

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e
Estrutura Variável**

Josenalde Barbosa de Oliveira

Profº. Aldayr Dantas de Araújo
Orientador

**NATAL/RN
FEVEREIRO/2003**

Josenalde Barbosa de Oliveira

Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável

Dissertação apresentada como requisito parcial à
obtenção do grau de mestre.

Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica,
Centro de Tecnologia, Universidade Federal do
Rio Grande do Norte.

Orientador: Prof. Aldayr Dantas de Araújo.

**NATAL/RN
FEVEREIRO/2003**

Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável

Josenalde Barbosa de Oliveira

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada por:

Prof. Aldayr Dantas de Araújo, D.Sc.
ORIENTADOR

Prof. David Simonetti Barbalho, Dr.
MEMBRO DA BANCA

Prof. Francisco das Chagas Mota, D. Sc.
MEMBRO DA BANCA

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D. Sc.
MEMBRO DA BANCA

Prof. Caio Dorneles Cunha, M. Sc.
MEMBRO DA BANCA

Natal, 06 de Fevereiro de 2003

Aos meus pais (José Barbosa e Maria Lúcia),
meus irmãos (Joalde e Cecília),
minha avó (Dona Nazaré),
e a minha maravilhosa esposa (Ceíça), pela ajuda e carinho.

Agradecimentos

Agradeço, em especial, ao nosso incomparável, onipotente, onipresente, soberano e maravilhoso Deus, o qual, por sua infinita misericórdia, nos transforma segundo sua vontade, para sermos vasos em suas mãos, moldados pelo seu amor. Toda honra, glória e louvor seja dada a Deus, em nome de seu Filho Jesus Cristo, por me capacitar a realizar tal trabalho tão abençoado.

Agradeço ao professor Aldayr Dantas de Araújo, por demonstrar tão grande amor à sua profissão e ter prazer e paciência em ensinar, corrigir, criticar, elogiar, enfim, ler e reler este trabalho.

Agradeço aos professores Francisco das Chagas Mota, Andrés Ortiz Salazar e André Laurindo Maitelli pelos novos conhecimentos a mim transmitidos nas disciplinas cursadas durante este curso.

Agradeço à minha família, em especial à minha esposa, por compartilhar com alegria e paciência todos os momentos na realização deste trabalho.

Agradeço ao apoio fundamental dos amigos José Marcelo, Plínio e Renato pela ajuda na parte prática, em dar idéias e apoio para a construção dos circuitos complementares.

Agradeço ao Pr. Jean-Claude e sua esposa Gicelma pelo apoio e orações, bem como a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho e que, por ventura, não foram aqui citados nominalmente.

“Assim diz o SENHOR: Não se glorie o sábio
na sua sabedoria, nem se glorie o forte na sua força; não
se glorie o rico nas suas riquezas. Mas o que gloriar glorie-se nisto:
em me conhecer e saber que eu sou o SENHOR, que faço beneficência, juízo e justiça na terra;
porque destas coisas me agrado, diz o SENHOR.”

Jeremias 9:23,24

Sumário

Resumo	ix
Abstract	x
1. Introdução	1
1.1 Modelagem	1
1.2 Projeto do Controlador	2
1.3 Implementação	2
1.4 Controle Adaptativo	2
1.4.1 Controle Adaptativo Direto e Indireto	4
1.4.2 Controle Adaptativo por Modelo de Referência	6
1.5 Controle por Estrutura Variável	8
1.6 Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável	9
1.7 Por que Controle Adaptativo?	9
2. Controle Adaptativo por Modelo de Referência	11
2.1 Controle Adaptativo Direto por Modelo de Referência	11
2.1.1 Parametrização e Condições para a Planta	11
2.1.2 Filtros da Entrada e da Saída da Planta	12
2.1.3 Vetor de Estado Geral para Planta e Filtros	14
2.1.4 Lei de Adaptação para o Vetor de Parâmetros	17
2.1.5 Simulações e Resultados	18
2.2 Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência	20
2.2.1 Simulações e Resultados	26
3. Controle Adaptativo Direto por Modelo de Referência e Estrutura Variável	28
3.1 Sistemas com Estrutura Variável	28
3.1.1 Controle Equivalente e Região Linear	31
3.2 VS-MRAC Direto	34
3.2.1 VS-MRAC Compacto	35
3.2.2 Simulações e Resultados	36
4. Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável	38
4.1 Prova de Estabilidade	42
4.2 Simulações e Resultados	44

5. Resultados Práticos	46
5.1 Motor de Indução Trifásico	46
5.2 Modelagem	47
5.3 Implementação	52
5.3.1 Sistema de Acionamento	52
5.3.2 Parâmetros do Motor de Indução	52
5.3.3 Função de Transferência do Motor	53
5.3.4 Resultados Obtidos	54
6. Conclusões Gerais	58
 APÊNDICE A Fundamentação Matemática	59
A.1 Fundamentos da Teoria de Estabilidade de Lyapunov	59
A.1.1 Sistemas Não-Lineares	59
A.1.2 Sistemas Autônomos e Não-Autônomos	61
A.1.3 Pontos de Equilíbrio	61
A.1.4 Conceitos de Estabilidade	62
A.1.4.1 Estabilidade e Instabilidade	62
A.1.4.2 Estabilidade Assintótica e Estabilidade Exponencial	64
A.1.4.3 Estabilidade Local e Global	65
A.2 Método Direto de Lyapunov	65
A.2.1 Funções Definidas Positivas e Funções de Lyapunov	66
A.2.2 Teoremas de Estabilidade	66
A.3 Análise de Sistemas Baseada no Método Direto de Lyapunov	67
A.3.1 Análise de Lyapunov para Sistemas Lineares Invariantes no Tempo	68
A.3.1.1 Matriz Definida Positiva, Simétrica e Anti-Simétrica	68
A.3.1.2 Funções de Lyapunov para S.L.I.T.	69
A.4 Projeto de Controle Baseado no Método Direto de Lyapunov	70
A.5 Análise de Sistemas Usando o Lema de Barbalat	71
A.5.1 Propriedades Assintóticas de Funções e suas Derivadas	71
A.5.2 Lema de Barbalat	71
A.5.3 Usando o Lema de Barbalat para Análise de Estabilidade	71
A.6 Funções de Transferência Reais Positivas e Estritamente Reais Positivas	72
A.7 Lema de Kalman-Yakubovitch	73
A.8 Equação Diofantina	74

APÊNDICE B Lei de Controle para a Condição de <i>Matching</i>	76
APÊNDICE C Provas de Estabilidade	80
C.1 MRAC Direto	80
C.2 MRAC Indireto	84
C.3 Sistemas com Estrutura Variável	91
C.4 VS-MRAC Direto	94
Referências	100

Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável

Resumo

O objetivo deste trabalho é desenvolver um controlador adaptativo por modelo de referência e estrutura variável, robusto a variações paramétricas e perturbações e com desempenho transitório bastante satisfatório, porém com a utilização de uma abordagem indireta, sendo portanto um trabalho inédito.

Na abordagem direta, as leis de adaptação são projetadas diretamente para os parâmetros do controlador. Na abordagem indireta, as leis de adaptação são projetadas para os parâmetros da planta, os quais apresentam incertezas que podem ser conhecidas mais facilmente, pois representam incertezas em parâmetros físicos, tais como resistências, capacitâncias, momentos de inércia, coeficientes de atrito, etc, sendo sua principal vantagem a possibilidade de se chegar a um projeto mais simples.

São revisadas as técnicas de controle adaptativo por modelo de referência, em ambas as abordagens (direta e indireta), bem como o controle adaptativo por modelo de referência e estrutura variável, em sua abordagem direta. Para um melhor entendimento e contextualização da técnica proposta é apresentada uma introdução ao controle por estrutura variável.

Em todas as técnicas mencionadas são feitas as demonstrações de estabilidade, bem como são apresentados resultados de simulações. Para a técnica proposta também foi realizado um ensaio experimental em um motor de indução trifásico.

Variable Structure Model Reference Indirect Adaptive Control

Abstract

An indirect approach to the variable structure model reference adaptive control with robustness to parametric uncertainties and disturbances as well as fast transient is proposed, being therefore an unedited work.

In the direct approach, the switching laws are designed to the controller parameters. On the other hand, in the indirect approach, the switching laws are designed to the plant parameters, which present uncertainties that can be known easier than in the direct approach, since they are related with physical parameters, such as inertia moments, etc., being its main advantage the possibility to get an easier design.

The model reference adaptive control is reviewed, in both approaches (direct and indirect), as well as the variable structure model reference adaptive control, in its direct approach.

For a better understanding of the proposed technique is presented an introduction to the variable structure systems.

For each mentioned technique, stability proofs and simulations results are shown.

For the particular proposed method was also carried out an experimental test on a three-phase induction motor.

Capítulo 1

Introdução

O projeto de um controlador que possa alterar ou modificar o comportamento e a resposta de uma planta desconhecida de modo a satisfazer determinados requisitos de desempenho pode ser um problema tedioso e desafiador em muitas aplicações de controle. Por planta, entende-se um processo caracterizado por um certo número de entradas u e de saídas y .

As entradas u são processadas de modo a produzir várias saídas y que representam a resposta mensurada da planta. A tarefa do projeto de controle é escolher a entrada u de forma que a resposta y satisfaça os requisitos de desempenho. Uma vez que a planta é usualmente complexa, isto é, pode consistir de muitas partes mecânicas, eletrônicas, hidráulicas, etc., a escolha apropriada de u em geral não é direta. Neste contexto, a maioria dos engenheiros de controle adota uma sistemática padrão de projeto de controlador, composta de três etapas: modelagem, projeto do controlador e implementação [Ioannou e Sun, 1996].

1.1 Modelagem

A tarefa do engenheiro de controle nesta etapa é entender o mecanismo de processamento da planta, de forma que esta possa ser descrita por equações matemáticas. Estas equações constituem o modelo matemático da planta. Um modelo exato da planta deve produzir a mesma resposta da planta, assumindo que a entrada aplicada ao modelo e suas condições iniciais são exatamente iguais às da planta. Contudo, a complexidade da maioria das plantas físicas torna o desenvolvimento de tal modelo difícil ou até mesmo impossível. Mas, mesmo que o modelo exato se torne disponível, sua dimensão é enorme, e sua descrição não-linear e variante no tempo o torna de utilidade mínima ou nenhuma do ponto de vista do projeto do controlador. Isto faz com que a etapa de modelagem seja bastante complicada, uma vez que o engenheiro deve obter um modelo que descreva bem as relações entrada/saída da planta e que, ao mesmo tempo, seja simples o bastante para ser usado no projeto. Um modelo simples geralmente leva a um controlador simples que é fácil de entender e implementar.

Um modelo pode ser desenvolvido através de leis físicas ou por processamento de dados de entrada/saída obtidos através de vários experimentos. Além disto, são feitas ainda

simplificações no modelo, através de métodos como linearização em torno de pontos de equilíbrio e/ou técnicas de redução de ordem do modelo.

A linearização consiste em aproximar a planta por um modelo linear que seja válido em torno de um determinado ponto de equilíbrio. Diferentes pontos de equilíbrio podem levar a diferentes modelos lineares para a planta.

A redução da ordem do modelo consiste em desprezar pequenos efeitos e fenômenos fora da faixa de frequência de interesse, levando a um modelo da planta mais simples.

Em geral, o processo de modelagem envolve um bom entendimento do processo e dos requisitos de desempenho, e pode requerer alguma experiência do engenheiro de controle.

1.2 Projeto do Controlador

Uma vez com o modelo da planta disponível, segue-se o projeto do controlador, o qual é feito para atender aos requisitos de desempenho para o modelo. Se o modelo é uma boa aproximação da planta, pode-se esperar que o controlador atuando no modelo produza um resultado próximo ao esperado quando o mesmo for aplicado à planta real. Qualquer discrepância entre o modelo e planta só será percebido quando o controlador for aplicado à planta. Um passo intermediário do projeto consiste em supor uma classe de incertezas que possam aparecer na planta, e construir o controlador de forma que seja robusto a tais perturbações.

1.3 Implementação

Nesta etapa, o controlador projetado está pronto para ser aplicado à planta desconhecida. A implementação pode ser realizada utilizando um computador digital, embora em algumas aplicações computadores analógicos podem também ser utilizados. Devem ser observados aspectos como tipo de computador disponível, interfaces A/D-D/A, softwares, etc. A velocidade do computador e limitações de precisão podem impor limites à complexidade do controlador, podendo ser necessário o reprojeto do controlador, sem contudo violar os requisitos de desempenho.

1.4 Controle Adaptativo

As plantas, em geral, podem ser representadas por uma classe de modelos descritos pela equação diferencial linear:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, x(0) = x_0 \\ y &= C^T x + Du\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde $x \in R^n$ é o estado do modelo, $u \in R^r$ é a entrada da planta, e $y \in R^l$ é a saída da planta. As matrizes $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times r}$, $C \in R^{n \times l}$, $D \in R^{l \times r}$ podem ser constantes ou variantes no tempo. Esta classe de modelos é geral devido ao fato de servir como aproximação de plantas não-lineares em torno de pontos de equilíbrio. O controle de modelos de plantas com A, B, C e D desconhecidas ou parcialmente conhecidas é objeto de estudo da área de sistemas de controle adaptativo.

Adaptar-se significa alterar o seu comportamento de modo a se ajustar a circunstâncias novas ou modificadas.

O projeto de pilotos automáticos para aeronaves de alto desempenho foi uma das primeiras motivações para a pesquisa de controle adaptativo no início da década de 50. Aeronaves operam em uma grande faixa de velocidades e altitudes, e sua dinâmica é não-linear e variante no tempo. Para um dado ponto de operação, especificado pela velocidade e altitude, a dinâmica complexa da aeronave pode ser aproximada por um modelo linear da mesma forma que (1.1), isto é, para cada ponto de operação, as matrizes do modelo possuem diferentes valores.

Uma vez que a saída da planta y carrega informação sobre o estado x da planta, bem como dos parâmetros, em princípio pode-se supor que um sofisticado controlador por realimentação pode ser capaz de “aprender” sobre alterações nos parâmetros através do processamento de y e utilizar ganhos apropriados para acomodá-los [Ioannou e Sun, 1996]. Este argumento leva a uma estrutura de controle por realimentação na qual o controle adaptativo é baseado. A estrutura do controlador consiste de uma malha de realimentação e de um controlador com ganhos ajustáveis, conforme a Figura 1.1. A forma como são alterados os ganhos do controlador em resposta a mudanças na planta e perturbações distingue um esquema de controle do outro.

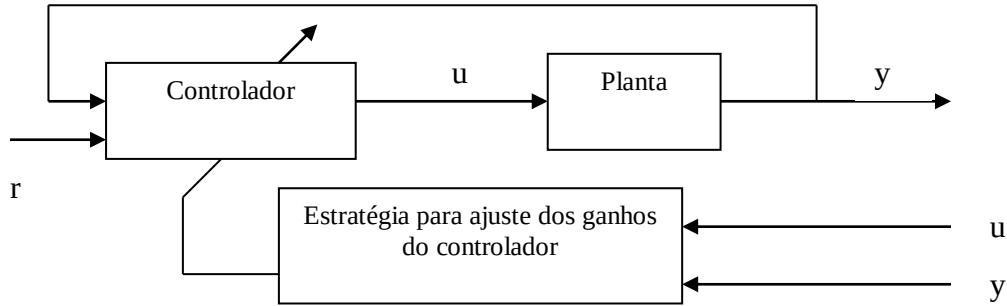


Figura 1.1 Estrutura do controlador com ganhos ajustáveis

1.4.1 Controle Adaptativo Direto e Indireto

Um controlador adaptativo é formado através da combinação de um estimador de parâmetros em tempo real, que provê a estimativa dos parâmetros desconhecidos a cada instante, com uma lei de controle. A forma como o estimador de parâmetros, também conhecido como lei adaptativa, é combinado com a lei de controle, leva a dois diferentes métodos. No primeiro método, conhecido como controle adaptativo direto, o modelo da planta é parametrizado em função dos parâmetros do controlador, os quais são estimados diretamente, sem cálculos intermediários envolvendo estimativas de parâmetros da planta. No segundo método, conhecido como controle adaptativo indireto, os parâmetros da planta são estimados a cada instante e utilizados para calcular os parâmetros do controlador.

No controle adaptativo indireto, o modelo da planta $P(\theta^*)$ é parametrizado em relação a um vetor de parâmetros desconhecidos θ^* . Por exemplo, para uma planta linear, invariante no tempo (LIT) e monovariável (SISO), θ^* pode representar os coeficientes desconhecidos do numerador e do denominador da função de transferência do modelo. Um estimador on-line gera uma estimativa $\theta(t)$ de θ^* a cada instante t , processando a entrada u e a saída y . A estimativa dos parâmetros $\theta(t)$ especifica um modelo estimado caracterizado por $\hat{P}(\theta(t))$ que, para os propósitos do projeto do controlador, é tratado como o verdadeiro modelo da planta no instante t , e é usado para calcular os parâmetros do controlador ou vetor de ganhos $\theta_c(t)$ através da equação algébrica $\theta_c(t) = F(\theta(t))$ a cada instante t . As formas da lei de controle $C(\theta_c)$ e da equação algébrica $\theta_c = F(\theta)$ são escolhidas como as mesmas que seriam usadas (lei de controle $C(\theta_c^*)$ e equação $\theta_c^* = F(\theta^*)$) para atender os requisitos de desempenho para o modelo $P(\theta^*)$ se θ^* fosse conhecido. É claro, neste método, que

$C(\theta_c(t))$ é projetada a cada instante t de modo a satisfazer os requisitos de desempenho do modelo estimado $\hat{P}(\theta(t))$, que pode ser diferente do modelo da planta desconhecida $P(\theta^*)$. Assim, o principal problema no controle adaptativo indireto é escolher a classe de leis de controle $C(\theta_c)$ e a classe de estimadores de parâmetros que geram $\theta(t)$, bem como a equação algébrica $\theta_c(t) = F(\theta(t))$, de forma que $C(\theta_c(t))$ atenda os requisitos de desempenho para o modelo $P(\theta^*)$ com θ^* desconhecido. A Figura 1.2 mostra o diagrama de blocos para o controle adaptativo indireto.

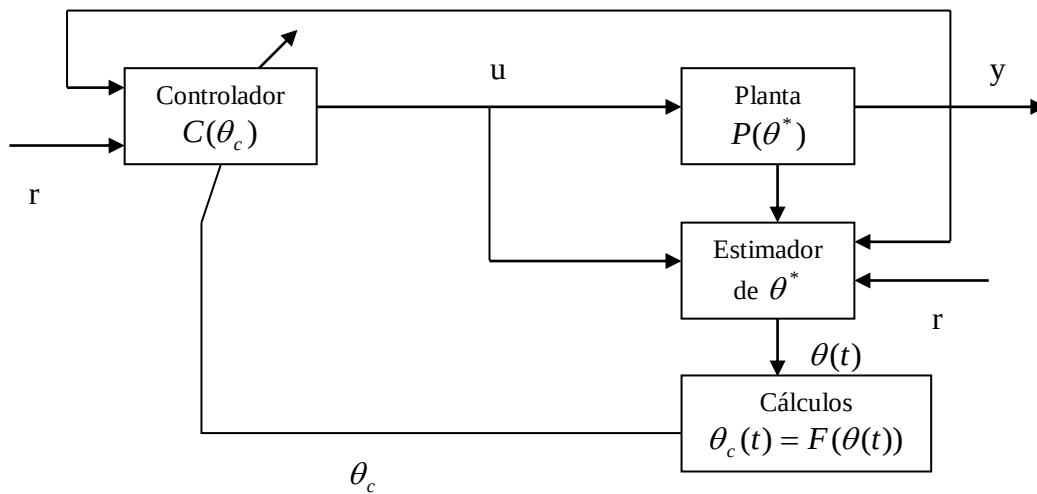


Figura 1.2 Diagrama de blocos para controle adaptativo indireto

No controle adaptativo direto, o modelo da planta $P(\theta^*)$ é parametrizado em função de um vetor de parâmetros do controlador desconhecido θ_c^* , com o qual $C(\theta_c^*)$ atende os requisitos de desempenho, para obter o modelo $P_c(\theta_c^*)$ com exatamente as mesmas características entrada/saída de $P(\theta^*)$.

