**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE – UFRN**
**CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO**

**BÁRBARA SUELEN PAULO DOS SANTOS**

# PROBLEMA DOS CASAIS

**MARTINS – RN**
**2016**

**BÁRBARA SUELEN PAULO DOS SANTOS**

**ROBLEMA DOS CASAIS**

Monografia apresentada à Universidade Federal do Rio Grande do Norte como um dos pré-requisitos para obtenção do grau de Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Médio, sob a orientação do Professor Dr. Iesus Carvalho Diniz.

Aprovado em: 17 de julho de 2016

Banca Examinadora

Professor Dr. Iesus Carvalho Diniz – UFRN
**Presidente**

Professora Esp. Danielle de Oliveira N. Vicente – UFRN
**Primeiro Membro**

Professor Me. Odilon Júlio dos Santos – UFRN
**Segundo Membro**

**MARTINS – RN**

**2016**

## SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO ........................................ 01

2 – OS LEMAS DE KAPLANSKY ........................................ 01

3 – DESENVOLVIMENTO ........................................ 02

4 – COMENTÁRIOS ........................................ 04

REFERÊNCIAS ........................................ 04

# 1 Introdução

Um espaço de probabilidades consiste dos elementos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ em que $\Omega$ é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento, espaço amostral, $\mathcal{F}$ é uma $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\Omega$, eventos, e $\mathbb{P}$ uma medida de probabilidade definida nos elementos de $\mathcal{F}$. [1] [2]

**Definição 1.1 ($\sigma$-Álgebra de Conjuntos)** *Uma classe não vazia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\Omega$ é dita ser uma $\sigma$-álgebra se:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. *Se* $A \in \mathcal{F}$, *então* $A^c \in \mathcal{F}$.
3. *Se* $A_i \in \mathcal{F}\ \forall i \in \mathbb{N}$, *então* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

**Definição 1.2 (Medida de Probabilidade)** *Seja $\mathcal{F}$ uma $\sigma$-álgebra de conjuntos de $\Omega$. Uma função $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ é uma medida de probabilidade se:*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$.
3. *Se* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ *e disjuntos,* $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$. *A medida $\mathbb{P}$ é $\sigma$-aditiva.*

Se o espaço amostral for constituído de no máximo uma quantidade enumerável de pontos, i.e., finito ou infinito enumerável, pode-se tomar como $\sigma$-álgebra de $\Omega$ o conjunto das partes de $\Omega$, i.e., $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Se o espaço amostral $\Omega$ for infinito não enumerável nem todos os elementos de $\mathcal{P}(\Omega)$ serão elementos de $\mathcal{F}$, e portanto não mensuráveis em relação à medida $\mathbb{P}$.

O ensino de probabilidade ao nível de ensino médio geralmente se restringe ao estudo de problemas em que o espaço amostral é finito e equiprovável, isto é, todos os eventos elementares têm a mesma probabilidade, neste caso a probabilidade de um dado evento é dada simplesmente pela razão entre as cardinalidades do evento e do espaço amostral. Neste contexto ao se falar em probabilidade não muito mais é feito do que fazer problemas de contagem, sem se quer descrever as propriedades da medida de probabilidade $\mathbb{P}$, onde ela está definida e até mesmo trabalhar noções mais elaboradas de classes de conjuntos além do conjunto das partes.

No ensino médio raramente é falado de um problema clássico em Análise Combinatória que é o de calcularmos a quantidade de subconjuntos de tamanho $p$ de um dado conjunto de tamanho $n$ nos quais os elementos do subconjuntos são não consecutivos. Este problema tem solução nos Lemas de Kaplansky. O princípio da inclusão e exclusão é outro tópico que também é abordado no ensino médio de maneira superficial e sem associá-lo a inúmeras outras ferramentas matemáticas numa vasta classe de problemas em que o mesmo se insere.

Abordaremos um problema clássico da teoria das probabilidades no qual é um bela aplicação do princípio da inclusão e exclusão juntamente com o Lema de Kaplansky.

# 2 Os Lemas de Kaplansky

Considere um conjunto com $n$ elementos dos quais estamos interessados em saber quantos subconjuntos de tamanho $p$ existem sem que haja elementos consecutivos. Como um exemplo inicial considere a seguinte situação. Um grupo de $n$ presidentes estão reunidos numa conferência da ONU sendo que os presidentes de Israel e Irã recusam-se a sentar lado a lado. Observemos que o total de possibilidades de todos se disporem à mesa respeitadas as preferências dependerá se a mesa tem forma circular ou não. Se a mesa tiver formato circular a posição 1 é consideradada adjacente a posição $n$, caso a mesa não seja circular a posição 1 é considerada adjacente apenas da posição 2. [3]

**Lema 2.1 (Primeiro Lema de Kaplansky)** *Quantos são os subconjuntos de $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ de tamanho $p$ em que não há elementos consecutivos é*

$$\binom{n-p+1}{p}.$$

**Demonstração:** Cada escolha de $p$ elementos determina outros $n-p$ elementos não selecionados. Notemos que para os $p$ elementos selecionados sejam não consecutivos é suficiente escolhermos $p$ posições das $n-p+1$ determinadas pelos $n-p$ elementos não selecionados, assim o total de possibilidades de escolha é $\binom{n-p+1}{p}$.

