

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-graduação em Engenharia
Elétrica

DESENVOLVIMENTO E AVALIAÇÃO DE
CONTROLADORES PREDITIVOS BASEADOS EM
MODELOS BILINEARES

Adhemar de Barros Fontes

Natal, RN - Brasil.
Setembro de 2002

Adhemar de Barros Fontes

**DESENVOLVIMENTO E AVALIAÇÃO DE
CONTROLADORES PREDITIVOS BASEADOS EM
MODELOS BILINEARES**

Ése submetida ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. André Laurindo Maitelli

Co-orientador: Prof. Dr. Andrés Ortiz Salazar

**Natal, RN - Brasil.
Setembro de 2002**

Adhemar de Barros Fontes

**DESENVOLVIMENTO E AVALIAÇÃO DE
CONTROLADORES PREDITIVOS BASEADOS EM
MODELOS BILINEARES**

Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Aprovada por:

- Prof. Dr. André Laurindo Maitelli
- Prof. Dr. Andrés Órtiz Salazar
- Prof. Dr. Takashi Yoneyama —
- Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea
- Prof. Dr. José Ivonildo do Rego

**Natal, RN - Brasil.
Setembro de 2002**

Ao meu **pai**,minha **mãe** e meus **irmãos** pelo apoio em todos os momentos de minha vida e aos meus filhos **Ricardo,Adhemar** e **Abrahão** na esperança de que estes entendam o sentido da realização profssional .

Agradecimentos

A Deus que através de seu filho Jesus nos ensina que o conhecimento da verdade permite a libertação.

Aos professores Maitelli e Ortiz pela orientação, apoio, compreensão, dedicação e amizade sempre demonstrada durante toda essa trajetória.

Aos professores Adelardo, Adrião, Pablo, com os quais tive a grata oportunidade do conviver, pela atenção e amizade sempre demonstrada.

Ao Engenheiro Walfran pelo apoio e presteza em assuntos referentes à área de informática.

A todos os professores do DCA e colegas com os quais convivi.

Aos colegas e amigos do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia pela confiança e incentivo.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A todos os pesquisadores cujos trabalhos serviram-nos de consulta.

RESUMO

Desenvolvimento e Avaliação de Controladores Preditivos Baseados em Modelos Bilineares

O presente trabalho trata do desenvolvimento e avaliação de controladores preditivos baseados em modelos bilineares. Como caso particular da técnica de controle preditivo baseado em sistemas não lineares, estes têm despertado grande interesse, uma vez que apresentam a vantagem de ser mais simples que o não linear em geral e mais representativo que o linear. A obtenção de uma lei de controle explícita, que minimize um critério quadrático sujeito a um modelo bilinear, é um problema de otimização não-linear, e uma solução analítica para o problema não pode ser obtida. Em essência, existem dois métodos representativos adotados na solução de controle preditivo não linear. Um dos métodos, aqui adotado, utiliza o modelo "quasilinear por degrau de tempo" no desenvolvimento do controlador preditivo baseado no Controlador Preditivo Generalizado.

A principal contribuição apresentada nesta tese é o desenvolvimento de uma nova abordagem para o controlador preditivo generalizado, baseado em sistemas bilineares, utilizando o modelo "quasilinear por degrau de tempo compensado" mono e multivariável. Nesta nova abordagem, um **termo de compensação** é adicionado ao modelo quasilinear por degrau de tempo objetivando diminuir o erro de predição e conseqüentemente melhorar o desempenho do controlador.

ABSTRACT

Development and Evaluation of Predictive Controllers Based on Bilinear Models

The present work contributes on the development and evaluation of predictive controller based on bilinear models. As a particular case of the technique of predictive control based on non-linear systems, these have been attracting great interest, as they present the advantage of being simpler than the non-linear in general and more effective than the linear ones. The determination of an explicit control law, that minimises a quadratic index to a bilinear model, is a problem of non-linear optimisation, and an analytic solution for the problem cannot be obtained. However, in many instances of interest, relevant ones approximate solution of non-linear predictive control does exist. One of the methods, here adopted, uses " timestep quasilinear " model in the development of the predictive controller based on the Generalised Predictive Controller.

The main contribution presented in this thesis is the development of a new approach for the Generalised Predictive Controller based on bilinear system, using the " timestep quasilinear compensated " model for single and multivariable plants. In this new approach, a compensation term is added to the timestep quasilinear model to reduce the prediction error and consequently to improve the controller's action.

SUMÁRIO

Agradecimentos	v
Sumário	vi
Lista de símbolos e abreviaturas	ix
Lista de figuras	xiii
Resumo	xvi
Abstract	xvii
CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO	01
CAPÍTULO II – CONTROLADORES PREDITIVOS	08
2.1 Introdução ao controle preditivo	08
2.2 Conceito	09
2.3 Histórico	13
2.4 Relação com outros métodos de controle	15
2.5 Modelos monovariáveis de entrada e saída	19
2.5.1 Modelos paramétricos:	19
2.5.1.1 Modelo ARX	21
2.5.1.2 Modelo ARIX	21
2.5.1.3 Modelo ARMAX	22
2.5.1.4 Modelo ARIMAX	22
2.5.2 Modelos não paramétricos:	22
2.5.1.1 Modelo FIR	23
2.5.1.1 Modelo FSR	23
2.6 Preditores: caso monovariável	25
2.6.1 Introdução	25
2.6.2 Preditores i-passos à frente para o modelo ARX	25
2.6.4 Preditor i-passos à frente para o modelo geral	29
2.6.5 Preditores i-passos à frente de sistemas com retardo	31
2.7 Funções objetivo e seu reflexo na propriedade do controlador	34
2.7.1 Função objetivo de passo único	34
2.7.2 Função objetivo multi-passo	40
2.8 Algoritmos	43
2.9 Conclusões	54

CAPÍTULO III – CONTROLE PREDITIVO GENERALIZADO (GPC):	
<i>Caso monovariável sem restrições</i>	
	55
3.1 Introdução	55
3.2 Formulação do controle preditivo generalizado	56
3.3 O caso com ruído colorido	64
3.4 Conclusões	73
CAPÍTULO IV– CONTROLE PREDITIVO GENERALIZADO (GPC):	
<i>Caso multivariável sem restrições</i>	
	74
4.1 Introdução	74
4.2 Formulação do GPC multivariável sem restrições	75
4.2.1 Modelo CARIMA para processos multivariáveis	76
4.2.2 Matriz <i>“interator”</i> de um processo multivariável	77
4.2.3 Função Objetivo	80
4.3 O caso com ruído colorido	86
4.4 Conclusões	89
CAPÍTULO V– CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM	
MODELOS BILINEARES	
	91
5.1 Introdução	91
5.2 Modelo bilinear	92
5.3 Controlador preditivo bilinear generalizado: linearização através de realimentação de saída (GBPC_LRS)	93
5.4 Controlador preditivo generalizado: aproximação quasilinear por degrau de tempo	98
5.4.1 Aproximação quasilinear por degrau de tempo	98
5.4.2 Controlador preditivo bilinear generalizado	100
5.4.3 O caso com ruído colorido	104
5.5 Conclusões	111
CAPÍTULO VI – APLICAÇÃO EM SISTEMAS BILINEARES	
	112
7.1 Introdução	112
7.2 Descrição dos sistemas utilizados:	112
7.2.1 Coluna de destilação de tolueno	113
7.2.2 Motor de indução	114
7.3 Controle preditivo bilinear aplicado na coluna de destilação	116
7.4 Controle preditivo bilinear aplicado no motor de indução	120
7.5 Conclusões	124

CAPÍTULO VII – CONTROLE PREDITIVO BILINEAR: UMA NOVA ABORDAGEM	125
6.1 Introdução	125
6.2 Modelo quasilinear compensado monovariável	126
6.3 Propriedade do termo de compensação	130
6.3 Estrutura do termo de compensação	131
6.3 GPC bilinear compensado monovariável	131
6.4 Modelo quasilinear compensado multivariável	145
6.5 GPC bilinear compensado multivariável	147
6.4 Conclusões	151
CAPÍTULO VIII – CONCLUSÕES GERAIS E TRABALHOS COMPLEMENTARES	152
BIBLIOGRAFIA	155
APÊNDICE A	165
A.1 Solução recursiva da equação diofantina	165
APÊNDICE B	168
B.1 Critério de Akaike	168

SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

- ARX:** Auto-regressivo com sinal exógeno;
- ARIX:** Auto-regressivo Integral com sinal exógeno;
- ARMAX:** Auto-regressivo, Média Móvel, com sinal Exógeno;
- ARMAX:** Auto-regressivo, Média Móvel, com sinal Exógeno;
- ARIMAX:** Auto-regressivo, Integral, Média Móvel, com sinal Exógeno;
- CPBG:** Controlador Preditivo Bilinear Generalizado;
- d:** retardo do sistema;
- DMC:** Dynamic matrix control;
- FIR:** Finite Impulse Response;
- FSR:** Finite Step Response;
- GMV:** Generalised Minima Variance;
- GPC:** Generalised Predictive Control;
- GRG:** Gradiente reduzido generalizado;
- LGR:** Lugar Geométrico das Raízes;
- LQ:** Linear quadratic;
- LQC:** Linear quadratic control;
- MPC:** Model Predictive Control;

MAC:	Model Algorithm Control;
Max(a,b):	Máximo entre n_a e n_b ;
MIMO:	Multi-input multi-output;
$\min_r \varepsilon :$	Mínimo de ε em relação a r
MPHC:	Controle Preditivo Baseado em Modelo Heurístico;
NARMAX:	Não linear, Auto-regressivo, Média Móvel, com sinal Exógeno;
NARIMAX:	Não linear, Auto-regressivo, Integral, Média Móvel, com sinal Exógeno;
NU:	Horizonte de controle;
NY:	Horizonte de predição;
N_1:	Horizonte mínimo de predição;
K_p:	Constante de erro de posição;
PQS:	Programação quadrática sucessiva;
SBPR:	Sinal Binário Pseudo Randômico;
SISO:	Single input single output;
λ:	Ponderação do controle;
$\hat{y}(k+i):$	Predição i -passos à frente da saída baseada em informações disponíveis até o instante k ;
$\ x(k)\ _R^2 :$	Representa a função quadrática $x'(k)Rx(k)$;
$\mathcal{E}\{x\}$	Representa o valor esperado de x ;
q^{-1}	Operador atraso unitário;

- z:** Representa a variável no domínio da frequência da transformada Z;
- y(k):** Representa a saída do processo;
- d:** Representa o retardo, em múltiplos do período de amostragem ($d \geq 0$);
- u(k):** Representa a saída do controlador;
- e(k):** Representa um ruído “branco” e gaussiano, com média zero e variância σ^2 ;
- $\eta(i)$:** Representa a resposta de um sistema ao pulso unitário;
- n_η :** Representa o número de elementos não nulos da resposta de um sistema ao pulso;
- n_h :** Representa o número de elementos h_i da resposta de um sistema ao degrau;
- $\hat{y}(k+i)$:** Representa a predição da saída do sistema i-passos à frente;
- $\delta(i)$ e $\lambda(i)$:** Representam seqüências de ponderação sobre o sinal de erro e o de controle, respectivamente;
- $r(k+i)$:** Representa a trajetória de referência futura.
- $y(k) \in R^q$:** Representa o vetor de saída do processo com q elementos ;
- $u(k) \in R^p$:** Representa o vetor de controle do processo com p elementos;
- $e(k) \in R^q$:** Representa o vetor de ruído branco, gaussiano, de média zero e matriz covariância $E = \text{diag}(\sigma^2)$;
- R e Q:** Representam matrizes positivas definidas de ponderação sobre o vetor sinal de erro e o vetor de controle, respectivamente;
- u(.):** Representa uma seqüência qualquer do sinal de entrada aplicada no modelo bilinear e utilizada pelo preditor i passos à frente baseado na aproximação quasilinear;

$\varepsilon_i(\cdot)$: Representa uma seqüência do erro de predição referente ao horizonte i ;

$L_i(q^{-1})$: Representa o termo de compensação referente ao horizonte i .

FIGURAS

<i>Figra n:21-</i>	Conceito de controle preditivo	09
<i>Figra n:22-</i>	Estrutura básica do MPC.....	11
<i>Figra n:23-</i>	Analogia do MPC.....	12
<i>Figra n:24-</i>	Comparação entre controle preditivo e convencional.....	15
<i>Figra n:25-</i>	Estrutura de controle com dois graus de liberdade.....	17
<i>Figra n:26-</i>	Estrutura de controle clássico.....	17
<i>Figra n:27-</i>	Diagrama de blocos do modelo do processo.....	20
<i>Figra n:28</i>	Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.....	35
<i>Figra n:29</i>	Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.....	38
<i>Figra n:210</i>	Diagrama de blocos do modelo do processo.....	41
<i>Figra n:211-</i>	Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.....	44
<i>Figra n:212-</i>	Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.....	51
<i>Figra n:31-</i>	Sistema em malha fechada com controlador GPC.....	57
<i>Figra n:32-</i>	Resultados de simulação.....	63
<i>Figra n:41-</i>	Processo MIMO.....	76
<i>Figra n:42-</i>	Sistema em malha fechada com controlador GPC.....	85
<i>Figra n:51-</i>	Diagrama de blocos da estrutura do controlador.....	94

<i>Figra n:52-</i>	Resultados utilizando a abordagem da linearização por realimentação de saída	96
<i>Figra n:53-</i>	Resultados utilizando o modelo quasilinear.....	110
<i>Figra n:54-</i>	Resultados comparativos entre o GPC linear e o quasilinear	111
<i>Figra n:61</i>	Condições operacionais da coluna.....	114
<i>Figra n:62</i>	Diagrama que representa a estratégia de controle utilizada..	116
<i>Figra n:63</i>	Resposta para um PRBS na entrada de $\pm 5\%$	118
<i>Figra n:64</i>	Respostas para uma mudança de 5% na Referência.....	119
<i>Figra n:65</i>	Sinal de Controle para uma mudança de 5% na referência..	120
<i>Figra n:66</i>	Respostas para uma mudança de + 8 % na velocidade nominal.....	122
<i>Figra n:67</i>	Sinal de controle para uma mudança de + 8 na velocidade nominal.....	122
<i>Figra n:68</i>	Respostas para uma mudança de -20 % na velocidade nominal.....	122
<i>Figra n:69</i>	Sinal de controle para uma mudança de -20 % na velocidade nominal.....	123
<i>Figra n:610</i>	Respostas para mudanças na carga nominal.....	123
<i>Figra n:611</i>	Sinal de controle para mudanças na carga nominal.....	123
<i>Figra n:71-</i>	Diagrama representando o termo de compensação.....	129
<i>Figra n:72-</i>	Saídas do sistema para mudança na referência, usando GPC baseado no modelo quasilinear compensado, no modelo quasilinear e no modelo linear para os mesmos parâmetros de sintonia.....	139

<i>Figura n.º73-</i>	Sinal de controle aplicado ao sistema para mudança na referência, usando GPC baseado no modelo quasilinear compensado, no modelo quasilinear e no modelo linear para os mesmos parâmetros de sintonia.....	139
<i>Figura n.º74-</i>	Saídas do sistema para mudança na referência, usando GPC baseado no modelo quasilinear compensado, no modelo quasilinear e no modelo linear.....	141
<i>Figura n.º75</i>	Sinal de controle aplicado ao sistema para mudança na referência, usando GPC baseado no modelo quasilinear compensado, no modelo quasilinear e no modelo linear.....	141
<i>Figura n.º76</i>	Processo MIMO.....	142

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Por muito tempo, modelos lineares, tanto invariantes como variantes no tempo, têm sido extensivamente usados para descrever sistemas físicos. Este fato é essencialmente devido a sua simplicidade analítica o que faz com que, como consequência, tenha-se atingido grande desenvolvimento da teoria concernente. No entanto, a teoria atual de sistemas permite e estimula a expansão e aprofundamento da pesquisa de forma que os limites intrínsecos dos modelos lineares, tornam-se mais e mais evidentes. Conseqüentemente, o estudo de sistemas não lineares, atualmente está mais ativo, com um esforço de vencer as freqüentes dificuldades analíticas que isto implica.

Um modelo que melhor represente um processo, é fundamental na implementação de estratégias de controle e produz um ganho competitivo em termos de qualidade e benefícios econômicos, que são consequências da redução de custos operacionais. Desta forma, um modelo linear para representação de processos não lineares tem uma deficiência destacada, tendo em vista que modelos simples são freqüentemente inadequados, quando uma aproximação mais realística torna-se necessária, (Doyle III, et al. 1995). Além do que, é fato que muitos processos são não lineares, o que é largamente documentado na literatura (Buckley, 1981; Garcia & Prett, 1986; Morari, 1986; Fleming, 1988; Bequette, 1991; Kane, 1993)

Para corroborar com o acima exposto, as pesquisas mostram que os modelos lineares utilizados pela maioria dos algoritmos de controle preditivo,

são insuficientes para o controle de alguns processos, que apresentam severo grau de não-linearidade. Nestes casos, mesmo quando o processo está operando na vizinhança de um ponto de equilíbrio, a representação deste por um modelo linear é inadequada, chegando a comprometer a estabilidade em malha fechada e constituindo uma grave deficiência (Camacho & Bordons, 1999). Em tais situações, podem ser utilizados modelos não lineares, de modo que o controlador preditivo não linear será essencial para melhorar o desempenho ou simplesmente garantir operação estável. Além disso, combinado com novas tecnologia de processos, o efetivo controle de processo é indispensável para se construir plantas eficientes, seguras e ambientalmente satisfatórios. De fato, um melhor controle permite que muitos processos sejam projetados e operem próximo ao regime ótimo de operação (Aström & Wittenmark, 1989).

Sabe-se que, as técnicas de projeto de controladores lineares são largamente empregadas na indústria química e petroquímica e, em particular, o controlador preditivo baseado em modelos lineares. No entanto, o controlador preditivo não linear, que utiliza um modelo do processo não linear, mais realista, freqüentemente mais complexo, tipicamente sacrifica a simplicidade associada às técnicas lineares de forma a alcançar um melhor desempenho, (Eaton e Rawlings, 1990 e Beigler e Rawlings, 1991). A extensão das idéias do **“Model Predictive Control”** (MPC), como é conhecida a família dos controladores preditivos, para processos não lineares é direta. No entanto, embora não exista qualquer argumentação no conceito básico do MPC contra a utilização de um modelo não linear, o seu desenvolvimento não é trivial e existem algumas questões em aberto, (Camacho & Bordons, 1999), tais como:

- pouca disponibilidade de modelos não lineares devido à escassez de técnicas de identificação para processos não lineares;
- a complexidade computacional para resolver o algoritmo de controle preditivo baseado em modelos não lineares - CPNL;
- a falta de resultados teóricos no que se refere a robustez, para o caso de sistemas não lineares.

Alguns destes problemas estão parcialmente resolvidos e o MPC, com o uso de modelos não lineares, é atualmente um campo de intensa pesquisa e tornar-se-á mais comum na medida em que usuários demandem alto desempenho.

Como caso particular da técnica de controle preditivo baseado em sistemas não lineares, aqueles baseados em **modelos bilineares**, tema central da presente Tese, têm despertado grande interesse, uma vez que:

- embora pertençam a uma classe de sistemas bilineares, estes apresentam a vantagem de ser mais simples que o não linear em geral e mais representativo que o linear;
- pode-se dizer que os modelos bilineares são mais tratáveis matematicamente que outros modelos não lineares mais gerais;
- a bilinearidade está presente em muitos sistemas físicos, especialmente em processos químicos, em que tal característica se apresenta de forma intrínseca. Nestes, o balanço de massa e de energia contém produtos de fluxos, que são normalmente usados como variáveis manipuladas, e temperatura e concentração, que são freqüentemente as variáveis controladas do processo;
- o modelo bilinear, utilizado pelo controlador, é linear nos parâmetros, fato que permite a utilização do algoritmo dos mínimos quadrados recursivo na estimação destes, ou ainda, pode-se utilizar quase a totalidade das técnicas de identificação desenvolvidas para sistemas lineares;.

As pesquisas objetivando desenvolver controladores preditivos baseados em modelos bilineares, com a mesma abordagem desenvolvida para sistemas lineares, têm naturalmente sido intensas e sempre procurando acompanhar o desenvolvimento destes. Assim é que S. Svoronos et al., em 1981, apresentaram a extensão para o caso bilinear do Controlador de Variância Mínima, desenvolvido por Aström, em 1970, para o caso linear. Neste, o modelo bilinear adotado apresenta uma estrutura que permite

representar uma parcela limitada dos casos possíveis. Esta estrutura assim adotada possibilita a obtenção da equação do preditor e conseqüentemente a obtenção de uma expressão analítica da lei de controle. No entanto, a análise das propriedades do controlador de variância mínima mostra que este não é adequado para resolver o 'problema servo', sendo de fato um **regulador** de variância mínima. Além disso, o sinal de controle gerado por este, em alguns casos, é grande e este controlador apresenta limitação para plantas cujo modelo linearizado correspondente é de fase não mínima. Por outro lado, deve-se observar que este é o algoritmo mais simples e constitui a base para os controladores preditivos mais gerais.

Sabe-se da análise da evolução dos controladores preditivos que Clarke e Gawthrop, em 1979, apresentaram o algoritmo de controle denominado de Controlador de Variância Mínima Generalizada. Este algoritmo, mantém a característica de regulador de variância mínima e apresenta ainda a capacidade de rastreamento. No caminho do desenvolvimento, Lee em 1990, apresentou uma versão para o caso bilinear, enfatizando a importância e as vantagens de tal representação na indústria. Este destaca que a bilinearidade aparece, principalmente, em virtude da escolha de fluxos como variáveis manipuladas e da temperatura e concentração como variáveis controladas do processo. No balanço de massa e de energia estas variáveis aparecem na forma de produto. No entanto, o autor, no desenvolvimento do controlador proposto utilizou um modelo bilinear que não contempla este caso. De fato, a bilinearidade considerada envolve o produto da variável de saída, referente a instantes distintos e também iguais. Embora este modelo tenha capacidade de representar sistemas não lineares, este não representa a bilinearidade mais freqüente acima citada e de fato muito importante.

Em 1987, no mesmo ano em que Clarke desenvolveu o Controle Preditivo Generalizado (GPC), Yeo e Williams apresentaram um controlador preditivo baseado em modelos bilineares. Na época, os pesquisadores estavam motivados pelo desenvolvimento da base teórica do controle preditivo, tendo em vista o sucesso apresentado pelos **“Model Algorithm Control”** (MAC) e **“Dynamic Matrix Control”** (DMC), os quais foram desenvolvidos de

forma heurística. Em sua proposta, o modelo bilinear adotado, por hipótese, não representa o distúrbio, sendo este estimado no instante k e ainda, por hipótese, considerado constante ao longo do horizonte de predição, semelhantemente ao DMC. Ainda com relação ao modelo bilinear adotado, este considera que o termo bilinear dá-se com o produto da variável controlada e da variável manipulada somente em instantes distintos. Isto, evidentemente não é o caso geral. Com relação à característica do controlador preditivo proposto, este foi desenvolvido para o caso especial em que o horizonte de predição é igual ao horizonte de controle, sendo obtido explicitamente somente o sinal de controle no instante k . Observa-se ainda que nenhuma abordagem formal para a identificação do modelo, utilizado no citado trabalho, é apresentada e a solução do problema de otimização resultante requer ainda o desenvolvimento de técnicas de programação não linear para o caso.

Em 1996, Katende e Jutan apresentaram uma extensão do controlador preditivo generalizado para uma classe de sistemas não lineares. Embora os autores afirmem que este controlador apresenta bom desempenho em controle de processos com não linearidades do tipo bilinear, isto não se verifica de fato. Pode-se fazer esta afirmação tendo em vista que o modelo não linear utilizado pelo algoritmo na predição, a qual é utilizada na minimização da função objetivo para obtenção da **Lei de Controle**, embora não linear, não apresenta qualquer característica bilinear. Conseqüentemente, esta lei provavelmente não será eficiente em controle de processos com não linearidades dominantes do tipo bilinear.

De fato, a obtenção de uma lei de controle explícita, que minimize um critério quadrático sujeito a um modelo bilinear, é um problema de otimização não-linear, e uma solução analítica para o problema não pode ser obtida. Em essência, existem dois métodos representativos adotados na solução de controle preditivo não linear. Um dos métodos é o da abordagem da programação não linear que utiliza um algoritmo de otimização não linear, tal como o Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) e a Programação Quadrática Sucessiva (PQS). Neste contexto, Mohler e Zakrzewski, apresentaram em 1996 um controlador preditivo baseado em sistemas bilineares. O outro método, é o


que utiliza técnicas distintas de linearização, destacando-se a utilização de séries de Volterra, a linearização através de realimentação de saída e a utilização do modelo denominado "quasilinear por degrau de tempo". A abordagem da linearização através da realimentação de saída foi apresentada por Re et al., em 1993, em diversos trabalhos. Nestes, os algoritmos são apresentados e aplicados, incluindo restrições na entrada e utilizando a abordagem adaptativa. Utilizando o modelo "quasilinear por degrau de tempo", Goodhart et al., em 1994, apresentaram uma extensão do GPC e o aplicaram em uma planta industrial, obtendo resultados encorajadores.

Na abordagem da linearização através da utilização do modelo quasilinear por degrau de tempo, apresentado por Goodhart et al., em 1994, o modelo proposto foi o ARMAX não-linear. Sabe-se no entanto, que o modelo mais adequado, para garantir erro de regime nulo para mudança em degrau na referência neste caso seria o ARIMAX não-linear. Uma extensão da estrutura do modelo linear auto-regressivo, integral, média móvel, com sinal exógeno (ARIMAX) com a adição do termo bilinear conduz à representação não linear ARIMAX ou NARIMAX.

A principal contribuição apresentada nesta tese é o desenvolvimento de uma nova abordagem para o controlador preditivo generalizado, baseado em sistemas bilineares, utilizando o modelo "quasilinear por degrau de tempo compensado" mono e multivariável. Nesta nova abordagem, um **termo de compensação** é adicionado ao modelo quasilinear por degrau de tempo objetivando diminuir o erro de predição e conseqüentemente melhorar o desempenho do controlador. A aplicação desta nova abordagem em modelos bilineares comprova a vantagem da utilização do termo de compensação.

A estrutura desta tese está organizada como segue:

1. no capítulo II apresenta-se a teoria geral de controladores preditivos, incluindo-se a apresentação do conceito, um breve histórico, os modelos normalmente utilizados, os preditores e as funções objetivo utilizadas e seu reflexo nas propriedades do controlador;

- 
2. nos capítulos III e IV apresenta-se a formulação do controlador preditivo generalizado (GPC), no caso mono e multivariável, considerando-se o ruído branco e colorido. Para o caso multivariável, inclui-se a apresentação do conceito de "matriz de interação";
 3. no capítulo V apresenta-se a teoria de controle preditivo baseado em modelos bilineares. Neste, descreve-se os modelos de sistemas bilineares, faz-se uma retrospectiva dos controladores preditivos bilineares, descreve-se detalhadamente a abordagem da linearização através da realimentação de saída e da aproximação quasilinear por degrau de tempo, incluindo-se exemplos, com resultados, em ambos os casos. Nesta última, analisa-se o caso com ruído branco e colorido, como também o caso mono e multivariável;
 4. no capítulo VI apresenta-se os resultados da aplicação dos controladores preditivos bilineares, descritos nos capítulos V, que utilizam a abordagem quasilinear, em dois processos reconhecidamente bilineares;
 5. no capítulo VII apresenta-se a teoria de controle preditivo baseado no modelo quasilinear por degrau de tempo compensado. Neste, descreve-se o modelo quasilinear compensado mono e multivariável e o controlador preditivo bilinear baseado nestes modelos e comprova-se a vantagem da utilização do termo de compensação através da aplicação desta nova abordagem em modelos bilineares.

CAPÍTULO II

CONTROLADORES PREDITIVOS

2.1 Introdução ao Controle Preditivo

Controle Preditivo, nome dado em virtude da maneira pela qual a lei de controle é calculada, refere-se a uma classe de algoritmos que calcula uma seqüência de ajustes no sinal de controle de forma a otimizar o comportamento futuro da saída de uma planta. Originalmente desenvolvida para atender à necessidade de controle especializado de refinarias de petróleo, esta técnica de controle recebeu bastante destaque na última década, obtendo grande aceitabilidade no ambiente industrial, com uma grande variedade de aplicação em várias áreas, incluindo indústria química, processamento de alimentos, automotiva, aeroespacial, metalúrgica e de papel. Isto porque, os controladores preditivos têm-se mostrado bastante eficazes no controle de plantas monovariáveis e multivariáveis, com retardo, de fase não mínima e instáveis, fato que caracteriza a maioria dos processos industriais, os quais têm seus próprios critérios de desempenho e exigência de confiabilidade. Diferentemente das técnicas de controle usuais, os controladores preditivos baseiam-se na predição do comportamento futuro da(s) saída(s) do processo a ser controlado. Esta predição, por sua vez, é obtida através de um modelo do processo, o qual

supõe-se disponível. Utiliza-se então os valores futuros preditos da(s) saída(s) para calcular a ação de controle. Além do mais, em contraste com outros métodos, os controladores preditivos têm-se mostrado intrinsecamente robustos com relação a erros de modelagem.

2.2 Conceito

O controle preditivo é uma técnica de controle, discreta no tempo, que faz uso de um modelo explícito do processo, para calcular uma seqüência de controle futura, tal que leve a saída predita a seguir uma dada trajetória de referência. Esse conceito pode ser ilustrado para o caso SISO, através da Figura 2.1, em que se considera o sinal de referência constante.

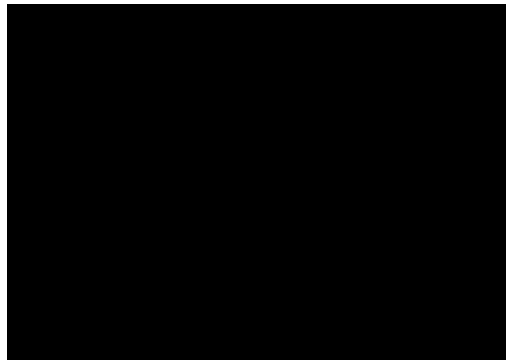


Figura 2.1 – Conceito de Horizonte Preditivo

As variáveis $u(k)$, $y(k)$ e $r(k)$ representam os valores no instante atual k da variável manipulada ou sinal de controle, da variável controlada ou saída do processo e do sinal de referência, respectivamente. Os valores futuros dessas variáveis são definidos pelos seguintes vetores:

$$\begin{aligned} u &= [u(k) \quad \dots \quad u(k + NU - 1)]^T \\ \hat{y} &= [\hat{y}(k + 1) \quad \dots \quad \hat{y}(k + NY)]^T \\ r &= [r(k + 1) \quad \dots \quad r(k + NY)]^T \end{aligned} \quad (2.1)$$

Em que:

$\hat{y}(k + i)$ representa o valor estimado de $y(k)$ i -passos à frente;

NY = Horizonte de predição;

NU = Horizonte de controle.

O comportamento futuro do processo é calculado dentro do horizonte de predição NY , usando um modelo previamente determinado e validado do processo e levando em consideração as NU ações de controle a serem fornecidas ao mesmo.

As ações de controle são calculadas de forma que a saída predita apresente determinadas características desejadas em relação ao sinal de referência utilizado, características estas mensuradas através de um determinado índice de desempenho. O sinal de referência, também conhecido como “**trajetória de referência**”, pode ser considerado tanto um valor constante, como uma trajetória filtrada por um modelo de referência, normalmente de primeira ou de segunda ordem. O primeiro elemento da seqüência de controle obtida é aplicada ao processo, sendo desconsiderados os demais. No instante de amostragem seguinte, todo o procedimento é repetido, utilizando as informações medidas mais recentes. Esta metodologia é conhecida como “**Princípio do Horizonte Móvel**”, (**Receding Horizon**) e foi proposta por Propoi em 1963.

Com a finalidade de se quantificar a qualidade de rastreamento da saída predita do processo em relação à trajetória de referência, utiliza-se uma “**Função Objetivo**”. Esta função, normalmente, relaciona as variáveis y , u e r . Um exemplo simples de função objetivo é:

$$J = \sum_{j=N1}^{NY} [r(k+j) - \hat{y}(k+j)]^2 + \lambda \sum_{i=1}^{NU} u^2(k+i) \quad (2.2)$$

Em que:

$N1$ = Horizonte mínimo de predição;

NU e NY são como já definidos em 2.1.

A minimização dessa função em relação a u gera a seqüência de ações de controle num determinado horizonte de predição. Nesse sentido, a seqüência encontrada é ótima com relação à função objetivo que é minimizada

num determinado instante. Dessa forma, os valores futuros da diferença entre y e r são minimizados e portanto, quando o modelo do processo disponível o representa fielmente, e quando o sistema não está sujeito a distúrbios nem restrições, a saída do processo acompanhará a **“trajetória de referência”**, nos instantes de amostragem, exatamente conforme previsto. Caso contrário, haverá um erro, compensado pelo novo cálculo no instante seguinte.

A estrutura básica capaz de implementar a estratégia de Controle Preditivo, conforme descrito, é mostrada na figura 2.2 a seguir. Nesta, o modelo é utilizado para prever os valores futuros das saídas da planta, baseados em valores presentes e passados e ainda nas futuras ações de controle ótimas propostas. Estas ações são calculadas por um otimizador, tendo em vista uma função objetivo, que considera o erro de rastreamento futuro, como também as restrições.

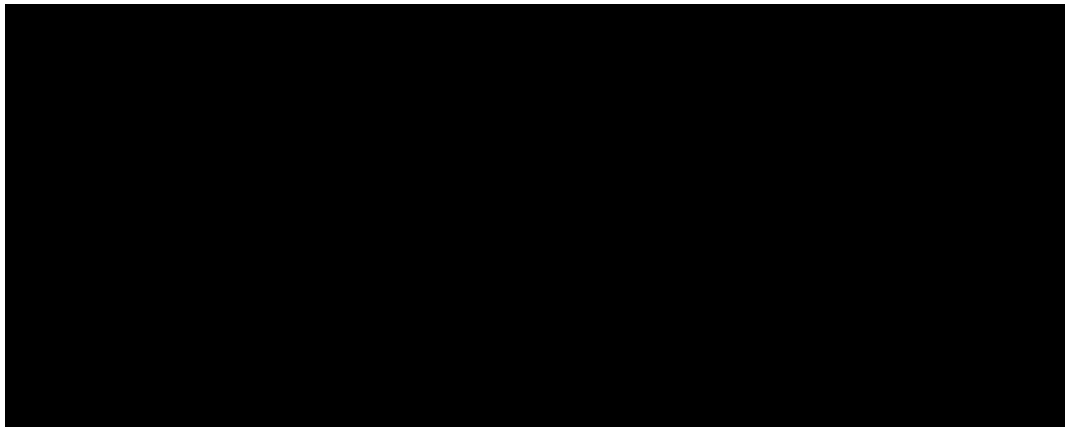


Figura 2.2 – Estrutura básica do MPC

Se o processo em questão tiver tempo morto associado, o procedimento a ser utilizado deve ser o mesmo, exceto que o limite inferior do somatório da função objetivo, correspondente ao horizonte mínimo de predição, deve ser mudado. Sendo este um múltiplo do período de amostragem, então os limites passarão a ser de $i = t_d / T$ até NY .

Um outro aspecto a ser observado é que o cálculo da seqüência de ações de controle é um problema de otimização ou, mais especificamente, um problema de minimização. Usualmente, a solução deste requer um procedimento iterativo, que no entanto, pode ser evitado quando o critério é

quadrático, o modelo é linear e não existem restrições. Neste caso, existe uma solução analítica. Deve-se observar no entanto, que a função objetivo ideal necessitaria ser baseada em especificações de projeto, tais como: “tempo de estabilização”; “sobresinal”; “tempo de subida”; “margem de ganho”; etc. Neste contexto, o problema de otimização resultante seria de difícil solução. Esta é, portanto, a razão pela qual em quase todos os controladores preditivos a função objetivo utilizada é uma função quadrática. Com isso as especificações de projeto devem ser trasladadas para os parâmetros da função objetivo quadrática, de forma que, quando esta é minimizada, as especificações acima mencionadas sejam atendidas.

Pode-se observar ainda que a **“Estratégia de Controle Preditivo”** é muito similar à utilizada no processo de dirigir um carro, conforme ilustração apresentada em (Camacho & Bordons, 1999), mostrada na figura 2.3. Neste, o motorista conhece a trajetória de referência desejada para um horizonte de controle finito e considerando as características do carro, o que corresponde a um modelo mental, decide que ações de controle executar, tais como: acelerar, atrasar e mudar a direção, de forma a seguir uma trajetória desejada. Somente a primeira ação de controle é executada em cada instante e o procedimento é novamente repetido para a decisão da nova ação de controle nos mesmos moldes do horizonte móvel.

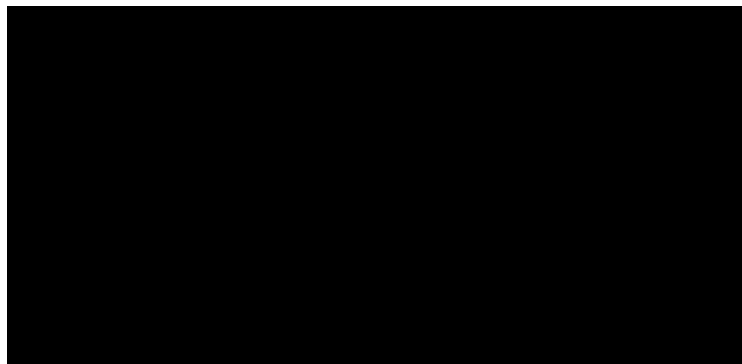


Figura 2.3 – Analogia do MPC (Segundo Camacho & Bordons)

2.3 Histórico:

O conceito de controle preditivo foi introduzido na mesma época e de forma independente por Richalet (1978) e Cutler e Ramaker (1979), na década de 70, embora os estudos relativos a esta abordagem de controle tenham sido iniciados nos anos 60, sendo Smith (1958) o primeiro a propor um controlador baseado na utilização de um modelo de predição e de uma lei de controle clássica. A partir de então, os controladores preditivos têm recebido contínuo aperfeiçoamento e se tornado motivo de grande interesse industrial, sendo ressaltado, na maioria da literatura especializada, seu excelente desempenho nas mais diversas aplicações práticas.

Como o Controle Preditivo traz, implicitamente, a necessidade da existência de um modelo matemático que descreva bem o comportamento dinâmico do processo, a partir do qual a(s) saída(s) será(ão) predita(s), estes são denominados de Controladores Preditivos baseados em Modelo – MPC. Esses controladores têm sido muito explorados na literatura (Garcia, 1980), (Fisher, 1989), (Morari, 1995) e se tornado uma poderosa técnica de controle nos últimos anos, com extensa publicação de resultados práticos.

Os diversos algoritmos MPC existentes até o momento baseiam-se no mesmo procedimento, isto é, obtenção da predição do valor futuro da saída e cálculo das ações de controle futuras feito através da minimização de um critério de desempenho, diferenciado-se basicamente pelo modelo matemático utilizado na predição e no tipo de cálculo de ação de controle.

Os controladores que utilizam modelos lineares e que possuem critério de otimalidade quadráticos, ou seja, que utilizam a minimização de uma norma H_2 para obtenção da ação de controle, dispõem de uma solução analítica explícita, ao passo que, controladores com modelos não lineares ou que minimizam outras normas, a exemplo da H_∞ ou ainda que imponham restrições de cálculo, necessitam utilizar ferramentas de otimização mais complexas.

Uma das primeiras e mais importantes propostas de controladores MPC foi apresentada com o nome de controle de Variância Mínima [Aström 73],

desenvolvido para aplicação numa indústria de papel de celulose, para controlar a homogeneidade da espessura do papel fabricado. O algoritmo proposto, baseado na predição a d passos à frente, sendo d o número de amostragens correspondente ao atraso de transporte do sistema, utilizava um modelo ARMAX e a ação de controle era calculada de forma a minimizar a variância do sinal de saída, apresentando, porém um baixo desempenho em sistemas de fase não mínima, ou com zeros próximos ao círculo unitário, e não possuindo um bom comportamento servo.

A partir do controlador de variância mínima, Clarke e Gawthrop (1975) propuseram melhorias no algoritmo original, dando-lhe o nome de Variância Mínima Generalizada (GMV). No GMV, o modelo utilizado é também o ARMAX e a lei de controle é obtida minimizando, a cada instante, um critério quadrático em que se pondera a saída predita a d passos a frente, a trajetória de referência e o vetor de controle. Isto permite que a saída predita apresente a mínima variância possível, mesmo na presença de ruído contaminante, além de dar ao controlador capacidade de rastreamento.

Em 1978, Richalet apresentou um algoritmo denominado Controle Preditivo Baseado em Modelo Heurístico - MPHIC, que utiliza um modelo heurístico de resposta ao impulso para calcular a ação de controle, determinada de forma que a saída predita siga uma dada trajetória de referência e utiliza ainda o conceito de horizonte estendido. Foi implementado em um software denominado IDCOM, utilizado com muito sucesso em plantas industriais como coluna de destilação de craqueamento catalítico, gerador de vapor e planta de PVC.

Outras propostas de controladores, baseados não na resposta impulsiva, mas na resposta ao degrau, foram desenvolvidas por Cutler (1980) e Rouhani & Mehra (1982), denominados respectivamente de Controle por Matriz Dinâmica - DMC e Algoritmo de Controle Baseado em Modelo - MAC.

Foram também desenvolvidos outros controladores, utilizando o modelo de representação não mais na forma de resposta ao impulso ou ao degrau, inviáveis para processos instáveis em malha aberta, mas sim na forma de

espaço de estados, a exemplo dos propostos por Ricker (1990) e Bitmead (1990), que permitem a generalização para casos mais complexos, trazendo porém em contrapartida, uma maior complexidade numérica.

