

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E DE  
COMPUTAÇÃO

**JOSENALDE BARBOSA DE OLIVEIRA**

**ESTABILIDADE E ROBUSTEZ DE UM CONTROLADOR ADAPTATIVO  
INDIRETO POR MODELO DE REFERÊNCIA E ESTRUTURA VARIÁVEL**

NATAL

2007

JOSENALDE BARBOSA DE OLIVEIRA

**ESTABILIDADE E ROBUSTEZ DE UM CONTROLADOR ADAPTATIVO  
INDIRETO POR MODELO DE REFERÊNCIA E ESTRUTURA VARIÁVEL**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (área de concentração: Automação e Sistemas) como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências de Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof<sup>o</sup> Aldayr Dantas de Araújo

NATAL

2007

Divisão de Serviços Técnicos

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede

Oliveira, Josenalde Barbosa de.

Estabilidade e robustez de um controlador adaptativo indireto por modelo de referência e estrutura variável / Josenalde Barbosa de Oliveira. – Natal, RN, 2007.

171 f.

Orientador: Aldayr Dantas de Araújo.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Ciência e Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Controle adaptativo – Tese. 2. Controle por estrutura variável – Tese. 3. Modos deslizantes – Tese. 4. Análise de estabilidade – Tese. 5. Robustez – Tese. I. Araújo, Aldayr Dantas de. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 621.5(043.2)

JOSENALDE BARBOSA DE OLIVEIRA

**ESTABILIDADE E ROBUSTEZ DE UM CONTROLADOR ADAPTATIVO  
INDIRETO POR MODELO DE REFERÊNCIA E ESTRUTURA VARIÁVEL**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (área de concentração: Automação e Sistemas) como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências de Engenharia Elétrica.

Aprovada em: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dsc. Aldayr Dantas de Araújo – UFRN

---

Prof. Dr. David Simonetti Barbalho – UFRN

---

Prof. Dsc. Francisco das Chagas Mota – UFRN

---

Prof. Dsc. José Paulo Vilela Soares da Cunha – UERJ

---

Prof. Dsc. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira – UNESP

Para Ceiça e Noemi,  
bênçãos imensuráveis de Deus em minha vida.

## AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, meu refúgio e fortaleza, em quem tenho crido.

Ao Professor Aldayr Dantas de Araújo, pela primorosa orientação desta Tese, pelo incentivo não apenas ao ingresso na área de controle, mas, que por seu exemplo de dedicação à profissão, tem inspirado minha carreira docente.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (PPgEEC), com os quais aprendi as bases para a construção desta Tese.

À minha esposa Ceiça, companheira na alegria e na tristeza, pelo suporte emocional. Suas declarações de amor compõem o combustível que me move.

À minha filha Noemi, bênção de Deus em minha vida, nascida no desenvolvimento desta Tese. Seu sorriso é o bastante para mim. No futuro, ao folhear estas páginas, saiba que você foi minha motivação para a conclusão deste trabalho.

Ao meu pai José Barbosa de Oliveira e minha mãe Maria Lúcia Barbosa de Oliveira, por acreditarem na educação.

Ao meu irmão Joalde Barbosa de Oliveira e à minha irmã Maria Cecília de Oliveira, pelos muitos momentos de descontração.

Aos meus irmãos em Cristo e amigos Ivan Max Freire de Lacerda e Harim Revorêdo de Macedo, pelo apoio durante meu afastamento da Escola Agrícola de Jundiá, sem o qual a conclusão desta Tese seria exponencialmente dificultada.

Ao meu pastor e amigo Gilberto Alves Pinheiro, da Igreja de Cristo em Cidade Verde, pelas orações e pela compreensão nos momentos em que tive de me ausentar.

Enfim, a todos os colegas que tive o prazer de conviver desde as primeiras aulas do PPgEEC.

Mestre é aquele que não só ensina,  
mas que de repente aprende.  
Guimarães Rosa

# **ESTABILIDADE E ROBUSTEZ DE UM CONTROLADOR ADAPTATIVO INDIRETO POR MODELO DE REFERÊNCIA E ESTRUTURA VARIÁVEL**

## **RESUMO**

Nesta tese é desenvolvida a análise de estabilidade e robustez à dinâmica não modelada e às perturbações externas de um controlador adaptativo por modelo de referência e estrutura variável aplicado a plantas incertas, monovariáveis, lineares e invariantes no tempo com grau relativo unitário. O projeto de tal controlador é baseado na abordagem indireta do controle adaptativo. Na abordagem direta, já amplamente conhecida na literatura, as leis chaveadas são projetadas diretamente para os parâmetros do controlador. Na abordagem indireta, as mesmas são projetadas para os parâmetros da planta e, conseqüentemente, o dimensionamento das amplitudes dos relés torna-se mais intuitivo, tendo em vista estarem associadas a parâmetros físicos, os quais apresentam incertezas que podem ser conhecidas mais facilmente, tais como resistências, capacitâncias, momentos de inércia e coeficientes de atrito. São apresentadas duas versões para o algoritmo do controlador, sendo suas análises de estabilidade desenvolvidas, assim como resultados de simulação sob condições de operação adversas para verificar os resultados teóricos obtidos e ilustrar o desempenho e a robustez do controlador proposto. A estabilidade assintótica global com respeito a um conjunto compacto é garantida em ambos os casos. Adicionalmente, para fins de aplicabilidade prática, são desenvolvidas algumas simplificações no algoritmo original.

**Palavras-chave:** controle adaptativo, controle por estrutura variável, modos deslizantes, análise de estabilidade, robustez.



# **ROBUSTNESS AND STABILITY ANALYSIS OF AN INDIRECT VARIABLE STRUCTURE MODEL REFERENCE ADAPTIVE CONTROLLER**

## **ABSTRACT**

In this thesis, it is developed the robustness and stability analysis of a variable structure model reference adaptive controller considering the presence of disturbances and unmodeled dynamics. The controller is applied to uncertain, monovariate, linear time-invariant plants with relative degree one, and its development is based on the indirect adaptive control. In the direct approach, well known in the literature, the switching laws are designed for the controller parameters. In the indirect one, they are designed for the plant parameters and, thus, the selection of the relays upper bounds becomes more intuitive, whereas they are related to physical parameters, which present uncertainties that can be known easier, such as resistances, capacitances, inertia moments and friction coefficients. Two versions for the controller algorithm with the stability analysis are presented. The global asymptotic stability with respect to a compact set is guaranteed for both cases. Simulation results under adverse operation conditions in order to verify the theoretical results and to show the performance and robustness of the proposed controller are showed. Moreover, for practical purposes, some simplifications on the original algorithm are developed.

**Keywords:** adaptive control, variable structure control, sliding modes, stability analysis, robustness.

## LISTA DE FIGURAS

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| Figura 2.1  | Trajetórias associadas aos conceitos de estabilidade   | 31 |
| Figura 3.1  | Diagrama de blocos para o controle adaptativo direto   | 41 |
| Figura 3.2  | Diagrama de blocos do controlador adaptativo direto por modelo de referência   | 42 |
| Figura 3.3  | Superfície deslizante  | 48 |
| Figura 3.4  | Campo vetorial no modo deslizante (solução de Filippov)  | 51 |
| Figura 4.1  | Diagrama de blocos para o controle adaptativo indireto   | 60 |
| Figura 4.2  | Diagrama de blocos do MRAC indireto  | 61 |
| Figura 5.1  | Caso ideal com $\hat{k}_p(0) = 1$ e $\gamma_p = 0,1$   | 89 |
| Figura 5.2  | Detalhe do comportamento do erro de saída e sinal de controle  | 90 |
| Figura 5.3  | Efeito isolado da adaptação paramétrica em $k_p$   | 90 |
| Figura 5.4  | Influência do ganho adaptativo $\gamma_p$ ( $\gamma_p = 0,1$ ) no rastreamento da saída                                      | 91 |
| Figura 5.5  | Transitório rápido e não oscilatório independente da adaptação em $k_p$ ( $\gamma_p = 1$ )                                   | 92 |
| Figura 5.6  | Obtenção do modo deslizante independente da velocidade de adaptação de $k_p$ ( $\gamma_p = 0,1$ )                            | 92 |
| Figura 5.7  | Ganho adaptativo $\gamma_p = 0,1$ e amplitude do relé $\hat{\alpha}_1$ ( $\bar{\alpha}_1 = 0,5$ ) influenciando convergência | 93 |
| Figura 5.8  | Incremento do ganho adaptativo $\gamma_p$ ( $\gamma_p = 1$ ), possibilitando rastreamento                                    | 93 |
| Figura 5.9  | Efeito da diminuição do parâmetro $\hat{k}_p(0)$ , para $\hat{k}_p(0) = 0,6$ e $\gamma_p = 1$                                | 94 |
| Figura 5.10 | Efeito da diminuição de $\hat{k}_p(0)$ , para $\hat{k}_p(0) = 0,2$   | 95 |
| Figura 5.11 | Rejeição parcial ao distúrbio do tipo degrau ( $d=5$ ) - $\bar{\alpha}_1 = 1,5$  | 96 |
| Figura 5.12 | Rejeição total ao distúrbio do tipo degrau ( $d=5$ ) - $\bar{\alpha}_1 = 5$  | 96 |
| Figura 5.13 | Saturação do sinal de controle na mudança de referência  | 97 |

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| Figura 5.14 | Dinâmica não modelada $\Delta_1$ com $\mu = 0,1$   | 98  |
| Figura 5.15 | Dinâmica não modelada $\Delta_1$ com $\mu = 0,01$  | 99  |
| Figura 5.16 | Dinâmica não modelada $\Delta_1$ com $\mu = 0,005$   | 99  |
| Figura 5.17 | Efeito simultâneo de perturbação introduzida em $t=3s$ ( $d=5$ ) e dinâmica não modelada $\Delta_1$ com $\mu = 0,01$ | 100 |
| Figura 5.18 | Dinâmica não modelada $\Delta_2$ com $\mu = 0,01$  | 101 |
| Figura 5.19 | Dinâmica não modelada $\Delta_2$ com $\mu = 0,005$   | 101 |
| Figura 5.20 | Efeito simultâneo de perturbação introduzida em $t=3s$ ( $d=5$ ) e dinâmica não modelada $\Delta_1$ com $\mu = 0,01$ | 102 |
| Figura 5.21 | Rastreamento do modelo obtido através de saturação   | 104 |
| Figura 5.22 | Perturbação ( $d=3$ ) em $t=3s$ e variação paramétrica introduzida em $t=5s$   | 104 |
| Figura 5.23 | Rejeição total à perturbação ( $d=5$ )   | 105 |
| Figura 5.24 | Dinâmica não modelada $\Delta_2$ com $\mu = 0,01$  | 105 |
| Figura 5.25 | Dinâmica não modelada $\Delta_2$ com $\mu = 0,005$   | 106 |
| Figura 5.26 | Perturbação do tipo degrau ( $d=5$ ) e dinâmica não modelada $\Delta_2$ com $\mu = 0,01$                             | 107 |
| Figura 5.27 | Perturbação do tipo degrau ( $d=5$ ) e dinâmica não modelada $\Delta_2$ com $\mu = 0,005$                            | 107 |
| Figura 6.1  | Caso ideal com $\tau$ variável em $t=5s$   | 121 |
| Figura 6.2  | Rejeição parcial da perturbação ( $d=5$ )  | 122 |
| Figura 6.3  | Variação paramétrica e rejeição total à perturbação com $\bar{k}_p = 0,7$ e $\bar{\alpha}_1 = 3$                     | 123 |
| Figura 6.4  | Efeito da dinâmica parasita $\Delta_1$ com $\mu = 0,01$  | 124 |
| Figura 6.5  | Efeito da dinâmica parasita $\Delta_1$ com $\mu = 0,005$   | 124 |
| Figura 6.6  | Efeito da dinâmica parasita $\Delta_1$ com $\mu = 0,01$ , perturbação e variação paramétrica                         | 125 |
| Figura 6.7  | Efeito da dinâmica parasita $\Delta_2$ com $\mu = 0,01$  | 125 |
| Figura 6.8  | Efeito da dinâmica parasita $\Delta_2$ com $\mu = 0,01$ , perturbação e variação paramétrica                         | 126 |

|             |   |     |
|-------------|---|-----|
| Figura 6.9  | Rastreamento do modelo obtido através de saturação em condições ideais  | 128 |
| Figura 6.10 | Perturbação e variação paramétrica  | 128 |
| Figura 6.11 | Efeito da dinâmica não modelada $\Delta_2$ , perturbação e variação paramétrica   | 129 |
| Figura 6.12 | Desempenho da versão compacta ilustrando a menor amplitude do sinal de controle devido à introdução do controle nominal | 130 |
| Figura 6.13 | Suavização do sobresinal e incremento na rapidez do transitório com $\gamma = 0,6$                                      | 130 |
| Figura 6.14 | Evolução da função de modulação   | 131 |
| Figura 6.15 | Eliminação de sobresinal ao se usar versão a relé com $k_{RL} = 4$  | 131 |
| Figura B.1  | Diagrama de blocos representativo da lei de controle na condição de matching  | 157 |
| Figura B.2  | Diagrama de blocos simplificado representativo da lei de controle na condição de matching                               | 158 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|          |   |
|----------|---|
| AP       | Adaptação Paramétrica   |
| APPC     | Adaptive Pole Placement Control (Controle Adaptativo por Alocação de Pólos)   |
| B-MRAC   | Binary Model Reference Adaptive Control   |
| ERP      | Estritamente Real Positivo  |
| FKYL     | Feedback Kalman-Yakubovich Lemma (Lema de Kalman-Yakubovich por Realimentação)  |
| FP       | Fator de Projeção   |
| FPGA     | Field Programmable Gate Array   |
| HMP      | Hyper Minimum Phase (Fase Hiper-Mínima)   |
| HOSM     | Higher Order Sliding Modes (Modos Deslizantes de Ordem Mais Elevada)  |
| IMRAC    | Implicit Model Reference Adaptive Control (Controle Implícito por Modelo de Referência)   |
| IVS-MRAC | Indirect Variable Structure Model Reference Adaptive Control (Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável) |
| LTl      | Linear Time Invariant (Linear Invariante no Tempo)  |
| MIMO     | Multiple Input / Multiple Output (Múltiplas Entradas / Múltiplas Saídas)  |
| MRAC     | Model Reference Adaptive Control (Controle Adaptativo por Modelo de Referência)   |
| PE       | Persistentemente Excitante  |
| PPC      | Pole Placement Control (Controle por Alocação de Pólos)   |
| RED      | Robust Exact Differentiator (Diferenciador Exato Robusto)   |
| SISO     | Single Input / Single Output (Uma Entrada / Uma Saída)  |
| SMC      | Sliding Mode Control (Controle por Modos Deslizantes)   |
| SVF      | Stable Variable Filters (Filtros de Entrada/Saída)  |
| VS-APPC  | Variable Structure Adaptive Pole Placement Control (Controle Adaptativo por Alocação de Pólos e Estrutura Variável)                       |
| VSC      | Variable Structure Control (Controle por Estrutura Variável)  |
| VS-MRAC  | Variable Structure Model Reference Adaptive Control (Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável)                   |
| VSS      | Variable Structure Systems (Sistemas com Estrutura Variável)  |

## SUMÁRIO

|                   |  |           |
|-------------------|--|-----------|
| <b>Capítulo 1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>17</b> |
| <b>Capítulo 2</b> | <b>Fundamentos de Estabilidade e Robustez</b>  | <b>28</b> |
| 2.1               | Introdução   | 28        |
| 2.2               | Fundamentos da Teoria de Estabilidade de Lyapunov  | 29        |
| 2.2.1             | Pontos de Equilíbrio   | 29        |
| 2.2.2             | Conceitos de Estabilidade  | 30        |
| 2.2.2.1           | Estabilidade e Instabilidade   | 30        |
| 2.2.2.2           | Estabilidade Assintótica e Estabilidade Exponencial  | 32        |
| 2.2.2.3           | Estabilidade Local e Global  | 33        |
| 2.2.3             | Método Direto de Lyapunov  | 33        |
| 2.2.3.1           | Funções Definidas Positivas e Funções de Lyapunov  | 34        |
| 2.2.3.2           | Teoremas de Estabilidade   | 35        |
| 2.3               | Perturbações Singulares  | 35        |
| <b>Capítulo 3</b> | <b>Controle Adaptativo Direto por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC Direto)</b> | <b>40</b> |
| 3.1               | Introdução   | 40        |
| 3.2               | Controle Adaptativo Direto por Modelo de Referência (MRAC Direto)                                | 40        |
| 3.2.1             | Parametrização e Hipóteses   | 43        |
| 3.2.2             | Equação do Erro  | 44        |
| 3.2.3             | Lei de Adaptação para o Vetor de Parâmetros do Controlador                                       | 46        |
| 3.3               | Sistemas com Estrutura Variável  | 47        |
| 3.3.1             | Equações Diferenciais Descontínuas   | 49        |
| 3.3.2             | Controle Equivalente Estendido   | 53        |
| 3.4               | Controle Adaptativo Direto por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC Direto)        | 53        |
| 3.4.1             | VS-MRAC Direto Compacto  | 56        |
| 3.4.2             | Estabilidade e Robustez do VS-MRAC Direto  | 57        |
| 3.5               | Conclusões   | 58        |

|                   |   |            |
|-------------------|---|------------|
| <b>Capítulo 4</b> | <b>Fundamentação e Desenvolvimento do VS-MRAC Indireto (IVS-MRAC)</b> | <b>59</b>  |
| 4.1               | Introdução  | 59         |
| 4.2               | Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência (MRAC Indireto) | 59         |
| 4.2.1             | Parametrização e Hipóteses  | 61         |
| 4.2.2             | Equação do Erro   | 63         |
| 4.2.3             | Lei de Adaptação para o Vetor de Parâmetros da Planta                 | 65         |
| 4.3               | Projeto do VS-MRAC Indireto   | 65         |
| 4.4               | Comentários sobre o VS-MRAC Indireto                                  | 67         |
| 4.4.1             | Eliminação da Descontinuidade Aninhada                                | 69         |
| 4.4.2             | Laço Algébrico e Filtro de Média                                      | 70         |
| 4.5               | Conclusões  | 71         |
| <br>              |   |            |
| <b>Capítulo 5</b> | <b>VS-MRAC Indireto Combinado</b>                                     | <b>72</b>  |
| 5.1               | Introdução  | 72         |
| 5.2               | VS-MRAC Indireto com Lei em Modo Dual para $k_p$                      | 74         |
| 5.3               | Análise de Estabilidade   | 76         |
| 5.3.1             | Preliminares  | 76         |
| 5.3.2             | Propriedades de Estabilidade  | 79         |
| 5.3.3             | Considerações sobre o Teorema 5.2                                     | 86         |
| 5.4               | Simulações  | 87         |
| 5.4.1             | Sistema de 1ª Ordem   | 88         |
| 5.4.2             | Sistema de 2ª Ordem   | 102        |
| 5.5               | Conclusões  | 108        |
| <br>              |   |            |
| <b>Capítulo 6</b> | <b>VS-MRAC Indireto</b>   | <b>110</b> |
| 6.1               | Introdução  | 110        |
| 6.2               | VS-MRAC Indireto  | 111        |
| 6.3               | Análise de Estabilidade   | 112        |
| 6.3.1             | Considerações sobre o Teorema 6.1                                     | 116        |
| 6.4               | Simplificações  | 117        |
| 6.5               | Simulações  | 120        |

|                    |   |            |
|--------------------|---|------------|
| 6.5.1              | Sistema de 1ª Ordem   | 120        |
| 6.5.2              | Sistema de 2ª Ordem   | 126        |
| 6.6                | Conclusões  | 132        |
| <b>Capítulo 7</b>  | <b>Conclusões e Perspectivas</b>  | <b>133</b> |
| <b>Referências</b> |   | <b>137</b> |
| <b>Apêndice A</b>  | <b>Conceitos de Base</b>  | <b>145</b> |
| A.1                | Sistemas Não Lineares   | 145        |
| A.2                | Sistemas Autônomos e Não-Autônomos                                      | 146        |
| A.3                | Normas  | 147        |
| A.3.1              | Propriedades de Normas de Vetores                                       | 147        |
| A.3.2              | Propriedades de Normas de Matrizes                                      | 147        |
| A.4                | Sinais Regulares  | 148        |
| A.5                | Teoria de Conjuntos   | 148        |
| A.6                | Existência e Unicidade de Soluções                                      | 149        |
| A.7                | Matrizes e Formas Quadráticas   | 151        |
| A.7.1              | Desigualdade de Rayleigh  | 152        |
| A.8                | Funções de Transferência Reais Positivas e Estritamente Reais Positivas | 152        |
| A.9                | Lema de Kalman-Yakubovich   | 154        |
| A.10               | Equação Diofantina  | 154        |
| A.11               | Propriedades Assintóticas de Funções e suas Derivadas                   | 155        |
| A.12               | Lema de Barbalat  | 155        |
| <b>Apêndice B</b>  | <b>Parâmetros do Controlador na Condição de Matching</b>                | <b>157</b> |
| <b>Apêndice C</b>  | <b>Produção Científica Relacionada</b>                                  | <b>161</b> |
| <b>Apêndice D</b>  | <b>Algoritmos para Simulação</b>  | <b>163</b> |
| D.1                | IVS-MRAC Combinado  | 163        |
| D.2                | IVS-MRAC  | 165        |



|     |                   |     |
|-----|-------------------|-----|
| D.3 | IVS-MRAC Compacto | 166 |
| D.4 | IVS-MRAC a Relé   | 169 |

# Capítulo 1

## Introdução

O objetivo de um sistema de controle consiste em aplicar sinais adequados na entrada de controle a fim de fazer com que o sinal de saída apresente um comportamento pré-especificado, e que o efeito da ação de perturbações sobre este comportamento seja minimizado ou mesmo completamente eliminado. O problema de controle consiste então em determinar, a partir do comportamento desejado para a saída e do conhecimento do processo, os sinais adequados a serem aplicados na entrada de controle (BAZANELLA; SILVA JR. J., 2005, p. 14).

À medida que a teoria de controle passou a tratar problemas com grandes incertezas, a estratégia natural foi incorporar características de sistemas biológicos aos controladores, por lidarem facilmente e eficientemente com mudanças ambientais. Assim, termos como adaptação, aprendizagem, reconhecimento de padrões e auto-organização, foram introduzidos na literatura de controle. Entre tais termos, o controle adaptativo inaugurou essa linha de pesquisa, tendo surgido no final dos anos 50 para lidar com incertezas paramétricas. As plantas consideradas em controle adaptativo são, em geral, descritas por modelos matemáticos com parâmetros desconhecidos ou com incertezas, ou seja, com limitantes conhecidos. O controlador adaptativo é projetado para que algumas especificações de desempenho sejam atendidas e consiste, em uma de suas formas mais usuais, de uma estrutura de controle parametrizada e um mecanismo de aprendizagem ou adaptação.

Na atualidade, os problemas de controle envolvem uma variedade de novos desafios cuja solução deve satisfazer simultaneamente especificações de confiabilidade, desempenho, funcionalidade e capacidade de se acomodar rapidamente às mudanças das condições e/ou ambiente de operação. Além disso, os dados para a elaboração do projeto podem não ser totalmente disponíveis, como por exemplo, a planta pode ser caracterizada por uma dinâmica que não é estacionária nem completamente conhecida, o que implica na necessidade de se fazer a identificação dos seus parâmetros (AGUIRRE, 2007). Uma das soluções encontradas para problemas desta natureza são os sistemas de controle adaptativos. Embora, inicialmente, a viabilidade de tais controladores tenha sido limitada pelos entraves tecnológicos, os avanços teóricos acerca da estabilidade e as possibilidades abertas pela implementação de algoritmos com maior grau de complexidade em microprocessadores ou microcontroladores (ASTRÖM; WITTENMARK, 1997; CAVALCANTI, 2004), caracterizados pelo baixo custo e

confiabilidade, têm provocado um intenso desenvolvimento na pesquisa teórica e aplicada desta área.

Os algoritmos originais da teoria de controle adaptativo (NARENDRA; VALAVANI, 1978; NARENDRA; LIN; VALAVANI, 1980) mostraram-se não robustos, ou seja, poderiam levar a uma instabilização efetiva quando as hipóteses ideais eram violadas (ROHRS et al., 1985). Tal violação está relacionada à presença de perturbações externas, variações paramétricas, não linearidades e dinâmicas não modeladas, comuns em sistemas reais. Desde então, tem-se buscado controladores capazes de assegurar a estabilidade do sistema, ou seja, garantir que todos os sinais do sistema permaneçam limitados, independentemente da presença de incertezas não levadas em conta no projeto. Esta busca gerou a linha de pesquisa denominada *controle adaptativo robusto*. Duas abordagens distintas foram desenvolvidas concernentes à robustez. Uma usando sinais de entrada adequados, notoriamente, sinais de referência. Outra através de modificações na lei de adaptação. Baseados em trabalhos preliminares de Peterson e Narendra (1982) e Kreisselmeier e Narendra (1982), Narendra e Annaswamy (1987, 1989) e Sastry e Bodson (1989) abordaram a questão do sinal Persistentemente Excitante (PE) e definiram alguns critérios para sua obtenção. Todavia, a introdução de sinais PE artificiais na malha de controle é geralmente indesejável para o objetivo de controle e, assim, possui algumas limitações do ponto de vista prático (DE LARMINAT, 1986), tendo em vista que em muitas aplicações o sinal de referência é definido pelo sistema, como por exemplo, no controle de rastreamento de trajetórias. Esse fato, inclusive, motivou o desenvolvimento de algoritmos que não necessitassem de sinais PE para a convergência exponencial do erro de rastreamento (BAYARD; SPANOS; RAHMAN, 1995). As modificações na lei de adaptação tornaram-se, assim, o foco da pesquisa. Ioannou e Kokotovic (1984) propuseram um fator- $\sigma$  no algoritmo de adaptação para remover a ação puramente integral do algoritmo original e demonstraram que, com esta modificação (chamada modificação- $\sigma$ ), assegura-se a existência de um domínio de estabilidade local para o sistema, o qual depende da *rapidez* da dinâmica não modelada. Posteriormente, Hsu e Costa (1987a) identificaram e demonstraram através de simulações que a utilização de um fator- $\sigma$  na lei de adaptação poderia gerar, no caso de regulação adaptativa de plantas instáveis, um fenômeno denominado *bursting*, isto é, oscilações intermitentes intercaladas por longos períodos de comportamento aparentemente estável. Assumindo que os parâmetros a serem adaptados ficam confinados a um conjunto compacto conhecido, métodos de projeção, limitação paramétrica e normalização foram propostos por Goodwin e Mayne (1989) para

evitar o crescimento ilimitado dos parâmetros e evitar o *bursting*. A utilização de um fator- $\sigma$  descontínuo foi explorada por Ioannou e Tsakalis (1986) e Hsu e Costa (1987b).

Embora a melhoria do comportamento transitório de tais controladores tenha evoluído ao longo do tempo, em algumas aplicações os resultados obtidos por sistemas puramente adaptativos podem não ser satisfatórios, devido às oscilações dependentes das condições iniciais, ao sobresinal característico e à lenta convergência, notadamente quando se usa algum tipo de normalização. O projeto de controladores adaptativos que fornecessem um transitório rápido tornou-se, assim, de grande interesse.

Todas as estratégias de controle mencionadas acima têm suas raízes no princípio básico do controle adaptativo, denominado *princípio de equivalência à certeza* (BARSHALOM; TSE, 1984). O mesmo supõe que se as estimativas dos parâmetros convergem para os valores verdadeiros, o desempenho do controlador adaptativo tende ao obtido no caso em que os parâmetros são conhecidos, derivando assim o conceito de Adaptação Paramétrica (AP), onde é realizado algum tipo de identificação de parâmetros na qual a lei de controle se baseia, seja direta ou indiretamente. No primeiro método, denominado controle adaptativo direto, o modelo da planta é parametrizado em função dos parâmetros do controlador, os quais são ajustados diretamente, sem cálculos intermediários envolvendo estimativas de parâmetros da planta. No segundo método, denominado controle adaptativo indireto, os parâmetros da planta são estimados e então utilizados para calcular os parâmetros do controlador. Uma alternativa à AP é a adaptação por *síntese de sinal* (HSU; COSTA, 1989; HSU; ARAÚJO; COSTA, 1994; HSU; COSTA; LIZARRALDE, 1993; LANDAU, 1979), em que o sinal de controle a ser aplicado na planta é gerado a partir de um mecanismo de chaveamento paramétrico, não havendo AP explícita. Neste sentido, o Controle por Estrutura Variável (*Variable Structure Control - VSC*) pode ser usado para gerar tal sinal de controle (UTKIN, 1978, 1992). Em contraste à maioria dos controladores adaptativos, este tipo de controlador determinístico emprega funções de controle não lineares (ZINOBER, 1993). A teoria de Sistemas com Estrutura Variável (*Variable Structure Systems - VSS*) tem sido bastante utilizada no tratamento de problemas de sistemas de controle com grandes incertezas, principalmente na forma conhecida como Controle por Modos Deslizantes (*Sliding Mode Control - SMC*). Neste método, as funções de chaveamento das variáveis de controle devem ser projetadas de modo a restringir a dinâmica do sistema a uma superfície denominada *superfície deslizante*.

Os VSS têm como principais características a rapidez do transitório e robustez às variações paramétricas e perturbações, dentro de uma faixa de tolerância estipulada no projeto. Esta teoria teve origem no estudo dos controladores à relé e baseia-se no chaveamento das variáveis de controle dentro de um conjunto de funções das variáveis de estado da planta de acordo com uma dada regra, o que impõe para este método o conhecimento de todas as variáveis de estado do sistema. A medição do estado do sistema nem sempre é viável devido a aspectos técnicos ou econômicos como, por exemplo, a impossibilidade de instalação ou de construção de alguns sensores e o custo de sistemas de comunicação entre os mesmos e o controlador. Mesmo que todo o estado fosse disponível, as medidas seriam tipicamente corrompidas por ruído. O uso de observadores de estado para contornar esta necessidade foi apresentado pelo artigo pioneiro de Bondarev et al. (1985), mas os resultados obtidos exigem um bom conhecimento do modelo da planta, bem como da perturbação atuando na mesma, o que pode dificultar sua aplicação direta dentro do enfoque de controle adaptativo. Várias soluções utilizando observadores por modos deslizantes têm sido propostas para sistemas incertos, considerando ser possível estimar os estados sob certas condições, como, por exemplo, os trabalhos de Slotine, Hedrick e Misawa (1987), Utkin (1992) e Mokhtari, Benallegue e Orlov (2006). Observadores por modos deslizantes têm sido objeto de intensa pesquisa, notadamente, por sua robustez, estabilidade numérica e insensibilidade às variações paramétricas. O trabalho inicial de Walcott e Zak (1988) levantou questionamentos sobre a justificação teórica para o uso de funções descontínuas compostas, chamadas de *descontinuidades aninhadas* (HSU; COSTA; LIZARRALDE, 1993), as quais são comuns ao se associar controlador e observador por estrutura variável (MOKHTARI; BENALLEGUE; ORLOV, 2006). Em Wang e Gao (2003), é apresentada uma justificativa para a introdução de filtros passa-baixa no argumento da função de chaveamento interna, que é baseada no conceito de controle equivalente (UTKIN, 1992). Outros trabalhos evitam este tipo de descontinuidade, por não ser contemplada pela teoria de Phillipov (1964), e utilizam funções descontínuas ponderadas (ALESSANDRI, 2000; NUNES; HSU; LIZARRALDE, 2004). Neste trabalho, são abordadas estratégias baseadas na realimentação de saída, tendo em vista que a entrada é sempre disponível e conhecida, e a análise é restrita ao Controle Adaptativo por Modelo de Referência (*Model Reference Adaptive Control - MRAC*) (IOANNOU; SUN, 1996), que consiste numa das principais abordagens de projeto de sistemas de controle adaptativo. No MRAC, a função do modelo de referência é especificar o comportamento desejado para a planta em malha fechada, de modo a obter-se a condição de

casamento (*matching*). Esta condição é alcançada através da realimentação, que altera apenas os pólos da planta, e pelo cancelamento e conseqüente substituição dos zeros da planta pelos zeros do modelo de referência. O erro de rastreamento, o qual é definido como o erro entre as saídas do modelo de referência e da planta, é utilizado pelo algoritmo de adaptação para ajustar diretamente os parâmetros do controlador (no caso direto) ou os parâmetros estimados da planta (no caso indireto). Portanto, o objetivo de controle consiste em tornar este erro nulo ou, pelo menos, que o mesmo se torne pequeno em algum sentido. Uma outra abordagem para o MRAC, comum na literatura russa, pode ser encontrada em Andrievsky e Fradkov (1994), onde os mesmos propõem simplificar o projeto de controladores adaptativos, principalmente no caso de Múltiplas Entradas/Múltiplas Saídas (*Multiple Input/Multiple Output* - MIMO) e em sistemas de ordem elevada. A idéia é não mais basear o projeto em uma condição de *matching*, mas em um Modelo de Referência Implícito (*Implicit Model Reference Adaptive Control* - IMRAC), denominado equação de referência ou equação característica, estando relacionado ao Controle por Posicionamento de Pólos (*Pole Placement Control* - PPC). Este tipo de controlador fundamenta-se no Lema de Kalman-Yakubovich por Realimentação (*Feedback Kalman-Yakubovich Lemma* - FKYL) (ANDRIEVSKY; CHURILOV; FRADKOV, 1996) e é mais geral que o MRAC, por ser aplicável a plantas de fase não-mínima, exigindo, contudo, menos em termos de desempenho. Uma proposta de Controlador Adaptativo por Posicionamento de Pólos e Estrutura Variável (*Variable Structure Adaptive Pole Placement Control* - VS-APPC) foi apresentada em Silva Jr. F., Araújo e Oliveira (2004a, 2004b).

A partir de idéias iniciais de Ambrosino, Celentano e Garofalo (1984) de associar sistemas adaptativos (NARENDRA; VALAVANI, 1978) e VSS (UTKIN, 1978), Hsu e Costa (1989) propuseram um Controlador Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável (*Variable Structure Model Reference Adaptive Control* - VS-MRAC) para o caso grau relativo unitário, baseado em um mecanismo de chaveamento paramétrico, o qual mostrou ser globalmente assintoticamente estável. A generalização para grau relativo arbitrário foi apresentada em Hsu (1990). Os resultados obtidos apresentaram propriedades vantajosas em relação ao comportamento transitório e em regime permanente, particularmente na presença de distúrbios limitados. Também demonstrou notável insensibilidade em relação às incertezas da planta, inclusive não-linearidades e dinâmica não modelada (COSTA; HSU, 1992). Nesta linha, Wu, Fu e Hsu (1992) propuseram um controlador semelhante ao VS-MRAC, porém com o chaveamento diretamente no canal de controle e com uma lei de

adaptação do tipo gradiente com modificação- $\sigma$  para os parâmetros do controlador, com o objetivo de reduzir a magnitude do sinal de controle. A rapidez do transitório obtido pelo VS-MRAC se mostrou superior a este, por não incluir adaptação paramétrica explícita. Desde Hsu e Costa (1989), vários desenvolvimentos têm sido realizados e o VS-MRAC já foi aplicado a sistemas lineares e não-lineares de Uma Entrada/Uma Saída (*Single Input/Single Output - SISO*) (HSU; ARAÚJO; COSTA, 1994; MIN; HSU, 2000), bem como a sistemas lineares e não-lineares MIMO (CUNHA, J. et al., 2003; HSU et al., 2002; HSU; CUNHA, J.; COSTA, 2003).

Uma questão fundamental do VSS que ocupou os pesquisadores desde o trabalho de Utkin (1978) foi a possível ocorrência do fenômeno denominado *chattering*, onde pequenos atrasos ou dinâmicas não modeladas na planta poderiam gerar o modo deslizante real e não o modo deslizante ideal. No modo deslizante ideal, o estado do sistema permanece na superfície deslizante enquanto o sinal de controle tem frequência infinita. No modo deslizante real, as variáveis de controle chaveiam em uma frequência finita. Se a frequência de chaveamento não for suficientemente grande, o desempenho do sistema é degradado por erros não desprezíveis na saída da planta e podem ocorrer perdas indesejáveis de potência em circuitos elétricos ou desgaste em partes mecânicas, como engrenagens. Nesse sentido, foram introduzidas regiões lineares nas funções de chaveamento para suavizar o sinal de controle (SLOTINE; LI, 1991), onde o erro de saída depende do tamanho de tais regiões lineares. Hsu (1997) propôs um controlador suave por estrutura variável baseado em um erro de predição, de modo a preservar o modo deslizante “ideal”. Evidentemente, na prática, uma frequência infinita não pode ser obtida e o termo *ideal* é utilizado quando a frequência de chaveamento é muito maior que a largura de banda da planta. Neste algoritmo, o sinal de controle aplicado à planta é filtrado por um filtro de valor médio com constante de tempo adequada. Tal filtragem é interpretada como uma dinâmica não modelada e, conseqüentemente, a análise de estabilidade considera este fato. O VS-MRAC suave foi posteriormente aplicado a um sistema robótico por Peixoto, Lizarralde e Hsu (2001). O problema foi revisitado por Peixoto et al. (2002), desta vez utilizando um filtro de Kalman para superar ruídos de medição. Ainda referente ao *chattering*, alguns conceitos pesquisados e considerados promissores são o conceito de Ordem Deslizante (LEVANT, 1993) e o de Modos Deslizantes de Ordem Mais Elevada (*Higher Order Sliding Modes - HOSM*) (LEVANT, 2001, 2003). Esta técnica permite obter eliminação total do *chattering* para sistemas de grau relativo arbitrário, através da generalização do conceito de modo deslizante (BARTOLINI; FERRARA; USAI, 1998; BARTOLINI; PUNTA, 2000). No

contexto de realimentação de saída, os HOSM também podem ser obtidos através do Diferenciador Exato Robusto (*Robust Exact Differentiator* - RED) (LEVANT, 1998, 2005). Neste sentido, Nunes, Hsu e Lizarralde (2004) apresentaram uma proposta de obter um VS-MRAC para o caso de grau relativo dois associado a um RED, de modo a garantir o rastreamento assintótico exato do modelo de referência e estabilidade global, tendo em vista que em Hsu, Lizarralde e Araújo (1997) o erro de rastreamento se torna arbitrariamente pequeno, mas não necessariamente nulo.

A crescente demanda por aplicações do VS-MRAC, tornaram natural o estudo de simplificações no algoritmo, bem como de alternativas à redução da amplitude do sinal de controle. Hsu, Araújo e Costa (1994) propuseram uma versão do VS-MRAC que utilizava apenas o número de relés correspondente ao grau relativo da planta, denominado VS-MRAC Compacto. Uma versão mais simples que garantia apenas estabilidade local também foi proposta neste trabalho e foi denominada VS-MRAC à Relé. Neste trabalho também foram analisados os efeitos da introdução de regiões lineares e dos filtros de valor médio, utilizados para implementar os controles equivalentes (UTKIN, 1978). Esses novos algoritmos foram aplicados com sucesso, notoriamente em problemas industriais (FURTUNATO et al., 2001). O VS-MRAC baseia-se na abordagem direta do controle adaptativo, onde as leis chaveadas são projetadas para os parâmetros do controlador. À medida que a ordem do sistema aumenta, o projeto do controlador pode se tornar árduo, no que diz respeito ao dimensionamento dos limitantes superiores para os parâmetros do controlador, os quais são usados nas leis chaveadas do VS-MRAC.

Controladores que possibilitem não apenas algoritmos e técnicas de implementação simplificados, mas também que forneçam métodos intuitivos de projeto, são de interesse prático relevante. Considerando este fato e também que os modelos de plantas considerados em sistemas adaptativos possuem incertezas em relação ao modelo ótimo da planta real (HSU; COSTA; LIZARRALDE, 1993), e que as expressões na condição de *matching* para os parâmetros do controlador (IOANNOU; SUN, 1996) dependem dos parâmetros incertos da planta, uma estratégia natural seria utilizar os próprios parâmetros da planta como as amplitudes dos relés e projetar leis chaveadas para os mesmos e não mais para os parâmetros do controlador. Desse modo, Oliveira e Araújo (2002) e Oliveira (2003), com base na abordagem indireta do controle adaptativo, propuseram o projeto do VS-MRAC sob um outro ponto de vista, para o caso de grau relativo unitário. O mesmo foi denominado VS-MRAC



Indireto (*Indirect Variable Structure Model Reference Adaptive Control* - IVS-MRAC). Vale salientar que a abordagem indireta está normalmente associada ao Controle Adaptativo por Posicionamento de Pólos (*Adaptive Pole Placement Control* - APPC) (SILVA JR. F.; ARAÚJO; OLIVEIRA, 2004a, 2004b). Da mesma forma que no VS-MRAC tradicional, simulações sugeriram um transitório rápido e robustez a distúrbios externos atuando na entrada da planta. Posteriormente, resultados experimentais em um motor de indução trifásico (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2003, 2004), além de sua viabilidade, sugeriram sua robustez à dinâmica não modelada. A robustez do VS-MRAC tradicional a distúrbios externos e à dinâmica não modelada foi demonstrada em (COSTA; HSU, 1992), utilizando uma abordagem por perturbação singular (KOKOTOVIC; KHALIL, 1986).

Semelhantemente à abordagem direta do VS-MRAC, em que podem ser encontradas na literatura outras técnicas que associam adaptação paramétrica, modelo de referência e estrutura variável, assim também ocorre com o IVS-MRAC. Em ambos os casos, os algoritmos combinados diferem essencialmente no fato de incluir um termo descontínuo na lei de controle e utilizar identificação paramétrica por leis integrais, como em (FU, 1991; WU; FU; HSU, 1992), que ajustam os parâmetros do controlador (direto) por uma lei do tipo gradiente com modificação- $\sigma$  (IOANNOU; KOKOTOVIC, 1984) e em (ANDRIEVSKY; FRADKOV; STOTSKY, 1996; STOTSKY, 1994) que ajustam os parâmetros da planta (indireto) pelo algoritmo dos mínimos quadrados. Este último, particularmente, garante o rastreamento do modelo de referência sob uma condição de excitação persistente, sabidamente indesejável ou até mesmo não possível de ser obtida em certas aplicações (ANDRIEVSKY; FRADKOV, 2002, 2003). Adicionalmente, a rapidez e qualidade do transitório do IVS-MRAC, livre de oscilações e sobresinal, são notoriamente superiores. Contudo, é digno de nota a contribuição que Andrievsky, Fradkov e Stotsky (1996) fornecem ao utilizar o modelo de referência implícito e estender a classe de sistemas às plantas de fase não-mínima de grau relativo arbitrário, através da introdução de um compensador paralelo, que torna o sistema aumentado (planta+compensador) de Fase Hiper-Mínima (*Hyper Minimum Phase* - HMP) (ANDRIEVSKY; CHURILOV; FRADKOV, 1996), ou seja, com todos os zeros no semiplano esquerdo e com grau relativo unitário. Portanto, consiste em uma abordagem interessante para a futura generalização do IVS-MRAC.

As leis chaveadas do IVS-MRAC são derivadas das leis tradicionais de adaptação para os parâmetros da planta do MRAC indireto (IOANNOU; SUN, 1996), e levam a um dimensionamento mais intuitivo para as amplitudes dos relés, uma vez que estão relacionadas aos parâmetros da planta, os quais possuem incertezas mais facilmente conhecidas que no caso direto, visto que estão associados a parâmetros físicos do sistema, como coeficientes de atrito, resistências, capacitâncias, momentos de inércia etc. Em Oliveira (2003), uma análise de estabilidade preliminar foi apresentada, considerando o caso ideal (sem perturbações e/ou dinâmica não modelada) e a disponibilidade de alguns sinais necessários à prova. Nesta análise, a lei chaveada para o ganho de alta frequência da planta -  $k_p$  - apresentava duas características peculiares: uma *descontinuidade aninhada inerente*, não definida no escopo da Teoria de Fillipov (1964) e um *laço algébrico* (ROHMAN; MIDDLETON, 2002). Embora tais peculiaridades pudessem ser superadas através de filtragens apropriadas, optou-se, inicialmente, por não tratar diretamente estas questões e substituir a lei chaveada para  $k_p$  por uma lei integral do tipo gradiente (NARENDRA; VALAVANI, 1978), o que foi denominado *modificação- $k_p$*  e a análise de estabilidade do IVS-MRAC para o caso de grau relativo unitário na presença de distúrbios na entrada da planta foi apresentada em Oliveira e Araújo (2007a). Embora, em um primeiro momento, a lei de adaptação puramente integral esteja associada a problemas clássicos de falta de robustez (ROHRS et al., 1985), seu uso restrito a um parâmetro da planta, embora esse seja fundamental, em associação às leis chaveadas dos parâmetros restantes, não alterou as propriedades de estabilidade e robustez do sistema geral e o sistema mostrou ser globalmente estável com respeito a um conjunto residual dependente do próprio distúrbio e do erro de adaptação em  $k_p$ . O transitório do sistema é influenciado apenas quando a parcela do sinal de controle associada às leis chaveadas é insuficiente para a obtenção do modo deslizante, contribuindo, assim, a parcela adaptativa para o rastreamento do modelo de referência. Considerando que as amplitudes dos relés satisfazem uma condição suficiente para que a superfície deslizante seja alcançada em tempo finito, pode-se afirmar que o algoritmo combinado mantém a propriedade de rapidez no transitório, característica de sistemas puramente baseados em leis chaveadas. Esta idéia baseou-se no fato de que estratégias de controle que associam adaptação paramétrica e algum mecanismo de chaveamento paramétrico são comuns na literatura (FU, 1991; SANE et al., 2002), porém sob um enfoque diferente, ou seja, é comum o processo de identificação contemplar todos os parâmetros em questão, sejam do controlador, sejam da planta, o que não ocorre em Oliveira e Araújo (2007a, 2007c), onde se tem identificação em apenas um parâmetro do sistema.

Este trabalho estende e formaliza os resultados preliminares de Oliveira e Araújo (2002, 2003, 2004), com o intuito de motivar o desenvolvimento teórico futuro do IVS-MRAC a outras classes de sistemas. Devido à sua considerável simplicidade de projeto, associada à etapa fundamental de dimensionamento das amplitudes dos relés, são apresentadas duas novas versões para o IVS-MRAC com suas respectivas análises de estabilidade na presença de distúrbios limitados atuantes na entrada da planta e dinâmica não modelada. São consideradas plantas SISO, Lineares e Invariantes no Tempo (LTI) e com grau relativo unitário. A primeira idéia consiste em substituir a lei de adaptação puramente integral para  $k_p$  (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2007a) por uma lei de adaptação em modo dual adaptativa/robusta (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2007c), conforme Hsu e Costa (1994), denominado Controle Adaptativo por Modelo de Referência Binário (B-MRAC), baseada na teoria de controle binário (EMELYANOV, 1987). A idéia do controlador em modo dual é associar as propriedades de rapidez no transitório dos sistemas à estrutura variável com as características de suavidade do sinal de controle dos sistemas adaptativos em regime permanente. Hsu e Costa (1990) mostraram que o B-MRAC era, na verdade, uma lei adaptativa do tipo gradiente com alto ganho e projeção. Garantiram, ainda, estabilidade exponencial global com relação a um domínio residual arbitrariamente pequeno, na presença de distúrbios, variações paramétricas e dinâmica não modelada. Outras alternativas de controle em modo dual utilizam, inclusive, lógica nebulosa para ajuste do parâmetro que alterna entre estrutura variável-adaptação paramétrica e vem sendo amplamente utilizadas em aplicações práticas (CUNHA, C. et al., 2005; CUNHA, C.; ARAÚJO; MOTA, 2007). Em Hsu e Real (1997, 1999), o B-MRAC foi estendido para uma classe de plantas não-lineares e uma rede neural Gaussiana é utilizada para compensar a não-linearidade da planta. O aprendizado desta rede é baseado em uma combinação de adaptação paramétrica e estrutura variável.

Outra contribuição deste trabalho é apresentar uma versão do IVS-MRAC com todas as leis chaveadas, ou seja, baseado somente em síntese de sinal, de modo a obter um algoritmo estruturalmente equivalente ao caso direto (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2007b). Tal desenvolvimento considera uma manipulação algébrica no algoritmo original que elimina a descontinuidade aninhada e utiliza um filtro de valor médio para tratar o laço algébrico. A introdução deste filtro é interpretada como uma dinâmica não modelada (HSU, 1997) e

desenvolve-se a análise de estabilidade por um método de perturbação singular, como em (COSTA; HSU, 1992).

Adicionalmente, são apresentadas simplificações no IVS-MRAC original (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2007d), as quais, além de fornecerem uma menor complexidade ao algoritmo, possibilitam a redução da amplitude do sinal de controle, bem como do número de relés. Essas simplificações são particularmente interessantes e necessárias do ponto de vista de implementações embarcadas, como as realizadas em microcontroladores (CAVALCANTI, 2004).

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

- O capítulo 2 revisa alguns fundamentos de estabilidade e robustez;
- O capítulo 3 constitui uma revisão bibliográfica dos principais aspectos relacionados com o VS-MRAC direto para o caso de grau relativo unitário;
- O capítulo 4 apresenta a motivação e projeto do IVS-MRAC. Partindo das leis chaveadas originalmente propostas, sugere o desenvolvimento de duas versões do controlador, uma que usa uma lei B-MRAC para o ganho de alta frequência da planta e outra que se baseia totalmente em síntese de sinal;
- O capítulo 5 trata do algoritmo IVS-MRAC combinado, ou seja, que utiliza leis à estrutura variável e lei de adaptação paramétrica integral. A análise de estabilidade é desenvolvida e simulações sugerem a veracidade dos resultados obtidos;
- O capítulo 6 se detém em reformular o algoritmo original, eliminando a descontinuidade aninhada e o laço algébrico na lei chaveada para  $k_p$ . A análise de estabilidade é desenvolvida e simulações contemplam alguns aspectos relevantes. Adicionalmente, apresenta simplificações no algoritmo original, derivando a versão compacta e a versão à relé do IVS-MRAC;
- O capítulo 7 apresenta conclusões gerais e perspectivas de trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Fundamentos de Estabilidade e Robustez

### 2.1 Introdução

As características consideradas mais importantes de um sistema de controle são *estabilidade e robustez*. Estabilidade significa manter uma planta sob controle, a despeito da ocorrência de perturbações, enquanto que a robustez está associada à sensibilidade a efeitos que não são considerados no projeto, tais como variações paramétricas, ruídos de medição, dinâmica não modelada (SPOONER et al., 2002), etc. O projeto de sistemas de controle envolve, necessariamente, uma análise criteriosa de estabilidade, a fim de se estabelecer os limites para sua utilização. A operação dentro dos limites de estabilidade é que garantirá a integridade funcional dos sistemas físicos, possibilitando o atendimento continuado dos requisitos de desempenho pré-especificados para o processo.

O projeto de sistemas de controle adaptativos apóia-se em modelos matemáticos livres de ruído, perturbações e dinâmicas não modeladas. Tais modelos, chamados modelos *nominais*, não representam as plantas com total fidelidade, seja por dificuldade de medida do comportamento da planta na fase de modelagem, seja porque os modelos são simplificados em virtude do método de projeto, seja porque a maioria dos métodos de projeto não permite considerar não-linearidades na planta nem comportamentos variantes no tempo, etc. O fato é que os erros nos modelos matemáticos são inevitáveis. A literatura refere-se a eles como incertezas do modelo, ou da planta (CASTRUCCI; SALES, 1990). O efeito das discrepâncias entre o modelo da planta e a planta real sobre a estabilidade pode não ser conhecido até as leis de controle e de adaptação serem implementadas na planta real. A idéia é examinar a estabilidade e robustez de tais leis quando aplicadas a modelos mais complexos, que incluam uma classe de incertezas e perturbações externas que são prováveis de estarem presentes na planta real (IOANNOU; SUN, 1996). É importante distinguir incertezas nos valores dos parâmetros do modelo, das decorrentes de uma total ausência de informação estrutural. Neste último caso estão sempre características de *alta frequência* da planta, tais como efeitos de componentes *parasitas* e suas ressonâncias inevitáveis, as chamadas *incertezas não estruturadas*. A qualificação e conseqüente estruturação dessas incertezas permitiram o

desenvolvimento de uma série de trabalhos associados aos aspectos de robustez de controladores adaptativos, iniciados por Rohrs et al. (1985). Para a análise de robustez à dinâmica não modelada, o método da Perturbação Singular (KOKOTOVIC; KHALIL, 1986) foi intensamente aplicado, inclusive para demonstrar os mecanismos de instabilização dos controladores adaptativos e propor melhorias de robustez em Ioannou e Kokotovic (1984). Costa e Hsu (1992) também utilizaram este método para demonstrar a estabilidade do VS-MRAC direto à dinâmica não modelada e às perturbações. Tendo em vista que os controladores adaptativos são inerentemente não-lineares, quer sejam projetados para sistemas lineares ou para sistemas não-lineares, técnicas de análise de sistemas não-lineares são necessárias. Frequentemente, o Método Direto de Lyapunov tem sido empregado para caracterizar diretamente o comportamento de sistemas dinâmicos não-lineares quanto à estabilidade.

Neste capítulo, serão revisados alguns aspectos importantes da Teoria de Estabilidade de Lyapunov e Perturbações Singulares.

## **2.2 Fundamentos da Teoria de Estabilidade de Lyapunov**

O método mais útil e geral para o estudo de sistemas não-lineares é a teoria introduzida no final do século XIX pelo matemático Russo Alexandr Mikhailovich Lyapunov. Neste trabalho (O Problema Geral da Estabilidade do Movimento), ele sugere dois métodos de análise de estabilidade: método de linearização e o método direto. O método de linearização faz conclusões sobre a estabilidade local de um sistema não-linear em torno de um ponto de equilíbrio a partir das propriedades de estabilidade de sua aproximação linear. O método direto não é restrito ao movimento local, e determina as propriedades de estabilidade de um sistema não-linear através da construção de uma função escalar de energia para o sistema e análise da variação desta função com o tempo.

### **2.2.1 Pontos de Equilíbrio**

Um estado  $x^*$  é um estado de equilíbrio (ou ponto de equilíbrio) do sistema se, uma vez que a trajetória do sistema  $x(t)$  se torna igual a  $x^*$ , esta permanece igual a  $x^*$  para todo  $t$ . Por conveniência, todas as definições serão realizadas para o caso em que o ponto de

equilíbrio está na origem do  $\mathbb{R}^n$ ; isto é,  $x^* = 0$ . Não há perda de generalidade ao fazer isto porque qualquer ponto de equilíbrio pode ser deslocado para a origem via uma mudança de variáveis (KHALIL, 1992).

