



Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Física Teórica e Experimental
Programa de Pós-Graduação em Física

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ANISOTROPIAS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO E VÍNCULOS EM MODELOS COM DECAIMENTO DO VÁCUO

Francisco Edson da Silva

Orientador: Dr. José Ademir Sales de Lima

Natal, julho de 2005.



Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Física Teórica e Experimental
Programa de Pós-Graduação em Física

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ANISOTROPIAS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO E VÍNCULOS EM MODELOS COM DECAIMENTO DO VÁCUO

Francisco Edson da Silva

Orientador: Dr. José Ademir Sales de Lima

Tese apresentada à Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial à obtenção do grau de **Mestre** em Física

Natal, julho de 2005.

A meus pais,
meus irmãos
e meu sobrinho.

Agradecimentos

- A Deus e à minha família que estão sempre ao meu lado e apoiando-me incondicionalmente.

- Ao Prof. José Ademir Sales de Lima, pela orientação, incentivos, ensinamentos e discussões que foram essenciais para meu aprendizado e para a realização deste trabalho.

- Aos professores de toda minha vida acadêmica, pois todos contribuíram para construir meu conhecimento e participaram de minha formação como pessoa e profissional.

- A todos os meus amigos que, ao passarem por minha vida e mesmo não permanecendo, também contribuíram para a minha formação e que não começo a citar nomes para não correr o risco de esquecer nenhum e, principalmente, para não encher páginas da dissertação só com agradecimentos.

- À UFRN e à CAPES que são, respectivamente, as instituições sede e mantenedora de minha pós-graduação.

- À FAPESP que contribuiu para a conclusão deste trabalho com o financiamento parcial de uma viagem de pesquisa (processo FAPESP nº 2000/06695-0).

Resumo

Muitas observações astronômicas feitas nos últimos anos sugerem fortemente que o universo é espacialmente plano e dominado por uma forma de energia exótica. Esta densidade de energia desconhecida acelera a expansão do universo e corresponde a cerca de 70% da densidade total de energia sendo chamada de Energia Escura ou Quintessência. Um dos candidatos a energia escura é a chamada constante cosmológica (Λ) que é usualmente interpretada como a densidade de energia do vácuo. Contudo, para remover a discrepância entre os valores esperado e observado para a densidade de energia do vácuo, alguns modelos atuais assumem que a energia do vácuo decai continuamente devido a seu possível acoplamento com os outros campos materiais do cosmos. Nesta dissertação, partindo dos conceitos e fundamentos da teoria da relatividade geral, estudamos a radiação cósmica de fundo com ênfase nas anisotropias ou flutuações em sua temperatura que servem de base observacional para o modelo do Big Bang e é uma das relíquias mais antigas do universo. As anisotropias são deduzidas a partir da integração da equação de Boltzmann, que fazemos em primeira ordem para explicar qualitativamente a geração e classificação destas flutuações. Em seguida construímos o espectro angular de potência das anisotropias e deduzimos sua forma explícita em grandes escalas para o modelo com constante cosmológica (Λ CDM) e para um modelo com decaimento do vácuo ($\Lambda(t)$ CDM). Com base no momento de quadrupólo medido pelo experimento do WMAP, estimamos as razões de decaimento da densidade de energia do vácuo em matéria e em radiação tanto no decaimento homogêneo como no não-homogêneo.

Abstract

Many astronomical observations in the last few years are strongly suggesting that the current Universe is spatially flat and dominated by an exotic form of energy. This unknown energy density accelerates the universe expansion and corresponds to around 70% of its total density being usually called Dark Energy or Quintessence. One of the candidates to dark energy is the so-called cosmological constant (Λ) which is usually interpreted as the vacuum energy density. However, in order to remove the discrepancy between the expected and observed values for the vacuum energy density some current models assume that the vacuum energy is continuously decaying due to its possible coupling with the others matter fields existing in the Cosmos. In this dissertation, starting from concepts and basis of General Relativity Theory, we study the Cosmic Microwave Background Radiation with emphasis on the anisotropies or temperature fluctuations which are one of the oldest relic of the observed Universe. The anisotropies are deduced by integrating the Boltzmann equation in order to explain qualitatively the generation and classification of the fluctuations. In the following we construct explicitly the angular power spectrum of anisotropies for cosmologies with cosmological constant (Λ CDM) and a decaying vacuum energy density ($\Lambda(t)$ CDM). Finally, with basis on the quadrupole moment measured by the WMAP experiment, we estimate the decaying rates of the vacuum energy density in matter and in radiation for a smoothly and non-smoothly decaying vacuum.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Introdução	1
1 Fundamentos da Cosmologia	5
1.1 A Teoria da Relatividade Geral e a Descrição do Universo	5
1.2 O Princípio Cosmológico	9
2 O Modelo do Big Bang	10
2.1 Modelos de Friedmann-Robertson-Walker	11
2.1.1 A Métrica e as Equações de Friedmann	11
2.1.2 Parâmetros Cosmológicos	12
2.1.3 Casos Particulares das Equações de Friedmann	16
2.2 Os Modelos de FRW e a Singularidade	17
2.3 Os Modelos de FRW e a Componente Dominante	18
2.4 Pilares Observacionais do Big Bang	20
2.5 Descrição Física do Cosmos no Modelo do Big Bang	22
3 Radiação Cós mica de Fundo	25
3.1 Previsão da RCF	26
3.2 Detecção da RCF	26

3.3	Espectro Térmico e Temperatura da RCF	28
3.4	Anisotropias da RCF	34
3.5	Classificação e Efeitos Geradores das Anisotropias	35
3.5.1	Classificação Angular	36
3.5.2	Classificação Cronológica	39
4	Descrição Matemática das Anisotropias	47
4.1	Equação de Boltzmann	47
4.2	Espectro Angular de Potência	57
5	Modelo com Decaimento do Vácuo	67
5.1	Descrição	68
5.2	Soluções para as flutuações	72
5.2.1	Decaimento homogêneo do vácuo (<i>Smoothly decaying vacuum</i>)	72
5.2.2	Decaimento não-homogêneo do vácuo (<i>Non-smoothly decaying vacuum</i>)	76
5.3	As Anisotropias e o Efeito Sachs-Wolfe Ordinário	77
5.4	Espectro Angular de Potência	80
5.5	Estimativa das Razões de Decaimento	80
6	Conclusões e Perspectivas	86
A	Tamanho Angular do Horizonte	89
B	Espectro de Potência da Matéria	93
	Bibliografia	96

Lista de Figuras

2.1	Gráfico mostrando o comportamento das densidades da matéria e da radiação com o tempo t e o <i>redshift</i> z	20
3.1	Espectro de corpo-negro da radiação cósmica de fundo. Dados experimentais medidos pelo FIRAS e curva teórica para $T_0 = 2,726$ K.	31
3.2	Espectro de corpo-negro da radiação cósmica de fundo. Dados experimentais de vários experimentos e curva teórica para $T_0 = 2,726$ K.	32
3.3	Esfera celeste com representação dos pontos 1 e 2, separados por um ângulo γ , em que são medidas as temperaturas da radiação.	35
3.4	Mapa do céu com a medida da anisotropia de dipolo da RCF feita pelo satélite COBE.	37
3.5	Mapa do céu com as medidas das flutuações na temperatura da RCF em escalas de $\gamma = 7^\circ$. Medidas feitas pelo COBE.	38
3.6	Mapa do céu com as medidas das flutuações na temperatura da RCF feitas pelo satélite WMAP.	39
3.7	Representação esquemática da última superfície de espalhamento.	40
3.8	Última superfície de espalhamento e principais mecanismos geradores de anisotropias primárias.	40
3.9	Esquema da geração de anisotropias secundárias na radiação cósmica de fundo.	43

Introdução

O conceito de universo é bastante antigo e remonta às primeiras sociedades humanas de que temos notícia. Entretanto, a idéia de um universo como o atualmente pensado é bem recente, apareceu no início do século passado, e vem sendo desenvolvida e aprimorada com o desenvolvimento da Física e da tecnologia que nos proporcionaram e vêm proporcionando inúmeras e surpreendentes descobertas.

Na antigüidade a única coisa essencial para a formulação de um modelo de universo (ou modelo cosmológico) era a imaginação. Com o passar dos séculos, o desenvolvimento do conhecimento e entendimento humanos propiciaram enormes avanços na ciência e tecnologia e, para a formulação de qualquer modelo cosmológico, tornou-se imprescindível a obtenção de dados cada vez mais confiáveis e precisos que possam lhe dar base observacional. Ou seja, as idéias concebidas pelas mentes e imaginação dos cientistas devem corresponder aos fatos e serem comprovadas por dados observacionais.

O surgimento da Cosmologia moderna foi determinado pelo desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral (TRG) que foi apresentada por Albert Einstein em 1915. As idéias e fundamentos da TRG e sua comprovação por diversos experimentos nos anos seguintes à sua apresentação, permitiram a criação de modelos cosmológicos consistentes com a realidade.

Também devemos citar como fato observacional crucial para o desenvolvimento da Cosmologia moderna, a observação, em 1929, por Edwin

Hubble, do afastamento das galáxias entre si.

Estes fatos, um teórico e outro observacional, permitiram ao homem começar a entender e descrever melhor o universo, sua dinâmica e constituição, e a abandonar, com cada vez mais segurança, idéias místicas e fantasiosas sobre o surgimento e evolução do universo.

Entre as descobertas observacionais recentes da Cosmologia podemos destacar a observação da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) e, mais recentemente, das flutuações (ou anisotropias) em sua temperatura.

A observação da RCF é uma das mais importantes bases para o atual modelo cosmológico e a observação e estudo de suas anisotropias, que só foi possível graças ao alto desenvolvimento tecnológico das últimas décadas, é uma das mais importantes fontes de informações sobre o universo primordial.

Estudar a radiação cósmica de fundo e suas anisotropias parece-nos ser uma das mais importantes formas de se conhecer e entender o universo e suas constituição, dinâmica e evolução. Além de que, é uma forma de obter dados independentes para se comparar com os dados obtidos por observações de outras áreas da Cosmologia contemporânea.

Há importantes experimentos sendo realizados e preparados para observar de forma cada vez mais acurada e precisa as anisotropias da RCF e que nos permitirão inferir e calcular de forma mais acertada e com erros cada vez menores os parâmetros e dados referentes ao universo para, com estes parâmetros, podermos determinar sua evolução.

Uma outra descoberta observacional importante da Cosmologia contemporânea e que faz-se necessário ser citada aqui, foi a expansão acelerada do universo, feita através da observação de supernovas Ia em diferentes *redshifts*.

Assim, temos um universo em expansão acelerada e, segundo observações de várias áreas, com parâmetro de curvatura espacial nulo ou aproximadamente nulo e com contribuição da matéria escura e bariônica

para a densidade total do universo em torno de trinta por cento.

Estes dados nos permitem concluir que o universo hoje é dominado por uma componente de energia de natureza desconhecida e que tem pressão negativa que contrabalança a atração gravitacional dos outros constituintes do universo e o acelera. Esta energia é, na literatura científica, chamada de energia escura ou *quintessência*.

É neste contexto evolucionário da Cosmologia e do conhecimento humano sobre o universo que se inserem as linhas de desenvolvimento de nosso trabalho e a construção desta dissertação, cuja estrutura está descrita nos parágrafos a seguir.

No primeiro capítulo fazemos uma breve explanação dos fundamentos da Cosmologia, revisando sucintamente a Teoria da Relatividade Geral e apresentando o Princípio Cosmológico.

No capítulo seguinte discutimos o modelo cosmológico do Big Bang e suas bases observacionais para explicar um pouco da física adjacente a este modelo, partindo da métrica de Robertson-Walker e das equações de Einstein obtemos as equações de Friedmann que são usadas para a descrever o universo. Tratamos, de forma resumida, a evolução do modelo cosmológico do Big Bang com base nas mais importantes descobertas observacionais da Cosmologia no século passado e nos últimos anos.

No terceiro capítulo começamos o nosso estudo da radiação cósmica de fundo, explicando o que é, quando foi prevista e quando e como foi detectada; estudamos o que são e como podem ser classificadas as anisotropias na temperatura da RCF e explicamos como estas flutuações são geradas a partir da interação da radiação com os outros constituintes do universo nas suas várias fases ou eras e, assim, explicamos descritivamente os principais efeitos geradores das anisotropias da RCF.

No quarto capítulo apresentamos a descrição matemática das anisotropias da radiação cósmica de fundo mostrando como é obtida a expressão para estas flutuações a partir da integração da equação de Boltz-

mann e também deduzindo o espectro angular de potência que relaciona as anisotropias medidas em uma dada escala angular com os efeitos que a geraram.

No quinto capítulo estudamos o modelo com decaimento da densidade de energia do vácuo, calculamos a forma explícita do espectro angular de potência para este modelo e, com o momento de quadrupolo medido para as anisotropias, estimamos os limites superiores das razões de decaimento da densidade de energia do vácuo em matéria e radiação.

No último capítulo apresentamos nossas conclusões e perspectivas de trabalho a partir do que foi apresentado e deduzido nesta dissertação.

No primeiro apêndice deduzimos o tamanho angular do horizonte para o modelo de matéria escura. E, no segundo, fazemos uma rápida dedução e discussão do espectro de potência da matéria.

* * *

Capítulo 1

Fundamentos da Cosmologia

Neste capítulo vamos discutir os pontos teóricos mais importantes para a construção da Cosmologia contemporânea e para se começar a entender a física adjacente à radiação cósmica de fundo, apresentando conceitos e equações que explicam e/ou facilitam o entendimento dos fenômenos tratados e discutidos no decorrer de toda a dissertação.

Como este é um capítulo introdutório, os tópicos aqui apresentados são discutidos sucintamente. Uma discussão mais detalhada destes tópicos pode ser encontrada em alguns livros-texto de relatividade e de cosmologia [1-4]. Outras referências que forem necessárias em pontos específicos do capítulo serão citadas em seu decorrer.

1.1 A Teoria da Relatividade Geral e a Descrição do Universo

A Cosmologia moderna teve início com o surgimento da Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG) que nos deu uma maior clareza sobre a força gravitacional que é uma das quatro forças fundamentais, a saber: gravitacional, eletromagnética, nuclear fraca e nuclear forte.

A força gravitacional é a única que realmente tem influência em grande

escala, já que o universo é eletricamente neutro e as forças nucleares fraca e forte são forças de curto alcance com influência relevante ou dominante apenas em escalas muito pequenas, menores que a ordem de grandeza do tamanho de um átomo (1\AA).

A Relatividade Geral é a teoria física que melhor descreve a força da gravidade e, por isto, os modelos de universo estão fundamentados nela.

A TRG introduziu na física alguns conceitos e idéias inovadores.

Um destes conceitos está relacionado ao fato de que os efeitos da força da gravidade sobre um corpo são equivalentes aos de uma aceleração. Uma outra inovação foi a introdução como princípio da equivalência, que já era tida como óbvia, entre as massas inercial e gravitacional de um corpo.

Também devemos lembrar que a ligação intrínseca entre massa e energia, já formulada pela Relatividade Especial, torna, para a Relatividade Geral, qualquer forma de energia como fonte de gravidade e, ao mesmo tempo, sensível aos seus efeitos.

Na Relatividade Geral temos também que a forma ou curvatura do espaço-tempo está intimamente ligada às massas contidas nele, ou seja, a forma do espaço-tempo é determinada por seu conteúdo material. Esta relação é matematicamente expressa pela equação de Einstein:

$$G_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} , \quad (1.1)$$

onde os índices gregos assumem valores de 0 a 3; $G_{\alpha\beta}$ é o tensor de Einstein que depende da métrica e determina as propriedades do espaço-tempo; $T_{\alpha\beta}$ é o tensor de energia-momento e representa o conteúdo material; e χ é a constante de Einstein. Durante toda a dissertação iremos utilizar também que índices latinos assumem valores de 1 a 3 e que índices repetidos indicam somatório.

Para construirmos o tensor $G_{\alpha\beta}$ devemos lembrar que no espaço-tempo da Relatividade Geral o intervalo entre dois eventos pode ser escrito como:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.2)$$

onde o tensor $g_{\alpha\beta}$ é o tensor métrico que descreve a geometria do espaço-tempo.

Neste espaço-tempo, com métrica dada pela equação (1.2), a trajetória de partículas só sob a ação da gravidade é estacionária e pode ser calculada pelo princípio da ação:

$$\delta \int ds = 0. \quad (1.3)$$

Essas trajetórias não são retas, pois a curvatura do espaço-tempo, determinada pelos efeitos da gravitação e dada pelo tensor $g_{\alpha\beta}$, é seguida pelas partículas livres. Estas trajetórias são chamadas de geodésicas e descritas pela equação:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \quad (1.4)$$

onde as quantidade $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ (símbolos de Christoffel) são definidas por:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left[\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda} \right], \quad (1.5)$$

com as componentes do tensor métrico satisfazendo:

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \quad (1.6)$$

onde δ^α_γ é o delta de Kronecker.

As propriedades do espaço-tempo curvo são caracterizadas pelo tensor de Riemann-Christoffel que é definido em termos dos símbolos de Christoffel como:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\lambda} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \Gamma^\nu_{\beta\lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\nu_{\beta\gamma}. \quad (1.7)$$

Contraindo-se o tensor de Riemann-Christoffel calculamos o tensor de Ricci:

$$R_{\alpha\beta} = R^\lambda_{\alpha\lambda\beta} . \quad (1.8)$$

Finalmente, podemos formar o escalar de curvatura ou escalar de Ricci:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} . \quad (1.9)$$

Com as quantidades acima podemos definir o tensor de Einstein que é dado por:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R , \quad (1.10)$$

que contém derivadas segunda de $g_{\alpha\beta}$ e cuja derivada covariante é nula, isto é:

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 . \quad (1.11)$$

Para o tensor de energia-momento, que descreve o conteúdo material do universo, utilizamos o tensor de um fluido perfeito com pressão p e densidade de energia ρ que é dado por:

$$T_{\alpha\beta} = (p + \rho)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} , \quad (1.12)$$

onde u_α é a quadrivelocidade do fluido, definida como:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} , \quad (1.13)$$

onde $x^\alpha(s)$ posiciona um elemento de volume do fluido. Assim:

$$u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta . \quad (1.14)$$

A constante de Einstein, χ , pode ser determinada pela aproximação de campo fraco. Neste caso as equações de Einstein para o campo tornam-se lineares e, por comparação com a equação de Poisson, obtém-se:

$$\chi = 8\pi G, \tag{1.15}$$

onde G é a constante gravitacional newtoniana.

Uma dedução detalhada do valor da constante de Einstein pode ser vista no livro do Weinberg [2] ou de Mollerach e Roulet [5].

1.2 O Princípio Cosmológico

Além da Mecânica Einsteiniana, a outra principal base teórica dos modelos de universo é o Princípio Cosmológico.

As premissas que nos permitem inferir este princípio são que: no universo não existem referenciais, posições ou direções privilegiadas; as leis e fenômenos físicos são os mesmos em qualquer ponto do universo. A partir destas podemos enunciar o chamado Princípio Cosmológico:

Em uma escala suficientemente grande o universo é homogêneo e isotrópico.

Isto quer dizer que ao olharmos em qualquer direção do espaço, desde que seja numa escala suficientemente grande, devemos observar a mesma distribuição de objetos e corpos celestes.

A distribuição de galáxias em escalas da ordem de 100 Mpc e a isotropia da RCF são indicações da isotropia do cosmos. É difícil verificar a homogeneidade do universo, porém a distribuição das anisotropias da RCF é uma prova indireta desta homogeneidade.

* * *

Capítulo 2

O Modelo do Big Bang

O modelo cosmológico mais aceito pela comunidade científica é o modelo do Big Bang (grande explosão). Segundo este modelo o universo está se expandindo com o passar do tempo e, em um passado distante, era muito mais quente e denso, ou seja, toda sua energia estava concentrada em um volume de dimensões desprezíveis e que, conseqüentemente, tinha densidade e temperatura infinitas e de onde começou a se expandir em uma grande explosão de energia, passando a criar o espaço-tempo à sua volta.

