



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA



Uma fundamentação matemática para processamento digital de sinais intervalares

Roque Mendes Prado Trindade

Orientador: Prof. Dr. Adrião Duarte Dória Neto

Co-orientador: Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFRN (área de concentração: Engenharia de Computação) como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Número de ordem PPgEE: D044
Natal, RN, junho de 2009

Divisão de Serviços Técnicos

Catálogo da publicação na fonte. UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede

Trindade, Roque Mendes Prado.

Uma fundamentação matemática para processamento digital de sinais intervalares / Roque Mendes Prado Trindade - Natal, RN, 2009.

197 f.

Orientador: Adrião Duarte Dória Neto

Co-orientador: Benjamín René Callejas Bedregal

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Matemática intervalar - Tese. 2. Processamento de sinais - Tese. 3. Sistemas lineares - Tese. I. Dória Neto, Adrião Duarte. II. Bedregal, Benjamín René Callejas. III. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. IV. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 519.6(043.2)

Uma fundamentação matemática para processamento digital de sinais intervalares

Roque Mendes Prado Trindade

Tese de Doutorado aprovada em 05 de junho de 2009 pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Adrião Duarte Dória Neto(orientador) DCA/UFRN

Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal(co-orientador) DIMAP/UFRN

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal UFPB

Prof. Dr. Aarão Lyra UNP

Prof^a Dr^a Renata Hax Sander Reiser UCPEL

Prof. Dr. Benedito Melo Acióly UESB

Dedicatória

*A minha mãe, Ana Maria do Prado,
e a meu filho, João Gabriel,
simplesmente por serem eles as
pessoas que são.*

Agradecimentos

Ao meu orientador e ao meu co-orientador, professores Adrião Duarte Dória Neto e Benjamín René Callejas Bedregal, pela paciência e tolerância que tiveram comigo durante esse período.

Ao meu amigo e colega, Benedito Melo Acióly, quem me apresentou a matemática intervalar e com quem ainda quero aprender muitas lições de vida.

A minha companheira e consultora Alzira Ferreira da Silva, por ter me ajudado a concluir este trabalho e abrilhantado muitos momentos nesta caminhada.

À minha mãe e meus irmãos, Jovino, Rita e Raquel pelo apoio durante esta jornada.

Aos colegas Stênio, Cátia, Marco Antônio e Silvinha.

A todos os meus colegas de departamento.

Aos colegas de pós-graduação, Adriana, Adriano, Alan, Daniel, Heliana, João Paulo, Juliana, Lima, Moisés, Rafael e Vinicius pelas críticas e sugestões e pelo apoio e companheirismo.

Aos professores Adelardo, Afonso, Ana Maria, Francisco, Glaúcio, Jorge, Luiz Marcos, Ortiz, Pablo, Paulo Mota, pela convivência durante esses quatro anos e pelas conversas de corredores.

Aos funcionários e colaboradores do DCA e do DIMAP Amalusia, Fátima, Gaspar, Giovani, Graça, Henrique e Zuleide, por terem contribuído com o seu trabalho para a realização do nosso.

A Paulo Yvens pela presteza em nos atender na secretaria do PPGEEC.

A meus amigos Dennis, Raquel e seus filhotes, Sebastian e Sofia, pelas críticas e sugestões (dos pais é claro) e por muitas festas que fizemos juntos (toda a família numerosa).

Epígrafe

A matemática é uma semi-deusa por ser onipresente, pseudo onipotente e inconsciente. É onipresente quando está em tudo sem ser vista, quando se manifesta de maneira ímpar na cabeça da cada homem.

É pseudo onipotente quando com um verbo no imperativo, em uma definição, se cria tudo no seu universo de discurso.

É inconsciente por ser etérea, por está em tudo e não ser ninguém.

É semi-deusa por não ser vista e nem tocada, mas é adorada por muitos.

E todo aquele que nela crê, entende o milagre do verbo. (Roque Mendes Prado Trindade)

Resumo

Este trabalho explora uma fundamentação matemática, para o processamento digital de sinais sob uma óptica da matemática intervalar. Pretende explorar o problema aberto de precisão e de representação de dados em sistemas digitais, trabalhando com uma versão intervalar de representação de sinais. Processamento de sinais é uma área muito rica e complexa, por isso, faremos um recorte e focaremos em sistemas lineares invariantes no tempo. Existe uma vasta literatura na área, mas mesmo assim, ainda existe alguns conceitos na matemática intervalar que precisam ser redefinidos ou elaborados para a construção de uma teoria sólida de processamento de sinais intervalares. Construiremos os fundamentos básicos para processamentos de sinais na versão intervalar, tais como as propriedades básicas linearidade, estabilidade, causalidade, uma versão intervalar de sistemas lineares e suas propriedades. Serão apresentadas versões intervalares da convolução e da transformada- Z . Será feita análise de convergências de sistemas usando a transformada- Z intervalar, uma distância essencialmente intervalar, números complexos intervalares, aplicação em um filtro intervalar.

Palavras-chave: Matemática Intervalar, Processamento de Sinais, Sistemas Lineares.

Abstract

This work deals with a mathematical fundament for digital signal processing under point view of interval mathematics. Intend treat the open problem of precision and representation of data in digital systems, with a interval version of signals representation. Signals processing is a rich and complex area, therefore, this work makes a cutting with focus in systems linear invariant in the time. A vast literature in the area exists, but, some concepts in interval mathematics need to be redefined or to be elaborated for the construction of a solid theory of interval signal processing. We will construct a basic fundaments for signal processing in the interval version, such as basic properties linearity, stability, causality, a version to intervalar of linear systems e its properties. They will be presented interval versions of the convolution and the Z -transform. Will be made analysis of convergences of systems using interval Z -transform , a essentially interval distance, interval complex numbers , application in a interval filter.

Keywords: Interval Mathematics, Signal Document Processing, Linear Systems.

Sumário

Sumário	i
Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	ix
Lista de Símbolos e Abreviaturas	xi
1 Introdução	1
1.1 Motivação	4
1.2 Justificativa	5
1.3 Objetivos	6
1.4 Metodologia	7
1.5 Organização do trabalho	7
2 Matemática intervalar	9
2.1 Semânticas associadas a intervalos	11
2.1.1 Intervalos como envoltória de reais	12
2.1.2 Intervalos como um número-intervalo	12
2.2 Aritmética intervalar	12
2.2.1 Funções intervalares	15
2.3 Soluções próprias de sistemas de equações intervalares	17
2.4 A topologia de $\mathbb{I}\mathbb{R}$	18
2.4.1 Distância	18
2.4.2 Sequências intervalares	20
2.5 Uma métrica essencialmente intervalar	22
2.6 Integrais intervalares	33
2.7 Integral de linha intervalar	36
2.8 Conclusão	37
3 Números complexos intervalares	39
3.0.1 Forma retangular dos números complexos intervalares	40
3.1 Aritmética intervalar complexa	43
3.1.1 Forma polar ou trigonométrica	51
3.2 Conclusão	71

4	Princípios de sinais e sistemas intervalares	73
4.1	Sinais e sistemas intervalares	75
4.1.1	Sinais intervalares	75
4.1.2	Sistemas intervalares	75
4.1.3	Propriedades básicas de sistemas intervalares	76
4.1.4	Sistemas lineares intervalares	81
4.2	Sistemas intervalares contínuos	83
4.2.1	Convolução intervalar contínua	86
4.3	Sinais e sistemas intervalares discretos	87
4.3.1	Sinais intervalares digitais	88
4.3.2	Sistemas digitais intervalares	88
4.3.3	Sequências intervalares discretas	89
4.3.4	Convolução intervalar discreta	95
4.4	Conclusão	97
5	Transformada-Z intervalar	99
5.1	Propriedades da região de convergência	114
5.2	Estabilidade, causalidade e regiões de convergência	120
5.3	Inversa da transformada-Z intervalar	123
5.3.1	Método formal com integral de Cauchy	123
5.3.2	Método por inspeção	126
5.3.3	Expansão de frações parciais	126
5.4	Expansão em séries de potências	128
5.5	Propriedades da transformada-Z intervalar	128
5.5.1	Linearidade	129
5.5.2	Deslocamento no tempo	131
5.5.3	Multiplicação por uma sequência exponencial	132
5.5.4	Diferenciação de $X(z)$	133
5.5.5	Conjugação de uma sequência complexa	133
5.6	Simetria temporal(tempo reverso)	135
5.7	Convolução de sequências e transformada-Z	136
5.8	Relação de Parseval	140
5.9	Conclusão	141
6	Filtros intervalares	143
6.1	Filtros	143
6.2	Incertezas em filtros	144
6.2.1	Incertezas de componentes dos filtros analógicos	144
6.2.2	Imprecisões genéricas na descrição dos filtros	145
6.2.3	Incertezas inerentes ao modelo matemático	148
6.2.4	Incertezas por quantização dos coeficientes	153
6.3	Filtros intervalares	156
6.3.1	Descrição intervalar de filtros	156
6.4	Conclusão	157

7 Conclusão	159
Referências bibliográficas	163

Lista de Figuras

1.1	Um modelo de digitalização de sinais intervalares	5
2.1	Interpretação geométrica para o diâmetro de um intervalo	10
2.2	Interpretação geométrica do módulo de um intervalo-Moore, para o caso em que $0 \in X$	19
2.3	Interpretação geométrica do módulo intervalar de um intervalo	32
3.1	Representação gráfica de um número complexo intervalar na forma retangular	40
3.2	Representação gráfica da união de dois números complexos	41
3.3	Representação gráfica da união hull dos dois números complexos mostrados na figura 3.2.	42
3.4	Representação Gráfica da intersecção não vazia de dois números complexos intervalares	42
3.5	Exemplo de números complexos intervalares nas regiões do plano complexo	43
3.6	Representação Gráfica da adição de dois números complexos intervalares na forma retangular	46
3.7	Distância intervalar entre dois complexos intervalares	49
3.8	Representação gráfica do módulo de um número complexo intervalar . . .	50
3.9	Extraída da representação polar de um complexo intervalar na abordagem de Boche [Boche, 1966].	52
3.10	Extraída de [Lyra 2003].	52
3.11	Representação gráfica de um número complexo de extremos reais na forma polar na abordagem de Lyra	52
3.12	Representação de um número complexo intervalar na forma polar	53
3.13	Representação Gráfica da adição de dois números complexos intervalares na forma polar.	57
4.1	Sistema semi intervalar onde $x(t)$ é real, $Y(t)$ é um grandeza intervalar e $H(x(t))$ é uma função intervalar	76
4.2	Sistema estritamente intervalar onde $X(t)$ e $Y(t)$ são grandezas intervalares e $H(X)$ é uma função intervalar	76
4.3	Sistema intervalar sem memória	78
4.4	Circuito RLC em série	83
4.5	Sistema digital intervalar onde $X[n]$ pode pertencer a $\mathbb{I}\mathbb{D}$ e $Y[n] \in \mathbb{I}\mathbb{D}$ e $H[X]$ pode ser uma função intervalar	88
4.6	Uma amostra de um sinal intervalar	89

4.7	A função escada intervalar com incerteza constante	89
4.8	A função exponencial intervalar com incerteza variável	90
4.9	Representação gráfica da função semi-intervalar $[0, 5; 1] \sin(x)$ para $-\pi \leq x \leq \pi$	90
4.10	Um exemplo de discretização de uma função semi-intervalar usando sequências intervalares na função $[0, 5; 1] \sin(x)$ para $-\pi \leq x \leq \pi$	90
4.11	A representação gráfica do produto das duas sequências intervalares $\delta_1[n]$ e $X[n] = [1; 2] \forall n \in \mathbb{Z}$	91
5.1	Um esboço de uma circunferência intervalar de raio R e $C = A + BI$	101
5.2	Representação de \mathbf{z} no plano complexo com destaque para o círculo de raio unitário	103
5.3	Representação da região de convergência da transformada- \mathcal{Z} da função degrau unitário intervalar $\mathcal{U}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}[n] \mathbf{z}^{-n}$	103
5.4	Uma ilustração do caso em que a região de convergência é um anel no plano- \mathbf{z}	104
5.5	Uma ilustração do caso em que a região de convergência é um círculo no plano- \mathbf{z}	104
5.6	Uma ilustração do caso em que a região de convergência é um "círculo" que toma todo o plano- \mathbf{z}	105
5.7	Uma ilustração da região de convergência para transformada- \mathcal{Z} intervalar exponencial no plano- \mathbf{z}	106
5.8	Representação gráfica de polos e zeros da transformada- \mathcal{Z} , intervalar exponencial no plano- \mathbf{z} da sequência $A^n \mathbf{u}[n]$ para $A \succ \mathbf{0}$	107
5.9	Uma ilustração da região de convergência para transformada- \mathcal{Z} intervalar exponencial esquerda no plano- \mathbf{z}	108
5.10	Representação gráfica de polos e zeros da transformada- \mathcal{Z} , intervalar exponencial no plano- \mathbf{z} da sequência $-A^n \mathbf{u}[-n - 1]$	108
5.11	Uma ilustração da região de convergência para transformada- \mathcal{Z} intervalar exponencial no plano- \mathbf{z} das sequências $([\frac{1}{4}; \frac{1}{2}])^n \mathbf{u}[n]$ e $([-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}])^n \mathbf{u}[n]$	110
5.12	Representação gráfica das regiões de convergência, polos e zeros da transformada- \mathcal{Z} , intervalar da soma das sequências $X_1[n]$ e $X_2[n]$	112
5.13	Uma ilustração da região de convergência para transformada- \mathcal{Z} intervalar exponencial no plano- \mathbf{z} para intervalos degenerados	115
5.14	Uma ilustração da região de convergência para transformada- \mathcal{Z} intervalar no plano- \mathbf{z}	116
6.1	Filtro de nona ordem de Chebyshev [Pothuri 2008].	145
6.2	Versão intervalar do filtro de nona ordem de Chebyshev da figura 6.1.	145
6.3	Sistema genérico filtragem digital de sinais contínuos	146
6.4	Sistema genérico para o caso do sistema da figura 6.3 ser um filtro passa baixa.	147
6.5	Correspondente sistema genérico discreto para o caso do sistema da figura 6.3 ser um filtro passa baixa.	148
6.6	Ilustração gráfica de especificações de filtros do exemplo 11.	150

6.7	Localização no plano- s dos pólos $H_c(s)H_c(-s)$ do filtro Butterworth de 6 ordem	153
-----	--	-----

Lista de Tabelas

5.1	Alguns pares comuns da transformada- Z	113
6.1	Representação real e intervalar dos valores dos componentes do filtro de Chebyshev de nona ordem das figuras 6.1 e 6.2.	146

Lista de símbolos e abreviaturas

- CIR Representação canônica intervalar
- $Contd(F)$ Contra domínio da função F
- D_{Mc} Distância de Moore entre complexos
- D_M Distância de Moore
- D_{ci} Distancia intervalar sobre \mathbb{IC} .
- $Diam(X)$ É uma notação para o diâmetro do intervalo X
- $Dom(F)$ Domínio da função F
- $H(z)$ Transformada- Z real da função de transferência $h[n]$
- $Im(Z)$ Parte imaginária do número complexo Z
- $Infm(M)$ Representa o ínfimo intervalar do conjunto M
- $Min(M)$ Mínimo intervalar do conjunto M
- $Re(Z)$ Parte real do número complexo Z
- \mathbb{C} O conjuntos dos números complexos
- \mathbb{IR} O conjunto dos intervalos de extremos reais
- \mathbb{IC} Conjunto dos números complexos intervalares
- \mathbb{IC} O conjunto dos números complexos intervalares
- \mathbb{IC}_d Conjuntos do intervalos complexos degenerados.
- \mathbb{IC}_E Números complexos representados na forma da identidade de Euler.
- \mathbb{IC}_p Conjunto dos números complexos na forma polar.
- \mathbb{ID} O conjunto do intervalos digitais
- \mathbb{IR}_c O conjunto dos intervalos circulares
- \mathbb{IR}_d O conjunto dos intervalos degenerados

$\mathbb{I}(\mathbb{C})$	O conjunto de todos os intervalos de complexos.
\mathbb{N}	O conjunto dos números naturais
\mathbb{N}^+	O conjunto dos números naturais sem o zero.
Ω	Este símbolo representa a frequência em sistemas contínuos
\mathbb{Q}	O conjunto dos números irracionais
\mathbb{R}	O conjunto dos números reais
\mathbb{R}_{ip}	Números reais com representação “i” e precisão “p”
\mathbb{Z}	O conjunto dos números inteiros
δ	Função delta real
δ_i	Função delta intervalar
$\delta_i[n]$	Pulso unitário intervalar.
$\inf(M)$	Ínfimo de M - Representa a maior das cotas inferiores do conjunto M .
$\mathcal{H}(z)$	Transformada-Z intervalar da função de transferência $H[n]$
ω	Este símbolo representa a frequência em sistemas discretos
\prec	Estritamente menor
\succ	Estritamente maior
$\sup(M)$	Supremo de M - Representa a menor das cotas superiores do conjunto M .
u	Função degrau intervalar
1	Intervalo degenerado $[1; 1]$.
0	O intervalo degenerado $[0,0]$ ou o vetor nulo de ordem n
z	Variável z intervalar degenerada
$\inf(M)$	Representa o ínfimo real do conjunto M
m_{ei}	Distância essencialmente intervalar
$pm(X)$	Representa o ponto médio do intervalo X
*	Este símbolo é usado com sobrecarga semântica, que, dependendo do contexto pode representar: Uma operação genérica, convolução ou conjugado complexo
C/D	Contínuo/discreto

D/C	Discreto/contínuo
dB	Decibel
DSP	Processamento digital de sinais(do inglês digital signal processing)
FIR	Resposta finita ao impulso
IIR	Resposta infinita ao impulso
LTI	Sistemas lineares invariantes no tempo
RCC	Região de convergência condicional
RCE	Região de convergência estrita
RLC	Região limite de convergência
RLNC	Região limite de não-convergência
RNCE	Região de não-convergência estrita
T	Período de amostragem

Capítulo 1

Introdução

No mundo da abstração, dos conceitos e das idéias podemos dizer que um dos mais impressionantes esforços realizados pela humanidade foi o desenvolvimento da matemática. Desde a invenção dos números aos dias de hoje, a computabilidade e a coerência das teorias lógicas marcaram a história da ciência. A matemática percorreu longo caminho no sentido de esclarecer a natureza do pensamento e também, indiretamente, da matéria, através de suas aplicações em física. A matemática ganhou mais adeptos com o surgimento do cálculo, que teve grandes contribuições, como os trabalhos de Arquimedes(287-212 A.C.), os trabalhos no início do século XVII, por René Descartes(1596-1650), Pierre de Fermat(1601-1665), John Wallis(1616-1703)e Isaac Barrow (1630-1677). Mas a invenção do cálculo foi atribuída a Sir Isaac Newton(1642-1727) e Gottfried Willhelm Leibniz(1646-1716). Eles foram responsáveis pelo cálculo infinitesimal, generalização e unificação do assunto. Sem deixar de fora outros matemáticos do século XVII e XVIII como Jakob Bernoulli(1654-1795), Johan Bernoulli(1667-1748), Leonhard Euler(1707-1783) e Josep L. Lagrange(1736-1813). Porém, foi no século XIX que o cálculo recebeu uma melhor formalização por Bernhard Bolzano(1781-1848), Augustin L. Cauchy(1789-1857), Karl Weierstrass(1815-1897) e Richard Dedekind(1831-1916). Hoje o contato com a matemática começa cedo, ainda na infância, antes mesmo de um domínio da língua falada. Com brinquedos educativos já se induz à construção de algumas noções matemáticas por parte das crianças, mas, de certa forma, é com a escrita que a representação se torna mais presente na vida do indivíduo e começa sempre cedo quando ainda nas escolas nos ensinam a adição com inteiros. Na verdade não aprendemos manipular números e sim sua representação decimal, aplicando o algoritmo aprendido, para que, dado a representação de dois inteiros se tenha como resultado a soma das duas entradas. Assim, o cálculo comumente não atua sobre os números, mas sobre suas representações. São as representações que são manipuladas no processo do calculo e os objetos representados carregam apenas a intenção. Muitas das leis do universo podem ser representadas em linguagem matemática. Muitas dessas leis são estudadas e representadas por sub-áreas diferentes dentro da matemática como é o caso da álgebra que é suficiente para resolver muitos problemas estáticos, mas os problemas que envolvem variações são melhores representados por equações diferenciais. Mesmos a matemática não é capaz de representar todos os fenômenos que envolvem uma sociedade.

A precisão de cálculos matemáticos vem sendo tema de pesquisas em diversos ramos

da ciência e tecnologia, buscando o desenvolvimento de algoritmos aritméticos, com o objetivo de alcançar melhor precisão possível, descritas usando equações dentro do processamento de dados numéricos. Mas nem sempre se consegue uma boa precisão, não pela qualidade do algoritmo, mas principalmente, pela qualidade dos dados de entrada, que muitas vezes são imprecisos advindos de sistemas de medidas que fornecem dados com valores aproximados (truncados ou arredondados) e por erros durante o processamento dos cálculos, devido às restrições operacionais da máquina, que pode vir tanto do truncamento quanto do arredondamento de dados que não possuem representação finita na linguagem de máquina.

Mesmo com todas essas limitações de representação, a matemática tem sido uma grande ferramenta na representação e manipulação de sinais. Que, com representação exata ou aproximada, os sinais são ingredientes básicos na comunicação e na vida do homem. Um exemplo é o sinal da fala. Seja frente a frente ou pelo telefone temos a figura do emissor e do receptor do sinal. Outra forma de comunicação humana é a visual, onde os sinais assumem a forma de imagens de objetos ou pessoas. Hoje é comum uma outra forma de comunicação via correio eletrônico na Internet. Além dos correios eletrônicos a Internet proporciona uma fonte de informações de interesses gerais como jogos, publicidade, educação e negócios. Todas estas formas de comunicação envolvem a transmissão de sinais. Podemos dizer que os batimentos cardíacos, a pressão sanguínea, e a temperatura são, para um médico, sinais sobre a saúde de um paciente. Por outro lado a direção do vento, as variações diárias da temperatura e a velocidade dos ventos são sinais para um meteorologista avaliar as condições do tempo. As flutuações diárias dos indicadores financeiros e econômicos são sinais que influenciam nas decisões dos investidores no mercado financeiro.

Como os sinais estão em toda parte das decisões do dia-dia, muitos sistemas físicos podem ser modelados e representados ou controlados através de sinais. Uma das principais aplicações industriais de sinais e sistemas se dá em controle de sistemas físicos. Sinais são usados em controle automático de sistemas como, por exemplo, no piloto automático de aviões, nos veículos de transportes coletivos, em motores de automóveis, em ferramentas e máquinas, refinarias de petróleo, fábricas de papel, reatores nucleares, usinas elétricas, e robôs.

Dentre as maneiras de representar sinais em descrição matemática, está a representação usando senoides. Este modelo é chamado análise de Fourier em homenagem a Josep Fourier (1768-1830), por sua contribuição à teoria da representação de funções como superposição ponderada de senoides. Os métodos de Fourier têm aplicações bastante difundidas, indo além dos sinais e sistemas; eles são usados em vários ramos da engenharia. A representação através da Transformada de Fourier é bastante importante para sinais contínuos e discretos. Ela permite mapear um sinal do domínio do tempo em um sinal no domínio da frequência. Além de prover diferentes meios de se analisar sinais e sistemas.

Podemos afirmar que a maioria dos fenômenos ocorrem em um domínio contínuo, entretanto, por motivos de processamento digital, o sinal é tratado no domínio discreto. Até início dos anos 1950, o processamento de sinais era feito basicamente em sistemas analógicos, implementados em circuitos eletrônicos ou mesmo em dispositivos mecânicos. Atualmente, eles são processados com dispositivos digitais. Por exemplo, sinais

como imagens, podem ser definidos precisamente de várias maneiras usando vários conceitos analíticos, como teoria dos conjuntos, produto cartesiano, relação binária, função, composição, etc. Cabe ao usuário escolher algoritmos e técnicas adequadas a cada domínio de problema. Um grande problema em processamento de sinais é tratar digitalmente sinais que são eminentemente contínuos. Um exemplo clássico desse problema é a representação dos reais pela aritmética de máquina. Aritmética que tem se mostrado pouco eficiente para resolver vários problemas que exigem precisão. Precisão de cálculos matemáticos em diversas áreas da ciência e tecnologia tem sido tema de trabalhos científicos, buscando sempre o desenvolvimento de algoritmos aritméticos, com o objetivo de alcançar a melhor precisão possível dentro do processamento de dados numéricos como visto em [Oppenheim & Schaffer 1989], [Comba & Stolfi 1993],[Edmonson 2001], [Boche 1966] e [Marciniak 2003] . De qualquer modo, isso nem sempre é possível devido a uma série de fatores como: imprecisão dos dados de entrada; imprecisão da aritmética de ponto flutuante e ainda pelas limitações físicas das máquinas. Podemos ver que esse não é um problema simples e que ele abrange todo o sistema computacional, passando por sua lógica de representação, modelagem matemática, capacidade de memória, tamanho das palavras, aritmética de ponto-flutuante etc. Consciente do tamanho e da complexidade das áreas envolvidas neste problema, neste trabalho faremos um recorte, abordaremos somente a parte de modelagem matemática em uma aritmética de precisão, apostando na aritmética intervalar como alternativa.

A abordagem intervalar na busca de precisão vem desde Arquimedes com o seu algoritmo para estimação de π através de duas sequências convergentes de polígonos inscritos e circunscritos com o número de lados crescente. Entretanto, a aritmética intervalar ganhou força como ramo da computação científica na década de 1950, através de alguns estudos isolados. Os trabalhos que marcaram o início do desenvolvimento da aritmética intervalar foram os trabalhos de Moore [Moore 1962] e Sunaga [Sunaga 1958]. Estes se destacaram no aspecto aritmético da matemática intervalar, enquanto os aspectos lógicos e algébricos ainda precisam de muita atenção para que a análise intervalar se aproxime da análise real. A matemática intervalar clássica se assenta em dois princípios básicos: a propriedade da inclusão-monotônica e uma topologia de Hausdorff. Contudo a métrica de Moore não é compatível com a inclusão-monotônica, uma das razões porque tem-se buscado métricas alternativas

A computação científica tem progredido muito nos últimos anos e expandido seu universo de utilização por diversas áreas dentre as quais podemos citar: telecomunicações, área médica(ressonância magnética), imagens médicas(processamentos de imagens), imagens de satélite(imagens multispectrais), sistemas financeiros e processamento de sinais como pode ser visto em [Corliss & Kearfott 1998], computação gráfica [Comba & Stolfi 1993] e outros ramos da ciência. Com este inegável crescimento aumenta a necessidade de conhecimento e controle rigoroso dos erros gerados e acumulados durante a computação dos dados. Existem três tipos básicos de erros em computação numérica: o primeiro e mais sério, por que não é possível torná-lo pequeno arbitrariamente via computação adicional, é a propagação dos erros dos dados iniciais, uma vez que estes em geral são incertos nem sempre espelhando a realidade do universo em questão, a segunda e terceira espécies de erro em computação científica são o arredondamento de números

reais para um número finito de dígitos e o erro de truncamento, causado quando se trunca uma sequência infinita de operações aritméticas após um número finito de operações.

O segundo e terceiro tipos de erros podem ser controlados através de computação rigorosa e exaustiva, pois são gerados por limitações físicas do equipamento de computação. Dependendo do método utilizado, o controle do erro pode ficar mais caro computacionalmente do que o próprio resultado, razão porque é sugestivamente indicado o uso da matemática intervalar como ferramenta de controle de erro.

Trabalhos recentes que são afins com esta proposta podemos citar; [Lyra 2003], que faz uma fundamentação para processamento digital de imagens intervalares, e que estaremos dando continuidade nesse trabalho; [Santiago 1999], [Santiago et al. 2006] e [Santiago et al. 2005] que trazem uma fundamentação da matemática intervalar, [Vaccaro 2001], que propõe algoritmos eficientes na resolução de sistemas lineares intervalares. Outros trabalhos que estão relacionados com o nosso tema são [Lordelo 2004], que trata de análise de projetos e controladores robustos e análise de convergência que também trataremos neste trabalho, [de Souza 2004], aplicações de métodos de otimização para cálculo de equilíbrio termodinâmico, fazendo uso da matemática intervalar.

Pelo exposto acima, este trabalho propõe uma abordagem intervalar para processamento digital de sinais intervalares.

A figura 1.1 resume o processamento de sinais de uma maneira geral. Aqui, $X(t)$ é um sinal contínuo que passa por um conversor contínuo /discreto (C/D) convertendo o sinal $X(t)$ em $X[n]$. Na sequência passa por um módulo de quantização gerando $X_q[n]$, o sinal quantizado que por sua vez passa por uma etapa de codificação produzindo o sinal digitalizado $X_D[n]$. Em todas essas etapas o sinal pode sofrer deformações (ganhar ruído). Na captação do sinal aparecem os ruídos de precisão dos sensores e da natureza do sinal. No módulo C/D é possível que a frequência de amostragem seja diferente da frequência de oscilação do sinal (Teorema de Nyquist [Oppenheim & Schaffer 1989]). Na quantização aparece o ruído gerado pelo fato de termos um intervalo de valores mapeados em um único valor. Na codificação temos uma limitação pelo fato de termos de representar números com representação infinita em uma quantidade finita de símbolos (tamanho da palavra limitado).

Neste trabalho daremos maior destaque às incertezas do sinal, ou seja, pretendemos criar mecanismos para tratar o sinal de maneira intervalar. Para isso assumiremos que nossos sistemas não tem um modelo real que o represente. Essa hipótese se justifica porque a aritmética intervalar não satisfaz a propriedade distributiva, pois, como sabemos, a multiplicação não é distributiva em relação à adição.

1.1 Motivação

DSP intervalar vem tendo cada vez mais importância na comunidade científica em aplicações nas diversas áreas do conhecimento como mostram os trabalhos de Lyra [Lyra 2003], que faz uma fundamentação matemática para processamento de imagens digitais; [Edmonson et al. 2004] e [Edmonson 2001] que propõe um processador intervalar no primeiro trabalho e implementação com FPGA da aritmética intervalar no segundo trabalho; Hansen [Hansen 2004], na área de métodos computacionais; Pereira et al. [Pereira

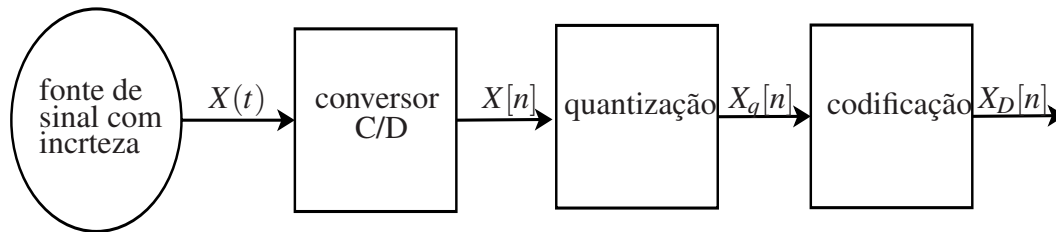


Figura 1.1: Um modelo de digitalização de sinais intervalares

et al. 2004] na área de bacias termais(Geologia); Pownuk [Pownuk 2004] engenharia; Skalna [Skalna 2006] aplicações em estruturas mecânicas; Samadi et al. [Samadi et al. 1992] com filtros intervalares; Comba e Stolfi [Comba & Stolfi 1993] propõe o uso da matemática intervalar em estruturas de dados para computação gráfica; Corliss e Kearfott [Corliss & Kearfott 1998] com aplicações industriais no campo de aplicações financeiras, sistemas médicos e terapia genética; Juzzo [Juzzo 2004] um trabalho de doutorado que usa análise intervalar para analisar sistemas robustos; Souza [de Souza 2004] uso da aritmética intervalar em engenharia química; e Lordelo [Lordelo 2004] um trabalho de doutorado em engenharia elétrica no qual propõe métodos intervalares para análise de estabilidade e convergência de sistemas; entre outros. Pelo o exposto acima, a principal motivação deste trabalho é em DSP intervalar, visto que propomos uma fundamentação matemática, apresentando alguns construtos como métrica, representação complexa, transformada- Z intervalar de modo a permitir aos usuários de DSP manipularem incertezas nos seus sistemas.

1.2 Justificativa

Na justificativa de qualquer ação se deve observar que mudanças esta pode acarretar, se ela é desejável e por último a relação custo benefício desta ação. No caso deste trabalho ele traz inovações no campo de processamento de sinais intervalares, uma que propomos uma extensão intervalar para algumas ferramentas matemáticas de processamentos digitais de sinais, como a convolução intervalar com tempo discreto, a transformada- Z intervalar com tempo discreto e a extensão das propriedades de sistemas reais para a sua versão intervalar, como a estabilidade, linearidade, invariância no tempo, causalidade, e a condição de memória do sistema.

Todos os tópicos propostos neste trabalho incrementarão a indumentária da análise intervalar que vem cada vez mais ganhando força no campo de processamento digitais de sinais, assim como em modelagem de sistemas, como pode ser comprovada na vasta bibliografia existente. Se observarmos os últimos cinco anos, encontraremos várias teses e dissertações, dentre as quais podemos destacar: O trabalho de Lyra que faz uma fundamentação para processamento de imagens digitais intervalares[Lyra 2003]; o de Vaccaro que propõe métodos intervalares para resolução de equações lineares [Vaccaro 2001]; o de Juzzo usando análise intervalar em sistemas de controle [Juzzo 2004]; o de Souza

fazendo uso de análise intervalar em problemas de engenharia química [de Souza 2004]; o de Lordelo usando a análise intervalar em problemas de alocação de pólos em estudos de plantas intervalares [Lordelo 2004]. Podemos constatar também muitas publicações de artigos em revistas e anais das quais citamos: Santiago que aborda relações entre a topologia de Moore e a topologia de Scott [Santiago et al. 2005]; Edmonson et al. propondo uma unidade lógica aritmética intervalar (IA-ALU) em [Edmonson et al. 2004]; Hansen discutindo cinco métodos de solução de equações lineares intervalares [Hansen 2004]; Pownuk que usa parâmetros intervalares na solução de problemas de engenharia [Pownuk 2004], uma proposta de *hardware* intervalar no trabalho de mestrado de [Gupte 2006]. Diante dessa vasta bibliografia e suas justificativas podemos inferir que vale a pena investir em modelos intervalares para processamento de sinais. Esses argumentos justificam uma abordagem intervalar em processamento de sinais, no intuito de resolver problemas de quantização e precisão, uma vez que a aritmética de máquina de ponto flutuante tem se mostrado insuficiente para tal tarefa.

1.3 Objetivos

O objetivo principal desse trabalho é contribuir com alguns princípios matemáticos para uma extensão da teoria de processamento de sinais digitais em sistemas lineares invariantes no tempo- LTI - para sua versão intervalar. Entretanto, como a área de processamento digitais de sinais é muito vasta, este trabalho fará um recorte do tema, tratando apenas um conjunto restrito dos seus conceitos, tais como as propriedades básicas de estabilidade, linearidade, causalidade e outros conceitos, como convolução e a transformada- Z . Pretendemos uma abordagem mais teórica, tendo em vista que o desenvolvimento de trabalhos nesta área é recente, sendo necessário primeiramente uma fundamentação teórica, para então iniciar uma implementação em bases seguras. Este trabalho é uma extensão do trabalho de Lyra [Lyra 2003] à luz dos trabalhos de [Oppenheim & Schaffer 1989] e [Chen 1999]. Ele visa melhorar a qualidade de processamento de sinais aplicados às áreas citadas em [Smith 1999]. Resumidamente, podemos dizer que o objetivo principal deste trabalho é:

- Construir alguns modelos matemáticos e estender um conjunto de conceitos de processamento digital de sinais para a versão intervalar.

Dentro desse objetivo geral podemos destacar objetivos específicos:

- Propor uma métrica intervalar que capte e preserve incertezas;
- Representar números complexos intervalares;
- Estender algumas propriedades de DSP real, como linearidade, estabilidade, causalidade, para a versão intervalar;
- Propor uma convolução intervalar, usando a integral intervalar de Moore;
- Estender a transformada- Z real para uma versão intervalar;
- Propor uma nova maneira de analisar as regiões de convergências.

1.4 Metodologia

Pretendemos uma abordagem mais teórica tendo em vista que o desenvolvimento de trabalhos nesta área é recente e carente de fundamentação teórica para proporcionar uma implementação bem fundamentada. Pretendemos desenvolver um trabalho com uma abordagem matemática autocontida, axiomática e bastante intuitiva, começando dos princípios básicos e construindo a teoria de sinais intervalares. Tomaremos como textos básicos para a fundamentação de DSP o trabalho de Oppenheim e Chafer [Oppenheim & Schafer 1989], na fundamentação de matemática intervalar os textos de Vaccaro [Vaccaro 2001] e Santiago [Santiago 1999], [Santiago et al. 2006] e [Santiago et al. 2005], na fundamentação de DSP Intervalar usaremos os textos de Lyra [Lyra 2003], Lordelo [Lordelo 2004] e Juzzo [Juzzo 2004].

1.5 Organização do trabalho

Este trabalho é dividido em 7 capítulos. Uma breve explicação dos conteúdos destes capítulos é apresentada a seguir:

- Capítulo 2 - “Matemática intervalar” : Neste capítulo faremos uma fundamentação da matemática intervalar como um suporte para os conceitos e fundamentos usados no decorrer do trabalho. Apresentaremos uma noção de distância que preserva incertezas e inclusão monotônica. Baseado nessa distância, apresentaremos uma extensão do conceito de módulo que preserve a inclusão monotônica.
- Capítulo 3 - “Princípios de sinais e sistemas intervalares ”: Neste capítulo serão apresentadas a versão intervalar das propriedades básicas de sistemas intervalares, tais como linearidade, causalidade, invariância no tempo e estabilidade; algumas sequências básicas usadas em processamento de sinais e convolução intervalar.
- Capítulo 4 - “Números complexos intervalares” : Neste capítulo será apresentada uma fundamentação dos números complexos intervalares. Serão propostas algumas contribuições, tais como uma representação alternativa para números complexos intervalares, módulo de números complexos intervalares que satisfaçam a propriedade da inclusão monotônica, e uma representação da identidade de Euler.
- Capítulo 5 “Transformada- Z intervalar” Neste capítulo serão apresentadas uma definição de transformada- Z intervalar, algumas propriedades da região de convergência e propriedades algébricas da transformada- Z intervalar.
- Capítulo 6 “Filtros ” neste capítulo apresentaremos alguns autores que lidam com filtros intervalares e proporemos o uso da transformada- Z intervalar na representação da função de transferências de filtros para contornar o problema dos efeitos de quantização.
- Capítulo 7 - “Conclusão”: Neste capítulo faremos uma reflexão sobre o nosso trabalho, tais como sua efetiva contribuição e alcance. Finalmente, sugerimos alguns tópicos que podem ser uma continuação de nosso trabalho.

Capítulo 2

Matemática intervalar

A matemática tem sido bem sucedida como linguagem na construção do conhecimento. Ela permite criar entes linguístico a partir de abstrações de entidades reais. Como toda linguagem ela tem suas limitações, uma das quais é não ter uma representação algorítmica para os números reais. Esta representação vem sendo tema de pesquisas desde Pitágoras até os dias de hoje. Na década de 50, Sunaga e Moore propuseram uma abordagem intervalar para controle de erros na computação de números reais. Em seus trabalhos eles descrevem a aritmética intervalar que é, de um certo modo, uma extensão da aritmética real. Pretendemos usar essa abordagem com sistemas lineares intervalares para modelar sistemas reais para processamento de sinais digitais. Para isso trataremos o conjunto \mathbb{R} como abordado por Vaccaro [Vaccaro 2001].

Precisão de cálculos matemáticos em diversas áreas da ciência e tecnologia tem sido tema de trabalhos científicos, buscando sempre o desenvolvimento de algoritmos aritméticos, com o objetivo de alcançar a melhor precisão possível dentro do processamento de dados numéricos, como visto em [Marciniak 2003] e [Popova 1994]. Isso nem sempre é possível por uma série de fatores como: imprecisão dos dados de entrada; imprecisão da aritmética de ponto flutuante e ainda pelas limitações físicas das máquinas. Como foi dito anteriormente, podemos ver que não é um problema simples e que abrange todo o sistema computacional, passando por sua lógica de representação, modelagem matemática, capacidade de memória, tamanho das palavras, aritmética de ponto-flutuante e etc. Este trabalho focará representação matemática, numa abordagem intervalar, pois nesta a aritmética intervalar deixa invariante as operações sobre números reais. Podemos ver isso nos trabalhos que marcaram o início do desenvolvimento da aritmética intervalar, os trabalhos de Moore [Moore 1966] e Sunaga [Sunaga 1958]. A Matemática Intervalar é uma área da matemática com interesse na resolução de expressões que possam ser executadas por computadores. Portanto, é crucial que essa abordagem responda às questões de precisão e eficiência que surgem na prática da computação científica.

Apesar do sucesso da matemática intervalar na área da computação científica, a análise intervalar não teve um sucesso análogo ao da teoria das variáveis complexas como extensão da análise real. Mais grave que isso foi o fato da análise intervalar não ter sido bem sucedida como uma fundamentação da computação intervalar. Isso talvez tenha sido pelo fato dos pesquisadores terem insistido numa métrica que não seja essencialmente intervalar, ou seja a distância entre intervalos não é um intervalo.

Atualmente, tem-se observado que a lógica clássica binária deixa a desejar na conver-

são do mundo real para um mundo virtual (de representação), o que faz a lógica fuzzy ser apontada como uma alternativa. As operações da lógica fuzzy no intervalo $[0; 1]$ podem fazer uma bijeção com o intervalo $(-\infty; +\infty)$, onde se pode trabalhar com as operações da aritmética intervalar. Com esta construção podemos ver que a aritmética intervalar se adequa mais à lógica fuzzy do que a aritmética real tradicional. Podemos também imaginar esta mesma situação onde o intervalo $[0; 1]$ representa um espaço de probabilidade, que também casa bem uma aritmética intervalar.

Neste capítulo apresentaremos uma fundamentação básica para a matemática intervalar no sentido de deixar o trabalho auto contido do ponto de vista dessa matemática. Proporemos uma métrica, provaremos algumas propriedades da integral intervalar de Moore. Faremos uma fundamentação para uso nos capítulos subsequentes.

Definição 1 (Intervalo) *Dados a e $b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$ chamaremos de intervalo X , o conjunto $X = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq x \leq b\}$ e representaremos por $X = [a; b]$. O conjunto dos intervalos assim definidos é representado por \mathbb{IR} .*

Cada intervalo tem duas projeções a ele associadas, π_1 e π_2 , definidas por $\pi_1([a; b]) = a$ e $\pi_2([a; b]) = b$. Para simplificar notação, usaremos \underline{X} para representar $\pi_1(X)$ e \bar{X} para representar $\pi_2(X)$. Seja $F : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$ uma função intervalar, o **limite inferior** de F é a função semi-intervalar $\underline{F} : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\underline{F}(X) = \pi_1(F(X))$ e o **limite superior** de F é a função semi-intervalar $\bar{F} : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\bar{F}(X) = \pi_2(F(X))$.

Definição 2 (Diâmetro de um intervalo) *Seja $X \in \mathbb{IR}$ um intervalo. Definimos o diâmetro do intervalo X como sendo o número real não-negativo $\text{Diam}(X) = \bar{X} - \underline{X}$.*

A Figura 2.1 dá uma interpretação geométrica para o diâmetro de um intervalo:

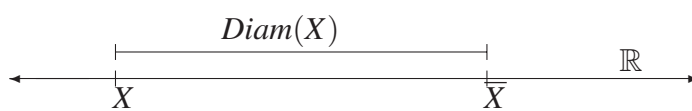


Figura 2.1: Interpretação geométrica para o diâmetro de um intervalo

O Raio de um intervalo, X , é dado pela metade do diâmetro de X , como mostra a equação seguinte:

$$\text{raio}(X) = \frac{\text{Diam}(X)}{2}. \quad (2.1)$$

Definição 3 (Ordem de inclusão) *Sejam X e $Y \in \mathbb{IR}$. Dizemos que $X \subseteq Y$ se e só se $\underline{Y} \leq \underline{X}$ e $\bar{X} \leq \bar{Y}$.*

Definição 4 (Ordem de Kulisch-Miranker) *Sejam X e $Y \in \mathbb{IR}$. X é menor ou igual a Y , denotado por $X \leq Y$, se $\underline{X} \leq \underline{Y}$ e $\bar{X} \leq \bar{Y}$.*

Sejam $X \leq Y$ e $X \cap Y = \emptyset$. Então dizemos que $X \prec Y$, que é equivalente a dizer que $Y \succ X$.

Um intervalo X diz-se **positivo** se $\underline{X} > 0$. E **negativo** se $\overline{X} < 0$.

Definição 5 (Ponto médio de um intervalo) Dado $X \in \mathbb{IR}$ chamamos de ponto médio de X o número real dado por

$$pm(X) = \frac{\underline{X} + \overline{X}}{2}$$

Definição 6 (Ínfimo intervalar) Seja $M \subseteq \mathbb{IR}$. O ínfimo de M , com relação à ordem \leq , denotado por $Infm$, é o intervalo Y tal que $Y \leq X$, $\forall X \in M$, e dado qualquer intervalo $Z \leq X$, $\forall X \in M$, então $Z \leq Y$.

Proposição 1 Seja $M \subseteq \mathbb{IR}$. Então o ínfimo intervalar de M , com relação à ordem \leq , é dado pela equação 2.2.

$$Infm(M) = [inf\{\underline{X} : X \in M\}; inf\{\overline{X} : X \in M\}]. \quad (2.2)$$

Prova:

Pela definição 6 temos que $Infm(M) \leq X$, $\forall X \in M$. Portanto pela definição 4 $Infm(M) \leq \underline{X}$, $\forall X \in M$ e $Infm(M) \leq \overline{X}$, $\forall X \in M$. Logo $Infm(M) = [inf\{\underline{X} : X \in M\}; inf\{\overline{X} : X \in M\}]$. ■

O ínfimo é a maior das cotas inferiores do conjunto e quando aplicado a um conjunto de intervalos degenerados coincide com a noção de ínfimo dos conjuntos dos reais.

Definição 7 (Mínimo intervalar) Dado $M \subseteq \mathbb{IR}$ e $X \in \mathbb{IR}$, diz-se que X é o **mínimo** de M , com relação à ordem \leq , denotado por $Min(M)$, se X é o **ínfimo** de M , com relação à ordem \leq , e $X \in M$.

As definições e proposições sobre o mínimo e ínfimo possuem as duais para os casos de supremo e máximo.

2.1 Semânticas associadas a intervalos

Existem várias semânticas atribuídas ao conjunto \mathbb{IR} . Aqui só daremos destaque a duas delas, a que trata o intervalo como envoltória de reais e a que trata o intervalo como uma entidade numérica. Cada uma dessas semânticas tem suas vantagens e desvantagens.

2.1.1 Intervalos como envoltória de reais

Os pesquisadores que adotam esta semântica para o conjunto \mathbb{IR} vêem cada intervalo como um invólucro que traz informação de um número real. Para esta corrente a multiplicação de um intervalo $X \in \mathbb{IR}$ por ele mesmo nem sempre é o mesmo resultado da multiplicação proposta por Moore. Com esta abordagem X^2 é sempre um intervalo não negativo. Visto que ele representa o mesmo número real. Esta é a interpretação usualmente aceita no contexto da aritmética intervalar. Segundo a semântica de envoltória intervalar de reais, um intervalo de reais representa um número real sujeito a incertezas, isto é

$$\forall x \in \mathbb{R}, X \text{ representa } x \Leftrightarrow x \in X.$$

Assim, qualquer número real pertencente à envoltória é um possível representante do número real cuja a envoltória representa. O efeito da envoltória é modelar a propagação do erro em calculo numérico em ponto flutuante¹ [Vaccaro 2001].

2.1.2 Intervalos como um número-intervalo

Nesta abordagem um intervalo é visto como uma entidade matemática que representa os números reais e os intervalos nele contidos. Ele constitui um tipo diferente das informações que carrega, é um novo tipo de número, cuja semântica pode ser definida da seguinte forma:

$$\forall X \in \mathbb{IR}, Y \text{ representa } X \Leftrightarrow X \subseteq Y.$$

Em palavras, um intervalo representa todos os intervalos reais que ele contém, em particular, os números reais, vistos como intervalos degenerados.

Assim, um número-intervalo representa todos os seus subconjuntos e não, apenas, números reais individualmente selecionados dentro de um domínio de incertezas. O conceito de número intervalo excede a lei da tricotomia² dos reais, que admite intervalos que contenham números simultaneamente positivos e negativos.

Os conceitos básicos e notações apresentadas aqui podem ser encontrados nas seguintes referências [Oliveira et al. 1997], [Vaccaro 2001], [Trindade 2002], [Santiago et al. 2006].

2.2 Aritmética intervalar

Incertezas são levadas em contas em áreas como lógica fuzzy, estatística, teoria da medida e matemática intervalar. Nosso trabalho se restringe a o uso da matemática intervalar. Existem várias propostas de tratamento de incertezas intervalares na literatura. Como exemplo podemos citar a Aritmética Affine usada em [Comba & Stolfi 1993, Grman & Veselý 2004], a aritmética de Moore em [Moore 1966], a aritmética circular como visto em [Arndt 2007], a representação diagramática da aritmética intervalar abordada em [Kulpa 2001], e etc. Neste trabalho usaremos, apenas, a aritmética de Moore e a aritmética

¹Uma representação de números reais usada em PC's com arquitetura Intel, Macintoshes e muitas plataformas Unix, é regulamentado pelo padrão 754 da IEEE [IEEE 1985].

²Segundo a tricotomia um número real em relação a outro só poder menor, igual ou maior.

circular. Numa visão da teoria dos conjuntos serão tratadas as operações aritmética intervalares sobre o conjunto \mathbb{IR} , apresentando-se as principais propriedades algébricas de \mathbb{IR} , funções, continuidade, noções de sequência, de convergência. Para um aprofundamento maior no assunto consulte os seguintes trabalhos: [Moore 1966], [Santiago et al. 2006], [Vaccaro 2001], [Lyra 2003], [Oliveira et al. 1997], [Trindade 2002].

Aritmética intervalar de Moore

Definição 8 (Operações aritméticas em \mathbb{IR}) *Sejam $X, Y \in \mathbb{IR}$. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão em \mathbb{IR} são definidas por $X * Y = \{x * y : x \in X, y \in Y\}$, onde $*$ $\in \{+, -, \times, \div\}$ é qualquer uma das quatro operações aritméticas. Se ω for uma operação aritmética unária, então $\omega(X)$ é definida por $\omega(X) = \{\omega(x) : x \in X\}$.*

Nota: Convém observar que para a operação de divisão, é necessário assumir que $0 \notin Y$, pois, caso contrário, a operação não estaria bem definida.

As três proposições seguintes não serão provadas, por se tratar de conceitos básicos já bastante difundidos na literatura, mas suas provas podem ser encontradas, por exemplo, em [Oliveira et al. 1997] na forma de vários teoremas.

Proposição 2 *Sejam X, Y e $Z \in \mathbb{IR}$. Então*

1. **Adição intervalar:** $X + Y = [(\underline{X} + \underline{Y}); (\overline{X} + \overline{Y})]$.
2. **Pseudo³ inverso aditivo intervalar:** $-X = [-\overline{X}; -\underline{X}]$.
3. **Subtração intervalar:** $X - Y = X + (-Y) = [\underline{X} - \overline{Y}; \overline{X} - \underline{Y}]$.
4. **Multiplicação intervalar:** $X \cdot Y = [\min\{\underline{X} \cdot \underline{Y}, \underline{X} \cdot \overline{Y}, \overline{X} \cdot \underline{Y}, \overline{X} \cdot \overline{Y}\}; \max\{\underline{X} \cdot \underline{Y}, \underline{X} \cdot \overline{Y}, \overline{X} \cdot \underline{Y}, \overline{X} \cdot \overline{Y}\}]$.
5. **Pseudo⁴ inverso multiplicativo intervalar:** $X^{-1} = 1/X = [\frac{1}{\overline{X}}; \frac{1}{\underline{X}}]$ e $0 \notin X$.
6. **Divisão intervalar:** $\frac{X}{Y} = X \cdot Y^{-1} = [\min\{\frac{\underline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\underline{X}}{\underline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\underline{Y}}\}; \max\{\frac{\underline{X}}{\underline{Y}}, \frac{\underline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\underline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}\}]$ com $0 \notin [Y; \overline{Y}]$.

Proposição 3 *Sejam X, Y e $Z \in \mathbb{IR}$. Então satisfaz*

1. **Propriedades algébricas da adição em \mathbb{IR}**
 - **Fechamento:** Se $X \in \mathbb{IR}$ e $Y \in \mathbb{IR}$ então $X + Y \in \mathbb{IR}$;
 - **Associatividade:** $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$;
 - **Comutatividade:** $X + Y = Y + X$;
 - **Elemento Neutro:** $\exists! \mathbf{0} = [0; 0] \in \mathbb{IR}$ tal que: $X + \mathbf{0} = \mathbf{0} + X = X$

Proposição 4 *Sejam X, Y e $Z \in \mathbb{IR}$. Então*

1. **Propriedades algébricas da multiplicação em \mathbb{IR}**

³O pseudo se justifica porque quando opera um elemento com o seu inverso não temos o elemento identidade da operação.

⁴Vale o mesmo comentário para o pseudo anterior.

- **Fechamento:** Se $X \in \mathbb{IR}$ e $Y \in \mathbb{IR}$, então $X \cdot Y \in \mathbb{IR}$;
- **Associatividade:** $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$;
- **Comutatividade:** $X \cdot Y = Y \cdot X$;
- **Elemento Neutro:** $\exists! \mathbf{1} = [1; 1] \in \mathbb{IR}$ tal que: $X \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot X = X$;
- **Subdistributividade:** $X \cdot (Y + Z) \subseteq (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$;

2. **Consequência do pseudo inverso multiplicativo:** Seja X um intervalo tal que $0 \notin X$. Então $1 \in X/X$

Definição 9 (Inclusão monotônica) Uma função intervalar F de variáveis X_1, X_2, \dots, X_n é uma inclusão monotônica se

$$Y_i \subseteq X_i$$

implica

$$F(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \subseteq F(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Uma das principais propriedades da aritmética de Moore é a inclusão monotônica. Ela garante a correteza dos resultados intervalares e a inclusão do erro.

Aritmética intervalar circular

Na aritmética circular um intervalo é representado também por um par de números reais $\langle m, r \rangle$, onde m representa o centro do intervalo, que seria o ponto médio do intervalo convencional, e r representa o raio do intervalo.

Definição 10 (Intervalo circular) Dados x_m e $x_r \in \mathbb{R}$. Chamaremos de **intervalo circular** ao conjunto $X = \langle x_m, x_r \rangle = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_m| \leq x_r\}$.

O conjunto de todos os intervalos circulares será representado por \mathbb{IR}_c .

Essa definição coincide com a definição de Moore no sentido que $\forall X \in \mathbb{IR}$ temos uma função $C : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}_c$ definida por $C(X) = \langle pm(X), raio(X) \rangle$ e em contrapartida temos uma função $R : \mathbb{IR}_c \rightarrow \mathbb{IR}$ definida por $R(X) = [x_m - x_r; x_m + x_r]$.

Genericamente, em [Arndt 2007] define-se a aritmética intervalar circular como segue: Dados X e $Y \in \mathbb{IR}_c$ temos: $\{x + y : x \in X, y \in Y\} \subseteq X + Y \in \mathbb{IR}_c$ e $\{x \cdot y : x \in X, y \in Y\} \subseteq X \cdot Y \in \mathbb{IR}_c$.

Maiores detalhes sobre a aritmética intervalar circular podem ser encontrados em [Arndt 2007].

Alguns dos conceitos usuais da aritmética intervalar de Moore tem sua contrapartida na aritmética circular, por exemplo:

$$|X|_C = |\langle x_m, x_r \rangle| = |x_m| + x_r = \max\{|c| : c \in X\},$$

$$raio(X) = x_r,$$

$$X + Y = \langle x_m + y_m, x_r + y_r \rangle,$$

$$X - Y = \langle x_m - y_m, x_r + y_r \rangle,$$

$$X \cdot Y = \langle x_m y_m, x_r y_r + |x_m| y_r + x_r |y_m| \rangle.$$

Com essa aritmética podemos observar que se $*$ é uma das operações aritméticas definidas temos $C(X * Y) = C(X) * C(Y)$ e que $R(Z * W) = R(Z) * R(W)$.

2.2.1 Funções intervalares

Nesta seção serão apresentadas algumas definições de funções intervalares, começando pela definição de função intervalar.

Definição 11 (Função intervalar) *Seja $F : X \rightarrow Y$ uma função. Se $X = \text{Dom}(F) \subseteq \mathbb{IR}$ e $Y = \text{Contd}(F) \subseteq \mathbb{IR}$, dizemos que F é uma função intervalar de uma variável intervalar.*

Definição 12 (Inclusão intervalar) *Dado $x \in \mathbb{R}$, diz-se que $X \in \mathbb{IR}$ é uma **representação** de x se $x \in X$.*

Como este trabalho explora a representação intervalar de sinais é muito importante uma definição de representação intervalar de funções reais. Usaremos aqui a definição de [Santiago et al. 2006].

Definição 13 (Representação intervalar) *Uma função $F : \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{IR}^n$ é uma representação intervalar da função $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ se, para cada $\vec{X} \in \mathbb{IR}^m$ e $\vec{x} \in \vec{X}$, $f(\vec{x}) \in F(\vec{X})$.*

Definição 14 (Representação canônica intervalar - CIR) *Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não assintótica⁵. A função $CIR(f) : \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{IR}$ é uma representação canônica da função $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ se CIR for definida por*

$$CIR(f)(\vec{X}) = \left[\inf\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in \vec{X}\}; \sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in \vec{X}\} \right].$$

Em outras palavras, $CIR(f)$ é uma função intervalar que mapeia uma m-tupla de intervalos \vec{X} no menor intervalo que contém $f(\vec{X})$.

