



Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística

Felipe Rodrigues da Silva

Estimação e Previsão no Processo INARCH(2)

Natal - RN
Fevereiro de 2016

Felipe Rodrigues da Silva

Estimação e Previsão no Processo INARCH(2)

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Probabilidade e Estatística

Orientadora:

Prof^a. Dr^a. Luz Milena Zea Fernández

Natal, Fevereiro de 2016

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Silva, Felipe Rodrigues da.

Estimação e previsão no processo INARCH(2) / Felipe Rodrigues da Silva. - Natal, 2016.

x, 91f. : il.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Luz Milena Zea Fernández.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística.

1. Séries temporais de valores inteiros – Dissertação. 2. Previsão – Dissertação. 3. Processos INARCH – Dissertação. 4. Simulação de Monte Carlo – Dissertação. 5. Sobredispersão – Dissertação. I. Zea Fernández, Luz Milena. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET

CDU: 519.246.8

Felipe Rodrigues da Silva

Estimação e Previsão no Processo INARCH(2)

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Probabilidade e Estatística

Aprovado em: / /

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Luz Milena Zea Fernández
Departamento de Estatística - UFRN
Orientador(a)

Prof. Dr. Marcelo Bourguignon Pereira
Departamento de Estatística - UFRN
Examinador Interno

Prof. Dr. Klaus Leite Pinto Vasconcellos
Departamento de Estatística - UFPE
Examinador Externo

Agradecimentos

Agradeço a Deus, ser supremo e criador de todas as coisas, por ter me sustentado e por ser minha força.

Agradeço a minha família, em especial minha mãe, que sempre me incentivou a concluir o curso.

Agradeço a minha orientadora, Prof^a. Dr^a. Luz Milena Zea Fernández, por ter aceitado me orientar, por toda paciência, dedicação e importantes conselhos que foram fundamentais para este trabalho.

Agradeço aos professores do departamento de Estatística da Universidade Federal do Piauí que foram fundamentais na minha formação acadêmica, em especial a Prof^a. Dr^a Valmária Rocha da Silva Ferraz por todo incentivo e instruções no início do mestrado.

Agradeço aos professores do departamento de Estatística da Universidade Federal do Rio Grande Norte por todos os ensinamentos e por toda disponibilidade durante estes dois anos.

Agradeço aos amigos do mestrado, em especial ao Jhonnata, Issac, Evandro e Laís, que foram fundamentais nestes dois anos, por todo o companheirismo nas disciplinas.

Agradeço aos amigos de Teresina que foram muito importantes nas férias.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço aos amigos e irmãos da Igreja Batista Shekinah por serem minha família em Natal.

Agradeço aos amigos e irmãos da Igreja Batista Nova Jerusalém por toda torcida e oração.

Agradeço a todos que torceram e contribuíram para realização deste trabalho.

“ Ouça conselhos e aceite instruções, e acabará sendo sábio.”

Provérbios 19.20

Resumo

Nas últimas décadas o estudo de séries temporais de valores inteiros tem ganho notoriedade devido a sua ampla aplicabilidade, por exemplo, modelar o número de acidentes com automóveis em uma determinada rodovia, ou o número de pessoas infectadas por um vírus. Um dos grandes interesses desta área de estudo está em fazer previsões; por este motivo é de grande importância propor metodologias para fazer previsões futuras, as quais devem, dada a natureza dos dados, apresentar valores inteiros não negativos. Neste trabalho, concentramo-nos em estudar e propor previsões um, dois e h passos à frente para os processos autorregressivos de segunda ordem condicionalmente heteroscedásticos de valores inteiros, *integer-valued second-order autoregressive conditional heteroskedasticity processes* [INARCH(2)], e estudar algumas propriedades teóricas deste modelo, como o r -ésimo momento marginal e a distribuição assintótica dos estimadores de mínimos quadrados condicionais referentes ao processo INARCH(2). Além disso, verificamos, através de ensaios de Monte Carlo, o comportamento dos estimadores dos parâmetros do processo INARCH(2), obtidos através de três métodos de estimação, Yule-Walker, mínimos quadrados condicionais e máxima verossimilhança condicional, em termos de erro quadrático médio, erro absoluto médio e viés. Apresentamos algumas propostas de previsão para o processo INARCH(2) e comparamos as previsões propostas via simulações de Monte Carlo. Como aplicação da teoria apresentada, modelamos dados referentes ao número de nascidos vivos do sexo masculino de mães residentes na cidade de Riachuelo no estado do Rio Grande do Norte.

Palavras-chave: Previsão. Processos INARCH. Séries Temporais de valores inteiros. Simulação de Monte Carlo. Sobredispersão.

Abstract

In the last decades the study of integer-valued time series has gained notoriety due to its broad applicability (modeling the number of car accidents in a given highway, or the number of people infected by a virus are two examples). One of the main interests of this area of study is to make forecasts, and for this reason it is very important to propose methods to make such forecasts, which consist of nonnegative integer values, due to the discrete nature of the data. In this work, we focus on the study and proposal of forecasts one, two and h steps ahead for integer-valued second-order autoregressive conditional heteroskedasticity processes [INARCH (2)], and in determining some theoretical properties of this model, such as the ordinary moments of its marginal distribution and the asymptotic distribution of its conditional least squares estimators. In addition, we study, via Monte Carlo simulation, the behavior of the estimators for the parameters of INARCH(2) processes obtained using three different methods (Yule-Walker, conditional least squares, and conditional maximum likelihood), in terms of mean squared error, mean absolute error and bias. We present some forecast proposals for INARCH(2) processes, which are compared again via Monte Carlo simulation. As an application of this proposed theory, we model a dataset related to the number of live male births of mothers living at Riachuelo city, in the state of Rio Grande do Norte, Brazil.

Keywords: Forecast. INARCH processes. Monte Carlo simulation. Overdispersion. Time Series integer values.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivo da dissertação	3
1.2	Contribuições do trabalho	3
1.3	Descrição dos capítulos	4
2	Processos autorregressivos condicionalmente heteroscedásticos de valores inteiros	5
2.1	O processo INARCH(p)	5
2.1.1	Métodos de estimação para o processo INARCH(p)	11
2.2	O modelo INARCH(1)	12
2.2.1	Estimadores para os parâmetros do processo INARCH(1)	13
2.3	O modelo INARCH(2)	15
2.3.1	Estimadores para os parâmetros do processo INARCH(2)	20
3	Estudo por simulação de Monte Carlo dos estimadores do processo INARCH(2)	26
3.1	Resultados simulados	27
3.2	Aplicação	39
4	Previsão no processo INARCH(2)	42
4.1	Previsão 1 passo à frente	44
4.2	Previsão 2 passos à frente	45
4.3	Previsão h passos à frente	48
4.4	Intervalo de Predição um passo à frente	52
5	Estudo por simulação de Monte Carlo das previsões no processo INARCH(2)	54
5.1	Resultados simulados 1 passo à frente	55
5.2	Resultados simulados 2 passos à frente	59

5.3	Resultados simulados h passos à frente	63
5.4	Aplicação	73
6	Considerações finais	78
	Referências Bibliográficas	79
A	Obtenção dos estimadores do processo INARCH(2)	83
A.1	Obtenção dos estimadores do processo INARCH(2) pelo método de YW	83
A.2	Obtenção dos estimadores do processo INARCH(2) pelo método de MQC	85
B	Demonstrações	89
B.1	Demonstração da variância incondicional do modelo INARCH(2)	89
B.2	Elementos da Matriz W	90

Lista de Figuras

2.1	Série temporal simulada de um processo INARCH(2) para $\alpha_1 = 0.35$, $\alpha_2 = 0.55$, $\lambda = 1$ e $T = 100$	19
2.2	Função de autocorrelação amostral e função de autocorrelação parcial de um processo INARCH(2) para $\alpha_1 = 0.35$, $\alpha_2 = 0.55$, $\lambda = 1$ e $T = 100$	19
2.3	Série temporal simulada de um processo INARCH(2) para $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.35$, $\lambda = 1$ e $T = 100$	20
2.4	Função de autocorrelação amostral e função de autocorrelação parcial de um processo INARCH(2) para $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.35$, $\lambda = 1$ e $T = 100$	20
3.1	Série de contagem do número de meninos nascidos de mães residentes na cidade de Riachuelo-RN de 1994 até 2013.	39
3.2	Função de autocorrelação e autocorrelação parcial da série.	40
3.3	Função de autocorrelação dos resíduos do processo INARCH(2).	41
5.1	Intervalo de predição um passo à frente com 95% de confiança do número de meninos nascidos vivos de mães residentes na cidade de Riachuelo-RN de 1994 até 2013.	77

Lista de Tabelas

3.1	EQM dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 1$	28
3.2	EQM dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 3$	29
3.3	EQM dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 5$	30
3.4	EAM dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 1$	32
3.5	EAM dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 3$	33
3.6	EAM dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 5$	34
3.7	Viés dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 1$	36
3.8	Viés dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 3$	37
3.9	Viés dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 5$	38
3.10	Estatísticas descritivas da série	39

3.11	Parâmetros estimados dos Modelos INAR(2) e INARCH(2).	40
5.1	EQM e EAM das previsões 1 passo à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 100$. . .	56
5.2	EQM e EAM das previsões 1 passo à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 200$. . .	57
5.3	EQM e EAM das previsões 1 passo à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 300$. . .	58
5.4	EQM e EAM das previsões 2 passo à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 100$. . .	60
5.5	EQM e EAM das previsões 2 passo à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 200$. . .	61
5.6	EQM e EAM das previsões 2 passo à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 300$. . .	62
5.7	EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 100$ e $\lambda = 1$	64
5.8	EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 200$ e $\lambda = 1$	65
5.9	EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 300$ e $\lambda = 1$	66
5.10	EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 100$ e $\lambda = 3$	67
5.11	EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 200$ e $\lambda = 3$	68
5.12	EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 300$ e $\lambda = 3$	69
5.13	EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 100$ e $\lambda = 5$	70

5.14	EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 200$ e $\lambda = 5$	71
5.15	EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 300$ e $\lambda = 5$	72
5.16	Dados referentes ao numero de meninos nascidos vivos na cidade de Riachuelo-RN.	74
5.17	Valores das previsões mensais 1 passo à frente de Julho de 2011 a Dezembro de 2013.	75
5.18	Valores das previsões mensais 2 passos à frente de Julho de 2011 a Dezembro de 2013.	76

Capítulo 1

Introdução

Em várias situações cotidianas é interessante entender processos que ocorram ao longo do tempo. Uma grande gama de áreas do conhecimento gera informações que variam ao longo do tempo e por conseguinte necessitam de técnicas para compreender e modelar tais fenômenos. Nesse tipo de dados é comum existir uma estrutura de correlação entre as observações, o que limita o número de técnicas disponíveis para modelar esses eventos. Diversos métodos estatísticos existentes auxiliam na tomada de decisões, contudo boa parte dos métodos supõem independência entre as observações. Nesse sentido, a análise de séries temporais se faz de extrema importância no contexto atual.

Um aglomerado de técnicas para analisar dados que apresentam correlação ao longo do tempo está disponível na literatura, essas metodologias são conhecidas como análise de séries temporais. Os modelos utilizados para representar séries temporais são realizações de um processo estocástico, em que T é o domínio do tempo e X_t é uma variável aleatória, tal que $t \in T$. Nessas condições, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias que se supõe definidas no mesmo espaço de probabilidade. Em geral, o domínio do tempo pode ser discreto ou contínuo. Uma série temporal é classificada como discreta se o conjunto de valores que T assume é enumerável finito ou infinito. Uma série temporal é dita ser contínua se os valores que T assume pertencem a um intervalo ou uma coleção de intervalos. Neste trabalho consideramos $T = \mathbb{Z}$, ou seja, a série temporal é discreta. A classificação da série temporal como discreta ou contínua é relacionada ao domínio do tempo ao qual ela é indexada e não aos valores observados da série temporal. Por exemplo, se uma série temporal registra a temperatura diária de uma cidade, temos que esta série temporal é discreta mas os valores observados são contínuos, pois os valores que a temperatura admite estão em um intervalo.

Existe uma ampla classe de modelos úteis para descrever séries temporais geradas

por variáveis aleatórias que seguem distribuições contínuas, dentre esses podemos destacar os modelos ARIMA propostos por Box e Jenkins (1976) e o modelo GARCH(p, q) proposto por Bollerslev (1986). Entretanto, em diversas situações é necessário modelar, por exemplo, o número de sucessos de um determinado fenômeno, ou seja, é razoável assumir que a variável aleatória associada ao fenômeno estudado possa ter uma distribuição discreta. Para solucionar essa necessidade foram propostos modelos específicos que são chamados de processos de valores inteiros ou processos de contagem. Um dos primeiros trabalhos com essa abordagem pode ser visto em Al-Osh e Alzaid (1987), que utilizaram o operador *thinning* proposto por Steutel e Harn (1979) para obter um modelo que gere valores inteiros.

Exemplos de séries temporais de contagem podem ser encontrados em diferentes áreas, por exemplo, na área de prevenção de acidentes Johansson (1996) utilizou séries temporais de contagem para avaliar o efeito da redução da velocidade máxima em estradas na diminuição do número de acidentes; na área de controle estatístico de processos Weiß (2007) descreveu um determinado número de situações em que os processos de contagem monitorados são correlacionados e na área de saúde pode ser útil modelar o número de infectados por uma determinada doença ao longo do tempo, por exemplo, Ferland, Latour e Oraichi (2006) modelaram o número de casos de infecções por campylobacteriosis.

Em algumas situações é necessário modelar dados de contagem com sobredispersão, ou seja, variância maior que a média. Weiß (2008), Weiß (2009) e Freeland (1998) estudaram uma série de contagem que apresenta sobredispersão. A série conta o número de trabalhadores da indústria de manufatura pesada da cidade de Richmond, capital do estado norte-americano da Virgínia, que entre janeiro de 1987 e dezembro de 1994 recorreram aos benefícios de perda salarial de curto prazo devido a ferimentos relacionados à queimaduras.

Neste trabalho iremos focar nos processos autorregressivos condicionalmente heteroscedásticos de valores inteiros [INARCH(p)], que são úteis para modelar séries de contagem com sobredispersão. Os processos INARCH(p) são um caso particular dos modelos INGARCH(p, q) propostos por Ferland, Latour e Oraichi (2006) e que anteriormente foram definidos por Heinen (2003) como modelos Poisson condicional autorregressivos *autoregressive conditional Poisson* (ACP).

1.1 Objetivo da dissertação

O estudo do processo INARCH é interessante pois a distribuição condicional deste processo segue uma distribuição conhecida, que é uma distribuição Poisson; desta forma fazer previsão neste processo é um trabalho menos custoso, bem como gerar valores de uma série temporal que segue um processo INARCH a partir da distribuição condicional. Além disso, a estrutura de autocorrelação existente nestes processos é análoga à dos processos autorregressivos usuais, o que facilita a identificação da ordem do modelo. Algumas propriedades destes processos foram estudadas, entretanto poucos estudos foram feitos na previsão dos modelos INARCH.

Zea (2013) apresentou propriedades, propôs algumas previsões e estudou o comportamento das previsões propostas no processo INARCH(1); assim, o objetivo deste trabalho é estudar o processo INARCH(2), principalmente no que se refere a previsões, pois na literatura existente ainda não encontramos propostas de previsões para este processo. Portanto, pretendemos propor previsões no processo INARCH(2) e estudar o comportamento das previsões propostas através de simulações de Monte Carlo considerando as estimativas obtidas pelas abordagens de Yule-Walker, mínimos quadrados condicionais e máxima verossimilhança condicional, para se possível apresentar uma melhor previsão em termos de erro quadrático médio e erro absoluto médio. Além disso, estamos interessados em investigar através de simulações de Monte Carlo o desempenho dos estimadores dos parâmetros deste modelo, considerando os seguintes métodos de estimação: Yule-Walker, mínimos quadrados condicionais e máxima verossimilhança condicional, para identificar numericamente os melhores estimadores em termos de erro quadrático médio, erro absoluto médio e viés. Uma contribuição teórica importante que pretendemos encontrar é a distribuição assintótica dos estimadores de mínimos quadrados condicionais deste processo.

1.2 Contribuições do trabalho

As principais contribuições deste trabalho podem ser resumidas no seguinte: apresentação da expressão analítica dos estimadores dos parâmetros α_1 , α_2 e λ do modelo INARCH(2) pelos métodos de mínimos quadrados condicionais e Yule-Walker; apresentação do r -ésimo momento da distribuição marginal do processo INARCH(2); apresentação da distribuição assintótica dos estimadores de mínimos quadrados condicionais do processo INARCH(2); estudo e comparação dos estimadores dos parâmetros do processo INARCH(2) considerando diferentes métodos de estimação por meio de simu-

lação de Monte Carlo; proposição de uma forma alternativa de representar os processos INARCH(p); apresentação de metodologias que permitam fazer previsões no processo INARCH(2), entre elas uma forma recursiva denotada por $X_{T(h)}^{(map)}$; comparação das previsões propostas via estudo de simulação de Monte Carlo.

1.3 Descrição dos capítulos

No Capítulo 2, mostramos uma breve introdução aos processos autorregressivos condicionalmente heteroscedásticos de valores inteiros e seus principais conceitos. Além disso, apresentamos algumas propriedades do processo INARCH(2), entre elas o r -ésimo momento da distribuição marginal do processo. Ainda neste capítulo, apresentamos a distribuição assintótica dos estimadores de mínimos quadrados condicionais do processo INARCH(2) e as expressões analíticas dos estimadores de mínimos quadrados condicionais e de Yule-Walker. No Capítulo 3, apresentamos um estudo de simulação de Monte Carlo que permite comparar o desempenho dos estimadores de Yule-Walker, mínimos quadrados condicionais e máxima verossimilhança condicional para os parâmetros do processo INARCH(2) juntamente com uma aplicação a dados reais. No Capítulo 4, apresentamos diferentes metodologias para fazer previsões no processo INARCH(2) e a construção do intervalo de predição um passo à frente. No Capítulo 5, fazemos um estudo via simulação de Monte Carlo para comparar as previsões propostas e aplicamos a teoria proposta ao conjunto de dados apresentado no Capítulo 3. As considerações finais são apresentadas no Capítulo 6. Algumas demonstrações dos resultados obtidos para os estimadores de Yule-Walker e mínimos quadrados condicionais do processo INARCH(2) encontram-se no Apêndice A e guardamos para o Apêndice B a demonstração da variância incondicional do processo INARCH(2) e os valores esperados contidos nos elementos da matriz W . Como observação ressaltamos que neste trabalho iremos utilizar o ponto e não a vírgula para separar a parte inteira da parte decimal.

Capítulo 2

Processos autorregressivos condicionalmente heteroscedásticos de valores inteiros

Neste capítulo, apresentamos a definição e as principais propriedades e métodos de estimação no processo $\text{INARCH}(p)$, que é de grande utilidade para modelar dados com sobredispersão. Os processos particulares $\text{INARCH}(1)$ e $\text{INARCH}(2)$ correspondentes a $p = 1$ e $p = 2$, respectivamente, também são apresentados juntamente com suas principais propriedades e métodos de estimação dos parâmetros. Além disso, apresentamos uma definição de resíduo para o modelo $\text{INARCH}(2)$, que nos permite ver se o modelo ajustado é adequado.

2.1 O processo $\text{INARCH}(p)$

Nesta seção é apresentado o processo autorregressivo condicionalmente heterocedástico de valores inteiros de ordem p , assim como suas principais propriedades e alguns métodos de estimação.

O processo $\text{INARCH}(p)$ é obtido como um caso particular de um processo mais geral chamado processo $\text{INGARCH}(p, q)$ que definiremos a seguir. O processo $\text{INGARCH}(p, q)$, com $p \geq 1$ e $q \geq 0$, p, q inteiros, foi definido por Ferland, Latour e Oraichi (2006) como o processo de valores inteiros análogo ao processo autorregressivo com heteroscedasticidade condicional generalizado $[\text{GARCH}(p, q)]$.

Definição 2.1.1. *Um processo discreto de valores inteiros não-negativos, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, em que $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $X_t \in \mathbb{N}_0$, e $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ é chamado um*

processo INGARCH(p, q), desde que:

$$\begin{cases} X_t | F_{t-1} \sim Po(M_t), \\ M_t = \lambda + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \delta_j M_{t-j}, \end{cases}$$

em que F_{t-1} é toda a informação do processo até o tempo $t-1$: X_{t-1}, X_{t-2}, \dots , $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, $\delta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q$ e a notação $Z|Y \sim Po(\gamma)$ significa que a variável aleatória (v.a.) Z dado a informação da v.a. Y segue uma distribuição de Poisson com parâmetro γ .

Considerando $q = 0$ obtemos o modelo INGARCH($p, 0$); Weiß (2009) se refere a este processo como o processo INARCH(p). Então o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ de valores inteiros não negativos segue um processo INARCH(p) se satisfaz

$$\begin{cases} X_t | F_{t-1} \sim Po(M_t), \\ M_t = \lambda + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Uma maneira alternativa de representar o processo INARCH(p), baseado no operador *thinning* Poisson e na fórmula recursiva apresentada por Zea (2013) para $p = 1$, será apresentada neste trabalho. A seguir apontamos a definição do operador *thinning* Poisson juntamente com suas propriedades.

Definição 2.1.2. *Seja X uma v.a. de valor inteiro não-negativo e α um número real tal que $\alpha \geq 0$. O operador thinning Poisson, denotado por “ $*$ ”, é definido como*

$$\alpha * X = \sum_{i=1}^X N_i, \quad (2.2)$$

em que $\{N_i\}_{i=1}^X$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com distribuição Poisson de parâmetro α , e independentes de X . A sequência de v.a. $\{N_i\}_{i=1}^X$ é chamada a série de contagem de $\alpha * X$.

Como consequência desta definição temos que

$$\alpha * X | X \sim Po(\alpha X). \quad (2.3)$$

As propriedades do operador *thinning* Poisson são dadas pelo seguinte lema.

Lema 2.1.1. *Sejam $\{X_i\}_{i=1}^m$ uma sequência de v.a. identicamente distribuídas de valores inteiros, seja $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ uma sequência de constantes reais não-negativas e suponha*

que as séries de contagem de $\alpha_i * X_i$, $i = 1, \dots, m$, são mutuamente independentes, identicamente distribuídas de acordo com uma $Po(\alpha_i)$, e independentes dos X_i . Então,

- i) $0 * X_1 = 0$,
- ii) $\alpha_1 * (X_1 + X_2) = \alpha_1 * X_1 + \alpha_1 * X_2$ se X_1 e X_2 são independentes,
- iii) $E[\alpha_1 * X_1] = \alpha_1 E[X_1]$,
- iv) $Var[\alpha_1 * X_1] = \alpha^2 Var[X_1] + \alpha E[X_1]$,
- v) $E[\alpha_1 * X_1 | X_1] = \alpha_1 X_1$,
- vi) $Var[\alpha_1 * X_1 | X_1] = \alpha_1 X_1$,
- vii) $Cov(\alpha_1 * X_1, \alpha_2 * X_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X_1, X_2)$,
- viii) $E[(\alpha_1 * X_1)^2] = \alpha_1 E[X_1] + \alpha_1^2 E[X_1^2]$,
- ix) $E[(\alpha_1 * X_1)^r] = \sum_{k=1}^r S(r, k) \alpha_1^k E[X_1^k]$, em que $S(r, k) = 1/k! \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^r$ é o número de Stirling de segunda espécie que conta o número de maneiras de particionar um conjunto de r objetos em k subconjuntos não vazios,
- x) $E[(\alpha_1 * X_1) X_2] = \alpha_1 E[X_1 X_2]$,
- xi) $E[(\alpha_1 * X_1)^2 X_2] = \alpha_1 E[X_1 X_2] + \alpha_1^2 E[X_1^2 X_2]$,
- xii) $E[(\alpha_1 * X_1)^r X_2] = \sum_{k=1}^r S(r, k) \alpha_1^k E[X_1^k X_2]$,
- xiii) $E[(\alpha_1 * X_1) \prod_{i=2}^m X_i] = \alpha_1 E[\prod_{i=1}^m X_i]$,
- xiv) $E[(\alpha_1 * X_1)^r \prod_{i=2}^m X_i] = \sum_{k=1}^r S(r, k) \alpha_1^k E[X_1^k \prod_{i=1}^m X_i]$,
- xv) $E[(\alpha_1 * X_1)(\alpha_2 * X_2)] = \alpha_1 \alpha_2 E[X_1 X_2]$,
- xvi) $E[\prod_{i=1}^m (\alpha_i X_i)] = (\prod_{i=1}^m \alpha_i) E[\prod_{i=1}^m X_i]$,
- xvii) $E[(\alpha_1 * X_1)^2 (\alpha_2 * X_2)] = \alpha_1^2 \alpha_2 E[X_1^2 X_2] + \alpha_1 \alpha_2 E[X_1 X_2]$,
- xviii) $E[(\alpha_1 * X_1)^r (\alpha_2 * X_2)] = \alpha_2 \sum_{k=1}^r S(r, k) \alpha_1^k E[X_1^k X_2]$,
- xix) $E[\alpha_1 * (\alpha_1 * X_1)] = \alpha_1^2 E[X_1]$,
- xx) $E[\underbrace{\alpha_1 * \dots * (\alpha_1 * (\alpha_1 * X_1))}_{r \text{ } \alpha_1^r s}] = \alpha_1^r E[X_1]$,

$$xxi) \text{Var}\left[\underbrace{\alpha_1 * \cdots * (\alpha_1 * (\alpha_1 * X_1))}_{r \alpha'_i s}\right] = \alpha_1^{2r} \text{Var}[X_1] + \left(\frac{1-\alpha_1^r}{1-\alpha_1}\right) \alpha_1^r E[X_1],$$

$$xxii) E\left[\underbrace{\alpha_1 * \cdots * (\alpha_1 * (\alpha_1 * X_1))}_{r \alpha'_i s} \mid X_1\right] = \alpha_1^r X_1,$$

$$xxiii) \text{Var}\left[\underbrace{\alpha_1 * \cdots * (\alpha_1 * (\alpha_1 * X_1))}_{r \alpha'_i s} \mid X_1\right] = \alpha_1^r X_1 \left(\frac{1-\alpha_1^r}{1-\alpha_1}\right), \text{ para } r \geq 2.$$

As provas dessas propriedades estão disponíveis na tese de Zea (2013). As propriedades *iv*), *v*), *vi*), *ix*), *xii*), *xviii*), *xix*), *xx*), *xxi*), *xxii*) e *xxiii*) são válidas apenas para séries de contagem com distribuição Poisson e não valem para qualquer distribuição discreta.

Usando a definição de thinning Poisson e suas propriedades, apresentamos a seguir uma maneira alternativa de representar o modelo INARCH(p).

Proposição 2.1.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo de valores inteiros não-negativos. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ diz-se ser um processo INARCH(p) se satisfaz a seguinte equação recursiva*

$$X_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i * X_{t-i} + e_t, \quad (2.4)$$

sendo $\alpha_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, p$, “ $*$ ” é o operador thinning definido em (2.2), $\{e_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, $e_t \in \mathbb{N}_0$ é uma sequência de variáveis aleatórias *i.i.d.* com distribuição Poisson de parâmetro λ , é assumido que as séries de contagem de $\alpha_i * X_{t-i}$, $i = 1, \dots, p$, são mutuamente independentes e independentes de $\{e_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, além de que e_t é independente de X_s para $s < t$.

A seguir mostramos que as duas definições apresentadas do processo INARCH(p) são equivalentes.

Considere um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ que segue a definição alternativa do processo INARCH(p) dado em (2.4). Então a distribuição condicional de X_t dado F_{t-1} , em que F_{t-1} é toda a informação do processo até o tempo $t - 1$: $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \dots$,

satisfaz

$$\begin{aligned}
X_t|F_{t-1} &= \alpha_1 * X_{t-1}|F_{t-1} + \alpha_2 * X_{t-2}|F_{t-1} + \cdots + \alpha_p * X_{t-p}|F_{t-1} + e_t|F_{t-1} \\
&= \alpha_1 * X_{t-1}|F_{t-1} + \alpha_2 * X_{t-2}|F_{t-1} + \cdots + \alpha_p * X_{t-p}|F_{t-1} + e_t \\
&= \left(\sum_{i=1}^{X_{t-1}} N_{1i} \right) \Big|_{F_{t-1}} + \left(\sum_{i=1}^{X_{t-2}} N_{2i} \right) \Big|_{F_{t-1}} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{X_{t-p}} N_{pi} \right) \Big|_{F_{t-1}} + e_t,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

em que $\{N_{ji}\}_{i=1}^{X_{t-j}}$, $j = 1, 2, \dots, p$, é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição Poisson de parâmetro α_j . Temos que $e_t|F_{t-1}$ distribui-se como a própria v.a. e_t dado que por hipótese e_t e X_s são independentes se $s < t$ e $\left(\sum_{i=1}^{X_{t-j}} N_{ji} \right) \Big|_{F_{t-1}} \sim Po(\alpha_j X_{t-j})$, pois dado F_{t-1} cada uma das somas $\sum_{i=1}^{X_{t-j}} N_{ji}$ não é mais aleatória. Assim, utilizando a suposição de que as séries de contagem são mutuamente independentes, temos da equação (2.5) que

$$\begin{aligned}
X_t|F_{t-1} &\sim Po(\alpha_1 X_{t-1}) + Po(\alpha_2 X_{t-2}) + \cdots + Po(\alpha_p X_{t-p}) + Po(\lambda) \\
&= Po\left(\lambda + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}\right) \\
&= Po(M_t),
\end{aligned}$$

em que $M_t = \lambda + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}$. Então $X_t|F_{t-1} \sim Po(M_t)$, que corresponde à definição do processo INARCH(p) dada na Definição 2.1.1, considerando $q = 0$. Reciprocamente, concluímos que o processo definido em (2.1) admite a representação em (2.4).

A seguir apresentamos a esperança e variância marginal e condicional do processo, assim como a função de autocovariância (facv).

Teorema 2.1.1. *De acordo com Ferland, Latour e Oraichi (2006), um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, seguindo um modelo INARCH(p) diz-se fracamente estacionário com primeiro e segundo momentos finitos se $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$.*

Como consequência do Teorema 2.1.1, Weiß (2009) mostrou que

i) A esperança marginal de X_t é dada por

$$\mu = E[X_t] = \frac{\lambda}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i},$$

ii) A facv $\gamma_X(k) = Cov[X_t, X_{t-k}]$, satisfaz a expressão recursiva

$$\gamma_X(k) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \gamma_X(|k-i|) + \delta_{k0} \cdot \mu, \quad (2.6)$$

para $k \geq 0$, em que $\delta_{k0} = 1$ se $k = 0$ e $\delta_{k0} = 0$ caso contrário.

iii) A variância marginal do processo é dada por

$$Var[X_t] = \mu + \sum_{i=1}^p \alpha_i \gamma_X(i). \quad (2.7)$$

Note que a equação (2.6), que corresponde a facv do processo INARCH(p), é semelhante a facv do modelo AR(p) proposto por Box e Jenkins (1976); por conseguinte a função de autocorrelação (fac) do processo INARCH(p), que nada mais é que o quociente entre a facv definida na equação (2.6) e a variância do processo expressa na equação (2.7), é dada pela expressão

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(|k-1|) + \alpha_2 \rho(|k-2|) + \dots + \alpha_p \rho(|k-p|), \quad k > 0. \quad (2.8)$$

De acordo com Weiß (2009), a ordem do processo INARCH(p) pode ser identificada de maneira similar ao modelo AR(p), ou seja, a partir da função de autocorrelação parcial (facp), que denotamos por $\rho_p(k)$, proposta por Box, Jenkins e Reinsel (1994). Assim, a ordem do processo INARCH(p) pode ser identificada através da facp, em que $\rho_p(k) = 0$ para $k > p$.

A esperança e a variância condicional do processo INARCH(p) de acordo com a Definição (2.1) são iguais, devido à distribuição condicional do processo seguir uma distribuição Poisson de parâmetro M_t , logo

$$E[X_t | F_{t-1}] = M_t = Var[X_t | F_{t-1}].$$

Entretanto, a esperança e a variância incondicional são dadas pelas seguintes equações, respectivamente

$$\begin{aligned} E[X_t] &= E[E(X_t | F_{t-1})] = E[M_t] = \mu, \\ Var[X_t] &= E[Var(X_t | F_{t-1})] + Var[E(X_t | F_{t-1})] \\ &= E[M_t] + Var[M_t] = \mu + Var[M_t], \end{aligned}$$

ou seja, a variância incondicional é maior que a esperança incondicional, o que caracteriza a sobredispersão. Então o processo INARCH(p) é útil para modelar dados que apresentem sobredispersão.

2.1.1 Métodos de estimação para o processo INARCH(p)

Neste trabalho serão apresentados três métodos de estimação para os parâmetros do modelo INARCH(p), sendo eles a abordagem de Yule-Walker (YW), mínimos quadrados condicionais (MQC) e máxima verossimilhança condicional (MVC). A abordagem de YW para obter os estimadores dos parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ baseia-se na resolução do sistema de p equações decorrentes da fac.

Se fizermos $k = 1, 2, \dots, p$ em (2.8) obtemos o seguinte sistema de p equações lineares

$$\begin{aligned}\rho(1) &= \alpha_1 + \alpha_2\rho(1) + \dots + \alpha_p\rho(p-1) \\ \rho(2) &= \alpha_1\rho(1) + \alpha_2 + \dots + \alpha_p\rho(p-2) \\ &\vdots \\ \rho(p) &= \alpha_1\rho(p-1) + \alpha_2\rho(p-2) + \dots + \alpha_p.\end{aligned}$$

Para estimar os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ com base em uma sequência X_1, \dots, X_T que segue um processo INARCH(p), basta substituir a fac $\rho(k)$ no sistema de equações (2.9) por seu respectivo estimador, expresso abaixo

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} [(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})]}{\sum_{t=1}^T [(X_t - \bar{X})^2]}, \quad k = 0, 1, \dots, T-1, \quad (2.9)$$

em que $\bar{X} = (1/T) \sum_{t=1}^T X_t$, é a média amostral.

Outro método que iremos abordar consiste em minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor da série no tempo t e a esperança condicional de X_t dado toda informação até o tempo $t-1$. Esse método, conhecido como MQC, depende da distribuição condicional de $X_t|F_{t-1}$ e é resolvido a partir da seguinte equação apresentada para o processo INARCH(p) por Weiß (2009).

$$\sum_{t=p+1}^T [X_t - E(X_t|F_{t-1})]^2. \quad (2.10)$$

A abordagem de MVC para o modelo INARCH(p), condicionada nos valores pré-amostrados, é utilizada por Ferland, Latour e Oraichi (2006). Uma vez que o processo

tem distribuição condicional Poisson, sua função de verossimilhança condicional é expressa da seguinte maneira

$$\begin{aligned} L(\theta; \mathbf{x}|x_p, \dots, x_1) &= P(X_T = x_T, \dots | X_p = x_p, \dots, X_2 = x_2, X_1 = x_1) \\ &= \prod_{t=p+1}^T e^{-\lambda - \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i}} \cdot \frac{(\lambda + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i})^{x_t}}{x_t!}, \end{aligned}$$

em que $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_T)^\top$ e $\theta = (\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)^\top$. As estimativas de MVC são obtidas numericamente maximizando o logaritmo da função de verossimilhança condicional, dado por

$$l(\theta; \mathbf{x}|x_p, \dots, x_1) = \sum_{t=3}^T \left[x_t \cdot \log \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i} + \lambda \right) - \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i} - \lambda - \log(x_t!) \right].$$

A distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança condicional $\hat{\theta}$ pode ser aproximada pela distribuição a seguir

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N_{p+1}(\mathbf{0}, \mathcal{F}_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \lambda}^{-1}),$$

em que, $\mathcal{F}_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \lambda}^{-1}$ é o inverso da matriz de informação de Fisher. A notação \xrightarrow{D} significa convergência em distribuição e $N_p(\mu, \Sigma)$ representa uma v.a. com distribuição normal multivariada com vetor de médias μ e matriz de variâncias e covariâncias Σ de ordem $p \times p$. Erros padrão assintóticos podem ser calculados a partir da informação observada de Fisher, ver Ferland, Latour e Oraichi (2006).

2.2 O modelo INARCH(1)

Como caso particular do modelo INARCH(p) quando $p = 1$, obtemos o modelo INARCH(1). Dado um processo de valores inteiros não negativos $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, então o processo segue o modelo INARCH(1) se satisfaz a equação (2.4) com $p = 1$, isto é, se X_t satisfaz a recursão

$$X_t = \alpha * X_{t-1} + e_t, \quad (2.11)$$

em que, $\alpha \geq 0$, “ $*$ ” é o operador *thinning* Poisson da Definição 2.1.2, $\{e_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição Poisson de parâmetro λ , a série de contagem de $\alpha * X_{t-1}$ é independente de $\{e_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, além de que e_t é independente de

X_s para $s < t$.

