

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

MARIA APARECIDA ROSEANE RAMOS SILVA

**ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833) E SUAS OBRAS EM TEORIA DOS
NÚMEROS**

Natal
2010

MARIA APARECIDA ROSEANE RAMOS SILVA

ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833) E SUAS OBRAS EM TEORIA DOS NÚMEROS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Educação da Universidade Federal do Rio
Grande do Norte como requisito parcial para a
obtenção do título de Doutor.

Orientador: John Andrew Fossa - UFRN

Co- Orientadora: Evelyne Barbin – Université de
Nantes

Natal
2010

Catálogo da Publicação na Fonte.
UFRN / Biblioteca Setorial do CCSA

Silva, Maria Aparecida Roseane Ramos.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e suas obras em Teoria dos Números / Maria Aparecida Roseane Ramos Silva. - Natal, RN, 2010. 256 f.

Orientador: Prof. Dr. John Andrew Fossa

Co-orientadora: Dra. Evelyne Barbin.

Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Programa de Pós-Graduação em Educação.

1. Educação - Tese. 2. Teoria dos Números - Tese. 3. História da Matemática - Tese. 4. Adrien-Marie Legendre - Tese. I. Fossa, John Andrew. II. Barbin, Evelyne. III. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/BS/CCSA

CDU 37.016(043.2)

MARIA APARECIDA ROSEANE RAMOS SILVA

ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833) E SUAS OBRAS EM TEORIA DOS NÚMEROS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Educação da Universidade Federal do Rio
Grande do Norte como requisito parcial para a
obtenção do título de Doutor.

Aprovada em 25/05/2010

BANCA EXAMINADORA

John Andrew Fossa - Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Pedro Franco de Sá - Universidade do Estado do Pará - UEPA

Ligia Arantes Sad - Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Iran Abreu Mendes - Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Giselle Costa de Sousa - Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Este trabalho teve o apoio financeiro da Secretaria
de Administração do Estado da Bahia (SAEB)

AGRADECIMENTOS

Para a realização desse trabalho, pude contar com o apoio e ajuda de algumas pessoas, às quais prestarei, através de poucas palavras, os mais sinceros agradecimentos:

Em primeiro lugar, ao Deus Todo Poderoso pela sua infinita bondade e fidelidade.

Aos meus filhos Francisco Augusto e Maria Tereza, que com amor e paciência suportaram as minhas ausências e me ajudaram a superar todas as dificuldades.

A todos os meus familiares que sempre acreditaram em mim.

Ao prof. John Andrew Fossa, orientador desse trabalho, pelos seus conhecimentos, pelo apoio, por sua atenção e boa vontade.

À minha professora co-orientadora Evelyne Barbin por suas sábias sugestões.

Ao Pastor Paulo Nei e aos meus amados irmãos em Cristo, da Assembléia de Deus do Pirangi – Natal, especialmente as irmãs Amélia, Neidinha, Michelle, Didi, Adriana, Maria Vieira, Eliete e Jane que muito me ajudaram em oração.

Aos meus colegas e aos funcionários do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.

Aos meus colegas, professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Ao diretor Stéphane Tirard e aos colegas do Centro François Viète pelo ambiente a mim favorecido durante o estágio realizado na Universidade de Nantes, França.

A Capes e à Universidade Federal do Rio Grande do Norte pelo apoio financeiro para a realização do doutorado sanduíche na França.

À Arivania Gomes da Silva pela correção da ortografia e da gramática.

A todos que direta e indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho.

Foi o Senhor quem fez. (Salmo 118: 23.)

RESUMO

Este trabalho teve por objetivo inventariar, sistematizar e avaliar as obras em Teoria dos Números do matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833), com certa ênfase no seu livro *Teoria dos Números*, edição francesa de 1830, bem como realizar um estudo histórico da vida desse matemático. Para tanto, foi investigado o papel desempenhado por essas obras e sua influência no desenvolvimento da Teoria dos Números no contexto de sua época. Uma leitura da vida de Adrien-Marie Legendre foi realizada por meio de suas relações pessoais e de suas produções científicas e colocou em evidência certos elementos históricos do desenvolvimento de um povo, das ciências e suas possíveis consequências que nortearam a própria evolução da sociedade francesa dos séculos XVIII-XIX, e revelou características marcantes da personalidade de Legendre no meio matemático contemporâneo, como as infundáveis querelas com Gauss a respeito de prioridades de descobertas científicas. Um estudo sistemático da obra *Teoria dos Números* (1830) num contexto histórico-social e a análise de certos conteúdos da obra comparados a alguns textos de outros autores nos permitiram compreender a evolução dinâmica dos caminhos percorridos pelo autor, quanto à semântica, à organização das demonstrações, à estrutura lógico-dedutiva que permearam suas descobertas matemáticas em Teoria dos Números, a exemplo da sua famosa lei de reciprocidade. O impacto causado por suas obras em Teoria dos Números na comunidade matemática francesa da época e as contribuições do autor à ciência antes e depois da publicação da obra revelou que *Teoria dos Números*, obra à qual o autor consagrou mais da metade de sua vida no intuito de aperfeiçoá-la, tornou notória a honra que lhe é devida como o primeiro tratado de uma Aritmética superior que tanto inspirou a outros matemáticos para o avanço dessa ciência no século XX. Legendre recebeu homenagens póstumas dos matemáticos Beaumont, e Poisson, que inclusive discursou em seu funeral, e o seu nome se encontra perpetuado na face *Trocadéro* da Torre Eiffel que contém uma lista de 72 ilustres cientistas e dá nome a uma passagem e a uma rua do 17º bairro da cidade de Paris.

Palavras chaves: História da Matemática. História da Teoria dos Números. Adrien-Marie Legendre.

ABSTRACT

The present thesis is an analysis of Adrien-Marie Legendre's works on Number Theory, with a certain emphasis on his 1830 edition of *Theory of Numbers*. The role played by these works in their historical context and their influence on the development of Number Theory was investigated. A biographic study of Legendre (1752-1833) was undertaken, in which both his personal relations and his scientific productions were related to certain historical elements of the development of both his homeland, France, and the sciences in general, during the 18th and 19th centuries. This study revealed notable characteristics of his personality, as well as his attitudes toward his mathematical contemporaries, especially with regard to his seemingly incessant quarrels with Gauss about the priority of various of their scientific discoveries. This is followed by a systematic study of Lagrange's work on Number Theory, including a comparative reading of certain topics, especially that of his renowned law of quadratic reciprocity, with texts of some of his contemporaries. In this way, the dynamics of the evolution of his thought in relation to his semantics, the organization of his demonstrations and his number theoretical discoveries was delimited. Finally, the impact of Legendre's work on Number Theory on the French mathematical community of the time was investigated. This investigation revealed that he not only made substantial contributions to this branch of Mathematics, but also inspired other mathematicians to advance this science even further. This indeed is a fitting legacy for his *Theory of Numbers*, the first modern text on Higher Arithmetic, on which he labored half his life, producing various editions. Nevertheless, Legendre also received many posthumous honors, including having his name perpetuated on the *Trocadéro* face of the Eiffel Tower, which contains a list of 72 eminent scientists, and having a street and an alley in Paris named after him.

Keywords: History of the Mathematics. History of Number Theory. Adrien-Marie Legendre.

RESUMÉ

La thèse présente est une analyse systématique des travaux d'Adrien-Marie Legendre sur la Théorie de Nombres, avec un certain accent sur son édition de 1830, intitulée *Théorie de Nombres*. Le rôle joué par ces œuvres dans leur contexte historique et leur influence sur le développement de la Théorie de Nombres a été examiné. Une étude biographique de Legendre (1752-1833) a été entreprise, dans lequel tant ses relations personnelles que ses productions scientifiques ont été rapproché des certains éléments historiques du développement tant de sa patrie, France, que des sciences en général, pendant les 18ème et 19ème siècles Cette étude a révélé les caractéristiques notables de sa personnalité, aussi bien que ses attitudes vers ses contemporains mathématiques, particulièrement en ce qui concerne ses querelles avec Gauss à propos des priorités de découvertes scientifiques. Cette enquête a révélé qu'il a non seulement fait des contributions substantielles à cette branche de Mathématiques, mais a aussi inspiré d'autres mathématiciens pour avancer la science des nombres. C'est en effet un héritage allant pour sa *Théorie de Nombres*, le premier texte moderne sur l'Arithmétique supérieur, sur laquelle il a insisté pendant la moitié de sa vie, produisant des éditions diverses. Néanmoins, Legendre a aussi reçu beaucoup d'honneurs posthumes, y compris l'ayant de son nom perpétué sur la face Trocadéro de la Tour Eiffel, qui contient une liste de 72 scientifiques éminents et une rue et un quartier à Paris portent son nom.

Mots-clés : Histoire des Mathématiques. Histoire de la Théorie de Nombres. Adrien-Marie Legendre.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
CAPÍTULO 1: ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833): SUA VIDA, SUAS OBRAS	19
1.1 INTRODUÇÃO	19
1.2 ADRIEN-MARIE LEGENDRE: SUA VIDA EM QUATRO PERÍODOS HISTÓRICOS	20
1.2.1 Legendre e o Antigo Regime (1752-1789)	21
1.2.2 Legendre e a Revolução Francesa (1789-1799)	25
1.2.2.1 ORIGENS DOS SOBRENOMES FRANCESES	31
1.2.3 Legendre e o Primeiro Império Napoleônico (1803-1814)	35
1.2.4 Legendre e a Restauração (1814-1833)	39
1.3 RELAÇÕES DE LEGENDRE COM MATEMÁTICOS CONTEMPORÂNEOS	42
1.3.1 Legendre e Fourier	42
1.3.2 Legendre e Poisson	44
1.3.3 Legendre e Sophie Germain	44
1.3.4 Legendre e Jacobi	46
1.3.5 Legendre e Galois	47
1.3.6 Conflitos sobre prioridades de descobertas científicas	49
1.3.6.1 Entre Legendre e Laplace	49
1.3.6.2 Entre Legendre e Gauss	52
1.4 ALGUNS FATORES SOBRE O CARÁTER DE LEGENDRE	55
1.4.1 Sua modéstia	55
1.4.2 Sua severidade	56
1.4.3 Seu perfeccionismo	57
1.4.4 Sua timidez	57
1.4.5 Sua generosidade	58
1.4.6 Sua parcialidade	58
1.5 O “FALSO” RETRATO DE LEGENDRE	62

CAPÍTULO 2: LEGENDRE E A TEORIA DOS NÚMEROS	68
2.1 LEGENDRE, GAUSS E A TEORIA DOS NÚMEROS NOS SÉCULOS XIX E XX	68
2.2 OBRAS DE LEGENDRE EM TEORIA DOS NÚMEROS COM DESTAQUES PARA OUTROS AUTORES	70
2.2.1 Como tudo começou: <i>Estudos sobre a Análise Indeterminada</i> (1785)	70
2.2.1.1 Primeiro artigo: “Equações indeterminadas lineares”	70
2.2.1.2 Segundo artigo: “Uso da Análise Indeterminada no estudo dos divisores de equações”	76
2.2.1.3 Terceiro artigo: “Um teorema sobre a possibilidade das equações indeterminadas do segundo grau”	78
2.2.1.4 Quarto artigo: “Diversos teoremas sobre os números primos”	79
2.2.1.4.1 <i>A primeira versão da Lei de Reciprocidade Quadrática</i>	79
2.2.1.4.2 <i>Divisores primos de formas quadráticas: Um texto de Lagrange</i>	86
2.2.2 Ensaio sobre a Teoria dos Números (1798)	89
2.2.3 Ensaio sobre a Teoria dos Números (1808)	97
2.2.4. Primeiro Suplemento (1816)	97
2.2.5 Mémoire: <i>Estudos sobre alguns objetos da Análise Indeterminada, particularmente sobre o Teorema de Fermat</i> (1823/5)	105
2.2.6 Mémoire: <i>Sobre a determinação das funções X e Y que satisfazem à equação</i>	
$4(X^n - 1) = (X - 1)(Y^2 \pm NZ^2)$, onde n é um número primo da forma $4i \pm 1$ (1832)	109
2.2.7 Teoria dos Números (1830)	112
2.2.7.1 Teoria dos Números (1830): Introdução	119
2.2.7.2 Teoria dos Números (1830): Volume I, Primeira parte	125
2.2.7.2.1 <i>Primeira parte (1830): Equações indeterminadas do segundo grau</i>	127
2.2.7.2.2 <i>Primeira parte (1830): Frações contínuas</i>	134
2.2.7.2.3 <i>Primeira parte (1830): Resoluções das equações $x^2 - Ay^2 = \pm D$ e $Mx^2 - Ny^2 = \pm 1$</i>	142
2.2.7.2.4 <i>Primeira parte (1830): Frações contínuas e raízes da equação $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k = 0$</i>	146
2.2.7.3 Teoria dos Números (1830): Volume I, Segunda parte	149
2.2.7.3.1 <i>Teoria dos Números (1830) Segunda parte: O Pequeno Teorema de Fermat</i>	151

2.2.7.3.2 Teoria dos Números (1830) Segunda parte: Números primos e fórmulas quadráticas	155
2.2.7.4 Teoria dos Números (1830): Volume I, Terceira parte	161
2.2.7.4.1 Teoria dos Números (1830) Terceira Parte: Divisores quadráticos e formas ternárias	162
2.2.7.5 Teoria dos Números (1830): Volume I, Tabelas	166
2.2.7.6 Teoria dos Números (1830): Volume II, Quarta parte	167
2.2.7.6.1 Teoria dos Números (1830) Quarta parte: Progressões aritméticas, números primos e logaritmos	170
2.2.7.7 Teoria dos Números (1830): Volume II, Quinta parte	177
2.2.7.7.1 Teoria dos Números (1830) Quinta parte: Divisão de uma circunferência em partes iguais	179
2.2.7.8 Teoria dos números (1830): Volume II, Sexta parte	185
2.2.7.8.1 Teoria dos Números (1830) Sexta parte: A lei de reciprocidade quadrática e o símbolo de Legendre	186
2.2.7.8.2 Categoria 1: Demonstração da lei de reciprocidade com fundamentos em formas quadráticas e congruências do segundo grau: textos de Legendre (1830) e de Gauss (1807)	191
2.2.7.8.3 Categoria 2: Demonstração da lei de reciprocidade com fundamentos no Lema de Gauss: textos de Legendre (1830) e de Zolotareff (1872)	201
2.2.7.8.4 Categoria 3: Demonstração da lei de reciprocidade com fundamentos na teoria de ciclotomia de Gauss: textos de Legendre (1830) e de Eisenstein (1844)	207
2.2.7.9 Teoria dos Números (1830): Apêndice	215
2.2.7.9.1 Teoria dos Números (1830): Apêndice, Seção I	215
2.2.7.9.2 Teoria dos Números (1830): Apêndice, Seção II	217
CAPÍTULO 3: A RECEPTIVIDADE PELA COMUNIDADE MATEMÁTICA DOS TRABALHOS DE LEGENDRE EM TEORIA DOS NÚMEROS	220
3.1 TEORIA DOS NÚMEROS (ENSAIO, 1798; ENSAIO, 1808; TEORIA DOS NÚMEROS, 1830), UM LIVRO DIDÁTICO? UM TRATADO DA ARITMÉTICA SUPERIOR?	220
3.1.1 Opiniões diversas sobre as obras de Legendre	220
3.2 O LEGADO	227
3.2.1 História da Teoria dos Números de Leonard-Eugene Dickson (1952)	227
3.2.2 Números primos, mistérios e recordes de Paulo Ribenboim (2001)	229
3.2.3 Leituras em Teoria dos Números de Lejeune-Dirichlet (1999)	230
3.2.4 Curso de Análise da Escola Real Politécnica de Cauchy (1821) apud Dhombres (2002)	231

3.2.5 Disquisitiones Arithmeticae de F. Gauss (1807)	232
3.2.6 Leis de reciprocidade de F. Lemmermeyer (2000)	233
3.3. CONTRIBUIÇÕES DE OUTROS MATEMÁTICOS ÀS OBRAS DE LEGENDRE	233
3.3.1 Sophie Germain: números primos	233
3.3.2 Jacobi: raízes da unidade e lei de reciprocidade	234
3.3.3 Abel: resolução de equações de grau maior do que quatro	236
4 CONCLUSÃO	239
REFERÊNCIAS	249

INTRODUÇÃO

Este trabalho teve por objetivo inventariar, sistematizar e avaliar as obras em Teoria dos Números do matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833), bem como realizar um estudo histórico da vida desse matemático. O referido autor é mundialmente conhecido como o autor do livro *Elementos de Geometria* (1794), que ganhou um prêmio especial do júri do concurso de produção de livros elementares para o ensino francês no fim do século XVIII. As únicas obras de Legendre traduzidas no Brasil foram *Elementos de Geometria* e *Tratado de Trigonometria*, no ano de 1809.

Em consonância com os objetivos do trabalho, achamos apropriado realizar um estudo sistemático da vida do autor em um contexto histórico-social da sociedade francesa, também, verificarmos qual foi o impacto causado pelas obras de Legendre em Teoria dos Números na comunidade matemática francesa da época antes e depois da publicação dessas obras e consequentemente, evocarmos quais foram as contribuições do autor às ciências de um modo geral.

O acervo matemático das bibliotecas brasileiras não contém informação alguma sobre os trabalhos de Legendre em Teoria dos Números. Nesse sentido, as principais referências para a execução do trabalho foram o livro *Teoria dos Números* (LEGENDRE, 1830) e as fontes primárias, secundárias e terciárias, a saber: todas as demais obras em Teoria dos Números de Legendre, informações dos arquivos das academias as quais Legendre esteve associado, cartas trocadas entre Legendre e seus pares, bibliografias realizadas por diferentes autores, livros originais sobre a História da Matemática, etc., que foram obtidas no Centro François Viète da Universidade de Nantes, instituição muito conhecida por seus estudos em Epistemologia e História da Matemática, onde realizei um estágio em 2009.

Uma vez garimpadas tais fontes procedemos como Prestes (p. 18-20, 2005) que diz que um trabalho científico de ser *racional, analítico, claro, preciso e sistemático*. Em consonância com Prestes (2005), nosso trabalho foi *racional* em relação aos conceitos envolvidos, onde não nos valem de sensações, imagens ou de modelos de conduta. Ele foi *analítico* na abordagem e decomposição dos fatos matemáticos e históricos sobre o objeto de estudo, onde o procedimento científico de análise nos levou à síntese. A clareza e a precisão foram evidenciadas pela ausência de ambiguidades. A sistematização foi engendrada na articulação entre a lógica dos conteúdos

matemáticos em que retomamos percorrido pelo autor em apreço a fim de apresentar o conhecimento da Teoria dos Números de uma forma evolutiva.

Dessa forma, todas as obras originais em Teoria dos Números do referido autor foram fontes norteadoras para que empreendêssemos uma análise matemática dos conteúdos dessas obras na compreensão da evolução dinâmica dos fenômenos envolvidos em suas descobertas matemáticas nessa área. Também, possibilitaram uma leitura histórica do papel desempenhado por essas obras e sua influência no desenvolvimento da Teoria dos Números dos séculos XVIII e XIX.

Nesse sentido O. May (1973, p. 3; 15) sugere alguns procedimentos fundamentais para que uma investigação histórica matemática seja bem sucedida. Primeiro, é necessário que o investigador trace um plano com objetivos claros e bem definidos e as investigações iniciais devem partir das instituições as quais o matemático esteve associado. Segundo, as fontes referenciais têm de estar em consonância com a bibliografia, a cronologia e as notas. Terceiro, nos chama a atenção O. May (1973, p. 30-33), para o cuidado com a idoneidade das fontes obtidas para que o pesquisador não seja induzido a erros na análise histórica dos fatos e não venha a se basear em uma única fonte ao escrever o texto. Aponta o autor que os historiadores matemáticos não podem se ater apenas aos fatos relativos à vida do autor investigado O estudo biográfico deve estar necessariamente articulado à personalidade, à imagem clara do indivíduo como personagem de sua época, sem o risco de dar a biografia um ar excessivamente romântico, técnico ou anedótico. Além disso, ele nos diz (O. May, 1973, p. 14-15) que a consulta às fontes não deverá estar consubstanciada apenas na ótica da História da Matemática, mas também apoiada no contexto histórico de uma sociedade e na evolução científica da época. A consulta a textos relativos à história das sociedades, a jornais e periódicos científicos e locais, aos manuscritos, às correspondências trocadas entre os pares, diários, etc., contribui de forma significativa na determinação de quando, quanto e por que uma teoria ou uma lei científica foi descoberta ou inventada.

Seguindo os preceitos de O. May (1973) realizamos uma investigação sobre a trajetória da vida de Legendre como um personagem de sua época. Uma viagem no tempo foi realizada no Capítulo 1, “Adrien-Marie Legendre (1752-1833): sua vida, suas obras”, articulada à cronologia de quatro momentos políticos mais importantes da sociedade francesa: o Antigo Regime (1752-1789), a Revolução Francesa (1789-1799), o Primeiro

Império de Napoleão (1803-1814) e a Restauração (1814-1833). Nesse capítulo, evidenciamos a participação de Legendre em cada um desses períodos e evocamos o desenvolvimento científico de seus trabalhos em Matemática, da Academia de Ciências de Paris, alguns deles, frutos dos concursos anuais que eram disputados pelos maiores cientistas da Europa. Para o traçado de sua personalidade, fizemos uma análise de suas relações afetuosas com os matemáticos Fourier, Poisson, Sophie Germain, Jacobi e Galois, e detectamos relações conflitantes com Laplace e com Gauss sobre prioridades de descobertas científicas.

Complementamos o perfil inicialmente traçado, com o relato de seis episódios envolvendo os pontos de vista dos historiadores, das correspondências trocadas entre seus pares, dos elogios póstumos e dos prefácios de suas obras. Finalizando o capítulo, registramos um episódio anedótico a respeito do **falso** retrato de Legendre num debate ocorrido em uma página da Internet em dezembro de 2008.

A história da Teoria dos Números é tão vasta que, para compreendermos o nascimento, o desenvolvimento e a difusão de uma determinada teoria, foi necessário enveredarmos por caminhos sinuosos que nos conduziram a um emaranhado de informações. Belhoste (1998) concorda que uma produção científica não é inteiramente autônoma, sobretudo, deve estar engajada a contextos específicos que ditarão as condições para o seu desenvolvimento.

Mediante essas recomendações, como então percorrer a via aritmética e algébrica da Teoria dos Números, sem lançarmos um olhar sobre os trabalhos de Legendre? Em quais contextos específicos foram realizadas as suas obras em Teoria dos Números? Essas obras tiveram alguma influência na Teoria dos Números desenvolvida nos séculos XVIII e XIX? Para responder tais questões, desenvolvemos no Capítulo 2, “Legendre e a Teoria dos Números”, um exame minucioso de todas as obras do autor em apreço, desde seu primeiro trabalho de 1785, passando por todas as edições do *Ensaio* até a sua última obra, *Sobre a determinação das funções X e Y que satisfazem à equação $4(X^n - 1) = (X - 1)(Y^2 \pm Nz^2)$, onde n é um número primo da forma $4i \pm 1$* que foi publicada em 1832, um ano antes de sua morte.

Para compreendermos a participação de Legendre na evolução da Teoria dos Números dos séculos XVIII e XIX e a sistematização de novas teorias e problemas desenvolvidos por ele por meio da Análise Indeterminada, traduzimos e examinamos

criticamente os textos das obras, considerando os aspectos históricos da criação e da difusão dessas teorias.

Durante a análise minuciosa do conteúdo de todos os livros e artigos de Legendre em Teoria dos Números, em virtude da extensão do conteúdo dessas obras, percebemos uma repetição ostensiva de conteúdos que o autor desenvolveu por mais de quarenta anos.

As fontes garimpadas na instituição francesa em que realizei o estágio em 2009 me possibilitaram ter acesso às obras em francês de importantes matemáticos a exemplo de Fermat, Euler, Lagrange, Gauss, que abordaram os mesmos assuntos e que foram retratados por Legendre nessas obras.

Nossa tradução dos textos matemáticos do autor em apreço e de seus pares primou pelo respeito aos aspectos semânticos e sintáticos no que se refere à argumentação lógica das proposições indutivas e dedutivas e pelo seu aspecto ontológico em que fatos foram explicados e localizados em um sistema de entidades inter-relacionadas.

Realizamos então um estudo comparativo e evolutivo dos textos desenvolvidos por Legendre e por variados autores.

Nessa ótica, optamos por enfatizar alguns estudos de Legendre comparados a textos de Euler, Lagrange, Gauss, Jacobi, Eisenstein e Zolotareff. Dentre outros assuntos, foram analisados a resolução de equações do segundo grau e de equações do tipo $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k = 0$ por meio de frações contínuas, o Pequeno Teorema de Fermat, os números primos divisores de formas quadráticas, e, como não poderia deixar de ser, a famosa lei de reciprocidade quadrática de Legendre, donde abordamos seis demonstrações. Focamos um interesse maior na famosa lei de reciprocidade quadrática que foi insistentemente demonstrada por Legendre de forma incompleta e com alguns erros.

Elaboramos uma arquitetura própria para a análise dos textos matemáticos. Tal arquitetura consistiu na análise dos textos segundo a organização axiomática (tipos de problemas e teoremas); nas questões sobre definições e axiomas (nomenclaturas novas e antigas, estrutura); críticas da estrutura dedutiva (generalidades, casos particulares); na organização das demonstrações (por absurdo, por indução, por descida finita, infinita, demonstrações diretas; conjecturas, ...) em que foram acentuadas diferenças e similitudes dos conteúdos de Legendre e de outros matemáticos.

O terceiro e último capítulo, “A receptividade pela comunidade matemática dos trabalhos de Legendre em Teoria dos Números”, teve como objetivo apresentar um panorama sobre as críticas dos matemáticos e as contribuições das obras de Legendre à comunidade matemática em variadas épocas. Montessus (1899) coloca que sempre que novas teorias surgem, as opiniões se divergem, prática habitual no meio científico. No Capítulo 3, retratamos as opiniões favoráveis e as críticas às obras de Legendre em Teoria dos Números, emitidas por grandes matemáticos e, divergências à parte, grande parcela das opiniões concordou que as inovações implementadas na Teoria dos Números por Legendre desde seu primeiro trabalho *Estudos sobre a Análise Indeterminada* (1785), exerceram uma grande influência na ciência do século XVIII até meados do século XIX. Em seguida, discorremos sobre o legado da obra expondo alguns conteúdos de trabalhos de Legendre em Teoria dos Números que foram citados nas obras de L. E. Dickson (1952), Paulo Ribenboim (2001), Lejeune Dirichlet (1999, Tradução inglesa do original alemão de 1863), Gauss (1807, Tradução francesa do original alemão de 1801), Cauchy (1821) *apud* Dhombres (2002) e F. Lemmermeyer (2000). Fechando o texto, discorremos sobre as contribuições de Sophie Germain, Jacobi e Abel, respectivamente, nos estudos de Legendre sobre números primos, raízes da unidade e lei de reciprocidade e resolução de equações de grau maiores a quatro.

CAPÍTULO 1

ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833): SUA VIDA, SUAS OBRAS

1. INTRODUÇÃO

Segundo Th. Hankins, *apud* Taton (2000, p. 531, tradução nossa),

O conjunto dos elementos biográficos precisos, de manuscritos inéditos e de correspondências não constituem em si uma biografia satisfatória de um cientista; ele deve ser interpretado a fim de unificar os diferentes aspectos de sua vida, de maneira a contribuir para uma análise de sua obra, de suas relações e de sua influência.

É nesse contexto, que realizaremos aqui um panorama da trajetória da vida do matemático francês Adrien-Marie Legendre com o objetivo de detectar certos elementos de sua personalidade, articulados à sua imagem como personagem de sua época, por meio de relações trocadas com seus pares, as instituições as quais o matemático esteve associado e os seus trabalhos científicos.

1.2 ADRIEN-MARIE LEGENDRE: SUA VIDA EM QUATRO PERÍODOS HISTÓRICOS



Figura 1: Adrien-Marie Legendre

Fonte: *apud* SAMUELI e BOUDENOT, 2006

Adrien-Marie Legendre (Figura 1) nasceu em 1752 e faleceu em 1833. Pertenceu a uma geração de grandes matemáticos a exemplo de Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Monge (1746-1818) e Gauss (1777-1855).

Cronologicamente, a vida de Legendre passou por quatro períodos da história da França, a saber: o Antigo Regime, a Revolução Francesa, o primeiro Império de Napoleão e a Restauração. Em um contexto baseado em cada um desses períodos, a sua vida pessoal, acadêmica, política e profissional será aqui retratada não apenas em relação ao meio científico, bem como em relação à sociedade francesa em geral.

1.2.1 Legendre e o Antigo Regime (1752-1789)

Legendre nasceu no dia 18 de setembro de 1752 na cidade de Paris. No entanto, encontramos registros divergentes quanto ao local de seu nascimento, uma vez que Parisot e Michaud (1843, vol. XXIII, p. 610) e Ball (2003, p. 108), apontam que Legendre nasceu em Toulouse. Mas essa informação não é verdadeira, pois os documentos dos arquivos sobre a sua candidatura e eleição da Academia Real de Londres atestam que Legendre, de fato, nasceu em Paris.

Sua família, embora não pertencesse à nobreza, era considerada uma família de posses. Legendre estudou no Colégio Mazarin (Figura 2), antigo Colégio das Quatro Nações, uma das escolas mais avançadas do século XVII. Além disso, foi nessa escola que ele começou a se interessar por literatura antiga e por livros científicos, especialmente os de Matemática.



Figura 2: Collège Mazarin, Paris, 1810

Fonte: ARTCHIVE. COM, 2010

Analisando os textos de Gillespie (1970-1980) e de Parisot e Michaud (1843), constatamos que Legendre revelou um talento precoce para as ciências. Aos 18 anos ele

defendeu sua tese em Matemática e em Física e concluiu seus estudos no Colégio Mazarin em Paris. Em 1774, aos 22 anos, publicou um tratado de Mecânica com a co-participação de Joseph-François Marie, seu professor de Matemática e de Física do Colégio Mazarin (que mais tarde misteriosamente foi assassinado durante a Revolução Francesa). Um ano depois, Legendre se tornou professor da Escola Militar de Paris onde ficou até 1780. Nessa época, a Europa era governada pelos déspotas esclarecidos, como Frederico II, o Grande, de Berlim; Pedro, o Grande e Catarina, a Grande, de São Petersburgo, Louis XV e Louis XVI de Paris que foram, respectivamente, os mecenas dos influentes matemáticos Gauss, Euler e Lagrange. De uma forma geral, os mecenas patrocinavam os artistas e os sábios que constituíam o centro do desenvolvimento intelectual do século das Luzes (GILLESPIE, 1970-1980, vol. XXIII, p. 135; PARISOT e MICHAUD, 1843, p. 610-5).

Segundo (SAUTOY, 2005), a presença de cientistas na corte era sinal de prestígio e tais monarcas eram perfeitamente conscientes que as ciências e a Matemática eram potencialmente uma alavanca para o desenvolvimento da capacidade militar e industrial de seus reinos.

Taton (1958-a) aponta que a ciência do século XVIII era herdeira e a continuação direta do magnífico desenvolvimento do pensamento científico da Europa ocidental da Renascença.

O meio científico francês era movido pelo fértil desenvolvimento científico dos acadêmicos das províncias e da Academia de Ciências de Paris, cujos concursos anuais eram disputados pelos maiores cientistas da Europa e na época do despotismo esclarecido se tornou uma fonte de inspiração para diversos soberanos que se esforçaram na tentativa de imitá-la. Vários deles incentivaram a criação das academias nacionais, de centros de pesquisas e de ensino que permitiram os cientistas trabalharem em condições favoráveis. Foi o caso de Frederico II da Prússia que em 1740 restaurou a Academia de Berlim, criada por Leibniz em 1700 e atraiu a atenção e dedicação de Euler (de 1741 a 1766), Lagrange (de 1766-1787) e Lambert (de 1765-1777). A criação da Universidade de Göttingen em 1773 na Alemanha contribuiu para o afloramento dos primeiros trabalhos de Gauss. Na Rússia Pedro, o Grande criou a Academia de São Petersburgo em 1724 que atraiu Daniel e Nicolas Bernoulli e Euler. Nesse contexto, Taton (1958-a) também afirma que, enquanto a Matemática do século XVII era caracterizada por um grande número de matemáticos

amadores, o século XVIII se limitou quase exclusivamente à

obra dos cientistas, profissionais, professores de universidades britânicas, italianas ou suíças, membros da Academia de Paris ou matemáticos itinerantes, atraídos a Berlim ou a São Petersburgo pela política dos reis esclarecidos. (TATON, 1958-a, p. 449, tradução nossa.)

Legendre, inclusive, foi um dos cientistas franceses que foi beneficiado por esse ambiente favorável ao desenvolvimento acadêmico. Em 1782 ele recebeu o Grande Prêmio da Academia de Ciências de Berlim pelo seu trabalho *Trajetórias de projéteis em meios resistentes*, cuja quantia o tornou independente financeiramente e lhe possibilitou uma dedicação exclusiva às pesquisas.

Nesse mesmo ano, seu trabalho *Figura de planetas* (1782), foi publicado pela mesma academia, onde Legendre demonstrou originalmente que a forma elipsoidal é a única forma conveniente a uma massa fluida e homogênea no movimento de rotação.¹

Em 30 de março de 1783, ele se tornou membro adjunto (colaborador) da Academia de Ciências de Paris, posição ocupada por Laplace desde 1773, que foi promovido a membro associado (membro efetivo) nessa mesma data. Anos depois, Legendre foi promovido a membro associado da classe de Mecânica quando da reorganização da Academia de Paris em 1795.

Em 1785 Legendre publicou um novo trabalho da Academia de Paris, *Estudos sobre a Análise Indeterminada* que foi o primeiro dos vários trabalhos seus em Teoria dos Números, e contém em particular, o célebre teorema de reciprocidade quadrática.

Em 23 de abril desse mesmo ano, Legendre juntamente com Cassini e Méchain foi designado pela Academia de Paris para realizar as medidas geodésicas de Greenwich à Paris, cujos trabalhos foram iniciados em 1787.² Para essa finalidade, Legendre utilizou métodos analíticos para a determinação do arco do meridiano de Greenwich à Paris por meio de triângulos esféricos bem como os que religavam a costa da Inglaterra a Greenwich. Em virtude desse trabalho, Legendre foi eleito membro da Sociedade Real de Londres em novembro de 1788, conforme Ata da Eleição de Legendre da Sociedade Real de Londres³,

¹Vide (Boyer, 1900, p. 205).

² Nota nossa: Esse fato pode ser constatado em Cassini, Méchain, Le Gendre discutem o assunto em *Exposição sobre as operações realizadas em 1787 pelos observatórios de Paris e Greenwich*, 1791.

³ Disponível em < <http://royalsociety.org/>>.

reproduzida na Figura 3 a seguir e traduzida abaixo (no alto da página do documento, Legendre é identificado como Le Gendre⁴):

Nós abaixo assinados, certificamos que o Sr. Legendre, Membro da Academia Real de Ciências e do Conselho de Direção das Escolas Militares, aspirando à honra de ser um dos associados da Sociedade Real de Londres, possui qualidades requisitadas para ser admitido nessa ilustre corporação. Crendo nisso, assinamos, Le Mis de Chabert; Dionis Dusejour; Broussonet; Messier; Daubenton; Le Roy; C Blagden; Will Roy. Lido em novembro de 1788.

Legendre foi eleito em 1788, mas efetivamente se tornou membro da Academia de Ciências londrina em 30 de abril de 1789, cuja Ata é reproduzida na Figura 3 a seguir.

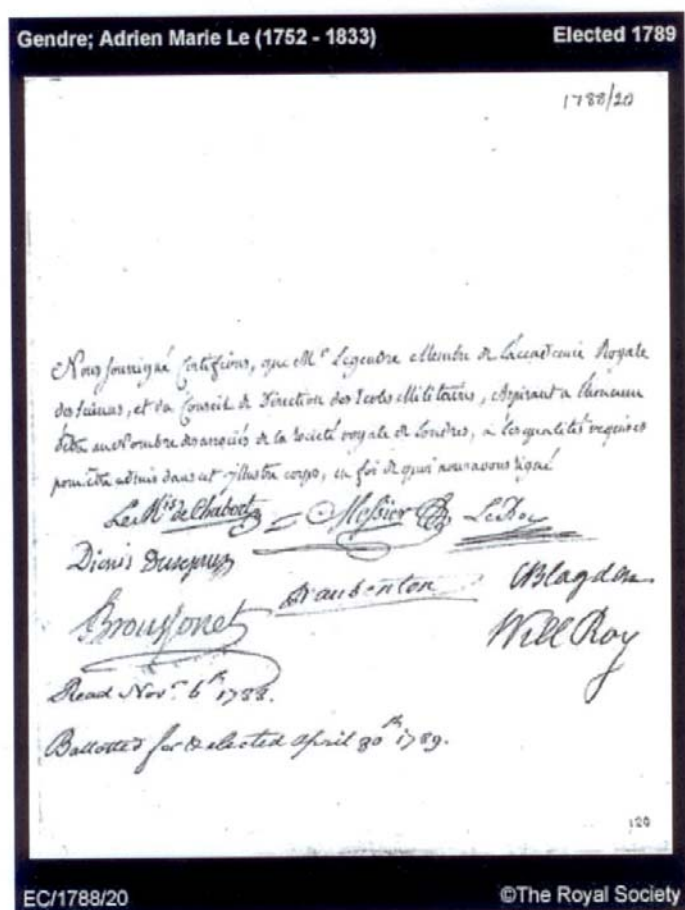


Figura 3: Fac-símile da Ata de eleição de Legendre à Academia Real de Londres em 1788

Fonte: ROYALSOCIETY.ORG, 2009

⁴ Vide observação sobre a origem de sobrenomes franceses mais adiante no presente trabalho.

Enquanto membro da Academia de Ciências de Paris, Legendre publicou importantes resultados tanto na Matemática quanto na Física. Em 1786, ele criou os polinômios que levam o seu nome (os polinômios ortogonais P_n de grau n , definidos no intervalo $[-1, 1]$, onde $P_n(1) = 1$), de seus trabalhos sobre a teoria do potencial e as funções harmônicas de Laplace, que anteriormente foram estudadas por Euler e Lagrange em hidrodinâmica.

Ainda em 1786, Legendre foi um dos primeiros que lançou os fundamentos da teoria de funções elípticas, que posteriormente foi aperfeiçoada por Abel e Jacobi. Nesse mesmo ano, sua atenção foi voltada para o cálculo variacional, ao qual forneceu um critério para distinguir os máximos dos mínimos. Sua demonstração, que não era muito rigorosa, foi corrigida posteriormente por Jacobi em 1836. Inspirado pelos estudos de Monge sobre superfícies mínimas, Legendre escreveu *A integração de algumas equações diferenciais parciais* que foi publicado pela Academia de Paris em 1787 (GILLESPIE, 1970-1980, Vol. VIII).

Nessa época, alguns matemáticos diversificaram seus interesses para outros assuntos. Euler se dedicou à música e à teoria de navegação e D'Alembert interessou em estudar Filosofia e Literatura. Laplace desenvolveu com Lavoisier, o pai da Química moderna, um importante tratado sobre a teoria do calor. Em 1785, os matemáticos Legendre, Monge, Meusnier e Laplace foram os relatores do processo verbal de uma experiência de Lavoisier sobre a composição da água, conforme Dhombres (1989).

1.2.2 Legendre e a Revolução Francesa (1789-1799)

No século XVIII, a sociedade feudal francesa entrou em decadência e as grandes cidades, como Paris, Marselha e Lyon, se tornaram alvo de interesses sociais e de poderio econômico. Nesse sentido, a Revolução Francesa de 1789 se impôs pela resistência das classes nobres que não queriam abrir mão de seus privilégios e da incapacidade da monarquia para reconduzir os novos acontecimentos sócio-políticos.

Do ponto de vista institucional, o novo poder proclamou como direito fundamental a igualdade de todos os cidadãos, invertendo radicalmente o elitismo que perdurou no Antigo Regime. Esse período fez parte de uma etapa muito importante no desenvolvimento social, político e educacional do povo francês, com repercussão não somente na Europa, mas

também no resto do mundo. A Revolução foi preparada a um nível ideológico num amplo movimento intelectual que propagava o governo da razão, da experiência e da ciência, aplicadas à técnica. Delambre em 1810, em seu discurso sobre as ciências matemáticas, observou que o período de 1789 a 1808 foi um dos períodos mais memoráveis para o povo francês, pois, simultaneamente, ocorreram grandes acontecimentos políticos, militares e na área do conhecimento.

A reforma do ensino francês, nesse período, refletiu diretamente no desenvolvimento científico do século XIX, uma vez que repercutiu em uma mobilização da comunidade científica de diversos países para a criação de organismos para a difusão de conhecimentos, seja pela fundação de sociedades científicas nacionais e regionais.

No século XIX, foram criadas a Sociedade de Matemática (1865), Sociedade Francesa de Matemática (1872), Círculo Matemático de Palermo (1884), Sociedade Americana de Matemática (1888) e Sociedade Alemã de Matemática (1890).

Na passagem do século XVIII para o XIX, importantes meios de divulgação foram criados na Europa, a exemplo do *Jornal da Escola Politécnica* (1795), dos *Anais Matemáticos* de Gergonne (1810), do *Jornal de Matemática Pura e Aplicada* (1836) de Liouville, que conjuntamente com os *Comptes Rendus* (1835) das seções da Academia de Ciências de Paris, na França e *Diário* de Crelle (1826) em Berlim, contribuíram para a difusão de pesquisas, das obras, correspondências e discussões científicas realizadas pelos matemáticos do século XVIII (DELAMBRE, 1810; TATON, 1961; URBANEJA, 1997).

Nesse contexto sócio-político francês, como se deu a relação entre o meio acadêmico e o poder revolucionário?

Alguns fatos atestam que durante o período revolucionário francês o meio intelectual e científico ficou dividido entre servir ao poder e continuar suas atividades acadêmicas, pois segundo Dhombres (1989, p. 11, tradução nossa) “as ocupações da maioria dos acadêmicos não foram afetadas”. Legendre, por exemplo, ficou distante das atividades políticas, mas participou de relevantes eventos científicos, a exemplo da comissão que foi instituída para o estabelecimento do sistema métrico decimal. Dentre os matemáticos, Laplace, Monge, Condorcet e Carnot, se engajaram aos Estados Gerais⁵ e à Assembléia Legislativa, como

⁵ Estados Gerais era um órgão político de poder consultivo e deliberativo constituído por representantes das três ordens: o clero, a nobreza e o povo. Eles aconselhavam o rei em algumas de suas decisões.

Monge e Carnot que foram ardentes republicanos. Para Monge a Revolução foi extremamente oportuna, pois lhe proporcionou uma carreira política como Ministro da Marinha em 1792. Um pouco mais tarde, em 1795, ele foi um dos fundadores da Escola Politécnica e do Instituto Nacional. Carnot se tornou deputado em 1793 e membro do Comitê de Saúde Pública. Condorcet, por suas ideias anti-revolucionárias, não resistiu às pressões políticas e acabou se envenenando e morreu dois dias após sua prisão em 1794. O químico Lavoisier foi acusado injustamente por gastos indevidos do dinheiro público e morreu guilhotinado em 8 de maio de 1794, conforme Dhombres (1989, p. 24).

Legendre, porém, não teve nenhum papel político durante a Revolução Francesa. Sua atenção foi voltada para ocupar postos públicos como conselheiro na universidade, professor da escola Normal, examinador da Escola Politécnica, cujos salários lhe proporcionaram o necessário para viver. Vale ressaltar que foi nesse período que Legendre juntamente com Monge, Lagrange e Lacroix fundaram a revista *Ensino de Matemática* que se tornou uma das bases para a difusão do desenvolvimento matemático no século XIX.

Em 1789 o estabelecimento de um sistema métrico único de pesos e medidas para a França gerou uma mobilização política dos acadêmicos junto à Assembléia Nacional. Foi nesse ano que a Academia de Ciências de Paris constituiu uma comissão composta por Lavoisier, Laplace, Brisson, Tillet e Le Rou. Somente em 1790 o ministro Taylerand correspondeu às expectativas dos acadêmicos e propôs à Constituinte a criação de comissões mistas formadas pelos membros das Academias de Paris e de Londres. No início, um documento foi elaborado pelos acadêmicos franceses Borda, Lagrange, Laplace, Monge e Condorcet em 19 de março de 1791 para a determinação de uma unidade padrão de medida. Após profundas discussões, o metro, a décima milionésima parte do quarto do meridiano calculado segundo a medida do arco entre Dunquerque e Barcelona, cujo nome foi sugerido por Laplace, foi o escolhido (DHOMBRES E DHOMBRES, 1989; DELAMBRE, 1810; BOYER, 1900; COLLETTE, 1979; URBANEJA, 1997; DIEDRON, 1959; BEAUMONT, 1864; GILLESPIE, 1970-1980, Vol. VIII).

Pouco tempo depois, Legendre, Cassini e Méchain que em 1787 tinham sido nomeados pela Academia de Ciências de Paris para realizar as medidas geodésicas de Greenwich à Paris, foram novamente convocados para fazer parte da comissão constituída para realizar os cálculos finais para o estabelecimento do sistema métrico único. Não existe

um consenso em algumas fontes secundárias quanto à data de constituição dessa última comissão. Em Dhombres (1989, p. 231), a data é dada como 10 de abril de 1791, em Gillespie (1970-1980, p. 136, Vol. VIII), a data é dada como 13 abril de 1791. Em Weil (1984, p. 325), encontramos apenas que o ano foi 1791.

Porém, os trabalhos somente foram iniciados anos depois da constituição dessa comissão. Novamente não encontramos um consenso relativo à época em que realmente os procedimentos foram realizados, vez que Jullian; Lesbroussart; Lennep (1827, p. 221) declarou que a implantação dos trabalhos foi aproximadamente em 1795 e que Legendre permaneceu nessa comissão até 1805. Já Dhombres (1989, p. 233) e Weil (1984, p. 325) afirmaram, respectivamente, que os trabalhos foram iniciados em 1799 e em 1794.

Em 1792 Legendre se casou com Marguerite-Claudine Couhin com a qual conviveu por 40 anos, sem deixar herdeiros. Em uma carta a Jacobi de 30 de junho de 1832, Legendre revelou que foi a sua tão amada esposa que no final de sua vida o ajudou “a restaurar progressivamente os negócios, o que me proporcionou essa tranquilidade de espírito necessária para me dedicar aos meus trabalhos habituais e para produzir novas obras.”, conforme Legendre *apud* Jacobi (1998, p. 460, tradução nossa).

Ao recuperar suas finanças, perdidas por causas não reveladas durante a Revolução Francesa, Legendre continuou produzindo e, em 1792, o seu trabalho *Sobre os transcendentel elípticos* foi lido na Academia de Ciências, mas infelizmente não pôde ser publicado por essa instituição, pois logo depois a Academia foi fechada. Segundo Gillespie (1970-1980, Vol. VIII, p. 140, tradução nossa), foi somente em 1793 que Legendre “conseguiu finalmente publicá-lo pelos seus recursos próprios, fora do circuito acadêmico”.

A supressão da Academia de Ciências de Paris, em 1793, foi um duro golpe para os acadêmicos, pois a instituição era o baluarte da ciência, das artes e das profissões, desde a sua criação por Colbert em 1666.

A ideia de fechar a Academia começou a ser germinada em 1791 pelo revolucionário Marat que, por interesses escusos⁶, denominou os acadêmicos de ‘aristocratas do saber’ e defendeu ardentemente a posição de que a Academia era a representação de um patrimônio elitista, um instrumento de poder e uma autoridade de censura do Antigo Regime. A rede de

⁶ Segundo Dhombres (1989, p. 161), Marat nutria um grande ressentimento pelos acadêmicos, especialmente por Laplace, por terem rejeitado seu trabalho em Física de 38 páginas submetido à Academia em 1779 que dentre outros assuntos, era uma crítica aos trabalhos de Newton.

intrigas da nova ordem republicana exigiu uma classificação da missão das academias científicas, literárias e artísticas.

A árdua e difícil incumbência de defender a Academia de Paris ficou a encargo de Lavoisier, o químico mais ilustre da época. Lavoisier fez uma defesa sólida da instituição, destacando a excelência dos trabalhos ali publicados no domínio das ciências e das artes, assim, como evidenciando a democracia existente na eleição dos seus membros por sufrágio universal, no intuito de marcar uma oposição e uma identificação da Academia a uma instituição elitista do Antigo Regime (DHOMBRES E DHOMBRES, 1989). Mesmo que a maioria dos acadêmicos não sofresse nenhuma perseguição ostensiva, de meados de 1793 a 1795, eles vivenciaram o período que ficou conhecido como *Terror*⁷, e que acarretou na redução da produção e da publicação de trabalhos científicos em jornais e boletins, assim como na supressão dos prêmios dos concursos da Academia (DHOMBRES E DHOMBRES, 1989; JURATIC, 2008).

Tão logo o ardor revolucionário começou a se apaziguar, um dos primeiros cuidados do governo foi organizar a instrução pública, uma vez que:

por um decreto em meados de junho, o Jardim do rei se tornou Museu de história natural, a vocação de ensino foi consolidada pela criação de novas cadeiras e pesquisas especializadas. À Academia de Ciências, dissolvida algumas semanas mais tarde⁸, sucederam instituições a exemplo da Escola Normal (21 de janeiro de 1795), a Escola Central de Trabalhos Públicos (21 de dezembro de 1794), mais tarde Escola Politécnica (1 de setembro de 1795) e o Instituto Nacional (25 de agosto de 1795) cuja organização em classes subdivididas em diferentes ramos, testemunharam a efetivação da nova ordem científica centrada na especialização. (CASTONGAY e BÉLANGER, 2009, p. 13, tradução nossa.)

A dissolução da Academia de Ciências de Paris em 1793, resultou na implementação das Escolas Normais e Escolas Centrais para o ensino elementar de Matemática, Ciências Físicas

⁷ Regime instituído no período de 10 de novembro de 1793 a 28 de julho de 1794 por Robespierre em que a Convenção Nacional se tornou o único centro de impulsão do governo que em princípio assumiu os três poderes. Um tribunal revolucionário foi constituído para julgar crimes políticos e era considerado inimigo da Revolução aquele que obstruía a liberdade pela força. Julgado sem testemunhas e sem direito advogado, duas sentenças eram possíveis: a liberdade ou a morte por guilhotina. Nesse período, três figuras eminentes da ciência foram submetidas a esse tipo de processo público: o astrônomo Bailly, o químico Lavoisier e o matemático Condorcet, que, por sua ligação com o Antigo Regime, foram vítimas do Terror. O mesmo foi suprimido em 1794 pela Convenção Nacional que instituiu o Diretório (de 26 de outubro de 1795 a 9 de novembro de 1799). O poder legislativo ficou dividido em duas câmaras: o Conselho dos Quinhentos (500 membros) e o Conselho dos Anciãos (250 membros). O poder executivo era exercido por cinco diretores nomeados pelo Conselho dos Anciãos, escolhidos de uma lista elaborada pelo Conselho dos Quinhentos.

⁸ Nota nossa: Em agosto de 1793.

e Naturais. As Escolas Militares e Politécnicas se tornaram referências para o ensino superior, cuja finalidade, segundo Taton (1961, p. 405, tradução nossa), era “o estabelecimento de instituições científicas, militares e técnicas”. Dois anos depois da supressão da Academia, no dia 22 de agosto de 1795, foi criado o Instituto Nacional das Ciências e de Artes que incorporou alguns dos acadêmicos. O Instituto era constituído de dez seções diferentes, onde cada seção tinha seis lugares. A primeira classe do Instituto, a seção Ciências Físicas e Matemáticas, era a mais numerosa, com 66 dos 144 membros. Em 1805, o Instituto foi transferido para o antigo Colégio das Quatro Nações. A partir de 1816 a Academia de Paris retomou a sua autonomia e até hoje faz parte do Instituto, atual Instituto da França⁹.

O novo planejamento do ensino francês durante o período revolucionário teve por objetivo permitir à população um ensino mais moderno com um corpo docente qualificado, constituído pelos acadêmicos mais importantes da época, como Laplace, Lagrange e Monge. Visava à formação de um grande número de cientistas e de técnicos, com amplo acesso às descobertas mais recentes (TATON, 2000).

No entanto, Legendre por algum tempo, não foi convidado para assumir o posto de professor nessas instituições. Por consequência, sendo ele oriundo da geração de cientistas do século XVIII cujo nível de rendimentos não era homogêneo, Legendre “passava por dificuldades financeiras sem ser miserável, contrariamente a Delambre que ficara totalmente arruinado” (DHOMBRES E DHOMBRES, 1989, p. 171, tradução nossa).

A omissão do nome de Legendre para exercer a docência no novo sistema de ensino é assim, explicada por Beaumont (1864, p. LXII, tradução nossa):

M. Legendre, ou por ter caído em desapreço pelo poder ou por algum outro motivo, não foi convidado para exercer a um posto nas novas instituições públicas de ensino, vez que seu nome não constava entre os professores da Escola Politécnica no final de 1794, sequer na relação dos professores das escolas Normais em janeiro de 1795, muito menos seu nome foi incluído entre os 48 cientistas escolhidos pelo governo para compor o núcleo do Instituto; mas desde os primeiros dias, seus colegas se manifestaram e lhe fizeram justiça, incluindo seu nome na lista para assumir uma cadeira de Matemática no Instituto Nacional.

⁹ Disponível em http://fr.wikipedia.org/wiki/academie_des_sciences.

Assim, conforme Beaumont (1864), a exclusão do nome de Legendre do sistema de ensino francês não perdurou por muito tempo, pois ele foi eleito membro residente do recém criado Instituto Nacional de Ciências e de Artes.

Em 13 de dezembro de 1795, ano em que foi criado o Instituto Nacional da França (Figura 4), Legendre se tornou professor da primeira classe, a seção de Ciências Físicas e Matemáticas¹⁰.



Figura 4: Instituto Nacional da França, Paris

Fonte: FOTORESEARCH.COM.BR, 2010

1.2.2.1 ORIGENS DOS SOBRENOMES FRANCESES

De uma forma geral, os sobrenomes começados pelos artigos definidos *la* (a) e *le* (o), a exemplo dos matemáticos Lagrange, Legendre e Laplace, eram originalmente escritos como La Grange, Le Gendre e La Place; sua origem histórica remonta à Idade Média. Até o século X a população francesa era de pequeno porte e as pessoas possuíam apenas um

¹⁰ Disponível em : < http://fr.wikipedia.org/wiki/academie_des_sciences>; Gillespie (1970-1980, vol. VIII, p. 137).

sobrenome como Paul, Pierre ou Jacques. Em meados do século XIII a população francesa aumentou para 10 milhões de habitantes, provocando muitas mudanças políticas, sociais e econômicas. Em consequência, ficou mais difícil identificar as pessoas por apenas um nome, pois existiam várias pessoas chamadas Paul, Pierre e Jacques. O reflexo disso é que, a cada pessoa foi acrescentado um novo sobrenome, além do sobrenome de batismo que corresponde ao nome do santo do dia do nascimento da criança, como Michel, Martin, Agnès, etc. O fenômeno se espalhou por toda a Europa e tais sobrenomes se tornaram hereditários, oriundos espontaneamente da linguagem popular, sem a imposição de uma lei.

Com o processo de alfabetização e a criação do *livret de famille*¹¹ no fim do século XIX, a formação dos sobrenomes foi sendo regularizada e desde então a maior parte é proveniente dos sobrenomes de batismo, da ascendência social, do trabalho ou especialidade, de uma particularidade física ou do caráter, de um país, de uma comunidade, de uma cidade ou nomes de animais que viviam em determinadas regiões. Por exemplo, o sobrenome *Beaumont* é originário de um nome de uma cidade; *Clement*, nome de batismo; *Dalmont*, veio de *mont* (monte); *Henry*, nome de batismo de origem germânica; *Leboeuf* (boi) do sul ou *Leloup* (lobo) da Picardia. Há também aqueles que expressam grau de parentesco, como *Lepère* (pai) ou *Lafille* (filha). Nesse sentido, a etimologia do nome de *Le Gendre* vem de *gendre* (genro), aquele que herdou a casa do sogro. Já a origem do sobrenome *La Grange* vem de *grange* (celeiro) e o de *La Place*, *place* (praça ou lugar). (LECOUVEY, 1999, p. 1-7, nom-famille.com).

O sobrenome Legendre ocupa a 302ª posição entre os sobrenomes mais comuns na França e 15.352 pessoas que nasceram após 1890 possuem esse sobrenome, e 471 moram na cidade de Paris (nom-famille.com).

Esse mergulho na história da formação dos sobrenomes franceses é uma justificativa para as diferentes grafias do sobrenome Legendre que encontramos em documentos oficiais da época, a exemplo do Fac-símile da Ata de eleição de Legendre à Academia Real de Londres em 1788 (Figura 3) e da Figura 5 abaixo, que é uma reprodução de uma carta de Legendre dirigida ao presidente do Instituto Nacional (Figura 4) em 1804.

¹¹ *Livret de famille* é um livro que contém os registros de nascimentos de todos os membros de uma família.

Institut National
 Classe des Sciences Physiques et Mathématiques
 Paris, le an XIV de la République française

Président de la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques
Le Secrétaire perpétuel pour les Sciences
 à Monsieur le président de l'Institut

Monsieur et cher Confrère

Je me réjouis de vous informer que la Classe des Sciences
Physiques et Mathématiques a adopté unanimement le projet d'ériger
édifiée dans l'Assemblée des Bureaux elle a passé en même temps
qu'il suffirait que cet objet fut rapporté à l'Assemblée générale
de l'Institut sans soulever aucune question extraordinaire

Agrée, Monsieur et cher Confrère, l'assurance de la
Considération distinguée avec laquelle j'ai l'honneur de vous saluer

Le Gendre

AUTOGRAPH LETTER OF LEGENDRE

In some of his letters the form "Le Gendre" appears, as in this case. In general
 the name is spelled Legendre

Figura 5: Carta de Legendre ao Instituto Nacional com o autógrafo LeGendre

Fonte: *apud* SMITH, 1958

Mesmo exercendo a função de professor, Legendre continuou a produzir trabalhos científicos. Em 1794, foi publicada a primeira edição de seu livro mais conhecido, *Elementos de Geometria* (Figura 6), que recebeu o prêmio especial no concurso de livros didáticos para o ensino elementar francês.

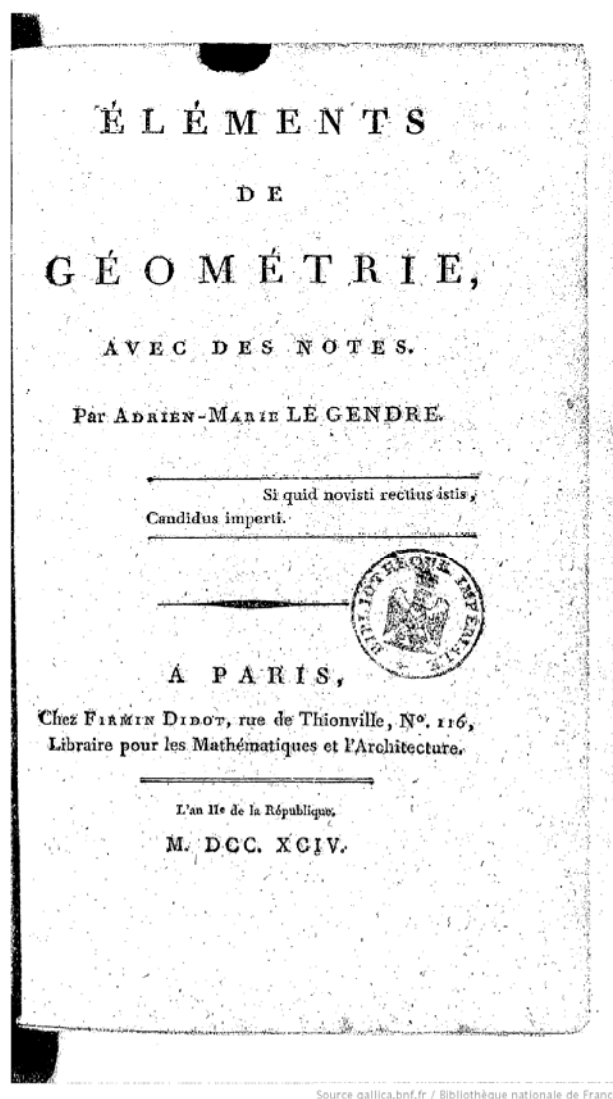


Figura 6: Fac-símile da Capa de Elementos de Geometria, 1794

Fonte: GALLICA.BNF.FR, 2010

O livro, além de ter sido adotado no ensino de geometria nas escolas secundárias da França, também o foi em outros países, uma vez que a obra assumiu muito rapidamente o primeiro lugar entre os livros clássicos de geometria. Em menos de trinta anos, teve mais de quatorze edições, a primeira atingiu um grande número de tiragens e foi traduzido

praticamente em todas as línguas da Europa. Na época, bateu o recorde de mais de cem mil exemplares vendidos, o que assegurou uma fortuna para o seu autor.

O livro foi traduzido para o árabe e “adotado nas escolas do Egito estabelecidas pelo vice-rei Méhémet-Ali” (BEAUMONT, 1864, p. LIX, LX, tradução nossa). Dhombres (1989, p. 628, tradução nossa) ainda ratifica que, “anteriormente ressaltamos na biografia de Legendre o sucesso de seus *Elementos de Geometria*. Sucesso tão extraordinário por causa do rigor euclidiano que trouxe de volta o raciocínio pelo absurdo (método de exaustão por exemplo) e a construção axiomática de resultados geométricos.” Smith (1901) nos revela que, no início do século XX o livro de Legendre, juntamente com os Elementos de Euclides, se tornou uma referência no ensino superior de geometria nos Estados Unidos.

Elementos de Geometria foi um dos primeiros livros de Matemática publicados no Brasil com tradução de Manuel Ferreira de Araújo Guimarães, no início do século XIX.

Contudo, a situação do acervo bibliográfico do livro no Brasil é bastante precária, pois existem apenas seis exemplares (dois deles são edições originais da língua francesa) e, ao todo, se encontram na Biblioteca do IMPA, na Biblioteca da UNB e na Biblioteca da PUC do Paraná.

Quatro anos após a publicação de *Elementos de Geometria*, Legendre publicou a primeira edição de *Ensaio sobre a Teoria dos Números* (1798). Essa obra é resultados de seus *Estudos sobre a Análise Indeterminada* (1785) e trabalhos em Teoria dos Números de outros eminentes matemáticos, como Fermat, Euler e Lagrange.

1.2.3 Legendre e o Primeiro Império Napoleônico (1803-1814)

Samueli e Boudenot (2006) relatam um episódio envolvendo os acadêmicos do então Instituto de Paris e Napoleão, antes de se tornar o imperador da França. Segundo os referidos autores, enquanto durou o período revolucionário, o Instituto de Paris serviu como instrumento para a ascensão política de alguns acadêmicos.

Napoleão Bonaparte, um jovem militar da artilharia, se tornou membro do Instituto Nacional (que inclusive foi reformulado durante o seu Império), no dia 25 de dezembro de 1797, e para atingir o intento, contou com o apoio dos acadêmicos Laplace e Bertholet.

Segundo Gillespie (1970-1980, Vol. XV), a relação entre Laplace e Napoleão era antiga e foi Laplace quem encorajou o jovem Bonaparte a entrar na Escola Militar de Paris em 1785.

Nessa mesma ocasião, Napoleão escreveu uma entusiasmada carta a Oriani, um astrônomo amigo de Laplace, e declarou que: “As ciências estimulam o espírito humano, embelezam a vida e transmitem grandes ações à posteridade e devem ser honradas nos governos livres” (SAMUELI E BOUDENOT, 2006, p. 271, tradução nossa). Tal declaração não deixou indiferentes alguns membros da Academia que pressentiram um belo futuro político no mais recente membro do Instituto, o que realmente aconteceu como veremos aqui.

Ao voltar da campanha da Itália em 1797, para evitar o poderio militar da Alemanha sobre a Índia, Napoleão convenceu o Diretório à ‘civilizar’ e a conquistar militarmente o Egito. O governo, que lhe temia a popularidade, acatou a sua proposta e, em 12 de abril de 1798, deu plenos poderes ao jovem militar para levar à diante o seu intento, que por conta própria decidiu que a expedição também teria o caráter científico, além do militar. Vários acadêmicos foram convidados e aceitaram participar dessa investida militar. Assim, 167 cientistas, dentre eles Fourier, Monge e Bertholet (Legendre não foi convidado), embarcaram para o Egito juntamente com Napoleão em 19 de abril de 1798. Após essa campanha, alguns cientistas exerceram cargos no governo napoleônico, como Fourier, que foi membro da Comissão de Cultura, e Laplace, que, após o golpe de Estado de Napoleão em 9 de novembro de 1799, foi nomeado ministro do Interior, posto que ocupou por apenas seis semanas (SAMUELI E BOUDENOT, 2006).

Dias antes do golpe, em 6 de outubro de 1799 Napoleão Bonaparte presidiu a primeira seção do Instituto Nacional em que Legendre, Monge, Bertholet, Lagrange, Laplace, Delambre, Lalande, Fourier e outros 41 cientistas estiveram presentes, conforme lista de presença reproduzida na Figura 7 a seguir, onde encontramos no número 40, a assinatura de Legendre como Le Gendre.

Ons arrivés à la séance du 6 Germinal an 8 (25. République),
 les Citoyens Membres de l'Institut national se sont
 dénommés

	1 ^{re} Classe.	2 ^e Classe.
<i>Cuvier</i>	21. <i>Lacépède</i>	41. <i>Dugès</i>
<i>Hallé</i>	22. <i>Sauvages</i>	42. <i>Quarante an</i>
<i>Deplanche</i>	23. <i>Parmentier</i>	43. <i>4997</i>
<i>Bouffé</i>	24. <i>Pichard</i>	44. <i>Duval</i>
<i>Corisier</i>	25. <i>L. G. Gauthier</i>	45. <i>Berthollet</i>
<i>Lapin</i>	26. <i>Maisnier</i>	46. <i>Monod</i>
<i>Storck</i>	27. <i>Bouffé</i>	47. <i>Pharacand</i>
<i>Richard</i>	28. <i>Sauvages</i>	48. <i>Pelletan</i>
<i>Montenot</i>	29. <i>Prony</i>	49. <i>Follin</i>
<i>Millevoye</i>	30. <i>Leferre Gineau</i>	50.
<i>Lamarck</i>	31. <i>Lacépède</i>	
<i>Tenon</i>	32. <i>Deshayes</i>	
<i>Pelletan</i>	33. <i>Gauthier</i>	
<i>Delambert</i>	34. <i>Thorin</i>	
<i>Vanquelin</i>	35. <i>Olivier</i>	
<i>Fournier</i>	36. <i>Lagrange</i>	
<i>Portat</i>	37. <i>Taurin</i>	
<i>Wautomb</i>	38. <i>Charlet-1.</i>	
<i>Roche</i>	39. <i>Le Gendre</i>	
<i>Legendre</i>	40. <i>Le Gendre</i>	

Feuille de présence de la première séance présidée par Bonaparte.
 Celui-ci et cinq de ses confrères, étant arrivés après la clôture de la liste,
 avaient perdu leur droit au jeton, qui fut de 4^{tr},99.

G.

12

Figura 7: Fac-símile da Folha de presença da primeira seção do Instituto presidida por
 Napoleão Bonaparte em 1798

Fonte: ONE.FILTRAGE.COM, 2009

Nessa lista, sob o número 40, encontramos novamente a assinatura de Legendre como Le Gendre.

Inspirado pela Revolução francesa de 1789, o Império de Napoleão também centralizou o ensino na engenharia militar. A Escola Politécnica “se tornou um centro educativo de maior prestígio de modo a permitir o avanço e a perfeição da matemática intimamente ligada à prosperidade do Estado. Os matemáticos tinham a incumbência de resolver problemas balísticos e hidráulicos” (SAUTOY, 2005, p. 87, tradução nossa).

O papel do Estado em organizar instituições públicas de ensino perdurou ao longo do século XVIII, isso ajuda a explicar a prosperidade da ciência francesa no momento em que o Primeiro Cônsul se instalou no poder. Com os cientistas a serviço do poder, Paris se tornou o centro que reunia os melhores especialistas da Matemática pura de toda a Europa. Em geral quem possuía uma formação científica, particularmente em Matemática, pertencia ao Instituto Nacional cuja reorganização foi delegada a Fourier por Napoleão em 1803. Seu estatuto continha instruções precisas do governo que foi decisiva para o desenvolvimento do ensino de Matemática. Na reorganização do Instituto, Legendre, que antes ocupava um lugar na seção de Ciências físicas e Matemática, passou a ocupar um lugar na seção de Geometria. Além disso, foi eleito vice-presidente da classe pelo período de 1804-1805 e presidente¹² de 1805 a 1806. A nova função de ensino exercida pelos acadêmicos estimulou a confecção de livros textos, bem como a divulgação no Jornal da Escola Politécnica de conferências, de estudos dos professores e alunos. Assim, as publicações científicas retomaram as atividades de outrora e permaneceram durante todo o Império (DHOMBRES E DHOMBRES, 1989; SAUTOY, 2005).

Nesse período, as atividades de Legendre se resumiram em exercer o duplo papel de autor e *expert* no processo de publicação nas áreas de Matemática, Mecânica, Estatística e Análise. Além de suas atividades como membro da comissão de concursos científicos dessas áreas, podemos também citá-lo como autor de importantes trabalhos. Os *Novos métodos para a determinação das órbitas dos cometas* de 1805, obra ¹³ fundamentada na Estatística e no sistema de equações do primeiro grau, deu origem ao método dos mínimos quadrados (*moindres carrés*). Nela Legendre criou uma régua de cálculos na determinação de pequenas medidas das trajetórias de cometas. Posteriormente, dois suplementos lhe foram acrescentados em 1810 e 1820. O trabalho *Análise dos triângulos traçados sobre a superfície de um*

¹² Conforme Arquivos da Academia de Paris.

¹³ Samueli e Boudenot (2006, p. 257-263) consideraram essa obra como uma das trinta obras mais importantes do meio matemático de todos os tempos.

esferóide foi lido no Instituto Nacional em 1806 e versava sobre triângulos esféricos formados por geodésicas de um elipsóide de revolução, estudo que em 1827 também foi generalizado por Gauss em *Disquisitiones générales circa superficies curvas*. Dando continuidade aos estudos de *Ensaio sobre a Teoria dos Números*, Legendre publicou uma segunda edição em 1808, que contém uma demonstração do Grande Teorema de Fermat sobre a impossibilidade de solução inteira da equação diofantina $x^n + y^n = z^n$ para $n = 5$. Em 1809, dando sequência às pesquisas sobre integrais eulerianas presentes no trabalho *Sobre os transcendentel elípticos* de 1793, ele publicou os *Estudos sobre diversos tipos de integrais definidas*. Em 1810, foram publicados três importantes trabalhos: o primeiro volume de *Exercícios de Cálculo Integral*, que introduziu os fundamentos das propriedades de integrais elípticas, os estudos *Métodos dos mínimos quadrados para encontrar o meio mais provável nos resultados de diferentes observações* e, por último, o estudo *Sobre as atrações dos elipsóides homogêneos*.

Em complemento à vida acadêmica, Legendre exerceu alguns cargos públicos. Em 1808 ele foi nomeado Conselheiro Titular da recém criada Universidade Imperial e se tornou membro do Conselho de Instrução Pública. Também recebeu algumas honrarias como a medalha da Legião de Honra, enquanto que nesse mesmo ano, os acadêmicos Lagrange, Laplace e Monge, foram agraciados pelo Império e se tornaram condes, e Fourier se tornou barão em 1810.

Em 1813 Legendre ocupou o lugar vago, por ocasião da morte de Lagrange, no Bureau de Longitudes, posto em que permaneceu até o fim de sua vida (ARQUIVOS DA ACADEMIA DE CIÊNCIAS DE PARIS, 2009; GILLESPIE, 1970-1980, Vol. VIII).

1.2.4 Legendre e a Restauração (1814-1833)

A Restauração foi o período da história francesa que vai desde a queda do primeiro Império napoleônico, em 6 de abril de 1814, à segunda Revolução de 1830. Nesse período, Napoleão se exilou na Ilha de Elba e esboçou um retorno ao poder em 1815.

Porém, foi vencido na batalha de Waterloo, e o poder retornou à monarquia, o que marcou o início da industrialização da França e a colonização de países a exemplo da Argélia e da Costa do Marfim.

A via do progresso científico aberto no século XVIII não permaneceu na Restauração, pois esse governo pouco se interessou pelo progresso das ciências. Apesar do número de publicações ter sido reduzido, Legendre retornou gradativamente às suas pesquisas. Às obras anteriores do regime imperial, podemos acrescentar o segundo e o terceiro volumes de *Exercícios de cálculo integral*, em que o segundo volume de 1817, continha estudos profundos sobre as funções gama aplicados à mecânica da rotação da terra e o terceiro, de 1819 continha tabelas com valores numéricos de integrais elípticas.

Em 1816 e 1823, Legendre publicou, respectivamente, o primeiro suplemento de *Ensaio sobre a Teoria dos Números* e os *Estudos sobre alguns objetos da Análise Indeterminada, particularmente sobre o Teorema de Fermat*, que constituiu o segundo suplemento do *Ensaio*.

Em 1825, o seu *Tratado das funções elípticas e as integrais eulerianas* lançou as bases para estudos aperfeiçoados duas décadas depois por Jacobi e Abel. Nas palavras de Legendre *apud* Abel (1864, p. VIII, tradução nossa),

Esses trabalhos, de dois jovens cientistas que até então me eram desconhecidos, me proporcionaram tanto admiração quanto satisfação. [...] Percebi que sob diferentes relações cada um deles aperfeiçoou essa teoria da qual me ocupei quase exclusivamente há vários anos e que os matemáticos de meu país olhavam com indiferença.

Essa declaração feita por Legendre ao jornal científico do alemão Crelle, além de revelar que seus trabalhos sobre funções elípticas influenciaram as obras de Abel e Jacobi, também revelou certo ressentimento, por não ter sido considerado pelos seus próprios colegas franceses, como um dos matemáticos precursores sobre o assunto.

Por muitos anos, o postulado das paralelas atraiu a atenção de um grande número de matemáticos e Legendre, no desejo de aperfeiçoar seus *Elementos de Geometria* de 1794, tentou demonstrá-lo em 1829, em suas célebres *Reflexões sobre as diferentes maneiras de demonstrar a teoria das paralelas ou o teorema sobre a soma de três ângulos do triângulo*. Assim, ele afirma que:

Podemos muito bem demonstrar que duas retas são paralelas quando pertencem a um mesmo plano e fazem juntamente com uma terceira dois ângulos internos, cuja soma é igual a dois ângulos retos. Resta provar que em qualquer outra posição dessas duas retas em relação à terceira, elas devem se encontrar e não serão mais paralelas e é esse o ponto da nossa dificuldade. (LEGENDRE, 1833, p. 367-8, tradução nossa.)

Esse trabalho que estabelece uma relação entre o quinto postulado e a igualdade da soma dos ângulos internos de triângulos a um ângulo reto, foi publicado pelo Instituto Nacional em 1833.

Três anos antes, Legendre publicou o seu penúltimo trabalho em Teoria dos Números, a terceira edição de *Ensaio sobre a Teoria dos Números*, com um novo título, *Teoria dos Números*, obra composta de dois grandes volumes contendo seis partes e dois apêndices. Essa obra foi reeditada na Alemanha em 1885, na França em 1900 e em 1955 e será analisada no próximo capítulo do presente trabalho.

Em 1816, juntamente com Poisson, foi nomeado examinador de candidatos à Escola Politécnica.

Em 1824, sua pensão do Instituto Nacional foi cancelada por sua recusa em apoiar um candidato do governo à direção dessa instituição, fato que é registrado unicamente por Colette (1979, p. 152).

Mesmo com a saúde frágil, Legendre ainda participou de duas comissões internas da Academia de Paris: uma, para a escolha de candidatos para o lugar vago de secretário perpétuo, devido ao falecimento de Fourier em 1830; outra, como júri de obras concorrentes a um prêmio da área de Geometria, conforme as edições do jornal *Le Globe* de 28 de maio e 25 de junho desse mesmo ano.