O estimador de parâmetros on-line é projetado baseado em $P_c(\theta_c^*)$ ao invés de $P(\theta^*)$ para prover estimativas diretas $\theta_c(t)$ de θ_c^* em cada instante t através do processamento da entrada u e da saída y da planta. A estimativa $\theta_c(t)$ é então usada para atualizar o vetor de parâmetros do controlador θ_c sem cálculos intermediários. A escolha da classe de leis de controle $C(\theta_c)$ e os estimadores de parâmetros que geram $\theta_c(t)$, de forma que $C(\theta_c(t))$ atenda os requisitos de desempenho para o modelo $P(\theta^*)$ são os principais problemas no

controle adaptativo direto. As propriedades do modelo $P(\theta^*)$ são fundamentais na obtenção do modelo parametrizado $P_c(\theta_c^*)$ que é conveniente para a estimação on-line. Como consequência, o controle adaptativo direto é restrito a certas classes de modelos de planta. Uma classe de modelos possível consiste em todas as plantas monovariáveis, lineares e invariantes no tempo que são de fase mínima, isto é, seus zeros estão localizados em $\text{Re}[s] < 0$. A Figura 1.3 mostra o diagrama de blocos para o controle adaptativo direto.

A idéia por trás do controle adaptativo é que uma vez que as estimativas dos parâmetros $\theta_c(t)$ e $\theta(t)$ convergem para os valores verdadeiros θ_c^* e θ^* , respectivamente, o desempenho do controlador adaptativo $C(\theta_c)$ tende para o alcançado por $C(\theta_c^*)$, no caso dos parâmetros serem conhecidos.

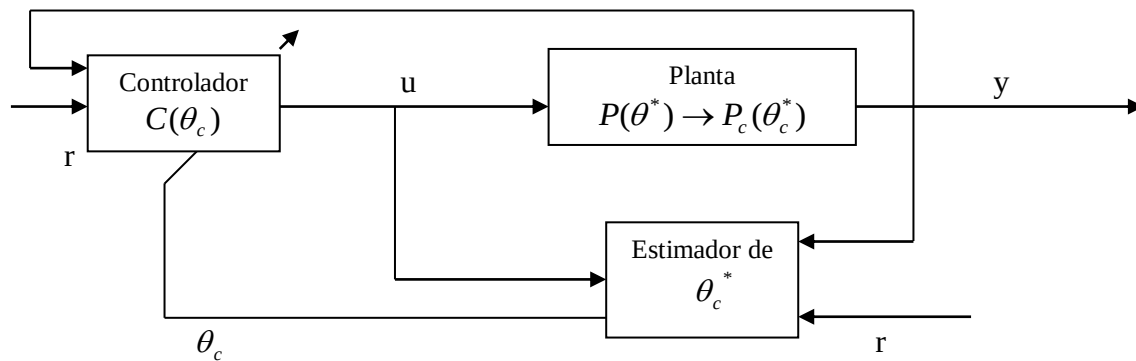


Figura 1.3 Diagrama de blocos para controle adaptativo direto

1.4.2 Controle Adaptativo por Modelo de Referência (Model Reference Adaptive Control - MRAC)

O controle adaptativo por modelo de referência (MRAC) [Narendra e Valavani, 1978] é derivado do problema de acompanhamento de modelo ou problema de controle por modelo de referência (MRC). No MRC, um bom entendimento da planta e dos requisitos de desempenho, possibilita o projetista a adotar um modelo, conhecido como modelo de referência, o qual descreve as características de entrada/saída desejadas para a planta em malha fechada. O objetivo do MRC é encontrar a lei de controle por realimentação que altera a estrutura e a dinâmica da planta de tal forma que as propriedades de entrada/saída sejam exatamente iguais às do modelo de referência. A desvantagem é que o processo de adaptação ao modelo, em geral, é lento e oscilatório. A estrutura para o esquema MRC para uma planta linear e invariante no tempo é mostrada na Figura 1.4.

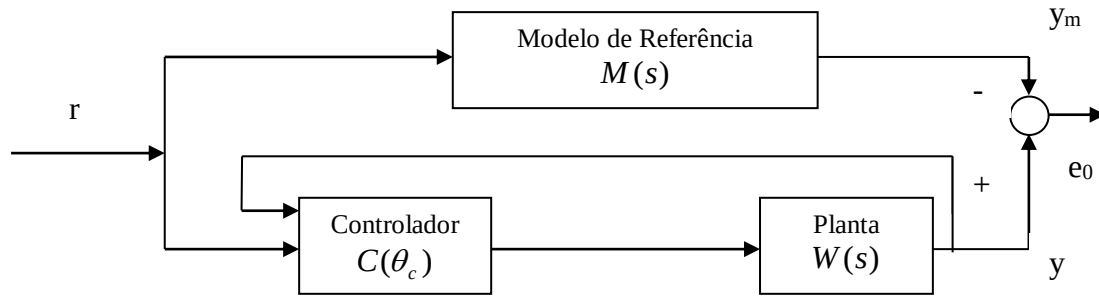


Figura 1.4 Controle por modelo de referência

A função de transferência $M(s)$ do modelo de referência é projetada de forma que para um dado sinal de referência $r(t)$ a saída $y_m(t)$ represente a saída desejada $y(t)$ que a planta deve seguir. O controlador por realimentação $C(\theta_c^*)$ é projetado de forma que todos os sinais sejam limitados e a função de transferência da planta de r para y seja igual a $M(s)$. Esta condição garante que para qualquer sinal de referência $r(t)$, o erro de saída $e_0 = y - y_m$, que representa o desvio da saída da planta em relação à trajetória desejada y_m , tenda para zero com o tempo. A condição de “matching” para a função de transferência da planta é obtida através do cancelamento dos zeros da função de transferência da planta $W(s)$ e substituindo-os pelos zeros de $M(s)$ e tornando os pólos do sistema em malha fechada iguais aos do modelo de referência, através do controlador $C(\theta_c^*)$. O cancelamento dos zeros da planta impõe a restrição da planta ser de fase mínima, isto é, ter zeros no semiplano esquerdo. Se qualquer zero da planta for instável, seu cancelamento pode facilmente levar a sinais ilimitados.

O projeto de $C(\theta_c^*)$ requer o conhecimento dos coeficientes da função de transferência da planta $W(s)$. Se θ^* é um vetor contendo todos os coeficientes de $W(s) = W(s, \theta^*)$, então o vetor de parâmetros θ_c^* deve ser conhecido exatamente.

Quando θ^* é desconhecido o esquema MRC da Figura 1.4 não pode ser implementado, pois θ_c^* não pode ser calculado através de $\theta_c^* = F(\theta^*)$, sendo assim desconhecido. Uma solução é substituir θ_c^* desconhecido na lei de controle por sua estimativa $\theta_c(t)$ obtida usando o método direto ou indireto. O esquema de controle resultante é conhecido como MRAC e pode ser classificado como direto e indireto, conforme pode ser visto nas Figuras 1.5 e 1.6, respectivamente.

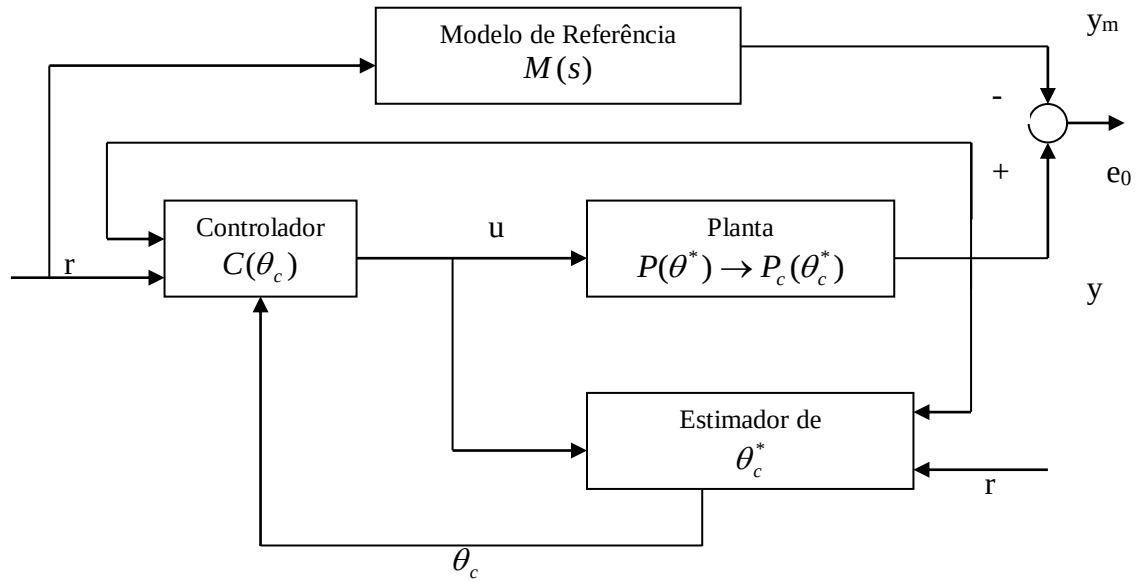


Figura 1.5 MRAC direto

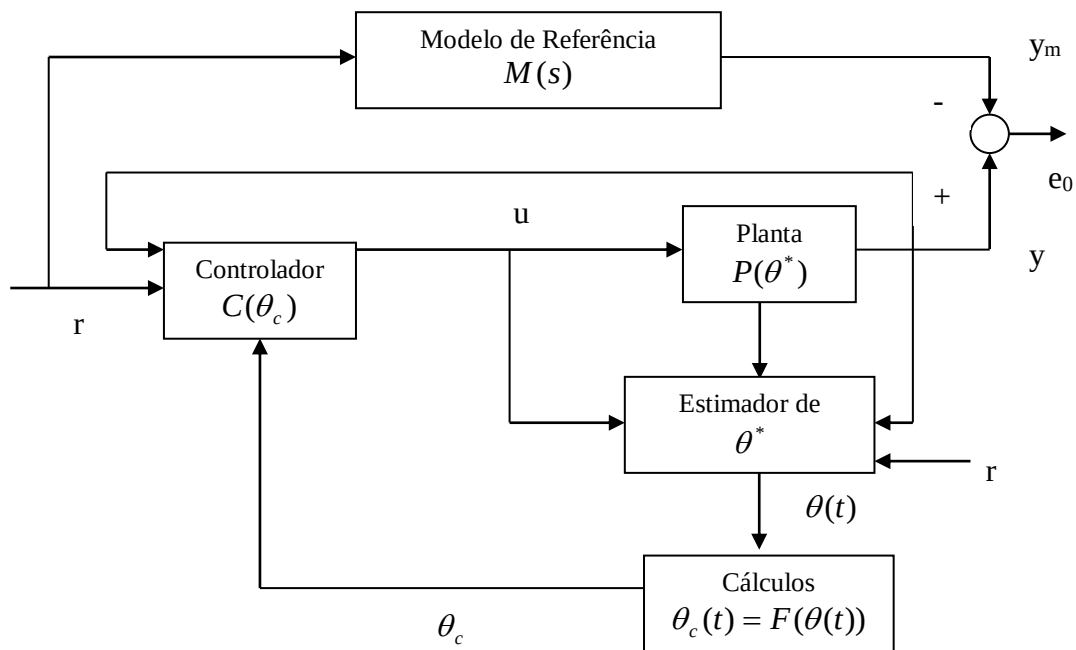


Figura 1.6 MRAC indireto

1.5 Controle por Estrutura Variável (Variable Structure - VS)

A teoria de sistemas com estrutura variável tem sido bastante utilizada no tratamento de problemas de sistemas de controle, principalmente na forma conhecida como controle por modos deslizantes [Utkin, 1978]. Neste método, as funções de chaveamento das variáveis de

controle devem ser projetadas de modo a restringir a dinâmica do sistema a uma superfície chamada *Superfície Deslizante*.

Os sistemas com estrutura variável têm como principais características a rapidez do transitório e robustez a variações paramétricas e perturbações, dentro de uma faixa de tolerância estipulada no projeto. Em contrapartida, possui alguns aspectos a considerar, como alto valor do sinal de controle inicial e chaveamento do sinal de controle em alta frequência, chamado *Chattering*.

Esta teoria teve origem no estudo dos controladores à relé e baseia-se no chaveamento das variáveis de controle dentro de um conjunto de funções das variáveis de estado da planta de acordo com uma dada regra, o que impõe para este método o conhecimento de todas as variáveis de estado do sistema.

1.6 Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC)

Esta técnica de controle tem por objetivo aproveitar as características de cada abordagem individualmente [Hsu, Araújo e Costa, 1994], e construir um controlador que tenha um transitório rápido, não muito oscilatório, e boa robustez a incertezas, tudo isto utilizando apenas medições da entrada e da saída da planta, não precisando ter acesso às variáveis de estado do processo [Hsu e Costa, 1989; Araújo, 1993; Paiva, 1996]. Da mesma forma que o MRAC, pode-se ter as duas abordagens de projeto, isto é, VS-MRAC direto ou indireto, sendo este último o objetivo deste trabalho, por ser uma abordagem inédita.

1.7 Por que Controle Adaptativo?

Em algumas aplicações de controle, tal como manipulação de robôs, os sistemas a serem controlados possuem incertezas nos parâmetros no início da operação de controle. A menos que tal incerteza seja gradualmente reduzida on-line por um mecanismo de adaptação ou estimação, isto pode causar instabilidade ou imprecisão do sistema de controle. Em muitas outras aplicações, tais como em sistemas de potência, a dinâmica do sistema pode ter valores bem conhecidos no início, mas pode apresentar variações imprevisíveis nos parâmetros ao longo da operação. Sem um contínuo reprojetado do controlador, o projeto inicial do controlador pode não responder bem a alterações na planta. Generalizando, o objetivo básico do controle adaptativo é manter o desempenho de um sistema mesmo na presença de incertezas ou variações desconhecidas nos parâmetros da planta [Slotine e Li, 1991]. Uma vez que tais

incertezas de parâmetros ou variações ocorrem em muitos problemas práticos, o controle adaptativo é útil em muitos contextos industriais, como:

- *Robôs manipuladores:* Robôs precisam manipular cargas de vários tamanhos, pesos e distribuições de massa. É altamente restritivo assumir que os parâmetros inerciais das cargas são bem conhecidos antes de o robô pegá-las e movê-las. Se controladores com ganhos constantes são utilizados e os parâmetros das cargas não são precisamente conhecidos, o movimento do robô pode ser impreciso ou instável. O controle adaptativo, por outro lado, permite os robôs movimentarem cargas com parâmetros desconhecidos com alta velocidade e alta precisão.
- *Curso de navios:* Em longos cursos, os navios são geralmente colocados sob piloto automático. Contudo, a dinâmica de um navio depende de vários parâmetros incertos, como profundidade, carga no navio, vento, condições do mar, etc. O controle adaptativo pode ser usado para encontrar um bom desempenho de controle sob condições de operação variáveis, e assim evitar perda de energia, com movimentos impróprios.
- *Controle de processos:* Modelos para processos metalúrgicos e químicos são usualmente complexos e difíceis de se obter. Os parâmetros que caracterizam os processos variam de módulo para módulo. Além disso, as condições de trabalho são variantes no tempo (por exemplo, as características do reator variam de acordo com a vida do reator, as matérias primas que entram no processo nunca são exatamente as mesmas, além das condições atmosféricas e climáticas também mudarem). De fato, o controle de processos é uma das mais importantes e ativas aplicações do controle adaptativo.
- Pode ser aplicado em várias outras áreas, como engenharia biomédica, sistemas de potência, etc.

Capítulo 2

Controle Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC)

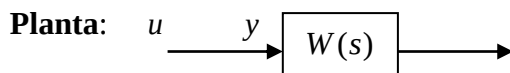
Como foi visto no capítulo 1, a teoria de controle adaptativo tem sido usada como uma das possíveis soluções para o controle de sistemas de dinâmica muito complexa ou desconhecida. Este tipo de metodologia caracteriza-se por um controlador com parâmetros ajustáveis e um mecanismo de "aprendizagem" ou de adaptação, o qual se adapta a mudanças na planta. O MRAC constitui uma das principais abordagens da área, e os algoritmos de adaptação que utilizam somente informações da entrada e saída da planta para a geração da lei de controle são de particular interesse prático, tendo em vista sua simplicidade e a necessidade de ter acesso somente às variáveis de saída do processo (planta).

2.1 Controle Adaptativo Direto por Modelo de Referência (MRAC Direto)

A abordagem direta do MRAC [Narendra e Valavani, 1978] (Seção 1.4.1) se caracteriza por um mecanismo de adaptação que gera os parâmetros do controlador on-line, a partir de informações da entrada e saída da planta [Araújo 1993; Paiva, 1996], como pode ser visto na Figura 1.5. Além disto, é preciso definir um modelo de referência, o qual especifica o comportamento desejável para a planta.

2.1.1 Parametrização e Condições para a Planta

Consideremos a planta e o modelo de referência especificados pelas seguintes funções de transferência:

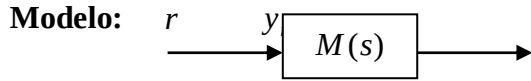


$$y(s) = W(s)u(s)$$

$$W(s) = k_p \frac{n_p(s)}{d_p(s)}$$

$$n_p(s) = s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i s^{n-1-i} \quad (2.1)$$

$$d_p(s) = s^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i s^{n-i} = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \sum_{i=2}^n \alpha_i s^{n-i} = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} s^{n-1-i} \quad (2.2)$$



$$y_m(s) = M(s)r(s)$$

$$M(s) = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)}$$

$$n_m(s) = s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{mi} s^{n-1-i} \quad (2.3)$$

$$d_m(s) = s^n + \sum_{i=1}^n \alpha_{mi} s^{n-i} = s^n + \alpha_{m1} s^{n-1} + \sum_{i=2}^n \alpha_{mi} s^{n-i} = s^n + \alpha_{m1} s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{m,i+1} s^{n-1-i} \quad (2.4)$$

Para a obtenção do algoritmo de controle, faz-se as seguintes hipóteses:

H1. A planta é monovariável, controlável, observável e tem grau relativo $n^* = 1$;

H2. O grau n de $d_p(s)$ é conhecido ;

H3. k_m e k_p têm o mesmo sinal (positivo, sem perda de generalidade);

H4. O modelo é ERP e tem o mesmo grau relativo da planta;

H5. $n_p(s)$, $n_m(s)$ e $d_m(s)$ são polinômios mônicos Hurwitz;

H6. $d_p(s)$ é um polinômio mônico;

O algoritmo de adaptação necessita de $2n$ variáveis. Uma vez que só se tem acesso à entrada e à saída da planta, é construído um conjunto de variáveis de estado a partir das medições de u e y , os quais são sinais filtrados da entrada e da saída da planta [Ioannou e Sun, 1996].

2.1.2 Filtros da Entrada e da Saída da Planta

Definem-se os seguintes filtros

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \Lambda v_1 + g u \\ \dot{v}_2 = \Lambda v_2 + g y \end{cases}$$

e, aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$\begin{cases} v_1(s) = (sI - \Lambda)^{-1} \cdot g \cdot u(s) \\ v_2(s) = (sI - \Lambda)^{-1} \cdot g \cdot y(s) \end{cases}$$

onde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\lambda_{n-1} & -\lambda_{n-2} & -\lambda_{n-3} & \dots & -\lambda_2 & -\lambda_1 \end{bmatrix} \in R^{(n-1) \times (n-1)}$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \in R^{n-1}, v_1 \text{ e } v_2 \in R^{n-1}, \gamma \in R$$

tem-se ainda que

$$(sI - \Lambda)^{-1} \cdot g = \frac{\gamma}{\lambda(s)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s^{n-2} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde $\lambda(s) = \det(sI - \Lambda) = s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i s^{n-1-i}$ é mônico e de grau $n-1$

O vetor w com as $2n$ variáveis recebe o nome de *vetor regressor* e é da forma

$$w = \begin{bmatrix} v_1 \\ y \\ v_2 \\ r \end{bmatrix}$$

e, assim, a lei de controle u é dada por

$$u = \theta^T(t) \cdot w(t) \quad (2.6)$$

onde $\theta(t)$ é o vetor de parâmetros adaptativos. Considerando u^* o sinal de controle quando $\theta = \theta^*$ é conhecido, a lei de controle na condição de *matching* fica

$$u^* = \theta_{v_1}^{*T} v_1 + \theta_n^* y + \theta_{v_2}^{*T} v_2 + \theta_{2n}^* r \quad (2.7)$$

$$\text{com } \theta^* = \begin{bmatrix} \theta_{v_1}^* \\ \theta_n^* \\ \theta_{v_2}^* \\ \theta_{2n}^* \end{bmatrix}$$

Nestas condições, tem-se que $\exists! \theta^*$ tal que com $u = \theta^{*T} w = u^*$, obtém-se $\frac{y(s)}{r(s)} = M(s)$, ou seja, $y \rightarrow y_m$.

