

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Ana Karolina Gomes Bezerra

**Gráficos de Controle Multivariados de Somas Acumuladas
(MCUSUM) e de Média Móvel Exponencialmente Ponderada
(MEWMA)**

Natal/RN

2017

Ana Karolina Gomes Bezerra

**Gráficos de Controle Multivariados de Somas Acumuladas
(MCUSUM) e de Média Móvel Exponencialmente Ponderada
(MEWMA)**

Monografia de Graduação apresentada ao
Departamento de Estatística do Centro de
Ciências Exatas e da Terra da
Universidade Federal do Rio Grande do
Norte como requisito para obtenção do
grau de bacharel em Estatística.

Orientador:

Prof. Dr. Pledson Guedes de Medeiros

Natal/RN

2017

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Especializada do Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Bezerra, Ana Karolina Gomes.

Gráficos de controle multivariados de somas acumuladas (MCUSUM) e de
média móvel exponencialmente ponderada (MEWMA) / Ana Karolina Gomes
Bezerra. - Natal, 2017.

36f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Pledson Guedes de Medeiros.

Monografia (Bacharelado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
Centro de Ciências Exatas e da Terra. Departamento de Estatística.

1. Controle estatístico de processos - Monografia. 2. Gráficos de controle
multivariados - Monografia. 3. Análise de componentes principais - Monografia. I.
Medeiros, Pledson Guedes de. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET

CDU: 519.248

Ana Karolina Gomes Bezerra

**Gráficos de Controle Multivariados de Somas Acumuladas
(MCUSUM) e de Média Móvel Exponencialmente Ponderada
(MEWMA)**

Monografia de Graduação apresentada ao
Departamento de Estatística do Centro de
Ciências Exatas e da Terra da
Universidade Federal do Rio Grande do
Norte como requisito para obtenção do
grau de bacharel em Estatística.

Monografia aprovada em: 09 de junho de 2017

Banca examinadora:

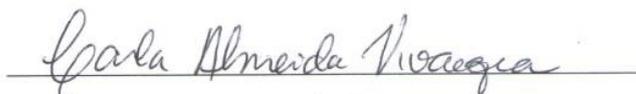


Prof. Dr. Pledson Guedes de Medeiros
(Orientador)

Prof. André Luis Santos de Pinho
Coordenador do Curso de Estatística
Mat.: 1217007



Prof. Dr. André Luis Santos de Pinho
(Examinador)



Profa. Dra. Carla Almeida Vivacqua
(Examinadora)

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo.

À minha mãe, Simone, por ser uma guerreira e sempre acreditar em mim, independente das circunstâncias.

Ao meu esposo, Mateus, por ter me dado todo apoio necessário, e ajudado em todos os momentos, principalmente nessa reta final.

À minha bisavó, Cícera, por ser uma mulher tão especial e um exemplo de matriarca.

À minha avó Salete e meu avô Raimundo por todo amor. Aos meus tios Eugênia, Eudes e Gustavo que me inspiram nesse caminho. Ao meu padrasto, Fábio, por sempre batalhar pela família. À minha irmã Vitória, pelo amor.

Ao professor Pledson, por ter aceitado ser meu orientador com todo carinho, paciência. Por sempre acreditar no meu potencial e não desistir. Por, desde o início, sempre incentivar os seus alunos a seguir no caminho da Estatística, sempre correndo atrás do melhor para o curso. Obrigada professor!

A todos os professores do melhor Departamento da UFRN, o de Estatística, por serem sempre atenciosos com seus ensinamentos, não só acadêmicos como para a vida.

Ao professor André, por ter se oferecido e se disponibilizado em me ajudar, pelas orientações e conselhos.

Aos amigos que fiz no curso durante esses anos, e que foram até o fim, Flávia, Felipe, Pedro e Vanessa. À minha amiga Raphaela, que começou essa caminhada comigo mas seguiu outro caminho, você fez falta!

Aos meus amigos da vida, que sempre que necessário foram o meu apoio, amo vocês!

A todos aqueles que de forma direta ou indireta me ajudaram na execução deste trabalho.

*“Porque dEle, e por Ele, e para Ele, são
todas as coisas;” Romanos 11-36a*

Resumo

O controle estatístico de processos fornece diversas ferramentas para monitoramento de características de qualidade, entre elas está o gráfico de controle. Com a necessidade de se monitorar simultaneamente duas ou mais características da qualidade os gráficos de controle se estenderam para os casos multivariados. No monitoramento de processos multivariados, em diversas situações, faz-se necessário detectar pequenas e moderadas mudanças. Nessas ocasiões é recomendado o uso de gráficos de controle de memória, que é o caso de gráficos como o Multivariado de Somas Acumuladas (MCUSUM) e o Multivariado de Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MEWMA). A análise de componentes principais (ACP) se apresenta como uma grande aliada dos gráficos de controle multivariados, a fim de potencialmente reduzir a dimensão dos dados e facilitar a compreensão da análise, uma vez que se tenha um número considerável de variáveis. Este trabalho propõe aplicar os gráficos de controle EWMA e CUSUM multivariados a dados reais, composto por oito variáveis, utilizando-se das componentes principais. Assim, a aplicação da ACP aos dados reduz o número de variáveis a serem analisadas para apenas duas componentes. Apresenta-se também um comparativo dos gráficos T^2 de Hotelling com o MCUSUM e MEWMA considerando a aplicação da análise de componentes principais.

Palavras-chave: Controle estatístico de processos. Gráficos de controle multivariados. Análise de componentes principais.

Abstract

Statistical process control provides several tools for monitoring quality characteristics, including control. With the need to simultaneously monitoring two or more quality characteristics, control charts have extended to multivariate cases. In the monitoring of multivariate processes, in several situations, it is necessary to detect small and moderate changes. For these occasions it is recommended to use memory control plots, such as the Multivariate Cumulative Sum (MCUSUM) and Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA) plots. The principal component analysis (PCA) is presented as a great ally of control charts in order to reduce the size of the data and facilitate the understanding of the analysis, once a considerable number of variables is present. This paper proposes to apply the multivariate EWMA and CUSUM control charts, composed of eight variables, using the PCA. Thus, the application of PCA to the data reduces the number of variables to be analyzed for only two components. This work also presents a comparison of the Hotelling T^2 with MCUSUM and MEWMA considering the application of Principal Components Analysis.

Keywords: statistical control process. Multivariate control charts. Principal component analysis.

Sumário

Lista de tabelas

1	Introdução	9
1.1	Objetivos.....	11
1.2	<i>Software</i> livre R versão 3.4.0.....	11
1.3	Organização do Trabalho.....	11
2	Revisão teórica	12
2.1	Análise de componentes principais.....	12
2.2	Gráficos de controle T^2 de Hotelling.....	13
3	Os gráficos CUSUM e EWMA univariados	15
3.1	Gráfico CUSUM.....	15
3.2	Gráfico EWMA.....	16
3.3	Exemplo ilustrativo.....	17
4	Os gráficos CUSUM e EWMA multivariados	20
4.1	Gráfico MCUSUM.....	20
4.2	Gráfico MEWMA.....	21
4.3	Exemplo ilustrativo.....	23
5	Gráficos de controle multivariados combinados com análise de componentes principais	25
5.1	Problemática.....	25
5.2	Aplicação.....	26
6	Considerações finais	30
	Apêndice	29
	Referências	33

1 Introdução

A qualidade é um fator de grande relevância para o consumidor no momento de selecionar algum serviço ou produto para compra. Em decorrência disto, a busca pela melhoria nos padrões de qualidade faz-se cada vez mais necessária. Atualmente o crescimento das indústrias está basicamente baseada na melhoria contínua de seus processos e produtos (Montgomery, 2016). Com isso, o controle estatístico da qualidade vem com o objetivo de atingir processos e produtos capazes e estáveis sem depender, necessariamente, de inspeções para garantir especificações exigidas (Samohyl, 2009)

O controle estatístico de processo (CEP) é uma das mais poderosas metodologias desenvolvidas visando auxiliar no controle eficaz da qualidade e contribuir no Controle estatístico da qualidade (Lima, 2009). É uma área de estudo que trata do monitoramento de processos, na qual estabelece informação permanente sobre o comportamento destes, e possui uma vasta coleção de ferramentas úteis na obtenção da estabilidade do processo através da detecção das causas que geram instabilidade.

O gráfico de controle é uma das técnicas fundamentais do controle estatístico, útil no monitoramento de ocorrências de instabilidade. Quando há presença de fontes externas de variabilidade, o gráfico de controle faz com que as médias amostrais sejam marcadas fora dos limites de controle, possibilitando que o processo seja parado para avaliar e corrigir a fonte que causa a variabilidade, ver Montgomery (2016) para maiores detalhes.