□

**Lema 2.2 (Segundo Lema de Kaplansky)** *Quantos são os subconjuntos de $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ de tamanho $p$ em que não há elementos consecutivos e que o 1 é considerado adjacente ao $n$ é*

$$\frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}.$$

**Demonstração:** Particionemos os subconjuntos de tamanho $p$ de elementos não consecutivos em relação à presença ou não do 1. Pelo princípio aditivo, segue-se que o total de possibilidades será os subconjuntos de tamanho $p$ e elementos não consecutivos nos quais o 1 está presente mais os subconjuntos de tamanho $p$ e elementos não consecutivos nos quais o 1 não está presente.

Se o 1 estiver presente devemos escolher $p-1$ elementos não consecutivos de $\{3, \ldots, n-1\}$, que pode ser feito de

$$\binom{n-3-(p-1)+1}{p-1} = \binom{n-p-1}{p-1}.$$

Se o 1 não estiver presente, devemos escolher $p$ elementos não consecutivos de $\{2, \ldots, n\}$, que pode ser feito de

$$\binom{n-1-p+1}{p} = \binom{n-p}{p}.$$

Assim, o total de possibilidades é

$$\binom{n-p-1}{p-1} + \binom{n-p}{p} = \frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}.$$

□

# 3 Desenvolvimento

Se $n$ casais estão sentados numa mesa circular com cadeiras numeradas de 1 a $2n$, em que homens e mulheres estão em posições alternadas e as mulheres ocupam as posições ímpares, qual a probabilidade de que nenhum casal sente em posições adjacentes?

**Solução:** Sejam $\Omega =$\{todas as permutações nas quais pessoas de mesmo sexo não aparecem juntas\} e $A_i =$\{há um casal nas posições $i$ e $i+1$\} para todo $i \in \{1, \ldots, 2n\}$. O evento $A = \cup_{i=1}^{2n} A_i$ é não vazio, se e somente se, ao menos um casal ocupa posições adjacentes. Queremos calcular a probabilidade do evento complementar, $A^c = \cap_{i=1}^{2n} A_i^c$, de que nenhum casal se sente em posições adjacentes. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{2n} A_i) = 1 - \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{P}(A_i) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 2n} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2}) \\ - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 2n} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) + \ldots + (-1)^{2n} \mathbb{P}(A_1 A_2 \ldots A_{2n}), \quad \text{com } |\Omega| = (n!)^2\end{aligned} \tag{3.1}$$

Determinemos as probabilidades dos eventos dados em (3.1), com a convenção que a posição $2n+1$ é a mesma que primeira posição, logo $\mathbb{P}(A_{2n}A_1) = 0$. A cardinalidade de $\Omega = n!n! = (n!)^2$. Consideremos

O evento $A_i$ ocorre, se e somente se, houver um casal nas posições $i$ e $i+1$, esposa e marido, respectivamente. Há $n$ possibilidades para a escolha de um dos casais para ocupar as posições $i$ e $i+1$, com os demais $n-1$ homens podendo-se alternar em $n-1$ posições diferentes de $(n-1)!$ maneiras, havendo também outras $(n-1)!$ possibilidades para as mulheres. Assim,

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{n \cdot (n-1)!^2}{n!^2} = \frac{(n-1)!}{n!} \quad \forall i \in \{1, \ldots, 2n\} \tag{3.2}$$

Observe que se $i$ e $j$ são consecutivos, então $A_iA_j = \varnothing$, pois deveríamos ter dois casais em três posições, o que é impossível devido a superposição. Se $i$ e $j$ são não consecutivos, o evento $A_iA_j$ ocorre, se e somente se, existir um casal nas posições $i$ e $i+1$, há $n$ possibilidades, um segundo casal nas posições $j$ e $j+1$, há outras $n-1$ possibilidades, restando $n-2$ homens para serem distribuídos em $n-2$ posições, existem $(n-2)!$ possibilidades, e a mesma quantidade de $(n-2)!$ para as $n-2$ mulheres que não fazem parte dos casais que estão nas posições $i$, $i+1$, $j$ e $j+1$ e que vão ocupar $n-2$ posições. Logo, com $\mathbb{P}(A_{2n}A_1) = 0$ e para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\mathbb{P}(A_iA_j) = \begin{cases} n(n-1)\dfrac{(n-2)!^2}{n!^2} = \dfrac{(n-2)!}{n!} & \text{se } |i-j| \geq 2 \\ 0 & \text{se } |i-j| = 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

Consideremos agora o evento $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}$ com $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, 2n\}$ tais que:

1. $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$;
2. $i_{j+1} - i_j \geq 2$ para todo $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, pois $A_jA_{j+1} = \varnothing$;
3. Como os casais estão dispostos numa mesa circular, a posição $2n$ é adjacente à posição 1. Deveremos ter portanto para que $A_{i_1}A_{i_k} \neq \varnothing$, que as posições $i_1$ e $i_k+1$ não sejam coincidentes, ou seja, $2n + i_1 - (i_k+1) \geq 1$.