Este modelo de universo surge naturalmente da análise das soluções das equações de Friedmann para seus casos particulares e tem como bases observacionais o afastamento das galáxias entre si, a abundância de elementos leves como hidrogênio e hélio e a radiação cósmica de fundo.

Neste capítulo vamos apresentar a métrica que descreve um universo homogêneo e isotrópico e as equações de Friedmann, definir os principais parâmetros cosmológicos e apresentar soluções particulares das equações de Friedmann em termos destes parâmetros, faremos uma breve discussão sobre o modelo cosmológico do Big Bang e sua obtenção intuitiva a partir destas soluções, apresentaremos os pilares observacionais do modelo e discutiremos sua evolução para adequar-se às mais recentes descobertas observacionais.

Os principais textos utilizados como base e fontes principais para a

construção deste capítulo são os já citados como referências principais do capítulo anterior ([1-4]) e também [6] e [7]. Novamente lembramos que, quando necessário em pontos específicos, citamos outras referências no decorrer do capítulo.

2.1 Modelos de Friedmann-Robertson-Walker

Nesta seção partiremos da equação de Einstein e do Princípio Cosmológico para estudar as propriedades do espaço-tempo que é homogêneo e isotrópico, e chegar às equações que descrevem a dinâmica do universo, apresentar soluções particulares e estudar a expansão do universo de acordo com os seus constituintes.

2.1.1 A Métrica e as Equações de Friedmann

A métrica mais geral que descreve um espaço-tempo homogêneo e isotrópico é a métrica de Robertson-Walker que é dada por:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \text{sen}^2\vartheta d\varphi^2) \right], \quad (2.1)$$

onde estamos usando coordenadas esféricas comóveis, isto é, r , ϑ e φ movem-se com o fluido que constitui o universo; t é o tempo cosmológico, ou seja, o tempo medido pelos relógios movendo-se com o fluido; $a(t)$ é uma função a ser determinada que tem dimensão de comprimento e é chamada de fator de escala; e K é o parâmetro de curvatura que pode assumir os valores 1 (esférico ou fechado), 0 (plano) e -1 (aberto ou hiperbólico).

Com a métrica dada pela equação (2.1) podemos calcular o tensor de Ricci e o escalar de curvatura para encontrar a parte geométrica da equação de Einstein. Usando ainda que o tensor de energia-momento do universo

é o tensor de um fluido perfeito (dado pela equação (1.12)) obtemos, para descrever o universo, as equações de Friedmann que são:

$$8\pi G\rho = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{K}{a^2}, \quad (2.2)$$

$$8\pi Gp = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{K}{a^2}. \quad (2.3)$$

Em (2.2) e (2.3) temos duas equações e três funções a determinar (a , ρ e p). Para resolvermos este problema precisamos de uma terceira equação. Neste caso utilizamos a equação de estado do fluido que, para um fluido perfeito, pode ser escrita na forma:

$$p = \omega\rho. \quad (2.4)$$

As equações de Friedmann e a equação de estado do fluido nos permitem, em princípio, determinar a dinâmica do universo que é dada por suas soluções.

2.1.2 Parâmetros Cosmológicos

O estudo das equações de Friedmann e suas soluções ficam mais simples quando o fazemos em termos dos parâmetros cosmológicos. Os principais estão definidos e explicados a seguir.

a) Redshift

O parâmetro de *redshift* ou desvio para o vermelho, z , de uma fonte de radiação afastando-se do observador é definido como:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_E}{\lambda_E}, \quad (2.5)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda medido localmente para a radiação; e λ_E é o comprimento de onda da radiação quando emitida.

b) Fator de Escala

O segundo parâmetro cosmológico em que estamos interessados é o fator de escala do universo, a , que já foi apresentado e pode ser definido em termos do *redshift*.

Para isto vamos considerar que um sinal luminoso foi emitido no ponto E em $t = t_E$ e observado no ponto P em $t = t_0$ (hoje). A radiação viaja ao longo da geodésica nula, de forma que $ds^2 = 0$. Como fonte e emissor, neste caso, movem-se apenas com a expansão temos também que $d\vartheta^2 = d\varphi^2 = 0$. Integrando a equação da métrica (equação (2.1)) temos que:

$$\int_{t_E}^{t_0} \frac{cdt}{a} = \int_0^r \frac{dr}{(1 - Kr^2)^{1/2}} = f(r). \quad (2.6)$$

Assim o raio luminoso emitido em $t'_E = t_E + \delta t_E$ será observado em $t'_0 = t_0 + \delta t_0$. A função $f(r)$ não muda porque ambos, emissor e observador, estão se movendo com a expansão, de modo que:

$$\int_{t'_E}^{t'_0} \frac{cdt}{a} = f(r). \quad (2.7)$$

Se δt_E e δt_0 são pequenos, as equações (2.6) e (2.7) implicam em:

$$\frac{\delta t_E}{a} = \frac{\delta t_0}{a_0}. \quad (2.8)$$

No caso em que $\delta t_E = 1/\nu_E$ e $\delta t_0 = 1/\nu_0$ temos que:

$$a\nu_E = a_0\nu_0. \quad (2.9)$$

Levando-se em consideração a relação entre a frequência e o comprimento de onda de uma onda eletromagnética ($c = \lambda\nu$) e a equação (2.5) temos que:

$$a = \frac{a_0}{1+z}, \quad (2.10)$$

onde a_0 é o fator de escala do universo hoje.

c) Parâmetro de Hubble

Quando Edwin Hubble mediu a velocidade de afastamento das galáxias, ele deduziu a chamada lei de Hubble que diz:

$$v = H(t)d, \quad (2.11)$$

onde v é a velocidade com respeito à origem, d é a distância da fonte à origem e $H(t)$ é o parâmetro de Hubble.

O parâmetro de Hubble é dado por:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.12)$$

Em $t = t_0$, hoje, temos que o valor de H é $H(t_0) = H_0$. O parâmetro de Hubble é medido em unidades de $\text{Km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ e seu valor está contido no intervalo de

$$40 \leq H_0 \leq 100 \text{ Km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$$

Normalmente, o parâmetro de Hubble hoje é escrito em termos de um parâmetro adimensional como:

$$H_0 = 100 h \text{ Km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}.$$

Segundo os dados mais recentes em radiação cósmica de fundo que são os dados do satélite WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*), o valor do parâmetro de Hubble adimensional é:

$$h = 0,71 \pm 0,04.$$

d) Densidade Crítica

Podemos reescrever a equação (2.2) como:

$$\begin{aligned}\frac{K}{a^2} &= \frac{8\pi G\rho}{3} - H^2 \\ \frac{K}{a^2} &= H^2 \left(\frac{8\pi G\rho}{3H^2} - 1 \right),\end{aligned}\tag{2.13}$$

ou:

$$\frac{K}{H^2 a^2} = \frac{\rho}{\rho_c} - 1,\tag{2.14}$$

onde a densidade crítica, ρ_c , foi aqui definida como:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}.\tag{2.15}$$

Assim, a razão entre a densidade crítica e a densidade do universo nos fornece uma forma mais elegante e fácil de visualizar se o universo é aberto ($K = -1$), plano ($K = 0$) ou fechado ($K = 1$).

e) Parâmetro de Densidade

Podemos definir um parâmetro de densidade adimensional, em relação à densidade crítica, como sendo:

$$\Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_c}.\tag{2.16}$$

Este parâmetro de densidade pode ser definido para a densidade total do universo (Ω_t) e para cada uma de suas componentes, tais como, radiação (Ω_γ), matéria (Ω_m), energia escura (Ω_Λ), neutrinos (Ω_ν). De forma que é válido:

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i}{\rho_c},\tag{2.17}$$

e

$$\Omega_t(t) = \sum_i \Omega_i. \quad (2.18)$$

2.1.3 Casos Particulares das Equações de Friedmann

Embora o universo seja constituído simultaneamente de fluidos diferentes, para podermos resolver as equações de Friedmann, é conveniente estudar o comportamento e a dinâmica de um universo que fosse constituído de um único fluido. Assim, podemos assumir o valor ω , que descreve cada fluido, em (2.3) e, substituindo em (2.1) e (2.2), obter as soluções para $a(t)$ e $\rho(t)$.

Também vamos considerar, para esta parte do estudo, o caso em que o parâmetro de curvatura (K) é nulo, isto é, o universo é plano. Neste caso, as equações são bem mais fáceis de serem resolvidas e, além do mais, os dados observacionais mais recentes indicam que o universo é plano ou aproximadamente plano.

Para um universo dominado por matéria sem pressão (poeira), temos que $\omega = 0$ em (2.3) e as soluções das equações de Friedmann para $a(t)$, $\rho(t)$ e $t = t(z)$ são dadas por:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \quad (2.19)$$

$$\rho_m(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad (2.20)$$

$$t(z) = t_0(1+z)^{-3/2}, \quad (2.21)$$

onde t_0 e a_0 são, respectivamente, o tempo cosmológico e o valor do fator de escala hoje.

Já para um universo dominado por um fluido de radiação, que tem $\omega = 1/3$, as soluções para as equações de Friedmann tomam a forma:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2}, \quad (2.22)$$

$$\rho_\gamma(t) = \frac{3}{32\pi G t^2}, \quad (2.23)$$

$$t(z) = t_0(1+z)^{-2}. \quad (2.24)$$

Em geral, para um valor arbitrário de ω (ver Coles e Lucchin [1]), temos:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(\omega+1)}}, \quad (2.25)$$

$$\rho_\gamma(t) = \frac{3}{32\pi G t^2}, \quad (2.26)$$

$$t(z) = t_0(1+z)^{-\frac{3(1+\omega)}{2}}. \quad (2.27)$$

2.2 Os Modelos de FRW e a Singularidade

Os chamados modelos de Friedmann-Robertson-Walker ou modelos FRW são os modelos cosmológicos obtidos como solução das equações de Friedmann utilizando-se, também, da métrica de Robertson-Walker para descrever o universo que é homogêneo e isotrópico.

Os casos particulares que são soluções das equações de Friedmann, como os universos de poeira, de radiação, de de-Sitter e outros, podem ser considerados como uma boa aproximação para o cosmos para o caso em que a componente ou constituinte de que tratam seja a componente dominante. Assim se, em uma dada fase, a matéria sem pressão domina a densidade

de energia do cosmos, podemos tratá-lo de acordo com a solução do universo de poeira. O mesmo tratamento pode ser feito e considerado para as diferentes fases do universo e suas respectivas componentes dominantes.

Ao analisarmos as soluções para os vários modelos FRW, vemos que todos dão uma singularidade para o universo, isto é, o fator de escala do cosmos vai a zero quando o tempo vai a zero (ou o *redshift* vai a infinito) e, conseqüentemente, a densidade de energia do cosmos vai a infinito. Isto ocorre mesmo para o modelo fechado ($K = +1$) em que o fator de escala do universo oscila com o tempo, pois em cada oscilação o cosmos atinge um raio mínimo (uma singularidade) da qual parte para novamente evoluir.

Para os universos de poeira e de radiação podemos verificar facilmente este comportamento pela análise direta das soluções obtidas como exemplo na secção anterior para as equações de Friedmann: equações (2.19)-(2.21) para poeira e (2.22)-(2.24) para radiação.

Das equações (2.19) e (2.22) vemos, respectivamente, que os universos de poeira e de radiação têm uma singularidade em $t = 0$. Por isto podemos afirmar que, em seus instantes iniciais, toda a energia de cada um destes universos estava concentrada em um volume ínfimo, de dimensões infinitesimais, e a partir deste volume começou a evoluir em uma grande explosão.

2.3 Os Modelos de FRW e a Componente Dominante

Vamos pensar agora que, por exemplo, todo o cosmos é constituído apenas por duas componentes: poeira e radiação.

Esta análise simplificada facilita a compreensão das eras do universo e de como uma componente domina sua expansão.

Para tanto estima-se a densidade de energia atual de cada componente para então deduzir a forma como elas evoluem à medida que o tempo

retrocede a zero e o *redshift* vai a infinito.

A densidade de energia da matéria não-relativística hoje é estimada pela abundância de galáxias, material interestelar e matéria escura e vale $\rho_{0m} \sim 10^{-31} \text{ g/cm}^3$.

A densidade de energia da radiação hoje é basicamente a densidade de energia da radiação cósmica de fundo, já que a energia eletromagnética emitida pelas galáxias, aglomerados e fontes “pontuais”, é várias ordens de grandeza menor. Esta densidade de energia da RCF vale $\rho_{0\gamma} \simeq 4,8 \times 10^{-34} \text{ g/cm}^3$.

Assim podemos concluir que hoje a matéria domina em relação à radiação e, neste universo em consideração, domina a expansão.

Combinando as equações (2.20) e (2.21) para a poeira e as equações (2.23) e (2.24) para a radiação podemos obter o comportamento das densidades de energia destas componentes com o *redshift* que será, respectivamente, dada para poeira e radiação por:

$$\rho_m(z) = \frac{1}{6\pi G t_0^2} (1+z)^3, \quad (2.28)$$

e

$$\rho_\gamma(z) = \frac{3}{32\pi G t_0^2} (1+z)^4. \quad (2.29)$$

Lembrando que, em qualquer dos casos, $\rho(z=0) = \rho_0$, ficamos com:

$$\rho_m(z) = \rho_{0m} (1+z)^3, \quad (2.30)$$

e

$$\rho_\gamma(z) = \rho_{0\gamma} (1+z)^4. \quad (2.31)$$

As diferentes dependências das densidades com o *redshift* faz com que, em algum momento do passado (alto *redshift*), a densidade da radiação se

iguale e, em seguida, ultrapasse à da matéria, mesmo que hoje esta última seja muito maior que a primeira. A figura 2.1 ilustra este fato.

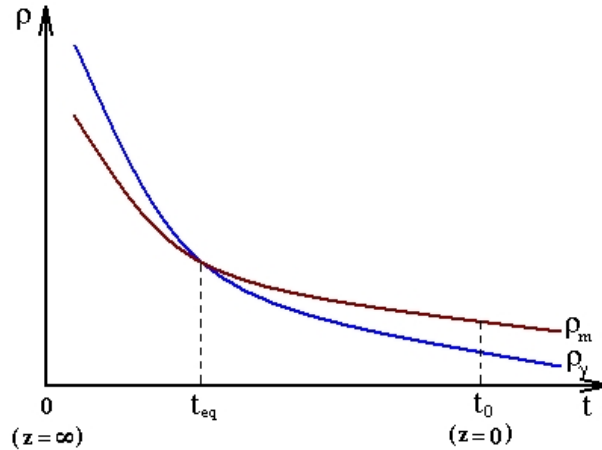


Figura 2.1: Gráfico mostrando o comportamento das densidades da matéria e da radiação com o tempo t e o *redshift* z .

Vemos que, à medida que voltamos para o passado, a densidade da matéria vai tornando-se menos dominante em relação à da radiação e em algum instante passa a dominar a densidade de energia e, conseqüentemente, dirigir a expansão do cosmos. Chamamos a época em que a matéria domina de Era da Matéria; e a época que a radiação domina, é óbvio, de Era da Radiação.

2.4 Pilares Observacionais do Big Bang

O modelo cosmológico do Big Bang é fundamentado na Teoria da Relatividade Geral e no Princípio Cosmológico, deduzido das equações de Friedmann e sustentado, principalmente, por três fatos observacionais que constataram três grandes previsões do modelo e o evidenciaram em detrimento de outros modelos de universo.

a) Expansão do Universo

O primeiro pilar observacional do modelo cosmológico do Big Bang é a medida da velocidade de afastamento das galáxias feita primeiramente por Edwin Hubble e apresentada por ele em 1929 [8] e que comprovou que o universo está em expansão.

O trabalho de Hubble deu início à era da Cosmologia observacional, lançou luz sobre a ordem de grandeza do raio do universo e permitiu a dedução de uma escala de tempo para a sua evolução.

Uma discussão mais detalhada sobre o trabalho de Hubble e sua importância histórica e científica é feita, por exemplo, por Kolb e Turner [6].

b) Nucleossíntese Primordial

A abundância no universo de elementos leves como hidrogênio e hélio surgiu como uma das primeiras previsões do modelo do Big Bang e sua observação no cosmos atual serve de forte base para este modelo.

Segundo o modelo do Big Bang, nos primeiros instantes, o cosmos era muito quente, mas a expansão inicial, ao mesmo tempo que o esfriou, permitiu a criação de outros núcleos a partir do hidrogênio (prótons) presente no plasma radiativo.

Entre os instantes $t \simeq 0,01\text{s}$ e $t \simeq 100\text{s}$ a temperatura do universo caiu de $T \simeq 10\text{ MeV}$ para $T \simeq 0,1\text{ MeV}$ e houve a formação de deutério (^2H), hélio-3 (^3He), hélio (^4He) e lítio (^7Li) criando uma abundância relativa de hélio no plasma primordial de aproximadamente 0,25, enquanto a abundância relativa de hidrogênio tornou-se aproximadamente igual a 0,75. As abundâncias relativas dos outros elementos são praticamente desprezíveis.

A observação destas abundâncias de hidrogênio e hélio nas nebulosas e galáxias, que está de acordo com a previsão teórica, é uma importante prova da teoria do Big Bang.

O tratamento e discussão da nucleosíntese primordial podem ser encontrados em diversos livros-texto, como no de Kolb e Turner [6].

c) Radiação Cósmica de Fundo

A RCF é considerada o terceiro pilar observacional do modelo de universo do Big Bang. Esta dissertação estuda-a com certo grau de detalhes e achamos mais conveniente deixarmos a sua descrição e quaisquer comentários para os próximos capítulos, não nos adiantando além do necessário.

2.5 Descrição Física do Cosmos no Modelo do Big Bang

A teoria do Big Bang representa a nossa atual concepção de universo e acreditamos que, mesmo ainda limitada e com pontos a serem esclarecidos, está mais próxima de explicar o cosmos real do que qualquer outra já criada pelo conhecimento humano.

Segundo o modelo cosmológico do Big Bang, como já foi dito, em algum momento do passado do universo toda a sua energia estava cons centrada em um volume infinitesimal de onde começou a se expandir em uma grande explosão que passou a criar continuamente o espaço-tempo que vem sendo ocupado por esta energia em expansão.

Após os primeiros instantes e algumas transições de fase, o cosmos era uma “sopa” ou fluido primordial de radiação e partículas, sendo composto por diversos constituintes que interagem entre si.

Durante sua expansão o cosmos e esse fluido efetivo que o compõe passaram por diversas fases ou eras. Estas diferentes fases da expansão do universo ocorrem devido às diferentes formas como as suas componentes materiais e energéticas evoluem e interagem entre si no decorrer da expansão.

Ainda segundo o modelo do Big Bang, nesta época inicial a radiação dominava a densidade de energia do cosmos e mantinha todas as outras componentes em equilíbrio térmico, definindo a temperatura do universo.

Um importante fenômeno cosmológico previsto pelo modelo do Big Bang ocorreu na era da radiação, a nucleossíntese primordial. A nucleossíntese formou vários elementos leves a partir dos prótons do plasma primordial e, como já discutido, a razão com que estes elementos aparecem no universo atual está de acordo com as previsões do modelo do Big Bang.

Com o passar do tempo e devido às diferentes formas com que as densidades de energia dos diferentes constituintes do cosmos evoluem com a expansão, a radiação deixou de ser a componente dominante, deixando de dirigir a expansão, e, em seguida, desacoplou-se, permitindo que os átomos presentes no plasma primordial se tornassem neutros.

O desacoplamento matéria-radiação ou último espalhamento ocorre já na era da matéria, ou seja, quando a matéria já era a componente dominante do universo.

Dados recentes nos mostraram que o universo atual está se expandindo aceleradamente. Isto quer dizer que, embora hoje seja dominante em relação à radiação, não é a matéria que domina a densidade total do universo e dirige sua expansão, pois a atração gravitacional da matéria tem a propriedade de desacelerar a expansão do universo.

