



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**JÔNATAS GOMES MAFALDO**

**ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO E NUMÉRICO VIA  
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF) DE ESCADA  
RETA AUTOPORTANTE EM CONCRETO ARMADO**

**NATAL/RN**

**2019**

Jônatas Gomes Mafaldo

Estudo comparativo analítico e numérico via Método dos Elementos Finitos (MEF) de escada  
reta autoportante em concreto armado

Trabalho de conclusão de curso na modalidade  
Monografia, submetido ao Departamento de  
Engenharia Civil da Universidade Federal do  
Rio Grande do Norte como parte dos  
requisitos necessários para obtenção do título  
de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. José Neres da Silva Filho

Coorientador: Eng. Pedro Mitzcun Coutinho

NATAL/RN

2019

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN  
Sistema de Bibliotecas - SISBI  
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Mafaldo, Jônatas Gomes.

Estudo comparativo analítico e numérico via Método dos Elementos Finitos (MEF) de escada reta autoportante em concreto armado / Jonatas Gomes Mafaldo. - 2019.

90f.: il.

Monografia (Graduação)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia Civil, Natal, 2019.

Orientador: Dr. José Neres da Silva Filho.

Coorientador: Eng. Pedro Mitzcun Coutinho.

1. Escadas autoportantes retas - Monografia. 2. Método dos Elementos Finitos - Monografia. 3. Momento fletor - Monografia. 4. Deformações - Monografia. I. Silva Filho, José Neres da. II. Coutinho, Pedro Mitzcun. III. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 69.01

Jônatas Gomes Mafaldo

Estudo comparativo analítico e numérico via Método dos Elementos Finitos (MEF) de escada  
reta autoportante em concreto armado

Trabalho de conclusão de curso na modalidade  
Monografia, submetido ao Departamento de  
Engenharia Civil da Universidade Federal do  
Rio Grande do Norte parte dos requisitos  
necessários para obtenção do título de  
Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovado em 19 de junho de 2019.

---

Prof. Dr. José Neres da Silva Filho – Orientador  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

---

Eng. Pedro Mitzcun Coutinho – Coorientador  
FUNPEC/UFRN

---

Prof. Dr. Joel Araújo do Nascimento Neto – Examinador  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

---

Profa. Dra. Fernanda Rodrigues Mittelbach – Examinadora  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

NATAL/RN

2019

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família, por sempre estar presente e dar suporte durante toda a trajetória da graduação. À minha mãe, Nadja Mafaldo, por todo amor. Ao meu pai, Jairo Mafaldo, por toda sabedoria e disciplina. Ao meu irmão, Victor Mafaldo, por me ensinar a ter responsabilidade e sempre acreditar em mim.

À minha namorada, Maria Santos, por toda paciência, generosidade, compreensão e suporte. Estando ao meu lado sempre que precisei.

Aos professores de graduação, que durante toda graduação transmitiram inestimáveis ensinamentos que levarei por toda a vida, principalmente ao Prof. Dr. José Neres da Silva, que além de orientador foi um mestre, se dedicando ao máximo para contribuir para uma formação de excelência.

Ao Eng. Pedro Mitzcun, por toda ajuda e disponibilidade como coorientador, assessorando e contribuindo de maneira essencial para o trabalho.

Aos meus amigos, Bernardo Saboia, Herisson Campos, José Ricardo, Katianny Maia, Leonardo Andrade, Letícia Costa, Maria Eduarda, Matheus Moura e Walter Gomes, que desde o início estiveram ao meu lado, contribuindo para minha formação, me fazendo melhorar tanto como pessoa, como profissional.

E principalmente a Deus, por tudo.

***Jônatas Mafaldo***

*“As cenas de nossas vidas são como imagens em um mosaico tosco; vistas de perto não produzem efeitos – devem ser vistas à distância para ser possível discernir sua beleza.”*

**Arthur Schopenhauer**

## RESUMO

### **Estudo comparativo analítico e numérico via Método dos Elementos Finitos (MEF) de escada reta autoportante em concreto armado**

Este trabalho apresenta a análise de uma escada reta autoportante em concreto armado a partir da variação de espessura da laje e da obtenção dos seus esforços normais de flexão e deformações. Para tanto, foram utilizados métodos analíticos, como o método simplificado de Araújo (2014) e o método de Knijnik & Tavares (1977), e métodos numéricos, por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), com o auxílio do programa de análise estrutural SAP2000®. Foram avaliados modelos computacionais compostos por elementos de barra (*frame element*) e elementos de casca (*shell element*). Assim, a partir da obtenção dos esforços, observou-se uma aproximação satisfatória entre os modelos analíticos e os modelos numéricos com elementos de casca, enquanto os modelos formados por elementos de barra apresentaram momentos fletores negativos bem além dos observados nos outros dois modelos, o que pode resultar em estruturas mais dispendiosas. Além disso, pode-se confirmar o que já era abordado na literatura existente, que a região central do patamar, próxima aos lances, possui uma importante concentração de momentos fletores, detectada através dos modelos analíticos e modelos numéricos com elementos de casca, o que não foi tão significativo para os modelos com elementos de barra. Esta concentração pode implicar na necessidade de uma armadura complementar para o combate à fissuração. Por fim, foi observada uma diminuição nas flechas analisadas à medida que a altura da laje era aumentada. Para uma menor espessura o método analítico apresentou maior deformação, seguido do modelo numérico formado por elementos de barra e, por último, o modelo com elementos de casca. Entretanto, à medida que houve o aumento da altura, o método analítico e modelo de casca se aproximaram, enquanto que o modelo de barras obteve maiores flechas.

**Palavras-chave:** Escadas autoportante retas. Métodos dos Elementos Finitos. Momento fletor. Deformações.

## ABSTRACT

### **Comparative analytical and numerical study using the Finite Element Method (FEM) of free-standing stair in reinforced concrete**

The aim of this research is to realize a comparative study of internal forces of the bending moment, shearing and torsion in free standing stairs considering two methodologies: **(a)** one using classical analytical methods for obtaining efforts in stairs (CAM) and **(b)** other using Finite Element Method (FEM). In the analytical modeling, the free standing stairs were treated as structures composed of: **(1)** isolated slabs through the Plate Theory with resolution of Lagrange's non-homogeneous fourth-order differential equation, **(2)** simplified method proposed by Araújo (2014) and **(3)** Knijinik's simplified method (1977). In order to obtain FEM efforts, the free standing stair were modeled using the SAP2000® program, using frame elements, both individual and in grid structures, and shell elements. The structures were made considering discretized finite element meshes with dimensions varying from 20 cm to 25 cm, sufficient to obtain the satisfactory efforts and with low computational cost. The results showed that on average the analytical models overestimated the values of internal forces (bending moments in the transversal direction in the landing and in the longitudinal direction of the stair), mainly by the fact of not considering the three-dimensionality of the stairs, redistribution of efforts and the consequent interaction among the bending and torsion efforts. It was also observed that shell element modeling, when compared to the frame elements, presented results closer to the analytical models considering the supported stairs. In the case of free standing stair, the settling moments between the landing-ladder links were similar to the numerical models and diverged when compared to the simplified models of Araújo (2014) and Knijinik (1977). Finally, the conclusions of the research indicated that although free standing stairs present much greater efforts and require higher thicknesses of bids and levels than ladders supported in beams, however, the lack of intermediate and adjacent structural elements results in a much more accelerated constructive process.

**Palavras-chave:** Free-standing Stair. Finite Element Method. Bending moment. Deformations.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1</b> – Modelo de escada autoportante.....	16
<b>Figura 1.2</b> – Ruptura de escada autoportante plissada por deficiência de armadura e erro de execução. ....	17
<b>Figura 2.1</b> - Tipos usuais de escadas em edifícios. (a) Escada reta, (b) escada em L, (c) escada em U, (d) escada helicoidal e (e) escada com trecho curvo. ....	21
<b>Figura 2.2</b> – Escadas armadas (a) transversalmente, (b) longitudinalmente e (c) nas duas direções.....	22
.....	22
<b>Figura 2.3</b> – Escada em balanço (a.1) em planta, (a.2) corte AA e (a.3) modelo estrutural e escada com degraus isolados (b.1) em corte e (b.2) vista lateral.....	23
<b>Figura 2.4</b> – Geometria de escada autoportante. ....	24
<b>Figura 2.5</b> – Modelos estruturais de (a) Fchssteiner, (b) Cusens & Kuang e (c) Guerrin.....	24
<b>Figura 2.6</b> - Escada helicoidal. ....	25
.....	25
<b>Figura 2.7</b> - Dimensões dos degraus da escada. ....	26
<b>Figura 2.8</b> – Ângulo de Inclinação da escada.....	27
<b>Figura 2.9</b> - Sinalização visual no piso dos degraus.....	28
<b>Figura 2.10</b> – Escada modelo. (a) Planta e (b) corte AA.....	29
<b>Figura 2.11</b> – Corte longitudinal. ....	30
<b>Figura 2.12</b> – Corte longitudinal. ....	31
<b>Figura 2.13</b> - Empunhadura de corrimão.....	32
<b>Figura 2.14</b> - Prolongamento do corrimão. ....	33
<b>Figura 2.15</b> – Localização das fissuras: (a) Intersecção dos lances com patamar e (b) bomba da escada.....	34
<b>Figura 2.16</b> - Momentos transversais médios no patamar.....	36
<b>Figura 2.17</b> - Consideração do patamar engastado nos lances. ....	37
<b>Figura 2.18</b> - Carregamentos nos lances isolados. ....	37
<b>Figura 2.19</b> - Modelo analítico.....	38
<b>Figura 2.20</b> – Curvas para obtenção dos esforços. ....	39
<b>Figura 2.21</b> – Corte de uma escada autoportante genérica.....	39
<b>Figura 2.22</b> – Modelagem via MEF de escada autoportante.....	40

<b>Figura 3.1</b> – Fluxograma de desenvolvimento da pesquisa.....	43
<b>Figura 3.2</b> – Planta de forma da escada em análise. (a) Planta, (b) corte do lance superior e (c) corte do lance inferior.....	44
<b>Figura 3.3</b> – Faixa de um metro estabelecida para seção do modelo de barra. ....	50
<b>Figura 3.4</b> – Modelo com elementos de barra: (a) apoiado, (b) engastado e (c) apoiado com continuidade.....	50
<b>Figura 3.5</b> – Modelo com elementos casca: (a) apoiado, (b) engastado e (c) apoiado com continuidade.....	51
<b>Figura 3.6</b> – Eixos locais de um elemento de casca de 4 nós. ....	52
<b>Figura 3.7</b> – Esforços internos de flexão e torção no elemento de casca. ....	52
<b>Figura 3.8</b> – Lajes formadas por elementos de placa (a) com eixos locais alinhados e (b) eixos trocados.....	53
<b>Figura 3.9</b> – Momento fletor (a) com eixos locais alinhados e (b) eixos trocados.....	54
<b>Figura 3.10</b> – Eixos locais dos elementos de casca. ....	54
<b>Figura A.1</b> – Momentos fletores em escada apoiada com laje de 12 cm, em kNm/m. ....	76
<b>Figura A.2</b> – Momentos fletores em escada apoiada com laje de 18 cm, em kNm/m. ....	76
<b>Figura A.3</b> – Momentos fletores em escada apoiada com laje de 25 cm, em kNm/m. ....	77
<b>Figura A.4</b> – Momentos fletores em escada com continuidade com laje de 12 cm, em kNm/m. ....	77
<b>Figura A.5</b> – Momentos fletores em escada com continuidade com laje de 18 cm, em kNm/m. ....	78
<b>Figura A.6</b> – Momentos fletores em escada com continuidade com laje de 25 cm, em kNm/m. ....	78
<b>Figura A.7</b> – Momentos fletores em escada engastada com laje de 12 cm, em kNm/m. ....	79
<b>Figura A.8</b> – Momentos fletores em escada engastada com laje de 18 cm, em kNm/m. ....	79
<b>Figura A.9</b> – Momentos fletores em escada engastada com laje de 25 cm, em kNm/m. ....	80
<b>Figura B.1</b> – Momentos fletores M11 em escada apoiada com laje de 12 cm, em kNm/m. ....	81
<b>Figura B.2</b> – Momentos fletores M22 em escada apoiada com laje de 12 cm, em kNm/m. ....	81
<b>Figura B.3</b> – Momentos fletores M11 em escada apoiada com laje de 18 cm, em kNm/m. ....	82
<b>Figura B.4</b> – Momentos fletores M22 em escada apoiada com laje de 18 cm, em kNm/m. ....	82
<b>Figura B.5</b> – Momentos fletores M11 em escada apoiada com laje de 25 cm, em kNm/m. ....	83
<b>Figura B.6</b> – Momentos fletores M22 em escada apoiada com laje de 25 cm, em kNm/m. ....	83
<b>Figura B.7</b> – Momentos fletores M11 em escada com continuidade com laje de 12 cm, em kNm/m. ....	84

<b>Figura B.8</b> – Momentos fletores M22 em escada com continuidade com laje de 12 cm, em kNm/m.....	84
<b>Figura B.9</b> – Momentos fletores M11 em escada com continuidade com laje de 18 cm, em kNm/m.....	85
<b>Figura B.10</b> – Momentos fletores M22 em escada com continuidade com laje de 18 cm, em kNm/m.....	85
<b>Figura B.11</b> – Momentos fletores M11 em escada com continuidade com laje de 25 cm, em kNm/m.....	86
<b>Figura B.12</b> – Momentos fletores M22 em escada com continuidade com laje de 25 cm, em kNm/m.....	86
<b>Figura B.13</b> – Momentos fletores M11 em escada engastada com laje de 12 cm, em kNm/m.....	87
<b>Figura B.14</b> – Momentos fletores M22 em escada engastada com laje de 12 cm, em kNm/m.....	87
<b>Figura B.15</b> – Momentos fletores M11 em escada engastada com laje de 18 cm, em kNm/m.....	88
<b>Figura B.16</b> – Momentos fletores M22 em escada engastada com laje de 18 cm, em kNm/m.....	88
<b>Figura B.17</b> – Momentos fletores M11 em escada engastada com laje de 18 cm, em kNm/m.....	89
<b>Figura B.18</b> – Momentos fletores M22 em escada engastada com laje de 18 cm, em kNm/m.....	89
<b>Figura AA.1</b> – Curva para obtenção dos esforços ( $t_p/t_1 = 1$ ).....	90

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 3.1</b> – Modelos Estudados. ....	46
<b>Quadro 3.2</b> – Peso próprio em função da espessura.....	47
<b>Quadro 4.1</b> – Valores de momentos fletores para os modelos analíticos.....	55
<b>Quadro 4.2</b> – Valores de momentos fletores para os modelos numéricos com elementos de barra.....	56
<b>Quadro 4.3</b> – Valores de momentos fletores para os modelos numéricos com elementos de casca.....	56
<b>Quadro 4.4</b> – Valores de momentos fletores para espessura de 12 cm. ....	57
<b>Quadro 4.5</b> – Valores de momentos fletores para espessura de 18 cm. ....	57
<b>Quadro 4.6</b> – Valores de momentos fletores para espessura de 25 cm. ....	57
<b>Quadro 4.7</b> – Comparativo entre modelos. ....	59
<b>Quadro 4.8</b> – Comparativo entre modelos. ....	59
<b>Quadro 4.9</b> – Comparativo entre modelos. ....	60
<b>Quadro 4.10</b> – Valores de momentos fletores para espessura de 12 cm. ....	60
<b>Quadro 4.11</b> – Valores de momentos fletores para espessura de 18 cm. ....	61
<b>Quadro 4.12</b> – Valores de momentos fletores para espessura de 25 cm. ....	61
<b>Quadro 4.13</b> – Comparativo entre modelos. ....	64
<b>Quadro 4.14</b> – Comparativo entre modelos. ....	64
<b>Quadro 4.15</b> – Valores de momentos fletores na região central do patamar. ....	65
<b>Quadro 4.16</b> – Comparativo entre modelos. ....	66
<b>Quadro 4.17</b> – Comparativo entre modelos. ....	69
<b>Quadro 4.18</b> – Valores de flecha máxima. ....	70
<b>Quadro 4.19</b> – Comparativo entre modelos. ....	71

## LISTA DE GRÁFICOS

<b>Gráfico 4.1</b> – Momentos fletores negativos na região lance-patamar. ....	57
<b>Gráfico 4.2</b> – Momentos fletores positivos na região do lance. ....	58
<b>Gráfico 4.3</b> – Momentos fletores positivos na região central do patamar. ....	58
<b>Gráfico 4.4</b> – Momentos fletores negativos na região piso-lance. ....	61
<b>Gráfico 4.5</b> – Momentos fletores negativos na região lance-patamar. ....	62
<b>Gráfico 4.6</b> – Momentos fletores positivos na região do lance. ....	62
<b>Gráfico 4.7</b> – Momentos fletores positivos na região central do patamar. ....	63
<b>Gráfico 4.8</b> – Momentos fletores positivos na região central do patamar. ....	66
<b>Gráfico 4.9</b> – Momentos fletores negativos na região lance-patamar. ....	67
<b>Gráfico 4.10</b> – Momentos fletores positivos na região do lance. ....	68
<b>Gráfico 4.10</b> – Momentos fletores positivos na região central do patamar. ....	68
<b>Gráfico 4.11</b> – Valores de flecha máxima nos diferentes modelos. ....	70

## SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	16
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	16
1.2 JUSTIFICATIVA .....	17
1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA .....	18
1.3.1 Objetivo geral .....	18
1.3.2 Objetivos específicos.....	18
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	18
CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	20
2.1 GENERALIDADES .....	20
2.2 CLASSIFICAÇÃO DAS ESCADAS .....	20
2.2.1 Escadas convencionais .....	21
2.2.2 Escadas autoportantes.....	23
2.3 CRITÉRIOS DE PROJETO .....	26
2.4 AÇÕES E CARREGAMENTOS ATUANTES .....	30
2.4.1 Peso Próprio.....	30
2.4.2 Revestimento .....	31
2.4.3 Corrimãos e Guarda-corpos.....	32
2.4.4 Sobrecarga distribuída .....	33
2.5 ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL .....	33
2.6 OBTENÇÃO DE ESFORÇOS EM ESCADAS AUTOPORTANTES.....	34
2.6.1 Obtenção de esforços de flexão pela teoria de Kirchhoff.....	35
2.6.2 Obtenção de esforços de flexão pelo método simplificado de Araújo (2014)....	36
2.6.3 Obtenção de esforços pelo método simplificado de Knijnik e Tavares (1977)..	38
2.6.4 Método dos elementos finitos.....	40
2.7 PESQUISAS REALIZADAS .....	41
CAPÍTULO 3 - CARACTERIZAÇÃO E MODELAGEM DAS ESCADAS .....	43
3.1 INTRODUÇÃO .....	43
3.2 GEOMETRIA .....	44
3.3 LEVANTAMENTO DAS AÇÕES .....	46
3.3.1 Peso Próprio.....	46
3.3.2 Revestimento .....	47
3.3.3 Guarda-corpo e Alvenaria .....	47
3.3.4 Sobrecarga de utilização.....	47
3.4 MODELO ANALÍTICO.....	48
3.5 MODELO NUMÉRICO .....	48
3.5.1 Definição dos materiais .....	49

3.5.2	Definição dos elementos.....	49
3.5.2.1	Modelagem dos elementos de barra ( <i>frame element</i> ).....	50
3.5.2.2	Modelagem dos elementos de casca ( <i>shell element</i> ).....	51
3.5.3	Obtenção dos esforços .....	51
CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DOS RESULTADOS .....		55
4.1	MOMENTOS FLETORES .....	55
4.1.1	Análise comparativa entre o método analítico de Araújo (2014), modelo numérico com elementos de barra apoiado e modelo numérico com elementos de casca apoiado	56
4.1.2	Análise comparativa entre os modelos numéricos com elementos de barra (engastado e com continuidade) e elementos de casca (engastado e com continuidade)	.60
4.1.3	Análise comparativa entre os métodos analíticos de Knijnik & Tavares (1977) e Araújo (2014), modelos com elementos de barra (apoiado, engastado e com continuidade) e modelos com elementos de casca (apoiado, engastado e com continuidade).....	65
4.1.4	Análise comparativa global devido à variação de espessura na laje da escada ..	67
4.2	DESLOCAMENTOS (FLECHAS) .....	69
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS .....		72
5.1	CONCLUSÕES GERAIS .....	72
5.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	73
REFERÊNCIAS .....		74
APÊNDICE A – ESFORÇOS (MODELO NUMÉRICO DE BARRA).....		76
APÊNDICE B – ESFORÇOS (MODELO NUMÉRICO DE CASCA).....		81
ANEXO A – CURVAS DO MÉTODO ANALÍTICO DE KNIJNIK & TAVARES (1977) ..		90

## CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

### 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Uma etapa fundamental em um projeto de um edifício em concreto armado é a sua concepção estrutural. As escadas são importantes elementos estruturais que compõem os edifícios, projetados e executados para unir, por meio de degraus sucessivos, de maneira confortável e sem que haja um grande gasto de energia, os diferentes níveis de uma edificação. Contudo, observam-se, na obra, dificuldades de execução das escadas devido ao sistema estrutural adotado e no posicionamento na armação. Ademais, a concretagem, demanda um tempo considerável de execução e cuidados especiais, principalmente para que não ocorra a segregação do concreto durante seu lançamento na forma.

Os modelos estruturais para cálculos desses elementos especiais devem ser eficientes a fim de retratar o seu comportamento estrutural na ruptura (ELU) e em serviço (ELS). Vale ressaltar que esses modelos podem ser gerados de maneiras mais simples através de modelos analíticos simplificados, ou mais complexos, com o emprego de modelos estruturais mais arrojados utilizando métodos numéricos. Contudo, não se pode a priori afirmar a melhor ou maior eficiência de um ou outro, mas sim entender que cada modelo tem características próprias, sendo sua utilização baseada na resposta que se pretende obter da estrutura. Devido à suas formas não convencionais, e por serem destaque do ponto de vista arquitetônico, as escadas especiais passaram a ter mais espaço nas construções com o decorrer do tempo, tendo como exemplo as escadas autoportantes retas, curvas e helicoidais (Figura 1.1).

**Figura 1.1** – Modelo de escada autoportante.



**Fonte:** <https://www.rollit.com.br/guarda-corpo-vidro-escada>

Segundo Knijnik & Tavares (1977), o fato de não necessitarem de estruturas auxiliares para sua sustentação faz com que este tipo de escada se apresente como a solução ideal, tanto em termos de funcionalidade, com sob o ponto de vista da estética. Entretanto, em consequência de sua relativa complexidade no processo de dimensionamento, essas escadas demandam um trabalho especializado, no qual o calculista precisa ter conhecimento e experiência necessários para a análise dos esforços internos gerados e para o dimensionamento, a fim de que sejam garantidas a segurança e a economia desses elementos estruturais. Neste contexto, esta pesquisa propõe-se a realizar a análise dos momentos fletores e deformações de escadas autoportantes, obtidos a partir de modelos analíticos clássicos e numéricos, por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando para este último caso, o programa de análise estrutural SAP2000®.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Apesar de não ser um assunto relativamente novo, são escassas as fontes bibliográficas e pesquisas referentes à análise estrutural dessas escadas. Ao se analisar as escadas autoportantes, são verificados os surgimentos de esforços internos, tais como os esforços normais, tangenciais e torcionais, que não são normalmente obtidos pelos modelos analíticos convencionais de cálculo, utilizados em escadas com apoios entre laces. Isso faz com que, por não serem determinados, acabam por resultar em projetos com excesso de armadura a fim de compensar a negligência desses esforços. Este fato gera um procedimento, de certa forma, empírico, resultando em estruturas subdimensionadas com risco de ruína ou mesmo superdimensionadas, de difícil execução e dispendiosas (Figura 1.2).

**Figura 1.2** – Ruptura de escada autoportante plissada por deficiência de armadura e erro de execução.



Fonte: Autor (2019).

Sendo assim, este trabalho foi apresentado com a pretensão de contribuir com a literatura sobre a temática, e, principalmente, com a prática de trabalho do profissional de engenharia civil. A obtenção de esforços internos nas escadas autoportantes em concreto armado se faz de extrema importância, com o objetivo de permitir um dimensionamento seguro e econômico.

### **1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA**

#### **1.3.1 Objetivo geral**

A presente pesquisa tem como objetivo geral analisar as escadas autoportantes retas pelo Método Analítico Clássico (MAC) e pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) a fim de verificar os momentos fletores e as deformações nessas estruturas.

#### **1.3.2 Objetivos específicos**

Os objetivos específicos desta pesquisa são:

- Modelar escadas autoportantes com espessuras variáveis via Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando elementos de barra (*frame element*) e casca (*Shell element*);
- Analisar e comparar os momentos fletores obtidos analiticamente (MAC) e utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), para cada um dos modelos de escadas autoportantes em estudo;
- Analisar e comparar os deslocamentos obtidos analiticamente (MAC) e utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), para cada um dos modelos de escadas autoportantes em estudo.

### **1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO**

Este trabalho é dividido em 5 capítulos, incluindo este, os quais abordam os conteúdos apresentados de forma resumida a seguir:

No Capítulo 1 apresentam-se as considerações iniciais da pesquisa, bem como as justificativas, os objetivos gerais e específicos, e a estrutura do trabalho.

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica dos tipos de escadas, das ações atuantes, do comportamento estrutural, do dimensionamento, de verificações e de pesquisas realizadas sobre escadas autoportantes em concreto armado.

No Capítulo 3 são expostos os modelos de estudo e as considerações feitas para o desenvolvimento da pesquisa.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos e as análises feitas a partir destes resultados.

No Capítulo 5 são feitas as conclusões gerais acerca da pesquisa e algumas sugestões para trabalhos futuros.

## **CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1 GENERALIDADES**

As escadas são importantes elementos estruturais da edificação projetados e executados para que o ser humano possa se locomover de um nível ao outro da edificação, de forma confortável, minimizado ao máximo o gasto de energia. Em comparação com as rampas, que possuem praticamente a mesma finalidade, têm a vantagem de ocuparem um espaço menor, porém não permitem o tráfego com cadeiras de rodas, carrinhos de carga, etc.

Apesar de, por muitas vezes, serem negligenciadas, as escadas demandam um tempo considerável tanto na execução da obra, quanto na fase de projeto, apresentando geometrias irregulares, planos inclinados, dificuldade na montagem de formas, na armação e concretagem.

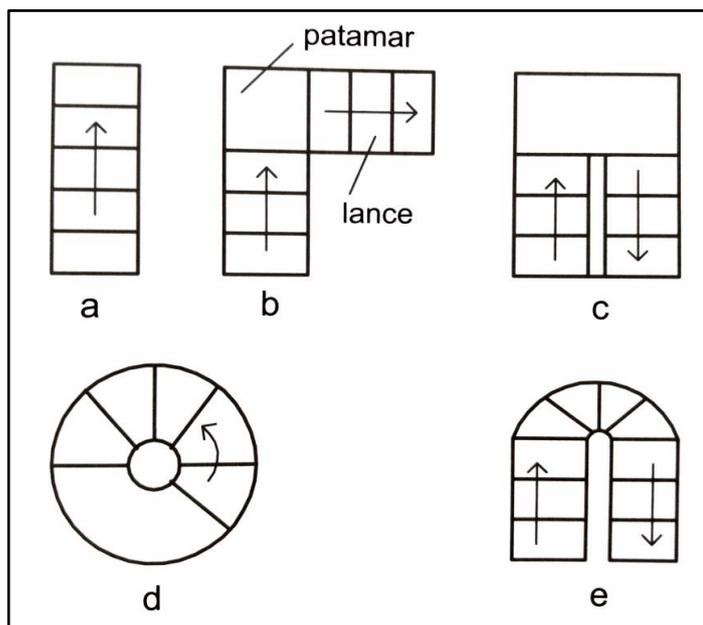
Atualmente, com o avanço da tecnologia e o surgimento de novos materiais, existem diferentes possibilidades de formas e materiais de construção que podem ser utilizados na confecção das escadas, podendo destacar o uso do concreto armado, concreto pré-moldado, aço, madeira, etc., sendo alguns tipos apoiados sobre lajes ou vigas, em balanço ou engastadas. Cabe salientar que a escolha do tipo de material e do sistema estrutural utilizado para confecção da escada, deverá ser realizada a partir de diversas análises prévias e dentro das possibilidades da obra e imposições arquitetônicas.

### **2.2 CLASSIFICAÇÃO DAS ESCADAS**

As escadas dos edifícios são projetadas nas mais diversas formas e dimensões, dependendo do espaço disponível, do tráfego de pessoas e de aspectos arquitetônicos.

Existem normas técnicas internacionais e nacionais que estabelecem geometrias mínimas e máximas, que o projeto de uma escada deve respeitar. Pode-se destacar a NBR 9077 (2001) que trata da segurança da evacuação de pessoas durante um incêndio. Ademais, existe na literatura expressões empíricas como a Fórmula de Blondel, proposta por Nicolas François Blondel no século XVII, para padrão de conforto que visam minimizar o gasto de energia dispendido pelo usuário durante a utilização da escada. A Figura 2.1 apresenta os tipos usuais de escadas em edifícios.

**Figura 2.1** - Tipos usuais de escadas em edifícios. (a) Escada reta, (b) escada em L, (c) escada em U, (d) escada helicoidal e (e) escada com trecho curvo.



**Fonte:** Araújo (2014).

As escadas podem se apresentar com um ou mais lances retangulares ou podem ser curvas. Existe uma variedade muito grande de tipos de escada, dependendo da sua utilidade e da estética desejada. Assim, as escadas podem ser normalmente classificadas como retangulares armadas transversalmente, longitudinalmente ou em cruz; com patamar; com laje em balanço; em viga reta, com degraus em balanço; com degraus engastados um a um (escada plissada); com lajes ortogonais e; com lances adjacentes.