Por outro lado, Clarke (1987) quando desenvolveu o Controle Preditivo Generalizado - GPC, preferiu utilizar um modelo paramétrico de entrada-saída, incluindo uma modelagem estruturada do ruído inserido na medição, o que o torna mais robusto a erros de modelagem, além do conceito do horizonte estendido de controle.

A necessidade de modelagem, intrínseca à predição, traz em si uma perda de robustez, quando se faz uma escolha indevida do modelo do processo. Todos os controladores citados têm suas deficiências, sendo o GPC, o primeiro que se propõe a controlar processos de fase não mínima, plantas instáveis em malha aberta, plantas com tempo morto desconhecido ou variável, e plantas com ordem desconhecida.

Todos os algoritmos citados anteriormente, podem ser dotados de mecanismo de adaptação e de tratamento de restrições, o que os tornaria mais eficientes, desde que sejam acrescentados aos algoritmos básicos as rotinas de adaptação e de otimização mais adequadas.

2.4 Relação com outros métodos de controle

Como já foi mencionado anteriormente, os controladores preditivos são baseados na minimização de um função objetivo, minimização esta que gera uma lei de controle, havendo necessidade de um modelo para a predição. Com isto, pode-se assim, utilizar o seguinte diagrama de blocos, como síntese representativo do método:



Figura 2.4 – Comparação entre Controle Preditivo e Convencional

No diagrama **(a)**, P é a planta, \tilde{P} é o modelo da planta e Q o controlador obtido por minimização, conforme citado anteriormente. Considere também o diagrama **(b)**, que representa a estrutura clássica equivalente de controle por realimentação de saída. Com o objetivo de se estabelecer um paralelo entre os dois métodos de controle, ainda que, para o caso sem restrições, considere que o modelo \tilde{P} é uma descrição perfeita da planta. Da estrutura do controle preditivo, Figura 2.4(a), vê-se que a relação entrada-saída é dada por :

$$y = P \left[I + Q \left(P - \tilde{P} \right) \right]^{-1} Q (r - d) + d \quad (2.3)$$

$$u = \left[I + Q \left(P - \tilde{P} \right) \right]^{-1} Q (r - d) \quad (2.4)$$

E do diagrama para o controle clássico, a relação é dada por:

$$y = P (I + CP)^{-1} C (r - d) + d \quad (2.5)$$

$$u = (I + CP)^{-1} C (r - d) \quad (2.6)$$

Comparando-se as equações 2.3 e 2.5 e as equações 2.4 e 2.6 verifica-se que as estruturas de controle são **“equivalentes”** pois qualquer par de sinais externos $\{r, d\}$ dará os mesmos sinais $\{u, y\}$, quando $P = \tilde{P}$, se e somente se:

$$Q = (I + CP)^{-1} C \quad \text{ou} \quad C = Q (I - PQ)^{-1} \quad (2.7)$$

E a relação entre a saída e o par $\{r, d\}$ é dada por:

$$y = PQ(r - d) + d \quad (2.8)$$

E ainda

$$e = (r - y) = (I - PQ)(r - d) = (I - \tilde{P}Q)(r - d) \quad (2.9)$$

Das relações apresentadas, pode-se mostrar que o “Controle Preditivo” sem restrições não é inerentemente melhor que o controle clássico, Garcia et al. (1989). Verifica-se, entretanto, que para cada controlador preditivo existe um controlador clássico equivalente com desempenho idêntico. Com isto, pode-se afirmar que Q pode ser considerada como uma parametrização alternativa dos controladores por realimentação clássicos, embora este tenha propriedades muito atrativas. Como por exemplo o conjunto de todos os controladores C clássicos que garantirão estabilidade em malha fechada é essencialmente impossível de se caracterizar, enquanto que, ao contrário, o conjunto de todos os controladores Q com a mesma propriedade é simplesmente o conjunto de todos os Q 's estáveis, Garcia et al. (1989).

A principal limitação do “Controle Preditivo”, com a estrutura mostrada na Figura 2.4(a), aparece claramente na equação de erro. Nesta, pode-se observar que tanto a perturbação quanto a referência afetam o sinal de erro e , através da mesma matriz de transferência $(I - PQ)$. Com isto, se r e d têm diferentes características dinâmicas, torna-se evidentemente impossível selecionar um controlador Q , que garanta simultaneamente um bom rastreamento do sinal de referência e rejeição à perturbação. Como solução a este problema, apresenta-se normalmente a estrutura de controle mostrada a seguir, conhecida como “*estrutura com dois graus de liberdade*”.

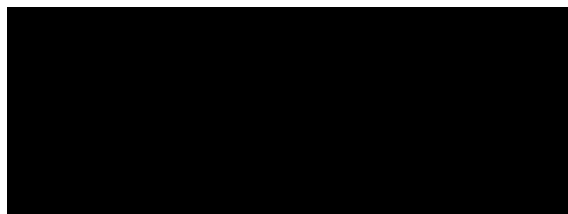


Figura 2.5 – Estrutura de Controle com dois graus de liberdade

Pode-se mostrar que, neste caso, quando $P = \tilde{P}$, tem-se que:

$$e = (I - \tilde{P}Q_2)r - (I - \tilde{P}Q_1)d \quad (2.10)$$

com o erro, conforme já definido, expresso por $e = (r - y)$.

E com isto, vê-se que, quando da ausência de erro de modelagem, isto é $P = \tilde{P}$, é possível, através da seleção de Q_1 e Q_2 , garantir de forma independente, bom desempenho na resposta a perturbação e no rastreamento da referência.

No caso de controle clássico a estrutura equivalente é a seguinte:

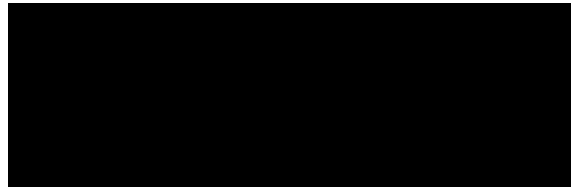


Figura 2.6 – Estrutura de Controle Clássico

Neste caso $e = C_1r - C_2y$, cuja relação com a estrutura anterior é:

$$C_1 = Q_1(I - \tilde{P}Q_1)^{-1}Q_1^{-1}Q_2 \quad (2.11)$$

$$C_2 = Q_1(I - \tilde{P}Q_1)^{-1} \quad (2.12)$$

Uma outra relação importante e esclarecedora é a relação entre o “controlador preditivo” e o “controlador linear quadrático” (LQC). Os controladores LQ são baseados numa lei de controle que geralmente utilizam realimentação de estado e/ou realimentação de saída. Em qualquer caso, a lei de controle é obtida através da minimização de uma função objetivo quadrática, com a estrutura do controlador, isto é, a lei de controle, determinada previamente. A minimização dá-se assim com relação a um vetor de parâmetros da lei de controle, por exemplo g referente a lei $u(k) = -g'x(k)$, em que $x(k)$ é o vetor de estado e g é o vetor de parâmetros do controlador.

Assim, no caso de "controle preditivo" sem restrições e "controle linear quadrático" sem restrições, chega-se às seguintes comparações:

- 1) As leis de controle resultantes dos dois procedimentos são essencialmente iguais. A única diferença consiste no modelo que cada uma utiliza;
- 2) Contrariamente ao LQC, o controle preditivo emprega a estratégia de horizonte móvel. No entanto, se o processo é linear e invariante no tempo, não existem restrições e a função objetivo é quadrática, o controlador preditivo produz uma lei de controle invariante no tempo, a despeito do fato que a estratégia de horizonte móvel ser utilizada.

Uma evidente vantagem do LQC é que sob algumas condições gerais, garante-se a estabilidade do sistema em malha fechada

2.5 Modelos monovariáveis de entrada e saída

Existem diversas famílias de modelos matemáticos que podem ser utilizadas para representar matematicamente o comportamento dinâmico de um processo, dentre eles encontram-se modelos de entrada-saída paramétricos e não-paramétricos, mono e multivariáveis, os modelos via espaço de estados, etc. (Goodwin e Sin, 1984). No caso em estudo, serão enfocados, neste capítulo, os modelos monovariáveis de entrada e saída. No capítulo IV, será apresentado o caso multivariável, que é uma extensão dos modelos monovariáveis a seguir apresentados.

2.5.1 Modelos paramétricos:

Os modelos lineares paramétricos, de uma forma geral, podem ser representados através da expressão:

$$y(k) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})A(q^{-1})}e(k) \quad (2.13)$$

[---parte determinística----] [---modelo do ruído----]

Em que: - q^{-1} representa o operador atraso unitário;

- $y(k)$ é a saída do processo;
- d é o retardo, em múltiplos do período de amostragem ($d \geq 0$);
- $u(k)$ é a saída do controlador;
- $e(k)$ é um ruído “branco” e gaussiano, com média zero e variância σ^2 .

Os polinômios $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$, $C(q^{-1})$ e $D(q^{-1})$, são dados por:

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{na}q^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{nb}q^{-nb} \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \dots + c_{nc}q^{-nc} \\ D(q^{-1}) &= 1 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2} + \dots + d_{nd}q^{-nd} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Em que: na , nb , nc e nd são os graus dos polinômios $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$, $C(q^{-1})$ e $D(q^{-1})$, respectivamente.

Em termos de diagrama de blocos, tem-se que:

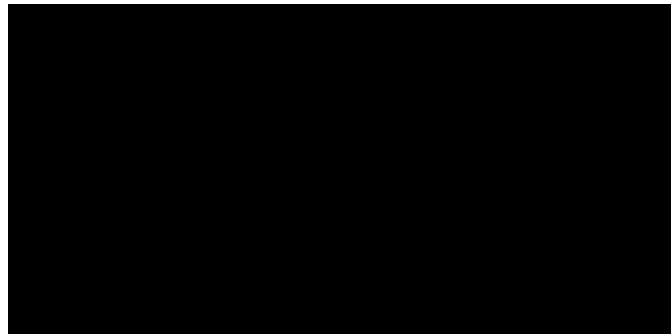


Figura 2.7 – Diagrama de Blocos do Modelo do Processo

2.5.1.1 Modelo auto-regressivo com sinal exógeno (ARX).

Neste caso, tem-se que: $na = n; nb \leq n, nc = nd = 0$. Com isso, o modelo resultante é:

$$y(k) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-1) + \frac{1}{A(q^{-1})}e(k) \quad (2.15)$$

ou ainda,

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + e(k) \quad (2.16)$$

2.5.1.2 Modelo Auto regressivo Integral com sinal exógeno (ARIX)

Neste caso tem-se: $na = n, nb < n, nc = 0$ e $nd = 1$. Isto resulta no seguinte modelo:

$$y(k) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-1) + \frac{1}{(1+d_1q^{-1})A(q^{-1})}e(k) \quad (2.17)$$

Fazendo $d_1 = -1$, o polinômio $D(q^{-1})$ corresponde à introdução da ação integral no controlador, o qual elimina o erro de regime ao degrau. Neste caso, $D(q^{-1})$ é normalmente representado por Δ . Com isso tem-se que:

$$y(k) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-1) + \frac{1}{\Delta A(q^{-1})}e(k) \quad (2.18)$$

ou ainda,

$$A(q^{-1})\Delta y(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k-1) + e(k) \quad (2.19)$$

2.5.1.3 Modelo Auto-regressivo, Média Móvel, com sinal Exógeno (ARMAX ou CARMA)

Neste caso, tem-se que: $na = n ; nb \leq n, nc > 0$ e $nd = 0$, que resulta no seguinte modelo:

$$y(k) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k) \quad (2.20)$$

ou ainda,

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (2.21)$$

2.5.1.4 Modelo Auto-regressivo, Integral, Média Móvel com sinal Exógeno (ARIMAX ou CARIMA).

Neste caso, tem-se que: $na = n ; nb \leq n, nc > 0$ e $nd = 1$, que corresponde a $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1} = \Delta$. Com isso, tem-se que:

$$y(k) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{\Delta A(q^{-1})} e(k) \quad (2.22)$$

ou ainda,

$$A(q^{-1})\Delta y(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (2.23)$$

2.5.2 Modelos não-paramétricos.

Os modelos não-paramétricos utilizados em controle preditivo são: o modelo FIR (*Finite Impulse Response*) e o modelo FSR (*Finite Step Response*), nos quais o modelo do "ruído" não é considerado. Estes modelos são também conhecidos como modelos de convolução ou modelos

convolucionais, uma vez que, nestes a relação entre entrada-saída é estabelecida através do “**somatório de convolução**”.

2.5.2.1 Modelo FIR

Sabe-se que para um sistema linear, causal, invariante no tempo, discreto, a relação entre entrada e saída no domínio do tempo é dada por, (Camacho e Bordons, 1998) :

$$y(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta(i)u(k-i) \quad (2.24)$$

Em que: $\eta(i)$ é a resposta do sistema ao pulso unitário.

A equação (2.24) é conhecida como "Somatório de Convolução". No caso do modelo FIR, tem-se que:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_\eta} \eta(i)u(k-i) \quad (2.25)$$

Em que: n_η é o número de elementos não nulos da resposta ao pulso.

2.5.2.2 Modelo FSR

No modelo FSR a saída do processo é descrita por:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_h} h_i \Delta u(k-i) \quad (2.26)$$

Em que n_h é o número de elementos h_i da resposta do sistema ao degrau que são considerados. Todos os outros elementos são supostamente considerados constantes.

Em um modelo FIR os coeficientes da divisão polinomial $[B(q^{-1})/A(q^{-1})]$ são os elementos da resposta ao impulso. No modelo FSR, os coeficientes do

polinômio $B(q^{-1})$ e de $A(q^{-1})$ estão relacionados com os h_i 's da resposta ao degrau através de:

$$h_j = - \sum_{i=1}^j a_i h_{j-i} + \sum_{i=0}^{j-1} b_i, \quad (2.27)$$

com $h_j = 0$ para $\forall j < 0$.

Isto mostra que, no caso de planta instáveis em malha aberta, em que a resposta experimental, dada uma perturbação em degrau na variável manipulada ou sinal de controle, não é recomendada, pode-se obter os coeficientes h_i 's, desde que, de alguma forma, estime-se os coeficientes dos polinômios $B(q^{-1})$ e de $A(q^{-1})$.

Em uma comparação com o modelo unificado, apresentado anteriormente, tem-se, para o modelo FIR, que $na = 0; nb = n_\eta$, com os polinômios $C(q^{-1})$ e $D(q^{-1})$ inexistentes, e para o modelo FSR $na = 0; nb = n_h$, sendo também que $C(q^{-1})$ e $D(q^{-1})$ não existem.

2.6 Preditores: caso monovariável

2.6.1 Introdução:

Em controle preditivo, para o cálculo das ações futuras de controle, é necessário que se faça uma predição da saída, isto é, da variável controlada. Para tanto, utiliza-se um modelo pré-definido do processo a ser controlado. Este modelo permite prever a saída em $t=k+i$, usando as informações passadas, conhecidas, das ações de controle e/ou saídas do processo, e as saídas futuras do controlador a serem calculadas. Os algoritmos que efetuam esse cálculo são denominados preditores i -passos à frente.

A predição baseada num modelo dinâmico refere-se à previsão da saída com um determinado instante de tempo maior que o instante de tempo atual, a partir de informação disponíveis até o instante k .

2.6.2 Preditores i -passos à frente para o modelo ARX – Diophantine

Considere o modelo ARX, descrito anteriormente, isto é:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) + e(k) \quad (2.27)$$

A saída $y(k)$ i -passos à frente obtida a partir desta equação é dada por:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k+i-1) + \frac{1}{A(q^{-1})}e(k+i) \quad (2.28)$$

Observa-se nesta equação que $y(k+i)$ depende de valores passados e/ou futuros das variáveis envolvidas, isto é: \mathbf{y} , \mathbf{u} e \mathbf{e} . Por outro lado, sabe-se que a melhor estimativa de $y(k+i)$, isto é $\hat{y}(k+i)$, satisfaz a condição a seguir:

$$\hat{y}(k+i) = \min_r \varepsilon \{ [y(k+i) - r]^2 \} \quad (2.29)$$

cuja solução é

$$\hat{y}(k+i) = \varepsilon \{ y(k+i) \} \quad (2.30)$$

Este estimador é conhecido como estimador de Bayes ou “*estimador de risco quadrático mínimo*”. Assim, quando $e(k)$ é um ruído “branco”, gaussiano, de média zero, a melhor estimativa de $y(k+i)$, é o seu valor determinístico. Então, com o objetivo de separar a dependência de $y(k+i)$, das informações passadas e futuras, introduz-se a seguinte identidade polinomial, conhecida como equação diofantina:

$$\frac{1}{A(q^{-1})} = F_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{G_i(q^{-1})}{A(q^{-1})}, \quad (2.31)$$

com

$$\begin{aligned} F_i(q^{-1}) &= 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{i-1} q^{-(i-1)} \\ G_i(q^{-1}) &= g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{n-1} q^{-(n-1)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Deve-se observar que:

- 1) o grau de $F_i(q^{-1})$ é $i-1$ e o de $G_i(q^{-1})$ é $n-1$;
- 2) a solução desta equação é apresentada no Apêndice A, e pode ser obtida usando uma divisão polinomial ou através de relações recursivas entre soluções sucessivas

Assim, utilizando a equação 2.31, tem-se que:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k+i-1) + \left[F_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{G_i(q^{-1})}{A(q^{-1})} \right] e(k+i) \quad (2.33)$$

Que pode ser reescrita na forma:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k+i-1) + F_i(q^{-1}) e(k+i) + \frac{G_i(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k) \quad (2.34)$$

Da equação (2.27), tem-se que:

$$e(k) = A(q^{-1})y(k) - B(q^{-1})u(k-1) \quad (2.35)$$

Então substituindo em (2.34), resulta em:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k+i-1) + F_i(q^{-1})e(k+i) + \frac{G_i(q^{-1})}{A(q^{-1})}(A(q^{-1})y(k) - B(q^{-1})u(k-1)) \quad (2.36)$$

Que pode ser rearrumada na forma:

$$y(k+i) = B(q^{-1}) \left[\frac{1}{A(q^{-1})} - q^{-i} \frac{G_i(q^{-1})}{A(q^{-1})} \right] u(k+i-1) + F_i(q^{-1})e(k+i) + G_i(q^{-1})y(k) \quad (2.37)$$

Tendo em vista a que:

$$\frac{1}{A(q^{-1})} - q^{-i} \frac{G_i(q^{-1})}{A(q^{-1})} = F_i(q^{-1}) \quad (2.38)$$

então,

$$y(k+i) = B(q^{-1})F_i(q^{-1})u(k+i-1) + F_i(q^{-1})e(k+i) + G_i(q^{-1})y(k) \quad (2.39)$$

Por outro lado como:

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{nb} q^{-nb} \quad \text{e} \quad F_i(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{i-1} q^{-(i-1)}$$

então,

$$B(q^{-1})F_i(q^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{nb+i-1} q^{-(nb+i-1)}, \quad (2.40)$$

ou seja, $B(q^{-1})F_i(q^{-1})$ é um polinômio de grau $(nb+i-1)$, o qual pode ser rescrito na forma:

$$B(q^{-1})F_i(q^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{i-1} q^{-(i-1)} + \alpha_i q^{-i} + \alpha_{i+1} q^{-i-1} + \dots + \alpha_{nb+i-1} q^{-nb+i}$$

Ou ainda:

$$B(q^{-1})F_i(q^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{i-1} q^{-(i-1)} + q^{-i}(\alpha_i + \alpha_{i+1} q^{-1} + \dots + \alpha_{nb+i-1} q^{-nb+i})$$

Definindo agora

$$\alpha(q^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{i-1} q^{-(i-1)} \quad (2.41)$$

$$\beta(q^{-1}) = \alpha_i + \alpha_{i+1} q^{-1} + \dots + \alpha_{nb+i-1} q^{-(nb-1)} \quad (2.42)$$

tem-se que:

$$B(q^{-1})F_i(q^{-1}) = \alpha(q^{-1}) + q^{-i} \beta(q^{-1}) \quad (2.43)$$

Substituindo esta equação na equação 2.39 do preditor, resulta em:

$$y(k+i) = [\alpha(q^{-1}) + q^{-i} \beta(q^{-1})]u(k+i-1) + F_i(q^{-1})e(k+i) + G_i(q^{-1})y(k) \quad (2.44)$$

Que pode ser rescrita na forma:

$$y(k+i) = \beta(q^{-1})u(k-1) + G_i(q^{-1})y(k) + \alpha(q^{-1})u(k+i-1) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.45)$$

Tendo em vista os graus dos polinômios $\beta(q^{-1})$, $G_i(q^{-1})$, $\alpha(q^{-1})$ e $F_i(q^{-1})$, tem-se então que:

$$\Rightarrow \beta(q^{-1})u(k-1) = \alpha_i u(k-1) + \alpha_{i+1} u(k-2) + \dots + \alpha_{nb+i-1} u(k-nb+1)$$

que corresponde a somente valores de $u(k)$ já disponíveis;

$$\Rightarrow G_i(q^{-1})y(k) = g_0 y(k) + g_1 y(k-1) + \dots + g_{n-1} y(k-n+1), \quad \text{que corresponde a valores de } y \text{ até o instante } k, \text{ portanto valores também disponíveis;}$$

$$\Rightarrow \alpha(q^{-1})u(k+i-1) = \alpha_0 u(k+i-1) + \alpha_1 u(k+i-2) + \dots + \alpha_{i-1} u(k)$$

que contém valores de u , do instante k até o instante $(k+i-1)$, portanto, não disponíveis. Estes valores correspondem a valores futuros de $u(k)$;

$$\Rightarrow F_i(q^{-1})e(k+i) = e(k+i) + f_1 e(k+i-1) + \dots + f_{i-1} e(k+1), \quad \text{que contém somente valores futuros de } e(k).$$

Desta análise, pode-se escrever a equação do preditor, separando futuro e passado, na forma:

$$y(k+i) = \beta(q^{-1})u(k-1) + G_i(q^{-1})y(k) + \alpha(q^{-1})u(k+i-1) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.46)$$

[.....passado.....] [.....futuro.....]

Observando-se a equação anterior, verifica-se que $e(k)$ aparece somente com valores futuros. Tendo em vista o que já foi mencionado anteriormente, o estimador de risco quadrático mínimo, isto é, o valor estimado de $y(k+i)$ é $\hat{y}(k+i) = \varepsilon\{y(k+i)\}$. Sendo assim, o preditor i -passos à frente de mínima variância é dado por:

$$\hat{y}(k+i) = \varepsilon\{\beta(q^{-1})u(k-1) + G_i(q^{-1})y(k) + \alpha(q^{-1})u(k+i-1) + F_i(q^{-1})e(k+i)\} \quad (2.47)$$

ou ainda,

$$\hat{y}(k+i) = \varepsilon\{\beta(q^{-1})u(k-1) + G_i(q^{-1})y(k) + \alpha(q^{-1})u(k+i-1) + \varepsilon\{F_i(q^{-1})e(k+i)\}\} \quad (2.48)$$

Como,

$$\varepsilon\{F_i(q^{-1})e(k+i)\} = \varepsilon\{e(k+i)\} + f_i\varepsilon\{e(k+i-1)\} + \dots + f_{i-1}\varepsilon\{e(k+1)\} \quad (2.49)$$

e ainda, tendo em vista que $e(k)$ é por hipótese um ruído “branco”, gaussiano, de média zero, isto é:

$$\varepsilon\{e(k+i)\} = 0 \quad (2.50)$$

então,

$$\hat{y}(k+i) = \beta(q^{-1})u(k-1) + G_i(q^{-1})y(k) + \alpha(q^{-1})u(k+i-1) \quad (2.51)$$

2.6.3 Preditor i -passos à frente para o modelo geral.

Considerando agora o modelo geral:

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})A(q^{-1})}e(k) \quad (2.52)$$

A saída $y(k)$ i -passos à frente é dada por:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k+i-1) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})A(q^{-1})}e(k+i) \quad (2.53)$$

Utilizando a identidade polinomial:

$$\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})A(q^{-1})} = F_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{G_i(q^{-1})}{D(q^{-1})A(q^{-1})}, \quad (2.54)$$

sendo $\text{grau}\{F_i(q^{-1})\} = i-1$ e $\text{grau}\{G_i(q^{-1})\} = \max(n_c - i, n_a + n_d - 1)$.

Substituindo na equação anterior, tem-se que:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k+i-1) + \left[F_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{G_i(q^{-1})}{D(q^{-1})A(q^{-1})} \right] e(k+i) \quad (2.55)$$

Ou ainda,

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k+i-1) + \frac{G_i(q^{-1})}{D(q^{-1})A(q^{-1})}e(k) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.56)$$

Da equação (2.52) tem-se que:

$$A(q^{-1})D(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})D(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (2.57)$$

tal que:

$$e(k) = \frac{A(q^{-1})D(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) - \frac{B(q^{-1})D(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k-1) \quad (2.58)$$

Substituindo na equação (2.56), resulta em:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k+i-1) + \frac{G_i(q^{-1})}{D(q^{-1})A(q^{-1})} \left[\frac{A(q^{-1})D(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) - \frac{B(q^{-1})D(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k-1) \right] + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.59)$$

Ou ainda,

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k+i-1) - \frac{G_i(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})C(q^{-1})} u(k-1) + \frac{G_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.60)$$

Esta equação pode ser reescrita na forma:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})D(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})A(q^{-1})} - q^{-i} \frac{G_i(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})} \right] u(k+i-1) + \frac{G_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.61)$$

Tendo em vista a equação (2.54), tem-se que:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})D(q^{-1})F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k+i-1) + \frac{G_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.62)$$

Utilizando-se agora a seguinte identidade polinomial:

$$\frac{B(q^{-1})D(q^{-1})F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} = H_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{I_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} \quad (2.63)$$

em que $H_i(q^{-1})$ e $I_i(q^{-1})$ são polinômios de graus $i-1$ e $\max(n_b + n_d, n_c) - 1$, respectivamente, e substituindo-se em (2.62), tem-se que:

$$y(k+i) = \frac{I_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k-1) + \frac{G_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + H_i(q^{-1})u(k+i-1) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.64)$$

Portanto, finalmente tem-se a seguinte expressão para o preditor:

$$\hat{y}(k+i) = \frac{I_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k-1) + \frac{G_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + H_i(q^{-1})u(k+i-1) \quad (2.65)$$

2.6.4 Preditores i -passos à frente de sistemas com retardo

Em um sistema com um retardo de d instantes de amostragem, uma entrada $u(k)$, gerado em $t = k$ tem efeito na saída y somente a partir do

instante $t = k + d + 1$. Então, na estratégia de controle preditivo, a seqüência de controle $u(k), \dots, u(k + NY - d - 1)$ deve ser calculada de forma que a saída predita do processo $\hat{y}(k + d + 1) \dots \hat{y}(k + NY)$ alcance a trajetória desejada definida por $r(k + d + 1), \dots, r(k + NY)$. Desta forma, utilizando preditores i-passos à frente, na presença de retardo, será efetuada a predição $\hat{y}(k + i)$ como função de $u(k + i - d - 1)$, com $i = d + 1, \dots, NY$, sendo NY o “horizonte de predição”. Isto significa que na existência de retardo o horizonte de predição deve satisfazer: $NY \geq d + 1$. Considere, então, o sistema descrito por:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k - 1) + e(k) \quad (2.66)$$

Então:

$$y(k + i) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k + i - 1) + \frac{1}{A(q^{-1})} e(k + i) \quad (2.67)$$

Ou ainda,

$$y(k + i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k + i - d - 1) + \frac{1}{A(q^{-1})} e(k + i) \quad (2.68)$$

com $i \geq d + 1$

Utilizando a identidade polinomial

$$\frac{1}{A(q^{-1})} = F_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{G_i(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (2.69)$$

em que $F_i(q^{-1})$ e $G_i(q^{-1})$ são polinômios de graus $(i-1)$ e $(n-1)$, respectivamente,

tem-se que:

$$y(k + i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k + i - d - 1) + \left[F_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{G_i(q^{-1})}{A(q^{-1})} \right] e(k + i) \quad (2.70)$$

ou ainda,

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k+i-d-1) + \frac{G_i(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.71)$$

Como

$$e(k) = A(q^{-1})y(k) - q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) \quad (2.72)$$

então:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k+i-d-1) - \frac{B(q^{-1})G_i(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-d-1) + G_i(q^{-1})y(k) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.73)$$

ou ainda,

$$y(k+i) = B(q^{-1}) \left[\frac{1}{A(q^{-1})} - q^{-i} \frac{G_i(q^{-1})}{A(q^{-1})} \right] u(k+i-d-1) + G_i(q^{-1})y(k) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.74)$$

Tendo em vista a identidade polinomial (2.69), tem-se que:

$$y(k+i) = B(q^{-1})F_i(q^{-1})u(k+i-d-1) + G_i(q^{-1})y(k) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.75)$$

ou ainda,

$$y(k+i) = q^{i-d}B(q^{-1})F_i(q^{-1})u(k-1) + G_i(q^{-1})y(k) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.76)$$

Lembrando que $B(q^{-1})F_i(q^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1q^{-1} + \dots + \alpha_{nb+i-1}q^{-(nb+i-1)}$, então $B(q^{-1})F_i(q^{-1})u(k-1)$ refere-se somente a valores passados de $u(k)$. Portanto, quando $i \geq d+1$, $y(k+i)$ dependerá também de valores futuros de u . Fazendo:

$$B(q^{-1})F_i(q^{-1}) = \alpha(q^{-1}) + q^{-(i-d)}\beta(q^{-1}) \quad (2.77)$$

tem-se que:

$$y(k+i) = \left[\alpha(q^{-1}) + q^{-(i-d)}\beta(q^{-1}) \right] u(k+i-d-1) + G_i(q^{-1})y(k) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.78)$$

ou ainda,

$$y(k+i) = \beta(q^{-1})u(k-1) + G_i(q^{-1})y(k) + \alpha(q^{-1})u(k+i-d-1) + F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.79)$$

E o preditor i-passos à frente, de mínima variância é:

$$\hat{y}(k+i) = \beta(q^{-1})u(k-1) + G_i(q^{-1})y(k) + \alpha(q^{-1})u(k+i-d-1) \quad (2.80)$$

Neste caso, a análise do erro de predição é dado por:

$$\varepsilon(k+i) = y(k+i) - \hat{y}(k+i) = F_i(q^{-1})e(k+i) \quad (2.81)$$

Ou ainda,

$$\varepsilon(k+i) = e(k+i) + f_1 e(k+i-1) + \dots + f_{i-1} e(k+1) \quad (2.82)$$

Se $e(k)$ é um ruído “branco”, com

$$E\{e(k+i)\} = 0, \quad (2.83)$$

e variância unitária, então a variância do erro de predição é dada por:

$$\text{Var}\{e(k+i)^2\} = 1 + f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{i-1}^2 \quad (2.84)$$

Esta equação mostra que a variância do erro de predição aumenta à medida que o horizonte de predição cresce.

2.7 Funções Objetivo e seu reflexo na propriedade do controlador

Em controle preditivo, a minimização de uma “Função Objetivo” produz uma lei de controle preditiva, a qual é caracterizada pela escolha dessa função.

2.7.1 Função Objetivo de Passo Único:

2.7.1-a – Função objetivo baseada no erro de rastreamento

Neste caso, trata-se de uma função objetivo simples que considera somente o **erro de rastreamento**, isto é:

$$J = [r(k+1) - \hat{y}(k+1)]^2 \quad (2.85)$$

Nesta função, somente uma previsão é usada, que é $\hat{y}(k+1)$. Por isto, esta é denominada de “**Função Objetivo de Passo Único**”. Para mostrar que tipo de controlador é obtido quando a função objetivo, acima definida, é utilizada, considere o modelo ARX, cujo preditor 1-passo à frente é dado por:

$$\hat{y}(k+1) = \beta(q^{-1})u(k-1) + \alpha(q^{-1})u(k) + G_1(q^{-1})y(k) \quad (2.86)$$

Ou ainda,

$$\hat{y}(k+1) = a(q^{-1})u(k) + G_1(q^{-1})y(k) \quad (2.87)$$

com:

$$a(q^{-1}) = \alpha(q^{-1}) + q^{-1}\beta(q^{-1}) \quad (2.88)$$

Das condições de otimalidade, ou seja derivando (2.85) com respeito a u , após substituição de (2.87) e igualando a zero, conclui-se que a função objetivo é minimizada quando $\hat{y}(k+1) = r(k+1)$. Isto produz a seguinte lei de controle:

$$u(k) = \frac{r(k+1) - G_1(q^{-1})y(k)}{a(q^{-1})} \quad (2.89)$$

Deve-se observar que é necessário o conhecimento antecipado da trajetória de referência a ser seguida. Desta lei de controle pode-se chegar ao seguinte sistema em malha fechada:



Figura 2.8 – Diagrama de Blocos do Sistema em Malha fechada

A análise da malha fechada mostra que:

$$y(k) = \frac{\frac{q^{-1}B(q^{-1})}{a(q^{-1})A(q^{-1})}}{1 + \frac{q^{-1}B(q^{-1})G_1(q^{-1})}{a(q^{-1})A(q^{-1})}} r(k+1) + \frac{\frac{1}{A(q^{-1})}}{1 + \frac{q^{-1}B(q^{-1})G_1(q^{-1})}{a(q^{-1})A(q^{-1})}} e(k) \quad (2.90)$$

Ou ainda,

$$y(k) = \frac{q^{-1}B(q^{-1})}{a(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-1}B(q^{-1})G_1(q^{-1})} r(k+1) + \frac{a(q^{-1})}{a(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-1}B(q^{-1})G_1(q^{-1})} e(k) \quad (2.91)$$

Da equação do modelo, tem-se que:

$$y(k+1) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{1}{A(q^{-1})} e(k+1) \quad (2.92)$$

Tendo em vista a identidade polinomial 2.69, tem-se que:

$$y(k+1) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + F_1(q^{-1})e(k+1) + \frac{G_1(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k) \quad (2.93)$$

Tendo em vista agora que $e(k) = A(q^{-1})y(k) - B(q^{-1})u(k-1)$, então:

$$y(k+1) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} [1 - q^{-1}G_1(q^{-1})] u(k) + G_1(q^{-1})y(k) + F_1(q^{-1})e(k+1) \quad (2.94)$$

Com isso tem-se que:

$$\hat{y}(k+1) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} [1 - q^{-1}G_1(q^{-1})] u(k) + G_1(q^{-1})y(k) \quad (2.95)$$

e ainda:

$$a(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} [1 - q^{-1}G_1(q^{-1})] \quad (2.96)$$

Com esse resultado, a equação característica de malha fechada resulta em:

$$\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} [1 - q^{-1}G_1(q^{-1})] A(q^{-1}) + q^{-1}B(q^{-1})G_1(q^{-1}) = B(q^{-1}) \quad (2.97)$$

Substituindo esse resultado na equação da saída do sistema em malha fechada, tem-se que:

$$y(k) = q^{-1}r(k+1) + \frac{B(q^{-1}) [1 - q^{-1}G_1(q^{-1})]}{A(q^{-1}) B(q^{-1})} e(k) \quad (2.98)$$

Ou ainda,

$$y(k) = q^{-1}r(k+1) + \left[\frac{1}{A(q^{-1})} - \frac{q^{-1}G_1(q^{-1})}{A(q^{-1})} \right] e(k) \quad (2.99)$$

Que também pode ser escrita na forma,

$$y(k) = q^{-1}r(k+1) + F_1(q^{-1})e(k) \quad (2.100)$$

Deste resultado pode-se concluir que:

1. a lei de controle obtida da minimização da função objetivo de passo único, impõe a colocação dos pólos em malha fechada exatamente nos zeros da função de transferência do processo, isto é: raízes de $B(q^{-1})$. Com isto, pode-se concluir que para processos de fase não mínima ou com zeros próximos ao círculo unitário, esta lei de controle é inviável;

2. na ausência de ruído, a equação (2.100) mostra que a saída do processo rastreia a referência desejada em um tempo mínimo, que neste caso é o período de amostragem. Neste sentido, o controlador é idêntico ao controlador dead-beat e portanto, a saída deste, isto é $u(k)$, geralmente apresenta valores elevados.

2.7.1-b Função objetivo baseada no erro de rastreamento e na ponderação do sinal de controle.

Neste caso, a função objetivo é da forma:

$$J = [r(k+1) - \hat{y}(k+1)]^2 + \rho u(k)^2 \quad (2.101)$$

E assim, uma condição necessária de otimalidade que pode ser usada na obtenção da lei de controle é:

$$\frac{\partial J}{\partial u(k)} = \left\{ -2[r(k+1) - \hat{y}(k+1)] \frac{\partial \hat{y}(k+1)}{\partial u(k)} + 2\rho u(k) \right\} = 0 \quad (2.102)$$

o que implica em:

$$u(k) = \frac{1}{\rho} [r(k+1) - \hat{y}(k+1)] \frac{\partial \hat{y}(k+1)}{\partial u(k)} \quad (2.103)$$

Como:

$$\hat{y}(k+1) = a(q^{-1})u(k) + G_1(q^{-1})y(k) \quad (2.104)$$

então,

$$\frac{\partial \hat{y}(k+1)}{\partial u(k)} = b_0 \quad (2.105)$$

uma vez que $\frac{\partial y(k)}{\partial u(k)} = 0$ e que $B(q^{-1})F_1(q^{-1}) = a(q^{-1})$, conforme as equações (2.41) e (2.94).

Isto resulta em:

$$u(k) = \frac{1}{\rho} [r(k+1) - \hat{y}(k+1)] b_0 \quad (2.106)$$

Ou ainda,

$$u(k) = \frac{1}{\rho} [r(k+1) - a(q^{-1})u(k) - G_1(q^{-1})y(k)] b_0 \quad (2.107)$$

Rearrmando esta equação, tem-se que :

$$\left[1 + \frac{1}{\rho} b_0 a(q^{-1}) \right] u(k) = \frac{1}{\rho} [r(k+1) - G_1(q^{-1})y(k)] b_0 \quad (2.108)$$

Finalmente obtém-se a seguinte expressão para a lei de controle:

$$u(k) = \frac{b_0}{\rho + b_0 a(q^{-1})} r(k+1) - \frac{b_0 G_1(q^{-1})}{\rho + b_0 a(q^{-1})} y(k) \quad (2.109)$$

Chega-se assim ao seguinte diagrama de blocos:

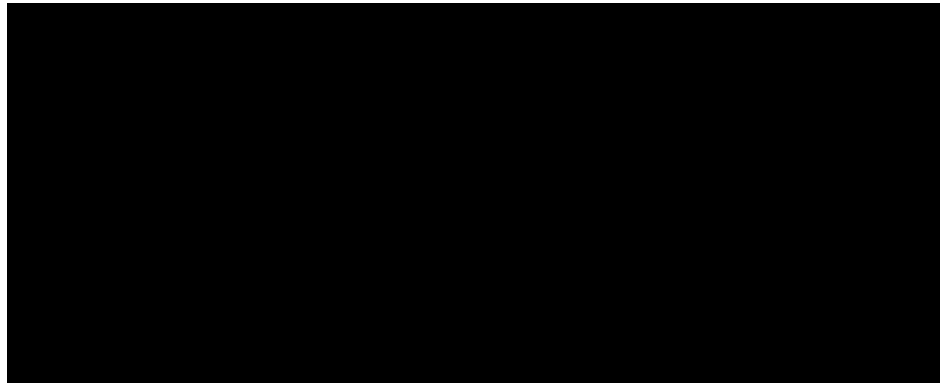


Figura 2.9 – Diagrama de Blocos do Sistema em Malha fechada

Do diagrama de blocos e substituindo a expressão de $a(q^{-1})$ obtém-se:

$$y(k) = \frac{q^{-1}}{1 + \frac{\rho A(q^{-1})}{b_0 B(q^{-1})}} r(k+1) + \frac{1 + \frac{\rho}{b_0 B(q^{-1})}}{1 + \frac{\rho A(q^{-1})}{b_0 B(q^{-1})}} e(k) \quad (2.110)$$

ou ainda,

$$y(k) = \frac{boB(q^{-1})q^{-1}}{boB(q^{-1}) + \rho A(q^{-1})} r(k+1) + \frac{boB(q^{-1}) + \rho}{boB(q^{-1}) + \rho A(q^{-1})} e(k) \quad (2.111)$$

Da equação anterior pode-se concluir que:

1. os pólos de malha fechada dependem da ponderação ρ sobre a ação de controle. Quando $\rho > 0$ e pequeno, tem-se que os pólos de malha fechada estarão próximos aos zeros do processo e assim para sistemas de fase não mínima a lei de controle é inviável;
2. quando $\rho > 0$, a variância da saída do processo é maior do que a variância do ruído;
3. erro de regime permanente, quando a referência $(r(k+1))$ ou “set-point” (Sp) é constante, é dado por:

$$e.p. = \frac{\rho}{\rho + boKp} r(k+1) \quad (2.112)$$

com $Kp = \frac{B(1)}{A(1)}$.

Portanto o erro de posição $e.p.$ é nulo quando:

- 3.1 $\rho=0$ e Kp finito, o que significa que a planta não tem ação integral, a ação de controle não é ponderada e pode assim assumir valores extremamente elevados;
- 3.2 ██████████ o que corresponde a existência de uma ação integral no processo.

Portanto, para $\rho \neq 0$ e com o objetivo de se garantir $e.p.$ nulo, a seguinte função é considerada:

$$J = [r(k+1) - \hat{y}(k+1)]^2 + \rho \Delta u(k)^2 \quad (2.113)$$

Com esta função objetivo e para a referência constante, em regime permanente, tem-se que $\Delta u(k) = 0$ e $e.p. = 0$ independente de ρ .