Esta constatação observacional implica na existência de uma outra componente que domina a densidade total do universo. Esta componente dominante, chamada de energia escura ou quintessência, tornou-se dominante para $z < 1$ ($z \simeq 0,7$) e sua presença não altera a descrição aqui apresentada

para a interação matéria-radiação e, tão pouco, a descrição do universo nas eras da radiação e da matéria que ocorreram antes da quintessência tornar-se dominante.

Mesmo não alterando significativamente a descrição da dinâmica do cosmos nas eras em que não era a componente dominante, a quintessência tem importante influência nas flutuações ou anisotropias da radiação cósmica de fundo, pois a RCF carrega impressa em suas flutuações todas as contribuições dos diversos constituinte do cosmos.

* * *

Capítulo 3

Radiação Cósmica de Fundo

Neste capítulo iniciaremos nosso estudo sobre a Radiação Cósmica de Fundo (RCF), com ênfase nas flutuações ou anisotropias em sua temperatura. Para tanto vamos começar lembrando alguns pontos da discussão final do capítulo anterior.

Em seus instantes iniciais, o universo era um fluido de radiação extremamente denso e quente. Após os primeiros minutos (isto é, após a nucleossíntese cosmológica), a radiação oriunda e remanescente do Big Bang, à qual chamamos de radiação cósmica de fundo, era a componente dominante e dirigia a expansão do universo no que chamamos de Era da Radiação. Nesta era, por estar em equilíbrio térmico com a componente bariônica e por ser o fluido dominante, a radiação tinha um espectro térmico ou espectro de corpo-negro com temperatura muito bem definida que era a temperatura do universo.

O universo foi se expandindo e esfriando. A radiação, que estava fortemente acoplada à matéria e às suas flutuações, deixou de ser dominante e, depois, desacoplou-se da componente material e o universo tornou-se transparente à radiação, ou seja, a radiação cósmica de fundo passou a expandir-se livremente até ser detectada.

Em resumo, a radiação cósmica de fundo é um campo de radiação proveniente do Big Bang e que, por estar praticamente sem interagir desde o

Desacoplamento, pode nos fornecer informações importantes e precisas sobre o universo e sobre os parâmetros cosmológicos, sendo uma das mais antigas relíquias do universo primordial que chega até nós.

3.1 Previsão da RCF

A radiação cósmica de fundo foi primeiro prevista por Gamow e colaboradores na segunda metade da década de '40 a partir de estudos da síntese primordial dos elementos leves, que explica suas abundâncias no universo atual.

Uma discussão histórica detalhada sobre a previsão da RCF é apresentada por Partridge [9] e complementada por Silk [10] e por Barreiro [11], e cujos principais pontos relatamos a seguir.

Gamow introduziu a idéia de um Big Bang quente para explicar a produção de núcleos mais pesados que ^1H , o que necessitaria de uma temperatura da ordem de $10^9 - 10^{10}$ K que seria definida por um campo de radiação que permeava todo o cosmos e, na época da nucleossíntese, estaria acoplado à componente material.

Essa radiação foi esfriando com a expansão e, segundo Alpher e Herman [12] e Gamow [13, 14, 15], teria se esfriado bastante e hoje constituiria um campo de radiação que relíquia do Big Bang e que estaria se propagando por todo o cosmos e com uma temperatura não nula e dada por $T_0 \sim 5$ K.

3.2 Detecção da RCF

Durante aproximadamente duas décadas, a radiação cósmica de fundo permaneceu como uma previsão teórica do modelo Big Bang pouco percebida pela comunidade.

Em 1964 a RCF foi observada por Penzias e Wilson como um “excesso de ruído” no céu, proveniente de todas as direções, mais ou menos isotrópico e com espectro térmico com temperatura bem definida. O cálculo da temperatura e o espectro térmico serão tratados na próxima secção.

A distribuição angular da RCF tornava impossível relacioná-la a qualquer fonte local de rádio ou a algum ruído proveniente de emissões atmosféricas, do próprio Sistema Solar ou de nossa galáxia. E sua intensidade, várias ordens de grandeza maior que qualquer erro sistemático possível, permitiu sua identificação com este campo de radiação proveniente do Big Bang e que permeia todo o cosmos.

Sua observação deu a Penzias e Wilson o prêmio Nobel em física e foi relatada em um artigo do *The Astrophysical Journal Letters* [16] adjacente a outro de um grupo de Princeton liderado por Dicke [17] que explicava a radiação detectada pelo grupo dos laboratórios Bell (Penzias e Wilson) e sua física, relacionando-a a um fundo de microondas proveniente do Big Bang e com temperatura $T_0 \sim 3$ K.

Na verdade, a radiação cósmica de fundo foi detectada antes de 1964, mas seus observadores a interpretaram como erros sistemáticos de suas medidas ou coisa similar. Um bom exemplo de detecção feita anteriormente é a observação, em 1941 por Adams [18], da excitação de moléculas de cianogênio do meio interestelar e que seria explicado facilmente pela presença de um campo de radiação com temperatura da ordem de 2,3 K.

Novamente vemo-nos na obrigação de ser sucintos nesta discussão e de apenas citar que uma discussão completa e detalhada sobre as “detecções” anteriores da RCF é feita por Partridge [9].

Vários experimentos ao longo destas décadas vêm medindo a RCF. Estes experimentos permitiram verificar a forma do seu espectro, determinar com altíssima precisão o valor de sua temperatura e medir as flutuações em torno do seu valor médio.

3.3 Espectro Térmico e Temperatura da RCF

Corpos quentes em equilíbrio térmico à temperatura T emitem radiação com um espectro de caráter universal e são chamados de corpos-negros, pois toda a radiação que incide sobre sua superfície é absorvida e eles emitem apenas o seu espectro característico, que é chamado de espectro térmico ou de corpo negro.

A forma matemática do espectro de corpo-negro foi proposta por Planck em 1900. Para um corpo-negro em equilíbrio térmico à temperatura T que esteja emitindo, a quantidade de radiação com frequência entre ν e $\nu + d\nu$ é dada por:

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} d\nu, \quad (3.1)$$

onde h é a constante de Planck e k_B a constante de Boltzman.

A temperatura de um corpo-negro costuma ser determinada pela frequência onde há o máximo de emissão através da lei de Wien. Para isto é necessário ter todo o espectro de corpo-negro ou, pelo menos, uma faixa razoável em torno do máximo que deve ser medido com precisão.

Para o caso da medida de Penzias e Wilson (ou mesmo da medida do grupo de Princeton) tinha-se a intensidade em uma única banda de frequência e, por ter sido feita do solo, estava bem longe do máximo da curva de corpo-negro. A determinação da frequência onde há o máximo no espectro térmico da RCF só seria possível com um experimento fora da atmosfera terrestre e que também medisse a intensidade da radiação em várias frequências. Assim foi necessário uma outra maneira para se determinar a temperatura.

Uma discussão rigorosa sobre a determinação da temperatura da RCF a partir da medida da radiação em uma só frequência pode ser vista no livro do Weinberg [2]. Vamos resumir e apresentar aqui os pontos principais desta discussão do Weinberg que também é apresentada por outros autores

[1, 16, 17].

Para determinar a temperatura da radiação a partir da medida original é necessário considerar a lei de Planck (equação (3.1)) e, como a medida foi feita na região de baixas frequências ($h\nu \ll k_B T$), pode-se expandir a exponencial em (3.1) e inverter a equação obtida para se ter a temperatura em termos da frequência e da densidade de radiação medida. Em linhas gerais, temos:

$$\begin{aligned}\rho_\gamma(\nu) &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \\ \rho_\gamma(\nu) &\simeq \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\left[1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \vartheta\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)^2 - 1\right]} \\ \rho_\gamma(\nu) &\simeq \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T, \end{aligned} \quad (3.2)$$

e assim:

$$T(\nu, \rho) \simeq \frac{c^3}{8\pi k_B \nu^2} \rho_\gamma. \quad (3.3)$$

Usando teoria de propagação de erros, encontramos que a incerteza associada à medida da temperatura pode ser calculada pela expressão:

$$\delta T = \frac{c^3}{8\pi k_B \nu^2} \delta \rho, \quad (3.4)$$

onde $\delta \rho$ é a incerteza na medida da densidade de energia.

A medida de Penzias e Wilson foi feita num comprimento de onda bem determinado: $\lambda = 7,35$ cm. Pela relação entre a frequência e o comprimento de onda para ondas eletromagnéticas ($c = \lambda\nu$), temos para a frequência: $\nu = 4080$ MHz.

Nesta frequência, em todas as direções do céu, eles observaram um fluxo ou densidade de energia dada por:

$$\rho(\theta) = \rho_A + \rho_{atm} \sec \theta , \quad (3.5)$$

onde θ é o ângulo entre o eixo da antena e o zênite.

A largura da atmosfera na direção onde o eixo da antena está apontando explica a dependência do segundo termo em (3.5) com a $\sec \theta$ e nos permite atribuí-lo à radiação de nossa atmosfera. Assim, o “ruído” captado pela antena em todas as direções do céu, em unidades convenientes, era:

$$\rho_A = (9,4 \pm 2,1) \cdot 10^{-27} \text{ J/m}^3 .$$

Dessa densidade de energia estimou-se que estava sendo captada uma contribuição adicional devido à perdas ôhmicas da antena e da radiação terrestre. Assim, a densidade de energia referente a este “excesso de ruído” do céu era dada por:

$$\rho_\gamma = (7,5 \pm 2,1) \cdot 10^{-27} \text{ J/m}^3 .$$

Por (3.3) e (3.4) e usando os dados acima temos que a temperatura da RCF medida por Penzias e Wilson em 1964 foi:

$$T_0 = (3,5 \pm 1,0) \text{ K} .$$

Usando o mesmo procedimento para se determinar a temperatura a partir da medida do grupo de Princeton, realizada no mesmo ano e em outro comprimento de onda ($\lambda = 3,2 \text{ cm}$), chega-se ao valor da temperatura da radiação:

$$T_0 = (3,0 \pm 0,5) \text{ K} .$$

Assim, desde sua observação, diz-se que a radiação cósmica de fundo tem um espectro térmico com temperatura da ordem de $T_0 \sim 3 \text{ K}$.

Os pontos do espectro térmico da RCF foram medidos no decorrer das últimas décadas por diversos experimentos que observaram a intensidade

da radiação em diversas faixas de frequência. No início da década de '90, o espectrometro FIRAS (*Far InfraRed Absolute Spectrometer*) do satélite COBE (*COsmic Background Explorer*) mediu o espectro térmico com dados mais precisos e acurados, varrendo uma grande faixa de frequências em torno do máximo do espectro.

O espectro térmico medido para a RCF é mostrado nas figuras 3.1 e 3.2 que foram impressas a partir de figuras da *homepage* do COBE [19].

No gráfico mostrado em 3.1 temos os pontos medidos pelo FIRAS e a curva teórica que melhor ajusta estes dados, a expressão para um corpo-negro à temperatura $T_0 = 2,726$ K. As barras de erro deste gráfico estão aumentadas em 50 vezes e, mesmo assim, não é possível visualizá-las.



Figura 3.1: Espectro de corpo-negro da radiação cósmica de fundo. Dados experimentais medidos pelo FIRAS e curva teórica para $T_0 = 2,726$ K.

Em 3.2 temos também os dados observacionais e a curva teórica mas, neste caso, temos os dados medidos por vários experimentos no decorrer destas décadas e os dados do FIRAS.

O universo é considerado o corpo-negro mais perfeito já observado, pois o espectro eletromagnético da RCF é, como visto nas figuras acima, um espectro térmico ajustado com extrema precisão.

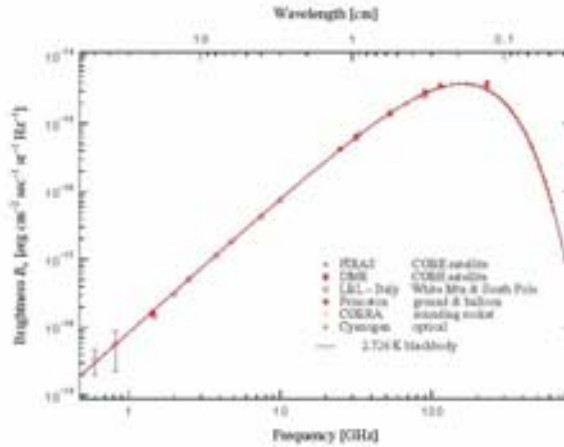


Figura 3.2: Espectro de corpo-negro da radiação cósmica de fundo. Dados experimentais de vários experimentos e curva teórica para $T_0 = 2,726$ K.

Pela análise estatística dos pontos do espectro térmico podemos concluir que a radiação cósmica de fundo tem um espectro de corpo-negro à temperatura $T_0 = 2,726 \pm 0,010$ K. Essa temperatura é constante em todas as direções do espaço e sempre que nos referirmos à temperatura da RCF estaremos nos referindo a ela.

Para entender como o espectro térmico foi gerado, devemos lembrar que quando em temperaturas muito altas, todos os constituintes de um sistema tendem a entrar em equilíbrio térmico. No universo primordial as temperaturas eram muito altas e, portanto, mesmo que a radiação existente estivesse distribuída em um espectro diferente, relaxaria para o espectro de corpo-negro, isto é, os seus fótons passariam a ser distribuídos em um espectro de corpo-negro, dado pela equação (3.1). Assim, o equilíbrio térmico dos vários constituintes do universo distribuiu sua radiação em um espectro térmico.

A manutenção do espectro térmico da RCF com a expansão do universo pode ser descrita em três fases distintas. A discussão a seguir foi adaptada das apresentadas por Partridge [9], Lineweaver [22] e Gawiser e Silk [23].

- 1^a: o universo em expansão com a matéria e radiação fortemente acopladas, isto é, antes do desacoplamento matéria-radiação. Neste caso, temos que considerar também que estamos na era da radiação, isto é, a densidade de radiação do universo é maior que a densidade da matéria e dos outros constituintes e, conseqüentemente, o campo de radiação consegue manter a temperatura destes constituintes igual a temperatura da radiação. O equilíbrio térmico mantém a forma do espectro da RCF e, como a temperatura do universo estará mudando continuamente com sua expansão, apenas a temperatura do espectro mudará e não a sua forma.
- 2^a: em algum momento a densidade de energia da radiação cai mais que a densidade de energia da matéria e elas acabam se tornando comparáveis. Os núcleos se combinam com o plasma de elétrons para formar átomos e a radiação se desacopla da matéria. No caso de um desacoplamento instantâneo, a radiação se desacopla da matéria mantendo todas as suas características do instante anterior ao desacoplamento. No caso de um desacoplamento ou última superfície de espalhamento que dure um certo intervalo de tempo (Δt_s), desde que $\Delta t_s \ll t$, onde t é a idade do universo quando começa o desacoplamento, as distorções no espectro térmico da radiação são desprezíveis e ele mantém a sua forma, levando consigo apenas flutuações em sua temperatura que estão ligadas às flutuações na densidade de energia da componente material presente no instante do desacoplamento.
- 3^a: após o desacoplamento, a radiação se propaga livremente no universo em expansão, praticamente sem interagir e, assim, a forma de seu espectro é mantida, variando apenas a frequência ν que depende do fator de escala do universo e, conseqüentemente, a sua temperatura T que decresceu até o seu atual valor T_0 .

3.4 Anisotropias da RCF

As anisotropias da radiação cósmica de fundo são as flutuações no valor de sua temperatura. Estas flutuações são definidas em cada ponto da esfera celeste como:

$$\Delta_T(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - T_0}{T_0}, \quad (3.6)$$

onde $T(\theta, \phi)$ é a temperatura da radiação num ponto arbitrário e T_0 é a temperatura média atual.

Embora as anisotropias da RCF sejam definidas ponto a ponto, no geral, estamos interessados na medida da flutuação relativa entre dois pontos da esfera celeste separados por uma distância angular γ . Essa anisotropia relativa é dada por:

$$\Delta_T(\gamma) = \frac{T_1 - T_2}{T_2}, \quad (3.7)$$

onde T_1 é a temperatura no ponto 1 e T_2 a temperatura no ponto 2 da esfera celeste, que estão representados na figura 3.3.

Ao deduzirmos o espectro angular de potência, no próximo capítulo da dissertação, relacionaremos a anisotropia definida ponto a ponto com o ângulo de separação entre os pares de pontos, ou seja, relacionamos a temperatura de dois pontos do céu com a distância angular entre eles.

A intensidade dessas flutuações ou anisotropias da temperatura da RCF é muito pequena ($\Delta_T \sim 10^{-5}$), mas a sua existência e o tipo destas anisotropias é de extrema importância para a cosmologia. Devido à essa reduzida intensidade das anisotropias, elas foram medidas primeiramente pelo COBE em 1992, depois de quase três décadas de tentativas de observação.

A observação da distribuição das anisotropias da radiação cósmica de fundo é a maior evidência de que o universo, em grande escala, é homogêneo e isotrópico.

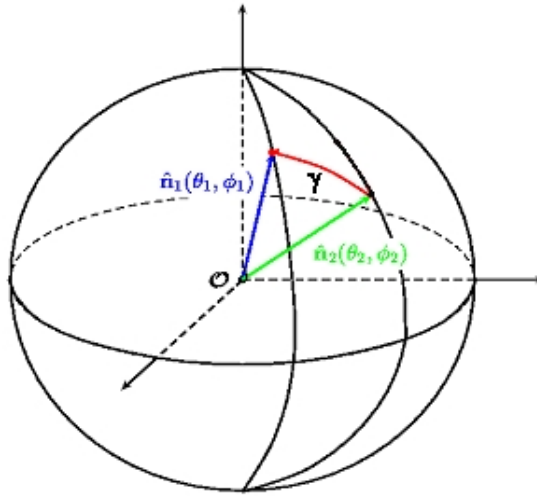


Figura 3.3: Esfera celeste com representação dos pontos 1 e 2, separados por um ângulo γ , em que são medidas as temperaturas da radiação.

As anisotropias da RCF são geradas pela interação da radiação com os outros constituintes do universo e com os potenciais gravitacionais gerados por estes constituintes. Elas estão ligadas ao tipo de universo que habitamos e, portanto, impõem limites nos modelos que descrevem nosso universo.

3.5 Classificação e Efeitos Geradores das Anisotropias

O tratamento matemático utilizado para extrair informações das medidas das anisotropias será mostrado no próximo capítulo. Por hora, iremos nos preocupar em como classificá-las e em fazer uma análise descritiva dos mecanismos geradores destas anisotropias.

As informações e análises aqui apresentadas foram construídas e/ou adaptadas a partir do estudo de diversos trabalhos sobre RCF, entre os quais os principais autores foram Partridge [9], Silk e colaboradores [10, 23],

Lineweaver [22], Tegmark [24], Hu e colaboradores [25, 26], Aghanim [27] e Smoot e outros [28, 29].

Há duas maneiras distintas de classificar as anisotropias da radiação cósmica de fundo. Podemos classificá-las quanto à escala angular e quanto aos efeitos geradores ou momento em que foram geradas.

3.5.1 Classificação Angular

Para a classificação angular das anisotropias levamos em consideração o ângulo entre os pontos que tiveram suas temperaturas medidas e o tamanho angular das regiões casualmente conectadas no desacoplamento. Ou seja, o tamanho das regiões que, até o desacoplamento, tiveram conexão causal subtende um ângulo no céu para um observador hoje, que é o ângulo subtendido por um objeto de tamanho ct onde t é a idade do universo na última superfície de espalhamento. Este ângulo (θ_H) é dado no modelo padrão por [30]:

$$\theta_H \approx 1^\circ \Omega_0^{1/2} \left(\frac{1100}{z_d} \right)^{1/2} \approx 1^\circ, \quad (3.8)$$

onde Ω_0 é o parâmetro de densidade total do universo; e z_d é o *redshift* médio em que ocorreu o desacoplamento. Veja a dedução de θ_H no apêndice A desta dissertação.

Assim, as anisotropias podem ser classificadas, quanto à escala angular, como sendo anisotropias de dipolo, de grande e de pequena escala.

a) Anisotropia de dipolo

É a flutuação observada no valor da temperatura da RCF quando fazemos medições em direções opostas do céu ($\theta = 180^\circ$).