Em março de 1832, a apenas alguns meses de sua morte, ele publicou um terceiro e último suplemento de *Tratado das funções elípticas e as integrais eulerianas*, que continha três trabalhos de Abel e Jacobi.

A longa carreira de Legendre, que foi totalmente dedicada às ciências, pelas quais trabalhou com paixão e regularidade por mais da metade de sua vida, foi interrompida, estando ele com 81 anos e quatro meses. De uma dolorosa doença, Legendre faleceu em Auteil, Paris, no dia 10 de janeiro de 1833, sem deixar herdeiros. Na *Biographie Universelle* (PARISOT E MICHAUD, 1843, p. 615), em Samuelli e Boudenot (2006, p. 260) e Gillespie (197-1980, Vol. VIII, p. 135, 138), o dia de sua morte foi dado como 9 de janeiro.

Segundo Gillespie (1970-1980, Vol. VIII), três de seus últimos trabalhos, a saber, *Nota sobre as novas propriedades das funções elípticas descobertas pelo Sr. Jacobi* (Astronomische Nachrichtien, 1828), *Sobre a determinação das funções Y e Z que satisfazem*

à equação $4(x^n - 1) = (x - 1)(Y^2 \pm nZ^2)$, onde n é um número primo $4i \pm 1$ (Academia de Ciências de Paris, 1832) e *Reflexões sobre as diferentes maneiras de demonstrar a teoria das paralelas ou o teorema sobre a soma de três ângulos do triângulo* (Academia de Ciências de Paris, 1833) somente foram publicados devido aos esforços de sua esposa (falecida em 1856), que, pessoalmente, se encarregou dos trâmites para efetivar a publicação desses trabalhos.

1.3 RELAÇÕES DE LEGENDRE COM MATEMÁTICOS CONTEMPORÂNEOS

Legendre, embora muito tímido, manteve relações afetivas com matemáticos do seu tempo e dentre essas relações, encontra-se uma benevolência aos jovens matemáticos, e alguns até foram seus protegidos, a exemplo de Sophie Germain e Jacobi. Algumas relações foram conflitantes, com episódios envolvendo Laplace e Gauss, sobre apropriação de trabalhos em Mecânica Celeste e Teoria dos Números. No caso de Gauss, tais querelas perduram por muito tempo, como percebemos não somente em suas cartas a Jacobi, como também, nos prefácios de suas obras.

No entanto, de certa maneira, Legendre também teve participação no episódio sobre a omissão do reconhecimento dos trabalhos de Galois, os quais somente foram reconhecidos pelo meio acadêmico anos depois de sua morte.

1.3.1 Legendre e Fourier

No Antigo Regime, organização social que prevaleceu na França do século XV ao século XVIII, a população se encontrava dividida em três ordens hierárquicas e desiguais, a saber: o clero, a nobreza e o terceiro estado. Essa última classe era muito heterogênea e era constituída por uma população que vivia mais no campo do que na cidade, enquanto que a nobreza formava um corpo sem unidade, composta por reacionários e liberais, grandes senhores e barões. Tal situação fez emergir uma nova classe denominada burguesia, oriunda da população do terceiro estado que procurava imitar a vida dos nobres. Por outro lado, nas cidades, a burguesia submetia o proletariado à sua mercê.

Foi nesse ambiente de grandes diferenças sociais, que o filho de um alfaiate, o físico-matemático Joseph Fourier foi vítima de preconceitos pela sua origem humilde. Fourier nasceu em 1768 em Auxerre. Órfão, iniciou seus estudos na Escola Militar dirigida pelos monges beneditinos em sua cidade natal. Seu talento para a Matemática aflorou logo cedo, pois aos quatorze anos já tinha assimilado toda a álgebra e a geometria de Clairaut e os seis volumes do curso de Matemática de Bézout. Um pouco antes da Revolução Francesa, Fourier demonstrou um forte desejo de ingressar na Escola Militar de Saint Maur, perto de Paris, uma das escolas mais importantes da engenharia e artilharia militar da época. Sendo inspetor dessa escola, Legendre juntamente com um de seus colegas interveio a seu favor. Mas o desfecho não foi feliz para Fourier, pois seu sonho foi frustrado por um decreto do Ministro da Guerra, como nos revela Dhombres e Dhombres (1989, p. 134, tradução nossa):

Apesar das recomendações de seus inspetores, Reynaud e o acadêmico Legendre, em seu maior desejo de entrar na artilharia e engenharia, Fourier se decepçiona com a recusa categórica do Ministro da Guerra que alegou: *“embora seja um brilhante candidato (mesmo um segundo Newton), ele não pertence à nobreza”*.

Apesar de tão duro golpe, Fourier não esmoreceu diante dessa primeira dificuldade e conseguiu vencer as barreiras sociais do episódio ocorrido em sua juventude, quando no final de 1789, um triunfante Fourier leu na Academia de Paris um brilhante trabalho sobre equações numéricas com aplicações ao cálculo do movimento dos astros. Tempos depois, ele foi considerado como um dos grandes físicos teóricos, após da publicação da sua obra *Teoria analítica do calor* em 1822. Em Matemática são conhecidas as integrais e as séries de funções trigonométricas que levam seu nome. Politicamente se destacou nos poderes vigentes. Foi prefeito de Isère, no sudeste da França e, por ser um ardente revolucionário, caiu nas graças de Napoleão que lhe deu a oportunidade de elaborar a lista dos cientistas que participaram da expedição de Napoleão ao Egito. Mais tarde, Napoleão lhe deu amplos poderes para organizar o ensino de Matemática no Instituto Nacional. Com a saúde debilitada devido a problemas cardíacos, faleceu de uma queda de uma escada em Paris em 1830, três anos antes do falecimento de seu amigo Legendre (REBIÈRE, 1899, p. 124-126).

1.3.2 Legendre e Poisson

Siméon Denis Poisson nasceu em 1781 e pertenceu à geração de matemáticos, físicos e engenheiros que foram alunos da Escola Politécnica, como Cauchy, Sophie Germain, e também Fresnel, Gay-Lussac e Arago. Em 1798 ele ingressou nessa instituição e chamou a atenção de seus professores pelas suas habilidades para as ciências que o deixaram livre para seguir os cursos que ele desejasse. Dois anos depois, ele submeteu dois trabalhos ao Instituto de Paris: um sobre o método de eliminação de Bézout, outro sobre o número de integrais de uma equação de diferenças finitas. Esse último trabalho foi analisado por Lacroix e Legendre que foram favoráveis à sua publicação na seção *Recueil des savants étrangers*, que o inseriu de imediato no círculo acadêmico, feito extraordinário para um jovem de apenas dezoito anos. Tal sucesso também lhe rendeu algumas importantes amizades: com Lagrange, que o elogiou após a leitura na Academia de um *mémoire* sobre a teoria de funções, e com Laplace, que o considerava como um filho de quem Poisson se tornou discípulo. Inclusive os trabalhos *Teoria da atração capilar* e *Estabilidade do sistema solar* de Laplace foram fontes inspiradoras para alguns dos trabalhos de Poisson sobre o mesmo tema.

Poisson esperou um longo tempo para ingressar na Academia para ocupar a vaga por ocasião da morte de Lagrange em 1813, o que somente ocorreu em 1816. Seus trabalhos em Física versavam sobre eletricidade e magnetismo e seus estudos em astronomia sobre a atração dos planetas geraram o trabalho *Sobre a atração dos esferóides* (1829). Em Matemática, seus trabalhos mais importantes são sobre integrais definidas e integrais e séries de Fourier. Foram publicados, de 1813 a 1823, no Jornal da Escola Politécnica e, em 1823, pela Academia. Foram fundamentais para os trabalhos de Lejeune-Dirichlet e Riemann.

Em janeiro de 1833 Poisson foi o autor do *Discurso pronunciado nos funerais de Legendre* (1833).

1.3.3 Legendre e Sophie Germain

Encontramos em Dhombres e Dhombres (1989) e em Stein (2006) um interessante episódio sobre a exclusão das mulheres na comunidade científica no início do século XIX, envolvendo diretamente a jovem matemática Sophie Germain.

Sophie Germain nasceu em Paris em 1776 e era filha de um eminente banqueiro. Ainda muito jovem, começou a estudar textos de Plutarco, de Arquimedes e textos em latim de Newton, Euler e Gauss, que a impulsionaram a realizar estudos autodidatas em Geometria, Álgebra, Física e Astronomia. Entre os seus livros prediletos estava *História da Matemática* de Montucla. No início do século XIX ela conheceu os livros *Teoria de Números* de Legendre e *Disquisitiones* de Gauss.

Não recebendo uma instrução formal, aos dezoito anos, se interessou em ser aluna de Lagrange no curso de Cálculo de funções na recém criada Escola Central de Trabalhos Públicos, a predecessora da Escola Politécnica.

Como na época era vedado às mulheres ingressarem nessas escolas, Sophie Germain inventou a estratégia de se matricular utilizando o pseudônimo de Monsieur Leblanc. Assim, Leblanc começou a se corresponder com Lagrange na França e com Gauss na Alemanha. Em virtude das interessantes observações de Leblanc sobre seus trabalhos, Lagrange se interessou em conhecer o autor das cartas e, não podendo mais esconder a sua identidade, o personagem inventado desapareceu e Sophie Germain teve o privilégio de ter o ilustre mestre como mentor (DHOMBRES E DHOMBRES, 1989).

Stein (2006) aponta que, Legendre foi um dos primeiros a trocar correspondências com Sophie Germain, o que resultaram numa grande amizade entre os dois. Alguns fatores corroboraram com a forte relação de confiança mútua entre eles, o que chegou ao extremo de Legendre beneficiar Sophie Germain com informações sigilosas sobre seus trabalhos sobre superfícies elásticas submetidos à apreciação da Academia de Paris. Impulsionada por Legendre, Sophie inscreveu três trabalhos consecutivos sobre curvatura de superfícies nos concursos de 1811, 1813 e 1815. Em uma carta de 4 de dezembro de 1811, Legendre a preveniu que o trabalho não seria premiado, pois, embora ele fosse original, o texto deixava um pouco a desejar por falta de rigor. Inclusive, Lagrange realizou algumas correções nesse trabalho. Como membro da comissão examinadora juntamente com Lacroix, Laplace, Lagrange e Malus, encarregada de julgar os trabalhos do concurso, Legendre lhe escreveu uma carta sigilosa onde declarou que: “Reconhecemos que a sua equação realmente é da superfície vibrante. Deixando a análise de lado, o restante é bom no que diz respeito à explicação dos fenômenos. Se a comissão do Instituto tiver a mesma opinião, a senhorita

merecerá uma menção honrosa” (LEGENDRE *apud* STEIN, 2006, p. 3; ou DHOMBRES E DHOMBRES, 1989, p. 218, tradução nossa).

Porém, Sophie Germain perdeu esse primeiro concurso e Legendre a informou, extra oficialmente, que haveria outro, numa carta de 4 dezembro de 1813, sobre o qual lhe solicitou que guardasse segredo. Novamente, ela perdeu o segundo concurso, mas Legendre ainda tentou convencer o júri a lhe dar uma menção honrosa (STEIN, 2006).

Anos mais tarde, Sophie contribuiu com alguns resultados sobre números primos especiais, que levam seu nome, em um dos suplementos de Legendre de *Ensaio sobre a Teoria dos números*.

1.3.4 Legendre e Jacobi

As correspondências trocadas entre cientistas muito contribuíram para a difusão das ciências, principalmente nos séculos XVII e XVIII. No que concerne à Matemática, as cartas de Fermat a Mersenne, de Euler a Goldbach, Laplace a Lagrange, Euler a Condorcet e de Sophie Germain a Lagrange, entre outras, revelaram como descobertas científicas e novas teorias foram divulgadas antes mesmo de serem publicadas no meio científico. Mas no caso das cartas trocadas entre Sophie Germain e Legendre, entre Legendre e Jacobi, e entre Legendre e Abel, além do conteúdo de ordem científica, por conterem relações afetivas entre eles, foram muito fundamentais para traçar um perfil da personalidade de Legendre, conforme páginas 56 a 61 do presente trabalho.

Jacobi nasceu em 10 de dezembro de 1804 em Königsberg na Prússia, Alemanha do norte e iniciou suas pesquisas sobre a teoria de funções elípticas ao mesmo tempo em que Abel, sem que um conhecesse o outro. A iniciativa das correspondências a Legendre partiu de Jacobi, conforme a primeira carta de 5 de agosto de 1827 onde Jacobi reverentemente comunicou suas descobertas sobre funções elípticas, que foram inspiradas nos trabalhos de Legendre. Assim, disse Jacobi a Legendre:

Um jovem geômetra vos ousa apresentar algumas descobertas sobre funções elípticas, às quais foram induzidas pelo estudo assíduo de seus belos escritos. Foi graças ao senhor, que essa brilhante parte da análise obteve o devido aperfeiçoamento e até então seguindo os vestígios de tão grande mestre, que matemáticos conseguiram ultrapassar os limites dessa teoria. Portanto ofereço ao senhor esse tributo de admiração e de reconhecimento. Agora vou expor os

principais resultados que obtive até o momento... (JACOBI, 1998, p. 390, tradução nossa.)

Em seguida, o texto da carta é de cunho técnico e contém os novos resultados de Jacobi sobre multiplicação de funções elípticas apresentados no volume I da obra *Exercícios de Cálculo Integral* de Legendre.

Em uma outra carta de 18 de janeiro de 1828, Jacobi agradeceu o posto de professor titular na Universidade de Königsberg obtido por influência de Legendre.¹⁴ Várias cartas foram trocadas entre Legendre e Jacobi no período de 1827 a 1832, seis meses antes da morte de Legendre. Seus conteúdos foram muito além das mútuas pesquisas de ambos os cientistas e expressavam uma estreita relação entre eles, cheias de confidências íntimas.

1.3.5 Legendre e Galois

Evariste Galois nasceu em Paris, em 26 de outubro de 1811 e sua breve vida foi marcada tanto pelos conflitos e agitação política quanto pela originalidade e a elegância de suas descobertas no domínio da Matemática. O trabalho de Galois mais conhecido é o tratado *Sobre as condições de resolubilidade de equações por radicais* (1831) que diz que “para que uma equação irredutível cujo grau é um número primo seja solúvel por radical, é necessário e suficiente que sejam conhecidas duas de suas raízes, as demais são deduzidas racionalmente”, conforme Liouville (1846, p. 417, tradução nossa).

As condições de resolução de equações por radicais foram estudadas por Galois desde a idade de 16 anos, quando foi orientado e encorajado por seu professor Richard do Colégio Luiz, o Grande.

Pelo seu caráter impulsivo, se envolveu em algumas circunstâncias que o impediram de ingressar em instituições onde acreditava que poderia desenvolver suas habilidades matemáticas e, ao mesmo tempo, obter o reconhecimento de sua genialidade tão precoce.

Ao realizar um teste para ingressar na Escola Politécnica, foi julgado inapto por ter discutido com um examinador, que, de inteligência inferior à sua, não compreendeu a originalidade de suas respostas (LIOUVILLE, 1846).

¹⁴Vide Jacobi (1998, p 433).

Segundo Taton (1947), Galois apresentou sucessivamente à Academia de Ciências de Paris alguns resultados de seus estudos e se sentiu magoado pela reação negativa dos acadêmicos, que rejeitaram seus trabalhos, sem mesmo tentar compreendê-los. Em 1829 ele submeteu à apreciação da Academia dois trabalhos: *Estudos algébricos* e *Estudos de resoluções algébricas de equações* (GALOIS *apud* LIOUVILLE, 1846), que continham dentre outros assuntos, suas pesquisas sobre teoria de permutações e de equações algébricas, frutos de seus artigos publicados no jornal *Anais* de Gergonne e no *Boletim das Ciências* de Férussac. Dois outros trabalhos foram apresentados para concorrerem ao prêmio da Academia em 1830. Infelizmente ficaram entre os papéis perdidos de Fourier, um dos membros do júri, que falecera nessa mesma ocasião. Outro trabalho, *Sobre as condições de resolução de equações por radicais* (GALOIS *apud* LIOUVILLE, 1846) foi submetido em janeiro de 1831. Em julho desse mesmo ano, o trabalho foi analisado por Poisson e Lacroix. Não compreendendo a condição necessária de um trabalho de apenas uma dezena de páginas e por entenderem que a condição era apenas suficiente anteriormente demonstrada por Abel, os relatores deram parecer negativo ao trabalho de Galois. Após infrutíferas tentativas junto à Academia, Galois se negou a enviar novos trabalhos a essa instituição e, numa última tentativa, se dirigiu a alguns dos mais importantes cientistas da época, os quais julgou capazes de compreender os detalhes, ou pelo menos notar a importância de seus estudos. As páginas iniciais de sua *Dissertação sobre a classificação de problemas matemáticos e sobre a natureza das quantidades e das funções transcendentais* contêm duas listas de cientistas, dentre eles Cauchy, Gauss, Jacobi e Legendre, aos quais enviou cópias de seus trabalhos para apreciação desses ilustres cientistas. Mas nenhum deles se pronunciou a esse respeito (TATON, 1947).

Galois faleceu aos 20 anos e sete meses, vítima de um duelo, em condições mal explicadas. Encontrado horas depois com ferimentos no abdômen, foi transportado para um hospital onde antes de morrer nos braços de seu irmão, disse: “Não chores, eu preciso de toda a minha coragem para morrer aos vinte anos” (GALOIS *apud* TATON, 1947, p. 130, tradução nossa).

Esse é o registro de um triste episódio envolvendo Legendre que estava na lista dos cientistas que poderiam ter feito justiça aos trabalhos de Galois, que somente mais tarde, após sua morte, foi reconhecido como um dos matemáticos excepcionais do século XIX.

As únicas sessenta páginas dos fragmentos de seus trabalhos manuscritos, reescritos na prisão em 1831, foram descobertos por Liouville que os publicou em 1846 em seu *Jornal de Matemática Pura e Aplicada*. Foi preciso esperar mais de 30 anos pelo trabalho *Tratado das substituições* (1870) de Camille Jordan para que as ideias férteis de Galois fossem ampliadas.

1.3.6 Conflitos sobre prioridades de descobertas científicas

Os conflitos de prioridades eram habituais no meio acadêmico dos séculos XVI ao XIX. Isto, de certa forma, contribuía para uma viva concorrência no meio científico.

Contudo, a quem deveria ser dada a primazia de uma descoberta científica? A quem a estudasse primeiro ou a quem a publicasse primeiro? Alguns episódios podem ser citados em relação à primazia de descobertas no meio científico. Por volta de 1800, dois jovens franceses, Arago e Biot, que, enquanto eram amigos, realizavam publicações conjuntas em domínios diversos das ciências até se tornarem grandes rivais por trabalhos do ramo da Física, a tal ponto que Biot deixou de ir à Academia por muitos anos. Em 1830, alguns conflitos entre Cuvier e Geoffroy Saint-Hilaire ocorreram sobre prioridades de estudos sobre evolução da História Natural. No final do século XVIII, questões de primazias nos estudos em Mecânica Celeste entre Legendre e Laplace e entre Legendre e Gauss em Teoria dos Números geraram querelas duraram muitos anos e, de certa forma, exerceram uma grande influência na produção científica desses matemáticos, conforme Dhombres e Dhombres (1989) e Maigre (2008).

1.3.6.1 Entre Legendre e Laplace

Pierre-Simon Laplace nasceu em 1749 em Beaumont-en-Auge. Filho de agricultores, foi professor de Matemática por vários anos em sua cidade natal. Num ato ousado para um jovem de 19 anos, se apresentou a d'Alembert através de uma carta onde teceu considerações mais elevadas de princípios gerais da Mecânica, passo decisivo para uma recomendação como professor de Matemática na Escola Militar e uma solicitação a Lagrange para ser membro da Academia de Berlim em 01 de janeiro de 1773. Esse último episódio foi

esquecido e três meses depois Laplace se tornou membro da Academia de Paris em 31 de março desse mesmo ano, cinco anos após sua chegada. Sua reputação cresceu rapidamente entre os matemáticos dos ramos da Análise e da Geometria transcendente (GILLESPIE, 1970-1980, vol. XV, JULLIAN; LESBROUSSART; LENNEP, 1827).

Laplace é considerado como um dos matemáticos mais respeitáveis da França, pela sua grande contribuição com importantes trabalhos em vários ramos das ciências. No conjunto de suas pesquisas se destaca os Estudos sobre a Análise Indeterminada estabilidade de grandes fenômenos, como fizeram Arquimedes e Galileu, assim, como doutrinas matemáticas de princípios originais e de grande extensão, como fizeram Descartes, Newton e Leibniz. A esse conjunto pertencem *Estudos sobre o Cálculo Integral às diferenças infinitamente pequenas e às diferenças finitas* (1771), *Teoria do movimento e da figura elíptica dos planetas* (1784), os cinco volumes do *Tratado de Mecânica Celeste*: Vol. I e II (1799), Vol. III (1802), Vol. IV (1805), Vol. V (1823-1825), *Exposição sobre o sistema do mundo* (1796), *Teoria Analítica das Probabilidades* (1812), *Ensaio filosófico sobre as probabilidades* (1814), *Resumo da História e da Astronomia* (1821) (GILLESPIE, 1970-1980, vol. XV; LABOULAIS, 2008).

Seus conhecimentos em vários domínios das ciências lhes foram úteis para que participasse de comissões científicas, inclusive da comissão de unificação de pesos e medidas, em que o nome metro foi sugerido por ele, bem como das mais importantes instituições científicas francesas: a Academia de Ciências, o Instituto Nacional, passando pela Escola Normal e pelo *Bureau* de Longitudes (LABOULAIS, 2008).

As referências sobre Laplace apontam que, por diversas ocasiões, ele teve uma conduta não muito ética por apropriação de resultados de outros estudiosos não muito conhecidos, assim, como por cometer indelicadezas aos colegas.

Relataremos aqui alguns episódios que foram registrados pelos historiadores.

Laplace fez alguns inimigos e mesmo d'Alembert não o apoiava mais. Numa certa ocasião, Laplace se envolveu numa discussão com Jacques Brissot sobre os trabalhos de ótica de Marat que negavam uma teoria de Newton. Na ocasião, Brissot, que havia se tornado seu inimigo, teceu severas críticas ao pré-julgamento acadêmico de Laplace em seu *Tratado sobre a verdade*, quando declarou: “Não suporto a idéia de Laplace tratar com insolência e

despotismo um físico que contrariamente a ele não gozava dos privilégios de se ‘sentar nas cadeiras’ da Academia” (DHOMBRES E DHOMBRES, 1989, p. 160, tradução nossa).

Ball (2003, p. 108, tradução nossa) declara que Laplace se apropriava dos trabalhos de jovens colegas, “a exemplo dos três que mais tarde se tornaram brilhantes cientistas, Legendre e Fourier na França e Young na Inglaterra”.

As querelas de primazias de descobertas entre Laplace e Legendre se deram propriamente em 1784, quando da publicação do trabalho *Sobre a determinação das órbitas dos cometas* de Laplace, que são Estudos sobre a Análise Indeterminadautilização do potencial para determinar com precisão a atração de um esferóide por um ponto exterior. Mais tarde, sem se referir ao autor, Laplace inseriu no terceiro volume da sua famosa obra, *Mecânica Celeste*, alguns estudos do Legendre, frutos do trabalho *Atração dos esferóides homogêneos* que fora lido na seção de 22 de janeiro de 1783, da Academia, do qual Laplace tinha sido o relator (BEAUMONT, 1864, p. XLIII-XLIV).

A esse respeito, apontam Dhombres e Dhombres (1989, p. 160, tradução nossa) que:

Legendre, ainda não acadêmico e três anos mais jovem do que Laplace, havia desenvolvido com um ano de antecedência, o trabalho *Atração dos esferóides homogêneos*, que submeteu à apreciação da Academia em 15 de março de 1783 cujo relator foi Laplace, o que lhe forneceu a ideia de escrever o seu próprio trabalho. [...] Apenas em seu livro *Teoria do movimento e da figura elíptica dos planetas*, publicado em Paris um ano depois, foi que Laplace fez pela primeira vez referências ao trabalho anterior de Legendre, até então não editado. Sobre tal procedimento inadmissível, Legendre apenas se contentou em tecer o seguinte comentário: “Ressalto que a data do meu trabalho é anterior”.

Ball, (2003, p. 100, tradução nossa) ainda acrescenta que:

É necessário observar que os coeficientes¹⁵ são semelhantes, mas apenas para o espaço de duas dimensões, já assinalados por Legendre com algumas propriedades, de um trabalho enviado à Academia de Ciências de Paris em 1783. Legendre teve seus motivos ao se queixar de Laplace por não tê-lo citado nesse seu novo trabalho.

Na certa, diz Ball (2003, p. 101, tradução nossa), “Legendre se omitiu por estar aguardando o momento de ingressar na Academia”, o que de fato ocorreu poucos meses depois. Segundo os arquivos da Academia de Paris, Legendre ingressou como membro adjunto em substituição ao lugar vago ocupado pelo próprio Laplace, quando esse se tornou associado da

¹⁵ Nota nossa: Os coeficientes da equação que determina a trajetória do esferóide.

seção de Mecânica em 30 de março de 1783.

Numa outra ocasião, Legendre se queixou da apropriação de Laplace de seus estudos sobre formas geométricas de planetas de massa fluída que realizam movimento de rotação em torno de seus próprios eixos. A esse respeito, Legendre se manifestou publicamente nas páginas de sua obra *Sequenciados Estudos sobre a Análise Indeterminada* figura dos planetas, que foi lida na Academia em 1789 e publicada posteriormente em 1793:

Encontraremos na introdução de um trabalho do Sr. Laplace, pesquisas que são análogas às minhas. Observo que a data do depósito do meu trabalho foi no dia 28 de agosto de 1790, e a do trabalho do Sr. Laplace foi bem posterior. (LEGENDRE *apud* DHOMBRES E DHOMBRES, 1989, p. 161, tradução nossa.)

Os registros de variados episódios envolvendo Laplace mostraram que Legendre tinha razão em se queixar da conduta de seu colega pela apropriação de descobertas científicas.

1.3.6.2 Entre Legendre e Gauss

Legendre era 25 anos mais velho do que Gauss, e como ele, também enveredou suas pesquisas para a Teoria dos Números. O início das questões de prioridade de descobertas entre os dois se deu no fim do século XVIII, gerada pela controvérsia de quem criara uma importante relação entre números primos e logaritmos.

Em 1795, Gauss, com apenas 18 anos, descobriu uma lei para determinar aproximadamente a quantidade de números primos entre 1 e N, que associada ao logaritmo neperiano, era expressa por $\frac{N}{\log(N)}$. Essa conjectura, atualmente conhecida como Teorema

dos Números Primos, seria demonstrada um século depois por Hadamard e La Vallée-Poussin em 1896.

Em 1785, Legendre, em seu primeiro trabalho sobre Teoria dos Números, *Estudos sobre Análise Indeterminada*, introduziu uma demonstração da sua célebre lei de reciprocidade. No entanto ele utilizou na demonstração, uma propriedade sobre a quantidade de números primos numa progressão aritmética, cujo primeiro termo e a razão são primos entre si (conhecida por progressão de Bachet). Na época, Legendre não apresentou nenhuma fórmula para expressar essa relação.

Três anos após a fórmula do então estudante Gauss, Legendre apresentou na primeira edição do *Ensaio*, de 1798, uma aproximação de $\frac{N}{\log(N)}$ para ¹⁶ $\frac{N}{\log N - 1,08366}$, onde $\log$ de N é hiperbólico. Mesmo assim, Legendre afirma que foi o primeiro quem estabeleceu uma relação sobre a quantidade de números primos na progressão de Bachet. Esse episódio deu origem a vários outros litígios entre os dois matemáticos, que segundo Maigre (2007, p. 19-26), proporcionaram discussões acirradas sobre a prioridade de descobertas, que não se restringiram apenas à área de Teoria dos Números.

Ambos discutiram a primazia da descoberta da lei de reciprocidade quadrática ou lei de Legendre, que explicita uma relação entre dois números primos ímpares. A demonstração de Legendre foi duramente criticada por Gauss como incompleta, devido à falta de rigor, muito embora Gauss a tenha elegido como a *jóia da aritmética* na obra *Disquisitiones* (1801). Nessa obra, Gauss apresenta seis demonstrações diferentes e mais completas do que a demonstração de Legendre de 1785.

Utilizando a simbologia de Legendre, a lei de reciprocidade pode ser anunciada assim:

Quaisquer que sejam os números primos m e n , que não são da forma $4x + 3$, sempre teremos $\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)$, e se forem da forma $4x + 3$, teremos $\left(\frac{n}{m}\right) = -\left(\frac{m}{n}\right)$. Esses dois casos gerais estão inclusos na fórmula $\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)$. (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p. 230, tradução nossa.)

Veremos no Capítulo 2 do presente trabalho, que essa é a segunda versão da lei de Legendre, que a demonstrou de três formas diferentes na terceira edição do *Ensaio* (1830).

Em 1805, Legendre publicou a obra *Novos métodos para a determinação das órbitas dos cometas*, eleita por Samueli e Boudenot em 2006 como um dos trintas livros de Matemática mais importantes ao longo de 25 séculos, onde, pela primeira vez, apareceu a teoria dos mínimos quadrados (*moindes carrés*) que é o fundamento da Análise Estatística.

¹⁶ A demonstração dessa proposição se encontra no parágrafo IX da quarta parte das edições do *Ensaio* de 1808 e 1830.

Em seu tratado *Theoria motus corporum coelestium* publicado em 1809, Gauss declarou que fora o primeiro a usar o método em uma de suas obras em 1795, mas Legendre foi o primeiro a publicá-lo.

Os litígios entre Gauss e Legendre sobre prioridade de descobertas e prioridade de publicação, duraram muitos anos, e não se restringiram ao âmbito da Matemática. Sautoy (2005) aponta um outro episódio envolvendo Legendre, Gauss e Astronomia, no que se refere ao desaparecimento do asteroide Ceres em 1801. No dia 1º de fevereiro desse ano, o asteroide Ceres foi descoberto pelo astrônomo Giuseppe Piazzi num observatório de Palermo e identificado como um pequeno planeta que girava em torno do Sol entre as órbitas de Marte e de Júpiter. Semanas depois, ele desapareceu do céu noturno, e os astrônomos da época não possuíam instrumentos para determinar o trajeto atualizado de Ceres, a partir de sua trajetória inicial.

Criou-se, então, um mistério em torno do problema, que somente foi desvendado um ano mais tarde, por Gauss, que aos 24 anos de idade anunciou que sabia determinar a trajetória do objeto celeste desaparecido. Usando a lógica e as ínfimas informações das anotações dos astrônomos, em poucas semanas, Gauss identificou o brilho de Ceres e enviou os resultados a uma revista científica. De posse dessa informação, os astrônomos localizaram o asteroide e Gauss adquiriu uma grande reputação e respeitabilidade entre os astrônomos – respeitabilidade que já era notória na comunidade matemática. A descoberta da trajetória do asteroide o incentivou a prosseguir estudos nessa área. Por um longo período, especificamente de 1801 a 1816, Gauss publicou trabalhos sobre Mecânica Celeste e muitos de seus colegas matemáticos o criticaram por sua dedicação excessiva à Astronomia em detrimento da Matemática.

Mas qual foi a participação de Legendre nesse episódio? É Sautoy (2005) que nos revela que, em 1801, Legendre reivindicou ser ele o primeiro a identificar o método de Gauss que permitiu descobrir a trajetória do asteroide Ceres. Na época, Gauss não se pronunciou a esse respeito, mas, anos depois, em uma carta de 30 de junho de 1806, ele declarou ao astrônomo Schumacher: “Aparentemente estou condenado pelo destino a me opor a Legendre em quase todos os meus trabalhos teóricos” (GAUSS, citado por SAUTOY, 2005, p. 89, tradução nossa).

Regularmente, Legendre afirmava ter sido despojado por Gauss de alguma descoberta matemática, para ser contradito por Gauss que anunciava ter encontrado o tesouro primeiro. A verdade somente apareceu em 1849, quando a análise dos escritos póstumos de Gauss revelou ser do matemático alemão o mérito não apenas dessa, mas também de outras descobertas (SAUTOY, 2005).

1.4 ALGUNS FATORES SOBRE O CARÁTER DE LEGENDRE

Identificaremos aqui, alguns traços da personalidade de Legendre, que se encontram registrados nos textos de suas obras, nas cartas trocadas com seus pares e nas homenagens póstumas.

1.4.1 Sua modéstia

O caráter modesto de Legendre é de imediato percebido no prefácio da primeira edição de *Ensaio sobre a Teoria dos Números* de 1798:

Depois da publicação desse trabalho, me ocupei por diversas vezes em desenvolver as ideias que ele contém, e trazer alguns aperfeiçoamentos aos diferentes pontos da Teoria dos Números ou da Análise Indeterminada. Minhas pesquisas sob esse olhar obtiveram algum sucesso. Agora me propus publicar um resultado num trabalho particular. [...] É por isso que me propus a compor a obra que ofereço nesse momento ao público. Eu não a ofereço como um tratado completo, mas simplesmente como um ensaio que proporcionará um panorama do atual estado da ciência, e que talvez possa contribuir, e quem sabe acelerar o seu progresso... (Legendre, 1798, p. ix-x, tradução nossa.)

Embora os seus *Estudos sobre a Análise Indeterminada* (1785) tenha sido aos seus olhos um trabalho bem sucedido, percebemos nesse trecho do prefácio da primeira edição do *Ensaio* (1798), que a referida obra, a qual é apresentada modestamente por Legendre como um ensaio, foi uma alavanca fundamental para a expansão do campo de estudos em Teoria dos Números.

1.4.2 Sua severidade

Embora manifestasse atos generosos e afetuosos nas relações com Abel, Jacobi e Sophie Germain, Legendre era conhecido pela severidade e pelo rigor na análise dos trabalhos científicos de seus contemporâneos (DHOMBRES, 2002, p. 18).

À medida que ia avançando na idade, seus comentários sobre Gauss se tornaram implacáveis e até irônicos, principalmente, no que se referiam à prioridade de descobertas. Isso pode ser percebido em duas cartas de Legendre a Jacobi, sobre a prioridade de descobertas de Jacobi sobre funções elípticas, conforme carta de 30 de novembro de 1827:

Como ousou M. Gauss lhe dizer que a maioria de vossos teoremas já lhe era conhecida e descoberta por ele em 1808? [...] Esse excesso de insolência não deveria vir da parte de um homem de muito mérito pessoal que não necessita se apropriar de trabalhos dos outros. [...] Mas foi esse mesmo homem que em 1801 se atribuiu a descoberta da lei de reciprocidade publicada em 1785 assim, como quis em 1801 se apossar do meu método de mínimos quadrados publicado em 1805¹⁷. (LEGENDRE *apud* JACOBI, 1998, p. 398-399, tradução nossa.)¹⁸

Em outra carta, de 15 de outubro de 1828, Legendre alertou a Jacobi para que ele não divulgasse seus estudos antes de efetivar a sua publicação por medida de prevenção contra afirmações de Gauss, a quem ironicamente, chamou de *Sr. G.*:

Não comentais com ninguém vossas descobertas antes de publicá-las, para que quando o invasor *Sr. G.* afirmar tê-las descoberto bem antes de vós, ele seja desmascarado e motivo de escárnio dos colegas. (LEGENDRE *apud* JACOBI, 1998, p. 427, tradução nossa.)

Pelo teor dessas cartas, percebemos que Legendre era extremamente severo em suas críticas a Gauss, e ainda se referia aos fatos que tinham ocorrido há mais de vinte e cinco anos, que remontam à época da publicação da lei de reciprocidade de Legendre, em 1785.

¹⁷ Nota nossa: em uma nota de rodapé, Jacobi declarou que a afirmação de Gauss é verdadeira, uma vez que as páginas 492-496 das obras completas de Gauss contém as datas de seus os trabalhos sobre funções elípticas, que somente se tornaram conhecidas após a sua morte, conforme Jacobi (1998, p. 398).

¹⁸ Jacobi (1998) nos esclarece a respeito de prioridades de descobertas científicas, ao declarar que: “É necessário distinguir a descoberta por observação e a demonstração de uma teoria. Em 1785 Legendre foi o primeiro a publicar sua demonstração que era incompleta, a qual procurou aperfeiçoar nas diferentes edições de *Essai...*, porém sem dúvida foi Gauss o primeiro a demonstrá-la de uma forma mais rigorosa em seus *Disquisitiones de 1801*” (JACOBI, 1998, p. 398, tradução nossa).

1.4.3 Seu perfeccionismo

No prefácio de *Teoria dos Números* (1830), encontramos os seguintes traços que demonstraram que Legendre era uma pessoa perfeccionista:

Não dissimularemos aqui que algumas das matérias tratadas nessa obra terão que ser melhoradas, ou até mesmo retificadas por novas pesquisas. Entretanto, o autor pensou que seria melhor deixá-las nesse estado de imperfeição do que suprimi-las. Elas irão proporcionar um objetivo de trabalho àqueles que futuramente se ocuparão do aperfeiçoamento dessa ciência. (LEGENDRE, 1830, p. vj, tradução nossa.)

Legendre afirmou que procurou melhorar a nova edição o quanto foi possível e como uma espécie de testamento, delega às futuras gerações de matemáticos o aprimoramento da ciência a qual se dedicou por mais de cinco décadas de sua vida.

1.4.4 Sua timidez

Registrado em épocas distantes, encontramos o acanhamento, como uma das características da personalidade de Legendre, expresso nas homenagens póstumas de Poisson no *Discurso pronunciado nos funerais de Sr. Legendre* (1833) e de Beaumont no *Elogio histórico de Adrien -Marie Legendre* (1864), em que os referidos autores afirmaram:

Nosso companheiro frequentemente exprimia o desejo, de que quando falássemos a respeito dele deveríamos nos restringir exclusivamente aos seus trabalhos, uma vez que efetivamente, foram toda a sua vida. Religiosamente me renderei à sua vontade, nessa homenagem em meu nome e em nome da Academia de Ciências. (POISSON, 1833, p. 61, tradução nossa.)

Na criação da Legião de Honra, o nome do Sr. Legendre estava entre os cavaleiros que receberiam a medalha. Ele rapidamente tenta desviar a atenção dessa simpática homenagem de sua pessoa para seus trabalhos, mas a sua modéstia natural o impediu por um longo tempo de colocar a sua condecoração vermelha às suas vestes... (BEAUMONT, 1864, p. LXV, tradução nossa.)

Legendre recebeu algumas homenagens em vida, como ser condecorado cavaleiro da Região de Honra e em 1800, foi considerado, juntamente com Laplace, Lagrange, Monge e Carnot, um dos 36 maiores matemáticos de todos os tempos. Desenvolveu trabalhos em variados ramos das ciências e participou de importantes comissões científicas (GILLESPIE, 1970-1980, vol. VIII; DHOMBRES E DHOMBRES, 1989).

Percebemos que esses fatores não exerceram influência alguma em seu caráter tímido, uma característica marcante de sua personalidade, pela qual Legendre ficou conhecido no meio matemático, conforme registros dessas duas homenagens póstumas escritas num espaço de mais de três décadas.

1.4.5 Sua generosidade

Além dos episódios envolvendo jovens matemáticos, Legendre não se esqueceu que em sua juventude foi beneficiado por seus mestres, que reconheceram e o ajudaram a despertar o seu talento precoce para as ciências. Segundo Beaumont (1864, p. LXXXV), em mais de uma ocasião, Legendre ajudou vários alunos desfavorecidos da Escola Politécnica, os quais eram mantidos financeiramente pelo matemático, que lhes pagava sucessivamente uma pensão.

1.4.6 Sua parcialidade

No episódio envolvendo Legendre e Sophie Germain, anteriormente relatado, Stein (2006) aponta que Germain, por seu talento superior, não mantinha um bom relacionamento com os matemáticos de sua época, a não ser com o próprio Legendre, Lagrange e Gauss.

Ela e Legendre se tornaram amigos e, por consequência, o matemático em mais de uma ocasião, revelou-lhe informações sigilosas, conforme as três cartas a seguir:

22 de outubro de 1811

O vosso *mémoire* não está perdido. Ele é o único recebido sobre a questão de vibração de superfícies. Ontem foram nomeados cinco membros para examiná-los, onde eu tive a honra de ser um deles. Os Srs. Laplace, Lagrange, Lacroix e Malus são os outros quatro. Eu até agora nada disse, mas eu a aconselho a guardar silêncio até sair o julgamento definitivo. Eu sou, de todos os sentimentos que vós conheceis, vosso servo devotado. (LEGENDRE *apud* STEIN, 2006, p. 16, tradução nossa.)

4 de dezembro de 1811

Senhorita, não tenho boas notícias sobre a análise do vosso *Mémoire*. Aachamos que a vossa equação principal não é exata mesmo admitindo a hipótese de elasticidade em cada ponto... O Sr. Lagrange achou que, segundo essa hipótese, a equação verdadeira deve ser da forma

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 \left(\frac{d^4 z}{dx^4} + 2 \frac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} \right) = 0, \text{ supondo } z \text{ bem pequeno.}$$

[...] Imagino que a mesma questão terá novamente num novo prazo e isso é mais do que necessário para sonhar com a vitória. (LEGENDRE *apud* STEIN, 2006, p. 18, tradução nossa.)

4 de dezembro de 1813

Por outro lado a sorte foi lançada. Não há mais nada a mudar no *Mémoire* e apesar de minha boa vontade, nada pude fazer. [...] Se a comissão do Instituto tiver a mesma opinião, a senhorita mereceria uma menção honrosa. (LEGENDRE *apud* STEIN, 2006, p. 19, tradução nossa.)

Segundo essas correspondências, Legendre não agiu de forma correta ao revelar a Sophie Germain os pareceres de seus trabalhos sobre curvatura de superfícies em 1811, 1813 e 1815, submetidos a concursos do Instituto, quando os resultados ainda não haviam sido divulgados ao público pela comissão julgadora. Sophie Germain não ganhou nenhum dos dois concursos de 1811 e 1813, mas, mesmo assim, Legendre tentou convencer a comissão julgadora para beneficiá-la com uma menção honrosa. Também não foi ético quando a preveniu sobre futuros concursos a serem lançados por essa instituição (para que ela se preparasse, antes do concurso ser oficialmente anunciado).

Essas foram as leituras que realizamos sobre a personalidade de Legendre, cientista atuante de sua época e longe da avidez por dinheiro, por títulos de nobreza ou por carreira política, foi

mais profundo do que popular, como foi o nosso Euler, como esse último, Legendre legou ao futuro uma gama de resultados, tarefa que só um gênio poderia realizar, que em muito contribuiu para o enriquecimento do espírito humano. (BEAUMONT, 1864, p. LXXXVII, tradução nossa.)

Além das homenagens póstumas como essa de Beaumont, e outra de Poisson, que discursou no seu funeral, o nome de Legendre se encontra perpetuado no monumento mais famoso de Paris, a Torre Eiffel (Fig. 8, 9, 10), uma vez que, juntamente com os nomes de Laplace, Lavoisier, Ampère e outros sessenta e oito cientistas, seu nome se encontra gravado na face *Trocadéro* (face que fica defronte ao rio Sena) da gigantesca escultura. Além disso, conforme o mapa de Paris, Legendre dá nome a uma passagem e a uma rua da capital francesa. Vide Figura 11, em que a rua supracitada se encontra identificada por uma seta direcionada ao 17º bairro de Paris acima do Arco do Triunfo que fica no 8º bairro dessa mesma cidade.



u19453167 fotoresearch.com.br



Figuras 8, 9: Face Trocadère, Torre Eiffel, Paris
 Fonte: FOTORESEARCH.COM.BR, 2010; FDAF.ORG, 2010



Figura 10: Nome de Legendre gravado na face Trocadère, Torre Eiffel, Paris
 Fonte: FDAF.ORG, 2010

Plan de Paris

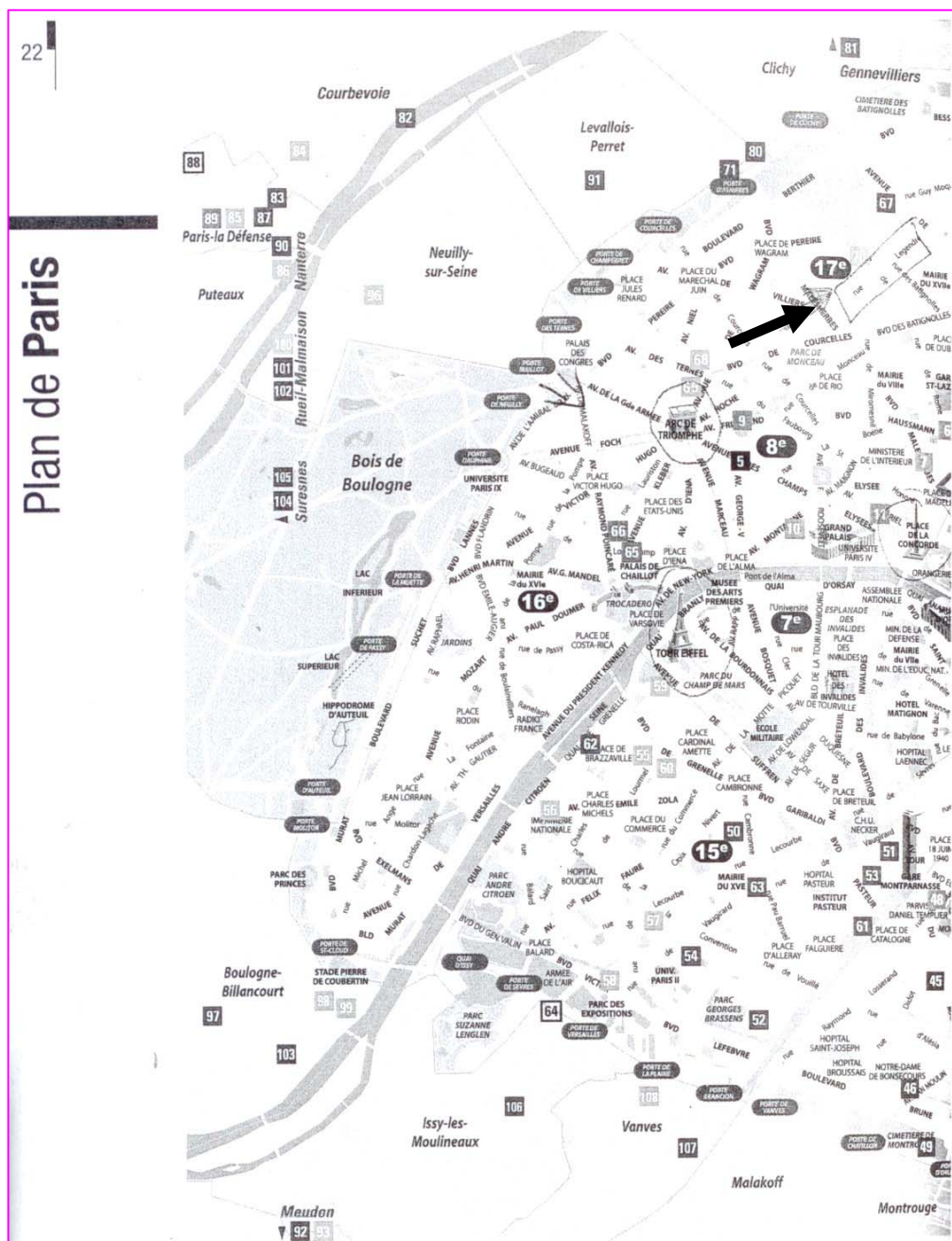


Figura 11: Localização da rua do 17º bairro de Paris que leva o nome de Legendre

Fonte: GARE DE NANTES, 2009

1.5 O “FALSO” RETRATO DE LEGENDRE

Registramos aqui um episódio anedótico sobre o **falso** retrato de Legendre que ocorreu em dezembro de 2008 em certa página da Internet.

O longo debate envolveu uma litografia concebida por volta de 1825 por François Séraphin Delpech (1778-1825) e uma gravura inspirada num retrato de Z. Belliard (1798-1843), retrato esse que, oficialmente é o que consta nos arquivos da Academia de Paris e está presente em todas as biografias como sendo do matemático Legendre.

Como o sobrenome Legendre é muito comum na França, o retrato foi identificado nessa página como sendo o de um dos seus homônimos, Luis Legendre, que segundo Jullian, Lesbroussart, Lennep (1827, p. 222-3), era um deputado revolucionário extremista que nasceu em Paris em maio de 1756 e faleceu em Versailles (Paris) em dezembro de 1797. Consta-se inclusive, que ele votou pela decapitação de Luis XVI em 16 de janeiro de 1796.

Em busca de documentos que justificassem tal episódio, encontramos apenas duas evidências que corroboravam com a ideia de que o retrato era do deputado Luis Legendre. Em uma biografia de Delpech (<http://fr.wikipedia.org/wiki/Delpech>, 2009) encontra-se uma série de litografias de sua autoria e uma delas foi identificada como sendo a do deputado Luis Legendre. A gravura aparece entre as litografias de alguns personagens da Revolução Francesa e do Primeiro Império de Napoleão, a saber, o matemático Monge, o compositor italiano Ferdinand Paer, o general Hoche, o Cônsul Cambacerès, o escritor Poissy d’Anglais, o matemático Poisson e o general Charette. Vide segunda gravura na Foto 1 a seguir:



Foto 1: Litografias de Delpech erroneamente identificada como sendo a do deputado Louis Legendre

Fonte: FR.WIKIPEDIA.ORG, 2009

A segunda evidência sobre o **falso** retrato do matemático Legendre é encontrada na própria página de discussão¹⁹ em que um dos questionadores afirma que o retrato de fato é de Luis Legendre, com base num retrato similar presente em uma biografia do político francês:

Homem político francês nascido em Versailles em 22 de maio de 1752²⁰, falecido em 13 de dezembro de 1797. Filho de um açougueiro e afilhado de Luis Frou, açougueiro oficial da rainha, foi marinheiro por dez anos e se estabeleceu como açougueiro em Paris. Por suas ideias revolucionárias participou da queda da Bastilha em 14 de julho de 1789. Membro do clube dos *jacobinos*²¹ e dos *cordeliers*²², contribuiu para a petição que exigia a deposição do rei que foi levado ao Campo de Março em 17 de julho de 1791 e que em 1792 foi um dos cabeças, juntamente com Santerre e Fournier, do movimento revolucionário. Deputado pelo *Montagne*²³, ele vota pela morte

¹⁹ Disponível em <<http://one.filtrage.com>>, 2009

²⁰ Nota nossa: O ano de nascimento de Luis Legendre é igual ao ano de nascimento do matemático Legendre mas segundo a biografia do deputado encontrada em *Galerie historique des contemporains ou nouvelle biographie* (JULLIAN; LESBROUSSART; LENNEP, 1827, p. 222), o ano correto é 1756 e não 1752.

²¹ Nota nossa: Clube revolucionário fundado em 1789 dirigido por Robespierre após 1792.

²² Nota nossa: Clube revolucionário que funcionou de 1790 até 1794.

²³ Nota nossa: Partido convencional oposto aos Girondinos, partido moderado da Revolução no período de 1791

do rei. “Depois de fazer parte do Comitê de segurança geral se separa de Danton, se opõe a Robespierre e abertamente passa para a oposição na Convenção do Thermidor em 20 de maio de 1795.

(<http://les.guillotines.free/legendre/louis.htm>, 2009, tradução nossa.)

Juntamente à foto²⁴ é apresentada uma cópia da Diocese do obituário de Luis Legendre que afirma, dentre outras coisas, que ele realmente participou da tomada da Bastilha e, inclusive votou pela morte do rei Luis XVI. Após a queda de Robespierre, Luis Legendre se tornou cada vez mais reacionário e, devido ao abuso do álcool morreu em Paris de uma doença desconhecida, totalmente na miséria, em data próxima ao natal de 1797.

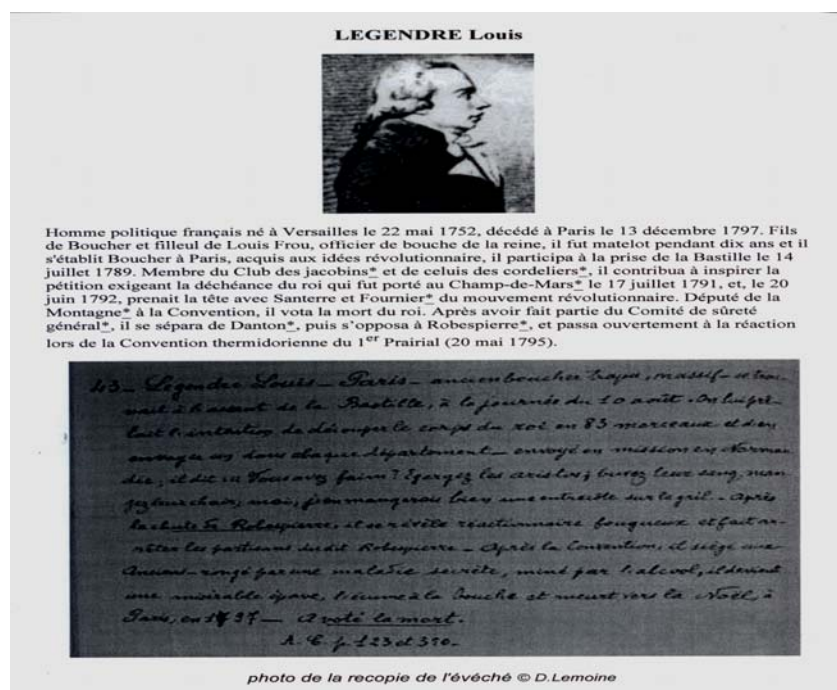


Foto 2: Retrato apresentado na biografia pela Internet do deputado Luis Legendre juntamente com uma cópia de seu obituário.

Fonte: LES.GUILLOTINES.FREE, 2009

Nada comprova que na foto 2 acima o retrato seja realmente de Luis Legendre, uma vez que poderia ter sido colocado erroneamente na biografia do político francês. Na dúvida, tal retrato é bem parecido com o retrato de Adrien-Marie Legendre, conforme apontaremos a seguir.

a 1793.

²⁴ Vide Foto 2.

Por essas fracas evidências, percebemos que os debatedores eram amadores e foram precipitados em concluir que o retrato questionado não era do matemático Legendre. Os erros são tão evidentes que, quando fizemos uma verificação das datas, constatamos que tal retrato jamais poderia ser do político francês, uma vez que, segundo a biografia de Z. Belliard (disponível em: [http://fr.wikipedia.org/wiki/Z  fferin Belliard](http://fr.wikipedia.org/wiki/Z  fferin_Belliard), 2009) o retrato do matemático Legendre foi tirado por ele, que viveu no período de 1798 a 1843. O artista nasceu em 1798, um ano depois da morte de Luis Legendre. Além disso, de acordo com a biografia de F-S. Delpech (disponível em: <http://fr.wikipedia.org/wiki/Delpech>, 2009), a gravura foi realizada pelo litográfico em 1825 e foi inspirada no retrato de Belliard. Portanto, o retrato e a litogravura foram realizados depois da morte do político e, assim, como tal gravura, que foi inspirada num retrato tirado depois de sua morte, poderia ser identificado como sendo seu?

Para ratificar que a foto é verdadeiramente do matemático Legendre, apresentaremos alguns fac-símiles de fotos (ver fotos 3, 4 e 5) encontradas não somente em órgãos oficiais, bem como em biografias apresentadas pelos historiadores.



Foto 3: Litografia do matemático Legendre pertencente à Biblioteca Nacional em Paris

Fonte: WIKIPEDIA.ORG, 2009



Legendre

488

FRANCE

he is known chiefly for his geometry,¹ a work which had a generous reception in various countries and which justly ranks as one of the best textbooks ever written upon the subject. In it he sought to rearrange the propositions of Euclid, separating the theorems from the problems and simplifying the proofs, without lessening the rigor of the ancient methods of treatment. To Legendre is largely due the abandoning of Euclid as a textbook in American schools.



ADRIEN-MARIE LEGENDRE
After a lithograph by Delpech

In higher mathematics Legendre is known for his works on the theory of numbers² and on elliptic functions.³ He is also known for his treatises on the calculus, higher geometry, mechanics, astronomy, and physics. To him is due the first satisfactory treatment of the method of least squares,⁴ although Gauss had already discovered the method. In his theory of numbers appears the law of quadratic reciprocity which Gauss called the "gem of arithmetic." The treatise on elliptic functions appeared almost simultaneously with the works by Abel and Jacobi on the same subjects; and although Legendre had spent thirty years on the theory, he

¹ *Éléments de géométrie*, Paris, 1794.

² *Essai sur la théorie des nombres*, Paris, 1798; 2d ed., Paris, 1808, with supplements in 1816 and 1825; 3d ed. under the title *Théorie des nombres*, Paris, 2 vols., 1820.

³ *Mémoire sur les transcendentes elliptiques*, Paris, 1794; *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, Paris, 1827-1832.

⁴ On the history of this subject see M. Merriman, *Method of Least Squares*, p. 182 (New York, 1882); *Transactions of Connecticut Academy*, IV, 19 (1877), with complete bibliography to that date; Todhunter, *Hist. Probability*, Cambridge, 1865.

Fotos 4 e 5: Retratos apresentados nas biografias do matemático Legendre

Fonte: *apud* SAMUELI e BOUDENOT, 2006; SMITH, 1958

De fato, comparando-se as fotos, é fácil deduzir que o retrato em apreço é do matemático Legendre e foi realizado por Zéfferin Belliard. Inclusive ele é o retrato que se encontra na Biblioteca Nacional de Paris e aparece em todas suas biografias e que, equivocadamente foi identificado como o de Luis Legendre na página de discussão exposta na internet em 2008.

Em consequência, por causa dessas infundadas justificativas, nessa mesma ocasião, o retrato foi retirado da biografia de Adrien-Marie Legendre da página francesa do wikipedia²⁵.

Por outro lado, vale ressaltar que, contrariamente a Lagrange e Gauss, não encontramos nenhum outro retrato de Legendre numa idade mais avançada, porém, existe uma aquarela em que Legendre e Fourier foram retratados juntos, que é parte do Álbum de 73 retratos-charge em aquarela de Boilly (1761-1845), consoante figura 12, que se encontra exposto na ante-sala da biblioteca do Instituto Nacional (Fig. 4) em Paris.

²⁵ Isso pode ser facilmente constatado quando a referida página é acessada.



Figura 11: Aquarela de Legendre e Fourier por Boilly
Fonte: ONE.FILTRAGE.COM, 2009

Legendre é o que está com os cabelos brancos esvoaçados e Fourier é o que está com uma aparência um tanto ‘rotunda’. A figura de Legendre está um tanto exagerada e não faz jus aos seus retratos anteriores, mas a de Fourier...

O próximo capítulo versará sobre as obras de Legendre em Teoria dos Números onde desvendamos tanto o papel desempenhado quanto a influência dessas obras no desenvolvimento da ciência ao longo dos séculos XVIII e XIX. Um estudo sistemático da sua obra maior *Teoria dos Números* (1830) foi realizado num contexto histórico-social e a análise de certos conteúdos da obra comparados a alguns textos de outros autores nos permitiram compreender a evolução dinâmica dos caminhos percorridos pelo autor, quanto à semântica, à organização das demonstrações, à estrutura lógico-dedutiva que permearam suas descobertas matemáticas em Teoria dos Números, a exemplo da sua famosa lei de reciprocidade.

CAPÍTULO 2

LEGENDRE E A TEORIA DOS NÚMEROS

2.1 LEGENDRE, GAUSS E A TEORIA DOS NÚMEROS NOS SÉCULOS XIX E XX

A Teoria dos Números desenvolvida no século XVIII foi fortemente influenciada pelas obras de Euler e Lagrange. No século XIX a ciência foi marcada por outras obras, em especial pelos trabalhos de Legendre que sistematizaram as teorias do século anterior e forneceram ao século XX métodos inovadores e problemas interessantes por meio da análise de Diofanto. Numa transição entre as obras de Lagrange e Legendre se encontra *Disquisitiones Arithmeticae*, de Gauss, que foi escrito em 1796, publicado em 1801 e traduzido para o francês em 1807 como *Recherches Arithmétiques* por Pouillet-Delisle. Segundo Aubry (1909), *Disquisitiones* é um conjunto de teorias completas e contém uma variedade e generalidade de resultados tratados com elegância e concisão de métodos das teorias criadas por Gauss, a exemplo da teoria de congruência que é uma base para toda a aritmética e da teoria da ciclotomia ou resolução das equações do tipo $x^n - 1 = 0$, que por meio de equações do segundo grau permite determinar se a circunferência pode ser dividida em n partes iguais. Acrescenta ainda que, a obra contém apenas a metade dos verdadeiros estudos de Gauss e muitos deles foram publicados após a sua morte em 1855. Uma justificativa foi a falta de tempo de Gauss para se dedicar com mais afinco ao aperfeiçoamento de sua obra, certamente, se refere ao período de 1801 a 1816, em que ele direcionou seus estudos para a Astronomia, especificamente para a Mecânica Celeste, conforme narrativa sobre o desaparecimento do asteroide Ceres apresentada no Capítulo 1 do presente trabalho.

A fatalidade ligada à difusão da Teoria dos Números aconteceu não somente nesse caso particular de Gauss, mas também, no caso de Abel, Galois, Eisenstein, Riemann e Stieltjes que morreram jovens. Liouville não teve tempo de tornar conhecidos seus métodos e completar suas descobertas. Lejeune-Dirichlet²⁶ morreu antes de comentar sobre os trabalhos posteriores que Gauss pretendia publicar. Lebesgue não encontrou um ambiente favorável para a publicação do seu *Tratado* e Édouard Lucas, um dos matemáticos franceses mais

²⁶ Em Lejeune-Dirichlet (1859, p. 401-420) encontra-se uma demonstração mais simples da primeira demonstração de Gauss da lei de reciprocidade na teoria de resíduos quadráticos.

férteis do fim do século XIX com tradição em Álgebra clássica e Teoria dos Números, faleceu em um acidente, um pouco antes da publicação do primeiro volume de sua obra *Teoria dos Números* (1891) que entre outros assuntos versava sobre cálculos com números inteiros, racionais e divisibilidade. Na visão desse matemático, o primeiro tratado de uma aritmética superior, como também era conhecida a Teoria dos Números na época, foi publicado em meados do século XIX por Legendre sob o título *Teoria dos Números* (1830) (AUBRY, 1909; LUCAS, 1891).

Esse é o início de uma história cuja continuidade se dará com a apresentação das obras de Legendre em Teoria dos Números, com destaque para a sua obra maior *Teoria dos Números* de 1830, que além de seus próprios estudos, contém trabalhos de Euler e Lagrange sobre resolução de equações e formas quadráticas, teoremas de Fermat, tabelas sobre números primos e, sobretudo, a lei de reciprocidade dos resíduos quadráticos que estabelece uma relação particular entre dois números primos ímpares.

O que será aqui apresentado em muito contribuirá para estabelecer uma evolução dos trabalhos de Legendre em Teoria dos Números, bem como para a compreensão da sua obra *Teoria dos Números* (1830) que não só prestou grandes serviços à Aritmética superior do fim do século XVIII a meados do século XIX como também, inspirou os estudos de grandes matemáticos dos séculos vindouros.

2.2 OBRAS DE LEGENDRE EM TEORIA DOS NÚMEROS COM DESTAQUES PARA OUTROS AUTORES

2.2.1 Como tudo começou: *Estudos sobre a Análise Indeterminada* (1785)

O primeiro trabalho de Legendre²⁷ em Teoria dos Números, *Estudos sobre a Análise Indeterminada*, foi publicado pela Academia de Ciências de Paris em 1785. Composto de 95 páginas, esse trabalho se encontra dividido em quatro artigos, contendo em particular, o seu célebre teorema de reciprocidade quadrática.

2.2.1.1 Primeiro artigo: “Equações indeterminadas lineares”

O primeiro artigo, “Equações Indeterminadas Lineares” (LEGENDRE, 1785, p. 465-490), apresentou um método de resolução da equação indeterminada linear do tipo $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \text{etc.}$, com números inteiros e é fundamentado no estudo de equações lineares, particularmente sobre as equações do tipo $Ay = ax^2 - B$, que foram estudadas primeiramente por Lagrange, nos trabalhos de Berlim de 1767, 1768, 1773 e 1775 e complementadas por Euler-Lagrange em *Adições aos Elementos de Álgebra* – em 1798. Elas também se encontram na Seção 2 de *Disquisitiones* de Gauss (1807, p. 28-9). Comparando-se os textos de Euler e de Legendre, a abordagem de Euler sobre a solubilidade de equações lineares de grau n é mais simples,²⁸ porém, a de Legendre é mais abrangente e contém uma variedade de letras e símbolos que, às vezes, tornam difícil a compreensão do significado do conteúdo abordado e, paradoxalmente, contém variados exemplos numéricos, procedimento que será seguido em todos os seus trabalhos nessa área.

Para advertir o leitor, o autor chamou a atenção para os conceitos e notações que serão utilizados nesse estudo, conforme Legendre (1785, p. 466-7, tradução nossa):

1. Se existe um valor de x tal que o polinômio $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \text{etc.}$ seja divisível por A , esse valor acrescido ou diminuído de um múltiplo qualquer de A também terá essa mesma propriedade. Por essa razão considerarei apenas os

²⁷ Segundo Beaumont (1864, p. XLV), esse não seria o primeiro trabalho de Legendre nessa ciência, pois ao ler na Academia de Ciências de Paris o relatório final do trabalho sobre atração dos esferóides de Legendre em 1783, Laplace comentou sobre outro trabalho do mesmo autor, que tratava a resolução de equações do segundo grau e propriedades de frações contínuas. Mas essa informação é somente encontrada nesse elogio póstumo de Beaumont.

²⁸ Maiores detalhes em Euler e Lagrange (1798, artigos 46, 47 p. 95-8).

valores de x entre os limites $+\frac{1}{2}A$ e $-\frac{1}{2}A$ que serão chamados de soluções ou raízes da equação proposta.

2. Para expressar que P é divisível por A ou P/A é um inteiro, escreverei $P/A = e$ ou $P = 0$ onde A é sempre um numero inteiro.

3. Somente podem existir n valores de x que tornem um polinômio de grau n , $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \text{etc.}$ divisível por A .

4. Sendo A um número primo e x não divisível por A , consideraremos $x^{A-1} - 1$ divisível por A . Portanto existem $A - 1$ valores de x , a saber, todos os números inteiros entre $+\frac{1}{2}A$ e $-\frac{1}{2}A$ que tornam o binômio $x^{A-1} - 1$ divisível por A .

5. O teorema anterior não é apenas válido para os polinômios que dividam exatamente $x^{A-1} - 1$, mas também para aqueles que o dividirão desconsiderando-se os múltiplos de A .

Como será visto na síntese do terceiro artigo desse mesmo trabalho, Legendre não justificou a escolha desse intervalo de variação das raízes da equação proposta. Em uma nota explicativa, ele assegurou que “basta procurar por tentativas os valores de x entre $+\frac{1}{2}A$ e $-\frac{1}{2}A$ que tornam $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \text{etc.}$ divisível por A ” (LEGENDRE, 1785, p. 466, tradução nossa).

O terceiro resultado é o Teorema Fundamental da Álgebra. Isto é demonstrado por Legendre sem muito rigor, por meio de divisões sucessivas de $\frac{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \text{etc}}{A}$ por $x - \alpha$, onde α é raiz de $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \text{etc.}$ entre $+\frac{1}{2}A$ e $-\frac{1}{2}A$, até que o grau do último polinômio obtido seja igual a zero.

Em seguida, Legendre apresentou e demonstrou o Teorema I sobre resolução de equações do tipo²⁹ $\frac{x^n - B}{A} = e$, forma reduzida de $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \text{etc.}$:

TEOREMA I. A equação $\frac{x^n - B}{A} = e$ onde A é um número primo, admitirá tantas

$\frac{A-1}{A}$ soluções quanto $\frac{B^\omega - 1}{A} = e$, onde ω é um divisor comum de n e de $A - 1$. Se essa condição for satisfeita, a equação proposta terá um número ω de soluções da

²⁹ Nota nossa: Tal redução não é justificada por Legendre, e ela é bem simples, conforme será visto posteriormente na síntese do terceiro artigo.

equação $\frac{x^\omega - B^p}{A} = e$ onde p é menor inteiro positivo que satisfaz à equação $pn - q(A - 1) = \omega$. (LEGENDRE, 1785, p. 468, tradução nossa.)

De uma maneira geral, esse teorema indica quantas soluções a equação proposta possui, e qual é a equação mais simples que contém todas essas soluções, caso ela seja solúvel. Na equação reduzida, o expoente de x sempre será divisor de $A - 1$. Assim o problema se restringiu a encontrar as soluções da equação $\frac{x^n - B}{A} = e$, com base na hipótese de que n seja divisor de $A - 1$ e se um dos valores de x for conhecido, todos os demais serão obtidos multiplicando-se o valor encontrado pelas diferentes raízes da equação $\frac{x^n - B}{A} = e$.

A demonstração de Legendre está essencialmente reproduzida nas três edições do *Ensaio sobre a Teoria dos Números* (1798, 1808, 1830), resguardando-se as devidas notações:

Se a equação proposta for solúvel, teremos simultaneamente $\frac{x^n - B}{A} = e$ e $\frac{x^{A-1} - 1}{A} = e$, ou para abreviar, $x^n = B$ e $x^{A-1} = 1$. Como os dois números n e $A - 1$ possuem o mesmo divisor comum ω , é fácil encontrar dois números positivos p e q , de maneira que $pn - q(A - 1) = \omega$. Mas as equações anteriores resultaram em $x^{np} = B^p$, $x^{q(A-1)} = 1$ e portanto $x^\omega = B^p$, ou $\frac{x^\omega - B^p}{A} = e$. Desde já percebemos que a equação proposta tem apenas ω soluções. Nesse momento é preciso analisar se a equação $x^\omega = B^p$ satisfará as duas primeiras, $x^n = B$ e $x^{A-1} = 1$. Portanto seja $\frac{n}{\omega} = n'$ e $\frac{A-1}{\omega} = A'$. Substituindo essas expressões em $x^n = B$ e $x^{A-1} = 1$ teremos que $B^{n'p} = B$ e $B^{A'p} = 1$. Como B não é divisível por A , da equação $B^{n'p} = B$ resultou que $B^{n'p-1} = 1$ ou $B^{A'q} = 1$, pois $p n' - q A' = 1$. Logo é necessário que B satisfaça às duas condições $B^{A'p} = 1$ e $B^{A'q} = 1$. Deduzimos que $B^{A'p} = 1$ e $B^{A'q} = 1$ e como $p n' = q A' + 1$, teremos $B^{A'q} = 1$. Essa condição obtida das equações $B^{A'p} = 1$ e $B^{A'q} = 1$ satisfaz a ambas as condições. Portanto para que a equação proposta seja solúvel é necessário que tenhamos $\frac{B^\omega - 1}{A} = e$. É a única condição necessária. Todas às vezes que ela for satisfeita, a equação proposta terá um número ω de soluções que estarão

contidas na fórmula $\frac{x^{\omega} - B^p}{A} = e$. Não resta dúvida que a equação acima efetivamente possui ω soluções, segundo a análise precedente. Mas nos convenceríamos mais rapidamente pelo n.º 4³⁰, observando que $x^{\omega} - B^p$ é fator de $x^{A'\omega} - B^{A'p}$ que resultou em $x^{A-1} - 1$. Observemos que se n for maior do que $A - 1$ na equação proposta, podemos omitir desse expoente os múltiplos de $A - 1$, e conservar apenas o resto, desde que ele seja positivo. Com efeito, x^{A-1} dividido por A , tem como resto 1. Portanto $x^{\lambda(A-1)+n}$ dividido por A tem o mesmo resto do que x^n . Segue que a equação $\frac{x^n - B}{A} = e$ sempre terá uma solução, qualquer que seja B , quando n e $A - 1$ são primos entre si. Portanto seja p o menor número positivo que satisfaz à equação $pn - q(A - 1) = 1$. Essa solução será $x = B^p$. (LEGENDRE, 1785, p. 468-9, tradução nossa.)

Embora Legendre não tenha explicitado, a demonstração acima foi fundamentada em três importantes resultados: o Pequeno Teorema de Fermat³¹, o Algoritmo de Euclides para a determinação do máximo divisor comum entre dois números inteiros e o Teorema Fundamental da Álgebra. Vale ressaltar que o teorema foi reproduzido na quarta parte, parágrafo II da edição do *Ensaio* (LEGENDRE, 1798, p. 413), sendo que nas edições de 1808 e 1830, ele está com uma nova redação, onde Legendre substituiu a forma reduzida $\frac{x^n - B}{A} = e$ pela expressão $x^n - b = \mathcal{M}(A)$ onde $\mathcal{M}(A)$ designa o conjunto dos múltiplos de A e

a expressão $\frac{B^{\frac{A-1}{\omega}} - 1}{A} = e$ por $b^{\frac{a-1}{\omega}} - 1 = \mathcal{M}(A)$, conforme Legendre (1808, p. 350; 1830, Vol. II, p. 13).

Considerando-se as notações, a redação da demonstração do teorema na terceira edição de 1830 difere um pouco da anterior e, com exceção do Pequeno Teorema de Fermat, as demais propriedades também não se encontram explicitadas. Mesmo depois de alguns anos da publicação da conhecida obra *Disquisitiones* de Gauss em 1801, Legendre evitou a linguagem da teoria de congruência de Gauss na redação da demonstração do Teorema I da edição do *Ensaio* (1808, 1830). Ele optou por utilizar o cálculo “desprezando os múltiplos de a ” ou “omitindo os múltiplos de $a - 1$ ”, ao invés de “desprezando-se os cálculos da

³⁰ Nota nossa: Vide observação 4 da introdução do referido artigo.

³¹ Retratado posteriormente na obra de 1830, Artigo 129, Vol. I, p. 192.

congruência $\equiv 0 \pmod{a}$ no primeiro caso ou “omitindo-se os cálculos de $a - 1 \equiv r \pmod{n}$, no segundo caso”, de acordo com Legendre (1830, p. 14).

Como foi retratado no Capítulo 1 do presente trabalho, as querelas entre os dois matemáticos influenciaram grandemente na produção científica de Legendre em Teoria dos Números.

Em seguida, Legendre (1785, p. 471, tradução nossa) demonstrou o Teorema II que fornece quatro condições para a resolubilidade da equação $\frac{x^n - 1}{A} = e$, em que A é um número primo divisível por n :

TEOREMA II. Sendo proposta a equação $\frac{x^n - 1}{A} = e$, onde o número primo $A =$

$A' n$, 1º teremos $x = u^{A'}$ onde u é um número qualquer não divisível por A .

2º Se α é um valor de x , então α^m também o será, qualquer que seja o expoente

m . 3º Se o número α é tal de modo que não tenhamos $\alpha^{\frac{n}{v}} = 1$, onde v é um divisor primo de n , a fórmula $x = \alpha^m$ conterá todos os valores de $x = 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$.

4º Não somente existem vários números α que gozam dessa propriedade, mas a quantidade $n \left(1 - \frac{1}{v}\right) \left(1 - \frac{1}{v'}\right) \left(1 - \frac{1}{v''}\right)$, etc., onde $v, v', v'',$ etc., são os diferentes números primos divisores de n .

O Teorema II explicita que, se v é um divisor primo de n e se existem n valores de x que satisfaçam à equação $\frac{x^n - 1}{A} = e$, então existirão $\frac{n}{v}$ valores de θ que tornam $\theta^{\frac{n}{v}} = 1$. Assim,

dos n valores de θ na equação $\theta^n = 1$ existem $n - \frac{n}{v}$ tais que $\theta^{\frac{n}{v}} \neq 1$. Raciocinando do mesmo modo sobre os demais fatores de n , Legendre concluiu que existem $n \left(1 - \frac{1}{v}\right) \left(1 - \frac{1}{v'}\right) \left(1 - \frac{1}{v''}\right)$ etc. valores de θ , tais que nenhum dos números $\theta^{\frac{n}{v}} - 1, \theta^{\frac{n}{v'}} - 1, \theta^{\frac{n}{v''}} - 1$, etc., seja divisível por a . Logo, se n é um número primo é necessário que x seja diferente da unidade. Se esse valor for θ , a fórmula $x = \theta^m$ fornece todos os valores de x . Por outro lado, se n é uma potência de um número primo v , para que o valor de $x = \theta$ satisfaça à

equação $x^n = 1$ e será necessário que $\theta^{\frac{n}{v}}$ seja distinto de $+1$ e, assim, $x = \theta^m$ será a solução da equação proposta. Esse método prático de Legendre pode ser utilizado quando não é possível determinar todas as raízes, pela fórmula $x = u^{a'}$. Portanto, θ é o número mais apropriado para fornecer todas as soluções da equação $\frac{x^n - 1}{A} = e$.