Suponha o ponto de equilíbrio desejado  $x^* \neq 0$ . Então, introduzindo uma nova variável  $z = x - x^*$  e substituindo  $x = z + x^*$  na equação de sistemas não-lineares autônomos  $\dot{x} = f(x)$ , um novo conjunto de equações na variável  $z$  é obtido, a saber,

$$\dot{z} = f(z + x^*). \quad (2.1)$$

Pode-se facilmente verificar uma correspondência biunívoca entre as soluções da equação  $\dot{x} = f(x)$  e as soluções da equação (2.1) e, ainda mais,  $z = 0$ , isto é, a solução correspondente quando  $x = x^*$ , é um ponto de equilíbrio de (2.1). Portanto, ao invés de estudar o comportamento da equação  $\dot{x} = f(x)$  na vizinhança de  $x^*$ , pode-se estudar o comportamento da equação (2.1) na vizinhança da origem.

## 2.2.2 Conceitos de Estabilidade

Para tornar a verificação de estabilidade prática, o ponto de equilíbrio é transladado para a origem, possibilitando assim a utilização direta da norma. Desta forma, analisar a estabilidade de um sistema consiste em estudar o comportamento da norma do estado, para todo tempo  $t$ .

Para as definições a seguir utilizam-se algumas notações simplificadas, de modo a facilitar o entendimento (SLOTINE; LI, 1991). Chamar-se-á  $B_R$  a região esférica (ou bola) definida por  $\|x\| < R$  no espaço de estado, e  $S_R$  a superfície esférica em si, definida por  $\|x\| = R$ .

### 2.2.2.1 Estabilidade e Instabilidade

**Definição 2.1** O ponto de equilíbrio  $x = 0$  é estável se, para cada  $R > 0$ , existe  $r = r(R) > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < R, \quad \forall t \geq 0.$$

Caso contrário, o ponto de equilíbrio é instável. Essencialmente, estabilidade significa que a trajetória do sistema pode ser mantida perto da origem, iniciando suficientemente perto dela. Mais formalmente, a definição diz que a origem é estável, se, para que a trajetória do sistema  $x(t)$  não saia de uma esfera de raio  $B_R$ , um valor  $r(R)$  pode ser encontrado de forma que iniciando o estado no interior da esfera  $B_r$  no tempo inicial  $t_0$ , garante-se que o estado irá permanecer no interior da esfera  $B_R$  para todo  $t \geq t_0$ . A implicação geométrica da estabilidade é indicada na curva 2 da Figura 2.1.

Contrariamente, um ponto de equilíbrio é instável se existe pelo menos uma esfera  $S_R$ , tal que para todo  $r > 0$ , não importa quão pequeno, é sempre possível que a trajetória do sistema inicie em algum lugar no interior da esfera  $S_r$  e eventualmente saia da esfera  $S_R$  (Figura 2.1). A instabilidade de um ponto de equilíbrio é, em geral, indesejável, por que pode resultar em danos nos componentes elétricos e/ou mecânicos, porém em outras aplicações pode ser útil, como no caso dos osciladores harmônicos construídos a partir de ciclos-limite em um sistema. É importante ressaltar a diferença qualitativa entre instabilidade e a noção intuitiva de *blowing up* (“explosão”), onde todas as trajetórias próximas à origem crescem indefinidamente. Em sistemas lineares, instabilidade é equivalente a *blowing up* pois, pólos instáveis sempre levam a um crescimento exponencial das variáveis de estado do sistema. Contudo, para sistemas não-lineares, o efeito *blowing up* é apenas um tipo de instabilidade.

Na Figura 2.1 tem-se três curvas representando três aspectos da estabilidade e/ou instabilidade de um sistema. Na curva 1 tem-se um sistema assintoticamente estável. Na curva 2, um sistema estável e na curva 3 um sistema instável.

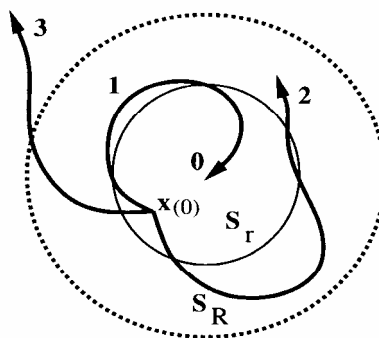


Figura 2.1 Trajetórias associadas aos conceitos de estabilidade



### 2.2.2.2 Estabilidade Assintótica e Estabilidade Exponencial

Em muitas aplicações de engenharia, o conceito de estabilidade visto acima não é o bastante. Por exemplo, quando a atitude de um satélite é alterada de sua posição nominal por algum distúrbio, não se deseja apenas manter sua atitude em uma faixa determinada pela magnitude do distúrbio, isto é, a estabilidade de Lyapunov, mas deseja-se também que sua atitude gradualmente retorne ao seu valor original. Este tipo de requisito é contemplado pelo conceito de estabilidade assintótica.

**Definição 2.2** O ponto de equilíbrio  $x = 0$  é assintoticamente estável se é estável e existe algum  $r > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

A estabilidade assintótica significa que o equilíbrio é estável, e também que os estados que iniciam perto da origem convergem para a mesma quando  $t \rightarrow \infty$ . A Figura 2.1 mostra que as trajetórias do sistema que iniciam no interior da esfera  $S_r$  convergem para a origem. A esfera  $S_r$  é chamada de *domínio de atração* do ponto de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio que possui estabilidade de Lyapunov, mas não é assintoticamente estável, é chamado apenas de *estável*. A convergência de estado não implica em estabilidade. Existem sistemas em que o estado de equilíbrio é atrativo (as soluções convergem para ele quando o tempo  $t$  tende a infinito), mas não é estável.

Em muitas aplicações de engenharia, não é suficiente saber que o sistema converge para o ponto de equilíbrio após um longo tempo. Há a necessidade de estimar o quão rápido a trajetória do sistema converge para o ponto. O conceito de estabilidade exponencial pode ser usado para este propósito.

**Definição 2.3** O ponto de equilíbrio  $x = 0$  é exponencialmente estável se existem dois números estritamente positivos  $\alpha$  e  $\lambda$  tal que

$$\forall t > 0, \quad \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t} \rightarrow 0$$

em alguma esfera  $S_r$  em torno do ponto.

Em outras palavras, significa que o vetor de estado de um sistema exponencialmente estável converge para o ponto de equilíbrio tão rápido quanto uma função exponencial. O número positivo  $\lambda$  é chamado de taxa de convergência exponencial.

### 2.2.2.3 Estabilidade Local e Global

As propriedades locais de estabilidade se relacionam ao fato de como as trajetórias de um sistema evoluem em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio. Estas propriedades dizem pouco sobre como o sistema irá se comportar quando o estado inicial é de alguma forma distante do ponto de equilíbrio. Conceitos de estabilidade global são então necessários.

Se a estabilidade assintótica ou exponencial é válida para qualquer estado inicial, o ponto de equilíbrio é dito *globalmente assintoticamente estável* ou *exponencialmente estável*, respectivamente. Sistemas lineares invariantes no tempo são assintoticamente estáveis, ou estáveis, ou instáveis. A estabilidade assintótica linear é sempre global e exponencial, e a instabilidade linear implica no efeito exponencial *blowing up*. Isto explica porque estas definições mais refinadas de estabilidade não são encontradas em estudos de sistemas lineares. Elas são explicitamente necessárias apenas para sistemas não-lineares.

### 2.2.3 Método Direto de Lyapunov

A filosofia básica do método direto de Lyapunov é uma extensão de uma observação física fundamental: se a energia total de um sistema mecânico (ou elétrico) é continuamente dissipada, quer seja linear ou não-linear, tende a convergir para um ponto de equilíbrio. Assim, podem-se tirar conclusões sobre a estabilidade de um sistema observando a variação de uma simples função escalar. A principal característica deste método é gerar uma função do tipo energia para o sistema, e examinar sua variação, tendo como fundamento o conceito de energia mecânica total de um sistema massa-mola, isto é, a soma da energia cinética e potencial. Comparando as definições de estabilidade e energia mecânica, podem-se tirar algumas relações entre tais conceitos, como a seguir:

- energia nula corresponde ao ponto de equilíbrio
- estabilidade assintótica implica que a energia mecânica converge para zero.
- instabilidade está relacionada a um aumento da energia mecânica

Estas relações indicam que uma quantidade escalar, a energia mecânica, reflete indiretamente a magnitude do vetor de estado. E, ainda mais, que as propriedades de estabilidade do sistema podem ser caracterizadas pela variação da energia mecânica do sistema.

A taxa de variação de energia durante o movimento do sistema é obtida facilmente diferenciando a função de energia, e esta derivada deve ser analisada. O uso desta técnica possibilita a análise de estabilidade de sistemas sem precisar de definições difíceis ou de um conhecimento explícito das soluções de equações não-lineares que descrevem o sistema.

### 2.2.3.1 Funções Definidas Positivas e Funções de Lyapunov

A função de energia descrita acima tem duas propriedades. A primeira é uma propriedade da função em si: ela é estritamente positiva a não ser que todos os seus argumentos sejam iguais à zero. A segunda propriedade está associada à dinâmica: a função vai monoticamente decrescendo quando as variáveis  $x$  e  $\dot{x}$  variam. No método direto de Lyapunov, a primeira propriedade é formalizada pela noção de funções definidas positivas, e a segunda é formalizada pelas chamadas funções de Lyapunov. Seja  $V(x)$  a função do tipo energia associada ao sistema.

**Definição 2.4** Uma função contínua escalar  $V(x)$  é dita *localmente definida positiva* se  $V(0) = 0$  e, em uma esfera  $S_{R_0}$

$$x \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0.$$

Se  $V(0) = 0$  e a propriedade acima é válida em todo o espaço de estado, então  $V(x)$  é dita *globalmente definida positiva*.

**Definição 2.5** Uma função contínua escalar  $V(x)$  é dita função de Lyapunov se é definida positiva, tem derivadas parciais contínuas e se sua derivada ao longo de qualquer trajetória do sistema é semi-definida negativa em uma esfera  $S_{R_0}$ , ou seja,

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ ou}$$

definida negativa,

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ para } x \neq 0 \text{ (}\dot{V}(0) = 0\text{)}.$$

### 2.2.3.2 Teoremas de Estabilidade

As relações entre funções de Lyapunov e a estabilidade de sistemas são estabelecidas através de teoremas do método direto de Lyapunov. Tais teoremas têm versões locais e globais. As versões locais são relacionadas com as propriedades de estabilidade na vizinhança de um ponto de equilíbrio e usualmente envolvem uma função localmente definida positiva.

**Teorema 2.1 (Estabilidade Local)** Se, em uma esfera  $S_{R_0}$ , existe uma função escalar  $V(x)$  com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas tal que

- $V(x)$  é definida positiva (localmente em  $S_{R_0}$ )
- $\dot{V}(x)$  é semi-definida negativa (localmente em  $S_{R_0}$ )

então, o ponto de equilíbrio ( $x = 0$ ) é estável. Se, a derivada  $\dot{V}(x)$  é localmente definida negativa em  $S_{R_0}$ , então a estabilidade é assintótica.

O teorema acima se aplica à análise local de estabilidade. Para analisar a estabilidade assintótica global de um sistema, deve-se esperar que a esfera  $S_{R_0}$  do Teorema 2.1 seja expandida para todo o espaço de estado. Isto é necessário, mas não é suficiente. Uma condição adicional sobre a função  $V$  precisa ser satisfeita:  $V(x)$  deve ser *radialmente ilimitada*, o que significa que  $V(x) \rightarrow \infty$ , quando  $\|x\| \rightarrow \infty$ . Obtém-se assim o seguinte resultado:

**Teorema 2.2 (Estabilidade Assintótica Global)** Assumindo que existe uma função escalar  $V$  do estado  $x$ , com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas tal que

- $V(x)$  é definida positiva
- $\dot{V}(x)$  é definida negativa
- $V(x) \rightarrow \infty$ , quando  $\|x\| \rightarrow \infty$

então, o ponto de equilíbrio ( $x = 0$ ) é globalmente assintoticamente estável.

## 2.3 Perturbações Singulares

Muito freqüentemente, ao analisarem-se sistemas dinâmicos, usam-se modelos de ordem reduzida obtidos desprezando-se pequenos *parâmetros parasitas*, associados às

constantes de tempo que podem ser desprezadas e que aumentam a ordem do modelo. Esta redução da ordem do modelo pode ser representada como um problema de perturbação singular (KOKOTOVIC; KHALIL, 1986), onde o modelo singularmente perturbado total representa o sistema com os *parâmetros parasitas* e o modelo reduzido é o modelo usado na análise. O método da perturbação singular consiste em um método assintótico para soluções de equações diferenciais não-lineares e pode ser utilizado no contexto de sistema de controle para a análise de tais sistemas na presença de dinâmicas não modeladas (COSTA; HSU, 1992; IOANNOU; KOKOTOVIC, 1984).

Soluções analíticas exatas para equações diferenciais não lineares são possíveis apenas para um número limitado de classes especiais de equações. Em geral, tem-se que recorrer a métodos aproximados. Existem duas categorias de métodos de aproximação que engenheiros e cientistas têm a sua disposição quando analisam sistemas não lineares: métodos numéricos e *métodos assintóticos* (KHALIL, 1992).

Seja a seguinte equação de estado

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad (2.2)$$

onde  $\mu$  é um parâmetro escalar *pequeno* e, sob certas condições, a equação tem uma solução exata  $x(t, \mu)$ . Equações deste tipo são encontradas em muitas aplicações. O objetivo de um método assintótico é obter uma solução aproximada  $\tilde{x}(t, \mu)$  tal que o erro de aproximação  $x(t, \mu) - \tilde{x}(t, \mu)$  seja pequeno, em alguma norma, para  $|\mu|$  pequeno e a solução aproximada  $\tilde{x}(t, \mu)$  é expressa em termos de equações mais simples que a equação original. O objetivo dos métodos assintóticos está em revelar propriedades estruturais essenciais da equação original para  $|\mu|$  pequeno. Métodos assintóticos revelam, ainda, um fraco acoplamento entre subsistemas isolados ou a estrutura de um sistema não-linear fraco. Mais importante: métodos assintóticos revelam estruturas de *múltipla escala de tempo* inerentes em muitos problemas práticos. Frequentemente, a solução da equação de estado (2.2) exibe um fenômeno em que algumas variáveis movem-se no tempo mais rápido que outras, levando à classificação das variáveis como *lentas* e *rápidas*. O método da perturbação singular lida, portanto, com a interação entre essas variáveis, ou seja, sistemas singularmente perturbados são caracterizados pela presença simultânea de pequenas e grandes constantes de tempo, o que introduz o agrupamento de autovalores lineares (ou linearizados) em dois grupos distintos: (a)

autovalores correspondendo a grandes constantes de tempo localizadas perto do eixo imaginário representando variáveis de estado *lentas*, e (b) autovalores correspondendo a pequenas constantes de tempo localizadas longe do eixo imaginário representando as variáveis de estado *rápidas* (GAJIC; MYO-TEG, 1988).

O modelo de perturbação singular de um sistema dinâmico é um modelo, no espaço de estados, no qual as derivadas de alguns dos estados são multiplicadas por um parâmetro positivo pequeno  $\mu$ , isto é,

$$\dot{x} = f(t, x, z, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

$$\mu \dot{z} = g(t, x, z, \mu), \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad (2.4)$$

onde há uma dependência descontínua das propriedades do sistema do parâmetro de perturbação  $\mu$  e as funções  $f$  e  $g$  são continuamente diferenciáveis em seus argumentos para  $[t, x, z, \mu] \in [0, t_1] \times D_1 \times D_2 \times [0, \mu_0]$ , onde  $D_1 \in \mathbb{R}^n$  e  $D_2 \in \mathbb{R}^m$  são conjuntos conexos. O modelo padrão de perturbação singular é obtido fazendo-se  $\mu = 0$  em (2.3)-(2.4), o que causa uma mudança fundamental e abrupta nas propriedades dinâmicas do sistema, visto que a equação diferencial  $\mu \dot{z} = g$  recai na equação algébrica

$$0 = g(t, x, z, 0). \quad (2.5)$$

A essência da teoria é que a descontinuidade das soluções causada por perturbações singulares pode ser evitada se analisada em diferentes escalas de tempo. A decomposição de escala de tempo é usada para analisar a estabilidade de pontos de equilíbrio pelo método de Lyapunov. Ao fazer  $\mu = 0$  em (2.3)-(2.4), a ordem da equação de estado reduz de  $n + m$  para  $n$ . O modelo (2.3)-(2.4) está na forma padrão se e somente se a equação (2.5) tem  $k \geq 1$  raízes reais isoladas (diferentes)

$$z_i = h_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.6)$$

para cada  $(t, x) \in [0, t_1] \times D_1$ . Esta hipótese garante que um modelo reduzido  $n$ -dimensional bem definido corresponderá a cada raiz de (2.5). Para obter o  $i$ -ésimo modelo reduzido, substitui-se (2.6) em (2.3), com  $\mu = 0$ , para obter

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0). \quad (2.7)$$

Será claro, a partir do contexto, que raiz de (2.6) estamos usando. Este modelo é, às vezes, chamado modelo *quase estacionário* porque  $z$ , cuja velocidade  $\dot{z} = g/\mu$  pode ser grande

quando  $\mu$  é pequeno e  $g \neq 0$ , pode rapidamente convergir para uma raiz de (2.5) que é o equilíbrio de (2.4). O modelo (2.7) é também denominado *modelo lento*.

Modelar um sistema físico na forma de perturbação singular pode não ser fácil. Nem sempre é claro como escolher os parâmetros que podem ser considerados pequenos. Felizmente, em muitas aplicações o conhecimento de processos físicos e componentes do sistema é suficiente para tal escolha, a qual, normalmente, está relacionada à menor constante de tempo do sistema, tal como massas, capacitâncias e *parâmetros parasitas* similares que elevam a ordem do modelo dinâmico e são muito comuns em modelos de sistemas físicos, como aeronaves, robôs, circuitos elétricos, sistemas de potência, reatores nucleares e químicos, motores de corrente contínua e de indução, máquinas síncronas, colunas de destilação e etc., tornando esta teoria muito popular na engenharia de controle. O método da perturbação singular garante que, ao analisar-se a estabilidade da origem do modelo reduzido (2.7) como exponencialmente estável, a origem do sistema completo (2.3)-(2.4) será exponencialmente estável, considerando que as dinâmicas desprezadas são suficientemente rápidas, ou seja,  $\mu \rightarrow 0$ . Uma prova deste fato pode ser encontrada em Khalil (1992).

Especificamente, para um sistema linear SISO, invariante no tempo, submetido a uma perturbação  $d$  atuante na entrada da planta, o sistema (2.3)-(2.4) será representado no restante deste trabalho por

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}\zeta + b_1'(u + d), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.8)$$

$$\mu\dot{\zeta} = A_{21}x + A_{22}\zeta + b_2'(u + d), \quad \zeta \in \mathbb{R}^m, \quad (2.9)$$

$$y = h^T x$$

onde  $\zeta$  está associado às variáveis de estado da dinâmica parasita. O escalar  $\mu$  representa todos os parâmetros a serem desprezados, tais como pequenas constantes de tempo, pequenas massas, etc. Todas as matrizes  $A_{ij}$  e vetores  $b_k$  são funções analíticas de  $\mu$  e  $\det[A_{22}(0)] \neq 0$ . O sistema (2.8)-(2.9) apresenta um acoplamento considerável entre as escalas de tempo. Um dos resultados mais importantes e usados na teoria matemática de perturbações singulares é o desenvolvimento da transformação para a decomposição de sistemas singularmente perturbados, em subsistemas chamados *exatamente-lento* e *exatamente-rápido*, obtida por Chang (1988). A fim de obter uma representação de (2.8)-(2.9) que possibilite uma decomposição das escalas de tempo, o sistema será escrito na *forma do atuador* (KOKOTOVIC; KHALIL, 1986), a saber,

$$\dot{x} = A_1x + A_{12}z + b_1(u + d) \quad (2.10)$$

$$\mu\dot{z} = A_2z + b_2(u + d) \quad , \quad (2.11)$$

$$y = h^T x$$

a qual é obtida fazendo-se  $z = Lx + \zeta$ , onde  $L$  é uma solução da equação de Riccati

$$0 = A_{21} + \mu LA_{11} - A_{22}L - \mu LA_{12}L \quad (2.12)$$

e  $A_1 = A_{11} - A_{12}L$ ,  $A_2 = A_{22} + \mu LA_{12}$ ,  $b_1 = b_1'$  e  $b_2 = b_2' + \mu Lb_1'$ . O modelo nominal da planta utilizado no projeto do controlador é um modelo de ordem reduzida obtido a partir de (2.10)-(2.11), fazendo  $\mu = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_r x + b_r u & (d = 0) \\ y &= h_r^T x \end{aligned} \quad , \quad (2.13)$$

onde  $A_r = A_1$ ,  $b_r = b_1 - A_{12}A_2^{-1}b_2$  e  $h_r = h$ .

Neste trabalho, a análise de estabilidade do VS-MRAC indireto será realizada através do método da perturbação singular e do método direto de Lyapunov, conforme Costa e Hsu (1992), a fim de estabelecer as condições e limites de estabilidade na presença de perturbações externas e de dinâmica não modelada.



## Capítulo 3

# Controle Adaptativo Direto por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC Direto)

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, são revisadas as principais características e equações do VS-MRAC direto para o caso de grau relativo unitário ( $n^* = 1$ ). O grau relativo de um sistema representa a diferença entre pólos e zeros do mesmo. Essas ferramentas formarão a base para o desenvolvimento e entendimento da versão indireta do VS-MRAC, a ser detalhada nos próximos capítulos. O VS-MRAC direto é derivado do MRAC direto (NARENDRA; VALAVANI, 1978) e tem sido intensamente desenvolvido a partir do trabalho de Hsu e Costa (1989). Desde então, pode-se destacar sua aplicação a sistemas lineares e não-lineares SISO (MIN; HSU, 2000), bem como a sistemas lineares e não-lineares MIMO (CUNHA, J. et al., 2003; HSU et al., 2002; HSU et al., 2006; HSU; CUNHA, J.; COSTA, 2003). A robustez do VS-MRAC tradicional a distúrbios externos e dinâmica não modelada foi demonstrada em (COSTA; HSU, 1992), utilizando uma abordagem por perturbação singular (KOKOTOVIC; KHALIL, 1986; KOKOTOVIC; KHALIL; O'REILLY, 1986), a qual servirá de base para a análise de estabilidade do caso indireto.

### 3.2 Controle Adaptativo Direto por Modelo de Referência (MRAC Direto)

A teoria de controle adaptativo tem sido usada como uma abordagem para o controle de sistemas de dinâmica muito complexa ou desconhecida. Este tipo de metodologia caracteriza-se por um controlador com parâmetros ajustáveis e um mecanismo de adaptação, o qual se ajusta às mudanças na planta. Um controlador adaptativo é formado através da combinação de um estimador dos parâmetros desconhecidos com uma lei de controle. A forma como o estimador de parâmetros (ou lei adaptativa) é combinado com a lei de controle resulta em dois diferentes métodos. No primeiro método, denominado controle adaptativo direto, o modelo da planta é parametrizado em função dos parâmetros do controlador, os quais são estimados diretamente, sem cálculos intermediários envolvendo estimativas de parâmetros

da planta. No segundo método, denominado controle adaptativo indireto, os parâmetros da planta são estimados e então utilizados para calcular os parâmetros do controlador. O IVS-MRAC se baseia nesta última abordagem, a qual será detalhada no próximo capítulo.

No controle adaptativo direto, o modelo da planta  $P(\theta_p^*)$  é parametrizado em função de um vetor de parâmetros do controlador  $\theta^*$ , com o qual  $C(\theta^*)$  atende os requisitos de desempenho, para obter o modelo  $P_c(\theta^*)$  com exatamente as mesmas características entrada/saída de  $P(\theta_p^*)$ . O estimador de parâmetros é projetado baseado em  $P_c(\theta^*)$  em vez de  $P(\theta_p^*)$  para prover estimativas diretas  $\theta(t)$  de  $\theta^*$  através do processamento da entrada  $u$  e da saída  $y$  da planta. A estimativa  $\theta(t)$  é então usada para atualizar o vetor de parâmetros do controlador  $\theta$  sem cálculos intermediários. As propriedades do modelo  $P(\theta_p^*)$  são fundamentais na obtenção do modelo parametrizado  $P_c(\theta^*)$  que é conveniente para a estimação. A Figura 3.1 mostra o diagrama de blocos para o controle adaptativo direto.

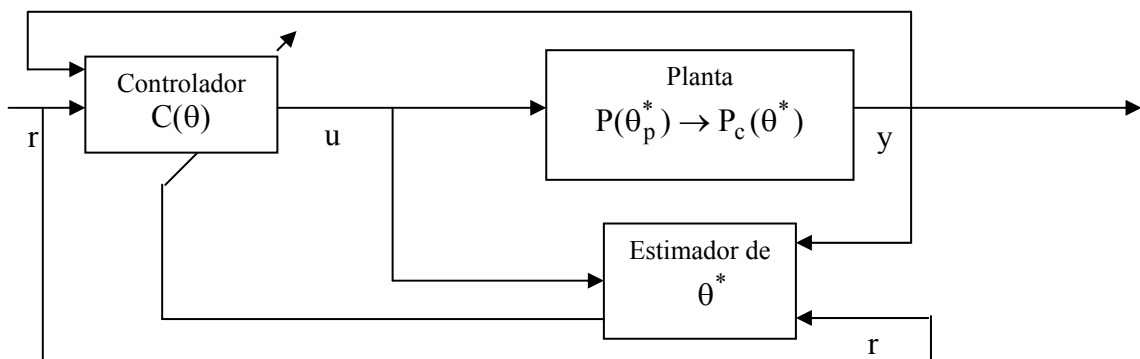


Figura 3.1 Diagrama de blocos para o controle adaptativo direto

O MRAC constitui uma das principais abordagens da área de controle adaptativo. Os algoritmos de adaptação que utilizam somente informações da entrada e saída da planta para a geração da lei de controle são de particular interesse prático, tendo em vista sua simplicidade e a necessidade de ter acesso somente às variáveis de saída do processo (planta). A abordagem direta do MRAC (NARENDRA; VALAVANI, 1978) se caracteriza por um mecanismo de adaptação que gera os parâmetros do controlador a partir de informações da entrada e saída da planta (IOANNOU; SUN, 1996; SASTRY, 1984), baseada na estrutura da Figura 3.1. Além disto, é preciso definir um modelo de referência, o qual especifica o

comportamento desejável para a planta em malha fechada. O Diagrama de blocos para o MRAC direto é apresentado na Figura 3.2.

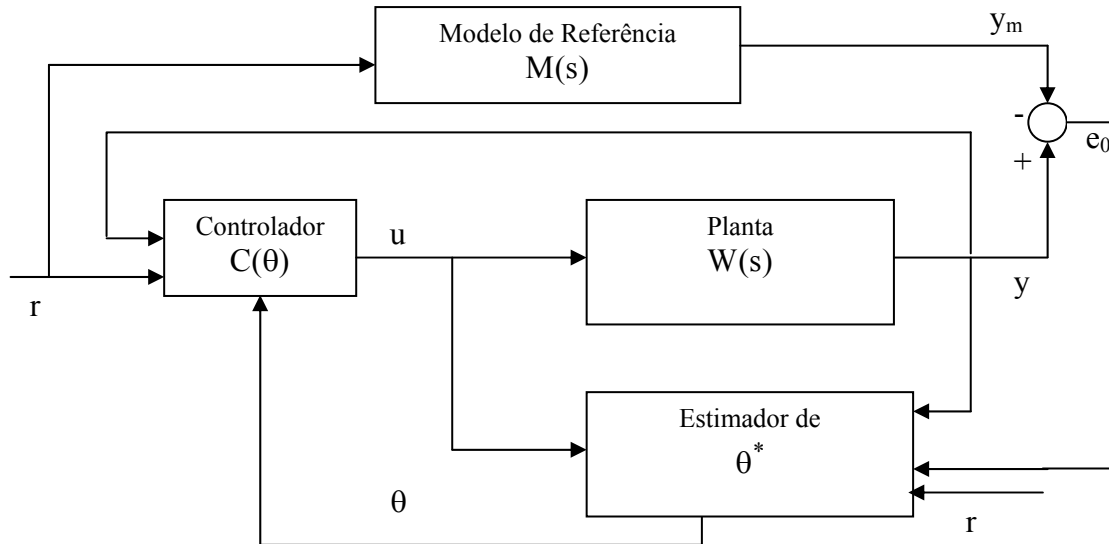


Figura 3.2 Diagrama de blocos do controlador adaptativo direto por modelo de referência

A função de transferência  $M(s)$  do modelo de referência é projetada de forma que para um dado sinal de referência  $r(t)$ , a saída  $y_m(t)$  represente a saída desejada  $y(t)$  que a planta deve seguir. O controlador por realimentação  $C(\theta)$  é projetado de forma que todos os sinais sejam limitados e a função de transferência da planta de  $r$  para  $y$  seja igual a  $M(s)$ . Esta condição garante que para qualquer sinal de referência  $r(t)$ , o erro de saída ou de rastreamento  $e_o = y - y_m$ , que representa o desvio da saída da planta em relação à trajetória desejada  $y_m$ , tenda para zero. A *condição de matching* para a função de transferência da planta é obtida através do cancelamento dos zeros da função de transferência da planta  $W(s)$  e substituindo-os pelos zeros de  $M(s)$ , e tornando os pólos do sistema em malha fechada iguais aos do modelo de referência, através do controlador  $C(\theta)$ . O cancelamento dos zeros da planta impõe a restrição da planta ser de fase mínima, isto é, ter todos os zeros no semiplano esquerdo. Se qualquer zero da planta for instável, seu cancelamento pode gerar autovalores instáveis e não-controláveis e/ou não-observáveis.

Sistemas adaptativos baseados simplesmente em adaptação paramétrica geralmente apresentam transitório lento e oscilatório, além de não apresentarem robustez às perturbações

e dinâmica não modelada (ROHRS et al., 1985), o que tem gerado intensa pesquisa desde a década de 70. Uma contribuição significativa foi dada por Hsu e Costa (1989) ao associar o MRAC direto aos VSS, com intuito de, ao mesmo tempo, conseguir melhorar o transitório e a robustez dos sistemas adaptativos. Antes de uma breve revisão do VS-MRAC direto, segue na próxima seção a apresentação das hipóteses básicas do MRAC direto e suas leis adaptativas, bem como a obtenção da equação do erro clássica. Tais ferramentas são naturalmente herdadas no VS-MRAC.

### 3.2.1 Parametrização e Hipóteses

Este trabalho considera o controle de plantas SISO, LTI, dadas em sua representação para o *caso ideal*, no espaço de estados, por:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = h^T x, \quad (3.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u$  é o sinal de entrada e  $y$  é o sinal de saída. O modelo Entrada/Saída (E/S) para (3.1) é dado pela função de transferência

$$y = W(s)u, \quad W(s) = h^T (sI - A)^{-1} b = k_p \frac{n_p(s)}{d_p(s)}, \quad (3.2)$$

onde  $k_p$  é o ganho de alta frequência. A matriz  $A$  e os vetores  $b, c$  possuem incertezas, mas pertencem a conjuntos conhecidos. A partir de (3.2), para  $n^* = 1$ ,  $n_p$  e  $d_p$  são polinômios mônicos definidos como,

$$n_p(s) = s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i s^{n-1-i} \quad (3.3)$$

$$d_p(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} s^{n-1-i} \quad (3.4)$$

O modelo de referência é definido por

$$y_m(s) = M(s)r(s), \quad M(s) = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)}, \quad (3.5)$$

onde  $y_m$  é o sinal de saída e  $k_m$  é o ganho de alta frequência do modelo de referência. Assume-se que o sinal de referência  $r$  é contínuo por partes e uniformemente limitado. Assim como em (3.3)-(3.4),  $n_m$  e  $d_m$  são escritos como,

$$n_m(s) = s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{m,i} s^{n-1-i} \quad (3.6)$$

$$d_m(s) = s^n + \alpha_{m,1} s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{m,i+1} s^{n-1-i} \quad (3.7)$$

São feitas as seguintes hipóteses em relação à planta e ao modelo de referência:

- H1.** A planta é monovariável, controlável, observável e tem grau relativo unitário,  $n^* = 1$ ;
- H2.** O grau  $n$  de  $d_p(s)$  é conhecido;
- H3.**  $k_m$  e  $k_p$  têm o mesmo sinal (positivo, sem perda de generalidade);
- H4.** O modelo é Estritamente Real Positivo (ERP) e tem o mesmo grau relativo da planta;
- H5.**  $n_p(s)$ ,  $n_m(s)$  e  $d_m(s)$  são polinômios mônicos Hurwitz;
- H6.**  $d_p(s)$  é um polinômio mônico;

O objetivo de controle é obter convergência assintótica do erro de saída

$$e_o(t) = y(t) - y_m(t) \quad (3.8)$$

para zero ou, apesar da presença de distúrbios (uniformemente limitados mas não necessariamente pequenos), garantir que todos os sinais no sistema em malha fechada permaneçam uniformemente limitados e que o erro de saída  $e_o$  convirja para uma pequena vizinhança residual de zero. O algoritmo de adaptação necessita de  $2n$  variáveis. Uma vez que só se tem acesso à entrada e à saída da planta, é construído um conjunto de variáveis de estado a partir das medições de  $u$  e  $y$ , denominados Filtros de Estado (SVF), os quais geram sinais filtrados da entrada e da saída da planta (IOANNOU; SUN, 1996).

### 3.2.2 Equação do Erro

Para a obtenção da equação geral do erro do MRAC direto, definem-se os seguintes filtros

$$\dot{v}_1 = \Lambda v_1 + gu, \quad \dot{v}_2 = \Lambda v_2 + gy, \quad (3.9)$$

onde  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ , e  $\Lambda$  é escolhido tal que  $\det(sI - \Lambda) = n_m(s)$ , para o caso  $n^* = 1$ . O vetor  $\omega$ , com as  $2n$  variáveis, recebe o nome de *vetor regressor* e é da forma

$$\omega = \begin{bmatrix} v_1^T & y & v_2^T & r \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

e, assim, a lei de controle  $u$  é dada por (SASTRY; BODSON, 1989)

$$u = \theta^T(t)\omega(t), \quad (3.11)$$

onde  $\theta(t)$  é o vetor de parâmetros do controlador, o qual é dado por

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_{v_1}^T & \theta_n & \theta_{v_2}^T & \theta_{2n} \end{bmatrix}^T. \quad (3.12)$$

Considerando  $u^*$  o sinal de controle quando  $\theta = \theta^*$  é conhecido, a lei de controle na condição de *matching* fica

$$u^* = \theta_{v_1}^{*T} v_1 + \theta_n^* y + \theta_{v_2}^{*T} v_2 + \theta_{2n}^* r. \quad (3.13)$$

Nestas condições, quando  $u = \theta^{*T} \omega = u^*$ , obtém-se  $y(s) = M(s)r(s)$ , ou seja,  $y \rightarrow y_m$ .

A partir das variáveis de estado da planta (3.1) e dos filtros (3.9), é construído o seguinte vetor de estado

$$X = \begin{bmatrix} x^T & v_1^T & v_2^T \end{bmatrix}^T. \quad (3.14)$$

Assim, tem-se que

$$\dot{X} = A_0 X + b_0 u, \quad y = h_c^T X, \quad (3.15)$$

onde

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ gh^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}; \quad b_0 = \begin{bmatrix} b \\ g \\ 0 \end{bmatrix}; \quad h_c^T = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

Adicionando e subtraindo o termo  $b_0 u^*$  em (3.15), fica-se com

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_0 X + b_0 u + b_0 u^* - b_0 u^* \\ &= A_0 X + b_0 u^* + b_0 (u - u^*) \\ &= A_0 X + b_0 \theta^{*T} \omega + b_0 (u - u^*). \end{aligned}$$

Fazendo

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} v_1 \\ y \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ h^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \Omega X \quad \text{e} \quad \bar{\theta}^* = \begin{bmatrix} \theta_{v_1}^* \\ \theta_n^* \\ \theta_{v_2}^* \end{bmatrix},$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_0 X + b_0 \left[ \bar{\theta}^{*T} \bar{\omega} + \theta_{2n}^* r \right] + b_0 (u - u^*) \\ &= A_0 X + b_0 \bar{\theta}^{*T} \Omega X + b_0 \theta_{2n}^* r + b_0 (u - u^*) \\ &= \left( A_0 + b_0 \bar{\theta}^{*T} \Omega \right) X + b_0 \theta_{2n}^* r + b_0 (u - u^*) \\ &= A_c X + b_c r + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c (u - u^*). \end{aligned}$$

Assim, o sistema composto pela planta e pelos filtros é representado por:

$$\dot{X} = A_c X + b_c r + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c (u - u^*), \quad y = h_c^T X, \quad (3.16)$$

onde

$$A_c = A_0 + b_0 \bar{\theta}^{*T} \Omega \quad \text{e} \quad b_c = b_0 \theta_{2n}^*.$$

Quando  $u = u^*$ ,  $\{A_c, b_c, h_c\}$  é uma realização não-mínima de  $M(s)$ , ou seja, o modelo de referência pode ser representado por

$$\dot{X}_m = A_c X_m + b_c r, \quad y_m = h_c^T X_m. \quad (3.17)$$

Definindo-se o vetor de erro e sua respectiva derivada como

$$e = X - X_m, \quad \dot{e} = \dot{X} - \dot{X}_m, \quad (3.18)$$

tem-se,

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_c (X - X_m) + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c (u - u^*) \\ &= A_c e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c (u - u^*), \quad e_0 = h_c^T e. \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.2.3 Lei de Adaptação para o Vetor de Parâmetros do Controlador

O MRAC direto utiliza uma lei integral de adaptação para os  $2n$  elementos do vetor de parâmetros do controlador (3.12), a qual é dada em sua forma mais simples, para o grau relativo unitário, por (NARENDRA; VALAVANI, 1978)

$$\dot{\theta} = -\Gamma e_0 \omega, \quad \Gamma = \Gamma^T > 0, \quad (3.20)$$

ou seja,

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t (-\Gamma e_0 \omega(t)) dt. \quad (3.21)$$

Embora a lei adaptativa dada por (3.20) tenha sido intensamente modificada para fins de incremento de robustez desde o trabalho de Ioannou e Kokotovic (1984), através da denominada modificação- $\sigma$ , o objetivo neste capítulo é mostrar a origem das leis chaveadas para os elementos de  $\theta$  (3.12), propostas por Hsu e Costa (1989), as quais derivam diretamente de (3.20). Procedimento semelhante é adotado para o caso do VS-MRAC indireto proposto por Oliveira e Araújo (2002), o qual tem suas leis chaveadas desenvolvidas a partir

do MRAC indireto, e será detalhado no próximo capítulo. Antes, porém, de revisar o VS-MRAC direto, convém apresentar os principais conceitos da teoria dos sistemas com estrutura variável (UTKIN, 1978).

### 3.3 Sistemas com Estrutura Variável

A teoria de sistemas com estrutura variável tem sido bastante utilizada no tratamento de problemas de controle de sistemas incertos, principalmente na forma conhecida como controle por modos deslizantes (UTKIN, 1978, 1992). Esta forma pertence a uma importante área de pesquisa e aplicações denominada *controle robusto*.

Esta estratégia de controle tem sua fundamentação no controle por relés, sendo as funções de chaveamento das variáveis de controle projetadas de modo a restringir a dinâmica do sistema a uma superfície chamada *superfície deslizante*. Os VSS têm como principais características a rapidez do transitório e robustez a variações paramétricas e perturbações (dentro de uma faixa de tolerância estipulada no projeto). Para as classes de sistemas as quais esta técnica se aplica, o SMC provê uma metodologia sistemática para o problema de manter a estabilidade e desempenho consistente em face de imprecisões na modelagem. Isto é obtido através do chaveamento das variáveis de controle dentro de um conjunto de funções das variáveis de estado da planta de acordo com uma determinada regra. O SMC tem sido usado com sucesso em manipuladores robóticos, veículos submarinos, motores elétricos de alto desempenho e sistemas de potência (SLOTINE; LI, 1991). Esta seção tem por objetivo apresentar alguns resultados da teoria VSS que são fundamentais para o desenvolvimento de um controlador adaptativo com leis chaveadas.

Seja, por simplicidade, o seguinte sistema de segunda ordem

$$\dot{x} = A(t)x + bu = f(x, u), \quad (3.22)$$

escrito em sua forma matricial como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (3.23)$$

com  $a_1$  e  $a_2$  conhecidos com incertezas. Define-se uma superfície  $s(x) = cx_1 + x_2 = 0, c > 0$ , na qual se deseja que permaneçam as variáveis de estado  $x_1, x_2$  (dinâmica do sistema). Deve ser satisfeita a condição  $\dot{s} < 0$  para se ter o comportamento ilustrado na Figura 3.3



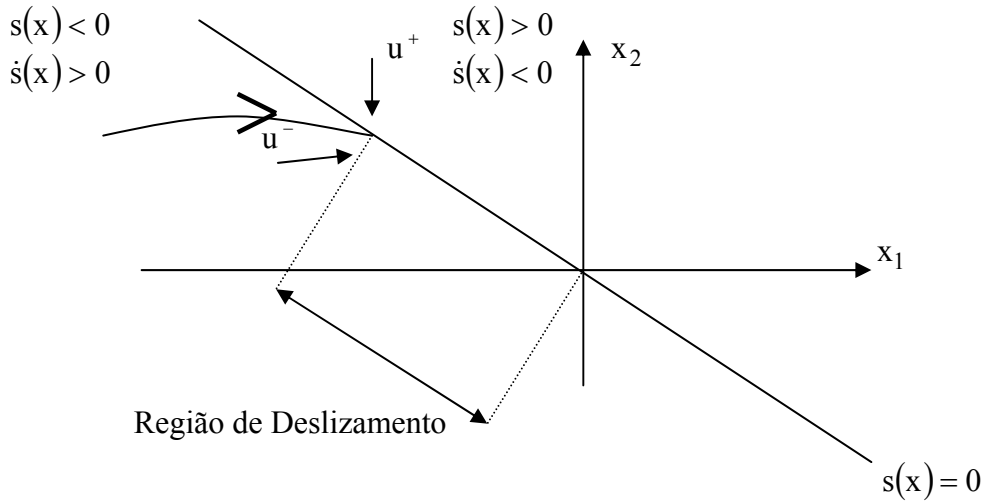


Figura 3.3 Superfície deslizante

Em um problema de estabilização, deve-se ter

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$$

Definindo o controle  $u(x)$  na forma

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), & s(x) > 0 \\ u^-(x), & s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

tem-se que  $u = g(\theta_1; \theta_2; x_1; x_2)$ , onde

$$\theta_1 = -\bar{\theta}_1 \operatorname{sgn}(sx_1), \quad \bar{\theta}_1 > \sup_{t>0} |a_1(t)| \quad (3.25)$$

$$\theta_2 = -\bar{\theta}_2 \operatorname{sgn}(sx_2), \quad \bar{\theta}_2 > \sup_{t>0} |a_2(t) + c| \quad (3.26)$$

Os valores dos parâmetros de projeto  $\bar{\theta}_i$  em (3.25)-(3.26) devem ser convenientemente dimensionados conforme as variações previstas para  $a_1(t)$  e  $a_2(t)$  em (3.23) e determinam a rapidez com que a trajetória do sistema, ou seja, a solução de (3.22), atinge a superfície de deslizamento. Como será visto adiante, esta condição suficiente para os parâmetros  $\bar{\theta}_i$  consiste em uma das principais motivações para o desenvolvimento do VS-MRAC indireto, tendo em vista que o dimensionamento sistemático e apropriado desses parâmetros não prescinde do conhecimento dos parâmetros nominais do sistema.

Desta forma, o sistema (3.22) se torna

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(x), & s(x) > 0 \\ f^-(x), & s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

tendo como condição de deslizamento,

$$s(x)\dot{s}(x) < 0 \quad (3.28)$$

Pode-se interpretar a condição de deslizamento (3.28) como a derivada (negativa) da função  $\frac{1}{2}s(x)^2$ , que é uma medida da distância à superfície de deslizamento  $s(x) = 0$ . Se a condição de deslizamento  $s\dot{s} < 0$  é satisfeita em uma vizinhança de  $s(x) = 0$ , os campos vetoriais representados por  $f^+(x)$  e  $f^-(x)$  apontam para esta superfície. Portanto, se uma trajetória alcança  $s(x)$ , é forçada a permanecer (deslizar) sobre esta.

A aplicabilidade dos VSS foi questionada por algum tempo, devido à natureza de alta frequência do sinal de controle descontínuo não ser contemplada pelos dispositivos físicos à época de sua idealização. A necessidade das incertezas paramétricas serem limitadas e a medição das variáveis de estado da planta foram outros entraves à técnica. Esta última vem sendo contornada pelo uso de estratégias que usam apenas medições da entrada e saída da planta, como no caso do VS-MRAC, ou pelo uso de observadores de estado (BONDAREV et al., 1985; SLOTINE; HENDRICK; MISAWA, 1987; WALCOTT; ZAK, 1988; UTKIN, 1992; WANG; WEIWEIN; 2003; MOKHTARI et al., 2006). O fenômeno de *chattering* representa uma dificuldade adicional e consiste no surgimento de sinais de alta frequência indesejáveis e excessiva atividade de controle. Este fenômeno ocorre ao longo da superfície de deslizamento devido às imperfeições introduzidas pelos mecanismos de chaveamento reais, tais como zona morta, histerese, atraso, e/ou à presença de dinâmica não modelada da planta. Várias soluções vêm sendo propostas, desde o uso de regiões lineares (SLOTINE; LI, 1991; HSU; ARAÚJO; COSTA, 1994) à filtragem do sinal de controle (HSU, 1997). Mais recentemente, técnicas em modo dual, ou seja, que alternam entre duas estratégias de controle (MRAC e VS-MRAC), têm obtido excelentes resultados (CUNHA, C. et al., 2005; HSU; COSTA; REAL, 1999). Técnicas baseadas em HOSM também têm sido intensamente pesquisadas para a eliminação do *chattering* (BARTOLINI; FERRARA; USAI, 1998).

### 3.3.1 Equações Diferenciais Descontínuas

As equações diferenciais que surgem em sistemas a estrutura variável apresentam lado direito descontínuo (devido à descontinuidade introduzida pelo controle) e, assim, não é possível determinar uma constante de Lipschitz para garantir a unicidade de uma solução para o sistema. Filippov (1964) propôs uma definição que é particularmente adequada para o tipo de equações diferenciais que surgem em sistemas à estrutura variável. Basicamente, as soluções no sentido de Filippov são absolutamente contínuas como funções do tempo e, também, contínuas em relação às condições iniciais. Isto torna possível a extensão do método direto de Lyapunov na análise de estabilidade de sistemas à estrutura variável.

**Definição 3.1** (Filippov, 1964) Seja a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (3.29)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é definida para quase todo  $(x, t)$  e mensurável (no sentido de Lebesgue) em um domínio  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Além disso, para qualquer subconjunto compacto  $D \subset M$ ,  $\exists A(t)$  localmente integrável tal que  $\|f(x, t)\| \leq A(t)$  para quase todo  $(x, t)$  em  $D$ . Uma função vetorial  $x(\cdot)$  é denominada uma solução de (3.29) em  $[t_0, t_1]$  se  $x(\cdot)$  é absolutamente contínua em  $[t_0, t_1]$  e se para quase todo  $t \in [t_0, t_1]$

$$\frac{dx}{dt} \in K[f(x, t)], \quad (3.30)$$

com

$$K[f(t, x)] = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{\text{conv}} f[B(x, \delta) - N, t], \quad (3.31)$$

onde  $\bigcap_{\mu N=0}$  representa a intersecção de todos os conjuntos  $N$  de medida nula (no sentido de

Lebesgue),  $B(x, \delta)$  é uma bola de raio  $\delta$  e  $\overline{\text{conv}}$  denota o fecho convexo.

Em cada ponto da superfície de descontinuidade, o campo vetorial que determina a solução de (3.29) pertence ao conjunto convexo fechado mínimo que contém todos os valores de  $f(x)$ , quando  $x$  varia em quase toda a vizinhança  $\delta$  (com  $\delta \rightarrow 0$ ) do ponto sob consideração (a vizinhança completa exceto um conjunto de medida nula). A relação (3.30) é denominada uma inclusão diferencial.

A possibilidade de rejeitar um conjunto de medida nula é que permite a definição do campo vetorial em uma superfície de chaveamento. Na verdade, embora o campo vetorial nos pontos da superfície de descontinuidade seja incerto, para uma dada trajetória estes pontos constituem um conjunto de medida nula em uma vizinhança da superfície e, então, podem ser desprezados.

Se ocorrer deslizamento em uma vizinhança da superfície  $s$ , o campo vetorial  $f^*$  em cada ponto desta superfície pode ser determinado a partir dos campos vetoriais  $f^+$  e  $f^-$  direcionados conforme a Figura 3.4. Desta maneira é obtido um fecho convexo mínimo que é a base do método de Filippov. Uma vez que, por definição, o deslizamento ideal ocorre na superfície de deslizamento, o campo vetorial permanece em um plano tangencial à superfície. Assim a equação para o deslizamento ideal, definida de acordo com Filippov, para o sistema (3.29) é dada por

$$\dot{x} = f^*(x, t), \tag{3.32}$$

$$f^* = \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^-; \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \tag{3.33}$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro que depende das direções e magnitudes dos campos vetoriais  $f^+$ ,  $f^-$  e do gradiente da função  $s(x)$ .

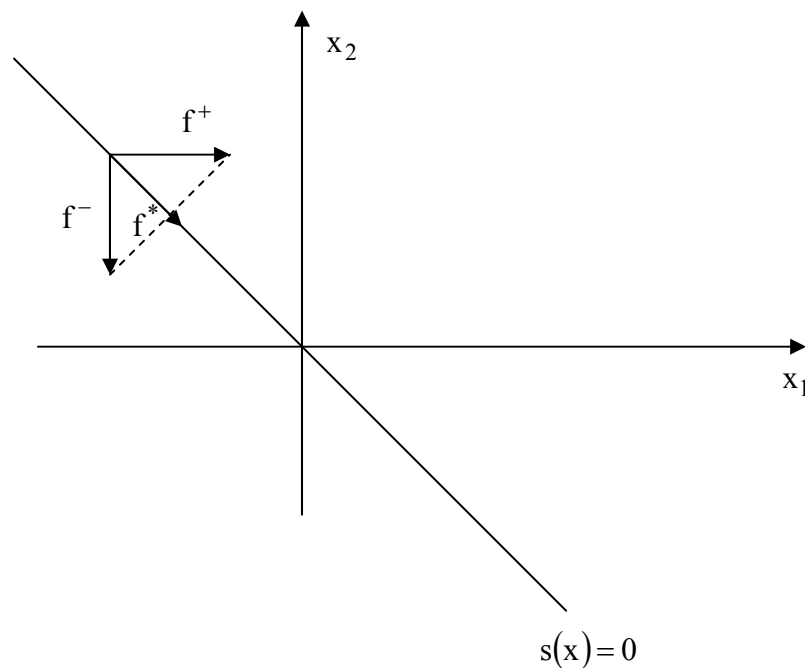


Figura 3.4 Campo vetorial no modo deslizante (solução de Filippov)

A definição acima permite garantir a existência e unicidade da solução em equações diferenciais com lado direito descontínuo e é muito útil em problemas de engenharia. Suponha que  $f(x, t)$  seja função de um relé não ideal, por exemplo, com um pequeno atraso de chaveamento. A solução de Filippov corresponde ao limite da solução de (3.29) com o atraso do relé tendendo a zero (UTKIN, 1978). Para sistemas da forma  $\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u$ , onde a equação diferencial é linear em relação à variável de controle  $u$ , a solução obtida pelo método do controle equivalente, que corresponde ao controle contínuo que seria aplicado durante o deslizamento ideal, coincide com a solução no sentido de Filippov, ou seja, se substituirmos  $u$  por  $u_{eq}$  na equação de  $\dot{x}$ , a solução obtida para  $x$  no modo deslizante é a solução no sentido de Filippov. Portanto, o trabalho de Filippov estabeleceu os primeiros passos para a utilização da teoria de Lyapunov em sistemas descontínuos. O seguinte Lema permite estender a teoria de Lyapunov para sistemas descontínuos do tipo (3.29).

**Lema 3.1** (BAYLEY; ARAPOSTATHIS, 1987) Seja (3.29) definida em um domínio  $M$ . Seja  $V(x, t)$  uma função continuamente diferenciável e  $w(x, t)$  uma função contínua tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x, t) + f(x, t) \nabla_x V(x, t) \leq w(x, t), \quad (3.34)$$

para quase todo  $(x, t)$  em  $M$ . Então, se  $x(t)$  é uma solução de (3.29) no sentido de Filippov, temos para quase todo  $t$ ,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) + f(x, t) \nabla_x V(x, t) \leq w(x(t), t). \quad (3.35)$$

■

O próximo Lema, denominado Teorema da Comparação de Filippov, é de grande importância e é utilizado ao longo deste trabalho.

