Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística

Márcia Gabriele Gonçalves de Sousa Lima

Um estudo sobre Polinômios Matriciais

Natal - RN
Outubro de 2015

Márcia Gabriele Gonçalves de Sousa Lima

Um estudo sobre Polinômios Matriciais

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Modelagem Matemática

Orientador:

Prof. Dr. Edgar Silva Pereira

Natal - RN

Outubro de 2015

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Lima, Márcia Gabriele Gonçalves de Sousa.
Um estudo sobre polinômios matriciais / Márcia Gabriele Gonçalves de Sousa Lima. - Natal, 2015.
vii, 47 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Edgar Silva Pereira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística.

1. Polinômio matricial – Dissertação. 2. Solvente – Dissertação. 3. Bloco autovalor – Dissertação. 4. Método da potência – Dissertação. I. Pereira, Edgar Silva. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU: 511.176

Márcia Gabriele Gonçalves de Sousa Lima

Um estudo sobre Polinômios Matriciais

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovado em: / /

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edgar Silva Pereira
Departamento de Matemática - UFRN
Orientador(a)

Prof. Dr. Nir Cohen
Departamento de Matemática - UFRN
Examinador Interno

Prof^{a}. Dr^{a}. Maria Cecília dos Santos Rosa
Departamento de Matemática-IPG/Portugal
Examinador Externo

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais Francisco e Gildásia, aos meus irmãos Carlos e Sylvio e ao meu esposo Diego (in memorian).

Agradecimentos

Eu poderia começar escrevendo como todo mundo, mas particularmente posso dizer que não me acho como todo mundo. Acredito que todos vieram ao mundo para cumprir um legado e ao longo da vida descobrimos o real sentindo de existirmos.

E ao longo da vida fazemos escolhas, as quais nos tornam ou não especiais na vida de alguém, algumas pessoas podem se tornar extraordinárias e inesquecíveis. É assim que posso definir minha mãe, simplesmente extraordinária, pois mesmo com os olhos cansados de enxergar longe por mim, hoje pode enxergar de perto e ter a certeza que o longe, de perto é mais bonito.

Todas as minhas vitórias, dedico a minha mãe a mulher mais guerreira que conheço. O sorriso hoje, é a maior recompensa. Pois agora, sorrindo lembramos de cada lágrima derramada em cada despedida, no entanto não sentimos mais a dor, pois a sensação de vitória é maravilhosa.

Mãe, Pai... Aos senhores, agradeço a vida e lhe pago com a vitória. Agradeço ao meu Deus, soberano. O qual denomino de "Amor", o amor que é o que nos une, nos torna um só. Existem várias vertentes de como acreditar em Deus. Porém prefiro assim, pois olho para cada pessoa que amo e consigo ver a imagem de Deus, consigo sentir a força e a segurança para seguir em frente.

Tenho como exemplo de segurança e determinação, meus irmãos, aos quais sempre estiveram ao meu lado apoiando e me ensinaram que "*Lutar? Sempre! Vencer? Se possível. Desitir? Jamais*". E mesmo que não obtenhamos vitórias, acumulamos experiência e nós tornamos cada vez mais fortes para a próxima batalha. Obrigada!

Acredito ainda, que quando amamos alguém, o motivo o qual nós faz amar não se explica, as palavras somem e só, quando fecho os olhos consigo sentir, não preciso transformar meus sentimentos em palavras, pois mesmo sem falar, consigo explicar o que sinto, para mim mesma. Sendo assim, acredito que amor é algo trancedental, inexplicável e maravilhoso de se sentir. Algo que só mesmo o espírito que se alimenta de todo esse amor pode explicar...Esse amor eu senti ao lado do meu esposo, o qual sempre mostrou-se orgulhoso por cada conquista minha, e a ele só tenho a agradecer. Apesar de o coração apertado e cheio de saudades, sem seu apoio não estaria concluindo mais essa etapa da minha vida. Obrigado meu amor!

Minha família se resume a amor, pois são o que alimentam minha alma e me fazem sentir a vida, saber o quanto é bom senti-la. A cada conquista que alcançamos nos lembra o quanto é gostoso se sentir vitorioso. Mas nem sempre conseguimos sentir esse gosto e é o que nos torna forte, é o que me torna forte.

Por fim, agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e seus professores, em especial ao meu orientador Edgar, que foi fundamental no desenvolvimento do trabalho, e que a todo momento esteve ao meu dado, não só como um professores me auxiliando nas dificuldades, mas nele pode encontrar um ser de grande coração, paciente e compreensível. Agradeço, também, a disponibilidade dos professor Nir Cohen e Maria Cecília (IPG/Portugal), os quais participarão da banca examinadora.

Sou eternamente grata a todos os meus colegas de mestrado, Rumenick, Renato, Paulinho, July, Fábio, Wênia. Em especial ao colega e amigo Eduardo Rangel pelas contribuições dadas ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Uma vez ouvir que quando nascemos começamos a morrer, particularmente prefiro acreditar que quando nascemos não perdemos nada, muito menos a vida. Acredito que é à partir daí que nos a fazermos valer a pena, cada sorriso, cada gentileza, cada amor retribuído nos torna tão humanos e vivos, assim como cada lágrima derramada, como cada dor sentida.

É assim que me fez forte, que me fez ser o que sou. Simplesmente eu. Gosto da definição de infinito, o que é imenso; incalculável, imensurável. É assim que me sinto hoje. Infinita!

Demore o tempo que for para decidir o que você quer da vida, e depois que decidir não recue ante nenhum pretexto, porque o mundo tentará te dissuadir.

Friedrich
Nietzsche

Resumo

Esse trabalho de pesquisa tem por objetivo, fazer um estudo sobre a teoria algébrica dos polinômios matriciais mônicos, bem como das definições, conceitos e propriedades de no que diz respeito a bloco autovalores, bloco autovetores e solventes de $P(X)$. Investigando as principais relações entre o polinômio matricial e as matrizes bloco Companheira e bloco Vandermonde. Estudamos a construção de polinômios matriciais com determinados solventes e a extensão do Método da Potência, para calcular blocos autovalores da matriz Companheira e solventes de $P(X)$. Através da relação entre o bloco autovalor dominante da matriz Companheira e o solvente dominante de $P(X)$ é possível obtermos a convergência do algoritmo para o solvente dominante do polinômio matricial mônico. Ilustramos com exemplos numéricos para casos distintos de convergência.

Palavras-chave: Polinômio Matricial. Solvente. Bloco Autovalor. Método da Potência.

Abstract

This research work aims to make a study of the algebraic theory of matrix monic polynomials, as well as the definitions, concepts and properties with respect to block eigenvalues, block eigenvectors and solvents of $P(X)$. We investigte the main relations between the matrix polynomial and the Companion and Vandermonde matrices. We study the construction of matrix polynomials with certain solvents and the extention of the Power Method, to calculate block eigenvalues and solvents of $P(X)$. Through the relationship between the dominant block eigenvalue of the Companion matrix and the dominant solvent of $P(X)$ it is possible to obtain the convergence of the algorithm for the dominant solvent of the matrix polynomial. We illustrate with numerical examples for different cases of convergence.

Keywords: Matrix Polynomial. Solvent. Block eigenvalue. Power method.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Teoria Algébrica **3**

2.1 Polinômio Matricial $P(X)$ 3

2.2 Matrizes de Blocos Associadas a $P(X)$ 6

2.2.1 Matriz Bloco Companheira de $P(X)$ 7

2.2.2 Matriz Bloco Vandermonde 8

2.3 Bloco Autovalor e Bloco autovetor 9

2.4 Propriedades de Blocos Autovalores e Blocos Autovetores 11

2.5 Condição de Existência do Solvente 14

2.6 Construção de Polinômios Matriciais e Solventes 17

2.6.1 Caso Diagonalizável 17

2.6.2 Caso Não-Diagonálizavel 25

3 Métodos Numéricos **31**

3.1 Método da Potência 31

3.1.1 Convergência do Algoritmo 35

3.1.2 Aplicação do Algoritmo 39

4 Conclusão **45**

Referências Bibliográficas **46**

Capítulo 1

Introdução

O estudo de equações polinomiais remonta a quase 5 mil anos e tem sido de grande influência no progresso da matemática. Entretanto, a preocupação com equações polinomiais envolvendo matrizes é relativamente recente. (PEREIRA, 2003b)

De maneira geral, podemos citar como marco inicial do estudo dos Polinômios Matriciais, o trabalho de Roth (1930), o qual apresenta a relação dos autovetores generalizados e dos respectivo autovalor de um solvente e do Polinômio Matricial. E anos mais tarde, Dennis Jr, Traub e Weber (1971), reúnem em uma nota técnica, a teoria algébrica e apresenta condições de existência de solução para o Polinômio Matricial. Trabalho esse, que dá origem a outros dois artigos. Sendo no primeiro desenvolvido a teoria algébrica dos polinômios matriciais (DENNIS JR; TRAUB; WEBER, 1976). No segundo são apresentados dois algoritmos para calcular solventes dominantes e conjuntos completos de solventes de um polinômio matricial (DENNIS JR; TRAUB; WEBER, 1978).

Apesar de recente, o estudo sobre Polinômio Matricial, tem aplicabilidade vasta a problemas nas diversas áreas da Ciência, em especial nas áreas de vibro-acústica, de propagação eletromagnética, mecânica dos fluídos, análise modal de estruturas mecânicas,etc. Tais problemas, de modo geral, se remetem ao cálculo numérico das soluções de equações diferenciais, o qual pode ser feito através do cálculo dos autovalores ou dos solventes do polinômio matricial associado.

Neste trabalho apresentaremos generalizações de um método numérico para calcular solventes de Polinômio Matricial. Iniciando pela teoria básica de Polinômio Matricial e alguns resultados importantes nesse contexto. Faremos o estudo do Método da Potência, para o caso matricial, o qual consiste no cálculo do solvente dominante.

Este trabalho, além do capítulo introdutório, está divido em 3 capítulos. No Capítulo 2 apresentamos a teoria algébrica dos polinômios matriciais mônicos, das definições, conceitos e propriedades de bloco autovalores, bloco autovetores e solventes de $P(X)$. Explanando sobre as principais relações entre o polinômio matricial e as matrizes bloco Companheira e bloco Vandermonde, com o intuito de promover um embasamento para o próximo capítulo. No Capítulo 3 estudamos a extensão do Método da Potência, para calcular bloco autovalores da matriz Companheira e solventes de $P(X)$, ilustramos através de exemplos numéricos para casos distintos de convergência do método. E por fim, nossas conclusões.