2.1.3 Vetor de Estado Geral para Planta e Filtros

A partir das variáveis de estado da planta e dos filtros, é construído o seguinte vetor de estado

$$X = \begin{bmatrix} x \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

onde x é o vetor de estado da planta e é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = c^T x \end{cases}$$

a qual é uma realização irredutível da função de transferência da planta.

Assim, tem-se que

$$\begin{cases} \dot{X} = A_0 X + b_0 u \\ y = c_c^T X \end{cases} \quad (2.8)$$

onde

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ g c^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}; b_0 = \begin{bmatrix} b \\ g \\ 0 \end{bmatrix}; c_c^T = \begin{bmatrix} c^T & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Adicionando e subtraindo o termo $b_0 u^*$, fica-se com

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_0 X + b_0 u + b_0 u^* - b_0 u^* \\ \dot{X} &= A_0 X + b_0 u^* + b_0 (u - u^*) \\ \dot{X} &= A_0 X + b_0 \theta^{*T} w + b_0 (u - u^*) \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ y \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ c^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \Omega X \\ \bar{\theta}^* &= \begin{bmatrix} \theta_{v_1}^* \\ \theta_n^* \\ \theta_{v_2}^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= A_0 X + b_0 [\bar{\theta}^{*T} w + \theta_{2n}^* r] + b_0 (u - u^*) \\
\dot{X} &= A_0 X + b_0 \bar{\theta}^{*T} \Omega X + b_0 \theta_{2n}^* r + b_0 (u - u^*) \\
\dot{X} &= (A_0 + b_0 \bar{\theta}^{*T} \Omega) X + b_0 \theta_{2n}^* r + b_0 (u - u^*) \\
\dot{X} &= A_c X + b_c r + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c (u - u^*) \\
y &= c_c^T X
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_c &= A_0 + b_0 \bar{\theta}^{*T} \Omega \\
b_c &= b_0 \theta_{2n}^*
\end{aligned}$$

No domínio da frequência, tem-se

$$y(s) = M(s) \left[r(s) + \frac{1}{\theta_{2n}^*} (u(s) - u^*(s)) \right] \quad (2.9)$$

onde $c_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c$ é uma realização não mínima de $M(s)$, pois, se $u = u^*$, o sistema se comporta como o modelo de referência. Então,

$$\begin{cases} \dot{X}_m = A_c X_m + b_c r \\ y_m = c_c^T X_m \end{cases} \quad (2.10)$$

Desenvolvendo no domínio da frequência, fica-se com

$$\begin{aligned}
X_m(s) &= (sI - A_c)^{-1} b_c r(s) \\
y_m(s) &= c_c^T X_m(s) \\
y_m(s) &= c_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c r(s) = M(s) r(s)
\end{aligned}$$

Definindo o vetor de erro e sua derivada como

$$\begin{aligned} e &= X - X_m \\ \dot{e} &= \dot{X} - \dot{X}_m \end{aligned} \quad (2.11)$$

e desenvolvendo, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_c(X - X_m) + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c(u - u^*) \\ \dot{e} &= A_c e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c(u - u^*) \\ e_0 &= y - y_m = c_c^T(X - X_m) \\ e_0 &= c_c^T e \end{aligned}$$

No domínio da frequência, obtém-se

$$\begin{aligned} e_0(s) &= \frac{1}{\theta_{2n}^*} c_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c [u(s) - u^*(s)] \\ e_0(s) &= \frac{1}{\theta_{2n}^*} M(s) [u(s) - u^*(s)] \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.1.4 Lei de Adaptação para o Vetor de Parâmetros

O MRAC direto utiliza uma lei integral de adaptação dada por

$$\dot{\theta} = -\Gamma e_0 w \quad (2.13)$$

a qual significa que

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t (-\Gamma e_0 w(t)) dt$$

e, desenvolvendo as expressões para os parâmetros do controlador na condição de *matching* (B.4), chega-se a

$$\theta_{v_1,i}^* = \frac{\beta_{m,n-i} - \beta_{n-i}}{\gamma}; i = 1, \dots, n-1$$

$$\theta_n^* = \frac{\alpha_1 - \alpha_{m1}}{k_p}$$

$$\theta_{v_2,i}^* = \frac{\alpha_{n-i+1} - \alpha_{m,n-i+1} - k_p \theta_n^* \beta_{m,n-i}}{k_p \gamma}; i = 1, \dots, n-1$$

$$\theta_{2n}^* = \frac{k_m}{k_p}$$

2.1.5 Simulações e Resultados

Nesta seção, serão mostrados os resultados de simulações para duas plantas distintas de 1ª e 2ª ordem, respectivamente, para uma referência constante ($r=1$), obtidos via MATLAB [Hanselman e Littlefield, 1999]. Para as simulações subseqüentes das outras metodologias de controle adaptativo, estas mesmas plantas serão utilizadas, bem como a mesma referência. A primeira planta é estável e o modelo a ser seguido apresenta uma dinâmica um pouco mais rápida. A segunda planta é instável. Sejam as plantas:

$$\text{a) Planta: } W(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{Modelo: } M(s) = \frac{1.5}{s+1.5} \quad (2.14)$$

$$\text{b) Planta: } W(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2} \quad \text{Modelo: } M(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \quad (2.15)$$

Tem-se abaixo o primeiro gráfico, obtido para a planta de 1ª ordem.

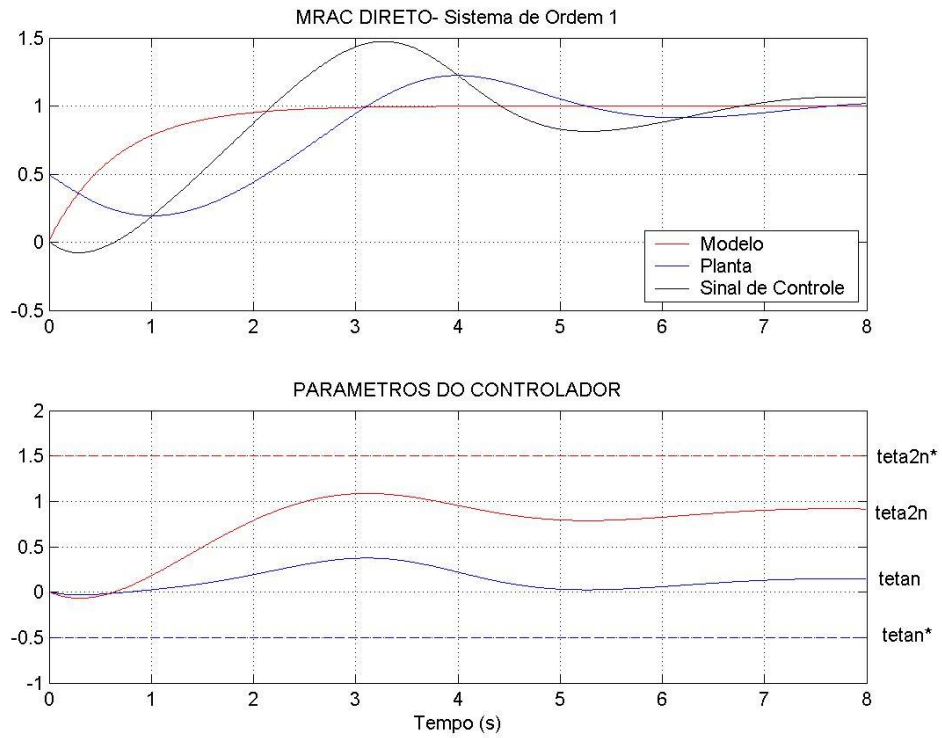


Figura 2.1 MRAC Direto para planta de 1ª ordem

Da análise do gráfico (Figura 2.1) observa-se um transitório lento e oscilatório, apresentando um sinal de controle suave. A partir das equações dos parâmetros do controlador na condição de *matching* (B.4), tem-se que $\theta_n^* = -0.5$ e $\theta_{2n}^* = 1.5$. Ao inicializar os parâmetros do controlador como $[0, 0]$, vê-se a não convergência dos parâmetros, pois para garantir que $\theta \rightarrow \theta^*$ a entrada deve ser um sinal suficientemente rico em frequências, ou seja, deve ter o número de raias espectrais igual ao número de singularidades da planta. [Boyd e Sastry, 1986].

Para a planta de 2ª ordem (Figura 2.2) o comportamento é semelhante ao anterior (Figura 2.1), não havendo a convergência dos parâmetros do controlador, isto é, embora $\|e\| \rightarrow 0$, o erro paramétrico não necessariamente tende a zero (Apêndice C). Os valores dos parâmetros do controlador na condição de *matching* (B.4) para $\gamma = 2$ são $\theta_{v_1,1}^* = 0,5$; $\theta_n^* = -6$; $\theta_{v_2,1}^* = 5$; $\theta_{2n}^* = 1$.

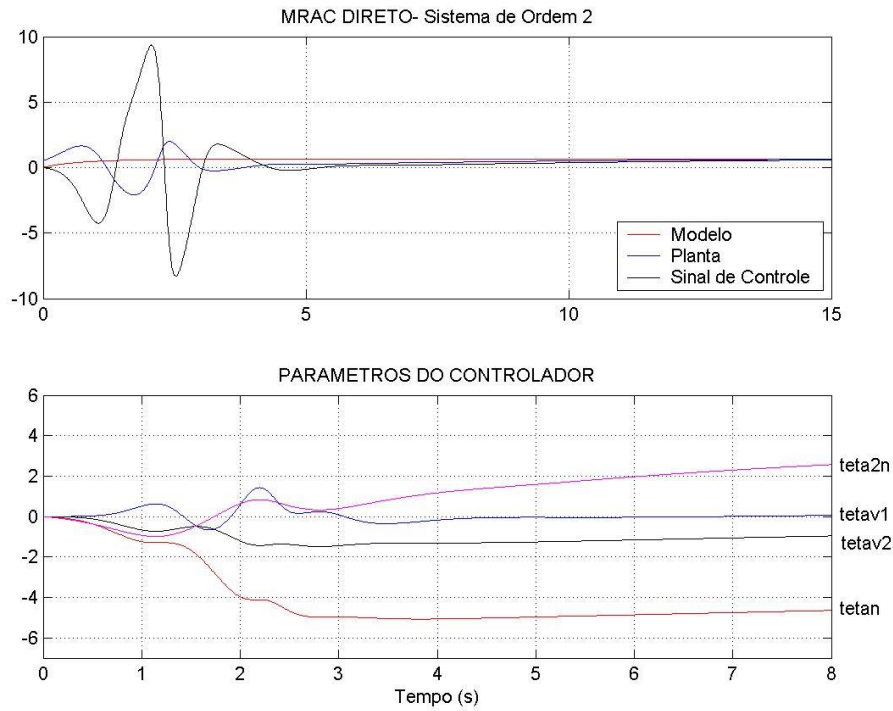


Figura 2.2 MRAC Direto para planta de 2ª ordem

2.2 - Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência (MRAC Indireto)

Conforme visto na Seção 1.4.1, o controle adaptativo indireto tem por objetivo encontrar uma lei de controle onde, a cada instante, os parâmetros do controlador são calculados com base na estimação on-line dos parâmetros da planta. A planta pode ser totalmente desconhecida e, uma vez definido o modelo a ser seguido, garante-se que a saída da planta converge para a do modelo. A Figura 1.6 mostra a estrutura do MRAC indireto.

O objetivo desta seção é mostrar as relações entre as expressões do MRAC direto (Seção 2.1) e do MRAC indireto [Ioannou e Sun, 1996] e, dessa forma, encontrar as leis adaptativas para o caso em questão. Resumindo, pode-se fazer a seguinte relação:

MRAC direto: o modelo da planta $P(\theta^*)$ é parametrizado em função de um vetor de parâmetros do controlador θ_c^* , para obter o modelo $P_c(\theta_c^*)$ com exatamente as mesmas características entrada/saída de $P(\theta^*)$. O estimador de parâmetros on-line é projetado com

base em $P_c(\theta_c^*)$, ao invés de $P(\theta^*)$, para prover estimativas diretas $\theta_c(t)$ de θ_c^* em cada instante t , através do processamento da entrada u e da saída y da planta

MRAC indireto: O objetivo é desenvolver uma lei adaptativa que gere a estimativa $\theta_p(t)$ (parâmetros da planta) e especifique o mapeamento de $\theta_p(t)$ para $\theta(t)$ (parâmetros do controlador), que permita calcular $\theta(t)$ a cada instante.

A planta e o modelo estão representados como em (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4). As mesmas hipóteses **H1-H6** (Seção 2.1.1) para o caso direto, são aqui consideradas.

Considerando o vetor de parâmetros da planta como

$$\theta_p^* = [k_p, \beta^T, \alpha_1, \alpha^T]^T$$

onde

$\beta \in R^{n-1}$ é um vetor que contém os elementos $\beta_i, (i = n-1, \dots, 1)$ da expressão de $n_p(s)$

$\alpha_1 \in R$ é o elemento α_1 da expressão de $d_p(s)$

$\alpha \in R^{n-1}$ é um vetor que contém os elementos $\alpha_{i+1}, (i = n-1, \dots, 1)$ da expressão de $d_p(s)$

e, também,

$\beta_m \in R^{n-1}$ é um vetor que contém os coeficientes $\beta_{mi}, (i = n-1, \dots, 1)$ de $n_m(s)$ (os coeficientes λ_i de $\lambda(s)$ são iguais aos coeficientes β_{mi} de $n_m(s)$)

$\alpha_{m1} \in R$ é o elemento α_{m1} da expressão de $d_m(s)$

$\alpha_m \in R^{n-1}$ é um vetor que contém os elementos $\alpha_{m,i+1}, (i = n-1, \dots, 1)$ da expressão de $d_m(s)$.

Com isso, de modo a tornar a prova de estabilidade do MRAC indireto (Apêndice C) mais legível, reescreve-se as expressões de *matching* como

$$\begin{aligned}
\theta_{v_1}^* &= \frac{\beta_m - \beta}{\gamma} \\
\theta_n^* &= \frac{\alpha_1 - \alpha_{m1}}{k_p} \\
\theta_{v_2}^* &= \frac{\alpha - \alpha_m - k_p \theta_n^* \beta_m}{k_p \gamma} = \frac{\alpha - \alpha_m + (\alpha_{m1} - \alpha_1) \beta_m}{k_p \gamma} \\
\theta_{2n}^* &= \frac{k_m}{k_p}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Considerando agora que $\hat{k}_p(t)$, $\hat{\beta}(t)$, $\hat{\alpha}_1(t)$ e $\hat{\alpha}(t)$ são as estimativas de k_p, β, α_1 , e α em cada instante t , respectivamente, o vetor de parâmetros do controlador fica

$$\theta(t) = [\theta_{v_1}^T(t), \theta_n(t), \theta_{v_2}^T(t), \theta_{2n}(t)]^T$$

onde

$$\begin{aligned}
\theta_{v_1}(t) &= \frac{\beta_m - \hat{\beta}(t)}{\gamma} \\
\theta_n(t) &= \frac{\hat{\alpha}_1(t) - \alpha_{m1}}{\hat{k}_p(t)} \\
\theta_{v_2}(t) &= \frac{\hat{\alpha}(t) - \alpha_m + (\alpha_{m1} - \hat{\alpha}_1(t)) \beta_m}{\hat{k}_p(t) \cdot \gamma} \\
\theta_{2n}(t) &= \frac{k_m}{\hat{k}_p(t)}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\text{com } \boxed{\left| \hat{k}_p(t) \right| \neq 0, \forall t \geq 0}$$

Precisa-se gerar $\hat{k}_p(t)$, $\hat{\beta}(t)$, $\hat{\alpha}_1(t)$ e $\hat{\alpha}(t)$ em tempo real. Podem ser usadas técnicas de estimação de parâmetros convencionais, como o método do gradiente, mínimos quadrados recursivo, etc., porém, serão utilizadas leis adaptativas que são guiadas pelo erro e_0 . Para isso, será utilizado o método de projeto usando a teoria de estabilidade de Lyapunov.

Seja a equação do erro (2.12)

$$e_0(s) = \frac{1}{\theta_{2n}^*} M(s) (u(s) - u^*(s))$$

a qual pode ser escrita como

$$e_0(s) = M(s) \frac{1}{\theta_{2n}^*} (u(s) - \theta^{*T} w(s)) \quad (2.18)$$

onde

$M(s)$ é a função de transferência do modelo de referência ERP, com $n^* = 1$.

Será desenvolvida uma lei adaptativa para $\hat{\theta}_p = \left[\hat{k}_p, \hat{\beta}^T, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}^T \right]^T$ pelo relacionamento

de e_0 com o erro dos parâmetros da planta $\tilde{\theta}_p = \hat{\theta}_p - \theta_p^*$, através da função de transferência $M(s)$, e depois seguir com o método de projeto de Lyapunov.

Desenvolvendo (2.18) e sabendo que $\theta_{2n}^* = \frac{k_m}{k_p}$, tem-se

$$e_0 = M(s) \frac{1}{k_m} (k_p u - k_p \theta^{*T} w - \hat{k}_p u + \hat{k}_p \theta^T w), \text{ onde } -\hat{k}_p u + \hat{k}_p \theta^T w = 0 \text{ e } u = \theta^T w$$

Definindo os erros nos parâmetros como

$$\tilde{k}_p = \hat{k}_p - k_p$$

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta} - \beta$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_1 - \alpha_1$$

$$\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha$$

e expandindo o termo entre parênteses, tem-se

$$\begin{aligned} k_p u - k_p \theta^{*T} w - \hat{k}_p u + \hat{k}_p \theta^T w &= \\ &= k_p u - \hat{k}_p u - k_p (\theta_{v_1}^{*T} v_1 + \theta_n^* y + \theta_{v_2}^{*T} v_2 + \theta_{2n}^* r) + \hat{k}_p (\theta_{v_1}^T v_1 + \theta_n y + \theta_{v_2}^T v_2 + \theta_{2n} r) \end{aligned}$$

Substituindo as equações (2.16) e (2.17), obtém-se

$$\begin{aligned}
 & k_p u - \hat{k}_p u - \frac{k_p (\beta_m - \beta)^T}{\gamma} v_1 - (\alpha_1 - \alpha_{m1}) y - \left[\frac{\alpha - \alpha_m + (\alpha_{m1} - \alpha_1) \beta_m}{\gamma} \right]^T v_2 - k_m r + \\
 & + \frac{\hat{k}_p (\beta_m - \hat{\beta})^T}{\gamma} v_1 + (\hat{\alpha}_1 - \alpha_{m1}) y + \left[\frac{\hat{\alpha} - \alpha_m + (\alpha_{m1} - \hat{\alpha}_1) \beta_m}{\gamma} \right]^T v_2 + k_m r = \\
 & = -(\hat{k}_p - k_p) u + \frac{(\hat{k}_p - k_p) \beta_m^T v_1}{\gamma} + (\hat{\alpha}_1 - \alpha_1) y + \frac{(\hat{\alpha} - \alpha)^T v_2}{\gamma} - \frac{(\alpha_1 - \alpha_1) \beta_m^T v_2}{\gamma} + \frac{k_p \beta^T v_1}{\gamma} - \frac{\hat{k}_p \hat{\beta}^T v_1}{\gamma} = \\
 & = (\hat{k}_p - k_p) \left(\frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u \right) + \frac{(\hat{\alpha} - \alpha)^T v_2}{\gamma} + (\hat{\alpha}_1 - \alpha_1) \left(y - \frac{\beta_m^T v_2}{\gamma} \right) - \frac{\hat{k}_p \hat{\beta}^T v_1}{\gamma} + \frac{k_p \beta^T v_1}{\gamma} =
 \end{aligned}$$

Obs.:
$$\begin{aligned}
 -\hat{k}_p \hat{\beta}^T v_1 + k_p \beta^T v_1 &= -\hat{k}_p \hat{\beta}^T v_1 + k_p \beta^T v_1 + k_p \hat{\beta}^T v_1 - k_p \hat{\beta}^T v_1 = \\
 &= -(\hat{k}_p - k_p) \hat{\beta}^T v_1 - k_p (\hat{\beta} - \beta)^T v_1 = -\tilde{k}_p \hat{\beta}^T v_1 - k_p \tilde{\beta}^T v_1
 \end{aligned}$$

Logo

$$\tilde{k}_p \left(\frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u \right) + \frac{\tilde{\alpha}^T v_2}{\gamma} + \tilde{\alpha}_1 \left(y - \frac{\beta_m^T v_2}{\gamma} \right) - \frac{\tilde{k}_p \hat{\beta}^T v_1}{\gamma} - \frac{k_p \tilde{\beta}^T v_1}{\gamma}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 e_0 &= M(s) \frac{1}{k_m} \left[\tilde{k}_p \left(\frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u \right) + \frac{\tilde{\alpha}^T v_2}{\gamma} + \tilde{\alpha}_1 \left(y - \frac{\beta_m^T v_2}{\gamma} \right) - \frac{\tilde{k}_p \hat{\beta}^T v_1}{\gamma} - \frac{k_p \tilde{\beta}^T v_1}{\gamma} \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow e_0 &= M(s) \frac{1}{k_m} \left[\tilde{k}_p \left(\frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u - \frac{\hat{\beta}^T v_1}{\gamma} \right) + \tilde{\alpha}_1 \left(y - \frac{\beta_m^T v_2}{\gamma} \right) + \frac{\tilde{\alpha}^T v_2}{\gamma} - \frac{k_p \tilde{\beta}^T v_1}{\gamma} \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow e_0 &= M(s) \frac{1}{k_m} \left[\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right] \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\zeta_p &= \frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u - \frac{\hat{\beta}^T v_1}{\gamma} \\
\zeta_\beta &= \frac{-v_1}{\gamma} \\
\zeta_1 &= y - \frac{\beta_m^T v_2}{\gamma} \\
\zeta_\alpha &= \frac{v_2}{\gamma}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Representando o vetor de erro no espaço de estado, fica-se com

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= A_c e + \frac{b_c}{k_m} [k_p \tilde{\zeta}_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha] \\
e_0 &= c_c^T e \\
c_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c &= M(s)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

e, escolhendo as seguintes leis adaptativas

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\beta}} &= \Gamma_\beta e_0 v_1 \operatorname{sgn}(k_p) \\
\dot{\hat{\alpha}}_1 &= -\gamma_1 e_0 \zeta_1 \\
\dot{\hat{\alpha}} &= -\Gamma_\alpha e_0 v_2
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Se $\left| \hat{k}_p \right| > k_0$ ou se $\left| \hat{k}_p \right| = k_0$ e $e_0 \zeta_p \operatorname{sgn}(\hat{k}_p) \leq 0$

$$\dot{\hat{k}}_p = -\gamma_p e_0 \zeta_p, \gamma_p > 0 \tag{2.23}$$

e, em caso contrário,

$$\dot{\hat{k}}_p = 0$$

com

$$P = P^T > 0$$

$$\gamma_1, \gamma_p > 0$$

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^T > 0, \Gamma_\beta = \Gamma_\beta^T > 0$$

e k_0 o limite inferior escolhido para $\hat{k}_p$ para que não ocorra uma indeterminação, consegue-se provar a estabilidade do método (Apêndice C).