Na continuidade dos estudos, outros três teoremas, variações do Teorema II, foram demonstrados:

1. O Teorema III se refere à resolução da equação $\frac{x^{2n} + 1}{A} = e$, onde A é número primo e $4n$ divisor de $A - 1$;
2. O Teorema IV corresponde à solução da equação $\frac{x^m - B}{A} = e$, com $B = \pm 1$ e m divisor de $\frac{A-1}{n}$;
3. O Teorema V trata da solução da equação $\frac{x^n - B}{A} = e$, onde $B^\omega = 1$ e ω é divisor de $\frac{A-1}{n}$ (LEGENDRE, 1785, p. 476, 477, 481).

Todos os teoremas bem como suas aplicações foram reproduzidos em todas três edições do *Ensaio*, como o Exemplo I a seguir:

EXEMPLO I

Determinaremos os sete valores de x na equação $\frac{x^7 - 1}{379} = e$.

Como $\frac{379-1}{7} = 54$, temos que $x = u^{54}$, onde u é um número qualquer não divisível por 379. Considere $u = 2$. Desprezando-se os múltiplos de 379, à medida que eles aparecem, obtemos que $u^6 = 64$, $u^{12} = -73$, $u^{24} = 23$, $u^{48} = 150$, $u^{54} = 125$. Portanto $x = 125$, e como o expoente 7 é um número primo, todos os valores de x podem ser obtidos pela fórmula $x = 125^m$, que são os sete números 1, 125, 86, 138, -184, 119, 94. Essa solução poderia ter sido facilmente encontrada pela fórmula mais simples, $\alpha = 86^m$. Como 86 é o menor valor positivo de x , vemos que o processo seria muito longo se procurássemos os valores de x por tentativas, fazendo x sucessivamente igual a $\pm 1, \pm 2, \pm 3$, etc. (LEGENDRE, 1785, p. 473, tradução nossa.)

Percebe-se claramente que o exemplo acima é uma aplicação direta do Teorema II. Esse exemplo foi reproduzido nas edições de 1798 (p. 413), 1808 (p. 352) e 1830 (Vol. II, p. 17), onde Legendre mudou a notação da equação $\frac{x^7 - 1}{379} = e$ para $x^7 - 1 = \mathcal{M}(379)$.

Delambre (1810) ainda aponta que esse artigo proporcionou avanços importantes na publicação e na divulgação da Teoria dos Números na França³². A partir de 1794, a teoria foi consolidada com a publicação dos cursos de Matemática da Escola Normal ministrados por Lagrange e Laplace, pois permitiram aos dois matemáticos a ocasião de retomar e determinar com mais clareza a teoria de equações. Lagrange desenvolveu a análise do caso irredutível e Laplace demonstrou o teorema de d'Alembert ou Teorema Fundamental da Álgebra no caso das raízes imaginárias. Ruffini procurou determinar de uma forma direta a impossibilidade de uma solução geral e, para facilitar a resolução do problema, diminuiu o grau da equação de uma unidade (DELAMBRE, 1810, p. 91-2).

2.2.1.2 Segundo artigo: “Uso da Análise Indeterminada no estudo dos divisores de equações”

No segundo artigo, “Uso da Análise Indeterminada no estudo dos divisores de equações” (1785, p. 490-507), Legendre não expôs qualquer teoria, apenas utilizou o teorema de Newton para determinar os divisores racionais de quatro equações com graus variando de 3 a 6, bem como os divisores irracionais de três equações de grau par, cujos coeficientes são números inteiros bem grandes. A demonstração segue o princípio de partição de situações que consiste em estudar uma situação segundo um número finito de casos que são exaustivamente analisados.

No primeiro exemplo, Legendre determinou um divisor racional do primeiro grau de $x^3 - 292x^2 - 2170221x + 6656000 = 0$. Representando por P o primeiro membro da equação e o divisor por $x + a$, primeiramente, Legendre dividiu P por x . Não obtendo um quociente exato e, como de todos os coeficientes, 13 é o único fator primo simples do termo independente, 6656000, Legendre então procurou um número a de modo que a não fosse da

³² Entende-se por publicações na França ou publicações “nacionais” francesas as publicações em jornais, boletins e periódicos franceses, de trabalhos de matemáticos franceses ou de matemáticos estrangeiros que trabalhavam na França. Os meios mais representativos de divulgação eram *Boletim da Sociedade Matemática da França*, *Jornal de Matemática Pura e Aplicada*, *Notas dos relatórios da Academia de Ciências*, *Novos Anais* (que eram publicações destinadas aos estudantes das escolas de engenharia), *Boletim da Sociedade Philomatemática*, *Jornal do Instituto Nacional* e *Jornal da Escola Politécnica*. Vide Goldstein (1999) e Dhombres (1999).

forma $13y$. Em seguida, ele igualou P à expressão $(x + 13y)(x^2 - 292x - 2170221 + 13z)$ e fazendo as devidas simplificações, reduziu os coeficientes da nova igualdade em³³ Z_{13} para obter $-5 = y(x^2 - 62x - 1) + xz$, onde y é uma constante e z é da forma $\alpha x + \beta$. Ainda trabalhando em Z_{13} , ele substituiu $x = 0$ no resultado anterior e obteve que $y = 5 + 13y'$. Logo, $x + a = x + 65 + 169y'$. Por um procedimento análogo, ele dividiu P por $x + 65 + 169y'$ em Z_{169} e substituindo $x = -65$ no resultado, após simplificações, ele finalmente obteve que o divisor procurado de P é $x - 1625$.

No segundo exemplo, Legendre determinou o divisor $x + a$ da equação $x^3 - 157x^2 - 3801x - 1600 = 0$, onde a é múltiplo de 5. Como esse caso não se enquadrava no exemplo anterior, uma vez que o penúltimo e o último termo são também múltiplos de 5, Legendre utilizou um novo procedimento: substituiu $x = 5y$, dividiu tudo por 25, e reduziu os coeficientes do primeiro membro em Z_5 , operações que resultaram, respectivamente, nas transformadas $5y^3 - 157y^2 - 76y - 640 = 0$ e $-2y^2 - y = 0$. Em seguida ele testou os valores $y = 0$ e $y = 2$. Utilizando o método precedente para cada um desses valores, após divisões em cada caso, por 125 e 1325, ele reduz novamente os coeficientes obtidos em Z_5 , e deduziu que $y = 2$ é o único valor possível para determinar a solução, $x - 160$.

O terceiro exemplo teve por objetivo encontrar os divisores quadráticos de $x^5 - 14x^4 - 233x^3 + 442x^2 + 500x - 840$ da forma $x^2 + ax + b$, onde b é um múltiplo de 7. Novamente utilizando o método precedente, o autor determinou $x^2 + 24x - 7$ e $x^2 - 25x + 42$ como soluções. No quarto exemplo, ele decompôs $x^6 + x^5 - 54x^4 - 181x^3 + 21x^2 + 262x - 120$ em dois fatores do tipo $x^3 + ax^2 + bx + c$, onde o termo independente c de um desses fatores era um múltiplo de 5.

O quinto e o sexto exemplos são ilustrações do método aritmético de Newton para determinar os divisores irracionais da equação $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \dots + K$ cujos coeficientes são números inteiros, que aprimorado por Legendre, recebeu o seguinte enunciado:

Se $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \dots + K$ cujos coeficientes são números inteiros, pode ser colocada na forma $*(x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + k)^2 - n(a'x^{m-1} + b'x^{m-2} + \dots + k')^2$, os quais todos os coeficientes são racionais então cada um deles ou pelo menos o seu dobro será um inteiro. [...] Se $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \dots + K$

³³ Nota nossa: Por praticidade, optamos por utilizar a linguagem dos anéis Z_n .

pode ser colocado na forma $M^2 - \alpha N^2$ então se pode supor $M = x^m + \frac{A}{2}x^{m-1} + bx^{m-2} + \text{etc.}$ e $N = a'x^{m-1} + b'x^{m-2} + \text{etc.}$ Se qualquer um dos coeficientes das potências de x for ímpar é necessário que alguns dos números $a, b, c, a', b', c', \text{etc.}$ sejam fracionários pois, desenvolvendo a expressão* os coeficientes das potências ímpares serão sempre pares e no caso em que um dos coeficientes $A, C, E, \text{etc.}$ for ímpar será necessário que α seja da forma $4h + 1$ e que os coeficientes correspondentes a e a', b e b', c e $c', \text{etc.}$ sejam ambos inteiros ou ambos fracionários. (LEGENDRE, 1785, p. 498-9, tradução nossa.)

Newton havia apresentado o método sem demonstrá-lo. Legendre estendeu o método e o demonstrou para o caso particular das equações de grau par reduzidas à forma $M^2 - \alpha N^2 = 0$, onde M e N são funções racionais de x e α é um número inteiro que não é um quadrado perfeito.

Posto isto, Legendre procedeu à determinação dos divisores irracionais das equações $x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 27x + 9 = 0$; $x^8 + 4x^7 - x^6 - 10x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 10x - 5 = 0$; $x^6 - 10x^5 - 21x^4 - 573x^3 - 743x^2 + 262x + 38 = 0$.

Vale observar que esse segundo artigo não foi reproduzido nas edições do *Ensaio sobre a Teoria dos Números*.

2.2.1.3 Terceiro artigo: “Um teorema sobre a possibilidade das equações indeterminadas do segundo grau”

O terceiro artigo, “Um Teorema sobre a possibilidade das Equações Indeterminadas do Segundo Grau” (LEGENDRE, 1785, p. 507-513), é um estudo sobre as equações do tipo $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, reduzidas na forma $x^2 - By^2 = A$, onde x e y são indeterminadas, a, b, c, d, e, f números inteiros, e A, B inteiros positivos sem fatores quadrados com $A > B$. Esse texto foi reproduzido no parágrafo IV da primeira parte da edição do *Ensaio* de 1798 e no parágrafo IV da primeira parte do volume I das edições de 1808 e de 1830, onde foram acrescentados maiores detalhes e novos conteúdos foram desenvolvidos.

2.2.1.4 Quarto artigo: “Diversos teoremas sobre os números primos”

O quarto e último artigo, “Diversos Teoremas sobre os Números Primos” (LEGENDRE, 1785, p. 513-559), são estudos sobre diversos teoremas não demonstrados por Fermat e aprofundados por Euler em *Actes de Leipsig* de 1773, *Op. Anal.* de 1783 e por Lagrange nos *Mémoires de Berlin* de 1772, 1773, 1775. A maior parte dos teoremas foi demonstrada por esses matemáticos, mas outros não foram demonstrados, a exemplo de “todo número primo da forma $8n - 1$ é da forma $p^2 + q^2 + 2r^2$ ” e “o dobro de um número ímpar é a soma de três quadrados” que, respectivamente, foram demonstrados por Legendre (1785, p. 544, 548, tradução nossa) no referido artigo.

2.2.1.4.1 A primeira versão da Lei de Reciprocidade Quadrática

Nesse mesmo texto, Legendre anunciou e demonstrou de forma incompleta a primeira versão da sua célebre “lei de reciprocidade quadrática” (Teoremas I a VIII, p. 516-517), que estabelece uma relação particular entre dois números primos ímpares e resíduos quadrados.

Resíduos quadrados de um número m são os números k que são os restos da divisão por m dos quadrados dos números inteiros x , com x e m primos entre si, que numa linguagem moderna de Gauss, pode ser expresso pela resolução da congruência $x^2 \equiv k \pmod{m}$, $0 < k < m$. Ou seja, são os elementos positivos de Z_m que são cômruos a quadrados dos números inteiros $x \pmod{m}$ ou são os elementos positivos de Z_m que satisfazem à equação $x^2 = k$. Por exemplo, os únicos elementos de Z_{12} que satisfazem à congruência $x^2 \equiv k \pmod{12}$ são os valores de $k = 1, 4, 9$, pois eles são os únicos restos da divisão por 12 dos quadrados de x . Portanto, a equação $x^2 = k$ admite apenas três soluções em Z_{12} e esses números são os resíduos quadrados mod 12. Os demais números 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11 são ditos não resíduos quadrados mod 12.

Com respaldo no Pequeno Teorema de Fermat, Legendre mostrou que se N é um número qualquer e c um número primo que não divide N , então, a quantidade $N^{c-1} - 1$ é sempre divisível por c . Como $N^{c-1} - 1 = (N^{\frac{c-1}{2}} + 1)(N^{\frac{c-1}{2}} - 1)$, é necessário que um desses dois fatores seja divisível por c . Desse modo, Legendre deduziu que a quantidade $N^{\frac{c-1}{2}}$ dividida por c , sempre deixará o resto $+1$ ou -1 .

Mas quando N é um número primo, o símbolo $N^{\frac{c-1}{2}}$ é a notação de resíduo quadrático que leva o seu nome para expressar o resto da divisão de $N^{\frac{c-1}{2}}$ por c para o caso particular em que c é um número primo da forma $4n + 1$, $4n - 1$ ou $4n + 3$, não divisor de N .

Assim, N é dito um resíduo quadrado de c quando $N^{\frac{c-1}{2}} = +1$, pois $N^{\frac{c-1}{2}}$ dividido por c , deixa resto $+1$, que é a condição necessária para que c seja divisor de $x^2 - N$. Caso contrário, quando $N^{\frac{c-1}{2}} = -1$, N é dito um não resíduo quadrado de c . Esse é o enunciado da famosa lei de reciprocidade quadrática ou Lei de Legendre.

Vale ressaltar que a autoria da lei é atribuída a Legendre em virtude do mesmo tê-la apresentado e demonstrado nesse seu primeiro trabalho de 1785. Porém, o primeiro a estudar a reciprocidade quadrática foi Fermat, que em uma carta a Mersenne, afirmou, sem determinar que: “Todo número primo que é um múltiplo de quatro mais um é escrito de maneira única como soma de dois quadrados”, segundo Lemmermeyer (2000, p. 1, tradução nossa).

A primeira versão da lei dada por Legendre se encontra dividida em oito teoremas e antes de demonstrá-los, o autor observou que seria necessário distinguir, por letras particulares, os números primos da forma $4n + 1$ e os da forma $4n + 3$. Ele designou os primeiros pelas letras A , a , α , e os segundos por B , b , β . Estabelecido isso, o teorema engloba os oito casos a seguir:

Teorema I. Se $b^{\frac{a-1}{2}} = +1$, segue que $a^{\frac{b-1}{2}} = 1$.

Teorema II. Se $a^{\frac{b-1}{2}} = -1$, segue que $b^{\frac{a-1}{2}} = -1$.

Teorema III. Se $a^{\frac{A-1}{2}} = +1$, segue que $A^{\frac{a-1}{2}} = +1$.

Teorema IV. Se $a^{\frac{A-1}{2}} = -1$, segue que $A^{\frac{a-1}{2}} = -1$.

Teorema V. Se $a^{\frac{b-1}{2}} = +1$, segue que $b^{\frac{a-1}{2}} = +1$.

Teorema VI. Se $b^{\frac{a-1}{2}} = -1$, segue que $a^{\frac{b-1}{2}} = -1$.

Teorema VII. Se $b^{\frac{B-1}{2}} = +1$, segue que $B^{\frac{b-1}{2}} = -1$.

Teorema VIII. Se $b^{\frac{B-1}{2}} = -1$, segue que $B^{\frac{b-1}{2}} = 1$.

(LEGENDRE, 1785, p. 516-7, tradução nossa.)

Nesse artigo, Legendre utilizou a notação $N^{\frac{c-1}{2}}$ para o resíduo quadrado de c , para expressar o resto da divisão de $N^{\frac{c-1}{2}}$ por c , resto que ele afirmou que é igual $+1$ ou -1 , que é uma consequência do Pequeno Teorema de Fermat. Nas edições posteriores do *Ensaio* de 1798, (p. 214); de 1808, (p. 198) e de 1830, (Vol. I, p. 231), a notação $N^{\frac{c-1}{2}}$ é substituída pela notação resumida $\left(\frac{N}{c}\right)$.

Com o objetivo de mostrar a evolução dessa lei nos diversos trabalhos de Legendre em Teoria dos Números, como primeira amostragem, foi escolhida a demonstração dos Teoremas I a II (LEGENDRE, 1785, p. 518, tradução nossa), em que o Teorema II é uma consequência direta do Teorema I:

DEMONSTRAÇÃO. A equação $Ax^2 + ay^2 = bz^2$, é impossível e mais geralmente a equação

$(4m+1)x^2 + (4n+1)y^2 = (4p+1)z^2$, pois o primeiro membro é sempre uma das formas $4n+1$ e $4n+2$, desde que o segundo membro seja somente das formas $4n$ ou $4n-1$. Mas segundo o teorema do artigo III³⁴, sabemos que a equação $Ax^2 + ay^2 = bz^2$ será solúvel, se pudermos satisfazer às três condições

$$\frac{A-1}{a^{\frac{a-1}{2}}} \frac{A-1}{b^{\frac{b-1}{2}}} = 1, \quad \frac{a-1}{A^{\frac{a-1}{2}}} \frac{a-1}{b^{\frac{b-1}{2}}} = 1, \quad \frac{b-1}{A^{\frac{b-1}{2}}} \frac{b-1}{a^{\frac{a-1}{2}}} = -1.$$

É necessário que essas três condições sejam compatíveis entre si. Suponhamos $A = 1$. A primeira condição é satisfeita.

As outras duas serão

$$\frac{a-1}{b^{\frac{a-1}{2}}} = 1, \quad \frac{b-1}{a^{\frac{b-1}{2}}} = -1.$$

Portanto, uma vez que elas não ocorrem simultaneamente,

$$1^\circ \text{ Se } \frac{a-1}{b^{\frac{a-1}{2}}} = 1 \text{ então } \frac{b-1}{a^{\frac{b-1}{2}}} = 1$$

$$2^\circ \text{ Se } \frac{b-1}{a^{\frac{b-1}{2}}} = -1, \quad \frac{a-1}{b^{\frac{a-1}{2}}} = -1.$$

Por outro lado, vimos que essa segunda proposição é uma consequência da primeira.

Nesse trabalho Legendre não utilizou a expressão resíduos quadráticos quando se referiu aos divisores primos p de $x^2 - a^2y$, com x e y primos entre si e a não divisível por p . Embora não se encontrem explícitas, as definições são equivalentes, uma vez que p é divisor de $x^2 - a^2y$ se, e somente se, a é resíduo quadrático de p .

³⁴ Nota nossa: “Sendo proposta a equação $ax^2 + by^2 = cz^2$, onde os coeficientes a, b, c , são positivos, primos entre si e sem fatores quadrados, esta equação será solúvel, se pudermos encontrar três inteiros λ, μ, ν tais que as três quantidades $\frac{a\lambda^2 + b}{c}, \frac{c\mu^2 - b}{a}, \frac{c\nu^2 - a}{b}$ sejam números inteiros” (LEGENDRE, 1785, p. 513, tradução nossa).

A demonstração de Legendre é longa e perdura por seis páginas, onde ele utilizou o método da redução ao absurdo. Também se apoiou em seu artigo anterior, “Um teorema sobre a possibilidade das equações indeterminadas do segundo grau”, e em uma conjectura que na época ele afirmou ser fácil de determinar, o Teorema da progressão aritmética ou progressão de Bachet, a saber, “Toda progressão aritmética cujo primeiro termo e a razão são primos entre si contém uma infinidade de números primos”. Embora o enunciado seja simples, ela não era muito fácil de determinar, o que somente foi realizado pelo matemático alemão Peter Gustav Lejeune-Dirichlet em 1837. O resultado é consequência de um teorema demonstrado por Lejeune-Dirichlet sobre a distribuição de números primos em progressões aritméticas. Esse assunto será tratado com maiores detalhes mais adiante.

Destacaremos alguns fatores que classificam a demonstração de Legendre como incompleta e redundante. Em primeiro lugar, ela é fundamentada numa propriedade de uma progressão aritmética particular que somente pôde ser demonstrada por Lejeune-Dirichlet com base na própria lei de reciprocidade e na teoria de grandezas contínuas. Em segundo lugar, Legendre não justificou a escolha do número primo c como sendo uma das formas³⁵ $4n + 1$ ou $4n + 3$. Por último, Legendre supôs algumas condições que lhe são devidamente convenientes (provavelmente deduzidas por tentativas?), a exemplo do que ocorreu na demonstração dos Teoremas I e II acima, quando ele supôs $A = 1$, para compatibilizar as três condições $a^{\frac{A-1}{2}} b^{\frac{A-1}{2}} = 1$, $A^{\frac{a-1}{2}} b^{\frac{a-1}{2}} = 1$, $A^{\frac{b-1}{2}} a^{\frac{b-1}{2}} = -1$, e na demonstração do teorema IV, quando ele diz: “[...] Assim supondo $A^{\frac{a-1}{2}} = 1$, segue que $a^{\frac{A-1}{2}} = 1$ ” (LEGENDRE, 1785, p. 520, tradução nossa). Isso perdurou nas demonstrações dos demais teoremas, conforme (LEGENDRE, 1785, p. 518-523).

Em seguida, o autor apresentou uma segunda redação da lei:

Dados dois números primos c e ∂ , as expressões $c^{\frac{\partial-1}{2}}$, $\partial^{\frac{c-1}{2}}$ serão de mesmos sinais se ambos não forem da forma $4n - 1$. Em outros casos elas sempre serão de mesmo sinal. Por outro lado elas somente podem ser $+1$ ou -1 . (LEGENDRE, 1785, p. 517, tradução nossa.)

³⁵ O que somente foi realizado nos trabalhos de 1808 e 1830.

A redação anterior dos oito teoremas e a nova redação resumida são compatíveis entre si, mas essa última permite uma melhor compreensão da generalização da lei de reciprocidade quadrática.

Nas edições do *Ensaio* de 1798, 1808, 1830, Legendre utilizou a notação $\left(\frac{N}{C}\right) = N^{\frac{c-1}{2}}$, no terceiro texto da lei:

Dados dois números primos ímpares m e n , se ambos não forem da forma $4x + 3$, sempre teremos $\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)$, e se eles forem da forma $4x + 3$, $\left(\frac{n}{m}\right) = -\left(\frac{m}{n}\right)$.

As duas as fórmulas satisfazem o caso geral $\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)$, onde as expressões $\left(\frac{m}{n}\right)$, $\left(\frac{n}{m}\right)$, são, respectivamente o resto da divisão de $m^{\frac{n-1}{2}}$ por n

e o resto de da divisão de $n^{\frac{m-1}{2}}$ por m . Esses restos somente podem ser $+1$ ou -1 . (LEGENDRE, 1798, p. 214; 1808, p. 198; 1830, Vol. I., p. 230, tradução nossa.)

Baseado neste texto, Beaumont tentou explicar a lei, no seu elogio póstumo a Legendre em 1864:

Esse teorema, mais fácil de ser expresso em linguagem algébrica do que em linguagem comum, quer dizer que, dados dois números primos m e n , se elevarmos m à potência n menos 1 dividido por 2 e se dividirmos o resultado por n , depois se elevarmos n à potência m menos 1 dividido por 2 e se dividirmos o resultado por m , os restos dessas duas divisões sempre podem ser expressos por $+1$ ou -1 se ambos possuírem o mesmo sinal, ou sinais contrários, conforme for o caso. (BEAUMONT, 1864, p. LXXI, tradução nossa.)

Tais palavras concisas de Beaumont (1864) sobre a lei de reciprocidade denotam uma não compreensão desta tão importante relação entre dois números primos ímpares, que como veremos, teve importantes desdobramentos nos estudos sobre os números primos no século XIX.

A exemplo da demonstração de 1785, a demonstração dessa nova versão da lei de reciprocidade quadrática apresentada nas três edições do *Ensaio sobre a Teoria dos Números* (1798, 1808, 1830) ainda é incompleta. Trata-se do caso em que o número m é restrito a um

dos números primos³⁶ $4x + 3$. Legendre conjecturou que, se m é um número primo dessa forma, sempre é possível encontrar um outro número primo n da forma $4x + 1$ tal que $\left(\frac{m}{n}\right) = -1$ (LEGENDRE, 1830, Vol. II, Segunda parte, parágrafo VI, p. 214-221). A demonstração da terceira versão da lei será abordada com maiores detalhes mais adiante no presente trabalho.

Segundo Lemmermeyer (2000, p. 4) Euler também conhecia a lei de reciprocidade quando anunciou um primeiro teorema equivalente em *Theoremata circa divisores numerorum in hac forma $pa^2 \pm qb^2$* (1744-6) dos *Comentários* da Academia de São Petersburgo. Mas Euler não soube demonstrá-lo rigorosamente, fornecendo apenas uma prova por exemplificação. Um texto póstumo revela que Euler investigou sobre a lei de reciprocidade quadrática, cúbica e de potências superiores.

Dessa feita, percebemos que assim como Euler, Legendre também nunca conseguiu superar a dificuldade de completar a demonstração da lei de reciprocidade, uma vez que a redação acima é a sua última versão da lei, que por sinal, ainda é incompleta, pois não ele conseguiu demonstrar a existência dos números primos em questão sem o auxílio da própria lei, o que somente foi obtido por Lejeune-Dirichlet em 1839. Gauss também a demonstrou de oito formas diferentes, sendo que as duas últimas não foram publicadas na época e só se tornaram públicas após a morte do matemático alemão.

Legendre finaliza os estudos do quarto artigo de 1785 apresentando algumas aplicações da lei de reciprocidade aos divisores primos da fórmula $t^2 + au^2$, e explicando as quatro tabelas apresentadas nas últimas páginas do artigo que contêm, respectivamente, os divisores $4n \pm 1$, da fórmula $t^2 + au^2$, para os casos em que a é um número primo do tipo $8n \pm 1$ ou $8n \pm 3$.

Como aplicações diretas dos Teoremas VII e IX serão apresentados, respectivamente, o Teorema XII e uma explicação da Tabela I sobre o caso particular dos divisores primos de $t^2 + 5u^2$:

TEOREMA XII. “Todo número primo c da forma $2bx + \chi$, onde χ satisfaz à equação $\chi^{\frac{b-1}{2}} = 1$, será divisor da fórmula $t^2 + bu^2$ e como consequência c terá uma das formas que convêm aos divisores dessa fórmula.”

³⁶ Nessas edições ele substituiu a expressão $4x - 1$ do trabalho de 1785 pela sua equivalente $4x + 3$.

Pois teremos $c^{\frac{b-1}{2}} = 1$. 1º Seja $c = A$ ou da forma $4n + 1$, uma vez que $A^{\frac{b-1}{2}} = 1$.

Pelo Teorema V temos que $b^{\frac{A-1}{2}} = 1$. Portanto A será divisor de $t^2 + bu^2$. 2º Seja $c = B$. Uma vez que $B^{\frac{b-1}{2}} = 1$, pelo Teorema VII temos que $b^{\frac{B-1}{2}} = -1$. Logo B será divisor de $t^2 + bu^2$. (LEGENDRE, 1785, p. 527-8, tradução nossa.)

TABELA I. Divisores de $t^2 + 5u^2$. Suponhamos que esses divisores sejam ímpares. Se o dividirmos em duas classes, denotaremos P os da forma $4n + 1$ e Q os da forma $4n - 1$, não só nesse exemplo como nos demais. Sendo $py^2 + 2qyz + rz^2$ a fórmula conveniente a esses divisores³⁷, é necessário determinar p, q, r de acordo com a equação $pr - q^2 = 5$, com a condição de que zq não seja maior do que p e r . Rapidamente veremos que esse resultado só poderá ser $y^2 + 5z^2$ e $2y^2 + 2yz + 3z^2$. O primeiro termo representa os números da forma $4n + 1$. O segundo, os números da forma $4n - 1$. Assim nesse exemplo $P = y^2 + 5z^2$ e $Q = y^2 + 2yz + 3z^2$. O segundo termo não é do mesmo tipo do primeiro, mas se o multiplicarmos por 2, obteremos $2Q = (2y + z)^2 + 5z^2$. Fazendo uma mudança de indeterminada temos que $2Q = y^2 + 5z^2$. Em geral, se o divisor $M = py^2 + 2qyz + rz^2$ não é da forma $y^2 + az^2$ sempre podemos multiplicar por p para obter $Mp = (py + qz)^2 + az^2$, ou simplesmente $Mp = y^2 + az^2$. Uma vez que nesse caso, P somente pode ser da forma $y^2 + az^2$, onde $p^{\frac{a-1}{2}} = y^{a-1} = 1$, conforme Teorema IX³⁸. Pelo mesmo

teorema, como $2Q = y^2 + az^2$ e em geral para todos os números da Tabela I, $2^{\frac{A-1}{2}}$

$= -1$, então $Q^{\frac{a-1}{2}} = -1$. Para encontrar a forma dos números P em relação aos

múltiplos de $4a$, é necessário fazer $P = 4ax + m$ e resolver a equação $m^{\frac{a-1}{2}} = 1$. Nesse caso é o mesmo que resolver $m^2 = 1$, o que resultou que $m = \pm 1$. Esse dois valores reduzidos à forma $4h + 1$ são $m = 1$ e $m = 9$. Portanto o divisor P que já é da forma $y^2 + 5z^2$ deve ser uma das formas $20x + 1$ e $20x + 9$.

Mas resultado principal desse resultado, segundo o Teorema X, é que todos os números primos das formas $20x + 1$ e $20x + 9$, são divisores de $t^2 + 5u^2$ e

³⁷ Nota nossa: Esse resultado é de Lagrange (1773).

³⁸ Nota nossa: Teorema IX: “Sejam P e Q, respectivamente, divisores $4n + 1$ e $4n - 1$ de $t^2 + au^2$. Então pelos

Teoremas II e III, $P^{\frac{a-1}{2}} = 1$ e $Q^{\frac{a-1}{2}} = -1$, quaisquer que sejam P e Q, simples ou compostos e t^2 e au^2 sejam primos entre si” (LEGENDRE, 1785, p. 524-5, tradução nossa).

por consequência, também da forma $y^2 + 5z^2$. Se semelhantemente representarmos os divisores Q pela fórmula $= 4ax + n$ determinariamos n por $n^2 = -1$. Ou por um modo mais simples, as formas P imediatamente fornecem os valores de Q, a saber $20x + 3$ e $20x + 7$. Portanto pelo Teorema X todo número primo de uma dessas formas será divisor de $t^2 + 5u^2$ e por conseguinte da forma $2y^2 + 2yz + 5z^2$. (LEGENDRE, 1785, p. 528-530, tradução nossa.)

Conforme observação do autor, esse exemplo, que é uma aplicação direta da lei de reciprocidade, é demonstrado com resultados de Lagrange sobre representação de números primos por formas quadráticas binárias nos *Mémoires de l'Académie de Berlin* de 1773, a saber, “Um divisor da fórmula³⁹ $t^2 + au^2$ qualquer que seja a , é sempre da forma $py^2 + 2qyz + rz^2$, onde y e z são duas indeterminadas desde que p, q, r satisfaçam a equação $pr - q^2 = a$ e zq não seja maior do que p e r ”. Ainda ressaltou que as duas primeiras formas $20x + 1$ e $20x + 9$ foram obtidas por Lagrange por meio de um método particular, mas ele não era conveniente para determinar as duas outras formas $20x + 3$ e $20x + 7$. Assim, Legendre desenvolveu outro método, que segundo ele, “é mais eficiente” (LEGENDRE, 1785, p. 530, tradução nossa).

2.2.1.4.2 Divisores primos de formas quadráticas: Um texto de Lagrange

O resultado, ao qual Legendre se referiu no texto anterior, é sobre a representação dos números inteiros por formas binárias, teoria desenvolvida por Euler e especialmente por Gauss.

Mas foi Lagrange quem descobriu que se um número primo da forma $4n + 1$ é representado por uma forma quadrática binária $ax^2 + bxy + cy^2$, ele pode ser representado por outras formas ou fórmulas equivalentes, por meio de mudanças de variáveis, do tipo $x = \alpha x' + \beta y', y = Y x' + \delta y'$, onde α, β, Y, δ são inteiros, apresentado no Teorema III⁴⁰ do artigo “Encontrar todas as formas possíveis dos divisores dos números da forma $t^2 \pm$

³⁹ Lagrange e Legendre empregam indistintamente os termos *formas* e *fórmulas* para se referirem à representação dos números primos P e as formas que são divisíveis por P.

⁴⁰ São demonstrados mais outros dois teoremas que, segundo o autor, são de Fermat e foram demonstrados por Euler nos Novos Comentários de Petersburgo (1736). Tratam-se de problemas de partição e da determinação do número de decomposições possíveis de um número como somas de m termos (LAGRANGE, 1773, p. 714).

au^2 , onde a é um número inteiro qualquer e t e u são indeterminadas e primos entre si”, conforme o trabalho publicado em Berlim (LAGRANGE, 1773, p. 269-271).

O teorema é fruto dos estudos de Lagrange sobre divisores dos números que são representados por formas quadráticas do tipo $Bt^2 + Ctu + Du^2$ onde t e u são primos entre si (LAGRANGE, 1773, p. 266-269). Segundo o referido autor, tais divisores podem ser representados por formas do mesmo grau, $Py^2 + Qyz + Rz^2$, sob as condições específicas de que y e z sejam primos entre si, Q não seja maior do que P e R e $4BD - C^2 = 4PR - Q^2 = K - C^2$. Como $K - C^2$ é sempre não nulo, Lagrange mostrou que se $K - C^2$ é positivo, Q será menor ou igual a $\sqrt{\left(\frac{4BD - C^2}{3}\right)}$ e, se for negativo, Q será menor ou igual a $\sqrt{\left(\frac{4BD - C^2}{5}\right)}$.

Vale ressaltar que sem essas condições todo número poderia dividir a forma $Bt^2 + Ctu + Du^2$, e não haveria, por consequência, nenhuma fórmula particular que caracterizasse os divisores dessa forma.

Com base nesses estudos preliminares, para determinar os divisores da forma $t^2 + au^2$, Lagrange analisou o caso em que $B = 1$, $C = 0$ e $D = a$ com $K = 4BD = 4a$. Ao provar que todos os divisores dessa forma estão necessariamente contidos na fórmula $y^2 + z^2$, Lagrange demonstrou uma importante propriedade da Teoria dos Números: “Se um número é a soma de dois quadrados, seus divisores também são somas de dois quadrados”. Ao examinar a natureza dos divisores dessa forma, Lagrange demonstrou que um divisor de $t^2 \pm au^2$, qualquer que seja a , é sempre da forma $py^2 \pm 2qyz + rz^2$, onde y e z são duas indeterminadas desde que p, q, r satisfaçam à equação $pr - q^2 = a$ e zq não seja maior do que p e r . Fazendo as devidas adaptações, ele deduziu que o número $K = 4a$ terá o mesmo sinal de a . Substituindo os valores convenientes de $B = 1$, $C = 0$ e $D = \pm a$ em $4BD - C^2 = 4PR - Q^2 = K - C^2$, são estabelecidos os limites para os valores de q , a saber, se $B = 1$, $C = 0$ e $D = a$ então q não é maior do que $\sqrt{\frac{a}{3}}$ e, se $B = 1$, $C = 0$ e $D = -a$, então q não pode ser maior do que $\sqrt{\frac{a}{5}}$.

Assim, após estimar os valores de q , o método de Lagrange permite descobrir os valores de p e r através do produto pr , uma vez que $pr - q^2 = a$ e zq não pode ser maior do

que p e r . Isso é posto em prática através dos exemplos para determinar os divisores de $t^2 + au^2$ com a variando de 1 a 12 (LAGRANGE, 1773, p. 707-713).

Para estabelecer diferenças entre essa demonstração de Lagrange e a de Legendre de 1785, será exibida a solução para os divisores de $t^2 + 5u^2$, como aponta Lagrange (1773, p. 276, tradução nossa):

Seja $a = 5$ e portanto q não pode ser maior do que $\sqrt{\frac{5}{3}}$. Logo $q = 0$ ou $q = 1$.
Fazendo $q = 0$ então $pr = 5$, $p = 1$, $r = 5$ e fazendo $q = 1$ então $pr = 6$, $p = 2$, $r = 3$.
Portanto os divisores dos números da forma $t^2 + 5u^2$ são necessariamente dessas duas formas $y^2 + 5z^2$, $2y^2 + 2yz + 3z^2$.
De maneira que eles próprios ou os seus dobros são sempre da forma $t^2 + 5u^2$.

Comparando-se as demonstrações de Legendre e de Lagrange, a demonstração de Legendre é notadamente mais abrangente, uma vez que por meio da passagem “sempre podemos multiplicar por p para obter $Mp = (py + qz)^2 + az^2$ ” (LEGENDRE, 1785, p. 528, tradução nossa), Legendre mostrou que as formas $M = py^2 + 2qyz + rz^2$ e $y^2 + az^2$ representam, respectivamente, os divisores primos da formas $4n + 3$ e $4n + 1$. Lagrange demonstrou a proposição somente para os divisores primos da forma $4n + 1$. Também apontamos que, por meio da passagem

é necessário fazer⁴¹ $P = 4ax + m$ e resolver a equação $\frac{a-1}{m^2} = 1$. Nesse caso é o mesmo que resolver $m^2 = 1$, o que resultou que $m = \pm 1$. Esses dois valores reduzidos à forma $4h + 1$ são $m = 1$ e $m = 9$. Portanto, o divisor P que já possui a forma quadrática $y^2 + 5z^2$ deve ser uma das formas $20x + 1$ e $20x + 9$ (LEGENDRE, 1785, p. 529, tradução nossa),

Legendre complementou a demonstração de Lagrange no caso particular da forma $t^2 + 5u^2$, pois além de determinar os divisores quadráticos $y^2 + 5z^2$ e $2y^2 + 2yz + 3z^2$, ele determinou seus divisores lineares $20x + 1$ e $20x + 9$, associados aos números do tipo $4n + 1$ da referida forma. O engenhoso procedimento que o permitiu obter tais resultados foi fundamentado no Teorema X⁴², fruto das proposições de Lagrange e da sua lei de reciprocidade (LEGENDRE, 1785, p. 528-9).

⁴¹ Nota nossa: Uma explicação para essa fórmula é dada posteriormente por Legendre no art. XXIII da segunda edição do *Ensaio* de 1808.

⁴² O Teorema X: “Todo número primo A da forma $4ax + m$, onde m é um dos valores que satisfazem à equação $\frac{a-1}{m^2} = 1$ será divisor da fórmula $t^2 + au^2$ e por consequência de forma $py^2 + 2qyz + rz^2$, onde y e z são duas indeterminadas desde que p , q , r satisfaçam à equação $pr - q^2 = a$ e zq não seja maior do que p e r ”

Dessa feita, com um raciocínio análogo, as demais formas $20x + 3$ e $20x + 7$, são encontradas em relação aos números primos da forma $4n + 3$.

As demais aplicações se dividem em proposições sobre divisores $8n \pm 1$ de formas quadráticas, sobre as representações de números primos que podem ser escritos como soma de três quadrados e explicações das tabelas apresentadas no fim do artigo.

Além disso, de uma maneira geral, todos os casos dos divisores primos das tabelas de Legendre em relação aos números $4n + 1$ são novos, exceto para os divisores de $t^2 + 5u^2$, $t^2 + 3u^2$ e $t^2 + 7u^2$ que também foram estudados por Lagrange em 1773. Tais tabelas também são encontradas nas edições do *Ensaio* de 1798, 1808 e na terceira edição de 1830 com o título de *Teoria dos Números*, apenas com uma diferença na condição do número a : que ele não seja divisível por um quadrado.

Nas edições do *Ensaio* de 1798, 1808 e 1830 esses resultados foram reformulados e estudados por Legendre de forma mais ampla nos dois artigos: “Estudo da forma conveniente para os divisores da fórmula $t^2 + au^2$ ” e “Aplicação da teoria anterior às diversas fórmulas tais como $t^2 + u^2$, $t^2 + 2u^2$, $t^2 - 2u^2$, etc. e suas consequências nas fórmulas gerais sobre números primos” (LEGENDRE, 1798, p. 187-197; 1808, p. 172-181; 1830, Vol. I, p. 200-210, tradução nossa), onde ele suprimiu os exemplos numéricos da edição de 1785.

2.2.2 *Ensaio sobre a Teoria dos Números* (1798)

No intuito de reagrupar os variados estudos sobre Teoria dos Números, Legendre publicou em 1798 seu segundo trabalho nessa área, *Ensaio sobre a Teoria dos Números* (Figura 13). A obra é a primeira de três edições, cujo conteúdo possui 500 páginas com 396 artigos, e oito complementações aos artigos X, XXVI, XXVIII da Introdução; ao parágrafo XII da Primeira parte; ao artigo 230 da Segunda parte; ao artigo 273 e os Teoremas X, XVI da Terceira parte, além de 56 páginas contendo doze tabelas, onde, nove, são sobre os divisores de formas quadráticas.

(LEGENDRE, 1785, p. 525, tradução nossa).



Figura 13: Fac-símile da capa da primeira edição de Ensaio sobre a Teoria dos Números

Fonte: *apud* LEGENDRE, 1798

Esse trabalho, em cujo prefácio Legendre atribuiu o modesto epíteto do ‘*Ensaio*’, contém os três artigos I, III e IV de *Estudos sobre a Análise Indeterminada* (1785) e variados assuntos lhe foram acrescentados com os trabalhos de Euclides, Diofanto, Viète, Bachet, Fermat bem como os de Euler e Lagrange. Até então o que existiam eram trabalhos isolados desses ilustres matemáticos, conforme trechos do prefácio da referida obra:

[...]Agora me propus publicar um resultado num trabalho particular. [...] É por isso que me propus a compor a obra que ofereço nesse momento ao público. Eu não a ofereço como um tratado completo, mas simplesmente como um *Ensaio* que proporcionará um panorama do atual estado da ciência...

[...]A julgarmos pelos primeiros fragmentos que restaram, onde alguns foram mencionados por Euclides, parece-nos que os antigos filósofos fizeram grandes estudos sobre as propriedades dos números. Mas lhes faltaram dois instrumentos para aprofundar essa ciência: a arte da numeração que serve para expressar os números com muita facilidade, e a Álgebra que generaliza os resultados e que igualmente opera com os conhecidos e desconhecidos. A invenção de uma ou de outra dessas artes muito influenciou sobre o progresso da ciência dos números. Assim vemos que a obra de Diofanto de Alexandria, o mais antigo autor da Álgebra que conhecemos, está inteiramente dedicada aos números e contém questões difíceis, resolvidas com muita propriedade e sagacidade.

Após Diofanto até os tempos de Viète e Bachet⁴³, os matemáticos continuaram a se ocupar dos números, mas sem muito sucesso e sem fazer avançar perceptivelmente a ciência.

Viète contribuiu para o aperfeiçoamento da Álgebra ao resolver muitos problemas difíceis sobre números. Bachet em sua obra *Problèmes plaisans et délectables*⁴⁴ resolveu a equação indeterminada do primeiro grau por um método geral e muito engenhoso. Devemos a esse sábio um excelente comentário sobre Diofanto, que mais tarde foi fonte de inspiração para as notas escritas por Fermat às margens desses livros.

Fermat, um matemático que cultivou com grande sucesso a Ciência dos Números, cujos trabalhos abriram passagens para novos caminhos, é o autor de um grande número de teoremas interessantes, mais ele os deixou quase todos sem demonstração. Era o espírito da época propor problemas uns aos outros. Escondia-se com muita frequência seu método, a fim de reservar o triunfo para si próprio ou para a sua nação, pois havia rivalidade entre os geômetras franceses e ingleses. Isso resultou que a maior parte das demonstrações de Fermat foi perdida, e o pouco que nos restou nos faz lamentar muito mais essa perda do que por aquelas que restaram.

De Fermat a Euler, os geômetras inteiramente dedicados à descoberta ou à aplicação de novos cálculos, não se ocuparam da Teoria dos Números. Euler foi o primeiro que se ateve a essa parte. Os vários *Mémoires* que ele publicou sobre o assunto nos *Comentários de Petersburgo*, e em outras obras, provam o quanto ele colocou o coração para fazer na ciência dos números os mesmos progressos que a maioria das outras partes da Matemática lhe foi devedora. Acredita-se também que Euler teve um gosto particular para esse tipo de pesquisa, em que ele se dedicou com uma espécie de paixão, como acontece a quase todos que se ocupa desse objeto. Quaisquer que foram seus sábios estudos, eles o conduziram a determinar dois dos principais teoremas de Fermat, a saber:

1º que se a é um número primo e x um número qualquer não divisível por a , a fórmula $x^{a-1} - 1$ sempre é divisível por a ; 2º que todo número primo da forma $4n + 1$ é a soma de dois quadrados.

Muitas descobertas importantes se destacam nos *Mémoires* de Euler. Neles encontramos a teoria de divisores da quantidade $a^n \pm b^n$; o tratado sobre *Partitione numerorum* que também está inserido em sua *Introdução à Análise Infinita*, o uso de fatores imaginários e irracionais na resolução de equações indeterminadas do segundo grau, uma vez conhecida uma solução particular, a demonstração de muitos teoremas sobre potências de números, particularmente as suas proposições negativas, avançadas por Fermat, no qual a soma ou a diferença de dois cubos não pode ser um cubo, e que a soma e a diferença de dois bi quadrados não pode ser um quadrado. Enfim, encontramos nesses escritos uma grande quantidade de questões indeterminadas resolvidas por engenhosos artifícios analíticos. (LEGENDRE, 1798, p. v-x, tradução nossa.)

Podemos observar no prefácio do *Ensaio* (1798), cujo texto original se encontra parcialmente reproduzido na figura 14 a seguir, Legendre declarou que, embora eminentes matemáticos tivessem contribuído para a divulgação da Teoria dos Números, ele foi o primeiro a avançar

⁴³Matemático, filósofo e poeta francês do século XVII, conhecido como Bachet de Méziriac, foi um dos primeiros especialistas europeus em Diofanto.

⁴⁴*Problemas Divertidos e Saborosos*; livro clássico de problemas recreativos, truques aritméticos e quebra-cabeças matemáticos.

la, pois sua obra era uma conjunção não somente de seus próprios trabalhos, mas de praticamente tudo que existia na época sobre a ciência.

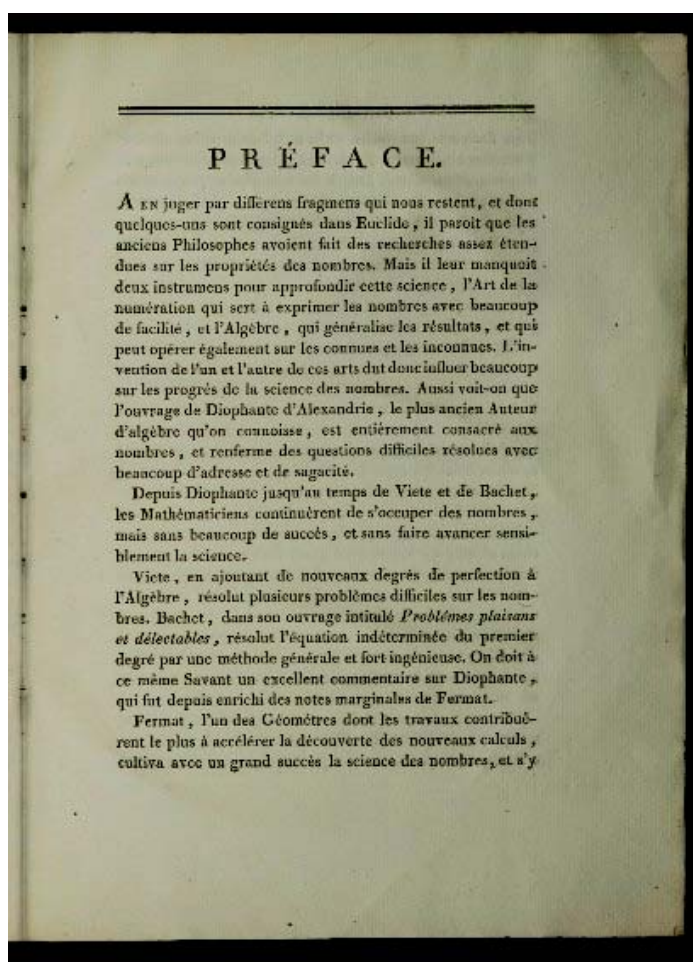


Figura 14: Fac-símile da primeira página do prefácio da Edição do *Ensaio sobre a Teoria dos Números* (1798)

Fonte: *apud* LEGENDRE, 1798)

A maioria dos conteúdos da obra de 1798 foi integrada às demais edições do *Ensaio*, embora alguns conteúdos tenham sido totalmente reformulados e outros remanejados de lugar ou retirados.

Nesse momento, destacaremos alguns assuntos dessa obra que não foram reproduzidos nas demais edições do *Ensaio*, a exemplo dos artigos XX a XXX, da tabela que contém os primeiros 1 000 números primos e as tabelas IX e XI sobre divisores de formas quadráticas.

Os artigos XX a XXX (p. 12-20) estão apresentados no final da Introdução da obra e têm por objetivo encontrar quantos números primos há em n termos sucessivos de uma progressão aritmética de razão constante do tipo $\dots, -2A + B, -A + B, B, A + B, 2A + B, \dots$ cujo termo geral é $Ax + B$, A e B primos entre si e n é um número grande. Primeiramente, Legendre afirmou que se θ for um número primo não divisível por A , sempre é possível encontrar infinitos valores de x tais que $\frac{Ax+B}{\theta}$ seja inteiro. De fato, como A não é divisível por θ , ao dividir $Ax + B$ por θ , os restos possíveis são $0, 1, 2, \dots, \theta - 1$, que são distintos e menores do que θ . Assim, se determinarmos x de maneira que $Ax + B$ seja divisível por θ , geralmente o valor de x será da forma $x = \alpha + \theta z$, onde os termos divisíveis por θ na progressão proposta formam eles próprios a progressão aritmética $\alpha, \alpha + \theta, \alpha + 2\theta, \dots$, quando $z = 0, 1, 2, \dots$ e assim, dos θ termos consecutivos da progressão acima, sempre existe um que será divisível por θ , o qual pertencerá a uma sequência de outros termos igualmente divisíveis por θ , e distantes entre si do intervalo θ .

Ao considerar $A + B$ como o primeiro termo da sequência, os n termos consecutivos, dessa progressão, Legendre concluiu que os $n\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)$ termos restantes não serão divisíveis por θ . Posto isto, ele deduziu por indução que se $\theta, \lambda, \mu, \nu, \dots$ for uma sequência aleatória de números primos não divisores de A , a fórmula $n\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)$ etc. representará a quantidade de termos da sequência $A + B, 2A + B, A + B, 3A + B, \dots, nA + B$ que não são divisíveis por nenhum dos números primos $\theta, \lambda, \mu, \nu, \dots$.

De acordo com a fórmula anterior, considerando a sequência natural dos números primos $3, 5, 7, \dots, \omega$, onde ω é o maior deles contido em $\sqrt{(nA+B)}$ (excluídos os divisores de A), Legendre criou o produto $n \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \left(\frac{\omega-1}{\omega}\right)$ e concluiu que, se $A + B$ for maior do que $\sqrt{(nA+B)}$, essa fórmula é a ideal para estimar a quantidade de números primos na progressão $A + B, 2A + B, A + B, 3A + B, \dots, nA + B$ e se isso não ocorrer, será necessário acrescentar à fórmula a quantidade de números primos menores do que $\sqrt{(nA+B)}$ pertencentes à sequência acima.

Em seguida, Legendre aplicou a fórmula em alguns casos, a exemplo de como encontrar quantos números primos existem nos 1 000 primeiros termos da sequência 49, 109, 19, 229, 289, etc., cujo termo geral é $60x - 11$. Determinando a $\sqrt{59989} \cong 244$, obtém-se que 241 é o maior primo contido nessa raiz quadrada. Os números 3 e 5 foram excluídos por serem divisores de 60 e assim utilizando-se os primos de 7 a 241 na fórmula anterior, foi obtida a expressão $1000 \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdots \frac{240}{241} \right) \cong 377$, que acrescida aos dois números primos 109 e 229 da sequência menores do que 241, resultou que existem aproximadamente 380 números primos na sequência proposta menores do que 1000 (artigos XXV a XXVII). Também encontramos uma nova aplicação na apresentação de uma tabela contendo valores sucessivos do produto $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \left(\frac{\omega-1}{\omega} \right)$, onde ω é um número primo variando de 3 a 353 (artigo XXVI) e por último, na determinação de quantos números primos existem menores do que 100 000. Sem ser explícito, primeiro ele considerou os 50 000 primeiros termos da sequência 1, 3, 5,..., 99999. Como 313 é o menor primo contido em $\sqrt{99999}$ então para $\omega = 313$, por meio da tabela foi obtido o produto $500\ 000 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{312}{313} = 50\ 000 \times 0,192\ 986$ que forneceu como primeira estimativa 9 649 primos menores do que 100 000. Considerando que existem 66 números primos da sequência menores do que $\sqrt{99999}$, esses foram acrescidos à quantidade anterior, resultando que existem aproximadamente 9 715 números primos menores do que 100 000 conforme artigos XXVIII a XXX (LEGENDRE, 1798, p. 12-20).

Numa nota de rodapé, Legendre conjecturou outra fórmula algébrica capaz de fornecer a quantidade de números primos em uma sequência de números naturais argumentando que:

Se existem b números primos na progressão natural 1, 2, 3, 4, 5 , ... , a é extraordinário observar que segundo os diversos valores de a temos aproximadamente as seguintes relações:

$$a = 10^1, \quad 10^2, \quad 10^3, \quad 10^4, \quad 10^5, \dots$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{10}, \dots$$

Onde parece que, em geral, podemos concluir que $b = \frac{a}{2la}$, em que la é o logaritmo decimal de a comumente apresentados em tabelas. Essa fórmula muito simples pode ser olhada como uma aproximação suficiente, pelo menos, quando a não é maior do que 1 000 000. Assim, se quisermos saber quantos números existem de 1 a 400 000, encontraremos que esse número é $\frac{400000}{2 \times 5,602}$ ou aproximadamente 35 700. Além disso, verdadeiramente a fórmula que fornece o valor de b quando a é muito grande é da forma $b = \frac{a}{A \log a + B}$, onde A e B são constantes e $\log a$ o logaritmo hiperbólico. A determinação exata desses coeficientes é um problema curioso e digno do exercício da sagacidade dos analistas. (LEGENDRE, 1798, p. 18-9, tradução nossa.)

As propriedades de logaritmos decimais que transformam multiplicações em adições foram fundamentais para a criação da fórmula $\frac{a}{2la}$ de Legendre para estimar quantos números primos existem em uma progressão aritmética. Nas edições posteriores do *Ensaio* essa fórmula foi aperfeiçoada para a expressão $\frac{a}{\log(a) - 1,08366}$, onde o $\log(a)$ é o logaritmo hiperbólico de a .

Vale observar que, no final da Introdução da obra, Legendre apresentou uma tabela contendo 170 números primos menores do que 1 000, incluindo o número 1.

Contudo, registramos que essa tabela contém um erro, uma vez que o número $527 = 13 \times 17$ é identificado como número primo. Portanto, de fato, existem 169 números primos menores do que 1 000, incluído o número 1, que pela fórmula $\frac{a}{2la}$ de Legendre, essa quantidade é aproximadamente $1\,000 \times \frac{1}{6} = 167$ que é uma boa aproximação para os 168 números primos, contados a partir do número 2.

No final da terceira e última parte da obra, Legendre apresentou doze tabelas, que de forma geral, contém as expressões mais simples das fórmulas do tipo $Ly^2 + Myz + Nz^2$, os divisores quadráticos e lineares das fórmulas $t^2 \pm au^2$, $t^2 + 2au^2$ e as frações mais simples $\frac{m}{n}$ que satisfazem à equação $m^2 - an^2 = \pm 1$, a variando de 2 a 1003, para todo número a não quadrado. Dando continuidade aos estudos realizados no trabalho de 1785, Legendre construiu as referidas tabelas como teoremas particulares, que dentro de alguns limites, apresentou para cada fórmula do tipo $t^2 + cu^2$, um sistema de seus divisores quadráticos e seus divisores lineares correspondentes. Registramos que, nas edições 1808 e 1830 do *Ensaio*, a Tabela IX “Divisores quadráticos $4n + 1$ da fórmula $t^2 + cu^2$, para todas as formas ternárias de $c = 4n + 1$ com os seus respectivos valores ternários, c variando de 1 a 213” e a Tabela XI “Divisores quadráticos $8n + 1$ e $8n + 3$ da fórmula $t^2 + 2au^2$, para todas as formas ternárias de $a = 4n + 1$ com os respectivos valores ternários de $2a$, a variando de 1 a 117” foram retiradas. Além disso, o limite estabelecido para o valor de a na Tabela XII “Contendo as frações mais simples $\frac{m}{n}$ que satisfazem à equação $m^2 - an^2 = \pm 1$, a variando de 2 a 1003, para todo número a não quadrado”, foi modificado para a variando de 2 a 135.

A história da construção de tabelas com divisores remonta ao século XVII, pois segundo Bullink (2000, p. 2, tradução nossa), “por volta de 1660, Pell foi o primeiro que motivou outros matemáticos a produzirem esse tipo de tabela, que é de grande utilidade não somente para a $\frac{m}{n}$ como também para Aritmética”. Um século depois, Lambert lançou um concurso para a reconstrução e extensão da Tabela de Pell com indicações para divisores e métodos para fatoração. Essa ideia estimulou os colegas da Academia de Berlim a criarem a Aritmética transcendente do século XIX que tanto influenciou esse trabalho de Legendre e *Disquisitiones* (1801) de Gauss (BULLINK, 2000).

Segundo Legendre (1798, p. 284), Lagrange foi o primeiro matemático que realizou estudos sobre divisores de formas quadráticas binárias e ternárias, nos *Mémoires* da Academia de Berlim (1775). Porém, os métodos de Lagrange se restringiram a alguns casos dos números primos $4n + 1$. Legendre ainda enfatizou que as dificuldades do método de Lagrange somente foram sanadas com a ajuda da sua lei de reciprocidade quadrática publicada de 1785.

Embora, ao longo de toda a obra, as demonstrações dos teoremas e proposições são longas e exaustivas, em parte, devido à criação de novas terminologias e simbologias, é perceptível uma grande evolução do trabalho inicial de 1785. Na obra de 1798, o autor apresentou muitas aplicações numéricas, com riqueza de detalhes, que facilitam a compreensão do leitor aos conteúdos abordados.

2.2.3 Ensaio sobre a Teoria dos Números (1808)

A segunda edição está dividida em cinco partes, onde as três primeiras são essencialmente reproduções dos conteúdos da edição de 1798. A quarta parte da referida obra contém alguns conteúdos da parte correspondente da primeira edição que foram melhorados e oito parágrafos foram acrescentados contendo Estudos sobre a Análise Indeterminada resolução da equação $x^2 + a = 2^m y$, a terceira versão da lei de reciprocidade, uma demonstração sobre a progressão de Bachet e uma complementação de estudos sobre divisores de formas quadráticas. A quinta parte é totalmente nova, onde Legendre fornece uma inusitada apresentação da teoria de ciclotomia de Gauss.

Para evitar repetições de conteúdos, maiores detalhes serão apresentados na análise da terceira edição da obra (1830), onde serão ressaltadas as principais diferenças entre a referida obra e as duas primeiras edições do *Ensaio*.

2.2.4. Primeiro Suplemento (1816))

O Suplemento de *Ensaio sobre a Teoria dos Números* de 1816 se encontra dividido em três capítulos distribuídos em 62 páginas.

O Capítulo I, *Sobre os meios de se decompor um número qualquer em quatro quadrados, de maneira que a soma de suas raízes seja igual a um certo número* (LEGENDRE, 1816, p. 5-12), é sobre o método que consiste em satisfazer às duas equações

$$(1) \quad \begin{aligned} a &= s^2 + t^2 + u^2 + v^2, \\ b &= s + t + u + v, \end{aligned}$$

onde a e b são números dados e as quatro raízes s, t, u, v são positivas.

Primeiramente, Legendre discutiu sobre a espécie dos números a e b . Sendo $x^2 + x$ sempre um número par, é preciso que $a + b$ seja também um número par. Assim, foi mostrado que os números a e b possuem a mesma paridade.

Em seguida, foram estabelecidas algumas relações entre os quatro números s, t, u, v e a e b para limitar o valor de b . Se s, t, u, v são iguais, então $a = 4s^2$ e $b = 4s$, logo $b = \sqrt{4a}$. Se três dos quatro valores acima forem nulos, sem perda de generalidade, $a = s^2, b = s$, então $b = \sqrt{a}$. Portanto, é mostrado que, em geral, b sempre estará entre os limites $\sqrt{a}$ e $\sqrt{4a}$.

Essas não são as únicas condições para que o problema seja solúvel. A generalidade foi desenvolvida por Legendre por meio da condição deduzida da equação (1), a saber, $4a - b^2 = (s + t - u - v)^2 + (s + u - t - v)^2 + (s + v - t - u)^2$, de onde resultou que $4a - b^2$ deve ser decomposto em três quadrados e assim, uma condição necessária para a solubilidade do problema é que $4a - b^2$ não seja da forma $4^k(8n + 7)$. A solução será sempre possível com números positivos, desde que b esteja entre os limites $\sqrt{(3a-2)} - 1$ e $\sqrt{4a}$. Legendre também deduziu certos casos em que b tem que ser menor do que $\sqrt{(3a-2)} + 1$.

Os principais resultados desses estudos podem ser assim resumidos: um número a qualquer é a soma de no máximo quatro quadrados⁴⁵; todo número a que não seja da forma $4^k(8n + 7)$ é a soma de três quadrados; para ambos os casos, a soma das raízes desses quadrados é igual a um número dado.

Posto isto, Legendre aplicou a teoria em alguns casos, dentre eles, para $a = 678, b = 40$, onde são encontrados valores positivos para as indeterminadas t, u, v , que resultaram nas duas soluções para a decomposição de a e b em somas de três quadrados, a saber,

$$\left\{ \begin{array}{l} 678 = 10^2 + 23^2 + 7^2 \\ 40 = 10 + 23 + 7 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} 678 = 22^2 + 13^2 + 5^2 \\ 40 = 22 + 13 + 5. \end{array} \right.$$

⁴⁵ Em uma nota na obra de 1830, Legendre (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 215) explica que Lagrange foi o primeiro que demonstrou esse belo teorema nos *Mém.* de Berlim (1770) e que essa mesma demonstração logo depois foi simplificada por Euler em *Acta Petrop.* (1777).

O Capítulo II, “Demonstração do teorema de Fermat sobre os números poligonais e alguns teoremas análogos” (p. 13-27) tem por objetivo determinar o Teorema de Fermat sobre números poligonais e outros teoremas similares.

Para atingir o objetivo, são necessários os conhecimentos do Capítulo I, sobre a decomposição de um inteiro como somas de, no máximo, quatro quadrados e dos estudos desenvolvidos no artigo 154 da Segunda parte, parágrafo IV da edição de 1808, correspondente ao artigo 156, Vol. I, 1830, sobre decomposição de números como somas de no máximo quatro quadrados que, por sua vez, estão intrinsecamente ligados a uma propriedade geral dos números poligonais de Fermat, “Um número qualquer pode ser formado pela soma de três números triangulares, pode ser igualmente formado pela adição de quatro quadrados, de cinco números pentagonais, de seis hexagonais e assim, infinitamente”. Ou seja, um número qualquer é composto de tantos polígonos de ordem $m + 2$, quantas unidades há em $m + 2$.

Para tanto, destacaremos alguns resultados desses estudos sobre números poligonais e números que são somas de no máximo quatro quadrados.

De acordo com Legendre (1808), os números poligonais são definidos em função de sequências de números naturais. Ao considerar diferentes progressões aritméticas cujo primeiro termo é a unidade e as razões são sucessivamente 1, 2, 3, 4, etc., são formadas novas sequências, por meio de acréscimos de termos a cada progressão e desse modo essas diferentes sequências formam os chamados *números poligonais*.

A apresentação de uma tabela com as sequências formadas esclarece ao leitor não somente a noção de números poligonais, mas também, suas divisões em diferentes categorias. Segundo a tabela abaixo, a primeira sequência $1, 3, 6, \dots, \frac{n(n+1)}{2}$, que representa os números triangulares, se refere à sequência $1, 2, 3, \dots, n$, a segunda $1, 4, 9, \dots, n^2$, correspondente a $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$, representa os números quadrados, a terceira $1, 5, 12, \dots, \frac{n(3n-1)}{2}$, se refere à sequência $1, 4, 7, \dots, 3n - 2$, representa os números pentagonais, e assim sucessivamente, conforme TABELA 1:

TABELA 1: Progressões aritméticas e números poligonais

<i>Progressões aritméticas</i>	<i>Sequências de números poligonais</i>
--------------------------------	---

1, 2, 3, 4, 5..	n	1, 3, 6, 10, 5.....	$\frac{n(n+1)}{2}$
1, 3, 5, 7, 9.....	$2n - 1$	1, 4, 9, 16, 25.....	n^2
1, 4, 7, 10, 13.....	$3n - 2$	1, 5, 12, 22, 35.	$\frac{n(3n-1)}{2}$
1, 5, 9, 13, 17.....	$4n - 3$	1, 6, 15, 28, 45.....	$n(2n - 1)$
.		.	
.		.	
.		.	
1, $\alpha + 1$, $2\alpha + 1$,.....	$n\alpha - \alpha + 1$	1, $\alpha + 2$, $3\alpha + 3$	$\frac{n(n-1)}{2}\alpha + n$

Fonte: LEGENDRE, 1808

De acordo com Legendre, a proposição de Fermat se encontra redigida em latim na página 180 de sua cópia da obra *Arithmetica*⁴⁶ de Diofanto (Fig. 15), cujo texto original está apresentado abaixo, conforme Legendre (1808):

Imo propositionem pulcherrimam et maxime generalem nos primi deteximus. Nempe omnem numerum vel esse triangulum vel ex duobus aut tribus triangulis compositum; esse quadratum vel ex duobus tribus aut quatuor quadratis compositum; esse pentagonum vel ex duobus tribus quatuor aut quinque pentagonis compositum et sic deinceps in infinitum in hexagonis, heptagonis et polygonis quibuscumque, enuntianda videlicet pro numero angulorum generali et mirabili propositione. Ejus autem demonstrationem quae ex multis variis et abstrusissimis numerorum mysteriis derivatur hic apponere non licet, opus enim et librum integrum huic operi destinare decrevinus et Arithmetice hac in parte ultra veteres et notos terminos mirum in modum promoveri. (LEGENDRE, 1808, p. 187.)

O texto em latim de Fermat se refere aos números inteiros que podem ser escritos como somas de pelo menos três números triangulares, de quatro números quadrados, de cinco números pentagonais, etc. Segundo os historiadores, tal anotação foi feita descuidadamente por Fermat à margem do referido livro de Diofanto e pode ser assim traduzida:

É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como a soma de dois números elevados a quatro, ou, em geral, para qualquer número que seja elevado a uma potência maior que dois ser escrito como a soma de duas potências semelhantes”. “Eu tenho uma demonstração

⁴⁶Nota Nossa: *Arithmetica* é o sexto livro do principal tratado de Diofanto, editado por Bachet em 1621. Trata-se de uma coleção de 150 problemas que o autor resolveu por operações puramente numéricas. Contém 24 problemas. Nestes problemas e no lema doze do mesmo livro, é tratada a construção de triângulos retângulos em números racionais positivos.

realmente maravilhosa para esta proposição mas esta margem é muito estreita para contá-la.



Figura 15: Fac-símile do livro *Arithmetica* de Diofanto

Fonte: WIKIPEDIA.ORG, 2010

Segundo Legendre (1808, p. 187), foi nesse texto que Fermat afirmou que pretendia escrever uma obra maior sobre belas propriedades dos números. Infelizmente esse ilustre sábio não realizou o seu intento, ou pelo menos os seus familiares ou amigos, herdeiros de seus manuscritos não o tornaram público.

Por outro lado, Legendre demonstrou com detalhes o teorema geral de Fermat do texto original em latim, em seu artigo 155 (1808, Vol. I, p. 187-90), que para uma melhor compreensão, serão divididos em quatro partes.

A primeira parte do teorema de Fermat demonstrado por Legendre pode ser interpretada assim: qualquer que seja o número dado A , e x, y, z , etc., números determinados,

sempre podemos satisfazer à equação $A = \frac{x^2 + x}{2} + \frac{y^2 + y}{2} + \frac{z^2 + z}{2}$, ou que dá no mesmo, à equação $8A + 3 = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 + (2z + 1)^2$. A segunda parte expressa que qualquer

que seja o número A , sempre podemos satisfazer à equação $A = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$. A terceira parte nos diz que $A = \frac{3x^2 - x}{2} + \frac{3y^2 - y}{2} + \frac{3z^2 - z}{2} + \frac{3y^2 - t}{2} + \frac{3u^2 - u}{2}$, ou $24A + 5 = (6x - 1)^2 + (6y - 1)^2 + (6z - 1)^2 + (6t - 1)^2 + (6u - 1)^2$, de maneira que o enunciado dessa proposição particular exprime que todo número da forma $24A + 5$ pode ser decomposto em cinco quadrados cujos lados são da forma $6m - 1$. A quarta parte revela que $A = x(2x - 1) + y(2y - 1) + z(2z - 1) + s(2s - 1) + t(2t - 1) + u(2u - 1)$, ou $8A + 6 = (4x - 1)^2 + (4y - 1)^2 + (4z - 1)^2 + (4s - 1)^2 + (4t - 1)^2 + (4u - 1)^2$. Nesse caso é necessário que todo número $8A + 6$ se decomponha em seis quadrados cujos lados são da forma $4m - 1$.

De uma forma geral, a proposição em questão sempre se reduz à decomposição de um número dado em quadrados e todas as proposições parciais estão contidas nessa fórmula: $8\alpha A + (\alpha + 2)(\alpha - 2)^2 = (2\alpha x - \alpha + 2)^2 + (2\alpha y - \alpha + 2)^2 + \text{etc.}$, cujo número de termos do segundo membro é igual a $\alpha + 2$.

Sendo assim, uma vez demonstrado o primeiro caso, de imediato foi deduzido que todo número inteiro é a soma de quatro quadrados, que é o segundo caso do teorema de Fermat. Assim todos os demais casos foram deduzidos do primeiro.

Legendre ainda demonstrou que um número poligonal de ordem $m + 2$ tem por expressão geral $\frac{m}{2}(x^2 - x) + x$, onde x é o lado do polígono ou a sua posição entre os polígonos de mesma ordem e assim essa expressão prova que 0 e 1 são dois termos comuns aos polígonos de todas as ordens. De acordo com a tabela anterior de Legendre, os números triangulares são aqueles em que $m = 1$ e os quadrados são os que $m = 2$. Nesses dois primeiros casos, é indiferente que x seja positivo ou negativo de maneira que seja formada uma única sequência: a dos números triangulares ou a dos quadrados.

Porém, quando $m > 2$, a expressão geral dos números poligonais oferece duas sequências distintas para cada ordem, segundo x seja positivo ou negativo (LEGENDRE, 1808, p. 187-190).

Fundamentado nos conhecimentos precedentes da edição do *Ensaio* (1808), Legendre demonstrou no Capítulo 2 do trabalho de 1816 o teorema geral de Fermat relativo a números poligonais que recebeu uma nova redação: “um número qualquer é composto de tantos

polígonos de ordem $m + 2$, quantas unidades há em $m + 2$ ” (LEGENDRE, 1816, p. 13, tradução nossa).

Posto isto, Legendre estabeleceu nove proposições subsidiárias para chegar à demonstração dessa última proposição, onde pela primeira vez ele utilizou as noções, já encontradas em *Os Elementos* de Euclides de números *parmente par* e *imparmente par* que, respectivamente, significam os números que são do tipo $4n$ e os números do tipo $(4n + 1) + 1 = 4n + 2$:

TEOREMA I. “Sendo a um número ímpar qualquer que não é um dos dez números 1, 3, 5, 7, 11, 15, 19, 23, 37, 71, sempre existirá dois números ímpares consecutivos $c, c - 2$, tais que fazendo sucessivamente $b = c$ e $b = c - 2$, poderemos, nos dois casos, satisfazer às equações (1) $a = t^2 + u^2 + v^2$ e $b = t + u + v$, com a condição de que as raízes s, t, u, v sejam todas positivas”.

TEOREMA II. “Seja a um número ímpar qualquer. Sejam $c, c - 2, c - 4, \dots, d$, os diversos valores sucessivos de b com os quais podemos resolver com números positivos as equações (1). Finalmente seja r um termo qualquer da sequência 0, 1, 2, 3, ..., $m - 2$. Se considerarmos a função $Z =$

$\frac{m}{2} (a - b) + b + r$, onde b e r são termos quaisquer em suas próprias sequências e se denominarmos P ou $P(a)$ o menor valor dessa função, Q ou $Q(a)$ a maior, teremos

$$P(a) = \frac{m}{2} (a - c) + c, \quad Q(a) = \frac{m}{2} (a - d) + d + m - 2.$$

Posto isto, digo 1º que todos os números inteiros entre $P(a)$ e $Q(a)$ serão representados pela função Z . 2º que todos esses números poderão ser decompostos cada um deles em $m + 2$ polígonos de ordem $m + 2$.”

TEOREMA III. “Quando $a = 121$ o maior valor de b é 21 e então $P(a) = \frac{m}{2} (a - b) + b = 50m + 21$, número que seguindo a proposição anterior, é a soma de quatro polígonos de ordem $m + 2$. Posto isto, digo que todo número inteiro maior do que $50m + 21$ é a soma de $m + 2$ polígonos de ordem $m + 2$ onde $m - 2$ serão iguais a zero ou à unidade.”

TEOREMA IV. “Todo número inteiro menor do que $P(121)$ ou $50m + 21$ é a soma de $m + 2$ polígonos de ordem $m + 2$, onde $m - 2$ serão iguais a zero ou à unidade”.

TEOREMA V. “Sendo m um número ímpar, se A é um número dado qualquer $> 28m^3$ digo: A será decomposto em quatro polígonos de ordem $m + 2$ ”.

TEOREMA VII. “Se m é parmente par⁴⁷ ou da forma $4n$, todo número par $A > 28m^3$ será decomponível em quatro polígonos de ordem $m + 2$ ”.

TEOREMA VIII. “Se m é imparmente par⁴⁸ ou da forma $4n + 2$, todo

⁴⁷ Nota nossa: Número par que pode ser dividido sucessivamente em partes iguais pares, até atingir a indivisível unidade. Por exemplo, 64 é parmente par, pois sua metade é 32, cuja metade é 16, cuja metade é 8, cuja metade é 4, cuja metade é 2, cuja metade é 1. Portanto é o número que é uma potência de 2, consoante Lauand (2002).

⁴⁸ Nota nossa: Número par cujas partes ainda podem sofrer divisões, mas sem chegar à unidade. Por exemplo,

número de ímparmente par $A > 7m^3$ será decomposto em quatro polígonos de ordem $m + 2$ ”.

TEOREMA IX. “Se m é ímparmente par ou da forma $4m' + 2$, todo número parmente par $A' > 28m^3$ será decomponível em quatro polígonos de ordem $m + 2$ desde que $A' - m'$ seja ímpar”. (LEGENDRE, 1816, p. 14-27, tradução nossa.)

Assim, os teoremas III a IX estabelecem que todo número A que é maior do que um limite é decomponível em quatro polígonos de ordem $m + 2$, exceto no caso em que $m + 2$ e A são ambos divisíveis por 4. Além disso, Legendre ampliou o teorema de Fermat, ao determinar que ultrapassando um limite para cada ordem dos polígonos, todo número pode ser decomposto em quatro, cinco ou mais polígonos.