**Lema 3.2** Sejam as equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t); \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.36)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, t); \quad y(t_0) = y_0, \quad (3.37)$$

onde  $f(x, t)$  e  $g(x, t)$  são definidas para quase todo  $(x, t)$  e mensuráveis (no sentido de Lebesgue) em um domínio  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Além disso, para qualquer subconjunto compacto  $D \subset M$ ,  $\exists A(t)$  e  $B(t)$  integráveis tais que  $\|f(t, x)\| \leq A(t)$  e  $\|g(t, x)\| \leq B(t)$  para quase todo

$(x, t)$  em  $D$ . Se  $y_0 \leq x_0$  e  $g(x, t) \leq f(x, t)$  para quase todo  $(x, t)$  em  $D$ , então,  $y(t) \leq x(t)$  para quase todo  $t \geq t_0$ . ■

### 3.3.2 Controle Equivalente Estendido

O controle equivalente em sistemas dinâmicos com modos deslizantes é usualmente definido durante a fase de deslizamento (UTKIN, 1978). O controle equivalente estendido foi definido por (HSU; COSTA, 1996) como uma generalização que se aplica ao movimento completo do sistema, i.e., dentro e fora da superfície de deslizamento  $\sigma(x(t), t) = 0$ . Seja a classe de sistemas não-lineares afins no controle descrita por (UTKIN, 1978)

$$\dot{x} = f(x, t) + \Gamma(x, t)u, \quad (3.38)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\Gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  são funções suaves. Seja  $x(t)$  uma solução deste sistema para  $t \in [0, T)$ . Então, o controle equivalente estendido é uma função localmente integrável definida em quase todo o intervalo  $[0, T)$ , obtida a partir da derivada total  $\frac{d}{dt}\sigma(x(t), t)$  e de (3.38), e é dado por

$$u_{eq} = [J\Gamma(x(t), t)]^{-1} \left[ \frac{d}{dt}\sigma(x(t), t) - Jf(x(t), t) - \frac{\partial}{\partial t}\sigma(x(t), t) \right], \quad (3.39)$$

onde  $J := \frac{\partial}{\partial t}\sigma(x(t), t)$  e se assume que  $\det[J\Gamma(x(t), t)] \neq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall t \in [0, T)$ . Essa expressão está bem definida uma vez que a solução  $x(t)$  é absolutamente contínua por definição e, portanto, tem derivadas em quase todo o tempo. No sentido usual, o controle equivalente é definido na superfície de deslizamento  $\sigma(x(t), t) = 0$ , então  $\frac{d}{dt}\sigma(x(t), t) = 0$  em (3.39).

### 3.4 Controle Adaptativo Direto por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC Direto)

Esta técnica teve origem na necessidade de encontrar um controlador que tornasse o sistema em malha fechada robusto em relação às incertezas da planta e perturbações, com desempenho transitório melhor que o obtido com o MRAC. A partir dos trabalhos de Ambrosino, Celentano e Garofalo (1984) e de Bartolini e Zolezzi (1988), Hsu e Costa (1989)

propuseram um controlador globalmente assintoticamente estável usando somente medições da entrada e saída para plantas LTI com  $n^* = 1$ . Este controlador foi desenvolvido baseado no conceito de adaptação por síntese de sinal (LANDAU, 1979), onde o sinal de controle a ser aplicado na planta é gerado a partir de parâmetros nominais do sistema e não envolve adaptação paramétrica explícita, e procurava associar as leis de adaptação paramétrica (3.20) do MRAC proposto por Narendra e Valavani (1978) com as idéias do SMC (UTKIN, 1978), com leis chaveadas da forma (3.25)-(3.26). Sendo assim, tendo em vista que tal desenvolvimento foi baseado no MRAC direto, foram propostas as seguintes leis para os parâmetros do controlador (3.12), a partir da teoria de estabilidade de Lyapunov,

$$\theta_i = -\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_0 \omega_i), \quad \bar{\theta}_i > |\theta_i^*|; \quad i = 1, 2, \dots, 2n, \quad (3.40)$$

onde  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$  são os elementos do vetor regressor  $\omega$  (3.10). Conforme (3.25)-(3.26), os parâmetros de projeto  $\bar{\theta}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , devem ser convenientemente dimensionados considerando as incertezas nos parâmetros da planta, ou seja, as incertezas nos coeficientes dos polinômios  $n_p$  e  $d_p$  (3.3)-(3.4) da função de transferência do sistema (3.2). Este fato torna necessária a adição de mais uma hipótese às hipóteses H1-H6 tradicionais do MRAC, ou seja,

**H7.** Os majorantes de  $\bar{\theta}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , são conhecidos.

A hipótese H7 está relacionada ao fato de que as estimativas para os parâmetros  $\theta_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , são sistematicamente obtidas a partir das expressões para os parâmetros do controlador (3.12) na condição de *matching*, utilizando os polinômios  $n_p$ ,  $n_m$ ,  $d_p$  e  $d_m$  conforme (3.3)-(3.4) e (3.6)-(3.7), a saber,

$$\begin{aligned} \theta_{v1,i}^* &= \frac{\beta_{m,n-i} - \beta_{n-i}}{\gamma}; \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \theta_n^* &= \frac{\alpha_1 - \alpha_{m,1}}{k_p}, \\ \theta_{v2,i}^* &= \frac{\alpha_{n-i+1} - \alpha_{m,n-i+1} - k_p \theta_n^* \beta_{m,n-i}}{k_p \gamma}; \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \theta_{2n}^* &= \frac{k_m}{k_p}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

com  $\gamma > 0$ . O desenvolvimento detalhado para a obtenção das equações acima pode ser encontrado no Apêndice B. Com o aumento da ordem do sistema, a estimativa dos parâmetros

acima pode se tornar árdua e, normalmente, o dimensionamento da amplitude dos relés, ou seja, dos parâmetros  $\bar{\theta}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , não se baseia na solução de (3.41). Em geral, atribui-se inicialmente valores grandes para os mesmos e diminui-se até o limite de instabilização, para ter-se uma idéia da faixa de tolerância dos valores. No entanto, o ideal seria realizar o projeto de modo a se ter a garantia da condição suficiente para a obtenção do modo deslizante, conforme (3.40).

Nesse sentido, considerando que se dispõe de um modelo nominal para a planta, cujos parâmetros são conhecidos com incertezas e limitados, e que tais incertezas estão associadas às tolerâncias de parâmetros físicos do sistema, tais como resistências, capacitâncias, momentos de inércia e outros, a idéia seria projetar leis chaveadas não mais para os parâmetros do controlador (enfoque direto), mas sim para os parâmetros da planta (enfoque indireto). Desse modo, o dimensionamento da amplitude dos relés seria mais intuitivo, tendo em vista que as incertezas em tais parâmetros, por serem associadas diretamente à relação entre grandezas físicas, são mais facilmente conhecidas e determinadas. Os trabalhos de Oliveira e Araújo (2002) e de Oliveira (2003) iniciaram o estudo de uma alternativa ao projeto do VS-MRAC, baseado nesta perspectiva. Resultados práticos (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2003, 2004) e de simulações apresentaram um comportamento semelhante ao do caso direto, apresentando, contudo, um projeto notadamente simplificado. Nesta tese, uma primeira prova de estabilidade formal é apresentada, considerando perturbações e dinâmica não modelada, juntamente com duas versões para o IVS-MRAC, motivadas pela análise e modificações nas leis chaveadas originais. Análise semelhante foi apresentada para o caso direto em Costa e Hsu (1992), baseada no método da perturbação singular (KOKOTOVIC; KHALIL, 1986) e terá seus principais resultados sumarizados na seção 3.4.2, para efeitos de comparação com os resultados obtidos para o caso indireto. Tendo suas propriedades de estabilidade equivalentes ao caso direto, propõe-se a posterior extensão do IVS-MRAC a outras classes de plantas, de modo a possibilitar sua intensa aplicação.

O fato de projetar leis chaveadas para os parâmetros da planta e incorporar as expressões (3.41) no algoritmo, incrementam a complexidade e carga computacional do mesmo, dificultando sua realização em sistemas embarcados, por exemplo. Contudo, neste trabalho, esta possível desvantagem em relação ao caso direto é superada através da derivação da versão compacta do VS-MRAC indireto para o caso de grau relativo unitário, a qual utiliza



apenas um relé e não incorpora as expressões (3.41) no algoritmo. A versão compacta para o caso direto baseia-se no fato de que em certos sistemas a realização deste algoritmo requisitaria um número grande de relés de amplitude modulada. Para superar esta dificuldade foram propostas modificações na lei de controle original. Uma primeira modificação foi utilizar um vetor com valores nominais dos parâmetros do controlador ( $\theta_{nom}$ ). Adicionalmente, reduziu-se o número de relés do algoritmo de controle. Este novo algoritmo foi denominado VS-MRAC Direto Compacto (HSU; ARAÚJO; LIZARRALDE, 1993), o qual é revisado na seção abaixo.

### 3.4.1 VS-MRAC Direto Compacto

Com a introdução do vetor de parâmetros nominais na lei de controle (3.11) fica-se com

$$u = \theta^T \omega + u_{nom}, \quad u_{nom} = \theta_{nom}^T \omega \quad (3.42)$$

Neste caso, a condição suficiente para a obtenção do modo deslizante fica, a partir de (3.40),

$$\theta_i = -\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_o \omega_i), \quad \bar{\theta}_i > |\theta_i^* - \theta_{nom,i}|; \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

Desenvolvendo (3.42) e usando a expressão acima, tem-se

$$\begin{aligned} u &= \theta^T \omega + \theta_{nom}^T \omega \\ u &= (\theta + \theta_{nom})^T \omega \\ u &= \sum_{i=1}^{2n} (\theta_i + \theta_{nom,i}) \omega_i \\ u &= \sum_{i=1}^{2n} [-\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_o \omega_i) + \theta_{nom,i}] \omega_i \\ u &= \sum_{i=1}^{2n} [-\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(\omega_i) \omega_i \operatorname{sgn}(e_o) + \theta_{nom,i} \omega_i] \\ u &= \sum_{i=1}^{2n} [-\bar{\theta}_i |\omega_i| \operatorname{sgn}(e_o) + \theta_{nom,i} \omega_i] \\ u &= -\left( \sum_{i=1}^{2n} \bar{\theta}_i |\omega_i| \right) \operatorname{sgn}(e_o) + \sum_{i=1}^{2n} \theta_{nom,i} \omega_i \end{aligned}$$

Tem-se, então, que

$$u = -u_0 + u_{nom}, \quad (3.43)$$

com  $u_0 = f_0 \operatorname{sgn}(e_o)$ , onde  $f_0 = \sum_{i=1}^{2n} \bar{\theta}_i |\omega_i|$  é denominada função de modulação do relé, e

$u_{\text{nom}} = \theta_{\text{nom}}^T \omega$  é o controle nominal. Este algoritmo foi denominado *VS-MRAC Compacto* devido à simplificação introduzida na lei de controle através da redução do número de relés.

### 3.4.2 Estabilidade e Robustez do VS-MRAC Direto

Nesta seção são sumarizados os principais resultados obtidos por Costa e Hsu (1992) sobre a estabilidade e robustez do VS-MRAC direto às perturbações e dinâmica não modelada, para fins de comparação com os resultados obtidos para o caso indireto, a serem apresentados nos próximos capítulos. Tal análise baseia-se no modelo do sistema (3.1) escrito na forma semi-desacoplada (2.10)-(2.13), denominada *forma do atuador* (KOKOTOVIC; KHALIL, 1986), de modo a incluir explicitamente a dinâmica não modelada e a perturbação atuando na entrada da planta.

**Teorema 3.1** Seja o sistema (3.1) escrito na forma do atuador (2.10)-(2.13), com as leis do VS-MRAC dadas por (3.40). Se  $\mu = 0$  e todas as hipóteses H1-H7 são satisfeitas, então

1. Todos os sinais do sistema são uniformemente limitados;
2. Se  $d = 0$  (perturbação na entrada da planta), o erro de saída  $e_o(t)$  tende a zero pelo menos exponencialmente, independente do sinal  $r(t)$ , assumido limitado superiormente e contínuo por partes;
3. Se  $\|\omega(t)\| > c_1 \bar{d} + c_2$ ,  $\forall t \geq T$ ,  $T$  finito, então  $e_o(t)$  vai para zero em tempo finito e permanece como um modo deslizante na superfície  $e_o = h^T e = 0$ , onde  $\bar{d}$  é um limitante superior para  $d(t)$ ,  $\sup|d(t)| \leq \bar{d}$  assumido conhecido, sendo  $d(t)$  uniformemente contínuo por partes.
4.  $e(t)$  tem um conjunto compacto residual dado por  $\{e : \|e\| \leq k\bar{d}\}$ ,  $k > 0$ .

**Prova:** (COSTA; HSU, 1992) ■

**Teorema 3.2** Seja o sistema (3.1) escrito na forma do atuador (2.10)-(2.13). Se  $\mu \in (0, \bar{\mu}]$ ,  $\bar{\mu} > 0$  suficientemente pequeno, e todas as hipóteses H1-H7 são satisfeitas, então toda trajetória do sistema entra em um conjunto residual compacto invariante da forma

$$D_R = \left\{ (e, z) : V(e, z) \leq (c_1 \sqrt{\mu} + c_2 \bar{d} + \delta)^2 \right\}$$

em tempo finito, onde  $c_1, c_2 > 0$  e  $\delta > 0$  é arbitrariamente pequeno e  $\bar{d}$  é um limitante superior para  $d(t)$ ,  $\sup |d(t)| \leq \bar{d}$  assumido conhecido, sendo  $d(t)$  uniformemente contínuo por partes.

**Prova:** (COSTA; HSU, 1992). ■

**Corolário 3.1** Se, além das hipóteses feitas no Teorema 3.2, tem-se  $\|\omega\| \geq \bar{c}_1 \sqrt{\mu} + \bar{c}_2 \bar{d} + \bar{\delta}$ , para algumas constantes positivas  $\bar{c}_1, \bar{c}_2$  e  $\bar{\delta}$  arbitrariamente pequena,  $\forall t \geq t_0$ ,  $t_0$  finito, então o erro de saída  $e_o$  é da ordem de  $\mu$ .

**Prova:** (COSTA; HSU, 1992). ■

### 3.5 Conclusões

Este capítulo procurou sumarizar os principais conceitos e equações associadas ao VS-MRAC para sistemas com grau relativo unitário, com o intuito de facilitar o estudo do caso indireto. A teoria do MRAC e VSS revisada neste capítulo teve por objetivo fundamentar a origem do VS-MRAC direto e dar subsídios para a derivação, compreensão e posterior análise do IVS-MRAC. Ao final, foram apresentados os principais resultados de estabilidade e robustez para o caso de grau relativo unitário, para fins de comparação com os resultados a serem apresentados nos próximos capítulos.

## Capítulo 4

# Fundamentação e Desenvolvimento do VS-MRAC Indireto (IVS-MRAC)

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, o objetivo é apresentar o desenvolvimento da versão indireta do VS-MRAC para o caso de grau relativo unitário, proposta inicialmente por Oliveira e Araújo (2002) e Oliveira (2003), a partir das equações fundamentais do MRAC indireto. A fim de tornar o capítulo autocontido, a formulação e hipóteses do MRAC indireto são brevemente revisadas. A análise das leis chaveadas originais motivará a derivação de duas versões para o IVS-MRAC, a serem apresentadas nos próximos capítulos, com suas respectivas análises de estabilidade na presença de dinâmica não modelada e perturbações. O IVS-MRAC surge como uma alternativa de projeto ao caso direto (HSU; COSTA, 1989), com a motivação de tornar mais intuitivo o dimensionamento das amplitudes dos relés utilizados em suas leis chaveadas, por estarem associadas diretamente aos parâmetros da planta. Estes, por sua vez, representam relações entre parâmetros físicos do sistema, tais como resistências, capacitâncias, momentos de inércia, coeficientes de atrito etc., que possuem incertezas mais facilmente conhecidas.

### 4.2 Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência (MRAC Indireto)

Nesta seção, o desenvolvimento do MRAC indireto seguirá o apresentado por Ioannou e Sun (1996), com as devidas modificações de nomenclatura para se adequar aos termos utilizados ao longo deste trabalho. No controle adaptativo indireto, os parâmetros da planta são estimados e então utilizados para calcular os parâmetros do controlador. O IVS-MRAC se baseia nesta abordagem, porém sob o conceito de adaptação por síntese de sinal, onde não há adaptação paramétrica explícita, e sim um chaveamento paramétrico.

No controle adaptativo indireto, o modelo da planta  $P(\theta_p^*)$  é parametrizado em relação a um vetor de parâmetros  $\theta_p^*$ . Por exemplo, para uma planta SISO, LTI,  $\theta_p^*$  pode representar os coeficientes do numerador e do denominador da função de transferência do seu modelo. Um estimador gera uma estimativa  $\theta_p(t)$  de  $\theta_p^*$ , processando a entrada  $u$  e a saída  $y$ . A estimativa dos parâmetros  $\theta_p(t)$  especifica um modelo estimado caracterizado por  $\hat{P}(\theta_p(t))$  que, para os propósitos do projeto do controlador, é tratado como o verdadeiro modelo da planta no instante  $t$ , e é usado para calcular os parâmetros do controlador  $\theta(t)$  através da equação algébrica  $\theta(t) = F(\theta_p(t))$ . As formas da lei de controle  $C(\theta)$  e da equação algébrica  $\theta = F(\theta_p)$  são escolhidas como as mesmas que seriam usadas (lei de controle  $C(\theta^*)$  e equação  $\theta^* = F(\theta_p^*)$ ) para atender os requisitos de desempenho para o modelo  $P(\theta_p^*)$ , caso  $\theta_p^*$  fosse conhecido. É claro que, neste método,  $C(\theta(t))$  é projetada de modo a satisfazer os requisitos de desempenho do modelo estimado  $\hat{P}(\theta_p(t))$ , que pode ser diferente do modelo da planta desconhecida  $P(\theta_p^*)$ . Assim, o principal problema no controle adaptativo indireto é escolher a classe de leis de controle  $C(\theta)$  e a classe de estimadores de parâmetros que geram  $\theta_p(t)$ , bem como a equação algébrica  $\theta(t) = F(\theta_p(t))$ , de forma que  $C(\theta(t))$  atenda os requisitos de desempenho para o modelo  $P(\theta_p^*)$ , com  $\theta_p^*$  conhecido. A Figura 4.1 mostra o diagrama de blocos para o controle adaptativo indireto.

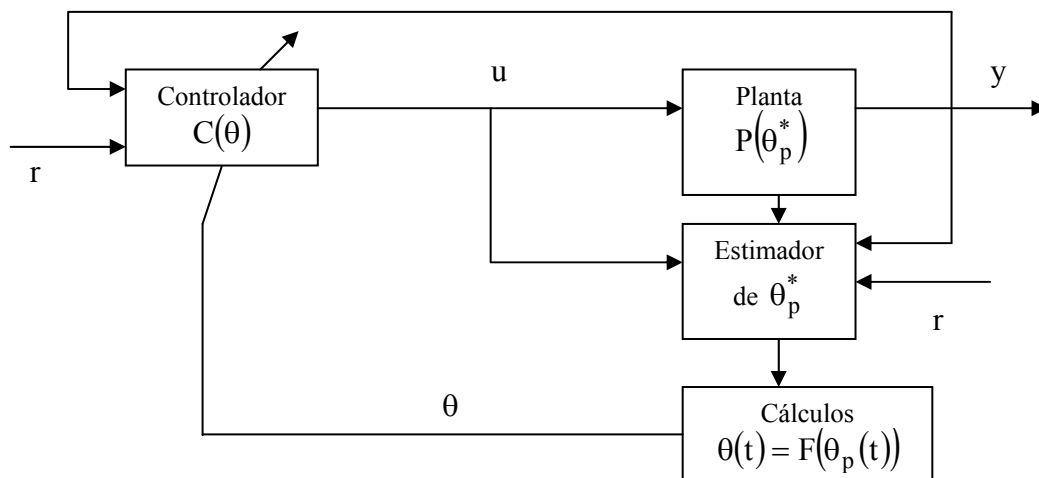


Figura 4.1 Diagrama de blocos para o controle adaptativo indireto

Quando é incorporado um modelo de referência ao esquema da Figura 4.1, o erro de saída  $e_o$  é adicionado ao estimador dos parâmetros da planta  $e$ , com isso, surge o MRAC indireto, cujo diagrama de blocos é apresentado na Figura 4.2.

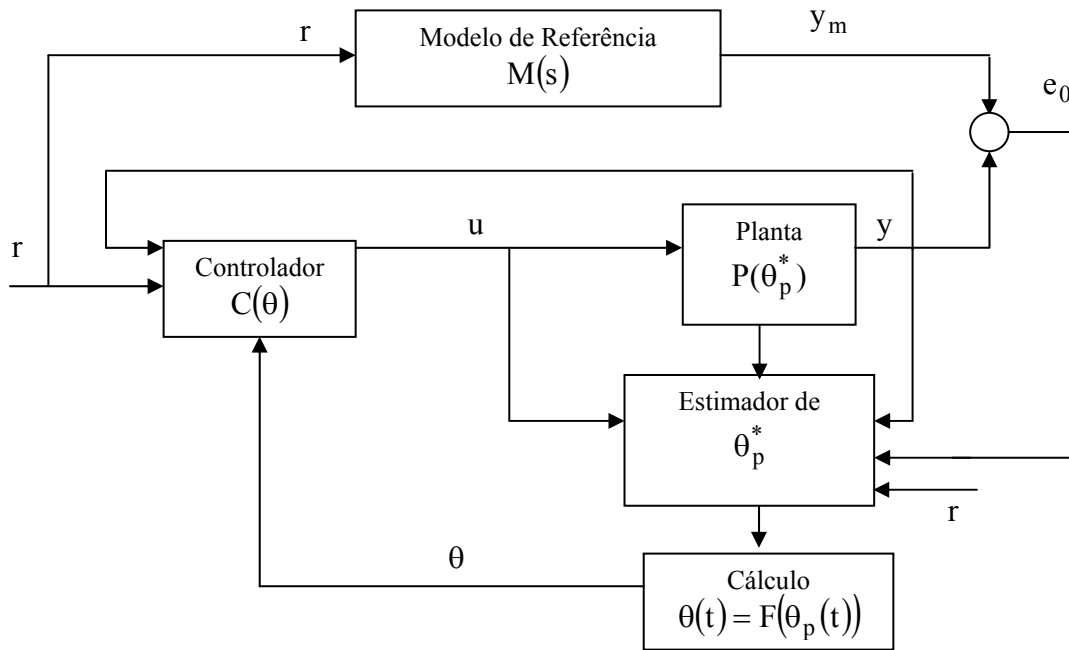


Figura 4.2 Diagrama de blocos do MRAC indireto

### 4.2.1 Parametrização e Hipóteses

Esta seção considera o controle de plantas SISO, LTI, conforme a seção 3.2.1, cuja parametrização é revisada aqui a fim de tornar o capítulo autocontido e de nortear a derivação da equação do erro para o caso indireto. Os sistemas considerados são dados em sua representação para o *caso ideal*, no espaço de estados, por:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = h^T x, \quad (4.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u$  é a entrada e  $y$  é a saída. O modelo E/S para (4.1) é dado pela função de transferência

$$W(s) = h^T (sI - A)^{-1} b = k_p \frac{n_p(s)}{d_p(s)}, \quad (4.2)$$

onde  $k_p$  é o ganho de alta frequência. A matriz  $A$  e os vetores  $b, c$  possuem incertezas, mas pertencem a conjuntos conhecidos. A partir de (4.2), para  $n^* = 1$ ,  $n_p$  e  $d_p$  são polinômios mônicos definidos como

$$n_p(s) = s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i s^{n-1-i}, \quad (4.3)$$

$$d_p(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} s^{n-1-i}. \quad (4.4)$$

O modelo de referência é definido por

$$y_m(s) = M(s)r(s), \quad M(s) = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)}, \quad (4.5)$$

onde  $y_m$  é a saída. Assume-se que o sinal de referência  $r$  é contínuo por partes e uniformemente limitado. De maneira similar a (4.3)-(4.4),  $n_m$  e  $d_m$  são escritos como,

$$n_m(s) = s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{m,i} s^{n-1-i}, \quad (4.6)$$

$$d_m(s) = s^n + \alpha_{m,1} s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{m,i+1} s^{n-1-i}. \quad (4.7)$$

A partir das expressões (4.3)-(4.4) e (4.6)-(4.7) define-se o vetor com os parâmetros da planta, supostos conhecidos,  $\theta_p^*$ , a saber,

$$\theta_p^* = [k_p^*, \beta^{*T}, \alpha_1^*, \alpha^{*T}]^T, \quad (4.8)$$

onde  $\beta \in \mathbb{R}^{n-1}$  contém os elementos  $\beta_i$  ( $i = n-1, \dots, 1$ ) de (4.3),  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$  é o elemento  $\alpha_1$  de (4.4),  $\alpha \in \mathbb{R}^{n-1}$  contém os elementos  $\alpha_{i+1}$  ( $i = n-1, \dots, 1$ ) de (4.4) e, do mesmo modo, definem-se  $\beta_m$ ,  $\alpha_{m,1}$  e  $\alpha_m$ , com respeito à (4.6)-(4.7). Quando os parâmetros da planta são desconhecidos ou conhecidos com incertezas, o vetor estimado é dado por,

$$\hat{\theta}_p = [\hat{k}_p, \hat{\beta}^T, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}^T]^T, \quad (4.9)$$

e o erro nos parâmetros da planta é dado pela diferença entre (4.9) e (4.8), ou seja,

$$\tilde{\theta}_p = \hat{\theta}_p - \theta_p^*, \quad (4.10)$$

onde

$$\tilde{k}_p = \hat{k}_p - k_p^*, \quad (4.11)$$

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta} - \beta^*, \quad (4.12)$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_1 - \alpha_1^*, \quad (4.13)$$

$$\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha^*. \quad (4.14)$$

Utilizando (4.8) para simplificar a notação, os parâmetros do controlador (3.12) na condição de *matching* (Apêndice B) são dados por,

$$\theta_{v1}^* = \frac{\beta_m - \beta^*}{\gamma}, \quad (4.15)$$

$$\theta_n^* = \frac{\alpha_1^* - \alpha_{m,1}}{k_p^*}, \quad (4.16)$$

$$\theta_{v2}^* = \frac{\alpha^* - \alpha_m + (\alpha_{m,1} - \alpha_1^*)\beta_m}{k_p^* \gamma}, \quad (4.17)$$

$$\theta_{2n}^* = \frac{k_m}{k_p^*}, \quad (4.18)$$

onde  $\gamma > 0$ .

Para o caso indireto, as mesmas hipóteses do caso direto são válidas, a saber,

**H1.** A planta é monovariável, controlável, observável e tem grau relativo unitário;

**H2.** O grau  $n$  de  $d_p(s)$  é conhecido;

**H3.**  $k_m$  e  $k_p$  têm o mesmo sinal (positivo, sem perda de generalidade);

**H4.** O modelo é ERP e tem o mesmo grau relativo da planta;

**H5.**  $n_p(s)$ ,  $n_m(s)$  e  $d_m(s)$  são polinômios mônicos Hurwitz;

**H6.**  $d_p(s)$  é um polinômio mônico;

#### 4.2.2 Equação do Erro

Para a obtenção da equação geral do erro do MRAC indireto, parte-se da equação do erro obtida para o caso direto (3.19),

$$\dot{e} = A_c e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c (u - u^*),$$

onde  $A_c$  e  $b_c$  são definidos como em (3.16). No MRAC indireto, a equação do erro deve conter explicitamente os parâmetros da planta, o que é realizado através de uma manipulação algébrica na equação de  $\dot{e}$  (IOANNOU; SUN, 1996). Sabendo que, conforme

(4.18),  $\frac{1}{\theta_{2n}^*} = \frac{k_p^*}{k_m}$ , tem-se,

$$\dot{e} = A_c e + \frac{b_c}{k_m} k_p^* (u - u^*) = A_c e + \frac{b_c}{k_m} (k_p^* u - k_p^* u^*). \quad (4.19)$$

Introduzindo o termo  $\hat{k}_p u - \hat{k}_p u$  em (4.19) e lembrando que  $u = \theta^T \omega$  (3.11) e  $u^* = \theta^{*T} \omega$  (3.13), obtém-se,



$$\dot{e} = A_c e + \frac{b_c}{k_m} \left( k_p^* u - k_p^* \theta^{*T} \omega - \hat{k}_p u + \hat{k}_p \theta^T \omega \right). \quad (4.20)$$

Expandindo os termos  $\theta^{*T} \omega$  e  $\theta^T \omega$  em (4.20) conforme (3.11) e (3.13) e utilizando (4.11)-(4.14) e (4.15)-(4.18), tem-se,

$$\dot{e} = A_c e + \frac{b_c}{k_m} \left( \tilde{k}_p \left( \frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u - \frac{\hat{\beta}^T v_1}{\gamma} \right) + \tilde{\alpha}_1 \left( y - \frac{\beta_m^T v_2}{\gamma} \right) + \frac{\tilde{\alpha}^T v_2}{\gamma} - \frac{k_p^* \tilde{\beta}^T v_1}{\gamma} \right), \quad (4.21)$$

que, para simplificar a notação, pode ser escrita como,

$$\dot{e} = A_c e + \frac{b_c}{k_m} \left( \tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right), \quad (4.22)$$

onde introduz-se o vetor auxiliar  $\zeta$ , dado por,

$$\zeta = \left[ \zeta_p \quad k_p^* \zeta_\beta^T \quad \zeta_1 \quad \zeta_\alpha^T \right]^T, \quad (4.23)$$

com  $\zeta_p, \zeta_1 \in \mathbb{R}$  e  $\zeta_\alpha, \zeta_\beta \in \mathbb{R}^{n-1}$ . De acordo com (4.21) e (4.22), os elementos de (4.23) são dados por,

$$\zeta_p = \frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u - \frac{\hat{\beta}^T v_1}{\gamma}, \quad (4.24)$$

$$\zeta_\beta^T = \left[ \zeta_{\beta_1} \quad \dots \quad \zeta_{\beta_{n-1}} \right], \quad \zeta_{\beta_i} = \frac{-v_{1,i}}{\gamma}, \quad (4.25)$$

$$\zeta_1 = y - \frac{\beta_m^T v_2}{\gamma}, \quad (4.26)$$

$$\zeta_\alpha^T = \left[ \zeta_{\alpha_2} \quad \dots \quad \zeta_{\alpha_n} \right], \quad \zeta_{\alpha_i} = \frac{v_{2,i-1}}{\gamma}. \quad (4.27)$$

Definindo,

$$\tilde{\theta}_p = \left[ \tilde{k}_p \quad \tilde{\beta}^T \quad \tilde{\alpha}_1 \quad \tilde{\alpha}^T \right]^T, \quad (4.28)$$

e, usando (4.23), a equação do erro do MRAC indireto pode ser escrita como

$$\dot{e} = A_c e + \frac{b_c}{k_m} \left( \tilde{\theta}_p^T \zeta \right). \quad (4.29)$$

### 4.2.3 Lei de Adaptação para o Vetor de Parâmetros da Planta

Conforme Ioannou e Sun (1996), o MRAC indireto utiliza leis integrais de adaptação para os elementos do vetor de parâmetros da planta (4.9), as quais são dadas em sua forma mais simples, para o grau relativo unitário, por,

$$\dot{\hat{\beta}} = \Gamma_{\beta} e_0 v_1, \quad \Gamma_{\beta} = \Gamma_{\beta}^T > 0, \quad (4.30)$$

$$\dot{\hat{\alpha}}_1 = -\gamma_1 e_0 \zeta_1, \quad \gamma_1 > 0, \quad (4.31)$$

$$\dot{\hat{\alpha}} = -\Gamma_{\alpha} e_0 v_2, \quad \Gamma_{\alpha} = \Gamma_{\alpha}^T > 0, \quad (4.32)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{k}}_p = -\gamma_p e_0 \zeta_p, & \text{Se } (|\hat{k}_p| > k_0) \text{ ou } (|\hat{k}_p| = k_0 \text{ e } e_0 \zeta_p \text{sgn}(\hat{k}_p) \leq 0) \\ \dot{\hat{k}}_p = 0 & \text{, em caso contrário,} \end{cases} \quad (4.33)$$

onde  $\gamma_p > 0$  e  $k_0 > 0$  é um limitante inferior conhecido para  $|k_p^*|$  de modo a não ocorrer singularidade em (4.16)-(4.18), e é escolhido tal que satisfaça  $\hat{k}_p(0) \text{sgn}(k_p^*) \geq k_0 > 0$ . Uma vez estimados os parâmetros da planta, os mesmos são utilizados nas expressões dos parâmetros do controlador (4.15)-(4.18), substituindo-se os respectivos valores exatos (\*) por suas estimativas (^), conforme a abordagem indireta da Figura 4.2. Assim como no VS-MRAC direto, onde as leis chaveadas procedem naturalmente do MRAC direto, Oliveira e Araújo (2002) propuseram leis chaveadas para os parâmetros da planta a partir da observação das leis (4.30)-(4.33), a serem apresentadas na próxima seção.

### 4.3 Projeto do VS-MRAC Indireto

O projeto do VS-MRAC baseado na abordagem indireta do controle adaptativo (Seção 4.2), tem por objetivo tornar mais intuitivo o dimensionamento da amplitude dos relés utilizados nas leis chaveadas, tendo em vista que no caso direto, à medida que a ordem do sistema aumenta, este dimensionamento pode se tornar árduo, conforme as expressões (4.15)-(4.18) e as leis propostas por Hsu e Costa (1989), (3.40) e Seção 3.4. Esta motivação se evidencia pela observação das leis originais propostas para o IVS-MRAC indireto para os parâmetros da planta (4.9), obtidas a partir de uma modificação em (4.30)-(4.33), a saber,

$$\hat{k}_p = -\bar{k}_p \text{sgn}(e_0 \zeta_p), \quad (4.34)$$

$$\hat{\beta}_i = -\bar{\beta}_i \operatorname{sgn}(e_o \zeta_{\beta_i}), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (4.35)$$

$$\hat{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_1 \operatorname{sgn}(e_o \zeta_1), \quad (4.36)$$

$$\hat{\alpha}_i = -\bar{\alpha}_i \operatorname{sgn}(e_o \zeta_{\alpha_i}), \quad i = 2, \dots, n, \quad (4.37)$$

onde os sinais auxiliares  $\zeta$  são dados como em (4.24)-(4.27). Neste caso, as condições *suficientes* (OLIVEIRA, 2003) para o dimensionamento das amplitudes dos relés em (4.34)-(4.37) e conseqüente obtenção do modo deslizante, conforme (3.25)-(3.26) e (3.40), são,

$$\bar{k}_p > |k_p^*|, \quad (4.38)$$

$$\bar{\beta}_i > |\beta_i^*|, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (4.39)$$

$$\bar{\alpha}_1 > |\alpha_1^*|, \quad (4.40)$$

$$\bar{\alpha}_i > |\alpha_i^*|, \quad i = 2, \dots, n. \quad (4.41)$$

Tais condições consistem na principal contribuição do desenvolvimento do VS-MRAC indireto. Nesse sentido, não se faz mais necessário estimar os limitantes dos parâmetros do controlador  $\bar{\theta}_i$ ,  $i = 1, \dots, 2n$ , (3.40) através das expressões de *matching* (4.15)-(4.18), as quais, inclusive, dependem dos próprios parâmetros da planta. Agora, as amplitudes dos relés estão diretamente relacionadas aos elementos do vetor  $\theta_p$  (4.9), que podem ter suas incertezas, tolerâncias ou variações mais facilmente conhecidas, por estarem associados às relações entre parâmetros físicos, como resistências, capacitâncias, momentos de inércia, coeficientes de atrito, etc. De posse das *estimativas* dos parâmetros da planta (4.34)-(4.37), os parâmetros do controlador são então calculados e usados para sintetizar o sinal de controle (3.11). O destaque em “estimativas” acima é necessário, tendo em vista que não se tem adaptação de parâmetros e sim síntese de sinal. O referido termo é usado apenas por questões de coerência de notação com a utilizada em controle adaptativo.

A lei para o ganho de alta freqüência da planta (4.34) pode torná-lo negativo, devido a seu comportamento descontínuo e, com isso, a hipótese H3 seria violada, a qual considera  $k_p$  e  $k_m$  positivos. Este fato pode ser resolvido adicionando-se à (4.34) um valor nominal positivo para  $k_p$ , ou seja,

$$\hat{k}_p = k_p^{\text{nom}} - \bar{k}_p \operatorname{sgn}(e_o \zeta_p). \quad (4.42)$$

Com esta modificação, o dimensionamento de  $\bar{k}_p$  deve satisfazer,

$$\bar{k}_p > \left| k_p^* - k_p^{\text{nom}} \right|, \text{ com } k_p^{\text{nom}} > \bar{k}_p. \quad (4.43)$$

As condições (4.39)-(4.41) e (4.43) exigem a introdução de mais uma hipótese à H1-H6, a saber,

**H7.** Os limitantes superiores de  $k_p^*, \beta_i^*$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ),  $\alpha_1^*$  e  $\alpha_i^*$  ( $i = 2, \dots, n$ ) são conhecidos.

Utilizando as leis (4.35)-(4.37), (4.42) e a candidata à função de Lyapunov  $V(e) = \frac{1}{2} e^T P e$ ,  $P = P^T > 0$ , Oliveira (2003) demonstrou, preliminarmente, a estabilidade global assintótica do IVS-MRAC, derivando a função  $V(e)$  ao longo das trajetórias do sistema (4.22). Tal demonstração foi preliminar no sentido de supor disponíveis alguns sinais necessários à prova, utilizando as leis chaveadas como em (4.35)-(4.37) e (4.42), e considerou apenas o caso ideal (sem perturbações nem dinâmica não modelada), embora os excelentes resultados práticos obtidos em Oliveira e Araújo (2003, 2004) tenham sugerido a robustez desta estratégia de controle quando perturbações externas e modelos reduzidos da planta são considerados. Na próxima seção, será realizada uma análise nas leis originais do IVS-MRAC, a fim de motivar o desenvolvimento de duas versões a serem apresentadas nos próximos capítulos, com suas respectivas análises de estabilidade e resultados de simulações.

#### 4.4 Comentários sobre o IVS-MRAC

Ao realizar procedimento semelhante ao utilizado por Hsu e Costa (1989), que derivaram o VS-MRAC direto do MRAC direto, as leis chaveadas do IVS-MRAC obtidas a partir do MRAC indireto (4.34)-(4.37) necessitam de algumas modificações. Uma primeira modificação foi apresentada na seção anterior, e introduziu um valor nominal de  $k_p$  em (4.34), gerando a expressão (4.42), a fim de garantir as hipóteses consideradas na seção 4.2.1. Esta lei para  $k_p$ , por sua vez, possui algumas características interessantes que merecem ser destacadas.

Seja a lei (4.42),

$$\hat{k}_p = k_p^{\text{nom}} - \bar{k}_p \operatorname{sgn}(e_o \zeta_p),$$

e o sinal  $\zeta_p$  conforme (4.24),

$$\zeta_p = \frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u - \frac{\hat{\beta}^T v_1}{\gamma}.$$

Substituindo (4.35) em  $\zeta_p$ , tem-se,

$$\zeta_p = \frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u + \frac{[\bar{\beta} \operatorname{sgn}(e_o \zeta_\beta)]^T v_1}{\gamma}, \quad (4.44)$$

e, conseqüentemente, (4.42) resulta em

$$\begin{aligned} \hat{k}_p &= k_p^{\text{nom}} - \bar{k}_p \operatorname{sgn} \left\{ e_o \left[ \frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u + \frac{[\bar{\beta} \operatorname{sgn}(e_o \zeta_\beta)]^T v_1}{\gamma} \right] \right\}, \\ \hat{k}_p &= k_p^{\text{nom}} - \bar{k}_p \operatorname{sgn} \left\{ e_o \left[ [\bar{\beta}_m + \bar{\beta} \operatorname{sgn}(e_o \zeta_\beta)]^T \frac{v_1}{\gamma} - u \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde se observa claramente no segundo termo de (4.45) a presença de uma *descontinuidade aninhada* da forma,

$$\hat{k}_p = k_p^{\text{nom}} - \bar{k}_p \operatorname{sgn}(k_1 + k_2 \operatorname{sgn}(\cdot) + k_3), \quad (4.46)$$

com  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  definidos apropriadamente conforme (4.45). Funções compostas contínuas do tipo  $(f_2 \circ f_1)(\cdot) = f_2[f_1(\cdot)]$  são possíveis quando as funções envolvidas  $(f_1, f_2)$  são contínuas. No segundo termo de (4.46), as duas funções são descontínuas e, a princípio, a composição não é definida matematicamente no escopo da Teoria de Filippov (1964), conforme observações feitas no trabalho de Hsu, Costa e Lizarralde (1993). Composições deste tipo são comuns em observadores por modos deslizantes, ao associar-se controlador e observador descontínuos. Alguns trabalhos utilizam funções do tipo  $f_2[f_1(\cdot)_{\text{av}}]$ , ou seja, introduz-se um filtro no argumento da função sinal interna. Justificativas teóricas para este artifício, baseadas no conceito de controle equivalente (UTKIN, 1978) foram dadas por Wang e Weiwen (2003) e Mokhtari et al. (2006). Outros trabalhos evitam lidar diretamente com estas funções e utilizam funções descontínuas ponderadas (ALESSANDRI, 2000; HSU; NUNES; LIZARRALDE, 2004). Nesta tese propõe-se a eliminação desta descontinuidade aninhada, para tornar o algoritmo bem definido do ponto de vista matemático.

#### 4.4.1 Eliminação da Descontinuidade Aninhada

Se a análise considerar apenas o sinal  $\zeta_p$  em (4.42) fica clara a existência de tal descontinuidade, conforme visto na seção anterior. A idéia consiste, portanto, em analisar todo o argumento da função sinal em (4.42), ou seja,  $e_o \zeta_p$ .

Seja  $\zeta_p$  conforme (4.24) e um sinal auxiliar  $v = e_o \zeta_p$ . Tem-se, portanto,

$$v = e_o \zeta_p = e_o \left( \frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u - \frac{\hat{\beta}^T v_1}{\gamma} \right).$$

Substituindo  $\zeta_\beta = -\frac{v_1}{\gamma}$  (4.25),

$$v = e_o \zeta_p = e_o \left( -\beta_m^T \zeta_\beta - u + \hat{\beta}^T \zeta_\beta \right) = e_o \left[ \left( \hat{\beta} - \beta_m \right)^T \zeta_\beta - u \right]. \quad (4.47)$$

Substituindo a expressão de  $\hat{\beta}$  conforme (4.35) em (4.47), tem-se,

$$\begin{aligned} v &= e_o \left[ \left( \hat{\beta} - \beta_m \right)^T \zeta_\beta - u \right] \\ v &= e_o \left\{ \left[ -\bar{\beta} \operatorname{sgn}(e_o \zeta_\beta) - \beta_m \right]^T \zeta_\beta - u \right\} \\ v &= \left[ -\bar{\beta} \operatorname{sgn}(e_o \zeta_\beta) - \beta_m \right]^T e_o \zeta_\beta - e_o u \\ v &= -\bar{\beta}^T |e_o \zeta_\beta| - \beta_m^T e_o \zeta_\beta - e_o u \\ v &= -|e_o \bar{\beta}^T| |\zeta_\beta| - e_o \beta_m^T \zeta_\beta - e_o u. \end{aligned}$$

Logo, (4.42) é reescrita como,

$$\hat{k}_p = k_p^{\text{nom}} - \bar{k}_p \operatorname{sgn}(v), \quad (4.48)$$

onde

$$v = -|e_o \bar{\beta}^T| |\zeta_\beta| - e_o \beta_m^T \zeta_\beta - e_o u, \quad (4.49)$$

e, assim, tem-se apenas uma descontinuidade simples em (4.48).

Uma observação ainda pode ser feita concernente à (4.49). Sabe-se que (4.48) é uma lei descontínua baseada em relé e o valor obtido para  $\hat{k}_p$  é instantâneo. Contudo, o argumento da função sinal de (4.48), ou seja,  $v$ , é função do sinal de controle  $u$ . Ocorre que o sinal de controle ainda será calculado por (3.11), não estando disponível para o cálculo de  $v$ . Essa

situação gera o fenômeno denominado *laço algébrico*, o qual será detalhado na próxima seção.

#### 4.4.2 Laço Algébrico e Filtro de Média

Um laço algébrico geralmente ocorre quando o cálculo de sinais de entrada de um bloco depende de sinais que saem do mesmo bloco. Isto significa que a saída não pode ser calculada sem o conhecimento dos sinais de entrada do bloco (ROHMAN; MIDDLETON, 2002). Este fenômeno geralmente ocorre em estratégias de controle baseadas em alocação de pólos (IOANNOU; SUN, 1996) e vem sendo superado através da introdução de integradores ou filtros de valor médio no lado direito da equação. Seja, por exemplo, a expressão  $z = u - f(z)$ , com  $f(z)$  sendo uma função não linear. Nesse caso, uma solução seria  $z = u - f(z_{av})$ , onde  $z_{av}$  poderia ser obtido através de um filtro de média com frequência de corte adequada, por exemplo,  $z_{av} = F(\tau s)^{-1} z$ ,  $F(\tau s) = \tau s + 1$ <sup>1</sup>. Portanto, (4.48) pode ser escrita como,

$$\hat{k}_p = k_p^{nom} - \bar{k}_p \operatorname{sgn}(v_{av}) \quad (4.50)$$

onde,

$$v_{av} = F(\tau s)^{-1} v \quad (4.51)$$

com  $F(\tau s)$ , por exemplo, de primeira ordem, a saber,  $F(\tau s) = \tau s + 1$ . Considerando  $\tau$  suficientemente pequeno, ou seja,  $\tau \rightarrow 0$ , esta filtragem em  $v$  é interpretada como uma dinâmica não modelada ou parasita e, assim, tal efeito deve ser considerado na análise de estabilidade, ou seja, pode-se dizer que (4.50) possui uma dinâmica não modelada *inerente*.

#### 4.5 Conclusões

Tendo em vista os comentários acima acerca da lei chaveada original do VS-MRAC indireto para o ganho de alta frequência da planta (4.42), duas alternativas a seu desenvolvimento são propostas nos próximos capítulos. A primeira consiste simplesmente em substituí-la por uma lei de adaptação integral (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2007), a princípio, do tipo gradiente, conforme (4.33). Com isso tem-se um algoritmo baseado simultaneamente em

---

<sup>1</sup> “s” denota a variável de Laplace ou o operador  $\frac{d}{dt}$ , dependendo do contexto.

*adaptação paramétrica* para  $k_p$  e em *adaptação por síntese de sinal* para os demais parâmetros do vetor  $\theta_p$  (4.49). Estratégias de controle baseadas em *algoritmos combinados* são comuns na literatura (FRADKOV, 1994; FU, 1991; SANE et al., 2002; WU; FU; HSU, 1992), porém sob um enfoque diferente. Nestes trabalhos, a adaptação paramétrica é aplicada a todos os parâmetros envolvidos (planta ou controlador) e é introduzido um termo descontínuo no canal de controle.

O fato de leis puramente integrais estarem relacionadas a problemas de robustez às perturbações ou dinâmica não modelada (ROHRS et al., 1985) motivou o uso de uma lei em modo dual para  $k_p$ , ou seja, uma lei que alterna entre MRAC e VS-MRAC, dependendo de determinadas condições. Neste sentido, será utilizada a lei proposta por Hsu e Costa (1994), denominada MRAC Binário (B-MRAC), para o caso de grau relativo unitário.

Outra alternativa de projeto do IVS-MRAC consiste em desenvolvê-lo baseado totalmente em *síntese de sinal*, utilizando a expressão para  $k_p$  conforme (4.50). Para ambos os casos, serão desenvolvidas suas análises de estabilidade segundo o método de Lyapunov e das perturbações singulares, considerando a presença de perturbações atuantes na entrada da planta e dinâmica não modelada. Os resultados são comparados e várias simulações apresentadas.



## Capítulo 5

### VS-MRAC Indireto Combinado

#### 5.1 Introdução

Os sistemas de controle adaptativo baseados em Estrutura Variável (*Variable Structure* - VS) tais como o VS-MRAC, consistem em estratégias baseadas em *adaptação por síntese de sinal* (LANDAU; 1979) devido ao caráter descontínuo das suas *leis de adaptação*, as quais alternam (chaveiam) entre diversos sinais de controle. O termo adaptação, neste caso, é utilizado apenas para manter a nomenclatura dos sistemas adaptativos baseados no MRAC, os quais, diferentemente do VS-MRAC, são baseados em *Adaptação Paramétrica* (AP). Ao contrário dos sistemas AP, a convergência exponencial global dos sistemas VS não faz nenhuma exigência sobre a *riqueza* do sinal de referência e, adicionalmente, exibem notáveis propriedades de invariância, rapidez no transitório, robustez e convergência. Contudo, os sistemas VS, em geral, requerem excessiva atividade de controle e sua aplicação prática pode apresentar dificuldades. Soluções baseadas em regiões lineares (HSU; ARAÚJO; COSTA, 1994; SLOTTINE; LI, 1991) e suavização do sinal de controle baseada em filtragens (HSU, 1997; PEIXOTO; LIZARRALDE; HSU, 2001) têm sido utilizadas com sucesso. Entretanto, o sistema resultante permanece baseado em síntese de sinal ao invés de adaptação paramétrica. Assim, se a planta é invariante ou lentamente variante no tempo, um esquema de adaptação que combine leis baseadas em AP e VS parece razoável. O controlador combinado resultante poderia possuir as excelentes propriedades transitórias dos sistemas VS e as propriedades em regime permanente dos sistemas AP. Controladores nesta linha são comuns na literatura (WU; FU; HSU, 1991; FRADKOV, 1994), notoriamente com fins de suavização do sinal de controle em regime permanente (CUNHA, C. et al., 2005. CUNHA, C.; ARAÚJO; MOTA, 2007).

O fato dos algoritmos originais da teoria de controle adaptativo baseados em AP (NARENDRA; VALAVANI, 1978) terem se mostrado não robustos, ou seja, que poderiam levar a uma instabilização efetiva quando as hipóteses ideais eram violadas, gerou intensa pesquisa na busca de controladores capazes de assegurar a estabilidade do sistema, ou seja, garantir que todos os sinais do sistema permaneçam limitados, independentemente da

presença de incertezas não levadas em conta no projeto. Várias modificações na lei de adaptação original foram propostas, notoriamente, no trabalho de Ioannou e Kokotovic (1984), os quais propuseram um fator- $\sigma$  no algoritmo de adaptação para remover a ação puramente integral do algoritmo original e demonstraram que, com esta modificação (chamada modificação- $\sigma$ ), assegura-se a existência de um domínio de estabilidade local para o sistema, o qual depende da *rapidez* da dinâmica não modelada. Posteriormente, Hsu e Costa (1987a) identificaram e demonstraram através de simulações que a utilização de um fator- $\sigma$  na lei de adaptação poderia gerar, no caso de regulação adaptativa de plantas instáveis, um fenômeno denominado *bursting*, isto é, oscilações intermitentes intercaladas por longos períodos de comportamento aparentemente estável. Assumindo que os parâmetros a serem adaptados ficam confinados a um conjunto compacto conhecido, métodos de projeção, limitação paramétrica e normalização foram propostos por Goodwin e Mayne (1989) para evitar o crescimento ilimitado dos parâmetros e evitar o *bursting*. A utilização de um fator- $\sigma$  descontínuo foi explorada por Ioannou e Tsakalis (1986) e Costa e Hsu (1987b).

Nesse sentido e na perspectiva de controle em modo dual, Hsu e Costa (1994) utilizaram os conceitos de fator- $\sigma$  descontínuo e de projeção e propuseram um controlador adaptativo globalmente exponencialmente estável baseado na teoria de controle binário (EMELYANOV, 1987), o qual denominaram B-MRAC. Para o caso de grau relativo unitário, mostraram que o B-MRAC consistia simplesmente em uma lei gradiente de alto ganho com projeção. A novidade estava no fato de como a estratégia foi vista no enfoque do controle binário, o que permitiu construir uma ponte entre controladores VS e AP e, portanto, permitiu obter estabilidade global exponencial, ou em relação a algum conjunto residual, onde o erro de rastreamento (de saída) é pequeno, ou para zero, quando o espectro do sinal de controle é rico.

Utilizando uma idéia similar e considerando as observações concernentes à lei VS original do IVS-MRAC para  $k_p$  (4.42) apresentadas na seção 4.4, uma primeira alternativa seria a substituição de (4.42) por uma lei AP, a princípio, uma lei puramente integral, conforme (4.33). Assim, se obteria um controlador combinado, mas sob um outro enfoque, ou seja, com leis VS para os  $2n-1$  parâmetros do vetor  $\theta_p$  (4.9) e uma lei AP para o parâmetro  $k_p$ , onde se encontram a descontinuidade aninhada e o loop algébrico. Oliveira e Araújo

(2007a) propuseram esta modificação, a qual denominaram *modificação- $k_p$* . A análise de estabilidade foi desenvolvida considerando a presença de perturbação atuando na entrada da planta e mostrou-se que o sistema resultante é globalmente estável em relação a um conjunto compacto que depende do erro de adaptação em  $k_p$  e da própria perturbação. Esse resultado é sumarizado no seguinte teorema:

**Teorema 5.1** Seja o sistema (4.1) com uma perturbação  $d(t)$  atuando na entrada da planta, tal que a perturbação  $d(t)$  é contínua por partes e se conhece um majorante  $\bar{d}(t)$  tal que  $|d(t)| \leq \bar{d}(t) \leq \bar{d}_{\text{sup}} < +\infty, \forall t \geq 0$ . Seja, ainda, o erro do sistema (4.22), as leis chaveadas (4.35)-(4.37) e a lei de adaptação integral (4.33). Se todas as hipóteses H1-H7 (Seção 4.2.1; Seção 4.3) e as condições suficientes (4.39)-(4.41) são satisfeitas, então toda trajetória do sistema entra em um conjunto residual compacto invariante,

$$D_{R1} = \left\{ (e, \tilde{k}_p) : V(e, \tilde{k}_p) \leq (c_1 \bar{d}^2 + c_2 \tilde{k}_p^2 + \delta) \right\} \quad (5.1)$$

em um tempo finito, onde  $c_1$  e  $c_2$  denotam constantes positivas adequadas,  $V$  é uma função quadrática definida positiva e  $\delta > 0$  é arbitrariamente pequeno.

**Prova:** (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2007a). ■

A demonstração apresentada neste capítulo contempla a prova de Oliveira e Araújo (2007a), no caso em que não há dinâmica não modelada e há apenas perturbação atuando na entrada da planta. Neste capítulo, a lei puramente integral (4.33) é substituída por uma lei em modo dual conforme Hsu e Costa (1994), devido aos seus melhores resultados de robustez, por incorporar uma modificação- $\sigma$  e fator de projeção (COSTA; HSU, 1991). No próximo capítulo, a lei VS para  $k_p$  será utilizada conforme (4.48) e, assim, o IVS-MRAC obtido será totalmente baseado em síntese de sinal.

