



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FUNDAMENTAÇÃO CINÉTICA DA ESTATÍSTICA NÃO-GAUSSIANA: EFEITOS EM POLITRÓPICAS

ELIÂNGELA PAULINO BENTO

NATAL-RN
SETEMBRO DE 2011

ELIÂNGELA PAULINO BENTO

FUNDAMENTAÇÃO CINÉTICA DA ESTATÍSTICA
NÃO-GAUSSIANA: EFEITOS EM POLITRÓPICAS

*Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física Teórica e Experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestra** em Física.*

Orientador: Dr. Raimundo Silva Júnior

NATAL-RN
SETEMBRO DE 2011

Agradecimentos

À DEUS, criador de todas as coisas.

Ao Professor Dr. Raimundo Silva Júnior pela orientação concedida para a realização deste trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFRN pelo espaço cedido e por ter me permitido fazer parte de seu grupo discente.

Ao Conselho Nacional de Pesquisas CNPq, pelo apoio financeiro concedido.

Aos meus pais, José Bento e Luciene Paulino de Lima, a meu irmão, Carlos Eduardo Paulino Bento e a minha irmã, Vanessa Paulino Bento, por sempre estarem ao meu lado, apoiando-me e incentivando-me a seguir sempre em frente.

À família Mattos de Souza, a qual me prestou a maior assistência durante toda minha permanência em Natal. Em especial a Hidalyn T. C. M. de Souza, por encarar comigo essa jornada.

Aos meus grandes amigos da sala Mário Schenberg: Danilo Pedreira, Thiago Bruno Rafael, Pedro Ferreira, Bruno Amorim, Caio Fábio, Flodoaldo Simões, Diogo Souto e Jefferson Soares pelos grandes momentos aos quais desfrutamos juntos e pelas grandes, interessantes e salutares discussões sobre os mais variados temas da Física. E acima de tudo, por nossa amizade e companheirismo.

Aos demais colegas e amigos das Salas César Lattes e Jaime Tiomo de modo especial a Carlene Paula Silva pela primeira estadia em Natal e a Juliana Cerqueira (companheira de quarto...). Muito obrigada meninas!!!!

Agradeço também aos amigos Gustavo Gurgel, Fábio Sales e Ubiratan Correia por me auxiliarem no início do mestrado e aos demais amigos e colegas Cosmólogos, Astrofísicos, da Matéria Condensada, da Física Estatística, das Ciências Climáticas, por tudo o que compartilhamos até aqui.

De modo especial agradeço aos professores do programa de pós-graduação, os quais devo grande parte da minha formação acadêmica.

E por último, mas não menos importantes, agradeço aos funcionários do DFTE, em particular a Celina, por sua excepcional eficiência, qualidade e atenção.

“Uma teoria é mais impressionante quanto maior for a simplicidade de suas premissas, quanto maior for o número de coisas diferentes relacionadas com ela e mais extensa for a sua área de aplicação. Daí veio a profunda impressão que tive da termodinâmica. É a única teoria física de conteúdo universal que, dentro do domínio dos seus conteúdos básicos, nunca será superada.”

(A. Einstein, 1949)

Resumo

Considerando um gás ideal não relativístico, os fundamentos da teoria cinética padrão são investigados no contexto da mecânica estatística não-gaussiana introduzida por Kaniadakis. O novo formalismo é baseado na generalização do teorema- H de Boltzmann e na dedução de Maxwell da distribuição estatística. A distribuição lei de potência calculada é parametrizada por um parâmetro κ medindo o grau de não-gaussianidade do sistema. No limite $\kappa = 0$, a teoria gaussiana de Maxwell-Boltzmann é recuperada. Duas aplicações dos efeitos não-gaussiano são estudados. Na primeira, o κ -alargamento Doppler das linhas espectrais de um gás excitado é obtido a partir das expressões analíticas. Na segunda, uma relação matemática entre o índice entrópico κ e o índice politrópico estelar é mostrada usando uma formulação termodinâmica para sistemas auto-gravitantes.

Palavras-chave: Mecânica estatística não-gaussiana, teorema- H de Boltzmann, dedução de Maxwell da distribuição estatística, distribuição lei de potência.

Abstract

Considering a non-relativistic ideal gas, the standard foundations of kinetic theory are investigated in the context of non-gaussian statistical mechanics introduced by Kaniadakis. The new formalism is based on the generalization of the Boltzmann H -theorem and the deduction of Maxwell's statistical distribution. The calculated power law distribution is parameterized through a parameter κ measuring the degree of non-gaussianity. In the limit $\kappa = 0$, the theory of gaussian Maxwell-Boltzmann distribution is recovered. Two physical applications of the non-gaussian effects have been considered. The first one, the κ -Doppler broadening of spectral lines from an excited gas is obtained from analytical expressions. The second one, a mathematical relationship between the entropic index κ and the stellar polytropic index is shown by using the thermodynamic formulation for self-gravitational systems.

Keywords: Non-gaussian statistical mechanics, Boltzmann's H -theorem, Maxwell's deduction of the statistical distribution, power law distribution.

Lista de símbolos

Símbolo	Descrição
k_B	Constante de Boltzmann
T	Temperatura
$f(\vec{r}, \vec{v}, t)$	Função de distribuição de velocidades
$d^3r d^3v$	Elemento de volume no espaço
n	Concentração ou densidade de partículas
$F(v)$	Função de distribuição de Maxwell completa
m	Massa das partículas
s	Raio da esfera de ação
\vec{V}	Velocidade relativa da partícula
\vec{e}	Vetor de colisão
$d\vec{\omega}$	Elemento de ângulo sólido
f_0	Função de distribuição de Maxwell no equilíbrio
f_1	Função de distribuição antes da colisão
f'_1	Função de distribuição depois da colisão
H	Funcional de Boltzmann
\vec{S}	Vetor fluxo associado com H
$G(\vec{r}, t)$	Fonte de entropia
S_q	q -entropia não extensiva
q	Parâmetro não extensivo
e_q	q -exponencial
\ln_q	q -logaritmo
$F_q(v)$	q -função de distribuição de velocidades completa
A_q	Constante de normalização unidimensional
B_q	Constante de normalização tridimensional
S_κ	κ -entropia
κ	κ -parâmetro
e_κ	κ -exponencial
\ln_κ	κ -logaritmo
β	Energia térmica
U	Energia potencial
μ	Potencial químico
Z	Função de partição
$C_\kappa(f)$	κ -Termo colisional
R_κ	κ -Função de correlação antes e depois da colisão
\vec{S}_κ	κ -Vetor fluxo

Lista de símbolos

Símbolo	Descrição
H_κ	κ -funcional
$P(r)$	Pressão interna do gás
ρ	Densidade do gás
$f(\varepsilon)$	Função de distribuição das esferas isotérmicas estelares
ε	Energia relativa das esferas isotérmicas
n	Índice politrópico
M	Massa total
E	Energia total
ν	Frequência da linha espectral
$I(\nu)$	Função de distribuição de frequências
λ	Comprimento de onda do espectro
$\Delta\lambda_d$	Alargamento das linhas espectrais

LISTA DE FIGURAS

2.1	Função de distribuição de velocidades para partículas brownianas.	31
3.1	Diagrama de correspondência entre a Estatística de Maxwell-Boltzmann e a κ -Estatística	38
4.1	Índice politrópico n como função dos parâmetros q de Tsallis e κ de Kaniadakis	55

Introdução	1
1 Teoria Cinética dos Gases	7
1.1 A Função de Distribuição Clássica	8
1.2 O Teorema- H de Boltzmann	15
2 Termoestatísticas Não-Gaussianas	21
2.1 A estatística não-extensiva de Tsallis	22
2.2 A estatística não-extensiva de Tsallis: contrapartida cinética	25
2.3 A estatística de Kaniadakis	27
2.4 A estatística de Kaniadakis: abordagem cinética via a generalização da hipótese de caos molecular	32
3 A κ-Função de Distribuição e Aplicações	37
3.1 Motivação	37

3.2	A κ -generalização da maxwelliana	39
4	A κ-Estatística e Sistemas Politrópicos	48
4.1	A κ -entropia e sistema estelar politrópico	50
5	Conclusões e Perspectivas	56
	Bibliografia	60

Durante muito tempo imaginou-se que a mecânica Newtoniana tivesse validade ilimitada, podendo ser aplicada a todos os sistemas físicos em quaisquer situações. Entretanto, com a chegada da Mecânica Quântica que lida com fenômenos nos quais as massas envolvidas são muito pequenas e da Teoria da Relatividade onde as velocidades são enormes (quando comparadas à velocidade da luz), o panorama da física mostrou-se bem mais complexo e sutil, colocando a Mecânica Clássica dentro de limites de aplicabilidade bem estabelecidos [1].

Situação semelhante vem ocorrendo com a Mecânica Estatística usual e a Termodinâmica Clássica. Basicamente, a Mecânica Estatística é o ramo da Física que trata das propriedades de sistemas macroscópicos constituídos por um grande número de elementos. Esta se propõe a investigar como as propriedades relativas à microescala dos sistemas aparecem na macroescala, utilizando, para tanto, a estatística na análise de sistemas formados por muitos corpos juntamente com o seu comportamento termodinâmico [2].

O conceito de *entropia* introduzido por Clausius em 1865 [3] desempenha o papel central na fundamentação teórica da Mecânica Estatística Clássica e da Termodinâmica. O esclarecimento de seu significado físico reveste-se, pois, de grande importância. Foi o destacado físico austríaco L. Boltzmann quem propôs, pela primeira vez, uma relação unívoca entre o valor da entropia de uma substância em um dado estado, e a probabilidade termodinâmica deste mesmo estado [4, 5].

O segundo postulada da termodinâmica estabelece que as transformações espontâneas são irreversíveis [6]. Portanto, os processos ditos irreversíveis (por exemplo, a difusão de um gás, a condução de calor entre dois corpos a diferentes temperaturas etc.) em sistemas isolados, terão um aumento significativo de sua entropia. Se em um dado sistema isolado, devido a um processo espontâneo, ocorre uma alteração do macroestado do sistema, então, o novo estado macroscópico possuirá uma quantidade maior de microestados do que o apresentado previamente. Consequentemente, o resultado do processo descrito acima é de que a probabilidade termodinâmica do sistema tende a aumentar, razão essa que na natureza, segundo Boltzmann, os processos tendem a passar dos estados menos prováveis aos mais prováveis [7, 8, 9]. Assim, a relação da entropia de um sistema físico com sua respectiva probabilidade termodinâmica de ocorrência é dada por,

$$S = k_B \ln W \quad (1)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e W a quantidade de estados acessíveis. No entanto, a equação acima é uma expressão particular de um caso mais geral, no qual a probabilidade termodinâmica do sistema

não é igual para todos os microestados que formam aquele dado estado macroscópico. Assim, a expressão se transforma na chamada entropia de Boltzmann-Gibbs (BG),

$$S = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i , \quad (2)$$

onde, p_i é a probabilidade do sistema encontrar-se no seu i -ésimo estado, e o somatório é efetuado sobre todos os microestados possíveis W em que o sistema pode ser encontrado.

A entropia apresenta as propriedades de *aditividade* e *extensividade* retratadas na forma entrópica logarítmica. Nesse contexto, para dois sistemas independentes quaisquer A e B, a entropia S do sistema combinado é dada da seguinte forma

$$S(A + B) = S(A) + S(B) . \quad (3)$$

A Mecânica Estatística, baseada nessa entropia, encontrou sua correta aplicação em sistemas físicos que guardam as seguintes características [1, 10, 11]:

- sistemas absolutamente *sem* interação ou com interações de curto alcance;
- sistemas com memória temporal de curto alcance e,
- sistemas cuja evolução no espaço de fase não apresentam fractalidade.

Seguindo essas características, os campos de aplicabilidade da Física Estatística ampliaram-se muito no último século. Foram encontrados resul-

tados em fluidos quânticos, fenômenos físico-químicos não-lineares, fenômenos críticos, teorias de transporte, biofísica, etc [2].

Embora muito útil para as situações acima mencionadas, pesquisas têm sugerido que existem outros sistemas de comportamento totalmente anômalo e discordante com o estabelecido pela Eq.(2). Em especial, parece não haver razão que obrigue a entropia a apresentar sempre a propriedade de extensividade. A ineficiência para tais sistemas anômalos parece estar relacionada com efeitos não-locais provenientes das interações de longo alcance no interior do sistema em evolução [1, 10].

Nesse contexto, as estatísticas generalizadas surgem com a proposta de lidar com sistemas anômalos por meio das mesmas ferramentas matemáticas usadas na Mecânica Estatística convencional. Isso pode ser realizado, através da forma de entropia adotada, com a introdução de logaritmos deformados apropriados [1].

No campo da Física teórica muitas aplicações dessas estatísticas generalizadas podem ser encontradas, enquanto que experimentalmente, observam-se muitos desvios relacionados com a queda da distribuição, a qual decai mais lentamente do que uma exponencial padrão, seguindo uma *lei de potência*. Exemplos de aplicações teóricas e experimentais podem ser encontrados em astrofísica estelar [12, 13, 14, 15], física de plasma [10, 16], gravitação, fractais [17], espectro de raios cósmicos [18], superfícies de crescimento, difusão anômala [19, 20], estatísticas de terremotos [21], formação de estruturas em cosmologia [22] etc. Desse modo, a proposição que generaliza a entropia clássica de BG, coloca as distribuições probabilísticas do tipo leis de potência no mesmo nível teórico que as exponenciais gaussianas. A estatística generalizada mais conhecida é a proposta por Constantino Tsallis em 1988, a *q-Estatística Não-Extensiva* [17] que lida com

uma entropia parametrizada pelo fator generalizado q .

