o assunto. Mas, no geral, não tivemos uma grande variação dos resultados entre as séries.

Ao iniciarem a sétima questão os alunos se confundiram um pouco na contagem dos lados dos triângulos, pois alguns contavam dois lados de um mesmo triângulo, assim, por exemplo, para ir do ponto *D* ao *B* (ver Figura 75), ao invés de 5 lados de triângulo, o aluno equivocadamente percorria 6, como se estivesse dando voltas e não pegando o caminho mais curto de um ponto ao outro. Mas, após tirarmos esta dúvida a questão foi bem realizada.

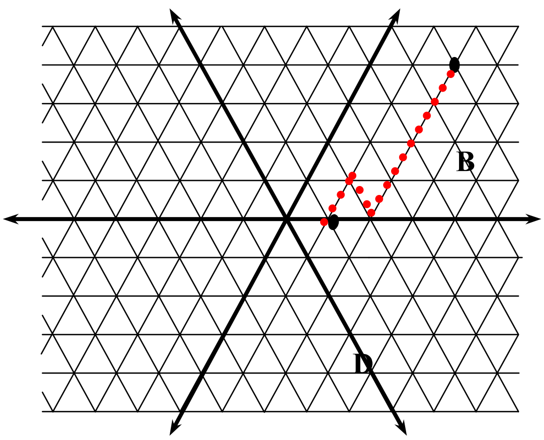


Figura 75 – Contagem de distância feita por aluno

A diferença entre alunos que acertaram todas as distâncias nesta questão, 9 da 7ª e 7 da 8ª série, foi bem menor dos que tiveram o mesmo resultado na quinta questão. No entanto, 13 alunos da 7ª e 14 da 8ª série, tiveram entre 7 a 9 acertos, o que é um resultado positivo e até melhor se comparado com a quantidade de alunos que obteve este resultado na quinta questão; 5 alunos da 7ª e 8 da 8ª série acertaram entre 4 a 6 itens; 8 alunos da 7ª e 7 da 8ª série tiveram de 0 a 3 acertos e os demais não resolveram a questão.

Entre os erros verificados durante a análise, novamente, o mais freqüente diz respeito a representação de valores fracionados, cometido por 9 alunos da 7ª e 11 da 8ª série; além da contagem de dois lados diferentes do mesmo triângulo, cometido por 11 alunos da 7ª série. Como na atividade cinco, também houveram aqueles que encontraram as distâncias contando os triângulos e não os lados percorridos desta figura, ou seja, contou a quadra e não o quarteirão, os meios de caminho não foram contados. No entanto, alguns alunos, principalmente aqueles com margem de erro de 1 a 3, apenas se equivocaram durante a contagem não demonstrando problemas além da falta de atenção.

Na oitava questão, em que os alunos deveriam encontrar as coordenadas dos pontos da questão anterior, localizados no espaço triangular, verificamos certa confusão no que se refere aos eixos. Os alunos, ao buscarem o valor de y, usavam o eixo mais próximo, y ou y'; outros, na hora da representação da coordenada, trocavam e colocavam a coordenada de x para y e vice-versa. Percebendo isso, reforçamos a explicação sobre como encontrar pontos no espaço triangular e a respeito dos eixos. Neste espaço, para alguns alunos, as dúvidas só foram sanadas durante a orientação individual.

Ao analisarmos as atividades verificamos os seguintes resultados na oitava questão: 12 alunos da 7ª e 16 da 8ª série acertaram todos os itens; 9 alunos da 7ª e 12 da 8ª série acertaram de 4 a 6 itens; 15 da 7ª e 9 da 8ª série tiveram de 1 a 3 acertos; 8 da 7ª e 3 da 8ª série erraram todas as coordenadas e os demais não resolveram.

Se compararmos os resultados obtidos na questão oito com aqueles da questão seis podemos perceber que não houve grande alteração nas quantidades, o que é um resultado positivo, pois pode mostrar que o trabalho neste espaço, tão diferente do usual não representa um problema e que as dificuldades dos alunos se devem a outros fatores.

As causas dos erros mais ocorridos nesta atividade são: a inversão dos valores de x e y em algumas letras, cometidas por 10 alunos da 7ª e 7 da 8ª série; uso dos eixos y mais próximo do ponto, por 9 da sétima e 7 da 8ª série; e, novamente, erro na representação de números decimais, por 10 da 7ª e 12 da 8ª série; erro na representação dos sinais em algumas letras, por 4 na 7ª e 4 na 8ª série.

Esta atividade teve continuidade em outra aula. Participaram desta aula 32 alunos da 7ª e 34 da 8ª série.

Nas questões nove e dez, para resolver o problema os alunos também tiveram que encontrar a distância entre os pontos colocados na questão. No entanto, o nível de dificuldade dessas é um pouco maior do das questões anteriores, visto que alguns pontos estão localizados em partes diferentes do espaço que não o "meio", ou seja, metade do lado do quadrado/ triângulo ou a "esquina", que corresponde ao vértice destas figuras.

Na questão nove, em que alguns quarteirões estavam divididos em *quartos* ou *meios*, os alunos precisavam fazer operações com frações ou números decimais. No entanto, durante as orientações, verificamos que estes tiveram problemas em realizar estas operações, alguns não lembravam, outros tinham um entendimento muito restrito sobre o assunto, que não incluía, por exemplo, equivalência de frações ou que só podemos comparar frações de mesmo todo.

Com a análise das atividades, verificamos que, das três distâncias que os alunos teriam que descobrir na nona questão, 16 da 7ª e 6 da 8ª série acertaram todas; 1 da 7ª e 4 da 8ª série acertaram duas distâncias; 10 da 7ª e 5 da 8ª acertaram apenas uma distância; 2 da 7ª e 15 da 8ª série erraram todas, os demais não resolveram a questão. Como causa dos erros verificamos que a soma de frações foi o problema principal para 10 alunos da 7ª e 16 da 8ª série.

Na décima questão, das quatro distâncias a serem descobertas, temos: 11 alunos da 7ª e 13 da 8ª série encontraram três distâncias; 9 alunos de cada turma acertaram duas questões; 7 alunos da 7ª e 5 da 8ª série acertaram apenas uma distância; 4 alunos da 7ª e 9 da 8ª série erraram todas e os demais não responderam a questão.

Durante a resolução das atividades percebemos que alguns alunos ainda tinham dúvidas em relação a contar as distâncias entre os pontos, as quais procuramos sanar durante as orientações. Os erros encontrados nesta questão foram semelhantes àqueles observados na sétima questão. No final da atividade fizemos a correção com a classe, neste momento os alunos socializavam suas discussões e a partir dessas buscamos sanar as dúvidas que surgiam.

3.2.3.2 A segunda atividade

A segunda atividade foi realizada em duas partes: a primeira abrange a resolução das questões 1 a 8, com duração de duas horas/aulas e a segunda parte refere-se a resolução da questão 9, direcionada a uma atividade de pesquisa sobre circunferência, a qual também durou duas horas/aulas. Entretanto, houve a necessidade do uso de mais duas horas/aulas destinadas a complementação da pesquisa através de uma explicação mais aprofundada a respeito da circunferência e, posteriormente, para correção da atividade. Esta atividade teve a participação de 38 alunos da 7ª e 33 da 8ª série.

Havendo a necessidade de conciliar o horário da sala de informática com aquele disponível para a aula, necessitamos inverter a ordem das etapas desta atividade para os alunos da 8ª série. Dessa forma, antecipamos as aulas referentes a pesquisa (nona questão) e a complementação desta e, posteriormente, realizamos a etapa referente a resolução das questões 1 a 8, bem como a correção da atividade. No entanto, relataremos os resultados na seqüência em que as questões encontram-se dispostas na atividade.

A referida atividade é iniciada com uma questão em que os alunos têm que encontrar a distância entre o ponto *O*, localizado no centro da quadrícula e os demais pontos. Os alunos deveriam observar que, apesar de estarem em locais diferentes da grade de quadrados, todos têm a mesma distância, 3 quarteirões, para o ponto central *O*, encontrando, assim, uma propriedade da circunferência.

Os alunos de ambas as séries não tiveram dificuldade em encontrar as distâncias solicitadas na primeira questão, com exceção daqueles cuja compreensão a respeito de frações não melhorou mesmo após as explicações dadas. Na 7ª série, por exemplo, 2 alunos encontraram a distância entre os pontos como sendo todas iguais a $\frac{3}{4}$, neste caso o numerador corresponde a quantidade de segmentos percorridos de um ponto para o outro e o denominador refere-se a quadra, a quantidade de lados do quadrado; 3 alunos cometeram alguns erros ocorridos por falta de atenção, como por exemplo, um aluno que colocou a distância entre os pontos *O* e *B* como sendo $\frac{3}{2}$, mas acertou as demais. Na 8ª série, 1 aluno colocou a distância entre os pontos como $2 + \frac{4}{4}$ que não deixa de estar correto e 4 alunos erraram ao somarem as partes fracionadas do quarteirão em que os pontos estavam localizados.

Na segunda questão os alunos teriam que encontrar pontos no espaço de quadrículas que tivessem a mesma distância (3 quarteirões) de um dado ponto *T*, realizando o processo contrário da questão anterior onde os pontos já estavam localizados e estes teriam que encontrar a distância.

Os pontos a serem encontrados formavam um quadrado euclidiano (ver Figura 76), mas se considerarmos o espaço quadricular e o processo utilizado para encontrá-los também podemos denominá-la de circunferência urbana. Nesta questão os alunos também não encontraram dificuldades. No entanto, ao serem indagados, na questão três, a respeito da figura que foi encontrada, as respostas obtidas foram: um aluno de cada turma respondeu que "é um quadrado", um aluno também de cada turma que "é um losango ou quadrado" e os demais, nas duas séries, responderam que a figura encontrada "é um losango".

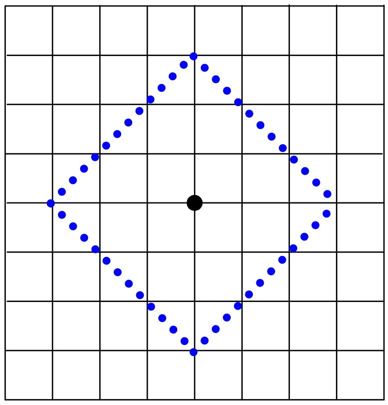


Figura 76 – Pontos da figura encontrada na 2ª questão
(Q-circunferência)

Como constatamos nas aulas, a maioria dos alunos não entendiam bem a diferença entre quadrado e losango. O fato da figura encontrada estar inclinada, por exemplo, fazia com que muitos **não** a vissem como um quadrado. Durante as orientações procuramos sanar esta dúvida para alguns, entretanto, pudemos esclarecemos de modo a abranger mais alunos durante a correção da atividade com as turmas, quando retomamos a respeito da definição de quadrado e losango a fim de esclarecer estes conceitos.

Na quarta questão, os estudantes foram indagados se a figura encontrada na questão dois poderia ser chamada de circunferência e os resultados obtidos foram os seguintes: na 7ª série, foi unânime a resposta "não" e entre as justificativas dadas, temos: "não, porque uma circunferência não possui lados iguais"; "não, porque é um losango"; "não, porque não é redonda" e outras; na 8ª série houve variação nas respostas, nesta tivemos 8 respostas afirmativas, cujas justificativas são: "sim, porque é formado por pontos com a mesma distância"; "sim, porque os pontos tem a mesma distância do núcleo para o ponto"; "sim, porque são os mesmos pontos, na mesma distância que forma um losango" e outras. As demais foram negativas, tendo como justificativas o seguinte: “não, porque é um losango”; “não, porquê para ela poder ser uma circunferência ela precisa ter forma arredondada”; “não, porque ela não tem formato de um círculo” e outras.

Como podemos observar nas respostas negativas de ambas as turmas, os alunos dão ênfase apenas a forma da figura. No referente as respostas positivas atribuídas apenas por alunos da 8ª série, acreditamos que o fato de, nesta turma, realizarmos a pesquisa sobre circunferência bem como, a explicação sobre este assunto no início da atividade, deu a estes alunos um respaldo maior para responder a questão, ou seja, estes alunos tinham mais esquemas para formação de novos conceitos, ao contrário do que ocorreu na 7ª série, em que, como verificamos no questionário de sondagem e nas respostas dadas a referida questão, o conhecimento que os alunos têm sobre circunferência está mais ligado a forma euclidiana desta figura do que a sua definição propriamente dita.

Na quinta questão, em que os alunos teriam que encontrar pontos no espaço triangular localizados a 5 trieirões de um dado ponto *B* (Figura 77), assim como na primeira questão, não foram encontradas muitas dificuldades por parte dos alunos de ambas as turmas. Ao observarmos a realização das atividades percebemos que os alunos se distribuíam de forma que, no grupo, um encontrava um conjunto de pontos, outro encontrava outro conjunto e assim sucessivamente até que, ao socializarem suas descobertas, completavam a figura.

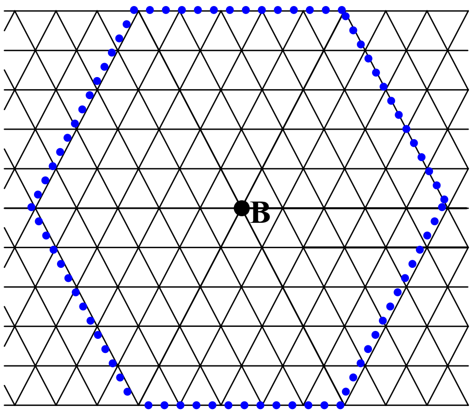


Figura 77 – Pontos da figura encontrada na 5ª questão (I-circunferência)

Ao perguntarmos, na questão seis, que figura foi encontrada na questão anterior os alunos da 7ª e da 8ª séries foram unânimes em responder que era um “hexágono” ou “hexangulo”, como foi nomeada por dois alunos da 7ª série.

Na sétima questão os alunos são perguntados a respeito das semelhanças e diferenças entre as figuras encontradas nas questões cinco e dois e as respostas obtidas foram: na 7ª série, apenas 9 alunos responderam que a semelhança entre as figuras é que "todos os lados têm a mesma distância até o centro"; os demais responderam que não havia nenhuma semelhança, apontando justificativas como: "nenhuma, porque a figura forma quatro ângulos e o hexágono possui seis"; "não, o hexágono tem 6 lados iguais e o losango tem 4 lados iguais"; "nenhuma, porque o losango possui 4 ângulos e o hexágono possui 6 ângulos"; na 8ª série, apenas 8 alunos responderam que "os pontos têm a mesma distância para o centro" os demais responderam que não havia semelhança e a principal justificativa era de que "o hexágono tem 6 lados e o losango tem 4 lados".

Ao conversarmos com alguns alunos, percebemos uma certa resistência em ver semelhanças entre as figuras, principalmente porque os mesmos se restringiam a observar a aparência destas.

Na questão oito, os alunos foram perguntados se a figura encontrada na quinta questão poderia ser chamada de circunferência. Na 7ª série, 2 alunos optaram em não responder a questão e os demais responderam que a figura "não" poderia ser chamada de circunferência, entre as justificativas para esta resposta, temos: "não, porque, essa figura forma o ângulo e a circunferência não possui ângulos"; "não porque não é redonda"; "não, porque essa figura possui seis ângulos e a circunferência não possui ângulos". Na 8ª série, 9 alunos responderam que sim dando as seguintes justificativas: "sim, pois tem a mesma distância do ponto para suas extremidade"; "sim, porque a distância dos pontos de fora para o ponto de dentro é igual"; "sim, pois todos os pontos têm a mesma distância para o centro"; "pode, porque compare a circunferência tem um ponto central que liga a outros pontos da circunferência, que é chamado de raio"; apenas 1 aluno não respondeu a referida questão e os demais responderam que a figura "não" pode ser chamada de circunferência e a principal justificativa dada para esta respostas é "não por que ela não possui formato de círculo".