### 2.2.1 Escadas convencionais

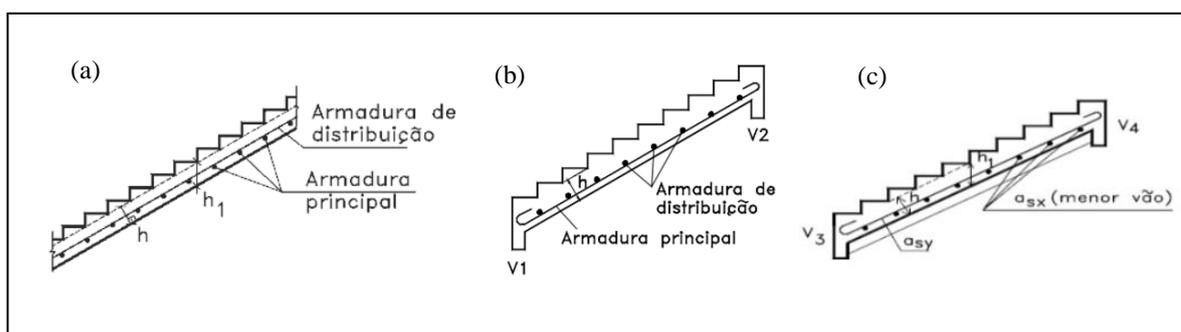
Comumente usadas, as escadas armadas transversalmente se apoiam geralmente em paredes e vigas laterais, e podem ser calculadas como uma laje armada na direção transversal, ou seja, vigas simplesmente apoiadas submetidas à ação uniformemente distribuída. Como o vão de cálculo é pequeno e os degraus colaboram na resistência, exige um pequeno valor de espessura da laje sob os degraus. A armadura principal é disposta na direção transversal e deve ser ancorada nas vigas laterais, já na direção longitudinal deve-se dispor uma armadura de distribuição (Figura 2.2 a).

No caso de escadas armadas longitudinalmente, estas são calculadas como uma viga inclinada. Todas as cargas atuantes sobre a escadas são distribuídas de maneira homogênea

pela superfície da escada e consideradas no modelo como uma carga distribuída de maneira horizontal. Este tipo de escada, devido a não colaboração dos degraus na resistência, pode exigir valores de espessuras mais elevados. As armaduras principais são distribuídas longitudinalmente, adotando-se uma armadura negativa mínima para limitar a fissuração na ligação da escada com os pisos, visto que existe um pequeno engastamento. Na direção transversal é disposta uma armadura de distribuição (Figura 2.2 b).

Já as escadas armadas em cruz são escadas apoiadas nas quatro bordas. Estas se assemelham a lajes armadas nas duas direções, onde seus esforços e reações são calculados com auxílio de tabelas de cálculo, considerando-se os vãos medidos na horizontal. Para o dimensionamento, na direção transversal, pode-se utilizar a altura  $h_1$ , também conhecida como altura inclinada, presente na equação 2.3, no cálculo da armadura mínima. Já na direção longitudinal utiliza-se a altura  $h$ , não apresentando novidades nas vigas horizontais, e para as vigas inclinadas, admitem-se as ações verticais por metro de projeção horizontal e os vãos medidos na horizontal (Figura 2.2 c).

**Figura 2.2** – Escadas armadas (a) transversalmente, (b) longitudinalmente e (c) nas duas direções.



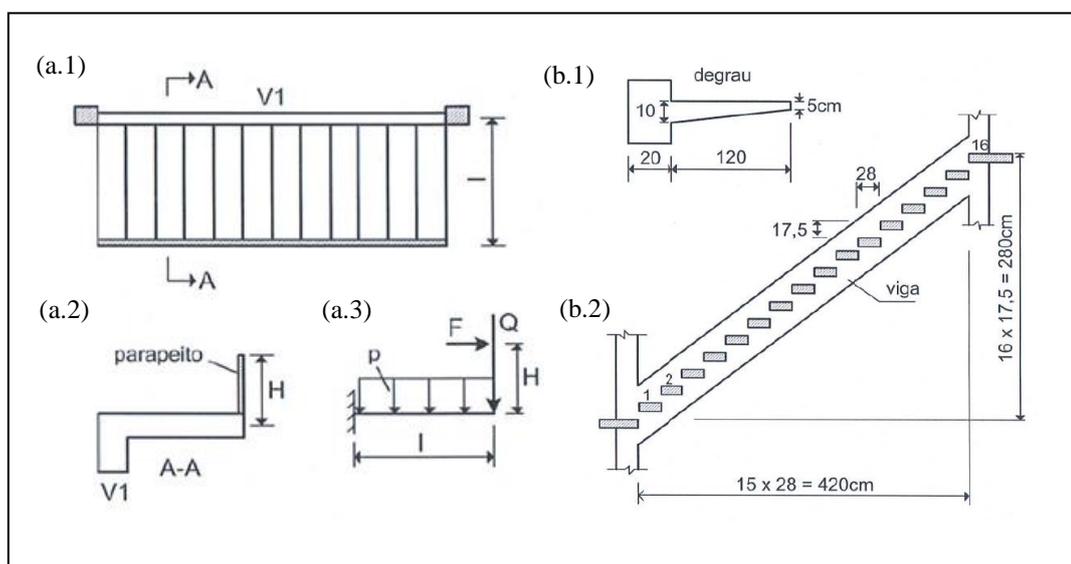
**Fonte:** Adaptado de Giongo (1997).

Outro modelo não tão comum, porém presente em alguns modelos estruturais é a escada em balanço. Segundo Araújo (2014), neste tipo de escada, uma de suas extremidades é engastada e a outra é livre. Com o carregamento levantado para a estrutura, calculam-se os momentos fletores e os esforços cortantes máximos. No dimensionamento da escada, a armadura é calculada a partir de uma seção de base unitária. Como o momento fletor é negativo, os degraus estão tracionados, portanto a armadura a ser colocada em cada degrau é dada por  $aA_s$ ,  $\text{cm}^2$ , onde  $a$  é a largura do degrau e metros e  $A_s$ ,  $\text{cm}^2/\text{m}$  é a área obtida no dimensionamento.

Por último, mas não menos importantes, estão as escadas com degraus isolados. Essa escada difere da anterior apenas pela ausência da laje sob os degraus. Nesse caso, os degraus

são calculados como uma viga em balanço, engastada na viga lateral. De acordo com a NBR 6120 (1980), os degraus devem ser calculados para suportarem uma carga acidental concentrada de 2,5 kN, aplicada na posição mais desfavorável.

**Figura 2.3** – Escada em balanço (a.1) em planta, (a.2) corte AA e (a.3) modelo estrutural e escada com degraus isolados (b.1) em corte e (b.2) vista lateral.



Fonte: Adaptado de Araújo (2014).

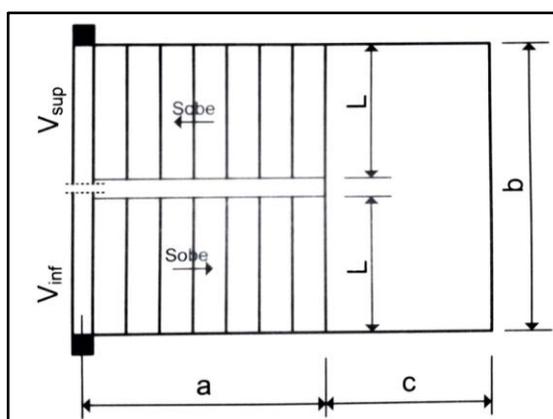
## 2.2.2 Escadas autoportantes

As escadas autoportantes, como dito anteriormente, são aquelas que não necessitam de um apoio intermediário, apoiando-se somente nas vigas situadas nos pisos. Os tipos mais comuns destas escadas são as formadas por dois lances com um patamar intermediário, como mostrado na Figura 2.4. Por não serem elementos tão simples, é necessário a utilização de um modelo estrutural que represente adequadamente o comportamento, após aplicadas as cargas que nelas atuam. Existem dos mais variados modelos para fazer esta representação, desde os mais simples, até os mais complexos. Portanto, deve-se haver um estudo sobre as características da estrutura em análise.

Inicialmente, os autores analisavam escadas por meio de aproximações, com modelos de barras espaciais. Nesta linha de estudo está Fuchssteiner (1954), que fez um modelo para escadas retas e helicoidais. Outros estudos semelhantes foram desenvolvidos por Cusens *et al.* (1966), Gould (1963), Sauter (1964) e Taleb (1964). Knijnik & Tavares (1977) reproduziu o

trabalho de Cusens *et al.* (1966) transformando a formulação em um conjunto de tabelas para facilitar a obtenção dos resultados.

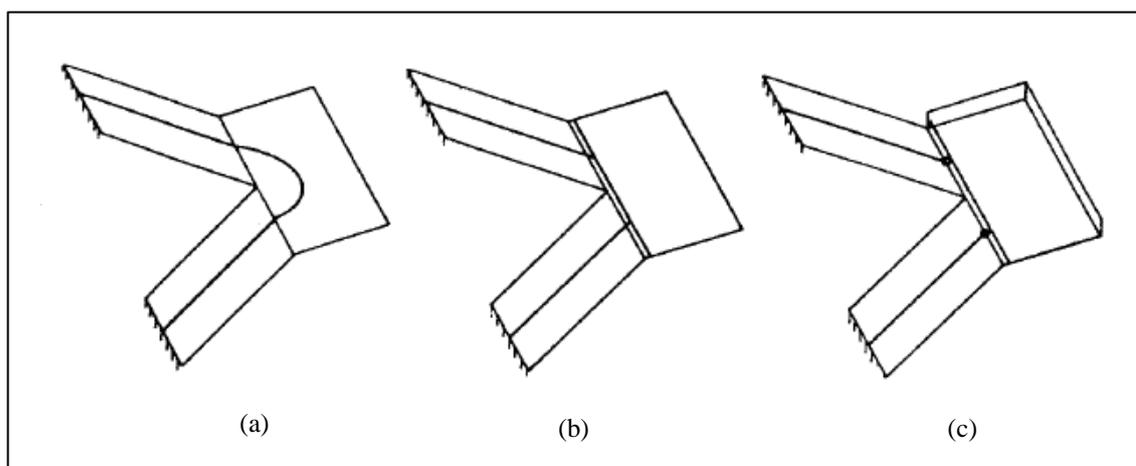
**Figura 2.4** – Geometria de escada autoportante.



Fonte: Araújo (2014).

A Figura 2.5 mostra alguns exemplos desses estudos. Fuchssteiner (1957 *apud* KNIJNIK & TAVARES, 1977) simplificou a escada como duas barras retas inclinadas unidas por uma barra curva, enquanto Cusens & Kuang (1966 *apud* KNIJNIK & TAVARES, 1977) propuseram uma aproximação por meio de duas barras inclinadas unidas por uma barra reta no encontro dos lances com o patamar. Já Guerrin (1968 *apud* KNIJNIK & TAVARES, 1977) propôs que as barras inclinadas fossem articuladas nos encontros com o patamar, e este seja rígido o suficiente para evitar deformação.

**Figura 2.5** – Modelos estruturais de (a) Fchssteiner, (b) Cusens & Kuang e (c) Guerrin.

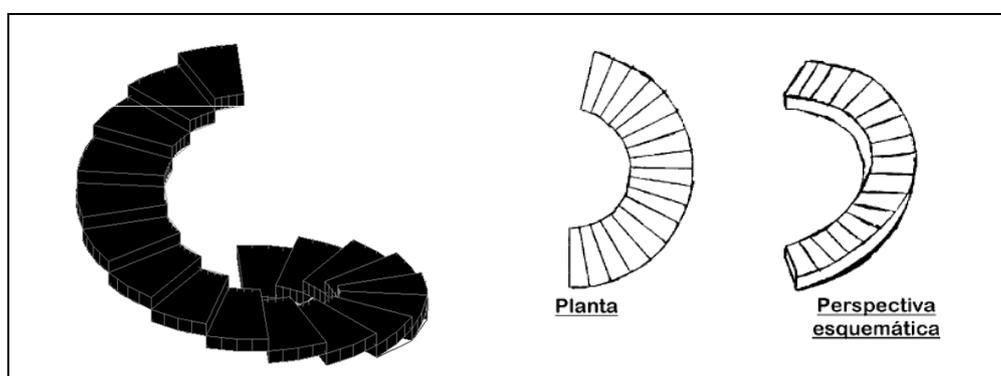


Fonte: Knijnik & Tavares (1977).

Além das escadas autoportantes retas, as escadas helicoidais são uma alternativa arquitetônica para ambientes que possuem poucos espaços amplos, por serem mais compactas do que as escadas de lances retos. Porém, se por um lado as razões estéticas para o uso deste tipo de estrutura são boas, por outro, a solução estrutural pode apresentar um alto nível de complexidade importante com a qual os engenheiros se deparam, principalmente quando se tem um patamar intermediário na escada helicoidal. (Figura 2.6).

Segundo Azambuja (1962), as rampas helicoidais bi-engastadas oferecem a vantagem de proporcionar o efeito de casca e por consequência uma ótima capacidade de distribuição dos esforços. Significa que, assim como nas cascas, em virtude da curvatura, os esforços de flexão são melhores distribuídos (ocorrendo flexão, além de torção e esforços normais à seção transversal) do que em estruturas planas horizontais ou de inclinação constante.

**Figura 2.6** - Escada helicoidal.



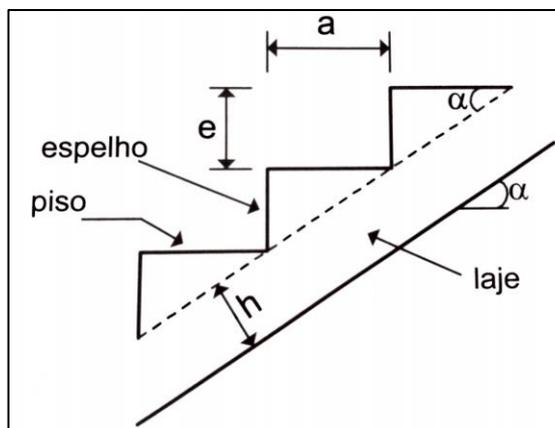
**Fonte:** Carvalho (2008)

### 2.3 CRITÉRIOS DE PROJETO

Desde a concepção arquitetônica, as escadas devem ser projetadas atentando para critérios básicos que necessitam serem garantidos, principalmente no que diz respeito ao conforto dos usuários. Por exemplo, a largura das escadas pode variar muito, dependendo da sua finalidade. Escadas secundárias ou de serviço têm largura variando de 70 a 90 cm. Para escadas de edifícios residenciais ou de escritórios, a largura usual é de 120 cm, enquanto as escadas de edifícios públicos ou comerciais podem ter larguras de 2 m ou mais.

Em relação aos degraus, existem diversas relações entre o comprimento do piso  $a$  e a altura dos espelhos  $e$  (Figura 2.7).

**Figura 2.7** - Dimensões dos degraus da escada.



**Fonte:** Araújo (2014).

A altura  $e$  dos espelhos dos degraus segundo a NBR 9050:2004 - Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos - deve atender às seguintes condições:

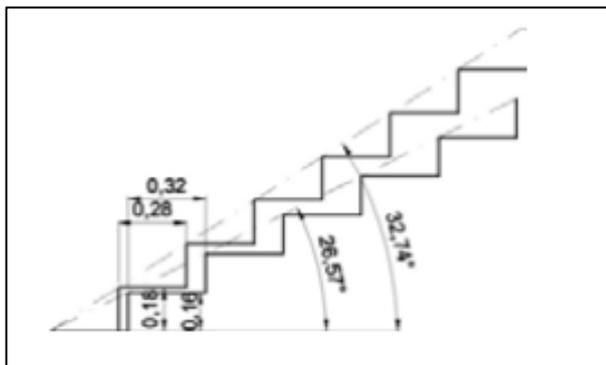
- a) pisos ( $p$ ):  $0,28 \text{ m} < p < 0,32 \text{ m}$ ;
- b) espelhos ( $e$ )  $0,16 \text{ m} < e < 0,18 \text{ m}$ ;

A relação mais empregada é a Fórmula de Blondel, dada por  $0,63 \text{ m} < p + 2e < 0,65 \text{ m}$ .

O ângulo  $\alpha$  de inclinação da escada pode ser obtido em função das dimensões dos degraus, resultando (Figura 2.8):

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + e^2}} \quad (2.1)$$

**Figura 2.8** – Ângulo de Inclinação da escada.



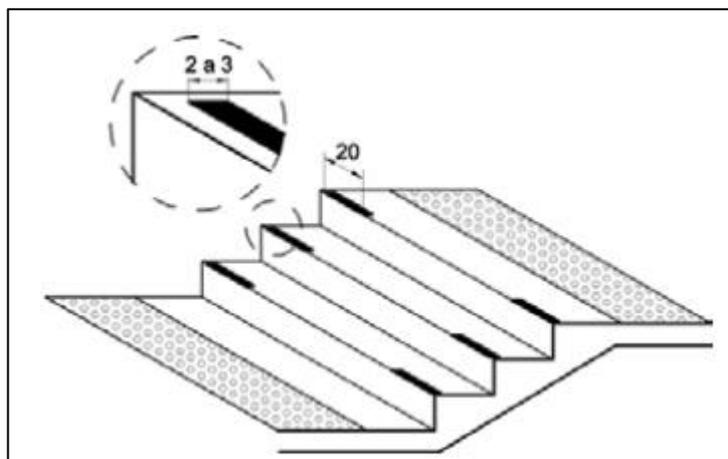
**Fonte:** NBR 9050 (2004)

A espessura  $h$  da laje deve ser verificada de acordo com os Estados Limites Último e de Serviço (ELU e ELS), respeitando os valores mínimo estabelecidos pela NBR 6118 (2014):

- a) 7 cm para lajes de cobertura não em balanço;
- b) 8 cm para lajes de piso não em balanço;
- c) 10 cm para lajes em balanço;
- d) 10 cm para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30 kN;
- e) 12 cm para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30 kN;
- f) 15 cm para lajes com protensão apoiadas em vigas, com o mínimo de 1/42 para lajes de piso biapoiadas e 1/50 para lajes de pisos contínuos;
- g) 16 cm para lajes lisas e 14 para lajes cogumelo.

Usualmente, segundo Araújo (2014), a espessura  $h$  da laje sob degraus varia entre 6 cm e 12 cm, dependendo dos vãos e das cargas, bem como das condições de apoio da escada. Vale ressaltar que segundo a NBR 9050 (2004), todo degrau ou escada deve ter sinalização visual na borda do piso, em cor contrastante com a do acabamento, medindo entre 0,02 m e 0,03 m de largura. Essa sinalização pode estar restrita à projeção dos corrimãos laterais, com no mínimo 0,20 m de extensão, localizada conforme Figura 2.9.

**Figura 2.9** - Sinalização visual no piso dos degraus



**Fonte:** NBR 9050:2004

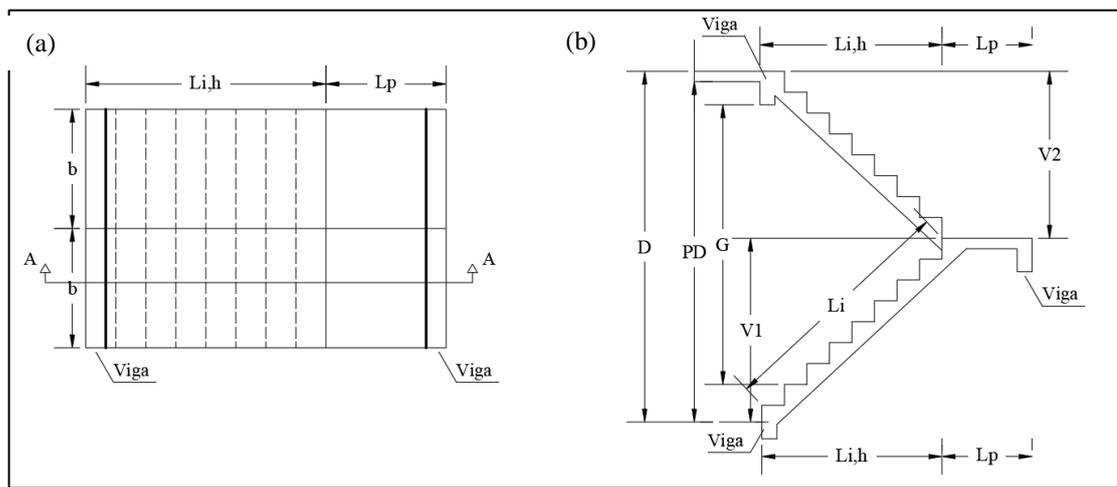
Conforme ilustrado nas figuras 2.10 e 2.11, os dados geométricos normalmente são:

- $L_{i,h}$  = comprimento horizontal do trecho inclinado;
- $L_p$  = comprimento do patamar;
- $b$  = largura da escada;
- $L_i$  = comprimento inclinado do trecho em rampa;
- $V$  = desnível vencido pelo trecho inclinado 1;
- $V_2$  = desnível vencido pelo trecho inclinado 2;
- PD = pé direito;
- $G$  = gabarito;
- $D$  = desnível;
- $D$  = desnível de um lance da escada após os acabamentos:  $D = A - B$ ;
- $A$  = cota no primeiro patamar ou na parte superior da escada;
- $B$  = cota no início ou no patamar inferior da escada;
- $D_e$  = desnível de um lance da escada sem os acabamentos, ou seja, da estrutura –  $D_e = A_1 - B_1$ ;
- $A_1$  = cota no primeiro patamar ou na parte superior da escada sem considerar o revestimento de acabamento;
- $B_1$  = cota no início ou no patamar inferior da escada sem considerar o revestimento de acabamento;
- $r_1$  = espessura do revestimento (considerando base e acabamento) junto ao patamar ou a parte superior da escada;

- $r_2$  = espessura do revestimento considerando base e acabamento) junto ao início ou no patamar inferior da escada;
- $r_d$  = espessura do revestimento nos degraus;

Considera-se em geral, que o revestimento dos degraus tem a mesma espessura que o do nível superior ou inferior. Assim,  $r_d = r_1$  ou  $r_d = r_2$  (Figura 2.11).

**Figura 2.10** – Escada modelo. (a) Planta e (b) corte AA.



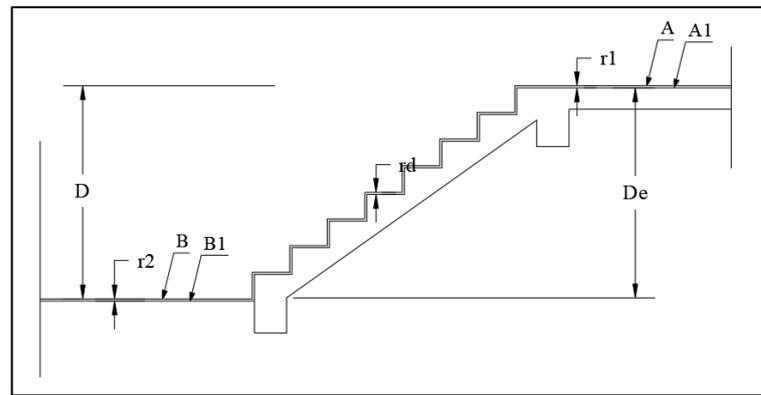
**Fonte:** Autor (2019).

Devem ser considerados três casos:

- a espessura dos três revestimentos é igual:  $r_1 = r_2 = r_d$ ;
- a espessura do revestimento superior é maior:  $r_1 > r_2 = r_d$ ;
- a espessura do revestimento inferior é maior:  $r_2 > r_1 = r_d$ ;

Dadas as cotas A e B, determina-se o desnível a se vencer **D** ( $D = A - B$ ). Posteriormente, determina-se o desnível a vencer da estrutura **De** ( $De = D - (r_1 - r_2)$ ). Como  $r_1 = r_2$  e, portanto, **D** = **De**, determina-se o número de degraus (na verdade de espelhos, pois o número de degraus é sempre este valor subtraído de um) necessários, arbitrando uma altura inicial para o degrau  $hd$ , recomendando o valor 17 cm, sendo  $nd = De/hd$ . Arredonda-se o valor de  $nd$  para o inteiro superior ou inferior e calcula-se o valor final de  $hd$ , que pode conter décimos ou centésimos de cm (Figura 2.11).

**Figura 2.11** – Corte longitudinal.



**Fonte:** Autor (2019).

## 2.4 AÇÕES E CARREGAMENTOS ATUANTES

Antes do dimensionamento de toda e qualquer estrutura, deve-se sempre prever quais ações virão agir sobre a estrutura, conforme a função e o posicionamento do elemento estrutural o qual se deseja dimensionar. Assim, as cargas atuantes nas escadas são agrupadas em cargas permanentes e acidentais. Dentre as cargas permanentes, estão inclusos: o peso próprio, o revestimento e peso de parapeito, caso venha a ter. As cargas acidentais, normalmente, são uniformemente distribuídas sobre a superfície da escada. Além disso, a ABNT NBR 6120 (1980) exige a consideração de cargas acidentais aplicadas ao longo dos parapeitos. A seguir serão descritas as principais ações que são consideradas para escadas em concreto armado.

### 2.4.1 Peso Próprio

O peso próprio da escada é obtido por  $m^2$  de projeção horizontal, ou seja, ele é uma carga vertical, tanto para o patamar, quanto para os trechos inclinados da estrutura.

Em se tratando de concreto armado, a NBR 6118 (2014) recomenda, em seu item 8.2.2, a utilização do peso específico igual a  $2500 \text{ kgf}/m^3$  para efeito de cálculo. Assim, o peso próprio do patamar é dado por:

$$\textit{peso patamar} = 25 \cdot h_p, \textit{kN}/m^2 \quad (2.2)$$

onde  $h_p$  é a espessura da laje do patamar em metros.

No trecho inclinado, deve-se levar em conta o peso dos degraus. Se  $h$  é a espessura da laje situada abaixo dos degraus, sua espessura  $h_1$ , medida na vertical, é:

$$h_1 = h / \cos \alpha \quad (2.3)$$

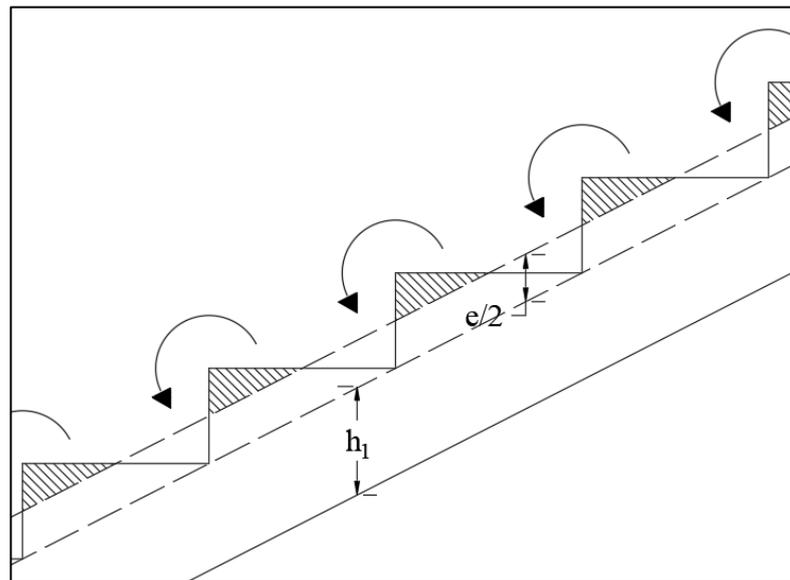
onde  $\alpha$  é o ângulo de inclinação da escada obtido da equação 2.3. Portanto, a espessura média, medida na vertical é dada por:

$$h_m = h_1 + \frac{e}{2} \quad (2.4)$$

e o peso próprio do trecho inclinado é:

$$\text{peso do trecho inclinado} = 25 \cdot h_m, \text{ kN/m}^2 \quad (2.5)$$

**Figura 2.12** – Corte longitudinal.



Fonte: Autor (2019).

## 2.4.2 Revestimento

Como o concreto não é o único material empregado na construção de escadas, se faz necessário a consideração do peso do revestimento sobre a superfície, por metro quadrado de projeção horizontal da escada. O seu valor depende basicamente dos materiais empregados

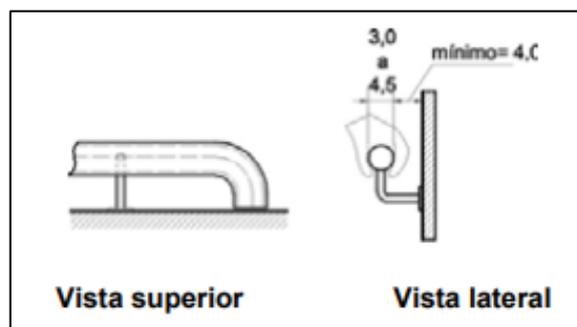
como piso, logo conhecendo o detalhamento dos degraus, pode-se avaliar o peso do revestimento em função do peso específico dos materiais de construção.

Entretanto, de acordo com a prática de projetos, na falta de projeto detalhado dos degraus da escada, pode-se adotar valor entre 0,8 a 1,2 kN/m<sup>2</sup>.

### 2.4.3 Corrimãos e Guarda-corpos

Os corrimãos e guarda-corpos devem ser construídos com materiais rígidos, ser firmemente fixados às paredes, barras de suporte ou guarda-corpos, oferecer condições seguras de utilização. Estes devem ser instalados em ambos os lados dos degraus isolados, das escadas fixas e das rampas e devem ter largura entre 3,0 cm e 4,5 cm, sem arestas vivas. Deve ser deixado um espaço livre de no mínimo 4,0 cm entre a parede e o corrimão. Devem permitir boa empunhadura e deslizamento, sendo preferencialmente de seção circular, conforme Figura 2.13.

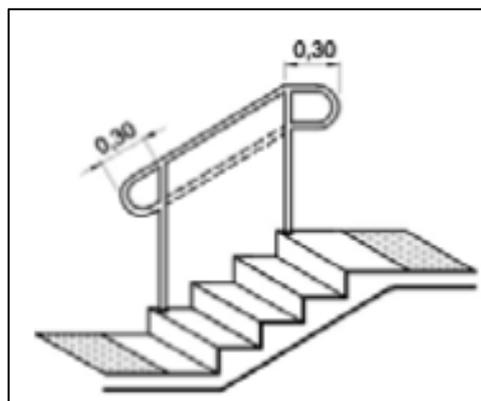
**Figura 2.13** - Empunhadura de corrimão.



**Fonte:** NBR 9050 (2004)

Os corrimãos laterais devem prolongar-se pelo menos 30 cm antes do início e após o término da rampa ou escada, sem interferir com áreas de circulação ou prejudicar a vazão. Em edificações existentes, onde for impraticável promover o prolongamento do corrimão no sentido do caminhamento, este pode ser feito ao longo da área de circulação ou fixado na parede adjacente, conforme Figura 2.14.

**Figura 2.14** - Prolongamento do corrimão.



Fonte: NBR 9050 (2004)

Por não possuir vigas intermediárias, os corrimãos ou guardas-corpos presentes se apoiam na própria escada. Assim o peso desses elementos é considerado com uma carga linear, distribuída ao longo das extremidades. Para esta carga é prática de projeto considerar um valor de 2 kN/m.