Mais recentemente, em 2001, temos lidado com uma nova forma de entropia proposta por Giorgio Kaniadakis [23], a qual como toda estatística não-gaussiana, segue uma lei de potência e deforma as funções ordinárias com a introdução do parâmetro κ . Numa certa aproximação, o parâmetro κ pode ser explicado via a teoria da relatividade especial de Einstein [24, 25]. Desde então, alguns trabalhos têm sido desenvolvidos utilizando esse novo formalismo em astrofísica [14, 26], econofísica [27], biologia, matemática, geologia, teoria da informação [28], etc.

A presente dissertação está organizada como segue: no primeiro capítulo faremos uma revisão da teoria cinética do gases clássica. Inicialmente discutiremos os aspectos conceituais da função de distribuição de velocidades para gases diluídos. Em seguida, apresentamos a equação de evolução temporal da função de distribuição, conhecida como equação de transporte de Boltzmann de onde se pode fazer a análise da dinâmica do gás a partir dos processos colisionais (colisões binárias), chamando a atenção ao papel desempenhado pelo teorema- H clássico.

No capítulo 2, apresentaremos uma breve introdução das estatísticas não-gaussianas, em particular introduziremos a q -Estatística, suas funções e principais propriedades. Em seguida apresentaremos o formalismo matemático associado a estatística de Kaniadakis e a motivação física para o parâmetro κ introduzido na deformação das funções matemáticas. Nesse contexto enfatizaremos a dedução do teorema- H_{κ} , associado a κ -estatística [29]. O cálculo segue da generalização do termo colisional presente na equação de transporte de Boltzmann, assim como uma nova expressão para o funcional H_{κ} . A consequência natural desse teorema, no equilíbrio colisional, é que podemos obter uma função de distribuição de

velocidades do tipo lei de potência.

No capítulo 3, veremos que o fato de o teorema- H_κ fornecer uma κ -função de distribuição estacionária inspira uma dedução maxwelliana da função de distribuição de velocidades seguindo a hipótese da fatorização das probabilidades. Assim, adotando um tratamento análogo ao desenvolvido por Maxwell em 1860, deduzimos uma função de distribuição de velocidades para um gás diluído em equilíbrio termo-dinâmico a temperatura T . Como uma primeira aplicação, consideramos o alargamento Doppler térmico das linhas espectrais emitidas pelos átomos e moléculas de um gás diluído, usando a κ -distribuição.

No capítulo 4, abordaremos a dinâmica de um sistema auto-gravitante representado pelas esferas isotérmicas politrópicas. Visto que a maximização da entropia não-extensiva de Tsallis, considerando massa e energia total constante, recai numa função de distribuição politrópica, analisaremos os efeitos da κ -entropia sob essa perspectiva. Faremos um comparativo com os resultados encontrados na literatura usando a entropia padrão, a q -entropia de Tsallis e a κ -entropia de Kaniadakis.

Finalmente, no capítulo 5, discutiremos nossas principais conclusões e perspectivas deste trabalho.

CAPÍTULO 1

TEORIA CINÉTICA DOS GASES

A teoria cinética dos gases tem por objetivo descrever as propriedades macroscópicas de um gás através de grandezas microscópicas associadas aos seus constituintes básicos (partículas). A teoria cinética considera que os gases são constituídos por um número muito grande de partículas, que na maior parte do tempo se movem independentemente através do volume que as contém. O movimento é brevemente interrompido quando uma partícula se choca com as paredes do recipiente ou com outras partículas. Em 1859, Maxwell estabeleceu os fundamentos da teoria cinética ao deduzir a função de velocidades de um gás ideal em equilíbrio térmico [29]. Mas foi em 1872, com a contribuição de L. Boltzmann (1844 – 1906) que a teoria cinética teve maior impulso. Estudando o caminho para o equilíbrio colisional de um gás, Boltzmann propôs uma equação de evolução para a função de distribuição das velocidades das partículas na forma de uma equação íntegro-diferencial [5]. Através de seu famoso teorema- H , ele demonstrou que a distribuição maxwelliana de ve-

locidades descreveria o estado de equilíbrio colisional do gás. Maxwell e Boltzmann trabalharam na teoria cinética dos gases quase que o mesmo tempo de uma forma ligeiramente diferente e conseguiram em grande parte os mesmos resultados - todos exceto um, que escapou de Maxwell: a entropia e sua interpretação estatística ou probabilística! [30]. O chamado fator de Boltzmann, $e^{\frac{-E}{\kappa_B T}}$, relacionado com a probabilidade relativa das configurações de energia E na temperatura T , fornece a base para todos os cálculos das propriedades de equilíbrio da matéria do ponto de vista molecular. Mais tarde, Boltzmann mostrou que a entropia de um sistema para um dado estado físico pode ser calculada a partir da função de distribuição, simplesmente contando o número de configurações moleculares correspondendo a este estado [31].

Neste capítulo apresentamos os elementos básicos da teoria cinética dos gases. Inicialmente faremos uma breve introdução dos conceitos de espaço de fase e função de distribuição necessários para uma descrição estatística. Em seguida, faremos uma breve discussão acerca do teorema- H de Boltzmann e sua relação com a função de distribuição de velocidades de Maxwell.

1.1 A Função de Distribuição Clássica

A descrição cinética de um gás é baseada na função de distribuição $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Esta função é definida de tal forma que,

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3r d^3v \quad (1.1)$$

é o número médio de moléculas no instante de tempo t , com posição dentro do elemento de volume d^3r , sobre \vec{r} , e velocidade localizada pelo vetor no interior do elemento d^3v sobre \vec{v} . Assim como na teoria de fluidos, os elementos de volume devem ser grandes o suficiente para comportar muitas partículas e, ao mesmo tempo, ser pequeno o bastante em comparação com as dimensões macroscópicas, de tal forma que possam ser considerados essencialmente infinitesimais, e portanto mapeáveis num espaço matemático. A partir da função de distribuição, a informação de que existem N moléculas no volume V está contida na condição de normalização:

$$\int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3r d^3v = N . \quad (1.2)$$

Quando as moléculas estão uniformemente distribuídas no espaço, tal que f independe de \vec{r} , obtemos

$$\int f(\vec{v}, t) d^3v = \frac{N}{V} = n \quad (1.3)$$

onde n é a concentração ou densidade de partículas.

O principal objetivo da teoria cinética é determinar a função de distribuição para uma dada forma da interação molecular e a partir dela deduzir as expressões termodinâmicas para gases diluídos [11]. A forma limite de $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ quando $t \rightarrow \infty$ contém todas as propriedades de equilíbrio do gás. Nesta situação, as velocidades das moléculas (na ausência de forças externas e gradientes espaciais) são regidas pela função de distribuição de Maxwell.

Em 1860, Maxwell fez uma derivação extremamente simples da

função de distribuição de equilíbrio para um gás monoatômico [29]. O procedimento do cálculo segue da seleção de uma molécula do gás ao acaso, cujas componentes da velocidade são v_x, v_y e v_z . A probabilidade que a primeira componente tenha um valor entre v_x e $v_x + dv_x$, é dada por

$$f(v_x)dv_x . \quad (1.4)$$

Argumento similar é válido para as demais componentes, pois não existem direções privilegiadas no espaço homogêneo e isotrópico [32]. Dessa forma, torna-se possível a introdução da hipótese de *independência estatística*, onde o valor provável de v_x não afeta v_y ou v_z . Maxwell foi o precursor da ideia de independência estatística das velocidades em teoria dos gases. Assim, para uma molécula de velocidades v , com componentes v_x, v_y e v_z pertencendo ao elemento de volume $dv_x dv_y dv_z = dV$ do espaço das velocidades, a probabilidade total de que a extremidade de \vec{v} se localize no elemento de volume deste espaço é:

$$f(v_x)f(v_y)f(v_z)dV . \quad (1.5)$$

Considerando a isotropia de todas as direções da velocidade, ou seja, o fato que todas as componentes são igualmente prováveis, pode-se introduzir uma função desconhecida F que depende apenas do módulo da velocidade, a saber

$$F(v)d^3v . \quad (1.6)$$

A comparação das duas equações acima resulta em:

$$F(v)d^3v = f(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_xdv_ydv_z, \quad (1.7)$$

onde $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

A determinação das funções F e f presentes na equação funcional acima é uma consequência natural dos seguintes passos [10]:

1) Uma diferenciação logarítmica da Eq.(1.7) em relação a v_x , que resulta em

$$\frac{v_x F'(v)}{v F(v)} = \frac{f'(v_x)}{f(v_x)}, \quad (1.8)$$

2) Introduzindo as funções

$$\Psi(v) = \frac{1}{v} \frac{F'(v)}{F(v)}, \quad \psi(v_x) = \frac{1}{v_x} \frac{f'(v_x)}{f(v_x)}, \quad (1.9)$$

a equação se transforma em

$$\Psi(v) = \psi(v_x). \quad (1.10)$$

3) A diferenciação com respeito a v_y e v_z implica que

$$\Psi'(v_y) = 0 \quad \longrightarrow \quad \psi(v_y) = c \quad (1.11)$$

e

$$\Psi'(v_z) = 0 \quad \longrightarrow \quad \psi(v_z) = c. \quad (1.12)$$

Supondo $c = -2\alpha$ onde o sinal foi introduzido para satisfazer a condição de normalização, e o fator 2 por conveniência matemática, segue da Eq.(1.10)

$$\psi(v_x) = -2\alpha . \quad (1.13)$$

Finalmente obtemos,

$$f(v_x) = B e^{-\alpha v_x^2} . \quad (1.14)$$

A constante B é fixada pela condição de normalização da função de distribuição (ou equivalentemente, a certeza de encontrar a componente v_x com algum valor entre v_x e $v_x + dv_x$). É fácil verificar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) dv_x = 1 , \quad (1.15)$$

de onde têm-se que o valor de B é,

$$B = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} . \quad (1.16)$$

A determinação de α segue do cálculo da energia cinética média da componente v_x . Através de cálculos elementares obtemos [33]:

$$pV = \frac{2}{3} N \langle E_{cin} \rangle , \quad (1.17)$$

onde $\langle E_{cin} \rangle$ é a média da energia cinética de uma partícula. Se compararmos a Eq.(1.17) com a lei dos gases ideais, $pV = Nk_B T$, devemos ter $\langle E_{cin} \rangle = \frac{3}{2}k_B T$; isto é, a quantidade $\frac{3}{2}k_B T$ mede exatamente a energia cinética média de uma partícula do gás ideal.

Como $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle$, da Eq.(1.17), temos:

$$\begin{aligned}
 k_B T &= m \langle v_x^2 \rangle = m \int_{-\infty}^{\infty} d^3v f(v) v_x^2 \\
 &= m \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x^2) dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_y^2) dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_z^2) dv_z \\
 &= m \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x^2) dv_x \\
 &= m \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x \\
 &= 2m \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{+\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x .
 \end{aligned}$$

As integrais em v_y e v_z resultam em 1. Substituindo $u = \alpha v_x^2$ encontramos, com $dv_x = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \frac{du}{\sqrt{u}}$

$$k_B T = 2m \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-u} \sqrt{u} du . \quad (1.18)$$

Integrais deste tipo são resolvidas em termos da função gama (Γ), definida por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du , \quad (1.19)$$

com $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$ e utilizando a fórmula $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, temos

$$k_B T = m \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{m}{\alpha}, \quad (1.20)$$

ou seja,

$$\alpha = \frac{m}{2k_B T}. \quad (1.21)$$

Inserindo esse resultado em (1.16), a famosa distribuição de Maxwell para a componente v_x é obtida de (1.14):

$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2k_B T}. \quad (1.22)$$

A energia cinética da componente v_x é representada por uma gaussiana, simétrica, em torno do valor médio $\bar{v}_x = 0$. Fazendo o mesmo procedimento para as demais componentes v_y e v_z , a forma da função $F(v)$ é simplesmente dada por:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_B T} \quad (1.23)$$

onde, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Em 1868, Boltzmann começou a generalizar o trabalho de Maxwell sobre a distribuição de velocidades para o caso geral de partículas em interação. O cerne da questão está na interpretação da função de distribuição de velocidades $f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3V$ que, segundo Maxwell, representava uma densidade de probabilidade, ou seja, representava o número de moléculas num

elemento de volume $dV = dv_x dv_y dv_z$ em torno de um ponto, cujas velocidades se encontram entre \vec{v} e $\vec{v} + d\vec{v}$ num dado instante t . Para Boltzmann a função pode ser interpretada não apenas deste modo, como também pode ser vista como a fração de tempo, de um intervalo suficientemente longo, durante o qual a velocidade de uma molécula qualquer se mantém dentro de certos limites [3]. O desenvolvimento dessa ideia será discutido na seção a seguir.

