



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE FÍSICA BACHARELADO

Correção relativística em curvas de rotação de galáxias

Ramon De Oliveira Silva Júnior

Natal/RN

2022

Ramon De Oliveira Silva Júnior

Correção relativística em curvas de rotação de galáxias

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador

Prof. Dr. Ronaldo Carlotto Batista

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

Natal/RN

2022

Monografia de Graduação intitulada *Correção relativística em curvas de rotação de galáxias* apresentada por Ramon De Oliveira Silva Júnior e aceita pelo Departamento de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof. Dr. Ronaldo Carlotto Batista
Orientador
Escola de Ciências e Tecnologia - ECT
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Profa. Dr. Leo Gouvea Medeiros
Examinador
Escola de Ciências e Tecnologia - ECT
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Prof. Dr. Raimundo Silva Junior
Examinador
Departamento de Física - DFTE
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Natal/RN

Aos meus familiares.

Agradecimentos

Aos meus pais, por me darem suporte emocional e financeiro para focar nos meus estudos acima de qualquer outra coisa e por todo o apoio e afeto que me deram ao longo de toda minha vida.

À minha irmã, por sempre estar presente e preocupada com meu bem estar, me incentivando a seguir o que me faz feliz.

À minha namorada, por ser uma grande incentivadora de tudo que faço, por sempre estar disponível para me ouvir e aconselhar e por acreditar em mim mesmo nos momentos mais difíceis.

Ao professor Dr. Ronaldo Carlotto Batista, pela orientação, pela confiança, pela paciência e pelos ensinamentos que compartilhou comigo.

Aos professores Dr. Carlos Eduardo Pellicer De Oliveira e Dr. Elton José Figueiredo De Carvalho, que foram meus orientadores durante minha graduação no Bacharelado em Ciências e Tecnologia e me inspiraram a fazer o curso de Bacharelado em Física.

Aos professores do Departamento de Física que fizeram parte da minha formação.

Aos meus amigos da graduação e de fora do ambiente acadêmico, que tornaram os dias mais alegres e menos cansativos.

À UFRN e ao CNPQ, que por meio de programas de bolsas de iniciação científica permitiram que eu desenvolvesse minhas atividades de pesquisa com apoio financeiro.

Correção relativística em curvas de rotação de galáxias

Autor: Ramon De Oliveira Silva Júnior

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Carlotto Batista

RESUMO

A matéria escura é uma das grandes incógnitas do mundo da ciência. Sua existência é evidenciada como necessária para explicar fenômenos astrofísicos e cosmológicos relacionados às forças gravitacionais. Entretanto, sua composição é desconhecida por não apresentar interações não gravitacionais com partículas do modelo padrão. Ela foi proposta para explicar evidências de falta de massa no universo, como no caso das curvas de rotação em galáxias espirais, onde a velocidade de rotação das estrelas e do gás observada é maior que a esperada de acordo com a massa visível. Neste trabalho, buscamos estudar o problema da matéria escura em curvas de rotação de galáxias espirais usando o modelo da esfera isotérmica rebaixada e avaliamos suas possíveis correções relativísticas devido à correção na energia cinética do sistema. Para determinar as curvas de rotação, resolvemos numericamente, com simetria esférica, a equação de Poisson, com a densidade de matéria escura dada pela função de distribuição de velocidade das partículas. Para realizar uma análise realista das correções relativísticas, ajustamos os parâmetros do modelo para descrever os dados observacionais de oito galáxias do catálogo SPARC, com massas totais da ordem de $10^9 M_\odot$, $10^{10} M_\odot$ e $10^{11} M_\odot$. Então, tomamos a correção relativística de primeira ordem da energia cinética que, por sua vez, corrige a função de distribuição. Verificamos que o modelo da esfera isotérmica rebaixada clássico descreve satisfatoriamente os dados de curvas de rotação das galáxias analisadas e que, mesmo para as galáxias mais massivas, que tem velocidade de rotação máxima de cerca de 300 km/s, a correção relativística é muito pequena em toda a extensão do halo. Finalmente observamos que a correção relativística seria relevante apenas para velocidades de rotação da ordem de 1000 km/s. Não há galáxias espirais conhecidas com tamanha velocidade de rotação, mas essa é a escala da dispersão de velocidades de galáxias em aglomerados de galáxias, o que sugere que a distribuição de velocidades das partículas de matéria escura nesses objetos pode ser ligeiramente modificada devido a efeitos relativísticos.

Palavras-chave: Matéria Escura, Curvas de Rotação, Galáxias.

Relativistic correction in galaxy rotation curves

Autor: Ramon De Oliveira Silva Júnior

Advisor: Prof. Dr. Ronaldo Carlotto Batista

ABSTRACT

Dark matter is one of the great unknowns in the world of science, as its existence is evidenced as necessary to explain astrophysical and cosmological phenomena related to gravitational forces, but its composition is unknown as it does not have non-gravitational interactions with particles in the standard model. It was proposed to explain evidence of a lack of mass in the universe, as in the case of rotation curves in spiral galaxies, where the observed speed of rotation of stars and gas is greater than expected according to the visible mass. In this work we seek to study the dark matter problem in rotation curves of spiral galaxies using the lowered isothermal sphere model and evaluate its possible relativistic corrections due to the correction in the kinetic energy of the system. To determine the rotation curves, we solve numerically, with spherical symmetry, the Poisson equation with the dark matter density given by the particle velocity distribution function. To perform a realistic analysis of relativistic corrections, we adjusted the model parameters to describe observational data from eight SPARC catalog galaxies, with total masses of the order of $10^9 M_{\odot}$, $10^{10} M_{\odot}$ and $10^{11} M_{\odot}$. Then, we take the first-order relativistic correction of the kinetic energy, which in turn corrects the distribution function. We verified that the classical lowered isothermal sphere model satisfactorily describes the rotation curve data of the analyzed galaxies and that, even for the most massive galaxies, which have a maximum rotation speed of about 300 km/s, the relativistic correction is very small across the entire length of the halo. Finally, we note that the relativistic correction would only be relevant for rotational speeds of the order of 1000 km/s. There are no known spiral galaxies with such a high rotational speed, but this is the scale of the dispersion of galaxy velocities in galaxy clusters, which suggests that the velocity distribution of dark matter particles in these objects may be slightly modified due to relativistic effects.

Keywords: Dark Matter, Rotation Curves, Galaxies.

Lista de figuras

1	Representação do movimento circular do disco de estrelas em uma galáxia espiral. Fonte: ESO/L Calçada.	p. 16
2	Ajuste das curvas de rotação com dados observacionais realizando a sobreposição de 3 parâmetros, as linhas tracejadas são para os componentes visíveis, as linhas pontilhadas para o gás e as linhas traço-ponto para o halo de matéria escura. Fonte: Ref. [1].	p. 19
3	Mapa das anisotropias da CMB Fonte:ESA/Planck Collaboration.	p. 20
4	Espectro de potência das flutuações de temperatura no fundo cósmico de micro-ondas. As flutuações são mostradas em diferentes escalas angulares no céu. Pontos vermelhos com barras de erro são os dados do Planck. A curva verde representa o modelo de concordância da cosmologia Λ CDM. Fonte:ESA/Planck Collaboration.	p. 20
5	Exemplo de galáxia com o modelo NFW. As linhas verdes, rosas e pretas representam contribuições de gás, disco e matéria escura, a linha vermelha representa a velocidade total. Fonte: Ref. [2].	p. 27
6	Exemplo de galáxia com o modelo Einasto. Os pontos pretos com barras de erro são os dados observacionais para as curvas de rotação da galáxia; as linhas pontilhadas verdes são a contribuição bariônica para as curvas de rotação; as linhas pontilhadas violetas são as curvas de rotação do halo de matéria escura; e as linhas vermelhas são as curvas de rotação de melhor ajuste resultantes para os dados observados. Fonte: Ref. [3].	p. 28
7	Comparação entre as simulações dos perfis de densidade Fonte: Ref. [4].	p. 29
8	Distribuição dos parâmetros Galáxia ESO563-G021.	p. 38
9	Distribuição dos parâmetros Galáxia F574-1.	p. 39
10	Distribuição dos parâmetros Galáxia UGCA444.	p. 39

11	Galáxias com massa total $M \simeq 10^9 M_\odot$. Os pontos pretos com barra de erro representam os dados do catálogo SPARC e a linha azul é a curva gerada pelo modelo.	p. 40
12	Galáxias com massa total $M \simeq 10^{10} M_\odot$. Os pontos pretos com barra de erro representam os dados do catálogo SPARC e a linha azul é a curva gerada pelo modelo.	p. 40
13	Galáxias com massa total maior que $M \simeq 10^{11} M_\odot$. Os pontos pretos com barra de erro representam os dados do catálogo SPARC e a linha azul é a curva gerada pelo modelo.	p. 41
14	Diferença entre os modelos com e sem correção em escala logarítmica para as galáxias com massa total $M \simeq 10^9 M_\odot$	p. 46
15	Diferença entre os modelos com e sem correção em escala logarítmica para as galáxias com massa total $M \simeq 10^{10} M_\odot$	p. 47
16	Diferença entre os modelos com e sem correção em escala logarítmica para as galáxias com massa total maior que $M \simeq 10^{11} M_\odot$	p. 47
17	Comparação entre as diferenças de acordo com o tamanho.	p. 48

Sumário

1	Introdução	p. 12
2	Matéria escura	p. 14
2.1	Análise histórica	p. 14
2.2	Curvas de rotação em galáxias espirais	p. 16
2.3	Evidências cosmológicas	p. 18
3	Perfis de densidade	p. 22
3.1	A equação de Poisson	p. 22
3.2	Exemplos de perfis de densidade	p. 24
3.2.1	Perfil da esfera isotérmica	p. 24
3.2.2	Perfil Einasto	p. 26
3.2.3	Perfil NFW	p. 27
3.2.4	Outros perfis	p. 29
4	A esfera isotérmica rebaixada	p. 31
4.1	Sistemas com simetria esférica definidos por uma função de distribuição	p. 31
4.2	A esfera isotérmica	p. 33
4.3	A esfera isotérmica rebaixada	p. 34
4.4	Ajuste de parâmetros	p. 36
4.4.1	MCMC	p. 36
4.4.2	Resultados para as curvas de rotação	p. 37

5	Correção relativística	p. 42
5.1	Modificações no perfil de densidade	p. 42
5.2	Resultados da correção relativística	p. 46
6	Considerações finais e perspectivas	p. 49
6.1	Conclusões	p. 49
	Referências	p. 50

1 Introdução

Ao estudar cosmologia, nos depararmos com o problema da matéria escura é algo recorrente. A matéria escura é uma forma de matéria que não tem interações eletromagnéticas, sua existência é inferida apenas por efeitos gravitacionais e sua dispersão de velocidades é não relativística, dificultando, dessa forma, sua detecção.

Observações de velocidades de rotação de galáxias espirais, dispersão de velocidade de galáxias em aglomerados de galáxias, lentes gravitacionais e distribuição de temperatura de gás quente em galáxias e aglomerados implicam que a matéria escura é responsável pela maior parte de massa no universo, compondo cerca de 85 % da matéria e 25 % de sua densidade total de energia. Ela também desempenha um papel central na formação de estruturas e na evolução das galáxias, e tem efeitos mensuráveis nas anisotropias da radiação cósmica de fundo, tornando-a, assim um objeto de estudo essencial para explicar a evolução do universo. [5]

Os candidatos à matéria escura podem ser divididos em 3 categorias segundo sua velocidade térmica no universo jovem: matéria escura fria, morna e quente. A matéria escura fria consiste em partículas não relativísticas no momento em que se desacoplam dos outros componentes do universo (essencialmente fótons e neutrinos). A matéria escura quente, por outro lado, consiste em partículas que se moviam em velocidades ultra relativísticas no momento em que se desacoplaram. Já a matéria escura morna é formada por partículas que se movem com velocidades não desprezíveis, mas muito menores que a velocidade da luz. [5]

O modelo de matéria escura quente foi descartado pois suas previsões para as anisotropias da radiação cósmica de fundo e formação de estruturas é muito diferente do observado. Assim, as soluções mais coerentes seriam os modelos de matéria fria ou morna. [6]

Concentramos nosso estudo no caso da velocidade de rotação da matéria escura em galáxias espirais utilizando o modelo esfera isotérmica rebaixada, que é conhecido e utili-

zado para descrever sistemas astronômicos como aglomerados globulares e halos de matéria escura [7]. Para modelar as curvas de rotação realizamos simulações computacionais utilizando a linguagem de programação Python e resolvemos numericamente, com simetria esférica, a equação de Poisson com a densidade de matéria escura dada pela função de distribuição de velocidade das partículas.

As curvas de rotação foram ajustadas a partir dos dados observacionais presentes no catálogo SPARC [8]. Por fim, realizamos a correção relativística de primeira ordem na energia cinética do sistema, que gera uma correção também na função de distribuição utilizada no modelo e verificamos a diferença entre os modelos com e sem correção.