No final dos estudos, ele apontou a necessidade de estender a teoria, uma vez que podem existir casos que não satisfazem a nenhuma das nove proposições demonstradas.

Como exemplo desse tipo de caso, foi proposto decompor o número $A = 6\,484$ em no máximo oito octógonos. A escolha de $A = 6\,484$ não foi fortuita, pois embora $m = 6 = 4m' + 2$ seja parmente ímpar⁴⁹ e $A > 28m^3 = 6\,048$, ele não satisfaz o teorema IX, uma vez que $6\,484 = 1\,621 \times 2^2$ é ímparmente par (produto de um ímpar por um parmente par) e, portanto, fora da hipótese do teorema que exige que A seja parmente par. Assim Legendre desenvolveu um novo método para decompor o número proposto em octógonos.

Pelo Teorema geral de Fermat, um número A pode ser decomposto em oito octógonos ou na soma de oito números octogonais do tipo $(3n^2 - 2n)$, a saber, $A = (3g^2 - 2g) + (3h^2 - 2h) + (3l^2 - 2l) + (3n^2 - 2n) + (3u^2 - 2u) + (3x^2 - 2x) + (3y^2 - 2y) + (3z^2 - 2z)$.

Segundo Legendre, para que A seja decomponível em quatro octógonos, será necessário, $A - r$ seja também decomponível em quatro octógonos, onde A é o número proposto, 6484 e r variando de 0 a $m - 2$ e assim r é igual a um dos números 0, 1, 2, 3, 4. No caso em que $m = 6$, segundo as fórmulas do art. 28 (1816, p. 23)⁵⁰, $b = A - mx$ e $a = b + 2x$, onde b deve estar entre os limites $\sqrt{(3a - 2)} - 1$ e $\sqrt{4a}$ ou $\sqrt{\frac{6A}{m}}$ e $\sqrt{\frac{8A}{m}}$. Após algumas

24 é ímparmente par, pois sua metade é 12, cuja metade é 6, cuja metade é 3. Portanto é o número que é o produto de um número ímpar por um parmente par (LAUAND, 2002).

⁴⁹ Número par que pode ser dividido em partes iguais, mas essas partes não podem mais ser divididas. De fato 6 pode ser dividido em 2 partes de 3, mas 3 não pode ser mais dividido. Assim como 10, 38, 50, etc. Portanto é o número que é o dobro de um ímpar (LAUAND, 2002).

⁵⁰ Também reproduzido no Art. 646 (LEGENDRE, 1830, p. 351).

simplificações, resultou que $\sqrt{(A-r-3)} < b < \frac{4}{3} + \sqrt{\left[\frac{4}{3}(A-r) + \frac{16}{9}\right]}$. Tais limites são satisfeitos substituindo $r = 0$ no primeiro, e $r = 4$ no segundo, onde $\sqrt{6481} < b < \frac{4}{3} + \sqrt{(8641\frac{7}{9})}$ e assim, b é um termo qualquer da sequência 81, 82, 83, ..., 94.

Para determinar x , foi necessário resolver a equação $x = \frac{A-r-b}{m} = 1080 - \frac{b+r-4}{6}$ onde foi obtido que $\frac{b+r-4}{6}$ era um inteiro. Assim, o autor concluiu que o número b era uma das formas $6n + 0, 1, 2, 3, 4$ correspondentes, respectivamente, aos valores de $r = 4, 3, 2, 1, 0$. Posto isso, mediante os resultados encontrados para os valores de a, b, r, x nenhum outro caso era solução do problema, pois incluía a unidade como um dos polígonos.

Entretanto, Legendre utilizou outro método que consistiu em considerar os valores de b inferiores ao limite $\sqrt{(3a-2)} - 1$. A pesquisa de valores b inferiores a esse limite, levou de imediato ao valor de $b = 76$. Utilizando as fórmulas do art. 10 do Capítulo I (1816, p. 10), em que $A = \frac{m}{2}(a-b) + b$, os números a e b foram determinados de maneira que as equações $a = t^2 + u^2 + v^2$, $b = t + u + v$, forneceram as soluções inteiras e positivas, $s = 43$, $t = u = v = 11$.

Portanto, por esse novo método, Legendre mostrou que 6 484 pode ser decomposto em quatro octógonos cujos lados são 43, 11, 11, 11.

O Capítulo III, “Novos métodos para a resolução aproximada de equações numéricas” (1816, p. 28-62) é sobre um método para determinar as raízes reais e imaginárias da equação $x^n \pm A_1x^{n-1} \pm A_2x^{n-2} \pm A_3x^{n-3}, \dots, \pm A_n = 0$, sem conhecer preliminarmente a grandeza e o número de raízes. Segundo Legendre, para determinar as raízes da equação, é suficiente procurar o limite das raízes positivas, uma vez que substituindo $-x$ no lugar de x e trocando os sinais dos termos de posição par, as raízes que eram negativas se tornam positivas. Esse capítulo foi reproduzido na terceira edição do *Ensaio* de 1830 e será analisado mais adiante.

2.2.5 Mémoire: Estudos sobre alguns objetos da Análise Indeterminada, particularmente sobre o Teorema de Fermat (1823/5)

O renascimento da Teoria dos Números na Europa teve início com a edição de *Aritmética* de Diofanto por Bachet em 1621. Uma cópia da edição de Bachet contém a equação diofantina $x^n + y^n = z^n$ a qual Fermat conjecturou que não possuía solução não trivial inteira para $n > 2$ (e disse que apresentaria uma maravilhosa demonstração que não caberia nas observações escritas nas margens do seu exemplar do sexto livro da obra de Diofanto, vide Figura 3, p. 100 do presente trabalho) do que conhecemos como o Último Teorema de Fermat. Em 1670 Samuel, o filho de Fermat publicou essa cópia, inclusive as notas, adições e observações manuscritas de Fermat, hoje desaparecidas. Três quartos das observações são sobre a resolução de um ou mais problemas, de Diofanto e de Bachet, ou de sua própria autoria inspirados por esses dois matemáticos. Por exemplo, “encontrar três quadrados tais que o produto de dois deles acrescido da soma de dois quadrados seja também um quadrado”. A quarta parte dos textos são críticas a Bachet e a Viète, em particular sobre as restrições impostas por esses aos enunciados para obter soluções racionais positivas.

O Último Teorema de Fermat teve um papel importante na história da Teoria dos Números e mobilizou matemáticos do mundo inteiro por mais de 300 anos que envidaram esforços na tentativa de validá-lo ou negá-lo. Essa conjectura, que é um dos mais importantes resultados da Teoria dos Números, cujo texto foi escrito em latim e se encontra aqui reproduzido:

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividerem cuius rei demonstrouionem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguas non caperet. (STEIN, 2006, p. 30.)

Esse texto foi traduzido do latim para o francês por Stein (2006), que recebeu uma tradução nossa para o português como:

é impossível separar dois cubos em dois cubos, ou um bi quadrado em dois bi quadrados, ou em geral nenhuma potência maior do que dois em duas potências de mesma magnitude. Eu encontrei uma verdadeira demonstração que não cabe nessa margem que é muito pequena para contê-la. (STEIN, 2006, p. 30, tradução nossa.)

Utilizando outros termos, Fermat conjecturou que a famosa equação diofantina⁵¹ $x^n + y^n = z^n$ não possuía solução inteira positiva para $n \geq 3$. No caso em que $n = 2$, a expressão $x^n + y^n = z^n$ é o Teorema de Pitágoras, conhecido desde a Antiguidade e que admite infinitas soluções.

⁵¹ Segundo Merker (2001, p. 496), a demonstração de Wiles do Teorema de Fermat pode ser encontrada em Amir D.

Stein (2006) e Goldstein (2004) apontam que Fermat utilizou o método da descida infinita para determinar o caso particular $n = 4$. Tal método consiste em primeiramente considerar (x_0, y_0, z_0) como uma primeira solução inteira positiva de $x^n + y^n = z^n$. A partir dessa solução, uma outra solução inteira (x_1, y_1, z_1) tal que $0 < z_1 < z_0$ é determinada. Como a nova solução deriva da primeira, a ideia é supor que a partir da segunda se determine uma terceira, da terceira, uma quarta e assim sucessivamente até que seja formada uma sequência infinita decrescente $0 < \dots < z_4 < z_3 < z_2 < z_1 < z_0$. Como o conjunto dos números naturais é limitado inferiormente por zero, então, tal sequência não existe e assim, a hipótese da existência de uma solução inicial (x_0, y_0, z_0) é impossível. Portanto, a equação proposta não tem solução. A demonstração de Fermat do caso particular para n consistiu em considerar que $x_0^4 + y_0^4 = z_0^4$ é verdadeira. Da identidade $x_0^4 + y_0^4 = z_0^4 = (x_0^2)^2 + (y_0^2)^2 = (z_0^2)^2$ tem-se que (x_0^2, y_0^2, z_0^2) é uma tripla pitagórica primitiva, e assim apenas um dos elementos é par. Sem perda de generalidade ele assumiu x_0 par e formou o seguinte sistema: $x_0^2 = 2st$, $y_0^2 = s^2 - t^2$, $z_0^2 = s^2 + t^2$, onde s e t são supostamente positivos, primos entre si e de paridade opostas. Sendo a segunda equação $y_0^2 + t^2 = s^2$ uma nova tripla pitagórica primitiva, similarmente ele formou um novo sistema com y_0 , s , e t e, após utilizar propriedades de divisibilidade e formar outros sistemas de equações, ele determinou outra solução inteira (x_1, y_1, z_1) tal que $0 < z_1 < z_0$ e utilizando o princípio da descida infinita, conforme foi observado acima, a hipótese da existência de uma solução inicial (x_0, y_0, z_0) é impossível.

Em 1649, Frenicle resolveu o mesmo caso utilizando o método da descida infinita, no qual, pelo menos a nomenclatura ou o método é atribuído ao próprio Fermat que, tardiamente, em uma carta a Carcavi escrita seis anos antes de sua morte, afirmou ter encontrado um interessante método que sucintamente aplicou no Teorema “a área de um triângulo retângulo não pode ser um quadrado”.

Em 1774, Euler *Ensaio* uma demonstração utilizando números imaginários e um século depois, Gauss de uma forma mais precisa, também demonstrou a impossibilidade para o caso para $n = 3$. O Instituto de Paris estabeleceu em 1816 um concurso sobre o Último

Aczel, *L'énigme du théorème de Fermat* (1998), Yves Hellegouarch, *Fermat vaincu* (1995) e *Invitation aux mathématiques de Fermat- Wiles* (1997), Catherine Goldstein, *Le théorème de Fermat enfin démontré* (1999).

Teorema de Fermat. Ninguém propôs nenhum trabalho e ele foi renovado em 1818 e com a ausência de propostas foi finalmente retirado em 1820.

Em 1825 Lejeune-Dirichlet demonstrou o caso para $n = 5$ e estudando a equação $x^3 + y^3 = az^3$ conjecturou que ela é impossível para $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 16, \dots$. O que não era verdadeiro, pois $17^3 + 37^3 = 6 \times 21^3$. Segundo Stein (2006, p. 38), a demonstração de 1825 de Lejeune-Dirichlet do Último Teorema de Fermat para $n = 5$ era incompleta, mas uma nova versão mais consistente foi apresentada à Academia de Paris meses depois.

Gabriel Lamé resolveu o caso em que $n = 7$ em 1839. A demonstração de Kummer realizada em 1847 para n inferiores a 100, distintos de 37, 59 e 67 abriu caminho para a teoria de ideais. Finalmente a conjectura foi demonstrada pelo matemático inglês Andrew Wiles em 1993-5 (STEIN, 2006; GOLDSTEIN, 2004; RIBENBOIM, 2001; MERKER, 2001; LEMMERMEYER, 2000, AUBRY, 1909).

Em 1823 Legendre também tratou do mesmo assunto num trabalho de sessenta páginas, *Sobre alguns objetos da , particularmente sobre o Teorema de Fermat* (LEGENDRE, 1823/5, p. 31), contendo importantes contribuições de Sophie Germain⁵². Em julho de 1825, simultaneamente à apresentação do trabalho de Lejeune-Dirichlet, o texto de Legendre se tornou o segundo suplemento à edição do *Ensaio* e foi o primeiro estudo extensivo publicado sobre o assunto.

Nesse trabalho, Sophie Germain é a autora do resultado “para todo número primo ímpar p menor do que 100 a equação $x^p + y^p = z^p$ não tem solução no caso em que nenhum dos três números x, y, z é divisível por p ” (LEGENDRE, 1823, p. 16-7, tradução nossa). Excluindo o caso em que n é múltiplo de 4, pois já tinha sido demonstrado por Fermat que $x^4 + y^4 = z^4$ é insolúvel para qualquer número positivo maior do que 2, Legendre-Germain mostraram que “se n e $2n + 1$ são números primos então a equação de Fermat implica que um dos números x, y, z é divisível por n ” (LEGENDRE, 1823, p. 5, tradução nossa) e estenderam esse resultado para o caso da primalidade de $4n + 1, 8n + 1, 10n + 1, 14n + 1$ ou $16n + 1$ (LEGENDRE, 1823, p. 18-20, tradução nossa). Também que, em geral se um dos números $x,$

⁵² A única referência à co-autoria com Sophie Germain está em uma nota de rodapé onde Legendre diz: “Essa demonstração que sem dúvida é genial é da Senhorita Sophie Germain, que cultivava com sucesso as ciências físicas matemáticas, como o prova o prêmio da Academia sobre vibrações elásticas. Também é de sua autoria o artigo 13 (p. 9) sobre a forma particular dos divisores de α segundo o artigo 11 (p. 7-8)” (LEGENDRE, 1823, p. 17, tradução nossa).

y, z é divisível por n então necessariamente o mesmo ocorrerá com n^2 e para $x + y + z = p$, onde p é uma quantidade qualquer (LEGENDRE, 1823, p. 9, tradução nossa).

Supondo x ora par ora ímpar, eles utilizaram propriedades do anel de fatorização $Z[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}; a \text{ e } b \in Z\}$, e a demonstração foi dividida em dois momentos: quando o produto xyz não era divisível por 5 e quando xyz era divisível por 5. O método da descida infinita de Fermat foi empregado para determinar a insolubilidade de $x^5 + y^5 + z^5 = 0$, com x, y e z não nulos, utilizando-se do princípio da redução ao absurdo, a partir da hipótese da existência de uma sequência infinita de outras equações igualmente solúveis, onde os números x, y, z , são compostos de uma infinidade de fatores.

É nesse trabalho que Legendre inseriu uma nova demonstração do Teorema de Fermat para o caso $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, que também foi reproduzida no parágrafo III da sexta parte do Volume II de *Teoria dos Números* de 1830.

A impossibilidade de resolução dessa equação é resultado das três proposições:

- I. Um dos números x, y, z será divisível por 3;
- II. A indeterminada que é par é ao mesmo tempo divisível por 3;
- III. A equação $x^3 + y^3 = 2^{3m}3^{3u}u^3$ é impossível, se uma das indeterminadas é simultaneamente divisível por 2^m e por 3^n . Assim, a equação à qual ela pertence poderá ser transformada em outra, cuja indeterminada análoga será divisível apenas por 3^{n-1} . (LEGENDRE, 1823, p. 41, tradução nossa.)

Para obter o resultado esperado, Legendre utilizou o método de redução ao absurdo. Após realizar sucessivas transformações da referida equação, ele obteve uma determinada equação em que nenhuma indeterminada era divisível por 3, o que foi uma contradição da primeira proposição.

Finalizando esse trabalho, Legendre abordou cinco teoremas da Análise Indeterminada, onde os três primeiros envolvem números primos e seções angulares, cujos resultados possibilitam a divisão da circunferência em n partes iguais. O quarto teorema é sobre a relação entre raízes racionais de uma determinada equação do terceiro grau e a soma de seus coeficientes. O quinto teorema, Legendre não demonstrou, mas exibiu um exemplo que será reproduzido tal como foi apresentado nesse artigo:

Teorema V. Se nos propomos encontrar quantos números primos existem na progressão aritmética $A - C, 2A - C, 3A - C, \dots, nA - C$, onde C é um dos

k números menores e primo a A , o número procurado x será dado pela fórmula $x = \frac{1}{k} \frac{nA}{\log(nA) - 1,08366}$, a qual será mais exata quanto maior for n . Por exemplo, na progressão 59, 119, 179, ... cujo termo geral é $60n - 1$, o número k , deduzido dos fatores simples 2, 3, 5 do número 60 é $30(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 16$, o que resultou que $x = \frac{\frac{15}{4}n}{\log(60n) - 1,08366}$. Assim nos 100.000 primeiros termos dessa progressão devemos encontrar pouco a pouco 25.820 números primos, quer dizer um pouco mais do que a quarta parte desses termos. (LEGENDRE, 1823, tradução nossa.)

O Teorema V⁵³ apresentou uma nova fórmula empírica de Legendre para determinar quantos números há numa sequência de números naturais que foi o melhoramento da fórmula $\frac{a}{2la}$ do trabalho de 1798. Ele não foi demonstrado no referido trabalho, o que somente foi realizado posteriormente, na Quarta parte, Parágrafo IX, volume II, p. 77 da edição de 1830, onde Legendre reformulou o Teorema V e o demonstrou com fundamento na lei de reciprocidade e numa conjectura que posteriormente foi demonstrada por Lejeune-Dirichlet em 1837.

Os três primeiros teoremas são encontrados no parágrafo V, da sexta parte do Volume II de *Teoria dos Números* (LEGENDRE, 1830, p. 369-390), cujas demonstrações são as mesmas, porém, acrescidas de um maior número de aplicações numéricas. O Teorema IV encontra-se demonstrado na segunda edição do *Ensaio* de 1808 e o Teorema V, que se encontra apenas enunciado, foi posteriormente demonstrado na quarta parte, parágrafos VIII, IX e XII da edição de 1808 e na quarta parte, Vol. II, parágrafos VIII, IX e XI da terceira edição de 1830.

2.2.6 Mémoire: Sobre a determinação das funções X e Y que satisfazem à equação $4(X^n - 1) = (X - 1)(Y^2 \pm NZ^2)$, onde n é um número primo da forma $4i \pm 1$ (1832)

⁵³ Também encontrado no artigo IV do trabalho de Legendre (1785), na introdução, p. 12-20 da edição do *Ensaio* de 1798 e reformulado na quarta parte, parágrafo IX, volume II, p. 77 da edição de 1830.

O trabalho *Sobre a determinação das funções X e Y que satisfazem à equação $4(X^n - 1) = (X - 1)(Y^2 \pm Nz^2)$* , onde n é um número primo da forma $4i \pm 1$, é um texto de apenas oito páginas. Lido na Academia em 11 de outubro de 1830 ele foi publicado em 1832.

Legendre mostrou um excepcional esforço na busca do aperfeiçoamento de seus estudos em Teoria dos Números, aos quais dedicou mais de 50 anos de sua vida. Ele começou a redigir o referido trabalho dois anos antes de sua apresentação na Academia de Paris, conforme carta escrita a Jacobi em 16 de junho de 1828:

[...] o estado de sofrimento em que permaneci por um longo tempo que me tornou incapaz de qualquer esforço e mesmo me impediu de entender os meus próprios trabalhos. Nesse momento eu estou redigindo um trabalho contendo a demonstração de dois teoremas e de alguns complementos segundo os princípios de vossa teoria e rendendo toda justiça merecida às vossas descobertas que ninguém nunca apreciou tanto e nunca apreciará como eu. Esse trabalho tão cedo não será publicado pela nossa Academia e V. Sa. terá tempo para avançar a sequência de vossos estudos, seja no Jornal do Sr. Schumacher ou em um outro meio de publicação científica. [...] é possível que eu realize uma viagem de dois meses para o sul da França para restabelecer a minha saúde. Nesse caso não vos espanteis se alguma carta vossa ficar sem resposta, por que somente poderei respondê-la após o meu regresso. (LEGENDRE, Apud JACOBI, 1998, p. 420-2, tradução nossa.)

Mesmo estando com a saúde debilitada, Legendre ainda continuou produzindo trabalhos científicos, aos 76 anos de idade, a exemplo desse, que foi o seu último trabalho em Teoria dos Números e foi publicado alguns meses antes de sua morte.

O trabalho é uma adição aos artigos 511 e 512 do Parágrafo II, Quinta parte das segunda e terceira edições do *Ensaio* (1808, 1830), em que Legendre desenvolveu um método para determinar todos os casos dos polinômios Y e Z que satisfazem à equação $4X = Y^2 \pm nZ^2$, onde n é um número primo da forma $4i \pm 1$ e X um polinômio igual ao quociente de $x^n - 1$ dividido por $x - 1$, com fundamento na hipótese insuficiente que os coeficientes dos diferentes termos da função Y são menores do que $\frac{1}{2}n$ (LEGENDRE, 1832, p. 81-99).

De fato, essas modificações foram frutos das observações na carta de Jacobi a Legendre de 02 de julho de 1830, onde o primeiro sugeriu correções aos erros cometidos por Legendre na obra *Teoria dos Números* publicada em 30 de abril desse mesmo ano:

[...] As distrações de uma longa viagem e de outras circunstâncias interromperam o fluxo dos meus trabalhos e eu não consegui retomá-los tão cedo. Eu estava acostumado a vos falar de Matemática e de pô-lo a par das novidades que porventura merecessem a vossa indulgência. Mas após ter recebido o precioso presente de um exemplar da terceira edição de vossa obra sobre Teoria dos

Números eu me permito ir mais longe do que simplesmente me desculpar. A maior parte do volume II é inteiramente nova e mais uma vez admiro esse espírito vigoroso que vence todas as dificuldades, mesmo numa idade avançada, ainda serve de estímulo a jovens matemáticos que se dedicam ao progresso da ciência.

[...] gostaria de fazer uma observação relativa à equação $4 \left(\frac{x^n - 1}{x - 1} \right) = Y^2 \pm nZ^2$.

Para encontrar Y, vossa obra apresentou uma regra para desenvolver $2(x-1)^{\frac{n-1}{2}}$ e substituiu os coeficientes pelos menores resíduos das divisões por n . Essa regra que também se encontra na segunda edição somente pode ser utilizada para números primos não muito grandes. Em cada um dos casos os valores dos coeficientes de Y e Z são determinados por fórmulas conhecidas que expressam os coeficientes de uma equação por meio das somas das potências de suas raízes, somas que no nosso caso são ou $\frac{-1 + \sqrt{\pm n}}{2}$ ou $\frac{-1 - \sqrt{\pm n}}{2}$. Assim achamos que, uma vez que

$Y = 2(x-r)(x-r^4)(x-r^9) \dots (x-r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}) = 2x^{\frac{n-1}{2}} + a_1x^{\frac{n-3}{2}} + a_2x^{\frac{n-5}{2}} + \dots^{54}$, a regra é correta para os três coeficientes a_1, a_2, a_3 , mas deixa de ser para os demais desde que n ultrapasse um certo limite. De maneira que os coeficientes de Y e Z podem ser maiores do que $\frac{1}{2}n$, e mesmo n e suas potências. (JACOBI, 1998, p. 453, tradução nossa.)

Complementando essas informações, Jacobi sugeriu algumas modificações ao método de Legendre, que afirmava que os coeficientes da função Y eram menores do que $\frac{1}{2}n$.

Jacobi mostrou que essa condição era suficiente para determinar apenas os quatro primeiros termos do polinômio e deu sugestões mais abrangentes, ao afirmar que se n fosse uma das formas $24\lambda + 1, 24\lambda + 5, 24\lambda + 13$ ou $24\lambda + 17$, os valores de n poderiam ser da ordem de $\frac{n^2}{192}$ e até ser bem maiores do que n . Também, que em geral, para grandes valores

de n os coeficientes a_{2m} e a_{2m+1} de Y poderiam assumir a ordem de $\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2m} \left(\frac{n}{4} \right)^m$.

Jacobi ainda submeteu suas sugestões à apreciação de Legendre, quando disse que, “Se assim o julgardes, talvez seja conveniente realizar uma adição de algumas linhas à vossa

⁵⁴ Nota nossa: O erro encontrado nessa fórmula é sobre o produto $2(x-r)(x-r^4)(x-r^9) \dots (x-r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2})$, que, segundo Legendre, não é igual ao polinômio Y, mas sim igual a $Y + \sqrt{\pm n}Z$ e isso foi apontado na carta resposta de Legendre de 01 de outubro de 1830.

obra, para corrigir o enunciado da regra mencionada” (JACOBI, 1998, p. 454, tradução nossa). De fato, tais sugestões foram utilizadas por Legendre no trabalho de 1832.

2.2.7 Teoria dos Números (1830)

O penúltimo trabalho de Legendre em Teoria dos Números se deu com a terceira edição do *Ensaio sobre a Teoria dos Números*, que recebeu um novo título, *Teoria dos Números* (Figuras 16, 17), e é composta de dois grandes volumes contendo seis partes e dois apêndices.

O volume I contém as três primeiras partes da segunda edição do *Ensaio* (1808), distribuídas em 452 páginas, onde 44 páginas são tabelas, que em sua maioria são sobre divisores quadráticos de formas quadráticas binárias e ternárias. Ao longo de 476 páginas, o volume II é constituído da quarta parte da edição de 1808 com uma grande quantidade de acréscimos. Quanto à quinta parte, ela foi quase totalmente reformulada, e além da teoria da ciclotomia são encontrados grandes e novos desenvolvimentos dos métodos de Gauss para a resolução de equações com duas variáveis. A sexta parte e o apêndice contêm demonstrações do Teorema de Fermat dos casos $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ e $x^5 + y^5 + z^5 = 0$. Também contém Estudos sobre a Análise Indeterminadadecomposição de um número em quatro quadrados, a demonstração de Fermat sobre os números poligonais, novos Estudos sobre a Análise Indeterminadadivisão do círculo em partes iguais, a última versão da lei de reciprocidade e novos métodos para a resolução de equações numéricas por aproximação.

Também fazem parte, os dois primeiros capítulos do suplemento de 1816, os dois capítulos do suplemento de 1823 e um apêndice contendo duas seções, ou dois capítulos: o primeiro é uma reprodução do Capítulo III, “Novos métodos para a resolução aproximada de equações numéricas” do suplemento de 1816, e o segundo, “Algumas equações com a propriedade que uma vez conhecida uma raiz, todas as demais são racionalmente determinadas” é um estudo inédito sobre a resolução de equações do terceiro, quarto e quinto graus.

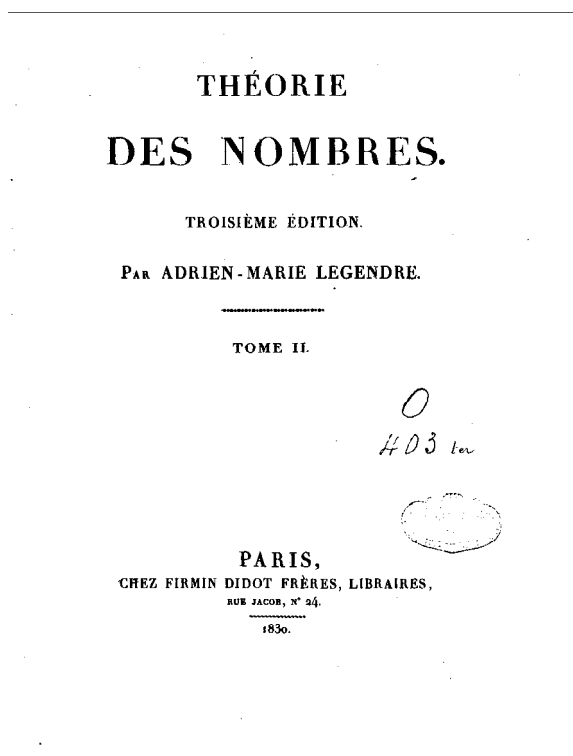
Essa edição é o resultado de quase meio século de trabalhos de Legendre. É um conjunto harmonioso de quase todo o conhecimento existente sobre Teoria dos Números até aquela época, incluindo suas próprias descobertas e de eminentes matemáticos de Diofanto a Gauss, bem como partes das obras de Jacobi, Sophie Germain e Abel.

Legendre não diferenciava a Álgebra da Análise Indeterminada, como ele apontou no prefácio de *Teoria dos Números* (1830, p. xij, tradução nossa):

Não existe um teorema sobre os números que não seja relativo à resolução de uma ou de várias equações indeterminadas. Assim se todo número primo $4n + 1$ é a soma de dois quadrados, é como se a equação $A = y^2 + z^2$ fosse sempre solúvel quando A for um número primo da forma $4n + 1$. Nesse mesmo caso a equação $A = y^2 + z^2$ terá apenas uma solução, o que é um segundo teorema contendo uma propriedade característica dos números primos $4n + 1$.

Para muitos, a Teoria dos Números se restringe ao estudo dos números inteiros. Como os matemáticos mais modernos, Legendre rejeitou tal concepção e todas as suas obras sobre o assunto expressaram claramente que, para ele, essas duas ciências constituíam um único ramo da Análise Algébrica.

A obra foi reeditada na Alemanha em 1885 e, na França, recebeu duas novas publicações em 1900 e em 1955.



Figuras 16, 17: Fac-símile das capas dos Volumes I e II de *Teoria dos Números* (1830)
Fonte: *apud* LEGENDRE, 1830

TABLE DES MATIÈRES DU TOME I.

INTRODUCTION,

Contenant des notions générales sur les nombres.

On considère les nombres en tant qu'ils résultent de la multiplication de plusieurs facteurs,	1
Des différents diviseurs d'un nombre donné, et de leur somme,	6
On détermine combien il y a de nombres plus petits que N et premiers à N .	8
On cherche combien de fois un même nombre premier ℓ peut être facteur dans le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot N$.	10
Propriétés générales des nombres premiers: leur répartition en diverses progressions arithmétiques dont la raison est constante,	13

PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSITION DE DIVERSES MÉTHODES ET PROPOSITIONS RELATIVES
À L'ANALYSE INDETERMINÉE.

§ I. Des fractions continues,	17
Définition des quotients-complets et des fractions convergentes,	18
Propriétés générales des fractions convergentes,	19
Condition pour qu'une fraction donnée soit comprise parmi les fractions convergentes,	24
Application à l'équation $p' - Aq' = \pm D$,	25
Des fractions continues symétriques,	27
§ II. Résolution des équations indéterminées du premier degré,	28
§ III. Méthode pour résoudre en nombres rationnels les équations indéterminées du second degré,	30
Réduction de l'équation générale à la forme $x' - By' = Ax'$	33

TABLE DES MATIÈRES DU TOME II.

QUATRIÈME PARTIE.

MÉTHODES ET RECHERCHES DIVERSES.

§ I. Théorèmes sur les puissances des nombres,	Pages 1
L'aire d'un triangle rectangle en nombres entiers ne saurait être égale à un carré,	2
La somme de deux bicarrés ne peut être égale à un carré,	5
La formule $x^4 + y^4$ ne peut être égale à un carré,	6
Aucun nombre triangulaire, excepté l'unité, n'est égal à un bicarré,	7
La somme ou la différence de deux cubes ne peut être égale à un cube, <i>ibid.</i>	7
L'équation $x^3 + y^3 = a^3$ est impossible pour toute valeur de a ,	9
Aucun nombre triangulaire, excepté 1, n'est égal à un cube,	11
L'équation $x^3 + 2 = y^3$ n'est susceptible que de la solution $x=5, y=3$,	12
L'équation $x^3 + 4 = y^3$ n'est susceptible que des deux solutions $x=2, y=2$, $x=11, y=5$, <i>ibid.</i>	12
§ II. Théorèmes concernant la résolution en nombres entiers de l'équation $x^a - b = ay$,	13
Condition de possibilité et réduction de l'équation lorsque a est un nombre premier,	14
Résolution de l'équation $x^a - 1 = ay$ lorsque a est un nombre premier et n un diviseur de $a-1$,	15
Résolution de l'équation $x^a + 1 = ay$ dans les mêmes cas,	18
Résolution de l'équation $x^a + b = ay$ dans les mêmes cas, <i>ibid.</i>	18
Résolution générale de la même équation,	20
§ III. Résolution de l'équation $x^a + a = a^2y$,	23
§ IV. Méthode pour trouver le diviseur quadratique qui renferme le produit de plusieurs diviseurs quadratiques donnés,	27

Figuras 18, 19: Fac-símile dos sumários dos Volume I (Introdução, Primeira parte) e Volume II (Quarta parte) de *Teoria dos Números* (1830)
Fonte: *apud* LEGENDRE, 1830

RESUMO DOS CONTEÚDOS

VOLUME I

INTRODUÇÃO

Noções gerais sobre os números

Determinação do número de vezes que um número primo θ é fator no produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots N$.

Propriedades gerais dos números primos: sua distribuição em várias progressões aritméticas de razão constante.

PRIMEIRA PARTE

Proposições e métodos diversos da Análise Indeterminada

§ I. Frações contínuas.

§ II. Resoluções de equações indeterminadas do primeiro grau.

§ III. Método para resolver com números racionais as equações indeterminadas do segundo grau

§ IV. Um teorema sobre a resolução da equação do tipo $ax^2 + by^2 = cz^2$.

Condições para que uma equação desse tipo seja solúvel.

§ V. Desenvolvimento da raiz de um número não quadrado em fração contínua.

§ VI. Resolução com números inteiros da equação $x^2 - Ay^2 = \pm D$, onde $D < \sqrt{A}$. Condição para que essa equação seja solúvel.

Fórmulas gerais que contêm uma infinidade de soluções da equação proposta.

§ VII. Teoremas sobre solubilidade das equações da forma $Mx^2 - Ny^2 = \pm 1$ ou ± 2

§ VIII. Redução da fórmula $Ly^2 + Myz + Nz^2$ à uma expressão mais simples pelo método de Lagrange (*Mém. de Berlin*, 1775). Outra demonstração por meio de um método particular.

§ IX. Desenvolvimento da raiz de uma equação do segundo grau em fração contínua.

§ X. Comparação entre frações contínuas resultantes do desenvolvimento de duas raízes de uma mesma equação do segundo grau.

§ XI. Resolução com números inteiros da equação $Ly^2 + Myz + Nz^2 = \pm H$.

§ XII. Demonstração de uma proposição dos parágrafos anteriores: se a equação $fy^2 + gyz + hz^2 = \pm H$,

onde $H < \frac{1}{2} \sqrt{(g^2 - 4fh)}$, é solúvel, então a fração $\frac{y}{z}$ estará entre as frações convergentes para uma raiz da equação $fx^2 + gx + h = 0$.

§ XIII. Redução posterior das fórmulas $Ly^2 + Myz + Nz^2$ quando $M^2 - 4LM$ é igual a um número.

§ XIV. Desenvolvimento em fração contínua da raiz de uma equação de um grau qualquer.

Método geral de Lagrange – Aperfeiçoamento desse método pelo mesmo autor.

§ XV. Redução com números inteiros da equação indeterminada $Ly^n + My^{n-1}z + Ny^{n-2}z^2 + \dots + Vz^n = \pm H$.

SEGUNDA PARTE

Propriedades gerais dos números

§ I. Teoremas sobre os números primos.

§ II. Estudo da forma conveniente aos divisores da fórmula $t^2 + au^2$, onde t e u são primos entre si.

§ IV. Onde provaremos que todo número inteiro é pelo menos a soma de quatro quadrados.

§ V. A forma linear conveniente aos divisores da fórmula $a^n \pm 1$, onde a e n são números dados.

§ VI. *Teorema sobre uma lei de reciprocidade que existe entre dois números primos quaisquer.*

§ VII. *Uso do teorema anterior para reconhecer se um número primo c é divisor da fórmula $x^2 + a$.*

§ VIII. *Como determinar x para que $x^2 + a$ seja divisível por um número composto N . Solução geral do problema.*

§ IX. *Resolução das equações simbólicas $\left(\frac{x}{c}\right) = 1$, $\left(\frac{x}{c}\right) = -1$.*

§ X. *Pesquisa sobre as formas lineares convenientes aos divisores da fórmula $t^2 + cu^2$.*

§ XI. *Sobre as Tabelas III, IV, V, VI e VII.*

§ XII. *Seqüência dos teoremas das tabelas anteriores.*

§ XIII. *Outros teoremas relativos às formas quadráticas de números*

§ XIV. *Sobre os métodos de encontrar um número primo maior do que um número dado.*

§ XV. *Aplicação dos teoremas anteriores para reconhecer se um número é primo.*

TERCEIRA PARTE

Teoria dos números decompostos em três quadrados

§ I. *Definição de forma ternária; números e divisores quadráticos que podem ser escritos dessa forma*

§ II. *Correspondência entre as formas ternárias do número c e os divisores ternários da fórmula $t^2 + cu^2$.*

§ III. *Teoremas sobre os divisores quadráticos ternários.*

LISTA DE TABELAS

Tabela I. Expressões mais simples das fórmulas $Ly^2 + 2Myz + Nz^2$, A variando de 2 até 136, para todos os valores do número não quadrado $A = M^2 - LN$.

Tabela II. Expressões mais simples das fórmulas $Ly^2 + Myz + Nz^2$, B variando de 5 a 305, para todos os valores de $B = M^2 - 4LN$, onde M é ímpar.

Tabela III. Divisores quadráticos e lineares ímpares da fórmula $t^2 - au^2$, a variando de 2 até 79, para todo número a não quadrado e nem divisível por um quadrado.

Tabela IV. Divisores quadráticos e lineares ímpares da fórmula $t^2 + au^2$, a variando de 1 até 105, para todo número a da forma $4n + 1$, não quadrado e nem divisível por um quadrado.

Tabela V. Divisores quadráticos e lineares ímpares da fórmula $t^2 + au^2$, a variando de 3 a 103, para todo número a da forma $4n + 3$ não divisível por um quadrado.

Tabela VI. Divisores quadráticos e lineares ímpares da fórmula $t^2 + 2au^2$, a variando de 1 a 53, para todo número a da forma $4n + 1$ não divisível por um quadrado.

Tabela VII. Divisores quadráticos e lineares ímpares da fórmula $t^2 + au^2$, a variando de 3 a 51, para todo número a da forma $4n + 3$ não divisível por um quadrado.

Tabela VIII. contendo os divisores quadráticos ternários da fórmula $t^2 + cu^2$, com os valores ternários correspondentes de c , c variando de 1 a 251, para todo número c que não é da forma $4n$, nem da forma $8n + 7$.

Tabela IX. Valores do produto $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdots \left(\frac{\omega-1}{\omega} \right)$, dos números primos sucessivos ω variando de 3 a 1229.

Tabela X. contendo os menores valores de x e y que satisfazem à equação $x^2 - ay^2 = \pm 1$, N variando entre 2 a 1003, para todo número N não quadrado.

VOLUME II

QUARTA PARTE

Métodos e proposições diversos

§ I. *Teoremas sobre potências de um número.*

§ II. *Teoremas sobre a resolução com números inteiros da equação $x^n - b = ay$.*

§ III. *Resolução da equação $x^2 + a = 2^m y$.*

§ IV. *Método para encontrar o divisor quadrático que inclua o produto de vários divisores quadráticos dados.*

§ V. *Resolução com números inteiros da equação $Ly^2 + Myz + Nz^2 = b\Pi$, onde Π é o produto de várias indeterminadas ou de suas potências.*

§ VI. *Demonstração de uma propriedade relativa aos divisores quadráticos da fórmula $t^2 + au^2$, onde a é um número $8n + 1$.*

§ VII. *Demonstração do Teorema sobre a lei da reciprocidade que existe entre dois números primos quaisquer (nº 166).*

§ VIII. *Sobre uma lei extraordinária observada na enumeração de números primos.*

Comparação entre a fórmula e as tabelas.

§ IX. *Demonstração de diversos teoremas sobre progressões aritméticas.*

§ X. Todo divisor quadrático da fórmula $t^2 + Nu^2$ contém pelo menos um número Z menor e primo a N ou a $\frac{1}{2}N$.

§ XI. Métodos para encontrar quantos termos existem numa progressão aritmética qualquer que não são divisíveis por nenhum dos números primos de uma seqüência dada

§ XII. Métodos para completar a resolução com números inteiros das equações do segundo grau.

§ XIII. Sobre a equação $x^3 + ay^3 = bz$.

§ XIV. Métodos para a resolução da equação $y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ com números racionais

§ XV. Desenvolvimento infinito do produto $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$, etc.

§ XVI. Funções semelhantes que multiplicadas entre si resultam em produtos semelhantes.

§ XVII. Algumas questões que se referem direta ou indiretamente à Análise indeterminada.

§ XVIII. Outro problema extraordinário em virtude do tipo de análise empregada em sua solução.

QUINTA PARTE

Uso da Análise Indeterminada na resolução da equação $X^n - 1 = 0$, onde n é um número primo

§ I. Fundamentos dessa nova teoria

§ II. Formação geral da equação de grau k para todos os valores de $k = 2, 3, 4, 5$

§ III. Aplicação da teoria em exemplos numéricos.

§ IV. Método de redução para completar a teoria anterior.

§ V. Método para obter a solução geral da equação $X = 0$.

SEXTA PARTE

Demonstração de diversos teoremas da Análise Indeterminada

§ I. Onde se propõe decompor um número em quatro quadrados de maneira que a soma das suas raízes, supostas positivas, seja igual a um número dado b .

§ II Demonstração do Teorema de Fermat e de outros Teoremas semelhantes sobre os números poligonais e de outros teoremas análogos.

§ III. Sobre a equação $x^3 + y^3 + z^3 = 0$.

§ IV. Sobre a equação $x^5 + y^5 + z^5 = 0$.

§ V. Teoremas da análise com novas fórmulas para seções angulares.

§ VI. Nova demonstração da lei da reciprocidade entre dois números primos.

APÊNDICE

SEÇÃO I. Novos métodos para a resolução aproximada de equações numéricas

Uma vez conhecidas as duas raízes imaginárias que formam o fator real do segundo grau que satisfaz a equação proposta de grau n , a equação de grau $n - 2$ contém as demais raízes.

SEÇÃO II. Algumas equações com a propriedade que uma vez conhecida uma raiz, todas as demais são racionalmente determinadas

Estudo generalizado sobre a equação de grau n cujas raízes formam uma seqüência reversível onde cada termo é uma função racional do termo anterior. Mostraremos que quando n é um número primo a solução

geral dessa equação será sempre dada por uma fórmula que contém todas as raízes. (*Apud* Legendre, 1830, tradução nossa)

Os livros atuais de Teoria dos Números geralmente se restringem a assuntos relativos às propriedades de números primos e resolução de equações diofantinas. Alguns também abordam sobre a teoria de ciclotomia de Gauss, que trata da divisão da circunferência em partes iguais.

Nesse momento, trataremos de alguns assuntos expostos na referida obra de Legendre, cujo olhar era diferenciado onde ele abordou desde os assuntos clássicos da Teoria dos Números presentes desde a Introdução bem como sobre os assuntos da Análise Indeterminada presentes ao longo de toda a obra, os quais descobrimos que estão intimamente relacionados. Atentamos à argumentação lógica das proposições indutivas e dedutivas e pelo seu aspecto ontológico em que fatos foram explicados e localizados em um sistema de entidades inter-relacionadas, a exemplo da determinação do número de vezes que um número primo θ é fator no produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots N$, das propriedades gerais dos números primos: sua distribuição em várias progressões aritméticas de razão constante, das resoluções de equações indeterminadas do primeiro grau, de métodos de resolução das equações indeterminadas do segundo grau com números racionais, o Pequeno Teorema de Fermat, os números primos divisores de formas quadráticas, e, como não poderia deixar de ser, a famosa lei de reciprocidade quadrática de Legendre, donde abordamos seis demonstrações.

Nessa ótica, realizamos então um estudo comparativo e evolutivo dos textos desenvolvidos por Legendre e por variados autores e optamos por enfatizar alguns estudos de Legendre comparados a textos de Euler, Lagrange, Gauss, Jacobi, Eisenstein e Zolotareff. Essa escolha perdurará ao longo do presente trabalho.

Iniciaremos com os assuntos presentes na Introdução do livro.

2.2.7.1 Teoria dos Números (1830): Introdução

Na Introdução da obra são encontradas as noções gerais sobre os números através dos seguintes parágrafos: “Propriedades do produto de números”, “Proposições diversas sobre números primos”, “Propriedades gerais dos números primos e sua distribuição em progressões aritméticas de razão constante”.

Essa parte contém algumas proposições fundamentais, todas sobre a comutatividade da multiplicação (artigos I, II e III), que segundo o autor, “cuja demonstração não se encontra nos tratados comuns de Aritmética, ou pelo menos, não é apresentada de uma maneira muito rigorosa” (LEGENDRE, 1830, p. 1, tradução nossa). Esses estudos elementares são pré-requisitos para as próximas proposições sobre propriedades gerais dos números primos.

Usando explicitamente os argumentos de divisibilidade, Legendre demonstrou três proposições, os artigos IV, VI, VIII, onde os dois primeiros são, respectivamente, as proposições 32 e 26 dos *Elementos* de Euclides e o terceiro é sobre a existência da decomposição de um inteiro em fatores primos. Segue a reprodução do texto conforme Legendre (1830):

IV. O produto de dois números A e B é divisível por todo número que divide exatamente um dos dois fatores A e B. (LEGENDRE, 1830, p. 2-3, tradução nossa.)

Partindo de um dado número θ divisor de B, Legendre mostrou diretamente que θ dividirá igualmente o produto AB:

VI. Todo número primo que não divide nenhum dos dois fatores A e B, não pode dividir o seu produto AB. (LEGENDRE, 1830, p. 3-4, tradução nossa.)

Na demonstração do artigo VI, além do argumento de divisibilidade dos números inteiros, Legendre também utilizou, embora não o tenha citado, o método da descida finita que é muito empregado em e foi utilizado especialmente por Lagrange nos trabalhos sobre equações indeterminadas do segundo grau. O método consiste em considerar uma solução particular de números inteiros para deduzir uma outra solução com números muito pequenos. O processo continua até que sejam esgotadas todas as soluções possíveis ou até que se chegue a uma contradição, no caso, a uma sequência indefinidamente decrescente de números inteiros positivos.⁵⁵ Nesse artigo, Legendre utilizou o método para obter sequências de inteiros $A', A'', A''', \text{etc.}$ e $B', B'', B''', \text{etc.}$, convenientemente determinados como restos não nulos das divisões por θ e para obter uma sequência dos produtos AB, $A'B', \text{etc.}$, que, por hipótese, são divisíveis por θ . Sendo a sequência dos produtos decrescente, o processo

⁵⁵ Maiores detalhes sobre o método são encontrados em Goldstein (1993, p. 1-3).

continua até quando é encontrado um produto com as condições de ser simultaneamente não nulo, divisível e menor do que θ , chegando-se a uma contradição.

No corpo dessa demonstração, percebe-se nitidamente a utilização do artigo V, que é um corolário do artigo IV, a saber, “Se o número θ divide simultaneamente os dois números A e B, ele dividirá a soma e a diferença de dois múltiplos quaisquer desses números” (LEGENDRE, 1830, p. 3, tradução nossa). No artigo VIII, Legendre continuou:

VIII. Se um número qualquer N não é primo, então ele pode ser representado pelo produto de vários números primos α , β , γ , etc., elevados cada um a uma potência qualquer, de maneira que sempre podemos supor que $N = \alpha^m \beta^n \gamma^p$, etc. (LEGENDRE, 1830, p. 5, tradução nossa.)

O artigo VIII poderia ser considerado como o Teorema Fundamental da Aritmética, se o enunciado não fosse incompleto, pois explicita a existência da fatoração de um número N, mas não a sua unicidade, nas passagens: “Se um número qualquer N não é primo, então ele pode ser representado pelo produto de vários números primos α , β , γ , etc., elevados cada um a uma potência qualquer, de maneira que sempre podemos supor que $N = \alpha^m \beta^n \gamma^p$, etc.” (LEGENDRE, 1830, p. 5, tradução nossa), bem como em “Deveremos então tentar a divisão de P apenas pelos números primos maiores do que α . Assim, encontraremos sucessivamente, $P = \beta^n Q$, $Q = \gamma^p R$, etc., onde $N = \alpha^m \beta^n \gamma^p$, etc.” (LEGENDRE, 1830, p. 5, tradução nossa).

Em seguida, utilizando novamente o princípio da redução ao absurdo, Legendre demonstrou a irracionalidade da $\sqrt{2}$ assim como a irracionalidade de $\sqrt[n]{b}$ que significam, respectivamente, que as equações $x^2 = 2$ e $x^n = b$ não são solúveis no conjunto dos números inteiros.

Na busca de uma fórmula ‘mágica’ capaz de fornecer números primos, Legendre desenvolveu os artigos XX a XXIII, que foram de grande utilidade na demonstração da lei de reciprocidade, no que se refere à existência de um número a da forma $4n + 1$, quando Legendre conjecturou que sempre é possível encontrar um número primo β da forma $4n + 3$, tal que β divida a fórmula $x^2 + a$ e, por consequência, a expressão $\left(\frac{a}{\beta}\right) = -1$.

Os estudos sobre os números primos levaram Euler a determinar que o número de Fermat para $n = 5$ é composto e em 1772 ele obteve uma lista de números primos por meio da fórmula $x^2 + x + 41$ com x variando entre 0 e 39. Esse fato é registrado por Legendre no artigo XX, conforme Legendre (1830):

XX. Em geral não existe propriamente nenhuma fórmula algébrica para expressar apenas números primos. Por exemplo, seja a fórmula $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$, e suponhamos que fazendo $x = k$, o valor de P seja igual a um número primo p : se fizermos $x = k + py$, sendo y um inteiro qualquer, teremos $P = p + (3ak^2 + 2bk + c)py + (3ak + b)p^2y^2 + ap^3y^3$. Donde vemos que P não é um número primo, pois é divisível por p e distinto de p .

No entanto, existem algumas fórmulas importantes pela quantidade de números primos que elas contêm: tal é a fórmula $x^2 + x + 41$, onde Euler faz menção em seus *Mémoires* de Berlim, 1772, pág. 36, na qual se fizermos sucessivamente $x = 0, 1, 2, 3$, etc., temos a sequência 41, 43, 47, 53, 61, 71, etc., onde os quarenta primeiros termos são números primos. Podemos citar dentro do mesmo gênero a fórmula $x^2 + x + 17$, onde os dezessete primeiros termos são números primos; a fórmula $2x^2 + 29$, onde os 29 primeiros termos são primos e uma grande quantidade de outras fórmulas. (LEGENDRE, 1830, p. 10-11, tradução nossa).

Historicamente, a busca de uma fórmula capaz de gerar números primos é antiga e se tornou uma espécie de paixão entre os matemáticos, que perdura até hoje. Como exemplo, podemos citar Fermat, que conjecturou que $2^{2^n} + 1$ era uma fórmula que expressava um número primo e Mersenne, um monge e matemático amador, que optou por subtrair 1 a uma potência de dois, conjecturou que $2^n - 1$ era primo para $n = 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31, 67, 127$ e 257. Um outro exemplo são as fórmulas de Euler citada no referido artigo de Legendre.

Seis décadas depois do texto de Legendre, Lucas (1891, p. 354, tradução nossa), ainda apontava a inexistência de um método para encontrar uma solução satisfatória que respondesse às seguintes questões:

1. Dado um número primo p , encontrar um outro número primo que seja maior do que p .
2. Encontrar uma função que forneça números primos.
3. Encontrar um número primo sucessor de um determinado número primo.
4. Encontrar a quantidade de números primos menores do que um determinado número.
5. Calcular diretamente um número primo a partir de uma sequência numérica.

Embora estando consciente de que é muito difícil obter fórmulas geradoras de números primos, Legendre no artigo XXI demonstrou que há uma infinidade deles:

XXI. Se não podemos encontrar a fórmula algébrica que contenha unicamente os números primos, pela mais forte razão que não podemos encontrar uma que contenha todos esses números expressa numa lei geral. Essa lei parece muito difícil de encontrar, e não há nenhuma esperança que consigamos. Isso não impede que possamos descobrir e determinar um grande número de propriedades sobre os números primos, as quais resplandecerão um grande dia sobre natureza desses números. Agora nós podemos determinar rigorosamente que a quantidade de números primos é infinita. Pois se a sequência de números primos 1. 2. 3. 5. 7. 11, etc., fosse finita e que p fosse o último ou maior de todos, seria preciso que um número N fosse divisível por qualquer um dos números primos 2. 3. 5 ... p .

Mas se representamos P pelo produto de todos estes números, é claro que dividindo $P + 1$ por qualquer um dos números primos até p , o resto será 1. Portanto a hipótese de que P é o maior dos números primos não tem fundamento; portanto a quantidade dos números primos é infinita. Essa proposição pode ser mostrada de uma maneira direta e muito elegante,

utilizando a sequência recíproca dos números primos $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.}$

que é uma soma infinita (*Introd. à Analyse infin.*, página 235). (LEGENDRE, 1830, p. 13-4, tradução nossa.)

Esse artigo é a Proposição 20, Livro IX dos Elementos de Euclides, a saber: “Existe uma infinidade de números primos”, que expressa que cada número pode ser obtido pelo produto de números primos entre si. Em sua demonstração, Legendre reproduziu a mesma demonstração de Euclides, que utilizou o método de redução ao absurdo, assim como aludiu à engenhosa demonstração de Euler em sua Introdução à Análise Infinita, em que o matemático suíço estabeleceu uma relação entre uma sequência finita $p_1, p_2, \dots, p_k$, de números primos e a série harmônica divergente, $\sum \frac{1}{n}$.

O artigo seguinte é uma apresentação dos números primos, os quais Legendre apresentou em duas categorias:

XXII. Todos os números ímpares se representam pela fórmula $2x + 1$, a qual segundo x é par ou ímpar, contém as duas formas $4x + 1$ e $4x - 1$ ou $4x + 3$. Desses resultados são obtidas duas grandes divisões de números primos, uma compreendendo os números primos $4x + 1$, a saber, 1, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, etc., outra contemplando os números primos $4x - 1$ ou $4x + 3$, a saber 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, etc. A forma geral $4x + 1$ se subdivide

em duas outras formas $8x + 1$ e $8x - 3$ ou $8x + 5$; da mesma forma que $4x + 3$ se subdivide em duas outras $8x + 3$ e $8x + 7$ ou $8x - 1$; de maneira que relativamente aos múltiplos de 8, os números primos se distribuem nessas quatro principais formas:

$$8x + 1 \dots 1, 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, \text{ etc.}$$

$$8x + 3 \dots 3, 11, 19, 43, 59, 67, 83, 107, \text{ etc.}$$

$$8x + 5 \dots 5, 13, 29, 37, 53, 61, 101, 109, \text{ etc.}$$

$$8x + 7 \dots 7, 23, 31, 47, 71, 103, 127, \text{ etc.}$$

(LEGENDRE, 1830, p. 14, tradução nossa.)

Essa classificação não é uma mera casualidade, pois ela aparece em vários momentos na obra, principalmente nas demonstrações de proposições sobre os números primos e na demonstração da lei de reciprocidade, como será visto mais adiante no presente capítulo.

Na continuidade, Legendre apresentou nos artigos XXIII e XXIV (p. 15-6), novas categorias para os números primos que, em relação aos múltiplos de 6, estão representados por $6x + 1$ e $6x - 1$ ou $6x + 5$; onde x pode ser ímpar ou par. Em relação aos múltiplos de 12, são representados pelas quatro formas $12x + 1$, $12x + 5$, $12x + 7$, $12x + 11$ e cada uma dessas formas contém uma infinidade de números primos.

Legendre ainda apontou que se a é um número qualquer, todo número ímpar pode ser representado por $4ax \pm b$, no qual b é ímpar, positivo e menor do que $4a$. Se, entre todos os valores possíveis para b , forem excluídos os que são divisores de a , as demais formas,

$4ax + b$ contém todos os números primos (com exceção daqueles que dividem $4a$).

No mais, se $4a = 2^m \alpha^n \beta^p$ etc., onde α , β , etc., são números primos, Legendre afirmou que a quantidade dessas últimas formas é dada pela fórmula

$$\mathbf{a} = 4a \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{\beta}\right), \text{ etc.}$$

Em seguida, Legendre aplicou a fórmula para $a = 60$, como aponta Legendre (1830, p. 16, tradução nossa):

XXIV. Por exemplo, se temos $a = 60$, resultou que $\mathbf{a} = 16$. Assim relativamente aos múltiplos de 60, todos os números primos (exceto 2, 3, 5 divisores de 60), se distribuiriam em dezesseis formas, a saber:

$$60x + 1, 60x + 7, 60x + 11, 60x + 13$$

$$60x + 17, 60x + 19, 60x + 23, 60x + 29$$

$$60x + 31, 60x + 37, 60x + 41, 60x + 43$$

$$60x + 47, 60x + 49, 60x + 53, 60x + 59;$$

provará além disso, mais adiante, que a distribuição dos números primos entre estas dezesseis formas se faz igualmente, segundo as relações que tendem de cada vez mais para a igualdade.

No entanto, nesse exemplo observamos um pequeno erro: o valor correto para a deveria ser 15 e não 60. De fato, se a fosse $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, teríamos pela fórmula acima, que $4a = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ e a quantidade de formas $4ax + b$, seria $\mathbf{a} = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 64$. Portanto, a quantidade correta, correspondente às dezesseis formas exibidas acima, deveria ter sido determinada para o valor de $a = 15$, e assim $4a = 60$ e

$$\mathbf{a} = 4 \times 15 (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 16.$$

Acreditamos que foi um erro de grafia da parte do editor, que suprimiu o fator 4 da expressão $4a$, que seria a expressão correta para ser igualada a 60. Não temos conhecimento de que outro autor tenha comentado sobre esse erro.

2.2.7.2 Teoria dos Números (1830): Volume I, Primeira parte

A Primeira Parte do Volume I, “Exposição sobre os diversos métodos e proposições relativos à Análise Indeterminada” (Figura 20), possui quinze parágrafos ou capítulos, que por sua vez são subdivididos em vários artigos. (vide resumo dos conteúdos expostos na página 114 do presente trabalho).

O parágrafo I, “Sobre as frações contínuas”, tem por finalidade resolver a equação $p^2 - Aq^2 = \pm D$, onde D é $< \sqrt{A}$ e determinar propriedades elementares de frações contínuas,

de frações convergentes e de frações simétricas. Após desenvolver $\sqrt{A}$ em fração contínua, Legendre mostrou que se a equação for solúvel, a fração $\frac{p}{q}$ está entre as frações convergentes para $\sqrt{A}$. Em seguida, ele aplicou o mesmo procedimento para resolver com números inteiros a equação indeterminada do primeiro grau, $ax - by = 1$, com a e b primos entre si, que consiste em primeiramente reduzir $\frac{a}{b}$ em fração contínua, e depois construir uma sequência de frações convergentes para $\frac{a}{b}$.

No parágrafo II, “Resoluções de equações indeterminadas do primeiro grau”, são realizados estudos cujos textos são similares aos artigos 50-52 do trabalho de Euler-Lagrange (1798), *Adições aos Elementos de Álgebra*.

No parágrafo III, “Sobre um método de resolução com números racionais da equação do segundo grau reduzida à forma $x^2 - By^2 = Az^2$ ”, Legendre utilizou o princípio da descida finita com a reprodução fiel do método utilizado por Lagrange para a resolução da equação de segundo grau em que os coeficientes A e B são sucessivamente diminuídos até que um dos dois seja igual à unidade.

Fruto dos estudos iniciais do trabalho de 1785, o parágrafo IV, que trata da possibilidade ou da impossibilidade de toda equação indeterminada do segundo grau, é um estudo da equação que se encontra reduzida à forma $ax^2 + by^2 = cz^2$ onde a, b, c são positivos sem fator quadrado e, para que tal equação fosse solúvel, foram estabelecidas as seguintes condições: que as expressões $\frac{a\lambda + b^2}{c}$, $\frac{c\mu^2 - b}{a}$, $\frac{cv^2 - a}{b}$ sejam inteiras, onde λ, μ, ν são números inteiros.

Nos parágrafos V a VI sobre o desenvolvimento da raiz de um número não quadrado em fração contínua e sobre a resolução com números inteiros da equação indeterminada $x^2 - Ay^2 = \pm D$, onde $D < \sqrt{A}$, foi apresentada uma lei geral do desenvolvimento da raiz de um número não quadrado em fração contínua, bem como foi demonstrado que a equação de Pell, $x^2 - Ay^2 = 1$ sempre admite uma infinidade de soluções.

Os estudos de Legendre sobre a possibilidade das equações da forma $Mx^2 - Ny^2 = \pm 1$ ou ± 2 produziram os seguintes resultados no parágrafo VII: se A é um número primo $4n +$

1, a equação $x^2 - Ay^2 = -1$ é sempre possível”; “se A é um número primo $8n + 3$, a equação $x^2 - Ay^2 = -2$ é sempre possível”; “se A é um número primo $8n + 7$, a equação $x^2 - Ay^2 = 2$ é sempre possível e “toda equação $Mx^2 - Ny^2 = +1$ será sempre possível quando M e N são dois números primos $4n + 3$ ”. Legendre também estabeleceu um procedimento para que todo número primo $4n + 1$ possa ser sempre decomposto em dois quadrados.

Por meio do método de Lagrange (*Mém. de Berlin*, 1773), a fórmula $Ly^2 + Myz + Nz^2$ foi reduzida a uma expressão mais simples e Legendre criou no parágrafo VIII um método particular para determinar que duas fórmulas $py^2 + 2qyz + rz^2$, $p'y^2 + 2q'yz + r'z^2$ eram essencialmente distintas uma da outra e não poderiam ser equivalentes desde que os seus coeficientes médios não sejam maiores do que os extremos em que $pr - q$ e $p'r' - q'$ são iguais a um número positivo A .

Os demais parágrafos de IX a XV são intitulados, respectivamente, “Desenvolvimento da raiz de uma equação do segundo grau em fração contínua”, “Comparação entre as frações contínuas que resultaram do desenvolvimento de duas raízes de uma mesma equação do segundo grau”, “Resolução com números inteiros da equação $Ly^2 + Myz + Nz^2 = \pm H$ ”, “Demonstração de uma proposição conjecturada nos parágrafos anteriores”, “Redução posterior das fórmulas $Ly^2 + Myz + Nz^2$ quando $M^2 - 4LM$ é igual a um número positivo”, “Desenvolvimento em fração contínua da raiz de uma equação de um grau qualquer” e “Resolução com números inteiros da equação indeterminada $Ly^n + My^{n-1}z + Ny^{n-2}z^2 \dots Vz^n = \pm H$ ”. Esses parágrafos foram inspirados não somente nos trabalhos de Lagrange publicados pela Academia Real de Ciências e Belas Artes de Berlim, nos anos de 1767, 1768 e 1775, mas também no trabalho de Euler-Lagrange (1798), que versam sobre um método geral para resolver as equações indeterminadas com números inteiros, fundamentados no desenvolvimento das raízes em frações contínuas.

2.2.7.2.1 Primeira parte (1830): Equações indeterminadas do segundo grau

Em continuidade, o primeiro enfoque da primeira parte da obra será dado ao terceiro parágrafo, “Método para resolver com números racionais as equações indeterminadas do segundo grau”, onde Legendre demonstrou que toda equação indeterminada do segundo grau

pode ser reduzida à forma $x^2 - By^2 = Az^2$, onde A e B são números inteiros positivos, sem fatores quadrados com $A > B$.

Devido à extensão dos assuntos, escolhemos conteúdos que nos possibilitou traçar um paralelo entre os trabalhos de Legendre de Euler, de Lagrange e de Gauss, ícones contemporâneos de Legendre que versaram sobre o mesmo assunto.

A diversidade de leituras de demonstrações de teoremas por Legendre e por outros autores é fundamental para a compreensão da semântica de textos originais pela aplicação de métodos, de generalização de propriedades, de demonstrações novas, de utilização de outras teorias, etc.

Apresentaremos as demonstrações de Euler-Lagrange (1798), de Legendre (1785, 1830) e de Gauss (1807), com ênfase nos pontos comuns e disjuntos de cada demonstração sobre a resolução de equações do segundo grau com duas indeterminadas (variáveis ou incógnitas). Optamos por manter o termo ‘indeterminada’ que era o termo utilizado na época

Primeiramente, apresentaremos os princípios utilizados na demonstração de Euler-Lagrange nas *Adições aos Elementos de Álgebra*⁵⁶ (1798) que segundo os autores (p. 114), são correções e adições de trabalhos desenvolvidos a partir de 1767, principalmente dos *Elementos de Álgebra* de Euler e dos trabalhos de Lagrange da Academia (1773-4). Inclusive Euler-Lagrange (1798, p. 98) indicam o trabalho de Legendre⁵⁷ (1785) como referência sobre o mesmo assunto.

No artigo 52, “Resolução da equação $Ap^2 + Bq^2 = z^2$ com números inteiros”, de *Adições* (1798), os autores expõem uma formulação definitiva e mais generalizada da resolução da equação $Ay^2 + B$, onde A e B são números inteiros não nulos e não divisíveis por um quadrado.

Considerando como ponto de partida a fórmula $Ap^2 + Bq^2 = z^2$ e supondo $y = \frac{p}{q}$ uma fração irredutível, os autores, no artigo 51 (p. 102), reduziram a equação anterior à $Ap^2 + Bq^2 = z^2$ ou $Ap^2 = z^2 - Bq^2$ com p, q, z inteiros. Como A e B não são divisíveis por um quadrado e p e q são primos entre si, ele demonstrou que q e A, bem como p e B não possuem fatores em comum. Essa condição é fundamental para que o autor demonstre as possibilidades de

⁵⁶ Traduzida do latim para o francês por Lagrange que também contribuiu com alguns estudos.

⁵⁷ Trata-se do terceiro artigo de Legendre: “Um Teorema sobre a possibilidade das equações indeterminadas do segundo grau” (LEGENDRE, 1785, p. 507-513).

resolubilidade da equação $Ap^2 + B$, ao criar condições para que a equação proposta seja ou não um quadrado. Esse fato é explicado de uma forma bem simples:

Primeiro devo provar que q deve ser primo a A e que p deve ser a B , pois se q e A tivessem um divisor comum, é claro que o termo Bq^2 seria divisível pelo quadrado desse divisor e que o termo Ap^2 seria divisível apenas pela primeira potência do mesmo divisor, pois p e q são primos entre si e A por suposição não possui fator quadrado. Portanto, o número $Ap^2 + Bq^2$ é divisível somente uma única vez pelo divisor comum de q e A e por consequência é impossível que esse número seja um quadrado. Da mesma maneira, provaríamos que p e B não possuem nenhum divisor comum. (EULER-LAGRANGE, 1798, artigo 51, p. 102, tradução nossa.)

É interessante ressaltar que Euler utilizou os termos “primeira potência” e “divisível somente uma única vez” para expressar os fatores simples de um número (EULER-LAGRANGE, 1798, p. 102-107).

No texto de 1785, a demonstração desse importante fato foi omitida por Legendre, que se contentou em afirmar “Toda equação dessa espécie pode ser reduzida segundo a forma $x^2 - By^2 = A$, onde A e B são inteiros positivos ou negativos, não divisíveis por um quadrado” (LEGENDRE, 1785, p. 507, tradução nossa).

Melhorando o texto de 1785, Legendre apresentou na edição de *Teoria dos Números* (1830, Vol. I, p. 32-5), “Estudos sobre a Análise Indeterminada na solução da equação com números racionais”, fundamentado nos parágrafos V e VI das *Adições* de Euler-Lagrange (1798, p. 100-2). Primeiramente, Legendre transformou a equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, onde x e y são indeterminadas e a, b, c, d, e, f números inteiros positivos ou negativos em $u^2 - At^2 = B$, por meio das expressões⁵⁸

$$2ax + by + d = \sqrt{[(by + d)^2 - 4a(cy^2 + ey + f)]}, \quad y = \frac{u - g}{A}, \quad x = \frac{t - by - d}{2a}.$$

A equação $u^2 - At^2 = B$ é reduzida à equação $x^2 - Ay^2 = Bz^2$ ou $x^2 - By^2 = Az^2$, com $A > B$ e A, B sem fatores quadrados pela substituição das novas indeterminadas $u = \frac{x}{z}$,

$t = \frac{y}{z}$. Legendre demonstrou que os três termos da equação reduzida não possuem fatores em comum, pois se o tivessem, eles seriam reduzidos por meio de divisões. Em seguida, o

⁵⁸ O texto omite, mas a primeira expressão vem do desenvolvimento de $(2ax + by + d)^2$ por substituição de $ax^2 + bxy + dx = -(cy^2 + ey + f)$ na referida equação.

autor demonstrou que x e y , x e z e y e z são primos entre si para logo depois, demonstrar que y e A são igualmente primos entre si:

Já provamos que x e y são primos entre si; disso segue que y e A são igualmente primos entre si, pois se y^2 e A tivessem um divisor comum θ , seria preciso que x^2 fosse também divisível por θ ; assim x^2 e y^2 não seriam primos entre si. LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 33, tradução nossa.)

Como A e B não são divisíveis por um quadrado e x e y são primos entre si, é fácil ver que y e A , bem como x e B não possuem fatores em comum. Pois se y e A tivessem um fator em comum, digamos, $y = \theta m$ e $A = \theta n$, ao substituirmos esses valores em $x^2 - By^2 = Az^2$, teríamos que θ dividiria x^2 , e, por conseguinte, dividiria x . Assim, x e y não seriam primos entre si, uma vez que A e B não possuem fatores quadrados. De forma análoga mostrou-se que a relação é válida para x e B .

A demonstração do teorema que determinou a resolução da equação reduzida $x^2 - By^2 = Az^2$ com números racionais do trabalho inicial de Legendre (1785) foi complementada, nesse trabalho de 1830, com base no método de Euler e Lagrange (1798), que utilizaram o princípio da descida infinita de Fermat. Esse princípio consiste em mostrar que é possível deduzir sistematicamente de uma solução inteira do problema dado uma outra solução, composta por números menores, e continuar esse procedimento até que se esgotem todas as soluções possíveis, ou que se chegue a uma contradição, uma vez que não existe uma sequência decrescente infinita de números naturais.

Com esse princípio, o engenhoso método de Euler e Lagrange, empregado por Legendre na resolução da equação $x^2 - By^2 = Az^2$, consiste em primeiramente encontrar um número α menor do que $\frac{1}{2}A$, tal que $\frac{\alpha^2 - B}{A}$ seja um inteiro. O objetivo é determinar analiticamente uma sequência de transformadas $\alpha^2 - B = AA'k^2$, $\alpha'^2 - B = A'A''k'^2$, $\alpha' = \mu A' \pm \alpha < \frac{1}{2}A'$, etc., da equação em estudo, onde os coeficientes decresçam continuamente, até que um deles seja reduzido à unidade, de modo a obter uma equação do tipo $\alpha^2 - B = tA$, para algum t inteiro.

A necessidade de mostrar que a expressão $\frac{\alpha^2 - B}{A}$ é igual a um inteiro no trabalho de Legendre é equivalente a mostrar que $z^2 - Bq^2$ tem que ser divisível por A, em relação à equação $Ap^2 = z^2 - Bq^2$, presente na obra de Euler-Lagrange (1798).

Os artigos 47 e 48 (EULER-LAGRANGE, 1798, p. 103-114) fornecem o método, o qual foi utilizado integralmente por Legendre em 1830: primeiro, é necessário substituir $x = \alpha y - Aq_1$ com α e q_1 inteiros, na expressão $x^2 - By^2$, de modo a obter que $(\alpha^2 - B)y^2 - 2\alpha Aq_1y + A^2q_1^2$. Segundo, deve-se mostrar que a equação $Az^2 = x^2 - By^2$ não terá solução inteira se $\alpha > \frac{A}{2}$, pois assim $Ay^2 + B$ não seria um quadrado. A justificativa para a condição de α é encontrada em Euler-Lagrange (1798, p. 103). De acordo com os autores, é desnecessário procurar valores de $\alpha > \frac{A}{2}$, uma vez que o artigo 47 (1798, p. 96) garante que, dados μ_i inteiros quaisquer tais que se $\alpha_i \pm \mu_i A$, $i = 1, 2, 3, \dots$ são maiores do que $\frac{A}{2}$, os sinais de μ_i podem ser convenientemente determinados para que $\alpha_i \pm \mu_i A$ sejam menores do que $\frac{A}{2}$. Terceiro, com esses argumentos, Legendre mostrou que a expressão $(\alpha^2 - B)y^2 - 2\alpha Aq_1y + A^2q_1^2$ é possível quando o número α é de tal maneira que $\frac{\alpha^2 - B}{A}$ é um número inteiro. Nesse sentido, o autor observou que, se existe algum valor de α que faz com que $\alpha^2 - B$ seja divisível por A, esse valor pode ser acrescido ou subtraído de um múltiplo qualquer de A, de forma que $\alpha^2 - B$ permaneça divisível por A. Assim, ele supôs que esse valor está entre os limites 0 e A, ou mesmo entre os limites $-\frac{1}{2}A$ e $+\frac{1}{2}A$. Disso segue, que tentando sucessivamente para α todos os números inteiros de $-\frac{1}{2}A$ até $+\frac{1}{2}A$, necessariamente serão encontrados um ou vários valores de α tais que $\alpha^2 - B$ é divisível por A, o que fará com que a equação seja solúvel. Caso contrário, a equação proposta não será solúvel (LEGENDRE; 1830, Vol. I, p. 39-48).

Após muitos cálculos, Legendre complementa o estudo com o artigo 27, que é uma condição suficiente e mais generalizada, com a qual, sem realizar nenhuma transformação, é

possível decidir de imediato, se uma equação indeterminada do segundo grau é solúvel ou não:

(27) Sendo proposta a equação $ax^2 + by^2 = cz^2$, onde os coeficientes a, b, c , são individualmente, ou dois a dois, sem divisor quadrado e sem divisor comum, digo, que esta equação será solúvel, se pudermos encontrar três inteiros λ, μ, ν tais que as três quantidades $\frac{a\lambda^2 + b}{c}, \frac{c\mu^2 - b}{a}, \frac{c\nu^2 - a}{b}$ sejam inteiras. Caso contrário, ela será insolúvel, se essas três condições não forem simultaneamente satisfeitas. (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 48, tradução nossa.)

O enunciado e a demonstração são idênticos ao texto que se encontra na parte final do artigo IV de 1785 e posteriormente reproduzido no parágrafo IV da primeira parte das edições de 1798 e de 1808 e no mesmo parágrafo do volume I da edição de 1830.

Fundamentado nos trabalhos de Lagrange de 1773 e 1775 e com princípios totalmente inusitados, Gauss, em *Recherches d'Aritmétiques* (1807, tradução francesa de *Disquisitiones Arithmeticae* de 1801), após estudar a questão de resíduos quadráticos na seção IV, consagrou a metade da seção V às combinações de formas quadráticas binárias⁵⁹ e equações indeterminadas do segundo grau, de acordo com Gauss, 1807, p. 153-308.

Gauss aplicou a teoria de formas quadráticas à resolução de $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ com números inteiros. Primeiramente, ele a transformou em uma equivalente, $ap^2 + 2bpq + cq^2 + (b^2 - ac) + (ae^2 - 2bed + cd^2) + f(b^2 - ac)$, substituindo $x = \frac{p + cd - be}{b^2 - ac}$ e $y = \frac{q + ae - bd}{b^2 - ac}$. Para abreviar, essa última forma é reduzida a $(b^2 - ac)(ae^2 - 2bed + cd^2) + f(b^2 - ac) = -M$, onde $M = ap^2 + 2bpq + cq^2$. O objetivo é encontrar todas as soluções possíveis (desprezando-se as fracionárias) da equação proposta, associadas a todas representações do número M pela forma (a, b, c) segundo as relações entre x, y, p, q acima. Essas soluções dependem de algumas condições: se M não pode ser representado pela forma (a, b, c) , ou se alguma representação de M não fornecer valores inteiros de x e y , a equação não é solúvel. Quando o determinante $b^2 - ac$ da forma (a, b, c) é negativo ou positivo quadrado e, simultaneamente, M não é positivo, as

⁵⁹ Segundo Edwards (2007, p. 130, tradução nossa), “A difícil teoria de composição de formas da seção V está intimamente ligada à teoria de ideais primos de Kummer de 1847. Não seria surpresa se Kummer, Gauss e Dedekind não tivessem discutido conexões entre essas duas teorias”.

representações de M pela forma (a, b, c) são limitadas e assim as soluções da equação também serão, caso existam. Assim, para encontrar todas as representações de um número, dadas por uma forma do tipo $m(gx + hy)^2$ cujo determinante é zero, Gauss concluiu que esse número deve ser divisível por M e que o quociente deve ser um quadrado. Se esse número for representado por me^2 , basta então, encontrar os valores de x e y para que $(gx + hy)^2 = e^2$, ou que $gx + hy = \pm e$, que é uma equação sempre solúvel com números inteiros, uma vez que g e h são primos entre si. Uma vez determinados g' e h' tais que $gg' + hh' = 1$ os valores de x e y podem ser encontrados por meio de $x = \pm g'e + hz$ e $y = \pm h'e - gz$, onde z é um número inteiro qualquer.