Na questão nove os alunos são solicitados a fazerem uma pesquisa a respeito da circunferência para depois comparar o resultado com as figuras encontradas nas questões dois e cinco. Por opção unânime dos alunos a pesquisa foi realizada na *internet*. Utilizamos a sala de informática da escola para realizar esta atividade. Como citamos anteriormente, devido a falta de horário disponível nesta sala precisamos antecipar a referida questão para os alunos da 8ª série, dessa forma, antes de iniciar a atividade, eles fizeram a pesquisa a respeito da circunferência.

Na sala de informática, os alunos se reuniam em duplas para utilizarem os computadores. Isto facilitou no caso de alguns alunos que não tinham nenhum conhecimento do computador, visto que os que conheciam um pouco mais foram estimulados a ensinar os que sabiam menos.

Iniciamos mostrando como acessar alguns *sites* de pesquisa, a exemplo do *Google*, do *Uol* e outros e, posteriormente, de como utilizá-los para buscar o assunto que estávamos trabalhando. Durante a pesquisa os alunos encontraram alguns *sites* mais científicos, que utilizavam muitos símbolos matemáticos desconhecidos por eles e, na orientação, interferíamos pedindo a estes que abrissem outros com leitura mais acessível ao nível da turma.

No decorrer da leitura a respeito da circunferência, a dúvida principal, em ambas as turmas, era porque esta é chamada de "um conjunto de pontos". Precisamos, neste momento, pedir que interrompessem a pesquisa por alguns minutos a fim de explicarmos esta definição. Percebemos que isto ajudou bastante na leitura do material encontrado. Após encontrarem a definição sobre circunferência pedimos aos alunos que pesquisassem a respeito do que era raio, diâmetro e corda.

Iniciamos a aula posterior a da pesquisa entregando a turma compassos e réguas. Solicitamos que estes escolhessem o tamanho da abertura do compasso, medissem com a régua e desenhassem em uma folha de papel uma circunferência. Posteriormente, pedimos que medissem na figura desenhada a distância do centro para qualquer ponto da circunferência, a distância de um ponto a outro da circunferência passando pelo centro e a distância de um ponto a outro da circunferência não passando pelo centro. Em seguida, solicitamos que trocassem seus desenhos e medidas encontradas com o colega ao lado.

Após a troca das atividades os alunos foram estimulados a compararem a figura desenhada do colega, bem como suas medidas, com a que ele tinha feito e verificassem se havia alguma semelhança ou diferença. Neste momento, as descrições feitas pelos alunos foram apenas a respeito do tamanho da circunferência. Então, direcionamos as perguntas fazendo os seguintes questionamentos: "A medida da abertura do compasso tem relação com alguma medida encontrada na circunferência?"; "A medida do centro para o ponto tem alguma relação com a medida de ponto para ponto passando pelo raio?"; "Teria uma forma de encontrar esta medida (no caso, a do diâmetro) sem precisar medir com a régua?". Estes questionamentos ajudaram os alunos a refletirem a respeito da figura e das medições feitas a ponto de darem respostas mais complexas.

Demos continuidade perguntando aos alunos se estes viam alguma relação a respeito da circunferência e medições obtidas com o que havia sido pesquisado. Com as respostas surgidas desta pergunta pudemos trabalhar não apenas a definição de circunferência, como também os conceitos de corda, raio e diâmetro.

Após as explicações a respeito da circunferência prosseguimos com a correção da atividade estimulando aos alunos que fizessem comparações das respostas dadas com o que foi visto na sala de aula e na pesquisa. Para a 8ª série, o estímulo era dado principalmente através da socialização das respostas, visto que nesta o número de alunos que responderam as questões baseados no que foi pesquisado foi bem maior, assim, fazíamos alguns questionamentos fazendo com que os alunos retomassem o que havia sido visto na pesquisa e na aula que complementava esta e analisassem melhor as respostas.

Ressaltamos que o fato de termos realizado a pesquisa no início da atividade com a 8ª série foi positivo para que no decorrer desta os alunos refletissem melhor sobre a definição desta e os procedimentos utilizados para encontrar as figuras e para construir uma circunferência euclidiana, visto na aula após a pesquisa.

Desse modo, a atividade foi utilizada principalmente na fixação do conteúdo sobre a circunferência euclidiana trabalhado com a nona questão. As comparações e conclusões, neste caso, causaram mais impacto e, durante a correção, ao reverem suas respostas, alguns alunos encararam com entusiasmo. Porém, houveram aqueles que ficaram confusos e para sanar isto precisamos relembrar mais minuciosamente sobre o que foi visto na pesquisa e o que foi trabalhado em sala sobre a circunferência euclidiana para comparar com as descobertas feitas na atividade.

Entretanto, durante as entrevistas que realizamos com os alunos no decorrer do curso, a fim de verificar seu aprendizado, percebemos que estes haviam desenvolvido uma compreensão maior a respeito do que define a circunferência, mostrando-se até mais desinibidos e seguros em responder as perguntas, o que acreditamos ser um resultado positivo.

3.2.3.3 A terceira atividade

A terceira atividade refere-se a construção do conceito de elipse. Esta, como na segunda atividade, foi trabalhada em duas partes: a primeira teve duração de três horas/aula e corresponde a resolução da primeira questão, em que os alunos foram incentivados a realizar uma pesquisa a respeito da elipse, seguida da aula expositiva em que trabalhamos o que foi pesquisado; a segunda parte compreende a resolução das questões 2 a 6 e também teve duração de três horas/aula. Participaram dessa atividade 42 alunos da 7ª e 39 da 8ª série.

A atividade foi iniciada com uma pequena introdução a respeito das órbitas dos planetas. Na primeira questão, como já mencionamos, os alunos realizaram uma pesquisa a respeito do que é elipse e da sua forma. Complementamos esta atividade solicitando que os alunos pesquisassem também algumas ocasiões práticas em que esta forma fosse empregada ou observada. Esta pesquisa também foi realizada na sala de informática. Dessa vez, os alunos já sabiam como começar a pesquisar e, assim, nossa orientação foi direcionada mais em tirar dúvidas a respeito do assunto e também dos *sites* encontrados, pois, como no caso da circunferência, alguns eram técnicos demais, com linguagem pouco acessível aquelas séries.

Na aula posterior a realização da pesquisa, os alunos expuseram os resultados obtidos durante a pesquisa, os quais foram analisados e discutidos com a classe. Os resultados foram muito positivos, pois, além de trabalharmos a respeito da definição da elipse, os alunos comentaram bons exemplos de aplicação da elipse, os quais incluem, não apenas a forma das órbitas dos planetas, permitindo que explicássemos melhor o pequeno texto que introduzia a atividade, mas também do emprego desta forma geométrica em faróis de carros, holofotes dentários, telescópios e do método usado por jardineiros ao traçar uma forma elíptica para construir um jardim de flores.

No exemplo do jardineiro, este amarra as pontas de um fio a duas estacas espetando-as no chão, de modo que a distância entre elas seja menor do que metade do comprimento do fio, e usando um pau e mantendo o fio esticado, desenha uma elipse no chão (Figura 78). Assim, distribuímos pedaços de barbantes para a turma a fim de que, a partir da idéia do jardineiro, os alunos, em duplas, construíssem elipses (Figura 79) em seus cadernos. Inicialmente, deixamo-os a vontade para que escolhessem a distância entre os focos. Posteriormente, pedimos que esta distância diminuísse de modo a ficar cada vez mais próximas, a seguir discutimos os resultados explorando a excentricidade da elipse.

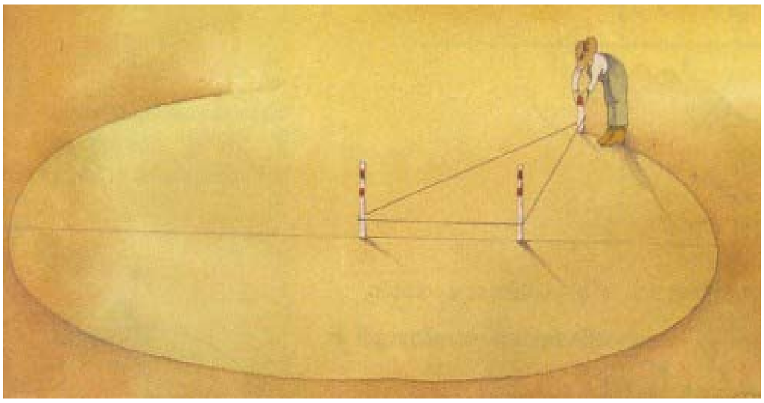


Figura 78 – Elipse traçada na jardinagem
(Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/)

Figura 79 – Elipse construída por uma aluna

Demos continuidade a atividade pedindo que os alunos respondessem a segunda questão, em que estes deveriam encontrar pontos cuja soma das distâncias para dois pontos fixos é 9 (Figura 80). Nesta, tivemos na 7ª série 22 alunos que encontraram todos os pontos da elipse, 17 encontraram alguns pontos e os demais não encontraram nenhum. Na 8ª série, 21 alunos encontraram todos os pontos, 13 encontraram alguns e os demais não encontraram nenhum ponto.

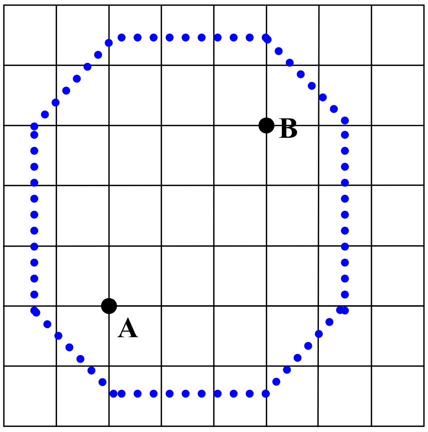


Figura 80 – Pontos da figura encontrada na 2ª questão
(Q-elipse)

Verificamos durante as aulas que a dificuldade maior estava no fato de que para encontrar os pontos, naquele caso, eles tinham um dado a mais que era a de encontrar um ponto cuja distância para os focos ao serem somadas totalizava 9. Alguns desenvolveram a estratégia de partir de cada foco, andando de quarteirão em quarteirão em direção a se encontrarem, assim para cada lado teriam que percorrer a metade do caminho, ou seja, 4,5 quarteirões. Mas, esta distância limitava-se a alguns pontos. Posteriormente, alguns complementaram esta idéia percebendo que se diminuíssem 1 quarteirão na distância para um foco e aumentasse a mesma quantidade na distância para o outro, também encontrariam pontos. Em seguida, perceberam que se encontrassem um ponto de um lado da figura, automaticamente havia outro com a mesma localização do outro lado desta. Assim, aos poucos os pontos que formavam a figura foram sendo encontrados.

Alguns alunos, a medida que iam vencendo a dificuldade e descobrindo os pontos, mostravam-se mais empolgados com a atividade. Entretanto, houveram aqueles que, ao se depararem com a dificuldade, logo desanimaram e a deixavam de lado. Assim, estimulamos alguns alunos com menos dificuldades a ajudarem os colegas, outros o fizeram de espontânea vontade. Dessa forma, conseguimos fazer com que a turma não se dispersasse com alunos que ficassem circulando na sala de aula por abandonarem a atividade.

Na questão três, em que os alunos deveriam fazer comparações entre o que havia sido pesquisado sobre elipse com a figura encontrada na questão anterior, obtivemos respostas bem interessantes. Na 7ª série, por exemplo, alguns alunos responderam que: “a diferença é que na figura número 2 andava em quarteirão e a semelhança é que todos dois têm dois pontos fixos”; “a diferença é que não é uma elipse exata [o aluno refere-se ao fato dos pontos encontrarem-se na metade dos quarteirões], semelhança todas as somas dos pontos é igual a

9"; "pontos diferentes, mas somas iguais" (neste caso, "pontos diferentes" referem-se ao fato dos pontos encontrados resultarem em um figura de forma diferente daquela vista na pesquisa); "na pesquisa 1 a elipse é redonda e na 2 a elipse é diferente e somada por quarteirões"; "soma das distâncias para dois pontos fixos"; "semelhança: os dois têm dois centros e a diferença as formas são diferentes"; "são semelhantes por possuírem pontos eqüidistante de 2 focos, e são diferentes por que a figura 1, é arredondada e a 2 não é."; "que na soma das distâncias os resultados são iguais"; houveram 15 alunos daquela turma que não responderam a referida questão.

Na 8ª série, entre as respostas dadas, temos: "é que o conjunto de pontos que a soma dos valores é a mesma distância, a diferença que não é circunferência"; "a semelhança é que a soma dos pontos são iguais e a diferença é a figura"; "semelhança é o conjunto de pontos, a diferença é que tem o formato de uma circunferência [a aluna se refere a figura encontrada que parece com uma circunferência urbana] e a elipse não, ela tem o formato oval"; "tem formação igual [as alunas querem dizer que usaram o mesmo processo para encontrá-las] e sempre a soma vai dar o mesmo resultado"; "a semelhança é que é um conjunto de pontos que a soma dos valores é a mesma distância, a diferença que não é circunferência"; "semelhança é porquê ela é formada por conjuntos de pontos"; "que todos os pontos encontrados são da mesma distância"; "são duas elipses que tem os pontos *A* e *B* semelhanças e porque ela é formada por um conjunto de pontos"; houveram 8 alunos que não responderam a terceira questão.

Como podemos observar, algumas das respostas dadas são escritas de forma um pouco confusa, mas, durante as perguntas informais os alunos nos deram algumas explicações a respeito do que queriam dizer, o que ajudou a esclarecer nossa concepção acerca do aprendizado deste, bem como ajudá-los a organizar melhor suas idéias. Como podemos perceber, os estudantes conseguiram, ao comparar as figuras, ver mais detalhes além da forma, ao contrário do que aconteceu na atividade de circunferência.

Na quarta questão, em que os alunos deveriam acrescentar focos com distância de um quarteirão e encontrar os pontos com a soma das distâncias igual a 5 (Figura 81), tivemos 10 alunos da 7ª e 5 da 8ª série que não resolveram a questão, os demais escolherem a posição dos focos com a distância solicitada e, em seguida, buscaram encontrar os pontos das figuras, sendo que: 8 da 7ª série encontraram alguns pontos e o restante encontrou todos os pontos; na 8ª série, 7 encontraram alguns pontos e os demais encontraram todos os pontos.

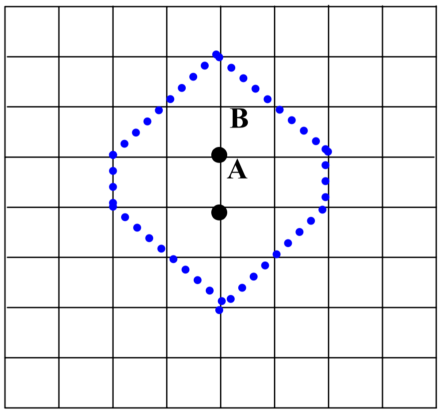


Figura 81 – Exemplo de figura encontrada na 4ª questão.