Em capítulos posteriores, esta representação canônica nos permitirá criar exemplos de sistemas intervalares a partir de sistemas reais.

Proposição 5 *Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função total e não assintótica. Então $\forall \vec{X} \in \mathbb{IR}^m$ e $\vec{x} \in \vec{X}$ temos que $f(\vec{x}) \in CIR(f)(\vec{X})$.*

Prova:

Se $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função total e não assintótica e $\vec{x} \in \vec{X}$ então $\inf\{f(\vec{a}) : \vec{a} \in \vec{X}\} \leq f(\vec{x}) \leq \sup\{f(\vec{a}) : \vec{a} \in \vec{X}\}$, logo pela definição 14 temos que $f(\vec{x}) \in CIR(f)(\vec{X})$. ■

Com a proposição 5, vemos que $CIR(f)$ é uma representação intervalar de f .

⁵Uma função real f é dita assintótica se para um dado intervalo X o conjunto $\{f(a) : \underline{X} < a < \bar{X}\}$ não tem o menor elemento ou o maior elemento.

Corolário 1 (Inclusão do CIR e a Aritmética intervalar) *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma das operações aritméticas em \mathbb{R} , $\vec{X} \in \mathbb{IR}^2$ e $\vec{x} \in \vec{X}$. Então $f(\vec{x}) \in CIR(f)(\vec{X})$.*

Prova:

Direto da proposição 5 ■

Proposição 6 *As operações da aritmética intervalar são as respectivas representações intervalares canônicas, CIR, das operações aritméticas reais.*

Prova:

Do corolário 1 concluímos que se $\vec{X} \in \mathbb{IR}^2$ e $\vec{x} \in \vec{X}$. Então $f(\vec{x}) \in CIR(f)(\vec{X})$, onde f é uma das operações da aritmética dos reais. Da definição 14 temos

$$CIR(f)(\vec{X}) = \left[\inf\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in \vec{X}\}; \sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in \vec{X}\} \right]. \quad (2.3)$$

Tomando, na equação (2.3), $\vec{x} = [a, b]$, $\vec{X} = [A, B]$ e $f(\vec{x}) = a * b$ podemos reescrever a equação (2.3) como segue

$$\begin{aligned} CIR(f)(\vec{X}) &= [\inf\{a * b : a \in A \text{ e } b \in B\}; \sup\{a * b : a \in A \text{ e } b \in B\}] \\ &= [\min\{a * b : a \in A \text{ e } b \in B\}; \max\{a * b : a \in A \text{ e } b \in B\}] \\ &= A * B. \end{aligned} \quad (2.4)$$

■

Sejam $F : \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{IR}$, $G : \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{IR}$ e $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que uma representação intervalar F de f é melhor do que uma representação intervalar G de f se

$$\forall \vec{X} \in \mathbb{IR}^m \quad F(\vec{X}) \subseteq G(\vec{X}). \quad (2.5)$$

Corolário 2 (Monotonicidade das operações intervalares) *Sejam $X, Y, Z, W \in \mathbb{IR}$ intervalos tais que $X \subseteq Z$ e $Y \subseteq W$. Então, vale que $X * Y \subseteq Z * W$, para qualquer operação $*$ $\in \{+, -, \times, \div\}$, onde $0 \notin Y$ e $0 \notin W$, no caso da divisão.*

Prova:

Direta do corolário 1 e da proposição 6. ■

Proposição 7 *Se $F : \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{IR}$ é uma representação intervalar de $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Então*

$$CIR(f)(\vec{X}) \subseteq F(\vec{X}). \quad (2.6)$$

Prova:

Da definição 13 temos que para cada $\vec{X} \in \mathbb{IR}^m$ e $\vec{x} \in \vec{X}$, $f(\vec{x}) \in F(\vec{X})$. Assim $\inf\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in \vec{X}\} \in F(\vec{X})$ e $\sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in \vec{X}\} \in F(\vec{X})$. Logo $[\inf\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in \vec{X}\}; \sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in \vec{X}\}] \subseteq F(\vec{X})$, de onde conclui-se que $CIR(f)(\vec{X}) \subseteq F(\vec{X})$. ■

Ou seja, $CIR(f)$ é a melhor representação intervalar de f . Vendo um sistema como uma função genérica, podemos dizer que todo sistema é uma função que transforma entrada em saída. O nosso interesse em sistemas intervalares nos remete ao manuseio de equações intervalares. Por isso analisaremos soluções de sistemas de equações intervalares e também suas soluções próprias.

2.3 Soluções próprias de sistemas de equações intervalares

As soluções próprias definidas em [Vaccaro 2001], como na definição 15, é uma maneira diferente de apresentação do CIR de uma função apresentado em [Santiago et al. 2006].

Definição 15 *Seja F uma representação intervalar de f . A solução intervalar da equação $F(X) = Y$, onde $X, Y \in \mathbb{IR}$, é dada pelo menor intervalo $X^* \in \mathbb{IR}$ que contenha todas as soluções reais de $f(x) = y$, onde $x \in X$ e $y \in Y$. Isto é,*

$$X^* \in \mathbb{IR} \text{ é solução intervalar de } F(X) = Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X^*,$$

$$f(x) = y \wedge \forall x \in X^*, \exists y \in Y, f(x) = y.$$

Por problemas de compatibilidade de notação, a definição 15 é uma adaptação de Vaccaro [Vaccaro 2001]. Na definição original não fala de representação intervalar.

Uma restrição importante de solução intervalar é a solução própria intervalar que é definida a seguir.

Definição 16 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$. A solução própria intervalar da equação $F(X) = Y$ com respeito a f é o intervalo $X^P = [\inf\{f(x) : x \in X^P\}; \sup\{f(x) : x \in X^P\}]$.*

A condição de existência de solução própria intervalar é expressa pela forma abaixo:

$$F(X) = Y, \text{ então } Diam(F(X^P)) = Diam(Y),$$

onde $Diam$ representa o diâmetro do intervalo, ou seja, a extensão de imprecisão. Esta condição garante que em um sistema intervalar a precisão associada aos dados de entrada seja igual à esperada nos dados de saída.

A determinação de soluções próprias é interessante em casos de problemas de estabilidade e de ajustes finos. Maiores detalhes sobre o assunto podem ser encontrado em [Vaccaro 2001].

2.4 A topologia de \mathbb{R}

Nesta seção serão apresentadas algumas propriedades topológicas do espaço \mathbb{R} enquanto espaço métrico. As propriedades aqui apresentadas estão baseadas na noção de proximidade e limite, como é o caso da distância. Pelo fato de estar apenas apresentando algumas propriedades topológicas de \mathbb{R} nesta seção serão omitidas algumas provas. O objetivo, aqui, é comparar propriedades, numa próxima seção. As provas poderão ser encontradas em [Moore 1966], [Moore 1979], [Oliveira et al. 1997] e [Trindade 2002].

Definições básicas

A seguir apresentaremos um conjunto de definições básicas sobre a topologia de \mathbb{R} . Usaremos a norma para introduzir o conceito de distância, porém não entraremos em detalhes sobre vetores e espaços vetoriais uma análise detalhada sobre o assunto pode ser encontrada em [Lang 1971] e [Lima 1999].

Definição 17 (Norma) *Uma norma consiste em uma função, $\| \cdot \|$, que associa a cada vetor, x , de um espaço vetorial, X , um número real. Satisfazendo as seguintes propriedades:*

- $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

Definição 18 (Norma euclidiana) *Uma norma $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita norma euclidiana quando*

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

2.4.1 Distância

Toda norma induz uma métrica natural d sobre o espaço vetorial no qual é definida. Assim no caso da norma euclidiana temos a seguinte distância.

A função $d_e : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $d_e(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ é chamada **distância euclidiana** de \vec{x} a \vec{y} em \mathbb{R}^m . Ela tem as seguintes propriedades :

- (D₁) $d_e(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ e $d_e(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$ (definida positiva);
- (D₂) $d_e(\vec{x}, \vec{y}) = d_e(\vec{y}, \vec{x})$ (simétrica);
- (D₃) $d_e(\vec{x}, \vec{y}) \leq d_e(\vec{x}, \vec{z}) + d_e(\vec{z}, \vec{y})$ (desigualdade triangular).

Definição 19 *Seja A um conjunto qualquer, uma função $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma **métrica** sobre A se ela satisfizer as seguintes propriedades:*

1. reflexividade: $d(x, x) = 0$;
2. desigualdade triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;
3. simetria: $d(x, y) = d(y, x)$;
4. identidade dos indiscerníveis: se $d(x, y) = 0$ então $x = y$.

Definição 20 Uma distância $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma **quase-métrica** se satisfizer as seguintes propriedades:

1. reflexividade: $d(x, x) = 0$;
2. desigualdade triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;
3. identidade simétrica dos indiscerníveis: se $d(x, y) = d(y, x) = 0$, então $x = y$.

Definição 21 (Distância de Moore) A **distância de Moore**, $D_M : \mathbb{I}\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, entre X e $Y \in \mathbb{I}\mathbb{R}$, é dada por

$$D_M(X, Y) = \max \{ |\underline{X} - \underline{Y}|, |\bar{X} - \bar{Y}| \}.$$

Teorema 1 A distância de Moore, assim definida, é uma métrica em $\mathbb{I}\mathbb{R}$.

Prova:

Veja [Moore 1962]. ■

Geometricamente, a distância entre dois intervalos é o comprimento do maior segmento que separa os respectivos extremos do intervalo.

Definição 22 (Módulo de um intervalo - Moore) Seja $X \in \mathbb{I}\mathbb{R}$ um intervalo. Definimos o **módulo ou norma** do intervalo X como sendo o número real não negativo, $|X|_M = D_M(X, \mathbf{0})$, que corresponde à distância de X a zero.

$$\text{Ou seja, } |X|_M = D_M(X, \mathbf{0}) = \max\{|\underline{X}|, |\bar{X}|\} \geq 0.$$

Teorema 2 (Propriedades do módulo - Moore)

1. $|X|_M = 0 \Leftrightarrow X = \mathbf{0}$;
2. $|X + Y|_M \leq |X|_M + |Y|_M$;
3. $|X \cdot Y|_M = |X|_M \cdot |Y|_M$.

Prova:

Decorre imediatamente da definição de módulo. ■

A Figura 2.2 dá interpretação geométrica para o módulo de um intervalo-Moore.

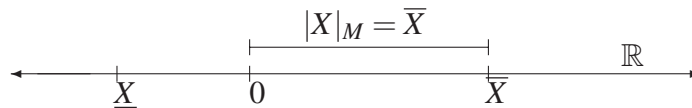


Figura 2.2: Interpretação geométrica do módulo de um intervalo-Moore, para o caso em que $0 \in X$.

Geometricamente, o módulo de um intervalo é o comprimento do maior segmento que une cada um dos extremos do intervalo à origem.

Teorema 3 *Sejam $X, Y, Z, W \in \mathbb{IR}$ intervalos. Então, valem*

1. $D_M(X+Y, X+Z) = D_M(Y, Z)$;
2. $D_M(X.Y, X.Z) \leq |X|_M \cdot D_M(Y, Z)$;
3. $D_M(X+Y, Z+W) \leq D_M(X, Z) + D_M(Y, W)$;
4. $D_M(X.Y, Z.W) \leq |Y|_M \cdot D_M(X, Z) + |Z|_M \cdot D_M(Y, W)$;
5. $D_M(X, Y) \leq |X|_M \cdot |Y|_M \cdot D_M(\frac{1}{X}, \frac{1}{Y})$, se $0 \notin X, 0 \notin Y$;
6. $X \subseteq Y \Rightarrow |X|_M \leq |Y|_M$;

Prova:

Veja [Oliveira et al. 1997]. ■

Geometricamente, o diâmetro de um intervalo é o comprimento do segmento que une os extremos do intervalo.

Como o objetivo deste trabalho é dar suporte matemático para processamento digital de sinais intervalares, assim como, o processamento de sinais reais discretos, os sinais intervalares também poderão ser escritos como uma sequência de intervalos. Esse fato traz uma importância para as propriedades das sequências intervalares, as quais trataremos na seção seguinte.

2.4.2 Sequências intervalares

Esta seção se justifica por que sinais de tempo discreto são representados, matematicamente, como uma sequência de números [Oppenheim & Schaffer 1989]. Logo, para construir uma fundamentação matemática para processamento digital de sinais intervalares precisa-se de uma versão intervalar de sequência de números reais.

A seguir, daremos algumas definições básicas sobre sequências intervalares. Maiores detalhes podem ser encontradas em [Oliveira et al. 1997], [Moore 1979] e [Trindade 2002].

Usaremos as seguintes notações: $X(t)$ para representar sequências contínuas e $X[n]$ para representar sequências discretas.

Definição 23 (Sequência intervalar) *Uma **sequência intervalar** é uma função $X : S \rightarrow \mathbb{IR}$, onde $S \subseteq \mathbb{Z}$, que associa a cada número inteiro n a um intervalo $X[n]$ em \mathbb{IR} . O intervalo $X[n]$ será chamado de termo de ordem n ou n -ésimo termo da sequência. Para $S = \mathbb{N}$ temos $\{X[n]\} = \{X[1], X[2], X[3], \dots, X[n], \dots\}$ que é denotada por $\{X[n]\}$ ou simplesmente $X[n]$.*

Exemplo 1 (Sequências intervalares) *São sequência intervalares.*

1. $X : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{IR}$ tal que $X[n] = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \frac{5n+1}{n} \right]$;
2. $Y : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{IR}$ tal que $Y[n] = (-1)^n[-2; 3]$;
3. $Z : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{IR}$ tal que $Z[n] = [n; n+1]$;

Definição 24 (Sequência intervalar contínua) Uma *sequência intervalar contínua* é uma função $X : S \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$, onde $S \subseteq \mathbb{R}$, que associa a cada número real t a um intervalo $X(t)$ em $\mathbb{I}\mathbb{R}$, denotada por $\{X(t)\}$ ou simplesmente $X(t)$.

Esta definição é uma apropriação não usual da palavra sequência para representar funções de variáveis contínuas. Essa apropriação se fez necessária neste trabalho para diferenciar a representação de um sinal discreto da representação de um sinal contínuo em seções posteriores.

Toda sequência intervalar $X[n]$ pode ser decomposta em duas sequências reais formadas pelas projeções $\pi_1(X[n]) = \underline{X[n]}$ e por $\pi_2(X[n]) = \overline{X[n]}$.

Definição 25 (Sequência intervalar limitada) Seja $X[n]$ uma sequência intervalar. Dizemos que $X[n]$ é uma *sequência limitada* se existir um real, $r > 0$, tal que $|X[n]|_M \leq r$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Definição 26 (Sequência intervalar monótona) Seja $X[n]$ uma sequência intervalar. Dizemos que $X[n]$ é uma *sequência intervalar monótona* com respeito à ordem \leq quando ambas as suas sequências de extremos são monótonas e coincide a monotonicidade, ou seja, ou ambas são não-crescentes ou ambas são não-decrescentes.

Exemplo 2

1. $X[n] = [n; n+1]$, monótona e ilimitada;
2. $X[n] = [\frac{n+1}{n+3}; \frac{n+2}{n+3}]$, $n \neq -3$ monótona e limitada;
3. $X[n] = [-n; n]$, ambas são monótonas, porém uma decresce e outra cresce e é uma sequência não monotônica e ilimitada;
4. $X[n] = [\frac{n+1}{n}; \frac{3n+7}{n+3}]$, $n \neq 0$ e $n \neq -3$ monótona e limitada;
5. $X[n] = [-n; 1-n]$, monótona e ilimitada;
6. $X[n] = [\frac{1-n}{n}; \frac{n+1}{n}]$, $n \neq 0$, monótona e limitada
7. $X[n] = [(\frac{n+1}{n})^n; \frac{5n+1}{n}]$, $n \neq 0$, monótona e limitada.

Definição 27 (Sequência intervalar convergente) Seja $X[n]$ uma sequência intervalar. Dizemos que $X[n]$ é *convergente* se existir $L \in \mathbb{I}\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{X[n]} = \underline{L}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X[n]} = \overline{L}$, onde $\lim_{n \rightarrow \infty}$ representa a noção usual de limite em números reais.

Neste caso, dizemos que $X[n]$ converge para L e denotamo-lo por $X[n] \rightarrow L$ com $n \rightarrow \infty$

Proposição 8 Uma sequência intervalar $X[n]$ é convergente se só se suas projeções $\underline{X[n]}$ e $\overline{X[n]}$ convergirem

Prova:

\Rightarrow) Se $X[n]$ converge. Então, da definição 27 temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{X[n]} = \underline{L}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X[n]} = \overline{L}$. Logo $\underline{X[n]}$ e $\overline{X[n]}$ são convergentes.

\Leftarrow) supondo que $\underline{X}[x]$ e $\overline{X}[n]$ são convergentes. Logo existe $\mathcal{L} \in \mathbb{IR}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{X}[n] = \underline{\mathcal{L}}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X}[n] = \overline{\mathcal{L}}$ e novamente pela definição 27 conclui-se que $X[n]$ é convergente. ■

Definição 28 (Sequência intervalar discreta) *Uma sequência intervalar discreta é uma aplicação $X : S \rightarrow \mathbb{IR}$, tal que $S \subseteq \mathbb{Z}$ representada por $\{X[n]\}$, onde o n -ésimo termo é denotado por $X[n]$ ⁶.*

Essa definição faz o uso apropriado da definição de sequência intervalar e será usada na representação de sinais discretos.

Para simplificação de notação, neste trabalho, a sequência $\{X[n]\}$ será referida simplesmente como $X[n]$.

Definição 29 (Sequência direita) *Uma sequência intervalar $X[n]$, com $n \in \mathbb{Z}$, é dita direita quando se leva em conta apenas os termos com índices $n \geq 0$.*

Definição 30 (Sequência esquerda) *Uma sequência intervalar $X[n]$ com $n \in \mathbb{Z}$, é dita esquerda, quando se leva em conta apenas os termos com índices $n < 0$.*

Definição 31 (Sequência bilateral) *Uma sequência intervalar $X[n]$, com $n \in \mathbb{Z}$, é dita bilateral quando se leva em conta tanto os termos com índices $n < 0$ quanto os termos com índices $n \geq 0$.*

2.5 Uma métrica essencialmente intervalar

Boa parte da matemática é fundamentada na noção de distância. Essa noção é fundamental na construção dos princípios topológicos do cálculo tais como o de limite e continuidade. Como a matemática é ferramenta de muitas áreas do conhecimento, a importância de distância (métrica) impacta áreas como processamento de sinais, sistemas de controle robustos e redes neurais, que lidam direta ou indiretamente com esta noção. Muitas vezes ela representa características de sistemas(objetos) com incertezas, as quais podem ser geradas pelos seguintes fatores: imprecisão de sensores, imprecisão na representação matemática do sistema, limitação em implementação de uma aritmética de máquina. Por isso essas áreas precisam de um modelo de distância que capte as incertezas inerentes a seus processos. Algoritmos de classificação de padrões tais como o K-means, o SOM, Máquinas de vetor de suporte (SVM), algoritmos de recuperação de imagens, CBIR, algoritmos genéticos, e outros, usam a noção de distância na separação de dados imprecisos (ruidosos). Muitas vezes pesquisadores dessas áreas deparam-se com problemas que têm, essencialmente, uma distância que contém incertezas. Por outro lado, nenhuma métrica real capta este modelo de problema. Isto motiva a proposta de uma extensão da métrica real para uma “métrica” intervalar. Nesta versão a distância entre

⁶[] será usado para denotar funções de variáveis discretas e () para denotar funções de variáveis contínuas

dois intervalos também é um intervalo, sem perder as características da métrica euclidiana, quando se trata de números reais(ou intervalos degenerados). A necessidade desta métrica se impõe porque aquela proposta por Moore [Moore 1966] não contempla a principal característica de sua aritmética, a propriedade da inclusão monotônica. Além disso, ela não é estritamente intervalar, pois a distância entre dois intervalos de incertezas é um número real. Nossa proposta de uma métrica visa aumentar o poder de representação da matemática intervalar. Com esta métrica é possível formular novos conceitos de sequências intervalares, limites intervalares, conseqüentemente reformulando as noções intervalares de integral, derivada, variáveis complexas, análise de convergência e estabilidade de sistemas LTI.

Achamos que nossa proposta de uma distância que preserve incertezas abre várias possibilidades de investigações e podemos dizer que ela cria um novo paradigma de métrica, que denominaremos métrica de corpos extensos.

Quem primeiro questionou a necessidade de uma métrica que fosse compatível com a aritmética intervalar e que preservasse incertezas foi Acióly, em seu trabalho de doutorado [Acióly 1991].

Um dos pioneiros na abordagem de uma distância fuzzy que preserve incertezas foi [Voxman 1998] que aborda princípios de distância sobre o ponto de vista fuzzy e trata o princípio de convergência sobre a ótica das sequências de Cauchy. Este trabalho é pioneiro em propor uma distância fuzzy entre números fuzzy. De todos os trabalhos aqui citados o que mais se aproxima de nossa idéia é o trabalho [Chakraborty & Chakraborty 2006] que propõe uma distância fuzzy para números fuzzy, uma distância que preserva incerteza, a mais similar à distância que propomos. Também, ela levanta a questão natural: "se não conhecemos exatamente os números como a distância entre eles pode ter um valor exato?" e critica o uso do supremo, do ínfimo ou de qualquer outro candidato como representante absoluto da distância entre dois números fuzzy. Considera também a distância entre dois números fuzzy como um número fuzzy, afirmando que a distância entre dois números com incertezas tem que ser um número com incerteza. Ainda para conjuntos fuzzy, [aw Grzegorzewski 2004] usa uma métrica de Hausdorff na construção de uma métrica fuzzy, mas que não preserva incerteza. Os trabalho que mais se aproximam do nosso tema estão na área da lógica fuzzy. Pela falta de uma métrica intervalar que preserve incertezas, esse trabalho pretende suprir essa necessidade.

A seguir apresentamos a definição de uma distância que preserva incertezas e construiremos versões de alguns resultados segundo esta distância. Neste trabalho ela tem o papel de dar suporte a uma definição de módulo que preserva incertezas, para ser aplicada na análise de convergência de sistemas LTI, usando o formalismo da transformada- Z , a qual será apresentado no capítulo 5.

Definição 32 (Métrica intervalar) *Seja M um conjunto qualquer, uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$, diz-se uma **métrica intervalar** se ela satisfizer as seguintes propriedades:*

1. *reflexividade:* $0 \in d(X, X)$;
2. *desigualdade triangular* $|d(X, Y)|_M \leq |d(X, Z)|_M + |d(Z, Y)|_M$;
3. *simetria:* $d(X, Y) = d(Y, X)$ e,
4. *identidade dos indiscerníveis:* se $0 \in d(X, Y) = d(X, X) = d(Y, Y)$ então $X = Y$.

Essa definição é uma contribuição deste trabalho.

Definição 33 [Uma distância essencialmente intervalar] Seja X e $Y \in \mathbb{IR}$. A **distância essencialmente intervalar** entre X e Y , denotada por $m_{ei}(X, Y)$, é definida por

$$m_{ei}(X, Y) = [\inf\{d_e(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}; \sup\{d_e(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}].$$

Proposição 9 Sejam X e Y dois intervalos, onde $X \leq Y$ e $X \cap Y = \emptyset$. Então

$$m_{ei}(X, Y) = [\underline{Y} - \bar{X}; \bar{Y} - \underline{X}].$$

Prova:

Se $x \in X$ e $y \in Y$, então $x \leq \bar{X}$ e $y \geq \underline{Y}$. Como $X \leq Y$ e $X \cap Y = \emptyset$, então $|x - y| = y - x$. Logo, $y - x \geq \underline{Y} - \bar{X}$ e, portanto, $\underline{Y} - \bar{X} = \min\{|x - y| : x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Analogamente, é possível provar que $\bar{Y} - \underline{X} = \max\{|x - y| : x \in X \text{ e } y \in Y\}$. ■

Proposição 10 Sejam X e Y dois intervalos, onde $X \leq Y$ e $X \cap Y \neq \emptyset$. Então,

$$m_{ei}(X, Y) = [0; \bar{Y} - \underline{X}].$$

Prova:

Como $X \cap Y \neq \emptyset$, $\exists z \in X \cap Y$. Logo, $0 \in \{d_e(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Portanto, $\inf\{d_e(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\} = 0$. Se $X \leq Y$, \underline{X} for o menor elemento de X e \bar{Y} o maior elemento de Y , então $\bar{Y} - \underline{X} = |\bar{Y} - \underline{X}| = \max\{d_e(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Logo, $m_{ei}(X, Y) = [0; \bar{Y} - \underline{X}]$. ■

Proposição 11 Dados dois intervalos X e Y , onde $X \subseteq Y$, então

$$m_{ei}(X, Y) = [0; \max\{\bar{X} - \underline{Y}, \bar{Y} - \underline{X}\}];$$

Prova:

Como $X \subseteq Y$, $X \cap Y \neq \emptyset$ e $\min\{d_e(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\} = 0$. Se $X \subseteq Y$, $\underline{Y} \leq \underline{X} \leq \bar{X} \leq \bar{Y}$. Sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Se $y \leq \bar{X}$, então $|x - y| \leq \bar{X} - \underline{Y}$. Se $y > \bar{X}$, então $|x - y| = y - x \leq \bar{Y} - \underline{X}$. Logo, $|x - y| \leq \max\{\bar{X} - \underline{Y}, \bar{Y} - \underline{X}\}$. Portanto, $m_{ei}(X, Y) = [0; \max\{\bar{X} - \underline{Y}, \bar{Y} - \underline{X}\}]$. ■

Corolário 3 Se $X \cap Y \neq \emptyset$, então $m_{ei}(X, Y) = [0; \max\{\bar{X} - \underline{Y}, \bar{Y} - \underline{X}\}]$.

Prova:

Direto das proposições 10 e 11. ■

Proposição 12 A distância m_{ei} coincide com a distância euclidiana d_e , quando aplicada a intervalos degenerados. De modo que, se $X = [x; x]$ e $Y = [y; y]$, então

$$m_{ei}(X, Y) = [d_e(x, y); d_e(x, y)].$$

Prova:

Supondo $X = [x; x]$ e $Y = [y; y]$ temos

$$\begin{aligned} m_{ei}(X, Y) &= [\min \{d_e(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}; \max \{d_e(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}] \\ &= [\min \{d_e(x, y) : x \in \{x\} \text{ e } y \in \{y\}\}; \max \{d_e(x, y) : x \in \{x\} \text{ e } y \in \{y\}\}] \\ &= [\min \{d_e(x, y)\}; \max \{d_e(x, y)\}] \\ &= [d_e(x, y); d_e(x, y)]. \end{aligned}$$

■

Corolário 4 A distância m_{ei} , restrita aos intervalos degenerados, é uma métrica intervalar.

Prova:

Direto da proposição 12. ■

Proposição 13 A distância m_{ei} é o CIR da distância euclidiana.

Prova:

Direto das definições 14 e 33. ■

Teorema 4 (O CIR de uma métrica no \mathbb{R}^n é uma métrica intervalar no $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$) Se A for um subconjunto do \mathbb{R}^n e d uma métrica sobre A , então $CIR(d)$ é uma métrica intervalar.

Prova:

$CIR(d)(X, Y)$ satisfaz as quatro propriedades da métrica intervalar.

- **Reflexividade:** $0 \in CIR(d)(X, X)$, pois $0 = d(x, x) \in \{d(x, y) : x \text{ e } y \in X\}$.
- **Desigualdade triangular:** $|CIR(d)(X, Y)|_M \leq |CIR(d)(X, Z)|_M + |CIR(d)(Z, Y)|_M$, pois $\sup\{d(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\} \leq \sup\{d(x, z) : x \in X \text{ e } z \in Z\} + \sup\{d(z, y) : z \in Z \text{ e } y \in Y\}$.
- **Simetria:** $CIR(d)(X, Y) = CIR(d)(Y, X)$, pois $\inf\{d(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\} = \inf\{d(y, x) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$ e $\sup\{d(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\} = \sup\{d(y, x) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$.
- **Identidade dos indiscerníveis:** Queremos provar que se $0 \in CIR(d)(X, Y) = CIR(d)(X, X) = CIR(d)(Y, Y)$, então $X = Y$. Para isso, supomos que $X \neq Y$. Se $X \cap Y = \emptyset$, então $0 \notin CIR(d)(X, Y)$, que contradiz a hipótese. Caso $X \cap Y \neq \emptyset$, temos quatro casos possíveis. Caso $X \subset Y$ ou $Y \subset X$ $CIR(d)(X, X) \neq CIR(d)(Y, Y)$, que também contradiz a hipótese. Os dois casos restante $X \leq Y$ ou $Y \leq X$, em ambos os casos, ou $CIR(d)(X, Y) \neq CIR(d)(X, X)$ ou $CIR(d)(X, Y) = CIR(d)(Y, Y)$, que também contradiz a hipótese. Logo, $CIR(d)$ satisfaz a propriedade dos indiscerníveis.

■

Acreditamos que na extensão de uma representação real para uma representação intervalar há uma mudança de paradigma, onde muitos teoremas que são válidos para os números reais necessitam de uma adaptação para uma versão intervalar.

O mesmo ocorre com as propriedades da definição 19, pois fazendo uma análise da propriedade da reflexividade, podemos observar que ela se adapta bem aos números reais por serem adimensionais, quando vistos como pontos sobre uma reta e imaginários, pela impossibilidade da existência física. Por isso a distância de um número real para ele mesmo tem que ser zero. Em uma entidade adimensional a distância dela para si mesma é zero, mas em uma entidade com um corpo extenso é razoável que a menor distância de si para mesma seja zero e a maior seja a extensão do seu corpo. Observamos aí um intervalo de zero à extensão do seu corpo. Assim, observamos que a distância de um intervalo a si próprio pode ser zero, quando se mede de um ponto do intervalo a si mesmo, ou o diâmetro do intervalo quando se mede a distância dos seus extremos.

Podemos observar mais uma incoerência do uso de uma propriedade de um conjunto com elementos adimensionais quando estendido a um conjunto com elementos extensos, como na distância de Moore, onde a distância entre dois intervalos é um número real.

Em um campo semântico, onde os intervalos são usados para representar incertezas de determinados sistemas, é natural esperarmos que dados dois intervalos X e Y , a distância entre eles seja um intervalo de incerteza, que varia entre $\min\{d_e(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$ e $\max\{d_e(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$.

Proposição 14 *A distância m_{ei} é uma métrica intervalar.*

Prova:

Direto da proposição 13 e do teorema 4. ■

Proposição 15 *Dados X e $Y \in \mathbb{IR}$, $m_{ei}(X, Y) \leq [0; \text{Diam}(Y)]$ se e só se $X \subseteq Y$.*

Prova:

\Leftarrow) Suponha que $X \subseteq Y$. Então, as condições da definição 3 e da proposição 11 são satisfeitas, de modo que

$$m_{ei}(X, Y) = [0; \max\{\bar{X} - \underline{Y}, \bar{Y} - \underline{X}\}]. \quad (2.7)$$

Da hipótese que $X \subseteq Y$ e da definição 3, temos que

$$\max\{\bar{X} - \underline{Y}, \bar{Y} - \underline{X}\} \leq \bar{Y} - \underline{Y} = \text{Diam}(Y). \quad (2.8)$$

Da equação (2.8) e da definição 4, concluímos

$$m_{ei}(X, Y) \leq [0; \text{Diam}(Y)]. \quad (2.9)$$

\Rightarrow) Agora, supondo que $m_{ei}(X, Y) \leq [0; \text{Diam}(Y)]$ dentro dos três casos possíveis e seus simétricos. Temos que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz, pelo menos uma das proposições 9, 10 ou

11. Supondo que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaça as condições da proposição 9

$$m_{ei}(X, Y) = [\underline{Y} - \overline{X}; \overline{Y} - \underline{X}]. \quad (2.10)$$

Da hipótese que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz as condições da proposição 9 e, da equação (2.10), temos

$$\begin{aligned} \underline{Y} - \overline{X} &\geq 0 \text{ e} \\ \overline{Y} - \underline{X} &\geq \overline{Y} - \underline{Y}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Da equação (2.11) e da definição 4, concluímos que

$$[0; \text{Diam}(Y)] \leq m_{ei}(X, Y). \quad (2.12)$$

Da equação (2.12) concluímos que, se $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz as condições da proposição 9, então não satisfará as condições da proposição 15.

Supondo que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz as condições da proposição 10

$$m_{ei}(X, Y) = [0; \overline{Y} - \underline{X}] \quad (2.13)$$

Da hipótese que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaça as condições da proposição 10 e da equação (2.13) temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq 0 \text{ e} \\ (\overline{Y} - \underline{X}) &\geq (\overline{Y} - \underline{Y}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Da equação (2.14) e da definição 4, concluímos que

$$m_{ei}(X, Y) \leq [0; \text{Diam}(Y)] \text{ somente quando } \underline{X} = \underline{Y}. \quad (2.15)$$

Da equação (2.15) concluímos que, se $m_{ei}(X, Y)$ satisfizer as condições da proposição 10, satisfará as condições da proposição 15, apenas quando a igualdade for satisfeita $\underline{X} = \underline{Y}$. Logo, $X \subseteq Y$.

Supondo, agora, que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz as condições da proposição 11, então

$$m_{ei}(X, Y) = [0; \max\{\overline{X} - \underline{Y}, \overline{Y} - \underline{X}\}]. \quad (2.16)$$

Da hipótese que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz as condições da proposição 11, e da equação (2.16), temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq 0 \text{ e} \\ (\overline{Y} - \underline{Y}) &\leq \max\{(\overline{X} - \underline{Y}), (\overline{Y} - \underline{X})\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Da equação (2.17) e da definição 3 concluímos que

$$m_{ei}(X, Y) \leq [0; \text{Diam}(Y)] \text{ e} \\ X \subseteq Y. \quad (2.18)$$

Das equações (2.12), (2.15) e (2.18) concluímos que $m_{ei}(X, Y) \leq [0; \text{Diam}(Y)]$ e, por conseguinte, $X \subseteq Y$. ■

Proposição 16 *Dados X e $Y \in \mathbb{IR}$, tal que $X \neq Y$, temos $m_{ei}(X, Y) \leq [0; \text{Diam}(Y) + \text{Diam}(X)]$ se e só se $X \cap Y \neq \emptyset$.*

Prova:

O caso em que $X \subseteq Y$, já foi provado na proposição 15. Para os demais casos, analisaremos os três possíveis para $m_{ei}(X, Y)$, quais sejam aqueles das proposições 9, 10 e 11.

Supondo que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz as condições da proposição 9, temos

$$m_{ei}(X, Y) = [\underline{Y} - \bar{X}; \bar{Y} - \underline{X}]. \quad (2.19)$$

Da hipótese que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz as condições da proposição 9, e da equação (2.19), temos

$$\begin{aligned} [0; \bar{Y} - \underline{Y} + \bar{X} - \underline{X}] &\leq [\underline{Y} - \bar{X}; \bar{Y} - \underline{X}], \\ [0; \text{Diam}(Y) + \text{Diam}(X)] &\leq m_{ei}(X, Y). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Da equação (2.20) concluímos que, quando $m_{ei}(X, Y)$ satisfizer as condições da proposição 9, não satisfará as condições da proposição 16.

Supondo que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz as condições da proposição 10 temos

$$m_{ei}(X, Y) = [0; \bar{Y} - \underline{X}]. \quad (2.21)$$

Da hipótese que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz as condições da proposição 10, e da equação (2.21), temos

$$\begin{aligned} [0; \bar{Y} - \underline{X}] &\leq [0; \bar{Y} - \underline{Y} + \bar{X} - \underline{X}], \\ m_{ei}(X, Y) &\leq [0; \text{Diam}(Y) + \text{Diam}(X)]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Da equação (2.22), concluímos que, quando $m_{ei}(X, Y)$ satisfizer as condições da proposição 10, então também satisfará as condições da proposição 16.

Supondo que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz as condições da proposição 11, temos

$$m_{ei}(X, Y) = [0; \max\{(\underline{Y} - \bar{X}), (\bar{Y} - \underline{X})\}]. \quad (2.23)$$

Da hipótese que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz as condições da proposição 11, e da equação (2.23), temos

$$\begin{aligned} [0; \max\{(\underline{Y} - \bar{X}), (\bar{Y} - \underline{X})\}] &\leq [0; \bar{Y} - \underline{Y} + \bar{X} - \underline{X}], \\ m_{ei}(X, Y) &\leq [0; \text{Diam}(Y) + \text{Diam}(X)]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Da equação (2.24) concluímos que, quando $m_{ei}(X, Y)$ satisfizer as condições da proposição 11, então satisfará também as condições da proposição 16.

Das equações (2.20), (2.22) e (2.24) concluímos que $m_{ei}(X, Y) \leq [0; \text{Diam}(Y) + \text{Diam}(X)]$ se e só se $X \cap Y \neq \emptyset$. ■

Proposição 17 *Dados X e $Y \in \mathbb{IR}$, $[0; \text{Diam}(Y) + \text{Diam}(X)] \leq m_{ei}(X, Y)$ se e só se $X \cap Y = \emptyset$.*

Prova:

Das equações, (2.20), (2.22) e (2.24) concluímos que apenas no caso em que $m_{ei}(X, Y$

satisfaz as condições das proposições 9 e 17. Então $[0; \text{Diam}(Y) + \text{Diam}(X)] \leq m_{ei}(X, Y)$ se e só se $X \cap Y = \emptyset$. ■

Associando o grau de incerteza de um intervalo ao seu diâmetro, podemos observar que a métrica m_{ei} preserva as incertezas, pois a distância entre dois intervalos precisos (diâmetro nulo) é uma medida precisa, também de diâmetro nulo e a distância entre dois intervalos imprecisos (diâmetros $\neq 0$) é também uma medida imprecisa, como mostra a proposição seguinte.

Proposição 18 *Dados X e $Y \in \mathbb{IR}$, temos que $\text{Diam}(m_{ei}(X, Y)) \leq \text{Diam}(X) + \text{Diam}(Y)$.*

Prova:

Podemos dividir esta prova em duas partes: a primeira parte refere-se ao caso em que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz as condições da proposição 9; e a segunda parte, no caso em que satisfaz as condições da proposição 10 ou a proposição 11. Esta última sai direto das proposições 15 e 16.

Façamos aprova da primeira parte.

Supondo que $m_{ei}(X, Y)$ satisfaz as condições da proposição 9, temos

$$m_{ei}(X, Y) = [\underline{Y} - \bar{X}; \bar{Y} - \underline{X}]. \quad (2.25)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Diam}(m_{ei}(X, Y)) &= (\bar{Y} - \underline{X}) - (\underline{Y} - \bar{X}) \\ &= \bar{Y} - \underline{X} - \underline{Y} + \bar{X} \\ &= (\bar{X} - \underline{X}) + (\bar{Y} - \underline{Y}) \\ &= \text{Diam}(X) + \text{Diam}(Y). \end{aligned} \quad (2.26)$$

■

Com esta métrica a noção de módulo poderá ser redefinida como segue.

Definição 34 *Chamamos de **módulo intervalar** de X , denotado por $|X|_I$, a distância $m_{ei}(X, [0; 0])$.*

Com a definição da função módulo intervalar apresentada na definição 34, podemos ter uma versão do teorema 2, considerando as propriedades do módulo intervalar.

Teorema 5 (Propriedades do módulo intervalar)

1. $|X|_I = \mathbf{0} \Leftrightarrow X = \mathbf{0}$;
2. $|X + Y|_I \leq |X|_I + |Y|_I$;
3. $|X \cdot Y|_I = |X|_I \cdot |Y|_I$.

Prova:

Propriedade 1

Suponha que $X \neq \mathbf{0}$. Então $\sup\{d_e(x, 0) : x \in X\}$ é maior que zero. Logo, $|X|_I \neq \mathbf{0}$.

Propriedade 2 Para isso, precisamos provar que o limite inferior de $|X + Y|_I$ é sempre menor ou igual ao limite inferior de $|X|_I + |Y|_I$ e que o limite superior de $|X + Y|_I$ é sempre menor ou igual ao limite superior de $|X|_I + |Y|_I$. Então,

$$|X + Y|_I = |[\underline{X} + \underline{Y}; \overline{X} + \overline{Y}]|_I. \quad (2.27)$$

Se $0 \in X + Y$, então

$$|X + Y|_I = [0; \max\{|\underline{X} + \underline{Y}|, |\overline{X} + \overline{Y}|\}]. \quad (2.28)$$

Caso $0 \notin X + Y$. Então

$$|X + Y|_I = [\min\{|\underline{X} + \underline{Y}|, |\overline{X} + \overline{Y}|\}; \max\{|\underline{X} + \underline{Y}|, |\overline{X} + \overline{Y}|\}]. \quad (2.29)$$

e para $|X|_I + |Y|_I$ temos

$$|X|_I + |Y|_I = [|\underline{X}|_I + |\underline{Y}|_I; |\overline{X}|_I + |\overline{Y}|_I]. \quad (2.30)$$

Se $0 \in X$ ou $0 \in Y$, ou seja 0 não pertence aos dois simultaneamente. Supondo que $0 \in Y$, o outro caso é simétrico(análogo), temos

$$|X|_I + |Y|_I = [\min\{|\underline{X}|, \overline{X}\}; \max\{|\underline{X}| + |\underline{Y}|, |\underline{Y}| + |\overline{X}|, |\underline{X}| + |\overline{Y}|, |\overline{X}| + |\overline{Y}|\}]. \quad (2.31)$$

Se $0 \in X$ e $0 \in Y$. Então

$$|X|_I + |Y|_I = [0; \max\{|\underline{X}| + |\underline{Y}|, |\underline{Y}| + |\overline{X}|, |\underline{X}| + |\overline{Y}|, |\overline{X}| + |\overline{Y}|\}]. \quad (2.32)$$

Caso $0 \notin X$ e $0 \notin Y$. Então

$$\begin{aligned} |X|_I + |Y|_I = \\ [\min\{|\underline{X}| + |\underline{Y}|, |\underline{Y}| + |\overline{X}|, |\underline{X}| + |\overline{Y}|, |\overline{X}| + |\overline{Y}|\}; \\ \max\{|\underline{X}| + |\underline{Y}|, |\underline{Y}| + |\overline{X}|, |\underline{X}| + |\overline{Y}|, |\overline{X}| + |\overline{Y}|\}]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Para os caso em que $0 \in X + Y$ pela definição positiva do módulo está provado o limite inferior. Resta provar o limite superior. Para isso basta provar que

$$\max\{|\underline{X} + \underline{Y}|, |\overline{X} + \overline{Y}|\} \leq \max\{|\underline{X}| + |\underline{Y}|, |\underline{Y}| + |\overline{X}|, |\underline{X}| + |\overline{Y}|, |\overline{X}| + |\overline{Y}|\}. \quad (2.34)$$

Supondo que $\max\{|\underline{X} + \underline{Y}|, |\overline{X} + \overline{Y}|\} = |\underline{X} + \underline{Y}|$ temos que

$$|\underline{X} + \underline{Y}| \leq |\underline{X}| + |\underline{Y}| \text{ (resultado da análise real)} \quad (2.35)$$

Supondo que $\max\{|\underline{X} + \underline{Y}|, |\overline{X} + \overline{Y}|\} = |\overline{X} + \overline{Y}|$ temos que

$$|\bar{X} + \bar{Y}| \leq |\bar{X}| + |\bar{Y}| \text{ (resultado da análise real)} \quad (2.36)$$

Logo quando $0 \in X + Y$ temos $|X + Y|_I \leq |X|_I + |Y|_I$.

Agora veremos para o caso em que $0 \notin X + Y$. Em especial para o caso em que X ou Y contém zero e não os dois. Como feito anteriormente escolheremos Y para conter zeros e o outro caso é simétrico. Provaremos primeiro para o limite inferior de maneira que temos que provar que

$$\min\{|\underline{X} + \underline{Y}|, |\bar{X} + \bar{Y}|\} \leq \min\{|\underline{X}|, |\bar{X}|\}. \quad (2.37)$$

Supondo que $\min\{|\underline{X} + \underline{Y}|, |\bar{X} + \bar{Y}|\} = |\underline{X} + \underline{Y}|$ então $\mathbf{0} \leq X + Y$ e $\min\{|\underline{X}|, |\bar{X}|\} = |\underline{X}|$. Como $\underline{Y} \leq 0$ temos que $|\underline{X} + \underline{Y}| \leq |\underline{X}|$.

Agora supondo que $\min\{|\underline{X} + \underline{Y}|, |\bar{X} + \bar{Y}|\} = |\bar{X} + \bar{Y}|$. Então $X + Y \leq \mathbf{0}$ e $\min\{|\underline{X}|, |\bar{X}|\} = |\bar{X}|$. Como $0 \leq \bar{Y}$. Logo $|\bar{X} + \bar{Y}| \leq |\bar{X}|$. Que prova o caso para o limite inferior e para o limite superior vale a prova mostrada acima nas equações (2.34), (2.35) e (2.36).

Agora para o caso em que $0 \notin X$ e $0 \notin Y$. Só provaremos para o limite inferior, pois o limite superior recai no caso das equações (2.34), (2.35) e (2.36).

Supondo que $\mathbf{0} \leq X + Y$ então temos

$$\min\{|\underline{X} + \underline{Y}|, |\bar{X} + \bar{Y}|\} = |\underline{X} + \underline{Y}| \quad (2.38)$$

e

$$\min\{|\underline{X}| + |\underline{Y}|, |\underline{Y}| + |\bar{X}|, |\underline{X}| + |\bar{Y}|, |\bar{X}| + |\bar{Y}|\} = \begin{cases} |\underline{X}| + |\underline{Y}| & \text{se } \mathbf{0} \leq X \text{ e } Y. \\ |\underline{Y}| + |\bar{X}| & \text{se } X \leq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{0} \leq Y. \\ |\underline{X}| + |\bar{Y}| & \text{se } Y \leq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{0} \leq X. \end{cases} \quad (2.39)$$

Da suposição que $\mathbf{0} \leq X + Y$ e das condições da equação 2.39 temos

$$|\underline{X} + \underline{Y}| \leq \begin{cases} |\underline{X}| + |\underline{Y}| & \text{se } \mathbf{0} \leq X \text{ e } Y. \\ |\underline{Y}| + |\bar{X}| & \text{se } X \leq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{0} \leq Y. \\ |\underline{X}| + |\bar{Y}| & \text{se } Y \leq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{0} \leq X. \end{cases} \quad (2.40)$$

Assim concluímos a prova da propriedade 2 deixando o caso em que $X + Y \leq \mathbf{0}$ como análogo do caso em que $\mathbf{0} \leq X + Y$.

Propriedade 3

Se X ou Y contém zero temos

$$|X \cdot Y|_I = [0; \max\{|\underline{X} \cdot \underline{Y}|, |\underline{X} \cdot \bar{Y}|, |\bar{X} \cdot \underline{Y}|, |\bar{X} \cdot \bar{Y}|\}] \quad (2.41)$$

$$|X|_I \cdot |Y|_I = [0; \max\{|\underline{X}| \cdot |\underline{Y}|, |\underline{X}| \cdot |\bar{Y}|, |\bar{X}| \cdot |\underline{Y}|, |\bar{X}| \cdot |\bar{Y}|\}] \quad (2.42)$$

Como na análise real o produto do módulo de dois números é igual ao módulo do produto desse números. Temos que as equações (2.41) e (2.42) são equivalentes. Logo quando dados dois intervalos, onde pelo menos um contém zero, o módulo intervalar do produto é igual ao produto do módulo intervalar desses dois números. Agora, provaremos

a propriedade para o caso em que nenhum dos dois contém zero

Se X e Y não contém zero temos

$$|X \cdot Y|_I = [\min\{|\underline{X} \cdot \underline{Y}|, |\underline{X} \cdot \bar{Y}|, |\bar{X} \cdot \underline{Y}|, |\bar{X} \cdot \bar{Y}|\}; \max\{|\underline{X} \cdot \underline{Y}|, |\underline{X} \cdot \bar{Y}|, |\bar{X} \cdot \underline{Y}|, |\bar{X} \cdot \bar{Y}|\}] \quad (2.43)$$

e

$$|X|_I \cdot |Y|_I = [\min\{|\underline{X}| \cdot |\underline{Y}|, |\underline{X}| \cdot |\bar{Y}|, |\bar{X}| \cdot |\underline{Y}|, |\bar{X}| \cdot |\bar{Y}|\}; \max\{|\underline{X}| \cdot |\underline{Y}|, |\underline{X}| \cdot |\bar{Y}|, |\bar{X}| \cdot |\underline{Y}|, |\bar{X}| \cdot |\bar{Y}|\}] \quad (2.44)$$

a propriedade 3 fica provada com a equivalência entre as equações 2.43 e 2.44. ■

Teorema 6 *O módulo intervalar em relação a m_{ei} é o CIR do módulo real em relação a d_e .*

Prova:

Da proposição 13 temos que m_{ei} é o CIR de d_e . Assim temos

$$\begin{aligned} |X|_I = m_{ei}(X, \mathbf{0}) &= [\inf\{d_e(x, 0) : x \in X \text{ e } 0 \in \mathbf{0}\}; \sup\{d_e(x, 0) : x \in X \text{ e } 0 \in \mathbf{0}\}] \\ &= [\inf\{|x| : x \in X\}; \sup\{|x| : x \in X\}] \\ &= CIR(| \cdot |)(X) \end{aligned}$$

■

A Figura 2.3 dá interpretação geométrica para o módulo de um intervalo-Moore.

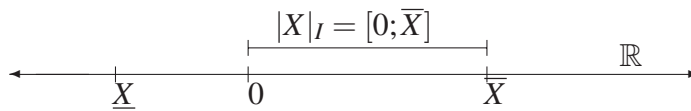


Figura 2.3: Interpretação geométrica do módulo intervalar de um intervalo

Podemos fazer uma comparação da figura 2.3 com a figura 2.2 e verificar que a figura 2.2 representa um número real positivo e que na figura 2.3 temos a representação de um intervalo de extremos reais não negativos.

Teorema 7 *Sejam $X, Y, Z \in \mathbb{IR}$ intervalos sendo Y e X disjuntos. Então, valem*

1. $\begin{cases} m_{ei}(X + Y, X + Z) = m_{ei}(Y, Z) + m_{ei}(X, X) \\ \text{ou} \\ m_{ei}(X + Y, X + Z) = m_{ei}(Y, Z) + [-Diam(X); Diam(X)] \end{cases}$
2. $X \subseteq Y \Rightarrow |X|_I \subseteq |Y|_I;$

Prova:

Item 1 Se $m_{ei}(X+Y, X+Z)$ satisfizer as condições da proposição 9, $X+Y \leq X+Z$ e $X \cap Y = \emptyset$, temos

$$\begin{aligned}
 m_{ei}(X+Y, X+Z) &= [(\underline{X} + \underline{Z}) - (\overline{X} + \overline{Y}); (\overline{X} + \overline{Z}) - (\underline{X} + \underline{Y})] \\
 &= [(\underline{Z} - \overline{Y}) + (\underline{X} - \overline{X}); (\overline{Z} - \underline{Y}) + (\overline{X} - \underline{X})] \\
 &= [(\underline{Z} - \overline{Y}) - \text{Diam}(X); (\overline{Z} - \underline{Y}) + \text{Diam}(X)] \quad (2.45) \\
 &= [(\underline{Z} - \overline{Y}); (\overline{Z} - \underline{Y})] + [-\text{Diam}(X); \text{Diam}(X)] \\
 &= m_{ei}(Y, Z) + [-\text{Diam}(X); \text{Diam}(X)]
 \end{aligned}$$

Se $m_{ei}(X+Y, X+Z)$ satisfizer as condições do corolário 3, $X+Y \cap X+Z \neq \emptyset$, temos:

$$\begin{aligned}
 m_{ei}(X+Y, X+Z) &= [0; \max\{(\overline{X} + \overline{Y}) - (\underline{X} + \underline{Z}), (\overline{X} + \overline{Z}) - (\underline{X} + \underline{Y})\}] \\
 &= [0; \max\{(\overline{Y} - \underline{Z}) + (\overline{X} - \underline{X}), (\overline{Z} - \underline{Y}) + (\overline{X} - \underline{X})\}] \\
 &= [0; \max\{(\overline{Y} - \underline{Z}) + \text{Diam}(X), (\overline{Z} - \underline{Y}) + \text{Diam}(X)\}] \quad (2.46) \\
 &= [0; \max\{(\overline{Y} - \underline{Z}), (\overline{Z} - \underline{Y})\}] + [0; \text{Diam}(X)] \\
 &= m_{ei}(Y, Z) + [0; \text{Diam}(X)] \\
 &= m_{ei}(Y, Z) + m_{ei}(X, X).
 \end{aligned}$$

Item 2 Direto das definições 33 e 34. ■

As noções de circunferência e de limite e continuidade também podem ser exploradas segundo esta métrica o que não faremos aqui por fugir ao escopo do trabalho.

2.6 Integrais intervalares

A fundamentação do cálculo diferencial e integral usada neste trabalho pode ser encontrada nos seguintes trabalhos [Moore et al. 1960], [Moore 1979], [Callejas-Bedregal & Bedregal 2005] e [Lyra 2003], principalmente a integral de Moore e suas extensões.

Definição 35 (Integral de Moore [Moore 1979]) *Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{IR}$ uma função semi-intervalar contínua⁷ e $X \in \mathbb{IR}$. A **Integral intervalar** de F nos limites de integração $[\underline{X}; \overline{X}]$ é definida por*

$$\int_{\underline{X}}^{\overline{X}} F(t) dt = \left[\int_{\underline{X}}^{\overline{X}} \underline{F}(t) dt; \int_{\underline{X}}^{\overline{X}} \overline{F}(t) dt \right].$$

Onde \underline{F} e \overline{F} são as projeções $\pi_1(F)$ e $\pi_2(F)$

⁷Contínuas em relação às distâncias euclidianas e de Moore

Definição 36 (Integral Lyra [Lyra 2003]) *Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}$ uma Função semi-intervalar contínua. A **integral indefinida** de F é dada por*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(t)dt; \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F}(t)dt \right].$$

Proposição 19 *A integração real preserva o mínimo e o máximo, supondo que cada função f_i seja contínua e esteja definida no intervalo $[a; b]$, temos*

$$\int_a^b \min \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\} dt = \min \left\{ \int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt \right\}$$

e

$$\int_a^b \max \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\} dt = \max \left\{ \int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt \right\}$$

Prova:

Das propriedades clássicas do cálculo e da análise real [Leithold 1994]. ■

A integral de Moore é bastante adequada ao propósito deste trabalho, uma vez que a usamos para modelar incertezas em processamento de sinais.

Teorema 8 *A integração intervalar preserva o ínfimo com relação à \leq , de modo que*

$$\int_a^b \inf \{F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)\} dt = \inf \left\{ \int_a^b F_1(t)dt, \int_a^b F_2(t)dt, \dots, \int_a^b F_n(t)dt \right\}.$$

Prova:

Pela proposição 19 temos que

$$\min \{F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)\} = \left[\inf \{ \underline{F}_1(t), \dots, \underline{F}_n(t) \}; \inf \{ \overline{F}_1(t), \dots, \overline{F}_n(t) \} \right]$$

Logo, pela proposição 19 e definição 35,

$$\int_{\underline{X}}^{\overline{X}} \inf \{F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)\} dt = \left[\int_{\underline{X}}^{\overline{X}} \inf \{ \underline{F}_1(t), \dots, \underline{F}_n(t) \} dt; \int_{\underline{X}}^{\overline{X}} \inf \{ \overline{F}_1(t), \dots, \overline{F}_n(t) \} dt \right].$$

portanto, pela proposição 19, $\int_a^b \min \{F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)\} dt$ é igual a

$$\left[\min \left\{ \int_a^b \underline{F}_1(t)dt, \dots, \int_a^b \underline{F}_n(t)dt \right\}; \min \left\{ \int_a^b \overline{F}_1(t)dt, \dots, \int_a^b \overline{F}_n(t)dt \right\} \right]. \quad \blacksquare$$

Teorema 9 *Seja C uma constante intervalar. Então*

$$\int_a^b CF(t)dt = C \int_a^b F(t)dt.$$

Prova:

Seja $G(t) = CF(t)$. Então

$$\begin{aligned}
 G(t) &= [\min\{\underline{CF}(t), \underline{C}\overline{F}(t), \overline{C}\underline{F}(t), \overline{C}\overline{F}(t)\}; \max\{\underline{CF}(t), \underline{C}\overline{F}(t), \overline{C}\underline{F}(t), \overline{C}\overline{F}(t)\}] \\
 \int_a^b G(t)dt &= \left[\int_a^b \underline{G}(t)dt; \int_a^b \overline{G}(t)dt \right] \\
 &= \left[\int_a^b \min\{\underline{CF}(t), \underline{C}\overline{F}(t), \overline{C}\underline{F}(t), \overline{C}\overline{F}(t)\}dt; \right. \\
 &\quad \left. \int_a^b \max\{\underline{CF}(t), \underline{C}\overline{F}(t), \overline{C}\underline{F}(t), \overline{C}\overline{F}(t)\}dt \right] \\
 &= \left[\min\left\{ \int_a^b \underline{CF}(t)dt, \int_a^b \underline{C}\overline{F}(t)dt, \int_a^b \overline{C}\underline{F}(t)dt, \right. \right. \\
 &\quad \left. \int_a^b \overline{C}\overline{F}(t)dt \right\}; \max\left\{ \int_a^b \underline{CF}(t)dt, \int_a^b \underline{C}\overline{F}(t)dt, \right. \\
 &\quad \left. \int_a^b \overline{C}\underline{F}(t)dt, \int_a^b \overline{C}\overline{F}(t)dt \right\} \right] \\
 &= \left[\min\left\{ \underline{C} \int_a^b \underline{F}(t)dt, \underline{C} \int_a^b \overline{F}(t)dt, \overline{C} \int_a^b \underline{F}(t)dt; \right. \right. \\
 &\quad \left. \overline{C} \int_a^b \overline{F}(t)dt \right\}; \max\left\{ \underline{C} \int_a^b \underline{F}(t)dt, \underline{C} \int_a^b \overline{F}(t)dt, \right. \\
 &\quad \left. \overline{C} \int_a^b \underline{F}(t)dt, \overline{C} \int_a^b \overline{F}(t)dt \right\} \right] \\
 &= C \left[\int_a^b \underline{F}(t)dt; \int_a^b \overline{F}(t)dt \right] \\
 &= C \int_a^b F(t)dt.
 \end{aligned}$$

Analisando o operador de integração como um somador infinito. Temos neste teorema um caso interessante. Pois, aparentemente temos a distributividade da multiplicação de uma constante sobre a adição contínua. Mas é sabido que em matemática intervalar a multiplicação não é distributiva sobre a adição.