Note que se $\alpha = 0$, pelo item *i*) do Lema 2.1.1 o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, coincide com a sequência $\{e_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, assim a média e a variância marginal de $\{X_t\}$ coincidem e neste caso o processo não é adequado para modelar dados que apresentem sobredispersão. Usando que a distribuição condicional de $X_t|F_{t-1}$ é Poisson com parâmetro $M_t = \lambda + \alpha X_{t-1}$ e a equação (2.11), temos que o modelo é sobredisperso sempre que $\alpha > 0$. Além disso, a quantidade de sobredispersão é uma função crescente de α .

Heinen (2003) e Ferland, Latour e Oraichi (2006) demonstram que o processo INARCH(1) é um processo estacionário sempre que $\alpha < 1$, com média e variância incondicionais dadas por

$$E[X_t] = \frac{\lambda}{1 - \alpha} \quad \text{e} \quad Var[X_t] = \frac{\lambda}{(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)}$$

A função de autocorrelação do modelo INARCH (1) de lag k é expressa como

$$\rho(k) = Corr(X_{t-k}, X_t) = \alpha^k, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots,$$

que tem forma semelhante a fac do modelo autorregressivo de primeira ordem [AR(1)]. Zhu e Wang (2011) mostram que o processo INARCH(1) tem uma única distribuição estacionária e é uniformemente ergódica. Usando um argumento fácil de cadeias de Markov, Zea (2013) provou que a distribuição estacionária do processo INARCH(1) existe e é única. No entanto, não é conhecida uma expressão explícita para a distribuição marginal de $\pi_j = P(X_t = j)$ do processo INARCH(1). Weiß (2010) analisou duas abordagens para aproximar a distribuição marginal π_j .

2.2.1 Estimadores para os parâmetros do processo INARCH(1)

Nesta seção, apresentamos três métodos de estimação para estimar os parâmetros α e λ do processo INARCH(1); a abordagem de YW, o método de MQC e o método de MVC. Seja X_1, \dots, X_T uma série temporal que segue um processo INARCH(1), definido na equação (2.11), utilizando as autocorrelações amostrais dadas em (2.9) como estimadores para as fac, obtemos que os estimadores de YW para os parâmetros α e λ são dados por

$$\hat{\alpha}_{YW} = \frac{\sum_{t=2}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}, \quad \hat{\lambda}_{YW} = (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{X},$$

em que \bar{X} é a média amostral e o estimador de λ é baseado no primeiro momento da distribuição marginal do processo.

A obtenção dos estimadores por MQC utiliza a informação da distribuição condicional de $X_t|F_{t-1}$, objetivando a minimização da soma dos quadrados dada em (2.10). Os estimadores encontrados para α e λ , coincidem com os estimadores de MQC para os parâmetros de um processo de Markov estacionário obtidos por Klimko e Nelson (1978) e Heyde e Hall (1980) e são dados por

$$\hat{\alpha}_{MQC} = \frac{\sum_{t=2}^T X_t X_{t-1} - \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T X_t \sum_{t=2}^T X_{t-1}}{\sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - \frac{1}{T-1} (\sum_{t=2}^T X_{t-1})^2},$$

$$\hat{\lambda}_{MQC} = \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T X_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T X_{t-1} \right).$$

Weiß (2010) demonstrou que a distribuição assintótica conjunta dos estimadores dos parâmetros do modelo INARCH(1) obtidos pelo método de MQC segue uma distribuição normal bivariada, dada por

$$\sqrt{T} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} - \alpha \\ \hat{\lambda} - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{D} N_2(\mathbf{0}, \Sigma_{\alpha, \lambda}),$$

em que

$$\Sigma_{\alpha, \lambda} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\alpha} \left[\lambda(1+\alpha) + \frac{1+2\alpha^4}{1+\alpha+\alpha^2} \right] & -\lambda(1+\alpha) - \frac{(1+2\alpha)\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2} \\ -\lambda(1+\alpha) - \frac{(1+2\alpha)\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2} & (1-\alpha^2) \left[1 + \frac{\alpha(1+2\alpha^2)}{\lambda(1+\alpha+\alpha^2)} \right] \end{bmatrix}.$$

A notação \xrightarrow{D} significa convergência em distribuição e $N_2(\mu, \Sigma)$ representa uma v.a. com distribuição normal bivariada com vetor de médias μ e matriz de variâncias e covariâncias Σ .

O terceiro método abordado também baseia-se na distribuição condicional, nessa abordagem o objetivo é maximizar o logaritmo da função de verossimilhança condicional. Considerando x_1, \dots, x_T uma sequência gerada de um processo INARCH(1), a função da log-verossimilhança condicional do processo INARCH(1) é expressa por

$$l(\alpha, \lambda; x_1, \dots, x_T | x_1) = \sum_{t=2}^T [x_t \cdot \log(\alpha x_{t-1} + \lambda) - \alpha x_{t-1} - \lambda - \log(x_t!)]. \quad (2.12)$$

Os escores de α e λ são obtidos derivando a equação (2.12) com relação a α e λ

respectivamente, e são dados por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha, \lambda; x_1, \dots, x_T | x_1)}{\partial \alpha} &= \sum_{t=2}^T \left(\frac{x_t x_{t-1}}{\alpha x_{t-1} + \lambda} - x_{t-1} \right), \\ \frac{\partial l(\alpha, \lambda; x_1, \dots, x_T | x_1)}{\partial \lambda} &= \sum_{t=2}^T \left(\frac{x_t}{\alpha x_{t-1} + \lambda} - 1 \right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Os estimadores de MVC dos parâmetros α e λ são obtidos por métodos numéricos e não possuem forma fechada. A matriz observada de Fisher $\mathfrak{J}_{\alpha, \lambda}$ é obtida a partir das equações (2.13) e é dada por

$$\mathfrak{J}_{\alpha, \lambda} = \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^T \frac{x_t x_{t-1}^2}{(\alpha x_{t-1} + \lambda)^2} & \sum_{t=2}^T \frac{x_t x_{t-1}}{(\alpha x_{t-1} + \lambda)^2} \\ \sum_{t=2}^T \frac{x_t x_{t-1}}{(\alpha x_{t-1} + \lambda)^2} & \sum_{t=2}^T \frac{x_t}{(\alpha x_{t-1} + \lambda)^2} \end{bmatrix}.$$

Ainda não está disponível uma forma explícita para a informação de Fisher $\mathcal{F}_{\alpha, \lambda}$, ou seja, para a esperança da matriz $\mathfrak{J}_{\alpha, \lambda}$. A distribuição assintótica conjunta dos estimadores de MVC dos parâmetros do modelo INARCH(1) é apresentada por Zhu e Wang (2011); os autores provam que

$$\sqrt{T} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} - \alpha \\ \hat{\lambda} - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{D} N_2(\mathbf{0}, \mathcal{F}_{\alpha, \lambda}^{-1}),$$

em que \mathcal{F}^{-1} representa a matriz inversa da matriz \mathcal{F} .

2.3 O modelo INARCH(2)

Nessa seção, apresentamos o processo INARCH(2), que é o processo estudado neste trabalho. As expressões dos estimadores de YW e MQC dos parâmetros do modelo e os momentos marginais foram deduzidas neste trabalho. As expressões obtidas para os estimadores são usadas no estudo de simulação apresentado no Capítulo 3.

De acordo com a Proposição 2.1.1 um processo estocástico discreto de valores inteiros não-negativo, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ diz-se um processo INARCH(2) se satisfaz a seguinte equação

$$X_t = \alpha_1 * X_{t-1} + \alpha_2 * X_{t-2} + e_t, \tag{2.14}$$

em que $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, “*” é o operador thinning Poisson da Definição 2.1.2, $\{e_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, $e_t \in \mathbb{N}_0$, é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com distribuição Poisson de

parâmetro λ , e as séries de contagem de $\alpha_1 * X_{t-1}$ e de $\alpha_2 * X_{t-2}$ são mutuamente independentes e independentes de $\{e_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, além de que e_t é independente de X_s para $s < t$.

A seguir, vamos justificar que as duas definições, (2.1), para $p = 2$, e (2.14) do processo INARCH(2) são equivalentes. A partir do processo definido na equação (2.14), queremos provar que a distribuição condicional de X_t dado toda a informação até o tempo $t - 1$, tem a mesma distribuição condicional do processo definido em (2.1).

A distribuição condicional do modelo INARCH(2) utilizando o operador thinning Poisson da Definição 2.1.2, pode ser entendida pela relação feita a seguir

$$X_t | F_{t-1} = \alpha_1 * X_{t-1} | F_{t-1} + \alpha_2 * X_{t-2} | F_{t-1} + e_t | F_{t-1},$$

em que F_{t-1} é a informação até o tempo $t - 1$ e a soma é uma soma de v.a. independentes. Então dado que F_{t-1} é conhecido temos que X_{t-1} e X_{t-2} também são conhecidos, assim $X_t | F_{t-1}$ pode ser denotado por $X_t | X_{t-1}, X_{t-2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} X_t | X_{t-1}, X_{t-2} &= \alpha_1 * X_{t-1} | X_{t-1}, X_{t-2} + \alpha_2 * X_{t-2} | X_{t-1}, X_{t-2} + e_t | X_{t-1}, X_{t-2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{X_{t-1}} N_{1i} \right) | X_{t-1}, X_{t-2} + \left(\sum_{i=1}^{X_{t-2}} N_{2i} \right) | X_{t-1}, X_{t-2} + e_t, \end{aligned} \quad (2.15)$$

em que $\{N_{1i}\}_{i=1}^{X_{t-1}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição Poisson de parâmetro α_1 e $\{N_{2i}\}_{i=1}^{X_{t-2}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias Poisson i.i.d. com distribuição Poisson de parâmetro α_2 , sendo as duas sequências independentes. Temos que $e_t | X_{t-1}, X_{t-2}$ é a própria v.a. e_t dado que por hipótese e_t e X_s são independentes se $s < t$, e $\sum_{i=1}^{X_{t-1}} N_{1i} | X_{t-1}, X_{t-2} \sim Po(\alpha_1 X_{t-1})$, $\sum_{i=1}^{X_{t-2}} N_{2i} | X_{t-1}, X_{t-2} \sim Po(\alpha_2 X_{t-2})$, pois dado X_{t-1}, X_{t-2} as duas somas $\sum_{i=1}^{X_{t-1}} N_{1i}$ e $\sum_{i=1}^{X_{t-2}} N_{2i}$ não são mais aleatórias.

Assim a equação (2.15) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} X_t | X_{t-1}, X_{t-2} &\sim Po(\alpha_1 X_{t-1}) + Po(\alpha_2 X_{t-2}) + Po(\lambda) \\ &= Po(\lambda + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2}) \\ &= Po(M_t), \end{aligned} \quad (2.16)$$

em que $M_t = \lambda + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2}$. Então $X_t | X_{t-1}, X_{t-2} \sim Po(M_t)$, que corresponde à definição (2.1) para $p = 2$. De acordo com a distribuição condicional do processo ser Poisson com parâmetro M_t , temos

$$E(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}) = \lambda + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} = Var(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}).$$

Com relação aos dois primeiros momentos marginais, temos que a existência destes fica garantida pelo Teorema 2.1.1, se $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, e são expressos como

$$E[X_t] = \frac{\lambda}{1 - \alpha_1 - \alpha_2} = \mu, \quad E[X_t^2] = \frac{\mu(1 - \alpha_2)}{(1 + \alpha_2)[(1 - \alpha_2)^2 - \alpha_1^2]} + \mu^2. \quad (2.17)$$

A seguinte proposição é uma contribuição deste trabalho e fornece uma forma recursiva de encontrar o r -ésimo momento marginal do processo INARCH(2).

Proposição 2.3.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo INARCH(2), então o r -ésimo momento da distribuição marginal de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dado por*

$$E[X_t^r] = \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^i S(r, j) \binom{j}{i} \binom{i}{k} \lambda^{j-i} \alpha_1^k \alpha_2^{i-k} E[X_{t-1}^k X_{t-2}^{i-k}],$$

em que $S(r, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^r$, $S(r, k)$ é o número de Stirling de segunda espécie.

Demonstração. Se W é uma variável aleatória tal que $W \sim Po(m)$, então utilizando a fórmula de Dobinski's demonstrada em Pitman (1997), o r -ésimo momento de W pode ser expresso como

$$E[W^r] = \sum_{k=0}^{\infty} k^r \cdot \frac{e^{-m} m^k}{k!} = \sum_{k=0}^r S(r, k) m^k, \quad (2.18)$$

em que $S(r, k)$ é o número de Stirling de segunda espécie. Pela equação (2.16) temos que $X_t | X_{t-1}, X_{t-2} \sim Po(\lambda + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2})$, assim podemos expressar o r -ésimo momento de X_t como

$$\begin{aligned}
E[X_t^r] &= E\{E[X_t^r | X_{t-1}, X_{t-2}]\} \\
&= E\left[\sum_{j=0}^r S(r, j)(\lambda + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2})^j\right] \\
&= \sum_{j=0}^r S(r, j)E[\{\lambda + (\alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2})\}^j] \\
&= \sum_{j=0}^r S(r, j)E\left[\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (\alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2})^i \lambda^{j-i}\right] \\
&= \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^j S(r, j) \binom{j}{i} \lambda^{j-i} E[(\alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2})^i] \\
&= \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^j S(r, j) \binom{j}{i} \lambda^{j-i} E\left[\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (\alpha_1 X_{t-1})^k (\alpha_2 X_{t-2})^{i-k}\right] \\
&= \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^i S(r, j) \binom{j}{i} \binom{i}{k} \lambda^{j-i} E[(\alpha_1 X_{t-1})^k (\alpha_2 X_{t-2})^{i-k}] \\
&= \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^i S(r, j) \binom{j}{i} \binom{i}{k} \lambda^{j-i} \alpha_1^k \alpha_2^{i-k} E[X_{t-1}^k X_{t-2}^{i-k}].
\end{aligned}$$

□

O primeiro e o segundo momento do processo INARCH(2) expressos em (2.17), podem ser obtidos através da Proposição 2.3.1, fazendo $r = 1$ e $r = 2$, respectivamente, e usando o fato de que $S(0, 0) = S(1, 1) = S(2, 1) = S(2, 2) = 1$, e $S(0, j) = S(j, 0) = 0 \forall j \neq 0$. A variância do processo INARCH(2) é dada por

$$Var[X_t] = \frac{\mu(1 - \alpha_2)}{(1 + \alpha_2)[(1 - \alpha_2)^2 - \alpha_1^2]},$$

e a função de autocovariância para o modelo INARCH(2) é descrita a seguir

$$\gamma_X(k) = \alpha_1 \cdot \gamma_X(|k - 1|) + \alpha_2 \cdot \gamma_X(|k - 2|) + \delta_{k0} \cdot \mu, \quad k \geq 0, \quad (2.19)$$

em que, $\delta_{k0} = 1$ se $k = 0$ e $\delta_{k0} = 0$ caso contrário. A fac do modelo INARCH(2) é definida como

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(|k - 1|) + \alpha_2 \rho(|k - 2|), \quad k > 0, \quad (2.20)$$

sendo que para $k = 0$, $\rho(k) = 1$.

A função de autocorrelação do processo INARCH(2) decai exponencialmente, similarmente ao processo AR(2) quando os dois parâmetros autorregressivos são positivos, pois de acordo com a definição do processo INARCH(2) os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$.

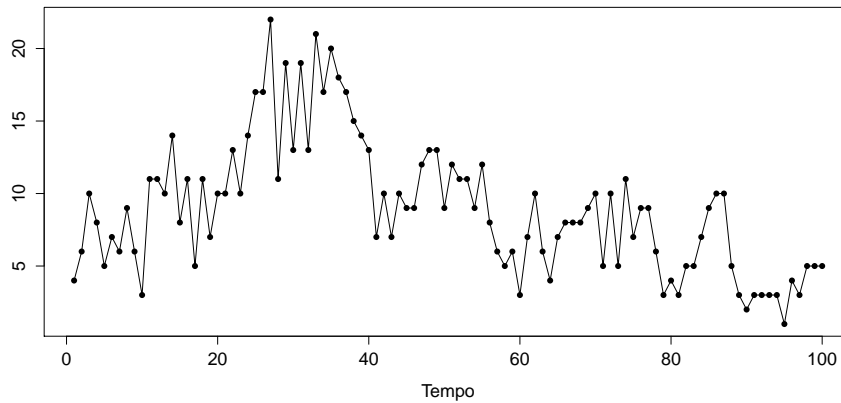


Figura 2.1: Série temporal simulada de um processo INARCH(2) para $\alpha_1 = 0.35$, $\alpha_2 = 0.55$, $\lambda = 1$ e $T = 100$.

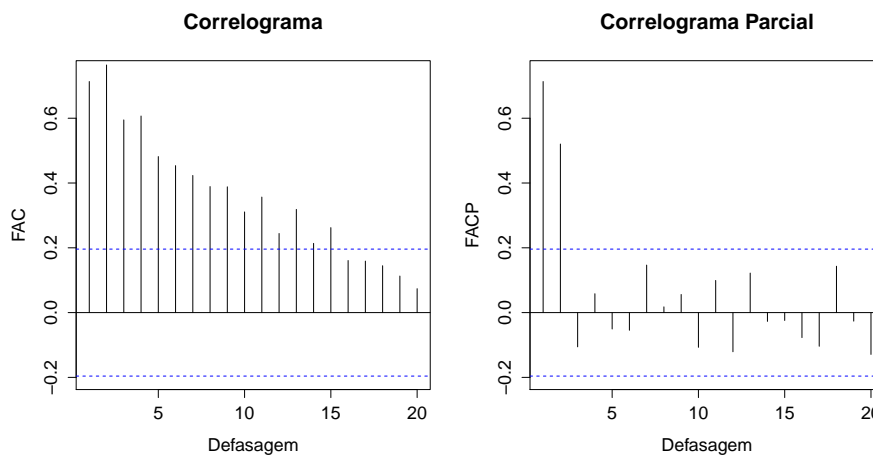


Figura 2.2: Função de autocorrelação amostral e função de autocorrelação parcial de um processo INARCH(2) para $\alpha_1 = 0.35$, $\alpha_2 = 0.55$, $\lambda = 1$ e $T = 100$.

A Figura 2.2 mostra o gráfico da função de autocorrelação amostral e função de autocorrelação parcial de um processo INARCH(2) próximo a região de não estacionariedade simulado com $\alpha_1 = 0.35$, $\alpha_2 = 0.55$, $\lambda = 1$ e tamanho amostral $T = 100$, enquanto a Figura 2.4 apresenta o gráfico da função de autocorrelação amostral e função de autocorrelação parcial de um processo INARCH(2) simulado com $\alpha_1 = 0.1$,

$\alpha_2 = 0.35$, $\lambda = 1$ e tamanho amostral $T = 100$.

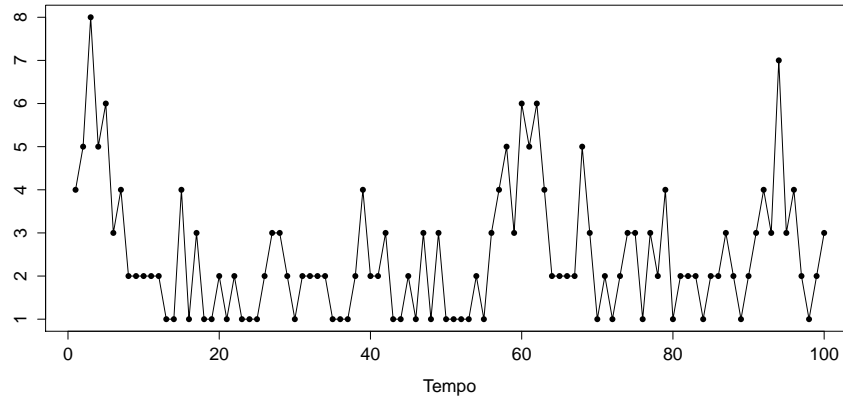


Figura 2.3: Série temporal simulada de um processo INARCH(2) para $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.35$, $\lambda = 1$ e $T = 100$.

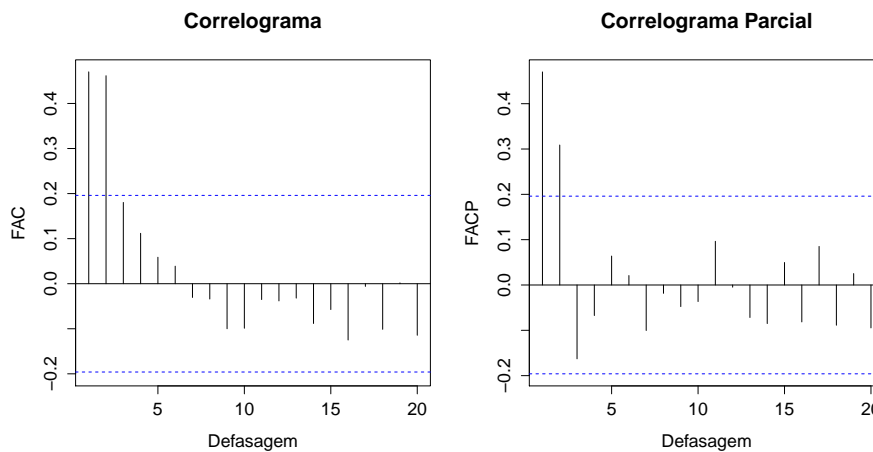


Figura 2.4: Função de autocorrelação amostral e função de autocorrelação parcial de um processo INARCH(2) para $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.35$, $\lambda = 1$ e $T = 100$.

2.3.1 Estimadores para os parâmetros do processo INARCH(2)

Nesta seção, utilizamos três métodos de estimação para estimar os parâmetros α_1 , α_2 e λ do modelo: como veremos os estimadores de YW e de MQC dos parâmetros do processo têm expressões fechadas, enquanto que os estimadores de MVC têm que ser encontrados por métodos de otimização numérica.

Seja X_1, \dots, X_T uma série temporal que segue um processo INARCH(2), então os estimadores dos parâmetros podem ser obtidos de acordo com a abordagem de YW,

através das equações (2.20) considerando $k = 1, 2$.

$$\begin{cases} \rho(1) = \alpha_1\rho(0) + \alpha_2\rho(1), \\ \rho(2) = \alpha_1\rho(1) + \alpha_2\rho(0). \end{cases} \quad (2.21)$$

Sabendo que $\rho(0) = 1$ e substituindo $\rho(1)$ e $\rho(2)$ por seus respectivos estimadores $\hat{\rho}(1)$ e $\hat{\rho}(2)$ descritos em (2.9), para $k = 1, 2$, nas equações (2.21) e resolvendo o sistema de equações, obtemos os seguintes estimadores para α_1 e α_2 respectivamente

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{1YW} &= (1 - \hat{\alpha}_{2YW}) \frac{\sum_{t=1}^{T-1} [(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})]}{\sum_{t=1}^T [(X_t - \bar{X})^2]}, \\ \hat{\alpha}_{2YW} &= \frac{\frac{\sum_{t=1}^{T-2} [(X_t - \bar{X})(X_{t+2} - \bar{X})]}{\sum_{t=1}^T [(X_t - \bar{X})^2]} - \left[\frac{\sum_{t=1}^{T-1} [(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})]}{\sum_{t=1}^T [(X_t - \bar{X})^2]} \right]^2}{1 - \left[\frac{\sum_{t=1}^{T-1} [(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})]}{\sum_{t=1}^T [(X_t - \bar{X})^2]} \right]^2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

O estimador para λ pela abordagem YW é baseado no primeiro momento marginal de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, que é dado na equação (2.17). Logo,

$$\hat{\lambda}_{YW} = (1 - \hat{\alpha}_{1YW} - \hat{\alpha}_{2YW})\hat{\mu}, \quad (2.23)$$

em que $\hat{\mu} = \bar{X}$ é um estimador fracamente consistente para μ .

Os estimadores de MQC dos parâmetros são obtidos minimizando a expressão

$$\begin{aligned} MQC(\lambda, \alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{t=3}^T (X_t - E[X_t | X_{t-1}, X_{t-2}])^2 \\ &= \sum_{t=3}^T (X_t - \lambda - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-2})^2, \end{aligned}$$

com relação a λ, α_1 e α_2 . Fazendo isto obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_{MQC} &= \frac{\sum_{t=3}^T X_t - \hat{\alpha}_{1MQC} \sum_{t=3}^T X_{t-1} - \hat{\alpha}_{2MQC} \sum_{t=3}^T X_{t-2}}{T-2}, \\ \hat{\alpha}_{1MQC} &= \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_t - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_t}{T-2} - \hat{\alpha}_{2MQC} \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_{t-2}}{T-2} \right)}{\left(\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - \frac{(\sum_{t=3}^T X_{t-1})^2}{T-2} \right)}, \\ \hat{\alpha}_{2MQC} &= \left\{ \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - \frac{(\sum_{t=3}^T X_{t-1})^2}{T-2} \right) \left(\sum_{t=3}^T X_{t-2} X_t - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-2} \sum_{t=3}^T X_t}{T-2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_t - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_t}{T-2} \right) \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_{t-2}}{T-2} \right) \right\} \\ &\quad \left\{ \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - \frac{(\sum_{t=3}^T X_{t-1})^2}{T-2} \right) \left(\sum_{t=3}^T X_{t-2}^2 - \frac{(\sum_{t=3}^T X_{t-2})^2}{T-2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_{t-2}}{T-2} \right)^2 \right\},\end{aligned}$$

em que $(\hat{\alpha}_{1MQC}, \hat{\alpha}_{2MQC}, \hat{\lambda}_{MQC})$ é o ponto que minimiza a função $MQC(\lambda, \alpha_1, \alpha_2)$. Ver Apêndice A.

Teorema 2.3.1. *De acordo com Klimko e Nelson (1978), se um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário e $\{e_t\}_{t \in \mathbb{Z}} \sim Po(\lambda)$, a distribuição assintótica do estimador de mínimos quadrados condicional de θ é dada por*

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \mathcal{V}^{-1} \mathbf{W} \mathcal{V}^{-1}),$$

em que $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_{1MQC}, \hat{\alpha}_{2MQC}, \hat{\lambda}_{MQC})^\top$, $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda)^\top$, \mathcal{V} é uma matriz 3×3 com os elementos

$$\mathcal{V}_{ij} = E \left(\frac{\partial M_t}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial \theta_j} \right) \quad i, j = 1, 2, 3,$$

e os elementos da matriz \mathbf{W} são da forma

$$\mathbf{W}_{ij} = E \left(d_t^2 \frac{\partial M_t}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial \theta_j} \right) \quad i, j = 1, 2, 3,$$

em que $d_t = X_t - M_t$.

Corolário 2.3.1. *Se o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário e $\{e_t\}_{t \in \mathbb{Z}} \sim Po(\lambda)$ em (2.14), então a distribuição assintótica do estimador de mínimos quadrados condicional de*

$\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda)^\top$ é dada por

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, V^{-1}WV^{-1}),$$

em que

$$V = \begin{bmatrix} E[X_{t-1}^2] & E[X_{t-1}X_{t-2}] & E[X_{t-1}] \\ E[X_{t-1}X_{t-2}] & E[X_{t-2}^2] & E[X_{t-2}] \\ E[X_{t-1}] & E[X_{t-2}] & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned} w_{11} &= \lambda E[X_{t-1}^2] + \alpha_1 E[X_{t-1}^3] + \alpha_2 E[X_{t-1}^2 X_{t-2}], \\ w_{22} &= \lambda E[X_{t-2}^2] + \alpha_1 E[X_{t-1} X_{t-2}^2] + \alpha_2 E[X_{t-2}^3], \\ w_{33} &= \lambda + \alpha_1 E[X_{t-1}] + \alpha_2 E[X_{t-2}], \\ w_{12} = w_{21} &= \lambda E[X_{t-1} X_{t-2}] + \alpha_1 E[X_{t-1}^2 X_{t-2}] + \alpha_2 E[X_{t-1} X_{t-2}^2], \\ w_{13} = w_{31} &= \lambda E[X_{t-1}] + \alpha_1 E[X_{t-1}^2] + \alpha_2 E[X_{t-1} X_{t-2}], \\ w_{23} = w_{32} &= \lambda E[X_{t-2}] + \alpha_1 E[X_{t-1} X_{t-2}] + \alpha_2 E[X_{t-2}^2]. \end{aligned}$$

Os valores esperados contidos nos elementos da matriz W estão expressos no Apêndice B.

Os estimadores de MVC para o vetor de parâmetros $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda)^\top$ do modelo INARCH(2) são obtidos através de métodos numéricos, a partir da maximização do logaritmo da função de verossimilhança condicional. A função de verossimilhança do processo denotada por $L(\theta; \mathbf{x})$, com $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_T)^\top$, é dada por

$$\begin{aligned} L(\theta; \mathbf{x}) &= P(X_T = x_T, \dots, X_2 = x_2, X_1 = x_1) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &\times P(X_3 = x_3 | X_1 = x_1, X_2 = x_2) P(X_4 = x_4 | X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) \\ &\times \dots \times P(X_T = x_T | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{T-1} = x_{T-1}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por se tratar de um processo que depende apenas dos dois últimos acontecimentos

anteriores, reescrevemos (2.24) da forma abaixo

$$\begin{aligned} L(\theta; \mathbf{x}) &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)P(X_3 = x_3|X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &\quad \times P(X_4 = x_4|X_2 = x_2, X_3 = x_3) \\ &\quad \times \cdots \times P(X_T = x_T|X_{T-2} = x_{T-2}, X_{T-1} = x_{T-1}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dividindo os dois lados da equação (2.25) por $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$, obtemos a função de verossimilhança condicional dado $X_1 = x_1$ e $X_2 = x_2$, ou seja, $P(X_T = x_T, \dots, X_3 = x_3|X_2 = x_2, X_1 = x_1)$, denotada por $L(\theta; \mathbf{x}|x_2, x_1)$, que é expressa como

$$\begin{aligned} L(\theta; \mathbf{x}|x_2, x_1) &= P(X_3 = x_3|X_1 = x_1, X_2 = x_2)P(X_4 = x_4|X_2 = x_2, X_3 = x_3) \\ &\quad \times P(X_5 = x_5|X_3 = x_3, X_4 = x_4) \\ &\quad \times \cdots \times P(X_T = x_T|X_{T-2} = x_{T-2}, X_{T-1} = x_{T-1}) \\ &= \prod_{t=3}^T P(X_t = x_t|X_{t-2} = x_{t-2}, X_{t-1} = x_{t-1}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Como conhecemos a distribuição condicional do processo INARCH(2) descrita em (2.16), então podemos reescrever a equação (2.26) de acordo com a forma abaixo

$$L(\theta; \mathbf{x}|x_2, x_1) = \prod_{t=3}^T e^{-\lambda - \alpha_1 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-2}} \cdot \frac{(\lambda + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2})^{x_t}}{x_t!}.$$

A função de log-verossimilhança condicional é da forma

$$l(\theta; \mathbf{x}|x_2, x_1) = \sum_{t=3}^T [x_t \cdot \log(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \lambda) - \alpha_1 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-2} - \lambda - \log(x_t!)]. \quad (2.27)$$

Os escores de α_1 , α_2 e λ são obtidos derivando a equação (2.27) com relação a α_1 , α_2

e λ respectivamente, e são dados por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(\theta; \mathbf{x}|x_2, x_1)}{\partial \alpha_1} &= \sum_{t=3}^T \left(\frac{x_t x_{t-1}}{\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \lambda} - x_{t-1} \right), \\ \frac{\partial l(\theta; \mathbf{x}|x_2, x_1)}{\partial \alpha_2} &= \sum_{t=3}^T \left(\frac{x_t x_{t-2}}{\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \lambda} - x_{t-2} \right), \\ \frac{\partial l(\theta; \mathbf{x}|x_2, x_1)}{\partial \lambda} &= \sum_{t=3}^T \left(\frac{x_t}{\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \lambda} - 1 \right).\end{aligned}\quad (2.28)$$

Os estimadores de MVC dos parâmetros α_1, α_2 e λ são obtidos por métodos numéricos e não possuem forma fechada. A matriz observada de Fisher $\mathfrak{J}_{\alpha_1, \alpha_2, \lambda} = \sum_{t=3}^T J_t(\alpha_1, \alpha_2, \lambda)$ é dada pelo negativo da matriz de derivadas das equações (2.28) e a matriz $J_t(\alpha_1, \alpha_2, \lambda)$ é expressa da seguinte forma

$$J_t(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{x_t x_{t-1}^2}{(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \lambda)^2} & \frac{x_t x_{t-1} x_{t-2}}{(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \lambda)^2} & \frac{x_t x_{t-1}}{(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \lambda)^2} \\ \frac{x_t x_{t-1} x_{t-2}}{(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \lambda)^2} & \frac{x_t x_{t-2}^2}{(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \lambda)^2} & \frac{x_t x_{t-2}}{(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \lambda)^2} \\ \frac{x_t x_{t-1}}{(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \lambda)^2} & \frac{x_t x_{t-2}}{(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \lambda)^2} & \frac{x_t}{(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \lambda)^2} \end{bmatrix}.$$

A forma explícita para a informação de Fisher $\mathcal{F}_{\alpha_1, \alpha_2, \lambda}$, ou seja, para esperança da matriz $\mathfrak{J}_{\alpha_1, \alpha_2, \lambda}$ ainda não está disponível. A distribuição assintótica conjunta para os estimadores de MVC dos parâmetros do modelo INARCH(2) segue aproximadamente a seguinte distribuição

$$\sqrt{T} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 - \alpha_1 \\ \hat{\alpha}_2 - \alpha_2 \\ \hat{\lambda} - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{D} N_3(\mathbf{0}, \mathcal{F}_{\alpha_1, \alpha_2, \lambda}^{-1}).$$

Para o processo INARCH(1) Weiß (2010) apresenta o resíduo empírico como a diferença entre o valor observado no tempo t e a esperança condicional estimada. Para o processo INARCH(2) denotamos o resíduo empírico do ajuste do modelo através da seguinte equação

$$\hat{\epsilon}_t = x_t - \hat{E}[X_t | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}] = x_t - \hat{\lambda} - \hat{\alpha}_1 x_{t-1} - \hat{\alpha}_2 x_{t-2}, \quad t \geq 3. \quad (2.29)$$

Analisando a fac dos resíduos esperamos que, se o modelo for adequado aos dados, os resíduos apresentem autocorrelação aproximadamente zero.

Capítulo 3

Estudo por simulação de Monte Carlo dos estimadores do processo INARCH(2)

Neste capítulo é apresentado um estudo via simulação de Monte Carlo que compara o desempenho dos estimadores de YW, MQC e MVC dos parâmetros do modelo INARCH(2) em termos de erro quadrático médio (EQM), erro absoluto médio (EAM) e viés. Também é apresentado um conjunto de dados reais, uma série temporal do número mensal de meninos nascidos vivos na cidade de Riachuelo-RN, que apresenta sobredispersão e pode ser modelado com o processo INARCH(2).

Apresentação inicial

O comportamento dos estimadores de YW expressos nas equações (2.22) e (2.23), dos estimadores de MQC apresentados em (2.24) e dos estimadores de MVC do processo INARCH(2), são avaliados nesta seção. Utilizando 5000 réplicas de Monte Carlo foram obtidas as estimativas para os parâmetros α_1 , α_2 e λ do processo, para os três tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 e para as combinações possíveis dos parâmetros $\alpha_1 = 0.1, 0.35, 0.55, 0.8$ e $\alpha_2 = 0.1, 0.35, 0.55, 0.8$, de forma que a condição de estacionariedade ($\alpha_1 + \alpha_2 < 1$) do processo INARCH(2) fosse satisfeita.

As estimativas obtidas pelo método de MQC foram utilizadas como valores iniciais para a estimação por MVC, que foi feita utilizando a sub-rotina `maxLik` no software R (R Development Core Team, 2011) para maximizar o logaritmo da função de verossimilhança condicional. As três abordagens de estimação foram comparadas em termos de EQM, EAM e viés, através das 5000 estimativas.

3.1 Resultados simulados

A Tabela 3.1 apresenta o EQM das estimativas dos parâmetros do modelo para $\lambda = 1$. Podemos observar que nesse cenário em termos de EQM os estimadores de MVC são superiores aos demais, em especial no que se refere ao parâmetro λ , em que os EQM's são menores comparados com os EQM's obtidos pelos outros estimadores estudados. Vemos ainda que a medida que o tamanho da amostra aumenta o desempenho dos estimadores dos parâmetros α_1 e α_2 são equivalentes. Para $T = 300$ os métodos de MVC e MQC são equivalentes inclusive na estimação de λ . Entretanto, para valores de α_1 e α_2 tais que $\alpha_1 + \alpha_2$ é próximo de 1, que chamaremos próximo da região de não estacionariedade, os estimadores de MVC continuam sendo superiores aos outros, principalmente o estimador do parâmetro λ .