Na questão cinco os alunos deveriam encontrar, no espaço triangular, todos os pontos cuja soma da distância destes para cada um dos focos fosse igual a 6 (Figura 82). Nesta atividade 10 alunos da 7ª série não encontraram nenhum ponto, 8 alunos encontraram alguns pontos e os demais encontraram todos os pontos da figura. Na 8ª série verificamos que 5 alunos não encontraram nenhum, 6 encontram alguns e os demais encontraram todos os pontos.

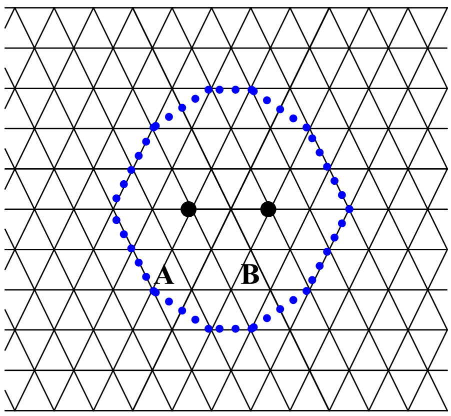


Figura 82 – Pontos da figura encontrada na 5ª questão
(I-elipse)

Como na atividade referente a circunferência, os alunos não se depararam com muitas dificuldades em relação ao espaço ao resolverem a questão cinco. Apenas alguns casos de alunos que, como exemplificado na Figura 75, percorriam dois lados de um mesmo triângulo, a fim de encontrarem a soma buscada, mas após algumas orientações isto foi resolvido. As estratégias usadas pelos alunos para encontrarem os pontos foram semelhantes aquelas utilizadas na segunda questão.

A sexta questão, por sua vez, foi dividida em três partes organizadas por ordem alfabética. Na letra *a* os alunos deveriam responder que figura foi encontrada na questão anterior (cinco). Na 7ª série, temos 9 alunos que não responderam. Destes, 3 haviam encontrado poucos pontos na questão anterior e entre as respostas dadas pelos demais, temos: 8 disseram ser uma "elipse de tamanho e formato diferente"; 1 aluno afirmou ser uma "circunferência" e os demais que a figura encontrada era "um hexágono". Na 8ª série, 6 alunos não responderam a questão; 13 afirmaram ser uma "elipse" (estes alunos ao encontrarem a figura compararam o procedimento usado com o da segunda questão); 5 responderam que a figura era uma "circunferência"; 5 que era um "decágono"; 1 que era "octógono" e os demais responderam que a figura encontrada era um "hexágono".

Verificamos nestas respostas que em ambas as séries houveram alunos que conseguiram fazer uma ligação entre a figura encontrada e a elipse. Ao perguntarmos a estes porquê elipse as justificativas dadas se referem ao procedimento utilizado para encontrar os pontos que, segundo eles, foi semelhante ao usado para encontrar pontos na questão com quarteirões (segunda) e com o que foi observado na pesquisa.

Durante as entrevistas verificamos que alguns alunos que tiveram dificuldades em encontrar os pontos, encontrando poucos ou nenhum, optaram em não responder ou em dar um nome qualquer para figura, a exemplo de octógono, circunferência e hexágono.

Na letra *b* os alunos deveriam responder se havia semelhanças entre a figura encontrada na quinta questão com as que foram trabalhadas nas primeira e segunda questões. Entre as respostas dadas na 7ª série, temos "não, por causa da largura dos focos até os pontos" (os alunos referem-se ao fato da soma da diferença nos valores das constantes serem diferentes); "não, as figuras são diferentes"; "um pouco de semelhança"; "muitas"; "sim, só a soma que sempre muda"; "sim, pois as questões 1 e 2 também têm dois pontos fixos e são feitas as contas pelos quarteirões e todos são uma elipse"; "sim, todas as figuras têm dois centros"; "sim, só as somas que mudam"; apenas 9 alunos não responderam. Na 8ª série, entre os que afirmaram haver semelhança, as justificadas dadas foram: "sim, todas duas são elipses"; "sim elas são formadas por conjuntos de pontos que dá a mesma distância"; "sim, porque são formados por pontos"; "sim, porque querem encontrar a soma" e "sim, porque todas são formadas por conjuntos dos pontos cuja soma é a mesma"; os alunos que responderam que não havia semelhança direcionaram suas observações para a forma das figuras; e 10 alunos não responderam a referida questão.

Como podemos observar nas respostas dadas, os alunos que não conseguiram ver semelhanças entre as figuras, preocuparam-se em observar apenas a semelhança na forma da figura ou na soma das constantes. Entretanto, aqueles que responderam que havia semelhança entre as figuras direcionaram suas respostas para o processo usado para encontrar os pontos das mesmas. Este resultado é importante haja vista que o referido processo envolve a definição da elipse.

Na questão *c*, em ambas as séries, todos os alunos que responderam "sim" na questão anterior afirmaram que a figura pode ser chamada de elipse e entre as justificativas que apareceram para esta resposta temos: "sim por que ela tem vários pontos"; "sim, por que existem vários pontos com a mesma distância e soma"; "sim, porque a soma dos pontos é a mesma e porque tem dois centros"; "sim, porque tem dois centros e a soma dos pontos tem a mesma distância dos centros".

Após a resolução de todas as questões desta atividade iniciamos o processo de correção com a classe. Fizemos indagações aos alunos de modo que estes recordassem os resultados da pesquisa realizada na primeira questão. Nas atividades em os alunos deveriam encontrar pontos, pedimos que estes fossem até o quadro, a fim de mostrarem nos painéis de EVA (Figuras 72 e 73) os pontos que encontraram e explicassem o procedimento que usassem para encontrá-los. Posteriormente, discutíamos com a classe a fim de que outras formas de encontrar estes pontos também fossem mostradas. Nas questões em que eles deveriam fazer relações entre as figuras usamos o mesmo processo de socialização, ou seja, um ou dois alunos respondiam e, em seguida, os demais analisavam e, no caso de terem respondido de forma diferente, mostravam a turma. Logo após, fazíamos intermediações de modo a organizar as respostas dadas e orientar as reflexões.

Usar este método para realização das correções foi muito satisfatório, pois permitiu aos alunos, de modo geral, uma melhor compreensão do assunto, além de possibilitá-los refletir sobre os diferentes procedimentos usados para resolver as questões e os diferentes tipos de respostas dadas, permitindo aqueles com maior dificuldade em responder as questões um maior entendimento do conteúdo.

Notamos, durante o processo de correção com os alunos que a quarta questão poderia ser complementada com outra que os fizesse refletir a respeito da excentricidade da elipse, assunto que, como mencionamos, já havia sido trabalhado logo após o trabalho de pesquisa, além de permitir comparações com as figuras encontradas na atividade sobre circunferência.

Durante a correção buscamos corrigir esta falha fazendo indagações aos alunos de modo que estes pudessem refletir sobre isto.

No capítulo seguinte faremos uma reflexão mais aprofundada a respeito dos resultados obtidos com a aplicação da atividade, aos olhares da Teoria da Equilibração de Piaget.

4

SIGA EM FRENTE!

"Dispor-se a" é, antes de tudo, um ótimo começo.

CONCEIÇÃO ALMEIDA

4 SIGA EM FRENTE!

4.1 Análise do resultado da intervenção

Neste capítulo apresentamos uma análise da experiência vivida durante a aplicação de nossa proposta de atividade, realizada no período de 26/04/05 à 10/06/2005. O tempo previsto para realização desta foi de 16 horas/aula. Entretanto, no percurso nos deparamos com algumas dificuldades que exigiram um pouco mais de tempo, pois precisavam ser contornadas para que pudéssemos alcançar nosso objetivo com eficiência.

Entre estas dificuldades, podemos citar a falta de domínio das operações com frações e números decimais, em interpretação, falta de conhecimentos de representações de medidas e, até mesmo, de como usar a régua para medir. Mas, estas barreiras nos ajudaram a ver a aplicabilidade das atividades para reforço de outros conteúdos, como, por exemplo, o de frações, que podem ser percebidos nas questões 9 e 10 da primeira atividade.

A dificuldade de interpretação e resistência a leitura foi uma barreira vencida através de muito diálogo e com uma dose de incentivo, que procurávamos proporcionar durante as entrevistas informais e orientações. Esta dificuldade e, talvez, a falta de costume com atividades deste tipo parecem fazer com que o aluno se depare com uma comodidade, conforme a qual pensar dá trabalho e, uma atividade trabalhosa é considerada por este aluno como *difícil*.

O fato de ter alunos de faixas etárias diferentes na sala também gerou alguns transtornos, pois verificamos aqueles com idade mais avançada não participavam ativamente das aulas. O número de estudantes faltosos também era grande e isto pode ser verificado ao compararmos a quantidade de alunos que responderam o questionário de sondagem e os que participavam das atividades. Entretanto, esta era uma rotina comum em todas as disciplinas.

Nossa atitude em deixá-los à vontade e incentivá-los durante conversas e brincadeiras, foi positiva à medida que eles se sentiam mais à vontade em demonstrar suas dificuldades. Assim, durante as aulas os educandos puderam questionar, expor seus pontos de vista, bem como refletir sobre os diferentes alternativas para chegar ao resultado. Alunos que, no início do curso, viviam inquietos na sala passaram a parar um pouco mais e a se preocuparem em resolver a atividade, a fazer mais perguntas e a tirar dúvidas.

Nas aulas iniciais percebemos uma certa preocupação dos estudantes, de ambas as séries, com a correção das atividades, no sentido de colocar a resposta certa das questões antes de nos entregar. No entanto, conversamos com as turmas, explicando que isto não influenciava em suas avaliações, mas que nos preocupávamos com a participação destes durante as correções e com o entendimento do assunto. Essa conversa os ajudou a ficar mais relaxados em relação a modificação da resposta dada e contribuiu para a análise das atividades.

Ressaltamos ainda que, apesar do trabalho ser feito em duplas ou trios, todos os alunos que participaram da aula entregaram sua atividade, daí termos duas ou três atividades com respostas iguais, mesmo em casos de respostas subjetivas, como as encontradas na questão três.

As atividades foram positivas em propor situações que os alunos agissem como sujeitos ativos na construção do conhecimento, visto que estas lhes permitiram analisar, refletir, propor soluções para as situações com a qual se depararam e tirar conclusões.

Buscamos, no decorrer das aulas, explorar situações que os alunos já conheciam sobre o assunto questionando-os de forma que estes pudessem fazer relações com os conhecimentos que estavam sendo construídos durante as aulas. Procuramos, ainda, fazer questionamentos que os levassem a pensar sobre as respostas dadas e as situações levantadas, a fim de que estes pudessem pensar sobre o que haviam pensado e sobre suas ações, possibilitando o desenvolvimento do pensamento metacognitivo.

Através das atividades, explanações e socialização de respostas e idéias dadas pelos alunos, pudemos abordar alguns assuntos que nos proporcionaram um trabalho interdisciplinar, tais como: a importância social das disposições físicas das cidades e os benefícios que essa nos traz, quando pensamos em situações como a locomoção, o comércio e outros; a utilização das propriedades das circunferência e elipse presentes na construção de instrumentos tecnológicos e nos aspectos de objetos que permeiam nosso ambiente, a exemplo dos holofotes odontológicos, telescópios, faróis de carros, movimentos dos planetas, localizações geográficas etc.

Discutir sobre as aplicações dessas propriedades, bem como, aprofundar o conhecimento a respeito de circunferência e elipse foi interessante para despertar o interesse dos alunos, principalmente, daqueles que faziam o Procefet, os quais demonstravam claramente suas inquietações e expectativas em adquirir conhecimentos que viessem contribuir para que estes concorressem com mais possibilidades por uma vaga no CEFET-RN.

O trabalho em grupo atendeu às expectativas de trocas de idéias e informações entre os alunos. Aos poucos, a interação começou a ocorrer também entre grupos. Alguns alunos, mais ágeis em interpretar as questões, ajudavam os componentes de seus grupos e, algumas vezes, também os componentes de outros grupos.

O uso da modelo urbano com ruas que formavam uma malha quadricular, como é o caso da Geometria Urbana, ou triangular, no caso da Geometria Isoperimétrica, contribuiu bastante, proporcionando que os alunos partissem de algo que já conheciam para construção dos conceitos propostos. Através das atividades de pesquisa, os estudantes puderam fazer comparações das variações das formas das figuras nos três espaços apresentados (quadricular, triangular e euclidiano), ajudando-os a ter uma compreensão melhor do que define estes gráficos.

Não foi observada nenhuma diferença de nível cognitivo entre os alunos da 7ª e os da 8ª série, porém, no que se refere ao conhecimento de conteúdos, verificamos que estes últimos possuíam uma compreensão melhor quanto às frações e ao plano cartesiano, precisando apenas relembrar. Mesmo assim, fez-se necessário revisá-lo em ambas as turmas.

Quanto aos procedimentos utilizados pelos alunos para resolver as atividades, verificamos que estas se aprimoraram durante as atividades. A partir do terceiro dia, percebemos que os alunos encontravam menos dificuldades nas atividades propostas e procuravam resolver suas atividades encontrando suas estratégias, fossem elas baseadas totalmente em raciocínios matemáticos, a exemplo dos pontos eqüidistantes da elipse, ou na sorte, com uma dose de matemática.

Durante as atividades pudemos revisar, ainda, outros conceitos, a exemplo, de quadrado, losango, hexágono. Foi possível também praticar o uso de alguns instrumentos, tais como, compasso e régua, bem como construir um elipsógrafo.

No referente a eficácia das atividades, durante as entrevistas informais e por meio da participação dos alunos, observamos que estes conseguiram desenvolver uma compreensão do que define as circunferência e elipse. Estas observações ficaram evidentes quando, durante as entrevistas e correções das atividades, verificamos que estes passaram a usar termos como conjunto de pontos, focos, raio e outros com maior propriedade, bem como, quando constatamos os progressos ao resolverem situações que exigiam que estes fizessem relações entre as figuras vistas nas atividades e tirassem conclusões, demonstrando um maior entendimento a respeito das mesmas.

4.2 Análise com base na Teoria da Equilibração

A construção do conhecimento, em que temos como foco a compreensão dos conceitos que envolvem as circunferência e elipse, foi analisada com base na teoria da equilibração de Jean Piaget, a que este recorreu buscando explicar o desenvolvimento e a formação do conhecimento e segundo a qual o processo de equilibração conduz certos estados de equilíbrios aproximados a outros, qualitativamente diferentes passando por múltiplos desequilíbrios e reequilibrações.

Com base nas reflexões realizadas pelos alunos e levantamento de hipótese, percebidos durante as entrevistas informais, verificamos que nossos alunos já eram capazes de desenvolver um pensamento formal, isto é, as manipulações lógicas começam a ser transpostas do plano de manipulação concreta para o das idéias. Este pensamento, por sua vez, é *hipotético-dedutivo*, isto é, capaz de deduzir as conclusões de hipóteses e não somente por meio de uma observação real.

Isto contribuiu bastante para que fosse alcançado uma equilibração mais ampla, pois apesar de, desde que nascemos, o desenvolvimento psíquico ser orientado, essencialmente, para o equilíbrio, sendo, o desenvolvimento, portanto, uma equilibração progressiva, este processo, para o adolescente é mais eficiente do que durante a segunda infância.