## 5.2 VS-MRAC Indireto com Lei em Modo Dual para $k_p$

Seja o vetor  $\hat{\theta}_p = [\hat{k}_p, \hat{\beta}^T, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}^T]^T$ , conforme (4.9). As leis VS são propostas como em (4.35)-(4.37), a saber,

$$\hat{\beta}_i = -\bar{\beta}_i \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_{\beta_i}), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (5.2)$$

$$\hat{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_1 \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_1), \quad (5.3)$$

$$\hat{\alpha}_i = -\bar{\alpha}_i \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_{\alpha_i}), \quad i = 2, \dots, n, \quad (5.4)$$

com as condições suficientes para as amplitudes dos relés conforme (4.39)-(4.41),

$$\bar{\beta}_i > |\beta_i^*|, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (5.5)$$

$$\bar{\alpha}_i > |\alpha_i^*|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.6)$$

Baseado em Hsu e Costa (1994), para o caso  $n^* = 1$ , a seguinte lei AP é proposta para  $k_p$ ,

$$\begin{cases} \dot{\hat{k}}_p = -\sigma \hat{k}_p - \gamma_p e_0 \zeta_p, & \text{Se } (|\hat{k}_p| > k_0) \text{ ou } (|\hat{k}_p| = k_0 \text{ e } e_0 \zeta_p \operatorname{sgn}(\hat{k}_p) \leq 0) \\ \dot{\hat{k}}_p = 0 & \text{, em caso contrário,} \end{cases} \quad (5.7)$$

onde  $k_0 > 0$  é um limitante inferior conhecido para  $|\hat{k}_p^*|$  de modo a não ocorrer singularidade em (4.16)-(4.18), e é escolhido tal que satisfaça  $\hat{k}_p(0) \geq k_0 > 0$ . Define-se o seguinte *Fator de Projeção* (FP),

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } |\hat{k}_p| < M_{k_p} \text{ ou } \sigma_{\text{eq}} < 0, \\ \sigma_{\text{eq}}, & \text{se } |\hat{k}_p| \geq M_{k_p} \text{ e } \sigma_{\text{eq}} \geq 0, \end{cases} \quad \sigma_{\text{eq}} = \frac{-\gamma_p e_0 \hat{k}_p \zeta_p}{|\hat{k}_p|^2}, \quad (5.8)$$

onde  $M_{k_p} > |\hat{k}_p^*|$  é uma constante. Os sinais auxiliares do vetor  $\zeta$  (4.23) são dados conforme (4.24)-(4.27), a saber,

$$\zeta_p = \frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u - \frac{\hat{\beta}^T v_1}{\gamma}, \quad (5.9)$$

$$\zeta_{\beta}^T = [\zeta_{\beta_1} \quad \dots \quad \zeta_{\beta_{n-1}}], \quad \zeta_{\beta_i} = \frac{-v_{1,i}}{\gamma}, \quad (5.10)$$

$$\zeta_1 = y - \frac{\beta_m^T v_2}{\gamma}, \quad (5.11)$$

$$\zeta_{\alpha}^T = [\zeta_{\alpha_2} \quad \dots \quad \zeta_{\alpha_n}], \quad \zeta_{\alpha_i} = \frac{v_{2,i-1}}{\gamma}, \quad (5.12)$$

e os parâmetros adaptativos do controlador conforme (4.15)-(4.18), ou seja,

$$\theta_{v_1}(t) = \frac{\beta_m - \hat{\beta}(t)}{\gamma}, \quad (5.13)$$

$$\theta_n(t) = \frac{\hat{\alpha}_1(t) - \alpha_{m,1}}{\hat{k}_p(t)}, \quad (5.14)$$

$$\theta_{v_2}(t) = \frac{\hat{\alpha}(t) - \alpha_m + (\alpha_{m,1} - \hat{\alpha}_1(t))\beta_m}{\hat{k}_p(t)\gamma}, \quad (5.15)$$

$$\theta_{2n}(t) = \frac{k_m}{\hat{k}_p(t)}. \quad (5.16)$$

Com  $\sigma$  conforme (5.8) aplicado a (5.7), mostra-se que se  $|\hat{k}_p(0)| \leq M_{k_p}$ , então  $|\hat{k}_p(t)| \leq M_{k_p}$ ,  $\forall t \geq 0$ . Uma prova formal deste fato pode ser encontrada em Ioannou e Sun (1996), para algoritmos com projeção. No restante deste capítulo, assume-se que  $|\hat{k}_p(0)| \leq M_{k_p}$ . Portanto,  $\hat{k}_p(t)$  é uniformemente limitado *a priori*. Em Hsu e Costa (1994), o uso do fator de projeção (5.8) gerou um algoritmo globalmente estável na presença de perturbações externas e de dinâmica não modelada, além de incrementar a rapidez de adaptação e manter o vetor de parâmetros adaptativos limitado a uma bola de raio apropriado.

Uma interpretação para o FP (5.8) na lei AP (5.7) pode ser dada. A adaptação integral é aplicada dentro de algum conjunto compacto (bola finita), e este conjunto compacto é invariante. Iniciando em um ponto na fronteira, ou o parâmetro ajustável permanece na fronteira, ou entra no conjunto, dependendo do sinal de  $\sigma_{eq}$ . Se o vetor de atualização  $-\gamma_p e_o \zeta_p$  aponta para fora da bola  $|\hat{k}_p| \leq M_{k_p}$ , então é projetado em um plano tangente à esfera no ponto  $\hat{k}_p$  assumido estar na esfera, e se ele aponta para o interior, permanece inalterado (conseqüentemente,  $\hat{k}_p(t)$  move-se para o interior da bola  $|\hat{k}_p| \leq M_{k_p}$ ).

### 5.3 Análise de Estabilidade

#### 5.3.1 Preliminares

Seja uma planta SISO, LTI, com parâmetros incertos e limitados, dada por uma representação de estado escrita na forma canônica semi-desacoplada denominada *atuador*

(KOKOTOVIC; KHALIL, 1986)

$$\dot{x} = A_1 x + A_{12} z + b_1 (u + d) \quad (5.17)$$

$$\mu \dot{z} = A_2 z + b_2 (u + d) \quad , \quad (5.18)$$

$$y = h^T x; \quad h^T = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado da parte dominante da planta,  $z \in \mathbb{R}^k$  representa a dinâmica rápida ou não modelada e  $d$  é uma perturbação externa. A constante  $\mu > 0$  representa todos os pequenos parâmetros que em geral são desprezados, conforme explicitado na seção 2.3. O sistema (5.17)-(5.18) representa um sistema *singularmente perturbado*. Qualquer sistema escrito na forma padrão

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11} x + A_{12} \zeta + b_1' (u + d), & x &\in \mathbb{R}^n \\ \mu \dot{\zeta} &= A_{21} x + A_{22} \zeta + b_2' (u + d), & \zeta &\in \mathbb{R}^m, \\ y &= h^T x \end{aligned}$$

onde  $A_{22}$  é não singular, pode ser transformado para a forma (5.17)-(5.18) através da transformação de similaridade  $z = Lx + \zeta$  onde  $L$  é uma solução da equação de Riccati

$$0 = A_{21} + \mu L A_{11} - A_{22} L - \mu L A_{12} L,$$

e  $A_1 = A_{11} - A_{12} L$ ,  $A_2 = A_{22} + \mu L A_{12}$ ,  $b_1 = b_1'$  e  $b_2 = b_2' + \mu L b_1'$ .

O modelo nominal ou reduzido da planta utilizado no projeto do controlador é um modelo de ordem reduzida obtido a partir de (5.17)-(5.18), fazendo  $\mu = 0$ , ou melhor, substituindo-se  $\mu \dot{z} = A_2 z + b_2 (u + d)$  pela equação algébrica  $z = -A_2^{-1} b_2 (u + d)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_r x + b_r u & (d = 0) \\ y &= h_r^T x \end{aligned} \quad ,$$

onde  $A_r = A_1$ ,  $b_r = b_1 - A_{12} A_2^{-1} b_2$  e  $h_r = h$ . A função de transferência correspondente é dada por

$$W_r(s) = k_p \frac{n_r(s)}{d_r(s)}, \quad (5.19)$$

onde  $k_p = h_r^T b_r = h^T (b_1 - A_{12} A_2^{-1} b_2)$ . O modelo de referência é o mesmo definido em (4.5).

O vetor regressor  $\omega$  e os filtros de E/S são os mesmos que em (3.9)-(3.10).

São feitas as seguintes hipóteses concernentes à planta (5.19) e ao modelo de referência (4.5):

**H1.** A planta nominal é monovariável, controlável, observável e tem grau relativo unitário;

- H2.** O grau  $n$  de  $d_p(s)$  é conhecido;
- H3.**  $k_m$  e  $k_p$  têm o mesmo sinal (positivo, sem perda de generalidade);
- H4.** O modelo é ERP e tem o mesmo grau relativo da planta;
- H5.**  $n_r(s)$ ,  $n_m(s)$  e  $d_m(s)$  são polinômios mônicos Hurwitz;
- H6.**  $d_r(s)$  é um polinômio mônico;
- H7.** A perturbação  $d(t)$  é contínua por partes e se conhece um majorante  $\bar{d}(t)$  tal que  $|d(t)| \leq \bar{d}(t) \leq \bar{d}_{\text{sup}} < +\infty, \forall t \geq 0$ ;
- H8.** O sinal de referência  $r(t)$  é contínuo por partes e se conhece um majorante  $\bar{r}(t)$  tal que  $|r(t)| \leq \bar{r}(t) \leq \bar{r}_{\text{sup}} < +\infty, \forall t \geq 0$ ;
- H9.** A dinâmica desprezada é estável, ou seja,  $\text{Re} \lambda(A_2) < 0$  em (5.19);
- H10.** Os limitantes superiores de  $k_p^*$ ,  $\beta_i^*$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ),  $\alpha_1^*$  e  $\alpha_i^*$  ( $i = 2, \dots, n$ ) são conhecidos, o que implica o conhecimento de  $\|\theta_p^*\|$  (4.8).

Definindo  $F := A_2 z + b_2 u$  e usando  $X^T = [x^T \quad v_1^T \quad v_2^T]$  como em (3.14), o sistema (5.17)-(5.18) e os filtros (3.9) podem ser representados por

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \bar{A}X + \bar{b}u + \bar{A}_{12}F + \bar{b}_1 d, \\ \mu \dot{z} &= F + b_2 d \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ gh^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_r \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} A_{12}A_2^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, adicionando-se e subtraindo-se  $\bar{b}\theta^{*T}\omega$  em (5.20) e usando a relação  $\omega_r = WX$ , onde  $W$  é uma matriz constante com elementos 0s e 1s, tem-se,

$$\dot{X} = A_c X + b_c r + \bar{b}(u - \theta^{*T}\omega) + \bar{A}_{12}F + \bar{b}_1 d, \quad (5.21)$$

onde  $A = \bar{A}X + \bar{b}\theta_r^{*T}W$  e  $b_c = \bar{b}\theta_{2n}^*$ . A equação (5.21) é válida para o caso direto. Para o VS-MRAC indireto, (5.21) deve incluir explicitamente o vetor de parâmetros da planta  $\theta_p$  (4.9) e não os parâmetros do controlador  $\theta$ . Portanto, utiliza-se o mesmo procedimento que em (4.19)-(4.22) no termo  $\bar{b}(u - \theta^{*T}\omega)$  e chega-se ao sistema completo,

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= A_c X + b_c r + \frac{b_c}{k_m} \left( \tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) + \bar{A}_{12} F + \bar{b}_1 d \\
 \mu \dot{z} &= F + b_2 d \\
 y &= h_c^T X; \quad h_c^T = [h^T \quad 0 \quad \dots \quad 0] = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

onde os elementos do vetor  $\zeta = [\zeta_p \quad k_p^* \zeta_\beta^T \quad \zeta_1 \quad \zeta_\alpha^T]^T$  são dados conforme (5.10)-(5.13).

Quando  $\mu = d = 0$  e  $u = u^*$  em (5.22), a equação  $h_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c = M(s)$  deve ser satisfeita. Isto significa que  $\{A_c, b_c, h_c\}$  é uma realização não mínima de  $M(s)$ , isto é, o modelo de referência pode ser representado por,

$$\dot{X}_m = A_c X_m + b_c r; \quad y_m = h_c^T X_m; \quad X_m \in \mathbb{R}^{3n-2}. \tag{5.23}$$

Visto que, conforme a hipótese H4,  $M(s)$  é ERP, existem matrizes  $P = P^T$  e  $Q = Q^T$  tal que,

$$A_c^T P + P A_c = -2Q; \quad P b_c = h_c. \tag{5.24}$$

De (5.22) e (5.23) tem-se que,

$$\begin{aligned}
 \dot{e} &= A_c e + \frac{b_c}{k_m} \left( \tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) + \bar{A}_{12} F + \bar{b}_1 d \\
 \mu \dot{z} &= F + b_2 d; \quad e_o = h_c^T e
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

onde  $e = X - X_m$  é o vetor de erro do sistema. Em notação vetorial, (5.25) pode ser escrita como,

$$\dot{e} = A_c e + \frac{b_c}{k_m} \left( \tilde{\theta}_p^T \zeta \right) + \bar{A}_{12} F + \bar{b}_1 d, \tag{5.26}$$

conforme (4.29) quando  $\mu = d = 0$ .

### 5.3.2 Propriedades de Estabilidade

A análise de estabilidade desenvolvida nesta seção segue os passos da análise apresentada em Costa e Hsu (1992) para o VS-MRAC direto (caso de grau relativo unitário) e considera o modelo da planta escrito conforme (5.22). Correspondentemente, a equação do erro é dada por (5.25).



No que segue,  $c_i$  e  $k_i$  denotam constantes positivas. Para analisar a estabilidade do sistema na presença de dinâmica não modelada, propõe-se a seguinte candidata à função de Lyapunov

$$2V(e, z, \tilde{k}_p) = \begin{bmatrix} e^T & \mu z^T & \tilde{k}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & R^T & 0 \\ R & S & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma_p k_m)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \mu z \\ \tilde{k}_p \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

A função (5.27) é definida positiva e radialmente ilimitada, de acordo com o seguinte lema:

**Lema 5.1** – A matriz  $\begin{bmatrix} P & R^T \\ R & S \end{bmatrix}$  com  $P = P^T > 0$  e  $S = S^T$  é definida positiva se e somente

se

$$S - RP^{-1}R^T > 0. \quad (5.28)$$

**Prova:** (JIANG, 1988). ■

**Teorema 5.2** – Seja o sistema (5.22), a equação do erro (5.25), as leis chaveadas (5.2)-(5.4) e a lei adaptativa (5.8)-(5.9). Se todas as hipóteses (H1)-(H10) e as condições (5.5)-(5.6) são satisfeitas, então toda trajetória do sistema entra em um conjunto residual compacto invariante

$$D_R = \left\{ (e, z, \tilde{k}_p) : V(e, z, \tilde{k}_p) \leq (c_1 \sqrt{\mu} + c_2 \bar{d} + \delta)^2 + c_3 \tilde{k}_p^2 \right\}, \quad (5.29)$$

em tempo finito.

**Prova:** Considere-se a função (5.27) com  $P$  satisfazendo (5.24) e  $R$  e  $S$  (definidas apropriadamente durante a demonstração) tal que a condição (5.28) do Lema 5.1 seja satisfeita. Conforme (5.8)-(5.9), a prova deve levar em consideração tais considerações sobre a lei adaptativa para  $\hat{k}_p$ , ou seja, têm-se dois casos possíveis:

**Caso 1:**  $\left( |\hat{k}_p| < M_{k_p} \text{ ou } \sigma_{eq} < 0 \right)$  onde  $M_{k_p} > |k_p^*|$  é uma constante e

$$\sigma_{eq} = \frac{-\gamma_p e_o \hat{k}_p \zeta_p}{|\hat{k}_p|^2}, \quad \gamma_p > 0, \text{ e } \zeta_p \text{ conforme (5.10). Neste caso, } \sigma = 0 \text{ e (5.8) recai em}$$

$$\dot{\hat{k}}_p = -\gamma_p e_o \zeta_p.$$

O Cálculo de  $\dot{V}(e, z, \tilde{k}_p)$  sobre as trajetórias do sistema (5.25) resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, z, \tilde{k}_p) = & -e^T Q e + \frac{e_o}{k_m} \left( k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) + \\ & + \mu z^T \left[ \frac{1}{2} (A_2^T + S A_2) + R \bar{A}_{12} A_2 \right] + \\ & + \mu z^T R A_c e + \frac{\mu z^T R b_c}{k_m} \left( \tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) + \\ & + \mu z^T (R \bar{A}_{12} + S) b_2 u + d \left( \bar{b}_1^T P + b_2^T R \right) e + \mu z^T (R \bar{b}_1 + S b_2) d. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Visto que  $A_2$  é Hurwitz, existem matrizes  $P_1 = P_1^T$  e  $Q_1 = Q_1^T > 0$  tal que,

$$A_2^T P_1 + P_1 A_2 = -2Q_1. \quad (5.31)$$

Escolhendo-se  $S = \alpha P_1$ , onde  $P_1$  satisfaz (5.31) e  $\alpha > 0$  suficientemente grande, pode-se garantir satisfazer (5.28) e simultaneamente garantir que o termo quadrático  $\mu z^T [\cdot] z$  é definido negativo e limitado superiormente por  $-\mu z^T Q_2 z < 0$ ,  $Q_2 > 0$ , ou seja,

$$\mu z^T \left[ \frac{1}{2} (A_2^T + S A_2) + R \bar{A}_{12} A_2 \right] z = \mu z^T \left[ -\alpha Q_1 - \bar{A}_{12}^T P \bar{A}_{12} A_2 \right] z \leq -\mu z^T Q_2 z < 0. \quad (5.32)$$

Pode-se encontrar um limitante superior para o segundo termo de (5.30). Neste sentido, seja o vetor reduzido dos erros nos parâmetros da planta (sem o  $\tilde{k}_p$ ) e o vetor  $\zeta_r$  dados por

$$\tilde{\theta}_{pr} = \left[ \tilde{\beta}^T \quad \tilde{\alpha}^T \quad \tilde{\alpha}_1 \right]^T; \quad \zeta_r = \left[ k_p^* \zeta_\beta^T \quad \zeta_\alpha^T \quad \zeta_1 \right]^T. \quad (5.33)$$

Usando (5.33), tem-se,

$$\frac{e_o}{k_m} \left( k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) = \frac{1}{k_m} \left( \tilde{\theta}_{pr}^T \zeta_r \right) e_o. \quad (5.34)$$

Substituindo (5.2)-(5.4) em (5.34), ou seja,

$$\theta_{pr,i} = -\bar{\theta}_{pr,i} \operatorname{sgn}(e_o \zeta_{r,i}), \quad \bar{\theta}_{pr,i} > |\theta_{pr,i}^*|, \quad i = 1, \dots, 2n-1, \text{ obtém-se,}$$

$$\frac{1}{k_m} \left( \tilde{\theta}_{pr}^T \zeta_r \right) e_o = - \sum_{i=1}^{2n-1} \left[ \left( \bar{\theta}_{pr,i} - |\theta_{pr,i}^*| \right) \zeta_{r,i} \right] e_o \leq -k_{\theta_p} \left( \sum_{i=1}^{2n-1} |\zeta_{r,i}| \right) e_o = -k_{\theta_p} \|\zeta_r\| |e_o|, \quad (5.35)$$

onde  $k_{\theta_p} = \min_i \left\{ \bar{\theta}_{pr,i} - |\theta_{pr,i}^*| \right\} > 0$ .

Analisando agora o termo  $\frac{\mu z^T R b_c}{k_m} (\tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha)$  de (5.30), tem-se,

$$\tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha = \tilde{\theta}_{pr}^T \zeta_r + \tilde{k}_p \zeta_p = (\hat{\theta}_{pr} - \theta_{pr}^*)^T \zeta_r + (\hat{k}_p - k_p^*) \zeta_p. \quad (5.36)$$

A separação de parâmetros explícita em (5.36) é necessária tendo em vista a natureza diferente da lei de adaptação de  $k_p$ . Usando a relação  $u = \theta^T \omega = \theta_r^T W(e + X_m) + \theta_{2n} r$ , os sinais auxiliares definidos em (5.11)-(5.13) e escrevendo  $\zeta_r$  em notação matricial, tem-se,

$$\zeta_r = \begin{bmatrix} k_p^* \zeta_\beta \\ \zeta_\alpha \\ \zeta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_p^* & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \\ h^T & 0 & -\frac{\beta_m^T}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (5.37)$$

$$\Rightarrow \zeta_r = HX = H(e + X_m).$$

Portanto, de (5.34)-(5.37), (5.30) resulta em,

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, z, \tilde{k}_p) &\leq -e^T Q e - \mu z^T Q_2 z - \frac{k_{\theta p}}{k_m} \|\zeta_r\| |e_o| + \\ &+ \mu z^T (Q_3 e + Q_4 r + Q_5 X_m + Q_6 d + Q_7 \zeta_p) + e^T Q_8 d, \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde,

$$\begin{aligned} Q_3 &= \frac{R b_c}{k_m} R b_c (\hat{\theta}_{pr} - \theta_{pr}^*)^T H + R A_c + (R \bar{A}_{12} + S) b_2 \theta_r^T W, \\ Q_4 &= (R \bar{A}_{12} + S) b_2 \theta_{2n}, \\ Q_5 &= Q_3 - R A_c; \quad Q_6 = R \bar{b}_1 + S b_2; \quad Q_7 = \frac{R b_c}{k_m} (\hat{k}_p - k_p^*); \quad Q_8 = R^T b_2 + P \bar{b}_1. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Definindo  $\tilde{z} := \sqrt{\mu} z$  e majorando adequadamente cada um dos termos restantes em (5.38), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, z, \tilde{k}_p) &\leq (-k_1 \|e\|^2 - k_2 \|\tilde{z}\|^2 + k_3 \sqrt{\mu} \|e\| \|\tilde{z}\|) + k_4 \sqrt{\mu} \|\tilde{z}\| + \\ &+ k_5 \sqrt{\mu} \|\tilde{z}\| \|\bar{d}\| + k_6 \sqrt{\mu} \|\tilde{z}\| \|\zeta_p\| + k_7 \|e\| \|\bar{d}\|. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Observa-se que, para todo  $\mu \in (0, \bar{\mu}]$ ,  $\bar{\mu} > 0$ ,  
 $(-k_1\|e\|^2 - k_2\|\tilde{z}\|^2 + k_3\sqrt{\mu}\|e\|\|\tilde{z}\|) \leq k_8\|\tilde{\varepsilon}\| < 0$ , onde  $\tilde{\varepsilon} := [e^T \quad \tilde{z}^T]^T$ . Desprezando-se o termo  
 $-\frac{k_{\theta p}}{k_m}\|\zeta_r\|e_o$  (negativo) obtém-se, então, que

$$\dot{V}(\tilde{\varepsilon}, \tilde{k}_p) \leq -k_8\|\tilde{\varepsilon}\|^2 + (k_4\sqrt{\mu} + k_5\sqrt{\mu\bar{d}} + k_6\sqrt{\mu}|\zeta_p| + k_7\bar{d})\|\tilde{\varepsilon}\|. \quad (5.41)$$

De (5.41), conclue-se que  $\dot{V}(\tilde{\varepsilon}, \tilde{k}_p) \leq 0$  fora da bola definida por

$$D = \left\{ \tilde{\varepsilon} : \|\tilde{\varepsilon}\| \leq (k_4\sqrt{\mu} + k_5\sqrt{\mu\bar{d}} + k_6\sqrt{\mu}|\zeta_p| + k_7\bar{d})/k_8 \right\}. \quad (5.42)$$

Retornando às variáveis “e” e “z” tem-se que dentro de D

$$\|e\| \leq M \text{ e } \|z\| \leq \frac{M}{\sqrt{\mu}}, \quad (5.43)$$

onde  $M = (k_4\sqrt{\mu} + k_5\sqrt{\mu\bar{d}} + k_6\sqrt{\mu}|\zeta_p| + k_7\bar{d})/k_8$ . Faz-se necessário, portanto, mostrar que o sinal  $\zeta_p$  é limitado, pois o mesmo influencia diretamente o tamanho de M.

Conforme (5.9), o sinal  $\zeta_p$  é função do sinal de controle u e de seus filtrados associados ao vetor  $v_1$  (3.9), ou seja,

$$\zeta_p = (\beta_m - \hat{\beta})^T \frac{v_1}{\gamma} - u; \quad \dot{v}_1 = \Lambda v_1 + gu.$$

Assim, pode-se expressar  $\zeta_p$  como uma função de u, ou seja,  $\zeta_p = f(u)$ . O que ocorre é que nenhum limite *a priori* é disponível para u. Mas, uma vez que a condição de matching é satisfeita com  $u^* = \theta^{*T} \omega$ , pode-se supor que  $|u(t)| \leq K_\omega \|\omega(t)\| + K_\delta; \quad \forall t$ , onde  $K_\omega, K_\delta > 0$  (SASTRY; BODSON, 1989). Isto garante que não ocorrerá escape em tempo finito nos sinais do sistema, ou seja, que todos os sinais serão regulares (Seção A.4) e pertencem ao  $L_\infty$ . Portanto, como  $\zeta_p = f(u)$ ,

$$|\zeta_p(t)| \leq K' \|\omega(t)\| + K''; \quad \forall t, \quad (5.44)$$

com  $K', K'' > 0$ . O vetor regressor  $\omega$  (3.10) pode ser escrito como  $\omega = \Omega X + b_r r$ , onde

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ h^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } b_r = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T. \text{ Sabendo que } e = X - X_m, \text{ pode-se expressar o vetor}$$

regressor associado à planta em função do erro do sistema, ou seja,  $\omega = \omega_m + \Omega e$ , onde  $\omega_m^T = [v_{m1}^T \quad y_m \quad v_{m2}^T \quad r]$  é o vetor regressor correspondente ao modelo de referência (por simplicidade, se considera condições iniciais nulas para o modelo de referência). Logo, segue que

$$\|\omega(t)\| \leq K_r + K_\Omega \|e(t)\|. \quad (5.45)$$

Substituindo (5.43) em (5.45), tem-se

$$\|\omega(t)\| \leq K_r + K_\Omega M, \quad (5.46)$$

e, usando (5.46) em (5.44), conclue-se que  $\zeta_p(t)$  também tem um limite do tipo (5.46), ou seja,

$$\|\zeta_p(t)\| \leq K''' + K'''' M, \quad (5.47)$$

com  $K''', K'''' > 0$ . Explicitando e desenvolvendo  $M$  em (5.47) chega-se a

$$\|\zeta_p(t)\| \leq \frac{K''' + \sqrt{\mu} + \sqrt{\mu\bar{d}} + \bar{d}}{1 - \sqrt{\mu}}, \quad (5.48)$$

onde as constantes multiplicativas positivas são omitidas por simplicidade de notação. A expressão (5.48) pode ser escrita como

$$\|\zeta_p(t)\| \leq K'''' + K_\mu \bar{d}, \quad (5.49)$$

onde  $K''''$  é da ordem de  $\frac{K''' + \sqrt{\mu} + \mu}{1 - \mu}$  e  $K_\mu$  é da ordem de  $\frac{(\sqrt{\mu} + 1)^2}{1 - \mu}$ . Substituindo agora

(5.49) em  $M$ , tem-se  $M$  função apenas de  $\mu$  e  $\bar{d}$ , ou seja,

$$M = (k_9 \sqrt{\mu} + k_{10} \sqrt{\mu\bar{d}} + k_7 \bar{d}) / k_8. \quad (5.50)$$

Para mostrar que qualquer trajetória do sistema entra em um conjunto residual da forma  $D_R = \{(e, z, \tilde{k}_p) : V(e, z, \tilde{k}_p) \leq k_R\}$  em algum tempo finito, deve-se estimar a constante  $k_R > 0$  tal que no conjunto  $W_R = \{(e, z, \tilde{k}_p) : V(e, z, \tilde{k}_p) \geq k_R\}$  tenha-se  $\dot{V} \leq -\delta_R$  para alguma constante  $\delta_R > 0$ . Tal domínio pode ser estimado a partir de uma majoração apropriada da função de Lyapunov (5.27) como segue,

$$V(e, z, \tilde{k}_p) \leq k_{11} \|e\|^2 + \mu^2 k_{12} \|z\|^2 + k_{13} \tilde{k}_p^2. \quad (5.51)$$

Substituindo os majorantes (5.43) com  $M$  dado por (5.50) em (5.51), tem-se,

$$D \subset \bar{D} = \left\{ (e, z, \tilde{k}_p) : k_{11}\|e\|^2 + \mu^2 k_{12}\|z\|^2 + k_{13}\tilde{k}_p^2 \leq (c_1\sqrt{\mu} + c_2\bar{d})^2 + c_3\tilde{k}_p^2 \right\}. \quad (5.52)$$

Logo, uma possível escolha para  $k_R$  é

$$k_R = (c_1\sqrt{\mu} + c_2\bar{d} + \delta)^2 + c_3\tilde{k}_p^2, \quad (5.53)$$

com  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeno, o que garante que  $D \subset \bar{D} \subset D_R$  e que  $\dot{V}$  é estritamente negativo em  $W_R$ . Como na fronteira de  $D_R$  tem-se que  $\dot{V} < 0$ , então toda trajetória do sistema iniciada fora da região  $D_R$  deve necessariamente entrar em  $D_R$  em tempo finito. ■

**Caso 2:**  $(|\hat{k}_p| \geq M_{k_p} \text{ ou } \sigma_{\text{eq}} \geq 0)$ . Neste caso,  $\sigma = \sigma_{\text{eq}}$  e (5.7) recai em  $\dot{\hat{k}}_p = 0$ , visto que, pela hipótese H3, o ganho de alta frequência da planta é positivo.

O Cálculo de  $\dot{V}(e, z, \tilde{k}_p)$  (5.27) sobre as trajetórias do sistema (5.25) resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, z, \tilde{k}_p) = & -e^T Q e + \frac{e_o \tilde{k}_p \zeta_p}{k_m} + \frac{e_o}{k_m} (k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha) + \\ & + \mu z^T \left[ \frac{1}{2} (A_2^T + S A_2) + R \bar{A}_{12} A_2 \right] z + \mu z^T R A_c e + \\ & + \frac{\mu z^T R b_c}{k_m} (\tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha) + \\ & + \mu z^T (R \bar{A}_{12} + S) b_2 u + d (b_1^T P + b_2^T R) e + \mu z^T (R \bar{b}_1 + S b_2) d. \end{aligned} \quad (5.54)$$

A prova segue os mesmos passos do *Caso 1*, tendo-se apenas que analisar a negatividade do segundo termo de (5.54). Considerando que, de acordo com (5.7),  $\dot{\hat{k}}_p = 0$  quando  $e_o \zeta_p \operatorname{sgn}(\hat{k}_p) > 0$  e  $|\hat{k}_p| = k_0$ , tem-se,

$$e_o \zeta_p > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\hat{k}_p) > 0 \Rightarrow \hat{k}_p = k_0 \Rightarrow \tilde{k}_p < 0 \Rightarrow \frac{\tilde{k}_p e_o \zeta_p}{k_m} < 0, \quad (5.55)$$

ou seja, pode-se desprezar este termo (negativo) e seguir com a análise do *Caso 1* para os demais termos, o que levará ao mesmo conjunto residual (5.53). ■

**Corolário 5.1** – Se a trajetória do sistema está dentro de  $D_R$  então,  $\|e\| \leq c_4\sqrt{\mu} + c_5\bar{d} + c_6\tilde{k}_p$  e, após um transitório finito,  $\|z\| \leq c_7\sqrt{\mu} + c_8\bar{d} + c_9\tilde{k}_p + c_{10} \sup|r| + c_{11} \sup\|X_m\|$ .

**Prova:** Escolhendo um minorante para (5.28) através da desigualdade de Rayleigh e, usando (5.52) tem-se que,

$$\frac{\lambda_{\min}(\bar{\mathbf{P}})\|e\|^2}{2} \leq (c_1\sqrt{\mu} + c_2\bar{d} + \delta)^2 + c_3\tilde{k}_p^2, \quad (5.56)$$

onde  $\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{R}^T & 0 \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma_p k_m)^{-1} \end{bmatrix}$ , conforme (5.28). Logo, dentro de  $D_R$ ,

$$\|e\| \leq (c_1\sqrt{\mu} + c_2\bar{d} + \delta) \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\min}(\bar{\mathbf{P}})}} + c_3\tilde{k}_p \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\min}(\bar{\mathbf{P}})}}. \quad (5.57)$$

$$\|e\| \leq c_4\sqrt{\mu} + c_5\sqrt{\mu}\tilde{\zeta}_p + c_6\bar{d} + c_7\tilde{k}_p$$

Substituindo cada um dos termos da relação  $u = \theta^T \omega = \theta_r^T W(e + X_m) + \theta_{2n} r$  por majorantes adequados e usando (5.57), tem-se,

$$|u| \leq c_8\sqrt{\mu} + c_9\bar{d} + c_{10}\tilde{k}_p + c_{11} \sup|r| + c_{12} \sup\|X_m\|. \quad (5.58)$$

Como  $\mu\dot{z} = A_2 z + b_2 u$  (5.18), com  $A_2$  Hurwitz, então após um transitório finito  $\|z\|$  será da mesma ordem que  $|u|$ .

■

### 5.3.3 Considerações sobre o Teorema 5.2

A solução dada neste capítulo tem por objetivo não lidar diretamente com a descontinuidade aninhada e o laço algébrico inerentes à lei chaveada original para  $k_p$ , como uma primeira solução para tornar a análise de estabilidade do IVS-MRAC matematicamente correta, do ponto de vista da Teoria de Filippov, que não trata funções compostas descontínuas. O conjunto residual compacto do erro geral do sistema obtido em (5.3) para o IVS-MRAC com lei adaptativa em modo dual para  $k_p$  demonstra claramente a influência do erro de adaptação em  $k_p$  ( $\tilde{k}_p$ ) sobre o tamanho deste conjunto, assim como sobre o sinal de controle (5.59). Deseja-se, sempre, o menor conjunto possível, o que, neste caso, seria obtido teoricamente através da introdução de algum sinal artificial PE na malha de controle, por exemplo, um sinal de referência, que garanta  $\hat{k}_p \rightarrow k_p^* \Rightarrow \tilde{k}_p = 0$  em algum tempo finito. Entretanto, como nem sempre é possível utilizar tais sinais em problemas de controle, o comportamento do sistema torna-se notadamente sensível em relação à  $\hat{k}_p(0)$ . Esta

característica tenderia a tornar esta versão combinada semelhante à estratégia indireta proposta por Stotsky (1994), que utiliza adaptação paramétrica para todos os parâmetros da planta. Porém, o algoritmo proposto neste capítulo se torna superior, notadamente por suas propriedades transitórias, a saber, rapidez e ausência de sobresinal. O conjunto residual obtido para o VS-MRAC direto (Teorema 3.1 e Teorema 3.2) é menor, e, espera-se obter um conjunto equivalente ao projetar-se o IVS-MRAC apenas com síntese de sinal, conforme será apresentado no próximo capítulo. Estratégias de controle que não necessitem de sinais PE para a obtenção do objetivo de controle são de interesse prático e, adicionalmente, se deseja propriedades de estabilidade equivalentes ao caso direto, que justifiquem seu uso e posterior extensão a outras classes de sistemas.

As simulações a seguir ilustrarão algumas propriedades obtidas no Teorema 5.2.

#### 5.4 Simulações

Nesta seção serão considerados os resultados obtidos através de simulação computacional em ambiente Matlab®, para o IVS-MRAC com lei de adaptação em modo dual para o ganho de alta frequência da planta, apresentado neste capítulo. As derivadas são implementadas via aproximação de Euler, utilizando um passo de integração de 1ms.

Os resultados contemplam dois sistemas, iniciando por um sistema instável de ordem 1 e, posteriormente, um sistema de ordem 2. As simulações foram realizadas em ordem crescente de complexidade, a fim de simular o algoritmo proposto nas mais diversas condições de operação. O sinal de referência assumido é do tipo degrau unitário, podendo ter seu valor dobrado, quando for mencionado que houve *mudança de referência*. Em alguns casos, também, é inserida uma variação paramétrica de +20% em todos os parâmetros da planta, a fim de verificar o caráter *adaptativo* do algoritmo. O efeito de perturbações do tipo degrau inseridas na entrada da planta e de dois tipos comuns de dinâmicas não modeladas também são apresentados.

Os sistemas serão escritos conforme a nomenclatura (4.2)-(4.7) utilizada ao longo deste trabalho.



### 5.4.1 Sistema de 1ª Ordem

Planta nominal: 
$$W_r(s) = k_p \frac{n_r(s)}{d_r(s)} = \frac{1}{s-1} = k_p \frac{1}{s+\alpha_1} \Rightarrow k_p = 1; \quad \alpha_1 = -1$$

Modelo de Referência: 
$$M(s) = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)} = \frac{3}{s+3} = k_m \frac{1}{s+\alpha_{m,1}} \Rightarrow k_m = 3; \quad \alpha_{m,1} = 3$$

Dinâmica Parasita (1): 
$$\Delta_1(s) = \frac{1}{\mu s + 1}$$

Dinâmica Parasita (2): 
$$\Delta_2(s) = \frac{-\mu s + 1}{\mu s + 1}$$

Sinais Auxiliares: 
$$\zeta_1 = y; \quad \zeta_p = -u; \quad \sigma_{eq} = \frac{-\gamma_p e_o \hat{k}_p \zeta_p}{|\hat{k}_p|^2}$$

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } |\hat{k}_p| < M_{k_p} \text{ ou } \sigma_{eq} < 0, \\ \sigma_{eq}, & \text{se } |\hat{k}_p| \geq M_{k_p} \text{ e } \sigma_{eq} \geq 0, \end{cases}$$

Se  $(|\hat{k}_p| > k_0)$  ou se  $(|\hat{k}_p| = k_0 \text{ e } e_o \zeta_p \operatorname{sgn}(\hat{k}_p) \leq 0)$

Adaptação: 
$$\dot{\hat{k}}_p = -\sigma \hat{k}_p - \gamma_p e_o \zeta_p$$

em caso contrário,

$$\dot{\hat{k}}_p = 0$$

$$\hat{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_1 \operatorname{sgn}(e_o \zeta_1)$$

Parâmetros do Controlador: 
$$\theta_n = \frac{\hat{\alpha}_1 - \alpha_{m,1}}{\hat{k}_p}; \quad \theta_{2n} = \frac{k_m}{\hat{k}_p}$$

Lei de Controle: 
$$u = \theta_n y + \theta_{2n} r$$

Os parâmetros  $k_0$ ,  $\hat{k}_p(0)$  e  $\gamma_p$  são ajustados ao longo das simulações. Onde não sejam definidos explicitamente, adota-se  $k_0 = 0,1$ ,  $\gamma_p = 1$  e  $\hat{k}_p(0) = 0,9$ . A condição inicial do sistema é  $y(0) = 1$  e, em todas as simulações,  $M_{k_p} = 1,5$ . O valor de  $\bar{\alpha}_1$  é escolhido a partir do valor nominal de  $|\alpha_1| = 1$  e, inicialmente, considera-se uma incerteza de 50% em seu valor, tendo sido adotado  $\bar{\alpha}_1 = 1,5$ .

Inicialmente, alguns resultados para a visualização do comportamento do sistema controlado no caso ideal.

As Figuras 5.1 e 5.2 ilustram o rápido transitório característico dos sistemas à estrutura variável, o qual aparenta não ser afetado pelo fato do parâmetro  $k_p$  ser adaptado por lei integral. O efeito VS parece superar a adaptação paramétrica, ou seja, a parcela descontínua do sinal de controle é suficiente para a obtenção do modo deslizante, independente de adaptação explícita de  $k_p$ . Tem-se, neste caso, uma lei VS e uma lei AP.

A fim de ilustrar melhor a natureza *combinada* do algoritmo proposto neste capítulo, a amplitude do relé  $\hat{\alpha}_1$  é zerada, ou seja,  $\bar{\alpha}_1 = 0$  (Figura 5.3). Neste caso,  $\hat{k}_p(0) = 0,6$  e  $k_0 = 0,01$ . Observa-se claramente a contribuição adaptativa de  $\hat{k}_p$ , influenciando o transitório do sistema. O efeito da diminuição do ganho adaptativo  $\gamma_p$  ( $\gamma_p = 0,1$ ) passa a ser significativo, alterando a velocidade de convergência, como pode ser visto na Figura 5.4.

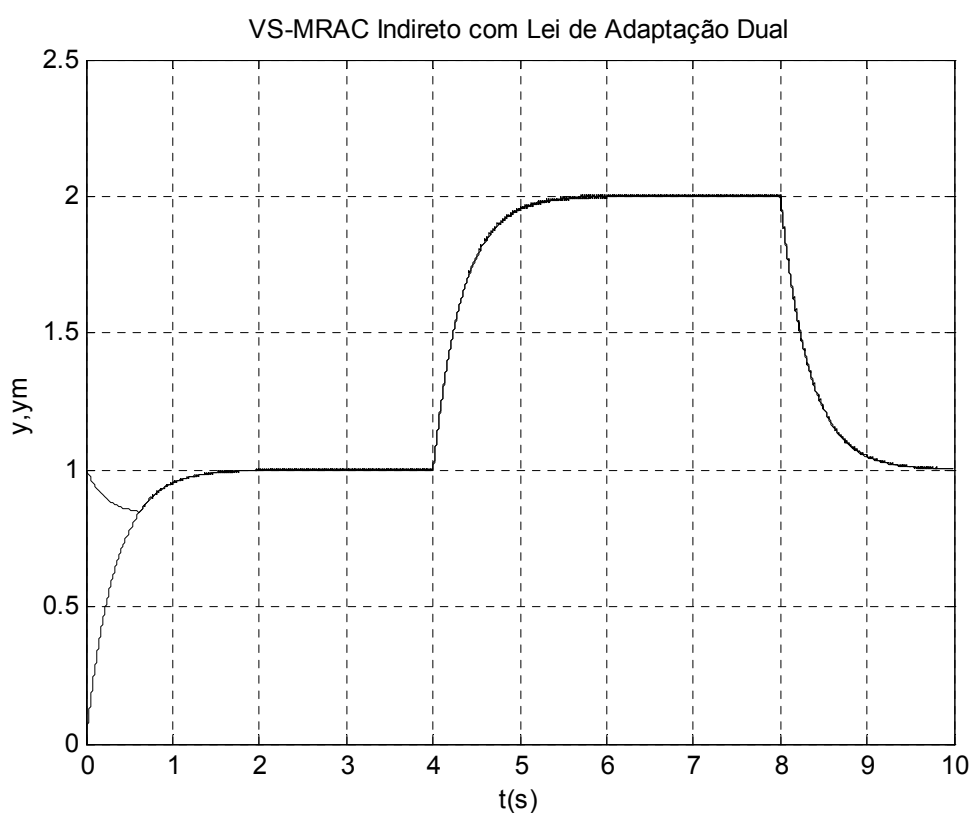


Figura 5.1 Caso ideal com  $\hat{k}_p(0) = 1$  e  $\gamma_p = 0,1$

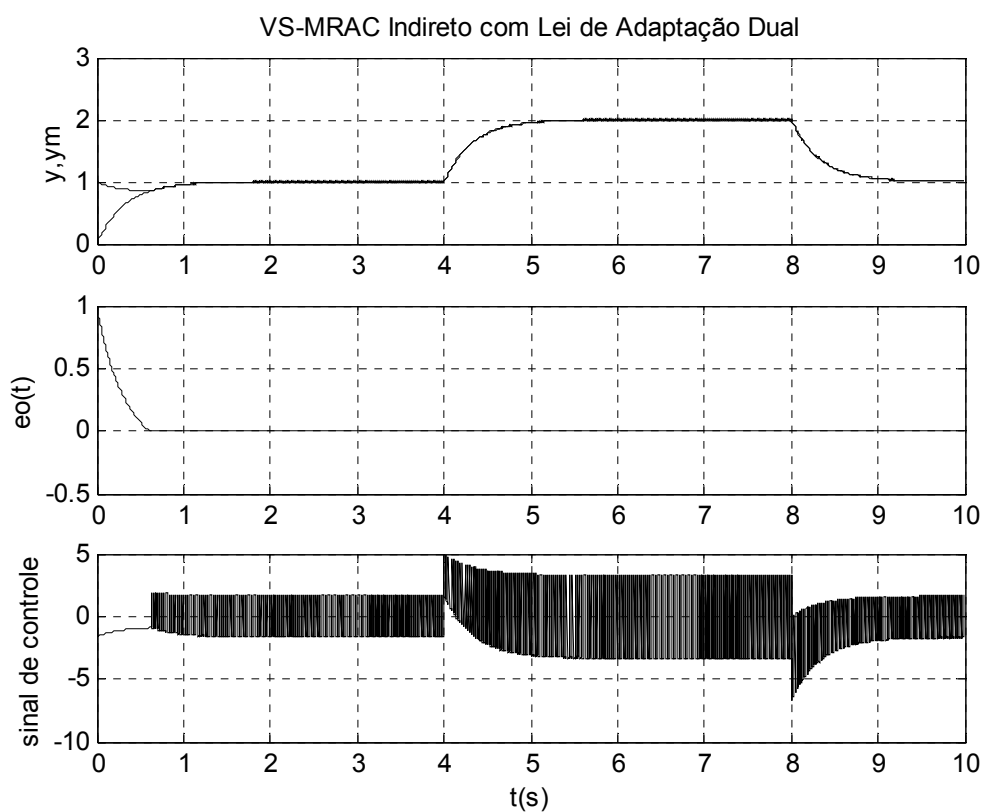


Figura 5.2 Detalhe do comportamento do erro de saída e sinal de controle

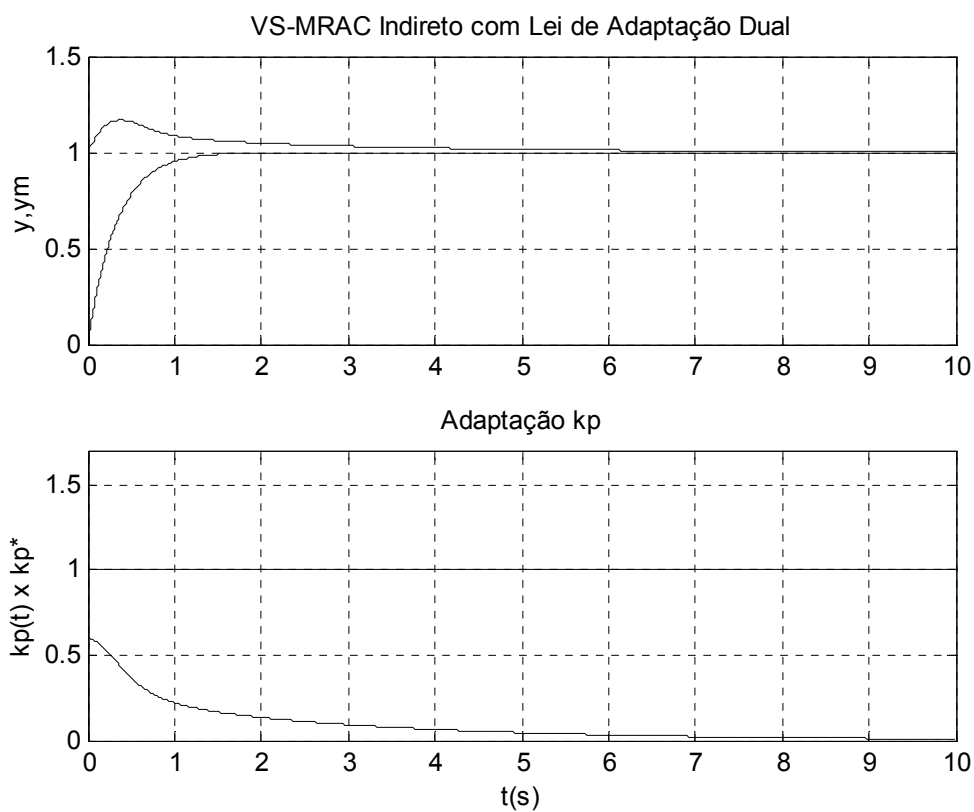


Figura 5.3 Efeito isolado da adaptação paramétrica em  $k_p$

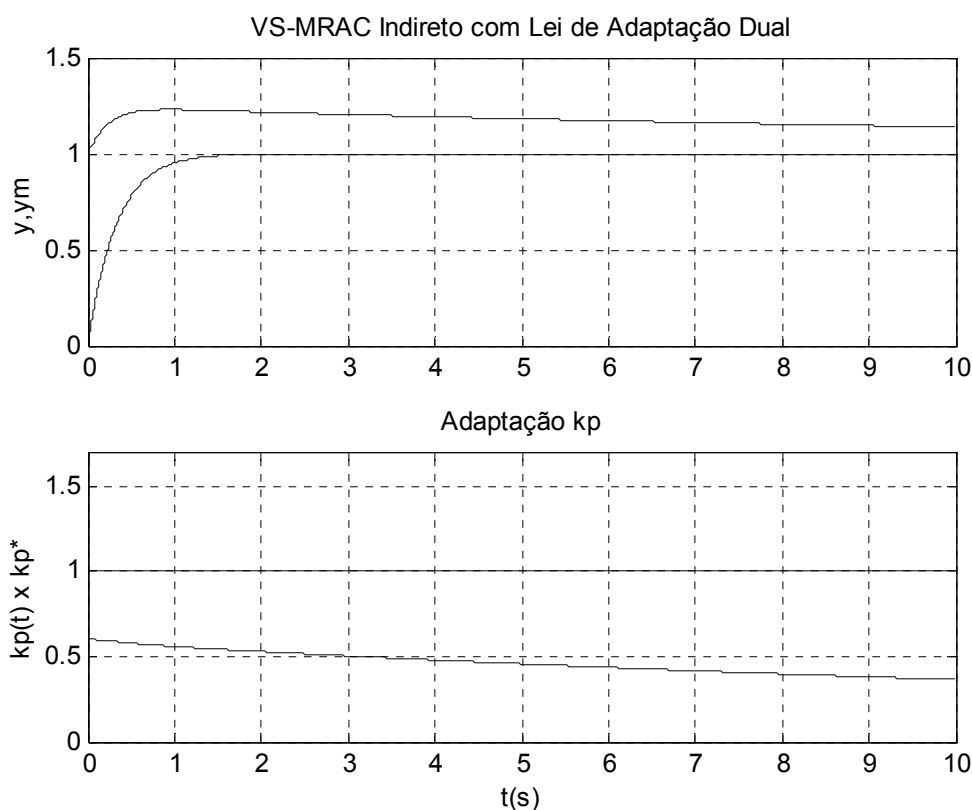


Figura 5.4 Influência do ganho adaptativo  $\gamma_p$  ( $\gamma_p = 0,1$ ) no rastreamento da saída

Ao utilizar o relé satisfazendo a condição suficiente  $\bar{\alpha}_1 > |\alpha_1^*|$ , por exemplo,  $\bar{\alpha}_1 = 1,5$ , o transitório rápido e não oscilatório é preservado, independente do ganho adaptativo  $\gamma_p$ , como pode ser visto nas Figuras 5.5 ( $\gamma_p = 1$ ) e 5.6 ( $\gamma_p = 0,1$ ). O fato de se ter um algoritmo com leis adaptativas integrais e leis chaveadas sugere uma relação entre a contribuição e conseqüente efeito de cada parcela, conforme a Figura 5.7. Para ilustrar este fato, diminui-se a amplitude de  $\hat{\alpha}_1$ , fazendo  $\bar{\alpha}_1 = 0,5$ . Ao se aumentar  $\gamma_p$  ( $\gamma_p = 1$ ), a parcela equivalente à adaptação paramétrica aumenta e *contribui* com a parcela VS para a obtenção do modo deslizante (Figura 5.8), embora o transitório seja um pouco mais lento quando comparado ao da Figura 5.5.