O trabalho foi dividido da seguinte maneira: O capítulo 2 apresentará uma revisão teórica sobre a matéria escura, sua história, suas evidências e o detalhamento no problema focado das curvas de rotação. No capítulo 3, será apresentado como as curvas de rotação são modeladas a partir de um perfil de densidade, apresentando exemplos de perfis já conhecidos e bastante utilizados. No capítulo 4, será apresentado o modelo da esfera isotérmica rebaixada, detalhando sua definição a partir de uma função de distribuição e os resultados para as curvas de rotação. No capítulo 5, será apresentado a correção relativística e quais mudanças ela apresenta em relação ao modelo padrão. Por fim, no capítulo 6, apresentamos as principais discussões e conclusões obtidas a partir dos resultados das simulações e as perspectivas geradas por essas conclusões.

2 Matéria escura

Neste capítulo será apresentada uma retrospectiva sobre acontecimentos importantes que puseram o problema da matéria ausente do universo em evidência, seguido de uma revisão teórica sobre as curvas de rotação em galáxias que serão o foco do trabalho.

2.1 Análise histórica

O interesse dos seres humanos em entender o universo e seus componentes é algo que nos permeia desde os tempos que se tem registro. Os grandes questionamentos que fundamentaram a criação da filosofia grega sobre quem somos, de onde viemos e de que tudo é composto serviram como base para a cosmologia conhecida nos dias de hoje a partir do momento que essas perguntas se expandiram para elementos astronômicos como planetas, estrelas e galáxias.

Apesar de que, até hoje, não termos certeza do que de fato é a matéria escura, as evidências de sua existência só aumentaram com a evolução da física e do nosso conhecimento sobre o universo. Com a formulação das leis de Newton e sua publicação, no fim do século XVII, o estudo da astronomia deu um grande salto pois através da lei da gravitação universal foi possível determinar a massa gravitacional de corpos astronômicos a partir de suas propriedades dinâmicas.

Dentre os primeiros cientistas que se propuseram a abordar o problema da matéria ausente temos Lord Kelvin. Em 1884, utilizando da dinâmica Newtoniana, ele propôs que se as estrelas da Via Láctea pudessem ser descritas como um gás de partículas, sob influência da gravidade. Assim, seria possível estabelecer uma relação entre o tamanho do sistema e a dispersão de velocidade das estrelas igualando a energia cinética do sistema à energia potencial gravitacional.

Kelvin concluiu que, para que o sistema fosse estável e permanecesse em equilíbrio, como é observado, a quantidade de massa existente na galáxia deveria ser muito maior

que a calculada de acordo com a luz das estrelas, sugerindo então que deveria existir mais estrelas que aquelas que são possíveis observar, denominando esses elementos como "corpos escuros"[9].

Durante os estudos de Kelvin a compreensão era de que o Universo existente se limitava a extensão da Via Láctea. Após a virada do século com a descoberta de novas galáxias por Edwin Hubble, o astrônomo Fritz Zwicky notou que esse problema da massa ausente se estendia também para aglomerados de galáxias. Em 1933 Zwicky utilizou o Teorema do Virial para calcular a massa do aglomerado de Coma. Através de seus cálculos a dispersão de velocidades referente à massa visível deveria ser de 80 km/s, enquanto a dispersão de velocidade observada seria em torno de 1000 km/s [9]. Essa análise o fez inferir que a quantidade de matéria deveria ser muito maior que a de matéria observável.

Outros grandes avanços sobre o estudo da matéria faltante só vieram a acontecer por volta da metade do século XX. Com computadores mais avançados e técnicas de detecção e observação mais precisas, a proposição da existência da matéria escura se fortaleceu. Estudos sobre as curvas de rotação em galáxias espirais realizados por Vera Rubin e Kent Fort demonstraram que a matéria escura também dominava esses objetos. Ao analisar a galáxia de Andrômeda constataram que as curvas de rotação se mostravam planas para grandes raios, diferente do que era esperado de acordo com a matéria visível. [10]

Apenas as curvas de rotação não se mostraram suficientes para a comprovação da existência da matéria escura, porém, paralelamente, a verificação de evidências cosmológicas para sua existência deu suporte à teoria, sendo uma das principais as análises das anisotropias da radiação cósmica de fundo. [5]

Além disso, próximo ao fim do século as lentes gravitacionais, propostas por Einstein em sua teoria da relatividade geral publicada em 1915, puderam ser observadas. Ao analisar a deformação do espaço causada pela gravidade de objetos com grandes massas como galáxias e aglomerados foi possível inferir que a quantidade de massa necessária, para ocorrerem as deformações observadas, se mostra incompatível com distribuição da matéria visível. [11]

Diversas outras evidências da matéria escura surgiram após o aumento de sua relevância devido observações como as descritas. Nas próximas seções iremos discutir algumas evidências cosmológicas e detalhar a evidência das curvas de rotação que são o foco do trabalho.

2.2 Curvas de rotação em galáxias espirais

Em galáxias espirais, podemos considerar que as estrelas realizam movimento circular, orbitando o centro da galáxia, formando um disco como mostra a figura 1.

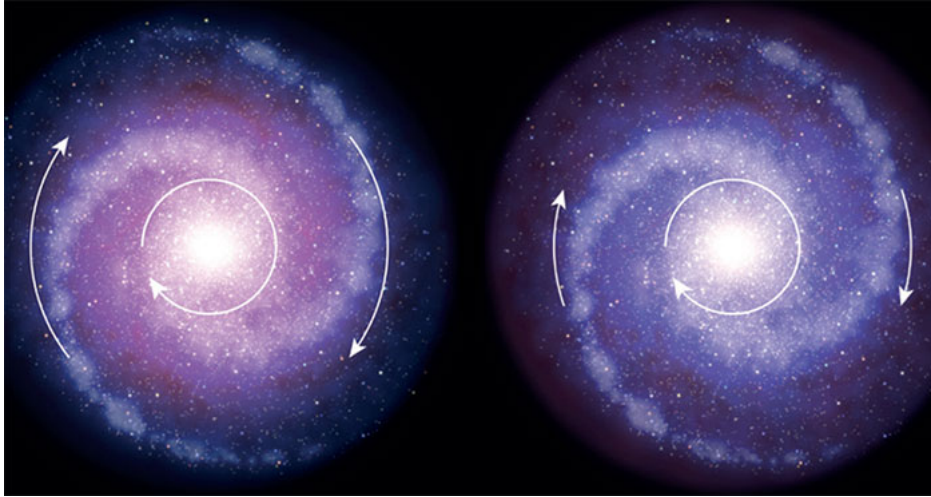


Figura 1: Representação do movimento circular do disco de estrelas em uma galáxia espiral. Fonte: ESO/L Calçada.

Sendo o raio da órbita R e a velocidade orbital v , a estrela nessa configuração sofrerá aceleração centrípeta apontando para o centro da galáxia, dada por

$$a = \frac{v^2}{R}, \quad (2.1)$$

a estrela também sofre aceleração proveniente da atração gravitacional dada por

$$a = \frac{GM(R)}{R^2}, \quad (2.2)$$

sendo $M(R)$ a massa contida numa esfera de raio R , centrada no centro da galáxia. Como o sistema está em equilíbrio podemos igualar as duas acelerações, encontrando assim, a relação entre a massa da galáxia e sua velocidade de rotação

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM(R)}{R^2}, \quad (2.3)$$

logo

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}. \quad (2.4)$$

Assumindo simetria esférica, a massa $M(R)$ é dada por

$$M(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr. \quad (2.5)$$

Se consideramos a massa total da galáxia apenas a massa visível, para a região visível ela pode ser calculada como a massa contida em uma esfera de raio R , com densidade ρ , temos então que

$$M(R) = \frac{4\pi\rho R^3}{3}, \quad (2.6)$$

substituindo esse resultado da massa em (2.4), temos

$$v = \sqrt{\frac{G4\pi\rho R^3}{3R}} = \sqrt{\frac{4\pi\rho G}{3}} R, \quad (2.7)$$

logo, $v \propto R$.

Para as regiões externas ao disco de matéria visível, o esperado é que a massa da galáxia permaneça constante, de modo que, ao substituir na equação (2.4) devemos ter $v \propto 1/\sqrt{R}$.

Porém, resultados obtidos a partir da medições das curvas de rotação de galáxias mostram que a velocidade não está de acordo com o esperado. Para a região central, com grande densidade de estrelas, a relação $v \propto R$ é observada, mas para a região externa a velocidade, que deveria decair à medida que as estrelas se tornassem mais distantes do centro da galáxia, a velocidade se mantém constante após atingir um valor máximo.

A matéria visível não é suficiente para que a velocidade se mantenha dessa maneira. A solução encontrada é que as galáxias deveriam estar envolvidas por halos esféricos extensos e difusos de matéria escura, pois se a massa $M(R)$, for proporcional a R para a região externa ao disco, temos que a partir da equação (2.4) a velocidade circular será constante [9].

Sendo o halo esférico, para $M(R) \propto R$, devemos ter uma densidade $\rho(r)$ nessas galáxias do tipo

$$\rho \propto R^{-2}. \quad (2.8)$$

Como veremos à frente no capítulo 4, a densidade distribuída de modo similar à uma esfera isotérmica.

É comum na literatura descrever que as curvas de rotação da maioria delas podem ser ajustadas satisfatoriamente pela sobreposição das contribuições do disco estelar e do gasoso, que correspondem a parte luminosa, ambos modelados por discos exponenciais, às vezes, de um bojo, e do halo de matéria escura, modelado por uma esfera quase isotérmica. A velocidade circular total da galáxia pode ser calculada pela soma de todas essas contribuições a partir da fórmula [12]

$$V_c^2(r) = V_{gas}^2(r) + \Upsilon_{*D}V_{disco}^2(r) + \Upsilon_{*B}V_{bojo}^2(r) + V_{ME}^2(r), \quad (2.9)$$

onde Υ_{*D} e Υ_{*B} são a razão massa-luminosidade do disco e do bojo respectivamente.

Na figura 2 podemos observar essa sobreposição. Dessa figura, podemos observar que para raios menores, próximo ao centro da galáxia, a contribuição de matéria luminosa é de grande importância, mas com o aumento do raio a existência de um halo esférico de matéria escura se mostra indispensável.

No capítulo 3, iremos demonstrar como a modelagem para as curvas de rotação pode ser realizada, exemplificando com alguns modelos utilizados para simular o halo esférico de matéria escura.

2.3 Evidências cosmológicas

Observações cosmológicas nos mostram de maneira consistente que a maior parte da massa no universo consiste em um componente desconhecido de matéria escura. A radiação cósmica de fundo em micro-ondas, conhecida como Cosmic Microwave Background (CMB), fornece medidas mais exatas dos parâmetros cosmológicos que descrevem a composição do universo e a nucleossíntese primordial restringe a abundância de matéria bariônica. Analisando as diferenças entre o limite possível de matéria bariônica e a radiação encontrada na CMB devido a matéria há uma lacuna que permanece uma incógnita na composição do universo.

A radiação cósmica de fundo foi descoberta em 1965 e impactou a cosmologia desde então por permitir o estudo da evolução do universo através da radiação emitida desde seu estágio inicial. Sua descoberta estabeleceu a ideia do Big Bang e confirmou a ideia que o universo está em expansão [13].

A partir do estudo dessa radiação é possível entender sobre a composição do universo, pois a matéria bariônica, no início do universo, era ionizada e interagia fortemente com

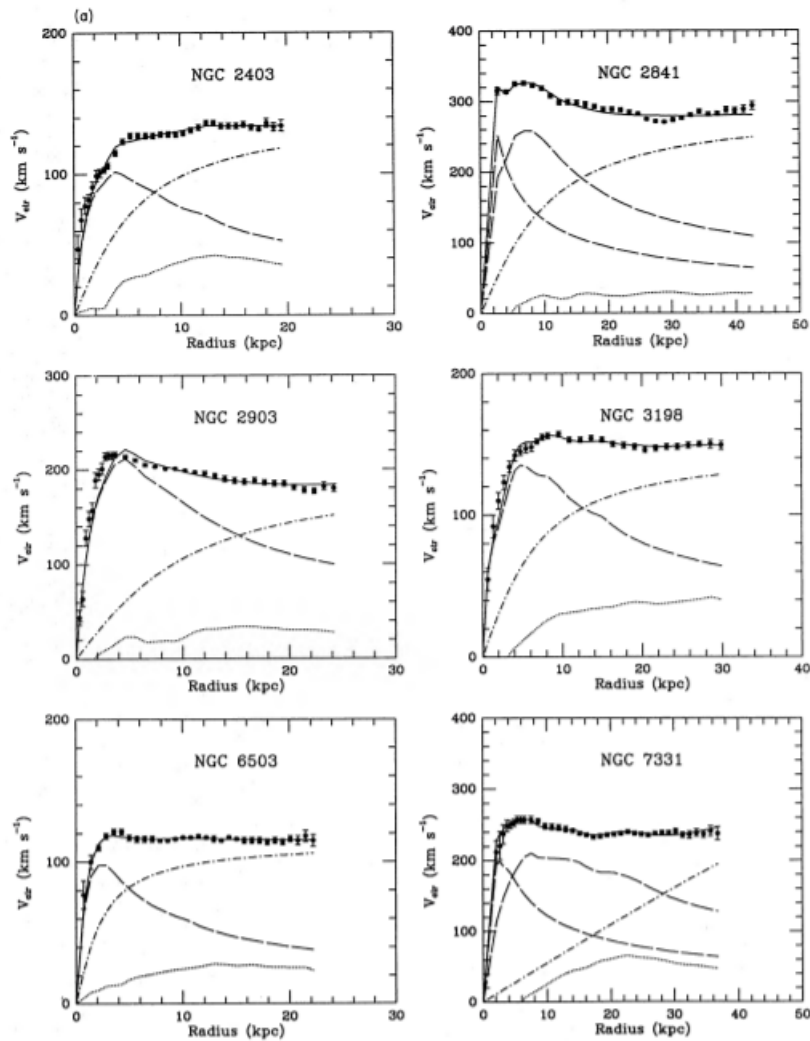


Figura 2: Ajuste das curvas de rotação com dados observacionais realizando a sobreposição de 3 parâmetros, as linhas tracejadas são para os componentes visíveis, as linhas pontilhadas para o gás e as linhas traço-ponto para o halo de matéria escura. Fonte: Ref. [1].

a radiação via espalhamento de Thomson. Já a matéria escura não possui interações eletromagnéticas, logo não interage diretamente com a radiação, porém afeta a CMB por seu potencial gravitacional e por seus efeitos na densidade e velocidade da matéria. Assim, as perturbações da matéria bariônica e da matéria escura evoluem de forma diferente com o tempo e deixam marcas diferentes na radiação cósmica de fundo [13].