Além disso, Gauss mostrou que o número de representações é infinito, quando o determinante $b^2 - ac$ é positivo e não quadrado ou quando ele é quadrado e, simultaneamente, M é zero e pode ser representado pela forma (a, b, c) .

Mas como é impossível encontrar todas essas representações, Gauss afirmou que é necessário descobrir, por tentativas, os valores fracionários ou inteiros das equações por uma regra particular que possa assegurar que existe apenas uma representação que forneça valores inteiros para x e y (GAUSS, 1807, p. 218).

As leituras das demonstrações do teorema sobre resolução de equações do segundo grau com duas indeterminadas realizadas em diferentes épocas por Euler, Lagrange, Legendre e Gauss mostraram que o método de Euler-Lagrange de 1798 é simples, mas limitado, pois a resolução da equação proposta se deu a partir de uma única equação e, assim, o estudo se reduziu a um pequeno número de casos.

No trabalho de 1785, Legendre apresentou várias propriedades fundamentadas no método de Lagrange, que trata de um procedimento geral para resolver as equações indeterminadas do segundo grau com números fracionários e também, com números inteiros. Usando o princípio da descida infinita de Fermat, o método de Lagrange, reproduzido por Legendre em todos os seus trabalhos sobre Teoria dos Números de 1785-1830, possui algumas lacunas no corpo da demonstração, pelo uso restritivo à “indução”, que não se trata do princípio da indução finita, mas de apreensão por meio de exemplos numéricos.

Gauss, porém, preencheu essas lacunas, quando, sistematicamente, desenvolveu a teoria das formas, que também é baseado em Lagrange, no que diz respeito aos estudos sobre equivalência das formas em 1773 e 1775. Gauss ao distinguir as formas próprias das

impróprias, criou um método diferente, unindo a resolução desse tipo de equações às propriedades de determinantes de formas quadráticas equivalentes.

2.2.7.2.2 Primeira parte (1830): Frações contínuas

Mantendo a coerência de nossa proposta, enfatizaremos as diferenças e as semelhanças de abordagem de conteúdos entre Legendre e seus pares, com o segundo enfoque ao parágrafo V: “Desenvolvimento da raiz de um número não quadrado em fração contínua”, assunto não muito habitual em Teoria dos Números, onde Legendre demonstrou que a equação $x^2 - Ay^2 = +1$ é sempre solúvel com infinitas soluções, qualquer que seja A, conquanto que A não seja um quadrado perfeito. Nesse parágrafo é demonstrado que a fração contínua convergente para a raiz de uma equação racional do segundo grau é periódica e que a equação $x^2 - Ay^2 = 1$ sempre admite uma infinidade de soluções.

Lagrange foi o primeiro a determinar que a fração contínua em questão é periódica e concluiu que o problema de Fermat sobre a equação $x^2 - Ay^2 = 1$ é sempre solúvel, proposição que, até então, não tinha sido estabelecida de uma maneira rigorosa pelos matemáticos da época.

No entanto, são necessários alguns conhecimentos sobre frações contínuas expostos no parágrafo I do Volume I da obra. Segundo Legendre (1830, p. 17), uma quantidade x qualquer racional ou irracional pode ser desenvolvida em fração contínua, segundo o princípio de se fazer sucessivamente

$$x = \alpha + \frac{1}{x'}, \quad x' = \alpha' + \frac{1}{x''}, \quad x'' = \alpha'' + \frac{1}{x'''}, \text{ etc.},$$

onde α é o maior inteiro contido em x , α' o maior inteiro contido em x' , α'' o maior inteiro contido em x'' , e assim por diante. Dessa feita, x pode ser transformado na fração contínua

$$\alpha + \frac{1}{\alpha' + \frac{1}{\alpha'' + \frac{1}{\alpha'''} + \dots}}$$

a qual terá um número finito ou infinito de termos, conforme x seja racional ou irracional.

Os termos α , α' , α'' , ... , assim como a quantidade x , foram sempre considerados positivos por Legendre e α será zero, se x for menor do que a unidade. Legendre observou que, para a sequência ser convergente, às vezes é conveniente admitir quocientes negativos. Descartando esse último caso, Legendre mostrou que quando a quantidade x é uma fração racional $\frac{M}{N}$ positiva, para transformá-la em fração contínua, basta realizar com os números M e N a mesma operação para determinar o máximo divisor comum entre dois números inteiros.

Para essa finalidade, Legendre supôs $M > N$ e por meio da operação

$$\text{resto } \frac{M}{P} \left\{ \frac{N}{\alpha} \right. , \text{ resto } \frac{N}{Q} \left\{ \frac{P}{\alpha'} \right. , \text{ resto } \frac{P}{R} \left\{ \frac{Q}{\alpha''} \right. \dots$$

obtem os seguintes resultados:

$$\frac{M}{N} = \alpha + \frac{P}{N}, \quad \frac{N}{P} = \alpha' + \frac{Q}{P}, \quad \frac{P}{Q} = \alpha'' + \frac{R}{Q}, \dots$$

$$\text{Então } \frac{M}{N} = \alpha + \frac{1}{\alpha' + \frac{1}{\alpha'' + \dots}} \quad \text{e} \quad \frac{N}{M} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha' + \frac{1}{\alpha'' + \dots}}$$

Em seguida, Legendre definiu como *quocientes* os sucessivos inteiros positivos α , α' , α'' , ... da fração contínua e como *quocientes completos* as quantidades x , x' , x'' , ... que

resultaram no desenvolvimento de $x = \alpha + \frac{1}{\alpha' + \frac{1}{\alpha'' + \frac{1}{x''' + \dots}}}$, onde α será nulo, caso x seja

menor do que a unidade.

Cada quociente completo contém, implicitamente, todos os quocientes da fração contínua, pois, a partir do desenvolvimento desse quociente completo, todos os quocientes posteriores serão sucessivamente determinados.

Dessa feita, os termos da fração contínua são os quocientes determinados pela operação do máximo divisor comum e a fração contínua será sempre limitada a certo número de termos, que poderá ser grande ou pequeno, de acordo com cada fração. Disso segue que, por meio de cada quociente completo, sempre é possível reproduzir ao valor exato da quantidade desenvolvida, quão longe possa ter ido o seu desenvolvimento.

Legendre mostrou que o processo é reversível: dada uma fração contínua

$$x = \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta} + \dots}}, \text{ para reduzi-la a uma fração ordinária, ou melhor, para determinar o}$$

seu valor, é suficiente observar a lei dos resultados obtidos e tomar sucessivamente o primeiro termo, os dois primeiros, os três primeiros, etc., dessa quantidade. Sendo assim, as seguintes reduções ordinárias foram obtidas:

$$\alpha = \frac{1}{\alpha}, \alpha + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha\beta + 1}{\beta}, \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma}} = \frac{\alpha\beta\gamma + \gamma + \alpha}{\beta\gamma + 1},$$

$$\alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta}}} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta + \gamma\delta + \alpha\delta + \alpha\beta + 1}{\beta\gamma\delta + \delta + \beta}, \text{ etc.}$$

Onde segue que sendo $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ dois resultados consecutivos, e μ um novo quociente, o

resultado seguinte é $\frac{p\mu + m}{q\mu + n}$, que é a lei geral que permite calcular facilmente o valor da

fração contínua proposta, qualquer que seja o número de seus termos (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 17-27).

Com esses conhecimentos, Legendre desenvolveu a raiz de um número não quadrado em fração contínua, no parágrafo V da primeira parte do volume I da edição de 1830.

O primeiro texto é uma aplicação do desenvolvimento de um número A em fração contínua, no caso particular de $A = 19$:

Seja $A = 19$. Temos que $x = \sqrt{19} = 4 + \frac{1}{x'}$ e assim $x' = \frac{1}{\sqrt{19} - 4}$. Multiplicando-se

os dois termos da fração por $\sqrt{19} + 4$, temos que $x' = \frac{\sqrt{19} + 4}{3}$, cujo maior inteiro é

2. Assim obteremos que $x' = 2 + \frac{\sqrt{19} - 2}{3}$. Dessa última parte, denominada

$\frac{1}{x''}$, obteremos $x'' = \frac{3}{\sqrt{19} - 2} = \frac{\sqrt{19} + 2}{5}$; cujo maior inteiro é 1 e o resto é $\frac{\sqrt{19} - 3}{5}$,

o qual é preciso inverter para obtermos o valor de x''' , e assim por diante. Segue a operação para desenvolver $\sqrt{19}$ em fração contínua:

$$x = \sqrt{19} = 4 + \frac{\sqrt{19} - 4}{1}$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{19} - 4} = \frac{\sqrt{19} + 4}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19} - 2}{3}$$

$$x'' = \frac{3}{\sqrt{19} - 2} = \frac{\sqrt{19} + 2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19} - 3}{5}$$

$$x''' = \frac{5}{\sqrt{19} - 3} = \frac{\sqrt{19} + 3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{19} - 3}{2}$$

$$x^{iv} = \frac{2}{\sqrt{19} - 3} = \frac{\sqrt{19} + 3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19} - 2}{5}$$

$$x^v = \frac{5}{\sqrt{19} - 2} = \frac{\sqrt{19} + 2}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19} - 4}{3}$$

$$x^{vi} = \frac{3}{\sqrt{19} - 4} = \frac{\sqrt{19} + 4}{1} = 8 + \frac{\sqrt{19} - 4}{1}$$

$$x^{vii} = \frac{1}{\sqrt{19} - 4} = \frac{\sqrt{19} + 4}{3} = 2 + \text{etc.}$$

(LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 49, tradução nossa.)

Uma vez determinado x^{vii} que é igual à expressão de x' , Legendre apontou que os quocientes que já foram encontrados 2, 1, 3, 1, 2, 8 reapareceram na mesma ordem, e assim o desenvolvimento de $\sqrt{19}$ em fração contínua resultou nos quocientes, com a notação de

período adotada por Legendre : 4: 2, 1, 3, 1, 2; 8: 2, 1, 3, 1, 2; 8: 2, 1, 3, 1, 2, 8: etc., onde vemos que após o primeiro termo igual a 4, o período 2, 1, 3, 1, 2, 8 permanece sempre nessa mesma ordem e se repete infinitamente.

A partir do caso anterior, Legendre apresentou, nos próximos artigos, uma lei geral que permitiu determinar a sequência infinita de quocientes completos do desenvolvimento em fração contínua de um número A , não quadrado. Primeiramente, ele considerou a^2 o maior quadrado contido em A e b o resto, de maneira que $A = a^2 + b$. O desenvolvimento de

$\sqrt{A}$ em fração contínua foi obtido dessa maneira: $x = \sqrt{A} = a + \frac{\sqrt{A} - a}{1}$,

$x' = \frac{1}{\sqrt{A} - a} = \frac{\sqrt{A} + a}{b} = \text{etc.}$, até o quociente-completo $x^{(n)}$ ou $y = \frac{\sqrt{A} + I}{D}$. A partir desse

quociente-completo foi deduzido o próximo quociente-completo $\frac{\sqrt{A} + I'}{D'}$. Caso os números

I' e D' sejam fracionários, Legendre afirmou que é suficiente substituir o valor de I' no

valor de D' , de forma a obter $D' = \frac{A - (\mu D - I)^2}{D} = \frac{A - I^2}{D} + 2\mu I - \mu^2 D$. Ora, sendo

$A - I'^2 = D'D$, se $\frac{\sqrt{A} + I'}{D^0}$ for o quociente-completo que precede $\frac{\sqrt{A} + I}{D}$, de maneira

análoga é obtido que $A - I^2 = DD^0$ e $D' = D^0 + 2\mu I - \mu^2 D$.

Onde vemos que, uma vez que os números D e I são inteiros nos dois quocientes-

completos $\frac{\sqrt{A}}{1} = \frac{\sqrt{A} + 0}{1}$ e $\frac{\sqrt{A} + a}{b}$, eles necessariamente também o serão nos demais

quocientes, e assim sucessivamente.

Após obter os quocientes provenientes do desenvolvimento da $\sqrt{A}$, Legendre mostrou que eles obedecem à lei: $a, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \gamma, \beta, \alpha, 2\alpha, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \gamma, \beta, \alpha, 2\alpha$, etc. Essa lei que deveria ser ainda mais regular, caso o primeiro quociente fosse $2a$ ou zero, ou seja, caso ele fosse o desenvolvimento da $\sqrt{A} \pm a$. Em seguida ele mostrou que toda fração convergente $\frac{p}{q}$ num período qualquer corresponde ao quociente $2a$ e deve ser de tal

modo para que $p^2 - Aq^2 = \pm 1$ e, se $\frac{p}{q} > \sqrt{A}$, ela será igual a $+1$. Caso contrário ela será igual a -1 . De onde resultou que, se o quociente $2a$ necessariamente estiver no desenvolvimento de $\sqrt{A}$, a equação $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ sempre será solúvel (pelo menos com o sinal $+$), qualquer que seja o número A , na condição de que ele não seja um quadrado perfeito. Ao mesmo tempo, haverá uma infinidade de soluções para essa equação, pois o quociente $2a$ se repete uma infinidade de vezes nos períodos sucessivos. Além disso, se o número de termos do período $\alpha, \beta, \dots, \beta, \alpha, 2a$, for par, todas as frações que correspondem ao quociente $2a$ nos diversos períodos, serão maiores do que $\sqrt{A}$, e nesse caso, as frações satisfarão apenas à equação $x^2 - Ay^2 = +1$.

Mas se a quantidade de termos do período for ímpar, então a primeira fração que corresponde ao quociente $2a$ será menor do que $\sqrt{A}$, a segunda maior, e assim alternadamente, de maneira que a equação $x^2 - Ay^2 = -1$ também será solúvel como a equação $x^2 - Ay^2 = +1$, sendo que a primeira será pelas frações convergentes de ordem ímpar, a segunda, pelas de ordem par (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 49-55).

Euler e Lagrange abordaram esse mesmo assunto no parágrafo VIII, “Observações sobre as equações da forma $p^2 = Aq^2 + 1$ e sobre a maneira comum de resolvê-las com números inteiros” (*Additions aux Eléments d'Algèbre d'Euler – Analyse Indeterminée*, 1978, p. 157-164), onde é apresentado um método diferente do método de Euler no trabalho *Comentários de Petersburgo* que conduz os cálculos às expressões fracionárias, que são evitadas no método mais rigoroso de Lagrange, cujo texto na referida obra de 1978 é uma reprodução do texto do Volume IV de seus *Mélanges de Turin*, que apresentaremos a seguir.

Segundo Lagrange, os valores de p e q que satisfazem à equação $p^2 - Aq^2 = 1$ são os termos de qualquer uma das frações principais do desenvolvimento de $\sqrt{A}$ em frações

contínuas representadas por $\mu + \frac{1}{\mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + \frac{1}{\mu_3 + \dots}}}$.

Assim, necessariamente $\frac{p}{q} = \mu + \frac{1}{\mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + \frac{1}{\mu_3 + \dots + \frac{1}{\mu_\rho}}}}$,

onde μ_ρ é um termo qualquer da série infinita $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu, \mu_1, \mu_2, \dots$, cujos termos são positivos e ρ é determinado *a posteriori*. Como os números $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\rho$ são os mesmos da fração contínua que exprime o valor de $\frac{p}{q}$, que é uma aproximação por falta do valor de $\sqrt{A}$, assim, $\frac{p}{q} \cong \sqrt{A}$, ou seja, $p^2 - Aq^2 = 0$.

Como $\frac{p}{q}$ é uma fração contínua cujos termos são $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\rho$, então esses valores são, respectivamente, os quocientes de p por q , de q pelo resto r da primeira divisão, de r pelo resto s da divisão anterior e assim sucessivamente. Posto isto, primeiramente Lagrange procura o valor aproximado de $\frac{p}{q}$ ou $\sqrt{A}$ e esse será o valor de μ . Em seguida, ele substitui o valor $\mu q + r$ de p na equação $p^2 - Aq^2 = 0$ para obter a equação $(\mu^2 - A)q^2 + 2\mu qr + r^2 = 0$. Novamente ele determinou o valor aproximado por falta de $\frac{q}{r}$ nessa equação, que é a raiz positiva da equação transformada $(\mu^2 - A) \left(\frac{q}{r}\right)^2 + 2\mu \frac{q}{r} + 1 = 0$ para obter o valor de μ_1 e substituir $\mu_1 r + s$ no lugar de q . Assim, $\frac{r}{s}$ é a raiz dessa nova equação cujo valor aproximado por falta é utilizado para obter o valor de μ_2 . A expressão $\mu_2 r + s$ deverá ser substituída no lugar de r e o procedimento é continuado até que, supondo t o último resto nulo e s o antepenúltimo igual a 1, seja encontrada uma expressão do tipo $Ps^2 + Qst + Rt^2$, que é a última transformada de $p^2 - Aq^2$. Substituindo $t = 0$ e $s = 1$ de modo a obter $p^2 - Aq^2 = 1$, é necessário que P seja igual a 1. Logo, é preciso continuar as operações e as transformações anteriores, até que se obtenha uma transformada cujo coeficiente do primeiro

termo seja igual à unidade. Desse modo, primeiramente determinou-se o valor de q por meio dos valores $r = 1$ e $s = 0$ substituídos na última expressão $\mu_r r + s$. Logo em seguida, determinou-se o valor de p substituindo o valor obtido para q na equação $p^2 - Aq^2 = 1$.

É importante ressaltar que o mesmo resultado seria obtido se o valor igual a 1 fosse desprezado na equação original $p^2 - Aq^2 = 1$ e, por consequência, o mesmo poderia ser realizado para os valores aproximados μ , μ_1 , μ_2 , ... das frações $\frac{p}{q}$, $\frac{q}{r}$, $\frac{r}{s}$, Nesse

caso, é necessário verificar em cada nova transformação se a equação transformada é consistente, ao fazer com que uma das indeterminadas seja igual a um e a outra igual a zero.

A operação termina quando tal fato ocorre e, assim, os valores de p e q serão obtidos por um processo regressivo. Como ilustração, Lagrange aplicou o método na equação $p^2 - 6q^2 = 1$, cujas passagens reproduziremos, para uma melhor compreensão do que foi exposto. Pela equação proposta, $p = \sqrt{6q^2 + 1}$ e assim, desprezando-se o valor 1 do radical, o primeiro

valor aproximado por falta de $\frac{p}{q}$ é $\sqrt{6}$. Como esse valor está entre 2 e 3, então $\mu = 2$ e, por conseguinte, substituindo $p = 2q + r$ em $p^2 - 6q^2 = 1$, é obtida a primeira transformada $-2q^2 + 4qr + r^2 = 1$. De onde resultou $q = \frac{2r + \sqrt{6r^2 - 2}}{2}$ e desse modo, após desprezar -2 do

radical, o valor $\frac{q}{r} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$ que possui, respectivamente, os valores 2 e 3 como aproximações por falta e por excesso. Considerando $\mu_1 = 2$ e fazendo $q = 2r + s$, a última equação obtida é $r^2 - 4rs - 2s^2 = 1$, na qual supondo $r = 1$ e $s = 0$ na equação $q = 2r + s$ e, em seguida o valor de q em $p = \sqrt{6q^2 + 1}$, são obtidos os valores $q = 2$ e $p = 5$.

Lagrange ainda mostrou que, se ao invés de 2 fosse utilizado o valor 3, que é uma aproximação por excesso de $\frac{p}{q} = \sqrt{6}$, jamais seria encontrada uma transformada cujo coeficiente do primeiro membro fosse igual à unidade, o que é necessário para se obter uma solução da equação proposta.

Essa demonstração de Lagrange e o seu método de resolução foram considerados como um dos grandes passos realizados na época.

De fato, a equação $x^2 - A y^2 = 1$ não somente é importante em si, mas é necessária para a resolução de todas as equações indeterminadas do segundo grau, para se determinar infinitas soluções quando uma delas é conhecida (Euler-Lagrange, 1798, p. 157-165).

A resolução com números inteiros da conhecida e difícil equação $x^2 - N y^2 = \pm 1$ para todo número N não sendo um quadrado perfeito, foi estudada pelos matemáticos Fermat, Wallis, Pell, bem como pelos hindus, centenas de anos antes.

Mas por um lado, Fermat nada publicou sobre a sua solução e por outro, o método do matemático inglês, embora fosse muito criativo, não estabelecia, portanto, um critério seguro para que o problema fosse sempre possível. Restava então determinar que a equação $x^2 - A y^2 = 1$ é sempre solúvel com números inteiros, o que Lagrange fez de uma maneira tão elegante quanto consistente, nos seus *Mélanges de Turin*, volume IV e em seguida nos *Mémoires de Berlin* de 1767.

2.2.7.2.3 Primeira parte (1830): Resoluções das equações $x^2 - A y^2 = \pm D$ e $M x^2 - N y^2 = \pm 1$

O terceiro enfoque é sobre os estudos desenvolvidos nos parágrafos VI e VII da Primeira parte, respectivamente intitulados, “Resolução com números inteiros da equação $x^2 - A y^2 = \pm D$ ” e “Teoremas sobre as possibilidades das equações da forma $M x^2 - N y^2 = \pm 1$ ”, que apresentaram, respectivamente, uma lei geral do desenvolvimento da raiz de um número não quadrado em fração contínua, bem como é demonstrado que a equação de Pell, $x^2 - A y^2 = 1$ sempre admite uma infinidade de soluções e produzem os seguintes resultados: “se A é um número primo $4n + 1$, a equação $x^2 - A y^2 = -1$ é sempre possível”; “se A é um número primo $8n + 3$, a equação $x^2 - A y^2 = -2$ é sempre possível”; “se A é um número primo $8n + 7$, a equação $x^2 - A y^2 = 2$ é sempre possível e “toda equação $M x^2 - N y^2 = +1$ será sempre possível quando M e N são dois números primos $4n + 3$ ”. Legendre também estabelece um método direto para que todo número primo $4n + 1$ possa ser sempre decomposto em dois quadrados, segundo Legendre (1830, Vol. I, p. 56-71).

Os textos a seguir estão apresentados⁶⁰ no parágrafo VI (1830), onde Legendre estuda a solubilidade da equação $x^2 - Ay^2 = -1$ e aplicou o método nos casos em que $A = 13, 211$ e 991:

(34) [...] Seja $\frac{p}{q}$ a primeira e a mais simples das frações convergentes que

corresponde ao mesmo quociente $2a$. Se tivermos $p^2 - Aq^2 = +1$, ou se o número de termos do período for par, a equação $x^2 - Ay^2 = +1$ será a única solúvel, conforme já havíamos visto. Então para termos a solução geral, basta elevar $p + q\sqrt{A}$ a uma potência m qualquer e igualar o resultado a $x + y\sqrt{A}$. Com efeito, se tivermos $(p + q\sqrt{A})^m = x + y\sqrt{A}$,

onde x e y racionais, teremos simultaneamente que $(p - q\sqrt{A})^m = x - y\sqrt{A}$. Multiplicando essas duas equações entre si, o produto será $x^2 - Ay^2 = (p^2 - Aq^2)^m = 1^m = 1$. Portanto efetivamente, os valores encontrados para x e y satisfarão à equação $x^2 - Ay^2 = 1$, qualquer que seja o expoente m . Podemos também obter os

$$x = \frac{(p + q\sqrt{A})^m + (p - q\sqrt{A})^m}{2}$$

valores de x e y separadamente pelas fórmulas:

$$y = \frac{(p + q\sqrt{A})^m - (p - q\sqrt{A})^m}{2\sqrt{A}}$$

que sempre fornecerão valores inteiros para x e y .

(35) Em segundo lugar, se tivermos $p^2 - Aq^2 = -1$ ou se a quantidade de termos do período for ímpar, então é evidente que podemos satisfazer simultaneamente as duas equações $x^2 - Ay^2 = +1$, $x^2 - Ay^2 = -1$, a saber, a primeira, pelas potências pares de $p + q\sqrt{A}$ e a segunda, pelas potências ímpares desse mesmo binômio. Pois se fizermos $(p + q\sqrt{A})^{2k} = x + y\sqrt{A}$, teremos que $x^2 - Ay^2 = (-1)^{2k} = +1$, e se fizermos $(p + q\sqrt{A})^{2k+1} = x + y\sqrt{A}$, teremos que $x^2 - Ay^2 = (-1)^{2k+1} = -1$.

Por exemplo, quando $A = 13$, encontramos $\frac{p}{q} = \frac{18}{5}$ e $p^2 - 13q^2 = -1$. Fazendo

então $(18 + 5\sqrt{13})^{2k} = x + y\sqrt{13}$, satisfaremos à equação $x^2 - 13y^2 = 1$, e fazendo

$(18 + 5\sqrt{13})^{2k+1} = x + y\sqrt{13}$, satisfaremos à equação

$x^2 - 13y^2 = -1$. Os menores números que satisfazem à equação $x^2 - 13y^2 = 1$ são $x = 649$, $y = 180$, pois temos que $(18 + 5\sqrt{13})^2 = 649 + 180\sqrt{13}$. Algumas vezes, os números mais simples como solução da equação $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ são os que são muito mais importantes. Por exemplo, a solução mais simples para a equação $x^2 - 211y^2 = 1$ é

$$\begin{array}{cccc} x = & 278 & 354 & 373 & 650 \\ y = & 19 & 162 & 705 & 353 \end{array}$$

e a solução mais simples para a equação $x^2 - 991y^2 = 1$ é

$$\begin{array}{cccccc} x = & 37951 & 64009 & 06811 & 93063 & 80148 & 96080 \\ y = & 1205 & 57357 & 90331 & 35944 & 74425 & 38767. \end{array}$$

(LEGENDRE, 1830, p. 56-8, tradução nossa.)

⁶⁰ Esses textos se encontram reproduzidos nas duas outras edições do *Ensaio*: (1798, p. 50-7) e (1808, p. 42-7).

Esse último artigo expressou de forma clara que a condição necessária e suficiente para que a equação $x^2 - Ay^2 = -1$ seja solúvel é que a quantidade de termos do período dos quocientes do desenvolvimento em frações contínuas convergentes para $\sqrt{A}$ seja um número ímpar. A *priori* foi encontrada uma expressão geral das várias frações que correspondem a um mesmo quociente situado de forma similar nos períodos sucessivos. Legendre estabeleceu condições para que uma equação seja possível e fórmulas gerais que contêm uma infinidade de soluções da equação proposta. Nesse estudo, Legendre não utilizou o método de Lagrange, mas sim o de Euler, que foi apresentado em seus *Comentários de Petersburgo* em que o mesmo calcula as expressões fracionárias dos sucessivos quocientes completos $\frac{\sqrt{A} + I}{D}$ do desenvolvimento de $\sqrt{A}$ em frações contínuas.

O método foi considerado por Legendre como seguro e infalível, contudo, nos dois últimos exemplos, a resolução das equações $x^2 - 211y^2 = 1$ e $x^2 - 991y^2 = 1$ foi por tentativas. Observamos que esse procedimento é um tanto frágil, pois no caso da equação $x^2 - 991y^2 = 1$, ele poderia ter induzido à conclusão errônea que a equação não era solúvel, depois de malogradas tentativas com números muito grandes.

No artigo 36, Legendre afirmou que Fermat foi o primeiro matemático que a conhecer a resolução da equação $x^2 - Ay^2 = 1$. Pelo menos, segundo ele, foi Fermat quem propôs esse problema como desafio aos matemáticos ingleses da época e Brownker propôs uma solução que se encontra em *Oeuvres de Wallis* e é relatada textualmente no segundo volume de Álgebra de Euler.

No final da obra Legendre apresentou a Tabela X com valores de x e y que satisfazem a equação $m^2 - An^2 = \pm 1$ para todo número A não quadrado de 2 até o número 139. Observamos que, na verdade, na relação das tabelas apresentadas no final do Sumário do Volume I, a tabela X que contém os valores de x e y que satisfazem a equação $x^2 - Ny^2 = \pm 1$ aparece com o coeficiente N de y^2 variando de 2 a 1003.

Porém, ao consultarmos as tabelas do final do volume I, esse coeficiente varia de 2 a 991 e é acompanhada de uma justificativa de Legendre dizendo que a mesma faz parte da primeira edição de 1798 e que ficou reduzida a uma única página na edição de 1808. Também afirmou que ela foi restabelecida, após muitas correções, com base em uma outra tabela de 1817 de autoria do Professor Degen da universidade de Copenhague.

Na obra de Euler-Lagrange (1798, p. 118-157), encontramos no parágrafo VII, “Método direto e geral para encontrar todos os valores de y expressos em números inteiros, pelos quais podemos racionalizar $\sqrt{Ay^2 + B}$, onde A e B são números inteiros e podemos também encontrar todas as soluções inteiras possíveis das equações indeterminadas do segundo grau com duas incógnitas”, desenvolvidos dezenove artigos sobre um método para encontrar fórmulas gerais para determinar todos os racionais y que façam $Ay^2 + B$ igual a um quadrado, ou seja, que é equivalente a resolver com números racionais a equação $x^2 - Ay^2 = B$, onde y e B são primos entre si. Se essa condição não for satisfeita, os autores mostram por simples cálculos que, se B é divisível por um quadrado α^2 , y poderá ser primo a B ou divisível por α e assim a equação anterior será transformada em $x^2 - Ay^2 = B_1$ onde $B_1 = \frac{B}{\alpha}$ é primo e a solução será dada pela multiplicação de α pelos valores de x, y encontrados. O método inspirou Legendre a escrever os artigos 37 a 39 no Volume I da obra de 1830.

Vale ressaltar que, como Legendre bem observou, encontra-se nessa obra um comentário de Lagrange dizendo que esse método é desenvolvido no capítulo XCVIII de *Algèbre* de Wallis o qual atribuiu a Brouncker bem como em outro livro de mesmo título de Ozanam que foi escrito em homenagem a Fermat. Qualquer quem seja o autor desse método, disseram eles, “é certo que foi Fermat o primeiro a abordar o problema, mas foi o inglês Brouncker que inventou o método e que infelizmente não percebeu a importância do problema” (EULER-LAGRANGE, 1798, p. 157, tradução nossa).

No parágrafo VII: “Teoremas sobre a possibilidade das equações da forma $Mx^2 - Ny^2 = \pm 1$ ou ± 2 ” (LEGENDRE, 1830, p. 64-71), onde por meio do desenvolvimento das frações contínuas da $\sqrt{A}$ Legendre demonstrou que toda equação $x^2 - Ay^2 = -1$ é sempre possível quando A é um número primo $4n + 1$, que toda equação $x^2 - Ay^2 = -2$ é sempre possível quando A é um número primo $8n + 3$, que toda equação $x^2 - Ay^2 = 2$ é sempre possível quando A é um número primo $8n + 7$, que toda equação, $Mx^2 - Ny^2 = 1$ será sempre possível quando M e N são dois números primos $4n + 3$. Também contém um método direto para escrever A sob a forma $D^2 + I^2$, quando A é um número primo $4n + 1$ ou quando em geral A torna possível a equação $x^2 - Ay^2 = -1$ onde Legendre (1830, Vol. I, p. 71, tradução nossa) concluiu “Portanto todas as vezes que a equação $x^2 - Ay^2 = -1$ é solúvel (nos casos em

que A é um número primo da forma $4n + 1$), o número A pode ser sempre decomposto em dois quadrados”. Essa decomposição foi realizada por meio do quociente completo $\frac{\sqrt{A} + I}{D}$ que corresponde ao segundo termo dos quocientes médios do primeiro período do desenvolvimento de $\sqrt{A}$ e, uma vez conhecidos os números I e D , foi obtido que $A = D^2 + I^2$ e, segundo o referido autor, esse resultado implicou em um dos mais belos teoremas das Ciências dos Números, a saber: “Todo número primo da forma $4n + 1$ é a soma de dois quadrados” LEGENDRE (1830, Vol. I, p. 71, tradução nossa).

2.2.7.2.4 Primeira parte (1830): Frações contínuas e raízes da equação $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k = 0$

O último enfoque é para o parágrafo XIV, “Desenvolvimento em fração contínua da raiz real de uma equação de um grau qualquer” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 141-178), sobre o método geral desenvolvido por Lagrange em *Mémoires* da Academia de Berlim (1768) que trata da resolução com números reais da equação ⁶¹ $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k = 0$ por meio de frações contínuas. O método consiste em

determinar o valor de x por meio da fração contínua $x = \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \dots}}$ e, a partir desses

quocientes, são determinadas as frações convergentes para x .

Segundo Legendre, foi Lagrange quem aperfeiçoou esse método, de modo que não é necessário pesquisar a sequência de inteiros $\alpha, \beta, \dots$ quando quaisquer um dos primeiros termos já são conhecidos. Legendre ainda explica que essa condição não é absolutamente necessária, e é possível desenvolver em fração contínua a raiz de toda equação proposta, seja ela algébrica ou transcendente.

Para isso, é necessário procurar, por um método qualquer, o valor aproximado da raiz em questão e, depois, converter esse valor em fração contínua, tendo o cuidado de interromper o desenvolvimento e o cálculo das frações convergentes no ponto onde eles não

⁶¹ Que não é divisível por nenhum fator racional e não possui raízes iguais, pois se ela o tivesse, ela seria divisível por um fator racional que facilmente seria encontrado pelos métodos conhecidos.

serão mais exatos. Para obter a primeira aproximação para as equações algébricas, Legendre utilizou o método de Daniel Bernoulli, como um dos mais simples e mais convenientes para esse propósito, que é fundamentado na teoria de sequências recorrentes, em que Euler expõe de forma detalhada no capítulo XVII de sua *Introdução à Análise infinita*. Tal método se refere apenas às raízes reais das equações. Para as raízes imaginárias, é necessário obter uma expressão aproximada e a Análise Indeterminada oferece casos onde há a necessidade de converter em fração contínua a parte real dessas raízes.

Como toda raiz imaginária de uma equação pode ser representada por $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, onde α e β são números reais, o número α foi determinado diretamente da equação de grau $\frac{n(n-1)}{2}$, onde n é o grau da equação proposta. Encontrado α , Legendre obteve β , dividindo a equação proposta por $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ cujos restos são do tipo $Ax + B$, e assim é necessário que $A = B = 0$, meio pelo qual foi obtido o valor racional de β^2 em função de α . Contanto que n não ultrapasse 4, tudo se reduz a encontrar o valor de α pela equação acima. Legendre afirmou que, caso isso ocorra, será absolutamente necessário recorrer a outros meios para se obter os valores aproximados de α e β , onde sempre se pode supor $\alpha = r\cos\varphi$ e $\beta = r\sin\varphi$ e, portanto, $x = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ e $x^m = r^m(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi)$. Essas fórmulas, cuja utilização foi indicada por Euler, são apropriadas para simplificar em muito a busca por raízes imaginárias. Em seguida, Legendre aplicou esse método na resolução das equações $ax^m + bx + c = 0$ e $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + hx + k = 0$.

Esse processo possibilita a busca de raízes imaginárias para certos casos e então Legendre criou um novo método prático e geral para obter um primeiro valor aproximado da raiz imaginária procurada, que segundo ele, “não me parece estar sujeito a nenhuma exceção” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 175, tradução nossa).

De maneira simples e direta, com fundamentos no Cálculo Diferencial, Legendre mostrou que um valor de x na forma $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ sempre pode satisfazer às equações algébricas ou transcendentais $F(x) = 0$ e esse valor pode ser reduzido a uma quantidade real

quando $\beta = 0$. Primeiro, ele substitui o valor hipotético de $x = \alpha + \beta \sqrt{-1}$ em $F(x)$, de maneira que $F(x) = P + Q\sqrt{-1}$, onde P e Q são números reais.

Segundo, ele determinou $\frac{dF}{dx} = F'$ e expressa $F'(x) = M + N\sqrt{-1}$. Considerando uma indeterminada ω real ou imaginária, muito menor do que $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$, e desprezando as potências maiores de ω , $F(\alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega)$ foi expresso como $P + Q\sqrt{-1} + \omega(M + N\sqrt{-1}) = (P + Q\sqrt{-1}) - n(P + Q\sqrt{-1})$, onde n é uma fração positiva de valor não muito grande. Assim, o valor corrigido de $x = \alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega$ é aproximadamente $F(x) = (1 - n)(P + Q\sqrt{-1})$, quantidade essa menor do que o resultado obtido quando $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$. O valor de n é aleatório, desde que ω seja sempre menor do que $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$. Se P e Q forem muito menores do que M e N , Legendre afirmou que é suficiente fazer $n = 1$ e o segundo valor aproximado, $\alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega$ será compatível com o que foi encontrado pelo método mais simples, supondo que $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ é um primeiro valor aproximado de x .

Porém, desde que P e Q não sejam muito menores do que M e N , o valor de x pode ser menor do que a unidade, valor muito pequeno para que ω esteja contido várias vezes em $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, o que permite muita liberdade para a escolha de ω ⁶².

O método prosseguiu com essa correção do valor de x , que novamente foi representado por $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. Substituindo esse valor nas funções F e F' , foi obtido um segundo valor corrigido para x , por meio do qual o valor de $P + Q\sqrt{-1}$ está entre $1 - n$ e 1 . Procedendo assim indefinidamente, $F(x)$ ficou reduzido a uma quantidade infimamente pequena quando $n = 1$.

⁶² Em uma nota, Legendre (1830, Vol. I, p. 176, tradução nossa) explica que “Quando comparamos as grandezas de duas quantidades imaginárias tais como $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\mu + \nu\sqrt{-1}$, a comparação deve se estender somente às quantidades reais $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$, $\sqrt{(\mu^2 + \nu^2)}$, que podemos chamá-las de seus módulos. Assim r será o módulo de toda quantidade imaginária reduzida na forma $r(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)$ ”

Quando M e N são nulos, ou seja, caso $\frac{dF}{dx} = 0$, Legendre procedeu de maneira análoga, de modo a substituir $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ nas funções $\frac{ddF}{2dx^2}$, $\frac{d^3F}{2 \cdot 3dx^3}$, etc., para obter $F(x) = (1 - n)(P + Q\sqrt{-1})$ como um resultado aproximado. Por procedimentos semelhantes, Legendre mostrou que a resolução da equação $F(x) = 0$ é possível, pois o valor de x será sempre conhecido, todas às vezes que o valor de $F(x)$ é diminuído continuamente, até que se torne tão pequeno quanto se queira (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 161-2; 175-8).

2.2.7.3 Teoria dos Números (1830): Volume I, Segunda parte

A segunda parte do Volume I, “Propriedades gerais dos números” (Legendre, 1830, p. 192-341), é composta por todos os quinze parágrafos da edição de 1808 que foram reformulados (vide página 115 do presente trabalho). Dentre outros assuntos, ela contém uma nova apresentação da lei de reciprocidade quadrática e demonstrações de algumas proposições: o Pequeno Teorema de Fermat, o Teorema de Wilson, alguns estudos de propriedades elementares dos números, estudos sobre o método de Lagrange de aproximações por frações contínuas das raízes de equações racionais, equações lineares e do segundo grau, todas as formas possíveis dos divisores dos números das formas $t^2 + u^2$, $t^2 + 2u^2$, $t^2 + 3u^2$, estudadas por Lagrange em seu trabalho *Estudos de Aritmética* de 1773 e por Euler em seus *Novos Comentários* da Academia de Petersburgo de 1760 e 1761.

Nessa parte estão demonstrados alguns resultados sobre os números primos, entre eles o Pequeno Teorema de Fermat, e várias proposições, a exemplo de “Todo divisor da fórmula $t^2 + au^2$, onde t e u são primos entre si pode ser representado pela fórmula de mesmo grau $py^2 + 2qyu + ru^2$, onde $pr - q^2 = a$ e $2q < p$ e r ”, bem como várias propriedades dos números primos $8n + 1$, $8n + 3$, $8n + 5$, $8n + 7$ (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 192-205).

Com fundamentos nos trabalhos de Lagrange (*Mémoires* da Academia de Berlim, 1770) e de Euler (*Mémoires* da Academia de S. Petersburgo, 1777), Legendre demonstrou alguns problemas clássicos de Diofanto e de Fermat, do tipo “dados um número primo A e dois números quaisquer B e C , positivos ou negativos, mas não divisíveis por A , sempre podemos encontrar dois números t e u , tais que a $t^2 - Bu^2 - C$ seja divisível por A ”

(LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 211, tradução nossa), “Um número qualquer é a soma de no máximo quatro quadrados”, “Todo número é igual à soma de quatro quadrados,” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 215, tradução nossa) que estão intrinsecamente ligados ao desenvolvimento de diferentes casos de uma propriedade geral dos números poligonais de Fermat, a saber, “um número qualquer pode ser formado pela adição de três números triangulares, pode ser igualmente formado pela adição de quatro quadrados, de cinco números pentagonais, de seis hexagonais e assim infinitamente” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 220-1, tradução nossa).

No parágrafo V encontramos estudos sobre a forma linear conveniente aos divisores da fórmula $a^n \pm 1$, onde a e n são números, em que “Todo número primo p que divide a fórmula $a^n + 1$ deve ser da forma $2nx + 1$ ou pelo menos da forma necessária para dividir uma outra fórmula $a^\omega + 1$ cujo expoente ω é o quociente de n dividido por um número ímpar” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 223, tradução nossa) e que “todo número primo p que divide a fórmula $a^n - 1$ deve ser da forma $p = nx + 1$, ou pelo menos divide a fórmula $a^\omega - 1$, onde ω é um submúltiplo de n ” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 227, tradução nossa).

O sexto parágrafo traz a segunda versão da lei de reciprocidade “quaisquer que sejam os números primos m e n , que não são da forma $4x + 3$, sempre teremos $\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)$ e se forem da forma $4x + 3$, teremos $\left(\frac{n}{m}\right) = -\left(\frac{m}{n}\right)$. Esses dois casos gerais estão inclusos na fórmula $\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)$ ” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 230, tradução nossa).

Por meio das equações simbólicas $\left(\frac{x}{c}\right) = 1$ e $\left(\frac{x}{c}\right) = -1$, Legendre estabeleceu um critério para o reconhecimento quando um número primo c é divisor da fórmula $x^2 + a$, com aplicações aos divisores primos de formas quadradas. Tais aplicações, que estão reproduzidas nas edições de 1798 e 1808, não são mais exemplos numéricos, como no trabalho de 1785, e sim proposições⁶³ sobre os divisores $8n + 3$, $8n + 5$ e $4n \pm 1$ das fórmulas $t^2 \pm au^2$, onde a é um número inteiro qualquer, a exemplo de “todo número primo $4n + 1$ divide

⁶³ Diferentes dos teoremas abordados no trabalho de 1785.

simultaneamente as fórmulas $t^2 + au^2$ e $t^2 - au^2$ ou nenhuma delas”; “todo número primo $4n - 1$ que divide a fórmula $t^2 + au^2$ não divide a fórmula $t^2 - au^2$ e vice-versa”; “se um número primo c divide as duas fórmulas $t^2 - au^2$ e $t^2 - bu^2$ então ele dividirá igualmente a fórmula $t^2 - abu^2$ ”, “todo número primo c da forma $8n + 3$ ou $8n + 5$ sempre divide a fórmula $t^2 + au^2$ ou a fórmula $t^2 + 2au^2$ ”; “se a divide a fórmula $t^2 + Au^2$ reciprocamente, A divide a fórmula $t^2 + au^2$ e se a não divide a fórmula $t^2 + Au^2$ e reciprocamente, A não divide a fórmula $t^2 + au^2$ onde A e a são números primos da forma $4n + 1$ ” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 230-243, tradução nossa).

Também são encontrados estudos sobre todos os divisores quadráticos e lineares correspondentes de fórmulas quadráticas e uma pesquisa sobre as formas lineares convenientes aos divisores da fórmula $t^2 + cu^2$ é procedida de explicações das Tabelas III, IV, V, VI e VII relativas a essas formas (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 244-298).

O estudo foi finalizado com a demonstração do Teorema Geral:

“Seja $4cx + a$ uma das formas lineares dos divisores de $t^2 \pm cu^2$. Então, todo número primo na forma $4cx + a$ necessariamente, será divisor da fórmula⁶⁴ $t^2 \pm cu^2$ e por consequência, será uma das formas quadráticas $py^2 + 2qyz \pm rz^2$ que corresponde à forma linear $4cx + a$ ” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 299, tradução nossa).

Legendre também apresenta um método para se encontrar um número primo maior do que certo número por meio de diversas fórmulas quadráticas, com aplicações para reconhecer se um número dado é primo (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 299-341).

2.2.7.3.1 Teoria dos Números (1830) Segunda parte: O Pequeno Teorema de Fermat

O primeiro enfoque será dado à demonstração de um dos teoremas fundamentais da Teoria dos Números, o Pequeno Teorema de Fermat que é apresentado por Legendre no primeiro parágrafo, “Teoremas sobre os números primos” (Fig. 20), numa versão em que o autor utilizou o símbolo que leva o seu nome relativo à lei de reciprocidade:

⁶⁴ Na verdade é divisor da formula $t^2 + cu^2$.

§ I. Théorèmes sur les nombres premiers.

(129) THÉOREME. « Si c est un nombre premier, et N un nombre quelconque non divisible par c , je dis que la quantité $N^{c-1} - 1$ sera divisible par c , de sorte qu'on aura $\frac{N^{c-1} - 1}{c} = \text{entier} = e$ (1).

Soit x un nombre entier quelconque, si on considère la formule connue

$$(1+x)^c = 1 + cx + \frac{c \cdot c-1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + cx^{c-1} + x^c,$$

il est aisé de voir que tous les termes de cette suite, à l'exception du premier et du dernier, sont divisibles par c . En effet, soit M le coefficient de x^m , on aura $M = \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \dots c-m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$; ou $M \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m = c \cdot c-1 \cdot c-2 \dots c-m+1$; et puisque le second membre est divisible par c , il faut que le premier le soit aussi. Mais l'exposant m , dans les termes dont il s'agit, ne surpasse pas $c-1$; donc c , qui est supposé un nombre premier, ne peut diviser le pro-

(1) Ce théorème, l'un des principaux de la théorie des nombres, est dû à Fermat; il a été démontré par Euler dans divers endroits des Mémoires de Pétersbourg, et notamment dans le tome I des *Novi commentarii*.

Figura 20: Fac-símile do Teorema de Fermat (Parágrafo I, Segunda Parte, p. 192 de *Teoria dos Números*, 1830)
Fonte: *apud* LEGENDRE, 1830

(129) TEOREMA. “Se c é um número primo, e N um número qualquer não divisível por c . Digo: a quantidade $N^{c-1} - 1$ será divisível por c , de maneira que $\frac{N^{c-1} - 1}{c} = \text{inteiro} = e$ ”.

DEMONSTRAÇÃO. Seja x um número inteiro qualquer. Se considerarmos a conhecida fórmula

$$(1+x)^c = 1 + cx + \frac{c \cdot c-1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + cx^{c-1} + x^c, \quad \text{é}$$

fácil ver que todos os termos dessa sequência são divisíveis por c , exceto o primeiro e o último. Com efeito, seja M o coeficiente de x^m . Teremos que

$$M = \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \dots c-m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \quad \text{ou} \quad M \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m =$$

$c \cdot c-1 \cdot c-2 \dots c-m+1$. Como o segundo membro é divisível por c , é necessário que o primeiro também o seja. Porém o expoente m dos termos em questão, não é maior do que $c-1$. Portanto c , que por hipótese é um número primo, não pode dividir o produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$ e assim

necessariamente ele divide M para todo valor m de 1 a $c - 1$. Portanto a quantidade $(1 + x)^c - 1 - x^c$ é divisível por c , qualquer que seja o inteiro x .

Novamente, seja $1 + x = N$. A quantidade anterior será $N^c - (N - 1)^c - 1$. E como ela é divisível por c , se omitirmos os múltiplos de c , teremos $N^c - 1 = (N - 1)^c$, ou $N^c - N = (N - 1)^c - (N - 1)$. Mas substituindo $N - 1$ no lugar de N , e negligenciando todos os múltiplos de c , de forma análoga, teremos $(N - 1)^c - (N - 1) = (N - 2)^c - (N - 2)$. Continuando dessa forma e comparando-se os restos iguais, obteremos necessariamente o resto $(N - N)^c - (N - N)$, que evidentemente é zero. Portanto todos os restos anteriores também serão e assim $N^c - N$ é divisível por c .

Mas $N^c - N$ é o produto de N por $N^{c-1} - 1$ e como por hipótese N não é divisível por c , será necessário que

$N^{c-1} - 1$ seja divisível por c , o que será necessário determinar:

Corolário. “Quando c é um número primo, satisfaremos à equação

$$\frac{x^{c-1} - 1}{c} = e \text{ onde } x \text{ é um número qualquer não divisível por } c”.$$

(LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 192-3, tradução nossa.)

Legendre (1830, p. 192, tradução nossa) aponta que “Esse teorema, um dos principais da Teoria dos Números, é de Fermat; ele foi demonstrado por Euler nos diversos *Mémoires* de Petersburgo, notadamente no volume I dos *Novos Comentários*⁶⁵.” Lemmermeyer (2000, p. 4) e Bühler e Michel-Pajus (2007, p. 24-5) complementam essa informação, quando afirmam que Euler, ao usar o binômio de Newton na demonstração do Pequeno Teorema de Fermat em seu artigo *Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio* (1736), anunciou um primeiro teorema equivalente: “*Significante p numerum primum formula $a^{p-1} - 1$ semper per p dividi poterit, nisi a per p divide queat*” que em linguagem moderna pode ser traduzido como “Se p é um número primo então o número $a^{p-1} - 1$ é sempre divisível por p ”. No entanto, o teorema é demonstrado pela primeira vez na obra de Legendre de 1830, embora, anteriormente, ele tenha sido utilizado pelo referido autor na primeira versão da sua lei de reciprocidade, conforme Legendre (1785, p. 516-7).

Constatamos que Legendre retomou essa demonstração de Euler em todas as três edições do *Ensaio*, em que utilizou a notação $\frac{N^{c-1} - 1}{c}$ de sua lei de reciprocidade e se apoiou principalmente em três importantes resultados, os quais os dois últimos não se encontram explicitamente identificados: o Binômio de Newton, a Proposição 26 ou Lema de

⁶⁵ Nota nossa: No ano de 1736.

Euclides e o Método da Descida Finita. Apontamos que o Método da Descida Finita é um tipo de raciocínio muito usado nas demonstrações com números inteiros, que após um número finito de casos um inteiro é obtido de forma conveniente para a conclusão da proposição, seja diretamente ou por absurdo. Na demonstração acima, Legendre o utilizou para chegar ao quociente zero na comparação dos restos da divisão de $N^c - (N - 1)^c - 1$ por c no caso em que $N = 1 + x$ (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 193, tradução nossa).

Em seguida, Legendre procedeu à demonstração de um corolário e de outras proposições, dentre elas, o Teorema de Wilson que foi citado por Waring em *Meditationes Algebraïcoe* e demonstrado pela primeira vez por Lagrange nos *Mémoires de Berlin*, ano 1771, e, em seguida, por Euler no Vol. I de *Opuscula Analytica*, a saber: “Se n é um número primo, o produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - 1)$ acrescido de uma unidade será divisível por n ” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 193-5, tradução nossa).

Em 1758, Euler realizou uma segunda demonstração do Pequeno Teorema de Fermat nos *Novos Mémoires* da Academia de São Petersburgo. Dessa vez, Euler não utilizou o binômio de Newton e sim, a progressão geométrica, que, com um texto mais moderno, pode ser assim enunciada:

“Se p é um número primo e se a e p são primos entre si, então não existe nenhum termo da progressão geométrica $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$, etc., que seja divisível pelo número p .”.

DEMONSTRAÇÃO. Isto é evidente segundo o livro III de Euclides, Prop. 26 onde ele demonstrou que se dois números a e b são números primos entre si a p , o produto ab também será primo a p . Portanto, como a e p são primos entre si, fazendo $b = a, a^2$ e p serão primos entre si e se $b = a^2, a^3$ também será e continuando assim, teremos que nenhuma potência de a será divisível por p . (EULER, *Apud* BÜHLER e MICHEL-PAJUS, 2007, p. 25, tradução nossa.)

Nessa demonstração, o método indutivo foi utilizado por Euler de forma singular, na expansão da proposição 26 de Euclides sobre o produto de dois números primos. Gauss (1807, p. 35) coloca que Euler evitou utilizar o binômio de Newton nessa nova demonstração, uma vez que não era muito comum aos matemáticos da época utilizar tal recurso em Teoria dos Números.

Ainda em 1736, Euler desenvolveu outra demonstração do teorema em apreço, com princípios apoiados nas proposições euclidianas de divisibilidade, em progressões e nas

potências de um número módulo p , que, mais tarde, foram utilizados por Gauss em *Disquisitiones* (BÜHLER e MICHEL-PAJUS (2007, p. 26-7).

Nos artigos 45, 46, 49 50, 51 da Seção 3 de *Recherches Arithmétiques* (versão francesa de *Disquisitiones*, 1807, p. 31-35), encontramos cinco versões de Gauss do Pequeno Teorema de Fermat, a exemplo da que está apresentada no artigo 51:

51. TEOREMA. Se p é um número primo, a potência do polinômio $a + b + c + \text{etc.} \equiv a^p + b^p + c^p + \text{etc.}$ segundo módulo p ”.

“DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que $(a + b + c + \text{etc.})^p$ é composto dos termos da forma $P a^\alpha b^\beta c^\gamma \text{ etc.}$ onde $\alpha + \beta + \gamma + \text{etc.} = p$ onde P é o número de permutações de p objetos, e $\alpha, \beta, \gamma, \text{ etc.}$ são, respectivamente iguais a $a, b, c, \text{ etc.}$ Mas vimos⁶⁶(nº. 41) que esse número é sempre divisível por p , a menos que alguns não sejam todos iguais, quer dizer, que pelo menos um desses números $\alpha, \beta, \gamma, \text{ etc.}$ sejam iguais a p e os outros não sejam iguais à zero. De onde segue que todos os termos do desenvolvimento, exceto $a^p, b^p, \text{ etc.}$, são divisíveis por p , e consequentemente, $(a + b + c + \text{etc.})^p \equiv a^p + b^p + c^p + \text{etc.} \pmod{p}$. (GAUSS, 1807, p. 35, tradução nossa.)

Comparando-se com a demonstração de Legendre, a redação de Gauss, que é fundamentada no binômio de Newton e na teoria de congruências dos estudos de potências de um número módulo p , é mais leve e o resultado foi além do enunciado usual do Teorema de Fermat.

2.2.7.3.2 Teoria dos Números (1830) Segunda parte: Números primos e fórmulas quadráticas

Um segundo destaque será dado aos parágrafos XIV e XV, respectivamente, “Sobre os meios para encontrar um número primo maior do que um número dado” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 326-333, tradução nossa) e “Aplicação dos teoremas anteriores para reconhecer se um determinado número é primo” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 334-341, tradução nossa), que são os dois últimos parágrafos da segunda parte do volume I da obra.

⁶⁶ Nota nossa: “Se p é um número primo, e se tivermos p objetos tais que entre eles são encontrados apenas alguns que são idênticos então o número de permutações desses objetos será divisível por p ” (GAUSS, 1807, p. 25, tradução nossa). A demonstração é deduzida da teoria de permutações.

Os matemáticos de todos os tempos se empenharam em desvendar algumas questões relativas a números primos, a exemplo de, dado um número primo p , encontrar outro número primo que seja maior do que p ; encontrar uma função que forneça números primos; encontrar um número primo sucessor de um determinado número primo; encontrar a quantidade de números primos menores do que um determinado número; calcular diretamente um número primo a partir de uma sequência numérica, como aponta Lucas (1891, p. 354).

No ensejo de responder à segunda questão, Fermat bem que tentou criar uma fórmula mágica geradora de números primos, mas Euler mostrou que o número de Fermat $2^{2^n} + 1$ era composto para $n = 5$.

Para responder à quarta questão, Legendre e Gauss criaram fórmulas para estimar quantos números primos existem numa sequência de números naturais.

No parágrafo XIV, Legendre (1830, Vol. I, p. 334-341) criou um método para se encontrar um número primo M menor do que um determinado número, mediante determinadas condições de M como divisor quadrático da fórmula $py^2 + 2qyz + rz^2$, vide Figura 26:

Os estudos sobre as formas quadráticas, desenvolvidos no parágrafo XIII de Legendre (1830, Vol. I, p. 308-325), foram essenciais para o entendimento dos estudos dos dois últimos parágrafos da segunda parte da obra de 1830. Nesse parágrafo, Legendre mostrou que P e P' são divisores de $t^2 \pm cu^2$, com t e u primos entre si se, e só se, são divisores quadráticos da fórmula $py^2 + 2qyz \pm rz^2$. Nesse caso, P e P' são do tipo $p\alpha^2 + 2q\alpha\beta \pm r\beta^2$ e todo número primo A (ou o dobro de A) que divide a fórmula $t^2 \pm cu^2$ possui apenas um único divisor quadrático dessa fórmula e se A for composto ele poderá ter vários divisores quadráticos da fórmula $t^2 \pm cu^2$ que contenham o número A . Também mostrou que, se um número A estiver contido de duas maneiras distintas em uma mesma fórmula quadrática $py^2 + 2qyz + rz^2$, $2A$ será o produto de dois fatores λ e ω , onde ω é da forma $my^2 + nz^2$ ou

$(mn = c)$ e λ menor do que $\frac{A}{\sqrt{c}}$.

A correlação entre a lei de reciprocidade e os estudos de Lagrange sobre os divisores primos de formas quadráticas foi estabelecida por Legendre nos parágrafos anteriores, em

que foram desenvolvidas as seguintes proposições: “um número primo M da forma $4n+3$ é divisor de $t^2 + cu^2$, t e u primos entre si se, e somente se, M é um não resíduo quadrático de c , ou seja, se $\left(\frac{c}{M}\right) = -1$ ou $(c)^{\frac{M-1}{2}} \equiv -1 \pmod{M}$ ” (1830, Vol. I, p. 196-7); “se M dividir a fórmula $t^2 + cu^2$, M dividirá igualmente a fórmula particular $x^2 + c$ ” e “para que M esteja incluso de duas maneiras distintas em uma mesma fórmula quadrática $py^2 + 2qyz + rz^2$ é necessário que $\frac{x^2 + c}{M} = e$ possua duas soluções, e caso ela possua apenas uma solução, M possuirá apenas uma forma quadrática” (1830, Vol. I, p. 197), “um número primo M é divisor de $t^2 + cu^2$, com t e u primos entre si e por consequência, da forma $py^2 + 2qyz + rz^2$, onde y e z são duas indeterminadas, desde que p, q, r satisfaçam à equação $pr - q^2 = a$ e zq não seja maior do que p e r ” (1830, Vol. I, p. 200).

Essas proposições foram importantes subsídios para o desenvolvimento do método para encontrar um número primo maior do que certo número, que é a primeira questão apontada por Lucas: “dado um número primo p , encontrar um outro número primo que seja maior do que p ” (LUCAS, 1891, p. 354, tradução nossa). Fundamentado nesses conhecimentos, Legendre criou o método, considerando um número M contido pelo menos duas vezes na fórmula $py^2 + 2qyz + rz^2$, ou seja, $M = p\alpha^2 + 2q\alpha\beta + r\beta^2 = p\gamma^2 + 2q\gamma\delta + r\delta^2$. Multiplicando essa expressão por p e fazendo $pr - q^2 = c$, após alguns cálculos, Legendre determinou a fórmula condicionante $\beta^2 + 2(p\alpha + q\beta)x - cx^2 = \delta^2$ (a),

que é fundamental para o desenvolvimento do método para que M seja divisor da fórmula $t^2 + cu^2$ e, por conseguinte, de $py^2 + 2qyz + rz^2$, com as condições citadas.

Assim, Legendre deduziu que, todas às vezes que for encontrado um valor de x diferente de zero, que torne o primeiro membro um quadrado perfeito, o número M ou a sua metade não é um número primo. Se o primeiro membro da equação (a) apenas pode ser um quadrado quando $x = 0$, então, o número M ou $\frac{1}{2}M$ é um número primo.

Entretanto, segundo Legendre, há uma exceção: quando M possui um fator primo α não comum a c , e vários outros, β, γ , etc. comuns a c . Nesse caso, é necessário, conforme o

artigo 139, (1830, Vol. I, p. 201), que cada um dos fatores divida a fórmula $t^2 + c$ ou $x^2 + c$ e assim a equação $\frac{x^2 + c}{M} = e$ é apenas suscetível de uma solução. Portanto, o número M pode apenas ser representado de uma única maneira pela fórmula $py^2 + 2qyz + rz^2$.

Para assegurar que $\beta^2 + 2(p\alpha + q\beta)x - cx^2$ fosse um quadrado apenas quando $x = 0$, Legendre mostrou que é necessário testar para x todos os valores inteiros entre duas raízes da equação $\beta^2 + 2(p\alpha + q\beta)x - cx^2 = 0$ e o número dessas tentativas é $\frac{2}{c}\sqrt{pM}$, onde $M = p\alpha^2 + 2q\alpha\beta + r\beta^2$.

Após discutir cinco condições para que M seja divisor quadrático da fórmula $py^2 + 2qyz + rz^2$, de maneira que a equação (a) possua duas soluções distintas, Legendre apresentou uma tabela contendo várias fórmulas condicionais e fórmulas de números primos e convidou o leitor a considerar como teoremas os resultados apresentados na referida tabela (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 329, tradução nossa):

TABELA 2: Algumas fórmulas para números primos

<i>Fórmula condicional.</i>	<i>Fórmula de números primos.</i>
$\beta^2 + 2(\alpha + \beta)x - 13x^2$	$\alpha^2 + 2\alpha\beta + 14\beta^2$
$\beta^2 + 2(\alpha + \beta)x - 37x^2$	$\alpha^2 + 2\alpha\beta + 38\beta^2$
$\beta^2 + 6(\alpha + \beta)x - 57x^2$	$3\alpha^2 + 6\alpha\beta + 22\beta^2$
$\beta^2 + 6(\alpha + \beta)x - 93x^2$	$3\alpha^2 + 6\alpha\beta + 34\beta^2$
$\beta^2 + 6(5\alpha + \beta)x - 141x^2$	$15\alpha^2 + 6\alpha\beta + 10\beta^2$
$\beta^2 + 2(11\alpha + 7\beta)x - 193x^2$	$11\alpha^2 + 14\alpha\beta + 22\beta^2$
.....	

	continuação
$\beta^2 + 2\alpha x - 22x^2$	$\alpha^2 + 22\beta^2$
$\beta^2 + 2\alpha x - 58x^2$	$\alpha^2 + 58\beta^2$
$\beta^2 + 10\alpha x - 70x^2$	$5\alpha^2 + 14\beta^2$
$\beta^2 + 6\alpha x - 102x^2$	$3\alpha^2 + 34\beta^2$
$\beta^2 + 10\alpha x - 190x^2$	$5\alpha^2 + 38\beta^2$

Fonte: LEGENDRE, 1830

A Tabela 2 acima contém diversas fórmulas, nas quais todo número em questão será primo ou o dobro de um primo, mediante se a fórmula condicional for um quadrado, unicamente quando $x = 0$, e se, simultaneamente, M e c , assim como α e β , são primos entre si. Além disso, ela mostra que quanto menor for α , menor será o limite para os valores de x .

Posto isto, Legendre apresentou um método mais simples para encontrar um número primo maior do que um dado limite L . Como subsídio, ele atentou para as últimas fórmulas da tabela, a fórmula $\beta^2 + 10\alpha x - 190x^2$ e a dos números primos $5\alpha^2 + 38\beta^2$. Fazendo $\alpha = 1$, ele considerou β um número ímpar maior do que $\sqrt{\frac{L}{38}}$ e não divisível por 5 para obter o número ímpar $N = 5 + 38\beta^2$ maior do que o limite L . O autor explicou que, como esse número não possui divisor algum comum a 190, para determinar se N é um número primo, é suficiente procurar um valor de x diferente de zero de modo que a quantidade $\beta^2 + 10\alpha x - 190x^2$ seja igual a um quadrado. Os valores de x testados foram os números da forma $4k$ ou $4k + 3$, tanto positivos quanto negativos, menores do que $\frac{\beta}{\sqrt{190}}$. Caso nenhum desses números torne a quantidade em questão igual a um quadrado, então, o número $5 + 38\beta^2$ será um número primo.

Em seguida, Legendre aplicou o método a $L = 1\,000\,000$ e, tomando β ímpar e $> \sqrt{\frac{1000000}{38}}$, ele escolheu o valor 163. Depois, a equação $26\,569 + 10x - 190x^2 = y^2$ foi resolvida por tentativas para os valores de $x = -1, 3, \pm 4, -5, 7, \pm 8, -9, 11$. Mas, como nenhum deles tornou o primeiro membro igual a um quadrado, resultou que o número $5 + 38\beta^2 = 1\,009\,627$ é um número primo (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 331).

No parágrafo XV, Legendre desenvolveu um método para se encontrar um número primo maior do que um número A por meio de diversas fórmulas quadráticas.

Primeiramente, Legendre determinou $\sqrt{A}$ e expressa $A = T^2 + CU^2$ onde T é a parte inteira de $\sqrt{A}$ de forma a conduzir esse número ou os seus múltiplos à forma $t^2 + cu^2$. Depois, ele utilizou os estudos anteriores para determinar os divisores convenientes dessa fórmula e, para encontrar outras formas, ele procedeu da mesma maneira para encontrar os divisores dos múltiplos de A menores do que $\sqrt{A}$ ou T . Quando tal operação era muito longa, ele então desenvolvia $\sqrt{A}$ em fração contínua nas diversas fórmulas $t^2 \pm Du^2$ das quais A é divisor. Considerando $\frac{\sqrt{A}+1}{D}$ a expressão geral do quociente completo, ele encontrou apenas os valores de D fornecidos por essa operação. Como ilustração desse método, Legendre apresentou o artigo⁶⁷ 261, para $A = 10\,091\,401$. O processo é muito longo, e portanto, abordaremos aqui os princípios gerais. Primeiramente, ele efetuou a divisão de A por todos os números primos menores do que $\sqrt{A}$, quer dizer, pelos números menores do que 3 176. Para diminuir o número dessas tentativas, ele desenvolveu $\sqrt{A}$ em fração contínua, para determinar as diversas fórmulas $t^2 \pm Du^2$ em que A é divisor. Lembrando que o quociente completo dessa operação é $\frac{\sqrt{A}+1}{D}$, são encontrados os seguintes valores para D :

1; $4\,425 = 177 \times 5^2$; $1\,928 = 482 \times 2^2$; 1 709; $2\,189 = 337 \times 3^2$; $2\,872 = 718 \times 2^2$; $2\,511 = 31 \times 9^2$; 3 755; $384 = 6 \times 8^2$; 5 585; 437; $3\,648 = 57 \times 8^2$; 2 619; 2 495; 183; 2 019; $720 = 5 \times 12^2$; 2 963; $152 = 38 \times 2^2$; $2\,061 = 229 \times 3^2$; 365; $480 = 30 \times 4^2$; 1 119; 3 415; $2\,712 = 678 \times 2^2$; $2\,525 = 101 \times 5^2$; $3\,789 = 421 \times 3^2$; $184 = 46 \times 2^2$. Desses resultados, foram deduzidas

⁶⁷ Respectivamente, artigo 259 da edição de 1798, p. 317-320 e artigo 261 da edição de 1808, p. 290-2.

as fórmulas $t^2 + 31u^2$, $t^2 + 6u^2$, $t^2 - 57u^2$, $t^2 + 5u^2$, $t^2 + 38u^2$, $t^2 - 30u^2$, $t^2 - 46u^2$. As fórmulas $t^2 - 30u^2$ e $t^2 + 38u^2$ foram excluídas, uma vez que, se um número primo é divisor de $t^2 + 6u^2$ e de $t^2 + 5u^2$, ele será divisor de $t^2 - 30u^2$. O mesmo ocorreu para a fórmula $t^2 + 38u^2$, em relação à $t^2 + 6u^2$, $t^2 - 57u^2$. Dessas, apenas cinco eram distintas uma das outras e o número de tentativas, ou o número dos números primos menores do que $\sqrt{A}$, que seria em torno de 454, ficou reduzido a 14.

Finalmente, foram determinadas todas as formas lineares convenientes aos divisores de A, a saber, as que dividem $t^2 + 6u^2$, que são $24x + 1$, $24x + 7$. Essas últimas, consideradas em relação aos múltiplos de 5, contêm as oito formas $120x + 1$, 7 , 31 , 49 , 73 , 79 , 97 , 103 . Descartando as que não são divisores de $t^2 + 5u^2$, restaram somente as quatro formas $120x + 1$, 7 , 49 , 103 . Os números primos contidos nessas formas dividem ao mesmo tempo as três fórmulas $t^2 + 3u^2$, $t^2 + 6u^2$, $t^2 + 5u^2$. Ao desenvolver as quatro formas acima em relação aos múltiplos de 11, isto é, as que resultaram da substituição de x por $11x + k$, k variando de 0, 1, 2, etc. e, em seguida, desprezando as que são múltiplas de 11, Legendre obteve quarenta novas formas. Dessas, as que dividem $t^2 - 55u^2$ são do tipo $220x + a$ que são encontradas na Tabela III e, uma vez excluídas as que não podem dividir $t^2 + 31u^2$, $t^2 + 38u^2$ e $t^2 - 46u^2$, restaram apenas três formas: $1320x + 727$, 1423 , 2281 . Como essas formas não expressavam número algum que dividisse 10 091 401, então, Legendre concluiu que ele era um número primo (LEGENDRE, 1830, p. 339-341).

Legendre observou que Euler obteve o mesmo resultado no Vol. IX dos *Novos Comentários* da Academia de São Petersburgo (1777) e também, nos *Mémoires de Berlin* de 1771, utilizando uma outra via, quando mostrou que o número $10\,091\,401 = 4 \times 2\,522\,850 + 1$ se decompunha de uma maneira única como soma de dois quadrados, o que é uma característica dos números primos da forma $4n + 1$ (LEGENDRE, 1830, p. 341).

2.2.7.4 Teoria dos Números (1830): Volume I, Terceira parte

A terceira parte do Volume I, intitulada “Teoria dos números que são decompostos em três quadrados” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 342-396), contém os mesmos três parágrafos da edição do *Ensaio* de 1808, a saber, “Definição de forma ternária (*trinaire*), números e divisores quadráticos que podem ser convenientemente escritos sob essa forma”;

“Correspondência entre as formas ternárias do número c e os divisores ternários da fórmula $t^2 + cu^2$ ”; “Teoremas sobre os divisores quadráticos ternários”.

Esses parágrafos são reformulações dos seis parágrafos, “Números, divisores quadráticos e formas ternárias”; “Teoremas relativos aos divisores ternários”; “Método direto para encontrar o divisor ternário da fórmula $t^2 + cu^2$ correspondente a um valor ternário de c ”; “Sequência dos teoremas sobre os divisores ternários”, “Explicação das tabelas VIII, IX, X e XI”, “Teoremas sobre as propriedades observadas nas tabelas”, da edição do *Ensaio* de 1798.

Nessa parte, encontramos estudos sobre os números inteiros que podem ser escritos como somas de três quadrados, denominados por Legendre de ternários (*trinaires*), onde ele, ampliando seus estudos no trabalho de 1785, demonstrou, por exemplo, que “nenhum número do tipo $8n + 7$ possui uma forma ternária”, “todos os números $4n + 1$, $4n + 2$, $8n + 3$ podem ser escritos na forma ternária” e “todo número inteiro, dobro de um ímpar é a soma de três quadrados” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 342, 393-4, tradução nossa).

2.2.7.4.1 Teoria dos Números (1830) Terceira Parte: Divisores quadráticos e formas ternárias

O primeiro parágrafo da terceira parte, “Definição de forma ternária (*trinaire*), números e divisores quadráticos que podem ser convenientemente escritos sob essa forma” (p. 342-5), é um estudo sobre as formas ternárias (*trinaires*) de um número n , que são todas as maneiras em que n pode ser expresso como soma de três quadrados. Por exemplo, $n = 59$ possui como formas ternárias $25 + 25 + 9$ e $49 + 9 + 1$. O autor também definiu o que são formas ternárias próprias e impróprias e ainda observou que, geralmente uma forma ternária é constituída por três quadrados, mas que também pode ser composta por apenas dois ou mesmo por um único quadrado, pois nesse caso, zero pode ser considerado como um quadrado para completar a forma ternária (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 342). Desse modo, 26 possui duas formas igualmente ternárias, $25 + 1 + 0$ e $16 + 9 + 1$.

Mas Legendre ainda apontou que, quando um número é divisível por um quadrado, as formas ternárias particulares desse número são aquelas cujos termos não são divisíveis pelo mesmo quadrado. Assim, as formas ternárias impróprias são as que possuem os três termos com um mesmo divisor, a exemplo de 189 que possui as formas ternárias próprias, a saber,

$13^2 + 4^2 + 2^2$, $10^2 + 8^2 + 5^2$ e $11^2 + 8^2 + 2^2$, e uma forma ternária imprópria: $12^2 + 6^2 + 3^2$, pois os seus três termos são divisíveis por 3^2 . De fato, esse valor é uma forma ternária de 21, a forma $4^2 + 2^2 + 1^2$ que ao ser multiplicada por 3^2 , resultou na forma imprópria de 189.

Com esses fundamentos, Legendre demonstrou os seguintes resultados: “Nenhum número $8n + 7$ possui uma forma ternária” (1830, Vol. I, p. 342, tradução nossa), “Nenhum número da forma $4n$ pode ter uma forma ternária própria” (1830, Vol. I, p. 342, tradução nossa), “Se o número c pertence a uma das formas $4n + 1$, $4n + 2$, $8n + 3$, a fórmula $t^2 + cu^2$ sempre terá pelo menos um divisor quadrático nos dois primeiros casos, ou o duplo divisor no terceiro, tal que podemos decompô-lo indefinidamente em três quadrados, sem atribuir nenhum valor particular às indeterminadas y e z que ele engloba”, (1830, Vol. I, p. 344, tradução nossa). Nesse último caso, Legendre observou que o divisor quadrático $9y^2 + 8yz + 9z^2$ da fórmula $t^2 + 65u^2$ se decompõe em três quadrados, a saber: $(2y - z)^2 + (2y + 2z)^2 + (y + 2z)^2$. Essa decomposição forneceu uma característica particular desse tipo de divisores. Os que possuíram essas características foram denominados de divisores quadráticos ternários, ou simplesmente divisores ternários. Eles satisfaziam uma condição que foi estudada por Legendre no parágrafo seguinte.

Os estudos são finalizados com algumas observações sobre certas classes de divisores quadráticos que jamais podem ser da forma ternária: quando c é da forma $4n + 1$, os divisores quadráticos de $t^2 + cu^2$ são de dois tipos: uns incluindo os divisores $4n + 1$, outros, os divisores $4n + 3$. Por sua vez esses últimos incluem simultaneamente os números $8n + 3$ e $8n + 7$. Como nenhum número $8n + 7$ pode ser da forma ternária, segue que nenhum divisor quadrático do tipo $4n + 3$ pode ser da forma ternária. Quando c é da forma $8n + 7$ não existe divisor quadrático algum da fórmula $t^2 + cu^2$ que é da forma ternária. A razão é que cada divisor quadrático contém simultaneamente, os números $4n + 1$ e $4n + 3$. Portanto, ele contém também os números $8n + 7$, de onde Legendre concluiu que nenhum deles é da forma ternária. Pela mesma razão, quando c é da forma $8n + 3$, não existe nenhum divisor quadrático ímpar que seja da forma ternária. No entanto, apontou o autor que pode ocorrer o caso em que o dobro de um dos divisores quadráticos ímpares de uma fórmula $t^2 + cu^2$ é uma forma ternária. É o caso de $y^2 + yz + 5z^2$, divisor ímpar da fórmula $t^2 + 19u^2$. Esse

divisor quadrático não é uma forma ternária, mas o seu dobro $2y^2 + 2yz + 10z^2$ o é, uma vez que $2y^2 + 2yz + 10z^2 = y^2 + (3z)^2 + (y + z)^2$ (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 344-5).