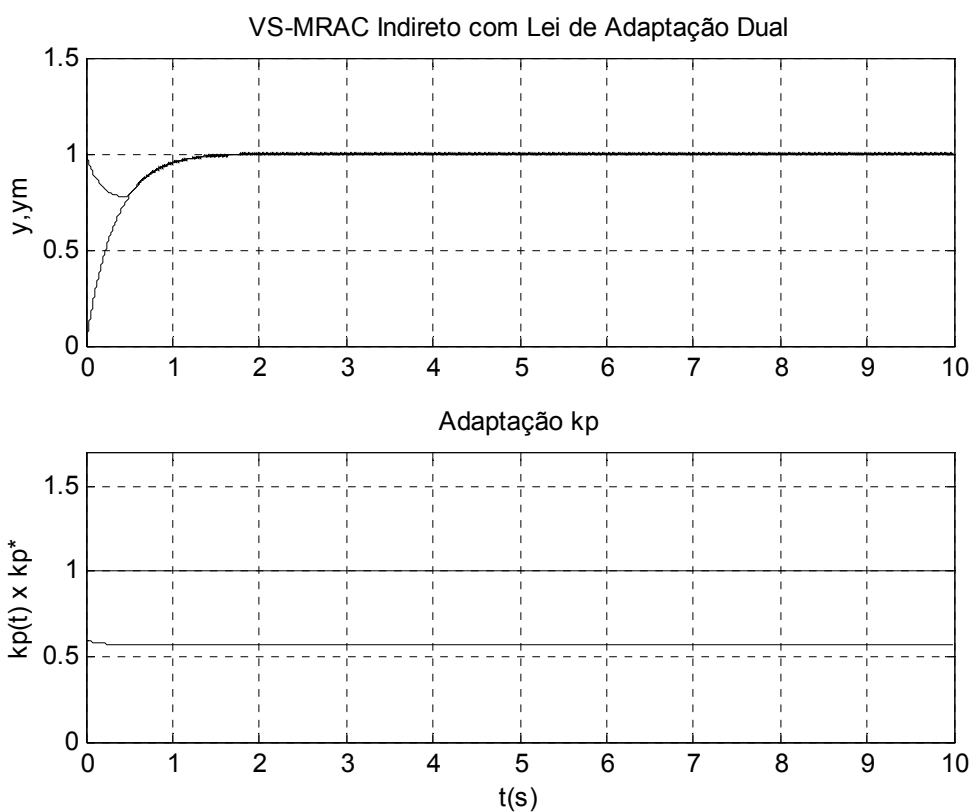
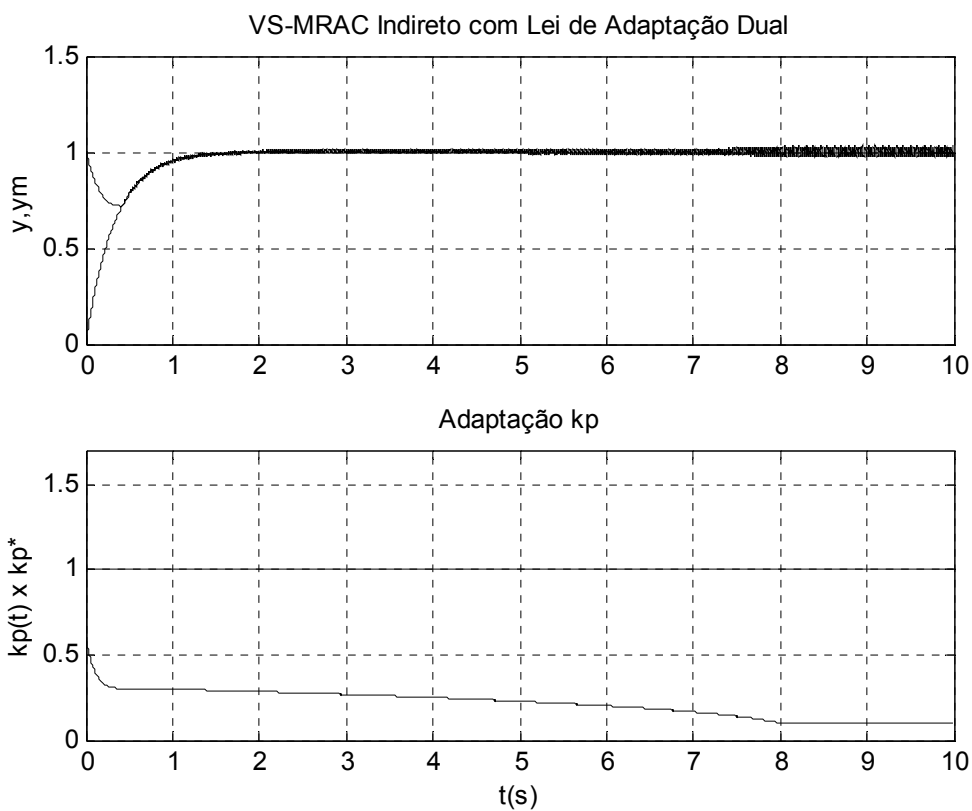


Figura 5.5 Transitório rápido e não oscilatório independente da adaptação em  $k_p$  ( $\gamma_p = 1$ )



5.6 Obtenção do modo deslizante independente da velocidade de adaptação de  $k_p$  ( $\gamma_p = 0,1$ )

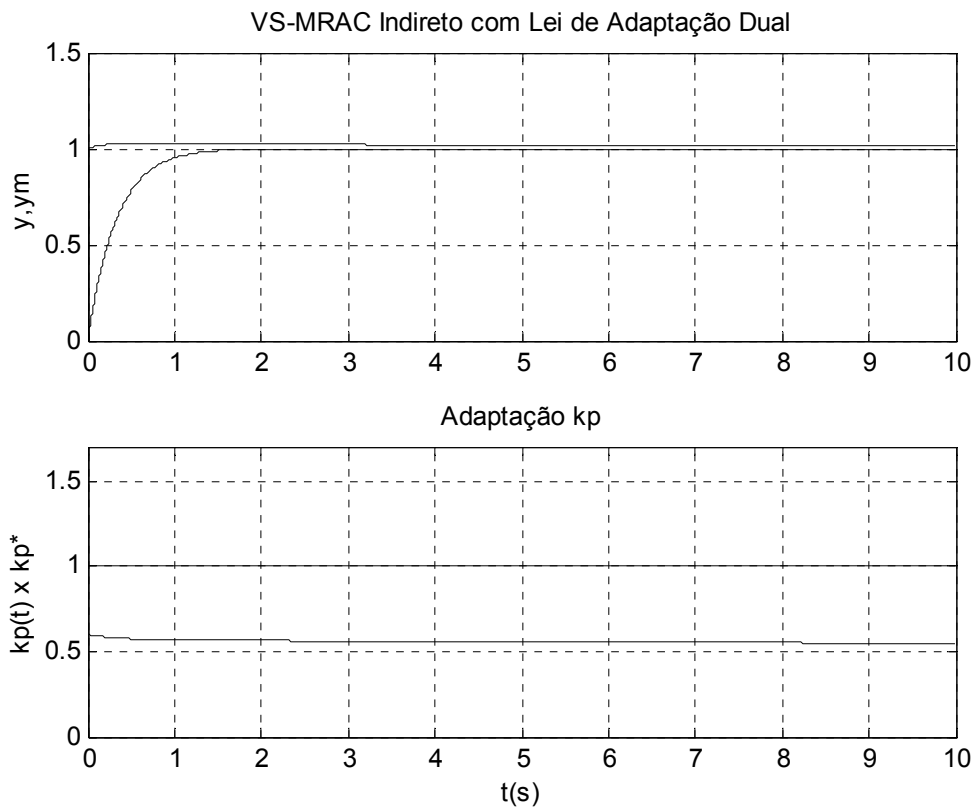


Figura 5.7 Ganho adaptativo  $\gamma_p = 0,1$  e amplitude do relé  $\hat{\alpha}_1$  ( $\bar{\alpha}_1 = 0,5$ ) influenciando convergência

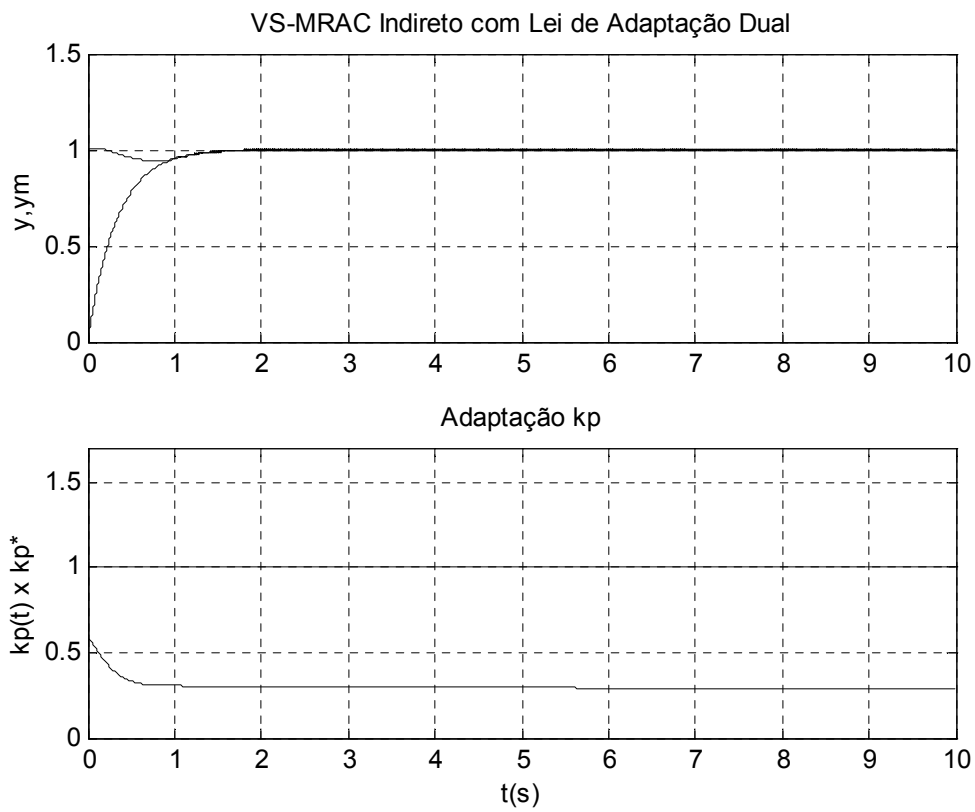


Figura 5.8 Incremento do ganho adaptativo  $\gamma_p$  ( $\gamma_p = 1$ ), possibilitando rastreamento

No restante deste capítulo, assume-se que a condição suficiente para as amplitudes dos relés é sempre satisfeita, tendo em vista que o objetivo é preservar as propriedades de desempenho dos VSS, particularmente, o comportamento transitório.

O valor inicial de  $k_p$ ,  $\hat{k}_p(0)$ , influencia diretamente o transitório e o sinal de controle do sistema, aumentando a rapidez do primeiro e a amplitude do segundo (Figura 5.9), quando  $\hat{k}_p(0)=0,6$ . Ao usar-se  $\hat{k}_p(0)=0,2$ , o aumento de  $u$  é substancial, conforme pode-se observar na Figura 5.10.

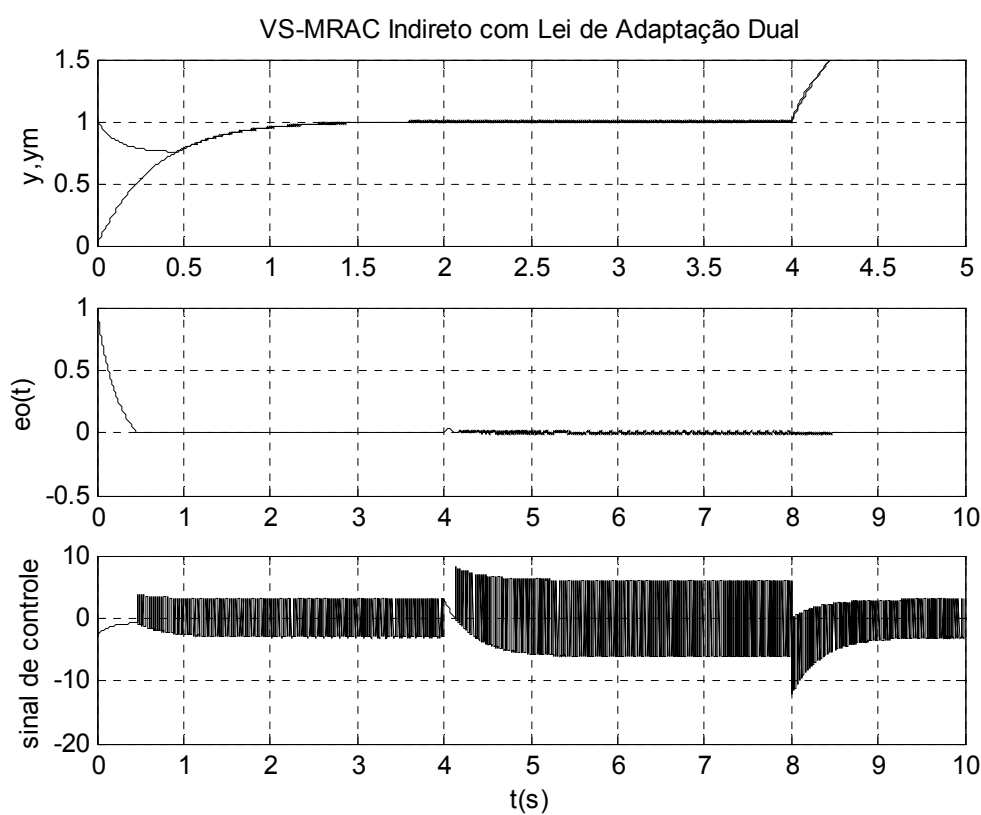


Figura 5.9 Efeito da diminuição de  $\hat{k}_p(0)$ , para  $\hat{k}_p(0)=0,6$  e  $\gamma_p=1$

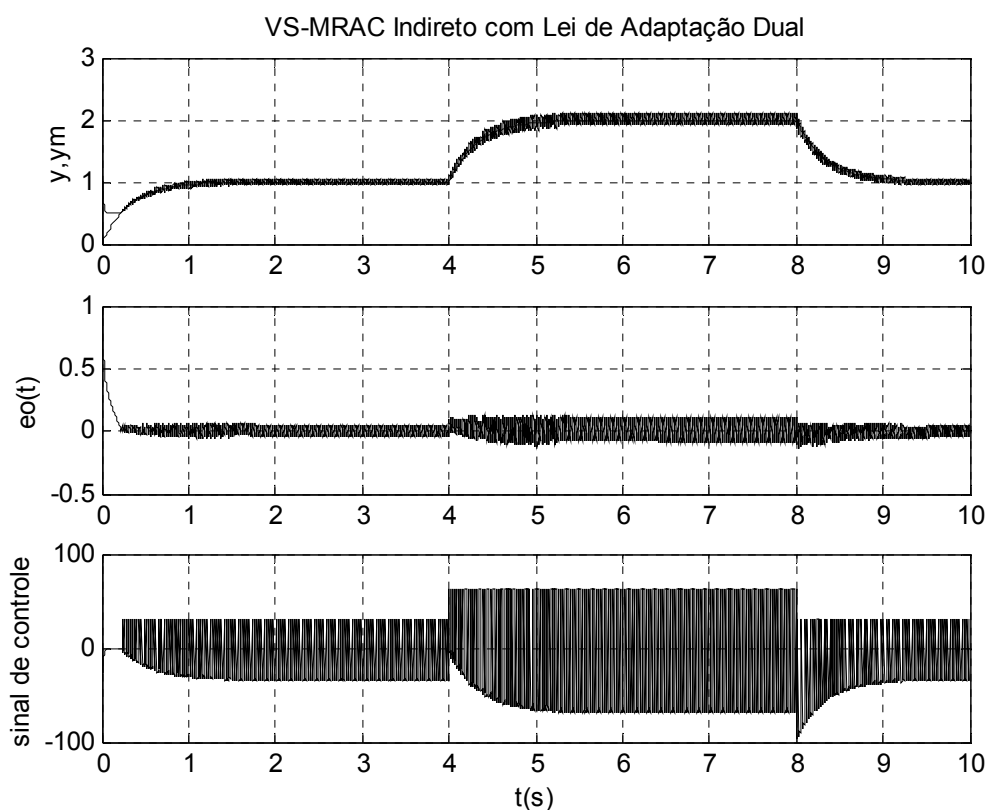


Figura 5.10 Efeito da diminuição de  $\hat{k}_p(0)$ , para  $\hat{k}_p(0) = 0,2$

Naturalmente, o sinal de controle com grande amplitude, além de saturar os atuadores, incrementa as oscilações na saída do sistema e, conseqüentemente, no erro de saída. Sendo assim, nas demais simulações, o valor de  $\hat{k}_p(0)$  é ajustado em 0,9. Conclui-se, portanto, que os erros são menores quando  $\tilde{k}_p$  é pequeno, estando de acordo com o conjunto residual obtido no Teorema 5.2.

Para analisar o comportamento do sistema em condições de operação mais próximas da realidade, uma perturbação externa do tipo degrau é inserida na entrada da planta em  $t = 3s$ . Utilizando a mesma amplitude para o relé, ou seja,  $\bar{\alpha}_1 = 1,5$ , tem-se apenas a rejeição parcial ao distúrbio, conforme a Figura 5.11.



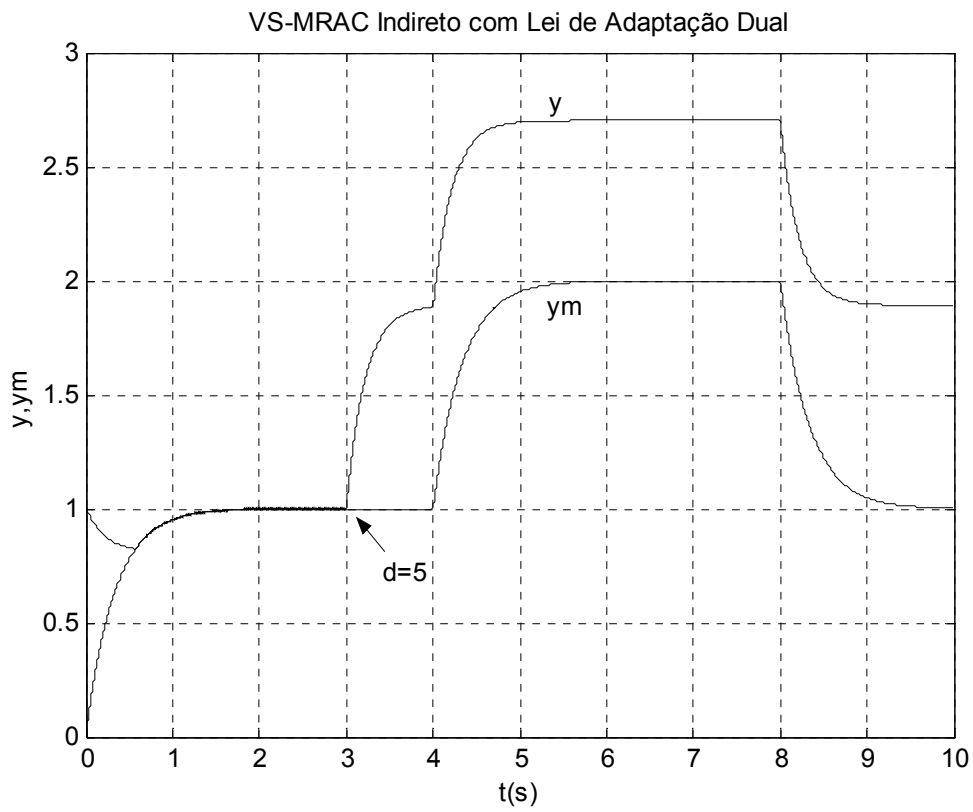


Figura 5.11 Rejeição parcial ao distúrbio do tipo degrau ( $d=5$ ) -  $\bar{\alpha}_1 = 1,5$

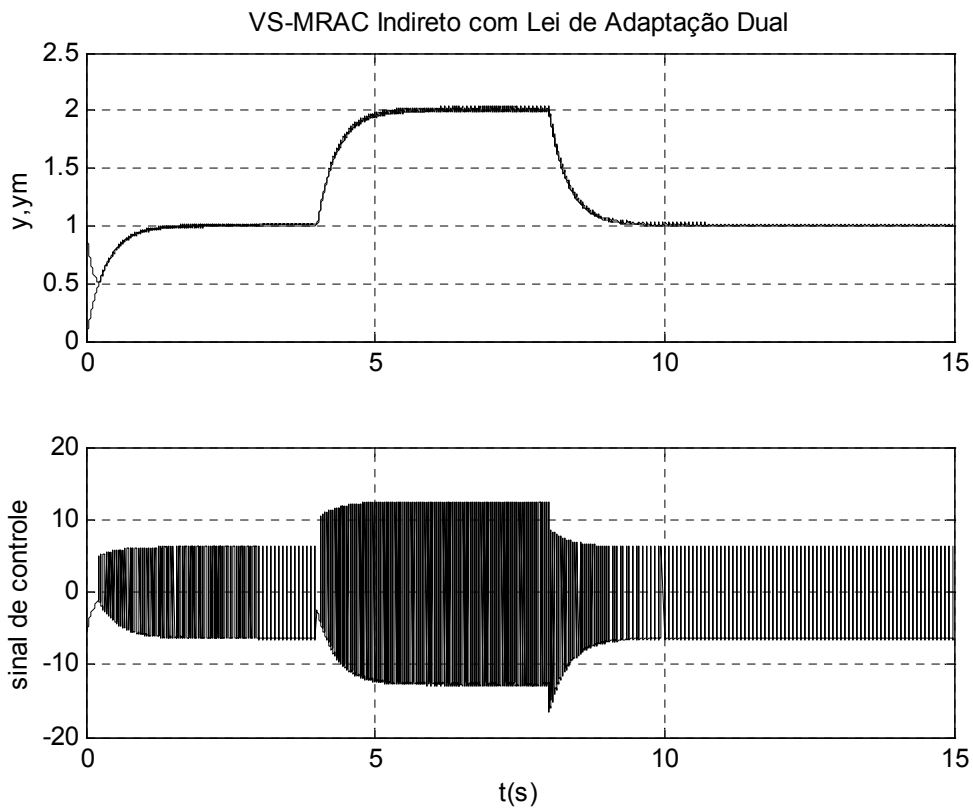


Figura 5.12 Rejeição total ao distúrbio do tipo degrau ( $d=5$ ) -  $\bar{\alpha}_1 = 5$

A rejeição total ao distúrbio é conseguida aumentando-se a amplitude do relé, no caso,  $\bar{\alpha}_1 = 5$ . Este fato é razoável e está de acordo com os resultados obtidos por Hsu, Araújo e Costa (1994) para o caso direto, os quais obtiveram resultados concernentes à função de modulação do relé, a qual deve superar uma função da amplitude da perturbação. Este aumento em  $\bar{\alpha}_1$  gera um incremento no sinal de controle, a fim de rejeitar a perturbação. Considerando, por exemplo, uma aplicação em um motor de indução trifásico como em Oliveira e Araújo (2003, 2004) em que fosse utilizada uma placa conversora Analógico-Digital/Digital-Analógico (A/D-D/A) com limitação em  $\pm 10V$ , uma saturação seria necessária, como pode ser visto na Figura 5.13. Considera-se também uma variação paramétrica de +20% em  $t=5s$ .

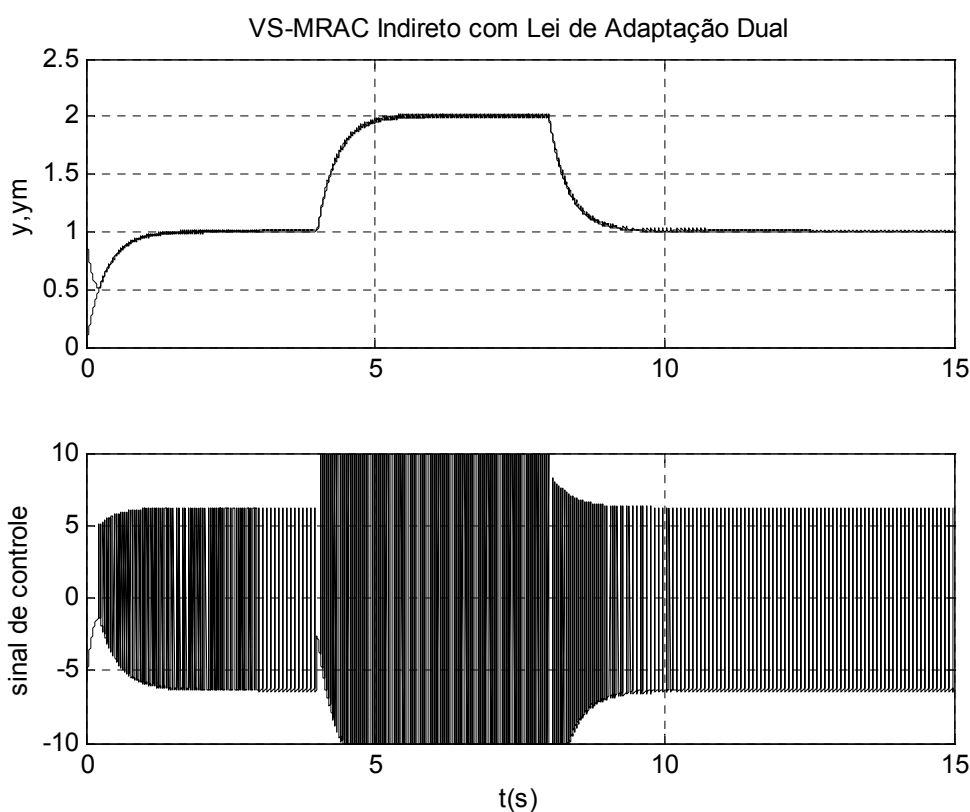


Figura 5.13 Saturação no sinal de controle na mudança de referência

Dinâmicas não modeladas são comuns em aplicações práticas, quer sejam introduzidas por atrasos no sistema ou pela utilização de modelos reduzidos, estando normalmente associadas a pequenas constantes de tempo, as quais são desprezadas na obtenção de tais modelos. Assim, simulações que contemplem a presença de tais dinâmicas são de extrema importância na avaliação de controladores, por sugerirem um maior grau de confiabilidade e robustez do controlador quando aplicado à planta real (IOANNOU; SUN, 1996). Serão

consideradas as dinâmicas parasitas multiplicativas  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  atuando na planta nominal  $W_r$ . As Figuras 5.14, 5.15 e 5.16 mostram o comportamento do sistema quando  $\Delta_1$  está influenciando o sistema, para valores decrescentes de  $\mu$ , a saber,  $\mu = 0,1$ ;  $0,01$ ;  $0,005$ , respectivamente.

Observa-se que, à medida que  $\mu \rightarrow 0$ , o erro diminui e o sistema fica menos oscilatório, corroborando os resultados do Teorema 5.2. Na Figura 5.14, o transitório é bem perceptível, porém tal resultado tem o objetivo principal de mostrar o efeito de  $\mu$ , o qual, no caso, não pode ser considerado desprezível.

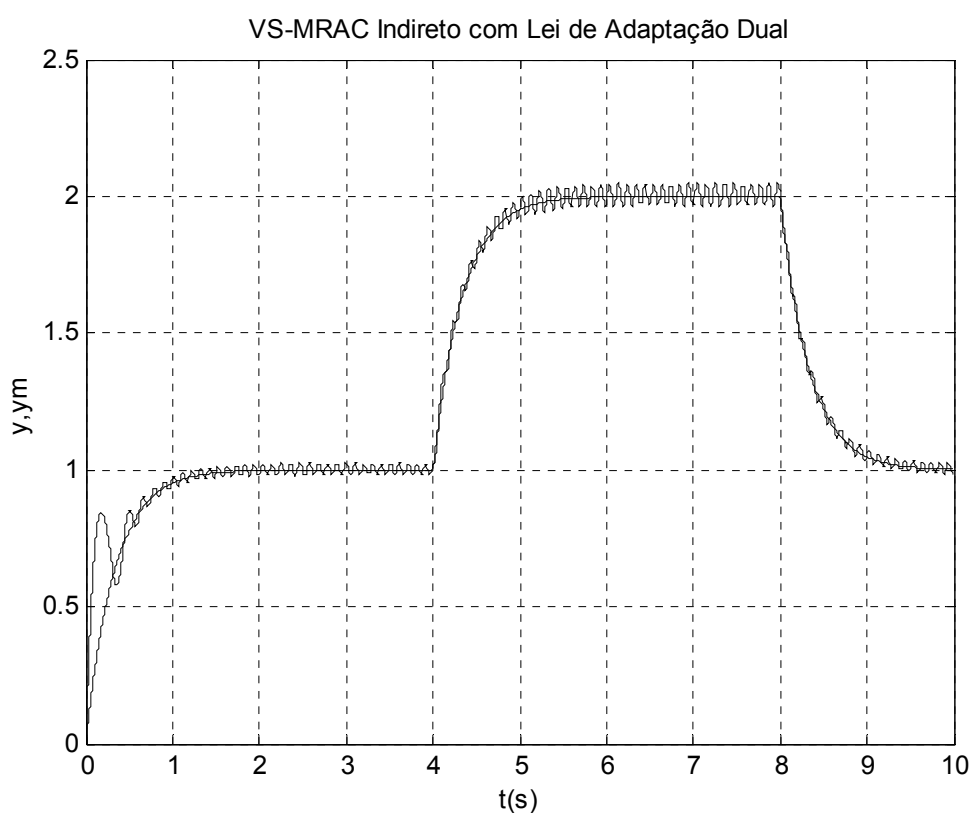


Figura 5.14 Dinâmica não modelada  $\Delta_1$  com  $\mu = 0,1$

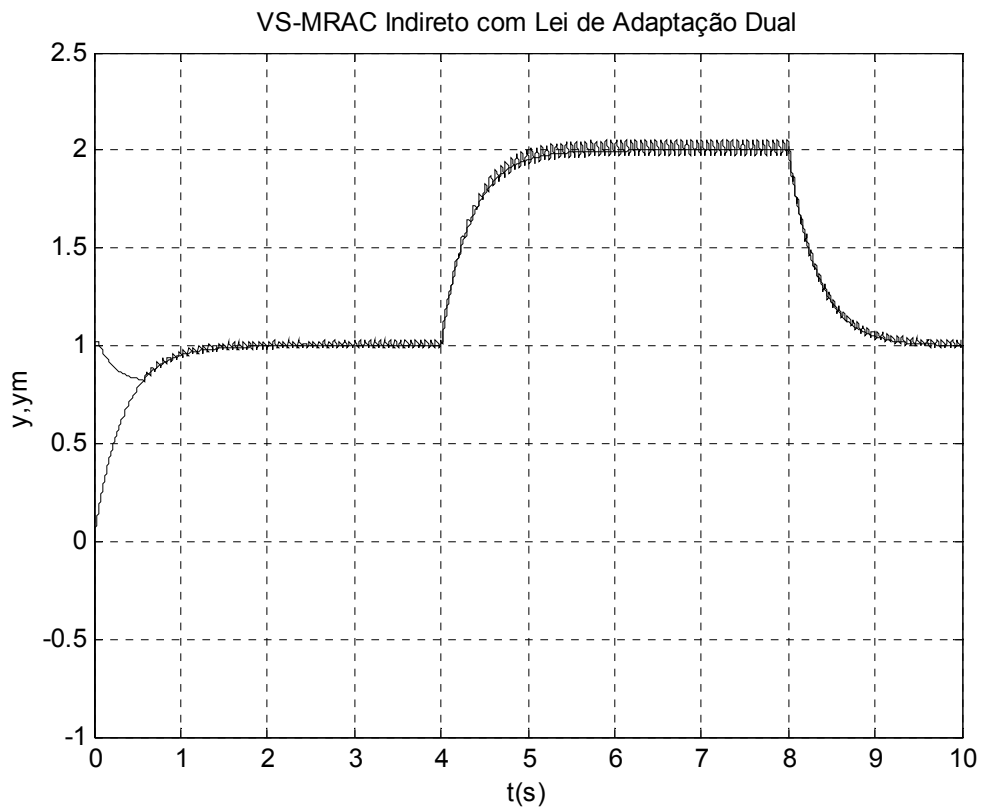


Figura 5.15 Dinâmica não modelada  $\Delta_1$  com  $\mu = 0,01$

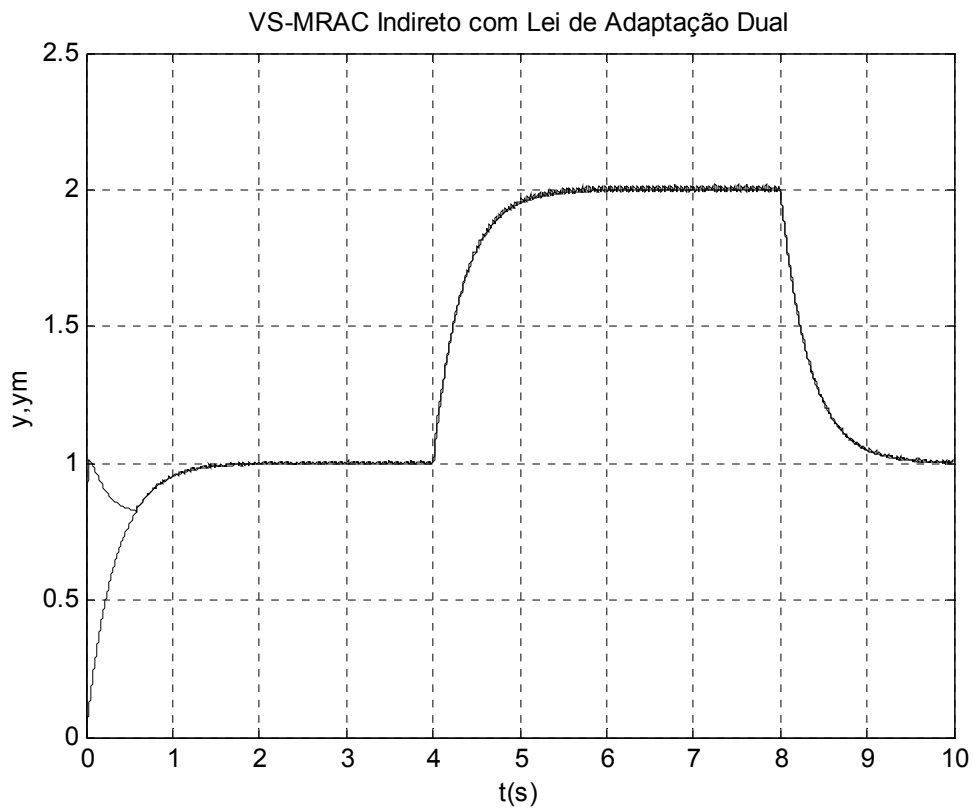


Figura 5.16 Dinâmica não modelada  $\Delta_1$  com  $\mu = 0,005$

Na Figura 5.16, o efeito de  $\Delta_1$  é praticamente imperceptível. A Figura 5.17 ilustra a presença simultânea da perturbação externa e da dinâmica não modelada, sendo, neste caso,  $\bar{\alpha}_1 = 5$ , conforme a Figura 5.12.

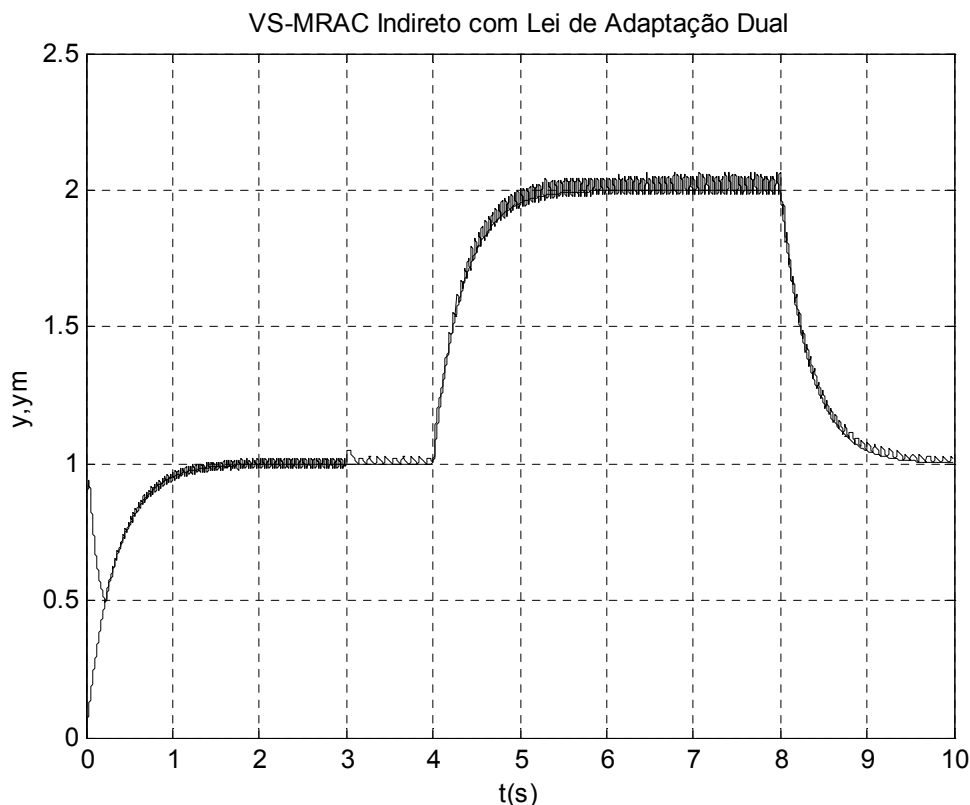


Figura 5.17 Efeito simultâneo de perturbação introduzida em  $t=3s$  ( $d=5$ ) e dinâmica não modelada  $\Delta_1$  com  $\mu = 0,01$

As figuras acima consideraram um tipo de dinâmica não modelada simples, associada, por exemplo, a um filtro de valor médio com  $\mu \rightarrow 0$ . Um tipo menos favorável de dinâmica parasita é dada por  $\Delta_2$ , a qual, inclusive, torna o sistema completo de fase não-mínima.

As Figuras 5.18 e 5.19 apresentam  $\Delta_2$  influenciando o sistema com  $\mu = 0,01$  e  $\mu = 0,005$ , respectivamente. Já em 5.20, o efeito simultâneo da perturbação e de  $\mu = 0,01$  é apresentado. Embora o sistema se torne oscilatório, não há instabilização.

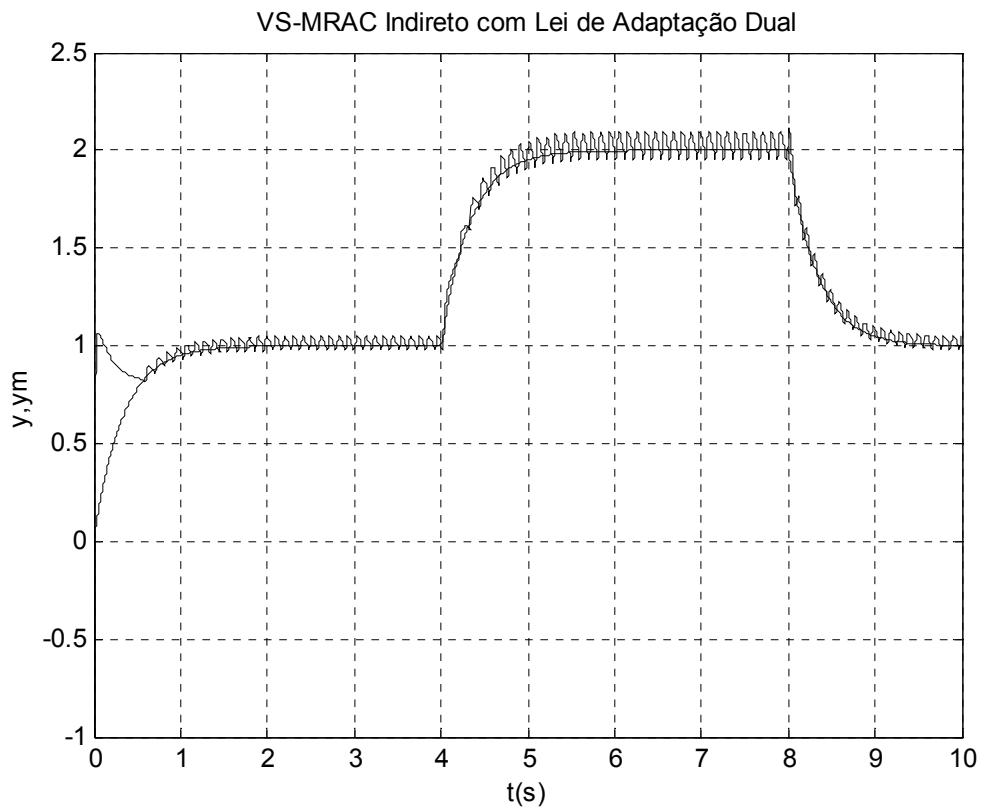


Figura 5.18 Dinâmica não modelada  $\Delta_2$  com  $\mu = 0,01$

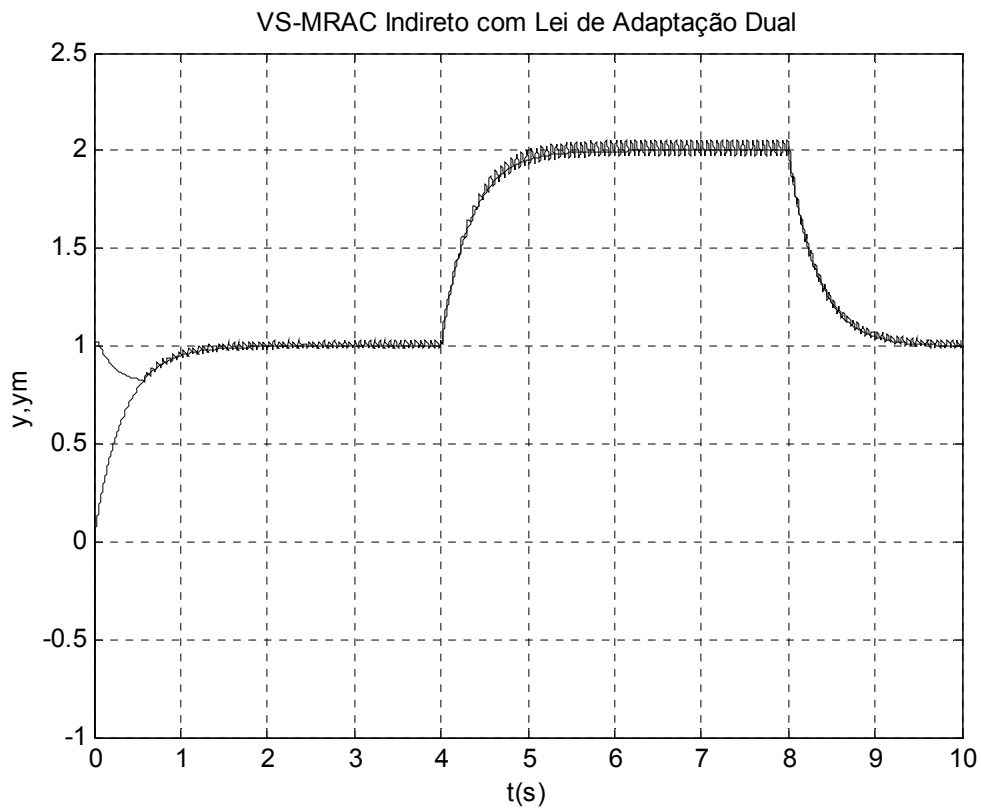


Figura 5.19 Dinâmica não modelada  $\Delta_2$  com  $\mu = 0,005$

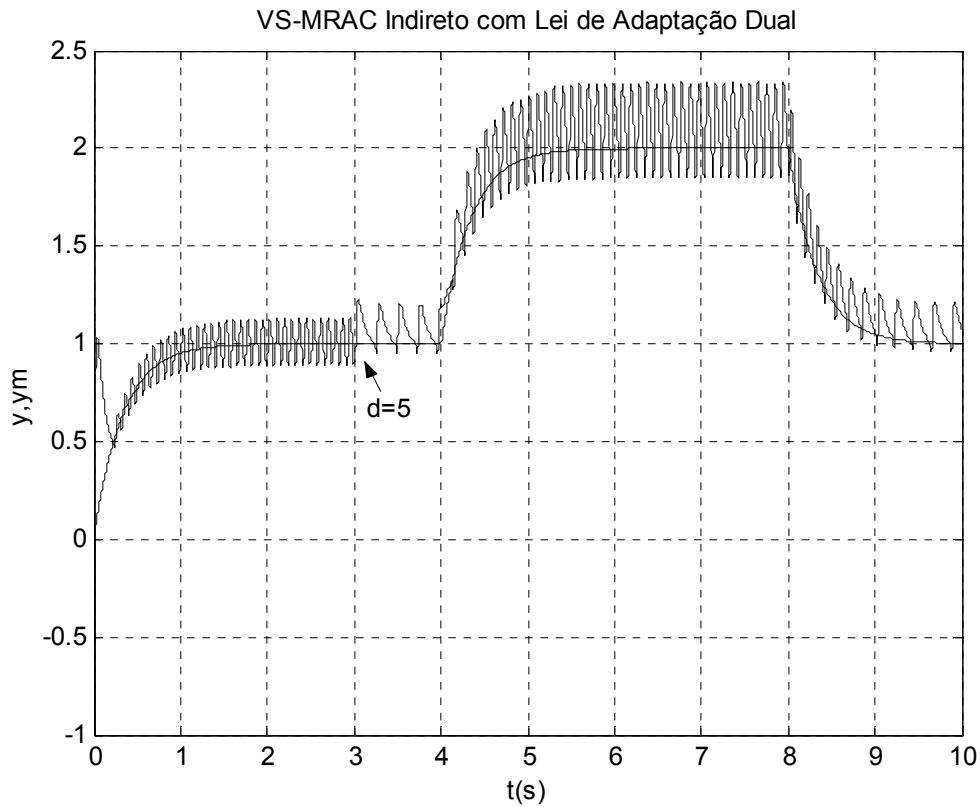


Figura 5.20 Efeito simultâneo de perturbação introduzida em  $t=3s$  ( $d=5$ ) e dinâmica não modelada  $\Delta_2$  com  $\mu = 0,01$

### 5.4.2 Sistema de 2ª Ordem

Planta nominal:

$$W_r(s) = k_p \frac{n_r(s)}{d_r(s)} = k_p \frac{s + \beta_1}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s - 10} \Rightarrow k_p = 1; \beta_1 = 3; \alpha_1 = 3; \alpha_2 = -10$$

Modelo de Referência:  $M(s) = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)} = k_m \frac{1}{s + \alpha_{m,1}} = \frac{1}{s + 1} \Rightarrow k_m = 1; \alpha_{m,1} = 1$

Dinâmica Parasita (1):  $\Delta_1(s) = \frac{1}{\mu s + 1}$

Dinâmica Parasita (2):  $\Delta_2(s) = \frac{-\mu s + 1}{\mu s + 1}$

Filtros E/S:  $\dot{v}_1 = -v_1 + u$   
 $\dot{v}_2 = -v_2 + y$

Sinais Auxiliares:  $\zeta_1 = y; \zeta_\alpha = v_2; \zeta_\beta = -v_1; \zeta_p = -u - \hat{\beta}v_1; \sigma_{eq} = \frac{-\gamma_p e_o \hat{k}_p \zeta_p}{|\hat{k}_p|^2}$

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } |\hat{k}_p| < M_{k_p} \text{ ou } \sigma_{eq} < 0, \\ \sigma_{eq}, & \text{se } |\hat{k}_p| \geq M_{k_p} \text{ e } \sigma_{eq} \geq 0, \end{cases}$$

Se  $(|\hat{k}_p| > k_0)$  ou se  $(|\hat{k}_p| = k_0 \text{ e } e_o \zeta_p \operatorname{sgn}(\hat{k}_p) \leq 0)$

Adaptação:  $\hat{k}_p = -\sigma \hat{k}_p - \gamma_p e_o \zeta_p$

em caso contrário,

$$\hat{k}_p = 0$$

$$\hat{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_1 \operatorname{sgn}(e_o \zeta_1)$$

$$\hat{\beta} = -\bar{\beta} \operatorname{sgn}(e_o \zeta_\beta)$$

$$\hat{\alpha} = -\bar{\alpha} \operatorname{sgn}(e_o \zeta_\alpha)$$

Parâmetros do Controlador:  $\theta_{v_1} = -\hat{\beta}; \quad \theta_n = \frac{\hat{\alpha}_1 - \alpha_{m,1}}{\hat{k}_p}; \quad \theta_{v_2} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{k}_p}; \quad \theta_{2n} = \frac{k_m}{\hat{k}_p};$

Lei de Controle:  $u = \theta_{v_1} v_1 + \theta_n y + \theta_{v_2} v_2 + \theta_{2n} r$

No exemplo acima, como  $v_1, v_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , assume-se  $\alpha = \alpha_2$  e  $\beta = \beta_1$ . Em todas as simulações adota-se  $\gamma = 1$  e  $y(0) = 1$ . As amplitudes dos relés utilizadas inicialmente são  $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta} = 3,5$ ,  $\bar{\alpha}_1 = 3,5$  e  $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha} = 11$ .

Ao aplicar o IVS-MRAC com as três leis chaveadas acima, considerando as amplitudes utilizadas, o sinal de controle eleva-se, dificultando a implementação prática e, portanto, requerendo saturação (Figura 5.21) mesmo no caso ideal, a qual foi fixada em  $\pm 10$ , conforme a Seção 5.4.1.



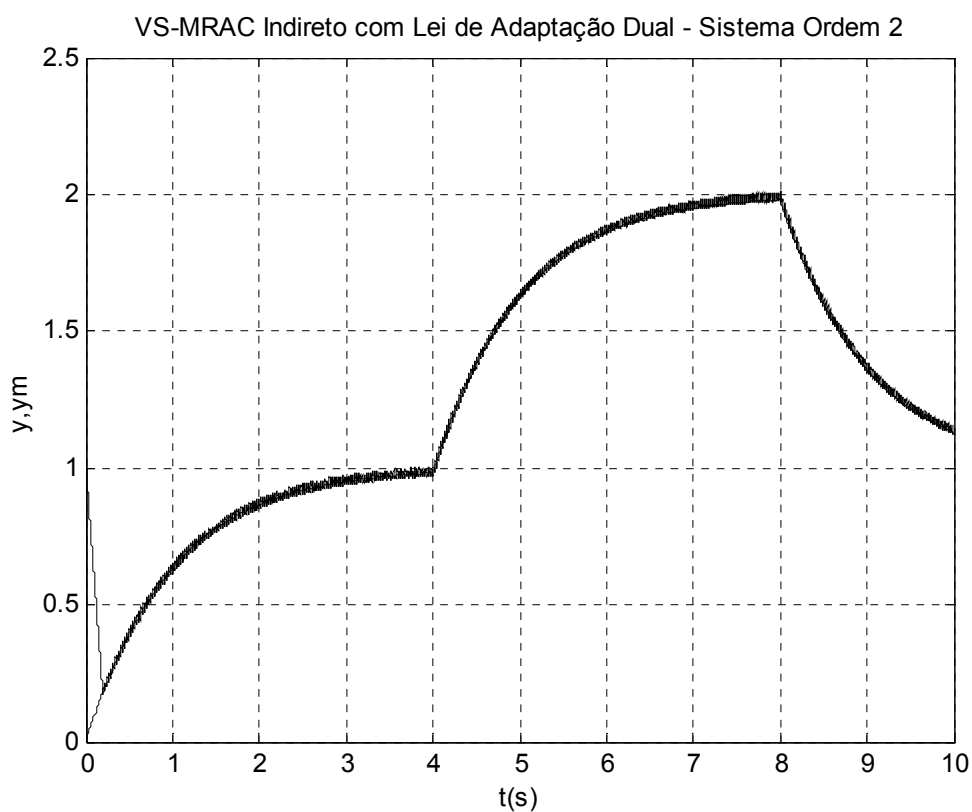


Figura 5.21 Rastreamento do modelo obtido através de saturação

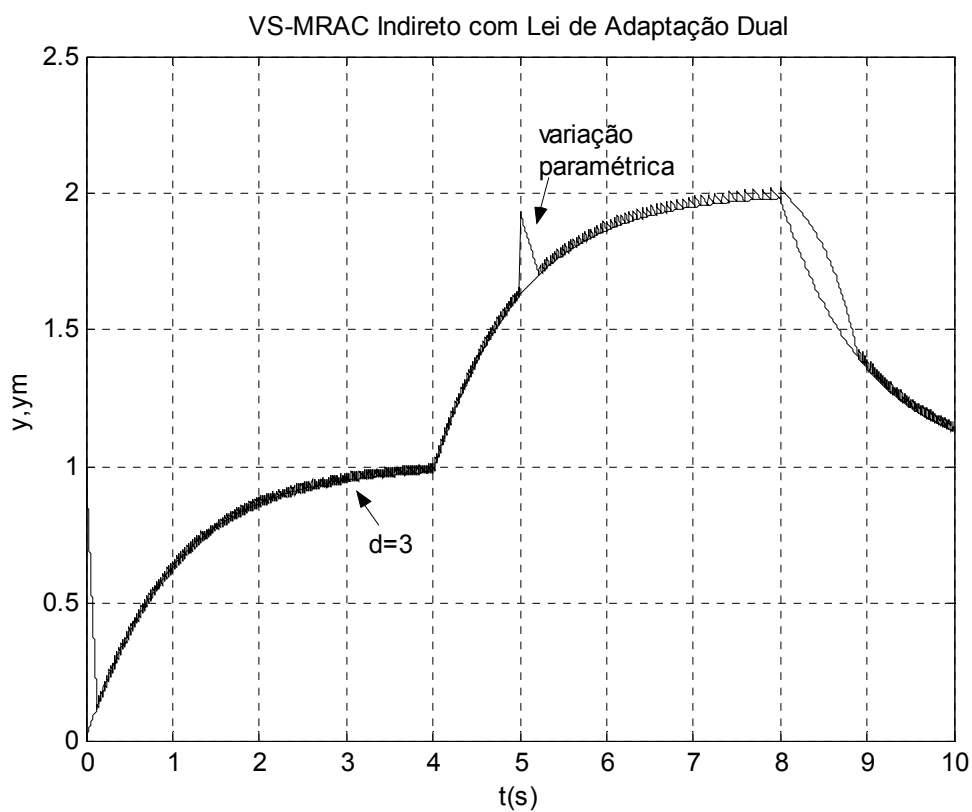


Figura 5.22 Perturbação ( $d=3$ ) em  $t=3s$  e variação paramétrica introduzida em  $t=5s$

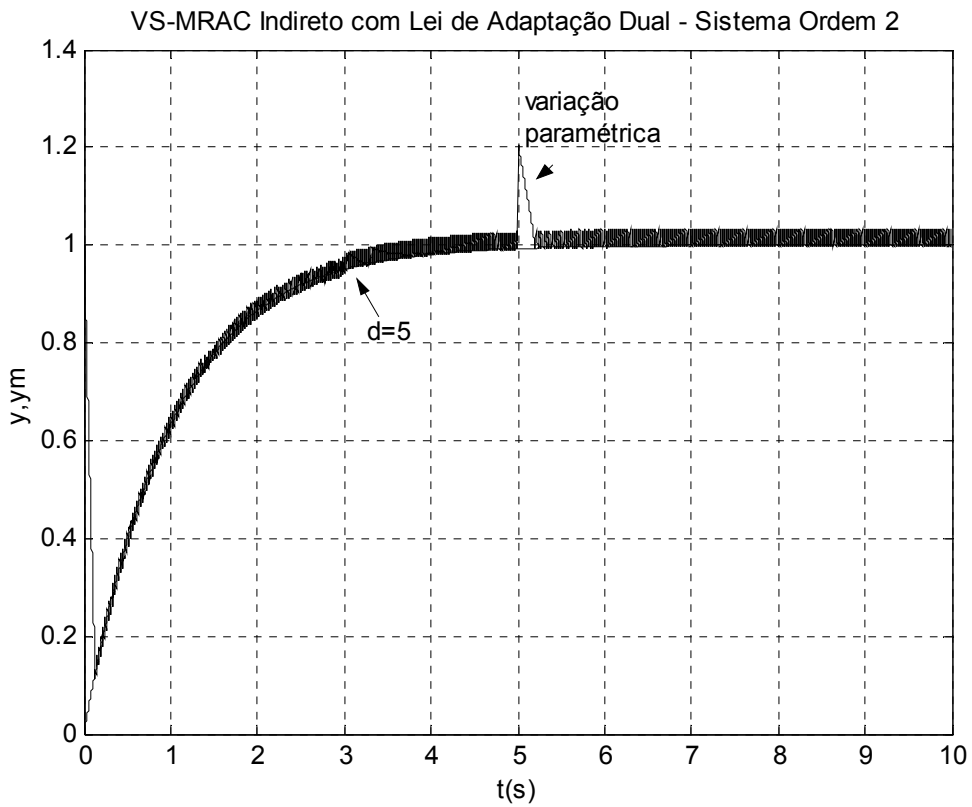


Figura 5.23 Rejeição total à perturbação ( $d=5$ )

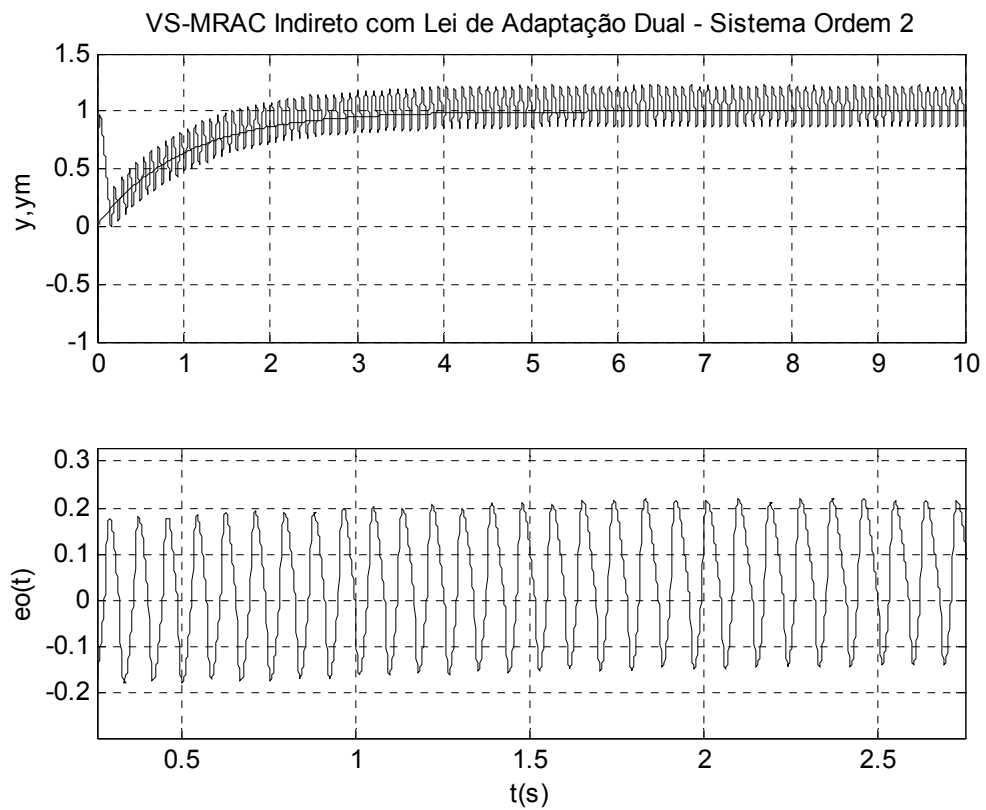


Figura 5.24 Dinâmica não modelada  $\Delta_2$  com  $\mu = 0,01$

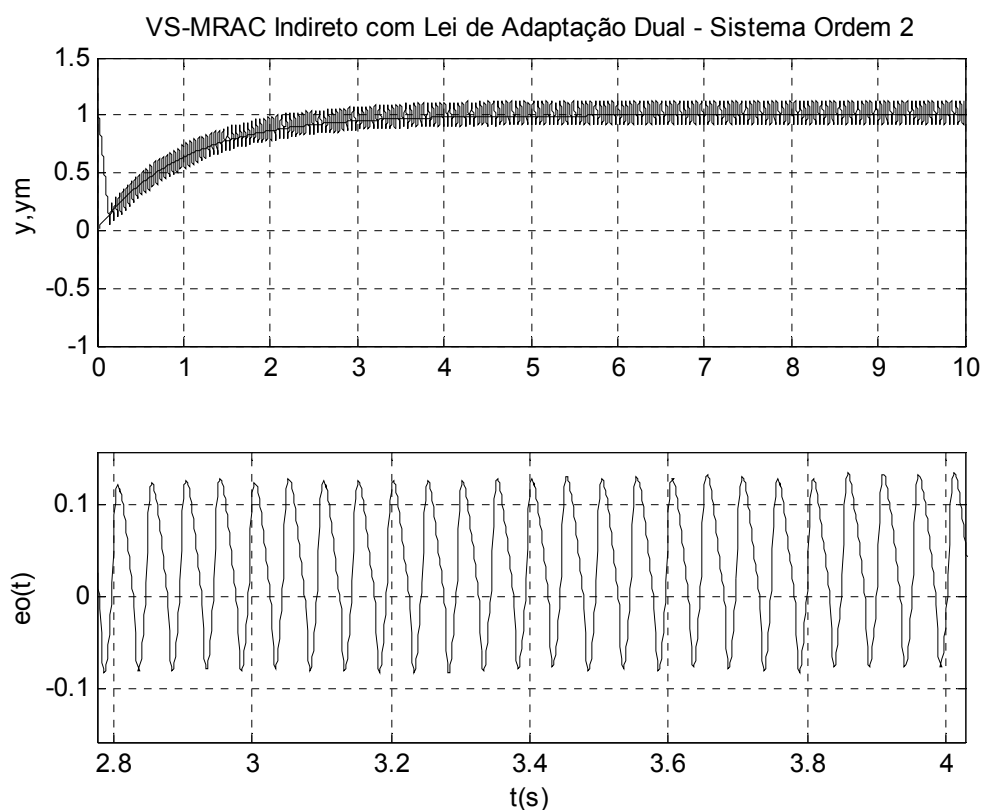


Figura 5.25 Dinâmica não modelada  $\Delta_2$  com  $\mu = 0,005$

A Figura 5.22 mostra o comportamento do sistema quando submetido à perturbação externa ( $d=3$ ) e variação paramétrica de +20% de todos os parâmetros da planta, introduzida em  $t=5s$ . Na Figura 5.23, aumenta-se a perturbação ( $d=5$ ) e, conseqüentemente, de acordo com o Teorema 5.2, o erro de saída (oscilações de maior amplitude). Nas Figuras 5.24 e 5.25 tem-se o sistema na presença de dinâmica parasita multiplicativa do tipo  $\Delta_2$ , onde se verifica, na Figura 5.25, um menor erro de saída, mostrando que existe, de fato, uma proporcionalidade entre os erros do sistema e o parâmetro  $\mu$ . Resultados equivalentes são apresentados nas Figuras 5.26 e 5.27, ressaltando que, nestes casos, uma perturbação ( $d=5$ ) também está atuando na planta. Novamente, se percebe a proporcionalidade entre  $\mu$  e o erro do sistema.