Teorema 10 *Seja F_1 e F_2 funções semi-intervalares. Então*

$$\int_a^b (F_1(t) + F_2(t))dt = \int_a^b F_1(t)dt + \int_a^b F_2(t)dt.$$

Prova:

Seja $G(t) = F_1(t) + F_2(t)$ temos

$$\begin{aligned}
 \int_a^b (F_1(t) + F_2(t))dt &= \int_a^b G(t)dt \\
 &= \left[\int_a^b \underline{G}(t)dt; \int_a^b \overline{G}(t)dt \right] \\
 &= \left[\int_a^b (\underline{F}_1(t) + \underline{F}_2(t))dt; \int_a^b (\overline{F}_1(t) + \overline{F}_2(t))dt \right] \\
 &= \left[\left(\int_a^b \underline{F}_1(t)dt + \int_a^b \underline{F}_2(t)dt \right); \left(\int_a^b \overline{F}_1(t)dt + \int_a^b \overline{F}_2(t)dt \right) \right] \\
 &= \left[\int_a^b \underline{F}_1(t)dt; \int_a^b \overline{F}_1(t)dt \right] + \left[\int_a^b \underline{F}_2(t)dt; \int_a^b \overline{F}_2(t)dt \right] \\
 &= \int_a^b F_1(t)dt + \int_a^b F_2(t)dt.
 \end{aligned}$$

2.7 Integral de linha intervalar

Na construção real da inversa da transformada- Z real, pelo método formal usamos a integral de linha. Por isso nesta seção apresentaremos a integral de linha intervalar para dar suporte ao construção de uma versão intervalar das técnicas de processamento de sinais que utilizam a transformada- Z . Tivemos dificuldade de encontrar na literatura trabalho que abordassem esse tema. Porém encontramos alguns trabalhos que abordam integrais de linha intervalar. São os trabalhos de Callejas-Bedregal e Bedregal [Callejas-Bedregal & Bedregal 2004] e de Petkovic e Petkovic [Petković & Petković 1998]. Os primeiros serão usados como fundamentação deste trabalho. Este último tratou as integrais de linha com a aritmética circular o que difere da opção de abordagem deste trabalho.

Os conceitos apresentados a seguir, sobre integrais de linha, foram todos extraídos do trabalho de Callejas-Bedregal e Bedregal [Callejas-Bedregal & Bedregal 2004], a menos da notação. Só apresentaremos alguns conceitos básicos que faremos uso maiores detalhes pode ser encontrado no texto de Callejas-Bedregal e Bedregal [Callejas-Bedregal & Bedregal 2004]. Por fugirem ao escopo do trabalho, as noções de continuidade nos reais deixaremos a cargo dos textos de análise real e cálculo tais como [Lima 1977], [Leithold 1994] e as noções de continuidade e de diferenciabilidade intervalar deixaremos a cargo dos trabalhos [Moore 1979], [Santiago et al. 2005] e [Callejas-Bedregal & Bedregal 2005].

Definição 37 (Caminho) *Um caminho em \mathbb{IR} é uma aplicação $\lambda : I \rightarrow \mathbb{IR}$, cujo domínio é um intervalo $I = [c; d] \subseteq \mathbb{R}$. Caso $t \in I$ temos que $\lambda(t) = [\underline{\lambda}(t); \overline{\lambda}(t)]$.*

Definição 38 (Caminho contínuo) *Um caminho é contínuo (resp. diferenciável) no ponto $a \in I$ se cada uma das funções $\underline{\lambda}(t)$ e $\overline{\lambda}(t)$ forem contínuas (resp. diferenciáveis) em a .*

Definição 39 (Diferencial intervalar) *Se λ for diferenciável (i.e., diferenciável em todos os pontos de I) então o diferencial de λ é a função $\lambda' : \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa a cada $t \in I$ o vetor $\lambda'(t) = (\underline{\lambda}'(t); \overline{\lambda}'(t))$ de \mathbb{R}^2 .*

Dizemos que λ é de classe C^1 se for diferenciável e $\lambda' : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ for contínua.

Callejas-Bedregal e Bedregal definem o limite superior e o limite inferior da integral de linha através de somas de Riemann. Não entraremos nestes detalhes, pois interesse desse trabalho é fazer uso da integral de linha por eles definida, portanto só pegaremos os resultados.

Definição 40 (Integral intervalar curvilínea [Callejas-Bedregal & Bedregal 2004]) *Uma função limitada $F : I_{[A,B]} \rightarrow \mathbb{IR}$ é integrável com respeito ao caminho λ se*

$$\int_{\underline{\lambda}} F(X) dS = \overline{\int_{\lambda}} F(X) dS.$$

*Este valor é chamado **integral intervalar curvilínea** de F com respeito a λ e denotada por*

$$\oint_{\lambda} F(X) dS.$$

Teorema 11 (Teorema da caracterização [Callejas-Bedregal & Bedregal 2004]) *Seja $\lambda : [c, d] \rightarrow I_{[A, B]}$ um caminho de classe C^1 e $F : I_{[A, B]} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, F é integrável com respeito a λ e*

$$\oint_{\lambda} F(X) dS = \left[\int_c^d \underline{F}(\lambda(x)) |\lambda'(x)| dx; \int_c^d \overline{F}(\lambda(x)) |\lambda'(x)| dx \right].$$

Prova:

Omitida ■

O teorema 11 é o resultado que realmente será usado para justificar formalmente a inversa da transformada- Z no capítulo 5.

2.8 Conclusão

Este capítulo trabalhou uma fundamentação básica de matemática intervalar para suporte de algumas ferramentas de processamento de sinais digitais. Começou com um apanhado histórico sobre a matemática intervalar e depois com discussão filosófica sobre a natureza do intervalo que pode comportar-se ora como um número ora como um conjunto. Apresentou as operações da aritmética de Moore. Propôs uma métrica que preserva as incertezas, satisfaz a propriedade da inclusão monotônica. A métrica proposta neste capítulo abre um leque de possibilidades que dá margem a vários trabalhos de investigação científica tais como: Que topologia teremos com essa métrica? Qual a noção de continuidade segundo esta métrica? Como seria o algoritmo K-means com uma métrica essencialmente intervalar?

Embora só se tenha focado as propriedades da métrica essencialmente intervalar de interesse imediato na fundamentação matemática de processamento digital de sinais intervalares. Outros conceitos como circunferência intervalar, módulo (valor absoluto) intervalar, máquinas de vetor de suporte intervalar tornarão possíveis. No caso da SVM intervalar foi um trabalho desenvolvido na base de sistemas inteligentes da UFRN por Takahashi et. al. [Takahashi et al. 2008].

Para atender o propósito do trabalho foi apresentado o conceito de sequência intervalar com definições voltadas para processamento de sinais. E finalmente apresentamos as integrais intervalares, que possibilitaram uma versão da convolução contínua intervalar e as integrais de linha intervalar de Callejas-Bedregal e Bedregal [Callejas-Bedregal & Bedregal 2005] que possibilitaram a construção do método formal de prova da existência da transformada- Z inversa. Com estes conceitos este trabalho não só contribui para a matemática intervalar e processamento de sinais como para todas as áreas do conhecimento que lidam com incertezas e as modelam por intervalos. O valor absoluto apresentado neste trabalho também contribui para quem trabalha na conversão de softwares que lidam com números reais para uma versão intervalar. Onde o valor absoluto gera problema quando mapeia uma grandeza intervalar em uma grandeza real.

Capítulo 3

Números complexos intervalares

Os números complexos são uma extensão dos números reais. Eles são usados na análise de sinais, para manipular e representar duas grandezas numa única variável. Em alguns modelos que não possuem soluções reais, os números complexos encurtam algumas operações em processamento de sinais. Podemos citar algumas técnicas importantes na manipulação de sinais que usam números complexos, como transformada de Fourier, transformada de Laplace e transformada- Z . Esta última é de maior interesse em nosso trabalho, pois focaremos nosso trabalho em sistemas intervalares discretos.

Pelo exposto acima, e para fundamentar o uso da aritmética intervalar em processamento de sinais, neste capítulo apresentamos os números complexos intervalares, com a perspectiva de usá-lo em processamento digital de sinais.

Um maior aprofundamento na teoria de números complexos intervalares pode ser encontrado nos seguintes trabalhos [Boche 1966, Arndt 2007, Candau et al. 2006, Neher 2007, Petković & Petković 1998, Lyra 2003]. Vale ressaltar que no trabalho de Boche [Boche 1966] é apontado uma incompatibilidade entre a forma polar e a forma retangular de intervalos complexos. Neste capítulo, propomos uma solução para esta incompatibilidade.

Apresentaremos nas primeiras seções as noções básicas de números complexos intervalares, onde contribuiremos com alguns conceitos, a fim de melhorar a modelagem de sistemas com números complexos. O nosso objetivo é dar mais coerência e consistência à teoria na representação de modelos ruidosos(imprecisos).

Mais precisamente, neste capítulo, faremos as seguintes contribuições.

1. Uma versão intervalar para o módulo de um número complexo que preserve incertezas. Usaremos esta propriedade para analisar convergências de sistemas aplicando a transformada- Z , tema do capítulo 5.
2. Uma representação polar para números complexos intervalares que seja compatível com a representação retangular intervalar.
3. Uma representação na identidade de Euler que seja uma extensão da forma polar.
4. Uma distância intervalar entre complexos que satisfaça a propriedade da inclusão monotônica.

3.0.1 Forma retangular dos números complexos intervalares

Definição 41 (Número complexo intervalar) Chamaremos *número complexo intervalar* toda número expressão, Z , da forma $A + BI$, com A e $B \in \mathbb{I}\mathbb{R}$ e $I = [i, i]$, onde i representa $\sqrt{-1}$, A representa a parte real e B a parte imaginária do número complexo intervalar. Denotamos por $\mathbb{I}\mathbb{C}$ o conjunto dos complexos intervalares.

Os números complexos, como na definição 41, herdam da matemática intervalar características de conjuntos, pois um número complexo intervalar pode ser interpretado como o conjunto de todos os números complexos contidos no retângulo determinado por ele, como mostra a figura 3.1.

Desse ponto de vista, um número complexo intervalar Z do tipo $Z = A + BI$, onde A e B sejam intervalos não degenerados, é representado por um retângulo no plano complexo, o qual contém todos os números complexos $z = a + bi$, com $a \in A$ e $b \in B$, como mostra a figura 3.1.

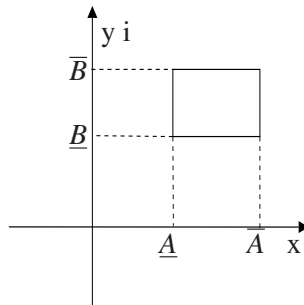


Figura 3.1: Representação gráfica de um número complexo intervalar na forma retangular

Definição 42 Seja \leq uma ordem em \mathbb{C} , tal que, $a + bi \leq c + di$ se e somente se $a \leq c$ e $b \leq d$.

Definição 43 Seja z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 \leq z_2$. Então $[z_1; z_2] = \{z \in \mathbb{C} : z_1 \leq z \leq z_2\}$ é um intervalo de complexos.

Seja $\mathbb{I}(\mathbb{C})$ o conjunto de todos os intervalos de complexos.

Existe uma correspondência bi-unívoca entre $\mathbb{I}\mathbb{C}$ e $\mathbb{I}(\mathbb{C})$, tal que $\forall A + BI \in \mathbb{I}\mathbb{C}$, $[A + Bi; \bar{A} + \bar{B}i] \in \mathbb{I}(\mathbb{C})$ e $\forall [a + bi; c + di] \in \mathbb{I}(\mathbb{C})$ temos que $[a; c] + [b; d]I \in \mathbb{I}\mathbb{C}$.

Assim, de agora em diante, um complexo intervalar, dependendo da nossa conveniência, pode ser visto com um elemento de $\mathbb{I}\mathbb{C}$, ou como um elemento de $\mathbb{I}(\mathbb{C})$.

Definição 44 (Relação de pertinência) Dados $Z = A + BI$ e $z = a + bi$ tal que $Z \in \mathbb{I}\mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}$, dizemos que $z \in Z$ se $a \in A$ e $b \in B$.

Definição 45 (Relação de inclusão) Dados Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{I}\mathbb{C}$, dizemos que $Z_1 \subseteq Z_2$ se $\forall z \in Z_1$, então $z \in Z_2$.

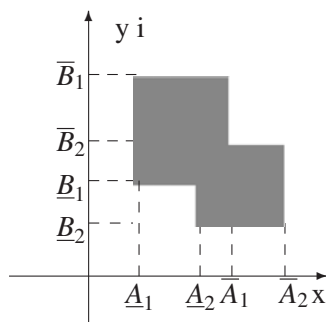


Figura 3.2: Representação gráfica da união de dois números complexos

Neste trabalho, quando usarmos a notação $z \subseteq Z$ estaremos nos referindo a $[z; z] \subseteq Z$.

Definição 46 (Relação de união) Dados Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{IC}$, chamamos **união** de Z_1 com Z_2 ao conjunto formado por todos os números complexos que pertencem a Z_1 ou Z_2 , o qual representamos por

$$Z_1 \cup Z_2 = \{z : z \in Z_1 \text{ ou } z \in Z_2\}.$$

Podemos observar que a relação de união, vista como uma operação, não é fechada sobre o conjunto \mathbb{IC} , no sentido de que nem toda união de complexos intervalares é um complexo intervalar. Isso pode ser visto na figura 3.2, que mostra que nem todas as uniões são convexas. Para suprir a falta desta operação definimos a união hull que é fechada sobre \mathbb{IC} .

Definição 47 (União hull) Dados os números complexos intervalares Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{IC}$. Chamaremos de **União hull** o menor complexo intervalar que contenha $Z_1 \cup Z_2$, denotado por $Z_1 \cup_H Z_2$.

A união hull dos conjuntos mostrados na figura 3.2 pode ser vista na figura 3.3.

Definição 48 (Relação de Intersecção) Dados Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{IC}$, chamamos **intersecção** de Z_1 com Z_2 ao conjunto formado por todos os números complexos que pertencem a Z_1 e Z_2 , simultaneamente, cuja representação é

$$Z_1 \cap Z_2 = \{z : z \in Z_1 \text{ e } z \in Z_2\}.$$

A relação de intersecção não é fechada sobre o conjunto \mathbb{IC} , no sentido de que nem toda intersecção de complexos intervalares é um complexo intervalar. Isto acontece por causa da intersecção disjunta, onde o conjunto vazio aparece como objeto da relação e $\emptyset \notin \mathbb{IC}$.

Podemos ver um exemplo de intersecção de números complexos intervalares na figura 3.4.

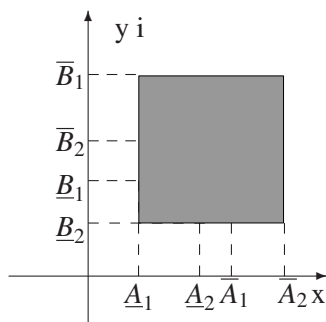


Figura 3.3: Representação gráfica da união hull dos dois números complexos mostrados na figura 3.2.

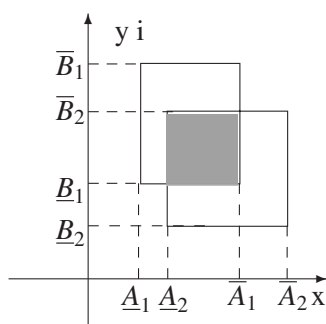


Figura 3.4: Representação Gráfica da intersecção não vazia de dois números complexos intervalares

Proposição 20 *O número*

$$I^n = [i^n, i^n],$$

como na definição 41, tem as seguintes propriedades:

$$I^x = \begin{cases} [1, 1], & \text{para } x \bmod 4 = 0; \\ [i, i], & \text{para } x \bmod 4 = 1; \\ [-1, -1], & \text{para } x \bmod 4 = 2; \\ [-i, -i], & \text{para } x \bmod 4 = 3; \end{cases}$$

para $x \in \mathbb{Z}_+$.

Prova:

Direta das propriedades de $i \in \mathbb{C}$ ■

Para facilitar a elaboração de algoritmos sobre complexos, dividiremos o plano complexo em 9 regiões os quais chamaremos primeiro(p)/(Z₂), segundo(s)/(Z₄), terceiro(t)/(Z₆)

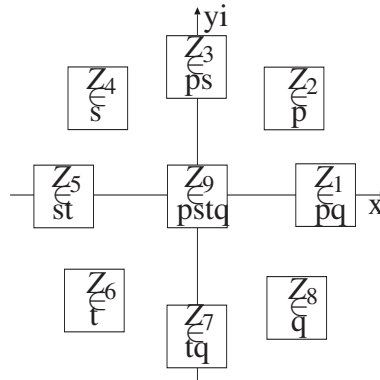


Figura 3.5: Exemplo de números complexos intervalares nas regiões do plano complexo

e quarto(q)/(Z_8) quadrantes e regiões híbridas para os números complexos intervalares, que pertençam a mais de um quadrante. Assim, teremos as seguintes regiões híbridas tais como primeiro/segundo(ps)/(Z_3), primeiro/quarto(pq)/(Z_1), segundo/terceiro(st)/(Z_5), terceiro/quarto(tq)/(Z_7) e finalmente a região primeiro/segundo/terceiro/quarto($pstq$)/(Z_9), como mostra a figura 3.5. Cada uma dessas regiões tem características algébricas que, se bem aproveitadas computacionalmente, diminuiriam o custo computacional de algumas operações aritméticas.

Um exemplo de uma dessas características acontece para os complexos intervalares da região Z_2 , onde seu módulo intervalar coincide com o pseudo módulo, a menos da representação.

3.1 Aritmética intervalar complexa

Como este trabalho explora a transformada- Z intervalar é preciso uma fundamentação básica da aritmética intervalar complexa. Para isso usaremos os conceitos apresentados em Lyra [Lyra 2003], no qual ele faz um embasamento da aritmética intervalar complexa e apresenta a identidade de Euler, assim como uma nova representação polar para os números complexos intervalares.

O conjunto formado por todos os números complexos será representado por \mathbb{IC}

Definição 49 (Operações da aritmética intervalar complexa) *Sejam $Z = A + BI$, $W = C + DI \in \mathbb{IC}$ dois intervalos complexos. As operações de soma, subtração, multiplicação e divisão são definidas através das operações aritméticas intervalares básicas, como segue.*

- $Z + W = (A + C) + (B + D)I$;
- $Z - W = (A - C) + (B - D)I$;
- $Z \cdot W = (A \cdot C - B \cdot D) + (A \cdot D + B \cdot C)I$;
- $Z/W = (A \cdot C + B \cdot D)/(C^2 + D^2) + I(B \cdot C - A \cdot D)/(C^2 + D^2)I$.

Convém observar que na divisão $0 \notin (C^2 + D^2)$, ou equivalentemente $\mathbf{0} \notin W$, pois, caso contrário, a operação não estará definida.

Definição 50 (Ordem de Kulisch-Miranker complexa intervalar) *Sejam $X, Y \in \mathbb{IC}$. X é menor ou igual a Y , denotado por $X \leq Y$, se existir $N \in \mathbb{IC}^+ = \{A + BI : \mathbf{0} \leq A \text{ e } \mathbf{0} \leq B\}$ tal que $X + N = Y$.*

Proposição 21 *Sejam $X, Y \in \mathbb{IC}$, onde $X = A + BI$ e $Y = C + DI$. $X \leq Y$ se e somente se*

$$A \leq C \text{ e } B \leq D.$$

Prova:

Veja [Lyra 2003, pg 77]. ■

Definição 51 (Igualdade entre intervalos complexos) *Sejam $X = A + BI$ e $Y = C + DI$, $X = Y$ se $A = C$ e $B = D$.*

Definição 52 (Comparabilidade) *Sejam $X, Y \in \mathbb{IC}$. Dizemos que X e Y são comparáveis, se $X \leq Y$ ou $Y \leq X$.*

Proposição 22 (Propriedades algébricas de \mathbb{IC}) *Sejam $Z, W, Y \in \mathbb{IC}$ intervalos complexos. Então temos as seguintes propriedades.*

- $Z + W = W + Z$;
- $Z \cdot W = W \cdot Z$;
- $Z + (W + Y) = (Z + W) + Y$;
- $\exists! \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0I} \in \mathbb{IC}$ tal que $Z + \mathbf{0} = \mathbf{0} + Z = Z$;
- $\exists! \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{0I} \in \mathbb{IC}$ tal que $Z \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot Z = Z$;
- $Z \cdot (W + Y) \subseteq (Z \cdot W) + (Z \cdot Y)$.

Prova:

Veja [Lyra 2003]. ■

Observamos que em \mathbb{IC} não vale a associatividade da multiplicação.

Definição 53 (Intervalo complexo positivo) *Chamaremos **intervalos complexos positivos** àqueles que pertencerem ao primeiro quadrante (Z_2) do plano- z , mostrados na figura 3.5, ou seja, $\mathbf{0} \prec X$ e $\mathbf{0} \prec Y$.*

Definição 54 (Intervalo complexo negativo) *Chamaremos **intervalos complexos negativos** àqueles que pertencerem ao terceiro quadrante (Z_7) do plano- z mostrada na figura 3.5, ou seja, $X \prec \mathbf{0}$ e $Y \prec \mathbf{0}$.*

Definição 55 (Distância de Moore entre intervalos complexos) *A **distância de Moore complexa** é a função $D_{Mc} : \mathbb{IC} \times \mathbb{IC} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por*

$$D_{Mc}(A + BI, C + DI) = D_M(A, C) + D_M(B, D).$$

Definição 56 (Módulo complexo intervalar baseado na distância de Moore) Seja $X = A + BI \in \mathbb{IC}$. O **módulo** de X , representado por $|X|_{Mc}$ é definido como o número real não negativo $|X|_{Mc} = D_{Mc}(X, \mathbf{0})$.

Definição 57 (Diâmetro de um número complexo intervalar) Seja $X = A + BI \in \mathbb{IC}$. O **diâmetro** de X , representado por $Diam(X)$, é definido como o número real não negativo:

$$Diam(X) = \sqrt{Diam(A)^2 + Diam(B)^2}$$

A parte real de um intervalo complexo, Z , em alguns momentos neste trabalho será referida como $Re(Z)$ e a parte imaginária como $Im(Z)$.

Assim, podemos definir algumas operações de conjuntos para os números complexos intervalares.

Proposição 23 Sejam Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{IC}$. Então

$$Z_1 + Z_2 = \{z_1 + z_2 : z_1 \in Z_1 \text{ e } z_2 \in Z_2\}.$$

Prova:

Sejam $z_1 \in Z_1$ e $z_2 \in Z_2$, então $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1$, e $a_2 \in A_2$, $b_2 \in B_2$. Pela monotonicidade da inclusão da aritmética intervalar, $a_1 + a_2 \in A_1 + A_2$, $b_1 + b_2 \in B_1 + B_2$. Logo, $z_1 + z_2 \in Z_1 + Z_2$. ■

Proposição 24 A adição de números complexos intervalares, dada na definição 49, preserva a propriedade da inclusão monotônica, de modo que se $Z_1 \subseteq Z_2$, $Z_3 \subseteq Z_4$, então $Z_1 + Z_3 \subseteq Z_2 + Z_4$.

Prova:

Consequência da proposição 23. ■

Como a aritmética intervalar não possui inverso aditivo, o mesmo acontece com os números complexos intervalares. Este fato motiva a seguinte proposição.

Proposição 25 (Pseudo inverso aditivo na forma retangular) Dados os números complexos intervalares $Z = A + BI$ e $-Z = -A - BI$, temos $Z + (-Z) \supseteq \mathbf{0}$

Prova:

Como $A - A = [\underline{A} - \bar{A}; \bar{A} - \underline{A}] \supseteq \mathbf{0}$ e $B - B = [\underline{B} - \bar{B}; \bar{B} - \underline{B}] \supseteq \mathbf{0}$, então $Z \subseteq \mathbf{0}$. ■

Definição 58 (Subtração em \mathbb{IC} na forma retangular) Definimos a subtração dos números complexos intervalares Z_1 e Z_2 pela adição do primeiro Z_1 com o pseudo inverso aditivo do segundo Z_2 .

$$Z_1 - Z_2 = Z_1 + (-Z_2)$$

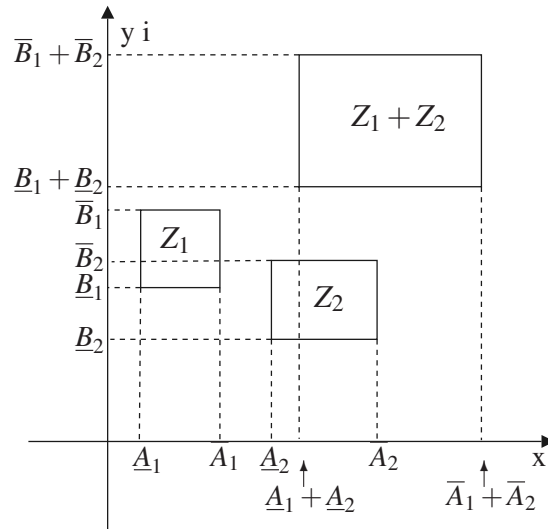


Figura 3.6: Representação Gráfica da adição de dois números complexos intervalares na forma retangular

Definição 59 (Conjugado em \mathbb{IC}) Dado $Z = A + BI$, seu conjugado é $Z^* = A - BI$.

Por causa dos pseudo inversos da aritmética intervalar, a soma de um intervalo complexo com o seu conjugado não é duas vezes a sua parte real e nem a diferença é duas vezes a parte imaginária, como acontece nos números complexos: $Z + Z^* \neq 2Re(Z)$ e $Z - Z^* \neq 2Im(Z)$.

Proposição 26 Dados Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{IC}$. Então

$$Z_1 \cdot Z_2 = \{z_1 \cdot z_2 : z_1 \in Z_1 \text{ e } z_2 \in Z_2\}.$$

Prova:

Sejam $z_1 \in Z_1$ e $z_2 \in Z_2$, então $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1$, e $a_2 \in A_2$, $b_2 \in B_2$. Pela monotonicidade da inclusão da aritmética intervalar, $a_1 \cdot a_2 \in A_1 \cdot A_2$, $b_1 \cdot b_2 \in B_1 \cdot B_2$. Logo, $z_1 \cdot z_2 \in Z_1 \cdot Z_2$. ■

A multiplicação de intervalos complexos tem uma proposição análoga a proposição 24 que é a proposição 27.

Proposição 27 A multiplicação de complexos intervalares, como na definição 49, satisfaz a propriedade da inclusão monotônica. Se $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \in \mathbb{IC}$, $Z_1 \subseteq Z_2$ e $Z_3 \subseteq Z_4$ então,

$$Z_1 Z_3 \subseteq Z_2 Z_4.$$

Prova:

Tomando o número complexo intervalar Z_i da forma $Z_i = A_i + B_i I$ e as condições da proposição 27, temos

$$\text{de } Z_1 \subseteq Z_2, \text{ temos } A_1 \subseteq A_2 \text{ e } B_1 \subseteq B_2; \quad (3.1)$$

$$\text{de } Z_3 \subseteq Z_4, \text{ temos } A_3 \subseteq A_4 \text{ e } B_3 \subseteq B_4; \quad (3.2)$$

$$\text{de 3.1 e 3.2, temos } A_1A_3 \subseteq A_2A_4 \text{ e } B_1B_3 \subseteq B_2B_4; \quad (3.3)$$

$$\text{de 3.1 e 3.2, temos } A_1B_3 \subseteq A_2B_4 \text{ e } B_1A_3 \subseteq B_2A_4; \quad (3.4)$$

$$\text{de 3.3 e 3.4, temos } A_1A_3 - B_1B_3 \subseteq A_2A_4 - B_2B_4; \quad (3.5)$$

$$\text{de 3.3 e 3.4, temos } (B_1A_3 + B_3A_1) \subseteq (B_2A_4 + B_4A_2); \quad (3.6)$$

$$\text{de 3.5 e 3.6, temos } Z_1Z_3 \subseteq Z_2Z_4. \quad (3.7)$$

■

Como a aritmética intervalar não possui inverso multiplicativo, o mesmo acontece com a aritmética complexa intervalar, motivando a seguinte definição.

Definição 60 (Pseudo inverso multiplicativo) Chamaremos *pseudo inverso multiplicativo* de $Z = A + BI$ o número $Z^- = \frac{1}{A+BI}$ e $Z^- = \frac{1}{Z}$, que pode ser escrito da forma

$$Z^- = \frac{A - BI}{A^2 + B^2} = \frac{A}{A^2 + B^2} + \left(\frac{-B}{A^2 + B^2} \right) I.$$

Por simplicidade, o pseudo inverso multiplicativo será referenciado apenas como Z^- .

Proposição 28 $Z \cdot Z^- \supseteq \mathbf{1} + \mathbf{0}I$.

Prova:

Seja $Z = A + BI$.

$$\begin{aligned} Z \cdot Z^- &= (A + BI) \cdot \left(\frac{A - BI}{A^2 + B^2} \right) \\ &= \frac{(A + BI) \cdot (A - BI)}{A^2 + B^2} \\ &= \frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2} + \frac{ABI - ABI}{A^2 + B^2} \supseteq \mathbf{1} + \mathbf{0}I \end{aligned}$$

■

Proposição 29 Dados Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{IC}$. Então

$$Z_1/Z_2 = \{z_1/z_2 : z_1 \in Z_1 \text{ e } z_2 \in Z_2\}.$$

Prova:

Sejam $z_1 \in Z_1$ e $z_2 \in Z_2$, então $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1$, e $a_2 \in A_2$, $b_2 \in B_2$. Pela monotonicidade da inclusão da aritmética intervalar, $a_1/a_2 \in A_1/A_2$, $b_1/b_2 \in B_1/B_2$. Logo, $z_1/z_2 \in Z_1/Z_2$.

■

Proposição 30 *A divisão, como definida na definição 49, é uma inclusão intervalar da divisão sobre \mathbb{C} , de modo que se $Z_1 = A_1 + B_1I$ e $Z_2 = A_2 + B_2I$, z_w e z_j , onde $z_w \in Z_1$ e $z_j \in Z_2$ e $Z_2 \not\equiv 0$, então $z_w/z_j \in Z_1/Z_2$.*

Prova:

Como $z_w \in Z_1$ e $z_j \in Z_2$, temos que $z_w = a_w + b_w i$ e $z_j = a_j + b_j i$, onde $a_w \in A_1$ e $b_w \in B_1$ e $a_j \in A_2$ e $b_j \in B_2$. Logo,

$$\begin{aligned} z_w/z_j &= \frac{z_w \bar{z}_j}{a_j^2 + b_j^2} \\ &= \frac{(a_w + b_w i)(a_j - b_j i)}{a_j^2 + b_j^2} \\ &= \frac{a_w a_j - a_w b_j i + a_j b_w i + b_w b_j}{a_j^2 + b_j^2} \\ &= \frac{(a_w a_j + b_w b_j) + (a_j b_w - a_w b_j) i}{a_j^2 + b_j^2} \\ &= \left(\frac{a_w a_j + b_w b_j}{a_j^2 + b_j^2} \right) + \left(\frac{a_j b_w - a_w b_j}{a_j^2 + b_j^2} \right) i. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} Z_1/Z_2 &= \frac{Z_1 \bar{Z}_2}{A_2^2 + B_2^2} \\ &= \frac{(A_1 + B_1 i)(A_2 - B_2 i)}{A_2^2 + B_2^2} \\ &= \frac{A_1 A_2 - A_1 B_2 i + A_2 B_1 i + B_1 B_2}{A_2^2 + B_2^2} \\ &= \frac{(A_1 A_2 + B_1 B_2) + (A_2 B_1 - A_1 B_2) i}{A_2^2 + B_2^2} \\ &= \left(\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{A_2^2 + B_2^2} \right) + \left(\frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_2^2 + B_2^2} \right) i. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Da propriedade da monotonicidade dos intervalos reais, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_w a_j + b_w b_j}{a_j^2 + b_j^2} \right) &\in \left(\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{A_2^2 + B_2^2} \right) \\ \left(\frac{a_j b_w - a_w b_j}{a_j^2 + b_j^2} \right) &\in \left(\frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_2^2 + B_2^2} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Das equações 3.8, 3.9 e 3.10 podemos concluir

$$z_w/z_j \in Z_1/Z_2. \quad (3.11)$$

■

Proposição 31 *As operações aritméticas sobre \mathbb{IC} são o CIR das respectivas operações sobre \mathbb{C} .*

Prova:

Seja f qualquer uma das operações aritméticas sobre \mathbb{C} e F a respectiva operação sobre \mathbb{IC} . Do corolário 1, das proposições 23, 26 e 29 e da monotonicidade das operações da aritmética intervalar, concluímos que $CIR(f)(\vec{X}) = F(\vec{X})$. ■

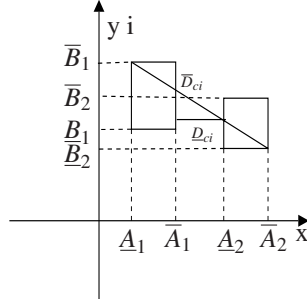


Figura 3.7: Distância intervalar entre dois complexos intervalares

Definição 61 (Distância intervalar entre complexos intervalares) Dados Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{IC}$, onde $Z_1 = A_1 + B_1I$ e $Z_2 = A_2 + B_2I$, a distância de Z_1 a Z_2 é definida por

$$D_{ci}(Z_1, Z_2) = \sqrt{m_{ei}(A_1, A_2)^2 + m_{ei}(B_1, B_2)^2}.$$

Proposição 32 Para intervalos degenerados a distância D_{ci} coincide com a distância euclidiana em \mathbb{C} , a menos de representação.

Prova:

Dados Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{IC}$ e $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tal que $z_1 = a_1 + b_1i$, $Z_1 = [a_1; a_1] + [b_1; b_1]I$, $z_2 = a_2 + b_2i$ e $Z_2 = [a_2; a_2] + [b_2; b_2]I$,

$$d_e(z_1, z_2) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}; \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} D_{ci}(Z_1, Z_2) &= \sqrt{m_{ei}([a_1; a_1], [a_2; a_2])^2 + m_{ei}([b_1; b_1], [b_2; b_2])^2} \\ &= \sqrt{[|a_1 - a_2|; |a_1 - a_2|]^2 + [|b_1 - b_2|; |b_1 - b_2|]^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Das equações 3.12 e 3.13 concluímos que quando aplicada a intervalos degenerados a métrica D_{ci} coincide com a métrica clássica usada em números complexos. ■

A distância intervalar entre Z_1 e Z_2 , como foi definida aqui, é um intervalo que tem como limite inferior a menor distância possível entre dois números complexos em Z_1 e em Z_2 e tem como limite superior a maior distância possível entre os dois números complexos em Z_1 e em Z_2 , como mostra a figura 3.7.

Definição 62 (Módulo intervalar de um número complexo intervalar) Seja $Z \in \mathbb{IC}$ e $\mathbf{0} + \mathbf{0}I$ a origem do plano intervalar complexo, que representaremos apenas por $\mathbf{0}$. O módulo de Z é definido por

$$|Z|_{CI} = D_{ci}(Z, \mathbf{0}).$$

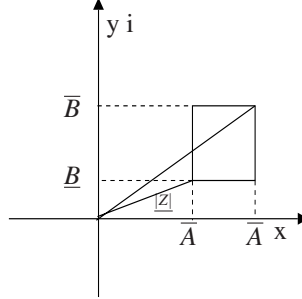


Figura 3.8: Representação gráfica do módulo de um número complexo intervalar

Proposição 33 Para intervalos complexos degenerados, o módulo, $|Z|_{CI}$, coincide com o módulo dos complexos com coeficientes reais, a menos de notação.

Prova:

Dados $Z \in \mathbb{I}\mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}$, tal que $z = a + bi$ e $Z = [a; a] + [b; b]I$,

$$|z| = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} |Z|_{CI} &= \sqrt{m_{ei}([a; a], \mathbf{0})^2 + m_{ei}([b; b], \mathbf{0})^2} \\ &= \sqrt{[|a|; |a|]^2 + [|b|; |b|]^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Das equações 3.14 e 3.15, concluímos que quando aplicada a intervalos degenerados $|Z|_{CI}$ coincide com o módulo de $|z|$ a menos de notação. ■

O módulo intervalar de um número complexo intervalar de um dado Z , representado por $|Z|_{CI}$, tem como limite inferior a menor distância euclidiana dos números complexos z contidos no retângulo determinado por Z á origem dos eixos do plano complexo e como limite superior a maior distância euclidiana desses complexos contidos no retângulo determinado por Z , como mostra a figura 3.8.

Proposição 34 O módulo intervalar de um número complexo intervalar $|Z|_{IC}$ é o CIR do módulo complexo de extremos reais.

Prova:

Seja um intervalo complexo $Z = A + BI$. Das definições 61 e 62, temos

$$|Z|_{CI} = \sqrt{(m_{ei}(A, \mathbf{0}))^2 + (m_{ei}(B, \mathbf{0}))^2}. \quad (3.16)$$

Da definição 34, temos

$$|Z|_{CI} = \sqrt{(|A|_I)^2 + (|B|_I)^2}. \quad (3.17)$$

Do teorema 6, temos

$$\begin{aligned} |Z|_{CI} &= \sqrt{(CIR(| \cdot |)(A))^2 + (CIR(| \cdot |)(B))^2} \\ &= [\inf\{|z| : z \in Z\}; \sup\{|z| : z \in Z\}] \\ &= CIR(| \cdot |)(Z). \end{aligned} \quad (3.18)$$

■

Corolário 5 *A proposição 34 pode ser usada para mostrar que o módulo intervalar de intervalos complexos satisfaz a propriedade de inclusão monotonicidade. Dados dois intervalos complexos Z_1 e Z_2 se $Z_2 \subseteq Z_1$, então $|Z_2| \subseteq |Z_1|$.*

Prova:

Direto da proposição 34. ■

3.1.1 Forma polar ou trigonométrica

Propomos aqui uma representação polar para os números complexos intervalares que coincida com a representação retangular intervalar complexa. Tentaremos definir suas operações de modo que elas sejam equivalentes. O problema da não equivalência foi primeiro abordado por Boche [Boche 1966], mostrado na figura 3.9, que é uma cópia da figura original de [Boche 1966]. No trabalho de Boche um número complexo intervalar é representado na forma polar por uma quádrupla, ou seja, por dois intervalos, um sobre um ângulo e outro sobre o módulo do número complexo intervalar. Podemos ver na figura 3.9 que, o retângulo de vértices (a, c) , (a, d) , (b, c) , (b, d) é uma representação gráfica do número complexo $Z = [a; b] + [c; d]I$ e o setor circular de raio menor $r_1 = \sqrt{a^2 + c^2}$ e raio maior $r_2 = \sqrt{b^2 + d^2}$ e o ângulo compreendido entre $\alpha_1 = \arctang(\frac{c}{a})$ e $\alpha_2 = \arctang(\frac{d}{b})$ representa o menor complexo intervalar na forma polar que contém Z . Na figura, podemos observar que a representação na forma polar e na forma retangular não são equivalentes, no sentido de representarem os mesmos números complexos pontuais. Por exemplo o complexo $a' + b'i$ na parte escura da figura 3.9 está fora do retângulo, ou seja, $a' + b'i \notin [a; b] + [c; d]i$, mas sua representação polar $(r' = \sqrt{a'^2 + b'^2}, \alpha' = \arctang(\frac{b'}{a'}))$ está dentro da representação polar de Boche, ou seja $r' \in [r_1; r_2]$ e $\alpha' \in [\alpha_1; \alpha_2]$. Um exemplo da representação intervalar na forma polar pode ser vista na figura 3.10, extraída do trabalho de Lyra [Lyra 2003]. Por isso propomos uma representação polar que seja equivalente à representação retangular.

Pelo isomorfismo existente entre o plano complexo e \mathbb{R}^2 , vamos representar os elementos de \mathbb{R}^2 na forma polar. Cada elemento do plano será representado por magnitude e fase, com a magnitude dada pela distância do ponto à origem e a fase dada pelo ângulo formado entre o eixo das abcissas e o segmento de reta que liga o ponto à origem, no sentido anti horário, como mostra a figura 3.11, que é a representação geométrica de um número complexo de extremos reais.

Como mostra a figura 3.11, o número complexo representado na forma polar tem $Re(z) = a = |z| \cos(\alpha)$ e $Im(z) = b = |z| \sen(\alpha)$.

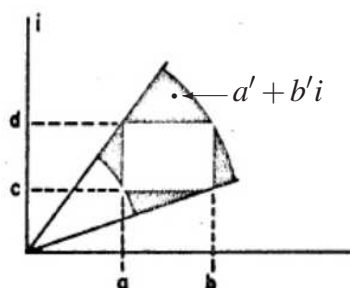


Figura 3.9: Extraída da representação polar de um complexo intervalar na abordagem de Boche [Boche, 1966].

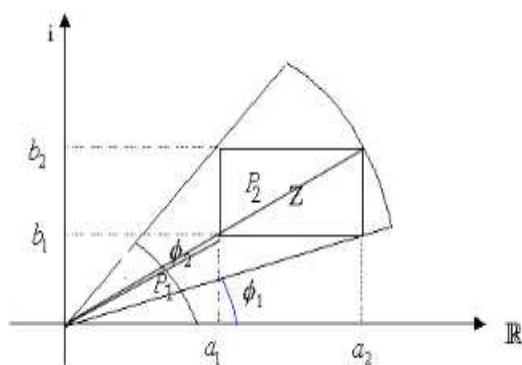


Figura 3.10: Extraída de [Lyra 2003].

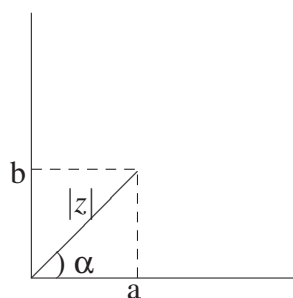


Figura 3.11: Representação gráfica de um número complexo de extremos reais na forma polar na abordagem de Lyra

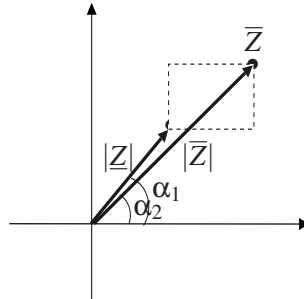


Figura 3.12: Representação de um número complexo intervalar na forma polar

Com a representação polar dos números complexos intervalares, Lyra conseguiu bons resultados nas transformações entre as formas polares e cartesianas (retangulares). Porém, como o foco do seu trabalho foi em processamento de imagens digitais, ele não explorou as equivalências das operações aritméticas entre a representação polar e a representação retangular.

Com base no princípio da geometria que garante que com apenas dois pontos se determina um retângulo no plano, propomos uma representação polar para os números complexos intervalares. Uma vez que um número complexo intervalar é um retângulo no plano complexo, como mostra a figura 41, escolheremos os pontos \underline{Z} e \bar{Z} , como mostra a figura 3.12, embora os extremos da diagonal secundária do retângulo também poderiam ser escolhidos para representar Z . Usando a orientação dos pontos cardinais, tomaremos o ponto mais a nordeste e o mais a sudoeste para representar o retângulo do número complexo Z . Como na figura 3.11, representaremos \underline{Z} e \bar{Z} na forma polar, onde temos $\underline{Z} = \alpha_1 |Z|$ e $\bar{Z} = \alpha_2 |\bar{Z}|$, onde $\underline{A} = |Z| \cos(\alpha_1)$, $\underline{B} = |Z| \sin(\alpha_1)$, $\bar{A} = |\bar{Z}| \cos(\alpha_2)$, e $\bar{B} = |\bar{Z}| \sin(\alpha_2)$.

Antes de formalizar a representação para os números complexos na forma polar, vamos propor uma relação de equivalência e outra de ordem sobre \mathbb{C} , ou equivalentemente sobre \mathbb{R}^2 .

Definição 63 (Relação $=^c$ sobre \mathbb{C}) *Dados dois números complexos representados na forma polar, $z_1 = \alpha_1 |z_1|$ e $z_2 = \alpha_2 |z_2|$, dizemos que $z_1 =^c z_2$ se e somente se $|z_1| \cos(\alpha_1) + |z_1| \sin(\alpha_1) = |z_2| \cos(\alpha_2) + |z_2| \sin(\alpha_2)$.*

Proposição 35 *A relação $=^c$, como na definição 63, é uma relação de equivalência sobre \mathbb{C} , pois satisfaz as seguintes propriedades:*

1. reflexividade, $z =^c z$;
2. simetria, se $z_1 =^c z_2$, então $z_2 =^c z_1$;
3. transitividade, se $z_1 =^c z_2$ e $z_2 =^c z_3$, então $z_1 =^c z_3$.

Prova:

As três propriedades são provadas usando a igualdade clássica sobre os coeficientes da

parte real e da parte imaginária dos números complexos em questão. ■

Definição 64 (Relação \leq^c sobre \mathbb{C}) Dados dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$, representados na forma polar $z_1 = \alpha_1|z_1|$ e $z_2 = \alpha_2|z_2|$, com $a_1 = |z_1|\cos(\alpha_1)$, $b_1 = |z_1|\sin(\alpha_1)$, $a_2 = |z_2|\cos(\alpha_2)$, e $b_2 = |z_2|\sin(\alpha_2)$, dizemos que $z_1 \leq^c z_2$ se e somente se $|z_1|\cos(\alpha_1) + |z_1|\sin(\alpha_1) \leq |z_2|\cos(\alpha_2) + |z_2|\sin(\alpha_2)$.

Proposição 36 A relação \leq^c , como na definição 64, é uma relação de ordem com $=^c$ sobre \mathbb{C} , pois satisfaz as seguintes propriedades:

1. reflexividade, $z \leq^c z$;
2. anti-simetria, se $z_1 \leq^c z_2$ e $z_2 \leq^c z_1$, então $z_1 =^c z_2$;
3. transitividade, se $z_1 \leq^c z_2$ e $z_2 \leq^c z_3$, então $z_1 \leq^c z_3$.

Prova:

Essas propriedades são provadas usando a propriedades da desigualdade usual, \leq , sobre os coeficientes dos complexos envolvidos. ■

Aqui exploraremos as propriedade de conjunto do número complexo intervalar.

Definição 65 (Mínimo em \mathbb{C} em relação a \leq^c) Dado um intervalo complexo Z , dizemos que o número $z_{min} \in Z$ é o **mínimo** de Z se e só se $z_{min} \leq^c z \forall z \in Z$.

Corolário 6 $\underline{A} + \underline{B}i$ é mínimo de $A + Bi$.

Prova:

Direto das definições 64 e 65. ■

Definição 66 (Máximo em \mathbb{C} em relação a \leq^c) Dado um intervalo complexo, Z , dizemos que o número $z_{max} \in Z$ é o **máximo** de Z se e só se $z \leq^c z_{max} \forall z \in Z$.

Corolário 7 $\overline{A} + \overline{B}i$ é máximo de $A + Bi$.

Prova:

Direto das definições 64 e 66. ■

Definição 67 (Pseudo módulo) Dado um número complexo intervalar, $Z \in \mathbb{IC}$, o **pseudo módulo** de Z é dado pelo par ordenado:

$$|(Z)|_P = (|z_{min}|, |z_{max}|).$$

Definição 68 (Multiplicação de pseudo módulo por uma constante $C \in \mathbb{I}\mathbb{R}$) Dado $Z \in \mathbb{I}\mathbb{C}$ e uma constante $C \in \mathbb{I}\mathbb{R}$, definimos a **multiplicação do pseudo módulo de Z por C** como

$$|(Z)|_P C = (|z_{min}| |C|, |z_{max}| |\bar{C}|).$$

Para o propósito deste trabalho, nossa ordem, \leq^c , pode ser substituída pela ordem de Lyra [Lyra 2003], apresentada na definição abaixo.

Definição 69 (Ordem de Lyra) Ordem Parcial Natural no Conjunto dos Números Complexos Seja $x, y \in \mathbb{C}$. x é **menor ou igual** a y , denotado por $x \leq y$, se existir $n \in \mathbb{C}^+ = \{a + bi/a, b \leq 0\}$ tal que $x + n = y$.

A ordem de Lyra e a ordem \leq^c não são equivalentes, mas para determinar o mínimo ou o máximo de um intervalo complexo, que foi o principal objetivo do uso dessa ordem \leq^c neste trabalho, elas podem ser usadas indistintamente. Porque o mínimo e o máximo coincidem nessas ordens coincide em conjuntos retangulares, é o que acontece no intervalo complexo.

A multiplicação de um pseudo módulo por uma constante real se torna um caso particular da multiplicação por uma constante intervalar, tratando o número real como um intervalo degenerado.

Definição 70 (Multiplicação de pseudo módulos) Dados Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{I}\mathbb{C}$ definimos a **multiplicação dos pseudos módulos de Z_1 com Z_2** por

$$|(Z_1)|_P |(Z_2)|_P = (|z_{1min}| |z_{2min}|, |z_{1max}| |z_{2max}|).$$

Definição 71 (Potenciação de pseudo módulo) Dado um número complexo intervalar, $Z \in \mathbb{I}\mathbb{C}$, a **n -ésima potência do pseudo módulo de Z** é dado por

$$|(Z)|_P^n = (|z_{min}|^n, |z_{max}|^n).$$

Definição 72 (Número complexo intervalar na forma polar) Dado um número complexo intervalar na forma retangular Z , sua **representação na forma polar** é dada por uma dupla de pares ordenados, onde os primeiros elementos dos pares ordenados formam a representação polar do mínimo de Z e os segundos elementos dos pares ordenados vem da representação polar do máximo de Z . Simbolicamente,

$$Z = ((\alpha_{min}, \alpha_{max}), |(Z)|_P).$$

onde o número complexo $z_{min} = |z_{min}|(\cos(\alpha_{min}) + \text{sen}(\alpha_{min})i)$ representa o vértice sudoeste do retângulo e $z_{max} = |z_{max}|(\cos(\alpha_{max}) + \text{sen}(\alpha_{max})i)$ representa o vértice nordeste do retângulo

Corolário 8 Um número complexo intervalar Z representado na forma polar é o conjunto $Z = \{z = |z|(\text{sen}(\alpha_z)i + \cos(\alpha_z)) : |z_{min}| \cos(\alpha_{z_{min}}) \leq |z| \cos(\alpha_z) \leq |z_{max}| \cos(\alpha_{z_{max}}) \text{ e } |z_{min}| \text{sen}(\alpha_{z_{min}}) \leq |z| \text{sen}(\alpha_z) \leq |z_{max}| \text{sen}(\alpha_{z_{max}})\}$.

Prova:

Direto da definição 72, pois o corolário 8 só apresenta uma forma diferente de especificar o conjunto $Z = \{z = a + bi : a \in A \text{ e } b \in B\}$. ■

A figura 3.12 mostra uma representação geométrica da forma polar de um número complexo intervalar. Analisando a figura, podemos observar que dependendo da localização do número complexo no plano complexo α_{min} pode ser maior do que α_{max} e vice versa, o mesmo vale para $|z_{min}|$ que pode ser maior do que $|z_{max}|$, e reciprocamente.

Só para evidenciar o modo de representação, o conjunto dos números complexos na forma polar será denotado por \mathbb{IC}_p .

Da mesma maneira que os números complexos na forma retangular, os números complexos na forma polar também representam retângulos no plano \mathbb{IC}_p , onde valem as mesmas propriedades de conjuntos válidas para retângulos representados na forma retangular.

Definição 73 (Adição de números complexos intervalares na forma polar) *Dados dois números complexos intervalares na forma polar $Z_1 = (\alpha_{1min}, \alpha_{1max})(|z_{1min}|, |z_{1max}|)$ e $Z_2 = (\alpha_{2min}, \alpha_{2max})(|z_{2min}|, |z_{2max}|)$. Então a forma polar de*

$$Z_1 + Z_2 \text{ é } (\alpha_{1+2min}, \alpha_{1+2max})(|z_{1+2min}|, |z_{1+2max}|).$$

onde,

$$\alpha_{1+2min} = \arctang \left(\frac{\text{sen}(\alpha_{1min})|z_{1min}| + \text{sen}(\alpha_{2min})|z_{2min}|}{\text{cos}(\alpha_{1min})|z_{1min}| + \text{cos}(\alpha_{2min})|z_{2min}|} \right),$$

$$\alpha_{1+2max} = \arctang \left(\frac{\text{sen}(\alpha_{1max})|z_{1max}| + \text{sen}(\alpha_{2max})|z_{2max}|}{\text{cos}(\alpha_{1max})|z_{1max}| + \text{cos}(\alpha_{2max})|z_{2max}|} \right),$$

$$|z_{1+2min}| = \sqrt{(\text{sen}(\alpha_{1min})|z_{1min}| + \text{sen}(\alpha_{2min})|z_{2min}|)^2 + (\text{cos}(\alpha_{1min})|z_{1min}| + \text{cos}(\alpha_{2min})|z_{2min}|)^2},$$

$$|z_{1+2max}| = \sqrt{(\text{sen}(\alpha_{1max})|z_{1max}| + \text{sen}(\alpha_{2max})|z_{2max}|)^2 + (\text{cos}(\alpha_{1max})|z_{1max}| + \text{cos}(\alpha_{2max})|z_{2max}|)^2}.$$

Podemos ver uma interpretação geométrica da adição de complexos intervalares na figura 3.13.

Proposição 37 (Equivalência da adição entre a forma retangular e a forma polar em \mathbb{IC}) *A adição de complexos intervalares na forma polar, como na definição 73, é equivalente à adição na forma retangular da definição 49.*

Prova:

Para provar que dois conjuntos são iguais basta provar que possuem os mesmos elementos.

Da definição 73 temos que na forma polar $Z_1 + Z_2 = (\alpha_{1+2min}, \alpha_{1+2max})(|z_{1+2min}|, |z_{1+2max}|)$,

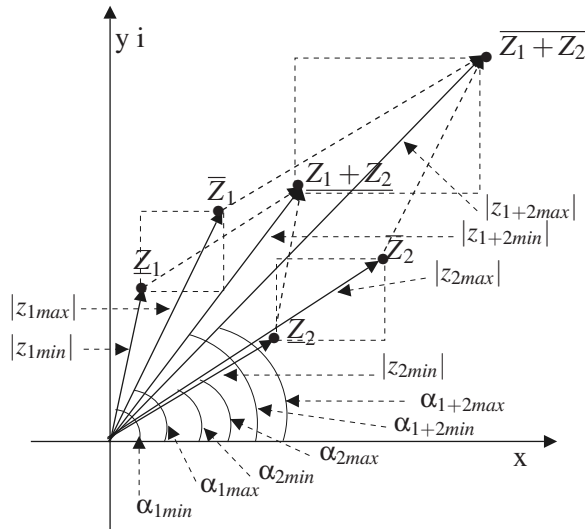


Figura 3.13: Representação Gráfica da adição de dois números complexos intervalares na forma polar.

que pelo corolário 8, $Z_1 + Z_2$, representa o conjunto

$$\begin{aligned}
 & Z_1 + Z_2 = \\
 & \{z = |z|(\text{sen}(\alpha_z)i + \text{cos}(\alpha_z)) : |z_{1+2min}| \text{cos}(\alpha_{1+2min}) \leq |z| \text{cos}(\alpha_z) \leq |z_{1+2max}| \text{cos}(\alpha_{1+2max}) \text{ e } |z_{1+2min}| \text{sen}(\alpha_{1+2min}) \leq |z| \text{sen}(\alpha_z) \leq |z_{1+2max}| \text{sen}(\alpha_{1+2max})\} \\
 & = \{z = |z| \text{cos}(\alpha) + |z| \text{sen}(\alpha)i : z \in Z_1 + Z_2\} \\
 & = \{z = a + bi : z \in Z_1 + Z_2\} \\
 & = Z_1 + Z_2.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

■

Corolário 9 A adição de números complexos intervalares, definida acima, preserva a inclusão monotonicidade.

Prova:

Direto da proposição 37.

■

Definição 74 (Pseudo inverso aditivo - forma polar) Dado um número complexo intervalar na forma polar, $Z = (\alpha_1, \alpha_2)(|z_{min}|, |z_{max}|)$, seu **pseudo inverso aditivo** é o número $-Z_p = (\alpha_2 + \pi, \alpha_1 + \pi)(|z_{max}|, |z_{min}|)$.

Em operações aritmética com números complexos intervalares na forma polar usaremos apenas o sinal de “-” como operação de inverso aditivo polar. Logo, por simplicidade o inverso aditivo na forma polar também será representado por $-Z$.

Proposição 38 Seja $Z \in \mathbb{IC}$ e Z_p sua forma polar. Então $-Z = -Z_p$, a menos de representação.

