



Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Centro de Ciências Exatas e da Terra



PPGMAE

Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada e Estatística
PPGMAE

MARIANA BARBOSA DA SILVA

ESTIMADORES DO TIPO NÚCLEO PARA
VARIÁVEIS I.I.D. COM ESPAÇO DE ESTADOS
GERAL

Natal - RN
Maio de 2012

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada e Estatística
PPGMAE

MARIANA BARBOSA DA SILVA

ESTIMADORES DO TIPO NÚCLEO PARA
VARIÁVEIS I.I.D. COM ESPAÇO DE ESTADOS
GERAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Orientador:

Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira

Co-orientadora:

Prof^a. Dr^a. Viviane Simioli Medeiros Campos

Natal - RN

Maio de 2012

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Silva, Mariana Barbosa da.

Estimadores do tipo núcleo para variáveis I.I.D. com espaço de estados geral /
Mariana Barbosa da Silva. - Natal, 2012.

51 f. il.:

Orientador: Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira.

Co-Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Viviane Simioli Medeiros Campos.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística.

1. Métodos não-paramétricos - Dissertação. 2. Estimador – Tipo núcleo - Dissertação. 3. Variáveis aleatórias – Dissertação. 4. Consistência forte – Dissertação. 5. Software R - Dissertação I. Pereira, André Gustavo Campos. II. Campos, Viviane Simioli Medeiros. III. Título.

RN/UF/BSE-CCET

CDU: 519.234

MARIANA BARBOSA DA SILVA

Estimadores do Tipo Núcleo para Variáveis i.i.d. com Espaço de Estados Geral

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de mestre em Matemática Aplicada e Estatística e aprovado em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística, do Centro de Ciências Exatas e da Terra, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

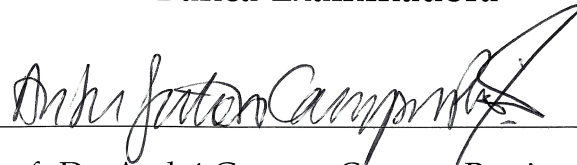


Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira- UFRN
Orientador

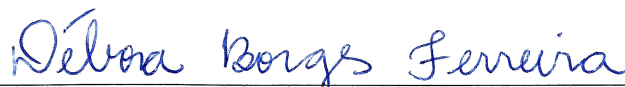


Prof. Carla Almeida Vivacqua - UFRN
Coordenadora do Programa

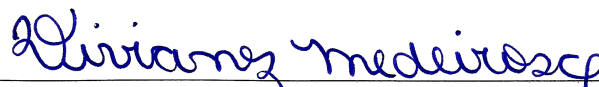
Banca Examinadora



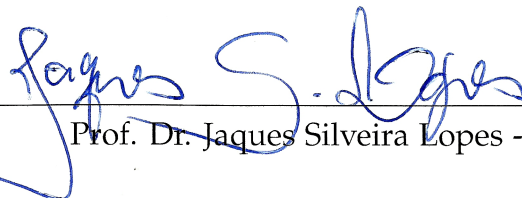
Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira- UFRN
Presidente



Prof. Dr. Débora Borges Ferreira - UFRN



Prof. Dr. Viviane Simioli Medeiros Campos - UFRN



Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes - UFV

Maio, 2012

DEDICATÓRIA

*"Este trabalho é dedicado a minha mãe, Maria Conceição, que nunca deixou de acreditar em mim e sempre me apoiou em todas as minhas decisões.
Obrigada manhinha por sempre estar ao meu lado!!!!!"*

IN MEMORIAM A MINHA MADRINHA

Andrea Maria Barros de Freitas

1966 – 2009

AGRADECIMENTOS

A Deus por sempre me guiar nessa vida me ajudando nos momentos difíceis.

A minha adorada professora Viviane, sem ela esse trabalho não seria possível. Obrigada por sempre acreditar em mim desde a graduação. Obrigada pelo carinho e palavras amigas quando eu precisei e que me ajudaram a continuar nessa jornada. Sempre a terei como exemplo de professora e mulher. Obrigada por tudo.

Ao professor André Gustavo pela orientação segundo ano do mestrado e por ter acreditado em mim.

Ao professor Paulo pela orientação no primeiro ano. Aprendi muito ao seu lado.

Ao meu pai por acreditar em mim.

Ao Thiago C. por sempre ter me apoiado e escutado meus problemas.

As minhas eternas amigas Ana Paula, Josefa Itailma, Louise e Kelly Cristina por sempre estarem ao meu lado apesar de tudo.

A Marconio que me ajudou em algumas contas e no meu nervosismo.

Aos meus amigos de turma Hérica, Elvis e Thiago J.. Em especial a Cátia que se tornou meu apoio nesses dois anos de mestrado, muito obrigada.

A Liandra por sempre se preocupar comigo e me levantar nos momentos difíceis.

Aos meus amigos Daniel, Laís, Romildo, Rafaela H., Geilson, Jucimeire, Ivanildo e Enai por torcerem por mim.

A professora Dione por sua preocupação com todos os alunos do mestrado.

Ao professor Pledson por seus conselhos na disciplina de Seminários.

Aos professores da graduação em especial:

Ao professor Rubens Leão por me mostrar o quão bonita é a matemática, ao professor Ronaldo Freire por me incentivar na vida acadêmica e ao professor Marcelo Pereira por suas sábias palavras e incentivo.

Ao professor Jaques e a professora Débora por aceitarem o convite para participar da minha banca.

A CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho estudamos um dos métodos não-paramétrico: os Estimadores do Tipo Núcleo associado a uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com espaço de estados geral, mais precisamente o trabalho de Campos e Dorea [3]. No Capítulo 2 verificamos as boas qualidades dessa classe de estimadores como não vício assintótico, convergência em média quadrática, consistência forte e normalidade assintótica. No Capítulo 3 com o auxílio do software R temos uma idéia visual do que ocorre no processo de estimação.

Palavras chaves: estimadores do tipo núcleo, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, consistência forte, normalidade assintótica.

ABSTRACT

In this work, the paper of Campos and Dorea [3] was detailed. In that article a Kernel Estimator was applied to a sequence of random variables with general state space, which were independent and identically distributed. In chapter 2, the estimator's properties such as asymptotic unbiasedness, consistency in quadratic mean, strong consistency and asymptotic normality were verified. In chapter 3, using R software, numerical experiments were developed in order to give a visual idea of the estimate process.

Key words: kernel estimates, independent random variables with a common density, strong consistency, asymptotic normality.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Um pouco da História dos Estimadores do Tipo Núcleo	11
1.1.1	Os Estimadores na Reta	11
1.1.2	Estimadores no \mathbb{R}^p	14
1.1.3	Dados direcionais	15
1.1.4	Espaço de Estados Geral	15
2	PROPRIEDADES DOS ESTIMADORES DO TIPO NÚCLEO	18
2.1	Introdução	18
2.2	O Teorema Principal	19
2.3	Não vício assintótico	23
2.4	Consistência em Média Quadrática	24
2.5	Consistência Forte	27
2.6	Normalidade Assintótica	30
2.7	Distribuições Discretas	35
3	SIMULAÇÕES NO SOFTWARE R	38
3.1	Introdução	38
3.2	Simulações	38
3.2.1	Limitação visual do software R	40
3.2.2	Convergência	40
3.3	Programa	43
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	46
A	APÊNDICE	48
A.1	Distribuição da $nF_n(x)$	48
A.2	Teorema da Convergência Dominada	48
A.3	Lema de Borel-Cantelli	49
A.4	Teorema do Limite Central de Liapounov	49
A.5	Desigualdade de Minkowski	49
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	51

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	$h_n = n^{-3}$	39
Figura 2	$h_n = n^{-1/3}$	39
Figura 3	$\Delta x = 0.1$	40
Figura 4	$\Delta x = 0.01$	40
Figura 5	$\Delta x = 0.001$	40
Figura 6	$n = 1.000$	41
Figura 7	$n = 10.000$	41
Figura 8	$n = 100.000$	41
Figura 9	$n = 1.000.000$	41
Figura 10	$n = 1.000$	42
Figura 11	$n = 10.000$	42
Figura 12	$n = 100.000$	42
Figura 13	$n = 1.000.000$	42

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

Um problema comum em Estatística é o de gerar, a partir de uma função de densidade conhecida, uma amostra aleatória. A teoria de estimação aborda o problema contrário, isto é, dada uma amostra aleatória o objetivo é encontrar a função de densidade da qual a amostra foi gerada. Existem dois tipos de estimação, o método paramétrico, onde se conhece a densidade mas os seus parâmetros são desconhecidos, e o método não-paramétrico, onde a densidade é totalmente desconhecida.

Neste trabalho estudamos um dos métodos não-paramétrico: os Estimadores do Tipo Núcleo associado a uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com espaço de estados geral, mais precisamente o trabalho de Campos e Dorea [3]. No Capítulo 2 verificamos as boas qualidades dessa classe de estimadores como o não vício assintótico, a convergência em média quadrática, a consistência forte e a normalidade assintótica. No Capítulo 3 com o auxílio do software R temos uma idéia visual do que ocorre no processo de estimação.

1.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DOS ESTIMADORES DO TIPO NÚCLEO

1.1.1 Os Estimadores na Reta

Parzen [10] motivado pelas ideias de Rosenblatt [12], considerou uma sequência $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição $F(x) = P[X \leq x]$ absolutamente contínua,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$$

e função de densidade de probabilidade $f(x)$. Dada X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória, como estimar a $f(x)$?