Vale salientar que quando não indicamos a referência básica para polinômios matriciais, a mesma pode ser encontrada nos trabalhos Dennis Jr, Traub e Weber (1971), Dennis Jr, Traub e Weber (1976). Dennis Jr, Traub e Weber (1978), Lancaster e Tismenetsky (1985), Gohberg, Lancaster e Rodman (1982). Referente aos estudos de bloco autovalores e bloco autovetores podemos encontrar na literatura de Dennis Jr, Traub e Weber (1971), Tsai, Shieh e Shen (1988), Pereira (2000).

Capítulo 2

Teoria Algébrica

Na primeira sessão deste capítulo apresentamos conceitos, definições, propriedade básicas e teóricas envolvendo polinômios matriciais. Sendo nas sessões subsequentes apresentada definição e relação entre a matriz bloco companheira e bloco Vandermonde e o polinômio matricial $P(X)$. Finalizando o capítulo com o estudo dos bloco autovalores e a construção de $P(X)$ e dos solventes de $P(X)$.

2.1 Polinômio Matricial $P(X)$

Definição 2.1 *Sejam $A_0, A_1, \ldots A_m$ matrizes complexas de ordem n, ou seja $A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$, para $i = 0, \ldots, m$. A expressão abaixo é denominada **Polinômio Matricial**, de grau m,*

$$P(X) = A_0X^m + A_1X^{m-1} + \ldots + A_{m-1}X + A_m. \tag{2.1}$$

com $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, também matriz, de ordem n e $A_0 \neq 0$.

Se A_0 é a matriz identidade $n \times n$, ou seja, $A_0 = I_n$, P é dito polinômio matricial mônico. E mais, uma matriz $S_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, de ordem n, que satisfaz a equação $P(S_1) = 0$, onde 0 é a matriz nula de ordem n, então S_1 é dita **solvente** (à direita) de $P(X)$.

Se ao invés da variável S_1, tivermos um número complexo, $\lambda \in \mathbb{C}$, em particular λI_n, então o polinômio matricial $P(\lambda)$ é um polinômio matricial em lambda.

Definição 2.2 *Seja $A_0, A_1, \ldots A_m$ matrizes complexas ($A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}, i = 0, \ldots, m$), a expressão abaixo é denominada polinômio matricial em lambda, de grau m,*

$$P(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \ldots + A_{m-1}\lambda + A_m. \tag{2.2}$$

Salientamos que a cada polinômio matricial, $P(X)$, está associado um polinômio matricial em lambda, $P(\lambda)$, e muitas das propriedades de $P(X)$ são obtidas por $P(\lambda)$. Ressaltamos ainda que, neste trabalho iremos considerar apenas polinômios mônicos.

Definição 2.3 *Seja o polinômio matricial em lambda $P(\lambda)$ (2.2), se $\alpha_0 \in \mathbb{C}$, tal que $det(P(\alpha_0)) = 0$, denominamos que α_0 é* ***autovalor de*** *$P(\lambda)$. E se $v \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ e $v \neq 0$, tal que $P_m(\lambda)v = 0$, denominamos que v é* ***autovetor*** *de $P(\lambda)$.*

Definição 2.4 *Dado o polinômio matricial em lambda 2.2, $P(\lambda)$, e um $\alpha_0 \in \mathbb{C}$, tal que $det(P(\alpha_0)) = 0$ e dado $v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}$, k vetores (não necessariamente distintos nem linearmente independentes), com $v_0 \neq 0$ e que satisfazem as seguintes equações*

$$P(\alpha_0)v_i + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\alpha_0)v_{i-1} + \frac{1}{2!}P^{(2)}(\alpha_0)v_{i-2} + \cdots + \frac{1}{j!}P^{(j)}(\alpha_0)v_{i-j} = 0$$

$i = 0, \cdots, k-j; k \geq j$. $P^{(j)}(\alpha_0)$ é a j-ésima derivada de $P(\lambda)$, calculada no ponto α_0. Dizemos que $v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}$ formam uma cadeia de Jordan de $P(\lambda)$, também podemos denominar de ***autovetores generalizados*** *de $P(\lambda)$.*

Temos que destacar uma importante definição referente ao par formado por um autovalor e um autovetor. O que é definido usando conceito de cadeia de Jordan e seu respectivo bloco de Jordan. Segundo Pereira (2003b), para qualquer matriz complexa a definição é equivalente.

Definição 2.5 *Dado um polinômio matricial em lambda (2.2), $P(\lambda)$, e a matriz de ordem $n \times k$*

$$V_i = [v_{i1}v_{i2}\cdots v_{ik}],$$

onde $v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{ik}$ são os autovetores generalizados (ou cadeia de Jordan) de $P(\lambda)$ correspondentes ao bloco de Jordan de ordem k,

$$J_i = \begin{bmatrix} a_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_i & 1 \\ & & & a_i \end{bmatrix}.$$

Denominamos (V_i, J_i) par próprio de $P(\lambda)$. Caso $P(\lambda)$ possua grau 1, ou seja $P(\lambda) = (A - \lambda I_n)$, definimos que (V_i, J_i) é par próprio da matriz complexa A.

De maneira geral, dado um polinômio matricial em lambda, $P(\lambda)$, seja o conjunto formado pelos pares próprios

$$(V_1, J_1), (V_2, J_2), \cdots, (V_k, J_k),$$

tal que

$$J_c = diag(J_1, J_2, \cdots, J_k),$$

onde J_c é a forma canônica de Jordan da matriz bloco Companheira associada a $P(X)$, a qual será definida posteriormente, associada a $P(\lambda)$ e definimos $(V_1, J_1), (V_2, J_2), \cdots, (V_k, J_k)$ como conjunto completo de pares próprios de $P(\lambda)$.

O mesmo é equivalente para uma matriz complexa A, e denominamos $(V_1, J_1), (V_2, J_2), \cdots, (V_k, J_k)$ conjunto completo de pares próprios de A.

Lema 2.1 *(GOHBERG; LANCASTER; RODMAN, 1982)(pág.27) Se o par (T, J_0) é tal que,*

$$T = [V_1, \cdots, V_l],$$

T é uma matriz de ordem $n \times p$ e

$$J_0 = diag(J_1, \cdots, J_l),$$

com J_0 de ordem p e J_i blocos de Jordan. Então (V_i, J_i), para $i = 1, \cdots, l$ são pares próprios de $P(\lambda)$, se e somente se a primeira coluna de cada V_i é não nula e

$$TJ_0^m + A_1 T J_0^{m-1} + \cdots + A_m T = 0.$$

Teorema 2.1 *(PEREIRA, 2003b) Se $T = [V_1, \cdots, V_l]$ é uma matriz invertível de ordem n, e $J_0 = diag(J_1, \cdots, J_l)$ também de ordem n, então (V_i, J_i), para $i = 1, \cdots, l$, são pares próprios de um polinômio matricial em lambda $P(\lambda)$, se somente se,*

$$S_1 = TJ_0T^{-1},$$

é solvente de $P(X)$.

Demonstração ($\Rightarrow$) Sejam T e J_0 matrizes de ordem n, com T invertível, e (V_i, J_i) par próprio de $P(\lambda)$, queremos mostrar que S_1 é solvente de $P(X)$ e é dado por $S_1 = TJ_0T^{-1}$.

Assim pelo lema 2.1, temos que se (V_i, J_i) é par próprio de $P(\lambda)$ então,

$$TJ_0^m + A_1TJ_0^{m-1} + \cdots + A_{m-1}TJ_0^1 + A_mT = 0$$
$$TJ_0^m(T^{-1}) + A_1TJ_0^{m-1}(T^{-1}) + \cdots + A_{m-1}TJ_0^1(T^{-1}) + A_mT(T^{-1}) = 0(T^{-1})$$
$$TJ_0^mT^{-1} + A_1TJ_0^{m-1}T^{-1} + \cdots + A_{m-1}TJ_0^1T^{-1} + A_mTT^{-1} = 0$$
$$(TJ_0T^{-1})^m + A_1(TJ_0T^{-1})^{m-1} + \cdots + A_{m-1}(TJ_0T^{-1})^1 + A_m = 0.$$

Por hipótese temos $S_1 = TJ_0T^{-1}$, assim

$$(TJ_0T^{-1})^m + A_1(TJ_0T^{-1})^{m-1} + \cdots + A_{m-1}(TJ_0T^{-1})^1 + A_m = 0$$
$$(S_1)^m + A_1(S_1)^{m-1} + \cdots + A_{m-1}(S_1)^1 + A_m = 0$$
$$P(S_1) = 0.$$

Portanto, S_1 é solvente de $P(X)$.

De maneira análoga podemos obter a reciprocidade e concluir que (V_i, J_i) são pares próprios de um polinômio matricial em lambda $P(\lambda)$, para $i = 1, \cdots, l$.

Partindo desses teoremas podemos concluir o seguinte corolário:

Corolário 2.1 *Os pares próprios de S_1 são pares próprios de $P(\lambda)$.*

Definição 2.6 *(PEREIRA, 2003b) Sejam $S_1, S_2, \cdots, S_m$, m solventes de um polinômio matricial $P(X)$ e $(V_{i1}, J_{i1}), \cdots, (V_{il_i}, J_{il_i})$ um sistema completo de pares próprios de S_i, para $i = 1, \cdots, m$ (onde l_i é o número de blocos de Jordan). Se $(V_{11}, J_{11}), \cdots, (V_{1l_1}, J_{1l_1}), \cdots, (V_{m1}, J_{m1}), \cdots, (V_{ml_m}, J_{ml_m})$ é um sistema completo de pares próprios de $P(\lambda)$, então dizemos que $S_1, S_2, \cdots, S_m$ é um conjunto completo de solventes de $P(X)$.*

Definição 2.7 *(DENNIS JR; TRAUB; WEBER, 1978) Dado m solventes $S_1, S_2, \ldots, S_m$ do polinômio matricial $P(X)$, diz-se que S_j, $1 \leq j \leq m$, é **solvente dominante** se os seus autovalores são maiores, em módulo, do que os autovalores de todos os outros solventes.*

2.2 Matrizes de Blocos Associadas a $P(X)$

Nesta seção vamos definir *Matriz Bloco Companheira*, a qual é análogo ao caso escalar e a *Matriz Bloco Vandermonde* e a relação dessas com os solventes de $P(X)$.

2.2.1 Matriz Bloco Companheira de $P(X)$

Dado um polinômio matricial, do tipo (2.1), com coeficientes $A_1, \ldots A_m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, a matriz de ordem mn, particionada em blocos de ordem n, é denominada *Matriz Bloco Companheira* associada aos coeficientes do polinômio matricial $P(X)$ e é da forma:

$$C = \begin{bmatrix} 0_n & I_n & \cdots & 0_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_n & & & I_n \\ -A_m & -A_{m-1} & \cdots & -A_1 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

As principais relações entre a matriz bloco companheira e o polinômio matricial $P(X)$ podem ser vistas nos teoremas a seguir. Sendo, o teorema a seguir, de grande relevância para o desenvolvimento do capítulo posterior.