Análises em escalas cosmológicas de anisotropias na CMB demonstram que os fótons sofreram oscilações que congelaram ao se desacoplar da matéria bariônica em um redshift de 1100. A escala angular e a altura dos picos dessas oscilações são dados importantes para a definição dos parâmetros cosmológicos, incluindo a densidade de energia total, a fração de massa bariônica e o componente de matéria escura. Na figura 3 temos a representação

do mapa das anisotropias da CMB e na figura 4 a representação da função de correlação das flutuações de temperatura na escala angular.

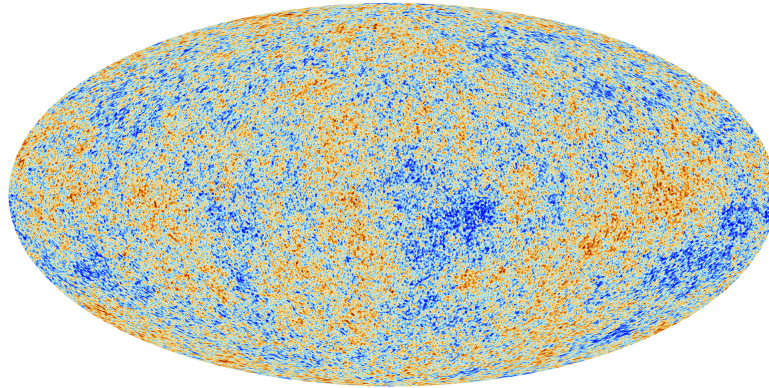


Figura 3: Mapa das anisotropias da CMB Fonte:ESA/Planck Collaboration.

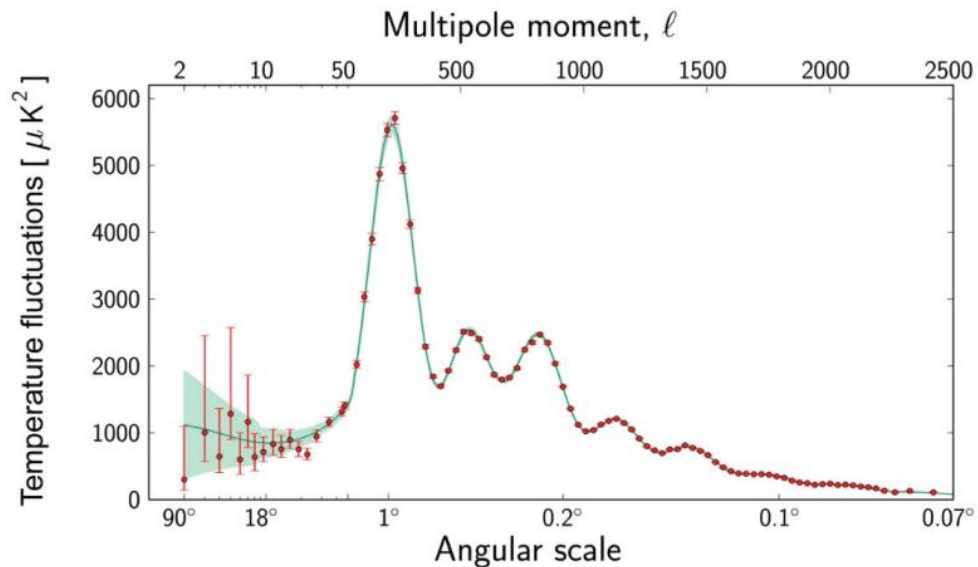


Figura 4: Espectro de potência das flutuações de temperatura no fundo cósmico de micro-ondas. As flutuações são mostradas em diferentes escalas angulares no céu. Pontos vermelhos com barras de erro são os dados do Planck. A curva verde representa o modelo de concordância da cosmologia Λ CDM. Fonte:ESA/Planck Collaboration.

O espectro de potência nos dá uma base para geometria e para a composição do universo. O primeiro pico do espectro, posicionado em cerca de 1° , indica que o universo possui geometria plana, correspondendo a uma densidade de energia do universo atual de $\sim 10^{-29} gm/cm^3$.

O posicionamento dos outros picos das flutuações de temperatura permitiram a definição dos valores para os parâmetros cosmológicos. Dessas análises, foi concluído que apenas 5% da composição total do universo é referente à matéria bariônica, enquanto

26% do total é matéria escura [14]. Sendo possível observar que a CMB por si só fornece evidências que a matéria escura, além de existir, seja mais abundante que a matéria bariônica.

3 Perfis de densidade

Neste capítulo, será descrito como podemos derivar as curvas de rotação em galáxias espirais a partir da definição do perfil de densidade do sistema.

3.1 A equação de Poisson

A equação de Poisson é uma equação diferencial parcial muito utilizada, em áreas da física como o eletromagnetismo e a gravitação, que nos permite entender como o potencial elétrico ou o gravitacional se comporta no espaço real a partir da escolha de uma forma funcional da densidade.

Para obtê-la podemos considerar uma certa superfície esférica de uma distribuição de massa para um volume V arbitrário dada por

$$M = \int_V \rho dV, \quad (3.1)$$

onde ρ é a função de densidade. O fluxo do campo gravitacional (\vec{g}) através dessa superfície esférica será dado pela expressão

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A}, \quad (3.2)$$

a lei de Gauss para a gravitação nos diz que o fluxo gravitacional que atravessa uma superfície é igual a $-4\pi GM$, assim temos

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM = -4\pi G \int_V \rho dV, \quad (3.3)$$

o teorema da divergência afirma que

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{g} dV, \quad (3.4)$$

substituindo a equação (3.4) em (3.3) temos

$$\int_V \nabla \cdot \vec{g} dV = -4\pi G \int_V \rho dV, \quad (3.5)$$

para que isso seja verdade para qualquer volume, devemos ter

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho, \quad (3.6)$$

\vec{g} pode ser escrito em termos do potencial gravitacional ϕ por

$$\vec{g} = -\nabla\phi. \quad (3.7)$$

Então, a equação (3.6) pode ser escrita usando (3.7) como

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (3.8)$$

essa equação (3.8) é a chamada Equação de Poisson.

Através da resolução dessa equação diferencial podemos encontrar a velocidade circular de uma galáxia, pois a partir de (2.1), temos que o módulo da aceleração da gravidade $g(r)$ será

$$g(r) = \frac{v_c^2}{r}, \quad (3.9)$$

a partir da relação (3.7) podemos encontrar a velocidade circular por

$$v_c^2 = -r \frac{d\phi}{dr}, \quad (3.10)$$

A resolução de equações diferenciais como essa nem sempre é fácil ou possível de ser realizada analiticamente, necessitando de métodos computacionais para encontrar sua solução numérica. Além disso, para que essas curvas geradas representem uma descrição coerente com o esperado é necessário que os parâmetros das funções e as condições de contorno sejam bem definidas.

3.2 Exemplos de perfis de densidade

Modelagens de curvas de rotação de matéria escura são realizadas desde o fim do século XX, existem modelos de perfis de densidade relevantes que utilizaram dos métodos descritos nas seções anteriores e apresentam descrições satisfatórias para curvas de rotação. Nessa seção será mostrado alguns exemplos.

3.2.1 Perfil da esfera isotérmica

O modelo da esfera isotérmica singular é um modelo simples utilizado para descrever aglomerados globulares e halos de matéria escura. Esse modelo é chamado de esfera isotérmica devido à dispersão de velocidade σ_V ser constante, pois esse parâmetro está ligado a temperatura do sistema através da relação termodinâmica $\sigma_V^2 = k_B T/m$, logo a temperatura do sistema também será constante.

Podemos derivá-lo se considerarmos um sistema com simetria esférica, sujeito apenas às forças de pressão e da gravitação. Pode-se imaginar o sistema como um gás cujas partículas são estrelas, galáxias, ou matéria escura.

A equação de Euler para fluidos ideais é dada por

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi, \quad (3.11)$$

onde \vec{v} é a velocidade do fluido, P a pressão e ϕ o potencial gravitacional.

Supondo que o sistema esteja em equilíbrio hidrostático temos que para um fluido em repouso a variação de velocidades será nula, assim a equação se torna

$$\frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} = -\vec{\nabla} \phi. \quad (3.12)$$

Assim, substituindo a equação (3.12) na equação de Poisson, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} \right) = -4\pi G \rho. \quad (3.13)$$

É possível definir uma equação de estado geral onde a pressão é uma função da densidade

$$P = P(\rho), \quad (3.14)$$

de modo que a equação (3.13) pode ser escrita, com simetria esférica em r , como

$$\frac{1}{r^2} \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} \left[\frac{1}{\rho^2} \left(2r\rho - \frac{d\rho}{dr} r^2 \right) \right] + \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) \frac{1}{\rho} \right] = -4\pi G\rho. \quad (3.15)$$

Temos que para um gás ideal de partículas de massa m a pressão é dada por

$$P = \rho K_B T / m. \quad (3.16)$$

Para um sistema gravitacional, é mais conveniente usar-se a dispersão de velocidades das partículas que a temperatura. Seja σ_V a dispersão de velocidades unidimensional, se o sistema é isotrópico, sua dispersão de velocidades total será $3\sigma_V^2$. Utilizando o teorema da equipartição de energia

$$\frac{1}{2} m 3\sigma_V^2 = \frac{3}{2} K_B T, \quad (3.17)$$

assim, a equação de estado deste gás é dada por

$$P = \rho \sigma_V^2, \quad (3.18)$$

como a dispersão de velocidades é constante, a resolução dessa equação diferencial (3.15) nos dá o perfil de densidade

$$\rho(r) = \frac{\sigma_V^2}{2\pi G r^2}. \quad (3.19)$$

Esse perfil é conhecido esfera isotérmica singular devido ao seu perfil de densidade possuir uma singularidade na origem, pois se $r \rightarrow 0$ teremos uma densidade infinita na origem.

Além disso, a massa contida até o raio R em um sistema esférico pode ser calculada por (2.5) substituindo a equação (3.19), a massa será

$$M(R) = 4\pi \int_0^R \left(\frac{\sigma_V^2}{2\pi G r^2} \right) r^2 dr = 2 \frac{\sigma_V^2}{G} R, \quad (3.20)$$

sendo, dessa maneira, a massa diretamente proporcional ao raio, tornando a massa total do sistema infinita.

Apesar disso, o modelo apresenta um perfil de densidade de acordo com o esperado em observações como citado na seção 2.2 e conseqüentemente por $M \propto R$, teremos que a velocidade circular, se substituirmos a massa em (2.4), será

$$v = \sqrt{\frac{G \left(2 \frac{\sigma_V^2}{G} R \right)}{R}} = \sqrt{2} \sigma_V, \quad (3.21)$$

assim, a velocidade circular para esse perfil será constante, resultado que também corresponde com o observado para grandes raios.

3.2.2 Perfil Einasto

Um dos primeiros perfis de densidade para sistemas esféricos estelares a serem propostos foi o perfil de Einasto (1965). Simulações realizadas por Graham (2006), Merritt (2006) e Navarro (2004) mostraram que o perfil de Einasto fornece uma descrição bastante precisa dos perfis de densidade de matéria escura que surgem durante o colapso do halo cosmológico, bem como perfis de bojos e galáxias elípticas (Cardone, Piedipalumbo e Tortora 2005) [15].

O perfil de Einasto é caracterizado por ter uma inclinação logarítmica que varia como uma lei de potência para o raio

$$\frac{d \log(\rho)}{d \log(r)} = -2 \left(\frac{r}{r_s} \right)^\alpha, \quad (3.22)$$

o parâmetro α define a inclinação da lei de potência e r_s é o raio de escala em que $\rho \propto r^{-2}$, nos dando uma inclinação logarítmica -2 . [3].