O segundo parágrafo, “Correspondência entre as formas ternárias do número c e os divisores ternários da fórmula $t^2 + cu^2$ ” (1830, Vol. I, p. 346-357), estabelece uma relação entre formas ternárias dos divisores quadráticos da fórmula $t^2 + cu^2$ e formas ternárias do número c .

Primeiramente, Legendre mostrou que se um divisor quadrático simples $py^2 + 2yz + rz^2$ da fórmula $t^2 + cu^2$ possui a forma ternária $(my + nz)^2 + (m'y + n'z)^2 + (m''y + n''z)^2$, então a forma ternária correspondente ao número c é $(mn' - m'n)^2 + (m'n'' - m''n')^2 + (m''n - mn'')^2$. Depois, ele estabelece algumas condições para determinar a expressão do divisor ternário e o valor ternário de c em função de $m, m', m'', n, n', n'', y, z$, a saber, se $(m''n' - m'n'')^2 = 0$ ou $\frac{m''}{n''} = \frac{m'}{n'}$, é necessário que o quadrado $(m''y - n''z)^2$ tenha uma relação constante com o quadrado $(m'y - n'z)^2$ e, então, o divisor quadrático proposto Δ possuirá a forma $\Delta = (my + nz)^2 + \alpha^2(m'y + n'z)^2 + \beta^2(m'y + n'z)^2$ e o valor ternário correspondente c será igual a $\alpha^2(m'n - m'n')^2 + \beta^2(m'n - m'n')^2$.

Se os três quadrados do valor de c , deduzidos do divisor Δ , se reduzem a um único quadrado, quer dizer, se $m''n' - m'n'' = 0$ e $m''n - m'n'' = 0$, segue que $m'' = 0$ e $n'' = 0$. Portanto, o divisor quadrático em questão possuirá a forma $(my + nz)^2 + (m'y + n'z)^2$ e o valor de c será $(mn' - m'n)^2$, que possuirá a forma ternária própria somente quando $c = 1$. Legendre considerou como forma ternária de um divisor quadrático aquela que é deduzida de uma forma ternária própria do número c . Assim, se os três números $mn' - m'n$, $m'n'' - m''n'$, $m''n - m'n''$, forem divisíveis por um mesmo fator, a expressão $\Delta = (my + nz)^2 + (m'y + n'z)^2 + (m''y + n''z)^2$ será uma forma ternária imprópria, que será excluída, por não satisfazer às propriedades de formas ternárias, conforme artigo 267 (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 344).⁶⁸

⁶⁸ “Se o número c pertence a uma das formas $4n + 1$, $4n + 2$, $8n + 3$, a fórmula $t^2 + cu^2$ sempre terá pelo menos um divisor quadrático nos dois primeiros casos, ou o duplo divisor no terceiro, tal que podemos decompô-lo indefinidamente em três quadrados, sem atribuir nenhum valor particular às indeterminadas y e z ” (Legendre, 1830, Vol. I, p. 344, tradução nossa).

Uma aplicação direta desse último caso foi realizada para o divisor $5y^2 + 2yz + 38z^2$ da forma $t^2 + 189u^2$. Como $c = 4 \times 47 + 1$, pelo artigo 267, ele pode ser decomposto em três quadrados. Assim, o divisor quadrático $5y^2 + 2yz + 38z^2$ da fórmula $t^2 + 189u^2$ possui as quatro formas ternárias, $(2y + 3z)^2 + (y - 5z)^2 + 4z^2$; $(2y + 2z)^2 + (y - 3z)^2 + 25z^2$; $(2y + z)^2 + (y - z)^2 + 36z^2$; $(2y - 2z)^2 + (y + 5z)^2 + 9z^2$. Em seguida, Legendre utilizou a fórmula do valor ternário de $c = (mn' - m'n)^2 + (m'n'' - m''n')^2 + (m''n - mn'')^2$ para cada uma delas e descarta as duas últimas formas por corresponderem à forma ternária imprópria $c = 12^2 + 6^2 + 3^2$. As duas primeiras formas ternárias de Δ correspondem às formas ternárias próprias de c , a saber, $c = 13^2 + 4^2 + 2^2$ e $c = 10^2 + 8^2 + 5^2$.

O objetivo dos estudos foi atingido quando Legendre apresentou a relação em que, dado um divisor ternário da fórmula $t^2 + cu^2$, é possível encontrar um valor ternário correspondente a c . A recíproca também é verdadeira: dado um valor ternário de c , é possível encontrar um divisor ternário correspondente a esse valor (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 355-6).

O terceiro parágrafo, que encerra o Volume I, “Teoremas sobre os divisores quadráticos ternários” apresenta uma série de proposições (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 358-396), das quais destacamos: “Seja c um número primo ou dobro de um número primo. Duas formas ternárias diferentes de c não podem corresponder a um mesmo divisor ternário da fórmula $t^2 + cu^2$ ”, (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 358), “se o número c é primo ou o dobro de um primo, a fórmula $t^2 + cu^2$ terá tantos divisores quadráticos ternários quantas forem as formas ternárias do numero c e cada um desses divisores terá apenas uma única forma ternária” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 361), “se o número N é um divisor ternário da fórmula $t^2 + cu^2$ e, se, reciprocamente, c é um divisor ternário da fórmula $t^2 + Nu^2$, os valores de N e c serão iguais em ambos os casos” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 362), “todo número ímpar, exceto os números da forma $8n + 7$ é a soma de três quadrados” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 393), “todo número que é o dobro de um número ímpar é a soma de três quadrados” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 394), “todo número inteiro, ou pelo menos o seu dobro, é a soma de três quadrados” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 394-5).

2.2.7.5 Teoria dos Números (1830): Volume I, Tabelas

No final da terceira parte, Legendre (1830, Vol. I) apresentou as dez tabelas abaixo referentes aos divisores de formas quadráticas:

Tabela I	Expressões mais simples das fórmulas $Ly^2 + 2Myz + Nz^2$, A variando de 2 até 136, para todos os valores do número não quadrado $A = M^2 - LN$.
Tabela II.	Expressões mais simples das fórmulas $Ly^2 + Myz + Nz^2$, B variando de 5 a 305, para todos os valores de $B = M^2 - 4LN$, onde M é ímpar.
Tabela III.	Divisores quadráticos e lineares ímpares da fórmula $t^2 - au^2$, a variando de 2 até 79, para todo número a não quadrado e nem divisível por um quadrado.
Tabela IV.	Divisores quadráticos e lineares ímpares da fórmula $t^2 + au^2$, a variando de 1 até 105, para todo número a da forma $4n + 1$, não quadrado e nem divisível por um quadrado.
Tabela V.	Divisores quadráticos e lineares ímpares da fórmula $t^2 + au^2$, a variando de 3 a 103, para todo número a da forma $4n + 3$ não divisível por um quadrado.
Tabela VI.	Divisores quadráticos e lineares ímpares da fórmula $t^2 + 2au^2$, a variando de 1 a 53, para todo número a da forma $4n + 1$ não divisível por um quadrado.
Tabela VII.	Divisores quadráticos e lineares ímpares da fórmula $t^2 + au^2$, a variando de 3 a 51, para todo número a da forma $4n + 3$ não divisível por um quadrado.
Tabela VIII.	Divisores quadráticos ternários da fórmula $t^2 + cu^2$, com os valores ternários correspondentes de c, c variando de 1 a 251, para todo número c que não é da forma $4n$, nem da forma $8n + 7$.
Tabela IX.	Valores do produto $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdots \left(\frac{\omega-1}{\omega} \right)$ de números primos sucessivos ω variando de 3 a 1229.
Tabela X.	Os menores valores de x e y que satisfazem à equação $x^2 - Ny^2 = \pm 1$, N variando entre 2 a 1003, para todo número N não quadrado.

Destacaremos algumas diferenças entre as tabelas das edições de 1798, 1808 e 1830: as doze tabelas apresentadas em 1798 foram reduzidas a dez nas edições do *Ensaio* de 1808 e 1830, sendo que as tabelas de I a VII são restritas aos números ímpares. A tabela VIII da edição de 1808 contém os divisores quadráticos ternários da fórmula $t^2 + cu^2$, cujos valores ternários correspondentes de c, c variando de 1 a 214, para todo número c que não é da forma $4n$, nem da forma $8n + 7$. Na edição de 1830 os valores de c variam de 1 a 251. A redação da tabela IX das duas últimas edições é completamente diferente da edição de 1798, pois é relativa aos valores do produto $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdots \left(\frac{\omega-1}{\omega} \right)$, onde ω são os números primos

sucessivos variando de 3 a 1229. A tabela X da segunda edição possui praticamente a mesma redação da tabela XII de 1798, a saber, Frações mais simples $\frac{m}{n}$ que satisfazem à equação $m^2 - an^2 = \pm 1$, a variando de 2 até 135, para todo número a não quadrado.

2.2.7.6 Teoria dos Números (1830): Volume II, Quarta parte

A quarta parte do Volume II, “Métodos e Pesquisas diversas”, que inicia o volume II (LEGENDRE, 1830, p. 1-165), é constituída de dezoito parágrafos, dos quais treze são essencialmente os mesmos da edição de 1808, em que são abordados os seguintes assuntos: alguns teoremas sobre potências de números, a saber, “a área de um triângulo retângulo com números inteiros não pode ser igual a um quadrado” (p. 2), “a soma de dois bi quadrados não pode ser igual a um quadrado” (p. 5), “a fórmula $x^4 + 2y^4$ não pode ser igual a um quadrado” (p. 6), “nenhum número triangular, exceto a unidade, é igual a um bi quadrado” (p. 7) “a soma ou a diferença de dois cubos não pode ser igual a um cubo ou o dobro de um cubo” (p. 7), “nenhum número triangular, exceto 1, é igual a um cubo” (p. 11). Nos teoremas sobre a resolução com números inteiros da equação $x^n - b = ay$ (p. 13-22) são estudadas as resoluções das equações $x^n - 1 = a$, $x^{2n} + 1 = ay$, $x^n - b = ay$, em que a é um número primo divisor de $a - 1$. Os Estudos sobre a Análise Indeterminadaresolução da equação $x^2 + a = 2^m y$ (p. 23-26) revelam que essa equação é solúvel para todo valor de m , desde que a seja da forma $-1 \pm 8\alpha$.

As fórmulas que expressam o produto de dois ou mais divisores quadráticos da fórmula $t^2 + au^2$ são estudadas no parágrafo “Método para encontrar o divisor quadrático que inclua o produto de vários divisores quadráticos” (p. 27-42). No parágrafo “Resolução com números inteiros da equação $Ly^2 + Myz + Nz^2 = b\Pi$, onde Π é o produto de várias indeterminadas ou de suas potências” (p. 43-8), é discutido um método para resolver a equação proposta e Legendre apresentou algumas condições mediante a paridade de M para chegar à conclusão que o primeiro membro da equação é um divisor quadrático da fórmula $t^2 + au^2$ e, uma vez multiplicada a equação por L ou $4L$, é obtida a fórmula $t^2 + au^2 = c\Pi$, onde c é igual à Lb ou $4Lb$. Desse resultado segue que todo fator Π deve dividir a fórmula $t^2 + au^2$ e, assim, as indeterminadas y e z podem ser expressas em funções das indeterminadas

análogas que pertencem aos diferentes fatores do produto Π e, por consequência, a equação pode ser representada por um divisor quadrático dessa fórmula. No parágrafo “Demonstração de uma propriedade relativa aos divisores quadráticos da fórmula $t^2 + au^2$, onde a é um número $8n + 1$ ” (p. 50-6), são demonstrados que a quantidade dos divisores quadráticos

$4n + 1$ da fórmula $t^2 + au^2$ é sempre uma unidade a mais do que a quantidade dos divisores quadráticos $4n - 1$, dessa mesma fórmula. A demonstração do Teorema sobre a lei da reciprocidade que existe entre dois números primos quaisquer está apresentada no parágrafo VII (p. 57-64), a qual será abordada mais adiante no presente trabalho.

No parágrafo “Uma lei extraordinária observada na enumeração de números primos” (p. 65-70), encontramos que, embora a sequência de números primos é extremamente irregular, podemos encontrar com uma precisão bem satisfatória quantos desses números existem de 1 até um limite dado x . De acordo com Legendre, a fórmula que resolve essa questão é $y = \frac{x}{\log x - 1,08366}$, onde $\log x$ é um logaritmo hiperbólico.

Uma discussão envolvendo números primos e sequência numéricas é realizada no parágrafo IX: “Demonstração de diversos teoremas sobre progressões aritméticas” (p. 71-79) e no parágrafo XI: “Métodos para encontrar quantos termos existem numa progressão aritmética qualquer que não são divisíveis por nenhum dos números primos de uma determinada sequência” (p. 86-102), onde Legendre demonstrou de forma “indutiva”⁶⁹ que existem infinitos números primos na progressão aritmética $A - C, 2A - C, 3A - C, \dots, nA - C$, com A e C primos entre si, bem como determinou quantos números primos menores do que um limite N possui um divisor quadrático da fórmula $t^2 + au^2$, assunto que abordaremos com maiores detalhes a seguir.

No parágrafo X “Onde provamos que todo divisor quadrático da fórmula $t^2 + Nu^2$ contém pelo menos um número Z menor e primo a N ou a $\frac{1}{2}N$ ” (p. 80-85), Legendre percorreu sobre o divisor quadrático $\Gamma = cy^2 + 2byz + az^2$ da fórmula $t^2 + Nu^2$, onde $ac - b^2 = N$, a e $c > 2b$, $c < 2\sqrt{\frac{1}{3}N}$ e os a, b, c sem divisores comuns. Para atingir o objetivo, Legendre analisou os dois casos: quando um dos números a e c não possuem divisor comum ou se

⁶⁹ Conforme observamos anteriormente, não se trata de indução matemática, mas de exemplificação.

possuem apenas o número 2 como divisor comum e quando o divisor quadrático proposto não possui o termo médio, ou seja, se $\Gamma = cy^2 + az^2$, onde $N = ac$. No primeiro caso, o autor afirmou que Z pode ser igual a a ou a c . No segundo caso, como o número $c + a$ está contido em Γ então, ele será menor do que ac e não possuirá divisor algum em comum com ac . Logo, $Z = c + a$ é uma solução do problema. Em seguida, Legendre examinou apenas os casos em que b não é zero e cada um dos coeficientes a e c possuem um divisor comum com N . Assim, ele mostrou que é possível encontrar o número procurado Z na fórmula proposta $cy^2 + 2byz + az^2$, bem como é possível encontrá-lo no caso particular em que $cy^2 + 2byz + a$. Mais adiante, ele finalizou os estudos mostrando que sempre é possível satisfazer à equação $Z = cy^2 + 2byz + a$, supondo Z menor do que N e primo a N ou a $\frac{1}{2}N$.

Estudos sobre a equação $ay^2 + byz + cz^2 + dy + fz + g = 0$ estão apresentados nos “Métodos para completar a resolução com números inteiros das equações indeterminadas do segundo grau” (parágrafo XII, p. 105-109). Fundamentado nos parágrafos anteriores e no *Mémoire* de Berlim de Lagrange (1767), Legendre mostrou que se a transformada $a y'^2 + b y' z' + c z'^2 = H$ da equação proposta for resolúvel, onde $y = \frac{y' + \alpha}{\theta}$ e $z = \frac{z' + \beta}{\theta}$, sempre existirão infinitas soluções em um ou em vários sistemas e cada sistema permite deduzir os valores de y' e de z' em função de y e z .

O parágrafo XIV: “Método para a resolução da equação $y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ com números racionais” (Legendre, 1830, p. 123-127) é sobre um método indicado por Fermat para resolver a equação em questão, cujo segundo membro é um polinômio racional e a variável não é maior do que o quarto grau. Para o caso em que o número a e o coeficiente e do termo ex^4 eram quadrados, Legendre desenvolveu um meio para encontrar sucessivamente soluções convenientes: suprimia os termos x^2 e x^3 , de tal maneira que, se $g = \frac{d}{2h}$ e

$h = \frac{c - g^2}{2h}$, então, a equação era reduzida a termos do primeiro grau, o que resultou $x = \frac{a - f^2}{2fg - b}$. Essa solução forneceu uma infinidade de outras, desde que $2fg - b$ não fosse igual à zero.

Até esse assunto, todos os estudos dos treze parágrafos anteriores foram abordados na edição do *Ensaio* de 1808. Os demais parágrafos apresentam os cinco assuntos inéditos, a saber: “Sobre a equação $x^3 + ay^3 = bz$ ” (LEGENDRE, 1830, parágrafo XIII, p. 113-122), “Desenvolvimento infinito do produto $(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)$, etc.” (LEGENDRE, 1830, parágrafo XV, p. 128-133), “Funções semelhantes que multiplicadas entre si resultaram em produtos semelhantes” (LEGENDRE, 1830, parágrafo XVI, p. 134-141), “Algumas questões que se referem direta ou indiretamente à ” (LEGENDRE, 1830, parágrafo XVII, p. 142-150), “Outro problema extraordinário pelo tipo de análise empregada em sua solução” (LEGENDRE, 1830, parágrafo XVIII, p. 151-165). Esse último parágrafo envolve a situação do movimento do cavalo no jogo de xadrez, em que Legendre mostrou que a partir de uma casa qualquer, o cavalo pode percorrer as 64 casas do tabuleiro, sem fazê-lo passar duas vezes pela mesma casa. Segundo o autor, muitos matemáticos tentaram resolver o problema por meio da Análise Indeterminada, mas Euler foi o único que, por um método simples, conseguiu encontrar um grande número de soluções⁷⁰, cujo procedimento foi reproduzido por Legendre nesse parágrafo.

2.2.7.6.1 Teoria dos Números (1830) Quarta parte: Progressões aritméticas, números primos e logaritmos

O primeiro destaque será dado aos parágrafos IX: “Demonstração de diversos teoremas sobre progressões aritméticas” e XI: “Métodos para encontrar quantos termos existem numa progressão aritmética qualquer que não são divisíveis por nenhum dos números primos de uma sequência dada” (LEGENDRE, 1830, p. 71-6, 80-102).

No final do artigo IV, do trabalho de 1785, Legendre declarou que, nas demonstrações da lei de reciprocidade ele utilizou uma propriedade sobre os números primos onde conjecturou que, dada uma progressão aritmética cujo primeiro termo e a razão são primos entre si, existe uma infinidade de números primos, conhecida como progressão de Bachet. Essa conjectura pode ser interpretada como uma generalização do teorema de

⁷⁰ Em uma nota, Legendre (1830, Vol. II, p. 151) declarou que esse assunto foi desenvolvido por Euler nos *Mémoires* da Academia de Ciências de Berlim, 1759.

Euclides sobre a existência de infinitos números primos na sequência dos números naturais 1, 2, 3, ...

Mediante a dificuldade em determinar em poucas linhas tal propriedade, Legendre esboçou uma demonstração por exemplificação, se justificando: “indico esse meio de demonstração que seria muito longa de detalhar, uma vez que esse trabalho já ultrapassou os limites permitidos” (LEGENDRE, 1785, p. 552; *Ensaio*, 1808, p. 399, tradução nossa).

Nos *Estudos sobre alguns objetos da Análise Indeterminada, particularmente sobre o Teorema de Fermat* (1823), Legendre também não demonstrou a proposição e, simplesmente, se contentou em exibir um exemplo numérico.

Na obra *Teoria dos Números* (1830), Legendre retomou o assunto e apresentou três textos com demonstrações da conjectura sobre a progressão de Bachet.

O primeiro texto traz uma demonstração por indução, que foi realizada na quarta parte da segunda edição (LEGENDRE, 1808, Vol. II, parágrafo IX, p. 399) e reproduzida na quarta parte, da terceira edição (LEGENDRE, 1830, parágrafo IX, Vol. II, p. 76-7). A demonstração foi fundamentada no Artigo 408 (1830, Vol. II, p.74), onde Legendre considerou a sequência ... , - 9, - 7, - 5, - 3, - 1, 1, 3, 5, 7, 9, ... na qual os termos que são múltiplos de 3, 5, 7,... são, respectivamente, denotados por (3), (5), (7), ... e, assim, a sequência anterior ficou representada por ... (3), (13), (11), (3), (7), (5), (3), (1), (1), (3), (5), (7), (3), (11), (13), (3) ... Com essa nova disposição, ele deduziu que a sequência anterior contém k números primos, onde dois deles, denotados por ψ e ω , são indeterminadas e os outros $k - 2$ formam a sequência natural 3, 5, 7, 11, 13, 17, até $\pi^{(k-2)}$. O maior deles é dado pela expressão $M = \pi^{(k-1)} - 1$, onde $\pi^{(k-1)}$ é o termo da $k - 1$ na sequência de números primos 3, 5, 7, 11, etc. (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p. 74-5).

Essa fórmula está de acordo com os resultados particulares encontrados, que resultou no seguinte teorema geral:

(410) Considere uma progressão aritmética qualquer $A - C, 2A - C, 3A - C$, etc., na qual A e C são primos entre si. Seja dada também uma sequência $\theta, \lambda, \mu, \dots, \psi, \omega$ composta por k números primos ímpares, aleatórios e dispostos em uma ordem qualquer. Se denominarmos por $\pi^{(z)}$ o z -ésimo termo da sequência natural dos números primos 3, 5, 7, 11 etc. Digo: entre os $\pi^{(k-1)}$ termos consecutivos da progressão proposta há pelo menos um que não será divisível por algum dos números primos $\theta, \lambda, \mu, \dots, \psi, \omega$

Com efeito, acabamos de provar (408) que na progressão em questão pode haver no máximo somente $\pi^{(k-1)} - 1$ termos consecutivos que sejam divisíveis por qualquer um dos números primos $\theta, \lambda, \mu, \dots, \psi, \omega$. Portanto entre os $\pi^{(k-1)}$ termos consecutivos da progressão proposta, há pelo menos um que não será divisível por algum desses números. (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p. 76, tradução nossa.)

Legendre considerou esse método infalível, argumentando que ele garantia a existência de pelo menos um número primo numa progressão aritmética qualquer.

No segundo texto (p. 77) foi estabelecido o limite igual a $\sqrt{(nA-C)}$, onde $nA - C$ é o n -ésimo termo da progressão $A - C, 2A - C, 3A - C, \dots$. De fato, considerando os n primeiros termos da sucessão, Legendre designou por L o maior inteiro contido em $\sqrt{(nA-C)}$. Ao mesmo tempo, ele considerou ω , o número primo sucessor de L e ψ , o número primo antecessor de ω . Nessa progressão foram contemplados ψ termos consecutivos e, em virtude do teorema anterior, Legendre mostrou que entre esses ψ termos existia pelo menos um que não era divisível por nenhum dos números primos $3, 5, 7, 11, \dots, \psi, \omega$ e, por consequência, esse número é um número primo. Assim, ele afirmou que, a quantidade de termos da progressão proposta que estão entre $\sqrt{(nA-C)}$ e o último termo, $nA - C$, é aproximadamente $n - \sqrt{\left(\frac{n}{A}\right)}$, onde $C < A$ e $\psi < \sqrt{nA}$. Portanto, concluiu o autor,

que dentre os n termos da progressão em questão, haverá, aproximadamente, $\frac{n - \sqrt{\frac{n}{A}}}{\sqrt{nA}} \approx \sqrt{\frac{n}{A}}$ números primos e esse número pode ser, também, tão grande quanto se queira, a depender do valor de n . Portanto, Legendre demonstrou indutivamente que “Toda progressão cujo primeiro termo e a razão são primos entre si, contém uma infinidade de números primos” (Legendre, 1830, Art. 411, Vol. II, p. 77, tradução nossa).

Em virtude desse resultado, Legendre generalizou um outro, no artigo 413, em que forneceu um método para determinar quantos termos podem ser acrescentados à progressão $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n - 1$ para que seja encontrado um número primo entre os termos dessa

sucessão, conforme (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p. 78, tradução nossa): “Seja ψ o maior número primo contido em $\sqrt{(2n-4)} - 1$. Entre os ψ números ímpares sucessores de $2n - 1$, sempre haverá pelo menos um número primo”.

O artigo 414 (p. 78-9) é uma aplicação desse último resultado:

(414) Seja $2n - 1 = 113$ ou $n = 57$. O maior número primo contido em $\sqrt{110} - 1$ é 7. Portanto, entre os sete números ímpares sucessores de 113, a saber, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, necessariamente existe um número primo. Esse número é precisamente 127, que é o sétimo termo da sequência. Aqui o limite fixado é 7. O mais frequente, é que ele seja bem maior, sobretudo quando n é muito grande. Podemos aumentá-lo ainda mais, porém, simplificaremos o enunciado do teorema, dizendo que de L a $L + 2\sqrt{L}$ necessariamente se encontra um número primo. Esse teorema é pelo menos um primeiro passo para a solução conhecida como muito difícil: encontrar um número primo maior do que certo limite. (LEGENDRE, 1830, p. 78-9, tradução nossa.)

Autoconfiante que a sua demonstração era infalível, Legendre ainda observou que se os valores de n fossem muito pequenos, o teorema “Se ψ é o maior número primo contido em $\sqrt{(2n-4)} - 1$ então entre os ψ números ímpares sucessores de $2n - 1$, sempre haverá pelo menos um número primo que estará sujeito a exceções”, (1830, p. 79, tradução nossa).

Entretanto, uma vez que ψ é um termo da sequência 3, 5, 7, 11, etc., então, para não haver nenhuma exceção, ele ainda afirmou que “é necessário que $\sqrt{(2n-4)} - 1$ seja maior do que 3 e, assim, n tem que ser maior do que 10” (LEGENDRE, 1830, p. 79, tradução nossa).

Fruto de tentativas em progressões particulares e da utilização errônea do processo indutivo, a generalidade proposta por Legendre no artigo 413, não pode ser caracterizada como uma demonstração rigorosa e, de fato, ela foi refutada pela comunidade matemática. Segundo Lemmermeyer (2000), a veracidade dessa proposição foi colocada em dúvida pela Academia de Ciências de Paris que propôs, em 1858, um concurso com um prêmio de 6 000 francos para quem conseguisse validar a sua demonstração. Um acadêmico chamado Dupré foi quem ganhou a metade do prêmio com a reformulação do enunciado da proposição para “Seja p_n o n ésimo número primo. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal pelo menos um dos inteiros ímpares $2k + 1, 2k + 3, \dots, 2k + 2p_{n-1} + 1$ não é divisível por nenhum $p_1, \dots, p_n$ ”

(LEMMERMEYER, 2000, p. 20, tradução nossa). Dupré também mostrou que a conjectura de Legendre era falsa para $43 \leq p_n \leq 113$. Porém, 70 anos depois, em 1930 A. Brauer e H. Zeitz demonstraram que ela era falsa para todo $p_n \geq 43$ (LEMMERMEYER, 2000, p. 20).

Embora tenha se equivocado ao generalizar um resultado sobre a existência de números primos em sequências numéricas, Legendre retornou ao mesmo assunto no parágrafo XI (1830, Vol. II, p. 86-102), onde novamente ele considerou a sequência $A - C$, $2A - C$, $3A - C$, ... , $nA - C$ e supôs que em cada uma dessas progressões estendida até o número de termos n sempre haverá tantos números primos quantas unidades há na quantidade $\frac{1}{k} \varphi(nA)$, onde $\varphi(nA)$ é o número total dos números primos de 1 até nA .

Segundo os estudos desenvolvidos no parágrafo VIII, “Sobre uma lei extraordinária observada na enumeração de números primos” (p. 65), Legendre demonstrou que essa quantidade é representada pela fórmula $x = \frac{1}{k} \cdot \frac{nA}{\log(nA) - 1,08366}$, onde $\log x$ é um logaritmo hiperbólico. Utilizando essa fórmula na progressão 59, 119, 179, etc., de razão 60 e termo geral $60n - 1$, o número $k = 16$ é deduzido dos fatores simples 2, 3, 5 do número 60 pela expressão $30(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5})$, donde resultou que $x = \frac{\frac{15}{4}n}{\log(60n) - 1,08366}$. Com uma precisão satisfatória, entre os 100 000 primeiros termos dessa progressão são encontrados cerca de 25820 números primos, que é uma quantidade um pouco maior do que a quarta parte desses termos.

Quase uma década depois da publicação de *Teoria dos Números* (1830), a conjectura de Legendre, finalmente, foi demonstrada pelo alemão Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, um ex-aluno de Gauss e contemporâneo de Abel e Jacobi, que completou seus estudos em Paris. A demonstração é parte integrante do trabalho *Estudos sobre diversas aplicações da Análise Infinita à Teoria dos Números*, que foi lido na Academia de Berlim em 1837, traduzido do alemão para o francês por Terquem e publicado no *Jornal de Matemática Pura e Aplicada* de Liouville em 1839.

A primeira tentativa da demonstração da conjectura foi frustrada, quando Dirichlet buscou argumentos nas grandezas discretas da Aritmética. Devido à complexidade do assunto, o objetivo somente foi atingido quando o referido autor recorreu às grandezas contínuas da Teoria Analítica dos Números, como aponta a introdução do trabalho:

Não existe uma demonstração rigorosa do teorema que acabei de anunciar. Mediante a grande quantidade de aplicações é necessário uma demonstração. Que eu o saiba, Legendre foi o único analista a tentar demonstrá-la. Apesar das dificuldades, esse teorema teve para ele todo um interesse particular uma vez que lhe serviu como lema em seus trabalhos posteriores. A demonstração desse ilustre matemático dependia da solução dessa questão. [...] Mas a solução dada por ele é apenas fundamentada sobre uma indução. Procurando provar a exatidão dessa solução de uma forma simples, encontrei dificuldades que me foram impossíveis de superar. Após abandonar essa via, consegui chegar a uma demonstração rigorosa do teorema. Ela não é somente aritmética, sobretudo fundamentada em grandezas contínuas. A novidade dos princípios sobre qual ela se apoiou é que antes de considerarmos o caso geral, devemos considerar o caso particular cuja razão da progressão aritmética é um número primo ímpar. (LEJEUNE-DIRICHLET, 1839, p. 394, tradução nossa.)

Dieudonné (1978, p. 187) coloca que, esse trabalho marcou o verdadeiro início da Teoria Analítica dos Números⁷¹, uma vez que, além da demonstração da conjectura de Legendre, ele contém métodos de resolução para vários problemas da Teoria dos Números, destacando-se, dentre eles, o estabelecimento de uma fórmula capaz de fornecer a quantidade de classes de formas quadráticas (a, b, c) que dependem do discriminante $D = b^2 - 4ac$, cujo caso particular foi conjecturado por Jacobi em 1832.

O ponto de partida para as 28 páginas da demonstração analítica de Dirichlet foram as raízes primitivas c de um número primo ímpar p de maneira que dividindo p pela progressão geométrica (c^n) , n variando de 0 a c^{p-2} , são encontrados os restos 1, 2, ..., $p - 1$, numa ordem qualquer bem como a série infinita $\sum \frac{1}{n}$, cuja divergência foi demonstrada por Euler.

Por se tratar de uma demonstração longa e não muito simples, os detalhes serão omitidos, e apenas indicaremos os seus princípios mais importantes.

Através do $\lim_{s \rightarrow 1+} \sum_{p \equiv a \pmod q} \frac{1}{p^s} = \infty$, com p da forma $4x + 1$ ou $4x + 3$, Dirichlet demonstrou que existe uma quantidade infinita de números primos da forma $p\mu + m$ onde μ é um número inteiro indeterminado e m um número da sequência 1, 2, 3, ..., $p - 1$. Em seguida, Dirichlet utilizou a linguagem modular de Gauss para estabelecer uma correspondência entre a congruência $x^2 \equiv k \pmod m$, onde k é inteiro não-nulo, com k e m

⁷¹ Nota nossa: Porém, para Aubry (1909, p. 447), em 1837 Jacobi foi o primeiro matemático a sugerir uma ligação entre Teoria dos Números e grandezas contínuas.

primos entre si, e o símbolo $\left(\frac{k}{p}\right)$ de Legendre, para o caso particular em que m é um número primo p , onde mostrou que, nesse caso particular⁷², os únicos valores possíveis para $\left(\frac{k}{p}\right)$ são ± 1 .

O estudo do caso geral, em que o primeiro termo e a razão de uma progressão aritmética são primos entre si, é complementado em outros trabalhos (Lejeune-Dirichlet, 1839, p. 394-422; 1859, p. 401-420), quando Dirichlet discorreu sobre a primeira demonstração de Gauss da lei de reciprocidade. Nesse novo trabalho, Dirichlet estabeleceu uma relação entre as formas binárias quadráticas com coeficientes e indeterminadas imaginárias e a lei de reciprocidade, em que utilizou a série de Dirichlet, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$, onde os a_n e z são números complexos. Em virtude desse resultado, Dirichlet demonstrou que a soma dos recíprocos dos números primos da sequência $a, a + b, a + 2b, \dots, a + nb$ onde a e b são primos entre si, diverge.

Além disso, percebemos algumas diferenças entre os textos da segunda e terceira edições do *Ensaio*: houve uma reorganização dos parágrafos, a exemplo do parágrafo XIII, “Métodos para a resolução da equação $y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ com números racionais” (LEGENDRE, 1808, quarta parte, p. 424-430), que na edição de 1830, se tornou o parágrafo XIV (Vol. II, quarta parte, p. 123-7). O primeiro parágrafo da quarta da edição de 1808, “Teoremas sobre a potência dos números” (quarta parte, p. 340-8) foi modificado na edição de 1830, com o acréscimo dos Estudos sobre a Análise Indeterminada resolução das equações $x^2 + 2 = y^3$ e $x^2 + 4 = y^3$ (LEGENDRE, 1830, Vol. II, quarta parte, p. 1-12). O quarto parágrafo, “Método para encontrar o divisor quadrático que inclua o produto de vários divisores quadráticos dados (1808, quarta parte, p. 361-9)”, foi modificado com a inclusão de novos divisores quadráticos da fórmula $t^2 + au^2$, de acordo com Legendre (1830, Vol. II, quarta parte, p. 27-38).

⁷² Vide Dirichlet (1839, p 411-421).

2.2.7.7 Teoria dos Números (1830): Volume II, Quinta parte

A quinta parte da edição do *Ensaio* de 1808 contém um único parágrafo, “Uso da na solução da equação $x^n - 1 = 0$, onde n é um número primo” (p. 166-330), onde é abordada a teoria de ciclotomia de Gauss em *Disquisitiones* (1801). Na época, Legendre (1808, p. v) reconheceu que a obra de Gauss, possuía conteúdos originais, porém, nem todos eram inéditos, uma vez que alguns já tenham sido anteriormente abordados na primeira edição do *Ensaio* de 1798. Sem perder a oportunidade, Legendre criticou os métodos empregados por Gauss na demonstração da lei de reciprocidade quando afirmou que o método dele era

muito mais simples e mais elegante; e que ele desejaria enriquecer essa nova edição com um número maior dos excelentes materiais que compõem a obra de M. Gauss: mas os métodos desse autor são tão particulares, que para não me sujeitar a um simples papel de tradutor, prefiro aproveitar as suas outras descobertas (LEGENDRE, 1808, p. vj, tradução nossa.)

Legendre desenvolveu no parágrafo único da edição de 1808 a proposição generalizada da teoria de Gauss e, no parágrafo VI da sexta parte de sua obra de 1830, forneceu a sua última demonstração da lei de reciprocidade utilizando essa nova teoria.

Já a quinta parte da terceira edição do *Ensaio* de 1830 possui o mesmo título da edição anterior, mas com uma apresentação mais detalhada, distribuída em cinco parágrafos ou capítulos. O primeiro parágrafo, “Contendo as bases dessa nova teoria” (LEGENDRE, 1830, p. 166-190) reproduz o mesmo texto de 1808 com relação às definições e proposições da teoria da ciclotomia, com a supressão de alguns exemplos numéricos que foram remanejados para o parágrafo III. Nesse parágrafo, Legendre explicou que, se denominarmos por r uma raiz imaginária qualquer da equação $x^n - 1 = 0$, quer dizer, se fizermos $r = \cos \frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n}$, onde k é um número qualquer não múltiplo de n , todas as raízes dessa equação serão $r, r^2, r^3, \dots, r^n$, das quais separando-se a raiz $r^n = 1$, restarão como raízes da equação $X = 0$, os $n - 1$ valores: $x = r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}$. Em geral, r^α será uma raiz qualquer da equação $X = 0$, desde que α não seja zero e nem múltiplo de n . O ponto fundamental desses estudos é o estabelecimento de algumas relações entre as raízes da equação $X = 0$ e as raízes das equações indeterminadas $z^n - 1 = \mathcal{M}(n)$, onde $\mathcal{M}(n)$ é o conjunto dos múltiplos de n , e todo valor $z = g$ que satisfaz essa última, o qual é denominado raiz primitiva de n , é tal

que todas as raízes da equação $X = 0$ são expressas pelas potências sucessivas $r, r^g, r^{g^2}, r^{g^3}, \dots, r^{g^{n-2}}$, ou segundo uma notação abreviada, por $(1), (g), (g^2), (g^3), \dots, (g^{n-2})$. Além disso, encontramos Estudos sobre a Análise Indeterminada a equação $p^k + p^{k-1} + \alpha p^{k-2} + \beta p^{k-3} + \text{etc.} = 0$, de grau k que tem como raízes os k períodos de m termos designados por $(m, 1), (m, g), (m, g^2), \dots, (m, g^{n-2})$.

O segundo parágrafo, “Formação geral da equação de grau k para os valores de $k = 2, 3, 4, 5$ ” (p. 191-213) apresenta o mesmo método para encontrar as raízes imaginárias da equação $X = 0$ que se encontram distribuídas em períodos, também fruto da reprodução do texto da edição de 1808. Entretanto, ele foi reformulado no trabalho de Legendre de 1832 com as correções sugeridas por Jacobi, conforme será visto mais adiante no presente trabalho.

O terceiro parágrafo, “Aplicações da teoria a exemplos numéricos” (p. 214-236) são aplicações para os casos em que $n = 7, 11, 13, 17, 41$. No caso em que $n = 41$, a função X foi decomposta em fatores com diferentes graus. Como $n - 1 = 8 \times 5$, primeiramente, foi formada a equação do quinto grau $p^5 + p^4 - 16p^3 + 5p^2 + 21p - 9 = 0$ que tem como raízes os períodos⁷³ $p = (8 : 1), p' = (8 : g), p'' = (8 : g^2), p''' = (8 : g^3), p^{iv} = (8 : g^4)$. As raízes simples contidas nesses períodos foram determinadas de acordo com a raiz primitiva⁷⁴ $g = 13$ que satisfaz à equação $g^{20} + 1 = \mathcal{M}(41)$, ou simplesmente, $g^{20} = -1$, sem que $g^1 = -1$. Depois de encontradas quatro soluções, Legendre concluiu que uma única dessas soluções é suficiente para obter todas as raízes da equação $X = 0$. Por exemplo, se raiz

$r = \cos \frac{8\pi}{41} + \sqrt{-1} \sin \frac{8\pi}{41}$, então, todas as demais serão conhecidas pelas sucessivas potências $r^2, r^3, \dots, r^{40}$. Em seguida, foi encontrada uma generalização para se decompor o polinômio X de grau m de várias maneiras possíveis. Fazendo $n - 1 = mk$, a quantidade de decomposições possíveis para $X = 0$ de grau m é o número de vezes que se pode decompor $n - 1$ em dois fatores. Portanto, aplicando em $n = 41$, o polinômio X de 40º grau foi

⁷³ A expressão $(m : g^\lambda)$ é utilizada por Legendre para exprimir a soma das m raízes que compõem o período onde g^λ é o primeiro termo.

⁷⁴ Numa nota, Legendre (1830, Vol. II, p. 223, tradução nossa) explicou: “Escolhemos 13 entre os 16 valores que podemos nesse caso ter a raiz primitiva. Esse 16 valores são $\pm (6, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 19)$ ”.

decomposto de cinco maneiras, a saber, em dois fatores de grau vinte, em quatro de grau dez, em cinco de grau oito, em dez de grau quatro e em vinte de grau dois.

O quarto parágrafo, “Método de redução para completar a teoria anterior” (p. 237-268), se refere ao método de Gauss, que é um método particular para a resolução de $X = 0$ por meio de equações auxiliares. Dessa maneira, uma equação completa de grau k pode ser resolvida pela secção de um ângulo cujo cosseno e seno são conhecidos, ou pelo menos, determinados, supondo conhecida a divisão do círculo em k partes iguais. Legendre concluiu que, em geral, é possível resolver uma equação do quinto grau que tem por raízes os cinco períodos de m termos quando $n = 5m + 1$, o que permitiu expressar uma maneira explícita todas as raízes de uma equação auxiliar do 5º grau que dependiam da equação $x^{11} - 1 = 0$. Também, que é possível resolver a equação do sétimo grau quando $n = 7m + 1$ e do terceiro grau quando $3m + 1$. Vale ressaltar que no caso $n = 11$ Legendre obteve o mesmo resultado do trabalho de Vandermonde publicado pela Academia de Ciências em 1771.

No quinto e último parágrafo, “Método para obter a solução geral da equação $X = 0$ ”, ao invés de resolver sucessivamente as diferentes equações auxiliares, Legendre utilizou o método que consiste em considerar de uma só vez a equação em p de grau $\frac{n-1}{2}$ que tem

como raízes os $\frac{n-1}{2}$ períodos com dois termos representados por $r^\mu + r^{-\mu}$ ou por

$2\cos \frac{2\mu\pi}{n}$. Por meio da substituição $x + \frac{1}{x} = p$, a equação $X = 0$, que é de grau $n - 1 = 2k$,

pode ser reduzida a uma equação de grau k , a saber,

$p^k - (k-1)p^{k-2} + \frac{k-2 \cdot k-3}{1 \cdot 2} p^{k-4} - \frac{k-2 \cdot k-3 \cdot k-5}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{k-6} + \text{etc.}$, a qual foi limitada a um

número de termos $\frac{k+2}{2}$ ou $\frac{k+1}{2}$, conforme k seja par ou ímpar. Essa equação, em que

todos os coeficientes são números inteiros conhecidos, foi resolvida pelo mesmo método de redução que foram aplicados aos valores de $k = 5, 7$ e 3 e as fórmulas gerais mais simples das que foram obtidas pela resolução dos auxiliares sucessivos, deduzidas exhaustivamente em mais de sessenta páginas e, finalmente, foram aplicadas aos casos em que $n = 31, 13, 41$ e 17 (LEGENDRE, 1830, p. 269-330).

2.2.7.7.1 Teoria dos Números (1830) Quinta parte: Divisão de uma circunferência em partes iguais

O único destaque da quinta parte será dado à teoria de ciclotomia de Gauss, reescrita por Legendre com simbologias próprias, que se encontra apresentada no quinto parágrafo. Na análise serão apresentados textos de ambos os autores para ressaltar as diferenças e as semelhanças na abordagem do assunto.

Dhombres (1978), Sautoy (2005), Maigre (2007) e Gauss (1807) apontam que o nascimento da teoria de ciclotomia (divisão de uma circunferência em partes iguais) está explicitamente ligado à própria teoria algébrica de equações.

Os progressos da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial em meados do século XVII permitiram grandes descobertas na Álgebra no século seguinte. Foi o caso da fórmula de Moivre: “Para todo número natural n , e todo número real α , $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$, onde $i^2 = -1$ ” (MAIGRE, 2007, p. 36, tradução nossa), que abriu caminho para o estudo de raízes da unidade.

O aperfeiçoamento da forma de tratamento das equações de graus maiores ou iguais a 2 aconteceu no século XVIII, através da generalização de antigas proposições e pelo desenvolvimento de equações por meio de radicais através dos notáveis trabalhos de Euler, Lagrange, Legendre, Abel, Jacobi e Galois. Euler, em seus trabalhos publicados pela Academia de Berlim de 1769-1770 e nos *Elementos de Álgebra* de 1773-4, e Lagrange, nos estudos entre a equivalência de formas e equações do segundo grau em 1773-5, forneceram métodos generalizados para a resolução de equações do segundo grau, bem como métodos particulares para a resolução de equações de grau maior do que 2. Em 1771, em suas *Reflexões sobre a resolução algébrica de equações*, Lagrange conjecturou que a resolução de equações de grau maior do que quatro era impossível e, posteriormente, em 1826-1827, a condição de suficiência foi demonstrada por Abel. Galois restabeleceu as relações entre a Álgebra e a Geometria quando demonstrou as condições necessárias e suficientes em seu artigo “Sobre as condições para resolução de equações por radicais” de 1831, que foi publicado por Liouville em seu *Jornal de Matemática*, somente em 1846. Porém, foi em 1870 que as ideias geniais de Galois foram elucidadas por Jordan, em seu *Tratado sobre Substituições* (DHOMBRES, 1978, p. 148-9).

Em um artigo de 1702, Leibniz explicitou a utilidade de se decompor as frações racionais em elementos mais simples e embora soubesse integrar as funções $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^2+1}$, recusou a possibilidade da decomposição de um polinômio com coeficientes reais em fatores de primeiro e segundo graus, dando como exemplo $x^4 + a^4$.

Todavia, Leibniz foi refutado por Côtes, que em 1722, realizou a fatoração completa dos binômios $x^n + a^n$, ao considerar a divisão de uma circunferência em n partes iguais, onde mostrou que o polinômio $X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1 = 0$ possui como fator geral $x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1$, onde k é um número qualquer não divisível por n , de maneira que, dando a k os sucessivos valores 1, 2, 3, ..., $\frac{1}{2}(n-1)$, foi possível determinar todos os fatores desse polinômio.

Vinte anos mais tarde, Euler, em 1742, formulou claramente o que mundialmente é conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra ou Teorema de d'Alembert, como é conhecido na França. Contudo, esse sábio não forneceu uma demonstração rigorosa, muito menos d'Alembert (1742) e Lagrange (1722). Isso somente foi realizado por Gauss em 1799, 1815, 1816 e 1849. A demonstração de Gauss, em 1799, tinha por objetivo garantir a existência de pelo menos uma raiz de um polinômio sem nenhum interesse em determiná-la.

A alavanca fundamental para lançar estudos sobre raízes da unidade vinculadas a arcos circulares da teoria de funções trigonométricas ou à teoria de polígonos regulares inscritos numa circunferência, foi a demonstração da fórmula de Moivre por Euler em 1748, bem como uma outra, decorrente advinda dessa, a saber, $e^{i\sqrt{-1}} = \cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha$. A partição da circunferência em partes iguais foi estudada por Moivre em 1707 e isso possibilitou para que as raízes quintas e sétimas da unidade fossem expressas por radicais. Percebemos um grande progresso desse assunto por Vandemonde que, no *Mémoire Sobre a resolução de equações* (1774), forneceu um método geral para a resolução de equações ciclotômicas a partir do caso da 11ª raiz da unidade. O complemento dessa teoria iniciada por Vandermonde em 1774 foi realizado por Gauss em *Recherches* (1807), tradução francesa de *Disquisitiones* (1801), onde na seção VII, através do artigo "As equações que determinam as

divisões do círculo”, ele discorre sobre a divisão de uma circunferência em n partes iguais, que está diretamente ligada às raízes da equação $x^n - 1 = 0$.

No final dos estudos, Gauss apresentou uma generalização para que uma circunferência possa ser dividida em n partes iguais: é necessário que n possua apenas os divisores ímpares da forma $2^m + 1$, onde m é uma potência de 2, quer dizer, que n seja um número de Fermat. Para resolver a equação $x^n - 1 = 0$ Gauss resolveu m equações do segundo grau e quando n era um número de Fermat, o polígono regular de n lados é construtível com régua e compasso. A recíproca não é muito fácil de determinar, mas Gauss se contentou apenas em enunciá-la. Como hábil calculista, Gauss aplicou essa propriedade a números menores do que 300, e encontrou os 38 valores para n , a saber: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272 (GAUSS, 1807, p. 329-489; MAIGRE, 2007, p. 36-42).

Anos mais tarde, Legendre se dedicou à teoria de ciclotomia de Gauss na seção “Uso da na resolução da equação $x^n - 1 = 0$, onde n é um número primo”, apresentada na quinta parte das duas últimas edições do *Ensaio* (LEGENDRE, 1830, p. 166-330). Fundamentado nos artigos da seção V de *Disquisitiones* (GAUSS, 1807, p. 429-489), Legendre incrementou novos conteúdos à teoria, como ele próprio afirmou:

Os conhecimentos dos Analistas sobre a resolução de $x^n - 1 = 0$, estão quase reduzidos à resolução de um único teorema, quando M. Gauss publicou a sua excelente obra intitulada *Disquisitiones Arithmeticae*, onde encontramos uma nova e muito completa teoria sobre a resolução da mesma equação, ou, o que dá no mesmo, da divisão da circunferência em n partes iguais. Como essa teoria é uma das aplicações mais interessantes da e conduz a resultados muito curiosos, cremos que satisfaremos os nossos leitores, expondo-a aqui com novos desenvolvimentos. (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p. 168, tradução nossa.)

Sem utilizar a nomenclatura de Gauss, Legendre buscou inovar a teoria de ciclotomia de Gauss ainda na edição de 1808 (LEGENDRE, 1808, p. 435-473), com acréscimos de conteúdos e com aplicações numéricas que constituíram os cinco parágrafos da obra: “Sobre as bases dessa nova teoria”; “Formação geral da equação de grau k para os valores de $k = 2, 3, 4, 5$ ”; “Aplicação da teoria a exemplos numéricos”; “Método de redução para completar a teoria anterior”; “Método para obter a solução geral da equação $X = 0$ ”.

Como vimos, mediante da impossibilidade da decomposição do polinômio $X = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ em fatores racionais, Legendre estabeleceu uma conexão entre a resolução da equação $X = 0$ e da equação $x^{n-1} - 1 = ny$ ou $x^{n-1} - 1 = \mathcal{M}(n)$ e utilizou a noção de raiz primitiva tal como o matemático alemão na obra de 1801.

Antes de analisarmos a reformulação desses conteúdos na obra de Legendre de 1830, ressaltaremos as diferenças e as similitudes de nomenclaturas e abordagens utilizadas em cada um dos trabalhos de Legendre (1808) e Gauss (1807). Na distribuição das raízes primitivas da unidade em períodos, Legendre substituiu a notação de Gauss $[g^k]$, por (g^k) . Os exemplos exibidos para a construção geométrica de polígonos regulares de n lados com régua e compasso foram baseados na generalização de Gauss em que é necessário que n seja um número de Fermat $2^m + 1$ (exceto para $n = 5$). Todos os exemplos foram os mesmos apresentados por Gauss, com exceção em que $n = 19$.

Na obra de 1830, Legendre analisou os casos em que $m = 1, 2$ e 4 , já conhecidos na obra de Gauss, e estudou o caso em que $m = 8$, donde resultou que $n = 2^8 + 1 = 257$. Portanto, Legendre mostrou que por meio de sete equações do segundo grau, é possível dividir geometricamente uma circunferência em 257 partes iguais.

Em seguida, Legendre apresentou alguns teoremas relativos à resolução de $X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, para $n = 3m + 1$ e $n = 4m + 1$. Também apresentou o método de resolução de Gauss que é um método particular que utiliza uma equação auxiliar de grau k do tipo $p^k + p^{k-1} + \alpha p^{k-2} + \beta p^{k-3} + \text{etc.} = 0$ para todo número primo $n = km + 1$. Tais equações auxiliares se reduziram em cada caso a uma equação com dois termos de mesmo grau, cujo termo conhecido é da forma $a + b\sqrt{-1}$. De maneira que, uma equação completa de grau k pode ser resolvida pela secção de um ângulo cujo co-seno e o seno são conhecidos, ou pelo menos, determinados, supondo conhecida a divisão do círculo em k partes iguais. Por meio das raízes dessa equação o polinômio X de grau $n - 1 = km$ é decomposto em k equações de grau m e Legendre aplicou aos casos em que $k = 2, 3, 4$ e 5 .

Como Gauss foi muito prolixo na apresentação desse método, Legendre se propôs a abordá-lo sob um novo aspecto, que em muito facilitou as aplicações.

Primeiramente, ele exibiu um método para encontrar as raízes imaginárias da equação $X = 0$. Uma vez que cada raiz é da forma $\cos \frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n}$, o método consistiu em obter uma raiz por meio dos valores reais de $x + \frac{1}{x}$ que sempre será representada por $2\cos \frac{2k\pi}{n}$. Para garantir que todas essas raízes fossem distribuídas em períodos, ele explicitou que toda raiz da equação $X = 0$ pode ser representada por r^α , onde α não é zero e nem múltiplo de n , e essa raiz foi identificada pelo seu expoente e denotada por (α) . Assim, duas raízes (α) e (β) são iguais quando $\alpha - \beta$ é divisível por n . Caso contrário elas são distintas.

Além disso, as raízes possuem propriedades análogas às de logaritmos, uma vez que da origem dessas raízes o produto $(\alpha) \times (\beta) = (\alpha + \beta)$ e a potência $(\alpha)^m = (m\alpha)$. Em seguida, como todas as raízes da equação $X = 0$ são representadas por

$(1), (2), (3), \dots, (n-1)$, r foi substituído por r^α , desde que α não seja divisível por n , e novamente foi obtida a representação dessas mesmas raízes por

$(\alpha), (2\alpha), (3\alpha), \dots, (\overline{n-1} \cdot \alpha)$, a menos da ordem de seus termos. Considerando k um divisor qualquer, primo ou não primo de $n-1$, de maneira que $n-1 = mk$ e partindo de um termo qualquer (g^λ) da sequência $(1), (g), (g^2), \dots, (g^{n-2})$, pertencente a todas as raízes da equação $X = 0$, foi formada uma nova sequência, $(g^\lambda), (g^{\lambda+k}), (g^{\lambda+2k}), \dots, (g^{\lambda+mk-k})$. Essa sequência foi denominada por período composto com m termos e foi sempre olhada como circular ou auto reversa, uma vez que o seu termo $(g^{\lambda+mk})$, que sucederia o $m^{\text{ésimo}}$ termo, era igual ao primeiro (g^λ) , em virtude da equação condicional $g^{mk} = g^{n-1} = 1$.

A expressão $(m : g^\lambda)$, como vimos acima, foi utilizada por Legendre para exprimir a soma das m raízes que compunham o período onde g^λ era o primeiro termo. Após atribuir a λ todos os valores de 1 a k foi formada a equação de grau k , que tem como raízes os períodos de m termos, a saber: $(m : 1), (m : g), (m : g^2) \dots (m : g^{k-1})$, onde g é uma das raízes primitivas de $x^n - 1$. Assim, Legendre obteve todos os períodos procurados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
(m : g) &= (g) + (g^{1+k}) + (g^{1+2k}) + \dots + (g^{1+mk-k}) \\
(m : g^2) &= (g^2) + (g^{2+k}) + (g^{2+2k}) + \dots + (g^{2+mk-k}) \\
(m : g^3) &= (g^3) + (g^{3+k}) + (g^{3+2k}) + \dots + (g^{3+mk-k}) \\
(m : g^k) &= (g^k) + (g^{2k}) + (g^{3k}) + \dots + (g^{mk}).
\end{aligned}$$

Com essa notação, Legendre separou as raízes da equação $X = 0$ em k grupos disjuntos, compostos cada um de m termos, uma vez que são encontrados todos os termos da sequência $(g), (g^2), (g^3), \dots, (g^{n-1})$. Uma decomposição semelhante foi realizada em todos os demais valores de m e k , cujo produto mk é igual ao número dado $n - 1$. Pelo processo de descida finita foram realizadas as subdivisões para a formação da sequência $m, m', m'', \dots$, até que o último termo da sequência fosse 2 e, portanto, as equações que tinham por raízes os períodos de dois termos, em geral, representados por $x^\mu + x^{-\mu}$, foram a solução completa do problema. Em seguida, foi encontrada a equação $p^k + p^{k-1} + \alpha' p^{k-2} + \beta' p^{k-3} + \dots = 0$, onde os coeficientes $\alpha', \beta', \dots$, sempre serão números inteiros, que satisfazem algumas propriedades. Considerando $n = 5m + 1$ Legendre aplicou a teoria para determinar a equação auxiliar $p^5 + p^4 + Pp^3 - Qp^2 + Rp - \Omega = 0$ na resolução de $x^{11} - 1 = 0$ que conduziu ao mesmo resultado de Vandermonde, que foi o primeiro autor dessa teoria publicada nos *Mémoires* da Academia de Paris em 1771 (LEGENDRE, 1830, Vol. II, quinta parte, p. 166-330).

Com exceção das nomenclaturas particulares adotadas por Gauss e Legendre os textos dos dois matemáticos são bem semelhantes e, deixando de lado as querelas do passado, Legendre prestou uma homenagem ao grande matemático Gauss, único autor contemporâneo em Teoria dos Números que, até então, não tinha sido contemplado em seus trabalhos anteriores.

2.2.7.8 Teoria dos números (1830): Volume II, Sexta parte

A sexta parte, “Demonstrações de diversos teoremas da Análise Indeterminada”, (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p. 331-393) contém seis parágrafos, onde o primeiro e o segundo são, respectivamente, reproduções na íntegra do Capítulo I do primeiro *Suplemento de Ensaio sobre a Teoria dos Números* (Legendre, 1816), a saber, “Sobre os meios de se

decompor um número qualquer em quatro quadrados, de maneira que a soma de suas raízes seja igual a certo número” (p. 331-9), e do Capítulo II, “Demonstração do teorema de Fermat sobre os números poligonais e de alguns teoremas análogos”(p. 340-356).

Os parágrafos III e IV são reproduções sobre a impossibilidade de solução com números inteiros da equação $x^n + y^n = z^n$ para os casos $n = 3$ e 5 apresentada no Suplemento de 1823/5, “Sobre alguns objetos da Análise Indeterminada, particularmente sobre o Teorema de Fermat”.

Já o parágrafo V, “Teoremas da Análise com novas fórmulas para seções angulares”, contém um complemento inédito sobre a resolução da equação $4X = Y^2 \pm nZ^2$ onde n é um número primo $4i \pm 1$ e $X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1$ por meio de fórmulas trigonométricas de seno e co-seno. Conforme carta de Jacobi a Legendre de 2 de julho de 1830 (JACOBI, 1998, p. 453-4), esse trabalho foi melhorado posteriormente com as sugestões de Jacobi, que deram origem ao último trabalho de Legendre em Teoria dos Números de 1832.

No sexto e último parágrafo, “Nova demonstração da lei de reciprocidade que existe entre dois números primos”, Legendre (1830, Vol. II, p. 391-4) apresentou a última versão, que, segundo ele, foi a mais simples de todas as demonstrações conhecidas da sua famosa proposição: em Teoria dos Números: a lei de reciprocidade quadrática.

2.7.7.8.1 Teoria dos Números (1830) Sexta parte: A lei de reciprocidade quadrática e o símbolo de Legendre

Nesse momento, o enfoque será dado às variadas demonstrações da lei de reciprocidade quadrática, que foi objeto de estudos por mais de 40 anos de sua vida.

Ao apresentar a sua lei, Legendre não utilizou a teoria de congruência de Gauss, sendo que o símbolo $N^{\frac{p-1}{2}}$ e, posteriormente, $\left(\frac{N}{p}\right)$, foi a notação adotada por ele para expressar o resto da divisão de $N^{\frac{p-1}{2}}$ por p , no caso particular em que p é um número primo da forma $4n + 1$ ou $4n + 3$, não divisor de N .

Lemmermeyer (2000, p. 1; tradução nossa) indica que o primeiro resultado que se sabe sobre reciprocidade quadrática é de Fermat, que em uma carta a Mersenne, afirmou, sem demonstrar que: “todo número primo que é um múltiplo de quatro mais um é escrito de maneira única como soma de dois quadrados”. Escrito numa linguagem mais moderna quer dizer que: “todo número primo $p \equiv 1 \pmod{4}$ é escrito de maneira única como a soma de dois quadrados” (LEMMERMAYER, 2000, p. 1; tradução nossa) ou “todo número primo $p = 4n + 1$ é escrito de maneira única como a soma de dois quadrados” (MAIGRE, 2008, p. 84, tradução nossa). Esse resultado, que estabelece uma ligação entre números primos e formas quadráticas, foi demonstrado por Legendre segundo o texto a seguir, com fundamentos no Pequeno Teorema de Fermat (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 192-3) e nos divisores quadráticos da fórmula $t^2 + u^2$, expostos em (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 203-7):

Seja p um número primo da forma $4n + 1$. Temos que $x^{c-1} - 1 = x^{4n} - 1 = (x^{2n} + 1)(x^{2n} - 1)$. Portanto, pelo (nº 133) haverá $2n$ valores de x , entre $\frac{1}{2}p$ e $-\frac{1}{2}p$, tais que $x^{2n} + 1$ será divisível por p . Mas $x^{2n} + 1$ é a soma de dois quadrados primos entre si e, assim, pelo⁷⁵ (nº 142) seu divisor p é igual à soma de dois quadrados primos entre si. Portanto, podemos sempre supor $p = y^2 + z^2$. (LEGENDRE, 1830, Teorema I, Vol. I, p. 207, tradução nossa.)

Pelo texto acima, Legendre mostrou apenas que, se p um número primo da forma $4n + 1$ então p é escrito como a soma de dois quadrados. No entanto, a recíproca também é verdadeira. Para preencher a lacuna do texto acima de Legendre, encontramos em Lemmermeyer (2000, p. 1-2) uma demonstração desse fato: primeiramente, Lemmermeyer supôs que $p = x^2 + y^2$, com p diferente de 2 (se $p = 2$ então $x = y = 1$ e p seria escrito como

⁷⁵ Nota nossa: Artigo (133) “Sejam c um número primo e P um polinômio de grau m , que é divisor do binômio $x^{c-1} - 1$. Digo: sempre haverá m valores de x , entre $-\frac{1}{2}c$ e $+\frac{1}{2}c$, que tornam esse polinômio divisível por c ” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 196). Artigo (142) “Para se obter os divisores da fórmula $t^2 + u^2$, será necessário, de acordo com o método do § anterior, fazer $c = 1$, $pr - q^2 = 1$, e $q < \sqrt{\frac{1}{3}}$ e assim teremos $q = 0$, $pr = 1$, $p = r = 1$ e, o divisor $py^2 + 2qyu + rz^2$ é reduzido a $y^2 + z^2$. Portanto, “todo divisor da fórmula $t^2 + u^2$ composto de dois quadrados primos entre si, é igual à soma de dois quadrados primos entre si” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 203).

soma de dois quadrados, mas não seria da forma $4n + 1$, com n inteiro) e, x e y primos entre si. Como p é ímpar, x e y têm paridades distintas. Então ele supôs que x é ímpar e y é par. Logo, $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$ e $y^2 \equiv 0 \pmod{4}$ e, assim, $p \equiv 1 \pmod{4}$, isto é, $p = 4n + 1$. Na continuidade, ele mostrou que como $p = x^2 + y^2$, onde x e y são primos entre si, então x e y não são divisíveis por p . Disso resultou que p e y são primos entre si e pelo algoritmo euclidiano existem os inteiros não nulos, y' e p' , tais que $p'p + y'y = 1$. O valor de $y = \frac{1 - p'p}{y'}$, uma vez substituído na congruência $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$ acarreta que $(xy')^2 \equiv (X)^2 \equiv -1 \pmod{p}$ é solúvel, ou seja, que X não é resíduo quadrático de p .

A partir desses resultados, embora não se encontre de maneira explícita, uma ligação entre números primos, formas quadráticas e lei de reciprocidade quadrática pode ser assim estabelecida: “se p é um número primo, então p é escrito de forma única como $x^2 + y^2$, onde x e y primos entre si, se, e somente se, a congruência $X^2 \equiv -1 \pmod{p}$ for solúvel, se e só se, X não é resíduo quadrático mod p , se, e somente se, $\left(\frac{X}{p}\right) = -1$, se, e só se, $p = 4n + 1$ ” (LEMMERMEYER, 2000, p. 2, tradução nossa).

Lemmermeyer (2000, p. 4, tradução nossa) ainda aponta que, em 1747 Euler estabeleceu, sem determinar, o seguinte resultado, que em notação mais moderna da congruência de Gauss pode ser escrito:

Dados um número inteiro m e um número primo ímpar n , tais que n não divide m então

$$m^{\frac{n-1}{2}} \equiv \begin{cases} +1 \pmod{n}, & \text{se } m \text{ é um resíduo quadrático mod } n, \\ -1 \pmod{n}, & \text{se } m \text{ não é um resíduo quadrático mod } n. \end{cases}$$

Esse teorema, conhecido como Critério de Euler, é um dos primeiros teoremas ligado diretamente à lei de reciprocidade quadrática. Lemmermeyer (2000, p. 1; 4) ainda nos diz que Diofanto já sabia que nenhum número $\equiv 3 \pmod{4}$ é a soma de dois quadrados (Problema 9, Livro V) e que nos anos 1773-1775 Lagrange se lançou aos estudos do Critério de Euler com demonstração de resultados de Euler, avançando as pesquisas desse matemático que

foram publicadas após a morte dele, dois anos antes da publicação da lei por Legendre em 1875.

Embora tenha criticado a demonstração de Legendre, de 1785, como incompleta, Gauss a considerou como “a jóia da Aritmética” e, utilizando a teoria de congruência, a demonstrou de oito formas diferentes⁷⁶. Legendre inclusive realizou uma demonstração similar da terceira demonstração de Gauss na edição do *Ensaio* de 1808. Tal demonstração foi reproduzida na edição do *Ensaio* de 1830 e Legendre apresentou na referida edição, uma nova versão da sexta demonstração de Gauss. Contudo, registramos que em nenhuma delas, Legendre utilizou a linguagem de congruência de Gauss.

A obra *Disquisitiones* (1801) foi escrita em 1796, quando Gauss tinha apenas 19 anos, dois anos antes da publicação da primeira edição do *Ensaio* de Legendre e, até então, a lei não tinha sido rigorosamente demonstrada. No prefácio de sua obra, Gauss declarou (p. xiv) que ao escrever a *Disquisitiones* não tinha conhecimento da primeira edição de 1798 de Legendre e apresentou uma primeira demonstração (por indução) nos artigos 64 (p. 45) da Seção 3, “Resíduos de potências”, e nos artigos 108 (p. 79-80) e 131 a 145 da Seção 4, “Congruências do segundo grau”, na tradução francesa de 1807.

A segunda demonstração de Gauss, da Seção 5 de *Disquisitiones*, é um corolário dos Estudos sobre a Análise Indeterminada classificação de formas quadráticas binárias (artigos 262, 263, p. 296-7).

A terceira foi publicada em 1808 e se apoiou em uma proposição conhecida como Lema de Gauss: “Dividamos por um número primo p os $\frac{p-1}{2} = m$ primeiros múltiplos de um inteiro positivo a . Os restos serão, numa certa ordem, os números

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm m$. Em consequência, consideremos $a \equiv r_1, 2a \equiv r_2, \dots, ma \equiv r_m$. Multiplicando essas expressões entre si, e sendo n a quantidade dos restos negativos, temos que $m! a^m \equiv r_1 r_2 \dots r_m = (-1)^n m!$ donde $a^m \equiv (-1)^n$ ” (LEBESGUE, 1847, p. 457, tradução nossa). Outra versão desse Lema é encontrada em Cahen (1900, p. 117, tradução nossa): “Sejam a um número qualquer e p um número primo ímpar não divisor a . Ao dividir

⁷⁶ Vide Lemmermeyer (2000, p. 6).

p pelos números $1a, 2a, 3a, \dots, \frac{p-1}{2}a$, os restos dessa divisão são, numa certa ordem, os números $1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}$, cuja soma é igual a $p - 2$ ”.

A quarta demonstração é de 1811 e é fundamentada nas somas

$1 - \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{1-a^n}{1-a} \frac{1-a^{n-1}}{1-a^2} + \dots + \sum a^{x(x-1)}, \sum a^{x^2}$, de onde Gauss tirou várias consequências dos valores das somas $\sum_1^{p-1} \cos \frac{2x^2\pi}{p}, \sum_1^{p-1} \sin \frac{2x^2\pi}{p}$ correlacionados à lei de Jacobi de 1927.

A quinta é novamente baseada no Lema de Gauss em que o conjunto de números é dividido em 16 partes distintas.

A sexta, em muito se parece com a quarta demonstração, porém, sem o recurso à Análise. Conta-nos Lebesgue (1847) que duas demonstrações foram inspiradas na sexta demonstração de Gauss: a demonstração de Jacobi, comunicada a Legendre em uma carta em 1827 e publicada na edição de *Teoria dos Números* de 1830 e uma demonstração de Cauchy publicada em 1829 no *Boletim* de Férussac.

As duas últimas das oito demonstrações de Gauss são de 1818 e se fundamentam nas teorias de ciclotomia e de números algébricos. Elas fariam parte do segundo volume de *Disquisitiones*, mas Gauss faleceu em 1855, antes que isto pudesse ser realizado. Segundo Lemmermeyer (2000), até 1818, Gauss havia publicado seis demonstrações e outras duas foram encontradas entre os seus trabalhos não publicados (LEBESGUE, 1847, p. 457; LEMMERMEYER, 2000, p. 9, 17, 413, 435; MAIGRE, 2007, p. 84-6, 105).

Assim, a lei de reciprocidade foi estudada por eminentes matemáticos desde Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss e Jacobi, passando por Dirichlet, Eisenstein, Kummer, Dedekind, Hilbert e Artin. De acordo com Lemmermeyer (2000, p. v; xi, 153-393), a referida lei possui mais de 150 demonstrações cuja extensão produziu resultados para a criação da lei de reciprocidade cúbica, biquadrada, sexta e oitava, bem como uma lei de reciprocidade racional.

Conhecer as variadas demonstrações da lei de reciprocidade quadrática fundamentadas em diferentes princípios são fontes reveladoras da multiplicidade de provas possíveis desse fenômeno singular da Teoria dos Números. As variadas leituras dos teoremas

de Legendre são um meio de investigação histórica e de uma relevante noção da semântica dos textos originais que são importantes contribuições para a História da Matemática. Com esse intuito, serão apresentados os textos de Legendre seguidos de observações das demonstrações de outros autores que contêm o mesmo princípio das demonstrações do autor em apreço.

Apresentaremos as principais ideias das demonstrações da lei de reciprocidade realizadas na segunda parte do Volume I e sexta parte do Volume II de *Teoria dos Números* (1830), comparadas aos textos de Gauss (1807), de Jacobi (1827), de Eisenstein (1844) e de Zolotareff (1872). Desse modo, os resultados isolados de cada matemático, segundo os objetivos traçados para cada trabalho e a época em que foram realizados, permitirão uma identidade estrutural dessas demonstrações que os olhares e as opiniões dos autores permitiram induzir.

As demonstrações estão divididas em três categorias: Categoria 1, as que são fundamentadas na teoria de formas quadráticas e congruências do segundo grau; Categoria 2, as que são fundamentadas no Lema de Gauss; Categoria 3, as que são fundamentadas na teoria de ciclotomia.

2.2.7.8.2 Categoria 1: Demonstração da lei de reciprocidade com fundamentos em formas quadráticas e congruências do segundo grau: textos de Legendre (1830) e de Gauss (1807)

Para o estabelecimento da lei de reciprocidade, alguns conhecimentos preliminares são necessários.

O parágrafo I da Segunda Parte do Volume I, “Teoremas sobre os números primos” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 192-9), contém uma explicação sobre a notação resumida $\left(\frac{N}{c}\right)$ e duas proposições que são fundamentais para os estudos sobre resíduos quadráticos: o Teorema 129 (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 192-3), a saber, “Se c é um número primo e N um número qualquer não divisível por c , digo: a quantidade $N^{c-1} - 1$ será divisível por c , de maneira que $\frac{N^{c-1} - 1}{c} = \text{inteiro} = e$ ” e o Teorema 134 (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 196-7),

“O número primo c será divisor de $x^2 + N$, se a quantidade $(-N)^{\frac{p-1}{2}} - 1$ é divisível por c . Caso contrário, não poderá dividir $x^2 + N$ ”.

O Teorema 129, como já foi especificado anteriormente no presente capítulo, trata-se do Pequeno Teorema de Fermat, que em outros termos quer dizer: quando N é um número qualquer e p um número primo não divisor de N , a quantidade $N^{p-1} - 1$ será sempre divisível por p e essa quantidade é o produto dos dois fatores $N^{\frac{p-1}{2}} + 1, N^{\frac{p-1}{2}} - 1$.

O Teorema 134 é uma consequência imediata do Pequeno Teorema de Fermat, em que a quantidade $N^{\frac{c-1}{2}}$ dividida por c , sempre deixará o resto $+1$ ou o resto -1 . Assim Legendre deduziu que, quando c é um número primo $4n + 1$, o expoente $\frac{c-1}{2}$ é par. Caso contrário, quando c é da forma $4n + 3$, esse expoente é ímpar. No primeiro caso, $\left(\frac{-N}{c}\right) = \left(\frac{N}{c}\right)$ e, no segundo, $\left(\frac{-N}{c}\right) = -\left(\frac{N}{c}\right)$. Além disso, essas expressões têm a propriedade multiplicativa em que $\left(\frac{MN}{c}\right) = \left(\frac{M}{c}\right)\left(\frac{N}{c}\right)$ e essa propriedade se estende a um número maior de fatores. No caso em que os dois fatores são iguais, a expressão $\left(\frac{MN}{c}\right) = \left(\frac{MM}{c}\right) = \left(\frac{M}{c}\right) \times \left(\frac{M}{c}\right)$, é sempre igual a $+1$, uma vez que o fator $\left(\frac{M}{c}\right)$ somente pode ser $+1$ ou -1 .

Portanto N é dito um *resíduo quadrado* de c quando $\left(\frac{N}{c}\right) = +1$, pois $N^{\frac{c-1}{2}}$ dividido por c , deixa resto $+1$, que é a condição necessária para que c seja divisor de $x^2 - N$. Caso contrário, quando $\left(\frac{N}{c}\right) = -1$, N é dito um *não resíduo quadrado* de c . Esse é o enunciado da lei de reciprocidade quadrática ou Lei de Legendre.

Em 1798 Legendre melhorou a demonstração da lei e introduziu o símbolo $\left(\frac{n}{m}\right)$, conhecido como o símbolo de Legendre, em substituição à notação $n^{\frac{m-1}{2}}$, com m e n primos,

conforme p. 85 do presente trabalho. Com a nova notação, a terceira redação do enunciado da primeira versão da lei de 1785 é apresentada nas edições do *Ensaio* de 1798 (p. 194); 1808 (p. 198) e 1830 (Vol. I, p. 230), assim:

[...]Quaisquer que sejam os números primos m e n , que não são da forma $4x + 3$, sempre teremos $\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)$

e se ambos são da forma $4x + 3$, teremos $\left(\frac{n}{m}\right) = -\left(\frac{m}{n}\right)$. Esses dois casos gerais podem ser reduzidos à fórmula $\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} \left(\frac{m}{n}\right)$. (LEGENDRE, 1830, Vol. I, Artigo 166, p. 230, tradução nossa.)

Em virtude dos resultados apresentados no parágrafo I (1830, Vol. I, p. 197), Legendre deduziu que se m e n são dois números primos quaisquer ímpares e distintos, as expressões resumidas $\left(\frac{m}{n}\right)$, $\left(\frac{n}{m}\right)$, representam, respectivamente, o resto da divisão de $m^{\frac{n-1}{2}}$ por n e o resto da divisão de $n^{\frac{m-1}{2}}$ por m . Ao mesmo tempo, ele demonstrou que os restos somente poderão ser $+1$ ou -1 . Portanto, a proposição acima é o teorema geral que contém a relação entre os dois restos $\left(\frac{m}{n}\right)$ e $\left(\frac{n}{m}\right)$. Uma vez conhecido o valor de um deles, o valor do outro é imediatamente determinado.