Teorema 2.2 *(GOHBERG; LANCASTER; RODMAN, 1986)(pág 146) Seja $P(X)$ um polinômio matricial e C uma matriz bloco companheira associada, então*

$$det(I\lambda - C) = det(P(\lambda)).$$

Demonstração Sejam as matrizes $E(\lambda)$ e $F(\lambda)$ dadas por:

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} B_{l-1}(\lambda) & B_{l-2}(\lambda) & \cdots & B_0(\lambda) \\ -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -I & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda I & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda I & I \end{bmatrix},$$

onde $B_0(\lambda) = I$ e $B_{r+1}(\lambda) = \lambda B_r(\lambda) + A_{l-r-1}$ para $r = 0, 1, \ldots, l-2$.

Sabendo que o $det(F(\lambda)) = 1$ e $det(E(\lambda)) = \pm 1$. E verificamos que é válido a igualdade

$$E(\lambda)(\lambda I - C) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} F(\lambda),$$

Agora calculando o determinante em ambos os lados obtemos

$$det(E(\lambda)(\lambda I - C)) = det \left([\begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} F(\lambda)] \right)$$

$$1.det(\lambda I - C) = det(P(\lambda)I).1 \Rightarrow det(\lambda I - C) = detP(\lambda).$$

Podemos concluir que os autovalores de $P(\lambda)$ são os mesmo da matriz bloco companheira C, associada.

2.2.2 Matriz Bloco Vandermonde

Dado m solventes $S_1, S_2, \ldots, S_m$ de um polinômio matricial P(X), a matriz de ordem mn, particionada em blocos de ordem n, é denominada *Matriz Bloco de Vandermonde* associada aos solventes $S_1, S_2, \ldots, S_m$ do polinômio matricial P(X) e é da forma:

$$V_b = \begin{bmatrix} I_n & I_n & \cdots & I_n \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_1^{m-1} & S_2^{m-1} & \cdots & S_m^{m-1} \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.3 *(LANCASTER; TISMENETSKY, 1985)(pág.524) Seja $P(X)$ um polinômio matricial. Se $S_1, S_2, \cdots, S_m \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é conjunto completo de solventes e C matriz bloco companheira associada a $P(X)$, então*

$$C = V_b Diag(S_1, S_2, \cdots, S_m)V_b^{-1},$$

com V_b não-singular.

2.3 Bloco Autovalor e Bloco autovetor

Segundo Pereira (2003b), os motivos pelos quais os bloco autovalores e bloco autovetores ainda não têm um lugar de destaque na Álgebra linear, se dá pela falta de aplicações relevantes e da sua natureza, a qual esta mais ligada a Cálculo Numérico do que mesmo Álgebra. Entretanto, o estudo de bloco autovalor e bloco autovetor é uma alternativa viável para o cálculo de solventes de polinômios matriciais. Sendo necessário defini-los e formalizar algumas propriedades e a relações entre bloco autovalor e solventes de $P(X)$. (DENNIS JR; TRAUB; WEBER, 1971). Ressaltamos ainda que as expressões posto completo e característica máxima são equivalentes.

Definição 2.8 *(DENNIS JR; TRAUB; WEBER, 1971) Seja $A \in \mathbb{C}$ uma matriz quadrada de ordem mn. A matriz $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, diz-se um bloco autovalor, à direita, de A, se existir um bloco vetor $V \in \mathbb{C}^{mn \times n}$, de caraterística máxima, tal que*

$$AV = VX.$$

Diz-se que V é um bloco autovetor, à direita, de A associado a X.

Definição 2.9 *(DENNIS JR; TRAUB; WEBER, 1971) Seja $A \in \mathbb{C}$ uma matriz quadrada de ordem mn. A matriz quadrada $Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$, diz-se um bloco autovalor, à esquerda, de A se existir um bloco vetor $W \in \mathbb{C}^{n \times mn}$, de caraterística máxima, tal que*

$$W^T A = Y W^T.$$

Diz-se que W^T é um bloco autovetor, à direita, de A associado a Y.

Para melhor compreensão das próximas definições, faz-se necessário recordar alguns conceitos. Bem com o de multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica de uma matriz. Seja λ_0 um autovalor da matriz A. A multiplicidade algébrica de λ_0 é a multiplicidade do mesmo como raiz do polinômio característico $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$. Sendo a multiplicidade geométrica a dimensão do respectivo espaço próprio $E = ker(A - \lambda I)$. E mais, vali salientar que a multiplicidade geométrica de $lambda_0$ é sempre menor ou igual à multiplicidade algébrica de λ_0.

Definição 2.10 *(PEREIRA, 2003b) Seja A um matriz em bloco, de ordem mn e sejam $X_i, i = 1, \dots m$, bloco autovalores de A, não necessariamente distintos. Dizemos que estes m blocos autovalores formam um **conjunto completo de bloco de autovalores** de A,* *se os autovalores e as respectivas multiplicidades parciais deste m bloco autovalores são os autovalores, com as mesmas multiplicidades parciais, da matriz de bloco A.*

Teorema 2.4 *(PEREIRA, 2003a) Seja A uma matriz, então a matriz X é um bloco autovalor de A, se e somente se os autovalores de X são também autovalores de A, e cada autovalor comum α, tem multiplicidade correspondente $k_1(X), \cdots, k_n(X)$ em X e $k_1(A), \cdots, k_m(A)$ em A, onde k_i, inteiros, satisfazem*

i) $n \leq m$;

ii) $k_i(X) \leq k_i(A), i = 1, \cdots, n$

Demonstração Note que n e m são as multiplicidades geométricas de α em X e em A, ou o número de blocos de Jordan, de α em J_X, e J_A, as formas normais de Jordan de X e A, respectivamente. E que k_i são as ordem desses blocos de Jordan.

Seja agora $X = TJ_XT^{-1}$, onde T é uma matriz não singular. Supondo pela definição 2.8 que

$$AV = VX,$$

com V sendo posto completo, assim

$$AVT = VXT$$

$$= VTJ_XT^{-1}T$$

$$= VTJ_X.$$

Desde que VT ainda seja posto completo, segue que as colunas linearmente independentes de VT são autovetores ou autovetores generalizados de A, com os respectivos autovalores de J_X, assim os autovalores de J_X(e de X) são também de A.

Além disso, para

$$AVT = VTJ_X,$$

segue que J_X é submatriz de J_A.

Portanto, cada autovalor comum α, correspondente de multiplicidade geométrica m de A e n de J_X, consequentemente de X, satisfazendo $n \leq m$. Também a ordem dos blocos de Jordan de J_A e J_X correspondem a α, satisfazendo a condição de $k_i(X) \leq k_i(A), i = 1, \cdots, n$.

Reciprocamente, supondo que os autovalores de X (e consequentemente de J_X), são comuns a A. E supondo (i) e (ii) podemos escrever

$$AZ = ZJ_X,$$

com as colunas de Z, autovetores ou autovetores generalizados de A, correspondente aos autovalores de J_X, são linearmente independentes. Consequentemente, Z é de posto completo, assim

$$\begin{aligned} AZT^{-1} &= ZJ_XT^{-1} \\ &= ZT^{-1}XTT^{-1} \\ &= ZT^{-1}X, \end{aligned}$$

ZT^{-1} é de posto completo, e concluímos que X é bloco autovalor de A.

Corolário 2.2 *$X_1, X_2, \cdots, X_m$ é um conjunto completo de bloco autovalores de A,se e somente se A é semelhante a diag$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$.*

No teorema a seguir temos a relação fundamental entre um solvente e um bloco autovalor.

Teorema 2.5 *(DENNIS JR; TRAUB; WEBER, 1971) Se S_1 é solvente do polinômio matricial $P(X)$, então S_1 é bloco autovalor da matriz bloco companheira C associada a $P(X)$, com o respectivo bloco autovetor dado por:*

$$V = \begin{bmatrix} I \\ S_1 \\ \vdots \\ S^{m-1} \end{bmatrix}.$$

2.4 Propriedades de Blocos Autovalores e Blocos Autovetores

Considerando as definições anteriores, apresentaremos as seguintes propriedades dos bloco autovalores e bloco autovetores. Pereira (2003b)

1. $V\lambda I_n$ e $\lambda I_n W^T$ são, respectivamente, bloco autovetor à direita e bloco autovetor à

esquerda, para qualquer complexo $\lambda \neq 0$.

Demonstração Seja $X_{n\times n}$ bloco autovalor à direita e $V_{mn\times n}$ bloco autovetor à direita de $A_{mn\times mn}$, com V posto completo. Temos que $AV = VX$, assim

$$AV(\lambda I_n) = A(V\lambda I_n) = (V\lambda I_n)X \quad , \text{com} \quad (V\lambda I_n)_{mn\times n},$$

posto completo e é bloco autovetor á direita de A.

2. $\lambda I_{mn}V$ e $W^T\lambda I_{mn}$ são, respectivamente, bloco autovetor à direita e bloco autovetor à esquerda, para qualquer complexo $\lambda \neq 0$.

   Demonstração Partindo da definição 2.8, temos $AV = VX$, assim

$$(\lambda I_{mn})VX = (\lambda I_{mn}V)X = A((\lambda I_{mn})), \quad \text{com} \quad (\lambda I_{mn}V)_{mn\times n},$$

   posto completo e bloco autovetor à direita de A.

3. Qualquer bloco semelhante a um bloco autovalor à direita (esquerda) é também um bloco autovalor à direita (esquerda).

   Demonstração Seja U_n um bloco semelhante a X que é um bloco autovalor à direita de A, por definição temos que $U_n = S_n^{-1}X_nS_n$. E pela definição 2.8, segue que

$$(VS)U = (VS)S^{-1}XS = VXS = A(VS) \Rightarrow A(VS) = (VS)U,$$

   com (VS) de posto completo e bloco autovetor de U.

4. Um bloco autovalor a direita (esquerda) de A é também um bloco autovalor a direita (esquerda) de qualquer matriz de blocos semelhante a A.

   Demonstração Queremos mostra que se X_n é bloco autovalor de A_{mn}, ele também é bloco autovalor de B_{mn}, matrizes blocos semelhante a A. Por definição temos, $B = RAR^{-1}$ e pela definição 2.8

$$B = RAR^{-1} \Rightarrow B(RV) = RAR^{-1}SV = RAV = RVX \Rightarrow B(RV) = (RV)X,$$

   sendo RV de posto completo e bloco autovetor à direita de B, matriz de blocos semelhante a A.

5. Se A não é singular, então A^pV e W^TA^p são, respectivamente, bloco autovetor à direita e bloco autovetor à esquerda, para qualquer inteiro $p > 0$.

Demonstração Seja A não singular, temos que $det(A) \neq 0$ e admite inversa, logo

$$AV = VX \Rightarrow A(AV) = (AV)X \cdots A(A^pV) = (A^pV)X,$$

com A^pV de posto completo e bloco autovetor à direita de A

6. Se X não é singular, então VX^P e X^pW^T são, respectivamente, bloco autovetor à direita e bloco autovetor à esquerda, para qualquer inteiro $p > 0$.