#### 2.4.4 Sobrecarga distribuída

Segundo a ABNT NBR 6120:1980, a carga vertical, distribuída uniformemente sobre a superfície da escada, tem os seguintes valores:

- Escadas sem acesso ao público: 2,5 kN/m<sup>2</sup>
- Escadas com acesso ao público: 3,0 kN/m<sup>2</sup>

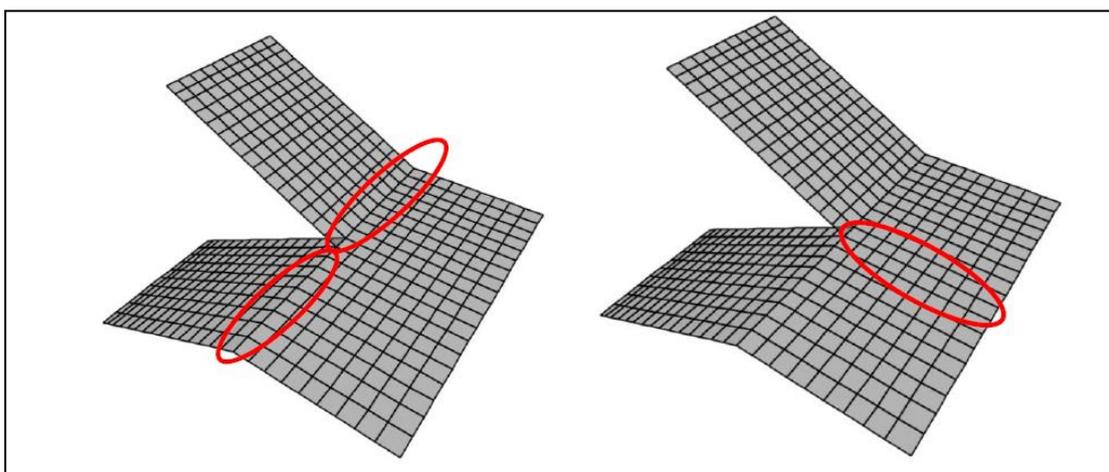
### 2.5 ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL

As escadas autoportantes apresentam um funcionamento típico que em escadas apoiadas não se tornam tão evidentes. Por não possuírem apoio intermediário o elemento apresenta uma tendência a rotação, assim, de acordo com os trabalhos de Cheiss, Glogau & Liebenberg (1966 *apud* KNIJNIK & TAVARES, 1977) e Cusens & Kuang (1966 *apud* KNIJNIK & TAVARES, 1977) o aparecimento das primeiras fissuras é devido a esforços torcionais. Essas fissuras aparecem com uma carga ligeiramente superior ao dobro da carga de projeto e são diagonais localizadas no apoio inferior do lance descendente da escada. Portanto, com o acréscimo de carga aparecem fissuras na intersecção do lance inferior com o

patamar e na junção com o lance superior, sendo a ruptura final ocorrida ao longo da linha de junção entre lances e patamar.

Foi verificado também na análise de Knijnik & Tavares (1977), a partir dos estudos anteriores, que há uma concentração de tensões na chamada bomba da escada, localizada entre faces internas dos lances. Foi constatado o aparecimento de fissuras neste local, aproximadamente perpendiculares à linha de intersecção do patamar com os lances. Essas fissuras tinham abertura considerável junto aos lances e, à medida que se dirigiam à face externa do patamar, iam se reduzindo a quase zero.

**Figura 2.15** – Localização das fissuras: (a) Intersecção dos lances com patamar e (b) bomba da escada.



**Fonte:** Autor (2019)

## 2.6 OBTENÇÃO DE ESFORÇOS EM ESCADAS AUTOPORTANTES

Para a obtenção dos esforços de dimensionamento de uma escada autoportante, algumas considerações, simplificações e métodos de cálculo analíticos ou numéricos podem ser aplicados. Nestes casos, as escadas são tratadas como estruturas compostas por: **(a)** lajes isoladas onde os esforços internos são obtidos através da Teoria de Placas, com resolução da equação diferencial de quarta ordem, não homogênea, de Lagrange, **(b)** método simplificado, proposto por Araújo (2014), **(c)** método simplificado de Knijnik & Tavares (1977) e, **(d)** consideração dos esforços obtidos pelos métodos numéricos.

### 2.6.1 Obtenção de esforços de flexão pela teoria de Kirchhoff

Os momentos fletores podem ser basicamente obtidos por método elástico por meio da teoria clássica de Placas Delgadas (Teoria de Kirchhoff), que supõe material homogêneo, isotrópico, elástico, linear e desconsidera a deformabilidade por esforço cortante.

Considerando o equilíbrio de forças e momentos e as relações entre deslocamentos e deformações obtém-se a equação fundamental que rege o problema de placas: a equação diferencial de quarta ordem, não homogênea, de Lagrange.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (2.6)$$

Em que:

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ : rigidez flexional da placa;

$w$ : função de deslocamento vertical;

$P$ : carga total uniformemente distribuída;

$D$ : rigidez da placa à flexão;

$E$ : módulo de elasticidade;

$h$ : espessura da placa;

$\nu$ : coeficiente de Poisson.

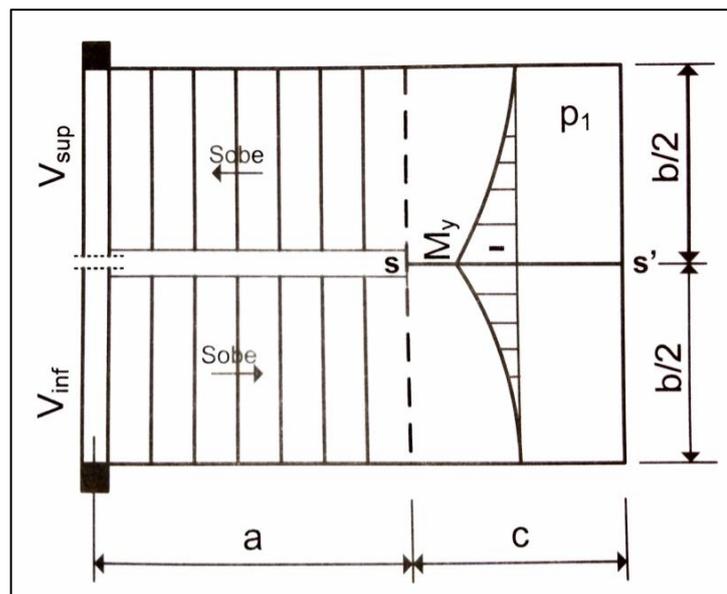
Vale salientar que o processo de integração da Equação de Lagrange só pode ser aplicado a alguns poucos casos de formas de placas e condições de contorno (GIONGO, 2007), sendo recorrente o uso de métodos numéricos como o dos elementos finitos, diferenças finitas e de elementos de contorno, ou através de modelo de analogia de grelha.

É oportuno lembrar que o uso de diferenças finitas para a integração numérica foi bastante utilizado para a resolução da equação de Lagrange, sobretudo antes da década de 70 onde havia uma limitação de computadores e grandes processadores. Nesse período surgiram as elaborações de tabelas, tais como as de Czerny e Bares, posteriormente adaptadas por Pinheiro (2007), as quais auxiliam nos cálculos de momentos fletores em lajes.

## 2.6.2 Obtenção de esforços de flexão pelo método simplificado de Araújo (2014)

A partir da análise de Araújo (2014), para projetos de escadas autoportantes, é possível realizar um cálculo simplificado para a obtenção de esforços de flexão. De acordo com o autor, os momentos fletores médios no patamar, segundo a direção transversal possuem a variação indicada na Figura 2.16.

**Figura 2.16** - Momentos transversais médios no patamar.



**Fonte:** Araújo (2014).

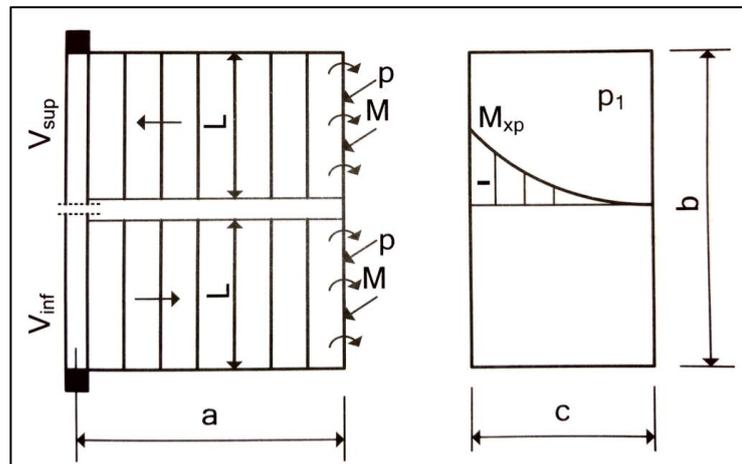
Para efeito de cálculo desses momentos, pode-se considerar que o patamar seja uma laje independente dos lances, possuindo um engaste perfeito ao longo da linha  $s-s'$ . Assim o momento fletor  $M_y$ , por unidade de comprimento, vale:

$$M_y = \frac{p_1 \cdot b^2}{8}, kNm/m \quad (2.7)$$

Contudo, para o efeito de cálculo dos momentos fletores segundo a direção longitudinal da escada, admite-se que o patamar seja uma laje nos dois lances (Figura 2.17). Assim, o momento negativo por unidade de comprimento  $M_{xp}$ , é dado por:

$$M_{xp} = \frac{p_1 \cdot c^2}{2}, kNm/m \quad (2.8)$$

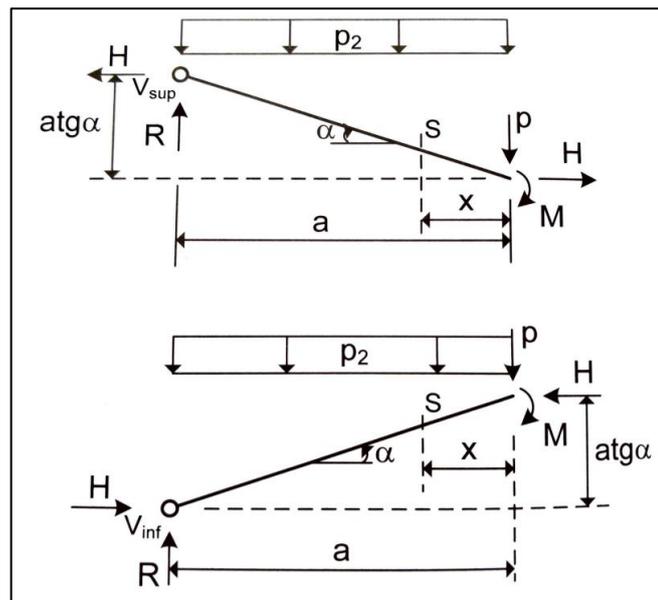
**Figura 2.17** - Consideração do patamar engastado nos lances.



Fonte: Araújo (2014).

Para conseguir obter as reações de apoio, cada lance da escada pode ser analisado como uma viga inclinada, rotulada ou engastada nas vigas de piso ( $V_{inf}$  e  $V_{sup}$ ). O modelo apresentado na Figura 2.18, considera que os lances sejam rotulados nas vigas de piso. As forças horizontais  $H$  são necessárias para manter os lances em equilíbrio.

**Figura 2.18** - Carregamentos nos lances isolados.



Fonte: Araújo (2014).

Os esforços  $p$  e  $M$  são provenientes da parcela de contribuição do patamar. Assim, resolvendo as barras da Figura anterior, obtêm-se as reações  $R$  e  $H$  na forma:

$$R = p + p_2 \cdot a, \text{ kN/m} \quad (2.9)$$

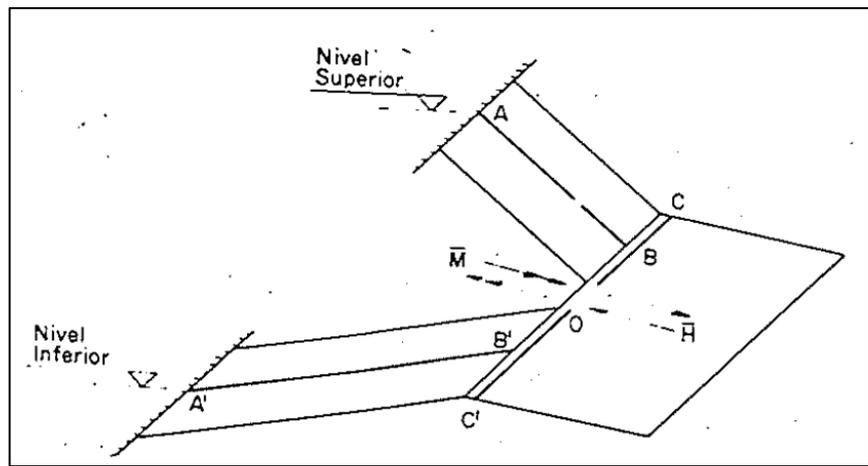
$$H = \frac{1}{a \cdot \text{tg}\alpha} \left( M + p \cdot a + \frac{p_2 \cdot a^2}{2} \right), \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (2.10)$$

### 2.6.3 Obtenção de esforços pelo método simplificado de Knijnik e Tavares (1977)

A partir das premissas de Cusens & Kuang (1966 *apud* KNIJNIK E TAVARES, 1977), ou seja, uma análise da escada através da aproximação, substituindo um sistema espacial de lajes pelo de uma estrutura de barras espacial, Knijnik & Tavares (1977) desenvolveram um método de análise para escadas autoportantes.

O esquema de cálculo encontra-se representado na Figura 2.19. As grandezas hiperestáticas escolhidas foram o momento fletor  $\overline{M}$  e o esforço  $\overline{H}$  no ponto O, ponto médio do sistema A B O B' A'. Mediante a aplicação destas forças uma das partes em que a estrutura fica dividida é garantida a manutenção do estado equilibrado e pode-se trabalhar com um sistema estaticamente determinado.

Figura 2.19 - Modelo analítico



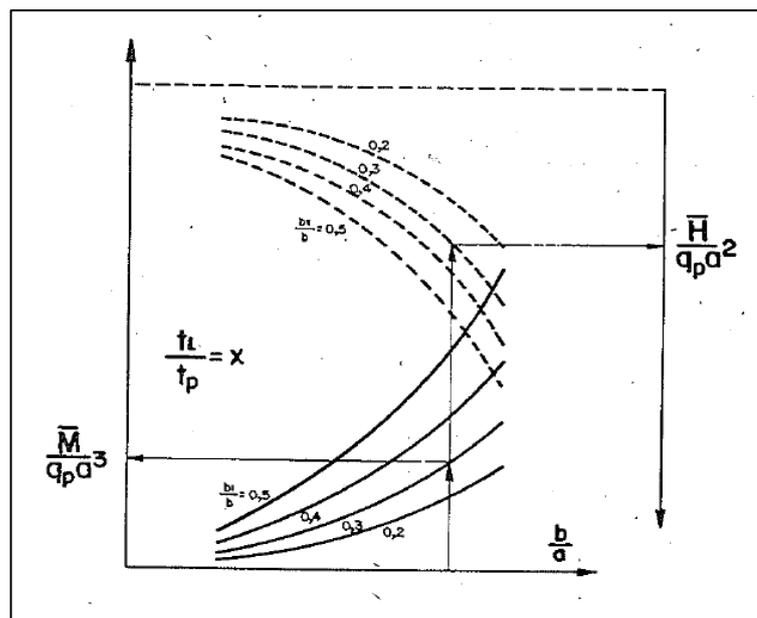
Fonte: Knijnik & Tavares (1977).

A determinação de grandezas hiperestáticas, indispensável para que sejam explicitadas as solicitações internas e reações, deve ser efetuada através da aplicação do teorema de Castigliano a uma das metades, a superior.

Segundo Knijnik e Tavares (1977), em termos de aplicação prática, certas simplificações podem ser adotadas, oriundas de análise e comparação de uma série de escadas deste tipo já projetadas por outros autores. Tais simplificações tornam menor número de variáveis envolvidas no processo, facilitando assim, sobremaneira, o cálculo propriamente dito.

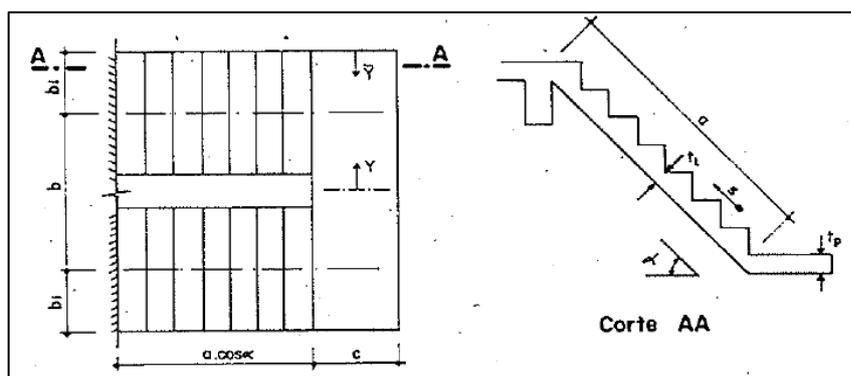
Mediante tal artifício, é possível determinar famílias de curvas que dão diretamente os valores de  $\frac{\bar{M}}{q_p \cdot a^3}$  e  $\frac{\bar{H}}{q_p \cdot a^2}$  em função dos parâmetros  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{b_1}{b}$  e  $\frac{t_l}{t_p}$  (Figura 2.20). A Figura 2.21 mostra um corte de uma escada autoportante.

**Figura 2.20** – Curvas para obtenção dos esforços.



Fonte: Knijnik & Tavares (1977).

**Figura 2.21** – Corte de uma escada autoportante genérica



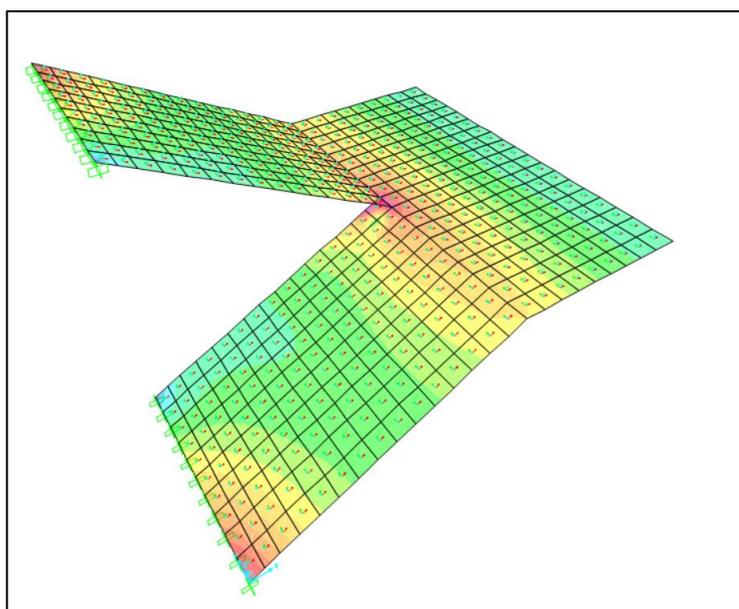
Fonte: Knijnik & Tavares (1977).

## 2.6.4 Método dos elementos finitos

Segundo Hambly (1991 *apud* REBOUÇAS, 2017), o Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico que consiste na discretização de um meio contínuo em uma malha de elementos em quantidade e dimensões definidas, de modo que sejam mantidas as propriedades do meio original. Este método surgiu como uma evolução da análise matricial de estruturas com uma formulação inicial voltada para a engenharia aeronáutica, como por exemplo, para análise de distribuições de tensões em chapas de asas de aviões. Atualmente, é a ferramenta com maior aplicabilidade em problemas de engenharia em geral, abrangendo desde análises de transferência de calor até escoamento de fluidos. A análise por MEF tem como objetivo obter a resposta de uma determinada estrutura com condições de contorno definidas submetidas a certo conjunto de cargas.

No contexto atual, o MEF tem sido largamente utilizado em diversas pesquisas no ramo da engenharia, com o auxílio de programas computacionais voltados para este fim. A Figura 2.22 mostra a utilização do Método dos Elementos Finitos na modelagem e obtenção de esforços em escadas autoportantes.

**Figura 2.22** – Modelagem via MEF de escada autoportante



**Fonte:** Autor (2019).

## 2.7 PESQUISAS REALIZADAS

Oliveira (2008) descreveu a metodologia dos processos de cálculo de escadas e analisou o comportamento estrutural de dois modelos de escadas em concreto armado, sob a ótica dos momentos fletores. Um dos modelos foi uma escada apoiada nos quatro lados. Já o outro modelo foi de uma escada autoportante com patamar em balanço. Na análise da escada apoiada foram seguidos os processos simplificados de cálculo utilizando as tabelas de Bares, adaptadas por Pinheiro (1993). No processo de análise do modelo autoportante, foi utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF) através do programa ANSYS, com elemento de casca (*shell element*). As conclusões do trabalho indicaram que escadas autoportantes apresentaram esforços bem maiores quando comparadas às escadas apoiadas em vigas. Entretanto, a não necessidade de elementos estruturais intermediários e adjacentes resultou em um processo construtivo mais ágil. Já o modelo de escada apoiado, por apresentar menores momentos fletores, necessitou de espessuras menores de lajes que compõe os lances e patamares e uma menor quantidade de armadura.

Grave (2013) elaborou um algoritmo para o cálculo de escadas autoportantes de concreto armado. Para isso foi necessário definir um modelo que representasse a estrutura e seu comportamento adequadamente. Assim, através de um modelo de barras e consideração de cargas, este foi resolvido pelo método dos deslocamentos, por análise matricial de estruturas de barras. Todo processo de cálculo foi sistematizado e transformado posteriormente em uma linguagem de programação, para então verificação do *software*. O autor percebeu que a maior dificuldade no cálculo desse tipo de estrutura foi encontrar as solicitações atuantes. Contudo, após alguns testes com o programa já concluído, observou-se que quando se afastava lances da escada uns dos outros, aumentando assim o comprimento do patamar intermediário, a torção nos lances aumentava. Verificou-se também que quando se aumentava o comprimento dos lances, deixando o balanço maior, o momento negativo no engaste também aumentava.

Hussain (2001) desenvolveu dois modelos de equações empíricas para três casos de carregamento para escadas autoportantes. Dez modelos de escadas foram analisados fazendo variar algumas propriedades geométricas. A resposta da estrutura foi obtida resolvendo equações analíticas propostas e através da utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF). Ao serem comparados os resultados obtidos com as equações analíticas propostas e a modelagem numérica em elementos finitos, percebeu-se uma variação menor que 5% nos esforços cortantes obtidos para oito escadas analisadas, enquanto, que para dois casos a

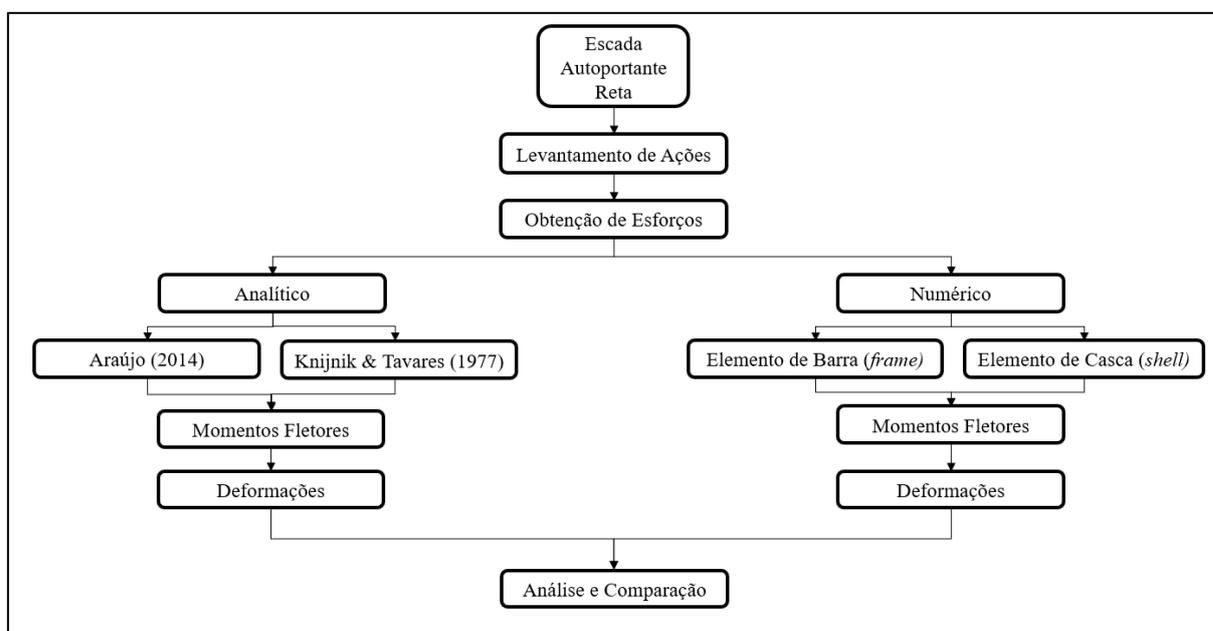
variação foi maior que 5 %. Mesmo assim, todas as variações para cortante foram menores que 7%. No caso de momento fletor, houve variações superiores, porém dentro dos limites aceitáveis, em torno de 17%. Contudo, a maioria dos casos se manteve entre 10% e 12%.

## CAPÍTULO 3 - CARACTERIZAÇÃO E MODELAGEM DAS ESCADAS

### 3.1 INTRODUÇÃO

No desenvolvimento deste trabalho foi seguida uma metodologia, dividida em três etapas principais, sendo elas: **(a)** definição da geometria da escada, considerando seu sistema, e da espessura, **(b)** obtenção dos esforços internos solicitantes por modelos analíticos e numéricos e, por fim, **(c)** as análises e comparações no ELS. Estas etapas podem ser visualizadas no fluxograma apresentado na Figura 3.1.

**Figura 3.1** – Fluxograma de desenvolvimento da pesquisa.



**Fonte:** Autor (2019)

O estudo constitui na comparação de quatro tipos de métodos de análise, sendo os dois primeiros analíticos e os outros dois métodos numéricos. Para cada um deles, foi inicialmente definida a geometria (comprimento, altura, largura) a partir de um projeto já existente, adotando somente a espessura variável. Posteriormente, foram levantadas as ações atuantes, para que se pudessem obter os esforços existentes de flexão e deformações imediatas considerando duas formas: **(a)** através de método analítico e, **(b)** por meio de método numérico, sendo neste último utilizando elementos de barra (*frame element*) e elementos de casca (*Shell element*). Assim, a partir dos valores encontrados, procedeu-se a análise e

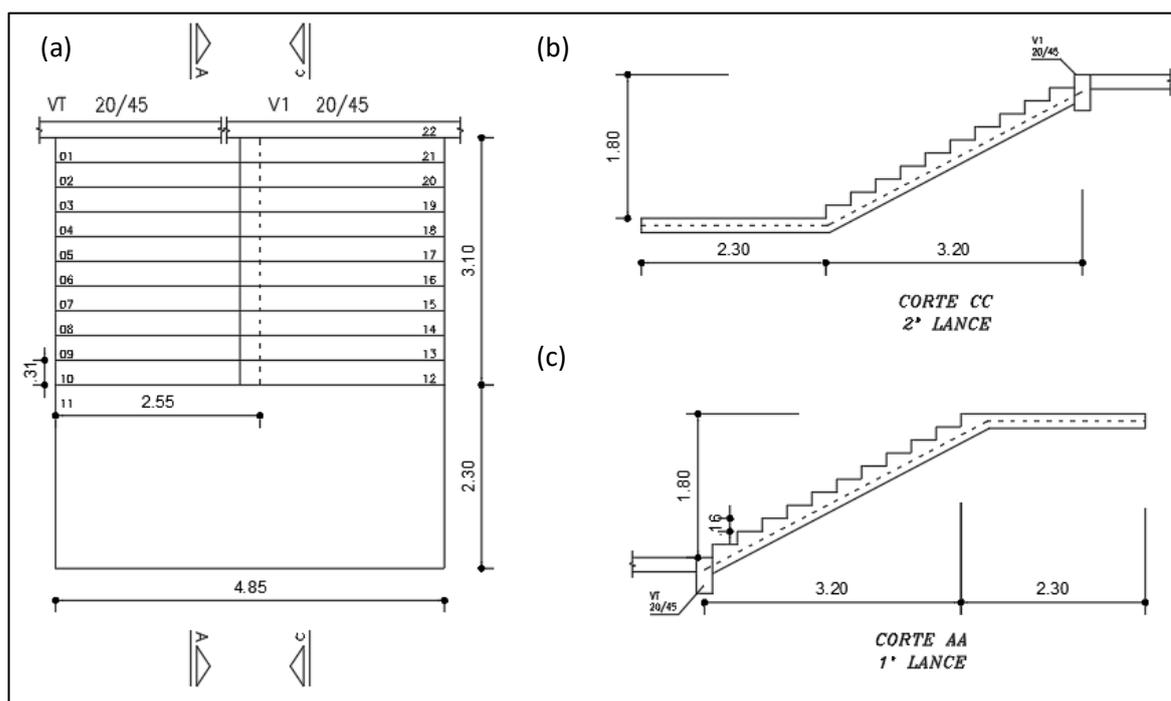
comparação de resultados frente aos diversos modelos e da variação na espessura da laje da escada.

Para as escadas foi considerada um classe de agressividade ambiental (CAA) II (ambiente de agressividade moderada), exigindo, assim, um concreto com resistência mínima à compressão de 25 MPa e cobrimento mínimo de 25 mm, porém foi adotado uma resistência de 30 MPa e cobrimento de 30 mm, respeitando as condições de norma.

### 3.2 GEOMETRIA

Os modelos de escada estudados nesse trabalho foram concebidos a partir de um projeto base de uma escada autoportante desenvolvida pela Superintendência de Infraestrutura (INFRA), na ampliação do Restaurante Universitário da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN).

**Figura 3.2** – Planta de forma da escada em análise. (a) Planta, (b) corte do lance superior e (c) corte do lance inferior.



Fonte: Autor (2019)

A estrutura de referência é uma escada autoportante em U de superfície inferior reta, composta por dois lances adjacentes e sobrepostos, apoiada somente nos pavimentos inferior e

superior. Apresenta seus degraus em concreto, estes com espelho e piso de dimensões iguais a  $e = 31$  cm e  $p = 16,36$  cm.

Assim, a partir dessa geometria estabelecida, foram determinadas algumas condições de projeto, estabelecendo três grupos de modelos de escadas a serem analisadas. O primeiro grupo se refere aos métodos analíticos, mais precisamente aos métodos simplificados de Araújo (2014) e Knijnik & Tavares (1977). O segundo e terceiro grupo são compostos, respectivamente, pelos modelos em MEF formados por elementos de barra e elementos de casca. Nos grupos referentes aos modelos numéricos, foram definidas variações nas vinculações do apoio, sendo estas apoiadas, engastadas e apoiadas com continuidade.