Uma desvantagem nesta função objetivo, quando se pretende obter um comportamento desejado, é a dificuldade de uma escolha a priori, adequada, do valor da ponderação ρ . A solução deste problema, é a adoção da seguinte função objetivo:

$$J = [Q(q^{-1})r(k+1) - P(q^{-1})\hat{y}(k+1)]^2 + [S(q^{-1})u(k)]^2 \quad (2.114)$$

Em que: $P(q^{-1})$, $Q(q^{-1})$ e $S(q^{-1})$ são polinômios, sendo $P(q^{-1})$ um polinômio mônico.

Embora isto resulte em mais parâmetros a serem ajustados, os graus de liberdade adicionados permitem, sob determinadas condições, que se obtenha um comportamento em malha fechada desejado.

2.7.2 Funções Critérios Multi-passo.

Se o horizonte de predição é maior que um, uma função objetivo multi-passo é necessária. Um caso simples é:

$$J = \sum_{i=1}^{NY} [r(k+i) - \hat{y}(k+i)]^2 \quad (2.115)$$

A minimização desta função gera o mesmo controlador produzido quando da minimização da função de único passo. Portanto, neste caso, não há vantagem na minimização da função multi-passo simples. No entanto, se a saída de controlador é também ponderada, então o controlador resultante dependerá do horizonte de predição.

Um exemplo de uma função multi-passo com ponderação da saída do controlador é a seguinte:

$$J = \sum_{i=1}^{NY} \left\{ [r(k+i) - \hat{y}(k+i)]^2 + \rho u(k+i-1)^2 \right\} \quad (2.116)$$

Neste caso, semelhantemente a função de passo único com ponderação no sinal de controle, a lei de controle resultante não garantirá erro de posição nulo, exceto quando o processo contém um ou mais integradores. Como isto é indesejável, para se evitar este efeito, pondera-se o incremento do sinal de controle, resultando na seguinte função objetivo a ser minimizada:

$$J = \sum_{i=1}^{NY} \left\{ [r(k+i) - \hat{y}(k+i)]^2 + \rho \Delta u(k+i-1)^2 \right\} \quad (2.117)$$

Finalmente, em conjunto com a função critério anterior, restrições adicionais são freqüentemente levadas em consideração, isto é:

1. em um certo intervalo, determinado pelo horizonte de controle (NU) e pelo horizonte de predição (NY), os incrementos do sinal de controle são supostos iguais a zero, o que equivale a afirmar que a saída do controlador é constante, isto é: $\Delta u(k+i) = 0$ para $1 \leq k+i \leq NU$. A vantagem da introdução desta restrição adicional é que o horizonte de controle “ NU ” é fácil de selecionar e em muitas situações torna a ponderação ρ supérflua;
2. introduz-se também o horizonte mínimo de predição N_1 , sendo que o erro de rastreamento só é considerado a partir deste horizonte.

Com isso, a função objetivo resultante é.

$$J = \sum_{i=N_1}^{NY} [r(k+i) - \hat{y}(k+i)]^2 + \rho \sum_{i=1}^{NU} [\Delta u(k+i-1)]^2 \quad (1.118)$$

2.8 Primeiros Controladores Preditivos Monovariáveis sem Restrições

2.8.1 Controle de Variância Mínima

Considere o processo representado na figura (2.10) a seguir. O objetivo do controlador de variância mínima é produzir uma saída com a menor variância possível.

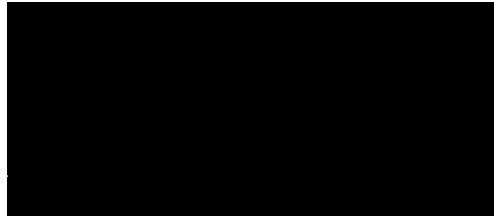


Figura 2.10 – Diagrama de Blocos do modelo do processo

Do diagrama, tem-se que:

$$y(k) = x(k) + v(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k) \quad (2.119)$$

com $e(k)$ sendo, por hipótese, um ruído branco, gaussiano, com média zero e variância unitária.

O controlador de variância mínima é um controlador pertencente à classe dos controladores preditivos e como tal exige um preditor, como já citado anteriormente. Neste controlador, o retardo d é supostamente conhecido e considerado constante, de forma que o horizonte de predição NY é, por concepção do algoritmo, igual ao referido retardo. Então, da equação do modelo, tem-se que o preditor d passos à frente é:

$$y(k+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k+d) \quad (2.120)$$

Como o objetivo é achar $u(k)$ que minimize a variância da saída d passos à frente, então a lei de controle é aquela que minimiza:

$$\underset{u(k)}{\text{Min}} \varepsilon \{y(k+d)^2\} \quad (2.121)$$

Utilizando-se então a identidade polinomial

$$\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = F_d(q^{-1}) + q^{-d} \frac{G_d(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (2.122)$$

tem-se que a saída $y(k+d)$ é descrita por:

$$y(k+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-1) + F_d(q^{-1})e(k+d) + \frac{G_d(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k) \quad (2.123)$$

Da equação do modelo, tem-se que:

$$e(k) = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) - q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k-1) \quad (2.124)$$

Substituindo-se esta equação, na equação anterior, resulta em:

$$y(k+d) = \left[\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} - q^{-d} \frac{B(q^{-1})G_d(q^{-1})}{A(q^{-1})C(q^{-1})} \right] u(k-1) + \frac{G_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + F_d(q^{-1})e(k+d) \quad (2.125)$$

ou ainda,

$$y(k+d) = \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} - q^{-d} \frac{G_d(q^{-1})}{A(q^{-1})} \right] u(k-1) + \frac{G_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + F_d(q^{-1})e(k+d) \quad (2.126)$$

Tendo em vista a identidade polinomial apresentada em (2.122), tem-se que:

$$y(k+d) = \frac{B(q^{-1})F_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k-1) + \frac{G_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + F_d(q^{-1})e(k+d) \quad (2.127)$$

Assim, a variância de $y(k+d)$ é dada por:

$$\varepsilon \{y(k+d)^2\} = \varepsilon \left\{ \left[\frac{B(q^{-1})F_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k-1) + \frac{G_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) \right]^2 \right\} +$$

$$+2\varepsilon \left\{ \left[\frac{B(q^{-1})F_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k-1) + \frac{G_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) \right] F_d(q^{-1}) e(k+d) \right\} + \varepsilon \left\{ \left[F_d(q^{-1}) e(k+d) \right]^2 \right\} \quad (2.128)$$

Como, por hipótese $e(k)$ é uma perturbação do tipo ruído branco, gaussiano, de média zero, então:

$$\varepsilon \{ y(k+d)^2 \} = \left\{ \left[\frac{G_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + \frac{B(q^{-1})F_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k-1) \right]^2 \right\} + \varepsilon \left\{ \left[F_d(q^{-1}) e(k+d) \right]^2 \right\} \quad (2.129)$$

Assim, o controle $u(k-1)$ que minimiza a variância da saída é obtido a partir de:

$$\frac{G_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + \frac{B(q^{-1})F_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k-1) = 0 \quad (2.130)$$

Portanto, a lei de controle é:

$$u(k-1) = - \frac{G_d(q^{-1})}{B(q^{-1})F_d(q^{-1})} y(k) \quad (2.131)$$

Com isso, o diagrama de blocos resultante é:

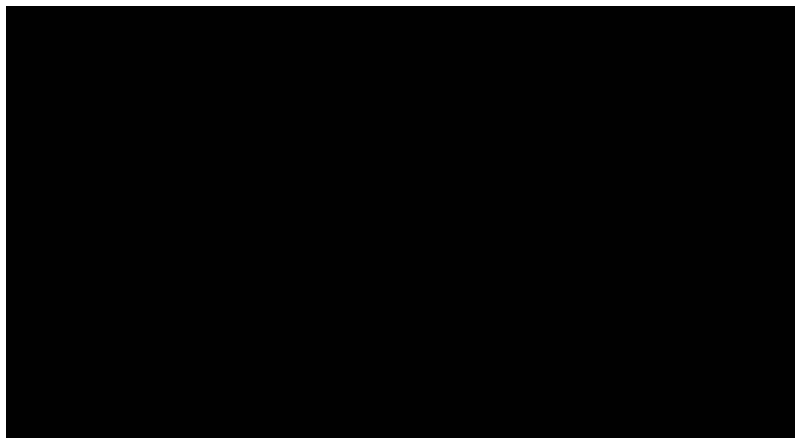


Figura 2.11 – Diagrama de Blocos do sistema em malha fechada

Deste diagrama, pode-se escrever que:

$$y(k) = \frac{\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}}{1 + q^{-d} \frac{G_d(q^{-1})}{A(q^{-1})F_d(q^{-1})}} e(k) = \frac{C(q^{-1})F_d(q^{-1})}{A(q^{-1})F_d(q^{-1}) + q^{-d}G_d(q^{-1})} e(k) \quad (2.132)$$

Da equação diofantina apresentada em (2.122), tem-se que:

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1})F_d(q^{-1}) + q^{-d}G_d(q^{-1}) \quad (2.133)$$

então,

$$\frac{y(k)}{e(k)} = \frac{C(q^{-1})F_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} = F_d(q^{-1}) \quad (2.134)$$

ou ainda,

$$y(k) = F_d(q^{-1})e(k) \quad (2.135)$$

Esta equação, mostra por que o controlador de variância mínima, é também conhecido como “**controlador média móvel**”.

Deve-se observar que o controlador apresenta como pólos os zeros do processo. Portanto, este torna-se inviável para sistemas de fase não-mínima e apresentará problemas para aqueles sistemas que tenham zeros próximo ao círculo unitário. Numa estratégia sub-ótima, apresentada em Åström (1995), o controlador apresenta no denominador os zeros de fase mínima.

A análise da expressão $y(k) = F_d(q^{-1})e(k)$ mostra que, como

$$F_d(q^{-1}) = 1 + f_1q^{-1} + f_2q^{-2} + \dots + f_{d-1}q^{-(d-1)}$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{y(k)}{e(k)} &= 1 + f_1q^{-1} + f_2q^{-2} + \dots + f_{d-1}q^{-(d-1)} \\ \frac{y(k)}{e(k)} &= \frac{q^{d-1} + f_1q^{d-2} + \dots + f_{d-1}}{q^{d-1}} \end{aligned} \quad (2.136)$$

Este resultado, evidencia que o controlador colocou $(d-1)$ pólos em malha fechada na origem do plano Z. Então, uma alternativa para se evitar cancelar os zeros de fase não-mínima ou próximos do círculo unitário, é colocarmos (d_1-1) pólos na origem, com $d_1 \geq d$.

Do diagrama de blocos apresentado na figura 2.11, tem-se que:

$$y(k) = \frac{\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}}{1 + q^{-d} \frac{B(q^{-1})G_d(q^{-1})}{A(q^{-1})B(q^{-1})F_d(q^{-1})}} e(k) \quad (2.137)$$

ou ainda,

$$y(k) = \frac{C(q^{-1})B(q^{-1})F_d(q^{-1})}{B(q^{-1})A(q^{-1})F_d(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})G_d(q^{-1})} e(k) = \frac{C(q^{-1})B(q^{-1})F_d(q^{-1})}{B(q^{-1})C(q^{-1})} e(k) \quad (2.138)$$

Como:

$$\begin{aligned} C(q^{-1}) &= 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_nq^{-n} = q^{-n}(q^n + c_1q^{n-1} + \dots + c_n) = q^{-n}C(q) \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_nq^{-n} = q^{-n}(b_0q^n + b_1q^{n-1} + \dots + b_n) = q^{-n}B(q) \\ F_d(q^{-1}) &= 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{d-1}q^{-(d-1)} = q^{-(d-1)}[q^{d-1} + f_1q^{d-2} + \dots + f_{d-1}] = q^{-(d-1)}F_d(q) \end{aligned} \quad (2.139)$$

então,

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{(q^{-2n})(q^{-(d-1)})C(q)B(q)F_d(q)}{(q^{-2n})C(q)B(q)} e(k) \\ y(k) &= \frac{C(q)B(q)F_d(q)}{q^{d-1}C(q)B(q)} e(k) \end{aligned} \quad (2.140)$$

Com isso, vê-se que a equação característica de malha fechada é:

$$q^{d-1}C(q)B(q) = 0 \quad (2.141)$$

Fatorando-se o polinômio $B(q)$ em:

$$B(q) = B^+(q)B^-(q) \quad (2.142)$$

sendo que $B^+(q)$ tem como raízes os zeros ditos bem amortecidos. Além disso, este é um polinômio mônico, com o objetivo de se garantir que a fatoração seja única. Por outro lado, $B^-(q)$ corresponde aos zeros que não devem ser cancelados, incluindo aqueles de fase não-mínima. Com isso, pretende-se determinar um controlador, do tipo média móvel, de forma que a equação característica de malha fechada seja:

$$q^{d_1-1}B^+(q)C(q) = 0 \quad (2.143)$$

evidenciando que somente os zeros de $B^+(q)$ serão cancelados. Para resolver o problema considere a seguinte lei de controle:

$$u(k-1) = -\frac{S(q)}{R(q)}y(k) \quad (2.144)$$

Da equação do modelo, tem-se que:

$$(1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na})y(k) = q^{-d}(b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb})u(k-1) + (1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc})e(k) \quad (2.145)$$

ou ainda,

$$(q^{na} + a_1q^{na-1} + \dots + a_{na})y(k) = (b_0q^{na-d} + b_1q^{na-d-1} + \dots + b_{nb}q^{na-d-nb})u(k-1) + (q^{na} + c_1q^{na-1} + \dots + c_{nc}q^{na-nc})e(k) \quad (2.146)$$

Com isso, tem-se que:

$$\begin{aligned} A(q) &= q^{na} + a_1q^{na-1} + \dots + a_{na}; \\ B(q) &= b_0q^{na-d} + b_1q^{na-d-1} + \dots + b_{nb}q^{na-d-nb} \\ C(q) &= q^{na} + c_1q^{na-1} + \dots + c_{nc}q^{na-nc} \end{aligned} \quad (2.147)$$

E a equação do modelo resulta em :

$$A(q)y(k) = B(q)u(k-1) + C(q)e(k) \quad (2.148)$$

Tendo em vista a lei de controle, tem-se que:

$$A(q)y(k) = -B(q)\frac{S(q)}{R(q)}y(k) + C(q)e(k) \quad (2.149)$$

Esta equação pode ser reescrita na forma:

$$y(k) = \frac{C(q)R(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)}e(k) \quad (2.150)$$

Com isso, vê-se que a equação característica em malha fechada é:

$$A(q)R(q) + B(q)S(q) = 0 \quad (2.151)$$

a qual deve ser igual a $q^{d_1-1}B^+(q)C(q) = 0$. Isto resulta na seguinte identidade polinomial :

$$A(q)R(q) + B(q)S(q) = q^{d_1-1}B^+(q)C(q) \quad (2.152)$$

A solução desta equação é tal que $B^+(q)$ deve ser fator de $R(q)$, isto é: $R(q) = R_1(q)B^+(q)$, ou seja $R(q)$ é divisível por $B^+(q)$. Isto pode ser mostrado, tendo em vista que:

$$y(k) = \frac{C(q)R(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)}e(k) = \frac{C(q)R(q)}{q^{d_1-1}B^+(q)C(q)}e(k) \quad (2.153)$$

ou ainda,

$$y(k) = \frac{C(q)B^+(q)R_1(q)}{q^{d_1-1}B^+(q)C(q)}e(k) = \frac{R_1(q)}{q^{d_1-1}}e(k) \quad (2.154)$$

Dado que o grau de $R_1(q)$ é igual a d_1-1 , com $d_1 = \text{grau}\{A(q)\} - \text{grau}\{B^+(q)\}$,

isto é:

$$R_1(q) = r_0q^{d_1-1} + r_1q^{d_1-2} + \dots + r_{d_1-1} \quad (2.155)$$

então:

$$y(k) = (r_0 + r_1q^{-1} + \dots + r_{d_1-1}q^{-(d_1-1)})e(k) \quad (2.156)$$

Observe que a saída controlada $y(k)$ é um processo média-móvel de ordem (d_1-1) , de forma que esta estratégia justifica o nome de **controlador média-móvel**. Deve ser observado ainda que, neste caso, d_1 zeros do processo são cancelados, sendo $d_1 = \text{grau}\{A(q)\} - \text{grau}\{B^+(q)\}$.

2.8.2 Variância Mínima Generalizada (GMV):

Neste caso a função objetivo é da forma:

$$J = \varepsilon \{ [R(q^{-1})r(k) - P(q^{-1})y(k+d)]^2 + [Q'(q^{-1})u(k)]^2 \} \quad (2.157)$$

Em que: $r(k)$ é o sinal de referência, $P(q^{-1})$, $Q'(q^{-1})$ e $R(q^{-1})$ são polinômios de ponderação.

O modelo utilizado é o ARMAX, com o retardo d supostamente conhecido e constante, isto é:

$$y(k) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k) \quad (2.158)$$

Utilizando-se este modelo tem-se que a saída d passos à frente é dada por:

$$y(k+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k+d) \quad (2.159)$$

ou ainda:

$$P(q^{-1})y(k+d) = \frac{P(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-1) + \frac{P(q^{-1})C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k+d) \quad (2.160)$$

Desta equação pode-se observar que somente a segunda parcela contém termos independentes das medidas realizadas até o instante k . Com o objetivo de separar as partes independentes, utiliza-se a seguinte identidade polinomial:

$$\frac{P(q^{-1})C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = F_d(q^{-1}) + q^{-d} \frac{G_d(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (2.161)$$

Portanto,

$$P(q^{-1})y(k+d) = \frac{P(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-1) + \frac{G_d(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k) + F_d(q^{-1})e(k+d) \quad (2.162)$$

O termo $F_d(q^{-1})e(k+d)$ é independente de medidas realizadas até o instante k , de forma que a melhor previsão para $P(q^{-1})y(k+d)$ é dada por:

$$P(q^{-1})\hat{y}(k+d) = \frac{P(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-1) + \frac{G_d(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k) \quad (2.163)$$

observando-se que:

$$P(q^{-1})y(k+d) = P(q^{-1})\hat{y}(k+d) + F_d(q^{-1})e(k+d) \quad (2.164)$$

Assim, tendo em vista que:

$$e(k) = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) - q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k-1) \quad (2.165)$$

que após substituição na equação (2.163) resulta em:

$$P(q^{-1})\hat{y}(k+d) = \frac{P(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-1) + \frac{G_d(q^{-1})}{A(q^{-1})} \left[\frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) - q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k-1) \right] \quad (2.166)$$

Rearrmando esta equação tem-se que:

$$P(q^{-1})\hat{y}(k+d) = \frac{G_d(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) + \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[\frac{P(q^{-1})C(q^{-1})}{A(q^{-1})} - q^{-d} \frac{G_d(q^{-1})}{A(q^{-1})} \right] u(k-1) \quad (2.167)$$

Com isto, o preditor é da forma:

$$P(q^{-1})\hat{y}(k+d) = \frac{G_d(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) + \frac{B(q^{-1})F_d(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k-1) \quad (2.168)$$

Deve-se observar que de acordo com a função objetivo a predição necessária é de $P(q^{-1})y(k+d)$, isto é $P(q^{-1})\hat{y}(k+d)$.

Assim, tendo em vista que:

$$P(q^{-1})y(k+d) = P(q^{-1})\hat{y}(k+d) + F_d(q^{-1})e(k+d) \quad (2.169)$$

tem-se que após substituição na função objetivo, resulta em:

$$J = \varepsilon \left\{ [R(q^{-1})r(k) - P(q^{-1})\hat{y}(k+d) - F_d(q^{-1})e(k+d)]^2 + [Q'(q^{-1})u(k-1)]^2 \right\} \quad (2.170)$$

Desenvolvendo a equação acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} J = & \varepsilon \left\{ [R(q^{-1})r(k) - P(q^{-1})\hat{y}(k+d)]^2 \right\} + \\ & -2\varepsilon \left\{ F_d(q^{-1})e(k+d)[R(q^{-1})r(k) - P(q^{-1})\hat{y}(k+d)] \right\} + \\ & + \varepsilon \left\{ [F_d(q^{-1})e(k+d)]^2 \right\} + \varepsilon \left\{ [Q'(q^{-1})u(k-1)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.171)$$

Tendo em vista que $e(k)$ é, por hipótese, um ruído branco, gaussiano, de média zero e considerando as correlações existentes, isto é:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\{ [R(q^{-1})r(k) - P(q^{-1})\hat{y}(k+d)]^2 \right\} + \varepsilon \left\{ [Q'(q^{-1})u(k-1)]^2 \right\} = \\ = [R(q^{-1})r(k) - P(q^{-1})\hat{y}(k+d)]^2 + Q'(q^{-1})u(k-1)^2 \end{aligned} \quad (2.172)$$

$$\varepsilon \left\{ F_d(q^{-1})e(k+d)[R(q^{-1})r(k) - P(q^{-1})\hat{y}(k+d)] \right\} = 0 \quad (2.173)$$

a função objetivo resulta em:

$$J = [R(q^{-1})r(k) - P(q^{-1})\hat{y}(k+d)]^2 + [Q'(q^{-1})u(k-1)]^2 + \varepsilon \left\{ [F_d(q^{-1})e(k+d)]^2 \right\} \quad (2.174)$$

O gradiente desta função em relação a $u(k-1)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u(k-1)} = & 2[R(q^{-1})r(k) - P(q^{-1})\hat{y}(k+d)] \frac{\partial [R(q^{-1})r(k) - P(q^{-1})\hat{y}(k+d)]}{\partial u(k-1)} \\ & + 2Q'(q^{-1})u(k-1) \frac{\partial Q'(q^{-1})u(k-1)}{\partial u(k-1)} + 2F_d(q^{-1})e(k+d) \frac{\partial \varepsilon \left\{ F_d(q^{-1})e(k+d) \right\}}{\partial u(k-1)} \end{aligned} \quad (2.175)$$

Como:

- $\frac{\partial \varepsilon \{F_d(q^{-1})e(k+d)\}}{\partial u(k-1)} = 0;$
- $\frac{\partial [R(q^{-1})r(k) - P(q^{-1})\hat{y}(k+d)]}{\partial u(k-1)} = -b_0\rho_0;$
- $\frac{\partial Q'(q^{-1})u(k-1)}{\partial u(k-1)} = q'_0,$

então a função objetivo é minimizada quando:

$$R(q^{-1})r(k) - P(q^{-1})\hat{y}(k+d) - \frac{q'_0}{b_0\rho_0}Q'(q^{-1})u(k-1) = 0 \quad (2.176)$$

Definindo:

$$Q(q^{-1}) = \frac{q'_0}{b_0\rho_0}Q'(q^{-1}) \quad (2.177)$$

Obtém-se a seguinte expressão :

$$R(q^{-1})r(k) - P(q^{-1})\hat{y}(k+d) - Q(q^{-1})u(k-1) = 0 \quad (2.178)$$

Esta equação pode ser reescrita em função das medidas disponíveis até o instante k , substituindo-se o valor da predição, resultando em:

$$\frac{G_d(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) + \frac{B(q^{-1})F_d(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k-1) - R(q^{-1})r(k) + Q(q^{-1})u(k-1) = 0 \quad (2.179)$$

ou ainda,

$$G_d(q^{-1})y(k) + [B(q^{-1})F_d(q^{-1}) + Q(q^{-1})C(q^{-1})]u(k-1) - R(q^{-1})C(q^{-1})r(k) = 0 \quad (2.180)$$

Definindo:

$$H(q^{-1}) = B(q^{-1})F_d(q^{-1}) + Q(q^{-1})C(q^{-1}) \quad (2.181)$$

obtém-se finalmente a seguinte lei de controle:

$$u(k-1) = \frac{R(q^{-1})C(q^{-1})}{H(q^{-1})}r(k) - \frac{G_d(q^{-1})}{H(q^{-1})}y(k) \quad (2.182)$$

Esta lei de controle conduz ao seguinte diagrama de blocos:

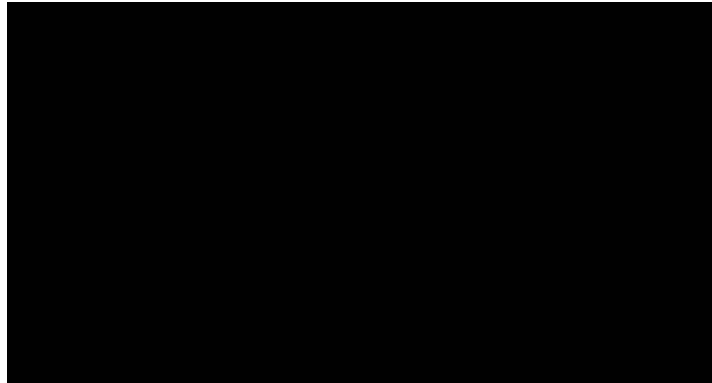


Figura 2.12 – Diagrama de Blocos do sistema em malha fechada

Observa-se da estrutura do diagrama de blocos que a lei de controle apresenta mínima variância possível, além de graus de liberdade para garantir capacidade de rastreamento. Deve-se observar no entanto que o retardo d é suposto conhecido.

2.9 Conclusões:

Neste capítulo, apresentou-se a teoria geral de controladores preditivos, enfatizando-se o conceito, um breve histórico, sua relação com outros métodos de controle, os modelos utilizados e a metodologia de obtenção de preditores. Apresentou-se também e principalmente as diversas funções objetivos e o reflexo de sua escolha nas propriedades do controlador preditivo, com o desenvolvimento de dois controladores preditivos, historicamente importantes.

CAPÍTULO III

Controlador Preditivo Generalizado (GPC)

3.1 Introdução:

O Controle Preditivo Generalizado surgiu como uma proposta de um algoritmo de controle preditivo genérico, que pudesse resolver os problemas apresentados pelos demais controladores da família MPC. Utilizando o conceito de horizonte móvel, este foi proposto por Clarke (1987) e tem-se tornado um dos métodos mais populares tanto na indústria como na academia. A sua implementação em muitas aplicações industriais tem sido de pleno sucesso, mostrando bom desempenho e um certo grau de robustez. Isto deve-se em parte a sua capacidade de manusear diferentes problemas de controle em uma grande variedade de plantas.

O algoritmo GPC calcula uma seqüência de ações de controle de forma a minimizar uma função objetivo multi-passo, definida sobre um horizonte de predição, com ponderação da ação de controle e pertence à classe de controladores de horizonte móvel.

Embora o GPC tenha muitos pontos em comum com outros controladores preditivos, já mencionados, este também tem muitas diferenças. Como será mostrado posteriormente, apresenta uma solução analítica, na ausência de restrições, permite trabalhar com processos instáveis e de fase

não-mínima, além de trabalhar com plantas multivariáveis e admitir o tratamento de restrições.

3.2 Formulação do Controlador Preditivo Generalizado: caso monovariável sem restrições.

A grande maioria dos processos monovariáveis de entrada e saída (SISO), quando considerado operando em torno de uma referência particular e após linearização, pode ser descrito pelo modelo auto-regressivo, média móvel, com sinal exógeno (ARMAX ou CARMA). No modelo a seguir apresentado, consideraremos explicitamente o retardo unitário introduzido pelo “sustentador”:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (3.1)$$

ou ainda:

$$y(k) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k) \quad (3.2)$$

Em que: - q^{-1} representa o operador atraso;

- $y(k)$ é a saída do processo;
- d é o retardo, em múltiplos do período de amostragem ($d \geq 0$);
- $u(k)$ é a saída do controlador;
- $e(k)$ é um ruído “branco” de média zero e variância σ^2

Os polinômios $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$, são dados por:

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{na}q^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{nb}q^{-nb} \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \dots + c_{nc}q^{-nc} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Em que: na , nb e nc são os graus dos polinômios $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$, respectivamente.

Sabe-se, no entanto, que em muitas aplicações industriais os distúrbios são não-estacionários de forma que o modelo auto-regressivo, integral, média móvel com sinal exógeno (CARIMA) é o mais apropriado. O modelo CARIMA é da forma:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})\frac{e(k)}{\Delta} \quad (3.4)$$

com $\Delta = 1 - q^{-1}$. Este modelo pode também ser escrito como:

$$y(k) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{\Delta A(q^{-1})}e(k) \quad (3.5)$$

Em termos de diagrama de blocos, tem-se que:

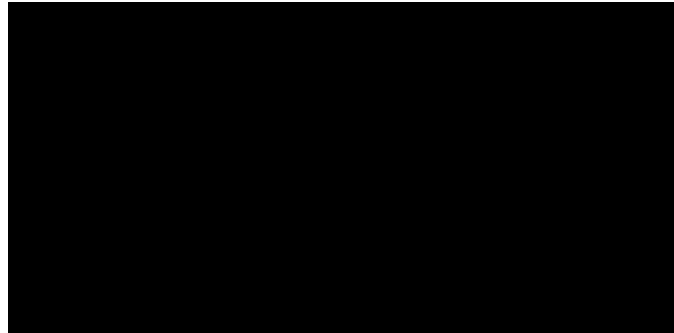


Figura 3.1 – Diagrama de Blocos do Modelo do Processo

A equação do modelo pode ainda ser escrita na forma:

$$\Delta A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (3.6)$$

Inicialmente, por uma questão de simplicidade, consideraremos o polinômio $C(q^{-1}) = 1$. Neste caso, e fazendo $\Delta A(q^{-1}) = \tilde{A}(q^{-1})$, o modelo resultante é:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k-1) + e(k) \quad (3.7)$$

ou ainda,

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})\Delta u(k-d-1) + e(k) \quad (3.8)$$

O caso geral, em que o ruído é colorido, será abordado posteriormente. Deve-se salientar, no entanto, que a introdução do polinômio $C(q^{-1})$, permite que seja modelada a estrutura do ruído, o que torna a predição mais exata, sendo uma grande vantagem do GPC sobre os demais controladores da família MPC.

Como já mencionado, o algoritmo GPC consiste em calcular uma seqüência de ações de controle de forma a minimizar uma função objetivo multi-passo definida sobre um horizonte de predição, com ponderação da ação de controle. Assim, considere a seguinte função objetivo:

$$J = \sum_{i=N_1}^{NY} \delta(i)[r(k+i) - \hat{y}(k+i)]^2 + \sum_{i=1}^{NU} \lambda(i)[\Delta u(k+i-1)]^2 \quad (3.9)$$

Em que: $\hat{y}(k+i)$ é uma predição ótima i -passos à frente da saída do sistema, baseada em informações disponíveis até o instante **k** ;

N_1 representa o horizonte inicial de predição;

NY representa o horizonte máximo de predição;

NU representa o horizonte de controle;

$\delta(i)$ e $\lambda(i)$ são seqüências de ponderação sobre o sinal de erro e o de controle, respectivamente;

$r(k+i)$ é a trajetória de referência futura.

Em Clark, (1987), $\delta(i)$ é considerado igual a 1 e $\lambda(i)$ considerado constante.

Para minimizar a função objetivo acima mencionada, deverá ser obtido a predição ótima da saída, i -passos à frente, no intervalo $N_1 \leq i \leq NY$. Sendo o

modelo linear e causal, o valor predito é considerado como a superposição de duas parcelas, a resposta livre e a resposta forçada, sendo:

- ⇒ **a resposta livre** devido à resposta natural do sistema a partir das condições atuais, considerando-se uma seqüência nula de ações futuras de controle;
- ⇒ **a resposta forçada**, obtida da consideração de condição inicial nula e sujeita à seqüência de futuras ações de controle, nosso objetivo de cálculo.

Assim, considerando-se o modelo acima mencionado, utilizando-se o procedimento analisado e explicitado na seção 2.6 e a seguinte equação diofantina:

$$\frac{1}{\tilde{A}(q^{-1})} = E_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \quad (3.10)$$

com:

$$\begin{aligned} E_i(q^{-1}) &= e_{i,0} + e_{i,1}q^{-1} + \dots + e_{i,j-1}q^{-(j-1)} \\ F_i(q^{-1}) &= f_{i,0} + f_{i,1}q^{-1} + \dots + f_{i,na}q^{-(na-1)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

obtém-se:

$$y(k+i) = B(q^{-1})E_i(q^{-1})\Delta u(k+i-d-1) + F_i(q^{-1})y(k) + E_i(q^{-1})e(k+i) \quad (3.12)$$

Tendo em vista que o grau de $E_i(q^{-1})$ é $(i-1)$, então o termo referente ao ruído, na expressão anterior, refere-se ao futuro, de forma que a melhor predição de $y(k+i)$ é como segue:

$$\hat{y}(k+i) = H_i(q^{-1})\Delta u(k+i-d-1) + F_i(q^{-1})y(k) \quad (3.13)$$

sendo: $H_i(q^{-1}) = B(q^{-1})E_i(q^{-1})$.

A solução do algoritmo GPC fornece o conjunto de sinais de controle $u(k)$, $u(k+1)$, ..., $u(k+N)$ que minimiza a função objetivo apresentada em (3.8).

$$y_{l,j+1} = q[1 - \tilde{A}(q^{-1})]y_{l,j} + B(q^{-1})\Delta u(k-d+i), \quad (3.18)$$

com $y_{l,0} = y(k)$ e $\Delta u(k+i) = 0$ para $i \geq 0$.

Pode ser observado ainda que os polinômios $H_{d+i}(q^{-1})$, com $i=1\dots N$, que formam os elementos da matriz $H'(q^{-1})$, podem ser calculados recursivamente por:

$$H_{i+1}(q^{-1}) = E_{i+1}(q^{-1})B(q^{-1}) = H_i(q^{-1}) + f_{i,0}q^{-i}B(q^{-1}) \quad (3.19)$$

Deve-se enfatizar que a **resposta livre** do sistema pode ser calculada sem utilizar a equação diofantina. Isto porque, baseando-se em sua definição, assume-se que as ações futuras de controle são iguais ao valor aplicado em $(k-1)$ e que a perturbação é constante. Então, utilizando-se este preceito e a função de transferência da planta ou o modelo paramétrico determinístico desta, determina-se a "**resposta livre**".

Da equação de predição vê-se que o **Vetor de Resposta Forçada (y_f)** é dado por:

$$y_f = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \dots & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} = Hu \quad (3.20)$$

De forma que:

$$y = Hu + y_l \quad (3.21)$$

Deve-se observar que se um degrau unitário é aplicado na entrada no instante k , então: $\Delta u(k)=1$, $\Delta u(k+1)=0$, ..., $\Delta u(k+N-1)=0$, de forma que a seqüência de saída esperada $[\hat{y}(k+d+1) \hat{y}(k+d+2) \dots \hat{y}(k+d+N)]^T$ é igual a primeira coluna de H . Assim, a primeira coluna de H pode ser calculada como a resposta da planta quando um degrau unitário do sinal de controle ou variável manipulada é aplicado nesta.

A matriz H pode ainda ser obtida através do modelo paramétrico da planta. Seus elementos podem ser calculados recursivamente, utilizando os parâmetros a_i e b_i do numerador e do denominador da função de transferência do processo, respectivamente, através da expressão:

$$h_j = -\sum_{i=1}^j a_i h_{j-i} + \sum_{i=0}^{j-1} b_i \quad (3.22)$$

com $h_j = 0$ para $\forall j < 0$.

Deve-se observar que os coeficientes dos polinômios $B(q^{-1})$ e $A(q^{-1})$, quando desconhecidos, podem ser obtidos através de métodos de estimação de parâmetros. Isto evidencia então, que este método pode ser aplicado em plantas instáveis em malha aberta.

Com a equação de predição ótima obtida e considerando a função objetivo acima definida, determina-se agora a **lei de controle**. Inicialmente reescreveremos a função objetivo na forma:

$$J = (r - Hu - y_1)^T (r - Hu - y_1) + \lambda u^T u \quad (3.23)$$

Em que: $r = [r(k+d+1) \ r(k+d+2) \ \dots \ r(k+d+N)]^T$

Esta equação pode ser escrita ainda na forma:

$$J = \frac{1}{2} u^T G u + b^T u + f_0 \quad (3.24)$$

Em que: $G = 2(H^T H + \lambda I)$;

$$b^T = 2(r - y_1)^T H;$$

$$f_0 = (r - y_1)^T (r - y_1).$$

A minimização da função objetivo, assumindo que não há restrições no sinal de controle, é obtida através do gradiente de J em relação a u e igualando este a zero, produzindo a seguinte expressão analítica para a lei de controle:

$$u = G^{-1}b = (H^T H + \lambda I)^{-1} H^T (r - y_l) \quad (3.25)$$

Lembrando que, baseado na estratégia dos controladores preditivos, o sinal de controle que é de fato enviado ao processo é o primeiro elemento do vetor u , que é dado por:

$$\Delta u(k) = K(r - y_l) \quad (3.26)$$

sendo K a primeira linha da matriz $(H^T H + \lambda I)^{-1} H^T$. Com isto, pode-se desenvolver o seguinte diagrama de blocos:

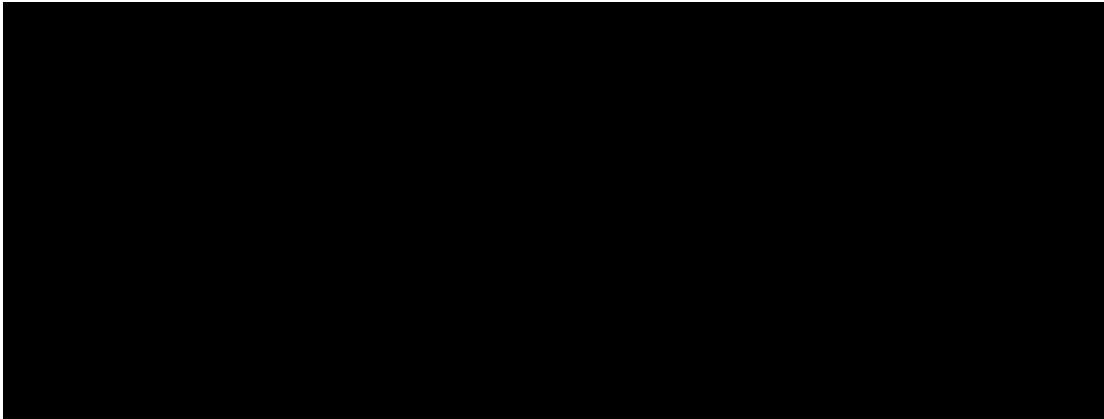


Figura 3.2 – Diagrama de Blocos do Sistema em Malha Fechada

A análise do diagrama de blocos mostra que se não existe erro de predição, isto é, se $(r - y_l) = 0$, então não existe alteração no controle, desde que o objetivo será plenamente completado com a evolução livre do processo. No entanto, caso contrário, existirá um incremento na ação de controle, proporcional ao erro futuro, diferentemente do controle por "**realimentação convencional**" que leva em conta o erro passado.

A implementação deste controlador, envolve a inversão ou triangularização de uma matriz $N \times N$ que requer um substancial esforço computacional. A utilização do conceito de **horizonte de controle** neste caso, é usado para reduzir este esforço, admitindo que o sinal de controle é constante após $NU < N$. Com isto a matriz a ser invertida é de ordem $NU \times NU$, com esforço computacional reduzido.

3.3 O caso com ruído colorido

Neste caso, considera-se que o polinômio do ruído $C(q^{-1})$ da equação que descreve o processo, acima mencionado, não é unitário. Isto altera a predição ligeiramente, sem alterar substancialmente o desenvolvimento do algoritmo. Considere então o modelo anteriormente mencionado:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (3.27)$$

ou ainda,

$$y(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \Delta u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} e(k) \quad (3.28)$$

Com isto, a saída predita i -passos à frente, com $i \geq d$, é dada por:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \Delta u(k-d+i-1) + \frac{C(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} e(k+i) \quad (3.29)$$

Considere então a seguinte equação diofantina:

$$\frac{C(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} = E_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \quad (3.30)$$

com grau $\{E_i(q^{-1})\} = i-1$ e grau $\{F_i(q^{-1})\} = \text{grau}\{\tilde{A}(q^{-1})\} - 1$.

Substituindo na equação anterior, tem-se que:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \Delta u(k-d+i-1) + \left[E_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \right] e(k+i) \quad (3.31)$$

ou ainda:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \Delta u(k-d+i-1) + E_i(q^{-1})e(k+i) + \frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} e(k) \quad (3.32)$$

Do modelo tem-se que:

$$e(k) = \frac{\tilde{A}(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) - \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} \Delta u(k-d-1) \quad (3.33)$$

então, substituindo na equação (3.31) resulta em:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[\frac{C(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} - q^{-i} \frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \right] \Delta u(k-d+j-1) + \quad (3.34)$$

$$+ E_i(q^{-1}) e(k+i) + \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k)$$

Da identidade polinomial apresentada em (3.30), tem-se que:

$$\left[\frac{C(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} - q^{-i} \frac{F_i(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})} \right] = E_i(q^{-1}) \quad (3.35)$$

então, substituindo-se em (3.34) resulta em:

$$y(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} E_i(q^{-1}) \Delta u(k-d+i-1) + E_i(q^{-1}) e(k+i) + \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) \quad (3.36)$$

Observa-se nesta equação que todo o ruído refere-se ao futuro. Assim, o valor esperado de $y(k+i)$ é:

$$\varepsilon\{y(k+i)\} = \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} E_i(q^{-1}) \Delta u(k-d+i-1) + \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) \quad (3.37)$$

ou ainda, a equação do preditor é da forma: :

$$\hat{y}(k+i) = \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} E_i(q^{-1}) \Delta u(k-d+i-1) + \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) \quad (3.38)$$

Utilizando-se agora a seguinte equação diofantina:

$$\frac{1}{C(q^{-1})} = M_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{N_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} \quad (3.39)$$

com grau $\{M(q^{-1})\} = i-1$ e grau $\{N(q^{-1})\} = n_c - 1$, tem-se que:

$$\hat{y}(k+i) = \left[M_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{N_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} \right] \left[B(q^{-1})E_i(q^{-1})\Delta u(k-d+i-1) + F_i(q^{-1})y(k) \right] \quad (3.40)$$

Esta equação pode também ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+i) = & M_i(q^{-1})E_i(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(k-d+i-1) + M_i(q^{-1})F_i(q^{-1})y(k) + \\ & + N_i(q^{-1}) \left[\frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} E_i(q^{-1})\Delta u(k-d-1) + \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k-i) \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

Tendo em vista a equação 3.38 verifica-se que:

$$\frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} E_i(q^{-1})\Delta u(k-d-1) + \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k-i) = \hat{y}(k) \quad (3.42)$$

como $\hat{y}(k) = y(k)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+i) = & M_i(q^{-1})E_i(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(k-d+i-1) + \\ & + \left[M_i(q^{-1})F_i(q^{-1}) + N_i(q^{-1}) \right] y(k) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Definindo:

$$H_i(q^{-1}) = M_i(q^{-1})E_i(q^{-1})B(q^{-1}) \quad (3.44)$$

e

$$F'_i(q^{-1}) = M_i(q^{-1})F_i(q^{-1}) + N_i(q^{-1}) \quad (3.45)$$

obtém-se:

$$\hat{y}(k+i) = H_i(q^{-1})\Delta u(k-d+i-1) + F'_i(q^{-1})y(k) \quad (3.46)$$

Observe que esta equação é similar a equação (3.13), isto é, a equação de predição correspondente ao caso em que $C(q^{-1}) = 1$. Portanto, a partir de então utiliza-se o mesmo procedimento realizado anteriormente, tal que:

$$y^f(k) = \frac{1}{C(q^{-1})}y(k) \text{ e } u^f(k) = \frac{1}{C(q^{-1})}u(k) \quad (3.50)$$

tal que o modelo global resultante torna-se:

$$A(q^{-1})y^f(k) = q^{-d}B(q^{-1})u^f(k-1) + \frac{e(k)}{\Delta} \quad (3.51)$$

ou ainda:

$$\tilde{A}(q^{-1})y^f(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u^f(k-1) + e(k) \quad (3.52)$$

Isto mostra que a utilização desta abordagem permite calcular a predição através do mesmo procedimento usado no caso em que $C(q^{-1}) = 1$. O sinal predito $\hat{y}^f(k+j)$ obtido desta forma tem que ser filtrado por $C(q^{-1})$ com o objetivo de se recuperar $\hat{y}(k+j)$.

