UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

MARIA DA CONCEIÇÃO ALVES BEZERRA

AS QUATRO OPERAÇÕES BÁSICAS: uma compreensão dos procedimentos algorítmicos

NATAL – RN
2008

MARIA DA CONCEIÇÃO ALVES BEZERRA

AS QUATRO OPERAÇÕES BÁSICAS: uma compreensão dos procedimentos algorítmicos

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática à banca examinadora, na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sob a orientação da Professora Doutora Rogéria Gaudencio do Rêgo, como requisito parcial a obtenção do título de mestre.

NATAL – RN

2008

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial Especializada
Especializada do Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Bezerra, Maria da Conceição Alves.
As quatro operações básicas: uma compreensão dos procedimentos algorítmicos / Maria da Conceição Bezerra. – Natal, 2008.
138 f. : il.

Orientadora: Profa Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo.

Dissertação (Mestrado) Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, 2008.

1. Compreensão relacional - Dissertação. 2. Quatro operações básicas - Dissertação. 3. Procedimentos algorítmicos - Dissertação. I. Rêgo, Rogéria Gaudencio do. II. Título.

MARIA DA CONCEIÇÃO ALVES BEZERRA

AS QUATRO OPERAÇÕES BÁSICAS: uma compreensão dos procedimentos algorítmicos

BANCA EXAMINADORA

____

Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo (UFPB) – Orientadora

____

Dra. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes (UECE-CE)

____

Dra. Claudianny Amorim Noronha (UFRN)

____

Dr. Paulo Cézar de Faria (UFRN) – Suplente

Aprovada em: / / 2008

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Valdeban Fernandes e Maria Alves, aos meus irmãos Vilmar, Valteido, Valdir e Vagne.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela força;

Aos meus pais, irmãos e cunhadas pela dedicação;

À Rogéria, minha orientadora, fica meu eterno agradecimento pela sua contribuição e objetividade nas orientações;

A amiga Suely pelo apoio durante a caminhada;

Aos professores Dra. Claudianny Amorim e Dr. Iran Abreu, pelas sugestões apresentadas no Exame de Qualificação;

Aos professores, funcionários e estudantes que fazem parte do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática;

Aos alunos que participaram como sujeitos deste estudo;

As minhas amigas, Ana Cristina, Clemilda e Jussara que me incentivaram durante este trabalho;

Ao meu tio Erni minha gratidão;

À Julia D'arc, pelas reflexões críticas e sugestões.

RESUMO

A presente pesquisa teve como principal objetivo analisar a possibilidade de elaboração/reelaboração de conhecimento acerca das idéias e procedimentos algoritmos relativos às operações básicas, por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, em um processo de aprendizagem significativa. Para tanto, o estudo teve como base uma intervenção metodológica desenvolvida em uma turma do 6º ano de uma Escola da Rede Municipal de Ensino Fundamental da cidade de João Pessoa-PB. A pesquisa teve como etapas centrais a aplicação de pré-testes (1 e 2); a realização de entrevistas semi-estruturadas com os alunos envolvidos nos estudos de aprofundamento do tema; a elaboração e desenvolvimento de atividades de ensino, tendo como referencial a aprendizagem significativa, e a aplicação de um pós-teste. Os dados coletados nos pré-testes (1 e 2) revelaram um baixo nível de compreensão dos alunos acerca dos conteúdos relativos às quatro operações. As respostas às questões do pós-teste foram analisadas principalmente do ponto de vista qualitativo, com base na teoria de compreensão de conceitos matemáticos, proposta por Skemp (1980), tendo como subsídio, complementar dados coletados por meio de entrevistas. A análise dos resultados obtidos no pós-teste revelou que a maior parte dos alunos atingiu uma compreensão relacional acerca das idéias e procedimentos algorítmicos relativos à adição, subtração, multiplicação e divisão. Tais resultados indicam que à aplicação de uma metodologia de ensino que privilegie a compreensão dos conteúdos, considerando o conhecimento prévio dos alunos e a reflexão sobre a ação ao longo das atividades propostas, possibilitaram a elaboração ou reelaboração de conhecimento por parte dos alunos, pertinentes aos conteúdos adotados como tema para nossa pesquisa.

Palavras-chave: Compreensão relacional. Quatro operações básicas. Procedimentos algorítmicos.

ABSTRACT

The current research had as main objective to analyze the possibility of knowledge elaboration/re-elaboration about ideas and algorithmic procedures related to basic operations by pupils of the 6th degree fundamental teaching in a significant learning process. This way the study had as basis a methodological intervention developed in a 6th degree class of a Fundamental Teaching Municipal School in the city of João Pessoa, PB. The research had as central steps the application of pre-tests (1 and 2); the execution of semi-structured interviews with the pupils involved in the theme deep studies; the elaboration and development of teaching activities, having as referential the significant learning and the application of a pre-test. The data collected in the pre-tests (1 and 2) showed a low level of the pupils' comprehension about the contents related to the four operations. The answers to the post-test questions were analyzed mainly from the qualitative point of view based on the mathematic concepts comprehension theory proposed by Skemp (1980) having as complementary subsidy data collected through interviews. The analysis of the results obtained in the post-test showed that the major part of pupils reached a relational comprehension about the ideas and algorithmic procedures related to addition, subtraction, multiplication, and division. Such results showed us that the application of a teaching methodology that privileges the content comprehension, considering the pupils' previous knowledge and the reflection about the action along the activities proposed, made possible the elaboration or re-elaboration of knowledge by pupils regarding to contents adopted as theme for our research.

Key-words: Relational Comprehension. Four Basic Operations. Algorithmic Procedures.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na sociedade contemporânea, as mudanças sociais, culturais, tecnológicas e profissionais são freqüentes, exigindo um conhecimento mais completo do mundo que nos cerca. Em todas as áreas do conhecimento, surgem novas demandas de formação, para que possamos compreender e agir no mundo, com qualidade. No campo do trabalho, por exemplo, as empresas que estão em busca da excelência passaram a exigir daqueles que fazem parte do seu quadro, que estes sejam profissionais preparados para o trabalho em equipe, que tenham inteligência emocional e estejam abertos a mudanças.

No campo da educação, não podia ser diferente. Documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, (PCN), (BRASIL, 1998) trazem, em seu conteúdo, recomendações de que o ensino deve estar voltado para preparar o aluno para as situações do seu cotidiano, trabalhando, para isso, com conteúdos e metodologias que levem a resultados positivos no que diz respeito à preparação para a vida. As formas de ensino adotadas há muito tempo pelas escolas e ainda predominantes em muitas de nossas salas de aula, baseadas na memorização de informações, aliadas a outros aspectos, durante muito tempo segregaram (e ainda segregam), sobretudo aqueles que sentem dificuldades para aprender.

É questionável se faz sentido proporcionar aos alunos um ensino descontextualizado, calcado na memorização de regras e técnicas operatórias totalmente, desvinculado de sua realidade, em especial quando se trata dos conhecimentos matemáticos.

Em razão das possibilidades de uso para quantificar, interpretar e fornecer instrumentos de leitura e previsão de comportamento de fenômenos naturais do mundo físico e social, a Matemática está presente em quase todas as atividades humanas. Por essa razão, faz-se necessário que seu ensino seja capaz de propiciar o desenvolvimento não só de conhecimentos, mas também de habilidades e competências que contribuam para a formação de um cidadão crítico, criativo e solidário, capaz de ser agente de mudanças na sociedade em que vive.

Com base em nossa experiência de sala de aula, verificamos as dificuldades que os alunos enfrentam para compreender os conteúdos básicos dessa disciplina, como os que envolvem as operações aritméticas básicas, apesar estes serem bastante trabalhados nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Assim, objetivando trazer elementos que possam contribuir para a melhoria da compreensão do processo de ensino/aprendizagem da Matemática, em sala de aula, tomamos como tema de estudo para o presente trabalho, a análise dos principais procedimentos algoritmos utilizados pelos alunos de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de ensino da cidade de João Pessoa – PB, em relação à forma como detêm sua estruturação e uso na resolução de problemas, bem como analisar a possibilidade de elaborarem/reelaborarem esses elementos, em um processo de intervenção didática.

Para isso, utilizamos recursos didáticos diversos, tais como o material dourado, jogos e calculadora, dentre outros, considerando a importância do desenvolvimento dos conteúdos, de diferentes formas, para a consolidação das idéias relacionadas aos conceitos formais associados aos algoritmos das operações aritméticas.

Este trabalho foi estruturado em quatro capítulos. O primeiro foi dedicado à apresentação dos fundamentos de nosso objeto de estudo, com a justificativa da escolha pelo tema para a realização da pesquisa e discussão sobre atual situação do ensino de Matemática no país, por meio dos dados apresentados no Relatório do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que apontam um baixo desempenho dos alunos do Ensino Fundamental quando da resolução de problemas e do emprego das operações fundamentais. Traçamos os objetivos gerais, os objetivos específicos e o percurso metodológico adotado. Finalmente, apresentamos os critérios de análise da pesquisa, baseados na teoria de Skemp (1980).

O segundo capítulo traz as contribuições teóricas elaboradas por Piaget, Vygotsky e Ausubel, cujos elementos nos forneceram subsídios para a compreensão do processo de construção dos conhecimentos matemáticos considerados. Além disso, pesquisamos algumas concepções acerca do conceito de “compreensão”, segundo Rios (2003) e Machado (2002). Com relação ao ensino e à aprendizagem das operações, destacamos as pesquisas de Carraher, Carraher e Schliemann (2001), Zunino (1995) e Saiz (1996) a respeito de como os alunos lidam com as operações básicas.

O terceiro capítulo trata da caracterização do ambiente da intervenção, da discussão dos resultados dos pré-testes (1 e 2), que tiveram como objetivo identificar os conhecimentos prévios dos alunos com relação às quatro operações. Traz a entrevista com os sujeitos da pesquisa, cujos resultados subsidiaram a elaboração da intervenção didática. Apresentamos ainda, neste Capítulo, as atividades aplicadas em sala de aula, com detalhes de como ocorreram e o relato das informações e impressões coletadas na interação com os alunos.

O quarto Capítulo compreende a análise das respostas do Pós-teste, que foram tabeladas e analisadas qualitativamente, com base em uma teoria de compreensão de conceitos matemáticos. Contém também elementos das entrevistas de aprofundamento realizadas, visando elucidar dados da análise qualitativa das respostas do Pós-teste; as conclusões gerais e nossas considerações finais.

1.1 Justificativa

No período em que atuamos como professora do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental (6° ao 9° anos), constatamos as dificuldades da maior parte dos alunos no que se refere à compreensão dos processos algorítmicos empregados nas quatro operações. Os erros eram freqüentes, principalmente quando as questões envolviam subtrações com reagrupamento e divisão envolvendo divisores com dois ou mais algarismos.

Documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (PCN) de Matemática e relatórios de avaliação, entre eles os apresentados pelo Sistema de Avaliação de Educação Básica (SAEB), ressaltam o estudo das operações básicas como um tema central nos currículos do Ensino Fundamental. Entretanto, muitos alunos chegam ao final desse nível de ensino sem ter desenvolvido o domínio ou a compreensão dos procedimentos algorítmicos envolvidos nas quatro operações. Os PCN (BRASIL, 1998) apontam, entre outros elementos, a possibilidade este fato ocorrer em função de uma abordagem inadequada para o tratamento do tema no Ensino Fundamental.

Para uma melhor compreensão do objeto de nossa pesquisa, procedemos uma leitura e análise dos dados presentes nos documentos do SAEB, cujos relatórios revelam algumas das fragilidades apresentadas pelos alunos do Ensino Fundamental, relativas ao nosso objetivo de estudo.

O SAEB é coordenado pelo Instituto Nacional de Estudo e Pesquisas Educacionais (INEP) - e conta com o apoio das secretarias estaduais e municipais de Educação das 27 unidades da federação. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional N° 9394/96 atribui responsabilidade à União pela avaliação do rendimento escolar dos alunos brasileiros.

O SAEB, cujo principal objetivo é avaliar a qualidade, a eqüidade e a eficiência do ensino/aprendizagem em nosso sistema educacional vem, desde 1995, avaliando por meio de um modelo por amostragem, o desempenho escolar de alunos nas redes públicas e privadas em nível nacional. O teste é aplicado a cada dois anos e avalia o desempenho dos estudantes do 5° e 9º anos do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio, nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática. Para a elaboração das avaliações de Matemática, os técnicos do SAEB tomam como base, a resolução de problemas relativos aos diversos campos do conhecimento desta disciplina.

O termo “competência” refere-se, no documento, à capacidade de utilizar determinadas operações e estabelecer diferentes relações entre elementos matemáticos como os significados das operações, a conexão e inversão de idéias entre operações, o domínio de procedimentos, a resolução de problemas, entre outros.

O SAEB discriminou os estágios de construção de competências matemáticas dos alunos das séries avaliadas em quatro: “muito critico”, “crítico”, “intermediário” e “adequado”, com o objetivo de analisar e discutir os dados obtidos.

A respeito dos estágios de desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos do 5° ano do Ensino Fundamental estão resumidos da forma apresentada no Quadro.

Muito crítico	Não conseguem transpor para uma linguagem matemática específica comandos operacionais elementares compatíveis com a série. (Não identificam uma operação de soma ou subtração envolvida no problema ou não sabem o significado geométrico de figuras simples).
Crítico	Desenvolvem algumas habilidades elementares de interpretação de problemas aquém das exigidas para o ciclo. São capazes de reconhecer partes de um todo em representações geográficas e calcular áreas de figuras desenhadas em malhas quadriculadas contando o número de lados; resolvem problemas do cotidiano envolvendo pequenas quantias em dinheiro.
Intermediário	Desenvolvem algumas habilidades de interpretação de problemas, aproximando-se do esperado para a 4ª série. Entre outras habilidades, resolvem problemas do cotidiano envolvendo adição de números racionais com o mesmo número de casas decimais, calculam o resultado de uma adição e subtração envolvendo números de até 3 algarismos, inclusive com recurso e reservas, de uma multiplicação com um algarismo.
Adequado	Interpretam e sabem resolver problemas de forma competente. Apresentam as habilidades compatíveis com a série. Reconhecem e resolvem operações com números racionais, de soma, subtração, multiplicação e divisão. Além das habilidades descritas para os estágios anteriores, resolvem problemas que utilizam a multiplicação envolvendo a noção de proporcionalidade, envolvendo mais de uma operação, incluindo o sistema monetário, e calculam o resultado de uma divisão por número de 2 algarismos, inclusive com resto.

Quadro: Matriz de estágios matemáticos

Fonte: (BRASIL, 2005, p.35)

A média de desempenho dos alunos da região Norte, no 5° ano do Ensino Fundamental, em 2003, foi de 163,4 pontos. No Nordeste, a média foi de 159,5; no Sudeste, de 190,3; e no Sul, de 186,7 pontos. Constata-se que as deficiências nos desempenhos distribuem-se de forma quase padrão em todas as regiões brasileiras, sendo o Norte e o Nordeste as regiões um pouco mais problemáticas.

No Nordeste, os alunos apresentam resultados abaixo da média nacional. Em 2001, essa média foi de 158,7 e em 2003, de 159,5 pontos, ocorrendo um pequeno acréscimo (0,8).

Na Paraíba, em 2001, a pontuação média dos alunos em Matemática girou em torno de 165,7 pontos, apresentando um decréscimo de - 6,1 pontos na avaliação seguinte, uma vez que a média em 2003 foi de 159,6.

Segundo o relatório de 2003, o percentual de alunos brasileiros que estavam no estágio muito crítico em Matemática era de 11,5% (em 2001, eram 12,5 %). No estágio crítico, os percentuais alcançados em 2001 e 2003 foram, respectivamente, 39,8 % e 40,1 %. Somando os valores desse estágio com os do estágio muito crítico temos uma situação alarmante, de cerca de 52,3 % do total dos alunos avaliados. Esse valor caiu para 51,6 %, em 2003, sem apontar mudanças significativas nos percentuais dos alunos que se encontram nos estágios, muito crítico e crítico.

Ao final do Ensino Fundamental (9° ano), as dificuldades são ainda maiores, uma vez que os percentuais relativos aos estágios, muito crítico e crítico correspondiam a 10% e 60%, respectivamente, no ano de 2003.

O percentual de alunos que se encontram nos estágios, intermediário e adequado compreende uma ínfima parcela do total avaliado. Vale destacar que, por razões diversas, entre eles a expansão das matrículas na Educação Básica, os dados do SAEB vêm mostrando queda sistemática dos valores relativos ao desempenho dos alunos em Matemática, no período de 1995 a 2001. A média dos alunos do 5° ano do Ensino Fundamental, em 1995, 1997, 1999, 2001 e 2003 foram, respectivamente, 190,6; 190,8; 181,0; 176,3 e 177,1. Observa-se uma pequena recuperação em 2003, mas, apesar dessa leve alteração nos valores, estamos longe das taxas de 1995.

Os documentos revelam que o desempenho dos alunos em Matemática é insatisfatório, pois grande parte dos estudantes, ao final do 5° ano do Ensino Fundamental, não desenvolveram habilidades nas operações com números naturais, como calcular o resultado de uma adição e subtração envolvendo número de até três algarismos; não têm domínio dos procedimentos algoritmos dessas operações e apresentam dificuldades na resolução de problemas, estando as operações de multiplicação e divisão quase que totalmente fora de seu alcance.

As avaliações feitas pelo SAEB evidenciam que, ao final do Ensino Fundamental (9° ano), os alunos dominam apenas habilidades elementares em Matemática, fragilidade que se destaca quando os temas abordados são as operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Compreendemos que os sistemas de avaliação adotados no país não podem ser vistos como único ou maior ponto de vista para a leitura da situação da educação no país, mas o fato de relatórios como os apresentados pelo SAEB estimularem discussões entre educadores, pedagogos e técnicos da educação, visando à melhoria de nosso sistema educacional já representa uma grande contribuição.

Como afirmamos anteriormente, nosso principal modelo de ensino é ainda baseado na memorização de regras, porém, mesmo quando memorizam as regras de cálculo, os alunos não as aplicam de forma adequada nas situações que lhes são propostas. Tais dificuldades transparecem em avaliações como as realizadas pelo SAEB por nossos alunos do Ensino Fundamental e do Médio, uma vez que tomam por base sua capacidade de resolver problemas.

Embora reconhecendo alguns avanços na educação brasileira, ainda é necessário que se estimulem debates e se realizem implementações de propostas concretas que levem a uma melhoria do ensino da Matemática e, em especial, das operações básicas.

Portanto, tendo em vista todos os aspectos aqui abordados, no que concerne às dificuldades que permeiam o processo de ensino/aprendizagem da Matemática, nosso trabalho de pesquisa teve por objetivo analisar a possibilidade de elaboração/reelaboração de conhecimentos relativos a procedimentos algoritmos nas operações básicas, por alunos do 6°

ano do Ensino Fundamental, tendo como ponto de partida para nossa reflexão o domínio e compreensão que têm acerca de tais procedimentos.

Considerando que o domínio das operações aritméticas é importante para a formação matemática do aluno, elaboramos um conjunto de atividades que envolveram diversos recursos didáticos, tais como jogos, material dourado, calculadora, entre outros, que aplicamos em uma intervenção didática.

As questões que propomos analisar e para as quais buscamos respostas ou indicações de caminhos possíveis foram:

- Quais são os principais procedimentos algorítmicos, utilizados pelos alunos?
- Qual a compreensão que detêm dos procedimentos algorítmicos que utilizam? O processo é realizado de forma mecânica ou eles entendem cada passo do processo?
- É possível que construam conhecimento significativo relativo ao tema indicado, mesmo que a abordagem adotada nas séries anteriores tenha sido inadequada?

Nossa hipótese principal era que as atividades desenvolvidas poderiam despertar o interesse dos alunos pelo estudo da Matemática e proporcionar uma aprendizagem significativa dos procedimentos algorítmicos relativos às operações básicas.

1.2 Objetivos

1.2.1 Geral

Analisar a possibilidade de elaboração/reelaboração de conhecimento relativo a procedimentos algoritmos para as operações básicas, por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, em um processo de aprendizagem significativa.

1.2.2 Específicos

- Identificar os principais procedimentos algorítmicos, utilizados pelos sujeitos da pesquisa e as principais dificuldades a eles relacionadas;

- Elaborar atividades didático-metodológicas envolvendo as operações aritméticas;

- Aplicar as atividades propostas em sala de aula e avaliar o desenvolvimento da compreensão dos principais procedimentos algoritmos que os alunos detêm;

- Avaliar se os alunos evoluíram quanto à compreensão e ao emprego dos procedimentos algoritmos.

1.3 Metodologia da pesquisa

O trabalho desenvolvido neste estudo caracteriza-se por uma abordagem metodológica qualitativa do tipo pesquisa-ação, com intervenção direta da pesquisadora no espaço da investigação, a partir da proposição de uma alternativa didática para o ensino dos procedimentos algoritmos das operações básicas, em uma turma do 6° ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de João Pessoa-PB.

Denzin (2006, p. 102) concebe a pesquisa-ação com as seguintes características:

> 1- é uma investigação na qual não há uma co-produção de conhecimento entre os participantes e os pesquisadores por meio de processos comunicativos colaborativos.
> 2- [...] trata a diversidade de experiência e de capacidades dentro do grupo local.
> 3- [...] produz resultados válidos de pesquisa.
> 4- [...] concentra-se no contexto; seu objetivo é resolver problemas da vida real em seu contexto.

Nesse sentido a pesquisa-ação tem como objetivo explicar alguns aspectos da realidade para, assim, ser possível agir/intervir sobre ela, identificando problemas, formulando, avaliando e aperfeiçoando alternativas de solução, em situação real, com a intenção de contribuir para o aperfeiçoamento contínuo dessa realidade, objeto de investigação.

Considerando, então, as características atribuídas à pesquisa-ação, julgamo-la como a forma mais adequada para os propósitos deste trabalho, pois a intervenção em sala de aula é feita com o objetivo de realizar uma investigação, sobre a aprendizagem dos procedimentos algoritmos envolvidos nas quatro operações, utilizando um conjunto de atividades de ensino, promovendo a participação ativa dos alunos, estimulando-os a criar hipóteses, criticar, interpretar, construindo seu conhecimento por meio de suas experiências.

Em uma abordagem acerca do processo de construção do conhecimento, D'Ambrosio (2000, p. 18) afirma:

> [...] todo conhecimento é resultado de um longo processo cumulativo de geração, de organização intelectual, de organização social e de difusão, naturalmente não-dicotômicos entre si. Esses estágios são normalmente de estudo, nas chamadas teoria da cognição, epistemologia, história e sociologia, e educação e política. O processo, como um todo, extremamente dinâmico e jamais finalizado, está obviamente sujeito a condições muito específicas de estímulo e de subordinação ao contexto natural, cultural e social. Assim é o ciclo de aquisição individual e social de conhecimento.

Nesse processo, é importante que se veja a elaboração do conhecimento como elemento central, sendo uma manifestação do presente, na passagem entre o tempo passado e o futuro.

Assim, considerando os elementos anteriormente apresentados, desenvolvemos nossa investigação de acordo com as seguintes etapas:

• levantamento bibliográfico acerca das pesquisas que tratam do ensino/aprendizagem das operações aritméticas;

• aplicação de pré-testes (1 e 2), com questões abertas, e de entrevistas semi-estruturadas;

• levantamento das características do ambiente onde foram aplicadas as atividades, visando traçar um perfil do público-alvo. A caracterização englobou o ambiente escolar, passando pela estrutura da escola, até os corpos docentes e discentes;

• elaboração de um conjunto de cinco atividades envolvendo as quatro operações, descritas em seguida;

• aplicação, em sala de aula, das atividades desenvolvidas, por meio de aulas expositivas, oficinas, jogos e brincadeiras, entre outras abordagens metodológicas;

• análises dos resultados alcançados durante a intervenção e aplicação de um pós-teste e entrevistas, contendo questões semelhantes às dos pré-testes (1 e 2).

A primeira atividade, “Trabalhando com o material dourado”, teve como objetivo auxiliar a compreensão do SND e dos métodos para efetuar as operações aritméticas (os algoritmos) e foi baseada nos estudos de Toledo e Toledo (1997).

A segunda atividade, “Confecção de bingos, jogos e figura mágica para a aplicação lúdica da tabuada”, teve como objetivo central retomar as tabuadas, motivando os alunos a compreenderem sua necessidade e uso.

O objetivo da terceira atividade, “Pesquisando no dicionário, na internet e explorando a calculadora”, foi o de trabalhar com a definição das palavras “adição”, “subtração”, “multiplicação”, “divisão” e “inverso” e pesquisar, na Internet, como surgiram os símbolos das operações e, por último, explorar a calculadora e o seu manuseio.

A quarta atividade, “Trabalhando situações-problema com o dinheiro chinês”, objetivou auxiliar o aluno a compreender características do SND e a realizar operações numéricas, com base na reflexão sobre o uso do “dinheiro chinês”. Como o dinheiro faz parte da vivência da maioria dos sujeitos da pesquisa, mesmo não equivalendo ao nosso sistema monetário, uma vez que envolve apenas cédulas que são potência de 10, a centena, a dezena e a unidade ganham mais significado.

Para concluir, realizamos a quinta atividade que envolveu a “Elaboração de situações-problema pelos alunos”. A maioria das atividades foi desenvolvida em grupo, valorizando a interação dos alunos como instrumento de desenvolvimento pessoal como propõem as teorias sócio-interacionistas, por nós consideradas as mais adequadas para subsidiarem o ensino de Matemática em particular.

1.3.1 Critérios de análise da pesquisa

Skemp (1980) considera que o desenvolvimento da compreensão é um processo crescente e contínuo que deve atravessar tudo o que acontece na aula de Matemática. Ao estudarmos a aprendizagem e a compreensão da Matemática, estudamos o funcionamento da inteligência, como evoluem as idéias, como se ampliam as leis do cálculo, como flui o processo de generalização matemática.

Esse autor categoriza a aprendizagem dos conceitos matemáticos em dois níveis: o nível de compreensão instrumental e o nível de compreensão relacional.

Na compreensão instrumental, o aluno domina uma coleção isolada de regras e algoritmos aprendidos por meio da repetição, sem estabelecer relações entre conceitos. Já na compreensão relacional o aluno é capaz de realizar uma grande variedade de atividades com criatividade e inteligência, permitindo relacionar diferentes conceitos em um só esquema.

Com relação às noções de conceito e esquema, Skemp afirma que essas definições não são tão fáceis de apresentar, visto que há uma inter-relação entre ambas as noções. Skemp (1980), considera que um conceito requer, para sua formação, um certo número de experiências que tenham algo em comum e somente após essa formação é possível falar de exemplos do conceito formado. Se isso ocorre, é possível organizá-los para formar estruturas conceituais denominadas esquemas.

Na visão de Skemp (1980, p. 43), o esquema não inclui apenas as complexas estruturas matemáticas, mas também as estruturas relacionadas às atividades sensório-motoras. Além disso, um esquema tem duas funções: (1) a de integrar os conhecimentos existentes e (2) a de funcionar como um instrumento mental para a aquisição de novos conhecimentos.

Documentos oficiais da Educação, a exemplo dos PCN, apontam que os objetivos a serem atingidos com o ensino de Matemática devem proporcionar aos alunos um *conhecimento relacional* e não apenas um *conhecimento instrumental* daquilo que estudam. Ao serem desafiados com atividades em que são incentivados a agir de forma não-convencional, os alunos produzem uma diversidade de estratégias pessoais de resolução que lhes permitirão caminhar na direção da construção de um conhecimento formal que poderá não apenas ser aplicado em novas situações, mas sofrer modificações diante delas.

O pós-teste que aplicamos com os sujeitos da pesquisa teve por objetivo verificar os resultados da aprendizagem dos conteúdos abordados na intervenção metodológica. Os dados coletados por meio do pós-teste foram analisados e discutidos sob duas formas: na primeira apresentamos as respostas dos alunos dispostas em tabelas, segundo os parâmetros: correto, errado ou não responderam. A segunda foi baseada na leitura qualitativa das respostas às questões apresentadas, bem como das observações feitas em sala de aula, com base na teoria de Skemp acerca da elaboração do conhecimento matemático pelo aluno. Saliente-se que foram realizadas entrevistas com os alunos envolvidos nos estudos de aprofundamento do tema, para melhor subsidiar a análise qualitativa das respostas das questões do pós-teste.