Ao integrar a equação (3.22) obtemos o perfil de densidade Einasto representado por

$$\rho(r) = \rho_s \exp \left(-\frac{2}{\alpha} \left[\left(\frac{r}{r_s} \right)^\alpha - 1 \right] \right), \quad (3.23)$$

temos então que o perfil de Einasto possui três parâmetros: o raio de escala r_s , a densidade nesse raio de escala ρ_s e α .

3.2.3 Perfil NFW

Apesar do perfil Einasto ter sido um dos primeiros perfis propostos, a popularização de sua utilização em simulações computacionais ocorreu após o sucesso das simulações realizadas para o perfil de Navarro-Frenk-White(NFW). Em 1997, Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk e Simon D.M. White publicaram um artigo em que realizaram simulações para curvas de rotação de galáxias para modelos de matéria escura fria(*Cold Dark Matter - CDM*) e demonstraram que os halos de matéria escura fria em simulações numéricas de N-corpos sem colisões poderiam ser descritas por um perfil de densidade universal [16]

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2} = \rho_c \frac{\delta_0}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}, \quad (3.24)$$

onde r_s é o raio de escala, $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ é a densidade de massa crítica cosmológica, δ_0 é conhecida como a sobredensidade característica e $H_0 = 67.8 \pm 0.9$ é o parâmetro de Hubble [17].

Pode ser visto na figura 5 abaixo exemplos de curvas de rotação modeladas a partir do modelo NFW

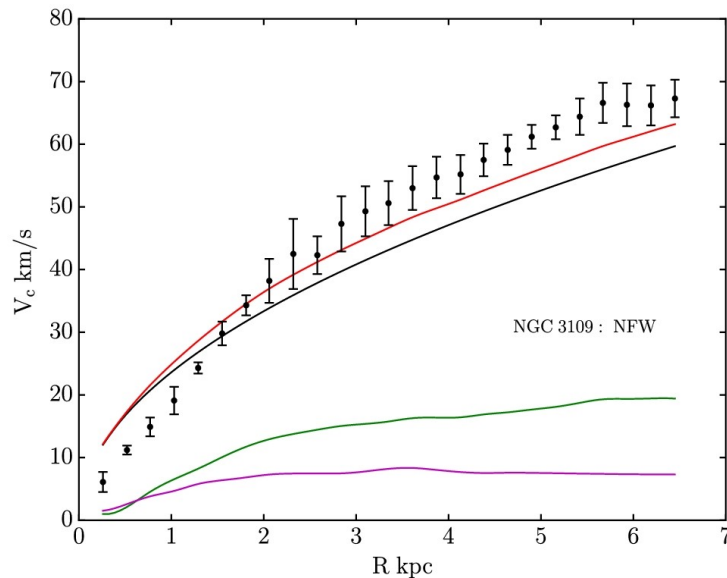


Figura 5: Exemplo de galáxia com o modelo NFW. As linhas verdes, rosas e pretas representam contribuições de gás, disco e matéria escura, a linha vermelha representa a velocidade total. Fonte: Ref. [2].

O modelo NFW se mostra em ótimo acordo com observações cosmológicas de grande escala, contudo apresenta problemas nas escalas de galáxias. O modelo prevê que os perfis de densidade nas regiões centrais desses objetos são divergentes ($\rho \propto r^{-1}$), ao passo

que observações indicam que a densidade é regular na origem ($\rho \propto cte$). Tal situação é conhecida na literatura como "Cusp/Core Problem"[18] e é possível observar na figura 5 uma diferença maior entre o modelo e os dados próximo a origem.

O modelo de Einasto, diferente do NFW, não apresenta o comportamento de cuspíde próximo a origem. Apresentando uma melhor descrição do observável, que seria um comportamento mais regular como um caroço. Na figura 6 abaixo temos um exemplo de galáxia modelada com o perfil Einasto onde é possível observar que essa modificação no perfil de densidade gera um melhor ajuste aos dados na região próxima a origem se comparado com o exemplo da figura 5.

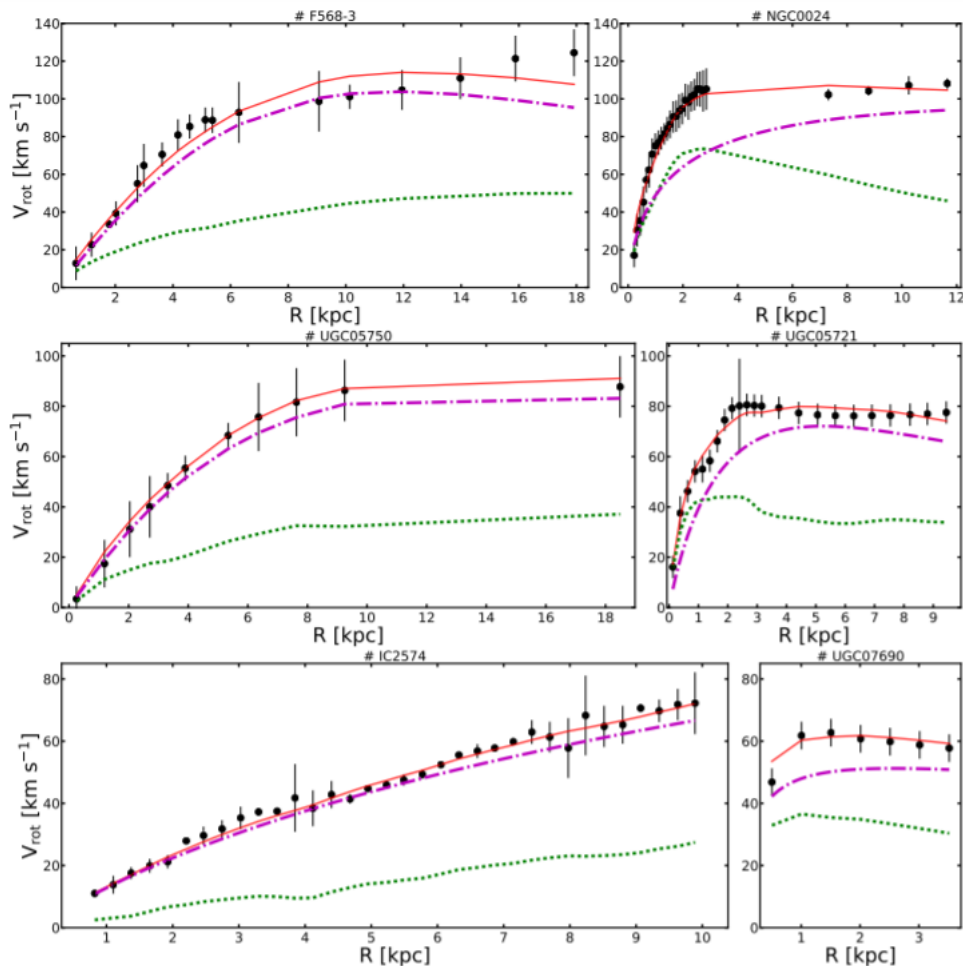


Figura 6: Exemplo de galáxia com o modelo Einasto. Os pontos pretos com barras de erro são os dados observacionais para as curvas de rotação da galáxia; as linhas pontilhadas verdes são a contribuição bariônica para as curvas de rotação; as linhas pontilhadas violetas são as curvas de rotação do halo de matéria escura; e as linhas vermelhas são as curvas de rotação de melhor ajuste resultantes para os dados observados. Fonte: Ref. [3].

3.2.4 Outros perfis

Além desses modelos, diversos outros perfis foram definidos e testados a partir de simulações buscando um ajuste compatível com os dados observados, podemos ver na figura 7 abaixo um comparativo entre alguns desses modelos, para a função densidade e para as curvas de rotação.

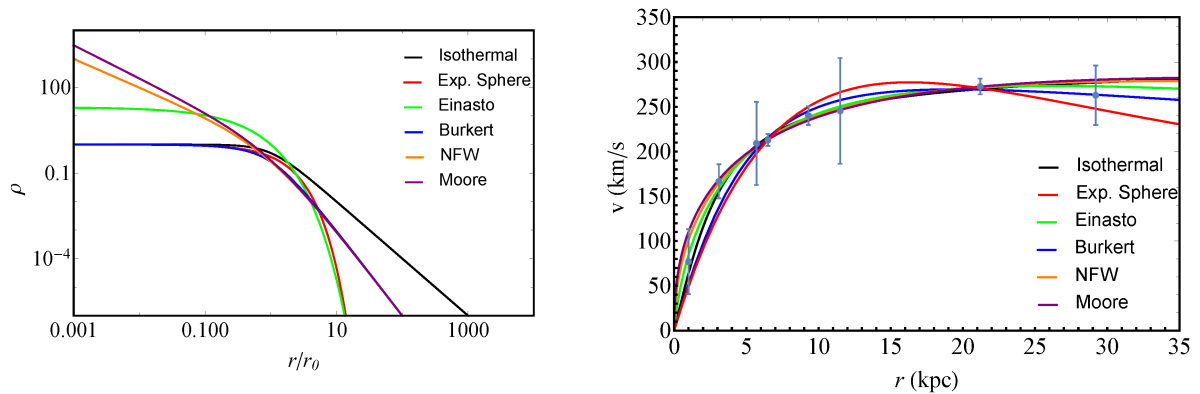


Figura 7: Comparação entre as simulações dos perfis de densidade Fonte: Ref. [4].

Na figura 7 além dos perfis já citados, outros perfis representados são:

O perfil de Moore [19]

$$\rho(r) = \rho_s \left(\frac{r}{r_s} \right)^{-1.16} \left(1 + \frac{r}{r_s} \right)^{-1.84}, \quad (3.25)$$

O perfil Burkert [20]

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(1 + r/r_s)(1 + (r/r_s)^2)}. \quad (3.26)$$

O perfil da esfera exponencial[21]

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-r/r_s}. \quad (3.27)$$

O perfil isotérmico não singular [22]

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + (r/r_s)^2}. \quad (3.28)$$

Escolhemos trabalhar com um modelo derivado do perfil isotérmico, buscamos modelar o halo esférico de matéria escura em torno das galáxias a partir do modelo da esfera

isotérmica rebaixada. No próximo capítulo será descrito o processo de determinação do perfil de densidade a partir das características físicas do modelo utilizando uma função de distribuição da energia, demonstrando como o modelo descreve as curvas de rotação e pode ser generalizado para comportar correções relativísticas para a velocidade.

4 A esfera isotérmica rebaixada

4.1 Sistemas com simetria esférica definidos por uma função de distribuição

Vamos assumir que o halo de matéria escura em torno de uma galáxia espiral possui formato esférico. Para definir o perfil de densidade desse halo utilizamos o conceito estatístico de função de distribuição. Uma função de distribuição é uma expressão matemática que descreve a probabilidade de um sistema assumir um valor específico [23].

A partir de uma função de distribuição podemos encontrar a densidade espacial de número $\nu(\vec{x})$ no espaço real a partir de uma forma funcional no espaço de fase diretamente por [7]

$$\nu(\vec{x}) = \int d\vec{v} f(\vec{x}, \vec{v}), \quad (4.1)$$

Para o caso estudado, a função de distribuição pode ser definida como a probabilidade de encontrar certo o número de partículas ou massa em um volume do espaço de fase. Podemos então escrever que a densidade de massa será

$$\rho(r) = \int d^3r d^3v f(r, v). \quad (4.2)$$

Os modelos a serem analisados descrevem sistemas em equilíbrio sem colisões e por isso podem ser modelados através da equação de Boltzmann não colisional

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\vec{q}} \frac{\partial f(\vec{q}, \vec{p})}{\partial \vec{q}} + \dot{\vec{p}} \frac{\partial f(\vec{q}, \vec{p})}{\partial \vec{p}} = 0, \quad (4.3)$$

que é uma equação diferencial parcial para a função de distribuição, dependente das seis coordenadas no espaço de fase e do tempo, onde \vec{q} representa uma coordenada generalizada para a posição e \vec{p} uma coordenada para o momento.

Os teoremas de Jeans enunciam que: qualquer solução da equação de Boltzmann não colisional e estacionária depende apenas das integrais de movimento do sistema e qualquer função das integrais de movimento é solução estacionária da equação de Boltzmann não colisional [7].

Como o halo esférico de matéria escura estudado está em equilíbrio, podemos assumir que ele é estacionário. Usando o teorema de Jeans, não precisamos resolver a equação de Boltzmann, basta assumir uma forma da função de distribuição que satisfaça o teorema. Desse modo, o teorema nos permite construir facilmente diversas funções de distribuição para estudar algum sistema gravitacional em equilíbrio, pois nos garante que qualquer função das integrais de movimento (como energia e momento angular, por exemplo) é uma solução válida da equação de Boltzmann não colisional para um sistema em equilíbrio estacionário.

Assumindo a simetria esférica do halo, podemos descrevê-lo a partir da função de distribuição de sua energia relativa

$$\varepsilon = \psi - \frac{1}{2}v^2, \quad (4.4)$$

onde definimos ψ como o potencial relativo

$$\psi = -\Phi + \Phi_0, \quad (4.5)$$

sendo Φ o potencial gravitacional, Φ_0 uma constante escolhida de modo que $f > 0$ se $\varepsilon > 0$ e $f = 0$ se $\varepsilon < 0$. Esse potencial relativo, também satisfaz a equação de Poisson e está sujeito à condição de contorno $\psi \rightarrow \Phi_0$, quando $|x| \rightarrow \infty$.