Exemplo:

Com o objetivo de mostrar uma forma como o GPC pode ser implementado apresenta-se a seguir um simples exemplo. Por simplicidade o controlador será projetado para um sistema de primeira ordem.

Considere então o modelo a seguir de um sistema de primeira ordem discretizado, dado por:

$$(1 - .8q^{-1})y(k) = (.4 + .6q^{-1})u(k-1) + \frac{e(k)}{\Delta}$$

Neste caso, o retardo natural é nulo, embora exista um retardo unitário, que é introduzido pelo segurador de ordem zero no processo de discretização. Com isto, consideraremos os parâmetros de sintonia do controlador iguais a: $N_1 = 0+1 = 1$; $N_Y = 0+N = N$ e $N_U = N=3$. Observe no modelo que neste caso $C(q^{-1})=1$ e portanto, o procedimento utilizado deve ser aquele desenvolvido para o caso. Assim, como foi mostrado, calcula-se inicialmente os valores preditos da saída do processo no horizonte acima escolhido e rescreve-se

numa forma em que se possa identificar as matrizes $H(q^{-1})$, $H'(q^{-1})$ e $F(q^{-1})$. Com estas matrizes calcula-se a lei de controle.

Assim, usando a equação diofantina, calcula-se os polinômios $F_i(q^{-1})$ e $E_i(q^{-1})$, com $i=1 \dots 3$, observando-se que $\tilde{A}(q^{-1}) = A(q^{-1})(1 - q^{-1})$, ou ainda que $\tilde{A}(q^{-1}) = (1 - .8q^{-1})(1 - q^{-1}) = (1 - 1.8q^{-1} + .8q^{-2})$. Tem-se assim as seguintes equações:

- Para $i=1 \Rightarrow \frac{1}{\tilde{A}(q^{-1})} = E_1(q^{-1}) + q^{-1} \frac{F_1(q^{-1})}{\tilde{A}(q^{-1})}$

$$\Rightarrow 1 = \tilde{A}(q^{-1})E_1(q^{-1}) + q^{-1}F_1(q^{-1})$$

$$\Rightarrow 1 = (1 - 1.8q^{-1} + .8q^{-2})e_0 + q^{-1}(f_0 + f_1q^{-1})$$

$$\Rightarrow E_1(q^{-1}) = 1 \text{ e } F_1(q^{-1}) = 1.8 - .8q^{-1}$$
- Para $i=2 \Rightarrow 1 = \tilde{A}(q^{-1})E_2(q^{-1}) + q^{-2}F_2(q^{-1})$

$$\Rightarrow 1 = (1 - 1.8q^{-1} + .8q^{-2})(1 + e_1q^{-1}) + q^{-2}(f_0 + f_1q^{-1})$$

$$\Rightarrow E_2(q^{-1}) = 1 + 1.8q^{-1} \text{ e } F_2(q^{-1}) = 2.44 - 1.44q^{-1}$$
- Para $i=3 \Rightarrow 1 = \tilde{A}(q^{-1})E_3(q^{-1}) + q^{-3}F_3(q^{-1})$

$$\Rightarrow 1 = (1 - 1.8q^{-1} + .8q^{-2})(1 + e_1q^{-1} + e_2q^{-2}) + q^{-3}(f_0 + f_1q^{-1})$$

$$\Rightarrow E_3(q^{-1}) = 1 + 1.8q^{-1} + 2.44q^{-2} \text{ e } F_3(q^{-1}) = 2.952 - 1.952q^{-1}$$

Como definido anteriormente, sabe-se que:

$$H_j(q^{-1}) = B(q^{-1})E_j(q^{-1})$$

Assim, como $B(q^{-1}) = (.4 + .6q^{-1})$ então:

- $H_1(q^{-1}) = (.4 + .6q^{-1})$

- $H_2(q^{-1}) = (.4 + 1.32q^{-1} + 1.08q^{-2})$
- $H_3(q^{-1}) = (.4 + 1.32q^{-1} + 2.056q^{-2} + 1.464q^{-3})$

Como as saídas preditas, neste caso, são dadas por:

$$\hat{y}(k+j) = H_j(q^{-1})\Delta u(k+j-d-1) + F_j(q^{-1})y(k) \hat{y}(k+j)$$

então:

- $\hat{y}(k+1) = (.4 + .6q^{-1})\Delta u(k) + (1.8 - .8q^{-1})y(k)$
- $\hat{y}(k+2) = (.4 + 1.32q^{-1} + 1.08q^{-2})\Delta u(k+1) + (2.44 - 1.44q^{-1})y(k)$
- $\hat{y}(k+3) = (.4 + 1.32q^{-1} + 2.056q^{-2} + 1.464q^{-3})\Delta u(k+2) + (2.952 - 1.952q^{-1})y(k)$

Estas equações podem ser escritas matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \hat{y}(k+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 1.32 & 0.4 & 0 \\ 2.056 & 1.32 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6\Delta u(k-1) + 1.8y(k) - 0.8y(k-1) \\ 1.08\Delta u(k-1) + 2.44y(k) - 1.44y(k-1) \\ 1.464\Delta u(k-1) + 2.952y(k) - 1.952y(k-1) \end{bmatrix}$$

Este resultado mostra que:

- $yf = Hu = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 1.32 & 0.4 & 0 \\ 2.056 & 1.32 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \end{bmatrix}$
- $y_i = \begin{bmatrix} 0.6\Delta u(k-1) + 1.8y(k) - 0.8y(k-1) \\ 1.08\Delta u(k-1) + 2.44y(k) - 1.44y(k-1) \\ 1.464\Delta u(k-1) + 2.952y(k) - 1.952y(k-1) \end{bmatrix}$

A matriz H e a resposta livre do sistema podem ser calculadas sem a utilização da equação diofantina. A partir do modelo do sistema, obtém-se a função de transferência deste, que é:

$$g(z) = \frac{0.4(z + 1.5)}{z(z - 0.8)} \Leftrightarrow g(z^{-1}) = 0.4z^{-1} + 0.92z^{-2} + 0.736z^{-3}$$

Observa-se que a planta é de fase não-mínima.

Do resultado obtém-se que :

- $h_0 = 0.4$;
- $h_1 = 0.4 \oplus 0.92 = 1.32$;
- $h_2 = 0.4 \oplus 0.92 \oplus 0.736 = 2.056$;

Da função de transferência, tem-se que:

$$y(k) = 0.8y(k-1) + 0.4u(k-1) + 0.6u(k-2)$$

então:

$$y(k+1) = 0.8y(k) + 0.4u(k) + 0.6u(k-1)$$

Com o objetivo de expressar $y(k)$ em termos de $\Delta u(k)$ subtrai-se $y(k)$ de $y(k+1)$, obtendo-se:

$$y(k+1) = 1.8y(k) - 0.8y(k-1) + 0.4\Delta u(k) + 0.6\Delta u(k-1)$$

Considerando agora que na resposta livre somente aparece incrementos do sinal de controle antes do instante k , tem-se que:

- $y(k+1) = 1.8y(k) - 0.8y(k-1) + 0.6\Delta u(k-1)$;
- $y(k+2) = 1.8y(k+1) - 0.8y(k) = 2.44y(k) - 1.44y(k-1) + 1.8\Delta u(k-1)$
- $y(k+3) = 1.8y(k+2) - 0.8y(k+1) = 2.952y(k) - 1.952y(k-1) + 1.464\Delta u(k-1)$

Agora, fazendo $\lambda=0.8$ e conhecendo-se H tem-se que:

$$(H^T H + \lambda I)^{-1} H^T = \begin{bmatrix} 0.133 & 0.286 & 0.147 \\ -0.154 & -0.165 & 0.286 \\ -0.029 & -0.154 & 0.1334 \end{bmatrix}$$

Como somente $\Delta u(k)$ é necessário para os cálculos, tendo em vista o princípio do horizonte móvel, somente a primeira linha da matriz acima é utilizada, obtendo-se assim a seguinte lei de controle:

$$\Delta u(k) = -0.604\Delta u(k-1) - 1.371y(k) + 0.805y(k-1) + 0.133r(k+1) + 0.286r(k+2) + 0.147r(k+3)$$

sendo $r(k+i)$ a trajetória de referência que pode ser considerada constante e igual ao "setpoint" atual ou aproximar-se da resposta desejada através de uma dinâmica de primeira ordem. Então o sinal de controle é uma função desta referência desejada e de entradas e saídas passadas e é dada por:

$$u(k) = 0.396u(k-1) + 0.604u(k-2) - 1.371y(k) + 0.805y(k-1) + 0.133r(k+1) + 0.286r(k+2) + 0.147r(k+3)$$

Considerando a referência constante R , tem-se a que:

$$u(k) = -\frac{1.371 - 0.805q^{-1}}{1 - 0.396q^{-1} - 0.604q^{-2}} y(k) + \frac{0.566}{1 - 0.396q^{-1} - 0.604q^{-2}} R$$

Esta lei de controle pode também ser escrita na forma:

$$u(k) = \left[\frac{0.566}{1 - 0.396q^{-1} - 0.604q^{-2}} \right] \left[R - 2.4223(1 - 0.587q^{-1})y(k) \right]$$

Os pólos do controlador estão em $z=1$ e $z=-0.604$. Como já era esperado o pólo em $z=1$ garante erro de rastreamento nulo para referências constantes.

A função de transferência de malha fechada é:

$$g_0(z) = \frac{0.2264.z(z+1.5)}{z^3 - 0.6476z^2 + 0.2134z + 0.0002}$$

cuja raízes do polinômio característico, pólos da função de transferência de malha fechada, são: $0.3243 \pm 0.3299i$ e -0.0009 . Isto mostra que o pólo dominante em malha fechada apresentará um comportamento transitório bastante rápido se compararmos com o pólo dominante de malha aberta que é de $.8$. Espera-se também um "overshoot" da ordem de 5%. A simulação mostra estes resultados esperados.



Figura 3.3 – Resultados de Simulação

3.4 Conclusões:

Neste capítulo, apresentou-se de forma detalhada o algoritmo de controle preditivo generalizado (GPC), no caso monovariável, considerando-se o ruído branco e o ruído colorido. A importância deste algoritmo neste trabalho, deve-se não só a sua relevância acadêmica, devido a seu aspecto conceitualmente consistente, mas também e principalmente devido a destacada aplicação em controle de processos, em vários setores industriais. Por outro lado, deve-se salientar que é importante estabelecer as bases para o entendimento do desenvolvimento deste algoritmo, na medida em que sua extensão para o caso bilinear é o tema central desta tese.

CAPÍTULO IV

Controlador Preditivo Generalizado Multivariável

4.1 Introdução:

A grande maioria dos processos industriais apresenta muitas variáveis que devem ser controladas e muitas variáveis manipuláveis que podem ser escolhidas como variáveis de controle do processo. Em alguns casos a mudança em uma das variáveis manipuláveis afeta essencialmente a correspondente variável controlada, sem influenciar substancialmente as outras variáveis controladas. Isto permite que a relação entre cada par entrada-saída possa ser considerada uma representação monovariável da planta e que esta possa ser controlada por malhas independentes. Neste caso, tem-se um caso multivariável plenamente desacoplado. No entanto, na grande maioria dos casos, há o acoplamento, de forma que quando uma variável manipulada é modificada, esta alteração não só modifica a variável controlada correspondente como também as demais variáveis controladas. Este acoplamento entre as variáveis do processo pode resultar em um pobre desempenho ou mesmo instabilidade quando técnicas de controle inadequadas são utilizadas, por exemplo considerando malhas de controle independentes. É interessante observar no entanto que, antes de considerar que a solução a ser adotada deve ter como princípio que o processo a controlar é multivariável com

acoplamento, uma análise criteriosa na seleção dos pares entrada-saída, considerando controlabilidade, observabilidade, retardo, atraso de fase, acoplamento, etc, é obrigatório que se realize. Esta seleção levará indubitavelmente ao conjunto de pares entrada-saída que definirá a melhor estrutura de controle. Quando no entanto, apesar da escolha criteriosa dos pares entrada-saída, as interações não são negligenciáveis (Kantende e Jutan, 1996), fato que está se tornando freqüente devido a utilização da integração energética como filosofia de projeto de processos, a planta deve ser considerada como um processo com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), ao invés de um conjunto de processos monovariáveis.

O controle de processos multivariáveis tem sido extensivamente tratado na literatura e representa um grande desafio para engenheiros de controle de processos. A forma mais popular de controlar processos MIMO é através da utilização de "**compensadores de desacoplamento**" projetados para suprimir ou diminuir as interações e em seguida projetar múltiplos controladores SISO. Isto requer que o número de entradas seja igual ao número de saídas, além do que o desacoplamento completo é muito difícil de ser alcançado. Em muitos casos, os desacopladores não são realizáveis, principalmente em processos de dinâmica complexa e que apresentam tempo morto. Uma das grandes vantagens de controladores preditivos diz respeito a sua aplicação em processo multivariáveis, que é realizada como uma extensão do caso SISO.

4.2 Formulação do Controlador Preditivo Generalizado: caso multivariável sem restrições.

O controlador preditivo generalizado para o caso multivariável, semelhantemente ao caso SISO, utiliza um modelo paramétrico multivariável de entrada e saída, especificamente o modelo CARIMA para um processo com p entradas e q saídas. No entanto, diferentemente do caso SISO, para o atraso de transporte, por não ser obrigatoriamente igual entre todos os pares entrada-saída, utiliza-se o conceito de **Matriz de Interação**.

4.2.1 Modelo CARIMA para processos multivariáveis.

Considere um processo linear discreto de múltiplas entradas e múltiplas saída (“MIMO”), ilustrado em diagrama de blocos através da figura (4.1) a seguir:

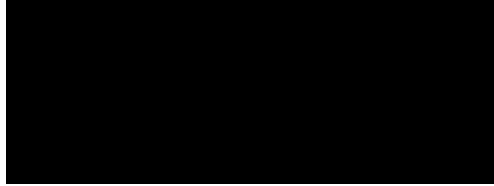


Figura 4.1 - Processo MIMO

Seja q o número de saídas do processo (y) e p o número de entradas (u).

Considere também que este processo é descrito pela seguinte equação:

$$A(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (4.1)$$

Em que: $y(k) \in R^q \rightarrow$ vetor de saída do processo com q elementos ;

$u(k) \in R^p \rightarrow$ vetor de controle do processo com p elementos;

$e(k) \in R^q \rightarrow$ vetor de ruído branco, gaussiano, de média zero e matriz covariância $E = \text{diag}(\sigma^2)$.

As matrizes $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$ são matrizes polinomiais no operador atraso q^{-1} definidas por:

$$A(q^{-1}) = I_{q \times q} + A_1 q^{-1} + \dots + A_{na} q^{-na}; \quad (4.2)$$

$$B(q^{-1}) = B_0 + B_1 q^{-1} + \dots + B_{nb} q^{-nb}; \quad (4.3)$$

$$C(q^{-1}) = I_{p \times p} + C_1 q^{-1} + \dots + C_{nc} q^{-nc}; \quad (4.4)$$

Em que: $A(q^{-1}) \in R^{q \times q}$; $B(q^{-1}) \in R^{q \times p}$ e $C(q^{-1}) \in R^{q \times q}$

Neste caso, introduz-se o operador $\Delta_j(q^{-1}) = (1 - q^{-1})I_j$, que corresponde à inclusão da ação integral no controlador.

4.2.2 Matriz de Interação de um processo “Multivariável”

A matriz de interação de um sistema multivariável é a extensão natural do atraso de transporte para sistemas multivariáveis e foi introduzida por Wolovich em 1976, a qual é descrita da seguinte forma:

“Seja $G(z) \in R^{q \times p}$ a matriz de transferência estritamente própria de um sistema multivariável, com $\det(G(z)) \neq 0$, para $z \neq 0$. Então existe uma matriz polinomial $\xi(z) \in R^{q \times q}$, com $\xi(z) = H(z)D(z)$,

Em que:

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21}(z) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot \\ h_{q1}(z) & h_{q2}(z) & \cdot & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

com $h_{ij}(z)$ divisível por z ou nulo e

$$D(z) = \text{diag} \left[z^{f_1} \dots z^{f_q} \right] = \begin{bmatrix} z^{f_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{f_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & & & \cdot & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & z^{f_q} \end{bmatrix}_{q \times q} \quad (4.6)$$

tal que $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)G(z) = K$, com K uma matriz não-singular”.

A matriz de interação pode ser vista como o análogo multivariável do atraso de transporte para sistemas “SISO”. De uma forma direta, considere a seguinte função de transferência monovariável:

$$g(z) = z^{-d} \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} = z^{-d} \left(\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \right) \quad (4.7)$$

Sabe-se, previamente, da definição de atraso de transporte que esta função de transferência representa um processo, com retardo de d , pois:

$$\frac{y(z)}{u(z)} = z^{-d} \left(\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \right) \quad (4.8)$$

que resulta, no domínio do tempo, na seguinte equação a diferença :

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k-d) + \dots + b_n u(k-d-n) \quad (4.9)$$

ou ainda:

$$y(k+d) = -a_1 y(k+d-1) - \dots - a_n y(k+d-n) + b_0 u(k) - \dots - b_n u(k-n) \quad (4.10)$$

Desta equação, vê-se que o retardo é d . No entanto, da definição de “matriz de interação”, deve-se determinar, então, o polinômio $\xi(z)$ que atenda a condição: $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)G(z) = K$, com $K \neq 0$. No caso monovariável, $\xi(z)$ é um polinômio em z , da forma:

$$\xi(z) = \xi_0 z^{n_\xi} + \xi_1 z^{n_\xi-1} + \dots + \xi_{n_\xi} \quad (4.11)$$

Calculando-se o limite de $\xi(z)g(z)$, tem-se que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[(\xi_0 z^{n_\xi-d} + \dots + \xi_{n_\xi} z^{-d}) \left(\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \right) \right] \quad (4.12)$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(\xi_0 z^{n_\xi-d} + \dots + \xi_{n_\xi} z^{-d}) b_0 + \dots + (\xi_0 z^{n_\xi-d-n} + \dots + \xi_{n_\xi} z^{-d-n}) b_n}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (4.13)$$

$$= \frac{\lim_{z \rightarrow \infty} (\xi_0 z^{n\xi-d} + \dots + \xi_{n\xi} z^{-d}) b_0 + \dots + \lim_{z \rightarrow \infty} (\xi_0 z^{n\xi-d-n} + \dots + \xi_{n\xi} z^{-d-n}) b_n}{\lim_{z \rightarrow \infty} (1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})} \quad (4.14)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\xi_0 z^{n\xi-d} + \dots + \xi_{n\xi} z^{-d}) b_0 + \dots + \lim_{z \rightarrow \infty} (\xi_0 z^{n\xi-d-n} + \dots + \xi_{n\xi} z^{-d-n}) b_n = K \neq 0 \quad (4.15)$$

A análise da equação (4.15) permite concluir que, o polinômio mínimo que atende esta condição é $\xi(z) = z^d$, de forma que o $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z) g(z) = b_0 \neq 0$. Isto mostra que o polinômio $\xi(z)$ está diretamente relacionado ao atraso de transporte do sistema monovariável.

Em processos multivariáveis é comum assumir que a matriz de interação tenha uma das duas seguintes formas simples, desde que $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z) G(z) = K$, com K não-singular:

1-) **Forma 1:** atrasos iguais entre os pares entrada/saída, isto é:

$$\xi(z) = z^d I_q, \text{ com } d = \min_{i,j} (d_{i,j}) \quad (4.16)$$

representando o atraso único do sistema multivariável. Neste caso, está-se admitindo que o atraso de todas as saídas em relação à todas as entradas é igual a um mesmo número inteiro d . Assim, o processo fica modelado pela seguinte equação:

$$A(q^{-1}) \Delta_q(q^{-1}) y(k) = q^{-d} B(q^{-1}) \Delta_p(q^{-1}) u(k-1) + C(q^{-1}) e(k) \quad (4.17)$$

2-) **Forma 2:** atrasos diferentes entre os pares entrada/saída.

Neste caso, faz-se $\xi(z) = \text{diag}[d_1 \quad d_2 \dots d_q]$ sendo $d_i = \min_j d_{i,j}$, em que $d_{i,j}$ representa o retardo entre a j -ésima entrada e a i -ésima saída e d_i o atraso da i -ésima saída. Assim, neste caso, para cada saída $y_i(k)$ admite-se um atraso de transporte d_i em relação a todas as entradas e com isso o processo pode ser modelado de acordo com a seguinte equação:

$$A(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k) = \text{diag} \left[q^{-d_1} q^{-d_2} \dots q^{-d_p} \right] B(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (4.18)$$

Qualquer que seja a forma mais conveniente para representar o atraso de transporte, considera-se sempre, com a finalidade de simplificar os cálculos de saídas preditas, a matriz polinomial $B'(q^{-1}) = q^{-d}B(q^{-1})$, no caso da primeira forma ou $B'(q^{-1}) = \text{diag} \left[q^{-d_1} q^{-d_2} \dots q^{-d_p} \right] B(q^{-1})$ no segundo caso. Com isto, o modelo a ser utilizado para predição resulta em:

$$A(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k) = B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (4.19)$$

Ou ainda,

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (4.20)$$

Convém ressaltar que no segundo caso, quando existe uma diferença significativa entre o retardo mínimo e o máximo, tem-se como consequência o aparecimento de elementos nulos nas matrizes coeficientes da matriz polinomial $B'(q^{-1})$.

4.2.3 Função Objetivo:

Como já mencionado, o algoritmo GPC consiste em calcular uma seqüência de ações de controle de forma a minimizar uma função objetivo multi-passo definida sobre um horizonte de predição, com ponderação da ação de controle e do erro de predição, isto é:

$$J = \sum_{i=N_1}^{NY} \left\| r(k+i) - \hat{y}(k+i) \right\|_R^2 + \sum_{i=1}^{NU} \left\| \Delta u(k+i-1) \right\|_Q^2 \quad (4.21)$$

Em que: $\hat{y}(k+i)$ é uma predição ótima i-passos à frente do vetor de saída do sistema baseada em informações disponíveis até o instante k ;

N_T representa o horizonte mínimo de predição;

NY representa o horizonte máximo de predição;

NU representa o horizonte de controle;

R e Q são matrizes positivas definidas de ponderação sobre o vetor sinal de erro e o vetor de controle, respectivamente;

$r(k+i)$ é o vetor trajetória de referência futura.

Para minimizar a função objetivo acima mencionada, deverá ser obtida a predição ótima da saída, i -passos à frente, no intervalo $N_T \leq i \leq NY$. Assim, de forma similar ao GPC monovariável, sendo o modelo linear e causal, o valor predito é também considerado como a superposição das respostas livre e forçada. Portanto, considerando o modelo acima mencionado, na hipótese de ruído branco, isto é: $C(q^{-1}) = I_{n \times n}$, e a seguinte equação diofantina:

$$I_{n \times n} = E_j(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) \quad (4.22)$$

Em que: $E_j(q^{-1})$ é uma matriz polinomial única de ordem $j-1$, dada por:

$$E_j(q^{-1}) = E_{j,0} + E_{j,1} q^{-1} + \dots + E_{j,j-1} q^{-(j-1)} \quad (4.23)$$

$F_j(q^{-1})$ é uma matriz polinomial única de ordem n_a , na forma:

$$F_j(q^{-1}) = F_{j,0} + F_{j,1} q^{-1} + \dots + F_{j,n_a} q^{-n_a} \quad (4.24)$$

$$\tilde{A}(q^{-1}) = A(q^{-1})\Delta_q(q^{-1}). \quad (4.25)$$

Pré-multiplicando a equação (4.20), com $C(q^{-1}) = I_{n \times n}$, por $E_j(q^{-1})q^j$ obtém-se:

$$E_j(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1})y(k+j) = E_j(q^{-1})B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) + E_j(q^{-1})e(k+j) \quad (4.26)$$

Tendo em vista que:

$$E_j(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) = I_{n \times n} - q^{-j}F_j(q^{-1}) \quad (4.27)$$

então substituindo na equação acima, resulta em:

$$y(k+j) = F_j(q^{-1})y(k) + E_j(q^{-1})B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) + E_j(q^{-1})e(k+j) \quad (4.28)$$

Como o grau $\{E_j(q^{-1})\} = j-1$, então o termo referente ao ruído, na expressão anterior, refere-se ao futuro, de forma que a melhor predição de $y(k+j)$ é como segue:

$$\hat{y}(k+j) = F_j(q^{-1})y(k) + E_j(q^{-1})B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) \quad (4.29)$$

Fazendo

$$E_j(q^{-1})B'(q^{-1}) = H_j(q^{-1}) + q^{-j}H_{jpa}(q^{-1}) \quad (4.30)$$

com grau $\{H_j(q^{-1})\} < j$, a equação de predição pode agora ser escrita como:

$$\hat{y}(k+j) = H_j(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) + H_{jpa}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + F_j(q^{-1})y(k) \quad (4.31)$$

Observando-se que os últimos dois termos da equação anterior dependem somente de valores passados, tanto da saída do processo quanto da entrada, tem-se portanto que esta parcela corresponde à resposta livre do processo. Por outro lado, o primeiro termo depende somente de valores futuros do sinal de controle, e podendo assim ser interpretado como a resposta forçada. Com isto tem-se que:

$$\hat{y}(k+j) = H_j(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) + Y_{ij} \quad (4.32)$$

sendo,

$$Y_{ij} = H_{jpa}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + F_j(q^{-1})y(k) \quad (4.33)$$

Considerando agora a equação do preditor, o conjunto de N predições ótimas é da forma:

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+1) &= H_1(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k) && + Y_{I1} \\ \hat{y}(k+2) &= H_2(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+1) && + Y_{I2} \\ &\vdots && \vdots \\ \hat{y}(k+N) &= H_N(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+N-1) && + Y_{IN}\end{aligned}\quad (4.34)$$

Tendo em vista que:

$$y(k+j)H_j(q^{-1}) = H_0 + H_1q^{-1} + \dots + H_{j-1}q^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} H_iq^{-i} \quad (4.35)$$

então o conjunto de N predições ótimas pode ser reescrito na forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & \dots & 0 \\ H_1 & H_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N-1} & H_{N-2} & \dots & H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_p(q^{-1})u(k) \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+N-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{I1} \\ Y_{I2} \\ \vdots \\ Y_{IN} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Estas predições podem ser escritas numa forma agrupada como:

$$y = Hu + y_I \quad (4.37)$$

Em que:

$$y = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N) \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} \Delta_p(q^{-1})u(k) \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+N-1) \end{bmatrix}; H = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & \dots & 0 \\ H_1 & H_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N-1} & H_{N-2} & \dots & H_0 \end{bmatrix}; y_I = \begin{bmatrix} Y_{I1} \\ Y_{I2} \\ \vdots \\ Y_{IN} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Pode ser observado ainda que se a matriz $A(q^{-1})$ é diagonal, então as matrizes $E_j(q^{-1})$ e $F_j(q^{-1})$ são também matrizes diagonais e o problema é reduzido a solução recursiva de n equações escalares diofantinas.

Uma importante observação a ser feita é que se um degrau unitário é aplicado na primeira entrada, no instante k , então: $\Delta u(k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$,

$\Delta u(k+1)=[0 \dots 0]^T, \dots, \Delta u(k+N-1)=[0 \dots 0]^T$, de forma que a seqüência de saída esperada $[\hat{y}(k+d+1) \hat{y}(k+d+2) \dots \hat{y}(k+d+N)]^T$ é igual a primeira coluna da matriz H . Isto é, a primeira coluna de H pode ser calculada como a resposta da planta quando um degrau unitário é aplicado na primeira variável manipulada, ou primeira entrada. A i -ésima coluna de H pode ser obtida de forma similar, aplicando um degrau unitário na i -ésima entrada.

Deve-se observar que os coeficientes das matrizes polinomiais $B(q^{-1})$ e $A(q^{-1})$, quando desconhecidos, podem ser obtidos através de métodos de estimação de parâmetros, permitindo a determinação de $E_j(q^{-1})$ e $F_j(q^{-1})$ e como conseqüência $H_j(q^{-1})$. Isto evidencia, então, que este método pode ser aplicado em plantas instáveis em malha aberta.

Com a equação de predição ótima obtida e considerando a função objetivo definida na equação (4.21), determina-se a lei de controle. Como o sinal de controle é mantido constante após o horizonte de controle NU , então o conjunto de predições que afetam a função objetivo pode ser expresso como:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+N_1) \\ \hat{y}(k+N_1+1) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N_y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{N_1-1} & H_{N_1-2} & \dots & H_{N_1-NU} \\ H_{N_1} & H_{N_1-1} & \dots & H_{N_1+1-NU} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N_y-1} & H_{N_y-2} & \dots & H_{N_y-NU} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_p(q^{-1})u(k) \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta_p(q^{-1})u(k+NU-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{IN_1} \\ Y_{IN_1+1} \\ \vdots \\ Y_{IN_y} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

com $H_i=0$ para $i<0$.

De forma compacta, pode-se escrever que:

$$y_{N_{1y}} = H_{N_{1y}} u_{NU} + y_{IN_{1y}} \quad (4.40)$$

Assim a função objetivo pode ser rescrita como:

$$J = (H_{N_{1y}} u_{NU} + y_{IN_{1y}} - r)^T \bar{R} (H_{N_{1y}} u_{NU} + y_{IN_{1y}} - r) + u_{NU}^T \bar{Q} u_{NU} \quad (4.41)$$

Em que: $\bar{R} = \text{diag}[R, \dots, R]$ e $\bar{Q} = \text{diag}[Q, \dots, Q]$

A minimização da função objetivo, assumindo-se que não há restrições no sinal de controle, é obtida através do gradiente de J em relação a u e igualando-se este a zero, produzindo-se a seguinte expressão analítica para a lei de controle:

$$u = (H_{N_{1yu}}^T H_{N_{1yu}} + \bar{Q})^{-1} H_{N_{1yu}}^T \bar{R} (r - y_{lN_{1y}}) \quad (4.42)$$

Lembrando que, baseado na estratégia dos controladores preditivos, o vetor sinal de controle, que é de fato enviado ao processo corresponde aos primeiros p elementos do vetor u , que é dado por:

$$\Delta(q^{-1})u(k) = K(r - y_l) \quad (4.43)$$

sendo K as p primeiras linhas da matriz $(H_{N_{1yu}}^T H_{N_{1yu}} + \bar{Q})^{-1} H_{N_{1yu}}^T \bar{R}$. Com isto, pode-se desenvolver o seguinte diagrama de blocos:

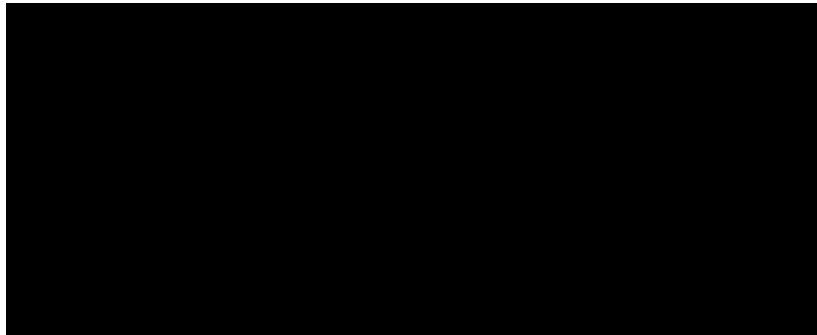


Figura 4.2 – Diagrama de Blocos do Sistema em Malha fechada

A análise do diagrama de blocos mostra que se não existe erro de predição futuro, isto é, se $(r - y_l) = 0$, então não existe alteração no controle, desde que o objetivo será plenamente completado com a evolução livre do processo. No entanto, caso contrário, existirá um incremento na ação de controle, proporcional ao erro futuro, diferentemente do controle por "**realimentação convencional**" que leva em conta o erro passado.

Nota-se também que a implementação deste controlador, envolve a inversão ou triangularização de uma matriz $Np \times Np$ que requer um substancial

esforço computacional. O conceito de **horizonte de controle** neste caso é usado para reduzir este esforço, admitindo que o sinal de controle é constante após $NU < N$. Com isto, a matriz a ser invertida é de ordem $(NUxp) \times (NUxp)$, com esforço computacional reduzido.

4.3 O caso com ruído colorido

Neste caso, considera-se que a matriz polinomial do ruído da equação (4.20) que descreve o processo, $C(q^{-1}) \neq I$ e por hipótese é considerada estável. Isto altera substancialmente o desenvolvimento do algoritmo de predição e a diferença fundamental, reside no fato de que operações com as matrizes polinomiais não são comutativas. Portanto, os cálculos envolvidos em sistemas “MIMO” são mais complexos do que com sistemas “SISO”. Por isso, estabelece-se a seguir algumas definições relacionadas a “identidades de matrizes polinomiais”, as quais ajudarão na elaboração do preditor j-passos à frente.

Considere então o seguinte modelo:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (4.44)$$

e a seguinte equação diofantina:

$$C(q^{-1}) = E_j(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) \quad (4.45)$$

sendo $E_j(q^{-1})$ e $F_j(q^{-1})$ matrizes polinomiais únicas de graus $j-1$ e n_a , respectivamente.

Considere então agora as matrizes polinomiais $\bar{E}_j(q^{-1})$ e $\bar{C}_j(q^{-1})$ as quais guardam entre si a seguinte propriedade:

$$\bar{E}_j(q^{-1})C(q^{-1}) = \bar{C}_j(q^{-1})E_j(q^{-1}) \quad (4.46)$$

Com $\bar{E}_j(0) = \bar{C}_j(0) = I_q$; $n_E = n_E$ e $n_C = n_C$ e $\det(\bar{C}_j(q^{-1})) = \det(C_j(q^{-1}))$.

As condições de existência e de unidade de solução são apresentados em Wolowich, (1974).

Assim, da equação polinomial (4.46) já definida, pós-multiplicando por $E_j(q^{-1})^{-1}$ e pré-multiplicando por $\bar{E}_j(q^{-1})^{-1}$, obtém-se:

$$\bar{E}_j(q^{-1})^{-1} \bar{C}_j(q^{-1}) = C_j(q^{-1}) E_j(q^{-1})^{-1} \quad (4.47)$$

Definindo

$$\bar{F}_j(q^{-1}) = q^j [\bar{C}_j(q^{-1}) - \bar{E}_j(q^{-1}) \tilde{A}(q^{-1})] \quad (4.48)$$

e pré-multiplicando a equação do modelo por $\bar{E}_j(q^{-1})$, resulta em:

$$\begin{aligned} \bar{E}_j(q^{-1}) \tilde{A}(q^{-1}) y(k) &= \bar{E}_j(q^{-1}) B'(q^{-1}) \Delta_p(q^{-1}) u(k-1) + \\ &+ \bar{E}_j(q^{-1}) C(q^{-1}) e(k) \end{aligned} \quad (4.49)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \bar{E}_j(q^{-1}) \tilde{A}(q^{-1}) y(k+j) &= \bar{E}_j(q^{-1}) B'(q^{-1}) \Delta_p(q^{-1}) u(k+j-1) + \\ &+ \bar{E}_j(q^{-1}) C(q^{-1}) e(k+j) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Utilizando a identidade polinomial definida em (4.46) e tendo em vista a definição apresentada em (4.48), isto é:

$$\bar{E}_j(q^{-1}) \tilde{A}(q^{-1}) = \bar{C}_j(q^{-1}) - q^{-j} \bar{F}_j(q^{-1}) \quad (4.51)$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{C}_j(q^{-1}) y(k+j) &= \bar{E}_j(q^{-1}) B'(q^{-1}) \Delta_p(q^{-1}) u(k+j-1) + \\ &+ \bar{F}_j(q^{-1}) y(k) + \bar{E}_j(q^{-1}) C(q^{-1}) e(k+j) \end{aligned} \quad (4.52)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \bar{C}_j(q^{-1})y(k+j) &= \bar{E}_j(q^{-1})B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) + \\ &+ \bar{F}_j(q^{-1})y(k) + \bar{C}(q^{-1})E_j(q^{-1})e(k+j) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Esta equação pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \bar{C}_j(q^{-1})[y(k+j) - E_j(q^{-1})e(k+j)] &= \bar{E}_j(q^{-1})B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) + \\ &+ \bar{F}_j(q^{-1})y(k) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Desta equação, observa-se que as predições ótimas $\hat{y}(k+j)$ podem ser geradas pela equação:

$$\bar{C}_j(q^{-1})\hat{y}(k+j) = \bar{E}_j(q^{-1})B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) + \bar{F}_j(q^{-1})y(k) \quad (4.55)$$

Considere agora a seguinte equação diofantina:

$$I = J_j(q^{-1})\bar{C}(q^{-1}) + q^{-j}K_j(q^{-1}) \quad (4.56)$$

com grau $\{J_j(q^{-1})\} < j$.

Multiplicando a equação de predição (4.55) por $J_j(q^{-1})$ e utilizando a equação diofantina definida em (4.56), tem-se que:

$$\begin{aligned} [I - q^{-j}K_j(q^{-1})]\hat{y}(k+j) &= J_j(q^{-1})\bar{E}_j(q^{-1})B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) + \\ &+ J_j(q^{-1})\bar{F}_j(q^{-1})y(k) \end{aligned} \quad (4.57)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+j) &= J_j(q^{-1})\bar{E}_j(q^{-1})B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) + \\ &+ [K_j(q^{-1}) + J_j(q^{-1})\bar{F}_j(q^{-1})]y(k) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Fazendo:

$$J_j(q^{-1})\bar{E}_j(q^{-1})B'(q^{-1}) = H_j(q^{-1}) + q^{-j}H_{jpa}(q^{-1}) \quad (4.59)$$

com grau $\{H_j(q^{-1})\} < j$, então a predição ótima j-passos à frente pode ser expressa como:

$$\hat{y}(k+j) = H_j(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k+j-1) + H_{jpa}(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + [K_j(q^{-1}) + J_j(q^{-1})\bar{F}_j(q^{-1})]y(k) \quad (4.60)$$

Observa-se nesta equação que o primeiro termo, que é devido a incrementos de controle futuros, corresponde à **resposta forçada**, enquanto os últimos dois termos correspondem à **resposta livre**, na medida em que estes são gerados por incrementos de controle passados e saídas passadas.

A partir desta conclusão, tem-se que o **vetor de resposta livre** é dado por:


$$Y_{lj} = H_{jpa}(q^{-1})\Delta u(k-1) + [K_j(q^{-1}) + J_j(q^{-1})\bar{F}_j(q^{-1})]y(k) \quad (4.61)$$

Com isto, observa-se que o conjunto de predições ótimas j-passos à frente pode ser escrito conforme a equação (4.34), apresentada supondo ruído branco. Como conseqüência, os procedimentos utilizados para a obtenção da lei de controle são os mesmos, de forma que esta é expressa também através das equações (4.42) e (4.43). No entanto, esta solução requer um maior esforço computacional e é muito mais complexa. Na realidade, é muito difícil obter o polinômio matricial $C(q^{-1})$ e em muitos casos esta matriz é escolhida arbitrariamente pelo usuário visando obter ganho em relação à robustez.

4.4 Conclusões:

Neste capítulo, apresentou-se de uma forma detalhada o algoritmo de controle preditivo generalizado (GPC), no caso multivariável, considerando-se o ruído branco e o ruído colorido, destacando-se as diferenças para o caso monovariável. Dentre estas, enfatizou-se o modelo multivariável e a matriz Interactor.

A importância deste algoritmo neste trabalho, também no caso multivariável, deve-se não só a sua relevância acadêmica, devido a seu aspecto conceitualmente consistente, mas também, e principalmente, devido a destacada aplicação em controle de processos, em vários setores industriais.



Por outro lado, deve-se salientar que é importante estabelecer as bases para o entendimento do desenvolvimento deste algoritmo, na medida em que a extensão para o caso bilinear, também no caso multivariável, é o tema central desta tese.