Além das mudanças nas condições de apoio, para cada modelo estabelecido também houve uma variação na espessura. Foram determinadas três dimensões padrão de 12 cm, 18 cm e 25 cm, apresentando uma variação média de 30 %. Com isso, foram caracterizados três grupos de análise a parte da geometria adotada, condições de apoio e método de análise.

Portanto, pode-se classificar os modelos trabalhados neste estudo através do seguinte nomenclatura, apresentadas no Quadro 3.1.

- **MAA:** Escada Autoportante em Modelo Analítico de Araújo (2014);
- **MAK:** Escada Autoportante em Modelo Analítico de Knijnik & Tavares (1977);
- **MEBA:** Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Barra Apoiado;
- **MEBE:** Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Barra Engastado;
- **MEBC:** Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Barra com Continuidade;
- **MECA:** Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Casca
- **MECE:** Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Casca Engastado;
- **MECC:** Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Casca com Continuidade.

**Quadro 3.1** – Modelos Estudados.

GRUPOS	MODELOS	TIPOS	MODELAGEM	ESPESSURA (h)
G1	MAA12	Araújo (2014)	Modelo Analítico	12
	MAA18			18
	MAA25			25
	MAK12	Knjinič (1977)		12
	MAK18			18
	MAK25			25
G2	MEBA12	Apóio	Modelo com Elemento de Barra	12
	MEBA18			18
	MEBA25			25
	MEBE12	Engaste		12
	MEBE18			18
	MEBE25			25
	MEBC12	Apóio com Continuidade		12
	MEBC18			18
	MEBC25			25
G3	MECA12	Apóio	Modelo com Elemento de Casca	12
	MECA18			18
	MECE25			25
	MECE12	Engaste		12
	MECE18			18
	MECE25			25
	MECC12	Apóio com Continuidade		12
	MECC18			18
	MECC25			25

Fonte: Autor (2019).

### 3.3 LEVANTAMENTO DAS AÇÕES

#### 3.3.1 Peso Próprio

A obtenção do peso próprio se deu a partir das Equações 2.2 e 2.5, anteriormente apresentada. Entretanto, neste caso ele foi dependente da espessura adotada e do elemento analisado, no qual  $g_1$  será a carga no patamar e  $g_2$  no lance. Portanto, conforme descrito no Quadro 3.2, tem-se:

**Quadro 3.2** – Peso próprio em função da espessura.

Peso Próprio		
h = 12 cm		
g <sub>1</sub>	3,00	kN/m <sup>2</sup>
g <sub>2</sub>	5,44	kN/m <sup>2</sup>
h = 18 cm		
g <sub>1</sub>	4,50	kN/m <sup>2</sup>
g <sub>2</sub>	7,13	kN/m <sup>2</sup>
h = 25 cm		
g <sub>1</sub>	6,25	kN/m <sup>2</sup>
g <sub>2</sub>	9,11	kN/m <sup>2</sup>

Fonte: Autor (2019).

### 3.3.2 Revestimento

Para a carga de revestimento foi adotado o valor de 1 kN/m<sup>2</sup> em todos modelos analisados, visto que satisfaz com segurança os materiais normalmente utilizados para esta finalidade.

### 3.3.3 Guarda-corpo e Alvenaria

O projeto da escada de referência prevê um possível guarda-corpo ou alvenaria em seu perímetro externo. Entretanto, como simplificação de projeto esta carga linear foi distribuída por toda área da escada como um carregamento uniformemente distribuído em área. Para tanto, foi adotada uma carga de 2 kN/m<sup>2</sup> para guarda-corpo e alvenaria.

### 3.3.4 Sobrecarga de utilização

Como mencionado anteriormente, no item 2.4.4, a norma NBR 6120 (1980) estabelece para uma escada com acesso ao público um carregamento acidental de 3 kN/m<sup>2</sup>, sendo este o utilizado em projeto.

### 3.4 MODELO ANALÍTICO

O cálculo dos esforços nas escadas autoportantes retas foi realizado a partir dos métodos analíticos simplificados de Araújo (2014) e Knijnik & Tavares (1977), como apresentado nos itens 2.6.2 e 2.6.3.

A partir do método de Araújo (2014), é possível obter os momentos fletores máximos atuantes nos lances e patamares, bem como as reações horizontais e verticais. Para tanto, é necessário calcular inicialmente as cargas distribuídas sobre os lances e patamares,  $p_1$  e  $p_2$  respectivamente, visto que as espessuras médias das lajes são diferentes. Assim, a partir da geometria estabelecida, aplicam-se as equações e se obtém o resultado. Vale salientar que os lances são analisados como uma viga inclinada, e o tipo de vinculação com os elementos de apoio no piso determinam os esforços que apareceram. Para esta análise, foram considerados apoios nos pisos, visto que os momentos fletores negativos surgirão enquanto a escada estiver no estádio I, porém é necessária a colocação das armaduras de ligação para ancorar a escada no piso superior, para os esforços de tração  $N_1$  existente.

Já através do método de Knijnik & Tavares (1977), são obtidos somente o momento fletor e a força horizontal no centro do patamar. Ao contrário do modelo de Araújo (2014), em que não se faz necessário o engastamento dos lances nos pisos, este método simplificado mediante a aplicação das ações a cada uma das partes em que a estrutura fica dividida, é garantida a manutenção do estado equilibrado e pode-se trabalhar com um sistema estaticamente determinado.

### 3.5 MODELO NUMÉRICO

A obtenção dos momentos fletores nas escadas autoportantes foi realizada com o auxílio do programa de análise estrutural SAP2000<sup>®</sup> considerando o regime linear elástico e as ações características visto que o objetivo da pesquisa era comparação percentual de esforços e deslocamentos, e não o dimensionamento em si das estruturas. Para tanto, os três tipos de escada foram modelados conforme os dados apresentados nos tópicos a seguir.

### 3.5.1 Definição dos materiais

Em todos os modelos foram utilizadas as mesmas características de material, de acordo com o que é indicado no item 8.2 da ABNT NBR 6118 (2014). As propriedades do material concreto armado adotadas foram:

- Peso específico: 25 kN/m<sup>3</sup>;
- Resistência à compressão: 30 MPa;
- Módulo de elasticidade: 26.838,41 MPa - calculado conforme o item 8.2.8 da ABNT NBR 6118 (2014), considerado o granito como agregado graúdo;
- Coeficiente de dilatação térmica: 10<sup>-5</sup>/°C;
- Coeficiente de Poisson: 0,2.

### 3.5.2 Definição dos elementos

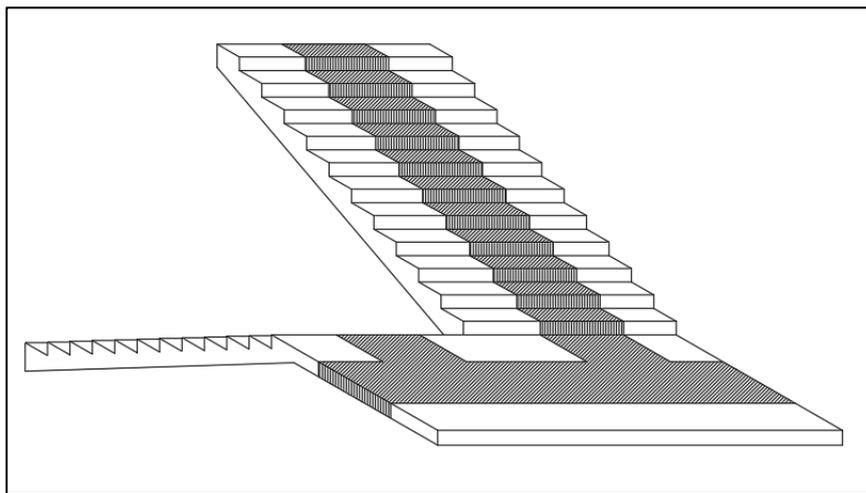
No trabalho desenvolvido, optou-se por modelar utilizando dois tipos de elementos no MEF: (1) o elemento de barra, também conhecido como *frame* e (2) elementos de casca, *shell*. Essa variação foi necessária para analisar o comportamento da estrutura à medida que se alterava a modelagem de um modelo simplificado de pórtico ou grelha, utilizando o elemento *frame*, para um elemento mais complexo de casca, *shell*, que possibilita, em princípio, uma melhor obtenção dos esforços.

O elemento *frame* é utilizado para modelar elementos estruturais com barras (vigas, pilares, pórticos, etc.). Para a devida consideração das ríjezas dos elementos e do correto peso próprio do modelo, é necessário se fazer a definição das propriedades das barras do modelo. Da mesma forma que é necessária a definição das propriedades das barras, também é necessário fazer a definição dos elementos *shell* para a correta modelagem do elemento estrutural. O elemento *shell* é utilizado para a modelagem de elementos laminares, como placas, cascas e lajes, gerando uma malha de elementos finitos definida pelo usuário. Nas modelagens, as seções modeladas como barras e cascas foram caracterizadas pelo material, com as propriedades apresentadas no item anterior, e pelas espessuras, conforme o Quadro 3.1 deste trabalho.

### 3.5.2.1 Modelagem com elementos de barra (*frame element*)

As escadas foram modeladas primeiramente com elementos de barra (*frame*). Para construção do modelo, as barras foram posicionadas no plano médio das lajes da escada, obtido através da planta de forma. A seção transversal do elemento de barra foi definida a partir da altura real da estrutura e com comprimento de base unitário, visto que os métodos analíticos e de casca fornecem esforços por metro. Portanto, para efeito comparativo se faz necessário essa condição.

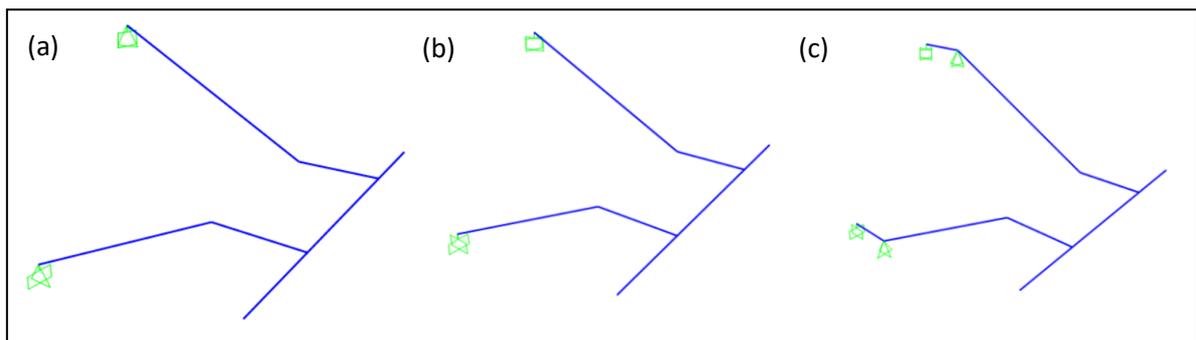
**Figura 3.3** – Faixa de um metro estabelecida para seção do modelo de barra.



**Fonte:** Autor (2019).

Ao todo, nove tipos de modelos foram propostos com elementos de barra. Primeiramente variando sua vinculação entre apoiado, engastado e apoiado com continuidade, e para cada tipo de vinculação existiam três espessuras de laje.

**Figura 3.4** – Modelo com elementos de barra: (a) apoiado, (b) engastado e (c) apoiado com continuidade.



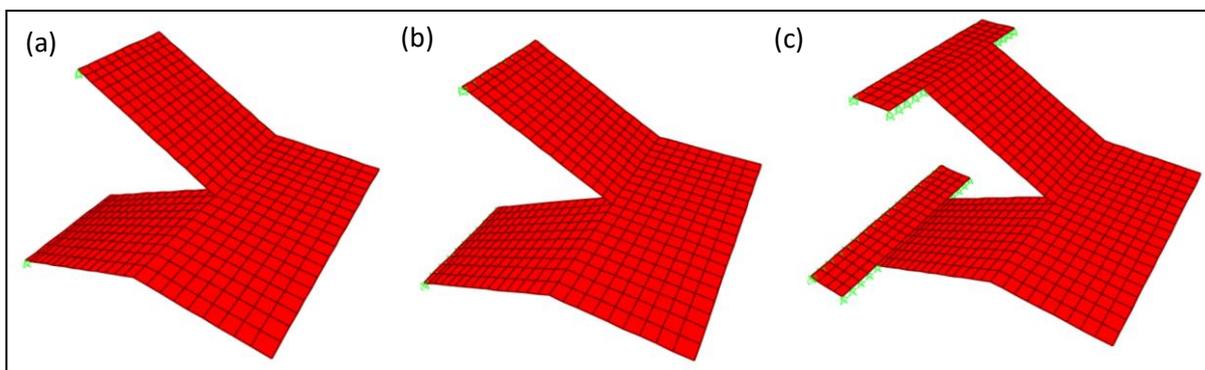
**Fonte:** Autor (2019).

Os carregamentos foram adicionados aos elementos conforme os valores previstos no item 3.4 deste trabalho. Todas as ações foram inseridas como carregamentos lineares uniformemente distribuídos.

### 3.5.2.2 Modelagem com elementos de casca (*shell element*)

Em segunda análise, as escadas foram modeladas como elementos de casca (*shell*), visto que estes se assemelham mais as lajes que as compõem. A geometria de cada elemento foi considerada como consta na planta de forma da escada base, resultando em um prisma com as dimensões passando pelos planos médios das lajes. Todos os elementos planos modelados foram discretizados em uma malha com dimensões suficientes para a obtenção de resultados satisfatórios, como mostrado na Figura 3.5. Nos patamares e lances foram utilizados elementos de quatro nós e com dimensões de aproximadamente 25 cm.

**Figura 3.5** – Modelo com elementos casca: (a) apoiado, (b) engastado e (c) apoiado com continuidade.



**Fonte:** Autor (2019).

Os carregamentos foram adicionados aos elementos conforme os valores previstos no item 3.3 deste trabalho. Todas as ações foram inseridas como carregamentos uniformes distribuídos em área.

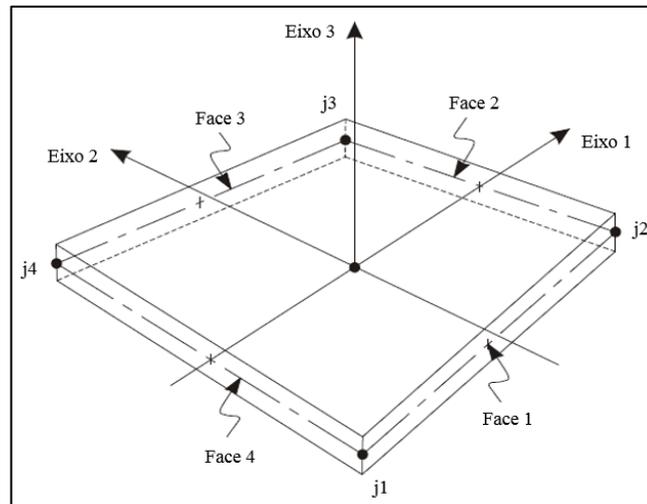
### 3.5.3 Obtenção dos esforços

A análise estrutural das escadas foi feita em regime elástico-linear e, portanto, desconsiderando a fissuração ou plastificação do concreto. Após a análise realizada pelo programa, tornou-se possível obter os esforços de flexão e deformações. Os esforços de flexão

foram coletados em pontos das cascas onde ocorreram os máximos valores positivos e negativos, em cada direção.

A Figura 3.6 mostra o sistema de eixos locais que é adotado pelo programa para um elemento de casca de 4 nós.

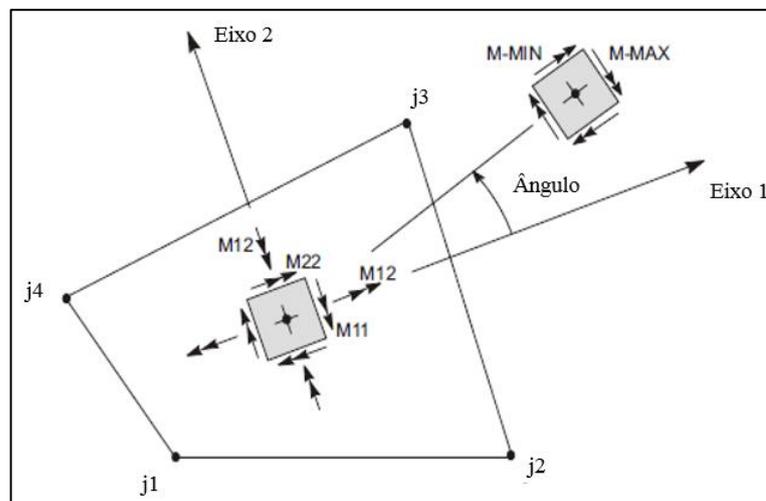
**Figura 3.6** – Eixos locais de um elemento de casca de 4 nós.



Fonte: Adaptado de *CSI Analysis Reference Manual* (2017).

Os esforços internos são resultantes da integração das tensões na espessura do elemento, os quais são forças e momentos por unidade de comprimento em cada ponto da superfície média do elemento. A Figura 3.7, a seguir, mostra as convenções de sinal para os esforços internos de flexão e momentos de torção.

**Figura 3.7** – Esforços internos de flexão e torção no elemento de casca.



Fonte: Adaptado de *CSI Analysis Reference Manual* (2017).

Sendo:

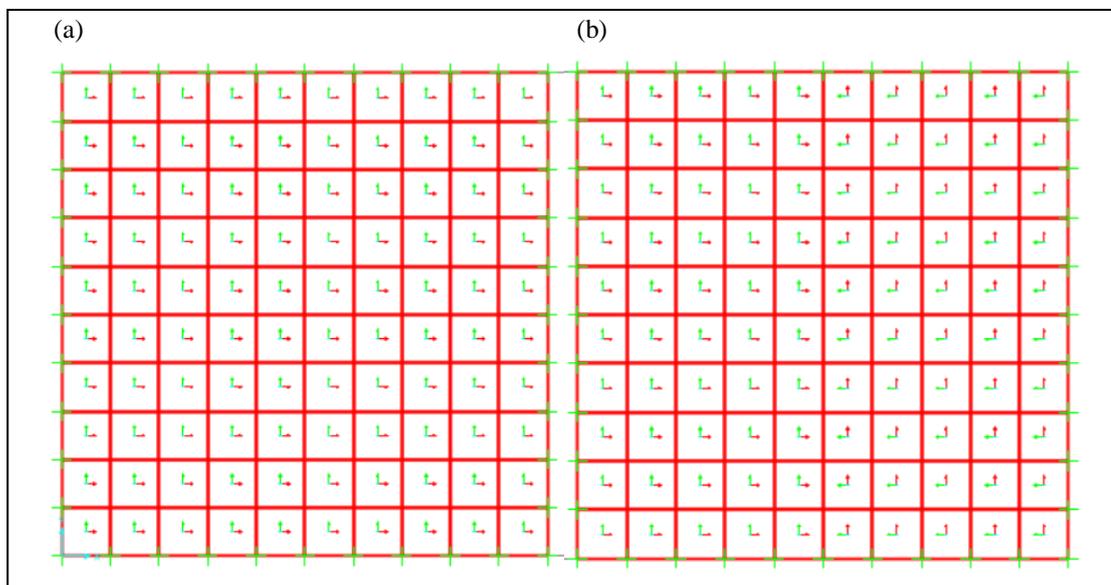
M11: Momento por unidade de comprimento atuando à meia altura do elemento nas faces 2 e 4 em torno do eixo 2;

M22: Momento por unidade de comprimento atuando à meia altura do elemento nas faces 1 e 3 em torno do eixo 1;

M12: Momento por unidade de comprimento atuando à meia altura do elemento nas faces 2 e 4 em torno do eixo 1 e nas faces 1 e 3 em torno do eixo 2.

É de grande importância a compatibilidade dos eixos locais dos elementos analisados, visto que o *software* no processo de fornecimento de resultados não lhe apresenta nos eixos globais, mas sim nos locais. Portanto, esses devem estar configurados em direções comuns.

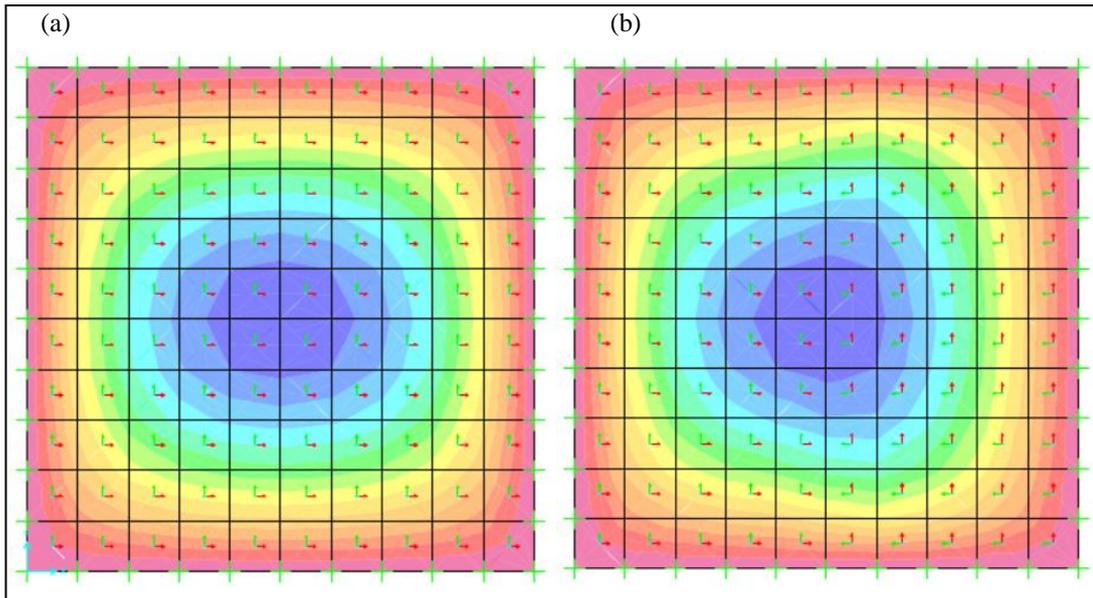
**Figura 3.8** – Lajes formadas por elementos de placa (a) com eixos locais alinhados e (b) eixos trocados.



**Fonte:** Autor (2019).

Para exemplificar como a alteração dos eixos locais é importante para a interpretação dos resultados, foram modeladas duas lajes quadradas de mesmas características e geometrias, porém na segunda laje metade de seus elementos de placa tiveram seus eixos locais rotacionados, como mostrado na Figura 3.8. Portanto, ao analisar os momentos fletores nos dois casos, pode-se perceber uma alteração em sua configuração visto que os esforços mapeados são distintos conforme mostra a Figura 3.9.

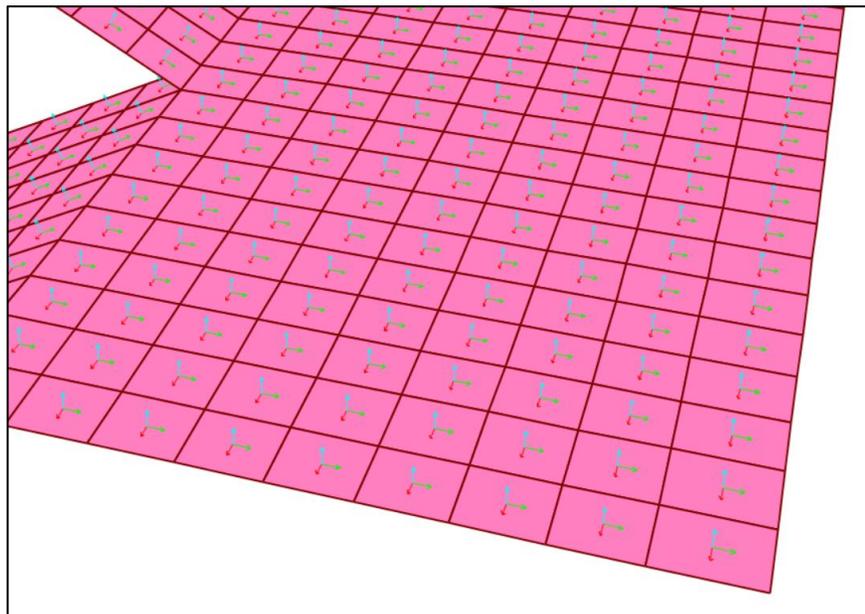
**Figura 3.9** – Momento fletor (a) com eixos locais alinhados e (b) eixos trocados



Fonte: Autor (2019).

Assim, os eixos locais dos elementos de casca foram dispostos de tal forma que, para obtenção dos esforços de flexão, nos lances se observou no momento  $M_{22}$  e para o patamar foi utilizado o  $M_{11}$ .

**Figura 3.10** – Eixos locais dos elementos de casca.



Fonte: Autor (2019).

## CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo destina-se a apresentação dos resultados obtidos, bem como as principais das análises destes resultados. Algumas informações, como das espessuras das lajes, das ações atuantes ou dos esforços, as quais não serão apresentadas nesta seção, podem ser vistas nas imagens apresentadas nos apêndices. Para efeito comparativo, na análise seccional local foi utilizada a seguinte equação para determinação do percentual de variação:

$$variação = \frac{valor\ analisado - valor\ de\ comparação}{valor\ de\ comparação} \cdot 100 \quad (4.1)$$

### 4.1 MOMENTOS FLETORES

A partir dos cálculos analíticos e da modelagem numérica, obtiveram-se os valores de momentos fletores nas interfaces lance-piso ( $m_{lp}$ ), lance-patamar ( $m_{lpa}$ ), região central do patamar ( $m_{pa}$ ) entre lances e nos lances ( $m_l$ ). Para os modelos compostos por elementos de casca, os resultados foram coletados em um ponto médio da região. A seguir, nos Quadros 4.1 a 4.3, são mostrados os valores desses momentos encontrados e utilizados para as análises posteriores.

**Quadro 4.1** – Valores de momentos fletores para os modelos analíticos.

MODELO	$m_{lp}$ (kN.m/m)	$m_{lpa}$ (kN.m/m)	$m_l$ (kN.m/m)	$m_{pa}$ (kN.m/m)
MAA12	-	-23,81	5,51	-26,46
MAA18	-	-27,77	6,19	-30,87
MAA25	-	-32,40	7,00	-36,02
MAK12	-	-	-	-20,52
MAK18	-	-	-	-23,93
MAK25	-	-	-	-27,93

**Fonte:** Autor (2019).

**Quadro 4.2** – Valores de momentos fletores para os modelos numéricos com elementos de barra.

MODELO	$m_{lp'}$ (kN.m/m)	$m_{lpa'}$ (kN.m/m)	$m_l$ (kN.m/m)	$m_{pa'}$ (kN.m/m)
MEBA12	-	-25,10	4,05	-13,57
MEBA18	-	-29,28	4,41	-19,28
MEBA25	-	-34,16	4,85	-24,92
MEBE12	-40,57	-25,10	-16,23	-11,56
MEBE18	-53,83	-29,28	-22,50	-15,66
MEBE25	-73,78	-34,16	-32,04	-19,18
MEBC12	-21,74	-25,10	-6,92	-11,33
MEBC18	-35,04	-29,28	-13,10	-15,11
MEBC25	-53,15	-34,16	-21,75	-18,53

Fonte: Autor (2019).

**Quadro 4.3** – Valores de momentos fletores para os modelos numéricos com elementos de casca.

MODELO	$m_{lp'}$ (kN.m/m)	$m_{lpa'}$ (kN.m/m)	$m_l$ (kN.m/m)	$m_{pa'}$ (kN.m/m)
MECA12	-	-20,22	7,19	-21,11
MECA18	-	-22,86	8,13	-27,49
MECA25	-	-26,75	9,23	-32,57
MECE12	-16,07	-20,89	-3,18	-18,39
MECE18	-19,98	-23,77	-5,36	-23,86
MECE25	-25,84	-27,78	-7,12	-27,11
MECC12	-7,35	-20,54	1,92	-19,93
MECC18	-11,04	-23,38	0,40	-25,38
MECC25	-15,76	-27,45	-1,52	-29,35

Fonte: Autor (2019).

#### 4.1.1 Análise comparativa entre o método analítico de Araújo (2014), modelo numérico com elementos de barra apoiado e modelo numérico com elementos de casca apoiado

Para esta análise comparativa foram escolhidos o método simplificado de Araújo (2014) e os modelos em MEF com elementos de barra e casca apoiados, visto que este método analítico utiliza um modelo estrutural de vinculação rotulada, não apresentando momentos fletores negativos no apoio. Portanto para efeitos de comparação, esses são os modelos que mais se aproximam entre si.

Abaixo serão apresentados os resultados obtidos para os momentos fletores em cada região da escada com a variação de espessura da laje.

**Quadro 4.4** – Valores de momentos fletores para espessura de 12 cm.

MODELO	$m_{lp'}$ (kN.m/m)	$m_{lpa'}$ (kN.m/m)	$m_l$ (kN.m/m)	$m_{pa'}$ (kN.m/m)
MAA12	-	-23,81	5,51	-26,46
MEBA12	-	-25,10	4,05	-13,57
MECA12	-	-20,22	7,19	-21,11

Fonte: Autor (2019).

**Quadro 4.5** – Valores de momentos fletores para espessura de 18 cm.

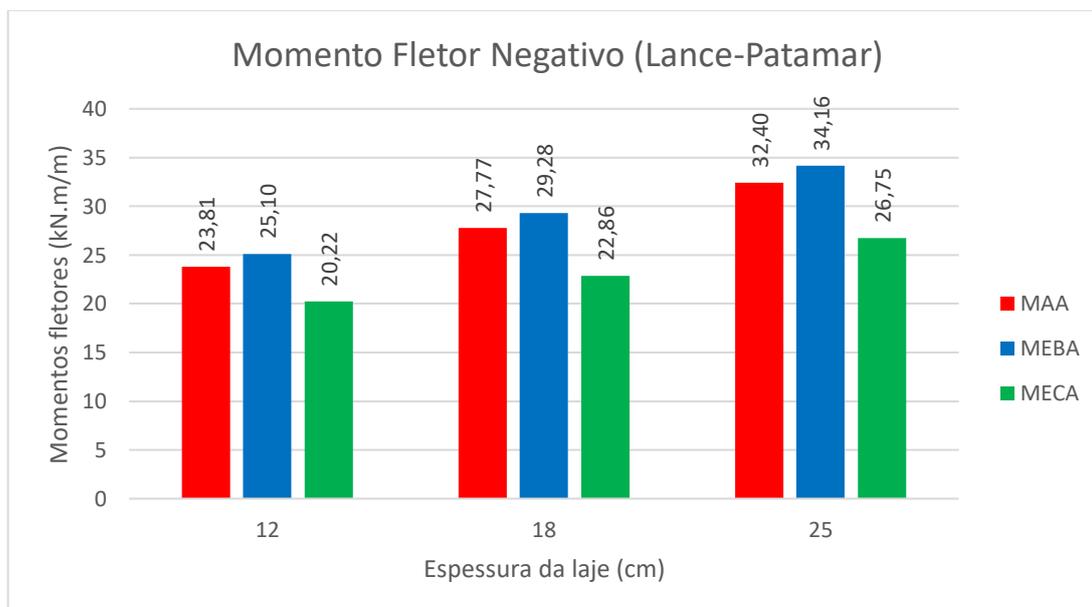
MODELO	$m_{lp'}$ (kN.m/m)	$m_{lpa'}$ (kN.m/m)	$m_l$ (kN.m/m)	$m_{pa'}$ (kN.m/m)
MAA18	-	-27,77	6,19	-30,87
MEBA18	-	-29,28	4,41	-19,28
MECA18	-	-22,86	8,13	-27,49

Fonte: Autor (2019).