1.2 O Teorema- H de Boltzmann

O modelo de maior sucesso utilizado para estudar sistemas fora do equilíbrio em todas as áreas da física é conhecido como *equação de transporte de Boltzmann* [7]. O objetivo primordial de uma equação de transporte é determinar a variação temporal da função de distribuição $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ devido às colisões moleculares. Nela as grandezas macroscópicas de um sistema termodinâmico são calculadas em função do tempo a partir das interações moleculares. Assume-se que o sistema é um gás diluído formado por N partículas idênticas. Numa primeira aproximação, a determinação da função $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ pode ser feita usando as seguintes hipóteses [7, 10]:

- as colisões entre as partículas são *binárias e elásticas*;
- o efeito das forças externas sobre as partículas durante uma colisão deve ser pequeno em comparação com as forças entre as partículas;
- como o efeito de forças externas sobre a seção de choque de colisão das partículas é muito pequeno, este pode ser ignorado;

- não há nenhuma correlação entre a velocidade (\vec{v}) e a posição (\vec{r}) de uma partícula no tempo t . Esta hipótese é conhecida como “Stosszahlansatz”¹, ou ainda “hipótese de caos molecular”. Matematicamente, a distribuição de pares de partículas pode ser escrita como

$$f(\vec{r}, \vec{v}, \vec{r}_1, \vec{v}_1, t) = f(\vec{r}, \vec{v}, t) f(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t) \quad (1.24)$$

implicando em,

$$\ln f(\vec{r}, \vec{v}, \vec{r}_1, \vec{v}_1, t) = \ln f(\vec{r}, \vec{v}, t) + \ln f(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t), \quad (1.25)$$

ou seja, as velocidades de duas partículas (antes da colisão) são completamente aleatórias (descorrelacionadas).

Seguindo as hipóteses feitas acima se obtém uma equação integro-diferencial denominada de *equação de transporte* de Boltzmann como segue,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \right) f_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{coll}. \quad (1.26)$$

O termo colisional é da forma [10],

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{coll} = \frac{s^2}{2} \int |\vec{V} \cdot \vec{e}| (f' f'_1 - f f_1) d\omega d^3 v_1, \quad (1.27)$$

onde, $d\omega$ é o elemento de ângulo sólido no espalhamento elástico $|\vec{V} \cdot \vec{e}|$ relaciona as velocidades entre as partículas (maiores detalhes ver [33]), s^2 é a seção de choque da colisão e o termo $(f' f'_1 - f f_1)$ descreve a transição de

¹Essa palavra pesada - mesmo para os ouvidos alemães - descreve uma fórmula para o número de colisões que conduzem a um ângulo de espalhamento especial pela interação binária das partículas. A palavra parece ser intraduzível, e por isso tem sido associada ao pequeno léxico de palavras alemãs no idioma inglês como *ansatz*. [30].

probabilidade entre as partículas.

Comparando a Eq.(1.27) com a Eq.(1.26) vemos que,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \right) f_1 = \frac{s^2}{2} \int |\vec{V} \cdot \vec{e}| (f' f'_1 - f f_1) d\omega d^3 v_1 \quad (1.28)$$

O problema matemático crucial na teoria cinética dos gases, consiste em procurar solucionar a equação íntegro-diferencial não-linear acima.

Os sistemas macroscópicos fechados evoluem para estados de equilíbrio de maneira a maximizar sua entropia. Paralelamente, na escala microscópica, a variação temporal da função de distribuição de não equilíbrio é regida pelo termo colisional da equação de transporte. A função de distribuição de Maxwell f_0 , que descreve o gás estatisticamente no equilíbrio termodinâmico, anula o lado direito da equação de transporte (1.28), sendo também uma solução homogênea, independente do tempo,

$$\int |\vec{V} \cdot \vec{e}| (f'_0 f'_1 - f_0 f_1) d\omega d^3 v_1 = 0 . \quad (1.29)$$

A Eq.(1.29) deve ser satisfeita através da seguinte condição,

$$f'(\vec{v}_0) f'(\vec{v}_1) = f(\vec{v}_0) f(\vec{v}_1) . \quad (1.30)$$

O grande triunfo de Boltzmann foi demonstrar que a Eq.(1.30) também é condição necessária para o equilíbrio termodinâmico [10]. O teorema- H pode ser estabelecido da seguinte forma, se $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ é uma solução da equação de Boltzmann, então o funcional $H(t)$, dado por,

$$H(t) = -k_B \int d^3\vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) \ln f(\vec{r}, \vec{v}, t) , \quad (1.31)$$

obedece a desigualdade [7, 9],

$$\frac{dH}{dt} \leq 0 . \quad (1.32)$$

A prova do teorema- H tem como ponto de partida a variação temporal do funcional H , dado por

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -k_B \int (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} d^3v . \quad (1.33)$$

Substituindo a equação de Boltzmann Eq.(1.28) na equação acima, segue que,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -k_B \int (1 + \ln f) \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{m} \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} - J_f \right) d^3v . \quad (1.34)$$

onde,

$$J_f = \frac{s^2}{2} \int |\vec{V} \cdot \vec{e}| (f'_0 f'_1 - f_0 f_1) d\omega d^3v_1 . \quad (1.35)$$

Transformando o primeiro termo do lado direito da Eq.(1.34), obtemos

$$\int (1 + \ln f) \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d^3v = \nabla \cdot \int \vec{v} \ln f \cdot f d^3v . \quad (1.36)$$

O segundo termo anula-se pois a integral resultante pode ser transformada numa integral de superfície sobre uma esfera no infinito do espaço das velocidades, e como a energia é finita, a distribuição f vai a zero. Usando a seguinte definição para o vetor fluxo associado com H ,

$$\vec{S} = -k_B \int \vec{v} \ln f \cdot f d^3v \quad , \quad (1.37)$$

a Eq.(1.34) assume a forma

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -k_B \int (1 + \ln f) J_f d^3v \quad . \quad (1.38)$$

Substituindo J_f no lado direito da Eq.(1.38) e depois de algumas manipulações algébricas (ver [10, 33]), obtemos seguinte equação de balanço para a entropia,

$$\frac{dH}{dt} = \dot{H} + \nabla \cdot \vec{S} = G \geq 0 \quad , \quad (1.39)$$

onde G é o termo fonte de entropia.

Portanto, devido aos processos irreversíveis, a taxa de variação da entropia é sempre positiva ou nula. Quando o gás relaxa para o equilíbrio termodinâmico, o termo colisional, ou equivalentemente, a fonte de entropia, se anulará de forma a satisfazer (1.30), que é uma condição de equilíbrio.

Para obtermos a distribuição de equilíbrio, é suficiente analisar a Eq.(1.30), a qual podemos reescrever da forma,

$$\ln f'(\vec{v}_0) + \ln f'(\vec{v}_1) = \ln f(\vec{v}_0) + \ln f(\vec{v}_1). \quad (1.40)$$

Como essa última expressão tem a forma de uma lei de conservação, podemos reescrever $\ln f_0(\vec{v})$ em termos das grandezas (momento e energia cinética) que se conservam durante a colisão. Assim, tem-se que [9]

$$\ln f(\vec{v}_0) = \alpha - \gamma(\vec{v} - \vec{v}_0)^2 \quad (1.41)$$

onde α , γ e \vec{v}_0 são três parâmetros que devem ser determinados por meio de condições de normalização. Fazendo $a = e^\alpha$ obtém-se a lei de distribuição de Maxwell,

$$f = f_0(\vec{v}) = a e^{-\gamma(\vec{v}-\vec{v}_0)^2} \quad (1.42)$$

com a diferença que a , γ e \vec{v}_0 podem ser ainda funções de \vec{r} e t . Nos referimos a ela como uma distribuição Maxwelliana local [33].

É importante salientar que como a dedução da Eq.(1.28) não é rigorosa, inúmeros trabalhos foram realizados analisando as suas limitações e quão rigorosas são algumas de suas previsões [34]; conseqüentemente, muitas outras *equações de transporte* foram e estão sendo propostas visando calcular melhor e com maior precisão a evolução temporal de $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ [35, 36].

CAPÍTULO 2

TERMOESTATÍSTICAS NÃO-GAUSSIANAS

Embora a estatística de Boltzmann-Gibbs (BG) tenha tido um grande sucesso na descrição termodinâmica de sistemas de muitas partículas, é amplamente reconhecido que esta não é a mais adequada para descrever as propriedades estatísticas de sistemas anômalos como, por exemplo, os encontrados em astrofísica estelar [12, 13, 14, 15], física de plasma [10, 11], gravitação, fractais [17], espectro de raios cósmicos [18], estatísticas de terremotos [21] etc¹. Experimentalmente são observados muitos desvios relacionados com a queda da distribuição, que ocorre mais lentamente do que o decaimento da exponencial padrão e segue uma chamada lei de potência [37, 38, 39].

Por apresentar limitações provenientes de propriedades como as interações de longo alcance, geometrias fractais, fortes correlações estatísticas e até mesmo possíveis efeitos relativísticos, alguns trabalhos acabam direcionando a busca por generalizações da estatística padrão. Nesse contexto,

¹Pode-se encontrar fortes evidências teóricas, experimentais, computacionais e observacionais em: <http://www.cbpf.br/GrupPesq/StatisticalPhys/biblio.htm> (página regularmente atualizada).

as estatísticas generalizadas surgem com a proposta de lidar com sistemas anômalos. Naturalmente, as generalizações podem ser realizadas através da forma de entropia adotada, com a introdução de logaritmos deformados apropriados [17, 40]. Exemplos de entropias generalizadas são a entropia de Tsallis [17] e a de Abe [41].

Neste capítulo, faremos uma breve exposição das estatísticas não gaussianas de Tsallis e Kaniadakis, fazendo uma comparação qualitativa desses dois formalismos, dando maior ênfase à κ -estatística.

2.1 A estatística não-extensiva de Tsallis

A forma entrópica proposta por Tsallis em 1988 fornece uma termodinâmica não-extensiva que incorpora a célebre abordagem extensiva de BG [17]. Essa formulação não-extensiva apresenta, como ponto de partida, uma classe mono-paramétrica de entropias, que são caracterizadas por um parâmetro livre q descrevendo o comportamento não-extensivo. Pelo novo postulado, para sistemas equiprováveis, a entropia é dada por [10, 42]

$$S_q = -k_B \frac{\left[1 - \sum_{i=1}^W p_i^q\right]}{(q-1)} \quad \left(\sum_{i=1}^W p_i = 1; \quad q \in \mathbb{R} \right), \quad (2.1)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, W o número total de possibilidades microscópicas e p_i a probabilidade genérica de ocorrência da i -ésima configuração de energia ϵ_i . A soma é realizada sobre todas as possibilidades e q denota um parâmetro livre descrevendo o grau de não extensividade,

e que em princípio deveria ser determinado pela dinâmica microscópica intrínseca ao sistema. Uma característica importante é que S_q é côncava e positiva para todos os valores fisicamente aceitáveis do parâmetro não-extensivo.

No limite $q \rightarrow 1$ a Eq. (2.1) se reduz a entropia de BG,

$$S_1 = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i . \quad (2.2)$$

Uma propriedade curiosa de S_q surge quando consideramos um sistema composto ($A + B$), constituído por dois subsistemas A e B que são independentes no sentido da fatorização das probabilidades dos microestados, ou seja, $P_{ij}^{(A+B)} = P_i^{(A)} \cdot P_j^{(B)}$. Nessa circunstância, a entropia de Tsallis obedece a chamada não-aditividade:

$$\frac{S_q(A+B)}{k_B} = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_B} \frac{S_q(B)}{k_B} . \quad (2.3)$$

A entropia de Tsallis é sub-aditiva quando $q > 1$, super-aditiva para $q < 1$ e, quando $q = 1$, nós retomamos a aditividade padrão [10, 11],

$$S(A+B) = S(A) + S(B) . \quad (2.4)$$

Do ponto de vista matemático, uma generalização da função exponencial, denominada de q -exponencial [17],

$$e_q(f) = [1 + (1-q)f]^{1/(1-q)} \quad (2.5)$$

desempenha um papel importante na q -estatística, pois está diretamente relacionada com a generalização da distribuição de probabilidade canônica [42]. A função $e_q(f)$, possui os seguintes limites no parâmetro q :

$$\begin{aligned} \text{para } q < 1, \quad e_q(f) = 0 \quad \text{se } 1 + (1 - q)f \geq 0, \\ \text{para } q > 1, \quad e_q(f) \rightarrow \infty \quad \text{em } f = 1/(q - 1), \end{aligned}$$

e também satisfaz a identidade a seguir

$$e_q(\ln_q f) = \ln_q(e_q(f)) = f, \quad \forall(q, f). \quad (2.6)$$

A função inversa da q -exponencial é o chamado q -logaritmo, definido da seguinte forma

$$\ln_q(f) = \frac{f^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad \forall(f, q). \quad (2.7)$$

No caso em que as probabilidades são iguais ($P_i = 1/W, \forall i$), a expressão (2.1) toma a forma

$$S_q = k_B \ln_q W. \quad (2.8)$$

Esse novo postuldo entrópico surgiu heurísticamente no próprio domínio da Mecânica Estatística e da Termodinâmica, tendo diversas fontes de inspiração, aparentemente associadas com sistemas dotados de geometrias multifractais ou efeitos persistentes de memória [17]. Inicialmente, acreditava-se que o novo princípio deveria ser adotado somente na descrição estatística de sistemas anômalos, ou mesmo em sistemas com interações de longo alcance, para os quais a distribuição clássica de BG fosse

apenas uma aproximação. Na realidade, o efeito não-extensivo pode também estar associado às correlações estatísticas entre as partes constituintes do sistema (Um exemplo pode ser visto na Ref.[43]). No entanto, existem inúmeras evidências observacionais e argumentos teóricos sugerindo que a entropia de Tsallis fornece uma descrição estatística e uma termodinâmica convincente para diversas áreas da física, como por exemplo, sistemas astrofísicos e cosmológicos [12, 13, 14, 22]; problema dos neutrinos solares [44, 45], estatísticas de terremotos [21], física de plasma [10]; campos de força conservativos [11] etc.