Esse tipo de anisotropia é o mais simples e mais fácil de explicar. É uma flutuação na temperatura da radiação devido ao movimento de nossa

galáxia em relação ao referencial comóvel do universo, referencial no qual a radiação cósmica de fundo é isotrópica. A ordem de grandeza desta anisotropia é dada por $\beta = v/c \simeq 10^{-3}$ que é bem maior que das outras anisotropias ($\simeq 10^{-5}$).

Por nossa galáxia estar em movimento, a temperatura da radiação que chega até nós no sentido do movimento tem um comprimento de onda menor (*blueshift*) do que a radiação que chega até nós vinda no sentido contrário ao movimento (*redshift*).

Ao medirmos a temperatura da RCF observamos que ela é maior em um dos lados da esfera celeste, como pode ser observado na figura 3.4, que foi impressa a partir da *homepage* do COBE [19].

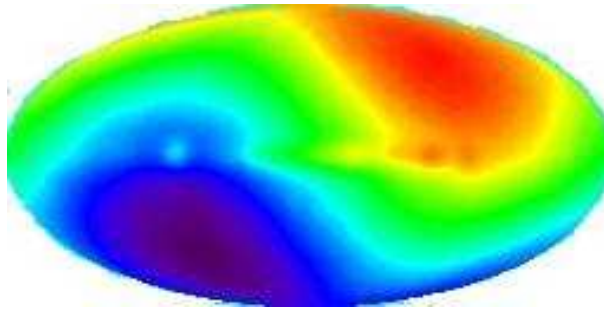


Figura 3.4: Mapa do céu com a medida da anisotropia de dipolo da RCF feita pelo satélite COBE.

Para estudarmos os outros tipos de anisotropias da radiação cósmica de fundo, que têm origem em processos físicos mais dinâmicos que a anisotropia de dipolo, precisamos descontar este efeito do valor medido para as anisotropias. Veja Coles e Lucchin [1] e Peebles [3] para discussão detalhada da anisotropia de dipolo e de como filtrar este efeito das anisotropias intrínsecas.

b) **Anisotropia de grande escala**

São as flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo medidas numa escala angular maior que θ_H , ou seja, são flutuações sem conexão causal que ocorrem devido ao efeito gravitacional da matéria.

Estas anisotropias são dominadas pelo chamado efeito Sachs-Wolfe ordinário [31], que será discutido na próxima subsecção, ao classificarmos cronologicamente as anisotropias.

A figura 3.5, impressa a partir da *homepage* do COBE [19], mostra o mapa das anisotropias da RCF na esfera celeste medido pelo COBE em 1992 que fazia medidas de flutuação para $\gamma = 7^\circ$.

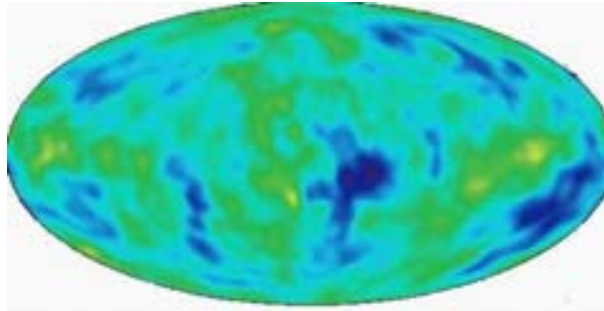


Figura 3.5: Mapa do céu com as medidas das flutuações na temperatura da RCF em escalas de $\gamma = 7^\circ$. Medidas feitas pelo COBE.

c) Anisotropia de pequena escala

São flutuações da RCF em escalas angulares menores que θ_H , portanto são anisotropias na temperatura dentro de regiões que tiveram contato causal até o momento do desacoplamento matéria-radiação.

As anisotropias em pequenas escalas angulares são geradas por diversos efeitos intrínsecos ou extrínsecos à radiação e que se somam para causar a anisotropia.

Vários experimentos foram ou estão sendo realizados para medir as anisotropias em escalas angulares cada vez menores e com precisão cada vez maior.

Na figura 3.6 é mostrado um mapa recente das anisotropias na esfera celeste medido pelo satélite WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*). Esta figura foi impressa da *homepage* do WMAP [32].

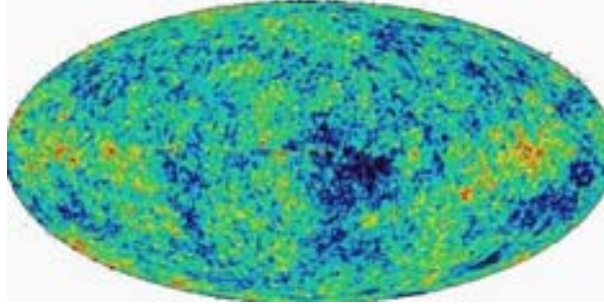


Figura 3.6: Mapa do céu com as medidas das flutuações na temperatura da RCF feitas pelo satélite WMAP.

3.5.2 Classificação Cronológica

Esta classificação para as anisotropias da radiação cósmica de fundo é a mais utilizada atualmente e baseia-se na natureza dos efeitos geradores das anisotropias. De acordo com a classificação cronológica, as anisotropias podem ser classificadas como primárias, secundárias e terciárias. Os três tipos estão descritos e explicados a seguir.

a) Anisotropias primárias

Ocorrem devido à presença, na última superfície de espalhamento, de flutuações na densidade e temperatura do fluido que constitui o universo.

A última superfície de espalhamento pode ser representada como uma esfera centrada na Terra e que ocorreu em $z \sim 1100$. Veja a figura 3.7 que foi adaptada do Bartlett [20].

As anisotropias primárias da RCF estão ligadas às flutuações presentes no universo no momento do desacoplamento que não ocorreu instantaneamente, levando um certo intervalo de tempo (ou *redshift*). Na figura 3.8, impressa do Lineweaver [22], estão representados, pictoricamente, os principais mecanismos geradores de anisotropias primárias.

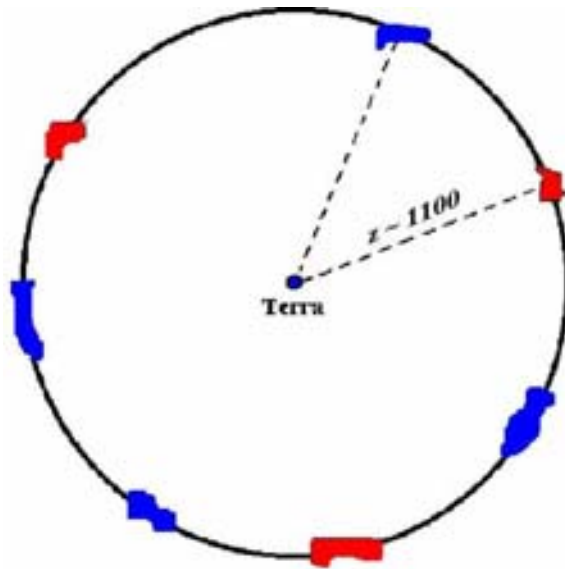


Figura 3.7: Representação esquemática da última superfície de espalhamento.

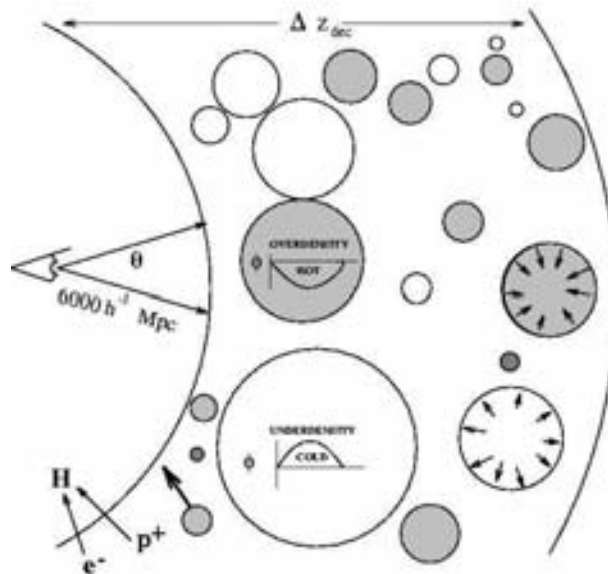


Figura 3.8: Última superfície de espalhamento e principais mecanismos geradores de anisotropias primárias.

O estudo destas anisotropias nos permite inferir detalhes sobre a estrutura e constituição do universo na época do desacoplamento. As anisotropias primárias são geradas, principalmente, por:

- Flutuações intrínsecas: os fótons ao serem espalhados uma última vez o são por regiões com densidade maior ou menor que a densidade média do universo que são, respectivamente, as regiões mais escuras e mais claras da figura 3.8. Os fótons espalhado por regiões mais densas são mais quentes dando uma maior temperatura à radiação e os espalhados por regiões menos densas têm menor temperatura.
- Flutuações no potencial gravitacional: os fótons, ao serem espalhados pela última vez, precisam escapar de regiões com um potencial gravitacional local que pode ser mais ou menos intenso que o potencial gravitacional médio. Estes potenciais estão representados na figura 3.8 dentro das regiões que são mais e menos densas que o meio. Ao escapar de um potencial gravitacional mais intenso (mais negativo), o fóton perde energia causando um *redshift* na temperatura da radiação cósmica de fundo.
- Efeito Sachs-Wolfe primordial: este efeito domina as anisotropias em grande escala e ocorre pela combinação das flutuações na densidade do meio e dos potenciais gravitacionais que estão intimamente ligados pois as flutuações na densidade geram flutuações nos potenciais e podem gerar *redshift* ou *blueshift* na temperatura da RCF. Este efeito foi deduzido em 1967 por Sachs e Wolfe [31] ao prever e explicar a formação de anisotropias na temperatura da RCF. Na literatura, em geral, este efeito aparece intitulado apenas de efeito Sachs-Wolfe, mas para diferenciá-lo do efeito Sachs-Wolfe integrado em alguns trabalhos ele aparece sob o título de efeito Sachs-Wolfe ordinário e, em outros, como efeito Sachs-Wolfe primordial. Voltaremos a tratar deste efeito com mais detalhes nos capítulos seguintes desta dissertação.
- Efeito Doppler: ocorre pelo fato de que cada região do fluido que compõem o universo na última superfície de espalhamento tem uma velocidade peculiar própria e os fótons da radiação são espalhados por

este fluido. Tal velocidade gera flutuações na temperatura da radiação que, em primeira ordem, acabam se anulando por serem produzidas por uma distribuição aleatória de velocidades. Porém, em segunda ordem e para escalas da ordem do horizonte, as flutuações causadas pela velocidade do fluido não se anulam e influenciam fortemente o espectro angular de potência das anisotropias.

- **Oscilações acústicas:** principal efeito gerador de anisotropias em pequenas escalas. Ocorre por uma combinação nas flutuações na densidade, no potencial e na velocidade peculiar e produz os chamados picos acústicos do espectro angular de potência da RCF. Para entendê-lo precisamos considerar que, antes do último espalhamento, o universo pode ser tratado como um fluido fóton-bárion fortemente acoplado. Enquanto a matéria tenta cair nos poços de potencial gravitacional do meio (regiões com setas apontando para o centro na figura 3.8), a pressão dos fótons resiste à queda (regiões com setas apontando do centro na figura 3.8) causando oscilações nas flutuações do fluido. As flutuações com escalas da ordem do horizonte oscilam enquanto as flutuações com escalas maiores são fortemente atenuadas. A fase da oscilação das flutuações no instante do último espalhamento dá os picos acústicos do espectro angular de potência, sendo que picos ímpares representam compressão e picos pares representam rarefação na última superfície de espalhamento.
- *Damping* ou amortecimento: este efeito ocorre pelo fato do desacoplamento não ocorrer instantaneamente e causa amortecimento das flutuações em escalas que correspondem à largura da última superfície de espalhamento ($l \sim 10^3$ ou $\theta \sim 0,1^\circ$) e também devido ao fato que quanto mais dentro do horizonte as oscilações na densidade do meio estejam, mais fortemente elas serão atenuadas.
- **Defeitos topológicos:** são os defeitos na estrutura do espaço-tempo do universo que se formaram em alguma transição de fase devido

a expansão do universo. Sua presença no universo do desacoplamento também deve produzir anisotropias na temperatura da radiação cósmica de fundo. Estes efeitos produziriam anisotropias de baixa intensidade e em escalas angulares muito pequenas (ver Albrecht e outros [33, 34] e Crittenden e Turok [35]).

b) Anisotropias secundárias

São as flutuações na temperatura causadas entre a última superfície de espalhamento e a observação hoje. A figura 3.9, adaptada do Peacock [21], mostra, esquematicamente, a geração de anisotropias secundárias da RCF que são somadas às anisotropias primárias também representadas na figura como as flutuações de densidade na última superfície de espalhamento.

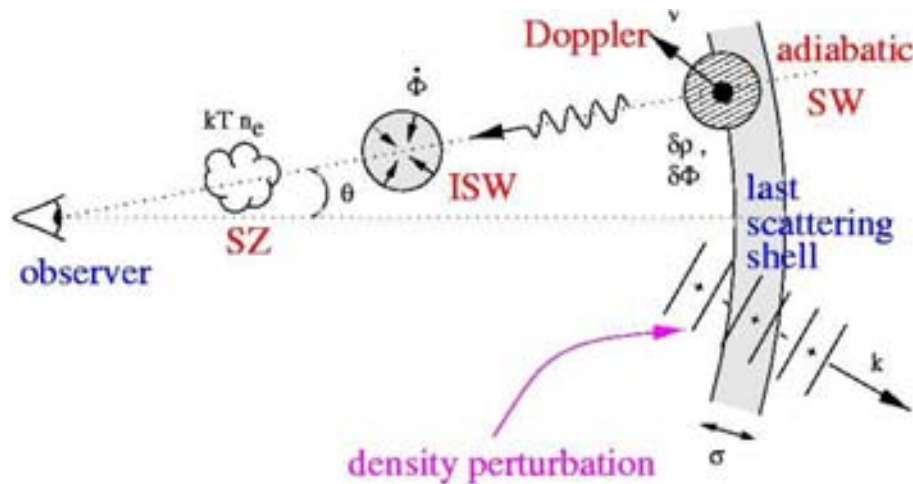


Figura 3.9: Esquema da geração de anisotropias secundárias na radiação cósmica de fundo.

Estas anisotropias podem ser causadas, basicamente, por: efeitos gravitacionais que distorcem a métrica do espaço-tempo percorrido pela radiação ao longo de sua trajetória (efeito Sachs-Wolfe integrado e lentes gravitacionais); e por reespalhamento dos fótons via espalhamento Compton inverso devido à reionização do universo em algum momento de sua evolução. Se o universo permanece neutro apenas os efeitos gravitacionais

produzem anisotropias secundárias na temperatura da radiação cósmica, mas no caso de ter ocorrido uma reionização outros efeitos como os efeitos Sunyaev-Zel'dovich e Ostriker-Vishniac também as produzem.

Os principais efeitos causadores de anisotropias secundárias são:

- Efeito Sachs-Wolfe Integrado: este efeito é devido ao fato da radiação passar por regiões de diferentes potenciais gravitacionais e para o caso do potencial gravitacional do universo variar com o tempo. O efeito Sachs-Wolfe integrado pode ser separado em três efeitos diferentes: efeito SWI inicial (*early ISW effect*); efeito SWI tardio (*late ISW effect*); e efeito Rees-Sciama. Os três estão especificados a seguir.
 - Efeito SWI inicial ou primitivo: logo após a recombinação, a contribuição dos fótons para a densidade do universo não é totalmente desprezível, causando um decaimento do potencial gravitacional. Este efeito é mais importante se a densidade total do universo for baixa.
 - Efeito SWI tardio: se a energia escura ou quintessência contribui para a densidade total ou se o universo não é plano, o potencial varia com o tempo causando flutuações na temperatura da RCF. Este efeito torna-se mais importante na era dominada por uma energia escura.
 - Efeito Rees-Sciama: a radiação, ao se propagar, encontra estruturas na fase não-linear da evolução.
- Lentes gravitacionais: a presença de grandes fontes gravitacionais no caminho dos fótons da radiação é responsável pela mudança na trajetória dos fótons na direção transversal ao movimento, isto tem como resultado uma distorção na imagem da última superfície de espalhamento. O efeito de lentes pode gerar ou reduzir potência, redistribuindo-a entre as diferentes escalas angulares, mas sua influência é mínima na maioria das escalas angulares, embora este efeito

possa ser responsável pela inibição de flutuações em escalas angulares muito pequenas.

- Efeito Sunyaev-Zel'dovich térmico: efeito causado por espalhamento Compton inverso da radiação pelos elétrons livres do gás quente no interior dos aglomerados durante a reionização do universo que pode distorcer o espectro térmico da RCF.
- Efeito Sunyaev-Zel'dovich cinemático: é um efeito Doppler adicional às anisotropias da radiação devido à velocidade peculiar do gás que produz o espalhamento Compton inverso. O efeito Sunyaev-Zel'dovich, tanto o térmico quanto o cinemático, é desprezível em todas as escalas angulares, mas pode ser usado para determinar propriedades internas do *cluster* ou para calcular sua velocidade peculiar.
- Efeito Ostriker-Vishniac: gera anisotropias de segunda ordem pela correlação entre as flutuações de pequena escala na densidade e as flutuações de grande escala na velocidade das perturbações no universo logo após a reionização ser completada. Este efeito produz anisotropias em escalas muito pequenas.

c) **Anisotropias terciárias**

São as flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo causadas por emissões de outras fontes eletromagnéticas. Estas distorções, em algumas faixas do espectro, costumam ser fáceis de filtrar para a análise dos efeitos que realmente podem determinar e/ou impor limites nos parâmetros cosmológicos.

Os tipos de fontes que produzem estes efeitos podem ser: extragalácticas, como fontes pontuais de rádio e infravermelho; galácticas, como a poeira interestelar e os aglomerados globulares; e locais, que são as emissões provenientes do nosso Sistema Solar e da atmosfera terrestre e os ruídos.

A classificação cronológica das anisotropias está resumida na tabela abaixo que foi adaptada de Tegmark [24].

Classificação Cronológica das Anisotropias		
Primárias	Gravidade	
	Flutuações na densidade	
	Efeito Doppler	
	<i>Dampping</i>	
	Defeitos topológicos	
Secundárias	Gravidade	Efeito SWI inicial
		Efeito SWI tardio
		Efeito Rees-Sciama
		Lentes gravitacionais
	Reionização local	Efeito SZ térmico
		Efeito SZ cinemático
	Reionização global	Supressão
		Novo efeito Doppler
Ostriker-Vishniac		
Terciárias	Extragaláctica	Fontes pontuais de rádio
		Fontes pontuais de infravermelho
	Galáctica	Poeira
		Radiação de Bremsstrahlung
		Radiação sincrotron
	Local	Sistema Solar
		Atmosfera
		Ruídos

* * *

Capítulo 4

Descrição Matemática das Anisotropias

Neste capítulo vamos nos aprofundar um pouco no estudo das anisotropias da radiação cósmica de fundo. Começaremos estudando a interação da radiação com as flutuações das outras componentes do universo através da integração da equação de Boltzmann em primeira ordem, o que nos permitirá deduzir e explicar os mecanismos geradores das anisotropias.

Em seguida deduziremos o espectro angular de potência das anisotropias, função que nos permite relacionar as anisotropias medidas com seus efeitos geradores e com os parâmetros cosmológicos. Nesta parte ainda calcularemos a forma explícita para o espectro angular de potência em grandes escalas angulares no modelo Λ CDM para obter uma expressão que nos permita compará-lo ao modelo com decaimento do vácuo que será estudado no próximo capítulo.

4.1 Equação de Boltzmann

A formação e evolução das anisotropias da radiação cósmica de fundo é estudada através da equação de Boltzmann com um termo de fonte ou

acoplamento. Esta equação nos permite descrever a interação da radiação com os outros constituintes do universo e suas perturbações cosmológicas durante a evolução do cosmos. Esta secção é baseada, principalmente, no trabalho de Mukhanov, Feldman e Brandenberger [36].