Prova:

Escrevendo $-Z_p$, temos

$$\begin{aligned}
-Z_p &= \\
&\{z = |z|(\operatorname{sen}(\alpha_z)i + \operatorname{cos}(\alpha_z)) : |z_{\max}|\operatorname{cos}(\alpha_{\max} + \pi) \leq |z|\operatorname{cos}(\alpha_z) \leq |z_{\min}| \\
&\operatorname{cos}(\alpha_{\min} + \pi) \text{ e } |z_{\max}|\operatorname{sen}(\alpha_{\max} + \pi) \leq |z|\operatorname{sen}(\alpha_z) \leq |z_{\min}|\operatorname{sen}(\alpha_{\min} + \pi)\} \\
&= \{z = |z|(\operatorname{sen}(\alpha_z)i + \operatorname{cos}(\alpha_z)) : -|z_{\max}|\operatorname{cos}(\alpha_{\max}) \leq |z|\operatorname{cos}(\alpha_z) \leq -|z_{\min}|\operatorname{cos}(\alpha_{\min}) \\
&\text{ e } -|z_{\max}|\operatorname{sen}(\alpha_{\max}) \leq |z|\operatorname{sen}(\alpha_z) \leq -|z_{\min}|\operatorname{sen}(\alpha_{\min})\} \\
&= \{z = a + bi : -\bar{A} \leq a \leq -\underline{A} \text{ e } -\bar{B} \leq b \leq -\underline{B}\} \\
&= \{z = a + bi : a \in -A, \text{ e } b \in -B\} \\
&= -Z.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

■

Corolário 10 *O pseudo inverso aditivo, na forma polar, preserva as mesmas propriedades do pseudo inverso aditivo na forma retangular.*

Prova:

Direto da proposição 38.

■

Definição 75 (Subtração de complexos intervalares na forma polar) *Dados dois números complexos intervalares na forma polar $Z_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12})(z_{1\min}, z_{1\max})$ e $Z_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22})(z_{2\min}, z_{2\max})$, a subtração de Z_2 e Z_1 é dada pela soma de Z_1 com o pseudo inverso aditivo de Z_2 , como mostramos a seguir.*

$$Z_1 - Z_2 = Z_2 + (-Z_2).$$

Assim,

$$Z_1 - Z_2 = (\alpha_{\min 1-2}, \alpha_{\max 1-2})(|z_{1-2\min}|, |z_{1-2\max}|).$$

onde,

$$\alpha_{\min 1-2} = \operatorname{arctang} \frac{\operatorname{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}| + \operatorname{sen}(\alpha_{2\max} + \pi)|z_{2\max}|}{\operatorname{cos}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}| + \operatorname{cos}(\alpha_{2\max} + \pi)|z_{2\max}|},$$

$$\alpha_{\max 1-2} = \operatorname{arctang} \frac{\operatorname{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}| + \operatorname{sen}(\alpha_{2\min} + \pi)|z_{2\min}|}{\operatorname{cos}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}| + \operatorname{cos}(\alpha_{2\min} + \pi)|z_{2\min}|},$$

$$|z_{1-2\min}| = \sqrt{(\operatorname{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}| + \operatorname{sen}(\alpha_{2\max} + \pi)|z_{2\max}|)^2 + (\operatorname{cos}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}| + \operatorname{cos}(\alpha_{2\max} + \pi)|z_{2\max}|)^2},$$

$$|z_{1-2\max}| = \sqrt{(\operatorname{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}| + \operatorname{sen}(\alpha_{2\min} + \pi)|z_{2\min}|)^2 + (\operatorname{cos}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}| + \operatorname{cos}(\alpha_{2\min} + \pi)|z_{2\min}|)^2}.$$

Proposição 39 *A subtração de complexos intervalares na forma polar é equivalente à subtração na forma retangular a menos de representação.*

Prova:

Ambas as subtrações são definidas a partir das respectivas adições, como, pela proposição 37, as adições são equivalentes, segue que a subtrações também o são. ■

Corolário 11 *A subtração de números complexos intervalares na forma polar, como está na definição 75, preserva monotonicidade da inclusão.*

Prova:

Consequência da proposição 39. ■

Uma maneira de definir a multiplicação intervalar na forma polar de dois números intervalares complexos é como segue.

$$Z_1 Z_2 = ((\alpha_{z_1 \min} + \alpha_{z_2 \min}, \alpha_{z_1 \max} + \alpha_{z_2 \max}), |(Z_1)|_P |(Z_2)|_P).$$

Pretendemos explorar essa definição em outra trabalho que não tenha como objetivo a equivalência entre a representação retangular e polar. Para uma compatibilização entre multiplicação polar e a multiplicação retangular, propomos a seguinte definição para a multiplicação na forma polar.

Definição 76 (Multiplicação intervalar na forma polar) *Dados dois números complexos intervalares Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{IC}$,*

$$Z_1 Z_2 = ((\alpha_{z_1 z_2 \min}, \alpha_{z_1 z_2 \max}), |(Z_1 Z_2)|_P),$$

onde

$$|(Z_1 Z_2)| = (|z_1 z_2 \min|, |z_1 z_2 \max|),$$

$$|z_1 z_2 \min| = \left| \sqrt{\underline{A}_{z_1 z_2 \min}^2 + \underline{B}_{z_1 z_2 \min}^2} \right|,$$

$$|z_1 z_2 \max| = \left| \sqrt{\overline{B}_{z_1 z_2 \max}^2 + \overline{A}_{z_1 z_2 \max}^2} \right|,$$

e

$$\alpha_{z_1 z_2 \max} = \arctang \left(\frac{\overline{B}_{z_1 z_2 \max}}{\overline{A}_{z_1 z_2 \max}} \right).$$

Definição 77 (Pseudo inverso multiplicativo intervalar na forma polar) Dado um número complexo intervalar $Z \in \mathbb{IC}$,

$$\frac{1}{Z} = (\alpha_{\frac{1}{z} \min}, \alpha_{\frac{1}{z} \max}) \left| \left(\frac{1}{Z} \right) \right|,$$

onde

$$\left| \left(\frac{1}{Z} \right) \right| = \left(\left| \frac{1}{z} \min \right|, \left| \frac{1}{z} \max \right| \right),$$

$$\left| \frac{1}{z} \min \right| = \left| \sqrt{\underline{A}_{z_1 z_2 \min}^2 + \underline{B}_{z_1 z_2 \min}^2} \right|,$$

$$\left| \frac{1}{z} \max \right| = \left| \sqrt{\overline{B}_{z_1 z_2 \max}^2 + \overline{A}_{z_1 z_2 \max}^2} \right|,$$

$$\underline{B}_{z_1 z_2 \min} = \min \left\{ \text{sen}(-\alpha_{\min}) \frac{1}{|z_{\min}|}, \text{sen}(-\alpha_{\max}) \frac{1}{|z_{\max}|} \right\},$$

$$\underline{A}_{z_1 z_2 \min} = \min \left\{ \text{cos}(\alpha_{\min}) \frac{1}{|z_{\min}|}, \text{cos}(\alpha_{\max}) \frac{1}{|z_{\max}|} \right\},$$

$$\overline{B}_{z_1 z_2 \max} = \max \left\{ \text{sen}(-\alpha_{\min}) \frac{1}{|z_{\min}|}, \text{sen}(-\alpha_{\max}) \frac{1}{|z_{\max}|} \right\},$$

$$\overline{A}_{z_1 z_2 \max} = \max \left\{ \text{cos}(\alpha_{\min}) \frac{1}{|z_{\min}|}, \text{cos}(\alpha_{\max}) \frac{1}{|z_{\max}|} \right\},$$

$$\alpha_{\frac{1}{z} \min} = \arctang \left(\frac{\underline{B}_{z_1 z_2 \min}}{\underline{A}_{z_1 z_2 \min}} \right)$$

e

$$\alpha_{\frac{1}{z} \max} = \arctang \left(\frac{\overline{B}_{z_1 z_2 \max}}{\overline{A}_{z_1 z_2 \max}} \right).$$

Devido ao objetivo deste trabalho e a complexidade que requer uma potenciação genérica, só trataremos aqui potenciação para o caso de expoente 2. Outra razão é o fato do trabalho ser dirigido para processamento de sinais digitais e o principal objetivo da fundamentação dos números complexos é a construção da transformada- Z intervalar complexa no capítulo 5, e que qualquer sistema linear invariante no tempo pode ser representado por equações diferenciais de ordem n . Na versão discreta teremos equações de diferenças de ordem n e os seus polinômios característicos podem ser representados pela associação de polinômios de graus menores. Além disso, com polinômios de graus 0, 1 e 2 podemos representar qualquer polinômio de grau maior. Só apresentaremos neste trabalho potências complexas de grau 2, visto que, assim, conseguiremos implementar em cascata ou em série qualquer sistema que tenha polinômio característico de grau maior do

que 2. Ademais, manteremos a compatibilidade entre a representação polar e a retangular da aritmética intervalar complexa proposta neste trabalho.

Definição 78 (Potenciação da multiplicação intervalar na forma polar para Z^2) Dado um número complexo intervalar $Z \in \mathbb{IC}_p$ na sua versão polar, definimos Z elevado a potência dois por

$$Z^2 = (\alpha_{z^2_{min}}, \alpha_{z^2_{max}}) |(Z^2)|,$$

onde

$$|(Z^2)| = (|z_{z^2_{min}}|, |z_{z^2_{max}}|),$$

$$|z_{z^2_{min}}| = |\sqrt{A_{z^2_{min}}^2 + B_{z^2_{min}}^2}|,$$

$$|z_{z^2_{max}}| = |\sqrt{B_{z^2_{max}}^2 + A_{z^2_{max}}^2}|,$$

$$\begin{aligned} B_{z^2_{min}} = & \min\{(\text{sen}(2\alpha_{min})|z_{min}|^2), \\ & (\frac{\text{sen}(2\alpha_{min})|z_{min}|^2}{2} + \text{sen}(\alpha_{min})\text{cos}(\alpha_{max})|z_{max}||z_{min}|), \\ & (\frac{\text{sen}(2\alpha_{min})|z_{min}|^2}{2} + \text{sen}(\alpha_{max})\text{cos}(\alpha_{min})|z_{max}||z_{min}|), \\ & (\frac{\text{sen}(2\alpha_{min})|z_{min}|^2 + \text{sen}(2\alpha_{max})|z_{max}|^2}{2}), \\ & (2(\text{sen}(\alpha_{min})\text{cos}(\alpha_{max})|z_{min}||z_{max}|)), \\ & (\text{sen}(\alpha_{min} + \alpha_{max})|z_{min}||z_{max}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{min})\text{cos}(\alpha_{max})|z_{min}||z_{max}| + \frac{\text{sen}(2\alpha_{max})|z_{max}|^2}{2}), \\ & (2(\text{sen}(\alpha_{max})\text{cos}(\alpha_{min})|z_{max}||z_{min}|)), \\ & (\text{sen}(\alpha_{max})\text{cos}(\alpha_{min})|z_{max}||z_{min}| + \frac{\text{sen}(2\alpha_{max})|z_{max}|^2}{2}), \\ & (\text{sen}(2\alpha_{max})|z_{max}|^2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{z_1 z_2_{min}} = & \min\{(\text{cos}(2\alpha_{min})|z_{min}|^2), \\ & (\text{cos}(\alpha_{min})^2|z_{min}|^2 - \text{sen}(\alpha_{min})\text{sen}(\alpha_{max})|z_{max}||z_{min}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{min})^2|z_{min}|^2 - \text{sen}(\alpha_{max})\text{sen}(\alpha_{min})|z_{min}||z_{max}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{min})^2|z_{min}|^2 - \text{sen}(\alpha_{max})^2|z_{max}|^2), \\ & (\text{cos}(\alpha_{min})\text{cos}(\alpha_{max})|z_{min}||z_{max}| - \text{sen}(\alpha_{min})^2|z_{min}|^2), \\ & (\text{cos}(\alpha_{min} + \alpha_{max})|z_{max}||z_{min}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{min} + \alpha_{max})|z_{min}||z_{max}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{min})\text{cos}(\alpha_{max})|z_{min}||z_{max}| - \text{sen}(\alpha_{max})^2|z_{max}|^2), \\ & (\text{cos}(\alpha_{max})\text{cos}(\alpha_{min})|z_{max}||z_{min}| - \text{sen}(\alpha_{min})^2|z_{min}|^2), \\ & (\text{cos}(\alpha_{max} + \alpha_{min})|z_{max}||z_{min}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{max})\text{cos}(\alpha_{min})|z_{max}||z_{min}| - \text{sen}(\alpha_{max})\text{sen}(\alpha_{min})|z_{min}||z_{max}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{max})\text{cos}(\alpha_{min})|z_{max}||z_{min}| - \text{sen}(\alpha_{max})^2|z_{max}|^2), \\ & (\text{cos}(\alpha_{max})^2|z_{max}|^2 - \text{sen}(\alpha_{min})^2|z_{min}|^2), \\ & (\text{cos}(\alpha_{max})^2|z_{max}|^2 - \text{sen}(\alpha_{min})\text{sen}(\alpha_{max})|z_{max}||z_{min}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{max})^2|z_{max}|^2 - \text{sen}(\alpha_{max})\text{sen}(\alpha_{min})|z_{min}||z_{max}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{max} + \alpha_{max})|z_{max}||z_{max}|)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{B}_{z^n \min} = & \min\{(\text{sen}(n\alpha_{\min})|z_{\min}|^n), \\
& (\text{sen}(\alpha_{\min})\cos((n-1)\alpha_{\min})|z_{\min}|^n + \text{sen}((n-1)\alpha_{\min})\cos(\alpha_{\max})|z_{\max}||z_{\min}|^{n-1}), \\
& (\text{sen}((n-1)\alpha_{\min})\cos(\alpha_{\min})|z_{\min}|^n + \text{sen}(\alpha_{\max})\cos((n-1)\alpha_{\min})|z_{\min}|^{n-1}|z_{\max}|), \\
& (\frac{\text{sen}(n\alpha_{\min})|z_{\min}|^n + \text{sen}(n\alpha_{\max})|z_{\max}|^n}{2}), \\
& (\text{sen}(\alpha_{\min})\cos(\alpha_{\max})|z_{\min}||z_{\max}| + \frac{\text{sen}(s\alpha_{\min})|z_{\min}|^2}{2}), \\
& (\text{sen}(\alpha_{\min})\cos(\alpha_{\max})|z_{\min}||z_{\max}| + \text{sen}(\alpha_{\min})\cos(\alpha_{\max})|z_{\max}||z_{\min}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{\min} + \alpha_{\max})|z_{\min}||z_{\max}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{\min})\cos(\alpha_{\max})|z_{\min}||z_{\max}| + \frac{\text{sen}(2\alpha_{\max})|z_{\max}|^2}{2}), \\
& (\text{sen}(\alpha_{\max})\cos(\alpha_{\min})|z_{\max}||z_{\min}| + \frac{\text{sen}(s\alpha_{\min})|z_{\min}|^2}{2}), \\
& (\text{sen}(\alpha_{\max} + \alpha_{\min})|z_{\max}||z_{\min}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{\max})\cos(\alpha_{\min})|z_{\max}||z_{\min}| + \text{sen}(\alpha_{\max})\cos(\alpha_{\min})|z_{\min}||z_{\max}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{\max})\cos(\alpha_{\min})|z_{\max}||z_{\min}| + \frac{\text{sen}(2\alpha_{\max})|z_{\max}|^2}{2}), \\
& (\frac{\text{sen}(2\alpha_{\max})|z_{\max}|^2}{2} + \frac{\text{sen}(s\alpha_{\min})|z_{\min}|^2}{2}), \\
& (\frac{\text{sen}(2\alpha_{\max})|z_{\max}|^2}{2} + \text{sen}(\alpha_{\min})\cos(\alpha_{\max})|z_{\max}||z_{\min}|), \\
& (\frac{\text{sen}(2\alpha_{\max})|z_{\max}|^2}{2} + \text{sen}(\alpha_{\max})\cos(\alpha_{\min})|z_{\min}||z_{\max}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{\max} + \alpha_{\max})|z_{\max}||z_{\max}|)\} \\
\underline{A}_{z_1 z_2 \min} = & \min\{(\cos(\alpha_{1\min} + \alpha_{2\min})|z_{1\min}||z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min})\cos(\alpha_{2\min})|z_{1\min}||z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min})\cos(\alpha_{2\min})|z_{1\min}||z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min})\cos(\alpha_{2\min})|z_{1\min}||z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min})\cos(\alpha_{2\max})|z_{1\min}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min})\cos(\alpha_{2\max})|z_{1\min}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min} + \alpha_{2\max})|z_{1\min}||z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min})\cos(\alpha_{2\max})|z_{1\min}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max})\cos(\alpha_{2\min})|z_{1\max}||z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max} + \alpha_{2\min})|z_{1\max}||z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max})\cos(\alpha_{2\min})|z_{1\max}||z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max})\cos(\alpha_{2\min})|z_{1\max}||z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max})\cos(\alpha_{2\max})|z_{1\max}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max})\cos(\alpha_{2\max})|z_{1\max}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max})\cos(\alpha_{2\max})|z_{1\max}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max} + \alpha_{2\max})|z_{1\max}||z_{2\max}|)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{B}_{z_1 z_2 \max} = & \max \{ (\text{sen}(\alpha_{1\min} + \alpha_{2\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\min}) \cos(\alpha_{2\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}| + \text{sen}(\alpha_{2\min}) \cos(\alpha_{1\max}) |z_{1\max}| |z_{2\min}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\min}) \cos(\alpha_{2\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}| + \text{sen}(\alpha_{2\max}) \cos(\alpha_{1\min}) |z_{1\min}| |z_{2\max}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\min}) \cos(\alpha_{2\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}| + \text{sen}(\alpha_{2\max}) \cos(\alpha_{1\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\min}) \cos(\alpha_{2\max}) |z_{1\min}| |z_{2\max}| + \text{sen}(\alpha_{2\min}) \cos(\alpha_{1\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\min}) \cos(\alpha_{2\max}) |z_{1\min}| |z_{2\max}| + \text{sen}(\alpha_{2\min}) \cos(\alpha_{1\max}) |z_{1\max}| |z_{2\min}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\min} + \alpha_{2\max}) |z_{1\min}| |z_{2\max}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\min}) \cos(\alpha_{2\max}) |z_{1\min}| |z_{2\max}| + \text{sen}(\alpha_{2\max}) \cos(\alpha_{1\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\max}) \cos(\alpha_{2\min}) |z_{1\max}| |z_{2\min}| + \text{sen}(\alpha_{2\min}) \cos(\alpha_{1\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\max} + \alpha_{2\min}) |z_{1\max}| |z_{2\min}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\max}) \cos(\alpha_{2\min}) |z_{1\max}| |z_{2\min}| + \text{sen}(\alpha_{2\max}) \cos(\alpha_{1\min}) |z_{1\min}| |z_{2\max}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\max}) \cos(\alpha_{2\min}) |z_{1\max}| |z_{2\min}| + \text{sen}(\alpha_{2\max}) \cos(\alpha_{1\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\max}) \cos(\alpha_{2\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}| + \text{sen}(\alpha_{2\min}) \cos(\alpha_{1\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\max}) \cos(\alpha_{2\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}| + \text{sen}(\alpha_{2\min}) \cos(\alpha_{1\max}) |z_{1\max}| |z_{2\min}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\max}) \cos(\alpha_{2\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}| + \text{sen}(\alpha_{2\max}) \cos(\alpha_{1\min}) |z_{1\min}| |z_{2\max}|), \\
& (\text{sen}(\alpha_{1\max} + \alpha_{2\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}|) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{A}_{z_1 z_2 \max} = & \max \{ (\cos(\alpha_{1\min} + \alpha_{2\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min}) \cos(\alpha_{2\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\min}) \text{sen}(\alpha_{1\max}) |z_{1\max}| |z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min}) \cos(\alpha_{2\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\max}) \text{sen}(\alpha_{1\min}) |z_{1\min}| |z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min}) \cos(\alpha_{2\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\max}) \text{sen}(\alpha_{1\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min}) \cos(\alpha_{2\max}) |z_{1\min}| |z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\min}) \text{sen}(\alpha_{1\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min}) \cos(\alpha_{2\max}) |z_{1\min}| |z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\min}) \text{sen}(\alpha_{1\max}) |z_{1\max}| |z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min} + \alpha_{2\max}) |z_{1\min}| |z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\min}) \cos(\alpha_{2\max}) |z_{1\min}| |z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\max}) \text{sen}(\alpha_{1\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max}) \cos(\alpha_{2\min}) |z_{1\max}| |z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\min}) \text{sen}(\alpha_{1\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max} + \alpha_{2\min}) |z_{1\max}| |z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max}) \cos(\alpha_{2\min}) |z_{1\max}| |z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\max}) \text{sen}(\alpha_{1\min}) |z_{1\min}| |z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max}) \cos(\alpha_{2\min}) |z_{1\max}| |z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\max}) \text{sen}(\alpha_{1\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max}) \cos(\alpha_{2\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\min}) \text{sen}(\alpha_{1\min}) |z_{1\min}| |z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max}) \cos(\alpha_{2\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\min}) \text{sen}(\alpha_{1\max}) |z_{1\max}| |z_{2\min}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max}) \cos(\alpha_{2\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\max}) \text{sen}(\alpha_{1\min}) |z_{1\min}| |z_{2\max}|), \\
& (\cos(\alpha_{1\max} + \alpha_{2\max}) |z_{1\max}| |z_{2\max}|) \}
\end{aligned}$$

$$\alpha_{z_1 z_2 \min} = \arctang\left(\frac{\underline{B}_{z_1 z_2 \min}}{\underline{A}_{z_1 z_2 \min}}\right)$$

e

$$\alpha_{z_1 z_2 \max} = \arctang\left(\frac{\overline{B}_{z_1 z_2 \max}}{\overline{A}_{z_1 z_2 \max}}\right).$$

Proposição 40 *A multiplicação de números complexos intervalares na forma polar, como na definição 76, é equivalente à multiplicação da definição 49 na forma retangular.*

Prova:

Sejam dois números complexos Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{IC}$, onde $Z_1 = A_1 + B_1I$ e $Z_2 = A_2 + B_2I$.

Da definição 76, temos

$$\begin{aligned} \underline{B}_{z_1 z_2 \min} = & \min\{(\text{sen}(\alpha_{1\min} + \alpha_{2\min})|z_{1\min}||z_{2\min}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\min})|z_{1\min}||z_{2\min}| + \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{cos}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\min}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\min})|z_{1\min}||z_{2\min}| + \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{cos}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\max}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\min})|z_{1\min}||z_{2\min}| + \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{cos}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\max}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\min}||z_{2\max}| + \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{cos}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\min}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\min}||z_{2\max}| + \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{cos}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\min}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{1\min} + \alpha_{2\max})|z_{1\min}||z_{2\max}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\min}||z_{2\max}| + \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{cos}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\max}|), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & (\text{sen}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\min})|z_{1\max}||z_{2\min}| + \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{cos}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\min}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{1\max} + \alpha_{2\min})|z_{1\max}||z_{2\min}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\min})|z_{1\max}||z_{2\min}| + \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{cos}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\max}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\min})|z_{1\max}||z_{2\min}| + \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{cos}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\max}|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\text{sen}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\max}||z_{2\max}| + \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{cos}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\min}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\max}||z_{2\max}| + \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{cos}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\min}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\max}||z_{2\max}| + \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{cos}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\max}|), \\ & (\text{sen}(\alpha_{1\max} + \alpha_{2\max})|z_{1\max}||z_{2\max}|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_{z_1 z_2 \min} = & \min\{(\text{cos}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\min}) - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\min}))|z_{1\min}||z_{2\min}|, \\ & (\text{cos}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\min})|z_{1\min}||z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\min}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\min})|z_{1\min}||z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\max}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\min})|z_{1\min}||z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\max}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\min}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\min}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\min}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\min}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\min}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\max}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{1\min})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\min}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\max}|), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & (\text{cos}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\min})|z_{1\max}||z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\min}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\min})|z_{1\max}||z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\min}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\min})|z_{1\max}||z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\max}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\min})|z_{1\max}||z_{2\min}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\max}|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\text{cos}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\max}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\min}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\max}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\min})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\min}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\max}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\min})|z_{1\min}||z_{2\max}|), \\ & (\text{cos}(\alpha_{1\max})\text{cos}(\alpha_{2\max})|z_{1\max}||z_{2\max}| - \text{sen}(\alpha_{2\max})\text{sen}(\alpha_{1\max})|z_{1\max}||z_{2\max}|) \end{aligned}$$

Da equação 3.22, temos

$$\begin{aligned} \underline{A}_{z_1 z_2 \min} = & \\ \min\{ & (\underline{A}_1 \underline{A}_2 - \underline{B}_2 \underline{B}_1), (\underline{A}_1 \underline{A}_2 - \underline{B}_2 \overline{B}_1), (\underline{A}_1 \underline{A}_2 - \overline{B}_2 \underline{B}_1), (\underline{A}_1 \underline{A}_2 - \overline{B}_2 \overline{B}_1), \\ & (\underline{A}_1 \overline{A}_2 - \underline{B}_2 \underline{B}_1), (\underline{A}_1 \overline{A}_2 - \underline{B}_2 \overline{B}_1), (\underline{A}_1 \overline{A}_2 - \overline{B}_2 \underline{B}_1), (\underline{A}_1 \overline{A}_2 - \overline{B}_2 \overline{B}_1), \\ & (\overline{A}_1 \underline{A}_2 - \underline{B}_2 \underline{B}_1), (\overline{A}_1 \underline{A}_2 - \underline{B}_2 \overline{B}_1), (\overline{A}_1 \underline{A}_2 - \overline{B}_2 \underline{B}_1), (\overline{A}_1 \underline{A}_2 - \overline{B}_2 \overline{B}_1), \\ & (\overline{A}_1 \overline{A}_2 - \underline{B}_2 \underline{B}_1), (\overline{A}_1 \overline{A}_2 - \underline{B}_2 \overline{B}_1), (\overline{A}_1 \overline{A}_2 - \overline{B}_2 \underline{B}_1), (\overline{A}_1 \overline{A}_2 - \overline{B}_2 \overline{B}_1)\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Da equação 3.23, temos

$$\begin{aligned} \underline{B}_{z_1 z_2 \max} = & \\ \max\{ & (\underline{B}_1 \underline{A}_2 + \underline{B}_2 \underline{A}_1), (\underline{B}_1 \underline{A}_2 + \underline{B}_2 \overline{A}_1), (\underline{B}_1 \underline{A}_2 + \overline{B}_2 \underline{A}_1), (\underline{B}_1 \underline{A}_2 + \overline{B}_2 \overline{A}_1), \\ & (\underline{B}_1 \overline{A}_2 + \underline{B}_2 \underline{A}_1), (\underline{B}_1 \overline{A}_2 + \underline{B}_2 \overline{A}_1), (\underline{B}_1 \overline{A}_2 + \overline{B}_2 \underline{A}_1), (\underline{B}_1 \overline{A}_2 + \overline{B}_2 \overline{A}_1), \\ & (\overline{B}_1 \underline{A}_2 + \underline{B}_2 \underline{A}_1), (\overline{B}_1 \underline{A}_2 + \underline{B}_2 \overline{A}_1), (\overline{B}_1 \underline{A}_2 + \overline{B}_2 \underline{A}_1), (\overline{B}_1 \underline{A}_2 + \overline{B}_2 \overline{A}_1), \\ & (\overline{B}_1 \overline{A}_2 + \underline{B}_2 \underline{A}_1), (\overline{B}_1 \overline{A}_2 + \underline{B}_2 \overline{A}_1), (\overline{B}_1 \overline{A}_2 + \overline{B}_2 \underline{A}_1), (\overline{B}_1 \overline{A}_2 + \overline{B}_2 \overline{A}_1)\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Da equação 3.24, temos

$$\begin{aligned} \underline{A}_{z_1 z_2 \max} = & \\ \max\{ & (\underline{A}_1 \underline{A}_2 - \underline{B}_2 \underline{B}_1), (\underline{A}_1 \underline{A}_2 - \underline{B}_2 \overline{B}_1), (\underline{A}_1 \underline{A}_2 - \overline{B}_2 \underline{B}_1), (\underline{A}_1 \underline{A}_2 - \overline{B}_2 \overline{B}_1), \\ & (\underline{A}_1 \overline{A}_2 - \underline{B}_2 \underline{B}_1), (\underline{A}_1 \overline{A}_2 - \underline{B}_2 \overline{B}_1), (\underline{A}_1 \overline{A}_2 - \overline{B}_2 \underline{B}_1), (\underline{A}_1 \overline{A}_2 - \overline{B}_2 \overline{B}_1), \\ & (\overline{A}_1 \underline{A}_2 - \underline{B}_2 \underline{B}_1), (\overline{A}_1 \underline{A}_2 - \underline{B}_2 \overline{B}_1), (\overline{A}_1 \underline{A}_2 - \overline{B}_2 \underline{B}_1), (\overline{A}_1 \underline{A}_2 - \overline{B}_2 \overline{B}_1), \\ & (\overline{A}_1 \overline{A}_2 - \underline{B}_2 \underline{B}_1), (\overline{A}_1 \overline{A}_2 - \underline{B}_2 \overline{B}_1), (\overline{A}_1 \overline{A}_2 - \overline{B}_2 \underline{B}_1), (\overline{A}_1 \overline{A}_2 - \overline{B}_2 \overline{B}_1)\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Usando a multiplicação na forma retangular, da definição 49, podemos tirar

$$Z_1 Z_2 = A_{z_1 z_2} + B_{z_1 z_2} I,$$

$$A_{z_1 z_2} = (A_1 A_2 - B_1 B_2), \quad (3.29)$$

$$B_{z_1 z_2} = (A_1 B_2 + A_2 B_1). \quad (3.30)$$

Das operações da aritmética intervalar, apresentadas na definição 8, e das equações 3.25, 3.26, 3.27, 3.28, 3.29 e 3.30, temos

$$A_{z_1 z_2} = [\underline{A}_{z_1 z_2}; \overline{A}_{z_1 z_2}], \quad (3.31)$$

$$B_{z_1 z_2} = [\underline{B}_{z_1 z_2}; \overline{B}_{z_1 z_2}]. \quad (3.32)$$

Do conceito de igualdade entre conjuntos e das e as equações 3.31 e 3.32, a multiplicação na forma retangular apresentada na definição 49 e a multiplicação na forma polar proposta na definição 76, são equivalentes. ■

Definição 79 (Identidade de Euler em \mathbb{IC}) Dado um número complexo intervalar na sua forma polar, $Z = ((\alpha_{\min}, \alpha_{\max})|(Z)|_P)$, ele tem a seguinte **representação** na identidade de Euler

$$(e^{\alpha_{\min} i}, e^{\alpha_{\max} i})|(Z)|_P.$$

Com esta definição da identidade de Euler podemos definir a transformada- Z intervalar,

apresentada no capítulo 5. Agora, definiremos as operações básicas para os números complexos intervalares representados na forma da identidade de Euler.

A representação na forma polar e na forma da identidade de Euler diferem, apenas, na representação da parte trigonométrica dos números complexos. Por isso, nas definições das operações com a identidade de Euler recorreremos às definições na forma polar.

Neste trabalho estamos tendo o cuidado de preservar a equivalência entre as operações independente da sua forma de representação. Em outro trabalho pretendemos explorar a acuracidade dos resultados.

O conjunto dos números complexos representados em função da identidade de Euler será representado por $\mathbb{I}\mathbb{C}_E$.

Definição 80 (Adição em $\mathbb{I}\mathbb{C}_E$) *Dados dois números complexos intervalares representados na forma da identidade de Euler, $Z_1 = (e^{\alpha_{1min}i}, e^{\alpha_{1max}i})|(Z_1)|_P$ e $Z_2 = (e^{\alpha_{2min}i}, e^{\alpha_{2max}i})|(Z_2)|_P$, sua **adição** é definida por*

$$Z_1 + Z_2 = Z_{1+2} = (e^{\alpha_{1+2min}i}, e^{\alpha_{1+2max}i})|(Z_{1+2})|_P$$

onde

$$|(Z_{1+2})|_P = (|z_{1+2min}|, |z_{1+2min}|),$$

e $|z_{1+2min}|, |z_{1+2min}|, \alpha_{1+2min}$ e α_{1+2max} são como mostrados na definição 73.

Proposição 41 *A adição de complexos intervalares representados pela identidade de Euler, como na definição 80, coincide com a adição na forma retangular proposta na definição 49.*

Prova:

Da proposição 37 e da definição 79. Por transitividade de equivalência temos

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (e^{\alpha_{1+2min}i}, e^{\alpha_{1+2max}i})|(Z_{1+2})|_P \\ &= (\alpha_{1+2min}, \alpha_{1+2max})|(Z_{1+2})|_P \\ &= (A + C) + (B + D)I \end{aligned}$$

■

Corolário 12 *A adição de complexos representados pela identidade de Euler, como na definição 80, preserva a monotonicidade da inclusão.*

Prova:

Direto da proposição 41.

■

Definição 81 (Pseudo inverso aditivo com a identidade de Euler) *Dado um número complexo intervalar na forma $Z = (e^{\alpha_{1min}i}, e^{\alpha_{1max}i})|(Z)|_P$ definimos seu **pseudo inverso aditivo** por*

$$-Z_E = Ze^\pi.$$

Proposição 42 *O pseudo inverso aditivo na forma da identidade de Euler é equivalente ao pseudo inverso na forma retangular.*

Prova:

Basta ver que a representação é equivalente à representação na forma polar, da definição 74, que, por sua vez é equivalente à representação na forma retangular, da definição 25. Pela transitividade da equivalência, concluímos que o pseudo inverso na forma retangular e representado pela identidade de Euler são equivalentes. ■

Definição 82 (Subtração em \mathbb{IC}_E) *Dados dois números Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{IC}_E$, definimos sua subtração por*

$$Z_1 - Z_2 = Z_1 + Z_2 e^\pi.$$

Proposição 43 *A subtração com a identidade de Euler, como na definição 82, é equivalente à subtração na forma retangular, como na definição 49.*

Prova:

Pela equivalência dos pseudos inversos aditivos das proposições 10 e 42. ■

Definição 83 (Multiplicação em \mathbb{IC}_E) *Dados dois números, Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{IC}_E$, definimos sua multiplicação por*

$$Z_1 Z_2 = (e^{\alpha_{z_1 z_2 \min} i}, e^{\alpha_{z_1 z_2 \min} i}, |(Z_1 Z_2)|_P),$$

onde $\alpha_{z_1 z_2 \min}$, $\alpha_{z_1 z_2 \min}$ e $|(Z_1 Z_2)|_P$ são como na definição 76.

Proposição 44 *A multiplicação de complexos intervalares como na definição 83 é equivalente á multiplicação da proposição 49.*

Prova:

Da proposição 40 temos a equivalência entre a multiplicação na forma retangular e na forma polar e da definição 79 temos uma equivalência entre a forma polar e a representação na forma da identidade de Euler. Podemos ver que usando a definição 79 para reescrever o produto apresentado da definição 76 como mostra equação 3.33 coincide com o produto apresentado na definição 83.

$$Z_1 Z_2 = (\alpha_{z_1 z_2 \min}, \alpha_{z_1 z_2 \min}, |(Z_1 Z_2)|_P) \equiv (e^{\alpha_{z_1 z_2 \min} i}, e^{\alpha_{z_1 z_2 \min} i}, |(Z_1 Z_2)|_P). \quad (3.33)$$

Logo pela proposição 40 concluímos, por transitividade da equivalência, que a multiplicação na forma da identidade de Euler é equivalente à multiplicação na forma retangular. ■

Definição 84 (Pseudo inverso multiplicativo em \mathbb{IC}_E) Dado o número $Z \in \mathbb{IC}_E$, definimos seu **pseudo inverso multiplicativo** por

$$\frac{1}{Z} = \left(e^{\alpha_{\frac{1}{Z}min}i}, e^{\alpha_{\frac{1}{Z}max}i} \right) \left| \left(\frac{1}{Z} \right) \right|_P,$$

onde $\alpha_{\frac{1}{Z}min}, \alpha_{\frac{1}{Z}max}$ e $\left| \left(\frac{1}{Z} \right) \right|_P$ são como na definição 77.

Proposição 45 O pseudo inverso multiplicativo na forma polar é equivalente ao pseudo inverso multiplicativo na forma retangular.

Prova:

a definição 79, um número escrito na forma polar tem seu equivalente na forma da identidade de Euler. Como o inverso multiplicativo na forma da identidade de Euler tem seu equivalente na forma polar, que por sua vez é equivalente à sua representação na forma retangular, concluímos que o Inverso multiplicativo na forma retangular e na forma da identidade de Euler são equivalentes. ■

Definição 85 (Potenciação da multiplicação em \mathbb{IC}_E de expoente 2) Dado um número $Z \in \mathbb{IC}_E$, definimos sua **Potenciação da multiplicação** por

$$Z^2 = \left(e^{\alpha_{Z^2min}i}, e^{\alpha_{Z^2max}i} \right) \left| (Z^2) \right|_P,$$

onde $\alpha_{Z^2min}, \alpha_{Z^2max}$ e $\left| \left(\frac{1}{Z} \right) \right|_P$ são como na definição 78.

Proposição 46 O quadrado de um número representado na forma da identidade de Euler é equivalente ao quadrado desse número representado na forma retangular.

Prova:

Direto da equivalência da multiplicação, tornando os dois fatores iguais. ■

3.2 Conclusão

Na busca de uma fundamentação matemática para processamento digital de sinais intervalares. Fizemos uma extensão da abordagem de intervalos como conjunto intervalares complexos. Analisando a propriedades de conjuntos dos números complexos intervalares verificamos que nem a união e nem a interseção são fechadas sobre o conjunto dos números complexos intervalares. Apresentamos as propriedade do número imaginário I e fizemos uma revisão da aritmética intervalar complexa na forma retangular. Dividimos o plano complexo intervalar em 9 regiões para facilitar implementações computacionais. Propomos uma distância intervalar complexa que contempla a inclusão monotônica preservando as incertezas. Baseados nesta distância propomos uma definição de módulo intervalar complexos que é uma extensão do módulo complexo e

que quando aplicado a intervalos degenerados coincide com a módulo euclidiano. Este módulo preserva a inclusão monotônica a principal propriedade a aritmética intervalar. Mostramos que as operações aritméticas intervalares complexas são o CIR das respectivas operações sobre \mathbb{C} .

Apresentamos uma forma de representação polar que facilita as operações e que preservam a inclusão monotônica, trazendo equivalência entre as operações independente da forma de representação do número complexo intervalar. Com isso resolveu-se um problema apontado por Boche [Boche 1966]. Definimos uma relação de equivalência sobre os complexos. Definimos uma relação de ordem total sobre os complexos, embora essa equipare os complexos à reta real em um certo sentido. Definimos máximo e mínimo segundo essa relação de ordem. Na nova representação dos números complexos intervalares na forma polar criamos o conceito de pseudo módulo e suas propriedades algébricas e aritméticas. Definimos a aritmética sobre a nova representação de números complexos na forma polar. Verificamos suas propriedades algébricas. Propomos uma representação de números complexos intervalares na forma da identidade de Euler a partir da nossa representação polar. Apresentamos sua aritmética e algumas propriedades algébricas. Provamos a equivalência das operações aritméticas entre as três formas de representação apresentadas neste trabalho. Estes construtos tem aplicações imediatas nos capítulos posteriores. Como é o caso do módulo do número complexo intervalar que foi de fundamental importância do desenvolvimento de análise da região de convergência no estudo das transformadas- Z . O caso dos números complexos intervalares que tiveram grande utilidade nas manipulações algébricas no estudo das transformada- Z .

Capítulo 4

Princípios de sinais e sistemas intervalares

Um dos principais problemas de processamento de sinais é a representação da informação em *hardware* e/ou software devido a limitações físicas, quanto a capacidade de lidar com incerteza e complexidade da representação da informação. As incertezas podem ser inerentes ao sinal, das limitações dos sensores, do modelo matemático escolhido para representar o sistema, limitações físicas de implementações, ou devido a incerteza de algumas operações implementadas em dispositivos de DSP.

Os métodos intervalares representam uma direção relativamente nova de pesquisas em processamento digital de sinais [Edmonson 2001]. Os métodos intervalares são adequados para processamento de sinais com incerteza porque os algoritmos intervalares incluem infinita precisão (intervalos contínuos) em seus resultados, além de preservar as incertezas dos sistemas e tratar os erros computacionais. Assim o uso da matemática intervalar em processamento de sinais aumenta a fidelidade entre o modelo matemático e o sistema real. Devido a isso, nos últimos anos, intervalos vem sendo usados para modelar este tipo de incerteza em processamentos de sinais.

Moore [Moore 1979] propõe o controle intervalar para erros causados por operações com representação numérica finita. Os intervalos nos facultam várias interpretações semânticas, e aqui neste trabalho, intervalos de extremos reais possuem a mesma interpretação dada por Santiago et al. [Santiago et al. 2006], onde intervalos e funções intervalares são vistos como representação de números e funções reais, respectivamente.

Na literatura existem vários trabalhos que usam sistemas lineares e intervalos, mas nenhum deles propôs uma fundamentação teórica, uma extensão formal das suas propriedades básicas para uma versão intervalar. Geralmente estão relacionados a uma aplicação específica. Por isso, este trabalho propõe uma extensão das propriedades básicas de sistemas lineares tais como causalidade, linearidade, invariância no tempo, estabilidade, etc. com uma perspectiva de aplicação em processamento digitais de sinais.

A matemática intervalar, vem sendo usada em processamento de sinais como uma ferramenta para representar suas incertezas, que podem ser derivadas, da precisão finita da representação numérica, limitada precisão de sensores, processos de quantização, ou ser inerentes ao próprio sistema. Em alguns sistemas de controle implementados em software ou *hardware* as incertezas do sistema são consequências da instabilidade da variável, da variação do sinal, ou faixa de segurança de alguns atuadores. Existem muitos trabalhos

com aplicações específicas nesta área, poucos fazem uma boa fundamentação teórica de matemática intervalar aplicada a processamento de sinais. Este capítulo pretende ser um começo de fundamentação matemática intervalar para processamento de sinais. Aqui adotaremos uma abordagem analítica para tratar sistemas lineares intervalares, com perspectiva de aplicação em processamento de sinais intervalares. Propomos o uso de sistemas lineares intervalares para representar sistemas reais, onde os intervalos representam as incertezas do sistema. Neste capítulo usaremos sistemas lineares invariantes no tempo com uma entrada e uma saída(SISO), estendendo suas propriedades básicas para uma versão intervalar. Propomos uma convolução intervalar com base na integral de Moore, a qual representará com melhor acuracidade as incertezas dos sistemas e sinais.

Todas as vezes que empregamos matemática para estudar alguns fenômenos de observação, devemos começar por construir um modelo matemático (determinístico ou probabilístico) para esses fenômenos. Inevitavelmente, o modelo deve simplificar (reduzir o espaço) e certos pormenores dos fenômenos serão desprezados. O bom resultado do modelo depende de que os pormenores desprezados sejam ou não realmente sem importância na elucidação dos fenômenos estudados. A resolução do problema matemático pode estar correta e, não obstante, estar em grande discordância com os dados observados, simplesmente porque as hipóteses básicas feitas não estão de acordo com a natureza dos fenômenos. Geralmente é bastante difícil afirmar com certeza se um modelo matemático especificado é ou não adequado, antes que alguns dados de observação sejam obtidos. A fim de verificar a validade de um modelo, deveremos deduzir um certo número de consequências de nosso modelo e, a seguir, comparar esses resultados previstos com observações.

Nossa contribuição consiste basicamente em propriedades elementares de processamentos de sinais como estabilidade, linearidade, invariância no tempo. Contribuiremos também com uma versão de sistemas lineares invariantes no tempo intervalar, outra contribuição será um modelo de convolução intervalar com o tempo real e versão contínua suportada pela a integral de Moore [Moore 1979] e por Callejas-Bedregal e Bedregal [Callejas-Bedregal & Bedregal 2005] e a versão discreta suportada pela noção de convergência de seqüências intervalares apresentada nos trabalhos [Oliveira et al. 1997], [Moore 1979] e [Trindade 2002]. Trataremos sistemas lineares intervalares com uma perspectiva de aplicações em processamento de sinais, numa abordagem analítica. Pretendemos analisar as restrições que se devem aplicar aos sistemas lineares intervalares para que estes possam servir de modelos matemáticos na representação de sistemas reais em processamento de sinais digitais. Ainda neste trabalho se busca analisar as peculiaridades resultantes da aritmética intervalar sobre um sistema intervalar no campo semântico de processamento de sinais digitais. Além de preparar uma fundamentação teórica para uma definição de convolução intervalar discreta que capte e represente com maior fidelidade os sistemas e sinais usados em processamento de sinais intervalares.

Neste capítulo apresentaremos, na seção 4.1, princípios gerais de sistemas e sinais intervalares. Embora estejamos usando a notação de sistemas contínuos, muitos desses princípios também se aplicam aos sistemas discretos. Na seção 4.2 apresentaremos alguns princípios de sinais e sistemas contínuos e na seção 4.3 alguns princípios de sinais e sistemas discretos. Algumas propriedades, como as propriedades básicas, só serão apre-

sentadas a versão contínua, tendo em vista a grande similaridade entre as duas versões.

4.1 Sinais e sistemas intervalares

Esta seção pretende contribuir com o melhoramento linguístico na representação formal de sistemas e sinais, juntando o processamento de sinais à matemática intervalar com base nos trabalhos [Lyra 2003], [Santiago et al. 2006], [Vaccaro 2001], [Chen 1999], [Smith 1999] e [Oppenheim & Schaffer 1989].

4.1.1 Sinais intervalares

Encontramos na literatura definições para alguns tipos de sinais intervalares isolados, mas nenhuma definição consolidada. Em [Grigoletti et al. 2005] e [Grigoletti et al. 2006] o sinal elétrico é tratado de forma intervalar, onde a resistência é vista de forma intervalar pelo software FINCA. Edmonson trata um sinal sintético, uma senóide com ruído aditivo [Edmonson et al. 2000]. Por isso, a definição seguinte é uma maneira genérica de definir sinal intervalar para o escopo deste trabalho.

Definição 86 (Sinal intervalar) *Chamaremos aqui de **sinal intervalar** um sinal que carregue em si uma quantidade de incerteza e é representado por um intervalo limitado nos seus extremos pelo mínimo e o máximo que o sinal pode assumir, sendo o diâmetro do intervalo a quantidade de incerteza que o sinal carrega.*

4.1.2 Sistemas intervalares

Como apresentado na seção anterior, encontramos alguns trabalhos que lidam com sistemas intervalares, focados na aplicação de cada trabalho. Encontramos alguns trabalhos que fazem uso de sistemas intervalares como: Arndt [Arndt 2007] que analisa convergência de sistemas de equações com matrizes intervalares e aritmética intervalar complexa, Buslowicz e Kaczorek [Buslowicz & Kaczorek 2004] aborda estabilidade em sistemas positivo intervalares discretos, Edmonson et al. usa métodos intervalares para controle de sistemas biológicos em [Edmonson et al. 2007], Shary trata sistemas intervalares dinâmicos e lineares e invariantes no tempo. Em Vaccaro [Vaccaro 2001] encontram-se métodos de resolução de sistemas intervalares, equações polinomiais intervalares. Vehí usa matemática intervalar em redes neurais e sistemas neuro-fuzzy. Embora todos esses trabalhos usem de alguma maneira sistemas intervalares, nenhum deles faz uma abordagem genérica, a ponto de definir genericamente o que é um sistema intervalar. Nesta seção, propomos uma definição para sistemas intervalares genéricos no âmbito de processamento de sinais.

Definição 87 (Sistemas intervalares) *Seja $L : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$, $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}$ e $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}$ sistemas quais quer. L , H e W são sistemas intervalares. Chamaremos de sistemas intervalares qualquer processo que manipula, de alguma maneira, dados intervalares.*

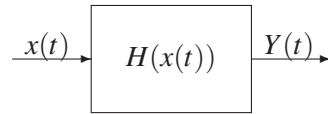


Figura 4.1: Sistema semi intervalar onde $x(t)$ é real, $Y(t)$ é um grandeza intervalar e $H(x(t))$ é uma função intervalar

Dividiremos os sistemas intervalares em 2 tipos: semi-intervalar e estritamente intervalar.

Definição 88 (Semi-intervalar) *É o sistema que tem pelo menos uma parte real e outra intervalar.*

Um exemplo de um sistema semi-intervalar de entrada real, saída intervalar e processamento intervalar como mostrado na figura 4.1.

Definição 89 (Estritamente-intervalar) *É um sistema que tem suas três partes intervalares.*

Podemos ver um exemplo de um sistema estritamente-intervalar na figura 4.2.

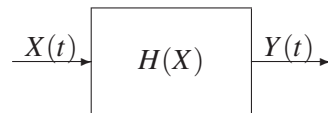


Figura 4.2: Sistema estritamente intervalar onde $X(t)$ e $Y(t)$ são grandezas intervalares e $H(X)$ é uma função intervalar

4.1.3 Propriedades básicas de sistemas intervalares

Os sistemas intervalares, assim como os não intervalares, podem ser classificados de acordo com algumas propriedades. As mais estudadas em processamento de sinais são: linearidade, invariância no tempo, causalidade, estabilidade e inversibilidade. Neste seção apresentaremos suas versões intervalares.

Uma extensão intervalar de sistemas lineares sem memória pode ser assim definida.

A causalidade é uma noção básica para processamento de sinais em \mathbb{R} ou em \mathbb{C} . Sua extensão para a versão intervalar é trivial.

Definição 90 (Causalidade em sistemas intervalares) *Um sistema intervalar é causal se para todos os valores n_0 a sequência de saída até o índice $n = n_0$ depende somente dos valores de entradas $n \leq n_0$.*

Um exemplo de um sistema intervalar causal é um medidor de resistência intervalar, onde o resultado da medição depende apenas do resistor que está sendo apresentado ao sistema, não dependendo da medida de nenhum outro resistor anterior.

Proposição 47 *Se l for um sistema real causal, então $CIR(l)$ será um sistema intervalar causal.*

Prova:

Temos $CIR(l)(X) = [\min\{l(x) : x \in X\}; \max\{l(x) : x \in X\}]$. Então, pela causalidade de l , para cada n_{01} e n_{02} , $\min\{l(x) : x \in X\}$ depende somente das entrada onde $n_1 \leq n_{01}$ e $\max\{l(x) : x \in X\}$ depende somente da entradas onde $n_2 \leq n_{02}$. Por isso concluímos que $CIR(l)(X)$ depende somente da entradas onde $n \leq \max\{n_{01}, n_{02}\}$. Logo $CIR(l)(X)$ é causal. ■

A definição abaixo é uma generalização do conceito usual de estabilidade para sistemas em \mathbb{R} ou em \mathbb{C} .

Definição 91 (Estabilidade de sistema intervalar) *Dizemos que um sistema intervalar é estável, BIBO (do inglês bounded-input bounded-output), se e somente se para cada entrada limitada produz uma saída limitada. A entrada é limitada se existe um valor intervalar fixo positivo B_x tal que :*

$$|X[n]|_I \leq B_x \prec [\infty; \infty] \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Então existe um valor intervalar fixo positivo B_y tal que:

$$|Y[n]|_I \leq B_y \prec [\infty; \infty] \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

No caso semi-intervalar é só considerar a entrada como um intervalo degenerado.

Lema 1 *Seja l um sistema real estável e contínuo. Então existe um real b tal que $l(x) \leq b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Prova:

Direto da definição 91. ■

Teorema 12 *l é um sistema real estável e contínuo, se e só se $CIR(l)$ é um sistema intervalar estável e contínuo*

Prova:

(\Leftarrow) Seja $X(t)$ uma sequência intervalar limitada de entrada. Então existe um real b_X satisfazendo a definição 25. Entretanto, para cada $x(t) \in X(t)$, $|x(n)| \subset |X(t)|_I$ então $|x(t)| \subset |X(t)|_I \leq B_X \prec [\infty; \infty]$. Como $CIR(l)$ representa, $l(x(t)) \in CIR(l)(x(t))$ e $|l(x(t))| \subset |CIR(l)(x(t))|_I$. Portanto, $x(t)$ é limitado. A continuidade sai pelo trabalho de Santiago et al [Santiago et al. 2006].

(\Rightarrow) Seja $y(t) = l(x(t))$. Já que l é estável então satisfaz $|y(t)| \leq b_{y(t)} < \infty$, para algum real $b_{y(t)}$. Pelo lema 1 e o teorema de Bolzano-Weistrass, $b_y = \sup\{b_{y(t)} : y(t) \in CIR(l)(X(t))\}$ existe. Logo, $|y(t)| \leq b_{y(t)} \leq b_y < \infty$. Portanto $|Y(t)| = |CIR(l)(X(t))| \leq b_y < \infty$. Conclui se que $CIR(l)$ é estável. A continuidade do CIR sai pelo trabalho de Santiago et. al. [Santiago et al. 2006]. ■

Definição 92 (Sistema intervalar sem memória) *Um sistema intervalar H é dito sem memória se $Y(t)$ depende apenas da sua entrada $X(t)$ (ou $x(t)$ no caso semi-intervalar).*

Podemos construir um exemplo, supondo que o sistema da figura 4.3 seja composto por um resistor $R(t)$ que, quando aplicado uma tensão $v(t)$, tem uma saída $i(t)$. Supondo que a entrada, $v(t)$, fosse intervalar, devido a imprecisões do sistema, teríamos uma saída $i(t)$ também intervalar. Este seria um típico sistema **pseudo-intervalar** sem memória. Supondo a tensão real e $R(t)$ um potenciômetro que oscila em um intervalo real de valores, a saída $i(t)$ também oscilaria em um intervalo real de valores, o que caracterizaria um sistema **semi-intervalar** sem memória. Supondo tanto o valor da tensão de entrada quanto o valor resistor grandezas intervalares, teríamos um sistema **estritamente intervalar** sem memória.

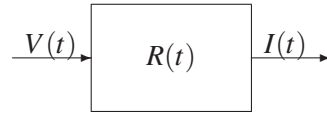


Figura 4.3: Sistema intervalar sem memória

Definição 93 (Sistema intervalar invariante no tempo) *Um sistema intervalar L diz-se **invariante no tempo** quando uma variação no tempo da seqüência de entrada causa a mesma variação no tempo da seqüência de saída, isto é, se $X_1(n) = X(n - n_0) \Rightarrow L(X_1(n)) = L(X(n - n_0))$.*

Proposição 48 *Se l for um sistema invariante no tempo, $CIR(l)$ será um sistema invariante no tempo.*

Prova:

Seja $x(t) = x(t - t_0)$. Então, $\forall x(t) \in X(t)$, temos $x(t) = x(t - t_0)$ e, portanto, $l(x(t)) = l(x(t - t_0))$. Logo, $\{l(x(t)) : x(t) \in X(t)\} = \{l(x(t - t_0)) : x(t - t_0) \in X(t)\}$. Portanto, $CIR(l)(X(t)) = CIR(l)(X(t - t_0))$, ou seja, $CIR(l)$ é invariante no tempo. ■

Para um sistema invariante no tempo podemos usar um sistema indutor como exemplo. Seja $v(t)$ o sinal de entrada, a corrente que flui através do sistema, $i(t)$ o sinal de saída do sistema e l a indutância. O sistema seria assim descrito.

$$i(t) = \frac{1}{l} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau.$$

Teremos um exemplo de um sistema **pseudo-intervalar** se tomarmos a entrada $v(\tau)$ como uma grandeza intervalar. O sistema assim descrito:

$$I(t) = \frac{1}{l} \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau.$$

Tomando apenas L como uma grandeza intervalar, teremos um sistema **semi-intervalar**

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau.$$

Quando L e $V(t)$ forem grandezas intervalares teremos um exemplo de um sistema **estritamente intervalar**

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau.$$

Definição 94 (Sistema intervalar aditivo) *Um sistema intervalar H será **aditivo** se a resposta de um somatório de entradas for um somatório de saídas correspondentes às respectivas entradas. Formalmente, $H(X_1 + X_2) = H(X_1) + H(X_2)$.*

Proposição 49 *Existe sistema **estritamente-intervalar** aditivo.*

Prova:

Para que um sistema estritamente-intervalar seja aditivo é preciso que ele seja restrito a \mathbb{IR}^+ . Suponha qualquer sistema intervalar positivo do tipo $H(X(t)) = KX(t)$, onde K é uma constante intervalar positiva, isto é, $\forall k \in K \Rightarrow k > 0$. então, temos

$$H(X(t) + Y(t)) = K(X(t) + Y(t)). \quad (4.3)$$

Com a garantia que $K, X(t)$ e $Y(t) > 0$ podemos aplicar a distributividade

$$K(X(t) + Y(t)) = KX(t) + KY(t) = \quad (4.4)$$

$$= KX(t) + KY(t) = H(X(t)) + H(Y(t)). \quad (4.5)$$

■

Para que a distributividade da multiplicação intervalar sobre a adição seja satisfeita é necessário que o sistema seja restrito a valores positivos.