Tabela 3.1: EQM dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 1$.

T	α_1	α_2	$\hat{\alpha}_1$			$\hat{\alpha}_2$			$\hat{\lambda}$			
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	
100	0.10	0.10	0.0051	0.0052	0.0051	0.0051	0.0054	0.0053	0.2475	0.2436	0.2410	
		0.35	0.0059	0.0060	0.0057	0.0211	0.0204	0.0198	0.3504	0.3386	0.3312	
		0.55	0.0055	0.0055	0.0050	0.0225	0.0207	0.0195	0.3640	0.3341	0.3123	
		0.80	0.0046	0.0040	0.0035	0.0146	0.0109	0.0093	1.2155	1.0058	0.8265	
	0.35	0.10	0.0197	0.0196	0.0189	0.0052	0.0055	0.0054	0.3521	0.3434	0.3353	
		0.35	0.0130	0.0133	0.0123	0.0157	0.0150	0.0139	0.4522	0.4253	0.4013	
		0.55	0.0105	0.0105	0.0095	0.0155	0.0124	0.0108	1.5487	1.3764	1.2160	
	0.55	0.10	0.0221	0.0219	0.0206	0.0054	0.0058	0.0054	0.3362	0.3187	0.3019	
		0.35	0.0122	0.0125	0.0109	0.0142	0.0125	0.0109	1.2160	1.0540	0.9039	
	0.80	0.10	0.0146	0.0149	0.0123	0.0055	0.0066	0.0057	0.7929	0.6680	0.5206	
	200	0.10	0.10	0.0033	0.0034	0.0033	0.0033	0.0033	0.0032	0.2914	0.2894	0.2888
			0.35	0.0034	0.0034	0.0033	0.0133	0.0130	0.0126	0.3258	0.3190	0.3170
0.55			0.0033	0.0033	0.0029	0.0119	0.0111	0.0107	0.2652	0.2518	0.2483	
0.80			0.0024	0.0023	0.0019	0.0053	0.0043	0.0036	0.5422	0.4729	0.3752	
0.35		0.10	0.0126	0.0125	0.0122	0.0034	0.0035	0.0033	0.3143	0.3095	0.3080	
		0.35	0.0072	0.0073	0.0067	0.0081	0.0078	0.0073	0.2798	0.2685	0.2607	
		0.55	0.0049	0.0049	0.0042	0.0064	0.0054	0.0046	0.4723	0.4232	0.3403	
0.55		0.10	0.0116	0.0115	0.0110	0.0034	0.0035	0.0031	0.2393	0.2310	0.2296	
		0.35	0.0059	0.0061	0.0052	0.0067	0.0062	0.0052	0.3855	0.3433	0.2675	
0.80		0.10	0.0065	0.0066	0.0053	0.0037	0.0040	0.0032	0.3029	0.2646	0.1935	
300		0.10	0.10	0.0027	0.0027	0.0026	0.0028	0.0028	0.0028	0.3098	0.3083	0.3084
			0.35	0.0027	0.0028	0.0026	0.0103	0.0100	0.0098	0.3067	0.3019	0.3013
	0.55		0.0025	0.0025	0.0023	0.0084	0.0079	0.0080	0.2316	0.2227	0.2269	
	0.80		0.0016	0.0016	0.0013	0.0031	0.0026	0.0022	0.3110	0.2790	0.2223	
	0.35	0.10	0.0095	0.0095	0.0094	0.0027	0.0027	0.0026	0.2945	0.2914	0.2931	
		0.35	0.0049	0.0049	0.0046	0.0055	0.0054	0.0051	0.2166	0.2092	0.2109	
		0.55	0.0031	0.0031	0.0026	0.0039	0.0035	0.0029	0.2593	0.2360	0.1894	
	0.55	0.10	0.0084	0.0083	0.0081	0.0029	0.0029	0.0026	0.2054	0.2002	0.2066	
		0.35	0.0040	0.0041	0.0034	0.0044	0.0042	0.0034	0.2356	0.2148	0.1654	
	0.80	0.10	0.0043	0.0044	0.0036	0.0029	0.0030	0.0024	0.1832	0.1670	0.1227	

Tabela 3.2: EQM dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 3$.

T	α_1	α_2	$\hat{\alpha}_1$			$\hat{\alpha}_2$			$\hat{\lambda}$			
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	
100	0.10	0.10	0.0054	0.0055	0.0055	0.0053	0.0056	0.0056	0.1579	0.1621	0.1619	
		0.35	0.0063	0.0064	0.0063	0.0119	0.0116	0.0113	0.3990	0.3972	0.3835	
		0.55	0.0053	0.0052	0.0051	0.0113	0.0103	0.0097	0.7884	0.7432	0.6930	
		0.80	0.0043	0.0038	0.0036	0.0120	0.0087	0.0081	9.3225	7.4926	6.9206	
	0.35	0.10	0.0111	0.0112	0.0108	0.0056	0.0059	0.0058	0.3769	0.3786	0.3628	
		0.35	0.0103	0.0106	0.0101	0.0112	0.0108	0.0103	1.4270	1.3607	1.2805	
		0.55	0.0093	0.0092	0.0089	0.0135	0.0104	0.0099	12.826	11.387	10.981	
	0.55	0.10	0.0114	0.0114	0.0106	0.0055	0.0059	0.0057	0.6832	0.6653	0.6142	
		0.35	0.0108	0.0113	0.0106	0.0128	0.0112	0.0105	9.6274	8.4291	7.9388	
		0.80	0.10	0.0112	0.0116	0.0106	0.0048	0.0059	0.0054	5.6749	4.8167	4.4416
	200	0.10	0.10	0.0033	0.0034	0.0034	0.0035	0.0035	0.0035	0.1093	0.1098	0.1085
			0.35	0.0034	0.0034	0.0033	0.0056	0.0055	0.0053	0.2341	0.2316	0.2235
0.55			0.0031	0.0030	0.0029	0.0048	0.0046	0.0043	0.4274	0.4100	0.3825	
0.80			0.0022	0.0021	0.0020	0.0040	0.0031	0.0029	3.7876	3.3017	3.0374	
0.35		0.10	0.0055	0.0056	0.0053	0.0034	0.0034	0.0033	0.2052	0.2031	0.1955	
		0.35	0.0049	0.0050	0.0047	0.0052	0.0051	0.0048	0.5788	0.5588	0.5208	
		0.55	0.0041	0.0041	0.0038	0.0053	0.0045	0.0041	3.5553	3.2014	3.0038	
0.55		0.10	0.0051	0.0051	0.0048	0.0033	0.0034	0.0033	0.3294	0.3246	0.2966	
		0.35	0.0053	0.0053	0.0049	0.0058	0.0053	0.0049	2.9734	2.6663	2.4513	
		0.80	0.10	0.0049	0.0050	0.0045	0.0032	0.0035	0.0033	2.0209	1.7991	1.5710
300		0.10	0.10	0.0027	0.0027	0.0027	0.0026	0.0026	0.0026	0.0956	0.0956	0.0947
			0.35	0.0026	0.0026	0.0025	0.0038	0.0037	0.0036	0.1744	0.1721	0.1644
	0.55		0.0022	0.0022	0.0021	0.0031	0.0030	0.0027	0.3047	0.2963	0.2721	
	0.80		0.0015	0.0015	0.0014	0.0023	0.0019	0.0017	2.3108	2.0974	1.9108	
	0.35	0.10	0.0038	0.0038	0.0037	0.0027	0.0027	0.0027	0.1420	0.1413	0.1359	
		0.35	0.0033	0.0033	0.0032	0.0034	0.0033	0.0031	0.3614	0.3509	0.3199	
		0.55	0.0028	0.0027	0.0025	0.0033	0.0029	0.0027	1.8469	1.6954	1.5552	
	0.55	0.10	0.0036	0.0036	0.0033	0.0027	0.0027	0.0026	0.2356	0.2315	0.2073	
		0.35	0.0034	0.0034	0.0031	0.0036	0.0034	0.0031	1.5397	1.3945	1.2600	
		0.80	0.10	0.0032	0.0032	0.0029	0.0026	0.0027	0.0024	1.1247	1.0207	0.8902

Tabela 3.3: EQM dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 5$.

T	α_1	α_2	$\hat{\alpha}_1$			$\hat{\alpha}_2$			$\hat{\lambda}$			
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	
100	0.10	0.10	0.0058	0.0060	0.0060	0.0053	0.0056	0.0056	0.4364	0.4569	0.4596	
		0.35	0.0059	0.0060	0.0060	0.0106	0.0104	0.0103	0.9770	0.9888	0.9792	
		0.55	0.0052	0.0052	0.0050	0.0110	0.0101	0.0096	2.1390	2.0360	1.9453	
		0.80	0.0042	0.0037	0.0036	0.0111	0.0079	0.0076	25.465	20.458	19.585	
	0.35	0.10	0.0103	0.0104	0.0102	0.0054	0.0056	0.0056	0.9547	0.9668	0.9495	
		0.35	0.0105	0.0107	0.0106	0.0112	0.0109	0.0105	3.9953	3.7887	3.6895	
		0.55	0.0098	0.0096	0.0094	0.0132	0.0101	0.0097	33.888	30.296	29.607	
	0.55	0.10	0.0107	0.0107	0.0102	0.0052	0.0056	0.0055	1.7509	1.7017	1.6409	
		0.35	0.0106	0.0110	0.0107	0.0124	0.0109	0.0105	26.812	23.544	22.780	
		0.80	0.10	0.0112	0.0115	0.0110	0.0050	0.0059	0.0058	15.857	13.336	12.769
	200	0.10	0.10	0.0034	0.0035	0.0035	0.0034	0.0035	0.0035	0.2606	0.2649	0.2652
			0.35	0.0035	0.0035	0.0035	0.0051	0.0050	0.0049	0.5639	0.5652	0.5532
0.55			0.0030	0.0030	0.0029	0.0046	0.0044	0.0042	1.1489	1.1100	1.0561	
0.80			0.0021	0.0020	0.0019	0.0038	0.0030	0.0028	10.535	9.2032	8.7054	
0.35		0.10	0.0051	0.0051	0.0050	0.0033	0.0034	0.0033	0.4933	0.4930	0.4814	
		0.35	0.0051	0.0051	0.0050	0.0051	0.0050	0.0049	1.5735	1.5184	1.4627	
		0.55	0.0042	0.0041	0.0040	0.0052	0.0043	0.0041	9.9881	9.0748	8.6935	
0.55		0.10	0.0051	0.0050	0.0048	0.0034	0.0035	0.0034	0.8808	0.8669	0.8266	
		0.35	0.0050	0.0050	0.0048	0.0055	0.0050	0.0048	7.9862	7.1238	6.7856	
		0.80	0.10	0.0048	0.0049	0.0046	0.0033	0.0036	0.0034	5.6197	4.9725	4.6459
300		0.10	0.10	0.0026	0.0026	0.0026	0.0027	0.0027	0.0027	0.2007	0.2024	0.2024
			0.35	0.0025	0.0025	0.0024	0.0033	0.0032	0.0031	0.4129	0.4112	0.3989
	0.55		0.0022	0.0022	0.0021	0.0029	0.0028	0.0027	0.8395	0.8143	0.7779	
	0.80		0.0014	0.0014	0.0013	0.0022	0.0019	0.0017	6.2443	5.6224	5.2939	
	0.35	0.10	0.0035	0.0035	0.0034	0.0026	0.0027	0.0026	0.3513	0.3522	0.3403	
		0.35	0.0032	0.0032	0.0031	0.0033	0.0032	0.0031	0.9896	0.9645	0.9180	
		0.55	0.0026	0.0026	0.0025	0.0031	0.0028	0.0026	5.4479	4.9912	4.7731	
	0.55	0.10	0.0034	0.0034	0.0032	0.0026	0.0027	0.0026	0.5862	0.5788	0.5437	
		0.35	0.0033	0.0034	0.0032	0.0037	0.0034	0.0033	4.2821	3.9424	3.7135	
		0.80	0.10	0.0031	0.0032	0.0030	0.0025	0.0026	0.0025	3.3834	3.0901	2.8120

A Tabela 3.2 mostra o EQM para o modelo gerado com $\lambda = 3$. Nesse cenário percebemos que quando a soma $\alpha_1 + \alpha_2$ aproxima-se de 1, existe uma ligeira vantagem dos estimadores de MVC dos parâmetros α_1 e α_2 . Nos demais cenários os estimadores de MVC são equivalentes aos outros estimadores em termos de EQM. O estimador de MVC do parâmetro λ é melhor que os outros estimadores em termos de EQM mesmo para amostras grandes, apesar de que para $T = 300$ os ganhos são menores.

A Tabela 3.3 apresenta o EQM para o modelo obtido com $\lambda = 5$, em que se observa um comportamento semelhante ao encontrado na Tabela 3.2; ressaltamos entretanto um aumento significativo dos valores do EQM para λ , sobretudo para valores próximos da região de não estacionariedade. Outra observação feita se refere ao valor do EQM ser inversamente proporcional ao tamanho amostral, ou seja, a medida que T aumenta o EQM diminui. Além disso, em termos de EQM os estimadores de YW de α_1 e α_2 são equivalentes aos estimadores de MQC, contudo o estimador de MQC de λ tem uma leve vantagem com relação ao estimador de YW para λ .

Avaliando os estimadores em termos de EAM nas Tabelas 3.4, 3.5 e 3.6 constatamos uma certa superioridade dos estimadores de MVC. Para o modelo gerado com $\lambda = 1$ os estimadores de MVC de α_1 , α_2 e λ obtiveram melhores resultados, ou seja, menores EAM's. A medida que o tamanho da amostra aumenta os estimadores de YW e MQC dos parâmetros α_1 , α_2 e λ são equivalentes. Quando $\alpha_1 + \alpha_2$ é próximo de 1, os estimadores de MVC são superiores para todos os parâmetros e para todos os tamanhos amostrais considerados.

Ainda em termos de EAM temos que os estimadores de YW e de MQC do parâmetro λ são equivalentes, sendo o de MQC ligeiramente melhor. A medida que o parâmetro λ aumenta, os valores dos EAM's aumentam, principalmente na fronteira da região de não estacionariedade. Similarmente ao que acontece com o critério de comparação EQM, a medida que o tamanho amostral cresce os valores do EAM decrescem.

Tabela 3.4: EAM dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 1$.

T	α_1	α_2	$\hat{\alpha}_1$			$\hat{\alpha}_2$			$\hat{\lambda}$			
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	
100	0.10	0.10	0.0568	0.0575	0.0573	0.0576	0.0586	0.0583	0.4618	0.4565	0.4537	
		0.35	0.0596	0.0603	0.0590	0.1201	0.1177	0.1157	0.5296	0.5170	0.5123	
		0.55	0.0576	0.0574	0.0549	0.1222	0.1158	0.1121	0.5102	0.4824	0.4688	
		0.80	0.0525	0.0503	0.0470	0.0967	0.0811	0.0741	0.8451	0.7452	0.6622	
	0.35	0.10	0.1160	0.1157	0.1130	0.0578	0.0590	0.0583	0.5305	0.5213	0.5160	
		0.35	0.0926	0.0936	0.0895	0.1006	0.0981	0.0944	0.5616	0.5379	0.5236	
		0.55	0.0818	0.0825	0.0778	0.0991	0.0869	0.0811	0.9310	0.8523	0.7770	
	0.55	0.10	0.1211	0.1201	0.1159	0.0583	0.0604	0.0579	0.4909	0.4736	0.4636	
		0.35	0.0885	0.0897	0.0832	0.0961	0.0896	0.0833	0.8260	0.7489	0.6757	
		0.80	0.10	0.0970	0.0983	0.0884	0.0581	0.0632	0.0587	0.6788	0.6056	0.5181
	200	0.10	0.10	0.0479	0.0482	0.0478	0.0476	0.0479	0.0474	0.5188	0.5165	0.5165
			0.35	0.0483	0.0485	0.0472	0.0958	0.0943	0.0927	0.5299	0.5231	0.5243
0.55			0.0466	0.0467	0.0439	0.0899	0.0863	0.0848	0.4494	0.4352	0.4399	
0.80			0.0391	0.0384	0.0346	0.0576	0.0509	0.0460	0.5625	0.5166	0.4501	
0.35		0.10	0.0929	0.0924	0.0912	0.0480	0.0483	0.0471	0.5215	0.5164	0.5184	
		0.35	0.0682	0.0685	0.0655	0.0722	0.0708	0.0680	0.4533	0.4414	0.4413	
		0.55	0.0553	0.0556	0.0518	0.0635	0.0582	0.0534	0.5228	0.4866	0.4279	
0.55		0.10	0.0880	0.0874	0.0858	0.0476	0.0481	0.0451	0.4308	0.4212	0.4285	
		0.35	0.0617	0.0626	0.0577	0.0654	0.0626	0.0572	0.4745	0.4408	0.3808	
		0.80	0.10	0.0641	0.0646	0.0575	0.0495	0.0508	0.0454	0.4261	0.3927	0.3322
300		0.10	0.10	0.0436	0.0436	0.0431	0.0444	0.0445	0.0439	0.5410	0.5395	0.5400
			0.35	0.0434	0.0434	0.0421	0.0852	0.0839	0.0830	0.5235	0.5187	0.5209
	0.55		0.0412	0.0413	0.0389	0.0755	0.0731	0.0740	0.4317	0.4213	0.4341	
	0.80		0.0319	0.0317	0.0290	0.0435	0.0398	0.0361	0.4262	0.3994	0.3528	
	0.35	0.10	0.0816	0.0813	0.0809	0.0433	0.0434	0.0424	0.5155	0.5122	0.5167	
		0.35	0.0565	0.0568	0.0547	0.0601	0.0589	0.0572	0.4068	0.3980	0.4084	
		0.55	0.0445	0.0447	0.0411	0.0496	0.0463	0.0422	0.3904	0.3690	0.3241	
	0.55	0.10	0.0749	0.0742	0.0744	0.0438	0.0440	0.0414	0.4074	0.4008	0.4171	
		0.35	0.0507	0.0512	0.0468	0.0530	0.0514	0.0466	0.3744	0.3544	0.3068	
		0.80	0.10	0.0523	0.0525	0.0472	0.0440	0.0447	0.0398	0.3356	0.3164	0.2714

Tabela 3.5: EAM dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 3$.

T	α_1	α_2	$\hat{\alpha}_1$			$\hat{\alpha}_2$			$\hat{\lambda}$			
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	
100	0.10	0.10	0.0580	0.0586	0.0584	0.0582	0.0593	0.0595	0.3189	0.3232	0.3227	
		0.35	0.0616	0.0620	0.0617	0.0866	0.0857	0.0842	0.5005	0.5000	0.4907	
		0.55	0.0567	0.0562	0.0552	0.0838	0.0799	0.0771	0.6890	0.6696	0.6440	
		0.80	0.0509	0.0485	0.0474	0.0868	0.0714	0.0684	2.3559	2.0654	1.9675	
	0.35	0.10	0.0843	0.0846	0.0830	0.0588	0.0601	0.0597	0.4816	0.4836	0.4719	
		0.35	0.0809	0.0818	0.0797	0.0844	0.0831	0.0811	0.9079	0.8868	0.8573	
		0.55	0.0767	0.0767	0.0751	0.0927	0.0805	0.0779	2.6324	2.4146	2.3434	
	0.55	0.10	0.0851	0.0850	0.0816	0.0587	0.0605	0.0594	0.6333	0.6272	0.6019	
		0.35	0.0837	0.0851	0.0824	0.0908	0.0845	0.0819	2.2969	2.0979	2.0140	
		0.80	0.10	0.0829	0.0848	0.0807	0.0551	0.0596	0.0574	1.7684	1.5997	1.5187
	200	0.10	0.10	0.0470	0.0473	0.0471	0.0481	0.0486	0.0485	0.2651	0.2657	0.2641
			0.35	0.0466	0.0468	0.0464	0.0594	0.0589	0.0579	0.3840	0.3823	0.3746
0.55			0.0448	0.0447	0.0436	0.0544	0.0529	0.0510	0.5108	0.5012	0.4836	
0.80			0.0371	0.0365	0.0353	0.0493	0.0434	0.0413	1.4626	1.3537	1.2967	
0.35		0.10	0.0592	0.0593	0.0582	0.0473	0.0477	0.0469	0.3592	0.3568	0.3495	
		0.35	0.0558	0.0564	0.0549	0.0567	0.0562	0.0546	0.5836	0.5758	0.5553	
		0.55	0.0507	0.0509	0.0493	0.0568	0.0524	0.0502	1.3991	1.3101	1.2598	
0.55		0.10	0.0569	0.0571	0.0552	0.0469	0.0474	0.0461	0.4490	0.4466	0.4262	
		0.35	0.0582	0.0584	0.0561	0.0605	0.0574	0.0553	1.2818	1.2059	1.1507	
		0.80	0.10	0.0553	0.0563	0.0534	0.0458	0.0474	0.0460	1.0733	1.0073	0.9305
300		0.10	0.10	0.0436	0.0436	0.0431	0.0444	0.0445	0.0439	0.2487	0.2488	0.2472
			0.35	0.0412	0.0413	0.0409	0.0489	0.0485	0.0477	0.3315	0.3296	0.3224
	0.55		0.0378	0.0379	0.0371	0.0445	0.0435	0.0416	0.4348	0.4293	0.4112	
	0.80		0.0309	0.0305	0.0295	0.0376	0.0342	0.0324	1.1510	1.0888	1.0360	
	0.35	0.10	0.0494	0.0494	0.0484	0.0420	0.0423	0.0417	0.2986	0.2979	0.2915	
		0.35	0.0459	0.0461	0.0449	0.0462	0.0459	0.0443	0.4706	0.4637	0.4410	
		0.55	0.0424	0.0421	0.0407	0.0457	0.0428	0.0410	1.0168	0.9717	0.9277	
	0.55	0.10	0.0481	0.0481	0.0461	0.0422	0.0424	0.0413	0.3848	0.3816	0.3591	
		0.35	0.0464	0.0467	0.0447	0.0479	0.0466	0.0444	0.9339	0.8864	0.8415	
		0.80	0.10	0.0451	0.0454	0.0426	0.0415	0.0420	0.0400	0.8064	0.7667	0.7098

Tabela 3.6: EAM dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 5$.

T	α_1	α_2	$\hat{\alpha}_1$			$\hat{\alpha}_2$			$\hat{\lambda}$			
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	
100	0.10	0.10	0.0598	0.0608	0.0610	0.0578	0.0592	0.0593	0.5308	0.5430	0.5442	
		0.35	0.0602	0.0607	0.0603	0.0821	0.0815	0.0807	0.7812	0.7878	0.7848	
		0.55	0.0564	0.0560	0.0552	0.0829	0.0791	0.0767	1.1394	1.1152	1.0906	
		0.80	0.0512	0.0486	0.0478	0.0838	0.0683	0.0666	3.9184	3.4276	3.3359	
	0.35	0.10	0.0810	0.0813	0.0805	0.0580	0.0593	0.0592	0.7706	0.7780	0.7715	
		0.35	0.0819	0.0826	0.0821	0.0840	0.0826	0.0811	1.5046	1.4611	1.4395	
		0.55	0.0786	0.0780	0.0768	0.0909	0.0788	0.0774	4.3396	4.0081	3.9407	
	0.55	0.10	0.0821	0.0820	0.0799	0.0568	0.0587	0.0579	1.0310	1.0205	1.0030	
		0.35	0.0820	0.0838	0.0825	0.0890	0.0831	0.0819	3.8448	3.5140	3.4345	
	0.80	0.10	0.0830	0.0845	0.0825	0.0558	0.0595	0.0589	2.9564	2.6661	2.5896	
	200	0.10	0.10	0.0469	0.0473	0.0474	0.0477	0.0481	0.0480	0.4114	0.4143	0.4145
			0.35	0.0471	0.0475	0.0471	0.0561	0.0558	0.0554	0.6002	0.6012	0.5954
0.55			0.0441	0.0440	0.0431	0.0534	0.0520	0.0507	0.8389	0.8252	0.8031	
0.80			0.0367	0.0361	0.0354	0.0480	0.0421	0.0408	2.4538	2.2669	2.1999	
0.35		0.10	0.0568	0.0570	0.0564	0.0468	0.0472	0.0471	0.5590	0.5593	0.5532	
		0.35	0.0567	0.0570	0.0562	0.0573	0.0565	0.0556	0.9566	0.9407	0.9205	
		0.55	0.0516	0.0514	0.0503	0.0562	0.0515	0.0504	2.3426	2.2166	2.1552	
0.55		0.10	0.0566	0.0566	0.0554	0.0474	0.0479	0.0475	0.7353	0.7301	0.7143	
		0.35	0.0562	0.0566	0.0553	0.0586	0.0562	0.0549	2.1190	1.9901	1.9314	
0.80		0.10	0.0546	0.0556	0.0535	0.0467	0.0479	0.0464	1.7617	1.6472	1.5853	
300		0.10	0.10	0.0414	0.0415	0.0415	0.0421	0.0424	0.0424	0.3588	0.3606	0.3605
			0.35	0.0401	0.0403	0.0399	0.0457	0.0455	0.0449	0.5089	0.5088	0.5010
	0.55		0.0378	0.0378	0.0372	0.0428	0.0421	0.0410	0.7228	0.7138	0.6958	
	0.80		0.0302	0.0299	0.0293	0.0371	0.0337	0.0323	1.8952	1.7939	1.7335	
	0.35	0.10	0.0471	0.0473	0.0463	0.0418	0.0420	0.0418	0.4709	0.4713	0.4629	
		0.35	0.0452	0.0453	0.0444	0.0458	0.0455	0.0447	0.7762	0.7678	0.7467	
		0.55	0.0410	0.0407	0.0399	0.0444	0.0415	0.0404	1.7417	1.6633	1.6205	
	0.55	0.10	0.0464	0.0465	0.0455	0.0420	0.0422	0.0415	0.6002	0.5975	0.5787	
		0.35	0.0463	0.0466	0.0455	0.0480	0.0464	0.0455	1.5516	1.4853	1.4307	
	0.80	0.10	0.0444	0.0449	0.0436	0.0410	0.0414	0.0404	1.3872	1.3253	1.2581	

De acordo com as Tabelas 3.7, 3.8 e 3.9, referentes ao viés dos estimadores, verificamos melhor desempenho do estimador de MVC do parâmetro λ , já com relação aos parâmetros α_1 e α_2 não podemos concluir a superioridade de algum dos métodos de estimação estudados em termos de viés. Nos cenários em que $\lambda = 1$ os estimadores de MVC têm melhor desempenho nas situações de proximidade da região de não estacionariedade, entretanto, os estimadores de MVC e MQC de α_1 e α_2 são equivalentes nas demais regiões.

Ainda em termos de viés os estimadores de YW e de MQC dos parâmetros α_1 e α_2 se apresentaram equivalentes e o estimador de MQC do parâmetro λ teve uma ligeira vantagem com relação ao estimador de YW do parâmetro λ . Além disso, conforme o valor de λ aumenta verifica-se que na proximidade da região de não estacionariedade os três estimadores de λ são mais viesados. Para grandes amostras o viés é reduzido nos três métodos estudados, entretanto os três estimadores de λ continuam viesados.

Podemos notar em geral, que em termos de EQM e EAM os estimadores obtidos pelo método de MVC apresentaram um desempenho melhor, especialmente para o parâmetro λ , enquanto que em termos de viés este bom comportamento fica restrito ao parâmetro λ , com resultados mais relevantes nas proximidades da região de não estacionariedade, pois em termos de viés os estimadores para os parâmetros α_1 e α_2 se alternaram, ou seja, em alguns cenários os estimadores de YW apresentaram menor viés, em outros os estimadores de MQC forneceram melhores resultados e nos demais cenários os estimadores de MVC obtiveram viés menor.

Por outro lado, comparando o desempenho dos estimadores de MQC e YW de λ , percebemos que o estimador de MQC teve um melhor desempenho que o de YW, em termos de EQM, EAM e viés. A partir da simulação ainda verificamos que a medida que o tamanho amostral aumenta, EQM, EAM e viés dos estimadores tendem a zero.

Através deste estudo simulado ainda podemos concluir que os estimadores de YW, MQC e MVC para os parâmetros do processo INARCH(2) são assintoticamente não viesados e assintoticamente consistentes, ou seja, quando o tamanho da amostra aumenta o EQM, EAM e viés das estimativas tendem para zero.

O desempenho dos estimadores de MVC mostrou-se melhor que o desempenho dos estimadores de YW e MQC, em termos de EQM, EAM e Viés, principalmente no que se refere ao parâmetro λ nas proximidades da região de não estacionariedade. Este é um resultado esperado, devido ao método de MVC utilizar a informação completa da distribuição condicional. Entretanto, em alguns cenários os ganhos obtidos com os estimadores de MVC não são muito grandes e portanto é recomendável utilizar os estimadores de YW e MQC, pois estes são obtidos mais facilmente.

Tabela 3.7: Viés dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 1$.

T	α_1	α_2	$\hat{\alpha}_1$			$\hat{\alpha}_2$			$\hat{\lambda}$			
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	
100	0.10	0.10	0.0047	0.0056	0.0062	0.0036	0.0059	0.0066	0.4605	0.4549	0.4525	
		0.35	0.0119	0.0123	0.0128	-0.1013	-0.0961	-0.0952	0.5256	0.5120	0.5086	
		0.55	0.0111	0.0105	0.0114	-0.1078	-0.0974	-0.0964	0.4935	0.4601	0.4532	
		0.80	0.0058	-0.0017	-0.0008	-0.0902	-0.0669	-0.0604	0.8091	0.6569	0.5765	
	0.35	0.10	-0.0949	-0.0933	-0.0931	0.0072	0.0099	0.0111	0.5256	0.5154	0.5120	
		0.35	-0.0413	-0.0420	-0.0416	-0.0725	-0.0643	-0.0629	0.5456	0.5164	0.5092	
		0.55	-0.0151	-0.0287	-0.0265	-0.0796	-0.0545	-0.0494	0.9010	0.7849	0.7071	
	0.55	0.10	-0.1035	-0.1007	-0.1007	0.0120	0.0160	0.0162	0.4750	0.4527	0.4512	
		0.35	-0.0192	-0.0291	-0.0260	-0.0656	-0.0444	-0.0410	0.7926	0.6788	0.6093	
	0.80	0.10	-0.0827	-0.0833	-0.0729	0.0150	0.0266	0.0236	0.6418	0.5325	0.4518	
	200	0.10	0.10	-0.0100	-0.0095	-0.0097	-0.0152	-0.0144	-0.0142	0.5188	0.5165	0.5165
			0.35	-0.0071	-0.0069	-0.0069	-0.0840	-0.0812	-0.0819	0.5293	0.5225	0.5240
0.55			-0.0023	-0.0026	-0.0031	-0.0789	-0.0737	-0.0762	0.4418	0.4260	0.4359	
0.80			-0.0038	-0.0079	-0.0066	-0.0485	-0.0372	-0.0337	0.5111	0.4401	0.3892	
0.35		0.10	-0.0797	-0.0787	-0.0799	-0.0082	-0.0071	-0.0070	0.5208	0.5156	0.5182	
		0.35	-0.0332	-0.0337	-0.0357	-0.0507	-0.0466	-0.0465	0.4416	0.4277	0.4353	
		0.55	-0.0073	-0.0146	-0.0135	-0.0427	-0.0297	-0.0266	0.4732	0.4152	0.3693	
0.55		0.10	-0.0729	-0.0714	-0.0748	-0.0020	-0.0004	-0.0007	0.4244	0.4137	0.4263	
		0.35	-0.0095	-0.0155	-0.0145	-0.0342	-0.0228	-0.0200	0.4200	0.3654	0.3247	
0.80		0.10	-0.0426	-0.0424	-0.0378	0.0048	0.0100	0.0084	0.3744	0.3209	0.2856	
300		0.10	0.10	-0.0179	-0.0176	-0.0179	-0.0192	-0.0186	-0.0187	0.5410	0.5395	0.5400
			0.35	-0.0119	-0.0118	-0.0121	-0.0775	-0.0755	-0.0763	0.5233	0.5185	0.5208
	0.55		-0.0091	-0.0094	-0.0099	-0.0684	-0.0649	-0.0690	0.4290	0.4180	0.4333	
	0.80		-0.0043	-0.0071	-0.0063	-0.0332	-0.0258	-0.0245	0.3681	0.3226	0.2983	
	0.35	0.10	-0.0719	-0.0713	-0.0730	-0.0135	-0.0128	-0.0130	0.5154	0.5121	0.5167	
		0.35	-0.0306	-0.0309	-0.0336	-0.0422	-0.0393	-0.0408	0.4003	0.3905	0.4064	
		0.55	-0.0050	-0.0102	-0.0102	-0.0298	-0.0210	-0.0188	0.3341	0.2973	0.2727	
	0.55	0.10	-0.0627	-0.0616	-0.0660	-0.0055	-0.0045	-0.0057	0.4045	0.3975	0.4166	
		0.35	-0.0070	-0.0110	-0.0110	-0.0247	-0.0175	-0.0156	0.3178	0.2842	0.2640	
	0.80	0.10	-0.0285	-0.0284	-0.0276	0.0001	0.0032	0.0033	0.2841	0.2518	0.2401	

Tabela 3.8: Viés dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 3$.

T	α_1	α_2	$\hat{\alpha}_1$			$\hat{\alpha}_2$			$\hat{\lambda}$			
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	
100	0.10	0.10	0.0142	0.0151	0.0154	0.0101	0.0125	0.0133	0.0044	-0.0085	-0.0127	
		0.35	0.0211	0.0214	0.0222	-0.0506	-0.0440	-0.0426	0.1873	0.1489	0.1365	
		0.55	0.0151	0.0139	0.0151	-0.0574	-0.0459	-0.0437	0.3550	0.2660	0.2371	
		0.80	0.0039	-0.0038	-0.0032	-0.0796	-0.0559	-0.0528	2.2034	1.7259	1.6147	
	0.35	0.10	-0.0411	-0.0394	-0.0386	0.0146	0.0176	0.0179	0.1716	0.1463	0.1402	
		0.35	-0.0194	-0.0205	-0.0191	-0.0469	-0.0378	-0.0355	0.6328	0.5509	0.5135	
		0.55	-0.0101	-0.0243	-0.0242	-0.0747	-0.0486	-0.0460	2.4847	2.1282	2.0464	
	0.55	0.10	-0.0524	-0.0499	-0.0474	0.0167	0.0209	0.0212	0.3048	0.2471	0.2233	
		0.35	-0.0133	-0.0245	-0.0230	-0.0602	-0.0375	-0.0356	2.1342	1.7921	1.6884	
	0.80	0.10	-0.0662	-0.0674	-0.0615	0.0114	0.0236	0.0212	1.5549	1.2285	1.1233	
	200	0.10	0.10	0.0010	0.0015	0.0016	-0.0010	0.0001	0.0002	0.0944	0.0883	0.0875
			0.35	0.0035	0.0035	0.0036	-0.0283	-0.0249	-0.0244	0.1647	0.1462	0.1429
0.55			0.0028	0.0021	0.0025	-0.0295	-0.0237	-0.0223	0.2338	0.1899	0.1743	
0.80			-0.0035	-0.0078	-0.0074	-0.0385	-0.0270	-0.0253	1.2189	1.0045	0.9422	
0.35		0.10	-0.0227	-0.0215	-0.0214	0.0000	0.0012	0.0015	0.1536	0.1405	0.1382	
		0.35	-0.0089	-0.0097	-0.0086	-0.0233	-0.0184	-0.0173	0.3103	0.2695	0.2473	
		0.55	-0.0048	-0.0126	-0.0123	-0.0354	-0.0219	-0.0201	1.1707	1.0022	0.9403	
0.55		0.10	-0.0233	-0.0219	-0.0206	0.0025	0.0043	0.0047	0.1752	0.1475	0.1331	
		0.35	-0.0046	-0.0115	-0.0106	-0.0317	-0.0195	-0.0182	1.0413	0.8843	0.8182	
0.80		0.10	-0.0302	-0.0306	-0.0273	0.0017	0.0073	0.0066	0.8075	0.6536	0.5758	
300		0.10	0.10	-0.0036	-0.0034	-0.0033	-0.0073	-0.0067	-0.0066	0.1315	0.1281	0.1274
			0.35	-0.0012	-0.0011	-0.0008	-0.0220	-0.0198	-0.0196	0.1539	0.1410	0.1382
	0.55		-0.0012	-0.0016	-0.0010	-0.0211	-0.0172	-0.0162	0.1912	0.1610	0.1471	
	0.80		-0.0036	-0.0066	-0.0063	-0.0274	-0.0200	-0.0182	0.8997	0.7638	0.7027	
	0.35	0.10	-0.0156	-0.0148	-0.0153	-0.0009	-0.0001	0.0002	0.1218	0.1134	0.1150	
		0.35	-0.0083	-0.0089	-0.0080	-0.0162	-0.0130	-0.0121	0.2336	0.2071	0.1889	
		0.55	-0.0005	-0.0062	-0.0055	-0.0256	-0.0164	-0.0153	0.7480	0.6453	0.5923	
	0.55	0.10	-0.0156	-0.0145	-0.0139	-0.0005	0.0007	0.0013	0.1410	0.1212	0.1110	
		0.35	-0.0036	-0.0084	-0.0077	-0.0198	-0.0113	-0.0104	0.6781	0.5701	0.5188	
	0.80	0.10	-0.0166	-0.0167	-0.0144	-0.0019	0.0015	0.0011	0.5338	0.4352	0.3792	

Tabela 3.9: Viés dos estimadores para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , fixando $\lambda = 5$.