2.2.1 Simulações e Resultados

Abaixo seguem as simulações do MRAC indireto para as mesmas plantas do caso direto (Seção 2.1.5).

O primeiro gráfico (Figura 2.3) apresenta o resultado do algoritmo aplicado à planta de 1ª ordem. Verifica-se uma convergência da planta para o modelo lenta e oscilatória, assim como no caso direto, bem como a não convergência dos parâmetros da planta para seus valores corretos, no caso $k_p^* = 1$ e $\alpha_1^* = 1$, pelo motivo já explicado no caso direto. É importante ressaltar que o algoritmo indireto é mais “custoso” do ponto de vista computacional, visto que é realizado primeiro uma estimação dos parâmetros da planta e só então são calculados os valores dos parâmetros do controlador.

Para a planta de 2ª ordem (Figura 2.4), observa-se, como esperado, um transitório extremamente oscilatório, bem como a não convergência dos parâmetros da planta, no caso $k_p^* = 1$, $\beta_1^* = 1$, $\alpha_1^* = -2$ e $\alpha_2^* = 1$.

Outro ponto a observar é o efeito de k_0 na resposta do sistema. Em geral, pode-se escolher k_0 em torno de um centésimo do valor nominal de k_p . Nas simulações mencionadas,

o valor inicial de $\hat{k}_p$ foi escolhido igual a k_0 , o que atende à restrição $\left| \hat{k}_p(0) \right| \geq k_0$ (Apêndice

C). Verifica-se que ao aumentar $\hat{k}_p(0)$, a resposta apresenta um aumento no sobressinal, além de tornar a convergência para o modelo mais lenta.

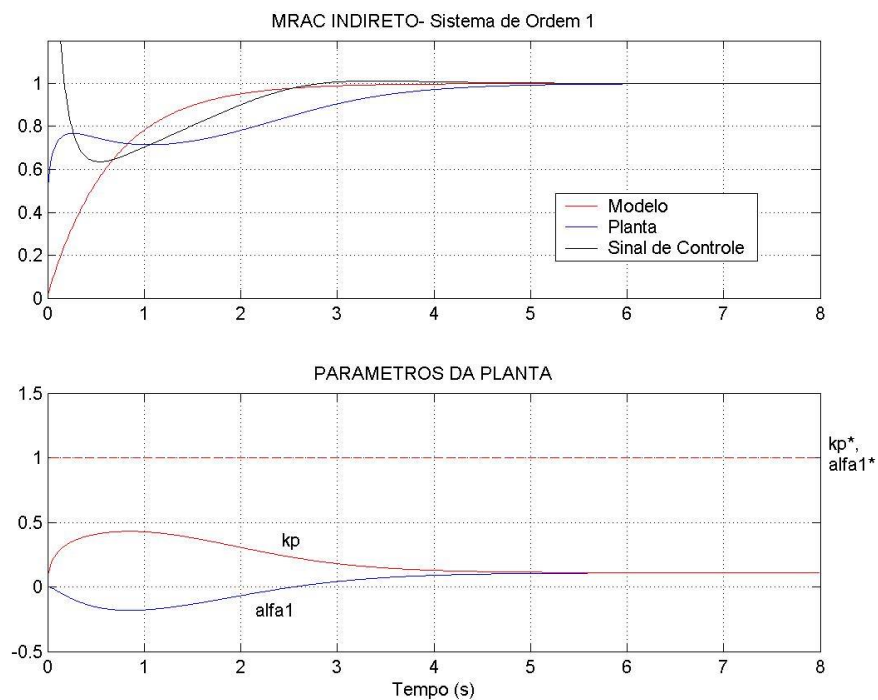


Figura 2.3 MRAC indireto para planta de 1ª ordem

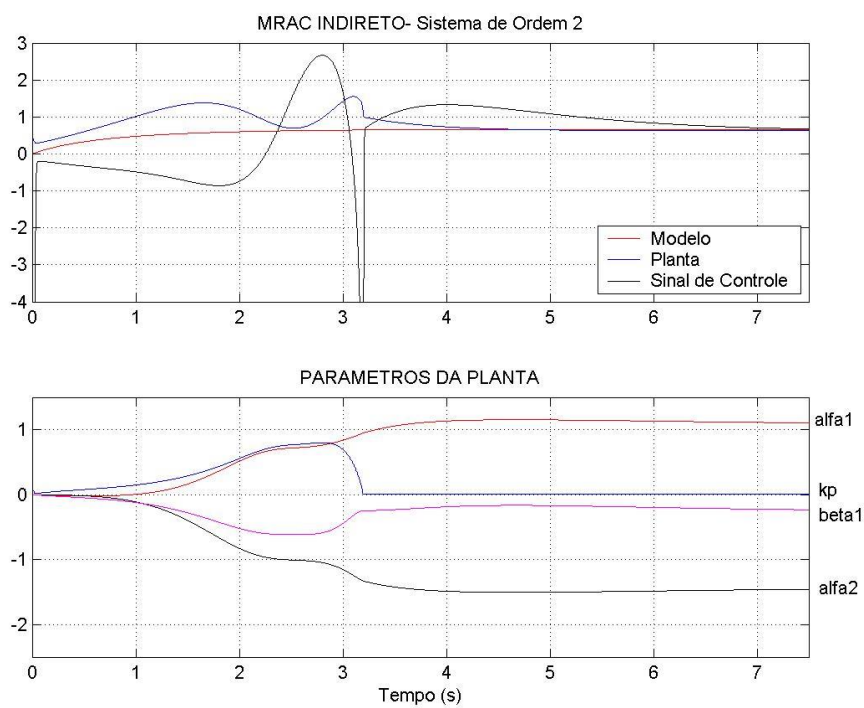


Figura 2.4 MRAC indireto para planta de 2ª ordem

Capítulo 3

Controle Adaptativo Direto por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC Direto)

Neste capítulo será apresentada uma estratégia de controle adaptativo direto (Seção 1.4.1) que necessita apenas de medições da entrada e da saída da planta, com leis chaveadas para os parâmetros do controlador [Hsu e Costa, 1989; Araújo, 1993].

Para uma melhor compreensão da referida técnica, é apresentada uma breve introdução aos sistemas com estrutura variável.

São apresentados ainda as provas de estabilidade (Apêndice C) bem como resultados de simulações.

3.1 Sistemas com Estrutura Variável

A teoria de sistemas com estrutura variável tem sido bastante utilizada no tratamento de problemas de controle, principalmente na forma conhecida como *controle por modos deslizantes* [Utkin, 1978; Araújo 1993; Paiva, 1996]. Esta forma pertence a uma importante área de pesquisa e aplicações denominada *controle robusto*.

Esta estratégia de controle tem sua fundamentação no controle por relés, sendo as funções de chaveamento das variáveis de controle projetadas de modo a restringir a dinâmica do sistema a uma superfície chamada *superfície deslizante*.

Os sistemas com estrutura variável têm como principais características a rapidez do transitório e robustez a variações paramétricas e perturbações (dentro de uma faixa de tolerância estipulada no projeto). Para a classe de sistemas aos quais esta técnica se aplica, o controle por modos deslizantes provê uma metodologia sistemática para o problema de manter a estabilidade e performance consistentes em face de imprecisões na modelagem. Isto é obtido através do chaveamento das variáveis de controle dentro de um conjunto de funções das variáveis de estado da planta de acordo com uma determinada regra. O controle deslizante tem sido usado com sucesso em manipuladores robóticos, veículos submarinos, motores elétricos de alta performance e sistemas de potência [Slotine e Li, 1991].

Esta seção tem por objetivo apresentar alguns resultados da teoria para sistemas com estrutura variável que são fundamentais para o desenvolvimento de um controlador adaptativo com leis chaveadas.

Para as demonstrações, será considerado o seguinte sistema de segunda ordem

$$\dot{x} = Ax + bu = f(x) \quad (3.1)$$

e, mais detalhadamente,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.2)$$

com a_1 e a_2 conhecidos com incertezas.

Define-se uma superfície $s(x) = cx_1 + x_2 = 0, c > 0$, na qual deseja-se que permaneçam as variáveis de estado x_1, x_2 (dinâmica do sistema). Deve ser satisfeita a condição $\dot{s} \cdot s < 0$ para se ter o seguinte comportamento, ilustrado na Figura 3.1

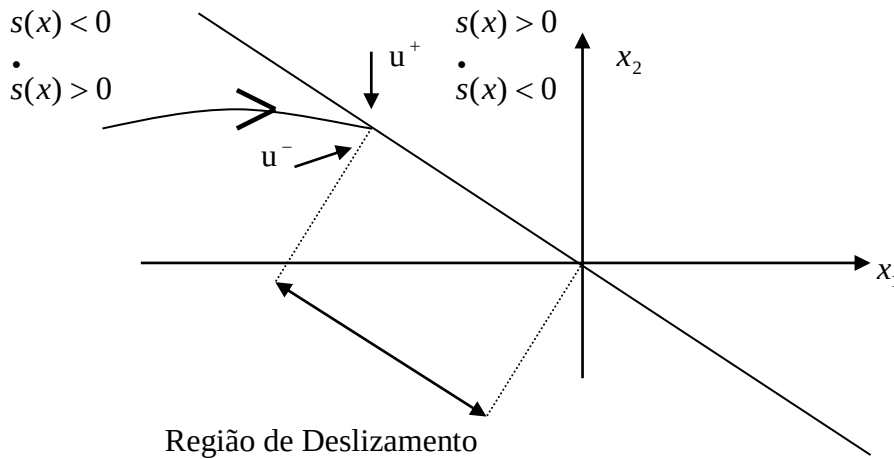


Figura 3.1 Superfície Deslizante

Em um problema de estabilização, deve-se ter

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$$

Definindo o controle $u(x)$ na forma

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), & s(x) > 0 \\ u^-(x), & s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

tem-se que $u = g(\theta_1; \theta_2; x_1; x_2)$, onde

$$\theta_1 = -\bar{\theta}_1 \cdot \text{sgn}(s \cdot x_1), \bar{\theta}_1 > |a_1| \quad (3.4)$$

$$\theta_2 = -\bar{\theta}_2 \cdot \text{sgn}(s \cdot x_2), \bar{\theta}_2 > |a_2 + c| \quad (3.5)$$

Os valores dos parâmetros $\bar{\theta}_i$ determinam a rapidez com que a trajetória atinge a superfície de deslizamento.

Desta forma, o sistema torna-se

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(x), & s(x) > 0 \\ f^-(x), & s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

tendo como condição de deslizamento

$$s(x) \cdot \dot{s}(x) < 0 \quad (3.7)$$

Pode-se interpretar a condição de deslizamento como a derivada (negativa) da função $\frac{1}{2} s(x)^2$, que é uma medida da distância à superfície de deslizamento $s(x) = 0$.

Se a condição de deslizamento $s \cdot \dot{s} < 0$ é satisfeita em uma vizinhança de $s(x) = 0$, os campos vetoriais representados por $f^+(x)$ e $f^-(x)$ apontam para esta superfície. Portanto, se uma trajetória alcança $s(x)$, é forçada a permanecer (deslizar) sobre esta.

3.1.1 Controle Equivalente e Região Linear

O Controle Equivalente [Utkin, 1978; Hsu, 1997] é definido como o controle contínuo que, quando a trajetória está sobre a superfície deslizante, deveria ser aplicado para manter a trajetória sobre esta superfície.

No deslizamento, tem-se para o caso ideal

$$\begin{aligned}\dot{s} \equiv 0 &\Rightarrow c \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \\ cx_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + u_{eq} &\equiv 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u_{eq} &= -a_1 x_1 - (a_2 + c)x_2\end{aligned}\tag{3.8}$$

Na prática, a obtenção de u_{eq} é feita através da filtragem de u (u_{av}) por um filtro passa-baixa (Figura 3.2) com frequência de corte suficientemente elevada.

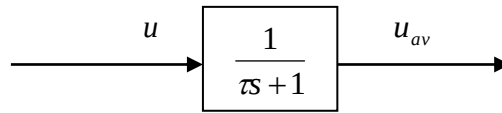


Figura 3.2 Filtro passa-baixa para obtenção de u_{av}

Tem-se $u_{av} \rightarrow u_{eq}$ quando $\tau \rightarrow 0, \left(\frac{1}{\tau} \rightarrow \infty\right)$. Uma regra bastante utilizada é escolher $\frac{1}{\tau}$ como a média geométrica entre a frequência de corte do modelo de referência (w_m) e a frequência de chaveamento dos relés (w_c).

As dificuldades encontradas para a implementação deste sistema de controle estão relacionadas com a necessidade de medição de todas as variáveis de estado da planta e no surgimento de sinais chaveados em alta frequência ("chattering"), devido à excessiva atividade de controle decorrente de imperfeições nos mecanismos de chaveamento reais, como pode ser visto na Figura 3.3.

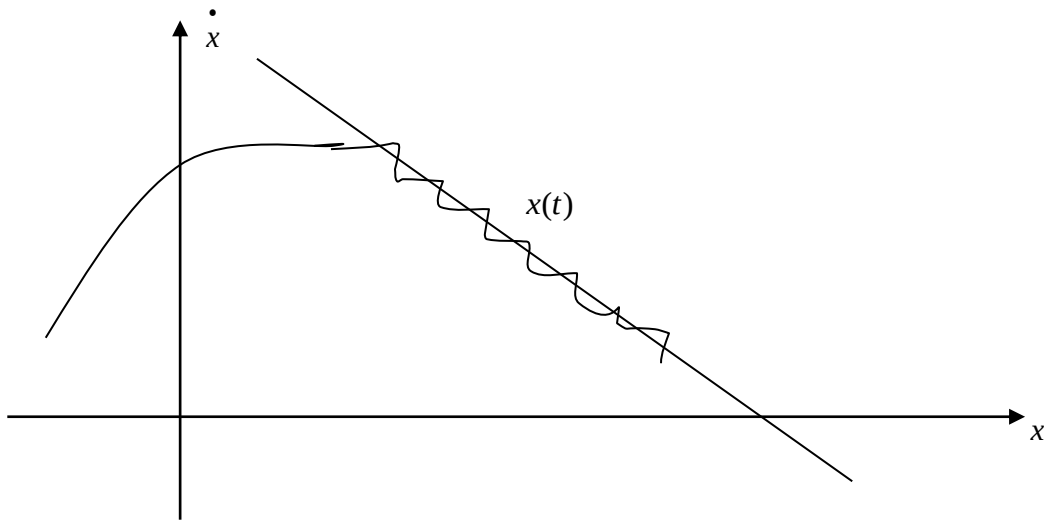


Figura 3.3 Fenômeno de “chattering”

Uma maneira de reduzir o “chattering” é através da substituição da função sinal pela função sinal modificada, conforme a Figura 3.4.

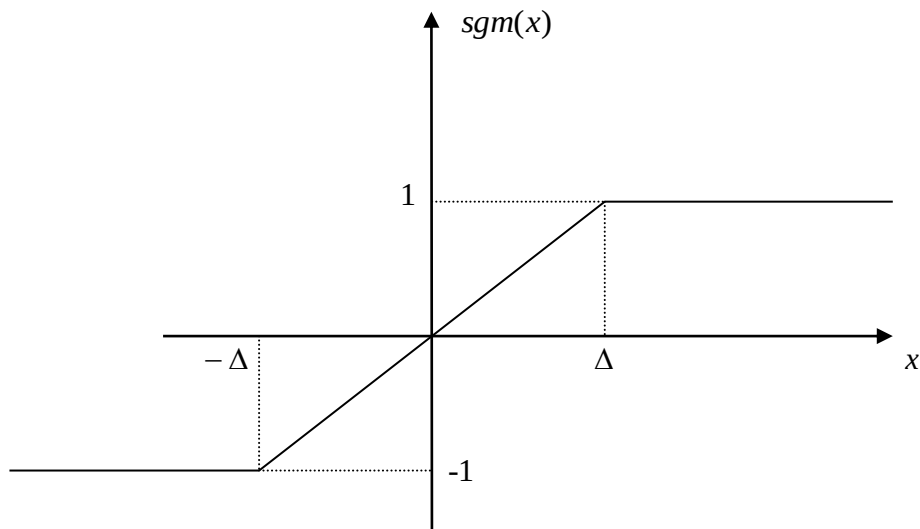


Figura 3.4 Função sinal modificada

onde define-se a função sinal modificada como

$$sgm(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x); & |x| > \Delta \\ \frac{1}{\Delta} x; & |x| \leq \Delta \end{cases} \quad (3.9)$$

A utilização desta função pode gerar erro em regime permanente, o que na prática pode ser corrigido por um compensador PI. Para garantir-se um comportamento próximo do ideal (relé puro), deve-se utilizar $\frac{\Delta}{\tau}$ pequeno. Isto pode ser visto considerando que quanto maior o valor da região linear Δ , menor é a frequência de chaveamento do sinal de controle, o que pode ser representado por

$$w_c \approx \frac{1}{\Delta}$$

Analisando o diagrama de bode para o sistema, tem-se

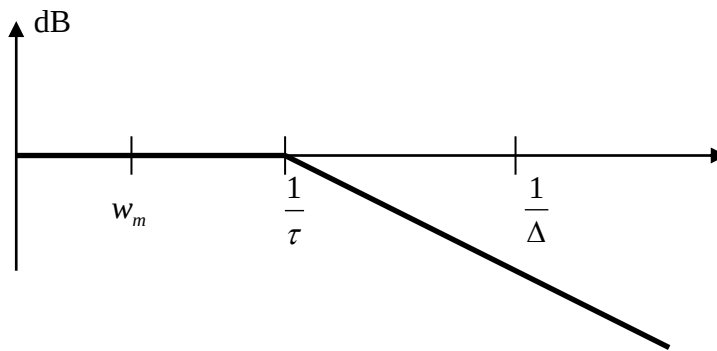


Figura 3.5 Diagrama de bode mostrando a relação entre a frequência de corte do modelo de referência w_m , a frequência de corte do filtro e a frequência de chaveamento dos relés

Deve-se ter um valor de $\frac{1}{\tau}$ muito menor que $\frac{1}{\Delta}$, para que se tenha uma filtragem eficaz das altas frequências do sinal de controle, sendo que tal valor não pode ser tão pequeno a ponto de interferir na banda passante w_m , pois passaria a filtrar os sinais do próprio modelo e alteraria o comportamento do sistema. Assim, pode-se fazer a seguinte relação

$$\frac{1}{\tau} \ll \frac{1}{\Delta} \Rightarrow \frac{\Delta}{\tau} \ll 1$$

As equações diferenciais que surgem em sistemas com estrutura variável apresentam lado direito descontínuo (devido à descontinuidade introduzida pelo sinal de controle)

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(x), s(x) > 0 \\ f^-(x), s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Além disso, não são definidas quando $s(x) = 0$, pois a função $\text{sgn}(x)$ rigorosamente tem a forma

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1, x > 0 \\ ?, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

Entretanto, a superfície $s(x) = 0$ é atingida apenas uma quantidade de vezes que apresenta medida nula (no sentido de Lebesgue), ou seja, $s(x) = 0$ ocorre em um número enumerável de pontos e, portanto, a probabilidade de $s(x) = 0$ ocorrer é nula em um intervalo não enumerável de pontos (Conjunto dos Números Reais). Isto possibilita a extensão dos resultados sobre soluções de equações diferenciais a sistemas com estrutura variável [Filippov, 1960].