O processo de equilibração passou a ser observado durante a pesquisa a partir do momento em que os alunos se depararam com algo que causou certa perturbação. Referimo-nos a forma das figuras, chamar um quadrado ou hexágono de circunferência ou uma circunferência de quadrado ou hexágono, por exemplo, foi algo que fugiu de suas expectativa, mas que também serviu de estímulo para a busca de respostas.

Em nosso trabalho de pesquisa, nossos alunos reagiram ao tipo de perturbação que consiste em lacunas, fontes de desequilíbrios, que deixam as necessidades insatisfeitas e se traduzem pela insuficiente alimentação de um esquema. Estas lacunas são caracterizadas por perturbações, a medida que se trata da ausência de um objeto ou das condições de uma situação que seriam necessárias para construir uma ação, ou ainda da carência de um conhecimento que seria indispensável para resolver um problema, tal como afirma Piaget (1976a).

Sendo assim, as experiências vividas por eles, em sala de aula, proporcionadas pelas atividades, foram positivas, por oferecerem condições de construir os conceitos que objetivamos alcançar por meio do enriquecimento de seus esquemas e da formação de novos, necessários a equilibração.

O desequilíbrio, por sua vez, desempenhou seu papel ao propiciar que o aluno ultrapassasse seu estado atual e procurasse superar as perturbações seguindo por direções novas. As reações a perturbações consistem em regulações (portanto, equilibração) e podem ser observadas, neste caso, em todo o processo de construção do conhecimento proposto.

Assim, a reequilibração ou equilibração majorante pode ser vista a medida que o aluno pôde ter uma compreensão mais ampla das definições que cercam as circunferência e elipse, o que significa um progresso, um melhoramento da fase inicial de equilibração.

Tal resultado pode ser alcançado a medida que, ao considerarmos, com base nas concepção de Piaget (1976b), o equilíbrio psicológico como uma compensação proveniente das atividades do sujeito em resposta às perturbações exteriores. Buscamos fazer com que nas atividades os alunos atuassem como sujeitos ativos na busca de respostas para estas perturbações.

Isto foi possível a medida que a atividade proporcionou a este aluno não apenas refletir a respeito do que ele já conhecia, mas também complementar este conhecimento por meio de pesquisas e reflexões, considerando em sua ação tanto o que vem dele, como o que vem do objeto.

Dessa forma, nossos alunos puderam assimilar um elemento exterior (as figuras e seus diferentes aspectos, de acordo com o espaço em que é estudada) aos seus esquemas pré-existentes. Posteriormente, foi possível acomodar este elemento, à medida que o aluno tinha a oportunidade de refletir sobre as diferenças dessas figuras, considerando suas particularidades próprias, podendo dar maior significação a elas, modificando, assim, seus esquemas ou estruturas para se adaptarem ao ambiente. Temos aí um fator importante, visto que toda conduta recorre, necessariamente, da noção de equilíbrio entre os fatores internos e externos ou, mais em geral, entre assimilação e acomodação.

Nessa perspectiva, acreditamos ter ocorrido uma procura constante, por parte do sujeito, pelo equilíbrio entre assimilações e acomodações com os objetos sobre os quais incide, se auto-construindo, auto-transformando, auto-regulando e, assim, adquirindo sempre conhecimentos novos e mais complexos.

Durante o processo de construção do conhecimento proposto a ação permanente dos alunos na busca de respostas para suas dúvidas desempenhou um importante papel. A organização das atividades de modo seqüenciado também contribuiu positivamente a medida que permitiu que esses alunos tivessem sempre esquemas prontos para que, com a absorção das novas experiências, pudessem efetivar a aprendizagem.

Ver uma circunferência com a forma de um quadrado ou um hexágono, por exemplo, necessitou de um novo esquema, que pôde ser propiciado a medida que os estudantes passaram a conhecer os espaços urbano e isoperimétrico e a relação desses com as formas das figuras.

As descobertas feitas a respeito das aplicações das propriedades das figuras em instrumentos tecnológicos ou a observação de suas formas aplicadas em objetos que povoam nossos ambientes, também foi interessante para que estes alunos pudessem perceber a importância desses estudos. Isto remete ao que ressalta Piaget de que os conhecimentos, importantes para a maturação do sujeito, não são fatos isolados.

Vale ressaltar que o estado de equilíbrio a que os sujeitos da pesquisas chegaram ainda não foi finalizado, pois vivemos em constantes buscas de superações de nossas perturbações, de ultrapassagem, e, portanto, constantes desequilíbrios e reequilibrações.

4.3 Conclusões com base no alcance dos objetivos

Como mencionamos na Introdução, nosso estudo visava propor uma abordagem metodológica do ensino da Geometria. Para isso, construímos um estudo teórico-prático baseado na relação entre a modelagem matemática e as Geometrias Urbana e Isoperimétrica. Para o desenvolvimento do mesmo delimitamos alguns objetivos a serem alcançados.

Neste item fazemos uma descrição dos resultados obtidos com base no alcance desses objetivos. Optamos em analisar partindo dos objetivos específicos para o objetivo geral, haja vista que estes se constituem em metas importantes para o alcance daquele primeiro. Assim, o primeiro objetivo específico é

> *Possibilitar ao aluno uma compreensão melhor do que define estes gráficos [circunferência e elipse], da variação de suas formas em relação ao espaço e da definição de distância que se pretende utilizar.*

O alcance deste objetivo pode ser verificado a medida que os alunos, aos poucos, demonstraram melhor desempenho ao realizarem tarefas que consistiam na realização de pesquisas e na resolução de situações-problema. Esta melhora direciona-se, principalmente, as capacidades de analisar, refletir e tirar conclusões.

Observamos que essas conclusões aos poucos foram avançando, pois os alunos passaram, no decorrer das aulas, a fazerem reflexões mais consistentes, direcionadas a aspectos que não se restringiam apenas as formas das figuras, como observado no começo, mas também passaram a considerar o processo usado para encontrá-las, bem como a relação com o tipo de malha usada para isso.

Durante as atividades introdutórias os alunos puderam concluir que a distância mais curta entre dois pontos no plano nem sempre é uma linha reta e que esta concepção está intimamente relacionada às diferentes formas de organização do espaço que iremos percorrer. Isto gerou uma discussão muito proveitosa, pois além de permitir que estes alunos conhecessem diferentes tipos de organização espacial e formas, também diferentes, de atuar nos mesmos proporcionou, ainda, reflexões a respeito da importância de levá-los em consideração na organização de espaços, a exemplo, do espaço urbano.

Em relação ao segundo objetivo específico, temos:

- *Verificar a possível diferença, no nível cognitivo, entre os alunos das séries que compõem o 4º ciclo.*

Como já mencionamos no item 4.1 deste capítulo, não observamos nenhuma diferença de nível cognitivo entre os alunos da 7ª e os da 8ª série, além do conhecimento de alguns conteúdos. Tal informação, pode ser claramente observada através das respostas dadas as questões das atividades (ver item 3.2.3, Capítulo 3) que demonstram estar sempre num mesmo nível cognitivo.

Entretanto, vale ressaltar que, como podemos verificar no item 3.2.1 (Capítulo 3) não há uma grande diferença se compararmos a faixa etária dos alunos das duas turmas. Não podemos deixar de considerar ainda os estágios em que Piaget classifica o desenvolvimento de estruturas sucessivamente construídas pelos sujeitos, cuja periodização, apesar de serem indícios e poderem variar de indivíduo para indivíduo, podem ser consideradas. A partir desse, os alunos de ambas as séries estão incluídos no 6º estágio, o das operações intelectuais abstratas, da formação da personalidade e da inserção afetiva e intelectual na sociedade dos adultos e correspondente a fase da adolescência.

Como terceiro objetivo específico temos:

- *Utilizar os espaços urbano e isoperimétrico como instrumento para provocar o desequilíbrio, visando chegar a equilibração majorante (reequilibração com melhoramento obtido).*

A proposta sugerida por nós adotou as malhas quadricular e triangular utilizadas, respectivamente, pelas Geometrias Urbana e Isoperimétrica. Como podemos verificar no Capítulo 1, figuras como as cônicas, que dependem de uma definição de distância, apresentam-se com aspectos diferentes quando aplicadas a estas geometrias.

Esta característica foi utilizada por nós ao organizar as atividades e, na aplicação desta, podemos verificar que foi eficiente para que os alunos chegassem a um estado de equilibração majorante. Isso porque, estes partiam de algo que já tinham como pronto – mas, que na verdade estava parcialmente completo, pois não tinham os conceitos de circunferência e elipse, apenas conheciam suas formas geométricas – e, ao se depararem com a forma das figuras apresentadas naquelas geometrias, passavam por um estado de desequilíbrio, isso foi observado claramente durante as discussões e entrevistas.

Esta etapa, por sua vez, como já mencionamos no item 4.2, foi importante e esteve presente em todo o processo de construção do conhecimento proposto, propiciando a ultrapassagem das perturbações e alcance de uma equilibração majorante que, neste caso, consiste na melhor compreensão, por parte dos alunos, das definições que cercam as circunferência e elipse.

Tal resultado pode ser alcançado a medida que, ao considerarmos, com base nas concepção de Piaget (1976b), o equilíbrio psicológico como uma compensação proveniente das atividades do sujeito em resposta às perturbações exteriores. Buscamos fazer com que nas atividades os alunos atuassem como sujeitos ativos na busca de respostas para estas perturbações.

No que refere ao quarto objetivo específico, temos:

- *Discutir a utilização das propriedades das circunferência e elipse no desenvolvimento tecnológico e em outras áreas, a exemplo da Geografia.*

Este objetivo foi alcançado não apenas durante as atividades de pesquisa, em que os alunos eram incentivados a buscarem situações em que a circunferência e elipse pudessem ser utilizadas, como também durante as discussões em sala de aula em que os alunos expunham suas descobertas e socializavam com os colegas, ampliando, assim, seus conhecimentos.

A relação com a Geografia, por sua vez, foi verificada principalmente durante a realização da atividade introdutória (1ª atividade). Durante o desenvolvimento desta, foi realizada debates com a classe de modo a proporcionar uma reflexão a respeito das diferentes formas de organização de espaço, direcionando esta discussão para a organização do espaço urbano. O trabalho com o plano cartesiano, fazendo analogias com as coordenadas geográficas e, ainda, o uso do mapa de Natal, encontrado nos catálogos telefônicos, para que os alunos pudessem localizar residências, a escola e outros, além de ser um trabalho muito interessante, também propiciou uma maior relação com aquela disciplina.

De modo geral, nossos objetivos específicos, bem como nosso objetivo geral, como pudemos observar no decorrer deste capítulo, foram alcançados com êxito, tornando, assim, a referida proposta, uma boa opção para o trabalho em sala de aula, o que podemos atribuir, principalmente, ao uso do modelo matemático e das Geometrias Urbana e Isoperimétrica. Mas, não afirmam que esta seja suficiente para que o aluno possa compreender o amplo conteúdo pertinente à essas formas geométricas, além de um professor que trabalha regularmente com a turma ter a oportunidade de estar revendo o assunto, sempre que necessário, fazendo as conexões com outros que o seguem.

Assim, esperamos ter contribuído positivamente à necessidade de mudança na realidade escolar através de uma proposta que busca provocar, tanto no educando quanto no professor, uma atitude ativa na construção do conhecimento matemático, principalmente no que concerne a Geometria.

Durante a realização de nossa pesquisa alguns fatos inesperados, tais como a falta de conhecimentos prévios, nos fez repensar o tempo determinado para a realização das atividades e, ainda, as finalidades de nossa proposta.

Com a ajuda de um bom planejamento, que inclua a participação de professores de diferentes disciplinas é possível que este conteúdo possa ter um tratamento interdisciplinar mais consistente.

As orientações e entrevistas informais que fazíamos durante o curso nos faz concluir que a atividade proposta atingiu os objetivos, concernente a construção dos conceitos de circunferência e elipse, através de uma abordagem metodológica que os permitiu, a partir do uso de sua intuição, levantar hipóteses, testar, discutir com os colegas e tirar suas conclusões, visto que eles conseguiram compreender não apenas o que define estes gráficos, mas também suas variações de acordo com o espaço, passando, para isso, por constantes etapas de desequilíbrio e equilibração majorante.

A eficiência da atividade é atribuída, principalmente, ao uso da modelagem matemático e das Geometrias Urbana e Isoperimétrica. Mas, não afirmam que esta seja suficiente para que o aluno possa compreender o amplo conteúdo pertinente à essas formas geométricas.

No item a seguir, faremos algumas sugestões, surgidas após nossa experiência com o curso e que poderiam complementar a atividade, proporcionando um trabalho mais efetivo.

4.4 Sugestões

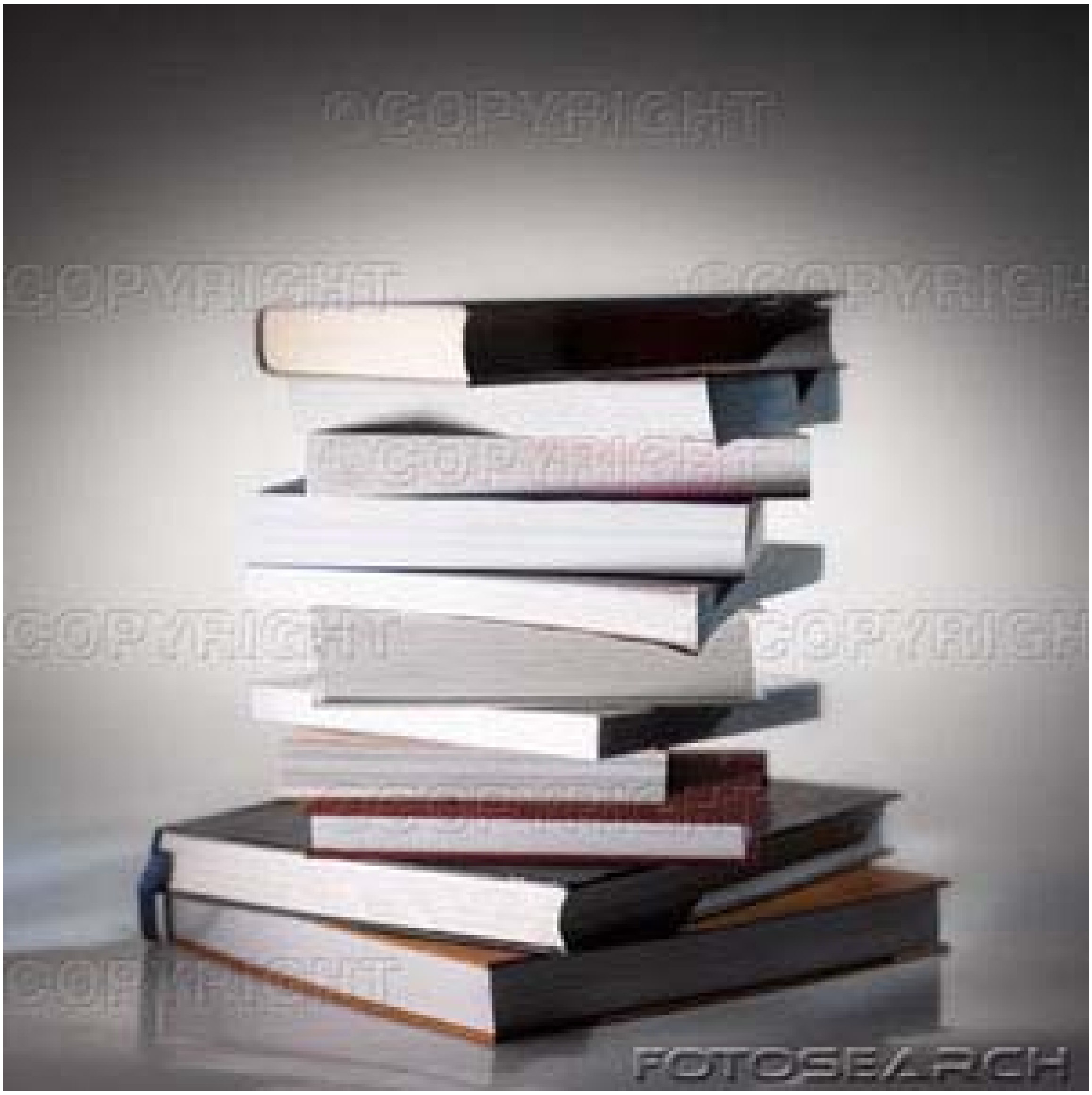
Apesar de termos alcançado os objetivos que propomos em nossa atividade, achamos que esta poderá ser melhorada, de forma a proporcionar um aprendizado mais amplo. A metodologia proposta, por exemplo, poderá fazer parte do planejamento escolar, podendo ser trabalhada por professores de outras disciplinas, caracterizando um trabalho interdisciplinar e, dessa forma, proporcionando uma melhor compreensão do assunto pelo aluno, que passará a vê-lo de forma mais significativa.