T	α_1	α_2	$\hat{\alpha}_1$			$\hat{\alpha}_2$			$\hat{\lambda}$			
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	
100	0.10	0.10	0.0182	0.0192	0.0194	0.0122	0.0146	0.0151	-0.1720	-0.1939	-0.1986	
		0.35	0.0206	0.0208	0.0215	-0.0411	-0.0341	-0.0327	0.1881	0.1224	0.1026	
		0.55	0.0148	0.0135	0.0137	-0.0544	-0.0426	-0.0407	0.5472	0.4000	0.3695	
		0.80	0.0030	-0.0051	-0.0050	-0.0772	-0.0534	-0.0516	3.6570	2.8680	2.7697	
	0.35	0.10	-0.0344	-0.0324	-0.0311	0.0129	0.0157	0.0161	0.1971	0.1529	0.1371	
		0.35	-0.0177	-0.0189	-0.0186	-0.0454	-0.0358	-0.0341	1.0318	0.8918	0.8590	
		0.55	-0.0106	-0.0252	-0.0246	-0.0733	-0.0470	-0.0459	4.0865	3.5099	3.4206	
	0.55	0.10	-0.0468	-0.0440	-0.0420	0.0144	0.0186	0.0187	0.4483	0.3494	0.3202	
		0.35	-0.0146	-0.0262	-0.0254	-0.0577	-0.0351	-0.0341	3.5690	3.0149	2.9247	
	0.80	0.10	-0.0650	-0.0659	-0.0633	0.0108	0.0228	0.0220	2.6217	2.0714	1.9813	
	200	0.10	0.10	0.0050	0.0056	0.0058	0.0013	0.0023	0.0026	-0.0241	-0.0340	-0.0368
			0.35	0.0062	0.0063	0.0065	-0.0196	-0.0161	-0.0153	0.1222	0.0891	0.0803
0.55			0.0028	0.0020	0.0021	-0.0276	-0.0219	-0.0207	0.3458	0.2747	0.2569	
0.80			-0.0035	-0.0080	-0.0077	-0.0387	-0.0275	-0.0262	2.0746	1.7334	1.6552	
0.35		0.10	-0.0147	-0.0136	-0.0130	0.0029	0.0042	0.0047	0.1120	0.0898	0.0803	
		0.35	-0.0087	-0.0095	-0.0086	-0.0232	-0.0183	-0.0177	0.5166	0.4480	0.4233	
		0.55	-0.0036	-0.0118	-0.0116	-0.0362	-0.0221	-0.0212	1.9509	1.6673	1.6075	
0.55		0.10	-0.0208	-0.0193	-0.0184	0.0028	0.0047	0.0049	0.2480	0.1992	0.1849	
		0.35	-0.0054	-0.0118	-0.0111	-0.0292	-0.0173	-0.0170	1.7028	1.4286	1.3768	
0.80		0.10	-0.0286	-0.0290	-0.0275	0.0014	0.0069	0.0069	1.3239	1.0645	0.9904	
300		0.10	0.10	-0.0004	-0.0002	-0.0001	-0.0017	-0.0010	-0.0009	0.0250	0.0193	0.0181
			0.35	0.0001	0.0000	0.0000	-0.0143	-0.0119	-0.0111	0.1255	0.1053	0.0979
	0.55		-0.0030	-0.0035	-0.0031	-0.0180	-0.0141	-0.0134	0.3003	0.2525	0.2360	
	0.80		-0.0032	-0.0061	-0.0059	-0.0273	-0.0199	-0.0186	1.4929	1.2770	1.2035	
	0.35	0.10	-0.0082	-0.0075	-0.0075	-0.0020	-0.0011	-0.0010	0.0948	0.0801	0.0784	
		0.35	-0.0052	-0.0058	-0.0057	-0.0162	-0.0130	-0.0122	0.3460	0.3035	0.2886	
		0.55	-0.0014	-0.0070	-0.0069	-0.0250	-0.0159	-0.0152	1.2927	1.1159	1.0732	
	0.55	0.10	-0.0130	-0.0119	-0.0108	-0.0004	0.0007	0.0007	0.1822	0.1501	0.1346	
		0.35	-0.0025	-0.0070	-0.0065	-0.0200	-0.0120	-0.0115	1.0906	0.9214	0.8708	
	0.80	0.10	-0.0160	-0.0159	-0.0147	-0.0030	0.0001	0.0000	0.9367	0.7787	0.7205	

3.2 Aplicação

Os dados desta aplicação referem-se ao número de nascidos vivos do sexo masculino de mães residentes na cidade de Riachuelo no estado do Rio Grande do Norte de janeiro de 1994 até dezembro de 2013, totalizando 240 valores mensais. Estas informações podem ser encontradas no site do Ministério da Saúde do Brasil, disponível em *www.datasus.gov.br* no campo informações de saúde (TABNET). A Tabela 3.10 apresenta as estatísticas descritivas do conjunto de dados descrito acima.

Tabela 3.10: Estatísticas descritivas da série

Mínimo	Média	Mediana	Variância	Máximo	Curtose	Assimetria
0.0000	4.6170	4.0000	6.7144	13.0000	2.8765	0.3767

Com base nos valores descritos na Tabela 3.10 verificamos que a variância amostral é maior que a média amostral, ou seja, é razoável assumir sobredispersão para este conjunto de dados. Assim iremos modelar esta série utilizando modelos que considerem esta característica dos dados e posteriormente compararemos os resultados obtidos com modelos úteis para modelar dados equidispersos, ou seja, média igual a variância.

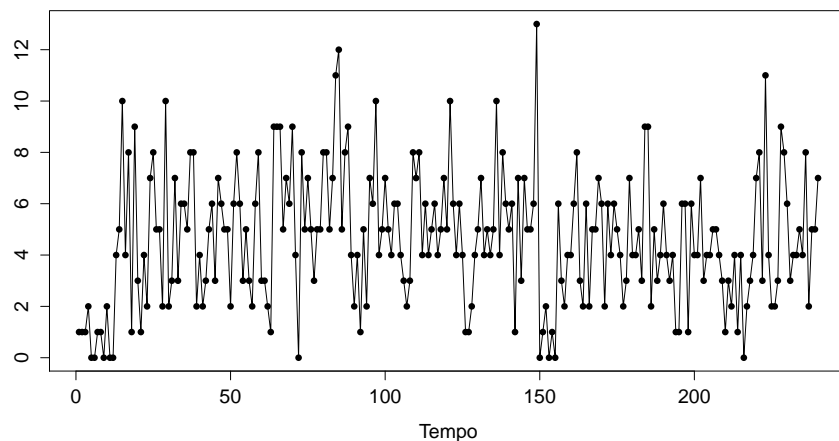


Figura 3.1: Série de contagem do número de meninos nascidos de mães residentes na cidade de Riachuelo-RN de 1994 até 2013.

A Figura 3.1 apresenta a série temporal do número de meninos nascidos vivos. Analisando a Figura 3.2 verificamos um decaimento exponencial da fac , o que caracteriza um modelo autorregressivo e estacionário, e por intermédio da função de autocorrelação parcial é razoável assumir que a ordem do processo autorregressivo de valores inteiros para modelar a série estudada pode ser 2 parâmetros autorregressivos.

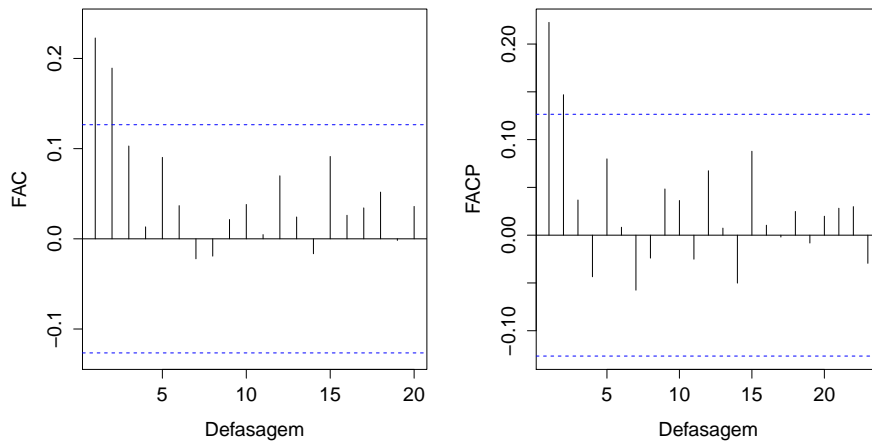


Figura 3.2: Função de autocorrelação e autocorrelação parcial da série.

Portanto, usaremos os processos autorregressivos de valores inteiros INARCH(2) e INAR(2) para modelar este conjunto de dados. O processo INAR(2) foi proposto por Alzaid e Al-Osh (1990) e é útil na modelagem de dados equidispersos.

Observando a Tabela 3.11 verificamos que através dos critérios *Akaike information criterion* (AIC) de Akaike (1974) e *Bayesian information criterion* (BIC) de Schwarz (1978) o modelo que melhor ajusta a série descrita, é o modelo INARCH(2). O modelo INAR(2) apresenta média e variância estimada igual a 4.66, enquanto que utilizando o modelo INARCH(2) através das estimativas por MVC obtemos média e variância estimadas iguais a 4.66 e 5.00, respectivamente, ou seja, o modelo INARCH(2) estima melhor a variância do processo, contida na Tabela 3.10. Isto já era esperado, pois o modelo INARCH é útil para modelar sobredispersão, ou seja, variância maior que a média.

Tabela 3.11: Parâmetros estimados dos Modelos INAR(2) e INARCH(2).

Modelo	Método	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	AIC	BIC	RMS
INAR(2)	MVC	3.1743	0.1726	0.1466	1118.2	1125.1	2.4750
INARCH(2)	MVC	2.8065	0.2126	0.1863	1113.0	1120.0	2.4784
		(0.0225)	(0.0037)	(0.0038)			
		YW	3.0612	0.1900			
	MQC	3.1121	0.1835	0.1491			

Os valores entre parênteses na Tabela 3.11 referem-se aos erros padrão das estimativas de máxima verossimilhança condicional. A Figura 3.3 mostra a função de autocorrelação amostral dos resíduos do modelo INARCH(2) expressos em (2.29) e através dela observamos que as autocorrelações amostrais dos resíduos estão contidas no intervalo $(-0.12, 0.12)$, assim é razoável assumir resíduos não autocorrelacionados, o que sugere um bom ajuste do modelo INARCH(2) aplicado ao conjunto de dados estudado.

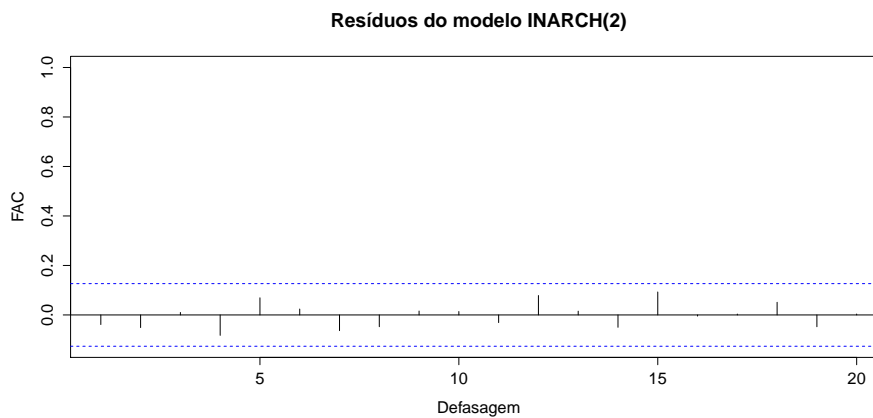


Figura 3.3: Função de autocorrelação dos resíduos do processo INARCH(2).

Capítulo 4

Previsão no processo INARCH(2)

Na literatura dos processos de valores inteiros geralmente a esperança condicional é utilizada como previsão, pois esta minimiza o erro quadrático médio condicional (EQMC), entretanto este valor muitas vezes não é coerente, uma vez que a esperança condicional pode ser um valor não inteiro, por esse motivo algumas discussões têm sido feitas na literatura para resolver esse problema. Freeland e McCabe (2004) apresentam a mediana da distribuição condicional h passos à frente como uma previsão coerente, pois esta previsão minimiza o erro absoluto médio condicional (EAMC). Freeland e McCabe (2005) desenvolveram uma metodologia geral para produzir previsões coerentes em séries temporais de baixa contagem. Nessa metodologia é permitido que o processo de chegadas siga qualquer distribuição discreta, diferentemente do processo Poisson INAR(1). Jung e Tremayne (2006) estenderam algumas das ideias usadas por Freeland e McCabe (2004) para ordens maiores, em particular para o modelo INAR(2), a partir de um método computacional intensivo para gerar previsões. Bu e McCabe (2008) apresentam a distribuição condicional h passos à frente do processo INAR(1) e utilizam a mediana da distribuição condicional como uma previsão h passos à frente. Silva, Pereira e Silva (2009) apresentam um método Bayesiano para obter previsão no modelo INAR(1).

Neste Capítulo apresentamos diferentes propostas de previsão um, dois e h passos à frente para o modelo INARCH(2). As previsões são baseadas nos critérios de minimização do EQMC, EAMC e em uma expressão recursiva para a previsão h passos à frente. Apresentamos neste capítulo a construção do intervalo de predição um passo à frente.

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência que segue um processo INARCH(2). Suponha que X_1, \dots, X_T são conhecidos e estamos interessados em prever o valor futuro de X_{T+h} para $h = 1, 2, 3, \dots$

Uma forma de propor previsões h passos à frente para $h = 1, 2, 3, \dots$ é selecioná-las de tal forma que minimizem o EQMC e o EAMC. A seguir encontraremos o valor de \hat{X}_{T+h} que minimiza o EQMC dado na seguinte equação.

$$E[(X_{T+h} - \hat{X}_{T+h})^2 | X_T, X_{T-1}]. \quad (4.1)$$

Desenvolvendo a expressão (4.1), temos

$$E[(X_{T+h}^2 - 2X_{T+h}\hat{X}_{T+h} + \hat{X}_{T+h}^2) | X_T, X_{T-1}],$$

aplicando propriedades do valor esperado, obtemos a seguinte expressão

$$E[X_{T+h}^2 | X_T, X_{T-1}] - 2\hat{X}_{T+h}E[X_{T+h} | X_T, X_{T-1}] + \hat{X}_{T+h}^2. \quad (4.2)$$

Para minimizar a expressão (4.1), desenvolvemos (4.2) em relação a \hat{X}_{T+h} e igualamos a derivada a zero, para obtermos

$$\begin{aligned} -2E[X_{T+h} | X_T, X_{T-1}] + 2\hat{X}_{T+h} &= 0 \\ \hat{X}_{T+h} &= E[X_{T+h} | X_T, X_{T-1}]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Então \hat{X}_{T+h} é um ponto crítico e de fato é um mínimo, pois a segunda derivada de (4.2) com relação a \hat{X}_{T+h} é 2 que é positivo. Então o valor que minimiza o EQMC é $\hat{X}_{T+h} = E[X_{T+h} | X_T, X_{T-1}]$, assim usando este critério de minimização, a esperança condicional de X_{T+h} dado X_T e X_{T-1} pode ser usada para prever X_{T+h} , porém este valor pode ser um valor não inteiro.

Outra possibilidade de encontrar previsões h passos à frente é escolhê-las de tal forma que minimizem o EAMC, então devemos encontrar o valor de a que minimiza o EAMC, dado por

$$E[|X_{T+h} - a| | X_T, X_{T-1}], \text{ para } h = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

Um resultado clássico garante que o valor a que minimiza a expressão (4.4) é a mediana da distribuição condicional $X_{T+h} | X_T, X_{T-1}$, que denotaremos por $X_{T(h)}^{(med)}$. Logo, segundo o critério de minimização do EAMC a mediana condicional de $X_{T+h} | X_T, X_{T-1}$ pode ser usada como previsão h passos à frente de X_{T+h} . Para $h = 1$ conhecemos a distribuição condicional de $X_{T+1} | X_T, X_{T-1}$ e para $h = 2$ encontramos neste trabalho a distribuição condicional dois passos à frente, entretanto a mediana dessas distribuições não tem forma fechada e por este motivo utilizaremos uma aproximação da mediana

condicional um passo à frente que também apresentaremos neste capítulo.

4.1 Previsão 1 passo à frente

Nesta seção iremos apresentar três possíveis estimadores para fazer previsões em um processo INARCH(2) um passo à frente. O primeiro minimiza o EQMC e é baseado na esperança condicional de $X_{T+1}|X_T, X_{T-1}$, o segundo minimiza o EAMC e é a mediana exata da distribuição condicional um passo a frente e o terceiro fundamenta-se em uma aproximação para a mediana exata da distribuição condicional.

Sabemos que a distribuição condicional um passo à frente do processo INARCH(2) segue uma distribuição Poisson de parâmetro $M_T = \alpha_1 X_T + \alpha_2 X_{T-1} + \lambda$, assim

$$\hat{X}_{T+1} = E[X_{T+1}|X_T, X_{T-1}] = \alpha_1 X_T + \alpha_2 X_{T-1} + \lambda. \quad (4.5)$$

Entretanto, não é possível garantir que a equação (4.5) sempre resulte em um valor inteiro, o que seria interessante, pois estamos buscando prever o comportamento de um processo que gera valores inteiros. Para resolver isso, propomos como previsão um passo à frente para o modelo INARCH(2) a seguinte expressão

$$X_{T(1)}^{(imp)} = \langle \hat{\alpha}_1 X_T + \hat{\alpha}_2 X_{T-1} + \hat{\lambda} \rangle ,$$

em que $\langle a \rangle$ representa o inteiro mais próximo do valor real a e $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ e $\hat{\lambda}$ são estimadores para α_1, α_2 e λ respectivamente. Então, $X_{T(1)}^{(imp)}$ é uma previsão para X_{T+1} dado que X_1, X_2, \dots, X_T são conhecidos.

A mediana da distribuição condicional um passo à frente, que corresponde à mediana de uma distribuição Poisson, que denotaremos por $X_{T(1)}^{(med)}$, não tem uma expressão explícita, por este motivo utilizaremos alguns resultados referentes à mediana da distribuição Poisson para encontrar uma boa aproximação desta mediana exata. Seja W uma variável aleatória tal que $W \sim Po(m)$, então

$$m - \log(2) \leq \text{mediana}(W) < m + \frac{1}{3}, \quad (4.6)$$

este resultado foi proposto por Chen e Rubin (1986) e provado por Choi (1994). Adell e Jodrá (2005) provaram que os limites em (4.6) são os melhores possíveis para a mediana da distribuição Poisson, um aspecto importante é que o intervalo

$$\left[m - \log(2), m + \frac{1}{3} \right),$$

só contém dois valores inteiros, $\lceil m - \log(2) \rceil$ e $\lfloor m + \frac{1}{3} \rfloor$, ou seja, se $\lceil m - \log(2) \rceil \neq \lfloor m + \frac{1}{3} \rfloor$, então

$$\text{mediana}(W) = \lceil m - \log(2) \rceil \text{ ou } \text{mediana}(W) = \lfloor m + \frac{1}{3} \rfloor,$$

em que $\lceil a \rceil = \min\{n : n \in \mathbb{N} ; n \geq a\}$ e $\lfloor a \rfloor = \max\{m : m \in \mathbb{N} ; m \leq a\}$, $\lceil a \rceil$ é conhecido como o teto de a e $\lfloor a \rfloor$ é conhecido como o piso ou parte inteira de a .

Uma aproximação para a mediana exata da distribuição condicional um passo à frente no modelo INARCH(1) foi proposta por Zea (2013). Dado que esta distribuição condicional um passo à frente é Poisson e que a distribuição de $X_{T+1}|X_T, X_{T-1}$ no modelo INARCH(2) também é Poisson, usaremos a mesma aproximação para propor a seguinte previsão um passo à frente, que corresponde à aproximação da mediana de uma distribuição Poisson com parâmetro $M_T = \alpha_1 X_T + \alpha_2 X_{T-1} + \lambda$, denotada por $X_{T(1)}^{(map)}$ e pode ser expressa como

$$X_{T(1)}^{(map)} = \left\lceil \hat{\alpha}_1 X_T + \hat{\alpha}_2 X_{T-1} + \hat{\lambda} - \frac{2}{3} \right\rceil, \quad (4.7)$$

em que, $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\lambda}$ são estimadores dos parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$ respectivamente. Portanto, temos como previsão 1 passo à frente no processo INARCH(2) as seguintes propostas

$$\begin{cases} X_{T(1)}^{(med)}, & \text{a mediana exata condicional de } X_{T+1}|X_T, X_{T-1}, \\ X_{T(1)}^{(map)}, & \text{a mediana aproximada de } X_{T+1}|X_T, X_{T-1}, \\ X_{T(1)}^{(imp)}, & \text{o inteiro mais próximo de } E[X_{T+1}|X_T, X_{T-1}]. \end{cases}$$

Uma consideração importante a fazer, é que $X_{T(1)}^{(map)}$ é uma ótima aproximação para a mediana exata e ainda apresenta uma forma fechada, o que facilita sua obtenção, logo a mediana aproximada é uma previsão mais útil na prática.

4.2 Previsão 2 passos à frente

Nesta seção propomos quatro previsões diferentes para o modelo INARCH(2) dois passos à frente. A primeira minimiza o EQMC e é baseada na equação (4.3). Sabemos que $\hat{X}_{T+1} = \alpha_1 X_T + \alpha_2 X_{T-1} + \lambda$, então iremos obter $\hat{X}_{T+2} = E[X_{T+2}|X_T, X_{T-1}]$ utilizando a forma recursiva (2.14) proposta nesse trabalho e os Teoremas 1.2 de Durrett (2010) e 20.1 de Billingsley (2008) associados a operações com o valor esperado

condicional, como mostramos a seguir

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{T+2} &= E[X_{T+2}|X_T, X_{T-1}] & (4.8) \\
&= E[(\alpha_1 * X_{T+1} + \alpha_2 * X_T + e_{T+2})|X_T, X_{T-1}] \\
&= E[(\alpha_1 * X_{T+1}|X_T, X_{T-1}) + (\alpha_2 * X_T|X_T, X_{T-1}) + (e_{T+2}|X_T, X_{T-1})] \\
&= E[\alpha_1 * X_{T+1}|X_T, X_{T-1}] + E[\alpha_2 * X_T|X_T, X_{T-1}] + E[e_{T+2}|X_T, X_{T-1}];
\end{aligned}$$

utilizando o resultado do operador thinning Poisson apresentado em (2.3), temos que $\alpha_2 * X_T|X_T, X_{T-1} \sim Po(\alpha_2 X_T)$, logo $E[\alpha_2 * X_T|X_T, X_{T-1}] = \alpha_2 X_T$. Desta maneira continuamos a resolver a equação aplicando resultados de esperança condicional até obtermos uma expressão recursiva

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{T+2} &= E[\alpha_1 * X_{T+1}|X_T, X_{T-1}] + \alpha_2 X_T + \lambda \\
&= E\{E[\alpha_1 * X_{T+1}|X_T, X_{T-1}]|X_{T+1}\} + \alpha_2 X_T + \lambda \\
&= E\{E[\alpha_1 * X_{T+1}|X_{T+1}]|X_T, X_{T-1}\} + \alpha_2 X_T + \lambda \\
&= E\{\alpha_1 X_{T+1}|X_T, X_{T-1}\} + \alpha_2 X_T + \lambda \\
&= \alpha_1 E\{X_{T+1}|X_T, X_{T-1}\} + \alpha_2 X_T + \lambda \\
&= \alpha_1 \hat{X}_{T+1} + \alpha_2 X_T + \lambda.
\end{aligned}$$

Note que a última igualdade é válida pela equação (4.5). Portanto \hat{X}_{T+2} é uma expressão recursiva em termos de \hat{X}_{T+1} e X_T , ou seja,

$$\hat{X}_{T+2} = \alpha_1 \hat{X}_{T+1} + \alpha_2 X_T + \lambda, \quad (4.9)$$

como não podemos garantir sempre que \hat{X}_{T+2} é um valor inteiro, utilizaremos como previsão a seguinte expressão

$$X_{T(2)}^{(imp)} = \langle \hat{\alpha}_1 \hat{X}_{T+1} + \hat{\alpha}_2 X_T + \hat{\lambda} \rangle,$$

em que $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ e $\hat{\lambda}$ são estimadores de $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$, respectivamente.

A seguinte proposição apresenta a distribuição condicional de X_{T+2} dado X_T e X_{T-1} , que será usada para fazer a segunda e terceira propostas de previsão dois passos à frente no modelo INARCH(2).

Proposição 4.2.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de v.a. inteiras não-negativas que seguem o processo INARCH(2), então a distribuição condicional de $X_{T+2}|X_T, X_{T-1}$ é*

dada por

$$P(X_{T+2} = k | X_T, X_{T-1}) = \lambda^k C_{m, \alpha_1, \alpha_2, \lambda} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \sum_{l=0}^i \left(\frac{\alpha_2 x_T}{\lambda} \right)^j \binom{j}{i} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 x_T} \right)^i \frac{S(i, l) u^l}{j!(k-j)!},$$

em que $m = \alpha_1 x_T + \alpha_2 x_{T-1} + \lambda$, $C_{m, \alpha_1, \alpha_2, \lambda} = \exp[-m - \alpha_2 x_T - \lambda + e^{-\alpha_1 m}]$, $S(i, l) = 1/l! \sum_{v=0}^l (-1)^v \binom{l}{v} (l-v)^i$ é o número de Stirling de segunda espécie e $u = e^{-\alpha_1 m}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} P(X_{T+2} = k | X_T, X_{T-1}) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_{T+2} = k | X_{T+1} = n, X_T = x_T, X_{T-1} = x_{T-1}) \\ &\quad \times P(X_{T+1} = n | X_T = x_T, X_{T-1} = x_{T-1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_{T+2} = k | X_{T+1} = n, X_T = x_T) \\ &\quad \times P(X_{T+1} = n | X_T = x_T, X_{T-1} = x_{T-1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{e^{(-\alpha_1 n - \alpha_2 x_T - \lambda)} (\alpha_1 n + \alpha_2 x_T + \lambda)^k}{k!} \right] \left[\frac{e^{-m} m^n}{n!} \right] \right\} \\ &= \frac{e^{(-m - \alpha_2 x_T - \lambda)}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [e^{(-\alpha_1 n)} (\alpha_1 n + \alpha_2 x_T + \lambda)^k] \left[\frac{m^n}{n!} \right] \right\} \\ &= \frac{e^{(-m - \alpha_2 x_T - \lambda)}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(e^{-\alpha_1 m})^n}{n!} [(\alpha_1 n + \alpha_2 x_T + \lambda)^k] \right\} \\ &= \frac{e^{(-m - \alpha_2 x_T - \lambda)}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(e^{-\alpha_1 m})^n}{n!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\alpha_1 n + \alpha_2 x_T)^j \lambda^{k-j} \right\} \\ &= \frac{\lambda^k e^{(-m - \alpha_2 x_T - \lambda)}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(e^{-\alpha_1 m})^n}{n!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{1}{\lambda^j} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (\alpha_1 n)^i (\alpha_2 x_T)^{j-i} \right\} \\ &= \frac{\lambda^k e^{(-m - \alpha_2 x_T - \lambda)}}{k! \exp(-e^{-\alpha_1 m})} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{\alpha_2 x_T}{\lambda} \right)^j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 x_T} \right)^i \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} n^i \frac{\exp(-e^{-\alpha_1 m}) (e^{-\alpha_1 m})^n}{n!} \end{aligned}$$

$$P(X_{T+2} = k | X_T, X_{T-1}) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-m - \alpha_2 x_T - \lambda + e^{-\alpha_1} m) \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \binom{k}{j} \left(\frac{\alpha_2 x_T}{\lambda}\right)^j \times \binom{j}{i} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 x_T}\right)^i E[W^i],$$

em que $W \sim Po(u)$, $u = e^{-\alpha_1} m$, em que o i -ésimo momento da Poisson é expresso por (2.18). Assim

$$\begin{aligned} P(X_{T+2} = k | X_T, X_{T-1}) &= \frac{\lambda^k}{k!} C_{m, \alpha_1, \alpha_2, \lambda} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \frac{k!}{j!(k-j)!} \left(\frac{\alpha_2 x_T}{\lambda}\right)^j \binom{j}{i} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 x_T}\right)^i \\ &\quad \times \sum_{l=0}^i S(i, l) u^l \\ &= \lambda^k C_{m, \alpha_1, \alpha_2, \lambda} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \sum_{l=0}^i \left(\frac{\alpha_2 x_T}{\lambda}\right)^j \binom{j}{i} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 x_T}\right)^i \frac{S(i, l) u^l}{j!(k-j)!}. \end{aligned}$$

□

Então usando a distribuição dois passos à frente apresentada em (4.2.1) e dado que X_1, X_2, \dots, X_T são conhecidos, propomos prever X_{T+2} através de

$$\begin{cases} X_{T(2)}^{(imp)}, \text{ o inteiro mais próximo de } E[X_{T+2} | X_T, X_{T-1}], \\ X_{T(2)}^{(med)}, \text{ a mediana exata condicional de } X_{T+2} | X_T, X_{T-1}, \\ X_{T(2)}^{(map)}, \text{ uma expressão recursiva que depende de } X_{T(1)}^{(map)}. \end{cases}$$

A previsão $X_{T(2)}^{(map)}$ é uma proposta dada pela fórmula recursiva

$$X_{T(2)}^{(map)} = \left[\hat{\alpha}_1 X_{T(1)}^{(map)} + \hat{\alpha}_2 X_T + \hat{\lambda} - \frac{2}{3} \right], \quad (4.10)$$

sendo $X_{T(1)}^{(map)}$ a aproximação para a mediana da distribuição $X_{T+1} | X_T, X_{T-1}$ dada na equação (4.7) e $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\lambda}$ são estimadores dos parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$ respectivamente.

4.3 Previsão h passos à frente

Para fazer previsões h passos à frente, para $h \geq 3$, no processo INARCH(2) propomos duas abordagens. A idéia da primeira abordagem é minimizar o EQMC, fornecendo

como previsão h passos à frente o inteiro mais próximo da $E[X_{T+h}|X_T, X_{T-1}]$. A seguir encontraremos uma expressão recursiva para esta esperança condicional. Para isso vejamos primeiramente que a esperança condicional três passos à frente pode ser obtida de maneira similar a equação (4.8).

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{T+3} &= E[X_{T+3}|X_T, X_{T-1}] & (4.11) \\
&= E[(\alpha_1 * X_{T+2} + \alpha_2 * X_{T+1} + e_{T+3})|X_T, X_{T-1}] \\
&= E[(\alpha_1 * X_{T+2}|X_T, X_{T-1}) + (\alpha_2 * X_{T+1}|X_T, X_{T-1}) + (e_{T+3}|X_T, X_{T-1})] \\
&= E[\alpha_1 * X_{T+2}|X_T, X_{T-1}] + E[\alpha_2 * X_{T+1}|X_T, X_{T-1}] + E[e_{T+3}|X_T, X_{T-1}],
\end{aligned}$$

utilizando os teoremas associados à esperança condicional, temos

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{T+3} &= E[\alpha_1 * X_{T+2}|X_T, X_{T-1}] + E[\alpha_2 * X_{T+1}|X_T, X_{T-1}] + \lambda \\
&= E\{E[\alpha_1 * X_{T+2}|X_T, X_{T-1}]\} + E\{E[\alpha_2 * X_{T+1}|X_T, X_{T-1}]\} + \lambda \\
&= E\{E[\alpha_1 * X_{T+2}|X_{T+2}]\} + E\{E[\alpha_2 * X_{T+1}|X_{T+1}]\} + \lambda \\
&= E\{\alpha_1 X_{T+2}|X_T, X_{T-1}\} + E\{\alpha_2 X_{T+1}|X_T, X_{T-1}\} + \lambda \\
&= \alpha_1 E\{X_{T+2}|X_T, X_{T-1}\} + \alpha_2 E\{X_{T+1}|X_T, X_{T-1}\} + \lambda \\
&= \alpha_1 \hat{X}_{T+2} + \alpha_2 \hat{X}_{T+1} + \lambda,
\end{aligned}$$

logo,

$$\hat{X}_{T+3} = \alpha_1 \hat{X}_{T+2} + \alpha_2 \hat{X}_{T+1} + \lambda.$$

De forma análoga as equações anteriores (4.8) e (4.11), obtemos a esperança condicional 4 passos a frente, dada por

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{T+4} &= E[X_{T+4}|X_T, X_{T-1}] \\
&= E[(\alpha_1 * X_{T+3} + \alpha_2 * X_{T+2} + e_{T+4})|X_T, X_{T-1}] \\
&= E[(\alpha_1 * X_{T+3}|X_T, X_{T-1}) + (\alpha_2 * X_{T+2}|X_T, X_{T-1}) + (e_{T+4}|X_T, X_{T-1})] \\
&= E[\alpha_1 * X_{T+3}|X_T, X_{T-1}] + E[\alpha_2 * X_{T+2}|X_T, X_{T-1}] + E[e_{T+4}|X_T, X_{T-1}],
\end{aligned}$$

utilizando os teoremas associados à esperança condicional, temos

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{T+4} &= E[\alpha_1 * X_{T+3} | X_T, X_{T-1}] + E[\alpha_2 * X_{T+2} | X_T, X_{T-1}] + \lambda \\
&= E\{E[\alpha_1 * X_{T+3} | X_T, X_{T-1}] | X_{T+3}\} + E\{E[\alpha_2 * X_{T+2} | X_T, X_{T-1}] | X_{T+2}\} + \lambda \\
&= E\{E[\alpha_1 * X_{T+3} | X_{T+3}] | X_T, X_{T-1}\} + E\{E[\alpha_2 * X_{T+2} | X_{T+2}] | X_T, X_{T-1}\} + \lambda \\
&= E\{\alpha_1 X_{T+3} | X_T, X_{T-1}\} + E\{\alpha_2 X_{T+2} | X_T, X_{T-1}\} + \lambda \\
&= \alpha_1 E\{X_{T+3} | X_T, X_{T-1}\} + \alpha_2 E\{X_{T+2} | X_T, X_{T-1}\} + \lambda \\
&= \alpha_1 \hat{X}_{T+3} + \alpha_2 \hat{X}_{T+2} + \lambda.
\end{aligned}$$

Então,

$$\hat{X}_{T+4} = \alpha_1 \hat{X}_{T+3} + \alpha_2 \hat{X}_{T+2} + \lambda.$$

Logo, para qualquer $h \geq 3$ podemos escrever \hat{X}_{T+h} como uma expressão recursiva em termos de \hat{X}_{T+h-1} e \hat{X}_{T+h-2} como é enunciado na seguinte proposição.