3.2 Controle Adaptativo Direto por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC Direto)

Esta técnica teve origem na necessidade de encontrar um controlador que tornasse o sistema em malha fechada robusto em relação às incertezas da planta e perturbações, com desempenho transitório sensivelmente melhor que o desempenho do MRAC.

Neste trabalho será dada ênfase a plantas com $n^* = 1$ e as leis integrais de adaptação do MRAC serão substituídas por leis chaveadas.

Desta forma os parâmetros θ_i tornam-se

$$\theta_i = -\bar{\theta}_i \text{sgn}(e_0 w_i) \quad (3.11)$$

$$\text{com } \bar{\theta}_i > |\theta_i^*|; i = 1, 2, \dots, 2n \quad (3.12)$$

onde os valores de $\theta_i^*; i = 1, 2, \dots, 2n$ são obtidos de (B.4).

Para o VS-MRAC direto, as mesmas hipóteses **H1-H6** (Seção 2.1.1) são aqui consideradas, com a adição da seguinte hipótese: **os limites de $|\theta_i^*|, i = 1, 2, \dots, 2n$ são conhecidos.**

A nível de implementação, os valores de $\bar{\theta}_i$ devem ser escolhidos em relação a uma determinada percentagem do valor nominal dos parâmetros, de forma a não gerar um sinal de controle muito elevado.

Em certos sistemas a implementação prática deste algoritmo requisitaria um número grande de relés de amplitude modulada. Para superar esta dificuldade foram propostas modificações na lei de controle original. Uma primeira modificação é utilizar um vetor com valores nominais dos parâmetros da planta (θ_{nom}). Adicionalmente, pode-se reduzir o número de relés do algoritmo de controle. Este novo algoritmo é chamado VS-MRAC Compacto [Araújo, 1993].

3.2.1 VS-MRAC Compacto

Com a introdução do vetor de parâmetros nominais fica-se com

$$u = \theta^T w + u_{nom}$$

$$u_{nom} = \theta_{nom}^T w$$

$$\theta_i = -\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_0 w_i), i = 1, 2, \dots, 2n$$

$$\bar{\theta}_i = |\theta_i^* - \theta_{i,nom}|$$

Desenvolvendo a expressão para u tem-se

$$u = \theta^T w + \theta_{nom}^T w$$

$$u = (\theta + \theta_{nom})^T w$$

$$u = \sum_{i=1}^{2n} (\theta_i + \theta_{i,nom}) w_i$$

$$u = \sum_{i=1}^{2n} \left[-\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_0 w_i) + \theta_{i,nom} \right] w_i$$

$$u = \sum_{i=1}^{2n} \left[-\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(w_i) w_i \operatorname{sgn}(e_0) + \theta_{i,nom} w_i \right]$$

$$u = \sum_{i=1}^{2n} \left[-\bar{\theta}_i |w_i| \operatorname{sgn}(e_0) + \theta_{i,nom} w_i \right]$$

$$u = - \left(\sum_{i=1}^{2n} \bar{\theta}_i |w_i| \right) \operatorname{sgn}(e_0) + \sum_{i=1}^{2n} \theta_{i,nom} w_i$$

Tem-se, então, o seguinte algoritmo

$$u = -u_0 + u_{nom}$$

com $u_0 = f_0 \operatorname{sgn}(e_0)$, onde $f_0 = \sum_{i=1}^{2n} \bar{\theta}_i |w_i|$ é chamada de função de modulação do relé, e

$u_{nom} = \theta_{nom}^T w$ é o controle nominal.

Este algoritmo é chamado de VS-MRAC Compacto devido a simplificação introduzida na lei de controle através da redução do número de relés.

3.2.2 Simulações e Resultados

As simulações do VS-MRAC direto para as mesmas plantas da Seção 2.1.5 levaram aos seguintes resultados:

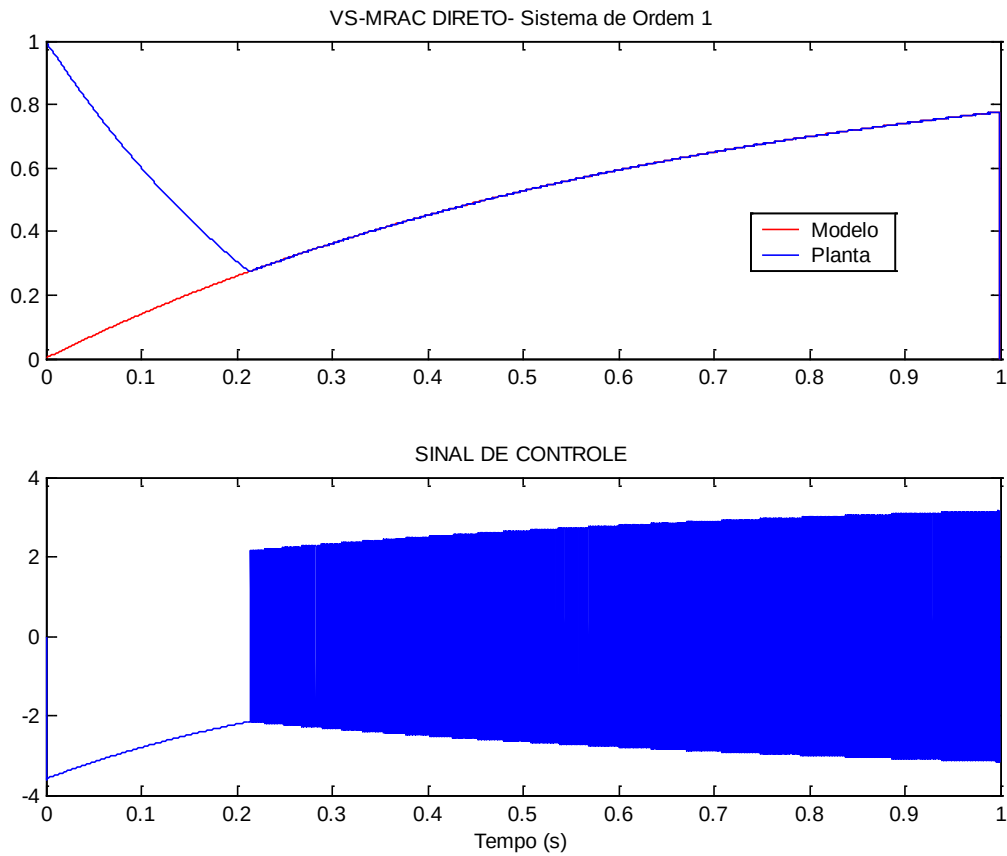


Figura 3.6 VS-MRAC Direto para sistema de 1ª ordem

Verifica-se uma convergência para o modelo muito rápida, praticamente eliminando oscilações no transitório, porém o sinal de controle chaveado não é adequado para situações

práticas. Deve-se, então, utilizar alternativas para a redução do “chattering” (parte inferior da Figura 3.6), como a introdução de uma região linear, de forma que o chaveamento não ocorra tão abruptamente (Seção 3.1.1). Abaixo tem-se o gráfico para o caso de segunda ordem.

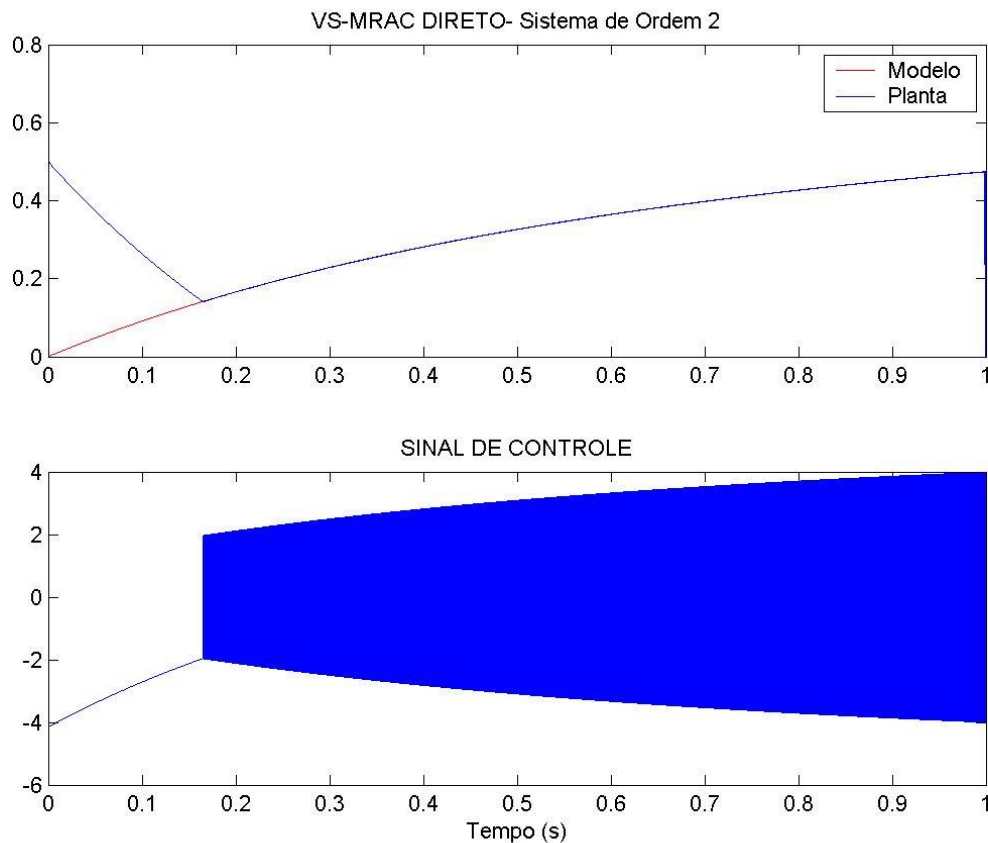


Figura 3.7 VS-MRAC Direto para sistema de 2ª ordem

A exemplo do algoritmo implementado em plantas de 1ª ordem, para plantas de 2ª ordem a convergência para o modelo é bastante rápida, eliminando assim oscilações iniciais indesejáveis. É importante ressaltar que a referida planta é instável, e a condição inicial da planta foi considerada diferente da origem, para comprovar a eficiência do algoritmo em qualquer situação prática.

Capítulo 4

Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC Indireto)

Este capítulo tem por objetivo apresentar a proposta inédita deste trabalho, ou seja, desenvolver um controlador adaptativo por modelo de referência e estrutura variável, conforme visto no capítulo anterior, porém com o chaveamento realizado nas leis de adaptação dos parâmetros da planta.

As incertezas nos parâmetros da planta podem ser conhecidas mais facilmente, pois representam incertezas em parâmetros físicos tais como, resistências, capacitâncias, momentos de inércia, coeficientes de atrito, etc.

Neste trabalho, será abordado o caso de plantas com grau relativo um ($n^* = 1$). A vantagem desta técnica está na facilidade de projeto pois, uma vez deduzidas as expressões para a condição de *matching* (B.4), o trabalho consiste em definir o conjunto de parâmetros da planta $\theta_p^* = [k_p, \beta^T, \alpha_1, \alpha^T]$, conforme a notação da Seção 2.2, e realizar o chaveamento nas leis de adaptação de tais parâmetros.

No caso direto, a partir das expressões de *matching*, faz-se uma estimativa dos parâmetros $\bar{\theta}_i, i = 1, \dots, 2n$ (3.12), seja manualmente ou através da construção de um programa de computador. À medida que a ordem do sistema aumenta, tal estimativa manual é um tanto trabalhosa e, embora possa se desenvolver um programa para realizar tal tarefa, o ideal em um algoritmo é a não necessidade de programas auxiliares, tendo em vista que em muitas situações práticas é interessante que o engenheiro seja capaz de fazer um esboço manual dos valores dos parâmetros necessários. No caso do VS-MRAC indireto, este cálculo (2.17) é incluído no próprio algoritmo, tornando portanto o método mais custoso do ponto de vista computacional, ressaltando-se que, em contrapartida, obtém-se um projeto mais simples.

Seguindo-se um raciocínio semelhante ao utilizado na obtenção das leis chaveadas do VS-MRAC direto [Hsu e Costa, 1989], onde tais leis foram obtidas partindo-se das leis

adaptativas do MRAC direto (2.13), na técnica proposta parte-se das leis adaptativas do MRAC indireto (2.22) e (2.23), e, assim, as seguintes leis chaveadas são propostas

$$\begin{aligned}
 \hat{k}_p &= -\bar{k}_p \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_p) \\
 \hat{\beta}_i &= -\bar{\beta}_i \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_{\beta_i} \operatorname{sgn}(k_p)), i = 1, \dots, n-1 \\
 \hat{\alpha}_1 &= -\bar{\alpha}_1 \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_1) \\
 \hat{\alpha}_i &= -\bar{\alpha}_i \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_{\alpha_i}), i = 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

com

$$\begin{aligned}
 \zeta_p &= \frac{\beta_m^T v_1}{\gamma} - u - \frac{\hat{\beta}^T v_1}{\gamma} \\
 \zeta_{\beta_i} &= \frac{-v_{1i}}{\gamma} \\
 \zeta_1 &= y - \frac{\beta_m^T v_2}{\gamma} \\
 \zeta_{\alpha_i} &= \frac{v_{2i-1}}{\gamma}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde os sinais auxiliares acima são definidos da mesma forma que em (2.20). Verifica-se ainda que tal implementação utiliza $2n$ relés, ficando a obtenção de um algoritmo compacto como objetivo para um trabalho futuro.

A planta e o modelo de referência são definidos conforme (2.1-2.4).

As hipóteses para a planta e para o modelo de referência são as mesmas do caso direto, com uma alteração apenas na última. Tais hipóteses são aqui descritas com o objetivo de tornar o capítulo o mais auto contido possível.

Para a obtenção do algoritmo de controle, faz-se as seguintes hipóteses:

H1. A planta é monovariável, controlável, observável e tem grau relativo $n^* = 1$;

H2. O grau n de $d_p(s)$ é conhecido ;

H3. k_m e k_p têm o mesmo sinal (positivo, sem perda de generalidade);

H4. O modelo é ERP e tem o mesmo grau relativo da planta;

H5. $n_p(s)$, $n_m(s)$ e $d_m(s)$ são polinômios mônicos Hurwitz;

H6. $d_p(s)$ é um polinômio mônico;

H7. Os limites superiores de k_p, β_i ($i = 1, \dots, n-1$), α_1 e α_i ($i = 2, \dots, n$) são conhecidos.

Uma atenção especial deve ser dada à hipótese **H3**. Na prova de estabilidade desta técnica, bem como em todas as outras provas apresentadas (Apêndice C), assume-se que k_m e k_p possuem o mesmo sinal (no caso, positivo, sem perda de generalidade). Desta forma, como no VS-MRAC indireto ocorre um chaveamento de $\hat{k}_p$, este pode assumir valores negativos, o que pode não garantir a estabilidade do sistema. No caso do MRAC indireto este detalhe não ocorre, visto que as leis de adaptação são integrais e são colocadas restrições. Assim, deve-se garantir que $\hat{k}_p$ sempre terá sinal positivo. Propõe-se, então, a introdução de um $k_{p,nom}$ (nominal) o qual é somado à expressão de $\hat{k}_p$ e o chaveamento é realizado apenas sobre a incerteza do parâmetro. Este procedimento se aproxima bastante da prática, onde tem-se uma incerteza no valor nominal de um parâmetro, como a faixa de incerteza no valor de um resistor, por exemplo.

Reescrevendo as equações (4.1) com a modificação na expressão de $\hat{k}_p$, tem-se

$$\begin{aligned}\hat{k}_p &= k_{p,nom} - \bar{k}_p \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_p) \\ \hat{\beta}_i &= -\bar{\beta}_i \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_{\beta_i} \operatorname{sgn}(k_p)), i = 1, \dots, n-1 \\ \hat{\alpha}_1 &= -\bar{\alpha}_1 \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_1) \\ \hat{\alpha}_i &= -\bar{\alpha}_i \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_{\alpha_i}), i = 2, \dots, n\end{aligned}\tag{4.3}$$

Para este algoritmo, não é obrigatório o uso de valores nominais para os outros parâmetros, uma vez que os mesmos não influenciam qualitativamente na prova de estabilidade.

Portanto, uma vez calculado os valores dos parâmetros da planta no instante atual, o cálculo dos parâmetros do controlador neste mesmo instante é feito pelo conjunto de equações (2.17), conforme é lembrado abaixo.

$$\begin{aligned}\theta_{v_1}(t) &= \frac{\beta_m - \hat{\beta}(t)}{\gamma} \\ \theta_n(t) &= \frac{\hat{\alpha}_1(t) - \alpha_{m1}}{\hat{k}_p(t)} \\ \theta_{v_2}(t) &= \frac{\hat{\alpha}(t) - \alpha_m + (\alpha_{m1} - \hat{\alpha}_1(t))\beta_m}{\hat{k}_p(t) \cdot \gamma} \\ \theta_{2n}(t) &= \frac{k_m}{\hat{k}_p(t)}\end{aligned}$$

com $\boxed{\left| \hat{k}_p(t) \right| \neq 0, \forall t \geq 0}.$

Uma vez que o algoritmo utiliza leis chaveadas, usam-se valores atuais das variáveis a cada instante, e não valores passados como nas leis integrais. Pela análise de (4.2) verifica-se que o sinal ζ_p é uma função, entre outros termos, de u , porém o que deseja-se calcular é exatamente o valor de u no instante atual. Logo, surge um problema conhecido como *loop-algébrico*. Uma solução é, ao invés de usar u , usar um sinal filtrado de u (u_{av}), como já visto na Seção 3.1.1.

Outra questão importante diz respeito à expressão para $\hat{k}_p$

$$\hat{k}_p = k_{p,nom} - \bar{k}_p^- \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_p)$$

a qual depende do sinal auxiliar ζ_p , que depende de outro sinal chaveado: $\hat{\beta}$. Matematicamente não é definida a função $\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(\cdot))$ quando o argumento não é um valor constante, ainda mais tendo em vista que a frequência de chaveamento é muito alta. Portanto, uma solução é introduzir um filtro, isto é, utilizar na expressão para $\hat{k}_p$ um sinal filtrado de ζ_p ($\zeta_{p_{av}}$). Com isto resolve-se também o problema do loop-algébrico, explicitado anteriormente. Esta solução, porém, torna a prova de estabilidade mais complexa. Neste trabalho, a prova de estabilidade apresentada (Apêndice C) assume possível utilizar o sinal ζ_p , o que já fornece um bom indício da estabilidade do método. À nível de implementação, o

problema é resolvido calculando-se $\hat{\beta}$ antes de $\hat{k}_p$, o que funciona devido ao fato de, na prática, a frequência de chaveamento ser finita.