Para responder essa pergunta Parzen considerou, inicialmente, a função de distribuição amostral

$$F_n(x) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de observações } \leq x}{n},$$

onde $nF_n(x)$ é uma variável aleatória com distribuição Binomial (ver [A.1](#)) e,

$$E[F_n(x)] = F(x)$$

e

$$\text{Var}[F_n(x)] = \left\{ \frac{1}{n} F(x) \right\} \{1 - F(x)\}.$$

A partir da $F_n(x)$ surge um estimador natural para a função de densidade:

$$f_n(x) = \frac{F_n(x+h) - F_n(x-h)}{2h}, \quad (1.1)$$

onde $h = h_n$ é uma sequência de números reais positivos que tende à zero quando n tende à infinito.

Definida a função

$$K(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad |y| \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{c.c.} \end{cases}, \quad (1.2)$$

observamos que o estimador dado em (1.1) pode ser escrito como

$$f_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_j}{h}\right).$$

De fato,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_j}{h}\right) \\ &= \frac{1}{nh} \sum_{j: x-h \leq X_j \leq x+h} K(X_j) \\ &= \frac{1}{nh} m \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

onde m é o número de observações no intervalo $[x-h, x+h]$.

Por outro lado se $r = n^\circ$ de observações $\leq x - h$, temos:

$$F_n(x - h) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de observações } \leq x - h}{n} = \frac{r}{n}$$

e

$$F_n(x + h) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de observações } \leq x + h}{n} = \frac{m + r}{n}.$$

Assim,

$$f_n(x) = \frac{F_n(x + h) - F_n(x - h)}{2h} = \frac{\frac{m+r}{n} - \frac{r}{n}}{2h} = \frac{m}{2hn}.$$

Parzen [10] construiu uma nova classe de estimadores para a densidade $f(x)$ ao considerar

$$f_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_j}{h}\right).$$

onde a função K , representa, não apenas (3.2) mas qualquer função satisfazendo as seguintes condições:

$$(I) \quad \sup_{-\infty < y < \infty} |K(y)| < \infty,$$

$$(II) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |K(y)| dy < \infty,$$

$$(III) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} |yK(y)| = 0.$$

A essa classe de estimadores ele deu o nome de Estimadores do Tipo Núcleo e garantiu as suas boas propriedades ao provar:

- **O não vício assintótico**, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[f_n(x)] = f(x), \quad \text{com} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h = 0.$$

- **A consistência em média quadrática**,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E|f_n(x) - f(x)|^2 = 0, \quad \text{com} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nh = \infty.$$

- **E a normalidade assintótica**,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{f_n(x) - E[f_n(x)]}{\sigma[f_n(x)]} \leq c\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad \text{com} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nh^2 = \infty.$$

Roussas [13] generalizou os trabalho de Parzen [10] ao considerar a sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como um processo de Markov estritamente estacionário.

Com o objetivo de estimar a densidade de transição, considerou os seguintes estimadores para as densidades marginal e conjunta:

$$p_n(x) = (nh_1(n))^{-1} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_j}{h_n}\right)$$

e

$$q_n(x) = (nh_2(n))^{-1} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_j}{h_n}\right) K\left(\frac{y - X_{j+1}}{h_n}\right).$$

E desta forma, com hipóteses apropriadas para a função K e a sequência h_n , obteve, para pontos x tais que $p(x) > 0$, um estimador natural para a densidade de transição $t(y|x)$

$$t_n(y|x) = \frac{q_n(x)}{p_n(x)}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

1.1.2 Estimadores no \mathbb{R}^p

Prakasa Rao [11] generalizou o trabalho de Parzen [10] ao considerar $\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ vetores aleatórios p -dimensionais, independentes e identicamente distribuídos com função de densidade desconhecida $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$. Adaptando as hipóteses sobre a função K e a sequência h_n provou que o estimador

$$f_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{nh_n^p} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_j}{h_n}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, \quad (1.3)$$

é um bom estimador para a $f(\mathbf{x})$. Ele mostrou o não vício assintótico, a consistência em média quadrática, a consistência uniforme, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| > \epsilon \right],$$

a consistência forte e a normalidade assintótica.

1.1.3 Dados direcionais

Bai, Radhakrishna Rao e Zhao [1] baseados no estimador desenvolvido por Parzen [10] construíram uma classe de Estimadores do Tipo Núcleo para uma função de densidade desconhecida f , associada a uma amostra independente e identicamente distribuída de vetores aleatórios X_1, \dots, X_n que tomam valores em uma esfera unitária k -dimensional, Ω .

Considerando $k \geq 3$, propuseram o seguinte estimador para a f

$$f_n(x) = \frac{1}{nh^{k-1}} C(h) \sum_{i=1}^n K\left(\frac{1 - x'X_i}{h^2}\right), \quad x \in \Omega,$$

onde a sequência $h = h_n > 0$ e as funções $K(\cdot)$ e $C(h)$ satisfazem condições apropriadas e a notação $x'X_i$ foi usada para denotar o produto interno.

Sob algumas condições de regularidade mostraram o não vício assintótico, a consistência uniformemente forte, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0, \quad \text{quase certamente.}$$

e a consistência forte na norma L_1 .

1.1.4 Espaço de Estados Geral

Campos e Dorea [3] com base no trabalho de Parzen [10] generalizaram os Estimadores do Tipo Núcleo para o caso em que o espaço de estados é geral. Consideraram X, X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com densidade $f(x)$ em relação a uma medida ν , σ -finita definida em (E, ξ) , onde $E \subset \mathbb{R}^d$ e ξ é uma σ -álgebra de subconjuntos de E . Definiram o estimador

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n W(h, x, X_k), \tag{1.4}$$

onde $h = h_n$ é uma sequência positiva que converge para zero e W é uma função satisfazendo algumas condições de regularidade.

O estudo detalhado deste artigo de Campos e Dorea [3] é o objetivo principal desta dissertação e está feito no Capítulo 2.

Dorea [2], considerando o mesmo espaço de estados geral $E \subset \mathbb{R}^d$, construiu uma classe de Estimadores do Tipo Núcleo para estimar a densidade de transição, com respeito à medida ν , de uma cadeia de Markov. Definiu

$$t_n(x, y) = \frac{\sum_{k=1}^n W(h, x, X_k)W(h, y, X_{k+1})}{\sum_{j=1}^n W(h, x, X_j)},$$

onde $h = h_n$ é uma sequência de valores reais e W é uma função satisfazendo as mesmas condições do trabalho de 2001. Para esses estimadores demonstrou a consistência forte.

Campos e Dorea [4] tomando os estimadores definidos em 2001, consideraram uma cadeia de Markov com espaço de estados geral estimaram a densidade desconhecida $f(x)$ em duas situações: quando $f(x)$ era a densidade estacionária de uma cadeia de Markov satisfazendo uma condição tipo "mixing" e quando $f(x)$ era a densidade limite de uma cadeia de Markov geometricamente ergódica. Com essas hipóteses, conseguiram provar as boas qualidades dos estimadores (1.4) associados a processos estocásticos estacionários, ou seja, sequência de variáveis aleatórias identicamente distribuídas mas agora dependentes.

Capítulo 2

PROPIEDADES DOS ESTIMADORES DO TIPO
NÚCLEO

2

PROPRIEDADES DOS ESTIMADORES DO TIPO NÚCLEO

2.1 INTRODUÇÃO

Seja (E, ξ) um espaço mensurável com $E \subset \mathbb{R}^d$ e ξ é uma σ -álgebra de subconjuntos de E . Sejam X, X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com densidade comum, $f(x)$, em relação a medida σ -finita ν em (E, ξ) , isto é,

$$P(X \in A) = \int_A f(x) \nu(dx), \quad \forall A \in \xi.$$

Campos e Dorea [3] com o objetivo de estimarem a densidade $f(x)$ e tendo como base os Estimadores do Tipo Núcleo estudados por Parzen [10] e Prakasa Rao [11], definiram a seguinte classe de estimadores

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n W(h, x, X_k), \quad (2.1)$$

onde $h = h_n$ é uma sequência de valores reais positivos e W é a chamada função peso.

Neste Capítulo estudamos as boas qualidades desses estimadores como o não vício assintótico, a consistência e a normalidade assintótica.

Dizemos que o estimador f_n é não viciado se seu valor esperado coincide com o valor da função a ser estimada, isto é,

$$E[f_n(x)] = f(x), \quad \text{para todo } x \in E.$$

Porém para a estimação de densidades em \mathbb{R}^d , Prakasa Rao [11] demonstrou que não existem estimadores para densidade não viciados para observações associadas a processos estocásticos estacionários. Portanto, não existem estimadores não viciados para densidades associadas a variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, entretanto, como veremos adiante, existem estimadores assintoticamente não viciados.

Dizemos que o estimador $f_n(x)$ é assintoticamente não viciado quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{E[f_n(x)] - f(x)\} = 0, \quad \text{para todo } x \in E.$$

O conceito de consistência é importante, pois trata da convergência da sequência $f_n(x)$ quando o tamanho da amostra aumenta, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Dependendo do tipo de convergência temos as diferentes formas de consistência. Dizemos que $f_n(x)$ é fracamente consistente quando $f_n(x)$ converge $f(x)$ em probabilidade. Quando a convergência é quase certa dizemos que a $f_n(x)$ é fortemente consistente. Dizemos ainda que $f_n(x)$ é consistente em média quadrática se $E\{[f_n(x) - f(x)]^2\} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in E$.