2.2 A estatística não-extensiva de Tsallis: contrapartida cinética

Como é amplamente conhecido, a teoria cinética dos gases antecede a Mecânica Estatística de Gibbs [7]. Portanto, uma questão fundamental seria investigar uma formulação cinética para a mecânica estatística não extensiva. A formulação cinética foi desenvolvida a partir da q -generalização da dedução da distribuição de Maxwell para um gás ideal e do teorema- H^2 (ou versão cinética para a segunda Lei da termodinâmica). Todo o argumento físico está centrado na introdução de correlações estatísticas entre as componentes das velocidades moleculares do gás ideal (Maiores detalhes, ver [10]).

A função de distribuição generalizada para as componentes das velocidades é dada por

²A dedução de Maxwell e o teorema- H de Boltzmann foram discutidos no Cap. 1.

$$f_q(v_i) = A_q \left[1 - (q-1) \frac{mv_i^2}{2k_B T} \right]^{1/q-1} \quad (i = x, y, z), \quad (2.9)$$

onde, A_q é expresso em termos de funções Gamma [10],

$$A_q = \left(\frac{1+q}{2} \right) \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{q-1})}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \sqrt{\frac{m(q-1)}{2\pi k_B T}}. \quad (2.10)$$

A distribuição de Maxwell é prontamente recuperada no limite extensivo $q = 1$ (ver Eq. (1.22)). A distribuição completa é dada por

$$F_q(v) = B_q \left[1 - (q-1) \frac{mv^2}{2k_B T} \right]^{1/q-1}, \quad (2.11)$$

onde,

$$B_q = (q-1)^{1/2} \frac{(3q-1)}{2} \left(\frac{1+q}{2} \right) \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{q-1})}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \left[\frac{m}{2\pi k_B T} \right]^{3/2}. \quad (2.12)$$

Mais uma vez, a Maxwelliana Eq.(1.22) é obtida no limite $q = 1$. O teorema- H não-extensivo (generalização do teorema mostrado na seção 1.2) apresenta a q -maxwelliana como a distribuição estacionária e introduz o vínculo termodinâmico no parâmetro não-extensivo q , a saber: $q > 0$ [10].

Na próxima seção apresentaremos brevemente a chamada κ -Estatística [23]. Enfatizaremos o teorema- H neste formalismo a partir da modificação da hipótese de caos molecular (*Stosszahlansatz*).

2.3 A estatística de Kaniadakis

Como bem conhecido, G. Kaniadakis introduziu uma estatística na forma de lei de potência, a chamada κ -estatística [23], que preserva a estrutura epistemológica e termodinâmica da teoria padrão de Maxwell-Boltzmann-Gibbs. O que norteia essa generalização é o *Princípio de Interação Cinética* (ou *Kinetic Interaction Principle* - KIP)[23, 46] que governa a dinâmica coletiva das partículas interagentes do sistema em estudo. O formalismo de Kaniadakis está baseado na seguinte entropia generalizada [23]

$$S_\kappa = -k_B \int d^3v f \ln_\kappa f = -\langle \ln_\kappa(f) \rangle, \quad (2.13)$$

ou ainda, na forma discreta [47] dada por

$$S_\kappa = -k_B \sum_{i=1}^N p_i \ln_\kappa(p_i), \quad \left(\sum_{i=1}^N p_i = 1 \right) \quad (2.14)$$

onde o κ -logaritmo é definido por

$$\ln_\kappa(x) = \frac{x^\kappa - x^{-\kappa}}{2\kappa}. \quad (2.15)$$

A função acima cresce monotonicamente com concavidade marcada por $\kappa \in [-1, 1]$, e no limite $\kappa \rightarrow 0$, a Eq.(2.15) retoma o logaritmo padrão e conseqüentemente a Eq.(2.13) converge para a já conhecida entropia de Boltzmann-Gibbs [47, 48].

A função inversa do κ -logarítmo, ou seja a κ -exponencial, é definida por

$$\exp_{\kappa}(x) = (\sqrt{1 + \kappa^2 x^2} + \kappa x)^{1/\kappa}. \quad (2.16)$$

A partir de (2.16), temos que

$$\exp_{\kappa}(x) = \exp_{-\kappa}(x), \quad (2.17)$$

de onde podemos ver nitidamente que quando $\kappa \rightarrow 0$, obtém-se a exponencial padrão: $\exp_0(x) = \exp x$. O comportamento assintótico tipo lei de potência é visto através da análise [23, 48]:

$$\exp_{\kappa}(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} |2\kappa x|^{\pm 1/|\kappa|}. \quad (2.18)$$

A κ -exponencial decresce com $x \rightarrow -\infty$ e cresce com $x \rightarrow +\infty$ com a mesma rapidez. Outra propriedade fica expressa por

$$\exp_{\kappa}(x) \cdot \exp_{\kappa}(-x) = 1, \quad (2.19)$$

onde, $\exp_{\kappa}(x) \in \mathbf{R}^+$ e $d \exp_{\kappa}(x)/dx > 0, \forall x, \kappa \in \mathbf{R}$. Logo, temos uma função positiva, crescente que obedece a seguinte lei de escala

$$[\exp_{\kappa}(x)]^{\lambda} = \exp_{\kappa/\lambda}(\lambda x). \quad (2.20)$$

O κ -logarítmo definido por (2.15) é tido como uma função real e

decrecente $\forall x \in \mathbf{R}$. Nós temos que $\ln_0(x) = \ln x$ e $\ln_\kappa(x) = \ln_{-\kappa}(x)$. Seu comportamento assintótico é dado por

$$\ln_\kappa(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{1}{|2\kappa|} x^{-\kappa}, \quad (2.21)$$

$$\ln_\kappa(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{|2\kappa|} x^{|\kappa|}. \quad (2.22)$$

O logarítmo deformado segue também uma lei de escala dada por

$$\ln_\kappa(x^\lambda) = \lambda \ln_{\lambda\kappa}(x), \quad (2.23)$$

de onde obtemos para $\lambda = -1$,

$$\ln_\kappa\left(\frac{1}{f}\right) = \lambda \ln_{\lambda\kappa}(f). \quad (2.24)$$

As funções \exp_κ e \ln_κ geram uma nova álgebra e um novo cálculo denominados κ -álgebra e κ -cálculo. Do ponto de vista físico, o κ -formalismo também está associado a relatividade especial (Ver detalhes em [24, 25, 48]).

A entropia de Kaniadakis (2.13) pode também ser escrita em função da entropia de Tsallis (2.1) a saber, [23],

$$S_\kappa = \frac{1}{2} \frac{\alpha^\kappa}{(1+\kappa)} S_{1+\kappa}^{(T)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^{-\kappa}}{(1-\kappa)} S_{1-\kappa}^{(T)} + C, \quad (2.25)$$

onde $S^{(T)}$ denota a entropia de Tsallis, $S_q = -k_B \int d^3v f^q \ln_q f$, na forma cinética e α uma constante real. De fato, a κ -entropia é dada por,

$$S_\kappa = -\frac{1}{2\kappa} \int d^3v \left(\frac{\alpha^\kappa}{1+\kappa} f^{1+\kappa} - \frac{\alpha^{-\kappa}}{1-\kappa} f^{1-\kappa} \right) \quad (2.26)$$

e se reduz a entropia de BG, $S_0 = -\int d^3v [\ln(\alpha f) - 1] f$ no limite $\kappa = 0$. Para a constante $\alpha = 1$, a distribuição estacionária pode ser calculada através da maximização da κ -entropia (2.13), isto é

$$\delta \left[S_\kappa + \beta \int d^3v (\mu - U) f \right] = 0 \quad , \quad (2.27)$$

onde, μ refere-se ao potencial químico. A distribuição estacionária é dada por

$$f = \exp_\kappa(-\epsilon) \quad , \quad \epsilon = \beta(U - \mu). \quad (2.28)$$

Para $\alpha = Z$ na Eq.(2.26), o cálculo variacional

$$\delta \left[S_\kappa - \beta \int d^3v U f \right] = 0 \quad (2.29)$$

resulta na função de distribuição estacionária,

$$f = \frac{1}{Z} \exp_\kappa(-\beta U) \quad (2.30)$$

onde $Z = \int d^3v \exp_\kappa(-\beta U)$ é a função de partição. Aqui, f depende da energia potencial, porém para partículas brownianas, $U = \frac{mv^2}{2}$. Nesse contexto, temos que [23]

$$f_{\kappa}(v) = \left(\frac{\beta m |\kappa|}{\pi} \right)^{n/2} \left[1 + \frac{n}{2} |\kappa| \right] \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2|\kappa|} + \frac{n}{4} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2|\kappa|} - \frac{n}{4} \right)} \exp_{\kappa} \left(-\frac{\beta m v^2}{2} \right), \quad (2.31)$$

onde, $n = 1, 2, 3$ e $|\kappa| < 2/n$ [23]. A distribuição (2.31) reduz-se à distribuição de MB, ou seja, $f = (\beta m / 2\pi)^{3/2} \exp(-\beta v^2 / 2)$ no limite $\kappa = 0$.

A Figura (2.1) a seguir mostra a função de distribuição de velocidades das partículas brownianas para alguns valores de κ . Note que para $\kappa = 0$, retomamos a forma padrão da função de distribuição de MB.

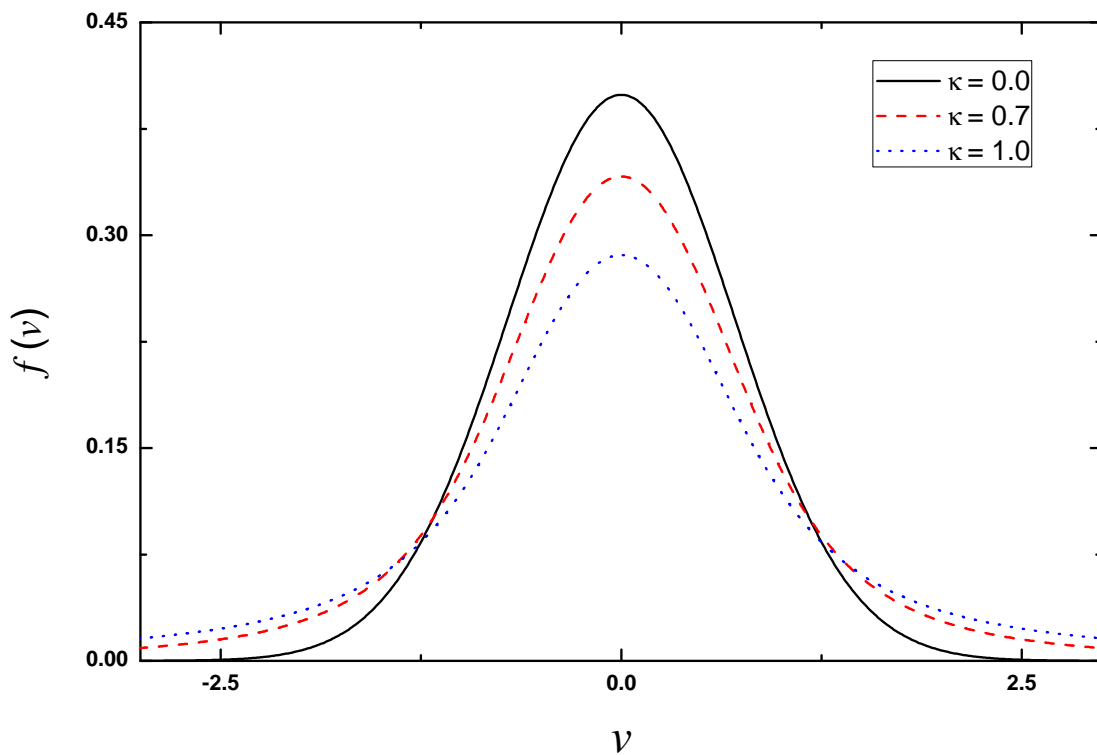


Figura 2.1: Função de distribuição de velocidades para partículas brownianas. As curvas representam o cálculo numérico da Eq.(2.31), resultado idêntico ao apresentado por Kaniadakis para os casos em que $\kappa = 0$, $\kappa = 0.7$ e $\kappa = 1$ [48]. A distribuição padrão de Maxwell-Boltzmann corresponde a $\kappa = 0$.

Na próxima seção, considerando a κ -entropia e a introdução de cor-

relações estatísticas no termo colisional da equação de Boltzmann, provaremos o teorema- H no contexto da formulação de Kaniadakis.