É através do estabelecimento da interação professor/aluno e aluno/aluno que ocorre a construção do conhecimento, assim o aluno terá a oportunidade de alcançar a compreensão relacional proposta por Skemp (1980), pois a troca de experiências, o diálogo e a valorização dos conhecimentos prévios subsidiarão essa compreensão. Caso contrário, o aluno terá adquirido apenas os mecanismos matemáticos capazes de conduzi-lo na resolução de exercícios do tipo padrão propostos pelo professor ou presentes nos livros didáticos, sem efetivamente compreender as ações que executam.

Deste modo, no final de nosso estudo, avaliamos como o aluno se encontrava após a intervenção metodológica, baseada na aplicação de atividades de ensino, considerando os níveis de compreensão instrumental e relacional propostos por Skemp (1980), cuja aplicação encontra-se detalhada no Capítulo da análise de dados.

2 CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

No presente Capítulo, tecemos considerações acerca do referencial teórico que adotamos em nossa pesquisa, tanto para a elaboração das atividades realizadas durante a intervenção didática quanto para a coleta e análise dos dados.

2.1 A teoria sócio-interacionista e o processo de ensino/aprendizagem

O modelo tradicional de ensino, no qual o professor é um mero transmissor de informações e o aluno seu receptor passivo, vem se mostrando pouco eficaz, gerando a demanda por modelos nos quais o aluno seja o principal ator no processo de geração de conhecimento. Tais modelos visam uma elaboração ou reelaboração do conhecimento, levando em consideração aspectos psicológicos e metodológicos, entre outros, no processo de ensino/aprendizagem, introduzindo conteúdos ligados à realidade do aluno, enquanto sujeito desse processo, e tendo o professor como mediador. Atualmente existe, no campo da Educação, uma preocupação em torno de quais os modelos educativos que melhor respondem às demandas atuais do ensino de Matemática, cabendo ao professor conhecer as várias possibilidades que lhe permitam escolher os mais adequados ao seu contexto escolar.

Na concepção e aplicação das atividades que desenvolvemos com os alunos durante a intervenção metodológica, que compreendeu uma das etapas de nossa pesquisa, adotamos como referencial teórico a teoria sócio-interacionista, por considerarmos fundamental o papel da mediação e da interação social na construção do conhecimento. Além disso, consideramos como igualmente importante levar em conta o que o aluno já sabe em relação ao conhecimento a ser por ele construído, possibilitando uma incorporação significativa deste à sua estrutura cognitiva.

Para isso, tomamos como base os modelos de ensino estruturados a partir das propostas teóricas de Piaget, Vygotsky e Ausubel, considerando a natureza do tema de nossa pesquisa e da estrutura de análise do emprego e da compreensão dos alunos acerca dos principais procedimentos algoritmos utilizados nas quatro operações básicas.

Para Piaget, o conhecimento se dá por meio de um constante processo dialético de adaptação entre o sujeito e o objeto de conhecimento. Esse conhecimento não é o mesmo que uma cópia figurativa que uma pessoa faz da realidade. Consiste, invariavelmente, em processos operativos que levam à transformação da realidade, tanto em ações quanto em pensamentos, realizados com o objetivo de se apreenderem os mecanismos dessas transformações (GORMAN, 1976).

No construtivismo piagetiano, o sujeito vai construindo seu conhecimento por meio de interação com a realidade que o envolve. Essa interação ocorre por intermédio da assimilação e da acomodação. A assimilação é o processo pelo qual o sujeito interpreta a realidade e lhe dá significado e a acomodação significa a mudança ocorrida no próprio sujeito, concluída a assimilação.

Os trabalhos realizados por Piaget repercutiram na educação por tratarem da compreensão de como uma criança elabora seu conhecimento, tendo suas idéias sobre as relações entre aprendizagem e desenvolvimento, provocando grandes avanços dos trabalhos na educação, servindo de base para outros pesquisadores que o seguiram, a exemplo de Vygotsky e Ausubel.

De acordo com a teoria sociocultural elaborada por Vygotsky, a criança constrói o conhecimento mais pela mediação da sociedade, por meio de signos/palavras, do que pela relação direta com os objetos. “O caminho do objeto até a criança e desta até o objeto passa através de outra pessoa” (VYGOTSKY, 1989, p. 33). A criança já nasce em um mundo que é social e, desde o nascimento, vai formando uma visão desse mundo por meio da interação com adultos ou crianças mais experientes.

Para Vygotsky, os conceitos têm duas origens: uma, a partir da experiência, formando os conceitos espontâneos ou cotidianos, e outra, a partir da interação social, especialmente em situação de escola, formando os conceitos científicos.

Para esse autor (1991, p. 79),

> Os conceitos científicos, com o sistema hierárquico de inter-relações, parecem constituir o meio no qual a consciência e o domínio se desenvolvem, sendo mais tarde transferidos a outros conceitos e a outras áreas do pensamento. A consciência reflexiva chega à criança através dos portais dos conhecimentos científicos.

Os conceitos científicos também são construídos pelos alunos por meio dos mesmos processos usados para a aquisição da linguagem, das atividades interpessoais para as atividades intrapessoais, passando da ação para a conceituação.

A zona de desenvolvimento proximal (ZDP) é o conceito central da teoria de Vygotsky e é fundamental para o entendimento das relações existentes entre desenvolvimento e aprendizagem; professor/aluno e aluno/aluno. Para Vygotsky (1989, p. 97), a ZDP é

> [...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através de solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes.

Na visão de Vygotsky, o conceito de ZDP é essencial para entender as relações entre desenvolvimento e aprendizagem, referindo-se principalmente, à construção de um conhecimento que se dá quando um adulto desafia o aprendiz com questionamentos ou problemas, levando-o a um desempenho além do que sua estrutura cognitiva, naquele momento, permitiria.

Assim, a criação de ZDP em sala de aula pressupõe um relacionamento contínuo entre o que os alunos sabem previamente e aquilo que têm de aprender. Na visão vigotskiana, cabe ao professor o papel de mediador e de ativador de situações que levem à aprendizagem por compreensão. Ele irá, por exemplo, proporcionar situações que façam com que os alunos explorem diferentes idéias matemáticas, encorajando-os a refletirem sobre seus processos de pensamento, com o objetivo de facilitar a construção do seu próprio conhecimento.

No ensino de Matemática, sentimos a carência de uma aprendizagem com compreensão. Nesse sentido, percebemos que "o mais importante fator isolado que influencia a aprendizagem é o que o aprendiz já sabe" (AUSUBEL, 1968, apud NOVAK, 1981, p. 9). Essa afirmação nos parece fundamental para entendermos que exigir um ensino puramente mecânico, centrado na memorização de regras e desprezando o conhecimento prévio dos alunos, é uma forma de exclusão.

A idéia central na teoria de Ausubel é o que ele descreve como aprendizagem significativa. Para Ausubel, a aprendizagem significativa "é um processo no qual uma nova informação é relacionada a um aspecto relevante, já existente na estrutura de conhecimento de um indivíduo" (AUSUBEL, 1968, apud NOVAK, 1981, p. 56).

Ausubel (apud SALVADOR, 2000) concebe que a aprendizagem significativa pode ser tanto por meio de recepção quanto por meio da descoberta. A aprendizagem por recepção ocorre quando o aluno recebe as informações e consegue relacioná-las com suas estruturas cognitivas, criando novos significados para elas. Já através da aprendizagem por descoberta o aluno constrói, por si só, o conhecimento, relacionando as novas informações com suas idéias prévias, isto é, com as informações já existentes em sua mente.

A aprendizagem mecânica ou repetitiva restringe-se a uma associação entre estímulo e resposta, isto é, é a aprendizagem de novas informações, com pouca ou nenhuma associação a conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva do aluno. Assim, na aprendizagem mecânica, a informação é armazenada de maneira arbitrária, sem que haja interação entre a nova informação e aquela já existente. Nesse caso, o aluno memoriza a informação sem tê-la necessariamente compreendido.

Como nossa preocupação era proporcionar aos alunos o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa, em um nível de conhecimento relacional (SKEMP, 1980), destacamos como fruto da opção teórica que adotamos para nossa pesquisa, as idéias de Vygotsky (1989) acerca da importância da interação social e do papel da mediação, no que diz respeito à compreensão das idéias e procedimentos algorítmicos relativos às operações básicas, e da valorização daquilo que os alunos já sabem (AUSUBEL, 1968, apud SALVADOR, 2000), no processo de elaboração ou de reelaboração de conhecimento acerca do conteúdo em tela.

2.2 Concepções de compreensão

Segundo o minidicionário da Língua Portuguesa (HOUAISS; VILLAR, 2003, p. 121), *compreender* significa incluir(-se), abranger(-se), assimilar mentalmente, entender. E compreensão é percepção, entendimento, domínio intelectual de um assunto, complacência, indulgência.

No verbete “compreensão” do dicionário OXFORD de Filosofia, encontra-se que:

> [...] ter uma palavra, uma imagem ou qualquer outro objeto em mente parece ser uma coisa, mas compreendê-lo é bastante diferente [...]. A melhor sugestão é afirmar que a compreensão deve ser concebida como a posse de uma técnica ou habilidade, e isso é o que quer a expressão “o sentido é o uso”. A idéia tem

> afinidades com o pragmatismo e é hostil a compreensões inefáveis e incomunicáveis. (BLACKBURN, 1997, p. 65).

Arendt (apud RIOS, 2003, p. 31), afirma que “a compreensão é uma atividade interminável, por meio da qual, em constante mudança e variação, aprendemos a lidar com nossa realidade, conciliamo-nos com ela, isto é, tentamos nos sentir em casa no mundo”. Segundo Rios (2003), o conceito de compreensão guarda em seu interior uma referência a uma dimensão intelectual e a uma dimensão afetiva.

Machado (2002) afirma que a idéia de conhecimento está ligada à de significado. Conhecer é, cada vez mais, conhecer o significado.

Na visão de Dewey (1979, p. 139, apud MACHADO, 2002, p. 35):

> Compreender é apreender a significação [...]; Apreender a significação de uma coisa, de um acontecimento ou situação é ver a coisa em suas relações com outras coisas. [...] Contrariamente, aquilo a que chamamos coisa bruta, a coisa sem sentido para nós, é algo cujas relações não foram apreendidas.

Essa definição se aproxima do sentido de compreensão que foi trabalhado em nossa pesquisa, isto é, a visão que se pode ter acerca de um conceito, no caso, de adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais.

O Relatório Delors (2006, p. 89), documento produzido para UNESCO pela Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI, afirma que “[...] à educação cabe fornecer, de algum modo, os mapas de um mundo complexo e constantemente agitado e, ao mesmo tempo, a bússola que permita navegar através dele”. A educação tem como meta essencial possibilitar mais saber. Além disso, terá que contribuir para o desenvolvimento total da pessoa, isto é, espírito e corpo, inteligência e responsabilidade pessoal e social. Compete à educação preparar não para a sociedade do presente, mas criar um referencial de valores e de meios de compreender e atuar em sociedades que dificilmente imaginamos como serão.

Segundo o mesmo Relatório, a prática pedagógica deve organizar-se em torno de quatro aprendizagens, que serão para cada indivíduo os pilares do conhecimento: “aprender a conhecer”, “aprender a fazer”, “aprender a viver juntos” e “aprender a ser”. A educação para o século XXI terá necessidade dessas quatro aprendizagens essenciais para a nossa realização pessoal e coletiva que perpassarão toda a existência. Essas aprendizagens inserem-se na perspectiva da educação permanente e da educação continuada.

Aprender a conhecer tem como plano de fundo o prazer de adquirir os instrumentos da compreensão. “Aprender para conhecer supõe, antes de tudo, aprender a aprender, exercitando a atenção, a memória e o pensamento” (DELORS, 2006, p. 92). Ao compreender o mundo que o rodeia o aluno se torna, para toda a vida, um amigo da ciência.

O aprender a fazer refere-se não apenas à formação técnico-profissional, mas objetiva capacitar as pessoas a enfrentarem as situações sociais que acontecem nas diversas experiências de vida e de trabalho.

Aprender a viver juntos implica em construir uma identidade própria e cultural, desenvolvendo a compreensão do outro e a percepção das interdependências no sentido de realizar projetos comuns e trabalhar em equipe.

O pilar “aprender a ser” significa que a educação tem como papel essencial desenvolver a sensibilidade; a responsabilidade pessoal; o sentido ético e estético; o pensamento autônomo e crítico; a comunicação com os outros. Segundo o Relatório Delors, o aprender a ser é apenas o resultado dos três primeiros, pois não há como aprender a conhecer, aprender a fazer e a viver juntos se não se aprende a ser.

Assim, compreendemos que a educação deve se basear em princípios amplos, que visem objetivos postos não apenas no presente, mas em uma perspectiva de futuro. Para nós, a compreensão constitui uma das referências centrais no processo de estruturação do conhecimento, ajudando o aluno a pensar sobre o que significa ser, conhecer, fazer e viver juntos.

Tal marcos de formação do aluno deve estar presentes no ensino de forma geral e, em particular, no ensino de disciplinas como a Matemática, em razão de sua presença e importância na sociedade.

No modelo de ensino de Matemática ainda predominante em nossas escolas, é reforçada a memorização de fórmulas e procedimentos, não sendo criadas condições de construção do conhecimento baseado na compreensão. Pelo que apreendemos de nossa experiência de sala de aula, o modelo citado pouco orienta no sentido do aluno aprender a aprender.

Atualmente compete ao professor desenvolver uma educação fundamentada em condições de aprendizagens que acatem as necessidades e os ritmos individuais, possibilitando a expansão e enriquecimento das capacidades de cada um. É importante que os educadores compreendam que a Matemática estudada deve de alguma forma, ser-lhes útil, ajudando-os a entender, exemplificar ou organizar sua realidade, sempre na medida do possível.

Em uma perspectiva de formação baseada na compreensão, cabe ao professor criar situações de aprendizagem para seus alunos que lhes proporcionem refletir e explicitar suas idéias. Essas atividades podem ser realizadas com objetos concretos (jogos, material dourado, dinheiro chinês dentre outros) pelos alunos, em grupos trabalhando, assim, valores de cooperação entre eles. Para tanto, é preciso que haja um clima de respeito e confiança na sala de aula a fim de que os alunos se sintam à vontade para lidar com suas potencialidades e limitações, dentre estas, seus erros ou justificativas equivocadas quanto ao funcionamento de procedimentos adotados ou, ainda, a ausência de compreensão de conceitos matemáticos. Isso lhes proporciona uma oportunidade de refletirem sobre a forma como pensam, levantarem hipóteses, confrontarem soluções, considerando seus erros e limitações como oportunidades ricas de aprendizagem.

Pinto (2000, p. 62) afirma que,

> Ao ser visto de modo construtivo, a partir de uma perspectiva sociológica, o erro deve perder sua conotação negativa, passando a ser a essência da pedagogia do sucesso e não do fracasso escolar. Uma aprendizagem para o êxito considera o erro como um elemento essencial para a construção do sujeito, favorece um “educar-se” para aceitar-se (a si e aos outros), em suas diferenças físicas, emotivas e intelectuais. Ao ser visto de modo construtivo pelo professor, o erro colabora para a auto-estima do aluno.

O professor deve adotar uma atitude reflexiva diante dos erros e carências de formação do aluno, procurando não só compreendê-los no contexto de ensino, mas compreender o aluno, analisando as razões pelas quais estes se manifestam. Ao trabalhar com erro e limitações, o professor teria à sua disposição dados preciosos para suas intervenções, podendo reconhecer as dificuldades enfrentadas pelos alunos e as diferenças entre eles.

Em nosso caso, especificamente, interessava-nos compreender as limitações dos alunos do 6° ano do Ensino Fundamental, em relação às operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão, analisando a possibilidade de superação destas em uma Intervenção Metodológica baseada nos princípios sócio-interacionistas, considerando a compreensão como principal elemento do processo de ensino/aprendizagem de Matemática.

2.3 Ensino/aprendizagem das operações básicas

É extensamente reconhecida a importância da utilização das operações aritméticas básicas em inúmeras situações do dia-a-dia, nos mais diversos contextos: em casa, na rua, na escola e no trabalho. No entanto, quando da resolução de situações-problemas no contexto escolar, ou quando as operações compreendem um maior grau de complexidade, muitos alunos falham em relação ao reconhecimento e utilização dos procedimentos algorítmicos adequados.

Na prática escolar, verificam-se, em grande parte dos alunos, e até mesmo em alguns professores, as dificuldades quanto ao domínio pleno dos algoritmos, que são utilizados de maneira mecânica e sem significado. Muitos professores empregam técnicas diversas de cálculo, mas não compreendem o porquê de cada procedimento, e os alunos repetem um modelo ao qual não atribuíram sentido lógico ou prático.

As pesquisas apresentadas por, Carraher, Carraher e Schliemann, (2001, p. 38) mostram que crianças com baixo rendimento no contexto escolar não apresentam dificuldades para resolver problemas semelhantes no contexto informal e destacam que

> [...] a escola nos ensina como deveríamos multiplicar, subtrair, somar e dividir; esses procedimentos formais, quando seguidos corretamente, funcionam. Entretanto, as crianças e adolescentes no presente estudo demonstraram utilizar métodos de resolução de problemas que, embora totalmente corretos, não são aproveitados pela escola.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) também enfatizam a importância dos números e das operações na construção de situações-problemas que favoreçam o desenvolvimento e os significados dessas operações e, no que concerne aos conteúdos propostos para o ensino de Matemática no terceiro ciclo do Ensino Fundamental (6º e 7° anos) e sugerem que:

> Neste ciclo, os alunos devem ser estimulados a aperfeiçoar seus procedimentos de cálculo aritmético, seja ele exato ou aproximado, mental ou escrito, desenvolvido a partir de procedimentos não-convencionais ou convencionais, com ou sem uso de calculadoras. Certamente, eles ainda não têm domínio total de algumas técnicas operatórias, como da multiplicação e da divisão envolvendo números naturais, compostos de várias ordens, ou aquelas com números decimais, e isso precisa ser trabalhado sistematicamente. O importante é superar a mera memorização de regras e de algoritmos (“divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima”, “inverte a segunda e multiplica”) e os procedimentos mecânicos que limitam, de

> forma desastrosa, o ensino tradicional do cálculo (BRASIL, 1998, p. 67).

Convém notar que as regras devem ser concebidas por meio da percepção das regularidades e depois, construídas, ao invés de apenas "transmitidas". Por essa razão, é importante que se construam os significados de números e das operações em detrimento apenas dos procedimentos.

Diferentes pesquisadores têm mostrado, nos últimos anos, interesse em descobrir como os alunos resolvem suas "continhas". Sobre esse aspecto, destacam-se as pesquisas de Carraher, Carraher e Schliemann, (2001). O estudo consistiu na resolução de 63 questões de matemática em um teste informal (respostas verbais), e 99 em um teste formal (papel e lápis) por cinco crianças e adolescentes na faixa etária entre 9 e 15 anos, com níveis de escolarização que variavam entre a 3ª e a 8ª séries do Ensino Fundamental (4º e 9º anos) e que participavam da economia informal, vendendo objetos diversos, com o objetivo de complementar a renda da família.

Foram efetuadas entrevistas com os alunos sobre os cálculos por eles desenvolvidos nos testes e, em relação à análise dos dados, os pesquisadores observaram que os estudantes tinham maior experiência com a aritmética oral fora da sala de aula do que com a aritmética escrita empregada na sala de aula. Esses alunos não aprenderam o suficiente na escola para resolver os problemas que surgiam no dia-a-dia e não associavam os problemas que resolviam no cotidiano aos conteúdos trabalhados na escola.

Zunino (1995) investigou os procedimentos e as estratégias de resolução de problemas utilizados por crianças de 3ª e 5ª séries (atuais 4° e 6° anos do Ensino Fundamental) para resolver os algoritmos das operações com números naturais, problemas aritméticos e problemas que combinavam mais de uma operação. Para melhor compreender os procedimentos realizados pelo aluno nos problemas propostos, foram feitas entrevistas, tendo a pesquisadora constatada que, quando resolvem às operações as crianças não compreendem procedimentos tais como: o “vai 1” ou o “pede emprestado”. A maioria delas faz uso de tais processos sem estabelecer vínculo com as unidades, dezenas e centenas, uma dificuldade decorrente do aprendizado do Sistema de Numeração Decimal, relacionada à não-compreensão dos agrupamentos e trocas, especialmente na base 10.

Zunino observou que os problemas de adição, em termos gerais, não representam nenhuma dificuldade para os alunos. Quanto aos problemas de subtração, multiplicação e divisão os erros mais freqüentes cometidos por eles são: não conseguem interpretar o problema; não sabem qual a operação a ser realizada para resolvê-lo e não compreendem a lógica dos algoritmos, em especial da multiplicação e da divisão.

Saiz (1996), em seu artigo “Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir”, fez um estudo exploratório com estudantes de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental (6° e 7° ano), em um total de 300 alunos de doze turmas diferentes. O estudo contou com a colaboração dos professores que participaram de um curso de aperfeiçoamento, os quais aplicaram cinco problemas e quatro “contas” de divisão com seus alunos, coletando os resultados para análise. Observou-se que as principais dificuldades na resolução de problemas foram os seguintes: os alunos não sabiam o significado da divisão; não reconheciam o problema como sendo de divisão, realizando outras operações como adição, subtração ou multiplicação.

Em relação à execução do algoritmo da divisão, o desempenho de 300 alunos ao realizarem esta operação envolvendo um divisor com um algarismo foi aceitável, porém, na divisão com divisores que continham dois ou três algarismos, esta foi resolvida erroneamente pela maioria dos estudantes e no caso em que a divisão envolvia a colocação de um zero intermediário, em alguma ordem do quociente, o desempenho foi baixíssimo.

As pesquisas apresentadas têm pontos em comum com o presente estudo. Na primeira pesquisa, de Carraher, Carraher e Schliemann (2001), na análise dos dados foi observado que os alunos cometiam erros na representação das operações, esse erro também foi identificado no presente estudo com a aplicação dos pré-testes (1 e 2), os quais serão comentados em detalhes posteriormente. Nas duas últimas pesquisas, Zunino (1995) e Saiz (1996), observaram que a maioria dos alunos cometia erros nas operações, pelo fato de não compreender a lógica dos algoritmos envolvidos e apresentar dificuldades de leitura e de interpretação dos enunciados dos problemas.

Tais estudos evidenciam as dificuldades que os alunos enfrentam para compreender a lógica dos algoritmos das operações e mostram que a memorização de regras e fórmulas não surte efeito positivo no desempenho dos alunos. Segundo Toledo e Toledo (1997), atividades práticas que envolvem objetos concretos (jogos, material dourado, dinheiro chinês, dentre outros) geralmente são eficazes para o entendimento de conceitos e relações numéricas. Em nosso estudo, além de constatar as dificuldades identificadas nas pesquisas aqui apontadas, procuramos avaliar a possibilidade de elaboração ou reelaboração de sentido para tais procedimentos, por parte dos alunos, realizando uma intervenção didática por nós elaborada.

3 A INTERVENÇÃO

No presente Capítulo, fazemos a apresentação e discussão das atividades desenvolvidas na intervenção didática, considerando aspectos relativos à compreensão dos alunos acerca dos procedimentos algorítmicos que executavam bem como de suas ações e reflexões no momento da realização das atividades propostas em sala de aula.

3.1 Caracterização do ambiente da intervenção

Nossa pesquisa foi realizada em uma Escola de Ensino Fundamental da Rede Municipal de João Pessoa-PB, localizada no bairro dos Bancários, que tem na maioria de sua clientela alunos de famílias de baixa renda. Para a escolha da escola, foi levado em consideração o fato de a pesquisadora atuar como professora nessa unidade de ensino, o que facilitaria o acesso ao espaço de investigação.

A escola funciona em três turnos (manhã, tarde e noite), com turmas de 3º ao 6° ano do Ensino Fundamental no turno da manhã, com um total de aproximadamente 286 alunos, na faixa etária entre 7 e 16 anos, nesse turno. Cerca de 266 alunos, na faixa etária entre 11 e 18 anos cursando do 6° ao 9º anos, no turno da tarde e, no turno da noite, 244 alunos em turmas de Educação de Jovens e Adultos (EJA) do Ensino Fundamental (6° ao 9° anos), com faixa etária entre 15 e 40 anos. Alguns alunos desse turno são pais de alunos que estudam durante a manhã ou à tarde e são, em sua maioria, trabalhadores com baixa renda.

Na escola atuam 44 professores, 18 deles no turno da manhã; 14, à tarde, e 12, à noite. Todos são graduados e lecionam em sua área de formação. Apenas cinco possuem título de Especialização.

As instalações físicas da escola são formadas pela sala de Diretoria, Secretaria, Sala de Professores, 12 salas de aula, Cantina, Refeitório, Sala de áudio e vídeo, Laboratório de Informática, Laboratório de Matemática e Ciências, Biblioteca, Gabinete odontológico, uma sala onde funciona o Serviço de Orientação Educacional (SOE), um pátio coberto para recreação; quatro banheiros masculinos, quatro femininos e um especificamente para as professoras. Não há quadra de esportes, mas existe espaço físico aberto adequado para práticas esportivas.

A escola atende aos bairros dos Bancários, Jardim Cidade Universitária, Água Fria, Mangabeira e pequenas comunidades circunvizinhas.

3.2 Os sujeitos da pesquisa

A turma do 6° ano do Ensino Fundamental, cujos alunos participaram de nossa pesquisa, funcionava no turno da manhã e contava com 23 alunos - 14 meninos e 9 meninas, na faixa etária entre 10 e 14 anos de idade, estando a maioria de acordo com a faixa etária indicada para a série. Todos participaram de algumas etapas da investigação e doze deles dos estudos de aprofundamento do tema.

Nos contatos iniciais com a Direção da Escola, apresentamos os objetivos da pesquisa, a metodologia da intervenção e conversamos sobre a turma escolhida.

A pesquisa foi realizada de fevereiro a junho de 2006, durante o 1º e o 2º bimestres letivos da Escola, compreendendo cinco horas-aula semanais que perfizeram um total de 100 horas-aula.

3.3 Metodologia da intervenção

Fizeram parte da intervenção com os alunos, a aplicação de dois pré-testes; à realização de uma entrevista de aprofundamento; a realização do conjunto de cinco atividades, a realização de um pós-teste e foram realizadas novas entrevistas com os 12 participantes da pesquisa.

No dia 08 de fevereiro de 2006, teve início o ano letivo na rede municipal, quando ocorreu nosso primeiro encontro com os alunos. No Diário de Classe, constavam 25 alunos matriculados, dos quais 23 participaram da pesquisa (um aluno havia solicitado transferência para o turno da tarde, e o outro, para o interior do Estado).

Na segunda semana de aula, solicitamos aos alunos que respondessem ao pré-teste1, com 12 questões abertas (Anexo A), abordando o domínio dos algoritmos das quatro operações. No dia seguinte, aplicamos o pré-teste2 (Anexo B), que consistiu na resolução de sete problemas envolvendo essas mesmas operações. Os pré-testes (1 e 2) foram os instrumentos utilizados para identificar os principais procedimentos algorítmicos utilizados pelos alunos e a compreensão que detinham dos mesmos e suas dificuldades centrais.

Os pré-testes (1 e 2) foram aplicados de forma coletiva aos 23 alunos da turma, mas os alunos respondiam as questões individualmente recebendo, para isso, papel e lápis. Em relação às respostas dadas aos pré-testes (1 e 2), tiveram total liberdade, já que não fazíamos quaisquer intervenções no sentido de correção ou direcionamento. A aplicação dos pré-testes (1 e 2), cujos resultados serão discutidos adiante, foi registrada por meio de fotografias e um diário de observação.

Uma semana após a aplicação dos pré-testes (1 e 2), com os resultados em mãos, efetuamos a passagem para outra etapa de nosso trabalho: a escolha de alguns alunos com os quais pudéssemos desenvolver e acompanhar de maneira mais detalhada os elementos principais da pesquisa. Doze alunos se ofereceram para participar de entrevistas, visando aprofundar e esclarecer fatos pertinentes às respostas dadas às questões. Os alunos foram entrevistados individualmente (as entrevistas foram gravadas e transcritas na íntegra), sobre suas respostas às questões dos pré-testes (1 e 2), as quais serão apresentadas adiante.

