UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA APLICADA E ESTATÍSTICA

CARLOS ALEXANDRE GOMES DA SILVA

Teoria da Ruína em um Modelo de Markov com dois Estados

Natal/RN - 2010

CARLOS ALEXANDRE GOMES DA SILVA

Teoria da Ruína em um Modelo de Markov com dois Estados

Dissertação apresentada ao Programa da Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística - PPGMAE, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Estatística.

Orientador:

Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira.

Natal/RN - 2010

Divisão de Serviços Técnicos

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede

Silva, Carlos Alexandre Gomes da.
Teoria da ruína em um modelo de Markov com dois estados / Carlos Alexandre Gomes da Silva. – Natal, RN, 2010.
47 f.

Orientador: André Gustavo Campos Pereira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística.

1. Probabilidade – Dissertação. 2. Teoria da ruína – Dissertação. 3. Modelo de Markov – Dissertação. I. Pereira, André Gustavo Campos. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/UF/BCZM CDU 519.2(043.3)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA APLICADA E ESTATÍSTICA

CARLOS ALEXANDRE GOMES DA SILVA

Teoria da Ruína em um Modelo de Markov com dois Estados

Comissão Examinadora:

Prof°. Dr°. André Gustavo Campos Pereira (PPGMAE/UFRN - Orientador)
Prof°. Dr°. Michelli Karinne Barros da Silva (PPGMAE/UFCG - Membro externo)
Prof°. Dr°. Viviane Simioli Medeiros Campos (PPGMAE/UFRN - Membro interno)

Natal/RN - 2010

Agradecimentos

Esta parte dos agradecimentos é com certeza uma parte difícil de escrever neste trabalho, visto que sempre que fazemos isto sempre corremos o risco de sermos injustos a acabarmos por esquecer pessoas que foram realmente essenciais ao longo de toda a nossa trajetória até o momento em que estamos. Há uma tendência natural de citarmos principalmente aqueles que nos acompanharam na fase final do trabalho, por isso peço desculpas antecipadamente a quem injustamente não citar nestas minhas poucas palavras de agradecimento.

Primeirmente gostaria de agradecer a **Deus** por me dar saúde e força para vencer esta batalha aos meus pais, **Geraldo Alexandre da Silva** e **Juliêta Gomes da Silva** por tudo que fizeram na para minha formação como pessoa e também por terem me dado a oportunidade de estudar no **Colégio Salesiano São José** toda a minha vida escolar, um lugar onde adquiri uma ótima fórmação básica e que me ensinou o mais importante que uma escola pode ensinar a um aluno; o hábito de estudar e pesquisar novos conhecimentos. Gostaria de registrar aqui meus sinceros agradecimentos aos excelentes professores que tive durante a minha graduação na UFRN; professores **Dr. Rubéns Leão de Andrade, Dr. Claúdio Carlos Dias, Benedito Tadeu V. Freire, Dr. Ronaldo Freire, Claudemir Caldas** e também a três outros professores que muito contribuiram para minha formação como matemático nas minhas passagens pela pós-graduação em duas outras universidades brasileiras; ao professor **Dr. Francesco Russo(UFPE)** e ao professor **Dr. Nelson Neri (UFPB)** e ao professor **Dr. João Marcos do Ó (UFPB)** o meu muito obrigado à todos vocês.

Aqui na UFRN no PPGMAE fazer o mestrado numa área totalmente nova para mim me fez aprender um pouco de um mundo nunca d'antes visitado ; A TEORIA DA PROBABILIDADE. Foi fascinante e inesperado para mim saber o quanto de Matemática pura existe nesta área da matemática, que para leigos como eu era há dois anos, parece ser restrita apenas aqueles problemas que envolvem combinatória básica e alguns problemas de jogos de azar.

O programa de mestrado do PPGMAE me fez descobrir também um pouco da Estatística, uma ciência riquíssima de aplicações mas que por outro lado tem uma sólida fundamentação Matemática. Todas estas descobertas não teriam sido possíveis sem meus excelentes professores do PPGMAE , **Dr. Jaques Lopes Siqueira, Dra. Dione Maria Valença, Dr. Marcelo Gomes Pereira, Dra.Viviane Simioli M Campos**, a quem incomodei inúmeras vezes ,tomando a sua sala emprestada para o estudo do nosso trabalho, e em especial ao meu orientador prof. **Dr. André Gustavo Campos Pereira**, que teve uma enorme paciência, dedicação e compreenção comigo e que sempre achou um tempinho para nossas discursões entre os meus apertadíssimos horários e dezenas de aulas semanais. Realmente foi muito dificil conciliar este mundo dual entre professor de ensino médio, professor universitário aqui na UFRN e aluno da pós-graduação. Realmente sem a sua colaboração e compreensão eu realmente não teria conseguido aprender o que aprendi e principalmente ler, e entender cada passagem deste trabalho. Obrigado a todos vocês e principalmente a você André.

Finalmente não poderia deixar de registrar meus sinceros agradecimente à quatro pessoas que são muito importantes para mim e que eu sei que estão sempre torcedo pelo meu sucesso, primeiramente ao meu inseparável amigo e parceiro de aventuras Matemáticas, o professor **Paulo de Sousa Sobrinho**, pessoa por quem tenho grande apreço e que divide sempre comigo a alegria de cada novo resultado de análise, probabilidade, uma bela questão olímpica ou as vezes até mesmo uma simples questão de Matemática elementar que apredemos a cada dia; ao meu querido amigo e hoje professor da UNB, **Dr. Ary Vasconcelos Medino**, que apesar da distância sempre me motivou e me apoiou para que eu levasse esse sonho adiante; ao professor e meu amigo-irmão **João Domingues Guimarães Mesquita** que sempre soube compreender as minhas ausências por estar envolvido neste trabalho e mesmo assim me deu forças em muitas horas dificéis nos últimos tempos e finalmente a minha namorada **Ana Claúdia Melo Caldas Batista** por seu constante incentivo compreensão para que eu finalizasse este trabalho, obrigado a todos vocês!

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais Geraldo Alexandre da Silva , Juliêta Gomes da Silva e aos meus irmãos; Giuliana, Priscila, Júnior e Sandro, que sempre deram e fizeram o melhor possível para que eu pudesse alcançar os meus objetivos e realizar os meus sonhos.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma aplicação da teoria do risco com o seguinte cenário: as mudanças no capital de uma seguradora acontecem em cada instante de tempo e o pagamento de uma indenização ou recebimento de um prêmio é decidido pelo resultado de uma cadeia de Markov de dois estados. Nesta situação calculamos a probabilidade de ruína e o tempo esperado de ruína quando o valor da indenização é um mútiplo do valor do prêmio.

Palavras chaves: probabilidade de ruína, teoria do risco, cadeias de Markov, esperança do tempo de ruína.

Abstract

In this work, we present a risk theory application in the following scenario: In each period of time we have a change in the capital of the ensurance company and the outcome of a two-state Markov chain stabilishs if the company pays a benefice it heat to one of its policyholders or it receives a Hightimes $c > 0$ paid by someone buying a new policy. At the end we will determine once again by the recursive equation for expectation the time ruin for this company.

Keywords: Ruin probability, risk theory, Markov chain, expectation time of ruin.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Todos temos uma idéia do que significa seguro, seguradora e segurado. É comum ao acontecer um acidente de trânsito alguém perguntar: "Seu carro tem seguro?" .Na recente crise financeira mundial, as seguradoras que seguravam as hipotecas das famílias americanas iam falindo uma após a outra. Pois bem, poderíamos simplificar o processo de seguros como em Santos [2]: Temos uma empresa seguradora (também chamada de seguradora) e seus clientes (também chamados de segurados). A empresa seguradora cobra um prêmio (preço pago pelo tomador do seguro à empresa de seguros pela contratação do seguro) ao cliente para segurar um bem (automóvel, casa, etc). Caso esse bem sofra algum dano devido a eventos aleatórios (tais eventos são descritos no contrato firmado entre segurador e segurado) o segurador indeniza (valor pago por uma empresa de seguros para reparar ou ressarcir um dano resultante de um sinistro) ao segurado após uma análise dos danos sofridos (perda total, parcial, etc).

A palavra sinistro utilizada anteriormente significa - Evento ou série de eventos resultantes de uma mesma causa susceptível de fazer funcionar as garantias de um ou mais contratos de seguro.

Com esses dados uma seguradora poderia modelar a quantia de dinheiro que ela terá em caixa no tempo t por

Dinheiro em caixa (t) = capital inicial + Dinheiro recebido em prêmios (t) - Dinheiro pago em indenizações (t).

Ainda em Santos [2] ele nos diz que utilizando as idéias, em 1903, Filip Lundberg desenvolveu em sua tese de doutorado um modelo para descrever a equação acima com mais precisão, conhecido como o modelo clássico de risco. No seu modelo ele assumiu que o processo de chegada de indenizações era um processo de Poisson homogêneo, as quantias de indenizações eram variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, e a entrada de prêmios era linear no tempo.Filip Lundberg utilizou o processo de Poisson $\{N_t\}_{t\geq 0}$ para modelar o número de indenizações que chegavam até o tempo t, obtendo o seguinte modelo, o qual é conhecido como modelo de risco clássico

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \tag{1.1}$$

onde:

- u representa o capital inicial.

- c representa a taxa de prêmio por unidade de tempo que entra na seguradora.

- N_t representa a quantidade de pedidos de indezinações que chegam à seguradora até o tempo t.

- $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de v.a.'s que representam os valores das indenizações pagas pela seguradora.

No estudo deste modelo, procura-se responder a seguinte pergunta: Qual a probabilidade do capital da seguradora ficar negativo em algum instante, em outras palavras, deseja-se calcular

$$P(U(t) < 0 \text{ para algum } t). \tag{1.2}$$

Tal probabilidade ficou conhecida como a probabilidade de ruína. Somente em alguns casos especiais, como por exemplo, no caso das quantias de indenizações serem esponencialmente distribuídas, é possível obter uma expressão exata para a probabilidade de ruína. Assim, um dos problemas principais da teoria do risco é a obtenção de estimativas precisas para a probabilidade de ruína.

Muitos autores trabalharam com o modelo clássico de Lundberg tentando melhorá-lo no sentido de torná-lo mais próximo possível da realidade. Dentre aqueles que trabalharam com desigualdades para a probabilidade da ruína em modelos de risco mais gerais, podemos citar, Yang[35] que discutiu um caso especial considerando as taxas de juros constantes idênticas. Cai[7] estudou um modelo com taxas de juros i.i.d. Formalmente esse modelo pode ser descrito pela igualdade

$$U_k = U_{k-1}(1 + I_k) - Z_k \quad , \quad k = 1, 2, 3 \cdots$$

Onde $U_0 = u \geq 0$ é o capital inicial da seguradora, $\{Z_k; k \geq 1\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com função de distribuição G e $\{I_k; k \geq 1\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias (que representam os juros do investimento do período $(I_k, I_{k+1}])$ independentes de $\{Z_k; k \geq 1\}$ além disso Z_k representa a perda líquida no período k, ou seja, do instante $k-1$ ao instante k. No final de cada período k, podemos enxergar a perda líquida como sendo a diferença entre o total de indenizações pagas menos o total de prêmios recebidos no período k, formalmente, $Z_k = Y_k - X_k$, onde $\{Y_k; k \geq 1\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. independentes de $\{X_k; k \geq 1\}$ que também é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. e finalmente I_k representa a taxa de juros no referido período k. Diante do exposto U_k representa o capital da seguradora que possuia um capital inicial u, ao final do período k. Em Cai[8], trabalhou com um modelo dependente para taxas de juros, no qual as taxas são assumidas ter uma estrutura AR(1) - modelo autoregressivo. Modelos de risco a tempo discreto foram considerados por Yang e Zhang[36]. Em relação a fórmulas assintóticas para a probabilidade de ruína, Tang e Tsitsiashvili[28] obtiveram fórmulas assintóticas para a probabilidade de ruína em tempo finito, considerando as taxas de juros v.a.'s i.i.d. e a distribuição sendo de cauda pesada.

Uma extensão natural do modelo clássico é considerar o processo de chegadas dos pedidos de indenizações como um processo de renovação, ou seja, um processo de contagem onde os tempos entre as chegadas das indenizações são i.i.d. com distribuição arbitrária. No caso do processo de Poisson esta distribuição é a exponencial. O primeiro a estudar o modelo de risco usando processo de renovação foi Sparre Andersen [1], por isto, este modelo tem sido chamado de modelo de Sparre Andersen, que formalmente pode ser descrito pela igualdade

$$U(t) = u + ct + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

onde $U(0) = u$ representa o capital inicial e $U(t)$ a reserva de capital no instante t, $c > 0$ é a taxa de entrada dos prêmios, Y_k é o valor da $k-$ésima indenização paga sendo Y_k variáveis aleatórias i.i.d. e finalmente $N(t)$ denota o número de indenizações ocorridas até o instante t, além disso $\{N(t), T \geq 0\}$ é um processo de renovação, ou seja, um processo de contagem que para cada $t \geq 0$ temos

$$N(t) = \max\{n; T_n \leq t\}$$

onde $T_0 = 0, T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \forall n \geq 1$ e X_m, $m \geq 1$ são variáveis aletórias não negativas, independentes e identicamente distribuídas.