2.4 A estatística de Kaniadakis: abordagem cinética via a generalização da hipótese de caos molecular

Na demonstração do teorema- H , consideraremos um gás ideal formado por N partículas que interagem via colisões binárias. Em particular, as suposições consideradas na seção 1.2 - (Teorema- H extensivo), referentes ao termo colisional e a definição de entropia, serão extendidas no contexto da estatística de Kaniadakis. Antes de introduzir os efeitos da κ -estatística, vamos apresentar a base do teorema- H Boltzmanniano. De fato, os dois principais ingredientes da teoria cinética de Boltzmann são [33]:

- entropia total expressa pela medida logarítmica;
- hipótese do caos molecular (“*Stosszahlansatz*”) que está diretamente relacionado com a fatorização das probabilidades.

Nesse contexto, a prova do teorema- H segue da modificação dos ingredientes acima. A argumentação física é motivada pela introdução de correlações estatísticas no termo colisional, via a hipótese de caos molecular e na generalização da fórmula entrópica. Como já conhecido, a função de distribuição varia com o tempo, em direção a solução estacionária através da *equação de transporte* de Boltzmann. De fato, as colisões moleculares modificam a função de distribuição, sendo que o efeito não-gaussiano (proveniente das correlações estatísticas) é introduzido no termo colisional [49]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) f = C_\kappa(f) \quad , \quad (2.32)$$

A generalização não-gaussiana de C_κ é dada por

$$C_\kappa(f) = \frac{s^2}{2} \int |\vec{V} \cdot \vec{e}| R_\kappa d\omega d^3v_1, \quad (2.33)$$

onde o termo $R_\kappa(f', f)$ é a diferença de duas funções de correlação (antes e depois da colisão). Na prática, R_κ é uma generalização da hipótese de caos molecular, a saber

$$R_\kappa = \exp_\kappa(\ln_\kappa z' f' + \ln_\kappa z'_1 f'_1) - \exp_\kappa(\ln_\kappa z f + \ln_\kappa z_1 f_1) \quad , \quad (2.34)$$

onde os primeiros termos referem-se às funções de distribuição depois da colisão, z e z' são constantes arbitrárias e $\exp_\kappa(f)$, $\ln_\kappa(f)$, são definidos pelas Eqs. (2.16) e (2.15). Quando $\kappa \rightarrow 0$, temos $R_0 = (z' f')(z'_1 f'_1) - (z f)(z_1 f_1)$ é a hipótese de caos molecular padrão Eq.(1.25).

O outro efeito não-gaussiano, consiste na generalização da fórmula entrópica [49],

$$H_\kappa = -k_B \int d^3v \left(\frac{z^\kappa}{2\kappa(1+\kappa)} f^{1+\kappa} - \frac{z^{-\kappa}}{2\kappa(1+\kappa)} f^{1-\kappa} \right) . \quad (2.35)$$

Tomando a variação temporal de H_κ , temos que

$$\frac{\partial H_\kappa}{\partial t} = -k_B \int d^3v \ln_\kappa f z \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.36)$$

Combinando a Eq.(2.36) com as Eqs.(2.32) e (2.33), podemos reescrever a expressão sob a forma de equação de balanço,

$$\frac{\partial H_\kappa}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S}_\kappa = G_\kappa(\vec{r}, t) \quad (2.37)$$

onde, o vetor fluxo da κ -entropia \vec{S}_κ é dado por

$$\vec{S}_\kappa = -k_B \int d^3v \vec{v} \left(\frac{z^\kappa}{2\kappa(1+\kappa)} f^{1+\kappa} - \frac{z^{-\kappa}}{2\kappa(1+\kappa)} f^{1-\kappa} \right) . \quad (2.38)$$

O termo de fonte na equação de balanço (2.37) é dado pela expressão

$$G_\kappa = \frac{-s^2}{2} \int |\vec{V} \cdot \vec{e}| \ln_\kappa f z R_\kappa d\omega d^3v_1 d^3v . \quad (2.39)$$

Considerando as colisões inversas, o termo G_κ pode ser escrito numa forma mais simétrica, tal que,

$$\begin{aligned} G_\kappa(\vec{r}, t) = & \frac{-s^2}{8} \int |\vec{V} \cdot \vec{e}| (\ln_\kappa z'_1 f'_1 + \ln_\kappa z' f' \\ & - \ln_\kappa z_1 f_1 - \ln_\kappa z f) [\exp_\kappa(\ln_\kappa z' f' + \ln_\kappa z'_1 f'_1) \\ & - \exp_\kappa(\ln_\kappa z f + \ln_\kappa z_1 f_1)] d\omega d^3v_1 d^3v . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Para valores de κ no intervalo $[-1,1]$, obtemos o Teorema- $H_{\kappa,}$

$$\frac{\partial H_\kappa}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S}_\kappa = G_\kappa \geq 0 . \quad (2.41)$$

Note que no limite gaussiano $\kappa = 0$, a expressão (2.41) se reduz ao teorema- H extensivo, dado por (1.39). A expressão (2.41) indica que a entropia deve ser positiva ou zero, fornecendo assim a derivação cinética da segunda lei da termodinâmica na κ -estatística. Assim como no caso clássico, para encontrar a função de distribuição de velocidades estacionárias, precisamos da condição de equilíbrio. Desse modo a condição em que $G_\kappa = 0$ já nos é suficiente, desde que o integrando da Eq.(2.40) não seja negativo, o que ocorre se e apenas se,

$$\ln_\kappa z' f' + \ln_\kappa z'_1 f'_1 = \ln_\kappa z f - \ln_\kappa z_1 f_1 . \quad (2.42)$$

Em outras palavras, $\ln_\kappa z' f' + \ln_\kappa z'_1 f'_1 = cte$, é conhecido como um invariante de soma [50]. Considerando as grandezas que se conservam no sistema (número de partículas, energia e momento), como no caso clássico (Eq.(1.41)da seção 1.2), podemos escrever,

$$\ln_\kappa z f = \alpha - \gamma(\vec{v} - \vec{v}_0)^2 , \quad (2.43)$$

com um novo conjunto de constantes arbitrárias. Assim, a κ -distribuição é da forma,

$$f = \frac{1}{z} \exp_\kappa[\alpha - \gamma(\vec{v} - \vec{v}_0)^2] \quad (2.44)$$

onde o termo $1/z$ é a constante de normalização e está ligada à função de

partição³, γ e \vec{v}_0 podem ser funções que dependam da temperatura. Essa é uma forma mais geral para representar a distribuição Maxwelliana no contexto da κ -estatística. Com efeito, essa função estacionária anula o termo de fonte e corresponde à distribuição de velocidades de um gás em estados de equilíbrio colisional local.

No capítulo que segue, apresentaremos a dedução da κ -função de distribuição de velocidades, utilizando as funções generalizadas na fatorização de probabilidades primeiramente feita por Maxwell em 1860.

³Ver seção (2.3).

CAPÍTULO 3

A κ -FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO E APLICAÇÕES

A estatística de Kaniadakis foi fundamentada sob dois aspectos a saber: *i*) Pela lei de distribuição argumentada via o termo colisional da equação de transporte de Boltzmann, no chamado princípio da interação cinética [23]; *ii*) a partir das funções exponenciais e logarítmicas generalizadas que possibilitaram a construção de uma formulação baseada na relatividade especial ancorada na κ -álgebra [24, 25]. Neste capítulo, apresentaremos outra abordagem (sem a utilização da κ -álgebra) para contextualizar a estatística de Kaniadakis.

3.1 Motivação

Nossa formulação está norteada nos fundamentos da teoria cinética dos gases. Como amplamente conhecido, a dedução da distribuição de equilíbrio de um gás ideal, formulada por Maxwell, foi calculada a par-

tir da hipótese da isotropia do espaço de velocidades moleculares (ou independência estatística)[33]. Em seguida, Boltzmann mostrou que a distribuição de Maxwell de equilíbrio era a solução estacionária da equação de transporte e que esta zerava o termo colisional. Esse resultado foi apresentado como o teorema- H e discutido em detalhes no Capítulo 1.

Como mostrado no Capítulo 2, o teorema- H de Boltzmann foi generalizado para o contexto da κ -estatística. Sugerindo portanto, a possível existência de uma generalização da dedução de Maxwell (Ver Fig.3.1). Neste capítulo, mostremos como generalizar a dedução de Maxwell, completando o quadro apresentado na Fig.3.1.

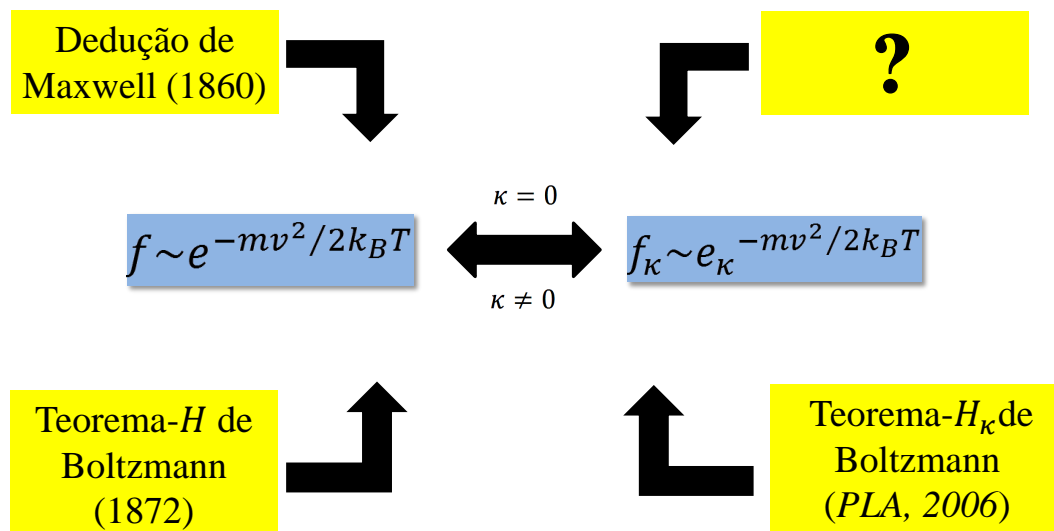


Figura 3.1: Diagrama de correspondência entre a Estatística de Maxwell-Boltzmann e a κ -Estatística. Podemos obter função de distribuição de velocidades partindo da fatorização probabilística de Maxwell [29] ou através do tratamento cinético proposto por Boltzmann [5]. R. Silva [49] obtém uma função de distribuição generalizada utilizando a formulação cinética da κ -estatística, deixando em aberto uma dedução via Maxwell de uma κ -distribuição.

3.2 A κ -generalização da maxwelliana

Como vimos no Capítulo anterior, a estatística de Kaniadakis prevê uma κ -entropia definida por

$$S_\kappa = - \int d^3p f \ln_\kappa f , \quad (3.1)$$

aqui, tomamos k_B como uma unidade.

Por sua vez, S_κ apresenta a propriedade de aditividade encontrada no formalismo clássico, ou seja, para um sistema formado por dois subsistemas A e B independentes, temos que

$$S_\kappa(A + B) = S_\kappa(A) + S_\kappa(B) . \quad (3.2)$$

Assim, podemos dizer que a κ -estatística preserva a forma epistemológica da estatística padrão, sem perda de generalizações [24].

Supondo que num volume V , tenhamos N partículas de um gás interagindo entre si num espaço de velocidades d^3v , como no caso da dedução feita no Capítulo 1, cada molécula tem velocidade entre \vec{v} e $\vec{v} + d\vec{v}$. Desse modo, considerando a composição de probabilidades à luz da estatística de Kaniadakis, podemos escrever

$$F_\kappa(v) d^3v = \exp_\kappa[\ln_\kappa f(v_x) + \ln_\kappa f(v_y) + \ln_\kappa f(v_z)] dv_x dv_y dv_z . \quad (3.3)$$

Para as κ -funções, as seguintes propriedades são satisfeitas,

$$\ln_{\kappa}[\exp_{\kappa}(f)] = \exp_{\kappa}[\ln_{\kappa}(f)] = f \quad (3.4)$$

e

$$\frac{d}{dx} \ln_{\kappa}(f) = \frac{f^{\kappa} + f^{-\kappa}}{2\kappa} \frac{df}{dx} . \quad (3.5)$$

Assim, tomando a derivada logarítmica da Eq.(3.3) com respeito a v_x temos que

$$\frac{\partial}{\partial v_x} \ln_{\kappa} F_{\kappa}(v) = \frac{\partial}{\partial v_x} \ln_{\kappa} \{ \exp_{\kappa} [\ln_{\kappa} f(v_x) + \ln_{\kappa} f(v_y) + \ln_{\kappa} f(v_z)] \} \quad (3.6)$$

Utilizando as propriedades (3.4) e (3.5), obtemos

$$\frac{F^{\kappa} + F^{-\kappa}}{2\kappa} \frac{\partial}{\partial v_x} F_{\kappa}(v) = \frac{\partial}{\partial v_x} [\ln_{\kappa} f(v_x)] . \quad (3.7)$$

Equivalentemente,

$$\frac{F^{\kappa} + F^{-\kappa}}{2\kappa} \frac{F'(\chi)}{\chi} = \frac{1}{v_x} \frac{\partial}{\partial v_x} \ln_{\kappa} f(v_x) , \quad (3.8)$$

onde, F' corresponde a derivada de $F(v)$ com relação a v_x . Fazendo a seguinte substituição $\chi = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ e definindo,

$$\Phi(\chi) = \frac{F^\kappa + F^{-\kappa}}{2\kappa} \frac{F'(\chi)}{\chi}, \quad (3.9)$$

nós reescrevemos a equação (3.8) na forma,

$$\Phi(\chi) = \frac{1}{v_x} \frac{d}{dv_i} [\ln_\kappa f(v_x)] . \quad (3.10)$$

Podemos fazer, de modo arbitrário, $\Phi(\chi) = -m/k_B T$. Logo,

$$\frac{1}{v_x} \frac{d}{dv_x} [\ln_\kappa f(v_i)] = -\frac{m}{k_B T}, \quad (3.11)$$

em geral, temos

$$\ln_\kappa f(v_i) = -\frac{mv_i^2}{2k_B T} + C, \quad (3.12)$$

que nos fornece

$$f(v_x) = \frac{1}{z} \exp_\kappa \left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T} \right), \quad (3.13)$$

onde $1/z$ refere-se à constante de normalização C .