Os alunos foram entrevistados buscando-se ampliar informações acerca dos seguintes aspectos:

• uso e compreensão do algoritmo da adição com e sem reservas (questões a, b e c);

• uso e compreensão do algoritmo da subtração com e sem reservas (questões d, e, f);

• uso e compreensão do algoritmo da multiplicação, em que um dos fatores é formado apenas por um ou mais algarismos (questões g, h e i);

• uso e compreensão do algoritmo da divisão, sendo duas divisões exatas, com zero intercalado no quociente, e uma divisão não exata, e

• capacidade de leitura, interpretação e resolução de problemas matemáticos envolvendo as operações básicas.

Com isso, objetivamos investigar se o processo fora realizado de forma mecânica ou se os alunos compreendiam os algoritmos utilizados.

Depois de realizados os pré-testes (1 e 2) e as entrevistas, procuramos compor os alunos em grupos, considerando duas categorias distintas, sem que as comunicássemos aos alunos: em um grupo, ficaram os alunos que tinham facilidade de responder os testes aplicados, e no outro, os que apresentaram dificuldades. Nossa intenção foi acompanhar, de modo mais acurado, uma quantidade menor de alunos, para que pudéssemos ter elementos que nos possibilitassem aprofundar a análise, mas sem perder de vista os resultados da turma como um todo.

Composição dos grupos:

Grupo A – 6 alunos com facilidade. Esse grupo foi subdividido em mais dois, cada um com três alunos (Grupo 1: A1, A2, A3; Grupo 2: A4, A5, A6);

Grupo B – 6 alunos com dificuldades. Esse grupo também foi subdividido em dois, cada um com três alunos (Grupo 3 – A7, A8, A9; Grupo 4: A10, A11, A12).

Os resultados obtidos nos pré-testes (1 e 2) subsidiaram a elaboração de um conjunto de cinco atividades de ensino, explorando metodologias e materiais diversos, como resolução de problemas e jogos; material dourado, “dinheiro chinês” e papel quadriculado, entre outros. Nosso objetivo era despertar o interesse e a curiosidade dos alunos e avaliar a possibilidade de ampliar a compreensão de aspectos fundamentais sobre o tema de estudo, favorecendo a estruturação de seu pensamento acerca dos conteúdos em questão.

As atividades foram executadas na Sala de Aula, na Biblioteca e no Laboratório de Informática, preparadas e aplicadas pela pesquisadora.

3.4 A intervenção

A seguir apresentamos as análises das respostas dos alunos nos pré-testes (1 e 2) e o desenvolvimento das atividades de ensino envolvendo as quatro operações básicas.

3.4.1 Classificação das respostas dos pré-testes (1 e 2)

A análise das respostas dos alunos nos pré-testes (1 e 2) foi feita, sob o ponto de vista matemático, segundo os parâmetros: *correto*, *errado* ou *não responderam*, considerando-se apenas o resultado numérico apresentado como resposta. Para julgarmos por esses parâmetros, observamos os cálculos realizados pelos alunos, ou seja, apenas os resultados matemáticos, corretos ou errados, apresentados como resposta a cada questão, sendo utilizadas entrevistas de aprofundamento com 12 participantes da pesquisa, buscando-se elementos que nos permitissem identificar qual a sua compreensão acerca dos cálculos desenvolvidos.

3.4.2 Análise das respostas dos alunos às questões do pré-teste1

O pré-teste1 envolvia a realização das seguintes operações, dentro da estrutura tradicional de questões apresentadas em sala-de-aula, quando do trabalho com as quatro operações aritméticas:

a) 413 + 385 (adição sem reagrupamento);

b) 1537 + 282 (adição com reagrupamento nas dezenas);

c) 4620 + 1398 + 27 (adição com reagrupamento nas unidades, dezenas e centenas);

d) 1753 – 321 (subtração sem reserva);

e) 852 – 208 (subtração com reserva, necessitando de troca de dezenas por unidades);

f) 3005 – 1732 (subtração com reserva, necessitando de trocas a partir da unidade de milhar);

g) 302 × 5 (multiplicação com reagrupamento);

h) 21 × 93 (multiplicação sem reagrupamentos);

i) 442 × 123 (multiplicação com reagrupamentos);

j) 424 ÷ 4 (divisor com uma única ordem, demandando o acréscimo de zero na ordem da dezena do quociente);

l) 1442 ÷ 14 (divisor com duas ordens, demandando o acréscimo de zero na ordem da dezena do quociente); e

m) 718 ÷ 23 (divisor com duas ordens, em operação simples, com resto).

Na Tabela 1, encontra-se o resultado matemático dos 23 sujeitos no pré-teste1, o qual envolvia a realização de operações aritméticas. Para a análise das questões, convencionamos a seguinte legenda: C = respostas corretas; E = respostas erradas e NR = não responderam.

Tabela 1 – Freqüência e percentual de acertos e erros com relação a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m da questão 1

Itens	C	% C	E	% E	NR	% NR	Total
A	23	100	0	0	0	0	100
B	16	69,6	7	30,4	0	0	100
C	15	65,2	7	30,4	1	4,4	100
D	17	73,9	6	26,1	0	0	100
E	12	52,1	10	43,5	1	4,4	100
F	5	21,7	18	78,3	0	0	100
G	6	26,1	15	65,2	2	8,7	100
H	7	30,4	15	65,2	1	4,4	100
I	5	21,7	17	73,9	1	4,4	100
J	0	0	19	82,6	4	17,4	100
L	0	0	13	56,5	10	43,5	100
M	5	21,7	7	30,4	11	47,9	100

Como se pode observar na Tabela anterior, nenhum dos participantes conseguiu realizar corretamente as operações de divisão com relação aos itens **j** (424 ÷ 4) e **l** (1442 ÷ 14). Postulamos que esse baixo desempenho poderia ser devido ao zero intercalado no quociente, que provoca tantos erros no algoritmo da divisão. Já no item **m** (718 ÷ 23), constatamos que 21,7% dos participantes calcularam corretamente, outros 30,4%, errado, e 47,9% não responderam à questão.

Na Tabela 2, encontra-se o desempenho dos 12 alunos que compuseram o estudo de aprofundamento, dividido em dois grupos: Grupo A e Grupo B.

Tabela 2 – Desempenho dos Grupos A e B no Pré-Teste1

Itens	GRUPO A							GRUPO B						
	C	%C	E	%E	NR	%NR	Total	C	%C	E	%E	NR	%NR	Total
A	6	100	0	0	0	0	100	6	100	0	0	0	0	100
B	6	100	0	0	0	0	100	4	66,7	2	33,3	0	0	100
C	6	100	0	0	0	0	100	4	66,7	2	33,3	0	0	100
D	6	100	0	0	0	0	100	3	50	3	50	0	0	100
E	6	100	0	0	0	0	100	3	50	2	33,3	1	16,7	100
F	4	66,7	2	33,3	0	0	100	0	0	6	100	0	0	100
G	3	50,0	3	50,0	0	0	100	1	16,7	4	66,7	1	16,7	100
H	4	66,7	2	33,3	0	0	100	0	0	5	83,3	1	16,7	100
I	4	66,7	2	33,3	0	0	100	1	16,7	4	66,7	1	16,7	100
J	0	0	6	100	0	0	100	0	0	4	66,7	2	33,3	100
L	0	0	6	100	0	0	100	0	0	2	33,3	4	66,7	100
M	4	66,7	0	0	2	33,3	100	0	0	2	33,3	4	66,7	100

Com base nos dados da Tabela 2, é fácil ver que todos os alunos (100%) dos Grupos A e B conseguiram encontrar a resposta certa para o item **a** (413 + 385). Essa questão foi considerada fácil pelos alunos de ambos os grupos, já que não envolvia o uso de recurso (transporte de unidades para a ordem seguinte).

Verificamos que 100% dos alunos do Grupo A, e 66,7% do Grupo B resolveram corretamente o item **b** (1537 + 282). Quando questionados sobre o valor do transporte realizado, os resultados mudaram significativamente: no Grupo A, dos 100% que resolveram corretamente a operação, 66,7% identificaram o valor posicional da dezena (o “vai 1” como sendo 10 dezenas) e os demais interpretaram o “vai 1” de forma absoluta (1 = 1). No Grupo B, nenhum aluno sabia o significado do “vai 1”.

Para verificar como os alunos interpretavam o transporte (“vai 1”), solicitamos que explicassem o seguinte item:

c) 4620 + 1398 + 27

O protocolo a seguir descreve a estratégia utilizada por A2, ao resolver o algoritmo da adição da Figura 1. (P representa a fala da pesquisadora, e E, a fala do aluno).

```
    1 1 1
c)  4 6 2 0
    1 3 9 8
  +     2 7
    6 0 4 5
```

Figura 1: Algoritmo da adição

P: Você pode resolver em voz alta, por favor?

E: Eu fiz assim: 0 (zero) mais 8 mais 7 (contando silenciosamente nos dedos) são 15, fica 5 e vai 1; 1 mais 2, mais 9, mais 2, são 14, fica 4 e vai 1 ...

P: Você falou que vai 1 do 5 (15). O que é esse 1?

E: 1 dezena, que são 10 unidades.

P: Por que será que passa esse 1 para cima?

E: Não sei explicar, mas se não levar, a conta fica errada.

P: Você falou que 1 mais 2, mais 9, mais 2 são 14. Você está somando as dezenas e o que esse vai 1 do 4 (14)?

E: É 1... Não, é 10. Não sei.

P: Quanto é uma centena?

E: 100

P: Uma centena, quantas dezenas tem?

E: Não sei.

P: Você começou a resolver a operação pelas unidades, por quê?

E: Porque começa das unidades.

P: Se você começasse a somar da esquerda para a direita, daria o mesmo resultado?

E: Não, eu acho que dá outro valor.

P: Então, tenta somar começando da esquerda.

(O aluno fica muito tempo pensando e diz que é impossível).

Ao analisar as entrevistas dos alunos por meio dos itens **b** e **c**, verificamos que eles apresentavam dificuldades acerca da relação entre centenas e dezenas, como fica evidente na entrevista acima, ocorrendo o mesmo com os outros alunos.

Alguns estudantes do grupo A sabiam que uma centena é composta por 100 unidades e que uma dezena agrupa 10 unidades, porém, não sabiam que uma centena agrupa 10 dezenas, embora lessem e escrevessem corretamente as quantidades e mostrassem o lugar ocupado por cada algarismo, dizendo “unidades”, “dezenas”, “centenas”, “unidade de milhar”, e assim sucessivamente.

Na subtração sem reagrupamento, item **d** (1753 – 321), metade dos alunos do Grupo B, errou a operação. Eles explicaram que se esqueceram de “baixar o 1”. Na Tabela 2 também demonstra o conhecimento do Grupo B com relação aos itens **e** (852 – 208) e **f** (3005 – 1732), envolvendo a subtração com reagrupamento. As duas últimas contas acima obtiveram uma porcentagem de respostas erradas de 33,3% e 100%, respectivamente, expressando com clareza um baixo nível de aprendizagem dessa operação.

As Figuras 2 e 3 mostram alguns dos procedimentos realizados. Os alunos afirmaram que a subtração é uma operação difícil. O protocolo a seguir descreve as justificativas de A7, do Grupo B.

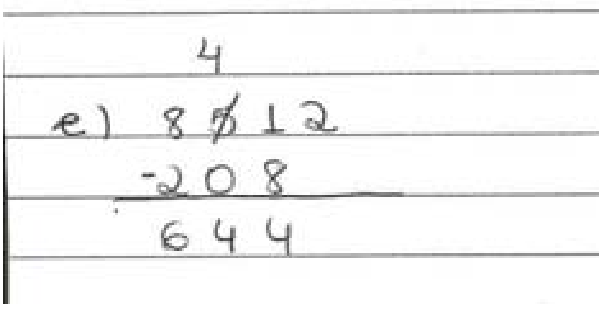


Figura 2: Algoritmo da subtração

P: Como você começou a resolver a conta?

E: Pela unidade.

P: Por quê?

E: Não sei explicar, só sei que começa da unidade.

P: Então, explique como você resolveu.

E: 2 menos 8 não pode. Porque 2 é menor que 8. Aí, eu peço 1 emprestado e fico com 12. 12 menos 8 é 4; aí 4 menos 0 (zero) é 4; 8 menos 2 é 6.

P: Você pediu 1 emprestado do 5 e falou que ficou com 12. Então esse 1 é "1 unidade"?

E: Não.

P: Então, quanto é esse 1?

E: É 10 unidades.

P: Você sabia disso?

E: Na pergunta da adição, eu notei que o que vai não é 1, é 10.

P: Então, o que você pediu emprestado não é "1 unidade", e sim, "10 unidades", ou seja, 1 dezena?

E: É 1 dezena. Mas a professora me dizia que eu peço 1 emprestado, e não, 1 dezena.

P: Você tinha mais antes de pedir emprestado, depois de pedir emprestado, ou não houve diferença?

E: O número é o mesmo depois do empréstimo.

P: Para verificar se o resultado está correto, o que você fez?

E: Eu fiz a prova real.

P: O que é a prova real?

E: Não sei explicar.

P: Então, mostre como você fez a prova real.

E: Eu somei:

$$\begin{array}{r} 2\ 0\ 8 \\ +\ 6\ 4\ 4 \\ \hline 8\ 5\ 2 \end{array}$$

E: 8 mais 4, são 12, fica 2 e vai 1; 1 mais 0 (zero) mais 4, são 5; e 6 mais 2, são 8.

P: Como você fez essa conta? (Figura 3)

f) $$\begin{array}{r} 3\ 0\ 0\ 5 \\ -\ 1\ 7\ 3\ 2 \\ \hline 2\ 7\ 3\ 3 \end{array}$$

Figura 3: Algoritmo da subtração

E: 5 menos 2 é 3; 0 (zero) menos 3 é 3; 0 (zero) menos 7 é 7; 3 menos 1 é 2.

P: Na conta anterior, você falou que 2 é menor que 8 e pediu 1 emprestado. Nessa conta, 0 (zero) é menor que 3. Por que você não pediu emprestado?

E: Porque 0 (zero) menos 3 é 3. Eu não sei pedir emprestado quando tem zero.

Todos os alunos do Grupo B resolveram as operações dessa maneira. Apresentam dificuldades em cálculos como o do item **f** da questão 1, pois, para trocar 1 centena por 10 dezenas seria necessário antes trocar 1 unidade de milhar por 10 centenas. No entanto, ficou evidente que nenhum dos alunos dos dois grupos, foi capaz de explicar como fazer uma troca de centena para dez dezenas e, em seguida, de uma dezena para dez unidades.

Os resultados revelaram que os alunos do Grupo A tiveram mais facilidade para resolver as questões, mas apresentaram as mesmas dificuldades do Grupo B para justificar o “por que” de seus procedimentos, executando-os mecanicamente.

Durante a entrevista, alguns “redescobriram” que o valor do 1 que “se eleva” ou que se “pede emprestado” não é “1 unidade”, e sim “1 dezena”.

Nos itens **g** (302 × 5), **h** (21 × 93) e **i** (442 × 123), os alunos do Grupo A obtiveram uma porcentagem de respostas certas de 50%, 66,7% e 66,7%, respectivamente. Já os alunos do Grupo B, apresentaram acertos correspondentes a 16,7%, 0,00% e 16,7%, respectivamente.

No item **g**, os alunos que acertaram a questão justificaram o transporte do "vai 1" como sendo de 1 dezena e que, no processo de multiplicação, nas "casinhas" que ficam vazias, sempre existe um zero, mas não é preciso registrar.

Os alunos do Grupo B justificaram seus erros, dizendo que não sabiam a tabuada e que buscavam as respostas contando nos dedos ou fazendo riscos, o que os deixava cansados e que, por contar a mais ou a menos, confundiam-se.

Na Tabela 2, pode-se verificar que todos os participantes erraram os itens **j** (424 ÷ 4) e **l** (1442 ÷ 14). Postulamos que esse baixo desempenho poderia ser devido ao zero intercalado no quociente. Para verificar a validade dessa hipótese, foi sugerido outro exemplo (948 ÷ 4) para que os grupos efetuassem a operação. Tanto o Grupo A quanto o Grupo B realizaram corretamente a operação. No entanto, questionou-se por que iniciavam o cálculo, dividindo o número da esquerda por 4, em vez de dividir o da direita, no caso, o 8, como acontece na adição, na subtração e na multiplicação. A resposta de todos os participantes foi à seguinte: "Não sei explicar, eu aprendi a fazer começando do 9". Ou seja, neste exemplo, começando pela centena.

Os alunos do Grupo B afirmaram que nunca haviam aprendido divisões por números de dois algarismos. Ao realizar as divisões dos itens **j** e **l,** os componentes dos dois grupos não colocaram o zero intermediário do quociente, pois não sabiam que era necessário fazê-lo.

O item **m** (718 ÷ 23) da questão 1 também é uma justificativa da hipótese desta pesquisa. As porcentagens são melhores no Grupo A, com 66,7% de respostas corretas, e 33,3% de respostas erradas.

O aluno A5, do Grupo A, efetuou corretamente a divisão do item **m** e foi o único que verificou se o resultado obtido estava correto, como se pode observar no protocolo registrado a seguir:

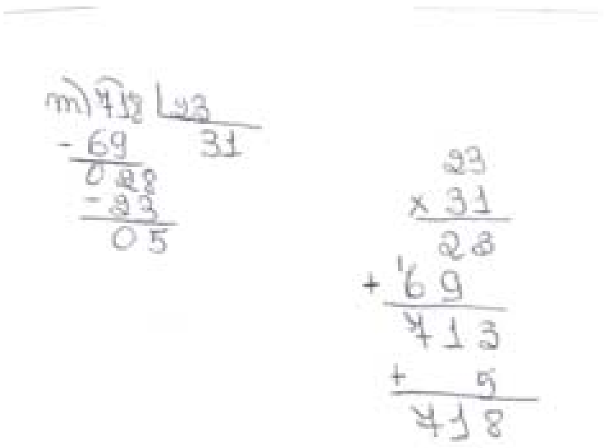


Figura 4: Algoritmo da divisão

P: Poderia fazer a conta em voz alta?

E: 71 dividido por 23 dá 3 e sobra 2; aí eu baixo 8, ficou 28 dividido por 23, dá 1 e sobra 5.

P: Por que você não começou dividindo somente as 7 centenas por 23?

E: Porque 7 é menor que 23.

P: O que você fez para saber se acertou a conta?

E: Eu fiz a prova real.

P: Você sabe o que significa a prova real?

E: Não sei explicar.

P: Então, explique como você fez a prova real.

E: Eu multipliquei 23 por 31 e encontrei 713; depois eu somei com o resto.

P: Você usou a multiplicação para verificar a divisão?

E: Foi.

P: Você já ouviu falar em operações inversas?

E: Eu não lembro.

As entrevistas dos demais alunos que conseguiram resolver corretamente a operação foram semelhantes, todos registraram as multiplicações e as subtrações.

Quando solicitados para resolver as contas, os alunos utilizavam recursos auxiliares para a realização dos cálculos necessários. Todos pediram lápis e papel. Ora eles faziam riscos no papel, ora utilizavam as mãos para fazer a contagem, e mesmo por meio desses recursos, muitas vezes se perdiam nas contas efetuadas e pediam para começar novamente.

Observamos que a maioria dos alunos não tem domínio dos algoritmos das operações básicas, assim como da compreensão de procedimentos do tipo “vai 1” e “pede emprestado”, como também demonstraram não compreender propriedades básicas do sistema de numeração decimal.

3.4.3 Análise das respostas dos alunos às questões do pré-teste2

O pré-teste2 envolvia a resolução dos problemas a seguir apresentados.

1) Dois amigos estão numa competição de vídeo game. Um fez 32770 pontos, outro fez 45550. Se eles formarem uma dupla, qual será o total de pontos?

Problema de adição envolvendo reagrupamento nas ordens da dezena e centena e a idéia de “juntar”.

2) Uma moto custa R$ 6.000,00, mas o motoqueiro só tem R$ 3.750,00 para comprá-la. Quanto lhe falta?

Problema de subtração com reserva, envolvendo a necessidade de trocas a partir da unidade de milhar e a idéia de “completar”.

3) Tinha R$ 720,00. Gastei R$ 82,00 e emprestei R$ 175,00. Com quanto fiquei?

Problema envolvendo duas subtrações consecutivas ou uma adição e uma subtração. A adição envolvia reagrupamento na ordem das dezenas e a subtração demandava trocas a partir da ordem da centena. A idéia associada à subtração era a de “tirar”.

4) Numa mercearia, há 7 caixas de bombons, e cada caixa contém 3 dúzias deles. Quantos bombons há na mercearia?

Problema envolvendo uma multiplicação (3 × 7, com resposta “21 dúzias de bombons”) ou duas multiplicações simples (3 × 12 × 7, com resposta “252 bombons”).

5) Em um teatro, as poltronas estão distribuídas em 28 fileiras com 12 poltronas em cada uma. Quantas poltronas há nesse teatro?

Problema envolvendo uma multiplicação com reagrupamento. A idéia de multiplicação associada é a de soma de parcelas iguais.

6) Ana distribuiu 240 figurinhas igualmente entre seus três primos. Quantas figurinhas cada um recebeu?

Problema envolvendo uma divisão onde o divisor é um número com apenas um algarismo e demanda a colocação de zero na ordem das unidades do quociente, segundo o modelo partitivo.

7) Uma indústria deseja formar grupos de 38 empregados. Como existem 450 empregados contratados, um deles ficará incompleto. Para completar esse grupo, a indústria deverá contratar quantos empregados?

Problema envolvendo uma divisão simples, demandando a compreensão do significado do resto na divisão realizada.

Na Tabela 3, apresentamos o desempenho dos 23 alunos no pré-teste2, na resolução dos sete problemas matemáticos, cujos textos e idéias envolvidas foram aqui apresentados.

Tabela 3 – Desempenho dos sujeitos no Pré-Teste2

Problemas	C	% C	E	% E	NR	% NR	Total
1	23	100	0	0	0	0	100
2	5	21,7	18	78,3	0	0	100
3	4	17,4	19	82,6	0	0	100
4	5	21,7	17	73,9	1	4,4	100
5	5	21,7	17	73,9	1	4,4	100
6	11	47,9	12	52,1	0	0	100
7	0	0	18	78,3	5	21,7	100

Como pode ser observado na Tabela anterior, em todas as questões o número de respostas erradas superou em muito o de acertos, à exceção dos problemas 1 e 6. Supusemos que esse baixo desempenho poderia ser resultante, em especial, da falta de compreensão dos enunciados dos problemas.

A Tabela 4 mostra o desempenho dos sujeitos dos dois grupos de alunos selecionados para o aprofundamento de nosso estudo, considerando apenas o resultado numérico das questões.

Tabela 4 – Desempenho dos Grupos A e B no Pré-Teste2

Itens	GRUPO A							GRUPO B						
	C	%C	E	%E	NR	%NR	Total	C	%C	E	%E	NR	%NR	Total
1	6	100	0	0	0	0	100	6	100	0	0	0	0	100
2	4	66,7	2	33,3	0	0	100	1	16,7	5	83,3	0	0	100
3	4	66,7	2	33,3	0	0	100	0	0	6	100	0	0	100
4	3	50	3	50	0	0	100	2	33,3	4	66,7	0	0	100
5	4	66,7	2	33,3	0	0	100	1	16,7	5	83,3	0	0	100
6	4	66,7	2	33,3	0	0	100	2	33,3	4	66,7	0	0	100
7	0	0	6	100	0	0	100	0	0	6	100	0	0	100

Pode-se verificar, na Tabela anterior, que os alunos do Grupo A obtiveram melhores resultados que os do Grupo B.

O Problema 1 foi resolvido de imediato por todos os participantes, mediante uma adição que envolvia reagrupamento. Quando questionamos como sabiam que aquele era um problema de adição, todos os entrevistados afirmaram que procuraram no enunciado, palavras que lhes permitissem verificar tal fato.

Para o Problema 2, 66,7% dos alunos do Grupo A, e 16,7% dos alunos do Grupo B obtiveram a resposta correta. Apenas o aluno A5, do Grupo A, justificou sua resposta, afirmando que se tirasse de 6 mil reais a quantia que o motoqueiro tinha, teríamos o resultado, resultando na subtração: 6.000 – 3.750 = 2.250.

Embora tenham identificado corretamente a operação, ocorreram alguns erros de cálculo por parte de alunos do Grupo A, correspondentes a 33,3% do total. Já 83,3% dos alunos do Grupo B erraram a questão e justificaram dizendo que não sabiam “pedir emprestado” quando havia muitos zeros no minuendo.

Os alunos do Grupo A utilizaram estratégias de resolução diferentes para o Problema 3. Os alunos A1 e A6 resolveram, usando as operações de adição e subtração. A6 explicou: “Eu somei o que eu gastei com o que eu emprestei aí o resultado eu subtraí do total”. A4 e A5 usaram a subtração, tendo o primeiro explicado: “Eu fiz assim: 720 menos 82 dá 638. Agora eu faço 638 menos 175, que dá 463”.

O problema provocou dificuldades para os alunos do Grupo B. Apesar de relê-lo várias vezes, eles declaram não entender o enunciado e registraram a operação como representado na Figura 5, sem saber como concluí-la.

```
  7 2 0
-   8 5
  1 7 5
```

Figura 5: Algoritmo da subtração

Diante dessa, situação não encontraram uma solução para o problema, afirmando que isso ocorreu porque este fornecia três dados. Quando o problema foi lido para os alunos, eles conseguiram interpretá-lo, e 66,7% o desenvolveram corretamente, tendo 33,3% deles errado nos cálculos.

Metade dos alunos do Grupo A e 66,7% dos alunos do Grupo B erraram a resposta do Problema 4, por não conseguirem entender o que estava sendo pedido. Eles fizeram a seguinte operação: 7 × 3 = 21, respondendo “21 bombons”. Quando o problema foi lido por nós, todos, de ambos os grupos, resolveram corretamente a questão. Alguns usaram o algoritmo da multiplicação, outros, a adição repetida. Já o aluno A5 demonstrou uma compreensão clara da multiplicação, explicando: “12 vezes 3 dá 36 (contando nos dedos), aí eu multiplico 36 por 7 caixas, que dá 252 bombons”. Os demais alunos do Grupo A que acertaram a questão usaram a adição de parcelas iguais.

A resposta correta (336) para o Problema 5 foi dada por 66,7% dos alunos do Grupo A e por 16,7% do Grupo B, os quais usaram o algoritmo da multiplicação. Os alunos que erraram usaram a adição repetida, procedendo da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r} 2\,8 \\ 2\,8 \\ . \\ +\quad . \\ . \\ 2\,8 \\ \hline \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{r} 2\\2\\.\\.\\.\\2 \end{array}}\right\}\ \text{12 vezes}$$

Embora tenham pensado em uma estratégia adequada para a resolução do problema, não conseguiram chegar ao resultado correto e explicaram que ora somavam nos dedos, ora faziam riscos e, como havia muitos números, erraram.

Todos os alunos reconheceram que o Problema 6 era de divisão, por meio da leitura de seu enunciado, tendo 66,7% dos alunos do Grupo A, e 33,3% do Grupo B acertado a questão, usando o cálculo mental. Nenhum dos alunos conseguiu registrar corretamente no papel o algoritmo da divisão, efetuando, pois, a seguinte operação:

240 | 3
00   8

A explicação foi à seguinte: “24 dividido por 3 dá 8, sobra zero e baixa o outro zero”. Quando perguntamos por que 8, os alunos afirmaram que era pouco, mas não sabiam fazer no papel, era melhor fazer de cabeça, e explicaram que 80 vezes 3 dá 240.

O Problema 7 foi considerado o mais difícil pelos alunos de ambos os grupos. Apenas 33,3% do Grupo A descobriram que se tratava de um problema de divisão e conseguiram efetuar corretamente os cálculos (uma divisão em que se obtém 11 de quociente e 32 de resto). No entanto, em relação à pergunta: “Para completar este grupo, a indústria deverá contratar quantos empregados?”, nenhum aluno conseguiu chegar à resposta correta, que seria 6.

Alguns alunos usaram a adição, outros, a subtração ou a multiplicação nas tentativas iniciais de abordagem do problema, mas ao ouvir a leitura do enunciado, conseguiram interpretá-lo e concluíram que a operação a ser desenvolvida era a divisão. Quando solicitados a registrá-la no papel, a maioria deles alegou cansaço.