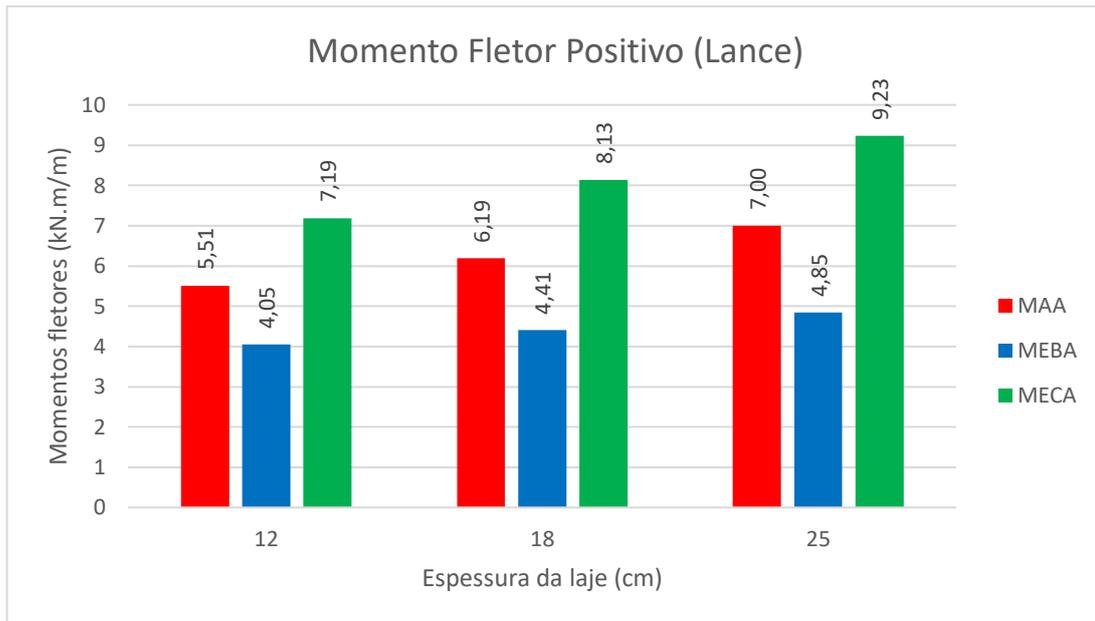
**Quadro 4.6** – Valores de momentos fletores para espessura de 25 cm.

MODELO	$m_{lp'}$ (kN.m/m)	$m_{lpa'}$ (kN.m/m)	$m_l$ (kN.m/m)	$m_{pa'}$ (kN.m/m)
MAA25	-	-32,40	7,00	-36,02
MEBA25	-	-34,16	4,85	-24,92
MECA25	-	-26,75	9,23	-32,57

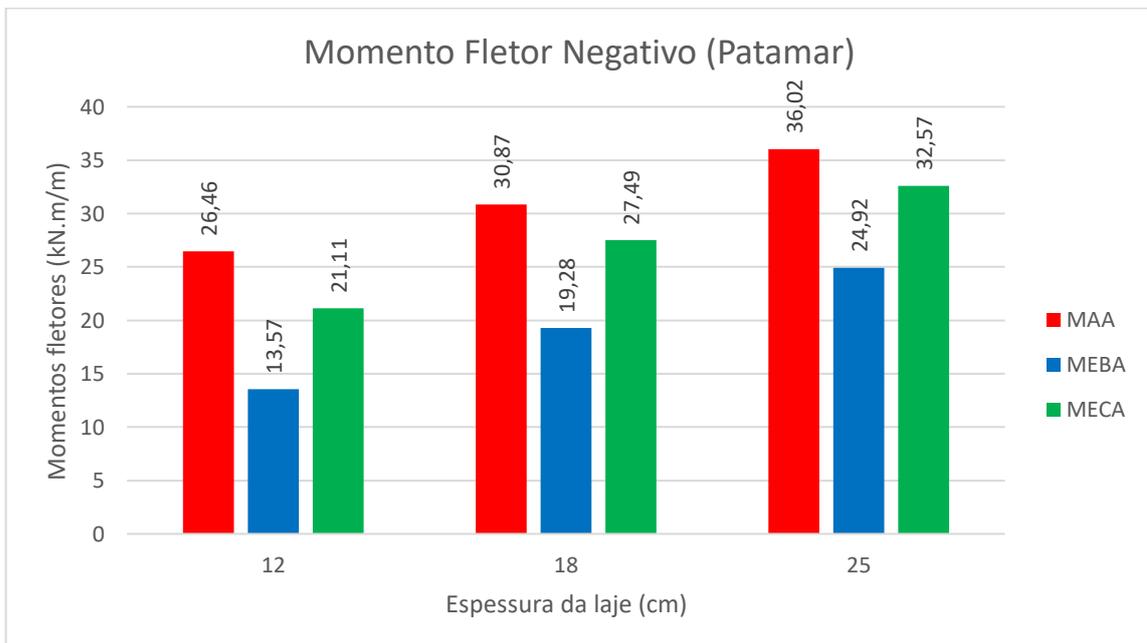
Fonte: Autor (2019).

**Gráfico 4.1** – Momentos fletores negativos na região lance-patamar.

Fonte: Autor (2019).

**Gráfico 4.2** – Momentos fletores positivos na região do lance.

**Fonte:** Autor (2019).

**Gráfico 4.3** – Momentos fletores positivos na região central do patamar.

**Fonte:** Autor (2019).

Para fins de comparação, na falta de experimentos, o modelo de casca foi escolhido como modelo base, visto que, por se tratar de uma estrutura bidimensional, supõe-se ser este o que mais se assemelha à estrutura real, em que duas de suas dimensões são muito maiores do que a terceira. Observa-se a partir dos gráficos que de maneira geral, em todos os modelos existe o incremento dos esforços à medida que a espessura da laje da escada é aumentada.

Porém esse aumento varia de maneira específica para cada modelo. No Quadro 4.7, são apresentadas as diferenças percentuais dos momentos para cada modelo analisado.

**Quadro 4.7** – Comparativo entre modelos.

<b>MOMENTO NEGATIVO (LANÇE-PATAMAR)</b>			
MODELO	MAA	MEBA	MECA
12 cm	18%	24%	-
18 cm	21%	28%	-
25 cm	21%	28%	-

**Fonte:** Autor (2019).

Observando primeiramente o momento fletor negativo que aparece na interface lance-patamar nos Quadros 4.4 a 4.6 e no Gráfico 4.1, pode-se observar que o modelo de casca possui os valores inferiores. Isso pode ser explicado devido a melhor distribuição de esforços que acontece neste modelo, o que não acontece no modelo formado por elementos de barra. Assim, percebe-se uma variação de 18% a 21%, dependendo da espessura, entre o modelo analítico e o modelo de casca, e uma variação de 24% a 28% para o modelo de elementos de barra. Portanto, o método analítico proposto por Araújo (2014) possui uma melhor aproximação frente ao modelo numérico com elementos de barra.

**Quadro 4.8** – Comparativo entre modelos.

<b>MOMENTO FLETOR POSITIVO (LANÇE)</b>			
MODELO	MAA	MEBA	MECA
12 cm	-23%	-44%	-
18 cm	-24%	-46%	-
25 cm	-24%	-47%	-

**Fonte:** Autor (2019).

Em seguida, quando são observados os valores de momentos fletores positivos ao longo do lance no Gráfico 4.2, percebe-se uma coerência frente aos resultados analisados anteriormente. Como foi visto, os momentos negativos na região lance-patamar nos modelos de casca, independente da espessura, foram sempre inferiores aos apresentados nos outros dois modelos, refletindo assim em maiores momentos positivos na região do lance.

Mais uma vez o método analítico simplificado apresentou valores mais próximos aos obtidos pelos elementos de casca, com uma variação de -23% a -24%, ao passo que o modelo composto por elementos de barras obteve uma divergência de -44% a -47%, como pode ser visto no Quadro 4.8.

**Quadro 4.9** – Comparativo entre modelos.

<b>MOMENTO NEGATIVO (PATAMAR)</b>			
MODELO	MAA	MEBA	MECA
12 cm	25%	-36%	-
18 cm	12%	-30%	-
25 cm	11%	-23%	-

Fonte: Autor (2019).

Na comparação dos momentos fletores na região central do patamar, destaca-se uma aproximação do método analítico ao modelo com elementos de casca à medida que a espessura da laje aumenta e conseqüentemente os carregamentos, variando de 25% a 11%, como mostra o Quadro 4.9. Os modelos compostos por elemento de barra apresentaram valores bem inferiores, o que pode ser justificado pela aproximação devido à simplificação da geometria real, não refletindo os esforços apresentados pelos outros dois modelos, apresentando uma variação de -36% a -23% comparado ao modelo de casca.

#### **4.1.2 Análise comparativa entre os modelos numéricos com elementos de barra (engastado e com continuidade) e elementos de casca (engastado e com continuidade)**

Para realizar uma análise da interferência do tipo vinculação da escada na obtenção dos esforços de flexão, foram escolhidos os modelos de barra e casca com engaste no apoio, simulando máxima rigidez, bem como aqueles que traziam uma continuidade, se aproximando assim do comportamento real da estrutura.

A seguir são apresentados os dados de esforços de flexão em cada região da escada com a variação de espessura da laje.

**Quadro 4.10** – Valores de momentos fletores para espessura de 12 cm.

MODELO	$m_{lp'}$ (kN.m/m)	$m_{lpa'}$ (kN.m/m)	$m_l$ (kN.m/m)	$m_{pa'}$ (kN.m/m)
MEBE12	-40,57	-25,10	-16,23	-11,56
MEBC12	-21,74	-25,10	-6,92	-11,33
MECE12	-16,07	-20,89	-3,18	-18,39
MECC12	-7,35	-20,54	1,92	-19,93

Fonte: Autor (2019).

**Quadro 4.11** – Valores de momentos fletores para espessura de 18 cm.

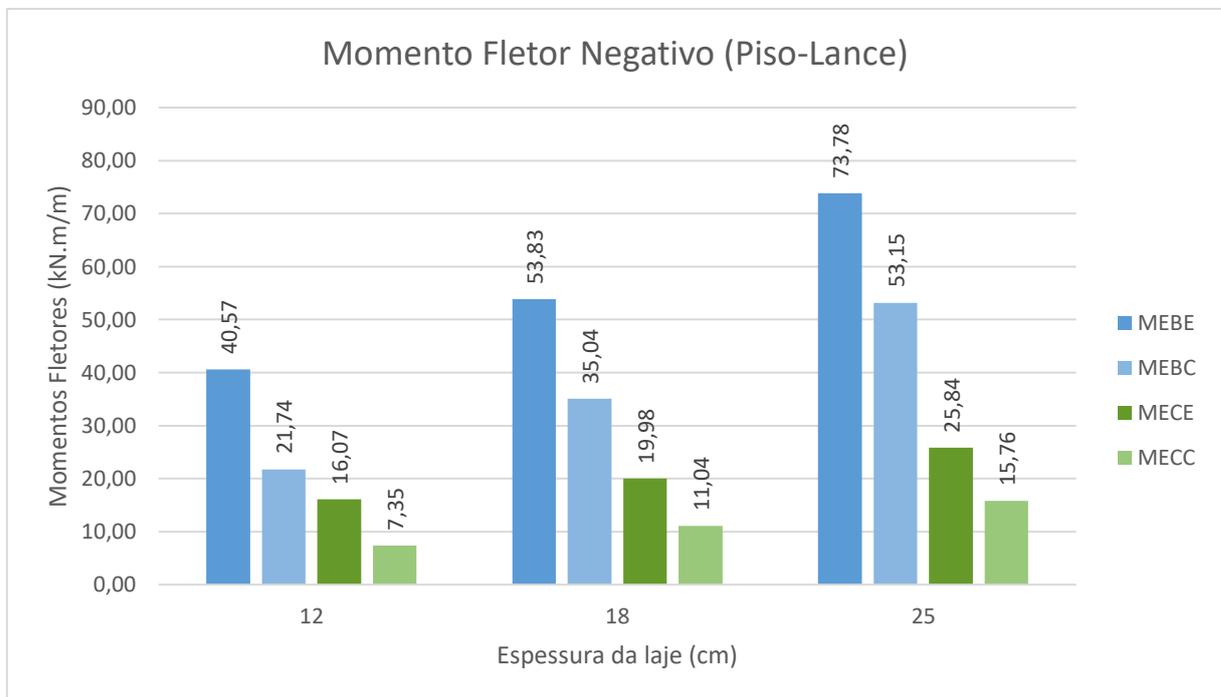
MODELO	$m_{lp'}$ (kN.m/m)	$m_{lpa'}$ (kN.m/m)	$m_l$ (kN.m/m)	$m_{pa'}$ (kN.m/m)
MEBE18	-53,83	-29,28	-22,50	-15,66
MEBC18	-35,04	-29,28	-13,10	-15,11
MECE18	-19,98	-23,77	-5,36	-23,86
MECC18	-11,04	-23,38	0,40	-25,38

Fonte: Autor (2019).

**Quadro 4.12** – Valores de momentos fletores para espessura de 25 cm.

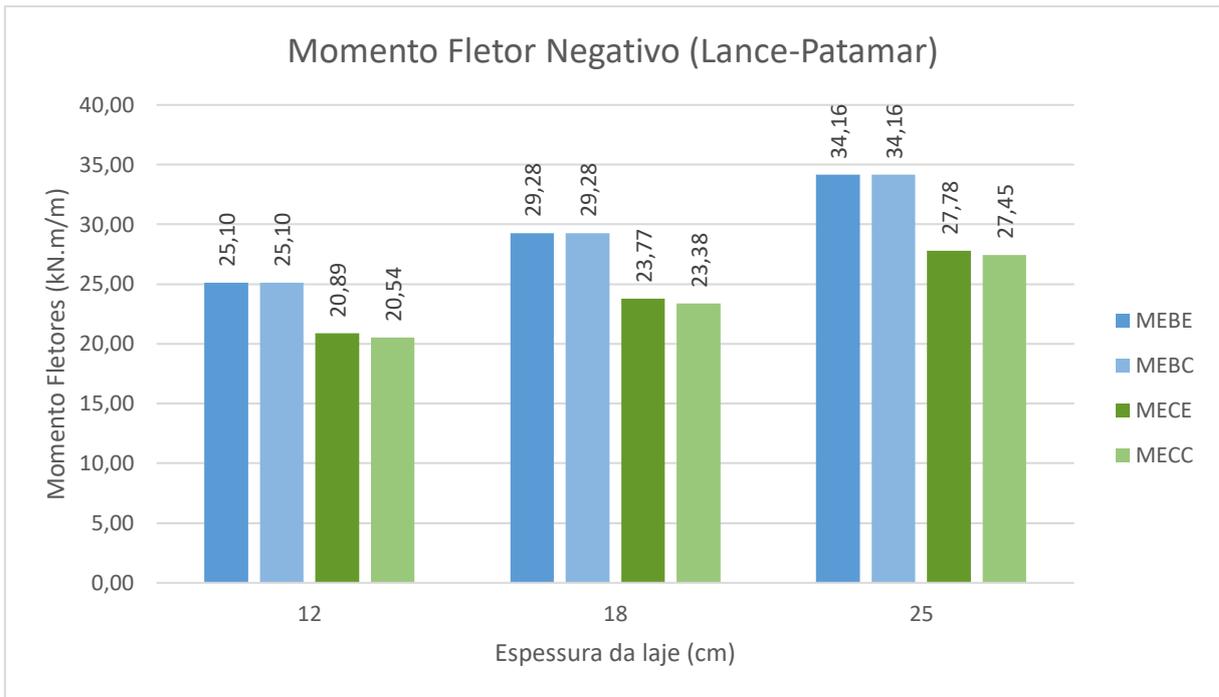
MODELO	$m_{lp'}$ (kN.m/m)	$m_{lpa'}$ (kN.m/m)	$m_l$ (kN.m/m)	$m_{pa'}$ (kN.m/m)
MEBE25	-73,78	-34,16	-32,04	-19,18
MEBC25	-53,15	-34,16	-21,75	-18,53
MECE25	-25,84	-27,78	-7,12	-27,11
MECC25	-15,76	-27,45	-1,52	-29,35

Fonte: Autor (2019).

**Gráfico 4.4** – Momentos fletores negativos na região piso-lance.

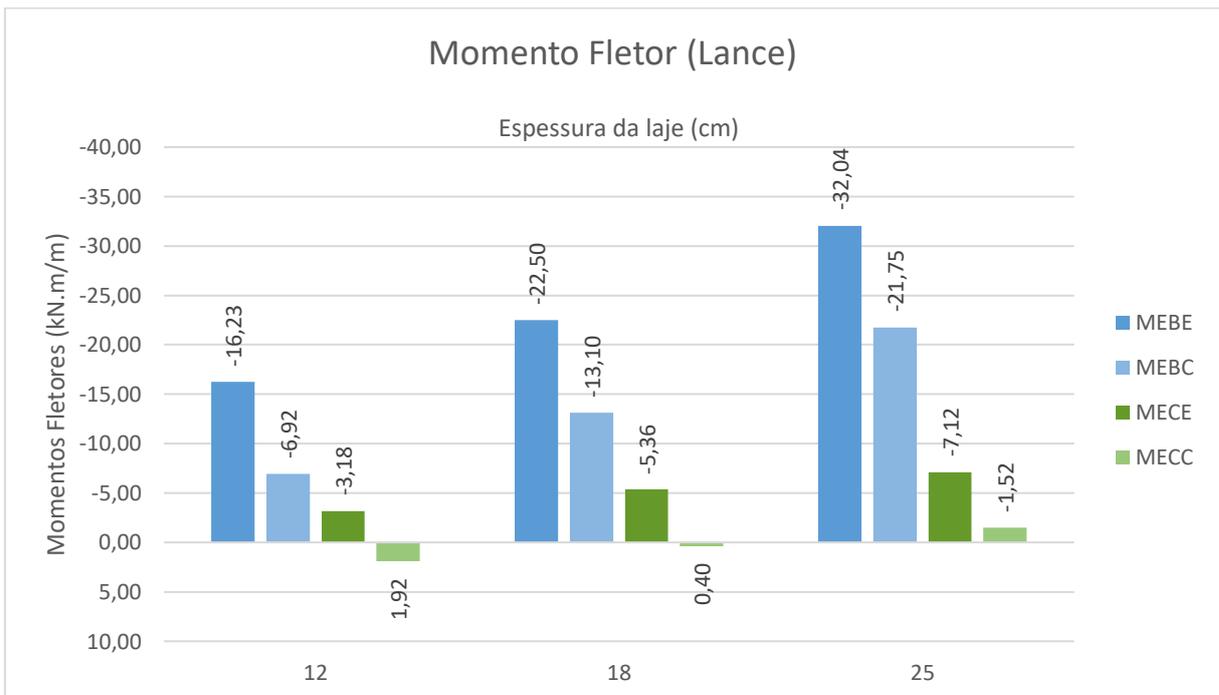
Fonte: Autor (2019).

Gráfico 4.5 – Momentos fletores negativos na região lance-patamar.

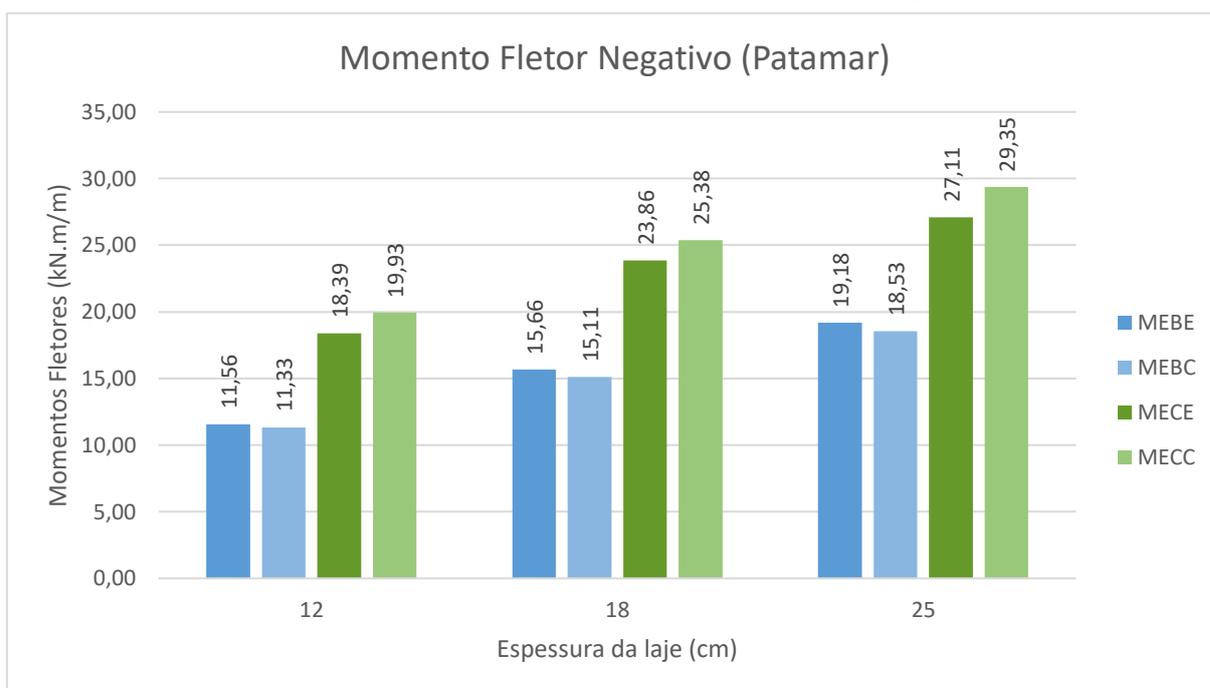


Fonte: Autor (2019).

Gráfico 4.6 – Momentos fletores positivos na região do lance.



Fonte: Autor (2019).

**Gráfico 4.7** – Momentos fletores positivos na região central do patamar.

**Fonte:** Autor (2019).

No Gráfico 4.4, no qual é analisado o momento negativo na interface piso-lance, percebe-se uma discrepância muito grande, primeiramente entre os esforços dos modelos de barra e casca, e posteriormente entre os tipos de vinculação. Por possuir maior rigidez, era esperado que a vinculação de engaste produzisse maiores momentos em relação aos apoios com continuidade, porém, se for tomado como parâmetro de comparação o modelo composto por elementos de casca e com continuidade no apoio, os momentos produzidos pelo modelo de barras engastado são em alguns casos quase 5 vezes maiores. Além de uma melhor distribuição de esforços possibilitada pelos modelos com elementos de casca, a aproximação da laje do lance pelo elemento de barra de largura unitária acaba por não refletir a realidade, fornecendo esforços muito superiores aos esperados.

Consequentemente, essa diferença incide sobre os esforços de flexão que surgem nos lances. Como pode ser visto no Gráfico 4.6, os modelos de barra, nos quais existem maiores valores de momento no apoio, apresentam momentos negativos elevados no lance. Já nos modelos de elementos de casca, mais precisamente aquele com continuidade, por possuir menores valores de momento devido à menor rigidez, possibilita o aparecimento de momentos positivo no lance da escada.

**Quadro 4.13** – Comparativo entre modelos.

<b>MOMENTO NEGATIVO (LANÇE-PATAMAR)</b>				
MODELO	MEBE	MEBC	MECE	MECC
12 cm	22%	22%	2%	-
18 cm	25%	25%	2%	-
25 cm	24%	24%	1%	-

**Fonte:** Autor (2019).

Ao contrário das divergências obtidas nos momentos negativos no apoio apresentadas anteriormente, pode ser observado no Quadro 4.13, que os esforços de flexão entre lance e patamar apresentam certa aproximação. Não houve variação entre os modelos de barra engastados e com continuidade; o que nos permite concluir que a vinculação não afeta no fletor nesta localidade. Isso vale para os modelos de casca engastados e com continuidade, que apresentaram variação de 1% a 2%. Ao se comparar o modelo de casca com continuidade aos modelos compostos por elementos de barra, obteve-se uma variação maior de 22% a 24%.

**Quadro 4.14** – Comparativo entre modelos.

<b>MOMENTO NEGATIVO (PATAMAR)</b>				
MODELO	MEBE	MEBC	MECE	MECC
12 cm	-42%	-43%	-8%	-
18 cm	-38%	-40%	-6%	-
25 cm	-35%	-37%	-8%	-

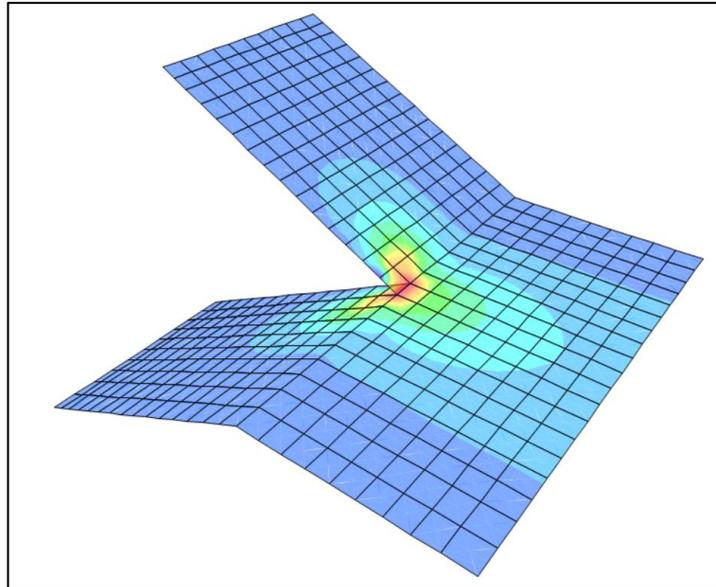
**Fonte:** Autor (2019).

Assim como na análise anterior, pode ser visto no Quadro 4.14, que os momentos negativos presentes na região central do patamar obtidos através dos modelos de barra são bastante inferiores aos modelos de casca com continuidade, com variação de -42% a -35% para o modelo com elementos de barra engastados, -43% a -37% para o modelo com elementos de barra e apoio com continuidade e -8% a -6% para o modelo com elementos de casca engastados.

**4.1.3 Análise comparativa entre os métodos analíticos de Knijnik & Tavares (1977) e Araújo (2014), modelos com elementos de barra (apoiado, engastado e com continuidade) e modelos com elementos de casca (apoiado, engastado e com continuidade)**

Nesta análise foi feita a comparação dos momentos negativos presentes na região central do patamar próximo aos lances. Este local possui relevante importância no estudo de escadas autoportantes, pois é nele que se desenvolve uma concentração de esforços como mostrado na Figura 4.1.

**Figura 4.1** – Concentração de esforços na região central do patamar.



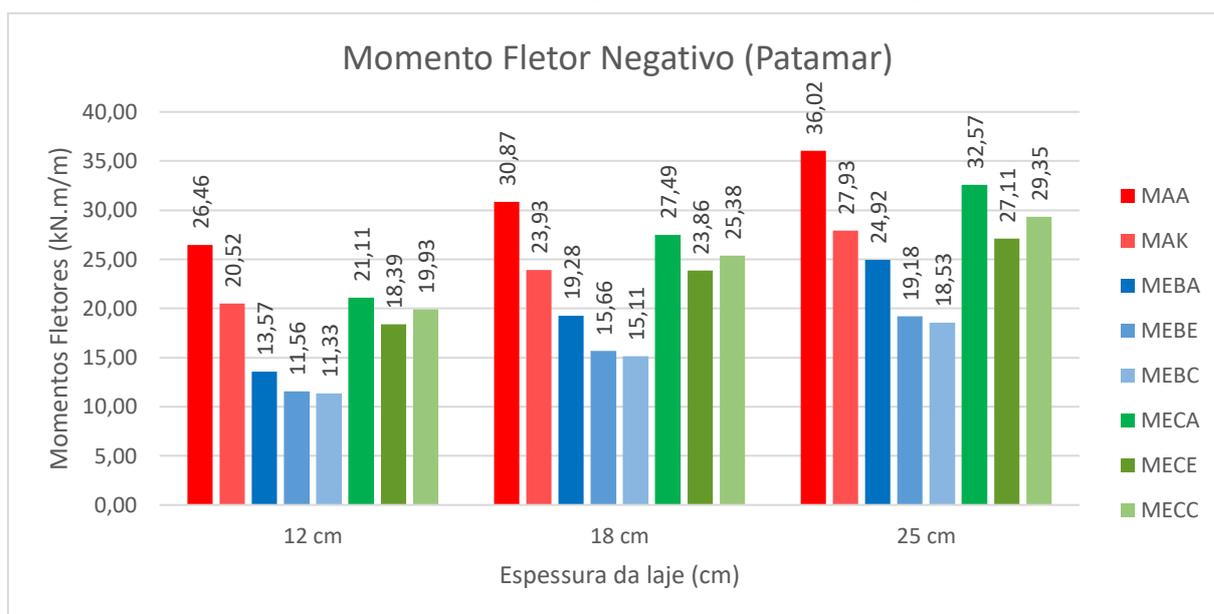
**Fonte:** Autor (2019).

A partir dos modelos propostos foram obtidos os seguintes esforços, descritos no Quadro 4.14 e no Gráfico 4.8.

**Quadro 4.15** – Valores de momentos fletores na região central do patamar.

MODELO	MAA	MAK	MEBA	MEBE	MEBC	MECA	MECE	MECC
12 cm	-26,46	-20,52	-13,57	-11,56	-11,33	-21,11	-18,39	-19,93
18 cm	-30,87	-23,93	-19,28	-15,66	-15,11	-27,49	-23,86	-25,38
25 cm	-36,02	-27,93	-24,92	-19,18	-18,53	-32,57	-27,11	-29,35

**Fonte:** Autor (2019).

**Gráfico 4.8** – Momentos fletores positivos na região central do patamar.

Fonte: Autor (2019).

**Quadro 4.16** – Comparativo entre modelos.

MODELO	MAA	MAK	MEBA	MEBE	MEBC	MECA	MECE	MECC
12 cm	33%	3%	-32%	-42%	-43%	6%	-8%	-
18 cm	22%	-6%	-24%	-38%	-40%	8%	-6%	-
25 cm	23%	-5%	-15%	-35%	-37%	11%	-8%	-

Fonte: Autor (2019).

É utilizado mais uma vez como base de comparação o modelo de casca com continuidade no apoio, por razões já explicitadas no item 4.1.1, levando em conta sua geometria, comportamento de laje e vinculação.

Dentre os métodos analíticos, o método de Araújo (2014) apresentou maiores valores frente a todos outros modelos, independente da espessura, porém com uma maior divergência para a laje de 12 cm, 33% maior. O método de Knijnik & Tavares (1977) mostrou resultados bem satisfatórios devido à uma boa aproximação aos modelos de casca, variando de -5% a 3%.

Considerando os modelos compostos por elementos de barra, de uma maneira geral os esforços se mostram muito aquém ao apresentado pelos outros modelos, não sendo a melhor alternativa para obtenção de momentos nessa região, com diferenças percentuais de -43% a -15%.

Em relação aos modelos compostos por elementos de casca, os esforços foram semelhantes variando de -8% a 11%, independente das vinculações.

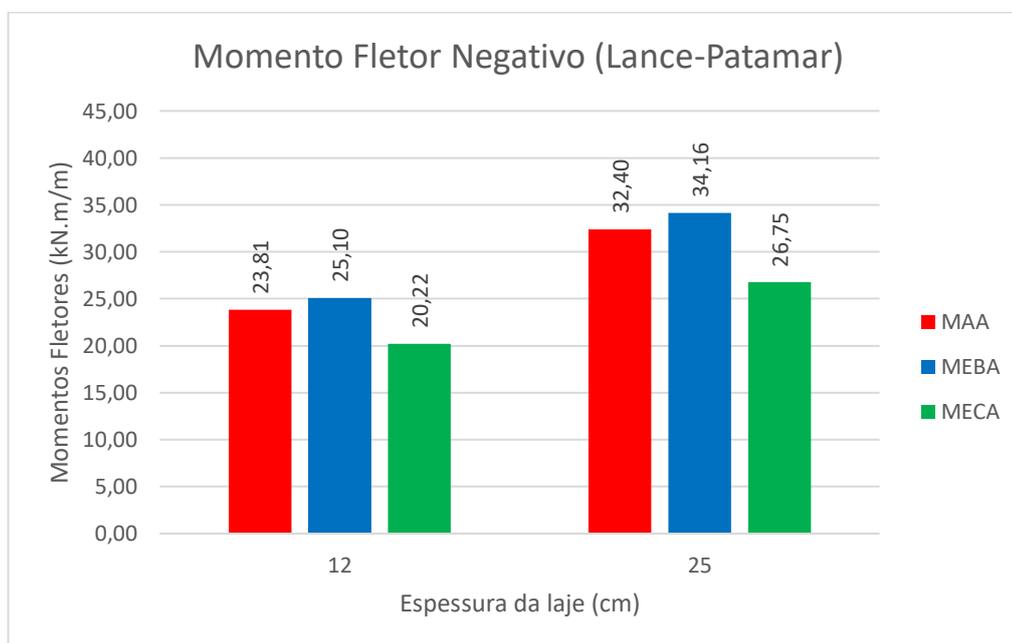
De maneira geral, os modelos que possuíam menor rigidez na vinculação, por conseguinte uma maior deformação da estrutura, geraram maiores esforços na região central do patamar.

#### 4.1.4 Análise comparativa global devido à variação de espessura na laje da escada

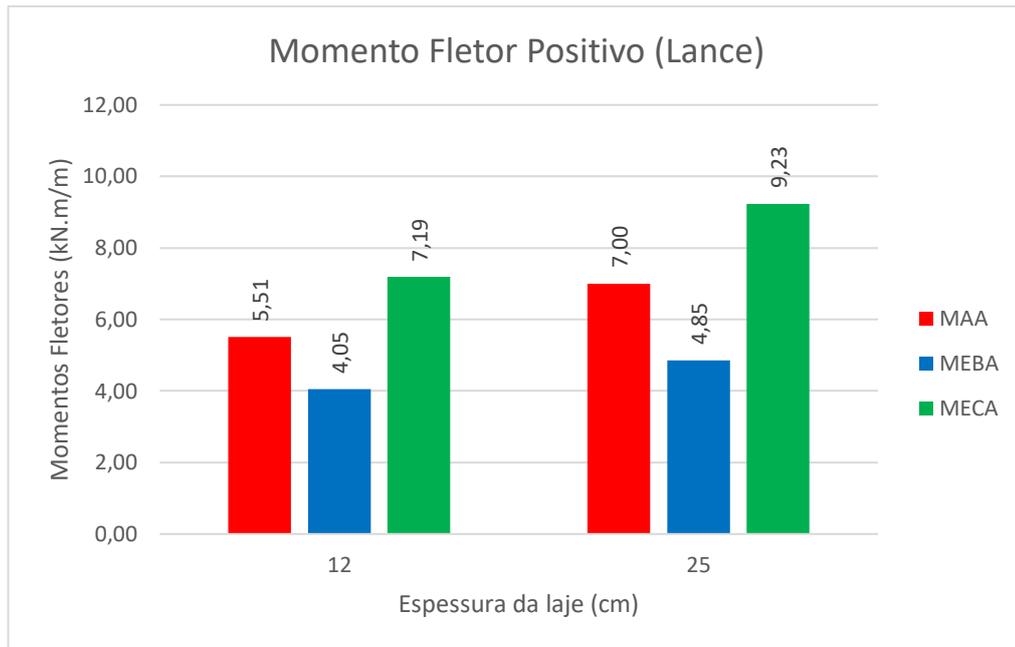
Para esta análise foram utilizados o método analítico simplificado de Araújo (2014) e modelos numéricos de barra e casca, ambos apoiados. Esta comparação tem por objetivo demonstrar a variação dos esforços obtidos, em cada modelo, frente à mudança na espessura da laje de 12 cm para 25 cm.

Abaixo serão apresentados os dados de esforços de flexão em cada região da escada com a variação de espessura da laje.

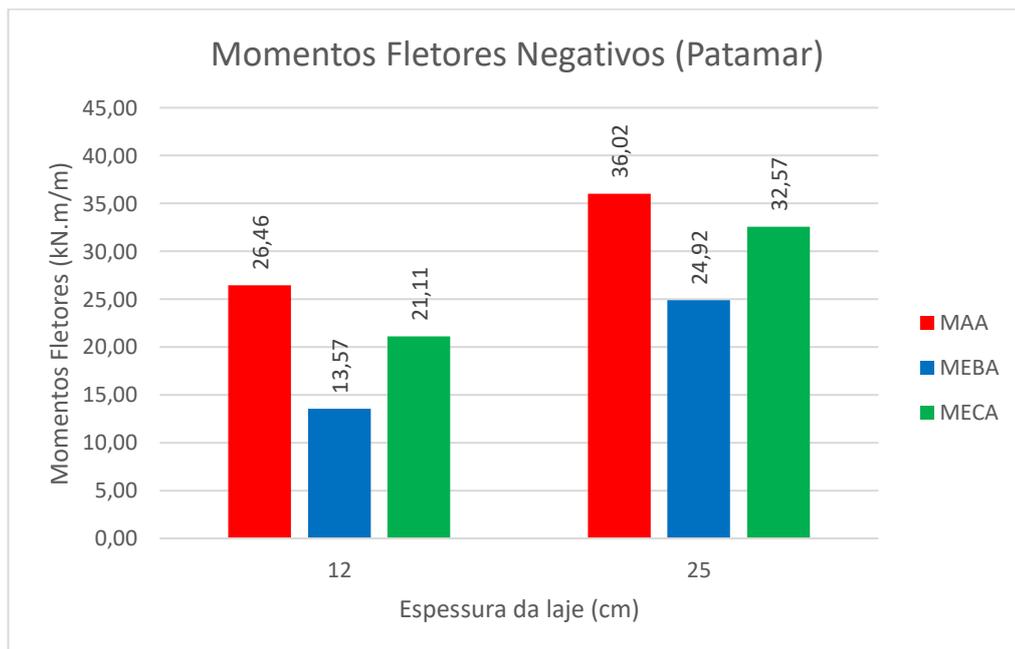
**Gráfico 4.9** – Momentos fletores negativos na região lance-patamar.



**Fonte:** Autor (2019).

**Gráfico 4.10** – Momentos fletores positivos na região do lance.

**Fonte:** Autor (2019).

**Gráfico 4.10** – Momentos fletores positivos na região central do patamar.

**Fonte:** Autor (2019).

**Quadro 4.17** – Comparativo entre modelos.

<b>MOMENTO NEGATIVO (LANÇE-PATAMAR)</b>			
MODELOS	MAA	MEBA	MECA
12 cm	23,81	25,10	20,22
25 cm	32,40	34,16	26,75
VARIAÇÃO	27%	27%	24%
<b>MOMENTO FLETOR POSITIVO (LANÇE)</b>			
MODELOS	MAA	MEBA	MECA
12 cm	5,51	4,05	7,19
25 cm	7,00	4,85	9,23
VARIAÇÃO	21%	16%	22%
<b>MOMENTO NEGATIVO (PATAMAR)</b>			
MODELOS	MAA	MEBA	MECA
12 cm	26,46	13,57	21,11
25 cm	36,02	24,92	32,57
VARIAÇÃO	27%	46%	35%

Fonte: Autor (2019).

A partir dos dados obtidos, para os esforços presentes na interface lance-patamar, o modelo de casca apresentou uma menor variação frente à alteração de espessura, e consequente aumento de carregamento. Porém, quando é analisado o momento fletor positivo no lance, o modelo de barra apresenta menor variação. De modo geral, as maiores alterações ocorreram para os esforços presentes na região central do patamar, que se mostrou mais sensível ao incremento de carga, com variações de 27% a 46%.

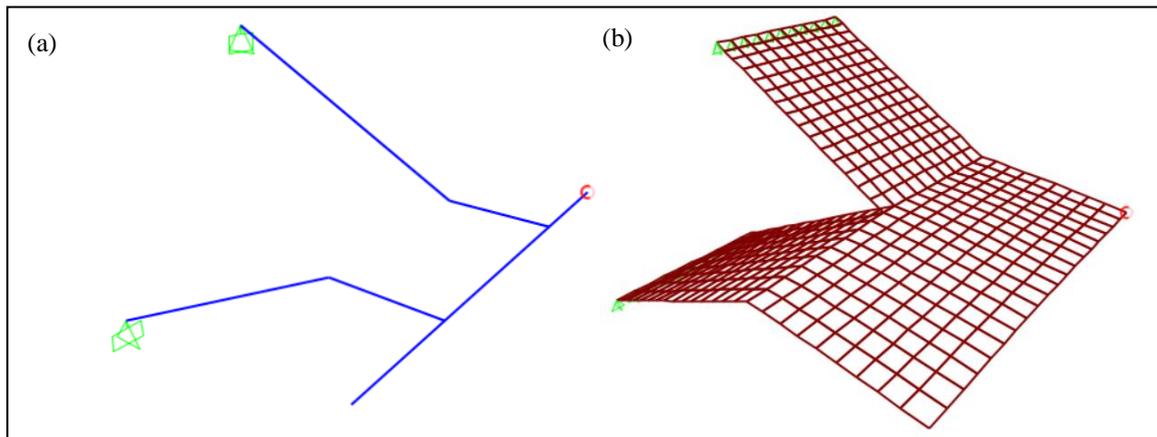
## 4.2 DESLOCAMENTOS (FLECHAS)

Na análise de deformações foram observados os deslocamentos máximos fornecidos pelo método analítico simplificado de Araújo (2014) através da Equação 4.2, e pelos modelos compostos por elementos de barra e casca, nas diferentes vinculações, submetidos à carregamentos característicos. Os dados foram obtidos a partir de um ponto localizado no extremo do patamar, como mostrado na Figura 4.2.

$$W_o = \frac{1}{E_{cs}I_c} \cdot \left( \frac{p_l c^4}{8} + \frac{Mac}{3\cos\alpha} \right) \quad (4.2)$$

Onde  $E_{cs}$  é o módulo secante do concreto e  $I_c = h^3/12$ , onde  $h$  é a espessura da laje da escada.

**Figura 4.2** – Localização da obtenção de flechas no (a) modelo de barra e no (b) modelo de casca.



Fonte: Autor (2019).

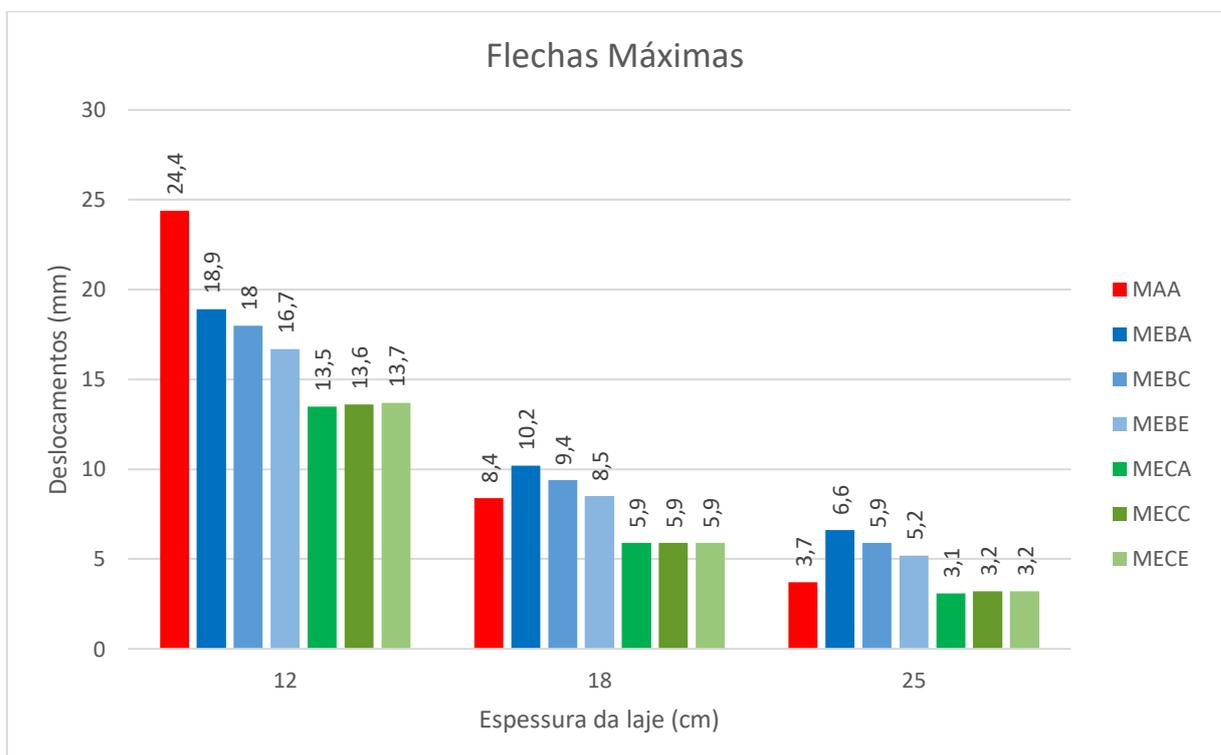
A seguir são observados, no Quadro 4.18 e no Gráfico 4.11, os valores em milímetros das deformações.

**Quadro 4.18** – Valores de flecha máxima.

MODELO	MAA (mm)	MEBA (mm)	MEBC (mm)	MEBE (mm)	MECA (mm)	MECC (mm)	MECE (mm)
12 cm	24,4	18,9	18	16,7	13,5	13,6	13,7
18 cm	8,4	10,2	9,4	8,5	5,9	5,9	5,9
25 cm	3,7	6,6	5,9	5,2	3,1	3,2	3,2

Fonte: Autor (2019).

**Gráfico 4.11** – Valores de flecha máxima nos diferentes modelos.



Fonte: Autor (2019).

Assim como nas comparações dos esforços de flexão, novamente tomar-se-á como base o modelo com elementos de casca com continuidade no apoio. Assim, o Quadro 4.19 apresenta os resultados percentuais para os modelos estudados.

**Quadro 4.19** – Comparativo entre modelos.

MODELO	MAA (mm)	MEBA (mm)	MEBC (mm)	MEBE (mm)	MECA (mm)	MECC (mm)	MECE (mm)
12 cm	79%	39%	32%	23%	-1%	-	1%
18 cm	42%	73%	59%	44%	0%	-	0%
25 cm	16%	106%	84%	63%	-3%	-	0%

**Fonte:** Autor (2019).

Em primeira análise, percebe-se uma diminuição nas deformações à medida que se tem o aumento da espessura da escada. Isso se dá pelo aumento da rigidez da estrutura, apesar do acréscimo de carga. Pode-se observar também de maneira geral que os modelos de barras são mais sensíveis à mudança de vinculação, apresentando maiores flechas para os apoios rotulados e menores para engaste. Diferente dos modelos de casca que obtiveram valores bastante semelhantes, variando de -3% a 1%.

Quanto ao método analítico, para menores alturas de laje, os valores de deslocamento foram bastante expressivos, superando todos os outros modelos. Porém, ao passo que a espessura aumenta, seus resultados se aproximam dos modelos de casca.

## CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS

### 5.1 CONCLUSÕES GERAIS

Devido à complexidade das escadas autoportantes frente aos tipos convencionais, sua análise demanda maiores cuidados, sendo necessário um estudo mais aprofundado do seu comportamento estrutural diante das ações atuantes e vinculações. Para isso, a escolha de um modelo, seja analítico ou numérico, que reflita este comportamento é de grande importância para a obtenção dos esforços que atuam na estrutura.

Assim, a partir das análises feitas no capítulo anterior, referente aos momentos fletores e deslocamentos, obtidos para os diferentes modelos propostos, podem ser retiradas algumas observações e conclusões gerais acerca desta pesquisa.

De maneira geral, ambos modelos analíticos apresentaram boa aproximação na obtenção dos momentos fletores. O método simplificado de Araújo (2014) obteve uma variação máxima de 25% nos valores comparado ao modelo de casca apoiado, entretanto, se for considerado todos os pontos analisados, essa variação cai para uma média de 20%. O que é justificável, pois métodos analíticos tendem a ser mais conservadores em relação ao modelo de casca devido à simplificação da análise da estrutura.

Apesar do método de Knijnik & Tavares (1977) fornecer somente os momentos fletores na região central do patamar, próximo aos lances, em sua comparação com o modelo de casca com continuidade, seus resultados se mostraram bastante satisfatórios, com variações menores de 10%.

Analisando os modelos formados por elementos de barra, constatou-se que estes divergem de certo modo dos outros modelos analisados. Isso pode ser causado devido à uma tentativa de aproximação do comportamento de uma laje através de elementos de barras com largura unitária. Assim, os momentos fletores encontrados nas interfaces piso-lance e lance-patamar apresentaram valores acima do esperado, resultando no aparecimento de fletores negativos elevados na região central do lance. Ao passo que na região central do patamar, os valores de esforços foram muito inferiores aos apresentados nos outros métodos. Isso pode refletir em uma escada superdimensionada em alguns trechos e subdimensionadas em outros.

Desta forma, comparado aos outros modelos apresentados, aqueles compostos por elementos de casca apresentaram menores valores de momento fletor, devido à uma melhor distribuição de rigidez e conseqüentemente uma melhor distribuição de esforços na estrutura. É importante salientar também que, nesse modelo é possível visualizar uma concentração de

esforços na região central do patamar entre os lances, exigindo uma armadura complementar para reforço no local.

Finalmente, em relação às deformações e deslocamentos analisados, percebe-se que apesar do incremento de carregamento, em todos os modelos existe uma redução nas flechas com o aumento da espessura da laje, o que pode ser relacionado ao aumento da rigidez da estrutura.

Para menores alturas de laje, o método simplificado de Araújo (2014) apresentou maior valor de deformação entre todos, contudo à medida que a espessura aumenta seus valores de flecha se tornam menores do que os modelos de barra, se aproximando do modelo com elementos de casca.

Ao contrário dos modelos de barra, aqueles com elementos de casca não sofreram interferência significativa nas deformações devido à vinculação.

## **5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Diante do que foi estudado e visando uma maior abrangência dos conhecimentos sobre as escadas autoportantes em concreto armado, são feitas a seguintes sugestões de trabalhos:

- Dimensionar as escadas retas autoportantes deste trabalho de pesquisa de acordo com a NBR 6118 (2014) e fazer um estudo comparativo de custos;
- Fazer uma análise não linear de escadas autoportantes a fim de comparar com a análise apresentada;
- Analisar escadas autoportantes não retas.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, José Milton de. **Curso de Concreto Armado: Volume 4**. 4. ed. Rio Grande: Dunas, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014. 238 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980. 5 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9077**: Saídas de emergências em edifícios. Rio de Janeiro, 2001. 35 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9050**: Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaço e equipamentos urbanos. Rio de Janeiro, 2004. 97 p.

AZAMBUJA, P. **Peças helicoidais bi-engastadas**. Revista Estrutura, n.46, p.67-83, 1962.

CARVALHO, R. C. **Estrutura Especiais: Escadas**. Notas de aula, Estruturas de Concreto e Fundações, Universidade Cidade de São Paulo. 2008.

**CSI Analysis Reference Manual**: for SAP2000®, ETABS®, SAFE® and CSiBridge®. 2017.

CUSENS, A. R., KUANG, J.G. **Experimental study of a free-standing staircase**. In: Journal of the American Concrete Institute, 63(5), 587-604, 1966.

FUCHSSTEINER, W. **Die freitragende wendeltreppe**. In: Beton und Stahlbetonbau, 49 (11), 1954

GIONGO, José Samuel. **Concreto armado**: Projeto estrutural de edifícios. São Carlos, 2007.

GOULD, P. L. **Analysis and design of cantilever staircase**. American Concrete Institute Journal, 1963.

GRAVE, M. **Escadas autoportantes: Desenvolvimento de programa computacional de dimensionamento**. 2013. 78 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

HUSSAIN, F. **A simplified analisys and design of free standing stairs resting on partially rigid support**. 2001. 76 f. Dissertação (Mestrado) – Department of Civil Engeneering, University of Engeneering & Technology, Bangladesh, 2001.

KNIJNIK, A., TAVARES, J. J. A. **Escada autoportante sem apoio no patamar**. Revista Estrutura, n.81, 109-126, 1977.

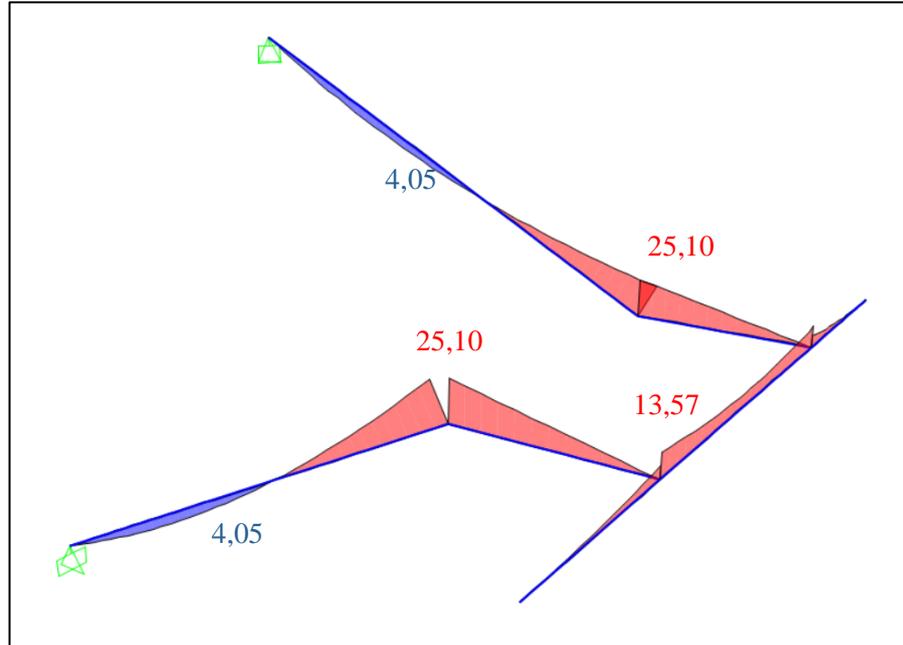
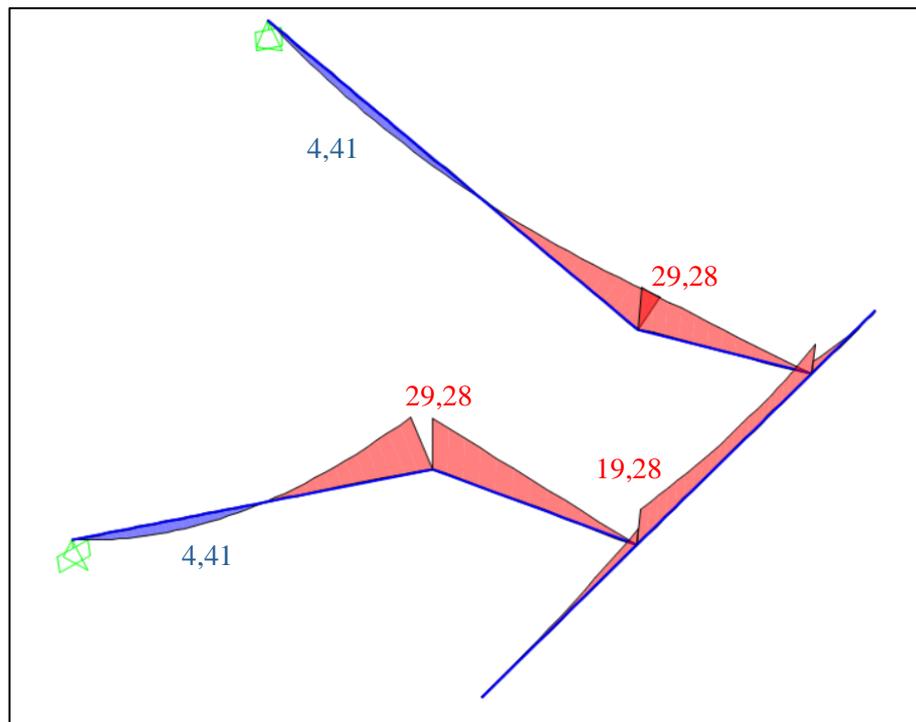
OLIVEIRA, C. R. **Considerações sobre Modelos Estruturais**. Ciência et Praxis. v. 1, n. 1, 2008.

PINHEIRO, Libânio M. **Tabelas de lajes**. São Carlos. 2007.

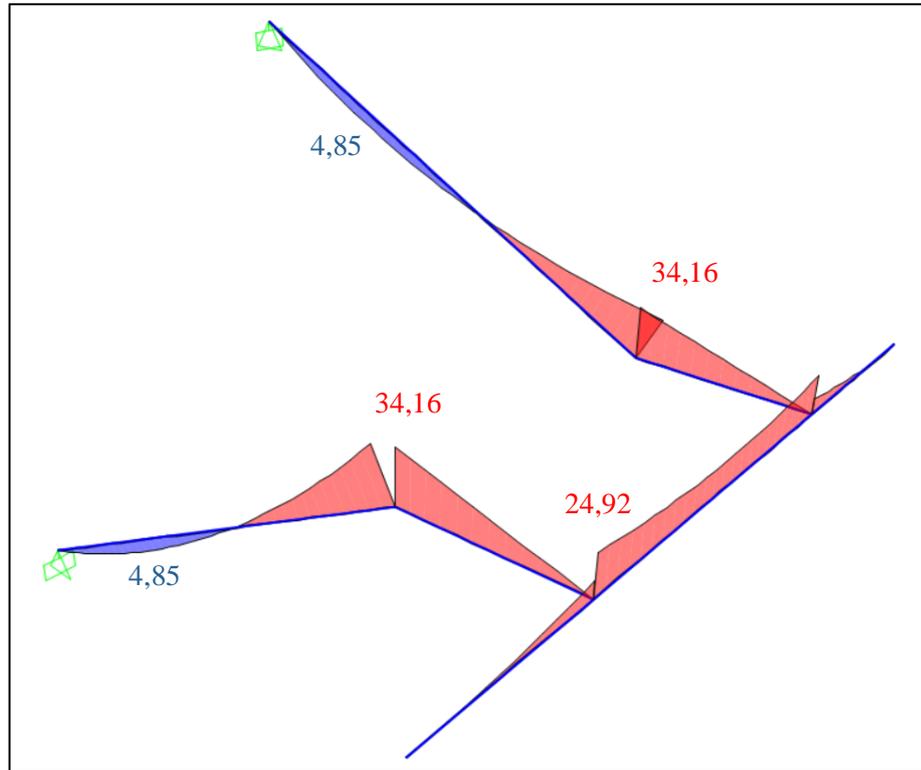
REBOUÇAS, Arthur da Silva. **Análise da distribuição de momento fletor devido a carga móvel em pontes curvas de concreto armado**. 2017. 194 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

SAUTER, F. **Free standing stairs**. American Concrete Institute Journal, 1964.

TALEB, N. J. **The analysis of stair with unsupported intermediate landings**. Concrete and Constructional Engeneering, 1964.

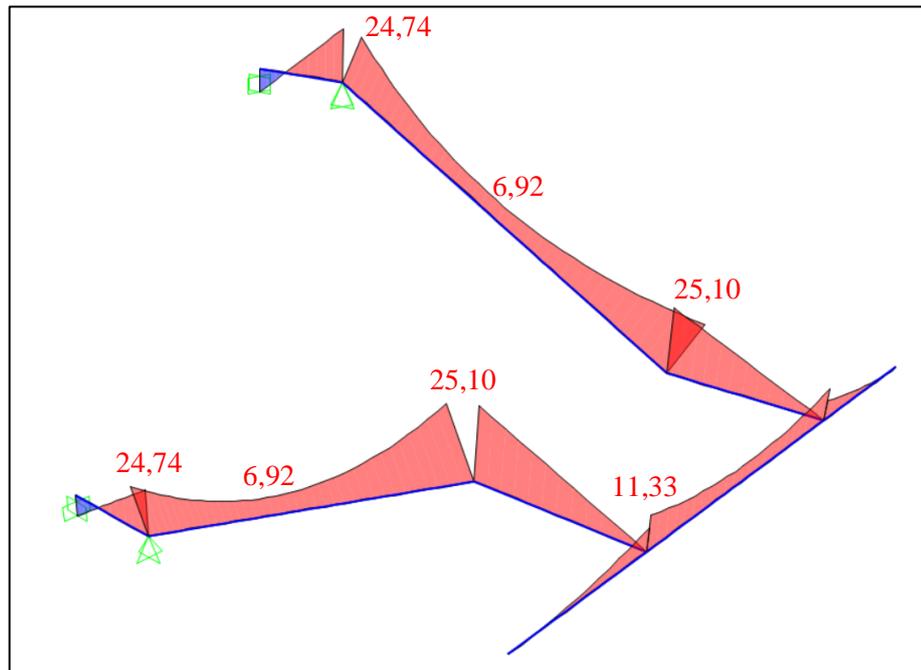
**APÊNDICE A – ESFORÇOS (MODELO NUMÉRICO DE BARRA)****Figura A.1** – Momentos fletores em escada apoiada com laje de 12 cm, em kNm/m.**Fonte:** Autor (2019).**Figura A.2** – Momentos fletores em escada apoiada com laje de 18 cm, em kNm/m.**Fonte:** Autor (2019).

**Figura A.3** – Momentos fletores em escada apoiada com laje de 25 cm, em kNm/m.



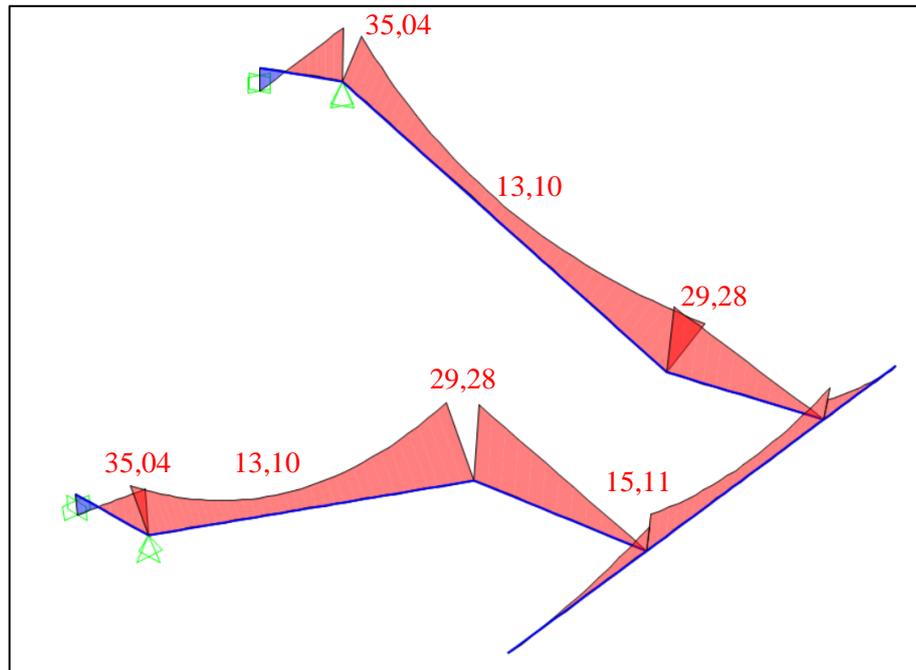
**Fonte:** Autor (2019).

**Figura A.4** – Momentos fletores em escada com continuidade com laje de 12 cm, em kNm/m.



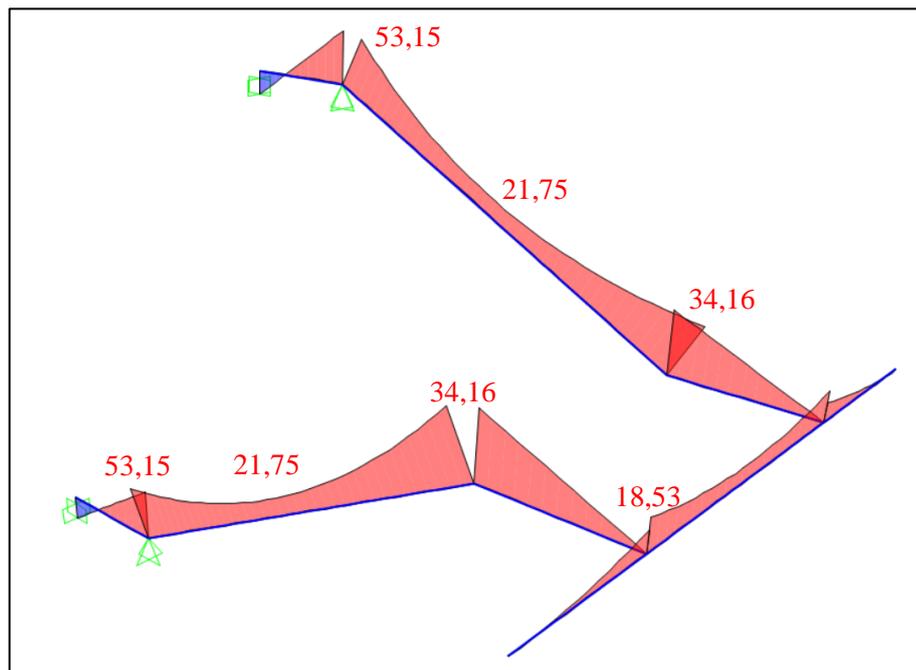
**Fonte:** Autor (2019).

**Figura A.5** – Momentos fletores em escada com continuidade com laje de 18 cm, em kNm/m.



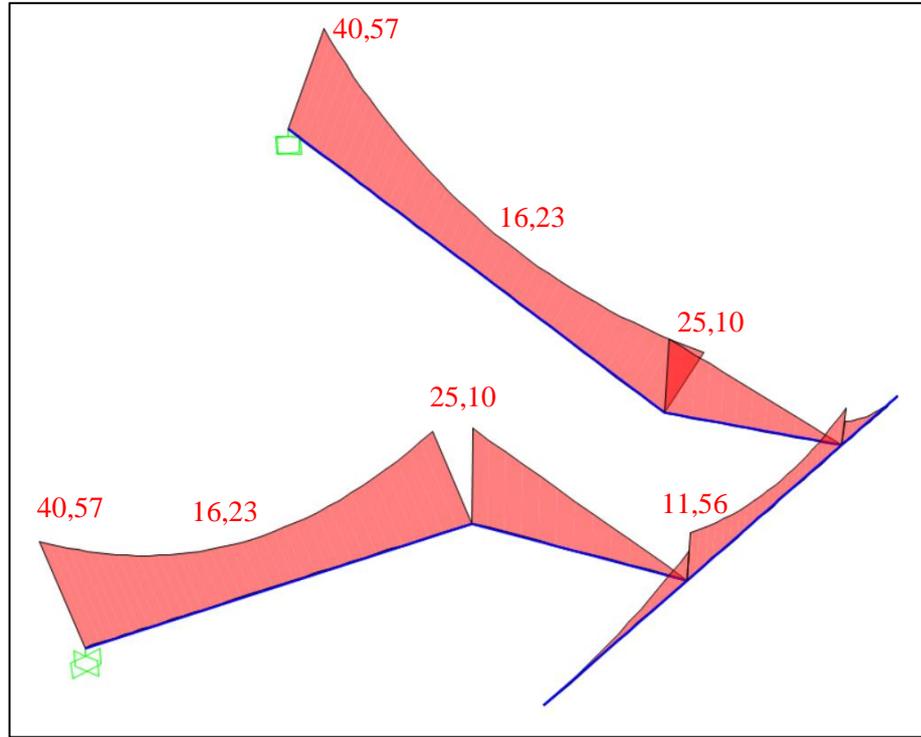
**Fonte:** Autor (2019).

**Figura A.6** – Momentos fletores em escada com continuidade com laje de 25 cm, em kNm/m.



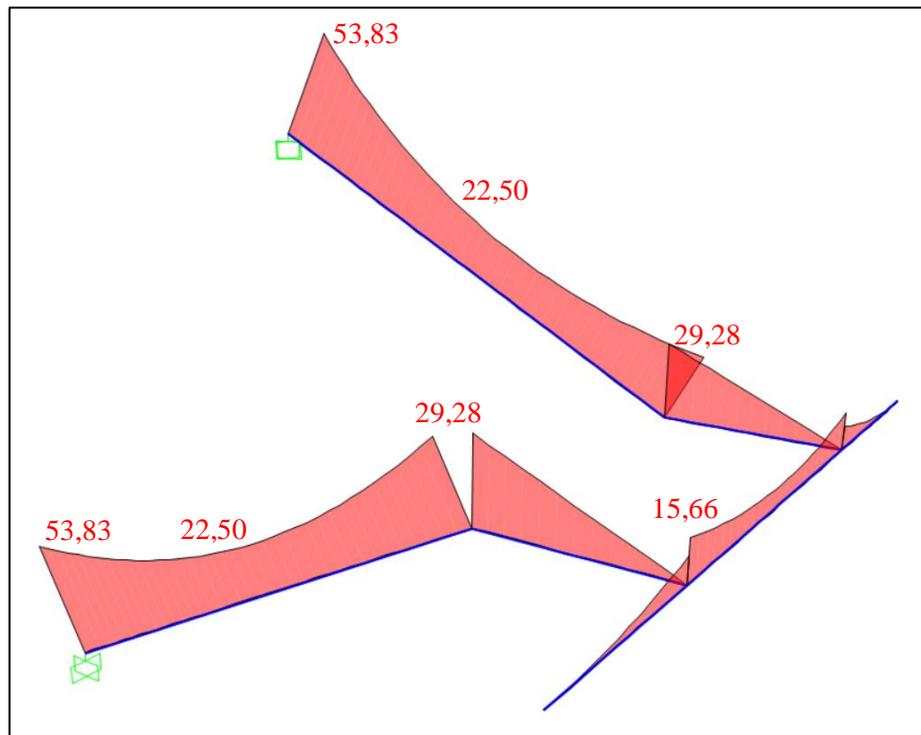
**Fonte:** Autor (2019).

**Figura A.7** – Momentos fletores em escada engastada com laje de 12 cm, em kNm/m.



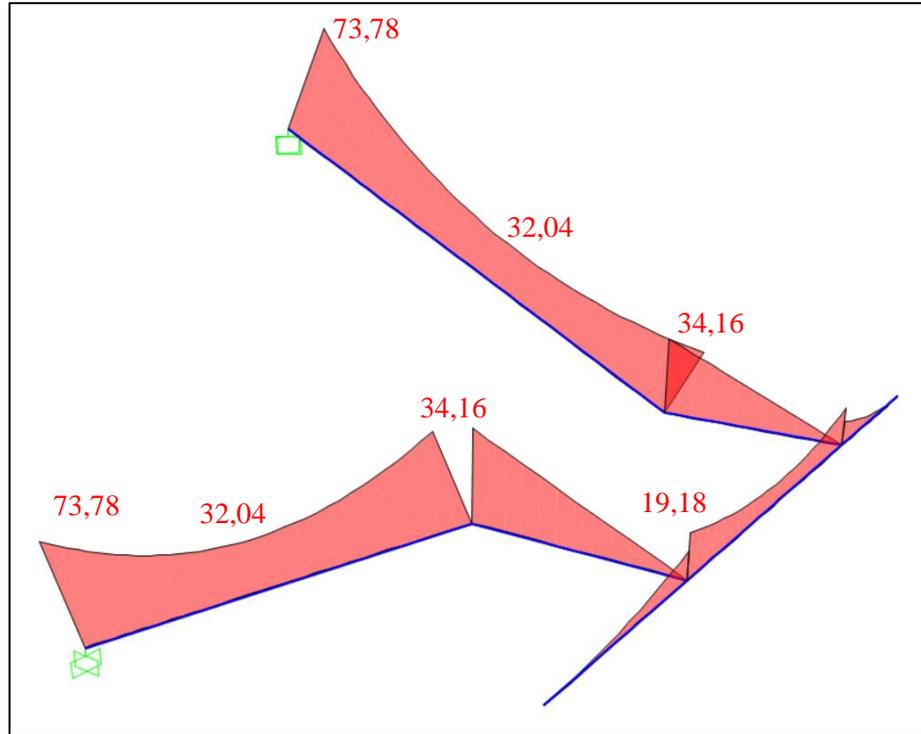
**Fonte:** Autor (2019).

**Figura A.8** – Momentos fletores em escada engastada com laje de 18 cm, em kNm/m.



**Fonte:** Autor (2019).

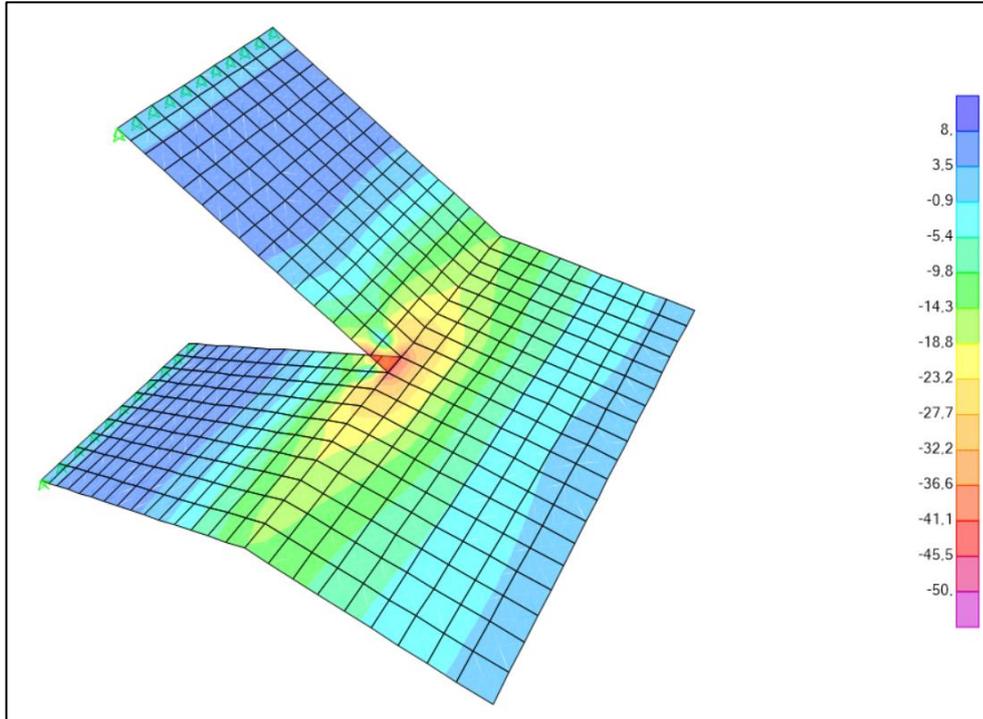
**Figura A.9** – Momentos fletores em escada engastada com laje de 25 cm, em kNm/m.



**Fonte:** Autor (2019).

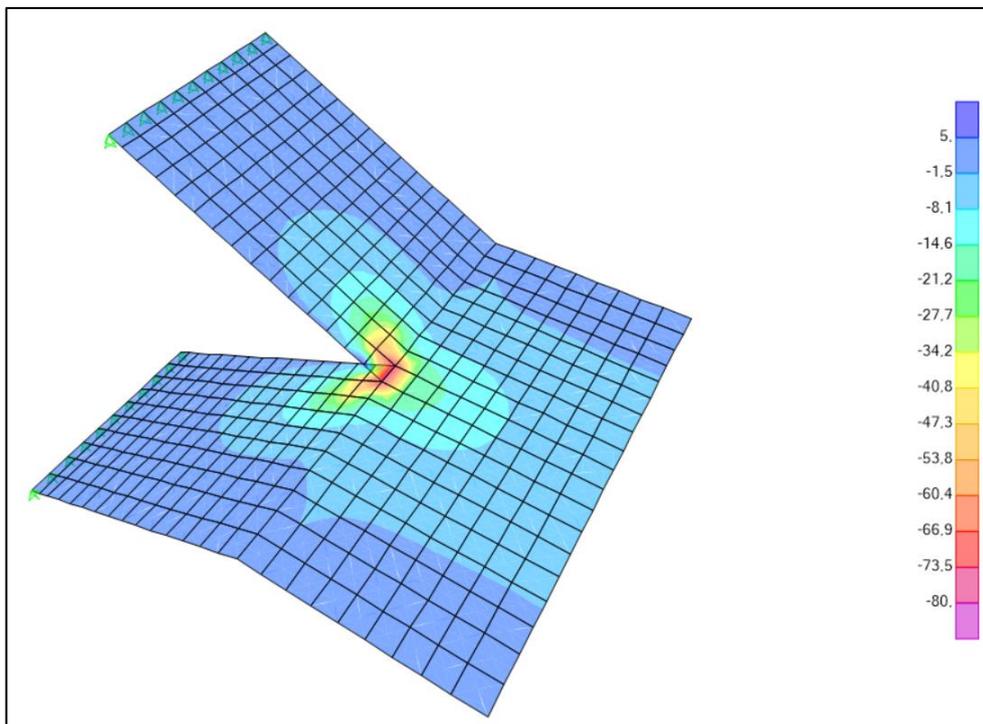
## APÊNDICE B – ESFORÇOS (MODELO NUMÉRICO DE CASCA)

**Figura B.1** – Momentos fletores M11 em escada apoiada com laje de 12 cm, em kNm/m.



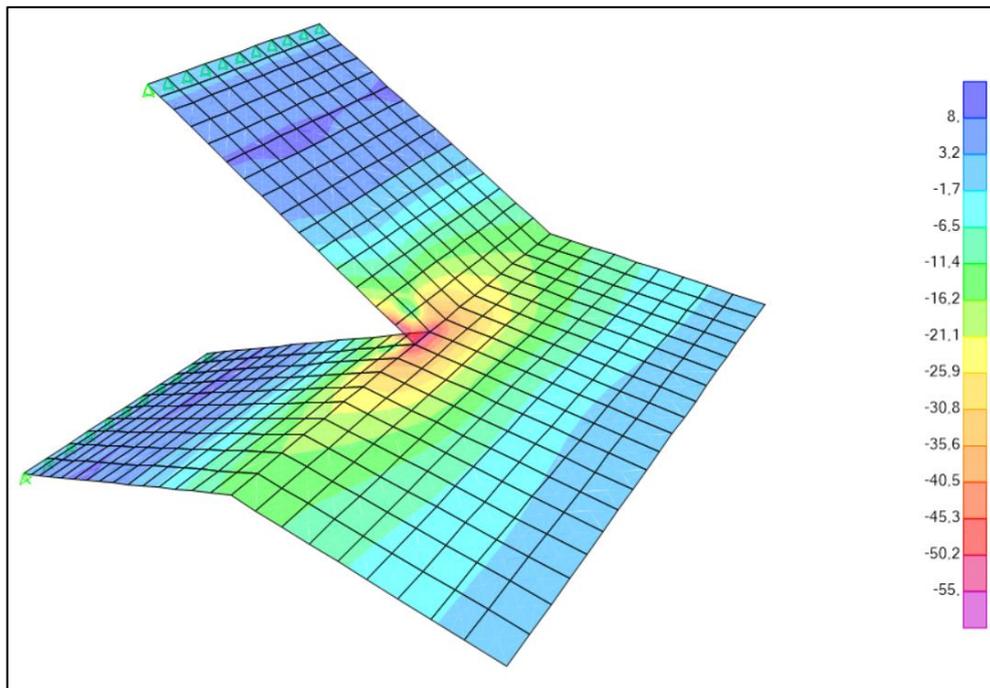
**Fonte:** Autor (2019).

**Figura B.2** – Momentos fletores M22 em escada apoiada com laje de 12 cm, em kNm/m.



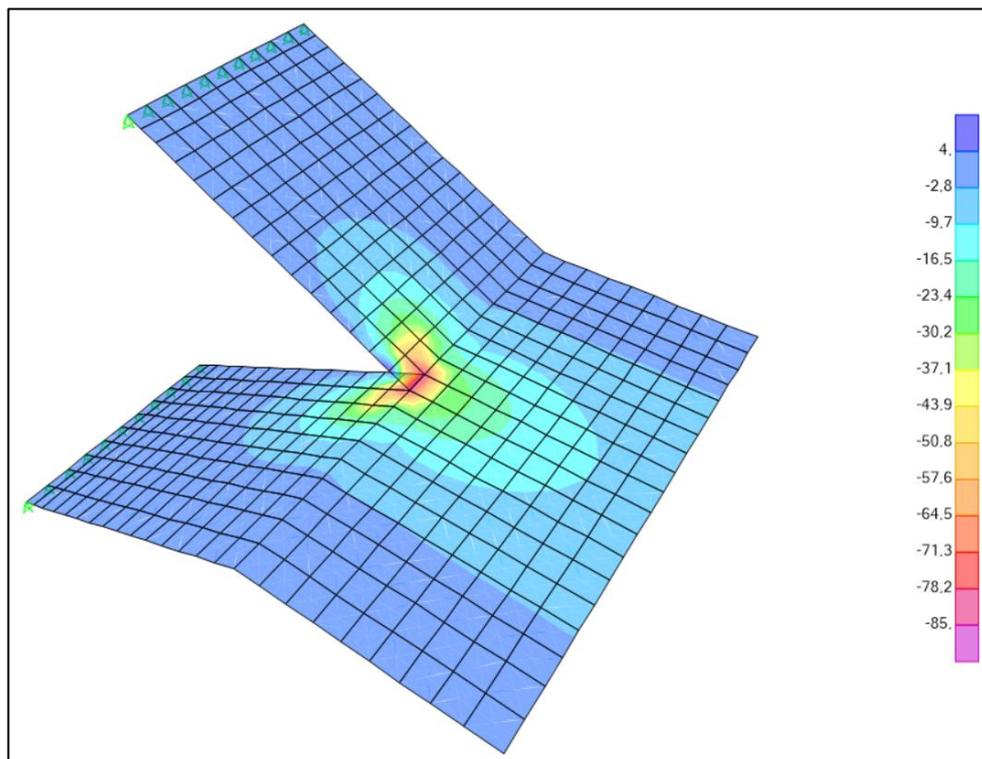
**Fonte:** Autor (2019).

**Figura B.3** – Momentos fletores M11 em escada apoiada com laje de 18 cm, em kNm/m.



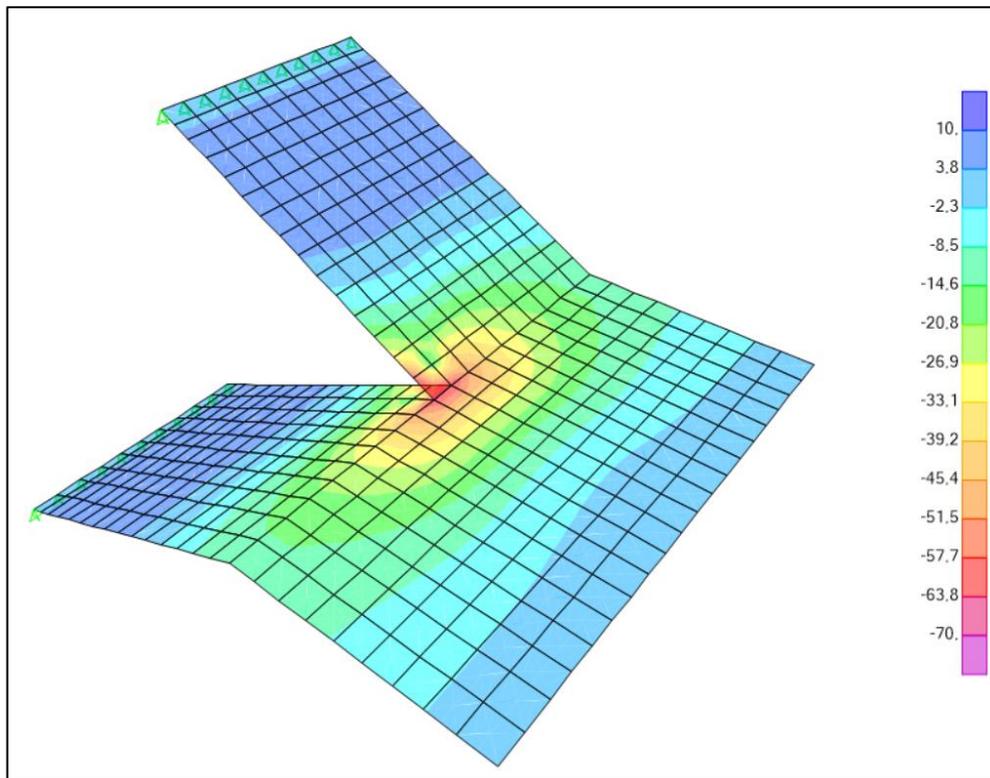
Fonte: Autor (2019).

**Figura B.4** – Momentos fletores M22 em escada apoiada com laje de 18 cm, em kNm/m.



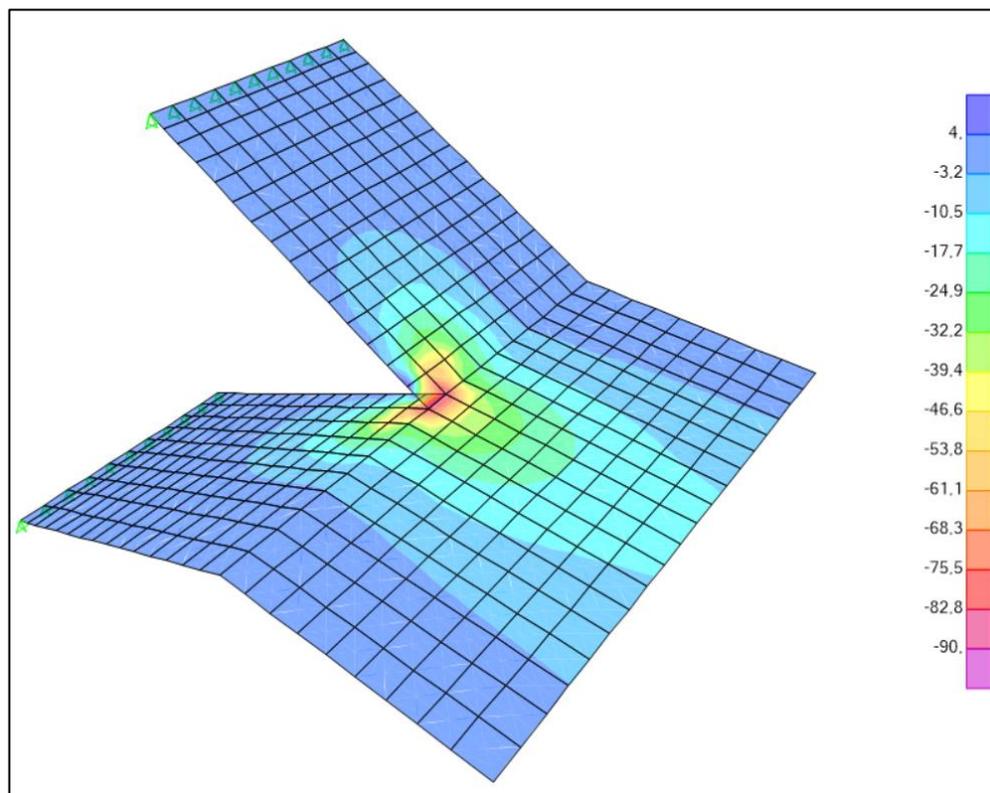
Fonte: Autor (2019).

**Figura B.5** – Momentos fletores M11 em escada apoiada com laje de 25 cm, em kNm/m.



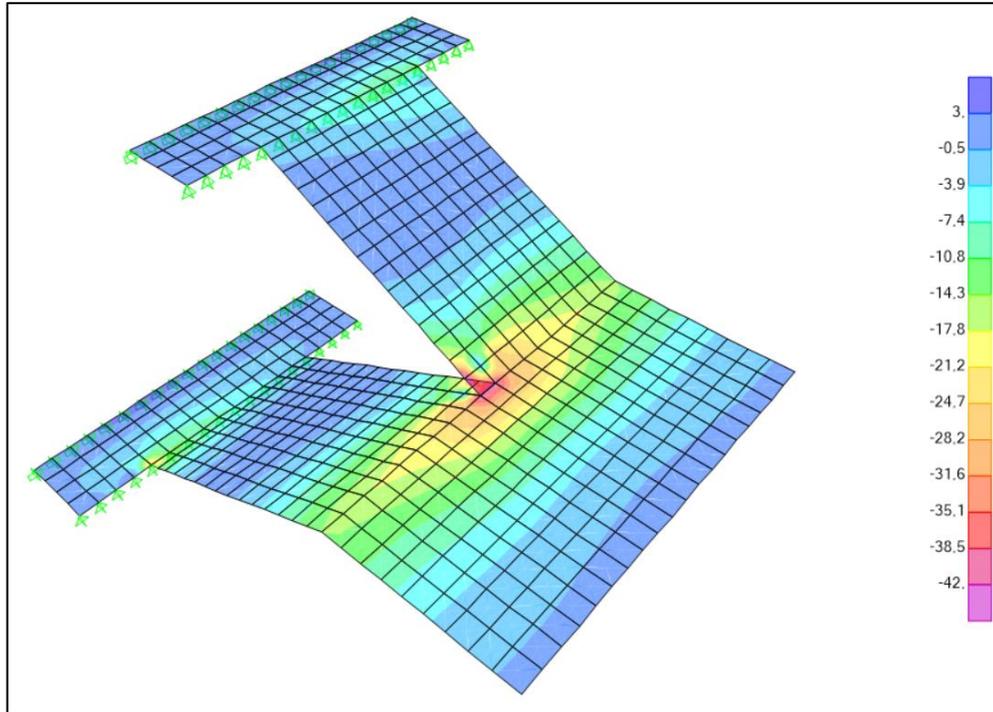
Fonte: Autor (2019).

**Figura B.6** – Momentos fletores M22 em escada apoiada com laje de 25 cm, em kNm/m.



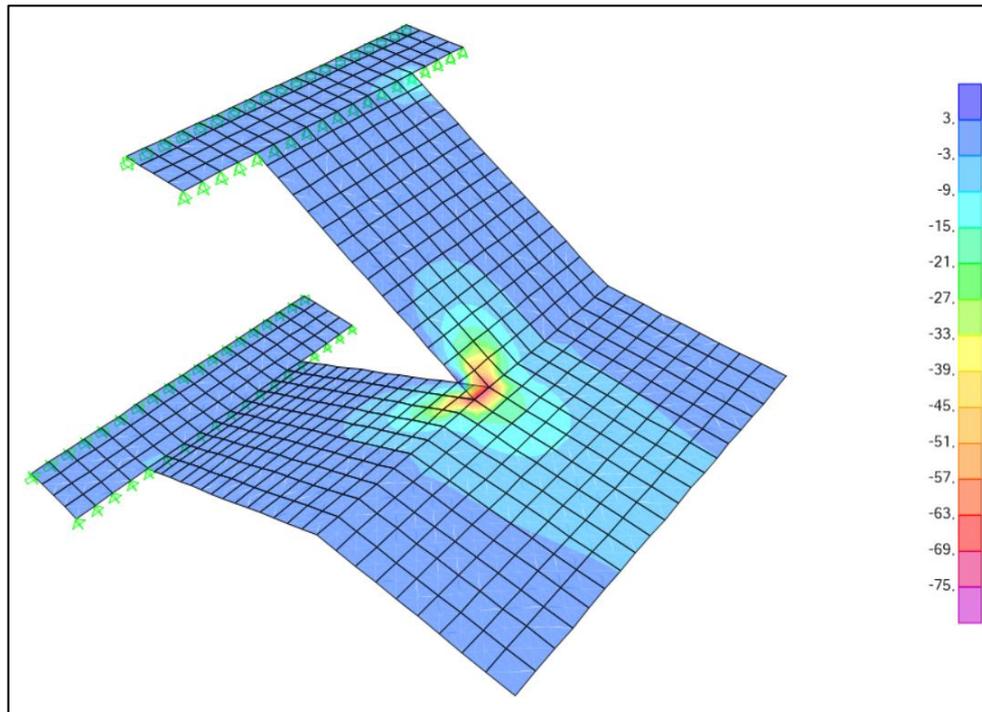
Fonte: Autor (2019).

**Figura B.7** – Momentos fletores M11 em escada com continuidade com laje de 12 cm, em kNm/m.



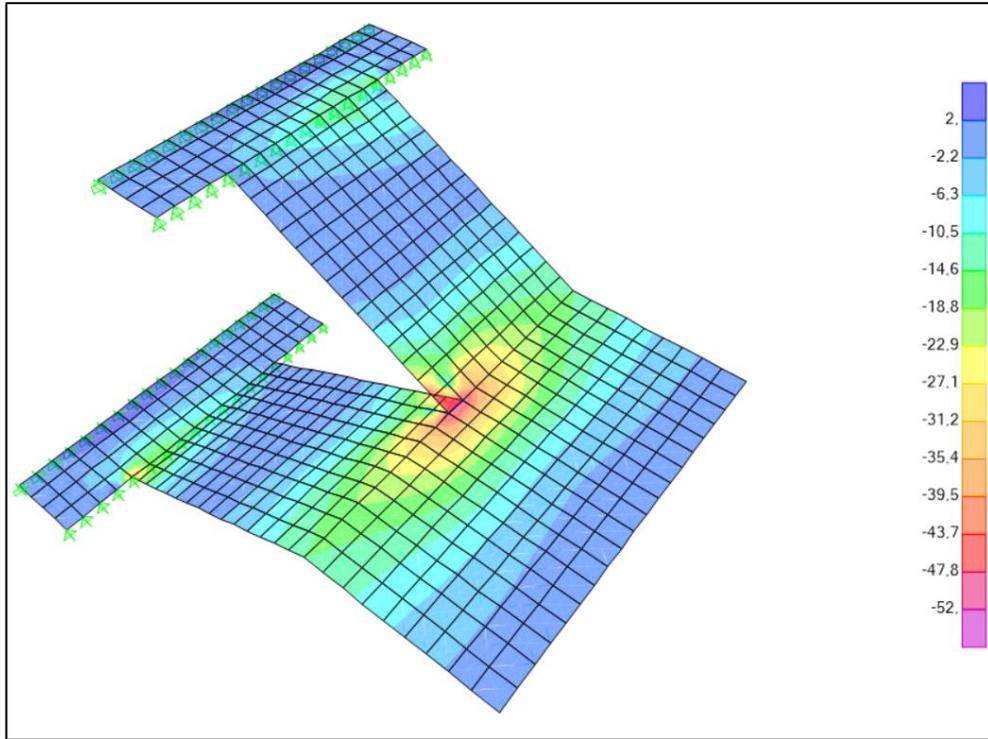
Fonte: Autor (2019).

**Figura B.8** – Momentos fletores M22 em escada com continuidade com laje de 12 cm, em kNm/m.



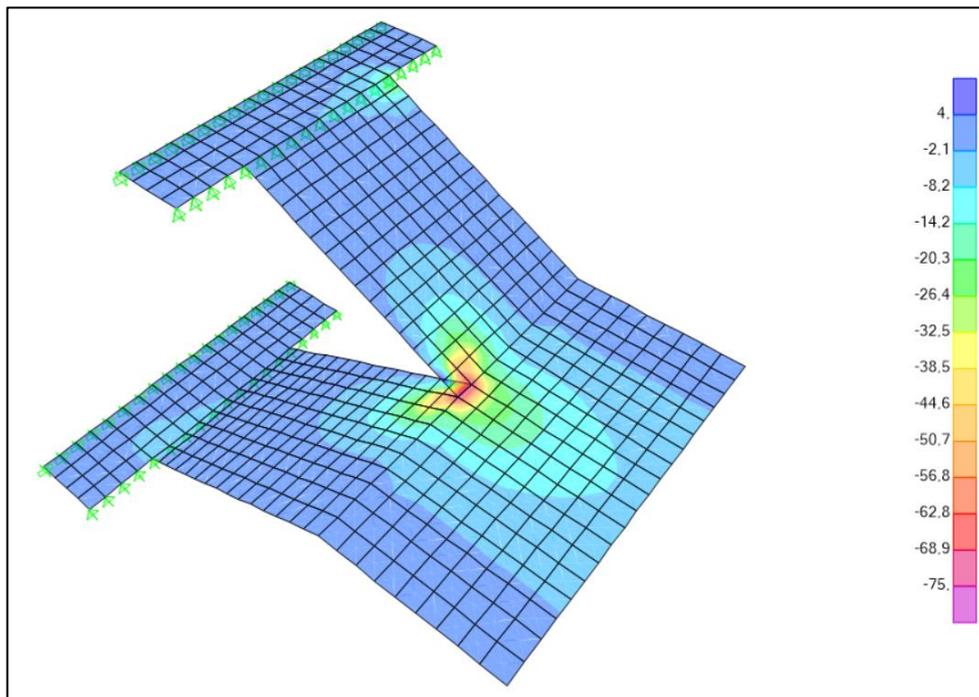
Fonte: Autor (2019).

**Figura B.9** – Momentos fletores M11 em escada com continuidade com laje de 18 cm, em kNm/m.



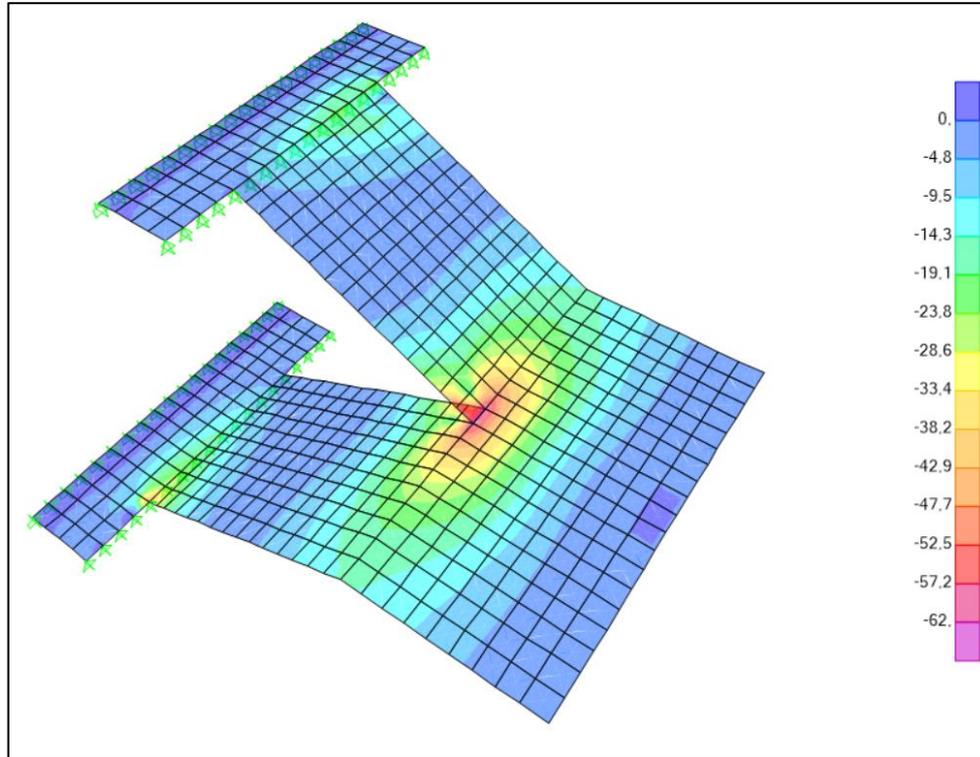
**Fonte:** Autor (2019).

**Figura B.10** – Momentos fletores M22 em escada com continuidade com laje de 18 cm, em kNm/m.



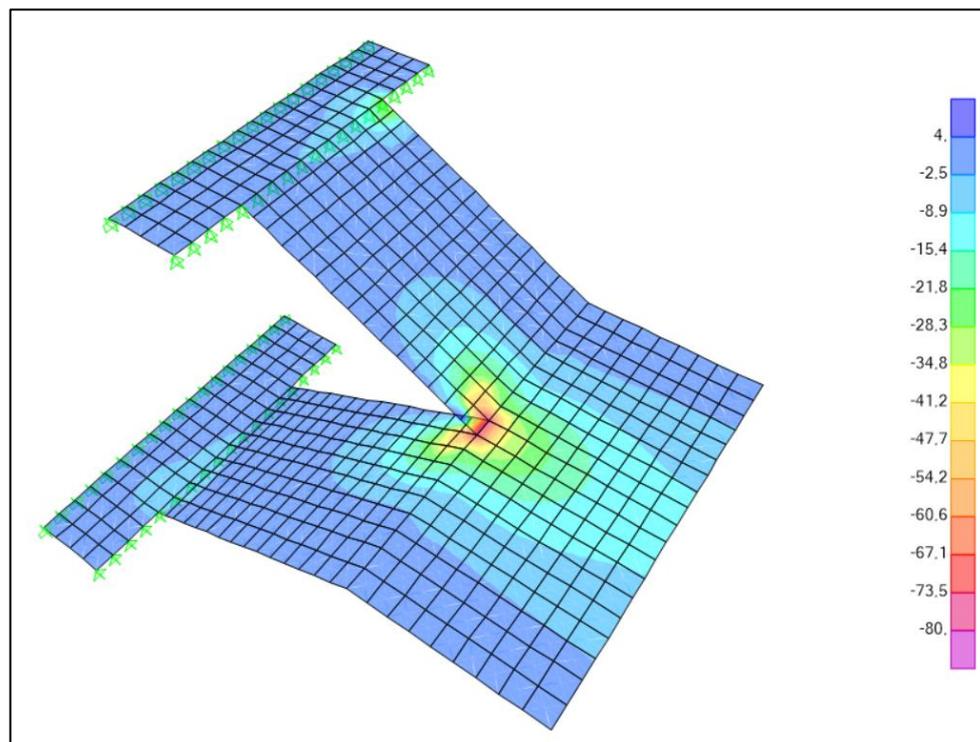
**Fonte:** Autor (2019).

**Figura B.11** – Momentos fletores M11 em escada com continuidade com laje de 25 cm, em kNm/m.



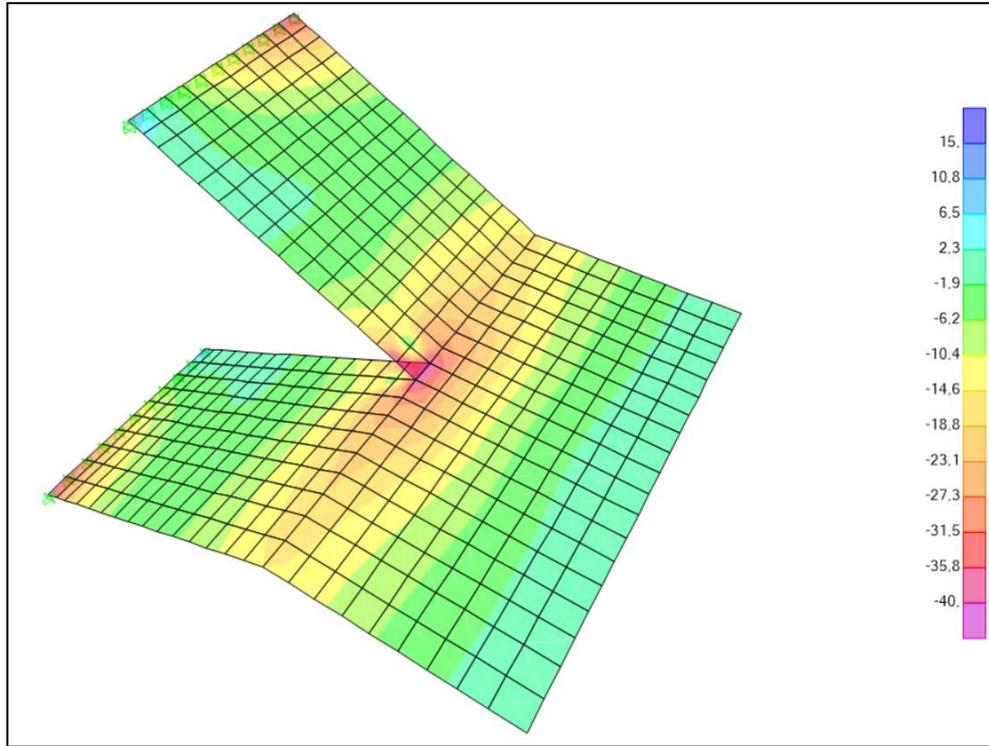
Fonte: Autor (2019).

**Figura B.12** – Momentos fletores M22 em escada com continuidade com laje de 25 cm, em kNm/m.



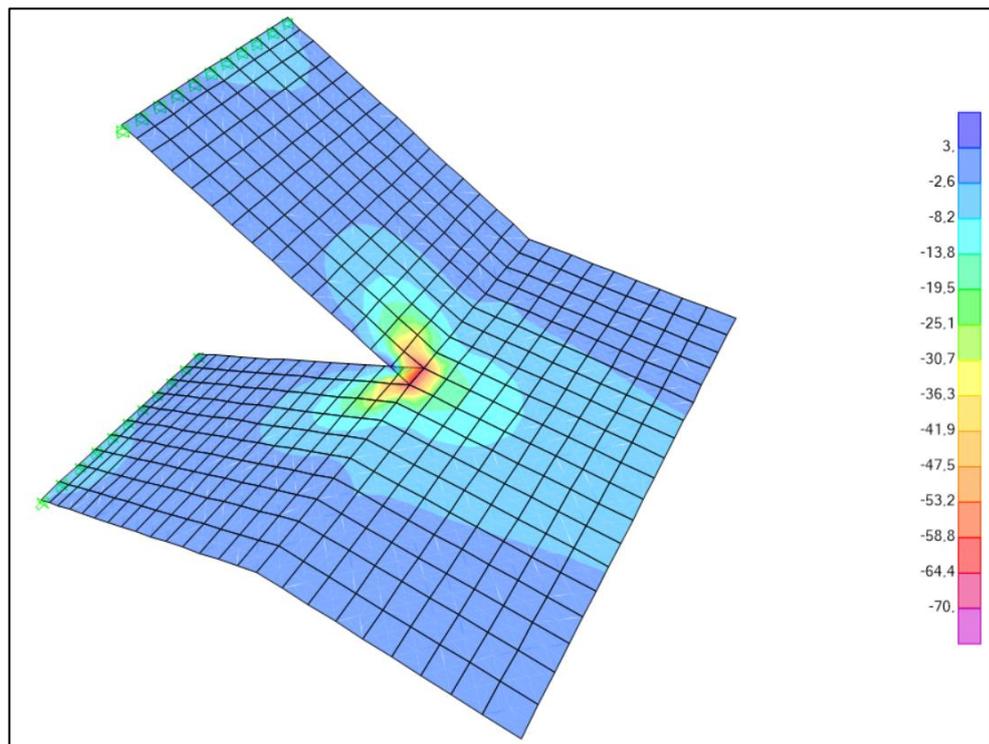
Fonte: Autor (2019).

**Figura B.13** – Momentos fletores M11 em escada engastada com laje de 12 cm, em kNm/m.



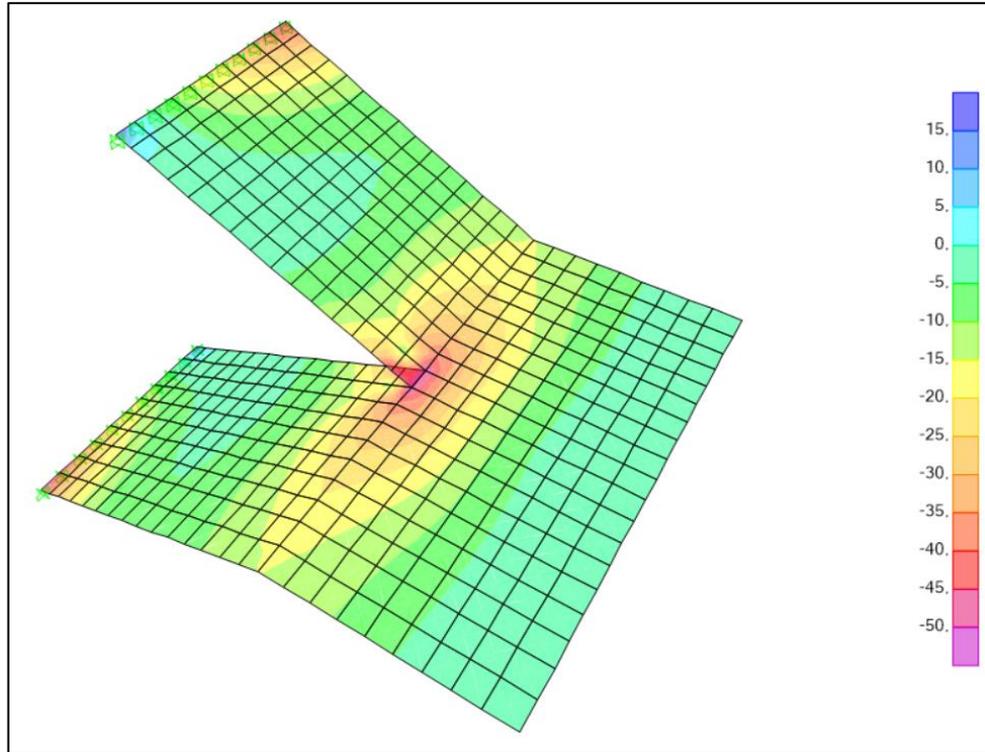
Fonte: Autor (2019).

**Figura B.14** – Momentos fletores M22 em escada engastada com laje de 12 cm, em kNm/m.



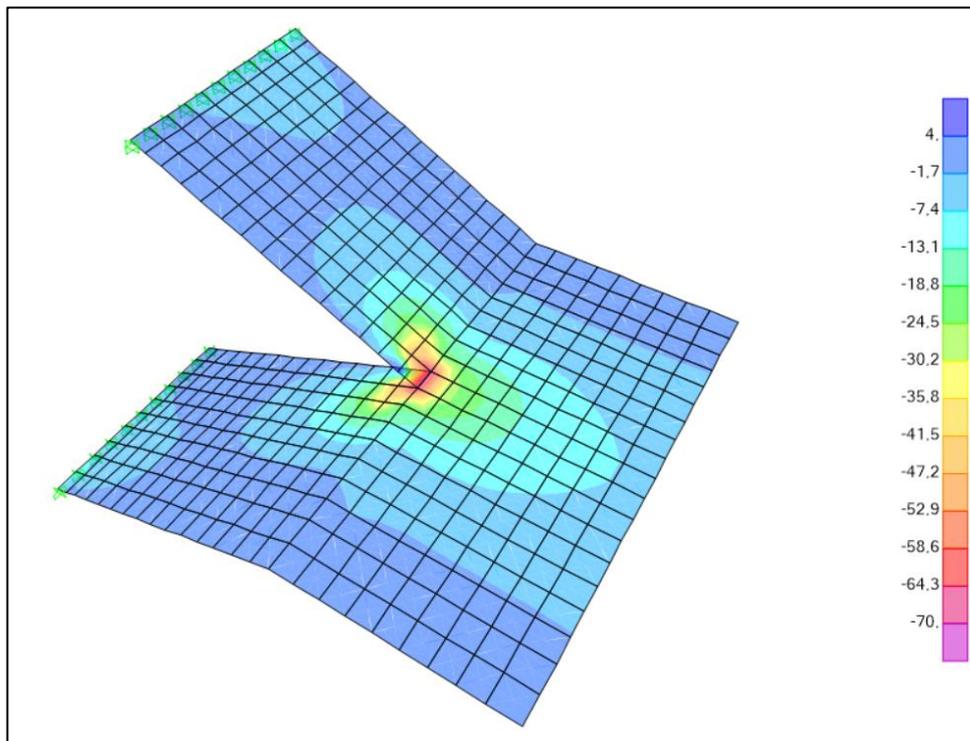
Fonte: Autor (2019).

**Figura B.15** – Momentos fletores M11 em escada engastada com laje de 18 cm, em kNm/m.



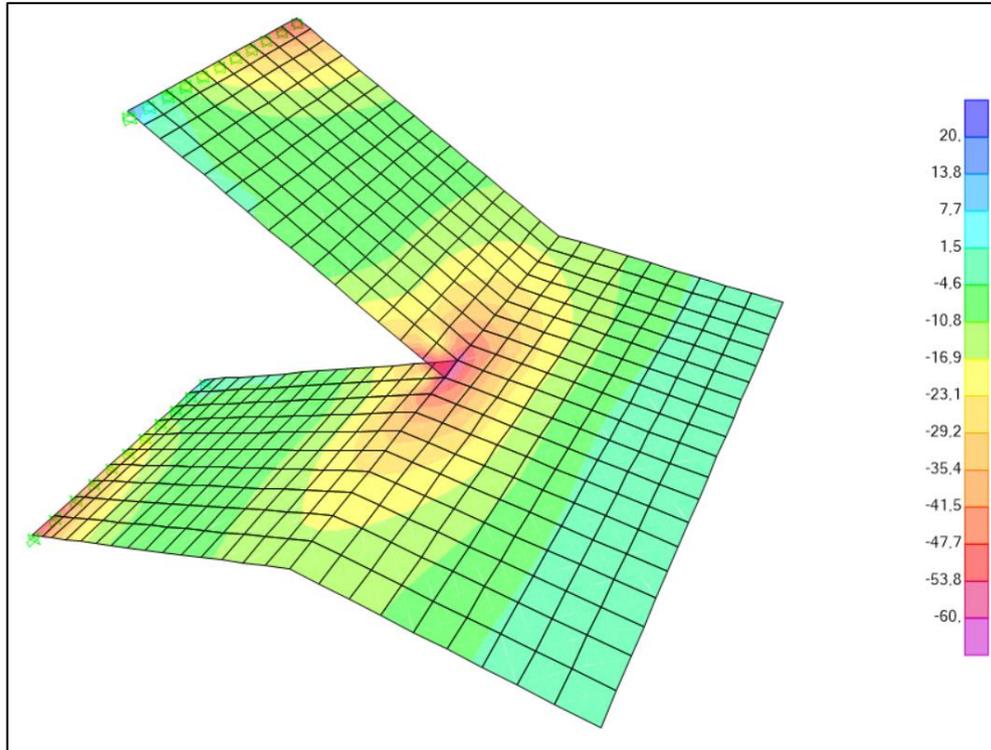
Fonte: Autor (2019).

**Figura B.16** – Momentos fletores M22 em escada engastada com laje de 18 cm, em kNm/m.



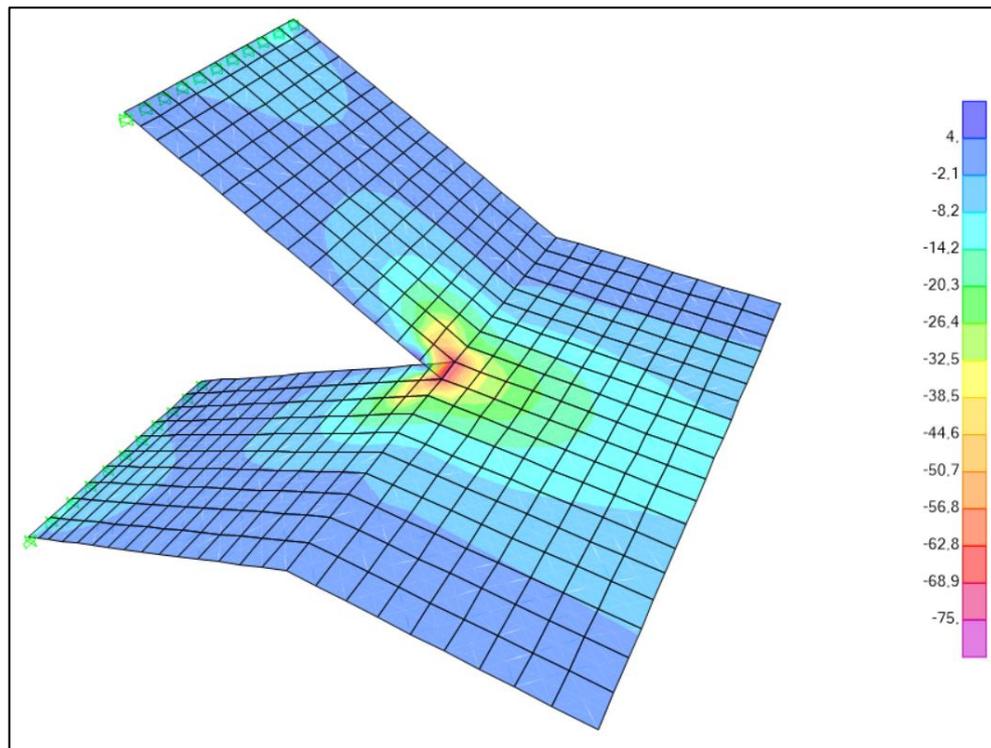
Fonte: Autor (2019).

**Figura B.17** – Momentos fletores M11 em escada engastada com laje de 18 cm, em kNm/m.



**Fonte:** Autor (2019).

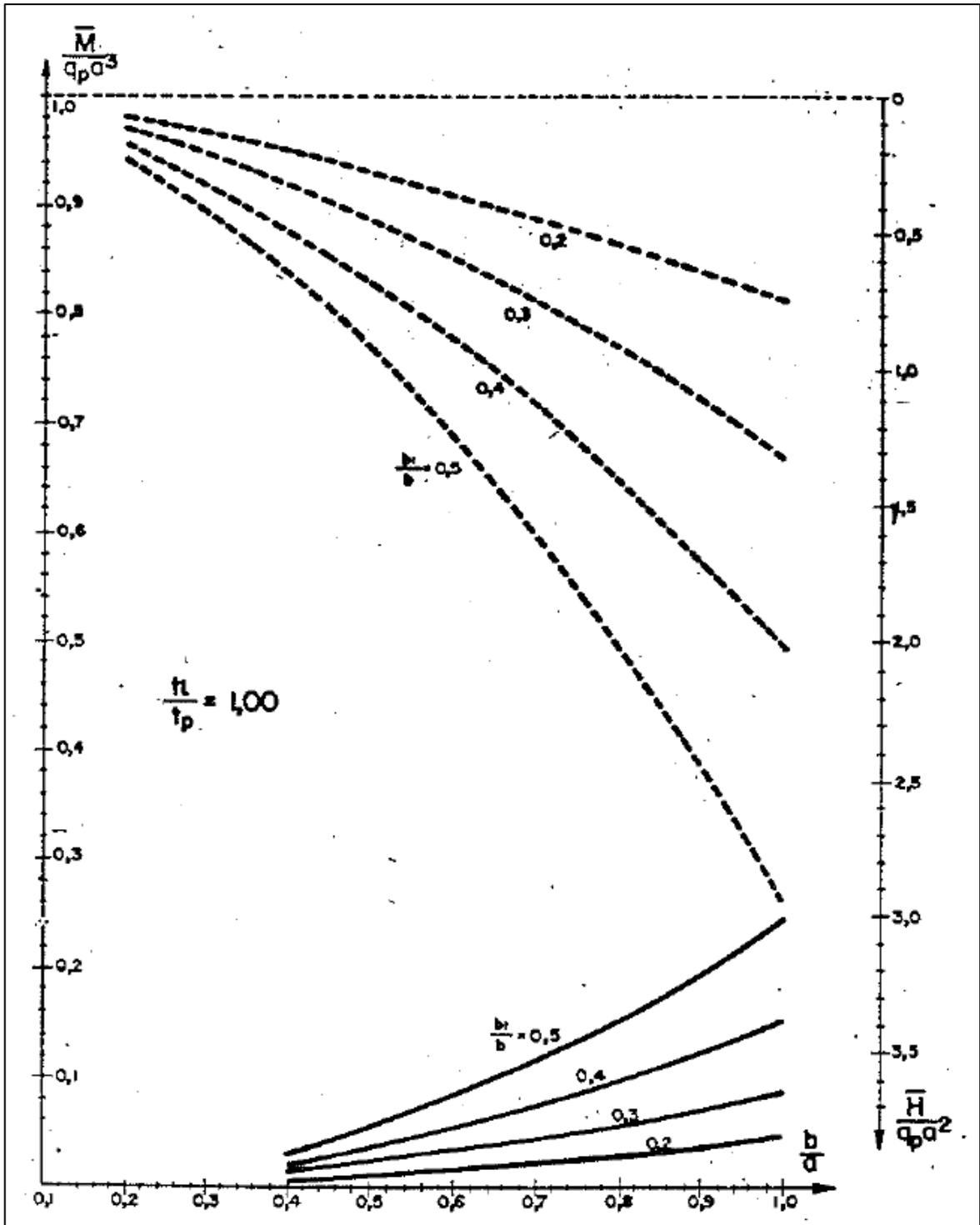
**Figura B.18** – Momentos fletores M22 em escada engastada com laje de 18 cm, em kNm/m.



**Fonte:** Autor (2019).

ANEXO A – CURVAS DO MÉTODO ANALÍTICO DE KNIJNIK & TAVARES (1977)

Figura AA.1 – Curva para obtenção dos esforços ( $t_p/t_1 = 1$ )



Fonte: Knijnik & Tavares (1977).