   Demonstração Seja X não singular, temos que $det(X) \neq 0$ e admite inversa, logo

   $$AV = VX \Rightarrow (VX)X = A(VX) = \cdots (VX^p)X = A(VX^p),$$

   com VX^p de posto completo e bloco autovetor à direita de A

7. Um bloco autovalor à direita (esquerda) de A é também bloco autovalor à direita (esquerda) de A^T (a matriz transposta de A).

   Demonstração Queremos mostrar que se X é um bloco autovalor à direita de A, o mesmo também é bloco autovalor à direita de A^T, daí seja A^T matriz semelhante de A, temos $A^T = RAR^{-1}$ e pela definição 2.8

   $$A^t = RAR^{-1} \Rightarrow A^T(RV) = RAR^{-1}RV = RAV = RVX \Rightarrow A^T(RV) = (RV)X,$$

   sendo RV de posto completo e bloco autovetor à direita de A^T, e portanto X é matriz de bloco autovalor à direita de A^T.

8. Um bloco autovalor à direita (esquerda) é também um bloco autovalor a esquerda (direita).

   Demonstração Queremos mostrar que se X é um bloco autovalor à direita de A, o mesmo também é bloco autovalor à esquerda de A. Seja A^T matriz semelhante a A, e da definição 2.8, seguem que

   $$AV = VX \Rightarrow (AV)^T = (VX)^T \Rightarrow V^TA^T = X^TV^T.$$

   Sabendo que

   $$X = SX^TS^{-1} \text{ e } X^T = S^{-1}XS,$$

segue que

$$X(SV^T) = SX^TS^{-1}(SV^T) = SX^TV^T = SV^TA^T \Rightarrow (SV^T)A^T = X(SV^T),$$

com (SV^T) de posto completo e é bloco autovetor à esquerda de A^T, a qual é semelhante a A, e mais, X é bloco autovalor à esquerda de A^T.

9. Se um bloco autovalor à direita e um bloco autovalor à esquerda de uma matriz de bloco A possuem espectro disjunto, os bloco autovetores correspondentes satisfazem $W^TV = V^TW = 0_n$.

   Demonstração Seja

$$W^TAV = W^TVX \ \text{ e } \ W^TAV = YW^TV,$$

   segue que,

$$(W^TV)X = Y(W^TV),$$

   e portanto $W^TV = 0_n$ devido ao espectro ser disjunto. (GANTMACHER, 1960), (pág 220)

2.5 Condição de Existência do Solvente

Dois problemas se destacam no contexto de estudo de polinômios matriciais. Sendo um deles encontrar a(s) matriz(es) $S_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tal que $P(S_1) = 0$, os solventes de $P(X)$. O outro, se remete a busca de escalares λ, tal que $det(P(\lambda)) = O$. Segundo Pereira (2003b), no primeiro caso, a dificuldade reflete na existência de solventes, a qual não é garantida pelo Teorema Fundamental da Álgebra (válido para polinômios escalares), sendo esse problema bastante recente, datando da segunda metade de 1900, hoje é um assunto bem resolvido. Para uma estudo sobre a descrição do número de solventes de um polinômio matricial ver (PEREIRA, 2003b). Entretanto, a precisão referente a existência de solvente de um polinômio é um tópico em pleno desenvolvimento e com vasta aplicação na área de análise numérica e teoria de controle, entre outras.

Quanto ao segundo problema, conta-se com uma teoria bem desenvolvida e não há dificuldade em relação a existência de soluções $\lambda's$ as quais são chamadas de autovalores do polinômio matricial.

Para melhor compreensão da condição de existência do polinômio matricial e de sua construção faz-se necessário o enunciado dos seguintes teoremas.

Teorema 2.6 *(GOHBERG; LANCASTER; RODMAN, 1986), (pág 46) Seja $P(X)$ polinômio matricial e C matriz bloco companheira associada. Seja S uma matriz de similaridade de C, isto é*

$$C = SJ_cS^{-1},$$

onde J_c é forma canônica de Jordan de C, então S tem a seguinte forma

$$S = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_l \\ V_1J_1 & V_2J_2 & \cdots & V_lJ_l \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ V_1J_1^{m-1} & V_2J_2^{m-1} & \cdots & V_lJ_l^{m-1} \end{bmatrix}; \tag{2.4}$$

onde (V_i, J_i), com $i = 1, \cdots, l$, é um sistema completo de pares próprios de $P(\lambda)$ e $J_c = diag(J_1, \cdots, J_l)$.

Vale salientar que esse teorema é valido para polinômios matriciais mônicos. A seguir mostraremos que dado uma matriz S da forma 2.4 não singular então, S é matriz de similaridade de C e $diag(J_i)$ é a respectiva forma de Jordan.

Teorema 2.7 *a Seja*

$$S = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_l \\ V_1J_1 & V_2J_2 & \ddots & V_lJ_l \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ V_1J_1^{m-1} & V_2J_2^{m-1} & \cdots & V_lJ_l^{m-1} \end{bmatrix};$$

matriz de ordem mn, onde V_i, $i = 1, \ldots, l$ são matrizes de ordem $n \times k_i$ blocos de Jordan de tamanho k_i com α na diagonal, para $i = 1, \ldots, l$ e $\sum_{i=1}^{l} k_i = mn$. Se S é não singular então S é uma matriz de semelhança da matriz bloco companheira associada ao polinômio matricial $P(X)$. Portanto $(V_1, J_1), \ldots, (V_l, J_l)$ é um sistema completo de pares próprios de $P(\lambda)$.

Demonstração Seja A uma matriz de ordem mn, queremos mostrar que se

$$AS = Sdiag(J_1, J_2, \ldots, J_l).$$

Com a matriz S, não singular, isto é, A é única e similar à $diag(J_1, J_2, \dots, J_l)$, é a matriz bloco companheira. Seja A da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix};$$

sendo os A_{ij} matriz blocos de ordem n, com $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, m$. Daí,

$$AS = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_l \\ V_1 J_1 & V_2 J_2 & \ddots & V_l J_l \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ V_1 J_1^{m-1} & V_2 J_2^{m-1} & \cdots & V_l J_l^{m-1} \end{bmatrix};$$

e mais,

$$Sdiag(J_1, \cdots, J_l) = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_l \\ V_1 J_1 & V_2 J_2 & \cdots & V_l J_l \\ \vdots & & & \vdots \\ V_1 J_1^{m-1} & V_2 J_2^{m-1} & \cdots & V_l J_l^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} V_1 J_1 & V_2 J_2 & \cdots & V_l J_l \\ V_1 J_1^2 & V_2 J_2^2 & \cdots & V_l J_l^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ V_1 J_1^m & V_2 J_2^m & \cdots & V_l J_l^m \end{bmatrix}.$$

Assim, segue pela igualdade $AS = Jdiag(J_1, J_2, \dots, J_l)$ que

$$A_{11}V_1 + A_{12}V_1J_1 + \cdots + A_{1m}V_1J_1^{m-1} = V_1J_1 \Rightarrow A_{12} = I_n$$

$$A_{11}V_2 + A_{12}V_2J_2 + \cdots + A_{1m}V_2J_2^{m-1} = V_2J_2 \Rightarrow A_{23} = I_n$$

$$A_{11}V_3 + A_{12}V_3J_3 + \cdots + A_{1m}V_3J_3^{m-1} = V_3J_3 \Rightarrow A_{34} = I_n$$

$$\vdots$$

$$A_{11}V_l + A_{12}V_lJ_l + \cdots + A_{1m}V_lJ_l^{m-1} = V_lJ_l \Rightarrow A_{(m-1)m} = I_n.$$

as demais entradas não especificada são matrizes nulas de ordem n. E mais, obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 0_n & I_n & \cdots & 0_n \\ \vdots & & \ddots & \\ 0_n & & & I_n \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}.$$

Pelos teoremas anteriores podemos concluir que a matriz S é invertível, se só se S é matriz de semelhança de uma única matriz bloco companheira C, diagonalizável, associada a um polinômio matricial.

2.6 Construção de Polinômios Matriciais e Solventes

Conforme o teorema 2.1, dado o conjunto de pares próprios, se conseguirmos construir uma matriz S, invertível, significa que existe, e é possível construir uma matriz bloco companheira C e portanto um polinômio matricial $P(X)$ associado a C (e a S). Além disso, para cada matriz T, não singular, formada pela combinação dos n autovetores (vetores principais ou cadeias de Jordan), é possível obter um solvente de $P(X)$.

2.6.1 Caso Diagonalizável

A combinação dos vetores norteia a construção de uma matriz S, que caso seja invertível, significa que podemos construir uma matriz bloco companheira e consequentemente um polinômio matricial $P(X)$ associado. Sendo o número de solventes de $P(X)$ determinados pelo número de autovetores linearmente independentes n a n. Portanto, é necessário ressaltar as condições em que a matriz S é não-singular, ou seja invertível.

Seja mn pares (valores, vetores), será que os mesmos formam um conjunto de pares próprios de uma matriz bloco companheira? Apesar de não ser nosso objetivo fazer um estudo mais aprofundado, podemos enunciar dois princípios que nos permitirão obter uma matriz S não singular. Vejamos então os seguintes exemplos.

Exemplo 2.1 *Sejam* $v_1, \ldots, v_6 \in \mathbb{C}^{2\times 1}$, *com*

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

e os respectivos valores $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *de modo que* $J = diag(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, *deste modo* S *é dada por:*

$$S = \begin{bmatrix} V \\ VJ \\ VJ^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & -10 & 30 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 15 & -18 \\ 3 & 12 & 27 & 48 & -50 & 180 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 75 & 108 \end{bmatrix}.$$

Temos uma matriz S de tipo 6×6, como blocos de tamanho 2, isto é $n = 2$ e $m = 3$ e observe que $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$, (se repete 4 vezes) o que torna a matriz S singular. Vamos enunciar isso sem demonstração.

Teorema 2.8 *(PEREIRA, 2000) Se* $w_1, \ldots, w_k$ *são vetores linearmente independentes* m *a* m *e* $v_j \in \{w_1, \ldots, w_k\}$, *com* $j = 1, \ldots, mn$, *então* S *será singular,quando algum dos* v_j *se repetir, a menos de uma constante,* $m + 1$ *vezes.*

Por outro lado temos:

Exemplo 2.2 *Sejam* $v_1, \ldots, v_9 \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ *vetores com*

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

e os respectivos valores $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *de modo que* $J = diag(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ *deste modo* S *de ordem* 9, *com* $n = 3$ *e* $m = 3$, *é dada por:*

$$S = \begin{bmatrix} V \\ VJ \\ VJ^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 10 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 24 & 27 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 50 & 72 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 147 & 192 & 243 \end{bmatrix}.$$

Verificamos que S é invertível, pois o número máximo de repetições de qualquer vetor não foi ultrapassado, ou seja para que S seja invertível, qualquer repetição não pode exceder m.