2.2 O TEOREMA PRINCIPAL

As condições sob as quais Parzen [10] conseguiu obter o não vício assintótico e as consistências dos estimadores foram reescritas para o \mathbb{R}^d por Prakasa Rao [11] no seguinte teorema.

Teorema 2.1 *Seja $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$ o espaço euclidiano d -dimensional com σ -álgebra de Borel correspondente, e seja $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ a linha real com $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$. Seja $K : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mensurável. Suponha que*

Condição C_1

$$(I) \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |K(y)| \leq M,$$

$$(II) \quad \int_{\mathbb{R}^d} |K(y)| dy < \infty,$$

$$(III) \quad \lim_{\|y\| \rightarrow \infty} \|y\|^d |K(y)| = 0,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana usual.

Condição C_2

$$(I) \quad K(y) \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^d,$$

$$(II) \quad K(y) = K(-y), \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

Condição C_3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n h_n^d = \infty.$$

Seja $g : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mensurável tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(z)| dz < \infty.$$

Então, se g é contínua e $0 < h_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n^d} \int_{\mathbb{R}^d} K\left(\frac{z}{h_n}\right) g(x-z) dz = g(x) \int_{\mathbb{R}^d} K(z) dz.$$

Se g é uniformemente contínua, então a convergência acima é uniforme.

Campos e Dorea [3], com o objetivo de estimarem densidades em $E \subset \mathbb{R}^d$ utilizando (2.1), adaptaram as hipóteses do Teorema 2.1, considerando:

Condição 2.1 A função $W(h, x, \cdot)$ satisfaz as condições.

Existe $h_0 > 0$ tal que

$$\int_E |W(h, x, y)| \nu(dy) \leq k_0 < \infty, \quad 0 < h \leq h_0, \quad (2.2)$$

e dado $\delta > 0$ para $W_\delta(h, x, y) = W(h, x, y) I_{\{|z-x| > \delta\}}$, temos

$$|W_\delta(h, x, y)| \leq k_\delta(x) < \infty, \quad 0 < h \leq h_0 \quad (2.3)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} W_\delta(h, x, y) = 0. \quad (2.4)$$

A convergência no Teorema 2.1 foi garantida nos pontos de continuidade da função g . Assim, Campos e Dorea [3], precisaram do conceito de ν -continuidade:

Definição 2.1 Seja g uma função real definida em E . Dizemos que x é um ponto de ν -continuidade de g , ou $x \in C_\nu(g)$, se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\nu\{y : |y - x| \leq \delta, |g(y) - g(x)| > \epsilon\} = 0. \quad (2.5)$$

Observamos que a condição 2.1 aparece naturalmente ao considerarmos $E = \mathbb{R}^d$, $\nu =$ medida de Lebesgue em \mathbb{R}^d e $W(h, x, y) = \frac{1}{h^d} K\left(\frac{x-y}{h}\right)$. De fato, com a mudança de variável, $z = \frac{x-y}{h}$ temos pelo item (II) da Condição C_1 que:

$$\int_E |W(h, x, y)| \nu(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} K(z) dz = 1 < \infty, \quad (2.6)$$

ou seja, $W(h, x, y)$ tem que satisfazer (2.2).

Sabemos pela Condição C_1 (III) que dado $\delta > 0$, existe α_δ tal que se $|x| > \alpha_\delta$ então $|x|^d K(x) < \delta^d$. Para $y \in \{z : |x-z| > \delta\}$ e fazendo $h_0 = \frac{\delta}{\alpha_\delta}$ temos:

$$\left| \frac{x-y}{h} \right| > \frac{\delta}{h} \geq \frac{\delta}{h_0} = \alpha_\delta,$$

e portanto,

$$\left| \frac{x-y}{h} \right|^d K\left(\frac{x-y}{h}\right) I_{\{|z:|x-z|>\delta\}}(y) < \delta^d.$$

Obtemos assim,

$$\begin{aligned} W_\delta(h, x, y) &= \frac{1}{|x-y|^d} \frac{|x-y|^d}{h^d} K\left(\frac{x-y}{h}\right) I_{\{|z:|x-z|>\delta\}}(y) \\ &\leq \frac{\delta^d}{|x-y|^d} \leq 1 = K_\delta(x). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ou seja, (2.3) da Condição 2.1

Mais ainda, se $y \in \{z : |x-z| > \delta\}$ então $\frac{|x-y|^d}{h^d} > \frac{\delta^d}{h^d} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$ e obtemos por (2.7) $\lim_{h \rightarrow 0} W_\delta(h, x, y) = 0$, ou seja, (2.4) da Condição 2.1.

Estamos, agora, prontos para verificarmos o resultado principal de Campos e Dorea [3], que generaliza o Teorema 2.1.

Teorema 2.2 *Seja g uma função integrável em (E, ξ, ν) e $x \in C_\nu(g)$. Assuma que $W(h, x, \cdot)$ satisfaz a Condição 2.1. Então,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_E W(h, x, y) g(y) \nu(dy) - g(x) \int_E W(h, x, y) \nu(dy) \right| = 0. \quad (2.8)$$

Demonstração

Dado $\epsilon > 0$ seja δ satisfazendo (2.5). Para $h \leq h_0$ defina $A = \{y : |y - x| \leq \delta\}$ e considere $E = A \cup A^C$. Então

$$\left| \int_E W(h, x, y)[g(y) - g(x)]\nu(dy) \right| \leq \left| \int_A W(h, x, y)[g(y) - g(x)]\nu(dy) \right| + \left| \int_{A^C} W(h, x, y)[g(y) - g(x)]\nu(dy) \right|.$$

Sejam

$$I_1 = \left| \int_A W(h, x, y)[g(y) - g(x)]\nu(dy) \right|$$

e

$$I_2 = \left| \int_{A^C} W(h, x, y)[g(y) - g(x)]\nu(dy) \right|.$$

Considerando $B = \{y \in A / |g(y) - g(x)| > \epsilon\}$ podemos escrever:

$$I_1 \leq \int_B |W(h, x, y)[g(y) - g(x)]|\nu(dy) + \int_{B^C} |W(h, x, y)[g(y) - g(x)]|\nu(dy)$$

de (2.5) e (2.2) obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{B^C} |W(h, x, y)[g(y) - g(x)]|\nu(dy) \\ &\leq \epsilon k_0. \end{aligned}$$

Para I_2 , escrevemos:

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \int_{A^C} W(h, x, y)[g(y) - g(x)]\nu(dy) \right| \\ &\leq \int_{A^C} |W(h, x, y)g(y)|\nu(dy) + \int_{A^C} |W(h, x, y)g(x)|\nu(dy). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Assim, usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos na primeira parcela de (2.9):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{A^C} |W(h, x, y)g(y)|\nu(dy) = \int_{A^C} \lim_{h \rightarrow 0} |W(h, x, y)g(y)|\nu(dy) = 0.$$

Para a segunda parcela de (2.9) note que sendo ν uma medida σ -finita existem conjuntos $E_n, E_n \uparrow E$ com $\nu(E_n) < \infty$ e n_0 tais que

$$\int_{A^C} |W_\delta(h, x, y)|\nu(dy) - \int_{A^C \cap E_{n_0}} |W_\delta(h, x, y)|\nu(dy) \leq \epsilon. \tag{2.10}$$

Como $\nu(E_{n_0}) < \infty$ temos $\nu(A^C \cap E_{n_0}) < \infty$. Pelo Teorema da Convergência Dominada:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{A^C \cap E_{n_0}} |W_\delta(h, x, y)| \nu(dy) = 0$$

e, por (2.10), temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{A^C} |W(h, x, y)g(x)| \nu(dy) = |g(x)| \lim_{h \rightarrow 0} \int_{A^C} |W(h, x, y)| \nu(dy) = 0.$$

Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_E W(h, x, y)[g(y) - g(x)] \nu(dy) \right| = 0.$$

■

2.3 NÃO VÍCIO ASSINTÓTICO

Prakasa Rao [11] obteve o não vício assintótico do estimador (1.3) como consequência imediata do Teorema 2.1 ao assumir a Condição C_1 e supondo ainda $K(y) > 0, \forall y \in \mathbb{R}^d$

$$K(y) > 0, \forall y \in \mathbb{R}^d,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^d} K(y) dy = 1, \tag{2.11}$$

ou seja, K é uma densidade em \mathbb{R}^d .

De maneira análoga, Campos e Dorea [3] considerando a Condição 2.2, a seguir, provaram o não vício assintótico dos estimadores (2.1) como consequência do Teorema 2.2.

Condição 2.2 *Assuma que para $x \in C_\nu(f)$ temos a Condição 2.1 e que $W(h, x, y) \geq 0$ com $h \leq h_0$ satisfaz*

$$\lim_{h \rightarrow 0} h = 0 \quad e \quad \int_E W(h, x, y) \nu(dy) = 1, \quad 0 < h \leq h_0. \tag{2.12}$$

Corolário 2.1 *Considerando a Condição 2.2, temos o não vício assintótico*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f_n(x)) = f(x), \quad \forall x \in C_v(f).$$

Demonstração

Pela definição do estimador em (2.1) e usando o fato de X_1, X_2, \dots, X_n serem variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, temos:

$$\begin{aligned} E[f_n(x)] &= E \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n W(h, x, X_k) \right] \\ &= \int_E W(h, x, y) f(y) \nu(dy). \end{aligned}$$

Segue, portanto, do Teorema 2.2 e de (2.12) que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E(f_n(x)) - f(x)| = 0, \quad \forall x \in C_v(f).$$

■

2.4 CONSISTÊNCIA EM MÉDIA QUADRÁTICA

Prakasa Rao [11] obteve a consistência em média quadrática utilizando as condições C_1, C_2 e C_3 , nas quais uma das hipóteses é que a função K satisfaça a condição B_2 (III).