Assim, definindo uma função de distribuição para a energia $f(\varepsilon)$ e utilizando a equação (4.4) teremos uma função de distribuição para ε , $f(\psi - \frac{1}{2}v^2)$, sendo possível escrever a equação de Poisson (3.8) para ψ como

$$\nabla^2\psi = -4\pi G \int d^3v f\left(\psi - \frac{1}{2}v^2\right), \quad (4.6)$$

onde ψ é uma função do raio r e, devido a simetria esférica, $d^3v = 4\pi v^2 dv$. Assim

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = -16\pi^2 G \int f\left(\psi - \frac{1}{2}v^2\right) v^2 dv. \quad (4.7)$$

Sendo possível, desse modo, determinar a velocidade circular de um sistema esférico definido por uma função de distribuição a partir da solução dessa equação integro-diferencial para $\psi(r)$ utilizando a equação (3.10).

4.2 A esfera isotérmica

Um exemplo de sistema esférico que modela satisfatoriamente o halo de matéria escura em galáxias espirais é o modelo da esfera isotérmica. Esse modelo possui a função de distribuição

$$f(\varepsilon) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\varepsilon/\sigma^2}, \quad (4.8)$$

onde os parâmetros ρ_1 é o fator de escala para a densidade e σ a dispersão de velocidade, ambos sendo constantes.

Realizando a substituição da energia (4.4) temos

$$f(v) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right). \quad (4.9)$$

Integrando a função de distribuição em relação a velocidade como em (4.6)

$$\rho(\psi) = \frac{4\pi\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_0^\infty dv v^2 \exp\left(\frac{\psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right), \quad (4.10)$$

o perfil de densidade encontrado será

$$\rho(\psi) = \rho_1 e^{\psi/\sigma^2}, \quad (4.11)$$

assim, a equação de Poisson para esse sistema pode ser escrita

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = -4\pi^2 G \rho_1 r^2 e^{\psi/\sigma^2}, \quad (4.12)$$

se utilizarmos a equação (4.11) para escrever o potencial em função da densidade temos $\psi = \ln(\rho/\rho_1)\sigma^2$, tornando a equação (4.12)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{\sigma^2} r^2 \rho. \quad (4.13)$$

A solução para essa equação diferencial pode ser obtida analiticamente [7]. Se considerarmos que a solução será do tipo $\rho = Cr^{-b}$ teremos

$$-b = -(4\pi G/\sigma^2)Cr^{2-b}, \quad (4.14)$$

assim, devemos ter $b = 2$ e $C = \sigma^2/4\pi G$, então o perfil de densidade em função do raio será

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi Gr^2}. \quad (4.15)$$

Podemos observar que a partir da função de distribuição foi possível encontrar o mesmo resultado para a esfera isotérmica singular, obtido na seção 3.2.1. Como já descrito nessa seção, esse modelo apresenta uma modelagem satisfatória para sistemas globulares exceto apenas pela singularidade que apresenta na origem. Desse modo, buscamos utilizar um modelo que se assemelha ao da esfera isotérmica singular mas que não possua densidade no centro da galáxia e massa total infinitas e que seja limitado por uma velocidade de escape. O modelo escolhido foi o da esfera isotérmica rebaixada.

4.3 A esfera isotérmica rebaixada

O modelo da esfera isotérmica rebaixada, assemelha-se ao modelo da esfera isotérmica singular para pequenos raios, onde a galáxia possui a maior quantidade de partículas com grandes valores de energia relativa, mas é menos denso para raios grandes, tornando assim sua massa finita. [7]

Podemos definir essa função de distribuição, apenas modificando a equação (4.8) para raios pequenos, realizando uma subtração de modo que $f = 0$ para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Definindo $\varepsilon_0 = 0$, é possível eliminar a singularidade do perfil de densidade para raios pequenos e obter uma equação similar a (4.8) quando $\varepsilon \gg 0$.

A função de distribuição f desse modelo é dada por

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \rho_1(2\pi\sigma^2)^{-3/2}(e^{\varepsilon/\sigma^2} - 1) & \varepsilon > 0 \\ 0 & \varepsilon < 0 \end{cases}, \quad (4.16)$$

queremos realizar a integral até a velocidade de escape, que pode ser definida como a

velocidade em que a energia do sistema é igual a zero. Da equação (4.4)

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2\psi}. \quad (4.17)$$

Assim, utilizando a equação (4.4) e substituindo a função de distribuição na equação (4.6) com esse limite na integração, temos

$$\rho(\psi) = \frac{4\pi\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{2\psi}} dv v^2 \left[\exp\left(\frac{\psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right) - 1 \right], \quad (4.18)$$

$$\rho(\psi) = \rho_1 \left[e^{\psi/\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\psi}}{\sigma}\right) - \sqrt{\frac{4\psi}{\pi\sigma^2}} \left(1 + \frac{2\psi}{3\sigma^2}\right) \right], \quad (4.19)$$

a partir desse perfil de densidade podemos escrever a equação de Poisson

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = -4\pi^2 G \rho_1 r^2 \left[e^{\psi/\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\psi}}{\sigma}\right) - \sqrt{\frac{4\psi}{\pi\sigma^2}} \left(1 + \frac{2\psi}{3\sigma^2}\right) \right]. \quad (4.20)$$

Resolvemos essa equação diferencial numericamente utilizando programação em python. Para isso realizamos as substituições $r = r_0 x$ e $\psi = \psi_0 y(x)$ e definimos $b = \psi_0/\sigma^2$, desse modo a equação (4.20) pôde ser escrita como

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -4\pi G \frac{\rho_0 r_0^2}{\psi_0} x^2 \left[e^{by} \operatorname{erf}\left(\sqrt{by}\right) - \sqrt{\frac{4b}{\pi}} y \left(1 + \frac{2b}{3} y\right) \right]. \quad (4.21)$$

Definindo a constante adimensional

$$A = 4\pi G \frac{\rho_0 r_0^2}{\psi_0}, \quad (4.22)$$

temos

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -Ax^2 \left[e^{by} \operatorname{erf}\left(\sqrt{by}\right) - \sqrt{\frac{4b}{\pi}} y \left(1 + \frac{2b}{3} y\right) \right], \quad (4.23)$$

a solução dessa equação diferencial depende de dois parâmetros adimensionais: A e b. Para sua resolução numérica utilizamos as condições de contorno $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, eliminando a singularidade presente na origem do caso da esfera isotérmica singular.

Utilizando as substituições para a velocidade circular na equação (3.10), temos para

a matéria escura

$$v_{ME}^2 = -r \frac{d\psi}{dr} = -\psi_0 x \frac{dy}{dx}. \quad (4.24)$$

Como vemos, v_{ME} depende do parâmetro ψ_0 .

Como buscamos ajustar o modelo aos dados observacionais das velocidades totais das galáxias precisamos levar em consideração também as contribuições da matéria bariônica. Para diminuir a quantidade de parâmetros, buscamos analisar galáxias que não possuem contribuição do bojo, sendo a velocidade total, mostrada na equação (2.9), calculada por

$$V_c^2(r) = V_{gas}^2(r) + \Upsilon_{*D} V_{disco}^2(r) + V_{ME}^2(r). \quad (4.25)$$

Onde V_{gas} e V_{disco} são dados observacionais presentes no catálogo SPARC. Das equações (4.23), (4.24) e (4.25) temos os parâmetros utilizados para o ajuste do modelo aos dados do catálogo SPARC, que são os parâmetros A , b , ψ_0 e Υ_{*D} .

4.4 Ajuste de parâmetros

4.4.1 MCMC

O método de Markov Chain Monte Carlo (MCMC), busca estimar as propriedades de uma distribuição examinando amostras aleatórias geradas de modo iterativo, onde cada amostra aleatória é usada como um ponto de partida para gerar a próxima amostra aleatória, refinando assim os resultados gerados e analisando quais descrevem melhor os dados. Esse refinamento é realizado através da definição de uma função de probabilidade que nos dará a probabilidade dos parâmetros analisados descreverem bem os dados, servindo de referência para o modelo se a nova cadeia de amostras aleatórias são mais ou menos adequadas que as anteriores. Para o caso das curvas de rotação podemos escrever uma função de probabilidade Gaussiana L [24]

$$\ln L(V_{obs} | r, q_j) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left[\frac{(V_{obs}(r_n) - V_c(r_n, q_j))^2}{\sigma_n^2} + \ln(2\pi \sigma_n^2) \right], \quad (4.26)$$

onde V_{obs} é a velocidade circular observada presente no catálogo SPARC, q_j são os parâmetros do modelo a serem definidos, N o número de pontos observacionais e σ_n o erro presente nos dados.

No processo de geração das amostras o modelo MCMC realiza a geração de novas amostras estimando a função de probabilidade posterior que nos dá uma distribuição consistente com o conjunto de dados e segundo o teorema de Bayes essa probabilidade posterior é proporcional aos "priors" dos parâmetros multiplicado pela função de probabilidade, podemos escrever o teorema como

$$p(q_i|V_{obs}) \propto p(q_i)L(V_{obs}|q_j), \quad (4.27)$$

onde $p(q_i|V_{obs})$ é a função de probabilidade posterior que nos dará a probabilidade de na amostra futura os parâmetros estarem dentro dos priors, $L(V_{obs}|q_j)$ é a função de probabilidade (4.26) e $p(q_i)$ é a função prior que determina os intervalos possíveis para cada parâmetro.

Os priors dos parâmetros são os conhecimentos prévios que se tem sobre eles, como resultados de experimentos antigos ou faixas fisicamente aceitáveis. Eles direcionam a geração de novas amostras consistentes pelo MCMC.

Para o caso estudado, os parâmetros A , b e ψ_0 por serem basicamente parâmetros de escala dependiam do tamanho das galáxias, os priors com distribuição uniforme utilizados foram $1km/s < \psi_0 < 640000km/s$, $10^{-18} < A < 10^{-2}$, $1 < b < 30$. Esses valores foram escolhidos de maneira que não limitam a distribuição dos parâmetros. Já o parâmetro Υ_{*D} possui restrição física definida de acordo com a análise de modelo populacional estelar $0.3 < \Upsilon_{*D} < 0.8$. [12]

Utilizamos para simular as cadeias de parâmetros a biblioteca `emcee` [24] no Python, que utiliza os conceitos descritos acima. A partir dela podemos ajustar as curvas de rotação dos modelos desejados a dados observacionais, seguindo o passo a passo descrito na seção 3.1, definindo um perfil de densidade que nos permitirá encontrar uma velocidade circular que será utilizada na função de probabilidade do MCMC, definindo os parâmetros que mais se adequam aos dados de maneira iterativa. Nas figuras 8, 9 e 10 podemos observar a distribuição dos parâmetros

4.4.2 Resultados para as curvas de rotação

Dentre as galáxias dos catálogo que não possuíam a contribuição do bojo, foi realizado o plot dos gráficos em grupos de acordo com o tamanho das galáxias definido por sua massa.

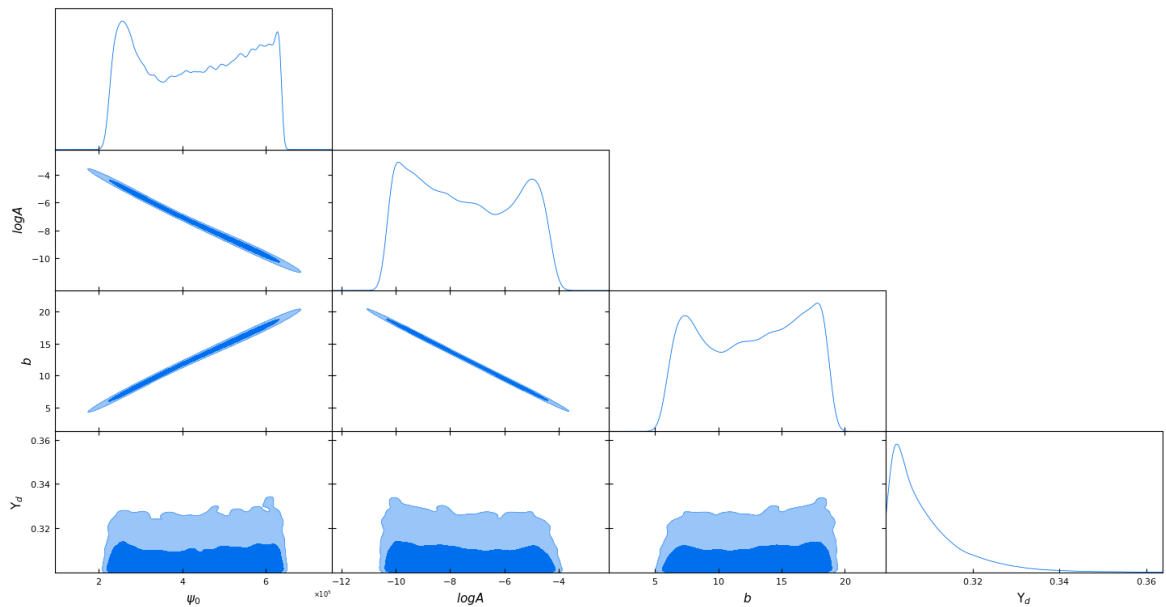


Figura 8: Distribuição dos parâmetros Galáxia ESO563-G021.