Uma das maneiras de se avaliar o desempenho de um gráfico de controle é mediante o número médio de amostras (NMA), que corresponde ao número de amostras necessárias para se detectar uma mudança ocorrida no processo. É a quantidade de amostras na média, necessárias, para que o gráfico de controle sinalize que o processo está fora de controle estatístico (WALTER et al., 2013). Segundo Samohyl (2009), se o alarme for falso, então é chamado de NMA_0 ; se verdadeiro, é chamado de NMA_1 .

O desenvolvimento do conceito estatístico de gráfico de controle foi introduzido por Shewhart em 1924, que aplicou os gráficos pela primeira vez enquanto estudava os dados de um dos processos de seu laboratório, o *Bell Telephone Laboratories*.

Entre os anos de 1940 e 1960, surgiram novos gráficos para cobrir as limitações presentes nos gráficos de Shewhart, como a detecção de pequenos desvios no processo

que passam despercebidos pelos gráficos de Shewhart. Esses novos modelos de gráfico de controle foram denominados gráficos de controle para pequenos desvios do valor nominal, que são os gráficos de controle de soma acumulada (CUSUM, do inglês *cumulative sum control chart*) e os gráficos de controle de média móvel exponencialmente ponderada (EWMA, do inglês *exponentially weighted moving average*), criados para o monitoramento univariados do processo.

No entanto, há muitas situações nas quais é necessário o monitoramento simultâneo do controle de duas ou mais características da qualidade relacionadas, e monitorar essas características independentemente pode ser enganoso (MONTGOMERY, 2004). Tendo isso, em 1947, Harold Hotelling desenvolveu um método de controle para monitorar mais de uma variável em um único gráfico.

No monitoramento de processos multivariados, em diversas situações, faz-se necessário detectar pequenas e moderadas mudanças das variáveis correlacionadas, nessas ocasiões é recomendado o uso de gráficos de controle de memória, que é o caso de gráficos como o Multivariado de Somas Acumuladas e o Multivariado de Média Móvel Exponencialmente Ponderada. Ambos, como já relatado, foram desenvolvidos para monitoramento de processos univariados, mas assim como os gráficos χ^2 e T^2 , eles também podem ser úteis no caso de processos multivariados. Lowry et al. (1992) desenvolveram o EWMA multivariado e Crosier (1998) e Pignatiello e Runger (1990) propuseram vários procedimentos do CUSUM multivariado.

Devido a dificuldades em relação as técnicas multivariadas, a aplicação de gráficos de controle para processos multivariados é pouco comum em processos industriais (HENNING et al. 2011). E, mesmo na literatura, não se há muitos estudos sobre os gráficos multivariados EWMA e CUSUM.

Assim, justifica-se a proposta de realizar um estudo no controle estatístico de processos multivariado, a respeito dos gráficos de controle com memória, o MCUSUM e o MEWMA.

1.1 Objetivos

Os principais objetivos desta monografia são:

- estudar gráficos de controle multivariados, com ênfase nos gráficos CUSUM e EWMA; e,
- estudar e analisar artigos desenvolvidos por Henning et al (2011).

Desta forma, os objetivos específicos podem ser dados por:

- revisar a literatura, acerca do tema do controle estatístico de processo com ênfase nos gráficos EWMA e CUSUM multivariados;
- analisar resultados desenvolvidos por Henning et al. (2011) e
- realizar análises com dados reais

1.2 *Software* livre R versão 3.4.0

O software utilizado para o desenvolvimento deste trabalho foi o R versão 3.4.0. O mesmo está disponível para diversos sistemas operacionais. O R possui diversos pacotes, ou bibliotecas, que englobam diversas ferramentas específicas para cada função pretendida

Para a execução das análises e estatísticas deste trabalho foram utilizados os pacotes qcc (Scrucca, L. 2004) e Devore7 (John Verzani, 2014), para gerar os gráficos univariados EWMA, CUSUM. Já para os gráficos MCUSUM e MEWMA, aplicam-se funções do pacote MSQC (Edgar Santos-Fernandez, 2013).

Para finalidade de consulta as rotinas utilizadas neste trabalho estão presentes no Apêndice do mesmo.

1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho foi estruturado em 8 capítulos. O primeiro traz a Introdução, assim como os objetivos gerais e específicos, o software utilizado no estudo e a organização do trabalho. No segundo capítulo encontra-se a revisão teórica, em que se apresenta uma revisão sobre alguns temas de CEP; análise de componentes principais; e o gráfico de controle T^2 de Hotelling. O capítulo três foi destinado para dar uma maior ênfase aos gráficos CUSUM e EWMA para o caso univariado, e o capítulo quatro para o multivariado. O quinto capítulo traz um estudo comparativo da literatura em relação aos gráficos multivariados aplicados com análise de componentes principais. No sexto, o

estudo dos gráficos EWMA e CUSUM multivariados, são aplicados em dados reais, no capítulo seguinte, o sete, são apresentados os resultados analisados e considerações finais. Por fim, no capítulo oito, tem relacionado as referências bibliográficas.

2 Revisão teórica

Este capítulo contém uma pequena revisão sobre alguns assuntos que são de relevância para o estudo em questão, e que ajudarão na compreensão do mesmo, são eles a análise de componentes principais e o gráfico multivariado T^2 de Hotelling.

2.1 Análise de componentes principais

A Análise de Componentes Principais é um método estatístico multivariado que visa transformar um conjunto de variáveis originais correlacionadas em outro conjunto de variáveis não correlacionadas, de mesma dimensão, denominadas componentes principais.

O objetivo é facilitar a interpretação dos dados, uma vez que possibilita a redução do número de variáveis para se analisar, ver Varella (2008) para maiores detalhes.

Essas componentes são combinações lineares das variáveis originais e representam suas projeções nas direções de máxima variabilidade dos dados.

$$\begin{aligned} z_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1p}x_p; \\ z_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2p}x_p; \\ &\vdots \\ z_p &= c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + \dots + c_{pp}x_p; \end{aligned}$$

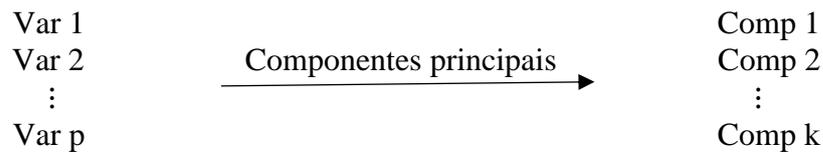
Propriedades:

1. Cada componente principal é uma combinação linear de todas as variáveis originais;
2. São não correlacionadas entre si;
3. São obtidas com o propósito de reter o máximo de informação sobre a variação total dos dados.

Geometricamente, as variáveis das componentes principais z_1, z_2, \dots, z_p são os eixos do novo sistema de coordenadas, obtido pela rotação do sistema das variáveis originais. Os novos eixos representam as direções de máxima variabilidade.

A informação contida no conjunto completo das p componentes principais corresponde àquela contida no conjunto completo de variáveis originais do processo (Peña, 2002).

Em geral temos:



Em que $k \leq p$.

Deve-se ressaltar que além reduzir as variáveis a serem investigadas, a análise de componente verifica também a identificação da variável(s) causadora(s) da instabilidade no sistema (Martins, 2011), ou seja, o que causa a variabilidade do processo.

2.2 Gráfico de controle T^2 de Hotelling

O procedimento mais familiar de monitoramento e controle de um processo multivariado é o gráfico de controle T^2 de Hotelling, para monitoramento do vetor média do processo. Ele é análogo ao gráfico X de Shewhart univariado (MONTGOMERY, 2004).

É recomendado quando as características do processo são fortemente correlacionadas e precisam ser monitoradas conjuntamente. Além disso, o gráfico de controle T^2 de Hotelling apresenta mais sensibilidade do que os gráficos univariados, permitindo ao operador detectar mais rapidamente os possíveis problemas existentes no processo e com isso corrigi-los com mais agilidade (HENNING et al., 2009).

A estatística de teste é dada por:

$$T^2 = n(\bar{X} - \bar{\bar{X}})' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \bar{\bar{X}})$$

Em que, \bar{X} e Σ correspondem, respectivamente, ao vetor das médias do processo e a matriz de variância e covariância do processo.

Existem duas fases distintas para a construção dos gráficos de controle T^2 de Hotelling. Lowry e Montgomery (1995) mostram que a Fase I consiste em utilizar os gráficos de controle para testar se o processo estava sob controle quando as primeiras m observações foram extraídas, objetivando obter um conjunto de dados sob controle para o estabelecimento dos limites de controle. Estes limites de controle são utilizados na Fase II para testar se o processo permanece sob controle, quando as observações futuras são extraídas durante a Fase II. Os limites de controle para a primeira fase são dados por Mason, Tracy e Young (1992) como:

$$LSC = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn - m - p + 1} F_{\alpha; p; mn - m - p + 1}$$

Em que p é o número de variáveis, m o número de amostras, e n o tamanho da amostra. F é o valor tabelado da estatística de teste referente a distribuição F de Snedecor com grau de liberdade do numerador igual a α (equivalente a taxa de alarmes falsos), e do denominador igual a $p, mn - m - p + 1$.

Para a fase II, o limite superior estabelecido é dado por:

$$LSC = LSC = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn - m - p + 1} F_{\alpha; p; mn - m - p + 1}$$

O limite inferior para os dois casos é igual a zero. Para a utilização dos gráficos de controle multivariados, também se faz necessário a verificação das suposições de normalidade e autocorrelação entre os dados, para que seja possível sua utilização.

3 Os gráficos CUSUM e EWMA univariados

3.1 Gráfico CUSUM

Os gráficos de controle de soma acumulada (CUSUM) são alternativas viáveis aos gráficos de controle de Shewhart e são os mais apropriados para reconhecer o histórico dos dados, característica ausente em gráficos mais simples, e também para reconhecer pequenas alterações nos processos muito antes dos alarmes dos gráficos \bar{X} (SAMOHYL, 2009). Foram, inicialmente, propostos por Page (1954).

Uma das maiores vantagens do gráfico CUSUM é que ele acumula informações de todo o conjunto de dados, dando pesos equivalentes as amostras, fazendo com que, dessa forma, o gráfico detecte pequenas alterações na média do processo.

Ele compreende toda a informação na sequência dos valores da amostra, plotando as somas cumulativas dos desvios dos valores da amostra em relação a um valor-alvo. Assim, sendo μ_0 o valor-alvo, o gráfico CUSUM é construído plotando a seguinte quantidade:

$$C_i = \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \mu_0)$$

versus o número i da amostra.

Se for observado uma tendência nos pontos plotados, tanto para cima quanto para baixo, é uma forte evidência de que a média do processo foi alterada, e deve ser realizada uma pesquisa para determinar alguma causa atribuível. Enquanto a média do processo estiver ajustada no alvo, os desvios positivos serão compensados pelos negativos, e então a estatística oscilará aleatoriamente em torno do zero.

Note que se $n = 1$, então o CUSUM se torna:

$$C_i = (x_i - \mu_0) + C_{i-1}$$

No entanto, o gráfico CUSUM não é, prontamente, um gráfico de controle, pelo fato de lhe faltar os limites de controle estatísticos. Assim, há duas formas de se caracterizar o CUSUM: a primeira com o CUSUM tabular e a segunda com a forma máscara V do CUSUM. No entanto, na literatura o CUSUM tabular é a melhor representação e pouco se encontra a respeito da segunda forma.

O CUSUM tabular acumula desvios da média μ_0 que estão acima do alvo com a estatística C^+ e as que estão abaixo do alvo com a estatística C^- , as quais são chamadas,

respectivamente, de CUSUMs unilaterais superior e inferior. São calculadas através das equações:

$$C_i^+ = \text{máx}[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \text{máx}[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-]$$

Em que os valores de $C_0^+ = C_0^- = 0$;

K é um valor de referência, que é, aproximadamente, a metade da soma do valor-alvo μ_0 com o valor da média fora de controle. Assim, se a mudança for expressa em unidades de desvio-padrão, como $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$, então:

$$K = \frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$$

Seja x_i a i -ésima observação do processo. Quando o processo está sob controle, supõe-se que x_i segue uma distribuição normal com média μ_0 e desvio-padrão σ . Assim, nota-se que tanto C_i^+ como C_i^- acumulam desvios a partir do valor-alvo que sejam maiores que K , e valendo zero quando ambas se tornam negativas.

Se C_i^+ ou C_i^- excederem o intervalo de decisão H o processo é dado como fora de controle. De acordo com alguns estudos define-se $H = h\sigma$, em que σ é o desvio-padrão da variável amostral utilizada no estudo para a construção do CUSUM. Usando $h = 4$ ou $h = 5$ e $k = 1/2$, resulta em um CUSUM que possui boas propriedades do CMS (comprimento médio da sequência) (MONTGOMERY, 2016).

3.2 Gráfico EWMA

Em 1959, mantendo a filosofia de utilizar a informação prévia com a finalidade de aumentar a eficiência para detectar pequenas alterações no processo, Robert S. introduziu o gráfico de médias móveis ponderadas exponencialmente. O gráfico EWMA (do inglês, Exponentially Weighted Moving Average), traduzido como MMPE (Média Móvel Ponderada Exponencialmente), é semelhante ao gráfico de somas acumuladas e, de certa forma, mais fácil de estabelecer e operar. Pode ser usado para melhorar a detecção de pequenas mudanças no controle de processo estatístico multivariável, Prabhu e Runger (1997).

Este gráfico é definido como:

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1}$$

Em que $0 < \lambda \leq 1$ é uma constante e o valor inicial é o alvo do processo, de modo que $z_0 = \mu_0$.

Se as observações x_i são variáveis aleatórias independentes com variância σ^2 , então a variância de z_i é:

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}]$$

Assim, o gráfico de controle EWMA é construído plotando z_i versus o número da amostra i (ou tempo).

Os limites de controle do gráfico são dados por:

$$LSC = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

$$LC = \mu_0$$

$$LIC = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

Note que o termo $[1 - (1 - \lambda)^{2i}]$ se aproxima de 1 quanto maior for o i . O que induz que quando o número de amostras ou períodos de tempo são muito grande os limites de controle vão se aproximando do estado estacionário:

$$LSC = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}$$

$$LIC = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}$$

A escolha dos parâmetros L e λ podem ser dados para se ter um melhor desempenho do *CMS* do gráfico de controle EWMA. Há muitos estudos na literatura sobre as propriedades do comprimento médio da sequência do gráfico de controle EWMA, em que fornecem tabelas com valores do *CMS* para diversos valores de λ e L .

O procedimento de planejamento ótimo consistiria da especificação dos comprimentos médios de sequência sob controle e fora de controle, e a magnitude da mudança no processo que é antecipada, para então fazer-se a seleção da combinação de λ e L que fornecesse o desempenho do *CMS* desejado (MONTGOMERY, 2016).

3.3 Exemplo ilustrativo

A Tabela 1 contém os valores dos x_i para a ilustração dos gráficos CUSUM e EWMA presentes neste tópico.

O exemplo é retirado do livro de Devore (2006, p. 626). Os dados tratam-se do peso de carvão vegetal para churrasqueiras. O carvão é empacotado em sacos de vários

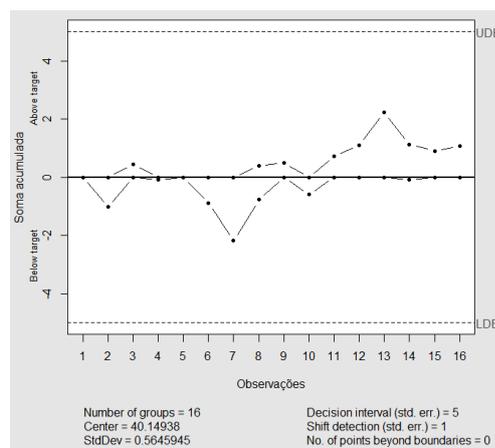
tamanhos, o maior dos quais se supõe que contenha aproximadamente 40 libras ($1 lb \approx 0,4536 kg$). Os dados são organizados em 16 amostras de tamanho $n = 4$. Os dez primeiros pesos foram obtidos de uma distribuição $N(\mu = 40, \sigma = 0,5)$. Iniciando com a amostra de número 11, a média foi deslocada para cima, com $\mu = 40,3$.

Tabela 1 - Valores dos x_i 's

Número da amostra	Observações			
1	40,77	39,95	40,86	39,21
2	38,94	39,70	40,37	39,88
3	40,43	40,27	40,91	40,05
4	39,55	40,10	39,39	40,89
5	41,01	39,07	39,85	40,32
6	39,06	39,90	39,84	40,22
7	39,63	39,42	40,04	39,50
8	41,05	40,74	40,43	39,40
9	40,28	40,89	39,61	40,48
10	39,28	40,49	38,88	40,72
11	40,57	40,04	40,85	40,51
12	39,90	40,67	40,51	40,53
13	40,70	40,54	40,73	40,45
14	39,58	40,90	39,62	39,83
15	40,16	40,69	40,37	39,69
16	40,46	40,21	40,09	40,58

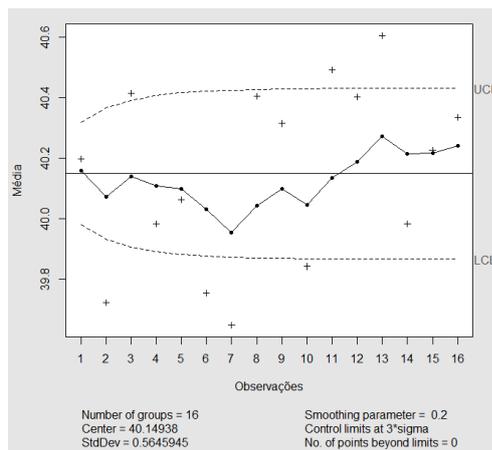
Fonte: Devore (2006)

Figura 1 - Gráfico de controle CUSUM



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 2 - Gráfico de controle de EWMA



Fonte: elaborada pelo autor

Pode-se observar, a partir das Figuras 1 e 2, que os gráficos de controle assinalam a mudança no vetor de médias a partir da amostra 11, quando, visualmente, nota-se que o gráfico começa a apresentar um comportamento crescente. O que demonstra ótimo desempenho de ambos os gráficos na detecção de pequenas alterações no vetor de médias do processo.

Os gráficos foram gerados pelo pacote `qcc` (Scrucca, L. 2004) do *Software R*. O comando está em anexo (APÊNDICE A).

4 Os gráficos CUSUM e EWMA multivariados

4.1 Gráfico MCUSUM

O CUSUM multivariado, ou MCUSUM, foi primeiramente proposto por Crosier (1986). A decisão sobre o estado do processo é baseada na informação acumulada de diversas amostras, e não apenas na última delas, acumulando, dessa forma, a pequena evidência que cada amostra fornece do estado do processo, conseguindo assim maior rapidez na sinalização de pequenos desajustes (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2009), com um número médio de amostras (NMA) menor do que fariam os tradicionais gráficos de Shewhart.

Para o uso do gráfico MCUSUM, é necessário considerar que as observações são independentes e que a sua matriz de covariância é conhecida. O procedimento para a utilização do gráfico baseia-se na coleta sucessiva de amostras de tamanho n na qual é obtida a estatística de cada vetor aleatório previamente observado, em relação ao valor nominal para monitorar o vetor de médias de um processo multivariado.

Os procedimentos de controle estatísticos multivariados baseados na filosofia CUSUM são discriminados em duas principais categorias: (i) procedimentos de controle que utilizam múltiplos gráficos de controle CUSUM univariados (abreviados por MCU), desconsiderando assim a correlação entre as variáveis e (ii) procedimentos de controle que utilizam um gráfico de controle CUSUM multivariado (abreviado por MCUSUM), isto é, utilizam a matriz de covariâncias das variáveis para obter uma aproximação do gráfico CUSUM em processos multivariados.

Crosier (1988) propõe dois métodos para a análise do gráfico de controle MCUSUM. O primeiro procedimento é baseado na raiz quadrada da estatística T^2 de Hotelling, enquanto o segundo pode ser obtido substituindo a quantidade de escalares nas expressões de somas acumuladas pelos correspondentes vetores.

O primeiro procedimento, denominado gráfico de controle soma de T, COT ou CUSUM of T consiste em reduzir as observações multivariadas a escalares. A estatística de soma acumulada para este procedimento é dada por:

$$S_i^+ = \text{máx}(0, S_{i-1} + T_i - k)$$

Este procedimento baseia-se em realizar uma soma acumulada da raiz quadrada da estatística T_i^2 para a i -ésima amostra, isto é:

$$T_i = \sqrt{(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)}$$

Em que $S_0 \geq 0$, $k > 0$ e \mathbf{X}_i é a i -ésima observação p variada do processo e k é o valor de referência. O procedimento indicará um processo fora de controle quando $S_i > h$, em que h é o intervalo de decisão (limite de controle).

No segundo método, que é uma extensão do gráfico CUSUM univariado de Crosier, o MCUSUM (CUSUM de vetores) a estatística calculada para o gráfico é dada por:

$$Y_i = (\mathbf{S}'_i \Sigma^{-1} \mathbf{S}_i)^{1/2}$$

As somas acumuladas \mathbf{S}_i são dadas por:

$$\text{Sendo: } \begin{cases} \mathbf{S}_i = (\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{X}_i)(1 - \frac{k}{c_i}), & \text{se } c_i > k \\ \mathbf{S}_i = 0, & \text{se } c_i \leq k \end{cases}$$

Com $\mathbf{S}_0 = 0$ e $k > 0$.

Definindo \mathbf{C}_i como:

$$\mathbf{C}_i = [(\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \Sigma^{-1} (\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)]^{1/2}$$

sendo:

\mathbf{X}_i : vetor de observações dos subgrupos de tamanho n da i -ésima amostra;

$\boldsymbol{\mu}_0$: vetor de valores alvo;

Σ : matriz de variância e covariância.

Se $Y_i = (\mathbf{S}'_i \Sigma^{-1} \mathbf{S}_i)^{1/2} > h$, indica que o processo está fora de controle.

A partir de um estudo comparativo entre estes dois procedimentos de gráfico MCUSUM Crosier demonstra que o segundo procedimento MCUSUM (CUSUM de Vetores) apresenta um desempenho NMA superior em relação ao procedimento COT (Soma de T).

4.2 Gráfico MEWMA

O MEWMA é utilizado para monitorar, conjuntamente, duas ou mais características de qualidade de processos correlacionados em um gráfico de controle ponderado exponencialmente. A eficiência do processo é garantida mesmo com a presença de pequenas mudanças, pois um erro, mesmo que pequeno, é acumulado durante o tempo amostral.

A primeira referência sobre o gráfico de controle multivariado MEWMA, se deve a Lowry et al. (1992) que definem o MEWMA como uma extensão lógica do gráfico de

controle EWMA univariado ($p = 1$), que utilizam mais informações que o gráfico T^2 de Hotelling, cuja estatística de controle para monitorar o valor médio do processo é dada por:

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \mathbf{x}_i + (1 - \lambda) \mathbf{Z}_{i-1}$$

Em que \mathbf{x}_i é uma matriz $p \times n$ com os valores das p variáveis referentes à i -ésima amostra; λ é o peso amostral, em que $0 \leq \lambda \leq 1$ e $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}$.

Quando $\lambda=1$ o gráfico MEWMA é equivalente ao gráfico de controle T^2 de Hotelling.

A quantidade plotada no gráfico de controle é definida como:

$$T_i^2 = \mathbf{Z}'_i \Sigma_{z_i}^{-1} \mathbf{Z}_i$$

Em que a matriz de covariância de \mathbf{Z}_i é dada pela equação:

$$\Sigma_{z_i} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \Sigma$$

A análise completa do NMA do gráfico de controle MEWMA é feita utilizando a abordagem por cadeia de Markov de Brook e Evans (1972). Os limites de controle H foram escolhidos para dar um $NMA_0 = 200$ sempre que o processo estiver sob controle. O tamanho da mudança, ou desvio em relação à média do processo sob controle, é dado por uma quantidade chamada de parâmetro de não centralidade:

$$\delta = \boldsymbol{\mu}' \Sigma' \boldsymbol{\mu}^{1/2}$$

em que, quanto maior valor de δ maior é a mudança na média, assim $\delta = 0$ representa o estado sob controle.

A Tabela 2 dada por Prabhu e Runger (1997) nos dá os valores de LSH(H) para um número de amostras até detectar um alarme falso de 200, para 2,4,6,10 e 15 variáveis, variando os valores dos δ 's e λ 's.

Para um dado δ pode-se observar que os NMA's tendem a crescer na medida em que λ cresce, para valores muito altos de δ .

O EWMA multivariado pode ser planejado para ter uma detecção mais rápida, ou seja, obter menores valores do NMA_1 . Sua forma robusta em relação à valores grandes, ou pequenos, proporciona uma segurança maior para o caso de processos que sofrem pequenas alterações.

Tabela 2 - Comprimento médio de sequência (estado zero) para o gráfico de controle MEWMA [de Prabhu e Runger (1997)]

p	δ	λ							
		0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80
2		H=7,35	8,64	9,65	10,08	10,31	10,44	10,52	10,58
	0,0	199,93	199,98	199,91	199,82	199,83	200,16	200,04	200,20
	0,5	26,61	26,61	35,17	44,10	53,82	64,07	74,50	95,88
	1,0	11,23	11,23	10,20	11,36	13,26	15,88	19,24	28,65
	1,5	7,14	7,14	5,49	5,48	5,78	6,36	7,25	10,28
	2,0	5,28	5,28	3,78	3,56	3,53	3,62	3,84	4,79
	3,0	3,56	3,56	2,42	2,20	2,05	1,95	1,90	1,91
4		H=11,22	12,73	13,87	14,34	14,58	14,71	14,78	14,85
	0,0	199,84	200,12	199,94	199,91	199,96	200,05	199,99	200,05
	0,5	32,29	35,11	46,30	59,28	72,43	85,28	97,56	120,27
	1,0	13,48	12,17	12,67	14,81	18,12	22,54	28,06	42,58
	1,5	8,54	7,22	6,53	6,68	7,31	8,40	10,03	15,40
	2,0	6,31	5,19	4,41	4,20	4,24	4,48	4,93	6,75
	3,0	4,23	3,41	2,77	2,50	2,36	2,27	2,24	2,37
6		H=14,60	16,27	17,51	18,01	18,26	18,39	18,47	18,54
	0,0	200,11	200,03	200,11	200,18	199,81	200,01	199,87	200,17
	0,5	36,39	40,38	54,71	70,30	85,10	99,01	111,65	133,91
	1,0	15,08	13,66	14,63	17,71	22,27	28,22	35,44	53,51
	1,5	9,54	8,01	7,32	7,65	8,60	10,20	12,53	20,05
	2,0	7,05	5,74	4,88	4,68	4,80	5,20	5,89	8,60
	3,0	4,72	3,76	3,03	2,72	2,58	2,51	2,51	2,77
10		H=20,72	22,67	24,07	24,62	24,89	25,03	25,11	25,17
	0,0	199,91	199,95	200,08	200,01	199,98	199,84	200,12	200,00
	0,5	42,49	48,52	67,25	86,58	102,05	116,25	128,82	148,96
	1,0	17,48	15,98	17,92	22,72	29,47	37,81	47,54	67,91
	1,5	11,04	9,23	8,58	9,28	10,91	13,49	17,17	28,33
	2,0	8,15	6,57	5,60	5,47	5,77	6,48	7,68	12,15
	3,0	5,45	4,28	3,43	3,07	2,93	2,90	2,97	3,54
15		H=27,82	30,03	31,59	32,19	32,48	32,63	32,71	32,79
	0,0	199,95	199,89	200,08	200,03	199,96	199,91	199,93	200,16
	0,5	48,20	56,19	78,41	98,54	115,36	129,36	141,10	159,55
	1,0	19,77	18,28	21,40	28,06	36,96	47,44	59,03	83,86
	1,5	12,46	10,41	9,89	11,08	13,53	17,26	22,38	37,07
	2,0	9,20	7,36	6,32	6,30	6,84	7,97	9,80	16,36
	3,0	6,16	4,78	3,80	3,43	3,29	3,31	3,49	4,49

Fonte: Montgomery (2016)

4.3 Exemplo ilustrativo

Os dados para a ilustração dos gráficos CUSUM e EWMA multivariados são dados de Crosier (1988) e estão presentes na Tabela 3. Esses dados foram extraídos aleatoriamente de uma distribuição normal bivariada com variância unitária e coeficiente

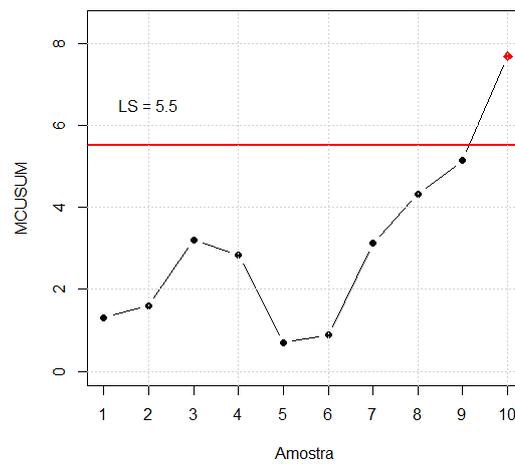
de correlação igual a 0,5. O vetor de médias do processo é (0,0) para as cinco primeiras observações e (1,2) para as outras cinco.

Tabela 3 - Dados para exemplo de aplicação para os gráficos multivariados

x_1	-1,19	0,12	-1,69	0,30	0,89	0,82	-0,30	0,63	1,56	1,46
x_2	0,59	0,90	0,40	0,46	-0,75	0,98	2,28	1,75	1,58	3,05

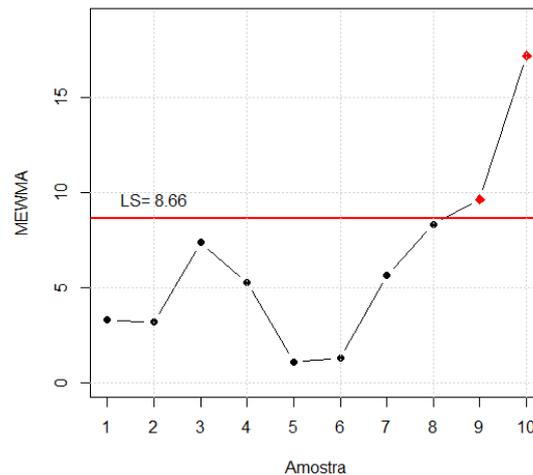
Fonte: Crosier (1988)

Figura 3 – Gráfico de controle MCUSUM



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 4 – Gráfico de controle MEWMA



Fonte: elaborada pelo autor

Na Figura 3 o processo apresenta estar fora de controle estatístico a partir da amostra 10, e, observa-se que, através da Figura 4, as amostras 9 e 10 estão fora de controle estatístico.

É interessante notar que, apesar de não ser o foco do estudo, o gráfico MEWMA nota a mudança na média do processo primeiro que o gráfico MCUSUM.

Para a construção de ambos os gráficos foi utilizada a função MSQC (EDGAR SANTOS-FERNANDEZ, 2013). Não professor, a média muda sim, para as primeiras cinco variáveis o vetor de médias é diferente das últimas cinco.

5 Gráficos de controle multivariados combinados com análise de componentes principais

Entre os gráficos multivariados existentes, o gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling é o mais conhecido na literatura. Hotelling (1947) foi um dos primeiros a analisar variáveis correlacionadas sob uma perspectiva de controle estatístico, utilizando-se de um procedimento multivariado.

No entanto, o gráfico T^2 de Hotelling tal como os gráficos de controle MCUSUM e MEWMA não são suficientemente robustos para tratar com um grande número de variáveis correlacionadas, pois foram desenvolvidos para monitorar um pequeno número dessas variáveis (PHAM, 2006). E em algumas situações, quando se tem um grande número de variáveis, tais estatísticas não poderão ser calculadas devido à dificuldade de inversão da matriz de covariâncias das variáveis de processo. Assim, faz-se necessário o uso combinado de gráficos de controle multivariados com as ferramentas da análise de componentes principais (ACP), para reduzir a dimensão dos dados, sem haver perda de informação.

5.1 Problemática

Atualmente na montagem de carroçarias de veículos, peças estampadas em aço são unidas entre si formando sua estrutura. Medidas tridimensionais dessa estrutura precisam ser controladas para que o restante das peças possa ser adequadamente montado em etapas posteriores do processo. Em particular, peças móveis como portas e capuz do motor estão recebendo especificações muito rígidas nas folgas no intuito de aumentar tanto a confiabilidade do produto quanto a qualidade percebida pelos consumidores. Um dispositivo de medição tridimensional é usado para se obter dados de vários pontos da cabina do caminhão pré-montada. Estudando-se em particular o sub-processo de montagem do capuz do motor, 4 pontos no assento do capuz são importantes para controle (tendo cada uma delas direção longitudinal e transversal) (COLACIOPPO, 2001).

Os dados foram coletados com o objetivo de entender a variabilidade do assento do capuz, para poder agir preventivamente e reduzir custos de ajuste bem como ganhar produtividade na linha de montagem. O conjunto de dados contém 43 observações desse

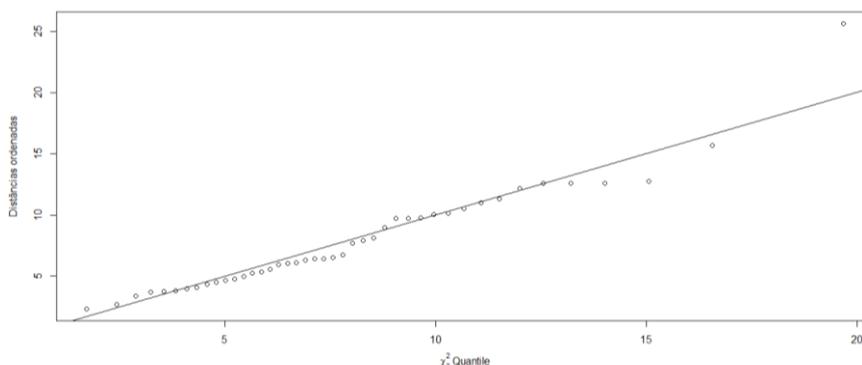
processo, que foram obtidas durante 2 meses para um determinado tipo de caminhão. As 8 variáveis utilizadas nesse processo estão descritas em Anexo (Apêndice B).

5.2 Aplicação

Os gráficos de controle, pressupõem que os dados tenham distribuição normal e sejam independentes. Assim, faz-se necessário o uso de um teste de normalidade nos dados, e a garantia da independência entre as observações de cada variável.

A normalidade dos dados foi verificada a partir do gráfico de probabilidade normal multivariada apresentado abaixo. Assim como a normalidade de cada uma das oito variáveis separadamente, que pode ser verificada no Apêndice deste trabalho.

Figura 5 – Gráfico da probabilidade normal multivariada



Fonte: elaborada pelo próprio autor

Como pode ser visto a partir da Figura 5, visualmente, pode-se dizer que os dados seguem uma distribuição normal, podendo assim, ser aplicada a análise de componentes principais aos dados, para se obter um novo número de variáveis para se trabalhar e facilitar a interpretação da análise final.

Para a realização do gráfico de probabilidade normal multivariada, utilizou-se a distribuição qui-quadrada, o comando para a reprodução do mesmo foi retirado do livro de Everitt e Hothorn (2011). Há uma outra rotina para a verificação da normalidade nos dados, desenvolvida por Mingoti (2005), que utiliza o teste de Mardia para a decisão. Ambas as rotinas podem ser encontradas no Apêndice D.

Para a análise dos dados iremos usar, antes da aplicação dos gráficos de controle, o uso das componentes principais, uma vez que, temos um número de variáveis elevada, e dificultaria na análise final.

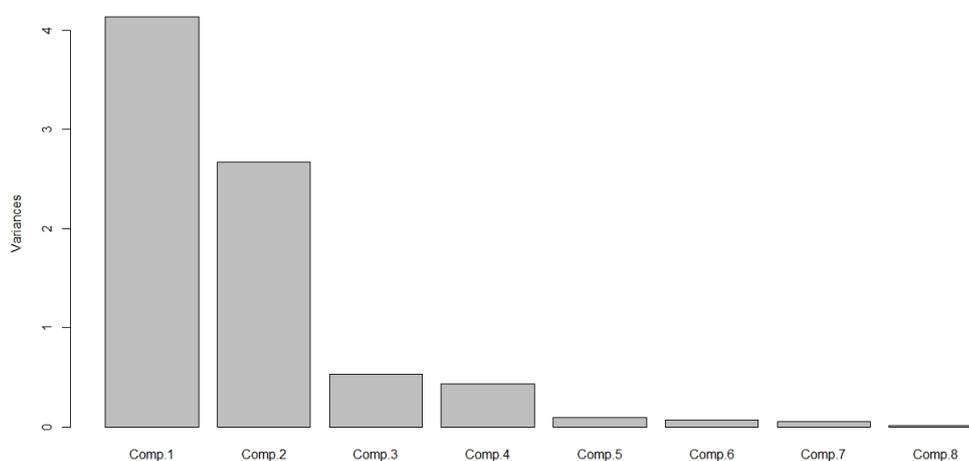
Assim, leva-se em consideração que as componentes principais são não autocorrelacionadas, para se garantir a independência das variáveis, e assim, aplicar os gráficos de controle.

Tabela 4 - Autovalores, variância explicada por componente e variância acumulada

Componentes	Autovalores	Proporção da variância	Proporção da variância acumulada
1	2,10	0,5520	0,5520
2	1,72	0,3693	0,9213
3	0,55	0,0385	0,9598
4	0,44	0,0250	0,9848
5	0,32	0,0126	0,9974
6	0,11	0,0015	0,9989
7	0,08	0,0009	0,9998
8	0,04	0,0002	1,0000

Fonte: elaborada pelo autor

Figura 6 – Gráfico das componentes (Screeplot)



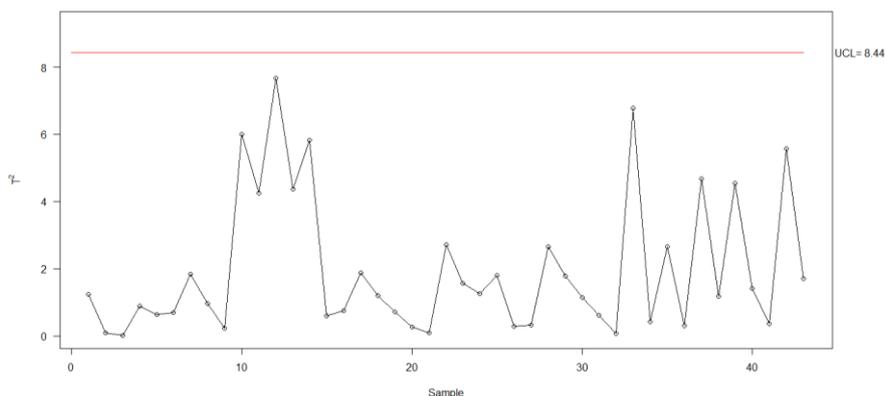
Fonte: elaborada pelo autor

Após aplicada a análise de componentes principais, as oito variáveis iniciais são reduzidas à duas componentes, que são responsáveis por, aproximadamente, 92% da variabilidade total dos dados, como podemos perceber através da Tabela 4 e da figura 6.

Depois de executada a análise de componentes principais nos dados, e ver que apenas duas variáveis são suficientes para explicar, aproximadamente, 92% da

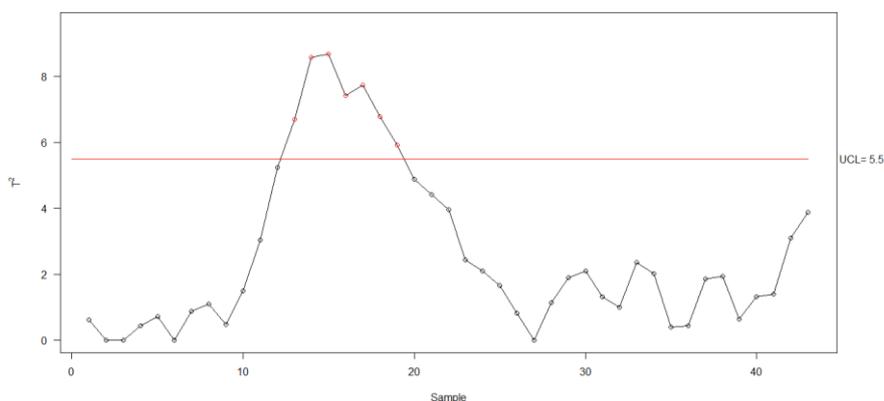
variabilidade geral dos dados, foi realizado também, com as duas variáveis restantes, um estudo comparativo entre os gráficos de controle T^2 de Hotelling e os gráficos MEWMA e MCUSUM, para se observar o comportamento de cada um deles. As Figuras 7 e 8 mostram os resultados do teste.

Figura 7 – Gráfico T^2 de Hotelling para as componentes principais



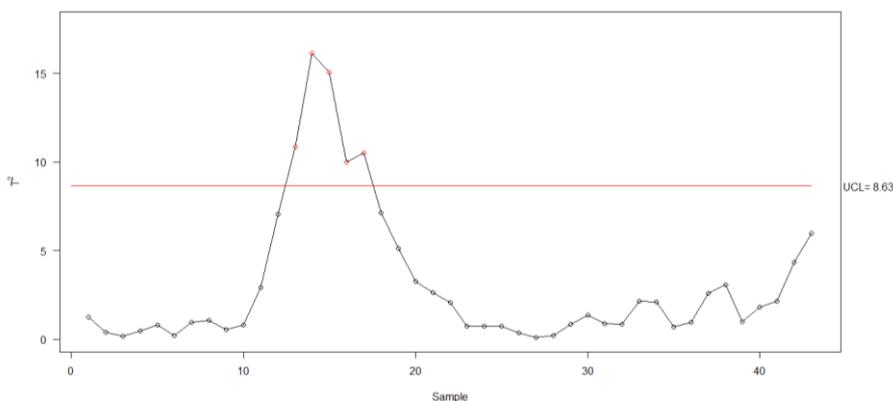
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 8 – Gráfico MCUSUM para as componentes principais



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 9 – Gráfico MEWMA para as componentes principais



Fonte: elaborada pelo autor

Como pode-se observar os gráficos MCUSUM (Figura 8) e MEWMA (Figura 9) das componentes principais sinalizam uma alteração no vetor de médias do processo, sinalizando que o processo está fora de controle estatístico, a partir da amostra 13 nos dois gráficos. Essa alteração do vetor de médias inicia-se a partir da amostra 11, em ambos os gráficos, quando as amostras começam a apresentar um comportamento crescente. Porém esta alteração não é detectada pelo gráfico T^2 de Hotelling (Figura 7), que demonstra um processo sob controle.

Esta não detecção pelo gráfico T^2 de Hotelling é explicada pelo fato da Estatística T^2 ser baseada apenas na última observação, e não levar em conta as passadas, como é o caso dos outros dois gráficos, sendo, o gráfico T^2 de Hotelling, insensível a pequenas alterações no vetor de médias do processo.

Esta análise confirma o fato dos gráficos MCUSUM e MEWMA serem bem mais eficientes em detectar pequenos desvios no vetor de médias do processo.

6 Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo expandir os conhecimentos das técnicas tradicionais de CEP a respeito dos gráficos CUSUM e EWMA, estendendo-os para o caso multivariado.

Foi introduzido o conceito da análise de componentes principais, em que esta foi combinada com os gráficos multivariados para se ter uma melhor facilidade na interpretação dos dados, e reduzimos uma análise de 8 variáveis para apenas 2.

Pode-se notar que a análise de componentes principais aplicada ao controle estatístico de processo multivariado é uma ótima alternativa para reduzir o número de variáveis a serem analisadas, sem haver perda de informações sobre elas, mostrando-se assim uma importante aliada no monitoramento de processos multivariados. Ademais, conforme o número de variáveis aumenta os gráficos multivariados convencionais perdem sua eficiência (MONTGOMERY, 2004).

O gráfico T^2 de Hotelling, como já se era sabido, mostrou-se insensível a pequenas mudanças no vetor de médias, com isso, uma boa alternativa seria usá-lo sempre conjunto aos gráficos de controle para pequenos desvios do valor nominal, EWMA e CUSUM multivariados.

Uma possível extensão deste trabalho é a ampliação dos estudos para o caso em que as variáveis do processo são correlacionadas, pois neste trabalho assume-se independência. Podendo assim verificar o comportamento dos gráficos MCUSUM e MEWMA na presença de correlação dentro das variáveis.

Seria interessante também um estudo para comparar qual dos dois gráficos é o mais sensível à mudança, o MCUSUM ou o MEWMA.

Além disso, um possível trabalho futuro pode levar em conta o desempenho do gráfico de controle, medindo o número médio de amostras (NMA), que corresponde ao número de amostras necessárias para se detectar uma mudança ocorrida no processo, para quando se tem um processo sob controle.

Apêndice A - Rotinas no R para os gráficos EWMA e CUSUM

Univariados

```
library(Devore7)
library(qcc)
cusum(amostra, title="Gráfico CUSUM", ylab="Soma acumulada",
      xlab="Observações")
ewma(amostra, title="Gráfico EWMA", ylab="Média", xlab="Observações")
#amostra são os dados para análise no gráfico
```

Multivariados

```
#HOTELING
mult.chart(type="t2",x[,c(1,2)])
#MCUSUM
Xmv<-mult.chart(x[,c(1:2)], type="t2")$Xmv
S<-mult.chart(x[,c(1:2)],type="t2")$covariance
mult.chart(type="mcusum", x[,c(1:2)], Xmv=Xmv, S=S)
mult.chart(type="mcusum2", x[,c(1:2)], Xmv=Xmv, S=S)
#MEWMA
mult.chart(type = "mewma", x[,c(1:2)])
```

Apêndice B – Tabelas a respeito dos dados da aplicação do Tópico 5

Tabela 5 - Significado das siglas usadas como nomes das variáveis em estudo

Variável	Ponto	Direção de medição	Posição	Lado
XFD	A	Transversal	Frente	Direito
XFE	B	Transversal	Frente	Esquerdo
XTD	C	Transversal	Traseira	Direito
XTE	D	Transversal	Traseira	Esquerdo
YFD	A	Longitudinal	Frente	Direito
YFE	B	Longitudinal	Frente	Esquerdo
YTD	C	Longitudinal	Traseira	Direito
YTE	D	Longitudinal	Traseira	Esquerdo

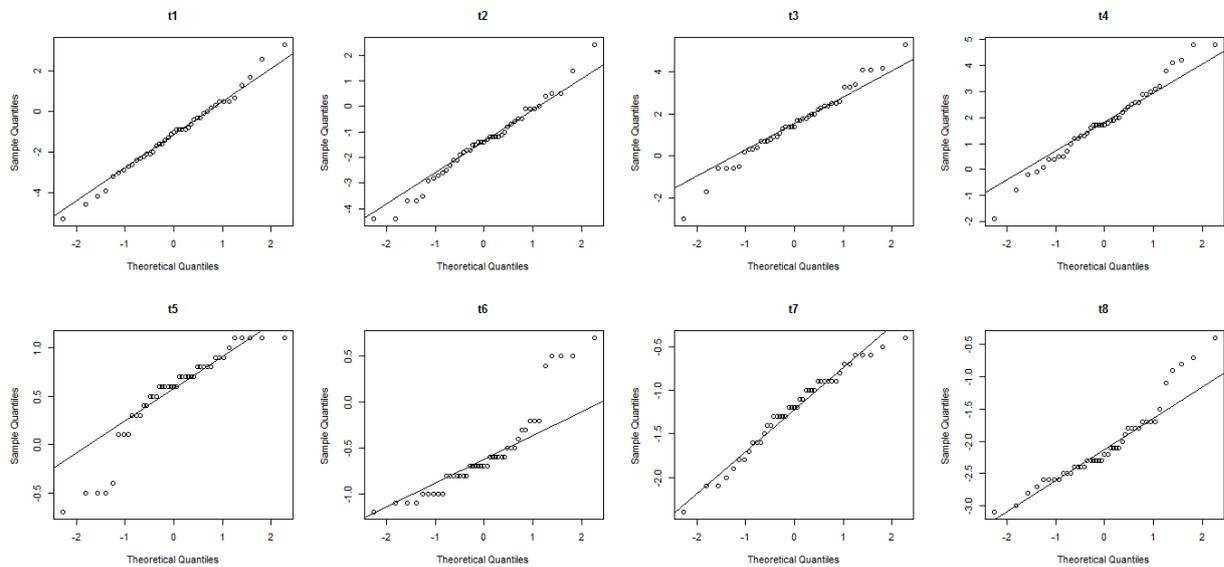
Fonte: Colacioppo (2001)