Da κ -Maxwelliana Eq.(3.18), vemos que a distribuição de velocidades usual é substituída por uma distribuição tipo lei de potência característica do formalismo não-gaussiano de Kaniadakis. Como o esperado, o limite $\kappa = 0$ nos fornece a exponencial padrão. Considerando o limite de validade da estatística de Kaniadakis compreendido no intervalo

$[-1, 1]$ [24], temos que a componente v_x toma valores sobre todo o intervalo $[-\infty, \infty]$. Nesse contexto, a constante de normalização calculada a partir da função de partição é dada por

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{m|\kappa|}{k_B T \pi} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2}|\kappa| \right] \frac{\Gamma\left(\frac{1}{|2\kappa|} + \frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{|2\kappa|} - \frac{1}{4}\right)}, \quad (3.14)$$

onde no limite $\kappa = 0$, verifica-se facilmente a normalização da maxwelliana padrão vista no Capítulo 1.

Naturalmente, retomando o nosso *ansatz* Eq.(3.3), adicionando as componentes em v_y e v_z , vemos que a distribuição completa satisfaz

$$F_\kappa(v) = \exp_\kappa \left\{ \ln_\kappa \left[C \exp_\kappa \left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T} \right) \right] + \ln_\kappa \left[C \exp_\kappa \left(-\frac{mv_y^2}{2k_B T} \right) \right] + \ln_\kappa \left[C \exp_\kappa \left(-\frac{mv_z^2}{2k_B T} \right) \right] \right\}. \quad (3.15)$$

Usando a propriedade (3.4) vemos que a função $F_\kappa(v)$ resulta em

$$F_\kappa(v) = \frac{1}{Z} \exp_\kappa \left[\left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) \right], \quad (3.16)$$

onde $1/Z$ está fixo pela condição de normalização tridimensional. De fato, $1/Z$ é dado por

$$\frac{1}{Z} = \left(\frac{m|\kappa|}{k_B T \pi} \right)^{3/2} \left[1 + \frac{3}{2}|\kappa| \right] \frac{\Gamma\left(\frac{1}{|2\kappa|} + \frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{|2\kappa|} - \frac{3}{4}\right)}, \quad (3.17)$$

Note que a Eq.(3.16) concorda perfeitamente com a Eq. (2.31). Em termos da κ -exponencial, temos

$$F_{\kappa}(v) = \frac{1}{Z} \left[\sqrt{1 + \kappa^2 \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right)^2} + \kappa \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) \right]^{1/\kappa}. \quad (3.18)$$

Observe ainda que a κ -distribuição é também uma função isotrópica, ou seja, depende apenas do módulo da velocidade, o que está de acordo com o fato de não haver uma direção privilegiada no espaço. Da mesma forma que no caso unidimensional, no limite $\kappa=0$, de (3.17), temos que $\frac{1}{Z} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}$, representa o resultado maxwelliano esperado.

Como aplicação da κ -distribuição consideremos o estudo do afastamento de linhas espectrais de um gás quente em equilíbrio termodinâmico. Diferentes velocidades emitem partículas em diferentes turnos, o efeito cumulativo é a linha de alargamento e perfil de linha resultante é conhecido como um perfil de Doppler [33, 51]. Esse fenômeno deu uma confirmação qualitativa para a distribuição maxwelliana [33].

De modo geral, quando o movimento térmico faz com que a partícula se mova em direção ao observador, a radiação emitida será deslocada para uma frequência maior. Da mesma forma, quando o observador se afasta, a frequência será menor. A ampliação depende apenas da frequência da linha espectral, da massa das partículas emissoras e de sua temperatura¹. Para estimar a magnitude do alargamento Doppler para a luz visível emitida por moléculas de um gás quente devemos fixar a direção de observação do espectro, o que torna o problema unidimensional

¹Maiores detalhes ver Ref.[52].

[10]. Assim, para velocidades térmicas não-relativísticas, o deslocamento Doppler será dado por [53]

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right) , \quad (3.19)$$

onde ν é a frequência observada, ν_0 é a frequência de repouso, v_x a velocidade do emissor em direção ao observador e c é a velocidade da luz.

No caso do alargamento Doppler, a distribuição de velocidades é dada pela distribuição de Maxwell Eq.(1.22). A distribuição de frequências para a banda espectral em ν_0 é obtida mudando-se as variáveis de v_x para ν . Considerando que a intensidade é proporcional ao número médio de moléculas, vemos que

$$I(\nu)d\nu = \left(\frac{c}{\nu_0}\right) \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{mc^2(\nu - \nu_0)^2}{2k_B T \nu_0^2}\right] d\nu \quad (3.20)$$

que nós imediatamente identificamos como uma distribuição com perfil gaussiano. O alargamento Doppler é geralmente calculado através da largura da linha espectral na metade da intensidade. Desta forma, em termos do comprimento de onda, temos a seguinte expressão,

$$\Delta\lambda_d = \left(\frac{2k_B T}{mc^2} \ln 2\right)^{1/2} \lambda_0. \quad (3.21)$$

De forma análoga, mas usando a κ -estatística, temos para uma dada direção

$$f_{\kappa}(v_x) = \frac{1}{Z} \exp_{\kappa} \left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T} \right). \quad (3.22)$$

Fazendo a substituição $v_x = c(\nu/\nu_0 - 1)$, ficamos com

$$I(\nu)d\nu = \frac{c}{\nu_0} \frac{1}{Z} \exp_{\kappa} \left[-\frac{mc^2}{2k_B T} \left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)^2 \right]. \quad (3.23)$$

Em termos da κ -exponencial, temos,

$$I(\nu)d\nu = \frac{1}{Z} \frac{c}{\nu_0} \left\{ \sqrt{1 + \kappa^2 \left[-\frac{mc^2}{2k_B T} \left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)^2 \right]} - \kappa \left[\frac{mc^2}{2k_B T} \left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)^2 \right] \right\}^{1/\kappa}, \quad (3.24)$$

com $Z = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \frac{|\kappa|^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2|\kappa|} - \frac{1}{4}\right)}{[1 - \frac{1}{2}|\kappa|] \Gamma\left(\frac{1}{2|\kappa|} + \frac{1}{4}\right)}$. A largura média Eq.(3.21) generalizada fica expressa por,

$$\Delta\lambda_d = \left[\frac{2k_B T}{mc} \left(\frac{2^{\kappa} - 2^{-\kappa}}{2\kappa} \right)^{1/2} \right] \lambda_0 = \left(\frac{2k_B T}{mc^2} \ln_{\kappa} 2 \right)^{1/2} \lambda_0. \quad (3.25)$$

No limite $\kappa = 0$, retomamos a forma padrão Eq.(3.21). Embora mantendo a mesma dependência na temperatura $T^{1/2}$, o alargamento Doppler térmico é modificado no formalismo não-gaussiano de Kaniadakis. Naturalmente a fórmula acima pode ser utilizada para limitar o parâmetro entrópico κ .

Vale lembrar que a entropia de Kaniadakis é mais uma das generalizações matemáticas possíveis da entropia logarítmica padrão. Na literatura, outras funções entrópicas tem sido consideradas [17, 41]. Entretanto, essa entropia tem se mostrado útil na solução de vários problemas teóricos não resolvidos pela distribuição de BG, e mais importante, várias evidências experimentais tem sido observadas². Apesar disso, teoricamente é interessante investigar se as propriedades matemáticas proveniente de outras entropias admitem aplicações físicas relevantes.

É importante enfatizar que a nossa dedução da κ -distribuição foi determinada a partir de duas únicas exigências:

- isotropia do espaço de velocidades e,
- generalização da condição de fatorização.

A condição de fatorização maxwelliana fundamenta-se na propriedade de que o logaritmo da função de distribuição completa é exatamente igual a soma dos N termos, cada um dependendo somente de uma componente da velocidade. Ao contrário do logaritmo, postulamos uma condição de fatorização, a qual exige que a potência da função de distribuição completa deve ser igual a soma N . As expressões maxwellianas ($\kappa = 0$) são sempre recuperadas das generalizações κ -logarítmicas de Kaniadakis. O mesmo ocorre com expressões derivadas, como é o caso da fórmula do alargamento das linhas espectrais.

Outro tipo de aplicação dessas distribuições lei de potência pode ser encontrado em sistemas auto-gravitantes [12, 54, 55, 56]. Esses sistemas configuram esferas isotérmicas gasosas que satisfazem uma equação de estado que relaciona a densidade (ρ) com a pressão (P). Distribuições este-

²Aplicações atualizadas da κ -estatística são encontradas em: <www.scientificcommons.org/g_kaniadakis>.

lares politrópicas constituem o mais simples modelo fisicamente plausível de sistema auto-gravitante. Entretanto, esse modelo não fornece uma descrição precisa dos dados observados em galaxias reais. Nesse contexto, a conexão de entropias tipo lei de potência e estrelas politrópicas se torna um importante objeto de estudo.

A constatação de que a maximização da q -entropia de Tsallis, impondo vínculos à massa e a energia totais do sistema, fornece uma distribuição configurando o sistema gasoso politrópico [12], nos sugere que a κ -entropia também pode apresentar esse comportamento, o que nos daria mais uma prova de sua consistência. Nos aprofundaremos nesse assunto no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4

A κ -ESTATÍSTICA E SISTEMAS POLITRÓPICOS

Durante o século XIX ocorreram muitos avanços em diversas áreas da física, criando um novo ambiente para as investigações no mundo natural. Um campo que foi investigado com rigor foi o de estrelas. Após algumas especulações, foi levantada a hipótese de que uma estrela tinha algum tipo de fonte de energia interna indefinido. Com isso em mente, Karl Schwarzschild começou seu trabalho na transferência radiativa de energia em atmosferas estelares em torno de 1906 [57]. Isto estabeleceu a adição de uma nova dinâmica da estrutura estelar, cuja importância está baseada no equilíbrio hidrostático. Foi essencialmente determinado que a estrutura de uma estrela é apoiada por pressão interna, bem como a pressão de radiação contra sua atração gravitacional. É neste período que, pela combinação das leis da gravitação com a termodinâmica, foi desenvolvido um método que permitiu a criação de um modelo de propriedades físicas de estrelas. Este método utiliza politropos¹, via uma equação de estado

¹Esferas de gás em equilíbrio hidrostático.

politrópica, que relaciona massa, pressão e densidade das estrelas com seu raio [58, 59, 60] dada por

$$P(r) = K\rho(r)^{\frac{(n+1)}{n}}, \quad (4.1)$$

onde, n é chamado de índice politrópico. No limite $n \rightarrow \infty$, nós obtemos a equação de estado para esferas isotérmicas, $P = K\rho$.

A teoria de modelos politrópicos foi primeiramente desenvolvida por Kelvin, Lane, Ritter e Fowler [58, 61]. Para muitos astrofísicos o estudo de politrópicas envolve apenas interesses históricos [59] uma vez que foi desenvolvido no início das pesquisas em estrutura estelar. A verdade é que os polítropos fornecem informações significativas na estrutura e evolução das estrelas. A motivação para tais pesquisas veio da observação de certo comportamento de gases ideais quando sofrem uma transformação de forma adiabática [58, 59, 60]. Esta generalização do comportamento é caracterizada pela equação de estado (4.1). Quando a convecção é estabelecida no interior de uma estrela, ela é tão eficiente que o gradiente da temperatura resultante é o de um gás adiabático respondendo a uma equação de equilíbrio hidrostático correspondendo a uma esfera estelar isotérmica. Tal configuração é dita politrópica.

Além da equação de estado, uma outra prova da semelhança entre a dinâmica estelar das esferas isotérmicas e os gases ideais está na função de distribuição de velocidades em cada ponto da esfera estelar que é dada por uma distribuição Maxwelliana [62], como veremos mais adiante. À parte de cada domínio da astrofísica estelar, existem ainda muitas aplicações de polítropos. Certos problemas em dinâmica estelar e estrutura galáctica podem ser descritas por politrópicas e a equação politrópica de estado tem

sido usada para representar a densidade de distribuição de matéria escura ao redor de galáxias [59].

4.1 A κ -entropia e sistema estelar politrópico

Ao relaxarem para o estado de equilíbrio, (ou metaequilíbrio), espera-se que informações acerca das condições iniciais desses sistemas sejam perdidos, exceto àquelas ligadas às quantidades conservadas. Consequentemente se tentarmos inferir através do recurso da máxima entropia, o estado final relaxado, é razoável que utilizemos como restrições as quantidades conservadas [63].