O pré-teste2 revelou que os dois grupos não pareciam diferentes quando a questão era fácil (por exemplo, questão 1, a qual exigia apenas a adição). As diferenças entre eles surgiram quando uma questão envolveu subtração com reagrupamento (questões 2 e 3), multiplicação (questões 4 e 5), divisão (questão 6) ou divisão e subtração (questão 7). Os grupos não cometeram apenas erros numéricos, mas também lógicos, pois, para resolver os problemas, era necessário verificar a estrutura de cada situação a fim de saber quantas e quais operações realizarem.

No decorrer da entrevista, nossa hipótese de que os alunos tinham dificuldades para ler e interpretar corretamente os enunciados do pré-teste2 foi confirmada. Uma provável explicação para esse fato poderia ser a falta de uma prática de leitura compartilhada entre professores e alunos e da realização de um trabalho contínuo de leitura e interpretação de textos matemáticos.

Com a realização das entrevistas, pudemos verificar que os alunos apresentam várias dificuldades, dentre as quais destacamos: não dominam os conceitos das operações; resolvem as operações de forma mecânica, sem compreensão; não conseguem identificar as operações necessárias para resolver o problema; não conseguem resolver subtrações com zeros no minuendo; não resolvem divisões com zeros intercalados no quociente e têm dificuldades de leitura e interpretação dos enunciados dos problemas e de compreensão do significado dos resultados que obtêm.

3.5 Desenvolvimento das Atividades de ensino

Para atingir o objetivo geral deste estudo foi elaborado, pela pesquisadora, um conjunto de cinco atividades envolvendo as quatro operações, que estão descritas nos itens a seguir.

3.5.1 Primeira atividade – Trabalhando com material dourado

À aplicação de atividades objetivaram despertar o interesse dos alunos pelo estudo da Matemática e proporcionar uma aprendizagem significativa, dos procedimentos, algorítmicos das operações básicas. A primeira delas teve como suporte o material dourado de Montessori, que se destina a atividades que auxiliam o ensino e a aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal (SND) e das técnicas para efetuar as operações aritméticas, isto é, os algoritmos. O material dourado faz parte de um conjunto de materiais idealizados pela médica e educadora italiana Maria Montessori que, no início do século XX, trabalhava com a educação de crianças excepcionais. Segundo ela, a criança tem necessidade de movimentar-se com liberdade dentro de certos limites, desenvolvendo sua criatividade no enfrentamento pessoal com experiências e materiais. Um desses materiais é o chamado material das contas douradas que, posteriormente, deu origem ao conhecido material dourado Montessori.

O material dourado é confeccionado geralmente em madeira, contendo peças de quatro tipos: cubo, placas, barras e cubinhos. Um kit desse material contém 1.000 cubinhos de $1cm^3$ (adotados tradicionalmente como unidades); 100 barras de 1cm × 1cm × 10 cm (adotados tradicionalmente como dezenas); 10 placas de 1cm × 10cm × 10cm (adotados tradicionalmente como centenas); e 1 cubo de 10cm × 10cm × 10cm (adotado tradicionalmente como a unidade de milhar e, portanto, equivalente a 10 centenas ou 100 dezenas ou 1000 unidades).

No ensino tradicional, os alunos acabam "dominando" os algoritmos a partir de exercícios para fixação do conteúdo exposto. Ou seja, realizar um cálculo associado a um problema significa fazer contas com os números presentes do enunciado, em geral na mesma ordem em que estes aparecem no enunciado, e, nesse caso, o aluno "aprende" por reprodução/imitação, sem conseguir compreender o que faz. Com o uso do material dourado, esperávamos que as relações numéricas, abstratas, passassem a ter uma interpretação concreta para os alunos, facilitando a compreensão dos algoritmos, desenvolvendo o raciocínio e proporcionando uma aprendizagem significativa.

Para o desenvolvimento das atividades, foram acatadas as sugestões de Toledo e Toledo (1997) sobre esse tema. Na primeira atividade, foi solicitado aos alunos que observassem as peças do material e as manipulassem, fazendo construções livres e sem regras. É importante salientar que todos os alunos conheciam o material, com o qual já haviam trabalhado no 2º ciclo do Ensino Fundamental (4° e 5° anos). A escola dispunha de oito kits do material dourado e, por essa razão, foram formados sete grupos, contendo três componentes cada, e um grupo composto de dois alunos.

Durante a atividade dos grupos, procuramos fazer alguns questionamentos sobre as relações entre as peças do material dourado, tais como:

- *Quantos cubinhos vão formar uma barra?*

- *E quantos formarão uma placa?*

- *Um cubo grande corresponde a quantas placas? E a quantas barras? E a quantos cubinhos?*

Cada pergunta feita era respondida corretamente pelos alunos, mas estes não faziam novas perguntas.

Em um segundo momento, foram propostas atividades com regras, sendo explorada a estruturação do Sistema de Numeração Decimal (SND), ampliando e aprofundando as idéias de unidades, dezenas e centenas.

Sobre esse tema, Toledo e Toledo (1997, p. 79) afirmam que:

> É necessário oferecer aos alunos um tempo maior de familiarização com o sistema de numeração decimal, antes de iniciar o estudo dos algoritmos das quatro operações com os números naturais. Esse tempo, que muitos professores podem imaginar como “perdido”, com certeza será recuperado na etapa da construção dos algoritmos.

A compreensão do SND requer um considerável espaço de tempo, visto que tal sistema não tem uma estrutura simples.

Para tanto, iniciamos o trabalho de agrupamento e de trocas com o jogo “Faça uma centena”, utilizando cubinhos, barras, placas e fichas numeradas de 0 a 9, colocadas em uma sacola opaca. Depois, foram distribuídos com cada grupo o kit do material dourado e as sacolas. Na sua vez de participar, cada aluno retirava uma das fichas, devolvendo-a depois à sacola, recebendo a quantia correspondente em cubinhos. Toda vez que completasse uma dezena de cubinhos, o participante deveria trocá-los por uma barra. Ganhava quem primeiro conseguisse reunir 10 barras e trocá-las por uma placa.

Esse mesmo jogo foi repetido utilizando-se o “dinheiro chinês”, material didático elaborado por um grupo de pesquisadores da Universidade Federal de Pernambuco, constituído por cédulas correspondentes a potências de 10, no nosso caso, cédulas de 1, 10 e 100. Na aplicação do jogo, observamos todos os alunos, mas, em especial, os dos grupos selecionados para aprofundamento do levantamento de dados e análise de desenvolvimento.

O Grupo 1, composto por A1, A2 e A3, resumiu o que achou da atividade:

- “Achei bom trabalhar esse jogo com o material dourado, fica mais fácil entender que 10 cubinhos é 1 dezena e tem 10 unidades, e que 10 barras trocamos por uma placa. E que uma placa vale 1 centena que tem 10 dezenas ou 100 unidades”.

Do Grupo 3, quem falou foi o aluno A8:

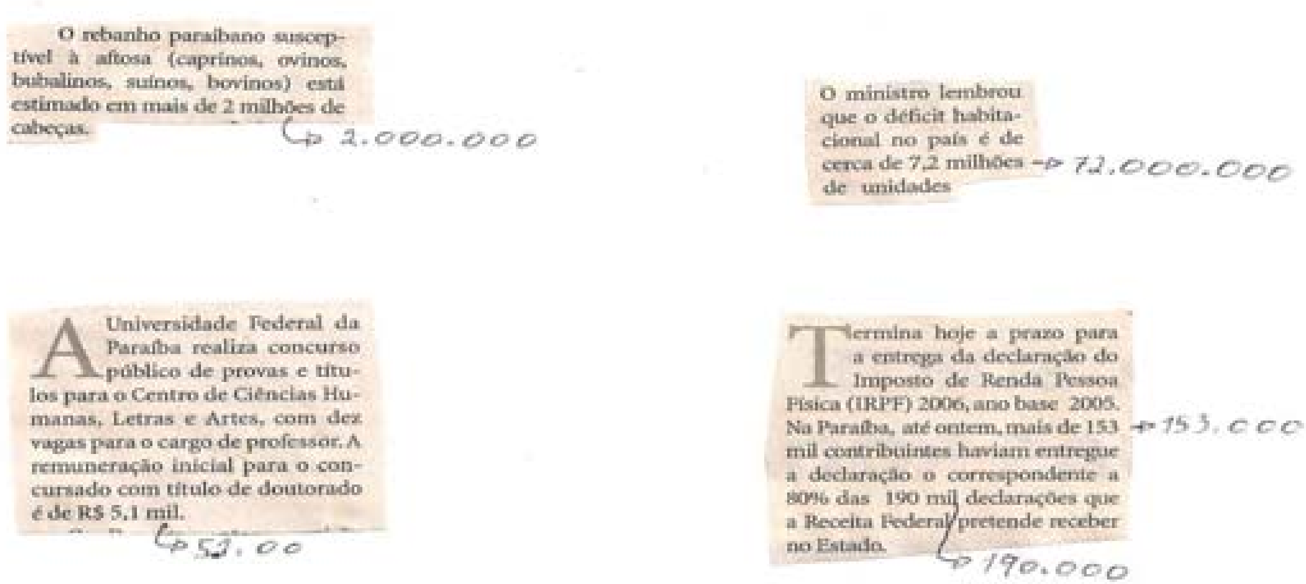
- “Eu gostei do jogo com o dinheiro, eu já brincava com o material dourado com a “tia” da 3ª e 4ª série e o dinheiro eu só via nos livros. Eu troco 10 notas de 1 por 1 nota de 10, e assim por diante”.

Alguns grupos apresentavam dificuldades quando iam se expressar oralmente, pois sentiam vergonha de falar em público. Através dessa atividade, os alunos afirmaram que cubinhos, barras e dezenas representam respectivamente unidades, dezenas e centenas e mostraram como fazer os agrupamentos e as trocas sem dificuldades.

A etapa seguinte do trabalho de pesquisa consistia na análise de desempenho dos alunos quanto à composição, decomposição, leitura e escrita de um número. Para essa tarefa, foram apresentados aos grupos números escritos no quadro, que os alunos representavam com o material dourado. Depois, o processo foi invertido: os números eram apresentados com o material dourado, e eles os representavam numericamente.

O material dourado foi utilizado na representação até a ordem dos milhares. As demais ordens foram exploradas por meio de informações sobre populações, áreas, superfícies, entre outros contextos. Para milhões e bilhões, exploramos atividades com jornais das quais os alunos recortavam números escritos de forma resumida, colavam as ilustrações em folhas de papel em branco e registravam as informações, utilizando apenas algarismos: 2,5 milhões, explorando seu significado e, de forma longa, verificando que ele significa 2 milhões e meio ou 2 milhões e 500 mil ou, ainda, 2.500.000.

Por meio dessa atividade, os grupos perceberam que essas formas são mais utilizadas em jornais e revistas do que a forma convencional aprendida na escola. Os erros mais comuns desses alunos estão expostos na Figura 6, por exemplo: 7,2 milhões. Os alunos apontaram como dificuldade o reconhecimento da escrita do número com seis ou mais ordens quando escrito por extenso, na forma que aparecem nos jornais. Se aparecer vírgula na representação, a dificuldade é maior.



O rebanho paraibano suscep-tível à aftosa (caprinos, ovinos, bubalinos, suínos, bovinos) está estimado em mais de 2 milhões de cabeças.

2.000.000

O ministro lembrou que o déficit habitacional no país é de cerca de 7,2 milhões de unidades

72.000.000

A Universidade Federal da Paraíba realiza concurso público de provas e títulos para o Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes, com dez vagas para o cargo de professor. A remuneração inicial para o concursado com título de doutorado é de R$ 5,1 mil.

51.00

Termina hoje o prazo para a entrega da declaração do Imposto de Renda Pessoa Física (IRPF) 2006, ano base 2005. Na Paraíba, até ontem, mais de 153 mil contribuintes haviam entregue a declaração o correspondente a 80% das 190 mil declarações que a Receita Federal pretende receber no Estado.

153.000

190.000

Figura 6: Recorte de jornais

Fonte: Grupo 1

Em relação ao trabalho com as operações aritméticas e os procedimentos com os algoritmos, Silva, Lourenço e Côgo (2004, p. 71) afirmam que,

> [...] em nossos dias, a utilização, com compreensão, das operações aritméticas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) tornou-se um dos objetivos principais de qualquer Educação Matemática Básica. É preciso ter em mente a importância de desenvolver a compreensão do sentido e a utilização das operações na resolução dos diversos problemas do cotidiano, o que é mais importante do que o simples domínio de algoritmos.

Nesse sentido, as atividades tiveram como objetivo levar os sujeitos da pesquisa a compreenderem o porquê dos procedimentos com os algoritmos para não empregá-los mecanicamente.

3.5.1.1 O algoritmo da adição

A adição é a operação mais natural na vida dos alunos, porque está associada às idéias de "juntar" e "acrescentar", ações corriqueiramente realizadas por eles no cotidiano.

As atividades com essa operação foram realizadas, levando os alunos a descobrirem as propriedades comutativa, associativa e o fato de o zero funcionar como elemento neutro sem, entretanto, explorar a denominação das propriedades.

A tarefa começou com a exploração do cálculo mental e a explicação de como haviam efetuado os cálculos (de que forma processaram as decomposições necessárias, por qual ordem começaram a trabalhar, entre outros aspectos). O cálculo mental tem importância no ensino e utilidade no dia-a-dia e contribui para a aprendizagem de conceitos matemáticos, para o desenvolvimento do raciocínio bem como para a ampliação da segurança emocional dos alunos.

Seguem a seguir alguns exemplos das operações realizadas pelo Grupo 4, associadas a problemas que lhes foram propostos.

a) 425 + 223 = 648

400 + 20 + 5

200 + 20 + 3

600 + 40 + 8

b) 185 + 276 = 461

100 + 80 + 5

200 + 70 + 6

300 + 100 + 50 + 10 +1

400 + 60 + 1

O grupo resolveu essas questões através da adição por decomposição, isto é, decompondo os números e somando as ordens iguais. Eles utilizaram o princípio aditivo e o princípio do valor posicional da escrita dos números, assim como às propriedades, associativa e comutativa da adição.

Os alunos sempre iniciavam a operação pela ordem das unidades, mesmo tendo consciência que poderiam iniciar em qualquer ordem, usando a decomposição, pois ao final, fariam a composição dos resultados, mas não fizeram isto nenhuma vez.

O aluno A5, do Grupo 2, efetuou a operação 150 + 295, primeiro, adicionando 150 a 300, e depois, subtraindo 5 do resultado (150 + 300 – 5 = 450 – 5 = 445). Ele explicou que arredondou 295 para 300, pois era mais perto, depois somou com 150, resultando em 450, e retirou 5. O resultado final foi 445. Para atingi-lo, fez um arredondamento para a centena mais próxima. Intuitivamente, usou a seguinte propriedade: se $a + b = c$, então $a + b – x = c – x$.

A contribuição da pesquisadora consistiu em favorecer a troca de idéias e a autonomia, estimulando os alunos a formularem processos próprios de cálculos, seja por meio de decomposição, arredondamento, cálculo mental ou resultados aproximados que são fundamentais em situações reais do cotidiano. Nesse processo, foi exercitado o cálculo mental, as estimativas, entre outros e, como os alunos já haviam trabalhado o processo de agrupamento e de trocas e a representação simbólica dos números, no SND, iniciaram as adições com o material dourado.

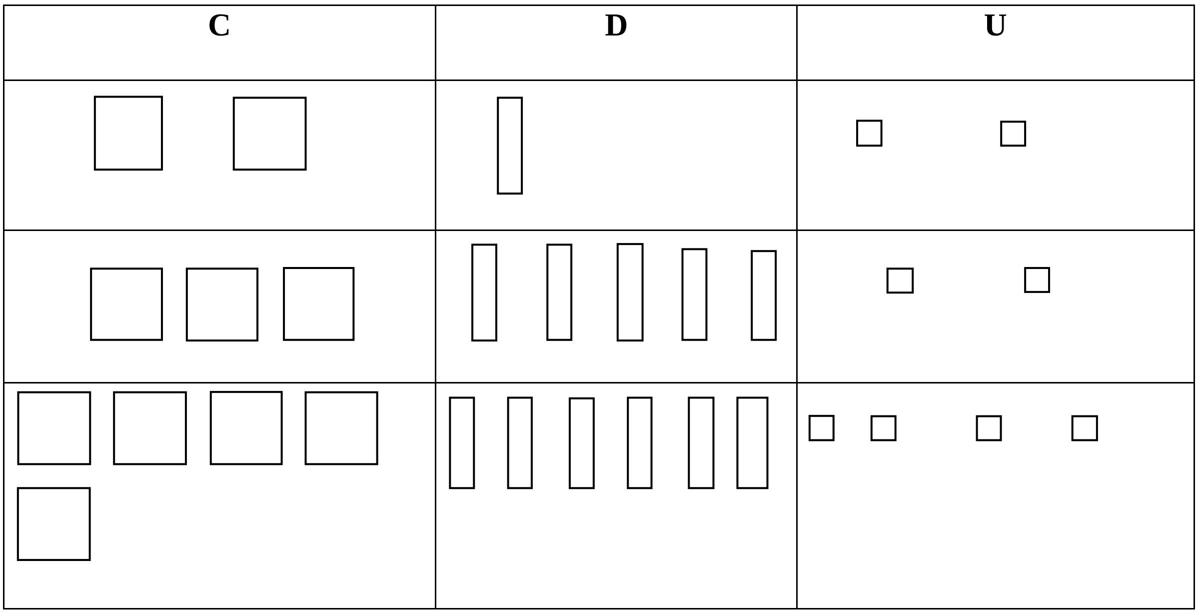
Enfatizamos a necessidade de trabalhar com o algoritmo das operações básicas apenas para os casos em que não é possível realizar as operações mentalmente, pois, quando trabalhamos com números de ordens superiores à dos milhões, o uso do cálculo mental fica difícil e a estimativa fornece um valor aproximado que, em determinados problemas, não é suficiente, surgindo a necessidade de resultados exatos.

Os grupos iniciaram registrando as operações no algoritmo, do modo como haviam aprendido, sendo convidados a utilizar o material dourado para representarem a operação, em suas diversas etapas. Partindo do exemplo 1*: Helena gastou R$ 212 em cadernos e R$ 352 em livros. Qual a quantia que Helena gastou?* , o Grupo 2 explicou seu procedimento da seguinte maneira:

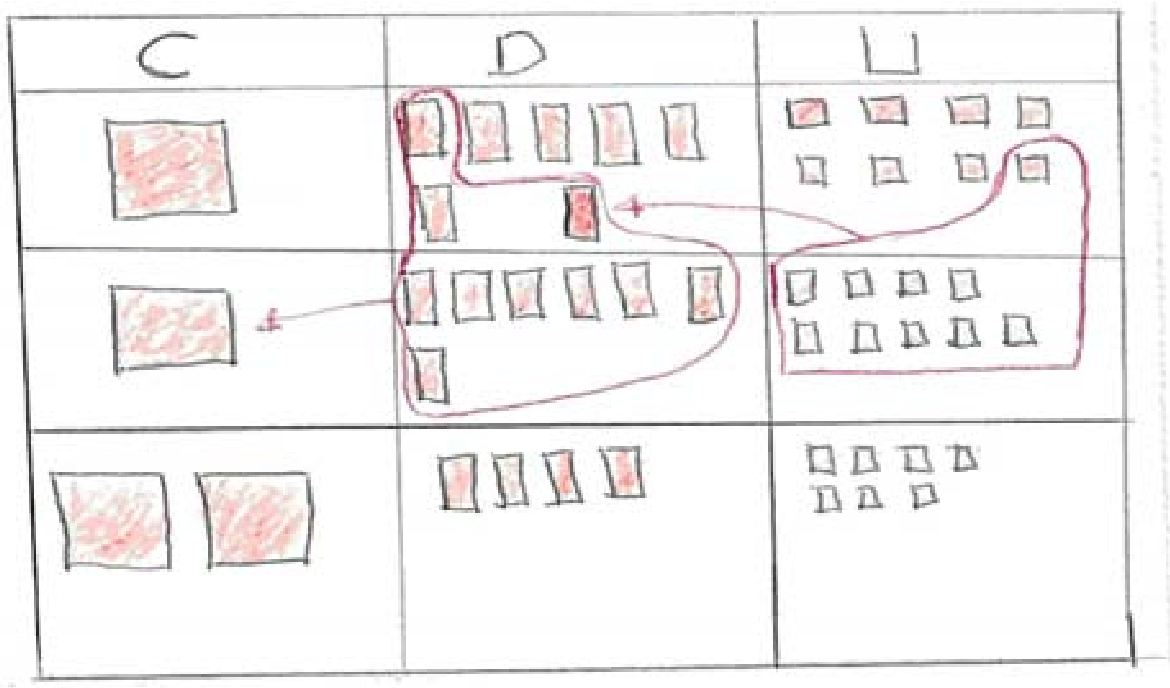
Usando o algoritmo:

C	D	U		
2	1	2	+	2U + 2U = 4U
3	5	2		1D + 5D = 6D
5	6	4		2C + 3C = 5C

Usando o Material Dourado:



No exemplo 2: *Dois amigos estão numa competição. Um fez 168 pontos; o outro, 79. Se eles formarem uma dupla, qual será o total de pontos?* O Grupo 4 utilizou, ainda, o material dourado, explicando da seguinte forma:



- O aluno A10, do Grupo 4, explica: “troco 10 cubinhos por uma barra. Não, professora, eu troco 10 unidades por 1 dezena, e depois, dez dezenas por 1 centena. Aí fica, 2 centenas, 4 dezenas e 7 unidades”.

Usando o algoritmo, o aluno explica:

C	D	U	
1	6	8	
	7	9	+
2	4	7	

“8U + 9U = 17 U; 17U = 1D + 7U; fica 7U na casa das unidades e levo 1D para a casa das dezenas. Aí 1D + 6D + 7D = 14D; 14 D = 1C + 4D. Deixo 4D e levo 1C para a casa das centenas; 1C + 1C = 2C. No total fico com 2C + 4D + 7U”.

Os alunos perceberam a relação que se estabelece quando usam o material dourado no processo usual de adição, enfatizando o transporte do “vai 1”. Pôde-se verificar, então, que o aluno percebeu a troca de 10 cubinhos (10 unidades) por uma barra (1 dezena) e 10 barras (dez dezenas) por 1 placa (1 centena), ficando claro o paralelo entre a ação com o material e os passos no procedimento algorítmico.

O aluno A5, do Grupo 2, declarou: “Quando eu fazia uma conta (ele dá o exemplo 38+92), eu fazia assim: 2 e 8, 10. Fica o 0 e vai 1; 9 + 3 + 1, que foi, é 13; que dá 130. Agora eu junto 2 cubinhos mais 8 cubinhos, vai dar 10 cubinhos. Os 10 cubinhos eu troco por 1 barra e fica nenhum cubinho que é o zero, junto essa barra às outras 12 barras, formando treze barras. Troco 10 barras por 1 placa e ficam 3 barras. No total, eu fiquei com uma placa, 3 barras e nenhum cubinho”.

Quando os alunos realizam os cálculos com o material dourado para depois representá-los formalmente, compreendem a posição dos algarismos de cada ordem na estrutura do algoritmo.

3.5.1.2 O algoritmo da subtração

A subtração não é uma operação simples de ser trabalhada em sala de aula. Primeiro, porque o raciocínio das crianças está concentrado em aspectos positivos de ação, percepção e cognição, enquanto que os aspectos negativos, como inversão e reciprocidade, só serão construídos depois. Segundo, a subtração tem um aspecto afetivo adverso, muitas vezes ligado a situações de “perda”. Por último, porque a subtração está associada às idéias bastante diferentes entre si, “tirar”, “comparar” e “completar”, como mostra o exemplo seguinte:

- *Ana tem 42 lápis. Hoje perdeu 18 deles. Quantos lápis restaram a Ana?* (tirar)

- *Numa caixa onde cabem 42 figurinhas, tenho apenas 18. Quantas figurinhas ainda cabem na caixa?* (completar)

- *Carlos tem 42 anos, e Ana, 18. Quantos anos, Carlos tem a mais que Ana?* (comparar)

A resolução dos três problemas envolve a mesma operação: 42 – 18 = 24. No entanto, cada um deles envolve uma idéia diferente. O primeiro, expressa a idéia de retirar uma quantidade de outra; o segundo, a idéia de completar uma quantidade para chegar à outra; o terceiro, a idéia de comparar uma quantidade com outra. Nas escolas, os professores dão ênfase à idéia de "tirar", devido ao fato de a maioria dos livros didáticos ilustrarem as operações de subtração, enfatizando essa idéia, explorando pouco as outras que lhe são associadas.

Iniciamos o trabalho com a subtração, explorando o cálculo mental. Na operação de subtração apresentada, o Grupo 1 explicou como procedeu, por meio de ações mentais, a operação: 82 – 35 = 82 – 30 – 5 = 52 – 5 = 47. Nesse exemplo, o subtraendo foi decomposto em dezenas e unidades, e a subtração foi feita por etapas. O grupo afirmou ser mais fácil subtrair dezenas completas e fazer 82 – 30 do que 82 – 35.

Na segunda operação, o aluno A5, do Grupo 2, explicou a operação 200 – 127: "De 127 para 130, faltam 3; de 130 para 200, faltam 70; 3 + 70 = 73. Logo, 200 – 127 = 73".

Nessa operação, a subtração foi convertida em adição, através do emprego da idéia de "quanto falta". Quanto falta de 127 para 130, isto é, quanto falta para ter dezenas completas.

Retomamos a subtração por decomposição com os exemplos:

a) 352 – 241 = 111

b) 574 – 349 = 225

O Grupo 3 explicou os exemplos **a** e **b**

a) $300 + 50 + 2$
$200 + 40 + 1 \; -$
$100 + 10 + 1$

b) $500 + \overset{60\;\;10}{\cancel{70}} + \overset{14}{\cancel{4}}$
$300 + 40 + 9 \; -$
$200 + 20 + 5$

O grupo desenvolveu as operações, usando a subtração por decomposição, isto é, decompondo os números e diminuindo as ordens iguais.

Os sujeitos da pesquisa trabalharam concretamente com o material dourado para compreender as trocas: 1 milhar por 10 centenas, 1 centena por 10 dezenas e 1 dezena por 10 unidades. Ao mesmo tempo em que trabalhavam com o material concreto, registravam os resultados no algoritmo.

Toledo e Toledo (1997) apresentam dois processos a serem utilizados quando existem no minuendo algarismos com valor menor que o subtraendo: recurso à ordem superior (técnica de empréstimo) ou processo de compensação (técnica de somar um mesmo valor ao minuendo e ao subtraendo).

Assim, para o desenvolvimento dessas operações, foram realizadas "trocas", evitando-se o uso do termo "emprestar", considerado inadequado (pede-se emprestado, mas não se paga o empréstimo realizado), principalmente para os que utilizam lápis e papel para efetuar as operações, já que acabam por não compreender o processo de agrupamento e de trocas.

Quando não se usa o material concreto, termina-se, em geral, por não entender o porquê da expressão “pede 1 emprestado e recebe 10”. Porém, usando-se o material, compreende-se o termo “trocar”, pois, para o aluno, fica evidente a troca de uma dezena por 10 unidades, o que é denominado de reagrupamento, na subtração com reserva.

Constatamos que nenhum aluno conhecia a técnica de “compensação”. Por exemplo, na operação 32 – 13 = 19 essa subtração pode ser efetuada da seguinte maneira: “3 para 12 faltam 9; das 12 unidades, vai 1 dezena para o subtraendo, na ordem das dezenas; 1 dezena mais 1 dezena é igual a 2 dezenas; 2 para 3 falta 1”.

Para justificar os passos do procedimento da subtração, vejamos os seguintes exemplos a seguir:

Na primeira questão: *Tenho 45 adesivos, e Ana tem 18. Quantos adesivos tenho a mais que ela?* O Grupo 3 efetuou a operação com o material dourado, registrando cada passo no algoritmo e explicando oralmente como procedeu.

Usando o algoritmo:

D	U	
4	5	“Troco 1D por 10U. Fico com 15U. Posso
- 1	8	fazer 15U – 8U = 7U; 3D – 1D = 2D.
2	7	Fico com 2D + 7U”.

Com o apoio do material dourado, o aluno percebeu que é necessário fazer as trocas, o que evita a tendência a subtrair o número menor do maior, como se a subtração fosse uma operação comutativa.

A segunda questão: “*Numa eleição a candidata A recebeu 3476 votos, e o candidato B, 1947 votos. Quantos votos A, recebeu a mais que B*?” o Grupo 4 respondeu, utilizando arredondamento, isto é, um resultado aproximado. Dessa forma, foi efetuada a seguinte operação: 3500 – 2000 = 1500. Os arredondamentos são muito importantes quando uma resposta aproximada já é suficiente.

O Grupo 2 explica:

“6U é menor que 7U, logo, não é possível efetuar: 6U – 7U. Troco 1D por 10U. Fico com 6D e 16U, assim posso fazer 16U – 7U = 9U”.

“Posso fazer: 6D – 4D = 2D. Não pode ser feita a conta: 4C – 9C; troco 1UM por 10C, fica 2UM na casa das unidades de milhares e 14C na casa das centenas. Agora posso fazer 14C – 9C = 5C; e 2UM – 1UM = 1UM; aí fico com 1UM + 5C + 2D + 9U”.

O Grupo utilizou o material dourado, representando os dois números, realizando as trocas e fazendo correspondências um a um entre as ordens para chegar ao resultado.

Trabalhamos com os alunos a subtração, quando o minuendo termina em zero ou tem zeros intercalados, como mostram os exemplos 1 e 2.

1) *Paulo tem 203 figurinhas. José tem 86. Quantas figurinhas, Paulo tem a mais que José?*

Como resposta à primeira questão, o aluno A5 fez a seguinte explicação: “troco 1C por 10D; aí troco 1D por 10U; agora tenho 10U mais 3U é igual 13U menos 6U da 7U; 9D menos 8D é 1D; e repete 1C; no total fico com 1C, 1D e 7U”.

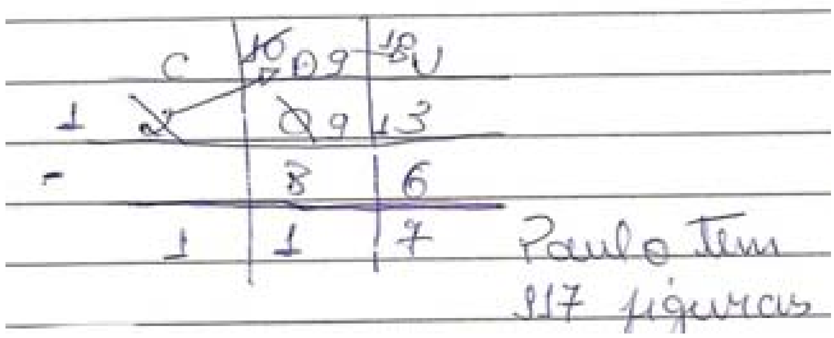


Figura 7: Subtração com reagrupamento

2) *Uma loja tem espaço para guardar 700 CDs. Se nela há 387 CDs, para quantos ainda há espaço?*

O aluno A8, explica: “Eu troquei 1 centena por 10 dezenas; troquei 1 dezena por 10 unidades. Aí fiquei com 10 unidades menos 7 unidades são 3 unidades; 9 dezenas menos 8 dezenas é 1 dezena; 6 centenas menos 3 centena são 3 centenas. No total fico com 3C + 1D + 3U” .

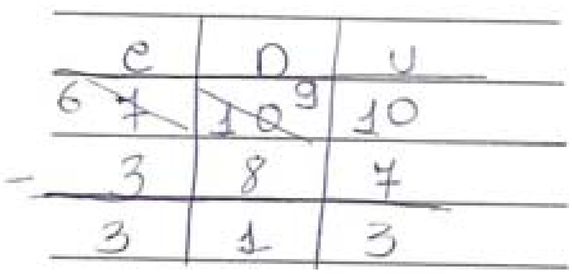


Figura 8: Subtração com reagrupamento

Os alunos demonstraram uma compreensão clara da subtração com zeros no minuendo, utilizando o algoritmo corretamente para resolver os exemplos 1 e 2. Nas discussões coletivas, eles diziam: “troco uma centena por dez dezenas, e uma dezena por 10 unidades”.

É importante não impor regras, para que as crianças resolvam os problemas e enfrentem os novos desafios de maneira criativa. É fundamental que conheçam diversas estratégias de raciocínio e cálculo e sejam incentivadas a desenvolver suas próprias estratégias, para que possam perceber a Matemática como uma construção social e em permanente estado de transformação. “Além disso, elas aprenderiam muito mais a respeito das operações e suas propriedades, sobre as estratégias que elas mesmas e as outras utilizam frente a diversas situações” (ZUNINO, 1995, p. 69).

3.5.1.3 O algoritmo da multiplicação

À operação da multiplicação, podem ser associados os seguintes significados:

- a multiplicação como uma soma de parcelas iguais;
- a multiplicação como área;
- a multiplicação como combinação (raciocínio multiplicativo);
- a multiplicação e a idéia de proporcionalidade.

Inicialmente, trabalhamos com a turma a idéia de multiplicação como a adição de parcelas iguais, conforme apresentado no exemplo seguinte: “*Em um estacionamento, há 3 setores. Cada setor tem 20 vagas. Qual é o número total de vagas do estacionamento?*”

A5 explica: 20 + 20 + 20 = 60   Adição de 3 parcelas iguais

3 × 20 = 60	3	fator
	20	fator
	60	produto

O aluno A5, surpreendeu-nos ao colocar a nomenclatura. Foram trabalhadas várias atividades para que os alunos percebessem que uma adição de parcelas iguais pode ser substituída por uma multiplicação.

Considerando o mesmo exemplo, representamos a operação correspondente, utilizando papel quadriculado (1 cm × 1 cm), como mostra a Figura 9.

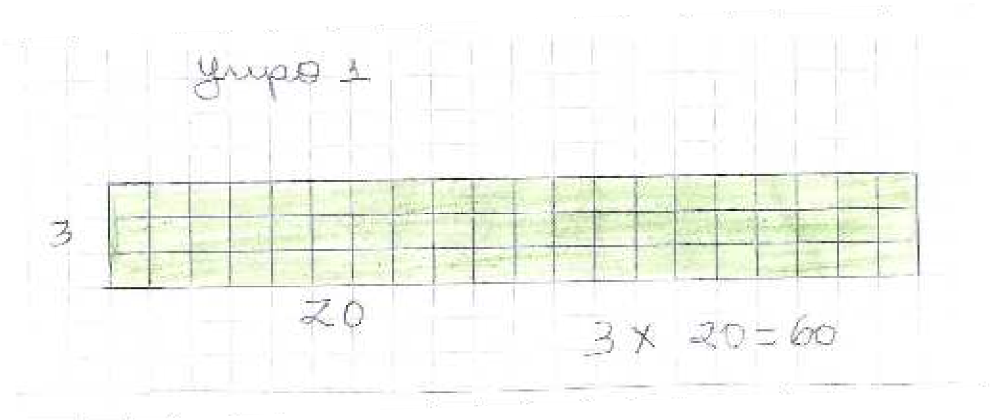


Figura 9: A multiplicação como área

Alguns alunos tiveram a curiosidade de contar os quadrados um a um. Depois, perceberam que, conhecendo o número de linhas e o de colunas numa disposição retangular, seria possível saber o resultado por meio de uma multiplicação sem que fosse necessário contá-los.

Distribuímos folhas de papel quadriculado e lápis de cor com a turma e pedimos que os alunos, representassem a operação 7 × 13, proposta que foi acatada com grande alegria, por estarem trabalhando com tais materiais. Para expressar a alegria que sentiam, alguns disseram: “Eu gosto de pintar”; “Eu conto os quadrados e não erro a multiplicação”.

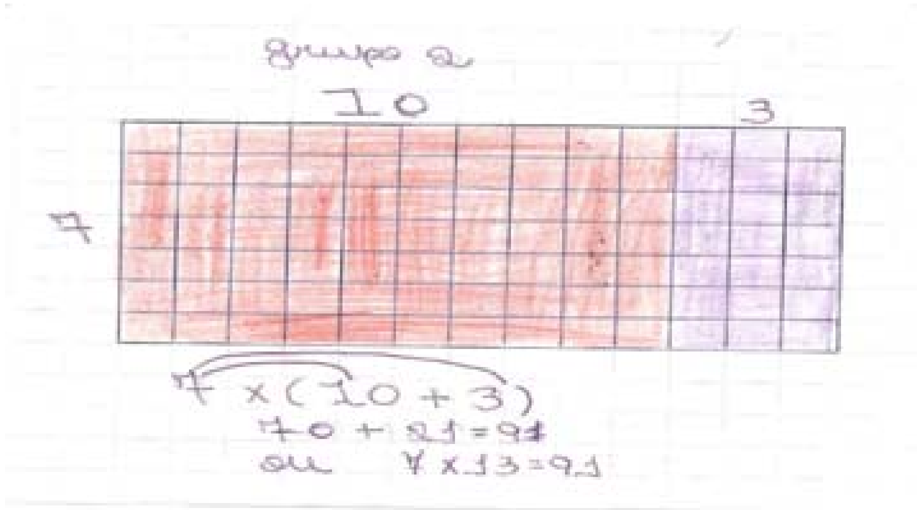


Figura 10: A multiplicação como área

Todos os grupos realizaram a tarefa sem dificuldade. Ao multiplicar 7 X 13, fizeram cálculos mentais e de decomposição, ao efetuar:

$7 \times 13 = 7 \times (10 + 3)$; a) $7 \times 10 = 70$; b) $7 \times 3 = 21$

Logo, $7 \times 13 = 70 + 21$, isto é, um dos fatores é decomposto em dezenas e unidades (ou centenas, dezenas e unidades), utilizando-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Um ponto importante observado foi quando os alunos afirmaram que a multiplicação por decomposição é mais fácil que a forma usual.

Neste outro exemplo, o Grupo A1 apresentou uma solução surpreendente, efetuando: $132 \times 4 = 132 \times 2 \times 2 = 264 \times 2 = 524$, isto é, decompondo um dos fatores em fatores mais simples, concluindo que multiplicar por 4 seria o mesmo que multiplicar por 2 e depois novamente por 2.

Para executar atividades com problemas de contagem, é necessário que os alunos disponham de material de manipulação, a fim de concretizarem as situações-problemas. Oferecemos aos alunos 3 tipos de camiseta (branca, preta e amarela) confeccionadas com o

E.V.A (material emborrachado), e 2 tipos de shorts (azul e vermelho) e perguntamos: "De quantas maneiras diferentes podemos formar uniformes?"

Os alunos fizeram as montagens e descobriram o total de uniformes. E usando contagens, eles concluíram que o total de uniformes pode ser encontrado pela multiplicação de 3 tipos de camisetas e 2 tipos de shorts, portanto, o total de uniformes era $3 \times 2 = 6$. Foi um diálogo interessante, que nos possibilitou discutir alguns conhecimentos matemáticos que os alunos detinham. Em seguida, propusemos o seguinte problema para os grupos: "*As meninas da 5ª série estão montando um time de voleibol e precisam escolher o uniforme. Na loja de artigos esportivos, existem três tipos de short, de cores diferentes. Para a camiseta, existem quatro opções de cores diferentes. Quantos uniformes diferentes podem criar, com os três tipos de short e os quatro tipos de camiseta?*".

Figura 11: A multiplicação como conjunto de possibilidades

Para visualizar todas as possibilidades de criação do uniforme, o Grupo 4 usou a tabela de dupla entrada (tabela multiplicativa). Quando estimulamos o aluno a determinar o total de combinações possíveis entre diferentes tipos de agrupamentos, ele constatou que se tratava de uma situação de multiplicação.

O Grupo 3 resolveu o mesmo problema por meio da árvore das possibilidades, cujo objetivo é favorecer a compreensão do princípio multiplicativo existente nessa contagem e revisou outra idéia de multiplicação (soma de parcelas iguais). É importante ressaltar que os alunos já conheciam esse recurso, posto que a professora da série anterior já lhes havia ensinado.

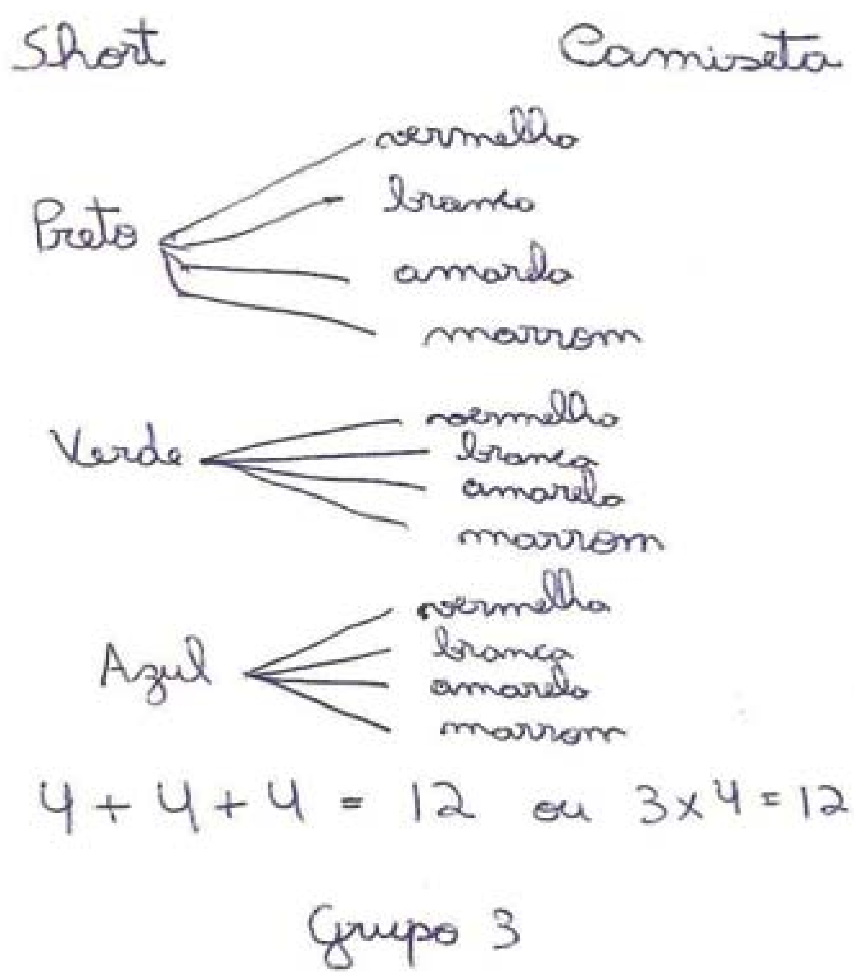


Figura 12: A multiplicação e a árvore de possibilidades

Em seguida, ocorreu uma intervenção por parte da pesquisadora com perguntas do tipo: “Quantas são as combinações possíveis com o short preto? Quantas são as combinações possíveis com a camiseta vermelha?”.

Por último, foi trabalhada a idéia de proporcionalidade, não só a memorização como também a reelaboração do conhecimento adquirido. Isso foi aprofundando a compreensão dos alunos sobre a operação de multiplicação. É a partir da proporcionalidade que se formam as noções de razão, proporção, regra de três, dentre outros, a exemplo do que é proposto na questão: “*Dona Marta gasta meia dúzia de ovos para fazer um bolo. Ela precisa fazer cinco bolos. Quantos ovos, irá usar?”*

Alguns grupos responderam dessa maneira:

1 bolo – 6 ovos

5 bolos – 5 × 6 = 30 ovos

O aluno A5, do Grupo 2, usou a seguinte estratégia:

1 bolo – 6 ovos

2 bolos – 6 ovos

3 bolos – 6 ovos

4 bolos – 6 ovos

5 bolos – 6 ovos, logo, somando 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30 ovos

Nesse exemplo, o aluno A5 foi o primeiro a responder que realizou a operação mentalmente sendo, pois, convidado, a ir ao quadro-branco explicar seu raciocínio. Nesse problema, as grandezas são quantidades de ovos e de bolos, e o resultado procurado é a quantidade de ovos. Se a quantidade de bolos aumenta cinco vezes, a quantidade de ovos também aumentará cinco vezes. Trabalhamos com os alunos situações simples, com as quais praticassem de modo intuitivo a idéia de proporção. Com essa familiarização foi iniciada a descoberta das propriedades que os levaria ao conceito de proporcionalidade.

Dando prosseguimento ao trabalho com a operação de multiplicação, trabalhamos a multiplicação por 10, 100 e 1000, explorando o cálculo mental. Foram realizadas algumas transformações de unidades de massa, tempo e comprimento, integrando esses assuntos, o que levou os alunos a chegarem sozinhos às conclusões abaixo.

Para multiplicar um número natural:

- por 10, basta acrescentar 1 zero à sua direita;
- por 100, basta acrescentar 2 zeros à sua direita;
- por 1000, basta acrescentar 3 zeros à sua direita.

Apesar da diversidade de significados que podem ser atribuídos à multiplicação, em geral explora-se apenas um deles, como afirmam Toledo e Toledo (1997, p. 120): “Na maioria das escolas, a multiplicação é vista apenas sob o seu aspecto de adição de parcelas iguais”. E para atingirmos os objetivos pretendidos acerca da multiplicação, trabalhamos as diversas idéias associadas a esta operação (adição de parcelas iguais, multiplicação como área, multiplicação como combinação e a idéia de proporcionalidade).

O trabalho com a multiplicação por meio de atividades com o papel quadriculado, também foi utilizado na abordagem de seu algoritmo. O material dourado foi empregado para que os alunos pudessem visualizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Eles resolveram as situações em que havia reservas sem dificuldades.

Ao utilizar o material dourado, sentiram dificuldades, quando precisaram manipular uma quantidade maior de peças, o que fez com que cometessem erros, concluindo, nesses casos, que com números “grandes” seria melhor utilizar o algoritmo da multiplicação ou a multiplicação por decomposição, como mostram os exemplos abaixo:

1) *Renata pôs 14 sanduíches em cada bandeja. Quantos ela colocou em três bandejas?*

Foram distribuídos para os grupos, papel quadriculado, lápis de pintar e o material dourado, ficando a critério dos grupos a escolha do material a ser utilizado e a busca de solução para o problema.

O Grupo 3 realizou a multiplicação de várias maneiras: primeiro, geometricamente, com o papel quadriculado; segundo, usando a decomposição, pois um dos fatores é formado por um único algarismo; terceiro, com o material dourado; e, por último, usando o algoritmo, explicando os passos da operação.

A diversidade de procedimentos está ilustrada a seguir:

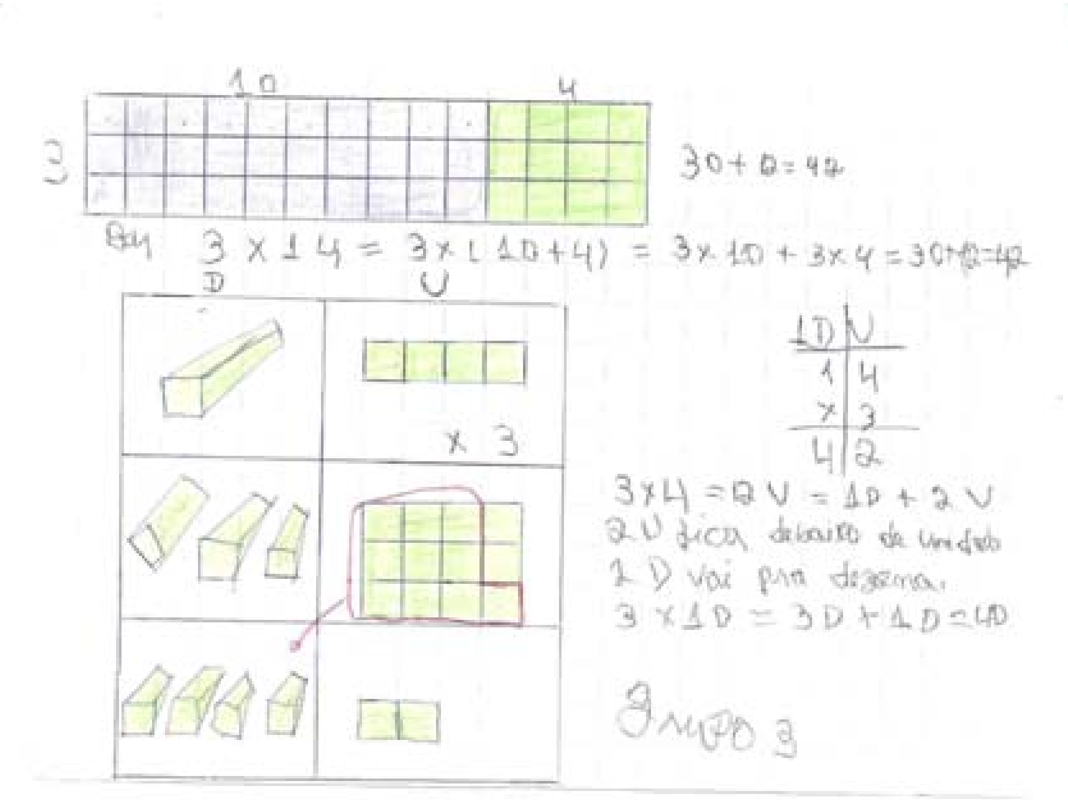


Figura 13: A multiplicação e seus diversos significados e propriedades

Nas multiplicações com o zero intercalado, quando o zero é tratado como um número qualquer, verifica-se que os alunos compreendem melhor e fazem as simplificações na escrita quando se sentem à vontade para isso. Como mostra a Figura 14.

No exemplo: *Sandra tem 105 álbuns de selos. Todos estão completos. Em cada álbum cabem 142 selos. Quantos selos ela tem?*

Os alunos resolveram usando o algoritmo da multiplicação.

A11, explica: “5U vezes 2U é igual a 10U, ou 1D; coloco o 0 (zero) na unidade e vai 1D para a casa da dezena; 5U vezes 4D é igual a 20D mais 1D fica 21D, coloco 1D na casa da dezena e vai 2C; 5U vezes 1C é igual a 5C mais 2C é igual a 7C; 0D vezes 2U dá 0D, coloco na casa da dezena; 0D vezes 4D dá 0C, coloco na casa da centena; 0D vezes 1C dá 0UM, coloco na casa da UM; 1C vezes 2U dá 2C, coloco na casa da centena; 1C vezes 4D da 4UM, coloco na casa da UM; 1C vezes 1C dá 1DM, coloco na casa da DM”.

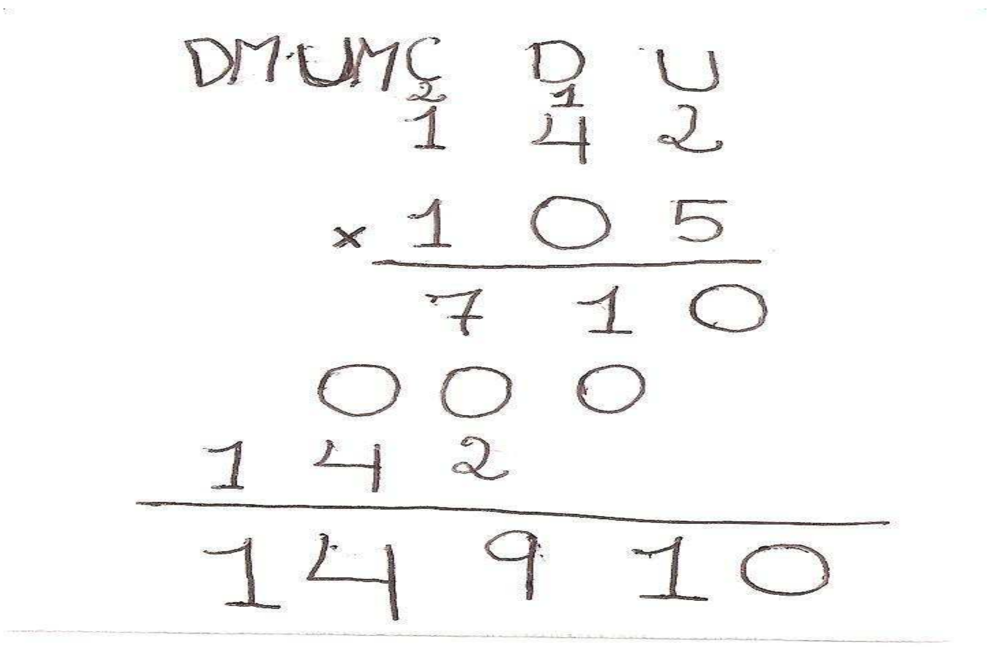


Figura 14: O algoritmo tradicional da multiplicação

Essa foi à resposta dada pelos grupos. Os alunos eliminaram a linha dos zeros, ou seja, compreenderam o porquê de se deixarem vazias as casas das unidades e das dezenas e entenderam que, para multiplicar um número por outro, multiplicam-se as unidades de cada ordem do multiplicando e, em seguida, adicionam-se os produtos encontrados. No início das atividades, os alunos tinham dificuldades em procedimentos como esse.

3.5.1.4 O algoritmo da divisão

Em relação à divisão, podem-se associar duas idéias distintas: a idéia partitiva (repartir em partes iguais) e a quotativa (de medida, busca da identificação de quantas vezes um número “cabe” no outro), como nos exemplos seguintes:

1) *Ana vai distribuir 100 reais igualmente entre seus quatro filhos. Quantos reais caberão a cada um deles?*

2) *Quantos saquinhos com quatro figurinhas, cada um deles, podem ser feitos, dispondo-se de 100 figurinhas?*

A resolução dos dois problemas envolve a mesma operação: 100 ÷ 4 = 25. No entanto, cada problema apresenta uma idéia diferente. No primeiro, temos a idéia de repartir em partes iguais; no segundo, a idéia trabalhada é a de identificação de quantas vezes uma quantidade cabe na outra.

Operacionalmente, a divisão pode ser relacionada com a realização de subtrações sucessivas. Assim, 36 ÷ 4 = 9; logo, 36 dividido por 4 significa quantas vezes o 4 cabe no 36; retirando-se 4 sucessivamente de 36, temos: 36 – 4 = 32; 32 – 4 = 28; 28 – 4 = 24; ...; 12 – 4 = 8; 8 – 4 = 4; 4 – 4 = 0. Portanto, o 4 cabe 9 vezes em 36, procedimento que os alunos desconheciam formalmente. Ao realizar divisões com material concreto, processam distribuições sucessivas de unidades, até que o montante se esgote, procedimento que querem adotar, mesmo quando operam com grande quantidade de objetos.

Na maioria dos casos, mesmo quando retirados grupos com várias unidades, como no exemplo 144 ÷ 4, o processo de subtrações sucessivas não é prático, podendo ser agilizado da seguinte forma: 144 é o mesmo que 14 dezenas e 4 unidades. Quantos 4 cabem em 14 dezenas? O resultado será 3 dezenas, sobrando 2 dezenas. Transformando as 2 dezenas em unidades e adicionando as 4 unidades, obtêm-se 24 unidades. A resposta dessa operação será 6. O resultado da divisão de 144 por 4 será, então, 3 dezenas e 6 unidades.

Em muitas situações do dia-a-dia, usa-se o cálculo mental, o arredondamento e os resultados aproximados, sendo esses fatores importantes para a tomada de decisões.

Realizamos atividades com o cálculo mental, envolvendo operações como a que segue: 824 ÷ 2. Os grupos resolveram a divisão por decomposição, explicando: 824 ÷ 2 = (8C + 2D + 4U) ÷ 2 = (8C ÷ 2) + (2D ÷ 2) + (4U ÷ 2) = 4C + 1D + 2U, logo 824 ÷ 2 = 412

O dividendo foi decomposto em suas ordens (centenas, dezenas e unidades), sendo também utilizada a propriedade distributiva em relação à adição.

Realizamos atividades com os grupos, instigando-os a descobrir que o resto não pode ser igual ao divisor ou maior que o divisor, levando-os a entender que, em uma divisão com números naturais, vale a relação: dividendo = quociente x divisor + resto. Trabalhamos a idéia de que em uma divisão que envolve somente números naturais, se o resto é zero, a divisão é exata; quando o resto é maior que zero, a divisão não é exata.

O aluno A12, indagou o porquê de não existir divisão por zero, uma questão que respondemos, afirmando que, por exemplo, considerando a divisão de 15 por zero, não existe nenhum número que, ao ser multiplicado por zero, tenha como resultado 15. Ele, então, exclamou: “Ah! Todo número multiplicado por 0 é 0”.

Para que melhor compreendessem a relação entre os termos de uma divisão, sugerimos aos alunos que utilizassem uma calculadora simples, efetuando divisões sucessivas de 15 por 1; 0,5; 0,1; 0,005; 0,0005. Os grupos observaram que, à medida que os valores do denominador iam ficando mais próximos de zero, o quociente tornava-se cada vez maior. Também foram trabalhadas as divisões por 10, 100 e 1000 na calculadora.

O algoritmo da divisão provoca discussões entre os professores, quanto ao uso do processo euclidiano de divisão ou processo longo, em que as subtrações são indicadas no algoritmo, enquanto, no processo breve, as subtrações são feitas mentalmente, não sendo registradas no algoritmo.

De acordo com Toledo e Toledo (1997, p. 52), “Do ponto de vista pedagógico, talvez seja melhor iniciar o trabalho com divisão pelo processo longo, que permite aos alunos conhecerem, passo a passo, os procedimentos que se apresentam resumidos no processo breve”. Ou seja, os alunos compreendem o porquê do que fazem, aprendendo a pensar formalmente.

Vejamos o exemplo *“A quantia de 342 reais será igualmente repartida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma”*? A solução foi explicada pelo Grupo 4 por meio do material dourado e do algoritmo.

No algoritmo, procederam à operação, explicando cada passo.

C D U		
3 4 2	3	“3C dividido por 3U é 1C.
0 4	1 1 4	4D dividido por 3U dá 1D e sobra 1D somando
1 2	C D U	essa dezena com as 2U e dividindo essas 12U por
(0)		3U, temos 4U”. .

O aluno A5 foi ao quadro resolver o exemplo: *“Dezesseis crianças compraram, juntas, um saco com 835 bolinhas de gude. Enquanto foi possível, dividiram igualmente as bolinhas e, no fim, sortearam as bolinhas restantes para uma delas. O sorteado foi Pedro. No total, quantas bolinhas ele recebeu”?*

O aluno usou o processo longo, que será descrito a seguir:

C D U

8 3 5 | 16

- 8 0   52

3 5

- 3 2

0 3

Explicação do aluno:

"Eu começo dividindo 83 dezenas por 16. Faço as multiplicações 16 × 4 = 64 e 16 × 5 = 80, desta forma achei 5 dezenas e sobrou 3 dezenas; junto as 5 unidades, ficando 35 unidades. Faço as multiplicações 16 × 3 = 48 passa e 16 × 2 = 32, está mais perto, restando 3.

A5 concluiu que Pedro recebeu 55 bolinhas, ou seja, 52 + 3.

Após a explicação, lançamos aos grupos a seguinte pergunta:

- Quais os possíveis valores para o resto?

Eles responderam que poderiam ser - 0, 1, 2, 3, 4, ... 15.

Nos pré-testes (1 e 2), as maiores dificuldades enfrentadas pelos alunos foram os problemas com zero no quociente intercalado ou na ordem das unidades. Por essa razão, procuramos explorar diversas atividades com essa estrutura, para auxiliar na apropriação dos conceitos matemáticos, como indicado nos exemplos que seguem.

1) *Marcelo comprou 240 laranjas na feira. Cada saquinho cabe 3 laranjas. Quantos saquinhos vão ser necessários?*

Solução: O Grupo 1 explicou no quadro o referido exemplo assim:

C D U

2 4 0 | 3

0   0 8 0

C D U

"Tenho 2C para dividir pra 3, dá zero centenas, sobra 2C, eu junto com 4D e fica 24D dividido por 3 dá 8D. Agora eu tenho 0U para dividir pra 3 que dá 0U".

Os alunos usaram o processo breve, ou seja, não registraram as multiplicações e as subtrações.

2) *Em uma padaria foram feitos 5125 doces. Os doces serão colocados em caixas com 25 unidades. Quantas caixas serão necessárias?* O Grupo 3 apresentou a seguinte solução.

```
UM C  D  U

 5  1  2  5 | 25
            |_____
- 5   0       0 2 0 5
  1   2   5
- 1   2   5
    0
```

"5 milhares divididos por 25 dá zero unidades de milhar. Agora, eu divido 51 centenas por 25, dá 2 centenas e sobra 1. Vou dividir 12 dezenas por 25, dá zero dezenas e sobra 12 dezenas, junto 12 dezenas com as 5 unidades, que dá 125 unidades dividido por 25 dá 5 unidades. São necessárias 205 caixas".

Os alunos utilizaram o processo longo da divisão, isto é, registrando as operações da subtração.

O problema 3: *Na organização de uma festa, Ana preparou 42 sanduíches. Cada bandeja cabe 8 sanduíches. Quantas bandejas ela vai usar?,*

Problema envolvendo uma divisão simples, demandando a compreensão do significado do resto na divisão. Foi resolvido de maneiras diferentes pelos grupos, como podemos observar no protocolo a seguir: (P representa a fala da pesquisadora, e A1, A5, A7, A10 e A12 são as falam dos alunos).

A1, (lendo o problema) fica pensativa e utiliza as mãos para auxiliar na contagem, conta em uma mão de 8 em 8 e marca no caderno quantas vezes já contou 8....aí é 8 vezes 5, 40, para 42, sobra 2.

A5: "É 8 vezes 5, 40, para 42, falta 2".

A7: "É 5 bandejas e sobra 2 sanduíches".

A12: "Eu fiz com tracinhos".

P: A12 utilizou tracinhos para representar a situação. A aluna fez 42 tracinhos e agrupou-os de 8 em 8, conforme a Figura 15:

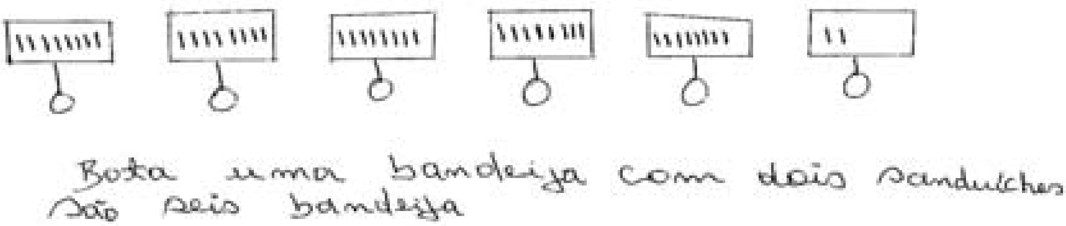


Figura 15: A questão do resto, na divisão

P: E o que fazer com esses 2 sanduíches?

A10: "Dá para alguém comer".

A5: "Bota outra bandeja com os 2 sanduíches".

A estratégia utilizada por A12 neste problema é o de ir separando o todo em quotas: oito sanduíches em cada bandeja e percebeu que ainda sobrariam dois sanduíches. Esta representação a auxiliava na solução do problema. Foi perguntado aos alunos o que fazer com esses dois sanduíches. Depois de várias discussões em grupo, concluíram que era necessário acrescentar mais uma bandeja para esgotar o total de sanduíches. O que resultaria em ter 6 bandejas ao invés de 5.

Por último, lançamos um desafio aos alunos, indagando-lhes se seria possível resolver as operações, iniciando-se o procedimento pelo lado oposto, isto é, pelas ordens mais altas, em vez de começar pelas unidades (nos casos das operações de adição, subtração e multiplicação). Todos responderam que não era possível. Então, sugerimos que resolvessem, inicialmente, com o material dourado, e depois, representassem as ações nos algoritmos correspondentes, como sugerido. Os cálculos propostos foram:

a) 245 + 372

b) 478 – 149

c) 76 × 6

d) 476 ÷ 4

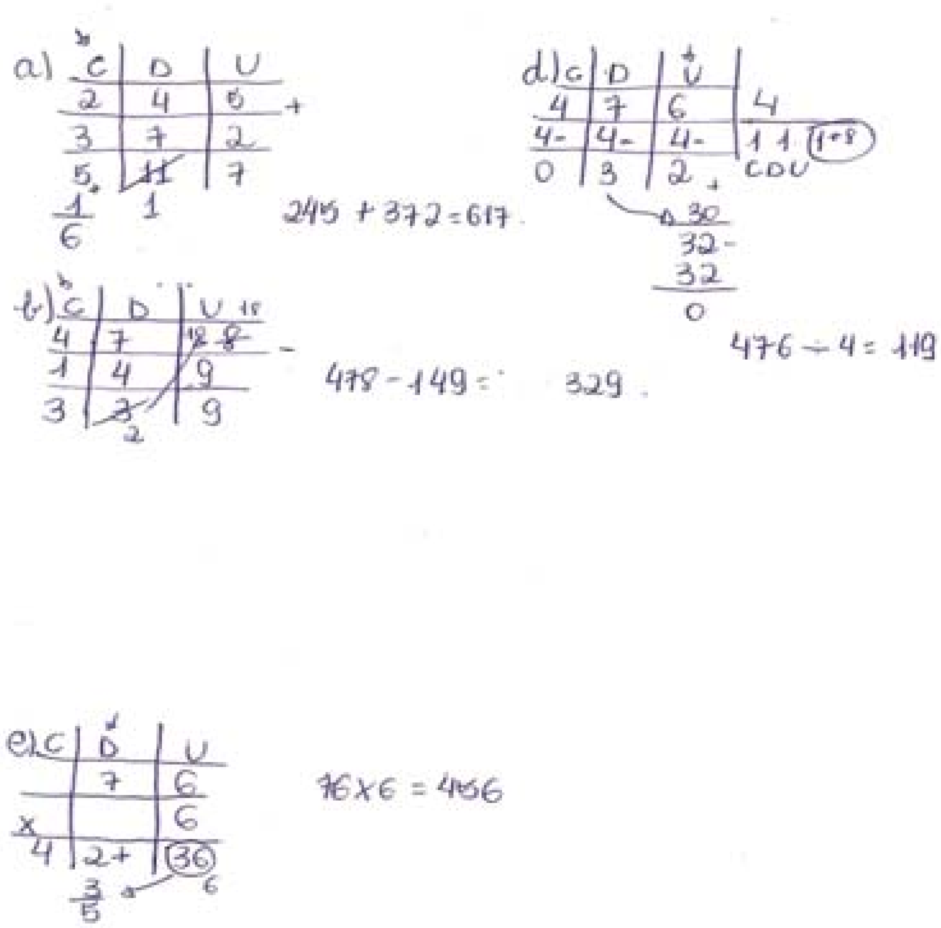


Figura 16: Resolvendo as contas pelo lado oposto

O aluno A1, explica o item **a:** “2C mais 3C são 5C, coloco na casa da centena; 4D mais 7D dá 11D, vai 1C para a casa da centena e fica 6C, e fica 1D na casa da dezena; 5U mais 2U são 7U”.

Por sua vez, o aluno A8, explica o item **b:** “4C menos 1C dá 3C, aí coloco na casa da centena; 7D menos 4D dá 3D, coloco na casa da dezena; agora tenho que trocar 1D por 10U, fica 2D na casa da dezena e 18U menos 9U são 9U, que coloca na casa da unidade”.

O aluno A10, explicou desta forma o item **c:** “6U vezes 7D são 42D, vai 4C para a casa da centena e fica 2D na casa da dezena; 6U vezes 6U são 36U, vai 3D para a casa da dezena mais 2D são 5D e fica 6U na casa da unidade”.

Ao explicar o item **d**, o aluno A5 afirmou: “começo das unidades; 6U divididas por 4U da 1U e sobra 2U; 7D divididas por 4U da 1D e sobram 3D; 4C divididas por 4U da 1C. Sobraram 3D, elas vão para as unidades (30 unidades) que se juntam as 2U, dando 32U; agora divido 32U por 4U da 8U . Assim nas unidades há 1U mais 8U igual a 9U”.

O objetivo dessa ação foi levá-los a entender que as operações podem ser realizadas, iniciando-se em qualquer ordem, isto é, tanto da direita para a esquerda, quanto da esquerda para a direita, desde que se compreenda o que significa o valor posicional de cada algarismo do número representado.

Foi perguntado aos alunos o que tinham achado mais difícil nas duas maneiras de realizar o algoritmo das operações, e a maioria respondeu que foi mais fácil resolver começando da direita para a esquerda (adição, subtração e multiplicação) no caso da divisão começando pela esquerda, pois daria menos trabalho, e o mais difícil foi começar dividindo pelas unidades.

Na primeira atividade, ressaltamos a importância do registro após o uso do material dourado no sentido da compreensão do algoritmo, do SND e das técnicas operatórias, pois sem o apoio desse material, a contagem por centenas, dezenas e unidades requer maior esforço de abstração por parte do aluno. Trabalhamos com a exploração de vários cálculos, por exemplo: cálculo mental, exato, escrito e aproximado, esses cálculos ajudam a entender as propriedades das operações. Além disso, evitamos os procedimentos automáticos de “vai 1” e “pedir emprestado”, mecanizados, sem compreensão.

3.5.2 Segunda atividade – Confecção de bingos, jogos e figura mágica para a aplicação lúdica da tabuada

Com base em nossa experiência como professora e capacitadora em programas de formação continuada para professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, constatamos que, nas escolas, a prática cotidiana envolvendo a tabuada ocorre por meio da “memorização”, sem a preocupação com que o aluno compreenda o que está fazendo.

Para que tal situação não fosse repetida, confeccionamos bingos, jogos e figuras mágicas, isto é, realizamos atividades lúdicas através das quais exploramos a tabuada, para promover o desenvolvimento dos alunos, motivando-os a querer saber mais.

Compreendemos que o domínio da tabuada facilita a realização de multiplicações, de divisões e que a ênfase não deve residir na mecanização do processo, mas na compreensão dos procedimentos envolvidos e na possibilidade de utilização do conhecimento que se tem para a construção de novos saberes. Por exemplo: é importante que os alunos percebam que, uma vez sabendo a tabuada do 4, basta duplicar seus resultados para obter a tabuada do 8.

O primeiro a ser confeccionado foi o “Bingo da Multiplicação” (RÊGO; RÊGO, 1999). Para isso, levamos para a sala de aula os modelos das cartelas e das fichas de chamada. Os alunos trabalharam individualmente, construindo em cartolina guache sua cartela, medindo 9 cm × 6 cm. Depois confeccionaram as fichas de chamada e os marcadores que foram feitos em E.V.A.

2	18	30
5	21	40

Figura 17: Modelo das cartelas

Fatores colocados nas fichas de chamada:

2 × 1	3 × 1
2 × 2	3 × 3
2 × 3	3 × 4
2 × 4	3 × 5
2 × 5	3 × 6
2 × 6	3 × 7
2 × 7	3 × 8
2 × 8	3 × 9
2 × 9	

e assim por diante, até a tabuada do 9.

Durante a confecção das fichas, os alunos perceberam que estavam construindo a tabuada e observaram também que não havia necessidade de repetir pares, como por exemplo: 2 × 3 e 3 × 2.

Durante esse processo, podemos observar que todos, os alunos, sem exceção, tiveram dificuldades de manusear a régua, já que começavam a contar a partir de 1 cm, e não, do zero. Foi importante que construíssem o próprio material e não o recebessem pronto, pois, através da construção, trabalharam medidas, coordenação motora, uso de régua, entusiasmando-se com a atividade. Outro aspecto observado foi o de que os alunos tiveram dificuldades para confeccionar os materiais, pois estes foram feitos na sala de aula, e as carteiras não lhes davam apoio para que realizassem adequadamente algumas das ações, como apoiar a cartolina.

No dia seguinte, com o bingo pronto, foram distribuídas as cartelas e os marcadores, e as fichas de chamada foram colocadas em uma sacola opaca. A pesquisadora retirava uma ficha e escrevia no quadro a operação nela contida: 8×8. O sorteio prosseguia, até que alguém conseguisse marcar na cartela os seis números, sendo, pois, o vencedor.

A pedido dos alunos, o bingo foi repetido algumas vezes. Em uma delas, solicitamos que um dos participantes conduzisse o jogo e passamos a observar o comportamento dos alunos. Quando um não sabia o resultado, os demais davam a resposta. A maior dificuldade dos alunos eram as tabuadas de 6, 7 e 8.

O bingo gerou muita curiosidade, o que ocasionou várias manifestações, tais como: “Nossa, tia, parecia tão fácil!”; “Por que colocar 2×6 e 3×4, ou 3×6 e 2×9, se dá o mesmo resultado?”. De acordo com as perguntas dos alunos, verificamos que o objetivo de trabalhar a tabuada por meio do cálculo mental e da compreensão da propriedade comutativa surgiu de forma natural.

O jogo Cubra Doze foi realizado pelos alunos, mas em duplas. Esse jogo consiste em um tabuleiro 30 cm × 30 cm em cartolina guache, numerado de 1 a 12, para cada jogador; 24 fichas em E.V.A, que serviam como marcadores, e dois dados comuns. Cada participante, em sua jogada, lançava os dados, e os números sorteados podiam ser utilizados como o jogador desejasse, por meio de operações aritméticas escolhidas e anunciadas por ele, devendo o mesmo, cobrir o valor correspondente ao resultado da operação.

Por exemplo: se os números dos dados fossem 6 e 2, o jogador poderia cobrir 8, resultado da soma de 2 mais 6; ou o 4, pois 6 menos 2, é igual a 4; ou 12, pois 2 vezes 6 é igual a 12; ou, ainda, o 3, pois 6 dividido por 2, igual a 3. A divisão entre os números só poderia ser efetuada se fosse exata. Ganhava o jogador que cobrisse primeiro todos os seus números.

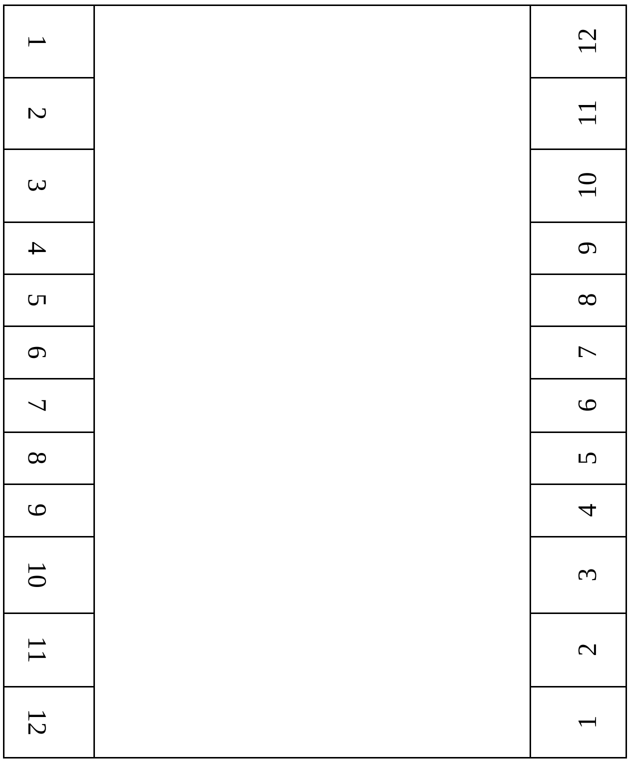


Figura 18: Modelo do cubra 12

Durante a confecção dos tabuleiros, os grupos já não apresentaram dificuldades para manusear a régua. No decorrer do jogo, foram realizadas intervenções com perguntas do tipo: “Quais os mais fáceis de ser cobertos? Com que valores e operações? Qual o mais difícil de ser coberto?”. Com essa atividade, objetivamos explorar a atenção, a agilidade de raciocínio, as quatro operações aritméticas e o cálculo mental. As observações foram registradas por escrito.

A pesquisadora atuou como organizadora dos grupos, estimulando a cooperação entre os alunos. Segundo eles, o jogo foi uma atividade prazerosa, realizada várias vezes, durante o qual os alunos tiveram a oportunidade de usar o cálculo mental, a concentração e a agilidade de raciocínio.

A última atividade escolhida foi uma “Figura Mágica”, que teve como objetivo a formação do raciocínio lógico, o trabalho com a manipulação de números e, principalmente, o uso de operações aritméticas.

Distribuímos cópias com os grupos, em sala de aula, dispondo, no tabuleiro quadriculado 3 × 3 (Figura 19), fichas numeradas de 1 a 9 (Figura 20), sem repetição, de modo que o produto de quaisquer três números na horizontal ou vertical dê sempre como resultado o valor indicado pelas igualdades.

			=70
			= 48
			= 108
= 64	= 45	= 126	

Figura 19: Quebra-cabeça

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

Figura 20: Fichas do quebra-cabeça

Para este quebra-cabeça, solicitamos que os alunos confeccionassem as fichas da Figura 20 no E.V.A, para facilitar o processo de busca da solução do mesmo. Inicialmente, os grupos fizeram uma leitura silenciosa e, em seguida, compartilhada com a pesquisadora. Após a indagação, afirmaram ter entendido o enunciado da questão e começaram a buscar a solução. Aproximadamente, depois de dez minutos tentando encontrar a solução, todos os grupos apresentaram a mesma dificuldade; conseguiam completar uma linha, porém, quando iam completar outra linha ou coluna, desfaziam as outras.

Durante a realização da atividade, interviemos com perguntas do tipo: “Por que você escolheu essa igualdade? Qual é a melhor igualdade”? A partir disso, surgiu um comentário interessante de todos os alunos: “É a igualdade 45 e 48”.

Perguntamos a eles quais as fichas que deveriam utilizar para preencher as igualdades, tendo os alunos concluídos que seriam as seguintes fichas: “1, 5, 6, 8, e 9”. Questionamos qual a posição do número 1, e A5 afirmou: “É a casa do centro”. Ao ser perguntado sobre por que a casa do centro, afirmou: “9 vezes 5 são 45 e 45 vezes 1 são 45, e 8 vezes 6 são 48, e 48 vezes 1 são 48”.

Nas discussões, os alunos concluíram que o número 1 só pode ocupar a casa central. Finalmente, para colocar os demais números, eles usaram o método de tentativa e erro.

No final da atividade, foi o momento de discutir um pouco com os grupos sobre o que haviam pensado do quebra-cabeça. Os comentários feitos pelos alunos foram de aprovação. A12 afirmou: “Jogo e quebra-cabeça ajudam a aprender as contas”. Já A7 comentou: “Fica melhor preencher a figura mágica com as fichas. Usando lápis, quando erramos tem que apagar”.

Portanto, quando o professor propõe uma atividade desse tipo, convém que seja com um material que o aluno manipule até chegar à conclusão, evitando simplesmente passar o modelo no quadro ou copiar de um livro para que o aluno tente respostas usando lápis as quais, se não encontradas em um breve espaço de tempo são, em geral, abandonadas por eles.

Eles concluíram que existe uma única solução para o quebra-cabeça proposto, que pode ser expressa conforme disposto na Figura 21.

2	5	7	=70
8	1	6	= 48
4	9	3	= 108
= 64	= 45	= 126	

Figura 21: Solução do quebra-cabeça

Com jogos simples e divertidos os alunos verificaram a regularidade das tabuadas do 5 e 10. E a facilidade de dobrar – multiplicar por 4 é dobrar duas vezes; multiplicar por 8 é dobrar três vezes. Daí a necessidade do professor fazer os alunos compreenderam a importância de se estudar a tabuada entendendo seu significado, propiciando-lhes novas possibilidades de aprendizagem.

3.5.3 Terceira atividade – Pesquisando no dicionário, na Internet e explorando a calculadora

A terceira atividade teve como finalidade desenvolver competências relacionadas ao ato de consultar o dicionário, e escolher entre várias definições, aquela que melhor convém ao contexto e reconhecer quando o uso do dicionário e da internet, se faz necessário. Exploramos o uso da calculadora como instrumento, e não como substituição do cálculo escrito. Portanto, fazendo-se contas usando calculadoras, cálculo mental ou lápis e papel, o importante é incentivar os alunos a anteciparem e a julgarem resultados, porque isso é fundamental na vida cotidiana e assim estarão em condições de avaliar se o resultado das contas que fazem está correto ou não.

Para o desenvolvimento da atividade, solicitamos que os alunos procurassem no dicionário (Miniaurélio), a definição das palavras “adição”, “subtração”, “multiplicação”, “divisão” e “inverso”. Tal atividade foi realizada individualmente, na Biblioteca da Escola. Depois, promovemos uma discussão com a turma sobre o significado desses vocábulos.

No dicionário, encontramos, por exemplo, esta definição de “inverso”: “que segue sentido, ordem; contrário ao sentido ou ordem natural; oposto, contrário”. Pedimos aos alunos que apontassem situações do dia-a-dia que transmitissem a idéia de inverso, tendo sido citadas: fechar a porta × abrir a porta; subir uma escada × descer uma escada, entre outras.

Nas atividades que desenvolveram com material dourado, eles foram relacionando a adição e a subtração como operações inversas, assim como a multiplicação e a divisão. Por exemplo, multiplicando 8 por 3, obtemos 24; dividindo 24 por 3, voltamos ao 8. Nesse caso, uma desfaz o que a outra faz. O aluno, então, concluiu: - “Para eu verificar se o resultado de uma conta está correto, utilizo a operação inversa”.

O aluno A5, comentou: “Eu sempre usava a prova real quando fazia uma conta”. Quando perguntamos o porquê, ele respondeu: “Eu não sabia por que fazia, apenas fazia. Agora eu faço a operação inversa para saber se a resposta está certa”.

Todos esses conceitos foram construídos, tendo como exemplo principal o uso do material dourado e os jogos construídos pelos alunos. Observamos, por exemplo, que, quando falávamos em “tirar a prova de uma subtração”, os alunos respondiam que bastava fazer uma adição. Não usavam mais a palavra “prova real”, termo que empregavam quando da realização dos pré-testes (1 e 2), embora não soubessem explicar o que significava.

Para enriquecer as aulas, propusemos, na ação seguinte, que fosse usada a Internet. Para isso, acessamos o site www.cade.com.br, por meio do qual procuramos o termo “educação matemática”, fazendo uma incursão na história dos símbolos +, –, ×, ÷ e outros empregados para indicar as operações. Foi uma atividade individual, para a qual sugerimos aos alunos que lessem, interpretando e relacionando Matemática e História. O objetivo não foi saber os nomes dos criadores e as datas, mas perceber que os progressos na notação matemática ocorreram em determinado período histórico relacionado com a intensificação das navegações e do comércio, isto é, esses progressos atenderam à demandas sociais.

O uso do computador não foi novidade para os alunos, pois já o manuseavam desde a 1ª série (2º ano) do Ensino Fundamental, porém, foi novidade para eles conhecer a história dos símbolos matemáticos dentro da própria evolução do ser humano. Apesar de a escola dispor de um laboratório de informática, não existe nenhum programa instalado que auxilie no ensino da Matemática.

Na última ação proposta, os alunos trabalharam em grupo usando, calculadoras, que eles não sabiam manusear. Por essa razão, dedicamos algum tempo para que conhecessem e praticassem as regras básicas da máquina: tecla para ligar e desligar, tecla para limpar o visor, teclas numéricas e teclas de sinais. A tecla de sinal que mais chamou a atenção dos grupos foi a da raiz quadrada.

Dividimos, então, os grupos assim: os que usavam a calculadora e os que respondiam às operações oralmente e usavam papel e lápis. As operações sugeridas eram do tipo: 5 + 3; 8 + 8; 100 ÷ 2; 15 – 7; subtrair 98 de 476; somar 3475 com 479; 3.975 × 517; 713 ÷ 23, e assim por diante.

A conclusão a que os grupos chegaram foi à seguinte: para calcular as contas com “números pequenos”, o melhor é fazer o cálculo mental, é mais rápido do que digitar na calculadora. Para as contas com “números grandes”, o melhor é usar a calculadora, entretanto, com papel e lápis também resolvem, mas demora.

Ao efetuar a divisão de 23 por 7 sem usar a calculadora, os alunos encontraram 3 como resultado e 2, como resto. Efetuando essa divisão com a calculadora, questionamos o que apareceu no visor. – “Dá 3,287142” Essa resposta foi dada por A5, do grupo 2. Os demais alunos não foram capazes de interpretar corretamente os resultados mostrados no visor da calculadora. Eles desprezavam a parte decimal e consideravam a parte inteira, ou como sendo um número sem o ponto decimal.

Manuseando a calculadora, explicamos aos alunos que a função da tecla “ponto” é representar a vírgula. Para representar 5,75 reais, por exemplo, deve-se digitar (5) (.) (7) (5). Eles argumentaram que o ponto era pequeno e às vezes não dava para perceber. Outros falaram que nunca haviam feito divisão com resto usando a calculadora: - “Eu pensava que a calculadora estava errada, eu não sabia que os números à direita da vírgula significam que a divisão deixa resto”.

A calculadora pode ser um instrumento aliado no desenvolvimento cognitivo dos alunos, contribuindo para o aprendizado da Matemática, liberando-os do trabalho mecânico, permitindo-lhes que se dediquem ao raciocínio e à compreensão de propriedades operatórias.

Usamos as calculadoras comuns que são mais acessíveis. Discutimos com os alunos os problemas decorrentes de se usá-las em sala de aula sem uma proposta adequada. Segundo Zunino (1995, p. 89), “as calculadoras podem fazer as contas, porém só os seres humanos podem decidir em que situações correspondem somar, subtrair, dividir ou multiplicar, e nenhuma máquina pode substituí-los na avaliação dos resultados obtidos ao analisar estas operações”.

3.5.4 Quarta atividade – Trabalhando situações-problema com o dinheiro chinês

Para essa atividade, a metodologia de ensino adotada foi à resolução de problemas. Os PCN (BRASIL, 1998) enfatizam a importância do uso da resolução de problemas em sala de aula para o desenvolvimento de conteúdos de Matemática, ultrapassando, assim, a mera reprodução de procedimentos e o acúmulo de informações, possibilitando a atribuição de significados à aprendizagem. Nesse sentido, o documento conceituou Matemática como sendo "Uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la" (BRASIL, 1998, p. 41).

Para a resolução de um problema, o aluno necessita colocar em ação uma ampla série de habilidades, conhecimentos, estratégias e raciocínios. Segundo Diniz (2001, p. 99), nos livros didáticos de Matemática, os enunciados dos problemas estão centrados em textos chamados convencionais ou tradicionais:

> Esses problemas são na verdade simples exercícios de aplicação ou de fixação de técnicas ou regras. Na maioria das vezes, percebe-se neles a ausência de contexto significativo para o aluno e de uma linguagem condizente com a utilizada em seu dia-a-dia.

Depois da apresentação de um conteúdo, são apresentados determinados modelos, algumas vezes denominados de problemas pelo autor, a partir dos quais os alunos irão exercitar um procedimento ou regra. Eles memorizam os passos para obter a resposta e, em geral, só conseguem solucionar apenas aqueles que são iguais ou semelhantes ao modelo original, tendo dificuldade para aplicar o que aprenderam em outros contextos.

Uma de nossas preocupações foi fazer com que os alunos fossem capazes de resolver diferentes tipos de desafios, como problemas sem solução, com mais de uma solução, não-convencionais, e outros, contribuindo para que desenvolvam o sentido crítico, a autonomia, e para que observem e discutam os problemas.

As dificuldades para ler e interpretar um problema ou exercício de Matemática, apresentadas por alguns alunos, ocorreram devido à sua pouca habilidade em leitura na língua materna e à ausência de um trabalho específico com textos matemáticos. A compreensão de um texto é um processo difícil, que envolve interpretação, decodificação, síntese, antecipação e auto-correção.

Deve-se também levar em consideração que a metodologia da resolução de problemas propõe que o professor deva funcionar como organizador, consultor, mediador, controlador e incentivador, a fim de que os alunos participem ativamente, fazendo Matemática, e não, observando a Matemática ser feita pelo professor (BRASIL, 1998).

Realizamos um trabalho contínuo de leitura e interpretação de vários textos matemáticos e, em seguida, foram distribuídos aos alunos situações-problema (Anexo C) que os direcionassem à construção dos conceitos das operações básicas. A resolução foi mediada com o uso do “dinheiro chinês”, tornando mais significativas as idéias de unidades, dezenas e centenas, pois o dinheiro faz parte da vivência da maioria dos alunos, em particular daqueles oriundos de famílias de baixa renda. Nosso objetivo, com essa atividade, foi propiciar a ampliação da compreensão dos algoritmos e a realização das trocas que seriam necessárias, concretamente com o dinheiro.

Para fazer valer o estudo da Matemática aplicado à realidade dos alunos, procedemos a uma discussão sobre o valor do dinheiro, como se ganha e como se deve gastá-lo. Depois, distribuímos o dinheiro - o suficiente entre os grupos - para a realização das situações propostas, a exemplo das transcritas a seguir.

1 – *Uma nota de 10 reais pode ser trocada por quantas notas de 1 real? O valor total muda, após a troca?*

2 – *Uma nota de 100 reais pode ser trocada por quantas notas de 10 reais? E por quantas de 1 real?*

Em relação à primeira questão, os grupos responderam que a nota pode ser trocada por 10 de 1 real e que, após a troca, o valor do dinheiro não aumenta, o que aumenta são as quantidades de notas. Sobre a segunda, que a nota de 100 reais pode ser trocada por 10 de 10 reais e por 100 de 1 real.

3 – *Você tem uma nota de 100 reais e quer tirar R$ 33,00 dessa quantia.*

a) Faça o mínimo de trocas necessárias. Desenhe seu dinheiro depois das trocas;

b) Tirando 33 reais, com quantas notas de 10 reais e quantas notas de 1 real você fica?

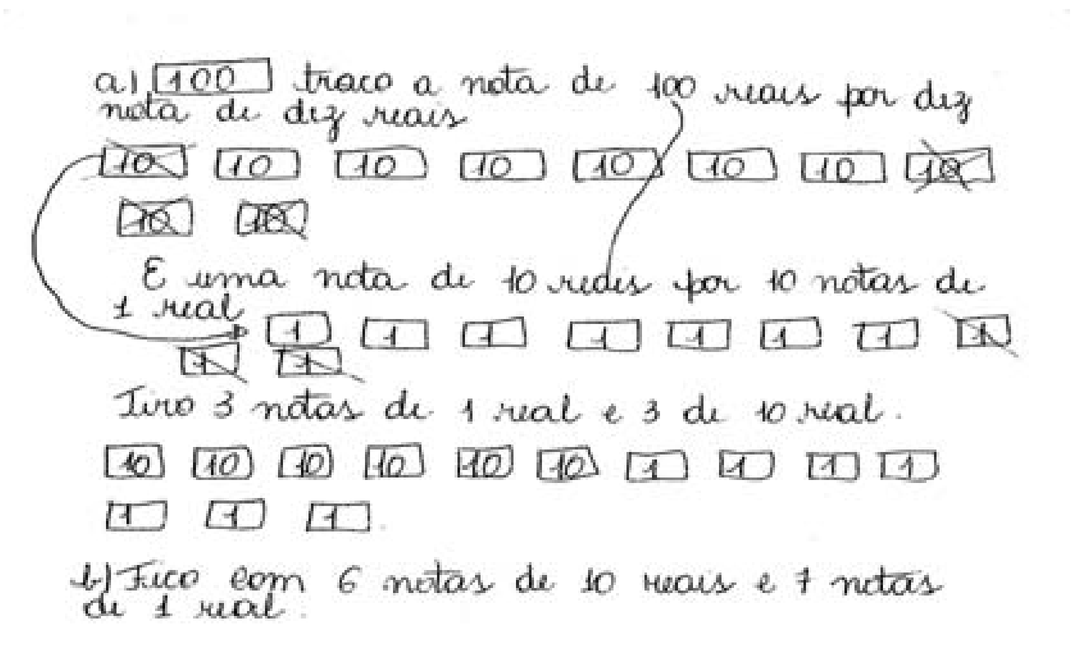


Figura 22: Subtração com o “dinheiro chinês”

Na figura anterior, eles trocaram a nota de 100 reais por 10 de 10 reais e uma nota de 10 reais foi trocada por 10 notas de 1 real. Ficaram 9 notas de 10 reais e 10 de 1 real; dessas 9 notas, eles tiraram 3, ficando 6 notas de 10 reais e tiraram 3 de 1 real, restando 7 notas de 1 real. O resultado foi, então, R$ 67, 00.

Os grupos afirmaram que resolveram a subtração por complementação, como se estivessem “passando um troco”. Nesse caso, ao trabalhar com o dinheiro, desenvolveram seu senso numérico e efetuaram informal e mentalmente as operações.

Como resultado desse processo, a frase mais comum que ouvimos foi: “Nossa, como é fácil trabalhar com o dinheiro! Não é demorado, não é cansativo! Eu gostei mais do que o material dourado!”.

Em relação ao Problema 4 – *Pagando cinco prestações iguais a R$ 35,00, qual o valor final de minha compra?,* Um aluno da turma perguntou se a prestação deveria ser paga por semana ou por mês. Indagamos o porquê da pergunta, e ele respondeu que sua mãe compra para pagar por semana, que há uns vendedores que vendem nas casas. O aluno A1, acrescentou que é melhor pagar por mês, pois seus pais só recebem o salário no final do mês. Isso desencadeou uma discussão importante, demonstrando que o aluno não está preocupado só em responder, mas em interpretar e compreender o problema.

Houve várias soluções para o problema proposto: uns grupos usaram a idéia de soma de parcelas iguais, representando da seguinte forma: 35 + 35 + 35 + 35 + 35. Outros utilizaram o cálculo mental: multiplicaram $5 \times 5 = 25$ e $30 \times 5 = 150$, depois somaram $25 + 150 = 175$. Isto é, um dos fatores foi decomposto em dezenas e unidades; em seguida, utilizaram à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Os demais grupos empregaram o algoritmo tradicional da multiplicação.

O trabalho com o dinheiro chinês facilitou a compreensão das técnicas algorítmicas. Além disso, estimulamos a leitura e interpretação de textos matemáticos e a autonomia na resolução dos problemas.

3.5.5 Quinta Atividade – Elaboração de situações-problema pelos alunos

Na última atividade, sugerimos aos alunos que elaborassem algumas situações-problema, não foram dados elementos para a composição das mesmas. Eles se reuniram, conversaram entre si e elaboraram as histórias.

Procuramos deixar os alunos livres nas suas argumentações, procurando ao máximo observar e não intervir. Além disso, incentivamos às atividades de solução de problemas, enfatizando a necessidade de leitura e a compreensão da história do problema aritmético, bem como o pensar sobre a solução dada.

Nessa atividade os alunos foram solicitados a resolver o problema, isto é, descrever o processo de pensamento utilizado para solucioná-lo. Alguns justificaram oralmente ou por escrito, os procedimentos empregados, as idéias utilizadas e o que aprenderam na atividade.

Tivemos como resultado várias produções interessantes, algumas das quais apresentadas em seguida.

No primeiro (Figura 23), utilizando-se de muitas palavras, o aluno explora a idéia da adição.

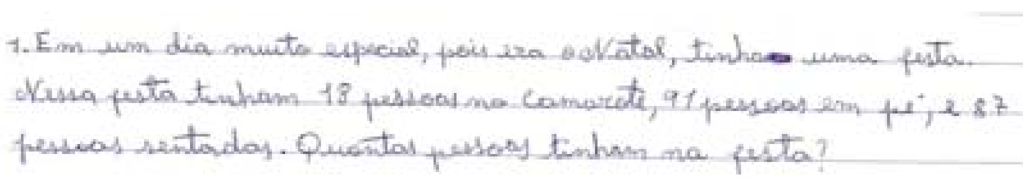

1. Em um dia muito especial, pois era o Natal, tinha uma festa. Nessa festa tinham 18 pessoas no Camarote, 91 pessoas em pé, e 87 pessoas sentadas. Quantas pessoas tinham na festa?

Figura 23: Problema elaborado por A5

Todos os alunos resolveram corretamente o problema anterior através da adição por decomposição.

O problema elaborado por A12 explora a operação da multiplicação com reagrupamento.

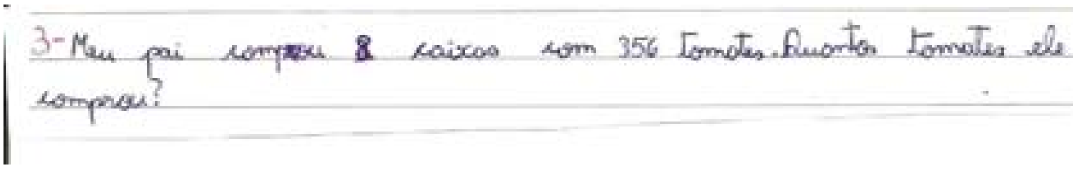

3- Meu pai comprou 8 caixas com 356 tomates. Quantos tomates ele comprou?

Figura 24: Problema elaborado por A12

O aluno A12 explicou como realizou a operação da Figura 24, efetuando: “356 = (300 + 50 + 6) e multipliquei por 8; 8 × 300 = 2400; 8 × 50 = 400 e 8 × 6 = 48; ai somei 2400 + 400 + 48 = 2848”.

Os alunos responderam a multiplicação por uma decomposição, eles explicaram seus procedimentos, demonstrando clareza em relação às propriedades da multiplicação.

No último problema (Figura 25), temos uma divisão onde o divisor é um número com apenas um algarismo.

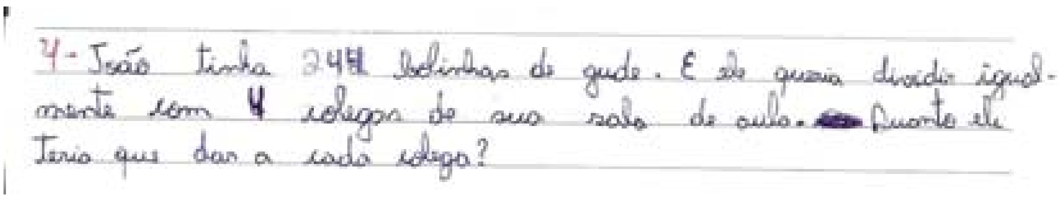

4- João tinha 244 bolinhas de gude. E ele queria dividir igualmente com 4 colegas de sua sala de aula. Quanto ele teria que dar a cada colega?

Figura 25: Problema elaborado por A3

O problema foi explicado pelo aluno A3: “244 ÷ 4 = (200 + 40 + 4) ÷ 4 = (200 ÷ 4) + (40 ÷ 4) + (4 ÷ 4) = 50 + 10 + 1, logo 244 ÷ 4 = 61”.

Os grupos resolveram a divisão (Figura 25) por decomposição, pois o dividendo foi decomposto em suas ordens (centenas, dezenas e unidades), sendo também utilizado o cálculo mental e a propriedade distributiva em relação à adição.

Com a realização de entrevistas coletivas pudemos observar que as histórias elaboradas pelos alunos são aquelas presentes em seu próprio cotidiano e, também, semelhantes as que estão propostas nos livros didáticos.

O objetivo da atividade foi verificar quais as considerações que faziam ao elaborar questões, quais as estratégias que adotavam para resolvê-las e como lidavam com os dados nelas envolvidos.

4 REALIZAÇÃO E ANÁLISE DO PÓS-TESTE

Neste Capítulo, apresentamos a análise das respostas do Pós-teste, que foram tabeladas e analisadas qualitativamente, com base em uma teoria de compreensão de conceitos matemáticos.

4.1 Pós-teste

O pós-teste teve por objetivo investigar o nível de compreensão dos alunos quanto aos conteúdos estudados na aplicação das atividades de ensino, adotando como referência os diferentes níveis propostos por Skemp (1980). Foi aplicado na semana seguinte ao término das atividades e continha cinco questões (Anexo D), semelhantes às propostas nos pré-testes (1 e 2), sendo a primeira relativa à aplicação direta dos algoritmos e as demais questões envolvendo situações-problema com as quatro operações.

Dos 23 alunos matriculados, estavam presentes 20, os quais representam 86,96% da turma. Segundo a Direção da Escola, os outros três alunos estavam doentes.

Os resultados obtidos no pós-teste foram analisados do ponto de vista matemático, segundo os parâmetros: correto, errado ou não responderam. Uma análise de natureza qualitativa foi realizada a partir das noções de compreensão instrumental e relacional, propostas por Skemp (1980), discutidas no Capítulo 1 deste trabalho e descritas adiante com detalhes.

4.1.2 Análise de dados

A classificação das respostas dos alunos às questões do pós-teste, considerando o aspecto qualitativo, quanto ao nível de compreensão do aluno, foi à seguinte:

• Se os alunos realizavam corretamente as operações, justificando cada passo dos procedimentos; compreendiam o enunciado dos problemas sem ajuda da pesquisadora; aplicavam corretamente as operações em sua resolução, entendemos que eles alcançaram o nível de compreensão relacional em relação ao conteúdo considerado.

• Se os alunos demonstravam algum entendimento dos procedimentos algorítmicos utilizados; capacidade de ler e interpretar os textos matemáticos sem ajuda, mas não conseguiam realizar as operações corretamente, entendemos que eles alcançaram um nível de transição entre a compreensão instrumental e relacional.

• Se os alunos não demonstravam compreensão da execução dos algoritmos e entendiam os enunciados dos problemas apenas com explicações da pesquisadora, entendemos que se encontrava em um nível de compreensão instrumental em relação ao conteúdo considerado.

Foram realizadas entrevistas de aprofundamento com os 12 alunos para o esclarecimento sobre as respostas do pós-teste, permitindo-nos obter uma melhor análise dos dados. Estão expostos, através de tabelas, os resultados apresentados às questões. Além disso, referentes a cada questão estão os comentários dos procedimentos dos alunos, nas respostas escritas e nas entrevistas, a análise qualitativa das respostas, com as figuras correspondentes.

Como se pode observar na Tabela 5, todos os participantes conseguiram realizar corretamente a operação de divisão do item **g** (672 ÷ 6) da questão 1. Já no item **h** (3322 ÷ 11), constatamos que 70% dos participantes calcularam corretamente, outros 30% erraram e 0% de respostas em branco, o percentual foi superior aos dos pré-testes (1 e 2).

Constatamos que o índice de respostas certas foi superior em relação aos pré-testes (1 e 2), também no que diz respeito à proporção de respostas erradas, pode-se notar que o resultado foi melhor do que nos pré-testes (1 e 2) e o percentual de respostas em branco foi 0%, já nos pré-testes (1 e 2) o índice de respostas em branco foi alto.

Tabela 5 – Desempenho dos participantes no Pós-teste

Questões	**C**	**% C**	**E**	**% E**	**NR**	**% NR**	**Total**
1 a	20	100	0	0	0	0	100
1 b	20	100	0	0	0	0	100
1 c	20	100	0	0	0	0	100
1 d	18	90	2	10	0	0	100
1 e	20	100	0	0	0	0	100
1 f	18	90	2	10	0	0	100
1 g	20	100	0	0	0	0	100
1 h	14	70	6	30	0	0	100
2	20	100	0	0	0	0	100
3	17	85	3	15	0	0	100
4	16	80	4	20	0	0	100
5	15	75	5	25	0	0	100

No Tabela 6, encontra-se o desempenho dos 12 alunos que compuseram o estudo de aprofundamento, dividido em dois grupos: Grupo A – 6 alunos e grupo B – 6 alunos.

Tabela 6 – Desempenho dos Grupos A e B no Pós-teste

Questões	**GRUPO A**							**GRUPO B**						
	C	%C	E	%E	NR	%NR	Total	C	%C	E	%E	NR	%NR	Total
1ª	6	100	0	0	0	0	100	6	100	0	0	0	0	100
1b	6	100	0	0	0	0	100	6	100	0	0	0	0	100
1c	6	100	0	0	0	0	100	6	100	0	0	0	0	100
1d	6	100	0	0	0	0	100	6	100	0	0	0	0	100
1e	6	100	0	0	0	0	100	6	100	0	0	0	0	100
1f	5	83,3	1	16,7	0	0	100	5	83,3	1	16,7	0	0	100
1g	6	100	0	0	0	0	100	6	100	0	0	0	0	100
1h	6	100	0	0	0	0	100	5	83,3	1	16,7	0	0	100
2	6	100	0	0	0	0	100	6	100	0	0	0	0	100
3	6	100	0	0	0	0	100	6	100	0	0	0	0	100
4	6	100	0	0	0	0	100	5	83,3	1	16,7	0	0	100
5	6	100	0	0	0	0	100	5	83,3	1	16,7	0	0	100

Pelos dados da Tabela 6, é possível perceber que nos dois grupos ocorreu um número maior de acertos do que nos pré-testes (1 e 2), bem como um número menor de respostas erradas e nenhuma resposta em branco. O Grupo A obteve melhor desempenho do que o Grupo B, com uma diferença significativa com relação aos pré-testes (1 e 2).

Para exemplificar o processo, a seguir estão às explicações de A9 ao resolver a operação do item **a:**

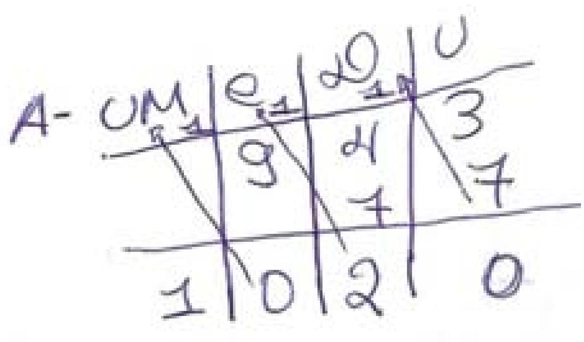


Figura 26: Algoritmo da adição

P: Como você começou a resolver?

E: Pela unidade, também pode começar pelo lado contrário, acho melhor começar da unidade.

P: Por quê?

E: Porque eu nunca faço pelo lado contrário. Ah! Dá muito trabalho.

P: Então como você fez?

E: Eu somei 3U + 7U = 10U; 10U = 1D + 0U; fica 0U na ordem das unidades e vai 1D para ordem das dezenas; 7D + 4D + 1D = 12D; 12D = 1C + 2D, deixo 2D na ordem das dezenas e levo 1C para a ordem das centenas; 9C + 1C = 10C; 10C = 1UM + 0C, fica 0C na ordem das centenas; e vai 1UM para a ordem das unidades de milhar; Aí fica 1UM + 0C + 2D + 0U.

P: Você falou que vai 1 do 0 (10). O que é esse 1?

E: 1D que são 10 unidades, antes eu pensava que era apenas 1, aprendi com o material dourado, e com o dinheiro. Achei melhor trabalhar com o dinheiro.

P: Por quê?

E: É mais divertido.

Com relação aos itens **a** (77 + 843) e **b** (1493 + 849) da questão 1 - cuja intenção era a de identificar as idéias dos alunos sobre o transporte (vai 1) - 100% do Grupo A e 100% do Grupo B identificaram o valor posicional da dezena (vai 1=10). Já 100% do Grupo A e 83,3% do Grupo B identificaram o valor posicional da centena (vai 1=10 dezenas). Apenas um aluno do Grupo B não tinha certeza de que uma centena agrupa 10 dezenas.

Na subtração com reagrupamento - itens **c** (3417 – 1948) e **d** (600-157) – como está expresso na Tabela 6, as porcentagens indicam um excelente desempenho, para ambos os grupos e, principalmente, para o Grupo B, já que no pré-teste1 nenhum aluno conseguiu realizar a subtração com zeros no minuendo.

O protocolo a seguir descreve a justificativa de A10 em relação ao item **d**.

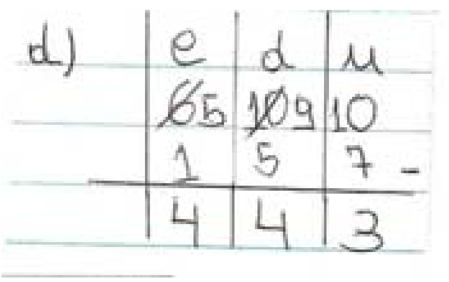


Figura 27: Algoritmo da subtração

P: Como você começou a resolver?

E: Pela unidade. Como tem zero unidades e zero dezenas, eu troquei 1 centena por 10 dezenas e depois troquei 1 dezena por 10 unidades. Aí 10 unidades menos 7 unidades são 3 unidades, 9 dezenas menos 5 dezenas dá 4 dezenas; 5 centenas menos 1 centena dá 4 centena.

P: Por que você não efetuou, começando da esquerda para a direita, ou seja, da centena?

E: Agora eu sei que as contas podem ser feitas em qualquer lado, eu prefiro do meu jeito que eu aprendi.

P: Para verificar se o resultado obtido está correto, o que você fez?

E: Eu usei a operação inversa.

P: Como assim?

E: Eu somei a diferença com o subtraendo.

$$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 1\,5\,7 \\ +4\,4\,3 \\ \hline 6\,0\,0 \end{array}$$

E: Assim, 7 unidades mais 3 unidades dá 10 unidades, fica 0 unidades na ordem das unidades e vai 1 dezena para a ordem das dezenas; 5 dezenas mais 4 dezenas mais 1 dezena dá 10 dezena, fica 0 dezenas na ordem das dezenas e vai 1 centena para a ordem das centenas; 1 centena mais 4 centenas mais 1 centena dá 6 centenas.

Todos os alunos entrevistados resolveram conforme a Figura 27, com exceção de A5 que registrou apenas o resultado 443. Ao perguntamos o por quê, ele respondeu: “Eu fiz assim 157 = 100 + 50 + 7; de 600, tiro 100 fica 500, de 500, tiro 50; fica 450 de 450 tiro7, fica 443”. O aluno fez uma subtração por decomposição e cálculo mental, sendo o único que utilizou uma estratégia diferente.

Os comentários anteriores indicam que os alunos são capazes de explicar como fazer uma troca de uma centena por dez dezenas e de uma dezena por dez unidades. Durante a entrevista eles não usaram novamente os termos “pede emprestado” e “prova real”, os quais foram substituídos por “trocas” e “operação inversa”.

No item **e** 100% dos alunos responderam a multiplicação por uma decomposição, eles aplicaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, como ilustra a Figura 28. A operação foi explicada pelo aluno A1:

P: Como você fez?

E: Eu fiz assim, 106 = (100 + 6) e multipliquei por 5; 5 × 100 = 500 e 5 × 6 = 30; ai somei 500 + 30 = 530; é melhor do que armar a conta”

P: O que indica o 0 em 106?

E: 0 dezenas.

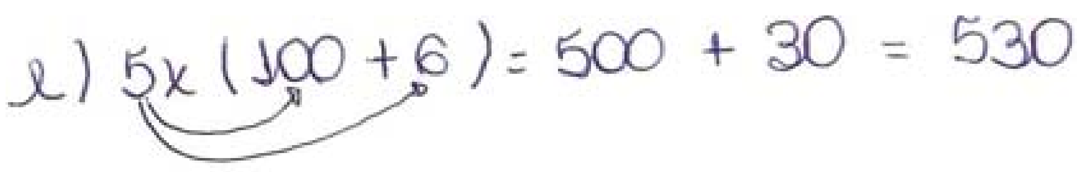


Figura 28: Propriedade da multiplicação

No item **e,** lhes foi pedido que explicasse seus procedimentos, o que todos fizeram demonstrando clareza em relação às propriedades da multiplicação. Os alunos resolveram o item **f** (14 × 167), usando o algoritmo tradicional da multiplicação (Figura 29). Quando questionamos seu procedimento, eles afirmaram: “É uma conta grande, é melhor armar”.

O protocolo a seguir descreve a estratégia utilizada por A7, ao resolver a multiplicação.

P: Poderia fazer em voz alta?

E: 4 × 7 = 28; 28U = 2D + 8U; coloco o 8 nas unidades; 4 × 6 = 24D com mais 2 são 26D, coloco 6 nas dezenas; 4 × 1 = 4 com mais 2 são 6C; 1 × 7 = 7D; 1 × 6 = 6C; 1 × 1 = 1UM; agora eu somo, repete 8 na unidade; 6D + 7D = 13, as 3D fica na casa das dezenas e vai 1C; 6C + 6C com mais 1C são 13C; as 3C fica na casa das centenas e vai 1UM + 1UM = 2UM.

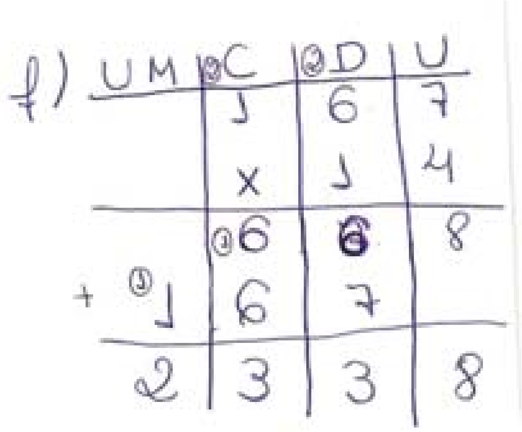


Figura 29: Algoritmo da multiplicação

A percentagem de respostas certas para ambos os grupos, é de 83,3%. Com as entrevistas, verificamos que os erros cometidos por dois alunos foram de cálculo, pois ambos souberam explicar os agrupamentos e trocas com clareza. Os alunos do Grupo B afirmaram que a utilização de jogos os ajudou muito, facilitando o aprendizado da tabuada.

Com base nos dados da Tabela 6, pode-se verificar que todos os sujeitos acertaram o item **g** (672 ÷ 6), e apenas um aluno do Grupo B não conseguiu realizar o item **h** (3322 ÷ 11).

O aluno A3 explicou como realizou a operação do item **g**.

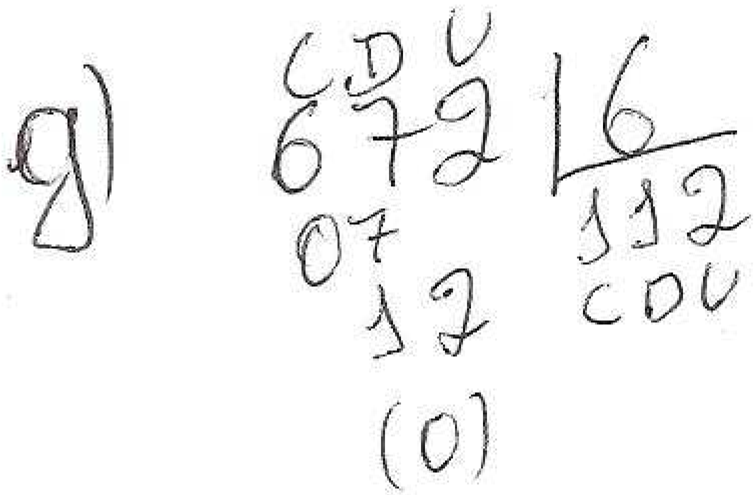


Figura 30: Algoritmo da divisão

P: Como você começou a resolver?

E: Pela centena; 6C divididas por 6 dá 1C; vou dividir 7D por 6 dá 1D e sobra 1D, junto essa dezena com as 2U. Vou dividir 12U por 6 dá 2U e não sobra nada.

P: Qual o valor do quociente?

E: 1C + 1D + 2U; foi 112.

P: Para verificar se o resultado obtido está correto, o que você fez?

E: faço a multiplicação; 112 × 6.

P Você fez a operação inversa?

E: Foi, usei a multiplicação.

Os alunos trabalharam a idéia básica de dividir centenas, depois dezenas e por fim unidades, fazendo as trocas necessárias. Eles usaram o registro breve, isto é, só apresentando o resultado da subtração entre o dividendo e o produto do quociente pelo divisor.

Como resposta ao item **h,** o processo de divisão usado por A11 (Figura 31) foi o processo longo, com a subtração indicada no algoritmo, aparecendo o produto do quociente pelo divisor. Foi o único aluno que registrou se o resultado obtido estava correto.

Pode-se verificar, pelos dados da Tabela 6, que 100% dos alunos do Grupo A, e 83,3% do Grupo B resolveram corretamente a questão; 50% do grupo A e 50% do grupo B explicaram correta e claramente os passos do algoritmo da divisão com zeros intercalados no quociente.

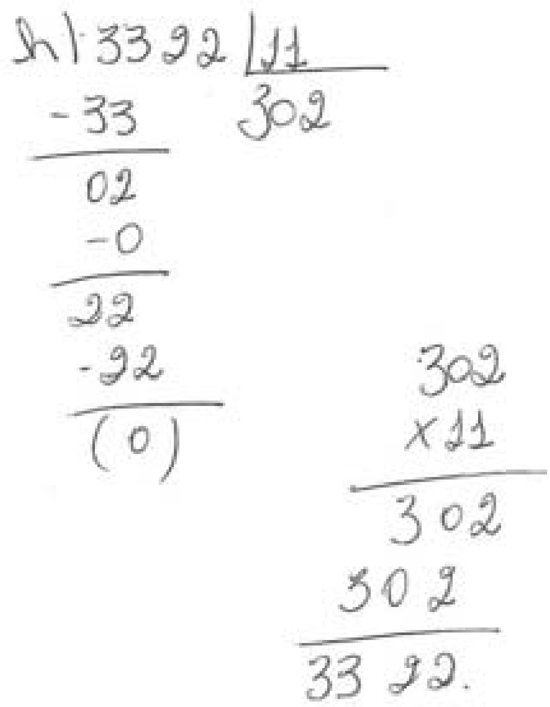


Figura 31: Algoritmo da divisão

O aluno A11 demonstrou ter clareza na compreensão da divisão com zero intercalado no quociente como mostra a entrevista a seguir:

P: Poderia fazer em voz alta essa conta (3322 ÷ 11)?

E: 33 centenas divididas por 11 dão 3 centenas e sobra zero; vou dividir 2 dezenas por 11 dá zero dezena; aí eu vou dividir 22 unidades por 11 dão 2 unidades.

P: Quando você dividiu duas dezenas por 11 dá quantas dezenas?

E: 0 dezenas.

P: É por isso que coloca zero no quociente?

E: É, coloca zero na dezena. Eu não sabia, aprendi esse ano.

P: O que você fez para saber se acertou a conta?

E: Eu usei a operação inversa, que é a multiplicação.

Durante a entrevista alguns alunos usaram o cálculo mental para justificar suas respostas, sem fazer uso de algoritmos. Outros pediram lápis e papel e fizeram desenhos (traços e bolinhas) para justificar os resultados obtidos por meio dos algoritmos e outros fizeram uso dos algoritmos das operações básicas. No geral, a maior parte dos alunos alternou a forma de resolução das questões.

A Questão 2 era um problema de adição com reagrupamento, que todos os alunos resolveram corretamente. Nas entrevistas os alunos conseguiram explicar adequadamente o reagrupamento na adição com mais de dois algarismos como mostra a Figura 32.

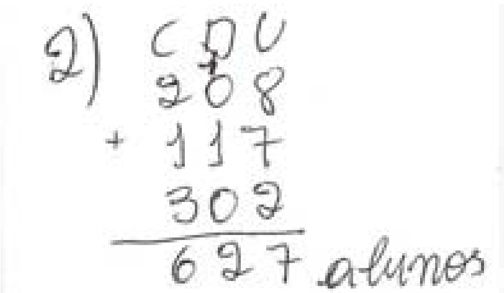


Figura 32: Algoritmo da adição

A Questão 3 envolvia a adição e a subtração com reagrupamento. O problema fornecia três dados, o que gerava dificuldade extra para os alunos, de acordo com o que observamos durante o pré-teste2. Os alunos do Grupo B superaram essa dificuldade, conseguindo interpretar o enunciado da questão e selecionar as operações adequadas. Dos 12 participantes, 60% resolveram na ordem em que os dados apareciam no problema, como explicou A11: (Figura 33), “5400 reais menos 2758 reais dá 2642; o resultado eu somo com o que ele ganhou fazendo outra conta: 2642 reais mais 1450 reais dá 4092 reais”. Os outros 40% usaram outra estratégia, que A8 explicou: “Eu somei o que ele tinha com o que ele ganhou (5400 reais 1450 dar 6850); do resultado eu paguei a dívida (6850 menos 2758 dá 4092)”.

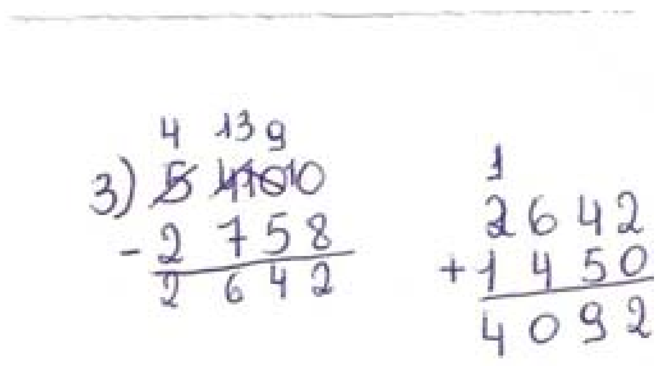


Figura 33: Algoritmo da subtração e adição

Alguns alunos tiveram uma dificuldade inicial para interpretar o enunciado da questão 3, mas depois de lê-la várias vezes, conseguiram resolver o problema corretamente, usando as operações de adição e subtração.

Na questão 4, observamos que os alunos usaram a idéia de proporção e responderam a questão, usando as operações da multiplicação e divisão. O aluno A5 explicou seu raciocínio, cujo procedimento está ilustrado na Figura 34. “9 livros custam 135 reais, aí eu multipliquei 135 reais por 12 livros (usando papel e lápis) dá 1620. Aí eu dividi 1620 por 9 livros, que dá 180 reais, que é o preço dos 12 livros”.

Os demais alunos usaram outra estratégia, como explicou A2: “Eu dividi 135 reais por 9 para saber o preço de cada livro, que deu 15 reais; aí eu multipliquei 15 por 12, que dá 180 reais”. Nas entrevistas perguntamos aos alunos quais as grandezas que o problema trazia e depois de várias leituras alguns explicaram que o problema trazia duas grandezas - a quantidade de livros e a quantidade de dinheiro - e que o resultado procurado era a quantidade de dinheiro.

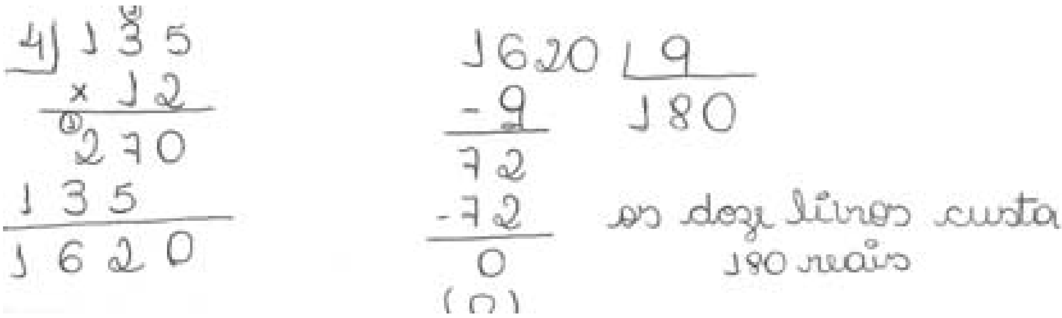


Figura 34: Algoritmo da multiplicação e divisão

Quanto aos conhecimentos demandados para a resolução do problema, a maior parte dos alunos demonstrou domínio e segurança, com exceção de um aluno do Grupo B que não acertou a questão e explicou que não entendeu o enunciado. Mesmo depois que lemos o enunciado do problema para ele, o aluno esboçou uma estratégia inadequada para resolver o problema, demonstrando ter mantido as dificuldades que apresentava antes da intervenção.

A Questão 5 era um problema de divisão e os dados da Tabela 6 mostram que todos os alunos do Grupo A e 83,3% do Grupo B efetuaram corretamente os cálculos (uma divisão em que se obtém 8 de quociente e 12 de sobra). No entanto, para a pergunta “Quantos microônibus são necessários”, 100% dos alunos do Grupo A e 83,3% do Grupo B afirmaram que seriam necessários 9 microônibus.

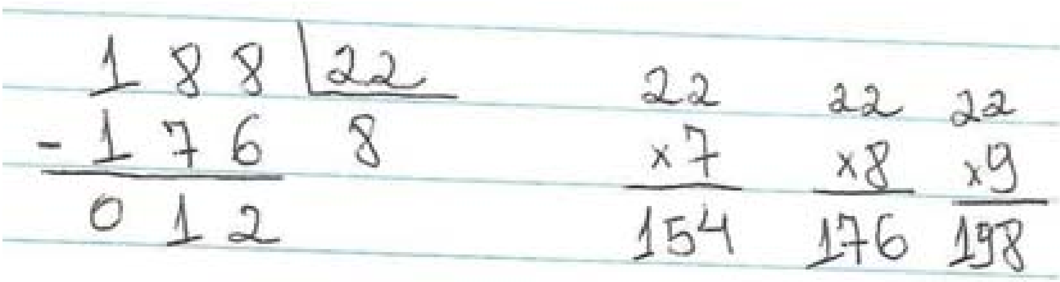


Figura 35: Algoritmo da divisão

Apenas um aluno do Grupo B errou nos cálculos, mas foi capaz de corrigi-lo. No entanto, não soube responder à pergunta: “Quantos microônibus são necessários?”

Durante as entrevistas, alguns alunos declararam que preferem resolver as operações fora de problemas. Perguntamos o porquê de tal preferência e a maioria das respostas, foram semelhantes, às aqui transcritas: “dificuldades em interpretar os textos dos problemas” ou “tenho muita dificuldade em ler”. Esta é uma queixa frequente entre os professores com os quais trabalhamos em cursos de formação continuada. Nestas ocasiões, destacamos que, para o trabalho com problemas ser mais produtivo, faz-se necessária uma prática de leitura compartilhada com professores e alunos, razão porque a escola precisa realizar um trabalho contínuo de leitura, compreensão e interpretação de textos, não apenas nas aulas de Língua Portuguesa.

4.2 Considerações finais

A análise das respostas dos alunos no pré-teste1 mostrou que, de um modo geral, quando solicitados para resolver as operações básicas, os alunos utilizavam recursos auxiliares como lápis e papel, no qual traçavam riscos ou bolinhas e as mãos para fazer contagens. Poucos faziam uso do cálculo mental, quando as operações envolviam números naturais menores do que dez e mesmo com o auxílio de recursos, muitas vezes se perdiam nas contas efetuadas e pediam para começar novamente.

Observamos que a maioria dos alunos não conseguia aplicar os conceitos relativos às operações básicas em situações problemas e não compreendiam o significado de processos como o “vai 1” e o “pedir emprestado”, que utilizavam nos algoritmos. Apresentavam dificuldades para resolver subtrações com zero no minuendo e divisões com zero intercalado no quociente, como também demonstraram não compreender as propriedades básicas das operações aritméticas.

No decorrer da entrevista, relativa ao préteste2, verificamos que os alunos tinham dificuldades para ler e interpretar corretamente os enunciados das questões. O pré-teste2 revelou que os alunos cometeram não apenas erros numéricos, mas apresentaram dificuldade para, diante da situação-problema proposta, identificar o que estava sendo pedido e quais operações utilizar. As dificuldades eram ampliadas, quando o problema necessitava, para sua resolução, a realização de mais de uma operação.

Na aplicação das atividades de ensino, pudemos fazer as observações que seguem. Na Primeira Atividade, relativa à adição, os alunos não compreendiam procedimentos como o “vai 1” . A maioria deles fez uso de tais processos sem estabelecer vínculo com as unidades, dezenas e centenas, uma dificuldade decorrente do aprendizado do Sistema de Numeração Decimal, relacionada à não-compreensão dos agrupamentos e trocas na base 10.

Na subtração, as dificuldades iniciais foram: a falta de compreensão em fazer uma troca de uma centena para dez dezenas e de uma dezena para dez unidades. Com o uso dos materiais concretos (material dourado e dinheiro chinês), evitamos os procedimentos automáticos de “pedir emprestado” e “vai 1”.

Quanto à operação de multiplicação, observamos as dificuldades com a tabuada e trabalhamos associando a ela vários significados (a multiplicação como uma soma de parcelas iguais; a multiplicação como área; a multiplicação como combinação (raciocínio multiplicativo); a multiplicação e a idéia de proporcionalidade).

Em relação à divisão, partimos das duas idéias distintas: a de repartir em partes iguais e a de verificação de quantas vezes um número cabe em outro, tendo observado a falta de compreensão da divisão com zero intercalado no quociente.

Com relação aos materiais concretos – material dourado, dinheiro chinês, papel quadriculado, calculadora e jornais – utilizados na primeira atividade, verificamos, que os alunos, a partir do manuseio e da reflexão sobre suas ações, puderam realizar abstrações e generalizações sobre os conceitos das operações básicas, das propriedades destas operações e domínio significativo das técnicas algorítmicas.

Com relação ao uso de instrumentos de medida e outros – régua, cartolina, tesoura – pudemos observar que todos os alunos, sem exceção, apresentavam dificuldades de manusear a régua. A confecção de bingos, jogos e figuras mágicas, possibilitou a superação dessas dificuldades e nos permitiu realizar atividades lúdicas através das quais exploramos a tabuada.

Na última ação proposta, os alunos trabalharam em grupo, usando calculadoras, que eles não sabiam utilizar e com a qual se envolveram com entusiasmo. Nas oficinas de formação continuada que ministramos, muitos professores justificam as deficiências dos alunos em relação às operações básicas, afirmando que a culpa é da calculadora, que deixaria o aluno preguiçoso, o que verificamos ser uma visão totalmente equivocada.

Por outro lado, mesmo havendo professores que defendem o uso desse recurso em sala de aula, são poucos os que fazem dessa máquina um instrumento de aprendizado dos seus alunos.

A atividade na qual solicitamos que os alunos procurassem no dicionário (Miniaurélio), a definição das palavras mais significativas em relação ao nosso objeto de estudo, teve como finalidade desenvolver competências relacionadas ao ato de consultar o dicionário e escolher, entre várias definições, aquela que melhor convém ao contexto e reconhecer quando o uso do dicionário e da Internet se fazem necessários. Os resultados foram satisfatórios e apontaram muitas investigações possíveis acerca de ambos os recursos utilizados, a exemplo da confecção de dicionários matemáticos pelos próprios alunos, em versões compreendendo os conhecimentos prévios acerca dos conteúdos e de suas concepções após um proceso de intervenção ou o uso da Internet para aprofundar o conhecimento da história das idéias matemáticas e a relação desta com as dificuldades que apresentam em sua apreensão.

Na quarta e quinta atividade, realizamos um trabalho contínuo de leitura e interpretação de vários textos matemáticos, constatando a dificuldade quase generalizada para ler e interpretar corretamente os enunciados dos problemas.

A utilização do material concreto, nas atividades de ensino, foi importante para a elaboração ou reelaboração dos conceitos das operações básicas e despertou o interesse e a curiosidade dos alunos em saber o porquê das coisas, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Durante a entrevista, pudemos observar que os materiais (material dourado, dinheiro chinês, jogos, entre outros) utilizados durante as atividades de ensino facilitaram a compreensão do valor posicional e auxiliaram, também, na compreensão das técnicas algorítmicas.

Os resultados da análise qualitativa do pós-teste mostraram uma evolução significativa na compreensão dos procedimentos algorítmicos envolvidos nas operações, confirmando que a aplicação de uma metodologia com materiais concretos para o ensino das operações surte efeito positivo mesmo, que a abordagem, adotadas nas séries anteriores tenha sido inadequada.

Após o término da intervenção, por meio da aplicação do pós-teste, verificamos que os alunos haviam progredido muito. O desempenho do Grupo B foi além do esperado, o que acreditamos à natureza das atividades e ao material utilizado para os grupos, que eram motivadores, demonstrando que a aplicação de uma metodologia diferenciada para o ensino das operações pode surtir efeito positivo. Outro aspecto que vale a pena ser destacado é o fato de aluno expor suas idéias e procedimentos oralmente, o que lhe ajuda a organizar o pensamento, prática que deveria ser explorada, com freqüência, nas aulas de Matemática.

Concluimos que a maioria dos alunos atingiu um nível relacional de compreensão das quatro operações trabalhadas, sendo capazes não apenas de explicar adequadamente cada passo dos procedimentos algorítmicos, mas também apreendendo as propriedades das operações e aplicando-as, de modo pertinente, na resolução de problemas. Apenas um aluno do Grupo B manteve-se em um nível instrumental de compreensão das quatro operações e parte dos alunos do mesmo Grupo (cerca de 30% do total) encontrava-se, ao final da Intervenção, em um nível intermediário de compreensão, entre o nível relacional e instrumental.

Pudemos destacar como contribuição da nossa pesquisa, a viabilidade de se elaborarem atividades que sejam aplicadas em sala de aula para trabalhar o conteúdo das quatro operações no Ensino Fundamental, melhorando a aprendizagem dos alunos, resgatando sua auto-estima e possibilitando-os acompanharem adequadamente seus estudos nas séries posteriores, a partir da superação de dificuldades acumuladas nas séries anteriores.

Esperamos que, dentro do limite desta pesquisa, possamos ter contribuído junto à escola em que a realizamos, no sentido de deixar algumas sugestões para a superação das dificuldades detectadas nesse campo da aprendizagem matemática. Sugerimos que esse tipo de investigação possa se da também, com os professores das séries iniciais do Ensino Fundamental que trabalham com esse conteúdo, em uma abordagem inicial dos conceitos envolvidos.

Esperamos que nosso trabalho traga contribuições significativas para o Ensino Fundamental, já que, nesta pesquisa, não tivemos a intenção de solucionar os problemas aqui questionados, sobretudo, por considerar que a aprendizagem é um processo que está sempre aberto a mudanças e permanentes revisões.

Como sugestão de outros estudos, advindos de outros da mesma natureza que o aqui apresentado, apontamos:

- analisar o desenvolvimento dos alunos que participaram de nossa investigação, na série seguinte, vendo se o nível de compreensão das idéias, por eles demonstradas ao final da intervenção, se mantém;
- analisar se a compreensão demonstrada em relação aos procedimentos algorítmicos envolvendo números naturais é ampliada quando do trabalho com números racionais na forma decimal;
- analisar até que ponto a compreensão relacional demonstrada pela maior parte dos alunos, frente às questões trabalhadas no pós-teste, se mantém, considerando mudanças significativas na estrutura dos problemas apresentados.

Para finalizar, destacamos uma importância do trabalho realizado, sendo esta de natureza pessoal, em razão do avanço teórico e metodológico que a experiência nos proporcionou, fazendo-nos compreender a importância da ação do docente como pesquisador em seu espaço de atuação profissional. Ganham os professores, os alunos e a Educação do país, como um todo.

REFERÊNCIAS

BLACKBURN, Simon. **Dicionário Oxford de Filosofia**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Circulares Nacionais para o Ensino Fundamental**. 1ª à 4ª série, Brasília, SEF, 1997.

______. 5ª à 8ª série, Brasília, SEF, 1998.

______. Relatório SAEB 2003 – Matemática. Brasília-DF. Disponível em: <http:// www.mec.gov.br.>. Acesso em: 15 out. 2005.

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David William; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. **Na vida dez, na escola zero.** 12. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 7. ed. Campinas: Papirus, 2000. p. 15 – 20.

DENZIN, Norman K**. O planejamento da pesquisa qualitativa**: teorias e abordagens. 2. ed. Trad. Sandra Regina Netz. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 100 – 105.

DELORS, Jacques. **Educação:** Um tesouro a descobrir. 10. ed. Trad. José Carlos Eufrásio. São Paulo: Cortez; Brasília, Df: MEC; UNESCO, 2006. p. 89 – 102.

DINIZ, M.I. Os problemas convencionais nos livros didáticos. In: SMOLE, K.S. e DINIZ. M.I. (org). **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001. p. 90 – 100.

GORMAN, Richard M. **Descobrindo Piaget:** Um guia para professores. Trad. Maria Lúcia Freire Esteves Peres. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1976.

HOUAISS, Antonio; VILLAR, Mauro de Sales. **Minidicionário Houaiss da Língua Portuguesa** elaborado no Instituto Houaiss de Lexicografia e banco de dados da Língua Portuguesa S/C Ltda. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003. p. 121.

MACHADO, Nilson J. **Epistemologia e didática:** as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2002. p. 30 – 40.

NOVAK, Joseph D. **Uma Teoria de Educação**. Trad. Marco Antônio Moreira. São Paulo: Pioneira, 1981. p. 9 e 10; 50 – 56.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática: estudo do erro, no ensino da Matemática Elementar.** Campinas, SP: Papirus, 2000. p. 60 – 65. (Série Prática Pedagógica).

RÊGO, Rogéria G. do, RÊGO, Rômulo M. do. **Matematicativa.** João Pessoa: Editora Universitária, UFPB, 1997.

______. **Matematicativa II**. João Pessoa: Editora Universitária, UFPB, 1999.

______. **Figuras Mágicas**. João Pessoa: Editora Universitária, UFPB, 1999.

RIOS, Terezinha A. **Compreender e ensinar:** Por uma docência da melhor qualidade. 4. ed. São Paulo-SP: Cortez, 2003. p. 31 – 45.

SAIZ, Irma. Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma. **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto alegre: Artes Médicas, 1996. p. 156 – 185.

SALVADOR, César Coll. et al. **Psicologia do ensino**. Trad. Cristina Maria de Oliveira. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

SILVIA, Circe M. S. da; LOURENÇO, Simone T; CÔGO, Ana M. **O ensino-aprendizagem da matemática e a pedagogia do texto.** Brasília: Plano Editora, 2004.

SKEMP, Richard. **Psicologia del aprendizaje de las matemáticas.** Madrid: Ediciones Morata, S. A. 1980.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Didática da Matemática:** como dois e dois: a construção da matemática. São Paulo: FTD, 1997.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e Linguagem**. 3. ed. Trad. Jeferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1991. p. 70 – 80.

______. A formação social da mente. 3. ed. Trad. José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. São Paulo, Martins Fontes, 1989.

ZUNINO, Delia Lerner de. **A matemática na escola:** aqui e agora. 2. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

ANEXOS

ANEXO A – PRÉ-TESTE1

Nome:____ Idade: ____
Série: _____________ Turma: ___________
Novato na série: (   ) Sim (   ) Não
Data: _______/_______/________

1. Efetue as operações: a) 413 + 385	b) 1537 + 282
c) 4620 + 1398 + 27	d) 1753 – 321
e) 852 - 208	f) 3005 – 1732
g) 302 × 5	h) 21 × 93
i) 442 × 123	j) 424 ÷ 4
l) 1442 ÷ 14	m) 718 ÷ 23

ANEXO B – PRÉ-TESTE2

Nome:____Idade: ____
Série: _____________ Turma: __________
Novato na série: (   ) Sim (   ) Não
Data: _______/_______/________

Resolva as situações propostas:

1) Dois amigos estão numa competição de vídeo game. Um fez 32770 pontos, outro fez 45550. Se eles formarem uma dupla, qual será o total de pontos?

2) Uma moto custa R$ 6.000,00, mas o motoqueiro só tem R$ 3.750,00 para comprá-la. Quanto lhe falta?

3) Tinha R$ 720,00. Gastei R$ 82,00 e emprestei R$ 175,00. Com quanto fiquei?

4) Numa mercearia, há 7 caixas de bombons, e cada caixa contém 3 dúzias deles. Quantos bombons há na mercearia?

5) Em um teatro, as poltronas estão distribuídas em 28 fileiras com 12 poltronas em cada uma. Quantas poltronas há nesse teatro?

6) Ana distribuiu 240 figurinhas igualmente entre seus três primos. Quantas figurinhas cada um recebeu?

7) Uma indústria deseja formar grupos de 38 empregados. Como existem 450 empregados contratados, um deles ficará incompleto. Para completar esse grupo, a indústria deverá contratar quantos empregados?

ANEXO C – SITUAÇÕES-PROBLEMA

1) Uma nota de 10 reais pode ser tocada por quantas de 1 real? O valor total muda, após a troca?

2) Uma nota de 100 reais pode ser trocada por quantas de 10 reais? E por quantas de 1 real?

3) Você tem uma nota de 100 reais e quer tirar 33 reais dessa quantia.

a) Faça o mínimo de trocas necessárias. Desenhe seu dinheiro depois das trocas;

b) Tirando 33 reais, com quantas notas de 10 reais e quantas notas de 1 real você fica?

4) Pagando cinco prestações iguais a R$ 35,00, qual o valor final da minha compra?

5) Tenho R$ 243,00, e quero repartir igualmente entre três pessoas. Represente a sua solução para esta situação.

ANEXO D – PÓS-TESTE

NOME:____

SÉRIE: ___________ TURMA: ______DATA: ________/________/________

1) Resolva os exercícios seguintes, justificando cada passo que você efetuou:

a) 77 + 943

b) 1493 + 849

c) 3417 – 1948

d) 600 – 157

e) 106 × 5

f) 14 × 167

g) 672 ÷ 6

h) 3322 ÷ 11

2) Na minha escola, estudam 208 alunos no período da manhã, 117, no período da tarde, e 302 no noturno. Quantos alunos estudam nessa escola?

3) Alexandre tinha 5.400 reais. Com esse dinheiro, pagou uma dívida de 2.758 reais. A seguir, Alexandre ganhou 1.450 reais. Que quantia ele tem agora?

4) Nove livros custam R$ 135,00. Quanto custam 12 desses livros?

5) Os alunos de um colégio vão fazer uma excursão. São 188 pessoas entre alunos e professores. Quantos microônibus de 22 lugares eles deverão alugar?