Campos e Dorea [3] garantiram que a convergência em média quadrática pode ser obtida sem que o núcleo $K(\cdot)$ satisfaça a condição C_2 (III). Além da Condição 2.2 elas definiram $\gamma_n(x) = \nu\{y : |x - y| \leq h_n\}$ e assumiram que $n\gamma_n(x) \rightarrow \infty$. Note que se ν for a medida de Lebesgue temos $\gamma_n(x)\nu\{y : |x - y| \leq h_n\} = ch_n^d$ $c > 0$ e pedido que $\gamma_n(x) \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ que é equivalente a C_3 . Estabeleceram assim, as condições sob as quais os estimadores (2.1) são convergentes em média quadrática.

Condição 2.3 *Assuma que $x \in C_v(f)$ e que vale a Condição 2.2 e ainda*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) = \gamma(x) < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n\gamma_n(x) = \infty \tag{2.13}$$

e

$$\gamma_n(x)W(h, x, y) \leq K_1(x) < \infty, \quad 0 < h \leq h_0, \tag{2.14}$$

onde

$$\gamma_n(x) = \nu\{y : |y - x| \leq h\}.$$

Com o objetivo de não sobrecarregar a demonstração do Teorema 2.3 que garante a convergência em média quadrática, destacamos o seguinte resultado:

Dado $\alpha > 0$, sob a Condição 2.3, defina

$$W^{(\alpha)}(h, x, y) = \gamma_n^\alpha(x) W^{1+\alpha}(h, x, y) \quad (2.15)$$

Temos que W^α satisfaz a Condição 2.1. De fato, existe $h_0 > 0$ e por (2.14) tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{E}} |W^{(\alpha)}(h, x, y)| \nu(dy) &= \int_{\mathbb{E}} |\gamma_n^\alpha(x) W^{1+\alpha}(h, x, y)| \nu(dy) \\ &\leq K_1^\alpha(x) \int_{\mathbb{E}} |W(h, x, y)| \nu(dy) \\ &= K_1^\alpha(x) < \infty. \end{aligned}$$

Agora, dado $\delta > 0$ temos ainda por (2.14) e (2.3), que

$$\begin{aligned} |W_\delta^{(\alpha)}(h, x, y)| &= |\gamma_n^\alpha(x) W_\delta^{1+\alpha}(h, x, y)| \\ &= |\gamma_n^\alpha(x) W^{1+\alpha}(h, x, y) I_{\{z: |z-x| > \delta\}}| \\ &\leq K_1^\alpha(x) |W_\delta(h, x, y) I_{\{z: |z-x| > \delta\}}| \\ &\leq K_1^\alpha(x) \cdot K_\delta(x). \end{aligned}$$

Falta verificar que $\lim_{h \rightarrow 0} W_\delta^{(\alpha)}(h, x, y) = 0$, usando os argumentos acima e fazendo $n \rightarrow \infty$ temos por (2.4):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} W_\delta^{(\alpha)}(h, x, y) &\leq K_1^\alpha(x) \lim_{n \rightarrow \infty} W_\delta(h, x, y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, todas as sentenças da Condição 2.1 são satisfeitas.

Teorema 2.3 Considerando a Condição 2.3, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{[f_n(x) - f(x)]^2\} = 0,$$

ou seja, a consistência em média quadrática.

Demonstração

Podemos escrever

$$E\{(f_n(x) - f(x))^2\} = \sigma^2(f_n(x)) + [E(f_n(x)) - f(x)]^2, \quad (2.16)$$

onde $\sigma^2(f_n(x)) = \text{Var}(f_n(x))$. Pelo Corolário 2.1, $\lim_{n \rightarrow \infty} [E(f_n(x)) - f(x)]^2 = 0$, $x \in C_v(x)$. Assim, basta mostrarmos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^2(f_n(x)) = 0$. Por (2.1) segue que

$$\begin{aligned} n\gamma_n(x)\sigma^2(f_n(x)) &= \gamma_n(x)\text{Var}(W(h, x, X)) \\ &= \gamma_n(x)E(W^2(h, x, X)) - \gamma_n(x)E^2(W(h, x, X)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para o segundo termo de (2.17), segue de (2.8) e (2.13) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x)E^2(W(h, x, X)) = \gamma(x)f^2(x) < \infty.$$

Para a primeira parcela de (2.17), fazendo $\alpha = 1$ em (2.15) e usando o Teorema 2.2 temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \gamma_n(x)E(W^2(h, x, X)) - f(x) \int_E W^{(1)}(h, x, y)\nu(dy) \right| = 0.$$

De (2.2) e (2.14), com $0 < h \leq h_0$ segue

$$\begin{aligned} \int_E W^{(1)}(h, x, y)\nu(dy) &\leq \int_E |\gamma_n(x)W^2(h, x, y)|\nu(dy) \\ &\leq K_1(x) \int_E |W(h, x, y)|\nu(dy) \\ &\leq K_1(x) \cdot K_0(x), \end{aligned} \quad (2.18)$$

como (2.18) é constante sabemos que $\gamma_n(x)E(W^2(h, x, X))$ converge para uma constante e de (2.13) temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^2(f_n(x)) = 0$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{(f_n(x) - f(x))^2\} = 0,$$

como queríamos. ■

2.5 CONSISTÊNCIA FORTE

Assumindo a Condição C_3 , a Condição C_1 , substituindo o item (ii) por $\int_{\mathbb{R}^d} K(z) dz = 1$ e mais a hipótese

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta n h_n^d) < \infty, \quad \forall \beta > 0,$$

a consistência forte do estimador (1.3) foi obtida por Prakasa Rao [11] no seu Teorema 3.1.5.

Para provar o teorema da consistência forte, Campos e Dorea [3] utilizaram o seguinte Lema de Hoeffding, que segue:

Lema 2.1 *Assuma que Y_1, \dots, Y_n são variáveis independentes e identicamente distribuídas com segundo momento finito. Se existem constantes a e b tais que $P(Y_i \in [a, b]) = 1$, então dado $\epsilon > 0$ temos*

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k\right| \geq \epsilon\right) \leq 2 \exp\left\{-\frac{n\epsilon^2}{2\sigma^2 + \epsilon(b-a)}\right\}, \quad (2.19)$$

onde $\sigma^2 = \sigma^2(Y_i)$.

Teorema 2.4 (Consistência forte) *Considerando a Condição 2.3 e $x \in C_\nu(f)$. Se para cada $\alpha > 0$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-n\gamma_n(x)\alpha\} < \infty. \quad (2.20)$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \nu - \text{q.c.}$$

Demonstração

Usando o Corolário 2.1, é suficiente é suficiente mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x) - E[f_n(x)]\} = 0, \quad \nu - \text{q.c.} \quad (2.21)$$

Defina $Y_k = W(h, x, X_k) - E(W(h, x, X_k))$ e mostremos que as hipóteses do Lema 2.1 são satisfeitas. De (2.14)

$$\begin{aligned}
|\gamma_n(x)Y_k| &= |\gamma_n(x)W(h, x, X_k) - \gamma_n(x)E(W(h, x, X_k))| \\
&\leq |\gamma_n(x)W(h, x, X_k)| + |\gamma_n(x)E(W(h, x, X_k))| \\
&\leq K_1(x) + |E(\gamma_n(x)W(h, x, X_k))| \\
&= K_1(x) + \int_E |\gamma_n(x)W(h, x, y)|f(y)\nu(dy) \\
&\leq K_1(x) + \int_E K_1(x)f(y)\nu(dy) \\
&= K_1(x) + K_1(x) \int_E f(y)\nu(dy) \\
&= 2 \cdot K_1(x).
\end{aligned}$$

Daí

$$|Y_k| \leq \frac{2 \cdot K_1(x)}{|\gamma_n(x)|}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n,$$

então

$$P\left(|Y_k| \leq \frac{2 \cdot K_1(x)}{|\gamma_n(x)|}\right) = 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

De (2.20) temos que $\gamma_n(x) > 0$ a partir de um certo n grande, pois caso contrário teríamos

$$\exp\{-n\gamma_n(x)\alpha\} = 1 \text{ para infinitos valores de } n,$$

então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-n\gamma_n(x)\alpha\} = \infty.$$