Uma equação integral para a probabilidade de ruína e a extensão da desigualdade de Lundberg para o modelo de renovação foram obtidas por Sparre Andersen. Desde então vários autores têm estudado as propriedades deste modelo. Dentre eles podemos citar Thorin[30] e [31], Takács[27] e Malinovskii[22].

Neste trabalho estudaremos um caso muito particular do modelo de risco acima explicado. Estaremos imaginando uma empresa seguradora com capital inicial $u \geq 0$. Suporemos que a cada instante a empresa é contactada por um cliente apenas uma das possibilidades abaixo ocorre:

1. Ela recebe um novo cliente, ou seja, há uma entrada de dinheiro (sempre o mesmo valor: c) no seu caixa, ou;

2. Ela paga uma indenização (sempre do mesmo valor : 1) para um dos seus segurados, ou seja, há uma saída do seu caixa.

A dinâmica que decidirá se ela recebe ou paga dinheiro é modelada por uma cadeia de Markov de dois estados. A versão da equação (1.1) é dada por

$$U_n = u + nc - (1 + c) \sum_{i=1}^{n} X_i$$

onde $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a cadeia de Markov mencionada acima.

É bastante natural que a empresa queira saber o risco que possui esse negócio. Com um capital inicial $u \geq 0$, qual a probabilidade que esta empresa venha a cair no vermelho num tempo finito? Qual é o tempo médio em que essa empresa não entra no vermelho? Estas são as questões que serão tratadas neste trabalho.

Tudo que desenvolvemos neste trabalho está baseado no artigo **A note on ruin in a two state Markov Model**,[33]. Como já mencionamos acima, apenas em casos bem particulares são encontradas fórmulas fechadas para o cálculo das probabilidades de ruína e esperanças do tempo de ruína. No artigo citado há pouco, são feitas ao longo da discussão, algumas suposições que podem não refletir de modo exato a realidade do problema prático (da vida real), mas em compensação são obtidas, ao final, fórmulas fechadas para o cálculo dos valores das probabilidades de ruína e das esperanças dos tempos de ruína.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos os conceitos e resultados que serão mencionados no restante do trabalho. Tais resultados não são a parte central do trabalho por este motivo nos limitaremos a apresentar as propriedades e os resultados sem suas demonstrações. Indicamos referências para os leitores que desejarem verificar as demonstrações e saber mais sobre os tópicos citados. Com este foco tratamos na seção 2.2 dos conceitos e propriedades das cadeias de Markov com espaço de estados finito e na seção 2.3 apresentamos os resultados que usamos no capítulo 3, a saber: a regra de sinal de Descartes e o teorema da convergência dominada para séries.

2.2 Processos Estocásticos e Cadeias de Markov

Nesta seção recordamos o que é um processo estocástico e falamos um pouco de algumas definições e propriedades relativas um processo estocástico específico, a saber: Cadeias de Markov com espaço de estados finito.

Definição. 2.2.1 *Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias $X(t), t \in T$ definidas sobre um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Isto é, para cada $t \in T$, $X(t) = X_t$ é uma variável aleatória. O conjunto S de todos os valores distintos assumidos por um processo estocástico é chamado espaço de estados do processo. Se S é enumerável , dizemos que o processo é uma cadeia.*

Podemos interpretar t como o tempo e dizemos que X_t é o estado do processo no instante t. Se o conjunto de índices T for um conjunto enumerável, dizemos que o processo é a tempo discreto, se não-enumerável; o processo é dito a tempo contínuo. Um processo estocástico pode ser visto como uma função de duas variáveis, $X_t(w) = X(t, w)$. Dessa forma, para t fixo, a função é uma variável aleatória, e para w fixado, temos uma função real de t que é chamada um caminho amostral ou trajetória amostral.

2.2.1 Cadeias de Markov

Dado um processo estocástico $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com espaço de estados $S = \{1, 2, 3, \cdots\}$, dizemos que o processo satisfaz a propriedade de Markov se, para todo $n \in \mathbb{N}$, e todos estados $i_1, i_2, \cdots$ em S, temos:

$$P(X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \cdots, X_1 = i_1) = P(X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1})$$

Definição. 2.2.2 *Um processo a tempo discreto $\{(X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, com espaço de estados enumerável, que satisfaz a propriedade de Markov é chamado Cadeia de Markov.*

Uma Cadeia de Markov é homogênea ou estacionária no tempo se a probabilidade de ir de um estado a outro é independente do tempo em que o passo é dado. Isto é, para todos os estados $i, j \in S$, temos:

$$P(X_n = j|X_{n-1} = i) = P(X_{n+k} = j|X_{n+k-1} = i)$$

para $k = -(n-1), -(n-2), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots$.Por outro lado, se a condição de estacionariedade falha, então a Cadeia é dita não homogênea ou não-estacionária.

Vamos considerar que no tempo $n - 1$ a cadeia esteja no estado i. Assim, denotaremos a probabilidade de, no tempo n a cadeia está no estado j, sabendo que no tempo $n-1$ ela estava no estado i, por $P(X_n = j|X_{n-1} = i) = p_{ij}^{(n-1,n)}$. Note que estamos definindo a probabilidade de ir do estado i ao estado j em apenas um passo, pois é do tempo $n - 1$ ao tempo n. Caso a cadeia seja estacionária, então

$$p_{ij}^{(n-1,n)} = p_{ij}^{(n+k-1,n+k)}$$

para todo $k = -(n - 1), -(n - 2), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots$, ou seja, $p_{ij}^{(n-1,n)}$ não depende do tempo, no sentido de ser o mesmo valor, para todo $n = 1, 2, \cdots$. Portanto, denotamos:

$$p_{ij}^{(n-1,n)} = P(X_n = j|X_{n-1} = i) = p_{ij}$$

Essas probabilidades condicionais são chamadas probabilidades de transição da cadeia.

Consideremos, agora, $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ como sendo uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.Para essa cadeia existem n^2 probabilidades de transição p_{ij}, com $i, j = 1, 2, \cdots, n$. Dada uma cadeia de Markov e as suas probabilidades de transição, podemos organizar esses valores em uma matriz $P = (p_{ij})_{n\times n}$; $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$, na qual p_{ij} representa probabilidade da cadeia mudar do estado i para estado j em apenas um passo.Vejamos:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Essa é a chamada matriz de transição da cadeia de Markov.Note que toda matriz de transição tem as seguintes propriedades:

i. Todas as entradas são não-negativas, pois são probabilidades;

ii. A soma das entradas em cada linha é sempre 1.

Teorema. 1 *Seja* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma cadeia de Markov com espaço de estados S finito. Dados* $i_0, i_1, i_2, ..., i_k \in S$ *temos*

$$P(X_n = i_1, X_{n+1} = i_2, ..., X_{n+k} = i_k | X_n = i_1) = P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_k = i_k | X_1 = i_1).$$

2.3 Resultados Auxiliares

A regra dos sinais de Descartes, primeiramente descrita por René Descartes no seu trabalho La géométrie, é uma teorema que determina o número de raízes positivas e negativas de um polinômio.

Teorema. 2 *(Regra dos sinais de Descartes): Se os termos de um polinômio com coeficientes reais são colocados em ordem decrescente de grau, então o número de raízes positivas do polinômio é ou igual ao número de alternâncias de sinal ou menor por uma diferença par. Mais precisamente falado, o número de alternâncias de sinal é igual ao número de raizes positivas acrescido do número de raizes imaginárias (que sempre acontecem ao pares em polinômio de coeficientes reais).*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [23].

Na teoria da medida, o teorema da convergência dominada de Lebesgue é bem conhecido, entretanto, a sua versão para séries não é muito conhecida.

Teorema. 3 *(Teorema da convergência dominada para séries): Seja* (a_{kn}) *uma sequência de números reais duplamente indexada de modo que para cada* n *o limite* $\lim_{k\to\infty} a_{kn} = a_n$ *existe. Se existir uma sequência de números reais não negativos* (b_n)*, tal que para cada* n , $|a_{kn}| \leq b_n$*, para* $k = 1, 2, 3, \cdots$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$*, então*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} a_{kn} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [18].

Capítulo 3

Modelo de ruína numa cadeia de Markov com dois estados

3.1 Introdução

Imagine um investidor que pretende entrar no mercado das seguradoras. Uma vez aberta a empresa, este investidor disponibiliza um capital inicial $u \geq 0$ no caixa da empresa. Supondo que a cada instante que a empresa é contactada por um cliente haja apenas duas possibilidades, a saber:

i. Ela recebe um novo cliente, ou seja, há uma entrada no seu caixa, ou;

ii. Ela deve pagar um benifício para um dos seus segurados, ou seja, há uma saída do seu caixa.

É bastante natural que o investidor queira saber o risco que possui esse negócio. Será que este negócio é viável para o investidor? Sendo mais preciso; com um capital inicial $u \geq 0$, qual a probabilidade que esta empresa venha a cair no vermelho num tempo finito? Qual é o tempo médio em que essa empresa não entrará no vermelho? Estas são as questões que serão tratadas neste trabalho. Evidentemente estas questões são de interesse prático para o investidor, que a partir destes resultados pode guiar as suas decisões sobre a viabilidade do seu futuro investimento.

3.2 Modelando o problema

Consideremos $t_1, t_2, \cdots, t_n$ como instantes igualmente espaçados. Sem perda de generalidade consideremos que $t_n - t_{n-1} = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Aqui neste capítulo vamos estudar um processo de risco tal que, se no instante t_n é recebido pela seguradora um novo cliente, que paga um valor total $c > 0$ ao comprar uma nova apólice, diremos que o processo está na posição 1, enquanto que se no instante t_n a seguradora paga um benefício (sinistro cujo valor admitiremos como 1), diremos que o processo está na posição 2. Sejam $0 < p_{12} < 1$ a probabilidade do processo mudar da posição 1 para a posição 2 no intervalo $(t_n, t_{n+1}]$ e $0 < p_{21} < 1$ a probabilidade do processo mudar da posição 2 para a posição 1 no intervalo $(t_n, t_{n+1}]$.Para descrever o processo vamos definir uma sequência de variáveis aleatórias X_n tais que

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{se no instante } t_n \text{ o processo está na posiçao 1.} \\ 1, & \text{se no instante } t_n \text{ o processo está na posição 2.} \end{cases}$$

Supondo que estas probabilidades não variem com o passar do tempo, podemos descrever este processo como uma cadeia de Markov homogênea com apenas dois estados, que pode ser representada pela seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - p_{12} & p_{12} \\ p_{21} & 1 - p_{21} \end{pmatrix}$$

Além disso, supondo que a seguradora inicia com um capital $u \geq 0$, definimos para cada posição $i \in \{1, 2\}$ o tempo de ruína da seguradora como sendo o menor inteiro positivo n para o qual o montante acumulado pela empresa fica negativo. Para definirmos formalmente esse tempo vamos raciocinar da seguite forma: pelo que descrevemos anteriormente a empresa inicia com um capital $u \geq 0$ no seu caixa; a cada instante a empresa paga uma indenização de valor 1 ou recebe uma quantia $c > 0$ de um novo cliente. A variável aleatória X_j sendo 1 quando a empresa paga uma indenização e 0 quando recebe um novo cliente implica que $\sum_{j=1}^{n} X_j$ representa o número de vezes que a empresa pagou indenizações e portanto o gasto com o pagamento destas indenizações foi de $1 \times \sum_{j=1}^{n} X_j$, visto que cada indenização paga é de valor 1. Assim, após n instantes a quantidade de vezes que a empresa recebeu um novo cliente foi $\left(n - \sum_{j=1}^{n} X_j\right)$. Como em cada entrada de um novo cliente a empresa recebe uma quantia c, segue que o total recebido pela empresa em n instantes será igual a $c \times \left(n - \sum_{j=1}^{n} X_j\right)$. Dessa forma, contabilizando as entradas e saídas de capital da empresa nestes n instantes o saldo líquido no caixa da empresa após os n instantes será:

$$U_n(u) = u + c \times \left(n - \sum_{j=1}^{n} X_j\right) - 1 \times \sum_{j=1}^{n} X_j \Rightarrow U_n(u) = u + nc - (1 + c) \sum_{j=1}^{n} X_j$$

Assim podemos fazer a seguinte

Definição. 3.2.1 *Com as notações estabelecidas acima definimos o tempo de ruína como sendo*

$$\tau_i(u) = inf\, \{n \in \mathbb{N}; U_n(u) < 0\}$$

Na verdade o nosso principal interesse é estimar a probabilidade do tempo de ruína ser finito, isto é, $\psi_i(u) = P(\tau_i(u) < \infty)$ e também o tempo médio de ruína da seguradora, isto é, $\xi_i(u) = E(\tau_i(u))$.

No presente trabalho vamos assumir que $c = \frac{1}{N}$ com $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, o que na prática é bem razoável visto que em geral o valor c que o segurado paga ao contratrar o seguro é sempre bem menor que o valor pago pela seguradora por um sinistro, no nosso caso, valor 1. Se por acaso, não existir o número natural N para o qual $c = \frac{1}{N}$ e então considerarmos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < c$ o nosso resultado exprimirá uma cota superior para $\psi_i(u) = P(\tau_i(u))$ e uma cota inferior para $\xi_i(u) = E(\tau_i(u))$. De agora em diante neste trabalho vamos supor que o capital inicial u seja um múltiplo de c, isto é, $u = kc = k\frac{1}{N} \Rightarrow u = \frac{k}{N}$ com $k \in \mathbb{N}$

A estratégia utilizada será deduzir fórmulas recursivas para a probabilidade de ruína e para o valor esperado do tempo de ruína e concluíremos determinando os seus respectivos valores iniciais que são:

$$\psi_1(0) = N\frac{p_{12}}{p_{21}} \ , \ \xi_1(0) = \frac{p_{21} - p_{11} + \sigma}{p_{21}.(1-\sigma)}$$

onde σ corresponde a única raiz do polinômio $p(s) = -p_{11} + s - (p_{21} - p_{11})s^N - p_{22}s^{N+1}$ no intervalo $(0,1)$.No final desta seção apresentaremos simulações para ilustrar algumas situações em função das probabilidades de transição e do capital inicial u e na seção seguinte apresentamos simulações para as esperanças dos tempos de ruína.