Considerando-se as restrições dos três itens acima expostos tem-se que $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}$ ocorre, se e somente se: um primeiro casal ocupa as posições $i_1$ e $i_1+1$, que pode ocorrer de $n$ maneiras, pois há $n$ casais para se escolher. Um segundo casal ocupa as posições $i_2$ e $i_2+1$, que pode ocorrer de $n-1$ maneiras,..., um $k$-ésimo casal ocupa as posições $i_k$ e $i_k+1$ que pode ocorrer de $n-k+1$ maneiras. Para cada uma das $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ maneiras de distribuir os $k$ casais de modo que cada marido fique ao lado de sua esposa, existem outras $n-k$ posições para os homens e $n-k$ para as mulheres que podem ser preenchidas de $(n-k)!(n-k)!$ maneiras. Assim,

$$\mathbb{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)!^2}{n!^2} = \frac{(n-k)!}{n!} \tag{3.4}$$

Observe que para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, cada subfamilia de eventos $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}$ tem iguais probabilidades dadas em (3.4) e definamos por $S_{k,n}$ o total de subfamílias de tamanho $k$ com $\mathbb{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) > 0$, com $S_{0,n} := 1$. Da definição de $S_{k,n}$ e (3.4), segue-se de (3.1) que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A^c) = 1 - \sum_{i=1}^{2n}\mathbb{P}(A_i) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 2n} \mathbb{P}(A_{i_1}A_{i_2}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 2n} \mathbb{P}(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) + \ldots \\ = (-1)^0\frac{(n-0)!}{n!}S_{0,n} + (-1)^1\frac{(n-1)!}{n!}S_{1,n} + (-1)^2\frac{(n-2)!}{n!}S_{2,n} \\ + (-1)^3\frac{(n-3)!}{n!}S_{3,n} + \ldots = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n-k)!}{n!}S_{k,n}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Notemos que determinar $S_{k,n}$ corresponde a contarmos o número de maneiras que podemos escolher $k$ pares de assentos, sem que nenhum desses pares tenha um assento em comum com outro par, pois neste caso $\mathbb{P}(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = 0$. Como os casais estão em uma mesa circular, as posições $2n$ e 1 são adjacentes. Consideremos então o problema inicial de determinar $N_{k,m} :=$ o número de maneiras de escolher $k$ pares de assentos adjacentes, de um total de $m$ assentos e nos quais o assento 1 não é considerado adjacente ao assento $2n$, sem assentos comuns entres os pares. $N_{k,m}$ corresponde a permutar $k$ símbolos de um tipo (os pares de assentos escolhidos) e $m - 2k$ de um segundo tipo (os assentos que não foram escolhidos para formar par). Segue-se portanto que

$$N_{k,m} = \binom{m - 2k + k}{k} = \binom{m-k}{k} \tag{3.6}$$

Particionemos o total das permutações dos $k$ pares de assentos adjacentes naqueles que o par 1 e $2n$ é escolhido ou não. Se o par 1 e $2n$ for escolhido, devemos então selecionarmos $k-1$ pares de um total de $2n-2$ assentos, dos assentos 2 a 2n-1, cujo total de possibilidades é, por (3.6), $N_{k-1,2n-2}$. Se os assentos 1 e $2n$ não forem escolhidos para formar um par, então basta selecionarmos $k$ pares de assentos adjacentes entre os $2n$ assentos disponíveis, $N_{k,2n}$. Assim,

$$\begin{aligned} S_{k,n} = N_{k-1,2n-2} + N_{k,2n} &\overset{(3.6)}{=} \binom{2n-2-(k-1)}{k-1} + \binom{2n-k}{k} = \\ &\binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-k}{k} = \binom{2n-k}{k}\frac{2n}{2n-k}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

De (3.7) em (3.5) segue-se que

$$\mathbb{P}(A^c) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n-k)!}{n!} \binom{2n-k}{k} \frac{2n}{2n-k}$$

$\square$

# 4 Comentários

# Referências


[1] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 1. Wiley, January 1968.

[2] Sheldon M. Ross. *A First Course in Probability*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., fifth edition, 1998.

[3] A.C. Morgado. *Analise combinatoria e probabilidade: com as soluções dos exercícios*. Coleção do professor de matematica. SBM, 2006.