Em sua forma manifestamente covariante, a equação de Boltzmann pode ser escrita como:

$$p^\mu \frac{df}{dx^\mu} = C[f], \quad (4.1)$$

onde no primeiro membro temos a influência da força gravitacional gerada pelos vários constituintes do universo sobre a função de distribuição dos fótons e o segundo membro corresponde ao termo de acoplamento dos fótons com outras componentes.

Dos constituintes do universo, a matéria bariônica era a única acoplada à radiação antes do desacoplamento. A matéria escura e os neutrinos somente interagem gravitacionalmente com bárions e fótons. Após a recombinação, nenhum dos constituintes do universo interage fortemente com a radiação.

Analisando por esta perspectiva, temos que considerar, antes da recombinação, a evolução do fluido matéria-radiação em um potencial gravitacional que dê conta dos outros constituintes do universo. Após o desacoplamento precisamos considerar a evolução da função de distribuição dos fótons que interage com os potenciais gravitacionais gerados pelas outras componentes do cosmos.

A função de distribuição dos fótons pode ser escrita como:

$$f = \bar{f}(x^\alpha, p^i), \quad (4.2)$$

e assim, a temperatura da radiação aparece ao integrarmos a função distribuição:

$$dN = \bar{f}(x^\alpha, p^i) d^3x^k p_k$$

$$N = \int \bar{f}(x^\alpha, p^i) d^3 x^k p_k . \quad (4.3)$$

Após o desacoplamento, os fótons são acolicionais e, portanto, as flutuações em sua função de distribuição podem ser obtidas, em primeira ordem, resolvendo-se a equação de Boltzmann sem termo de colisão, equação de Vlasov, que nas variáveis x^α e p_i pode ser escrita como:

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \frac{dp^\alpha}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial p^\alpha} = 0 , \quad (4.4)$$

e assim:

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \frac{dp^i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0 , \quad (4.5)$$

onde usamos que $\partial f / \partial p^0 = 0$, pois f não depende explicitamente de p^0 , já que para fótons é válido que:

$$\begin{aligned} p^\alpha p_\alpha &= 0 \\ p^i p_i &= p^0 p_0 \\ p^0 &= p^0(p^i) . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para obtermos a forma explícita da equação de Boltzmann precisamos da forma dos coeficientes $dp^i/d\tau$ e $dx^\alpha/d\tau$ que podem ser obtidos da equação da geodésica para os fótons (equação (1.4)):

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \quad (4.7)$$

onde os símbolos de Christofel, Γ , são dados pela equação (1.5).

No calibre de Poisson, a métrica plana perturbada é dada por [36]:

$$ds^2 = a^2 \{ (1 + 2\Phi) d\tau^2 - (1 - 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j \} . \quad (4.8)$$

Usando ainda que o vetor unitário da direção de observação dos fótons pode ser definido como:

$$n_i = -\frac{p_i}{p}, \quad (4.9)$$

onde p é o módulo do momento dos fótons que obedece à relação:

$$p^2 = p^i p_i, \quad (4.10)$$

podemos escrever a equação da geodésica dos fótons como:

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = 2p \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}, \quad (4.11)$$

e

$$\frac{dx^i}{d\tau} = n^i (1 + 2\Phi). \quad (4.12)$$

Antes de seguirmos, precisamos ainda escrever a função de distribuição em termos da flutuação na temperatura:

$$f(x^\alpha, p_i) \simeq \bar{f}[p/T + \delta T(x^\alpha, n^i)], \quad (4.13)$$

onde \bar{f} é a função de distribuição média dos fótons.

Expandindo a função \bar{f} em torno do ponto $v = p/T$, podemos escrever que:

$$\bar{f}[p/T + \delta T(x^\alpha, n^i)] = f\left(\frac{p}{T}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{v=\frac{p}{T}} \delta v. \quad (4.14)$$

Como:

$$v = \frac{p}{T} \Rightarrow \delta v = -\frac{p}{T} \left(\frac{\delta T}{T}\right), \quad (4.15)$$

e definindo:

$$g \equiv \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{v=\frac{p}{T}} \delta v, \quad (4.16)$$

temos que:

$$\begin{aligned}
g &= \frac{\partial f}{\partial(P/T)} \left(-\frac{p}{T} \frac{\delta T}{T} \right) \\
g &= -\frac{p}{T} \frac{\delta T}{T} \frac{\partial f}{\partial(p/T)},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

e, assim, temos:

$$f = \bar{f} + g. \tag{4.18}$$

Retornando à equação (4.5) podemos reescrevê-la como:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp^i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0. \tag{4.19}$$

Substituindo (4.18) em (4.19) temos que:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \tau} + \frac{\partial g}{\partial \tau} + \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i} + \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial g}{\partial x^i} + \frac{dp^i}{d\tau} \frac{\partial \bar{f}}{\partial p^i} + \frac{dp^i}{d\tau} \frac{\partial g}{\partial p^i} = 0. \tag{4.20}$$

A função de distribuição média não depende das coordenadas ($\bar{f} = \text{cte}$), assim o primeiro e terceiro termos em (4.20) são nulos. Já o último termo desta equação é de segunda ordem nas perturbações, podendo ser desprezado. Desta forma, ficamos com:

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} + \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial g}{\partial x^i} + \frac{dp^i}{d\tau} \frac{\partial \bar{f}}{\partial p^i} = 0. \tag{4.21}$$

Substituindo as expressões (4.11) e (4.12) em (4.21) ficamos com:

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} + n^i (1 + 2\Phi) \frac{\partial g}{\partial x^i} + 2p \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial p^i} = 0. \tag{4.22}$$

Como $v = p/T$, podemos escrever que:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{f}}{dp^i} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial p^i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \frac{\partial}{\partial p^i} \left(\frac{p}{T} \right) \\
\frac{d\bar{f}}{dp^i} &= \frac{1}{T} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial p^i}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Por (4.10) podemos escrever que:

$$\frac{\partial p}{\partial p^i} = \frac{p_i}{p}, \quad (4.24)$$

e, desta forma, temos:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial p_i} = \frac{p_i}{pT} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}. \quad (4.25)$$

Tendo em vista que:

$$n^i = -\frac{1}{p} p_i, \quad (4.26)$$

temos:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial p_i} = -\frac{n^i}{T} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right). \quad (4.27)$$

Substituindo (4.27) em (4.22), obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} + n^i \frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{2pn^i}{T} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial p^i} = 0. \quad (4.28)$$

Substituindo, agora, (4.17) em (4.28), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left[-\frac{p}{T} \left(\frac{\delta T}{T} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right] + n^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left[-\frac{p}{T} \left(\frac{\delta T}{T} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right] - \frac{2pn^i}{T} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial p^i} = 0 \\ & -\frac{p}{T} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + n^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \frac{\delta T}{T} + 2n^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right] = 0 \\ & \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + n^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \frac{\delta T}{T} + 2n^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ao longo da geodésica dos fótons, a derivada total em relação ao tempo conforme pode ser escrita como:

$$\frac{d}{d\tau} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + n^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (4.30)$$

e então:

$$n^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{d}{d\tau} - \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (4.31)$$

Desta forma a equação (4.29) torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\delta T}{T} \right) + 2 \frac{d\Phi}{d\tau} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\delta T}{T} + 2\Phi \right] &= 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

que é a forma final da equação de Boltzmann em primeira ordem para as flutuações na temperatura da RCF.

Integrando a equação (4.32) temos:

$$\frac{\delta T}{T}(\vec{x}, \tau) + 2\Phi(\vec{x}, \tau) = \text{cte} + 2 \int_i^f \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(\tau) d\tau \quad (4.33)$$

A constante (cte) em (4.33) pode ser determinada das condições iniciais da “viagem” dos fótons desde a última superfície de espalhamento, ou seja, ela dá as anisotropias intrínsecas à RCF no instante do último espalhamento em um desacoplamento instantâneo e, portanto, é uma forma indireta de se obter a solução em primeira ordem para a equação de Boltzmann com termo de colisão. Este procedimento dá as flutuações na temperatura da RCF com boa precisão em escalas grandes e intermediárias e é muito importante na discussão qualitativa dos mecanismos geradores das anisotropias.

Para obtermos a constante vamos desconsiderar a integral no segundo membro de (4.33) que representa o efeito Sachs-Wolfe integrado. Assim:

$$\frac{\delta T}{T}(\vec{x}, \tau) + 2\Phi(\vec{x}, \tau) = \text{cte}. \quad (4.34)$$

Vamos, também, lembrar que o tensor de energia momento para a radiação é dado por:

$$(T^\alpha_\beta)_r = \frac{1}{\sqrt{-g}} \int d^3p \frac{p^\alpha p_\beta}{p} f. \quad (4.35)$$

Da métrica perturbada, equação (4.8), temos que:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{a^6(1+2\Phi)(1-2\Phi)^3}. \quad (4.36)$$

Como estamos considerando apenas as perturbações em primeira ordem, podemos fazer a expansão linear de (4.36), que nos fornece:

$$\sqrt{-g} \simeq a^3(1-2\Phi),$$

e, assim, temos que:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \simeq \frac{1}{a^3}(1+2\Phi). \quad (4.37)$$

Substituindo (4.37) em (4.35) ficamos com:

$$(T^\alpha_\beta)_r = \frac{(1+2\Phi)}{a^3} \int d^3p \frac{p^\alpha p_\beta}{p} f. \quad (4.38)$$

A componente tempo-tempo do tensor de energia momento vale:

$$(T^0_0)_r = \epsilon_r. \quad (4.39)$$

De (4.38) e (4.39) temos que:

$$\epsilon_r = \frac{(1+2\Phi)}{a^3} \int d^3p \frac{p^0 p_0}{p} f. \quad (4.40)$$

Pela (4.18), temos que (4.40) torna-se:

$$\epsilon_r = \frac{(1+2\Phi)}{a^3} \int d^3p \frac{p^0 p_0}{p} (\bar{f} + g). \quad (4.41)$$

Fazendo a integração em (4.38), usando a condição expressa em (4.18) e mantendo apenas os termos de primeira ordem nas variáveis Φ e δT , podemos escrever que:

$$\frac{1}{4} \frac{\delta \epsilon_r}{\epsilon_r} = \Phi + \int \frac{d^2n}{4\pi} \frac{\delta T}{T} \quad (4.42)$$

e

$$\frac{(\delta T_0^i)_r}{4\epsilon_r} = \int \frac{d^2n}{4\pi} n^i \frac{\delta T}{T}. \quad (4.43)$$

Das equações de Einstein, a perturbação na densidade de energia e a velocidade peculiar invariante de calibre podem ser expressas como [36]:

$$\frac{\delta\epsilon}{\epsilon} = \frac{\tau^2}{6} \Delta\Phi - 2\Phi \quad (4.44)$$

e

$$v^i = -\frac{1}{3} \tau \delta^{ij} \frac{\partial\Phi}{\partial x^j}. \quad (4.45)$$

Lembrando que, antes do último espalhamento, a radiação estava acoplada à matéria e suas densidades de energia obedecem às relações:

$$\epsilon_r \sim a^{-4}, \quad (4.46)$$

$$\epsilon_m \sim a^{-3}, \quad (4.47)$$

temos, em condições adiabáticas:

$$\frac{\delta\epsilon_r}{\epsilon_r} = \frac{4}{3} \frac{\delta\epsilon_m}{\epsilon_m}. \quad (4.48)$$

Lembrando ainda que, para radiação:

$$p_r = \frac{1}{3} \epsilon_r, \quad (4.49)$$

segue-se que:

$$(T^i_0)_r = \frac{4}{3} \epsilon_r v^i. \quad (4.50)$$

Comparando (4.42) e (4.43) com (4.44), (4.45), (4.48) e (4.50) encontramos que, antes do último espalhamento:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta}{3} - \Phi + n^i v_i. \quad (4.51)$$

Usando (4.51) como condição inicial em (4.34), podemos reescrevê-la como:

$$\left(\frac{\delta T}{T} + 2\Phi\right)(x_0, \tau_0) = \frac{\delta}{3} - \Phi + n^i v_i(x_0 - n(\tau_0 - \tau_d), \tau_d). \quad (4.52)$$

Ainda de (4.34) podemos escrever:

$$\frac{\delta T}{T}(\tau_0) = \frac{\delta T}{T}(\tau_d) - 2[\Phi(\tau_0) - \Phi(\tau_d)], \quad (4.53)$$

onde cada termo é calculado ao longo do raio de luz $x(\tau)$ no tempo correspondente.

Assim, de (4.52) e (4.53) temos:

$$\Delta_T(\tau_0) \equiv \frac{\delta T}{T}(\tau_0) = \frac{\delta}{3}(\tau_d) - 2\Phi(\tau_0) + \Phi(\tau_d) + n^i v_i(\tau_d). \quad (4.54)$$

O potencial hoje é como um termo de monopólo na temperatura e não pode ser medido. O termo $\delta/3$ nos dá a contribuição das flutuações na densidade, Φ a contribuição do potencial gravitacional e $n^i v_i$ a contribuição das velocidades de cada elemento do fluido material no instante do desacoplamento para a geração das anisotropias. Considerando, também, o termo do efeito Sachs-Wolfe integrado que é a contribuição da variação do potencial gravitacional entre o desacoplamento e hoje, temos que (4.54) torna-se:

$$\Delta_T(\tau_0) = \frac{\delta}{3}(\tau_d) + \Phi(\tau_d) + n^i v_i(\tau_d) + 2 \int_i^f \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(\tau) d\tau. \quad (4.55)$$

A expressão em (4.55) nos dá a anisotropia na temperatura da RCF medida hoje. Um resultado mais exato pode ser obtido apenas numericamente, como descrito, por exemplo, por Seljak e colaboradores [38, 20]. Porém, a equação (4.55) nos fornece a anisotropia com grande precisão para escalas grandes e intermediárias e com ela podemos estudar os principais efeitos geradores das flutuações, tanto primárias quanto secundárias.

Na próxima secção vamos calcular explicitamente o espectro angular de potência das anisotropias em grandes escalas e, para isto, precisaremos da forma da anisotropia. Assim, lembremos que, para anisotropias em escalas bem maiores que o horizonte, podemos desconsiderar os efeitos causais em sua formação (efeito Doppler). Como estamos interessados apenas em uma primeira aproximação, também vamos desconsiderar o termo do efeito Sachs-Wolfe integrado. Assim, a anisotropia em grande escala será:

$$\Delta_T(\tau_0) \simeq \frac{\delta}{3}(\tau_d) + \Phi(\tau_d) . \quad (4.56)$$

Em grande escala, a flutuação na densidade de energia pode ser escrita em termos do potencial como (veja, por exemplo, Hu [25], Mukhanov e colaboradores [36], Bartlet [20]):

$$\delta(\tau_d) = -2\Phi(\tau_d) . \quad (4.57)$$

Assim:

$$\Delta_T(\tau_0) \simeq \frac{\Phi(\tau_d)}{3} , \quad (4.58)$$

que é a contribuição do efeito Sachs-Wolfe ordinário para as anisotropias em grandes escalas angulares.

4.2 Espectro Angular de Potência

A flutuação ou anisotropia na temperatura da radiação cósmica de fundo é definida em cada ponto da esfera celeste pela equação (3.6), aqui reescrita:

$$\Delta_T(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - T_0}{T_0} . \quad (4.59)$$

Nosso objetivo é determinar, para um dado modelo, uma expressão que nos permita comparar a flutuação medida no céu com a previsão teórica

para esta flutuação que é gerada por diversos efeitos. Nesta secção vamos deduzir esta função que é chamada de espectro angular de potência e obter sua dependência explícita com as flutuações medidas para a temperatura da RCF e com os parâmetros cosmológicos dos modelos de universo. Para a construção desta secção usamos como principais referências Hu [25], Bartlet [20], Padmanabhan [39], Kleber, Daum e Machado [40] e Arfken e Weber [41].

A anisotropia em (4.59) está definida na esfera celeste e, portanto, a simetria do problema torna conveniente a sua expansão em termos dos harmônicos esféricos. Assim:

$$\Delta_T(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.60)$$

onde os coeficientes da expansão são dados por:

$$a_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) \Delta_T(\theta, \phi). \quad (4.61)$$

Para o estudo das anisotropias, precisamos definir a função de correlação de dois pontos para as flutuações na temperatura:

$$C(\gamma) = \langle \Delta_T(\theta_1, \phi_1) \Delta_T(\theta_2, \phi_2) \rangle, \quad (4.62)$$

onde γ é a separação angular entre os dois pontos da esfera celeste onde estamos medindo a flutuação em relação à temperatura média da RCF.

O espectro de potência associado a esta função de correlação é o chamado espectro angular de potência. Para determiná-lo, devemos expandir a função de correlação em termos de polinômios de Legendre:

$$C(\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l P_l(\cos \gamma). \quad (4.63)$$

Usando o teorema da adição de harmônicos esféricos:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{lm}(\theta_2, \phi_2), \quad (4.64)$$

podemos escrever que:

$$C(\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{lm}(\theta_2, \phi_2). \quad (4.65)$$

A escolha mais simples para que o B_l forneça um coeficiente normalizado para a expansão é que o espectro angular de potência, C_l , seja dado por:

$$C_l = B_l \frac{4\pi}{2l+1}. \quad (4.66)$$

Substituindo (4.66) em (4.63) temos a forma da função de correlação em termos do espectro angular de potência:

$$C(\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l(\cos \gamma), \quad (4.67)$$

ou ainda, pela equação (4.64), temos:

$$C(\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_l Y_{lm}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{lm}(\theta_2, \phi_2). \quad (4.68)$$

Para obter a relação entre o espectro angular de potência e os coeficientes da expansão da temperatura em harmônicos esféricos vamos calcular o módulo quadrado destes coeficientes:

$$\langle |a_{lm}|^2 \rangle = \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle. \quad (4.69)$$

Substituindo (4.61) em (4.69), temos:

$$\begin{aligned} \langle |a_{lm}|^2 \rangle &= \int d\Omega d\Omega' \langle \Delta_T(\theta_1, \phi_1) \Delta_T(\theta_2, \phi_2) \rangle Y_{lm}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{l'm'}(\theta_2, \phi_2) \\ \langle |a_{lm}|^2 \rangle &= \int d\Omega d\Omega' C(\gamma) Y_{lm}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{l'm'}(\theta_2, \phi_2). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Substituindo (4.68) em (4.70), obtemos:

$$\langle |a_{lm}|^2 \rangle = \int d\Omega d\Omega' \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j C_j Y_{jk}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{jk}(\theta_2, \phi_2) Y_{lm}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{l'm'}(\theta_2, \phi_2). \quad (4.71)$$

Usando a condição de ortonormalidade dos harmônicos esféricos:

$$\int d\Omega Y_{l'm'}(\theta_1, \phi_1) Y_{lm}(\theta_1, \phi_1) = \delta_{l'l} \delta_{m'm} , \quad (4.72)$$

a equação (4.71) torna-se:

$$\begin{aligned} \langle |a_{lm}|^2 \rangle &= \int d\Omega' \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j C_j \delta_{jl} \delta_{km} Y_{jk}^*(\theta_2, \phi_2) Y_{l'm'}(\theta_2, \phi_2) \\ \langle |a_{lm}|^2 \rangle &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j C_j \delta_{jl} \delta_{km} \delta_{j'l'} \delta_{km'} = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \end{aligned} \quad (4.73)$$

e, portanto, chegamos a:

$$C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle. \quad (4.74)$$

Demonstrada a relação expressa pela equação (4.74), precisamos obter a expressão para os C_l 's em termos dos potenciais descritos pelos modelos cosmológicos. Para tanto vamos começar lembrando que uma função expressa no espaço real pode ser expandida em modos de Fourier:

$$F(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} F(\vec{k}) Q(\vec{x}, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{2/3}} \int_0^{\infty} d^3k F(\vec{k}) Q(\vec{x}, \vec{k}) , \quad (4.75)$$

onde $F(\vec{k})$ é a sua transformada de Fourier e $Q(\vec{x}, \vec{k})$ é a onda plana dada por:

$$Q(\vec{x}, \vec{k}) = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} . \quad (4.76)$$

Assim, expandindo a flutuação de temperatura, Δ_T , em termos de seus modos de Fourier:

$$\begin{aligned} \Delta_T(\vec{n}, x) &= \frac{1}{(2\pi)^{2/3}} \int d^3k \Delta_T(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ \Delta_T(\vec{n}, x) &= \frac{1}{(2\pi)^{2/3}} \int d^3k \Delta_T(\vec{k}, \tau) e^{-ix_d \vec{k}\cdot\hat{n}} , \end{aligned} \quad (4.77)$$

e combinando as identidades:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(k) P_l(x), \quad (4.78)$$

e:

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\hat{n}) Y_{lm}^*(\hat{k}), \quad (4.79)$$

segue que:

$$e^{ix_d \vec{k} \cdot \hat{n}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l J_l(x_d k) Y_{lm}(\hat{n}) Y_{lm}^*(\hat{k}), \quad (4.80)$$

onde x_d é a posição da última superfície de espalhamento.