As contribuições atribuídas ao uso das Geometrias Urbana e Isoperimétrica verificadas neste trabalho podem servir de incentivo para que novos estudos venham a surgir a respeito das aplicações desta métrica, ou seja, investigações que busquem outros conteúdos e formas em que esta Geometria possa ser usada de modo a aproveitar conhecimentos que o aluno já obteve através de sua convivência em um ambiente urbano e aplicá-los ao ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos.

No Apêndice D, por exemplo, apresentamos outras atividades que poderão ser utilizadas para a realização de trabalhos que objetivam a construção dos conceitos de hipérbole e parábola, tanto no 4º ciclo do ensino fundamental, como também no Ensino Médio. No item 3.2.4 (Capítulo 3), apontamos algumas sugestões de alterações nas atividades apresentadas no Apêndice D. Essas modificações foram surgindo no decorrer da aplicação dessas atividades e podem contribuir para um resultado melhor das mesmas.

Trabalhos como estes poderão ajudar o aluno a conhecer sua cidade de forma mais completa e a melhor se localizar em seu próprio ambiente, além de proporcionar um aprendizado de conteúdos matemáticos, de forma mais aproximada da sua realidade. Portanto, deixamos nossa proposta, na expectativa de que esta possa contribuir, de alguma forma, com a prática de docentes que tenham interesse em trabalhar os objetivos aqui propostos de forma diferente e eficaz, para a construção do conhecimento de seu alunado.

REFERÊNCIAS



REFERÊNCIAS

ABREU JUNIOR, L. **Conhecimento transdisciplinar**: o cenário epistemológico da complexidade. Piracicaba: UNIMEP, 1996.

ABREU, João Francisco de; BARROSO, Leônidas Conceição. Alguns aspectos da "geometria do táxi" na geografia. **Revista Geografia e Ensino**, Belo Horizonte, v. 1, n. 1, p. 31-46, mar. 1982.

ALMEIDA, Maria da Conceição. **Complexidade e cosmologia da tradição**. Belém: EDUEPA, 2001.

AMADO, João; GAMA, João; MOURÃO, Artur. **O prazer de pensar**. Lisboa: Edições 70, 1989.

ANDRINI, Álvaro; ZAMPIROLO, Maria José. **Novo Praticando matemática**. 7ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

ANDRINI, Álvaro; ZAMPIROLO, Maria José. **Novo Praticando matemática**. 8ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

ÁVILA, Geraldo. A hipérbole e os telescópios. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 34, p. 22-27, 1997.

ÁVILA, Geraldo. Kepler e a órbita elíptica. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 15, p. 2-13, 1989.

BANCHOFF, Thomas; GIBLIN, Peter. On the Geometry of Piecewise Circular Curve. **American mathematical monthly**, v. 101, n. 5, p. 403-416, May, 1994.

BARBOSA, Jonêi Cerqueira. O que pensam os professores sobre a Modelagem Matemática? **Zetetikê,** Campinas, v. 7, n. 11, p. 67-85, jan./jun. 1999.

BARBOSA, Jonêi Cerqueira. Uma perspectiva para a Modelagem Matemática. In: **Anais do IV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**. Rio Claro: Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2000. p.53-59.

BERTONHA, Regina Aparecida. **O ensino da Geometria e o dia-a-dia na sala de aula**. 1989**.** 225 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Campinas, Campinas, 1989.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

BIENBENGUTT, Maria Salett. **Modelação matemática como método de ensino-aprendizagem de matemática em cursos de 1º e 2º Graus**. 1990, 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1990.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. 7ª série. São Paulo FTD, 2000.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. 8ª série. São Paulo FTD, 2000.

BKOUCHE, Rudolf; LILLE, I. de. Sobre o ensino da Geometria. **GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 14, p. 55-70, dez. 1982.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitative em educação**: uma introdução á teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994 (Ciências da Educação).

BORBA, Marcelo de Carvalho et al. **Calculadoras gráficas e Educação Matemática**. Rio de Janeiro: A. Bureau, 1999 (Reflexões em Educação Matemática).

BOYER, C. B. **História da matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Blücher, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAMPOS, Dinah Martins de Souza. **Psicologia da Aprendizagem**. 24. ed. Petrópolis: Vozes, 1996. (1ª edição em 1987).

CARRETERO, Mario. **Construtivismo e educação**. Tradução: Jussara Haubert Rodrigues. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

CARVALHO, A. E.; AGUIAR, J. O. Geometria – leitura de mundo. **AMAE Educando**, [S.I.], n. 290, p. 39-43, abr. 2000.

CARVALHO, Aline Wernwck; LEITE, Paulo Tadeu. **Introdução ao estudo de urbanismo.** Viçosa, MG: Universidade Federal de Viçosa, 1985.

CARVALHO, P. C. P. **Visualização e modelagem baseadas em imagens**. Disponível em: <http://www.comciencia.netway.com.br/reportagens/modelagem/mod13.htm>. Acesso em: 11 abr. 2002.

CASTILHO, Sônia Fiuza da Rocha. A Geometria das ruas. **AMAE Educando**, [S.I.], n. 304, p. 12-14, nov. 2001.

CHIZZOTTI, Antonio. **Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais**. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

CÓRIA-SABINI, Maria Aparecida. **Psicologia do Desenvolvimento**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005. (Série Educação).

COVOLAN, Roberto J. M.; MIN, Li Li**. Átomo de Bohr, ratos de laboratório e Gisele Bündchen**: o que é que eles têm em comum? Disponível em:

<http://www.comciencia.netway.com.br/reportagens/modelagem/mod13.htm>. Acesso em: 13 abr. 2002.

CURTIS, H. J. A note on the taxicab geometry. **American mathematical monthly**, [s.l.], v. 60, n. 6, p. 416-417, June, 1953.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. 4. ed. São Paulo: Summus; Campinas: Unicamp, 1986.

DAVIS, Claudia Leme Ferreira; NUNES, Marina Muniz Rossa; SILVA, Patrícia Davis Ribeiro da. Consciência e metagonição em Piaget. **Psicologia da Educação**, São Paulo, n.18, p. 33-53, jan./dez. 2004.

DINIZ, Maria Ignez. Resolução de Problemas e Comunicação. In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 87-97.

DOLLE, Jean-Marie. **Para além de Freud e Piaget**: referenciais para novas perspectiva em psicologia. Tradução: Guilherme João de Freitas Teixeira. Petrópolis, RJ: VOZES, 1993.

DOMINGUES, Hygino H. Seções cônicas: história e ensino. **Revista de Educação Matemática**, [s.l.], ano 6, n. 4, p. 43-49, 1998.

ELISANGELA; JANAINA. **Ensino e aprendizagem da matemática elementar III**: Geometria Analítica. Disponível em: <http://mathematikos.psico.ufrgs.br/disciplinas/ufrgs/mat01194991/alunos/janaelis/index.html>. Acesso em: 20 ago. 2000.

EMPRESAS também utilizam métodos matemáticos. Disponível em: <http://www.comciencia.netway.com.br/reportagens/modelagem/mod13.htm>. Acesso em: 11 abr. 2002.

EVES, Howard. **História da Geometria**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992 (Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula; v. 3).

EVES, Howard. **Introdução á História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Unicamp, 1995.

FONSECA, Maria da Conceição F. R. et al. **O ensino da geometria na escola fundamental**: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

FOSSA, John A. **Ensaios sobre a educação matemática**. Belém: EDUEPA, 2001. (Educação 2).

FOSSA, John A. **Geometria Urbana**. João Pessoa: UFPb, 2003.

FOSSA, John A. **Teoria intuicionista da educação matemática**. Tradução: Alberta M. R. B. Ladchumananandasivam. Natal: EDUFRN, 1998.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREITAG, Bárbara. Aspectos filosóficos e sócio-antropológicos do construtivismo pós-piagetiano. In: GROSSI, Ester Pillar; BORDIN, Jussara. (Orgs.). **Construtivismo pós-piagetiano:** um novo paradigma sobre aprendizagem. Petrópolis, RJ: Vozes, 1993. p. 26-34.

GIBERT, A. **Origens históricas da Física Moderna**. Lisboa: F. C. Gulbenkian, 1982.

GOLLAND, Louise. Karl Menger and taxicab geometry. **Mathematics magazine**. [s.l.], v. 63, n. 5, p. 326-327, Dec., 1990.

GOMES, Candido Alberto. Desseriação escolar: alternativa para o sucesso? **Ensaio**: avaliação e políticas públicas em educação, Rio de Janeiro, v. 13, n. 46, jan./mar. 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-40362005000100002>. Acesso em: 27 abr. 2006.

HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da matemática**: influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos. Tradução Paulo Moreira da Silva. 3. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1952. (Edição norte-americana: Mathematics for the Million).

IDEMA. Instituto de Desenvolvimento Econômico e Meio Ambiente do Rio Grande do Norte. <www.idema.rn.gov.br>. Acesso em: 31 mai. 2005.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria analítica. São Paulo: Atual, 1977, v. 7.

IMENES, Luiz Márcio P. Arredondada ou achatada? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 11, p. 42-44, 1987.

INHELDER, Barbel; GARCIA, Rolando; VONÈCHE, Jacques. **Epistémologie genétique et équilibration**. França: Delachaux et Niestlé Éditeurs, 1976.

INTUIÇÃO. JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. Dicionário básico de Filosofia. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1996. p. 147.

KARLSON, Paul. **A magia dos números**: a Matemática ao alcance de todos. Tradução Henrique Carlos Pfeifer, Eugênio Brito e Frederico Porta. Rio de Janeiro: Globo, 1961. (Coleção Tapete Mágico 31).

KLEIN, Lígia Regina. Construtivismo Piagetiano: considerações críticas à concepção de sujeito e objeto. In: DUARTE, Newton (Org.). **Sobre o Construtivismo**: contribuições a uma análise crítica. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2005 (Coleção Polêmicas do Nosso Tempo, n. 77).

KOBAYASHI, M. do C. M. **A construção da geometria pela criança.** Bauru: EDUSC, 2001.

KRAUSE, E. F. **Taxicab Geometry:** an adventure in Non – Euclidean Geometry. New York: Cover Publications, 1986.

KRAUSE, Eugene F. Taxicab geometry. **Mathematics Teacher**, v. 66, p. 695-706, December, 1973.

KRAUSE, Eugene F. **Taxicab geometry**: An adventure in non-Euclidean geometry. Mineola, New York: Dover, 1975/1986.

KUHN, T. **A tensão essencial**. Lisboa: Edições 70, 1989.

LAATSH, Richard. Pyramidal sections in taxicab geometry. **Mathematics Magazine**, v. 55, n. 4, p. 205-212, Sept., 1982.

LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides)

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Orgs.). **Aprendendo e ensinando Geometria.** Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

Mapa Mundi. <http://www.esg.br/cee/mapa_mundi/Thumbnails.html>. Acesso em: 16 ago 2006.

Mapa Mundi. Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Imagem:Physical_world.jpg#file>. Acesso em: 16 ago. 2006. Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre. Imagem: Physical world.jpg

MARANHÃO, M. C. S. de A. **Matemática**. São Paulo: CORTEZ, 1991 (Coleção Magistério 2° grau. Série formação geral).

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Técnicas de pesquisa:** planejamento e execução de pesquisa, elaboração, análise e interpretação de dados. São Paulo: ATLAS, 1986.

MENDES, Iran Abreu. **Ensino da Matemática por atividades:** uma aliança entre o construtivismo e a história da Matemática. 2001. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Sociais e Aplicadas, Natal, 2001.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John A. Tendências atuais na educação matemática: experiências e perspectivas. In: FOSSA, John A. (Org.). **Educação Matemática**, Natal: EDUFRN, 1998 (Coleção EPENN – n. 13, v. 19).

MODELAGEM matemática na previsão do tempo e do clima. Disponível em: <http://www.comciencia.netway.com.br/reportagens/modelagem/mod13.htm>. Acesso em: 11 abr. 2002.

MODELAGEM matemática: a inspiração para a música computacional. Disponível em: <http://www.comciencia.netway.com.br/reportagens/modelagem/mod13.htm>. Acesso em: 11 abr. 2002.

MODELAGEM: um caminho para a realização da Inteligência Artificial. Disponível em:

<http://www.comciencia.netway.com.br/reportagens/modelagem/mod13.htm>. Acesso em: 11 abr. 2002.

MORETTO, Vasco Pedro. **Construtivismo:** a produção do conhecimento em aula. Rio de Janeiro: DP&A, 1999.

NORONHA, Claudianny Amorim. **A modelagem e a geometria urbana**: uma proposta para a construção dos conceitos das cônicas. 2003. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2003.

NORONHA, Claudianny Amorim; FOSSA, John Andrew. A Geometria Isoperimétrica: uma variação da Geometria do Taxista. In: FOSSA, John Andrew. **Cabelos Negros, Olhos Azuis e Outras Feições das Matemáticas Puras e Aplicadas**. Natal: Editora da UFRN, a aparecer.

O AUXÍLIO da modelagem matemática à medicina. Disponível em: <http://www.comciencia.netway.com.br/reportagens/modelagem/mod13.htm>. Acesso em: 11 abr. 2002.

PAIS, Luiz Carlos. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 6, p. 65-74, jul./dez. 1996.

PAVANELLO, Regina Maria. **Formação de possibilidades cognitivas em noções geométricas.** 1995. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 1995.

PAZ, M. P. **Manual de automóveis.** Tradução: José de Campos Roxo. Madrid: M. Jou, 1970.

PEIXES transformados em números. Disponível em: <http://www.comciencia.netway.com.br/reportagens/modelagem/mod13.htm>. Acesso em: 11 abr. 2002.

PIAGET, Jean et al. **Abstração Reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das redes espaciais. Tradução: Fernando Becker e Petronilha Beatriz Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIAGET, Jean. **A Equilibração das Estruturas Cognitivas**: problema central do desenvolvimento. Tradução: Marion Merlone dos Santos Penna, Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976a (Traduzido da 1ª edição francesa de 1975).