As restrições naturais para sistemas estelares esféricos são a massa e a energia total do sistema. No entanto, ao maximizarmos a entropia padrão de Boltzmann-Gibbs, sem essa restrição, nós obtemos uma distribuição de esferas isotérmicas caracterizada pela massa e energia infinitas [63], o que representa um resultado não-físico. Esse resultado motivou busca por entropias alternativas. Na Ref.[12] é mostrado que a extremização da q -entropia não-extensiva [17], considerando as restrições de massa e energia totais, fornecem uma distribuição estelar politrópica cuja massa e energia são finitas em relação a um determinado intervalo do parâmetro q . Faremos uma aplicação semelhante utilizando a κ -estatística a fim de encontrar valores de κ que produzam modelos politrópicos fisicamente significativos.

A função de distribuição associada a um sistema de estrelas politrópicas com índice n é dada da seguinte forma [62]

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= A\varepsilon^{n-3/2}, & \varepsilon > 0 \\ &= 0, & \varepsilon \leq 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde, ε é igual a uma constante menos a energia total por unidade de massa de uma estrela individual movendo-se sob influência de um potencial gravitacional [13]. De fato, ε é a energia relativa de uma estrela definida por $(\varepsilon = \Phi - \frac{1}{2}v^2)$, onde, Φ é o potencial relativo dado por $\Phi = \phi_0 - \phi$, ϕ é a energia potencial da estrela e ϕ_0 uma constante arbitrária [62]. Partindo da κ -entropia generalizada Eq.(2.13) a seguir,

$$S_\kappa(f) = - \int \frac{f^{1+\kappa} - f^{1-\kappa}}{2\kappa} d^3r d^3v. \quad (4.3)$$

Impondo as restrições em relação à massa total e a energia total [12],

$$M = \int f d^6\tau \quad (4.4)$$

e

$$E = \frac{1}{2} \int [v^2 + \Phi(\vec{r})] f d^6\tau \quad (4.5)$$

onde, $d^6\tau = d^3r d^3v$. Levando em conta a situação estacionária, utilizando os multiplicadores de Lagrange, é visto que,

$$\delta S_\kappa - \alpha \delta M - \beta \delta E = 0. \quad (4.6)$$

Substituindo os vínculos da massa total e da energia total, Eqs. (4.4) e (4.5), podemos escrever,

$$-\delta \left[\frac{1}{2\kappa} \int (f^{1+\kappa} - f^{1-\kappa}) d^3r d^3v \right] - \alpha \delta \int f d^3r d^3v - \beta \delta \left[\frac{1}{2} \int v^2 f d^3r d^3v + \frac{1}{2} \int \phi(\vec{r}) f d^3r d^3v \right] = 0 \quad (4.7)$$

Usando a relação $\delta\phi(\vec{r})f = 2\phi(\vec{r})\delta f$, encontramos

$$-\int \left[\frac{1}{2\kappa} [(1+\kappa)f^\kappa - (1-\kappa)f^{-\kappa}] d^3r d^3v \right] \delta f - \alpha \int d^3r d^3v \delta f - \beta \left[\frac{1}{2} \int v^2 d^3r d^3v + \phi(\vec{r}) d^3r d^3v \right] \delta f = 0 \quad (4.8)$$

o que resulta em

$$-\frac{1}{2\kappa} [(1+\kappa)f^\kappa - (1-\kappa)f^{-\kappa}] - \alpha - \beta \left[\frac{v^2}{2} + \phi(\vec{r}) \right] = 0. \quad (4.9)$$

Identificando $\epsilon = \frac{v^2}{2} + \phi(\vec{r})$, podemos reescrever a Eq.(4.8) da seguinte forma,

$$[(1+\kappa)f^\kappa - (1-\kappa)f^{-\kappa}] - 2\kappa\beta \left(-\frac{\alpha}{\beta} - \epsilon \right) = 0. \quad (4.10)$$

Manipulando algebricamente, podemos encontrar a seguinte função de distribuição,

$$f_{\kappa} = \left[\frac{\kappa\beta}{(1+\kappa)} \right]^{1/\kappa} \left[\frac{\sqrt{\kappa^2(\alpha - \beta\epsilon)^2 + 1 + \kappa^2} - \alpha\kappa}{\beta\kappa} - \epsilon \right]^{1/\kappa}. \quad (4.11)$$

Identificando,

$$\phi_0(\epsilon) = \frac{\sqrt{\kappa^2(\alpha - \beta\epsilon)^2 + 1 + \kappa^2} - \alpha\kappa}{\beta\kappa},$$

e fazendo a substituição de ϵ , temos

$$f_{\kappa} = \left(\frac{\kappa\beta}{1+\kappa} \right)^{1/\kappa} \left[\phi_0(\epsilon) - \phi(\vec{r}) - \frac{v^2}{2} \right]^{1/\kappa}. \quad (4.12)$$

Utilizando as relações para o potencial relativo e energia relativa mencionados anteriormente, a nossa função de distribuição de velocidades para politrópicas fica da forma

$$f_{\kappa} = \left(\frac{\kappa\beta}{1+\kappa} \right)^{1/\kappa} \left[\Phi - \frac{v^2}{2} \right]^{1/\kappa}. \quad (4.13)$$

Comparando a Eq.(4.13) com a Eq.(4.2), e identificando a energia relativa ϵ , nós obtemos para o índice politrópico a seguinte relação

$$n = \frac{3}{2} + \frac{1}{\kappa}. \quad (4.14)$$

A relação encontrada com a estatística de Tsallis [12, 54] é dada por,

$$n = \frac{3}{2} + \frac{1}{q-1}, \quad (4.15)$$

O resultado da distribuição (4.13) juntamente com a relação (4.14) implica que o gás politrópico é equivalente a esfera de gás isotérmica no limite $\kappa \rightarrow 0$ ou $n \rightarrow +\infty$, o que de fato é obtido quando adotamos a entropia de Boltzmann-Gibbs Eq.(2.2).

A Fig.(4.1) a seguir mostra a dependência entre o índice politrópico n com os parâmetros q e κ dados pelas Eqs. (4.15) e (4.14). Nós observamos que o índice politrópico diverge para os parâmetros $q = 1$ e $\kappa = 0$, assim as esferas isotérmicas ficam separadas em dois ramos. Para $q > 0$ e $\kappa > 0$, n cai de ∞ para $3/2$. Pela Eq.(4.2), vemos que ε é uma função decrescente com a energia. Quando $n > 3/2$, a função distribuição tende a ser uma constante independente da energia. No entanto, é sabido que para qualquer sistema astrofísico, o índice n deve ser positivo e maior que $1/2$ [62]. Assim os intervalos $0 \leq q \leq 1$ e $-1 \leq \kappa \leq 0$ representam regiões proibidas, pois n assume valores menores que $1/2$ e valores negativos.

Note que $\kappa < -1$ ($q < 0$) nos fornece um $n > 1/2$, porém esta região ultrapassa os limites de validade da κ -estatística. A extensão dos modelos politrópicos cresce com n , no entanto, quando $n > 5$, a densidade cai mais lentamente com o tamanho do raio e a massa torna-se infinita [12, 62], o que não é considerado um resultado físico. Assim podemos concluir que o índice politrópico deve ser menor que 5 e considerando os vínculos físicos mencionados anteriormente, nós temos apenas o ramo da direita como fisicamente significativo. Os valores físicos de q devem ser maior que $9/7$ [12], enquanto que os κ -valores estão no intervalo $2/7 \leq \kappa \leq 1$ delimitado pelo retângulo hachurado menor.

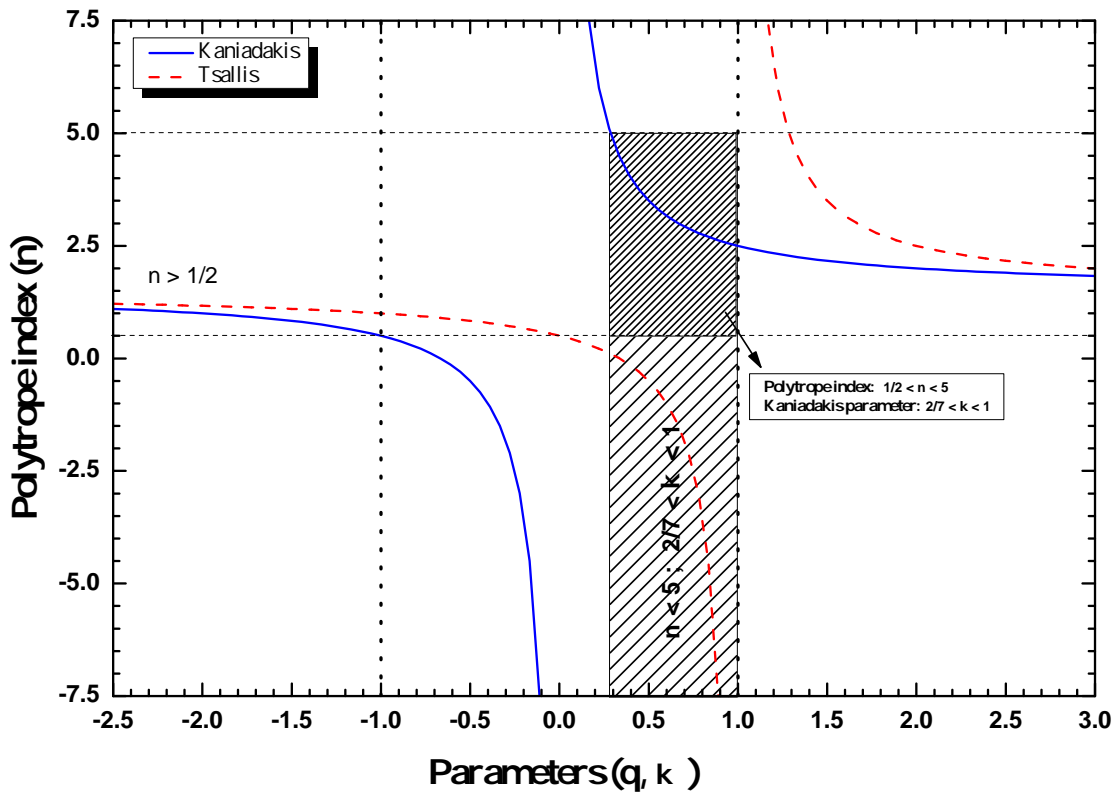


Figura 4.1: Índice politrópico n como função dos parâmetros q de Tsallis e κ de Kaniadakis. As linhas verticais pontilhadas marcam o intervalo limite de validade da κ -estatística $[-1, 1]$. As linhas horizontais marcam os valores fisicamente possíveis para o índice politrópico n .

Com esse resultado, mostramos que o extremo local da κ -entropia nos fornece uma distribuição equivalente à distribuição politrópica cuja conexão é marcada pela relação do índice politrópico n com o parâmetro κ (ver Eq.(4.14)).

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Baseado na estrutura teórica da Mecânica Estatística Clássica, o presente estudo apresentou duas formas de se obter a função de distribuição de velocidades moleculares. A primeira partindo da fatoração das probabilidades proposta por Maxwell em 1860 [31] e a segunda partindo do tratamento cinético de Boltzmann [5], o famoso teorema- H de 1872. Ambas chegam ao mesmo resultado. No entanto apesar da grande variedade de aplicações a termoestatística clássica não abarca os sistemas como anômalos, o que estimula a busca de estatísticas alternativas que generalizem o formalismo padrão seguindo uma lei de potência. Nesse contexto, apresentamos a generalização mais conhecida da literatura, a estatística não-extensiva de Tsallis [17]. Caracterizada pelo parâmetro não-extensivo q essa estatística apresenta uma entropia generalizada não-aditiva. Fundamentados nesse formalismo, mostramos a função de distribuição de velocidades não-extensiva utilizando a fatoração das probabilidades e generalizando o teorema- H clássico [10].

Com o objetivo de uma generalização ainda maior, G. Kaniadakis [23] propõe um novo formalismo que agregue várias entropias já conhecidas em uma única entropia. Sobre os pilares do princípio de interação cinética de partículas (KIP)[23, 46], surge um série de funções especiais marcadas pelo parâmetro κ que aliadas a uma álgebra especial, dão o suporte matemático a esse formalismo [24, 25, 48]. Outra característica da estatística de Kaniadakis é a aditividade da κ -entropia que pode ser tomada como uma soma de duas entropias de Tsallis [23]. Além da q -estatística, pode-se ainda obter outras estatísticas bastando para isso, fazer o correto ajuste do parâmetro κ como é o caso da estatística de férmions por exemplo.

Sob o ponto de vista da κ -estatística, reproduzimos o teorema- H_κ desenvolvido na Ref.[49] e, tendo em vista que o resultado final obtido foi uma κ -função de distribuição estacionária, fizemos como parte original de nossa pesquisa, a dedução maxwelliana da κ -função de distribuição. Como aplicação imediata, fizemos a dedução do κ -alargamento Doppler térmico para um gás em equilíbrio termodinâmico. Nessa ocasião reeditamos a função de distribuição de frequências e obtemos uma expressão para o alargamento das linhas espectrais.

Outra aplicação foi feita em sistemas auto-gravitantes, onde buscamos encontrar o estado mais estável da função de distribuição. Sabendo que ao utilizar a entropia padrão, recaímos nas esferas isotérmicas de raio infinito, nós substituímos a entropia de Boltzmann-Gibbs pela generalização entrópica de Kaniadakis. Mantendo o vínculo da massa e energia total do sistema, que são grandezas que se conservam, obtemos uma distribuição equivalente a distribuição das esferas estelares politrópicas. O que concorda com a constatação da Ref.[12] utilizando a q -estatística.