Substituindo (4.80) em (4.77), obtemos:

$$\Delta_T(\vec{n}, x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[4\pi (-i)^l \frac{1}{(2\pi)^{2/3}} \int d^3 k \Delta_T(\vec{k}, \tau) j_l(x_d k) Y_{lm}^*(\hat{k}) \right] Y_{lm}(\hat{n}). \quad (4.81)$$

Comparando (4.81) com (4.60) vemos que a expressão entre colchetes é o coeficiente da expansão da anisotropia em harmônicos esféricos

$$a_{lm} = 4\pi (-i)^l \frac{1}{(2\pi)^{2/3}} \int d^3 k \Delta_T(\vec{k}, \tau) j_l(x_d k) Y_{lm}^*(\hat{k}), \quad (4.82)$$

e, assim, temos:

$$\begin{aligned} \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle &= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^3} (-i)^l (i)^{l'} \int d^3 k \int d^3 k' j_l(k x_d) j_{l'}(k' x_d) \times \\ &\quad \times Y_{lm}^*(\hat{k}) Y_{l'm'}^*(\hat{k}') \langle \Delta_T(\vec{k}, \tau_d) \Delta_T(\vec{k}', \tau_d) \rangle. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Comparando (4.83) com (4.74), temos:

$$\begin{aligned} C_l &= \frac{2}{\pi} (-i)^l (i)^{l'} \int d^3 k \int d^3 k' j_l(k x_d) j_{l'}(k' x_d) \times \\ &\quad \times Y_{lm}^*(\hat{k}) Y_{l'm'}^*(\hat{k}') \langle \Delta_T(\vec{k}, \tau_0) \Delta_T(\vec{k}', \tau_0) \rangle. \end{aligned} \quad (4.84)$$

A média das flutuações no espaço de Fourier pode ser expressa em termos do espectro de potência na forma

$$\langle \Delta_T(\vec{k}, \tau_0) \Delta_T(\vec{k}', \tau_0) \rangle = P_\psi(k) \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (4.85)$$

o que nos permite escrever (4.84) como

$$C_l = \frac{2}{\pi} (-i)^l (i)^{l'} \int d^3k j_l(kx_d) Y_{lm}^*(\hat{k}) P_\psi(k) \int d^3k' j_{l'}(k'x_d) Y_{l'm'}^*(\hat{k}') \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (4.86)$$

ou ainda:

$$C_l = \frac{2}{\pi} (-i)^l (i)^{l'} \int d^3k j_l(kx_d) j_{l'}(kx_d) Y_{lm}^*(\hat{k}) Y_{l'm'}^*(\hat{k}) P_\psi(k). \quad (4.87)$$

Considerando que o volume elementar no espaço de Fourier é dado por:

$$d^3k = k^2 \sin\theta \, dk d\theta d\phi = k^2 dk d\Omega, \quad (4.88)$$

e substituindo (4.88) e (4.72) em (4.87) chegamos, finalmente, ao seguinte resultado

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 P_\psi(k) j_l^2(kx_d). \quad (4.89)$$

Para inferirmos da normalização do espectro de potência, $P_\psi(k)$, e deduzirmos sua dependência com o modelo cosmológico vamos retomar a equação (4.85), que pode ser reescrita como

$$P_\psi(k) = \langle |\Delta_T(\vec{k}, \tau_0)|^2 \rangle. \quad (4.90)$$

Em grandes escalas, as flutuações na temperatura, expressas no segundo membro de (4.90), podem ser escritas apenas em termos das flutuações no potencial gravitacional no instante do desacoplamento, como na equação (4.58), que reescrevemos, convenientemente, como:

$$\Delta_T(\tau_0) \simeq \mathbb{C}\Phi(\tau_d) . \quad (4.91)$$

Assim:

$$P_\psi(k) \simeq |\mathbb{C}\Phi(\tau_d)|^2 . \quad (4.92)$$

Podemos reescrever (4.92), em termos das flutuações iniciais no potencial gravitacional, como:

$$P_\psi(k) \simeq \mathbb{C}^2 \frac{|\Phi(\tau_d)|^2}{|\Phi(0)|^2} |\Phi(0)|^2 . \quad (4.93)$$

Substituindo (4.93) em (4.89), temos que o espectro angular de potência em grandes escalas será dado por:

$$C_l \simeq \frac{2}{\pi} \mathbb{C}^2 \left(\frac{\Phi(\tau_d)}{\Phi(0)} \right)^2 \int \frac{dk}{k} k^3 j_l^2(kx_d) |\Phi(0)|^2 . \quad (4.94)$$

Considerando o caso adiabático plano, o espectro primordial de potência é dado por uma lei de potência [25], permitindo-nos fazer:

$$k^3 |\Phi(0)|^2 = Bk^{n-1} , \quad (4.95)$$

e assim, (4.94) toma a forma:

$$C_l \simeq \frac{2}{\pi} \mathbb{C}^2 B \left(\frac{\Phi(\tau_d)}{\Phi(0)} \right)^2 \int_0^\infty dk j_l^2(kx_d) k^{n-2} . \quad (4.96)$$

Fazendo $y = x_d k \Rightarrow dy = x_d dk$ temos que (4.96) torna-se:

$$\begin{aligned} C_l &\simeq \frac{2}{\pi} \mathbb{C}^2 B \left(\frac{\Phi(\tau_d)}{\Phi(0)} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dy}{x_d} \frac{y^{n-2}}{x_d^{n-2}} j_l^2(y) \\ C_l &\simeq \frac{2}{\pi} \frac{\mathbb{C}^2 B}{x_d^{n-1}} \left(\frac{\Phi(\tau_d)}{\Phi(0)} \right)^2 \int_0^\infty dy y^{n-2} j_l^2(y) . \end{aligned} \quad (4.97)$$

Considerando a identidade [42]:

$$\int_0^\infty dx x^\nu j_l(x) j_{l'}(x) dx = \frac{\pi 2^{\nu-2} \Gamma(1-\nu) \Gamma\left(\frac{l+l'+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-l'-\nu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l'+l-\nu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l+l'-\nu+3}{2}\right)}, \quad (4.98)$$

obtemos para o espectro angular de potência em grandes escalas:

$$C_l \simeq \frac{2^{n-3} \mathbb{C}^2 B \Gamma(3-n) \Gamma\left(\frac{2l+n-1}{2}\right)}{x_d^{n-1} \Gamma^2\left(\frac{4-n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2l-n+5}{2}\right)} \left(\frac{\Phi(\tau_d)}{\Phi(0)}\right)^2. \quad (4.99)$$

No caso particular de um espectro da matéria invariante de escala ($n = 1$), tal como é discutido no Apêndice B, temos que (4.99) reduz-se para:

$$C_l \simeq \frac{\mathbb{C}^2 B}{2} \left(\frac{\Phi(\tau_d)}{\Phi(0)}\right)^2 \frac{\Gamma(2)\Gamma(l)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(l+2)}. \quad (4.100)$$

Usando resultados conhecidos da função Γ [42], a saber:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)!, \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \end{aligned}$$

a equação (4.100) torna-se:

$$C_l \simeq \frac{\mathbb{C}^2 B}{\pi} \left(\frac{\Phi(\tau_d)}{\Phi(0)}\right)^2 \frac{1}{l(l+1)}. \quad (4.101)$$

A equação (4.101) costuma ser, normalmente, expressa em termos da amplitude do espectro de potência da matéria hoje, que obedece à relação:

$$|\Delta_T(\tau_0, k)|^2 = A k^n. \quad (4.102)$$

A relação entre as duas normalizações para o espectro de potência da matéria pode ser escrita como [25]:

$$B = \frac{25}{9} (\Omega_m H_0^2)^2 \left(\frac{a_0}{D_0}\right)^2 A, \quad (4.103)$$

onde, de acordo com Bond e Efstathiou [43], temos que, para modelos com constante cosmológica, é válida a relação:

$$\Omega_m^2 \left(\frac{a_0}{D_0} \right)^2 \simeq \Omega_m^{1,53}, \quad (4.104)$$

o que nos dá, para a relação entre A e B :

$$B \simeq \frac{25}{9} \Omega_m^{1,53} H_0^4 A. \quad (4.105)$$

O desacoplamento matéria-radiação ocorre dentro da era da matéria e, levando-se em consideração que as flutuações iniciais são adiabáticas, podemos afirmar que a razão entre as flutuações no potencial gravitacional no instante do desacoplamento e as flutuações geradas na inflação cósmica, veja Hu [25], é 9/10. Ou seja, temos que:

$$\frac{\Phi(\tau_d)}{\Phi(0)} = \frac{9}{10}. \quad (4.106)$$

Desta forma, temos que a equação (4.101) pode ser escrita como:

$$l(l+1)C_l \simeq \frac{9}{4\pi} \mathbb{C}^2 \Omega_m^{1,53} H_0^4 A, \quad (4.107)$$

ou

$$l(l+1)C_l = 6C_2, \quad (4.108)$$

com o momento de quadrupolo, C_2 , dado por:

$$C_2 \simeq \frac{9 \mathbb{C}^2 \Omega_m^{1,53} H_0^4 A}{24\pi}. \quad (4.109)$$

Para o modelo padrão, temos que $\mathbb{C} = 1/3$ e a equação (4.107) no fornece:

$$l(l+1)C_l \simeq \frac{H_0^4 \Omega_m^{1,53} A}{4\pi}. \quad (4.110)$$

Esta expressão será utilizada para comparação com as previsões de outros modelos e para as nossas estimativas a partir das medidas observacionais.

A expressão dada por (4.107), que dá os modos do espectro angular de potência das anisotropias da RCF em grandes escalas nos modelos com matéria escura fria (CDM) e com constante cosmológica (Λ CDM), também é válida, como veremos no próximo capítulo, para o modelo com decaimento da energia do vácuo. Ao especificarmos o modelo precisamos calcular a constante \mathcal{C} e, com seu valor, podemos comparar o modelo aos dados observacionais.

* * *

Capítulo 5

Modelo com Decaimento do Vácuo

Dados recentes em várias áreas da Cosmologia indicam que a densidade de matéria do universo é bem menor que a densidade crítica [44, 45] e que o universo é espacialmente plano [46, 47, 48], o que nos leva a concluir que sua densidade é dominada por uma componente energética desconhecida. Esta componente é responsável pela atual fase com expansão acelerada do cosmos [49, 50] e é chamada de energia escura ou quintessência.

Há alguns candidatos possíveis a energia escura. Um destes candidatos é a chamada constante cosmológica ou densidade de energia do vácuo. Porém, o valor estimado através das medidas do parâmetro de Hubble para a densidade de energia do vácuo hoje ($\rho_{vac} \sim 10^{-47}$ GeV) difere das estimativas teóricas ($\rho_{vac} \sim 10^{70}$ GeV) por mais de uma centena de ordens de grandeza. Várias aproximações foram propostas para remover esta enorme discrepância sem, no entanto, haver uma solução convincente [51, 52].

Nos últimos anos vários autores analisaram a possibilidade de uma densidade de energia do vácuo que decai continuamente. Assim, ela seria uma quantidade dependente do tempo e acoplada aos outros campos materiais e à expansão do universo.

Começamos este capítulo descrevendo o modelo com decaimento do vácuo proposto por Bradenberger, Lima e Zanchin [53] e que foi construído

a partir dos trabalhos de Lima e colaboradores [54]-[58] e de Mukhanov e outros [36]. Em seguida damos prosseguimento aos cálculos de Bradenberger e colaboradores e obtemos a forma explícita das flutuações na densidade de energia para o caso relativístico em grande escala e para a forma das anisotropias da RCF para o efeito Sachs-Wolfe ordinário e, a partir destas expressões, obtemos o espectro angular de potência em termos das razões de decaimento da densidade de energia do vácuo, permitindo-nos fazer uma estimativa para os valores destas razões a partir das medidas observacionais do satélite WMAP e para que estes valores possam ser comparados com valores obtidos por meio de outras análises.

5.1 Descrição

O modelo com decaimento do vácuo é obtido a partir das equações cosmológicas não-perturbadas para modelos com energia escura, onde o termo da constante cosmológica é levado em um termo $\Lambda(t)$. Por simplicidade, considera-se que o espaço-tempo é descrito pelo elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) com curvatura espacial nula que é dado por:

$$ds^2 = a^2(\tau)[d\tau^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2], \quad (5.1)$$

onde fez-se $c = 1$, $a(\tau)$ é o fator de escala e τ é o tempo conforme que é definido em termos do tempo cosmológico, t , como:

$$d\tau = \frac{dt}{a}. \quad (5.2)$$

A componente energética do espaço-tempo é representada por um fluido perfeito com densidade ϵ e pressão p e mais o termo de energia escura que tem densidade de energia dada por:

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda(\tau)}{8\pi G}, \quad (5.3)$$

e pressão

$$p_{vac} = -\rho_{vac} . \quad (5.4)$$

Assim, as equações de campo de Einstein podem ser escritas como:

$$8\pi G(\epsilon + \rho_{vac}) \equiv 8\pi G\rho = 3\frac{a'^2}{a^4} , \quad (5.5)$$

$$8\pi G(p - \rho_{vac}) \equiv 8\pi GP = -2\frac{a''}{a^3} + \frac{a'^2}{a^4} , \quad (5.6)$$

onde ρ e P são, respectivamente, a densidade de energia e a pressão do fluido efetivo.

Para o caso em que o fluido efetivo seja dado pela mistura da componente do vácuo mais matéria e radiação, temos que:

$$\epsilon = \epsilon_m + \epsilon_r , \quad (5.7)$$

$$p = p_m + p_r . \quad (5.8)$$

Se uma das componentes domina a densidade de energia do meio, para todas as propostas práticas esta obedecerá a equação de estado dada por:

$$p = (\gamma - 1)\epsilon , \quad (5.9)$$

onde $\gamma = 4/3$ para radiação e $\gamma = 1$ para poeira.

Neste caso, de (5.5) e (5.6), temos que a densidade de energia e o fator de escala satisfazem as equações:

$$\mathcal{H}' + \left(\frac{3\gamma - 2}{2}\right)\mathcal{H}^2 - \frac{\gamma}{2}\Lambda(\tau)a^2 = 0 , \quad (5.10)$$

$$\epsilon' + 3\gamma\epsilon\mathcal{H} = -\rho'_{vac} , \quad (5.11)$$

onde:

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a}, \quad (5.12)$$

e o apóstrofo representa derivada com respeito ao tempo conforme.

Também tem-se que o fluido total obedece a equação de estado:

$$P = (\nu - 1)\rho, \quad (5.13)$$

onde ν é uma constante positiva. Assim, encontra-se:

$$a = a_0 \tau^{\frac{2}{3\nu-2}}, \quad (5.14)$$

para $\nu \neq 2/3$, e

$$a = e^{a_0 \tau}, \quad (5.15)$$

para $\nu = 2/3$.

Para obter as perturbações de primeira ordem no modelo com decaimento do vácuo considera-se que a métrica dada por (5.1), no calibre longitudinal Newtoniano ou calibre de Poisson, assume a forma:

$$ds^2 = a^2(\tau) [(1 + 2\Phi)d\tau^2 - (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (5.16)$$

No caso em consideração, ou seja, um fluido perfeito na presença de um termo Λ variável que se comporta como uma mistura de dois fluidos isotrópicos, as equações para as perturbações de primeira ordem são [53]:

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - 3\mathcal{H}^2\Phi = 4\pi G a^2 (\delta\epsilon + \delta\rho_{vac}), \quad (5.17)$$

$$(a\Phi)'_{,i} = 4\pi G a^2 (\epsilon + p)\delta u_i, \quad (5.18)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 (\delta p - \delta\rho_{vac}). \quad (5.19)$$

Definindo as quantidades perturbadas para esta mistura de fluidos como:

$$\delta\rho = \delta\epsilon + \delta\rho_{vac}, \quad (5.20)$$

$$\delta P = \delta p + \delta p_{vac} = \delta p - \delta\rho_{vac}, \quad (5.21)$$

$$\delta p = v_s^2 \delta\epsilon + \eta \delta\sigma, \quad (5.22)$$

onde v_s é a velocidade do som no meio adiabático e dada por:

$$v_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\sigma}, \quad (5.23)$$

e

$$\eta = \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right)_\rho, \quad (5.24)$$

com σ sendo a entropia por partícula da radiação. De acordo Mukhanov e outros [36] estas quantidades são dadas por:

$$v_s^2 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3\epsilon_m}{4\epsilon_r}\right)^{-1}, \quad (5.25)$$

$$\eta = \frac{v_s^2 \epsilon_m}{\sigma}. \quad (5.26)$$

Uma outra quantidade conveniente na presente análise dos modelos com decaimento do vácuo, é o parâmetro adimensional e dependente do tempo:

$$\chi = \frac{\rho_{vac}}{\rho_{vac} + \epsilon}, \quad (5.27)$$

onde $0 \leq \chi \leq 1$. Assim, a flutuação na densidade de energia do vácuo, escrita em termos das flutuações $\delta\chi$, é dada por:

$$\delta\rho_{vac} = \frac{\chi}{1-\chi} \delta\epsilon + \frac{\epsilon}{(1-\chi)^2} \delta\chi. \quad (5.28)$$

Esta expressão permite-nos analisar, inclusive, o caso em que o decaimento da densidade de energia do vácuo não seja homogêneo.

Também vamos utilizar que a densidade de energia do vácuo pode ser escrita, em termos da densidade de energia total, como:

$$\rho_{vac} = \beta \rho, \quad (5.29)$$

o que implica que podemos escrever uma relação entre os coeficientes das equações de estado dada por:

$$\nu = \gamma(1 - \beta), \quad (5.30)$$

O β dá a fração da energia do vácuo em relação à energia total. No entanto, o designaremos como razão de decaimento da densidade do vácuo, pois, no caso em que β seja constante, esta quantidade dá a taxa de decaimento da densidade de energia do vácuo nos outros constituintes do universo.

5.2 Soluções para as flutuações

O passo seguinte é especificar o tipo de decaimento do vácuo para obtermos as soluções específicas para as flutuações no potencial gravitacional e, a partir delas, as expressões para a densidade de energia de modo a construirmos as expressões para as flutuações na temperatura da RCF e seu espectro angular de potência.

5.2.1 Decaimento homogêneo do vácuo (*Smoothly decaying vacuum*)

Para começar, assume-se que as perturbações são adiabáticas ($\delta\sigma = 0$). E, como o vácuo vai decair homogeneamente em cada ponto do espaço,

temos que as flutuações na densidade de energia do vácuo são nulas ($\delta\rho_{vac} = 0$).

Brandenberger e colaboradores [53], ao considerarem o decaimento homogêneo, calcularam separadamente as flutuações no potencial gravitacional para o caso geral em que $\nu \neq 2/3$ e para o caso particular em que $\nu = 2/3$. Aqui, no entanto, vamos considerar apenas o caso geral e apresentar a solução do potencial gravitacional para grandes escalas angulares e obter as soluções correspondentes para as flutuações na densidade. Assim, a solução para o potencial gravitacional é dada por [53]:

$$\Phi = B_1 \tau^{-\frac{2+3(2\gamma-\nu)}{2(3\nu-2)}+\mu} + B_2 \tau^{-\frac{2+3(2\gamma-\nu)}{2(3\nu-2)}-\mu}, \quad (5.31)$$

onde:

$$\mu = \left\{ \frac{1}{4} + 3 \left[\frac{2\nu + (\gamma - \nu)(3\gamma - 2)}{(3\nu - 2)^2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (5.32)$$

O modo representado pelo segundo termo em (5.31) é sempre decrescente, não contribuindo para a formação de anisotropias na temperatura da radiação e, portanto, deve ser desconsiderado.

Aqui e também no decaimento não-homogêneo, consideraremos que, em primeira ordem, podemos tomar que a pressão do fluido matéria-radiação na última superfície de espalhamento, por estarmos na era da matéria, é aproximadamente igual à pressão da matéria ($p = 0$), o que nos fornece $\gamma = 1$. Assim, temos que a potência de τ em (5.31) será:

$$x = \frac{3\nu - 8 + \sqrt{9\nu^2 + 16}}{2(3\nu - 2)}. \quad (5.33)$$

Como estamos interessados em expressar a dependência de Φ com β , vamos utilizar a condição $\gamma = 1$ na equação (5.30), o que nos dá:

$$\nu = 1 - \beta. \quad (5.34)$$

Assim, podemos reescrever (5.33) como:

$$x = \frac{3\beta + 5 - \sqrt{9\beta(\beta - 2) + 25}}{2(3\beta - 1)}. \quad (5.35)$$

Desta forma, o potencial gravitacional em grandes escalas será:

$$\Phi = B_1 \tau^{\frac{3\beta+5-\sqrt{9\beta(\beta-2)+25}}{2(3\beta-1)}}. \quad (5.36)$$

Para o cálculo da flutuação na densidade de energia, δ , vamos partir da equação (5.17). Lembrando que em grandes escalas o laplaciano de Φ é nulo e que estamos no caso de decaimento homogêneo do vácuo e que o contraste de densidade é dado por:

$$\delta = \frac{\epsilon - \bar{\epsilon}}{\epsilon}. \quad (5.37)$$

Desta forma, (5.17) pode ser escrita como:

$$-3\mathcal{H}\Phi' - 3\mathcal{H}^2\Phi = 4\pi G a^2 \epsilon \delta. \quad (5.38)$$

Neste modelo, é válido:

$$\epsilon = (1 - \beta)\rho, \quad (5.39)$$

e, para modelos planos, temos:

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (5.40)$$

onde:

$$H = \frac{\mathcal{H}}{a}. \quad (5.41)$$

Assim, reescrevemos (5.38) na forma:

$$\delta = \frac{2}{(1 - \beta)} \left[-\frac{\Phi'}{\mathcal{H}} - \Phi \right]. \quad (5.42)$$

A definição de \mathcal{H} é dada por (5.12). Pelas equações (5.14) e (5.34), temos:

$$a = a_0 \tau^{\frac{2}{1-3\beta}}, \quad (5.43)$$

e, conseqüentemente:

$$a' = \frac{2a_0}{1-3\beta} \tau^{\frac{2}{1-3\beta}-1}, \quad (5.44)$$

o que nos dá:

$$\mathcal{H} = \frac{2}{1-3\beta} \tau^{-1}. \quad (5.45)$$

Mas, de (5.36) temos que:

$$\Phi' = B_1 \frac{(5 + 3\beta - \sqrt{9\beta(\beta - 2) + 25})}{2(3\beta - 1)} \tau^{\frac{3\beta+5-\sqrt{9\beta(\beta-2)+25}}{2(3\beta-1)}-1}. \quad (5.46)$$

Das equações (5.45) e (5.46), podemos escrever:

$$-\frac{\Phi'}{\mathcal{H}} = \frac{5 + 3\beta - \sqrt{9\beta(\beta - 2) + 25}}{4} \Phi. \quad (5.47)$$

Substituindo (5.47) em (5.42) ficamos com:

$$\delta = \left[\frac{1 + 3\beta - \sqrt{9\beta(\beta - 2) + 25}}{2(1 - \beta)} \right] \Phi. \quad (5.48)$$

A partir da equação (5.48), podemos expressar a anisotropia da RCF e calcular o espectro angular de potência para o modelo com decaimento homogêneo do vácuo. Comparando-a com a equação (4.57) que dá a forma da flutuação na densidade em termos do potencial gravitacional para o modelo (Λ)CDM, vemos que no modelo com decaimento homogêneo do vácuo há uma forte dependência com a razão de decaimento β . Também podemos perceber que quando $\beta = 0$ a equação (5.48) reduz-se à (4.57),

o que nos leva a concluir que o modelo (Λ) CDM pode ser considerado um caso particular do modelos $\Lambda(t)$.

5.2.2 Decaimento não-homogêneo do vácuo (*Non-smoothly decaying vacuum*)

Para o caso do decaimento não-homogêneo temos que, em grandes escalas, o potencial gravitacional é constante:

$$\Phi = B_2 . \quad (5.49)$$

Para determinar a flutuação na densidade de energia, retornamos à equação (5.17). Neste caso, temos que $\Phi' = 0$ e também, por estarmos em grande escalas, o laplaciano novamente se anula, o que nos dá:

$$-3\mathcal{H}^2\Phi = 4\pi G a^2 (\delta\epsilon + \delta\rho_{vac}) . \quad (5.50)$$

Pela equação (5.29) e considerando que na era da matéria podemos fazer:

$$\rho \simeq \rho_{vac} + \epsilon , \quad (5.51)$$

temos que:

$$\rho_{vac} = \frac{\beta}{1-\beta}\epsilon . \quad (5.52)$$

Desta forma, podemos escrever que:

$$\delta\epsilon + \delta\rho_{vac} = \frac{1}{1-\beta}\delta\epsilon . \quad (5.53)$$

Substituindo (5.53) em (5.50) e pela definição do contraste de densidade, temos:

$$-3\mathcal{H}^2\Phi = \frac{4\pi G a^2 \epsilon \delta}{1 - \beta}. \quad (5.54)$$

Pela equação (5.39), podemos reescrever (5.54) como:

$$-3\mathcal{H}^2\Phi = 4\pi G a^2 \rho \delta. \quad (5.55)$$

Substituindo (5.40) e (5.41) em (5.55) chegamos finalmente à relação entre as flutuações na densidade de energia e no potencial gravitacional para o modelo com decaimento não-homogêneo do vácuo:

$$\delta = -2\Phi. \quad (5.56)$$

Mesmo que para o decaimento não-homogêneo, a flutuação na densidade de energia em termos do potencial gravitacional tenha a mesma forma apresentada no modelo Λ CDM, a anisotropia na temperatura, como veremos logo a seguir, tem uma forte dependência com a razão de decaimento.

5.3 As Anisotropias e o Efeito Sachs-Wolfe Ordinário

Bradenberger e colaboradores [53] obtêm, no modelo com decaimento do vácuo, a expressão geral para as anisotropias na temperatura da radiação cósmica de fundo a partir das soluções perturbadas para as flutuações no fluido relativístico e assumindo que a energia do vácuo, no lugar de decair em todos os tipos de componentes presentes no modelo, decai apenas em matéria escura e radiação. Assim a equação (5.29) pode ser reescrita como:

$$\rho_{vac} = \frac{\beta_r}{1 - \beta_r} \epsilon_r + \frac{\beta_m}{1 - \beta_m} \epsilon_m, \quad (5.57)$$

onde β_r e β_m são, respectivamente, as razões de decaimento da energia do vácuo em radiação e matéria.

Na era da matéria podemos negligenciar a contribuição da densidade da radiação para a dinâmica do universo e, desta forma, todos os resultados obtidos até aqui continuam válidos e apenas devemos repassar a razão de decaimento, β , pela razão de decaimento em matéria, β_m .

Temos, assim, que a expressão geral para a anisotropia na RCF é escrita como [53]:

$$\Delta_T(\tau_r) = (1-\beta_r) \left[\frac{1}{3}\delta_m(\tau_r) + \frac{3+2\beta_r-5\beta_m}{3(1-\beta_m)}\Phi(\tau_r) + n^i v_i(\tau_r) + 2 \int_{\tau_r}^{\tau_o} dv \frac{\partial\Phi(\vec{x}, v)}{\partial v} \right]. \quad (5.58)$$

Esta equação dá, em primeira ordem, os efeitos geradores das anisotropias.

Para nosso estudo vamos considerar, assim como no modelo Λ CDM, apenas a contribuição do efeito Sachs-Wolfe ordinário para a formação de anisotropias na RCF em grandes escalas angulares, desconsiderando, assim, a contribuição do efeito Sachs-Wolfe integrado (último termo). Os efeitos causais também podem ser ignorados por estarmos fora do horizonte na última superfície de espalhamento, ou seja, o terceiro termo em (5.58) será desprezado, o que nos fornece:

$$\Delta_T(\tau_r) = (1-\beta_r) \left[\frac{1}{3}\delta_m(\tau_r) + \frac{3+2\beta_r-5\beta_m}{3(1-\beta_m)}\Phi(\tau_r) \right]. \quad (5.59)$$

Agora vamos calcular, explicitamente, a expressão para a contribuição do efeito Sachs-Wolfe para as anisotropias no caso dos decaimentos homogêneo e não-homogêneo.

a) Decaimento homogêneo

Voltando à expressão obtida para a flutuação na densidade de energia no decaimento homogêneo, equação (5.48), e substituindo-a na equação (5.59) temos:

$$\Delta_T = \frac{1 - \beta_r}{1 - \beta_m} \left[\frac{7 - 7\beta_m + 4\beta_r - \sqrt{9\beta_m(\beta_m - 2) + 25}}{2} \right] \frac{\Phi}{3}. \quad (5.60)$$

Comparando (5.60) com (4.92) podemos associar a constante \mathbb{C} que no modelo Λ CDM é igual a $1/3$, como sendo:

$$\mathbb{C} = \frac{f(\beta_r, \beta_m)}{3}. \quad (5.61)$$

Assim podemos calcular o espectro angular de potência das anisotropias da RCF para grandes escalas angulares no modelo com decaimento do vácuo da mesma maneira que o calculamos para o modelo (Λ) CDM e associar a esta função f a dependência com os parâmetros do nosso modelo:

$$f(\beta_r, \beta_m) = \frac{1 - \beta_r}{1 - \beta_m} \left[\frac{7 - 7\beta_m + 4\beta_r - \sqrt{9\beta_m(\beta_m - 2) + 25}}{2} \right]. \quad (5.62)$$

E, a partir dos dados observacionais, trabalharemos esta expressão a fim de usá-la para impor um limite superior nas razões β_m e β_r para o decaimento homogêneo.

b) Decaimento não-homogêneo

Para o decaimento não-homogêneo, vamos substituir a expressão obtida para as flutuações na densidade de energia, equação (5.56), na equação para as anisotropias na temperatura da RCF, equação (5.59). Assim, temos:

$$\Delta_T = \frac{1 - \beta_r}{1 - \beta_m} (1 + 2\beta_r - 3\beta_m) \frac{\Phi}{3}. \quad (5.63)$$

Comparando a equação (5.63) com (4.92) temos que a constante associada à anisotropia na temperatura pode, também neste caso, ser escrita como:

$$\mathbb{C} = \frac{f(\beta_r, \beta_m)}{3}, \quad (5.64)$$

o que nos dá para a função f :

$$f(\beta_r, \beta_m) = \left(\frac{1 - \beta_r}{1 - \beta_m} \right) (1 + 2\beta_r - 3\beta_m), \quad (5.65)$$

que é a expressão que trabalharemos para estimar as razões β_m e β_r no decaimento não-homogêneo.

5.4 Espectro Angular de Potência

Na secção anterior, obtivemos as expressões para as anisotropias da RCF em grande escala no modelo $\Lambda(t)$ e as escrevemos de forma que, por comparação com as expressões para o modelo Λ CDM, pudemos averiguar que o cálculo do espectro angular de potência é o mesmo já feito no capítulo anterior. Assim, o C_l em grande escala será dado pela equação (4.107):

$$l(l+1)C_l \simeq \frac{9}{4\pi} \mathbb{C}^2 \Omega_m^{1,53} H_0^4 A, \quad (5.66)$$

onde apenas temos que substituir nela, para o $\Lambda(t)$, a expressão dada por (5.61) o que nos fornece:

$$l(l+1)C_l \simeq \frac{\Omega_m^{1,53} H_0^4 A}{4\pi} f^2(\beta_m, \beta_r). \quad (5.67)$$

5.5 Estimativa das Razões de Decaimento

Para fazermos a estimativa da razão de decaimento a partir dos dados observacionais, vamos utilizar a expressão obtida para o espectro angular de potência (equação (5.67)) e as expressões obtidas para a função f

nos decaimentos homogêneo, equação (5.62), e não-homogêneo, equação (5.65). Antes, porém, vamos lembrar que, por estarmos em grandes escalas, podemos utilizar a expressão para o momento de quadrupolo que é dada pela equação (4.109) e, para o modelo Λ CDM, vale:

$$C_2^{\Lambda CDM} = \frac{\Omega_m^{1,53} H_0^4 A}{24\pi}. \quad (5.68)$$

Para o modelo $\Lambda(t)$, temos:

$$C_2^{\Lambda(t)} = \frac{\Omega_m^{1,53} H_0^4 A}{24\pi} f^2(\beta_m, \beta_r). \quad (5.69)$$

Substituindo (5.68) em (5.69), ficamos com:

$$C_2^{\Lambda(t)} = C_2^{\Lambda CDM} f^2(\beta_m, \beta_r). \quad (5.70)$$

Como estamos fazendo uma aproximação linear, podemos dizer, sem perda de generalidade, que $C_2^{\Lambda(t)}$ difere de $C_2^{\Lambda CDM}$ por uma pequena perturbação, ou seja:

$$f^2 = 1 + \alpha. \quad (5.71)$$

Substituindo (5.71) em (5.70), temos:

$$C_2^{\Lambda(t)} = (1 + \alpha) C_2^{\Lambda CDM}, \quad (5.72)$$

o que nos dá:

$$\alpha = \frac{C_2^{\Lambda(t)} - C_2^{\Lambda CDM}}{C_2^{\Lambda CDM}}. \quad (5.73)$$

Assim, o α nos dá a medida do quanto o modelo com decaimento do vácuo se afasta do modelo Λ CDM.

Segundo a análise estatística feita para os dados do experimento WMAP [46], o modelo Λ CDM foi considerado, dentre os modelos analisados, o que melhor se ajustou aos dados. Devemos lembrar que esta análise não levou em consideração modelos com decaimento da energia escura.

Assim, podemos afirmar que, para uma primeira aproximação, a diferença entre os momentos de quadrupolo dos modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ pode ser associada à largura da incerteza com que o WMAP mediu o quadrupolo. E o $C_2^{\Lambda\text{CDM}}$ pode ser associado ao valor médio do quadrupolo medido. Assim:

$$\alpha = \frac{\delta C_2}{\bar{C}_2}. \quad (5.74)$$

Já pela previsão teórica, podemos obter o α da expressão de f e, neste caso, devemos fazê-lo para os dois tipos de decaimento separadamente.

a) Decaimento homogêneo

Partindo da equação (5.62) que dá a expressão de f para o decaimento homogêneo, vamos linearizá-la desprezando os termos quadráticos em β_r e β_m , por estarmos interessados em uma aproximação de primeira ordem e pelo fato de que as razões de decaimento devem ser pequenas. Assim, obtemos:

$$f(\beta_r, \beta_m) \simeq 1 + \beta_r - \frac{8}{5}\beta_m. \quad (5.75)$$

Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} f^2(\beta_r, \beta_m) &\simeq \left(1 + \beta_r - \frac{8}{5}\beta_m\right)^2 \\ f^2(\beta_r, \beta_m) &\simeq 1 + 2\beta_r - \frac{16}{5}\beta_m. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Comparando as equações (5.71) e (5.76), finalmente, temos:

$$\alpha = 2\beta_r - \frac{16}{5}\beta_m. \quad (5.77)$$

b) Decaimento não-homogêneo

Neste caso, vamos partir da expressão (5.65) e linearizá-la em termos das razões de decaimento. O que nos fornece:

$$f(\beta_r, \beta_m) \simeq 1 + \beta_r - 2\beta_m, \quad (5.78)$$

e, assim, temos:

$$\begin{aligned} f^2(\beta_r, \beta_m) &\simeq (1 + \beta_r - 2\beta_m)^2 \\ f^2(\beta_r, \beta_m) &\simeq 1 + 2\beta_r - 4\beta_m. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Pelas equações (5.71) e (5.79), obtemos:

$$\alpha = 2\beta_r - 4\beta_m. \quad (5.80)$$

Antes de seguirmos, devemos lembrar que esta estimativa analítica é feita em primeira ordem e, pela forma como α foi definido, permite-nos inferir o limite superior das razões de decaimento que ajustam o modelo $\Lambda(t)$ ao quadrupolo medido pelo WMAP. Também vale ressaltar que o sinal negativo nas equações (5.77) e (5.80) indica que o decaimento da energia do vácuo em matéria contribui para diminuir a anisotropia na temperatura da RCF, mas que ao calcularmos o limite de β_m , devemos considerar o módulo do valor obtido.

Efstathiou [59] obtém, através de uma análise de máxima verossimilhança, o intervalo de valores do momento de quadrupolo para as medidas do WMAP:

$$C_2 = [176, 250] \mu\text{K}^2, \quad (5.81)$$

desta forma, substituindo o valor médio e largura do intervalo em (5.74), ficamos com:

$$\alpha = \frac{74}{213}. \quad (5.82)$$

Novamente vamos analisar separadamente os dois casos de decaimento.

a) Decaimento homogêneo

Igualando as expressões (5.77) e (5.82) temos:

$$2\beta_r - \frac{16}{5}\beta_m \leq l\frac{74}{213}. \quad (5.83)$$

Para obtermos o limite superior em β_m vamos considerar que a densidade de energia do vácuo decai apenas em matéria ($\beta_r \simeq 0$). Fazendo as contas encontramos, então, que:

$$\beta_m \leq 0,11. \quad (5.84)$$

Para o limite em β_r consideramos o decaimento da densidade de energia do vácuo apenas em radiação ($\beta_m = 0$). Assim, temos que:

$$\beta_r \leq 0,17, \quad (5.85)$$

que está de acordo com o valor obtido no referido trabalho e que é $\beta_r = 0,16$.

b) Decaimento não-homogêneo

Neste caso, precisamos igualar as expressões (5.80) e (5.82) para α . Então:

$$2\beta_r - 4\beta_m \leq \frac{74}{213}. \quad (5.86)$$

Considerando o decaimento apenas em matéria, encontramos como limite para β_m :

$$\beta_m \leq 0,09 . \quad (5.87)$$

E, considerando o decaimento apenas em radiação, encontramos:

$$\beta_r \leq 0,17 . \quad (5.88)$$

Vemos que os limites superiores obtidos para as razões β_m e β_r , nesta aproximação, para os decaimentos homogêneo e não-homogêneo são bastante parecidos.

* * *

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Vamos começar nossas conclusões discutindo brevemente os principais resultados que foram deduzidos ou apresentados nesta dissertação.

Primeiramente, apresentamos a expressão obtida por Brademberger e colaboradores [53] para as anisotropias da RCF no modelo com decaimento da densidade de energia do vácuo (equação 5.58), onde percebemos claramente que a forma matemática das anisotropias é drasticamente influenciada pelo decaimento do vácuo. Comparando tal expressão com a forma das anisotropias no modelo Λ CDM (equação 4.55), vemos que a diferença entre tais expressões está no fato de que a forma matemática de cada efeito, no modelo $\Lambda(t)$, depende das razões de decaimento em matéria e em radiação, respectivamente, β_m e β_r . É, tão importante quanto, vemos que o modelo Λ CDM é um caso particular deste modelo $\Lambda(t)$ com $\beta_m = \beta_r = 0$.