Para galáxias menores com massa total $M \simeq 10^9 M_\odot$, temos que a maioria não possuem muitos pontos observacionais para o ajuste e demandam bastante tempo para convergência das cadeias no MCMC. Podemos observar na figura 11 alguns dos melhores exemplos para galáxias com essa dimensão

Para galáxias médias com massa total $M \simeq 10^{10} M_\odot$ o ajuste dos dados foram mais fáceis de serem realizados. Havia uma quantidade maior de galáxias com bojo, mas para aquelas que não tinham bojo a quantidade de dados, por serem galáxias um pouco maiores, também era maior. Podemos observar na figura 12 alguns dos melhores exemplos para galáxias com essa dimensão

Para galáxias maiores com massa total maior que $M \simeq 10^{11} M_\odot$, temos uma grande quantidade de dados observacionais para a grande maioria, o que melhora a descrição dos dados pelo modelo, porém a maior parte dessas galáxias apresentavam bojo em sua composição, limitando um pouco a quantidade de curvas de rotação disponíveis para a nossa simulação. Podemos observar na figura 13 alguns dos melhores exemplos para galáxias com essa dimensão

Observamos uma boa qualidade nos ajustes das curvas de rotação nas galáxias. Na maioria das galáxias, com exceção da UGC12732 e da ESO563-G021, pode-se observar nas figuras que o modelo apresentou um χ^2 reduzido abaixo de 1. Demonstrando que o modelo apresenta uma boa descrição dos dados observacionais.

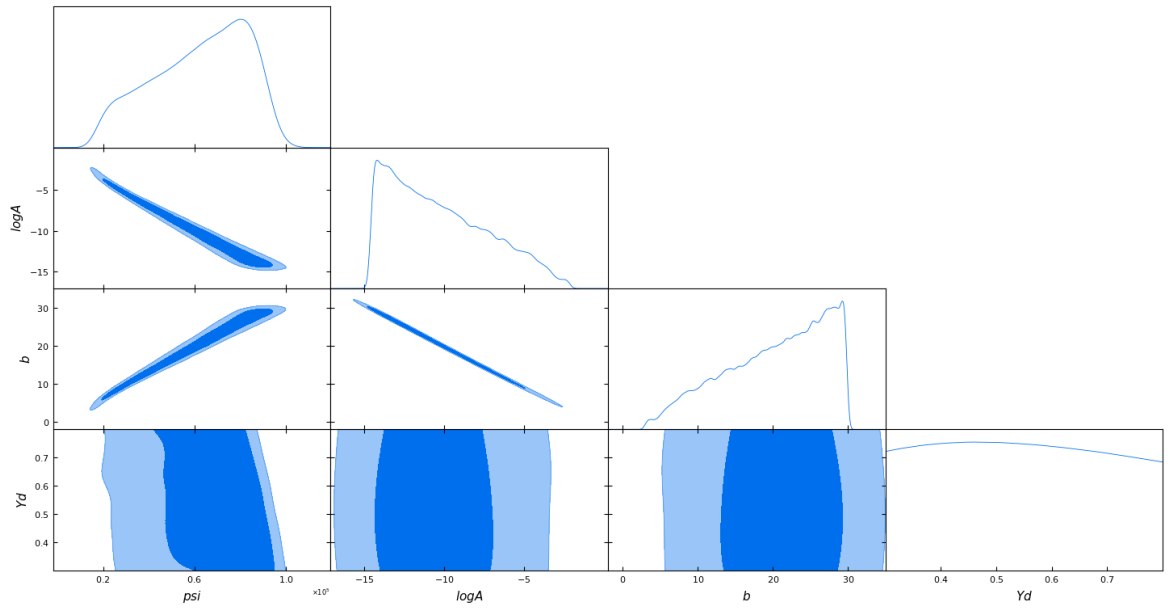


Figura 9: Distribuição dos parâmetros Galáxia F574-1.

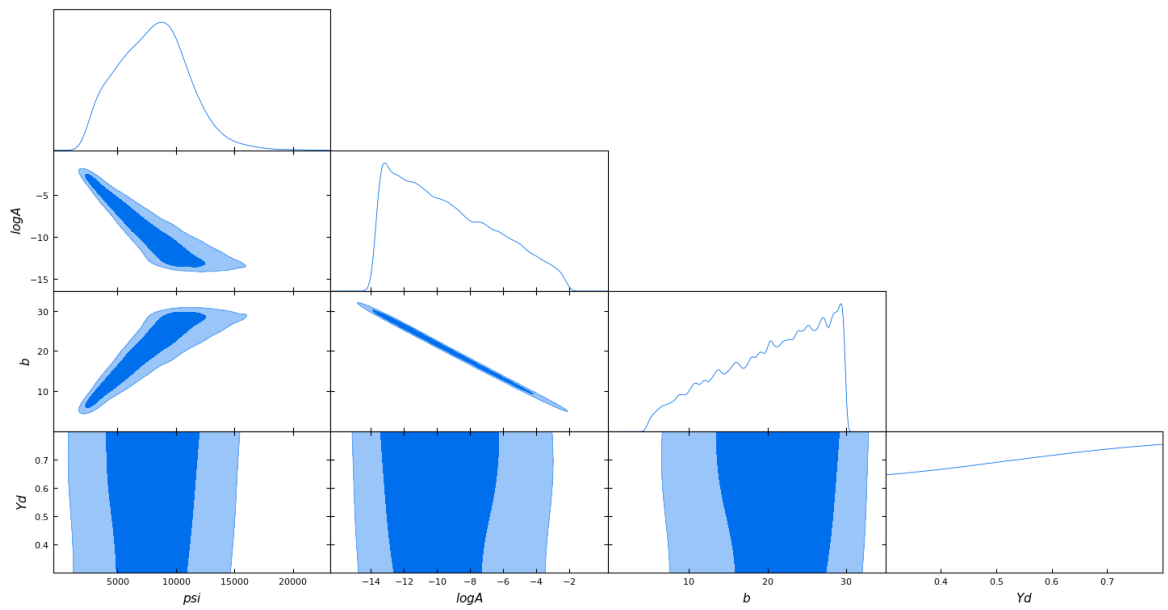


Figura 10: Distribuição dos parâmetros Galáxia UGCA444.

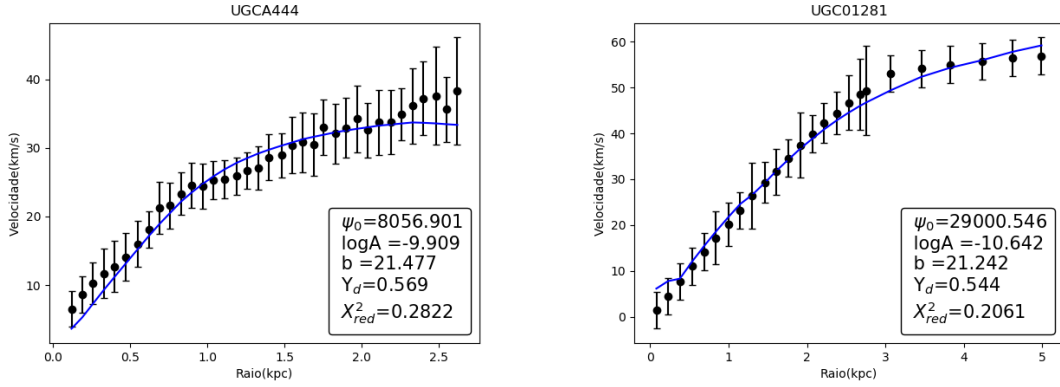


Figura 11: Galáxias com massa total $M \simeq 10^9 M_\odot$. Os pontos pretos com barra de erro representam os dados do catálogo SPARC e a linha azul é a curva gerada pelo modelo.

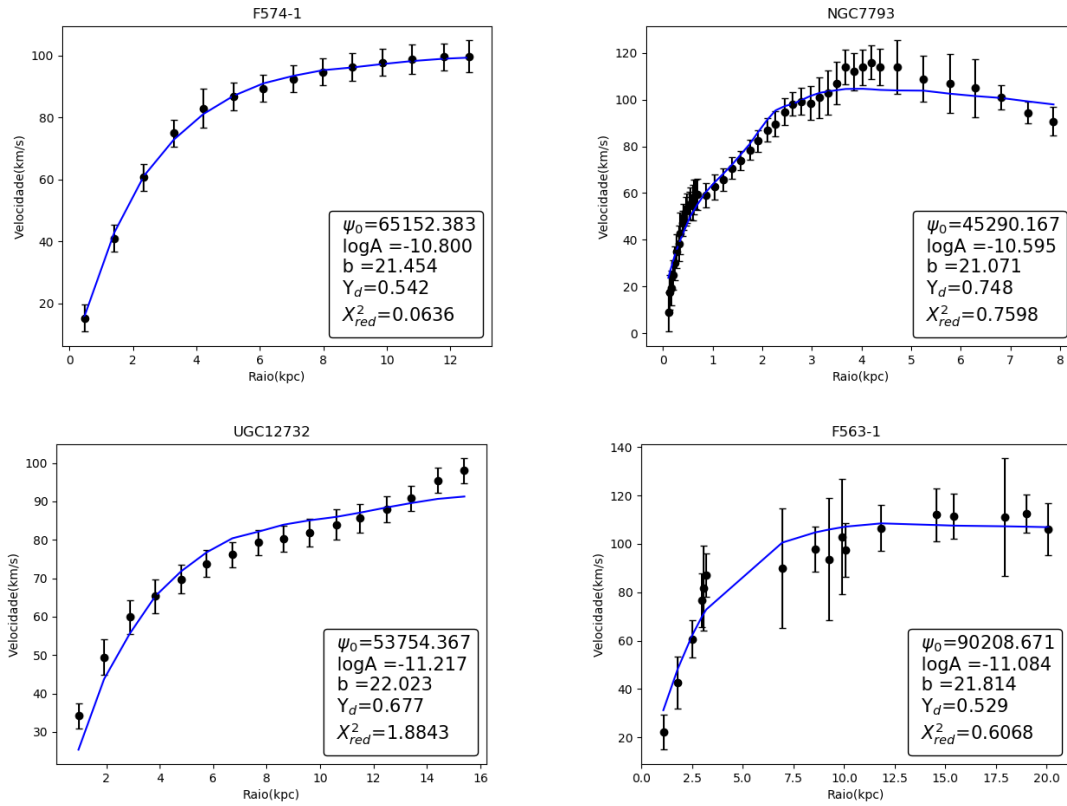


Figura 12: Galáxias com massa total $M \simeq 10^{10} M_\odot$. Os pontos pretos com barra de erro representam os dados do catálogo SPARC e a linha azul é a curva gerada pelo modelo.

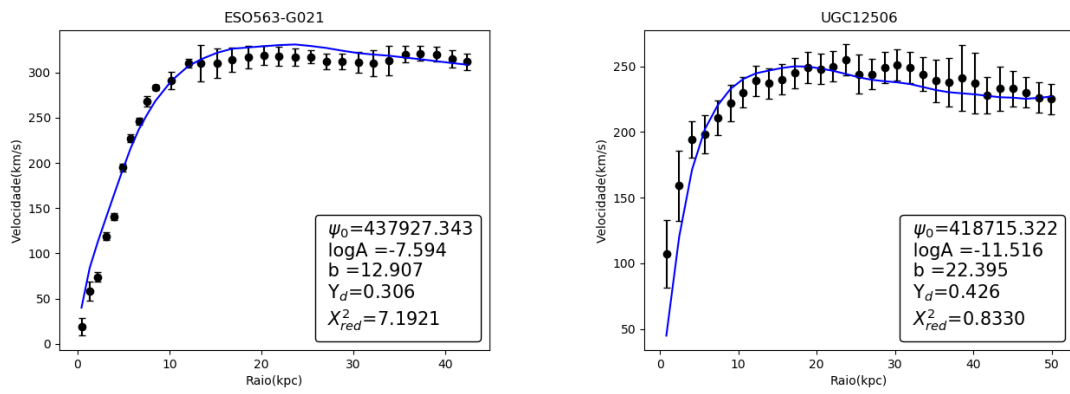


Figura 13: Galáxias com massa total maior que $M \simeq 10^{11} M_{\odot}$. Os pontos pretos com barra de erro representam os dados do catálogo SPARC e a linha azul é a curva gerada pelo modelo.

5 Correção relativística

A teoria da relatividade, proposta por Albert Einstein, nos diz que a energia relativística total de uma partícula pontual é dada pela equação [25]

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (5.1)$$

sendo γ o conhecido fator de Lorentz. Expandindo o radical em série de Taylor, teremos

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots \quad (5.2)$$

Podemos observar que o segundo termo corresponde ao termo clássico da energia cinética, ao passo que o primeiro (mc^2) é uma constante. Essa constante na teoria da relatividade é conhecida como energia de repouso, pois é o valor da energia quando $v = 0$. O restante da equação corresponde à energia cinética do sistema

$$T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots \quad (5.3)$$

Iremos então na seção 5.1, demonstrar como a correção relativística é realizada no modelo da esfera isotérmica rebaixada se considerarmos a correção até a primeira ordem na energia cinética.