Para proceder à demonstração, o teorema foi dividido em oito casos, similares aos textos da primeira versão de 1785, só que com um novo arranjo e uma nova notação para o símbolo de Legendre. O referido autor distinguiu, por letras particulares, os números primos da forma $4x + 1$ dos da forma $4x + 3$, sendo que no primeiro caso, os números são denotados pelas letras A , a , α e no segundo, são denotados por B , b , β :

- I. Se $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$, segue que $\left(\frac{b}{a}\right) = -1$.
- II. Se $\left(\frac{b}{a}\right) = +1$, segue que $\left(\frac{a}{b}\right) = +1$.

$$\text{III.} \quad \text{Se } \left(\frac{B}{b}\right) = +1, \text{ segue que } \left(\frac{b}{B}\right) = -1.$$

$$\text{IV.} \quad \text{Se } \left(\frac{B}{b}\right) = -1, \text{ segue que } \left(\frac{b}{B}\right) = +1.$$

$$\text{V.} \quad \text{Se } \left(\frac{a}{A}\right) = +1, \text{ segue que } \left(\frac{A}{a}\right) = +1.$$

$$\text{VI.} \quad \text{Se } \left(\frac{a}{A}\right) = -1, \text{ segue que } \left(\frac{A}{a}\right) = -1.$$

$$\text{VII.} \quad \text{Se } \left(\frac{a}{b}\right) = +1, \text{ segue que } \left(\frac{b}{a}\right) = +1.$$

$$\text{VIII.} \quad \text{Se } \left(\frac{b}{a}\right) = -1, \text{ segue que } \left(\frac{a}{b}\right) = -1.$$

(LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 231, tradução nossa.)

A apresentação desses oito teoremas possui redação diferenciada nos trabalhos de Legendre. Nas edições de 1798 e 1830 as redações são iguais, mas Legendre achou conveniente trocar a sequência dos teoremas na versão de 1830: os teoremas I e II são respectivamente, os Teoremas II e I da versão de 1785; os Teoremas III e IV são o VIII e VII; V e VI são o III e IV; VII e VIII são o III e IV. Na edição de 1808, os Teoremas I e II foram trocados de ordem, respectivamente, com os Teoremas III e IV.

Todas as demonstrações foram fundamentadas na teoria de formas quadráticas e são praticamente as mesmas nas três edições do *Ensaio*. Como amostra, apresentaremos as demonstrações dos Teoremas I e II, onde o Teorema I é a contra positiva do Teorema II, bem como as dos Teoremas VII e VIII.

Segue a demonstração dos Teoremas I e II:

Primeiramente, observo que a equação $x^2 + ay^2 = bz^2$, ou mais geralmente

$(4f+1)x^2 + (4g+1)y^2 = (4n+3)z^2$, é impossível, pois sendo x e y supostamente primos entre si, o primeiro membro sempre será uma das formas $4k+1$ e $4k+2$, desde que o segundo membro seja somente das formas $4k$ ou $4k+3$. Mas segundo o n°. 27, a equação $x^2 + ay^2 = bz^2$ será solúvel, se pudermos encontrar dois inteiros λ e μ tais que $\frac{\lambda^2 + a}{b}$ e $\frac{\mu^2 - b}{a}$ sejam inteiros. Por outro

lado, a condição para que b seja divisor de $\lambda^2 + a$ é que $\left(\frac{-a}{b}\right) = 1$, ou $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$

e a condição para que a divida $\mu^2 - b$ é que $\left(\frac{b}{a}\right) = +1$. Portanto não podemos ao mesmo tempo ter $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$ e $\left(\frac{b}{a}\right) = +1$. Por outro lado, cada uma dessas expressões apenas pode ser $+1$ ou -1 e portanto

I se $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$, segue que $\left(\frac{b}{a}\right) = -1$,

II se $\left(\frac{b}{a}\right) = +1$, segue que $\left(\frac{a}{b}\right) = +1$.

Além disso, essas duas proposições estão ligadas entre si, de maneira que uma é consequência da outra, pois sendo a primeira $\left(\frac{b}{a}\right) = +1$, $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$ não poderá ocorrer, uma vez que resultaria $\left(\frac{b}{a}\right) = -1$, o que seria uma contradição da hipótese. Portanto, temos que $\left(\frac{a}{b}\right) = +1$. (LEGENDRE, 1798, p. 215; 1808, p. 215-6; 1830, parágrafo VI, Vol. I, p. 231-2, tradução nossa.)

Nessa demonstração, Legendre utilizou os Estudos sobre a Análise Indeterminada resolução da equação $x^2 + ay^2 = bz^2$ apresentados no artigo III do trabalho de 1785 (p. 513) cujo texto⁷⁷ foi reproduzido no artigo 27 (p. 47) da edição do *Ensaio* de 1830. Primeiramente, Legendre observou que a equação é impossível, uma vez que, o primeiro membro é uma das formas $4n + 1$ ou $4n + 2$, enquanto o segundo membro é uma das formas $4n$ ou $4n + 3$. Em seguida, o autor afirmou que a equação é solúvel se existirem os números inteiros λ e μ tais que as expressões $\frac{\lambda^2 + a}{b}$ e $\frac{\mu^2 - b}{a}$ sejam inteiras. Assim, é necessário que $\lambda^2 + a$ seja divisível por b e que $\mu^2 - b$ seja divisível por a . Além disso, dos estudos desenvolvidos sobre divisores primos de formas quadráticas, b tem que ser da forma $4n + 3$ e utilizando que “todo número primo $4n + 1$ divide simultaneamente as fórmulas $t^2 + au^2$ e $t^2 - au^2$ ou

⁷⁷ Artigo (27) “Sendo proposta a equação $ax^2 + by^2 = cz^2$, na qual os coeficientes a, b, c , são individualmente, ou dois a dois, sem divisor quadrado, sem divisor em comum, digo, que esta equação será solúvel, se pudermos encontrar três inteiros λ, μ, ν tais que as três quantidades $\frac{a\lambda^2 + b}{c}, \frac{c\mu^2 - b}{a}, \frac{c\nu^2 - a}{b}$ sejam inteiras. Caso contrário, se essas três condições não puderem ser simultaneamente satisfeitas, ela será insolúvel. Essas duas condições se reduzem a duas se um dos números a, b, c é igual à unidade, e a uma, se dois deles forem iguais à unidade” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, parágrafo IV, p. 47-8, tradução nossa).

nenhuma delas”, Legendre (1830, Vol. I, p. 238-9) mostrou que fazendo $u = 1$, $4n + 1$ divide simultaneamente as fórmulas $t^2 + a$ e $t^2 - a$. Assim, a divide $\mu^2 \pm b$. Vimos pelo teorema 134 do parágrafo I do volume I, que quando a é um número primo $4n + 1$, o expoente $\frac{a-1}{2}$ é par, então $\left(\frac{-a}{b}\right) = +1$ e como b é da forma $4n + 3$ então $\left(\frac{b}{a}\right) = +1$, ou seja, $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$ e $\left(\frac{b}{a}\right) = +1$. Mediante a afirmação que para cada expressão as únicas possibilidades são $+1$ ou -1 , Legendre concluiu que as expressões $\left(\frac{a}{b}\right)$ e $\left(\frac{b}{a}\right)$ somente satisfazem as condições de solubilidade da equação proposta se ambas possuírem, simultaneamente, valores iguais. Portanto, se $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$, $\left(\frac{b}{a}\right) = -1$ e se $\left(\frac{a}{b}\right) = 1$, $\left(\frac{b}{a}\right) = 1$.

A demonstração dos casos VII e VIII possui a seguinte redação:

Seja $\left(\frac{a}{b}\right) = +1$. Digo, $\left(\frac{b}{a}\right) = +1$. Com efeito, seja agora β um número primo $4n + 3$ que divida a fórmula $x^2 + a$, de maneira que $\left(\frac{a}{\beta}\right) = -1$ e assim, $\left(\frac{\beta}{a}\right) = -1$. Vimos que sempre é possível satisfazer a uma das três equações seguintes, desde que tomemos convenientemente o sinal do primeiro membro:

$$\begin{aligned}\pm 1 &= ax^2 - b\beta y^2 \\ \pm 1 &= bx^2 - a\beta y^2 \\ \pm 1 &= \beta x^2 - aby^2.\end{aligned}$$

Ora, supomos que $\left(\frac{a}{b}\right) = +1$, $\left(\frac{a}{\beta}\right) = -1$ e assim $\left(\frac{\beta}{a}\right) = -1$. Dessas três equações, que representam seis, existem quatro que não ocorrem, a saber:

$$\begin{aligned}1^\circ \text{ A equação } +1 &= \beta x^2 - aby^2 \text{ que supõe } \left(\frac{\beta}{a}\right) = +1; \\ 2^\circ \text{ A equação } -1 &= \beta x^2 - aby^2 \text{ que supõe } \left(\frac{\beta}{a}\right) = +1; \\ 3^\circ \text{ A equação } -1 &= ax^2 - b\beta y^2 \text{ que supõe } \left(\frac{a}{b}\right) = -1;\end{aligned}$$

4º A equação $+1 = ax^2 - b\beta y^2$ que supõe $\left(\frac{a}{\beta}\right) = +1$.

Portanto restam as duas equações: $+1 = bx^2 - a\beta y^2$ e $-1 = bx^2 - a\beta y^2$, onde necessariamente apenas uma delas ocorre. Ora, todas as duas exigem que $\left(\frac{b}{a}\right) = +1$, uma vez que, pela primeira, a é divisor de $b^2x^2 - b$ ou de $z^2 - b$ e pela segunda, a é divisor de $b^2x^2 + b$ ou de $z^2 + b$. Portanto se $\left(\frac{a}{b}\right) = +1$, segue que $\left(\frac{b}{a}\right) = +1$. Em segundo lugar, considere $\left(\frac{b}{a}\right) = -1$. Digo que $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$. De fato, se tivéssemos $\left(\frac{a}{b}\right) = +1$, resultaria, pelo caso que acabamos de mostrar, que $\left(\frac{b}{a}\right) = +1$, o que seria contrário à hipótese. Finalmente, se $\left(\frac{b}{a}\right) = -1$, segue que $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$. (LEGENDRE, 1830, parágrafo VI, Vol. I, p. 234-5, tradução nossa.)

Ressaltamos que, salvo a notação, nenhuma diferença é notada entre os argumentos da demonstração acima e os argumentos da demonstração anterior do trabalho de 1785. Vimos que, em 1785, Legendre utilizou a equação $Ax^2 + ay^2 = bz^2$, ao invés da equação $x^2 + ay^2 = bz^2$, o que dá no mesmo, conforme a demonstração na referida obra em que ele supôs que $A = 1$. Esse texto também é encontrado nas edições do *Ensaio* de 1798 (p. 218) e de 1808 (p. 218-9).

As demonstrações dos demais casos são análogas, onde Legendre ora utilizou a equação $x^2 + ay^2 = bz^2$, ora as equações $Ax^2 - ay^2 = \pm 1$, $x^2 - Aay^2 = -1$, $Bx^2 - by^2 = +1$ e $Bx^2 - by^2 = -1$. Além disso, com base na conjectura sobre a existência de números primos em uma progressão aritmética, ele supôs que dado um número primo auxiliar a , sempre é possível encontrar um número primo β da forma $4n + 3$, tal que β divida a fórmula $x^2 + a$, e, por consequência, $\left(\frac{a}{\beta}\right) = -1$

A escolha do número a como sendo um número primo das formas $4n + 1$ ou $4n + 3$ não foi explicada de modo rigoroso por Legendre.

Porém, ele justificou a existência do outro número β em função de cada um dos valores de a e, para essa finalidade, foram usados os resultados do artigo XXII da Introdução (LEGENDRE, 1830, parágrafo VI, Vol. I, p. 15).

Considerando $a = 4n + 1$, ele utilizou uma de suas subdivisões, a forma $8n + 5$. Como supôs que β dividia a fórmula $x^2 + a$, ele substituiu $x = 1$ em $x^2 + a$ e obteve que $1 + a = 8n + 6$. Mas essa última forma é divisível por um número primo $4n + 3$ e assim, o autor deduziu que β pode ser um número primo dessa forma. A outra subdivisão de a , $8n + 1$, também foi utilizada, com a diferença de que Legendre a considerou em relação aos múltiplos de 3, que foram divididas em outras duas categorias, as formas $24n + 1$ e $24n + 17$.

As passagens da representação da forma $8n + 1$ pelas formas $24n + 1$ e $24n + 17$ não foram explicitadas por Legendre, porém, percebemos que elas foram baseadas nos artigos XXII acima e em outro, o artigo XXIII da Introdução⁷⁸, que utilizaremos para uma melhor compreensão dos resultados obtidos pelo referido autor. Como 24 é múltiplo de 8 e de 3 e $24 = 6 \times 4$ então é necessário procurar entre as formas $a = 24n + b' = 6 \times 4n + b'$, onde b' é ímpar e menor do que $4a$, de tal modo que, novamente substituindo $x = 1$ em $x^2 + a$, como no caso anterior, $1 + a$ seja divisível por um número da forma $4n + 3$. Excluídas as demais formas, as únicas que restam são $24n + 1$ e $24n + 17$. Em relação a essa última forma, fica fácil ver a relação, pois substituindo $x = 1$ em $x^2 + a$ tem-se que $24n + 17 + 1 = 24n + 18 = 6(4n + 3)$, que é divisível por 3. Portanto, para $\beta = 3 = 4 \times 0 + 3$, a condição $\left(\frac{a}{\beta}\right) = -1$ é satisfeita para todo número primo a da forma $24n + 17$.

Para determinar que para todo número primo a da forma $24n + 1$, com exceção da unidade, sempre é possível encontrar um número primo β da forma $4n + 3$, tal que β divida

⁷⁸ Artigo XXII. Todos os números ímpares se representam pela fórmula $2x + 1$, a qual segundo x é par ou ímpar, contém as duas formas $4x + 1$ e $4x - 1$ ou $4x + 3$. Daí, existem duas grandes divisões de números primos, uma compreendendo os números primos $4x + 1$, a saber, 1, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, etc., outra contemplando os números primos $4x - 1$ ou $4x + 3$, a saber 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, etc. A forma geral $4x + 1$ se subdivide em duas outras formas $8x + 1$ e $8x - 3$ ou $8x + 5$ da mesma forma que $4x + 3$ se subdivide em duas outras $8x + 3$ e $8x + 7$ ou $8x - 1$. (LEGENDRE, 1830, parágrafo VI, Vol. I, p. 14-5, tradução nossa.) Artigo XXIII. [...] Em geral, sendo a um número dado, todo número ímpar pode ser representado por $4ax \pm b$, no qual b é ímpar, positivo e menor do que $4a$. Se entre todos os valores possíveis para b nós desconsiderarmos aqueles que têm um divisor comum com a , as demais formas, $4ax + b$ contém todos os números primos (com exceção daqueles que dividem $4a$) distribuídos, relativamente, aos múltiplos de $4a$, tantas quantas espécies ou formas que b terá como valores diferentes. (LEGENDRE, 1830, p. 15-6, tradução nossa.)

a fórmula $x^2 + a$ e, por consequência, $\left(\frac{a}{\beta}\right) = -1$, Legendre mostrou que a forma $24n + 1$ pode ser subdividida relativamente aos múltiplos de 7, 11, etc., sendo que a cada operação a quantidade dessa formas é reduzida à metade e a fórmula $x^2 + a$ será divisível por 7, 11, etc., de maneira que o valor β encontrado satisfaz, para todos os números primos a inclusos nessas fórmulas, a condição $\left(\frac{a}{\beta}\right) = -1$. Legendre ainda demonstrou que todo número primo a do tipo $24n + 1$ pode ser uma das seis formas $168x + 17$, $168x + 41$, $168x + 73$, $168x + 89$, $168z + 97$ e $168x + 145$. Uma vez que, 168 é múltiplo de 7 ($168 = 7 \times 24$), os respectivos valores de $z = 2, 1, 2, 3, 1$ e 3 substituídos em $z^2 + a$ também são múltiplos de 7. De onde segue que a fórmula $z^2 + a$ será divisível por 7 e, que o valor $\beta = 7 = 4 \times 1 + 3$ satisfaz à condição $\left(\frac{a}{\beta}\right) = -1$, para todos os números primos inclusos nessas fórmulas. Da mesma maneira, todo número primo $24n + 1$, incluso em uma das dez formas, respectivamente, $a = 264z + 17, 41, 65, 73, 145, 161, 193, 217, 233, 241$. Como $264 = 24 \times 11$, substituindo os valores correspondentes, $x = 4, 5, 1, 2, 3, 2, 4, 5, 3, 1$, resultou que, a fórmula $x^2 + a$ será divisível por 11 e $\beta = 11 = 4 \times 2 + 3$ satisfaz a condição $\left(\frac{a}{\beta}\right) = -1$, para todos os números primos a inclusos nessas fórmulas. Os números primos $24n + 1$, estendidos até o limite 1 009, são os seguintes números: 73, 97, 193, 241, 313, 337, 409, 433, 457, 577, 601, 673, 769, 937, 1 009. Desses 15 números, dez satisfazem à condição $\left(\frac{a}{7}\right) = -1$, a saber, $a = 73, 97, 241, 313, 409, 433, 577, 601, 769, 937$, e os demais, satisfazem à condição $\left(\frac{a}{11}\right) = -1$: $a = 193, 337, 457, 673, 1009$. A hipótese, portanto, foi verificada até o limite 1 009 e, ao mesmo tempo, ela foi verificada para uma grande quantidade de números primos das fórmulas anteriores. Dessa feita, Legendre concluiu indutivamente que ela é verdadeira para todo número primo a da forma $8n + 1$, exceto a unidade.

Finalizando, Legendre utilizou argumentos baseados na representação de números primos por formas quadráticas de Lagrange, equivalente ao artigo 140: “todo divisor da fórmula $t^2 + u^2$ onde t e u são primos entre si, é igual à soma de dois quadrados primos entre

si” (LEGENDRE, 1830, p. 203) e com recursos implícitos no artigo XXIII da Introdução. Utilizando o princípio da redução ao absurdo, primeiro Legendre escreveu $a = 2f^2 - g^2$, e assim, $2fy^2 + 2gyz + fz^2$ é um divisor quadrático da fórmula $t^2 + au^2$. Se f tem por divisor um número primo β da forma $4n + 3$ (o que acontecerá sempre que f for dessa forma), esse número dividirá $z^2 + a$ que é igual a $2f^2$, se $z = g$ e, assim, tomando β como um número nesses termos, a questão é satisfeita. Em seguida, foi assumido que $2fy^2 + 2gyz + fz^2$ é a soma de dois quadrados, digamos, $2fy^2 + 2gyz + fz^2 = t^2 + u^2$ e após algumas transformações, Legendre chegou à conclusão de que $a = 2f^2 - g^2 = (AN - BN)^2$ é um quadrado, o que é uma contradição, pois, a é um número primo e o caso $a = 1$ foi excluído. Logo, os divisores primos da fórmula $2fy^2 + 2gyz + fz^2$ não podem ser todos da forma $4n + 1$ e, assim, haverá um ou vários da forma $4n + 3$. Se β for esse divisor ou um dos divisores $4n + 3$, então $\beta P = 2fy^2 + 2gyz + fz^2$ ou $\beta fP = (fz + gy)^2 + ay^2$ e, por conseguinte, β dividirá a fórmula $x^2 + a$ (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 235-8).

A exemplo de Legendre, a primeira demonstração de Gauss se fundamentou na conjectura que existe certo número primo auxiliar para mostrar que para cada número primo $q \equiv 3 \pmod{4}$ existe um primo $p < q$, tal que $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$. Na verdade, Gauss apresentou três versões da lei em diferentes artigos: no artigo 64 (GAUSS, 1807, p. 45) após estudar as condições das raízes de congruências de graus maiores ou iguais a 2, Gauss associou a resolução com números reais de equações $x^n = A$ ou para que $\sqrt[n]{A}$ admite valores reais, à resolução da congruência $x^n = A \pmod{p}$, onde $\sqrt[n]{A} \pmod{p}$ é uma raiz qualquer da congruência. A sua primeira versão da lei foi assim enunciada: “ $\sqrt{-1} \pmod{p}$ sempre admite dois valores reais quando p é da forma $4m + 1$ e nenhuma raiz quando p é da forma $4m + 3$ ”, (GAUSS, 1807, p. 45, tradução nossa). Segundo Gauss (1807), esse resultado é equivalente ao teorema de Euler (que não conseguiu demonstrar): “Se p é um número primo da forma $4m + 1$, pode-se encontrar um quadrado a^2 tal que $a^2 + 1$ é divisível por p e isso não ocorre se ele for da forma $4m + 3$ ” (GAUSS, 1807, p. 46, tradução nossa).

No artigo 108 (GAUSS, 1807, p. 79, tradução nossa), ele demonstrou que “ -1 é resíduo de todos os números primos da forma $4n + 1$ e não resíduo da forma $4n + 3$ ”. No

artigo 131 (GAUSS, 1807, p. 96, tradução nossa), ela apareceu com uma redação generalizada e foi denominada de Teorema Fundamental: “Todo número positivo que é resíduo ou não resíduo de p terá por resíduo ou não resíduo $+p$ ou $-p$, segundo p é da forma $4n + 1$ ou $4n + 3$ ”. Vale ressaltar que essa demonstração é apresentada em treze páginas, onde Gauss utilizou as notações pRq se p é um resíduo quadrático mod q e pNq se p é um não resíduo quadrático mod q . Ela é análoga à demonstração de Legendre dos Teoremas I a VIII. No final da demonstração, Gauss estabeleceu uma correlação entre um número A e os divisores primos dos números da fórmula $x^2 - A$, a saber, “Se A é um número positivo da forma $4n + 1$ ou negativo, da forma $4n + 3$, pelo Teorema Fundamental, todos os números primos positivos que são resíduos de A , são divisores de $x^2 - A$ ” (GAUSS, 1807, p. 110, tradução nossa). Em seguida, ele demonstrou que $+2$ é não resíduo e -2 é resíduo dos números primos da forma $8n + 3$; que ± 2 são não resíduos da forma $8n + 5$; que -2 é não resíduo e $+2$ é resíduo dos números primos da forma $8n + 7$ (GAUSS, 1807, p. 110). Para uma melhor compreensão da primeira demonstração de Gauss, o trabalho mais recomendável é o de Dirichlet (1859, p. 401-420) que apresentou uma abordagem mais simples em *A primeira demonstração de Gauss da lei de reciprocidade na teoria de resíduos quadráticos*.

Como Gauss declarou que não tinha conhecimento da primeira edição do *Ensaio* de Legendre (1798), é bem provável que ambos matemáticos chegaram aos mesmos resultados de maneiras independentes.

2.2.7.8.3 Categoria 2: Demonstração da lei de reciprocidade com fundamentos no Lema de Gauss: textos de Legendre (1830) e de Zolotareff (1872)

A segunda demonstração de Legendre da terceira versão da lei de reciprocidade é apresentada no parágrafo VII, “Demonstração do Teorema sobre a lei de reciprocidade que existe entre dois números primos quaisquer” (1830, Vol. II, p. 57), em um longo texto de oito páginas, onde ele utilizou o Lema de Gauss, influenciado pela terceira demonstração realizada pelo matemático alemão em 1808:

Sejam p um número primo positivo ímpar e k um inteiro não divisível por p . Se dividirmos sucessivamente, $k, 2k, 3k, \dots, \frac{p-1}{2}k$. por p , os restos obtidos serão

compostos, em parte, pelos números $a', a'', a''', \dots, a^\lambda$ menores do que $\frac{1}{2}p$ e, em parte, pelos números $b', b'', b''', \dots, b^\mu$, maiores do que $\frac{1}{2}p$. Posto isto, sendo μ a quantidade desses últimos restos, teremos em geral, que: $\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^\mu$ e $\left(\frac{k}{p}\right) = +1$, se μ é par e $\left(\frac{k}{p}\right) = -1$, se μ é ímpar. (LEGENDRE, 1830, Vol. II,

Quarta parte, Parágrafo VII, p. 57, tradução nossa.)

Dividimos as principais ideias da demonstração de Legendre em duas etapas: a primeira etapa se refere à utilização do Lema de Gauss em que é demonstrado que $\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^\mu$, onde μ é a quantidade dos restos $b', b'', b''', \dots$, etc. que são maiores do que $\frac{1}{2}p$. A segunda etapa se refere à utilização de somatórios para determinar o valor analítico de $\left(\frac{k}{p}\right)$, segundo a paridade de μ .

Primeiramente, Legendre mostrou que os restos $b', b'', b''', \dots$, são distintos entre si, pois se dois deles fossem iguais, digamos, kA e kA' , então a diferença $k(A' - A)$ seria divisível por p . Segundo Legendre, isso não ocorre, uma vez que p é um número primo que não divide k , nem $A' - A$, pois A' e A são distintos e menores do que $\frac{1}{2}p$. De forma análoga, ele mostrou que os restos $a', a'', a''', \dots$, são distintos entre si. Além disso, foi mostrado que $b', b'', b''', \dots$, etc. são distintos de $a', a'', a''', \dots$, etc. Como o número total

$\lambda + \mu$ dos termos dessas duas sequências é $\frac{1}{2}(p-1)$, que é a quantidade dos múltiplos $k, 2k, 3k, \dots, \frac{p-1}{2}k$ de onde elas são originárias, segue que uma vez permutados convenientemente, eles são os números $1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2}(p-1)$. De onde o produto de todos esses números é $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{p-1}{2}$. Por outro lado, desprezando-se os múltiplos de p , ele utilizou o Lema de Gauss para obter que o produto

$$k \cdot 2k \cdot 3k \dots \frac{1}{2}(p-1)k = a' a'' a''' \dots a^\lambda \cdot b' b'' b''' \dots b^\mu,$$

onde o primeiro membro é igual a $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{1}{2}(p-1)k^{\frac{1}{2}(p-1)}$. Ao comparar essas duas expressões, Legendre deduziu que $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{1}{2}(p-1)k^{\frac{1}{2}(p-1)}(-1)^\mu = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{1}{2}(p-1)$ e, portanto, $k^{\frac{1}{2}(p-1)}(-1)^\mu = 1$ ou $k^{\frac{1}{2}(p-1)} = (-1)^\mu$. Mas, desprezando os múltiplos de p , $k^{\frac{1}{2}(p-1)}$ é o valor da expressão $\left(\frac{k}{p}\right)$ e, assim, $\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^\mu$, onde μ é a quantidade dos últimos restos maiores do que $\frac{1}{2}p$.

Uma vez que o número μ pode ser par ou ímpar, a segunda parte da demonstração tem por objetivo encontrar um valor analítico para $\left(\frac{k}{p}\right)$, nos casos em que p é da forma $4n+1$ e $4n+3$. Para determinar em quais casos o valor da expressão $\left(\frac{k}{p}\right)$ é $+1$ ou -1 , Legendre observou que isso depende da disposição dos números das classes dos restos anteriores e sendo a designado como um dos números $a', a'', \dots, a^\lambda$ e b um dos números $b', b'', \dots, b^\mu$, por hipótese, $2a < p < 2b$.

Para tanto, Legendre definiu as somas $s_1(k, p) = f(k, p) + \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} E\left(\frac{2nk}{p}\right)$ e $s_2(k, p) = g(k, p) + \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} E\left(\frac{2n+1}{p}k\right)$, onde a noção de $E(x)$ significa o maior inteiro contido em uma quantidade qualquer x . Assim $x - E(x)$ sempre será uma fração positiva menor do que a unidade. Considerando os diversos múltiplos de k , $k, 2k, 3k, \dots, \frac{p-1}{2}k$ interligados aos restos $a', b', \dots$, etc., se, em particular, Ak for o múltiplo cujo resto é a , e se Bk for o múltiplo cujo resto é b , Legendre mostrou que $\frac{Ak}{p} - E\left(\frac{Ak}{p}\right) < \frac{1}{2}$ e $\frac{Bk}{p} - E\left(\frac{Bk}{p}\right) > \frac{1}{2}$. Portanto, $E\left(\frac{2Ak}{p}\right) - 2E\left(\frac{Ak}{p}\right) = 0$ e $E\left(\frac{2Bk}{p}\right) - 2E\left(\frac{Bk}{p}\right) = 1$.

Com esses resultados, Legendre obteve o valor de

$$\mu = E\left(\frac{2k}{p}\right) + E\left(\frac{4k}{p}\right) + E\left(\frac{6k}{p}\right) + \dots + E\left(\frac{(p-1)k}{p}\right) - 2E\left(\frac{k}{p}\right) - 2E\left(\frac{2k}{p}\right) - 2E\left(\frac{3k}{p}\right) - \dots - 2E\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}\right)$$

Após analisar os casos em que p é da forma $4n + 1$ ou $4n + 3$, a expressão foi reduzida, no primeiro caso, para $\mu = \frac{1}{4}(p-1)(k-1) + E\left(\frac{k}{p}\right) + E\left(\frac{2k}{p}\right) + E\left(\frac{3k}{p}\right) + \dots + E\left(\frac{2nk}{p}\right)$ e, no segundo caso, para $\mu = \frac{1}{4}(p+1)(k-1) + E\left(\frac{k}{p}\right) + E\left(\frac{2k}{p}\right) + E\left(\frac{3k}{p}\right) + \dots + E\left(\frac{2n+1}{p}k\right)$.

Legendre expôs que, quando k é par, as duas fórmulas também podem ser reduzidas a uma única, a saber, $\mu = E\left(\frac{k}{p}\right) + E\left(\frac{2k}{p}\right) + E\left(\frac{3k}{p}\right) + \dots + E\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)}{p}k\right)$, desde que o sinal ambíguo seja determinado de tal maneira que $\frac{1}{4}(p \pm 1)$ seja um inteiro e, então, $\frac{1}{4}(p \pm 1)(k-1)$ foi reduzido a $\frac{1}{4}(p \pm 1)$. Desse modo, ele deduziu que nem sempre é relevante saber se μ é par ou ímpar.

Em seguida, uma relação entre os dois expoentes μ e ν foi estabelecida, de onde $\mu + \nu = \frac{1}{4}(p-1)(k-1)$. Portanto, se um dos números p e k , ou ambos, são da forma $4n + 1$, a quantidade $\frac{1}{4}(p-1)(k-1)$ é um número par. Logo, os dois números μ e ν serão ambos pares ou ambos ímpares e $\left(\frac{p}{k}\right) = \left(\frac{k}{p}\right)$. Se os dois números primos p e k são ambos da forma $4n + 3$, a quantidade $\frac{1}{4}(p-1)(k-1)$ será um número ímpar. Portanto, μ e ν sempre serão um par e o outro ímpar e $\left(\frac{p}{k}\right) = -\left(\frac{k}{p}\right)$. Logo, se $\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^\mu$ então $\left(\frac{p}{k}\right) = (-1)^\nu$.

Por outro lado, a fórmula geral que satisfaz a todos os casos, é deduzida das expressões acima e, assim, $\left(\frac{k}{p}\right) = \left(\frac{p}{k}\right)(-1)^{\mu+\nu} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{k-1}{2}} \left(\frac{p}{k}\right)$, como no artigo 166 de Legendre (1830, parágrafo VI, Vol. I, p. 230).

Como aplicação da teoria, Legendre determinou o valor da expressão $\left(\frac{k}{p}\right)$, para o caso particular em que $k = 2$. Como 2 é par, pela observação anterior, todos os termos $E\left(\frac{2}{p}\right)$, $E\left(\frac{4}{p}\right)$, ..., $E\left(\frac{p-1}{p}\right)$ são nulos e então $\mu = \frac{1}{4}(p \pm 1)$. Portanto, quando p é da forma $8n + 1$ ou $8n + 7$, o número μ será par e, conseqüentemente, $\left(\frac{2}{p}\right) = +1$.

Porém, se $p = 8n + 3$ ou $8n + 5$, o número μ será ímpar e, então, $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$. Com essas informações, Legendre deduziu que 2 é resíduo quadrático dos números primos da forma $8n + 1$ ou $8n + 7$ e não resíduo quadrático dos números primos da forma $8n + 3$ ou $8n + 5$ (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p. 57-64).

Apresentaremos outra demonstração com fundamentos no Lema de Gauss e em transposições de sequências numéricas que foi realizada em 1872, por Zolotareff, um professor da Universidade de São Petersburgo.

Os princípios utilizados pelo autor foi primeiramente considerar uma sequência $S = \{1, 2, 3, \dots, (p-1)\}$ formada pelos restos da divisão de um número inteiro por um número primo ímpar p , não divisível por p . Por meio de permutações de seus elementos, são obtidas novas sequências, que, a menos da ordem, são os mesmos elementos de S . De forma análoga à demonstração anterior de Legendre, Zolotareff mostrou que todos os $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1)$ arranjos possíveis se dividem em duas classes, cada uma contendo $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1)}{2}$ arranjos.

Os arranjos da primeira classe são deduzidos de S por meio de um número par de transposições e os elementos da segunda classe são deduzidos de S através de uma quantidade ímpar de transposições. O objetivo é mostrar que o caráter quadrático do arranjo é $+1$ ou -1 conforme o arranjo pertença à primeira ou à segunda classe.

Com essa finalidade, o autor demonstrou que dado um número inteiro k não divisível por um número primo p , os elementos da sequência $k, 2k, 3k, \dots, (p-1)k$ são congruos mod p , a menos da ordem, aos números $1, 2, \dots, p-1$, ou seja, aos elementos de S e, $\left(\frac{k}{p}\right)$ é a

característica quadrática dessa última sequência. É importante ressaltar que, em relação às sequências de Legendre essas últimas são distintas apenas no último elemento e, portanto, essa parte da demonstração é idêntica à primeira etapa da demonstração de Legendre.

Considerando q um número primo ímpar distinto de p e a sequência S , uma nova sequência $S_1 = \{1, 2, 3, \dots, (p-1), p, p+1, \dots, qp-1\}$ foi construída e, a partir dela, foi criada uma nova sequência $\lambda_1 p + 1, \lambda_2 p + 2, \lambda_3 p + 3, \dots, p, (\lambda_1 + 1)p + 1, (\lambda_2 + 1)p + 2, (\lambda_3 + 1)p + 3, \dots, 2p, \dots$, que foi gerada pelo acréscimo de $\lambda_1 p$ ao primeiro elemento de S_1 em relação ao mod p , de $\lambda_2 p$ ao elemento congruo a 2 mod p etc., onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ são números inteiros. Em seguida, o autor substituiu os elementos dessa sequência pelos seus resíduos em relação ao mod pq , menores do que pq para concluir que essa sequência possui os mesmos elementos de S_1 , a menos da ordem. O objetivo foi atingido quando as novas sequências construídas continham primeiramente, os $(p-1)$ números divisíveis por q , seguidos de p números congruos a p mod q , depois por p números congruos a $2p$ mod q e assim sucessivamente, até que finalmente, os p números congruos a $(q-1)p$ mod q fossem construídos. Assim, ao substituir esses números pelos seus resíduos positivos em relação ao mod pq e menores do que pq , Zolotareff mostrou que, uma vez permutados seus elementos, essas sequências terão os mesmos elementos de S_1 e eles são, a menos da ordem, congruos mod p aos elementos de S .

Em seguida, o autor estabeleceu uma correspondência entre S_1 e as demais sequências formadas por transposições pares e ímpares dos elementos de S_1 e utilizou o resultado anterior, considerando $k = q$. Portanto, ele deduziu que o resíduo quadrático dos elementos de S_1 é igual $\left(\frac{q}{p}\right)$.

Deixando fixos alguns elementos de S_1 e permutando os demais por meio de transposições ímpares e pares (cujo caráter quadrático do arranjo é $+1$ ou -1 , mediante a paridade da permutação), Zolotareff mostrou que os seus elementos, a menos da ordem, são iguais e que tais sequências possuíam o caráter quadrático igual a $\left(\frac{p}{q}\right) (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$. Em virtude desses resultados, finalmente ele obteve o que era esperado: $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$ (ZOLOTAREFF, 1872, p. 354-362).

2.2.7.8.4 Categoria 3: Demonstração da lei de reciprocidade com fundamentos na teoria de ciclotomia de Gauss: textos de Legendre (1830) e de Eisenstein (1844)

Os estudos de Legendre apresentados na quinta parte do Volume II (1830) sobre a lei de ciclotomia nos dizem que, dado um número primo ímpar n , se a equação $x^n - 1 = 0$ possui apenas a unidade como raiz real, todas as raízes imaginárias são os $n - 1$ valores: $x = r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}$, donde $r = \cos \frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$ e k é um número qualquer não múltiplo de n .

Essas raízes também serão raízes da equação $X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$ e, em geral, toda raiz da equação $X = 0$ é representada por r^α , onde α não é zero e nem múltiplo de n e r^α é denotada por Legendre como (α) .

Fundamentado nessa teoria e nas sugestões de Jacobi de 1827, Legendre demonstrou a lei de reciprocidade e, segundo Lebesgue (1847), ela é uma simplificação da sexta demonstração de Gauss de 1818, da demonstração de Cauchy, publicada no Boletim de Férussac em 1829, e da de Eisenstein, publicada no *Jornal de Crelle* em 1844. O princípio de todas essas demonstrações é o desenvolvimento da soma $\sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p}\right) x^i$ elevada à potência q , onde cada um dos referidos autores utilizaram conceitos diferenciados para x : Gauss supôs que x é uma quantidade arbitrária, Cauchy supôs $x^p = 1$ e x é imaginário e Eisenstein, que $x^p = 1$ e $x \neq 1$ (LEBESGUE, 1847, p. 457-8).

A demonstração de Legendre foi essencialmente concebida pelo esboço da demonstração de Jacobi exposto na carta escrita a Legendre em 5 de agosto de 1827 e nos estudos desenvolvidos na quinta parte sobre a resolução a equação indeterminada $g^m + 1 = \mathcal{M}(n)$ (LEGENDRE, Vol. II, p. 174-5).

Na referida carta, Jacobi comunicou a Legendre sobre uma demonstração da lei de reciprocidade com base nas raízes imaginárias de $X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, onde n é um número primo ímpar:

[...]De fato, partindo da nova teoria sobre a divisão da circunferência proposta pelo Sr. Gauss na oitava seção de *Disquisitiones Arithmeticae*, descobri um método que me levou aos teoremas fundamentais sobre a teoria de resíduos quadráticos, cúbicos, bi quadrados e mesmo sobre resíduos de potências maiores. Para dar uma

ideia sucinta, transcrevo aqui a demonstração do teorema fundamental relativa aos resíduos quadráticos com base nesses novos princípios.

Sejam p um número primo ímpar, x a raiz da equação $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$ e g uma raiz

primitiva da congruência $g^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Então $x^g - x^{g^2} + x^{g^4} + \dots -$

$x^{g^{p-2}} = + \sqrt[p-1]{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$. Em geral temos que $x^q - x^{qg} + x^{qg^2} - x^{qg^4} + \dots -$

$x^{qg^{p-2}}$ é igual a $+ \sqrt[p-1]{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$ ou igual a $- \sqrt[p-1]{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$, conforme g seja resíduo quadrático ou não resíduo quadrático de p .

Mas como q também é um número primo, desprezando-se os múltiplos de q , temos

que $x^g - x^{g^2} + x^{g^4} + \dots - x^{g^{p-2}} = (x^g - x^{g^2} + x^{g^4} + \dots - x^{g^{p-2}})^q =$

$(-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \cdot p^{\frac{q-1}{2}} \sqrt[p-1]{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$. Portanto, q é resíduo ou não resíduo quadrático de

p , conforme $(-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \cdot p^{\frac{q-1}{2}}$ dividido por q deixa restos $+1$ ou -1 , o que é precisamente, a lei de reciprocidade, ou de acordo com o Sr. Gauss, o Teorema Fundamental dos resíduos quadráticos. (JACOBI, 1998, p. 394, tradução nossa.)

Para um melhor entendimento da demonstração, faremos um paralelo com os trechos da carta de Jacobi que estão divididos em três partes, sendo que cada parte está diretamente relacionada aos artigos 679 a 681 desenvolvidos por Legendre no parágrafo final da sexta parte do volume II de *Teoria dos Números*. Sendo assim, o primeiro trecho da carta se refere ao conteúdo desenvolvido no artigo 679, o segundo, se refere ao teor do artigo 680 e o terceiro, ao conteúdo do artigo 681, que contém o enunciado e a conclusão da lei de reciprocidade.

Posto isto, segue a primeira demonstração desenvolvida por Legendre no artigo 679:

Seja p ou $2m+1$ um número primo qualquer. Seja g uma das raízes primitivas que corresponde a esse número de maneira que tenhamos $g^m + 1 = \mathcal{M}(p)$. Vimos no art. 509 que as $2m$ raízes da

equação $X = 0$ ou $X = \frac{x^p - 1}{x - 1}$ podem ser representadas pela sequência $(1), (g),$

$(g^2), (g^3), \dots, (g^{2m-1})$, onde cada termo (α) é a expressão de r^α , onde r é uma raiz imaginária qualquer da equação $x^p - 1 = 0$. Seja y a soma dos termos de posição par e z a soma dos termos de posição ímpar, de maneira que tenhamos

$y = (1) + (g^2) + (g^4) + (g^6) + \dots + (g^{2m-2})$
 $z = (g) + (g^3) + (g^5) + (g^7) + \dots + (g^{2m-1}).$

Encontramos no art. citado duas fórmulas para determinar y e z : uma supondo p da forma $4i + 1$; outra supondo p da forma $4i + 3$. Essas duas fórmulas se aplicam facilmente aos dois casos em que lhes é dada a seguinte forma:

$$y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{p-1}{p(-1)^2} \right]} \text{ e } z = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{p-1}{p(-1)^2} \right]}.$$

O duplo sinal que depende da raiz r pode ser tomado aleatoriamente entre as raízes da equação $X = 0$. Mas, essa ambiguidade não exerce nenhuma influência no resultado que acabamos de expor.

Denominemos P a diferença $y - z$ assim expressa $P = (1) - (g) + (g^2) - (g^3) + \dots +$

$$(g^{2m-2}) - (g^{2m-1}), \text{ e teremos } P = \pm \sqrt{\left[\frac{p-1}{p(-1)^2} \right]}. \text{ (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p.}$$

391-2, tradução nossa.)

Essa primeira parte da demonstração, exposta no artigo 679, se relaciona diretamente ao primeiro trecho da carta de Jacobi no que diz respeito ao texto:

Sejam p um número primo ímpar, x a raiz da equação $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$ e g uma raiz

primitiva da congruência $g^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Então $x^g - x^{g^2} + x^{g^3} + \dots -$

$x^{g^{p-2}} = + \sqrt{\left[\frac{p-1}{(-1)^2 p} \right]}$. Em geral temos que $x^g - x^{g^2} + x^{g^3} - x^{g^4} + \dots -$

$x^{g^{p-2}}$ é igual a $+ \sqrt{\left[\frac{p-1}{(-1)^2 p} \right]}$ ou igual a $- \sqrt{\left[\frac{p-1}{(-1)^2 p} \right]}$, conforme g seja resíduo quadrático ou não resíduo quadrático de p . (JACOBI, 1998, p. 394, tradução nossa.)

É importante observar que Legendre não explicitou alguns conhecimentos desenvolvidos no artigo 679 que se relacionam ao que Jacobi escreveu no primeiro trecho de sua carta. Portanto para essa parte, desenvolveremos os conteúdos que não se encontram muito bem explicitados no referido artigo. Já para os dois últimos trechos da carta, isso não será mais necessário, uma vez que os artigos 680 e 681 estão muito bem estruturados. No artigo 679, Legendre utilizou seus estudos desenvolvidos na quinta parte sobre a resolução da equação indeterminada $g^m + 1 = \mathcal{M}(n)$, onde o segundo membro designa um múltiplo de n , e as $m - 1$ raízes dessa equação são por hipótese, positivas, menores do que n e pertencentes à sequência dos números naturais $1, 2, 3, \dots, m - 1$. Além disso, para Legendre, é sempre possível encontrar um número g cujas potências sucessivas são as raízes da mesma equação, de maneira que a sequência $g, g^2, g^3, g^4, \dots, g^{m-1}$, ou a sequência $1, g, g^2, \dots, g^{m-2}$, desprezando-se os múltiplos de n , contêm, a menos da ordem, os mesmos elementos da sequência $1, 2, 3, \dots, m - 1$.

A expressão $(m : g^\lambda)$ é a notação de Legendre para a soma das m raízes que compõem o período, onde g^λ é o primeiro termo, e assim são formados os sub-períodos:

$$\begin{aligned}(m : g) &= (g) + (g^{1+k}) + (g^{1+2k}) + \dots + (g^{1+mk-k}) \\(m : g^2) &= (g^2) + (g^{2+k}) + (g^{2+2k}) + \dots + (g^{2+mk-k}) \\(m : g^3) &= (g^3) + (g^{3+k}) + (g^{3+2k}) + \dots + (g^{3+mk-k}) \\(m : g^k) &= (g^k) + (g^{2k}) + (g^{3k}) + \dots + (g^{mk}).\end{aligned}$$

Legendre mostrou que os k períodos, compostos cada um de m termos, incluíam todas as raízes da equação $X = 0$, uma vez que são neles que são encontrados todos os termos da sequência $(g), (g^2), (g^3), \dots, (g^{n-1})$. Assim, ele deduziu que uma decomposição semelhante sucederá a todos os demais valores de m e k cujo produto mk é igual a $n - 1$ (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p.174-6).

Esses conhecimentos exerceram um importante papel no desenvolvimento do artigo 679: para determinar as duas raízes y e z da equação $g^m + 1 = \mathcal{M}(n)$, Legendre utilizou o artigo 509 (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p. 184), para o caso em que n é um número primo $p = 2m + 1$ e $k = 2$. Dessa feita, essas raízes são os subperíodos $(m : 1)$ e $(m : g)$ do período $(2m : 1)$ de posição par, que por sua vez são expressos, respectivamente, por $(m : 1) = (1) + (g^2) + (g^4) + (g^6) + \dots + (g^{2m-2})$ e $(m : g) = (g) + (g^3) + (g^5) + (g^7) + \dots + (g^{2m-1})$.

Portanto, $y + z = -1$.

Do resultado denominado por Legendre de Teorema Fundamental⁷⁹, é obtido o produto $yz = (m : 1 + g) + (m : 1 + g^3) + (m : 1 + g^5) + (m : 1 + g^7) + \dots + (m : 1 + g^{2m-1})$. Como todos os períodos da forma $(m : \alpha)$ se reduzem aos dois períodos $(m : 1)$ e $(m : g)$, Legendre acrescentou a esses dois a expressão $(m : 0)$ que propriamente não é um período, mas cujo valor é igual a m . De onde, pelo Teorema Fundamental, $A + A' + A'' = m$, uma vez que m é a quantidade dos termos $(m : 1 + g), (m : 1 + g^3), (m : 1 + g^5), (m : 1 + g^7), \dots, (m : 1 + g^{2m-1})$. Disso resultou que o produto yz é igual à equação $yz = A(m : 0) + A'(m : 1) + A''(m : g) = Am + A'y + A''z$. Como o número de períodos no produto yz é m , então, a soma dos coeficientes $A + A' + A'' = m$, onde esses coeficientes são inteiros positivos ou

⁷⁹ Teorema Fundamental. “Sejam $(m : \alpha), (m : \beta)$ dois períodos semelhantes ou com um mesmo número de termos, iguais ou não. O produto desses dois períodos sendo denotado por Π , teremos, fazendo $k = \frac{n-1}{m}$ e $h = g^k$, então $\Pi = (m : \alpha + \beta) + (m : \alpha h + \beta) + (m : \alpha h^2 + \beta) \dots + (m : \alpha h^{m-1} + \beta)$, quer dizer, que o produto Π será igual à soma dos períodos semelhantes, que contém os termos $(\alpha + \beta), (\alpha h + \beta), (\alpha h^2 + \beta), \dots, (\alpha h^{m-1} + \beta)$ ”. (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p. 180, tradução nossa.)

zero. Como o produto yz é comutativo, então, $A' = A''$. Portanto, $yz = Am + A'(y + z) = Am + A'(-1) = Am - A'$ e $A + 2A' = m$. Assim, os valores de yz e A' dependem da paridade de m .

Legendre, então, analisou os casos em que m é par e quando m é ímpar. Se m é ímpar, como $g^m + 1 = \mathcal{M}(p)$, ou seja, $g^m = -1$, pela natureza do número g , necessariamente, existe um único termo nulo na sequência $1 + g, 1 + g^3, 1 + g^5, \dots, 1 + g^{2m-1}$. Portanto, $A = 1$, $A' = \frac{1}{2}(m - 1)$ e $yz = \frac{1}{2}(m + 1)$. Se m é par, então, nenhum elemento é igual a zero na sequência acima e, assim, $A = 0$, $A' = \frac{1}{2}m$ e $yz = -\frac{1}{2}m$.

Desses resultados foi obtido que se m é ímpar ou se p é da forma $2m + 1 = 4i + 3$, y e z são raízes da equação $y^2 + y + \frac{1}{2}(m + 1) = 0$ e se m é par ou se p é da forma $4i + 1$, y e z são raízes da equação $y^2 + y - \frac{1}{2}(m + 1) = 0$.

Portanto, se p é da forma $4i + 3$ ou da forma $4i + 1$, y e z podem ser determinados em ambos os casos pelas fórmulas $y = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{-p} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p(-1)^{\frac{p-1}{2}}}$ e $z = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{p(-1)^{\frac{p-1}{2}}}$, onde o sinal duplo $\pm (\mp)$ depende da raiz da equação $X = 0$.

A segunda parte da demonstração se encontra no artigo 680:

Novamente seja q um número primo qualquer, diferente de p e suponhamos que queiramos elevar o polinômio P à potência q . Essa potência conterá, primeiramente, as potências q dos diferentes termos do polinômio P tomados separadamente. E como a potência q do termo (α) ou r^α é $r^{q\alpha}$ ou $q\alpha$, teremos uma primeira parte $Q = (q) - (qg) + (qg^2) - (qg^3) + \dots + (qg^{2m-2}) - (qg^{2m-1})$. Em seguida ela conterá um número grande de produtos parciais que serão todos da forma qAr^x , onde A é um número inteiro e x um expoente também inteiro que poderá ser suposto menor do que p , uma vez que $r^p = 1$. Designemos por $\Sigma(qAr^x)$ a soma de todos esses termos, tanto positivos quanto negativos e teremos a equação $P^q = Q + \Sigma(qAr^x)$. Novamente, qualquer que seja o número primo q distinto de p , necessariamente teremos a equação $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ ou $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$. No primeiro caso, q seria o que chamamos de *resíduo quadrado de p* e poderíamos supor $q = g^{2n}$. No segundo caso, q seria um *não resíduo* e teríamos $q = g^{2n-1}$, valores encontrados quando

desprezamos os múltiplos de p . (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p. 392, tradução nossa.)

Essa parte foi muito bem desenvolvida por Legendre e o texto corresponde às sugestões apresentadas na carta de Jacobi, no que se refere ao trecho “Mas como q também é um número primo, desprezando-se os múltiplos de q , temos que $x^g - x^{g^2} + x^{g^3} + \dots - x^{g^{p-2}} =$

$(x^g - x^{g^2} + x^{g^3} + \dots - x^{g^{p-2}})^q = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \cdot \frac{q-1}{p-2} \sqrt{\frac{p-1}{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}}$ ”, conforme Jacobi (1998, p. 394, tradução nossa).

A terceira parte da demonstração de Legendre é encontrada no artigo 681:

Seja 1º $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ ou $q = g^{2n}$, onde o expoente $2n$ pertence à sequência 0, 2, 4, 6 ...

$2m - 2$. Teremos $Q = (g^{2n}) - (g^{2n+1}) + (g^{2n+2}) + \dots - (g^{2m-1}) + (1) - (g) + (g^2) + \dots - (g^{2m-1})$, quantidade cujos termos formam uma sequência circular onde poderemos tomar (1) como primeiro termo que se reduzirá assim a $(1) - (g) + (g^2) + \dots - (g^{2m-2})$ de maneira que tenhamos $Q = P$.

2º Seja 1º $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ ou $q = g^{2n-1}$. Teremos $Q = (g^{2n-1}) - (g^{2n}) + (g^{2n+1}) + \dots + (g^{2m-1}) - (1) + (g) - (g^2) + \dots - (g^{2m-2})$ ou $Q = -P$. Portanto nos dois caso temos que $Q = \left(\frac{q}{p}\right)P$, que fornece a equação geral $P^q = \left(\frac{q}{p}\right)P + \sum (qAr^x)$ ou $P^{q-1} -$

$\left(\frac{q}{p}\right) = q \frac{\sum(Ar^x)}{P}$. Substituindo o valor de P no primeiro membro temos que

$\frac{q-1}{p-2} (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} - \left(\frac{q}{p}\right)$, quantidade sempre igual a um número inteiro. Quanto

ao segundo membro $q \frac{\sum(Ar^x)}{P}$, ele também se reduz a um número inteiro. E como

o irracional $P = \pm \sqrt[p]{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}$ não é divisível por q , em geral é necessário que

$\frac{\sum(Ar^x)}{P}$ se reduza a um inteiro A' , de maneira que tenhamos $\frac{q-1}{p-2} (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} -$

$\left(\frac{q}{p}\right) = q A'$. Suprimindo em ambos os membros os múltiplos de q , o que

reduzirá em $\frac{q-1}{p-2}$ à expressão $\left(\frac{p}{q}\right)$, finalmente teremos a equação

$\frac{q-1}{p-2} (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} = \left(\frac{q}{p}\right)$, que é a lei da reciprocidade entre os dois números

primos p e q . (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p. 392-3, tradução nossa.)

Essa parte corresponde aos desdobramentos do último trecho da carta de Jacobi no que se refere ao texto: “Portanto, q é resíduo ou não resíduo quadrático de p , conforme

$(-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \cdot p^{\frac{q-1}{2}}$ dividido por q deixa restos $+1$ ou -1 , o que é precisamente, a lei de reciprocidade, ou de acordo com o Sr. Gauss, o Teorema Fundamental dos resíduos quadráticos” (JACOBI, 1998, p. 394, tradução nossa).

Segundo Lebesgue (1847), Eisenstein apresentou uma demonstração da lei de reciprocidade que foi publicada no volume XXVII do *Jornal de Crelle* em 1844, com, praticamente, os mesmos argumentos em somas finitas da demonstração de Legendre, ou melhor, de Jacobi-Legendre. Essa demonstração será aqui apresentada de uma forma sintética.

A demonstração de Eisenstein *apud* Lebesgue (1847) envolveu o desenvolvimento da soma $S = \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p}\right) x^i$ elevada à potência q , onde p e q são números primos ímpares distintos e o símbolo $\left(\frac{i}{p}\right)$ representa $+1$ se i é resíduo quadrático de um número primo ímpar positivo p e, -1 se i não é resíduo quadrático de p .

Inicialmente, o autor mostrou que $S^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$ é divisível por $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1} = \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p}\right) x^i$. Como $x^p = 1$ então, ele deduziu que $S^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p = 0$. Em seguida, com o objetivo de encontrar uma identidade que o conduzisse à lei de reciprocidade, ele definiu a soma $S_q = \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p}\right) x^{qi} = \left\{ \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p}\right) x^i \right\}^q$ e, logo em seguida, deduziu a expressão

$$(1) S_q = \left(\frac{q}{p}\right) S.$$

Da identidade $S^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$, segue que $S = \left\{ p(-1)^{\frac{p-1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$ e, assim, $S^{q-1} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}}$, donde, $SS^q = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}}$.

Por outro lado, de (1) ele deduziu que $SS_q = S\left(\frac{q}{p}\right)S = S^2 \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \left(\frac{q}{p}\right)$.

Logo, $S(S^q - S_q) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \left\{ (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} - \left(\frac{q}{p}\right) \right\}$.

Realizando as devidas substituições, o autor expôs que a expressão $S^q - S_q$ poderia ser reduzida a uma soma de termos do tipo qAx^i , onde A é um inteiro e q é um número primo ímpar.

Para abreviar, Eisenstein supôs $S(S^q - S_q) = m$ e mostrou que o número primo q divide m e $p^{\frac{q-1}{2}} - \left(\frac{p}{q}\right)$ e, por conseguinte, q é divisor de $\left(\frac{q}{p}\right) - (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)$.

Porém, isso somente ocorre quando $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)$, que é o grande final da demonstração da lei de reciprocidade.

As variadas demonstrações da lei de reciprocidade mostram que essa proposição instigou a curiosidade de matemáticos de todos os tempos.

Posto isto, duas questões se impõem:

1ª Dado um número primo ímpar p , quais são os números a não divisíveis por p que são restos ou resíduos quadráticos em relação ao módulo p ?

2ª Dado um número a , quais são os números primos p dos quais a é um resto quadrático mod p ?

A primeira questão pode ser respondida considerando $p = 2$ e p igual a um número primo ímpar.

Se p é igual a 2, então, todo número a inteiro ímpar é resto quadrático mod 2 e assim, $x \equiv 1 \pmod{2}$ é a solução da congruência $x^2 \equiv a \pmod{2}$.

Se p é ímpar, a condição necessária e suficiente para que um número inteiro a não divisível por p seja resto quadrático é, pelo Pequeno Teorema de Fermat, que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ e sendo assim a congruência $x^2 \equiv a \pmod{p}$ possui duas soluções de módulos iguais e de sinais contrários $\pmod{p}$.

A resposta ao segundo problema é dada pela lei de reciprocidade quadrática, que diz que um número a é resíduo quadrático de p quando $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$.

2.2.7.9 Teoria dos Números (1830): Apêndice

O Apêndice se encontra no final da Sexta parte do Volume II (LEGENDRE, 1830, p. 395-463) e é constituído de duas partes, respectivamente intituladas, Seção I “Novos métodos para a resolução aproximada de equações numéricas” (p. 395-430) e Seção II “Algumas equações com a propriedade que uma vez conhecida uma raiz, todas as demais são racionalmente determinadas” (p. 431-463).

2.2.7.9.1 Teoria dos Números (1830): Apêndice, Seção I

A Seção I é a reprodução do Capítulo III, “Novos métodos para a resolução aproximada de equações numéricas”, do primeiro Suplemento (LEGENDRE, 1816, p. 28-62) que fornece um método para encontrar as raízes reais e imaginárias da equação $x^n \pm A_1 x^{n-1} \pm A_2 x^{n-2} \pm A_3 x^{n-3} \pm \dots \pm A_n = 0$, sem que a grandeza e o número de raízes sejam preliminarmente conhecidos, como foi anteriormente retratado no presente trabalho.

Para determinar as raízes reais, Legendre definiu a função *omale* de x , denotada por ele $\varphi(x)$, como toda função que tem a propriedade de ser sempre crescente ou sempre decrescente à medida que x aumente no sentido positivo do eixo x , ou seja, de $x = 0$ até $x = \infty$. Depois, ele considerou apenas as funções *omales* que permaneceram constantemente positivas para todo valor de x , nesse intervalo. Primeiramente, ele atentou para as funções que são crescentes e que, ao mesmo tempo, sejam côncavas perto do eixo nesse intervalo. Assim, os zeros de uma curva supostamente contínua cuja equação é $y = \varphi(x) =$

$\frac{ax^{n-k} + bx^{n-k-1} + cx^{n-k-2} + \text{etc.}}{1 + \frac{f}{x} + \frac{g}{x^2} + \frac{h}{x^3} + \text{etc.}}$ foram determinados, onde todos os coeficientes são positivos

e os dois polinômios não podem ser completos, sem que a mesma potência de x se encontre simultaneamente nos dois membros. Portanto, foi suficiente resolver a equação $x^n = \varphi(x)$.

Posto isso, uma vez determinados os zeros de $\varphi(x)$, já que ela é contínua, dado um número real c entre $\varphi(0)$ e $\varphi(\infty)$, a equação $c = \varphi(x)$ sempre terá uma raiz positiva, mas, ela poderá ter apenas uma única raiz e se c não estiver entre os limites $\varphi(0)$ e $\varphi(\infty)$, a equação $c = \varphi(x)$ não terá nenhuma raiz positiva. Esse é o primeiro método para encontrar a maior raiz positiva r da equação proposta, supondo que suas raízes são distintas. Após dividir o primeiro membro da equação primitiva por $x - r$, o mesmo procedimento foi realizado para determinar as demais raízes ao resolver a equação $x^{n-1} = \psi(x)$, onde $\psi(x)$ é uma função *omale* de x . A determinação da menor raiz foi realizada pela intersecção de uma reta com a curva $y = \varphi(x)$ e, depois de conhecida essa raiz, as demais foram determinadas não pela intersecção de curvas traçadas, mas por elementos do cálculo diferencial e integral aplicados às funções $1 + \varphi(x) = \psi(x)$, $1 + \varphi_1(x) = \psi_1(x)$, etc., resultantes das divisões sucessivas pelas raízes $r, r', \dots$

As raízes imaginárias foram determinadas pela resolução da equação $F(x) = x^n \pm A_1x^{n-1} \pm A_2x^{n-2} \pm A_3x^{n-3} \pm \dots \pm A_n = 0$. Em seguida, Legendre substituiu um valor qualquer $x = k$ no lugar de x , para tornar o primeiro membro $F(k)$ uma quantidade positiva. Em seguida, ele utilizou o mesmo procedimento anterior, após dividir a equação proposta pelo produto dos fatores $1 + x, 2 + x, \dots, n + x$ em $F(x)$ para obter $F(x) = 1 + \varphi(x) = \psi(x)$ ou $1 + \int \frac{A}{a+x} = \int \frac{B}{b+x}$. Supondo $x = r(\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta)$, onde $\cos \theta$ é positivo, à medida que duas raízes imaginárias são encontradas, que são os fatores reais do segundo grau que satisfazem à equação proposta de grau n , são construídas diversas equações de grau $n - 2t$ que são sucessivamente solucionadas para determinar as demais raízes.

Novas fórmulas foram apresentadas para corrigir os valores obtidos por uma primeira aproximação e, uma vez conhecidas as duas raízes imaginárias que formam o fator real do segundo grau que satisfaz a equação proposta de grau n , Legendre desenvolveu uma equação de grau $n - 2$ que contém as demais raízes (LEGENDRE, 1830, p. 395-430).

2.2.7.9.2 Teoria dos Números (1830): Apêndice, Seção II

A segunda parte do Apêndice: Seção II, “Algumas equações com a propriedade que uma vez conhecida uma raiz, todas as demais são racionalmente determinadas”, são estudos até então inéditos, pois não são encontrados em nenhum trabalho anterior de Legendre em Teoria dos Números. Essa seção contém os estudos de Abel do artigo “Sobre as equações algébricas onde foi demonstrada a impossibilidade de resolução da equação geral do quinto grau” *qpu*d Homboe (1839), que foi publicado em Chistiania em 1824, em que o autor abordou sobre várias classes de equações que podem ser resolvidas algebricamente. Em outro trabalho, impresso no *Jornal de Crelle*, ano 1829, nº 8, Abel complementou esses estudos e lançou as bases para formar diversas classes de equações solúveis algebricamente ou decompostas (se o grau não for um número primo) em equações de um grau inferior. Resultou que as equações não pertencentes a essas categorias são identificadas como não solúveis e, nesse caso, não existem fórmulas gerais de resolução de equações de grau maior do que quatro.⁸⁰

Finalizando a obra de 1830, Legendre discorreu sobre uma lei muito simples, que estabelecia uma relação entre dois termos consecutivos da série das raízes de uma equação, em que, conhecida uma raiz x , a outra raiz x' é racionalmente determinada pela expressão

$$x' = \frac{a + bx}{1 + cx}, \text{ onde } a, b, c \text{ são coeficientes conhecidos. Segundo Legendre (1830), essa é}$$

uma propriedade geral para todas as raízes e para se obter a equação original, é necessário

substituir $\frac{a + bx}{1 + cx}$ no lugar de x . A lei que permitiu deduzir a raiz x' da raiz x permitia

semelhantemente deduzir uma terceira raiz x'' de x' , uma quarta x''' de x'' , e assim por

diante, por meio das sucessivas equações: $x' = \frac{a + bx}{1 + cx}$, $x'' = \frac{a + bx'}{1 + cx'}$, $x''' = \frac{a + bx''}{1 + cx''}$,

etc. Portanto, se a equação proposta for de grau n , é necessário que a $n^{\text{ésima}}$ das raízes x' , x'' , x''' , ... designada por $x^{(n)}$ seja igual à raiz primitiva x . Considerando x^k um termo qualquer da

⁸⁰ Maiores referências em Holmboe (1839).

sequência $x', x'', x''', \dots, x^{(n-1)}$, a condição geral para que a sequência das raízes seja reversível, é que o termo seguinte x^{k+1} seja expresso analiticamente por $x^{k+1} = \frac{a + bx^k}{1 + cx^k}$.

O método foi aplicado nas resoluções de equações do terceiro, do quarto e do quinto graus. No primeiro caso, foi desenvolvida uma fórmula geral para a resolução da equação $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$. Legendre mostrou que há uma infinidade de equações do terceiro grau na qual uma raiz x' se deduz de outra raiz x , pela fórmula $x' = \frac{a + bx}{1 + cx}$, onde os três coeficientes a, b e c satisfazem à condição $1 + b + b^2 + ac = 0$. Assim, a terceira raiz dessa equação, x'' , foi expressa por $x'' = \frac{a + bx'}{1 + cx'} = \frac{a - x}{cx - b}$.

Como ilustração do método, Legendre (1830, p. 437), apresentou no artigo 51 o caso em que $a = 3, b = -2, c = -1$. A equação encontrada foi $0 = x^3 - 9x + 9 + \alpha(x^2 - 3x + 2)$, a qual resultou numa infinidade de equações particulares, tais como

$$0 = x^3 - 9x + 9$$

$$0 = x^3 - 3x^2 + 3$$

$$0 = x^3 + 3x^2 - 18x + 15, \text{ etc.}$$

Legendre expôs que tais equações gozam da mesma propriedade e, em virtude desse resultado, as raízes x' e x'' podem ser determinadas racionalmente pela raiz x por meio das fórmulas $x' = \frac{3-2x}{1-x}, x'' = \frac{3-x}{x+2}$. Uma vez que a equação do terceiro grau contém as três indeterminadas c, b, α , ela foi reduzida a $0 = x^3 - px^2 + qx - r$ e os valores de α, b e c foram determinados pelas equações $\frac{\alpha}{c} = p, \frac{3a}{c} - (1-b)\frac{\alpha}{c^2} = q$ e $\frac{1-b^3}{c^3} - \frac{b\alpha}{c^3} = r$. Assim, afirma o autor, “essa fórmula com três indeterminadas, pode ser aplicada a qualquer equação do terceiro grau” (LEGENDRE, 1830, p. 438, tradução nossa).

No segundo caso, dada uma equação do quarto grau, foi estabelecida uma equação condicionante, $1 + b + b^2 + ac = 0$, de onde resultou que a equação ficou reduzida a $0 = c^4x^4 -$

$\alpha c^3x^3 + \beta c^2x^2 - \gamma cx + \delta$ e, uma raiz designada por x , bem como as outras três x' , x'' e x''' foram dadas pelas fórmulas $x' = \frac{a + bx}{1 + cx}$, $x'' = \frac{a + bx'}{1 + cx'} = \frac{2a + (b-1)x}{1 - b + 2cx}$ e $x''' = \frac{x - a}{b - cx}$.

Para encontrar raízes de equações do quinto grau, Legendre apresentou um método para a solução de equações cujos coeficientes de duas indeterminadas são números reais. Esse método fornece uma fórmula para expressar as cinco raízes da equação particular $0 = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 - \frac{1}{A}(-5x^3 - x^2 - 25x + 1)$. Legendre mostrou que as suas cinco raízes, denotadas por x , x' , x'' , x''' , x^{IV} , foram determinadas pelas equações:

$$x' = \frac{x - n}{1 + x}, x'' = \frac{x' - n}{1 + x'}, x''' = \frac{x'' - n}{1 + x''}, x^{IV} = \frac{x''' - n}{1 + x'''} \text{ e } x^V = \frac{x^{IV} - n}{1 + x^{IV}},$$

em que $n = 5 - 2\sqrt{5} = 0,5278640450004206072$ (LEGENDRE, 1830, p. 443-9).

O impacto causado pelas obras de Legendre em Teoria dos Números na comunidade matemática francesa da época e as contribuições do autor à ciência serão evidenciados no próximo capítulo por meio das opiniões de seus pares e as contribuições do autor à ciência antes e depois da publicação de sua obra *Teoria dos Números* (1830), livro o qual o autor consagrou mais da metade de sua vida no intuito de aperfeiçoá-lo e que tornou notória a honra que lhe é devida como o primeiro tratado de uma Aritmética superior que tanto inspirou a outros matemáticos para o avanço dessa ciência no século XX.

CAPÍTULO 3

A RECEPTIVIDADE PELA COMUNIDADE MATEMÁTICA DOS TRABALHOS DE LEGENDRE EM TEORIA DOS NÚMEROS

3.1 TEORIA DOS NÚMEROS (ENSAIO, 1798; ENSAIO, 1808; TEORIA DOS NÚMEROS, 1830), UM LIVRO DIDÁTICO? UM TRATADO DA ARITMÉTICA SUPERIOR?

Montessus (1899) ao expor sobre os fundamentos da Aritmética moderna, explicou que sempre que novas teorias surgem, as opiniões sobre as mesmas divergem, e isso faz parte do meio científico. Segundo ele, tal processo é importante para que antigas teorias sejam divulgadas e novas teorias sejam criadas.

Neste momento, veremos qual foi o impacto causado pelos trabalhos de Legendre em Teoria dos Números na comunidade matemática em particular, do século XIX, desde seu primeiro trabalho *Estudos sobre a Análise Indeterminada* (1785) até as diferentes edições do *Ensaio sobre a Teoria dos Números* (1798, 1808, 1830), que aqui serão identificados indistintamente como ‘as obras de Legendre’, bem como se deu a sua contribuição à ciência, através das opiniões de seus pares. Vale ressaltar que a última edição do *Ensaio* (1830) foi denominada por Legendre de *Teoria dos Números*.

3.1.1 Opiniões diversas sobre as obras de Legendre

Iniciamos por Édouard Lucas que no prefácio da obra homônima de sua autoria, *Teoria dos Números* de 1891 se refere à obra de Legendre de 1830 como o primeiro tratado da Aritmética superior e que ela foi uma de suas fontes de inspiração para elaboração do seu livro.

Para Ball (2003), o livro *Teoria dos Números* (LEGENDRE, 1830) foi um livro da Álgebra clássica e pedra angular para a criação das bases para uma Aritmética superior.

Seguindo a mesma linha, Dhombres (2002) diz que o livro de Legendre é muito rico para ser considerado apenas como um livro de Aritmética, uma vez que, é totalmente fundamentado na Álgebra e ainda ressalta que a elegância e a simplicidade de suas fórmulas por si só justificariam a necessidade de uma demonstração.

Em mais de uma oportunidade, Maigre (2007), em seu trabalho sobre um estudo comparativo entre as obras de Legendre e *Disquisitiones* de Gauss, salienta que pela forma detalhada como Legendre apresentou seus estudos, a obra *Teoria dos Números* (1830) deveria ser considerada como um livro didático, uma vez que

Os prefácios das diferentes edições da obra nos ajudaram a compreender que o objetivo de Legendre era reunir tudo que existia sobre Teoria dos Números até então desenvolvida em uma grande obra didática. [...] Parece-me que o objetivo da obra foi atingido e que os esforços de Legendre para progredir a ciência foram recompensados pelas grandes descobertas de Jacobi. Por outro lado, é possível crer que apresentar resultados de seus predecessores da maneira mais compreensível possível, levou Legendre a novas descobertas. [...] *Teoria dos Números* cumpriu o seu papel didático, pela maneira que os teoremas foram apresentados e o nome do pai da lei de reciprocidade jamais será esquecido pelos seus sucessores. (MAIGRE, 2007, p. 124-6, tradução nossa.)

A análise realizada nos capítulos precedentes do presente trabalho não ratifica a opinião da autora em apreço, vez que segundo o dicionário Aurélio – Século XXI, um livro didático é reconhecido como tal pela finalidade de ensino, de doutrina ou de instrução e é um instrumento utilizado pelo professor. A obra de Legendre possui o mérito de reunir tudo o que se conhecia sobre Teoria dos Números da época e buscou aperfeiçoá-la por quase meio século de pesquisas.

No entanto, o próprio Legendre testifica que esse não era o seu objetivo ao criar a obra, conforme a parte final do prefácio⁸¹ da primeira edição da obra (1798, p. ix, x, tradução nossa):

Depois da publicação desse trabalho [1785], eu me ocupei por diversas vezes de desenvolver as idéias que ele contém, e trazer alguns aperfeiçoamentos a diferentes pontos da Teoria dos Números ou da . Minhas pesquisas sob esse olhar obtiveram algum sucesso. Eu me propus agora a publicar um resultado num trabalho particular e acreditei que eu deveria aproveitar essa ocasião para tratar a Teoria dos Números com uma maior extensão não realizada até o momento, e isso inclui o resultado das principais pesquisas de Euler e de Lagrange sobre o mesmo assunto. É por isso que eu me determinei a compor a obra que ofereço nesse

⁸¹ Prefácio que foi mantido na terceira edição de 1830.

momento ao público, a qual não é um tratado completo, mas simplesmente um ensaio para que se conheça um pouco de perto o atual estado da ciência e que talvez ela possa contribuir para avançar o seu progresso.

Concordando com esse objetivo, encontramos Taton (1958b) e Colette (1979) que afirmam que a obra de Legendre possui o mérito de ser considerada o primeiro tratado sobre a Teoria dos Números e o seu conteúdo se aproxima do que foi apresentado na obra *Disquisitiones* de Gauss.

Beaumont (1864, p. LXVIII, LXXI, tradução nossa) ainda acrescenta que

[...] essa parte da ciência efetivamente recebeu importantes contribuições após a publicação em 1830 de *Teoria dos Números* (de Legendre). Porém, se compararmos o conteúdo dessa obra a tudo que foi descoberto durante dois mil anos antes de 1785, veremos que nenhum outro cientista marcou tanto nesse ramo da Matemática como Legendre. [...] A obra de Legendre contém importantes descobertas, particularmente o teorema da lei de reciprocidade, também conhecida como lei de Legendre, que é um dos resultados mais férteis da Teoria dos Números.

Nesse elogio póstumo dedicado ao matemático francês falecido em 1833, Beaumont (1864) reconhece os esforços de um cientista que consagrou os seus últimos cinquenta anos de vida para o avanço da Teoria dos Números desde o seu primeiro trabalho, *Estudos sobre a Análise Indeterminada* de 1785 e que segundo ele, até então, esse ramo da ciência tinha andado em passos lentos nas mãos de eminentes matemáticos a exemplo de Euclides, Diofanto, Viète, Bachet, Fermat, Euler e Lagrange. Ele também reconheceu que, na época, a obra não teve muitos leitores, mas profetizou que, no futuro, ela seria reconhecida como um importante trabalho em Teoria dos Números.

Delambre (1810) em sua abordagem histórica sobre os trabalhos mais relevantes das ciências e em particular da Matemática após 1789, corrobora a opinião de Beaumont ao dizer que Fermat descobriu vários resultados em Teoria dos Números, mas não os demonstrou. Euler e Lagrange se ocuparam por algum tempo para demonstrá-los e “Legendre reuniu

importantes proposições em seu livro *Ensaio*⁸². De uma forma original, demonstrou o Teorema geral de Fermat⁸³, (DELAMBRE, 1810, p. 12, tradução nossa).

Delambre (1810) ainda ressalta que

Desde de 1785, Legendre incrementou a ciência variadas proposições importantes tanto com estudos sobre resolução de equações do segundo grau com duas indeterminadas quanto com Estudos sobre a Análise Indeterminada Teoria dos Números, e em 1798, publicou um tratado que engloba Estudos sobre a Análise Indeterminada decomposição de números em três quadrados, para chegar uma demonstração inédita da proposição de Fermat que todo número pode ser decomposto em números triangulares. (DELAMBRE, 1810, p. 91-2, tradução nossa.)

A proposição supra citada, foi redigida por Fermat na página 180 em uma das páginas das *Obras* de Diofanto, e se refere aos números que podem ser decompostos em somas de três números triangulares, de quatro quadrados, de cinco números pentagonais, de seis hexagonais e assim infinitamente. Essa proposição foi demonstrada por Legendre na segunda parte das edições do *Ensaio* de 1798, 1808, 1830 e no primeiro suplemento de 1816.