CAPÍTULO V

Controle Preditivo Baseado em Modelos Bilineares

5.1 Introdução:

As pesquisas mostram que os modelos lineares utilizados pela maioria dos algoritmos de controle preditivo são insuficientes para o controle de alguns processos, que apresentam determinado grau de não-linearidade. Nestes casos, mesmo quando o processo está operando na vizinhança de um ponto de equilíbrio, a representação deste por um modelo linear é inadequada e insuficiente, chegando a ser crucial para a estabilidade em malha fechada e constituindo uma importante deficiência. Em tais situações, utilizando-se modelos não lineares que descrevam adequadamente o processo e que sejam bem identificados, a aplicação de um controlador preditivo não linear poderá melhorar o desempenho ou simplesmente garantir operação estável. A extensão das idéias do “**Model Predictive Control**” (MPC), como é conhecida a família dos controladores preditivos, para processos não lineares é direta. No entanto, embora não exista qualquer argumentação, no conceito básico do MPC, contra a utilização de um modelo não linear, o seu desenvolvimento não é trivial e existem algumas questões em aberto (Camacho & Bordons,1999). Assim, o MPC com o uso de modelos não lineares, é atualmente um campo de intensa pesquisa e tornar-se-á mais comum na medida em que usuários demandem alto desempenho.

Como caso particular da técnica de controle preditivo baseado em modelos não lineares, aqueles baseados em **modelos bilineares** têm despertado grande interesse. Isto porque, os modelos bilineares apresentam a vantagem de ser mais simples que o não linear em geral, mais representativo que o linear, é linear nos parâmetros e a bilinearidade está presente em muitos sistemas físicos.

A obtenção de uma lei de controle explícita que minimize um critério quadrático sujeito a um modelo bilinear, é um problema de otimização não-linear e uma solução analítica para o problema não pode ser obtida. Em essência, existem dois métodos representativos adotados na solução de controle preditivo não linear. Um dos métodos é o da abordagem da programação não linear que utiliza um algoritmo de otimização não linear, tal como o Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) e a Programação Quadrática Sucessiva (PQS). O outro método, é o que utiliza técnicas distintas de linearização, destacando-se a utilização de séries de Volterra, a linearização através de realimentação de saída e a utilização do modelo "timestep quasilinear". Utilizando a última abordagem, Goodhart et al., em 1994, apresentaram uma extensão do GPC e aplicaram numa planta industrial, obtendo resultados encorajadores.

5.2 Modelo Bilinear:

Para o desenvolvimento do controlador preditivo baseado em modelos bilineares, será analisado inicialmente o caso SISO. A extensão da estrutura do modelo padrão linear, autoregressivo, média móvel, integral, com sinal exógeno (ARIMAX) com a adição do termo bilinear conduz a representação não linear ARIMAX ou NARIMAX. Esta representação não linear, que difere da apresentada por Goodhart et al. (1994), que utilizaram o modelo NARMAX, é conhecida como representação polinomial de sistemas bilineares e tem a seguinte forma:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{j=1}^m \eta_{(i-d),j} u(k-j-i+1)y(k-i) + \frac{C(q^{-1})}{\Delta(q^{-1})}e(k) \quad (5.1)$$

Em que: $\eta_{i,j} = 0$ para $\forall l < 0$;

$$\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1};$$

$u(k)$, $y(k)$ e $e(k) \in \mathfrak{R}$ são, respectivamente, as seqüências da entrada, da saída e do ruído branco;

$d \geq 1$ é o retardo do sistema expresso como um múltiplo inteiro do período de amostragem.

E ainda:

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c} \end{aligned} \quad (5.2)$$

com $b_0 \neq 0$ e os zeros de $C(q^{-1})$, por hipótese, supostos no interior do círculo unitário.

5.3 Controlador Preditivo Bilinear Generalizado: linearização através de realimentação de saída (CPBG_LRS).

A linearização exata por realimentação de saída é uma técnica que força a planta a ter um comportamento linear. Basicamente, esta consiste em fazer uma extensão da planta através de uma realimentação não linear que compensa sua não linearidade, tal que a dinâmica do novo sistema composto é linear, (Braake et al., 1999).

A linearização por realimentação de saída oferece algumas vantagens em algumas aplicações, especialmente quando especificações exatas, em termos da forma da resposta da planta a diferentes amplitudes, são relevantes. Neste caso, a linearização por realimentação obriga o sistema a apresentar um comportamento linear, permitindo uma fácil correspondência entre estas especificações e as simples especificações do sistema de controle.

O diagrama de blocos apresentado a seguir ilustra a utilização da

abordagem de linearização por realimentação de saída em conjunto com um controlador preditivo.

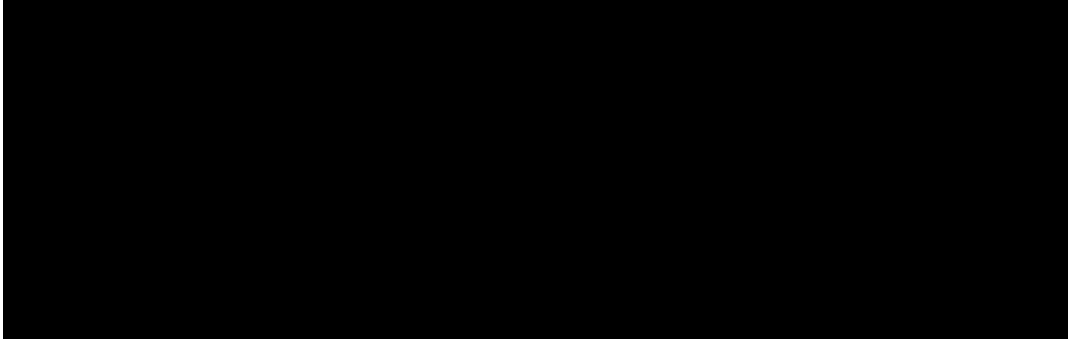


Figura 5.1 Diagrama de blocos da estrutura do controlador

A análise de robustez, ou seja, uma avaliação de desempenho da estrutura apresentada considerando-se incertezas nos modelos da plantas, ou ainda, as dinâmicas não modeladas, normalmente de altas frequências, deve ser cuidadosamente efetuada. As condições gerais de robustez, considerando-se incertezas no modelo bilinear da planta são analisadas, para o caso SISO, por Zhaoli et al., (2000).

Exemplo 5.1: considere uma planta descrita pelo seguinte modelo bilinear de primeira ordem:

$$(1 - .8q^{-1})y(k) = (.4 + .6q^{-1})u(k-1) + .2y(k-1)u(k-1) + \frac{e(k)}{\Delta}$$

Ou ainda:

$$(1 - .8q^{-1})y(k) = [.4 + .2y(k-1) + .6q^{-1}]u(k-1) + \frac{e(k)}{\Delta}$$

Fazendo

$$v(k-1) = [.4 + .2y(k-1) + .6q^{-1}]u(k-1)$$

obtém-se o seguinte modelo linear:

$$(1 - .8q^{-1})y(k) = v(k-1) + \frac{e(k)}{\Delta}$$

Observe que a lei de controle de linearização é não linear em relação a $y(k)$ e pode ser escrita na forma:

$$u(k) = \frac{v(k)}{.4 + .2y(k)} - .6 \frac{u(k-1)}{.4 + .2y(k)}$$

De uma forma geral, considere o modelo bilinear, baseado em (5.1), porém com $i=1$ e $j=1$:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + q^{-d}D(q^{-1})y(k-1)u(k-1) + C(q^{-1})\frac{e(k)}{\Delta} \quad (5.3)$$

com $D(q^{-1}) = d_0 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d}$. Este, pode ser escrito ainda na forma:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}[B(q^{-1}) + D(q^{-1})y(k-1)]u(k-1) + C(q^{-1})\frac{e(k)}{\Delta} \quad (5.4)$$

Fazendo:

$$v(k-1) = [B(q^{-1}) + D(q^{-1})y(k-1)]u(k-1) \quad (5.5)$$

obtém-se o seguinte modelo linearizado:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}v(k-1) + C(q^{-1})\frac{e(k)}{\Delta} \quad (5.6)$$

ou ainda:

$$\Delta A(q^{-1})y(k) = q^{-d}\Delta v(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (5.7)$$

Fazendo:

$$\Delta A(q^{-1}) = \tilde{A}(q^{-1}) \quad (5.8)$$

o modelo resultante é:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-d}\Delta v(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (5.9)$$

ou ainda:

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = \Delta v(k-d-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (5.10)$$

Utilizando-se este modelo linearizado projeta-se o controlador preditivo. No caso em estudo, recomenda-se o GPC, não só pelo modelo utilizado, como também pelas propriedades já citadas.

Para o exemplo acima analisado, o GPC para o sistema linearizado é obtido então para o seguinte modelo:

$$(1 - 1.8q^{-1} + .8q^{-2})y(k) = \Delta v(k-1) + e(k)$$

Assim, usando a equação diofantina, calcula-se os polinômios $F_j(q^{-1})$ e $E_j(q^{-1})$, com $j=1 \dots 3$, observando-se que $\tilde{A}(q^{-1}) = A(q^{-1})(1-q^{-1})$, ou ainda que $\tilde{A}(q^{-1}) = (1-.8q^{-1})(1-q^{-1}) = (1-1.8q^{-1}+.8q^{-2})$. Tem-se assim as seguintes equações:

- Para $j=1 \Rightarrow E_1(q^{-1}) = 1$ e $F_1(q^{-1}) = 1.8 - .8q^{-1}$
- Para $j=2 \Rightarrow E_2(q^{-1}) = 1 + 1.8q^{-1}$ e $F_2(q^{-1}) = 2.44 - 1.44q^{-1}$
- Para $j=3 \Rightarrow E_3(q^{-1}) = 1 + 1.8q^{-1} + 2.44q^{-2}$ e $F_3(q^{-1}) = 2.952 - 1.952q^{-1}$

Como definido anteriormente, sabe-se que: $H_j(q^{-1}) = B(q^{-1})E_j(q^{-1})$.

Assim, como $B(q^{-1}) = 1$, no sistema linearizado, então:

$$H_1(q^{-1}) = 1; H_2(q^{-1}) = (1 + 1.8q^{-1}) \text{ e } H_3(q^{-1}) = (1 + 1.8q^{-1} + 2.44q^{-2})$$

Assim a equação do preditor é dada por:

$$\hat{y}(k+j) = H_j(q^{-1})\Delta v(k+j-d-1) + F_j(q^{-1})y(k)$$

então para o horizonte de predição estabelecido, pode-se escrever que:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \hat{y}(k+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.8 & 1 & 0 \\ 2.44 & 1.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v(k) \\ \Delta v(k+1) \\ \Delta v(k+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.8y(k) - 0.8y(k-1) \\ 2.44y(k) - 1.44y(k-1) \\ 2.952y(k) - 1.952y(k-1) \end{bmatrix}$$

Este resultado mostra que:

$$y_f = Hu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.8 & 1 & 0 \\ 2.44 & 1.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v(k) \\ \Delta v(k+1) \\ \Delta v(k+2) \end{bmatrix} \text{ e } y_l = \begin{bmatrix} 1.8y(k) - 0.8y(k-1) \\ 2.44y(k) - 1.44y(k-1) \\ 2.952y(k) - 1.952y(k-1) \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $\lambda=0.8$ e conhecendo-se H tem-se que:

$$(H^T H + \lambda I)^{-1} H^T = \begin{bmatrix} 0.2993 & 0.1921 & 0.0473 \\ -0.3466 & 0.0861 & 0.1921 \\ -0.0591 & -0.3466 & 0.2993 \end{bmatrix}$$

Como somente $\Delta v(k)$ é necessário para os cálculos, somente a primeira linha da matriz acima é utilizada, obtendo-se assim a seguinte lei de controle:

$$\Delta v(k) = -1.1470y(k) + 0.6084y(k-1) + \\ + 0.2993r(k+1) + 0.1921r(k+2) + 0.0473r(k+3)$$

sendo $r(k+i)$ a trajetória de referência que pode ser considerada constante e igual ao "setpoint" atual ou aproximar-se da resposta desejada através de uma dinâmica de primeira ordem. Então, assumindo que a trajetória de referência é constante, tem-se que:

$$v(k) = v(k-1) + 0.5387r - 1.1470y(k) + 0.6084y(k-1)$$

Esta lei de controle pode também ser escrita como:

$$v(k) = \frac{0.5387}{1-q^{-1}} \left[r - 2.129(1-.5304q^{-1})y(k) \right]$$

Os resultados de simulação mostraram a inviabilidade desta lei de controle, uma vez que, quando uma mudança em degrau na referência acontecia, embora a resposta do sistema e o sinal $v(k)$ apresentassem comportamento satisfatório, o sinal de controle apresentava oscilações permanentes, como pode ser visto na figura (5.2) a seguir:

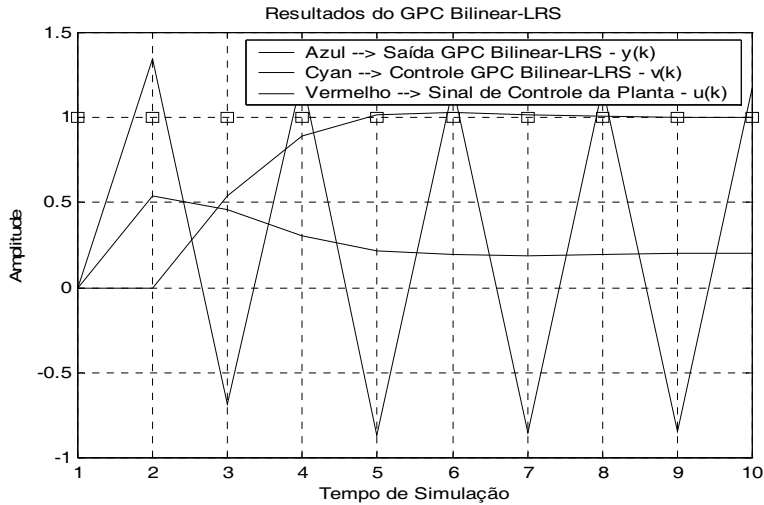


Figura 5.2 Resultados utilizando a abordagem da linearização por realimentação de saída.

Isto evidentemente, inviabiliza a aplicação desta lei de controle. Outro fato importante observado está relacionado com a robustez do sistema de controle. Quando o parâmetro do termo bilinear apresentava um desvio positivo com relação ao termo correspondente da lei de controle de linearização o sistema tornava-se instável. Convém salientar que o exemplo apresentado constitui um contra-exemplo para o método, não devendo ser interpretado como uma prova definitiva da inviabilidade deste.

5.4 Controlador Preditivo Bilinear Generalizado: aproximação quasilinear por degrau de tempo.

5.4.1 A aproximação quasilinear por degrau de tempo:

Considere o modelo bilinear monovariável, autoregressivo, média móvel, com sinal exógeno (ARMAX):

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{j=1}^m \eta_{(i-d),j} u(k-j-i+1)y(k-i) + C(q^{-1})e(k) \quad (5.11)$$

com $\eta_{l,j} = 0$ para $\forall l < 0$.

A aproximação quasilinear por degrau de tempo consiste em reescrever este modelo na forma:

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} \left(a_i - \sum_{j=1}^m \eta_{(i-d),j} u(k-i-j+1) \right) y(k-i) + q^{-d} B(q^{-1}) u(k-1) + C(q^{-1}) e(k) \quad (5.12)$$

Definindo:

$$\tilde{a}_i(u) = \left(a_i - \sum_{j=1}^m \eta_{(i-d),j} u(k-i-j+1) \right) \quad (5.13)$$

obtém-se o seguinte modelo:

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} \tilde{a}_i(u) y(k-i) + q^{-d} B(q^{-1}) u(k-1) + C(q^{-1}) e(k) \quad (5.14)$$

ou ainda:

$$\tilde{A}(q^{-1}, u) y(k) = q^{-d} B(q^{-1}) u(k-1) + C(q^{-1}) e(k) \quad (5.15)$$

Em que:

$$\tilde{A}(q^{-1}, u) = 1 + \tilde{a}_1(u) q^{-1} + \tilde{a}_2(u) q^{-2} + \dots + \tilde{a}_{n_a}(u) q^{-n_a} \quad (5.16)$$

Observe que, em cada instante k os valores passados de $u(k)$ são conhecidos, permitindo assim que os coeficientes $\tilde{a}_i(u)$ do polinômio $\tilde{A}(q^{-1}, u)$ sejam determinados e considerados constantes até o instante seguinte. O modelo assim obtido é denominado modelo **NARMAX quasilinear por degrau de tempo**. A partir deste modelo, válido para o instante k , efetua-se a predição da saída i -passos à frente.

No trabalho publicado por Goodhart et al. (1984), o modelo proposto foi o ARMAX não-linear. Sabe-se no entanto que o modelo mais adequado para garantir erro de regime nulo a mudança em degrau na referência, neste caso seria o ARIMAX não linear, isto é:

$$\tilde{A}(q^{-1}, u)y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})\frac{e(k)}{\Delta(q^{-1})} \quad (5.17)$$

ou ainda,

$$\Delta\tilde{A}(q^{-1}, u)y(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (5.18)$$

Fazendo:

$$\bar{A}(q^{-1}, u) = \Delta\tilde{A}(q^{-1}, u) = \tilde{A}(q^{-1}, u) - q^{-1}\tilde{A}(q^{-1}, u) \quad (5.19)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{A}(q^{-1}, u) = & 1 + [\tilde{a}_1(u) - 1]q^{-1} + [\tilde{a}_2(u) - \tilde{a}_1(u)]q^{-2} + \dots + \\ & + [\tilde{a}_{n_a}(u) - \tilde{a}_{n_a-1}(u)]q^{-n_a} - \tilde{a}_{n_a}(u)q^{-(n_a+1)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

ou ainda,

$$\bar{A}(q^{-1}, u) = 1 + \bar{a}_1(u)q^{-1} + \bar{a}_2(u)q^{-2} + \dots + \bar{a}_{n_a}(u)q^{-n_a} + \bar{a}_{n_a+1}(u)q^{-(n_a+1)} \quad (5.21)$$

tem-se finalmente o seguinte modelo:

$$\bar{A}(q^{-1}, u)y(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (5.22)$$

Este modelo, assim obtido, será denominado modelo **NARIMAX quasilinear por degrau de tempo**. Observe que, neste modelo os coeficientes do polinômio $\bar{A}(q^{-1}, u)$ dependem de valores passados de $u(k)$ que são conhecidos, considerados constantes até o instante seguinte, quando uma nova atualização de seus valores é realizada.

5.4.2 Controlador Preditivo Bilinear Generalizado

Inicialmente, por uma questão de simplicidade, consideraremos o polinômio $C(q^{-1}) = 1$. Neste caso, o modelo resultante é:

$$\bar{A}(q^{-1}, u)y(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k-1) + e(k) \quad (5.23)$$

Semelhantemente ao algoritmo GPC, o Controlador preditivo Bilinear Generalizado calcula uma seqüência de ações de controle de forma a minimizar uma função objetivo multi-passo definida sobre um horizonte de predição, com ponderação da ação de controle. Considere então a função objetivo apresentada na seção 3.8:

$$J = \sum_{i=N_1}^{NY} \lambda(i) [r(k+i) - \hat{y}(k+i)]^2 + \sum_{i=1}^{NU} \delta(i) [\Delta u(k+i-1)]^2 \quad (5.24)$$

Em que: $\hat{y}(k+i)$ é uma predição sub-ótima i -passos à frente da saída do sistema baseada em informações disponíveis até o instante k ;

N_1 representa o horizonte mínimo de predição;

NY representa o horizonte máximo de predição;

NU representa o horizonte de controle;

$\delta(i)$ e $\lambda(i)$ são seqüências de ponderação sobre o sinal de erro e o de controle; respectivamente;

$r(k+i)$ é a trajetória de referência futura.

Deve-se observar que $\hat{y}(k+i)$ representa uma predição **sub-ótima**, uma vez que o modelo quasilinear representado em (5.22) utilizado na predição, é uma aproximação do modelo bilinear apresentado em (5.1). Assim, para minimizar a função objetivo acima mencionada, deverá ser obtida a predição sub-ótima da saída, i -passos à frente, no intervalo $N_1 \leq i \leq NY$. Embora o modelo da planta seja não-linear, a aproximação utilizada, isto é, o modelo quasilinear adotado permite que se use o mesmo procedimento do empregado pelo GPC. Assim o conceito de resposta livre e de resposta forçada é também utilizado. Portanto, considerando o modelo representado pela equação (5.22) e utilizando a seguinte equação diofantina:

$$\frac{1}{\bar{A}(q^{-1}, u)} = E_j(q^{-1}, u) + q^{-j} \frac{F_j(q^{-1}, u)}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \quad (5.25)$$

com:

$$\begin{aligned} E_j(q^{-1}, u) &= e_{j,0}(u) + e_{j,1}(u)q^{-1} + \dots + e_{j,j-1}(u)q^{-(j-1)} \\ F_j(q^{-1}, u) &= f_{j,0}(u) + f_{j,1}(u)q^{-1} + \dots + f_{j,na}(u)q^{-(na-1)} \end{aligned} \quad (5.26)$$

obtém-se:

$$y(k+j) = B(q^{-1})E_j(q^{-1}, u)\Delta u(k+j-d-1) + F_j(q^{-1}, u)y(k) + E_j(q^{-1}, u)e(k+j) \quad (5.27)$$

Tendo em vista que o grau de $\{E_j(q^{-1}, u)\} = j-1$, então o termo referente ao ruído, na expressão anterior, refere-se ao futuro, de forma que a melhor predição de $y(k+j)$ é como segue:

$$\hat{y}(k+j) = H_j(q^{-1}, u)\Delta u(k+j-d-1) + F_j(q^{-1}, u)y(k) \quad (5.28)$$

sendo: $H_j(q^{-1}, u) = B(q^{-1})E_j(q^{-1}, u)$.

Como todo algoritmo de controle preditivo, a solução deste fornece um conjunto de sinais de controle $u(k)$, $u(k+1)$, ..., $u(k+N)$ que minimiza a função objetivo acima citada. Considerando que o sistema tem um tempo morto igual a d períodos de amostragem, então a saída do sistema será influenciada pela entrada $u(k)$ após $(d+1)$ períodos. Com isto, os valores dos parâmetros da função objetivo, N_1 , NY e NU podem ser definidos como: $N_1 = d+1$; $NY = d+N$ e $NU = N$.

Considerando então agora a equação do preditor, o conjunto **sub-ótimo** de predições, no intervalo acima desejado, é da forma:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+d+1) &= H_{d+1}\Delta u(k) && + F_{d+1}y(k) \\ \hat{y}(k+d+2) &= H_{d+2}\Delta u(k+1) && + F_{d+2}y(k) \\ &\vdots && \vdots \\ \hat{y}(k+d+N) &= H_{d+N}\Delta u(k+N-1) && + F_{d+N}y(k) \end{aligned} \quad (5.29)$$

que pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(u)\mathbf{u} + \mathbf{F}(q^{-1}, u)y(k) + \mathbf{H}'(q^{-1}, u)\Delta u(k-1) \quad (5.30)$$

Em que:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+d+1) \\ \hat{y}(k+d+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+d+N) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}(u) = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{H}(q^{-1}, u) = \begin{bmatrix} [H_{d+1}(q^{-1}) - h_0]q \\ [H_{d+2}(q^{-1}) - h_0 - h_1q^{-1}]q^2 \\ \vdots \\ [H_{d+N}(q^{-1}) - h_0 - h_1q^{-1} - \cdots - h_{N-1}q^{-(N-1)}]q^N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}(q^{-1}, u) = \begin{bmatrix} F_{d+1}(q^{-1}) \\ F_{d+2}(q^{-1}) \\ \vdots \\ F_{d+N}(q^{-1}) \end{bmatrix}$$

De forma similar ao caso linear observa-se que o **Vetor de Resposta Livre** (\mathbf{y}_l) é dado por:

$$\mathbf{y}_l = \mathbf{F}(q^{-1}, u)\mathbf{y}(k) + \mathbf{H}(q^{-1}, u)\Delta u(k-1) \quad (5.31)$$

O vetor de resposta livre pode ser calculada recursivamente por:

$$\mathbf{y}_{l,j+1} = q[1 - \bar{A}(q^{-1}, u)]\mathbf{y}_{l,j} + B(q^{-1})\Delta u(k-d+j) \quad (5.32)$$

com $\mathbf{y}_{l,0} = \mathbf{y}(k)$ e $\Delta u(k+j)=0$ para $j \geq 0$.

Da equação de predição, vê-se também que o **Vetor de Resposta Forçada** (\mathbf{y}_f) é dado por:

$$\mathbf{y}_f = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(u)\mathbf{u} \quad (5.33)$$

De forma que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(u)\mathbf{u} + \mathbf{y}_l \quad (5.34)$$

Deve-se observar que os coeficientes dos polinômios do modelo bilinear, quando desconhecidos, podem ser obtidos através de métodos de estimação de parâmetros, visto que há linearidade nos parâmetros.

A lei de controle, neste caso é obtida de forma semelhante ao GPC, observando-se no entanto que esta é uma solução sub-ótima, na medida em que o preditor é sub-ótimo. Assim, a lei de controle é dada por:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{H}(u)^T \mathbf{H}(u) + \lambda I)^{-1} \mathbf{H}(u)^T (\mathbf{r} - \mathbf{y}_l) \quad (5.35)$$

Lembrando que, baseado na estratégia dos controladores preditivos, o sinal de controle que é de fato enviado ao processo é o primeiro elemento do vetor \mathbf{u} , que é dado por:

$$\Delta u(k) = K(r - y_l) \quad (5.36)$$

sendo K a primeira linha da matriz $(\mathbf{H}(u)^T \mathbf{H}(u) + \lambda I)^{-1} \mathbf{H}(u)^T$.

5.4.3 O caso com ruído colorido

Neste caso, considere o modelo descrito em (5.22):

$$\bar{A}(q^{-1}, u)y(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (5.37)$$

ou ainda,

$$y(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \Delta u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} e(k) \quad (5.38)$$

Com isto, a saída predita j -passos à frente, com $j \geq d$, é dada por:

$$y(k+j) = \frac{B(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \Delta u(k-d+j-1) + \frac{C(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} e(k+j) \quad (5.39)$$

Considere então a seguinte equação diofantina:

$$\frac{C(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} = E_j(q^{-1}, u) + q^{-j} \frac{F_j(q^{-1}, u)}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \quad (5.40)$$

com grau $\{E_j(q^{-1}, u)\} = j - 1$ e grau $\{F_j(q^{-1}, u)\} = \text{grau}\{\bar{A}(q^{-1}, u)\} - 1$.

Substituindo na equação anterior, tem-se que:

$$y(k + j) = \frac{B(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \Delta u(k - d + j - 1) + \left[E_j(q^{-1}, u) + q^{-j} \frac{F_j(q^{-1}, u)}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \right] e(k + j) \quad (4.41)$$

ou ainda,

$$y(k + j) = \frac{B(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \Delta u(k - d + j - 1) + E_j(q^{-1}, u) e(k + j) + \frac{F_j(q^{-1}, u)}{\bar{A}(q^{-1}, u)} e(k) \quad (5.42)$$

Do modelo tem-se que:

$$e(k) = \frac{\bar{A}(q^{-1}, u)}{C(q^{-1})} y(k) - \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} \Delta u(k - d - 1) \quad (5.43)$$

então, substituindo na equação da predição resulta em:

$$\begin{aligned} y(k + j) &= \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[\frac{C(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} - q^{-j} \frac{F_j(q^{-1}, u)}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \right] \Delta u(k - d + j - 1) + \\ &+ E_j(q^{-1}, u) e(k + j) + \frac{F_j(q^{-1}, u)}{C(q^{-1})} y(k) \end{aligned} \quad (5.44)$$

Como:

$$\left[\frac{C(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} - q^{-j} \frac{F_j(q^{-1}, u)}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \right] = E_j(q^{-1}, u) \quad (5.45)$$

então:

$$y(k + j) = \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} E_j(q^{-1}, u) \Delta u(k - d + j - 1) + E_j(q^{-1}, u) e(k + j) + \frac{F_j(q^{-1}, u)}{C(q^{-1})} y(k) \quad (5.46)$$

Observa-se nesta equação que todo o ruído refere-se no futuro, de forma que:

$$\varepsilon\{y(k+j)\} = \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} E_j(q^{-1}, u) \Delta u(k-d+j-1) + \frac{F_j(q^{-1}, u)}{C(q^{-1})} y(k) \quad (5.47)$$

ou ainda, a equação do preditor é da forma:

$$\hat{y}(k+j) = \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} E_j(q^{-1}, u) \Delta u(k-d+j-1) + \frac{F_j(q^{-1}, u)}{C(q^{-1})} y(k) \quad (5.48)$$

Utilizando agora a seguinte equação diofantina:

$$\frac{1}{C(q^{-1})} = M_j(q^{-1}) + q^{-j} \frac{N_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} \quad (5.49)$$

tem-se que:

$$\hat{y}(k+j) = \left[M_j(q^{-1}) + q^{-j} \frac{N_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} \right] \left[B(q^{-1}) E_j(q^{-1}, u) \Delta u(k-d+j-1) + F_j(q^{-1}, u) y(k) \right] \quad (5.50)$$

Esta equação pode também ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+j) = & M_j(q^{-1}) E_j(q^{-1}, u) B(q^{-1}) \Delta u(k-d+j-1) + M_j(q^{-1}) F_j(q^{-1}, u) y(k) + \\ & + N_j(q^{-1}) \left[\frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} E_j(q^{-1}, u) \Delta u(k-d-1) + \frac{F_j(q^{-1}, u)}{C(q^{-1})} y(k-j) \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

Da equação (5.48), tem-se que:

$$\hat{y}(k) = q^{-j} \hat{y}(k+j) = \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} E_j(q^{-1}, u) \Delta u(k-d-1) + \frac{F_j(q^{-1}, u)}{C(q^{-1})} y(k-j) \quad (5.52)$$

então:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+j) = & M_j(q^{-1}) E_j(q^{-1}, u) B(q^{-1}) \Delta u(k-d+j-1) + \\ & + \left[M_j(q^{-1}) F_j(q^{-1}, u) + N_j(q^{-1}) \right] y(k) \end{aligned} \quad (5.53)$$

Definindo:

$$H_j(q^{-1}, u) = M_j(q^{-1})E_j(q^{-1}, u)B(q^{-1}) \quad (5.54)$$

$$F'_j(q^{-1}, u) = M_j(q^{-1})F_j(q^{-1}, u) + N_j(q^{-1}) \quad (5.55)$$

obtém-se:

$$\hat{y}(k+j) = H_j(q^{-1}, u)\Delta u(k-d+j-1) + F'_j(q^{-1}, u)y(k) \quad (5.56)$$

Observe que esta equação é similar ao caso em que $C(q^{-1}) = 1$. Portanto, a partir de então utiliza-se o mesmo procedimento realizado anteriormente, produzindo a mesma lei de controle, isto é:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{H}(u)^T \mathbf{H}(u) + \lambda I)^{-1} \mathbf{H}(u)^T (\mathbf{r} - \mathbf{y}_l) \quad (5.57)$$

Em que:

$$\mathbf{y}_l = \mathbf{F}'(q^{-1}, u)y(k) + \mathbf{H}'(q^{-1}, u)\Delta u(k-1)$$

$$\mathbf{H}(u) = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \dots & h_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}'(q^{-1}, u) = \begin{bmatrix} [H_{d+1}(q^{-1}) - h_0]q \\ [H_{d+2}(q^{-1}) - h_0 - h_1 q^{-1}]q^2 \\ \vdots \\ [H_{d+N}(q^{-1}) - h_0 - h_1 q^{-1} - \dots - h_{N-1} q^{-(N-1)}]q^N \end{bmatrix}$$

Uma outra forma de calcular a predição, no caso em que o ruído é colorido, é considerar os sinais de entrada e saída filtrados, isto é:

$$y^f(k) = \frac{1}{C(q^{-1})}y(k) \quad e \quad u^f(k) = \frac{1}{C(q^{-1})}u(k)$$

tal que o modelo global resultante torna-se:

$$\tilde{A}(q^{-1}, u)y^f(k) = q^{-d}B(q^{-1})u^f(k-1) + \frac{e(k)}{\Delta} \quad (5.58)$$

ou ainda:

$$\bar{A}(q^{-1}, u)y^f(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u^f(k-1) + e(k) \quad (5.59)$$

Isto mostra que a utilização desta abordagem permite calcular a predição através do mesmo procedimento usado no caso em que $C(q^{-1}) = 1$. O sinal predito $\hat{y}^f(k+j)$ obtido desta forma tem que ser filtrado por $C(q^{-1})$ com o objetivo de se recuperar $\hat{y}(k+j)$.

Com o objetivo de avaliar o método acima descrito e mostrar uma forma como o GPC Bilinear com a abordagem apresentada pode ser implementado, apresenta-se a seguir um simples exemplo. Por simplicidade o controlador será projetado para o mesmo sistema bilinear de primeira ordem utilizado na abordagem por realimentação de saída.

Exemplo 5.2: Considere o mesmo modelo utilizado no exemplo 5.1, isto é:

$$(1 - .8q^{-1})y(k) = (.4 + .6q^{-1})u(k-1) + .2y(k-1)u(k-1) + \frac{e(k)}{\Delta}$$

Consideraremos os parâmetros de sintonia do controlador iguais a: $N_1=0+1=1$; $N_Y=0+N=N$ e $N_U=N=3$. Observe no modelo que neste caso $C(q^{-1}) = 1$ e portanto, o procedimento utilizado deve ser aquele desenvolvido para o caso. Assim, como foi mostrado, faz-se inicialmente a seguinte aproximação:

$$\tilde{a}_1(u) = .8 + .2u(k-1)$$

tal que:

$$[1 - \tilde{a}_1(u)q^{-1}]y(k) = (.4 + .6q^{-1})u(k-1) + \frac{e(k)}{\Delta}$$

ou ainda:

$$(1 - q^{-1})[1 - \tilde{a}_1(u)q^{-1}]y(k) = (.4 + .6q^{-1})\Delta u(k-1) + e(k)$$

que pode ser escrita ainda na seguinte forma:

$$\{1 - [1 + \tilde{a}_1(u)]q^{-1} + \tilde{a}_1(u)q^{-2}\}y(k) = (.4 + .6q^{-1})\Delta u(k-1) + e(k)$$

Assim, usando a equação diofantina, calcula-se os polinômios $F_j(q^{-1}, u)$ e $E_j(q^{-1}, u)$, com $j = 1 \dots 3$, e observando-se que $B(q^{-1}) = .4 + .6q^{-1}$ e que $\bar{A}(q^{-1}) = 1 - [1 + \tilde{a}_1(u)]q^{-1} + \tilde{a}_1(u)q^{-2}$. Tem-se assim as seguintes equações:

1. $E_1(q^{-1}) = 1$ e $F_1(q^{-1}, u) = [1 + \tilde{a}_1(u)] - \tilde{a}_1(u)q^{-1}$;
2. $E_2(q^{-1}, u) = 1 + [1 + \tilde{a}_1(u)]q^{-1}$ e $F_2(q^{-1}, u) = [\tilde{a}_1(u)^2 + \tilde{a}_1(u) + 1] - \tilde{a}_1(u)[1 + \tilde{a}_1(u)]q^{-1}$;
3. $E_3(q^{-1}, u) = 1 + [1 + \tilde{a}_1(u)]q^{-1} + [\tilde{a}_1(u)^2 + \tilde{a}_1(u) + 1]q^{-2}$ e

$$F_3(q^{-1}, u) = [1 + \tilde{a}_1(u)][1 + \tilde{a}_1(u)^2] - [\tilde{a}_1(u)^2 + \tilde{a}_1(u) + 1]\tilde{a}_1(u)q^{-1}$$

Como definido anteriormente, sabe-se que: $H_j(q^{-1}, u) = B(q^{-1})E_j(q^{-1}, u)$.

Assim, como $B(q^{-1}) = (.4 + .6q^{-1})$ então:

- $H_1(q^{-1}, u) = (.4 + .6q^{-1})$;
- $H_2(q^{-1}, u) = \{.4 + [1 + \tilde{a}_1(u)]q^{-1} + .6[1 + \tilde{a}_1(u)]q^{-2}\}$;
- $H_3(q^{-1}, u) = \{.4 + [1 + \tilde{a}_1(u)]q^{-1} + [1 + \tilde{a}_1(u) + .4\tilde{a}_1(u)^2]q^{-2} + .6[1 + \tilde{a}_1(u) + \tilde{a}_1(u)^2]q^{-3}\}$

Como as saídas preditas, neste caso, são dadas por:

$$\hat{y}(k + j) = H_j(q^{-1}, u)\Delta u(k + j - d - 1) + F_j(q^{-1}, u)y(k)$$

obtém-se então que:

$$\mathbf{y}_f = \mathbf{H}(u)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ [1 + .4\tilde{a}_1(u)] & 0.4 & 0 \\ [1 + \tilde{a}_1(u) + .4\tilde{a}_1(u)^2] & [1 + .4\tilde{a}_1(u)] & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k + 1) \\ \Delta u(k + 2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_f = \begin{bmatrix} 0.6\Delta u(k - 1) + [1 + \tilde{a}_1(u)]y(k) - \tilde{a}_1(u)y(k - 1) \\ .6[1 + \tilde{a}_1(u)]\Delta u(k - 1) + [1 + \tilde{a}_1(u) + \tilde{a}_1(u)^2]y(k) - \tilde{a}_1(u)[1 + \tilde{a}_1(u)]y(k - 1) \\ .6[1 + \tilde{a}_1(u) + \tilde{a}_1(u)^2]\Delta u(k - 1) + [1 + \tilde{a}_1(u)][1 + \tilde{a}_1(u)^2]y(k) - \tilde{a}_1(u)[1 + \tilde{a}_1(u) + \tilde{a}_1(u)^2]y(k - 1) \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $\lambda=0.8$ e conhecendo-se $\mathbf{H}(u)$, obtém-se a lei de controle que é dada por::

$$\mathbf{u} = (\mathbf{H}(u)^T \mathbf{H}(u) + \lambda I)^{-1} \mathbf{H}(u)^T (\mathbf{r} - \mathbf{y}_l)$$

ou ainda:

$$\Delta u = K(r - y_l)$$

com K sendo a primeira linha de $\mathbf{G}(u) = (\mathbf{H}(u)^T \mathbf{H}(u) + \lambda I)^{-1} \mathbf{H}(u)^T$.

Considerando a trajetória de referência constante, o gráfico da figura 5.3 a seguir mostra os resultados, representados pela saída e pelo sinal de controle, do sistema de controle quando um degrau unitário é aplicado:

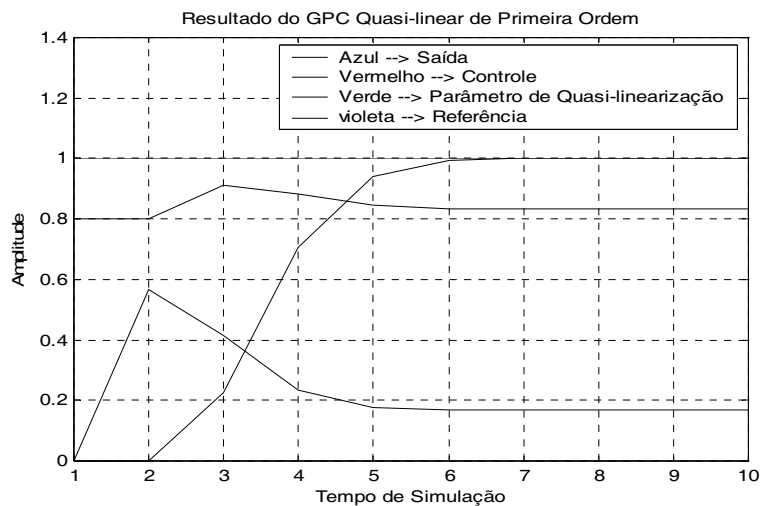


Figura 5.3 Resultados utilizando o modelo quasilinear.

A figura 5.4 a seguir mostra a comparação entre os resultados obtidos com o GPC utilizando o modelo quasilinear e o GPC utilizando o modelo linear. Dos resultados apresentados, pode-se concluir que a aproximação quasilinear é de fato mais adequada como solução do problema aqui analisado. Observe que não só a saída, como também o sinal de controle, do GPC utilizando o modelo quasilinear apresentaram valores mais convenientes.

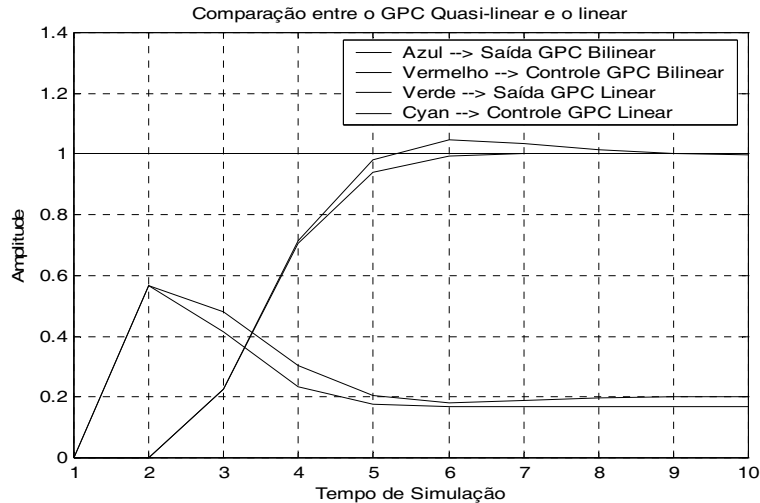


Figura 5.4 Resultados comparativos entre o GPC linear e o quasilinear.