Esses princípios podem ser generalizados da seguinte maneira: Dado $V = [v_1, v_2, \ldots, v_{mn}]$, se para algum conjunto de q vetores v_i pertencentes a um subespaço $S^{k\times 1}$, de dimensão k, tivermos $q > mk$ a matriz S será singular (PEREIRA, 2000).

Vemos agora condições para a existência de infinitos solventes.

Teorema 2.9 *(PEREIRA, 2003a) Seja $P(X)$ um polinômio matricial e seja C a matriz bloco companheira associada. Se C é diagonalizável e se pelo menos um de seus autovalores tem multiplicidade geométrica maior que* 1*, então $P(X)$ tem infinitos solventes.*

Demonstração Verifiquemos para o caso de $n = 3$, e m qualquer, sendo que para o caso geral a demonstração é equivalente.

Sejam

$$(v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2), \ldots, (v_3m, \alpha_3m),$$

os pares próprios do polinômio matricial em λ, $P(\lambda)$, e sem perca de generalidade, supomos que α_1 tem multiplicidade geométrica maior que 1. Pelo teorema 2.1, temos que

$$S_1 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^{-1},$$

é solvente, tal que $\alpha_1 \neq \alpha_2$ e $\alpha_1 \neq \alpha_3$. Seja v_k um outro vetor próprio $P(\lambda)$ correspondente a α_1. Como C é diagonalizável, necessariamente, v_1 e v_k são linearmente independentes, e geram um subespaço $\mathbb{S}_1^{2\times 1} \subset \mathbb{C}^{3\times 1}$, de dimensão 2. Obviamente a intersecção de $\mathbb{S}^{2\times 1}$ com o subespaço gerado por v_2 e v_3 tem, no máximo, dimensão 1, pois a matriz $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ tem característica máxima igual a 3. Então existem infinitos vetores próprios $v_i = \beta v_1 + \gamma v_k$ de $P(\lambda)$ associados a α_1, para escalares não nulos, de modo que $\begin{bmatrix} v_i & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ é invertível.

Portanto, $P(X)$ tem infinitos solventes,

$$S_i = \begin{bmatrix} v_i & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Corolário 2.3 *Os solventes S_1 e S_i, expressos no teorema anterior, são semelhantes.*

Para melhor ilustrar as definições e teoremas anteriores, em especial o teorema 2.1 onde são formalizados as construção dos solventes, seguem-se alguns exemplos.

Exemplo 2.3 *Seja o conjunto completo de pares próprios de $P(\lambda)$:*

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, 2 \right), \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, 3 \right), \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, 4 \right),$$

temos que

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e a matriz de Jordan

$$J_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pelo teorema 2.6, podemos construir a matriz bloco companheira a partir de uma matriz S de similaridade, que é dada por:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 & 3 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Daí, temos que a matriz bloco companheira associada pode ser escrita como $C = SJ_cS^{-1}$*, logo:*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-176}{19} & \frac{54}{19} & \frac{123}{19} & \frac{-18}{19} \\ \frac{-188}{57} & \frac{-30}{19} & \frac{80}{57} & \frac{67}{19} \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos escrever o polinômio matricial associado, de grau 2 *como:*

$$P(X) = X^2 + \begin{bmatrix} \frac{-123}{19} & \frac{18}{19} \\ \frac{-80}{57} & \frac{-67}{19} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \frac{176}{19} & \frac{-54}{19} \\ \frac{188}{57} & \frac{30}{19} \end{bmatrix}, (m = 2, n = 2).$$

Observando que os autovetores de $P(\lambda)$ *são linearmente independentes* 2 *a* 2*, podemos tomar dois pares próprios, quaisquer e construir uma matriz* T_0 *invertível, e consequentemente um solvente.*

Por exemplo, a matriz T_0 *dada por*

$$T_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

portanto temos que

$$S_1 = T_0 J_0 T_0^{-1}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-3}{10} \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

É um solvente de $P(X)$*. De maneira análoga, tomando dois a dois autovetores, construímos todos os solventes de* $P(X)$

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{9}{4} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 3 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -\frac{4}{3} & 6 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \frac{2}{3} & 3 \end{bmatrix}.$$

Ademais, temos

$$\left\{\begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \frac{2}{3} & 3 \end{bmatrix}\right\};\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -\frac{4}{3} & 6 \end{bmatrix}\right\};\left\{\begin{bmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{9}{4} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 3 \end{bmatrix}\right\}$$

são os conjuntos completos de solventes de $P(X)$.

Exemplo 2.4 *Contrário do exemplo anterior, temos o seguinte caso. Seja o conjunto completo de pares próprios de $P(\lambda)$:*

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix},1\right),\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix},2\right),\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},3\right),\left(\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},4\right),$$

temos que

$$V=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e a matriz de Jordan

$$J_c=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pelo teorema 2.6, podemos construir a matriz bloco companheira a partir de uma matriz S de similaridade, onde S de ordem 4, com $n=2$ e $m=2$, e é dada por:

$$S=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Daí, temos que a matriz bloco companheira associada pode ser escrita como $C=TJ_cT^{-1}$, logo:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 29 & \frac{27}{2} & 12 & \frac{-9}{2} \\ -34 & 15 & 10 & -2 \end{bmatrix}.$$

E o polinômio matricial associado a matriz bloco companheira , de grau 2, é dado por:

$$P(X) = X^2 + \begin{bmatrix} -12 & \frac{9}{2} \\ -10 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -29 & \frac{-27}{2} \\ 34 & -15 \end{bmatrix}, (m = 2, n = 2).$$

Note que apesar da matriz C ser diagonalizável, temos que os 2 (dois) primeiros pares próprios, possuem o mesmo autovetor, com os respectivos autovalores 1 e 2, dessa maneira, os autovetores não definem solvente, pois são linearmente dependentes, consequentemente não é possível construir uma matriz T_0 invertível. Entretanto, podemos tomar, por exemplo, outros dois autovetores que seja linearmente independentes e construir a matriz T_0

$$T_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

daí, temos queT_0 é invertível, e podemos obter o solvente com base no teorema 2.1

$$S_1 = T_0 J_0 T_0^{-1},$$

onde $J_0 = diag(1, 3)$, portanto

$$S_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Com exceção dos autovetores linearmente dependentes, podemos calcular os demais solventes, sendo todos os solventes dados por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} \frac{11}{2} & \frac{9}{4} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \frac{2}{3} & 3 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 5 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

E mais, temos os conjuntos completos de solvente dados por :

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right\} e \left\{\begin{bmatrix} \frac{11}{2} & \frac{9}{4} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 5 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Exemplo 2.5 *Seja o conjunto completo de pares próprios de $P(\lambda)$:*

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},1\right);\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},1\right);\left(\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix},3\right);$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},4\right);\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},5\right);\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},6\right),$$

temos que

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz de Jordan $J = diag(1; 1; 3; 4; 5; 6)$.

Partindo do conjunto completo de pares próprios, podemos construir a matriz S de similaridade e pelo teorema 2.1, temos que

$$S = \begin{bmatrix} V \\ VJ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 4 & 15 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 8 & 5 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

e

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-3}{17} & \frac{-1656}{187} & \frac{-441}{187} & \frac{640}{187} & \frac{1236}{187} & \frac{-399}{187} \\ \frac{116}{17} & \frac{-2438}{187} & \frac{-2192}{187} & \frac{-346}{187} & \frac{1695}{187} & \frac{323}{187} \\ \frac{138}{17} & \frac{-1854}{187} & \frac{-3378}{187} & \frac{-438}{187} & \frac{774}{187} & \frac{1405}{187} \end{bmatrix},$$

temos assim, o polinômio matricial associado a matriz bloco companheira dado por:

$$P(X) = X^2 + \begin{bmatrix} \frac{-640}{187} & \frac{-1236}{187} & \frac{399}{187} \\ \frac{346}{187} & \frac{-1695}{187} & \frac{-323}{187} \\ \frac{438}{187} & \frac{-774}{187} & \frac{-1405}{187} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{1656}{187} & \frac{441}{187} \\ \frac{-116}{17} & \frac{2438}{187} & \frac{2192}{187} \\ \frac{-138}{17} & \frac{1854}{187} & \frac{3378}{187} \end{bmatrix}.$$

Como os autovetores são linearmente independentes 3 *a* 3, *assim podemos obter uma matriz* T_0 *como qualquer combinação de três autovetores, e pelo teorema 2.1, temos o solvente*

$$S_1 = T_0 J_0 T_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 10 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 12 & -10 & -22 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz C é diagonalizável e o autovalor 1 tem multiplicidade 2, pelo teorema (???) o número de solventes é infinito.

2.6.2 Caso Não-Diagonálizavel

Para o caso de todas as cadeias de Jordan de C (e de $P(\lambda)$) serem de tamanho 1 o teorema 2.9, é válido. Porém, quando uma ou mais cadeias de Jordan de $P(\lambda)$ tem mais de um elemento segue o seguinte teorema.

Teorema 2.10 *(PEREIRA, 2003a) Se S_1 é um solvente de um polinômio matricial $P(X)$, e pelo menos um autovalor comum a S_1 e C, tem multiplicidade geométrica maior em C do que em S_1, então $P(X)$ possui infinitos solventes.*

Demonstração

Seja S_1 solvente de um polinômio matricial $P(X)$, e que $(V_1, J_1), (V_2, J_2), \ldots, (V_k, J_k)$ são pares próprios de S_1,, tais que

$$(V_i, J_i) = \begin{bmatrix} v_{i1} & \cdots & v_{ij_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i & 0 & \cdots \\ & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \alpha_i \end{bmatrix},$$

onde $i = 1, \ldots, k$, e j_i é a ordem do bloco J_i, deste modo

$$S_1 = \begin{bmatrix} V_1 & \cdots & V_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & \cdots & V_k \end{bmatrix}^{(-1)}.$$

Supomos, agora, que α_1 que tem multiplicidade maior em C (e em $P(\lambda)$) do que em S_1, e é autovalor correspondente a autovetor v_{11}. Seja, v_{1l} associado a $alpha_1$ um autovetor de $P(\lambda)$ que não seja autovetor de S_1, logo

$$V_1 = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1(j_1-1)} & v_{1j_1} \end{bmatrix},$$

é uma cadeia de Jordan de $P(\lambda)$, de tamanho j_1. Por outro lado, existem infinitos vetores $w_j = v_{1j_1} + \gamma v_{l1}$, com γ escalar e não nulo, com os n vetores linearmente independentes. Onde, $v_{11}, \cdots, v_{1(J_1-1)}, w_j$ também é uma cadeia de Jordan de $P(\lambda)$, de tamanho j_1, correspondente a α_1, mas não é cadeia de Jordan de S_1. Assim teremos que

$$S_i = \begin{bmatrix} V_{i(w)} & \cdots & V_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1(w)} & \cdots & V_k \end{bmatrix}^{(-1)}.$$

é solvente de $P(X)$ diferente de S_1, deste modo o polinômio matricial terá infinitos solventes, onde $\begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1(j_1-1)} & w_j \end{bmatrix}$

Corolário 2.4 *Os solventes S_1 e S_i, expressos no teorema anterior, são semelhantes.*

Note que, ao contrário dos exemplos anteriores, onde consideramos o caso da matriz bloco companheira C diagonalizável, onde é sempre possível a construção de um conjunto completo de solventes. Quando a matriz bloco companheira não é diagonalizável, são observados outros resultados, sendo que o polinômio matricial poderá apenas um solvente, nenhum ou infinitos. Isto é verificado nos exemplos a seguir.