3.3 Uma fórmula recurssiva para a probabilidade de ruína

De acordo com as definições que demos acima temos que $\psi_i(u)$ é a probabilidade de ruína da seguradora começando no estado inicial $i \in \{1,2\}$ e com um capital inicial u em caixa.

Diante do que foi exposto acima vamos deduzir as duas expressões a seguir:

$$\psi_1(u) = p_{11}\psi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) + p_{12}\psi_2(u-1) \tag{3.1}$$

$$\psi_2(u) = p_{21}\psi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) + p_{22}\psi_2(u-1) \tag{3.2}$$

De fato,

$$\psi_i(u) = P\left(\tau_i(u) < \infty\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\tau_i(u) = n\right)$$

Lembrando que

$$U_n(u) = u + nc - (1+c)\sum_{j=1}^{n} X_j$$

temos que:

$$P\left(\tau_i(u) = n\right) = P\left(U_0(u) > 0, U_1(u) > 0, U_2(u) > 0, \cdots, U_{n-1}(u) > 0, U_n(u) < 0 | X_1 = i\right)$$

Para simplificar a notação, definimos

$$V_0 = \{w \in \Omega : U_0(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u > 0\}$$

$$V_1 = \{w \in \Omega : U_1(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u + c - (1+c)X_1(w) > 0\}$$

$$V_2 = \{w \in \Omega : U_2(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u + 2c - (1+c)X_1(w) - (1+c)X_2(w) > 0\}$$

$$\vdots$$

$$V_{n-1} = \{w \in \Omega : U_{n-1}(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u + (n-1)c - (1+c)\sum_{j=1}^{n-1} X_j(w) > 0\}$$

$$V_n = \{w \in \Omega : U_n(u)(w) < 0\} = \{w \in \Omega : u + nc - (1+c)\sum_{j=1}^{n} X_j(w) < 0\}$$

Assim podemos escrever a expressão,

$$P(\tau_i(u) = n) = P(U_0(u) > 0, U_1(u) > 0, U_2(u) > 0, \cdots, U_{n-1}(u) > 0, U_n(u) < 0 | X_1 = i)$$

de forma mais econômica como:

$$P(\tau_i(u) = n) = P(V_0, V_1, V_2, \cdots V_n | X_1 = i).$$

Como X_2 só assume os valores 0 ou 1 temos:

$$P(\tau_i(u) = n) = P(V_0, V_1, V_2, \cdots V_n, X_2 \in \{0,1\} | X_1 = i)$$

e portanto

$$P(\tau_i(u) = n) = P(V_0, V_1, V_2, \cdots V_n, X_2 = 0 | X_1 = i) + P(V_0, V_1, V_2, \cdots V_n, X_2 = 1 | X_1 = i) \quad (3.3)$$

Por definição

$$P(V_0, V_1, V_2, \cdots, V_n, X_2 = 0 | X_1 = i) = \frac{P(V_0, V_1, V_2, \cdots, V_n, X_2 = 0, X_1 = i)}{P(X_1 = i)}$$

e fazendo

$$P(V_0, V_1, V_2, \cdots, V_n, X_2 = 0 | X_1 = i) = \frac{P(V_0, V_1, V_2, \cdots, V_n, X_2 = 0, X_1 = i)}{P(X_1 = i)} . \frac{P(X_2 = 0, X_1 = i)}{P(X_2 = 0, X_1 = i)}$$

obtemos

$$P(V_0, V_1, V_2, \cdots, V_n, X_2 = 0 | X_1 = i) = P(V_0, V_1, V_2, \cdots, V_n | X_2 = 0, X_1 = i) .p_{i1}$$

Analogamente,

$$P(V_0, V_1, V_2, \cdots, V_n, X_2 = 1 | X_1 = i) = P(V_0, V_1, V_2, \cdots, V_n | X_2 = 1, X_1 = i) .p_{i2}$$

Assim podemos reescrever (3.3) da seguinte maneira:

$$P(\tau_i(u) = n) = P(V_0, V_1, V_2, \cdots, V_n | X_2 = 0, X_1 = i) .p_{i1} + P(V_0, V_1, V_2, \cdots, V_n | X_2 = 1, X_1 = i) .p_{i2}$$

Note que, dado $X_1 = 0$ temos:

$$V_0 = \{w \in \Omega : U_0(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u > 0\} \text{ é o evento certo}$$

$$V_1 = \{w \in \Omega : U_1(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u + c > 0\} \text{ é o evento certo}$$

$$V_2 = \{w \in \Omega : U_2(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u + 2c - (1+c)X_2(w) > 0\}$$

$$\vdots$$

$$V_{n-1} = \{w \in \Omega : U_{n-1}(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u + (n-1)c - (1+c)\sum_{j=2}^{n-1} X_j(w) > 0\}$$

$$V_n = \{w \in \Omega : U_n(u)(w) < 0\} = \{w \in \Omega : u + nc - (1+c)\sum_{j=2}^{n} X_j(w) < 0\}$$

Da mesma forma, dado $X_1 = 1$ temos,

$$V_0 = \{w \in \Omega : U_0(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u > 0\} \text{ é o evento certo}$$

$$V_1 = \{w \in \Omega : U_1(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u + c - (1+c) > 0\}$$

$$V_2 = \{w \in \Omega : U_2(u) > 0\} = \{w \in \Omega : u + 2c - (1+c) - (1+c)X_2(w) > 0\}$$

$$\vdots$$

$$V_{n-1} = \{w \in \Omega : U_{n-1}(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u + (n-1)c - (1+c) - (1+c)\sum_{j=2}^{n-1} X_j(w) > 0\}$$

$$V_n = \{w \in \Omega : U_n(u)(w) < 0\} = \{w \in \Omega : u + nc - (1+c) - (1+c)\sum_{j=2}^{n} X_j(w) < 0\}$$

o que implica em

$$V_0 = \{w \in \Omega : U_0(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u > 0\} \text{ é o evento certo}$$

$$V_1 = \{w \in \Omega : U_1(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u + c - (1+c) > 0\} = \{w \in \Omega : u - 1 > 0\}$$

dependendo do valor de u é o evento certo ou o impossível.

$$V_2 = \{w \in \Omega : U_2(u) > 0\} = \{w \in \Omega : u + 2c - (1+c) - (1+c)X_2(w) > 0\}$$

$$\vdots$$

$$V_{n-1} = \{w \in \Omega : U_{n-1}(u)(w) > 0\} = \{w \in \Omega : u + (n-1)c - (1+c) - (1+c)\sum_{j=2}^{n-1} X_j(w) > 0\}$$

$$V_n = \{w \in \Omega : U_n(u)(w) < 0\} = \{w \in \Omega : u + nc - (1+c) - (1+c)\sum_{j=2}^{n} X_j(w) < 0\}$$

Note que dado $X_1 = i$ temos que V_0 sempre é o evento certo e que V_1 ou é o evento certo ou o evento impossível dependendo do valor de u, ou seja,

$$\begin{aligned} P(\tau_1(u) = n) = &\ P(V_0, V_1, V_2, \cdots, V_n | X_2 = 0, X_1 = 0) .p_{i1} + P(V_0, V_1, V_2, \cdots, V_n | X_2 = 1, X_1 = 0) .p_{i2} \\ = &\ P(V_2, V_3, \cdots, V_n | X_2 = 0, X_1 = 0) .p_{i1} + P(V_0, V_1, V_2, \cdots, V_n | X_2 = 1, X_1 = 0) .p_{i2} \end{aligned}$$

e de forma análoga

$$P(\tau_2(u) = n) = P(V_1, V_2, \cdots, V_n | X_2 = 0, X_1 = 1) .p_{i1} + P(V_1, V_2, \cdots, V_n | X_2 = 1, X_1 = 1) .p_{i2}.$$

Observemos mais atentamente $P(V_2, \cdots, V_n | X_2 = 0, X_1 = 0)$. Note que depois que $X_1 = 0$ foi considerado

$$V_2 = \{w \in \Omega : u + 2c - (1+c) - (1+c)X_2(w) > 0\}$$

$$\vdots$$

$$V_n = \{w \in \Omega : u + nc - (1+c) - (1+c)\sum_{j=2}^{n} X_j(w) < 0\}$$

só dependem das variáveis $X_2, ..., X_n$ e como $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cadeia de Markov, temos que o futuro só depende do passado mais próximo, ou seja,

$$P(V_2, \cdots, V_n | X_2 = 0, X_1 = 0) = P(V_2, \cdots, V_n | X_2 = 0)$$

da mesma forma

$$P(V_3, \cdots, V_n | X_2 = 0, X_1 = 0) = P(V_2, \cdots, V_n | X_2 = 1).$$

De forma análoga

$$P(V_1, \cdots, V_n | X_2 = 0, X_1 = 1) = P(V_2, \cdots, V_n | X_2 = 0)$$

da mesma forma

$$P(V_1, \cdots, V_n | X_2 = 1, X_1 = 1) = P(V_2, \cdots, V_n | X_2 = 1).$$

Note também que estamos trabalhando com uma cadeia de Markov homogênea, assim as probabilidades com que os eventos acontecem no tempo são preservadas desde que a distância dos passos seja preservada, ou seja,

$$\begin{aligned} P(V_2, \cdots, V_n | X_2 = 0) .p_{i1} = &\ P\Big(u + 2c - (1+c)X_2 > 0, \cdots, u + nc - (1+c)\textstyle\sum_{j=2}^{n} X_j < 0 | X_2 = 0\Big) .p_{i1} \\ = &\ P(u + 2c - (1+c)X_1 > 0, \cdots \\ &\ \cdots, u + c + (n-1)c - (1+c)\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} X_j < 0 | X_1 = 0\Big) .p_{i1} \end{aligned}$$

Note entretanto que

$$P\left(u+2c-(1+c)X_1>0,\cdots,u+c+(n-1)c-(1+c)\sum_{j=1}^{n-1}X_j<0|X_1=0\right)=P\left(\tau_1(u+c)=n-1\right)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} P\left(V_1,V_2,\cdots,V_n|X_2=1\right).p_{i2} = & \; P\left(u-1>0,\cdots,u-1+(n-1).c-(1+c)\textstyle\sum_{j=2}^{n}X_j<0|X_2=1\right).p_{i2} \\ = & \; P\left(u-1>0,\cdots,u-1+(n-1)c-(1+c)\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}X_j<0|X_1=1\right).p_{i2} \end{aligned}$$

Entretanto,

$$P\left(u-1>0,\cdots,u-1+(n-1)c-(1+c)\sum_{j=1}^{n-1}X_j<0|X_1=1\right)=P\left(\tau_2(u-1)=n-1\right)$$

Portanto, podemos reescrever (3.3) da seguinte maneira

$$P\left(\tau_i(u)=n\right)=P\left(\tau_1(u+c)=n-1\right).p_{i1}+P\left(\tau_2(u-1)=n-1\right).p_{i2}. \tag{3.4}$$

Somando em n a expressão acima,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}P\left(\tau_i(u)=n\right) = & \; p_{i1}\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\tau_1(u+c)=n-1\right)+p_{i2}\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\tau_2(u-1)=n-1\right) \\ = & \; p_{i1}.P\left(\tau_1(u+c)<\infty\right)+p_{i2}P\left(\tau_2(u-1)<\infty\right) \end{aligned}$$

Como $P\left(\tau_i(u)=0\right)=P\left(u<0\right)=0$ segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\tau_i(u)=n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}P\left(\tau_i(u)=n\right)=\psi_i(u)$$

$$\psi_i(u)=p_{i1}\psi_1(u+c)+p_{i2}\psi_2(u-1)$$

.

Substituindo os valores $i=1$ e $i=2$ obtemos as equações (3.1) e (3.2).