5.5 Conclusões:

Neste capítulo, apresentou-se a teoria geral de controle preditivo baseado em modelos bilineares. Inicialmente para o caso SISO, descreveu-se o modelo bilinear. Dentre as abordagens apresentadas, detalhou-se aquelas que buscam uma solução analítica, mesmo que adotando um processo de linearização. Como mencionado, a obtenção de uma lei de controle *ótima* para o controlador preditivo bilinear é um problema de otimização não linear e uma solução analítica para o problema não existe. Neste sentido, a abordagem que utiliza a linearização por realimentação de saída e a que utiliza o modelo quasilinear foram detalhadamente apresentadas e analisadas, incluindo-se exemplos para ilustrar e fortalecer os comentários apresentados. A abordagem que utiliza o modelo quasilinear mostrou-se mais consistente e robusta, merecendo assim pesquisa no sentido de buscar, dentro desta abordagem, uma solução, embora ainda *sub-ótima*, que apresente melhores resultados. Assim, apresenta-se no próximo capítulo os resultados da aplicação do GPC, que utiliza o modelo quasilinear, em dois processos reconhecidamente não lineares, comprovando-se a vantagem do método. Ainda, como resultado desta pesquisa, apresenta-se no capítulo VII uma nova abordagem do controlador preditivo bilinear, cujos resultados justificam o esforço.

CAPÍTULO VI

APLICAÇÃO EM PROCESSOS BILINEARES

6.1 Introdução

Neste capítulo, apresenta-se duas aplicações, via modelos simulados, de controle preditivo bilinear realizadas em sistemas que têm dinâmica reconhecidamente bilinear. Uma das aplicações é em uma coluna de destilação de tolueno e a outra em um motor de indução. Em ambos os casos o controlador preditivo monovariável baseado em sistemas bilineares, utilizando a abordagem do modelo quasilinear é implementado, após a identificação de um modelo bilinear adequadamente validado. No caso da coluna de destilação, implementa-se também o controlador preditivo generalizado monovariável baseado em um modelo linear identificado e também validado. Os resultados da aplicação de ambos os controladores são mostrados e comparados. No caso do motor de indução o controlador preditivo baseado em modelos bilineares é comparado com a abordagem clássica, utilizando modelo linear, por ser esta a freqüentemente utilizadas nestes sistemas.

6.2 Descrição dos processos utilizados:

A seguir descreve-se sucintamente as características, com as respectivas justificativas, dos processos escolhidos para avaliação de desempenho de controladores preditivos baseados em modelos bilineares.

6.2.1 Coluna de destilação de tolueno:

Colunas de Destilação são um dos mais freqüentes e importantes processos na Indústria Química, tornando a implementação de técnicas de controle avançado um esforço indispensável. Neste caso, a identificação de modelos adequados é requerida e assim, muitas dificuldades surgem devido a complexidade destes processos. Dentre estas dificuldades podemos destacar a não linearidade, que é a mais freqüente, o atraso de transporte, a interação entre as malhas, as perturbações estocásticas, etc. Além disso, a grande maioria dos processos industriais é não linear, e em especial o modelo bilinear é uma forma de representação natural da dinâmica não linear presente no processo de destilação, segundo Mohler (1973). Apesar da bilinearidade presente na dinâmica do processo, o modelo bilinear é linear nos parâmetros, o que permite a utilização do algoritmo dos mínimos quadrados recursivo (***Recursive Least Squares - RLS***) na estimação destes.

Pelo exposto, justifica-se a escolha da coluna de destilação como ambiente adequado para avaliação de desempenho de controladores preditivos bilineares. Para isto, utilizou-se um modelo de ordem completa não linear, de uma ***Coluna de Destilação de Tolueno***, cuja validação foi realizada com a planta real, apresentada em Fontes et al.(2000) e descrita sucintamente a seguir.

A técnica de separação de tolueno de uma carga composta por tolueno, xileno e C9 aromáticos é uma tarefa facilmente realizável. A coluna de destilação utilizada neste trabalho é composta de dez (10) estágios de equilíbrio de forma que, 98% de concentração do produto de topo é obtido. O modelo ideal termodinâmico, baseado na lei de Raoult, é adequado para representar o processo, uma vez que a mistura tolueno/xileno tem comportamento ideal em baixa pressão. O modelo dinâmico é baseado em um exemplo desenvolvido por Luyben (1990), para destilação multicomponente. As subrotinas utilizadas para o cálculo da entalpia, pressão de vapor, densidade foram desenvolvidas usando as equações disponíveis no simulador comercial ASPEN PLUS. A estimação inicial da temperatura e composição disponíveis no ASPEN PLUS foram também usadas.

Para reduzir o tempo de computação, necessário para gerar os resultados, algumas simplificações, citadas a seguir, foram introduzidas, sem, no entanto, prejudicar e invalidar os resultados de simulação:

- a simulação foi realizada com três componentes;
- a pressão varia linearmente do topo para a base da coluna;
- volume de líquido no condensador e reboiler é considerado constante;
- não é considerada a dinâmica do refeedor;
- acúmulo molar do vapor é considerado desprezível.

A figura 6.1 a seguir apresenta as condições de operação obtidas da coluna:

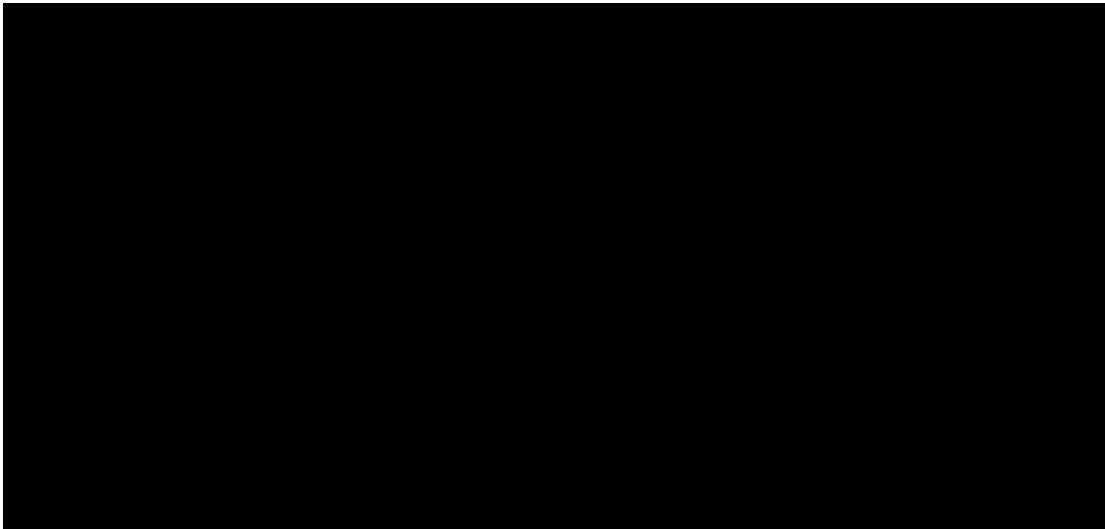


Figura 6.1 – Condições operacionais da coluna

É interessante observar que estas condições e o modelo foram validados qualitativamente, considerando-se uma planta real.

6.2.2 Modelagem e estratégia de controle para o motor de indução;

O motor de indução é um dos mais importantes e freqüentes equipamentos elétricos na indústria em geral, tendo um largo espectro de aplicação. Isto, evidentemente, torna a implementação de técnicas de controle com melhor desempenho, um esforço essencial e justificado. Para isto, um modelo que melhor represente dinamicamente o referido equipamento é

fundamental, para implementar e desenvolver técnicas de controle mais eficientes e aplicáveis. Tendo em vista então que o motor de indução tem um comportamento essencialmente não linear, sendo, em especial, o modelo bilinear uma forma natural de representação deste, segundo Figalli et al.(1984), escolheu-se o motor de indução como também um ambiente adequado para avaliação de desempenho de controladores preditivos bilineares.

A utilização da técnica de controle vetorial, abordagem normalmente adotada na modelagem do motor de indução, tem como qualidade principal a simplicidade do modelo obtido, levando-se em conta a complexidade da dinâmica não linear deste. Assim, para o motor de indução utilizou-se a técnica de modelagem vetorial, tornando mais simples a estrutura de controle. Nesta, utiliza-se como variável manipulada a corrente no motor. A partir de um inversor do tipo “*Voltage Source to Invert*” (VSI), com modulação por largura de pulso (PWM) e controle de corrente, é possível impor correntes ao motor. Conseqüentemente, o grupo formado pelo controle vetorial indireto, inversor e motor de indução, mostrado na Figura 6.2 a seguir, é equivalente a uma máquina de corrente contínua. Nesta, o campo é representado pela componente do fluxo vetorial do rotor no eixo direto e a corrente de armadura é representada pela componente do vetor corrente do estator no eixo em quadratura.

Devido à complexidade da dinâmica não linear do motor de indução, o uso de valores incorretos de parâmetros no modelo vetorial, ou um modelo inverso inadequado, causa no entanto, o acoplamento das equações de fluxo e torque. Evidentemente, isto conduz a um modelo resultante não linear e portanto não tão simples como é usualmente considerado em muitos dos projetos de controladores que utilizam esta abordagem. Isto evidentemente, degrada a ação do sistema de controle. Além disso, no motor de indução, alguns parâmetros variam com as condições de operação, principalmente a constante de tempo do rotor, devido principalmente à variação da resistência rotórica com a temperatura, o que impõe a necessidade de utilização de uma estratégia de controle com algum grau de robustez.

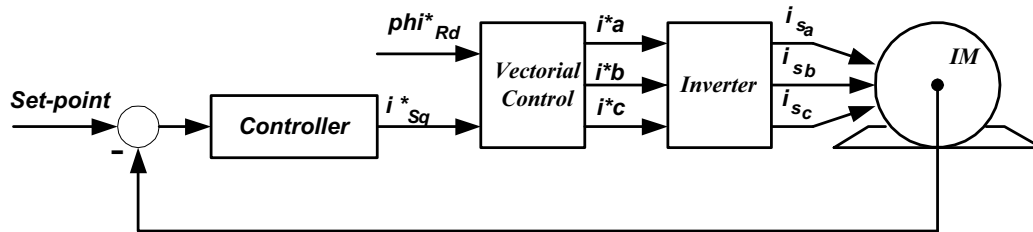


Figura 6.2 Diagrama que representa a estratégia de controle utilizada.

Assim, como já mencionado, objetivando evidenciar o melhor desempenho do controlador preditivo bilinear, em face da abordagem clássica, implementou-se as duas abordagens. Na abordagem clássica o motor é considerado como equivalente a uma máquina DC e geralmente é representado por um modelo linear de primeira ordem. Neste caso, buscando uma sintonia mais rigorosa, os parâmetros do controlador foram ajustados através do método analítico do “Lugar Geométrico das Raízes” (LGR). Os parâmetros do controlador preditivo bilinear foram escolhidos em consonância com as regras de sintonia de controladores preditivos

6.3 Controle preditivo bilinear aplicado na coluna de destilação

A coluna de destilação de tolueno é um processo multivariável e o acoplamento entre os pares entrada/saída, utilizados como variáveis manipuladas e variáveis controladas respectivamente, existe, como verificado em Fontes et al. (2000). No entanto, com o objetivo preliminar de mostrar o melhor desempenho do controlador preditivo bilinear em face do linear, independente do processo controlado ser mono ou multivariável, foi identificado um modelo bilinear SISO para cada par.

No processo de identificação, como o tempo de acomodação entre o destilado (D) e a concentração do produto de topo (temperatura do terceiro

prato -T3) é de 3.2 horas e entre o refeedor (Q) e a concentração do produto da base (temperatura do décimo prato -T10) é de 4.1 horas, adotou-se um período de amostragem de 0.1 hora, para ambos.

Para estimação de parâmetros de cada modelo bilinear, uma seqüência de dados foi obtida, para cada par, aplicando-se no modelo da coluna, em cada entrada individualmente, um Sinal Binário Pseudo Aleatório (SBPA), persistentemente excitante para um sistema bilinear, segundo Dasgupta (1991), adicionado ao sinal de regime permanente.

A simulação foi realizada durante um tempo que corresponde a 100 horas de operação da coluna. Isto gerou dados suficientes para estimação dos parâmetros. Na aplicação das técnicas utilizadas, os valores iniciais dos parâmetros, na ausência de um conhecimento a priori, são considerados nulos. No entanto, o valor inicial escolhido do vetor de estado foi compatível com as condições nominais da coluna.

A ordem do modelo bilinear foi escolhido usando o critério de Akaike. A matriz de covariância do erro de estimação de parâmetros é iniciada com o valor de $(10^4)\mathbf{I}$, sendo \mathbf{I} uma matriz identidade de ordem compatível.

Os modelos bilineares obtidos com a técnica de identificação utilizada são os seguintes:

- par 1(modelo SISO 1): destilado (D) e a concentração do produto de topo (T3),

$$(1 - 1.1883q^{-1} + .2814q^{-2})y(t) = (.0075 + .0047q^{-1})u(t - 1) - .0031y(t - 1)u(t - 1) + .0050y(t - 2)u(t - 2)$$

- par 2 (modelo SISO 2): refeedor (Q) e a concentração do produto da base (T10),

$$(1 - 1.5331q^{-1} + .6834q^{-2})y(t) = .9451u(t - 1) + 1.0508y(t - 1)u(t - 1) - 1.0265y(t - 2)u(t - 2)$$

Estes parâmetros geraram um erro de ajuste entre o modelo identificado e o processo real, aqui representado pelo modelo simulado, com média aproximadamente de $0,75 \times 10^{-3}$ e covariância de 3.5×10^{-6} , para o primeiro par, enquanto que, para o segundo par, a média foi de $.4 \times 10^{-3}$ e covariância de 1.5×10^{-6} .

Após a estimação dos parâmetros, a validação do modelo identificado foi realizada usando como entrada a função degrau, com várias mudanças no valor nominal da taxa de fluxo de entrada. Uma outra validação foi realizada usando um sinal SBPA, adicionado à entrada nas condições nominais de operação, para cada par. O resultado para o par 1 é mostrado na Figura 6.3 a seguir:

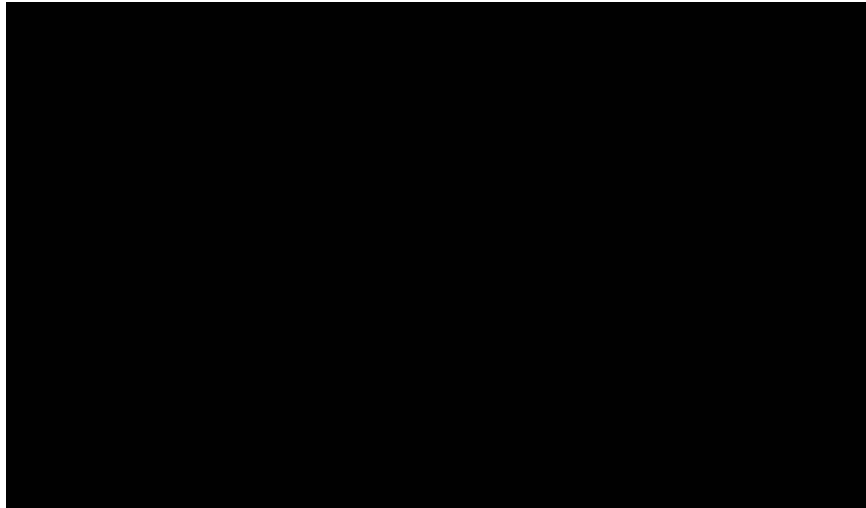


Figura 6.3 – Respostas para um PRBA na entrada de $\pm 5\%$

O controle de uma coluna de destilação é constituído do *Controle de Inventário*, que permite a operação da coluna, mantendo-se estáveis os níveis do vaso de topo e de fundo da coluna, e do *Controle de qualidade*, em que se garante, a especificação dos produtos de topo e fundo da coluna.

Existem diversas combinações entre as variáveis manipuladas e as controladas que constituem as diversas estruturas de controle. Neste trabalho, adotou-se a estrutura D-Q, que é a mais utilizada, e a partir desta determinou-se os pratos sensíveis. A técnica utilizada para identificação destes foi o levantamento da matriz de sensibilidade. A partir do modelo estático,

perturbou-se o sistema, mantendo-se as demais variáveis constantes. Observou-se que a maior sensibilidade, está nos pratos 3 e 10. Portanto, a temperatura nestes pratos são as variáveis do sistema a serem controladas, pelo destilado(D) e pela carga térmica da coluna(Q) respectivamente.

Assim, usando-se o modelo bilinear obtido para o par destilado (D) e a concentração do produto de topo, representada por (T3), o controlador preditivo generalizado bilinear monovariável foi aplicado, mantendo-se a malha de fundo aberta, com a carga térmica na condição nominal de operação. O ajuste escolhido do controlador, principalmente o horizonte de predição, foi baseado na característica da resposta ao degrau para o referido par.

Ainda para este par, foi identificado um modelo linear, apresentado em Fontes et al.(2000), sendo utilizada a mesma abordagem utilizada para o caso bilinear. Então, aplicou-se o controlador preditivo generalizado linear, no mesmo par acima mencionado, nas mesmas condições e com os mesmos parâmetros de sintonia.

Os resultados, para uma mudança de 5% na **Referência**, são mostrados nas Figuras 6.4 e 6.5, a seguir. Nestas, observa-se que o Controlador Preditivo Generalizado baseado em modelo bilinear apresenta um melhor desempenho, tanto do ponto de vista de resposta do processo quanto do esforço de controle, quando comparado com o controlador linear.

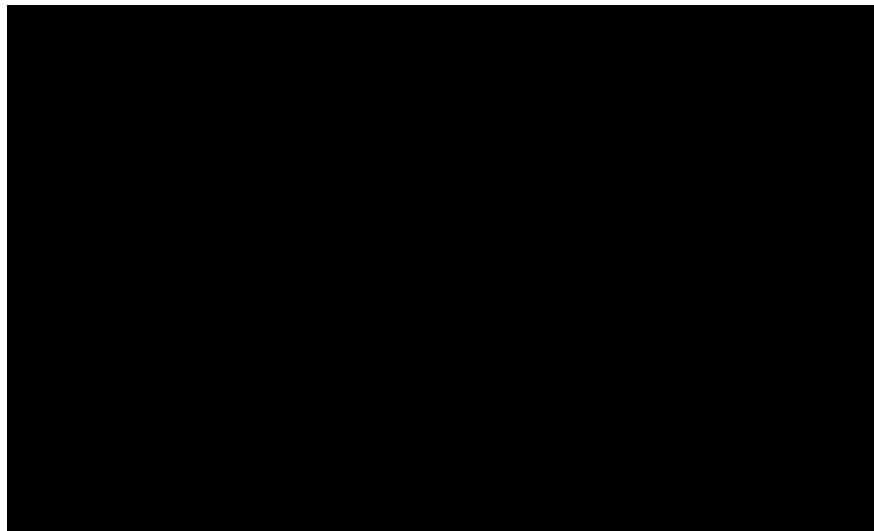


Figura 6.4 – Respostas para uma mudança de 5% na Referência



Figura 6.5 – Sinal de Controle para uma mudança de 5% na Referência

6.4 Controle preditivo bilinear aplicado no motor de indução

O modelo utilizado é o de um motor de indução de 185W, com rotor tipo gaiola de esquilo, dois (2) pares de pólos, 182.28 rad./s, 380V, 60 Hz. Como o tempo de resposta entre a variável manipulada e a variável controlada, com carga nominal é de 3.85s, adotou-se um período de amostragem de 0.1s. Para estimação de parâmetros de um modelo bilinear local, uma seqüência de dados foi obtida, através da aplicação no modelo do motor de indução, de um Sinal Binário Pseudo Aleatório (SBPA), persistentemente excitante para um sistema bilinear, adicionado ao sinal de regime permanente. A simulação foi realizada durante um tempo que corresponde a 100 segundos de operação do motor. Isto gerou dados suficientes para estimação dos parâmetros. A matriz de covariância do erro de estimação de parâmetros é iniciada com o valor de $(10^4)I$, sendo I uma matriz identidade de ordem compatível. O modelo bilinear obtido é o seguinte:

$$(1 - 0.8712q^{-1})y(t) = 18.19u(t-1) - .11y(t-1)u(t-1) + e(t)$$

Utilizando a mesma técnica de identificação um modelo de primeira ordem localmente linear foi identificado, tendo sido obtido o seguinte resultado:

$$(1-0.9031q^{-1})y(t) = 17.4807u(t-1) + e(t)$$

Estes parâmetros geraram um erro de ajuste entre o modelo identificado e o processo real, aqui representado pelo modelo simulado, com covariância de aproximadamente 1.1×10^{-6} , para o modelo bilinear, enquanto que para o modelo linear, a covariância foi de 2×10^{-4} . Após a estimação dos parâmetros, a validação dos modelos identificados foi realizada usando como entrada a função degrau, com várias mudanças no valor nominal da corrente de entrada. Uma outra validação foi realizada usando um sinal SBPA, adicionado à entrada nas condições nominais de operação.

A sintonia do controlador preditivo bilinear, principalmente o horizonte de predição, foi baseada na característica da resposta ao degrau do motor de indução, em malha aberta. No caso do controlador linear, para a sintonia do controlador PID foi utilizado o método do “*Lugar Geométrico das Raízes*”. Assim, estes foram aplicados ao motor de indução conforme o diagrama apresentado na Figura 6.2. Os resultados para uma mudança +8% e -20% na velocidade de referência, são mostrados nas Figuras 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9, a seguir. Nestas, observa-se que o controlador preditivo baseado no modelo bilinear, utilizando a aproximação quasilinear, apresenta um melhor desempenho, tanto do ponto de vista de resposta do sistema quanto do esforço de controle, quando comparado com o caso linear. O sistema de controle com o controlador preditivo bilinear apresenta um menor tempo de resposta em conjunto com um menor esforço de controle. Nas Figuras 6.10 e 6.11 apresenta-se também os resultados obtidos com um aumento e uma diminuição da carga. Os resultados mostram novamente que o controlador preditivo bilinear apresenta um melhor desempenho que o caso linear. Nesta situação, o desempenho do controlador preditivo bilinear, devido a sua própria característica, é muito melhor do que aquele apresentado pela abordagem clássica, sendo justificado também pela inerente dinâmica não linear do motor de indução.

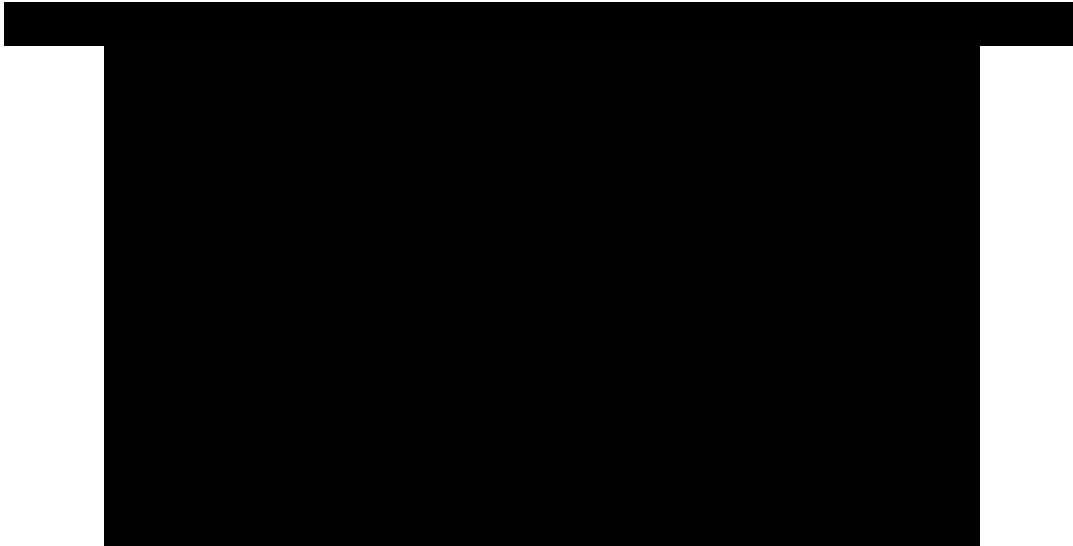


Figura 6.6 Respostas para uma mudança de + 8 % na velocidade nominal.

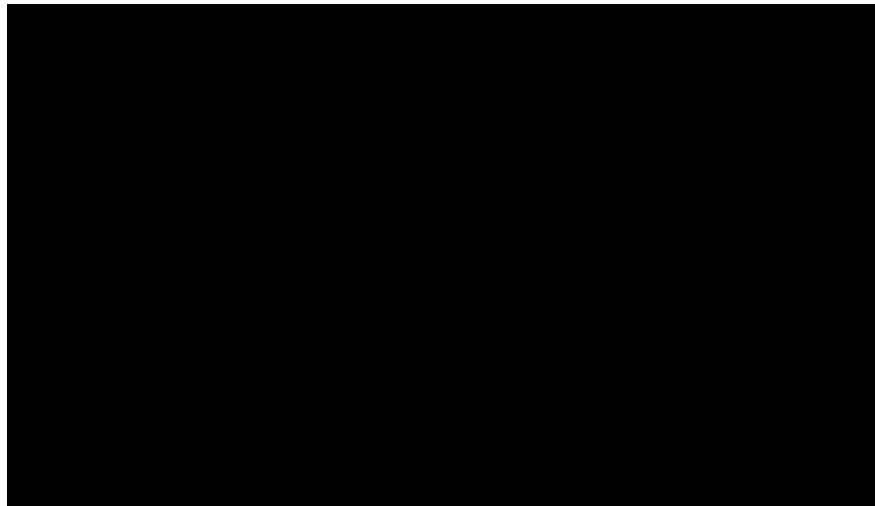


Figura 6.7 Sinal de controle para uma mudança de + 8 % na velocidade nominal.

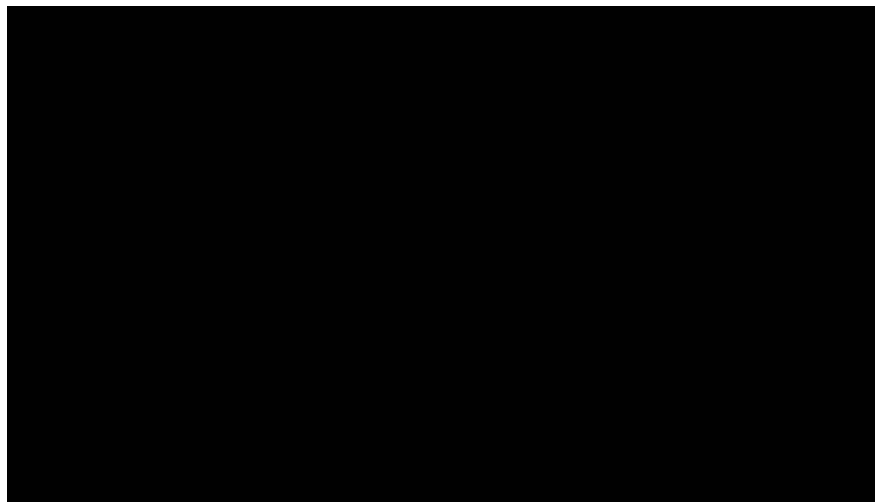


Figura 6.8 Respostas para uma mudança de -20 % na velocidade nominal.

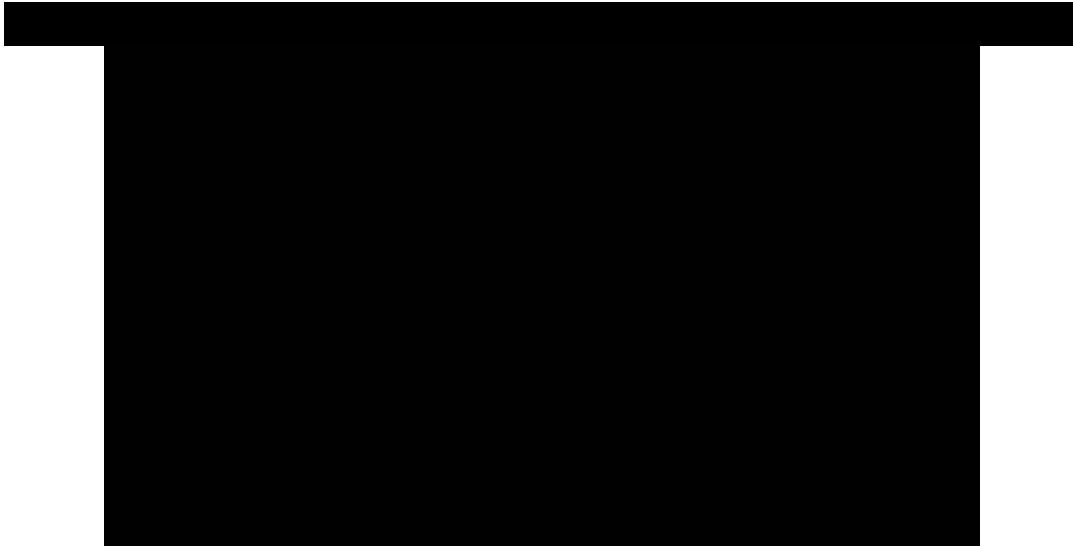


Figura 6.9 Sinal de controle para uma mudança de -20 % na velocidade nominal.

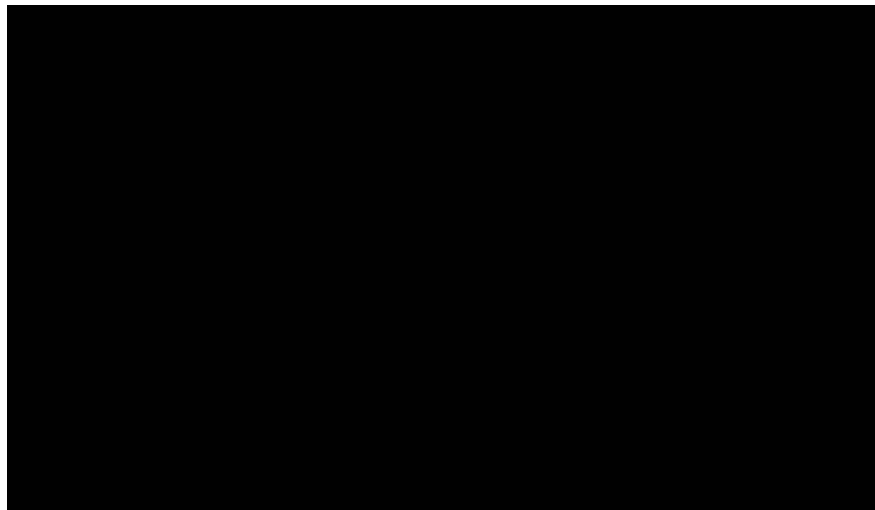


Figura 6.10 Respostas para mudanças na carga nominal.

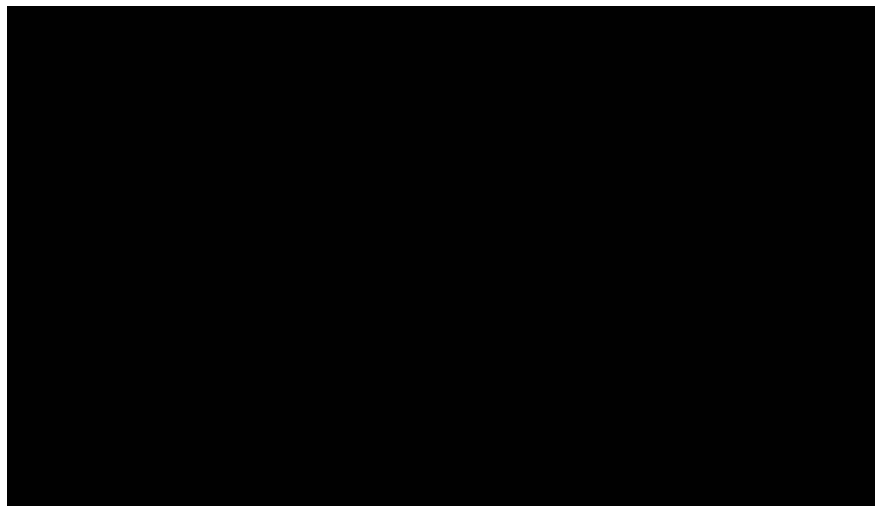


Figura 6.11 Sinal de controle para mudanças na carga nominal.

6.5 Conclusões:

Neste capítulo, dois processos, reconhecidamente de dinâmica bilinear, foram sucintamente descritos e sua importância justificada dentro do escopo desta tese. Modelos bilineares destes foram identificados, mostrando serem estes eficientes na representação de suas respectivas não linearidades devido à natureza bilinear destes. Um algoritmo de controle preditivo bilinear monovariável foi aplicado em ambos os processos. No caso da coluna de destilação de tolueno, aplicou-se na malha de topo, mantendo-se a malha de fundo aberta, com a carga térmica na condição nominal de operação.

Os resultados mostram que o controlador preditivo bilinear, devido a sua própria característica, apresenta um desempenho melhor, tanto do ponto de vista da resposta do processo como do esforço de controle, quando comparado com o caso linear. Assim, os resultados apresentados evidenciam que a abordagem bilinear oferece um desempenho potencialmente grande, produzindo significativo reduzido esforço de controle e melhor desempenho.

É interessante observar que a abordagem bilinear pode ser aplicável em uma grande faixa de sistemas não lineares em que a bilinearidade local pode ser assumida.

CAPÍTULO VII

CONTROLE PREDITIVO BILINEAR: UMA NOVA ABORDAGEM

7.1 Introdução:

O presente capítulo apresenta uma nova abordagem para um controlador preditivo bilinear. A abordagem é baseada no Controlador Preditivo Generalizado Bilinear (CPGB), estratégia que utiliza o modelo quasilinear por degrau de tempo NARIMAX apresentado por Goodhart, *et al.*, (1994). Nessa abordagem, devido ao modelo utilizado, existe um erro de predição, o qual aumenta com o horizonte de predição, degradando o desempenho deste controlador. No controlador, o preditor utilizado é uma solução sub-ótima, cuja predição se distancia do real valor na medida em que o horizonte de predição aumenta, sem considerar neste caso o desvio devido ao ruído e/ou erros de medição. Assim, na presente abordagem, um modelo bilinear compensado é utilizado, cujo termo de compensação depende do horizonte de predição. O algoritmo e os resultados obtidos com um sistema de primeira ordem, predominantemente bilinear, são mostrados neste capítulo, evidenciando que o controlador baseado no modelo bilinear compensado apresenta um desempenho melhor que aquele baseado no modelo quasilinear por degrau de tempo.

É importante observar também que a abordagem apresentada tem seu grau de importância e interesse, devido ao fato que uma solução analítica, que

representa a solução ótima, não existe. Assim, o esforço de se achar uma solução melhor, embora sub-ótima, é justificado.

7.2 Modelo monovariável quasilinear por degrau de tempo compensado:

Considere o modelo polinomial bilinear apresentado em (5.1), isto é:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{j=1}^m \eta_{(i-d),j} u(k-j-i+1)y(k-i) + \frac{C(q^{-1})}{\Delta(q^{-1})} e(k) \quad (7.1)$$

Em que os polinômios $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$ são definidos pelo polinômio geral:

$$P(q^{-1}) = p_0 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2} + \dots + p_{n_p} q^{-n_p} \quad (7.2)$$

com: $a_0 = c_0 = 1$ e b_0 qualquer; $\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$; $\eta_{l,j} = 0$ para $\forall l \leq 0$; $u(k)$, $y(k)$ e $e(k) \in \mathcal{R}$ são, respectivamente, as seqüências da entrada, da saída e do ruído branco; q^{-1} é o operador deslocamento definido como $q^{-j}y(k) = y(k-j)$; $d \geq 1$ é o retardo expresso como um múltiplo inteiro do período de amostragem e os zeros de $C(q^{-1})$, por hipótese, assumidos que estão no interior do círculo unitário.

Também como já definido anteriormente a aproximação quasilinear por degrau de tempo consiste em reescrever (7.1) na forma:

$$y(k) = - \sum_{i=1}^{n_a} \tilde{a}_i(u) y(k-i) + q^{-d} B(q^{-1}) u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{\Delta(q^{-1})} e(k) \quad (7.3)$$

Em que:

$$\tilde{a}_i(u) = \left(a_i - \sum_{j=1}^m \eta_{(i-d),j} u(k-i-j+1) \right) \quad (7.4)$$

Este modelo pode ainda ser escrito na forma:

$$\tilde{A}(q^{-1}, u)y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + \frac{C(q^{-1})}{\Delta(q^{-1})}e(k) \quad (7.5)$$

Em que:

$$\tilde{A}(q^{-1}, u) = 1 + \tilde{a}_1(u)q^{-1} + \tilde{a}_2(u)q^{-2} + \dots + \tilde{a}_{n_a}(u)q^{-n_a} \quad (7.6)$$

Em cada instante k os valores passados de $u(k)$ são conhecidos, permitindo assim que os coeficientes $\tilde{a}_i(u)$ do polinômio $\tilde{A}(q^{-1}, u)$ sejam determinados e considerados constantes até o instante seguinte. Este modelo pode ainda ser escrito na forma:

$$\Delta\tilde{A}(q^{-1}, u)y(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (7.7)$$

Fazendo:

$$\bar{A}(q^{-1}, u) = \Delta\tilde{A}(q^{-1}, u) = \tilde{A}(q^{-1}, u) - q^{-1}\tilde{A}(q^{-1}, u) \quad (7.8)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{A}(q^{-1}, u) = & 1 + [\tilde{a}_1(u) - 1]q^{-1} + [\tilde{a}_2(u) - \tilde{a}_1(u)]q^{-2} + \dots + \\ & + [\tilde{a}_{n_a}(u) - \tilde{a}_{n_a-1}(u)]q^{-n_a} - \tilde{a}_{n_a}(u)q^{-(n_a+1)} \end{aligned} \quad (7.9)$$

ou ainda,

$$\bar{A}(q^{-1}, u) = 1 + \bar{a}_1(u)q^{-1} + \bar{a}_2(u)q^{-2} + \dots + \bar{a}_{n_a}(u)q^{-n_a} + \bar{a}_{n_a+1}(u)q^{-(n_a+1)} \quad (7.10)$$

tem-se finalmente o seguinte modelo:

$$\bar{A}(q^{-1}, u)y(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (7.11)$$

Este modelo, é denominado modelo **NARIMAX quasilinear por degrau de tempo**. Com este modelo, válido para cada instante k , para o controlador preditivo generalizado, a predição da saída i -passos à frente é obtida, procedimento que é necessário e característico dos controladores preditivos.

Devido à aproximação utilizada, um erro de predição existe, sem considerar neste caso, o erro devido ao ruído e/ou erros de medição. Este erro aumenta a medida que o horizonte de predição aumenta, o que evidentemente degrada o desempenho do controlador.

Utilizando um modelo bilinear que represente a dinâmica de um sistema, obtido, por exemplo, através de um processo de identificação, e o correspondente modelo quasilinear por degrau de tempo, uma seqüência de erros de predição, para um dado horizonte, é gerada. Para isto, uma seqüência qualquer do sinal de entrada é utilizada tanto pelo modelo bilinear como pelo preditor i-passos à frente, baseado na aproximação quasilinear. Com isto, gera-se a saída considerada real e a saída predita. Assim, utilizando-se estes resultados obtém-se uma seqüência de erros de predição i-passos à frente. Existe evidentemente um **mapeamento** não linear de $u(.)$ e também do horizonte de predição i , para este erro. Então, pode-se afirmar que existe um modelo dinâmico não linear, para cada horizonte de predição i , que relaciona o erro de predição e a entrada $u(.)$. Assim, no sentido de ilustrar o que foi exposto, considere o sistema bilinear de primeira ordem a seguir:

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k-1) + du(k-1)y(k-1)$$

Baseada neste modelo, a saída do sistema bilinear um passo à frente é dada por:

$$y(k+1) = ay(k) + bu(k) + du(k)y(k)$$

enquanto que a predição um passo à frente baseada no modelo quasilinear é dada por:

$$\hat{y}(k+1) = [a + du(k-1)]y(k) + bu(k)$$

Assim $\varepsilon_1(k)$, que representa o erro de predição referente ao horizonte 1 é dado por:

$$\varepsilon_1(k) = y(k+1) - \hat{y}(k+1) = d[u(k) - u(k-1)]y(k)$$

Esta equação mostra que existe uma relação não linear entre $\varepsilon_1(\cdot)$, $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$. Por outro lado, do modelo bilinear, verifica-se que $y(\cdot)$ é função não linear de $u(\cdot)$. Isto mostra que existe uma relação não linear entre $\varepsilon_1(\cdot)$ e $u(\cdot)$. Pelo que foi analisado, pode-se entender que o termo de compensação do modelo quasilinear, aqui proposto, corresponde à linearização do referido modelo não linear, o que pode ser interpretado como sendo uma aproximação de **Segunda Ordem** para o modelo bilinear apresentado em (7.1).

Neste sentido, a compensação do modelo quasilinear consiste em achar um modelo linear, média móvel, cuja ordem e parâmetros dependem do erro de predição e do horizonte de predição. A ordem e os parâmetros deste modelo são aqueles que minimizam a variância do erro de predição, ou ainda uma norma do vetor erro de predição, como por exemplo a norma de Frobenius. De uma forma sistemática, considere o seguinte diagrama:



Figura 7.1- Diagrama representando o termo de compensação.

Em que: $u(\cdot)$ representa uma seqüência qualquer do sinal de entrada aplicada no modelo bilinear e utilizada pelo preditor i passos à frente baseado na aproximação quasilinear;

$\varepsilon_i(\cdot)$ representa uma seqüência do erro de predição referente ao horizonte i ;

$L_i(q^{-1})$ representa o termo de compensação referente ao horizonte i .

O termo de compensação $L_i(q^{-1})$ é um polinômio da forma:

$$L_i(q^{-1}) = l_{0i} + l_{1i}q^{-1} + l_{2i}q^{-2} + \dots + l_{n_i}q^{-n_i} \quad (7.12)$$

cuja ordem e parâmetros dependem do erro de predição e do horizonte de predição e são determinados de forma que minimizem a variância do erro de predição. Pelo exposto tem-se o seguinte modelo linear média móvel:

$$\varepsilon_i(k) = L_i(q^{-1})u(k) \quad (7.13)$$

Observe que a ordem, isto é n_i , e os parâmetros l_{ji} , com $j=1 \dots n_i$, de $L_i(q^{-1})$ são determinados utilizando-se, por exemplo, o critério de *Akaike* (apêndice B) e o algoritmo dos mínimos quadrados (Åström and Wittenmak, 1995), respectivamente.