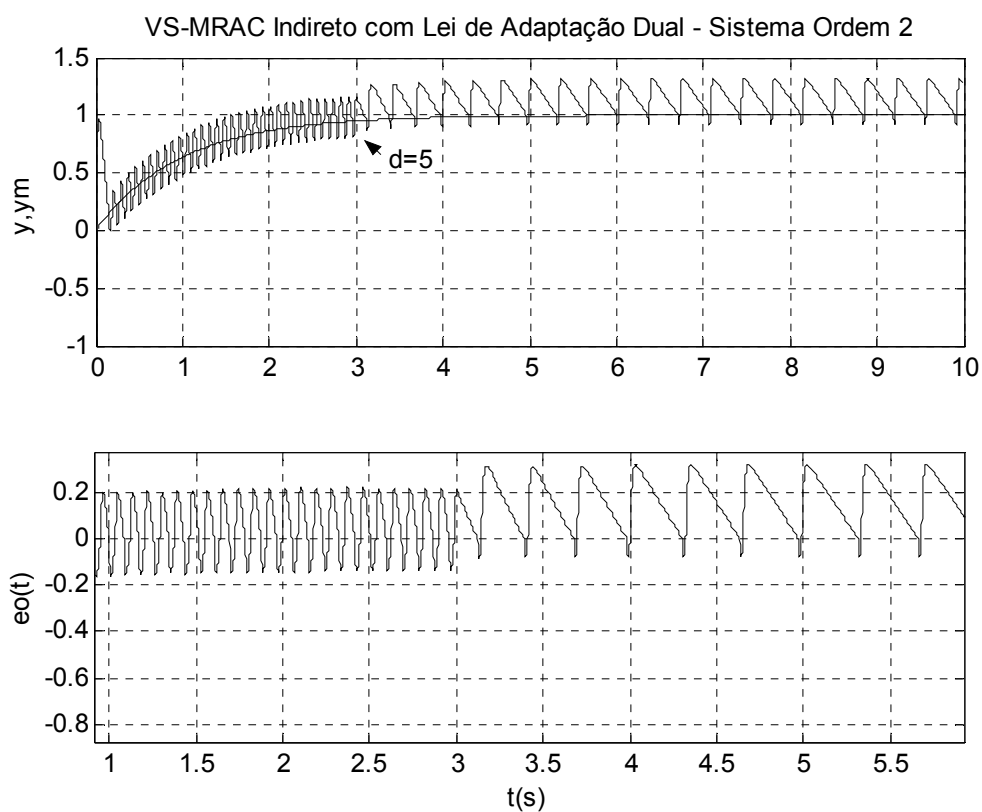


Figura 5.26 Perturbação do tipo degrau ( $d=5$ ) e dinâmica não modelada  $\Delta_2$  com  $\mu = 0,01$

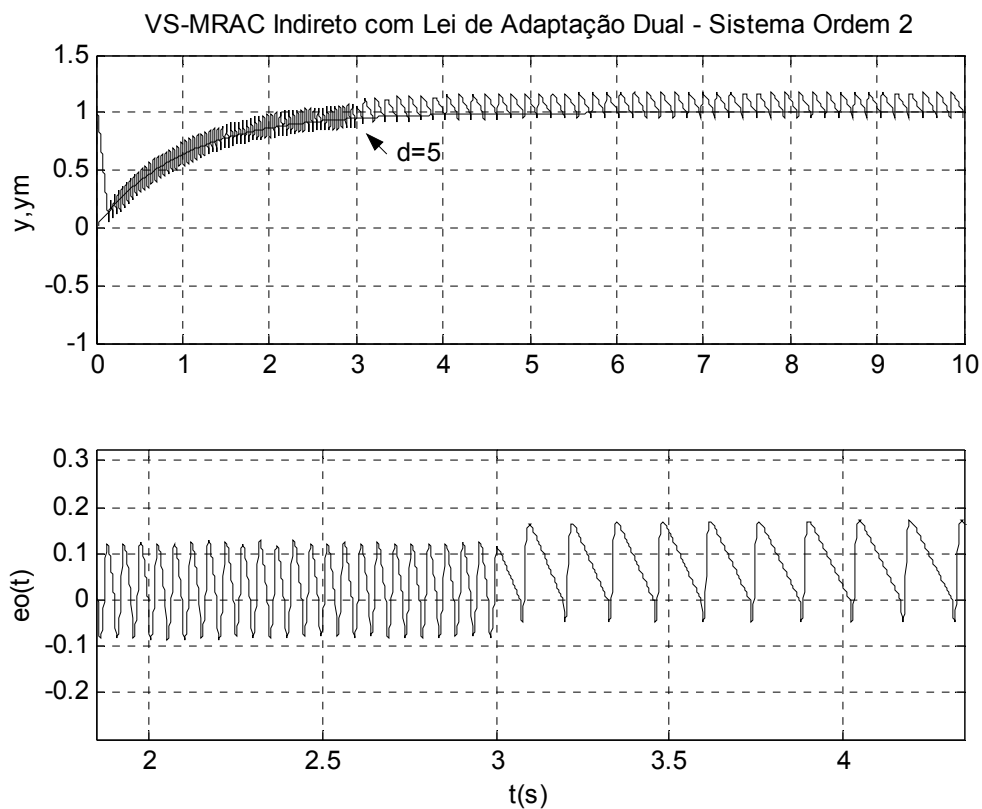


Figura 5.27 Perturbação do tipo degrau ( $d=5$ ) e dinâmica não modelada  $\Delta_2$  com  $\mu = 0,005$

## 5.5 Conclusões

Neste capítulo, apresentou-se uma alternativa ao projeto do IVS-MRAC, utilizando uma lei de adaptação paramétrica do tipo B-MRAC para o ganho de alta frequência da planta e leis à estrutura variável para os demais parâmetros do sistema. Esta solução tem por objetivo não tratar diretamente o laço algébrico e a descontinuidade aninhada inerentes à lei chaveada original para  $k_p$ , conforme apresentado no capítulo anterior, e se baseia no fato de serem comuns na literatura algoritmos combinados, notoriamente, para fins de suavização do sinal de controle, o que não é o caso para a abordagem feita aqui.

Os resultados de estabilidade e robustez obtidos, formulados em um Teorema e em um Corolário, garantiram a existência de um conjunto residual compacto globalmente atrativo, dependente principalmente do erro de adaptação em  $k_p$ , da amplitude da perturbação e da dinâmica não modelada, ou seja, o erro do sistema é da ordem de  $O(\sqrt{\mu}) + O(\bar{d}) + O(\tilde{k}_p)$ . Na ausência de perturbação ( $d=0$ ) e dinâmica não modelada ( $\mu = 0$ ), o erro ainda depende do erro de adaptação em  $k_p$ , fato característico de sistemas que utilizam alguma adaptação paramétrica e que necessitam de sinais PE para alcançar o objetivo de controle. As simulações sugeriram que o valor inicial de  $k_p$  influencia diretamente a rapidez do transitório, a amplitude do sinal de controle e, conseqüentemente, o erro do sistema. Contudo, ao se utilizar as amplitudes dos relés nas leis chaveadas satisfazendo as condições suficientes para obtenção do modo deslizante, esse efeito é minimizado através de um ajuste adequado em  $\hat{k}_p(0)$ . Adicionalmente não há necessidade de introdução de sinais PE na malha de controle. Tais simulações sugeriram, também, a robustez do sistema quando na presença de perturbações externas e dinâmica não modelada, tendo, através de um ajuste adequado da amplitude dos relés, rejeitado totalmente as perturbações em tempo finito.

A simulação para o sistema de segunda ordem exigiu a saturação do sinal de controle, mesmo nas condições ideais ( $d=0$  e  $\mu = 0$ ), o que motiva a derivação de um algoritmo compacto que utilize menos relés e permita obter sinais de controle de menor amplitude, devido à introdução de um vetor de parâmetros nominais da planta na lei de controle. O *IVS-MRAC Compacto* será desenvolvido no próximo capítulo.

Com o objetivo de desenvolver uma versão do IVS-MRAC equivalente ao caso direto em termos de propriedades de estabilidade e robustez e, considerando que o caso indireto apresenta uma simplicidade de projeto notável na etapa de dimensionamento dos relés, ainda no próximo capítulo, a versão do IVS-MRAC totalmente baseada em síntese de sinal, ou seja, com todas as leis chaveadas para os parâmetros da planta, terá sua análise de estabilidade desenvolvida, considerando a eliminação da descontinuidade aninhada e filtragem do sinal de controle, a qual será tratada como uma dinâmica não modelada. São esperados resultados similares aos obtidos por Costa e Hsu (1992) para o caso direto.

## Capítulo 6

### VS-MRAC Indireto

#### 6.1 Introdução

Neste capítulo, o objetivo é analisar a estabilidade e robustez do IVS-MRAC baseado somente em síntese de sinal, ou seja, com todas as leis chaveadas projetadas no enfoque VSS, equivalente ao caso direto (COSTA; HSU, 1992).

Conforme visto no capítulo anterior, o algoritmo combinado permite obter um conjunto residual para o erro do sistema dependente do erro de adaptação em  $k_p$ . Quando  $k_p$  é conhecido, não há nenhuma objeção a este fato, contudo, quando  $k_p$  é desconhecido ou conhecido com incertezas, sua adaptação se faz necessária e sabe-se que a convergência  $\hat{k}_p \rightarrow k_p^* \Rightarrow \tilde{k}_p \rightarrow 0$  se dá mediante a utilização de sinais de referência suficientemente ricos em frequência (SASTRY; BODSON, 1989). Em problemas de rastreamento, o uso de tais sinais nem sempre é possível, e, assim, estratégias de controle que não exijam sinais PE são de grande interesse prático (BAYARD; SPANOS; RAHMAN, 1995). No capítulo anterior, o IVS-MRAC combinado mostrou-se independente da necessidade de sinais PE, quando as amplitudes dos relés são convenientemente dimensionadas de modo a obter-se o modo deslizante em tempo finito. Embora o IVS-MRAC combinado tenha preservado a rapidez durante o transitório, característica dos sistemas à estrutura variável, o interesse em desenvolver uma versão estruturalmente equivalente ao caso direto se justifica na medida em que sua simplicidade de projeto motiva a extensão e futura aplicação a outras classes de plantas.

Uma alternativa de projeto do IVS-MRAC consiste em utilizar a lei chaveada original para  $k_p$  (Seção 4.4) em vez de leis integrais. Com a eliminação da descontinuidade aninhada, conforme a Seção 4.4.1, e a filtragem do sinal de controle presente na equação tratada como uma dinâmica não modelada, a demonstração de estabilidade se torna possível e, assim, pode-se obter um conjunto residual para o erro menor, independente de  $\tilde{k}_p$ .

A aparente desvantagem do IVS-MRAC em tornar o algoritmo mais complexo, por incorporar as expressões para o cálculo dos parâmetros do controlador, é solucionada através da derivação de uma versão que utiliza apenas um relé para o caso de grau relativo unitário, a qual será denominada *IVS-MRAC compacto*, desenvolvida mais adiante neste capítulo.

## 6.2 VS-MRAC Indireto

Seja o vetor  $\hat{\theta}_p = [\hat{k}_p, \hat{\beta}^T, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}^T]^T$ , conforme (4.9). As leis VS são propostas como em (4.35)-(4.37), a saber,

$$\hat{\beta}_i = -\bar{\beta}_i \operatorname{sgn}(e_o \zeta_{\beta_i}), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (6.1)$$

$$\hat{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_1 \operatorname{sgn}(e_o \zeta_1), \quad (6.2)$$

$$\hat{\alpha}_i = -\bar{\alpha}_i \operatorname{sgn}(e_o \zeta_{\alpha_i}), \quad i = 2, \dots, n, \quad (6.3)$$

com as condições suficientes para as amplitudes dos relés conforme (4.39)-(4.41),

$$\bar{\beta}_i > |\beta_i^*|, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (6.4)$$

$$\bar{\alpha}_1 > |\alpha_1^*|, \quad (6.5)$$

$$\bar{\alpha}_i > |\alpha_i^*|, \quad i = 2, \dots, n. \quad (6.6)$$

De acordo com a Seção 4.4.1, a seguinte lei VS é proposta para  $k_p$  (4.49)-(4.51),

$$\hat{k}_p = k_p^{\text{nom}} - \bar{k}_p \operatorname{sgn}(v_{av}); \quad v_{av} = F(\tau s)^{-1} v; \quad F(\tau s) = \tau s + 1, \quad (6.7)$$

onde  $v = -|e_o| \bar{\beta}^T |\zeta_\beta| - e_o \beta_m^T \zeta_\beta - e_o u$ . Neste caso, a condição suficiente para  $\bar{k}_p$  é  $\bar{k}_p > |k_p^{\text{nom}} - k_p^*|$  e  $k_p^{\text{nom}} > \bar{k}_p$  de modo a garantir a positividade de  $\hat{k}_p$ . Com  $\tau \rightarrow 0$ , a filtragem em  $v$  introduz uma dinâmica não modelada em (6.7) e, assim, a análise de estabilidade que inclua este fato é necessária, tendo em vista esta ser uma característica inerente a (6.7). No que segue, a mesma abordagem por perturbação singular utilizada no capítulo anterior é aqui empregada, partindo-se, portanto, diretamente para o desenvolvimento da análise.



### 6.3 Análise de Estabilidade

A análise de estabilidade desenvolvida nesta seção segue os passos da análise apresentada em Costa e Hsu (1992) para o VS-MRAC direto (caso de grau relativo unitário) e considera o modelo da planta escrito conforme (5.23). Correspondentemente, a equação do erro é dada por (5.26).

No que segue,  $c_i$  e  $k_i$  denotam constantes positivas. Para analisar a estabilidade do sistema na presença de dinâmica não modelada, propõe-se a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$2V(e, z) = \begin{bmatrix} e^T & \mu z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & R^T \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \mu z \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

A função (6.8) é definida positiva e radialmente ilimitada, de acordo com o Lema 5.1.

**Teorema 6.1** – Seja o sistema (5.23), a equação do erro (5.26), as leis chaveadas (6.1)-(6.3) e (4.48). Se todas as hipóteses (H1)-(H11) (Capítulo 5) e as condições (6.4)-(6.6) são satisfeitas, então toda trajetória do sistema entra em um conjunto residual compacto invariante

$$D_R = \left\{ (e, z) : V(e, z) \leq (c_1 \sqrt{\mu} + c_3 \bar{d} + \delta)^2 \right\}, \quad (6.9)$$

em tempo finito.

**Prova:** Considere-se a função (6.8) com  $P$  satisfazendo (5.25) e  $R$  e  $S$  (definidas apropriadamente durante a demonstração) tal que a condição (5.29) do Lema 5.1 seja satisfeita.

O Cálculo de  $\dot{V}(e, z)$  sobre as trajetórias do sistema (5.26) resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, z) = & -e^T Q e + \frac{e_o}{k_m} \left( \tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) + \\ & + \mu z^T \left[ \frac{1}{2} (A_2^T + S A_2) + R \bar{A}_{12} A_2 \right] z + \\ & + \mu z^T R A_c e + \frac{\mu z^T R b_c}{k_m} \left( \tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) + \\ & + \mu z^T (R \bar{A}_{12} + S) b_2 u + d \left( \bar{b}_1^T P + b_2^T R \right) e + \mu z^T (R \bar{b}_1 + S b_2) d. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Visto que  $A_2$  é Hurwitz, existem matrizes  $P_1 = P_1^T$  e  $Q_1 = Q_1^T > 0$  tais que

$$A_2^T P_1 + P_1 A_2 = -2Q_1. \quad (6.11)$$

Escolhendo-se  $S = \alpha P_1$ , onde  $P_1$  satisfaz (6.11) e  $\alpha > 0$  suficientemente grande, pode-se garantir satisfazer o Lema 5.1 e simultaneamente garantir que o termo quadrático  $\mu z^T [\cdot] z$  em (6.10) é definido negativo e limitado superiormente por  $-\mu z^T Q_2 z < 0$ ,  $Q_2 > 0$ , ou seja,

$$\mu z^T \left[ \frac{1}{2} (A_2^T + S A_2) + R \bar{A}_{12} A_2 \right] z = \mu z^T \left[ -\alpha Q_1 - \bar{A}_{12}^T P \bar{A}_{12} A_2 \right] z \leq -\mu z^T Q_2 z < 0. \quad (6.12)$$

Pode-se encontrar um limitante superior para o segundo termo de (6.10). Usando o vetor  $\tilde{\theta}_p$  (4.29) e  $\zeta$  (4.23), tem-se,

$$\frac{e_o}{k_m} (\tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha) = \frac{1}{k_m} (\tilde{\theta}_p^T \zeta) e_o. \quad (6.13)$$

Nesta análise, a expressão para  $\hat{k}_p$  é utilizada como em (4.48), ou seja,  $\hat{k}_p = k_p^{\text{nom}} - \bar{k}_p \text{sgn}(v)$ , sendo a filtragem em  $v$  interpretada como uma dinâmica parasita e o sinal  $v_{av}$  utilizado na prática.

Reescrevendo  $\zeta$  (4.23) de modo a incluir  $v$ , tem-se,

$$\zeta = \begin{bmatrix} v & k_p^* \zeta_\beta^T & \zeta_1 & \zeta_\alpha^T \\ e_o & & & \end{bmatrix}^T. \quad (6.14)$$

Utilizando (6.14) e substituindo (6.1)-(6.3) e (4.48) em (6.13), a saber,  $\theta_{p,i} = -\bar{\theta}_{p,i} \text{sgn}(e_o \zeta_i)$ ,  $\bar{\theta}_{p,1} > |\theta_{p,1}^{\text{nom}} - \theta_{p,1}^*|$  e  $\bar{\theta}_{p,i} > |\theta_{p,i}^*|$ ,  $i = 1, \dots, 2n$ , obtém-se,

$$\frac{1}{k_m} (\tilde{\theta}_p^T \zeta) e_o = - \sum_{i=1}^{2n-1} [(\bar{\theta}_{p,i} - |\theta_{p,i}^*|) \zeta_i] e_o \leq -k_{\theta_p} \left( \sum_{i=1}^{2n-1} |\zeta_i| \right) e_o = -k_{\theta_p} \|\zeta\| e_o, \quad (6.15)$$

onde  $k_{\theta_p} = \min_i \{ \bar{\theta}_{p,i} - |\theta_{p,i}^*| \} > 0$ .

Analisando agora o termo  $\frac{\mu z^T R b_c}{k_m} (\tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha)$  de (6.10), tem-se,

$$\tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha = \tilde{\theta}_p^T \zeta = (\hat{\theta}_p - \theta_p^*)^T \zeta \quad (6.16)$$

Usando a relação  $u = \theta^T \omega = \theta_r^T W(e + X_m) + \theta_{2n} r$ , os sinais auxiliares definidos em (5.9)-(5.12), e escrevendo  $\zeta$  (4.23) em notação matricial, tem-se,

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_p \\ k_p^* \zeta_\beta \\ \zeta_\alpha \\ \zeta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \left( \frac{\beta_m - \hat{\beta}}{\gamma} \right)^T & 0 \\ 0 & \frac{-k_p^*}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \\ \mathbf{h}^T & 0 & \frac{-\beta_m^T}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \Rightarrow \quad (6.17)$$

$$\Rightarrow \zeta_r = \mathbf{H}\mathbf{X} = \mathbf{H}(\mathbf{e} + \mathbf{X}_m) + \mathbf{V}[\theta_r^T \mathbf{W}(\mathbf{e} + \mathbf{X}_m) + \theta_{2n} r].$$

Portanto, de (6.15)-(6.17), (6.10) resulta em,

$$\dot{V}(\mathbf{e}, z) \leq -\mathbf{e}^T \mathbf{Q}_e \mathbf{e} - \mu z^T \mathbf{Q}_2 z - \frac{k_{\theta_p}}{k_m} \|\zeta\| |\mathbf{e}_o| + \mu z^T (\mathbf{Q}_3 \mathbf{e} + \mathbf{Q}_4 r + \mathbf{Q}_5 \mathbf{X}_m + \mathbf{Q}_6 d) + \mathbf{e}^T \mathbf{Q}_8 d, \quad (6.18)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_3 &= \frac{\mathbf{R} \mathbf{b}_c}{k_m} (\hat{\theta}_p - \theta_p^*)^T \mathbf{H} + \frac{\mathbf{R} \mathbf{b}_c}{k_m} (\hat{\theta}_p - \theta_p^*)^T \mathbf{V} \theta_r^T \mathbf{W} + \mathbf{R} \mathbf{A}_c + (\mathbf{R} \bar{\mathbf{A}}_{12} + \mathbf{S}) \mathbf{b}_2 \theta_r^T \mathbf{W}, \\ \mathbf{Q}_4 &= \frac{\mathbf{R} \mathbf{b}_c}{k_m} (\hat{\theta}_p - \theta_p^*)^T \mathbf{V} \theta_{2n} + (\mathbf{R} \bar{\mathbf{A}}_{12} + \mathbf{S}) \mathbf{b}_2 \theta_{2n}, \\ \mathbf{Q}_5 &= \mathbf{Q}_3 - \mathbf{R} \mathbf{A}_c; \quad \mathbf{Q}_6 = \mathbf{R} \bar{\mathbf{b}}_1 + \mathbf{S} \mathbf{b}_2; \quad \mathbf{Q}_8 = \mathbf{R}^T \mathbf{b}_2 + \mathbf{P} \bar{\mathbf{b}}_1. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Definindo  $\tilde{z} := \sqrt{\mu} z$  e majorando adequadamente cada um dos termos restantes em (6.18), tem-se

$$\dot{V}(\mathbf{e}, z) \leq \left( -k_1 \|\mathbf{e}\|^2 - k_2 \|\tilde{z}\|^2 + k_3 \sqrt{\mu} \|\mathbf{e}\| \|\tilde{z}\| \right) + k_4 \sqrt{\mu} \|\tilde{z}\| + k_5 \sqrt{\mu} \|\tilde{z}\| \bar{d} + k_6 \|\mathbf{e}\| \bar{d}. \quad (6.20)$$

Observa-se que, para todo  $\mu \in (0, \bar{\mu}]$ ,  $\bar{\mu} > 0$ ,

$$\left( -k_1 \|\mathbf{e}\|^2 - k_2 \|\tilde{z}\|^2 + k_3 \sqrt{\mu} \|\mathbf{e}\| \|\tilde{z}\| \right) \leq k_7 \|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\| < 0, \quad \text{onde } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} := \begin{bmatrix} \mathbf{e}^T & \tilde{z}^T \end{bmatrix}. \text{ Desprezando-se o termo } -\frac{k_{\theta_p}}{k_m} \|\zeta\| |\mathbf{e}_o| \text{ (negativo) obtém-se, então, que}$$

$$\dot{V}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \leq -k_7 \|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2 + (k_4 \sqrt{\mu} + k_5 \sqrt{\mu} \bar{d} + k_6 \bar{d}) \|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\|. \quad (6.21)$$

De (6.21), conclue-se que  $\dot{V}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) < 0$  fora da bola definida por

$$\mathbf{D} = \left\{ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\| \leq (k_4 \sqrt{\mu} + k_5 \sqrt{\mu} \bar{d} + k_6 \bar{d}) / k_7 \right\}. \quad (6.22)$$

Retornando às variáveis “e” e “z” tem-se que dentro de D

$$\|\mathbf{e}\| \leq M \text{ e } \|z\| \leq \frac{M}{\sqrt{\mu}}, \quad (6.23)$$

onde  $M = (k_4\sqrt{\mu} + k_5\sqrt{\mu\bar{d}} + k_6\bar{d})/k_7$ .

Para mostrar que qualquer trajetória do sistema entra em um conjunto residual da forma  $D_R = \{(e, z): V(e, z) \leq k_R\}$  em algum tempo finito, deve-se estimar a constante  $k_R > 0$  tal que no conjunto  $W_R = \{(e, z): V(e, z) \geq k_R\}$  tenha-se  $\dot{V} \leq -\delta_R$  para alguma constante  $\delta_R > 0$ . Tal domínio pode ser estimado a partir de uma majoração apropriada da função de Lyapunov (6.8) como segue,

$$V(e, z) \leq k_8 \|e\|^2 + \mu^2 k_9 \|z\|^2. \quad (6.24)$$

Substituindo os majorantes (6.23) em (6.24), tem-se,

$$D \subset \bar{D} = \left\{ (e, z): k_8 \|e\|^2 + \mu^2 k_9 \|z\|^2 \leq (c_1\sqrt{\mu} + c_2\bar{d})^2 \right\}. \quad (6.25)$$

Logo, uma possível escolha para  $k_R$  é

$$k_R = (c_1\sqrt{\mu} + c_2\bar{d} + \delta)^2, \quad (6.26)$$

com  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeno, o que garante que  $D \subset \bar{D} \subset D_R$  e que  $\dot{V}$  é estritamente negativo em  $W_R$ . Como na fronteira de  $D_R$  tem-se que  $\dot{V} < 0$ , então toda trajetória do sistema iniciada fora da região  $D_R$  deve necessariamente entrar em  $D_R$  em tempo finito. ■

**Corolário 6.1** – Se a trajetória do sistema está dentro de  $D_R$  então,  $\|e\| \leq c_3\sqrt{\mu} + c_4\bar{d}$  e, após um transitório em tempo finito,  $\|z\| \leq c_5\sqrt{\mu} + c_6\bar{d} + c_7 \sup|r| + c_8 \sup\|X_m\|$ .

**Prova:** Escolhendo um minorante para (6.8) através da desigualdade de Rayleigh e usando (6.9) tem-se que,

$$\frac{\lambda_{\min}(\bar{P})\|e\|^2}{2} \leq (c_1\sqrt{\mu} + c_2\bar{d} + \delta)^2, \quad (6.27)$$

onde  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & R^T \\ R & S \end{bmatrix}$ , conforme (6.8). Logo, dentro de  $D_R$ ,

$$\|e\| \leq [(c_1\sqrt{\mu} + c_2\bar{d} + \delta)] \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\min}(\bar{P})}} \leq c_3\sqrt{\mu} + c_4\bar{d}. \quad (6.28)$$

Substituindo cada um dos termos da relação  $u = \theta^T \omega = \theta_r^T W(e + X_m) + \theta_{2n} r$  por majorantes adequados e usando (6.28), tem-se,

$$|u| \leq c_5 \sqrt{\mu} + c_6 \bar{d} + c_7 \sup |r| + c_8 \sup \|X_m\|. \quad (6.29)$$

Como  $\mu \dot{z} = A_2 z + b_2 u$  (5.19), com  $A_2$  Hurwitz, então após um transitório finito  $\|z\|$  será da mesma ordem que  $|u|$ .

■

### 6.3.1 Considerações sobre o Teorema 6.1

Ao se utilizar leis chaveadas para todos os parâmetros envolvidos no projeto do controlador IVS-MRAC, obtém-se um conjunto residual para o erro do sistema equivalente ao obtido para o caso direto por Costa e Hsu (1992), para o caso de grau relativo unitário (ver Teorema 3.2). Este fato está associado à diferença entre ambas as abordagens, do ponto de vista de desenvolvimento teórico (Capítulo 4), a qual reside basicamente na parametrização, a qual, no caso indireto, inclui explicitamente o vetor de parâmetros da planta desde a formulação da equação geral do erro (4.22). Portanto, a motivação desta abordagem se justifica por não haver perda das propriedades de robustez e estabilidade obtidas para o caso direto (HSU; COSTA, 1989), ou seja, insensibilidade às variações paramétricas e robustez às perturbações externas e dinâmica não modelada, associadas ao excelente desempenho transitório. Adicionalmente, obtém-se um dimensionamento mais intuitivo das amplitudes dos relés.

Sendo assim, o seguinte corolário do caso direto também é válido, onde, ao invés de ter-se uma relação envolvendo o vetor regressor  $\omega$  tem-se uma relação envolvendo o vetor  $\zeta$  (4.23):

**Corolário 6.2** – Se além das hipóteses feitas no Teorema 6.1, também for verificada a condição

$$\|\zeta\| \geq \bar{c}_1 \sqrt{\mu} + \bar{c}_2 \bar{d} + \bar{\delta}, \quad (6.30)$$

onde  $\bar{c}_1$  e  $\bar{c}_2$  são constantes positivas e  $\bar{\delta} > 0$  é arbitrariamente pequeno  $\forall t \geq t_0$ ,  $t_0$  finito, então  $|e_0|$  é ulteriormente da ordem de  $\mu$ .

**Prova:** A prova segue os mesmos passos que em Costa e Hsu (1992), utilizando a candidata a função de Lyapunov

$$2V(e_o, z) = \begin{bmatrix} e_o & \mu z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_1^T \\ r_1 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_o \\ \mu z \end{bmatrix}, \quad (6.31)$$

com  $S$  e  $r_1$  tais que  $S - r_1 r_1^T > 0$ . Usa-se o fato de que  $\dot{e}_o = h_c^T \dot{e}$ , com  $e$  conforme (4.29). ■

O Corolário 6.2 mostra que, na ausência de dinâmica não modelada explícita ( $\mu = 0$ ), se  $\|\zeta\| > O(\bar{d})$ , o erro de rastreamento tende a zero. Para a lei VS utilizada para  $k_p$ , pelo fato dela possuir uma dinâmica não modelada inerente devido à introdução do filtro, mesmo que não haja dinâmica parasita explícita, deve-se ter  $\|\zeta\| > O(\tau) + O(\bar{d})$ , onde  $\tau \rightarrow 0$  é a constante de tempo do filtro, para que  $e_o$  tenda a zero em tempo finito. No caso ideal ( $d = 0$  e  $\mu = 0$ ), tem-se  $|e_o| \rightarrow O(\tau)$ . Nessas mesmas condições, quando comparado ao VS-MRAC direto (Corolário 3.1), este garante  $|e_o| \rightarrow 0$  para o caso de grau relativo unitário. Na prática, os resultados são similares, tendo em vista que erros dessa ordem são imperceptíveis pela presença natural de ruídos de medição, dinâmicas não modeladas e dos próprios erros numéricos gerados pelas aproximações.

## 6.4 Simplificações

No caso direto (HSU; COSTA, 1989), o projeto do VS-MRAC envolve o dimensionamento das amplitudes dos relés (parâmetros do controlador) a partir das expressões de *matching* de tais parâmetros, os quais são então diretamente usados na síntese do sinal de controle. Este fato torna o algoritmo simples, facilitando sua implementação embarcada. Adicionalmente, Hsu, Araújo e Costa (1994) propuseram uma versão *compacta* do VS-MRAC, que utilizava apenas o número de relés equivalente ao grau relativo da planta (Seção 3.4.1), e uma versão denominada *à relé*, a qual substituía a função de modulação por uma constante adequada, obtendo, assim, estabilidade apenas local.

Nesta seção, o objetivo é desenvolver uma versão compacta similar ao caso direto. Além de obter-se uma versão que utiliza apenas um relé ( $n^* = 1$ ), a incorporação do cálculo dos parâmetros do controlador a partir das *estimativas* dos parâmetros da planta não se faz

mais necessária. Desse modo, a mesma facilidade de implementação embarcada é obtida para o caso indireto, agregando valor a seu desenvolvimento.

Seja a lei de controle (3.41)

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}_{\text{nom}}, \quad \mathbf{u}_{\text{nom}} = \boldsymbol{\theta}_{\text{nom}}^T \boldsymbol{\omega},$$

e as expressões para o cálculo dos parâmetros do controlador como em (4.15)-(4.18),

$$\begin{aligned} \theta_{v_1} &= \frac{\beta_m - \hat{\beta}}{\gamma}, \\ \theta_n &= \frac{\hat{\alpha}_1 - \alpha_{m,1}}{\hat{k}_p}, \\ \theta_{v_2} &= \frac{\hat{\alpha} - \alpha_m + (\alpha_{m,1} - \hat{\alpha}_1) \beta_m}{\hat{k}_p \gamma}, \\ \theta_{2n} &= \frac{k_m}{\hat{k}_p}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o primeiro termo do sinal de controle ( $\mathbf{u} = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\omega}$ ) e substituindo as expressões acima, tem-se,

$$\mathbf{u} = \frac{(\beta_m - \hat{\beta})^T}{\gamma} \mathbf{v}_1 + \frac{\hat{\alpha}_1 - \alpha_{m,1}}{\hat{k}_p} \mathbf{y} + \frac{(\hat{\alpha} - \alpha_m)^T + (\alpha_{m,1} - \hat{\alpha}_1) \beta_m^T}{\hat{k}_p \gamma} \mathbf{v}_2 + \frac{k_m}{\hat{k}_p} \mathbf{r}, \quad (6.32)$$

a qual, após a substituição das leis (6.1)-(6.3), torna-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{[\beta_m + \bar{\beta} \operatorname{sgn}(\mathbf{e}_o \zeta_\beta)]^T}{\gamma} \mathbf{v}_1 + \frac{[-\bar{\alpha}_1 \operatorname{sgn}(\mathbf{e}_o \zeta_1) - \alpha_{m,1}]}{\hat{k}_p} \mathbf{y} + \\ &+ \frac{\{[-\bar{\alpha} \operatorname{sgn}(\mathbf{e}_o \zeta_\alpha) - \alpha_m]^T + [\alpha_{m,1} + \bar{\alpha}_1 \operatorname{sgn}(\mathbf{e}_o \zeta_1)] \beta_m^T\}}{\hat{k}_p \gamma} \mathbf{v}_2 + \frac{k_m}{\hat{k}_p} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Desenvolvendo (6.33) e utilizando os sinais auxiliares do vetor  $\boldsymbol{\zeta}$  como em (5.11)-(5.13), obtém-se,

$$\mathbf{u} = \frac{-\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_m + k_m \mathbf{r}}{\hat{k}_p}, \quad (6.34)$$

onde,

$$\mathbf{u}_0 = f_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{e}_o) = \left( \sum_{i=1}^{2n-1} \bar{\theta}_{p,r,i} |\zeta_{r,i}| \right) \operatorname{sgn}(\mathbf{e}_o), \quad (6.35)$$

e  $f_0$  é a função de modulação do relé. São definidos os seguintes vetores auxiliares,

$$\bar{\theta}_{pr} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}^T & \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}^T \end{bmatrix}^T; \quad \zeta_r = \begin{bmatrix} \hat{k}_p \zeta_\beta^T & \zeta_1 & \zeta_\alpha^T \end{bmatrix}^T. \quad (6.36)$$

A parcela do sinal de controle associada ao modelo de referência é dada por

$$u_m = \sum_{i=1}^{2n-1} \theta_{m,i}^T \zeta_{r,i}; \quad \theta_m = \begin{bmatrix} \beta_m^T & \alpha_{m,1} & \alpha_m^T \end{bmatrix}^T. \quad (6.37)$$

Adicionando agora a parcela associada ao controle nominal, ou seja, utilizando os valores nominais para os parâmetros da planta em (4.15)-(4.18), tem-se um novo controle nominal, dado por

$$u_{nom} = \sum_{i=1}^{2n-1} \theta_{pr_{nom},i} \zeta_{r,i}, \quad (6.38)$$

onde

$$\theta_{pr_{nom}} = \begin{bmatrix} \beta_{nom}^T & \alpha_{1_{nom}} & \alpha_{nom}^T \end{bmatrix}^T \quad (6.39)$$

e as condições para as amplitudes dos relés são dadas por

$$\bar{\beta}_i > \left| \beta_i^* - \beta_{nom,i} \right|, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (6.40)$$

$$\bar{\alpha}_1 > \left| \alpha_1^* - \alpha_{1_{nom}} \right|, \quad (6.41)$$

$$\bar{\alpha}_i > \left| \alpha_i^* - \alpha_{nom,i} \right|, \quad i = 2, \dots, n, \quad (6.42)$$

o que garante uma menor amplitude da parcela descontínua do sinal de controle. Assim, a lei de controle para o VS-MRAC indireto compacto resulta,

$$u = \frac{-(u_0 + u_m) + u_{nom} + k_m r}{\hat{k}_p}, \quad (6.43)$$

com  $\hat{k}_p$  conforme (6.7).

Uma outra simplificação pode ser adicionada à (6.43), obtendo-se, contudo, estabilidade local. Conforme Hsu, Araújo e Costa (1994), a idéia consiste em substituir a função de modulação  $f_0$  por uma constante adequada  $k_{RL}$ , de tal modo que,

$$u_0 = k_{RL} \operatorname{sgn}(e_o), \quad k_{RL} \geq f_0, \quad \forall t \geq 0. \quad (6.44)$$

Esta constante  $k_{RL}$  pode ser dimensionada através de simulações, verificando-se algum majorante para a função  $f_0$ . Outra opção é obter-se um algoritmo combinado, onde,



$$f_0 = \begin{cases} f_0, & f_0 \geq k_{RL} \\ k_0, & f_0 < k_{RL} \end{cases}. \quad (6.45)$$

## 6.5 Simulações

Nesta seção, as mesmas considerações e condições utilizadas nas simulações do capítulo 5 são utilizadas. A fim de permitir a comparação entre as duas versões do IVS-MRAC apresentadas neste trabalho, as mesmas plantas são submetidas à simulação.

Os sistemas serão escritos conforme a nomenclatura (4.2)-(4.7) utilizada ao longo deste trabalho.

### 6.5.1 Sistema de 1ª Ordem

Planta nominal:  $W_r(s) = k_p \frac{n_r(s)}{d_r(s)} = \frac{1}{s-1} = k_p \frac{1}{s+\alpha_1} \Rightarrow k_p = 1; \quad \alpha_1 = -1$

Modelo de Referência:  $M(s) = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)} = \frac{3}{s+3} = k_m \frac{1}{s+\alpha_{m,1}} \Rightarrow k_m = 3; \quad \alpha_{m,1} = 3$

Dinâmica Parasita (1):  $\Delta_1(s) = \frac{1}{\mu s + 1}$

Dinâmica Parasita (2):  $\Delta_2(s) = \frac{-\mu s + 1}{\mu s + 1}$

Sinais Auxiliares:  $\zeta_1 = y; \quad v = -e_o u$

Adaptação:  $\hat{k}_p = k_p^{\text{nom}} - \bar{k}_p \text{sgn}(v_{av}); \quad v_{av} = F(\tau s)^{-1} v; \quad F(\tau s) = \tau s + 1;$   
 $\hat{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)$

Parâmetros do Controlador:  $\theta_n = \frac{\hat{\alpha}_1 - \alpha_{m,1}}{\hat{k}_p}; \quad \theta_{2n} = \frac{k_m}{\hat{k}_p}$

Lei de Controle:  $u = \theta_n y + \theta_{2n} r$

Os parâmetros utilizados são  $k_p^{\text{nom}} = 1,2; \bar{k}_p = 0,5; \bar{\alpha}_1 = 1,5$ . A constante do tempo do filtro ( $\tau$ ) é ajustada ao longo das simulações. A condição inicial do sistema é  $y(0) = 1$ .

Inicialmente, são apresentados alguns resultados para a visualização do comportamento do sistema controlado no caso ideal (Figura 6.1) e na presença de perturbação externa (Figura 6.2).

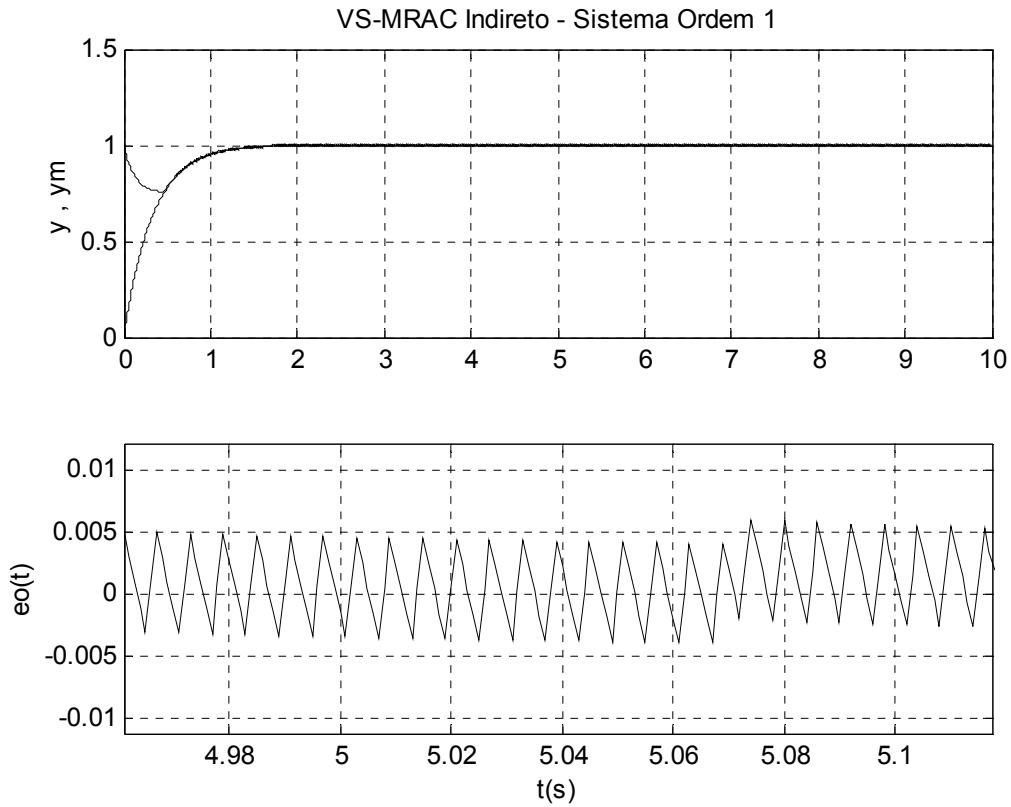


Figura 6.1 Caso ideal com  $\tau$  variável em  $t=5s$

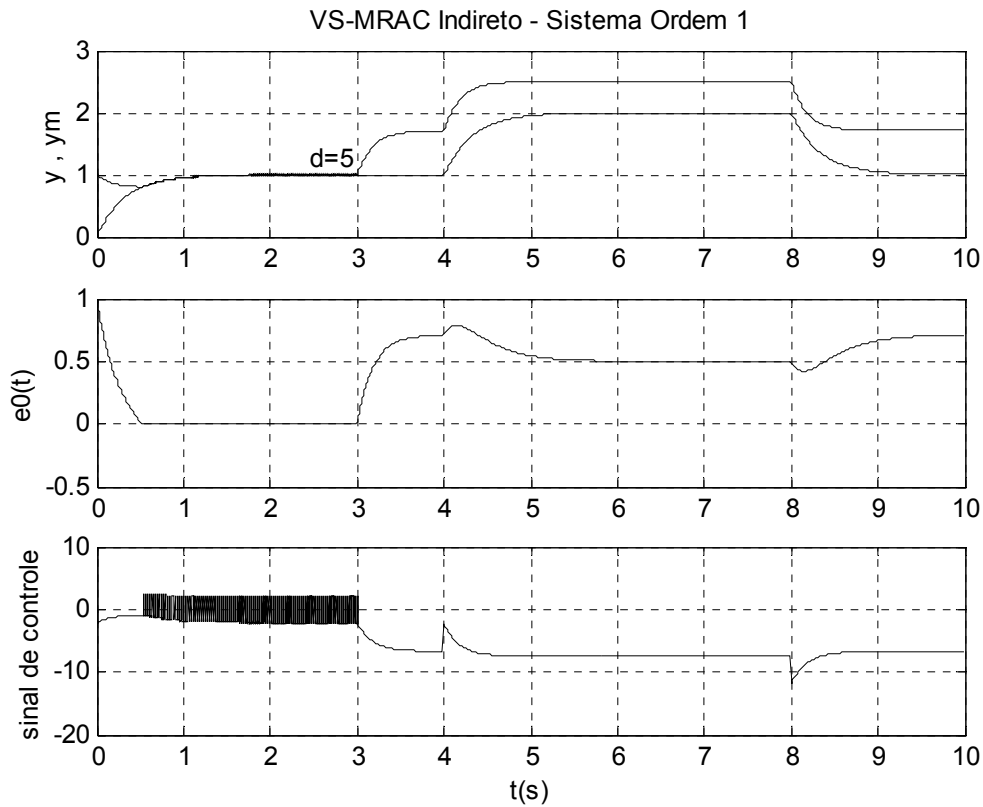


Figura 6.2 Rejeição parcial da perturbação ( $d=5$ )

Embora, na ausência de dinâmica não modelada explícita seja esperado um erro de saída em torno de  $O(\tau)$  associado à dinâmica não modelada introduzida pelo filtro, a Figura 6.1 mostra que isso não se verifica, tendo em vista que o sinal filtrado  $v_{av}$  é apenas o argumento da função sinal existente na lei VS para  $\hat{k}_p$ , não estando multiplicando ou sendo somado ao modelo da planta  $W_r$ . Na Figura 6.1, este fato pode ser observado pela invariância do erro de saída quando ocorre a mudança no valor de  $\tau$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \tau &= 1s, & 0 \leq t < 5s \\ \tau &= 0,001s & t \geq 5s \end{aligned}$$

Este fato corrobora a idéia da equivalência em termos de propriedades de estabilidade entre o caso direto e o indireto. Nas demais simulações, adota-se, portanto,  $\tau = 0,001s$ .

Nestas simulações, o mesmo tipo de perturbação do capítulo anterior é utilizada (Figura 6.2) e necessita-se aumentar a amplitude dos relés para que haja uma rejeição total (Figura 6.3), onde utiliza-se  $\bar{k}_p = 0,7$  e  $\bar{\alpha}_1 = 3$ . Observa-se que um incremento menor que no caso em modo dual é suficiente para a rejeição total. A variação paramétrica de 20% também

é introduzida em  $t=5s$ . Ao se aumentar as amplitudes dos relés, se aumenta a amplitude do sinal de controle, o qual excedeu a faixa de  $\pm 10$ , definida no capítulo 5. Assim, a saturação do sinal de controle é empregada.

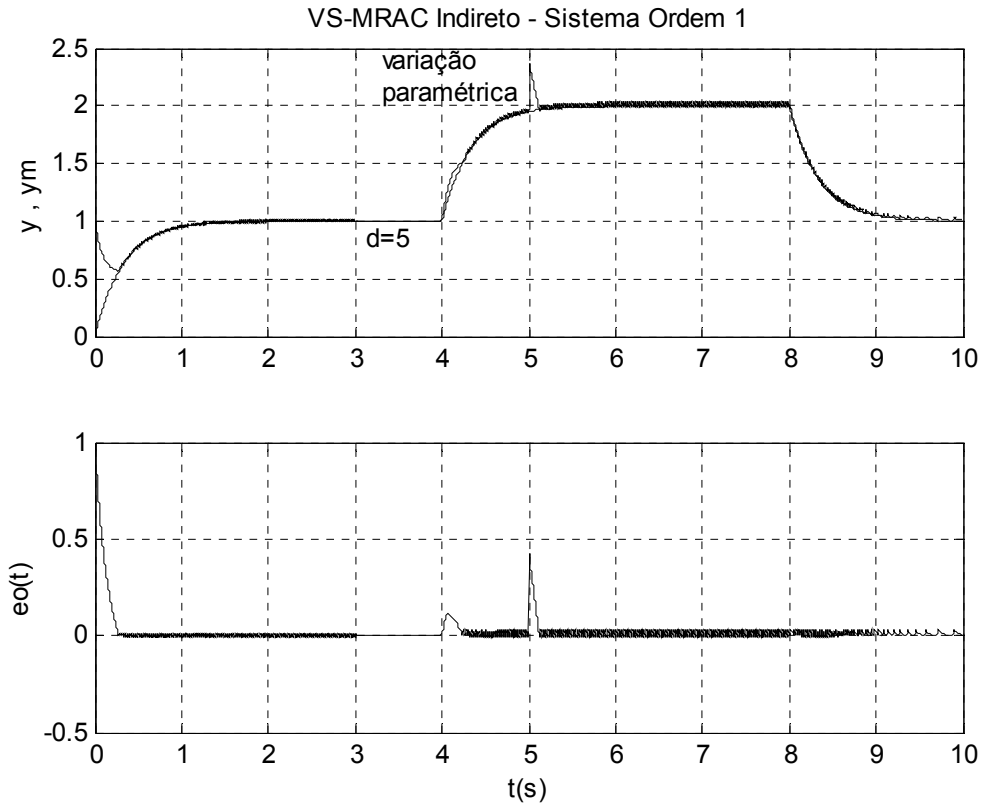


Figura 6.3 Variação paramétrica e rejeição total à perturbação com  $\bar{k}_p = 0,7$  e  $\bar{\alpha}_1 = 3$

As Figuras 6.4 e 6.5 apresentam o comportamento do sistema na presença da dinâmica não modelada explícita  $\Delta_1$  com  $\mu = 0,01$  e  $\mu = 0,005$ , respectivamente. O intuito é mostrar a proporcionalidade entre o erro de saída e o parâmetro  $\mu$ .