Agora vamos analisar as expressões acima em função dos valores que o capital inicial u pode assumir:

1^0 Caso:

Começando com o capital $0\leq u<1$ e chegando um pedido de indenização a seguradora falirá com probabilidade 1, ou seja, $\psi_2(u-1)=1$. Substituindo esse valor em (3.1) temos

$$\psi_1(u)=p_{11}\psi_1\left(u+\frac{1}{N}\right)+p_{12}\Rightarrow p_{12}=\psi_1(u)-p_{11}\psi_1\left(u+\frac{1}{N}\right). \tag{3.5}$$

2^0 Caso:

Para $1 \leq u < 2$, substituindo u por $u-1$ em (3.2), obtemos:

$$\psi_2(u-1) = p_{21}\psi_1\left(u-1+\frac{1}{N}\right) + p_{22}\psi_2(u-2)$$

como $1 \leq u < 2$ segue que $u-2 < 0$ e então $\psi_2(u-2) = 1$ e equação anterior é reescrita:

$$\psi_2(u-1) = p_{21}\psi_1\left(u-1+\frac{1}{N}\right) + p_{22}.$$

Substituindo esta última expressão em (3.1) temos

$$\begin{aligned} \psi_1(u) - p_{11}\psi_1\left(u+\tfrac{1}{N}\right) &= p_{12}\psi_2(u-1) \\ &= p_{12}\left[p_{21}\psi_1\left(u-1+\tfrac{1}{N}\right) + p_{22}\right] \\ &= p_{12}p_{21}\psi_1\left(u-1+\tfrac{1}{N}\right) + p_{12}p_{22} \\ &= p_{12}p_{21}\psi_1\left(u-1+\tfrac{1}{N}\right) + p_{12}p_{22} + p_{22}\left(p_{12}-p_{12}\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

ou seja,

$$\psi_1(u) - p_{11}\psi_1\left(u+\frac{1}{N}\right) = p_{12}p_{21}\psi_1\left(u-1+\frac{1}{N}\right) + p_{12}p_{22} + p_{22}\left(p_{12}-p_{12}\right) \tag{3.7}$$

Quando $0 \leq u < 1$ já deduzimos no 1^0 caso que

$$p_{12} = \psi_1(u) - p_{11}\psi_1\left(u+\frac{1}{N}\right)$$

como neste momento estamos supondo que $1 \leq u < 2$ segue que $0 \leq u-1 < 1$ a última expressão acima continua sendo válida se trocarmos u por $u-1$, logo:

$$p_{12} = \psi_1(u-1) - p_{11}\psi_1\left(u-1+\frac{1}{N}\right)$$

Substituindo esse resultado na equação (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} \psi_1(u) - p_{11}\psi_1\left(u+\tfrac{1}{N}\right) = \ & p_{12}p_{21}\psi_1\left(u-1+\tfrac{1}{N}\right) + p_{12}p_{22} + \\ & + p_{22}\left(\psi_1(u-1) - p_{11}\psi_1\left(u-1+\tfrac{1}{N}\right) - p_{12}\right) \\ = \ & p_{22}\psi_1(u-1) + \psi_1\left(u-1+\tfrac{1}{N}\right)\left[p_{12}p_{21} - p_{22}p_{11}\right] + p_{12}p_{22} - p_{12}p_{22} \end{aligned}$$

Logo,

$$\psi_1(u) - p_{11}\psi_1\left(u+\frac{1}{N}\right) = p_{22}\psi_1(u-1) + \psi_1\left(u-1+\frac{1}{N}\right)\left[p_{12}p_{21} - p_{22}p_{11}\right] \tag{3.8}$$

Como $p_{11} = 1 - p_{12}$ e $p_{22} = 1 - p_{21}$, logo

$$(p_{12}p_{21} - p_{22}p_{11}) = [p_{12}p_{21} - (1 - p_{21})(1 - p_{12})] = (p_{21} - p_{11}).$$

Subtituindo a identidade acima em (3.8) temos

$$\psi_1(u) - p_{11}\psi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) = p_{22}\psi_1(u-1) + (p_{21} - p_{11})\psi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) \tag{3.9}$$

3^0 Caso:

Para $u \geq 2$, substituindo u por $u - 1$ na equação (3.2) obtemos:

$$\psi_2(u-1) = p_{21}\psi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + p_{22}\psi_2(u-2).$$

substituindo a expressão $\psi_2(u-1)$ acima na equação (3.1) obtemos

$$\psi_1(u) - p_{11}\psi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) = p_{12}\left(p_{21}\psi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + p_{22}\psi_2(u-2)\right)$$

$$\psi_1(u) - p_{11}\psi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) = p_{12}p_{21}\psi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + p_{12}p_{22}\psi_2(u-2) \tag{3.10}$$

Substituindo u por $u - 1$ em (3.1)

$$\psi_1(u-1) = p_{11}\psi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + p_{12}\psi_2(u-2) \Rightarrow p_{12}\psi_2(u-2) = \psi_1(u-1) - p_{11}\psi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right)$$

substituindo a expressão $p_{12}\psi_2(u-2)$ obtida na equação anterior em (3.10) obtemos

$$\begin{aligned}\psi_1(u) - p_{11}\psi_1\left(u + \tfrac{1}{N}\right) &= p_{12}p_{21}\psi_1\left(u - 1 + \tfrac{1}{N}\right) + p_{22}\left(\psi_1(u-1) - p_{11}\psi_1\left(u - 1 + \tfrac{1}{N}\right)\right) \\ &= p_{22}\psi_1(u-1) + (p_{12}p_{21} - p_{22}p_{11})\psi_1\left(u - 1 + \tfrac{1}{N}\right)\end{aligned}$$

$$\psi_1(u) - p_{11}\psi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) = p_{22}\psi_1(u-1) + (p_{21} - p_{11})\psi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) \tag{3.11}$$

Definindo a função Φ como $\Phi(k) = \psi_1\left(\frac{k}{N}\right)$ e lembrando que para $u = \frac{k}{N} \Rightarrow u + \frac{1}{N} = \frac{k}{N} + \frac{1}{N} = \frac{k+1}{N}$ segue que:

$$\Phi(k) = \psi_1(u) \quad e \quad \Phi(k+1) = \psi_1(u + \frac{1}{N})$$

Assim, no caso em que $0 \leq u < 1$, ou seja, quando $0 \leq k < N$ temos de (3.5) que:

$$\psi_1(u) - p_{11}\psi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) = p_{12} \Leftrightarrow \Phi(k) - p_{11}\Phi(k+1) = p_{12}. \tag{3.12}$$

No caso em que $u \geq 1$, (casos 2 e 3 discutidos acima) as equações (3.9) e (3.11) tem a mesma expressão. Assim para $k \geq N$ e usando o fato que

$$\Phi(k-N) = \psi_1(u-1) \text{ e } \Phi(k-N+1) = \psi_1(u-1+\frac{1}{N})$$

podemos escrever 3.11 em termos da função Φ pela seguinte expressão

$$\Phi(k) - p_{11}\Phi(k+1) = p_{22}\Phi(k-N) + (p_{21} - p_{11})\Phi(k-N+1). \tag{3.13}$$

Das equações (3.12) e (3.13), temos

$$\Phi(k) - p_{11}\Phi(k+1) = \begin{cases} p_{12} & \text{, se } 0 \leq k < N \\ p_{22}\Phi(k-N) + (p_{21} - p_{11})\Phi(k-N+1) & \text{, se } k \geq N \end{cases} \tag{3.14}$$

Note que dado valor de $\Phi(0)$, os $N+1$ primeiros valores $\Phi(0), \Phi(1), \cdots, \Phi(N)$ podem ser calculados pela expressão acima:

$$\Phi(0) - p_{11}\Phi(1) = p_{12} \Rightarrow \Phi(1) = \frac{\Phi(0) + p_{11} - 1}{p_{11}}$$

$$\Phi(1) - p_{11}\Phi(2) = p_{12} \Rightarrow \Phi(2) = \frac{\Phi(1) - p_{12}}{p_{11}} = \frac{\Phi(0) + p_{11}^2 - 1}{p_{11}^2}$$

$$\Phi(2) - p_{11}\Phi(3) = p_{12} \Rightarrow \Phi(3) = \frac{\Phi(2) - p_{12}}{p_{11}} = \frac{\Phi(0) + p_{11}^3 - 1}{p_{11}^3}$$

seguindo com $k = 3, 4, 5, \cdots N-1$ obtemos a fórmula geral

$$\Phi(k) = \frac{\Phi(0) + p_{11}^k - 1}{p_{11}^k}, \; para \; 0 \leq k \leq N \tag{3.15}$$

Os demais valores de $\Phi(k)$ para $k > N$ podem ser calculados a partir da recorrência

$$\Phi(k) - p_{11}\Phi(k+1) = p_{22}\Phi(k-N) + (p_{21} - p_{11})\Phi(k-N+1)$$

Note que com os valores de $\Phi(k)$ e com as equações

$$\psi_1(u) = p_{11}\psi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) + p_{12}\psi_2(u-1)$$

$$\psi_2(u) = p_{21}\psi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) + p_{22}\psi_2(u-1)$$

podemos obter os valores de $\psi_1(u)$ e de $\psi_2(u)$.

3.4 Os valores iniciais para a probabilidade de ruína

Usando $k-1$ no lugar de k em (3.14) temos

$$\Phi(k-1) - p_{11}\Phi(k) = \begin{cases} p_{12} & , \text{ para } 0 < k < N \\ p_{22}\Phi(k-1-N) + (p_{21}-p_{11})\Phi(k-N) & , \text{ para } k \geq N \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\Phi(k-1) = \begin{cases} p_{11}\Phi(k) + p_{12} & , \text{ para } 0 < k < N \\ p_{11}\Phi(k) + p_{22}\Phi(k-1-N) + (p_{21}-p_{11})\Phi(k-N) & , \text{ para } k \geq N \end{cases} \tag{3.16}$$

Para $n > N$ temos

$$\begin{aligned} \Phi(n) - \Phi(0) = & \sum_{k=1}^{n}(\Phi(k) - \Phi(k-1)) = \sum_{k=1}^{N}(\Phi(k) - \Phi(k-1)) + \sum_{k=N+1}^{n}(\Phi(k) - \Phi(k-1)) \\ = & \sum_{k=1}^{N}(\Phi(k) - p_{11}\Phi(k) - p_{12}) + \\ & + \sum_{k=N+1}^{n}\left[\Phi(k) - p_{11}\Phi(k) - p_{22}\Phi(k-1-N) - (p_{21}-p_{11})\Phi(k-N)\right]. \end{aligned}$$

Na última passagem apenas substituímos os valores encontrados em (3.16). Note que o primeiro somatório é igual a

$$\sum_{k=1}^{N}[\Phi(k) - p_{11}\Phi(k) - p_{12}] = (1-p_{11})\sum_{k=1}^{N}\Phi(k) - Np_{12}$$

e o segundo

$$\sum_{k=N+1}^{n}\left[\Phi(k) - p_{11}\Phi(k) - p_{22}\Phi(k-1-N) - (p_{21}-p_{11})\Phi(k-N)\right] =$$

$$\sum_{k=N+1}^{n}[\Phi(k) - p_{11}\Phi(k)] - \sum_{k=N+1}^{n}[p_{22}\Phi(k-1-N) + (p_{21}-p_{11})\Phi(k-N)] =$$

$$(1-p_{11})\sum_{k=N+1}^{n}\Phi(k) - \sum_{k=N+1}^{n}[p_{22}\Phi(k-1-N) + (p_{21}-p_{11})\Phi(k-N)]$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\Phi(n) - \Phi(0) = \;& (1-p_{11})\sum_{k=1}^{N}\Phi(k) - Np_{12} + (1-p_{11})\sum_{k=N+1}^{n}\Phi(k) + \\
& - \sum_{k=N+1}^{n}\left[p_{22}\Phi(k-1-N) + (p_{21}-p_{11})\Phi(k-N)\right] \\
= \;& (1-p_{11})\sum_{k=1}^{n}\Phi(k) - Np_{12} - \sum_{k=N+1}^{n}\left(p_{22}\Phi(k-1-N) + (p_{21}-p_{11})\Phi(k-N)\right)
\end{aligned}
$$

Substituindo $(p_{21}-p_{11})$ por $(p_{21}-1+1-p_{11})$ na expressão acima e distribuindo, obtemos

$$
\begin{aligned}
\Phi(n) - \Phi(0) = \;& (1-p_{11})\sum_{k=1}^{n}\Phi(k) - Np_{12} + \\
& - \left[\sum_{k=N+1}^{n}\left(p_{22}\Phi(k-1-N) + (p_{21}-1)\Phi(k-N)\right)\right] - (1-p_{11})\sum_{k=N+1}^{n}\Phi(k-N) \\
= \;& (1-p_{11})\left[\sum_{k=1}^{n}\Phi(k) - \sum_{k=N+1}^{n}\Phi(k-N)\right] - Np_{12} + \\
& - \sum_{k=N+1}^{n}\left[p_{22}\Phi(k-1-N) + (p_{21}-1)\Phi(k-N)\right]
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variáveis $j = k-N$ e usando o fato que $(p_{21}-1) = -p_{22}$ reescrevemos a equação acima como

$$
\begin{aligned}
\Phi(n) - \Phi(0) = \;& (1-p_{11})\left(\sum_{k=1}^{n}\Phi(k) - \sum_{k=1}^{n-N}\Phi(k)\right) - Np_{12} + \\
& - (-p_{22})\sum_{j=1}^{n-N}\left(\Phi(j) - \Phi(j-1)\right) \qquad (3.17) \\
= \;& (1-p_{11})\sum_{k=n-N+1}^{n}\Phi(k) - Np_{12} + p_{22}\left(\Phi(n-N) - \Phi(0)\right)
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que

$$
\lim_{k\to\infty}\Phi(k) = 0 \qquad (3.18)
$$

De fato, como $u = \frac{k}{N}$ e $\Phi_1(k) = \psi_1\left(\frac{k}{N}\right) = P\left(\tau_1\left(\frac{k}{N}\right) < \infty\right)$ segue que

$$P\left(\tau_1\left(\frac{k}{N}\right) < \infty\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\tau_1\left(\frac{k}{N}\right) = n\right)$$

logo

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\tau_1\left(\frac{k}{N}\right) < \infty\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\tau_1\left(\frac{k}{N}\right) = n\right)$$