Observe que o erro de predição, no instante k , referente ao horizonte i é dado por:

$$\varepsilon_i(k) = y(k+i) - \hat{y}(k+i) \quad (7.14)$$

em que: $y(k+i)$ representa a saída do sistema bilinear;

$\hat{y}(k+i)$ é a predição i -passos à frente obtida através do modelo quasilinear, com informações até o instante k .

Considere então o modelo apresentado em (7.11). A representação dinâmica, i -passos à frente, válida para $i \geq 1$, baseada no modelo quasilinear compensado é como segue:

$$\bar{A}(q^{-1}, u)y(k+i) = q^{-d}[B(q^{-1}) + L_i(q^{-1})]\Delta u(k+i-1) + C(q^{-1})e(k+i) \quad (7.15)$$

em que $L_i(q^{-1})$ representa o termo adicional que compensa o erro de predição. O grau de $L_i(q^{-1})$ depende do horizonte de predição.

7.2.1 Propriedade do termo de compensação:

Considerando o que foi apresentado, verifica-se que o polinômio $L_i(q^{-1})$ corresponde a um termo de compensação dinâmica, tal que o ganho estático do modelo compensado é necessariamente o mesmo do modelo quasilinear. Desta forma, tem-se que:

$$L_i(1) = 0 \quad (7.16)$$

para $\forall i$. Da definição de $L_i(q^{-1})$ apresentada em (7.12) e tendo em vista (7.16), tem-se que:

$$\sum_{j=0}^{n_i} l_{j,i} = 0 \quad (7.17)$$

para $\forall i$.

7.2.2 Estrutura do termo de compensação:

O termo de compensação $L_i(q^{-1})$ referente ao horizonte i , como já mencionado, é adicionado ao modelo quasilinear objetivando corrigir a predição realizada no instante k por este modelo, para um dado horizonte i . Pelo fato do modelo quasilinear, devido à característica da aproximação utilizada na obtenção deste modelo, utilizar na predição realizada no instante k , valores passados de u a partir de i prévios instantes de amostragem, é necessário compensar, através de $L_i(q^{-1})$, em correspondência aos mesmos instantes. Então, considerando o modelo quasilinear por degrau de tempo **NARIMAX** apresentado em (7.11), com grau $\{\bar{A}(q^{-1}, u)\} = (n_a + 1)$, o termo de compensação tem a seguinte estrutura:

$$L_i(q^{-1}) = l_{0,i} + l_{1,i}q^{-i} + l_{2,i}q^{-(i+1)} + \dots + l_{(n_a+1),i}q^{-(n_a+1+i)} \quad (7.18)$$

Deve-se observar que nos exemplos mostrados neste capítulo, esta estrutura se confirma e ainda que tal estrutura atende o critério de Akaike.

7.3 Controlador Preditivo Bilinear Generalizado Compensado:

Semelhantemente ao algoritmo GPC, o controlador preditivo bilinear generalizado compensado calcula uma seqüência de ações de controle de forma a minimizar uma função objetivo multi-passo definida sobre um horizonte

de predição, com ponderação da ação de controle. Considere então a mesma função objetivo apresentada em (3.8):

$$J = \sum_{i=N_1}^{N_Y} \delta(i) [\hat{y}(k+i) - r(k+i)]^2 + \sum_{i=1}^{N_U} \lambda(i) [\Delta u(k+i-1)]^2 \quad (7.19)$$

Em que: $\hat{y}(k+i)$ é ainda uma predição sub-ótima i -passos à frente da saída do sistema baseada em informações disponíveis até o instante k ;

N_1 representa o horizonte mínimo de predição;

N_Y representa o horizonte máximo de predição;

N_U representa o horizonte de controle;

$\delta(i)$ e $\lambda(i)$ são seqüências de ponderação sobre o sinal de erro e o de controle; respectivamente;

$r(k+i)$ é a trajetória de referência futura.

Deve-se observar que $\hat{y}(k+i)$ ainda representa uma predição **sub-ótima**, uma vez que o modelo quasilinear compensado, é uma aproximação do modelo bilinear, embora apresente um menor erro de predição. Assim, para minimizar a função objetivo acima mencionada, deverá ser obtido a predição sub-ótima da saída, i -passos à frente, no intervalo $N_1 \leq i \leq N_Y$. Embora o modelo da planta seja não-linear, a aproximação utilizada, isto é, o modelo quasilinear compensado adotado permite que se use o mesmo procedimento empregado pelo GPC. Assim o conceito de **resposta livre** e de **resposta forçada** é também utilizado. Portanto, considerando o modelo mencionado em (7.12), tem-se que a saída predita i -passos à frente, com $i \geq d$, é dada por:

$$y(k+i) = q^{-d} \frac{[B(q^{-1}) + L_i(q^{-1})]}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \Delta u(k+i-1) + \frac{C(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} e(k+i) \quad (7.20)$$

ou ainda,

$$y(k+i) = \frac{[B(q^{-1}) + L_i(q^{-1})]}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \Delta u(k+i-d-1) + \frac{C(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} e(k+i) \quad (7.21)$$

Definindo:

$$B_i(q^{-1}) = B(q^{-1}) + L_i(q^{-1}) \quad (7.22)$$

e observando-se que $B_0(q^{-1}) = B(q^{-1})$, uma vez que $L_0(q^{-1}) = 0$, obtém-se:

$$y(k+i) = \frac{B_i(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \Delta u(k+i-d-1) + \frac{C(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} e(k+i) \quad (7.23)$$

Considere a seguinte equação diofantina:

$$\frac{C(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} = E_i(q^{-1}, u) + q^{-i} \frac{F_i(q^{-1}, u)}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \quad (7.24)$$

sendo,

$$\begin{aligned} E_i(q^{-1}, u) &= e_{i,0} + e_{i,1}q^{-1} + \dots + e_{i,i-1}q^{-(i-1)} \\ F_i(q^{-1}, u) &= f_{i,0} + f_{i,1}q^{-1} + \dots + f_{i,na}q^{-na} \end{aligned} \quad (7.25)$$

com grau $\{E_i(q^{-1}, u)\} = i - 1$ e grau $\{F_i(q^{-1}, u)\} = \text{grau}\{\bar{A}(q^{-1}, u)\} - 1$. Substituindo a equação (7.18) na equação (7.17), tem-se que:

$$y(k+i) = \frac{B_i(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \Delta u(k-d+i-1) + \left[E_i(q^{-1}, u) + q^{-i} \frac{F_i(q^{-1}, u)}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \right] e(k+i) \quad (7.26)$$

ou ainda,

$$y(k+i) = \frac{B_i(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1}, u)} \Delta u(k-d+i-1) + E_i(q^{-1}, u)e(k+i) + \frac{F_i(q^{-1}, u)}{\bar{A}(q^{-1}, u)} e(k) \quad (7.27)$$

Do modelo tem-se que:

$$e(k) = \frac{\bar{A}(q^{-1}, u)}{C(q^{-1})} y(k) - \frac{B_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} \Delta u(k-d-1) \quad (7.28)$$

então, substituindo na equação (7.24) resulta em:

$$y(k+i) = \frac{B_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1},u)} - q^{-i} \frac{F_i(q^{-1},u)}{A(q^{-1})} \right] \Delta u(k-d+i-1) + \frac{F_i(q^{-1},u)}{C(q^{-1})} y(k) + E_i(q^{-1},u) e(k+i) \quad (7.29)$$

Como:

$$\left[\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1},u)} - q^{-i} \frac{F_i(q^{-1},u)}{A(q^{-1},u)} \right] = E_i(q^{-1},u) \quad (7.30)$$

tem-se então que:

$$y(k+i) = \frac{B_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} E_i(q^{-1},u) \Delta u(k-d+i-1) + E_i(q^{-1},u) e(k+i) + \frac{F_i(q^{-1},u)}{C(q^{-1})} y(k) \quad (7.31)$$

Observa-se nesta equação que todo o ruído está no futuro, de forma que:

$$\varepsilon\{y(k+i)\} = \frac{B_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} E_i(q^{-1},u) \Delta u(k-d+i-1) + \frac{F_i(q^{-1},u)}{C(q^{-1})} y(k) \quad (7.32)$$

ou ainda, a equação do preditor é da forma:

$$\hat{y}(k+i) = \frac{B_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} E_i(q^{-1},u) \Delta u(k-d+i-1) + \frac{F_i(q^{-1},u)}{C(q^{-1})} y(k) \quad (7.33)$$

Utilizando agora a seguinte equação diofantina:

$$\frac{1}{C(q^{-1})} = M_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{N_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} \quad (7.34)$$

tem-se que:

$$\hat{y}(k+i) = \left[M_i(q^{-1}) + q^{-i} \frac{N_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} \right] \left[\begin{array}{l} B_i(q^{-1}) E_i(q^{-1},u) \Delta u(k-d+i-1) + \\ + F_i(q^{-1},u) y(k) \end{array} \right] \quad (7.35)$$

Esta equação pode também ser escrita na forma:

$$\hat{y}(k+i) = M_i(q^{-1})E_i(q^{-1},u)B_i(q^{-1})\Delta u(k-d+i-1) + M_i(q^{-1})F_i(q^{-1},u)y(k) + N_i(q^{-1})\left[\frac{B_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}E_i(q^{-1},u)\Delta u(k-d-1) + \frac{F_i(q^{-1},u)}{C(q^{-1})}y(k-i)\right] \quad (7.36)$$

Da equação (7.33) tem-se que:

$$y(k) = q^{-i}\hat{y}(k+i) = \frac{B_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}E_i(q^{-1},u)\Delta u(k-d-1) + \frac{F_i(q^{-1},u)}{C(q^{-1})}y(k-i) \quad (7.37)$$

Então:

$$\hat{y}(k+i) = M_i(q^{-1})E_i(q^{-1},u)B_i(q^{-1})\Delta u(k-d+i-1) + [M_i(q^{-1})F_i(q^{-1},u) + N_i(q^{-1})]y(k) \quad (7.38)$$

Definindo:

$$H_i(q^{-1},u) = M_i(q^{-1})E_i(q^{-1},u)B_i(q^{-1}) \quad (7.39)$$

e

$$F_i'(q^{-1},u) = M_i(q^{-1})F_i(q^{-1},u) + N_i(q^{-1}) \quad (7.40)$$

obtém-se:

$$\hat{y}(k+i) = H_i(q^{-1},u)\Delta u(k-d+i-1) + F_i'(q^{-1},u)y(k) \quad (7.41)$$

Deve-se observar que, quando $C_i(q^{-1}) = 1$ então $M_i(q^{-1}) = 1$ e $N_i(q^{-1}) = 0$.

Com isto, tem-se que:

$$H_i(q^{-1},u) = E_i(q^{-1},u)B_i(q^{-1}) \quad (7.42)$$

e ainda,

$$F_i'(q^{-1},u) = F_i(q^{-1},u) \quad (7.43)$$

Como todo algoritmo de controle preditivo, a solução deste fornece um conjunto de sinais de controle $u(k)$, $u(k+1)$, ..., $u(k+N)$ que minimiza a função objetivo apresentada em (7.19). Considerando-se que o sistema tem um tempo

morto igual a d períodos de amostragem, então a saída do sistema será influenciada pela entrada $u(k)$ após $(d+1)$ períodos. Com isto, os valores dos parâmetros da função objetivo, N_1 , NY e NU podem ser definidos como: $N_1 = d+1$; $NY = d+N$ e $NU = N$.

Considerando então agora a equação do preditor, o conjunto **sub-ótimo** de predições, no intervalo acima desejado, é da forma:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+d+1) &= H_{d+1}(q^{-1})\Delta u(k) & + F'_{d+1}(q^{-1})y(k) \\ \hat{y}(k+d+2) &= H_{d+2}(q^{-1})\Delta u(k+1) & + F'_{d+2}(q^{-1})y(k) \\ &\vdots & \vdots \\ \hat{y}(k+d+N) &= H_{d+N}(q^{-1})\Delta u(k+N-1) & + F'_{d+N}(q^{-1})y(k) \end{aligned} \quad (7.44)$$

que pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(u)\mathbf{u} + \mathbf{F}''(q^{-1}, u)y(k) + \mathbf{H}'(q^{-1}, u)\Delta u(k-1) \quad (7.45)$$

Em que:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+d+1) \\ \hat{y}(k+d+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+d+N) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}(u) = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \dots & h_0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{H}'(q^{-1}, u) = \begin{bmatrix} [H_{d+1}(q^{-1}) - h_0]q \\ [H_{d+2}(q^{-1}) - h_0 - h_1q^{-1}]q^2 \\ \vdots \\ [H_{d+N}(q^{-1}) - h_0 - h_1q^{-1} - \dots - h_{N-1}q^{-(N-1)}]q^N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}''(q^{-1}, u) = \begin{bmatrix} F'_{d+1}(q^{-1}) \\ F'_{d+2}(q^{-1}) \\ \vdots \\ F'_{d+N}(q^{-1}) \end{bmatrix}$$

De forma similar ao caso linear observa-se que o **Vetor de Resposta Livre** (y_l) é dado por:

$$\mathbf{y}_l = \mathbf{F}''(q^{-1}, u)y(k) + \mathbf{H}'(q^{-1}, u)\Delta u(k-1) \quad (7.46)$$

O vetor de resposta livre pode ser calculada recursivamente por:

$$y_{l,i+1} = q[1 - \bar{A}(q^{-1})]y_{l,i} + B_i(q^{-1})\Delta u(k-d+i) \quad (7.47)$$

com $y_{l,0} = y(k)$ e $\Delta u(k+i) = 0$ para $i \geq 0$.

Da equação de predição, vê-se também que o **Vetor de Resposta Forçada** (\mathbf{y}_f) é dado por:

$$\mathbf{y}_f = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(u)\mathbf{u} \quad (7.48)$$

De forma que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(u)\mathbf{u} + \mathbf{y}_l \quad (7.49)$$

A lei de controle, neste caso é obtida de forma semelhante ao GPC, observando-se no entanto que esta é uma solução sub-ótima, na medida em que o preditor é sub-ótimo. Assim, a lei de controle é dada por:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{H}(u)^T \mathbf{H}(u) + \lambda I)^{-1} \mathbf{H}(u)^T (\mathbf{r} - \mathbf{y}_l) \quad (7.50)$$

Lembrando que, o sinal de controle que é de fato enviado ao processo é o primeiro elemento do vetor \mathbf{u} , que é dado por:

$$\Delta u(k) = K(r - y_l) \quad (7.51)$$

sendo K a primeira linha da matriz $(\mathbf{H}(u)^T \mathbf{H}(u) + \lambda I)^{-1} \mathbf{H}(u)^T$.

Com o objetivo de avaliar o método acima descrito apresenta-se a seguir dois exemplos:

Exemplo 7.1: considere o seguinte sistema bilinear de primeira ordem:

$$y(k) = .2y(k-1) + .4u(k-1) + .6u(k-1)y(k-1) + e(k)$$

O modelo quasilinear por degrau de tempo é:

$$y(k) = \tilde{a}_1(u)y(k-1) + .4u(k-1)$$

com $\tilde{a}_1(u) = (.2 + .6u(k-1))$.

Neste exemplo, consideraremos os seguintes parâmetros de sintonia do controlador preditivo: $N_1=1$ e $N=NU=4$. Assim, para estes parâmetros escolhidos e utilizando-se a propriedade e a estrutura apresentada em 7.17 e 7.18 respectivamente, tem-se que os termos adicionais de compensação, $L_i(q^{-1})$, para $i=1$ a 4, obtidos de tal forma que minimize a variância do erro de predição, são:

$$\begin{aligned} L_1(q^{-1}) &= .22(1-q^{-1}); & L_2(q^{-1}) &= .26(1-q^{-2}) \\ L_3(q^{-1}) &= .31(1-q^{-3}); & L_4(q^{-1}) &= .35(1-q^{-4}) \end{aligned}$$

Como para o exemplo, $B(q^{-1}) = .4$, tem-se que:

$$\begin{aligned} B_1(q^{-1}) &= .62 - .22q^{-1}; & B_2(q^{-1}) &= .66 - .26q^{-2} \\ B_3(q^{-1}) &= .71 - .31q^{-3}; & B_4(q^{-1}) &= .75 - .35q^{-4} \end{aligned}$$

Utilizando estes resultados, o controlador preditivo bilinear generalizado compensado foi desenvolvido e aplicado no sistema bilinear de primeira ordem. Ainda para o mesmo sistema bilinear o controlador preditivo baseado no modelo quasilinear, foi aplicado e também aquele baseado no modelo linear. Os resultados de simulação, para uma mudança na referência e os mesmos parâmetros de ajuste, incluindo neste caso, o mesmo fator de ponderação λ , são mostrados nas figuras (7.2) e (7.3), a seguir. Nestas, observa-se que o controlador preditivo baseado no modelo compensado apresenta um melhor desempenho. A análise do sinal de controle mostra que em todos os controladores o valor final é o mesmo. No entanto, para o controlador baseado no modelo compensado o sinal de controle se antecipa, sendo portanto mais eficiente. Isto se deve, evidentemente, ao fato deste controlador utilizar um modelo aproximado mais próximo do bilinear do que o utilizado pelo controlador quasilinear e pelo linear. Sendo o modelo mais próximo do modelo real, a predição é mais exata e o controlador naturalmente apresenta um melhor desempenho.

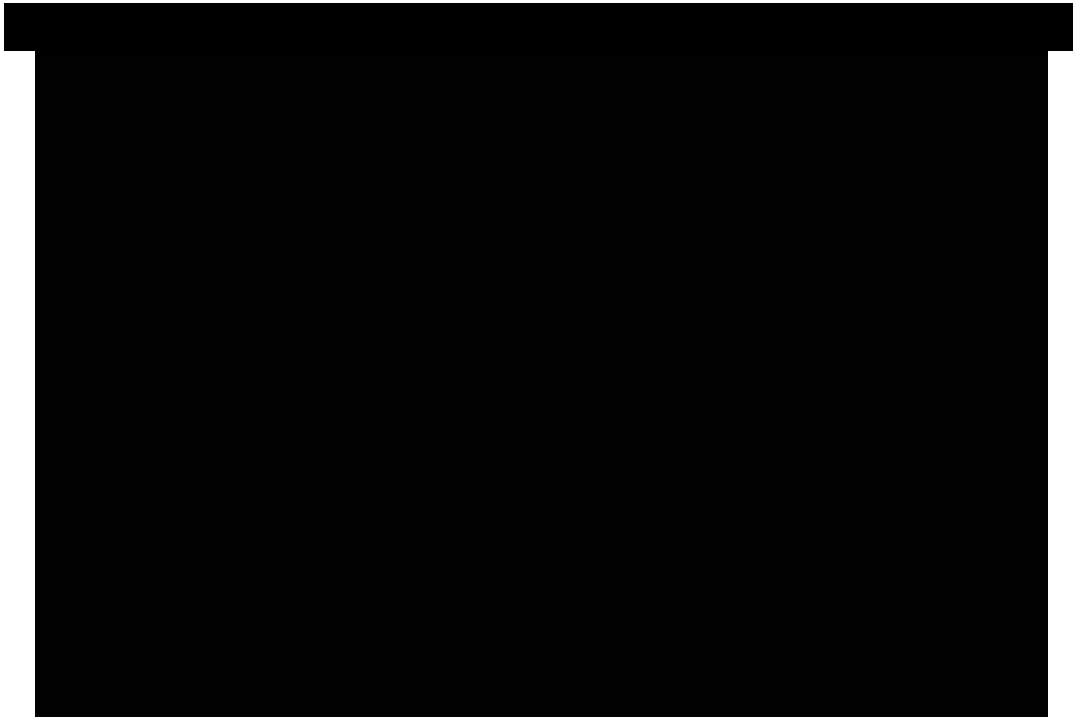


Figura 7.2 Saídas do sistema para mudança na referência, usando GPC baseado no modelo quasilinear compensado, no modelo quasilinear e no modelo linear para os mesmos parâmetros de sintonia.

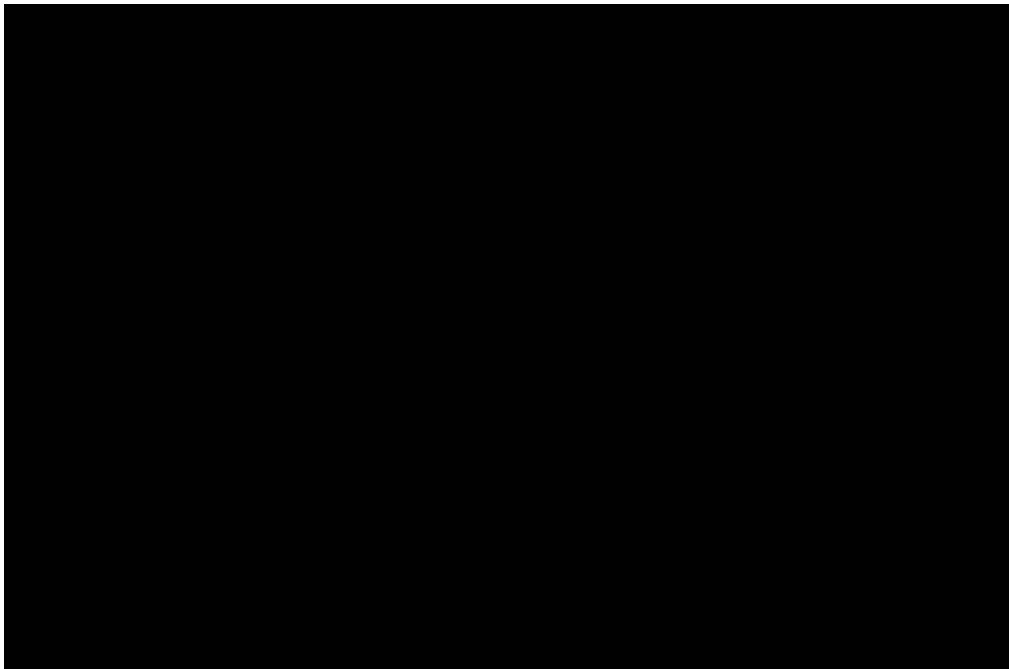


Figura 7.3 Sinal de controle aplicado ao sistema para mudança na referência, usando GPC baseado no modelo quasilinear compensado, no modelo quasilinear e no modelo linear para os mesmos parâmetros de sintonia.

Exemplo 7.2: considere agora o seguinte sistema bilinear de segunda ordem:

$$y(t) = .2y(t-1) + .1y(t-2) + .4u(t-1) + .8u(t-1)y(t-1) + .6u(t-2)y(t-2)$$

O modelo quasilinear por degrau de tempo é:

$$y(t) = \tilde{a}_1(u)y(t-1) + \tilde{a}_2(u)y(t-2) + .4u(t-1)$$

com $\tilde{a}_1(u) = (.2 + .8u(t-1))$ e $\tilde{a}_2(u) = (.1 + .6u(t-1))$.

Neste exemplo, também consideraremos os seguintes parâmetros de sintonia do controlador preditivo: $N_1=1$ e $N=NU=4$. Assim, para estes parâmetros escolhidos e utilizando-se também a propriedade e a estrutura apresentada em (7.17) e (7.18) respectivamente, tem-se que os termos adicionais de compensação, $L_i(q^{-1})$, para $i=1$ a 4, obtidos de tal forma que minimize a variância do erro de predição, são:

$$L_1(q^{-1}) = .0273 - .0346q^{-1} + .0073q^{-2}$$

$$L_2(q^{-1}) = .0448 - .0940q^{-2} + .0492q^{-3}$$

$$L_3(q^{-1}) = .1460 - .0337q^{-3} - .1123q^{-4}$$

$$L_4(q^{-1}) = .1997 - .0467q^{-4} - .1530q^{-5}$$

Observa-se também que a propriedade apresentada em (7.17) e a estrutura apresentada em (7.18) são verificadas. Utilizando estes resultados, o controlador preditivo bilinear generalizado compensado foi desenvolvido e aplicado no sistema bilinear de segunda ordem. Ainda para o mesmo sistema bilinear, o controlador preditivo baseado no modelo quasilinear e o baseado no modelo linear, foram aplicados. Os resultados de simulação, para os mesmos parâmetros de ajuste, mostram que o controlador preditivo baseado no modelo compensado apresenta um melhor desempenho. Observa-se ainda que, para o controlador baseado no modelo compensado, o sinal de controle se antecipa, sendo portanto mais eficiente. Isto em virtude do modelo compensado ser mais próximo do modelo real, sendo a predição mais exata e o controlador naturalmente apresenta um melhor desempenho.

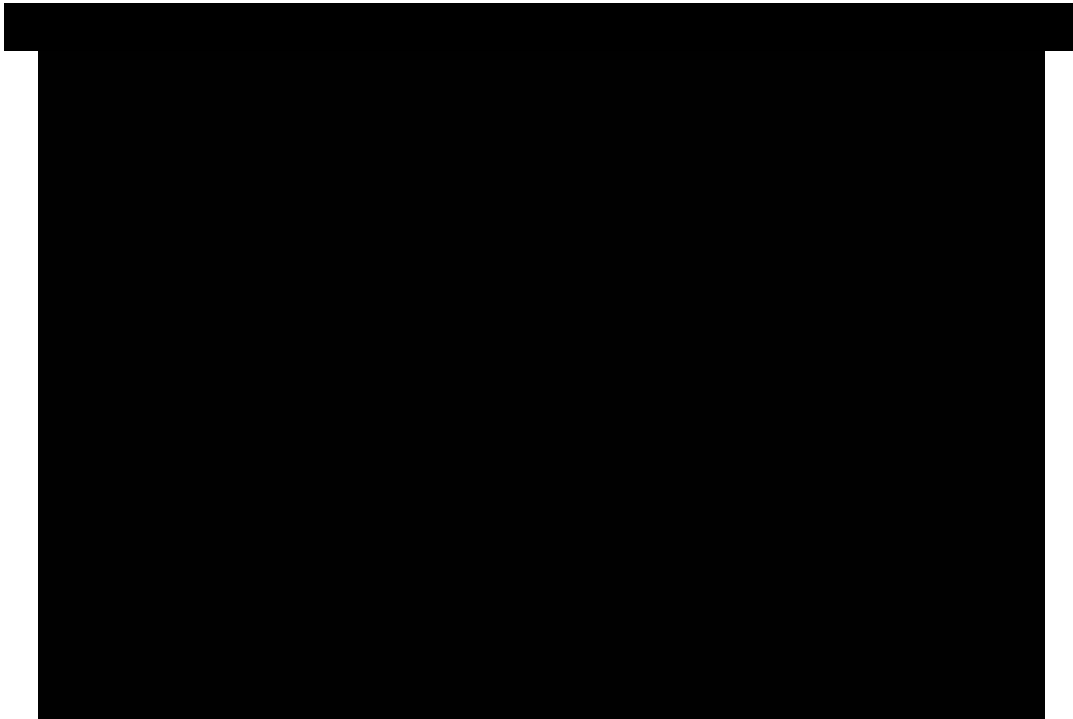


Figura 7.4 Saídas do sistema para mudança na referência, usando GPC baseado no modelo quasilinear compensado, no modelo quasilinear e no modelo linear.

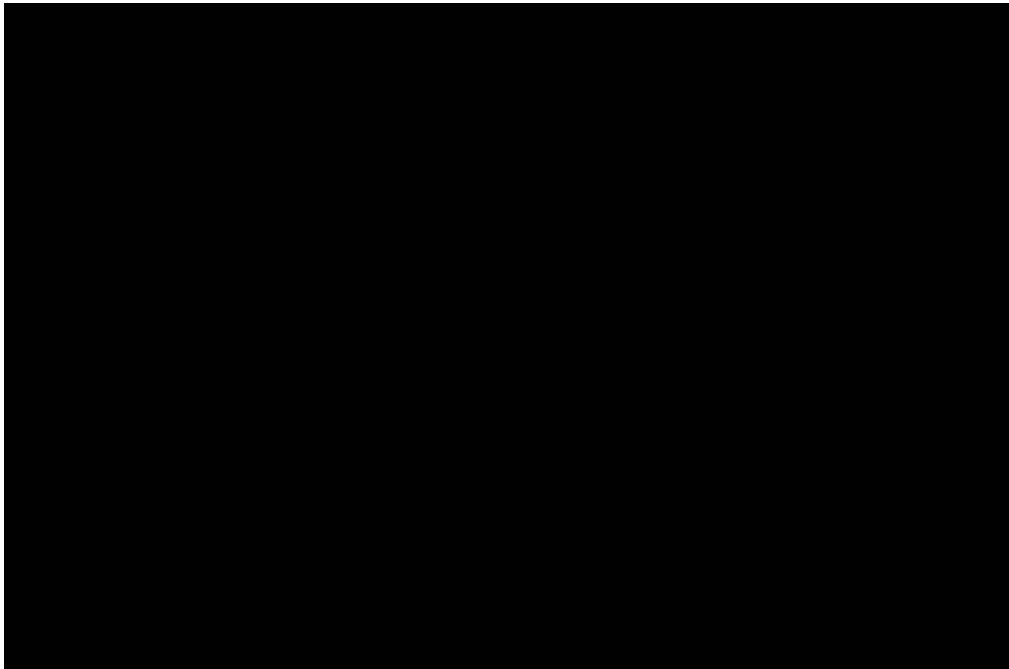


Figura 7.5 Sinal de controle aplicado ao sistema para mudança na referência, usando GPC baseado no modelo quasilinear compensado, no modelo quasilinear e no modelo linear.

7.4 Modelo multivariável quasilinear por degrau de tempo compensado:

7.4.1 Modelo multivariável bilinear:

Considere um processo bilinear discreto de múltiplas entradas e múltiplas saídas (“MIMO”), ilustrado em diagrama de blocos através da figura (7.6) a seguir:



Figura 7.6 - Processo MIMO

Sendo q o número de saídas do processo (y) e p o número de entradas (u).

Considere também que este processo é descrito pelo seguinte modelo polinomial bilinear:

$$A(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + D_e(q^{-1})D[u(k-1)]D_d(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (7.52)$$

Em que: $y(k) \in R^q \rightarrow$ vetor de saída do processo com q elementos;

$u(k) \in R^p \rightarrow$ vetor de controle de processo com p elementos;

$e(k) \in R^q \rightarrow$ vetor de ruído branco, gaussiano, de média zero e matriz covariância $E = \text{diag}(\sigma^2)$.

As matrizes $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$, $C(q^{-1})$, $D_d(q^{-1})$ e $D_e(q^{-1})$ são polinômios matriciais no operador atraso q^{-1} definidos por:

$$A(q^{-1}) = I_{q \times q} + A_1 q^{-1} + \dots + A_{na} q^{-na} \quad (7.53)$$

$$B(q^{-1}) = B_0 + B_1 q^{-1} + \dots + B_{nb} q^{-nb} \quad (7.54)$$

$$C(q^{-1}) = I_{p \times p} + C_1 q^{-1} + \dots + C_{nc} q^{-nc} \quad (7.55)$$

$$D_d(q^{-1}) = D_{d,0} + D_{d,1} q^{-1} + \dots + D_{d,nd_d} q^{-nd_d} \quad (7.56)$$

$$D_e(q^{-1}) = D_{e,0} + D_{e,1} q^{-1} + \dots + D_{e,nd_e} q^{-nd_e} \quad (7.57)$$

Com $A(q^{-1}) \in R^{q \times q}$; $B(q^{-1}) \in R^{q \times p}$; $C(q^{-1}) \in R^{q \times q}$; $D_e(q^{-1}) \in R^{q \times p}$ e $D_d(q^{-1}) \in R^{p \times q}$ e

$$D[u(k-1)] = \text{diag}[u_1(k-1) \dots u_p(k-1)] = \begin{bmatrix} u_1(k-1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2(k-1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & u_p(k-1) \end{bmatrix}_{p \times p} \quad (7.58)$$

Neste caso, introduz-se o operador $\Delta_j(q^{-1}) = (1 - q^{-1})I_j$, que corresponde a inclusão da ação integral no controlador.

Deve-se observar que em uma parcela significativa dos processos multivariáveis, em que há graus de liberdade suficientes, para uma melhor estrutura de controle, normalmente adota-se o número de entradas igual ao número de saídas. Neste caso, pode-se fazer uma simplificação do modelo apresentado em (7.52), resultando em:

$$A(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})u(k-1) + D[u(k-1)]D_d(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (7.59)$$

Há ainda uma simplificação a fazer, quando se considera que os termos bilineares ocorrem entre a entrada e a saída correspondente, não havendo portanto bilinearidade referente a termos cruzados. Neste caso, o modelo resultante é:

$$A(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})u(k-1) + D(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})v(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (7.60)$$

com $v(k-1) \in R^p$ e $v_i(k-1) = u_i(k-1)y_i(k-1)$

7.4.2 *Matriz de Interação de um processo multivariável bilinear*

Como já mencionado no capítulo IV, a matriz de Interação de um sistema multivariável, é a extensão natural do atraso de transporte para sistemas multivariáveis. Este conceito, apresentado por Wolovich (1976), foi introduzido para sistemas lineares. No entanto, sua extensão para sistemas bilineares, como apresentado em (7.52), (7.59) e (7.60), é imediata. Considerando que o sistema bilinear tenha características dinâmicas invariantes com o tempo, a matriz de interação pode ser obtida utilizando o procedimento anteriormente apresentado, em que a **matriz de transferência** $G(z) \in \mathbb{R}^{q \times p}$, neste caso, refere-se à parcela linear do sistema bilinear multivariável.

Em processos multivariáveis é comum assumir que a matriz de Interação tenha uma das duas seguintes formas simples, desde que $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)G(z) = K$, com K não-singular:

1-) **Forma 1:** atrasos iguais entre os pares entrada/saída, isto é:

$$\xi(z) = z^d I_q, \text{ com } d = \min_{i,j} (d_{i,j}) \quad (7.61)$$

representando o atraso único do sistema multivariável. Neste caso, está-se admitindo que o atraso de todas as saídas em relação à todas as entradas é igual a um mesmo número inteiro d . Assim, o processo fica modelado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} A(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k) &= q^{-d}B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + \\ &+ D_e(q^{-1})D[u(k-1)]D_d(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k-1) + C(q^{-1})e(k) \end{aligned} \quad (7.62)$$

2-) **Forma 2:** atrasos diferentes entre os pares entrada/saída.

Neste caso, faz-se $\xi(z) = \text{diag}[d_1 \ d_2 \ \dots \ d_q]$ sendo $d_i = \min_j d_{i,j}$, em que $d_{i,j}$ representa o retardo entre a j -ésima entrada e a i -ésima saída e d_i o atraso da

i -ésima saída. Assim, neste caso, para cada saída $y_i(k)$ admite-se um atraso de transporte d_i em relação a toda as entradas e com isso o processo pode ser modelado de acordo com a seguinte equação:

$$A(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k) = \text{diag}\left[q^{-d_1} \ q^{-d_2} \ \dots \ q^{-d_p}\right]B'(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + D_e(q^{-1})D[u(k-1)]D_d(q^{-1})\Delta_q(q^{-1})y(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (7.63)$$

Qualquer que seja a forma mais conveniente para representar o atraso de transporte, considera-se sempre, com a finalidade de simplificar os cálculos de saídas preditas, o polinômio matricial $B(q^{-1}) = q^{-d}B'(q^{-1})$, no caso da primeira forma ou $B(q^{-1}) = \text{diag}\left[q^{-d_1} \ q^{-d_2} \ \dots \ q^{-d_q}\right]B'(q^{-1})$ no segundo caso.

7.4.3 Modelo multivariável quasilinear por degrau de tempo:

Semelhantemente ao caso SISO, o modelo quasilinear por degrau de tempo para o caso MIMO, consiste em rescrever (7.52) na forma:

$$\tilde{A}(q^{-1}, u)\Delta_q(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})e(k) \quad (7.64)$$

Em que:

$$\tilde{A}(q^{-1}, u) = A(q^{-1}) + D_e(q^{-1})D[u(k-1)]D_d(q^{-1}) \quad (7.65)$$

Em cada instante k os valores passados do vetor de entrada $\mathbf{u}(k)$ são conhecidos, permitindo assim que os elementos do matriz polinomial $\tilde{A}(q^{-1}, u)$ sejam determinados e considerados constantes até o instante seguinte. Este modelo, será denominado modelo **NARIMAX multivariável quasilinear por degrau de tempo**.

7.4.4 Modelo multivariável quasilinear por degrau de tempo compensado:

Como no caso monovariável, através de modelo NARIMAX multivariável quasilinear por degrau de tempo, válido para cada instante k , para o controlador preditivo generalizado, a predição da saída i -passos à frente é obtida, procedimento que é necessário e característico dos controladores preditivos. Também neste caso, devido à aproximação utilizada, um erro de predição existe, sem considerar o erro devido ao ruído e/ou erros de medição. Este erro aumenta a medida que o horizonte de predição aumenta, o que evidentemente degrada o desempenho do controlador.

Utilizando um procedimento semelhante ao utilizado no caso monovariável, gera-se uma seqüência do vetor erro de predição, para um dado horizonte. Para isto, aplica-se uma seqüência qualquer de u_m , $m=1\dots p$, correspondente ao m -ésimo elemento do vetor de entrada \mathbf{u} , individualmente, tanto no modelo bilinear multivariável como no preditor i -passos à frente, baseado na aproximação quasilinear. Com isto, gera-se o vetor de saída considerado real e o vetor de saída predita. Utilizando-se estes resultados, obtém-se uma seqüência do vetor erro de predição i -passos à frente, para cada m -ésimo elemento do vetor de entrada \mathbf{u} aplicado. Pode-se afirmar que existe um “**mapeamento**” não linear multivariável, isto é, um modelo dinâmico não linear, para cada horizonte de predição i , que relaciona o vetor erro de predição e o vetor de entrada $u(\cdot)$. Assim, o termo de compensação do modelo quasilinear multivariável, consiste em achar um modelo linear, multivariável, média móvel $\mathbf{L}_i(q^{-1}) \in R^{q \times p}$, que corresponde a linearização do referido modelo não linear. Isto pode ser interpretado como uma aproximação de **Segunda Ordem** para o modelo bilinear apresentado em (7.52). A ordem e os parâmetros de cada elemento $l_{m \times n}(q^{-1}) \in \mathbf{L}_i(q^{-1})$ dependem do erro de predição e do horizonte de predição. Estes, são aqueles que minimizam a variância de cada elemento n , com $n = 1 \dots q$, do vetor erro de predição, ou ainda uma norma do referido elemento do vetor erro de predição.

Deve-se observar que o termo de compensação do modelo quasilinear multivariável também satisfaz a propriedade apresentada no item (7.2.1), de forma que $\mathbf{L}_i(1) = 0$ para $\forall i$.

Considere então o modelo apresentado em (7.64). A representação dinâmica, i -passos à frente, válida para $i \geq 1$, baseado no modelo quasilinear compensado é como segue:

$$\tilde{A}(q^{-1}, u)\Delta_q(q^{-1})y(k+i) = [B(q^{-1}) + L_i(q^{-1})]\Delta_p(q^{-1})u(k-1+i) + C(q^{-1})e(k+i) \quad (7.66)$$

sendo $L_i(q^{-1})$ o termo adicional que compensa o erro de predição. Este modelo pode ainda ser escrito como:

$$\bar{A}(q^{-1}, u)y(k+i) = [B(q^{-1}) + L_i(q^{-1})]\Delta_p(q^{-1})u(k-1+i) + C(q^{-1})e(k+i) \quad (7.67)$$

com $\bar{A}(q^{-1}, u) = \tilde{A}(q^{-1}, u)\Delta_q(q^{-1})$.

Definindo:

$$B_i(q^{-1}) = B(q^{-1}) + L_i(q^{-1}) \quad (7.68)$$

obtém-se:

$$\bar{A}(q^{-1}, u)y(k+i) = B_i(q^{-1})\Delta_p(q^{-1})u(k-1+i) + C(q^{-1})e(k+i) \quad (7.69)$$

7.5 Controlador Preditivo Bilinear Generalizado Compensado Multivariável:

Como já mencionado, o algoritmo GPC consiste em calcular uma seqüência de ações de controle de forma a minimizar uma função objetivo multi-passo definida sobre um horizonte de predição, com ponderação da ação de controle e do erro de predição, isto é:

$$J = \sum_{i=N_1}^{NY} \left\| \hat{y}(k+i) - r(k+i) \right\|_R^2 + \sum_{i=1}^{NU} \left\| \Delta u(k+i-1) \right\|_Q^2 \quad (7.70)$$

Em que: $\hat{y}(k+i)$ é uma predição **sub-ótima** i -passos à frente do vetor de saída do sistema baseada em informações disponíveis até o instante k ;

N_1 representa o horizonte mínimo de predição;

NY representa o horizonte máximo de predição;

NU representa o horizonte de controle;

R e Q são matrizes positivas definidas de ponderação sobre o vetor sinal de erro e o vetor de controle; respectivamente;

$r(k+i)$ é a trajetória de referência futura.

Para minimizar a função objetivo acima mencionada, deverá ser obtida a predição ótima da saída, i -passos à frente, no intervalo $N_1 \leq i \leq NY$. Embora o modelo em questão seja não-linear, a aproximação utilizada, isto é, o modelo quasilinear compensado adotado permite que se use o mesmo procedimento do empregado pelo GPC. Assim o conceito de **resposta livre** e de **resposta forçada** é também utilizado. Portanto, considere o modelo descrito em (7.61) e a seguinte equação diofantina:

$$C(q^{-1}) = E_i(q^{-1}, u)\bar{A}(q^{-1}, u) + q^{-i}F_i(q^{-1}, u) \quad (7.71)$$

sendo $E_i(q^{-1}, u)$ e $F_i(q^{-1}, u)$ matrizes polinomiais únicas de graus $i-1$ e n_a respectivamente.