PIAGET, Jean. **Seis Estudos da Psicologia**. Tradução: Maria Alice Magalhães D'Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva, Rio de Janeiro: Editora Forense Universitária, 1976b. (Traduzido da 1ª edição francesa de 1964).

POWELL, Arthur B. **"So let's prove it!"**: Emergent and elaborated mathematical ideas and reasoning in the discourse and inscriptions of learners engaged in a combinatorial task. Published doctoral dissertation, 2003, Rutgers, The State University of New Jersey, New Brunswick, 2003.

RADICE, Lucio Lombardo. **A Matemática de Pitágoras a Newton**. Tradução Bárbara Martins Costa. Lisboa: Edições 70, 1971.

SAMUEL. **Cônicas.** Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~samuel/matthtables/álgebra/conics.htm>. Acesso em: 15 ago. 2001.

SANTOS, Alan Kardel Pereira dos. **Artefatos mentais.** 1999. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Sociais e Aplicadas, Natal, 1999.

SCANDIUZZI, Pedro Paulo Água e óleo: modelagem e etnomatemática. **Bolema,** Rio Claro, ano 15, n. 17, p. 52-58, 2002.

SCHATTSCHNEIDER, Doris J. The taxicab group. **American mathematical monthly**, [s.l.], v. 91, p. 423-428, Aug./Sept. 1984.

SILVEIRA, C.; CARDOSO, H.; RODRIGUES, S. **O que é uma cônica?** Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/>. Acesso em: 15 ago. 2001.

SKEMP, Richard R. **Psicología del aprendizaje de las matemáticas**. Tradução de Gonzalo Gonzalvo Mainar. Madrid: Ediciones Morata, 1980.

SOWELL, Katye O. Taxicab Geometry – A new slant. **Mathematics Magazine,** [s.l.], v. 62 n. 4, p. 238-248, October, 1989.

TAUBE NETTO, M. **Matemática para produtividade**. Disponível em: <http://www.comciencia.netway.com.br/reportagens/modelagem/mod13.htm>. Acesso em: 13 abr. 2002.

TAUBE NETTO, M. **Matemática para produtividade**. Disponível em: <http://www.comciencia.netway.com.br/reportagens/modelagem/mod13.htm>. Acesso em: 13 abr. 2002.

UNIVERSIDADE DE CAMPINAS. **Telescópios**: desvendando o universo. Disponível em: <http://www.epub.org.br/comciencia>. Acesso em: 20 ago. 2001.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **Notas de aulas do curso fundamentos de Astronomia**: astrofísica estelar (telescópios). Disponível em: <http://www.iagusp.usp.br/~jane/aga215/aula05/inicio2.htm>. Acesso em: 20 ago. 2001.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **Século XX – Astronomia e Astronáutica**: os grandes instrumentos. Disponível em: <http://educar.sc.usp.br/ciencias/astro/cda/sessao-astronomia/seculoxx/textos/>. Acesso em: 20 ago. 2000.

VALLADARES, Renato J. C. A Matemática e a Geometria nas leis de Kepler e da Gravidade. **GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 35, p. 95-109, 1999.

VALLADARES, Renato J. C. Elipses, sorrisos e sussurros. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 36, p. 24-28, 1998.

VOGT, C. **Modelos e modelagens.** Disponível em: <http://www.comciencia.netway.com.br/reportagens/modelagem/mod13.htm>. Acesso em: 11 abr. 2002.

WAGNER, Eduardo. Por que as antenas são parabólicas. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 33, p. 10-15, 1997.

APÊNDICE A

PLANO DE AULAS

Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
Centro de Ciências Sociais e Aplicadas.
Programa de Pós-Graduação em Educação.
Doutoranda: Claudianny Amorim Noronha.
Orientador: John A. Fossa.
Curso de Geometria: Definindo Circunferência e Elipse.
Série: 7ª e 8ª série.

Conteúdo: Circunferência e Elipse

Objetivo Geral

- Construir os conceitos de circunferência e elipse.

Objetivos Específicos

- Identificar aspectos diferentes dessas formas em diferentes espaços;
- Definir circunferência e elipse;
- Entender o que compreende raio e diâmetro da circunferência;
- Identificar aplicações dessas formas no cotidiano;

Método

Buscando atender nossos objetivos, elaboramos atividades (Anexo) baseadas nas Geometrias Urbana e Isoperimétrica, na modelagem matemática e, consequentemente, na Resolução de Problemas e na realização de pesquisas.

Ressaltamos que, apesar do uso de uma métrica diferente, não faz parte de nossos objetivos desvincular os alunos da métrica euclidiana. Mas, possibilitar a eles uma melhor compreensão da definição de circunferência e elipse, a partir do uso de uma métrica diferente da usual e mais condizente com a sua realidade, além de permitir que percebam a existência de outros espaços, que não o plano, em que essas figuras podem se apresentar.

Para fazer a conexão entre essas duas métricas, as atividades elaboradas buscam incentivar o aluno a realizar pesquisas, a analisar, a refletir, a fazer comparações e tirar suas próprias conclusões, as quais serão debatidas em sala de aula.

As atividades serão trabalhadas em grupos, a fim de que possamos estimular a discussão em torno dos métodos encontrados para resolver os problemas e a troca de idéias e a observação de diferentes formas de chegar a um resultado.

É importante ressaltar que nos preocupamos em obedecer a uma seqüência na disposição das atividades, de forma que uma dará subsídios para a resolução da próxima, buscando possibilitar aos alunos criarem os seus esquemas mentais para um melhor entendimento.

Recursos

Papel, caneta ou lápis, quadro de giz, giz, computadores com internet, livros didáticos, painéis de EVA.

Avaliação

- Freqüência e participação dos alunos nas atividades propostas e nos momentos de correção destas com a classe;
- Verificação, através de entrevista informais e de análise das atividades entregues, do progresso dos estudantes em relação ao entendimento do conteúdo e a tomada de atitudes que apontem iniciativa e capacidades de interpretar, de refletir, de trabalhar em grupo e de propor soluções para as situações propostas.

Período

- Prevemos para o curso a duração 16 horas/aula.

Referências

ABREU, J. F.; BARROSO, Leônidas C. Alguns aspectos da "geometria do táxi" na geografia. **Revista Geografia e Ensino**, Belo Horizonte, v. 1, n. 1, p. 31-46, mar., 1982.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. 7ª série. São Paulo: FTD, 2000.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. 8ª série. São Paulo: FTD, 2000.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAMPOS, Dinah Martins de Souza. **Psicologia da Aprendizagem**. 24. ed. Petrópolis: Vozes, 1996. 1ª edição em 1987.

CÓRIA-SABINI, Maria Aparecida. **Psicologia do Desenvolvimento**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005. (Série Educação).

EVES, Howard. **História da Geometria**. São Paulo: Atual, 1992. (Coleção Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula; v. 3)

FOSSA, John Andrew. **Ensaios sobre a educação matemática.** Belém: EDUEPA, 2001 (Educação 2).

FOSSA, John Andrew. **Geometria urbana**. João Pessoa: UFPB, 2003.

KRAUSE, Eugene F. **Taxicab geometry**: An adventure in non-Euclidean geometry. Mineola, New York: Dover, 1975/1986.

NORONHA, Claudianny Amorim. **A modelagem e a geometria urbana**: uma proposta para a construção dos conceitos das cônicas. 2003. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2003.

SOWELL, Katye O. Taxicab Geometry – A new slant. **Mathematics Magazine**, [s.l.], v. 62 n. 4, p. 238-248, October, 1989.

APÊNDICE B

QUESTIONÁRIO DE PESQUISA

Escola:____
Aluno:____
Série:______________________Idade:____

01- Você já repetiu de ano?
( ) Não ( ) Sim. Quantas vezes?__________________________________

02- Em que série(s) você repetiu?____

03- Em que disciplina(s) você repetiu?____

04- Quais os motivos que levaram você a repetir de ano?
( ) Você não gostava da disciplina
( ) Você não gostava do seu professor
( ) Você não entendia as explicações do seu professor
( ) Você não tinha tempo de estudar. Por quê?_______________________________________
( )Outros. Quais?____

05- Você gosta das aulas de Matemática?
( ) Sim ( ) Não
Por quê?____

06- Você usa fora da escola o que você aprende nas aulas de Matemática?
( ) Sim. Dê exemplo____
( ) Não.

07- Você se considera um bom aluno em Matemática?
( ) Sim ( ) Não
Por quê?____

08- Você gosta de resolver problemas matemáticos?
( ) Sim ( ) Não
Por quê?____

09- Você sabe o que é uma circunferência?
( ) Sim ( ) Não

10- Você sabe o que é uma elipse?
( ) Sim ( ) Não

11- Você sabe o que é um plano cartesiano?
( ) Sim ( ) Não

12- Você sabe encontrar as coordenadas de um ponto no plano cartesiano?
( ) Sim ( ) Não

APÊNDICE C

ATIVIDADES

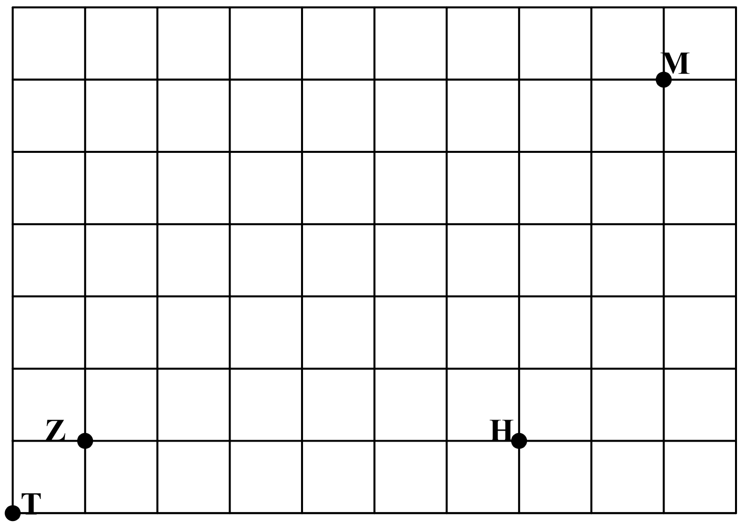
Escola:____
Aluno:____
Série:______________ **Turma:**______________ **Idade:**________________
Data:___/___/____.

OS TAXISTAS DE BARCARENA

Um turista sueco, que chegou a algumas horas em Barcarena, uma cidade simples e bonita do norte do país, decide sair do hotel "Sombra e Água Fresca", em que está hospedado, para dar um curto passeio na cidade e voltar a tempo para o jantar. Então, após olhar a lista telefônica, o sueco decide ligar para a empresa de táxi "A Jato" que oferece o melhor serviço da cidade.

Ao ligar para a empresa atende a telefonista Joana, que promete enviar um carro o mais rápido possível. Para isso, dona Jô, como era conhecida na empresa, decide enviar o táxi que está mais próximo do hotel, supondo que este chegará mais rápido. Sabendo que há dois taxistas trabalhando na área em que está localizado o hotel, que são os motoristas Zé e o Mané, ela olha para o mapa em suas mãos com a posição dos dois taxistas e do hotel e, depois de muito pensar, decide enviar o Mané.

Mapa da Cidade



Sendo:
Z - Taxista Zé;
M - Taxista Mané;
H - Hotel "Sombra e Água Fresca";
T - Empresa de Táxi "A Jato", onde está dona Jô.

01- Meça com uma régua a distância entre os pontos ZH e MH. Agora responda, o motorista Mané está realmente mais próximo do hotel?

Mas, a telefonista não estava contanto com o servente João que estava limpando a mesa dela quando ela tomou a decisão de mandar o taxista Mané. João era um servente de 50 anos, que depois que decidiu se alfabetizar e a ser o melhor aluno da classe, passou a se intrometer em todos os assuntos do seu local de trabalho.

Após a telefonista ligar para Mané, João nem contou um segundo para dizer: - Ihhh, dona Jô, a senhora não pensa não, é??!! A Senhora não vê que o taxista Zé tava mais próximo do hotel???

02- E aí, você acha que João é intrometido, mas inteligente, e deu o pitaco correto? Ou você concorda com dona Jô e acha que a experiência na profissão lhe ajuda na hora de tomar decisões como esta? Por quê?
Resposta:____

____

____

03- Se você concorda com João, que solução você daria a este problema? Por quê?
Resposta:____

____

____

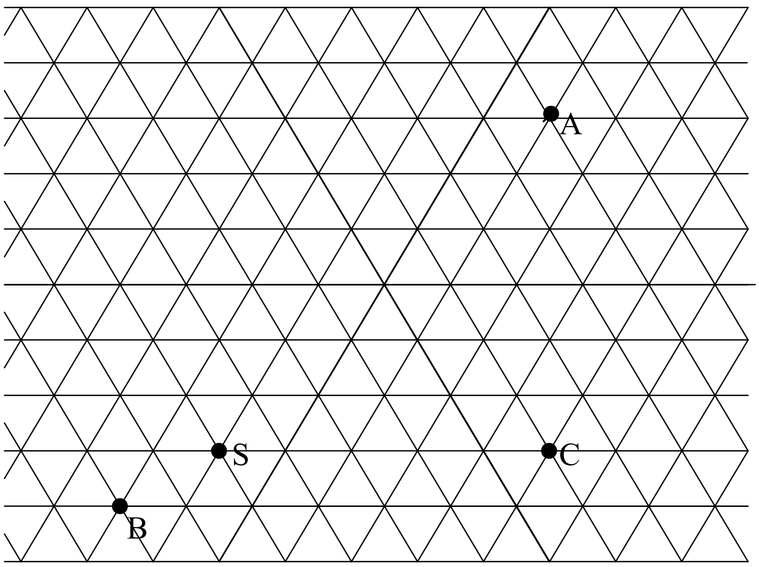
O MUNDO VIRTUAL DOS FELICITONS

O mundo virtual é um mundo cheio de mistérios e novidades. Neste mundo existe uma cidade chamada Divertix, onde mora um grupo de heróis que buscam a paz e a felicidade do povo divertixiano, são os Felicitons.

Divertix é uma cidade com características bastante diferentes do mundo real. Um exemplo dessa diferença são as ruas, que, ao invés de formarem quarteirões quadrados como as nossas, formam os chamados trieirões, ou seja, triângulos. Mas, não são qualquer triângulo e sim, triângulos eqüiláteros (triângulos com os três lados iguais).

Um belo dia, um dos grandes inimigos dos Felicitons, o Deprecix, atacou um grupo de jovens que se reunia em um clube da cidade. Mas, o radar da base de observação dos heróis detectou o perigo e, ao tentar acionar os defensores, viu que haviam dois nas redondezas do ataque, o Sorrison e o Amigon, que faziam rondas com suas motos superpotentes. Como o radar era conectado a um computador bastante avançado, ele fez seus cálculos matemáticos e decidiu enviar o Amigon, pois descobriu que este estava mais próximo do local do crime.

Mapa da Cidade



Sendo:
B - Base de Observação;
S – Localização de Sorrison;
A - Localização de Amigon;
C – Local do crime.

04- Meça com uma régua a distância entre os pontos SC e AC. Agora responda, o computador da base de observação estava correto e enviou o herói certo ou ele está precisando de uma reforminha?