Aqui podemos usar o teorema da convergência dominada para séries. Para isso vamos definir $b_n = P\left(\tau_1\left(\frac{1}{N}\right) = n\right)$ e $a_{kn} = P\left(\tau_1\left(\frac{k}{N}\right) = n\right)$ como $k \geq 1$ segue que $P\left(\tau_1\left(\frac{k}{N}\right) = n\right) \leq P\left(\tau_1\left(\frac{1}{N}\right) = n\right)$ e portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left(\tau_1\left(\frac{k}{N}\right) = n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\tau_1\left(\frac{1}{N}\right) = n\right)$$

como $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\tau_1\left(\frac{1}{N}\right) = n\right) < \infty$, segue pelo teorema da convergência dominada para séries que

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\tau_1\left(\frac{k}{N}\right) < \infty\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{k\to\infty} P\left(\tau_1\left(\frac{k}{N}\right) = n\right) \tag{3.19}$$

Mas

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\tau_1\left(\frac{k}{N}\right) = n\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(U_1\left(\frac{k}{N}\right) \geq 0, \cdots, U_{n-1}\left(\frac{k}{N}\right) \geq 0, U_n(u) < 0\right)$$

como

$$U_1\left(\frac{k}{N}\right) \cap U_2\left(\frac{k}{N}\right) \cap \cdots \cap U_n\left(\frac{k}{N}\right) \subset U_n\left(\frac{k}{N}\right)$$

segue que

$$P\left(U_1\left(\frac{k}{N}\right) \geq 0, \cdots, U_{n-1}\left(\frac{k}{N}\right) \geq 0, U_n\left(\frac{k}{N}\right) < 0\right) \leq P\left(U_n\left(\frac{k}{N}\right) < 0\right)$$

passando o limite com $k \to \infty$,

$$\lim_{k\to\infty} P\left(U_1\left(\frac{k}{N}\right) \geq 0, \cdots, U_{n-1}\left(\frac{k}{N}\right) \geq 0, U_n\left(\frac{k}{N}\right) < 0\right) \leq \lim_{k\to\infty} P\left(U_n\left(\frac{k}{N}\right) < 0\right)$$

mas ocorre que

$$\lim_{k\to\infty} P\left(U_n\left(\frac{k}{N}\right) < 0\right) = 0$$

pois definindo

$$A_k = \left\{w \in \Omega; \frac{k}{N} + nc - (1+c). \sum_{j=1}^{n} X_j(w) < 0\right\}$$

temos que $A_{k+1} \subset A_k$, visto que se $w \in A_{k+1}$ implica que

$$\underbrace{\frac{k+1}{N}}_{=u} + nc - (1+c).\sum_{j=1}^{n} X_j\,(w) < 0$$

ou seja,

$$\frac{k}{N} + \frac{1}{N} + nc - (1+c).\sum_{j=1}^{n} X_j\,(w) < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{k}{N} + nc - (1+c).\sum_{j=1}^{n} X_j\,(w) < -\frac{1}{N}$$

como $N > 0$ segue que $-\frac{1}{N} < 0$ e portanto

$$\frac{k}{N} + nc - (1+c).\sum_{j=1}^{n} X_j\,(w) < 0$$

ou seja, $w \in A_k$. Como tomamos $w \in A_{k+1}$ qualquer segue que $A_{k+1} \subset A_k$.Dessa forma temos uma cadeia decrescente de eventos

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots A_k \supset A_{k+1}$$

Nestas condições sabemos que

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Agora mostraremos que $\bigcap A_k = \phi$. De fato, seja $w \in A_k$ mostraremos que existe um $s \in \mathbb{N}$ para o qual $w \notin A_s$ e portanto w não pode pertencer a $\bigcap A_k$ e assim concluiremos que $\bigcap A_k = \phi$.

De fato,

$$w \in A_k \Rightarrow \frac{k}{N} + nc - (1+c).\sum_{j=1}^{n} X_j\,(w) < 0$$

fixado o n, a quantidade $nc - (1+c).\sum_{j=1}^{n} X_j\,(w)$ é limitada e portanto existe $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{s}{N} + nc - (1+c).\sum_{j=1}^{n} X_j\,(w) > 0$$

e portanto para esse s temos que $w \notin A_s$, ou seja, acabamos de mostrar existe um s para o qual o w não pertence ao A_s e portanto $\bigcap A_k = \phi$.

Agora podemos concluir que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} P\left(\tau_1\left(\tfrac{k}{N}\right)=n\right) = & \lim_{k\to\infty} P\left(U_1\left(\tfrac{k}{N}\right)\geq 0,\cdots,U_{n-1}\left(\tfrac{k}{N}\right)\geq 0, U_n\left(\tfrac{k}{N}\right)<0\right)\\ \leq & \lim_{k\to\infty} P\left(U_n\left(\tfrac{k}{N}\right)<0\right)=0\end{aligned}$$

Segue da (3.19) obtemos a (3.18). Usando (3.18) na (3.17), obtemos obtemos:

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(n)-\Phi(0)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[(1-p_{11})\sum_{k=n-N+1}^{n}\Phi(k)\right]-Np_{12}+p_{22}\left(\Phi(n-N)-\Phi(0)\right)\right\}\Rightarrow$$

$$0-\Phi(0)=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left[(1-p_{11})\sum_{k=n-N+1}^{n}\Phi(k)\right]}_{=0}-Np_{12}+p_{22}\left(0-\Phi(0)\right)\Rightarrow$$

$$-\Phi(0)=-Np_{12}-p_{22}\Phi(0)\Rightarrow$$

$$Np_{12}=\Phi(0)-p_{22}\Phi(0)\Rightarrow$$

$$Np_{12}=\Phi(0)\underbrace{(1-p_{22})}_{=p_{21}}\Rightarrow$$

$$\psi_1(0)=\Phi(0)=N\frac{p_{12}}{p_{21}}$$

Para determinar $\psi_2(0)$ fazemos $u=0$ na 3.2

$$\psi_2(0)=p_{21}\psi_1\left(\frac{1}{N}\right)+p_{22}$$

Pela definição de $\Phi(k)=\psi_1(\frac{k}{N})$ e por (3.20) temos que a expressão acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\psi_2(0)= & \; p_{21}\Phi(1)+p_{22}\\ = & \; p_{21}\left(\tfrac{\Phi(0)+p_{11}-1}{p_{11}}\right)+p_{22}\\ = & \; p_{21}\left(\tfrac{N\frac{p_{12}}{p_{21}}+p_{11}-1}{p_{11}}\right)+p_{22}\\ = & \; \tfrac{Np_{12}+p_{21}p_{11}-p_{21}+p_{11}p_{22}}{p_{11}}\\ = & \; \tfrac{p_{11}(p_{21}+p_{22})+Np_{12}-p_{21}}{p_{11}}.\end{aligned}$$

Como $p_{21}+p_{22}=1, p_{11}-1=-p_{12}$ e $1-p_{21}=p_{22}$ temos

$$\psi_2(0)=\frac{Np_{12}+p_{11}-p_{21}}{p_{11}}=\frac{Np_{12}+p_{11}-1+1-p_{21}}{p_{11}}=\frac{Np_{12}-p_{12}+p_{22}}{p_{11}}$$

$$\psi_2(0) = \frac{p_{12}(N-1) + p_{22}}{p_{11}}$$

Exemplo: Para $p_{12} = 0.01$,$p_{21} = 0.2$, prêmio é igual a $\frac{1}{10}$ e $N = 10$, obtemos $\psi_1(0) = 0.5$ e $\psi_2(0) = 0.9$. Os valores de $\psi_i(u)$ para outros valores de u estão representados na tabela abaixo:

u	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$	u	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$
0.0	0.5000	0.8990	1.0	0.4471	0.8077
0.1	0.4950	0.8980	2.0	0.3998	0.7253
0.2	0.4898	0.8969	3.0	0.3576	0.6510
0.3	0.4847	0.8959	4.0	0.3197	0.5841
0.4	0.4779	0.8948	5.0	0.2859	0.5238
0.5	0.4642	0.8938	6.0	0.2557	0.4697
0.6	0.4689	0.8927	7.0	0.2286	0.4209
0.7	0.4636	0.8916	8.0	0.2044	0.3772
0.8	0.4581	0.8905	9.0	0.1828	0.3379
0.9	0.4527	0.8894	10.0	0.1634	0.3027

Tabela 3.1: Simulação para os valores de $\psi_1(u)$ e $\psi_2(u)$

Os resultados apresentados na tabela acima foram obtidos a partir de simulações realizadas com o auxílio do sofware MATLAB. Note que: a medida que o valor do capital inicial u vai crescendo, as probabilidades de ruína vão assumindo valores cada vez menores, o que mostra que o modelo proposto se comporta de modo razoável, uma vez que com um capital inicial maior, naturalmente é menos provável que a empresa entre em ruína num tempo finito. Além disso, podemos perceber que, para um mesmo capital inicial u o valor da probabilidade de ruína $\psi_2(u)$ é sempre maior do que o valor da probabilidade de ruína $\psi_1(u)$, o que também é razoável do ponto de vista prático, visto que a posição 2 do processo é aquela que a empresa inicialmente deve pagar uma indenização e portanto sendo mais provável de entrar em ruína do que se recebesse inicialmente um novo cliente. Assim, Os resultados exibidos na tabela mostram a razoabilidade do modelo proposto.

3.5 Uma fórmula recursiva para a esperança do tempo de ruína

Nesta seção vamos obter as fórmulas recursivas para as esperanças do tempo de ruína. Para isso estamos supondo que a probabilidade da ruína acontecer em um tempo finito é igual a um independentemente do estado em que a cadeia comece, ou seja, $P(\tau_1(u) < \infty) = P(\tau_2(u) < \infty) = 1, \forall u > 0$, pois caso contrário teríamos que a esperança seria infinita e nada teríamos a fazer. Pela definição de esperança e por (3.4) temos que

$$\xi_i(u) = E\left(\tau_i(u)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n.P\left(\tau_i(u) = n\right).$$

Como todos os termos das séries são positivos podemos separar a série acima em duas outras como a seguir

$$\begin{aligned}
\xi_i(u) = & \sum_{n=0}^{\infty} n.\left[P\left(\tau_1(u+c)=n-1\right).p_{i1}+P\left(\tau_2(u-1)=n-1\right).p_{i2}\right] \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} n.P\left(\tau_1(u+c)=n-1\right).p_{i1}+\sum_{n=1}^{\infty} n.P\left(\tau_2(u-1)=n-1\right).p_{i2} \\
= & \sum_{n=1}^{\infty}(n-1+1).P\left(\tau_1(u+c)=n-1\right).p_{i1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1+1).P\left(\tau_2(u-1)=n-1\right).p_{i2} \\
= & \; p_{i1}.\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n-1).P\left(\tau_1(u+c)=n-1\right)+P\left(\tau_1(u+c)=n-1\right)\right]+ \\
& +p_{i2}.\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n-1).P\left(\tau_2(u-1)=n-1\right)+P\left(\tau_2(u-1)=n-1\right)\right] \\
= & \; p_{i1}\xi_1\left(u+c\right)+p_{i1}\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\tau_1\left(u+c\right)=n-1\right)+p_{i2}\xi_2\left(u-1\right)+p_{i2}\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\tau_2\left(u\right)=n-1\right) \\
= & \; p_{i1}\xi_1\left(u+c\right)+p_{i2}\xi_2\left(u-1\right)+ \\
& +p_{i1}\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\tau_1\left(u+c\right)=n-1\right)+p_{i2}\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\tau_2\left(u\right)=n-1\right) \\
= & \; p_{i1}\xi_1\left(u+c\right)+p_{i2}\xi_2\left(u-1\right)+ \\
& +p_{i1}P\left(\tau_1\left(u+c\right)<\infty\right)+p_{i2}P\left(\tau_2\left(u\right)<\infty\right) \\
= & \; p_{i1}\xi_1\left(u+c\right)+p_{i2}\xi_2\left(u-1\right)+p_{i1}+p_{i2}
\end{aligned}$$

como $p_{i1}+p_{i2}=1$ segue finalmente que

$$\xi_i(u)=p_{i1}\xi_1\left(u+c\right)+p_{i2}\xi_2\left(u-1\right)+1$$

e portanto para $u \geq 0$, $\xi_1(u)$ e $\xi_2(u)$ são conectadas da seguinte maneira:

$$\xi_1(u)=p_{11}\xi_1\left(u+\frac{1}{N}\right)+p_{12}\xi_2(u-1)+1 \tag{3.20}$$

$$\xi_2(u)=p_{21}\xi_1\left(u+\frac{1}{N}\right)+p_{22}\xi_2(u-1)+1 \tag{3.21}$$

Agora como fizemos com a probabilidade de ruína vamos analisar as recorrências acima para diferentes valores de u.