Considere então agora as matrizes polinomiais $\bar{E}_i(q^{-1})$ e $\bar{C}_i(q^{-1})$ as quais guardam entre si as seguinte propriedade:

$$\bar{E}_i(q^{-1})C(q^{-1}) = \bar{C}_i(q^{-1})E_i(q^{-1}, u) \quad (7.72)$$

com $\bar{E}_i(0) = \bar{C}_i(0) = I_q$; $n_{\bar{E}} = n_E$ e $n_{\bar{C}} = n_C$ e $\det(\bar{C}_i(q^{-1})) = \det(C_i(q^{-1}))$. As condições de existência e de unidade de solução (7.72) são apresentados em Wolowich, (1974).

Assim, da polinomial já definida, pós multiplicando por $E_i(q^{-1})^{-1}$ e pré multiplicando por $\bar{E}_i(q^{-1})^{-1}$, obtém-se:

$$\bar{E}_i(q^{-1})^{-1}\bar{C}_i(q^{-1}) = C_i(q^{-1})E_i(q^{-1})^{-1} \quad (7.73)$$

Definindo

$$\bar{F}_i(q^{-1}) = q^i[\bar{C}_i(q^{-1}) - \bar{E}_i(q^{-1})\bar{A}(q^{-1}, u)] \quad (7.74)$$

e pré multiplicando a equação (7.69) por $\bar{E}_j(q^{-1})$, resulta em:

$$\bar{E}_i(q^{-1})\bar{A}(q^{-1}, u)y(k+i) = \bar{E}_i(q^{-1})B_i(q^{-1})\Delta u(k+i-1) + \bar{E}_j(q^{-1})C(q^{-1})e(k+i) \quad (7.75)$$

Utilizando a identidade polinomial definida em (7.74) e tendo em vista a definição apresentada em (7.72), isto é:

$$\bar{E}_i(q^{-1})\bar{A}(q^{-1}, u) = \bar{C}_i(q^{-1}) - q^{-i}\bar{F}_i(q^{-1}) \quad (7.76)$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{C}_i(q^{-1})y(k+i) &= \bar{E}_i(q^{-1})B_i(q^{-1})\Delta u(k+i-1) + \bar{F}_i(q^{-1})y(k) + \\ &+ \bar{E}_i(q^{-1})C(q^{-1})e(k+i) \end{aligned} \quad (7.77)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \bar{C}_i(q^{-1})y(k+i) &= \bar{E}_i(q^{-1})B_i(q^{-1})\Delta u(k+i-1) + \bar{F}_i(q^{-1})y(k) + \\ &+ \bar{C}(q^{-1})E_i(q^{-1})e(k+i) \end{aligned} \quad (7.78)$$

Esta equação pode ser reescrita na forma:

$$\bar{C}_i(q^{-1})[y(k+i) - E_i(q^{-1})e(k+i)] = \bar{E}_i(q^{-1})B_i(q^{-1})\Delta u(k+i-1) + \bar{F}_i(q^{-1})y(k) \quad (7.79)$$

De (7.79), observa-se que as predições ótimas $\hat{y}(k+i)$ podem ser geradas pela equação:

$$\bar{C}_i(q^{-1})\hat{y}(k+i) = \bar{E}_i(q^{-1})B_i(q^{-1})\Delta u(k+i-1) + \bar{F}_i(q^{-1})y(k) \quad (7.80)$$

Considere agora a seguinte equação diofantina:

$$I = J_i(q^{-1})\bar{C}(q^{-1}) + q^{-i}K_i(q^{-1}) \quad (7.81)$$

com grau $\{J_i(q^{-1})\} < i$.

Multiplicando a equação de predição (7.80) por $J_i(q^{-1})$ e utilizando a equação diofantina (7.81), tem-se que:

$$[I - q^{-i}K_i(q^{-1})]\hat{y}(k+i) = J_i(q^{-1})\bar{E}_i(q^{-1})B_i(q^{-1})\Delta u(k+i-1) + J_i(q^{-1})\bar{F}_i(q^{-1})y(k) \quad (7.82)$$

ou ainda:

$$\hat{y}(k+i) = J_i(q^{-1})\bar{E}_i(q^{-1})B_i(q^{-1})\Delta u(k+i-1) + [K_i(q^{-1}) + J_i(q^{-1})\bar{F}_i(q^{-1})]y(k) \quad (7.83)$$

Tendo em vista que:

$$J_i(q^{-1})\bar{E}_i(q^{-1})B_i(q^{-1}) = H_i(q^{-1}) + q^{-i}H_{ip}(q^{-1}) \quad (7.84)$$

com grau $\{H_i(q^{-1})\} < i$, então a predição **sub-ótima** i-passos à frente pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+i) = & H_i(q^{-1})\Delta u(k+i-1) + H_{ip}(q^{-1})\Delta u(k-1) + \\ & + [K_i(q^{-1}) + J_i(q^{-1})\bar{F}_i(q^{-1})]y(k) \end{aligned} \quad (7.85)$$

Observa-se nesta equação que o primeiro termo, que é devido a incrementos de controle futuros, corresponde à **resposta forçada**, enquanto os últimos dois termos correspondem à **resposta livre**, na medida em que estes são gerados por incrementos de controle passados e saídas passadas.

O conjunto de predições j-passos à frente podem ser escritas, como no caso anterior, na forma:

$$y_{N_{1y}} = H_{N_{1yu}} u_{NU} + y_{IN_{1y}} \quad (7.86)$$

Assim a função objetivo pode ser escrita como:

$$J = (H_{N_{1yu}} u_{NU} + y_{IN_{1y}} - r)^T \bar{R} (H_{N_{1yu}} u_{NU} + y_{IN_{1y}} - r) + u_{NU}^T \bar{Q} u_{NU} \quad (7.87)$$

Em que: $\bar{R} = \text{diag}[R, \dots, R]$ e $\bar{Q} = \text{diag}[Q, \dots, Q]$

A minimização dessa função objetivo, assumindo que não há restrições no sinal de controle, produz uma solução sub-ótima, que no entanto está mais próxima da solução ótima que a obtida utilizando o modelo quasilinear. Portanto, a minimização da função objetivo produz a mesma lei de controle:

$$u = (H_{N_{1yu}}^T H_{N_{1yu}} + \bar{Q})^{-1} H_{N_{1yu}} \bar{R} (r - y_{IN_{1y}}) \quad (7.88)$$

Lembrando que, baseado na estratégia dos controladores preditivos, o sinal de controle que é de fato enviado ao processo é o primeiro elemento do vetor u , que é dado por:

$$\Delta u(k) = K(r - y_l) \quad (7.89)$$

sendo K as q primeiras linhas da matriz $(H_{N_{1yu}}^T H_{N_{1yu}} + \bar{Q})^{-1} H_{N_{1yu}} \bar{R}$.

Nota-se também que a implementação deste controlador, envolve a inversão ou triangularização de uma matriz $Np \times Np$ que requer um substancial esforço computacional. O conceito de **horizonte de controle** neste caso é usado para reduzir este esforço, admitindo que o sinal de controle é constante após $NU < N$. Com isto, a matriz a ser invertida é de ordem $(NUxp) \times (NUxp)$, com esforço computacional reduzido.

7.5 Conclusões:

Neste capítulo, apresentou-se detalhadamente a principal contribuição desta tese, que é o algoritmo de um controlador preditivo bilinear, que utiliza o modelo quasilinear compensado. Foi apresentado tanto o caso monovariável, quanto o caso multivariável. O termo de compensação foi justificado, indicado como determiná-lo, uma das suas propriedades e estrutura apresentadas. O algoritmo incluindo este termo de compensação foi desenvolvido e

apresentado. Alguns exemplos foram apresentados justificando o desempenho do algoritmo aqui proposto.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES GERAIS E TRABALHOS COMPLEMENTARES

Neste trabalho, apresentou-se a teoria geral de controladores preditivos, enfatizando-se o conceito, um breve histórico, sua relação com outros métodos de controle, os modelos utilizados e a metodologia de obtenção de preditores. As diversas funções objetivo e o reflexo de sua escolha nas propriedades do controlador preditivo foram analisadas. Devido a sua importância e relevância acadêmica, pelo seu aspecto conceitualmente consistente e destacada aplicação em controle de processos, apresentou-se de forma detalhada o algoritmo de controle preditivo generalizado (GPC), no caso mono e multivariável, considerando-se o ruído branco e o ruído colorido. Teve-se como finalidade estabelecer as bases para o entendimento do desenvolvimento deste algoritmo, na medida em que a extensão para o caso bilinear é o tema central desta tese.


Em conseqüência, apresentou-se a teoria geral de controle preditivo baseado em modelos bilineares. Inicialmente, para o caso SISO, descreveu-se o modelo bilinear. Em seguida, apresentou-se um histórico evolutivo, na forma de retrospectiva, de todas as abordagens existentes na solução do controlador preditivo bilinear, destacando-se as vantagens e desvantagens destas. Dentre as abordagens apresentadas, detalhou-se aquelas que buscam uma solução analítica, mesmo que adotando um processo de linearização. Como mencionado, a obtenção de uma lei de controle *ótima* para o controlador preditivo bilinear, é um problema de otimização não linear e uma solução

analítica para o problema não existe. Neste sentido, a abordagem que utiliza a linearização por realimentação de saída e a que utiliza o modelo quasilinear foram detalhadamente apresentadas e analisadas, incluindo-se exemplos para ilustrar e fortalecer os comentários apresentados. A abordagem que utiliza o modelo quasilinear mostrou-se mais consistente e robusta, merecendo assim pesquisa no sentido de buscar, dentro desta abordagem, uma solução, embora ainda **sub-ótima**, que apresentasse melhores resultados. Como resultado desta pesquisa, apresentou-se uma nova abordagem do controlador preditivo bilinear, cujos resultados justificam o esforço.

Assim, detalhadamente apresentou-se a principal contribuição desta tese, que é o algoritmo de um controlador preditivo bilinear, que utiliza o modelo quasilinear compensado. Foi apresentado tanto o caso monovariável, quanto o caso multivariável. O termo de compensação foi justificado, sua estrutura e propriedade apresentada, e também indicado como determiná-lo. O algoritmo incluindo este termo de compensação foi desenvolvido e apresentado.

Finalmente, dois processos, reconhecidamente de dinâmica bilinear, foram sucintamente descritos e sua importância justificada dentro do escopo desta tese. Modelos bilineares destes foram identificados, mostrando serem estes eficientes na representação de suas respectivas não linearidades devido à natureza bilinear apresentada por estes processos. Um algoritmo de controle preditivo bilinear monovariável foi aplicado em ambos os processos. No caso da coluna de destilação de tolueno, aplicou-se na malha de topo, mantendo-se a malha de fundo aberta, com a carga térmica na condição nominal de operação.

Os resultados mostraram que o controlador preditivo bilinear, devido a sua própria característica, apresentou um desempenho melhor, tanto do ponto de vista da resposta do processo como do esforço de controle, quando comparado com o caso linear. Assim, os resultados apresentados evidenciam que a abordagem bilinear oferece um desempenho potencialmente grande, produzindo significativa redução de esforço de controle e melhor desempenho.



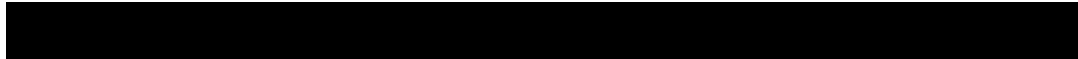
Finalmente, como parte das perspectivas de trabalhos futuros, pretende-se buscar uma forma que indique uma generalização do termo de compensação.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Åström K.J. and Wittenmak B. *Adaptive Control*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [2] Axelsson J. P. and Hagander P. Control Design for a Bilinear System Reachable Sets and Exact Linearization. *Proceedings of 29th Conference on Decision and Control*, pp. 2828-2829, Honolulu, Hawaii, December, 1990.
- [3] Bellini A., Figalli G. and Lombardi T. An Approach To Induction Machines By Means of the Bilinear System Theory. *International Conference on Electrical Machines*, Bruxelles, Belgium, 1978.
- [4] Biegler L. and Rawlings J. Optimization approaches to nonlinear predictive control, *In Proc. 4th International Conference of Chemical Process Control*, 1991.
- [5] Bitmead R. R., Gevers M. and Wertz V. *Adaptive Optimal Control. The Thinking Man's GPC*. Prentice-Hall, 1990.
- [6] Boyd S. and Chua L. O. Fading Memory and the Problem of Approximating Nonlinear Operators with Volterra Series. *IEEE Transaction on Circuits and Systems*: Vol. 32, nº. 11, November 1985.
- [7] Braake H. A. B.te, Botto M. A., Van Can L., Costa J. S. and Verbruggen H. B. Linear Predictive Control Based on Approximate Input-output

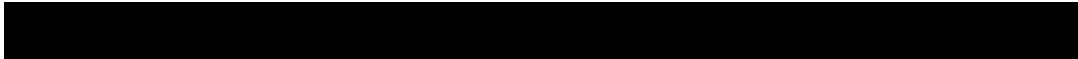
Feedback Linearisation. *IEEE Proc. Control Theory Appl.*: Vol. 146, n°. 4, July 1999.

- [8] Bradley M. E. and Lenhart S. Bilinear Optimal Control of a Kirchhoff Plate to a Desired Profile. *Optimal Control Applications & Methods*: Vol. 18, pp. 217-226, 1997.
- [9] Bradley M. E. Bilinear Optimal Control of the Velocity Term in a Kirchhoff Plate Equation. *Journal of Mathematical Applications*, Vol. 238, pp. 451-467, 1999.
- [10] Bruni C., Dipillo G. and Koch G.. Bilinear Systems: An Appealing Class of "Nearly Linear" Systems in Theory and Applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*: Vol. AC-19, n°. 4, pp. 334-348, August 1974.
- [11] Burnham K. J., James D. J. and Shields D. N.. Self-Tuning Control of Bilinear Systems. *Optimal Control Applications & Methods*: Vol. 8, pp. 147-157, 1987.
- [12] Burnham K. J., Dunoyer A. and Marcroft S. Bilinear Controller with PID Structure. *Computing & Control Engineering Journal*, pp. 63-69, 1999.
- [13] Camacho E. F. and Bordons C. Model Predictive Control. *Springer-Verlag*, New York, 1998.
- [14] Chen W., Ballance J. D. and Gawthrop J. P. Analytic Approach To Generalized Predictive Control of Nonlinear Systems. *IEE Conference*, Savoy Place, London, UK, 1999.



- [15] Cheon OH S. and Y-Koo Yeo. An Adaptive Model Predictive Control Method Using Multivariable Bilinear Model. *Journal of Chemical Engineering of Japan.*, Vol. 31, nº. 5, pp. 828-837, 1998.
- [16] Chen Hin, Zinober A S. I. and Ruan R. Strong Consistency and Convergence Rate of Parameter Identification for Bilinear Systms. *Int. J. Control*: Vol. 63, nº. 5, pp. 907-919, 1996.
- [17] Clarke D. W. and P. J. Gawthrop. Self-tuning Control. *Proceedings IEEE*, 123, pp. 633-640, 1979.
- [18] Clarke D. W., Mohtadi C. and Tuffs P. S. Generalized Predictive Control – Parts 1 and 2. *Automatica*: Vol. 21, nº. 2, 1987.
- [19] Cutler C. R. and Ramaker B. L. Dinamic Matrix Control – A Computer Control Algorithm. *Proc. Automatic Control Conference*, Paper WP5-B, San Francisco, 1980.
- [20] Daí H., Sinha N. K. and Puthenpura S. C. Robust Combined Estimation of States and Parameters of Bilinear Systems. *Automatica*: Vol. 25, nº.4, pp. 613-616, 1989.
- [21] Daí H. and Sinha N. K. Robust Recursive Least-squares Method with Modified Weights for Bilinear System Identification. *IEE Proceedings*: Vol. 136, Pt.D, nº. 3, May 1989.
- [22] Daí H. and Sinha N. K. Robust Recursive Instrumental Variable Method with Modified Weights for Bilinear System Identification. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*: Vol. 38, nº. 1, February 1991.
- [23] Dagupta S., Shrivastava Y., Krenzer G. Persistent Excitation in Bilinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*: Vol. 36, nº. 3, March 1991.

- [24] Dang Y. and Yangwang C. Robust Nonlinear MPC Based on Simplified Second-Order Volterra Series Model. Proceeding of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation: pp. 3269-3273, June 28-July 2, 2000, Henfei, P. R. China.
- [25] Del Re L., Chapuis J. and Nevistic V.. Predictive Control with Embedded Feedback Linearization for Bilinear Plants with Input Constraints. *Proceeding of thr 33nd Conference na Decision and Control*, Santo Antonio, Texas, December 1993.
- [26] Doyle III F. J., Ogunnaike B. A. and Pearson Ronald K. Nonlinear Model-Based Control Using Second-Order Volterra Models. *Automatica*: Vol.31, n^o. 5, pp. 697-714, 1995.
- [27] Dunoyer A ., Burnham K. J., McAlpine T. S. Self-Tuning Control of an Industrial Pilot-Scale Reheating Furnace Design: Principles and Application of a Bilinear Approach. *IEEE Proc. Control Theory Appl.:* Vol. 144, n^o. 1, pp. 25-31, January 1997.
- [28] Eaton J. and Rawlings J. Feedback control of chemical process using on-line optimization techniques, *Computing Chemical Engineering*, Vol. 14, pp. 469-479, 1990.
- [29] Elhennawey M. S. and S. E. Aidarous. Model Reference Adaptive Control of Bilinear Systems. *Control and Computers*: Vol. 9, n^o. 1, 1981.
- [30] Fontes A B., Rocha G. e Silva M. Análise de desempenho de dois controladores, preditivo e clássico, em uma coluna de destilação, COBEQ 2000, S. Paulo, Brasil, 2000.
- [31] Fontes A. B. e Duarte. A. A. Identificação de um Modelo Bilinear de uma Coluna de Destilação de Tolueno, II SNCA, Salvador- BA, Brasil, 2001.

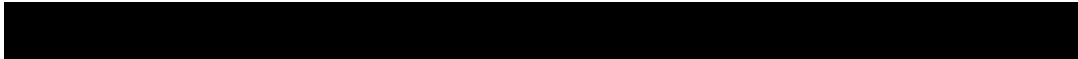


- [32] Fontes A. B., Duarte A. A. e Maitelli A. L. Identification of a Bilinear Model for a Toluene Distillation Column, International Conference on Systems Science, *Systems Science XIV*, Wroclaw, Polônia, setembro de 2001.
- [33] Fontes A. B., Maitelli A. L. e Salazar A. O. Controlador Preditivo Bilinear Aplicado a uma Coluna de Destilação: Algoritmos e Resultados. COBEQ 2002, Natal - RN.
- [34] Fontes A. B., Maitelli A. L. e Salazar A. O. Technique of Bilinear Predictive Control Applied in an Induction Motor Driver. V Induscon/IEEE, Salvador – Bahia, julho 2002.
- [35] Fontes A. B., Maitelli A. L. e Salazar A. O. A New Bilinear Generalized Predictive Control Approach: Algorithm and Results. IFAC' 2002, Barcelona - Espanha.
- [36] Fontes A. B., Maitelli A. L. e Salazar A. O. Bilinear Predictive Control Applied in an Induction Motor Driver, Intercon 2002, Lima - Peru.
- [37] Fontes A. B., Maitelli A. L. e Salazar A. O. Controlador Preditivo Bilinear Aplicado a uma Coluna de Destilação: Algoritmos e Resultados. CBA 2002, Natal - RN.
- [38] Fontes A. B., Maitelli A. L. e Salazar A. O. A New Bilinear Generalized Predictive Control Approach: Algorithm and Results. Artigo submetido ao *Institute of Electrical Engineers - IEE*, sob nº 32970.
- [39] Figalli G., Lava M. Cava and Tomas L. An Optimal Feedback Control for a Bilinear Model of Induction Motor Drives. *Int. J. Control*: vol. 39, nº. 5, pp. 1007-1016, 1984.

- [40] Fortunato A. F. and Salazar A. O. "Implementation of a Velocity Controller Using Slide Modes to a Induction Motor", Sociedade Brasileira de Automática (SBA).
- [41] Garcia C.E., Prett D.M. and Morari M. Model Predictive Control: Theory and Practice – a Survey. *Automatica*, Vol. 25, Nº. 3, pp. 335-348,1989.
- [42] Gabr M. M. and Rao T. S. On the Identification of Bilinear Systems from Operating Records. *Int. J. Control*: Vol. 40, nº. 1, pp. 121-128, 1984.
- [43] Goodhart S. G., Burnham K. J. and James D. J. G. Bilinear Self-tuning Control of a high temperature Heat Treatment Plant. *IEEE Control Theory Appl.* : Vol. 141, nº. 1, January 1994.
- [44] Goodwin G. C. and Sin K. S. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. New Jersey, Prentice Hall, 1984.
- [45] Gutman P. Stabilizing Controllers for Bilinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*: Vol. AC-26, nº. 4, pp. 917-922, August 1981.
- [46] Kantende E. and Jutan A. Nonlinear Predictive Control of Complex Processes. *Ind. Eng. Chem. Res.*, Vol. 35, nº. 10, pp. 3539-3546, 1996.
- [47] King J., Burnham J. and James G. Comparison of two identification techniques for bilinear systems., *Control and Computation*, Vol. 18, nº.1, pp. 4–8, 1990
- [48] Lee, An-Chen. Minimum-Variance Controller for a Class of Non-Linear Systems. *Int. J. Systems Sci.*: Vol. 21, nº. 11, november 1990.

- [49] Lee J. and Park S. Robust Nonlinear Predictive Control Using A Disturbance Estimator, *Chem. Eng. Comm.*, Vol. 128, pp. 43-64, 1994.
- [50] Luyben W. L. *Process Modeling, Simulation and Control of Chemical Engineering*, New York, McGraw-Hill, 1990.
- [51] Mahfouf M. and Linkens D. A. Non-Linear Generalized Predictive Control (NLGPC) Applied to Muscle Relaxant Anaesthesia. *Int. J. Control*: Vol. 71, nº. 2, pp. 239-257, 1998.
- [52] Maner B. R., Doyle III F. J., Ogunnaike B. A. and Pearson R. K.. Nonlinear Model Predictive Control of Simulated Multivariable Polymerization Reactor Using Second-order Volterra Models. *Automatica*: Vol. 32, nº. 09, pp. 1285-1301, 1996.
- [53] Maner B. R. A Nonlinear Model Predictive Control Scheme Using Second Order Volterra Models. *Proceeding of the American Control Conference*. Baltimore, June 1994.
- [54] Mohler R. R. *Bilinear Control Process*, Academic Press, Vol. 106, New York, 1973.
- [55] Mohler R.R. and Khapalov A. Y. Bilinear Control and Application to Flexible a . c. Transmission Systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*: Vol.105, pp. 621-637, June 2000.
- [56] Mohler R. R. and Kolodziej W. J. An Overview of Stochastic Bilinear Control Processes. *IEEE Transactions Systems, Man, and Cybernetics*: Vol. SMC-10, nº. 12, pp. 913-917, December 1990.
- [57] Mohler R. R. and Kolodziej W. J. Optimal Control of a Class of Nonlinear Stochastic Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*: Vol. AC-26, nº. 5, pp. 1048-1054, October 1981.

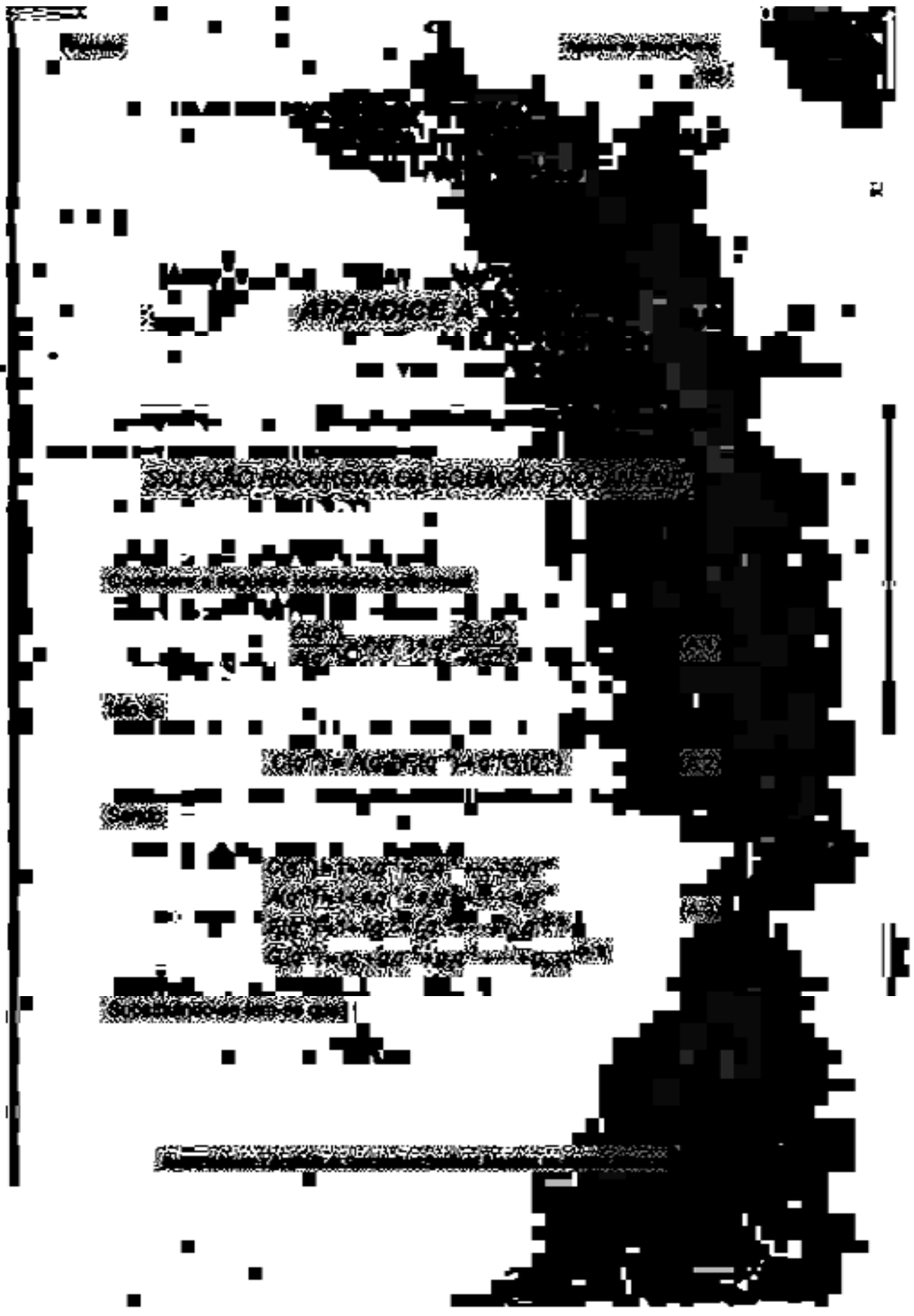
- [58] Morningred J. D., Mellichamp D. A. and Seborg D. E. A Multivariable Adaptive Nonlinear Predictive Controller. Proc. of the American Control Conference: pp. 2776-2781, Boston, 1991.
- [59] Morningred J. D., Paden B. E., Seborg D. E. and Mellichamp D. A. An Adaptive Nonlinear Predictive Controller. *Chemical Engineer in a Science*: Vol.47, n°.4, pp. 755-762, 1992.
- [60] M'Sahli F., Bouani F., Kamel A. El Abdenmour, R. B. and Ksouri M.. Constrained Nonlinear Model-Based Predictive Control Using ARX-Plus Volterra Models. *IEEE Transaction on Automatic Control*. pp. 3764-3769, 1998.
- [61] Mutha R. H., Cluett W. R. and Pendilis A. Nonlinear Model-Based Predictive Control of Control Nonaffine Systems. *Automatica*: Vol. 33, n°. 5, pp. 907-913, 1997.
- [62] Parker R. S. and Doyle III F. J. Nonlinear Model Predictive Control of a Continuous Bioreactor at Near-Optimum Conditions. *Proceeding of the American Control Conference*. pp. 2549-2553. Philadelphia-Pennsylvania, June 1998.
- [63] Propoi A. I. Use of LP methods for synthesizing sampled-data automatic systems. *Autumn Remote Control*, 24, 1963.
- [64] Puthenpura C., Sinha K. and Vidal P., Application of M-estimation in Robust Recursive Identification, *IFAC Symp. Stoch. Control*, pp.23-30, 1985.
- [65] Rajkumar V., Zhu W., Mohler R.R., Spée R., Mittelstadt W. A. and Maratukuiam. D. A Bilinear Self-Tuning Controller for Multimachine Transient Stability. *IEEE Transactions on Power Sytems*: Vol. 9, n°. 3, August 1994.



- [66] Rajkumar V. and Mohler R.R. Bilinear Generalized Predictive Control Using the Thyristor-Controlled Series Capacitor. *IEEE Transactions on Power Systems.*, Vol. 9, nº. 9, pp. 1987-1993, November 1994.
- [67] Richalet J., Rault A., Testud I. L. and Pappon J., Model Predictive Heuristic Control: Applications to Industrial Processes, *Automatica*, Vol.14, 413-418, 1978.
- [68] Smith M. O. J. Feedback Control Systems. Mc Graw Hill, 1958.
- [69] Soroush M. and Soroush H. M. Input-Output Linearizing nonlinear Predictive Control. *Int. J. Control*: Vol. 68, nº. 6, pp. 1449-1473, 1997.
- [70] Söeterbock R. *Predictive Control: A unified approach*. Prentice-Hall, 1992.
- [71] Svoronos S., Stephanopoulos G. On Bilinear Estimation and Control. *Int. J. Control*: Vol. 34, nº.4, pp. 651-684, 1981.
- [72] Sundareshan M. K. and Fundakowski R. A. Stability and Control of a Class of Compartmental Systems with Application to Cell Proliferation and Cancer Therapy. *IEEE Transactions on Automatic Control*: Vol. AC-31, nº.11, November 1986.
- [73] Sun X. and Rao M. A Multivariable Bilinear Adaptive Controller with Decoupling Design. *IEEE Transactions on Automatic Control*: Vol. 45, nº. 4 April 2000.
- [74] Toledo B. Castilho and Gallegos J. Alvarez. Identification and Bilinear Control of a Binary Distillation Column. *Int. J. Systems Sci.*: Vol. 18, nº. 12, pp. 2209-2228, 1987.



- [75] Topunov M. V.. Problem of Regulation of the Cardiovascular System as a Bilinear Control Problem. *Math. Meth. Appl. Sci.*,21, 1365-1377, 1998.
- [76] Tuan, H.D. and Hosoe S. On Robust and Control for a Class of Linear and Bilinear System with Nonlinear Uncertainty. *Automatica*: Vol.33, nº. 7, pp.1373-1377 , 1997.
- [77] Vaidya V. G., Alexandro F. J. and Vaidya P.G. A Bilinear Control Model For Tumor Growth and Chemotherapy. *Int. J. Bio-Medical Computing*, Vol. 17. Elsevier Scientific Publishers: pp. 145-154, 1985.
- [78] Yeo Y. K. and Williams D. C. Bilinear model Predictive control. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 26, pp. 2267-2274, 1987
- [79] Yugeng X., Hao S. and Zhongjun Z. Model Predictive Control for a class of Nonlinear Systems. IEEE Tencon`93, Beijng. pp. 428-431,1993.
- [80] Zhaoli U., Feng L., Zulian Q. and Yong W. Adaptive Predictive Control for Bilinear Systems with Model Indeterminacy. Proceeding of the 3rd World Congress on Intelligent and Automation. pp. 3205-3207 June 28-July 2, 2000, Hefei, China.



...the first of the month of May, 1630, the
...the first of the month of May, 1630, the

...the first of the month of May, 1630, the
...the first of the month of May, 1630, the

...the first of the month of May, 1630, the
...the first of the month of May, 1630, the

...the first of the month of May, 1630, the
...the first of the month of May, 1630, the

...the first of the month of May, 1630, the
...the first of the month of May, 1630, the

...the first of the month of May, 1630, the
...the first of the month of May, 1630, the

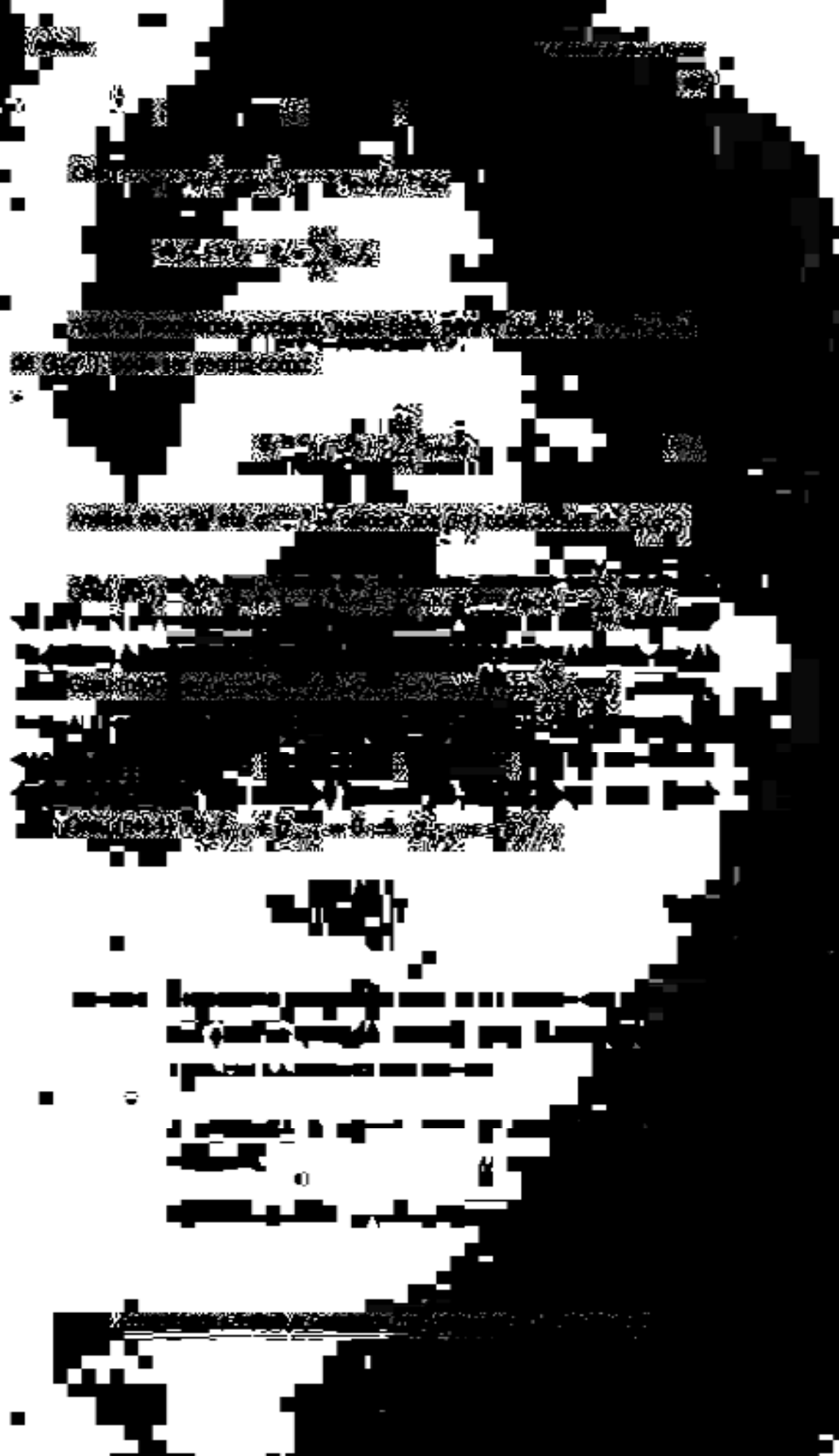
...the first of the month of May, 1630, the
...the first of the month of May, 1630, the

...the first of the month of May, 1630, the
...the first of the month of May, 1630, the

...the first of the month of May, 1630, the
...the first of the month of May, 1630, the

...the first of the month of May, 1630, the
...the first of the month of May, 1630, the

...the first of the month of May, 1630, the
...the first of the month of May, 1630, the



MEMORANDUM

MEMORANDUM FOR THE RECORD

On 10/15/64, the following information was received from the Chicago Office of the Federal Bureau of Investigation (FBI) regarding the activities of the Chicago Office of the Communist Party (CP) during the period from 10/1/64 to 10/15/64. The information was obtained from a review of the files of the Chicago Office of the FBI and is being furnished to you for your information.

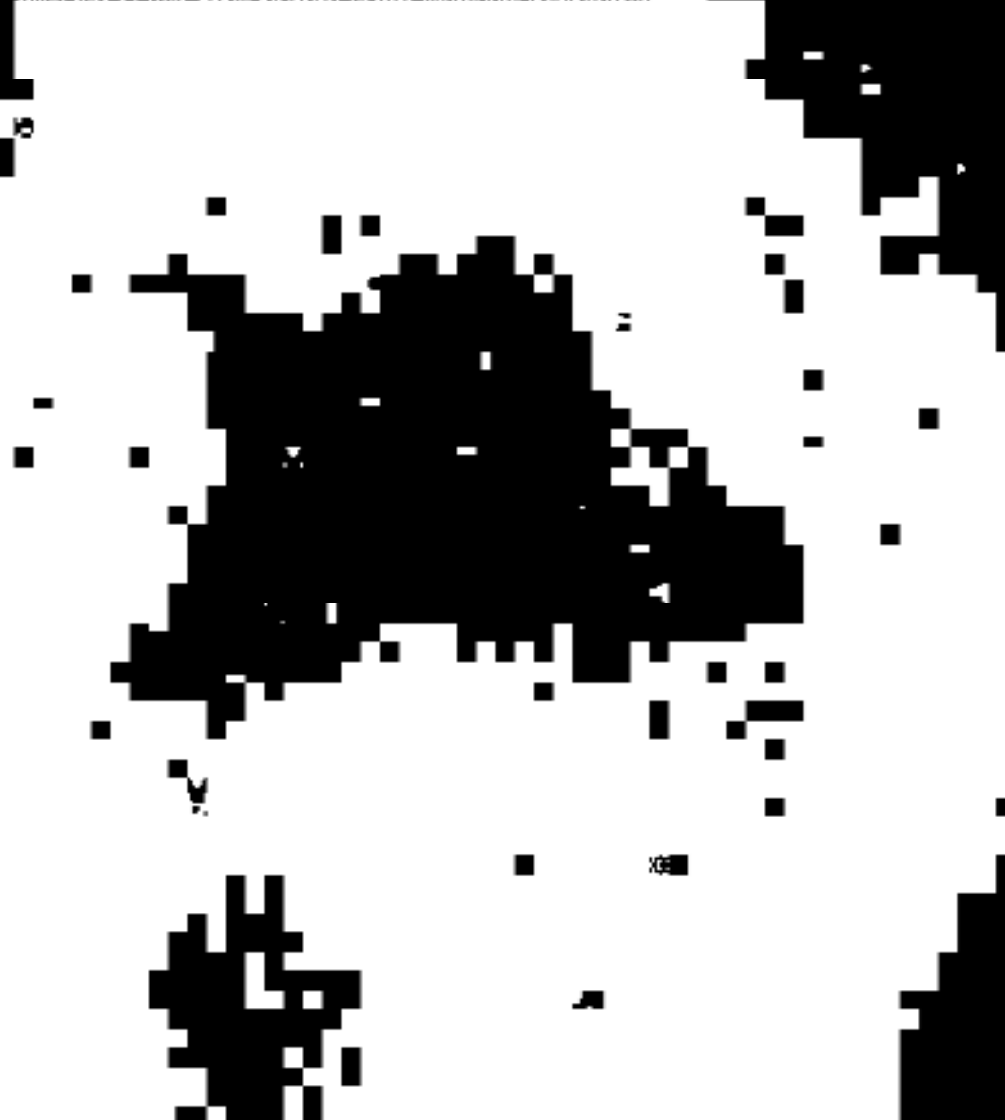
The Chicago Office of the FBI has received information from the Chicago Office of the CP that the Chicago Office of the CP is planning to hold a meeting on 10/20/64 at the Chicago Convention Center. The meeting is to be held from 10:00 a.m. to 12:00 p.m. and is to be held in Room 1000. The meeting is to be held in Room 1000 of the Chicago Convention Center, 100 North Dearborn Street, Chicago, Illinois. The meeting is to be held in Room 1000 of the Chicago Convention Center, 100 North Dearborn Street, Chicago, Illinois. The meeting is to be held in Room 1000 of the Chicago Convention Center, 100 North Dearborn Street, Chicago, Illinois.



10/15/64

On 10/15/64, the following information was received from the Chicago Office of the Federal Bureau of Investigation (FBI) regarding the activities of the Chicago Office of the Communist Party (CP) during the period from 10/1/64 to 10/15/64. The information was obtained from a review of the files of the Chicago Office of the FBI and is being furnished to you for your information.

The Chicago Office of the FBI has received information from the Chicago Office of the CP that the Chicago Office of the CP is planning to hold a meeting on 10/20/64 at the Chicago Convention Center. The meeting is to be held from 10:00 a.m. to 12:00 p.m. and is to be held in Room 1000. The meeting is to be held in Room 1000 of the Chicago Convention Center, 100 North Dearborn Street, Chicago, Illinois. The meeting is to be held in Room 1000 of the Chicago Convention Center, 100 North Dearborn Street, Chicago, Illinois. The meeting is to be held in Room 1000 of the Chicago Convention Center, 100 North Dearborn Street, Chicago, Illinois.



1998 THE JOURNAL OF THE 1998