Proposição 4.3.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de v.a. inteiras não-negativas que seguem o processo INARCH(2), então a esperança condicional h passos a frente é dada por*

$$E[X_{T+h} | X_T, X_{T-1}] = \alpha_1 \hat{X}_{T+h-1} + \alpha_2 \hat{X}_{T+h-2} + \lambda, \quad h \geq 3.$$

Demonstração. A prova é feita utilizando a forma recursiva apresentada em (2.14) e propriedades de esperança condicional. Temos que

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{T+h} &= E[X_{T+h} | X_T, X_{T-1}] \\
&= E[(\alpha_1 * X_{T+h-1} + \alpha_2 * X_{T+h-2} + e_{T+h}) | X_T, X_{T-1}] \\
&= E[\alpha_1 * X_{T+h-1} | X_T, X_{T-1}] + E[\alpha_2 * X_{T+h-2} | X_T, X_{T-1}] \\
&\quad + E[e_{T+h} | X_T, X_{T-1}] \\
&= E\{E[\alpha_1 * X_{T+h-1} | X_T, X_{T-1}] | X_{T+h-1}\} \\
&\quad + E\{E[\alpha_2 * X_{T+h-2} | X_T, X_{T-1}] | X_{T+h-2}\} + E[e_{T+h}],
\end{aligned}$$

usando (2.3) e os teoremas associados a esperança condicional, temos

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{T+h} &= E\{E[\alpha_1 * X_{T+h-1}|X_{T+h-1}]|X_T, X_{T-1}\} \\
&\quad + E\{E[\alpha_2 * X_{T+h-2}|X_{T+h-2}]|X_T, X_{T-1}\} + \lambda \\
&= E\{\alpha_1 X_{T+h-1}|X_T, X_{T-1}\} + E\{\alpha_2 X_{T+h-2}|X_T, X_{T-1}\} + \lambda \\
&= \alpha_1 E\{X_{T+h-1}|X_T, X_{T-1}\} + \alpha_2 E\{X_{T+h-2}|X_T, X_{T-1}\} + \lambda \\
&= \alpha_1 \hat{X}_{T+h-1} + \alpha_2 \hat{X}_{T+h-2} + \lambda.
\end{aligned}$$

□

Então obtivemos uma forma de encontrar \hat{X}_{T+h} para qualquer $h \geq 1$, sendo \hat{X}_{T+1} conhecido, \hat{X}_{T+2} dado pela equação (4.9) e \hat{X}_{T+h} , para $h \geq 3$, é obtido pela Proposição 4.3.1. Mas como não podemos garantir que \hat{X}_{T+h} é sempre um valor inteiro, utilizaremos como previsão o inteiro mais próximo denotado a seguir

$$X_{T(h)}^{(imp)} = \langle \hat{\alpha}_1 \hat{X}_{T+h-1} + \hat{\alpha}_2 \hat{X}_{T+h-2} + \hat{\lambda} \rangle ,$$

em que $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ e $\hat{\lambda}$ são estimadores de $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$ respectivamente.

Para $h \geq 3$ não podemos utilizar como previsão o valor que minimiza o EAMC, ou seja, a mediana h passos à frente $X_{T(h)}^{(med)}$, pois não conhecemos a distribuição condicional h passos à frente. Como uma previsão alternativa propomos usar uma expressão recursiva que depende das previsões anteriores nos passos $h - 1$ e $h - 2$, a expressão é dada a seguir.

Dado que X_1, X_2, \dots, X_T são conhecidos propomos prever X_{T+h} por

$$X_{T(h)}^{(map)} = \left[\hat{\alpha}_1 X_{T(h-1)}^{(map)} + \hat{\alpha}_2 X_{T(h-2)}^{(map)} + \hat{\lambda} - \frac{2}{3} \right], \text{ para } h \geq 3, \quad (4.12)$$

em que $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ e $\hat{\lambda}$ são estimadores de $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$ respectivamente.

Portanto, para fazer previsões h passos à frente, para $h \geq 3$, propomos prever X_{T+h} através de

$$\begin{cases} X_{T(h)}^{(imp)}, \text{ o inteiro mais próximo de } E[X_{T+h}|X_T, X_{T-1}], \\ X_{T(h)}^{(map)}, \text{ uma expressão recursiva que depende de } X_{T(h-1)}^{(map)} \text{ e } X_{T(h-2)}^{(map)}. \end{cases}$$

4.4 Intervalo de Predição um passo à frente

Dado que X_1, X_2, \dots, X_T são conhecidos, podemos construir um intervalo de predição unilateral ou bilateral com $100(1 - \gamma)\%$ de confiança para X_{T+1} . Primeiro vamos construir um intervalo bilateral com $100(1 - \gamma)\%$ de confiança. Para isso vamos seguir os seguintes passos:

- Encontramos os estimadores dos parâmetros do processo INARCH(2), denotados por $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ e $\hat{\lambda}$. Sabendo que $X_{T+1}|X_T, X_{T-1}$ segue uma distribuição Poisson de parâmetro M_{T+1} , então o parâmetro estimado será $\widehat{M}_{T+1} = \hat{\alpha}_1 X_T + \hat{\alpha}_2 X_{T-1} + \hat{\lambda}$;
- Encontramos o maior valor inteiro l_{T+1} que satisfaz a desigualdade

$$P(W < l_{T+1}) \leq \frac{\gamma}{2},$$

em que W é uma variável aleatória Poisson com parâmetro \widehat{M}_{T+1} ;

- Encontrar o menor valor inteiro u_{T+1} que satisfaz a desigualdade

$$P(W \leq u_{T+1}) \geq 1 - \frac{\gamma}{2}.$$

Note que,

$$\begin{aligned} P(l_{T+1} \leq W \leq u_{T+1}) &= P(W \leq u_{T+1}) - P(W < l_{T+1}) \\ &\geq 1 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} \\ &= 1 - \gamma, \end{aligned}$$

logo $[l_{T+1}, u_{T+1}]$ é um intervalo de predição para X_{T+1} com confiança maior ou igual a $100(1 - \gamma)\%$.

Agora iremos construir um intervalo de predição para X_{T+1} apenas com o limite superior de confiança $100(1 - \gamma)\%$. Seguindo os passos

- Encontramos $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ e $\hat{\lambda}$;
- Encontramos o menor valor inteiro u_{T+1} que satisfaz a desigualdade

$$P(W \leq u_{T+1}) \geq 1 - \gamma. \quad (4.13)$$

Note que,

$$\begin{aligned} P(0 \leq W \leq u_{T+1}) &= P(W \leq u_{T+1}) - P(W < 0) \\ &\geq 1 - \gamma - 0 \\ &= 1 - \gamma, \end{aligned}$$

logo $[0, u_{T+1}]$ é um intervalo de predição para X_{T+1} com confiança maior ou igual a $100(1 - \gamma)\%$.

Capítulo 5

Estudo por simulação de Monte Carlo das previsões no processo INARCH(2)

Neste capítulo é apresentado um estudo via simulação de Monte Carlo que compara o desempenho das previsões propostas um, dois e h passos à frente apresentadas no Capítulo 4. Também estudamos o comportamento dos estimadores de YW, MQC e MVC dos parâmetros do modelo INARCH(2) nas previsões em termos de erro quadrático médio (EQM) e erro absoluto médio (EAM). Apresentamos ainda um conjunto de dados reais que conta o número mensal de meninos nascidos vivos na cidade de Riachuelo-RN, prevemos valores desta série temporal até cinco passos à frente e por fim apresentamos o intervalo de predição um passo à frente com 95% de confiança para esta série.

Apresentação inicial

O comportamento das previsões um, dois e h passos à frente no processo INARCH(2) propostas neste trabalho são avaliados nesta seção. Utilizando 5000 réplicas de Monte Carlo foram obtidas as estimativas para os parâmetros α_1 , α_2 e λ do processo, para os três tamanhos amostrais $T = 100, 200$ e 300 , $\lambda = 1, 3$ e 5 e para as combinações possíveis dos parâmetros $\alpha_1 = 0.1, 0.35, 0.55, 0.8$ e $\alpha_2 = 0.1, 0.35, 0.55, 0.8$, de forma que a condição de estacionariedade ($\alpha_1 + \alpha_2 < 1$) do processo INARCH(2) fosse satisfeita. A partir das estimativas dos parâmetros obtivemos as previsões estimadas para um, dois e $h = 3, 4, 5$ passos à frente.

A implementação computacional foi feita no software R (R Development Core Team,

2011). As propostas de previsões apresentadas neste trabalho foram comparadas em termos de EQM e EAM.

5.1 Resultados simulados 1 passo à frente

Nesta seção iremos apresentar um estudo de simulação de Monte Carlo, para comparar a performance das diferentes previsões um passo à frente apresentadas no Capítulo 4. Tais predições são: mediana aproximada da distribuição condicional um passo à frente, inteiro mais próximo da esperança condicional um passo à frente e mediana exata da distribuição condicional um passo à frente.

A Tabela 5.1 apresenta o EQM e EAM das previsões propostas um passo à frente denotadas por $X_{T(1)}^{(map)}$, $X_{T(1)}^{(imp)}$ e $X_{T(1)}^{(med)}$, que representam a mediana aproximada da distribuição condicional um passo à frente, o inteiro mais próximo da esperança condicional um passo à frente e a mediana exata da distribuição condicional um passo à frente, respectivamente. Podemos observar a partir desta tabela que a medida que o parâmetro λ aumenta, o EQM e o EAM das previsões também aumentam em todos os cenários simulados. Verificamos ainda que o EQM e o EAM das previsões sempre crescem nas proximidades da região de não estacionariedade.

Em termos de EQM e EAM percebemos que o comportamento das previsões $X_{T(1)}^{(map)}$ e $X_{T(1)}^{(med)}$ são equivalentes para todos os cenários, o que era esperado pois a aproximação da mediana é muito boa. Em termos de EQM verificamos que temos algum ganho ao utilizarmos a previsão $X_{T(1)}^{(imp)}$, ou seja, utilizando esta previsão obtemos um EQM menor em grande parte dos cenários com ganhos maiores nas proximidades da região de não estacionariedade. Através deste estudo simulado identificamos que em termos de EQM e EAM as previsões obtidas utilizando os estimadores de MVC forneceram menores EQM e EAM. Este aspecto é mais perceptível nas proximidades da região de não estacionariedade, ou seja, para os outros cenários o comportamento das previsões são equivalentes para todos os estimadores abordados neste trabalho.

Em geral, as Tabelas 5.2 e 5.3 que mostram o EQM e EAM das previsões utilizando os estimadores de YW, MQC e MVC para $T = 200$ e $T = 300$, respectivamente, apresentam conclusões semelhantes às expostas na Tabela 5.1. Avaliando o comportamento das previsões nestas tabelas verificamos que o EQM e o EAM apontam valores menores para cenários com maior tamanho amostral.

Tabela 5.2: EQM e EAM das previsões 1 passo à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 200$.

Previsão	α_1	α_2	EQM												EAM												
			$\lambda = 1$				$\lambda = 3$				$\lambda = 5$				$\lambda = 1$				$\lambda = 3$				$\lambda = 5$				
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	
$X_{T(1)}^{(map)}$	0.10	0.10	1.126	1.129	1.126	3.738	3.750	3.750	6.260	6.258	6.260	9.189	9.189	9.189	0.780	0.781	0.779	1.496	1.499	1.499	1.961	1.961	1.961	2.387	2.384	2.383	
		0.35	1.715	1.719	1.713	5.346	5.340	5.345	9.219	9.196	9.219	14.390	14.392	14.392	0.967	0.970	0.967	1.822	1.823	1.822	2.387	2.387	2.387	2.994	2.993	2.993	
		0.80	10.028	9.985	9.979	29.531	29.457	29.401	51.370	50.935	50.826	90.965	91.12	90.965	1.306	1.303	1.305	2.339	2.339	2.339	4.277	4.270	4.264	5.653	5.628	5.621	
		0.10	1.776	1.785	1.780	5.415	5.415	5.405	9.091	9.095	9.112	17.758	17.758	17.758	0.974	0.978	0.977	1.805	1.805	1.805	2.395	2.392	2.392	2.992	2.992	2.995	
	0.35	0.10	3.712	3.682	3.678	10.394	10.385	10.387	17.764	17.732	17.758	31.326	31.226	31.226	1.446	1.440	1.436	2.548	2.548	2.548	3.315	3.316	3.316	3.316	3.316	3.315	
		0.35	10.917	10.802	10.759	31.389	31.326	31.226	51.266	50.928	50.745	90.928	90.928	90.928	2.497	2.486	2.479	4.391	4.384	4.376	5.645	5.624	5.624	5.624	5.616	5.616	
		0.80	10.633	10.606	10.626	32.293	31.990	31.947	52.576	52.384	52.268	90.928	90.928	90.928	1.316	1.314	1.313	2.338	2.339	2.340	2.974	2.975	2.975	2.975	2.972	2.973	
		0.10	1.028	1.028	1.028	29.531	29.457	29.401	51.370	50.935	50.826	90.928	90.928	90.928	2.436	2.427	2.425	4.277	4.270	4.264	5.653	5.628	5.628	5.628	5.621	5.621	
	$X_{T(1)}^{(imp)}$	0.10	0.10	1.065	1.069	1.069	3.648	3.659	3.661	6.276	6.276	6.276	9.151	9.140	9.151	0.781	0.782	0.782	1.489	1.494	1.494	1.966	1.970	1.966	2.382	2.382	2.382
			0.35	1.697	1.696	1.701	5.321	5.319	5.324	9.151	9.151	9.140	14.311	14.311	14.311	0.976	0.976	0.977	1.825	1.825	1.825	2.384	2.386	2.386	2.989	2.989	2.989
			0.80	10.001	9.995	9.960	29.531	29.457	29.401	51.370	50.935	50.826	90.928	90.928	90.928	1.324	1.324	1.322	2.343	2.343	2.343	4.271	4.260	4.260	5.645	5.622	5.621
			0.10	1.761	1.768	1.757	5.414	5.414	5.406	9.054	9.037	9.024	17.662	17.662	17.662	0.993	0.994	0.991	1.814	1.814	1.814	2.396	2.396	2.396	2.996	2.996	2.996
0.35		0.10	3.677	3.686	3.672	10.379	10.384	10.380	17.689	17.670	17.670	31.250	31.145	31.250	1.459	1.459	1.455	2.555	2.553	2.553	3.307	3.303	3.303	3.303	3.303	3.303	
		0.35	10.822	10.747	10.736	31.276	31.145	31.250	51.099	50.877	50.820	90.928	90.928	90.928	2.502	2.488	2.487	4.385	4.374	4.380	5.641	5.627	5.627	5.627	5.627	5.627	
		0.80	10.522	10.522	10.522	32.209	31.894	31.927	52.456	52.408	52.277	90.928	90.928	90.928	1.319	1.315	1.312	2.351	2.351	2.342	2.978	2.978	2.978	2.978	2.978	2.978	
		0.10	1.535	1.463	1.458	31.720	31.783	31.707	51.298	50.972	50.978	90.928	90.928	90.928	2.463	2.455	2.455	4.389	4.396	4.393	5.611	5.594	5.594	5.594	5.594	5.593	
0.10		0.10	1.140	1.139	1.136	3.746	3.751	3.751	6.263	6.259	6.264	9.191	9.191	9.191	0.782	0.782	0.780	1.497	1.498	1.498	1.962	1.962	1.962	2.384	2.383	2.383	
		0.35	1.720	1.722	1.717	5.347	5.347	5.345	9.217	9.198	9.191	14.384	14.384	14.384	0.968	0.969	0.968	1.822	1.822	1.822	2.387	2.384	2.384	2.988	2.988	2.988	
		0.80	10.026	9.979	9.979	29.530	29.462	29.397	51.367	50.935	50.825	90.928	90.928	90.928	1.304	1.302	1.305	2.338	2.338	2.338	4.270	4.264	4.264	5.653	5.628	5.621	
		0.10	1.781	1.788	1.784	5.425	5.425	5.408	9.086	9.091	9.106	17.757	17.757	17.757	0.975	0.979	0.977	1.807	1.807	1.807	2.391	2.391	2.391	2.991	2.991	2.991	
0.35	0.10	3.710	3.684	3.678	10.391	10.385	10.393	17.766	17.738	17.738	31.260	31.261	31.260	1.444	1.439	1.435	2.548	2.548	2.548	3.315	3.315	3.315	3.315	3.315	3.315		
	0.35	10.918	10.796	10.763	31.390	31.326	31.260	51.261	50.932	50.738	90.928	90.928	90.928	2.498	2.485	2.480	4.391	4.384	4.375	5.645	5.624	5.624	5.624	5.616	5.616		
	0.80	10.636	10.605	10.625	32.293	31.988	31.948	52.570	52.378	52.271	90.928	90.928	90.928	1.316	1.312	1.314	2.339	2.339	2.340	2.974	2.975	2.975	2.975	2.972	2.972		
	0.10	1.576	1.522	1.498	31.793	31.832	31.722	51.296	50.920	50.956	90.928	90.928	90.928	2.465	2.461	2.451	4.393	4.393	4.384	5.609	5.591	5.591	5.591	5.591	5.596		

Tabela 5.3: EQM e EAM das previsões 1 passo à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 300$.

Previsão	α_1	α_2	EQM												EAM											
			$\lambda = 1$				$\lambda = 5$				$\lambda = 1$				$\lambda = 5$				$\lambda = 1$				$\lambda = 5$			
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC
$X_{T(1)}^{(map)}$	0.10	0.10	1.035	1.036	1.032	3.553	3.549	3.549	6.593	6.613	6.608	9.707	9.707	9.707	0.772	0.772	0.771	1.470	1.470	1.469	1.469	2.013	2.016	2.015	2.015	
		0.35	1.825	1.829	1.824	5.646	5.650	5.635	9.696	9.707	9.707	13.919	13.919	13.919	0.989	0.989	0.988	1.864	1.864	1.863	1.863	2.443	2.443	2.445	2.446	
		0.55	2.949	2.945	2.950	9.105	9.084	9.074	13.976	13.976	13.945	17.227	17.227	17.227	1.289	1.290	1.291	2.362	2.362	2.358	2.357	2.963	2.963	2.963	2.963	
		0.80	10.583	10.552	10.497	31.230	31.089	31.071	51.178	51.223	51.178	51.223	51.223	51.223	2.468	2.468	2.463	4.363	4.351	4.353	4.351	5.646	5.631	5.637	5.637	
	0.35	0.10	1.749	1.743	1.744	5.175	5.175	5.175	9.523	9.523	9.523	17.331	17.331	17.331	0.977	0.975	0.976	1.786	1.786	1.789	1.789	2.424	2.425	2.421	2.421	
		0.35	3.700	3.689	3.689	10.516	10.503	10.474	17.363	17.320	17.331	17.331	17.331	1.462	1.458	1.461	2.524	2.524	2.524	2.518	2.518	2.524	3.274	3.274	3.277	3.277
		0.55	10.296	10.249	10.222	29.757	29.765	29.703	50.893	50.893	50.893	50.893	50.893	2.449	2.447	2.444	4.315	4.310	4.307	4.307	5.638	5.630	5.630	5.630		
		0.80	30.311	30.220	30.200	86.226	86.200	86.200	141.133	141.133	141.133	141.133	141.133	2.283	2.283	2.283	4.267	4.262	4.262	4.262	5.724	5.724	5.721	5.721		
	$X_{T(1)}^{(imp)}$	0.10	0.10	1.002	1.003	1.004	3.507	3.508	3.510	6.595	6.616	6.611	9.769	9.769	9.769	0.775	0.776	0.776	1.475	1.475	1.476	1.476	2.023	2.023	2.028	2.026
			0.35	1.813	1.805	1.800	5.631	5.630	5.624	9.735	9.749	9.749	13.948	13.948	13.948	0.999	0.999	0.997	1.867	1.867	1.868	1.868	2.462	2.463	2.469	2.469
			0.55	2.923	2.925	2.912	9.013	9.013	9.049	13.920	13.942	13.942	13.942	13.942	1.303	1.303	1.298	2.357	2.357	2.357	2.357	2.973	2.970	2.973	2.974	
			0.80	10.547	10.537	10.489	31.155	31.002	30.994	51.336	51.154	51.067	51.067	51.067	2.478	2.476	2.471	4.361	4.351	4.351	4.351	5.650	5.640	5.640	5.640	
0.35		0.10	1.721	1.727	1.714	5.197	5.215	5.203	9.489	9.479	9.489	17.253	17.253	17.253	0.982	0.985	0.980	1.796	1.796	1.799	1.799	2.432	2.430	2.430	2.430	
		0.35	3.645	3.638	3.620	10.436	10.404	10.378	17.265	17.253	17.253	17.253	17.253	1.465	1.461	1.458	2.518	2.514	2.514	2.516	2.516	3.277	3.273	3.274	3.274	
		0.55	10.296	10.249	10.222	29.757	29.765	29.703	50.893	50.893	50.893	50.893	50.893	2.453	2.451	2.449	4.309	4.293	4.293	4.293	5.631	5.629	5.629	5.629		
		0.80	30.311	30.329	30.328	86.226	86.211	86.211	141.133	141.133	141.133	141.133	141.133	2.286	2.286	2.286	4.267	4.262	4.262	4.262	5.724	5.724	5.724	5.724		
$X_{T(1)}^{(med)}$		0.10	0.10	1.037	1.040	1.038	3.559	3.555	3.557	6.592	6.613	6.613	9.707	9.707	9.707	0.769	0.769	0.768	1.470	1.470	1.469	1.470	2.012	2.012	2.015	2.015
			0.35	1.827	1.829	1.822	5.642	5.642	5.635	9.689	9.707	9.707	13.923	13.923	13.923	0.988	0.989	0.987	1.862	1.862	1.862	1.861	2.442	2.445	2.445	2.445
			0.55	2.952	2.948	2.954	9.109	9.087	9.070	13.977	13.947	13.947	13.947	13.947	1.290	1.291	1.291	2.362	2.359	2.359	2.356	2.962	2.963	2.963	2.963	
			0.80	10.579	10.559	10.498	31.229	31.091	31.075	51.369	51.177	51.230	51.230	51.230	2.467	2.469	2.462	4.363	4.354	4.354	4.351	5.646	5.630	5.638	5.638	
	0.35	0.10	1.751	1.748	1.745	5.175	5.175	5.175	9.523	9.516	9.504	17.330	17.330	17.330	0.977	0.977	0.975	1.786	1.786	1.789	1.790	2.424	2.425	2.421	2.421	
		0.35	3.700	3.700	3.693	10.516	10.501	10.476	17.359	17.323	17.330	17.330	17.330	1.461	1.462	1.460	2.524	2.523	2.523	2.518	2.518	3.279	3.279	3.276	3.276	
		0.55	10.299	10.251	10.231	29.758	29.761	29.696	50.895	50.895	50.895	50.895	50.895	2.447	2.447	2.445	4.315	4.310	4.307	4.307	5.638	5.630	5.629	5.629		
		0.80	30.333	30.181	30.224	86.637	86.617	86.617	141.133	141.133	141.133	141.133	141.133	2.281	2.281	2.281	4.267	4.262	4.262	4.262	5.724	5.724	5.724	5.724		
	0.55	0.10	1.037	1.040	1.038	3.559	3.555	3.557	6.592	6.613	6.613	9.707	9.707	9.707	0.769	0.769	0.768	1.470	1.470	1.469	1.470	2.012	2.012	2.015	2.015	
		0.35	1.827	1.829	1.822	5.642	5.642	5.635	9.689	9.707	9.707	13.923	13.923	13.923	0.988	0.989	0.987	1.862	1.862	1.862	1.861	2.442	2.445	2.445	2.445	
		0.55	2.952	2.948	2.954	9.109	9.087	9.070	13.977	13.947	13.947	13.947	13.947	1.290	1.291	1.291	2.362	2.359	2.359	2.356	2.962	2.963	2.963	2.963		
		0.80	10.579	10.559	10.498	31.229	31.091	31.075	51.369	51.177	51.230	51.230	51.230	2.467	2.469	2.462	4.363	4.354	4.354	4.351	5.646	5.630	5.638	5.638		
0.80	0.10	1.037	1.040	1.038	3.559	3.555	3.557	6.592	6.613	6.613	9.707	9.707	9.707	0.769	0.769	0.768	1.470	1.470	1.469	1.470	2.012	2.012	2.015	2.015		
	0.35	1.827	1.829	1.822	5.642	5.642	5.635	9.689	9.707	9.707	13.923	13.923	13.923	0.988	0.989	0.987	1.862	1.862	1.862	1.861	2.442	2.445	2.445	2.445		
	0.55	2.952	2.948	2.954	9.109	9.087	9.070	13.977	13.947	13.947	13.947	13.947	1.290	1.291	1.291	2.362	2.359	2.359	2.356	2.962	2.963	2.963	2.963			
	0.80	10.579	10.559	10.498	31.229	31.091	31.075	51.369	51.177	51.230	51.230	51.230	2.467	2.469	2.462	4.363	4.354	4.354	4.351	5.646	5.630	5.638	5.638			

5.2 Resultados simulados 2 passos à frente

Nesta seção iremos apresentar um estudo de simulação de Monte Carlo para comparar a performance das diferentes previsões dois passos à frente apresentadas no Capítulo 4. Tais previsões são: uma fórmula recursiva que depende da mediana aproximada da distribuição um passo à frente, e por isso denotamos por $X_{T(2)}^{(map)}$, inteiro mais próximo da esperança condicional dois passos à frente $X_{T(2)}^{(imp)}$ e mediana exata da distribuição condicional dois passos à frente $X_{T(2)}^{(med)}$. A moda da distribuição dois passos à frente também foi estudada, entretanto não apresentamos os resultados nesta seção, pois em termos de EQM e EAM esta previsão foi inferior às demais, ou seja, forneceu maiores valores de EQM e EAM.

Analisando os resultados numéricos contidos na Tabela 5.4 observamos que o EQM e o EAM são maiores nas proximidades da região de não estacionariedade e também crescem a medida que o parâmetro λ aumenta, este comportamento é esperado, pois através do estudo do desempenho dos estimadores dos parâmetros do processo INARCH(2) percebemos que para valores grandes de λ e em cenários próximos da região de não estacionariedade o desempenho dos estimadores piorava, ou seja, o EQM, EAM e viés dos estimadores aumentavam. Como sabemos que as previsões dependem dos estimadores, esperamos que o comportamento das previsões também tenham desempenho inferior nestes cenários.

Através da Tabela 5.4 verificamos que em termos de EQM a previsão $X_{T(2)}^{(imp)}$ forneceu resultados sensivelmente menores e utilizando os estimadores de MVC os resultados são melhores, ou seja, o EQM é menor utilizando estes estimadores. Em termos de EQM e EAM observamos que os desempenhos das previsões $X_{T(2)}^{(map)}$ e $X_{T(2)}^{(med)}$ são equivalentes. Analisando a tabela em termos de EAM podemos observar que as três previsões têm comportamento similar na previsão do processo dois passos à frente.

Comparando as previsões obtidas pelos estimadores de YW, MQC e MVC, é possível verificar que através dos critérios EQM e EAM, os estimadores de MVC forneceram melhores resultados, isto é, as previsões utilizando os estimadores de MVC fornecem menor EQM e EAM, principalmente nas proximidades da região de não estacionariedade.

Nas Tabelas 5.5 e 5.6 para $T = 200$ e $T = 300$, respectivamente, percebemos resultados similares aos da tabela para $T = 100$, quer dizer, o $X_{T(2)}^{(imp)}$ apresentou um EQM sensivelmente menor, os estimadores de MVC utilizados nas previsões produziram menores EQM e EAM nas proximidades da região de estacionariedade. Ainda observamos uma diminuição no EQM e EAM das previsões para maiores tamanhos amostrais.

Tabela 5.4: EQM e EAM das previsões 2 passo à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 100$.

Previsão	α_1	α_2	EQM									EAM								
			$\lambda = 1$			$\lambda = 3$			$\lambda = 5$			$\lambda = 1$			$\lambda = 3$			$\lambda = 5$		
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC
$X_{T(2)}^{(map)}$	0.10	0.10	1.099	1.106	1.106	3.756	3.753	3.749	6.321	6.338	6.349	0.762	0.763	0.764	1.507	1.504	1.504	1.974	1.976	1.980
	0.10	0.35	1.857	1.857	1.861	5.781	5.761	5.781	9.493	9.497	9.488	1.007	1.008	1.011	1.879	1.868	1.872	2.420	2.418	2.418
	0.10	0.55	3.145	3.137	3.130	8.984	8.962	8.937	15.314	15.317	15.317	1.331	1.329	1.328	2.362	2.359	2.354	3.076	3.080	3.081
	0.10	0.80	10.518	10.299	10.299	32.532	32.007	32.097	52.974	52.078	52.136	2.459	2.445	2.441	4.468	4.421	4.432	5.754	5.716	5.718
	0.10	0.10	2.025	2.037	2.038	6.329	6.367	6.351	10.245	10.234	10.230	1.034	1.039	1.038	1.969	1.977	1.973	2.514	2.516	2.516
	0.10	0.35	3.941	3.942	3.933	11.516	11.563	11.537	19.659	19.622	19.661	1.491	1.494	1.491	2.668	2.674	2.669	3.488	3.488	3.491
	0.10	0.55	12.327	11.977	11.935	35.723	34.933	34.842	58.703	58.000	57.839	2.680	2.646	2.642	4.679	4.631	4.621	6.070	6.027	6.021
	0.10	0.80	3.851	3.862	3.855	11.619	11.622	11.619	19.722	19.638	19.758	1.467	1.472	1.470	2.655	2.655	2.655	3.506	3.495	3.510
	0.10	0.35	13.915	13.597	13.591	41.426	40.306	40.230	70.737	68.874	68.880	2.853	2.818	2.819	5.043	4.997	4.992	6.644	6.558	6.563
	0.10	0.55	17.529	17.246	17.113	53.268	52.693	52.583	86.092	85.323	85.098	3.167	3.146	3.139	5.738	5.682	5.682	7.300	7.267	7.261
$X_{T(2)}^{(i-map)}$	0.10	0.10	1.002	1.005	1.006	3.676	3.690	3.688	6.353	6.368	6.369	0.760	0.761	0.762	1.501	1.502	1.502	1.991	1.992	1.993
	0.10	0.35	1.844	1.838	1.837	5.757	5.761	5.766	9.445	9.461	9.472	1.020	1.020	1.020	1.881	1.881	1.882	2.426	2.429	2.432
	0.10	0.55	3.084	3.060	3.060	8.945	8.923	8.918	15.217	15.224	15.212	1.340	1.334	1.335	2.364	2.363	2.361	3.073	3.075	3.076
	0.10	0.80	10.484	10.325	10.207	32.451	31.868	31.867	52.974	52.018	52.028	2.468	2.449	2.433	4.462	4.414	4.416	5.764	5.715	5.714
	0.10	0.10	2.014	2.021	2.024	6.309	6.325	6.304	10.100	10.156	10.144	1.057	1.061	1.059	1.982	1.984	1.982	2.509	2.514	2.516
	0.10	0.35	3.906	3.895	3.888	11.509	11.558	11.526	19.647	19.606	19.539	1.506	1.505	1.505	2.682	2.686	2.679	3.497	3.489	3.488
	0.10	0.55	12.191	11.925	11.861	35.609	34.766	34.732	58.783	58.100	57.856	2.680	2.650	2.646	4.677	4.617	4.612	6.089	6.041	6.029
	0.10	0.80	3.788	3.771	3.770	11.619	11.608	11.611	19.562	19.556	19.554	1.488	1.491	1.488	2.679	2.676	2.677	3.502	3.502	3.503
	0.10	0.35	13.853	13.482	13.455	41.295	40.289	40.225	70.578	68.647	68.604	2.864	2.814	2.808	5.044	4.997	4.997	6.644	6.551	6.553
	0.10	0.55	17.392	17.154	17.071	53.112	52.708	52.621	85.902	85.188	85.003	3.182	3.163	3.157	5.745	5.706	5.701	7.302	7.271	7.263
$X_{T(2)}^{(i-ead)}$	0.10	0.10	1.084	1.086	1.083	3.734	3.732	3.727	6.319	6.345	6.351	0.762	0.761	0.760	1.502	1.502	1.500	1.976	1.980	1.981
	0.10	0.35	1.850	1.853	1.850	5.777	5.775	5.783	9.508	9.491	9.472	1.006	1.008	1.007	1.875	1.871	1.875	2.424	2.418	2.415
	0.10	0.55	3.142	3.124	3.115	8.980	8.957	8.939	15.283	15.328	15.304	1.330	1.328	1.326	2.364	2.359	2.357	3.077	3.082	3.080
	0.10	0.80	10.537	10.341	10.290	31.126	30.665	30.584	54.570	53.542	53.363	2.463	2.445	2.442	4.379	4.349	4.346	5.823	5.772	5.772
	0.10	0.10	2.019	2.026	2.021	6.315	6.339	6.341	10.225	10.226	10.246	1.028	1.033	1.030	1.967	1.973	1.974	2.518	2.518	2.519
	0.10	0.35	3.945	3.949	3.928	11.501	11.509	11.519	19.637	19.571	19.578	1.493	1.497	1.490	2.670	2.664	2.667	3.489	3.481	3.485
	0.10	0.55	12.268	11.973	11.886	34.987	34.316	34.318	61.018	59.571	59.528	2.674	2.647	2.632	4.631	4.585	4.586	6.197	6.132	6.132
	0.10	0.80	3.804	3.807	3.799	11.621	11.648	11.647	19.650	19.615	19.675	1.462	1.466	1.464	2.659	2.664	2.664	3.496	3.501	3.504
	0.10	0.35	13.899	13.521	13.473	43.537	42.725	42.578	76.132	72.913	72.913	2.842	2.805	2.798	5.171	5.122	5.118	6.828	6.692	6.692
	0.10	0.55	17.451	17.236	17.152	53.549	52.692	52.616	103.053	100.371	100.558	3.152	3.141	3.132	5.734	5.703	5.694	7.787	7.695	7.698

Tabela 5.5: EQM e EAM das previsões 2 passo à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 200$.

Previsão	α_1	α_2	EQM												EAM											
			$\lambda = 1$				$\lambda = 3$				$\lambda = 5$				$\lambda = 1$				$\lambda = 3$				$\lambda = 5$			
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC
$X_{T(2)}^{(map)}$	0.10	0.10	1.130	1.135	1.135	3.778	3.779	3.777	6.364	6.375	6.377	9.417	9.418	9.418	0.793	0.794	0.795	1.523	1.523	1.523	1.990	1.990	1.993	2.410	2.409	2.409
		0.35	1.762	1.762	1.760	5.583	5.589	5.593	9.400	9.417	9.418	14.435	14.435	14.435	0.973	0.973	0.973	1.845	1.845	1.845	2.409	2.410	2.410	2.996	2.996	2.998
		0.55	3.081	3.076	3.078	8.782	8.779	8.779	14.411	14.392	14.392	22.294	22.294	22.294	1.320	1.321	1.320	2.294	2.294	2.294	2.996	2.996	2.996	3.448	3.448	3.448
		0.80	10.629	10.599	10.561	31.497	31.288	31.367	49.527	49.617	49.549	10.096	10.096	10.096	1.020	1.022	1.019	1.947	1.946	1.944	2.490	2.489	2.489	2.488	2.488	2.488
	0.35	0.10	1.930	1.935	1.933	6.212	6.206	6.210	10.105	10.104	10.104	19.519	19.505	19.505	1.475	1.473	1.475	2.689	2.686	2.685	3.500	3.497	3.497	3.498	3.498	3.498
		0.35	3.865	3.866	3.862	11.664	11.618	11.620	19.577	19.519	19.505	57.729	57.716	57.716	2.638	2.624	2.621	4.657	4.651	4.646	6.006	5.985	5.985	6.420	6.420	6.420
		0.55	12.048	11.905	11.843	35.160	35.180	35.075	58.200	57.729	57.716	18.732	18.712	18.739	1.469	1.471	1.465	2.665	2.669	2.668	3.441	3.439	3.439	3.444	3.444	3.444
		0.80	18.209	18.124	18.071	50.764	50.615	50.510	83.776	82.776	82.734	66.217	66.283	66.217	2.835	2.830	2.831	4.973	4.942	4.946	6.448	6.421	6.421	6.420	6.420	6.420
	0.55	0.10	1.045	1.044	1.044	3.679	3.675	3.683	6.320	6.331	6.323	9.370	9.370	9.370	0.783	0.782	0.782	1.514	1.514	1.516	1.986	1.990	1.990	2.412	2.411	2.411
		0.35	1.740	1.741	1.739	5.520	5.539	5.534	9.386	9.391	9.370	14.366	14.366	14.366	0.984	0.985	0.984	1.849	1.849	1.849	2.414	2.412	2.412	2.994	2.994	2.994
		0.55	3.048	3.027	3.031	8.758	8.739	8.763	14.371	14.371	14.366	22.294	22.294	22.294	1.343	1.337	1.338	2.302	2.301	2.303	2.994	2.994	2.994	3.448	3.448	3.448
		0.80	10.625	10.564	10.548	31.504	31.310	31.387	49.574	49.541	49.531	10.019	10.019	10.019	1.037	1.038	1.037	1.944	1.947	1.949	2.490	2.490	2.490	2.495	2.495	2.495
0.35	0.10	1.925	1.928	1.921	6.133	6.144	6.164	10.034	10.019	10.019	19.308	19.308	19.308	1.492	1.493	1.491	2.686	2.686	2.686	3.486	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484	
	0.35	3.838	3.835	3.817	11.549	11.555	11.501	19.385	19.308	19.308	57.712	57.712	57.712	2.652	2.634	2.631	4.658	4.648	4.650	6.008	5.999	5.999	6.421	6.421	6.421	
	0.55	12.014	11.852	11.807	35.033	34.970	35.007	58.047	57.782	57.712	18.697	18.696	18.696	1.480	1.479	1.480	2.659	2.665	2.665	3.452	3.446	3.446	3.448	3.448	3.448	
	0.80	17.979	17.857	17.837	50.571	50.603	50.426	83.415	82.532	82.672	66.319	66.261	66.319	2.834	2.830	2.826	4.988	4.955	4.960	6.449	6.424	6.424	6.421	6.421	6.421	
0.55	0.10	1.102	1.104	1.100	3.777	3.769	3.772	6.362	6.388	6.381	9.416	9.412	9.412	0.786	0.785	0.784	1.525	1.522	1.525	1.991	1.996	1.996	2.410	2.406	2.406	
	0.35	1.761	1.754	1.748	5.588	5.588	5.588	9.397	9.416	9.412	14.411	14.432	14.432	0.976	0.974	0.972	1.849	1.848	1.847	2.409	2.410	2.410	2.997	2.997	2.997	
	0.55	3.069	3.062	3.065	8.793	8.793	8.794	14.402	14.411	14.411	22.294	22.294	22.294	1.322	1.320	1.321	2.296	2.294	2.295	2.996	2.996	2.996	3.448	3.448	3.448	
	0.80	10.627	10.581	10.521	32.541	32.247	32.351	52.959	52.729	52.731	10.036	10.036	10.036	1.016	1.016	1.015	1.933	1.935	1.937	2.493	2.490	2.490	2.490	2.490	2.490	
0.35	0.10	1.932	1.932	1.927	6.167	6.155	6.173	10.076	10.045	10.045	19.445	19.445	19.445	1.473	1.473	1.473	2.686	2.683	2.686	3.498	3.491	3.491	3.488	3.488	3.488	
	0.35	3.850	3.845	3.854	11.634	11.588	11.603	19.565	19.463	19.445	57.340	57.325	57.340	2.640	2.620	2.619	4.565	4.562	4.566	5.941	5.916	5.916	6.421	6.421	6.421	
	0.55	12.062	11.858	11.824	33.998	33.906	33.826	57.916	57.404	57.325	18.704	18.631	18.704	1.468	1.468	1.463	2.658	2.662	2.658	3.448	3.448	3.448	3.442	3.442	3.442	
	0.80	18.136	18.060	18.005	49.340	49.123	49.070	102.155	100.577	100.741	72.412	72.202	72.412	2.842	2.825	2.820	4.952	4.955	4.952	6.720	6.662	6.662	6.650	6.650	6.650	

Tabela 5.6: EQM e EAM das previsões 2 passo à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 300$.