Exemplo 2.6 *Seja*

$$(V_1, J_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, 5 \right) e (V_2, J_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right),$$

pares próprios de $P(\lambda)$, onde construímos a matriz S, de ordem 4, com $m = 2$ e $n = 2$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -5 & 4 \\ 15 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

S é invertível, logo é possível construir um polinômio matricial $P(X)$, com a matriz bloco companheira de $P(X)$ dada por:

$$C = S(diag(V_1, V_2))S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -5 & 4 \\ 15 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -5 & 4 \\ 15 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-450}{49} & \frac{-95}{49} & \frac{311}{49} & \frac{27}{49} \\ \frac{-27}{49} & \frac{-726}{49} & \frac{51}{49} & \frac{375}{49} \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos

$$P(X) = X^2 + \begin{bmatrix} \frac{-311}{49} & \frac{-27}{49} \\ \frac{-51}{49} & \frac{-375}{49} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \frac{450}{49} & \frac{95}{49} \\ \frac{27}{49} & \frac{726}{49} \end{bmatrix} (m = 2, n = 2).$$

Podemos verificar que, o único solvente de $P(X)$ é dado por

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{18}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-9}{7} & \frac{24}{7} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.7 *Sejam*

$$(V_1, J_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) e (V_2, J_2) = \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right),$$

pares próprios de $P(\lambda)$, temos que $n = 2$ e $m = 3$, onde construímos a matriz S, assim é dada por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & -2 & -3 & 5 \\ 6 & 8 & -1 & 2 & 3 & -9 \\ 6 & 8 & 8 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix},$$

S é invertível, logo é possível construir um polinômio matricial $P(X)$, com a matriz bloco companheira de $P(X)$ dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-755}{112} & \frac{27}{56} & \frac{-361}{224} & \frac{577}{112} & \frac{-17}{56} & \frac{163}{224} \\ \frac{-391}{112} & \frac{-393}{56} & \frac{-53}{224} & \frac{157}{112} & \frac{291}{56} & \frac{23}{224} \\ \frac{-233}{56} & \frac{-47}{28} & \frac{-587}{112} & \frac{99}{56} & \frac{13}{28} & \frac{521}{112} \end{bmatrix}$$

e

$$P(X) = X^2 + \begin{bmatrix} \frac{-577}{112} & \frac{17}{56} & \frac{-163}{224} \\ \frac{-157}{112} & \frac{-291}{56} & \frac{-23}{224} \\ \frac{-99}{56} & \frac{-13}{28} & \frac{-521}{112} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \frac{755}{112} & \frac{-27}{56} & \frac{361}{224} \\ \frac{391}{112} & \frac{393}{56} & \frac{53}{224} \\ \frac{233}{56} & \frac{47}{28} & \frac{587}{112} \end{bmatrix}.$$

Observamos que $P(X)$ não tem solvente, pois todas as combinações possíveis entre três *vetores iniciais das cadeias de Jordan de $P(\lambda)$ são linearmente dependentes.*

O próximo exemplo, ressalta a existência de infinitos solvente, levando em conta que a matriz bloco companheira associada a $P(X)$ é não-diagonalizável.

Exemplo 2.8 *Sejam os pares próprios de $P(\lambda)$ dados por*

$$(V_1, J_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right),$$

$$(V_2, J_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, 2 \right)$$

e

$$(V_3, J_3) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right).$$

Construímos uma matriz S, de ordem 6, com $m = 2$ e $n = 2$ e por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 & 7 & 11 \\ 4 & -6 & -4 & -6 & -5 & 11 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

A matriz bloco companheira é

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -51 & -8 & 29 & 19 & 4 & -6 \\ 68 & 8 & -40 & -21 & -2 & 7 \\ -55 & -10 & 29 & 17 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sendo o polinômio matricial associado:

$$P(X) = X^2 + \begin{bmatrix} -19 & -4 & 6 \\ 21 & 2 & -7 \\ -17 & -5 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 51 & 8 & -29 \\ -68 & -8 & 40 \\ 55 & 10 & -29 \end{bmatrix}.$$

Portanto, podemos construir o seguinte solvente,

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ 6 & \frac{5}{2} & -7 \\ -1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar que o solvente possui um autovalor $\alpha_1 = 2$ com multiplicidade geométrica 1 em S_1 e multiplicidade geométrica 2 em C. Logo estamos nas condições do teorema 2.10. Assim, podemos considerar os vetores $w_j = v_{12} + \gamma v_{21}$ e teremos infinitos solventes, desde que a matriz formada por v_{11}, w_j, v_{31} seja invertível.

Por exemplo:

- Para $\gamma = 1$, temos

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ 8 & \frac{5}{2} & -9 \\ -2 & -\frac{1}{4} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}.$$

- Para $\gamma = 3$, temos

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -10 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -10 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{4} & \frac{9}{2} \\ 12 & \frac{5}{2} & -13 \\ -4 & -\frac{1}{4} & \frac{13}{2} \end{bmatrix}.$$

S_2 e S_3 são, também, solventes de $P(X)$. Deste modo podemos construir infinitos solventes.

Capítulo 3

Métodos Numéricos

Neste capítulo apresentaremos a extensão do método da potência com o objetivo de calcular numericamente bloco autovalores da matriz bloco companheira e solventes de polinômios matriciais. Inicialmente abordaremos os métodos para casos escalares então posteriormente a generalização e faremos o estudo de alguns exemplos.

3.1 Método da Potência

Existem vários métodos para calcular o maior autovalor e autovetor, escalar, de uma matriz, como o Método da Potência. Segundo Wilkinson (1965), esse método é um dos processos mais simples para a computar o maior autovalor e autovetor associado de uma matriz A, de dimensão $n \times n$. A ideia central do método, são as sucessivas potências da matriz multiplicada por um vetor, a partir do produto de um vetor inicial, aleatório v_0 pela matriz A, normalizado, o qual converge para o autovetor associado a maior autovalor, em módulo, da matriz A.

Para simplificar a exposição, suponha que a matriz A, de ordem n, possuem n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, não necessariamente distintos, disposto em ordem decrescente, em módulo, isto é

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|,$$

e seja $v_1, v_2, \cdots, v_n$ uma base $\mathbb{R}^n$ formada pelos autovetores associados. Definimos λ_1 *autovalor dominante* de A e v_1 autovetor associado. Diante disso, o método consiste em encontrar esse valores. O primeiro passo do método da potência é escolher um vetor inicial

v_0, não-nulo e que forme uma sequência

$$v_0, Av_0, A^2v_0, \cdots, A^kv_0, \cdots$$

note que podemos representar a sequencia por um termo geral, $A^{j+1}v_0 = A(A^jv_0)$, sendo que os elementos da sequencia são determinados de maneira recursiva e calculados da seguinte maneira

$$v_{j+1} = A_jv_0 = v.$$

Como $v_1, v_2, \cdots, v_n$ formam uma base $\mathbb{R}^n$, existem constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ tais que

$$v_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n \Rightarrow v_0 = \sum_{i=1}^{n} c_iv_i.$$

Da relação espectral $Av = \lambda v$,temos

$$\begin{aligned} v_0 = \sum_{i=1}^{n} c_iv_i \Rightarrow A^kv_0 &= \sum_{i=1}^{n} c_iA^kv_i \\ &= c_1A^kv_1 + c_2A^kv_2 + \cdots + c_nA^kv_n \\ &= c_1\lambda^kv_1 + c_2\lambda^kv_2 + \cdots + c_n\lambda^kv_n \\ &= \lambda_1^k[c_1v_1 + \sum_{i=2}^{k} c_i(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^kv_i]. \end{aligned}$$

Supondo $\frac{\lambda_i}{\lambda_1} < 1$, assim $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}|^k \to 0$ quando $k \to \infty$. Portanto, segue que

$$lim_{m\to\infty}\frac{A^kv_0}{\lambda_1^k} = c_1v_1$$

converge para o autovetor dominante. No entanto não conhecemos λ_1, a priori, dessa maneira, é uma alternativa trabalharmos com a sequencia normalizada.

$$\frac{A^kv_0}{||A^kv_0||},$$

$||.||$ norma do máximo, que converge para o autovetor dominante unitário.

Visto o método da potência clássico para o calcular autovalor dominante escalar, tem-se como intuito apresentar a generalização desse método para o caso de bloco vetor. O qual mantém a essência original e pode ser sintetizada como a convergência do bloco vetor formado a partir do bloco produto de potências da matriz pelo vetor bloco inicial,normalizado, não-trivial para o bloco autovetor, associado ao bloco autovalor. Veremos condições para que um bloco autovalor de um matriz bloco companheira seja também solvente do polinomial característico associado.

A priori, iremos considerar algumas definições, além das já apresentadas 2.7, 2.10, 2.8 e 2.9. Posteriormente formalizaremos um algoritmo para calcular bloco autovalor dominante. Para efeito de simplificação faremos uso apenas das definições de bloco autovalor, à direita, bem como solvente, à direita. Salientando que para o caso de bloco autovalor, à esquerda e solvente, à esquerda, as definições e demonstrações são análogas.

Levando em consideração a convergência do método da potência escalar é fundamentada no fato de que, se $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, então

$$lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} = 0.$$

Para o caso de bloco vetor, a convergência é apoiada na definição e no lema, que se segue.

Definição 3.1 *Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem, dizemos que A domina B, se todos os autovalores de A são maiores, em módulo, do que os autovalores de B.*

Lema 3.1 *(DENNIS JR; TRAUB; WEBER, 1978) Sejam A e B matriz quadradas e de mesma ordem, se A domina B, então*

$$\lim_{n\to\infty} A^{-n}CB_n = 0,$$

onde C é uma matriz constante de mesma ordem.

Definição 3.2 *Em um conjunto completo de bloco autovalores, um deles é dito dominante, se todos os autovalores são maiores em módulo ou iguais aos autovalores dos demais blocos autovalores do conjunto.*

Definição 3.3 *Sejam $V_1, V_2, \cdots, V_m$ blocos vetores de ordem $(mn \times n)$, dizemos que são bloco linearmente independentes se*

$$\sum_{i=1}^{k} V_i A_i = 0,$$

então $A_i = 0$ para todo i, onde A_i são matrizes quadradas de ordem n.

Lema 3.2 *(DENNIS JR; TRAUB; WEBER, 1971) Seja* $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{in})$, *para* $i = 1, \cdots, m$ *bloco vetor. Então* $V_1, V_2, \cdots, V_m$ *são bloco linearmente independentes, se e somente se* v_{ij}, *para* $i = 1, \cdots, m$ *e* $j = 1, \cdots, n$ *são linearmente independentes.*

Corolário 3.1 *A matriz* $(V_1, V_2, \cdots, V_k)$ *de ordem* $(mn \times mn)$ *é não singular, se somente se* $V_1, V_2, \cdots, V_m$ *são bloco linearmente independentes (BLI).*

Definição 3.4 *Os blocos vetores* $V_1, V_2, \cdots, V_m$ *de ordem* $(mn \times n)$ *formam uma bloco base, se para qualquer* V *de mesma ordem, existe um conjunto único de matriz,* $A_1, A_2, \cdots, A_m$, *tal que*

$$V = \sum_{i=1}^{m} V_i A_i.$$

Teorema 3.1 *Blocos vetores* $V_1, V_2, \cdots, V_m$ *de ordem* $(mn \times n)$ *formam uma bloco base, se e somente se, são bloco linearmente independentes.*

Demonstração ($\Leftrightarrow$) Seja V, de ordem $(mn \times n)$ e uma base formada pelos blocos vetores $V_1, V_2, \cdots, V_m$, é valido por definição 3.4,

$$V = \sum_{i=1}^{m} V_i A_i \Leftrightarrow V = (V_1, V_2, \cdots, V_m) \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix},$$

$(V_1, V_2, \cdots, V_m)$ é uma matriz quadrada, segue pelo corolário 3.1 que é não singular, se e somente se $V_1, V_2, \cdots, V_m$ são BLI.

Teorema 3.2 *Se* $X_1, X_2, \cdots, X_m$, $V_1, V_2, \cdots, V_m$ *são bloco autovalores e respectivos bloco autovetores bloco linearmente independentes da matriz* A. *Se* X *é também bloco autovalor de* A, *então* X *é bloco autovalor da* $diag(X_1, X_2, \cdots, X_m)$, *além disso*

$$(V_1, V_2, \cdots, V_m)^{-1} A (V_1, V_2, \cdots, V_m) = diag(X_1, X_2, \cdots, X_m).$$

Demonstração Da definições 2.8 e 3.3, temos dado

$$AV = VX,$$

existe um conjunto completo de matrizes quadradas de ordem n,A_i, para todo $i = 1, \cdots, m$, tal que

$$V = \sum_{i=1}^{m} V_i A_i,$$

seja

$$\Lambda = (A_1^T, A_2^T, \cdots, A_m^T)^T,$$

desde que $(V_1, V_2, \cdots, V_m)$ seja não-singular e V seja de posto completo, temos

$$V = (V_1, V_2, \cdots, V_m)\Lambda = (V_1, V_2, \cdots, V_m)(A_1^T, A_2^T, \cdots, A_m^T)^T.$$

Retomando a expressão inicial podemos reescrevê-la da seguinte forma,

$$VX = (V_1, V_2, \cdots, V_m)\Lambda X = AV = A(V_1, V_2, \cdots, V_m)\Lambda$$

$$= (V_1, V_2, \cdots, V_m)[(V_1, V_2, \cdots, V_m)^{-1} A (V_1, V_2, \cdots, V_m)]\Lambda$$

$$= (V_1, V_2, \cdots, V_m) diag(X_1, X_2, \cdots, X_m)\Lambda.$$

Temos por fim, $diag(X_1, X_2, \cdots, X_m)\Lambda = \Lambda X$ e que X é bloco autovalor de $diag(X_1, X_2, \cdots, X_m)$, com Λ de posto completo.

3.1.1 Convergência do Algoritmo

Apresentaremos agora um algoritmo para calcular um bloco autovetor correspondendo a um bloco autovalor dominante de uma matriz de blocos .

Algorítmo 3.1 *(DENNIS JR; TRAUB; WEBER, 1971) Seja A, uma matriz de ordem mn particionada em blocos de ordem n e U_0 um vector de blocos do tipo $mn \times n$, arbitrário e de posto completo, e seja k um número inteiro arbitrário, com $1 < k < m$. Definimos, então a sequência de vetores de blocos U_n por*

$$U_{n+1} = AU_n((AU_n)_k)^{-1},$$

onde U_0 é um bloco vetor arbitrário de posto completo e $1 \leq k \leq m$ é um valor inteiro. Note que, AU_n é um vetor bloco de ordem $mn \times n$ e $(AU_n)_k$ é uma matriz de ordem n e sua não-singularidade determina a normalização da equação.

Como visto anteriormente, para o método da potência escalar, a velocidade de convergência depende da constante $\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}$ estar próxima de zero. (WILKINSON, 1965). Assim, para o caso de blocos, a velocidade da convergência está ligada a constante $d = \frac{max|\lambda_j|}{min|\lambda_i|}$, com $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. estar próxima do zero, onde $min|\lambda_i|$é o menor autovalor, em módulo, do bloco autovalor dominante e $max|\lambda_j|$ é o maior autovalor,em módulo, dos demais blocos.

Assim, para verificarmos a convergência do algoritmo, de antemão devemos considerar o seguinte resultado.

Lema 3.3

$$U_n = A^n U_0((A^n U_0)_k)^{-1},$$

com U_0 um bloco vector do tipo $mn \times n$ e posto completo.

Demonstração

$$U_{n+1} = AU_n((AU_n)_k)^{-1}$$

$$= A^2 U_{n-1}((AU_{n-1})_k)^{-1}(A^2 U_{n-1}((AU_{n-1})_k)^{-1})_k)^{-1}$$

$$= A^2 U_{n-1}((AU_{n-1})_k)^{-1}((A^2 U_{n-1})_k((AU_{n-1})_k)^{-1})^{-1}$$

$$= A^2 U_{n-1}((AU_{n-1})_k)^{-1}((A^2 U_{n-1})_k)^{-1}((AU_{n-1})_k)$$

$$= A^2 U_{n-1}(A^2(U_{n-1})_k)^{-1}$$

$$\vdots$$

$$= A^{n+1} U_0((A^{n+1} U_0)_k)^{-1}.$$

Teorema 3.3 *Sejam A, uma matriz de ordem mn, $X_1, \cdots, X_m$ um conjunto completo de bloco autovalores de ordem n de A, $V_1, \cdots, V_m$ os respectivos bloco autovetores. Se X_1 é bloco autovalor dominante e o bloco vector U_0 está no subespaço gerado pelos V_i, ou seja ,*

$$U_0 = \sum_{i=1}^{m} V_i A_i,$$

onde A_i é não singular. Então $U_{n+1} = AU_0((AU_n)_k)^{-1}$ converge para $V_1((V_1)_k)^{-1}$, se $(V_1)_k$ é não singular.

Demonstração Temos do lema 3.3 que

$$U_n = A^n U_0((A^n U_0)_k)^{-1},$$

Além disso, temos a relação $A^n V_i = V_i X_i^n$ e a definição

$$U_0 = \sum_{i=1}^{m} V_i A_i,$$

Assim, segue que

$$U_n = A^n U_0((A^n U_0)_k)^{-1}$$

$$U_n = (\sum_{i=1}^{m} V_i X_i^n A_i)((\sum_{i=1}^{m} V_i X_i^n A_i)_k)^{-1}$$

$$U_n = (\sum_{i=1}^{m} V_i X_i^n A_i A_1^{-1} X_1^{-n})(\sum_{1}^{m} (V_i)_k X_i^n A_i A_1^{-1} X_1^{-n}).$$

Segue do lema 3.1 que

$$U_n \rightarrow V_1((V_1)_k)^{-1},$$

quando $n \rightarrow \infty$, visto que S_1 é dominante.

Portanto, temos que

$$(AU_n)_k A_1^{-1} X_1^{-n} \rightarrow (V_1)_k,$$

segue que $(AU_n)_k$ é não singular para um n suficientemente grande, tendo em visto que $(V_1)_k^{-1}$ existe por hipótese.

Na aplicação do algoritmo à matriz bloco companheira C, segundo (DENNIS JR; TRAUB; WEBER, 1971) a existência de um k tal que $(V_1)_k$ é não singular, é equivalente a existência de um solvente. Se um solvente à direita existe, pelo teorema 2.5 então podemos tomar $k = 1$, como pode ser visto nos exemplos adiantes. A reciproca do teorema 2.5 é provada a seguir.

Teorema 3.4 *Se $CV = VX$ e $(V)_1$ é não singular, então $S = (V)_1 X (V)_1^{-1}$ é solvente, à direita do polinômio matricial $P(X)$ associado a matriz bloco companheira C.*

Demonstração Seja $(V)_1$ não singular e

$$V(V)_1^{-1} = D = \begin{bmatrix} I \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{bmatrix},$$

sendo $V(V)_1^{-1}$ um bloco autovetor da matriz bloco companheira, C, com bloco autovalor dado por

$$S_1 = (V)_1 X (V)_1^{-1}.$$

Assim,

$$CV = VX,$$

e mais,

$$\begin{bmatrix} 0 & I & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & I \\ -A_m & -A_{m-1} & \cdots & -A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{bmatrix} S_1;$$

efetuando o produto das matrizes, obtemos que $D_i = S_1^{i-1}$ e mais,

$$D_m S + A_1 D_m + \cdots + A_m = 0.$$

Portanto, S_1 é solvente à direita.

Assim, o algoritmo 3.1 aplicado a uma matriz bloco companheira do tipo $mn \times mn$, converge para o bloco autovetor associado ao bloco autovalor dominante, X_1. Se $(V)_1^{-1}$ é não singular, pelo mesmo teorema (3.4), temos que X_1 também será solvente dominante.

- **Cálculo de bloco autovalores**

  Rotina no MATLAB (Representação para os casos $(m = 2, n = 2)$)

```
function [f,g]=powerblock(A)
v_i=[eye(2);eye(2)];
v_k = A*v_i;
for j=1:50
    x_k=A*v_k;
    v_k=x_k*x_k(1:2,1:2)^(-1);
end
f=v_k;
g=x_k;
end
```

3.1.2 Aplicação do Algoritmo

A seguir apresentaremos uma ilustração numérica como base no algoritmo apresentado anteriormente.

Exemplo 3.1 *Consideremos a matriz A, de ordem 6×6 particionada em 3×3 blocos de ordem 2, cada.*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & 1 \\ -39 & -201 & -9 & 90 & 13 & -3 \\ 67 & 229 & -30 & -129 & 1 & 17 \end{bmatrix}.$$

Com base no algoritmo 3.1, escolheremos um vetor U_0, do tipo 6×2 e de posto completo, dado por

$$U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e enquanto a matriz $[(AU_i)_k]^{-1}$, de ordem 2×2, for singular, garantirá a normalização do vetor. E em sucessivas interações, nesse caso especifico com 50 interações, teremos a convergência para o bloco autovetor e respectivo bloco autovalor dominante, respectivamente

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 6 & 3 \\ 1 & 10 \\ 33 & -48 \\ 16 & 97 \end{bmatrix}$$

e

$$X_1 = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dando continuidade nos exemplos numéricos, o que se segue estão presentes no trabalho de Dennis Jr, Traub e Weber (1971), sendo que nesse trabalho é usado o algoritmo generalizado de Traub para calcular o solvente dominante de um polinômio matricial.

Exemplo 3.2 *Considere o polinômio matricial*

$$P(X) = X^3 + \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -3 & -15 \end{bmatrix} X^2 + \begin{bmatrix} 2 & -42 \\ 21 & 65 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 18 & 66 \\ -33 & -81 \end{bmatrix}.$$

Partindo do polinômio matricial, podemos escrever a matriz bloco companheira de ordem 6*, particionadas em bloco de ordem* 2*,*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -18 & -66 & -2 & 42 & 6 & -6 \\ 33 & 81 & -21 & -65 & 3 & 15 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o algoritmo 3.1, obtemos, em aproximadamente 50 interações a convergência para o bloco autovetor e o bloco autovalor dominante, associado;

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & -2 \\ 1 & 7 \\ 14 & -22 \\ 11 & 47 \end{bmatrix}$$

e

$$X_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.3 *Considere o polinômio quadrado*

$$P(X) = X^2 + \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}.$$

A matriz bloco companheira associada ao polinômio matricial, é uma matriz de ordem 4*, particionada em bloco de ordem* 2 *e dada por;*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 1 & 6 \\ 2 & -14 & -2 & 9 \end{bmatrix}.$$

E através do algoritmo 3.1, obtemos em aproximadamente 20 *interações.*

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

e

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

respectivamente, bloco autovetor e o bloco autovalor dominante, associado. E mais uma vez, como $(V_1)_1 = I_2$ *é não singular verificamos que* $(V_1)_1 X_1 (V_1)_1^{-1}$ *é solvente de* $P(X)$ *(teorema 3.4).*

Tendo em vista que a convergência do algoritmo é determinada pela constante $d = \frac{max|\lambda_j|}{min|\lambda_i|}$, sendo quão próxima esteja de zero. Nos exemplos a seguir, analisaremos a velocidade de convergência, dando ênfase na relação entre o menor autovalor de um bloco dominante com o maior autovalor dos demais blocos da matriz em questão.

Como $(V_1)_1 = I_2$ é não singular verificamos que $(V_1)_1 X_1 (V_1)_1^{-1}$ é solvente de $P(X)$ (teorema 3.3).

Exemplo 3.4 *Considere o polinômio matricial*

$$P(X) = X^2 + \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & -10 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -4 & -14 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}.$$

Partindo do polinômio matricial $P(X)$, podemos escrever a matriz bloco companheira C, de ordem 4×4 e particionada em blocos 2×2 de ordem 2, cada.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 14 & 1 & -6 \\ -7 & -17 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Temos que os autovalores de A são, $(5, 3, 2, 1)$, observe que podemos construir um conjunto completo X_1, de autovalores $5, 3$ e X_2 de autovalores $2, 1$, neste caso, temos

$$d = \frac{max|\lambda_j|}{min|\lambda_i|} = \frac{2}{3} = 0,6666...$$

aplicando o algoritmo 3.1, obtemos em 50 interações a convergência do mesmo, para bloco vetor e seu respectivo bloco autovalor dominante:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

e

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Como $(V_1)_1 = I_2$ é não singular verificamos que $(V_1)_1 X_1 (V_1)_1^{-1}$ é solvente de $P(X)$ (teorema 3.4).

Exemplo 3.5 *Considere o polinômio matricial $P(X)$*

$$P(X) = X^2 + \begin{bmatrix} -1002 & 4 \\ -2 & -1008 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -2 & -2010 \\ 1005 & 3013 \end{bmatrix}.$$

Partindo do polinômio matricial $P(X)$, podemos escrever a matriz bloco companheira C

associada, de ordem 4×4, particionada em blocos 2×2 de ordem $n = 2$,

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2010 & 1002 & -4 \\ -1005 & -3013 & 2 & 1008 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, temos que os autovalores da matriz são $(1004, 1003, 2, 1)$. *Observe que temos um conjunto completo com X_1, de autovalores* $1004, 1003$ *e X_2 de autovalores* $2, 1$. *Verificamos que o menor autovalor do bloco dominante está muito distante do maior autovalor do segundo bloco. Neste caso, temos que a constante d*

$$d = \frac{max|\lambda_j|}{min|\lambda_i|} = \frac{2}{1003} = 0,00199...$$

Tendo que isso acarreta uma convergência mais rápida, em menos de 10 *interações obtemos a convergência para o bloco autovetor e o bloco autovalor dominante, associado.*

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1002 & -2 \\ 1 & 100 \end{bmatrix}$$

e

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1002 & -2 \\ 1 & 1005 \end{bmatrix}.$$

Como $(V_1)_1 = I_2$ é não singular verificamos que $(V_1)_1 X_1 (V_1)_1^{-1}$ é solvente de $P(X)$ (teorema 3.4).

Exemplo 3.6 *Considere o polinômio matricial $P(X)$*

$$P(X) = X^2 + \begin{bmatrix} -1,002 & 3,998 \\ -1,999 & -6,999 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1,998 & -7,998 \\ 3,999 & 9,999 \end{bmatrix}.$$

Partindo do polinômio matricial $P(X)$, podemos escrever a matriz bloco companheira C associada, de ordem 4×4, particionada em 2×2 blocos de ordem $n = 2$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1,998 & 7,998 & 1,002 & -3,998 \\ -3,999 & -9,999 & 1,999 & 6,999 \end{bmatrix}.$$

Temos que os autovalores da matriz são, $(3, 2, 001, 2, 1)$ *e observe que o conjunto completo tem* X_1*, de autovalores* $3, 2, 001$ *e* X_2 *de autovalores* $2, 1$*.Daí obtemos a constante d,*

$$d = \frac{max|\lambda_j|}{min|\lambda_i|} = \frac{2}{2,001} = 0,999...$$

Neste caso, como o maior autovalor do segundo bloco está muito próximo do menor autovalor do bloco dominante a convergência do algoritmo é muito lenta. Após 10000 *interações não obteve-se a convergência para bloco autovalor dominante.*

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho fizemos o estudo da teoria dos polinômios matriciais mônicos, apresentando as definições, conceitos e propriedades dos mesmos, e também a teoria dos bloco autovalores e bloco autovetores. Investigamos as principais relações entre o polinômio matricial e as matrizes bloco Companheira e bloco Vandermonde. Verificamos condições para que um bloco autovalor de um matriz bloco companheira seja também solvente do polinomial matricial associado. Estudamos a construção de polinômios matriciais com determinados solventes e a extensão do Método da Potência, para calcular blocos autovalores da matriz Companheira e solventes de $P(X)$.

Observamos que, partindo de um conjunto de pares próprios, se construirmos uma matriz S, invertível, significa que existe, e é possível construir uma matriz bloco companheira C e portanto um polinômio matricial $P(X)$, associado a C (e a S). Para o caso da matriz bloco companheira ser diagonalizável, sempre teremos um conjunto completo de solventes do polinômio matricial associado. Para o caso da matriz bloco companheira não ser diagonalizável, é observado outros resultados, sendo possível a existência de nenhum ou de um número qualquer de solventes . Também estudamos o caso da existência de um número infinito de solventes.

Desenvolvemos um programa em Matlab para o Método da Potência, em blocos, o que permitiu estudarmos a convergência do bloco vetor normalizado formado a partir do produto de potências da matriz pelo vetor bloco inicial. Fizemos a análise de alguns exemplos numéricos para casos distintos de convergência desse método, onde verificamos o pressuposto teórico de que a velocidade de convergência do método é determinada pela relação entre o menor autovalor do bloco autovalor dominante com o maior autovalor dentre os demais blocos da matriz em questão.

Como trabalho futuro propomos, o estudo de outros métodos numéricos, pois apesar do Método da Potência ser de fácil implementação, possui limitações quando o polinômio matricial não tem um solvente dominante. Daí, a motivação para o estudo de outros métodos, tais como o Método de Newton, e também o estudo de métodos para o cálculo de conjuntos completos de bloco autovalores e conjuntos completos de solventes.

Referências Bibliográficas

DENNIS JR, J.; TRAUB, J. F.; WEBER, R. Algorithms for solvents of matrix polynomials. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 15, n. 3, p. 523–533, 1978.

DENNIS JR, J. E.; TRAUB, J. F.; WEBER, R. The algebraic theory of matrix polynomials. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 13, n. 6, p. 831–845, 1976.

DENNIS JR, J. E.; TRAUB, J. F.; WEBER, R. P. *On the Matrix Polynomial, Lamda-Matrix and Block Eigenvalue Problems.* [S.l.], 1971.

GANTMACHER, F. R. *Theory of Matrices. 2V.* [S.l.]: Chelsea Publishing Company, 1960.

GOHBERG, I.; LANCASTER, P.; RODMAN, L. *Matrix polynomials.* [S.l.]: SIAM, 1982. v. 58.

GOHBERG, I.; LANCASTER, P.; RODMAN, L. *Invariant subspaces of matrices with applications.* [S.l.]: SIAM, 1986. v. 51.

LANCASTER, P.; TISMENETSKY, M. *The theory of matrices: with applications.* [S.l.]: Academic press, 1985.

PEREIRA, E. *Sobre solventes de polinômios matriciais.* Tese (Doutorado) — Universidade da Beira Interior, Portugal, 2000.

PEREIRA, E. Block eigenvalues and solutions of differential matrix equations. *Mathematical Notes (Miskolc)*, v. 4, p. 45–51, 2003.

PEREIRA, E. On solvents of matrix polynomials. *Applied numerical mathematics*, Elsevier, v. 47, n. 2, p. 197–208, 2003.

ROTH, W. E. On the unilateral equation in matrices. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 32, n. 1, p. 61–80, 1930.

TSAI, J.; SHIEH, L.; SHEN, T. Block power method for computing solvents and spectral factors of matrix polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 16, n. 9, p. 683–699, 1988.

WILKINSON, J. H. *The algebraic eigenvalue problem.* [S.l.]: Clarendon Press Oxford, 1965. v. 87.