Quando $0 \leq u < 1 \Rightarrow \xi_2(u-1) = 0$ e reescrevemos (3.21) da seguinte maneira

$$\xi_1(u) - p_{11}\xi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) = 1. \tag{3.22}$$

Quando $1 \leq u < 2$ segue que $0 < u - 1 < 1$ e podemos aplicar a equação (3.22) em $u - 1$ obtendo

$$\xi_1(u-1) - p_{11}\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) = 1.$$

Sabemos que (3.20) e (3.21) valem para todo $u \geq 0$, assim substituindo u por $u - 1$ em (3.21) e usando que $\xi_2(u-2) = 0$ já que $u - 2 < 0$, temos

$$\xi_2(u-1) = p_{21}\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + 1.$$

Substituindo o valor acima de $\xi_2(u-1)$ em (3.20) temos

$$\xi_1(u) - p_{11}\xi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) = p_{12}\left(p_{21}\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + 1\right) + 1.$$

Usando (3.22) podemos então escrever

$$\xi_1(u) - p_{11}\xi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) = p_{12}\left(p_{21}\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + 1\right) + 1 + p_{22}\left(1 - 1\right)$$

como

$$\xi_1(u) - p_{11}\xi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) =$$

$$p_{12}\left(p_{21}\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + 1\right) + 1 + p_{22}\left(\xi_1(u-1) - p_{11}\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) - 1\right) =$$

$$p_{22}\xi_1\left(u-1\right) + \left(p_{12}p_{21} - p_{22}p_{11}\right)\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + p_{12} + 1 - p_{22}$$

$$= p_{22}\xi_1(u-1) + (p_{21} - p_{11})\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + p_{12} + p_{21}$$

na última passagem usamos que $p_{12}p_{21} - p_{22}p_{11} = p_{21} - p_{11}$ e $1 - p_{22} = p_{21}$ em 3.20

Quando $u \geq 2$. Mais uma vez substituindo u por $u - 1$ em (3.21) e substituindo o valor de $\xi_2(u-1)$ na equação (3.20) obtemos

$$\xi_1(u) - p_{11}\xi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) = p_{12}\left(p_{21}\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + p_{22}\xi_2(u-2) + 1\right) + 1$$

$$\xi_1(u) - p_{11}\xi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) = p_{12}p_{21}\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + p_{12}p_{22}\xi_2\left(u-2\right) + p_{12} + 1. \tag{3.23}$$

De (3.20) obtemos

$$p_{12}\xi_2(u-1) = \xi_1(u) - p_{11}\xi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) - 1 \Rightarrow$$

Substituindo u por $u-1$ temos

$$p_{12}\xi_2(u-2) = \xi_1(u-1) - p_{11}\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) - 1$$

substituindo este resultado em (3.23) obtemos,

$$\xi_1(u) - p_{11}\xi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) =$$

$$p_{12}p_{21}\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + p_{22}\left(\xi_1(u-1) - p_{11}\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) - 1\right) + p_{12} + 1 =$$

$$p_{22}\xi_1(u-1) + (p_{12}p_{21} - p_{22}p_{11})\,\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + p_{12} + 1 - p_{22}$$

$$\xi_1(u) - p_{11}\xi_1\left(u + \frac{1}{N}\right) = p_{22}\xi_1(u-1) + (p_{21} - p_{11})\xi_1\left(u - 1 + \frac{1}{N}\right) + p_{12} + p_{21}.$$

Na última passagem usamos os seguintes fatos: $p_{12}p_{21} - p_{22}p_{11} = p_{21} - p_{11}$ e $1 - p_{22} = p_{21}$.

Escrevendo $\Phi(k) = \xi_1\left(\frac{k}{N}\right)$ temos que:

$$\Phi(k) - p_{11}\Phi(k+1) = \begin{cases} 1 & \text{, se } 0 \leq k < N \\ p_{22}\Phi(k-N) + (p_{21} - p_{11})\Phi(k-N+1) + p_{12} + p_{21} & \text{, se } k \geq N \end{cases} \quad (3.24)$$

Dado $\Phi(0)$ os $N+1$ valores iniciais $\Phi(0), \Phi(1), \cdots, \Phi(N)$ podem ser calculados da seguinte forma:

$$k = 0 \Rightarrow \Phi(0) - p_{11}\Phi(1) = 1 \Rightarrow \Phi(1) = \frac{\Phi(0) - 1}{p_{11}}$$

$$k = 1 \Rightarrow \Phi(1) - p_{11}\Phi(2) = 1 \Rightarrow \Phi(2) = \frac{\Phi(1) - 1}{p_{11}} \Rightarrow \Phi(2) = \frac{\frac{\Phi(0)-1}{p_{11}} - 1}{p_{11}}$$

Note que

$$\Phi(2) = \frac{\frac{\Phi(0)-1}{p_{11}} - 1}{p_{11}} = \frac{\Phi(0) - (1 + p_{11})}{p_{11}^2}$$

Lembrando que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

segue que

$$1 + p_{11} = \frac{1 - p_{11}^2}{1 - p_{11}} = \frac{1 - p_{11}^2}{p_{12}}$$

assim,

$$\Phi(2) = \frac{\Phi(0) - (1+p_{11})}{p_{11}^2} = \frac{\Phi(0) - \frac{1-p_{11}^2}{p_{12}}}{p_{11}^2} = \frac{\Phi(0) + \frac{p_{11}^2-1}{p_{12}}}{p_{11}^2}$$

fazendo $k = 2$,

$$\Phi(2) - p_{11}\Phi(3) = 1 \Rightarrow \Phi(3) = \frac{\Phi(2) - 1}{p_{11}} = \frac{\frac{\Phi(0)-(1+p_{11})}{p_{11}^2} - 1}{p_{11}}$$

ou seja,

$$\Phi(3) = \frac{\Phi(0) - (1 + p_{11} + p_{11}^2)}{p_{11}^3}$$

lembrando que

$$1 + p_{11} + p_{11}^2 = \frac{1 - p_{11}^3}{1 - p_{11}} = \frac{1 - p_{11}^3}{p_{12}}$$

segue que

$$\Phi(3) = \frac{\Phi(0) - (1 + p_{11} + p_{11}^2)}{p_{11}^3} = \frac{\Phi(0) - \frac{1-p_{11}^3}{p_{12}}}{p_{11}^3} = \frac{\Phi(0) + \frac{p_{11}^3-1}{p_{12}}}{p_{11}^3}$$

prosseguindo com este raciocínio podemos concluir que

$$0 \leq k \leq N \Rightarrow \Phi(k) = \frac{\Phi(0) + \frac{p_{11}^k-1}{p_{12}}}{p_{11}^k} \tag{3.25}$$

pois note que você utiliza o valor de u para calcular o valor $u + \frac{1}{N}$. Já os valores de $\phi(k)$ para todo $k > N$ podem ser calculados pela recorrência

$$\Phi(k) - p_{11}\Phi(k+1) = p_{22}\Phi(k-N) + (p_{21} - p_{11})\Phi(k-N+1) + p_{12} + p_{21}. \tag{3.26}$$

Note que aqui usamos o valor de $\Phi(N)$ encontrado para calcular os outros valores de $\Phi(k)$ para $k > N$.

3.6 Os valores iniciais para a esperança do tempo de ruína

Para $j \in \mathbb{N}$ definamos a seqüência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ da seguinte forma: todos os termos serão zero exceto $f_0 = p_{11}, f_N = p_{21} - p_{11}$ e $f_{N+1} = p_{22}$.

Vamos mostrar que $\Phi(k)$ pode ser escrito como:

$$\Phi(k) = \sum_{j=0}^{k+1} f_j \Phi(k+1-j) + 1 - \delta_{k,N-1} f_N \Phi(0) + I_{\{k \geq N\}} f_N \tag{3.27}$$

onde $\delta_{k,N-1}$ é o delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$), $I_{\{k\geq N\}}$ é a função indicadora e $k \in \mathbb{N}$.

Utilizaremos (3.24) para mostrar a validade da expressão (3.27).

De (3.22) que é válida quando $0 \leq u < 1$, ou equivalentemente, $0 \leq k < N$, usamos o valor em k para determinar o valor em $k+1$, ou seja,

$$p_{11}\Phi(k+1) = \Phi(k) - 1$$

assim o valor de

$$p_{11}\Phi(N) = p_{11}\Phi(N-1+1) = \Phi(N-1) - 1$$

Assim podemos reescrever (3.24) da seguinte maneira

$$\Phi(k) = \begin{cases} p_{11}\Phi(k+1) + 1 & , \text{ se } 0 \leq k < N \\ p_{11}\Phi(k+1) + p_{22}\Phi(k-N) + (p_{21} - p_{11})\Phi(k-N+1) + p_{12} + p_{21} & , \text{ se } k \geq N \end{cases} \tag{3.28}$$

Mostremos que (3.27) é verdadeira qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.

Para $0 \leq k < N-1$ temos que o lado direito de (3.27) é escrito como

$$f_0\Phi(k+1) + f_1\Phi(k) + ... + f_k\Phi(1) + f_{k+1}\Phi(0) + 1 = p_{11}\Phi(k+1) + 1.$$

Pela (3.28) isso vale $\Phi(k)$. Portanto a igualdade em (3.27) se verifica para $0 \leq k < N-1$.

Para $k = N-1$, temos que o lado direito de (3.27) é escrito como

$$f_0\Phi(N) + f_1\Phi(N-1) + ... + f_{N-1}\Phi(1) + f_N\Phi(0) + 1 - f_N\Phi(0) = p_{11}\Phi(k+1) + 1.$$

Pela (3.28) isso vale $\Phi(N-1)$. Portanto a igualdade em (3.27) se verifica para $k = N-1$.
Para $k \geq N$ temos que o lado direito de (3.27) é escrito como

$$f_0\Phi(k+1) + f_1\Phi(k) + \cdots + f_N\Phi(K+1-N) + f_{N+1}\Phi(k-N) + ... + f_{k+1}\Phi(0) + 1 + f_N = p_{11}\Phi(k+1) + 1 =$$

$$= p_{11}\Phi(k+1) + (p_{21} - p_{11})\Phi(k+1-N) + p_{22}\Phi(k-N) + 1 + p_{21} - p_{11} =$$
$$p_{11}\Phi(k+1) + (p_{21} - p_{11})\Phi(k+1-N) + p_{22}\Phi(k-N) + p_{12} + p_{21}.$$

Por (3.28) isso vale $\Phi(k)$, para $k \geq N$. Vemos então que a identidade (3.27) é válida para todo $k = 0, 1, 2, ...$ Nosso objetivo agora é determinar os valores iniciais das esperanças do tempo de ruína. Para atingir esse objetivo precisaremos definir algumas funções auxiliares. Para $|s| < 1$ defina

$$J(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \Phi(k)$$

e

$$H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k f_k \tag{3.29}$$

De (3.27) e usando as definições de $\delta_{k,N-1}$ e $I_{k \geq N}$ podemos escrever

$$
\begin{aligned}
J(s) = & \sum_{k=0}^{\infty} s^k \Phi(k) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} s^k \left(\sum_{j=0}^{k+1} f_j \Phi(k+1-j) + 1 - \delta_{k,N-1} f_N \Phi(0) + I_{\{k \geq N\}} f_N \right) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} s^k \left(\sum_{j=0}^{k} f_j \Phi(k+1-j) + f_{k+1}\Phi(0) + 1 \right) - s^{N-1} f_N \Phi(0) + \sum_{k=N}^{\infty} s^k f_N
\end{aligned}
$$

assim,

$$
J(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{j=0}^{k} f_j \Phi(k+1-j) + \sum_{k=0}^{\infty} s^k f_{k+1} \Phi(0) + \sum_{k=0}^{\infty} s^k - s^{N-1} f_N \Phi(0) + f_N \sum_{k=N}^{\infty} s^k
$$

Como $|s| < 1$ temos $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{1}{1-s}$ e $\displaystyle\sum_{k=N}^{\infty} s^k = \frac{s^N}{1-s}$, logo a equação anterior pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
J(s) = & \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{j=0}^{k} f_j \Phi(k+1-j) + \sum_{k=0}^{\infty} s^k f_{k+1} \Phi(0) + \frac{1}{1-s} - s^{N-1} f_N \Phi(0) + \frac{s^N}{1-s} f_N \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{j=0}^{k} f_j \Phi(k+1-j) + \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} s^{k+1} f_{k+1} \Phi(0) - s^{N-1} f_N \Phi(0) + \frac{1 + s^N f_N}{1-s}
\end{aligned}
$$

adicionando e subtraindo $\frac{f_0}{s}\Phi(0)$ na expressão anterior

$$
\begin{aligned}
J(s) = & \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{j=0}^{k} f_j \Phi(k+1-j) + \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} s^{k+1} f_{k+1} \Phi(0) + \frac{f_0}{s}\Phi(0) - \frac{f_0}{s}\Phi(0) - s^{N-1} f_N \Phi(0) + \frac{1 + s^N f_N}{1-s} \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{j=0}^{k} f_j \Phi(k+1-j) + \frac{1}{s} \left(\sum_{k=0}^{\infty} s^k f_k \Phi(0) - f_0 \Phi(0) \right) - s^{N-1} f_N \Phi(0) + \frac{1 + s^N f_N}{1-s}
\end{aligned}
$$

Usando (3.29)a equação anterior se reescreve como

$$
J(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{j=0}^{k} f_j \Phi(k+1-j) + \Phi(0) \frac{H(s) - f_0}{s} - s^{N-1} f_N \Phi(0) + \frac{1 + s^N f_N}{1-s}. \tag{3.30}
$$

Vamos escrever o somatório $\sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{j=0}^{k} f_j \Phi(k+1-j)$ de uma outra maneira. Para tanto, observe que

$$J(s)=\sum_{k=0}^{\infty}s^k\Phi(k)=\Phi(0)+s\Phi(1)+s^2\Phi(2)+\cdots\Rightarrow J(s)-\Phi(0)=\sum_{k=1}^{\infty}s^k\Phi(k)=s\Phi(1)+s^2\Phi(2)+\cdots$$

e que

$$\frac{1}{s}H(s)=\frac{1}{s}\left(f_0+sf_1+s^2f_2+\cdots+s^kf_k+\cdots\right)=\frac{f_0}{s}+f_1+sf_2+\cdots+s^{k-1}f_k+\cdots$$