4.1 Prova de Estabilidade

Seja uma candidata à função de Lyapunov que depende apenas do vetor de erro

$$V = \frac{e^T P e}{2} \quad (4.4)$$

Desenvolvendo a derivada de (4.4) e usando (2.21)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\dot{e}^T P e}{2} + \frac{e^T P \dot{e}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{V} &= \frac{1}{2} \left\{ e^T A_c^T + \frac{b_c^T}{k_m} (k_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha) \right\} P e + \\ &+ e^T P \left\{ A_c e + \frac{b_c}{k_m} (k_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha) \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{V} &= \frac{1}{2} \left\{ e^T (A_c^T P + P A_c) e + 2 e^T P \frac{b_c}{k_m} (k_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha) \right\} \end{aligned}$$

Usando o lema de Kalman-Yakubovich

$$\begin{cases} A_c^T P + P A_c = -2Q \\ P b_c = c_c \Rightarrow e^T c_c = c_c^T e = e_0 \end{cases}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e^T Q e + \frac{e_0}{k_m} (k_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{V} &= -e^T Q e + \frac{1}{k_m} \left\{ (k_p - \hat{k}_p) e_0 \zeta_p + k_p \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{\beta}_i - \beta_i) e_0 \zeta_{\beta i} + (\hat{\alpha}_1 - \alpha_1) e_0 \zeta_1 + \sum_{i=2}^n (\hat{\alpha}_i - \alpha_i) e_0 \zeta_{\alpha i} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \dot{V} &= -e^T Q e + \frac{1}{k_m} \left\{ \left[k_{p,nom} - \bar{k}_p \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_p) - k_p \right] e_0 \zeta_p + k_p \sum_{i=1}^{n-1} \left[-\bar{\beta}_i \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_{\beta i} \operatorname{sgn}(k_p)) - \beta_i \right] e_0 \zeta_{\beta i} + \right. \\
 &+ \left. \left[-\bar{\alpha}_1 \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_1) - \alpha_1 \right] e_0 \zeta_1 + \sum_{i=2}^n \left[-\bar{\alpha}_i \operatorname{sgn}(e_0 \zeta_{\alpha i}) - \alpha_i \right] e_0 \zeta_{\alpha i} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \dot{V} &= -e^T Q e - \frac{1}{k_m} \left\{ \left(\bar{k}_p |e_0 \zeta_p| + (k_p - k_{p,nom}) e_0 \zeta_p \right) + \left(\bar{\alpha}_1 |e_0 \zeta_1| + \alpha_1 e_0 \zeta_1 \right) + \right. \\
 &+ \left. \left(\sum_{i=1}^{n-1} (k_p \operatorname{sgn}(k_p) \bar{\beta}_i |e_0 \zeta_{\beta i}| + k_p \beta_i e_0 \zeta_{\beta i}) \right) + \left(\sum_{i=2}^n \bar{\alpha}_i |e_0 \zeta_{\alpha i}| + \alpha_i e_0 \zeta_{\alpha i} \right) \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \dot{V} &= -e^T Q e - \frac{1}{k_m} \left\{ \left(\bar{k}_p |e_0 \zeta_p| + (k_p - k_{p,nom}) e_0 \zeta_p \right) + \left(\bar{\alpha}_1 |e_0 \zeta_1| + \alpha_1 e_0 \zeta_1 \right) + \right. \\
 &+ \left. \left(\sum_{i=1}^{n-1} (|k_p| \bar{\beta}_i |e_0 \zeta_{\beta i}| + k_p \beta_i e_0 \zeta_{\beta i}) \right) + \left(\sum_{i=2}^n \bar{\alpha}_i |e_0 \zeta_{\alpha i}| + \alpha_i e_0 \zeta_{\alpha i} \right) \right\} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

Se

$$\begin{cases} \bar{k}_p > |k_p - k_{p,nom}| \\ \bar{\alpha}_1 > |\alpha_1| \\ \bar{\beta}_i > |\beta_i|, i = 1, \dots, n-1 \\ \bar{\alpha}_i > |\alpha_i|, i = 2, \dots, n \end{cases}$$

Então

$$\dot{V} \leq -e^T Q e < 0 \tag{4.5}$$

Pela análise de (4.5), consegue-se garantir a estabilidade assintótica do sistema, sendo todos os sinais presentes em malha fechada uniformemente limitados.

4.2 Simulações e Resultados

As simulações apresentadas foram obtidas considerando as observações feitas acima, em relação à implementação. As mesmas plantas e modelos de referência em (2.14) e (2.15) foram utilizados. Para a planta (2.14), foram utilizados $k_{p,nom} = 0.8$, $\bar{k}_p = 0.2$ e $\bar{\alpha}_1 = 1.2$. Para a planta (2.15) foram utilizados $k_{p,nom} = 0.8$, $\bar{k}_p = 0.2$, $\bar{\alpha}_1 = 2.4$, $\bar{\alpha}_2 = 1.2$, $\bar{\beta}_1 = 2.2$, $\Lambda = -\gamma$ ($\gamma = 2$). Em ambas simulações o intervalo de simulação é $h = 0.0001$ e a referência é $r = 1$. Os seguintes gráficos foram obtidos.

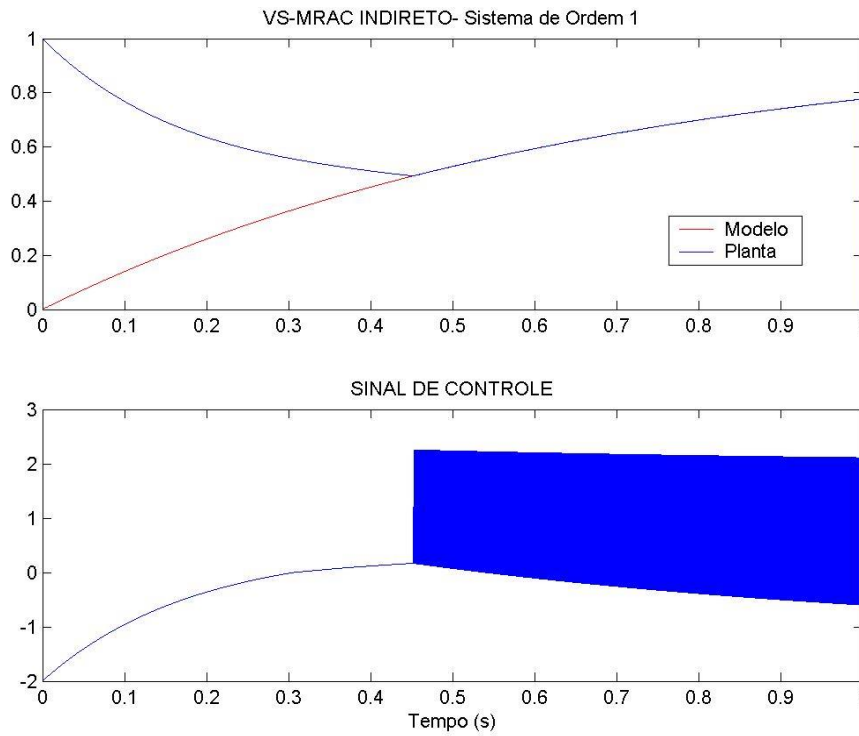


Figura 4.1 VS-MRAC Indireto para sistema de 1ª ordem

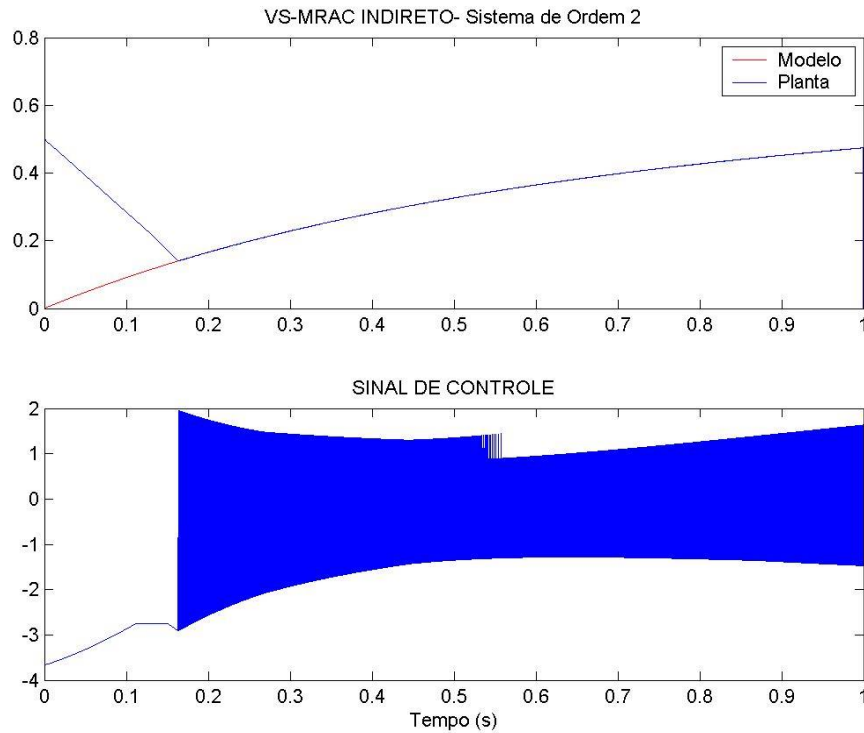


Figura 4.2 VS-MRAC indireto para sistema de 2ª ordem instável

A análise destes gráficos mostra que o desempenho é similar ao VS-MRAC direto, visto no capítulo anterior.

A principal vantagem do VS-MRAC indireto é a possibilidade de um projeto mais simples, com o cálculo das amplitudes dos relés estando diretamente relacionado com parâmetros físicos da planta, sendo apenas mais custoso do ponto de vista computacional.

Por fim, para que o algoritmo proposto possa ser utilizado em problemas práticos, deve-se fazer uso do controle equivalente e/ou de uma região linear.

Capítulo 5

Resultados Práticos

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados práticos da aplicação da técnica proposta (VS-MRAC Indireto) a um motor de indução trifásico, tendo em vista sua ampla utilização na indústria. A linguagem C [Stroustrup, 2000] foi utilizada para a implementação do algoritmo, bem como uma placa conversora A/D-D/A Advantech PCI 1710 para a aquisição de dados e envio de informações para a planta.

5.1 Motor de Indução Trifásico

O motor de indução ou assíncrono é uma máquina elétrica destinada a transformar energia elétrica em energia mecânica. Esse motor é constituído basicamente por rotor e estator. O rotor é a parte móvel do motor, e o estator constitui a parte fixa. Normalmente o rotor usado nesses motores é do tipo gaiola de esquilo, assim chamado devido ao seu formato. É constituído por um conjunto de chapas de ferro-silício com barras de cobre ou alumínio colocadas em ranhuras e interligadas em curto circuito nas extremidades.

O motor trifásico é a máquina elétrica construída para funcionar em redes trifásicas. No estator do motor trifásico estão alojados três enrolamentos referentes às três fases. Esses três enrolamentos estão montados com uma defasagem de 120° elétricos. Quando a corrente elétrica trifásica é aplicada aos enrolamentos do estator, produz-se um campo magnético rotativo ou girante que, por indução (razão do nome do motor), são geradas correntes equilibradas no circuito do rotor as quais produzem outro campo magnético girante. Através da atração entre esses campos magnéticos, o rotor é arrastado, dando-lhe movimento.

Nos dias atuais, os motores de indução têm cada vez mais tomado o lugar dos motores CC em aplicações de alta performance [Leonhard, 1996]. No caso de motores com rotor em gaiola de esquilo, sua principal vantagem é a ausência de contatos deslizantes, resultando em uma construção simples. Motores de indução são construídos em uma variedade de formas com faixas de alguns watts a vários megawatts. Os motores de indução podem ser usados em locais adversos uma vez que eles não possuem comutadores e, conseqüentemente, não existe possibilidade de centelhamento. Com o progresso da eletrônica de potência e do aparecimento

de microprocessadores rápidos e de baixo custo, têm alcançado uma posição competitiva quando comparados às máquinas CC, até porque são mais baratos, necessitam de pouquíssima manutenção e podem ser usados em diversos ambientes [Fitzgerald & Kingsley, 1975]. Nas máquinas CC, o controle de velocidade pode ser realizado facilmente, visto que o torque e o fluxo podem ser desacoplados. Contudo, as máquinas CC têm as desvantagens de possuírem custos elevados, necessitarem de manutenções mais freqüentes e terem sua utilização não recomendada para alguns ambientes.

Somente com o surgimento, na década de 70, da teoria de controle vetorial [Blashke, 1972], é que se teve ferramentas teóricas para um controle mais preciso das máquinas de corrente alternada. Na técnica de controle vetorial Campo Orientado Indireto – COI [Garcia, 1990; Ortega & Taoutaou, 1996; Novotny & Lorenz 1986] a estimação do fluxo de referência é feita em malha aberta e o fluxo escolhido como referência para o eixo direto é o fluxo enlaçado pelo rotor. Essa escolha está relacionada com a simplicidade do modelo obtido, além da boa resposta dinâmica, sendo tão eficiente quanto as técnicas que fazem estimação de fluxo em malha fechada através de observadores. Quanto o motor é alimentado por fontes de corrente ideais, ocorre o desacoplamento entre o torque e o fluxo de modo semelhante às máquinas CC [Cunha, 2001; Larrea, 1993; Leonhard, 1996].

Na técnica COI, a estimação do fluxo depende dos valores dos parâmetros da máquina. O uso de valores incorretos de parâmetros na modelagem vetorial causa o acoplamento das equações de fluxo e torque [Branco, 1991; Larrea, 1993], degradando o desempenho do sistema de controle. Nesta estratégia, um elemento importante de incerteza é o valor da constante de tempo rotórica que varia com as condições de operação, mudando o comportamento do sistema, o que impõe o uso de alguma estratégia de controle adaptativo e/ou robusto, que compense possíveis variações de parâmetros.

5.2 Modelagem

A modelagem do motor de indução já foi bastante discutida em diversos trabalhos [Bose, 2000]. Dessa forma, parte-se do modelo matemático em notação vetorial [Leonhard, 1996]. As equações que descrevem a dinâmica do motor de indução são:

$$u_s = R_s i_s(t) + L_s \frac{d}{dt}(i_s(t)) + L_m \frac{d}{dt}(i_r(t)e^{j\epsilon}) \quad (5.1)$$

$$0 = R_r i_R(t) + L_r \frac{d}{dt}(i_R(t)) + L_m \frac{d}{dt}(i_S(t)e^{-j\varepsilon}) \quad (5.2)$$

$$T_e(t) = \frac{2}{3} PL_m \Im m \left\{ i_S(t) \left[i_R(t)e^{j\varepsilon} \right]^* \right\} \quad (5.3)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = T_e(t) - B\omega(t) - T_l(t) \quad (5.4)$$

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \omega(t) \quad (5.5)$$

onde

u_s	Vetor tensão do estator.
i_s, i_R	Vetores corrente do estator e corrente do rotor, respectivamente.
R_s, R_r	Resistências por fase do estator e do rotor, respectivamente.
L_s, L_r	Indutâncias próprias por fase do estator e do rotor, respectivamente.
L_m	Indutância de magnetização por fase.
T_e	Torque eletromagnético no eixo do motor.
T_l	Torque de carga.
J	Momento de inércia do rotor.
B	Coeficiente de atrito viscoso da máquina.
P	Número de pares de pólos.
$\omega(t)$	Velocidade angular do eixo do motor.
ε	Posição angular do eixo do motor (ângulo entre os eixos da fase 1 do estator e a fase 1 do rotor).
$\Im m\{x\}$	Componente imaginário de um número complexo “x”.
$[x]^*$	Operador complexo conjugado de um vetor “x”.

Nota-se, nesta modelagem, a complexidade das relações entre as diversas variáveis que compõem a dinâmica de um motor de indução. Sendo necessário, portanto, o uso do controle vetorial do motor com orientação dada pelo campo do rotor. Este controle é a base moderna para o acionamento de alto desempenho para o motor de indução e também é conhecido como controle desacoplado, ortogonal ou transvetorial [Bose, 2000].

Na prática, o que se busca com a modelagem vetorial é a observação das correntes do estator de um referencial fixo a um fluxo de referência. Assim, definindo um novo sistema de

coordenadas (Figura 5.1) com o eixo de referência direto, $\mathbf{d}$ ou eixo real ($\Re e$), coincidindo com o vetor fluxo do rotor (ψ_r), a componente do vetor fluxo do rotor no eixo em quadratura, $\mathbf{q}$ ou eixo imaginário ($\Im m$), é anulada, ou seja, $\psi_{Rq} = 0$.

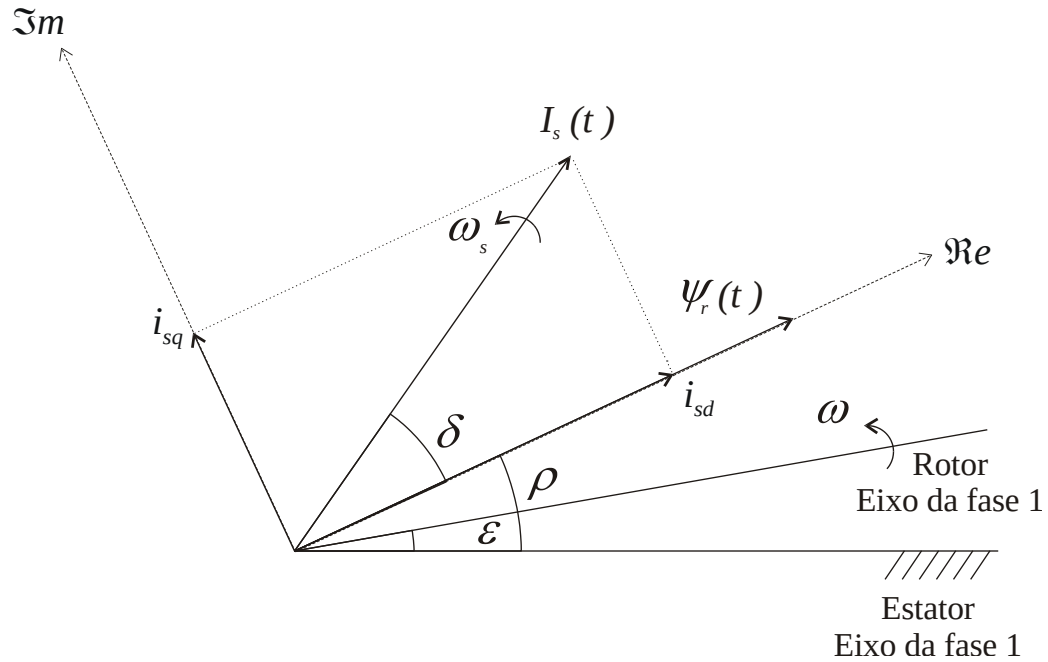


Figura 5.1 Diagrama vetorial do motor de indução (ω_s é a velocidade síncrona)

Baseado na Figura 5.1 e partindo-se da Equação (5.2), obtém-se

$$0 = \frac{R_r}{L_r} (\psi_{Rd} - L_m i_s e^{-j\rho}) + \frac{d}{dt} (\psi_{Rd}) + j \left(\frac{d\rho}{dt} - \omega \right) \psi_{Rd} \quad (5.6)$$

onde

ψ_{Rd} Componente do vetor fluxo do rotor no eixo direto.

ρ Posição angular do vetor fluxo do rotor em relação ao estator.