Agora mostremos que existe $\sigma^2(x) < \infty$ tal que $\sigma^2(Y_k) \leq \frac{\sigma^2(x)}{\gamma_n(x)}$. Visto que $E(Y_k) = 0$, segue do Corolário 2.1, para n grande:

$$\begin{aligned}
\gamma_n(x)\sigma^2(Y_k) &= \gamma_n(x)\text{Var}(Y_k) \\
&= \gamma_n(x)E(Y_k^2) \\
&= \gamma_n(x)\{E(W^2(h, x, X_k)) - [E(W(h, x, X_k))]^2\} \\
&= E(\gamma_n(x)W^2(h, x, X_k)) - \gamma_n(x)[E(W(h, x, X_k))]^2 \\
&\leq K_1(x)E(W(h, x, X_k)) - \gamma_n(x)[E(W(h, x, X_k))]^2 \\
&\leq K_1(x)p(x) - \gamma_n(x)p^2(x) + c \\
&= \sigma^2(x),
\end{aligned}$$

onde $c > 0$ é uma constante qualquer. De (2.19), considerado $A_n = (|f_n(x) - E(f_n(x))| \geq \epsilon)$, $a = -\frac{2 \cdot K_1(x)}{|\gamma_n(x)|}$ e $b = \frac{2 \cdot K_1(x)}{|\gamma_n(x)|}$ obtemos

$$\begin{aligned}
P(A_n) &= P(|f_n(x) - E(f_n(x))| \geq \epsilon) \\
&= P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n W(h, x, X_k) - E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n W(h, x, X_k)\right)\right| \geq \epsilon\right) \\
&= P\left(\left|\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n W(h, x, X_k) - \sum_{k=1}^n E(W(h, x, X_k))\right)\right| \geq \epsilon\right) \\
&= P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (W(h, x, X_k) - E(W(h, x, X_k)))\right| \geq \epsilon\right) \\
&= P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k\right| \geq \epsilon\right) \\
&\leq 2 \cdot \exp\left\{-\frac{n\epsilon^2}{2\sigma^2(Y_k) + \epsilon(b-a)}\right\} \\
&\leq 2 \cdot \exp\left\{-\frac{n\epsilon^2}{2\frac{\sigma^2(x)}{\gamma(x)} + \epsilon\frac{4K_1(x)}{\gamma_n(x)}}\right\} \\
&= 2 \cdot \exp\left\{-\frac{n\epsilon^2\gamma_n(x)}{2\sigma^2(x) + \epsilon 4K_1(x)}\right\} \\
&= 2 \cdot \exp\{-n\gamma_n(x)\alpha\},
\end{aligned}$$

com $\alpha = \epsilon^2/[2\sigma^2(x) + \epsilon 4K_1(x)] > 0$. De (2.20), segue que $\sum_{n>0} P(A_n) < \infty$, logo pelo Lema de Borel-Cantelli (A.3) temos (2.21). ■

2.6 NORMALIDADE ASSINTÓTICA

Para obter a normalidade assintótica de (2.1) Campos e Dorea [3] se depararam com o problema técnico de terem que garantir: $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) \sigma^2(W(h, x, y)) = \beta_0 > 0$. Segue assim o Lema 2.2.

Lema 2.2 *Seja $x \in C_v(f)$ com $f(x) > 0$, suponha que x não é um átomo e assuma que vale a Condição 2.3 com $\gamma(x) > 0$. Se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \gamma_n(x) W^2(h, x, y) \nu(dy) = \tau^2(x) > 0, \quad (2.22)$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) \sigma^2(W(h, x, y)) = \beta_0 > 0.$$

Demonstração

Tomando $h_n = 1/n$ temos

$$\gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\{y : |x - y| \leq 1/n\} = \nu(\{x\}).$$

Dado $\delta > 0$ definimos $\mathcal{A}_\delta = \{y : |x - y| \leq \delta\}$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$ obtemos $\mathcal{A}_\delta \setminus \{x\} \rightarrow \emptyset$ e como $W(h, x, \cdot)$ é integrável temos

$$\int_{\mathcal{A}_\delta \setminus \{x\}} W(h, x, y) \nu(dy) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Por outro lado, pela Condição 2.1 e o Teorema da Convergência Dominada (A.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}_\delta^c} W(h, x, y) \nu(dy) = 0.$$

Mas $W(h, x, \cdot)$ é uma densidade, portanto

$$\begin{aligned} \int_E W(h, x, X) \nu(dy) &= W(h, x, y) \nu(\{x\}) + \int_{\mathcal{A}_\delta \setminus \{x\}} W(h, x, y) \nu(dy) \\ &\quad + \int_{\mathcal{A}_\delta^c} W(h, x, y) \nu(dy). \end{aligned}$$

e fazendo $\delta \rightarrow 0$ e $h \rightarrow 0$ obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(h, x, X) \nu(\{x\}) = 1. \quad (2.23)$$

Tomando $\alpha = 1$ em (2.15) podemos escrever de maneira análoga

$$\begin{aligned} \int_E W^{(1)}(h, x, y) f(x) \nu(dy) &= \int_E \gamma_n(x) W^2(h, x, y) f(x) \nu(dy) \\ &= \gamma_n(x) W^2(h, x, X) f(x) \nu(\{x\}) \\ &+ \int_{\mathcal{A}_\delta \setminus \{x\}} \gamma_n(x) W^2(h, x, y) f(x) \nu(dy) \\ &+ \int_{\mathcal{A}_\delta^c} \gamma_n(x) W^2(h, x, y) f(x) \nu(dy). \end{aligned}$$

E por hipótese

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \gamma_n(x) W^2(h, x, y) f(x) \nu(dy).$$

De fato, por (2.15)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E W^{(1)}(h, x, y) f(x) \nu(dy) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \gamma_n(x) W^2(h, x, y) f(x) \nu(dy) \\ &= f(x) \tau^2(x). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Pela Condição 2.3

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathcal{A}_\delta \setminus \{x\}} \gamma_n(x) W^2(h, x, y) f(x) \nu(dy) \\ &\leq K_1(x) f(x) \int_{\mathcal{A}_\delta \setminus \{x\}} W(h, x, y) \nu(dy) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathcal{A}_\delta} \gamma_n(x) W^2(h, x, y) f(x) \nu(dy) \\ &\leq K_1(x) f(x) \int_{\mathcal{A}_\delta} W(h, x, y) \nu(dy) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$ e $h \rightarrow 0$ e usando (2.23) encontramos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \gamma_n(x) W^2(h, x, y) f(x) \nu(dy) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) W^2(h, x, X) f(x) \nu(\{x\}) \\ &= \gamma(x) f(x) \lim_{h \rightarrow 0} W(h, x, X). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Pela Condição 2.2 temos $\lim_{h \rightarrow 0} \int_E W(h, x, y) f(x) \nu(dy) = f(x)$, donde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_E W(h, x, y) f(x) \nu(dy) \right)^2 = f^2(x). \quad (2.26)$$

Assim, por (2.25) e (2.26)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) \text{Var}(W(h, x, X)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\gamma_n(x) E(W^2(h, x, X)) - \gamma_n(x) E^2(W(h, x, X))] \\ &= \gamma(x) f(x) \lim_{n \rightarrow 0} W(h, x, x) - \gamma(x) f^2(x) \\ &= \gamma(x) f(x) [\lim_{n \rightarrow 0} W(h, x, x) - f(x)]\end{aligned}$$

Como x não é um átomo, segue que $f(x) \nu(\{x\}) < 1$ o que implica

$$\lim_{n \rightarrow 0} W(h, x, x) f(x) \nu(\{x\}) < \lim_{n \rightarrow 0} W(h, x, x)$$

e por (2.23) temos

$$f(x) < \lim_{n \rightarrow 0} W(h, x, x).$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) \text{Var}(W(h, x, X)) = \beta_0 > 0.$$

■

Definição 2.2 Dizemos que x é um átomo se a probabilidade de x é maior que zero.

Teorema 2.5 Seja $x \in C_\nu(f)$ com $f(x) > 0$, assumamos que x não é um átomo e que a Condição 2.3 vale. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \gamma_n(x) W^2(h, x, y) \nu(dy) = \tau^2(x) > 0,$$

então temos a normalidade assintótica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{f_n(x) - E(f_n(x))}{\sigma(f_n(x))} \leq z \right) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} dt,$$

onde $\sigma(f_n(x)) = \sqrt{\text{Var}(f_n(x))}$.

Demonstração

Pelo Teorema do Limite Central de Liapounov (A.4) é suficiente provarmos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^n E(|W(h, x, X_k) - E(W(h, x, X_k))|^3) = 0,$$

onde, $s_n^2 = \text{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^n \sigma^2(W(h, x, X_k))$, ou seja, basta mostrarmos que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^n E|W(h, x, X_k) - E[(W(h, x, X_k))]|^3 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n E|W(h, x, X_k) - E[(W(h, x, X_k))]|^3}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^n \sigma^2(W(h, x, X_k))\right)^3}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nE|W(h, x, X) - E[(W(h, x, X))]|^3}{\sqrt{n^3 \sigma^3(W(h, x, X_k))}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E|W(h, x, X) - E[(W(h, x, X))]|^3}{\sqrt{n} \sigma^3(W(h, x, X_k))}, \tag{2.27}
\end{aligned}$$

com X representando uma variável aleatória com a mesma distribuição de $\{X_i\}$. Então, basta verificar (2.27).

Para verificar (2.27), vamos mostrar que existem constantes β_1 e β_2 tais que para n grande

$$L_1 = \gamma_n^{3/2}(x) \sigma^3(W(h, x, X)) \geq \beta_1 > 0 \tag{2.28}$$

e

$$L_2 = E\{\gamma_n^2(x) |W(h, x, X) - E[(W(h, x, X))]|^3\} \leq \beta_2 < \infty \tag{2.29}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E\{|W(h, x, X) - E[(W(h, x, X))]|^3\}}{\sqrt{n} \sigma^3(W(h, x, X))} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E\{\gamma_n^2(x) |W(h, x, X) - E[(W(h, x, X))]|^3\}}{\sqrt{n \gamma_n(x)} \gamma_n^{3/2}(x) \sigma^3(W(h, x, X))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_2}{\sqrt{n \gamma_n(x)} L_1} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_2}{\sqrt{n \gamma_n(x)} \beta_1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

já que por (2.15) $n \gamma_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Por (2.24)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[W^1(h, x, X)] = f(x) \tau^2(x).$$

Assim podemos escrever

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) \sigma^2(W(h, x, X)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{\gamma_n(x) E[W(h, x, X) - E(W(h, x, X))]^2\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) E[W^2(h, x, X)] - \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) E^2[W(h, x, X)].\end{aligned}$$

Por (2.13) e pelo Teorema 2.2 temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) E^2[W(h, x, X)] = f(x) \tau^2(x) - \gamma(x) f^2(x).$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) \sigma^2(W(h, x, X)) = f(x) \tau^2(x) - \gamma(x) f^2(x).$$

Ou seja, se $\gamma(x) = 0$ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) \sigma^2(W(h, x, X)) = f(x) \tau^2(x) > 0$. E para $\gamma(x) \neq 0$, temos garantido pelo Lema 2.2 que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) \sigma^2(W(h, x, X)) = \beta_0 > 0$. Como L_1 converge para um valor estritamente positivo, temos que existe β_1 tal que $L_1 \geq \beta_1 > 0$.