Assim,

$$\frac{1}{s}H(s)\left(J(s)-\Phi(0)\right)=\left(\frac{f_0}{s}+f_1+sf_2+s^2f_3\cdots+s^{k-1}f_k+\cdots\right)\left(s\Phi(1)+s^2\Phi(2)+\cdots\right)$$

O coeficiente de s^k no produto $\frac{1}{s}H(s)\left(J(s)-\Phi(0)\right)$ é

$$\frac{f_0}{s}s^{k+1}\Phi(k+1)+f_1s^k\Phi(k)+sf_2s^{k-1}\Phi(k-1)+\cdots s^{k-1}f_ks\Phi(1)=$$

$$s^k\left(f_0\Phi(k+1)+f_1\Phi(k)+f_2\Phi(k-1)+\cdots+f_k\Phi(1)\right)$$

Portanto,

$$\frac{1}{s}H(s)\left(J(s)-\Phi(0)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}s^k\sum_{j=0}^{k}f_j\Phi(k+1-j)$$

e (3.30) pode ser expressa por

$$J(s)=\frac{1}{s}H(s)\left(J(s)-\Phi(0)\right)+\Phi(0)\frac{H(s)-f_0}{s}-s^{N-1}f_N\Phi(0)+\frac{1+s^Nf_N}{1-s}$$

ou equivalentemente,

$$J(s)\left(1-\frac{1}{s}H(s)\right)=-\Phi(0)\left(\frac{f_0}{s}+s^{N-1}f_N\right)+\left(1+s^Nf_N\right)\frac{1}{1-s}\tag{3.31}$$

Com a última expressão acima é fácil perceber que se nós determinarmos um zero σ do polinômio $1-\frac{1}{s}H(s)$ segue que este mesmo número σ também será um zero para a expressão

$$-\Phi(0)\left(\frac{f_0}{s}+s^{N-1}f_N\right)+\left(1+s^Nf_N\right)\frac{1}{1-s}\tag{3.32}$$

Substituindo os valores de f_0, f_N e f_{N+1} definidos na equação (3.27) temos

$$1-\frac{1}{s}H(s)=\frac{1}{s}\left(s-p_{11}-\left(p_{21}-p_{11}\right)s^N-p_{22}s^{N+1}\right)$$

Supondo que $N>\frac{p_{21}}{p_{12}}$, note que: não importando se $(p_{21}-p_{11})$ é positivo, negativo ou zero. nós teremos duas mudanças de sinais na sequência dos coeficientes do polinômio $p(s)=-p_{11}+s-\left(p_{21}-p_{11}\right)s^N-p_{22}s^{N+1}$ o que implica pela regra dos sinais de DESCARTES que o polinônio $p(s)$ não tem nenhuma ou duas raízes positivas. Como $p(1)=0, p'(1)=p_{21}-Np_{12}<0$

e $p(0) = -p_{11} < 0$, ou seja, no ponto 0 a função é negativa, no ponto 1 vale zero mas pelo sinal da sua derivada a função está decrescendo na vizinhança do ponto 1 o que significa que a função está positiva antes do ponto 1, segue que o polinômio possui uma raiz σ menor que 1.É claro que quando necessário poderemos encontrar essa raiz por métodos numéricos. Como σ uma raiz do polinômio $1 - \frac{1}{s}H(s) = 1 - \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty} s_k f^k = -f_0 + s - f_N s^N - f_{N+1}s^{N+1}$ segue que

$$-f_0 + \sigma - f_N\sigma^N - f_{N+1}\sigma^{N+1} = 0 \tag{3.33}$$

e por (3.31), σ também é raiz de (3.32), ou seja,

$$-\Phi(0)\left(\frac{f_0}{\sigma} + \sigma^{N-1} f_N\right) + \left(1 + \sigma^N f_N\right)\frac{1}{1-\sigma} = 0.$$

Encontrando $\Phi(0)$ temos:

$$\Phi(0) = \frac{\sigma\left(1 + \sigma^N f_N\right)}{\left(f_0 + \sigma^N f_N\right)(1-\sigma)}. \tag{3.34}$$

De (3.33) temos

$$\sigma^N = \frac{\sigma - f_0}{f_N + f_{N+1}\sigma}$$

substituindo o valor acima no denominador da expressão (3.34) temos

$$\begin{aligned}
\Phi(0) = \quad & \frac{\sigma\left(1+\sigma^N f_N\right)}{(f_0+\sigma^N f_N)(1-\sigma)} = \frac{\sigma\left(1+\sigma^N f_N\right)}{\left[f_0 + \left(\frac{\sigma - f_0}{f_N + f_{N+1}\sigma}\right) f_N\right](1-\sigma)} \\
= \quad & \frac{\sigma\left(1+\sigma^N f_N\right)}{\left(\frac{f_0 f_N + f_0 f_{N+1}\sigma + \sigma f_N - f_0 f_N}{f_N + f_{N+1}\sigma}\right)(1-\sigma)} = \frac{\sigma\left(1+\sigma^N f_N\right)(f_N + f_{N+1}\sigma)}{(f_0 f_{N+1}\sigma + \sigma f_N)(1-\sigma)} \\
= \quad & \frac{\sigma\left(1+\sigma^N f_N\right)(f_N + f_{N+1}\sigma)}{\sigma(f_0 f_{N+1} + f_N)(1-\sigma)} = \frac{\left(1+\sigma^N f_N\right)(f_N + f_{N+1}\sigma)}{(f_0 f_{N+1} + f_N)(1-\sigma)}
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de f_0, f_N e f_{N+1} na equação acima obtemos

$$\Phi(0) = \frac{\left(1 + \sigma^N f_N\right)(f_N + f_{N+1}\sigma)}{p_{21}p_{12}(1-\sigma)}. \tag{3.35}$$

Vamos trabalhar um pouco o numerador da expressão (3.35)

$$\begin{aligned}
\left(1 + \sigma^N f_N\right)(f_N + f_{N+1}\sigma) &= f_N + f_{N+1}\sigma + f_N^2\sigma^N + f_N f_{N+1}\sigma^{N+1} \\
& f_N\left(1 + f_N\sigma^N + f_{N+1}\sigma^{N+1}\right) + f_{N+1}\sigma.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

De (3.33) segue que

$$f_N\sigma^N + f_{N+1}\sigma^{N+1} = \sigma - f_0$$

e podemos reescrever (3.36) como

$$f_N\left(1 + \underbrace{f_N\sigma^N + f_{N+1}\sigma^{N+1}}_{=\sigma - f_0}\right) + f_{N+1}\sigma = f_N(1 + \sigma - f_0) + f_{N+1}\sigma$$

e substituindo os valores de f_0, f_N e f_{N+1}, obtemos

$$\begin{aligned}
f_N\left(1+\sigma-f_0\right)+f_{N+1}\sigma = & \left(p_{21}-p_{11}\right)\left(\sigma+\underbrace{1-p_{11}}_{=p_{12}}\right)+p_{22}\sigma \\
= & \left(p_{21}-p_{11}\right)\left(\sigma+p_{12}\right)+p_{22}\sigma \\
= & \left(p_{21}-p_{11}\right)\sigma+\left(p_{21}-p_{11}\right)p_{12}+p_{22}\sigma \\
= & \left(p_{21}-p_{11}\right)\left(1-p_{11}\right)+\sigma\left(p_{21}-p_{11}+p_{22}\right) \\
= & \left(p_{21}-p_{11}\right)\left(1-p_{11}\right)+\sigma\left(p_{21}-p_{11}+1-p_{21}\right) \\
= & \left(p_{21}-p_{11}\right)\left(1-p_{11}\right)+\sigma\left(1-p_{11}\right) \\
= & \left(1-p_{11}\right)\left(p_{21}-p_{11}+\sigma\right) \\
= & p_{12}\left(p_{21}-p_{11}+\sigma\right).
\end{aligned}$$

Substituindo o valor acima em (3.35) obtemos

$$\Phi(0)=\frac{p_{21}-p_{11}+\sigma}{p_{21}\left(1-\sigma\right)}$$

Como $\Phi(k)=\xi_1\left(\frac{k}{N}\right)$ segue que $\xi_1(0)=\Phi(0)$. Fazendo $u=0$ em (3.20) temos

$$\xi_1\left(0\right)=p_{11}\xi_1\left(\frac{1}{N}\right)+p_{12}\xi_2(-1)+1$$

como $\xi_2(-1)=0$ segue que

$$\xi_1\left(0\right)=p_{11}\xi_1\left(\frac{1}{N}\right)+p_{12}\xi_2(-1)+1 \Rightarrow \xi_1\left(\frac{1}{N}\right)=\frac{\xi_1(0)-1}{p_{11}}.$$

Fazendo $u=0$ em (3.21)

$$\xi_2(0)=p_{21}\xi_1\left(\frac{1}{N}\right)+p_{22}\xi_2(-1)+1$$

como $\xi_2(-1) = 0$ e $\xi_1\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{\xi_1(0)-1}{p_{11}}$ segue que

$$\begin{aligned}
\xi_2(0) = \; & p_{21}\xi_1\left(\tfrac{1}{N}\right) + p_{22}\xi_2(-1) + 1 \\
= \; & p_{21}\tfrac{1}{p_{11}}\left(\xi_1(0) - 1\right) + 1 \\
= \; & \tfrac{p_{21}}{p_{11}}\left(\tfrac{p_{21}-p_{11}+\sigma}{p_{21}(1-\sigma)} - 1\right) + 1 \\
= \; & \tfrac{p_{21}}{p_{11}}\left[\tfrac{p_{21}-p_{11}+\sigma}{p_{21}(1-\sigma)}\right] - \tfrac{p_{21}}{p_{11}} + 1 \\
= \; & \tfrac{p_{21}-p_{11}+\sigma}{p_{11}(1-\sigma)} - \tfrac{p_{21}}{p_{11}} + \tfrac{p_{11}}{p_{11}} \\
= \; & \tfrac{p_{21}-p_{11}+\sigma}{p_{11}(1-\sigma)} - \left(\tfrac{p_{21}-p_{11}}{p_{11}}\right)\tfrac{(1-\sigma)}{(1-\sigma)} \\
= \; & \tfrac{1}{p_{11}(1-\sigma)}\left[p_{21} - p_{11} + \sigma - \left(p_{21} - p_{11}\right)(1-\sigma)\right] \\
= \; & \tfrac{1}{p_{11}(1-\sigma)}\left[\left(p_{21} - p_{11}\right)(1 - (1-\sigma)) + \sigma\right) \\
= \; & \tfrac{1}{p_{11}(1-\sigma)}\left[\left(p_{21} - p_{11}\right)\sigma + \sigma\right] \\
= \; & \tfrac{\sigma}{p_{11}(1-\sigma)}\left(p_{21} - p_{11} + 1\right) \\
= \; & \tfrac{\sigma(p_{12}+p_{21})}{p_{11}(1-\sigma)}
\end{aligned}$$

Exemplo: simulamos uma situação em que $p_{12} = 0,025$ e $p_{21} = 0,20$. Escolhendo, por exemplo $N = 10$ nós obtemos numericamente $\sigma = 0,994387...$, $\xi_1(0) = 195,9$ e $\xi_2(0) = 40,9$.Alguns valores de $\xi_i(u)$ para alguns valores de u estão exibidos na tabela abaixo:

u	$\xi_1(u)$	$\xi_2(u)$	u	$\xi_1(u)$	$\xi_2(u)$
0.0	195.5	40.9	1.0	240.2	82.6
0.1	199.4	41.7	2.0	285.1	124.9
0.2	203.5	42.5	3.0	329.9	167.8
0.3	207.7	43.4	4.0	374.8	211.0
0.4	212.0	44.3	5.0	419.8	254.6
0.5	216.4	45.2	6.0	464.7	298.5
0.6	221.0	46.1	7.0	509.6	342.6
0.7	225.6	47.1	8.0	554.6	386.9
0.8	230.4	48.0	9.0	599.6	431.3
0.9	235.2	49.0	10.0	644.5	475.8

Tabela 3.2: Simulação para os valores de $\xi_1(u)$ e $\xi_2(u)$

Os resultados apresentados na tabela acima foram obtidos a partir de simulações realizadas com o auxílio do sofware MATLAB. Note que a medida que o valor do capital inicial u vai crescendo as esperanças do tempo de ruína vão assumindo valores cada vez maiores, o que mostra que o modelo proposto se comporta de modo razoável, uma vez que com um capital inicial maior naturalmente demoraria mais tempo para que a empresa entre em ruína. Além disso, podemos perceber que, para um mesmo capital inicial u o valor da esperança do tempo de ruína $\xi_2(u)$ é sempre menor do que o valor da esperança do tempo de ruína $\xi_1(u)$, o que também é razoável do ponto de vista prático, visto que a posição 2 do processo é aquela que a empresa inicialmente deve pagar uma indenização e portanto é esperado que ela possa entrar em ruína num tempo menor do que se recebesse inicialmente um novo cliente. Assim, os resultados exibidos na tabela mostram a razoabilidade do modelo proposto para a esperança do tempo de ruína.