Com esse resultado nós encontramos uma relação direta entre o índice politrópico n e o parâmetro entrópico κ Eq.(4.14).

A partir da relação (4.14), analisamos quais os valores de κ tornam a função de distribuição politrópica fisicamente significativa. Esses valores se encontram no intervalo $2/7 < \kappa < 1$ e foram obtidos através das restrições físicas das esferas isotérmicas. Em seguida construímos um gráfico índice politrópico (n) vs. parâmetro entrópico (κ) onde foi mostrado o comportamento da função de distribuição. Fizemos ainda um comparativo com as curvas obtidas pela q -entropia, nesse caso o valor do parâmetro q que representa um significado físico é $q > 9/7$.

Concluindo o presente estudo, apresentamos e discutimos uma nova variante da estatística de Kaniadakis, abrindo caminho, para várias aplicações em diferentes ramos da Física. Naturalmente, as implicações e os possíveis desdobramentos do nosso trabalho estão direta ou indiretamente vinculados às aplicações desse novo formalismo cinético. Em estudos futuros pode-se, a partir dessa função politrópica generalizada, determinar a pressão e a densidade das esferas politrópicas [54].

Ainda na linha dos sistemas auto-gravitantes podemos estudar os efeitos da aplicação da κ -estatística na chamada catástrofe gravotérmica, originalmente investigada por Antonov[64] e Lynden-Bell [65] e revisitada no contexto da estatística não-extensiva nas Refs.[54, 55, 56].

Na linha de gases e plasmas, alguns problemas merecem ser investigados dentre eles, destacamos: a generalização do método de Chapman-Enskog para obter soluções analíticas aproximadas da equação de Boltzmann segundo Kaniadakis; o cálculo dos coeficientes de transporte para um gás diluído [11]; uma dedução da κ -distribuição de velocidades para o caso do gás relativístico utilizando os quadri-vetores de velocidades [66]

assim como uma generalização da equação de transporte de Boltzmann relativística recaindo no que poderemos chamar de teorema- H_κ relativístico.

BIBLIOGRAFIA

- [1] MENEZES FILHO, A. P. **Não-extensividade termodinâmica**. IN: Não-extensividade termodinâmica invariância discreta de escala-plasticidade: estudo de um modelo geodinâmico auto-organizado criticamente. (Tese de Doutorado). PUC-RIO, Rio de Janeiro, 2003.
- [2] REICHL, L. E. **A Modern Course in Statistical Physics**. 3^a ed. WILEY-VCH, Weinheim, 2009.
- [3] DAHMEN, S. R. **A obra de Boltzmann em Física**. Rev. Bras. Ens. Fís., 28:281–295, 2006.
- [4] BOLTZMANN, L. E. **Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten**. Wiener Berichte, 58:517, 1868.
- [5] BOLTZMANN, L. E. **Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen**. Wiener Berichte, 66:275, 1872.
- [6] CALLEN, H. B. **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics**. John Wiley & Sons, Philadelphia, 1985.

- [7] HUANG, K. **Statistical Mechanics**. John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [8] REIFF, F. **Fundamentals of Statistical and Thermal Physics**. Waveland Press, Long Grove, IL, 2009.
- [9] SALINAS, S. R. A. **Introdução à Física Estatística**. EDUSP, São Paulo, 1999.
- [10] SILVA, R. **Teoria Cinética Não-Extensiva: Efeitos Físicos em Gases e Plasmas**.(Tese de Doutorado). UFRN, Natal, 2000.
- [11] BEZERRA, J. R. **Teoria Cinética Não-Extensiva: Coeficientes de Transporte e Outras Aplicações Físicas**.(Tese de Doutorado). UFRN, Natal, 2005.
- [12] PLASTINO, A. R. & PLASTINO, A. **Stellar polytropes and Tsallis' entropy**. Phys. Lett. A, **174**:384, 1993.
- [13] SILVA, R. & ALCANIZ, J. S. **Non-extensive statistics and the stellar polytrope index**. Physica A, **341**:208–214, 2004.
- [14] CARVALHO, J. C.; SILVA, R.; NASCIMENTO, J. D. & MEDEIROS, J. R. **Power law statistics an stellar rotationnal velocities in the Pleiades**. EPL Journ., **84**:59001, 2008.
- [15] LIMA, J. A. S. & SOUZA, R. E. **Power law stellar distribtions**. Physica A, **350**:303–314, 2005.
- [16] HASEGAWA, A.; KUMIONI, A. M. & DUONG-VAN, M. **Plasma Distribution Function in a Superthermal Radiation Field**. Phys. Lett., **54**:2608–10, 1985.

- [17] TSALLIS, C. **Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics.** J. Stat. Phys., **52**:479, 1988.
- [18] WILK, G. & WLODARCZYK, Z. **Plasma Distribution Function in a Superthermal Radiation Field.** Phys. Rev. D, **50**:2318–20, 1994.
- [19] ZANETE, D. & ALEMANY, P. **Thermodynamics anomalous diffusion.** Phys. Rev. Lett., **75**:366, 1995.
- [20] TSALLIS, C. & BUKMAN, D. J. **Anomalous diffusion in the presence of external forces: exact time-dependent solutions and their thermo-statistical basis.** Phys. Rev. E, **54**:R2197, 1996.
- [21] VILAR, C. S.; FRANÇA, G.S.; SILVA, R. & ALCANIZ, J. S. **Nonextensivity in Geological Faults?** Physica A, **377**:285–290, 2007.
- [22] ALMEIDA, L. M. S. **Efeitos não-gaussianos em Astrofísica e Cosmologia.**(Tese de Doutorado). UFRN, Natal, 2007.
- [23] KANIADAKIS, G. **Non-linear kinetics underlying generalized statistics.** Physica A, **296**:405–425, 2001.
- [24] KANIADAKIS, G. **Statistical mechanics in the context of special relativity.** Phys. Rev. E, **66**:56125, 2002.
- [25] KANIADAKIS, G. **Statistical mechanics in the context of special relativity II.** Phys. Rev. E, **72**:36108–14, 2005.
- [26] CARVALHO, J. C.; SILVA, R. ; NASCIMENTO JR., J. D. ; SOARES, B. B. & MEDEIROS, J. R. **Observational measurement of open stellar clusters: A test of Kaniadakis and Tsallis statistics.** EPL, **91**:69002, 2010.

- [27] CLEMENTI, F.; GALLEGATI, M. & KANIADAKIS, G. **A κ -generalized statistical mechanics approach to income analysis.** Journ. Stat. Mec., **02:02037–21**, 2009.
- [28] BECK, C. **Generalized information and entropy measures in physics.** arXiv:0902.1235v2, 2009.
- [29] MAXWELL, J. C. **Illustrations of the dynamical theory of gases part I: On the motion and collisions of particles.** Philos. Mag. Ser. 4, **20:21**, 1860.
- [30] MÜLLER, I. **A history of thermodynamics: The doctrine of energy and entropy.** Springer, Berlin, 2007.
- [31] MAXWELL, J. C. **On the dynamical theory of gases.** Philos. Trans. R. Soc. London Physica A, **157:49–88**, 1867.
- [32] MAYER, J. E. & MAYER, M. G. **Estatistical Mechanics.** John Wiley & Sons, New York, 1940.
- [33] SOMMERFELD, A. **Thermodynamics and Estatistical Mechanics: Lectures on theoretical Physics.** vol V, Academic Press, 1993. Cap.V, p.293-310.
- [34] CATTANI, M. & BASSALO, J. M. F. **Entropia, reversibilidade, irreversibilidade, equação de transporte e teorema- H de Boltzmann e o teorema do retorno de Poincaré.** Rev. Bras. Ens. Fís., **30:2301–9**, 2008.
- [35] CERCIGNANI, C. & KREMER, G. M. **The relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications.** *Birkhäuser Verlag*, Berlin, 2001.
- [36] LUZZI, R. ; VASCONCELLOS, A. R. & RAMOS, J. R. **The Theory os Irreversible Process: Nonequilibrium Statistical ensemble Formalism.** (Notas de Física do IFGW), Campinas, 2005.

- [37] DANIELS, K. E.; BECK, C. & BODENSCHATZ, E. **Defect turbulence and generalized statistical mechanics.** *Phys. D*, **193**:208–217, 2004.
- [38] LIU, B.; & GOREE, J. **Superdiffusion and Non-Gaussian Statistics in a Driven-Dissipative 2D Dusty Plasma.** *Phys. Rev. Lett.*, **100**:55003–4, 2008.
- [39] ADARE, A. et al. **Nuclear modification factors of ϕ mesons in $d + Au$, $Cu + Cu$, and $Au + Au$ collisions at $\sqrt{S_{NN}} = 200 GeV$.** *Phys. Rev. C*, **83**:24909, 2011.
- [40] EPJB. **Topical issue on Generalized Entropies and Non-Linear Kinetics.** *EPJB*, **70** (1), 2009.
- [41] ABE, S. **A note on the q -deformation - theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics.** *Phys. Lett. A*, **224**:326, 1997.
- [42] SILVA, W. S. T. **Estruturas Algébricas Deformadas na Entropia Não-Extensiva.**(Dissertação de Mestrado). Universidade Federal da Bahia-UFBA, Salvador, 2009.
- [43] LIMA, J. A. S. & SILVA, R. **The nonextensive gas: a kinetic approach.** *Phys. Lett. A*, **338**:272–276, 2005.
- [44] KANIADAKIS, G.; LAVAGNO, A. & QUARATI, P. **Generalized statistics and solar neutrinos.** *Phys. Lett. B*, **369**:308, 1996.
- [45] KANIADAKIS, G.; LAVAGNO, A. & QUARATI, P. **Non-extensive statistics and solar neutrinos.** *Astrophysics and space Science*, **258**:154, 1998.
- [46] KANIADAKIS, G. **Kinetic foundations of non-conventional statistics.** *Physica A*, **305**:69–75, 2002.

- [47] KANIADAKIS, G. & SCARFONE, A. M. **Lesche stability of κ -entropy.** *Physica A*, **340**:102–109, 2004.
- [48] KANIADAKIS, G. & SCARFONE, A. M. **A new one-parameter deformation of the exponential function.** *Physica A*, **305**:69–75, 2002.
- [49] SILVA, R. **The H -theorem in κ -statistics: influence on the molecular chaos hypothesis.** *Phys. Lett. A*, **352**:17–20, 2006.
- [50] DE GROOT, S. R. & MAZUR, P. **Non-equilibrium Thermodynamics.** Dover, New York, 1984.
- [51] TIPLER, P. A. & LLEWELLYN, R. A. **Física Moderna.** 3^a ed. LTC, Rio de Janeiro, 2001.
- [52] GRIEM, H. R. **Principles of Plasma Spectroscopy .** Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [53] KENT, M. & SCHUCKING, E. L. **Doppler broadening at all temperatures.** *Annals of physics*, **100**:457–489, 1976.
- [54] TARUYA, A. & SAKAGAMI, M. **Gravothermal Catastrophe and Tsallis' Generalized Entropy of Self-Gravitating Systems.** *Physica A*, **307**:185–206, 2002.
- [55] TARUYA, A. & SAKAGAMI, M. **Gravothermal Catastrophe and Tsallis' Generalized Entropy of Self-Gravitating Systems II. Thermodynamics properties os stellar polytrope.** arXiv:cond-mat/0204315v2, 2002.
- [56] TARUYA, A. & SAKAGAMI, M. **Gravothermal Catastrophe and Tsallis' Generalized Entropy of Self-Gravitating Systems III. Thermodynamics properties os stellar polytrope.** *Physica A*, **322**:285–312, 2003.

- [57] ROSE, W. K. **Advanced Stellar Astrophysics**. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [58] CHANDRASHSEKAR, S. **An Introduction to the Study of Stellar Structure**. Dover, New York, 1958.
- [59] COLLINS, G. W. **The Fundamentals of Stellar Astrophysics**. Disponível em <http://ads.harvard.edu/books/1989fsa..book>, acessado em 20/jul/2011.
- [60] HOREDT, G. P. **Polytropes: Applications in Astrophysics and Related Fields**. Kluwer Academic Publishers, New York, 2004.
- [61] FERNANDES, F. M. F. **Modelos físico-matemáticos de estruturas estelares**.(Tese de Doutorado). Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2001.
- [62] BINNEY, J. & TRENAINE, S. **Galactic Dynamics**. Princeton University Press, Princeton, 1987.
- [63] LYNDEN-BELL, D. **Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems**. Mon. Not. R. Astr. Soc., **136**:101–121, 1967.
- [64] ANTONOV, V. A. **Dynamics of Globular Clusters**. IAU Symposium, **113**:525–540, 1985.
- [65] LYNDEN-BELL, D. & WOOD, R. **The Gravo-thermal Catastrophe in Isothermal Spheres and the Onset of Red-giant Structure for Stellar Systems**. Mon. Not. R. Astron. Soc., **138**:495–525, 1968.
- [66] BASU, P. & MONDAL, S. **4-Velocity function using Maxwell-Boltzmann's original approach and a new of the relativistic equation of state**. arXiv:1103.3330v1[astro-ph.SR], 2011.