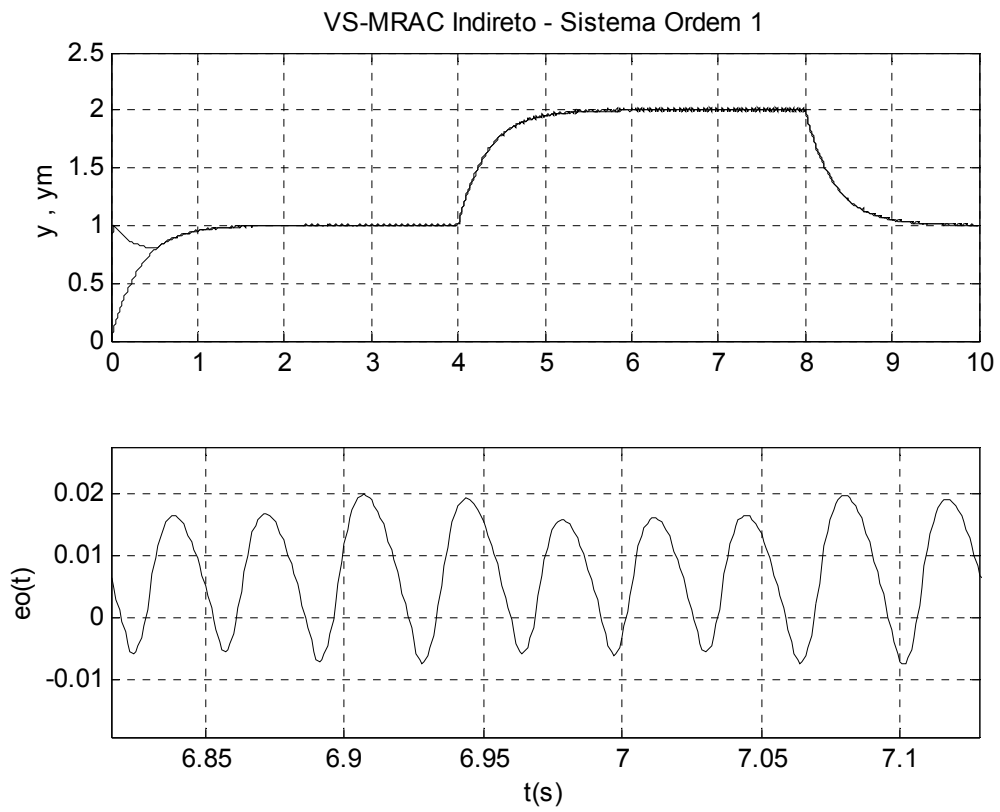


Figura 6.4 Efeito da dinâmica parasita  $\Delta_1$  com  $\mu = 0,01$

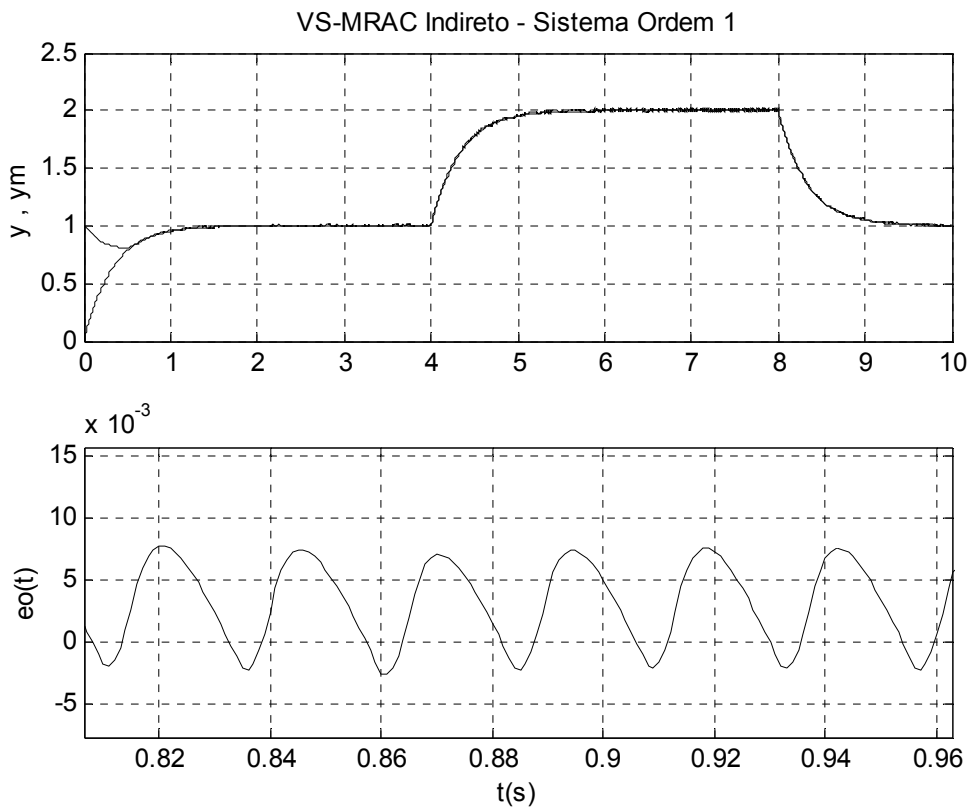


Figura 6.5 Efeito da dinâmica parasita  $\Delta_1$  com  $\mu = 0,005$

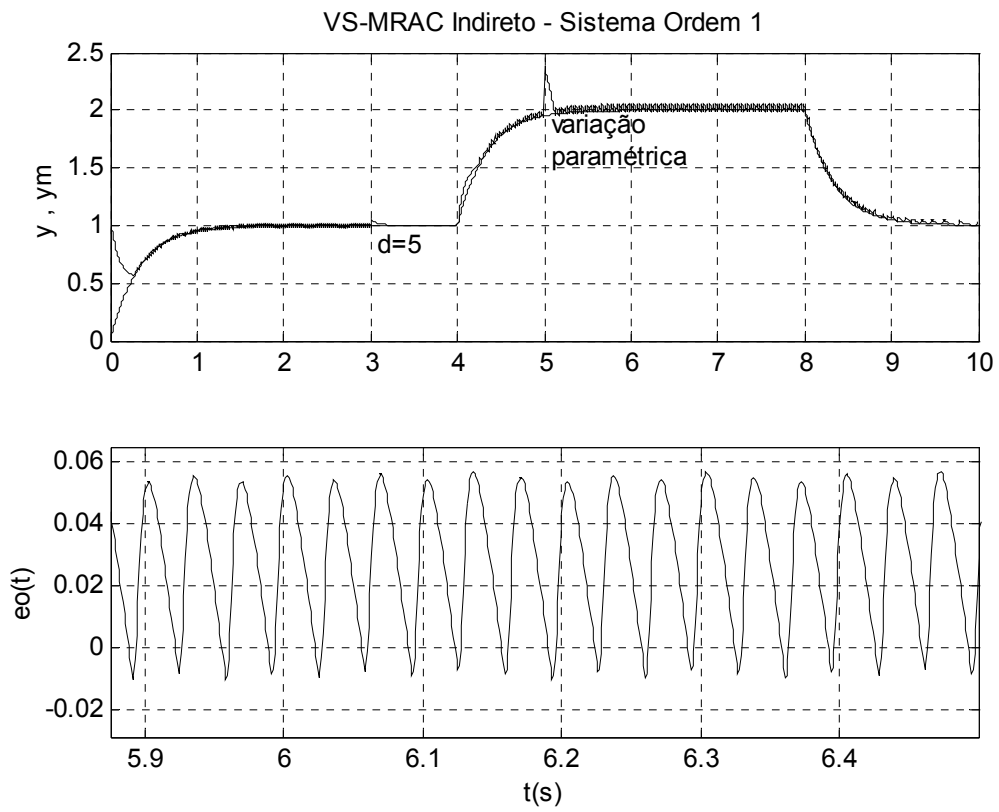


Figura 6.6 Efeito da dinâmica parasita  $\Delta_1$  com  $\mu = 0,01$ , perturbação e variação paramétrica

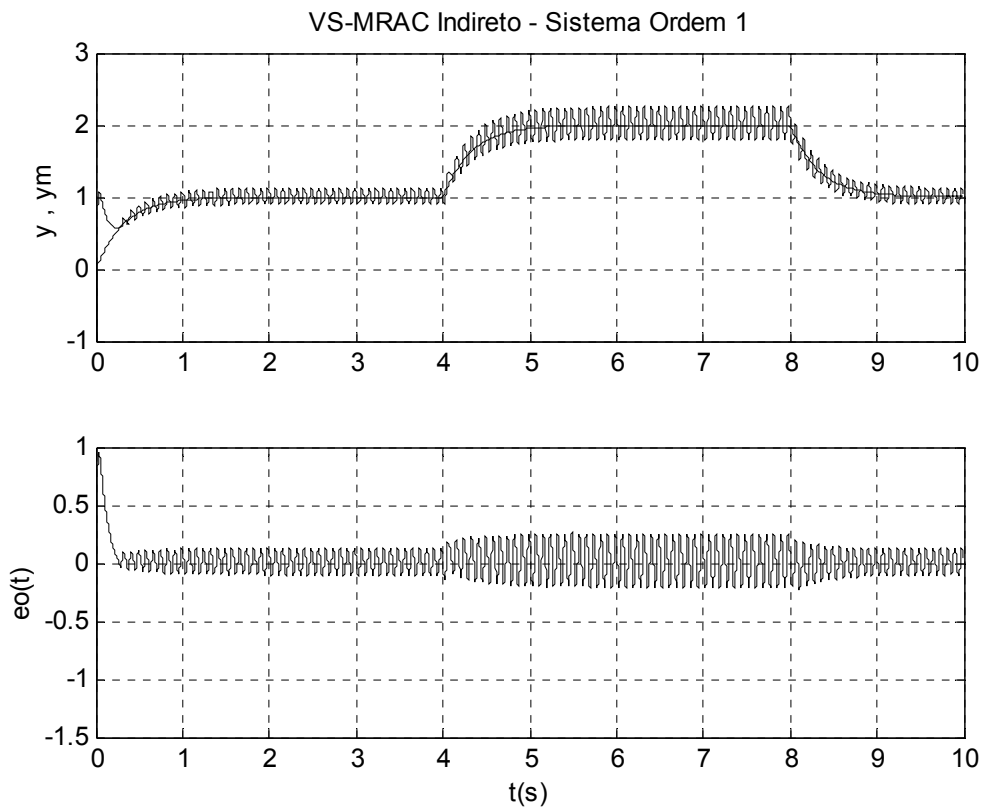


Figura 6.7 Efeito da dinâmica parasita  $\Delta_2$  com  $\mu = 0,01$

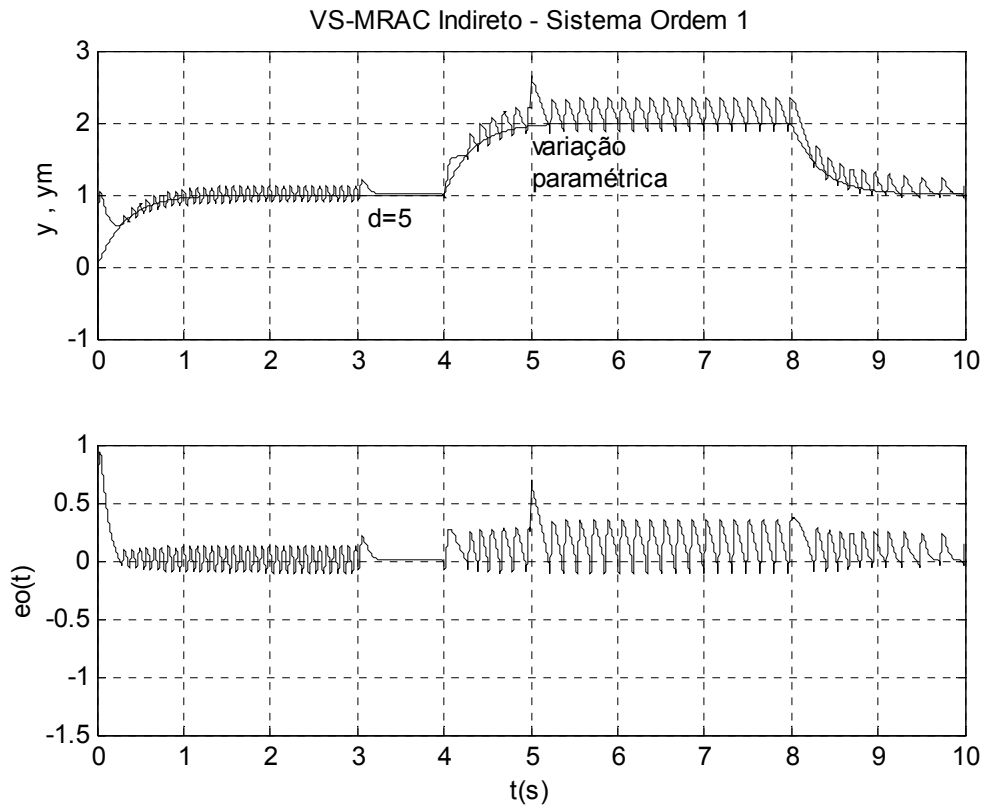


Figura 6.8 Efeito da dinâmica parasita  $\Delta_2$  com  $\mu = 0,01$ , perturbação e variação paramétrica

A fim de simular o comportamento do sistema em uma situação comum na prática, a Figura 6.6 ilustra a presença simultânea de perturbação, dinâmica parasita e variação paramétrica. O desempenho do sistema na presença de  $\Delta_2$  é ilustrado nas Figuras 6.7 e 6.8. Comparando a Figura 6.8 com a Figura 5.16 percebe-se o maior erro da estratégia em modo dual.

### 6.5.2 Sistema de 2ª Ordem

Planta nominal:

$$W_r(s) = k_p \frac{n_r(s)}{d_r(s)} = k_p \frac{s + \beta_1}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s - 10} \Rightarrow k_p = 1; \beta_1 = 3; \alpha_1 = 3; \alpha_2 = -10$$

Modelo de Referência:  $M(s) = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)} = k_m \frac{1}{s + \alpha_{m,1}} = \frac{1}{s + 1} \Rightarrow k_m = 1; \alpha_{m,1} = 1$

Dinâmica Parasita (1):  $\Delta_1(s) = \frac{1}{\mu s + 1}$

Dinâmica Parasita (2):  $\Delta_2(s) = \frac{-\mu s + 1}{\mu s + 1}$

Filtros E/S:  $\dot{v}_1 = -v_1 + u$   
 $\dot{v}_2 = -v_2 + y$

Sinais Auxiliares:  $\zeta_1 = y; \zeta_\alpha = v_2; \zeta_\beta = -v_1; v = -|e_o| \bar{\beta}^T |\zeta_\beta| - e_o u$

Adaptação:  $\hat{k}_p = k_p^{\text{nom}} - \bar{k}_p \text{sgn}(v_{\text{av}}); v_{\text{av}} = F(\tau s)^{-1} v; F(\tau s) = \tau s + 1;$   
 $\hat{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)$   
 $\hat{\beta} = -\bar{\beta} \text{sgn}(e_o \zeta_\beta)$   
 $\hat{\alpha} = -\bar{\alpha} \text{sgn}(e_o \zeta_\alpha)$

Parâmetros do Controlador:  $\theta_{v_1} = -\hat{\beta}; \theta_n = \frac{\hat{\alpha}_1 - \alpha_{m,1}}{\hat{k}_p}; \theta_{v_2} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{k}_p}; \theta_{2n} = \frac{k_m}{\hat{k}_p};$

Lei de Controle:  $u = \theta_{v_1} v_1 + \theta_n y + \theta_{v_2} v_2 + \theta_{2n} r$

No exemplo acima, como  $v_1, v_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , assume-se  $\alpha = \alpha_2$  e  $\beta = \beta_1$ . Em todas as simulações adota-se  $\gamma = 1$  e  $y(0) = 1$ . As amplitudes dos relés utilizadas inicialmente são  $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta} = 3,5$ ,  $\bar{\alpha}_1 = 3,5$ ,  $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha} = 11$ ,  $k_p^{\text{nom}} = 1,2$  e  $\bar{k}_p = 0,5$ .

Ao aplicar o IVS-MRAC com as leis chaveadas acima, considerando as amplitudes utilizadas, o sinal de controle eleva-se, portanto, dificultando a implementação prática e requerendo saturação (Figura 6.9) mesmo no caso ideal, a qual foi fixada em  $\pm 10$ , conforme a Seção 5.4.1. A Figura 6.10 mostra que, para o caso de ordem 2, devido ao maior número de parâmetros, o somatório das amplitudes dos relés é maior e, conseqüentemente, consegue-se rejeição total à perturbação ( $d=5$ ) sem a necessidade de incrementar os valores iniciais utilizados.

Ao submeter o sistema à dinâmica não modelada  $\Delta_2$ , perturbação e variação paramétrica, se obtém o desempenho ilustrado na Figura 6.11, o qual apresenta um erro menor que seu equivalente em modo dual (Figura 5.22) pela não dependência do erro de adaptação em  $k_p$ .



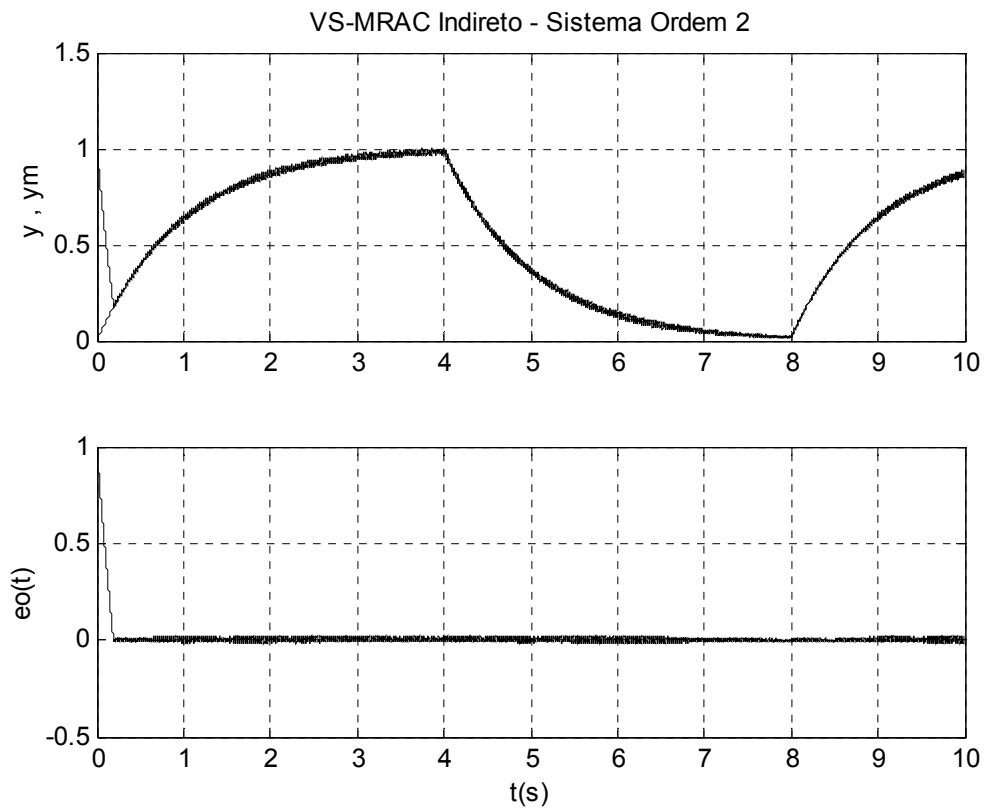


Figura 6.9 Rastreamento do modelo obtido através de saturação em condições ideais

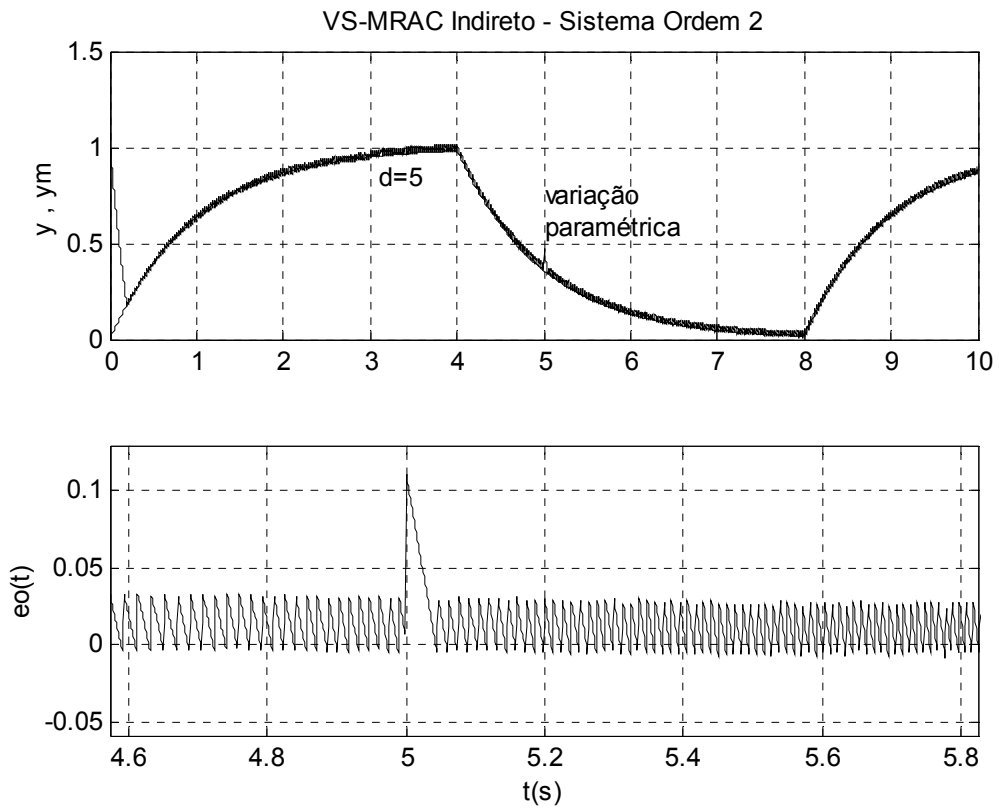


Figura 6.10 Perturbação e variação paramétrica

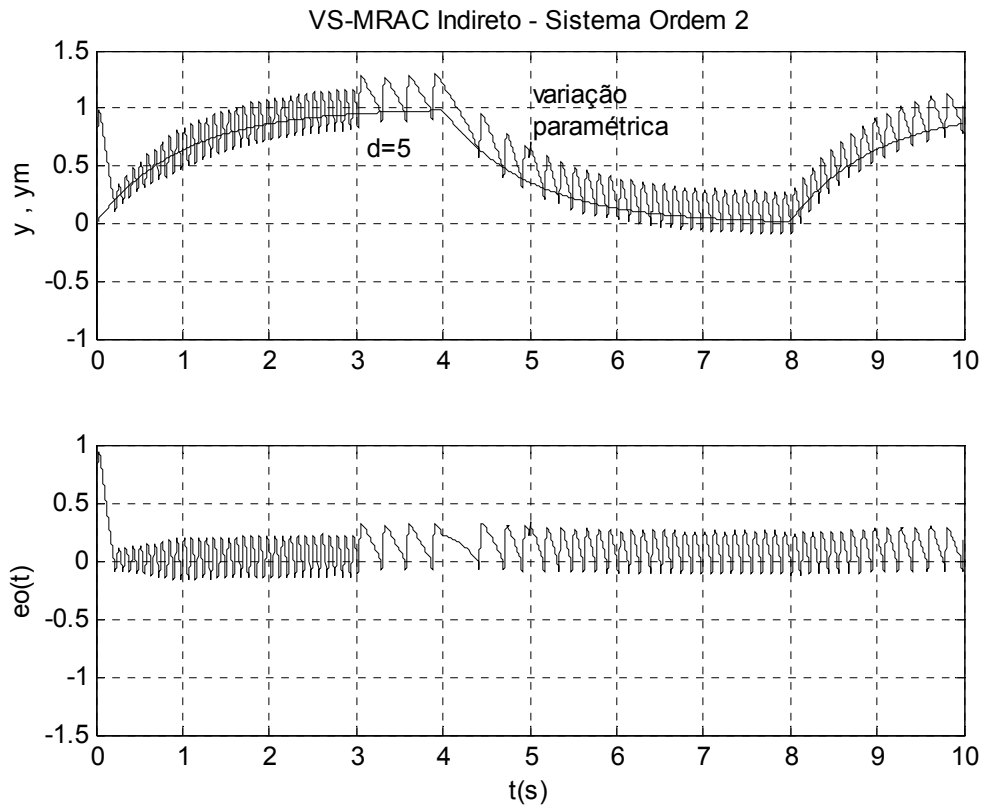


Figura 6.11 Efeito da dinâmica não modelada  $\Delta_2$ , perturbação e variação paramétrica

Na Figura 6.12, a versão compacta da Seção 6.4 é aplicada ao sistema no caso ideal, com as amplitudes dos relés  $\bar{\beta} = \bar{\beta}_1 = 0,8$ ;  $\bar{\alpha}_1 = 0,8$ ;  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_2 = 0,8$ ;  $\bar{k}_p = 0,5$  e os parâmetros nominais  $\alpha_{1\text{nom}} = 3,2$ ;  $\alpha_{\text{nom}} = \alpha_{2\text{nom}} = -10,5$  e  $k_{p\text{nom}} = 1,2$ . Observa-se um transitório um pouco mais lento e com um pequeno *overshoot* em relação à versão não compacta (Figura 6.9), porém o sinal de controle é menor, não necessitando de saturação. Ao se utilizar  $\gamma = 0,6$ , obtém-se menor sobresinal e transitório mais rápido (Figura 6.13). Adicionalmente, tem-se um algoritmo mais simples, com apenas um relé (ver 6.43). Ao utilizar-se a versão à relé, a função de modulação é substituída por uma constante, que pode ser obtida através da observação da evolução de tal função, conforme a Figura 6.14. Utilizando-se  $k_{RL} = 4$ , tem-se o resultado ilustrado na Figura 6.15, onde o *overshoot* é eliminado.

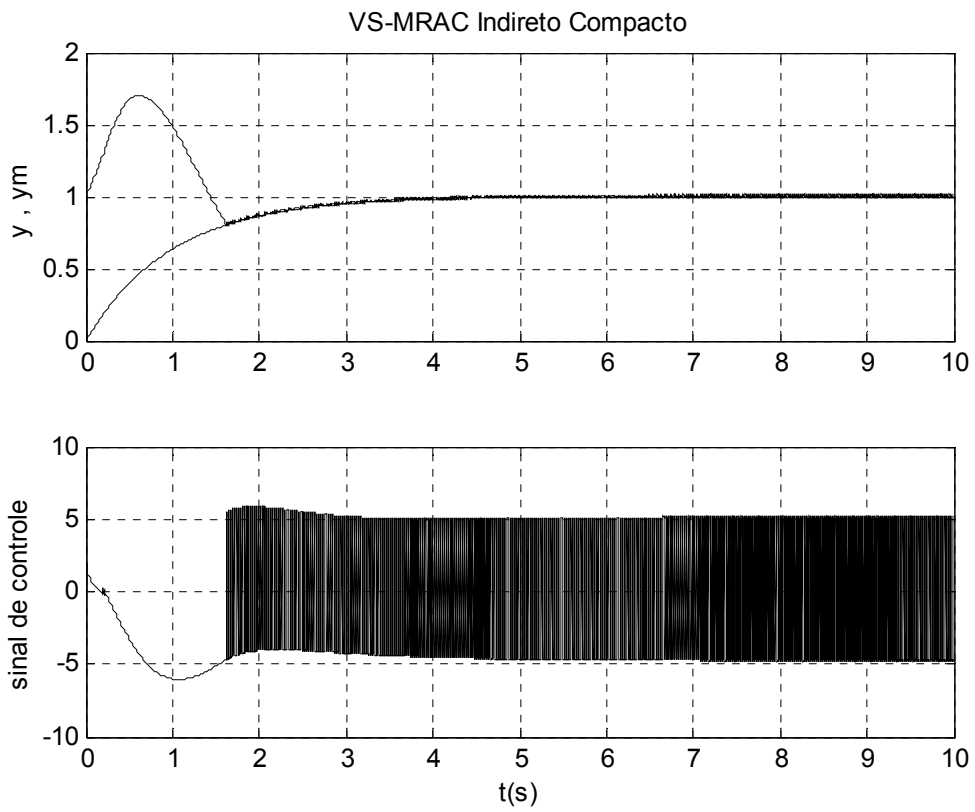


Figura 6.12 Desempenho da versão compacta para ilustrar a menor amplitude do sinal de controle devido a introdução do controle nominal

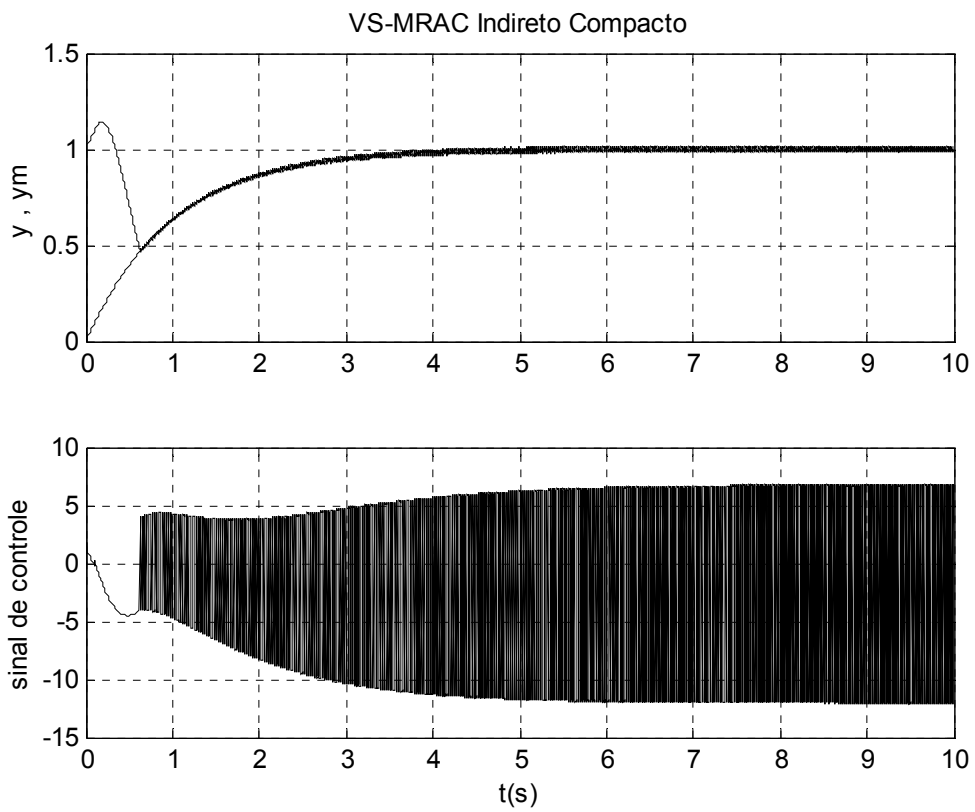


Figura 6.13 Suavização de sobresinal e incremento na rapidez do transitório com  $\gamma = 0,6$

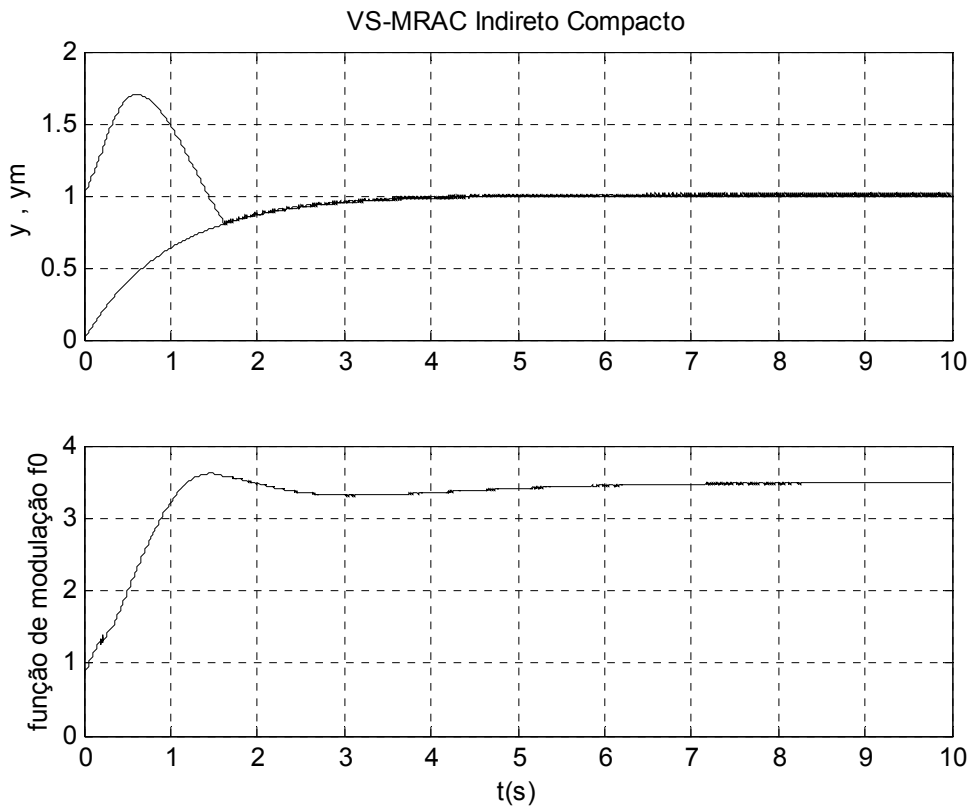


Figura 6.14 Evolução da função de modulação

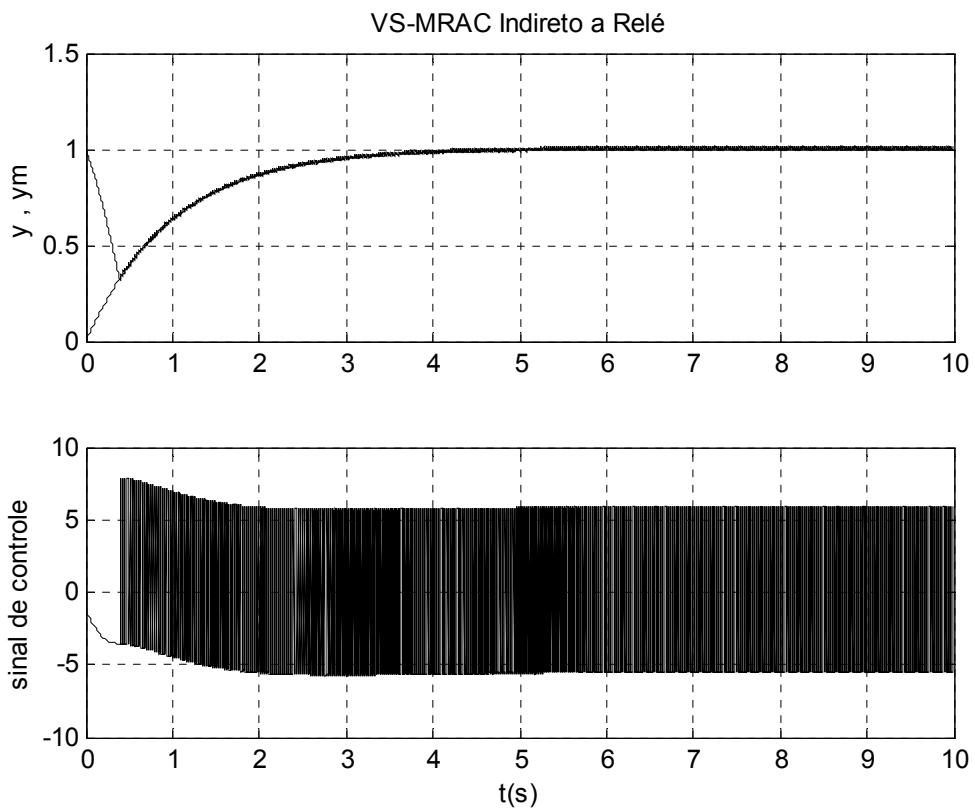


Figura 6.15 Eliminação de overshoot ao usar-se versão à relé com  $k_{RL} = 4$ .

## 6.6 Conclusões

Neste capítulo, apresentou-se a análise de estabilidade e robustez a perturbações e dinâmica não modelada do IVS-MRAC baseado totalmente em síntese de sinal, com o chaveamento paramétrico realizado nos parâmetros da planta. O desenvolvimento desta versão teve por objetivo obter uma versão equivalente ao caso direto, não apenas em termos de estrutura, mas também em relação às suas propriedades de estabilidade. O conjunto residual obtido para o erro do sistema é menor do que quando se usa algum tipo de adaptação paramétrica, como no algoritmo combinado do capítulo 5. As simulações permitiram verificar a não influência do parâmetro  $\tau$  no comportamento do erro de saída, associado à dinâmica não modelada introduzida pelo filtro. Uma versão que utiliza apenas um relé e permite o dimensionamento do mesmo com uma menor amplitude também foi desenvolvido, o qual foi denominado IVS-MRAC compacto. Com isto, as expressões para o cálculo dos parâmetros do controlador não necessitam estar incorporadas ao algoritmo, simplificando-o e motivando sua aplicação embarcada.

## Capítulo 7

### Conclusões e Perspectivas

Nesta Tese foram propostos controladores por modelo de referência e estrutura variável utilizando-se apenas a realimentação de saída da planta. Os controladores aqui desenvolvidos foram denominados IVS-MRAC (Indirect Variable Structure Model Reference Adaptive Control), pois se baseiam na abordagem indireta do controle adaptativo. Considerou-se o controle de plantas lineares, monovariáveis, com parâmetros incertos, perturbações e dinâmica não modelada.

A motivação para este Tese foi obter controladores que possibilitem não apenas algoritmos e técnicas de implementação simplificados, mas também que forneçam métodos intuitivos de projeto. Embora o IVS-MRAC seja desenvolvido a partir da formulação de controle adaptativo com adaptação paramétrica, o mesmo utiliza adaptação por síntese de sinais, que lhe confere robustez à dinâmica não modelada e perturbações. Neste sentido, uma contribuição significativa desta Tese é a possibilidade de projeto do VS-MRAC sob um novo enfoque, onde as leis não são mais chaveadas para os parâmetros do controlador, mas para os parâmetros da planta. Este procedimento se justifica pelo fato das amplitudes dos relés utilizados nas leis chaveadas estarem agora associados diretamente aos parâmetros do modelo da planta, os quais representam relações entre parâmetros físicos do sistema, que podem ter suas incertezas conhecidas mais facilmente. No VS-MRAC tradicional, baseado na abordagem direta, esses mesmos parâmetros do modelo da planta, com suas respectivas incertezas, são utilizados para o cálculo sistemático dos parâmetros nominais do controlador, através das respectivas expressões obtidas supondo a condição de *matching* (Apêndice B). Esse procedimento consiste na etapa de dimensionamento das amplitudes dos relés. O IVS-MRAC torna este dimensionamento mais intuitivo, facilitando o projeto global do controlador. A linha de pesquisa do VS-MRAC direto tem evoluído e expandido a classe de sistemas às quais o mesmo se aplica. Nesta Tese, não só se propõe um desenvolvimento sobre outro ponto de vista, considerado mais intuitivo, mas também sugere uma extensão similar ao caso direto. Os resultados teóricos de estabilidade (especificamente relativos ao erro de saída) do IVS-MRAC para o caso de grau relativo unitário e em condições ideais se mostraram

equivalentes aos obtidos para o VS-MRAC, a menos de um termo  $O(\tau)$ ,  $\tau \rightarrow 0$ . Na prática, os resultados são similares, tendo em vista que erros dessa ordem são imperceptíveis pela presença natural de ruídos de medição, dinâmicas não modeladas e dos próprios erros numéricos gerados pelas aproximações. Para o caso de grau relativo arbitrário, o VS-MRAC também apresenta erros da ordem de  $\tau$  (HSU; ARAÚJO; COSTA, 1994), pela introdução de filtros de média.

A análise do algoritmo original do IVS-MRAC, especificamente na lei chaveada para o ganho de alta frequência da planta ( $k_p$ ), motivou a eliminação de uma função descontínua composta, chamada descontinuidade aninhada, a qual não é definida no escopo da teoria de Filippov. Adicionalmente, o tratamento de um loop algébrico inerente à lei chaveada também foi tratado. A referida eliminação da descontinuidade aninhada seguiu duas abordagens. Na primeira, a lei chaveada para  $k_p$  foi substituída por uma lei adaptativa em modo dual do tipo B-MRAC, gerando um controlador. O termo combinado é coerente no sentido de que combina leis chaveadas com leis integrais, contudo aqui não é utilizado no sentido usual comum na literatura, onde os algoritmos ditos combinados empregam adaptação paramétrica em todos os parâmetros (sejam da planta, sejam do controlador) e incluem um termo descontínuo na lei de controle. Nesta Tese, a adaptação é restrita a um único parâmetro, o que, inclusive, contribui para a preservação da rapidez do transitório, fato este característico dos VSS.

Na segunda abordagem, uma manipulação algébrica no argumento da função sinal da lei chaveada para  $k_p$  permitiu eliminar a descontinuidade aninhada. Adicionalmente, um filtro de valor médio foi introduzido para tratar o loop algébrico. Este filtro foi interpretado como uma dinâmica não modelada inerente, sendo sua influência contemplada na análise de estabilidade.

Em ambas as abordagens, obteve-se a estabilidade assintótica global com respeito a um conjunto compacto, diferindo apenas no tamanho de tais conjuntos, tendo em vista que o conjunto residual obtido para o erro do sistema no caso combinado depender do erro de adaptação em  $k_p$  ( $\tilde{k}_p$ ), fato característico de controladores que empregam alguma adaptação

paramétrica. Contudo, as simulações mostraram que quando as amplitudes dos relés são convenientemente dimensionadas, esta dependência não influencia o transitório do sistema.

O IVS-MRAC totalmente baseado em síntese de sinal apresentou propriedades de estabilidade equivalentes ao caso direto, além de ter uma estrutura similar. Sendo assim, pode-se estender o IVS-MRAC para outras classes de plantas, como não-lineares e multivariáveis, a partir de trabalhos associados ao caso direto, notadamente em trabalhos recentes que agregam outras técnicas tal como HOSM e RED para a eliminação do *chattering* e obtenção de erro de rastreamento nulo para o caso de grau relativo dois (BARTOLINI; FERRARA; USANI, 1998; NUNES; HSU; LIZARRALDE, 2004). A generalização do IVS-MRAC para grau relativo arbitrário baseada na técnica denominada *shunt*, onde introduz-se um compensador em paralelo à planta, parece ser promissora (ANDRIEVSKY; FRADKOV; STOTSKY, 1996).

Em síntese, as principais contribuições deste trabalho foram:

1. Desenvolvimento do VS-MRAC para sistemas monovariáveis, lineares, sob o enfoque do controle adaptativo indireto, aqui denominado IVS-MRAC, a fim de tornar a etapa de dimensionamento dos relés mais intuitiva.
2. Eliminação e tratamento da descontinuidade aninhada e do laço algébrico inerentes à lei chaveada original para  $k_p$ , a fim de tornar o algoritmo bem definido matematicamente, possibilitando a análise formal de estabilidade.
3. Projeto do IVS-MRAC combinado, que substituiu a lei chaveada para  $k_p$  por uma lei adaptativa em modo dual do tipo B-MRAC.
4. Projeto do IVS-MRAC totalmente baseado em síntese de sinal, estruturalmente equivalente ao caso direto.
5. Análise de estabilidade para ambos os controladores, considerando a presença de perturbações e dinâmica não modelada.



6. Obtenção de simplificações no IVS-MRAC, de modo a reduzir o número de relés e a conseqüente complexidade do algoritmo.

Propõem-se os seguintes tópicos como continuidade a esta linha de pesquisa:

1. A generalização do IVS-MRAC para sistemas de grau relativo arbitrário.
2. A extensão para sistemas multivariáveis e classes de sistemas não-lineares.
3. A incorporação do IVS-MRAC em algoritmos em modo dual, tais como o DMARC (Dual Mode Adaptive Robuste Control) (CUNHA, C.; ARAÚJO; MOTA, 2007).
4. Aplicação prática do IVS-MRAC, através da implementação das versões compacta e à relé em microcontroladores e FPGAs (*Field-Programmable Gate Array*).

## Referências

AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas*. 3ª ed. Belo Horizonte: UFMG, 2007.

ALESSANDRI, A. Sliding-Mode Estimators for a Class of Nonlinear Systems. *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Symposium on Robust Control Design*, 2000.

AMBROSINO, G.; CELENTANO, G.; GAROFALO, F. Variable Structure Model Reference Adaptive Control Systems. *International Journal of Control*, v. 39, nº 7, p. 1339-1349, 1984.

ANDRIEVSKY, B. R.; FRADKOV, A. L. Implicit Model Reference Adaptive Controller Based on Feedback Kalman-Yakubovich Lemma. *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Conference on Control Applications*, p. 1171-1174, 1994.

ANDRIEVSKY, B. R.; FRADKOV, A. L. Combined Adaptive Flight Control System. *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International ESA Conference on Guidance Navigation and Control System and Sensor and Actuator Product Exhibition*, 2002.

ANDRIEVSKY, B. R.; FRADKOV, A. L. Combined Adaptive Controller for UAV Guidance. *Proceedings of the 2003 European Control Conference*, 2003.

ANDRIEVSKY, B. R.; CHURILOV, A. N.; FRADKOV, A. L. Feedback Kalman-Yakubovich Lemma and its Applications to Adaptive Control. *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, p. 4537-4542, 1996.

ANDRIEVSKY, B. R.; FRADKOV, A. L.; STOTSKY, A. A. Shunt Compensation for Indirect Sliding-mode Adaptive Control. *Proceedings of the 13<sup>th</sup> IFAC Congress*, p. 193-198, 1996.

ARAÚJO, A. D. Contribuição à Teoria de Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável: Uma Abordagem Entrada/Saída. *Tese de Doutorado*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1993.

ASTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. *Computer Controlled Systems: theory and design*. 3ª ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1997.

BAR-SHALOM, Y.; TSE, E. Dual Effect, Certainty Equivalence and Separation in Stochastic Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-19, nº 5, p. 494-500, 1984.

BARTOLINI, G.; PUNTA, E. Second Order Sliding Mode Control of Systems with Nonlinear Friction. *Proceedings of the 39<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, v. 3, p. 2192-2197, 2000.

BARTOLINI, G.; ZOLEZZI, T. The VSS Approach to the Model Reference Control of Nonminimum Phase Linear Plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-33, nº 9, p. 859-863, 1988.

- BARTOLINI, G.; FERRARA, A.; USAI, E. Chattering Avoidance by Second-Order Sliding Mode Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-43, nº 2, p. 241-246, 1998.
- BAYARD, D. S.; SPANOS, J.; RAHMAN, Z. Exponential Convergence of the Tracking Error in Adaptive Systems without Persistent Excitation. *Proceedings of the 34<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, p. 208-209, 1995.
- BAYLEY, E.; ARAPOSTATHIS, A. Simple Sliding Mode Control Scheme Applied to Robot Manipulators. *International Journal of Control*, v. 45, nº 4, p. 1197-1209, 1987.
- BAZANELLA, A. S.; SILVA JR., J. M. G. *Sistemas de Controle: princípios e métodos de projeto*. Porto Alegre: UFRGS, 2005.
- BONDAREV, A. G.; BONDAREV, S. A.; KOSTYLEVA, N. E.; UTKIN, V. I. Sliding Modes in Systems with Asymptotic State Observers. *Automation and Remote Control*, v. 46, nº 6, pt. 1, p. 679-684, 1985.
- CASTRUCCI, P.; SALES, R. M. *Controle Digital*. v. 3. São Paulo: Edgard Blücher, 1990.
- CAVALCANTI, L. F. Utilização do Microcontrolador PIC 16F877 na Implementação de Controladores Adaptativos. *Dissertação de Mestrado*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2004.
- CHANG, K. Singular Perturbations of a General Boundary Value Problem. *SIAM J. Math. Anal.*, nº 3, p. 502-526, 1972.
- COSTA, R. R.; HSU, L. Robustness of VS-MRAC with Respect to Unmodeled Dynamics and External Disturbances. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 6, p. 19-33, 1992.
- CUNHA, C. D.; ARAÚJO, A. D.; BARBALHO, D. S.; MOTA, F. C. A Dual-Mode Adaptive Robust Controller Applied to the Speed Control of a Three-Phase Induction Motor. *Asian Journal of Control*, v. 7, nº 2, p. 197-201, 2005.
- CUNHA, C. D.; ARAÚJO, A. D.; MOTA, F. C. Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto para Plantas com Grau Relativo Unitário: Prova de Estabilidade. *Controle & Automação*, v. 2, p. 1-9, 2007.
- CUNHA, J. P. V. S.; HSU, L.; COSTA, R. R.; LIZARRALDE, F. Output-Feedback Model-Reference Sliding Mode Control of Uncertain Multivariable Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-48, nº 12, p.2245-2250, 2003.
- DE LARMINAT, P. Robust Stability of Explicit Adaptive Control without Persistent Excitation. *Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique – Publication Interne nº 317*, 1986.
- EMELYANOV, S. V. *Binary Automatic Control Systems*. Moscow: MIR, 1987.
- FILIPPOV, A. F. Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side. *American Math. Soc. Translations*, v. 42, ser. 2, p. 199-231, 1964.

- FU, L. C. New Approach to Robust MRAC for a Class of Plants. *International Journal of Control*, v. 53, nº 6, p. 1359-1375, 1991.
- FURTUNATO, A. F. A.; SALAZAR, A. O.; ARAÚJO, A. D. Implementação de um Controlador de Velocidade Usando Modos Deslizantes Suaves para um Motor de Indução Trifásico. *Controle & Automação*, v. 12, nº 2, p. 148-155, 2001.
- GAJIC, Z.; MYO-TAEG, L. Hamiltonian Approach to Linear Continuous-Time Singularly Perturbed Optimal Control and Filtering Problems. *Proceedings of the VI International SAUM Conference*, Plenary Lecture, 1998.
- GOODWIN, G. C.; MAYNE, D. Q. A Parameter Estimation Perspective of Continuous Time Model Reference Adaptive Control. *Automatica*, v. 23, nº 1, p. 57-70, 1989.
- HAMMING, R. W. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2ª ed., Dover Publications, 1973.
- HSU, L. Variable Structure Model Reference Adaptive Control Using Only Input and Output Measurements: The General Case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-35, nº 11, p. 1238-1243, 1990.
- HSU, L. Smooth Sliding Control of Uncertain Systems Based on a Prediction Error. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 7, p. 353-372, 1997.
- HSU, L.; COSTA, R. R. Bursting Phenomena in Continuous-Time Adaptive Systems with a  $\sigma$ -Modification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-32, nº 1, p. 84-86, 1987a.
- HSU, L.; COSTA, R. R. Adaptive Control with Discontinuous Sigma-Factor and Saturation for Improved Robustness. *International Journal of Control* v. 45, nº 3, p. 843-859, 1987b.
- HSU, L.; COSTA, R. R. Variable Structure Model Reference Adaptive Control Using Only Input and Output Measurements – Part I. *International Journal of Control* v. 49, nº 2, p. 399-416, 1989.
- HSU, L.; COSTA, R. R. A Binary Control Approach to Design Globally Exponentially Stable Systems. *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Systems Engineering*, 1990.
- HSU, L.; COSTA, R. R. B-MRAC: A New Model Reference Adaptive Controller Based on Binary Control Theory. *Proceedings of the 1<sup>st</sup> IFAC Symposium on Design Methods of Control Systems*, p. 384-389, 1991.
- HSU, L.; COSTA, R. R. B-MRAC: Global Exponential Stability with a New Model Reference Adaptive Controller Based on Binary Control Theory. *Control Theory and Advanced Technology*, v. 10, nº 4, pt. 1, p. 649-668, 1994.
- HSU, L.; COSTA, R. R. Adaptive Control with Sliding Modes: Theory and Applications. *XI Congresso Brasileiro de Automática*, p. 39-60, 1996.

- HSU, L.; REAL, J. A. Dual Mode Adaptive Control with Gaussian Networks. *Proceedings of the 36<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, v. 4, n° 10-12, p. 4032-4034, 1997.
- HSU, L.; ARAÚJO, A. D.; COSTA, R. R. Analysis and Design of I/O Based Variable Structure Adaptive Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n° 1, p. 4-21, 1994.
- HSU, L.; COSTA, R. R.; LIZARRALDE, F. Output Feedback Adaptive Variable Structure Control Systems: The State of the Art. *Proceedings of the 32<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, v. 2, p. 1408-1415, 1993.
- HSU, L.; COSTA, R. R.; REAL, J. A. Dual Mode Adaptive Control Using Gaussian Networks: Stability Analysis. *Proceedings of the IFAC'99 World Congress*, 1999.
- HSU, L.; CUNHA, J. P. V. S.; COSTA, R. R. Model-Reference Output-Feedback Sliding Mode Controller for a Class of Multivariable Nonlinear Systems. *Asian Journal of Control*, v. 5, n° 4, p. 543-556, 2003.
- HSU, L.; LIZARRALDE, F.; ARAÚJO, A. D. New Results on Output Feedback VS-MRAC: Design and Stability Analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 43, n° 2, p. 241-246, 1998.
- HSU, L.; CUNHA, J. P. V. S.; COSTA, R. R.; LIZARRALDE, F. Multivariable Output-Feedback Sliding Mode Control. In: YU, X; XU, J. -X. (eds). *Variable Structure Systems: towards the 21<sup>st</sup> century*. Berlim: Springer-Verlag, p. 283-313, 2002.
- HSU, L.; PEIXOTO, A. J.; CUNHA, J. P. V. S.; COSTA, R. R.; LIZARRALDE, F. Output Feedback Sliding Mode Control for a Class of Uncertain Multivariable Systems with Unmatched Nonlinear Disturbances. In: EDWARDS, C.; COLET, F. E.; FRIDMAN, L. (eds). *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control*. Springer-Verlag, p. 195-225, 2006.
- IOANNOU, P. A.; KOKOTOVIC, P. V. *Adaptive Systems with Reduced Models*. Berlim: Springer-Verlag, 1983.
- IOANNOU, P. A.; KOKOTOVIC, P. V. Instability Analysis and Improvement of Robustness of Adaptive Control. *Automatica*, v. 20, n° 5, p. 583-599, 1984.
- IOANNOU, P. A.; SUN, J. *Robust Adaptive Control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- IOANNOU, P. A.; TSAKALIS, K. S. A Robust Direct Adaptive Controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-31, n° 11, p. 1033-1043, 1986.
- JIANG, C. L. Effective Recursive Algorithm for Judgment the Positive Definiteness of Matrices of High Dimension. *International Journal of Control*, v. 47, p. 657-660, 1988.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. Macmillan, 1992.
- KOKOTOVIC, P. V.; KHALIL, H. K. *Singular Perturbation in System and Control*. New York: IEEE Press, 1986.