Aplicando a desigualdade de Minkowski (A.5) em (2.29)

$$\begin{aligned}L_2^{1/3} &= \{E[\gamma_n^2(x) |W(h, x, X) - E(W(h, x, X))|^3]\}^{1/3} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{E}} |\gamma_n^2(x) W(h, x, y) - \gamma_n^2(x) E(W(h, x, y))|^3 f(y) \nu(dy) \right\}^{1/3} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{E}} |\gamma_n^2(x) W(h, x, y)|^3 f(y) \nu(dy) \right)^{1/3} + \left(\int_{\mathbb{E}} |\gamma_n^2(x) E(W(h, x, y))|^3 f(y) \nu(dy) \right)^{1/3} \\ &= \{E[\gamma_n^2(x) |W(h, x, X)|^3]\}^{1/3} + \{\gamma_n^2(x) |E(W(h, x, X))|^3\}^{1/3} \\ &\leq \{K_1^2(x) E|W(h, x, X)|\}^{1/3} + \gamma_n^{2/3}(x) |E(W(h, x, X))| \\ &= K_1^{2/3}(x) [E|W(h, x, X)|]^{1/3} + \gamma_n^{2/3}(x) |E(W(h, x, X))|.\end{aligned}$$

Fazendo $\beta_n = K_1^{2/3}(x) [E|W(h, x, X)|]^{1/3} + \gamma_n^{2/3}(x) |E(W(h, x, X))|$ temos $L_2 \leq \beta_n^3$ e por (2.13) e pelo Teorema 2.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^3 = [K_1^{2/3}(x) f(x)]^{1/3} + \gamma^{2/3}(x) f(x)^3.$$

Portanto,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} L_2 = [K_1^{2/3}(x) f(x)]^{1/3} + \gamma^{2/3}(x) f(x)^3 = \beta_2 < \infty.$$

O que conclui a demonstração. ■

2.7 DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

Ao longo deste capítulo mostramos como as hipóteses de Campos e Dorea [3] foram obtidas a partir do trabalho de Prakasa Rao [11], ou seja, estenderam os resultados de Prakasa Rao [11] para estimar densidades de distribuição absolutamente contínuas seguem como corolários dos Teoremas 2.3, 2.4 e 2.5 ao considerarmos, $E = \mathbb{R}^d$ e ν a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^d .

Vamos encerrar esse capítulo verificando como alguns dos resultados já conhecidos para estimar distribuições discretas podem ser obtidos a partir de Campos e Dorea [3].

Exemplo 2.1 *Seja S um intervalo da reta contendo a origem. Com o objetivo de construir Estimadores do Tipo Núcleo para estimar distribuições discretas em \mathbb{Z} , Wang e Ryzin [6] introduziram a noção de função peso, isto é, uma função $W(h, i, j)$ definida em $S \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfazendo*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} W(h, i, j) = 1$$

$W(h, i, j) > 0$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, $h \in S$,

$$W(0, i, j) = I_{(i=j)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}, \quad (2.30)$$

e $W(h, i, j)$ é contínua no zero para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.

Dadas X_1, X_2, \dots, X_n , variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas assumindo valores em \mathbb{Z} , com distribuição comum $f(i)$, $i = 0, \pm 1, \dots$. A partir da definição de função peso, Wang e Ryzin [6] introduziram a seguinte classe de estimadores para $f(i)$

$$f(i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} W(h, i, j) Y_n(j) \quad \text{onde} \quad Y_n(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=j}^n I_{(X_k=1)} \quad \text{e} \quad h = h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Eles observaram a consistência fraca e a normalidade assintótica para esses estimadores supondo $\lim_{n \rightarrow \infty} h\sqrt{n} = 0$ e $W(h, i, j)$ uma função com primeira derivada contínua no 0.

Tomando ν como sendo a medida contadora em \mathbb{Z} temos para h pequeno $\gamma_n(i) = 1$ e é fácil verificar que a Condição 2.3 e as hipóteses (2.20) e (2.22) são satisfeitas. Sendo assim os resultados de Campos e Dorea [3] estendem aos de Wang e Ryzin [6] sem a hipótese $\lim_{n \rightarrow \infty} h\sqrt{n} = 0$ e também sem a exigência de que $W(h, i, j)$ tenham primeira derivada contínua no 0.

Nos próximos exemplos serão citados mais dois estimadores de distribuições discretas existentes na literatura que satisfazem as condições de Campos e Dorea [3].

Exemplo 2.2 *Hall e Titterington [5] estudaram funções peso discretas em \mathbb{Z} do tipo*

$$W(h, i, j) = \frac{K\left(\frac{i-j}{h}\right)}{\sum_{i \in \mathbb{Z}} K\left(\frac{j}{h}\right)}, \quad (2.31)$$

onde o núcleo $K(\cdot)$ é uma função contínua com suporte compacto satisfazendo as condições

$$K(x) > 0, \quad \int K(x) dx = 1, \quad \int xK(x) dx = 0 \quad e \quad \int x^2 K(x) dx > 0.$$

É imediato que $W(h, i, j) \geq 0$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} W(h, i, j) = \frac{\sum_{j=-\infty}^{\infty} K\left(\frac{i-j}{h}\right)}{\sum_{i \in \mathbb{Z}} K\left(\frac{j}{h}\right)} = 1$ e, devido compaci-

dade do suporte, $\lim_{h \rightarrow 0} W(h, i, j) = 0$ se $i \neq j$ e $\lim_{h \rightarrow 0} W(h, i, j) = 1$. Ou seja, (2.31) satisfaz as condições do Exemplo 2.1. Portanto tomando ν como sendo a medida contadora temos também para este exemplo a Condição 2.3 e as hipóteses (2.20) e (2.22) satisfeitas.

Exemplo 2.3 *Seja E um conjunto enumerável sem pontos de acumulação e seja $f(\cdot)$ uma probabilidade em E . Note que se ν é a medida contadora em E , então todo $x \in E$ é um ponto de ν -continuidade. Um estimador natural para $f(x)$ é dado pela distribuição empírica*

$$f_n(x) = F_n(x+h) - F_n(x-h) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_{(x-h, x+h]}(X_k).$$

Para esse caso foi considerado $W(h, x, y) = I_{(x-h, x+h]}(y)$ e é fácil verificar, também para este estimador, que as condições do Exemplo 2.1 são satisfeitas.

Capítulo 3

SIMULAÇÕES

3

SIMULAÇÕES NO SOFTWARE R

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, ilustramos através de exemplos a necessidade de algumas hipóteses (sobre a sequência $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ usada na definição dos estimadores, por exemplo) no processo de estimação de uma função de densidade. Os exemplos nos darão também uma idéia visual do que ocorre no processo de estimação. Os exemplos que apresentamos foram simulados utilizando o software R. Veremos que o software possui limitações visuais, os resultados obtidos para partições finas não melhoram muito se tomarmos partições com muito mais pontos. Nos exemplos que apresentamos o intervalo no qual estimamos a densidade procurada é definido da seguinte maneira o limite inferior (x_{inf}) será o menor valor e o limite superior (x_{sup}) o maior valor da amostra utilizada. A partição é obtida pela divisão do intervalo em subintervalos de largura Δx .

3.2 SIMULAÇÕES

Neste capítulo usamos os estimadores definidos em Parzen (1962), a saber

$$f_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_j}{h}\right), \quad (3.1)$$

onde a sequência $h = h_n > 0$ satisfaz as hipóteses necessárias para a obtenção dos resultados de não vício assintótico e consistência, a saber

- $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot h_n = \infty$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot h_n^2 = \infty$.

Caso h não satisfaça uma das condições não obtemos os resultados desejados.