Observando o diagrama vetorial (Figura 5.1) e com a Equação (5.6), as componentes do vetor corrente do estator no eixo direto e em quadratura são calculadas como

$$i_{sd} = \frac{1}{L_m} \psi_{Rd} + \frac{L_r}{R_r L_m} \frac{d\psi_{Rd}}{dt} \quad (5.7)$$

$$i_{sq} = \frac{L_r}{R_r L_m} \left(\frac{d\rho}{dt} - \omega(t) \right) \psi_{Rd} \quad (5.8)$$

Visto que, pela análise do diagrama,

$$i_s(t) = (i_{sd}(t) + ji_{sq}(t))e^{j\rho} \quad (5.9)$$

e

$$\psi_R(t) = \psi_{Rd}(t)e^{j(\rho-\varepsilon)} \quad (5.10)$$

o torque da máquina (Equação 5.3) fica

$$T_e(t) = \frac{2}{3} P \frac{L_m}{L_r} \psi_{Rd}(t) i_{sq}(t) \quad (5.11)$$

sendo similar ao torque de uma máquina de corrente contínua, onde a componente do vetor de fluxo do rotor no eixo direto é equivalente ao fluxo de campo em uma máquina CC e a componente do vetor corrente do estator no eixo em quadratura é equivalente à corrente de armadura em uma máquina CC. Pela Equação (5.11), mantendo-se a componente de fluxo no eixo direto constante, o torque pode ser controlado apenas pela componente da corrente em quadratura, através de uma relação linear, até o limite da velocidade nominal do motor. Para obter-se o torque máximo, o fluxo de referência será mantido constante e em seu valor máximo $\left(\frac{d\psi_{Rd}}{dt} = 0\right)$. Com essa consideração, as Equações (5.7) e (5.8) são suficientes para a obtenção do controle desacoplado do motor de indução (Figura 5.2), onde tem-se

$$i_{sd}^r = \frac{\psi_{Rd}^r}{L_m} \quad (5.12)$$

$$\rho = \varepsilon + \frac{R_r L_m}{L_r} \int \frac{i_{sq}^r}{\psi_{Rd}^r} dt \quad (5.13)$$

onde

i_{sd}^r, i_{sq}^r Valores de referência das componentes do vetor corrente do estator nos eixos direto e em quadratura, respectivamente.

ψ_{Rd}^r Valor de referência da componente do vetor fluxo do rotor no eixo direto.

Os valores das correntes instantâneas em cada fase do estator podem ser calculados a partir das componentes **d-q** [Cunha, 2001], levando a

$$i_{s1}(t) = \frac{2}{3} (i_{sd}(t) \cos \rho - i_{sq}(t) \sin \rho) \quad (5.14)$$

$$i_{s2}(t) = -\frac{1}{3} (i_{sd}(t) \cos \rho - i_{sq}(t) \sin \rho) + \frac{1}{\sqrt{3}} (i_{sd}(t) \sin \rho + i_{sq}(t) \cos \rho) \quad (5.15)$$

$$i_{s3}(t) = -\frac{1}{3} (i_{sd}(t) \cos \rho - i_{sq}(t) \sin \rho) - \frac{1}{\sqrt{3}} (i_{sd}(t) \sin \rho + i_{sq}(t) \cos \rho) \quad (5.16)$$

As equações (5.14), (5.15) e (5.16) são aqui denominadas de transformação **d-q → 1-2-3**. A partir delas vê-se que uma vez especificadas i_{sd} e i_{sq} , normalmente pelo algoritmo de controle, e determinada a posição do rotor, por medição direta ou indireta, as correntes de alimentação do motor ficam estabelecidas.

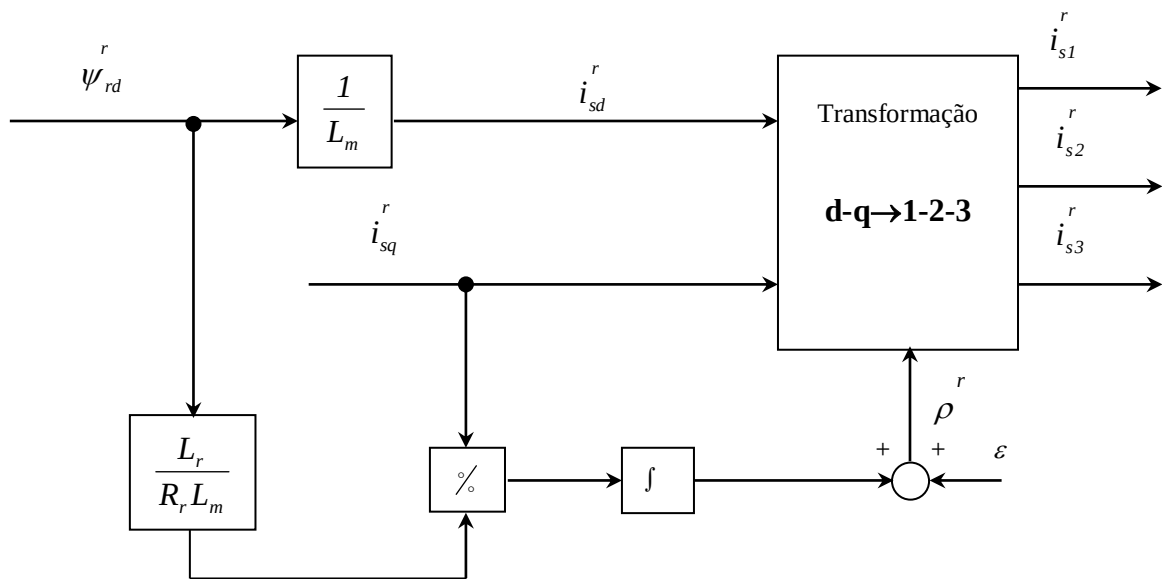


Figura 5.2 Controle vetorial indireto do motor de indução (ρ^r é a referência da posição do fluxo do rotor com relação ao estator e $i_{s1}^r, i_{s2}^r, i_{s3}^r$ são as referências das correntes em cada fase do estator).

A partir de um inversor do tipo fonte de tensão (Voltage Source Inverter – VSI), com modulação por largura de pulso (Pulse Width Modulation – PWM) e controle de corrente, é possível impor correntes ao motor. Conseqüentemente, o conjunto formado pelo controle vetorial indireto, inversor e motor de indução é equivalente a uma máquina de corrente contínua, onde o campo é representado pela componente do vetor fluxo do rotor no eixo

direto, e a corrente de armadura é representada pela componente do vetor corrente do estator no eixo em quadratura.

5.3 Implementação

5.3.1 Sistema de Acionamento

O sistema de acionamento, utilizado na implementação do controlador VS-MRAC Indireto, é mostrado na Figura 5.3 [Furtunato, 1997]. Ele é composto por um motor de indução de 0.25HP, alimentado por um inversor trifásico VSI/PWM com controle de corrente por janela de histerese. No controle de corrente são usados sensores de efeito Hall para a medição das correntes de duas fases do motor. Um microcomputador recebe a velocidade do motor, através do sinal de um tacogerador e, utilizando um software de controle implementado em linguagem C, envia o sinal necessário para o inversor.

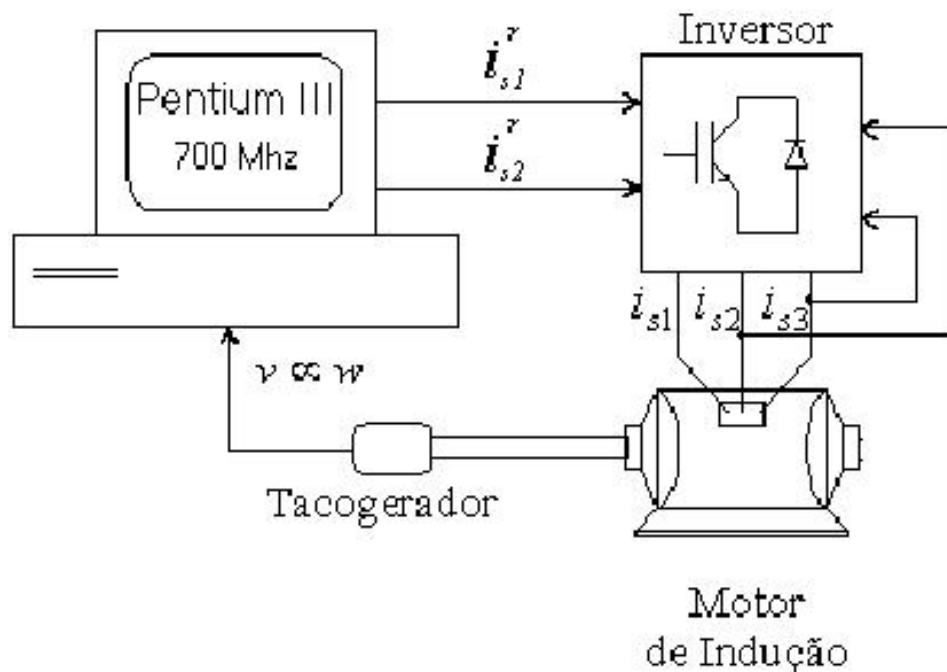


Figura 5.3 Sistema de Acionamento

5.3.2 Parâmetros do Motor de Indução

Foi utilizado um motor de indução trifásico classe “B” de 0,25 HP, com 4 pólos, velocidade nominal de 1725 rpm (180.64 rad/s), tensões nominais 380 V / 220 V para

ligação Y e Δ , respectivamente, com frequência nominal de 60 Hz. As correntes nominais são de 1,26 A em 220 V (ligação Δ) e 0,726 A em 380 V (ligação Y). O rotor é do tipo gaiola de esquilo. O conjugado nominal é de 1,02 N.m.

Os parâmetros elétricos do motor foram obtidos através de ensaios de curto-circuito e de circuito aberto [Cunha, 2001] e confrontados com os dados fornecidos pelo fabricante. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Parâmetros elétricos do motor

R_s	29,5012 Ω
L_s	0,0534 + 1,0417 = 1,0951 H
R_r	17,8384 Ω
L_r	0,0637 + 1,0417 = 1,1054 H
L_m	1,0417 H

Também foi fornecido pelo fabricante o momento de inércia do motor, cujo valor é

$$J = 5 \times 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

5.3.3 Função de Transferência do Motor

A obtenção da equação de primeira ordem que representa a planta foi baseada no fato de que, utilizando-se o controle vetorial indireto pelo campo do rotor, com alimentação dada pela componente da corrente do estator em quadratura (i_{sq}^r) e mantendo-se constante o fluxo do rotor (ψ_{Rd}^r), a relação entre o torque elétrico e a corrente de referência é aproximadamente

$$T_e(t) = K i_{sq}^r \quad (5.17)$$

onde K é uma constante obtida a partir da Equação (5.11).

Substituindo a equação anterior na Equação (5.4), a qual descreve a dinâmica de um motor de indução, e supondo que o torque de carga é devido somente ao atrito, tem-se

$$\frac{\omega}{i_{sq}^r} = \frac{\frac{K}{J}}{s + \frac{B}{J}} \quad (5.18)$$

que, na notação adotada neste trabalho, pode ser escrita como

$$W(s) = \frac{k_p}{s + \alpha} \quad (5.19)$$

onde

$$k_p = \frac{K}{J} \text{ e } \alpha = \frac{B}{J}.$$

Para os valores dos parâmetros obtidos [Cunha, 2001], o seguinte modelo nominal é obtido

$$W(s) = \frac{3798}{s + 11,3} \quad (5.20)$$

A constante de tempo do modelo de referência foi escolhida próxima da constante de tempo da planta. Tentou-se, dessa forma, evitar sinais mais elevados do que aqueles que seriam necessários para um modelo com dinâmica mais rápida. Por simplicidade foi escolhido um modelo de referência com ganho unitário. Com essas considerações o modelo fica

$$M(s) = \frac{12}{s + 12} \quad (5.21)$$

5.3.4 Resultados Obtidos

A velocidade do motor é convertida em uma tensão por intermédio de um tacogerador acoplado ao seu eixo. A saída do tacogerador é uma tensão alternada cuja frequência e valor eficaz são proporcionais à velocidade do motor. Essa tensão alternada é atenuada, retificada e filtrada (eliminando os ruídos de medição) gerando uma tensão contínua proporcional à velocidade do motor. A constante de proporcionalidade é dada de acordo com a Tabela 5.2. Uma placa de interface A/D transforma esta tensão contínua em um sinal digital para o microcomputador. No microcomputador, um algoritmo de controle, escrito em linguagem

“C”, calcula as correntes de referência e, através de um conversor D/A, estas correntes são fornecidas a um VSI/PWM para a alimentação do motor.

Tabela 5.2: Característica tensão x velocidade do tacogerador

TENSÃO (Volts)	0,00	4,30	6,05	7,65	10,07
VELOCIDADE (rpm)	0,00	975,20	1405,00	1820,00	2442,00

A placa de interface A/D-D/A trabalha com tensões de 0 a +10V e, assim, o sinal de tensão retificado, proporcional à velocidade, é ajustado para esta faixa. As correntes de referência, geradas a partir do algoritmo de controle, são alternadas, de forma que um nível DC deve ser adicionado para compensar o ciclo negativo das correntes de referência. A interface D/A da placa possui apenas duas saídas e, então, apenas duas correntes de referência, geradas pelo algoritmo de controle, podem ser enviadas. Como o circuito é trifásico equilibrado, a terceira corrente pode ser obtida pelo valor negativo da soma das outras duas. Assim, projetou-se um circuito para subtrair o nível DC adicionado às duas correntes de referência geradas pelo controlador, e criar a terceira corrente de referência.

Nesta experiência, foi medido o intervalo de amostragem referente ao tempo de processamento do algoritmo de controle e de conversões A/D - D/A, cujo resultado foi

$$h = 0,00042s$$

O diagrama de blocos da experiência prática encontra-se na Figura 5.4.

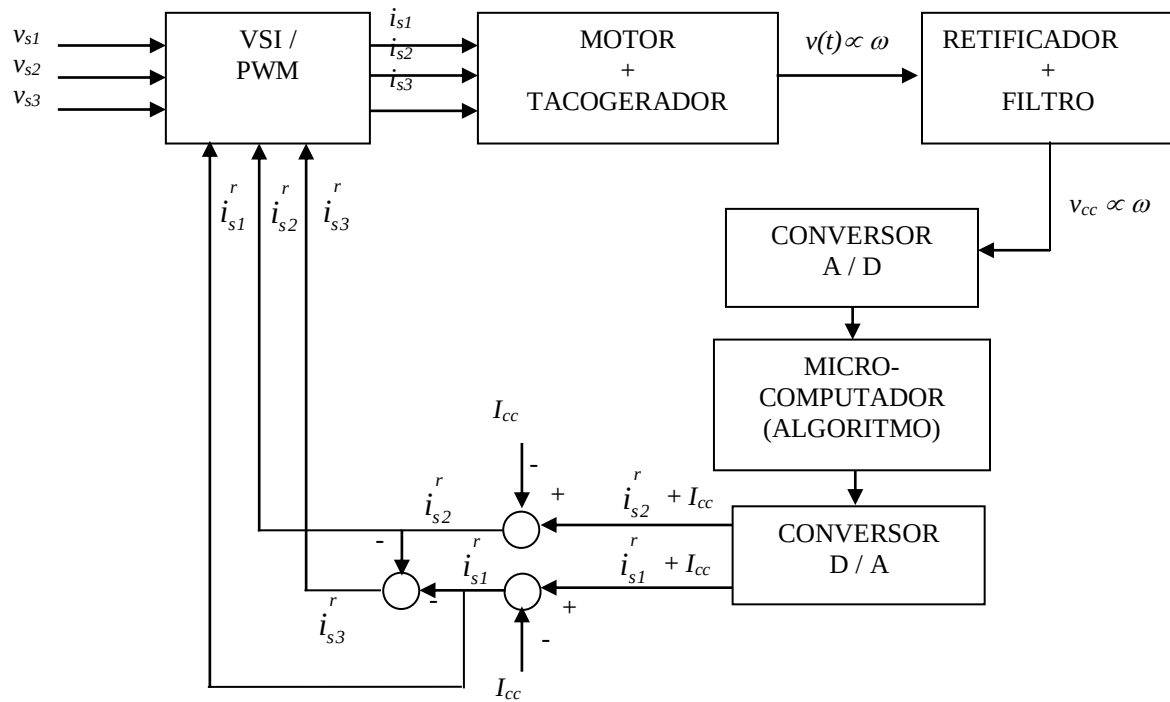


Figura 5.4: Diagrama de blocos da implementação prática

No ensaio prático, a partir da análise de (5.20), os valores utilizados foram $\bar{k}_{p,nom} = 3798$, $\bar{k}_p = 250$, $\bar{\alpha} = 40$. Uma região linear com $\Delta = 1500$ também foi introduzida, com o objetivo de diminuir o chaveamento do sinal de controle. Este valor de Δ foi obtido através de simulações, não sendo o objetivo deste trabalho o estudo aprofundado de regiões lineares, embora venha a ser abordado em trabalhos futuros. Além disto, não foi incluído um controlador PI para corrigir o erro em regime permanente. O motor e o modelo de referência partem com velocidades iniciais nulas. A referência é inicialmente assumida como 1000 rpm, depois de um certo tempo aumenta-se o valor para 1200 rpm, em seguida reduz-se para 1000 rpm. Depois é introduzida uma perturbação durante alguns segundos. A planta segue o modelo de referência com a velocidade tendendo para a referência especificada em cada caso (o ganho do modelo é unitário). O efeito da perturbação só é percebido (Figura 5.5) pelo aumento do sinal de controle durante o intervalo de tempo em que a perturbação é aplicada. O desempenho transitório é bastante rápido e sem oscilações, estando de acordo com os resultados obtidos em simulações.

O resultado do ensaio prático encontra-se na Figura 5.5, onde as velocidades do modelo de referência e da planta estão em rpm e o sinal de controle $u = i_{sq}$ em mA.

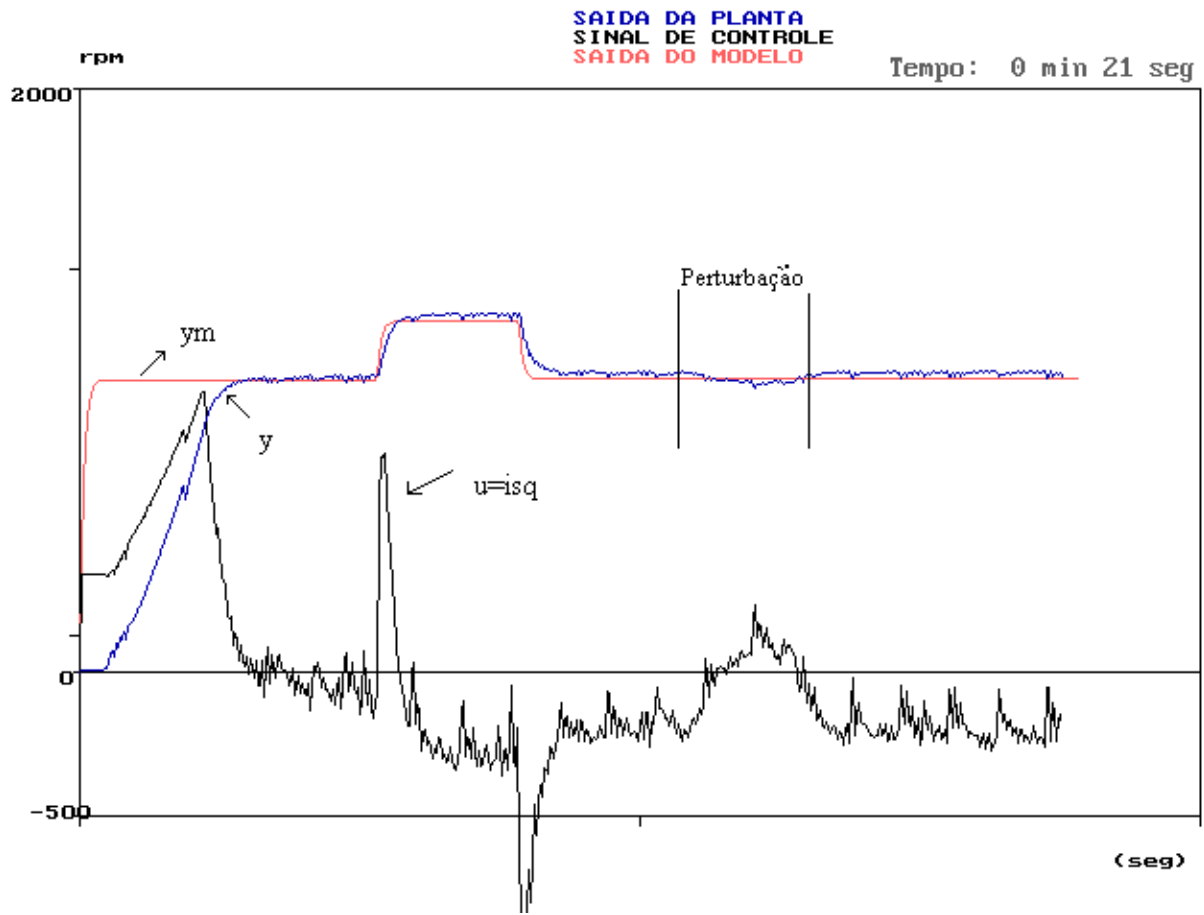


Figura 5.5 Resultado da aplicação prática

Na teoria, o sinal de controle possui frequência de chaveamento muito alta sobre a superfície deslizante. Em termos de implementação, tal sinal não deve ser usado, tendo em vista as limitações do sistema de acionamento. Assim, na implementação acima foi utilizada a técnica de introduzir uma região linear, de modo a suavizar tal chaveamento. Tal técnica, contudo, introduz erro em regime permanente, sendo necessária a introdução de um compensador PI. Outra alternativa para conseguir tal suavização do sinal de controle é utilizar o conceito de controle equivalente [Hsu, 1997], sendo que este causa o efeito de aumentar o grau relativo da planta, tornando o projeto mais complexo.