Proposição 50 *Existe sistema **semi-intervalar** aditivo.*

Prova:

É só tomarmos um sistema estritamente intervalar com entrada intervalos degenerados ■

Proposição 51 *Seja l um sistema real aditivo. Então, $CIR(l)$ é um sistema intervalar aditivo.*

Prova:

$$\begin{aligned}
CIR(l)(X_1 + X_2) &= \\
&= [\min l(X_1 + X_2); \max l(X_1 + X_2)] \\
&= [\min\{l(x_1 + x_2) : x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in X_2\}; \max\{l(x_1 + x_2) \\
&\quad : x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in X_2\}] \\
&= [\min\{l(x_1) + l(x_2) : x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in X_2\}; \max\{l(x_1) \\
&\quad + l(x_2) : x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in X_2\}] \\
&= [\min l(X_1) + \min l(X_2); \max l(X_1) + \max l(X_2)] \\
&= [\min l(X_1), \max l(X_1)] + [\min l(X_2), \max l(X_2)] \\
&= CIR(l)(X_1) + CIR(l)(X_2). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definição 95 (Sistema intervalar homogêneo) *Um sistema intervalar, L , diz-se **intervalar homogêneo** se a saída do sistema para uma entrada multiplicada por uma constante for a saída do sistema para a respectiva entrada multiplicada pela constante. Formalmente,*

$$L(CX) = CL(X).$$

Esta propriedade não é genérica em sistemas lineares intervalares, ela ocorre somente em casos particulares. Devido a falta de propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Proposição 52 *Seja L um sistema intervalar homogêneo. Então, existe $K \in \mathbb{I}\mathbb{R}$ tal que, para cada $X \in \mathbb{I}\mathbb{R}$,*

$$L(X) = KX. \quad (4.6)$$

Prova:

Seja $K = L([1; 1])$ então, pela homogeneidade de L , $L(X) = L(X[1; 1]) = XL([1; 1]) = KX$. \blacksquare

Proposição 53 *Seja l um sistema real homogêneo. Então, $CIR(l)$ é um sistema intervalar aditivo.*

Prova:

Se l for real homogêneo, então l será real aditivo. Logo, pela proposição 51, $CIR(l)$ é aditivo. \blacksquare

Proposição 54 *Seja l um sistema real homogêneo. Então, $CIR(l)$ é um sistema intervalar homogêneo.*

Prova:

$$\begin{aligned}
CIR(l)(CX) &= [\inf l(CX), \sup l(CX)] \\
&= [\min\{l(cx) : c \in C \text{ e } x \in X\}; \max\{l(cx) : c \in C \text{ e } x \in X\}] \\
&= [\min\{cl(x) : c \in C \text{ e } x \in X\}; \max\{cl(x) : c \in C \text{ e } x \in X\}] \\
&= [\min\{ckx : c \in C \text{ e } x \in X\}; \max\{ckx : c \in C \text{ e } x \in X\}] \\
&= [k; k] \cdot [\min\{cx : c \in C \text{ e } x \in X\}; \max\{cx : c \in C \text{ e } x \in X\}] \\
&= [k; k] \cdot C \cdot X \\
&= C \cdot K \cdot X \text{ pela proposição 52} \\
&= C \cdot CIR(l)(X).
\end{aligned}$$

■

Corolário 13 *Seja l um sistema homogêneo. Então $\forall X \in \mathbb{IR}$, $CIR(l)(X) = KX$, onde $K = [k; k]$ com $k = l(1)$.*

Prova:

Direto das proposições 52 e 54.

■

4.1.4 Sistemas lineares intervalares

Como a aritmética intervalar não tem a propriedade distributiva, existe um grande problema na construção de uma versão intervalar de sistemas lineares.

Definição 96 (Sistema linear intervalar) *Um sistema intervalar L diz-se **linear** se para toda sequência intervalar $X(t)$, $X_1(t)$ e $X_2(t)$ e uma constante intervalar C , $L(X(t))$, $L(X_1(t))$ e $L(X_2(t))$ forem sequências intervalares,*

$$L(X_1(t) + X_2(t)) = L(X_1(t)) + L(X_2(t)) \quad (4.7)$$

e

$$L(CX(t)) = CL(X(t)). \quad (4.8)$$

As equações (4.7) e (4.8) são chamadas propriedade da aditividade e homogeneidade, respectivamente. Elas podem ser combinadas para formar o princípio da superposição, como mostra a equação 4.9

$$L(CX_1(t) + C'X_2(t)) = CL(X_1(t)) + C'L(X_2(t)). \quad (4.9)$$

Uma análise da condição de existência de sistemas lineares intervalares não será tratada neste trabalho, mas [Hansen 2004, Buslowicz & Kaczorek 2004, Skalna 2006] abordam esse tema.

Proposição 55 *Seja l um sistema linear real. Então, $CIR(l)$ é um sistema linear intervalar.*

Prova:

Extensão direta das proposições 51 e 54. ■

Reciprocamente, cada sistema linear intervalar é uma representação canônica intervalar de um sistema linear real. Antes provaremos o seguinte lema.

Lema 2 *Seja L um sistema linear intervalar. Então, $L([0;0]) = [0;0]$.*

Prova:

Suponha que $L([0;0]) \neq [0;0]$. Então $L(X + [0;0]) = L(X) \neq L(X) + L([0;0])$. Logo, L não seria linear, o que é uma contradição. ■

Lema 3 *Seja L um sistema linear intervalar. Então, para cada intervalo degenerado X , $L(X)$ é também um intervalo degenerado.*

Prova:

Suponha que $[x;x]$, $L([x;x]) = [y_1, y_2]$. Pelo lema 2, $L([0;0]) = [0;0]$ e, portanto, $L([x;x] - [x;x]) = L([0;0]) = [0;0]$. Então, $[0;0] = L([x;x] - [x;x]) = L([x;x]) - L([x;x]) = [y_1, y_2] - [y_1, y_2] = [y_1 - y_2, y_2 - y_1]$. Mas, $[y_1 - y_2, y_2 - y_1] = [0;0]$ se e somente, $y_1 = y_2$. Portanto, $L([x;x])$ é um intervalo degenerado. ■

Teorema 13 *Seja L um sistema linear intervalar. Então, existe um sistema linear real l , tal que $L = CIR(l)$.*

Prova:

Seja $X \in \mathbb{IR}$. Pela proposição 52, $L(X) = KX$, onde $K = L([1;1])$. Então, pelo lema 3, $K = [k;k]$. Tomando $l(x) = \pi_1(L([x;x]))$, temos $l(1) = k$. Ainda

$$\begin{aligned} l(x) &= \pi_1(L([x;x])) \\ &= \pi_1([k;k][x;x]) \quad (\text{pela equação 4.6}) \\ &= \pi_1[kx; kx] \\ &= kx. \end{aligned}$$

Entretanto, l é um sistema linear e, temos,

$$\begin{aligned} L(X) &= [k;k]X \\ &= \{kx : x \in X\} \\ &= \{l(1)x : x \in X\} \\ &= \{l(1x) : x \in X\} \\ &= \{l(x) : x \in X\} \\ &= CIR(l)(X). \end{aligned}$$

■

Proposição 56 *Seja l um sistema linear real, então*

$$\int_a^b l(x)dx = l\left(\int_a^b xdx\right)$$

Prova:

Resultado conhecido da análise real e do cálculo. ■

Teorema 14 *Seja $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}$ um sistema linear semi-intervalar, então*

$$\int_a^b L(x)dx = L\left(\int_a^b xdx\right).$$

Prova:

Como L é um sistema linear semi-intervalar, existe um intervalo K para todo x , tal que $L(x) = Kx$. Logo,

$$\int_a^b L(x)dx = \int_a^b Kx dx = K \int_a^b x dx = L\left(\int_a^b x dx\right). \quad \blacksquare$$

4.2 Sistemas intervalares contínuos

Este trabalho proporá uma versão semi-intervalar da função delta δ . Não trataremos a quantidade de energia e nem a duração do impulso como grandezas intervalares, embora representaremos a função δ_i semi-intervalar como um intervalo degenerado.

Uma definição da função impulso intervalar é encontrada no trabalho de Lyra [Lyra 2003]. A função impulso contínua é representada pela função delta de Dirac. É uma maneira de representar um fenômeno que tem amplitude infinita, duração nula e energia finita. Um fenômeno assim não poder ser representado por uma função matemática. A representação delta de Dirac é a que mais se aproxima de um fenômeno assim. Como exemplo de um sistema intervalar contínuo temos o circuito RLC, mostrado na figura 4.4, onde, resistor R , o capacitor C e o indutor L são intervalares e estão conectados em série.

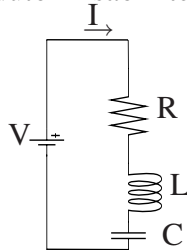


Figura 4.4: Circuito RLC em série

Um sinal muito importante em processamento de sinais é sinal impulso. Mas ele não pode ser representado por uma função matemática, por que nenhuma função matemática

pode atender aos requisitos do sinal impulso que deve representar um sinal instantâneo, com energia finita e amplitude infinita. Mas, o impulso pode ser aproximado pela função δ de Dirac definida da seguinte maneira.

$$\begin{cases} \delta(t) = 0; \text{ para } t \neq 0 \\ e \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \end{cases}$$

Ou seja, impulso é um sinal composto por zero em todo o seu domínio exceto em um ponto.

Definição 97 (Função impulso intervalar) Chamaremos de **função impulso intervalar** a função *semi-intervalar* $\delta_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}$ definida por

$$\delta_i(t) = [\delta(t); \delta(t)].$$

Proposição 57 A função δ_i satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} \delta_i(t) = [0; 0] \text{ para } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_i(t) dt = [1; 1]. \end{cases}$$

Prova:

Se $t \neq 0$, então $\delta_i(t) = [\delta(0); \delta(0)] = [0; 0]$. Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_i(t) dt &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\delta_i(t)} dt; \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\delta_i(t)} dt \right] \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt; \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt \right] \\ &= [1; 1]. \end{aligned}$$

■

A função δ_i tem propriedades similares à função real δ . Por isso, podemos estender suas propriedades para descrever sequência intervalares contínuas, usando a integral de Moore indefinida.

Lema 4 Sejam $X(t) X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}$, um sinal representado por uma sequência intervalar contínua, δ_i a função impulso intervalar e $t, \tau \in \mathbb{R}$. Então:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau) \delta_i(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \delta_i(t - \tau) d\tau.$$

Prova:

Se $\tau \neq t$. Então, $t - \tau \neq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} X(\tau) \delta_i(t - \tau) &= X(\tau) [0; 0] \\ &= [0; 0] \\ &= X(t) [0; 0] \\ &= X(t) \delta_i(t - \tau). \end{aligned}$$

Se $\tau = t$. Então,

$$X(\tau)\delta_i(t-\tau) = X(t)\delta_i(t-\tau).$$

Então $\forall \tau \text{ e } t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X(\tau)\delta_i(t-\tau) &= X(t)\delta_i(t-\tau) \\ \text{e portanto} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)\delta_i(t-\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\delta_i(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

■

Teorema 15 *Seja $X(t)$ um sinal representado por uma sequência intervalar. Então,*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)\delta_i(t-\tau)d\tau.$$

Prova:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)\delta_i(t-\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\delta_i(t-\tau)d\tau \text{ Pelo lema 4,} \\ &= X(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_i(t-\tau)d\tau \text{ Pela proposição 57,} \\ &= X(t). \end{aligned}$$

■

Definição 98 (Resposta ao impulso contínuo) *A resposta ao impulso de um sistema linear intervalar, L , denotada por H , é*

$$H(t) = L(\delta_i(t)). \quad (4.10)$$

Teorema 16 *Seja L um sistema linear intervalar, $X(t)$ um sinal intervalar, $H(t)$ a resposta ao impulso de L e $Y(t)$ a saída do sistema. Então,*

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)H(t-\tau)d\tau.$$

Prova:

Para o sistema intervalar

$$Y(t) = L(X(t))$$

Pela teorema 15, $X(t)$ pode ser escrito como uma soma infinita da função impulso, portanto,

$$\begin{aligned} Y(t) &= L\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)\delta_i(t-\tau)d\tau\right) \text{ (Pelo teorema 15)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} L(X(\tau)\delta_i(t-\tau))d\tau \text{ (Pelo teorema 14)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)L(\delta_i(t-\tau))d\tau \text{ (pela equação (4.10))} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)H(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

■

4.2.1 Convolução intervalar contínua

Nesta seção usaremos a integral de Moore para representar a convolução intervalar contínua. Vamos usar uma “deficiência” que é a de não tratar de forma intervalar os limites de integração. Pois, como dissemos seção anterior, a função impulso é instantânea. Essa “deficiência” da integral de Moore nos permite captar a instantaneidade de impulso e construir a convolução intervalar contínua. Essa característica da integral de Moore é fundamental no desenvolvimento e na representação de sistemas cujas incertezas estão nos dados de entradas e não no sistema.

Definição 99 (Convolução intervalar contínua) Chamamos **convolução intervalar** de um sinal contínuo, $Y(t)$, a soma infinita de respostas ao impulso de uma sequência de entrada, $X(t)$, pelo sistema $H(X(t))$, uma função intervalar, com saída $Y(t)$ denotada por

$$X(t) * H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)H(t - \tau)d\tau = Y(t). \quad (4.11)$$

Propriedades da convolução intervalar contínua

Proposição 58 (Comutatividade contínua) A convolução intervalar contínua é comutativa, ou seja

$$X(t) * H(t) = H(t) * X(t).$$

Prova:

Por definição, temos

$$X(t) * H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)H(t - \tau)d\tau. \quad (4.12)$$

Pela comutatividade da multiplicação intervalar temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t - \tau)X(\tau)d\tau. \quad (4.13)$$

Logo, pela propriedade de invariância no tempo dos sistemas podemos concluir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)X(t - \tau)d\tau = H(t) * X(t). \quad (4.14)$$

■

Proposição 59 (Associatividade da convolução intervalar contínua) A convolução intervalar é associativa.

Prova:

$$(X(t) * H(t)) * G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)H(t - \tau)d\tau \right) G(t - k)dk \quad (4.15)$$

O termo entre colchetes pode ser considerado uma constante em relação à variável k e a equação 4.15 pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)H(t-\tau)d\tau \right] G(t-k)dk = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)H(t-\tau)d\tau \right] \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-k)dk. \quad (4.16)$$

Pela comutatividade da multiplicação, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)H(t-\tau)d\tau \right] G(t-k)dk = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-k)dk \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)H(t-\tau)d\tau. \quad (4.17)$$

Pela homogeneidade e aditividade, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t-k)dk \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)H(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-k)dk X(t)H(t-\tau)d\tau. \quad (4.18)$$

De novo, pela comutatividade da multiplicação,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)G(t-k)dk H(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)G(t-k)dk \right] H(t-\tau)d\tau. \quad (4.19)$$

Logo a convolução intervalar é comutativa. ■

Com a convolução intervalar, como apresentada nesta seção, podemos manipular sinais intervalares e fazer análise de sistemas intervalares ruidosos.

4.3 Sinais e sistemas intervalares discretos

Esta seção contribui com uma fundamentação matemática para processamento digitais de sinais intervalares com sistemas lineares intervalares. Pretendemos que ela seja instrumento na análise dos ganhos e das restrições no uso de sistemas lineares intervalares, como modelos matemáticos na representação de sistemas reais em processamento digitais de sinais. Culminaremos com uma definição de convolução intervalar, que achamos captar e representar com maior fidelidade os sistemas e sinais usados em processamento digital de sinais intervalares. Ainda, pretendemos que ele seja o início de uma fundamentação matemática para o estudo e análise de sinais e sistemas no processamento digital de sinais intervalares.

Neste trabalho serão chamados sinais e sistemas intervalares digitais, todos os sinais ou processos que tenham uma representação em codificações digitais, onde um intervalo puder representar suas incertezas ou faixa de valoração.

Para isso precisamos construir alguns conceitos e fazer algumas convenções, como é o caso do intervalo digital.

Definição 100 (Intervalo digital) *Um intervalo de \mathbb{IR} diz-se **digital** se seus extremos puderem ser representados por cadeias de tamanho limitado no sistema binário de codificação. O conjunto é representado por \mathbb{ID} , onde $\mathbb{ID} \subset \mathbb{IR}$.*

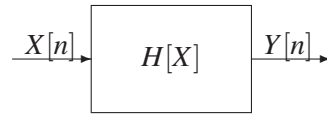


Figura 4.5: Sistema digital intervalar onde $X[n]$ pode pertencer a \mathbb{ID} e $Y[n] \in \mathbb{ID}$ e $H[X]$ pode ser uma função intervalar

O intervalo digital é também chamado **intervalo de máquina**.

4.3.1 Sinais intervalares digitais

A definição de sinais intervalares digitais deste trabalho será baseada no conceito usado em Oppenheim e Schaffer [Oppenheim & Schaffer 1989], Chen [Chen 1999] e Lyra [Lyra 2003].

Definição 101 (Sinal intervalar digital) Chamaremos **sinal intervalar digital** um sinal representado por uma sequência de intervalos digitais $X[n]$, sendo o diâmetro de cada termo da sequência a quantidade de incerteza que o sinal carrega.

4.3.2 Sistemas digitais intervalares

Neste trabalho chamaremos de sistemas digitais intervalares qualquer processamento de sinal que manipule, de alguma maneira, dados intervalares digitais, que é uma restrição sobre a definição 87, formando um subconjunto dos sistemas intervalares definidos em Trindade et al. [Trindade et al. 2008], onde os intervalos de representação pertencem a \mathbb{ID} .

Neste trabalho usaremos o termo sistema digital intervalar para qualquer tipo de sistema que trate com dados intervalares, onde os intervalos pertencem a \mathbb{ID} , generalizando os 3 tipos de sistemas tratados em Trindade et al. [Trindade et al. 2008].

Podemos generalizar um sistema digital intervalar, como mostra na figura 4.5, onde $X[n]$, $H[n]$ e $Y[n]$ são sequência intervalares digitais discretas.

Na modelagem de sistemas, algumas das suas propriedades se destacam e muitas podem ser usadas para classificar os sistemas. Veremos algumas propriedades importantes na modelagem de sistemas digitais intervalares.

Uma amostra de um sinal intervalar poderia ser representado pela figura 4.6, onde o intervalo X representa o sinal intervalar e a diferença $\bar{X} - \underline{X}$ representa a incerteza do sinal.

Vejam agora a representação da função escada de um sinal intervalar com incerteza constante, como mostra a figura 4.7.

Vejam a intuição de uma função exponencial intervalar com incerteza variável na figura 4.8.

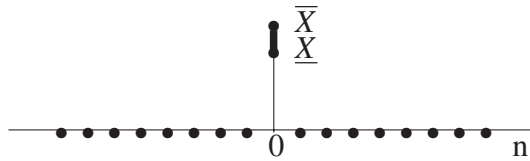


Figura 4.6: Uma amostra de um sinal intervalar

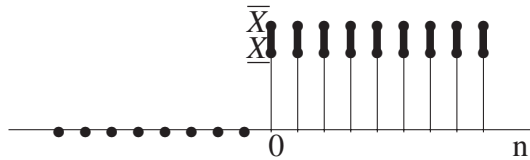


Figura 4.7: A função escada intervalar com incerteza constante

Uma vantagem da função impulso é que uma variedade de sequências intervalares podem ser representadas como uma soma escalar de impulsos deslocados. Matematicamente, temos

$$X[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta[n-k].$$

Consideraremos um sistema genérico, como o descrito na equação (4.20) e mostrado na figura 4.5, onde H é o sistema que mapeia a sequência $X[n]$ nas saídas $Y[n]$.

$$Y[n] = H(X[n]). \quad (4.20)$$

4.3.3 Sequências intervalares discretas

Sinais de tempo discreto são representados matematicamente como uma sequência de números [Oppenheim & Schaffer 1989]. Logo, para construir uma fundamentação matemática para processamento digital de sinais intervalares precisamos de uma versão intervalar de sequências discretas de números reais.

Uma sequência intervalar discreta pode ser originada de uma amostragem periódica de um sinal analógico (contínuo). Neste caso, o valor numérico do n -ésimo termo da sequência é igual ao valor do sinal analógico intervalar $X_a[t]$ no tempo nT ; isto é, $X[n] = X_a(nT)$, onde $-\infty < n < \infty$. T é o **período de amostragem**. Sua inversa é a **frequência de amostragem**.

Um exemplo de discretização usando sequência intervalar pode ser visto na figura 4.10, que representa uma aproximação da função semi-intervalar $X \sin(x)$, onde X é o intervalo $[0, 5; 1]$ e $-\pi \leq x \leq \pi$, cuja versão contínua é mostrada na figura 4.9.

Operações com sequências intervalares discretas

No tratamento de sinais discretos de tempo discreto, sequências podem ser manipuladas de várias maneiras. Para estender processamento digital de sinais para sua versão

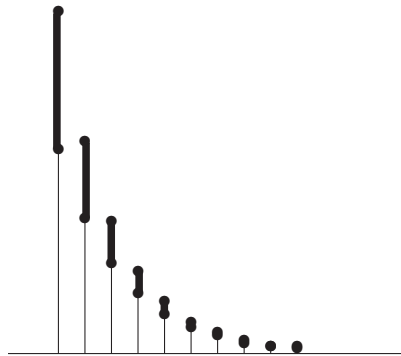


Figura 4.8: A função exponencial intervalar com incerteza variável

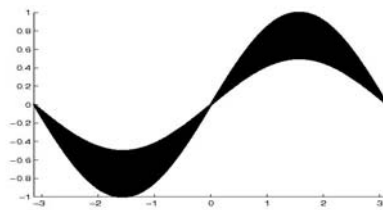


Figura 4.9: Representação gráfica da função semi-intervalar $[0, 5; 1] \sin(x)$ para $-\pi \leq x \leq \pi$

intervalar é necessário fazer o mesmo com as operações básicas sobre sequências discretas, estendendo-as para suas versões intervalares. Em muitos casos, podemos fazer isso, simplesmente, substituindo as operações reais por sua versão intervalar.

A multiplicação e a adição de duas sequências intervalares, $X[n]$ e $Y[n]$, são definidas pelo produto ou pela soma, respectivamente, de amostra por amostra das duas sequências. A multiplicação de uma sequência, $X[n]$, intervalar por uma constante, C , é definida pela multiplicação de cada termo da sequência pela constante. No caso de multiplicação por um número real, c , se torna um caso particular da multiplicação pela constante intervalar, quando C é considerado como o intervalo degenerado $[c; c]$.

Uma sequência intervalar $Y[n]$ diz-se uma versão com **retardo ou atraso(delay)** de

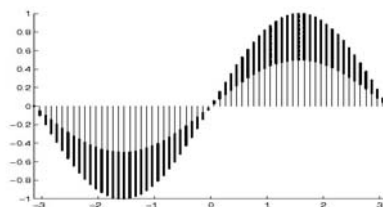


Figura 4.10: Um exemplo de discretização de uma função semi-intervalar usando sequências intervalares na função $[0, 5; 1] \sin(x)$ para $-\pi \leq x \leq \pi$.

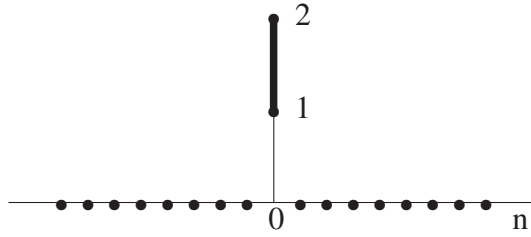


Figura 4.11: A representação gráfica do produto das duas sequências intervalares $\delta_i[n]$ e $X[n] = [1; 2] \forall n \in \mathbb{Z}$.

uma sequência $X[n]$ se $Y[n]$ tiver valores $Y[n] = X[n - n_0]$, para n_0 inteiro.

Definição 102 Seja X_1 e X_2 duas sequências intervalares discretas. $X_1 \leq X_2$ se $X_1[n] \leq X_2[n] \forall n$.

Sequências básicas intervalares

Em processamento de sinal algumas sequências básicas recebem uma atenção especial. Nesta seção, serão apresentadas quatro sequências. Elas são destacadas na maioria dos trabalhos de fundamentação de processamento digital de sinais. Uma delas é o pulso unitário, denotado por $\delta[n]$, que apresentaremos sua versão intervalar na definição 103.

Usaremos a mesma notação que usamos para representar a função impulso intervalar, da definição 97, diferenciando, apenas, o contexto entre contínuo e discreto e da notação $\delta_i(t)$ e $\delta_i[n]$.

Definição 103 (Pulso unitário intervalar) O *Pulso unitário intervalar*, denotado por $\delta_i[n]$, é definido em função de δ como $\delta_i[n] = [\delta[n]; \delta[n]]$.

A figura 4.11 mostra um exemplo do produto de duas sequências intervalares, onde uma é $\delta_i[n]$ e a outra é uma sequência constante definida por $X[n] = [1; 2], \forall n \in \mathbb{Z}$.

A sequência pulso unitário será referida aqui como **impulso de tempo discreto** ou, simplesmente, **impulso**.

Proposição 60 Assim como em processamento de sinais em tempo discreto reais, as sequências intervalares também podem ser representadas em função do impulso, i.e,

$$X[n] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} X[j] \delta_i[n - j].$$

Prova:

Como no caso do somatório de sinais reais, temos todos os termos do somatório nulos, exceto onde $j = n$, pois $\delta_i(0) = [1; 1]$, que multiplicado por $X[j]$ é igual a $X[n]$ ■

A função **degrau unitário**, denotada por $u[n]$, é definida como 0 se $n < 0$ e 1 se $n \geq 0$.

A função degrau também precisa ser estendida para sua versão intervalar. A função degrau unitário intervalar será definida a partir da sua versão real.

Definição 104 (Degrau unitário intervalar) A função *degrau unitário intervalar*, denotada por $\mathbf{u}[n]$, é definida como $\mathbf{u}[n] = [u[n]; u[n]]$.

Proposição 61 A função *degrau unitário intervalar* pode ser representada pelo impulso unitário intervalar. Formalmente,

$$\mathbf{u}[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{\mathbf{i}}[n-k]$$

Prova:

Vemos que o somatório

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{\mathbf{i}}[n-k]$$

tem valor $[0; 0]$, para qualquer $n < 0$, e valor $[1; 1]$, para qualquer $n \geq 0$, o que caracteriza a função *degrau unitário intervalar*. ■

Duas classes de sequências muito importantes em processamento de sinal real e em análises de sistemas lineares discretos e invariantes no tempo são as sequências **exponenciais** e **senoidais**. Devido a sua importância, as suas versões intervalares são investigadas nesse trabalho.

Definição 105 Uma *sequência exponencial intervalar* tem a seguinte forma $X[n] = A\alpha^n$, onde A e α são intervalos.

Dizemos que uma sequência exponencial intervalar é positiva e crescente quando $A \succ [0; 0]$ e $\alpha \succ [1; 1]$ ou $X \prec [0; 0]$, $[0; 0] \prec \alpha \prec [1; 1]$. Dizemos que ela é decrescente quando A é um intervalo positivo e $\alpha \subset (0, 1)$ ou A é um intervalo negativo e $\alpha \subset (1, +\infty)$. Quando $\alpha \subset (-1, 0)$, a sequência é alternada em sinal, mas é decrescente em magnitude que decresce com o crescimento de n . Se $|\alpha| \succ [1; 1]$, a magnitude da sequência decresce com n . O escopo deste trabalho não é suficiente para uma análise detalhada de convergência de sequências intervalares. Isso será abordado em trabalho futuro.

Na figura 4.8 é apresentada uma ilustração gráfica de uma sequência exponencial, onde A é um intervalo positivo e $\alpha \subset (0; 1)$.

Definição 106 Uma *sequência intervalar senoidal* pode ser definida da seguinte maneira

$$X[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) \text{ para todo } n, \text{ ou} \quad (4.21)$$

$$X[n] = A \sin(\omega_0 n + \phi) \text{ para todo } n. \quad (4.22)$$

A figura 4.10 contém uma representação da sequência da equação (4.22), onde $X = [0, 5; 1]$, $\omega_0 = \frac{\pi}{32}$, $\phi = 0$ e $-31 \leq n \leq 32$.

No caso em que a sequência exponencial intervalar tenha A e α complexos, pode-se reescrever esses intervalos como complexos na forma da identidade de Euler $|A|e^{j\phi}$ e

$|\alpha|e^{j\omega_0}$, respectivamente. Dessa forma, a equação 4.21 será reescrita como

$$\begin{aligned} X[n] &= A\alpha^n \\ &= |A|e^{j\phi}|\alpha|e^{j\omega_0 n} \\ &= |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \phi)} \\ &= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A||\alpha|^n \text{sen}(\omega_0 n + \phi). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Quando $\alpha = 1$ na equação 4.23, obtém-se uma **sequência exponencial complexa**, como mostra a seguir.

$$\begin{aligned} X[n] &= |A|e^{j(\omega_0 n + \phi)} \\ &= |A| \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A| \text{sen}(\omega_0 n + \phi). \end{aligned} \quad (4.24)$$

O capítulo 3 explorou um pouco mais as exponenciais complexas.

É fácil ver que quando $|X|_I = [\min\{|x| : x \in X\}, \max\{|x| : x \in X\}]$, a equação (4.24) pode ser reescrita por uma soma das equações (4.21) e (4.22). Logo, podemos construir um tipo de sequência exponencial complexa intervalar. Ela é um tipo particular das sequências complexas intervalares, onde somente a magnitude é intervalar. Estas sequências podem ser usadas para representar sistemas que tenham incertezas, apenas, na magnitude e não na fase.

Seja $X : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{IR}$ uma sequência intervalar, a e b os índices do primeiro e do último elemento da sequência, respectivamente. O **somatório intervalar** de todos os $X[n]$, com $a \leq n \leq b$, é definido por

$$\sum_{i=a}^b X[i] = \left[\sum_{i=a}^b \underline{X}[i]; \sum_{i=a}^b \overline{X}[i] \right]. \quad (4.25)$$

Uma extensão da equação (4.25) pode ser escrita como segue.

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} X[i] = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \underline{X}[i]; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \overline{X}[i] \right]. \quad (4.26)$$

Teorema 17 (Multiplicação de uma constante intervalar por um somatório) *Seja C uma constante intervalar. Então,*

$$C \sum_{i=a}^b X[i] \subseteq \sum_{i=a}^b CX[i].$$

Prova:

Uma generalização da propriedade sub-distributiva ■

Devido à sub-distributividade, os sistemas lineares intervalares são aplicados somente em sistemas intervalares estritamente positivos ou estritamente negativos, isto é, para sistemas lineares onde $\forall n \ L[X[n]] \in \mathbb{IR}^+$ ou $\forall n \ L[X[n]] \in \mathbb{IR}^-$ pode-se substituir \subseteq do Teorema 17 por $=$.

Teorema 18 *Sejam $X_1[n]$ e $X_2[n]$ sequências intervalares. Então,*

$$\sum_{i=a}^b (X_1[i] + X_2[i]) = \sum_{i=a}^b X_1[i] + \sum_{i=a}^b X_2[i].$$

Prova:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=a}^b (X_1[i] + X_2[i]) \\ &= \left[\sum_{i=a}^b (X_1[i] + X_2[i]); \sum_{i=a}^b \overline{(X_1[i] + X_2[i])} \right] \\ &= \left[\sum_{i=a}^b (\underline{X_1[i]} + \underline{X_2[i]}); \sum_{i=a}^b (\overline{X_1[i]} + \overline{X_2[i]}) \right] \\ &= \left[\sum_{i=a}^b \underline{X_1[i]}; \sum_{i=a}^b \overline{X_1[i]} \right] + \left[\sum_{i=a}^b \underline{X_2[i]}; \sum_{i=a}^b \overline{X_2[i]} \right] \\ &= \sum_{i=a}^b X_1[i] + \sum_{i=a}^b X_2[i]. \end{aligned}$$

■

Definição 107 (Resposta ao impulso discreto) *A resposta ao impulso de um sistema linear intervalar discreto, L , denotada por H , é dado por*

$$H[n] = L[\delta_i[n]]. \quad (4.27)$$

Lema 5 *Se L for um sistema linear semi-intervalar discreto positivo, existirá uma constante intervalar K , de modo que para todo $x[n]$, temos $L[x[n]] = Kx[n]$.*

Prova:

Da linearidade de L , temos que $L[x[n] \cdot 1] = x[n] \cdot L[1]$. Tomando $K = L[1]$, podemos escrever $L[x[n]] = Kx[n]$. ■

Teorema 19 *Seja $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}$ um sistema linear discreto e semi-intervalar positivo, onde a e b são, respectivamente, o primeiro elemento e o último elemento da sequência. Então a soma dos seus termos é dada por*

$$\sum_{i=a}^b L[x[i]] = L \left[\sum_{i=a}^b x[i] \right].$$

Prova:

Do lema 5, temos que $L[x[n]] = Kx[n]$ e, com a restrição do sistema ser positivo, podemos usar a distributividade da multiplicação sobre um somatório para obter

$$\sum_{i=a}^b L[x[i]] = \sum_{i=a}^b Kx[i] = K \sum_{i=a}^b x[i] = L \left[\sum_{i=a}^b x[i] \right].$$

■

Teorema 20 *Seja L um sistema linear intervalar discreto invariante no tempo, $X[n]$ um sinal intervalar discreto representado por uma sequência semi-intervalar, $H[n]$ a resposta ao impulso de L e $Y[n]$ a saída do sistema L . Então,*

$$Y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} X[i]H[n-i].$$

Prova:

Para sistemas intervalares

$$Y[n] = L[X[n]],$$

pela proposição 60, $X[n]$ pode ser reescrito como soma infinita da resposta ao impulso. Portanto, temos

$$\begin{aligned} Y[n] &= L \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} X[i] \delta_i[n-i] \right) \text{ (pela proposição 60)} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} L[X[i] \delta_i[n-i]] \text{ (pelo teorema 19)} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} X[i] L[\delta_i[n-i]] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} X[i] H[n-i] \text{ (da equação 4.27)}. \end{aligned}$$

■

4.3.4 Convolução intervalar discreta

Trataremos neste trabalho apenas as propriedades da convolução intervalar, as propriedades da convolução convencional podem ser encontrada em [Oppenheim & Schaffer 1989].

Definição 108 (Convolução intervalar discreta) *Seja L um sistema linear intervalar discreto e invariante no tempo e $H[n]$ sua resposta ao impulso. A **convolução intervalar** de um sistema é definida como uma soma infinita de suas respostas ao impulso, $H[n]$, pela sequência das respectivas entradas, $X[n]$. Formalmente,*

$$X[n] * H[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} X[i]H[n-i]. \quad (4.28)$$

A convolução intervalar discreta tem as seguintes propriedades quando aplicada a sistemas positivos.

(i) **Proposição 62 (comutativa-discreta)** *A convolução intervalar discreta é comutativa. Isto é, $H[n] * X[n] = X[n] * H[n]$.*

Prova:

Sejam H e X sistemas intervalares discretos e invariantes no tempo. Devido à propriedade comutativa da multiplicação intervalar, temos

$$\begin{aligned} X[n] * H[n] &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} X[i]H[n-i] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} H[n-i]X[i]. \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} H[v]X[n-v] \\ &= H[n] * X[n]. \end{aligned}$$

■

O fato da ordem dos sinais não ser importante nessa propriedade possibilita a implementação de sistemas em cascata.

(ii) **Proposição 63 (Associatividade-discreta)** *A convolução semi-intervalar é associativa, isto é,*

$$[X[n] * H[n]] * G[n] = X[n] * [H[n] * G[n]].$$

Prova:

Seja $W[n] = X[n] * H[n]$ e $Z[n] = H[n] * G[n]$. então,

$$\begin{aligned} [X[n] * H[n]] * G[n] &= W[n] * G[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W[k]G[n-k] \text{ (da equação (4.28))} \\ W[k] &= \sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v]H[k-v] \text{ (da equação (4.28))} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W[k]G[n-k] &= \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v]H[k-v] \right] G[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v]H[k-v]G[n-k]. \end{aligned}$$

Mudando a variável e fazendo $u = k - v$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v]H[k-v]G[n-k] &= \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v]H[u]G[[n-v]-u] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[v] \sum_{v=-\infty}^{+\infty} H[u]G[[n-v]-u] \text{ (do teorema 17),} \end{aligned}$$

$$Z[n-v] = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} H[u]G[[n-v]-u] \text{ (da equação (4.28)).}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[v] \sum_{v=-\infty}^{+\infty} H[u]G[[n-v]-u] &= \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[v] \left[\sum_{v=-\infty}^{+\infty} H[u]G[[n-v]-u] \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[v]Z[n-v] \\ &= X[n] * Z[n] \\ &= X[n] * [H[n] * G[n]]. \end{aligned}$$

■

Com a convolução discreta podemos representar qualquer sinal discreto, manipulá-lo, aplicar as transformadas. É uma ferramenta a mais para processamento digital de sinais.

4.4 Conclusão

Neste capítulo começamos com algumas definições básicas que faltavam na literatura de referência do trabalho. Como a definição de sinais intervalares, a definição de sistemas intervalares que damos o foco para uma linguagem de processamento de sinais. As propriedades básicas de sistemas reais foram estendidas para sistemas intervalares. Esta extensão também foi contribuição deste trabalho. Na literatura deste trabalho tem trabalho com foco em processamento de sinais intervalares, mas nenhum tem preocupação com uma fundamentação e mais com aplicações. Por isso apresentamos as versões intervalar das propriedades básicas como linearidade, causalidade, estabilidade, sistemas sem memória, sistema intervalar invariante no tempo, sistema intervalar aditivo, sistema intervalar homogêneo e sistema linear intervalar. Usamos a função CIR para criar alguns exemplos sistemas intervalares. Fizemos uma análise da linearidade dos sistemas intervalares segunda a falta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição da aritmética intervalar.

Depois de feito fundamentos básicos fizemos uma divisão em sistemas intervalares contínuos e discretos. Para os sistemas contínuos definimos a função impulso intervalar, que será de grande utilidade em demonstrações ao longo do trabalho. Definimos também a convolução contínua intervalar usando a integral de Moore. Para os sistemas discretos definimos sinais digitais intervalares para o escopo de nosso trabalho, e sistemas digitais intervalares. Como processamento digital de sinal nada mais é do que manipulação matemática de sequências de números reais, fizemos a versão intervalar de sequências discretas. Falamos sobre período de amostragem e frequência de amostragem. Tratamos algumas operações básicas com sequências intervalares discretas. Para isso usamos as principais funções usadas nos textos de processamento de sinais, tais como função pulso, função escada, função seno e função exponencial [Oppenheim & Schaffer 1989], [Smith 1999] e [Chen 1999]. Exploramos as propriedades de sistemas lineares intervalares. Apresentamos a convolução intervalar discreta e suas propriedades.

Nesse capítulo foi mostrado que o modelo intervalar é bem adequado para processamento digital de sinais, uma vez que todo sistema discreto que represente variáveis reais podem conter erros de quantização. Esses erros podem não ser somente dos dados, mas também da aritmética de ponto flutuante, ou da variância do sistema. Neste trabalho, várias propriedades de processamento de sinais na sua versão intervalar foram apresentadas. Entretanto, só sistemas lineares invariantes no tempo foram abordados. Com a convolução intervalar, aqui apresentada, e suas propriedades, muitos sistemas que contêm incertezas podem, agora, ser melhor modelados. Essa convolução pode ser usada no projeto de filtros intervalares, ou para análises de estabilidades de sistemas. Este trabalho poderá despertar nos usuário de processamento de sinais uma nova maneira de tratar as incertezas do sistemas digitais.

Após termos começado elaborar uma versão intervalar para processamento de sinais intervalares, verificamos que é uma abordagem quase que intuitiva, uma vez que todos

os sistemas discretos que representam sistemas contínuos estão sujeitos a imprecisões, sejam elas de leitura dos dados ou de falta de uma aritmética de máquina que dê conta de computação de sistemas de alta precisão. Mostramos as propriedades básicas do processamento de sinais digitais na sua versão intervalar.

Capítulo 5

Transformada-Z intervalar

Para processos discretos no tempo, a modelagem matemática fazendo uso de equações de diferenças permite a elaboração de importantes modelos, para diferentes áreas. No processamento digital de sinais para sistemas lineares, o uso de equações de diferenças permite uma adequada modelagem no domínio do tempo.

A transformada-Z, a exemplo da transformada de Laplace, no caso contínuo, constitui-se uma poderosa ferramenta para solução das equações de diferenças. Possibilita uma análise do sistema linear usado no processamento do sinal, quanto a estabilidade, causalidade, convergência, etc.

Usaremos os símbolos \mathcal{X} , \mathcal{U} e \mathcal{V} para representar as transformadas e os símbolos X , U e V para representar os intervalos e funções intervalares, respectivamente. Representaremos uma sequência contínua intervalar por $X(t)$ e uma sequência discreta intervalar por $X[n]$.

Devido a escolha da integral de Moore para modelar a convolução intervalar contínua, e a integral de linha de [Callejas-Bedregal & Bedregal 2004] para construção da transformada-Z inversa, o domínio de aplicação de nossa transformada-Z será o conjunto dos intervalos complexos degenerados representado por $\mathbb{I}\mathbb{C}_d$.

Apenas por coerência de notação, o intervalo $[e; e]$ será denotado pelo símbolo \mathbf{e} . Como a aritmética intervalar é uma generalização da aritmética real, as operações sobre “ e ” são equivalentes àquelas sobre \mathbf{e} . Vale a mesma regra para os símbolos \mathbf{u} , \mathbf{z} , \mathbf{v} e outros usados no decorrer deste trabalho.

As contribuições deste capítulo são

1. uma versão intervalar da transformada-Z;
2. a análise de convergência, onde a antiga região de convergência ganha outras partes e outros conceitos;
3. o Conceito de circunferência intervalar;
4. as propriedades intervalares da região de convergência;
5. o uso de uma distância intervalar

Para posterior comparação com a transformada-Z, apresentaremos aqui uma versão intervalar da transformada discreta de Fourier. Devido à escolha de abordar, onde o tempo é abordado como uma grandeza real, nossa transformada de Fourier ficará como na definição que se segue.

Definição 109 (Transformada discreta de Fourier intervalar) A transformada discreta de Fourier intervalar é definida pela equação

$$\mathcal{X}(\mathbf{e}^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \mathbf{e}^{-j\omega k}. \quad (5.1)$$

Analogamente ao que foi feito com a variável “ e ”, na transformada de Fourier, faremos com a variável z para transformada- Z , cuja versão intervalar é dada por \mathbf{z} .

Definição 110 (Transformada- Z intervalar) Dado uma sequência intervalar discreta, $X[n]$, sua transformada- Z é representada pela seguinte expressão.

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \mathbf{z}^{-k}. \quad (5.2)$$

Podemos ver por comparação, que a transformada de Fourier da equação 5.1 da definição 109 e a transformada- Z da equação 5.2 da definição 110 são equivalentes, quando $|\mathbf{z}|_I = \mathbf{1}$. Isso fica fácil de ver quando a variável \mathbf{z} da equação 5.2 estiver representada na forma polar, pois substituindo \mathbf{z} na equação 5.2 pela sua representação polar $\mathbf{z} = [r; r] \mathbf{e}^{j\omega}$ temos

$$\mathcal{X}([r; r] \mathbf{e}^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] ([r; r] \mathbf{e}^{j\omega})^{-n}. \quad (5.3)$$

Como $|\mathbf{z}|_I = \mathbf{1}$, na equação 5.3 temos $r = 1$, substituindo r por 1 na equação 5.3 resulta

$$\mathcal{X}(\mathbf{1e}^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] (\mathbf{1e}^{j\omega})^{-n}. \quad (5.4)$$

Resolvendo a potência temos

$$\mathcal{X}(\mathbf{1e}^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \mathbf{1e}^{-j\omega n}. \quad (5.5)$$

$$\mathcal{X}(\mathbf{e}^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \mathbf{e}^{-j\omega n}, \quad (5.6)$$

que é equivalente a expressão da equação 5.1.

Uma importante contribuição deste capítulo será o uso de uma distância intervalar que preserve as incertezas de sistemas intervalares, o que nos permite definir um módulo intervalar que preserve a inclusão monotônica. É esse módulo o diferencial deste trabalho no estudo de convergência e na construção das regiões de convergência da transformada- Z intervalar, proposta neste capítulo.

Sem o compromisso de explorar todas as implicações geométricas que esta métrica traz, definiremos aqui uma circunferência intervalar.

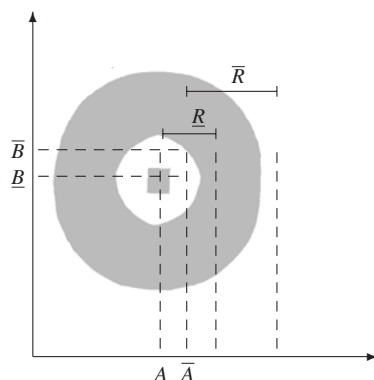


Figura 5.1: Um esboço de uma circunferência intervalar de raio R e $C = A + BI$.

Definição 111 (Circunferência intervalar no plano \mathbf{z}) Chamaremos **circunferência intervalar de centro C e raio R** , a região do plano- \mathbf{z} formado por todos \mathbf{z} tais que $d_{ci}(\mathbf{z}, c) \subset R$ para $c \in C$.

A figura 5.1 nos mostra um exemplo de uma circunferência intervalar de raio R e centro em $C = A + BI$.

Uma circunferência intervalar, como na definição 111, é formada pelo conjunto de todas as circunferências, $Circ(c, r)$, cujo centro pertence a C e o raio pertence a R . Matematicamente, temos $\{Circ(c, r) : c \in C \text{ e } r \in R\}$.

Considere a função racional definida na equação 5.7, dentro da região de convergência, isto é,

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \frac{\mathcal{P}(\mathbf{z})}{\mathcal{Q}(\mathbf{z})}, \quad (5.7)$$

onde $\mathcal{P}(\mathbf{z})$ e $\mathcal{Q}(\mathbf{z})$ são polinômios em \mathbf{z} .

Neste trabalho, mais precisamente, na representação da transformada- \mathbf{Z} , usaremos alguns resultados sobre polinômios, como um polinômio racional de variável \mathbf{z} . No entanto, vamos deixar uma análise detalhada sobre polinômios intervalares complexos fora do escopo do trabalho. Os resultados que usaremos aqui serão apresentados na forma de definições. Boa parte dos resultados sobre polinômios usados nesse trabalho pode ser encontrado nos trabalhos [Vaccaro 2001],[Petković 1979]. No caso de polinômios complexos segue-se as referências, [Boche 1966], [Petković & Petković 1998], [Sun & Kosmol 2001]. Os conceitos de zeros e polos não foram explorados em todos os trabalhos acima citados e, dependendo do foco do trabalho, tem certas diferenças entre um trabalho e outro. Por isso, definiremos a seguir esses conceitos para o escopo deste trabalho.

Definição 112 (Zero de polinômio racional intervalar complexo) Seja $\mathcal{X} : \mathbb{IC}_d \rightarrow \mathbb{IC}$ uma função racional intervalar complexa e $\mathcal{P} : \mathbb{IC}_d \rightarrow \mathbb{IC}$ e $\mathcal{Q} : \mathbb{IC}_d \rightarrow \mathbb{IC}$ duas funções polinomiais intervalares complexas, de modo que

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \frac{\mathcal{P}(\mathbf{z})}{\mathcal{Q}(\mathbf{z})}.$$

Os valores de \mathbf{z} tais que $\mathcal{P}(\mathbf{z}) \supseteq \mathbf{0}$ são chamados **zeros** de $\mathcal{X}(\mathbf{z})$.

Exemplo 3 Dados A, B, C e $D \in \mathbb{IC}$ disjuntos dois a dois, $\mathcal{P}(\mathbf{z}) = (A - \mathbf{z})(B - \mathbf{z})$, $Q(\mathbf{z}) = (C - \mathbf{z})(D - \mathbf{z})$, $\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \frac{\mathcal{P}(\mathbf{z})}{Q(\mathbf{z})}$. Os zeros do polinômio racional intervalar complexo $\mathcal{X}(\mathbf{z})$ estão contidos nos intervalos A e B , que contém os zeros do polinômio $\mathcal{P}(\mathbf{z})$.

Definição 113 (Polos de polinômio racional intervalar complexo) Seja $\mathcal{X} : \mathbb{IC}_d \rightarrow \mathbb{IC}$ uma função racional intervalar complexa, $\mathcal{P} : \mathbb{IC}_d \rightarrow \mathbb{IC}$ e $Q : \mathbb{IC}_d \rightarrow \mathbb{IC}$ duas funções polinomiais, de modo que

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \frac{\mathcal{P}(\mathbf{z})}{Q(\mathbf{z})}.$$

Os valores de \mathbf{z} , onde $Q(\mathbf{z}) \supseteq \mathbf{0}$ são chamados **polos** de \mathcal{X} .

Tomando como referência o polinômio racional $\mathcal{X}(\mathbf{z})$ do exemplo 3, podemos observar que os seus polos são os zeros do polinômio $Q(\mathbf{z})$ e que eles estão contidos nos intervalos C ou D .

Algumas vezes nos referiremos à transformada- \mathcal{Z} como um operador $\mathcal{Z}\{\cdot\}$, que transforma uma sequência intervalar discreta em uma função de uma variável contínua complexa, como segue.

$$\mathcal{Z}\{X[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\mathbf{z}^{-n} = \mathcal{X}(\mathbf{z}).$$

A correspondência entre uma sequência intervalar discreta e sua transformada- \mathcal{Z} é dada pela seguinte notação.

$$X[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \mathcal{X}(\mathbf{z}).$$

A transformada- \mathcal{Z} intervalar, como na equação 5.2, é chamada **bilateral** ou **de dois lados**. A transformada, \mathcal{X} , **intervalar unilateral** ou de **um lado** é representada com a seguinte equação

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} X[n]\mathbf{z}^{-n}. \quad (5.8)$$

A transformada- \mathcal{Z} intervalar unilateral é igual a transformada- \mathcal{Z} intervalar bilateral somente quando $X[n] = 0$, para todo $n < 0$.

Sendo \mathbf{z} uma variável complexa intervalar degenerada, podemos analisar seu posicionamento no plano complexo intervalar, com mostra a figura 5.2

A transformada de Fourier não converge para toda sequência; isto é, certas sequências infinitas não tem somas finitas. Similarmente, a transformada- \mathcal{Z} não converge para toda sequência ou para todo valor de \mathbf{z} . Para uma dada sequência, os valores de \mathbf{z} para os quais ela converge é chamada **região de convergência-RC**. Se a sequência for absolutamente somável, então sua transformada de Fourier converge.

Aplicando o critério de convergência na equação 5.3, tomando o seu módulo, temos

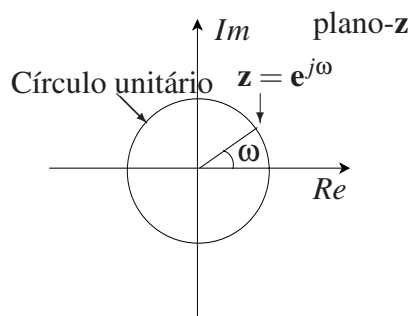


Figura 5.2: Representação de \mathbf{z} no plano complexo com destaque para o círculo de raio unitário

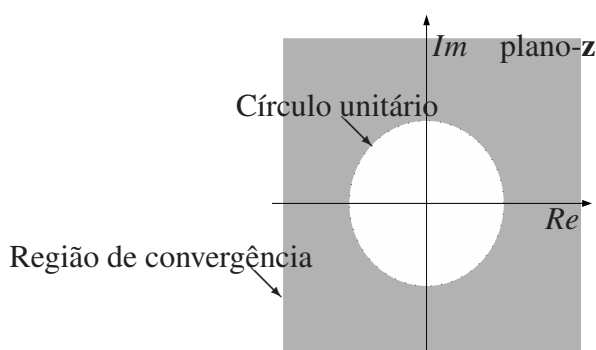


Figura 5.3: Representação da região de convergência da transformada- \mathcal{Z} da função degrau unitário intervalar $\mathcal{U}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}[n]\mathbf{z}^{-n}$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |X[n]|([r;r])^{-n} \prec [\infty; \infty]. \quad (5.9)$$

Na equação 5.9, é fácil ver que, de acordo com os valores assumidos por r em $[r;r]^{-n}$ podem existir sequências cujas suas transformadas de Fourier não convergem e as transformadas \mathcal{Z} convergem. Um exemplo é a sequência intervalar de degrau unitário, que representaremos por $\mathbf{u} = [u; u]$, a qual não é uma sequência absolutamente somável. Por isso, sua transformada de Fourier não converge, enquanto sua transformada- \mathcal{Z} converge para os caso em que $||[r;r]|| \prec \mathbf{1}$. Neste caso, podemos afirmar que a transformada- \mathcal{Z} tem região de convergência $||[r;r]|| \prec \mathbf{1}$, representada pela área escura na figura 5.3.

Desse modo, podemos ver que a convergência da série de potências da equação 5.2, na definição 110, para $X[n]$ não exponencial, depende exclusivamente do módulo $|\mathbf{z}|$. Consequentemente temos $|\mathcal{X}(\mathbf{z})| \prec [\infty; \infty]$, se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |X[n]| |\mathbf{z}|^{-n} \prec [\infty; \infty]. \quad (5.10)$$

A região de convergência da transformada dada pela equação 5.2 consiste nos valores

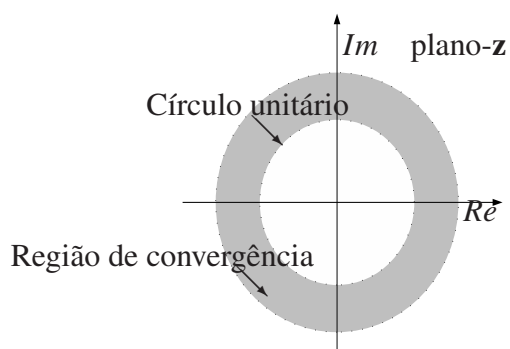


Figura 5.4: Uma ilustração do caso em que a região de convergência é um anel no plano- z

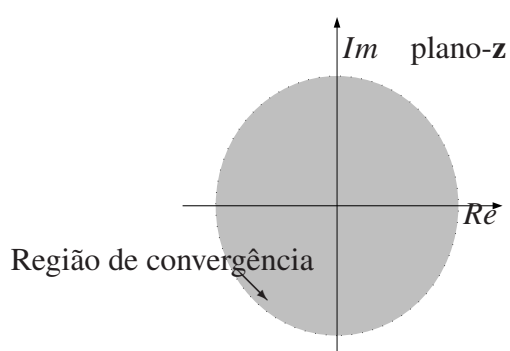


Figura 5.5: Uma ilustração do caso em que a região de convergência é um círculo no plano- z

de \mathbf{z} que satisfazem a condição da equação 5.10. Se algum $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 \in RC$, então todo \mathbf{z} tal que $|\mathbf{z}|_I = |\mathbf{z}_0|_I$ também estará na RC . Assim, as RCs geralmente são anéis no plano- z . Como ilustra a figura 5.4, quando a região de convergência incluir 0, a RC será um disco de centro na origem, como ilustrado na figura 5.5. Se a transformada convergir, para qualquer \mathbf{z} , a região formará um disco de centro na origem e raio infinito, que consiste de todo plano- z , como mostra a figura 5.6. Se ela convergir para todo $|\mathbf{z}|_I > [k; k] > \mathbf{0}$ teremos o caso da figura 5.3.

Como mostrado anteriormente, quando ocorrer $|\mathbf{z}|_I = \mathbf{1}$, a transformada- Z será equivalente à transformada de Fourier. Podemos garantir que se a região de convergência da transformada- Z não incluir o círculo unitário, a transformada de Fourier não convergirá absolutamente.

Nem todas as funções possuem sua transformada- Z convergindo absolutamente, como é o caso das duas funções apresentadas abaixo.

$$X_1[n] = \frac{A \text{sen}(\omega_i n)}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty,$$

e

$$X_2[n] = B \cos(\omega_u n), \quad -\infty < n < \infty,$$

onde A e B são constantes intervalares positivas e ω_i e ω_u constantes reais.

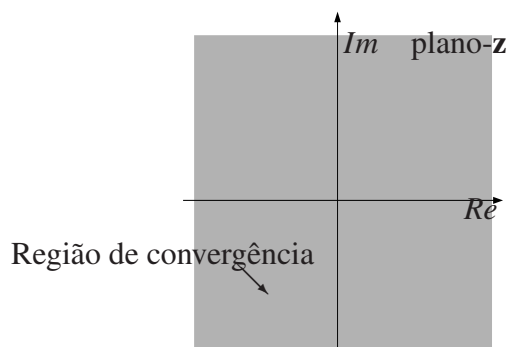


Figura 5.6: Uma ilustração do caso em que a região de convergência é um "círculo" que toma todo o plano- z

Exemplo 4 (Transformada- Z de uma sequência exponencial direita) Consideremos um sinal intervalar $X[n] = A^n \mathbf{u}[n]$. Da equação 5.2 temos

$$X(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A^n \mathbf{u}[n] \mathbf{z}^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \mathbf{z}^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (A\mathbf{z}^{-1})^n. \quad (5.11)$$

Pelo critério de convergência,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |A\mathbf{z}^{-1}|_I^n < [\infty; \infty]. \quad (5.12)$$

Assim, a região de convergência é composta pela faixa de valores $|A\mathbf{z}^{-1}|_I < \mathbf{1}$, ou seja, $|\mathbf{z}|_I > |A|_I$.

Como \mathbf{z} e A são intervalares, usaremos os símbolos \leq , $<$ ou $>$ em lugar dos símbolos $<$ ou $>$. Desse modo, temos vários casos para analisar, nomeadamente, $|\mathbf{z}|_I \leq |A|_I$, $|A|_I \leq |\mathbf{z}|_I$, $|A|_I < |\mathbf{z}|_I$, $|A|_I > |\mathbf{z}|_I$ ou $|A|_I \supset |\mathbf{z}|_I$.

Para o caso em que $|\mathbf{z}|_I \leq |A|_I$, excluiríamos o caso em que $\underline{\mathbf{z}}$ e $\bar{\mathbf{z}}$ sejam iguais a $|A|_I$, que será tratado como um caso particular de $|A|_I \supset |\mathbf{z}|_I$, tornando os demais similares ao caso $|A|_I < |\mathbf{z}|_I$. Tratamento similar será dado ao caso em que $|A|_I \leq |\mathbf{z}|_I$, onde também será excluído o caso em que $\underline{\mathbf{z}}$ e $\bar{\mathbf{z}}$ sejam iguais a $|A|_I$, tornando os demais como casos particulares de $|A|_I > |\mathbf{z}|_I$. Nessa análise, o caso em que $\underline{\mathbf{z}}$ e $\bar{\mathbf{z}}$ sejam iguais a $|A|_I$ será excluído do caso $|A|_I \supset |\mathbf{z}|_I$, pois ele terá um tratamento separado.