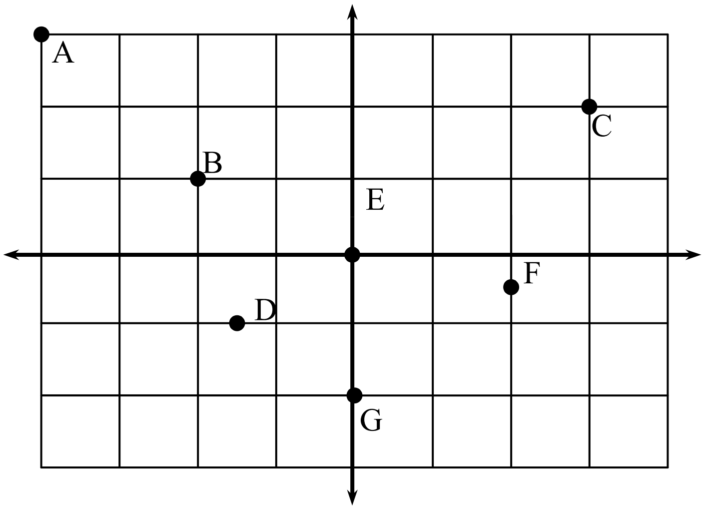
Resposta:____

____

____

05- Observando o gráfico abaixo, diga qual a distância em quarteirão entre os pontos:

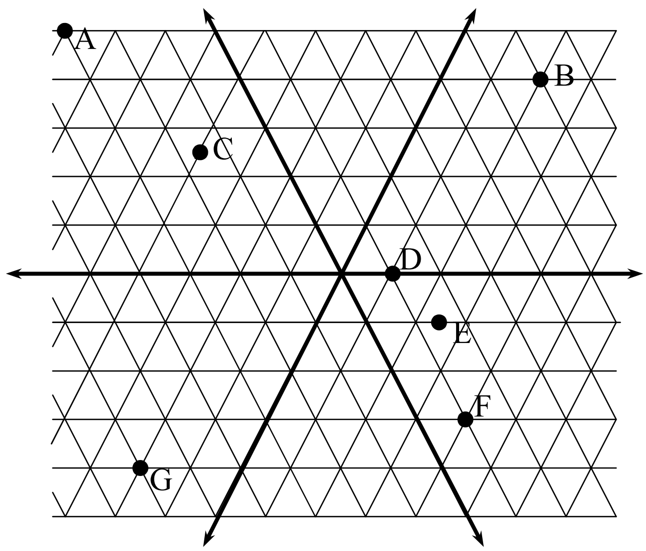
a) A e B –
b) B e C –
c) C e D –
d) D e E –
e) E e F –
f) F e G –
g) A e G –
h) B e F –
i) D e A –
j) D e A –



06- Encontre as coordenadas de cada um dos pontos do quadro da questão 05.

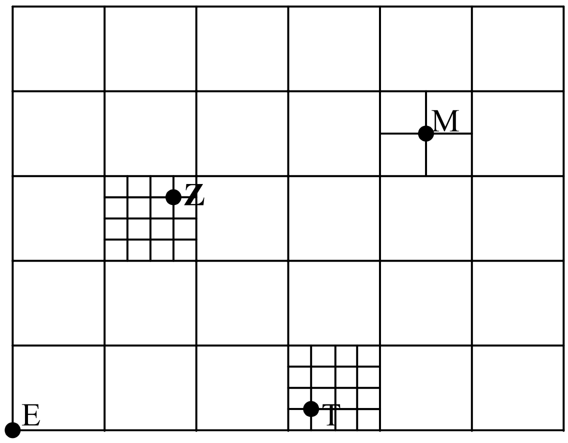
07- Agora observe o gráfico formado por triângulos eqüiláteros e diga qual a distância em trieirão entre os pontos:

a) A e B –
b) C e B –
c) B e D –
d) D e E –
e) G e D –
f) G e F –
g) D e F –
h) F e B –
i) G e B –
j) A e E –



08- Encontre as coordenadas de cada um dos pontos do quadro da questão 07.

09- Mas, sabemos que nas cidades existem quarteirões menores, vilas, ruelas etc. Portanto, tendo em mãos o mapa abaixo, que distância Zé percorrerá para ir da casa dele até a do taxista Mané (M)? Se, depois de chegar na casa de Mané, Zé decidir visitar dona Jô, ele terá que andar quantos quarteirões? E se Mané sair da casa dele para a estação de táxi (T) em que trabalha, ele terá que percorrer que distância?

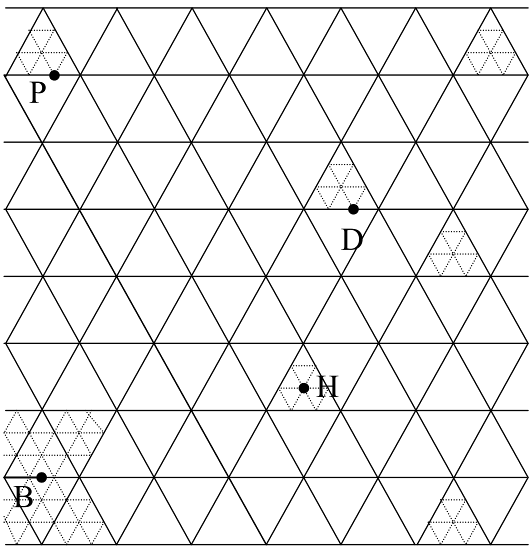


M – casa do taxista Mané;
Z – casa do taxista Zé;
C – casa da telefonista Joana (dona Jô);
E – Estação de Táxi.

Resposta:____

____

10- A cidade virtual não fica atrás, é cheia de pequenos trieirões, vilas, ruelas etc, que podem esconder muitos inimigos. Portanto, tendo em mãos o mapa abaixo, quantos trieirões os Felicitons terão que percorrer para irem da sua base de observação para a toca do inimigo nº 1 deles, o Humor Negro? Após prenderem o humor Negro, que distância nossos heróis terão que percorrer até a toca do terrível Deprecix? Após prenderem o 2º maior vilão do mundo virtual, quantos trieirões nossos heróis percorrerão para prendê-los na base de observação? Ao chegarem a base, os heróis ouvem um pedido de socorro, era o Embriaguesion, atacando na casa de uma senhora muito boa a dona Da Paz, agora quantos trieirões ele terão que percorrer até a casa da vítima?



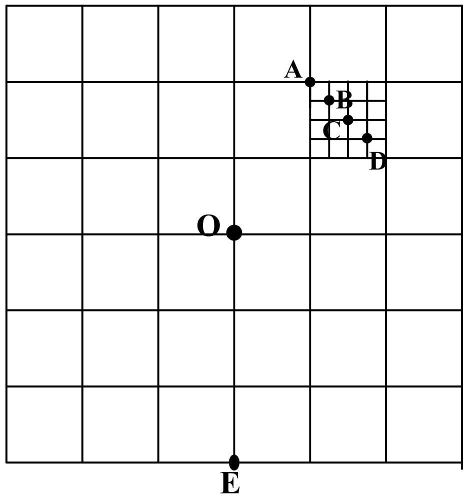
H – Toca do Humor Negro;
D – Toca do Deprecix;
P – Casa de dona Da Paz (Onde Embriaguesion está atacando);
B – Base de observação dos Felicitons.

Resposta:____

____

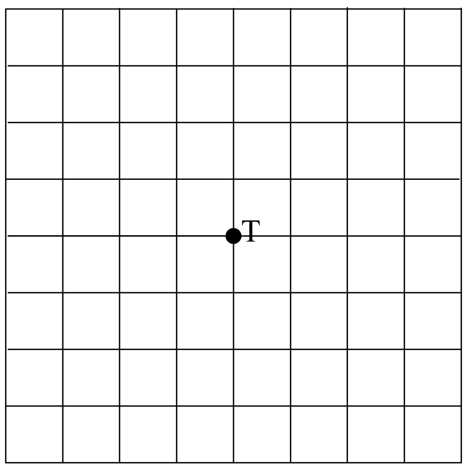
Aluno: ____Turma:_____________

01- Verifique, na figura abaixo, qual a distância de O para cada um dos outros pontos:



Sr. Gonzaga, dono da "A Jato", era um homem muito "mão de vaca". Para economizar, comprou uns rádios de comunicação bem baratos para sua frota de táxi. Depois de instalados nos carros, foi verificado que os rádios não funcionavam quando os taxistas se afastavam mais de 3 quarteirões da empresa. Sr. Gonzaga, que não queria ter mais gastos, decidiu, então, que todos os taxistas terão que ficar em pontos de táxi localizados a três quarteirões da empresa.

02- Descubra estes pontos na figura abaixo, sabendo que a empresa de táxi "A Jato" está representada pela letra *T*.

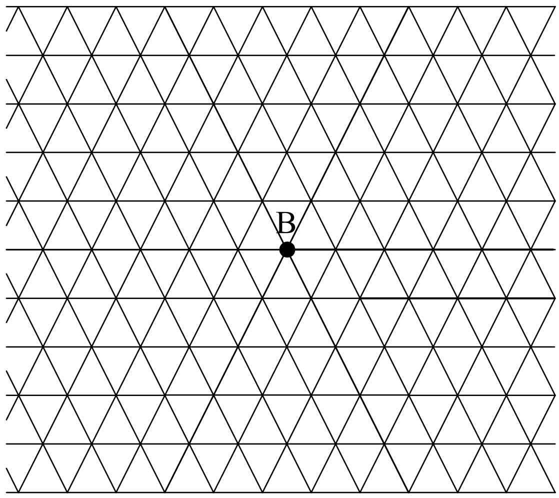


03- Que figura você encontrou?
Resposta:____
____

04- Você chamaria essa figura de circunferência? Por quê?
Resposta:____
____

Em Divertix, o grupo dos Felicitons montaram uma estratégia de defesa da cidade, todos os heróis deveriam ficar em um ponto da cidade, de modo que, quando houvesse perigo o radar da base de observação acionaria, através do rádio, o herói que estivesse mais próximo do local do crime. Mas, eles não poderiam ficar muito afastados, pois o rádio de comunicação só funciona a uma distância de 5 trieirões da base.

05- No mapa abaixo, descubra todos os pontos localizados a 5 trieirões da base (B) e ajude os heróis de Divertix a encontrarem suas localizações.



06- Que figura você encontrou?

Resposta:________________________________

07- Quais as semelhanças e diferenças desta figura com a encontrada na questão 02?

Resposta:________________________________

08- Esta figura poderia ser chamada de circunferência? Por quê?

Resposta:________________________________

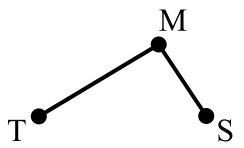
09- Pesquise em livros didáticos ou em outras fontes a respeito da circunferência e relate as semelhanças e diferenças que esta possui com as figuras encontradas nas questões 02 e 05.

Resposta:________________________________

Aluno: ____Turma:____________

Muitos astrônomos da Antigüidade pensavam que os planetas giravam em órbitas circulares, mas por volta de 1601, o astrônomo Johannes Kepler descobriu que isto não era verdadeiro e que os planetas giravam em órbitas elípticas, tendo o Sol em um dos focos. Para isso tomou como ponto de referência o Sol, como estrela fixa, e Marte, planeta que se move mais rapidamente em sua órbita, retornando logo à posição inicial, o que facilitou o seu estudo.

$MT + MS = K$



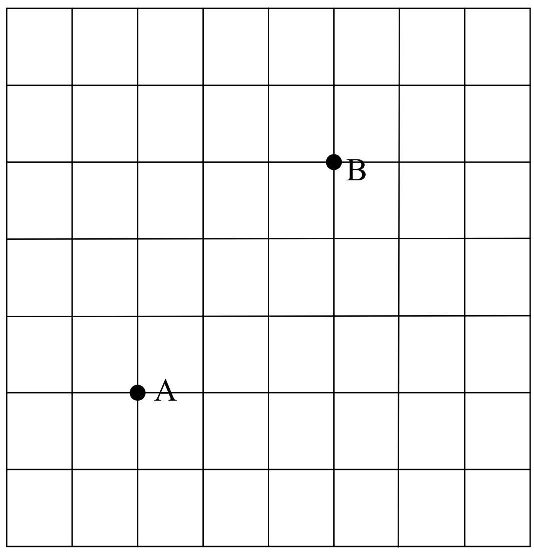
M – Marte
T – Terra
S – Sol
K – pontos da órbita do planeta

01- Pesquise em livros didáticos ou em outras fontes o que é uma elipse e de que forma ela se apresenta.

Resposta:____

____

02- Levando em conta a conclusão de Kepler, use a Geometria Urbana para achar a órbita do planeta **P**, tendo como pontos de referência os focos **A** e **B** e sabendo que a soma das distâncias destes para os pontos da órbita deverá ser sempre igual a 9:

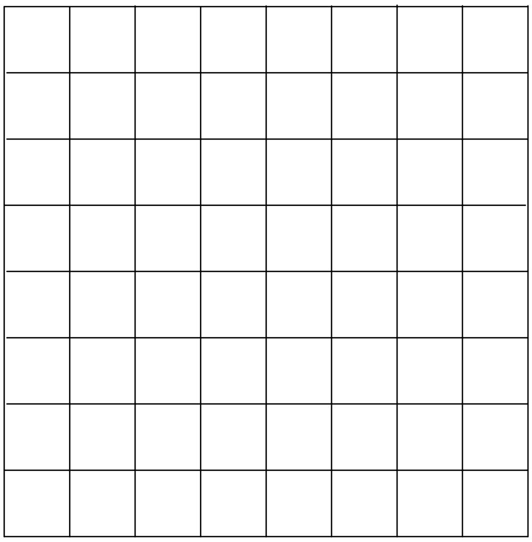


03- Compare a figura encontrada na questão 02 com a elipse que você encontrou na pesquisa. Quais as diferenças e semelhanças encontradas?

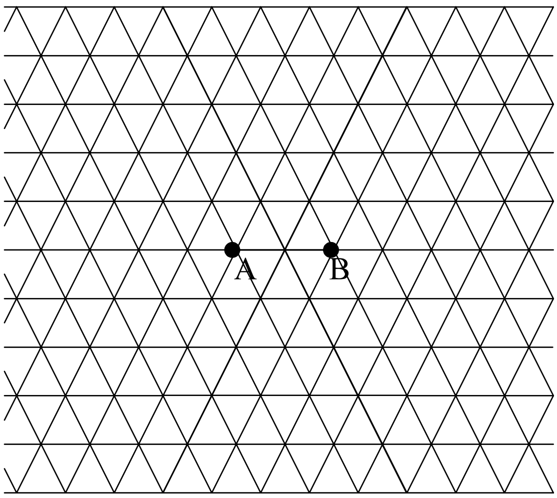
Resposta:____

____

04- No quadro abaixo, mude a posição dos pontos A e B de modo que a distância entre estes seja de um quarteirão. Agora descubra os pontos da elipse de forma que a soma da distância entre estes e os pontos A e B seja a mesma usada na figura anterior?



05- A órbita dos planetas no universo virtual é muito diferente da órbita dos nossos planetas. Você poderá verificar essa diferença encontrando a órbita do planeta Divertix. Para isso, você precisa encontrar na figura abaixo os pontos cuja soma da distância destes para cada um dos focos (A e B) seja igual a 6.