Para este exemplo, suponhamos que a densidade procurada seja a de uma normal padrão. Usamos uma amostra de tamanho 10.000 com $\Delta x = 0.01$ e estimamos os valores da densidade nos pontos $x_{\text{inf}}, x_{\text{inf}} + \Delta x, x_{\text{inf}} + 2\Delta x, \dots, x_{\text{sup}}$. E considerando a seguinte função como a função núcleo nas simulações

$$K(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad |y| \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Tomando $h_n = n^{-3}$ vemos que essa sequência só cumpre a primeira condição. Utilizando este h_n no estimador (3.1) obtemos a seguinte aproximação:

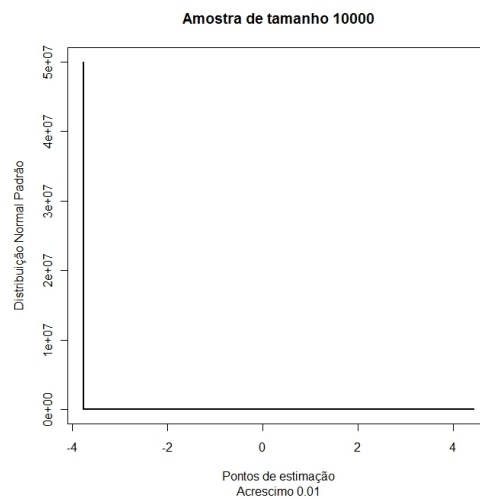


Figura 1: $h_n = n^{-3}$

Tomando $h_n = n^{-1/3}$ vemos que satisfaz todas as três condições. Utilizando este h_n no estimador (3.1), obtemos a seguinte aproximação:

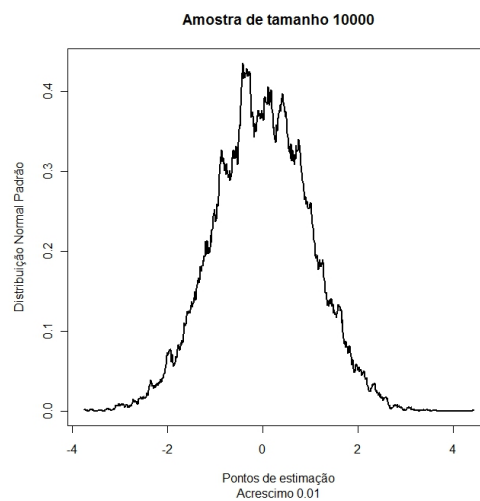


Figura 2: $h_n = n^{-1/3}$

Vemos então que as hipóteses sobre h_n são importantes para a convergência dos estimadores. Nos próximos exemplos usamos $h_n = n^{-1/3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.2.1 Limitação visual do software R

Neste próximo exemplo continuamos supondo que a densidade procurada é a de uma normal padrão, e o tamanho da amostra utilizada é 10.000. Para valores de acréscimo $\Delta x = 0.1, 0.01$ e 0.001 , obtemos as seguintes aproximações:

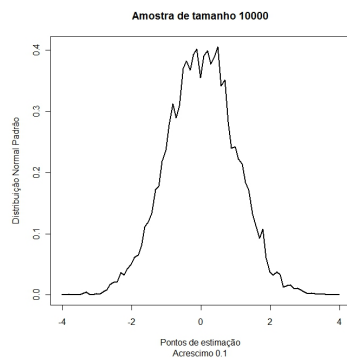


Figura 3: $\Delta x = 0.1$

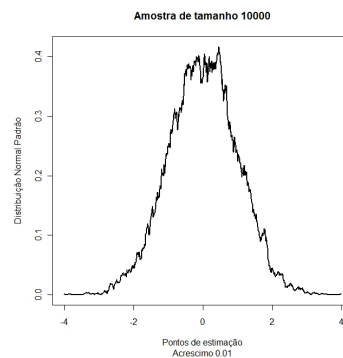


Figura 4: $\Delta x = 0.01$

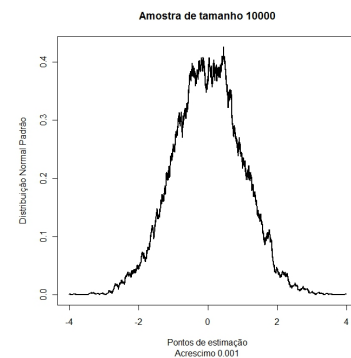


Figura 5: $\Delta x = 0.001$

Note que visualmente não percebemos muita diferença entre $\Delta x = 0.01$ e $\Delta x = 0.001$. Para reduzirmos o esforço computacional, nos próximos exemplos usamos $\Delta x = 0.01$ uma vez que não obtemos melhorias substanciais se usarmos $\Delta x = 0.001$.

3.2.2 Convergência

Para ilustrarmos graficamente como ocorre a convergência, nos próximos exemplos utilizamos $\Delta x = 0.01$ e tamanho de amostra diferentes $n = 1.000, 10.000, 100.000$ e $1.000.000$

Exemplo 3.1 *Suponha que a densidade procurada seja a de uma normal padrão. Utilizando (3.1) obtemos:*

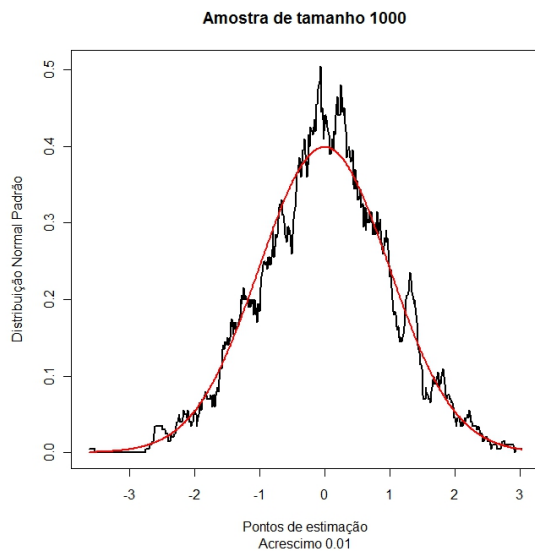


Figura 6: $n = 1.000$

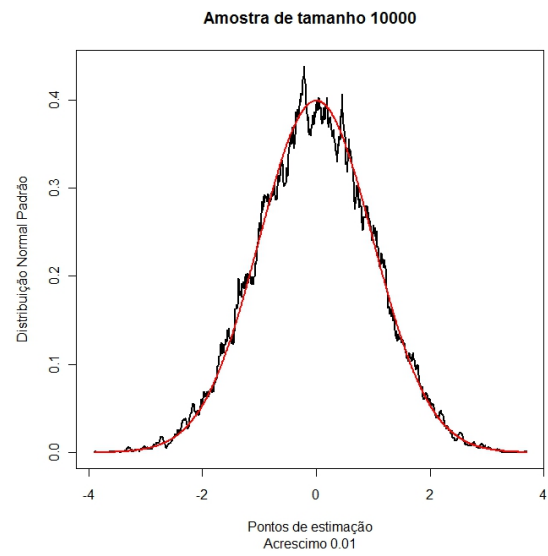


Figura 7: $n = 10.000$

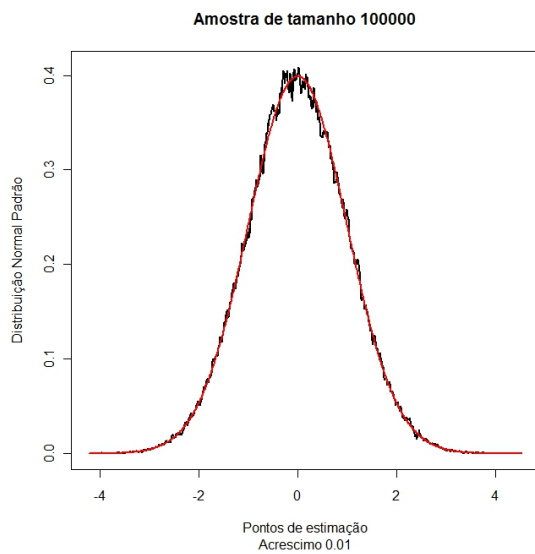


Figura 8: $n = 100.000$

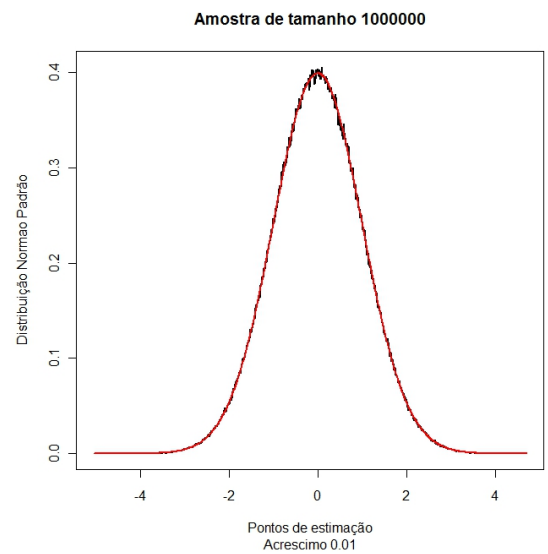


Figura 9: $n = 1.000.000$

Exemplo 3.2 *Suponha que a densidade procurada seja de uma variável aleatória exponencial com parâmetro $\lambda = 1$:*