Goldstein (1999, p. 189-90, tradução nossa) ainda coloca que

Se os matemáticos franceses se interessavam pelos aspectos algébricos mais tradicionais da Teoria dos Números cujas referências passavam por Fermat, Bernoulli, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Cauchy, Hermite e Liouville, que em geral continham estudos sobre os números primos, divisores de um número, frações contínuas, equações com coeficientes racionais, mas a partir da segunda metade desse século a ciência teve um grande declínio em virtude da predominância da Matemática alemã com importantes trabalhos sobre a teoria dos corpos algébricos no período de 1870 a 1900.

Ao expor sobre o marasmo francês ante a produção de trabalhos em Teoria dos Números no final do século XIX em virtude da excelência dos trabalhos dos matemáticos alemães nesse período, Goldstein (1999) classificou os trabalhos do grupo dos matemáticos, dentre eles, os de Legendre, como os trabalhos algébricos tradicionais que mais se destacaram em Teoria dos Números até meados do século XIX.

A conturbada relação entre Legendre e Gauss sobre prioridades de descobertas, não impediu que o matemático alemão incluísse Legendre na galeria dos matemáticos que exerceram uma grande influência na Aritmética, que assim como o matemático francês, a

⁸² Primeira edição de 1798.

⁸³ Trata-se do Teorema sobre os números poligonais.

Aritmética é dicotomicamente dividida em Aritmética elementar e transcendente, uma vez que

[...] A ciência (a Aritmética transcendente) é atribuída aos modernos, na verdade, pode-se dizer que são poucos os homens mas dignos de glória imortal, Fermat, Euler, Lagrange, Legendre (e uma pequena quantidade d'outros) que abriram a entrada dessa ciência divina e descobriram a fonte inesgotável das riquezas que ela contém. Não ousou aqui enumerar as descobertas desses matemáticos, no entanto, podemos conhecê-los pelo prefácio das *Adições* de Euler e pela obra de Legendre, a qual nos referiremos mais adiante. (GAUSS, 1807, p. xij, tradução nossa.)

Em seguida, após comentar sobre o conteúdo da sua obra, a qual se dedicou por cinco anos, ele elogiou a primeira edição do *Ensaio* de Legendre de 1798, que segundo ele, não teve a oportunidade de conhecê-la antes da edição de sua obra em 1801:

[...] Nesse intervalo, surgiu uma excelente obra que rendeu grandes serviços à Aritmética transcendente (*Ensaio sobre a Teoria dos Números*, Legendre, ano VI) na qual não somente reuniu e colocou no lugar tudo que surgiu até o presente momento sobre essa ciência, mas que também acrescentou muitas outras coisas novas. Como essa obra me chegou às mãos um pouco tarde, quando a maior parte de meus *Estudos Aritméticos* já tinha sido impressa, não pude mencioná-la nos espaços apropriados onde a analogia dos conteúdos ainda me permitiriam fazer. (GAUSS, 1807, p. xiv, tradução nossa.)

Esse conjunto harmonioso de estudos em Teoria dos Números, o qual Legendre denominou de *Ensaio sobre a Teoria dos Números*, reunia as principais obras da ciência até aquele momento. Segundo Taton (1958b), a genialidade da obra de Gauss e a publicação desse tratado em 1798 incentivaram Legendre a publicar em 1808 um segundo Suplemento à primeira edição do *Ensaio*, com novos estudos sobre números poligonais, números como somas de quatro quadrados e alguns métodos para aproximação de raízes equações de grau n .

L. Maurice⁸⁴, *apud* Maigre (2007, p. 6-7; tradução nossa), observa que a obra *Teoria dos Números* de Legendre foi um marco histórico para essa ciência, pois seus estudos

⁸⁴ Contemporâneo de Legendre cujo trabalho *Sobre os trabalhos e os escritos do Sr. Legendre* de 1833 foi escrito

contemplavam praticamente tudo o que se conhecia na época, “seja pelo progresso que o autor fez pela ciência, seja pelas adições e aperfeiçoamentos que distinguem sua *Teoria* das demais edições do *Ensaio*”.

Entretanto, L. Maurice, citado por Maigre (2007), ainda aponta que o livro *Teoria dos Números* (LEGENDRE, 1830) não tinha muito leitores fora do círculo acadêmico. Contudo,

[...] aqueles que a consultarem, reconhecerão que ela não é exclusivamente consagrada à exposição das propriedades dos números. Sua obra na forma atual é um rico tesouro para quem quer se instruir nos mistérios da Análise e foi realizada por um matemático que eminentemente contribuiu para o aperfeiçoamento desse admirável instrumento do espírito humano. Uma gama de propriedades relativas às frações contínuas, à teoria de equações e ao desenvolvimento de seções angulares são expostas numa ordem satisfatória. Sem sombra de dúvida podemos afirmar que depois da célebre *Introdução* de Euler, obra alguma da Análise finita pura chamou tanto à atenção dos sábios. (L. MAURICE *apud* MAIGRE, 2007, p. 6-7, tradução nossa.)

Quando o referido autor expressou no texto acima o termo Análise, na verdade ele se referia à Análise Indeterminada. No final do texto quando disse que *Teoria dos Números* de Legendre era uma obra que chamava a atenção dos sábios, de fato, L. Maurice se referia aos estudos da famosa lei de reciprocidade que, ao longo do tempo foi (e ainda é) alvo de estudos de muitos matemáticos.

Assim, todas as opiniões anteriores são unânimes em declarar que as obras de Legendre tiveram grande influência na ciência até meados do século XIX quando decorreram sobre as inovações implementadas em Teoria dos Números por Legendre a partir do seu primeiro trabalho *Estudos sobre a Análise Indeterminada* de 1785 e pelas edições do *Ensaio* (1798, 1808, 1830).

Contrariamente à opinião de L. Maurice, Gauss não conseguiu dissimular as críticas negativas, não somente aos estudos de Legendre, bem como aos de Euler em *Disquisitiones* no que se refere à lei de reciprocidade quadrática:

O Teorema Fundamental⁸⁵ que acabamos de apresentar de uma forma muito simples e que inclui como um dos teoremas mais elegantes desse gênero, até o momento não foi demonstrado por ninguém. É de se estranhar que Euler, com o conhecimento de algumas proposições a esse respeito, não chegou facilmente a esse resultado. [...] Após Euler, Legendre se dedicou à mesma pesquisa num excelente tratado intitulado: *Estudos sobre a Análise Indeterminada* (Hist. Da Acad. de Ciências, 1785, p. 465). [...] Esse célebre autor deu uma demonstração... [...] Como ele supõe muitas coisas sem demonstração (que lhe eram convenientes, como por exemplo, na p. 520: *Vamos supor somente que, etc.*) até o presente uma parte ainda não foi demonstrada por ninguém e a outra parte somente pode, segundo a minha opinião, ser demonstrada pelo Teorema fundamental, o que nos parece que o caminho que ele [Legendre] tomou não evitou tais dificuldades. Por essas razões a nossa demonstração deveria ser considerada como a primeira. (GAUSS, 1807, p. 114-6, tradução nossa.)

Percebemos nitidamente que Gauss emitiu um julgamento de valor entre seus próprios estudos e os de seus colegas, quando declara ser dele a primazia da demonstração da lei de reciprocidade quadrática, por ela ter sido a mais completa e a mais simples de todas realizadas até aquele momento.

Segundo Aubry (1909), Legendre foi um dos fundadores da Aritmética moderna e o livro *Teoria dos Números* contribuiu para a difusão da Aritmética superior.

Contraditoriamente, ele não considera a obra como um verdadeiro tratado da Aritmética, pois na sua visão, ela não representava os avanços da ciência da época e dentre outras coisas, declarou que a obra era reconhecida mais pela suas tabelas:

[...] Apesar do seu título, a obra de Legendre não é um verdadeiro tratado. É sobretudo um agrupamento de teoremas não ligados entre si sem uma concepção e um objetivo comuns. Somente a lei de reciprocidade é objeto de uma teoria bem completa. Por outro lado, mesmo na época de sua terceira edição, ele já não estava mais no nível do progresso da ciência. Observemos também que do meu ponto de vista, Legendre começa de uma forma errada, por uma longa e cansativa exposição da teoria de frações contínuas e ele considera a Teoria dos Números como uma divisão da . No entanto, frequentemente a obra é uma referência por causa de suas tabelas e é preciso reconhecer que a obra é útil para a divulgação da Aritmética superior. Se Legendre sempre foi mais feliz em suas descobertas do que em suas

⁸⁵ Nota nossa: “Se p é um número primo da forma $4n + 1$, $+p$ será um resíduo ou não resíduo de todo o número primo que, tomado positivamente é um resíduo ou não resíduo de p . Se p é um número primo da forma $4n + 3$, $-p$ terá a mesma propriedade” (GAUSS, 1807, Artigo 131, p. 96, tradução nossa).

demonstrações, a clareza de seus textos, sua lei de reciprocidade com aplicações, seus estudos sobre formas ternárias, sobre progressões aritméticas, suas fórmulas semi empíricas sobre números primos, lhe asseguram um lugar entre os fundadores da Aritmética moderna. (AUBRY, 1909, p. 436-7, tradução nossa.)

Esses comentários fazem parte do trabalho de Aubry, “Sobre os trabalhos de Lagrange, de Legendre e de Gauss” (1909), cujo texto contém vinte páginas onde mais da metade (11 páginas) é dedicada a elogios à obra *Disquisitiones* de Gauss, duas páginas contém um resumo das obras de Lagrange escritas no período de 1766 a 1777 e cinco páginas são sobre os trabalhos de Legendre, o que expressa claramente a sua predileção pela obra do matemático alemão em detrimento das obras dos outros dois matemáticos.

Vale ressaltar que há alguns equívocos no que diz respeito ao comentário de Aubry, quando ele disse que a obra *Teoria dos Números* de Legendre contém conteúdos sem nenhuma ligação com o restante da obra, pois conforme Capítulo 2 do presente trabalho, as proposições apresentadas no trabalho de Legendre estão logicamente articuladas com o objetivo maior da obra: a demonstração da sua lei de reciprocidade quadrática.

Além disso, a crítica negativa sobre Legendre em não diferenciar a Teoria dos Números e da Análise Indeterminada conforme citação anterior de Gauss *apud* Aubry (1909, p. 436-7), também é compartilhada pelo matemático alemão.

3.2 O LEGADO

Neste momento, evidenciaremos a influência das obras de Legendre sob os aspectos: citações em outras obras e a intervenção nas obras de outros autores através de uma pequena amostragem das obras de alguns renomados autores de livros sobre Teoria dos Números.

3.2.1 História da Teoria dos Números de Leonard-Eugene Dickson (1952)

Em diversos momentos, a obra de Legendre é citada na extraordinária obra de Leonard-Eugene Dickson, *História da Teoria dos Números* (1952), como alusão aos seus estudos sobre números amigáveis de Euler do tipo $2^m(2^{m+1} + 2^k) - 1$, $2^m(1 + 2^k) - 1$, $2^{2m}(2^{2k+1} + 2^{3k} + 2^k) - 1$, o pequeno teorema de Fermat, função ϕ de Euler, raízes primitivas da unidade, congruências binomiais, somas e divisores de um número, infinitude dos números primos em progressões aritméticas (DICKSON, 1952, Vol. I, p.36, 47, 64, 114, 182, 205, 281, 415).

No segundo volume da citada obra de Dickson, encontramos referências a estudos sobre números poligonais, números figurados, sistema linear de congruências, número como somas de dois quadrados (DICKSON, 1952, Vol. II, p. 17-9, 88, 233).

No terceiro volume são citados os estudos de Legendre sobre formas quadráticas binárias (DICKSON, 1952, Vol. III, p. 1, 9-11, 17, 26, 61, 94).

Dickson não somente se refere a estudos de Legendre bem como comenta sobre alguns deles, a exemplo dos estudos sobre números que podem ser decompostos como somas de três quadrados:

Fermat afirmou que nenhum inteiro $8n + 7$ é a soma de três quadrados. [...] Legendre observou que a proposição de Fermat é verdadeira não apenas para números primos mas para todos os números ímpares, e ainda demonstrou que isso também é válido para o dobro desses números. A sua demonstração é fundamentada nos teoremas empíricos sobre os divisores quadráticos de $t^2 + cu^2$. [...] Legendre mostrou que todo número inteiro positivo que não é da forma $8n + 7$ ou $4n$ é a soma de três quadrados sem divisores em comum. (DICKSON, 1952, Vol. II, p. 261, tradução nossa.)

Comparados aos trabalhos de Fermat, Euler e Lagrange, ainda encontramos no Volume III da obra de Dickson, três páginas dedicadas aos estudos de Legendre sobre divisores de formas quadráticas:

[...] A.M. Legendre empregou o método de redução de Lagrange para reduzir formas quadráticas, mas forneceu maiores detalhes no caso em que o coeficiente médio da forma é par. [...] Legendre investigou a equivalência e redução das formas $ay^2 + 2byz - cz^2$ com determinante positivo igual a $b^2 + 4ac = A$, onde a, b, c são positivos e maiores do que $2b$. [...] Legendre utilizou a redução das formas $P = py^2 + 2qyz \pm rz^2$ dos divisores de $t^2 \pm cu^2$ para encontrar as formas lineares $4cx + a$ desses divisores. [...] A lei de reciprocidade também limita a forma dos divisores lineares. Portanto, esse trabalho foi abreviado pelo uso generalizado da lei reciprocidade. (DICKSON, 1952, Vol. III, p. 9-11, tradução nossa.)

Conforme Dickson (1952), ao utilizar a correlação entre a lei de reciprocidade e divisores primos de formas quadráticas, Legendre simplificou e expandiu resultados de Lagrange (1773), sobre a teoria geral de redução e equivalência de formas quadráticas binárias.

Importante ressaltar que é nesse trabalho de Dickson que descobrimos a existência de uma tradução alemã de *Teoria dos Números* de Legendre realizada em 1893 por H. Mauser.

3.2.2 Números primos, mistérios e recordes de Paulo Ribenboim (2001)

Paulo Ribenboim, um dos mais renomados pesquisadores brasileiros, autor de mais de 200 artigos sobre Teoria dos Números, também aponta em sua obra (RIBEMBOIM, 2001) variados estudos de Legendre.

Sobre os estudos dos números primos, Ribenboim (2001, p. 19) destaca a fórmula de Legendre $m = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{a}{p^i} \right] = \frac{a - (a_0 + a_1 + \dots + a_k)}{p - 1}$, que expressa a potência de um número primo p que divide o fatorial $a!$, e que segundo o referido autor, é “uma belíssima expressão de m em função dos termos do desenvolvimento p -ádico⁸⁶ de a : $a = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \dots + a_1 p + a_0$, onde $p^k \leq a \leq p^{k+1}$ e $0 \leq a_i \leq p - 1$, onde a_i são os algarismos de a na base p para todo $i = 0, 1, \dots, k$.

Ribenboim acrescenta ainda que em 1852, Kummer utilizou o resultado de Legendre nos estudos sobre potências de números primos que dividem o coeficiente binomial $\frac{(a+b)!}{a!b!}$, com a e $b \geq 1$ e que ambos resultados foram aplicados à Análise p -ádica, onde para cada número p , os números p -ádicos dão forma a uma extensão de corpos de números racionais descritos para a primeira vez perto Kurt Hensel em 1897.

Nos estudos sobre as fórmulas $\pi(x)$ que expressam quantos números primos existem em uma progressão aritmética, novamente Ribenboim comenta sobre os estudos de Legendre relativos ao assunto, ao afirmar que “A primeira tentativa séria do estudo da função $\pi(x)$ é devida a Legendre (1808) que utilizou o crivo de Eratóstenes para mostrar que $\pi(N) = \pi(\sqrt{N}) - 1 + \sum \mu(d)^{87} \left[\frac{N}{d} \right]$. [...] Como corolário, Legendre conjecturou em 1798, e de novo em 1808 que $\pi(x) = \frac{x}{\log x - A(x)}$, onde $\lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = 1,08366\dots$ ” (RIBENBOIM, 2001, p. 139).

Infelizmente, esse conhecido autor cometeu alguns equívocos quando, ao dissertar sobre as propriedades do símbolo de Legendre, atribuiu a notação (a/p) a Legendre e a

⁸⁶ Dado um número p o valor p -ádico de um número n é o inverso da maior potência de p que divide n .

⁸⁷ Nota nossa: Divisores de d do produto de todos os números primos p menores do que $\sqrt{N}$. Função de Mobius: $\mu(1) = 1$; se n é o produto de r , números primos distintos, então $\mu(n) = (-1)^r$; se n tem um fator quadrado, então $\mu(n) = 0$.

notação $\left(\frac{a}{p}\right)$ a Jacobi. Segundo Lemmermeyer (2000, p. 10), a primeira notação é de Jacobi, fruto de seu trabalho publicado no *Jornal de Crelle* em 1837, onde generalizou o símbolo de Legendre, em que dado um número ímpar $b = p_1 \dots p_n$ decomposto em fatores primos $p_1, \dots, p_n$ então $(a/b) = (a/p_1) \dots (a/p_n)$. A segunda notação, conforme vimos, é de Legendre e apareceu na primeira edição *do Ensaio* de 1798.

Ribenboim também afirmou de forma equivocada que Gauss é o autor da lei de reciprocidade, quando na verdade, ele foi o primeiro a dar uma demonstração completa da lei, quando apontou que “O símbolo de Legendre para um número ímpar $q \neq p$, pode ser efetuado por um algoritmo simples. Explícito e rápido. Utiliza-se somente a divisão euclidiana e é apoiado na lei de reciprocidade de Gauss: $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$ ” (RIBENBOIM, 2001, p. 31-2).

3.2.3 Leituras em Teoria dos Números de Lejeune-Dirichlet (1999)⁸⁸

Lejeune-Dirichlet inicia os estudos sobre resíduos quadráticos apresentando o símbolo $\left(\frac{m}{p}\right)$ de Legendre e após discutir as propriedades multiplicativas de resíduos de um produto qualquer de números não divisíveis por um número primo ímpar p , ele anuncia a seguinte propriedade num texto que combina as linguagens de Legendre e de Gauss:

Um produto de uma quantidade arbitrária de números não divisíveis por um número primo p é um resíduo ou não resíduo de p conforme a quantidade dos não resíduos entre os fatores é par ou ímpar. [...] Esse teorema pode ser expresso na forma de uma equação quando usamos o símbolo de Legendre⁸⁹, que tem um importante papel no que se segue. Legendre usa o símbolo $\left(\frac{m}{p}\right)$ para denotar como a unidade positiva e negativa de acordo se um número m (não divisível por p) é um resíduo ou não resíduo quadrático de p . Assim é sempre verdadeiro que

⁸⁸ Tradução inglesa do original alemão de 1863.

⁸⁹ Vide Legendre (1830, Vol. I, p. 197).

$$\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{p}{m}\right) = +1 \text{ e } m^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{m}{p}\right) \pmod{p}. \text{ [...]Esse produto pode ser expresso}$$

$$\text{por } \left(\frac{mnl\dots}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{n}{p}\right)\left(\frac{l}{p}\right)\dots \text{ E é claro que se } m \equiv n \pmod{p} \text{ então } \left(\frac{m}{p}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{p}\right). \text{ (LEJEUNE-DIRICHLET, 1999, p. 55, tradução nossa.)}$$

A partir dessas propriedades, Dirichlet apresenta as diferentes demonstrações da lei de reciprocidade quadrática.

Também encontramos no referido livro, outras referências ao símbolo de Legendre nos estudos sobre o teorema de Wilson e sobre formas quadráticas, conforme Dirichlet (1999, p. 66, 92).

3.2.4 Curso de Análise da Escola Real Politécnica de Cauchy (1821) *apud* Dhombres (2002)

O Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) foi utilizado implicitamente por Legendre no seu primeiro trabalho de 1785, mas nunca foi demonstrado por ele.

Legendre em 1798, discutiu a resolução da equação geral, $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + hx + k = 0$, reescrita como $F(x) = P + Q\sqrt{-1}$ e estabeleceu relações que traduzem a derivabilidade do polinômio em função de uma variável complexa, onde TFA é explicitado assim: “Sabemos que toda raiz imaginária de uma equação pode ser representada por $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, sendo α e β números reais. Sabemos também que o número α pode ser determinado diretamente pela equação de grau $\frac{n(n-1)}{2}$, onde n é o grau da equação proposta” (LEGENDRE, 1798, p. 161; 1830, Vol. I, p. 171).

Segundo Dhombres (2002), a história do TFA revela que as demonstrações para determinar as raízes de um polinômio com coeficientes reais realizadas antes de 1800 foram todas fundamentadas no raciocínio puramente numérico e esbarravam num obstáculo, quando as raízes determinadas pertenciam a uma estrutura de números totalmente desconhecida. Esse problema foi resolvido após a descoberta do corpo dos números complexos.

Dhombres (2002) ainda aponta que, as relações de Legendre entre raízes complexas de polinômios e cálculo diferencial dos estudos de Legendre de 1798 foram fundamentais para que Cauchy considerasse a estrutura de corpo dos complexos do ponto de vista puramente conceitual na sua demonstração do TFA em seu *Curso de Análise da Escola Real Politécnica* de 1821. Em consequência, a rejeição da representação geométrica dos números complexos, que até então era vigente, implementada na demonstração de Cauchy do TFA, permitiu a criação da Análise (não a Análise infinita ou Análise algébrica, etc.) quebrando as dicotomias existentes entre a Matemática prática e a Matemática teórica, a Matemática do concreto numérico e a Matemática do abstrato conceitual (DHOMBRES, 2002).

3.2.5 Disquisitiones Arithmeticae de F. Gauss (1807)

Gauss (1807, p. 114-5, tradução nossa), em sua famosa obra, declarou que a recíproca do seu Teorema Fundamental foi deduzida a partir da lei de reciprocidade quadrática de Legendre:

[...]Euler conhecia algumas proposições derivadas desse Teorema. [...] Depois de Euler, Legendre se dedicou ao mesmo estudo, num excelente tratado intitulado *Estudos sobre a Análise Indeterminada*. Ele obteve um teorema que no fundo é equivalente ao meu Teorema Fundamental. [...]Essa proposição está contida na nossa desenvolvida no nº 131. [...]Reciprocamente, o Teorema Fundamental pode ser deduzido da proposição de Legendre.

O Teorema Fundamental ao qual Gauss se referiu é uma condição necessária para que um número seja resíduo ou não resíduo quadrático de um outro número primo p , a saber: “todo número positivo é resíduo ou não resíduo de p terá por resíduo ou não resíduo $+p$ ou $-p$ se p é da forma $4n + 1$ ou $4n + 3$ ”, conforme Gauss (1807, p. 96). Na verdade, Euler já havia apresentado uma demonstração por indução desse resultado no seu trabalho sobre divisores de formas quadráticas apresentado na Academia de São Petersburgo em 20 de novembro de 1775, mas a demonstração continha um erro, pois Euler supôs, sem demonstrar, a existência dos números primos auxiliares $4n + 1$ ou $4n + 3$. Erro que também foi cometido por Legendre em todas as suas demonstrações da lei de reciprocidade.

3.2.6 Leis de reciprocidade de F. Lemmermeyer (2000)

Encontramos no extraordinário livro de Lemmermeyer (2000) uma ótima referência das contribuições de Legendre (e de eminentes matemáticos desde Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Jacobi, passando por Dirichlet, Eisenstein, Kummer, Dedekind, Hilbert, Artin) no desenvolvimento da lei de reciprocidade quadrática, pois o referido autor aponta que a lei possui mais de 150 demonstrações cuja extensão produziu desenvolvimentos para as potências: cúbica, biquadrada, sexta, oitava, bem como a criação da lei de reciprocidade racional.

3.3. CONTRIBUIÇÕES DE OUTROS MATEMÁTICOS ÀS OBRAS DE LEGENDRE

A terceira edição do *Ensaio* é uma reestruturação dos variados assuntos da Teoria dos Números e dos trabalhos de Fermat, Euler, Lagrange e Gauss. Certamente, essas obras foram importantes na constituição da obra maior de Legendre.

Mas outros importantes matemáticos também contribuíram de forma significativa e, nesse momento, destacaremos as contribuições de Sophie Germain, Jacobi e Abel.

3.3.1 Sophie Germain: números primos

No início do século XIX, Sophie Germain conheceu o livro *Teoria dos Números* de Legendre, em Paris e segundo Stein (2006), ela e Legendre trocaram várias cartas que revelaram uma grande amizade e uma forte relação de confiança mútua.

No ano de 1823, Sophie Germain contribuiu com alguns resultados sobre números primos especiais, que levam seu nome, em um dos suplementos de Legendre *do Ensaio* que em linguagem moderna, o Teorema de Sophie Germain pode ser assim enunciado:

Seja p um número primo ímpar. Se existe um número primo auxiliar θ tal que existam duas p -ésimas potências mod θ consecutivas e não nulas e não sendo o próprio p uma p -ésima potência mod θ então nenhuma solução x, y ou z da equação de Fermat $x^p + y^p = z^p$ pode ser divisível por p^2 . (LEGENDRE, 1823, p. 16-7, tradução nossa.)

Esse teorema foi comprovado com sucesso no trabalho de Legendre para $p < 100$ e Sophie Germain também teve outros resultados contemplados pelo matemático, a exemplo de “se n e $2n + 1$ são números primos⁹⁰ então segundo a equação de Fermat, um dos números x, y, z é divisível por n ” e “se em geral se um dos números x, y, z for divisível por n então, necessariamente, ele será por n^2 e o mesmo ocorrerá para $x + y + z = p$, onde p é uma quantidade qualquer” (LEGENDRE, 1823, p. 5; 9, tradução nossa).

3.3.2 Jacobi: raízes da unidade e lei de reciprocidade

As correspondências trocadas entre Jacobi e Legendre não somente revelaram relações afetivas, bem como trocas de estudos recíprocos sobre funções elípticas e Teoria dos Números. Como vimos, foi por meio de uma carta que Jacobi colaborou com Legendre, sugerindo correções aos erros cometidos nos Estudos sobre a Análise Indeterminadaciclomotomia, desenvolvidos na quinta parte da obra, que posteriormente deram origem ao artigo de Legendre de 1832.

As trocas de conhecimentos em Teoria dos Números não pararam por aí e, novamente, as permutas epistolares proporcionaram, a ambos matemáticos, a comunicação de descobertas relacionando a lei de reciprocidade quadrática e a teoria de ciclotomia de Gauss.

Conforme o capítulo anterior, foi numa carta de 5 de agosto de 1827 que Jacobi comunicou a Legendre alguns Estudos sobre a Análise Indeterminadalei de reciprocidade quadrática e fundamentando-se na resolução do polinômio $X = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, onde n é um primo ímpar, Jacobi descreve o seu método para Legendre, bem como revela que ampliou a lei de reciprocidade para potências maiores do que dois. Segue a reprodução de trechos da referida carta:

Há muito tempo realizo algumas pesquisas sobre a Teoria dos Números, que me conduziram a resultados muito curiosos sobre a bela parte da disciplina aberta aos matemáticos pela vossa lei de reciprocidade⁹¹. De fato, partindo da nova teoria sobre a divisão da circunferência proposta pelo Sr. Gauss na oitava seção de

⁹⁰ Números que são conhecidos como números de primos de Germain.

⁹¹ Nota nossa: Aqui Jacobi faz alusão à relação entre Análise Indeterminada e Teoria dos Números.

Disquisitiones Arithmeticae, descobri um método que me levou aos teoremas fundamentais sobre a teoria de resíduos quadráticos, cúbicos, bi quadrados e mesmo sobre resíduos de potências maiores. Para dar uma idéia sucinta, transcrevo aqui a demonstração do teorema fundamental relativa aos resíduos quadráticos com base nesses novos princípios.

Sejam p um número primo ímpar, x a raiz da equação $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$ e g uma raiz

primitiva da congruência $g^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Então $x^g - x^{g^2} + x^{g^4} + \dots -$

$x^{g^{p-2}}$ $= + \sqrt{\frac{p-1}{(-1)^2 p}}$. Em geral temos que $x^q - x^{qg} + x^{qg^2} - x^{qg^4} + \dots -$

$x^{qg^{p-2}}$ é igual a $+ \sqrt{\frac{p-1}{(-1)^2 p}}$ ou igual a $- \sqrt{\frac{p-1}{(-1)^2 p}}$, conforme g seja resíduo quadrático ou não resíduo quadrático de p .

Mas sendo q Também um número primo, desprezando-se os múltiplos de q , temos

que $x^g - x^{g^2} + x^{g^4} + \dots - x^{g^{p-2}} = (x^g - x^{g^2} + x^{g^4} + \dots - x^{g^{p-2}})^q =$

$\frac{p-1}{(-1)^2} \cdot \frac{q-1}{2} \cdot p \sqrt{\frac{p-1}{(-1)^2 p}}$. Portanto q é resíduo ou não resíduo quadrático de

p , conforme $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2} \cdot p$ dividido por q deixa restos $+1$ ou -1 , o que é precisamente, a lei de reciprocidade, ou de acordo com o Sr. Gauss, o teorema fundamental dos resíduos quadráticos. (JACOBI, 1998, p. 394, tradução nossa.)

A resposta de Legendre veio em 30 de novembro de 1827, onde ele revelou ao amigo que ainda não havia apreciado tais descobertas de Jacobi por causa dos trâmites de publicação do livro *Teoria dos Números*. No entanto, assegura ao amigo que iria analisá-las tão logo pudesse e que seus estudos seriam contemplados nessa obra, o que de fato ocorreu, pois Legendre realizou a terceira e última demonstração da lei: “dados dois números primos

ímpares e distintos p e q então $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$, com os argumentos de Jacobi,

conforme Legendre (Artigo 681, parágrafo VI, Vol. II, p. 391-3).

Essa carta nos revela que embora a última edição *do Ensaio* foi publicada em abril de 1830, Legendre já tinha começado a escrevê-la bem antes, no ano de 1827 e terminado em meados de 1828 e, portanto, ainda teve tempo hábil para incluir a demonstração acima de Jacobi nesse trabalho. Isso pode ser comprovado pelo teor da carta de 28 de agosto de 1828, quando Legendre declara “não me ocupo mais com a terceira edição de minha obra sobre Teoria dos Números e assim vós tereis todo o tempo do mundo para me expor as vossas descobertas sobre os resíduos de diferentes graus. Aprovei a vossa demonstração da lei de

reciprocidade quadrática à qual acrescentei novos conhecimentos” (JACOBI, 1998, p. 398, 408, tradução nossa).

Outro fato que reforça o que foi dito, é que numa nota no final da segunda demonstração da lei apresentada na quarta parte de *Teoria dos Números*, Legendre declara “a demonstração que acabamos de fazer, de autoria de Fred. Gauss, é extraordinária, uma vez que se fundamenta em princípios mais simples. Mas na quinta seção, teremos a oportunidade de demonstrá-la com mais simplicidade, cujo autor é o Sr. Jacobi de Könisberg, conhecido por suas belas descobertas em teoria das funções elípticas” (LEGENDRE, 1830, Vol. II, Quarta parte, p. 63, tradução nossa).

3.3.3 Abel: resolução de equações de grau maior do que quatro

Dois anos mais jovem do que Jacobi e morto aos 27 anos em 1829, Abel foi professor de Matemática em Christiania, onde, primeiramente, ensinou Matemática elementar e mais tarde, Cálculo infinitesimal. Com muita afeição, impulsionado pelo seu professor Hombøe, se empenhou em estudar os trabalhos de Cálculo diferencial e integral de Euler, os trabalhos de Lacroix, Poisson, Gauss, Legendre e Lagrange. Com alguns deles, travou conhecimentos, como Legendre, Cauchy e Crelle, do qual foi um amigo íntimo e um dos colaboradores do jornal que ele dirigia. Após estudar as obras de Lagrange em 1821, se lançou com afeição para demonstrar a impossibilidade de resolver uma equação do quinto grau por radicais, a qual consegue elaborar uma condição necessária e que seria publicado em 1824 de tal maneira que foram expostas por Legendre em *Teoria dos Números* de 1830.

Quando os trabalhos de Abel sobre resolução algébrica de equações começavam a chamar a atenção da comunidade matemática, Legendre tomou conhecimento dos estudos de Abel e Jacobi por meio de Poisson, conforme carta de 10 de setembro de 1828 de Crelle a Abel:

O que o Sr. me falou sobre o jovem Abel é absolutamente de acordo com a idéia que eu tinha dos grandes talentos dele, ao percorrer o caderno de vosso jornal onde se encontra um agradável tratado sobre funções elípticas. O Sr. Poisson me fez chegar no ano passado o caderno que enviastes para ele, pouco tempo depois de eu ter recebido a bela descoberta do Sr. Jacobi publicada no jornal do Sr. Schumacher através de uma carta a mim enviada pelo próprio autor.⁹² Essas produções dos dois jovens cientistas que até então me eram conhecidos, me proporcionaram tanto o

92 Nota nossa: Vide Jacobi, 1998, p 390.

sentimento de satisfação quanto o de admiração. (CRELLE *apud* HOLMBOE, 1839, p. VIII, tradução nossa.)

Contrariamente ao que ocorreu entre Legendre e Jacobi que tiveram um amplo relacionamento através de inúmeras cartas, as informações sobre o relacionamento entre Abel e Legendre, nesse presente trabalho, são baseadas em apenas duas das três cartas que foram trocadas entre esses dois matemáticos⁹³.

Em carta de 25 de novembro de 1828, Abel demonstra um grande contentamento por estar se correspondendo com seu mestre ao declarar:

Foi um dos momentos mais felizes de minha vida por merecer a atenção de um dos grandes matemáticos do nosso século. Isso me incentivou a me empenhar com mais zelo os meus estudos, os quais continuarei com ardor e os atribuirei mais a vós do que a mim, por ter sido guiado pela tua luz.
[...] Não fiques zangado comigo Senhor, pois ainda ousou apresentar, mais uma vez, as minhas descobertas. Sobretudo sobre funções elípticas e as funções mais gerais da teoria de equações algébricas. Estou muito feliz por ter encontrado uma regra sobre como reconhecer se uma equação qualquer pode ser solúvel por radicais ou não. Um corolário de minha teoria diz que é impossível resolver equações de graus superiores a quatro. (ABEL, 1864, p. 279, tradução nossa.)

Abel desenvolveu o trabalho “Sobre uma classe particular de equações resolvidas algebricamente” (1828) que foi publicada no jornal de Crelle após a sua morte em 1829. Utilizando os estudos de Lagrange que em 1770 estabeleceu uma relação entre a solubilidade por radicais e permutações das raízes de equações do terceiro grau, Abel demonstrou que as equações de grau maior ou igual a cinco não são solúveis por radicais, problema que seria completamente resolvido por Galois em 1830, por meio da teoria de grupo que leva o seu nome.

Essa relação foi interrompida bruscamente, pois meses depois, Abel, por causa dos rigores do inverno, ficou seriamente doente e faleceu no dia 6 de abril de 1829 (HOLMBOE, 1839, p. IX). A morte de Abel foi muito sentida por Legendre. Depois de três meses após a morte dele, Legendre escreveu uma carta a Jacobi em 14 de julho de 1829, lamentando a perda prematura de tão talentoso matemático: “É uma perda que será verdadeiramente sentida para aqueles que se interessam pelo progresso da análise matemática do mais alto

⁹³ Vide Holmboe, 1839, p.VIII-XI e Abel, 1864, p. 271.

grau. O curto espaço de tempo que ele viveu foi o suficiente para tornar imemoráveis os frutos de sua genialidade” (LEGENDRE *apud* JACOBI, 1998, p. 447, tradução nossa).

Inspirado pelo trabalho de Abel, “Demonstração da impossibilidade de resolução algébrica de equações gerais com grau maior do que quatro” (1827), sobre as funções algébricas que podem ser expressas por funções racionais das raízes de uma equação de grau n , Legendre discute a resolução das equações do tipo $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + na = 0$ para $n = 3, 4, 5$, na Seção 2, “Algumas equações com a propriedade que uma vez conhecida uma raiz, todas as demais são racionalmente determinadas”, do Apêndice de *Teoria dos Números* de 1830.

4 CONCLUSÃO

Ao encontro dos objetivos expostos na introdução do presente trabalho, desenvolvemos no Capítulo 1, “Adrien-Marie Legendre (1752-1833): sua vida, suas obras”, uma leitura da história de vida de Legendre, que pertenceu à geração de grandes matemáticos, como Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Monge (1746-1818) e Gauss (1777-1855). A leitura foi realizada no contexto de quatro períodos importantes da França, a saber, o Antigo Regime (1752-1789), a Revolução Francesa (1789-1799), o primeiro Império de Napoleão (1803-1814) e a Restauração (1814-1833).

Muito além de uma narrativa ancorada na História da Matemática, os episódios da vida de Legendre foram articulados aos elementos históricos do desenvolvimento de um povo, de uma ciência e suas possíveis consequências que nortearam a própria evolução da sociedade francesa dos séculos XVIII e XIX.

Os aspectos evocados na análise de suas biografias nos levaram a Ball (2003, p. 10, tradução nossa) que afirmou que “os principais acontecimentos da vida de Legendre são muito simples e podem ser resumidos em poucas palavras”.

Contudo, as demais fontes consultadas nos revelaram que Legendre teve uma vida recheada por ricos episódios, em contraste com que nos disse Ball (2003). Descobrimos que, enquanto membro da Academia de Ciências de Paris e da Sociedade Real de Londres, Legendre contribuiu com importantes trabalhos em vários ramos das ciências. O seu nome é sempre associado a várias proposições e símbolos nos ramos da Astronomia, da Física e da Matemática, através de seus trabalhos sobre Mecânica Celeste, Funções Elípticas, Cálculo Diferencial e Integral e Estatística. O seu livro *Elementos de Geometria* (1794) que ganhou um prêmio no concurso nacional de livros didáticos teve várias publicações na França, foi traduzido em vários países e os seus milhares de exemplares vendidos lhe renderam fama e uma grande fortuna. Por causa desse fenômeno, Legendre obteve uma independência financeira que, por muitos anos, proporcionou a ele uma vida totalmente dedicada às suas pesquisas.

Ele participou de importantes comissões científicas, como a comissão que foi instituída em 1787, pela Academia de Paris, para realizar as medidas geodésicas de Greenwich à Paris. Para essa finalidade, Legendre utilizou métodos analíticos na determinação do arco do meridiano das referidas cidades e os que religavam a costa da

Inglaterra a Greenwich por meio de triângulos esféricos. No período da Revolução Francesa, ele participou da relevante comissão que efetivou os cálculos finais para o estabelecimento do sistema métrico único. Ele foi professor da Escola Militar e do Instituto Nacional da França, importantes instituições do ensino superior francês.

Além disso, nosso trabalho aponta que Legendre não somente se tornou conhecido por seus trabalhos como um hábil calculista ou como autor dos *Elementos de Geometria*, mas também, por traços de sua personalidade cujo caráter modesto, tímido, severo e gentil, ficaram registrados em suas epístolas trocadas com seus pares, nos elogios póstumos e nos prefácios de suas obras. Contudo, ele nem sempre fora tão educado, amável ou ético em relação aos seus amigos. Teve, por exemplo, participação direta num episódio envolvendo um de seus protegidos, a matemática Sophie Germain. Nesse episódio, Legendre, para beneficiá-la, revelou informações de concursos em que ela participara da Academia de Paris, antes mesmo da publicação oficial dos resultados. Também, registramos os seus desafetos e intermináveis litígios com Gauss a respeito de prioridade de descobertas científicas, que, de certo modo, influenciaram no desenvolvimento da maior parte de seus trabalhos em Teoria dos Números.

Objetivando analisar as obras em Teoria dos Números de Legendre e compreender a contribuição das referidas obras para o avanço da Teoria dos Números dos séculos XVIII e XIX, desenvolvemos no Capítulo 2, “Legendre e a Teoria dos Números” um estudo com respaldo em todas as suas obras nesse ramo da Matemática. Obras essas que, juntamente com seus estudos sobre funções elípticas, ocuparam quase meio século de sua vida.

No aspecto evocado no referido capítulo sobre os seus trabalhos em Teoria dos Números (p. 85), mostramos que, desde seu primeiro trabalho *Estudos sobre a Análise Indeterminada* (1785), Legendre descobriu importantes proposições e restabeleceu uma ligação entre a Análise Indeterminada e a Ciência dos Números. Nessa obra, encontramos pela primeira vez a lei de reciprocidade quadrática numa versão que contém oito proposições, onde Legendre criou uma relação particular entre dois números primos ímpares, resíduos quadrados e divisores primos de formas quadráticas. As demonstrações das oito proposições foram fundamentadas em seus estudos sobre equações indeterminadas do segundo grau e numa conjectura que, na época, ele afirmou ser fácil de determinar: “Toda progressão aritmética cujo primeiro termo e a razão são primos entre si contém uma infinidade de

números primos”. Registramos que, embora o enunciado fosse simples, Legendre não a demonstrou de forma consistente, o que somente foi realizado pelo matemático alemão Peter Gustav Lejeune-Dirichlet em 1837.

Legendre, desejoso de reagrupar seus próprios estudos e os trabalhos de influentes matemáticos que vão de Euclides, Diofanto, Viète, Bachet, Fermat, Euler e Lagrange, publicou em 1798 a obra *Ensaio sobre a Teoria dos Números* que reuniu a maior parte de tudo que se conhecia sobre a ciência na época.

A publicação em 1801 da obra *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss estimulou Legendre a publicar em 1808 uma segunda edição do *Ensaio*, edição com um volume um pouco maior do que a edição anterior e que foi complementada com o acréscimo de dois Suplementos em 1816 e 1823. No primeiro suplemento, Legendre forneceu um método para encontrar as raízes reais e imaginárias da equação $x^n \pm A_1x^{n-1} \pm A_2x^{n-2} \pm A_3x^{n-3} \pm \dots \pm A_n = 0$ e, no suplemento de 1823, Legendre demonstrou o Teorema de Fermat para os casos $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ e $x^5 + y^5 + z^5 = 0$.

Detectamos um outro trabalho seu, *Sobre a determinação das funções X e Y que satisfazem à equação $4(X^n - 1) = (X - 1)(Y^2 \pm nZ^2)$, onde n é um número primo da forma $4i \pm 1$* (1832), no qual Legendre desenvolveu um procedimento para determinar todos os casos dos polinômios Y e Z que satisfazem à equação $4X = Y^2 \pm nZ^2$, onde n é um número primo da forma $4i \pm 1$ e X um polinômio igual ao quociente de $x^n - 1$ dividido por $x - 1$. Esse trabalho foi fruto de algumas observações pertinentes de Jacobi que corrigiu os erros cometidos por Legendre no trabalho anterior de 1830 em que o matemático francês se fundamentou na hipótese insuficiente de que todos os coeficientes dos diferentes termos da função Y eram menores do que $\frac{1}{2}n$.

Em 1830, ele publicou uma terceira edição de *Ensaio*, que recebeu o novo título de *Teoria dos Números*. A obra é composta por dois grandes volumes distribuídos em 859 páginas, fruto da vitalidade excepcional para um homem aos 78 anos de idade.

O livro *Teoria dos Números* (1830) é um conjunto harmonioso que reproduziu os mesmos conteúdos da edição de 1808 e apresentou textos inéditos de Sophie Germain, Abel, Jacobi e até mesmo de Gauss, com quem por longo tempo Legendre travou querelas científicas a respeito de prioridades de descobertas.

Com base na análise do livro *Teoria dos Números* (1830), encontramos, a partir da introdução da obra, Estudos sobre a Análise Indeterminada e a Aritmética relativos às noções gerais sobre os números e às propriedades básicas sobre números inteiros, em particular sobre os números primos. Esses estudos parecem desarticulados com os demais conteúdos da obra. É somente depois de realizarmos uma leitura global, que percebemos que Legendre ao utilizar a Análise Indeterminada, ultrapassou os limitados artifícios da Aritmética na abordagem de uma série de problemas clássicos, como a determinação dos divisores de formas quadráticas, o teorema dos quatro quadrados, os teoremas sobre os números poligonais, a resolução de equações de graus maiores ou iguais a dois, o Último Teorema de Fermat e a última versão da lei de reciprocidade quadrática que aparece com a redação “se p e q são dois números primos ímpares então $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)$ ” (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p. 392-3, tradução nossa).

Como bem apontou Belhoste (1998), um trabalho científico nunca é autônomo e, assim, não podemos negar a intervenção dos trabalhos de outros matemáticos no desenvolvimento das obras de Legendre em Teoria dos Números.

O Pequeno Teorema de Fermat que foi apresentado por Legendre com a seguinte versão: “Se c é um número primo, e N um número qualquer não divisível por c . Digo: a quantidade $N^{c-1} - 1$ será divisível por c , de maneira que $\frac{N^{c-1} - 1}{c} = \text{inteiro} = e$ ” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 192-3, tradução nossa).

Em seguida, Legendre obteve o seguinte resultado que estabelece uma ligação entre divisores primos de formas quadráticas e sua lei de reciprocidade: “Se o número primo c é divisor de $x^2 + N$, onde N é um número inteiro, a quantidade $\left(-N\right)^{\frac{c-1}{2}} - 1$ é divisível por c e, reciprocamente, se essa condição for satisfeita, existe um número x (menor do que $\frac{c}{2}$) tal que $x^2 + N$ será divisível por c ” (LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 196-7, tradução nossa). No corpo da demonstração dessa proposição, Legendre utilizou a notação $N^{\frac{c-1}{2}}$ para o resíduo quadrado de c , para expressar o resto da divisão de $N^{\frac{c-1}{2}}$ por c , resto que ele afirmou que é igual $+1$ ou -1 , que é uma consequência imediata do Pequeno Teorema de Fermat.

Dessa feita, comparamos demonstrações do Pequeno Teorema de Fermat realizadas por Legendre, por Euler, que utilizou o binômio de Newton e a definição de progressão geométrica e de Gauss, cuja demonstração também se baseou no binômio de Newton e na teoria de congruências.

Importante destacar que foi nesses estudos que encontramos uma terceira versão da lei de reciprocidade, cuja redação ficou assim:

Dados dois números primos ímpares m e n , se ambos não forem da forma $4x + 3$, sempre teremos $\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)$, e se eles forem da forma $4x + 3$, $\left(\frac{n}{m}\right) = -\left(\frac{m}{n}\right)$.

As duas as fórmulas satisfazem o caso geral $\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)$, onde

as expressões $\left(\frac{m}{n}\right)$, $\left(\frac{n}{m}\right)$, são, respectivamente o resto da divisão de $\frac{n-1}{m^2}$ por n

e o resto de da divisão de $\frac{m-1}{n^2}$ por m . Esses restos somente podem ser $+1$ ou -1 .
(LEGENDRE, 1830, Vol. I, p. 230, tradução nossa.)

De acordo com a nossa análise das obras de Legendre em Teoria dos Números realizada no presente trabalho (p. 85; 189), foi nessa terceira versão da lei de reciprocidade que o autor

substituiu a notação $N^{\frac{c-1}{2}}$, criada por ele no trabalho de 1785, pela notação resumida $\left(\frac{N}{c}\right)$,

conhecida como o símbolo de Legendre, nas edições do *Ensaio* de 1798, 1808 e 1830.

Dentre outros assuntos, analisamos as versões da lei de ciclotomia desenvolvidas por Gauss e por Legendre que, embora sejam similares, possuem notações diferenciadas. Também, examinamos demonstração de Legendre da solubilidade das equações indeterminadas do segundo grau com números inteiros e fracionários onde ele utilizou o método de Lagrange e o princípio da descida infinita de Fermat.

Para finalizar, atingimos o ápice do capítulo, quando discorreremos sobre as variadas demonstrações da lei de reciprocidade. Nesse sentido, realizamos um confronto entre os textos de Legendre, de Gauss (que inclusive realizou oito demonstrações, sendo que duas delas apareceram em textos póstumos), de Zolotareff, um professor russo da Universidade de

S. Petersburgo, de Jacobi e de Eisenstein. As demonstrações foram analisadas segundo três categorias: com Fundamentos em Formas Quadráticas e Congruências do Segundo Grau (textos de Legendre (1830) e de Gauss (1807)), com Fundamentos no Lema de Gauss (textos de Legendre (1830) e de Zolotareff (1872)) e com Fundamentos na Teoria de Ciclotomia de Gauss (textos de Legendre (1830) e de Eisenstein (1844) *apud* Lebesgue (1847)).

Constatamos que a lei de reciprocidade quadrática foi insistentemente demonstrada por Legendre de forma incompleta e evidenciamos os erros cometidos. Um deles foi o fato do autor ter se utilizado de hipóteses que somente poderiam ser validadas com o auxílio da própria lei e se apoiado em conjecturas que somente foram demonstradas após a sua morte em 1833. Além disso, a redação apresenta um grande número de cálculos e simbologias próprias que, às vezes, até dificultam a compreensão da teoria desenvolvida, procedimento que foi seguido em todos os seus trabalhos nessa área.

Contudo, outros matemáticos tiveram o privilégio de completá-la, como Gauss, Jacobi, Cauchy, Lucas, Zolotareff, Eisenstein, Kummer, Dedekind, Hilbert, Artin e tantos outros.

No Capítulo 3, “A receptividade pela comunidade matemática dos trabalhos de Legendre em Teoria dos Números”, reunimos as diferentes opiniões sobre as obras de Legendre, em particular, sobre o livro *Teoria dos Números*, e encontramos, conforme o espírito natural do mundo científico, opiniões favoráveis e contrárias da parte de seus pares, a exemplo dos elogios de Delambre e Beaumont e as críticas de Gauss que, com razão, declarou publicamente que a primeira demonstração da lei de reciprocidade quadrática era incompleta e as de Aubry, que, classificou o livro como uma obra pouco concisa, cheia de detalhes supérfluos e teoremas desconexos entre si.

O próprio Legendre denominou a primeira edição (1798) de “ensaio”, por reconhecer que a obra não era um tratado completo e, assim, dedicou muitos anos de sua vida no intuito de aperfeiçoá-la.

Foram muitos os legados das obras de Legendre em Teoria dos Números. Ao longo de suas obras, encontramos algumas nomenclaturas e notações de sua autoria. Por exemplo, a notação $\mathcal{M}(A)$ que atualmente é designada para denominar o conjunto dos múltiplos de um número inteiro A , foi criada por Legendre e apareceu pela primeira vez na segunda edição do

Ensaio sobre a Teoria dos Números de 1808. Os símbolos $N^{\frac{c-1}{2}}$ e $\left(\frac{N}{c}\right)$ que expressam o resíduo quadrático de c aparecem em todas as demonstrações de Legendre do seu teorema de reciprocidade quadrática. Também é de sua autoria, o termo reciprocidade para expressar a lei que estabelece uma relação entre dois números primos ímpares, que foi anunciada pela primeira vez no trabalho de 1785. Aponta Dhombres (2002, p. 5) que Legendre foi quem criou o nome Teoria dos Números para identificar a ciência que estuda os números inteiros, cuja terminologia apareceu pela primeira vez na sua obra de 1798. Um outro exemplo foi a nomenclatura *bifide* que foi criada por ele em 1830 para expressar um tipo particular de números ternários, que são todas as formas possíveis que um número pode ser escrito como somas de três quadrados.

Além disso, evidenciamos no capítulo final do presente trabalho que a obra *Teoria de Números* de Legendre também foi fonte de inspiração para jovens matemáticos como Abel, Jacobi e Sophie Germain que contribuíram de forma significativa na constituição da obra. Vimos que as trocas epistolares entre Legendre e Jacobi revelaram que ainda muito jovem Jacobi contribuiu com importantes resultados para o livro *Teoria dos Números*, quando em uma carta de 2 de julho de 1830, disse:

[...] Também percebi com prazer que vós aproveitastes as minhas observações sobre a lei de reciprocidade... [...] A maior parte do Volume II de vossa obra é inteiramente inédita. Tive a oportunidade de admirar o vosso vigor, cujo espírito venceu e ultrapassou as dificuldades impostas pela idade avançada, mas a vossa gloriosa vida consagrada ao progresso dessa ciência sempre será um motivo de inspiração a jovens matemáticos (JACOBI, 1998, p. 453, tradução nossa).

A estimativa de Legendre sobre a distribuição de números primos numa sequência aritmética teve certa influência sobre Riemann que na juventude estudou todo o conteúdo do livro *Teoria dos Números* (1830). Tempos depois, em 1859, Riemann conjecturou que os zeros da função zeta⁹⁴ criada por Euler (1748) pode controlar essa repartição dos números primos. Esse problema colocado por Riemann há mais de 150 anos, ainda focaliza o interesse

⁹⁴ Função definida por meio de series cujos elementos são os inversos dos quadrados de números naturais. Maiores detalhes em Lachaud (2005) e Lejeune-Dirichlet (1999).

dos maiores matemáticos. Um deles foi André Weil, que em 1940 demonstrou um caso particular da conjectura de Riemann utilizando argumentos da geometria (LACHAUD, 2005).

As extensões das demonstrações da lei de reciprocidade quadrática de Legendre, fundamentadas na teoria de formas quadráticas, no Lema de Gauss, na teoria de ciclotomia e na teoria de corpos, foram um grande impulso à Teoria dos Números do século XIX. A célebre lei recebeu novas versões para graus maiores do que dois como a lei de reciprocidade bi quadrada de um número a de Gauss publicada em 1828, denotada por Jacobi como $\left(\left(\frac{a}{p}\right)\right)$

e aperfeiçoada por Eisenstein, que também é o autor do símbolo $\left[\frac{a}{p}\right]$ que representa a reciprocidade cúbica de um número a que são alusivas ao símbolo de Legendre.

Notamos que em sua obra maior, a *Teoria dos Números* (1830), Legendre realizou a unificação acumulativa de todas as proposições que redundou na unificação de conteúdos da Álgebra e da Aritmética que aparentemente não eram correlatos. Haja vista a estreita ligação entre a lei de reciprocidade, o Pequeno Teorema de Fermat, resolução de equações e formas quadráticas.

Observamos ainda que, para cada teoria desenvolvida Legendre exibiu um grande número de aplicações para que o leitor tivesse uma melhor compreensão dos métodos apresentados. Por esse motivo, o livro de Legendre foi classificado por Maigre (2007) como um livro didático, ainda que jamais isso tenha sido a intenção do autor.

Deduzimos que para Legendre, fazer matemática não era somente conhecer teoremas, mas de certa maneira, ter uma intimidade com eles, mesmo que isso levasse algum tempo. Isso ficou evidente pelo número de demonstrações da sua lei de reciprocidade que Legendre tanto buscou aperfeiçoar por quase cinco décadas.

Também, compreendemos o motivo de suas demonstrações de outros importantes resultados terem sido consideradas como incompletas e até mesmo deixaram a desejar, por estarem fundamentadas no que ele chamava de “forma indutiva”. Na verdade, tais demonstrações eram por apreensão por meio de exemplos numéricos, que até certo ponto se adequava à teoria exposta, porém, sem o devido rigor matemático que o método de indução finita impõe. Em particular, evidenciamos a sua conjectura sobre a existência de números

primos numa sequência aritmética que posteriormente foi demonstrada por Lejeune-Dirichlet. Nesse sentido, divisamos que, embora as suas consequências fossem verdades matemáticas, Legendre tinha a concepção de que existiam teoremas que não precisavam ser rigorosamente demonstrados.

Na busca de fatores que justificassem a razão do brilho da obra de Legendre ter sido eclipsado pela obra do Príncipe dos Matemáticos ao longo dos tempos, comparamos as obras de Gauss (1807) e de Legendre (1830), e chegamos à conclusão que a última obra foi superada pela primeira em alguns pontos. *Disquisitiones Arithmeticae* marcou o início da etapa da Teoria dos Números moderna, enquanto que a obra de Legendre reuniu todo o conhecimento clássico da ciência até meados do século XIX. A obra de Gauss nos oferece um conjunto de teorias completas com uma variedade e generalidade de resultados, como a teoria de congruência e a teoria da divisão da circunferência em partes iguais, cujas linguagens e notações até hoje são utilizadas nos livros textos de Teoria dos Números. Por outro lado, a obra de Legendre possui textos com notações e linguagens próprias que, com exceção do símbolo de Legendre $\left(\frac{N}{c}\right)$ e da notação $\mathcal{M}(A)$ para o conjunto dos múltiplos de um número inteiro A , ficaram obsoletas, restritas ao âmbito de suas obras. Maigre (2007) ressalta que, embora a ideia de congruência estivesse presente em toda a sua obra, Legendre sempre se recusou a utilizar o símbolo $\equiv$ que tornaria os seus textos mais concisos e provavelmente foram as querelas de prioridades entre ambos matemáticos que esclareceram a atitude do matemático francês.

No entanto, o seu livro merece ser tão apreciado quanto à obra do matemático alemão, tanto pelos resultados inéditos, quanto pelo cuidado da análise e da síntese que ele manifestou em boa parte dos seus conteúdos apresentados. Opiniões divergentes à parte, a obra merece a honra em que lhe é feita como o primeiro tratado de uma Aritmética Superior que tanto inspirou outros matemáticos para o avanço da ciência no século XX.

Traçando um paralelo entre a *Teoria dos Números* de Legendre e *Os Elementos* de Euclides, não podemos negar o mérito de Legendre ter compilado teoremas, simplificado demonstrações, fornecido métodos mais fáceis, com a finalidade de proporcionar raciocínios mais simples e uma maior clareza dos conteúdos, pela exibição de um grande número de aplicações. Trabalho que foi fruto do último esforço do autor para que a sua obra se

mantivesse ao nível da Teoria dos Números da época, em que incluiu suas próprias descobertas e partes das obras de Gauss, Abel e Jacobi.

De tudo que aqui foi pontuado, inferimos que, embora muitas das proposições apresentadas em todas as suas obras em Teoria dos Números não fossem de sua própria autoria, Legendre foi o responsável pela forma axiomática com que os assuntos foram tratados.

Usaremos Lacroix (1816) para expressar de uma forma clara, toda uma vida de um homem – Legendre – que se dedicou à Ciência dos Números, concretizando seus sonhos em aperfeiçoá-la ou, pelo menos, avançá-la, para que ela fosse complementada no futuro pelos seus sucessores:

Todo homem que pretende tornar a sua existência útil à sociedade, deve caminhar sempre com o mesmo objetivo. Somente caminhando continuamente numa mesma direção é que ele poderá obter a estima dos seus contemporâneos e o reconhecimento daqueles que virão após ele (LACROIX, 1816, p. 171, tradução nossa).

Gostaríamos de ter avançado o presente trabalho, com a inclusão de estudos comparativos de textos de Legendre (1830), Abel (1823) *apud* Homboe (1839) e Galois (1830) *apud* Liouville (1846) sobre a resolução de equações algébricas. Também, desejaríamos ter confrontado os textos de Legendre (1830) e de Vandemonde (1771) sobre o caminho percorrido pelo cavalo no tabuleiro de xadrez que, entrelaçado à teoria de grupos de permutação de Galois é um excelente tema a ser explorado. No entanto, pretendemos retomar os estudos no futuro e, assim, esperamos ter atingido os objetivos propostos que culminaram na realização desse trabalho.

REFERÊNCIAS

- ABEL, N. H. **Lettre de Abel à Legendre**. Mémoires de l' Académie des Sciences de l'Institut de France, Vol. 6, 1828, rééd. Paris: Gauthier-Villars, 1864, p. 271-279.
- ARQUIVOS da Academia de Ciências de Paris. Disponível em: <http://fr.wikipedia.org/wiki/academie_des_sciences>. Acesso em: 23 fev. 2010.
- AQUARELA de Legendre e Fourier por Boilly. Disponível em: <<http://one.filtrage.com/index.php>>. Acesso em: 19 fev. 2009.
- ATA da eleição de Legendre à Academia Real de Londres Em 1788. Disponível em: <http://royalsociety.org/>>. Acesso em: 03 fev. 2009.
- AUBRY, A. **Sur les travaux aritmétiques de Lagrange, de Legendre et de Gauss**. L'Enseignement Mathématique, Vol. 11, Zurich: Seals, 1909, p. 430-450.
- BALL, W.W. Rouse. **Histoire des Mathématiques – Les Mathématiques modernes depuis Newton jusqu' à nos jours – Note complémentaire de Darboux**. Traduite par L. Freund conforme la triosième édition anglaise de 1907, Tome Deuxième, Paris: Editions Jacques Gabay, 2003, p. 89 – 112.
- BEAUMONT, E. de. **Éloge historique de Adrien -Marie Legendre**. Mémoires de l' Académie des Sciences de l'Institut de France, Vol. 32, Paris: Gauthier-Villars, 1864, p. XXXVII-LXXXVII.
- BELHOSTE, B et al. (Sous la direction de). **La France des siècles d' histoire**. Paris: Editions Economica, 1995, p. 7 – 61.
- BELHOSTE, B. **Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement d'Histoire des Mathématiques**. Revue des histoire des mathématiques, Paris: Société Mathématique de
- BOYER, Jacques. **Histoire des mathématiques**. Paris: G. Carré ert Maud, 1900.
- BÜHLER, Martine; MICHEL-PAJUS, Anne. **Sur différents types de démonstrations rencontrés spécifiquement en arithmétique**. Collection : Mnémosyne Num. 19, Paris: IREM de Paris, 2007, p. 19-60. Disponível em: <publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IPS07003.htm>. Acesso em: 23 ago. 2009.
- BULLYNCK, Maarten. **A history of factors tables with notes on the birth of Number Theory 1658-1817**. 2000. Disponível em: <kuttaka.org>. Acesso em: 23 ago. 2009.
- CAHEN, E. **Elements de la théorie des nombres**. Vol. I, Paris: Gaithier-Villars, 1900.

CAPA de Elementos de Geometria, 1794. Disponível em: <[http:// gallica.bnf.fr](http://gallica.bnf.fr)>. Acesso em: 14 nov. 2010.

CASTONGAY-BELANGER, J. **Les écarts de l'imagination – Pratiques et représentations dans le roman au tournant des Lumières**. Montréal: Les Presses de l' Université de Montréal, 2009, p. 9-18.

COLLÈGE Mazarin. Disponível em: <<http://www.archive.com>>. Acesso em: 22 nov. 2010.

COLLETTE, J-P. **Histoire des Mathématiques**. Montréal: Editions du Renouveau Pédagogique, 1979, p. 263, 137-169, 170-191.

DELAMBRE, **Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789, et sur leur état actuel**. Paris: Imprimerie Impériale, 1810, p. 1-119.

DICKSON, L. E. **History of the Theory of Numbers**. Vol. I, II, III, New York: Chelsea Publishing Company, 1952.

DIEDRON, Pierre; ITARD, Jean. **Mathématiques et mathématiciens**. Paris: Les Éditions Mangnard, 1959, p. 1-6, 257-268.

DHOMBRES, Nicole; DHOMBRES, Jean. **Naissance d'un nouveau pouvoir: sciences et savants en France: 1793 – 1824**. Paris: Editions Payot, 1989.

DHOMBRES, Jean. **Quelle fut la part «national» dans le bilan post-révolutionnaire de la mathématisation des lumières en Europe?**. Paris: Annales historiques de la Révolution française, n. 320, Articles, 1999.

_____. **Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire**. Publication de l'Irem de Nantes, Nantes: CEDIC/ Fernand Nathan, 1978, p. 142-150.

_____. Le numérique en question. **Actes du Colloque de Peyresq La pensée numérique**, Bruxelles, 2002, p. 231-257.

DIEUDONNE, Jean. **Abrégé d'histoire des mathématiques: 1700 – 1900**. Vol. I, Paris: Hermann, 1978, p. 165 – 334.

EDWARDS, HAROLD M. Composition of binary quadratic forms and foundations of Mathematics. In GOLDSTEIN, C.; SCHAPPACHER, N.; SCHERMER, J. (Editors). **The Shaping of arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae**. New York: Springer, Berlin: Heidelberg, 2007, Cap. 2, p. 129-144.

EULER, L.; LAGRANGE, J. L. C. **Additions aux Eléments d'Algèbre d'Euler – Analyse Indeterminée**. Traduit de l'allemand, Nouvelle édition revue et corrigé, A. Pétersbourg, 1798.

FACE Trocadéro, Torre Eiffel, Paris. Disponível em: <<http://www.fotosearch.com.br>>. Acesso em: 14 mar. 2010-a.

_____. Disponível em: <http://fdaf.org/jtissot/images/Tour_eiffel_nord_ouest.jpg>. Acesso em: 14 nov. 2010-b.

FOLHA de presença da primeira seção do Instituto Nacional presidida por Napoleão Bonaparte em 1798. Disponível em: <<http://one.filtrage.com/index.php>>. Acesso em: 19 fev. 2009.

GAUSS, C. F. **Recherches Arithmétiques**. Traduction française des *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) par Pouillet-Deslisle, Paris: Éditions Courcier, 1807.

GILLESPIE, Charles C. (Editor in Chief). **Dictionary of Scientific Biography**. New York: Pinceton University, Charles Scribner's Sons, Vol. VIII, 1970 – 1980, p. 135-143.

_____. (Editor in Chief). **Dictionary of Scientific Biography**. New York: Pinceton University, Charles Scribner's Sons, Vol. XV, 1970 – 1980, p. 274-356.

GOLDSTEIN, C. **L'Arithmétique de Pierre Fermat dans le contexte de la correspondance de Mersenne: une approche microsociale**. Sciences et techniques en perspective, IIe série, 8, 2004, p. 14 – 47.

_____. **Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques: le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914)**. Actas historiae rerum naturalium technicarum, New series, Vol. 3, 1999, p. 187 – 214.

_____. **Descente infinie et analyse diophantine: programmes de travail et mise en oeuvre chez Fermat, Levi, Mordell et Weil**. Cahiers du Séminaire d'histoire de mathématiques, 2^e série, 3, 1993, Paris: Université de Paris Sud, 1991, p. 25-49.

HOLMBOE, B. **Oeuvres Complètes de N. H. Abel, mathématicien, avec des notes et développements, rédigées par ordre du Roi**. Tome Premier, Chapitres I et II, Christiania: Chr. Gröndahl, 1839, p. I-XVI; 1-24.

JACOBI, C. G. J. **Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi**. p 390- 461, Berlin: ed. C. W. Borchard, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bud. p. 205-279, Leipzig: B. G. Stuttgart, 1998.

JULLIAN, P. L. PASCAL de, LESBROUSSART, P., LENNEP, G. **Galerie historique des contemporains ou nouvelle biographie, dans laquelle se trouvent réunis les hommes morts ou vivans, de toutes les nations, qui se sont fait remarquer à la fin du XVIII^e siècle et au commencement du XIX^e, par leurs écrits, leurs actions, leurs talens, leurs vertus ou leurs crimes.** Troisième édition. Tome sixième, Mons: Le Roux, 1827, p. 97-98; 157-159; 195-225; 404-409, 431.

JURATIC, S. **Publier les sciences au 18^e siècle: la librairie parisienne et la diffusion des savoirs scientifiques.** Dix-huitième siècle 2008.1, n. 40, p. 301-313, Distribution électronique: Cairn pour La Découverte, 2008.

LABOULAIS, Isabelle. **Pierre Simon Laplace 1749-1827. A determined scientist.** Compte rendu, Annales historiques de la Révolution française, n. 347, 2008, p. 1-3. Disponível em: <<http://ahrf.revues.org/document8903.html>>. Acesso em: 17 mar. 2009.

LACHAUD, G. **L'hypothèse de Riemann – Le Graal des mathématiciens.** Les Dossiers de la Recherche, n. 20, 2005, p. 26-34.

LACROIX, S. F. **Essais sur l'enseignement en general, et sur celui des mathematiques en particulier.** Seconde édition, Paris: Courcier, 1816.

LAGRANGE, J. L. C. **Recherches d' arithmétique.** Nouveaux Mémoires de l' Académie des Sciences et de Belles – Lettres, Berlin: 1773, 1775, p. 265-315.

LAUAND, J. **Estudo Introdutório - a Aritmética de Isidoro de Sevilha e a Educação Medieval.** *Signum*, Revista da ABREM - Associação Brasileira de Estudos Medievais, n. 4, São Paulo: 2002.

LEBESGUE, V.-A. **Démonstration nouvelle et élémentaire de la loi de réciprocité de Legendre, par M. Eisentsein, précédée et suivie de remarques sur d'autres démonstrations qui peuvent être tirées du même principe.** Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1^{ère} série, Vol. 12, 1847, p. 457-473.

LECOUVEY, J-P. **Les secrets des noms de famille.** Bulletin d'information communale de Jobourg, 1999, p. 1-7.

LEGENDRE, Adrien Marie. **Recherches d' analyse indéterminée .** Mémoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris: Imprimerie Royale, 1785, p. 465-559.

_____. **Essai sur la théorie des nombres.** Première édition, Paris: Duprat, 1798.

_____. _____. Deuxième édition, Paris: Courcier, 1808.

_____. _____. Premier supplément, Paris: Courcier, 1816.

_____. **Sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat.** Mémoire de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, Paris: Imprimerie Royale, n. 6, 1823, p. 1-60.

_____. **Essai sur la théorie des nombres.** Deuxième supplément, Paris: Courcier, 1825.

_____. **Théorie des Nombres.** Tomes I, II. Troisième édition, Paris: Firmin Didot Frères, Librairies, 1830.

_____. **Sur la détermination des fonctions Y et Z qui satisfont à l'équation $4(x^n - 1) = (x - 1)Y^2 \pm nZ^2$, n étant un nombre premier $4i \pm 1$.** Mémoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris: Imprimerie Royale, 1832, p. 81-100.

_____. **Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle.** Lu en 1829, Paris: Institut national des sciences, Tome XII, p. 367-411, 1833.

LE GLOBE, Journal politique, philosophique et littéraire, 22 février 1830, 28 mai 1830, 25 juin 1830.

LEJEUNE-DIRICHLET, P. G. **Démonstration de cette proposition: Toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun contient une infinité de nombres premiers.** Mémoire Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimal à la théorie des nombres, lu à l'Académie des sciences de Berlin, le 27 juillet 1837, Traduit par M. Terquem, Journal de Mathématiques Pure et Appliquées, Paris: Bachelier, Tome IV, 1839, p. 393-422.

_____. **La première démonstration donnée par Gauss de la loi de réciprocité dans la théorie des résidus quadratiques.** Traduit par M Houelm, Journal de Mathématiques Pure et Appliquées, Paris: Bachelier, première série, Tome IV, 1859, p. 401- 420.

_____. **Lectures on Number Theory - Supplements by R. Dedekind.** History of Mathematics, Vol. 16, Originally published in German by F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1863, Translated by John Stillwell, Rhode Island: American Mathematical Society, 1999.

LEMMERMAYER, Franz. **Reciprocity Laws: From Euler to Eisenstein.** New York: Springer - Verlag Berlin: Heidelberg, 2000.

LIIOUVILLE, J. **Galois, Evariste – Oeuvres mathematiques**. Journal de Mathematiques Pure et Appliquees, Paris: Bachelier, deuxieme serie, tome 11, 1846, p. 381- 444.

LITOGRAFIAS de Delpech... Disponível em: <<http://fr.wikipedia.org/wiki/Delpech>>. Acesso em: 19 fev. 2009.

LITOGRAFIA do matemático Legendre pertencente à Biblioteca Nacional em Paris. Disponível em: <http://fr.wikipedia.org/wiki/Zéfferin_Belliard>. Acesso em: 19 fev. 2009.

LUCAS, E. **Théorie des Nombres**, t. 1, Paris: Gauthier-Villars, 1891.

LIVRO *Arithmetica* de Diofanto. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Diofanto_de_Alexandria>. Acesso em: 15 nov. 2010.

MAIGRE, Lise. **La Théorie des nombres de Legendre – Les différentes éditions et le role des travaux de Gauss**. Mémoire dirigé par Evelyne Barbin, Master 2 – Histoire des Sciences et des Techniques, Centre François Viète, Nantes: Université de Nantes, 2007.

MAPA de Paris, Gare de Nantes: SNFC, 2009.

MERKER, J. **L'île mathématique (III)**. Études, Tome 395, SER-SA, 2001, p. 493-504.

MONTESUS, R. de. **Les fondements de l' arithétique moderne**. L' Enseignement Mathématique, Vol. 1, Zurich: Seals, 1899, p. 185-195.

NOME de Legendre gravado na face Trocadéro, Torre Eiffel, Paris. Disponível em: <http://fdaf.org/jtissot/images/Tour_eiffel.jpg>. Acesso em: 14 nov 2010.

O. MAY, Kenneth. **Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics**. Toronto: University of Toronto Press, 1973.

ORIGENS dos sobrenomes franceses. Disponível em: <<http://www.nom-famille.com>>. Acesso em: 19 ago. 2009.

PARISOT; MICHAUD (ed.). **Biographie Universelle – Ancienne et Moderne**. Tome XXIII, Paris: Desplaces et Leipzig, 1843, p. 610-615.

POISSON, S. D. **Discours prononcé aux funérailles de M. Legendre**. Journal des Savants, Paris: de l' Imprimerie Royale, janvier 1833, p. 61-63.

REBIÈRE, A. **Les savantes modernes, leur vie et leurs travaux- d'après les documents académiques**. Paris: Librairie Nony & C^{ie}, 1899.

RETRATO apresentado na biografia pela internet do deputado Louis Legendre juntamente com uma cópia de seu obituário. Disponível em: <<http://fr.les.guillotines.free/legendre/louis.htm>>. Acesso em: 13 mar. 2009.

- RIBENBOIM, Paulo. **Números Primos: mistérios e recordes**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira e Matemática, Instituto de Matemática e Aplicada, Coleção Matemática Universitária, 2001.
- SAMUELI, J-J., BOUDENOT, J-C. **Trente ouvrages de Mathématiques qui ont changé le monde**. Paris: Ellipses Edition Marketing S.A., 2006.
- SAUTOY, M. **La symphonie des nombres premiers**. Traduit de l'anglais par Raymond Clarinard, France: Editions Héloïse d'Ormesson, 2005, Traduction de The Music of the Primes.
- SMITH, D-E. **L' enseignement des Mathématiques aux Etats-Unis**. L' Enseignement Mathématique, Vol. 3, Zurich: Seals, 1901, p. 157- 171.
- _____. **History of Mathematics – General survey of the history of elementary mathematics**. Volume I, New York: Dover Publications, INC, 1958.
- STEIN, A. **Sophie Germain: mathématicienne extraordinaire**. Claremont: SRIPPS The women's College, April, 2006, 79 p.
- TATON, R. **Etudes d'histoire des sciences**. Tome 47, Belgium: Brepolis Publishers, 2000, p. 57 – 68; 272 – 304; 404 – 535.
- _____. **La science contemporaine 1 – Le XIX^e siècle**. Histoire générale des sciences, tomes III-I, Paris: Presses Universitaires de France, 1961, p. VI – VIII; 1 – 76.
- _____. **La science moderne – de 1450 a 1800**. Histoire générale des sciences, tome II, Paris: Presses Universitaires de France, 1958a, p. 432 – 469.
- _____. **A. M. Legendre, Théorie des nombres**. Compte Rendu, Revue d'histoire des sciences, volume 11, n. 4, 1958b, p. 363-364. Disponível em: <<http://www.persee.fr>>. Acesso em: 19 fev. 2009.
- _____. **Les relations d'Evariste Galois avec les mathématiciens de son temps**. Article, Revue d'histoire des sciences, volume 1, n. 2, 1947, p. 114-130. Disponível em: <<http://www.persee.fr>>. Acesso em: 19 fev. 2009.
- URBANEJA, P. G.. La matematica de la revolucion francesa. In: SEMINARIO OROTAVA DE HISTORIA DE LA CIENCIA, Año III, Las Palmas, **Actas...**:Las Palmas, 1997, p. 93-132. Disponível em: <divulgamat.ehu.es/weborriak/.../LecInaugl0506PMGU>. Acesso em: 19 de fev. 2009.

VANDERMONDE, A-T. **Remarques sur les problèmes de situation.** Mémoires de l' Académie Royale des Sciences, Lut à la séance en 1771, Paris: de l' Imprimerie Royale, 1774, p. 566-575.

ZOLOTAREFF, J. I. **Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité de Legendre.** Nouvelles Annales de Mathématiques, 2^e série, Vol. 11, Saint-Pétersbourg: Université de Saint-Pétersbourg, 1872, p. 354-62.