5.1 Modificações no perfil de densidade

Após a verificação do modelo da esfera isotérmica rebaixada com os parâmetros das galáxias bem definidos, analisamos como as curvas de rotação seriam modificadas ao realizar a correção relativística de primeira ordem na energia cinética do sistema. Com essa modificação a equação (4.4) torna-se

$$\varepsilon = \psi - \frac{1}{2}v^2 - \frac{3v^4}{8c^2}, \quad (5.4)$$

a velocidade de escape presente no limite de integração da densidade pode ser calculada para $\varepsilon = 0$, logo

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2\psi} \left(1 - \frac{3\psi}{4c^2} \right). \quad (5.5)$$

Desse modo, a integral da densidade com a correção é

$$\rho(v) = \frac{4\pi\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{2\psi}(1-\frac{3\psi}{4c^2})} dv \left[v^2 \exp\left(\frac{\psi - \frac{1}{2}v^2 - \frac{3v^4}{8c^2}}{\sigma^2}\right) - v^2 \right], \quad (5.6)$$

resolvendo o primeiro termo da integral, temos

$$\exp\left(\frac{\psi}{\sigma^2}\right) \int_0^{\sqrt{2\psi}(1-\frac{3\psi}{4c^2})} dv v^2 \exp\left[\frac{-\frac{1}{2}v^2}{\sigma^2} \left(1 + \frac{3v^2}{4c^2}\right)\right] \quad (5.7)$$

$$= \exp\left(\frac{\psi}{\sigma^2}\right) \int_0^{\sqrt{2\psi}(1-\frac{3\psi}{4c^2})} dv v^2 \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right)^{\left(1+\frac{3v^2}{4c^2}\right)}. \quad (5.8)$$

Escrevendo

$$\exp\left(\frac{-\frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right)^{\left(1+\frac{3v^2}{4c^2}\right)} = \exp(u)^{\left(1+\frac{3x^2}{4}\right)}, \quad (5.9)$$

onde $x^2 = v^2/c^2$ e $u = -\frac{1}{2}v^2/\sigma^2$. Expandindo esse termo em série para $x \ll 1$ temos

$$\exp(u)^{\left(1+\frac{3x^2}{4}\right)} = \exp(u) \left[1 + \frac{3}{4}ux^2 + \frac{9}{32}u^2x^4 + O(x^5) \right], \quad (5.10)$$

a partir dos termos de x^4 em diante teremos termos de $(1/c^2)^2$ tornando-os irrelevantes, pois $c \gg v$, fazendo os termos tenderem a zero. Assim, podemos considerar apenas os termos até a segunda ordem e retornar para a variável v obtendo

$$\exp\left(\frac{-\frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right)^{\left(1+\frac{3v^2}{4c^2}\right)} = \exp\left(\frac{\psi}{\sigma^2}\right) \left[\int_0^{\sqrt{2\psi}\left(1-\frac{3\psi}{4c^2}\right)} dv v^2 \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right) + \frac{(-3)}{8\sigma^2 c^2} \int_0^{\sqrt{2\psi}\left(1-\frac{3\psi}{4c^2}\right)} dv v^6 \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right) \right], \quad (5.11)$$

podemos dividir a expressão em duas integrais I_1 e I_2

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{2\psi}\left(1-\frac{3\psi}{4c^2}\right)} dv v^2 \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right), \quad (5.12)$$

$$I_2 = \frac{(-3)}{8\sigma^2 c^2} \int_0^{\sqrt{2\psi}\left(1-\frac{3\psi}{4c^2}\right)} dv v^6 \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right). \quad (5.13)$$

Resolvendo a primeira integral temos

$$I_1 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}} \left[-2 \exp\left(-\frac{\psi\left(1-\frac{3\psi}{4c^2}\right)^2}{\sigma^2}\right) \sqrt{\psi} \left(1-\frac{3\psi}{4c^2}\right) + \sqrt{\pi} \sigma \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\psi}\left(1-\frac{3\psi}{4c^2}\right)}{\sigma}\right) \right], \quad (5.14)$$

e a segunda

$$I_2 = \frac{-3}{8\sqrt{2}c^2} \left[\sqrt{\psi} \left(1-\frac{3\psi}{4c^2}\right) \left(15\sigma^4 + 4\psi^2 \left(1-\frac{3\psi}{4c^2}\right)^4 + 10\psi \left(\sigma - \frac{3\sigma\psi}{4c^2}\right)^2\right) \right] \\ \times \left[-2 \exp\left(-\frac{\psi\left(1-\frac{3\psi}{4c^2}\right)^2}{\sigma^2}\right) + \frac{-3}{8\sqrt{2}c^2} 15\sigma^5 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\psi}\left(1-\frac{3\psi}{4c^2}\right)}{\sigma}\right) \right], \quad (5.15)$$

se expandirmos as equações (5.14) e (5.15) em função de $1/c$ e desprezarmos os termos de ordem maior que $1/c^4$, temos para (5.14)

$$I_1 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}} \left[-2 \exp\left(\frac{-\psi}{\sigma^2}\right) \sqrt{\psi} + \sqrt{\pi} \sigma \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\psi}}{\sigma}\right) - \frac{3}{\sqrt{2}c^2} \exp\left(\frac{-\psi}{\sigma^2}\right) \psi^{5/2} \right] \\ + \frac{9}{4\sqrt{2}\sigma^2 c^4} \left[\exp\left(\frac{-\psi}{\sigma^2}\right) \psi^{7/2} (\sigma^2 - \psi) \right] + O(1/c^5), \quad (5.16)$$

e para (5.15)

$$I_2 = \frac{-3}{8\sqrt{2}c^2} \left[-2\exp\left(\frac{-\psi}{\sigma^2}\right) \sqrt{\psi}(15\sigma^4 + 10\sigma^2\psi + 4\psi^2) + 15\sigma^5 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\psi}}{\sigma}\right) \right] \\ + \frac{9}{2\sqrt{2}\sigma^2 c^4} \left[\exp\left(\frac{-\psi}{\sigma^2}\right) \psi^{9/2} \right] + O(1/c^5), \quad (5.17)$$

eliminando os termos de ordem maior que $1/c^4$ e fatorando os termos $\exp\left(\frac{-\psi}{\sigma^2}\right)$ e $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\psi}}{\sigma}\right)$, a equação (5.11) tem como resultado

$$= \exp\left(\frac{\psi}{\sigma^2}\right) \left[\exp\left(\frac{-\psi}{\sigma^2}\right) \left(-2\sigma^2 \sqrt{\frac{\psi}{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}c^2} \psi^{5/2} + \frac{6\sqrt{\psi}}{8\sqrt{2}c^2} (15\sigma^4 + 10\sigma^2\psi + 4\psi^2) \right) \right] \\ + \exp\left(\frac{\psi}{\sigma^2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\psi}}{\sigma}\right) \left(\sigma^3 - \frac{45\sigma^5}{8c^2} \right), \quad (5.18)$$

então a função de densidade da equação (5.6) poderá ser escrita

$$\rho(\psi) = \frac{4\pi\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \left[\left(-2\sigma^2 \sqrt{\frac{\psi}{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}c^2} \psi^{5/2} + \frac{6\sqrt{\psi}}{8\sqrt{2}c^2} (15\sigma^4 + 10\sigma^2\psi + 4\psi^2) \right) \right. \\ \left. + \exp\left(\frac{\psi}{\sigma^2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\psi}}{\sigma}\right) \left(\sigma^3 - \frac{45\sigma^5}{8c^2} \right) - \frac{[\sqrt{2\psi}(1 - \frac{3\psi}{4c^2})]^3}{3} \right], \quad (5.19)$$

podemos simplificar ainda mais se expandirmos o termo ao cubo $(1 - 3\psi/c^2)^3$, cancelarmos os termos com potencia de c maior que 2 no denominador. O perfil de densidade com a correção relativística de primeira ordem na energia cinética pode ser definido como

$$\rho(\psi) = \rho_1 \left[\exp\left(\frac{\psi}{\sigma^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\psi}}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{45\sigma^2}{8c^2} \right) \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{4\psi}{\pi\sigma^2}} \left(1 + \frac{2\psi}{3\sigma^2} \left(1 - \frac{9\psi}{4c^2} \right) - \frac{3\psi^2}{\sqrt{2}(\sigma c)^2} + \frac{3}{4\sqrt{2}(\sigma c)^2} (15\sigma^4 + 10\sigma^2\psi + 4\psi^2) \right) \right]. \quad (5.20)$$

Com o melhor ajuste para os parâmetros definido para cada galáxia, foi utilizado a equação (5.20) para calcular as novas curvas de rotação com a correção, substituindo-a na equação de Poisson e calculando a velocidade total. Realizando a comparação do modelo com a correção e os dados e verificando a diferença entre o modelo com e sem correção.

5.2 Resultados da correção relativística

Assim como no plot das curvas de rotação, plotamos a diferença entre as velocidades para os grupos de galáxias de acordo com o tamanho. Para galáxias menores com massa total $M \simeq 10^9 M_\odot$, obtivemos as diferenças presentes na figura 14. Para galáxias médias com massa total $M \simeq 10^{10} M_\odot$, obtivemos diferenças presentes na figura 15. Para galáxias maiores com massa total maior que $M \simeq 10^{11} M_\odot$, obtivemos as diferenças presentes na figura 16

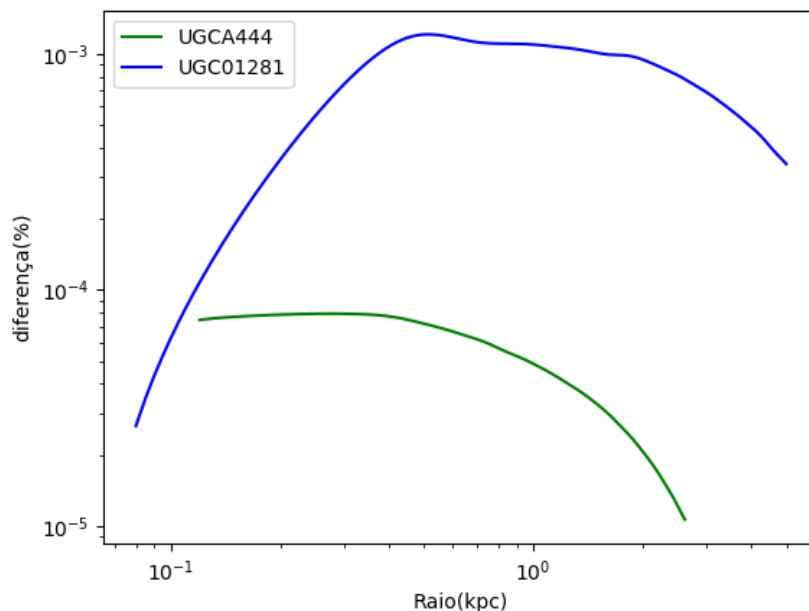


Figura 14: Diferença entre os modelos com e sem correção em escala logarítmica para as galáxias com massa total $M \simeq 10^9 M_\odot$.

É possível observar que a diferença entre os modelos com e sem a correção aumenta de acordo com o tamanho da galáxia. Na figura 17 isso fica ainda mais claro pois temos a representação da comparação das diferenças entre 3 das galáxias demonstradas, a maior (ESO563-G021), uma entre as médias (F574-1) e a menor (UGCA444). Temos que a maior diferença entre elas está na maior galáxia, sendo ela em torno de 0,55%.

Essa análise nos permite inferir que a correção relativística nesse modelo pode vir a ser relevante para casos de elementos astronômicos de escalas maiores como os aglomerados de galáxias, onde podemos ter velocidades de rotação mais de 10 vezes maiores que para o caso de uma única galáxia.

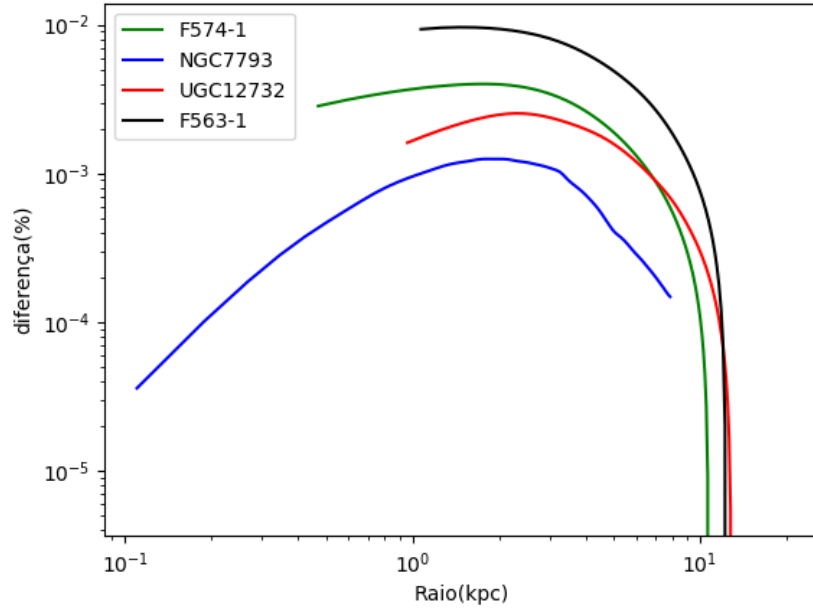


Figura 15: Diferença entre os modelos com e sem correção em escala logarítmica para as galáxias com massa total $M \simeq 10^{10} M_{\odot}$.