Previsão	α_1	α_2	EQM									EAM								
			$\lambda = 1$			$\lambda = 3$			$\lambda = 5$			$\lambda = 1$			$\lambda = 3$			$\lambda = 5$		
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC
$X_{T(2)}^{(map)}$	0.10	0.10	1.068	1.069	1.069	3.701	3.698	3.696	6.386	6.382	6.383	0.766	0.766	0.766	1.498	1.498	1.497	1.976	1.974	1.975
		0.35	1.788	1.787	1.788	5.565	5.577	5.568	9.376	9.356	9.377	0.970	0.972	0.973	1.840	1.840	1.840	2.403	2.401	2.403
		0.55	3.073	3.071	3.082	8.794	8.788	8.799	14.631	14.611	14.608	1.309	1.311	1.311	2.330	2.329	2.332	3.022	3.016	3.016
		0.80	10.574	10.545	10.535	30.835	30.817	30.793	50.715	50.580	50.579	2.462	2.459	2.459	4.354	4.357	4.356	5.638	5.632	5.636
	0.35	0.10	1.852	1.855	1.857	6.088	6.094	6.079	10.822	10.826	10.842	0.990	0.990	0.992	1.928	1.928	1.929	2.588	2.588	2.590
		0.35	3.974	3.977	3.959	11.946	11.932	11.914	19.278	19.284	19.338	1.503	1.504	1.502	2.698	2.697	2.699	3.461	3.460	3.466
		0.55	11.900	11.816	11.841	33.495	33.311	33.333	56.811	56.469	56.393	2.628	2.629	2.629	4.553	4.540	4.541	5.967	5.947	5.946
		0.80	36.990	36.679	36.661	113.887	113.351	113.382	18.970	18.987	19.020	1.439	1.440	1.435	2.637	2.632	2.638	3.433	3.434	3.438
	0.55	0.10	13.466	13.471	13.380	39.580	39.341	39.335	68.599	68.489	68.508	2.794	2.796	2.786	4.927	4.918	4.913	6.563	6.547	6.554
		0.35	16.618	16.647	16.577	51.124	50.812	50.664	85.641	85.453	85.488	3.102	3.104	3.088	5.519	5.502	5.499	7.298	7.291	7.291
		0.55	1.014	1.014	1.015	3.634	3.634	3.632	6.393	6.392	6.394	0.764	0.764	0.765	1.507	1.507	1.506	1.986	1.987	1.987
		0.80	1.782	1.783	1.782	5.527	5.517	5.515	9.357	9.348	9.330	0.991	0.991	0.990	1.849	1.850	1.849	2.412	2.412	2.410
$X_{T(2)}^{(i-map)}$	0.10	0.10	3.041	3.047	3.044	8.757	8.764	8.776	14.632	14.616	14.615	1.331	1.333	1.332	2.331	2.333	2.332	3.026	3.023	3.024
		0.35	10.566	10.514	10.494	30.870	30.825	30.760	50.715	50.580	50.579	2.467	2.463	2.463	4.369	4.368	4.362	5.633	5.629	5.628
		0.55	1.856	1.857	1.858	6.010	6.003	6.000	10.773	10.773	10.752	1.010	1.010	1.010	1.925	1.924	1.923	2.596	2.596	2.595
		0.80	3.926	3.906	3.904	11.852	11.861	11.816	19.330	19.311	19.284	1.528	1.527	1.524	2.700	2.701	2.696	3.471	3.471	3.470
0.35	0.10	11.802	11.732	11.732	33.451	33.249	33.292	56.751	56.378	56.453	2.629	2.629	2.628	4.546	4.537	4.542	5.971	5.952	5.956	
	0.35	3.581	3.591	3.580	11.192	11.262	11.243	18.911	18.891	18.908	1.453	1.456	1.456	2.633	2.641	2.640	3.441	3.439	3.444	
	0.55	13.377	13.344	13.323	39.515	39.435	39.363	68.569	68.177	68.204	2.803	2.798	2.798	4.932	4.928	4.922	6.554	6.533	6.537	
	0.80	16.536	16.522	16.533	50.955	50.921	50.963	85.477	85.332	85.501	3.121	3.118	3.114	5.530	5.515	5.503	7.310	7.313	7.306	
0.55	0.10	1.053	1.052	1.052	3.692	3.684	3.694	6.391	6.384	6.392	0.770	0.769	0.769	1.500	1.496	1.500	1.976	1.975	1.977	
	0.35	1.788	1.790	1.787	5.562	5.570	5.567	9.378	9.366	9.364	0.972	0.974	0.974	1.840	1.840	1.841	2.402	2.401	2.401	
	0.55	3.069	3.063	3.077	8.794	8.793	8.804	14.647	14.617	14.588	1.309	1.310	1.313	2.330	2.331	2.333	3.023	3.017	3.013	
	0.80	10.589	10.533	10.529	31.216	31.125	31.145	52.755	52.642	52.569	2.464	2.459	2.461	4.401	4.396	4.393	5.699	5.696	5.688	
$X_{T(2)}^{(i-ead)}$	0.35	0.10	1.852	1.854	1.854	6.088	6.076	6.073	10.813	10.801	10.805	0.985	0.985	0.986	1.926	1.924	1.925	2.588	2.588	2.587
		0.35	3.955	3.948	3.935	11.911	11.924	11.892	19.215	19.265	19.280	1.503	1.505	1.501	2.698	2.697	2.700	3.456	3.462	3.463
		0.55	11.881	11.778	11.753	33.932	33.788	33.845	58.965	58.469	58.388	2.621	2.621	2.615	4.582	4.579	4.581	6.049	6.031	6.024
		0.80	36.229	36.637	36.616	113.556	113.340	113.303	18.975	19.012	19.050	1.429	1.429	1.425	2.630	2.629	2.629	3.432	3.434	3.438
0.55	0.10	13.465	13.445	13.385	39.994	39.827	39.803	68.208	67.126	67.051	2.795	2.797	2.788	4.967	4.959	4.963	6.454	6.414	6.415	
	0.35	16.575	16.618	16.594	50.744	50.504	50.365	106.371	105.530	105.589	3.094	3.097	3.087	5.580	5.568	5.569	7.889	7.860	7.862	
	0.55	1.014	1.014	1.015	3.634	3.634	3.632	6.393	6.392	6.394	0.764	0.764	0.765	1.507	1.507	1.506	1.986	1.987	1.987	
	0.80	1.782	1.783	1.782	5.527	5.517	5.515	9.357	9.348	9.330	0.991	0.991	0.990	1.849	1.850	1.849	2.412	2.412	2.410	

5.3 Resultados simulados h passos à frente

Nesta seção iremos apresentar resultados simulados referentes ao EQM e EAM das previsões h passos à frente. Neste estudo consideramos cinco valores para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ e comparamos duas previsões, uma fórmula recursiva apresentada em (4.12) que depende de $X_{T(h-1)}^{(map)}$ e $X_{T(h-2)}^{(map)}$, sendo que para $h = 3$ depende da mediana aproximada da distribuição condicional um passo à frente, por isso denotamos por $X_{T(h)}^{(map)}$. A outra previsão considerada baseia-se na esperança condicional h passos à frente apresentada na Proposição 4.3.1 para $h \geq 3$, definida por $X_{T(h)}^{(imp)}$. Para $h = 1, 2$ segue as previsões apresentadas nas seções 5.1 e 5.2, a saber $X_{T(1)}^{(map)}$, $X_{T(1)}^{(imp)}$ e $X_{T(2)}^{(map)}$, $X_{T(2)}^{(imp)}$, respectivamente.

Nas Tabelas 5.7, 5.8 e 5.9, temos os resultados do EQM e EAM das previsões para os cenários estudados com o parâmetro $\lambda = 1$. Primeiramente observamos que a medida que o valor de h aumenta o EQM e o EAM das previsões cresce em todos os cenários, ou seja, fazer previsões em períodos de tempo maior conduz a uma maior incerteza, fato já conhecido. Através destas tabelas verificamos que a previsão $X_{T(h)}^{(imp)}$ fornece em geral menor EQM para todos os valores h e que em termos de EAM a previsão $X_{T(h)}^{(map)}$ produz valores sensivelmente menores que a previsão $X_{T(h)}^{(imp)}$.

Observando os resultados das Tabelas 5.10, 5.11 e 5.12 para $\lambda = 3$ e comparando com o EQM e EAM das previsões para $\lambda = 1$, verificamos que as previsões tem valores do EQM e EAM maiores para todos os valores de h . Este crescimento nos valores do EQM e EAM das previsões também foi percebido nas tabelas em que o valor do parâmetro $\lambda = 5$, ou seja, para valores grandes do parâmetro λ as previsões apresentam um comportamento pior em termos de EQM e EAM como podemos ver nas Tabelas 5.13, 5.14 e 5.15, um resultado esperado, pois de acordo com o estudo simulado feito no Capítulo 3, os estimadores dos parâmetros do processo INARCH(2) têm maiores valores do EQM e EAM a medida que o parâmetro λ cresce.

Em geral, a partir dos resultados simulados das previsões h passos à frente percebemos que as previsões com os estimadores de MVC fornecem EQM e EAM sensivelmente menores nas proximidades das regiões de não estacionariedade. Outra característica encontrada nas proximidades da região de não estacionariedade, ou seja, nos cenários em que a soma dos parâmetros α_1 e α_2 é próxima de um, é que o EQM e o EAM das previsões aumentam consideravelmente.

Tabela 5.7: EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 100$ e $\lambda = 1$.

Previsão	α_1	α_2	$h = 1$			$h = 2$			$h = 3$			$h = 4$			$h = 5$		
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC
EQM	$X_T^{(map)}$	0.10	1.095	1.102	1.097	1.066	1.066	1.095	1.103	1.106	1.106	1.210	1.215	1.225	1.187	1.188	1.190
		0.35	1.814	1.815	1.807	1.857	1.857	1.861	1.959	1.974	1.975	2.080	2.087	2.084	2.131	2.152	2.154
		0.55	2.968	2.978	2.980	3.145	3.137	3.130	3.886	3.903	3.883	4.104	4.122	4.129	4.098	4.135	4.117
		0.80	10.626	10.390	10.397	10.518	10.345	10.299	17.313	17.027	16.931	18.596	18.200	18.143	22.706	22.254	22.176
		0.10	1.942	1.941	1.943	2.025	2.037	2.038	2.157	2.162	2.162	2.181	2.189	2.199	2.106	2.111	2.116
		0.35	3.662	3.675	3.662	3.941	3.942	3.933	4.689	4.711	4.687	4.929	4.957	4.953	5.421	5.483	5.466
	0.55	10.712	10.522	10.454	12.327	11.977	11.935	17.454	16.862	16.805	19.172	18.442	18.361	23.212	22.382	22.341	
	0.80	3.052	3.053	3.041	3.851	3.862	3.855	4.326	4.340	4.322	4.434	4.482	4.468	4.699	4.696		
	0.10	10.549	10.453	10.403	13.915	13.597	13.591	19.274	18.613	18.593	22.399	21.618	21.618	25.169	25.089		
	0.35	10.653	10.579	10.502	17.529	17.246	17.113	24.202	23.636	23.636	28.119	27.897	27.886	32.198	32.083		
	0.55	1.027	1.036	1.031	1.002	1.005	1.006	0.974	0.975	0.974	1.056	1.057	1.057	1.034	1.034	1.034	
	0.80	1.809	1.792	1.797	1.844	1.838	1.837	1.993	2.000	1.995	2.085	2.085	2.089	2.181	2.189	2.193	
EAM	$X_T^{(map)}$	0.10	2.959	2.974	2.968	3.084	3.060	3.734	3.786	3.766	3.904	3.950	3.945	3.889	3.937	3.929	
		0.35	10.588	10.462	10.414	10.484	10.325	10.207	17.197	17.019	16.924	18.356	17.939	17.865	22.466	21.949	21.948
		0.55	1.921	1.930	1.918	2.014	2.021	2.024	2.155	2.156	2.156	2.166	2.171	2.107	2.108	2.099	
		0.80	3.613	3.629	3.629	3.906	3.895	3.888	4.583	4.612	4.605	4.811	4.880	4.847	5.243	5.311	5.280
		0.10	10.621	10.456	10.370	12.191	11.925	11.861	17.289	16.809	16.724	18.916	18.289	18.158	23.012	22.400	22.163
		0.35	3.029	3.015	3.004	3.788	3.771	3.770	4.155	4.181	4.170	4.201	4.217	4.210	4.342	4.403	4.381
	0.55	10.508	10.399	10.354	13.853	13.482	13.455	19.039	18.458	18.486	22.187	21.536	21.482	25.470	24.900	24.792	
	0.80	10.647	10.578	10.488	17.392	17.154	17.071	23.828	23.575	23.532	27.640	27.387	27.173	31.742	31.783	31.395	
	0.10	0.772	0.775	0.773	0.762	0.763	0.764	0.769	0.769	0.769	0.805	0.805	0.804	0.809	0.802	0.801	0.802
	0.35	0.996	0.999	0.996	1.007	1.008	1.011	1.023	1.029	1.031	1.037	1.040	1.036	1.056	1.065	1.066	
	0.55	1.307	1.306	1.306	1.331	1.329	1.328	1.484	1.489	1.484	1.519	1.523	1.523	1.514	1.524	1.520	
	0.80	2.501	2.473	2.471	2.459	2.445	2.441	3.188	3.152	3.150	3.275	3.243	3.241	3.628	3.587	3.591	
EAM	$X_T^{(map)}$	0.10	1.023	1.026	1.026	1.039	1.039	1.066	1.066	1.065	1.068	1.072	1.073	1.066	1.069	1.070	
		0.35	1.442	1.445	1.445	1.491	1.494	1.491	1.634	1.636	1.633	1.673	1.679	1.680	1.738	1.749	1.748
		0.55	2.498	2.483	2.475	2.680	2.642	2.642	3.197	3.150	3.140	3.371	3.319	3.306	3.621	3.573	3.564
		0.80	2.472	2.472	2.460	2.853	2.818	2.819	3.349	3.292	3.289	3.653	3.602	3.599	3.877	3.843	3.837
		0.10	2.471	2.458	2.452	3.167	3.146	3.139	3.705	3.682	3.673	3.981	3.965	3.951	4.260	4.267	4.261
		0.35	0.779	0.782	0.779	0.760	0.761	0.762	0.758	0.759	0.758	0.791	0.792	0.791	0.779	0.779	0.779
	0.55	1.008	1.005	1.007	1.020	1.020	1.020	1.062	1.064	1.063	1.066	1.066	1.068	1.100	1.104	1.106	
	0.80	1.316	1.319	1.319	1.340	1.340	1.335	1.485	1.499	1.495	1.514	1.526	1.522	1.512	1.523	1.521	
	$X_T^{(imp)}$	0.10	2.509	2.490	2.481	2.468	2.449	2.433	3.200	3.165	3.156	3.286	3.237	3.230	3.648	3.586	3.589
		0.35	1.036	1.040	1.039	1.057	1.061	1.059	1.087	1.093	1.092	1.092	1.091	1.092	1.097	1.096	
		0.55	1.445	1.449	1.450	1.506	1.505	1.505	1.639	1.642	1.641	1.697	1.708	1.700	1.749	1.763	1.757
		0.80	2.495	2.483	2.473	2.680	2.650	2.646	3.211	3.161	3.150	3.377	3.328	3.314	3.658	3.610	3.586
0.10		1.316	1.316	1.316	1.488	1.491	1.488	1.561	1.568	1.564	1.575	1.583	1.580	1.597	1.605	1.603	
0.35		2.488	2.472	2.460	2.864	2.814	2.808	3.349	3.304	3.299	3.668	3.610	3.612	3.888	3.841	3.830	
0.55	2.477	2.464	2.453	3.182	3.163	3.157	3.722	3.696	3.679	3.984	3.963	3.948	4.297	4.284	4.268		

Tabela 5.8: EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 200$ e $\lambda = 1$.

Previsão	α_1	α_2	$h = 1$			$h = 2$			$h = 3$			$h = 4$			$h = 5$		
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC
EQM	$X_T^{(map)}$	0.10	1.126	1.129	1.126	1.130	1.135	1.135	1.118	1.121	1.121	1.122	1.123	1.125	1.119	1.125	1.122
		0.35	1.715	1.719	1.713	1.762	1.762	1.760	2.023	2.023	2.025	1.976	1.977	1.983	2.061	2.049	2.051
		0.55	3.025	3.020	3.024	3.081	3.076	3.078	4.120	4.133	4.133	3.867	3.862	3.871	4.184	4.195	4.191
		0.80	10.028	9.985	9.979	10.629	10.599	10.561	16.935	16.783	16.719	17.538	17.438	17.438	22.371	22.555	22.371
		0.10	1.776	1.785	1.780	1.930	1.935	1.933	2.027	2.033	2.031	2.027	2.037	2.036	1.989	1.992	1.993
		0.35	3.712	3.682	3.678	3.865	3.866	3.862	4.704	4.702	4.702	4.693	4.800	4.818	4.805	5.453	5.461
	0.55	10.917	10.802	10.759	12.048	11.905	11.843	16.770	16.512	16.481	18.790	18.495	18.320	23.135	22.985	22.813	
	0.80	3.103	3.085	3.083	3.408	3.394	3.379	4.409	4.398	4.383	4.615	4.608	4.594	5.549	5.571	5.567	
	0.10	10.633	10.606	10.626	13.741	13.564	13.553	18.274	18.052	18.016	21.475	21.475	21.475	25.540	25.107	25.110	
	0.35	10.566	10.519	10.496	18.209	18.124	18.071	23.773	23.753	23.555	27.901	27.967	27.758	32.030	32.178	32.028	
	0.55	1.069	1.069	1.045	1.044	1.044	1.044	1.045	1.045	1.045	1.030	1.027	1.030	1.027	1.027	1.027	
	0.80	1.697	1.696	1.701	1.740	1.741	1.739	2.009	2.011	2.011	1.968	1.974	1.971	2.050	2.051	2.057	
EAM	$X_T^{(map)}$	0.10	3.021	3.026	3.014	3.048	3.027	3.031	3.970	3.973	3.960	3.717	3.731	3.710	3.896	3.905	3.898
		0.35	10.001	9.995	9.960	10.625	10.564	10.548	16.748	16.622	16.501	17.369	17.260	17.215	22.351	22.152	22.098
		0.55	1.761	1.768	1.757	1.925	1.928	1.924	2.029	2.034	2.027	2.045	2.042	2.049	2.027	2.027	2.031
		0.80	3.677	3.686	3.672	3.838	3.835	3.817	4.512	4.524	4.503	4.663	4.692	4.668	5.198	5.184	5.180
		0.10	10.822	10.747	10.736	12.014	11.852	11.807	16.446	16.331	16.170	18.512	18.282	18.103	22.574	22.400	22.400
		0.35	3.038	3.020	3.009	3.879	3.858	3.874	4.136	4.122	4.115	4.329	4.310	4.299	4.229	4.211	4.208
	0.55	10.592	10.599	10.522	13.551	13.454	13.441	17.983	17.719	17.690	21.420	21.176	21.102	24.962	24.613	24.476	
	0.80	10.555	10.463	10.458	17.979	17.887	17.837	23.370	23.420	23.206	27.297	27.375	27.171	31.079	31.159	30.980	
	0.10	0.780	0.781	0.779	0.793	0.794	0.795	0.786	0.786	0.786	0.786	0.786	0.788	0.788	0.783	0.783	
	0.35	0.967	0.970	0.967	0.973	0.973	0.973	1.015	1.018	1.017	1.016	1.019	1.020	1.037	1.035	1.034	
	0.55	1.306	1.303	1.305	1.320	1.321	1.320	1.514	1.519	1.520	1.467	1.466	1.469	1.546	1.548	1.549	
	0.80	2.436	2.427	2.425	2.488	2.479	2.477	3.163	3.150	3.139	3.234	3.232	3.221	3.610	3.590	3.583	
EAM	$X_T^{(map)}$	0.10	0.974	0.978	0.977	1.020	1.022	1.019	1.034	1.036	1.036	1.036	1.040	1.041	1.011	1.014	1.014
		0.35	1.446	1.440	1.436	1.475	1.473	1.475	1.637	1.641	1.641	1.669	1.671	1.670	1.749	1.751	1.752
		0.55	2.497	2.486	2.479	2.638	2.624	2.621	3.132	3.116	3.108	3.319	3.297	3.280	3.665	3.654	3.639
		0.80	2.481	2.474	2.477	2.835	2.830	2.831	3.257	3.248	3.242	3.568	3.552	3.551	3.838	3.822	3.818
		0.10	2.463	2.462	2.451	3.210	3.205	3.203	3.661	3.663	3.643	3.963	3.963	3.947	4.266	4.266	4.256
		0.35	0.781	0.782	0.782	0.783	0.782	0.782	0.783	0.783	0.783	0.783	0.777	0.777	0.777	0.770	0.770
	0.55	0.976	0.976	0.977	0.984	0.985	0.984	1.044	1.046	1.047	1.033	1.035	1.035	1.052	1.053	1.054	
	0.80	1.324	1.324	1.322	1.343	1.327	1.338	1.525	1.527	1.524	1.472	1.472	1.472	1.523	1.524	1.525	
	0.10	0.993	0.994	0.991	1.037	1.038	1.037	1.052	1.052	1.051	1.057	1.059	1.059	1.040	1.040	1.041	
	0.35	1.459	1.459	1.455	1.492	1.493	1.491	1.643	1.647	1.641	1.695	1.698	1.693	1.758	1.756	1.756	
	0.55	2.502	2.488	2.487	2.652	2.634	2.631	3.122	3.109	3.095	3.333	3.307	3.288	3.664	3.658	3.637	
	0.80	1.319	1.312	1.312	1.480	1.479	1.480	1.548	1.549	1.548	1.563	1.562	1.561	1.569	1.569	1.569	
0.10	2.483	2.479	2.468	2.834	2.830	2.826	3.267	3.241	3.236	3.575	3.575	3.553	3.851	3.824	3.814		
0.35	2.463	2.463	2.455	3.216	3.205	3.205	3.665	3.667	3.655	3.980	3.980	3.962	4.279	4.279	4.257		

Tabela 5.9: EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 300$ e $\lambda = 1$.

Previsão	α_1	α_2	$h = 1$			$h = 2$			$h = 3$			$h = 4$			$h = 5$		
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC
EQM	$X_T^{(map)}$	0.10	1.035	1.036	1.032	1.068	1.069	1.069	1.091	1.090	1.091	1.061	1.066	1.066	1.069	1.072	1.072
		0.35	1.825	1.829	1.824	1.788	1.787	1.788	2.061	2.060	2.059	1.943	1.946	1.944	2.055	2.056	2.053
		0.55	2.949	2.945	2.950	3.073	3.071	3.082	4.124	4.112	4.138	4.042	4.243	4.046	4.249	4.244	4.244
		0.80	10.583	10.552	10.497	10.574	10.545	10.535	17.008	17.012	16.838	17.595	17.511	17.466	21.707	21.682	21.572
		0.10	1.749	1.743	1.744	1.852	1.855	1.857	1.936	1.935	1.934	1.960	1.957	1.963	2.048	2.049	2.047
		0.35	3.700	3.689	3.689	3.974	3.977	3.959	4.771	4.778	4.778	4.765	4.919	4.924	4.907	5.200	5.199
	$X_T^{(imp)}$	0.10	1.0296	1.0249	1.0222	1.1900	1.1816	1.1841	16.850	16.769	16.757	18.355	18.231	18.270	21.413	21.284	21.306
		0.35	3.031	3.013	3.020	3.690	3.679	3.661	4.123	4.125	4.127	4.490	4.502	4.503	4.605	4.605	4.588
		0.55	10.401	10.405	10.311	13.466	13.471	13.380	17.589	17.585	17.519	22.105	21.882	21.907	25.095	24.911	24.922
		0.80	9.940	9.915	9.887	16.618	16.647	16.577	22.252	22.259	22.196	26.318	26.249	26.112	30.974	30.939	30.791
		0.10	1.002	1.003	1.004	1.014	1.014	1.015	1.025	1.025	1.025	0.996	0.996	0.996	1.001	1.001	1.001
		0.35	1.813	1.805	1.800	1.782	1.783	1.782	2.040	2.038	2.038	1.933	1.939	1.942	2.074	2.074	2.070
EAM	$X_T^{(map)}$	0.10	0.772	0.772	0.772	0.766	0.766	0.766	0.786	0.785	0.786	0.772	0.772	0.772	0.767	0.767	0.767
		0.35	0.989	0.989	0.988	0.970	0.972	0.973	1.025	1.025	1.025	1.002	1.004	1.004	1.026	1.027	1.026
		0.55	1.289	1.290	1.291	1.309	1.311	1.311	1.523	1.524	1.528	1.513	1.512	1.510	1.534	1.535	1.533
		0.80	2.468	2.468	2.463	2.462	2.459	2.459	3.163	3.164	3.151	3.212	3.205	3.197	3.571	3.578	3.563
		0.10	0.977	0.975	0.976	0.990	0.990	0.992	1.000	0.999	0.998	1.017	1.016	1.019	1.031	1.032	1.031
		0.35	1.462	1.458	1.461	1.503	1.504	1.502	1.648	1.649	1.647	1.670	1.670	1.669	1.719	1.718	1.717
	$X_T^{(imp)}$	0.10	0.776	0.776	0.776	0.764	0.764	0.765	0.780	0.780	0.780	0.772	0.772	0.772	0.767	0.767	0.767
		0.35	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.990	1.045	1.046	1.046	1.023	1.024	1.024	1.049	1.052	1.052
		0.55	1.303	1.303	1.298	1.331	1.331	1.332	1.536	1.536	1.537	1.515	1.517	1.517	1.542	1.543	1.543
		0.80	2.478	2.476	2.471	2.463	2.463	2.463	3.167	3.164	3.153	3.221	3.214	3.221	3.568	3.558	3.554
		0.10	0.982	0.983	0.980	1.010	1.010	1.010	1.017	1.019	1.018	1.040	1.040	1.039	1.049	1.050	1.050
		0.35	1.465	1.461	1.458	1.528	1.527	1.524	1.661	1.661	1.664	1.695	1.696	1.695	1.741	1.743	1.746
$X_T^{(imp)}$	0.10	1.306	1.306	1.305	1.453	1.453	1.456	1.523	1.523	1.522	1.559	1.562	1.561	1.576	1.578	1.577	
	0.35	2.436	2.435	2.432	2.803	2.798	2.798	3.207	3.203	3.204	3.585	3.581	3.577	3.806	3.793	3.797	
	0.55	2.400	2.396	2.394	3.121	3.118	3.114	3.569	3.567	3.555	3.896	3.896	3.882	4.217	4.221	4.203	
	0.80	9.898	9.884	9.870	16.536	16.522	16.533	22.050	22.026	21.965	25.703	25.693	25.595	30.064	29.832	29.832	
	0.10	0.772	0.772	0.771	0.766	0.766	0.766	0.786	0.785	0.786	0.772	0.772	0.772	0.767	0.767	0.767	
	0.35	0.989	0.989	0.988	0.970	0.972	0.973	1.025	1.025	1.025	1.002	1.002	1.004	1.026	1.027	1.026	

Tabela 5.10: EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 100$ e $\lambda = 3$.

Previsão	α_1	α_2	$h = 1$			$h = 2$			$h = 3$			$h = 4$			$h = 5$			
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	
$X_T^{(map)}$	0.10	0.10	3.783	3.791	3.782	3.756	3.753	3.749	3.755	3.769	3.767	3.813	3.853	3.844	3.734	3.731	3.734	
		0.35	5.631	5.622	5.641	5.781	5.761	5.781	5.781	6.275	6.291	6.300	6.391	6.459	6.462	6.778	6.798	6.793
		0.55	8.998	8.995	8.955	8.984	8.962	8.937	8.937	12.046	12.089	12.033	12.038	12.080	12.101	13.216	13.264	13.273
		0.80	32.131	31.658	31.605	32.532	32.007	32.097	32.097	53.875	53.206	53.036	54.040	53.264	53.147	71.526	70.792	70.348
	0.35	0.10	5.798	5.793	5.811	6.329	6.367	6.351	6.501	6.532	6.534	6.420	6.448	6.447	6.473	6.469	6.469	6.469
		0.35	10.232	10.236	10.233	11.516	11.563	11.516	11.527	13.922	13.959	13.914	15.439	15.577	15.510	15.765	15.901	15.840
		0.55	33.082	32.572	32.565	35.723	34.933	34.842	34.842	53.497	52.049	51.847	58.854	57.065	56.839	69.918	67.742	67.604
		0.80	9.175	9.150	9.148	11.619	11.622	11.619	13.425	13.398	13.412	14.036	14.841	14.052	14.034	14.841	14.916	14.912
	0.55	0.10	31.342	31.225	31.099	41.426	40.306	40.230	58.046	56.298	56.218	69.795	68.013	67.994	78.503	76.210	76.102	76.102
		0.35	32.581	32.121	31.999	53.268	52.693	52.583	72.076	71.629	71.253	80.794	88.571	88.107	103.511	102.543	102.128	
		0.55	3.746	3.748	3.746	3.676	3.690	3.688	3.661	3.622	3.651	3.727	3.739	3.738	3.555	3.550	3.548	3.548
		0.80	5.626	5.643	5.652	5.757	5.761	5.766	6.196	6.222	6.207	6.358	6.397	6.398	6.654	6.660	6.660	6.660
0.80	0.10	9.018	9.034	9.006	8.945	8.923	8.918	11.900	11.959	11.907	11.968	11.970	11.956	13.055	13.084	13.052	13.052	
	0.35	32.106	31.584	31.487	32.451	31.868	31.867	53.729	52.967	52.827	54.023	53.099	52.983	71.185	70.357	70.185	70.185	
	0.55	5.795	5.793	5.806	6.309	6.325	6.304	6.502	6.513	6.525	6.380	6.425	6.408	6.370	6.346	6.353	6.353	
	0.80	10.257	10.267	10.218	11.509	11.558	11.526	13.848	13.872	13.842	15.375	15.456	15.426	15.681	15.842	15.800	15.800	
0.55	0.10	33.040	32.540	32.428	35.609	34.766	34.752	52.995	51.833	51.465	58.298	56.732	56.415	69.394	67.384	66.994	66.994	
	0.35	9.152	9.163	9.144	11.619	11.608	11.611	13.249	13.274	13.287	13.784	13.829	13.825	14.576	14.558	14.543	14.543	
	0.55	31.396	31.230	31.053	41.295	40.289	40.225	57.836	56.315	56.085	69.547	67.708	67.681	78.124	76.326	75.881	75.881	
	0.80	32.539	32.132	32.011	53.112	52.708	52.621	71.836	71.516	71.288	80.199	88.219	87.905	102.896	101.952	101.635		
$X_T^{(map)}$	0.10	0.10	1.506	1.506	1.507	1.507	1.504	1.504	1.512	1.515	1.515	1.523	1.531	1.530	1.497	1.492	1.493	
		0.35	1.854	1.854	1.855	1.879	1.868	1.872	1.952	1.958	1.958	1.954	1.966	1.967	2.009	2.014	2.012	
		0.55	2.349	2.347	2.346	2.362	2.359	2.354	2.715	2.717	2.710	2.706	2.711	2.713	2.841	2.844	2.847	
		0.80	4.457	4.425	4.421	4.468	4.421	4.432	5.785	5.743	5.737	5.807	5.757	5.747	6.649	6.619	6.597	
	0.35	0.10	1.891	1.891	1.888	1.891	1.891	1.973	1.989	1.996	1.996	1.979	1.981	1.978	1.974	1.976	1.976	1.976
		0.35	2.506	2.509	2.510	2.668	2.674	2.669	2.927	2.930	2.928	3.092	3.103	3.097	3.119	3.134	3.129	3.129
		0.55	4.534	4.507	4.506	4.679	4.631	4.621	5.711	5.714	5.711	6.050	5.978	5.962	6.589	6.498	6.496	
		0.80	2.352	2.349	2.349	2.655	2.655	2.655	2.870	2.862	2.865	2.894	2.893	2.893	3.000	3.009	3.013	
	0.55	0.10	4.396	4.374	4.361	5.043	4.997	4.992	5.985	5.883	5.873	6.551	6.480	6.476	6.958	6.857	6.847	6.847
		0.35	4.393	4.447	4.444	5.738	5.690	5.682	6.609	6.568	6.566	7.409	7.351	7.341	7.931	7.881	7.865	
		0.55	1.510	1.510	1.511	1.501	1.502	1.502	1.507	1.502	1.502	1.533	1.535	1.534	1.481	1.480	1.480	
		0.80	1.864	1.870	1.870	1.881	1.881	1.882	1.955	1.956	1.956	1.964	1.971	1.972	2.018	2.017	2.016	
0.80	0.10	2.361	2.364	2.362	2.359	2.363	2.361	2.720	2.722	2.712	2.718	2.718	2.714	2.853	2.848	2.843	2.843	
	0.35	4.460	4.426	4.416	4.462	4.414	4.416	5.790	5.741	5.734	5.819	5.760	5.755	6.652	6.614	6.609		
	0.55	1.904	1.902	1.902	1.982	1.984	1.982	2.009	2.011	2.009	1.990	2.001	1.996	1.989	1.985	1.987		
	0.80	2.517	2.514	2.514	2.682	2.686	2.679	2.936	2.940	2.937	3.107	3.117	3.112	3.133	3.145	3.140		
0.55	0.10	4.540	4.508	4.503	4.677	4.617	4.612	5.778	5.712	5.697	6.043	5.971	5.946	6.577	6.493	6.471		
	0.35	2.355	2.358	2.354	2.679	2.676	2.677	2.874	2.869	2.874	2.896	2.896	2.896	3.008	3.007	3.007		
	0.55	4.400	4.373	4.357	5.044	5.000	4.997	5.989	5.897	5.881	6.562	6.477	6.474	6.973	6.890	6.873		
	0.80	4.500	4.457	4.453	5.745	5.706	5.701	6.614	6.578	6.582	7.424	7.363	7.357	7.943	7.881	7.874		

Tabela 5.11: EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 200$ e $\lambda = 3$.