A figura 5.7 facilitará a visualização da convergência da transformada- Z da sequência $X[n] = A^n \mathbf{u}[n]$, em função de $|\mathbf{z}|_I$ e $|A|_I$.

A figura 5.7 mostra um anel mais escuro separando a região de convergência da região de não-convergência. Esse anel não aparece nas transformadas- Z não intervalares.

Definiremos 5 regiões com características distintas quando analisada a convergência da transformada- Z intervalar. Como mostram as seguintes definições:

Definição 114 (Região de convergência estrita-RCE) Dada uma sequência intervalar $X[n]$, chamaremos **região de convergência estrita** aquela do plano- z tal que sua transformada- Z converge para todos os valores intervalares da sequência $X[n]$.

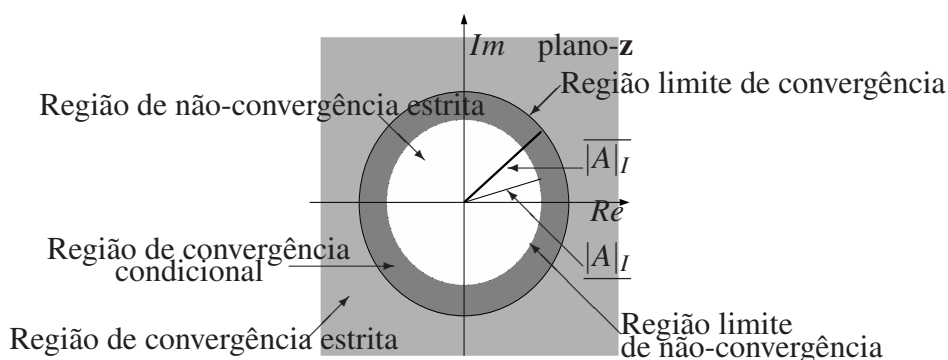


Figura 5.7: Uma ilustração da região de convergência para transformada- Z intervalar exponencial no plano- z .

Com essas regiões aqui definidas é possível analisar o quanto as incertezas influenciam na estabilidade do sistema. Analisando regiões de convergência da transformada- Z de maneira intervalar, onde se conclui que o sistema é estável independente dos valores que as variáveis intervalares possam representar. Assim, na região de convergência estrita, temos a certeza da estabilidade do sistema independente do valor assumido pela variável intervalar. Analogamente ocorre no caso da região de não convergência estrita. A única região onde a convergência depende dos valores assumidos pelas variáveis intervalares é a região de convergência condicional.

Na figura 5.7 a região de convergência estrita é representada pelo círculo de raio menor que $|A|_I$ e centro na origem.

Definição 115 (Região de não-convergência estrita-RNCE) Dada uma sequência intervalar $X[n]$, chamaremos **região de não-convergência estrita** aquela região do plano- z tal que sua transformada- Z não converge, para todos os valores intervalares da sequência $X[n]$.

Na figura 5.7 a região de não-convergência estrita é representada pela região do plano- z , onde $|A|_I < |z|_I$. Ela está representada pela região cinza claro que estende de $|A|_I$ até o infinito.

Definição 116 (Região limite de convergência -RLC) Dada a sequência intervalar $X[n]$, chamaremos **região limite de convergência** aquela região de sua transformada- Z formada pela circunferência de fronteira da região de convergência estrita.

Na figura 5.7 a região de convergência limite é representada pela circunferência no plano- z de raio $|A|_I$. Essa é uma região de indeterminação quanto a convergência, dependendo agora da sequência em questão. Se esta sequência for absolutamente somável, ela convergirá, caso contrário, não.

Definição 117 (Região limite de não-convergência-RLNC) Dada a sequência intervalar $X[n]$, chamaremos **região limite de não convergência** aquela região de sua transformada- Z formada pela circunferência de fronteira da região de não-convergência estrita.

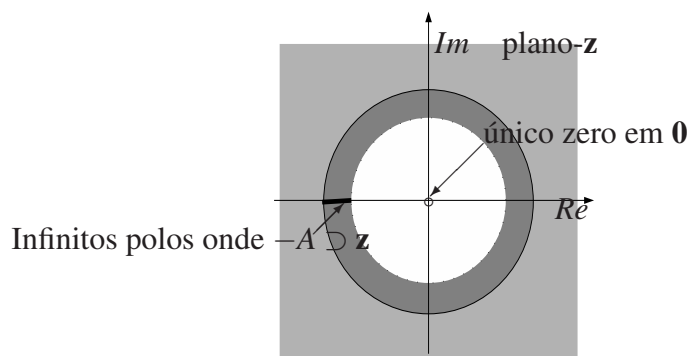


Figura 5.8: Representação gráfica de polos e zeros da transformada-Z, intervalar exponencial no plano- \mathbf{z} da sequência $A^n \mathbf{u}[n]$ para $A \succ \mathbf{0}$.

Na figura 5.7 a região de não convergência limite é representada pela circunferência no plano- \mathbf{z} , de raio $|A|_I$.

Definição 118 (Região de convergência condicional-RCC) Dada uma sequência intervalar $X[n]$, chamaremos **região de convergência condicional** aquela região do plano- \mathbf{z} , na qual sua transformada-Z pode convergir para alguns valores intervalares da sequência \mathbf{z} , situado entre RLC e RLNC, excetuando suas fronteiras. Caso RCC contenha $\mathbf{0}$ a única fronteira é RLC.

Na figura 5.7 a região de convergência condicional é representada pela região do plano- \mathbf{z} , onde $|A|_I \supset |\mathbf{z}|_I$. Ela fica limitada entre $|A|_I$ e $|\overline{A}|_I$, que é o anel cinza escuro, entre a região de convergência estrita e de não-convergência estrita, excetuando as circunferências, onde $|\mathbf{z}|_I = [|\overline{A}|_I; |\overline{A}|_I]$ e $|\mathbf{z}|_I = [|\underline{A}|_I; |\underline{A}|_I]$.

Supondo que na última expressão da equação 5.11 seja $|A\mathbf{z}^{-1}|_I \prec \mathbf{1}$ e aplicando a nossa conhecida fórmula da soma de uma série geométrica temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A\mathbf{z}^{-1})^n = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - A\mathbf{z}^{-1}} = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z} - A}, \quad |A|_I \prec |\mathbf{z}|_I. \quad (5.13)$$

Agora, com a equação 5.13 temos a transformada na forma de um polinômio racional intervalar na variável \mathbf{z} ,

$$X(\mathbf{z}) = \frac{\mathcal{P}(\mathbf{z})}{Q(\mathbf{z})},$$

onde $\mathcal{P}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ e $Q(\mathbf{z}) = \mathbf{z} - A$.

Podemos ver que o polinômio $X(\mathbf{z})$ tem zero em $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ e polos $\mathbf{z} - A \supseteq \mathbf{0}$, que é todo o intervalo, $-A$, denotado por $[-\overline{A}; -\underline{A}]$, como mostra a figura 5.8.

Mais adiante, veremos que toda sequência que pode ser representada por uma soma exponencial, pode também ser representada pela transformada-Z racional.

Exemplo 5 (Sequência exponencial à esquerda) Seja $X[n] = -A^n \mathbf{u}[-n - 1]$. Quando a sequência for diferente de zero somente para $n \leq -1$, ela será chamada **sequência à esquerda**. Aplicando a transformada-Z temos

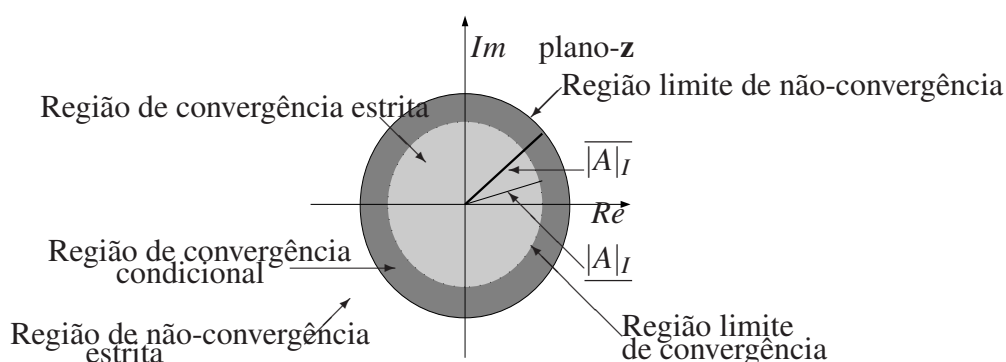


Figura 5.9: Uma ilustração da região de convergência para transformada-Z intervalar exponencial esquerda no plano-z

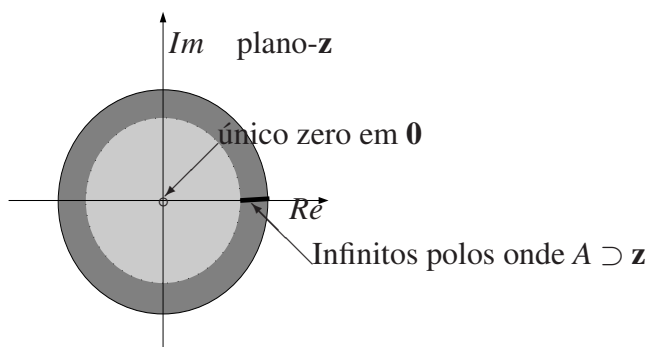


Figura 5.10: Representação gráfica de polos e zeros da transformada-Z, intervalar exponencial no plano-z da sequência $-A^n \mathbf{u}[-n-1]$.

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A^n \mathbf{u}[-n-1] \mathbf{z}^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} A^n \mathbf{z}^{-n} \quad (5.14)$$

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = - \sum_{n=1}^{\infty} A^{-n} \mathbf{z}^n = \mathbf{1} - \sum_{n=0}^{\infty} (A^{-1} \mathbf{z})^n. \quad (5.15)$$

Pode-se observar que se $|A^{-1} \mathbf{z}|_I < \mathbf{1}$, ou equivalentemente, $|\mathbf{z}|_I < |A|_I$, então a série converge, a qual podemos representar pela equação seguinte.

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - A^{-1} \mathbf{z}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - A \mathbf{z}^{-1}} = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z} - A}, \quad |\mathbf{z}|_I < |A|_I. \quad (5.16)$$

A figura 5.9 mostra, graficamente, a análise da convergência.

A figura 5.10 mostra a representação de polos e zeros da transformada-Z da sequência $-A^n \mathbf{u}[-n-1]$.

Exemplo 6 (Soma de duas sequências exponenciais) Consideremos um sinal formado pela soma de duas sequências exponenciais intervalares

$$X[n] = \left(\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \right)^n \mathbf{u}[n] + \left(\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6} \right] \right)^n \mathbf{u}[n]. \quad (5.17)$$

Para plotar separadamente cada uma das seqüências, usaremos a equação 5.13, substituindo a variável A pelos intervalos $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$ e $\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6} \right]$ respectivamente, como mostra a figura 5.11.

A figura 5.11 mostra as peculiaridades gráficas da análise de convergência de duas seqüências exponenciais intervalares. Os gráficos das transformadas são mostrados separados, para depois na figura 5.11 mostrarmos o gráfico da soma das transformadas e analisarmos que características são preservadas e que relação eles guardam entre si.

Aplicando a transformada- Z na seqüência da equação 5.17, fazendo uso da propriedade da linearidade da transformada- Z intervalar, a qual provaremos na seção , temos 5.5.1.

$$X(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \right)^n \mathbf{u}[n] + \left(\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6} \right] \right)^n \mathbf{u}[n] \right\} \mathbf{z}^{-n} \quad (5.18)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \right)^n \mathbf{u}[n] \mathbf{z}^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6} \right] \right)^n \mathbf{u}[n] \mathbf{z}^{-n} \quad (5.19)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \mathbf{z}^{-1} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6} \right] \mathbf{z}^{-1} \right)^n \quad (5.20)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \mathbf{z}^{-1}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right] \mathbf{z}^{-1}} \quad (5.21)$$

$$= \frac{(\mathbf{1} + \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right] \mathbf{z}^{-1}) + (\mathbf{1} - \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \mathbf{z}^{-1})}{(\mathbf{1} + \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right] \mathbf{z}^{-1}) (\mathbf{1} - \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \mathbf{z}^{-1})} \quad (5.22)$$

$$= \frac{([2; 2] + \left[-\frac{4}{12}; \frac{1}{12} \right] \mathbf{z}^{-1})}{(\mathbf{1} + \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right] \mathbf{z}^{-1}) (\mathbf{1} - \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \mathbf{z}^{-1})} \quad (5.23)$$

$$= \frac{[2; 2] (\mathbf{1} + \left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{24} \right] \mathbf{z}^{-1})}{(\mathbf{1} + \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right] \mathbf{z}^{-1}) (\mathbf{1} - \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \mathbf{z}^{-1})} \quad (5.24)$$

$$= \frac{[2; 2] \mathbf{z} (\mathbf{z} + \left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{24} \right])}{(\mathbf{z} + \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right]) (\mathbf{z} - \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right])}. \quad (5.25)$$

A figura 5.12 mostra a representação gráfica da transformada- Z da somas de duas seqüências exponenciais intervalares, sua região de convergência, seus zeros e polos.

Proposição 64 *Dado as transformadas- Z de duas seqüências intervalares $X_1[n]$ e $X_2[n]$, a região de convergência estrita da transformada- Z da soma $X_1[n] + X_2[n]$ é a interseção entre a região de convergência estrita das seqüências $X_1[n]$ e $X_2[n]$.*

$$RCE_{1+2} = RCE_1 \cap RCE_2.$$

Prova:

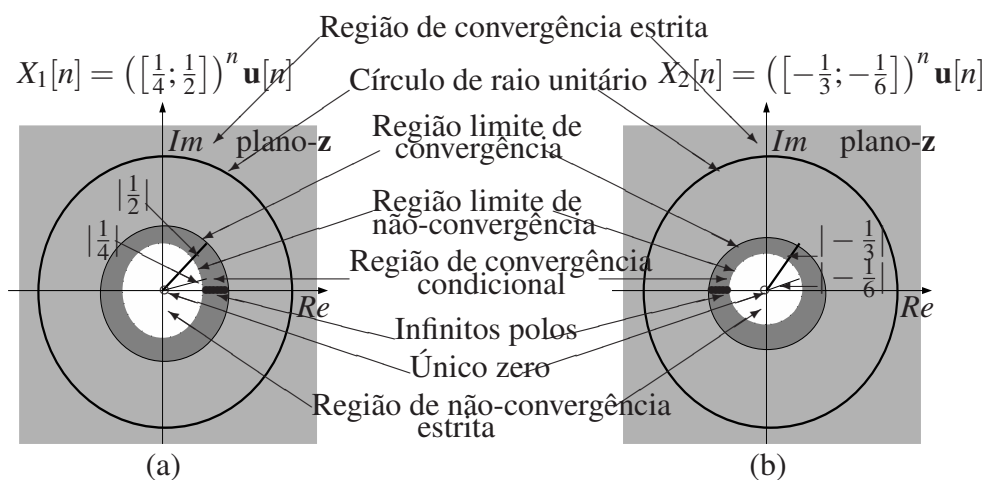


Figura 5.11: Uma ilustração da região de convergência para transformada- Z intervalar exponencial no plano- z das sequências $([\frac{1}{4}; \frac{1}{2}])^n \mathbf{u}[n]$ e $([-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}])^n \mathbf{u}[n]$.

A adição só é definida na região onde as duas sequências convergem. ■

Proposição 65 Dadas as transformadas- Z de duas sequências intervalares $X_1[n]$ e $X_2[n]$, se $RCE_1 \cap RCE_2 = \emptyset$, então a transformada da soma não está definida.

Prova:

Direto da proposição 64, pois $RCE_{1+2} = \emptyset$. ■

Na figura 5.11 (a) podemos ver que a transformada- Z intervalar da sequência $X_1[n] = ([\frac{1}{4}; \frac{1}{2}])^n \mathbf{u}[n]$ converge estritamente quando $[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}] \prec |\mathbf{z}|_I$. Na figura 5.11(b) a sequência $X_2[n] = ([-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}])^n \mathbf{u}[n]$ converge estritamente para $[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}] \prec |\mathbf{z}|_I$. Assim, a soma das sequências converge estritamente para a $([\frac{1}{4}; \frac{1}{2}] \prec |\mathbf{z}|_I) \cap ([\frac{1}{6}; \frac{1}{3}] \prec |\mathbf{z}|_I)$.

Proposição 66 Dadas duas sequências intervalares $X_1[n]$ e $X_2[n]$, a região de não-convergência estrita da transformada- Z da soma $X_1[n] + X_2[n]$ é dada pela união entre as regiões de não-convergência estrita das sequências $X_1[n]$ e $X_2[n]$.

$$RNCE_{1+2} = RNCE_1 \cup RNCE_2.$$

Prova:

Onde uma das sequência divergir a soma divergirá. Portanto, a soma divergirá na união das regiões de não convergência estrita das duas sequências. ■

Proposição 67 *Dadas as transformadas-Z de duas sequências intervalares $X_1[n]$ e $X_2[n]$, caso $RCE_1 \cap RCE_2 \neq \emptyset$, a região limite de convergência da transformada-Z da soma $X_1[n] + X_2[n]$ é dada pela expressão:*

$$RLC_{1+2} = (RLC_1 \cup RLC_2) - (RCC_1 \cup RCC_2 \cup RNCE_1 \cup RNCE_2).$$

Prova:

Suponha que as transformadas-Z das sequências convergem absolutamente. Então, $(RLC_1 \cup RLC_2) = \emptyset$. Logo, não existe RLC_{1+2} , que satisfaz trivialmente a proposição. Suponha que uma das transformadas não convirja absolutamente, mas tenha uma região de convergência e a outra convirja absolutamente. Pela proposição 64, temos $RCE_{1+2} = RCE_1 \cap RCE_2$ e pela definição 116 concluímos que $RLC_{1+2} \subseteq (RLC_1 \cup RLC_2)$. Como $(RCC_1 \cup RCC_2 \cup RNCE_1 \cup RNCE_2) \not\subseteq (RLC_1 \cup RLC_2)$, pois, por hipótese, uma das RCC e uma das $RNCE$ é vazia e por definição elas não contém suas fronteiras. Logo, $RLC_{1+2} = (RLC_1 \cup RLC_2) - (RCC_1 \cup RCC_2 \cup RNCE_1 \cup RNCE_2)$. Suponha que as duas transformadas das sequências em questão não convirjam absolutamente, mas tenham regiões de convergência. Se $RCE_1 \cap RCE_2 = \emptyset$, não se aplica à proposição. Se $RCE_1 \supseteq RCE_2$, então $RLC_{1+2} = RLC_2 = (RLC_1 \cup RLC_2) - (RCC_1 \cup RCC_2 \cup RNCE_1 \cup RNCE_2)$, pois $(RCC_2 \cup RNCE_2) \supset RLC_1$. Valendo simetricamente para o caso em que $RCE_1 \supseteq RCE_2$. Para os casos em que $RCE_1 \not\supseteq RCE_2$, $RCE_2 \not\supseteq RCE_1$ e $RCE_1 \cap RCE_2 \neq \emptyset$, pelas definições 118 e 115 e 116 e pela suposição acima concluímos que $(RLC_1 \cup RLC_2) \cap (RCC_1 \cup RCC_2 \cup RNCE_1 \cup RNCE_2) = \emptyset$ e que $RLC_{1+2} = (RLC_1 \cup RLC_2) - (RCC_1 \cup RCC_2 \cup RNCE_1 \cup RNCE_2)$. ■

Proposição 68 *Sejam as transformadas de duas sequências intervalares $X_1[n]$ e $X_2[n]$, tais que $RCE_1 \cap RCE_2 \neq \emptyset$. A região limite de não-convergência da transformada-Z da soma $X_1[n] + X_2[n]$ é dada pela seguinte expressão.*

$$RLNC_{1+2} = (RLNC_1 \cup RLNC_2) - RNCE_{1+2}$$

Prova:

Suponha que $(RNCE_1 \cap RNCE_2) = \emptyset$. Então, pela definição 115 $(RNCE_1 \cup RNCE_2) \cap (RLNC_1 \cup RLNC_2) = \emptyset$ e pela definição 117 $RLNC_{1+2} = (RLNC_1 \cup RLNC_2)$, pois, por hipótese, $(RNCE_1 \cup RNCE_2) \cap (RLNC_1 \cup RLNC_2) = \emptyset$. Então, $RLNC_{1+2} = (RLNC_1 \cup RLNC_2) - RNCE_{1+2}$. Suponha, agora, que $(RNCE_1 \cap RNCE_2) \neq \emptyset$. Se $(RNCE_1 = RNCE_2)$, então $RLNC_{1+2} = RLNC_1 = RLNC_2 = (RLNC_1 \cup RLNC_2) - RNCE_{1+2}$. Se $(RNCE_1 \neq RNCE_2)$, então $(RNCE_{1+2} \supset RLNC_2)$ ou $(RNCE_{1+2} \supset RLNC_1)$. Mas, $RNCE_{1+2} \not\subseteq (RLNC_1 \cup RLNC_2)$. Logo, $RLNC_{1+2} = RLNC_1$ ou $RLNC_{1+2} = RLNC_2$ e, portanto, $RLNC_{1+2} = (RLNC_1 \cup RLNC_2) - RNCE_{1+2}$. ■

Proposição 69 *Dadas as transformadas-Z de duas sequências intervalares $X_1[n]$ e $X_2[n]$ a região de convergência condicional da transformada-Z da soma $X_1[n] + X_2[n]$, quando $RCE_1 \cap RCE_2 \neq \emptyset$, é representada pela equação*

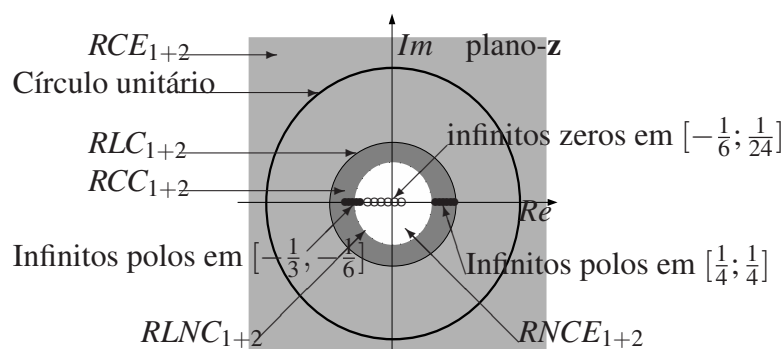


Figura 5.12: Representação gráfica das regiões de convergência, polos e zeros da transformada- Z , intervalar da soma das sequências $X_1[n]$ e $X_2[n]$.

$$RCC_{1+2} = (RCC_1 \cup RCC_2) - RNCE_{1+2}.$$

Prova:

Suponha que $RNCE_{1+2} \cap (RCC_1 \cup RCC_2) = \emptyset$. Pelas definições 114, 116 e 117 $(RLC_{1+2} \cup RCE_{1+2} \cup RLNC) \cap (RCC_1 \cup RCC_2) = \emptyset$ $RCC_{1+2} = (RCC_1 \cup RCC_2) - RNCE_{1+2}$. Para os casos em que $RNCE_{1+2} \cap (RCC_1 \cup RCC_2) \neq \emptyset$ uma das RCC das sequências em questão ou parte dela passa a integrar a $RNCE_{1+2}$ e o restante $(RCC_1 \cup RCC_2) - [(RCC_1 \cup RCC_2) \cap RNCE_{1+2}]$ compõe a RCC_{1+2} que equivale a $RCC_{1+2} = (RCC_1 \cup RCC_2) - RNCE_{1+2}$. ■

Tabela 5.1: Alguns pares comuns da transformada- \mathcal{Z}

Sequência	Transformada- \mathcal{Z}	RCE	RCC	RLC	RLNC
1. $\delta_i[n]$	$\mathbf{1}$	$\forall \mathbf{z}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
2. $\mathbf{u}[n]$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\mathbf{z}^{-1}}$	$ \mathbf{z} _I \succ \mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$ \mathbf{z} _I = \mathbf{1}$	$ \mathbf{z} _I = \mathbf{1}$
3. $-\mathbf{u}[-n-1]$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\mathbf{z}^{-1}}$	$ \mathbf{z} _I \prec \mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$ \mathbf{z} _I = \mathbf{1}$	$ \mathbf{z} _I = \mathbf{1}$
4. $\delta_i[n-m]$ se $m > 0$ se $m < 0$	\mathbf{z}^{-m} \mathbf{z}^{-m}	$\forall \mathbf{z} - \{0\}$ $\forall \mathbf{z} - \{\infty\}$	$\mathbf{0}$ $\mathbf{0}$	$\mathbf{z} = \mathbf{0}$ $ \mathbf{z} _I = \infty$	$ \mathbf{z} _I = \mathbf{0}$ $ \mathbf{z} _I = \infty$
5. $A^n \mathbf{u}[n]$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-A\mathbf{z}^{-1}}$	$ \mathbf{z} _I \succ A _I$	$ \mathbf{z} _I \subset A _I - \{A, \bar{A}\}$	$ \mathbf{z} _I = \bar{A}; \bar{A} _I$	$ \mathbf{z} _I = A; A _I$
6. $-A^n \mathbf{u}[-n-1]$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-A\mathbf{z}^{-1}}$	$ \mathbf{z} _I \prec A _I$	$ \mathbf{z} _I \subset A _I - \{A, \bar{A}\}$	$ \mathbf{z} _I = A; A _I$	$ \mathbf{z} _I = \bar{A}; \bar{A} _I$
7. $nA^n \mathbf{u}[n]$	$\frac{A\mathbf{z}^{-1}}{(\mathbf{1}-A\mathbf{z}^{-1})^2}$	$ \mathbf{z} _I \succ A _I$	$ \mathbf{z} _I \subset A _I - \{A, \bar{A}\}$	$ \mathbf{z} _I = \bar{A}; \bar{A} _I$	$ \mathbf{z} _I = A; A _I$
8. $-A^n \mathbf{u}[-n-1]$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-A\mathbf{z}^{-1}}$	$ \mathbf{z} _I \prec A _I$	$ \mathbf{z} _I \subset A _I - \{A, \bar{A}\}$	$ \mathbf{z} _I = A; A _I$	$ \mathbf{z} _I = \bar{A}; \bar{A} _I$
9. $\cos_i[\omega_0 n] \mathbf{u}[n]$	$\frac{\mathbf{1}-\cos_i[\omega_0] \mathbf{z}^{-1}}{\mathbf{1}-[2;2] \cos_i[\omega_0] \mathbf{z}^{-1} + \mathbf{z}^{-2}}$	$ \mathbf{z} _I \succ \mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$ \mathbf{z} _I = \mathbf{1}$	$ \mathbf{z} _I = \mathbf{1}$
10. $\sin_i[\omega_0 n] \mathbf{u}[n]$	$\frac{\sin_i[\omega_0] \mathbf{z}^{-1}}{\mathbf{1}-[2;2] \cos_i[\omega_0] \mathbf{z}^{-1} + \mathbf{z}^{-2}}$	$ \mathbf{z} _I \succ \mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$ \mathbf{z} _I = \mathbf{1}$	$ \mathbf{z} _I = \mathbf{1}$
11. $R^n \cos_i[\omega_0 n] \mathbf{u}[n]$	$\frac{\mathbf{1}-R \cos_i[\omega_0] \mathbf{z}^{-1}}{\mathbf{1}-[2;2] R \cos_i[\omega_0] \mathbf{z}^{-1} + R^2 \mathbf{z}^{-2}}$	$ \mathbf{z} _I \succ R$	$ \mathbf{z} _I \subset R - \{R, \bar{R}\}$	$ \mathbf{z} _I = [\bar{R}; \bar{R}]$	$ \mathbf{z} _I = [R; R]$
12. $R^n \sin_i[\omega_0 n] \mathbf{u}[n]$	$\frac{R \sin_i[\omega_0] \mathbf{z}^{-1}}{\mathbf{1}-[2;2] R \cos_i[\omega_0] \mathbf{z}^{-1} + R^2 \mathbf{z}^{-2}}$	$ \mathbf{z} _I \succ R$	$ \mathbf{z} _I \subset R - \{R, \bar{R}\}$	$ \mathbf{z} _I = [\bar{R}; \bar{R}]$	$ \mathbf{z} _I = [R; R]$
13. $\begin{cases} A^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & n \leq 0 \text{ ou } n \geq N. \end{cases}$	$\frac{\mathbf{1}-A^N \mathbf{z}^{-N}}{\mathbf{1}-A\mathbf{z}^{-1}}$	$ \mathbf{z} _I \succ \mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$ \mathbf{z} _I = \mathbf{0}$	$ \mathbf{z} _I = \mathbf{0}$

Um resumo da transformada- Z de algumas sequências, suas regiões de convergência é apresentado na tabela 5.

5.1 Propriedades da região de convergência

Assumiremos que a transformada- Z é um polinômio racional e que o sinal a representar tenha amplitude finita, com possíveis exceções para quando $n = \infty$ ou $n = -\infty$.

Proposição 70 *A RCE é um anel no plano- z de raio R , onde $0 \leq R \leq \infty$ e $R \supset |z|_I$.*

Prova:

Para essa proposição usaremos o resultado de [Oppenheim & Schaffer 1989] pp 152, que nos diz que, se $z = z_1$ pertence à região de convergência, então, toda a circunferência definida por $|z| = |z_1|$ também pertencerá à região de convergência. Como estamos trabalhando com o intervalo degenerado \mathbf{z} e as operações da aritmética dos intervalos degenerados coincidem com a aritmética real, extrapolaremos o resultado acima para o caso $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 \in RCE$. Então, toda a circunferência definida por $|\mathbf{z}|_I = |\mathbf{z}_1|_I$ também pertencerá à circunferência. Caso $\mathbf{0} \in RCE$, a circunferência de raio $|\mathbf{0}|_I$ e centro na origem pertence à RCE. Caso $RCE \rightarrow \infty$, a circunferência de raio $[\infty; \infty]$ e centro na origem pertencerá a RCE. ■

Pelo fato de termos assumido que a sequência $X[n]$ tem energia finita. o Raio de convergência estrito não depende de $X[n]$.

A figura 5.6 exemplifica um caso em que a RCE contém $\mathbf{0}$ e $[\infty; \infty]$. Na figura 5.7, temos um exemplo onde a RCE contém $[\infty; \infty]$ e não contém $\mathbf{0}$. Já na figura 5.9, temos um exemplo onde a RCE contém $\mathbf{0}$ e não contém $[\infty; \infty]$. Finalmente, na figura 5.14, temos um exemplo onde a RCE não contém $\mathbf{0}$ e nem $[\infty; \infty]$.

Proposição 71 *A RCC é vazia quando se trata da transformada- Z com apenas intervalos degenerados.*

Prova:

A operações aritméticas intervalares com intervalos degenerados coincide com a aritmética real. Assim, podemos concluir que a fronteira da região de convergência estrita é a mesma da região de não convergência estrita. Logo, não existe uma região entre RLCE e RLCN. Então, pela definição 118, não existe RCC. ■

Exemplo 7 *Podemos ver um exemplo de ausência da RCC no caso de análise de convergência da transformada- Z da sequência $X[n] = [a; a]^n \mathbf{u}[n]$, que é um caso particular da sequência apresentada no exemplo 4, onde o intervalo A é substituído pelo intervalo degenerado $[a.a]$. Podemos observar que as figuras 5.7 e 5.13 apresentam entre si uma certa similaridade. Vimos que as setas da RLC e RLNC, que na figura 5.7 apontam para circunferências diferentes, na figura 5.13 elas apontam para uma mesma circunferência. Observamos também que a RCC que aparece na figura 5.7 já não aparece na figura 5.13. Além disso, os valores $|\overline{A}|_I$ e $|\underline{A}|_I$ da figura 5.7 dão lugar ao valor $|a|$ na figura 5.13.*

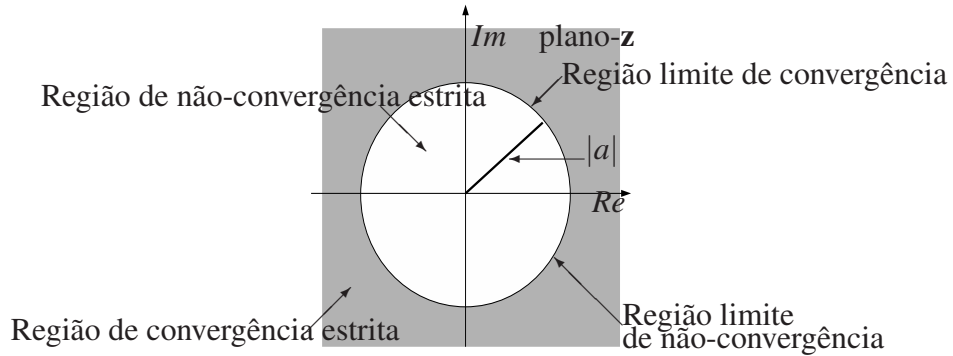


Figura 5.13: Uma ilustração da região de convergência para transformada- Z intervalar exponencial no plano- z para intervalos degenerados

Proposição 72 *Suponha que $\mathbf{0} \in RCE$ ou $\infty \in RCE$, e, portanto, que $RCE \not\supset \{0, \infty\}$. Se a RCC existe, ela é contínua e representada por um anel.*

Prova:

Suponha uma sequência que não convirja absolutamente, mas que tenha uma região de convergência. Se $RCE \supset \mathbf{0}$, como não converge absolutamente, então $RCE \not\supset [\infty; \infty]$. Logo, existe \mathbf{z}_0 tal que $\forall \mathbf{z} \in RCE$, $|\mathbf{z}|_I \prec |\mathbf{z}_0|_I$, existe \mathbf{z}_1 tal que $|\mathbf{z}_1|_I \geq |\mathbf{z}_0|_I$ e $\forall \mathbf{z} \in RLNC$, $|\mathbf{z}|_I \succ |\mathbf{z}_1|_I$, onde RLC é a circunferência de raio $|\mathbf{z}_0|_I$ e $RLNC$ é a circunferência de raio $|\mathbf{z}_1|_I$. Como, por hipótese, a RCC existe, $|\mathbf{z}_1|_I \succ |\mathbf{z}_0|_I$ e $RLNC \neq RLC$ e, pela definição 118, a RCC é a região entre a $RLNC$ e a RLC , que é o anel definido pela circunferência de raio intervalar $[\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1]$ e centro na origem. Usando simetria, podemos provar o mesmo resultado para o caso em que $RCEs \supset [\infty; \infty]$. ■

Na figura 5.8 podemos observar um caso em que a RCC é um anel e a $RCE \supset [\infty; \infty]$. Na figura 5.9 temos um caso onde a RCC é um anel e a $RCE \supset \mathbf{0}$.

Proposição 73 *A RCC é descontínua e representada por dois anéis quando se trata da transformada- Z com coeficientes não-degenerados e, se $\forall \mathbf{z} \in RCE$, então $|\mathbf{0}|_I \prec |\mathbf{z}_0|_I \leq |\mathbf{z}|_I \leq |\mathbf{z}_1|_I \prec [\infty; \infty]$.*

Prova:

Das hipóteses da proposição 73, concluímos que a RCE é um anel no plano complexo limitado pelas circunferências de raios $|\mathbf{z}_0|_I$ e $|\mathbf{z}_1|_I$, respectivamente. Caso RCC não inclua vizinhança de zero $\mathbf{0}$, existem \mathbf{z}_2 e \mathbf{z}_3 tais que $|\mathbf{z}_2|_I \prec |\mathbf{z}_0|_I$, $|\mathbf{z}_3|_I \succ |\mathbf{z}_1|_I$, de modo que as circunferências de raios $|\mathbf{z}_2|_I$ e $|\mathbf{z}_3|_I$ são fronteiras da $RNCE$. Assim, temos dois anéis. Um definido pelas circunferências de raios $|\mathbf{z}_2|_I$ e $|\mathbf{z}_0|_I$ e o outro pelas circunferências de raios $|\mathbf{z}_1|_I$ e $|\mathbf{z}_3|_I$. Logo, pela definição 118 temos duas RCC . ■

Exemplo 8 *Podemos tomar como exemplo de uma transformada- Z que tenha uma RCC descontínua, a transformada- Z adição da sequência $A^n \mathbf{u}[n]$, que tem seu gráfico esboçado na figura 5.7, com a sequência $-B^n \mathbf{u}[-n-1]$, que tem gráfico semelhante ao*

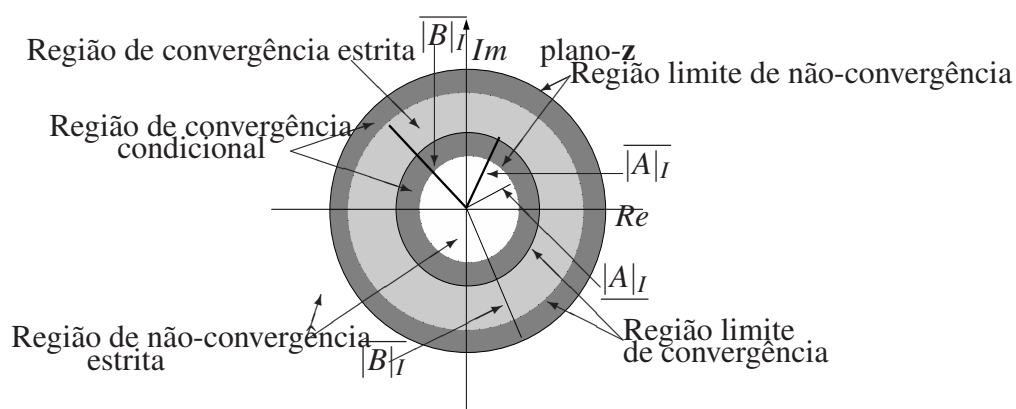


Figura 5.14: Uma ilustração da região de convergência para transformada- Z intervalar no plano- z

da figura 5.9. A transformada da sequência $A^n \mathbf{u}[n] - B^n \mathbf{u}[-n - 1]$ é mostrada na figura 5.14

Proposição 74 A RLC coincide com a região $RLNC$ quando se trata de intervalos degenerados.

Prova:

A região de fronteira da RCE é a mesma da $RNCE$. Logo, pelas definições 116 e 117, $RLNC$ e RLC são iguais. ■

Podemos ver um exemplo em que $RLC = RLNC$ na figura 5.13.

Proposição 75 A RLC é vazia quando a transformada- Z converge para todo o plano- z .

Prova:

Quando a transformada- Z converge para todo o plano- z não existe região de fronteira. Logo, pela definição 116, não existe a RLC . ■

Podemos ver um exemplo de ausência da RLC para transformada- Z que converge para todo o plano z na figura 5.6.

Proposição 76 A $RLNC$ é vazia quando a transformada- Z converge para todo o plano- z .

Prova:

Quando a transformada- Z converge para todo o plano- z , não existe região de fronteira. Logo, pela definição 117, não existe a $RLNC$. ■

Proposição 77 A RCC é vazia quando a transformada- Z convergir para todo o plano- z .

Prova:

Quando a transformada- Z convergir para todo o plano- z , das proposições 75 e 76 concluímos que não existe a RLC e nem a $RLNC$. Logo, pela definição 118, não existe a RCC . ■

Podemos ver um exemplo de uma transformada- Z que converge para todo o plano- z na figura 5.6.

Proposição 78 *A RLC é composta por duas circunferências, quando a RCC é composta por dois anéis.*

Prova:

Por definição, definição 118, cada RCC tem uma RLC como fronteira. Logo, para duas RCC teremos duas RLC . ■

Na figura 5.14 temos um exemplo de duas RCC e duas RLC . Sempre teremos duas RLC , quando RCE for um anel limitado por duas circunferências de raios finitos maiores que zero.

Proposição 79 *A transformada de Fourier intervalar da sequência $X[n]$ converge absolutamente, se a RCE da transformada- Z da sequência $X[n]$ contiver o círculo unitário.*

Prova:

Das definições 109 e 110 temos que a transformada discreta de Fourier e a transformada- Z intervalar são equivalentes quando $|z|_I = 1$. Portanto, se uma converge a outra também convergirá. ■

Um exemplo no qual a RCE contém o círculo unitário pode ser visto na figura 5.12.

Proposição 80 *A transformada de Fourier intervalar da sequência $X[n]$ converge condicionalmente quando RCC da transformada- Z da sequência $X[n]$ contiver o círculo unitário ou a RLC coincide com o círculo unitário e $RLC \neq RLNC$.*

Prova:

Das definições 109 e 110, podemos concluir a equivalência entre a transformada discreta de Fourier e a transformada- Z intervalar, quando $|z|_I = 1$. Portanto, ela tem o mesmo comportamento no círculo unitário. ■

Proposição 81 *A RCE não contém polos.*

Prova:

Direto da definição 114. Caso existisse polos não seria região de convergência estrita. ■

Somente como ilustração, podemos observar nas figuras 5.8, 5.10, 5.11 e 5.12 que os polos estão sempre fora da RCE .

Proposição 82 Para uma sequência finita $X[n]$, a RCE é todo o plano- \mathbf{z} , com possíveis exceções para $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{z} = [-\infty; \infty]$.

Prova:

Consideremos uma sequência finita intervalar, $X[n]$, com $-\infty < N_0 \leq n \leq N_1 < \infty$. Podemos reescrever a equação 5.2, da definição 110, como

$$X(\mathbf{z}) = \sum_{k=N_0}^{N_1} X[k]\mathbf{z}^{-k}, \quad (5.26)$$

que converge para todos os valores de \mathbf{z} , exceto para $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, com $k > 0$, pois não existe o $\lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\mathbf{z}^k}$. Além disso, para $\mathbf{z} = [\infty; \infty]$, com $k < 0$, não existe o $\lim_{\mathbf{z} \rightarrow [\infty; \infty]} \mathbf{z}^k$. ■

Proposição 83 Se $X[n]$ for uma sequência lateral direita, então a RCE de sua transformada- \mathcal{Z} se estende da região de fronteira da RLC até $\mathbf{z} \rightarrow [\infty; \infty]$.

Prova:

Sendo $X[n]$ uma sequência lateral direita, sua transformada- \mathcal{Z} pode ser representada pela equação da definição 5.8

$$X(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} X[k]\mathbf{z}^{-k} \quad (5.27)$$

Se a série da equação 5.27 convergir para um determinado \mathbf{z}_i , ela converge absolutamente para esse determinado \mathbf{z}_i . Logo, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} |X[k]|_I |\mathbf{z}_i^{-k}|_I, \quad (5.28)$$

que também converge. Tomando um \mathbf{z}_w qualquer tal que $|\mathbf{z}_w|_I \geq |\mathbf{z}_i|_I$, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} X[k]\mathbf{z}_w^{-k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |X[k]|_I |\mathbf{z}_i^{-k}|_I. \quad (5.29)$$

Como a série à direita da desigualdade na inequação 5.29 converge, sua minorante também converge. Como podemos tomar \mathbf{z}_i tão próximo da fronteira RLC quanto se queira e um \mathbf{z}_w qualquer tal que $|\mathbf{z}_w|_I \geq |\mathbf{z}_i|_I$ concluímos a proposição. ■

Podemos ver exemplos de sequências laterais direita nas seguintes figuras 5.3, 5.6, 5.7, 5.8, 5.12 e 5.13.

Proposição 84 Se $X[n]$ for uma sequência lateral esquerda, então a RCE se estenderá de RLC até possivelmente $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Prova:

Sendo $X[n]$ uma sequência lateral esquerda, sua transformada- \mathcal{Z} pode ser representada pela equação da definição 5.8

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{-1} X[k]\mathbf{z}^{-k}. \quad (5.30)$$

Se a série da equação 5.30 convergir para um determinado \mathbf{z}_i , ela converge absolutamente para esse determinado \mathbf{z}_i . Logo, temos

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} |X[k]|_I |\mathbf{z}_i^{-k}|_I, \quad (5.31)$$

que também converge. Tomando um \mathbf{z}_w qualquer tal que $|\mathbf{z}_w|_I \leq |\mathbf{z}_i|_I$ temos

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} X[k]\mathbf{z}_w^{-k} \leq \sum_{k=-\infty}^{-1} |X[k]|_I |\mathbf{z}_i^{-k}|_I. \quad (5.32)$$

Como a série à direita da desigualdade na inequação 5.32 converge, sua minorante também convergirá. Como podemos tomar \mathbf{z}_i tão próximo da fronteira *RLC* quanto quisermos, e um \mathbf{z}_w qualquer tal que $|\mathbf{z}_w|_I \leq |\mathbf{z}_i|_I$, concluímos nossa proposição. ■

Podemos ver exemplos de sequências laterais esquerdas nas seguintes figuras 5.5 e 5.10,

Proposição 85 *Se $X[n]$ for uma sequência bilateral, a RCE de sua transformada- \mathcal{Z} é um anel limitado pala RLC de raio inferior maior ou igual a $\mathbf{0}$ e a RLC de raio superior menor que $[\infty, \infty]$.*

Prova:

Se $X[n]$ for uma sequência bilateral, sua transformada- \mathcal{Z} é dada pela equação 5.2, da definição 110,

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\mathbf{z}^{-k} \quad (5.33)$$

Usando a associatividade da adição intervalar, podemos representá-la como adição de duas sequências unilaterais, sendo uma lateral esquerda e a outra lateral direita, como mostra a equação 5.34.

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{-1} X[k]\mathbf{z}^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} X[k]\mathbf{z}^{-k}. \quad (5.34)$$

Batizando a *RLC* da sequência lateral esquerda de *RLC*₁ e a *RLC* da sequência lateral direita de *RLC*₂ segue que, na proposição 84, temos que a *RCE* da sequência lateral esquerda se estende da fronteira *RLC*₁ até $\mathbf{0}$. Além disso, na proposição 83 a *RCE* da sequência lateral direita se estende da fronteira *RLC*₂ até $[\infty, \infty]$. Na proposição 64, temos que $RCE_{1+2} = RCE_1 \cap RCE_2$. Logo, a *RCE* de uma sequência bilateral é um anel limitado por *RLC*₁ e *RLC*₂ provando nossa proposição. ■

Na figura 5.4 vemos um exemplo, onde a *RCE* é um anel.

Proposição 86 *A RCE é sempre uma região contínua.*

Prova:

Suponha, por contradição, que exista $\mathbf{z}_i \in RCE$ para o qual a transformada -Z não converge. Então, ela também não convergirá para toda circunferência definida por $|\mathbf{z}|_I = |\mathbf{z}_i|_I$. Suponha, agora, que esta circunferência divida a *RCE* em duas regiões, aquela interna à circunferência e aquela externa. Supondo que a sequência seja lateral direita e tomando um ponto \mathbf{z}_w na parte externa da circunferência de tal maneira que $\mathbf{z}_w \in RCE$ e um ponto \mathbf{z}_i na circunferência temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} X[k]\mathbf{z}_i^{-k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |X[k]|_I |\mathbf{z}_w^{-k}|_I \quad (5.35)$$

que é uma contradição, pois pela escolha de \mathbf{z}_w , o termo do lado direito da inequação 5.35 converge. Logo, o da esquerda também deveria convergir o que não ocorre, pois escolhemos o suposto ponto de descontinuidade da *RCE*. Com isso concluímos que uma sequência lateral direita não pode ter uma *RCE* descontínua. Supondo agora que a sequência seja lateral esquerda e tomando um ponto \mathbf{z}_w na parte interna da circunferência de tal maneira que $\mathbf{z}_w \in RCE$ e um ponto \mathbf{z}_i na circunferência temos

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} X[k]\mathbf{z}_i^{-k} \leq \sum_{k=-\infty}^{-1} |X[k]|_I |\mathbf{z}_w^{-k}|_I, \quad (5.36)$$

que é uma contradição, pois pela escolha de \mathbf{z}_w o termo do lado direito da inequação 5.36 converge. Logo, o da esquerda também deveria convergir o que não ocorre, pois escolhemos o suposto ponto de descontinuidade da *RCE*. Com isso concluímos que uma sequência lateral esquerda não pode ter uma *RCE* descontínua. Supondo que a sequência seja bilateral, ela pode ser escrita como a soma de duas sequências, uma lateral a esquerda e outra lateral direita. Como a *REC* da soma é a interseção das duas sequências, a bilateral também não pode ser descontínua. Para o caso de uma sequência finita a *RCE* é todo o plano \mathbf{z} . ■

A figura 5.4 ilustra bem um caso no qual temos uma *RCE* contínua de uma sequência bilateral. A figura 5.6 mostra um saco onde a *RCE* é todo o plano \mathbf{z} . A figura 5.7 mostra a *RCE* de uma sequência lateral direita. Um exemplo da *RCE* da transformada-Z de uma sequência lateral esquerda é dado na figura 5.9.

5.2 Estabilidade, causalidade e regiões de convergência

A estabilidade e a causalidade são propriedades desejadas em alguns sistemas.

Proposição 87 *Dado um sistema cuja resposta ao impulso seja $H[n]$ e sua transformada-Z igual a $\mathcal{H}(\mathbf{z})$, dizer que o sistema é estável é equivalente a dizer que a RCE contém o círculo unitário.*

Prova:

Primeiro, suponhamos que o sistema seja estável. Da definição de estabilidade, temos que

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} H[k-n] \right|_I \prec [\infty; \infty] \quad (5.37)$$

é convergente. Das propriedades de convergências de seqüências intervalares segue que a expressão do primeiro membro da desigualdade da equação 5.37, multiplicado por uma constante intervalar também convergirá, como mostra a inequação 5.38

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} H[k-n] \right|_I |C|_I \prec [\infty; \infty]. \quad (5.38)$$

Tomando $C = \mathbf{1}$, podemos reescrever a equação 5.38 como segue

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} H[k-n] \right|_I |\mathbf{1}|_I \prec [\infty; \infty]. \quad (5.39)$$

Da equação 5.39 e da hipótese de estabilidade de H , concluímos que a equação 5.40 converge quando $|\mathbf{z}|_I = \mathbf{1}$,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} H[k-n] \mathbf{z}^{-n} \succ [\infty; \infty]. \quad (5.40)$$

Assim, a RCE da transformada- Z de H conterá o círculo unitário, quando H for estável.

Reciprocamente, suponhamos que a RCE da transformada- Z contenha o círculo unitário, ou seja,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} H[k-n] \mathbf{z}^{-n} \succ [\infty; \infty], \quad (5.41)$$

que converge quando $|\mathbf{z}|_I = \mathbf{1}$, substituindo $\mathbf{z}^{-n} = \mathbf{1}$ na equação 5.41. Logo,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} H[k-n] \mathbf{1} \succ [\infty; \infty]. \quad (5.42)$$

Usando o intervalo $\mathbf{1}$ como o elemento neutro da multiplicação intervalar resulta

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} H[k-n] \succ [\infty; \infty]. \quad (5.43)$$

Tomando uma entrada limitada $X[k]$ tal que $X[k] < [\infty; \infty]$ segue

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] H[k-n] \succ [\infty; \infty]. \quad (5.44)$$

Consequentemente, temos o sistema

$$Y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]H[k-n] \succ [\infty; \infty]. \quad (5.45)$$

Da equação 5.45 concluímos que para cada entrada limitada, $X[k]$, sua saída será limitada. Logo, o sistema é estável. O que nos leva a concluir que sempre que tivermos um sistema cuja transformada- Z contenha o círculo unitário, ele será estável. Assim, concluímos a prova da proposição. ■

Caso um sistema satisfaça as condições da proposição 87, sua transformada de Fourier convergirá.

Proposição 88 *seja um sistema cuja a resposta ao impulso seja $H[n]$ e sua transformada- Z seja igual a $\mathcal{H}(\mathbf{z})$. Se sua região de convergência for uma circunferência intervalar de centro na origem e raio R tal que $\mathbf{0} \prec R \prec [\infty; \infty]$, então H não é causal.*

Prova:

Se RCE tiver raio, R , tal que $\mathbf{0} \prec R \prec [\infty; \infty]$, concluímos que

$$\mathcal{H}(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H[k]\mathbf{z}^{-k} \prec [-\infty; \infty] \text{ para } \forall \mathbf{z} \text{ tal que } \mathbf{0} \prec \mathbf{z} \prec [\infty; \infty]. \quad (5.46)$$

Sem perda de generalidade, e pela associatividade da adição intervalar, podemos reescrever $\mathcal{H}(\mathbf{z})$ da seguinte maneira.

$$\mathcal{H}(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{-1} H[k]\mathbf{z}^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} H[k]\mathbf{z}^{-k}. \quad (5.47)$$

Das definições 29 e 30, que $\mathcal{H}(\mathbf{z})$ na equação 5.47 é representada pela soma da transformada- Z de uma sequência lateral direita com uma sequência lateral esquerda. Das proposições 83 e 84 e da hipótese que $\mathbf{0} \prec R \prec [\infty; \infty]$ concluímos que $\mathcal{H}(\mathbf{z})$ não pode ser representado nem só por uma sequência lateral direita e nem só por uma sequência lateral esquerda. Logo, deste fato e da definição 31 concluímos que $\mathcal{H}(\mathbf{z})$ é uma sequência bilateral. Sendo $\mathcal{H}(\mathbf{z})$ bilateral, pela definição 90, $\mathcal{H}(\mathbf{z})$ não pode ser causal. ■

Proposição 89 *Seja um sistema cuja a resposta ao impulso seja $H[n]$ e sua transformada- Z seja igual a $\mathcal{H}(\mathbf{z})$. Dizer que H é causal é equivalente dizer que $H[n]$ é uma sequência lateral direita.*

Prova:

Direto da definição 90. ■

5.3 Inversa da transformada-Z intervalar

A transformada-Z inversa é uma importante ferramenta para análise de sistemas lineares discretos. Existem vários métodos para encontrar a inversa da transformada-Z.

O método baseado no teorema da integral de Cauchy, é um método formal. Na prática de processamentos de sinais são usados outros métodos menos formais como o método da inspeção, expansão em frações parciais e expansão em séries de potências.

5.3.1 Método formal com integral de Cauchy

Esse método usa integral de linha para a obter a transformada-Z inversa. Ele tem pouca utilização prática, mas tem grande valor teórico na garantia da existência da inversa. Apresentaremos uma versão intervalar a seguir.

Embora este trabalho tem suas peculiaridades, diferindo ligeiramente do que se encontra na literatura, uma maior fundamentação sobre integral de contorno intervalar pode ser encontrado nos seguintes trabalhos [Callejas-Bedregal & Bedregal 2004] e [Petković & Petković 1998].

A fundamentação para integral de linha intervalar deixaremos por conta do trabalho de [Callejas-Bedregal & Bedregal 2004], apenas faremos uso da integral de linha, que será um caso particular das generalizações propostas em [Callejas-Bedregal & Bedregal 2004].

Teorema 21 (Teorema de Cauchy para \mathbf{z}) *Seja $F : D \rightarrow \mathbb{IC}$ uma função analítica em um domínio simplesmente conexo $D \subseteq \mathbb{IC}_d$. Se C for um caminho fechado simples de D , então*

$$\oint_C F(\mathbf{z})d\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

Prova:

Usando os princípios de integração intervalar propostos nos trabalhos [Moore 1979] e [Callejas-Bedregal & Bedregal 2005] temos

$$\begin{aligned} \oint_C F(\mathbf{z})d\mathbf{z} &= \left[\oint_C F(\mathbf{z})d\mathbf{z}; \overline{\oint_C F(\mathbf{z})d\mathbf{z}} \right] \\ &= \left[\oint_C \underline{F(\mathbf{z})}d\mathbf{z}; \oint_C \overline{F(\mathbf{z})}d\mathbf{z} \right] \\ &= \left[\oint_C \underline{F(\mathbf{z})}d\mathbf{z}; \oint_C \overline{F(\mathbf{z})}d\mathbf{z} \right] \end{aligned} \quad (5.48)$$

Como $\mathbf{z} = [z; \bar{z}]$, podemos reescrever o último termo da equação 5.48 como segue.

$$\left[\oint_C \underline{F(\mathbf{z})}d\mathbf{z}; \oint_C \overline{F(\mathbf{z})}d\mathbf{z} \right] = \left[\oint_C \underline{F(z)}dz; \oint_C \overline{F(z)}dz \right]. \quad (5.49)$$

Pelo teorema de Cauchy para funções complexas, temos

$$\left[\oint_C \underline{F(z)}dz; \oint_C \overline{F(z)}dz \right] = \mathbf{0}. \quad (5.50)$$



Esse teorema será usado na prova do seguinte teorema.