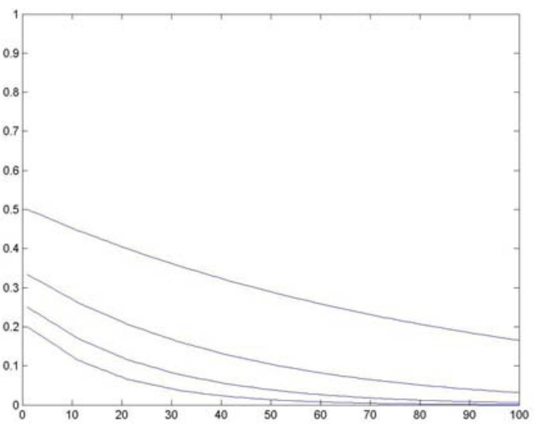
Capítulo 4

Conclusões

Neste capítulo vamos usar a modelagem proposta nos capítulos anteriores para o nosso problema para apresentar algumas simulações realizadas com o auxílio do Matlab e a partir da análise dos dos resultados obtidos vamos averiguar até que ponto o modelo proposto se comporta de modo razoável.

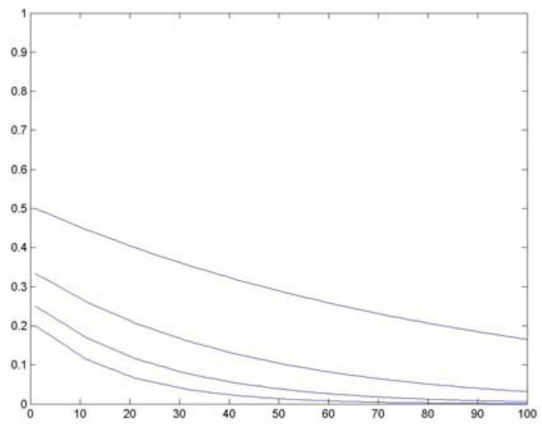
Inicialmente trabalharemos com algumas simulações para os valores das probabilidades de ruína quando alteramos as probabilidades de transição p_{12} e p_{21} da cadeia de Markov que modela o nosso problema.Inicialmente vamos considerar uma situação em que seja mais provável ,no intervalo $(t_n, t_{n+1}]$, que a seguradora receba um novo cliente do que tenha que pagar uma indenização.Para isso temos que impor $p_{12} < p_{21}$.

O diagrama abaixo mostra para $N = 10$ para 100 instantes distintos o comportamento das probabilidades de ruína $\Psi_1(u)$ quando fixamos a probabilidade $p_{12} = 0.01$ e fizemos a probabilidade p_{21} assumir os valores $0.20, 0.30, 0.40$ e 0.50.No diagrama $p_{21} = 0.20$ é a curva mais acima , logo abaixo $p_{21} = 0.30$ até que $p_{21} = 0.50$ é a mais abaixo.



As simulações acima sugerem que, fixada a probabilidade p_{12} (que na prática se espera ser bem menor que a p_{21}, visto que normalmente é mais frequente a venda de um a apólice do que o pedido de uma indenização à seguradora), a probalilidade de ruína $\Psi_1(u)$ vai decrescendo com o tempo e com o aumento da probabilidade p_{12}, o que se mostra bastante razoável com a intuição, pois quando fazemos p_{21} cada vez maior estamos supondo que é cada vez mais provável que ao chegar um cliente este deseje a compra de uma nova apólice, o que faz com que seja cada vez menos provável que a empresa entre no vermelho. Não trataremos os casos em que as probabilidades de transição p_{12} e p_{21} são próximas ou no caso em que $p_{12} > p_{21}$, visto que não refletem a realidade.

De modo análogo ao que fizemos com a probabilidade de ruína $\Psi_1(u)$, usamos o modelo descrito no nosso trabalho para simular alguns valores da probabilidade de ruína $\Psi_2(u)$ para os mesmos valores das probabilidades transição p_{12} e p_{21} citados logo acima a a partir daí obtivemos as seguintes curvas

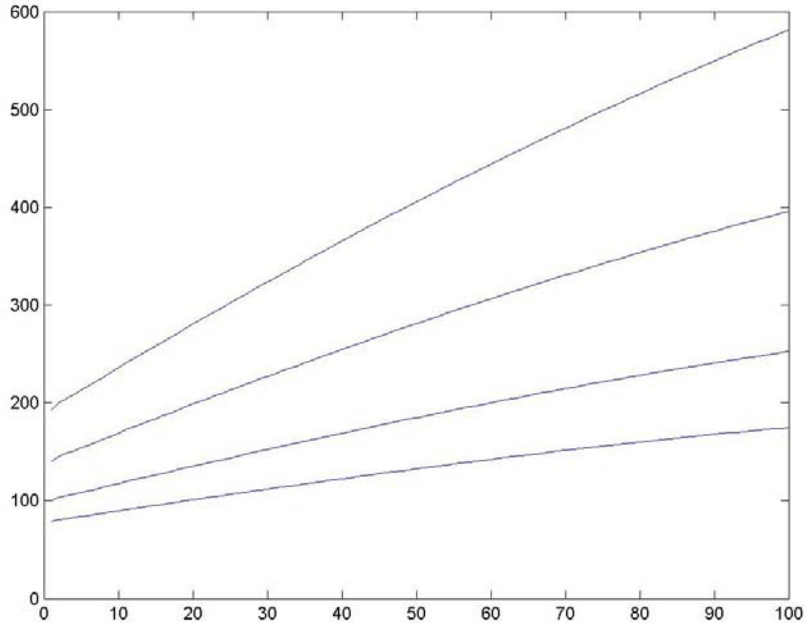


Os resultados das simulações para $\Psi_2(u)$ sugerem como no caso do probabilidade de ruína $\Psi_1(u)$, que fixada a probabilidade p_{12}, o comportamento da $\Psi_2(u)$ é completamente análogo ao que já comentamos acima a menos do que, fixadas das probabilidades de transição, $\Psi_2(u) > \Psi_1(u)$, o que concorda com a intuição de que se no instante inicial a empresa paga uma indenização é bem mais provável que entre em ruína num tempo finito de que se naquele instante inicial ela tivesse vendiso uma nova apólice.

Para finalizar as nossas conclusões analisemos algumas simulações para a esperança do tempo de ruína $\xi_(u)$. Como no caso das probabilidades de ruína vamos fixar um valor para a probabilidade de transição p_{12} e vamos efeturar simulações para diferentes valores da probabilidade de transição p_{21} e a partir dai discutir a razoabilidade do nosso modelo com respeito a esperança do tempo de ruína.

Mais uma vez o diagrama abaixo mostra para $N = 10$ para 100 instantes distintos o comportamento da da esperança do tempo ruína $\xi_1(u)$ quando fixamos a probabilidade $p_{12} = 0.025$ e fizemos a probabilidade p_{21} assumir os valores $0.20, 0.18, 0.15$ e 0.12. No diagrama $p_{21} = 0.12$ é a curva mais abaixo, logo acimo $p_{21} = 0.15$ até que $p_{21} = 0.50$ é a mais acima. (Note que escolhemos valores tais que $N > \frac{p_{21}}{p_{12}}$, pois como vimos o nosso modelo só funciona sob essa hipótese!)

Analisando o comportamento das curvas acima vemos que o nosso modelo reflete o que achamos intuitivo, ou seja, fixando a probabilidade de transição p_{12} e fazendo simulações para valores cada vez menores da probabilidade de transição p_{21} a experança do tempo de ruína deve ser cada vez menor, visto que quanto menor for p_{21} menos provável é a chegada de um



novo cliente para a aquisição de uma nova apólice. diante disso é natural que diminuindo p_{21} a esperança do tempo de ruína seja cada vez menor como sugerem as curvas acima. Resultados análogos podem ser compilados para a esperança $\xi_2(u)$, a menos do fato que ,fixadas das probabilidades de transição, $\xi_2(u) < \xi_1(u)$ como sugere a já conhecida tabela da página 41.

Para finalizar gostaríamos de registrar que apesar do trabalhoso tratamento matemático que tivemos na leitura e principalmente na demonstração de cada fórmula que surge no texto e nos esclarecimentos de todas os detalhes que julgamos necessários no nosso trabalho , este é um modelo que não é o melhor reflexo da realidade. Por outro lado, as suposições feitas no inicío do artigo WAGNER, Christian. A note on ruin a two states Markov model,[33], permitiram a obtenção de fórmulas fechadas para as probabilidades de ruína e para as esperanças do tempo de ruína, o que só foi conseguido até hoje em casos muito particulares. O modelo clássico de Lundberg citado no início do nosso texto supõe como já mencionamos anteriormente que os tempos de chegada apresentam uma distribuição exponencial o que, com certeza, reflete de modo mais aproximado a realidade.

Bibliografia

[1] ANDERSEN,S.E., On the collective theory of risk in the case of contagion between the claims. Transactiores XVth International Congress of Actuaries, New York, II, (1957). p.p 219-229:

[2] SANTOS,Antonio L. S. Estimativas para a Probabilidade de Ruína em um Modelo de Risco com Taxa de Juros Markoviana.Paraíba, Dissertação de (Mestrado), Depto. de Matemática, UFCG, 2007. [3] ASMUSSEM, S. Ruin Probabilities. World Scientific, Singagore, 2000:

[4] ATHREYA, Krishna B. Measure Theory and Probability Theory. 1:ed. Springer Verlag,2003:

[5] BAUERLE, Nicole. Some results about the expected ruin time in Markov-modulated risc models. Insurance: Mathematics and Economics 18 (1996). p.p 119-127: [6] BREZEZNIAK, Zdzistaw. Basic Stochastic processes. 1:ed. Springer Verlag,2007:

[7] CAI, J. Discrete time risk models under rates of interest. Prob. Eng. Inf. Sci. 16, (2002). p.p 309-324:

[8] CAI, J. Probabilities with dependents rates of interest. J. Appl. Prob. 39, (2002). p.p 312-323:

[9] CAPIINSKI, Marek. Measu, Integral and Probability. 2:ed. Springer Verlag,2005:

[10] CASELLA, George. Statistical Inference, 2:ed. Duxbury - Thomson Learning, 2002:

[11] CHUNG, Kai Lai. A Course in Probability Theory. 2:ed. [S.l]: Academic Press, 1974:

[12] CHUNG, Kai Lai. Elementary Probability Theory. 4:ed. Springer Verlag,2003:

[13] DYNKIN, E. B. Theory Markov Process, 1:ed. Dover , 2006:

[14] FELLER, W. An Introduction to Probability Theory and Applications II. 2:ed,. Willey, New York, 1971:

[15] GNEDENKO,Boris Vladimirovich. A Teoria da Probabilidade. 1:ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna,2008:

[16] HAIGH, John. Probability Models. 1:ed. Springer Verlag,2005:

[17] IOSIFESCU, Marius. Finite Markov Process and Their Applications. 1:ed. Dover, 2007.

[18] ISAACSON, Dean L. Markov Chains Theory and Applications. 1:ed. Robert E. Krieger Publishing Company, INC Malabar, Flórida, 1985: [19] JAMES, Barry R. Probabilidade: Um

curso intermediário. 3: ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004:

[21] MAGALHÃES, M. Nascimento. Probabilidade e Variáveis aleatórias. São Paulo: IME-USP, 2004:

[22] MALINOVSKII,V.K., Non-Poissonian Claim's arrivals and Claculation of the probability of ruin. Insurance: Mathematics and Economics 22, (1998). p.p 123-138:

[23] MERSEVE, Bruce E., Fundamentals concepts of Algebra. Dover publications, 1982:

[24] MEYER,Paul L. Probabilidade e aplicações à Estatística. 1:ed. Rio de Janeiro: LTC, 1975:

[25] ROSSI, S. M. Stochastic Processes. New York: John Wiley and Sons, 1983:

[26] SILVA, Jackelya Araújo. A teoria da ruína aplicada em um modelo de emresa financeira com risco de crédito, Dissertação de (Mestrado), PPGMAE , UFRN, 2008:

[27] TAKÁCS, L., On Risk Reserve Processes. Scand. Actuarial J.,III, (1970). p.p 64-75:

[28] TANG,Q.H. e TSITSIASHVILI, G. Sh. Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a descrete-time model with heaby-tailed insurance and financial risks. Stochastic Process. Appl. 108, (2003). p.p 299-325:

[29] THORIN, O., Some Remarks of the Ruin Problem in Case the Epochs of Claims Form a Renewal Process . Scand. Actuarial J.,III, (1970). p.p 29-50:

[30] THORIN, O., Further Remarks of the Ruin Problem in Case the Epochs of Claims Form a Renewal Process . Scand. Actuarial J.,IV, (1971). p.p 121-142:

[31] THORIN, O., An Outline of a Generalization-Started by E. Sparre Andersen- of the Classical Ruin Theory . Austin Bulletin,VI, (1971). p.p 108-115: [32] VON Bahr, B., Ruin Probability Expressed in Terms of Ladder Height Distributions. Scand. Actuarial J., (1974). p.p 190-204:

[33] WAGNER, Christian. A note on ruin in a two states Markov model. Astin Bulletin, vol 32, n°2, 2001, p.p 349-358:

[34] WAGNER, Christian. Time in Red in a two state Markov model. Insurance: Mathamatics and Economics 31 (2002). p.p 365-372:

[35] YANG, H. Non exponencial bounds for ruin probability with interest effect included. Scand. Actuarial J. 99, (1999). p.p 66-79:

[36] YANG,H. e ZHANG, L. Martingale method for ruin probability in an autoregressive model with constant interest rate. Prob. Eng. Inf. Sci. 17, (2003). p.p 183-198: