



Departamento de Engenharia Mecânica
Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)/2021.1

AVALIAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM PROBLEMAS DE FADIGA POR FRETTING ATRAVÉS DA IMPLEMENTAÇÃO DE UM MÉTODO SEMIANALÍTICO

Felipe Monte Rocha Ferreira

feliperocha15@icloud.com

Raphael Araujo Cardoso

raphael.araujo@ufrn.br

Resumo. Este trabalho tem como principal objetivo avaliar a propagação de trincas em contatos cilíndricos sob condições de fadiga por fretting em uma liga de Ti-6Al-4V. Para tal, um método semianalítico baseado no método da distribuição das discordâncias foi implementado com o auxílio da linguagem de programação Python, o que viabilizou o cálculo do fator de intensidade de tensão para o problema em questão. Este, por sua vez, permitiu a aplicação da lei de Paris com o intuito de estimar a vida de propagação de trincas em problemas de fadiga por fretting. Esses resultados foram então comparados com o número de ciclos até a falha de ensaios laboratoriais extraídos da literatura, onde conseguiu-se então estimar a vida de iniciação de trincas para o problema investigado. A vida de iniciação também foi determinada para ensaios convencionais de fadiga, o que possibilitou avaliar o efeito das cargas de fretting na iniciação de trincas. Ao final, conseguiu-se verificar que a nucleação de trincas ocorre de forma mais rápida em componentes sujeitos à carregamentos de fretting, o que está de acordo com observações de trabalhos anteriores. Ademais, vale salientar que a metodologia para o cálculo do fator de intensidade de tensão implementada nesse trabalho leva em consideração o efeito da espessura finita do corpo de prova nas análises, o que torna a solução mais robusta e próxima da condição real. A mesma também apresenta como vantagem um baixo custo computacional, principalmente quando considera-se abordagens puramente numéricas como o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno.

Palavras chaves: fadiga, fretting, trinca, contato.

Abstract. The aim of this work is to evaluate the crack propagation in cylindrical contacts under fretting fatigue conditions in a Ti-6Al-4V alloy. For such, a semi-analytical method based on the distributed dislocation technique was implemented with the assistance of the Python programming language, which enabled the calculation of the stress intensity factor for the problem investigated. This parameter, in its turn, allowed the application of the Paris' law in order to estimate the crack propagation life in fretting fatigue problems. These results were then compared to the number of cycles to failure of laboratory tests collected from the literature, where it was then possible to estimate the crack initiation life for the investigated problem. The initiation life was also determined for conventional fatigue tests, which allowed to evaluate the effect of fretting loads on crack initiation. In the end, it was possible to verify that crack nucleation occurs faster in components subjected to fretting loading, which is in agreement with observations from previous works. Furthermore, it is worth noting that the methodology for calculating the stress intensity factor implemented in this work takes into account the effect of the finite thickness of the specimen in the analyses, which makes the solution more robust and closer to the real condition. It also presents a low computational cost, especially when considering fully numerical approaches such as the finite element method and the boundary element method.

Keywords: fatigue, fretting fatigue, cracks, contact mechanics.

1. INTRODUÇÃO

A fadiga mecânica é um fenômeno que se desenvolve a partir de tensões ou deformações de natureza cíclica, sendo assim caracterizado como um processo de ruptura progressiva que evolui de acordo com a repetição dos ciclos do carregamento presente. Já o *fretting* é definido como pequenos deslocamentos relativos entre duas superfícies em contato, podendo ter origem na vibração do sistema ou através de uma carga oscilatória aplicada em um dos corpos em interação, favorecendo a nucleação de trincas, devido ao desgaste e as altas tensões nas proximidades da superfície de contato. Segundo Hills e Nowell (1994), a presença do *fretting* associada a uma carga de fadiga é determinada como fadiga por *fretting*.

A fadiga por *fretting* começou a ser estudada por Eden, Rose e Cunningham (1911), quando foi observada a iniciação de trincas no contato entre o corpo de prova e as garras da máquina de testes. Posteriormente, Warlow-Davis (1941) constatou que componentes previamente submetidos a condições de *fretting* apresentavam redução na resistência à fadiga quando eram depois expostos a carregamentos cíclicos. Já McDowell (1952) relatou que a ação conjunta do *fretting* e da fadiga pode causar reduções de até 90% na resistência à fadiga de materiais metálicos. De acordo com Thompson (1998), a fadiga por *fretting* é responsável por cerca de 17% das falhas ou contratempos nos sistemas de propulsão aeronáuticos.

O acidente de uma aeronave da Aloha Airlines em 28 de abril de 1988, mostrado na Figura 1, teve uma vítima fatal, e foi constatado que a principal causa do acidente foi a propagação de trincas devido à fadiga por *fretting* nas juntas rebitadas da fuselagem da aeronave.

Equipamentos mecânicos, em sua grande maioria, apresentam configurações que os tornam suscetíveis à fadiga por *fretting*, como ocorre em pás de turbinas, juntas rebitadas ou parafusadas, cabos condutores de energia, varetas de combustíveis, entre outros exemplos. Levando isso em consideração, o estudo desse fenômeno se mostra de imensa importância, pois componentes sujeitos a tais condições podem gerar graves consequências, como o caso do acidente do Boeing na Figura 1. Estudos e análises sobre esse assunto podem ser de grande utilidade para o desenvolvimento de métodos que possibilitem prever e prevenir falhas inesperadas em sistemas mecânicos.

Figura 1 - Acidente do Boeing 737-297 da Aloha Airlines em abril de 1988.



Fonte: (<https://www.aerotime.aero/18542-history-hour-alo-ha-airlines-flight-243-incident>)

À vista disso, o presente estudo tem como objetivo a implementação de um método desenvolvido na linguagem Python para, através da obtenção dos fatores de intensidade de tensão, avaliar a propagação de trincas, perpendiculares à superfície de contato, em problemas de fadiga por *fretting*, tendo como foco o contato cilindro-plano.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Fadiga por *fretting*

Pares mecânicos em condições de *fretting* estão sujeitos a oscilações de baixa amplitude que tem origem em um carregamento que varia no tempo. Em casos como esse, as tensões de contato de grande magnitude e as interações tribológicas podem favorecer a nucleação e a propagação de trincas, impactando diretamente a vida útil dos componentes que formam o par, podendo comprometer o sistema ao qual fazem parte.

Figura 2 - Juntas parafusadas; pás de turbina; e prótese de quadril.



Fonte: (<http://calculistadeaco.com.br/wp-content/uploads/2017/03/Liga%C3%A7%C3%B5es-parafusadas-2.pdf>;
<https://www.computerworld.com.pt/2017/06/23/siemens-valida-pas-impresas-para-turbinas-a-gas/>;
<https://www.medicaexpo.com/pt/prod/aesculap/product-70641-663410.html>);

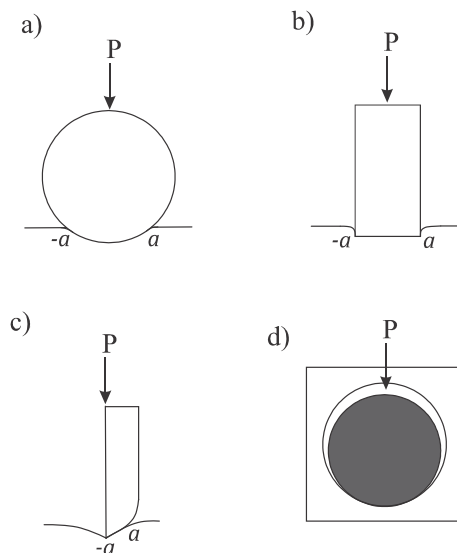
A Figura 2 mostra exemplos de casos onde o *fretting* está presente. Juntas parafusadas aplicadas na construção civil, turbinas de sistemas de propulsão aeronáuticos e até mesmo na haste femoral em próteses de quadril.

No estudo da fadiga por *fretting*, muitas vezes considera-se geometrias simplificadas, por exemplo, contatos do tipo cilindro-plano ou esfera-plano. Tais configurações, além de garantirem uma maior padronização e reprodutibilidade nos ensaios, também admitem, em alguns casos, a utilização de soluções analíticas na obtenção dos campos de tensão e deformação para o problema estudado. Neste trabalho, considerar-se-á o contato do tipo cilindro-plano na avaliação da propagação de trincas em problemas de fadiga por *fretting*. Nas próximas seções são abordados todos os tópicos necessários para o entendimento e modelagem do problema a ser investigado, detalhando equações, características do contato e dos corpos envolvidos.

2.2 Mecânica do contato

A diversidade de contatos entre componentes mecânicos sujeitos ao *fretting* é de grande relevância, por isso é de suma importância ter a caracterização do tipo do contato como primeiro passo de qualquer estudo relacionado a este fenômeno. Os tipos de contato são mostrados na Figura 3, classificados de acordo com sua natureza.

Figura 3 - Tipos de contato: (a) Incompleto e não-conforme; (b) Completo; (c) Incompleto com singularidade; (d) Incompleto e conforme.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 3(a), é ilustrado um cilindro sendo pressionado contra um semiplano. Contatos dessa natureza são dependentes da carga aplicada, e a distribuição de pressão tende a zero nas extremidades do contato. Ainda, esse tipo de configuração é uma aproximação com boa precisão do contato entre dois cilindros onde o raio de um deles é substancialmente maior que o outro. Essa característica permite que a curvatura da superfície do cilindro maior possa ser considerada um plano sem gerar erros significativos nos estudos realizados. Para casos de contatos completos, como o da Figura 3(b), a largura do contato não depende da carga aplicada, e os maiores valores de pressão se encontram nas extremidades do contato. O tamanho do contato no caso de contatos incompletos com singularidade, Figura 3(c), também é dependente da carga P e apresenta distribuição de pressão singular em uma extremidade e uma distribuição que decai a zero na outra. Na Figura 3(d) ocorre a conformabilidade do contato, assim a semilargura do contato terá comprimento considerável, não podendo ser feito a mesma aproximação para um semiplano.

2.2.1 Tensões superficiais

Para o contato cilindro-plano, como abordado neste trabalho, na presença de apenas carga normal, Hertz (1882) apresentou a solução mostrada na Eq. (1) para a distribuição de pressão na superfície ao longo do contato.

$$p(x) = -p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (1)$$

onde x representa a posição em relação ao centro do contato e p_0 é a pressão máxima desenvolvida no contato:

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} \quad (2)$$

onde, P é o valor da carga normal por unidade de comprimento e a é a semilargura do contato.

$$a = \sqrt{\frac{4PR^*}{\pi E^*}} \quad (3)$$

sendo R^* o raio equivalente, dado por:

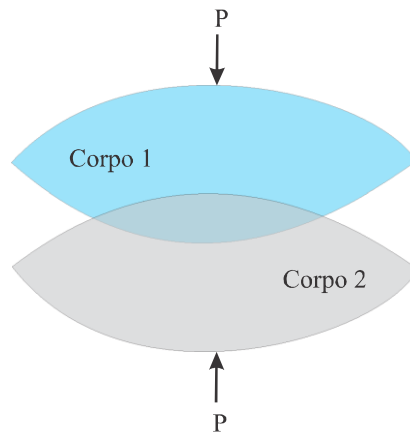
$$R^* = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (4)$$

e E^* o módulo de elasticidade equivalente:

$$E^* = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (5)$$

onde, ν é o coeficiente de Poisson do material, e os subíndices 1 e 2 são relativos aos corpos em contato, como visto na Figura 4.

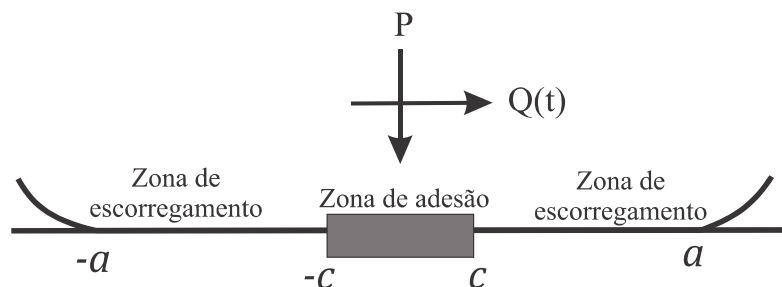
Figura 4 - Contato entre dois corpos deformáveis.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No problema de *fretting* é necessário levar em consideração a presença de uma carga tangencial que geralmente resulta em uma condição de escorregamento parcial, como ilustrado na Fig. 5. Nesse caso, a carga tangencial não é alta o suficiente para causar o deslizamento total entre as superfícies, mas a natureza do contato entre cilindros faz com que, independentemente da magnitude da carga tangencial, Q , as extremidades do contato sempre experimentarão micro deslizamentos enquanto a região central encontra-se aderida devido à maior pressão de contato nessa região.

Figura 5 - Contato em regime de escorregamento parcial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como visto na Figura 5, a zona de adesão se encontra na região central do contato e é delimitada pelo semilargura c . As zonas de escorregamento circundam a zona de adesão.

A carga tangencial origina tensões cisalhantes ao longo do contato que se diferenciam de acordo com a região em que estão sendo calculadas. A Eq. (6) mostra como são calculadas essas tensões. O termo $q'(x)$ se comporta como uma perturbação da solução de escorregamento total, já que a carga tangencial não é suficiente para gerar tal regime.

$$q(x) = fp_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + q'(x) \quad (6)$$

onde f é o coeficiente de atrito entre as superfícies em contato.

Nas zonas de escorregamento, o comportamento das tensões cisalhantes é o mesmo da condição de escorregamento total, então $q'(x) = 0$. Já na zona de adesão, $|x| \leq c$, essa perturbação pode ser calculada como:

$$q'(x) = -fp_0 \frac{c}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \quad (7)$$

onde, considerando o equilíbrio tangencial:

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{fP}\right)} \quad (8)$$

Os cálculos mostrados acima são relativos apenas para momentos de carga tangencial máxima. A rigor, no caso da carga mínima, teríamos que multiplicar a Eq. (6) por -1. Como mencionado anteriormente, no problema de *fretting*, a carga tangencial apresenta variação no tempo, por isso, mais uma modificação deve ser considerada na obtenção de $q(x)$. Assumindo-se um carregamento senoidal totalmente reversível para a carga tangencial, $Q(t)$, temos que a mesma irá variar entre um valor máximo Q_{max} e um valor mínimo $Q_{min} = -Q_{max}$ ao longo do tempo. Nesse caso, nas fases de descarregamento e carregamento, a variação da carga tangencial faz como que o tamanho da zona de adesão também seja modificado. Para incorporar esse efeito, Hills e Nowell (1994) apresentam a seguinte solução:

$$\frac{q(x)}{\mu p_0} = \begin{cases} -\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, & c' < |x| \leq a \\ -\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + 2\frac{c'}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c'}\right)^2}, & c < |x| \leq c' \\ -\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + 2\frac{c'}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c'}\right)^2} - \frac{c}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2}, & |x| \leq c \end{cases} \quad (9)$$

onde, novamente, devido a condição de equilíbrio na direção tangencial, temos:

$$\frac{c'}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{Q_{max} - uQ(t)}{2fP}\right)} \quad (10)$$

onde, para a fase de carregamento $u = -1$, e para fase de descarregamento $u = 1$.

Em casos de fadiga por *fretting* é comum que haja uma carga remota, ou seja, uma carga que está atuando longe do contato, em fase com a carga tangencial, onde essa, por sua vez, é responsável por deslocar a zona de adesão devido a deformação do corpo submetido a essa carga. Levando isso em conta, os termos de correção das tensões cisalhantes apresentados anteriormente precisam ser reescritos de forma a considerar o efeito da carga remota. Os termos reescritos seguem abaixo.

$$q' = -fp_0 \frac{c}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x-e}{c}\right)^2} \quad (11)$$

e,

$$q'' = 2fp_0 \frac{c'}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x-e'}{c'}\right)^2} \quad (12)$$

onde, e representando o deslocamento da zona de adesão devido a presença da carga remota durante o instante de carga máxima:

$$\frac{e}{a} = \frac{\sigma_{b,max}}{4fp_0} \quad (13)$$

enquanto e' na Eq. (12) representa o deslocamento da zona de adesão ao longo do tempo:

$$\frac{e'}{a} = \frac{\sigma_{b,max} - s\sigma_b(t)}{8fp_0} \quad (14)$$

sendo $\sigma_b(t)$ a tensão remota em função do tempo t .

2.2.2 Tensões subsuperficiais

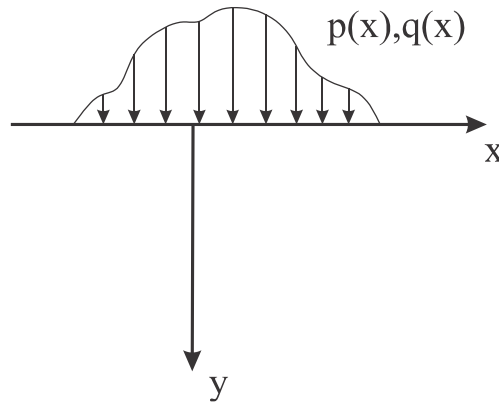
As tensões de contato apresentadas na seção anterior induzem o aparecimento de tensões subsuperficiais. Para o contato entre cilindros, Hills e Nowell (1994) apresentaram que as componentes de tensão normal e de cisalhamento para um regime de escorregamento total são dadas pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}^n}{p_0} &= \frac{y}{a} \left\{ 2 - \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}} - \frac{\sqrt{a^2+s^2}}{s} - \frac{x^2 s^3 a^2}{(a^2+s^2)^{3/2}(s^4+y^2 a^2)} \right\} \\ \frac{\sigma_{zz}^n}{p_0} &= \frac{-2vy}{a} \left\{ \frac{\sqrt{a^2+s^2}}{s} - 1 \right\} \\ \tau_{xz}^n &= \tau_{yz}^n = 0 \\ \frac{\sigma_{yy}^n}{p_0} &= \frac{-y^3 a \sqrt{a^2+s^2}}{s(s^4+y^2 a^2)} \\ \frac{\tau_{xy}^n}{p_0} &= \frac{-xy^2 sa}{\sqrt{a^2+s^2}(s^4+y^2 a^2)} \\ \frac{\sigma_{xx}^t}{fp_0} &= \frac{-2x}{a} \left(1 - \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}} \right) + \frac{xy^2 sa}{\sqrt{a^2+s^2}(s^4+y^2 a^2)} \\ \frac{\sigma_{zz}^t}{fp_0} &= \frac{-2vx}{a} \left\{ 1 - \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}} \right\} \\ \frac{\sigma_{yy}^t}{f} &= \tau_{xy}^n \\ \frac{\tau_{xy}^t}{f} &= \sigma_{xx}^n \\ \tau_{xz}^t &= \tau_{yz}^t \end{aligned} \quad (15)$$

onde, os sobrescritos n e t representam as componentes de tensão geradas pelas cargas normais e tangenciais, respectivamente, x e y representam as coordenadas do ponto analisado (ver Fig. 6) e s é dado por:

$$s^2 = \frac{1}{2} \left\{ -(a^2 - x^2 - y^2) + \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^2 + 4y^2} \right\} \quad (16)$$

Figura 6 - Semiplano sujeito a cargas normal e tangencial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O cálculo das tensões subsuperficiais se dá pela superposição das componentes de tensão resultantes da carga normal, da carga tangencial e da carga remota. Nos momentos de carga máxima e mínima, o resultado se dá pela equação abaixo:

$$\frac{\sigma_{xx}(x,y)}{p_0} = \left(\frac{\sigma_{xx}^n(\frac{x}{a}, \frac{y}{a})}{p_0} \right) \pm f \left(\frac{\sigma_{xx}^t(\frac{x}{a}, \frac{y}{a})}{fp_0} \right) \mp f \frac{c}{a} \left(\frac{\sigma_{xx}^t(\frac{x-e}{c}, \frac{y}{c})}{fp_0} \right) + \frac{\sigma_b}{p_0} \quad (17)$$

onde, a combinação dos sinais + e - é referente ao instante de carga máxima.

Nas fases de carregamento e descarregamento, a equação válida é:

$$\frac{\sigma_{xx}(x,y)}{p_0} = \left(\frac{\sigma_{xx}^n(\frac{x}{a}, \frac{y}{a})}{p_0} \right) \mp f \left(\frac{\sigma_{xx}^t(\frac{x}{a}, \frac{y}{a})}{fp_0} \right) \pm 2f \frac{c'}{a} \left(\frac{\sigma_{xx}^t(\frac{x-e'}{c'}, \frac{y}{c'})}{fp_0} \right) \mp f \frac{c}{a} \left(\frac{\sigma_{xx}^t(\frac{x-e}{c}, \frac{y}{c})}{fp_0} \right) + \frac{\sigma_b}{p_0} \quad (18)$$

onde, na fase de descarregamento, a combinação dos sinais é -, + e -.

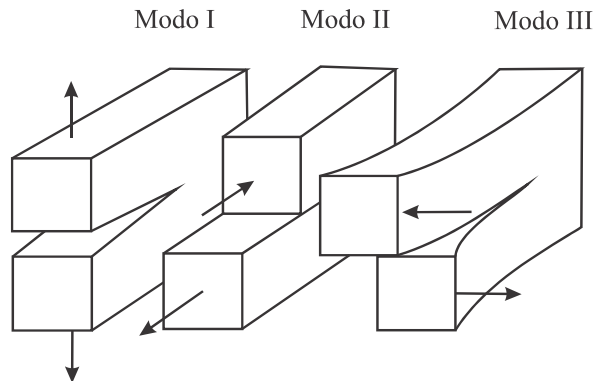
Note que as Eqs. (17) e (18) apresentam apenas a solução para a componente de tensão na direção x, entretanto, as demais componentes podem ser obtidas de forma análoga.

2.3 Mecânica da fratura linear elástica

A fratura por fadiga pode ser dividida em três estágios. O estágio I é referente à nucleação da trinca envolvendo o deslizamento da rede cristalina e ainda é invisível ao observador. O estágio II se caracteriza pela propagação da trinca, que começa a se mostrar visível em análises de micrografia. No estágio III há uma grande aceleração do crescimento da trinca até chegar o momento em que ocorre a fratura. (BUDYNAS; NISBETT, 2016)

A propagação pode se dar a partir de três modos, como é mostrado na Fig. 7. O modo I é conhecido como modo de abertura, o modo II é o modo de cisalhamento, e o III é o modo de rasgamento.

Figura 7 - Modos de propagação de trincas.



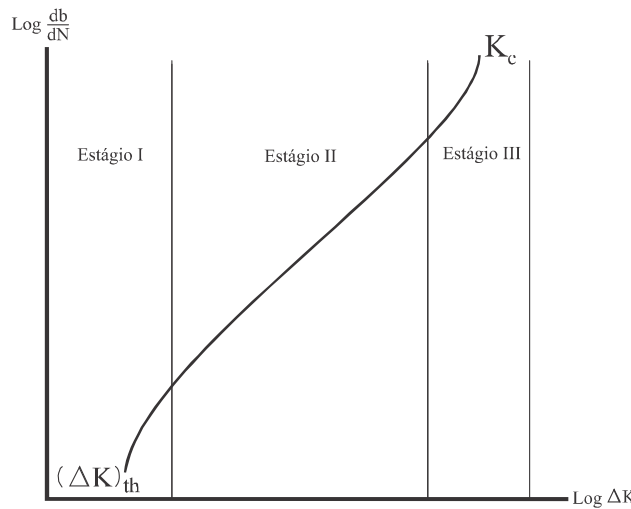
Fonte: Adaptado pelo autor.

No problema em estudo, observa-se experimentalmente que as trincas geralmente são iniciadas em modo misto, i.e. modos I e II. Entretanto, já no estágio II essas trincas passam a se propagar em modo I. Nesse caso, devido à dificuldade em se estimar a direção de iniciação da trinca, assim como o foco na propagação de trincas longas do presente nesse trabalho, considerar-se-á apenas trincas perpendiculares a superfície de contato, i.e. trincas em modo I.

2.3.1 Fator de intensidade de tensão

O fator de intensidade de tensão é um parâmetro utilizado na análise da propagação de trincas e é ele quem dita a taxa de crescimento da trinca. Em outras palavras, o fator de intensidade de tensão mede a magnitude das tensões e deformações elásticas presentes nas proximidades da ponta da trinca. Na Fig. 8 podemos ver a relação geralmente observada entre a taxa de propagação, db/dN , onde b é o comprimento da trinca e N o número de ciclos de carregamento, e a faixa da de variação do fator de intensidade de tensão, K , em um ciclo de carregamento.

Figura 8 - Taxa de crescimento da trinca em função do ΔK em escala logarítmica.



Fonte: Adaptado pelo autor.

Como pode ser visto na Fig. 8, a taxa de propagação da trinca depende fortemente do fator de intensidade de tensão. No estágio I ocorre a nucleação e o início da propagação da trinca, o estágio II é caracterizado pelo crescimento estável da trinca, e no estágio III a taxa de propagação da trinca cresce rapidamente, levando a falha do material. O ΔK_{th} é o limiar do fator de intensidade de tensão, ou seja, é o valor mínimo necessário de ΔK para que a trinca continue crescendo, já que, para valores inferiores a este, a taxa de propagação é muito pequena. O K_{Ic} representa a tenacidade a fratura do material, onde quando K atinge esse valor, a fratura frágil ocorre.

A relação entre o fator de intensidade de tensão e a taxa de propagação da trinca foi dada por Paris et al. (1961):

$$\frac{db}{dN} = C(\Delta K_I)^m \quad (19)$$

onde, C e m são constantes próprias do material, e K_I é o fator de intensidade de tensão relacionado ao modo I de fratura.

É importante salientar que essa formulação da equação de Paris só é válida para uma trinca que já se encontre no estágio II, ou seja, na fase de propagação estável com um comprimento significativo. Cálculos feitos a partir de trincas muito pequenas podem levar a uma violação desta equação.

Através da Eq.(19) é possível obter o valor da quantidade de ciclos até a fratura, a partir de um determinado comprimento de trinca, realizando a integração numérica abaixo:

$$\delta N_j = \frac{\delta b_j}{C(\Delta K_I)_j^m} \quad (20)$$

onde, δN_j representa o número de ciclos necessários para que a trinca se propague um incremento δb_j ao consideramos o j -ésimo incremento de propagação. Nesse caso, tanto o novo comprimento de trinca quanto a vida de propagação para a próxima iteração podem ser atualizados através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
b_{j+1} &= b_j + \delta b_j \\
N_{j+1} &= N_j + \delta N_j \\
N_p &= \sum \delta N_j
\end{aligned}
\tag{21}$$

O procedimento iterativo descrito pelas Eqs. (20) a (21) é finalizado quando o valor máximo do fator de intensidade de tensão $K_{I,max}$ durante um ciclo de carregamento iguala-se ou supera o valor da tenacidade a fratura do material K_{Ic} . Já a faixa do fator de intensidade de tensão, ΔK_I , é dado pela diferença entre $K_{I,max}$ e o menor valor do fator de intensidade de tensão, $K_{I,min}$, em um ciclo de carregamento.

3. METODOLOGIA

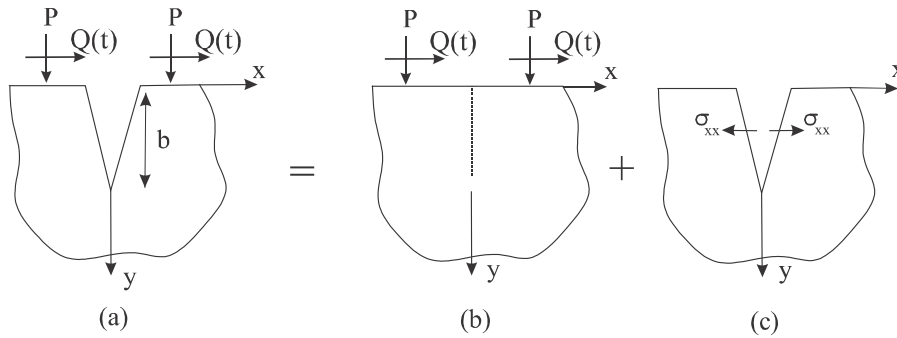
Visando avaliar a propagação de trincas em problema de *fretting* presente no contato entre cilindros, este trabalho calcula o fator de intensidade de tensão na ponta da trinca utilizando-se de um método semianalítico desenvolvido na linguagem Python através do software Wing Personal 7.2. O código implementado permite a obtenção da solução do problema através da implementação de extensas soluções analíticas, assim como da resolução de um sistema de equações que permite a obtenção de K_I através do princípio de Bueckner.

3.1 Método de cálculo do fator de intensidade de tensão

Nessa seção será apresentada de forma breve a formulação utilizada no cálculo de K_I . Mais detalhes podem ser encontrados em Hills e Nowell (1994) e Hills *et. Al* (2013).

O método da distribuição das discordâncias, considerado neste trabalho para o cálculo de KI, baseia-se no princípio de Bueckner. No caso de um corpo com trinca sujeito a cargas de contato (Fig. 9(a)), tem-se que, para obter as tensões nas proximidades da ponta da trinca, deve ser feita a superposição dos resultados das tensões em um corpo não trincado (Fig. 9(b)), ao longo do que seria a linha da trinca, com as tensões na trinca em corpo livre de carregamentos (Fig. 9(c)).

Figura 9 – Princípio de Bueckner: (a) corpo com trinca sujeito a carga normal e tangencial; (b) corpo sem trinca sujeito a carga normal e tangencial; (c) corpo com trinca livre de carregamentos.



Fonte: Adaptado pelo autor.

As Eqs. (17) e (18) permitem calcular a tensão em um corpo sem trinca, σ_T . Para simular a trinca é feita uma distribuição de discontinuidades ao longo da linha da trinca de forma a induzir uma tensão que se oponha a σ_T , de forma que as duas se cancelem. Essa condição deve ser satisfeita pois as faces da trinca não estão em contato, logo as tensões nelas devem ser nulas. Dessa forma:

$$\sigma_T + \frac{\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_0^b B_y(c_d) G(y, c_d) dc_d = 0
\tag{22}$$

onde c_d é a posição de colocação da discontinuidade, $B_y(c_d)$ é a densidade da distribuição contínua de discontinuidades, μ é o módulo de rigidez, κ é a constante de Kolosov, e o Kernel, $G(y, c_d)$, é dado por:

$$G(y, c_d) = 2 \left\{ \frac{1}{y-c_d} - \frac{1}{y+c_d} - \frac{2c}{(y+c_d)^2} + \frac{4c_d^2}{(y+c_d)^3} \right\}
\tag{23}$$

Apesar de $B_y(c_d)$ ser uma função desconhecida, a Eq. (22) pode ser discretizada fazendo-se uso da quadratura de Gauss-Jacobi, o que nos leva a formar um sistema algébrico contendo n equações e n incógnitas:

$$\frac{\mu}{\pi(\kappa+1)} \sum_{i=1}^n \frac{2\pi(1+r_i)}{2n+1} G(w_k, r_i) \phi(r_i) = -\sigma_T(w_k) \quad (24)$$

onde,

$$r_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n+1}\right) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$w_k = \cos\left(\frac{2k}{2n+1}\pi\right) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

onde r e w são as componentes y e c_d , respectivamente, normalizadas $[-1, 1]$:

$$r = \frac{2c_d}{b} - 1 \quad (25)$$

$$w = \frac{2y}{b} - 1 \quad (26)$$

Note que o sistema $n \times n$ formado pela Eq. (22) pode ser resolvido numericamente para obter as funções desconhecidas $\phi(r_i)$.

Finalmente, o cálculo do fator de intensidade de tensão pode ser feito através da seguinte relação:

$$K_I = 2\sqrt{2}\sqrt{\pi b} \frac{\mu}{(\kappa+1)} \phi(1) \quad (27)$$

onde $\phi(1)$ é dado por Krenk (1975):

$$\phi(1) = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=1}^n \cot\left(\frac{2i-1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n}{2n+1}(2i-1)\pi\right) \phi(r_i) \quad (28)$$

Mesmo já possuindo todas as informações necessárias para calcular o fator de intensidade de tensão, é importante mencionar que o núcleo de Cauchy mostrado na Eq.(23) desconsidera a espessura do corpo de prova, ou seja, só é válida para corpos infinitos. Tendo isso em mente, Karuppanan (2007) desenvolveu um fator de correção S para casos onde o corpo trincado possui dimensões finitas. Nesse caso, a Eq. (24) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma_T + \frac{\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_0^b B_y(c) [G(y, c_d) + S(y, c_d, d)] dc_d = 0 \quad (29)$$

onde o fator S é dado por:

$$S(y, c_d, d) = \frac{2}{d} \left[C_1 + C_2 \left(\frac{y}{d}\right) + C_3 \left(\frac{y}{d}\right)^2 + C_4 \left(\frac{y}{d}\right)^3 \right] \quad (30.a)$$

$$C_n = A_{n1} + A_{n2} \left(\frac{c_d}{d}\right) + A_{n3} \left(\frac{c_d}{d}\right)^2 + A_{n4} \left(\frac{c_d}{d}\right)^3 \quad (30.b)$$

sendo d a espessura do corpo de prova. As constantes A_{ij} são mostradas na Tabela 1.

Tabela 1 - Constantes para Eq.(30.b)

A11	A12	A13	A14	A21	A22	A23	A24
0,4	18,9	-14,5	-3,9	-1,6	-40,1	25,4	20,3
A31	A32	A33	A34	A41	A42	A43	A44
3,6	12,7	29,4	-49,6	-3,4	-7,6	-32,4	50,7

No caso deste trabalho, o valor mínimo de K_I está relacionado a tensões negativas, o que significa que a trinca está fechada, logo, não contribui para seu crescimento e pode ser desprezado. Com isso, o valor do ΔKI assume o valor máximo de K_I no ciclo de carregamento, $K_{I,max}$.

3.2 Validação do cálculo de K

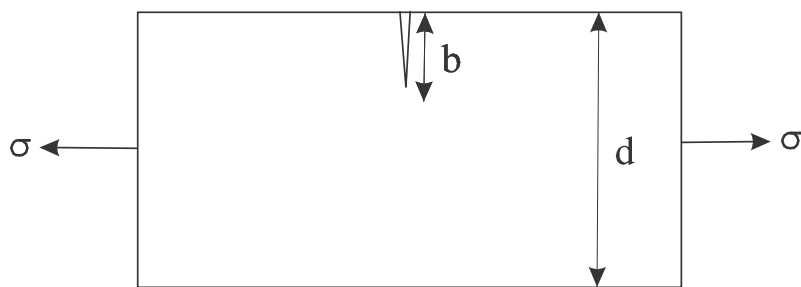
Para validar o cálculo do fator de intensidade de tensão, os resultados obtidos através do método implementado neste trabalho foram comparados com duas soluções encontradas na literatura para o problema de uma placa finita de espessura d com uma trinca na borda (ver Fig. 10). A primeira foi a solução de Brown e Srawley (1966) evidenciada na Eq.(31), e esta apresenta boa precisão apenas para valores de b/d até 0,6.

$$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi b}} = 1,12 - 0,231 \left(\frac{b}{d}\right) + 10,55 \left(\frac{b}{d}\right)^2 - 21,72 \left(\frac{b}{d}\right)^3 + 30,39 \left(\frac{b}{d}\right)^4 \quad (31)$$

e a segunda a solução apresentada por Paris e Sih (1965) na Eq.(32).

$$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi b}} = \sec \beta \sqrt{\frac{\tan \beta}{\beta}} \left[0,752 + 2,02 \left(\frac{b}{d}\right) + 0,37(1 - \text{sen } \beta)^3 \right]; \beta = \frac{\pi b}{2d} \quad (32)$$

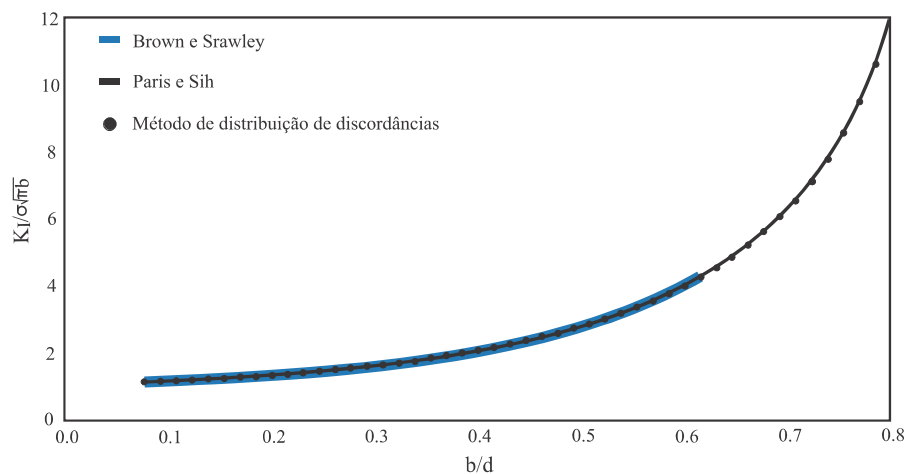
Figura 10 – Placa finita com trinca iniciada na borda.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O gráfico apresentado na Figura 11 mostra a comparação das curvas do fator de intensidade de tensão, onde, a linha azul representa a equação de Brown e Srawley, a linha preta representa a equação de Paris e Sih, e os pontos são referentes ao método de distribuição de discordâncias, utilizado no desenvolvimento deste trabalho.

Figura 11 - Comparação entre diferentes soluções do fator de intensidade de tensão.



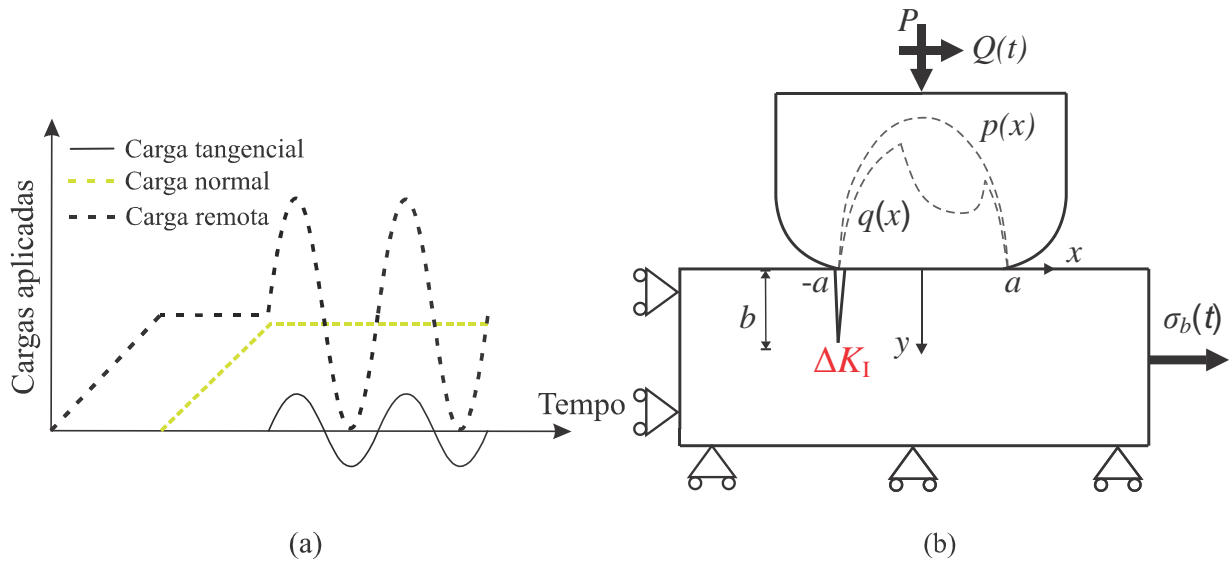
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3 Dados experimentais

Para avaliar a metodologia considerada no presente trabalho, dados experimentais de fadiga por *fretting* apresentados por Cardoso et al. (2019) serão considerados na análise. Os testes realizados para obtenção dos dados experimentais foram executados em corpos de prova cujo material é a liga Ti-6Al-4V, que é a liga de titânio mais comum no mercado e tem em sua composição 6% de alumínio e 4% de vanádio. Ela possui um módulo de elasticidade de 119,4 GPa e o coeficiente de Poisson de 0,286.

Os ensaios foram feitos considerando o contato entre uma sapata cilíndrica e um corpo de prova do tipo “dog-bone”, com um coeficiente de atrito $f = 0,5$. Nos testes, adotou-se um raio da sapata de 70 mm, e uma pressão máxima de contato (Eq.(2)) igual a 500 MPa foi mantida para todos os testes. O histórico de carregamento considerado nos ensaios investigados no presente trabalho é mostrado na Figura 12(a). Já uma representação esquemática da configuração geométrica e de carregamento presente nos ensaios é mostrada na Figura 12(b). Como pode ser visto, primeiramente aplica-se uma carga remota no corpo de prova que dá origem a uma tensão média no mesmo. Em seguida, a carga normal P é aplicada e mantida constante durante todo o ensaio. Quando a carga P atinge o valor programado no ensaio, a carga tangencial Q é então prescrita em fase com a carga remota alternada (senoidal) produzindo então a condição de fadiga por *fretting*. A razão de carregamento foi de zero em todos os ensaios aqui considerados.

Figura 12 – (a) Histórico de carregamentos; (b) Representação esquemática de testes.



Fonte: Adaptado pelo autor.

A Tabela 2 sumariza as condições de carregamento para os ensaios investigados nesse trabalho, onde $\sigma_{b,max}$ é o valor máximo da tensão remota nos testes e N_f^{exp} é o número de ciclos até a falha verificado experimentalmente.

Tabela 2 - Dados de testes de fadiga por *fretting* da liga Ti6Al-4V

Teste	$\sigma_{b,max}/p_0$	Q_{max}/fP	N_f^{exp} (ciclos)
1	0,45	0,68	218000
2	0,6	0,46	167000
3	0,3	0,65	672000
4	0,46	0,44	443000
5	0,6	0,46	207000
6	0,4	0,42	529000
7	0,4	0,42	538000

As constantes utilizadas na equação de Paris foram obtidas de dados de propagação fornecidos por Zhang et al. (2015) em $C = 2,7 \times 10^{-12} MPa^{-3,52} m^{-0,76}$ e $m = 3,52$, assim como a tenacidade a fratura, que tem o valor de 77,4 MPa.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Utilizando a integração numérica da lei de Paris, Eq. (19), a vida de propagação foi estimada para cada um dos testes experimentais apresentados na Subseção 3.3. O cálculo do fator de intensidade de tensão, utilizado no cálculo da vida de

propagação, foi obtido através da metodologia apresentada na Subseção 3.1 ao considerar-se uma trinca propagando-se perpendicularmente a borda do contato, como visto na Figura 12.

O posicionamento da trinca na borda do contato se deu devido ao fato desta ser a região mais crítica do contato, logo, é nela que as trincas tendem a ser iniciadas. Com o intuito de não aplicar a lei de Paris no domínio de trincas curtas, o comprimento de iniciação da trinca foi assumido como sendo 1 mm. Dessa forma foram obtidos os resultados mostrados na Tabela 3.

Tabela 3 - Dados de comprimento de trinca e número de ciclos para fadiga por *fretting*.

Teste	N_f^{exp} (ciclos)	N_p (ciclos)	N_i (ciclos)	N_i/N_f (%)	b_f (mm)
1	218000	34582	183418	84,14	6,27
2	167000	14574	152426	91,27	5,4
3	672000	224586	447414	66,58	7,61
4	443000	51066	391934	88,47	6,34
5	207000	14574	192426	92,96	5,4
6	529000	107615	421385	79,66	6,84
7	538000	107615	430385	80,00	6,84

onde, b_f é o comprimento final da trinca, N_f^{exp} é o número experimental de ciclos, já mostrado anteriormente na Tab. 2, N_p é o número de ciclos referente à propagação da trinca, N_i são os ciclos na fase de iniciação da trinca obtidos pela subtração de N_p do valor total de ciclos até a falha N_f^{exp} . A razão N_i/N_f representa a porcentagem que a iniciação da trinca tem na vida total do teste.

A Tabela 4 apresenta dados semelhantes aos da Tab. 3, porém com resultados de cálculos feitos a partir de uma situação de fadiga convencional com tensão média nula, ou seja, sem a presença de *fretting*. Os dados necessários para os cálculos foram adquiridos através da curva S-N apresentada por Kallmeyer *et. al* (2002) da mesma liga Ti-6Al-4V. Nesse caso, para cada valor de tensão alternada, σ_a , da curva S-N, calculou-se K através das Eqs. (33), dadas por Forman *et al.* (1998):

$$\Delta K = F\sigma_a\sqrt{\pi b}$$

$$F = H(0,752 + 1,286\theta + 0,37Y^3)$$

$$H = 0,92 \left(\frac{2}{\pi}\right) \sec \theta \left(\frac{\tan \theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

$$Y = 1 - \sin \theta$$

$$\theta = \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{b}{D}\right)$$

Por fim, o cálculo de estimativa da vida de propagação se dá pela integral mostrada na Eq.(34). A solução desta equação foi obtida usando o mesmo método mostrado nas Eq. (21).

$$N_p = \frac{1}{c} \int_{b_i}^{b_f} \frac{db}{(F\sigma_a\sqrt{\pi b})^m} \quad (34)$$

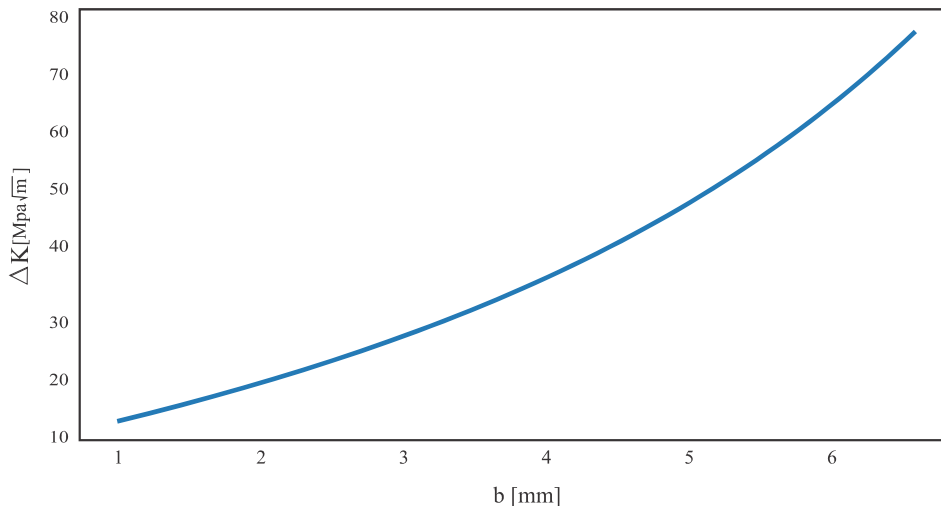
Tabela 4 - Dados de comprimento de trinca e número de ciclos para fadiga convencional.

σ_a (MPa)	N_f^{exp} (ciclos)	N_p (ciclos)	N_i (ciclos)	N_i/N_f (%)	b_f (mm)
529	38783	6072	32710	84,34	4,83
495	69155	7683	61472	88,89	5,04
461	93544	9879	83664	89,44	5,27
483	104601	8388	96213	91,98	5,12
442	116560	11499	105062	90,14	5,40
432	181267	12436	168831	93,14	5,47
408	207845	15245	192600	92,67	5,65
376	475319	20236	455083	95,74	5,89
376	1840711	20236	1820474	98,90	5,89
408	3294118	15245	3278873	99,54	5,65
410	6573507	14930	6558577	99,77	5,63
398	10221326	16594	10204732	99,84	5,72
439	10244547	11724	10232823	99,89	5,42

Comparando as Tabelas 3 e 4, levando em consideração a faixa de N_f^{exp} que está entre 100000 e 700000 ciclos na Tab.4, percebe-se que a fase de iniciação da trinca representa uma parcela menor da vida total no caso da fadiga por *fretting*, pois apresentam porcentagem de N_i/N_f menores em todos os casos. Por exemplo, no Teste 3 de *fretting*, a vida de iniciação chega a corresponder a menos 67% da vida total, enquanto que na fadiga convencional, a vida de iniciação foi sempre maior que 90% no regime de fadiga de alto ciclo. Essa constatação comprova o que era esperado, indo de acordo com estudos anteriores que afirmaram o favorecimento da nucleação de trincas em componentes sujeitos ao *fretting*.

Para ilustrar a progressão do fator de intensidade de tensão e da vida de propagação, foram feitos dois gráficos que relacionam esses dois parâmetros com o comprimento da trinca para as condições referentes ao Teste 1 da Tabela 2. O gráfico da Figura 13 apresenta o comportamento do fator de intensidade de tensão durante a propagação da trinca. Conforme a trinca progride, o ΔK assume valores maiores até chegar no limite que define o rompimento da trinca.

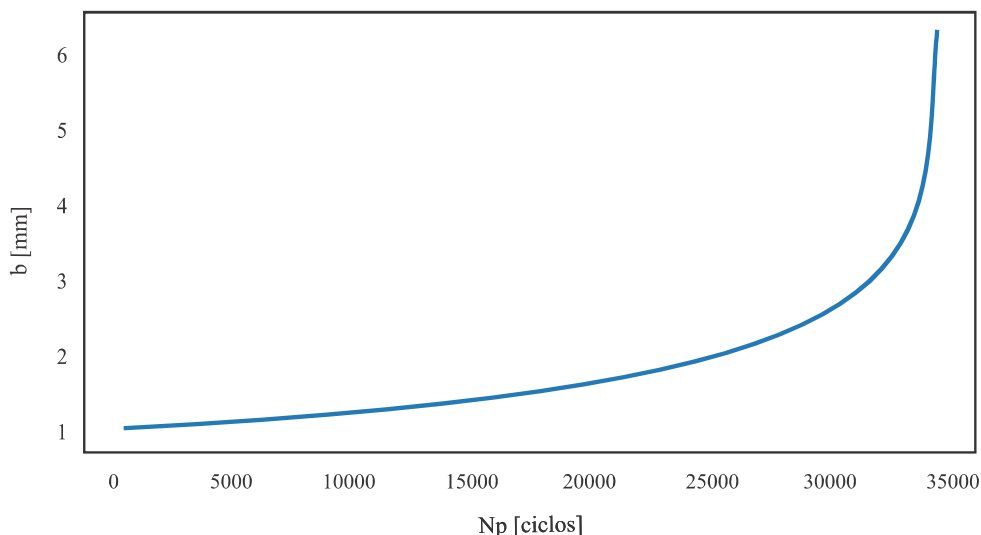
Figura 13 – Gráfico $b \times \Delta K$ para condição de Teste 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Já na Figura 14, vê-se a relação entre a vida de propagação e o comprimento da trinca. Este gráfico demonstra que, em momentos iniciais, muitos ciclos de carregamento são necessários para que a trinca tenha um crescimento considerável, porém, quando a propagação atinge certo nível, e o fator de tensão assume valores altos, a trinca cresce até o seu comprimento final com pouca variação de ciclos. Isso pode ser confirmado quando os gráficos são analisados juntos, pois, é possível perceber que a baixa taxa de crescimento do K coincide com a grande elevação no número de ciclos, e de forma semelhante, a baixa variação de ciclos ocorre simultaneamente à fase de maior evolução nos valores de K .

Figura 14 – Gráfico N_p x b para condição de Teste 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5. CONCLUSÕES

No presente trabalho foram expostos os conceitos teóricos necessários para o entendimento e implementação de uma metodologia semianalítica utilizada na modelagem da propagação de trinca em problemas de fadiga por fretting envolvendo o contato do tipo cilindro-plano. Nesse caso, a utilização do método da distribuição das discordâncias permitiu a obtenção do fator de intensidade de tensão para o problema estudado, o que possibilitou a aplicação da Lei de Paris no cálculo da vida de propagação de trincas no problema de fretting. No presente estudo, o efeito da espessura finita do corpo de prova também foi considerado.

Uma análise da propagação de trincas em problemas de fadiga convencional também foi conduzida, o que em conjunto com a utilização de dados experimentais provenientes da literatura, permitiu a verificação do impacto do fretting na vida de iniciação de trincas. Dos resultados das análises, verificou-se que o fretting favorece a nucleação e iniciação de trincas. Apesar desse fenômeno ser bastante conhecido na literatura, esse trabalho permitiu quantificar esse fenômeno através da implementação de uma metodologia que apresenta baixo custo computacional, principalmente, em vista de abordagens puramente numéricas, como o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno.

6. REFERÊNCIAS

- Araujo J.A., Nowell D., 2001. "The effect of rapidly varying contact stress fields on fretting fatigue". *International Journal of Fatigue*, Vol. 24, pp. 763–775.
- Brown W.F., Srawley J.E., "Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Material". In *Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Materials*, (West Conshohocken, PA: ASTM International, 1966), pp. 1-129.
- Budynas, R.G., Nisbett, J. K., 2016. *Elementos de máquinas de Shigley*. 10. ed. Porto Alegre: AMGH.
- Cardoso, R.A., Doca, T., Néron, D., Pommier, S., Araujo, J.A., 2019. "Wear numerical assessment for partial slip fretting fatigue conditions". *Tribology International*, Vol. 136, pp. 508-523.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.triboint.2019.03.074>.

- Cardoso, R.A., Ferry, B., Montebello, C., Meriaux, J., Pommier, S., Araújo, J.A., 2020. “Study of size effects in fretting fatigue”. *Tribology International*, Vol. 143, 106087.
- Cardoso, R.A. *Problema de propagação de trincas em condições de fretting*. 2015. 81 f., il. Dissertação (Mestrado em Ciências Mecânicas), Universidade de Brasília, Brasília, 2015.
- Cardoso, R.A. *Numerical studies on fretting fatigue modelling*. 2019. x, 102 f., il. Tese (Doutorado em Ciências Mecânicas)—Universidade de Brasília, Brasília, 2019.
- Hills, D. A., Kelly, P. A., Dai, D. N., Korsunsky, A. M., 2013. *Solution of crack problems: the distributed dislocation technique*, Vol. 44. Springer Science & Business Media, 2013.
- Hills D.A., Nowell D., 1994. *Mechanics of fretting fatigue*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1994.
- Kallmeyer, A. R., Krgo, A., Kurath, P., 2002. “Evaluation of multiaxial fatigue life prediction methodologies for Ti-6Al-4V”. *Journal of Engineering Materials and Technol.*, Vol. 124(2), pp. 229-237.
- Karuppanan, S., 2007. *Analysis of incomplete and complete contacts in sliding and partial slip*. Ph.D. thesis, Oxford University, Oxford, 2007.
- Lampman, S.R., 1997. *ASM Handbook, Volume 19: Fatigue and Fracture*. The Materials Information Society, ASM International, 1997.
- Murakani, Y., 1987. *Stress Intensity Factors Handbook*, Vol. 1, Pergamon Press, 1987.
- Paris, P.C., Sih, G., 1965. “Stress Analysis of Cracks”. In *Fracture Toughness Testing and its Applications*, (West Conshohocken, PA: ASTM International, 1965), pp. 30-81.

7. APÊNDICE

Apêndice A - Código desenvolvido no software Wing Personal 7.2 na linguagem Python.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def tensoes(x_a,y_a,v):

    s_a=np.sqrt(0.5*((-1)*(1-x_a**2-y_a**2)+np.sqrt((1-x_a**2-y_a**2)**2+4*y_a**2)))

    C1=np.sqrt(1+s_a**2)
    C2=(1+s_a**2)*np.sqrt(1+s_a**2)
    C3=s_a**4+y_a**2

    Snxx_pmax = y_a*(2-(s_a/C1)-(C1/s_a)-((x_a**2)*(s_a**3))/(C2*C3))

    Snzz_pmax = -2*v*y_a*((C1/s_a)-1)

    Snyy_pmax = -(y_a**3)*C1/(s_a*C3)

    Tnxy_pmax = -(x_a)*(y_a**2)*s_a/(C1*C3)

    Stxx_qmax = -2*x_a*(1-(s_a/C1))+x_a*(y_a**2)*s_a/(C1*C3)

    Stzz_qmax = -2*v*x_a*(1-(s_a/C1))

    Styy_qmax = Tnxy_pmax

    Ttxy_qmax = Snxx_pmax

    Tnxz=0
```


Tnyz=0

Ttxz=0

Ttyz=0

return Snxx_pmax,Snyy_pmax,Tnxy_pmax,Stxx_qmax,Styy_qmax,Ttxy_qmax

def tensoes_superposicao(Qmax_fP,sba_pmax,sbm_pmax,f,v,x_a,y_a,t):

[Snxx_pmax,Snyy_pmax,Tnxy_pmax,Stxx_qmax,Styy_qmax,Ttxy_qmax]=tensoes(x_a,y_a,v)

c_a = np.sqrt(1-Qmax_fP)

x_c = x_a/c_a

y_c = y_a/c_a

e_a = sba_pmax/(4*f)

e_c = e_a/c_a

sb_pmax = sbm_pmax + sba_pmax*np.sin(2.0*np.pi*t)

if t==0.25:

[_,_,_,Stxx2_qmax,Styy2_qmax,Ttxy2_qmax] = tensoes(x_c-e_c,y_c,v)

Sxx_pmax = Snxx_pmax + f*Stxx_qmax - f*c_a*Stxx2_qmax + sb_pmax

Syy_pmax = Snyy_pmax + f*Styy_qmax - f*c_a*Styy2_qmax

Txy_pmax = Tnxy_pmax + f*Ttxy_qmax - f*c_a*Ttxy2_qmax

elif t==0.75:

[_,_,_,Stxx2_qmax,Styy2_qmax,Ttxy2_qmax] = tensoes(x_c-e_c,y_c,v)

Sxx_pmax = Snxx_pmax - f*Stxx_qmax + f*c_a*Stxx2_qmax + sb_pmax

Syy_pmax = Snyy_pmax - f*Styy_qmax + f*c_a*Styy2_qmax

Txy_pmax = Tnxy_pmax - f*Ttxy_qmax + f*c_a*Ttxy2_qmax

elif t>0.25 and t<0.75:

c1_a = np.sqrt(1-((Qmax_fP/2)*(1-np.sin(2*np.pi*t))))

x_c1 = x_a/c1_a

y_c1 = y_a/c1_a

e1_a = sba_pmax*(1-np.sin(2*np.pi*t))/(8*f)

e1_c1 = e1_a/c1_a

[_,_,_,Stxx2_qmax,Styy2_qmax,Ttxy2_qmax] = tensoes(x_c-e_c,y_c,v)

[_,_,_,Stxx3_qmax,Styy3_qmax,Ttxy3_qmax] = tensoes(x_c1-e1_c1,y_c1,v)

$$S_{xx_pmax} = S_{nxx_pmax} - f \cdot S_{txx_qmax} + 2 \cdot f \cdot c_{1_a} \cdot S_{txx3_qmax} - f \cdot c_{_a} \cdot S_{txx2_qmax} + s_{b_pmax}$$

$$S_{yy_pmax} = S_{nyy_pmax} - f \cdot S_{tyy_qmax} + 2 \cdot f \cdot c_{1_a} \cdot S_{tyy3_qmax} - f \cdot c_{_a} \cdot S_{tyy2_qmax}$$

$$T_{xy_pmax} = T_{nxy_pmax} - f \cdot T_{txy_qmax} + 2 \cdot f \cdot c_{1_a} \cdot T_{txy3_qmax} - f \cdot c_{_a} \cdot T_{txy2_qmax}$$

else:

$$c_{1_a} = \text{np.sqrt}(1 - ((Q_{max_fP}/2) \cdot (1 + \text{np.sin}(2 \cdot \text{np.pi} \cdot t))))$$

$$x_c1 = x_a/c_{1_a}$$

$$y_c1 = y_a/c_{1_a}$$

$$e_{1_a} = s_{ba_pmax} \cdot (1 + \text{np.sin}(2 \cdot \text{np.pi} \cdot t)) / (8 \cdot f)$$

$$e_{1_c1} = e_{1_a}/c_{1_a}$$

$$[_, _, _, S_{txx2_qmax}, S_{tyy2_qmax}, T_{txy2_qmax}] = \text{tensoes}(x_c - e_c, y_c, v)$$

$$[_, _, _, S_{txx3_qmax}, S_{tyy3_qmax}, T_{txy3_qmax}] = \text{tensoes}(x_c1 - e_{1_c1}, y_c1, v)$$

$$S_{xx_pmax} = S_{nxx_pmax} + f \cdot S_{txx_qmax} - 2 \cdot f \cdot c_{1_a} \cdot S_{txx3_qmax} + f \cdot c_{_a} \cdot S_{txx2_qmax} + s_{b_pmax}$$

$$S_{yy_pmax} = S_{nyy_pmax} + f \cdot S_{tyy_qmax} - 2 \cdot f \cdot c_{1_a} \cdot S_{tyy3_qmax} + f \cdot c_{_a} \cdot S_{tyy2_qmax}$$

$$T_{xy_pmax} = T_{nxy_pmax} + f \cdot T_{txy_qmax} - 2 \cdot f \cdot c_{1_a} \cdot T_{txy3_qmax} + f \cdot c_{_a} \cdot T_{txy2_qmax}$$

$$S_{zz_pmax} = v \cdot (S_{xx_pmax} + S_{yy_pmax})$$

return $S_{xx_pmax}, S_{yy_pmax}, S_{zz_pmax}, T_{xy_pmax}$

def stress($Q_{max_fP}, s_{ba_pmax}, s_{bm_pmax}, f, v, x_a, y_a, t$):

$S_{xx_pmax}, S_{yy_pmax}, S_{zz_pmax}, T_{xy_pmax} =$
 $\text{tensoes_superposicao}(Q_{max_fP}, s_{ba_pmax}, s_{bm_pmax}, f, v, x_a, y_a, t)$

return $S_{xx_pmax}, S_{yy_pmax}, S_{zz_pmax}, T_{xy_pmax}$

def kernel(x, c, d):

$$x_plus_c = x + c$$

$$x_d = x/d$$

$$cd_d = c/d$$

$$c1 = 0.4 + 18.9 \cdot cd_d - 14.5 \cdot cd_d^{**2} - 3.9 \cdot cd_d^{**3}$$

$$c2 = -1.6 - 40.1 \cdot cd_d + 25.4 \cdot cd_d^{**2} + 20.3 \cdot cd_d^{**3}$$

$$c3 = 3.6 + 12.7 \cdot cd_d + 29.4 \cdot cd_d^{**2} - 49.6 \cdot cd_d^{**3}$$

$$c4 = -3.4 - 7.6 \cdot cd_d - 32.4 \cdot cd_d^{**2} + 50.7 \cdot cd_d^{**3}$$

$$K = 2 \cdot (1.0/(x-c) - 1.0/x_plus_c - 2.0 \cdot c/x_plus_c^{**2} + 4.0 \cdot c^{**2}/x_plus_c^{**3}) + 2.0 \cdot (1.0/d) \cdot (c1 + c2 \cdot x_d + c3 \cdot x_d^{**2} + c4 \cdot x_d^{**3})$$

return K

$x_a = -1$

$t = [0.25, 0.75]$

```

sba_pmax = 0.4/2.0 #teste artigo
sbm_pmax = 0.4/2.0 #teste artigo
Qmax_fP = 0.42 #Qmax/(f*P)
b0 = 1 #comprimento inicial da trinca
db = 0.01 #incremento do comprimento da trinca
d = 13 #espessura do corpo de prova
b = np.arange(b0,d,db)
nb = len(b)
n = 40 #discretização da trinca
KI = np.zeros([2,nb])
KIc = 77.4
C = 2.7*10**-12
m = 3.52
R = 70
f = 0.5
pmax = 500
E1 = 119400
v = 0.296
Np = 0
E = pow(((1-pow(v,2))/E1+(1-pow(v,2))/E1),-1)
P = np.pi*R*pmax**2/E
a = np.sqrt((4*P*R)/(np.pi*E))
dK = []
bp = []
Npp = []
for j in range(nb):
    A = np.zeros([n,n])
    B = np.zeros(n)
    for u in range(2):
        for k in range(n):
            sk = np.cos(2.0*(k+1)/(2.0*n+1)*np.pi)

```

```

x = 0.5*(sk+1)*b[j]

y_a = x/a

[Sxx_pmax, _, _, _] = stress(Qmax_fP,sba_pmax,sbm_pmax,f,v,x_a,y_a,t[u])

B[k] = -Sxx_pmax*pmax

for i in range(n):

    ri = np.cos((2.0*(i+1.0) - 1.0)/(2.0*n + 1.0)*np.pi)

    c = 0.5*(ri+1)*b[j]

    K = kernel(x,c,d)

    A[k,i] = 2.0*(1.0 + ri)/(2.0*n + 1.0)*K

phi = np.linalg.solve(A,B)

phi1 = 0.0

for i in range(n):

    phi1 = phi1 + 2.0/(2.0*n + 1.0)/np.tan((2.0*(i+1.0) - 1.0)/(2.0*n + 1.0)*np.pi/2.0)*np.sin(n/(2*n + 1.0)*(2.0*(i+1.0) - 1.0)*np.pi)*phi[i]

    KI[u,j] = (1000)**-0.5*4.0/b[j]*np.sqrt(2.0)*np.sqrt(np.pi*b[j])*phi1

KI_max = KI[0,j]
KI_min = KI[1,j]

if KI_min>0:

    DK = KI_max - KI_min

else:

    DK = KI_max

dN = 0.001*db/(C*DK**m)

Np = Np + dN

b0 = b0 + db

dK.append(DK)
bp.append(b[j])
Npp.append(Np)

if KI_max>KIc:
    break

```



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Natal, 14 de setembro de 2021.

Ao(s) **quatorze** dia(s) do mês de **setembro** do ano de **dois mil e vinte e um**, às **nove horas, por videoconferência**, instalou-se a banca examinadora do Trabalho de Conclusão de Curso do(a) aluno(a) **FELIPE MONTE ROCHA FERREIRA**, matrícula **20190002002**, do curso de Engenharia Mecânica. A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros: **RAPHAEL ARAÚJO CARDOSO**, orientador; **AVELINO MANUEL DA SILVA DIAS**, examinador interno; **EVANS PAIVA DA COSTA FERREIRA**, examinador interno. Deu-se início à abertura dos trabalhos pelo(a) **RAPHAEL ARAÚJO CARDOSO**, que após apresentar os membros da banca examinadora, solicitou a (o) candidato (a) que iniciasse a apresentação do trabalho de conclusão de curso, intitulado “**AVALIAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM PROBLEMAS DE FADIGA POR FRETTING ATRAVÉS DA IMPLEMENTAÇÃO DE UM MÉTODO SEMI-ANALÍTICO**”, marcando um tempo de trinta minutos para a apresentação. Concluída a exposição, **RAPHAEL ARAÚJO CARDOSO**, orientador, passou a palavra aos examinadores para arguirem o(a) candidato(a); após o que fez suas considerações sobre o trabalho em julgamento; tendo sido **aprovado**, o(a) candidato(a), conforme as normas vigentes na Universidade Federal do Rio Grande do Norte. A versão final do trabalho deverá ser entregue à Coordenação do Curso de Engenharia Mecânica, no prazo de **oito** dias; contendo as modificações sugeridas pela banca examinadora e constante na folha de correção anexa. Conforme o que rege o Projeto Político Pedagógico do Curso de Engenharia Mecânica da UFRN, o(a) candidato(a) não será aprovado(a) se não cumprir as exigências acima.

RAPHAEL ARAÚJO CARDOSO

Orientador

AVELINO MANUEL DA SILVA DIAS

Examinador interno

EVANS PAIVA DA COSTA FERREIRA

Examinador interno

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Ferreira, Felipe Monte Rocha.

Avaliação da propagação de trincas em problemas de fadiga por fretting através da implementação de um método semianalítico / Felipe Monte Rocha Ferreira. - 2021.

20 f.: il.

Monografia (graduação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia Mecânica, Natal, RN, 2021.

Orientador: Prof. Dr. Raphael Araujo Cardoso.

1. Fadiga - Monografia. 2. Fretting - Monografia. 3. Trinca - Monografia. 4. Contato - Monografia. I. Cardoso, Raphael Araujo. II. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 621