Teorema 22 Dada uma função $F : A \rightarrow W$ e C o círculo unitário de centro na origem contido em W , com A o conjunto dos complexos intervalares degenerados, W uma região simplesmente conexa contida em \mathbb{C} e $F(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^n$, temos

$$\frac{\mathbf{1}}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_C F(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } n = -1 \\ \mathbf{0} & \text{se } n \neq -1. \end{cases}$$

Prova:

Dividiremos a prova em três partes: a) $n \geq 0$, b) $n = -1$ e c) $n < -1$.

a) para $n \geq 0$, $F(\mathbf{z})$ satisfaz as condições do teorema 21, portanto $F(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$.

b) para $n = -1$, temos

$$\frac{\mathbf{1}}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_C \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}} d\mathbf{z} = \frac{\mathbf{1}}{[2\pi i; 2\pi i]} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{1}}{e^{it}} i e^{it} dt \quad (5.51)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{[2\pi i; 2\pi i]} \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = \frac{\mathbf{1}}{[2\pi i; 2\pi i]} i \int_0^{2\pi} \mathbf{1} dt \quad (5.52)$$

$$= \frac{[i; i]}{[2\pi i; 2\pi i]} \int_0^{2\pi} \mathbf{1} dt = \frac{\mathbf{1}}{[2\pi; 2\pi]} [[t; t]]_0^{2\pi} \quad (5.53)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{[2\pi; 2\pi]} [2\pi - 0, 2\pi - 0] = \frac{\mathbf{1}}{[2\pi; 2\pi]} [2\pi; 2\pi] = \mathbf{1}. \quad (5.54)$$

c) para o caso em que $n < -1$,

$$\frac{\mathbf{1}}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_C \mathbf{z}^n d\mathbf{z} = \frac{\mathbf{1}}{[2\pi i; 2\pi i]} \int_0^{2\pi} e^{nit} n i e^{it} dt \quad (5.55)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{[2\pi i; 2\pi i]} \int_0^{2\pi} e^{nit} n i e^{it} dt = \frac{\mathbf{1}}{[2\pi i; 2\pi i]} n i \int_0^{2\pi} e^{(n+1)it} dt \quad (5.56)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{[2\pi i; 2\pi i]} n i \int_0^{2\pi} e^{(n+1)it} dt = \frac{\mathbf{1}}{[2\pi i; 2\pi i]} n i \left[\frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i} \right]_0^{2\pi} \quad (5.57)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{[2\pi i; 2\pi i]} n i \left[\left(\frac{e^{(n+1)i(2\pi)}}{(n+1)i} \right) - \left(\frac{e^{(n+1)i(0)}}{(n+1)i} \right) \right]. \quad (5.58)$$

Podemos observar que o termo

$$\left[\left(\frac{e^{(n+1)i(2\pi)}}{(n+1)i} \right) - \left(\frac{e^{(n+1)i(0)}}{(n+1)i} \right) \right],$$

da equação 5.58, se anula para qualquer valor de $n \neq -1$, uma vez que $e^{k2\pi} = \mathbf{1}$, para qualquer inteiro k . Concluindo a prova.

■

Com o teorema 22 podemos enunciar o seguinte teorema sobre a inversa da transformada- Z de uma sequência.

Teorema 23 (Inversa da Transformada- Z intervalar) *Seja $X(\mathbf{z})$ a transformada- Z da sequência $X[n]$ na sua região de convergência estrita-RCE e $C \in RCE$ um caminho fechado. Então*

$$X[n] = \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_C X(\mathbf{z}) \mathbf{z}^{n-1} d\mathbf{z}.$$

Prova:

Multiplicando ambos os membros da equação 5.2 por \mathbf{z}^{n-1} temos

$$\mathbf{z}^{n-1} X(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \mathbf{z}^{-k} \mathbf{z}^{n-1}. \quad (5.59)$$

Multiplicando ambos os membros da equação 5.59 por $\frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]}$ e reorganizando, temos

$$\frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} X(\mathbf{z}) \mathbf{z}^{n-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \mathbf{z}^{n-k-1}. \quad (5.60)$$

Integrando ambos os membros da equação 5.60 sobre um caminho fechado C , temos

$$\oint_C \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} X(\mathbf{z}) \mathbf{z}^{n-1} d\mathbf{z} = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \mathbf{z}^{n-k-1} d\mathbf{z}. \quad (5.61)$$

Fazendo uso da linearidade do operador de integração, na equação 5.61 e colocando as constantes fora do integrando segue

$$\frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_C X(\mathbf{z}) \mathbf{z}^{n-1} d\mathbf{z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_C \mathbf{z}^{n-k-1} d\mathbf{z}. \quad (5.62)$$

Do teorema 22 temos

$$\frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_C \mathbf{z}^{n-k-1} d\mathbf{z} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}. \quad (5.63)$$

Substituindo a expressão do lado esquerdo da equação 5.63, na equação 5.62, pelo seu valor do lado direito na equação 5.63 e rearrumando temos

$$X[n] = \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_C X(\mathbf{z}) \mathbf{z}^{n-1} d\mathbf{z}, \quad (5.64)$$

provando o nosso teorema. ■

Como o método formal não é muito usado na prática, apresentaremos a seguir alguns métodos mais práticos

5.3.2 Método por inspeção

Este método consiste em reconhecer, por inspeção, alguns pares de transformadas, como mostra a tabela 5, e com manipulação algébrica chegando á inversa da transformada.

Podemos, por exemplo, procurar por inspeção a inversa da transformada

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right] \mathbf{z}^{-1}}, \quad |\mathbf{z}|_I \succ \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right].$$

Analisando a tabela 5, podemos ver que o item 5 traz o par sequência/transformada que procuramos

$$A^n \mathbf{u}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - A\mathbf{z}^{-1}}, \quad |\mathbf{z}|_I \succ |A|_I. \quad (5.65)$$

Se substituirmos A da equação 5.65, por $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$, encontraremos a inversa que procuramos, como mostra a equação 5.66,

$$\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]^n \mathbf{u}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right] \mathbf{z}^{-1}}, \quad |\mathbf{z}|_I \succ \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]. \quad (5.66)$$

5.3.3 Expansão de frações parciais

Nesta seção faremos as manipulações polinomiais com as variáveis intervalares como se fosse intervalos degenerados ou variáveis reais. Estamos tratando um problema que as incertas são advindas das entradas dos sinais e não do modelo, por isso manipulamos o modelo como se fosse um modelo real.

Muitas vezes, na busca da inversa da transformada- \mathcal{Z} de uma certa sequência não temos explicitamente os termos para consultarmos em uma tabela. Para isso é necessário algumas manipulações algébricas para expressá-la de forma que fique evidente as formas menores que a compõem. Para conseguir isso um dos recursos utilizados em análise de sistemas LTI é o método de expansão em frações parciais, como mostraremos a seguir.

Uma versão não intervalar deste método pode ser encontrada em Oppenheim e Schaffer [Oppenheim & Schaffer 1989] pp 112.

Assumimos que $\mathcal{X}(\mathbf{z})$ seja expresso por uma razão de polinômios sobre \mathbf{z}^{-1} , genericamente representados pela a equação 5.67,

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \frac{\sum_{k=0}^M B_k \mathbf{z}^{-k}}{\sum_{k=0}^N A_k \mathbf{z}^{-k}}. \quad (5.67)$$

Multiplicando o segundo membro da equação 5.67 pela fração $\frac{\mathbf{z}^{M+N}}{\mathbf{z}^{M+N}}$ e fazendo uma distribuição sobre o somatório temos

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z}^N \sum_{k=0}^M B_k \mathbf{z}^{M-k}}{\mathbf{z}^M \sum_{k=0}^N A_k \mathbf{z}^{N-k}}. \quad (5.68)$$

Na equação 5.68 podemos observar que $\mathcal{X}(\mathbf{z})$ tem M intervalos zeros e N intervalos

polos não nulos no plano \mathbf{z} , e $M - N$ intervalos polos em $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ se $M \geq N$ ou $N - M$ intervalos de zeros em $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ se $N \geq M$. Para obter a expansão em frações parciais de $X(\mathbf{z})$ da equação 5.67, pode ser reescrita da seguinte forma

$$X(\mathbf{z}) = \frac{B_0 \prod_{k=0}^M (\mathbf{1} - C_k \mathbf{z}^{-1})}{A_0 \prod_{k=0}^N (\mathbf{1} - D_k \mathbf{z}^{-1})}, \quad (5.69)$$

onde os coeficientes C_k representam os zeros não nulos de $X(\mathbf{z})$ e os coeficientes D_k representam os polos não nulos de $X(\mathbf{z})$.

Se $M \leq N$ e todos os polos forem de primeira ordem, $X(\mathbf{z})$ pode ser escrito como

$$X(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\mathbf{1} - D_k \mathbf{z}^{-1}}. \quad (5.70)$$

Aqui, precisamos fazer algumas hipóteses para isolarmos o termo A_k . Assim, assumiremos que todo $W \supseteq \mathbf{0}$ seja representado por $\mathbf{0}$, e toda expressão, $D(n)$, dividida por $D(n)$ seja representada por $\mathbf{1}$. Agora, multiplicando ambos os membros da equação 5.70, pela expressão $(\mathbf{1} - D_k \mathbf{z}^{-1})$ obtemos

$$(\mathbf{1} - D_k \mathbf{z}^{-1})X(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^N \frac{(\mathbf{1} - D_k \mathbf{z}^{-1})A_i}{\mathbf{1} - D_i \mathbf{z}^{-1}}. \quad (5.71)$$

Pelas hipóteses acima e avaliando o lado direito da equação 5.71, para $\mathbf{z} \subseteq D_k$ temos que todos os termos com índices $i \neq k$ são nulos. Reescrevendo a equação e trocando a ordem dos termos temos

$$A_k = (\mathbf{1} - D_k \mathbf{z}^{-1})X(\mathbf{z})|_{\mathbf{z} \subseteq D_k}. \quad (5.72)$$

Caso $M \geq N$ adicionaremos ao lado direito da equação 5.70 um polinômio de ordem $M - N$, representado pela expressão

$$\sum_{r=0}^{M-N} B_r \mathbf{z}^{-r}. \quad (5.73)$$

Logo temos

$$X(\mathbf{z}) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \mathbf{z}^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\mathbf{1} - D_k \mathbf{z}^{-1}}. \quad (5.74)$$

Os termos B_r podem ser encontrados pela divisão do numerador pelo denominador até que o resto tenha grau menor do que o denominador, e os A_k , como na equação 5.72, caso o polinômio tenha um pólo de múltipla ordem e $M \geq N$. Se $X(\mathbf{z})$ tiver um pólo de ordem s , em $\mathbf{z} = D_i$, a equação 5.74 deve ser reescrita como

$$X(\mathbf{z}) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \mathbf{z}^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{\mathbf{1} - D_k \mathbf{z}^{-1}} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{\mathbf{1} - D_i \mathbf{z}^{-1}}, \quad (5.75)$$

onde, os coeficientes C_m são obtidos da seguinte equação

$$C_m = \frac{1}{(s-m)(-D_i)^{s-m}} \left\{ \frac{d^{s-m}}{d\mathbf{w}^{s-m}} [(\mathbf{1} - D_i \mathbf{w})^s X(\mathbf{w}^{-1})] \right\}_{\mathbf{w} \subseteq D_i}. \quad (5.76)$$

5.4 Expansão em séries de potências

Pela definição 110, podemos observar que a transformada- \mathcal{Z} é uma série de Laurent, onde os $X[n]$ são os coeficientes de \mathbf{z}^{-n} . Assim, a transformada- \mathcal{Z} pode ser escrita como série de potências na seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\mathbf{z}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \mathbf{z}^{-n} \\ &= \dots + X[-2] \mathbf{z}^2 + X[-1] \mathbf{z}^1 + X[0] \mathbf{z}^0 + X[1] \mathbf{z}^{-1} + X[2] \mathbf{z}^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (5.77)$$

Assim, podemos determinar qualquer valor particular de uma sequência encontrando os coeficientes apropriados para a potência \mathbf{z}^{-1} , como podemos ver no exemplo 9.

Exemplo 9 *Seja a transformada- \mathcal{Z} $\mathcal{X}(\mathbf{z})$ da seguinte forma.*

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^2 \left(\mathbf{1} - \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right] \mathbf{z}^{-1} \right) \left(\mathbf{1} + [1, 2] \mathbf{z}^{-1} \right) \left(\mathbf{1} - \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right] \mathbf{z}^{-1} \right). \quad (5.78)$$

Resolvendo o produto e simplificando temos

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) \subseteq \mathbf{z}^2 - \left[\frac{1}{6}; \frac{9}{6} \right] \mathbf{z} - \left[\frac{5}{12}; \frac{7}{6} \right] + \left[\frac{17}{6}; \frac{1}{3} \right] \mathbf{z}^{-1}. \quad (5.79)$$

Por inspeção obtemos

$$X[n] \subseteq \begin{cases} \mathbf{1} & n = -2 \\ - \left[\frac{1}{6}; \frac{9}{6} \right] & n = -1 \\ - \left[\frac{5}{2}; \frac{7}{6} \right] & n = 0 \\ - \left[0; \frac{17}{8} \right] & n = 1 \\ \mathbf{0} & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (5.80)$$

Alternativamente temos

$$X[n] \subseteq \delta_{\mathbf{i}}[n+2] - \left[\frac{1}{6}; \frac{9}{6} \right] \delta_{\mathbf{i}}[n+1] - \left[\frac{5}{2}; \frac{7}{6} \right] \delta_{\mathbf{i}}[n] - \left[0; \frac{17}{8} \right] \delta_{\mathbf{i}}[n-1].$$

5.5 Propriedades da transformada- \mathcal{Z} intervalar

Muitas das propriedades da transformada- \mathcal{Z} convencional são usadas no manuseio de sinais em conjunto com as técnicas da transformada inversa para calcular transformadas

inversas mais sofisticadas. Nesta seção apresentaremos uma versão intervalar de algumas dessas propriedades.

Para simplificar a notação usaremos a seguinte representação

$$X[n] \xleftrightarrow{Z} X(\mathbf{z}) \quad RCE = R_x.$$

$$X_1[n] \xleftrightarrow{Z_1} X(\mathbf{z}) \quad RCE_1 = R_{x_1}.$$

$$X_2[n] \xleftrightarrow{Z_2} X(\mathbf{z}) \quad RCE_2 = R_{x_2}.$$

5.5.1 Linearidade

Com a linearidade podemos usar o princípio “dividir para conquistar” e construir a transformada de seqüências com um maior grau de complexidade, através da transformada de seqüências mais simples. Podemos usar procedimento análogo para obter a transformada inversa.

Uma extensão desejada da linearidade da transformada- Z real para a transformada- Z intervalar seria com mostrada na expressão abaixo

$$AX_1[n] + BX_2[n] \xleftrightarrow{Z} AX_1(\mathbf{z}) + BX_2(\mathbf{z}), \quad RCE \supseteq R_{x_1} \cup R_{x_2}. \quad (5.81)$$

Infelizmente, por causa da falta da propriedade de distributividade da multiplicação em relação à adição da aritmética intervalar, não conseguimos a linearidade genérica como na equação 5.81. Temos, apenas, uma pseudo linearidade ou uma linearidade condicional.

A pseudo linearidade se daria relaxando a relação de equivalência para uma ordem de inclusão.

Não trataremos aqui a pseudo linearidade da transformada- Z por causa do escopo do trabalho. Optamos por sistemas reais com entradas intervalares.

Entendendo A e B , da equação 5.81, como sendo operadores de escalonamento do sinal que podem ampliar ou reduzir a amplitude do sinal, pela opção deste trabalho A e B não precisam ser intervalares, uma vez que fazem parte do modelo matemático da planta e não do sinal propriamente dito.

Mesmo não fazendo parte do escopo do trabalho, pela importância da linearidade mostraremos que impondo restrições sobre os operadores A e B e sobre o sinal de entrada obteremos uma versão restrita da equação 5.81. Como mostra a seguinte proposição.

Proposição 90 (Linearidade condicional da transformada- Z intervalar) *Suponha das duas seqüências $X_1[n]$ e $X_2[n]$, A e B de modo que nenhum termo das seqüências X_1 e X_2 e nem A e B contenha zero. Então, vale a linearidade formalizada na equação abaixo*

$$AX_1[n] + BX_2[n] \xleftrightarrow{Z} AX_1(\mathbf{z}) + BX_2(\mathbf{z}), \quad RCE = R_{x_1} \cup R_{x_2}. \quad (5.82)$$

Prova:

Renomeando as seqüências $AX_1[n] = W_1$ e $BX_2[n] = W_2$ e aplicando a transformada- Z

temos.

$$\mathcal{W}_1(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_1[k] \mathbf{z}^{-k}, \quad (5.83)$$

$$\mathcal{W}_2(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2[k] \mathbf{z}^{-k}. \quad (5.84)$$

Somando as equações 5.83 e 5.84 obtemos

$$\mathcal{W}_1(\mathbf{z}) + \mathcal{W}_2(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_1[k] \mathbf{z}^{-k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2[k] \mathbf{z}^{-k}. \quad (5.85)$$

Substituindo $W_1[k]$ e $W_2[k]$, da equação 5.85 por $AX_1[k]$ e $BX_2[k]$, respectivamente, resulta

$$\mathcal{W}_1(\mathbf{z}) + \mathcal{W}_2(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} AX_1[k] \mathbf{z}^{-k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} BX_2[k] \mathbf{z}^{-k}. \quad (5.86)$$

Das hipóteses de que as constantes A e B e os termos das sequências não contém zero, garantimos que podemos passar as constantes A e B para fora dos somatórios da equação 5.86,

$$\mathcal{W}_1(\mathbf{z}) + \mathcal{W}_2(\mathbf{z}) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1[k] \mathbf{z}^{-k} + B \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_2[k] \mathbf{z}^{-k}, \quad (5.87)$$

donde podemos concluir que

$$\mathcal{W}_1(\mathbf{z}) + \mathcal{W}_2(\mathbf{z}) = AX_1(\mathbf{z}) + BX_2(\mathbf{z}). \quad (5.88)$$

Agora analisando a RCE, temos que para todo valor de \mathbf{z} onde $X(\mathbf{z})$ converge. Então, $CX(\mathbf{z})$ também convergirá para qualquer $C \in \mathbb{I}\mathbb{R}$ tal que $C \prec [\infty; \infty]$. Logo, nas condições da hipótese temos

$$AX_1[n] + BX_2[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} AX_1(\mathbf{z}) + BX_2(\mathbf{z}), \quad RCE = R_{x1} \cup R_{x2}. \quad (5.89)$$

■

No modelo de sistema que estamos estudando temos interesse que, no caso de as constantes A e B da proposição 90, sejam intervalos degenerados. A proposição abaixo garante a linearidade

Proposição 91 (Linearidade com constantes de intervalos degenerados) *Dadas duas sequências intervalares quaisquer $X_1[n]$ e $X_2[n]$, e A e B dois intervalos degenerados, vale a linearidade formalizada na equação abaixo*

$$AX_1[n] + BX_2[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} AX_1(\mathbf{z}) + BX_2(\mathbf{z}), \quad RCE = R_{x1} \cup R_{x2}. \quad (5.90)$$

Prova:

Os casos em que $A \neq \mathbf{0}$ e $B \neq \mathbf{0}$ e os termos das sequências não contenham zero se

equiparam aos da proposição 90. Os casos em que A ou B se anula, também é anulado um ou os dois termos da equação 5.90. Resta provar, apenas, os caso onde os termos das sequências podem conter zeros. Mas, como a multiplicação é distributiva, sobre a adição, nos intervalos degenerados fica provada a equivalência da proposição 91. Para a Região de convergência vale o mesmo argumento usado na prova da proposição 90. ■

5.5.2 Deslocamento no tempo

O deslocamento no tempo é importante na manipulação de sequências, principalmente quando se trata de sistemas recursivos, no qual o valor em um determinado tempo depende de tempos anteriores.

Chamamos de **sistema invariante no tempo** quando um deslocamento de tempo na sequência de entrada provoca um correspondente deslocamento na sequência de saída.

Proposição 92 (Deslocamento no tempo) *Dada uma sequência intervalar $X[n]$ e um n_0 inteiro qualquer temos*

$$X[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} \mathbf{z}^{-n_0} X(\mathbf{z}), \quad RCE = R_X(*^1). \quad (5.91)$$

Prova:

Fazendo $Y[n] = X[n - n_0]$, temos

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n - n_0] \mathbf{z}^{-n}. \quad (5.92)$$

Tomando $m = n - n_0$ e substituindo na equação 5.92 resulta

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m] \mathbf{z}^{-(m+n_0)}. \quad (5.93)$$

Usando a propriedade da potenciação de números complexos e o fato de \mathbf{z} ser um complexo intervalar degenerado temos

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m] \mathbf{z}^{-m} \mathbf{z}^{-n_0}. \quad (5.94)$$

Além disso, como \mathbf{z} é degenerado e temos a distributividade da multiplicação de um complexo degenerado sobre uma soma intervalar podemos concluir

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m] \mathbf{z}^{-m}, \quad (5.95)$$

que pode ser reescrito como

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{-n_0} X(\mathbf{z}), \quad (5.96)$$

provando a proposição. ■

5.5.3 Multiplicação por uma sequência exponencial

Devido o escopo do nosso trabalho, trataremos apenas o caso em que a sequência a ser multiplicada seja degenerada.

Proposição 93 *Dada uma sequência intervalar, $X[n]$, e uma sequência de complexos degenerados \mathbf{z}_0^n temos*

$$\mathbf{z}_0^n X[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \mathcal{X} \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}_0} \right), \quad RCE = |\mathbf{z}_0|_I R_X. \quad (5.97)$$

Prova:

Tomando $Y[n] = \mathbf{z}_0^n X[n]$ temos

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{z}_0^n X[n] \mathbf{z}^{-n}. \quad (5.98)$$

Pela comutatividade da multiplicação obtemos

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \mathbf{z}_0^n \mathbf{z}^{-n}. \quad (5.99)$$

Pelo fato de \mathbf{z}_0 ser degenerado ele tem inverso multiplicativo e, portanto, podemos reescrever a equação 5.99 como segue

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \left(\frac{1}{\mathbf{z}_0} \right)^{-n} \mathbf{z}^{-n}. \quad (5.100)$$

Rearrmando temos

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}_0} \right)^{-n}, \quad (5.101)$$

que é equivalente a

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \mathcal{X} \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}_0} \right). \quad (5.102)$$

Analisando agora o caso da *RCE*. Suponhamos que $\mathcal{X}(\mathbf{z})$ seja uma sequência lateral esquerda e convirja para todo \mathbf{z} tal que $|\mathbf{z}|_I \prec [k_1; k_1]$, para $k_1 > 0$. Então, $\mathcal{X} \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}_0} \right)$ convergirá para todo $|\mathbf{z}|_I \prec |\mathbf{z}_0|_I [k_1; k_1]$. Supondo, agora, que $\mathcal{X}(\mathbf{z})$ seja uma sequência lateral direita e convirja para todo \mathbf{z} tal que $|\mathbf{z}|_I \succ [k_2; k_2]$, para $k_2 > 0$, temos $\mathcal{X} \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}_0} \right)$ convergirá para todo $|\mathbf{z}|_I \succ |\mathbf{z}_0|_I [k_2; k_2]$. Caso $\mathcal{X}(\mathbf{z})$ seja bilateral satisfaça as condições das duas posições acima, temos que $\mathcal{X}(\mathbf{z})$ convergirá para todo \mathbf{z} tal que $[k_2; k_2] \prec |\mathbf{z}|_I \prec [k_1; k_1]$. Logo, $\mathcal{X} \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}_0} \right)$ convergirá para todo $|\mathbf{z}_0|_I [k_2; k_2] \prec |\mathbf{z}|_I \prec |\mathbf{z}_0|_I [k_1; k_1]$. Das três hipóteses acima concluímos que $RCE_{\mathbf{z}_0^n X} = |\mathbf{z}_0|_I RCE_X$. ■

5.5.4 Diferenciação de $X(\mathbf{z})$

Proposição 94 Dada uma sequência intervalar $X[n]$ temos.

$$nX[n] \xleftrightarrow{\mathbf{z}} -\mathbf{z} \frac{dX(\mathbf{z})}{d\mathbf{z}}, \quad RCE = R_X. \quad (5.103)$$

Prova:

Como \mathbf{z} é degenerado e n é inteiro,

$$\frac{dX(\mathbf{z})}{d\mathbf{z}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n X[n] \mathbf{z}^{-n-1}. \quad (5.104)$$

Tomando $Y[n] = n X[n]$ obtemos

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n X[n] \mathbf{z}^{-n}, \quad (5.105)$$

que pode ser reescrito como

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n X[n] \mathbf{z}^{-n-1}. \quad (5.106)$$

Substituindo a derivada de $X(\mathbf{z})$, da equação 5.104, na equação 5.106 temos

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z} \frac{dX(\mathbf{z})}{d\mathbf{z}}. \quad (5.107)$$

No caso da RCE podemos afirmar que para todos os pontos que $X(\mathbf{z})$ convergir, $\frac{dX(\mathbf{z})}{d\mathbf{z}}$ também convergirá e, para todo ponto que $X(\mathbf{z})$ não convergir $\frac{dX(\mathbf{z})}{d\mathbf{z}}$ também não converge, pois a derivada não é definida onde a função não for. Além disso, para todos os pontos onde $\frac{dX(\mathbf{z})}{d\mathbf{z}}$ convergir, $-\mathbf{z} \frac{dX(\mathbf{z})}{d\mathbf{z}}$ também convergirá, pois qualquer \mathbf{z} escolhido sempre terá $|\mathbf{z}|_I \prec [\infty; \infty]$. Logo, $RCE_{nX} = RCE_X$. ■

5.5.5 Conjugação de uma sequência complexa

Na conjugação complexa usaremos a representação de números complexos intervalar apresentada no capítulo 3.

Proposição 95 Dada uma sequência intervalar complexa $X[n]$ temos

$$X^*[n] \xleftrightarrow{\mathbf{z}} X^*(\mathbf{z}^*) \quad RCE = R_X. \quad (5.108)$$

Prova:

Fazendo $Y[n] = X^*[n]$, resulta

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X^*[n] \mathbf{z}^{-n}. \quad (5.109)$$

Substituindo as variáveis complexas do segundo membro da equação 5.109 pela sua representação polar na forma da identidade de Euler, temos

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(X^*[n])|_p (e^{-\alpha_1 j}, e^{-\alpha_2 j}) |(\mathbf{z})|_p^{-n} (e^{\phi j}, e^{\phi j})^{-n}, \quad (5.110)$$

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(X^*[n])|_p (e^{-\alpha_1 j}, e^{-\alpha_2 j}) |(\mathbf{z})|_p^{-n} (e^{-n\phi j}, e^{-n\phi j}). \quad (5.111)$$

Usando a propriedade comutativa da multiplicação de pseudos módulos complexos intervalares obtemos

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(X^*[n])|_p |(\mathbf{z})|_p^{-n} (e^{-\alpha_1 j}, e^{-\alpha_2 j}) (e^{-n\phi j}, e^{-n\phi j}). \quad (5.112)$$

Rearrmando sai que

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(X^*[n])|_p |(\mathbf{z})|_p^{-n} (e^{(-\alpha_1 - n\phi)j}, e^{(-\alpha_2 - n\phi)j}). \quad (5.113)$$

Como o módulo de um número complexo é o mesmo do seu conjugado podemos concluir

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(X[n])|_p |(\mathbf{z})|_p^{-n} (e^{-(\alpha_1 + n\phi)j}, e^{-(\alpha_2 + n\phi)j}). \quad (5.114)$$

Tomando, agora, a transformada-Z de $X[n]$, no conjunto dos conjugados de \mathbf{z} obtemos

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n](\mathbf{z}^*)^{-n}. \quad (5.115)$$

Reescrevendo a equação 5.115 com os complexos do segundo membro na forma da identidade de Euler, proposta neste trabalho, resulta

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(X[n])|_p (e^{\alpha_1 j}, e^{\alpha_2 j}) |(\mathbf{z}^*)|_p^{-n} (e^{-\phi j}, e^{-\phi j})^{-n}. \quad (5.116)$$

Usando, novamente, a propriedade comutativa da multiplicação de pseudo módulos intervalares obtemos

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(X[n])|_p |(\mathbf{z}^*)|_p^{-n} (e^{\alpha_1 j}, e^{\alpha_2 j}) (e^{-\phi j}, e^{-\phi j})^{-n}. \quad (5.117)$$

Considerando que o módulo de um número complexo é o mesmo de seu conjugado, podemos tirar

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(X[n])|_p |(\mathbf{z})|_p^{-n} (e^{(\alpha_1 + n\phi)j}, e^{(\alpha_2 + n\phi)j}). \quad (5.118)$$

Podemos observar que a equação 5.114 é o conjugado da equação 5.118.

Aplicando o conjugado na equação 5.118 sai

$$\mathcal{X}^*(\mathbf{z}^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(X[n])|_p |(\mathbf{z})|_p^{-n} \left(e^{-(\alpha_1+n\phi)j}, e^{-(\alpha_2+n\phi)j} \right). \quad (5.119)$$

Logo,

$$X^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \mathcal{X}^*(\mathbf{z}^*). \quad (5.120)$$

Quanto à região de convergência, se $\mathcal{X}(\mathbf{z})$ convergir para \mathbf{z} , ela convergirá para \mathbf{z}^* , pois $|\mathbf{z}|_I = |\mathbf{z}^*|_I$, além disso, se a transformada existir ela tem seu conjugado. Logo, $RCE_{X^*[n]} = RCE_{\mathcal{X}^*(\mathbf{z}^*)}$. ■

5.6 Simetria temporal(tempo reverso)

Proposição 96 Se $X[n]$ for uma sequência intervalar, então

$$X[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \mathcal{X}\left(\frac{1}{\mathbf{z}}\right) \quad RCE = \frac{1}{R_X}. \quad (5.121)$$

Prova:

Da definição 110, a transformada- \mathcal{Z} da sequência $X[-n]$ é

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[-n] \mathbf{z}^n, \quad (5.122)$$

que, pela comutatividade da adição intervalar, podemos afirmar que a equação 5.122 é equivalente à equação 5.123

$$\mathcal{X}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \mathbf{z}^n, \quad (5.123)$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\mathcal{X}\left(\frac{1}{\mathbf{z}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \left(\frac{1}{\mathbf{z}}\right)^{-n}. \quad (5.124)$$

Quanto à RCE , supondo que $\mathcal{X}(\mathbf{z})$ convirja, para todo \mathbf{z} tal que $[k_1; k_1] \prec \mathbf{z} \prec [k_2; k_2]$. Logo $\mathcal{X}\left(\frac{1}{\mathbf{z}}\right)$ convergirá para todo $\frac{1}{\mathbf{z}}$ tal que $\frac{1}{[k_2; k_2]} \prec \frac{1}{\mathbf{z}} \prec \frac{1}{[k_1; k_1]}$, confirmando que $RCE_{\mathcal{X}\left(\frac{1}{\mathbf{z}}\right)} = \frac{1}{RCE_{\mathcal{X}(\mathbf{z})}}$. ■

5.7 Convolução de seqüências e transformada-Z

Devido à ausência da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição da aritmética intervalar, precisamos fazer algumas restrições na versão intervalar da assertiva abaixo

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)X_2(z) \quad ROC = R_{X_1} \cap R_{X_2}. \quad (5.125)$$

A primeira será restringir as seqüências a intervalos degenerados, como mostra a proposição abaixo.

Proposição 97 *Dadas $X_1[n]$ e $X_2[n]$ duas seqüências de intervalos degenerados temos*

$$X_1[n] * X_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(\mathbf{z})X_2(\mathbf{z}) \quad RCE = R_{X_1} \cap R_{X_2}. \quad (5.126)$$

Prova:

Direto do resultado de [Oppenheim & Schaffer 1989] pg 178 - A aritmética intervalar quando aplicada a intervalos degenerados coincide com a aritmética real. ■

Agora, restringiremos, apenas, uma das seqüências a intervalos degenerados. Esta restrição é de interesse neste trabalho devido a nossa escolha de trabalhar com sistemas reais com entradas intervalares. No caso uma seqüência intervalar representa o sinal ruidoso de entrada e a outra de intervalos degenerados representa um filtro ou qualquer operação real sobre o sinal intervalar.

Um exemplo que caracteriza bem essa restrição é o fato de podermos ter um sistema representado pela convolução de duas seqüências intervalares, sendo que uma das seqüências é de intervalos degenerados. Podemos dar a seguinte semântica às seqüências. A seqüência intervalar não degenerada é o sinal de entrada e a seqüência de intervalos degenerados representa a resposta ao impulso do sistema onde tivermos um sistema bem definido e um sinal ruidoso ou impreciso.

Restringindo, apenas, uma das seqüências a intervalos degenerados temos a seguinte proposição.

Proposição 98 *Dadas $X_1[n]$ e $X_2[n]$ duas seqüências intervalares, com uma degenerada e outra não, temos*

$$X_1[n] * X_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(\mathbf{z})X_2(\mathbf{z}) \quad RCE = R_{X_1} \cap R_{X_2}. \quad (5.127)$$

Prova:

Tomando $Y[n] = X_1[n] * X_2[n]$ obtemos

$$Y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1[k]X_2[n-k]. \quad (5.128)$$

Aplicando a transformada-Z intervalar a $Y[n]$ resulta

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y[n]\mathbf{z}^{-n}. \quad (5.129)$$

Substituindo $Y[n]$, da equação 5.129, pelo seu valor representado na equação 5.128, podemos concluir

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1[k]X_2[n-k] \right\} \mathbf{z}^{-n}. \quad (5.130)$$

Devido a distributividade da multiplicação de intervalos degenerados sobre a adição intervalar, sai

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1[k]X_2[n-k] \mathbf{z}^{-n}. \quad (5.131)$$

Usando a associatividade e a comutatividade da adição intervalar, podemos trocar a ordem dos somatórios da equação 5.131 para obter a equação 5.132

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1[k]X_2[n-k] \mathbf{z}^{-n}. \quad (5.132)$$

Como $X_1[k]$ é uma constante dentro do segundo somatório da equação 5.132, com base na hipótese de que apenas uma das duas sequências é intervalar e na distributividade da multiplicação de intervalos degenerados sobre uma adição de parcelas de intervalos não degenerados. Podemos, sem perda de generalidade, supor que $X_1[k]$ seja degenerado e passar para fora do segundo somatório. Assim, temos

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_2[n-k] \mathbf{z}^{-n}. \quad (5.133)$$

Fazendo uma mudança de variável no segundo somatório da equação 5.133. e tomando $m = n - k$ temos

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1[k] \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_2[m] \mathbf{z}^{-(m+k)}, \quad (5.134)$$

que é equivalente a

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1[k] \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_2[m] \mathbf{z}^{-m} \mathbf{z}^{-k}. \quad (5.135)$$

O termo \mathbf{z}^{-k} é degenerado e é variável livre no segundo somatório da equação 5.135, por isso podemos passá-lo para fora do somatório

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1[k] \mathbf{z}^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_2[m] \mathbf{z}^{-m}. \quad (5.136)$$

Desse modo, vemos que a equação é equivalente a

$$\mathcal{Y}(\mathbf{z}) = X_1(\mathbf{z})X_2(\mathbf{z}). \quad (5.137)$$

Quanto à RCE observamos que o produto das transformadas só convergirá onde as

duas transformadas convergirem. Portanto $RCE_{X_1(z)X_2(z)} = RCE_{X_1(z)} \cap RCE_{X_2(z)}$. ■

Teorema 24 (Teorema do valor inicial) *Se $X[n] = \mathbf{0}$, para todo $n < 0$, ou seja, ela for uma sequência lateral direita, então*

$$X[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

Prova:

Aplicando o limite na equação 5.2, da definição 110, tiramos

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]z^{-k}. \quad (5.138)$$

Pelo fato da sequência $X[n]$ ser lateral direita, podemos reescrever a equação 5.138 por

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} X[k]z^{-k}. \quad (5.139)$$

Como a soma dos limites é o limite da soma temos

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} X[0]z^0 + \lim_{z \rightarrow \infty} X[1]z^{-1} + \lim_{z \rightarrow \infty} X[2]z^{-2} + \dots \quad (5.140)$$

Na sequência do lado direito da equação 5.140 todos os termos tendem a zero, quando $z \rightarrow \infty$, exceto o primeiro termo, $\lim_{z \rightarrow \infty} X[0]z^0$. logo, temos

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} X[0]z^0 = X[0]. \quad (5.141)$$

■

As extensões de propriedades reais para uma versão intervalar têm suas restrições. Com convolução complexa não será diferente. As restrições são consequências da sub distributividade da multiplicação sobre a adição intervalar. A versão intervalar do teorema da convolução complexa é apresentada como segue.

Teorema 25 (Convolução complexa) *Dada uma sequência $W[n] = X_1[n]X_2[n]$, de modo que apenas uma das sequências $X_1[n]$ ou $X_2[n]$ contenha intervalos não degenerados, temos*

$$W(z) = \frac{\mathbf{1}}{[2\pi j; 2\pi j]} \oint_{C_1} X_1\left(\frac{z}{v}\right) X_2(v)v^{-1} dv$$

onde C_1 é um contorno fechado dentro das regiões de convergência estrita de $X_1\left(\frac{z}{v}\right)$ e $X_2(v)$.

Prova:

Como $W[n] = X_1[n]X_2[n]$ temos

$$\mathcal{W}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1[n]X_2[n]\mathbf{z}^{-n}. \quad (5.142)$$

Tomando $X_2[n]$ como uma expressão equivalente e usando a inversa de sua transformada, como mostra o teorema 23, podemos tirar

$$X_2[n] = \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_{C_2} \mathcal{X}_2(\mathbf{v})\mathbf{v}^{n-1}d\mathbf{v}. \quad (5.143)$$

Substituindo $X_2[n]$ na equação 5.142 pela expressão equivalente, como mostrada na equação 5.143 obtemos

$$\mathcal{W}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1[n] \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_{C_2} \mathcal{X}_2(\mathbf{v})\mathbf{v}^{n-1}d\mathbf{v} \mathbf{z}^{-n}. \quad (5.144)$$

Podemos reescrever a equação 5.144 como

$$\mathcal{W}(\mathbf{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1[n] \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_{C_2} \mathcal{X}_2(\mathbf{v}) \left(\frac{1}{\mathbf{v}}\right)^{-n} \mathbf{z}^{-n}\mathbf{v}^{-1}d\mathbf{v}. \quad (5.145)$$

Ainda podemos reorganizá-la como segue

$$\mathcal{W}(\mathbf{z}) = \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1[n] \oint_{C_2} \mathcal{X}_2(\mathbf{v}) \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{v}}\right)^{-n} \mathbf{v}^{-1}d\mathbf{v}. \quad (5.146)$$

Sem perda de generalidade, supondo que $X_1[n]$ seja degenerado podemos e como é constante em relação à variável de integração, \mathbf{v} , podemos colocar o somatório para dentro do operador de integração.

$$\mathcal{W}(\mathbf{z}) = \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_{C_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1[n]\mathcal{X}_2(\mathbf{v}) \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{v}}\right)^{-n} \mathbf{v}^{-1}d\mathbf{v}. \quad (5.147)$$

Fazendo usa da comutatividade de multiplicação intervalar temos

$$\mathcal{W}(\mathbf{z}) = \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_{C_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1[n] \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{v}}\right)^{-n} \mathcal{X}_2(\mathbf{v})\mathbf{v}^{-1}d\mathbf{v}. \quad (5.148)$$

Destacando $\mathcal{X}_1\left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{v}}\right)$ obtemos

$$\mathcal{W}(\mathbf{z}) = \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_{C_2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1[n] \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{v}}\right)^{-n} \right] \mathcal{X}_2(\mathbf{v})\mathbf{v}^{-1}d\mathbf{v}. \quad (5.149)$$

Substituindo $\mathcal{X}_1\left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{v}}\right)$ e impondo a condição que C_2 esteja contido nas $RCE_{\mathcal{X}_1(\mathbf{z}/\mathbf{v})}$ e $RCE_{\mathcal{X}_2(\mathbf{v})}$ tiramos

$$\mathcal{W}(\mathbf{z}) = \frac{1}{[2\pi i; 2\pi i]} \oint_{C_2} \mathcal{X}_1\left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{v}}\right) \mathcal{X}_2(\mathbf{v})\mathbf{v}^{-1}d\mathbf{v}. \quad (5.150)$$

Quanto a $RCE_{\mathcal{W}(\mathbf{z})}$ temos que

$$RCE_{X_1(\mathbf{z})} : [k_{1X1}; k_{1X1}] \prec |\mathbf{z}|_I \prec [k_{2X1}; k_{2X1}],$$

,

$$RCE_{X_2(\mathbf{z})} : [k_{1X2}; k_{1X2}] \prec |\mathbf{z}|_I \prec [k_{2X2}; k_{2X2}]$$

,

Da limitação da condição de contorno C_2 resulta

$$[k_{1X1}; k_{1X1}] \prec \left| \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{v}} \right|_I \prec [k_{2X1}; k_{2X1}],$$

e

$$[k_{1X2}; k_{1X2}] \prec |\mathbf{v}|_I \prec [k_{2X2}; k_{2X2}]$$

.

Multiplicando as duas expressões temos

$$[k_{1X1}; k_{1X1}][k_{1X2}; k_{1X2}] \prec |\mathbf{z}|_I \prec [k_{2X1}; k_{2X1}][k_{2X2}; k_{2X2}]$$

que é a RCE de $\mathcal{W}(\mathbf{z})$. ■

5.8 Relação de Parseval

A relação de Parseval é uma generalização do teorema da convolução complexa.

A sua versão intervalar também sofrerá as mesmas restrições que a versão intervalar do teorema da convolução complexa.

Proposição 99 *Sejam $X_1[n]$ e $X_2[n]$ duas sequências intervalares complexas. Uma versão intervalar da relação de Parseval pode ser apresentada como*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1[n]X_2^*[n] = \frac{1}{[2\pi j; 2\pi j]} \oint_C X_1(\mathbf{v})X_2^*\left(\frac{1}{\mathbf{v}^*}\right) \mathbf{v}^{-1} d\mathbf{v}, \quad (5.151)$$

onde o contorno de integração tem que conter as regiões de convergência de $X_1(\mathbf{v})$ e $X_2^*\left(\frac{1}{\mathbf{v}^*}\right)$.

Prova:

Do teorema 25, tiramos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1[n]X_2[n]\mathbf{z}^{-n} = \frac{1}{[2\pi j; 2\pi j]} \oint_{C_1} X_1\left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{v}}\right) X_2(\mathbf{v})\mathbf{v}^{-1} d\mathbf{v}, \quad (5.152)$$

que, pela comutatividade da multiplicação intervalar obtemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_2[n]X_1[n]\mathbf{z}^{-n} = \frac{1}{[2\pi j; 2\pi j]} \oint_{C_1} X_2\left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{v}}\right) X_1(\mathbf{v})\mathbf{v}^{-1} d\mathbf{v}, \quad (5.153)$$

que é equivalente a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1[n]X_2[n]z^{-n} = \frac{1}{[2\pi j; 2\pi j]} \oint_{C_1} \mathcal{X}_1(\mathbf{v})\mathcal{X}_2\left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{v}}\right) \mathbf{v}^{-1} d\mathbf{v}. \quad (5.154)$$

Da proposição 5.108, que garante $X^*[n] \xleftrightarrow{Z} \mathcal{X}^*(z^*)$, e do fato do conjugado do produto ser o produto dos conjugados concluímos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1[n]X_2^*[n]z^{-n} = \frac{1}{[2\pi j; 2\pi j]} \oint_{C_1} \mathcal{X}_1(\mathbf{v})\mathcal{X}_2^*\left(\frac{\mathbf{z}^*}{\mathbf{v}^*}\right) \mathbf{v}^{-1} d\mathbf{v}. \quad (5.155)$$

Avaliando a expressão da equação 5.155 para $\mathbf{z} = \mathbf{1}$ obtemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1[n]X_2^*[n] = \frac{1}{[2\pi j; 2\pi j]} \oint_{C_1} \mathcal{X}_1(\mathbf{v})\mathcal{X}_2^*\left(\frac{1}{\mathbf{v}^*}\right) \mathbf{v}^{-1} d\mathbf{v}. \quad (5.156)$$

■

5.9 Conclusão

Entre as diferentes técnicas de manipulação de sinais, escolhemos a transformada- Z para fazer sua versão intervalar. Pois as transformadas são ferramentas importantes em processamento de sinais e a transformada de Fourier de uma certa maneira poder ser considerada um caso particular da transformada- Z quando tomada no círculo unitário. Para a construção da transformada- Z intervalar e suas propriedades além de fazermos uso de todo os construtos apresentados nos capítulos anteriores também se fez necessário outras contribuições como a circunferência intervalar, polinômios intervalares, polos e zeros intervalares. Uma das contribuições importantes deste capítulo foi o uso de uma métrica que preserva incertezas na construção da definição de módulo intervalar que preserva a inclusão monotônica. As regiões de convergências na sua versão intervalar ganharam duas outras possibilidades pelo fato de considerar o módulo intervalar. Renomeamos as regiões de convergências com os seguintes rótulos: região de convergência estrita-RCE para aquela região que independente da imprecisão do sistema o sistema sempre converge; Região de não-convergência estrita-RNCE rótulo da região onde sistema sempre diverge independente do grau de incerteza; região limite de convergência-RLC nome que recebeu a região de fronteira da região de convergência; região limite de não convergência-RLNC nome que designa a região de fronteira com a região de não-convergência e por fim a região de convergência condicional-RCC que representa a região de incertezas do sistema é uma transição entre convergência e não-convergência. Verificamos que em um sistema não intervalar não temos a figura da RCC e a RLC e RLNC são coincidentes. Com isso criamos uma nova maneira de analisar convergência de sistemas intervalares. Apresentamos as propriedades das novas regiões de convergências. Verificamos relações entre estabilidade, causalidade e regiões de convergências. Analisamos o caso da inversa da transformada- Z , usamos a integral de linha de Callejas-Bedregal e Bedregal [Callejas-Bedregal & Bedregal 2005] para a construção do método formal da inversa da

transformada- Z . Apresentamos os métodos de investigação da inversa por inspeção, por expansão em frações parciais, expansão em séries de potências. Foi feita uma apresentação das propriedades da transformada- Z tais como linearidade, sempre lembrando das limitações de sistemas intervalares não possuírem a distributividade da multiplicação em relação à adição. Abordamos o deslocamento no tempo, multiplicação por uma sequência exponencial, diferenciação, conjugação de uma sequência, simetria temporal. Abordamos convolução de sequências intervalares e transformada- Z intervalar. e por fim uma versão intervalar da relação de Parseval.

Neste capítulo foi apresentada um versão da transformada- Z intervalar com coeficientes intervalares, para modelar sinais intervalares. As vantagens desta abordagem são o módulo intervalar que preserva a incerteza, o poder da aritmética intervalar em lidar com erros e a análise de convergência intervalar, que esse modelo proporciona. Este modelo pode ser usado para representar sistemas, nos quais as incertezas estão na quantização em sistemas com representação finitas. 6. Assim, acreditamos que este capítulo contribui para melhorar as manipulações com sinais com incertezas nas aplicações de processamento de sinais.

Capítulo 6

Filtros intervalares

Neste trabalho é proposto o uso de matemática intervalar no processamento de sinais intervalares digitais, representados por sistemas lineares. Por isso, neste capítulo, nas seções 6.2.1 e 6.2.2, mostraremos exemplos corriqueiros, onde sistemas inerentemente intervalares são representados pela aritmética real. Na seção 6.2.3 apresentaremos um exemplo de uma técnica de projeto de filtro digital através do modelo analógico, onde fica clara a limitação do modelo matemático escolhido na representação do sistema. Na seção 6.2.4 trabalharemos com os conceitos de [Oppenheim & Schaffer 1989] sobre efeitos de quantização, modelando o problema em sistemas IIR. Usaremos manipulação simbólica para justificar uma representação intervalar para sistemas IIR com problemas de quantização.

Ainda como contribuição deste capítulo, apresentaremos o uso da aritmética intervalar na construção de filtros. Isso será apresentado na seção 6.3

Neste capítulo nos restringiremos ao uso da aritmética na análise de projetos de filtros. A teoria clássica de implementação pode ser encontrada nos textos de [Oppenheim & Schaffer 1989] e [Smith 1999].

6.1 Filtros

Filtros são estruturas usadas para manipular sinais. Os filtros seletivos em frequências podem ser classificados como passa-baixa, passa-alta, passa-faixa, rejeita-faixa. Quanto à resposta ao impulso os filtros são classificados como: resposta finita ao impulso-FIR (finite impulse response) e resposta infinita ao impulso-IIR (infinite impulse response).

Além dessa divisão, os filtros ainda podem ser classificados em analógicos e digitais. Os primeiros estão matematicamente associados a sistemas contínuos e o segundo grupo a sistemas discretos. Embora usaremos um exemplo de filtros analógico para mostrar a natureza intervalar dos sinais, neste trabalho daremos maior destaque aos filtros digitais, no qual usaremos a fundamentação matemática desenvolvida com a transformada- Z intervalar do capítulo 5. Filtros digitais são frequentemente usados para simular(emular) os filtros analógicos clássicos tais como Butterworth, Chebyshev e elípticos.

Os filtros adaptativos são essenciais em muitas aplicações de processamento de sinais, tais como equalização de canais, cancelamento de eco, controle de ruído ativo e processamento de voz [Ocloo & Edmonson 2008]. Filtros adaptativos são temas de grande

parte das pesquisas em processamento de sinais, comunicação e controle [Edmonson et al. 1998], embora não tratados neste trabalho, mas a fundamentação matemática apresentada pode ser usada na construção deste filtros.

Nesta seção faremos uma apresentação geral sobre filtros seletivos em frequência, deixando uma investigação mais aprofundada por conta dos textos [Oppenheim & Schaffer 1989], [Smith 1999]. Não discutiremos aqui transformada de Laplace, apenas faremos uso de sua notação no intuito de esclarecer a natureza intervalar dos métodos de projetos e implementação de filtros. Usaremos para esse fim um exemplo apresentado em [Oppenheim & Schaffer 1989, pg 404].

6.2 Incertezas em filtros

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos onde as imprecisões não são facilmente removíveis dos projetos dos filtros. Usando a metáfora, “ quando não puder vencer o inimigo, junte-se a ele ” sugerimos a possibilidade de juntar ao sistema suas imprecisões e representá-lo com mais fidelidade usando a matemática intervalar.

Aqui, apresentamos apenas alguns exemplos, embora acreditamos que para uma análise detalhada do problema deva ser feita para cada uma das três etapas da construção de filtros, que são a extração das características do sistema a modelar, a escolha do modelo matemático que vai representar o sistema e a implementação. Uma análise assim foge ao escopo deste trabalho.

6.2.1 Incertezas de componentes dos filtros analógicos

Um filtro muito usado em processamento de sinais e, principalmente, em RF é o filtro de Chebyshev, que será utilizado aqui como exemplo para justificar o uso da aritmética intervalar na representação da imprecisões dos sistemas. A figura 6.1 é uma reprodução do esquema de um filtro de Chebysev de ordem nove, apresentado no trabalho de mestrado de Pothuri [Pothuri 2008]. Embora só tenha valor ilustrativo ele ajuda no entendimento de que para alguns sistemas o modelo intervalar é mais representativo.

Suponhamos que alguns componentes(capacitores, resistores e indutores) do filtro, mostrado na figura 6.1, tenham sido adquiridos de um fabricante onde seus produtos exigem um por cento de tolerância sobre o seu valor nominal. Com essa hipótese, temos, na verdade, um filtro intervalar onde os valores do filtro apresentado na figura 6.1 passa a ter seus valores intervalares como os apresentados na figura 6.2. Isso mostra que a maioria dos sistemas eletrônicos implementados com componentes que tem alguma limitação de precisão é essencialmente intervalar. Assim, podemos ver na tabela 6.1 que um filtro com valores nominais dos componentes, como mostradas na segunda coluna, com uma margem de precisão de 1% deveriam ser apresentados por intervalos, como mostra a terceira coluna.

A preocupação com imprecisões nos componentes não é nossa. Na literatura estão trabalhos que lidam com esse tema. Podemos ver exemplos de análises de circuito intervalares nos trabalhos [Grigoletti et al. 2005] e [Grigoletti et al. 2006]. Silva propôs

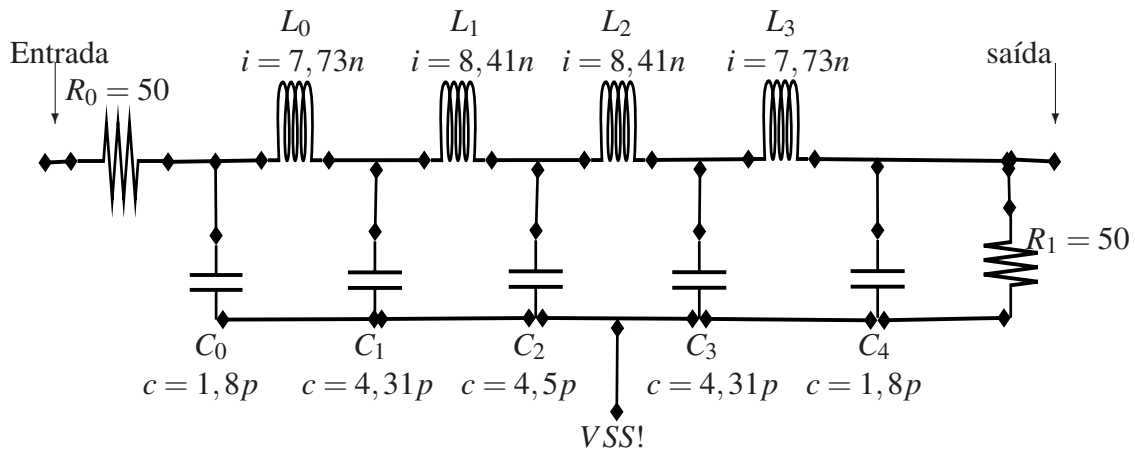


Figura 6.1: Filtro de nona ordem de Chebyshev [Pothuri 2008].

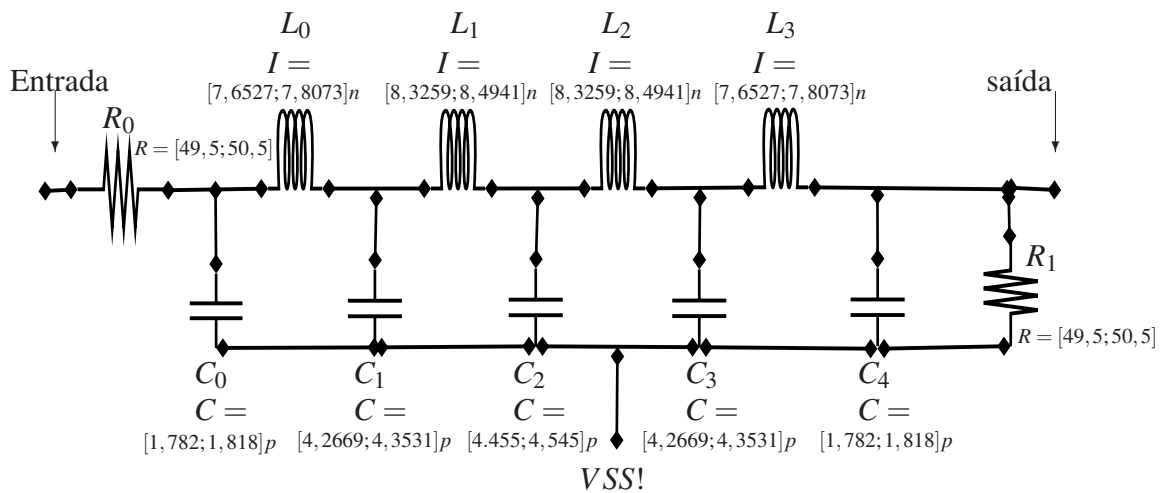


Figura 6.2: Versão intervalar do filtro de nona ordem de Chebyshev da figura 6.1.

um medidor de resistências intervalar, incorporando as imprecisões do circuito do instrumento de medida [Silva 2008].

6.2.2 Imprecisões genéricas na descrição dos filtros

Problemas de projetos de filtros começam com as especificações desejadas em termos da variável ω de frequência de tempo discreto.

Muitos projetos de filtros, na prática, são representados por esquemas de tolerância.

Exemplo 10 Consideremos um sistema genérico de processamento de sinais, como mostra a figura 6.3, constituído de três blocos, onde o primeiro é um conversor contínuo/discreto C/D, o segundo bloco um sistema de tempo discreto e o terceiro um conversor discreto/contínuo D/C, T é o período de amostragem dos conversores, $x_a(t)$ a entrada contínua do sistema, $x[n]$ a saída do conversor contínuo discreto e entrada do sistema

Tabela 6.1: Representação real e intervalar dos valores dos componentes do filtro de Chebyshev de nona ordem das figuras 6.1 e 6.2.

Componente	Valor real	Valor Intervalar
L_0	7,73	[7,6527;7,8073]
L_1	8,41	[8,3259;8,4941]
L_2	8,41	[8,3259;8,4941]
L_3	7,73	[7,6527;7,8073]
C_0	1,8	[1,782;1,818]
C_1	4,31	[4,2669;4,3531]
C_2	4,5	[4,455;4,545]
C_3	4,31	[4,2669;4,3531]
C_4	1,8	[1,782;1,818]
R_0	50	[49,5;50,5]
R_1	50	[49,5;50,5]

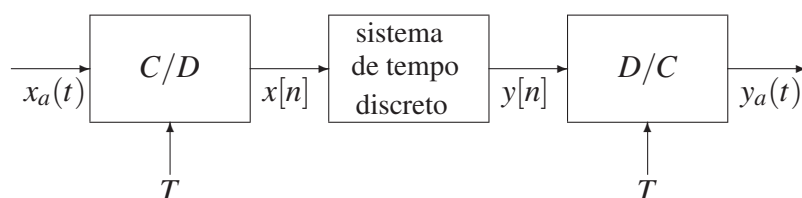


Figura 6.3: Sistema genérico filtragem digital de sinais contínuos

discreto, $y[n]$ a saída do sistema discreto e entrada do conversor discreto contínuo e, por fim, $y_a(t)$ é a saída contínua do sistema.

Suponhamos que o sistema H se comporte como um sistema linear contínuo e invariante no tempo, com a seguinte resposta em frequência H_{eff} .