- KOKOTOVIC, P. V.; KHALIL, H. K.; O'REILLY, J. O. *Singular Perturbations Methods in Control Analysis and Design*. New York: Academic Press, 1986.
- KOKOTOVIC, P. V.; O'MALLEY JR., R. E.; SANNUTI, P. Singular Perturbation and Order Reduction in Control Theory. *Automatica*, v. 12, p. 123-132, 1976.
- LANDAU, Y. D. *Adaptive Control: the model reference approach*. New York: Marcel Dekker, 1979.
- LEVANT, A. Sliding Order and Sliding Accuracy in Sliding Mode Control. *International Journal of Control*, v. 5, n° 4, p. 1247-1263, 1993.
- LEVANT, A. Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique. *Automatica*, v. 34, n° 3, p. 379-384, 1998.
- LEVANT, A. Universal SISO Sliding-Mode Controllers with Finite-Time Convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n° 9, p. 1447-1451, 2001.
- LEVANT, A. Higher-Order Sliding Modes, Differentiation and Output-Feedback Control. *International Journal of Control*, v. 6, n° 9-10, p. 924-941, 2003.
- LEVANT, A. Quase-Continuous High-Order Sliding-Mode Controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n° 11, p. 1812-1816, 2005.
- MIN, L. J.; HSU, L. Sliding Controller for Output Feedback of Uncertain Nonlinear Systems: Global and Semi-Global Results. *Proceedings of the IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*, p. 169-178, 2000.
- MOKHTARI, A.; BENALLEGUE, A.; ORLOV, Y. Exact Linearization and Sliding Mode Observer for a Quadrator Unmanned Aerial Vehicle. *International Journal of Robotics and Automation*, v. 21, n° 1, p. 39-49, 2006.
- NARENDRA, K. S.; ANNASWAMY, A. M. Persistent Excitation in Adaptive Systems. *International Journal of Control*, v. 45, n° 1, p. 127-160, 1987.
- NARENDRA, K. S.; ANNASWAMY, A. M. *Stable Adaptive Systems*. New Jersey: Prentice-Hall, 1989.
- NARENDRA, K. S.; VALAVANI, L. S. Stable Adaptive Controller Design – Part I – Direct Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-23, n° 4, p. 570-583, 1978.
- NARENDRA, K. S.; LIN, Y. H.; VALAVANI, L. S. Stable Adaptive Controller Design – Part II – Proof of Stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-25, n° 3, p. 440-448, 1980.
- NUNES, E. V. S.; HSU, L.; LIZARRALDE, F. Globally Stable Output-Feedback Sliding Mode Control with Asymptotic Exact Tracking. *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, p. 638-643, 2004.

- OLIVEIRA, J. B. Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável. *Dissertação de Mestrado*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2003.
- OLIVEIRA, J. B.; ARAÚJO, A. D. Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável: VS-MRAC Indireto. *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática*, p. 2557-2562, 2002.
- OLIVEIRA, J. B.; ARAÚJO, A. D. An Indirect Variable Structure Model Reference Adaptive Control Applied to the Speed Control of a Three-Phase Induction Motor. *Anais do VII Congresso Brasileiro de Eletrônica de Potência*, v. 1, p. 697-702, 2003.
- OLIVEIRA, J. B.; ARAÚJO, A. D. An Indirect Variable Structure Model Reference Adaptive Control Applied to the Speed Control of a Three-Phase Induction Motor. *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, p. 1946-1951, 2004.
- OLIVEIRA, J. B.; ARAÚJO, A. D. Controlador Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável: Análise de Estabilidade. *Anais do VIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, p. 1-6, 2007a.
- OLIVEIRA, J. B.; ARAÚJO, A. D. Design and Stability Analysis of an Indirect Variable Structure Model Reference Adaptive Control. *International Journal of Control*, 2007b. (aceito para publicação).
- OLIVEIRA, J. B.; ARAÚJO, A. D. A Modified Design for the VS-MRAC Based on the Indirect Approach: Stability Analysis. *Proceedings of the 17<sup>th</sup> IFAC World Congress 2008*, 2007c. (aceito para publicação).
- OLIVEIRA, J. B.; ARAÚJO, A. D. New Developments on Output Feedback Sliding Mode Control Based on the Indirect Approach: Stability and Practical Aspects, 2007d. (submetido ao *American Control Conference 2008*).
- OLIVEIRA, J. B.; ARAÚJO, A. D. An Indirect Adaptive Sliding Mode Control of a Three-Phase Induction Motor, 2008. *IEEE Transactions on Industrial Electronics – Special Edition on Sliding Mode Control on Industrial Applications*. (submetido sob o n. 08-TIE-0060).
- PEIXOTO, A. J.; LIZARRALDE, F.; HSU, L. Experimental Results on Smooth Control of Uncertain Systems. *Proceedings of the 40<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, p. 928-933, 2001.
- PEIXOTO, A. J.; LIZARRALDE, F.; HSU, L. Chattering Avoidance by Sliding Control Based on Prediction Error. *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática*, p. 1047-1052, 2002.
- PETERSON, B. P.; NARENDRA, K. S. Bounded Error Adaptive Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-27, n° 6, p. 1161-1168, 1982.
- ROHMAN, A. S.; MIDDLETON, R. H. On the Robustness of Multivariable Algebraic Loops with Sector Nonlinearities. *Proceedings of the 41<sup>st</sup> Conference on Decision and Control*, v. 1, p. 1054-1059, 2002.

- ROHRS, C. E.; VALAVANI, L. S.; ATHANS, M.; STEIN, G. Robustness of Continuous-Time Adaptive Control Algorithms in the Presence of Unmodeled Dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-30, n° 9, p. 881-889, 1985.
- SANE, H. S.; ROUP, A. V.; BERNSTEIN, D. S.; SUSSMANN, H. J. Adaptive Stabilization and Disturbance Rejection for First-Order Systems. Proceedings of the 2002 *American Control Conference*, v. 5, p. 4021-4026, 2002.
- SASTRY, S. S. Model-Reference Adaptive Control: Stability, Parameter Convergence and Robustness. *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, v. 1, p. 27-66, 1984.
- SASTRY, S. S.; BODSON, N. M. *Adaptive Control: stability, convergence and robustness*. New Jersey: Prentice-Hall, 1989.
- SILVA JR., F. C.; ARAÚJO, A. D.; OLIVEIRA, J. B. A Proposal for a Variable Structure Adaptive Pole Placement Control. *Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Workshop on Variable Structure Systems*, 2004a.
- SILVA JR., F. C.; ARAÚJO, A. D.; OLIVEIRA, J. B. Uma Proposta de um Controlador Adaptativo por Posicionamento de Pólos e Estrutura Variável. *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, p. 1-6, 2004b.
- SLOTINE, J. J. E.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- SLOTINE, J. J. E.; HEDRICK, J. K.; MISAWA, E. A. On Sliding Observers for Nonlinear Systems. *Proceedings of the 1986 American Control Conference*, p. 1794-1800, 1986.
- SPOONER, J. T.; MAGGIORE, M.; ORDÓÑEZ, R.; PASSINO, K. M. *Stable Adaptive Control and Estimation for Nonlinear Systems: neural and fuzzy approximator techniques*. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- STOTSKY, A. A. Combined Adaptive and Variable Structure Control. In: ZINOBER, A. S. I. (ed). *Variable Structure and Lyapunov Control*. London: Springer-Verlag, p. 313-333, 1994.
- UTKIN, V. I. *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. Moscow: MIR, 1978.
- UTKIN, V. I. *Optimization and Control Using Sliding Modes*. New York: Springer-Verlag, 1992.
- WALCOTT, B. L.; ZAK, S. H. Combined Observer-Controller Synthesis for Uncertain Dynamical Systems with Applications. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, v. SMC-18, n° 1, p. 88-104, 1988.
- WANG, W.; GAO, Z. A Comparison Study of Advanced State Observer Design Techniques. *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, p. 4754-4759, 2003.



WU, A. C.; FU, L. C.; HSU, C. F. Robust MRAC for Plant with Arbitrary Relative Degree Using Variable Structure Design. *Proceedings of the 1992 American Control Conference*, p. 2735-2739, 1992.

ZINOBER, A. S. I. (ed). *Variable Structure and Lyapunov Control*. London: Springer-Verlag, 1993.

# Apêndice A

## Conceitos de Base

Neste apêndice são revisados conceitos e ferramentas matemáticas fundamentais utilizados ao longo deste trabalho, concernentes às áreas de controle adaptativo e sistemas não lineares, tendo em vista que os sistemas de controle adaptativo, quer sejam aplicados às plantas lineares ou não lineares, são inerentemente não lineares.

### A.1 Sistemas Não-Lineares

Um sistema dinâmico não-linear pode ser representado por um conjunto de equações diferenciais não-lineares na forma

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (\text{A.1})$$

onde  $f$  é uma função vetorial não-linear,  $x$  é um vetor de estado onde cada componente se chama *variável de estado*. Um valor particular do vetor de estado é também chamado de *ponto*, porque ele corresponde a um ponto no espaço de estado. O número de variáveis de estado  $n$  é chamado *ordem* do sistema. Uma solução  $x(t)$  de (A.1) é uma função que satisfaz a equação diferencial (A.1) e corresponde a uma curva no espaço de estado. Esta curva é geralmente referenciada como *trajetória do sistema*.

É importante observar que embora a equação (A.1) não contenha explicitamente o sinal de controle como uma variável, pode ser diretamente aplicável a sistemas de controle por realimentação. A razão é que a equação (A.1) pode representar a dinâmica de malha fechada de um sistema de controle por realimentação, com o sinal de controle sendo uma função do estado  $x$  e do tempo  $t$  e, portanto, estando implicitamente na dinâmica de malha fechada. Especificamente, se a dinâmica da planta é representada por

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

e alguma lei de controle for escolhida, como

$$u = g(x, t)$$

então, a dinâmica de malha fechada é

$$\dot{x} = f[x, g(x, t), t]$$

a qual pode ser escrita na forma da equação (A.1). É visível que a equação (A.1) pode representar sistemas dinâmicos onde sinais de controle não são envolvidos como, por exemplo, um pêndulo oscilatório.

Uma classe especial de sistemas não-lineares são os sistemas lineares. A dinâmica de um sistema linear é da forma

$$\dot{x} = A(t)x \quad (\text{A.2})$$

onde  $A(t)$  é uma matriz quadrada.

## A.2 Sistemas Autônomos e Não-Autônomos

Sistemas lineares são classificados como invariantes ou variantes no tempo, dependendo se a matriz  $A$  não varia ou varia com o tempo, respectivamente. No contexto mais geral dos sistemas não-lineares, estes adjetivos são tradicionalmente substituídos por autônomos e não-autônomos.

Estritamente falando, todos os sistemas físicos são não-autônomos, porque nenhuma de suas características dinâmicas é estritamente invariante no tempo. O conceito de um sistema autônomo é uma idealização, assim como o conceito de um sistema linear. Na prática, contudo, as propriedades do sistema podem variar muito lentamente, e pode-se negligenciar sua variação com o tempo sem causar algum erro significativo.

É importante observar que para sistemas de controle, a definição acima é válida para a dinâmica de malha fechada. Uma vez que um sistema de controle é composto de um controlador e de uma planta (incluindo a dinâmica do sensor e do atuador), a natureza não-autônoma do sistema pode ser causada por uma variação no tempo ou na planta ou na lei de controle. Especificamente, uma planta invariante no tempo com a dinâmica

$$\dot{x} = f(x, u)$$

pode levar a um sistema em malha fechada não-autônomo, se um controlador dependente do tempo é escolhido, isto é, se  $u = g(x, t)$ . Na verdade, controladores adaptativos para plantas lineares invariantes no tempo usualmente tornam os sistemas de controle em malha fechada não-lineares e não-autônomos.

### A.3 Normas

A norma de um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  é um escalar não negativo usado para medir seu comprimento, tamanho ou distância, dependendo do contexto de sua aplicação. As normas são essenciais nas demonstrações de estabilidade, tendo em vista que as condições e domínios de estabilidade são definidos normalmente em termos de normas de vetores.

$$\text{Norma } p: \|x\|_p = \left( |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\text{Norma } \infty: \max_i |x_i|$$

$$\text{As normas mais usadas são } \|x\|_1, \|x\|_\infty \text{ e a norma Euclidiana } \|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

A norma  $L_{\infty}$  do sinal  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é definida como

$$\|x_t\|_\infty := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|x(\tau)\|$$

Quando o tempo inicial é  $t_0 \leq t$ , pode-se utilizar a norma,

$$\|x_{t,t_0}\| := \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|x(\tau)\|.$$

#### A.3.1 Propriedades de Normas de Vetores

1.  $\|x\| \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , com  $\|x\| = 0$  se e somente se  $x = 0$ .
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  e  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ .

#### A.3.2 Propriedades de Normas de Matrizes

A norma de uma matriz é definida de forma análoga à norma de vetores. A norma de uma matriz em  $\mathbb{R}^{m \times n}$  é uma função  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz:

1.  $A \neq 0 \Rightarrow \|A\| > 0$
2.  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

$$3. \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$4. \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

#### A.4 Sinais Regulares

Seja  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $z, \dot{z} \in L_{\infty}$ . Então  $z$  é chamado regular (SASTRY; BODSON, 1989) se, para algum  $k_1, k_2 \geq 0$ ,

$$\|\dot{z}(t)\| \leq k_1 \|z_t\|_{\infty} + k_2 \quad \forall t \geq 0,$$

onde  $\|z_t\|_{\infty} := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|z(\tau)\|$ . Esta propriedade impede o *escape em tempo finito* dos sinais do sistema. Para uma prova da regularidade de sinais no contexto de controle adaptativo, ver Wu, Fu e Hsu (1992).

#### A.5 Teoria de Conjuntos

Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  é dito *aberto* se para todo vetor  $x \in S$  pode-se achar uma vizinhança  $\varepsilon$  de  $x$

$$N(x, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - x\| < \varepsilon\}$$

tal que  $N(x, \varepsilon) \subset S$ . Equivalentemente,  $S$  é *fechado* se e somente se toda seqüência convergente  $\{x_k\}$  com elementos em  $S$  converge para um ponto em  $S$ .

Um conjunto  $S$  é *limitado* se existe  $r > 0$  tal que  $\|x\| \leq r, \forall x \in S$ . Um conjunto  $S$  é *compacto* se é fechado e limitado.

Um ponto  $p$  é um ponto de fronteira de um conjunto  $S$  se toda vizinhança de  $p$  contém pelo menos um ponto de  $S$  e um ponto não pertencente a  $S$ . O conjunto de todos os pontos de fronteira de  $S$ , denotado por  $\partial S$ , é chamado de *fronteira* de  $S$ . Um conjunto fechado contém todos os seus pontos de fronteira. Um conjunto aberto não contém nenhum dos seus pontos de fronteira. O *interior* de um conjunto  $S$  é definido por  $S - \partial S$ . Um conjunto aberto é igual a seu interior. O *fechamento* de um conjunto  $S$ , denotado por  $\bar{S}$ , é a união de  $S$  com sua fronteira. Um conjunto fechado é igual ao seu fechamento.

Um conjunto aberto é *conexo* se todo par de pontos em  $S$  pode ser unido (conectado) por um arco restrito a  $S$ . Um conjunto  $S$  é chamado de *região* se é a união de um conjunto aberto conexo com nenhum, algum ou todos os seus pontos de fronteira. Se nenhum dos pontos de fronteira é incluído, a região é chamada uma *região aberta* ou *domínio*.

## A.6 Existência e Unicidade de Soluções

Seja o sistema  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Uma questão fundamental é a possibilidade de prever o estado futuro do sistema a partir do estado inicial em  $t_0$ . Para isto, o problema do valor inicial deve ter apenas uma solução (unicidade). A restrição chave para este objetivo é a condição de Lipschitz, ou seja,  $f(t, x)$  deve satisfazer a inequação

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

para todo  $(t, x)$  e  $(t, y)$  em alguma vizinhança de  $(t_0, x_0)$ . A definição desta vizinhança leva às definições de condições locais e globais.

**Teorema A.6.1** (Existência e Unicidade Local) Seja  $f(t, x)$  uma função contínua por partes em  $t$  e que satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

$\forall x, y \in B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ ,  $\forall t \in [t_0, t_1]$ . Então, existe algum  $\delta > 0$  tal que a equação

$$\dot{x} = f(t, x), \text{ com } x(t_0) = x_0$$

tenha uma única solução em  $[t_0, t_0 + \delta]$ . ■

**Prova:** (KHALIL, 1992, p. 74)

Para garantir que a solução possa ser estendida indefinidamente, são necessárias condições adicionais que garantam que a solução de  $x(t)$  sempre estará em um conjunto onde  $f(t, x)$  é uniformemente Lipschitz em  $x$ . O próximo teorema estabelece a unicidade da solução no intervalo  $[t_0, t_1]$ , onde  $t_1$  pode ser arbitrariamente grande.

**Teorema A.6.2** (Existência e Unicidade Global) Suponha que  $f(t, x)$  é contínua por partes em  $t$  e que satisfaz

$$\begin{aligned}\|f(t, x) - f(t, y)\| &\leq L\|x - y\| \\ \|f(t, x_0)\| &\leq h\end{aligned}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ . Então, a equação

$$\dot{x} = f(t, x), \text{ com } x(t_0) = x_0$$

tem uma única solução em  $[t_0, t_1]$ . ■

**Prova:** (KHALIL, 1992, p. 81)

No enfoque de sistemas de controle, tal teorema é utilizado, entre outras aplicações, na análise de sistemas lineares. Por exemplo, seja o sistema linear

$$\dot{x} = A(t)x + g(t) = f(t, x)$$

onde  $A(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  são funções contínuas por partes em  $t$ . Sobre qualquer intervalo finito de tempo  $[t_0, t_1]$ , os elementos de  $A(t)$  e  $g(t)$  são limitados. Assim,  $\|A(t)\| \leq a$  e  $\|g(t)\| \leq b$ , onde  $\|g\|$  pode ser qualquer norma no  $\mathbb{R}^n$  e  $\|A\|$  denota a norma da matriz  $A$  induzida pela norma Euclidiana, que é dada pelo seu maior valor singular. As condições do Teorema A.6.2 são satisfeitas visto que,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|A(t)(x - y)\| \leq \|A(t)\|\|x - y\| \leq a\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

e

$$\|f(t, x_0)\| = \|A(t)x_0 + g(t)\| \leq a\|x_0\| + b \leq h, \text{ para cada } x_0 \text{ finito, } \forall t \in [t_0, t_1].$$

Portanto, o Teorema A.6.2 mostra que o sistema linear tem uma única solução em  $[t_0, t_1]$ . Visto que  $t_1$  pode ser arbitrariamente grande, pode-se também concluir que se  $A(t)$  e  $g(t)$  são contínuas por partes  $\forall t \geq t_0$ , então o sistema tem uma única solução  $\forall t \geq t_0$ . Portanto, o sistema não tem escape em tempo finito.

A condição de Lipschitz global pode não ser razoável para sistemas não lineares. A condição de Lipschitz local está associada basicamente à suavidade da função, no sentido de diferenciação contínua. É razoável que modelos de sistemas físicos tenham funções com o lado direito localmente Lipschitz, com exceção de funções com lado direito descontínuo, onde é válida a solução proposta por Filippov (1964). A condição de Lipschitz global, contudo, é restritiva e muitos modelos de sistemas físicos não a satisfazem, devido a sua natureza conservativa. Com isto, é útil um teorema de existência e unicidade global que requer que a

função  $f$  seja apenas localmente Lipschitz, conquanto seja necessário um maior conhecimento sobre a solução do sistema.

**Teorema A.6.3** Seja  $f(x)$  localmente Lipschitz em um domínio  $D \subset \mathbb{R}^n$ , e seja  $W$  um subconjunto compacto de  $D$ . Seja  $x_0 \in W$  e suponha que toda solução de

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

permanece em  $W$ . Então, existe uma única solução que é definida para todo  $t \geq 0$ . ■

**Prova:** (KHALIL, 1992, p. 83)

### A.7 Matrizes e Formas Quadráticas

As formas quadráticas são extensivamente usadas na construção de funções de Lyapunov, as quais constituem a base para a demonstração de estabilidade de sistemas não lineares.

Uma matriz quadrada  $M$  é simétrica se  $M = M^T$  (em outras palavras, se  $\forall i, j$   $M_{ij} = M_{ji}$ ). Uma matriz quadrada  $M$  é anti-simétrica se  $M = -M^T$ . Um fato interessante é que qualquer matriz  $M$  pode ser representada pela soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica, o que pode ser mostrado pela decomposição

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}$$

onde o primeiro termo é simétrico e o segundo é anti-simétrico.

Outro fato importante é que a forma quadrática associada com uma matriz anti-simétrica é sempre zero. Denotando  $M$  como uma matriz anti-simétrica e  $x$  um vetor arbitrário, a definição de uma matriz anti-simétrica implica que

$$x^T M x = -x^T M^T x$$

Uma vez que  $x^T M^T x$  é um escalar, o lado esquerdo da equação acima pode ser substituído por sua transposta. Portanto,

$$x^T M x = -x^T M x$$

Isto mostra que



$$\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = 0, \forall \mathbf{x}$$

Com estes conhecimentos, pode-se introduzir o importante conceito de matriz definida positiva. Uma matriz  $\mathbf{M}$  quadrada é definida positiva (d.p.) se

$$\mathbf{x} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} > 0$$

Em outras palavras, a matriz  $\mathbf{M}$  é definida positiva se a forma quadrática  $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$  é uma função definida positiva. Isto implica que a toda matriz definida positiva está associada a uma função definida positiva. Obviamente, o contrário não é verdade. Uma condição necessária para que a matriz  $\mathbf{M}$  seja d.p. é que os elementos de sua diagonal sejam estritamente positivos.

### A.7.1 Desigualdade de Rayleigh

Esta propriedade de formas quadráticas está associada à definição de conjuntos residuais de estabilidade. Seja  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ . Então,

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{x}\|^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \text{ em que } \|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \text{ e}$$

$\lambda_{\min}(\cdot)$  e  $\lambda_{\max}(\cdot)$  são, respectivamente, o mínimo e o máximo autovalor da matriz  $\mathbf{P}$ .

Um exemplo da aplicação deste resultado é dado na seqüência. Seja uma curva de nível dada por  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = k, k > 0$  e  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ . Utilizando a desigualdade, pode-se estimar um minorante e um majorante para  $V(\mathbf{x})$ , ou seja,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{x}\|^2 \Rightarrow \|\mathbf{x}\| \geq \sqrt{\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}} = \sqrt{\frac{k}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| \geq R_1$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \geq \lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\mathbf{x}\|^2 \Rightarrow \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}} = \sqrt{\frac{k}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| \leq R_2$$

Logo,  $R_1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq R_2$ . Substituindo tais limitantes de  $\|\mathbf{x}\|$  em  $V(\mathbf{x})$  encontram-se as curvas de nível minorantes e majorantes para  $V(\mathbf{x})$ .

### A.8 Funções de Transferência Reais Positivas e Estritamente Reais Positivas

Na análise e projeto de sistemas não-lineares, é geralmente possível e útil decompor o sistema em um subsistema linear e um subsistema não-linear. Se a função de transferência (ou

matriz de transferência) do subsistema linear é real positiva, então esta tem propriedades importantes que podem levar à geração de uma função de Lyapunov para todo o sistema.

Considere funções de transferência racionais de ordem  $n$  SISO (*Single Input - Single Output*) da forma

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

onde os coeficientes do numerador e denominador são considerados números reais e  $n \geq m$ . A diferença  $n - m$  entre a ordem do denominador e do numerador é também chamada de *grau relativo do sistema*, também representado por  $n^*$ .

A função de transferência  $G(s)$  é real positiva se

$$\operatorname{Re}[G(s)] \geq 0, \forall \operatorname{Re}[s] \geq 0$$

Ela é estritamente real positiva (ERP) se  $G(s - \varepsilon)$  é real positiva para algum  $\varepsilon > 0$ . Esta definição significa que  $G(s)$  sempre tem uma parte real positiva (ou zero) quando  $s$  tem parte real positiva (ou zero).

Para funções de transferência de ordem elevada, é geralmente difícil usar a definição acima para testar a condição de positividade real das funções, porque envolve o teste da condição de positividade ao longo de todo o lado direito do plano complexo. Assim, pode-se simplificar esta condição da seguinte maneira:

Uma função  $G(s)$  é estritamente real positiva (ERP) se e somente se

- i)  $G(s)$  é uma função de transferência estritamente estável (pólos no semiplano esquerdo aberto do plano complexo);
- ii) a parte real de  $G(s)$  é estritamente positiva ao longo do eixo imaginário, isto é,  $\operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0, \forall \omega \geq 0$

Os itens acima implicam nas seguintes condições necessárias para garantir que uma função  $G(s)$  é ERP:

- $G(s)$  é estritamente estável (pólos no semiplano esquerdo aberto do plano complexo);

- A curva de Nyquist de  $G(j\omega)$  deve estar totalmente no semiplano direito do plano complexo. Equivalentemente, o diagrama de fase do sistema em resposta a entradas senoidais é sempre menor que  $90^\circ$ ;
- O grau relativo de  $G(s)$  é 0 ou 1;
- $G(s)$  é estritamente de fase-mínima (isto é, todos os zeros estão no semiplano esquerdo aberto do plano complexo).

### A.9 Lema de Kalman-Yakubovich

Se a função de transferência de um sistema é ERP, existe uma propriedade matemática associada com sua representação no espaço de estado, a qual é descrita pelo Lema de Kalman-Yakubovich (KY).

Considere um sistema monovariável, controlável, linear e invariante no tempo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x\end{aligned}$$

A função de transferência

$$G(s) = c^T [sI - A]^{-1} b$$

é estritamente real positiva se, e somente se, existem matrizes definidas positivas  $P$  e  $Q$  tal que

$$\begin{aligned}A^T P + PA &= -Q \\ Pb &= c\end{aligned}$$

Neste lema o sistema envolvido deve ser assintoticamente estável.

### A.10 Equação Diofantina

Consiste em um resultado algébrico importante que será útil no desenvolvimento das expressões para os parâmetros do controlador adaptativo na condição de *matching* (Apêndice B). Tal resultado é utilizado no projeto de sistemas de controle por alocação de pólos, onde deseja-se posicionar ou igualar os pólos do sistema em malha fechada com os pólos de um polinômio característico. Considerando que, no caso de controle por modelo de referência, deseja-se que os pólos do sistema em malha fechada se comporte como os pólos de um determinado modelo de referência, a equação diofantina também se aplica neste caso

(IOANNOU; SUN, 1996), e é utilizada para determinar os parâmetros ou coeficientes do controlador para que esse *casamento* de parâmetros possa ocorrer.

Sejam os polinômios  $n_p(s)$  mônico com grau  $n - n^*$ ,  $d_p(s)$  mônico com grau  $n$  e  $x(s)$  mônico com grau  $2n - 1$ , com  $n_p(s)$  e  $d_p(s)$  coprimos e  $x(s)$  arbitrário. Então,  $\exists! p_1(s)$  mônico com grau  $n - 1$  e  $\exists! p_2(s)$  mônico com grau  $n - 1$  tal que  $p_1(s)d_p(s) + p_2(s)n_p(s) \equiv x(s)$ .

### A.11 Propriedades Assintóticas de Funções e Suas Derivadas

Dada uma função diferenciável  $f(t)$ , os três fatos a seguir são importantes:

- $\dot{f} \rightarrow 0 \not\Rightarrow f$  converge para uma constante, ou seja, o fato de  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  não implica que  $f(t)$  tem um limite quando  $t \rightarrow \infty$ ;
- $f$  converge  $\not\Rightarrow \dot{f} \rightarrow 0$ , ou seja, o fato de  $f(t)$  ter um limite quando  $t \rightarrow \infty$  não implica que  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ ;
- Se  $f$  é limitada inferiormente e decrescente ( $\dot{f} \leq 0$ ), então  $f$  converge para um limite.

### A.12 Lema de Barbalat

Este lema utiliza as idéias da Seção A.11 e é bastante utilizado nas provas de estabilidade dos controladores adaptativos por modelo de referência. O lema de Barbalat indica que, dada uma função que tende para um limite finito, é necessário um requisito adicional para garantir que sua derivada convirja para zero, ou seja, é necessário que a derivada em si tenha alguma suavidade. Mais precisamente, tem-se que se a função diferenciável  $f(t)$  tem um limite finito quando  $t \rightarrow \infty$ , e se  $\dot{f}$  é uniformemente contínua, então  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

A continuidade uniforme de uma função pode ser examinada com base em sua derivada. Uma condição suficiente bem simples para uma função ser uniformemente contínua é sua derivada ser limitada. Desta forma pode-se reescrever o lema da seguinte forma:

Se a função diferenciável  $f(t)$  tem um limite finito quando  $t \rightarrow \infty$ , de tal forma que  $\ddot{f}$  existe e é limitada, então  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Para uma prova, ver (KHALIL, 1992, p. 186).

## Apêndice B

### Parâmetros do Controlador na Condição de *Matching*

A lei de controle para o controle adaptativo por modelo de referência (NARENDRA; VALAVANI, 1978) é definida como

$$u = \theta^T(t)\omega(t),$$

e, para a condição de *matching*, tem-se

$$u^* = \theta_{v_1}^{*T} v_1 + \theta_n^* y + \theta_{v_2}^{*T} v_2 + \theta_{2n}^* r.$$

Pode-se representar a equação acima por um diagrama de blocos, para um melhor entendimento das equações que determinam o vetor de parâmetros do controlador na condição de *matching*.

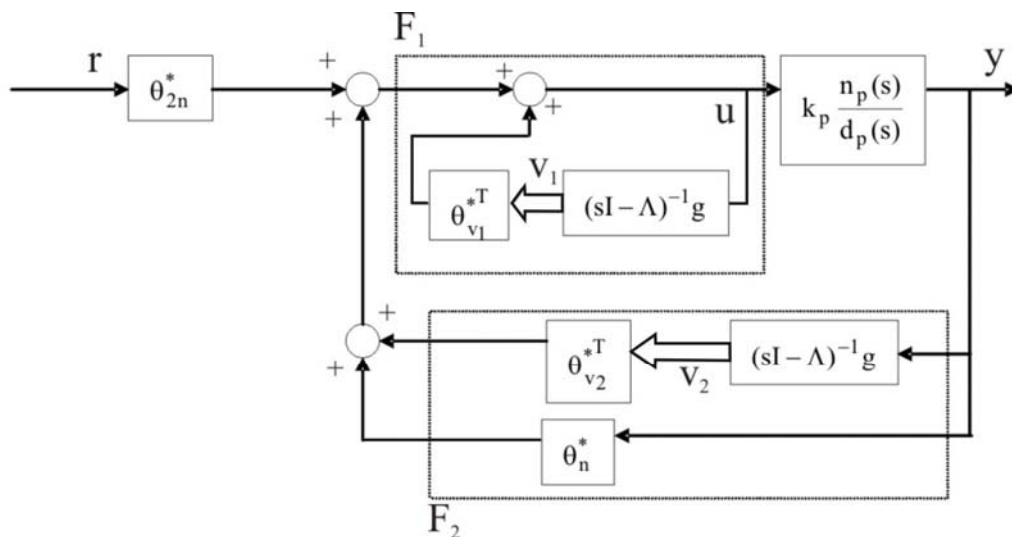


Figura B.1 – Diagrama de blocos representativo da lei de controle na condição de *matching*

Desenvolvendo os blocos  $F_1$  e  $F_2$  e sabendo que

$$(sI - \Lambda)^{-1} g = \frac{\gamma}{\lambda(s)} \begin{bmatrix} 1 & s & \dots & s^{n-2} \end{bmatrix}^T,$$

onde  $\gamma > 0$  e  $\lambda(s) = \det(sI - \Lambda) = s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i s^{n-1-i}$  é um polinômio mônico, tem-se

$$F_1 = \frac{1}{1 - \theta_{v_1}^{*T} (sI - \Lambda)^{-1} g} = \frac{1}{1 - \frac{\theta_{v_1}^*(s)}{\lambda(s)}} = \frac{\lambda(s)}{\lambda(s) - \theta_{v_1}^*(s)}; \theta_{v_1}^*(s) = \gamma \theta_{v_1}^{*T} \begin{bmatrix} 1 & s & \dots & s^{n-2} \end{bmatrix}^T,$$

$$F_2 = \theta_n^* + \theta_{v_2}^{*T} (sI - \Lambda)^{-1} g = \theta_n^* + \frac{\theta_{v_2}^*(s)}{\lambda(s)} = \frac{\theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s)}{\lambda(s)}; \theta_{v_2}^*(s) = \gamma \theta_{v_2}^{*T} \begin{bmatrix} 1 & s & \dots & s^{n-2} \end{bmatrix}^T.$$

Simplificando o diagrama de blocos da Figura B.1, tem-se

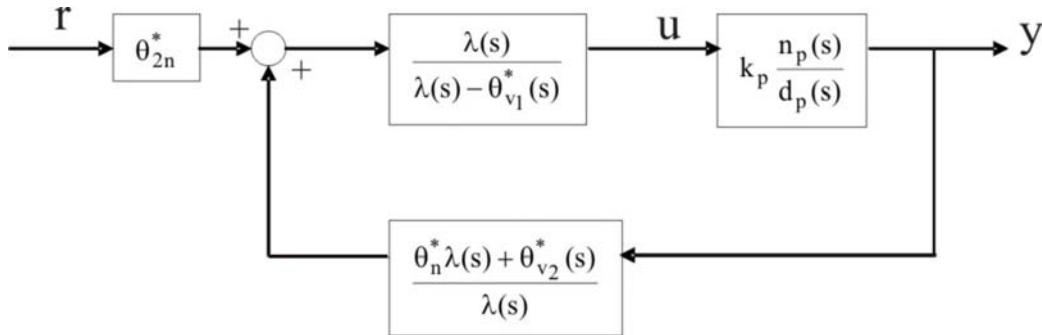


Figura B.2 – Diagrama de blocos simplificado representativo da lei de controle na condição de *matching*

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\theta_{2n}^* k_p n_p(s) \lambda(s)^2}{\lambda(s) [\lambda(s) - \theta_{v_1}^*(s)] d_p(s) - \lambda(s) [\theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s)] k_p n_p(s)},$$

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\theta_{2n}^* k_p n_p(s) \lambda(s)}{[\lambda(s) - \theta_{v_1}^*(s)] d_p(s) - [\theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s)] k_p n_p(s)}$$

Obs:  $n_p(s)$  é um fator de  $[\lambda(s) - \theta_{v_1}^*(s)]$ .

Utilizando a equação diofantina (Seção A.10) e considerando  $n_m(s)$  um fator de  $\lambda(s)$

e  $x(s) = \frac{d_m(s) n_p(s) \lambda(s)}{n_m(s)}$ , tem-se

$$p_1(s) d_p(s) + p_2(s) n_p(s) \equiv \frac{d_m(s) n_p(s) \lambda(s)}{n_m(s)}.$$

Sejam

$$\theta_{2n}^* = \frac{k_m}{k_p}, \quad \theta_{v_1}^*(s) = -p_1(s) + \lambda(s), \quad \theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s) = \frac{-1}{k_p} p_2(s),$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{r(s)} &= \frac{\frac{k_m}{k_p} k_p n_p(s) \lambda(s)}{[\lambda(s) + p_1(s) - \lambda(s)] d_p(s) + \frac{1}{k_p} p_2(s) k_p n_p(s)} \\ &= \frac{k_m n_p(s) \lambda(s)}{p_1(s) d_p(s) + p_2(s) n_p(s)} = \frac{k_m n_p(s) \lambda(s)}{d_m(s) n_p(s) \lambda(s)} = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)}. \end{aligned}$$

Resolvendo para grau relativo unitário ( $n^* = 1$ ), tem-se

$$n_m(s) = \lambda(s)$$

$$n_p(s) = \lambda(s) - \theta_{v_1}^*(s) \Rightarrow n_p(s) = n_m(s) - \theta_{v_1}^*(s) \Rightarrow \theta_{v_1}^*(s) = n_m(s) - n_p(s)$$

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\frac{k_m}{k_p} k_p n_p(s) n_m(s)}{n_p(s) d_p(s) - [\theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s)] k_p n_p(s)} = \frac{k_m n_m(s)}{d_p(s) - k_p [\theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s)]} = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)}$$

$$d_p(s) - k_p [\theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s)] = d_m(s) \Rightarrow \theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s) = \frac{d_p(s) - d_m(s)}{k_p}.$$

Desenvolvendo a expressão  $\theta_{v_1}^*(s) = n_m(s) - n_p(s)$ , tem-se

$$\theta_{v_1}^*(s) = \gamma \sum_{i=1}^{n-1} \theta_{v_1, n-i}^* s^{n-1-i},$$

e, usando a notação introduzida para os polinômios  $n_p(s)$  e  $n_m(s)$  conforme (3.3) e (3.6), obtém-se

$$\gamma \theta_{v_1, n-i}^* = \beta_{m,i} - \beta_i \Rightarrow \theta_{v_1, i}^* = \frac{\beta_{m, n-i} - \beta_{n-i}}{\gamma}; i = 1, \dots, n-1.$$

Desenvolvendo a expressão  $\theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s) = \frac{d_p(s) - d_m(s)}{k_p}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s) &= \theta_n^* (s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{m,i} s^{n-1-i}) + \gamma \sum_{i=1}^{n-1} \theta_{v_2, n-i}^* s^{n-1-i} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s) = \theta_n^* s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_n^* \beta_{m,i} + \gamma \theta_{v_2, n-i}^*) s^{n-1-i} \end{aligned}$$

e, usando a notação introduzida para os polinômios  $d_p(s)$  e  $d_m(s)$  conforme (3.4) e (3.7), fica-se com



$$\begin{aligned}\theta_n^* &= \frac{\alpha_1 - \alpha_{m1}}{k_p} \\ \theta_n^* \beta_{m,i} + \gamma \theta_{v2,n-i}^* &= \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_{m,i+1}}{k_p} \Rightarrow \theta_{v2,n-i}^* = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_{m,i+1} - k_p \theta_n^* \beta_{m,i}}{k_p \gamma} \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta_{v2,i}^* &= \frac{\alpha_{n-i+1} - \alpha_{m,n-i+1} - k_p \theta_n^* \beta_{m,n-i}}{k_p \gamma}; i = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Resumindo, tem-se as seguintes expressões para os parâmetros do controlador na condição de *matching*, para o caso  $n^* = 1$

$$\begin{aligned}\theta_{v1,i}^* &= \frac{\beta_{m,n-i} - \beta_{n-i}}{\gamma}; i = 1, \dots, n-1, \\ \theta_n^* &= \frac{\alpha_1 - \alpha_{m,1}}{k_p}, \\ \theta_{v2,i}^* &= \frac{\alpha_{n-i+1} - \alpha_{m,n-i+1} - k_p \theta_n^* \beta_{m,n-i}}{k_p \gamma}; i = 1, \dots, n-1, \\ \theta_{2n}^* &= \frac{k_m}{k_p}.\end{aligned}\tag{B.1}$$

## Apêndice C

### Produção Científica Relacionada

Para evidenciar a divulgação dos resultados obtidos e relacionados a esta Tese de Doutorado, seguem abaixo alguns artigos publicados ou submetidos até o momento:

1. A idéia inicial proposta para o IVS-MRAC foi apresentada no artigo em congresso (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2002).
2. O IVS-MRAC foi aplicado com sucesso no controle de velocidade de um motor de indução trifásico e apresentado em (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2003, 2004). A aplicação do IVS-MRAC Compacto a uma planta similar foi submetido a periódico (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2008)
3. Uma estratégia similar ao IVS-MRAC, porém baseada em alocação de pólos foi apresentada em (SILVA, JR. F.; ARAÚJO; OLIVEIRA, 2004a, 2004b). Esta abordagem permite a extensão a plantas de fase não-mínima, porém exige menos em termos de desempenho, por tratar apenas os pólos desejados em malha fechada.
4. O artigo (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2007a) introduziu a chamada modificação- $k_p$ , substituindo a lei chaveada para  $k_p$  por uma lei puramente integral. A prova de estabilidade foi preliminar no sentido de restringir a análise na presença de perturbações casadas. Representa a primeira versão do IVS-MRAC combinado.
5. O IVS-MRAC totalmente baseado em síntese de sinal, bem como sua análise de estabilidade na presença de perturbações e dinâmica não modelada foi aceito para publicação em periódico (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2007b).
6. Uma extensão ao trabalho (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2007a) consistiu em substituir a lei puramente integral por uma lei em modo dual do tipo B-MRAC. A análise de

estabilidade incluiu o efeito de dinâmica não modelada. Esta extensão está no artigo (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2007c).

7. As simplificações no IVS-MRAC, ou seja, as versões compacta e a relé, estão registradas em (OLIVEIRA; ARAÚJO, 2007d).

## Apêndice D

### Algoritmos para Simulação

As simulações dos controladores foram realizadas no software Matlab® 7.0. O método de resolução numérica que tem parecido o mais adequado a equações diferenciais com sinais descontínuos é o método de Euler que utiliza passo de integração fixo (HAMMING, 1973). Nesta tese se aplicou tal método com passo de integração  $h = 1\text{ms}$ . Não foram utilizadas aproximações suaves para as discontinuidades para se evitar o surgimento de erros de rastreamento que poderiam ser causados por essas aproximações.

A seguir, são apresentados os algoritmos utilizados para a obtenção das simulações ao longo desta Tese, na ordem em que foram apresentados no texto: IVS-MRAC combinado, IVS-MRAC, IVS-MRAC compacto e IVS-MRAC a relé. Para os dois primeiros casos, é apresentado o caso de 1ª ordem dos capítulos 5 e 6. Para os dois últimos, o caso de 2ª ordem. Os exemplos são valorados, apenas para ilustrar a atribuição de valores aos parâmetros de projeto.

#### D.1 IVS-MRAC Combinado

```
function vsmraci_dual1(tmax,de, Mkp,kpchapeuant,gamap,alfa1barra,k0)
```

```
% tmax: tempo em segundos para simulação
% de : distúrbio externo atuando na entrada da planta
% Mkp: define a bola de pertinência de kpchapeu
% kpchapeuant: valor inicial para a estimativa de kp
% gamap: ganho de adaptação de kp
% alfa1barra: amplitude do relé associada ao parâmetro da planta alfa1
% k0: limitante inferior para kp, de modo a não haver indeterminação
```

```
% w(s) = kp*(np/dp)
% m(s) = km*(nm/dm)
```

```
% w(s) = kp => kp=1, alfa1 = -1
% m(s) = 3/s+3 => km=1, alfam1 = 3
```

```
kp = 1;
alfa1 = -1;
km = 3;
alfam1 = 3;
```

```
% representação em variáveis de estado para simulação
num = [0 kp];
```

```

den = [1 alfa1];
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den);

% inicializações
yant = 0;
uant = 0;
ymant = 0;
xant = [1]';
t=0;

% referência degrau
r = 1;

% passo de integração
h = 1e-3;

while (t < tmax),

    %introduz perturbação externa em t=3s
    if (t>=0 & t<3)
        d = 0;
    elseif (t>=3)
        d = de;
    end

    x = xant + h*(A*xant + B*(uant+d));
    y = C*xant;
    ym = ymant + h*(km*r - alfa1*ymant);

    % erro de saída
    e0 = y - ym;

    % sinais auxiliares;
    zeta1 = y;
    zetapant = -uant;

    % síntese dos parâmetros da planta
    alfa1chapeu = -alfa1barra*sign(e0*zeta1);

    % lei adaptativa B-MRAC para kp
    sigmaeq = (-gamap*e0*kpchapeuant*zetapant)/(abs(kpchapeuant)^2);

    if ((abs(kpchapeuant) > k0) | ((abs(kpchapeuant)==k0) & (e0*zetapant<=0)))
        if ((abs(kpchapeuant) < Mkp) | (sigmaeq < 0))
            sigma = 0;
        elseif ((abs(kpchapeuant)>=Mkp) & (sigmaeq >= 0))
            sigma = sigmaeq;
        end
        kpchapeu = kpchapeuant + h*(-sigma*kpchapeuant-gamap*e0*zetapant);
    else
        kpchapeu = kpchapeuant;
    end

    % calculo parâmetros do controlador em função dos parâmetros da planta
    tetan = (alfa1chapeu - alfa1)/(kpchapeu);
    teta2n = km/kpchapeu;

    % lei de controle
    u = tetan*y + teta2n*r;

```

```

    %atualizações de variáveis
    uant = u;
    yant = y;
    ymant = ym;
    xant = x;
    kpchapeuant = kpchapeu;
    t = t + h;
end

```

## D.2 IVS-MRAC

```

function vsmraci(tmax,de, tau)

% tmax: tempo sem segundos para simulação
% de : distúrbio externo atuando na entrada da planta
% tau : constante de tempo do filtro de valor médio do sinal v

kp = 1;
alfa1 = -1;
km = 3;
alfam1 = 3;

% representação em variáveis de estado para simulação
num = [0 kp];
den = [1 alfa1];
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den);

% inicializações
yant = 0;
uant = 0;
ymant = 0;
xant=[1];
e0_ant = 0;
v_av_ant = 0;
t=0;
gama = 1;

% referência degrau
r = 1;

% passo de integração
h = 1e-3;

% parâmetros de projeto
alfalbarra = 1.5;
kpnom = 1.2;
kpbarra = .7;

while (t < tmax),

    %introduz perturbação externa em t=3s
    if (t>=0 & t<3)
        d = 0;
    elseif (t>=3)
        d = de;
    end
end

```

```

x = xant + h*(A*xant + B*(uant+d));
y = C*xant;
ym = ymant + h*(km*r - alfa1*ymant);

% erro de saida
e0 = y - ym;

% sinais auxiliares;
zeta1 = y;

% síntese dos parâmetros da planta
alfa1chapeu = -alfa1barra*sign(e0*zeta1);

% argumento para sign(v) na expressao de kp (eliminando sign(sign(.)))
v_ant = -e0_ant*uant;
v_av = v_av_ant + (h/tau)*(v_ant - v_av_ant);

kpchapeu = kpnom - kpbarra*sign(v_av);

% calculo parâmetros do controlador em função dos parâmetros da planta
tetan = (alfa1chapeu - alfa1)/kpchapeu;
teta2n = km/kpchapeu;

% lei de controle
u = tetan*y + teta2n*r;

%atualizações de variáveis
uant = u;
yant = y;
ymant = ym;
xant = x;
e0_ant = e0;
v_av_ant = v_av;
t = t + h;
end

```

### D.3 IVS-MRAC Compacto

```

function vsmraci_compacto(tmax,de,tau)

% tmax: tempo sem segundos para simulação
% de : distúrbio externo atuando na entrada da planta
% tau : constante de tempo do filtro de valor médio do sinal v

% w(s) = kp*(np/dp)
% m(s) = km*(nm/dm)

% w(s) = s+beta1/s^2+alfa1*s+alfa2 => kp=1, beta1= 3, alfa1=3,alfa2=-10
% m(s) = 1/s+1 => km=1, alfa1 = 1

% parâmetros da planta e do modelo de referência para simulação
kp = 1;
beta1 = 3;
alfa1 = 3;

```

```

alfa2 = -10;

km = 1;
alfam1 = 1;
betam = 0;
alfam = 0;

% representação em variáveis de estado para simulacao
num = [0 1 beta1];
den = [1 alfa1 alfa2];
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den);

% inicializações
yant = 0;
uant = 0;
ymant = 0;
xant = [1 0]';
v1ant = 0;
v2ant = 0;
e0_ant = 0;
v_av_ant = 0;
zetabeta_ant = 0;
gama=1;
t=0;

% referência degrau
r = 1;

% passo de integração
h = 1e-3;

% parametros de projeto
beta1barra = 1
alfa1barra = 1;
alfa2barra = 1;

beta1nom = 3.2;
alfa1nom = 3.2;
alfa2nom = -10.5;

betabarra=[beta1barra];
alfabarra=[alfa2barra];

betanom=[beta1nom];
alfanom=[alfa2nom];

kpnom=1.2;
kpbarra=.5;

while (t < tmax),

    %introduz perturbação externa em t=3s

    if (t>=0 & t<3)
        d = 0;
    elseif (t>=3)
        d = de;
    end

    x = xant + h*(A*xant + B*(uant+d));

```



```

y = C*xant;
ym = ymant + h*(km*r - alfam1*y mant);

% erro de saida
e0 = y - ym;

% filtros i/o
v1 = v1 ant + h*(-1*v1 ant + uant);
v2 = v2 ant + h*(-1*v2 ant + yant);

% sinais auxiliares;
zeta1 = y;
zetaalfa = v2/gama;
zetabeta = -v1/gama;

% argumento para sign(v) na expressao de kp (eliminando sign(sign(.)))
v_ant = -abs(e0_ant)*betabarra*abs(zetabeta_ant) - e0_ant*uant;
v_av = v_av_ant + (h/tau)*(v_ant - v_av_ant);

kpchapeu = kpnom - kpbarra*sign(v_av);

% montagem do vetor zetar
zetar = [kpchapeu*zetabeta zeta1 zetaalfa]';

% montagem do vetor zetar com modulos
zetarmod = [kpchapeu*abs(zetabeta) abs(zeta1) abs(zetaalfa)]';

% montagem do vetor tetapr_barra
tetapr_barra = [betabarra alfa1barra alfabarra];

% montagem do vetor tetapr_nom
tetapr_nom = [betanom alfa1nom alfanom];

% montagem do vetor tetam (com parametros do modelo)
tetam = [betam alfam1 alfam];

% calculo u0
u0 = (tetapr_barra*zetarmod)*sign(e0);

% calculo um
um = tetam*zetar;

% calculo unom
unom = tetapr_nom*zetar;

u = -(u0+um) + unom + km*r)/(kpchapeu);

%atualizações de variáveis
uant = u;
yant = y;
ymant = ym;
v1ant = v1;
v2ant = v2;
xant = x;
e0_ant = e0;
zetabeta_ant = zetabeta;
v_av_ant = v_av;
t = t + h;

end

```

#### D.4 IVS-MRAC a Relé

```

function vsmraci_rele(tmax,de,tau,kRL)

% tmax: tempo sem segundos para simulação
% de : distúrbio externo atuando na entrada da planta
% tau : constante de tempo do filtro de valor médio do sinal v
% kRL : constante que substitui a função de modulação

% parâmetros da planta e do modelo de referência para simulação
kp = 1;
beta1 = 3;
alfa1 = 3;
alfa2 = -10;

km = 1;
alfam1 = 1;
betam = 0;
alfam = 0;

% representação em variáveis de estado para simulação
num = [0 1 beta1];
den = [1 alfa1 alfa2];
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den);

% inicializações
yant = 0;
uant = 0;
ymant = 0;
xant = [1 0]';
v1ant = 0;
v2ant = 0;
e0_ant = 0;
v_av_ant = 0;
zetabeta_ant = 0;
gama=1;
t=0;

% referência degrau
r = 1;

% passo de integração
h = 1e-3;

% parâmetros de projeto
beta1barra = .8;
alfa1barra = .8;
alfa2barra = .8;

beta1nom = 3.2;
alfa1nom = 3.2;
alfa2nom = -10.5;

betabarra=[beta1barra];
alfabarra=[alfa2barra];

betanom=[beta1nom];
alfanom=[alfa2nom];

```

```

kpnom=1.2;
kpbarra=.5;

while (t < tmax),

    %introduz perturbação externa em t=3s
    if (t>=0 & t<3)
        d = 0;
    elseif (t>=3)
        d = de;
    end

    x = xant + h*(A*xant + B*(uant+d));
    y = C*xant;
    ym = ymant + h*(km*r - alfam1*ymant);

    % erro de saída
    e0 = y - ym;

    % filtros i/o
    v1 = v1ant + h*(-1*v1ant + uant);
    v2 = v2ant + h*(-1*v2ant + yant);

    % sinais auxiliares;
    zeta1 = y;
    zetaalfa = v2/gama;
    zetabeta = -v1/gama;

    % argumento para sign(v) na expressão de kp (eliminando sign(sign(.)))
    v_ant = -abs(e0_ant)*betabarra*abs(zetabeta_ant) - e0_ant*uant;
    v_av = v_av_ant + (h/tau)*(v_ant - v_av_ant);

    kpchapeu = kpnom - kpbarra*sign(v_av);

    % montagem do vetor zetar
    zetar = [kpchapeu*zetabeta zeta1 zetaalfa]';

    % montagem do vetor tetapr_nom
    tetapr_nom = [betanom alfam1 nom alfanom];

    % montagem do vetor tetam (com parametros do modelo)
    tetam = [betam alfam1 alfam];

    % calculo u0
    u0 = k0*sign(e0);

    % calculo um
    um = tetam*zetar;

    % calculo unom
    unom = tetapr_nom*zetar;

    u = -(u0+um) + unom + km*r)/(kpchapeu);

    %atualizações de variáveis
    uant = u;
    yant = y;
    ymant = ym;
    v1ant = v1;
    v2ant = v2;

```

```
xant = x;  
e0_ant = e0;  
zetabeta_ant = zetabeta;  
v_av_ant = v_av;  
t = t + h;  
end
```