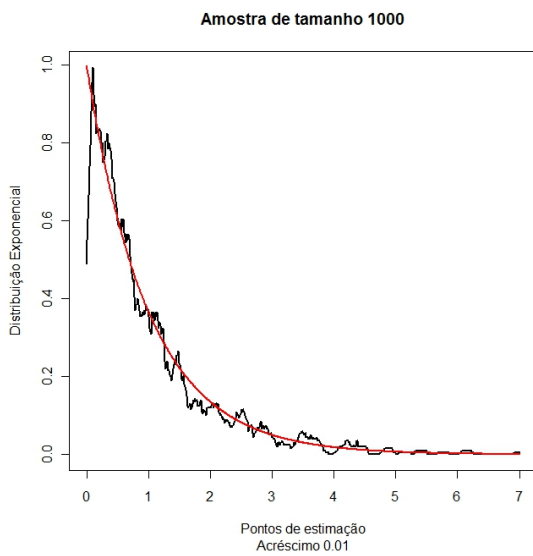


Figura 10: $n = 1.000$

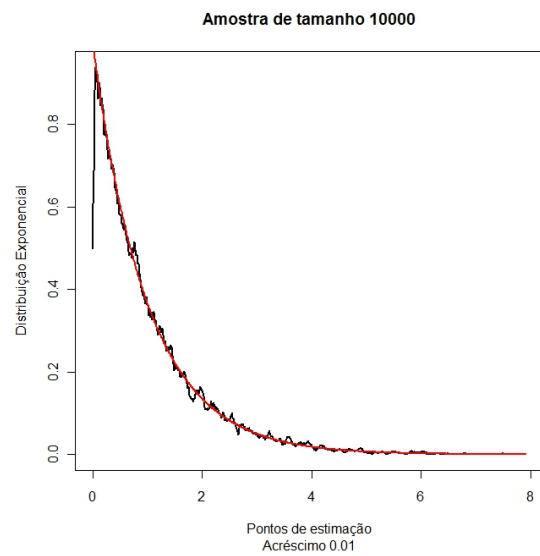


Figura 11: $n = 10.000$

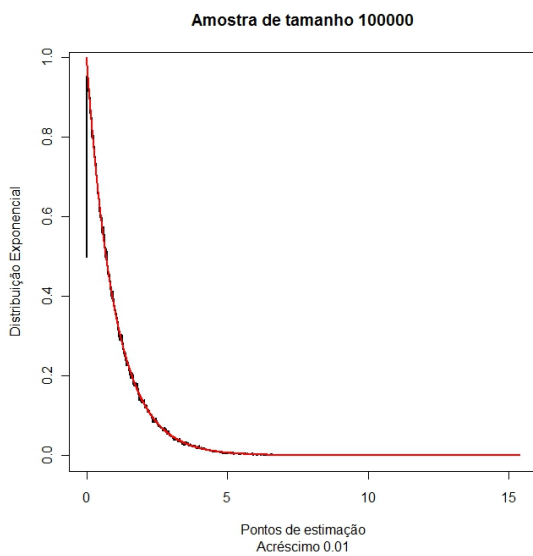


Figura 12: $n = 100.000$

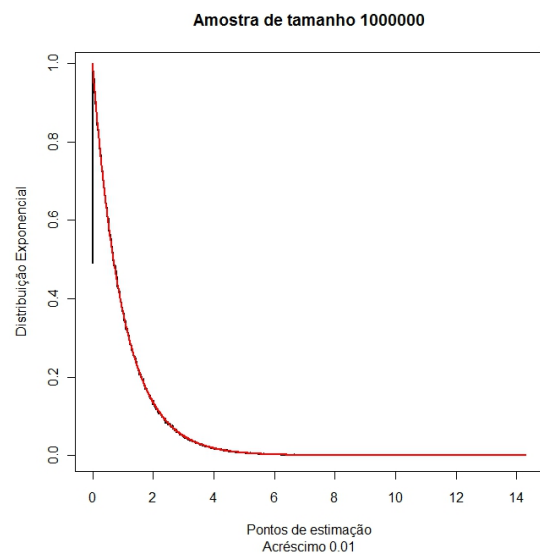


Figura 13: $n = 1.000.000$

Quanto maior o valor da amostra mais o estimador se aproxima da densidade desejada.

3.3 PROGRAMA

```

#Definir a amostra
  n <- 1000 #Tamanho da amostra
  X <- c(rnorm(n)) # define a amostra, no caso estamos usando a normal
padrão
  xsup <- max(X) # o valor máximo da amostra
  xinf <- min(X) # o valor mínimo da amostra
#Definir a sequência que satisfaça as condições necessárias
  h<- function (n){ 1/n^(1/3) }
  h(10)
#Definir a função núcleo
  K <- function(y){
  k <-NULL
  if ( abs(y) <= 1 )
  k <- 1/2
  else
  k <- 0
  return (k)
  }
  K(1)
#Definir o estimador
  w <- NULL
  y <- c(0)
  s <- 0
#Ponto em que vamos estimar
  x <- c(seq(xinf,xsup, 0.01))
  length(x)
  fn <- function (i,n) {
  y[i]<-0
  for(j in 1:n){
  y[i] <- y [i] + K((x[i]-X[j])/h(n))
  }
  f <- y[i]/(n*h(n))
  return (f)
  }
  resultado<-c(0)
  for (i in 1:length(x)){
  resultado[i]<-fn(i,n)

```

```
}  
plot(x,resultado,type = "l",lwd=2)  
lines(x,dnorm(x),col = "red",lwd=2)
```

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho de Campos e Dorea (2001)[3] trata da consistência de uma classe de estimadores do tipo núcleo, ou seja, da convergência de uma sequência de variáveis aleatórias.

O grande mérito do trabalho foi a adaptação do Teorema de Bochner (colocar a referência) para espaço de estados geral, enunciada no Teorema 2.2 2.2. Como consequência desse teorema, obtiveram o não vício assintótico e a consistência em média quadrática para a classe de estimadores estudada.

Para a consistência forte e a normalidade assintótica, precisaram acrescentar algumas hipóteses técnicas e estabeleceram assim, para a sequência de variáveis aleatórias $f_n(x)$, versões da convergência quase-certa e do Teorema do Limite Central.

Apêndice **A**

A

APÊNDICE

A.1 DISTRIBUIÇÃO DA $nF_n(x)$

Seja

$$F_n(x) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de observações } \leq x}{n}.$$

Defina,

$$Y_i = I_{(-\infty, x]}(X_i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Note que Y_i é uma variável aleatória com distribuição Bernoulli($F_X(x)$). De fato,

$$p(1) = P(Y_i = 1) = P(X_i \leq x) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

$$p(0) = P(Y_i = 0) = P(X_i > x) = 1 - P(X_i \leq x) = 1 - F_X(x).$$

Dessa forma podemos escrever

$$nF_n(x) = \sum_{i=1}^n Y_i$$

sabemos que a soma de n variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli($F_X(x)$) é uma variável aleatória com distribuição Binomial($n, F_X(x)$).

A.2 TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA

Por Isnard [8] tem - se:

Sejam as funções $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ mensuráveis tais que $f_n \rightarrow f$ q.t.p.. Se existe uma função integrável $g : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ tal que $g \geq |f_n|$ q.p, então as funções f_n e f são integráveis e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

A.3 LEMA DE BOREL-CANTELLI

Por Magalhães [9] tem - se:

Sejam A_1, A_2, \dots eventos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ com $p_n = P(A_n)$ para todo $n \geq 1$. Temos

I Se $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ então $P(\limsup A_n) = 0$

II Se $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$ e os A_n 's são independentes, então $P(\limsup A_n) = 1$

A.4 TEOREMA DO LIMITE CENTRAL DE LIAPOUNOV

Por Magalhães [9] tem - se:

Seja $\{X_n : n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com esperança μ_n e variância σ_n^2 , com $\sigma_n^2 < \infty$ e pelo menos um dos σ_n^2 's maior que zero. Sejam $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ e $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. Se a condição de Liapounov estiver satisfeita, isto é, se existir $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E(|X_k - \mu_k|^{2+\delta}) = 0$$

então

$$\frac{S_n - E(S_n)}{s_n} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

A.5 DESIGUALDADE DE MINKOWSKI

Por Cassela [7] tem - se:

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer. Então, para $1 \leq p < \infty$,

$$[E(|X + Y|^p)]^{1/p} \leq [E(|X|^p)]^{1/p} + [E(|Y|^p)]^{1/p}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Z. D. Bai, C. Radhakrishna Rao, and L. C. Zhao. Kernel estimators of density function of directional data. *Journal of Multivariate Analysis*, 27:24–39, 1988. (Citado na pagina 15.)
- [2] C.C. Y. Dorea. Strong consistence of kernel estimators for markov transition densities. *Bull Braz Math Soc*, 33(3):409–419, 2002. (Citado na pagina 16.)
- [3] V. S. M. Campos e C. C. Y. Dorea. Kernel density estimation: the general case. *Statistics and Probability Letter*, 55, 2001. (Citado na pagina vii, viii, 11, 15, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 30, 35, 36, and 46.)
- [4] V. S. M. Campos e C. C. Y. Dorea. Kernel estimation for stationary density of markov chains with general state space. 2005. (Citado na pagina 16.)
- [5] P. Hall e D. M. Titterington. On smoothing sparse multinomial data. *Australian Journal of Statistics*, 29, 1987. (Citado na pagina 36.)
- [6] M.C. Wang e J. van Ryzin. A class of smooth estimators for discrete distributions. *Biometrika*, 68, 1981. (Citado na pagina 35.)
- [7] G. Casella e R. L. Berger. *Inferência Estatística*. Cengage Learning, tradução da 2 edition, 2010. (Citado na pagina 49.)
- [8] C. Insnard. *Introdução à Medida e Integração*. IMPA, 2 edition, 2009. (Citado na pagina 48.)
- [9] M. N. Magalhães. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. Edusp: Editora da Universidade de São Paulo, 2 edition, 2006. (Citado na pagina 49.)
- [10] E. Parzen. On estimation of a probability density function and mode. *Annals of Mathematical Statistics*, 1962. (Citado na pagina 11, 13, 14, 15, 18, and 19.)
- [11] B. L. S. Prakasa Rao. *Nonparametric Functional Estimation*. Academic Press, third edition, 1992. (Citado na pagina 14, 18, 19, 23, 24, 27, and 35.)
- [12] M. Rosenblatt. Remarks on nonparametric estimates of a density function. *Annals of Mathematical Statistics*, 27(3):832–837, 1956. (Citado na pagina 11.)
- [13] G. G. Roussas. Nonparametric estimation in markov processes. *Annals of The Institute of Statistical Mathematics*, 21:73–87, 1969. (Citado na pagina 14.)