Previsão	α_1	α_2	$h = 1$			$h = 2$			$h = 3$			$h = 4$			$h = 5$			
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	
EQM	$X_T^{(map)}$	0.10	3.738	3.750	3.778	3.779	3.777	3.796	3.807	3.810	3.807	3.810	3.837	3.838	3.838	3.672	3.677	3.679
		0.35	5.346	5.340	5.345	5.589	5.593	5.593	6.247	6.263	6.280	6.280	6.255	6.267	6.263	6.310	6.314	6.332
		0.55	8.875	8.866	8.906	8.782	8.779	8.779	11.350	11.309	11.300	11.300	11.818	11.776	11.776	12.483	12.483	12.465
		0.80	29.531	29.457	29.401	31.288	31.367	31.367	51.635	51.462	51.336	51.336	54.204	53.431	53.403	65.869	65.400	65.228
		0.10	5.426	5.415	5.405	6.212	6.206	6.219	6.508	6.520	6.516	6.516	6.842	6.854	6.857	6.566	6.578	6.575
		0.35	10.394	10.385	10.387	11.664	11.618	11.620	14.520	14.536	14.478	14.558	14.512	16.108	16.144	16.101	16.144	16.101
	0.55	31.389	31.326	31.264	35.160	35.180	35.075	49.165	49.046	48.928	48.928	55.522	55.675	55.490	64.807	64.423	64.362	
	0.80	8.930	8.943	8.955	11.609	11.633	11.632	13.146	13.172	13.159	13.159	13.966	13.966	13.929	13.506	13.523	13.522	
	0.10	31.791	31.831	31.721	50.764	50.615	50.510	67.678	67.345	67.323	67.323	80.978	80.716	80.557	92.799	92.499	92.225	
	0.35	3.648	3.659	3.661	3.679	3.675	3.683	3.673	3.668	3.671	3.671	3.496	3.496	3.497	3.523	3.523	3.523	
	0.55	5.321	5.319	5.324	5.529	5.539	5.534	6.221	6.227	6.243	6.243	6.177	6.167	6.168	6.251	6.251	6.238	
	0.80	29.605	29.458	29.366	31.504	31.310	31.387	51.449	51.356	51.356	51.356	54.043	53.426	53.396	65.730	65.113	64.901	
$X_T^{(imp)}$	0.10	5.410	5.414	5.406	6.144	6.144	6.164	6.414	6.413	6.413	6.713	6.712	6.699	6.456	6.447	6.445		
	0.35	10.379	10.384	10.360	11.549	11.555	11.501	14.337	14.331	14.325	14.338	14.368	14.332	15.938	15.909	15.937		
	0.55	31.276	31.146	31.250	35.033	34.970	35.007	48.727	48.601	48.601	55.163	55.284	55.260	64.174	64.175	63.898		
	0.80	8.938	8.937	8.894	11.494	11.540	11.465	12.862	12.946	12.963	13.580	13.668	13.616	13.098	13.112	13.091		
	0.10	31.750	31.783	31.707	50.571	50.603	50.426	67.292	67.056	67.092	80.341	80.026	79.901	92.217	91.735	91.711		
	0.35	1.496	1.499	1.499	1.525	1.525	1.523	1.518	1.519	1.520	1.494	1.494	1.495	1.498	1.498	1.500		
EAM	$X_T^{(map)}$	0.10	1.822	1.823	1.822	1.845	1.846	1.958	1.963	1.965	1.965	1.962	1.962	1.955	1.957	1.959		
		0.35	2.339	2.339	2.340	2.294	2.294	2.294	2.656	2.656	2.651	2.693	2.687	2.682	2.760	2.761	2.760	
		0.55	4.277	4.270	4.264	4.427	4.408	4.412	5.678	5.657	5.651	5.770	5.723	5.717	6.405	6.376	6.362	
		0.80	1.805	1.805	1.806	1.946	1.944	1.947	1.984	1.987	1.986	2.016	2.019	2.020	2.000	2.001	2.001	
		0.10	2.548	2.548	2.546	2.689	2.686	2.685	2.994	2.993	2.986	3.003	3.004	2.997	3.131	3.136	3.131	
		0.35	4.391	4.384	4.376	4.657	4.651	4.646	5.517	5.506	5.502	5.858	5.875	5.865	6.327	6.313	6.313	
	0.55	2.338	2.339	2.340	2.665	2.669	2.668	2.839	2.841	2.838	2.916	2.925	2.920	2.876	2.877	2.877		
	0.80	4.393	4.379	4.371	4.973	4.942	4.946	5.904	5.856	5.863	6.250	6.184	6.191	6.649	6.589	6.595		
	0.10	4.393	4.393	4.384	5.549	5.537	5.537	6.436	6.432	6.429	7.021	7.024	7.011	7.584	7.580	7.575		
	0.35	1.489	1.489	1.495	1.514	1.514	1.516	1.513	1.512	1.513	1.483	1.483	1.484	1.488	1.489	1.489		
	0.55	1.825	1.825	1.828	1.847	1.849	1.849	1.975	1.976	1.978	1.957	1.956	1.958	1.967	1.967	1.967		
	0.80	2.343	2.343	2.343	2.302	2.303	2.303	2.659	2.658	2.658	2.682	2.682	2.682	2.754	2.761	2.759		
$X_T^{(imp)}$	0.10	4.289	4.271	4.260	4.434	4.420	4.421	5.687	5.671	5.671	5.778	5.738	5.732	6.423	6.378	6.365		
	0.35	2.555	2.553	2.553	2.686	2.686	2.683	2.989	2.992	2.993	2.994	2.998	2.993	3.138	3.138	3.145		
	0.55	4.385	4.374	4.380	4.658	4.648	4.650	5.503	5.500	5.491	5.849	5.865	5.866	6.320	6.315	6.301		
	0.80	2.350	2.351	2.342	2.659	2.665	2.657	2.831	2.838	2.845	2.905	2.913	2.907	2.859	2.860	2.858		
	0.10	4.392	4.383	4.381	4.988	4.955	4.960	5.901	5.857	5.860	6.265	6.210	6.206	6.652	6.610	6.609		
	0.35	4.389	4.396	4.393	5.559	5.555	5.546	6.439	6.439	6.435	7.021	7.014	7.004	7.610	7.594	7.593		

Tabela 5.12: EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 300$ e $\lambda = 3$.

Previsão	α_1	α_2	$h = 1$			$h = 2$			$h = 3$			$h = 4$			$h = 5$		
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC
EQM	$X_T^{(map)}$	0.10	3.553	3.549	3.549	3.698	3.698	3.696	3.629	3.629	3.628	3.741	3.744	3.742	3.692	3.700	3.701
		0.35	5.646	5.650	5.635	5.577	5.577	5.568	6.040	6.052	6.027	6.229	6.224	6.220	6.415	6.420	6.407
		0.80	31.230	31.089	31.071	30.835	30.817	30.793	52.040	51.764	51.766	50.552	50.414	50.502	67.733	67.230	67.146
		0.10	5.157	5.175	5.179	6.088	6.094	6.079	6.454	6.466	6.449	6.438	6.443	6.447	6.386	6.387	6.387
		0.35	10.516	10.503	10.474	11.946	11.932	11.914	13.658	13.640	13.625	14.760	14.744	14.749	16.054	16.063	16.049
		0.55	29.757	29.765	29.703	33.495	33.311	33.333	46.742	46.770	46.508	55.453	55.224	55.224	64.521	64.265	64.019
	0.10	8.626	8.620	8.634	11.387	11.351	11.382	12.885	12.869	12.904	13.690	13.691	13.712	14.706	14.668	14.704	
	0.35	30.799	30.708	30.681	39.580	39.341	39.335	53.250	53.041	53.005	63.733	63.264	63.237	72.014	71.719	71.602	
	0.80	29.911	29.755	29.625	51.124	50.812	50.664	66.984	66.529	66.381	79.118	78.910	78.910	94.735	94.247	93.971	
	0.10	3.507	3.508	3.510	3.634	3.634	3.632	3.538	3.537	3.537	3.618	3.617	3.617	3.561	3.561	3.561	
	0.35	5.631	5.630	5.624	5.527	5.517	5.515	6.000	5.995	6.005	6.141	6.136	6.146	6.352	6.343	6.343	
	0.55	9.013	9.013	9.049	8.757	8.764	8.776	12.002	12.041	12.004	11.622	11.609	11.626	12.682	12.682	12.669	
0.80	31.155	31.002	30.994	30.870	30.825	30.760	51.953	51.573	51.545	50.257	50.277	50.277	67.439	67.052	66.877		
$X_T^{(imp)}$	0.10	5.197	5.215	5.203	6.010	6.003	6.000	6.431	6.455	6.448	6.431	6.435	6.399	6.385	6.391	6.391	
	0.35	10.436	10.404	10.378	11.852	11.861	11.816	13.572	13.542	13.508	14.639	14.605	14.601	15.686	15.693	15.649	
	0.55	29.636	29.668	29.503	33.451	33.249	33.292	46.506	46.517	46.351	55.256	54.953	54.901	64.194	63.977	63.740	
	0.10	8.622	8.611	8.638	11.192	11.262	11.243	12.592	12.587	12.604	13.358	13.343	13.331	14.157	14.141	14.154	
	0.35	30.789	30.681	30.657	39.515	39.435	39.363	53.010	52.723	52.740	62.624	62.718	62.718	71.443	70.892	70.888	
	0.80	29.851	29.705	29.730	50.955	50.621	50.363	66.759	66.072	66.058	79.292	78.611	78.423	93.875	93.371	93.198	
EAM	$X_T^{(map)}$	0.10	1.470	1.469	1.469	1.498	1.498	1.497	1.499	1.500	1.500	1.509	1.512	1.511	1.507	1.509	1.510
		0.35	1.864	1.863	1.861	1.840	1.840	1.840	1.918	1.920	1.916	1.950	1.950	1.949	1.984	1.983	1.983
		0.55	2.362	2.358	2.357	2.330	2.329	2.332	2.734	2.731	2.725	2.693	2.687	2.682	2.814	2.810	2.815
		0.80	4.363	4.353	4.351	4.354	4.357	4.356	5.650	5.640	5.645	5.574	5.565	5.578	6.417	6.406	6.398
		0.10	1.786	1.789	1.791	1.928	1.928	1.929	1.999	1.999	1.997	1.984	1.984	1.986	1.976	1.975	1.974
		0.35	2.524	2.524	2.518	2.698	2.697	2.699	2.888	2.888	2.887	3.014	3.008	3.009	3.139	3.138	3.140
	0.55	4.315	4.310	4.307	4.553	4.540	4.541	5.409	5.405	5.391	5.852	5.836	5.837	6.320	6.313	6.313	
	0.10	2.285	2.283	2.284	2.637	2.632	2.638	2.797	2.795	2.798	2.881	2.881	2.880	2.972	2.967	2.975	
	0.35	4.325	4.327	4.325	4.918	4.918	4.913	5.724	5.724	5.720	6.272	6.253	6.254	6.605	6.595	6.588	
	0.80	4.267	4.262	4.253	5.519	5.502	5.499	6.392	6.370	6.370	6.912	6.912	6.904	7.579	7.579	7.569	
	0.10	1.475	1.476	1.475	1.507	1.507	1.506	1.489	1.489	1.489	1.489	1.499	1.499	1.499	1.499	1.499	1.499
	0.35	1.868	1.868	1.868	1.849	1.850	1.849	1.925	1.926	1.928	1.948	1.948	1.948	1.990	1.989	1.988	
0.55	2.357	2.357	2.363	2.333	2.333	2.332	2.743	2.748	2.743	2.688	2.688	2.693	2.817	2.815	2.814		
0.80	4.361	4.351	4.353	4.369	4.368	4.362	5.644	5.644	5.645	5.594	5.579	5.585	6.425	6.417	6.417		
$X_T^{(imp)}$	0.10	1.796	1.799	1.798	1.924	1.924	1.923	2.014	2.019	2.019	2.007	2.005	2.005	1.996	1.991	1.992	
	0.35	2.518	2.514	2.516	2.701	2.701	2.696	2.901	2.898	2.898	3.029	3.024	3.025	3.127	3.129	3.125	
	0.55	4.309	4.307	4.293	4.546	4.537	4.542	5.414	5.410	5.394	5.840	5.838	5.840	6.329	6.322	6.322	
	0.10	2.289	2.286	2.291	2.633	2.641	2.640	2.784	2.786	2.788	2.881	2.879	2.875	2.952	2.949	2.949	
	0.35	4.331	4.317	4.323	4.932	4.928	4.922	5.723	5.723	5.723	6.249	6.249	6.246	6.616	6.592	6.590	
	0.80	4.270	4.265	4.267	5.530	5.515	5.503	6.399	6.371	6.362	6.914	6.914	6.916	7.579	7.574	7.561	

Tabela 5.13: EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 100$ e $\lambda = 5$.

Previsão	α_1	α_2	$h = 1$			$h = 2$			$h = 3$			$h = 4$			$h = 5$		
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC
EQM	0.10	0.10	6.320	6.318	6.330	6.321	6.338	6.349	6.697	6.707	6.719	6.505	6.529	6.534	6.579	6.579	6.587
		0.35	9.316	9.319	9.293	9.493	9.497	9.488	10.942	10.932	10.916	10.749	10.758	10.721	11.565	11.576	11.575
		0.55	14.536	14.568	14.597	15.272	15.314	15.317	19.897	20.043	20.048	19.907	19.975	20.030	21.009	21.077	21.077
		0.80	51.587	50.833	50.865	52.943	52.078	52.136	90.088	89.169	88.570	87.970	86.555	86.225	112.413	111.448	110.707
	0.35	0.10	9.035	9.044	9.033	10.234	10.234	10.230	11.463	11.486	11.508	11.637	11.678	11.682	11.748	11.762	11.772
		0.35	16.740	16.756	16.698	19.659	19.622	19.661	23.686	23.635	23.592	24.364	24.357	24.287	27.331	27.385	27.387
		0.55	51.079	50.649	50.561	58.703	58.000	57.839	83.457	82.803	82.397	96.449	94.989	94.633	111.374	109.632	109.113
		0.80	150.046	14.997	14.947	19.722	19.638	19.758	22.518	22.561	22.633	23.844	23.892	23.925	24.228	24.353	24.353
	0.55	0.10	53.041	52.351	52.326	70.737	68.874	68.880	100.123	96.887	96.778	116.919	113.331	113.124	133.100	129.603	129.594
		0.35	51.344	51.197	51.197	86.092	85.323	85.098	115.108	113.285	113.079	141.915	139.977	139.437	165.793	164.274	163.719
		0.55	6.265	6.264	6.280	6.353	6.368	6.369	6.673	6.670	6.668	6.457	6.442	6.441	6.554	6.587	6.585
		0.80	9.299	9.329	9.294	9.445	9.461	9.472	10.828	10.867	10.840	10.655	10.663	10.656	11.480	11.478	11.464
0.80	0.10	14.537	14.567	14.544	15.217	15.224	15.212	19.907	19.947	19.932	19.817	19.940	19.971	20.954	20.954	21.010	
	0.35	51.502	50.838	50.730	52.974	52.018	52.028	89.088	88.813	87.916	87.916	86.409	86.178	112.302	111.256	110.953	
	0.55	9.057	9.015	8.993	10.100	10.156	10.144	11.377	11.399	11.398	11.434	11.529	11.514	11.559	11.550	11.579	
	0.80	16.689	16.686	16.688	19.647	19.606	19.539	23.711	23.627	23.604	24.219	24.269	24.211	27.167	27.224	27.248	
0.10	0.10	14.973	14.887	14.856	19.562	19.556	19.554	22.344	22.361	22.347	23.586	23.618	23.613	23.906	23.920	23.871	
	0.35	53.074	52.324	52.214	70.578	68.647	68.604	99.430	96.305	96.224	116.329	112.751	112.637	132.505	129.204	129.178	
	0.55	51.299	51.121	51.121	85.902	85.188	85.003	114.775	113.518	113.194	141.680	140.007	139.681	165.959	164.649	163.984	
	0.80	1.978	1.979	1.982	1.974	1.976	1.980	2.010	2.012	2.016	1.992	1.996	1.998	2.008	2.008	2.008	
0.35	0.10	2.395	2.393	2.391	2.420	2.418	2.418	2.588	2.581	2.580	2.570	2.572	2.569	2.662	2.662	2.662	
	0.35	3.010	3.011	3.015	3.076	3.080	3.081	3.538	3.547	3.550	3.503	3.506	3.514	3.656	3.656	3.657	
	0.55	5.712	5.659	5.659	5.754	5.716	5.718	7.518	7.493	7.472	7.424	7.341	7.325	8.453	8.390	8.362	
	0.80	2.352	2.356	2.353	2.514	2.516	2.516	2.647	2.650	2.653	2.675	2.680	2.682	2.696	2.695	2.695	
0.35	0.10	3.236	3.236	3.232	3.488	3.488	3.491	3.878	3.875	3.867	3.915	3.910	3.909	4.126	4.132	4.132	
	0.35	5.666	5.633	5.625	6.070	6.027	6.021	7.215	7.169	7.157	7.795	7.726	7.716	8.341	8.260	8.244	
	0.55	3.064	3.064	3.059	3.506	3.495	3.510	3.718	3.725	3.727	3.823	3.832	3.832	3.885	3.886	3.886	
	0.80	5.739	5.722	5.718	6.653	6.558	6.563	7.889	7.775	7.766	8.512	8.418	8.403	9.077	8.950	8.945	
0.10	0.10	5.684	5.661	5.660	7.300	7.267	7.261	8.463	8.397	8.393	9.381	9.321	9.302	10.154	10.154	10.130	
	0.35	1.979	1.980	1.982	1.991	1.992	1.993	2.024	2.023	2.024	1.989	1.986	1.986	2.018	2.023	2.022	
	0.55	2.398	2.403	2.398	2.426	2.429	2.426	2.586	2.583	2.583	2.571	2.571	2.572	2.672	2.672	2.672	
	0.80	3.022	3.022	3.015	3.073	3.075	3.076	3.549	3.552	3.549	3.506	3.512	3.516	3.656	3.671	3.671	
0.35	0.10	5.711	5.663	5.656	5.764	5.715	5.714	7.534	7.491	7.476	7.429	7.344	7.329	8.470	8.397	8.386	
	0.35	2.359	2.353	2.355	2.509	2.514	2.516	2.643	2.645	2.643	2.673	2.683	2.679	2.691	2.688	2.694	
	0.55	3.238	3.241	3.242	3.497	3.489	3.488	3.892	3.887	3.885	3.918	3.919	3.917	4.132	4.142	4.144	
	0.80	5.667	5.635	5.629	6.089	6.041	6.029	7.158	7.163	7.158	7.781	7.718	7.712	8.330	8.262	8.245	
0.55	0.10	3.065	3.056	3.054	3.502	3.502	3.503	3.721	3.721	3.720	3.839	3.839	3.839	3.874	3.870	3.870	
	0.35	5.741	5.717	5.716	6.644	6.551	6.553	7.863	7.754	7.741	8.509	8.408	8.402	9.064	8.957	8.950	
	0.55	5.683	5.664	5.662	7.302	7.271	7.263	8.465	8.411	8.405	9.379	9.329	9.321	10.201	10.181	10.155	
	0.80	1.978	1.979	1.982	1.974	1.976	1.980	2.010	2.012	2.016	1.992	1.996	1.998	2.008	2.008	2.008	

Tabela 5.14: EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 200$ e $\lambda = 5$.

Previsão	α_1	α_2	$h = 1$			$h = 2$			$h = 3$			$h = 4$			$h = 5$		
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC
$X_T^{(map)}$	0.10	0.10	6.260	6.258	6.260	6.364	6.375	6.377	6.817	6.823	6.823	6.823	6.604	6.602	6.374	6.377	6.381
		0.35	9.219	9.196	9.189	9.400	9.417	9.418	10.510	10.505	10.498	10.498	10.657	10.671	10.869	10.881	10.874
		0.55	14.390	14.379	14.392	14.411	14.392	14.435	19.213	19.213	19.231	18.699	18.721	18.754	21.089	21.194	21.181
		0.80	51.370	50.935	50.826	49.527	49.617	49.549	85.432	84.553	84.469	87.394	87.394	86.938	112.427	111.288	111.356
	0.35	0.10	9.091	9.095	9.112	10.105	10.104	10.096	10.710	10.831	10.831	10.852	10.831	11.089	11.094	11.089	
		0.35	17.764	17.732	17.758	19.577	19.519	19.505	23.430	23.373	24.918	24.860	24.786	26.377	26.307	26.261	
		0.55	51.266	50.928	50.745	58.200	57.729	57.716	80.558	79.934	79.739	91.303	90.576	90.628	104.993	104.900	
		0.80	14.303	14.301	14.292	18.732	18.712	18.739	21.552	21.504	21.526	22.419	22.375	22.400	24.032	24.053	
	0.55	0.10	51.294	50.920	50.959	83.776	82.776	82.734	114.080	113.006	113.027	137.635	136.164	136.350	160.596	159.119	
		0.35	6.264	6.276	6.272	6.320	6.331	6.323	6.822	6.815	6.823	6.626	6.612	6.613	6.413	6.390	
		0.55	9.151	9.151	9.140	9.386	9.391	9.370	10.443	10.433	10.434	10.538	10.532	10.544	10.730	10.724	
		0.80	51.190	50.796	50.705	49.574	49.541	49.541	85.133	84.125	84.115	87.123	86.815	86.707	112.035	111.026	
0.80	0.10	9.054	9.037	9.024	10.034	10.019	10.019	10.568	10.577	10.560	10.615	10.644	10.630	10.939	10.944		
	0.35	17.689	17.670	17.662	19.385	19.308	19.306	23.269	23.263	23.204	24.721	24.701	24.713	26.050	25.982		
	0.55	51.099	50.877	50.820	58.047	57.782	57.712	80.491	79.896	79.863	90.987	90.486	90.556	104.477	104.543		
	0.80	14.271	14.256	14.275	18.690	18.697	18.696	21.466	21.438	21.508	22.293	22.326	22.327	23.815	23.807		
$X_T^{(map)}$	0.10	0.10	1.961	1.961	1.962	1.990	1.993	1.993	2.031	2.033	2.033	2.011	2.011	1.988	1.989	1.990	
		0.35	2.387	2.384	2.383	2.409	2.410	2.409	2.552	2.552	2.550	2.572	2.574	2.575	2.588	2.588	
		0.55	2.994	2.993	2.993	2.998	2.996	2.998	3.476	3.479	3.479	3.413	3.413	3.416	3.596	3.607	
		0.80	5.653	5.628	5.621	5.566	5.569	5.565	7.306	7.269	7.267	7.408	7.401	7.394	8.305	8.267	
	0.35	0.10	2.395	2.392	2.395	2.490	2.489	2.488	2.573	2.569	2.566	2.593	2.592	2.590	2.624	2.623	
		0.35	3.315	3.316	3.315	3.500	3.497	3.498	3.781	3.773	3.768	3.920	3.916	3.913	4.051	4.044	
		0.55	5.645	5.624	5.616	6.006	5.985	5.983	7.096	7.066	7.060	7.519	7.490	7.492	8.134	8.086	
		0.80	14.274	14.274	14.275	18.690	18.697	18.696	21.466	21.438	21.508	22.293	22.326	22.327	23.815	23.807	
	0.55	0.10	5.732	5.729	5.720	6.448	6.421	6.420	7.396	7.360	7.354	8.085	8.056	8.042	8.799	8.783	
		0.35	5.732	5.729	5.720	6.448	6.421	6.420	7.396	7.360	7.354	8.085	8.056	8.042	8.799	8.783	
		0.55	5.732	5.729	5.720	6.448	6.421	6.420	7.396	7.360	7.354	8.085	8.056	8.042	8.799	8.783	
		0.80	14.274	14.274	14.275	18.690	18.697	18.696	21.466	21.438	21.508	22.293	22.326	22.327	23.815	23.807	
0.80	0.10	5.609	5.590	5.596	7.219	7.180	7.177	8.400	8.358	8.359	9.230	9.178	9.180	9.961	9.923		
	0.35	1.966	1.970	1.969	1.986	1.990	1.987	2.045	2.043	2.045	2.021	2.017	2.017	1.999	1.994		
	0.55	2.384	2.386	2.382	2.414	2.412	2.411	2.562	2.560	2.562	2.570	2.572	2.571	2.580	2.581		
	0.80	5.645	5.622	5.621	5.576	5.568	5.570	7.290	7.258	7.255	7.406	7.392	7.389	8.311	8.270		
$X_T^{(map)}$	0.35	0.10	2.396	2.396	2.395	2.497	2.497	2.495	2.565	2.567	2.564	2.579	2.583	2.585	2.625	2.625	
		0.35	3.307	3.303	3.305	3.484	3.484	3.484	3.774	3.775	3.769	3.923	3.919	3.924	4.037	4.037	
		0.55	5.641	5.627	5.627	6.003	6.003	5.999	7.090	7.062	7.064	7.518	7.507	7.502	8.079	8.083	
		0.80	14.279	14.278	14.279	18.697	18.697	18.697	21.466	21.438	21.508	22.293	22.326	22.327	23.815	23.807	
0.55	0.10	5.730	5.734	5.729	6.449	6.424	6.424	7.380	7.354	7.349	8.084	8.058	8.046	8.799	8.788		
	0.35	5.730	5.734	5.729	6.449	6.424	6.424	7.380	7.354	7.349	8.084	8.058	8.046	8.799	8.788		
	0.55	5.730	5.734	5.729	6.449	6.424	6.424	7.380	7.354	7.349	8.084	8.058	8.046	8.799	8.788		
	0.80	14.279	14.278	14.279	18.697	18.697	18.697	21.466	21.438	21.508	22.293	22.326	22.327	23.815	23.807		
0.80	0.10	5.611	5.594	5.593	7.211	7.174	7.180	8.393	8.363	8.355	9.252	9.201	9.200	9.989	9.947		
	0.35	1.966	1.970	1.969	1.986	1.990	1.987	2.045	2.043	2.045	2.021	2.017	2.017	1.999	1.994		
	0.55	2.384	2.386	2.382	2.414	2.412	2.411	2.562	2.560	2.562	2.570	2.572	2.571	2.580	2.581		
	0.80	5.645	5.622	5.621	5.576	5.568	5.570	7.290	7.258	7.255	7.406	7.392	7.389	8.311	8.270		

Tabela 5.15: EQM e EAM das previsões h passos à frente para diferentes valores de α_1 e α_2 , usando os estimadores de YW, MQC e MVC, para $T = 300$ e $\lambda = 5$.

Previsão	α_1	α_2	$h = 1$			$h = 2$			$h = 3$			$h = 4$			$h = 5$		
			YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC	YW	MQC	MVC
EQM	$X_T^{(map)}$	0.10	6.593	6.613	6.608	6.386	6.382	6.324	6.327	6.324	6.324	6.284	6.279	6.279	6.494	6.487	6.485
		0.35	9.696	9.707	9.707	9.376	9.356	9.377	10.594	10.590	10.590	10.697	10.709	10.697	10.853	10.855	10.867
		0.55	13.976	13.945	13.919	14.631	14.611	14.608	18.988	18.984	18.988	19.025	19.010	19.010	20.487	20.482	20.497
		0.80	51.372	51.178	51.223	50.854	50.665	50.685	86.178	85.455	85.520	84.638	84.284	84.284	109.777	109.059	109.068
		0.10	9.523	9.523	9.509	10.822	10.826	10.842	10.848	10.848	10.848	11.132	11.150	11.137	11.289	11.304	11.287
		0.35	17.363	17.320	17.331	19.278	19.284	19.338	23.163	23.171	23.150	24.254	24.232	24.209	26.225	26.191	26.231
	0.55	51.019	50.893	50.898	56.811	56.469	56.393	82.421	81.924	81.810	89.228	88.538	88.403	103.277	102.615	102.435	
	0.80	141.333	14.096	14.125	18.970	18.987	19.020	20.623	20.605	20.589	22.768	22.716	22.750	22.588	22.572	22.572	
	0.10	52.364	52.358	52.302	85.641	85.453	85.488	114.033	113.958	113.869	135.184	135.098	135.115	155.444	155.748	155.355	
	0.35	6.595	6.616	6.611	6.393	6.392	6.394	6.350	6.354	6.354	6.303	6.296	6.302	6.551	6.552	6.551	
	0.55	9.735	9.749	9.769	9.348	9.348	9.330	10.561	10.561	10.528	10.607	10.622	10.621	10.694	10.713	10.701	
	0.80	13.920	13.942	13.948	14.632	14.616	14.615	18.895	18.897	18.840	18.921	18.889	18.895	20.259	20.302	20.271	
EQM	$X_T^{(map)}$	0.10	51.336	51.154	51.067	50.715	50.580	50.579	85.869	85.468	85.525	84.167	84.116	84.106	109.498	108.899	108.965
		0.35	17.265	17.253	17.227	19.330	19.311	19.284	23.022	23.051	22.881	24.070	24.036	24.019	26.009	25.948	25.923
		0.55	50.902	50.809	50.871	56.378	56.453	56.453	82.036	81.692	81.871	88.777	88.232	88.234	102.043	102.098	102.098
		0.80	141.181	14.141	14.166	18.911	18.891	18.908	20.483	20.441	20.441	22.569	22.604	22.620	22.309	22.277	22.354
		0.10	52.300	52.291	52.329	85.477	85.632	85.501	114.196	113.970	113.762	134.837	135.193	134.889	155.258	155.568	155.063
		0.35	2.013	2.016	2.015	1.976	1.974	1.975	1.971	1.971	1.971	1.992	1.992	1.992	1.981	1.979	1.979
	0.55	2.443	2.445	2.446	2.403	2.401	2.403	2.548	2.548	2.549	2.588	2.590	2.587	2.584	2.583	2.585	
	0.80	2.963	2.963	2.963	3.022	3.016	3.016	3.422	3.422	3.419	3.418	3.415	3.415	3.579	3.582	3.584	
	0.10	5.646	5.631	5.637	5.638	5.632	5.636	7.337	7.319	7.316	7.235	7.227	7.225	8.237	8.215	8.212	
	0.35	3.280	3.274	3.277	3.461	3.460	3.466	3.782	3.782	3.780	3.859	3.859	3.856	4.010	4.008	4.012	
	0.55	5.638	5.630	5.630	5.967	5.947	5.946	7.149	7.149	7.142	7.483	7.461	7.457	8.004	8.004	8.004	
	0.80	2.948	2.943	2.950	3.433	3.434	3.438	3.597	3.595	3.591	3.749	3.745	3.743	3.745	3.745	3.745	
EAM	$X_T^{(map)}$	0.10	5.730	5.724	5.721	7.309	7.268	7.291	8.451	8.441	8.435	9.171	9.157	9.140	9.870	9.872	9.859
		0.35	2.023	2.028	2.026	1.986	1.987	1.987	1.978	1.978	1.978	1.999	1.999	1.992	1.993	1.994	1.993
		0.55	2.462	2.463	2.469	2.412	2.412	2.410	2.559	2.559	2.556	2.589	2.589	2.590	2.582	2.585	2.582
		0.80	2.970	2.973	2.974	3.026	3.023	3.023	3.431	3.431	3.422	3.426	3.425	3.425	3.579	3.583	3.577
		0.10	5.650	5.640	5.632	5.633	5.629	5.628	7.328	7.328	7.332	7.229	7.234	7.231	8.246	8.229	8.228
		0.35	3.277	3.273	3.274	3.471	3.471	3.471	3.777	3.782	3.778	3.865	3.860	3.855	4.015	4.013	4.007
	0.55	5.631	5.629	5.629	5.971	5.952	5.956	7.159	7.146	7.160	7.465	7.454	7.453	8.028	8.002	8.003	
	0.80	2.963	2.960	2.963	3.441	3.439	3.444	3.591	3.593	3.591	3.761	3.761	3.766	3.742	3.738	3.744	
	0.10	5.675	5.664	5.654	6.554	6.533	6.537	7.450	7.439	7.429	8.217	8.213	8.214	8.816	8.787	8.795	
	0.35	5.728	5.728	5.724	7.310	7.313	7.306	8.477	8.453	8.439	9.176	9.176	9.157	9.892	9.895	9.875	

Em linhas gerais podemos dizer que para um passo à frente a previsão $X_{T(1)}^{(imp)}$ tem um comportamento sensivelmente melhor que as demais em termos de EQM. Esta conclusão tem um suporte teórico, pois a previsão $X_{T(1)}^{(imp)}$ é função da esperança condicional que minimiza o EQMC. Em termos de EAM verificamos que as previsões $X_{T(1)}^{(map)}$ e $X_{T(1)}^{(med)}$ são equivalentes e sensivelmente melhores na previsão um passo à frente, o que também tem justificativa teórica pois o valor que minimiza o EAMC é a mediana da distribuição condicional, e como $X_{T(1)}^{(map)}$ é uma ótima aproximação para mediana da distribuição condicional um passo à frente, usá-la como previsão é equivalente a usar a mediana exata.

Para fazer previsões h passos à frente verificamos que as duas propostas apresentadas neste trabalho são muito similares, sendo que em termos de EQM a previsão $X_{T(h)}^{(imp)}$ tem uma leve vantagem e em termos de EAM a previsão $X_{T(h)}^{(map)}$ fornece valores sensivelmente menores. Para as duas previsões percebemos que quando os estimadores de MVC são utilizados o EQM e o EAM apresentam valores menores nas proximidades da região de não estacionariedade.

5.4 Aplicação

Nesta seção iremos utilizar o mesmo banco de dados analisado no Capítulo 3, referente ao número de meninos nascidos vivos de mães residentes na cidade de Riachuelo no estado do Rio Grande do Norte entre Janeiro de 1994 e Dezembro de 2013, totalizando 240 observações. A partir da série de Riachuelo contida na Tabela 5.16 iremos ilustrar a aplicação das previsões um e dois passos à frente apresentadas anteriormente.

Para comparar as diferentes previsões um e dois passos à frente analisamos a série primeiramente até o mês de Julho de 2011, de maneira que mantivemos 30 observações à frente. Feito isto estimamos os parâmetros e encontramos as previsões um e dois passos à frente. Depois disso repetimos este procedimento até o mês de Dezembro de 2013, totalizando 30 valores preditos. Posteriormente comparamos as previsões em termos de EQM e EAM.

A Tabela 5.17 apresenta os pontos preditos um passo à frente baseados na mediana aproximada, inteiro mais próximo da esperança condicional e mediana exata da distribuição Poisson com parâmetro $\hat{\alpha}_1 X_T + \hat{\alpha}_2 X_{T-1} + \hat{\lambda}$, e as estimativas dos parâmetros obtidas pelos estimadores de YW, MQC e MVC.

A Tabela 5.18 apresenta os pontos preditos dois passos à frente baseados na forma recursiva (4.10), inteiro mais próximo da esperança condicional dois passos à frente e mediana exata da distribuição condicional dois passos à frente, bem como as estimativas

Tabela 5.16: Dados referentes ao numero de meninos nascidos vivos na cidade de Riachuelo-RN.

Ano	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
1994	1	1	1	2	0	0	1	1	0	2	0	0
1995	4	5	10	4	8	1	9	3	1	4	2	7
1996	8	5	5	2	10	2	3	7	3	6	6	5
1997	8	8	2	4	2	3	5	6	3	7	6	5
1998	5	2	6	8	6	3	5	3	2	6	8	3
1999	3	2	1	9	9	9	5	7	6	9	4	0
2000	8	5	7	5	3	5	5	8	8	5	7	11
2001	12	5	8	9	4	2	4	1	5	2	7	6
2002	10	4	5	7	5	4	6	6	4	3	2	3
2003	8	7	8	4	6	4	5	6	4	5	7	5
2004	10	6	4	6	4	1	1	2	4	5	7	4
2005	5	4	5	10	4	8	6	5	6	1	7	3
2006	7	5	5	6	13	0	1	2	0	1	0	6
2007	3	2	4	4	6	8	3	2	6	2	5	5
2008	7	6	2	6	4	6	5	4	2	3	7	4
2009	4	5	3	9	9	2	5	3	4	6	4	3
2010	4	1	1	6	6	1	6	4	4	7	3	4
2011	4	5	5	4	3	1	3	2	4	1	4	0
2012	2	3	4	7	8	3	11	4	2	2	3	9
2013	8	6	3	4	4	5	4	8	2	5	5	7

dos parâmetros obtidas pelos estimadores de YW, MQC e MVC.

Em termos de EQM e EAM verificamos que, para prever esta série um passo à frente, a mediana exata $x_{T(1)}^{(med)}$ e a mediana aproximada $x_{T(1)}^{(map)}$ forneceram resultados semelhantes utilizando os estimadores de YW, MQC e MVC, enquanto que o inteiro mais próximo da esperança condicional um passo à frente $x_{T(1)}^{(imp)}$ forneceu valores de EQM e EAM maiores, ou seja, $x_{T(1)}^{(map)}$ e $x_{T(1)}^{(med)}$ previram melhor esta série de acordo com os critérios de EQM e EAM. Ainda verificamos que as previsões que utilizaram as estimativas de MVC obtiveram menor EAM, entretanto as previsões com as estimativas de YW forneceram menor EQM.

Analisando as previsões dois passos à frente na Tabela 5.18 percebemos que em termos de EQM, o inteiro mais próximo $x_{T(2)}^{(imp)}$ fornece um resultado mais satisfatório, principalmente quando utiliza as estimativas de MVC. Porém em termos de EAM a previsão que fornece o menor valor é a $x_{T(2)}^{(med)}$. Verificamos ainda que através dos dois critérios de comparação utilizados as previsões com as estimativas de MVC fornecem menores valores.

Em geral concluímos que neste banco de dados $x_{T(1)}^{(med)}$ conseguiu prever melhor a série um passo à frente utilizando as estimativas de YW em termos de EQM e em termos de EAM as previsões $x_{T(1)}^{(map)}$ e $x_{T(1)}^{(med)}$ predisseram melhor a série de Riachuelo com as estimativas de MVC. Para previsões dois passos à frente a previsão $x_{T(2)}^{(imp)}$ teve melhor desempenho em termos de EQM utilizando as estimativas de MVC, enquanto que em termos de EAM a previsão $x_{T(2)}^{(med)}$ com as estimativas de MVC comportou-se de maneira mais satisfatória.

Tabela 5.17: Valores das previsões mensais 1 passo à frente de Julho de 2011 a Dezembro de 2013.

Mes/Ano	T	YW			MQC			MVC			x_{T+1}	YW			MQC			MVC			
		$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\lambda}$		$x_{T(1)}^{(map)}$	$x_{T(1)}^{(imp)}$	$x_{T(1)}^{(med)}$	$x_{T(1)}^{(map)}$	$x_{T(1)}^{(imp)}$	$x_{T(1)}^{(med)}$	$x_{T(1)}^{(map)}$	$x_{T(1)}^{(imp)}$	$x_{T(1)}^{(med)}$	
Jul/2011	210	0.195	0.142	3.079	0.189	0.146	3.115	0.218	0.182	2.806	3	4	4	4	4	4	4	3	4	4	3
Ago/2011	211	0.198	0.142	3.058	0.191	0.146	3.101	0.220	0.182	2.793	2	4	4	4	4	4	4	3	4	4	3
Set/2011	212	0.199	0.147	3.023	0.192	0.151	3.066	0.221	0.188	2.755	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Out/2011	213	0.200	0.148	3.016	0.192	0.150	3.068	0.221	0.188	2.759	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Nov/2011	214	0.198	0.153	2.987	0.192	0.156	3.026	0.220	0.194	2.717	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Dez/2011	215	0.199	0.153	2.981	0.191	0.156	3.028	0.219	0.195	2.732	0	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Jan/2012	216	0.196	0.162	2.939	0.191	0.166	2.967	0.218	0.207	2.654	2	3	4	4	3	3	3	3	3	3	3
Fev/2012	217	0.202	0.160	2.914	0.196	0.166	2.937	0.224	0.206	2.622	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Mar/2012	218	0.203	0.164	2.887	0.196	0.167	2.930	0.224	0.207	2.620	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Abr/2012	219	0.204	0.164	2.881	0.196	0.166	2.932	0.224	0.206	2.625	7	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Mai/2012	220	0.203	0.161	2.905	0.196	0.164	2.960	0.224	0.203	2.651	8	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Jun/2012	221	0.207	0.157	2.918	0.201	0.161	2.959	0.230	0.201	2.646	3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
Jul/2012	222	0.204	0.155	2.933	0.196	0.158	2.986	0.225	0.197	2.674	11	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Ago/2012	223	0.189	0.170	2.951	0.185	0.175	2.987	0.216	0.216	2.659	4	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6
Set/2012	224	0.187	0.172	2.953	0.178	0.178	2.998	0.208	0.219	2.672	2	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6
Out/2012	225	0.190	0.159	2.989	0.183	0.162	3.033	0.212	0.202	2.712	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Nov/2012	226	0.193	0.158	2.973	0.187	0.162	3.008	0.216	0.202	2.688	3	4	4	4	4	4	4	3	4	4	3
Dez/2012	227	0.194	0.160	2.954	0.188	0.163	2.996	0.217	0.203	2.677	9	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Jan/2013	228	0.190	0.152	3.022	0.184	0.155	3.070	0.213	0.192	2.763	8	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Fev/2013	229	0.198	0.144	3.031	0.193	0.150	3.063	0.222	0.188	2.754	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
Mar/2013	230	0.200	0.146	3.015	0.193	0.150	3.063	0.222	0.188	2.757	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Abr/2013	231	0.199	0.143	3.028	0.192	0.145	3.080	0.220	0.182	2.778	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Mai/2013	232	0.200	0.142	3.027	0.193	0.144	3.077	0.221	0.181	2.776	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Jun/2013	233	0.200	0.143	3.023	0.193	0.145	3.074	0.221	0.182	2.774	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Jul/2013	234	0.200	0.143	3.025	0.193	0.144	3.078	0.221	0.182	2.778	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Ago/2013	235	0.200	0.143	3.023	0.193	0.145	3.075	0.221	0.182	2.776	8	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Set/2013	236	0.197	0.144	3.042	0.191	0.146	3.092	0.220	0.184	2.786	2	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Out/2013	237	0.191	0.147	3.050	0.183	0.149	3.100	0.212	0.186	2.798	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Nov/2013	238	0.190	0.148	3.050	0.183	0.150	3.100	0.211	0.187	2.798	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Dez/2013	239	0.190	0.147	3.053	0.183	0.149	3.107	0.212	0.185	2.805	7	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	EQM	5.967	6.167	5.800	6.200	5.967	6.100	6.267	6.100	6.100	6.100
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	EAM	1.833	1.900	1.800	1.867	1.833	1.767	1.933	1.933	1.933	1.767

Na Figura 5.1 apresentamos o intervalo de predição um passo à frente com 95% de confiança da série Riachuelo. Este intervalo de predição foi feito apenas com limite superior $[0, u_{T+1}]$ e está justificado em (4.13). Para montar o intervalo de confiança primeiro tivemos que estimar o parâmetro da distribuição condicional um passo à frente, que segue uma distribuição Poisson. Para este passo utilizamos as 30 primeiras observações da série Riachuelo, ou seja, o intervalo de predição um passo à frente começa a partir de Junho de 1996. Na série de Riachuelo verificamos dez observações fora do intervalo de predição um passo à frente, ou seja, aproximadamente 5% dos valores.

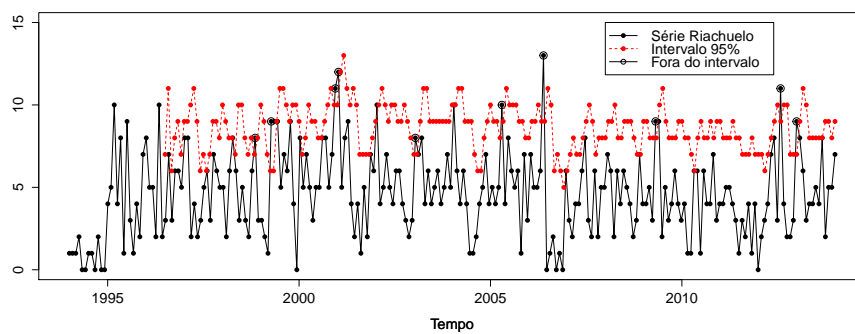


Figura 5.1: Intervalo de predição um passo à frente com 95% de confiança do número de meninos nascidos vivos de mães residentes na cidade de Riachuelo-RN de 1994 até 2013.

Capítulo 6

Considerações finais

As principais contribuições deste trabalho referem-se à apresentação alternativa do modelo $\text{INARCH}(p)$, um caso particular do modelo $\text{INGARCH}(p, q)$ introduzido por Heinen (2003) e posteriormente denominado desta forma por Ferland, Latour e Oraichi (2006), e as proposições relacionadas ao modelo $\text{INARCH}(2)$.

No Capítulo 2, foram apresentadas propriedades gerais do modelo $\text{INARCH}(p)$, bem como procedimentos para a estimação do processo. Ainda neste capítulo foi apresentado o r -ésimo momento da distribuição marginal do processo $\text{INARCH}(2)$, a forma analítica dos estimadores de YW e MQC do processo e a distribuição assintótica dos estimadores de MQC.

A partir do estudo simulado do comportamento dos estimadores apresentado no Capítulo 3 notou-se que em geral em termos de EQM e EAM os estimadores obtidos pelo método de MVC apresentaram um desempenho melhor para todos os parâmetros do modelo, especialmente para o parâmetro λ , enquanto que em termos de viés este bom comportamento ficou restrito ao parâmetro λ , com resultados mais relevantes nas proximidades da região de não estacionariedade.

Ainda no Capítulo 3 foi feita uma aplicação a dados reais utilizando o modelo $\text{INARCH}(2)$, os dados da aplicação referem-se ao número de nascidos vivos do sexo masculino de mães residentes na cidade de Riachuelo no estado do Rio Grande do Norte de janeiro de 1994 até dezembro de 2013, totalizando 240 valores mensais.

Outras contribuições deste trabalho foram as proposições de previsões um, dois e h passos à frente para o modelo $\text{INARCH}(2)$. Essas proposições abordadas no Capítulo 4 foram baseadas nos critérios de minimização do EQMC e do EAMC que nos levaram à esperança condicional do processo h passos à frente e à mediana da distribuição condicional. Apresentamos a distribuição condicional dois passos à frente do processo $\text{INARCH}(2)$ e a partir desta propomos algumas previsões. A fórmula recur-

siva da esperança condicional h passos à frente do modelo INARCH(2), também é uma contribuição deste trabalho.

Como complemento ao Capítulo 4 apresentamos um estudo via simulação de Monte Carlo para comparar o desempenho das previsões propostas neste trabalho em termos de EQM e EAM, e também comparar o desempenho dos estimadores obtidos através dos métodos de YW, MQC e MVC nas previsões um, dois e h passos à frente. Mostramos ainda uma aplicação utilizando as previsões propostas um, dois e h passos à frente, em uma série de dados reais.

A partir do estudo apresentado no Capítulo 5 verificamos que para um passo à frente a previsão $X_{T(1)}^{(imp)}$ tem um comportamento sensivelmente melhor em termos de EQM que as demais. Percebemos que em termos de EAM as previsões $X_{T(1)}^{(map)}$ e $X_{T(1)}^{(med)}$ são equivalentes e sensivelmente melhores na previsão um passo à frente, a equivalência entre estas previsões era esperada pois $X_{T(1)}^{(map)}$ é uma ótima aproximação para mediana exata da distribuição condicional um passo à frente.

As duas previsões propostas h passos à frente, ou seja, o inteiro mais próximo da esperança condicional h passos à frente $X_{T(h)}^{(imp)}$ e a forma recursiva $X_{T(h)}^{(map)}$ expressa em (4.12), em geral apresentaram resultados similares. Em termos de EQM a previsão $X_{T(h)}^{(imp)}$ apresentou uma pequena vantagem e em termos de EAM a previsão $X_{T(h)}^{(map)}$ forneceu valores sensivelmente menores. Portanto indicamos qualquer uma das duas propostas de previsão h passos à frente apresentadas neste trabalho, pois consideramos que ambas são facilmente obtidas através de equações recursivas. Em geral, as previsões não forneceram bons resultados nas proximidades da região de não estacionariedade.

Para as duas previsões h passos à frente percebemos que quando os estimadores de MVC são utilizados, o EQM e o EAM apresentaram valores menores nas proximidades da região de não estacionariedade, isto é, quando o processo estava próximo da não estacionariedade, as previsões com os estimadores de MVC se comportaram melhor em termos de EQM e EAM.

Concluimos ainda, que as previsões obtidas utilizando os estimadores de YW e MQC, não perdem muito em termos de EQM e EAM para as previsões que utilizaram os estimadores de MVC e portanto pelo custo benefício vale a pena utilizar os estimadores de YW e MQC, pois estes são mais fáceis de obter. Fazendo uma comparação entre as previsões que utilizaram os estimadores de YW e MQC percebemos que as previsões obtidas com os estimadores de MQC forneceram resultados um pouco melhores em termos de EQM e EAM, principalmente nas proximidades da região de não estacionariedade.

Referências Bibliográficas

ADELL, J.; JODRÁ, P. The median of the Poisson distribution. *Metrika*, Springer, v. 61, n. 3, p. 337–346, 2005.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Ieee, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974.

AL-OSH, M. A.; ALZAID, A. A. First-order integer-valued autoregressive (INAR (1)) process. *Journal of Time Series Analysis*, Wiley Online Library, v. 8, n. 3, p. 261–275, 1987.

ALZAID, A.; AL-OSH, M. An integer-valued p th-order autoregressive structure (INAR (p)) process. *Journal of Applied Probability*, JSTOR, p. 314–324, 1990.

BILLINGSLEY, P. *Probability and measure*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.

BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986.

BOX, G.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. Time series analysis: Forecasting & control. Prentice Hall, 1994.

BOX, G. E.; JENKINS, G. M. *Time Series Analysis: forecasting and control, revised ed.* [S.l.]: Holden-Day, 1976.

BU, R.; MCCABE, B. Model selection, estimation and forecasting in INAR (p) models: a likelihood-based markov chain approach. *International journal of forecasting*, Elsevier, v. 24, n. 1, p. 151–162, 2008.

CHEN, J.; RUBIN, H. Bounds for the difference between median and mean of gamma and Poisson distributions. *Statistics & Probability Letters*, Elsevier, v. 4, n. 6, p. 281–283, 1986.

CHOI, K. On the medians of gamma distributions and an equation of ramanujan. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 121, n. 1, p. 245–251, 1994.

DURRETT, R. *Probability Theory: Theory and Examples*. [S.l.]: Cambridge University Press: New York, 2010.

FERLAND, R.; LATOUR, A.; ORAICHI, D. Integer-Valued GARCH Process. *Journal of Time Series Analysis*, Wiley Online Library, v. 27, n. 6, p. 923–942, 2006.

-
- FREELAND, R. K. *Statistical analysis of discrete time series with application to*. Tese (Doutorado) — University of British Columbia, 1998.
- FREELAND, R. K.; MCCABE, B. Asymptotic properties of CLS estimators in the Poisson AR (1) model. *Statistics & probability letters*, Elsevier, v. 73, n. 2, p. 147–153, 2005.
- FREELAND, R. K.; MCCABE, B. P. Forecasting discrete valued low count time series. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 20, n. 3, p. 427–434, 2004.
- HEINEN, A. Modelling time series count data: an autoregressive conditional Poisson model. *Disponível em SSRN 1117187*, 2003.
- HEYDE, C.; HALL, D. Martingale limit theory and its applications. *Probability and Mathematical Statistics*, 1980.
- JOHANSSON, P. Speed limitation and motorway casualties: a time series count data regression approach. *Accident Analysis & Prevention*, Elsevier, v. 28, n. 1, p. 73–87, 1996.
- JUNG, R. C.; TREMAYNE, A. Coherent forecasting in integer time series models. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 22, n. 2, p. 223–238, 2006.
- KLIMKO, L. A.; NELSON, P. I. On conditional least squares estimation for stochastic processes. *The Annals of statistics*, JSTOR, p. 629–642, 1978.
- PITMAN, J. Some probabilistic aspects of set partitions. *American Mathematical Monthly*, JSTOR, p. 201–209, 1997.
- R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2011. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>.
- SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978.
- SILVA, N.; PEREIRA, I.; SILVA, M. E. Forecasting in INAR (1) model. Instituto Nacional de Estatística, 2009.
- STEUTEL, F.; HARN, K. V. Discrete analogues of self-decomposability and stability. *The Annals of Probability*, p. 893–899, 1979.
- STEWART, J. Cálculo volume II. *São Paulo: Pioneira Thomson Learning*, 2006.
- WEISS, C. H. Controlling correlated processes of poisson counts. *Quality and reliability engineering international*, Wiley Online Library, v. 23, n. 6, p. 741–754, 2007.
- _____. Serial dependence and regression of poisson INARMA models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Elsevier, v. 138, n. 10, p. 2975–2990, 2008.
- _____. Modelling time series of counts with overdispersion. *Statistical Methods and Applications*, Springer, v. 18, n. 4, p. 507–519, 2009.

_____. The INARCH (1) model for overdispersed time series of counts. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, Taylor & Francis, v. 39, n. 6, p. 1269–1291, 2010.

ZEA, L. M. F. *Forecasting time series with integer values*. Tese (Doutorado) — Federal University of Pernambuco, 2013.

ZHU, F.; WANG, D. Estimation and testing for a poisson autoregressive model. *Metrika*, Springer, v. 73, n. 2, p. 211–230, 2011.

Apêndice A

Obtenção dos estimadores do processo INARCH(2)

A.1 Obtenção dos estimadores do processo INARCH(2) pelo método de YW

As equações de Yule-Walker para o modelo INARCH(2) são dadas por

$$\begin{aligned}\rho(1) &= \alpha_1\rho(0) + \alpha_2\rho(1), \\ \rho(2) &= \alpha_1\rho(1) + \alpha_2\rho(0).\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima, temos

$$\begin{aligned}\rho(1) - \alpha_2\rho(1) &= \alpha_1\rho(0), \\ \rho(1) &= \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}, \\ \rho(2) &= \alpha_1 \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2} \right) + \alpha_2\rho(0), \\ \rho(2) &= \frac{\alpha_1^2}{1 - \alpha_2} + \alpha_2.\end{aligned}$$

Para estimar α_1 e α_2 pelas equações de Yule-Walker, substituímos $\rho(1)$ e $\rho(2)$ por suas respectivas estimativas $\hat{\rho}(1)$ e $\hat{\rho}(2)$, em que

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} [(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})]}{\sum_{t=1}^T [(X_t - \bar{X})^2]},$$

em que

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(1) &= \frac{\hat{\alpha}_{1YW}}{1 - \hat{\alpha}_{2YW}}, \\ \hat{\alpha}_{1YW} &= (1 - \hat{\alpha}_{2YW})\hat{\rho}(1), \\ \hat{\rho}(2) &= \frac{\hat{\alpha}_{1YW}^2}{1 - \hat{\alpha}_{2YW}} + \hat{\alpha}_{2YW}, \end{aligned}$$

substituindo $\hat{\alpha}_{1YW}$, temos

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(2) &= \frac{(1 - \hat{\alpha}_{2YW})^2 \hat{\rho}^2(1)}{1 - \hat{\alpha}_{2YW}} + \hat{\alpha}_{2YW} = \hat{\rho}^2(1) - \hat{\alpha}_{2YW} \hat{\rho}^2(1) + \hat{\alpha}_{2YW}, \\ \hat{\alpha}_{2YW} &= \frac{\hat{\rho}(2) - \hat{\rho}^2(1)}{1 - \hat{\rho}^2(1)}, \end{aligned}$$

substituindo agora as expressões de autocorrelações amostrais, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{1YW} &= (1 - \hat{\alpha}_{2YW}) \frac{\sum_{t=1}^{T-1} [(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})]}{\sum_{t=1}^T [(X_t - \bar{X})^2]}, \\ \hat{\alpha}_{2YW} &= \frac{\frac{\sum_{t=1}^{T-2} [(X_t - \bar{X})(X_{t+2} - \bar{X})]}{\sum_{t=1}^T [(X_t - \bar{X})^2]} - \left[\frac{\sum_{t=1}^{T-1} [(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})]}{\sum_{t=1}^T [(X_t - \bar{X})^2]} \right]^2}{1 - \left[\frac{\sum_{t=1}^{T-1} [(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})]}{\sum_{t=1}^T [(X_t - \bar{X})^2]} \right]^2}. \end{aligned}$$

O estimador para λ pela abordagem Yule-Walker é baseado no primeiro momento de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, que é dado por

$$\mu = E[X_t] = \frac{\lambda}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}.$$

Logo,

$$\hat{\lambda}_{YW} = (1 - \hat{\alpha}_{1YW} - \hat{\alpha}_{2YW})\hat{\mu},$$

em que $\hat{\mu} = \bar{X}$ é um estimador fracamente consistente para μ .

A.2 Obtenção dos estimadores do processo INARCH(2) pelo método de MQC

Seja $MQC(\lambda, \alpha_1, \alpha_2)$ a função que desejamos minimizar, dada por

$$MQC(\lambda, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{t=3}^T (X_t - \lambda - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-2})^2.$$

Então os estimadores dos parâmetros são obtidos abaixo:

- Estimador de λ

$$\begin{aligned} \frac{\partial MQC}{\partial \lambda} &= -2 \sum_{t=3}^T (X_t - \hat{\lambda} - \hat{\alpha}_{1MQC} X_{t-1} - \hat{\alpha}_{2MQC} X_{t-2}) = 0 \\ 0 &= \sum_{t=3}^T X_t - (T-2) \hat{\lambda}_{MQC} - \hat{\alpha}_{1MQC} \sum_{t=3}^T X_{t-1} - \hat{\alpha}_{2MQC} \sum_{t=3}^T X_{t-2} \\ (T-2) \hat{\lambda}_{MQC} &= \sum_{t=3}^T X_t - \hat{\alpha}_{1MQC} \sum_{t=3}^T X_{t-1} - \hat{\alpha}_{2MQC} \sum_{t=3}^T X_{t-2} \\ \hat{\lambda}_{MQC} &= \frac{\sum_{t=3}^T X_t - \hat{\alpha}_{1MQC} \sum_{t=3}^T X_{t-1} - \hat{\alpha}_{2MQC} \sum_{t=3}^T X_{t-2}}{T-2}. \end{aligned}$$

- Estimador de α_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial MQC}{\partial \alpha_1} &= -2 \sum_{t=3}^T X_{t-1} (X_t - \hat{\lambda}_{MQC} - \hat{\alpha}_{1MQC} X_{t-1} - \hat{\alpha}_{2MQC} X_{t-2}) = 0 \\ 0 &= \sum_{t=3}^T X_{t-1} X_t - \hat{\lambda}_{MQC} \sum_{t=3}^T X_{t-1} - \hat{\alpha}_{1MQC} \sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - \hat{\alpha}_{2MQC} \sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2}, \end{aligned}$$

substituindo $\hat{\lambda}_{MQC}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{t=3}^T X_{t-1} X_t - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_t}{T-2} - \hat{\alpha}_{1MQC} \left[\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - \frac{\left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} \right)^2}{T-2} \right] \\ &\quad - \hat{\alpha}_{2MQC} \left[\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_{t-2}}{T-2} \right]. \end{aligned}$$

Isolando $\hat{\alpha}_{1MQC}$, temos

$$\hat{\alpha}_{1MQC} = \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_t - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_t}{T-2} - \hat{\alpha}_{2MQC} \left[\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_{t-2}}{T-2} \right]}{\left[\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - \frac{\left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} \right)^2}{T-2} \right]}.$$

- Estimador de α_2

$$\begin{aligned}\frac{\partial MQC}{\partial \alpha_2} &= -2 \sum_{t=3}^T X_{t-2} (X_t - \hat{\lambda}_{MQC} - \hat{\alpha}_{1MQC} X_{t-1} - \hat{\alpha}_{2MQC} X_{t-2}) = 0 \\ 0 &= \sum_{t=3}^T X_{t-2} X_t - \hat{\lambda} \sum_{t=3}^T X_{t-2} - \hat{\alpha}_{1MQC} \sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} - \hat{\alpha}_{2MQC} \sum_{t=3}^T X_{t-2}^2,\end{aligned}$$

substituindo $\hat{\lambda}_{MQC}$, temos

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{t=3}^T X_{t-2} X_t - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-2} \sum_{t=3}^T X_t}{T-2} - \hat{\alpha}_{1MQC} \left[\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_{t-2}}{T-2} \right] \\ &\quad - \hat{\alpha}_{2MQC} \left[\sum_{t=3}^T X_{t-2}^2 - \frac{(\sum_{t=3}^T X_{t-2})^2}{T-2} \right],\end{aligned}$$

substituindo $\hat{\alpha}_{1MQC}$, temos

$$\begin{aligned}0 &= \left[\sum_{t=3}^T X_{t-2} X_t - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-2} \sum_{t=3}^T X_t}{T-2} - \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_t - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_t}{T-2} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_{t-2}}{T-2} \right) \setminus \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - \frac{(\sum_{t=3}^T X_{t-1})^2}{T-2} \right) \right] \\ &\quad - \hat{\alpha}_{2MQC} \left[\left(\sum_{t=3}^T X_{t-2}^2 - \frac{(\sum_{t=3}^T X_{t-2})^2}{T-2} \right) - \frac{\left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_{t-2}}{T-2} \right)^2}{\left(\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - \frac{(\sum_{t=3}^T X_{t-1})^2}{T-2} \right)} \right].\end{aligned}$$

Isolando $\hat{\alpha}_{2MQC}$, temos

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{2MQC} &= \left[\left(\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - \frac{(\sum_{t=3}^T X_{t-1})^2}{T-2} \right) \left(\sum_{t=3}^T X_{t-2} X_t - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-2} \sum_{t=3}^T X_t}{T-2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_t - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_t}{T-2} \right) \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_{t-2}}{T-2} \right) \right] \\ &\quad \setminus \left[\left(\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - \frac{(\sum_{t=3}^T X_{t-1})^2}{T-2} \right) \left(\sum_{t=3}^T X_{t-2}^2 - \frac{(\sum_{t=3}^T X_{t-2})^2}{T-2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} - \frac{\sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_{t-2}}{T-2} \right)^2 \right].\end{aligned}$$

Para verificar que o ponto crítico $P = (\hat{\alpha}_{1MQC}, \hat{\alpha}_{2MQC}, \hat{\lambda}_{MQC})$, é um ponto de mínimo, vejamos o seguinte teorema

Teorema A.2.1. *Seja P um ponto crítico não degenerado da função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($\nabla f(P) = \vec{0}$ e $\Delta(\text{Hessiana}(f(P))) \neq 0$) com todas as derivadas parciais de segunda ordem sendo contínuas, então*

- $\Delta_i(\text{Hessiana}(f(P))) > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ (todos os Δ_i 's estritamente positivos) se, e somente se P é ponto de mínimo local estrito.
- $(-1)^i \Delta_i(\text{Hessiana}(f(P))) > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ (sinal de Δ_i , começando do negativo) se, e somente se P é ponto de máximo local estrito.
- Se nenhuma das anteriores for satisfeita, então é um ponto de sela.

Sendo que

$$\Delta_i = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} \end{bmatrix}.$$

Para mais detalhes, ver Stewart (2006). Dado que a matriz hessiana de $MQC(\lambda, \alpha_1, \alpha_2)$ é expressa a seguir

$$\begin{bmatrix} 2(T-2) & 2\sum_{t=3}^T X_{t-1} & 2\sum_{t=3}^T X_{t-2} \\ 2\sum_{t=3}^T X_{t-1} & 2\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 & 2\sum_{t=3}^T X_{t-1}X_{t-2} \\ 2\sum_{t=3}^T X_{t-2} & 2\sum_{t=3}^T X_{t-1}X_{t-2} & 2\sum_{t=3}^T X_{t-2}^2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\Delta_1 = 2(T-2) > 0, \text{ pois } T > 2.$$

$$\Delta_2 = 4(T-2) \sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - 4(\sum_{t=3}^T X_{t-1})^2 > 0, \text{ pois}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=3}^T (X_{t-1} - \bar{X})^2 &> 0, \\ \sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - 2\bar{X} \sum_{t=3}^T X_{t-1} + (T-2)\bar{X}^2 &> 0, \\ \sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - 2\bar{X}(T-2)\bar{X} + (T-2)\bar{X}^2 &> 0, \\ \sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - \bar{X}^2(T-2) &> 0, \\ \sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - \frac{(\sum_{t=3}^T X_{t-1})^2}{(T-2)^2}(T-2) &> 0, \\ \sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 - \frac{(\sum_{t=3}^T X_{t-1})^2}{(T-2)} &> 0, \\ (T-2) \sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 &> \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = 8(T-2) \left[\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 \sum_{t=3}^T X_{t-2}^2 - \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} \right)^2 \right] \quad (\text{A.1})$$

$$+ 16 \sum_{t=3}^T X_{t-1} \sum_{t=3}^T X_{t-2} \sum_{t=3}^T X_{t-1} X_{t-2} \quad (\text{A.2})$$

$$- 8 \left[\sum_{t=3}^T X_{t-1}^2 \left(\sum_{t=3}^T X_{t-2} \right)^2 + \sum_{t=3}^T X_{t-2}^2 \left(\sum_{t=3}^T X_{t-1} \right)^2 \right], \quad (\text{A.3})$$

em que (A.1) > 0 pela desigualdade de Cauchy, (A.2) > 0 pois X_1, \dots, X_T são valores inteiros positivos, e (A.3) < 0 . Com algum trabalho algébrico temos que $\Delta_3 > 0$.

Apêndice B

Demonstrações

B.1 Demonstração da variância incondicional do modelo INARCH(2)

De acordo com a função de autocovariância para o modelo INARCH(2), temos que:

$$\text{Var}[X_t] = \gamma(0) = \alpha_1\gamma(1) + \alpha_2\gamma(2) + \mu,$$

em que, $\gamma(1) = \frac{\alpha_1\gamma(0)}{1-\alpha_2}$ e $\gamma(2) = \alpha_1\gamma(1) + \alpha_2\gamma(0) = \frac{\alpha_1^2\gamma(0)}{1-\alpha_2} + \alpha_2\gamma(0)$. Substituindo $\gamma(1)$ e $\gamma(2)$ na equação acima, temos

$$\gamma(0) = \frac{\alpha_1^2\gamma(0)}{1-\alpha_2} + \alpha_2\frac{\alpha_1^2\gamma(0)}{1-\alpha_2} + \alpha_2^2\gamma(0) + \mu.$$

Isolando os termos de $\gamma(0)$, obtemos

$$\gamma(0) \left[1 - \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} - \alpha_2\frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} - \alpha_2^2 \right] = \mu$$

$$\gamma(0) \left[\frac{(1-\alpha_2)(1-\alpha_2^2) - \alpha_1^2(1+\alpha_2)}{1-\alpha_2} \right] = \mu,$$

sendo que $\mu = E[X_t] = \frac{\lambda}{1-\alpha_1-\alpha_2}$, logo

$$\gamma(0) = \frac{\lambda(1-\alpha_2)}{(1-\alpha_1-\alpha_2)[(1-\alpha_2)(1-\alpha_2^2) - \alpha_1^2(1+\alpha_2)]}.$$

B.2 Elementos da Matriz W

Pela suposição que o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário, temos que $E[X_{t-1}] = E[X_{t-2}] = \mu$ definido em (2.17), pelo mesmo argumento temos $E[X_{t-1}^2] = E[X_{t-2}^2] = E[X_t^2]$ expresso em (2.17). $E[X_{t-1}X_{t-2}] = \gamma(1) + \mu^2$, em que $\gamma(1)$ é obtido da equação (2.19) para $k = 1$, logo $E[X_{t-1}X_{t-2}] = \mu^2 + (\alpha_1\mu)/(1 + \alpha_2)[(1 - \alpha_2)^2 - \alpha_1^2]$.

O terceiro momento do processo pode ser obtido da Proposição 2.3.1 para $r = 3$ e dado por

$$\begin{aligned} E[X_t^3] &= \left[(1 - 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^3)\{\lambda + \mu(\alpha_1 + \alpha_2 + 6\lambda\alpha_1 + 6\lambda\alpha_2 + 3\lambda^2\alpha_1 + 3\lambda^2\alpha_2) \right. \\ &\quad + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3E[X_t^2](\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \lambda\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2) \\ &\quad + 6\alpha_1\alpha_2(1 + \lambda)E[X_{t-1}, X_{t-2}] \} + 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_1^2) \\ &\quad \times [\lambda^2\mu + E[X_t^2](\alpha_1 + 2\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2^2) + (\alpha_2 + 2\lambda\alpha_2)E[X_{t-1}X_{t-2}] + \lambda\mu] \\ &\quad \left. \backslash [(1 - 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^3)(1 - \alpha_1^3 - \alpha_2^3 - 3\alpha_1^2\alpha_2^2) - 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\alpha_1)] \right]. \end{aligned}$$

Note que o terceiro momento depende apenas dos parâmetros do processo INARCH(2), pois é função de esperanças que também dependem somente dos parâmetros.

As esperanças $E[X_{t-1}^2X_{t-2}]$ e $E[X_{t-1}X_{t-2}^2]$ são dadas a seguir

$$\begin{aligned} E[X_{t-1}X_{t-2}^2] &= E\{E[X_{t-1}X_{t-2}^2|X_{t-2}, X_{t-3}]\} \\ &= E\{X_{t-2}^2E[X_{t-1}|X_{t-2}, X_{t-3}]\} \\ &= E[X_{t-2}^2(\lambda + \alpha_1X_{t-2} + \alpha_2X_{t-3})] \\ &= E[\lambda X_{t-2}^2 + \alpha_1X_{t-2}^3 + \alpha_2X_{t-2}^2X_{t-3}] \\ &= \lambda E[X_{t-2}^2] + \alpha_1E[X_{t-2}^3] + \alpha_2E[X_{t-2}^2X_{t-3}], \end{aligned}$$

pela suposição de estacionariedade, temos

$$E[X_{t-1}X_{t-2}^2] = \lambda E[X_t^2] + \alpha_1 E[X_t^3] + \alpha_2 E[X_{t-1}^2X_{t-2}]. \quad (\text{B.1})$$

Encontrando a esperança do produto de X_{t-1}^2 e X_{t-2} .

$$\begin{aligned}
E[X_{t-1}^2 X_{t-2}] &= E\{E[X_{t-1}^2 X_{t-2} | X_{t-2}, X_{t-3}]\} \\
&= E\{X_{t-2} E[X_{t-1}^2 | X_{t-2}, X_{t-3}]\} \\
&= E\{X_{t-2} [(\lambda + \alpha_1 X_{t-2} + \alpha_2 X_{t-3})^2 + (\lambda + \alpha_1 X_{t-2} + \alpha_2 X_{t-3})]\} \\
&= E[\lambda^2 X_{t-2} + (\alpha_1 + 2\lambda\alpha_1) X_{t-2}^2 + (\alpha_2 + 2\lambda\alpha_2) X_{t-2} X_{t-3} + \alpha_1^2 X_{t-2}^3 \\
&\quad + 2\alpha_1\alpha_2 X_{t-2}^2 X_{t-3} + \alpha_2^2 X_{t-2} X_{t-3}^2 + \lambda X_{t-2}] \\
&= \lambda^2 E[X_{t-2}] + (\alpha_1 + 2\lambda\alpha_1) E[X_{t-2}^2] + (\alpha_2 + 2\lambda\alpha_2) E[X_{t-2} X_{t-3}] \\
&\quad + \alpha_1^2 E[X_{t-2}^3] + 2\alpha_1\alpha_2 E[X_{t-2}^2 X_{t-3}] + \alpha_2^2 E[X_{t-2} X_{t-3}^2] + \lambda E[X_{t-2}],
\end{aligned}$$

pela suposição de estacionariedade, temos

$$\begin{aligned}
E[X_{t-1}^2 X_{t-2}] &= \lambda^2 E[X_t] + (\alpha_1 + 2\lambda\alpha_1) E[X_t^2] + (\alpha_2 + 2\lambda\alpha_2) E[X_{t-1} X_{t-2}] \\
&\quad + \alpha_1^2 E[X_t^3] + 2\alpha_1\alpha_2 E[X_{t-1}^2 X_{t-2}] + \alpha_2^2 E[X_{t-1} X_{t-2}^2] + \lambda E[X_t] \\
&= [\lambda^2 E[X_t] + (\alpha_1 + 2\lambda\alpha_1) E[X_t^2] + (\alpha_2 + 2\lambda\alpha_2) E[X_{t-1} X_{t-2}] \\
&\quad + \alpha_1^2 E[X_t^3] + \alpha_2^2 E[X_{t-1} X_{t-2}^2] + \lambda E[X_t]] \setminus (1 - 2\alpha_1\alpha_2),
\end{aligned}$$

substituindo $E[X_{t-1} X_{t-2}^2]$ por (B.1), temos

$$\begin{aligned}
E[X_{t-1}^2 X_{t-2}] &= [\lambda^2 E[X_t] + (\alpha_1 + 2\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2^2) E[X_t^2] + (\alpha_2 + 2\lambda\alpha_2) E[X_{t-1} X_{t-2}] \\
&\quad + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2\alpha_1) E[X_t^3] + \lambda E[X_t]] \setminus (1 - 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^3),
\end{aligned}$$

ou seja, $E[X_{t-1}^2 X_{t-2}]$ só depende de quantidades que são funções dos parâmetros α_1 , α_2 e λ do processo.