Em relação ao espectro angular de potência que foi definido e (re)deduzido a partir da distribuição angular das anisotropias da RCF, temos que ele só pode ser calculado via aproximação numérica. Mas, para grandes escalas angulares, seu cálculo analítico torna-se simples em ambas as classes de modelo, $\Lambda(t)$ e Λ CDM.

O espectro angular de potência calculado para o modelo Λ CDM em grandes escalas é um caso particular do calculado para $\Lambda(t)$ quando temos

$\beta_m = \beta_r = 0$. E suas expressões diferem, em primeira ordem, por uma perturbação, cuja forma matemática, linearizada em termos das razões de decaimento, permitiu-nos estimar os limites superiores destas razões, onde, para tanto, fizemos uso do momento de quadrupólo medido pelo experimento do satélite WMAP.

Nossas estimativas foram feitas considerando-se dois tipos de decaimento da densidade de energia do vácuo: decaimento homogêneo, onde obtivemos $\beta_m \leq 0,11$ e $\beta_r \leq 0,17$; e decaimento não-homogêneo, onde obtivemos $\beta_m \leq 0,09$ e $\beta_r \leq 0,17$. De onde vemos que, em primeira ordem e considerando que apenas o efeito Sachs-Wolfe ordinário contribui para a formação de anisotropias em grande escala, o tipo de decaimento do vácuo não influi significativamente nos limites de β_m e β_r .

Os limites obtidos para β_r estão de acordo com outros limites obtidos por outros autores. Entre estes podemos citar os limites obtidos por: Lima [58] a partir de cálculos de nucleossíntese, a saber $\beta_r \leq 0,16$; Birkel e Sarkar [60] a partir de cálculos de nucleossíntese, a saber $\beta_r \leq 0,13$; e Molaro e colaboradores [61] a partir de medidas de temperatura da RCF em altos *redshifts*, $\beta_r \leq 0,22$.

Para a razão β_m não encontramos outras estimativas com às quais pudéssemos comparar o valor que obtivemos.

Os valores obtidos em nossa estimativa para as razões de decaimento nos fazem crer que é plausível que a discrepância entre a estimativa teórica e a medida observacional da densidade de energia do vácuo seja explicada através de um modelo cosmológico que faça uso do decaimento da densidade de energia do vácuo. No entanto, para atestar a veracidade desta afirmativa no modelo estudado, precisamos refinar nossa estimativa para as razões de decaimento incluindo, para grandes escalas, o efeito Sachs-Wolfe integrado que, neste modelo, pode contribuir significativamente.

Também será necessário modificar um dos códigos que calculam numericamente o espectro angular de potência (o CMBFast, por exemplo)

e transformar β_m e β_r em parâmetros a serem determinados pela análise estatística das medidas observacionais. Assim será possível determinar os valores mais prováveis e barras de erro das razões de decaimento que ajustam as medidas observacionais e, conseqüentemente, o quanto esta classe de modelos se afasta de Λ CDM e se é melhor ou pior para ajustar o espectro angular de potência medido.

Ao concluirmos esta dissertação temos a certeza de ter cumprido nossos principais objetivos. Pois começamos a estudar e entender a física da RCF e de suas anisotropias, introduzimos um, mesmo ínfimo, acréscimo ao universo da física ao darmos seguimento ao estudo da RCF no modelo com decaimento da energia do vácuo proposto por Bradenberger e colaboradores e, a partir do qual, enxergamos diversas possibilidades e perspectivas de trabalho nesta tão vasta área da Cosmologia.

* * *

Apêndice A

Tamanho Angular do Horizonte

Neste apêndice, vamos deduzir o tamanho angular do horizonte no instante do desacoplamento para o modelo com matéria escura fria. Os cálculos aqui apresentados são baseados no livro do Padmanabhan [30] e nos permitem definir a escala angular a partir da qual podemos separar as anisotropias como de grande e de pequena escala.

Um processo físico caracterizado por um comprimento L em um *redshift* z subtende um ângulo no céu dado por:

$$\theta(L) = \frac{L}{d_A(z)}, \quad (\text{A.1})$$

onde $d_A(z)$ é a distância diâmetro angular medida do observador, na origem, ao processo. Esta distância vale:

$$d_A(z) = r_1 a(z_1). \quad (\text{A.2})$$

Podemos escrever que:

$$a(z) = \frac{a_0}{1+z}, \quad (\text{A.3})$$

o que nos dá:

$$d_A(z) = \frac{a_0 r_1}{1+z_1}. \quad (\text{A.4})$$

Para determinarmos a expressão para r_1 , vamos considerar a métrica de Robertson-Walker em coordenadas esféricas (equação 2.1):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (\text{A.5})$$

onde fizemos $c = 1$.

Vamos considerar também que o fóton foi emitido em $t = t_1$ por uma fonte em (r_1, θ, ϕ) e foi detectado na origem em $t = t_0$. Ao longo da geodésica radial dos fótons temos que $ds = 0$ e $d\theta = d\phi = 0$. Assim:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} = - \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (\text{A.6})$$

O intervalo infinitesimal de tempo viajado por um fóton pode ser relacionado ao intervalo infinitesimal de *redshift* em termos da distância de horizonte, d_H , como:

$$dt = \frac{dz}{1 + z} d_H(z). \quad (\text{A.7})$$

Usando (A.3) e (A.7), temos que (A.6) toma a forma:

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \frac{1}{a_0} \int_0^z dz d_H(z). \quad (\text{A.8})$$

A expressão mais geral para a função distância de horizonte é obtida a partir das equações de Einstein e dada por:

$$d_H(z) = \frac{1}{H_0} \left[\Omega_\gamma(1 + z)^4 + \Omega_m(1 + z)^3 + (1 - \Omega)(1 + z)^2 + \Omega_\Lambda \right]^{-1/2}. \quad (\text{A.9})$$

Substituindo (A.9) em (A.8) e considerando um universo dominado pela matéria ($\Omega = \Omega_m$) e com $\Omega_\Lambda = 0$, obtemos:

$$r_1(z) = \frac{2\Omega z + 2(\Omega - 2)(\sqrt{\Omega z + 1} - 1)}{H_0 a_0 \Omega^2 (1 + z)}. \quad (\text{A.10})$$

Para $z \gg 1$ esta equação reduz-se a:

$$r_1(z) = \frac{2}{H_0 a_0 \Omega}. \quad (\text{A.11})$$

Substituindo (A.11) em (A.4), com $z \gg 1$, ficamos com:

$$d_A(z) = \frac{2}{H_0 \Omega z}. \quad (\text{A.12})$$

Substituindo (A.12) em (A.1), temos:

$$\theta(L) = \left(\frac{H_0 \Omega}{2} \right) L z_d. \quad (\text{A.13})$$

Para obtermos o ângulo de horizonte devemos considerar uma região que, no desacoplamento, tinha um tamanho igual ao raio de Hubble, ou seja:

$$L = d_H(z_d). \quad (\text{A.14})$$

Pela equação (A.9) e considerando o modelo padrão ($\Omega = \Omega_m; \Omega_\Lambda = 0$) temos:

$$d_H(z_d) = H_0^{-1} (1 + z_d)^{-1} (1 + \Omega z_d)^{-1/2}, \quad (\text{A.15})$$

e, para $z_d \gg 1$, ficamos com:

$$d_H(z_d) = (H_0 z_d)^{-1} (\Omega z_d)^{-1/2}. \quad (\text{A.16})$$

Substituindo (A.16) e (A.14) em (A.13) e definindo $\theta_H \equiv \theta(d_h)$, temos:

$$\theta_H = \frac{1}{2} \Omega^{1/2} \left(\frac{1}{z_d} \right)^{1/2}. \quad (\text{A.17})$$

Convertendo o ângulo de radianos para graus podemos escrevê-lo como:

$$\frac{1}{2} \text{rad} = \frac{90^\circ}{\pi} = \frac{9^\circ}{\pi \sqrt{11}} \sqrt{1100} \simeq 0,86^\circ \sqrt{1100}, \quad (\text{A.18})$$

o que nos dá para a equação (A.17):

$$\theta_H = 0,86^\circ \Omega^{1/2} \left(\frac{1100}{z_d} \right)^{1/2}. \quad (\text{A.19})$$

O *redshift* em que ocorre o desacoplamento é ~ 1100 . Desta forma, o tamanho angular do horizonte no desacoplamento visto no céu por um observador hoje, para o modelo padrão, vale:

$$\theta_H \simeq 1^\circ. \quad (\text{A.20})$$

Por esta razão dizemos que as anisotropias da RCF medidas em escalas angulares maiores que 1° estão fora do horizonte e são chamadas de anisotropias de grande escala, enquanto que as anisotropias medidas em ângulos menores estão dentro do horizonte e são anisotropias de pequena escala.

O ângulo de horizonte varia com o modelo e, portanto, este cálculo nos dá apenas sua ordem de grandeza, seu valor exato para nosso universo deve ser determinado pela análise estatística das medidas observacionais do espectro angular de potência da RCF.

* * *

Apêndice B

Espectro de Potência da Matéria

Neste apêndice, vamos deduzir o espectro de potência das flutuações na densidade de matéria e inferir sua forma em termos das flutuações observadas hoje. Vamos, também, discutir brevemente sua evolução com a expansão do universo. As principais referências deste apêndice são Peacock [21] e Longair [63].

Para começar, vamos assumir que o universo pode ser dividido em células cúbicas de volume V_u . A densidade média neste volume é $\bar{\rho}$ e $\rho(\vec{x})$ é a densidade no ponto \vec{x} com respeito a alguma origem arbitrária. Assim, definimos a flutuação ou contraste de densidade no ponto \vec{x} como:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}. \quad (\text{B.1})$$

O contraste de densidade pode ser escrito em termos de sua transformada de Fourier:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{V_u}{(2\pi)^3} \int_{V_u} \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k, \quad (\text{B.2})$$

onde os coeficientes $\delta_{\vec{k}}$ são dados por:

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V_u} \int_{V_u} \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x}. \quad (\text{B.3})$$

O valor médio das flutuações, por definição, é nulo, pois as flutuações podem ser pensadas como um campo aleatório.

Usando o teorema de Parseval podemos relacionar as integrais dos quadrados do contraste de densidade e de sua transformada de Fourier:

$$\frac{1}{V_u} \int_{V_u} \delta^2(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{V_u}{(2\pi)^3} \int_{V_u} |\delta_{\vec{k}}|^2 d^3k. \quad (\text{B.4})$$

O lado esquerdo em (B.4) é a amplitude média do quadrado das flutuações por unidade de volume, ou seja, a variância do contraste de densidade por unidade de volume. Assim:

$$\sigma^2 \equiv \langle \delta^2 \rangle = \frac{V_u}{(2\pi)^3} \int_{V_u} |\delta_{\vec{k}}|^2 d^3k. \quad (\text{B.5})$$

A quantidade $|\delta_{\vec{k}}|^2$ é o espectro de potência das flutuações e pode ser escrito como $P(k)$ no limite em que o volume V_u vai a infinito. Desta forma:

$$\sigma^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty P(k) d^3k. \quad (\text{B.6})$$

Como as flutuações são isotrópicas no espaço real, podemos escrever o elemento de volume no espaço de fase como:

$$d^3k = 4\pi k^2 dk, \quad (\text{B.7})$$

o que nos dá para (B.6):

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk. \quad (\text{B.8})$$

A equação (B.8) pode ser escrita na forma:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^3 \frac{dk}{k}, \quad (\text{B.9})$$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty \Delta(k) \frac{dk}{k}. \quad (\text{B.10})$$

onde:

$$\Delta(k) = \frac{1}{2\pi^2} P(k) k^3. \quad (\text{B.11})$$

é uma quantidade adimensional que representa a contribuição das flutuações no espaço de fase por unidade de intervalo logarítmico.

É usual assumir que o espectro de potência é dado por uma lei de potência:

$$P(k) = Ak^n, \quad (\text{B.12})$$

onde n é chamado de índice espectral e A é a amplitude das flutuações observada hoje.

O caso especial em que $n = 1$ é conhecido como espectro de Harrison-Zeldovich ou espectro invariante de escala, pois, para este espectro, após saírem do horizonte durante a inflação, as perturbações entram no horizonte com a mesma escala no espaço de fase. Este espectro de potência não diverge para grandes escalas angulares e é consistente com a isotropia de grande escala observada para o universo.

* * *

Bibliografia

- [1] Coles, P.; Lucchin, F., *Cosmology*, 1995, John Wiley, NY.
- [2] Weinberg, S., *Cosmology and Gravitation*, 1972, John Wiley, NY.
- [3] Peebles, P. J. E., *Principles of Physical Cosmology*, 1995, Princeton University Press.
- [4] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M., *Teoría Clásica de los Campos*, Vol. II, 1973, Reverté, Spain.
- [5] Mollerach, S.; Roulet, E., *Gravitational Lensing and Microlensing*, 2002, World Scientific.
- [6] Kolb, E. W.; Turner, M. S., *The Early Universe*, 1990, Addison-Wesley Publishing Company.
- [7] Pais, A., *Sútil é o Senhor: A Ciência e a Obra de Albert Einstein*, 1995, Editora Nova Fronteira, RJ.
- [8] Hubble, E., 1929, *Proceedings of the Royal Academy of Science*, **15**, 168.
- [9] Partridge, R. B., *3K: The Cosmic Microwave Background Radiation*, 1995, Cambridge University Press.
- [10] *The Cosmic Microwave Background*, Silk, J.
- [11] Barreiro, R. B., 2000, *New Astronomy Review*, **44**, 179.
- [12] Alpher, R. A.; Herman, R. C., 1948, *Nature*, **162**, 774.
- [13] Gamow, G., 1946, *The Physical Review*, **70**, 572.

- [14] Gamow, G., 1948, *The Physical Review*, **74**, 505.
- [15] Gamow, G., 1948, *Nature*, **162**, 680.
- [16] Penzias, A. A.; Wilson, R. W., 1965, *The Astrophysical Journal*, **142**, 419.
- [17] Dicke, R. H.; Peebles, P. J. E.; Roll, P. G.; Wilkinson, D. T., 1965, *The Astrophysical Journal*, **142**, 419.
- [18] Adams, S. W., 1941, *The Astrophysical Journal*, **93**, 11.
- [19] <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>
- [20] Bartlet, J. G., *The Standard Cosmological Model and CMB Anisotropies*. (astro-ph/9903260 v1)
- [21] Peacock, J. A., *Cosmological Physics*, 2000, Cambridge University Press.
- [22] *Gold in the Doppler Hills: Cosmological Parameters in the Microwave Background*, Lineweaver, C. H.
- [23] Gawiser, E.; Silk, J., 2000, *Physics Reports*, **333-334**, 245-267.
- [24] Tegmark, M., 1995, *Doppler peaks and all that: CMB anisotropies and what they can tell us*, Lecture notes to appear in Proc. Enrico Fermi, Course CXXXII, Varenna.
- [25] Hu, W., 1995, *Wandering in the Background: A CMB Explorer*, PhD Thesis, UC Berkeley.
- [26] Hu, W.; Sugiyama, N.; Silk, J., 1997, *Nature*, **386**, 37.
- [27] Aghanim, N., *Theoretical and Observational Cosmology*, 1999, Kluwer Academic Publishers.
- [28] Smoot, G. F., et al, *Astrophysical Journal Letters*, 1992, **396**, 1.

- [29] Smoot, G. F., *The Cosmic Background Radiation*.
- [30] Padmanabhan, T., *Cosmology and Astrophysics*, 1996, Cambridge University Press.
- [31] Sachs, R.; Wolfe, A., 1967, *The Astrophysical Journal*, **147**, 73.
- [32] <http://map.gsfc.nasa.gov/>
- [33] Albrecht, A., Coulson, D., Ferreira, P., Magueiro, J., *Physical Review Letter*, 1996, **76**, 1413. (astro-ph/9505030v4)
- [34] Albrecht, A., Coulson, D., Ferreira, P., Magueiro, J., *Doppler peaks from active perturbations*, astro-ph/9511042.
- [35] Crittenden, R. G., Turok, N., *The Doppler Peaks from Cosmic Texture*, astro-ph/9505120.
- [36] Mukhanov, V. F., Feldman, H. A., Brandenberger, R. H., *Physics Report*, **215**, 203 (1992).
- [37] Seljak, U., Zaldarriaga, M., *A Line of sight Integrations Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies*. (astro-ph/9603033)
- [38] Zaldarriaga, M., Seljak, U., Bertschinger, E., *Integral Solution for the Microwave Background Anisotropies in Non-flat Universes*. (astro-ph/9704265v2)
- [39] Padmanabhan, T., *Theoretical Astrophysics – Volume 2: Stars and Stellar Systems*, 2001, Cambridge University Press.
- [40] Machado, K. D., *Teoria do Eletromagnetismo – Vol. I*, 2000, Editora UEPG.
- [41] Arfken, G. B., Weber, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*, 1995, Academic Press, Inc.

- [42] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series, and Products*, 1980, London: Academic.
- [43] Bond, J. R.; Efstathiou, G., S. D. M. MNRAS, **258**, P1 (1992).
- [44] Caldwell, R. R., Dave, R., Steinhardt, J. P., astro-ph/9708069.
- [45] Ostriker, J. P., Steinhardt, J. P., *Nature* **377**, 600 (1995).
- [46] Bennet, C. L., et al., *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results*.
- [47] Stompor, R., et al., C. R. Physique **4**, 853 (2003).
- [48] Hamilton, J. C., et al., C. R. Physique **4**, 853 (2003).
- [49] Perlmutter, S., et al., *Nature*, **391**, 51 (1998).
- [50] Garnavich, P. M., et al., *Astrophysical Journal*, **493**, L53 (1998).
- [51] Weinberg, S., *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [52] Dolgov, A. D., *The Problem of Vacuum Energy and Cosmology*. (astro-ph/9708045).
- [53] Bradenberger, R., Lima, J. A. S., Zanchin, V. T., *Perturbations and CMB anisotropy in decaying vacuum cosmologies: Some analytical results*. (A ser submetido.)
- [54] Maia, J. M. F., Lima, J. A. S., *Physical Review D*, **65**, 083513 (2002).
- [55] Carvalho, J. C., Lima, J. A. S., Waga, I., *Physical Review D*, **46**, 2404 (1992).
- [56] Lima, J. A. S., Maia, J., *Physical Review D*, **49**, 5597 (1994).
- [57] Lima, J. A. S., Trodden, M. *Physical Review D*, **53**, 4280 (1996).
- [58] Lima, J. A. S., *Physical Review D*, **54**, 2571 (1996).

- [59] Efstathiou, G. E., *Is the Low CMB Quadrupole a Signature of Spatial Curvature?*, [astro-ph/0303127v1](#).
- [60] Birkel, M., Sarkar, S., *Astroparticle Physics*, **6**, 197 (1997),
- [61] Molaro, P.; Levshakov, S. A.; Dessauges-Zavadsky, M.; D’Odorico, S., *Astronomy and Astrophysics*, **381**, L64 (2002).
- [62] Opher, R., Pelinson, A., *Decay of the vacuum energy into CMB photons*, [astro-ph/0409451v1](#).
- [63] Longair, M. S., *Galaxy Formation*, 1998, Springer-Verlag.
- [64] Padmanabhan, T., *Structure Formation in the Universe*, 1993, Cambridge University Press.
- [65] Hu, W., White, M., *CMB Anisotropies in the Weak Coupling Limit*, [astro-ph/9507060](#).
- [66] Hu, W., White, M., *The Sachs-Wolfe Effect*, [astro-ph/9609105](#).
- [67] Bertschinger, E., *Cosmic Microwave Background Anisotropy*, MIT notes.
- [68] Mukhanov, V., *CMB-slow, or How to Estimate Cosmological Parameters by Hand*, [astro-ph/0303072v1](#).
- [69] Hu, W., Sugiyama, N., *Anisotropies in the Cosmic Microwave Background: An Analytical Approach*, [astro-ph/9407093](#).

* * *