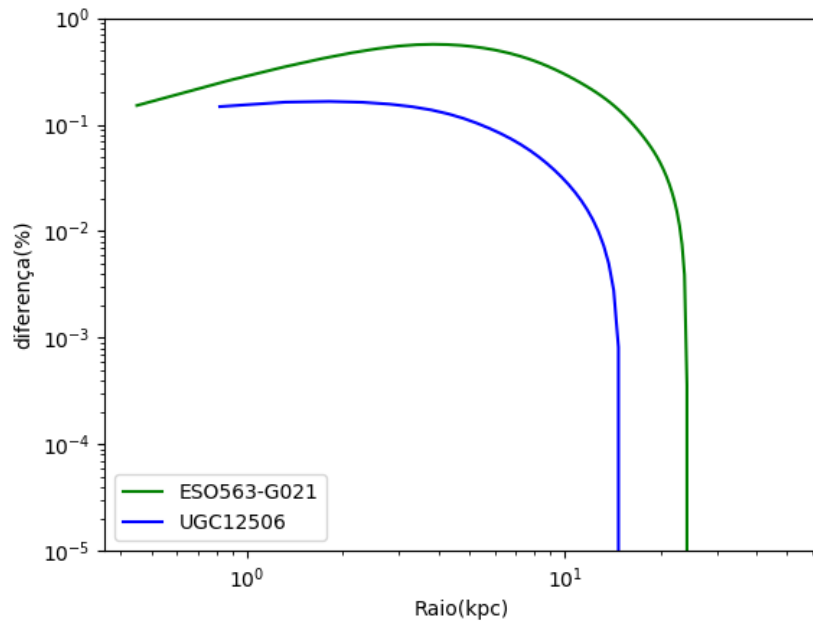


Figura 16: Diferença entre os modelos com e sem correção em escala logarítmica para as galáxias com massa total maior que $M \simeq 10^{11} M_{\odot}$.

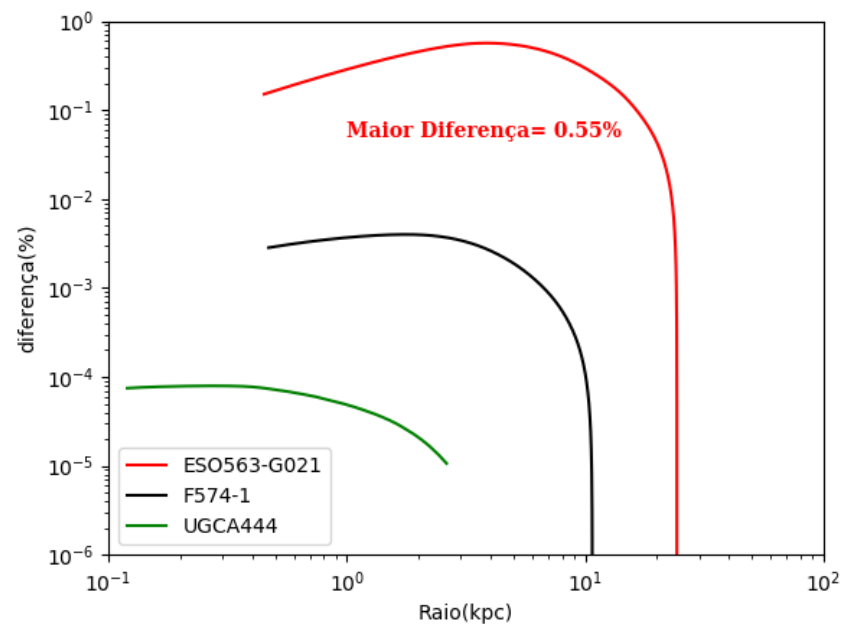


Figura 17: Comparação entre as diferenças de acordo com o tamanho.

6 Considerações finais e perspectivas

6.1 Conclusões

Nesse trabalho buscamos estudar como modelar o halo de matéria escura em galáxias espirais a partir do perfil de densidade definido pela função de distribuição de energia relativa do sistema. Foi possível verificar que o modelo da esfera isotérmica rebaixada apresentado descreve satisfatoriamente as curvas de rotação das galáxias analisadas, mostrando-se uma boa alternativa para perfil de densidade. Não apresentando o cúspide próximo a origem como o modelo NFW e não apresentando a singularidade da origem do modelo da esfera isotérmica singular.

A partir dos resultados obtidos para o cálculo da correção relativística notamos que ela aumenta de acordo com o tamanho da galáxia. A correção mostrou-se desprezível para galáxias espirais menos massivas e apresentando uma diferença de 0,55% para a maior galáxia com velocidade circular em torno de 300km/s. Podemos especular, então, que essa correção pode ser considerável pra os aglomerados de galáxias que possuem massas consideravelmente maiores, com dispersão de velocidade em torno de 1000 km/s, podendo ser estudado esse caso mais adiante.

Além disso, a metodologia do modelo pode também ser aplicada para galáxias que possuam contribuição do bojo, entretanto haverá o aumento da carga computacional exigida e possível maior dispersão no ajuste dos parâmetros.

Referências

- [1] K. G. Begeman, A. H. Broeils, and R. H. Sanders. Extended rotation curves of spiral galaxies: Dark haloes and modified dynamics. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 249:523, 1991.
- [2] Harley Katz, Federico Lelli, Stacy S. McGaugh, Arianna Di Cintio, Chris B. Brook, and James M. Schombert. Testing feedback-modified dark matter haloes with galaxy rotation curves: estimation of halo parameters and consistency with cdm scaling relations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 466(2):1648–1668, Dec 2016.
- [3] Amir Ghari, Benoit Famaey, Chervin Laporte, and Hosein Haggi. Dark matter–baryon scaling relations from einasto halo fits to sparc galaxy rotation curves. *Astronomy Astrophysics*, 623:A123, Mar 2019.
- [4] Kuantay Boshkayev, Talgar Konysbayev, Ergali Kurmanov, Orlando Luongo, and Marco Muccino. Imprint of pressure on characteristic dark matter profiles: The case of eso0140040. *Galaxies*, 8(4), 2020.
- [5] B. Ryden. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 1970.
- [6] Neta A. Bahcall. Dark matter universe. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(40):12243–12245, 2015.
- [7] James Binney and Scott Tremaine. Galactic dynamics: Second edition. *Galactic Dynamics: Second Edition*, 01 2008.
- [8] Federico Lelli, Stacy S. McGaugh, and James M. Schombert. Sparc: Mass models for 175 disk galaxies with spitzer photometry and accurate rotation curves. *The Astronomical Journal*, 152(6):157, Nov 2016.
- [9] Gianfranco Bertone and Dan Hooper. History of dark matter. *Reviews of Modern Physics*, 90(4), Oct 2018.
- [10] V C Rubin and W K Ford, Jr. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *Astrophys. J.* 159: 379-403(Feb 1970)., 1 1970.
- [11] Richard Massey, Thomas Kitching, and Johan Richard. The dark matter of gravitational lensing. *Reports on Progress in Physics*, 73(8):086901, Jul 2010.
- [12] Álefe de Almeida, Luca Amendola, and Viviana Niro. Galaxy rotation curves in modified gravity models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(08):012–012, Aug 2018.

- [13] Ruth Durrer. The cosmic microwave background: the history of its experimental investigation and its significance for cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 32(12):124007, Jun 2015.
- [14] Planck Collaboration, Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A. J., Barreiro, R. B., Bartolo, N., Basak, S., Battye, R., Benabed, K., Bernard, J.-P., Bersanelli, M., Bielewicz, P., Bock, J. J., Bond, J. R., Borrill, J., Bouchet, F. R., Boulanger, F., Bucher, M., Burigana, C., Butler, R. C., Calabrese, E., Cardoso, J.-F., Carron, J., Challinor, A., Chiang, H. C., Chluba, J., Colombo, L. P. L., Combet, C., Contreras, D., Crill, B. P., Cuttaia, F., de Bernardis, P., de Zotti, G., Delabrouille, J., Delouis, J.-M., Di Valentino, E., Diego, J. M., Doré, O., Douspis, M., Ducout, A., Dupac, X., Dusini, S., Efstathiou, G., Elsner, F., Enßlin, T. A., Eriksen, H. K., Fantaye, Y., Farhang, M., Fergusson, J., Fernandez-Cobos, R., Finelli, F., Forastieri, F., Frailis, M., Fraisse, A. A., Franceschi, E., Frolov, A., Galeotta, S., Galli, S., Ganga, K., Génova-Santos, R. T., Gerbino, M., Ghosh, T., González-Nuevo, J., Górski, K. M., Gratton, S., Gruppuso, A., Gudmundsson, J. E., Hamann, J., Handley, W., Hansen, F. K., Herranz, D., Hildebrandt, S. R., Hivon, E., Huang, Z., Jaffe, A. H., Jones, W. C., Karakci, A., Keihänen, E., Keskitalo, R., Kiiveri, K., Kim, J., Kisner, T. S., Knox, L., Krachmalnicoff, N., Kunz, M., Kurki-Suonio, H., Lagache, G., Lamarre, J.-M., Lasenby, A., Lattanzi, M., Lawrence, C. R., Le Jeune, M., Lemos, P., Lesgourgues, J., Levrier, F., Lewis, A., Liguori, M., Lilje, P. B., Lilley, M., Lindholm, V., López-Caniego, M., Lubin, P. M., Ma, Y.-Z., Macías-Pérez, J. F., Maggio, G., Maino, D., Mandolesi, N., Mangilli, A., Marcos-Caballero, A., Maris, M., Martin, P. G., Martinelli, M., Martínez-González, E., Matarrese, S., Mauri, N., McEwen, J. D., Meinhold, P. R., Melchiorri, A., Mennella, A., Migliaccio, M., Millea, M., Mitra, S., Miville-Deschênes, M.-A., Molinari, D., Montier, L., Morgante, G., Moss, A., Natoli, P., Nørgaard-Nielsen, H. U., Pagano, L., Paoletti, D., Partridge, B., Patanchon, G., Peiris, H. V., Perrotta, F., Pettorino, V., Piacentini, F., Polastri, L., Polenta, G., Puget, J.-L., Rachen, J. P., Reinecke, M., Remazeilles, M., Renzi, A., Rocha, G., Rosset, C., Roudier, G., Rubiño-Martín, J. A., Ruiz-Granados, B., Salvati, L., Sandri, M., Savelainen, M., Scott, D., Shellard, E. P. S., Sirignano, C., Sirri, G., Spencer, L. D., Sunyaev, R., Suur-Uski, A.-S., Tauber, J. A., Tavagnacco, D., Tenti, M., Toffolatti, L., Tomasi, M., Trombetti, T., Valenziano, L., Valiviita, J., Van Tent, B., Vibert, L., Vielva, P., Villa, F., Vittorio, N., Wandelt, B. D., Wehus, I. K., White, M., White, S. D. M., Zacchei, A., and Zonca, A. Planck 2018 results - vi. cosmological parameters. *A&A*, 641:A6, 2020.
- [15] Andrey V. Kravtsov and Stefano Borgani. Formation of galaxy clusters. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 50(1):353–409, Sep 2012.
- [16] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D. M. White. The structure of cold dark matter halos. *The Astrophysical Journal*, 462:563, May 1996.
- [17] Andrés Granados, Daniel Torres, Leonardo Castañeda, Lady Henao, and Santiago Vanegas. Galrotpy: a tool to parametrize the gravitational potential of disc-like galaxies. *New Astronomy*, 82:101456, Jan 2021.
- [18] W. J. G. de Blok. The Core-Cusp Problem. *Adv. Astron.*, 2010:789293, 2010.

- [19] B. Moore, F. Governato, T. Quinn, J. Stadel, and G. Lake. Resolving the structure of cold dark matter halos. *The Astrophysical Journal*, 499(1):L5–L8, May 1998.
- [20] A. Burkert. The structure of dark matter halos in dwarf galaxies. *The Astrophysical Journal*, 447(1), Jul 1995.
- [21] Yoshiaki Sofue. Rotation curve and mass distribution in the galactic center —from black hole to entire galaxy—. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 65(6):118, Dec 2013.
- [22] R. Jimenez, L. Verde, and S. P. Oh. Dark halo properties from rotation curves. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 339(1):243–259, Feb 2003.
- [23] M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully, and Eugene P. Wigner. Distribution functions in physics: Fundamentals. *Phys. Rept.*, 106:121–167, 1984.
- [24] Daniel Foreman-Mackey, David W. Hogg, Dustin Lang, and Jonathan Goodman. emcee: The mcmc hammer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(925):306–312, Mar 2013.
- [25] Valerio Faraoni. *Special Relativity*. 02 2015.