Tabela 6 - Dados observados no processo

Obs	XFD	XFE	XTD	XTE	YFD	YFE	YTD	YTE
1	0.0	0.0	-0.6	0.4	0.6	-0.7	-1.6	-2.6
2	-1.6	-1.4	2.2	1.9	0.3	-0.3	-1.4	-2.4
3	-0.9	-1.9	1.4	2.4	0.5	-0.6	-1.3	-2.3
4	-0.3	-1.3	0.7	1.7	0.1	-0.2	-1.9	-1.8
5	-0.9	-1.7	1.4	2.3	0.1	-0.2	-1.6	-1.8
6	-1.1	-1.2	1.4	1.7	0.9	-1.0	-0.9	-2.4
7	0.5	0.5	-0.6	-0.2	0.6	-0.7	-1.5	-2.5
8	-0.9	-1.2	0.9	1.7	1.0	-1.1	-1.0	-2.5
9	-1.6	-2.1	2.5	2.5	0.5	-0.6	-0.9	-2.1
10	-2.0	-1.2	2.0	1.4	-0.5	0.5	-2.4	-0.9
11	-0.8	-0.5	0.9	0.7	-0.4	0.5	-1.8	-0.8
12	-2.2	-2.3	2.6	2.6	-0.7	0.7	-2.1	-0.7
13	0.5	-0.5	0.3	1.0	-0.5	0.4	-2.1	-1.1
14	-0.1	-0.1	0.3	0.5	-0.5	0.5	-2.0	-0.4
15	-0.9	-0.1	1.1	0.4	0.3	-0.4	-1.6	-1.7
16	-0.3	-1.1	1.3	1.7	0.7	-0.8	-0.7	-2.6
17	0.5	0.5	-0.5	-0.1	0.1	-0.2	-1.8	-2.3
18	-2.3	-3.7	2.4	4.2	0.7	-0.7	-1.3	-2.4
19	0.7	-0.6	0.8	1.2	0.6	-0.6	-0.7	-2.3
20	-1.7	-1.5	1.8	2.0	0.7	-0.8	-0.9	-2.3
21	-2.9	-1.0	2.4	1.3	0.6	-0.6	-1.2	-1.8
22	-3.9	-3.7	4.1	4.1	0.6	-0.6	-1.0	-1.8
23	0.3	-0.7	0.2	1.3	0.8	-0.8	-0.9	-3.0
24	-3.2	-2.8	3.4	3.1	0.7	-0.6	-0.9	-1.7
25	-3.0	-2.9	3.3	3.2	1.1	-1.0	-0.6	-2.1
26	0.2	-0.8	0.7	1.2	0.4	-0.5	-1.3	-2.0
27	-0.6	-1.2	0.7	1.6	0.8	-0.8	-1.2	-2.3
28	1.7	-0.1	0.4	0.5	0.5	-0.7	-0.4	-3.1
29	1.3	0.4	-0.6	0.1	0.6	-0.5	-1.0	-2.1
30	-0.4	-1.7	1.7	2.2	0.9	-1.0	-0.8	-2.8
31	-2.7	-2.6	2.3	2.9	0.8	-0.8	-1.2	-1.9
32	-2.1	-1.4	2.0	1.7	0.6	-0.7	-1.1	-2.2
33	3.3	2.4	-3.0	-1.9	0.3	-0.3	-1.4	-1.5
34	-1.0	-1.5	1.7	2.0	0.8	-0.8	-0.6	-2.1
35	-4.2	-3.5	4.2	3.8	0.7	-0.7	-1.0	-1.7
36	-1.4	-1.4	1.8	1.8	0.8	-0.8	-1.2	-2.6
37	2.6	1.4	-1.7	-0.8	0.7	-0.7	-1.3	-2.6
38	-1.3	-2.1	1.4	2.6	1.1	-1.2	-1.1	-2.7
39	-4.6	-4.4	4.1	4.8	0.4	-0.5	-1.7	-1.7
40	-2.4	-2.7	2.5	3.0	1.1	-1.1	-0.9	-2.5
41	-2.1	-1.8	1.9	1.9	0.9	-1.0	-1.3	-2.4
42	-5.3	-4.4	5.3	4.8	1.1	-1.0	-0.5	-2.2
43	-2.6	-2.5	3.3	2.9	1.1	-1.1	-0.6	-2.3

Fonte: Colacioppo (2001)

Apêndice C – Gráficos da probabilidade normal para as oito variáveis



Fonte: elaborada pelo autor

Apêndice D – Rotinas para a reprodução do gráfico de probabilidade normal multivariado

Rotina 1 - Everitt e Hothorn (2011)

```
x <- D[, c("t1", "t2", "t3", "t4", "t5", "t6", "t7", "t8")]
#D é o objeto em que se encontra os dados para análise
cm <- colMeans(x)
S <- cov(x)
d <- apply(x, MARGIN = 1, function(x)
  t(x - cm) %*% solve(S) %*% (x - cm))
plot(qchisq((1:nrow(x) - 1/2) / nrow(x), df = 3), sort(d), xlab = expression(paste(d^2)),
  ylab = expression(chi^2), cex.main=5, cex.lab=1)
abline(a = 2, b = 2)
```

Rotina 2 - Mingoti (2005)

```
qqmult4 <- function(y){
  library(QRM)#Para acessar teste Mardia
  library(psych)#varios histogramas
```

```

x<-as.matrix(y,ncol=ncol(y),nrow=nrow(y))
colnames(x)<-names(y)
nvar<-dim(x)[2]
##histograma, curva normal e densidade
#nr <- ifelse(nvar>3,ceiling(sqrt(nvar)),1)
#nc <- ifelse(nvar>3,ceiling(nvar/sqrt(nvar)),nvar)
#multi.hist(x,nrow=nr,ncol=nc)
#teste shapiro
shapiro.res<-matrix(c(0),ncol=nvar,nrow=1)
for (i in 1:nvar) {
shapiro.res[1,i]<-shapiro.test(x[,i])$p.value }
colnames(shapiro.res)<-names(y)
shapiro.res<-data.frame(shapiro.res)
vetormedias<-as.vector(colMeans(x))
mc<-cov(x)
desvios<-matrix(c(0),ncol=ncol(x),nrow=nrow(x))
for (j in 1:ncol(x)){
desvios[,j]<-x[,j]-vetormedias[j]}
imc<-solve(mc)
nop<-desvios %*% imc
na<-1:length(x[,1])
q<-(na-0.5)/nrow(x)
p<-ncol(x)
c2<-qchisq(q,p,lower=F)
td<-t(desvios)
d2<-0
for (i in 1:nrow(x)){
d2[i]<- nop[i,]%*%td[i]}
c2<-sort(c2)
d2<-sort(d2)
rtm<-MardiaTest(x)
plot(d2,c2,main="",ylim=c(-0.5,max(c2+0.5)),ylab=expression(chi^2),pch=19,
xlab=expression(d^2),cex.main=1.2,cex.lab=1.5)
abline(lm(c2~d2))

```

```
structure(list(TESTE.SHAPIRO.p.valor=shapiro.res,MARDIA.coef.ass=rtm[1],  
p.valor=rtm[2],MARDIA.coef.curtose=rtm[3],p.valor=rtm[4]))  
}
```

Referências

- Alves, C. C. *O método de Equação Integral com Quadratura Gaussiana para otimizar os parâmetros do gráfico de controle multivariado de Somas Acumuladas*. Tese de doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2009.
- Brook, D.; Evans D. A. (1972). *An Approach to the Probability Distribution of Cusum Run Length*. *Biometrika*. Vol. 59, pp. 539-549.
- Colacioppo, R. C. *Controle estatístico multivariado de processos para observações individuais*. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2001.
- Costa, A. F. B.; Epprecht, E. K. and L. C. R. Carpinetti. *Controle Estatístico de Qualidade*. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2009.
- Crosier, R. B. (1986). *A New Two-Sided Cumulative Sum Quality Control Scheme*. *Technometrics*, Vol. 28(3), pp. 187-194.
- Crosier, R. B. (1988). *Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-control Schemes*. *Technometrics*, Vol. 30(3), pp. 291-303.
- Devore, J. L. *Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências*. São Paulo: Cengage Learning, 2006.
- Everitt, B and Hothorn, T. *An Introduction to Applied Multivariate Analysis with R*. 1.ed. New York: Springer, 2011.
- Heninng, E.; Araujo, N. G. A.; Alves, C. C.; Zvirtes, L. (2011). *Aplicação de gráficos de controle multivariados baseados na projeção de dados via análise de componentes principais*. Produção em foco, Vol 1(1).
- Lima, A.A.N.; Lima, J.R. ; Silva, J.L. ; Alencar, J.R.B. ; Soares-Sobrinho, J.L. ; Lima, L.G. ; Rolim-Neto, P.J. (2006). *Aplicação do controle estatístico de processo na indústria farmacêutica*. Revista de Ciências Farmacêuticas Básica e Aplicada., Vol(27).
- Lowry, C. A.; Woodall, W. H.; Champ, C.W.; Rigdon, S. E. (1992). *A multivariate exponentially wighted moving average control chart*. *Technometrics*, Vol. 34(1), pp, 46-53.
- Martins, S. L. M. *Monitoramento do controle estatístico do processo utilizando ferramentas estatísticas*. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2011.
- Montgomery, D. C. *Introdução ao controle estatístico da qualidade*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. 513 p.
- Montgomery, D.C. *Introdução ao controle estatístico da qualidade*. 6. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. 528 p.
- R Core Team. *R: A language and environment for statistical computing*. Vienna, Austria (2016). Disponível em <<https://www.R-project.org/>>.
- Page, E.S. (1954). *Continuous Inspection Schemes*. *Biometrika*, Vol. 41(1).

Prabhu, S. S.; Runger G.C. (1997). *Designing a multivariate EWMA control chart*. *Journal of quality technology*, Vol. 29(1), pp. 8-15.

Samohyl, R. W. *Controle Estatístico da Qualidade*. Rio de Janeiro: Campus, 2009.

Varella, C. A. A. *Análise multivariada aplicada as ciências agrárias: Análise de componentes principais*. UFRRJ. 2008.

Woodall, W. H. ; Ncube, M. M. (1985). *Multivariate CUSUM Quality Control Procedures*. *Technometrics*, Vol. 27(3), pp. 285-292.