06- Agora responda:

a) Que figura você encontrou?
Resposta:____
____

b) Há alguma semelhança desta figura com as encontradas nas questões 1 e 2?
Resposta:____
____

c) A figura encontradas na questão 5 pode ser chamada de elipse? Por quê?
Resposta:____
____

APÊNDICE D

PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA HIPÉRBOLE E PARÁBOLA

PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA HIPÉRBOLE

A CONCORRÊNCIA DOS TAXISTAS

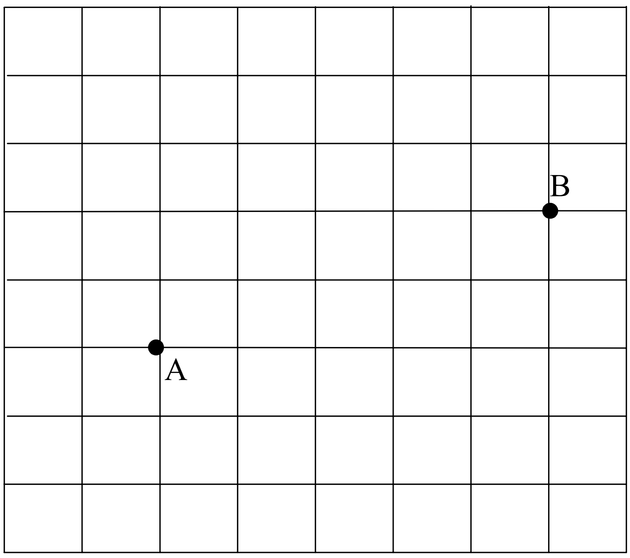
A empresa de táxi "A Jato", que tinha como dono o Sr. Gonzaga, não era a única da cidade. Sua maior concorrente era a "Papaléguas", cujo proprietário era o Sr. Batista. O maior problema existente entre os donos das duas empresas era que os dois atendiam clientes na mesma área da cidade e seus funcionários taxistas viviam brigando na porta dos hotéis por causa dos clientes.

Um dia, os donos das empresas foram chamados para uma reunião com os donos de hotéis que pediam que estes tomassem alguma providência, pois, as constantes discussões entre taxistas, estavam espantando seus clientes.

Temendo perder seus clientes e, assim, entrar em falência, Sr Gonzaga e Sr. Batista, após muito pensarem, encontraram a seguinte solução: traçar uma linha de fronteira entre as duas empresas, de modo que cada empresa atendesse aos clientes do seu lado da fronteira.

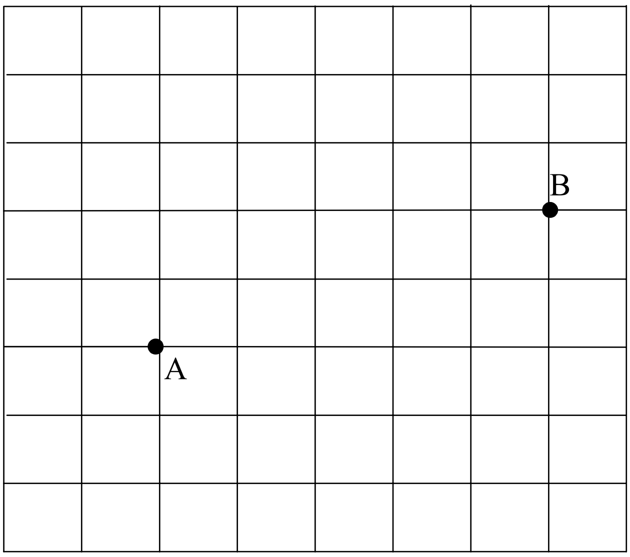
Tendo os dois concordado com a idéia, começaram a estudar o mapa da cidade e decidiram que, para traçar a linha de fronteira, eles precisavam encontrar todos os pontos da cidade que ficassem eqüidistantes das duas empresas, ou seja, encontrar pontos cuja diferença entre as distâncias destes para cada empresa fosse sempre igual a zero.

01- Tendo o quadro abaixo como o mapa estudado pelos dois empresários, tente encontrar os pontos (P) que os dois procuram:



Lembre-se que:
PA – PB = D
A- Empresa de Táxi "A Jato";
B- Empresa de Táxi "Papalégua";
P- Pontos da fronteira;
D- Diferença sempre = 0.

02- Supondo que os empresários escolhessem uma solução diferente e, ao invés de encontrar pontos eqüidistantes, eles decidissem encontrar pontos cuja diferença entre as distâncias destes para cada uma das empresas de táxi fosse igual a 6, ou seja, PA-PB = 6. Quais seriam os pontos encontrados no mapa?



Lembre-se que:
PA – PB = D
A- Empresa de Táxi "A Jato";
B- Empresa de Táxi "Papalégua";
P- Pontos da fronteira;
D- Diferença sempre = 6.

03- Que figura você encontrou?

Resposta:____

____

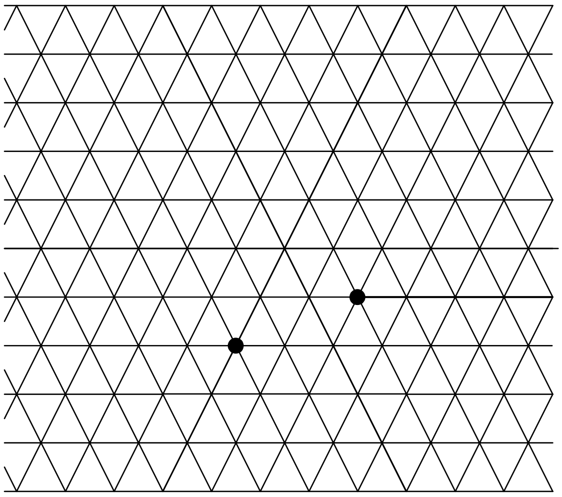
A BRIGA DE VILÕES

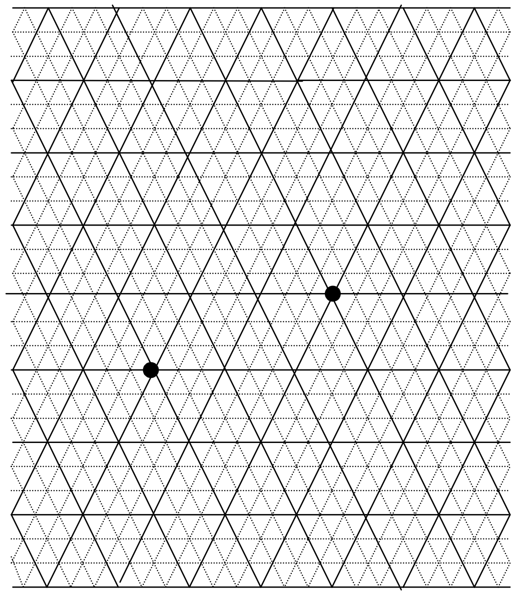
É incrível, mas no mundo virtual aconteceu um probleminha bem parecido. Mas, lá, a briga por território acontecia entre dois vilões da cidade: o Humor Negro e o Deprecix.

A briga entre eles acontecia por que quando Humor Negro decidia atacar uma vítima, ao chegar na casa dela, quem estava lá? Se você disse Deprecix, acertou! Mas o contrário também acontecia. Deprecix escolhia uma vítima, quando chegava na casa dela Humor Negro já estava lá. Acontece que sempre que os dois se encontravam, havia uma batalha entre eles. Então, ambos decidiram acabar com isso antes que um acabasse com o outro. Assim, marcaram uma reunião e depois de tanto pensar e olha que eles pensaram muito, aliás, todo vilão é burro. Pensaram dias, semanas, meses e......até que enfim, acharam uma solução.

Os vilões decidiram marcar território. Para isso, precisavam marcar uma linha de fronteira, assim cada um atuaria em um lado da cidade. A linha que eles encontraram deveria ficar no meio do caminho entre as tocas do dois, ou seja, teria que ser formada por pontos eqüidistantes das duas tocas. Assim, de posse do mapa da cidade virtual, eles precisavam encontrar todos os pontos cuja diferença da distância entre estes e a toca de cada um fosse igual a zero.

04- Considerando o mapa abaixo como o da cidade virtual que os vilões tinham em mãos, encontrem os pontos com as características buscadas por eles.





05- Agora responda:

a) Que figura você encontrou?

Resposta:____

b) A figura encontrada na atividade 04 tem alguma semelhança com as figuras encontradas nas atividades 1 e 2? Qual?

Resposta:____

____

c) Pesquise em livros didáticos ou em outras fontes a respeito da hipérbole e relacione a respeito das semelhanças e diferenças que esta possui com as figuras encontradas nas questões 1, 2 e 4.

Resposta:____

____

d) Considerando a pesquisa realizada, é possível concluir que as figuras encontradas podem ser hipérboles? Por quê?

Resposta:____

____

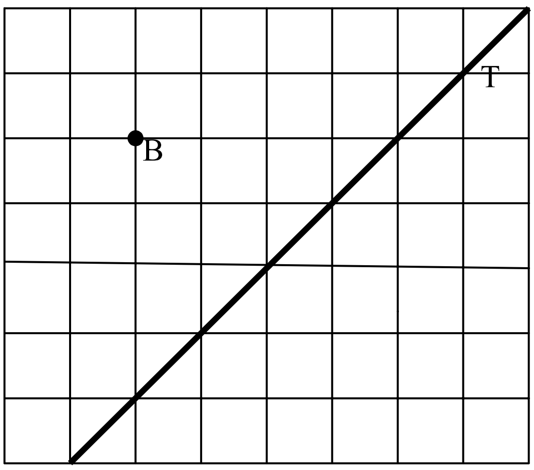
PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA PARÁBOLA

O EMPRESÁRIO GONZAGA

Sr. Gonzaga, como grande empresário que era, precisava ter o controle da situação, não bastava ter uma área só pra a empresa dele, precisa saber se os motoristas dele estavam todos trabalhando e que não tinha nenhum dormindo em casa. A forma encontrada por ele foi a de fiscalizar os motoristas através de um balão, já que não dava para comprar um helicóptero.

Mas, Sr. Gonzaga não conseguia esconder que tinha muito medo do balão, principalmente quando soube que o balão não tinha rádio para anunciar qualquer perigo. Foi então, que ele decidiu que um de seus taxistas iria seguí-lo. Mas, para que o taxista escolhido pudesse rapidamente pedir ajuda em caso de qualquer perigo, Sr. Gonzaga determinou que este deveria percorrer sempre eqüidistante do trajeto feito pelo balão e de um posto dos bombeiros. No entanto, Sr. Gonzaga pensou, como vou fazer para traçar o caminho que o taxista irá percorrer!!??

01- No mapa abaixo está projetado o trajeto previsto para o balão de Sr. Gonzaga, que será uma linha reta, e, também, a localização do posto dos bombeiros. Agora, ajude Sr. Gonzaga a encontrar a solução de seu problema traçando o percurso que o taxista irá percorrer de modo que este esteja sempre eqüidistante da reta (trajeto do balão) e do posto dos bombeiros, ou seja, de modo que a diferença das distâncias entre os pontos encontrados (P) a cada um (posto dos bombeiros e trajeto do balão) seja sempre igual a zero.



Lembre-se que:
PB – PT = 0
B- Posto dos Bombeiros
T- Trajeto do Balão

A figura encontrada na questão anterior é conhecida como **parábola** na geometria apresentada nos livros didáticos, chamada Geometria Euclidiana. As trajetórias de bolas ou outros projéteis dentro da atmosfera terrestre são, geralmente, arcos similares a uma parábola euclidiana e, quanto menor é a resistência do ar, mais perfeitas são essas trajetórias. Porém, esta apresenta algumas diferenças da parábola vista na Geometria Urbana.

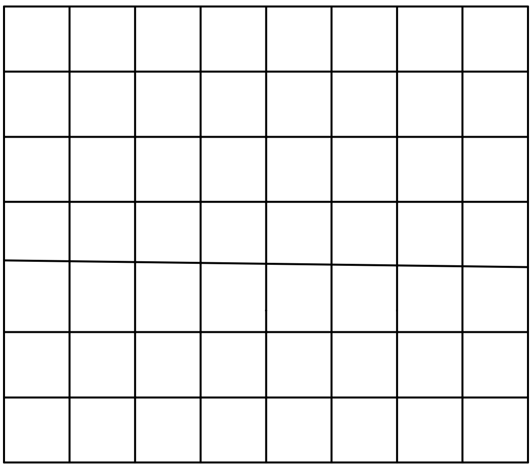
02- Pesquise em livros didáticos ou em outras fontes, as semelhanças e diferenças que a parábola encontrada acima possui com a parábola da Geometria Euclidiana e explique-as abaixo.

Resposta:

03- Tendo como base a pesquisa feita na questão anterior é possível concluir que a figura encontrada na questão 01 é uma parábola? Por quê?

Resposta:

04- Coloque na figura abaixo um ponto **B** e uma reta **T** com posição diferente da que temos na figura acima e verifique se a forma da figura será a mesma.



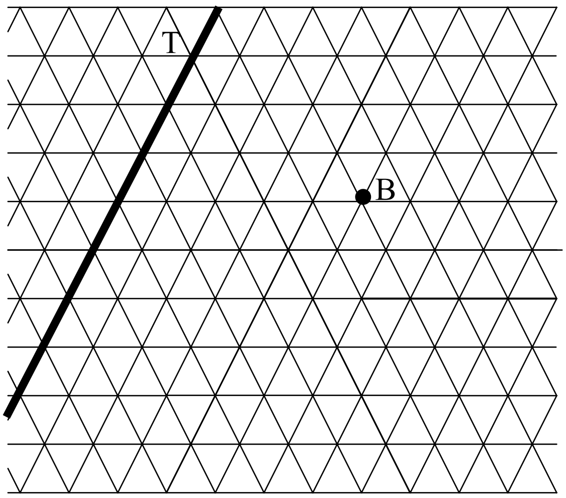
A NOVA ESTRATÉGIA DOS FELICITONS

O que estará acontecendo no mundo virtual?

Após as inúmeras maldades que o vilão Humor Negro aprontou em pouco menos de uma semana, os defensores Felicitons decidiram tomar uma atitude urgente: colocar um de seus parceiros, o Sorrison, para vigiar o malvado.

A caminho da toca de Humor Negro, o destemido Sorrison segue em sua super moto, quando, de repente, ao olhar para cima, vê um enorme balão saindo do alto da torre em que seu inimigo morava. Era o Humor Negro indo fazer mais uma de suas maldades. Então, Sorrison pensou: o que faço, já que não posso voar? Tenho que perseguí-lo sem me afastar muito da Base de Observação para não perder o sinal de rádio e poder avisar meus companheiros do perigo! Foi então que o ágil e inteligente Sorrison teve uma idéia: Vou seguí-lo pelos trieirões de modo que eu possa ficar sempre a mesma distância do trajeto do balão e da Base de Observação. E, para sorte do defensor, essa não foi uma tarefa difícil, pois o trajeto do balão era uma linha reta, portanto, ele só precisava seguir pelos trieirões que ficassem a mesma distância dessa linha reta e da base.

05- Tendo em mãos um mapa da cidade virtual, como o que temos abaixo, Sorrison rapidamente traçou seu trajeto. Você é capaz de descobrir que trajeto nosso defensor traçou?



Lembre-se que:
PB – PT = 0
B- Base de Observação
T- Trajeto do Balão

06- Compare a figura encontrada na atividade 05 com a encontrada na atividade 01 e relacione suas semelhanças e diferenças.

Resposta:____

____

07- Tendo como base a pesquisa feita na questão 03 é possível concluir que a figura encontrada na questão 05 é uma parábola? Por quê?

Resposta:____

____