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases} \quad (6.1)$$

Para converter as especificações do filtro contínuo para um filtro discreto usaremos a relação $\omega = \Omega T$, o qual tem a seguinte equação

$$H(e^{j\omega}) = H_{eff}\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi \quad (6.2)$$

Suponhamos, além disso, que o sistema mostrado na figura 6.3 seja um filtro passa baixa

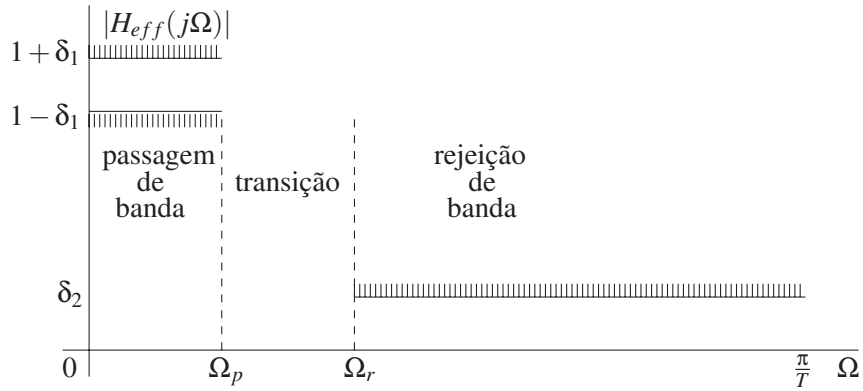


Figura 6.4: Sistema genérico para o caso do sistema da figura 6.3 ser um filtro passa baixa.

com as seguintes especificações:

1. Período de amostragem $T = 10^{-4}s$.
2. Ganho do filtro $0,99 \leq |H_{eff}(j\Omega)| \leq 1,01$ (0,086 dB) na banda de frequência $0 \leq \Omega \leq 2\pi(2000)$.
3. O ganho do filtro $|H_{eff}(j\Omega)| \leq 0,001$ (-60 dB) na banda de frequência $\Omega > 2\pi(3000)$.

Na figura 6.4 apresentamos um esboço genérico das especificações de um filtro passa baixa em função de $|H_{eff}(j\Omega)|$, onde os limites de tolerância e erro de aproximação são indicados pelas linhas hachuradas. Para as especificações acima os parâmetros da figura 6.4 seriam os seguintes

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 0,01 (20\log_{10}(1 + \delta_1) = 0,086 \text{ dB}), \\ \delta_2 &= 0,001 (20\log_{10}(\delta_2) = -60 \text{ dB}), \\ \Omega_p &= 2\pi(2000) \\ \Omega_r &= 2\pi(3000).\end{aligned}$$

O esquema de tolerância e de erro de aproximação para um filtro passa baixa discreto com as mesmas especificações é mostrado na figura 6.5, que é idêntico ao gráfico da figura 6.4, exceto ao acréscimo do gráfico da função da frequência normalizada ($\omega = \Omega T$) e só foi plotado até π , assumindo a periodicidade e a simetria, onde

$$(1 - \delta_1) \leq |H(e^{j\omega})| \leq (1 + \delta_1) \quad |\omega| \leq \omega_p. \quad (6.3)$$

Onde $\Omega_p = \omega_p T$. Neste exemplo temos $\delta_1 = 0,01$ e $\omega_p = 2\pi(2000) \cdot 10^{-4} = 0,4\pi$ radianos. Para a aproximação da banda de rejeição temos a seguinte equação

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2 \quad \omega_r \leq |\omega| \leq \pi. \quad (6.4)$$

Onde $\Omega_r = \omega_r T$. No caso deste exemplo, $\delta_2 = 0,001$ e $\omega_r = 2\pi(3000) \cdot 10^{-4} = 0,6\pi$ radianos.

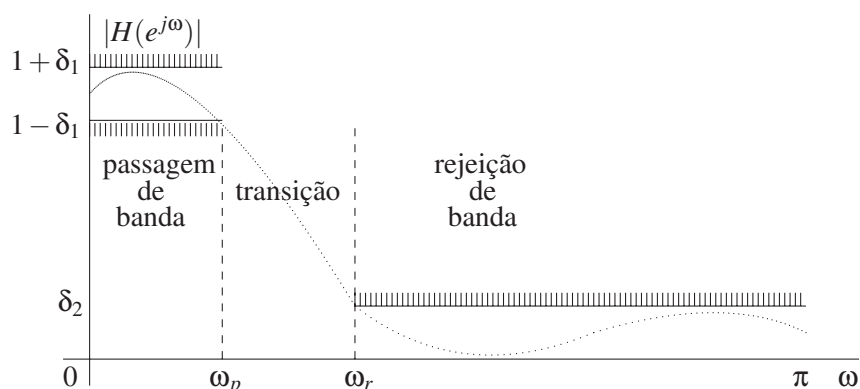


Figura 6.5: Correspondente sistema genérico discreto para o caso do sistema da figura 6.3 ser um filtro passa baixa.

Este exemplo foi adaptado de [Oppenheim & Schaffer 1989, Exemplo 7.1, pg 404]. Pretendemos analisá-lo sobre uma ótica intervalar, não para propor uma solução para as incertezas no processamento de sinal, mas para justificar que a matemática intervalar é mais fiel na representação das incertezas, uma vez que ela não elimina a incerteza, a incorpora ao sistema.

Podemos observar que para especificar o filtro passa baixa do exemplo acima falamos de **limite de tolerância e erro de aproximação**, que são evidenciados pelas linhas hachuradas da figura 6.4. Observamos que o ganho do filtro na região de passa banda como mostra a equação (6.3) nada mais é do que dizer $|H(e^{j\omega})| \in [1 - \delta_1; 1 + \delta_1]$. Ou, usando a definição 12, o intervalo $[1 - \delta_1; 1 + \delta_1]$ representa $|H(e^{j\omega})|$. No caso da região rejeita banda temos, da equação (6.4), $|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2$, que é equivalente a $0 \leq |H(e^{j\omega})| \leq \delta_2$, que é o mesmo que dizer que $|H(e^{j\omega})| \in [0; \delta_2]$, de onde podemos concluir que $[0; \delta_2]$ representa $|H(e^{j\omega})|$ na região de rejeita banda.

Analogamente ao que foi feito com a magnitude pode ser feito com a frequência. Voltando à equação (6.3), observamos que a frequência da região de passa banda é dada por $|\omega| \leq \omega_p$, que é equivalente a $-\omega_p \leq \omega \leq \omega_p$. Logo, o intervalo $[-\omega_p; \omega_p]$ representa ω . Entretanto, devido a simetria dizemos que o intervalo $[0; \omega_p]$ representa $|\omega|$. Só trataremos o intervalo de frequência $[0; \pi]$. O mesmo ocorre na região de rejeita banda parametrizada pela equação (6.4), onde $\omega_r \leq |\omega| \leq \pi$ o que nos leva a concluir que o intervalo $[\omega_r; \pi]$ representa ω . Finalmente, podemos observar, na figura 6.5, que na região de transição a frequência pode ser representada pelo intervalo $[\omega_p; \omega_r]$. Assim, podemos observar que várias grandezas na representação genérica de um filtro podem ser representadas por intervalos.

6.2.3 Incertezas inerentes ao modelo matemático

Chamamos de imprecisão inerente ao modelo matemático, pelo fato de ela ser independente da plataforma de implementação, do tipo de representação numérica, ou do comprimento da palavra. Neste contexto a imprecisão decorre simplesmente do fato do

grau do polinômio ser inteiro.

Projetando filtros discretos IIR a partir de filtros contínuos

Neste capítulo nos restringimos a justificativa do uso da aritmética na análise de projetos de filtros, com a intenção de uma aplicação no filtro de Chebyshev. A teoria clássica de implementação pode ser encontrada nos seguintes textos [Oppenheim & Schaffer 1989], [Smith 1999].

Devido ao escopo deste trabalho, não faremos, aqui, nenhuma discussão sobre limitações básicas desse método de projetar filtros. Deixaremos isso por conta de [Oppenheim & Schaffer 1989, Capítulo 7], embora ela seja em uma versão não intervalar.

Considerando a invariância no impulso, podemos relacionar um sistema discreto com um sistema contínuo, como mostra a equação (6.5), onde T é o período de amostragem.

$$h[n] = Th_c(nT). \quad (6.5)$$

No domínio da frequência, um filtro discreto invariante ao impulso se relaciona com o correspondente contínuo pela seguinte equação.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T} + j\frac{2\pi}{T}k\right). \quad (6.6)$$

Supondo que o filtro de tempo contínuo seja banda limitada, e tratando os seus parâmetros como intervalos temos

$$H_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \in \left[0; \frac{\pi}{T}\right]. \quad (6.7)$$

Logo,

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| \in [0; \pi] \quad (6.8)$$

Exemplo 11 *Agora, trataremos de maneira intervalar o exemplo 7.2 de [Oppenheim & Schaffer 1989]. Baseado nas equações (6.5) e (6.6), assumiremos que as especificações intervalares desejadas são:*

$$\begin{aligned} \delta_{i1} &= [-0, 10875; 0]; \\ \delta_{i2} &= [0; 0, 17783]; \\ \omega_{passa} &= [0; 0, 2\pi]; \\ \omega_{rejeita} &= [0, 3\pi; \pi]. \end{aligned}$$

Uma ilustração de uma versão discreta e contínua de filtros com essas especificações pode ser vistas na figura 6.6(a) e 6.6(b), respectivamente.

Vamos apresentar aqui uma equivalência entre filtros contínuos, representados na forma de expansão em frações parciais, e filtros discretos, também na mesma forma de representação. Toda essa construção terá como único objetivo apontar pontos das técnicas de projetos de filtros que trazem imprecisão para os dados. Analisaremos a possibilidade

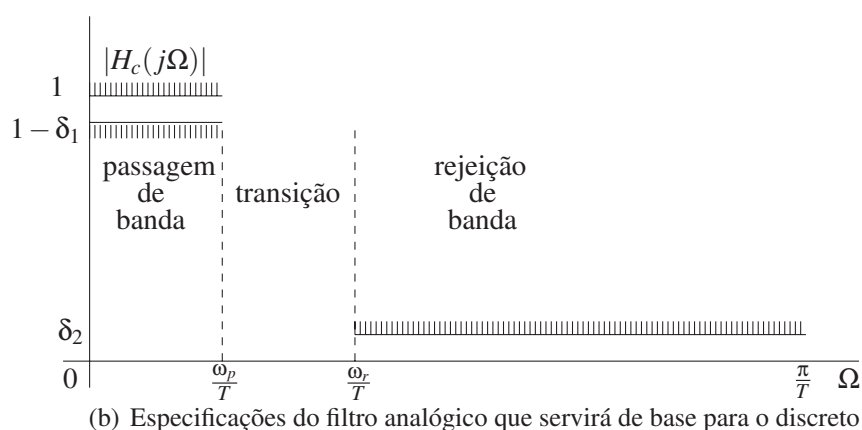
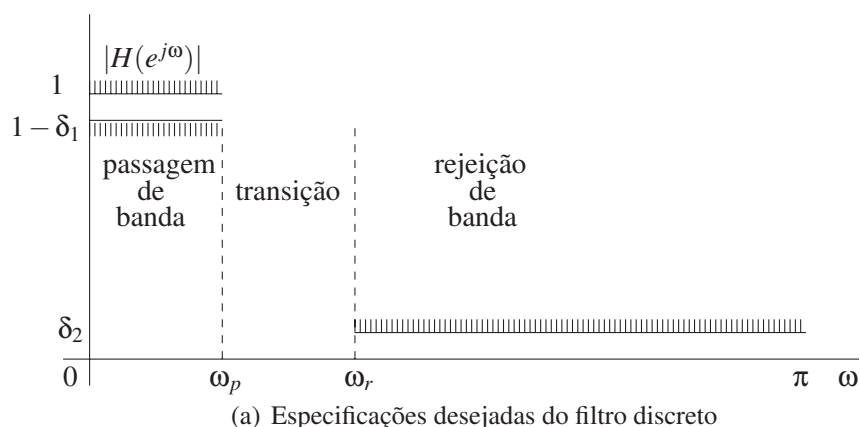


Figura 6.6: Ilustração gráfica de especificações de filtros do exemplo 11.

de usar uma representação intervalar que incorpore essa imprecisão ao sistema. A construção que faremos abaixo pode ser encontrada em [Oppenheim & Schaffer 1989, pg 410].

Um filtro contínuo genérico na forma de frações parciais é dado pela seguinte expressão.

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k}. \quad (6.9)$$

Sua correspondente resposta ao impulso é

$$h_c(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

A resposta ao impulso da sua versão discreta é obtida através da relação de amostragem $Th_c(t)$, como a seguinte equação

$$\begin{aligned} h[n] = Th_c(nT) &= \sum_{k=1}^n T A_k e^{s_k nT} u[n] \\ &= \sum_{k=1}^n T A_k (e^{s_k T})^n u[n]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Sua função de transferência, $H(z)$, em tempo discreto é dada por

$$H(z) = \sum_{k=1}^n \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}. \quad (6.12)$$

Da comparação entre a equação (6.9) e a equação (6.12) podemos constatar que os pólos, $s = s_s$, no plano- s são mapeados nos pólos $e^{s_k T}$ no plano- z e que os coeficientes da expansão em frações parciais são iguais, a menos de multiplicação por T .

Agora, usaremos as especificações intervalares do exemplo 11 para construir um filtro discreto a partir do filtro contínuo de Butterworth. As especificações desejadas do filtro discreto são mostradas na figura 6.6(a).

Somando $[1; 1]$ a $\delta 1_1$, do exemplo 11, e usando o intervalo de frequência de passa banda temos

$$|H(e^{j\omega})| \in [0, 89125; 1], \quad |\omega| \in [0; 0, 2\pi]. \quad (6.13)$$

Na frequência de rejeita banda temos as seguintes especificações

$$|H(e^{j\omega})| \in [0; 0, 17783], \quad |\omega| \in [0, 3\pi; \pi]. \quad (6.14)$$

Sabendo que o parâmetro T é cancelado na conversão do filtro contínuo para o discreto, vamos considerá-lo $T = 1$. Assim obtemos $\omega = \Omega$.

Agora, construiremos um filtro contínuo de Butterworth, cuja magnitude atende às seguintes especificações.

$$|H_c(j\Omega)| \in [0, 89125; 1], \quad |\Omega| \in [0; 0, 2\pi]; \quad (6.15)$$

$$|H_c(j\Omega)| \in [0; 0, 17783], \quad |\Omega| \in [0, 3\pi; \pi]. \quad (6.16)$$

Considerar a monotonicidade da função contínua do filtro de Butterworth não contradiz as condições das equações (6.15) e (6.16) se ele satisfizer as seguintes equações:

$$|H_c(j0, 2\pi)| \geq 0, 89125; \quad (6.17)$$

$$|H_c(j0, 3\pi)| \leq 0, 17783. \quad (6.18)$$

Como a função da magnitude quadrada do filtro de Butterworth¹ é dada por

$$|H_c(j\Omega)| = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}, \quad (6.19)$$

vamos usar as equações (6.17), (6.18) e (6.19) para calcular a ordem do filtro de Butterworth e o raio da circunferência, onde seus pólos estão distribuídos uniformemente no plano- s . Logo, temos

¹ Algumas considerações sobre filtros contínuos no são apresentadas anexo N

$$1 + \left(\frac{0,2\pi}{\Omega_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0,89125} \right)^2. \quad (6.20)$$

$$1 + \left(\frac{0,3\pi}{\Omega_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0,17783} \right)^2. \quad (6.21)$$

Assim temos um sistema de equações com duas variáveis. Resolvendo o sistema encontra-se $N = 5,8858$ e $\Omega_c = 0,70474$, mas o parâmetro N tem que ser inteiro. Para isso o arredondaremos para o maior inteiro mais próximo que no caso é 6. Este exemplo foi escolhido justamente para mostrar que nesta etapa dificilmente encontraremos N inteiro e que este processo é de natureza ruidosa. Embora neste caso, quanto maior a ordem do filtro de Butterworth, mais o filtro se aproxima do filtro ideal passa baixa, mas mesmo assim pode se deixar a pergunta. A aritmética intervalar captaria esse tipo de incerteza?

Continuaremos o processo até chegar no sistema discreto que procuramos.

Substituindo N por 6, na equação (6.20) encontramos $\Omega_c = 0,7032$. Pelo fato da equação (6.19) ser de ordem $2N$, temos 12 pólos para alocarmos no plano- s igualmente distribuídos sobre a circunferência de raio $\Omega_c = 0,7032$, sendo 6 pares com a parte real positiva e 6 pares com a parte real negativa. O sistema a cima é representado pela seguinte equação $|H_c(s)|^2 = H_c(-s)H_c(s) = 1/[1 + (s/j\Omega_c)^{2N}]$. Aqui, nos interessa apenas os seis pólos que tem a parte real negativa que serão mapeados na circunferência unitário no plano- z . Os 12 pólos estão distribuídos no circunferência de raio $\Omega_c = 0,7032$ espaçado por um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos como mostra a figura 6.7. Assim podemos encontrar os seguintes pares de pólos no plano- s , com notação cartesiana em retangular.

Par de pólos 1: $-0,182 \pm j(0,679)$;

Par de pólos 2: $-0,497 \pm j(0,679)$;

Par de pólos 3: $-0,679 \pm j(0,679)$.

Portanto, podemos concluir

$$H_c(s) = \frac{0,12093}{(s^2 + 0,3640s + 0,4945)(s^2 + 0,9945s + 0,4945)(s^2 + 1,3585s + 0,4945)}. \quad (6.22)$$

Depois que expandir a equação (6.22) em frações parciais e fazer as devidas substituições, de acordo com a equação (6.12), obteremos a função do filtro discreto que procurávamos, como mostra a equação (6.23)

$$H(z) = \frac{0,2871 - 0,4466z^{-1}}{1 - 1,2972z^{-1} + 0,6949z^{-2}} + \frac{-2,1428 - 1,1455z^{-1}}{1 - 1,0691z^{-1} + 0,3699z^{-2}} + \frac{1,8557 - 0,6303z^{-1}}{1 - 0,9972z^{-1} + 0,2570z^{-2}}. \quad (6.23)$$

Se tivéssemos trabalhado com Ω_{ci} intervalar quando arredondamos $N = 5,8858$ para $N = 6$, por não tratarmos polinômios de ordem fracionária, teríamos $\Omega_c \in \Omega_{ci} = [0,7032; 0,70474]$. E certamente os coeficientes do filtro discreto representado pela equação (6.23) também seriam intervalares.

Para o projeto de filtros temos 3 etapas básicas

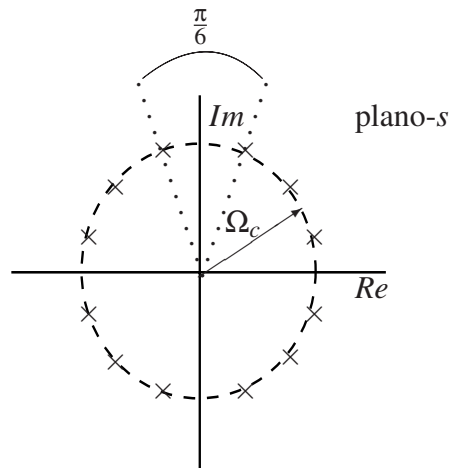


Figura 6.7: Localização no plano- s dos pólos $H_c(s)H_c(-s)$ do filtro Butterworth de 6 ordem

- Especificação das propriedades desejadas do sistema;
- A aproximação das especificações, usando sistemas causais discretos no tempo;
- Realização do sistema.

No segundo item a transformada- Z pode ser uma boa ferramenta para análise de estabilidade do sistema.

6.2.4 Incertezas por quantização dos coeficientes

Apesar de neste capítulo nos limitarmos a exemplos dos processos que geram imprecisões em representação de sistemas. Aqui usaremos um exemplo teórico para abordar os erros de quantização dos coeficientes de sistemas *IIR*. Faremos um recorte de [Oppenheim & Schaffer 1989, Seção 6.8.1]. Quando um sistema é quantizado, um valor é eleito para representar um “quantum”, uma quantidade de outros valores. E quando isso acontece com os coeficientes de equações polinomiais racionais os pólos e zeros do sistema se deslocam no plano- z . A resposta em frequência do sistema também sofre alterações em relação ao sistema original. Como sabemos que para garantir a estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo eles têm que ser causais, isso significa que os pólos devem estar todos no círculo unitário no plano- z . Logo se com os deslocamentos causados pela quantização um dos pólos se deslocar para fora do círculo unitário causa instabilidade no sistema. Para resolver este problema Bose e Kim propuseram o uso de coeficientes intervalares em filtros FIR e IIR [Bose & Kim 1991]. Uma análise de sensibilidade detalhada é muito trabalhosa e deveria ser feita caso a caso. Aqui elegeremos um

modelo genérico e faremos uma análise hipotética como em [Oppenheim & Schaffer 1989, pg 336]. Vamos observar como os pólos e zeros de uma estrutura de forma direta são afetados com os coeficientes de quantização.

O sistema que corresponde à forma direta é representado pelo polinômio racional da equação

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \quad (6.24)$$

onde os coeficientes $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ são idealmente de precisão infinita. Ao quantizarmos esses coeficientes obteremos

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \hat{b}_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=0}^N \hat{a}_k z^{-k}}, \quad (6.25)$$

onde $\hat{a}_k = a_k + \Delta a_k$ e $\hat{b}_k = b_k + \Delta b_k$ são os coeficientes quantizados, que diferem dos originais pelos erros de quantização Δa_k e Δb_k , respectivamente.

Vamos, agora, considerar os efeitos de quantização nos coeficientes do denominador que são os pólos do sistema. O erro de quantização dos coeficientes afeta a localização de todos os pólos. Supondo que todos os pólos sejam de primeira ordem e localizados em $z = z_i$, para $i = 1, 2, \dots, N$. Assim, o denominador da equação (6.24) pode ser reescrito pela seguinte equação

$$A(z) = 1 - \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = \prod_{j=1}^N (1 - z_j z^{-1}) \quad (6.26)$$

Agora, podemos definir os pólos de $\hat{H}z$ como sendo $z_i + \Delta z_i$ para $i = 1, 2, \dots, N$. O erro na localização do i -ésimo pólo pode ser dado em função do erros dos coeficientes como

$$\Delta z_i = \sum_{k=0}^N \frac{\partial z_i}{\partial a_k} \Delta a_k, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.27)$$

Usando as duas representações de $A(z)$, na equação (6.26) e o fato de que

$$\left(\frac{\partial A(z)}{\partial z_i} \right)_{z=z_i} \frac{\partial z_i}{\partial a_k} = \left(\frac{\partial A(z)}{\partial a_k} \right)_{z=z_i}, \quad (6.28)$$

segue

$$\frac{\partial z_i}{\partial a_k} = \frac{z_i^{N-k}}{\prod_{j=1, j \neq i}^N (z_i - z_j)}, \quad (6.29)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$ e $k = 1, 2, \dots, N$. Seção 6.8 do [Oppenheim & Schaffer 1989]. A equação (6.29) pode ser substituída na equação (6.27) para determinar o deslocamento de um determinado pólo z_i devido as alterações ocorridas no denominador da equação (6.24). A equação também pode ser usada para medir a sensibilidade do i -ésimo pólo pelo erro

de quantização do k -ésimo coeficiente no denominador de $H(z)$. O mesmo pode ser feito para o denominador, desde que sua localização no plano- z dependa exclusivamente dos coeficientes do denominador. Esse exemplo foi extraído do [Oppenheim & Schaffer 1989, seção 6.8].

Agora, que apresentamos o problema de quantização, de uma forma bem genérica e com apenas um exemplo, com a mesma superficialidade o analisaremos do ponto de vista intervalar.

Vimos que o problema de quantização gera instabilidades em sistemas discretos representados por equações de diferenças. Vimos, também, que as equações (6.27), (6.28) e (6.29) são usadas para o controle do erro causado pela quantização dos coeficientes, que tem uma manipulação algébrica razoável com o uso de derivadas parciais. Com isso fica claro que o controle do erro de quantificação tem um custo elevado em sistemas discretos.

Como o objetivo aqui é abordar o problema do ponto de vista da matemática intervalar, vamos de uma maneira bem genérica e superficial analisar o problema.

Suponhamos que os coeficientes de $H(z)$ na equação (6.24) sejam idealmente de precisão infinita, e que o erro de quantização seja conhecido Δa_k e pertença a qualquer uma das 9 regiões do plano- z , como mostra a figura 3.5. Nestas condições podemos tornar intervalar a equação (6.24). Para isso, tomaremos $\hat{a}_k = \hat{a}_{1k} + \hat{a}_{2k}i$, $\hat{b}_k = \hat{b}_{1k} + \hat{b}_{2k}i$, $\Delta a_k = \Delta a_{1k} + \Delta a_{2k}i$, $\Delta b_k = \Delta b_{1k} + \Delta b_{2k}i$, $A_k = [\hat{a}_{1k} - |\Delta a_{1k}|; \hat{a}_{1k} + |\Delta a_{1k}|] + [\hat{a}_{2k} - |\Delta a_{2k}|; \hat{a}_{2k} + |\Delta a_{2k}|]i$ e $B_k = [\hat{b}_{1k} - |\Delta b_{1k}|; \hat{b}_{1k} + |\Delta b_{1k}|] + [\hat{b}_{2k} - |\Delta b_{2k}|; \hat{b}_{2k} + |\Delta b_{2k}|]i$, de modo que $a_k \in A_k$ e $b_k \in B_k$. Assim, pela definição 13, A_k representa a_k e B_k representa b_k . Portanto, temos

$$\mathcal{H}(\mathbf{z}) = \frac{\sum_{k=0}^M B_k \mathbf{z}^{-k}}{[1; 1] - \sum_{k=0}^N A_k \mathbf{z}^{-k}}. \quad (6.30)$$

Pela maneira como foi construída a equação (6.30), vemos que $H(z) \in \mathcal{H}(\mathbf{z})$. Logo, $\mathcal{H}(\mathbf{z})$ representa $H(z)$. Analisando a equação (6.30), podemos ver que $\mathcal{H}(\mathbf{z})$ é uma transformada- \mathcal{Z} intervalar, como proposta no capítulo 5 e representada, aqui, por um polinômio racional. Juntando os conceitos apresentados no capítulo 5 com toda a teoria que temos na literatura de resolução de equações intervalares e localização de zeros de polinômios intervalares podemos inferir que o método intervalar é adequado a problemas de quantização.

Além disso métodos intervalares já são muito utilizados em sistemas, como é o caso dos trabalhos [Arndt 2007] que trata sistemas intervalares complexos, [Hansen 2004] que aborda modelos para equações lineares intervalares, apresentando 5 métodos de resolução de equações lineares, Lordelo [Lordelo 2004] que aborda alocação de pólos e zeros, via análise intervalar. Niu et. al. [Niu et al. 2007] para localização de zeros em funções analíticas, [Petković & Petković 1998] usa métodos intervalares para localização de zeros de polinômios de grau n , [Vaccaro 2001], que aborda soluções para equações polinômiais intervalares e, finalmente, [Edmonson et al. 2000] que diz que a aritmética intervalar foi desenvolvida para estimar e controlar automaticamente erros causados pela aritmética computacional de finita precisão. Além disso, os efeitos da quantização podem ser incorporados ao problema de projeto dos filtros [Samadi et al. 1992]. O trabalho de Bose e Kim [Bose & Kim 1991] trata o problema de quantização de forma semelhante ao pro-

posta aqui neste exemplo.

6.3 Filtros intervalares

Nossa principal contribuição neste tema será o uso da transformada- Z proposto no capítulo 5 na representação de filtros com coeficientes intervalares em problemas de quantização. Entretanto, também consideramos como contribuição as abordagens e as análises dos exemplos dados.

Um grande problema nas implementações dos filtros acontece quando eles são postos em prática. Ocorre divergência entre resultados teóricos e resultados práticos, pois, existe uma falta de homogeneidade operacional entre a reta real e a reta digital (representada em ponto flutuante). Os números digitais podem ter grande número de dígitos, mas sempre serão uma aproximação dos reais. Isso causa erros quando sistemas reais são implementados com a aritmética de precisão finita. Assim, filtros adaptativos podem ter problemas de convergência com parâmetros ótimos devido a erros numéricos [Vehí et al. 2002]. Para lidar com as incertezas em imagens digitais Lyra usou vários filtros digitais intervalares [Lyra 2003].

Para abordar os problemas de incertezas em filtros contamos com uma das principais características computacionais dos métodos intervalares, nomeadamente o arredondamento para fora (outward rounding) que garante que resultados que requerem infinita precisão estejam limitados em um intervalo. Como um exemplo, podemos considerar uma função $f(x)$ sobre uma região M tal que $f_i \leq f(x) \leq f_s$. Podemos observar que f_i e f_s nem sempre podem ser representados por um sistema de ponto flutuante ou ponto fixo. Assim, a representação de f sobre M , usando matemática intervalar, pode ser $F = [\underline{f}; \bar{f}]$, onde \underline{f} é o maior número de máquina representável tal que $\underline{f} \leq f_i$ e \bar{f} de modo que $f_s \leq \bar{f}$, ou seja, estamos tomando o ínfimo e o supremo de f em \mathbb{R}_{ip} . Assim, temos a garantia que $F \supset [f_i; f_s]$. Esse método foi usado por Edmonson para calcular coeficientes de filtros IIR na modelagem de sistemas biológicos em [Edmonson et al. 2007]. Que é semelhante ao método apresentado na seção 6.2.4. Samadi et al. [Samadi et al. 1992] também usa a matemática intervalar na análise de filtros passa-tudo na forma reticulados estáveis, onde se vê que nas aplicações práticas de filtros digitais é mais realístico tratar os coeficientes como intervalos finitos do que restringi-los a representação infinita ou com palavras com grande número de bits [Samadi et al. 1992]. Vehí et. al. em seu trabalho [Vehí et al. 2002] cita vários trabalhos que abordam filtros adaptativos intervalares. O trabalho não se limita a filtros adaptativo intervalares, também podemos encontrar controle adaptativo usando sistemas fuzzy.

6.3.1 Descrição intervalar de filtros

Concordando com os trabalhos [Vehí et al. 2002], [Samadi et al. 1992] e [Bose & Kim 1991], de que as imprecisões dos filtros são melhores representadas por métodos intervalares, propomos aqui representar as especificações dos filtros com intervalos. Como já vimos na seção 6.2.2, as descrições dos filtros já são intervalares, a menos da notação.

Voltando ao sistema genérico da figura 6.3 e as especificações representadas pela figura 6.4 e tomando as especificações sugeridas pelas equações (6.3) e (6.4), temos

$$(1 - \delta_1) \leq |H(e^{j\omega})| \leq (1 + \delta_1) \quad |\omega| \leq \omega_p. \quad (6.31)$$

Do exemplo 10, tiramos $\delta_1 = 0,01$ e $\omega_p = 2\pi(2000) \cdot 10^{-4} = 0,4\pi$ radianos.

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2 \quad \omega_r \leq |\omega| \leq \pi. \quad (6.32)$$

Do exemplo 10 temos, $\delta_2 = 0,001$ e $\omega_r = 2\pi(3000) \cdot 10^{-4} = 0,6\pi$ radianos.

Substituindo δ_1 , ω_p , δ_2 e ω_r nas equações (6.31) e (6.32) respectivamente temos

$$0,99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1,01 \quad |\omega| \leq 0,4\pi. \quad (6.33)$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0,001 \quad 0,6\pi \leq |\omega| \leq \pi. \quad (6.34)$$

Podemos, assim, observar que as equações (6.33) e (6.34) podem ser reescrita de forma intervalar, apenas mudando a notação da seguinte forma.

$$|H(e^{j\omega})| \in [0,99; 1,01] \quad |\omega| \in [0; 0,4\pi], \quad (6.35)$$

$$|H(e^{j\omega})| \in [0; 0,001] \quad |\omega| \in [0,6\pi; \pi]. \quad (6.36)$$

Portanto, podemos dizer que as equações (6.35) e (6.36) são as especificações intervalares de um filtro passa baixa independente da sua implementação ser intervalar.

6.4 Conclusão

Neste capítulo justificamos a escolha do modelo intervalar para representar sistemas que de alguma maneira carregam incertezas usando filtros. Seja estas incertezas advindas de componentes físicos do sistemas, dos dados de entradas do sistema, do modelo matemático escolhido ou da representação numérica adotada no sistema. Onde sugerimos mais fidelidade aos sistemas que são inerentemente incertos, tornando as imprecisões como parte dos sistemas. Apresentamos um exemplo com filtros analógicos, onde os próprios fabricantes de componentes eletrônicos delimitam as margens de confiabilidade ou de precisão de seus produtos. Mostramos que muitos filtros podem ser descritos intervalarmente sem nada alterar nas sua implementações, pois muitos deles são descritos intervalarmente, amenos de uma notação. Exibimos um exemplo onde a imprecisão está no modelo matemático. Para isso usamo a técnica de projetar filtros discretos IIR a partir de filtros contínuos extraída de Oppenheim e Schaffer [Oppenheim & Schaffer 1989]. Buscamos também mostra as incertezas nos coeficientes de quantização. Neste exemplo vimos que a nossa transformada- Z é uma excelente maneira de lidar com os erros de quantização. Vimos que não estávamos sozinhos mo uso de matemática intervalar em filtros temos com abordagens diferentes, mas com o mesmo intuito os trabalhos [Vehí

et al. 2002],[Lyra 2003], [Edmonson et al. 2007] e [Samadi et al. 1992]. Por fim propomos uma descrição intervalar para filtros.

Os exemplos deste capítulo mostraram que as imprecisões estão presentes em várias fases do processamento de sinais. Temos imprecisões por limitações de representação numérica, por limitações do modelo matemático escolhido, por imprecisões de componentes. Vimos na literatura que essas imprecisões são bem representadas usando a matemática intervalar. Finalmente, observamos que a especificações dos filtros podem ser naturalmente expressas de forma intervalar.

Capítulo 7

Conclusão

Este trabalho propôs uma fundamentação matemática para processamento de sinais intervalares, partindo das propriedades básicas de processamento de sinais, temos como texto de referência o texto de Oppenheim e Schafer [Oppenheim & Schafer 1989]. Não tentamos uma função que mapeasse cada conceito de processamento de sinal em seu correspondente intervalar, mas construímos as versões intervalares dos conceitos básicos como prometido. Para esta construção foi preciso também contribuir com conceitos em matemática intervalar. Estas contribuições foram distribuídas do capítulo 2 ao capítulo 6 como relatamos a seguir.

No capítulo 2 trabalhamos uma fundamentação básica de matemática intervalar para suporte de algumas ferramentas de processamento de sinais digitais. Começou com um apanhado histórico sobre a matemática intervalar e depois com discussão filosófica sobre a natureza do intervalo que pode comportar-se ora como um número ora como um conjunto. Apresentou as operações da aritmética de Moore. Propôs uma métrica que preserva as incertezas, satisfaz a propriedade da inclusão monotônica. A métrica proposta neste trabalho abre um leque de possibilidades que dá margem a vários trabalhos de investigação científica tais como: Que topologia teremos com essa métrica? Qual a noção de continuidade segundo esta métrica? Como seria o algoritmo K-means com uma métrica essencialmente intervalar?

Embora só se tenha focado as propriedades da métrica essencialmente intervalar de interesse imediato na fundamentação matemática de processamento digital de sinais intervalares. Outros conceitos como circunferência intervalar, módulo (valor absoluto) intervalar, máquinas de vetor de suporte intervalar tornarão possíveis. No caso da SVM intervalar foi um trabalho desenvolvido na base de sistemas inteligentes da UFRN por Takahashi et. al. [Takahashi et al. 2008].

Para atender o propósito do trabalho foi apresentado o conceito de sequência intervalar com definições voltadas para processamento de sinais. E finalmente apresentamos as integrais intervalares, que possibilitaram uma versão da convolução contínua intervalar e as integrais de linha intervalar de Callejas-Bedregal e Bedregal [Callejas-Bedregal & Bedregal 2005] que possibilitaram a construção do método formal de prova da existência da transformada- Z inversa. Com estes conceitos este trabalho não só contribui para a matemática intervalar e processamento de sinais como para todas as áreas do conhecimento que lida com incertezas e modeladas por intervalos. O valor absoluto apresentado neste trabalho também contribui para quem trabalha na conversão de softwares que li-

dam com números reais para uma versão intervalar. Onde o valor absoluto gera problema quando mapeia uma grandeza intervalar em uma grandeza real.

No capítulo 3 apresentamos os conceitos e construtos que se fizeram necessário para a construção da versão intervalar para conceitos de processamento de sinais, analisando as propriedades de conjuntos dos números complexos intervalares verificamos que nem a união e nem a interseção são fechadas sobre o conjunto dos números complexos intervalares. Apresentamos as propriedades do número imaginário I e fizemos uma revisão da aritmética intervalar complexa na forma retangular. Dividimos o plano complexo intervalar em 9 regiões para facilitar implementações computacionais. Propomos uma distância intervalar complexa que contempla a inclusão monotônica preservando as incertezas. Baseados nesta distância propomos uma definição de módulo intervalar complexos que é uma extensão do módulo complexo e que quando aplicado a intervalos degenerados coincide com a módulo euclidiano. Este módulo preserva a inclusão monotônica a principal propriedade a aritmética intervalar. Mostramos que as operações aritméticas intervalares complexas são o CIR das respectivas operações sobre \mathbb{C} .

No capítulo 4 começamos com algumas definições básicas que faltavam na literatura de referência do trabalho. Como a definição de sinais intervalares, a definição de sistemas intervalares que damos o foco para uma linguagem de processamento de sinais. As propriedades básicas de sistemas reais foram estendidas para sistemas intervalares. Esta extensão também foi contribuição deste trabalho. Na literatura deste trabalho tem trabalho com foco em processamento de sinais intervalares, mas nenhum tem preocupação com uma fundamentação e mais com aplicações. Por isso apresentamos as versões intervalar das propriedades básicas como linearidade, causalidade, estabilidade, sistemas sem memória, sistema intervalar invariante no tempo, sistema intervalar aditivo, sistema intervalar homogêneo e sistema linear intervalar. Usamos a função CIR para criar alguns exemplos sistemas intervalares. Fizemos uma análise da linearidade dos sistemas intervalares segunda a falta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição da aritmética intervalar.

Depois de feito fundamentos básicos fizemos um divisão em sistemas intervalares contínuos e discretos. Para os sistemas contínuos definimos a função impulso intervalar, que será de grande utilidade em demonstrações ao longo do trabalho. Definimos também a convolução contínua intervalar usando a integral de Moore. Para os sistemas discretos definimos sinais digitais intervalares para o escopo de nosso trabalho, e sistemas digitais intervalares. Como processamento digital de sinal nada mais é do que manipulação matemática de sequências de números reais, fizemos a versão intervalar de sequências discretas. falamos sobre período de amostragem e frequência de amostragem. Tratamos algumas operações básicas com sequências intervalares discretas. Para isso usamos as principais funções usadas nos textos de processamento de sinais ,tais como função pulso, função escada, função seno e função exponencial [Oppenheim & Schaffer 1989], [Smith 1999] e [Chen 1999]. Exploramos as propriedades de sistemas lineares intervalares. Apresentamos a convolução intervalar discreta e suas propriedades.

No capítulo 5 construímos uma versão intervalar da transformada- Z . Para a construção da transformada- Z intervalar e suas propriedades foi necessário contribuições como a circunferência intervalar, polinômios intervalares, pólos e zeros intervalares. Uma das

contribuições importantes deste capítulo foi o uso de uma métrica que preserva incertezas na construção da definição de módulo intervalar que preserva a inclusão monotônica. As regiões de convergências na sua versão intervalar ganharam duas outras possibilidades pelo fato de considerar o módulo intervalar. Renomeamos as regiões de convergências com os seguintes rótulos: região de convergência estrita-RCE para aquela região que independente da imprecisão do sistema o sistema sempre converge; Região de não-convergência estrita-RNCE rótulo da região onde sistema sempre diverge independente do grau de incerteza; região limite de convergência-RLC nome que recebeu a região de fronteira da região de convergência; região limite de não convergência-RLNC nome que designa a região de fronteira com a região de não-convergência e por fim a região de convergência condicional-RCC que representa a região de incertezas do sistema é uma transição entre convergência e não-convergência. Verificamos que em um sistema não intervalar não temos a figura da RCC e a RLC e RLNC são coincidentes. Com isso criamos uma nova maneira de analisar convergência de sistemas intervalares. Apresentamos as propriedades das novas regiões de convergências. Verificamos relações entre estabilidade, causalidade e regiões de convergências. Analisamos o caso da inversa da transformada- Z , usamos a integral de linha de Callejas-Bedregal e Bedregal [Callejas-Bedregal & Bedregal 2005] para a construção do método formal da inversa da transformada- Z . Apresentamos os métodos de investigação da inversa por inspeção, por expansão em frações parciais, expansão em séries de potências. Foi feita uma apresentação das propriedades da transformada- Z tais como linearidade, sempre lembrando das limitações de sistemas intervalares não possuem a distributividade da multiplicação em relação à adição. Abordamos o deslocamento no tempo, multiplicação por uma sequência exponencial, diferenciação, conjugação de uma sequência, simetria temporal. Abordamos convolução de sequências intervalares e transformada- Z intervalar. e por fim uma versão intervalar da relação de Parserval.

No capítulo 6 usamos os filtros para justificar um abordagem intervalar para processamento de sinais. Onde sugerimos mais fidelidade aos sistemas que são inerentemente incertos, tornando as imprecisões como parte dos sistemas. Apresentamos um exemplo com filtros analógicos, onde os próprios fabricantes de componentes eletrônicos delimitam as margens de confiabilidade ou de precisão de seus produtos. Mostramos que muitos filtros podem ser descritos intervalarmente sem nada alterar nas suas implementações, pois muitos deles são descritos intervalarmente, amenos de uma notação. Exibimos um exemplo onde a imprecisão está no modelo matemático. Para isso usamos a técnica de projetar filtros discretos IIR a partir de filtros contínuos extraída de Oppenheim e Schaffer [Oppenheim & Schaffer 1989]. Buscamos também mostra as incertezas nos coeficientes de quantização. Neste exemplo vimos que a nossa transformada- Z é uma excelente maneira de lidar com os erros de quantização. Vimos que não estávamos sozinhos no uso de matemática intervalar em filtros temos com abordagens diferentes, mas com o mesmo intuito os trabalhos [Vehí et al. 2002],[Lyra 2003], [Edmonson et al. 2007] e [Samadi et al. 1992]. Por fim propomos uma descrição intervalar para filtros.

Neste trabalho abordamos processamento de sinais digitais. Fizemos várias contribuições importantes tanto no campo de processamento de sinais, quanto como no campo da matemática intervalar. Observamos que Lyra já havia proposto uma métrica seme-

lhante, cuja distância entre dois pontos intervalares também seria um intervalo, porém ele só definiu para intervalos complexos.

Com a representação de sinais intervalares e a construção dos conceitos de sistemas intervalares, o campo de processamento de sinais ganha mais recursos linguísticos na representação de sistemas reais, através de uma linguagem discreta.

Apresentamos uma fundamentação básica de matemática intervalar para suporte de algumas ferramentas de processamento de sinais digitais. Foi proposta uma métrica e conjecturou que ela abriria várias possibilidades de novas aplicações para a matemática intervalar. A métrica proposta neste trabalho abre um leque de possibilidades que dá margem a vários trabalhos de investigação científica tais como: Que topologia teremos com essa métrica? Qual a noção de continuidade segundo esta métrica? Como seria os algoritmos K-meas propostos nos trabalho [Cruz et al. 2004] e [Takahashi et al. 2005] com uma métrica essencialmente intervalar?.

Defendemos que o modelo intervalar é bem adequado para processamento digitais de sinais, uma vez que todo sistema discreto que representa variáveis reais podem conter erros de quantização. Esses erros não são somente dos dados, mas também da aritmética de ponto flutuante, ou da variância do sistema.

Apresentamos propriedades de processamento de sinais na sua versão intervalar. Entretanto, só sistemas lineares invariantes no tempo foram abordados. A convolução intervalar pode ser usada no projeto de filtros intervalares, ou para análises de estabilidades de sistemas. Este trabalho poderá despertar nos usuário de processamento de sinais uma nova maneira de tratar as incertezas do sistemas digitais.

Contribuímos com novos conceitos sobre números complexos intervalares tais como: pseudo módulo e suas operações; uma nova representação de números complexos na forma polar; nova representação dos números complexos na identidade de Euler; construímos a aritmética complexa de maneira que conseguimos uma equivalência entre as operações independente da forma de representação, resolvemos um problema apresentado pela primeira vez por Boche [Boche 1966], além de contribuir com o módulo complexo intervalar que dá suporte à análise de convergência de sistemas intervalares. Contribuímos também com a identidade de Euler, que facilita os cálculos e os torna mais natural, quando um número complexo é representado na forma $|Z|e^{j\phi}$.

Apresentamos um versão da transformada- Z intervalar com coeficientes intervalares. Para modelar sistemas onde as entradas possuem incertezas. As vantagens nesta abordagem são o módulo intervalar que preserva a incerteza, o poder a aritmética intervalar em lidar com erros e a análise de convergência intervalar que esse modelo proporciona. Este modelo pode ser usado para representar sistemas onde as incertezas estão na quantização em sistemas com representação finitas. Assim acreditamos que este trabalho contribui para melhorar as manipulações com sinais com incertezas nas aplicações de processamento de sinais.

Os exemplos mostraram que as imprecisões estão presentes em várias fases do processamento de sinais temos incertezas por limitações de representação numérica, por limitações do modelo matemático escolhido, por limitações de componentes. Vimos na literatura que essas incertezas são bem representadas usando a matemática intervalar. E finalmente observamos que a especificações dos filtros podem ser naturalmente expressas

de forma intervalar.

Possibilidades de trabalhos futuros

As contribuições deste trabalho abrem possibilidades de novos trabalho e novas áreas como

- Uma nova abordagem para topologia intervalar. Onde se exploraria a topologia induzida pela métrica m_{ei} , noção de vizinhança, abertos e fechados, noção de continuidade.
- Geometria analítica intervalar. Estendendo os conceitos básicos da geometria para uma versão intervalar. Assim teríamos ponto intervalar, reta intervalar e planos intervalares.
- Banco de dados intervalares. No caso de bancos de imagens, buscar uma indexação contínua no domínio do espaço de cores, usando intervalos para quantização.
- Sistemas e sinais não lineares intervalares. Neste trabalho exploramos sistemas lineares, como as imprecisões estão em todos os tipos de sistemas. Podemos explorar sistemas não lineares com incertezas e representar suas incertezas como intervalos.
- Sistemas discretos com tempo intervalar. Neste trabalho tomamos o tempo instantâneo para a função impulso. No entanto, essa função poder ser modelada com um tempo intervalar, visto que cada fenômeno demanda de uma espaço de tempo para ocorrer.
- Processadores intervalares. Edmonson já trabalha com processadores intervalares. Pretendemos usá-los em aplicações específicas, no processamento de linguagens naturais, e usar a matemática intervalar para modelar as variações da voz humana.
- Estruturas de dados intervalares. Já tem trabalhos que usam octrees intervalares em computação gráfica. Poderemos usar m_{ei} na construção dessas octrees.
- Projetos de filtros intervalares. Tem alguns trabalho que usam matemática intervalar em filtros. Sugerimos filtros de voz e de imagens intervalares,

Referências Bibliográficas

- Acióly, Benedito Melo (1991), *Fundamentação Computacional da Matemática Intervalar*, Tese de doutorado, Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Arndt, Hans-Robert (2007), 'On interval systems $[x] = [a][x] + [b]$ and the powers of interval matrices in complex interval arithmetics', *Reliable computing* (13), 245–259.
- aw Grzegorzewski, Przemysław (2004), 'Distances between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the hausdorff metric', *Fuzzy Sets and Systems* (148), 319–328.
- Boche, Ray (1966), 'Complex interval arithmetic with some applications', *Lockheed Missiles & Space Company- Sunnyvale, California* pp. 1–33.
- Bose, N. K. & K. D. Kim (1991), 'Boundary implications for frequency response interval fir and iir filters', *IEEE Transactions on signal Processing* **39**(10), 2167–2173.
- Busłowicz, Mikolaj & Tadeusz Kaczorek (2004), 'Robust stability of positive discrete-time interval systems with time-delays', *Bulletin of the Polish Academy of Sciences - Technical Sciences* **52**(2), 99–102.
- Callejas-Bedregal, Roberto & Benjamín René Callejas Bedregal (2004), 'Integrais intervalares curvilíneas', *Transparências apresentadas no CNMAC*.
- Callejas-Bedregal, Roberto & Benjamín René Callejas Bedregal (2005), 'A generalization of the moore and yang integral approach', *Preprint submitted to Computational & Applied Mathematics* .
- Candau, Yves, Tarek Raissi, Nacim Ramdani & Laurent Ibos (2006), 'Complex interval arithmetic using polar form', *Reliable Computing* **12**(1), 1–20.
- Chakraborty, Chandan & Debjani Chakraborty (2006), 'A theoretical development on a fuzzy distance measure for fuzzy numbers', *Mathematical and Computer Modelling* (43), 254–261.
- Chen, Chi-Tsong (1999), *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press.
- Comba, João Luiz Dhill & Jorge Stolfi (1993), Affine arithmetic and its applications to computer graphics, *em* 'Anais do VII Sibigrapi', pp. 1–10.

- Corliss, George F. & R. Baker Kearfott (1998), 'Rigorous global search: Industrial applications', *Reliable Computing* **0**, 1–16.
- Cruz, Marcia M. C., Adrião Duarte Dória Neto & Roque Mendes Prado Trindade (2004), O algoritmo k-means aplicado a quantização intervalar para imagens digitais, em 'ERMAC2004'.
- de Souza, Alexandre Teixeira (2004), Aplicação de métodos de otimização para o cálculo do equilíbrio termodinâmico, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas Faculdade de Engenharia Química.
- Edmonson, William, Senanu Ocloo, Cranos Williams & Winser Alexander (2007), 'The use of interval methods in signal processing and control for systems biology', *Proceedings of the 2007 IEEE Symposium on Foundations of Computational Intelligence (FOCI2007)* pp. 136–142.
- Edmonson, William (2001).
- Edmonson, William, Josze Principe, Kannan Srinivasan & Chuan Wang (1998), 'A global least mean square algorithm for adaptive FIR filtering', *IEEE Transactions on Circuits and Systems - II: Analog and Digital Signal Processing* **45**(3), 379–384.
- Edmonson, William, Wen H. Lee & John M. M. Anderson (2000), 'Interval methods for sinusoidal parameter estimation: A comparative analysis', *Reliable Computing* **6**(3), 321–336.
- Edmonson, William, Winser Alexander, Clay Gloster & Esther Hughes (2004), Interval arithmetic requirements for digital signal processor, em 'NSF Workshop: Presentations - Reliable Engineering Computing', Savannah GA, pp. 1–1. Available in <http://www.gtsav.gatech.edu/workshop/rec04/presentations/presentations.html>.
- Grigoletti, Pablo Souza, Graçaliz Dimuro, Luciano Vitória Barboza & Renata Hax Sander Reiser (2005), Finca: Uma ferramenta computacional intervalar para análise de circuitos elétricos, em 'XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional', São Paulo, São Paulo.
- Grigoletti, Pablo Souza, Graçaliz Dimuro, Luciano Vitória Barboza & Renata Hax Sander Reiser (2006), 'Análise intervalar de circuitos elétricos', *Tendências Em Matemática Aplicada e Computacional* **7**(2), 1–10.
- Grman, L'umbomír & Vojtech Veselý (2004), 'External transfer functions in robust control system design', *Electrical Engineering* **55**(1-2), 11–17.
- Gupte, Ruchir (2006), Interval arithmetic logic unit for dsp and control applications, Dissertação de mestrado, North Carolina State University.
- Hansen, Eldon (2004), Methods for interval linear equations, em 'NSF International Workshop on Reliable Engineering Computing', Savannah GA, pp. 1–12. Available in <http://www.gtsav.gatech.edu/workshop/rec04/proceedings/proceedings.html>.

- IEEE (1985), *IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic*, ieee std 754^a edição, IEEE Computer Society.
- Juzzo, Edvaldo Antonio (2004), Condições suficientes para comprimo-robustez de polinômios intervalares via análise intervalar, Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Elétrica e da Computação.
- Kulpa, Zenon (2001), 'Diagrammatic representation for interval arithmetic', *Linear Algebra and Its applications* (423), 55–80.
- Lang, Serge (1971), *Álgebra linear*, Editora Edgard Blücher Ltda.
- Leithold, Louis (1994), *O cálculo com geometria analítica*, Vol. 1, 3^a edição, Editora HARBRA Ltda.
- Lima, Elon Lages (1977), *Espaços métricos*, 2^a edição, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA.
- Lima, Elon Lages (1999), *Álgebra linear*, 2^a edição, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA.
- Lordelo, Alfredo Del Sole (2004), Análise e Projeto de Controladores Robustos por Alocação de Pólos via Análise Intervalar, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Elétrica.
- Lyra, Aarão (2003), Uma fundamentação matemática para o processamento de imagens digitais intervalares, Tese de doutorado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica - Laboratório de Engenharia de Computação e Automação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN.
- Marciniak, Andrzej (2003), 'On multistep interval methods for solving the initial value problem', *Poznan University of Technology - Institute of Computing Science - Piotrowo 3a. 60-965 Poznan Poland*.
- Moore, R. E. (1966), 'Interval analysis', *Prentice Hall, New Jersey*.
- Moore, Ramon E. (1962), Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing, Tese de doutorado, Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, California. NR-0440211.
- Moore, Ramon E. (1979), *Methods and Applications of Interval Analysis*, Studies in Applied Mathematics - SIAM, Philadelphia.
- Moore, Ramon E., Wayman Strother & C. T. Yang (1960), Interval integrals, Relatório Técnico LMSD-703073, Lockheed Aircraft Corporation: Missiles and Space Division, Sunnyvale, California.
- Neher, Markus (2007), 'Complex standard functions and their implementation in the costly library', *ACM Trans. Math. Softw.* **33**(1), 27.

- Niu, Xiao-Ming, Testsuya & Hiroshi Sugiura (2007), 'A verified method for bounding clusters of zeros of analytic functions', *Journal of Computation and Applied Mathematics* **199**, 263–270.
- Ocloo, Senanu & William Edmonson (2008), 'Tir filter adaptation using branch-and-bound: A novel approach', *IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS* **55**(11), 3393–3403.
- Oliveira, Paulo Werlang, Tiaraj Asmuz Diverio & Dalcidio Moraes Cláudio (1997), *Fundamentos da matemática intervalar*, Sagra Luzzato.
- Oppenheim, Alan V. & Ronald W. Schafer (1989), *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall.
- Pereira, Sebastião C., Ulisses T. Mello, Nelson F. F. Ebecken & Rafi L. Muhanna (2004), 'Uncertainty in thermal basin modeling: An interval finite element approach', *Reliable computing* **12**(6), 451–470.
- Petković, Miodrag S. (1979), 'Some interval methods of the second order for the simultaneous approximation of polynomial roots', *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. n.634 (677)*, 75–82.
- Petković, Miodrag S. & Ljiljana D. Petković (1998), *Complex Interval Arithmetic and Its Applications*, Vol. 105, WILEY-VCH.
- Popova, Evgenija D. (1994), 'Extended interval arithmetic in iee floating-point environment', *Interval Computation* (4), 100–129.
- Pothuri, Aditya (2008), Design of pulse output direct digital synthesizer with an analog filter bank, Dissertação de mestrado, Wright State University.
- Pownuk, Andrzej (2004), 'Efficient method of solution of large scale engineering problems with interval parameters', *Reliable Computing* .
- Samadi, Saed, Akinori Nishihara & Nobuo Fujii (1992), Interval properties of lattice all-pass filters with applications, Relatório técnico, Department of Physical Electronics Tokyo Institute of Technology, Ookayama, Meguro-ku Tokio 152, Japan.
- Santiago, Regivan Hugo Nunes (1999), Teoria das equações intervalares locais, Tese de doutorado, Departamento de Informática, Pós-Graduação em Ciência da computação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- Santiago, Regivan Hugo Nunes, Benjamín René Callejas Bedregal & Benedito Melo Acióly (2005), 'Comparing continuity of interval functions based on moore and scott topologies', *Eletronic Journal on Mathematics of Computation* .
- Santiago, Regivan Hugo Nunes, Benjamín René Callejas Bedregal & Benedito Melo Acióly (2006), 'Formal aspects of correctness and optimality of interval computations', *Formal Aspects of Computing* **18**(2), 231–243.

- Silva, Fábio Oliveira (2008), Homímetro intervalar, Relatório técnico, Faculdade Independente do Nordeste - FAINOR - Colegiado de Engenharia da Computação. Monografia de Final de Curso.
- Skalna, Iwona (2006), 'A method for outer interval solution of systems of linear equations depending linearly on interval parameters', *Reliable Computing* **12**(2), 107–120.
- Smith, Steven W (1999), *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, California Technical Publishing.
- Sun, Fangyu & Peter Kosmol (2001), 'A new simultaneous method of fourth order for finding complex zeros in circular interval arithmetic', *Journal of Computational and Applied Mathematics* **130**, 293–307.
- Sunaga, Teruo (1958), 'Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis', RAAG MEMOIRS.
- Takahashi, Adriana, Adrião Duarte Dória Neto & Benjamin René Callejas Bedregal (2008), 'Svm intervalar linearmente separável', *CNMAC* **6**.
- Takahashi, Adriana, Benjamin René Callejas Bedregal & Aarão Lyra (2005), 'Uma versão intervalar do método de segmentação de imagens utilizando o k-means.', *Tendencias em Matemática Aplicada e Computacional-TEMA* **6**.
- Trindade, Roque Mendes Prado (2002), Uma análise intervalar de scott, Dissertação de mestrado, Departamento de Informática, Universidade Federal de Pernambuco-UFPE.
- Trindade, Roque Mendes Prado, Benjamín René Callejas Bedregal & Adrião Duarte Dória Neto (2008), 'Basic concepts of interval digital signal processing', *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology* **30**. ISSN1307-6884.
- Vaccaro, Guilherme Luís Roëhe (2001), Solução de equações intervalares, Tese de doutorado, Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS.
- Vehí, Josep, Joaquim Armengol & Luís Eduardo Mujica (2002), 'A review on interval methods for adaptive systems', *Eunite Annual Symposiums 2001 and 2002* pp. 9–18.
- Voxman, William (1998), 'Some remarks on distances between fuzzy numbers', *Fuzzy Sets and Systems* (100), 353–365.