Capítulo 6

Conclusões Gerais

Neste trabalho foi apresentada uma nova técnica de projeto para controladores adaptativos por modelo de referência e estrutura variável, em uma abordagem indireta, sendo apresentada a prova de estabilidade e resultados de simulações e implementação prática em um motor de indução trifásico, com o objetivo de comprovar sua eficiência em plantas reais. Esta técnica tem o objetivo e principal vantagem de tornar o projeto mais simples, uma vez que as leis de chaveamento são projetadas para os parâmetros da planta, os quais possuem incertezas mais facilmente conhecidas, por se tratarem de grandezas físicas. As simulações e a implementação prática em um motor de indução trifásico comprovaram que a técnica proposta apresenta desempenho semelhante ao caso direto, sendo apenas mais custosa do ponto de vista computacional.

Relacionado com este trabalho, foi publicado o artigo [Oliveira e Araújo, 2002].

Como sugestões para a continuidade deste trabalho poder-se-ia citar:

- a prova de estabilidade com a introdução de $\zeta_{p_{av}}$;
- a obtenção de um algoritmo compacto (que utilize menos relés);
- a generalização para plantas com grau relativo maior que um ($n^* > 1$);
- as provas de estabilidade na presença de dinâmica não modelada e perturbações externas;
- a utilização da técnica proposta no controlador dual adaptativo robusto [Cunha, 2001];
- a implementação em um motor de maior porte, mais comum nas indústrias;
- o estudo mais aprofundado das regiões lineares e controle suave [Hsu, 1997];
- outras aplicações, por exemplo, controle de nível.

Apêndice A

Fundamentação Matemática

Neste apêndice, serão abordados vários conceitos e ferramentas matemáticas necessárias para o desenvolvimento da teoria de controle adaptativo. Uma vez que os sistemas de controle adaptativos, aplicados a plantas lineares ou não-lineares, são essencialmente não-lineares, sua análise e projeto estão intimamente relacionados a ferramentas para análise de tais sistemas, como a Teoria de Estabilidade de Lyapunov e outras [Slotine e Li, 1991; Khalil, 1992; Ioannou e Sun, 1996].

A.1 Fundamentos da Teoria de Estabilidade de Lyapunov

O método mais útil e geral para o estudo de sistemas não-lineares é a teoria introduzida no final do século XIX pelo matemático Russo Alexandr Mikhailovich Lyapunov. Neste trabalho (O Problema Geral da Estabilidade do Movimento), ele sugere dois métodos de análise de estabilidade: método de linearização e o método direto. O método de linearização faz conclusões sobre a estabilidade local de um sistema não-linear em torno de um ponto de equilíbrio a partir das propriedades de estabilidade de sua aproximação linear. O método direto não é restrito ao movimento local, e determina as propriedades de estabilidade de um sistema não-linear através da construção de uma função escalar de energia para o sistema e análise da variação desta função com o tempo.

A.1.1 Sistemas Não-Lineares

Um sistema dinâmico não-linear pode ser representado por um conjunto de equações diferenciais não-lineares na forma

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (\text{A.1})$$

onde f é função vetorial não-linear $n \times 1$, x é um vetor de estado $n \times 1$ onde cada componente se chama *variável de estado*. Um valor particular do vetor de estado é também chamado de *ponto*, porque ele corresponde a um ponto no espaço de estado. O número de variáveis de estado n é chamado *ordem* do sistema. Uma solução $x(t)$ de (A.1) é uma função que satisfaz

a equação diferencial (A.1) e corresponde a uma curva no espaço de estado. Esta curva é geralmente referenciada como *trajetória do sistema*.

É importante observar que embora a equação (A.1) não contenha explicitamente o sinal de controle como uma variável, pode ser diretamente aplicável a sistemas de controle por realimentação. A razão é que a equação (A.1) pode representar a dinâmica de malha fechada de um sistema de controle por realimentação, com o sinal de controle sendo uma função do estado x e do tempo t e, portanto, estando implicitamente na dinâmica de malha fechada. Especificamente, se a dinâmica da planta é representada por

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (\text{A.2})$$

e alguma lei de controle for escolhida, como

$$u = g(x, t) \quad (\text{A.3})$$

então, a dinâmica de malha fechada é

$$\dot{x} = f[x, g(x, t), t] \quad (\text{A.4})$$

a qual pode ser escrita na forma da equação (A.1). É visível que a equação (A.1) pode representar sistemas dinâmicos onde sinais de controle não são envolvidos como, por exemplo, um pêndulo oscilatório.

Uma classe especial de sistemas não-lineares são os sistemas lineares. A dinâmica de um sistema linear é da forma

$$\dot{x} = A(t)x \quad (\text{A.5})$$

onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$.

A.1.2 Sistemas Autônomos e Não-Autônomos

Sistemas lineares são classificados como invariantes ou variantes no tempo, dependendo se a matriz A não varia ou varia com o tempo, respectivamente. No contexto mais geral dos sistemas não-lineares, estes adjetivos são tradicionalmente substituídos por autônomos e não-autônomos.

Estritamente falando, todos os sistemas físicos são não-autônomos, porque nenhuma de suas características dinâmicas é estritamente invariante no tempo. O conceito de um sistema autônomo é uma idealização, assim como o conceito de um sistema linear. Na prática, contudo, as propriedades do sistema podem variar muito lentamente, e pode-se negligenciar sua variação com o tempo sem causar algum erro significativo.

É importante observar que para sistemas de controle, a definição acima é válida para a dinâmica de malha fechada. Uma vez que um sistema de controle é composto de um controlador e de uma planta (incluindo a dinâmica do sensor e do atuador), a natureza não-autônoma do sistema pode ser causada por uma variação no tempo ou na planta ou na lei de controle. Especificamente, uma planta invariante no tempo com a dinâmica

$$\dot{x} = f(x, u)$$

pode levar a um sistema em malha fechada não-autônomo, se um controlador dependente do tempo é escolhido, isto é, se $u = g(x, t)$. Na verdade, controladores adaptativos para plantas lineares invariantes no tempo usualmente tornam os sistemas de controle em malha fechada não-lineares e não-autônomos.

A.1.3 Pontos de Equilíbrio

Um estado x^* é um estado de equilíbrio (ou ponto de equilíbrio) do sistema se, uma vez que a trajetória do sistema $x(t)$ se torna igual a x^* , esta permanece igual a x^* para todo t .

Por conveniência, todas as definições serão realizadas para o caso em que o ponto de equilíbrio está na origem do R^n ; isto é, $x^* = 0$. Não há perda de generalidade ao fazer isto porque qualquer ponto de equilíbrio pode ser deslocado para a origem via uma mudança de variáveis [Khalil, 1992].

Suponha o ponto de equilíbrio desejado $x^* \neq 0$. Então, introduzindo uma nova variável

$$z = x - x^*$$

e substituindo $x = z + x^*$ na equação de sistemas não-lineares autônomos $\dot{x} = f(x)$, um novo conjunto de equações na variável z é obtido

$$\dot{z} = f(z + x^*) \quad (\text{A.6})$$

Pode-se facilmente verificar uma correspondência biunívoca entre as soluções da equação $\dot{x} = f(x)$ e as soluções da equação (A.6) e, ainda mais, $z = 0$, isto é, a solução correspondente quando $x = x^*$, é um ponto de equilíbrio de (A.6). Portanto, ao invés de estudar o comportamento da equação $\dot{x} = f(x)$ na vizinhança de x^* , pode-se estudar o comportamento da equação (A.6) na vizinhança da origem.

A.1.4 Conceitos de Estabilidade

Para tornar prática a verificação de estabilidade, o ponto de equilíbrio é transladado para a origem, possibilitando assim a utilização direta da norma. Desta forma, analisar a estabilidade de um sistema consiste em estudar o comportamento da norma do estado, para todo tempo t .

Para as definições a seguir utilizam-se algumas notações simplificadas, de modo a facilitar o entendimento [Slotine e Li, 1991]. Chamar-se-á B_R a região esférica (ou bola) definida por $\|x\| < R$ no espaço de estado, e S_R a superfície esférica em si, definida por $\|x\| = R$.

A.1.4.1 Estabilidade e Instabilidade

O ponto de equilíbrio ($x = 0$) é estável se, para qualquer $R > 0$, existe $r > 0$, tal que se $\|x(0)\| < r$, então $\|x(t)\| < R$ para todo $t \geq 0$. Caso contrário, o ponto de equilíbrio é instável.

Essencialmente, estabilidade significa que a trajetória do sistema pode ser mantida perto da origem, iniciando suficientemente perto dela. Mais formalmente, a definição diz que a origem é estável, se, para que a trajetória do sistema $x(t)$ não saia de uma esfera de raio B_R , um valor $r(R)$ pode ser encontrado de forma que iniciando o estado no interior da esfera B_r no tempo inicial t_0 , garante-se que o estado irá permanecer no interior da esfera B_R para todo $t \geq t_0$. A implicação geométrica da estabilidade é indicada na curva 2 da Figura A.1.

Pode-se escrever a definição de estabilidade como

$$\forall R > 0, \exists r > 0 \text{ tal que } \|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < R, \forall t \geq 0$$

Contrariamente, um ponto de equilíbrio é instável se existe pelo menos uma esfera B_R , tal que para todo $r > 0$, não importa quão pequeno, é sempre possível que a trajetória do sistema inicie em algum lugar no interior da esfera B_r e eventualmente saia da esfera B_R (Figura A.1). A instabilidade de um ponto de equilíbrio é, em geral, indesejável, por que pode resultar em danos nos componentes elétricos e/ou mecânicos, porém em outras aplicações pode ser útil, como no caso dos osciladores harmônicos construídos a partir de ciclos-limite em um sistema.

É importante ressaltar a diferença qualitativa entre instabilidade e a noção intuitiva de *blowing up* (“explosão”), onde todas as trajetórias próximas à origem crescem indefinidamente. Em sistemas lineares, instabilidade é equivalente a *blowing up* pois, pólos instáveis sempre levam a um crescimento exponencial das variáveis de estado do sistema. Contudo, para sistemas não-lineares, o efeito *blowing up* é apenas um tipo de instabilidade.

Na Figura A.1 tem-se três curvas representando três aspectos da estabilidade e/ou instabilidade de um sistema. Na curva 1 tem-se um sistema assintoticamente estável. Na curva 2, um sistema estável e na curva 3 um sistema instável.

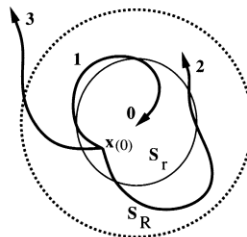


Figura A.1 Conceitos de Estabilidade

A.1.4.2 Estabilidade Assintótica e Estabilidade Exponencial

Em muitas aplicações de engenharia, o conceito de estabilidade de Lyapunov visto acima não é o bastante. Por exemplo, quando a atitude de um satélite é alterada de sua posição nominal por algum distúrbio, não se deseja apenas manter sua atitude em uma faixa determinada pela magnitude do distúrbio, isto é, a estabilidade de Lyapunov, mas deseja-se também que sua atitude gradualmente retorne a seu valor original. Este tipo de requisito é contemplado pelo conceito de estabilidade assintótica.

O ponto de equilíbrio ($x = 0$) é assintoticamente estável se é estável, e se também existe algum $r > 0$ tal que $\|x(0)\| < r$ implica que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

A estabilidade assintótica significa que o equilíbrio é estável, e também que os estados que iniciam perto da origem convergem para a mesma quando $t \rightarrow \infty$. A Figura A.1 mostra que as trajetórias do sistema que iniciam no interior da esfera B_r convergem para a origem. A esfera B_r é chamada de *domínio de atração* do ponto de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio que possui estabilidade de Lyapunov mas não é assintoticamente estável, é chamado apenas de *estável*.

A convergência de estado não implica em estabilidade. Existem sistemas em que o estado de equilíbrio é atrativo (as soluções convergem para ele quando o tempo t tende a infinito), mas não é estável.

Em muitas aplicações de engenharia, não é suficiente saber que o sistema converge para o ponto de equilíbrio após um longo tempo. Há a necessidade de estimar o quão rápido a trajetória do sistema converge para o ponto. O conceito de estabilidade exponencial pode ser usado para este propósito.

O ponto de equilíbrio ($x = 0$) é exponencialmente estável se existem dois números estritamente positivos α e λ tal que

$$\forall t > 0, \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t} \rightarrow 0$$

em alguma esfera B_r em torno do ponto.

Em outras palavras, significa que o vetor de estado de um sistema exponencialmente estável converge para o ponto de equilíbrio tão rápido quanto uma função exponencial. O número positivo λ é chamado de taxa de convergência exponencial.

A.1.4.3 Estabilidade Local e Global

As propriedades locais de estabilidade se relacionam ao fato de como as trajetórias de um sistema evoluem em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio. Estas propriedades dizem pouco sobre como o sistema irá se comportar quando o estado inicial é de alguma forma distante do ponto de equilíbrio. Conceitos de estabilidade global são então necessários.

Se a estabilidade assintótica ou exponencial é válida para qualquer estado inicial, o ponto de equilíbrio é dito globalmente assintoticamente estável ou exponencialmente estável, respectivamente.

Sistemas lineares invariantes no tempo são assintoticamente estáveis, ou estáveis, ou instáveis. A estabilidade assintótica linear é sempre global e exponencial, e a instabilidade linear implica no efeito exponencial *blowing up*. Isto explica porque estas definições mais refinadas de estabilidade não são encontradas em estudos de sistemas lineares. Elas são explicitamente necessárias apenas para sistemas não-lineares.

A.2 Método Direto de Lyapunov

A filosofia básica do método direto de Lyapunov é uma extensão de uma observação física fundamental: se a energia total de um sistema mecânico (ou elétrico) é continuamente dissipada, quer seja linear ou não-linear, tende a convergir para um ponto de equilíbrio. Assim, pode-se tirar conclusões sobre a estabilidade de um sistema observando a variação de uma simples função escalar. A principal característica deste método é gerar uma função do tipo energia para o sistema, e examinar sua variação, tendo como fundamento o conceito de energia mecânica total de um sistema massa-mola, isto é, a soma da energia cinética e potencial. Comparando as definições de estabilidade e energia mecânica, pode-se tirar algumas relações entre tais conceitos, como a seguir:

- energia nula corresponde ao ponto de equilíbrio
- estabilidade assintótica implica que a energia mecânica converge para zero.
- instabilidade está relacionada a um aumento da energia mecânica

Estas relações indicam que uma quantidade escalar, a energia mecânica, reflete indiretamente a magnitude do vetor de estado. E, ainda mais, que as propriedades de estabilidade do sistema podem ser caracterizadas pela variação da energia mecânica do sistema.

A taxa de variação de energia durante o movimento do sistema é obtida facilmente diferenciando a função de energia, e esta derivada deve ser analisada.

O uso desta técnica possibilita a análise de estabilidade de sistemas sem precisar de definições difíceis ou de um conhecimento explícito das soluções de equações não-lineares que descrevem o sistema.

A.2.1 Funções Definidas Positivas e Funções de Lyapunov

A função de energia descrita acima tem duas propriedades. A primeira é uma propriedade da função em si: ela é estritamente positiva a não ser que todos os seus argumentos sejam iguais a zero. A segunda propriedade está associada à dinâmica: a função vai monoticamente decrescendo quando as variáveis x e $\dot{x}$ variam. No método direto de Lyapunov, a primeira propriedade é formalizada pela noção de funções definidas positivas, e a segunda é formalizada pelas chamadas funções de Lyapunov. Seja $V(x)$ a função do tipo energia associada ao sistema. Uma função contínua escalar $V(x)$ é dita localmente definida positiva se $V(0) = 0$ e, em uma esfera B_{R_0}

$$x \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0$$

Se $V(0) = 0$ e a propriedade acima é válida em todo o espaço de estado, então $V(x)$ é dita globalmente definida positiva.

Se, em uma esfera B_{R_0} , a função $V(x)$ é definida positiva e tem derivadas parciais contínuas, e se sua derivada ao longo de qualquer trajetória do sistema é semi-definida negativa, isto é,

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ ou}$$

definida negativa

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ para } x \neq 0 \quad (\dot{V}(0) = 0)$$

então $V(x)$ é chamada de função de Lyapunov para o sistema.

A.2.2 Teoremas de Estabilidade

As relações entre funções de Lyapunov e a estabilidade de sistemas são estabelecidas através de teoremas do método direto de Lyapunov. Tais teoremas têm versões locais e globais. As versões locais são relacionadas com as propriedades de estabilidade na vizinhança de um ponto de equilíbrio e usualmente envolvem uma função localmente definida positiva.

Teorema A.2.2.1 (Estabilidade Local) - Se, em uma esfera B_{R_0} , existe uma função escalar $V(x)$ com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas tal que

- $V(x)$ é definida positiva (localmente em B_{R_0})
- $\dot{V}(x)$ é semi-definida negativa (localmente em B_{R_0})

então o ponto de equilíbrio ($x = 0$) é estável. Se, a derivada $\dot{V}(x)$ é localmente definida negativa em B_{R_0} , então a estabilidade é assintótica.

O teorema acima se aplica à análise local de estabilidade. Para analisar a estabilidade assintótica global de um sistema, deve-se esperar que a esfera B_{R_0} do teorema local seja expandida para todo o espaço de estado. Isto é necessário, mas não é suficiente. Uma condição adicional sobre a função V precisa ser satisfeita: $V(x)$ deve ser *radialmente ilimitada*, o que significa que $V(x) \rightarrow \infty$, quando $\|x\| \rightarrow \infty$ (em outras palavras, quando x tende a infinito em qualquer direção). Obtém-se assim o seguinte resultado:

Teorema A.2.2.2 (Estabilidade Assintótica Global) - Assumindo que existe uma função escalar V do estado x , com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas tal que

- $V(x)$ é definida positiva
- $\dot{V}(x)$ é definida negativa
- $V(x) \rightarrow \infty$, quando $\|x\| \rightarrow \infty$

então o ponto de equilíbrio ($x = 0$) é globalmente assintoticamente estável.

A.3 Análise de Sistemas baseada no Método Direto de Lyapunov

Os teoremas expostos acima possuem uma exigência para que possam ser utilizados: uma função de Lyapunov explícita precisa ser de alguma forma conhecida. A questão é, portanto, como encontrar uma função de Lyapunov para um problema específico. Contudo, não há um modo geral de encontrar funções de Lyapunov para sistemas não-lineares. Este é o principal ponto negativo do método direto. Assim, uma vez confrontado com um problema,

deve-se usar experiência, intuição e percepção física para encontrar uma função de Lyapunov apropriada.

A.3.1 Análise de Lyapunov para Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

A análise de estabilidade de sistemas lineares e invariantes no tempo já é bem conhecida. É interessante, contudo, desenvolver funções de Lyapunov para tais sistemas. Primeiro, isto permite descrever ambos os tipos de sistemas (lineares e não-lineares) usando uma linguagem comum, permitindo compartilhar características entre estas duas classes. Segundo, funções de Lyapunov são aditivas, como a "energia". Em outras palavras, funções de Lyapunov para combinações de subsistemas podem ser encontradas adicionando as funções de Lyapunov de cada subsistema. Uma vez que sistemas de controle não-lineares podem incluir componentes lineares (na planta e/ou controlador), é interessante descrever tais componentes no formalismo de Lyapunov. Abaixo seguem algumas definições de matrizes, as quais serão usadas posteriormente.

A.3.1.1 Matriz Definida Positiva, Simétrica e Anti-Simétrica

Uma matriz quadrada M é simétrica se $M = M^T$ (em outras palavras, se $\forall i, j$ $M_{ij} = M_{ji}$). Uma matriz quadrada M é anti-simétrica se $M = -M^T$. Um fato interessante é que qualquer matriz M $n \times n$ pode ser representada pela soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica, o que pode ser mostrado pela decomposição

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}$$

onde o primeiro termo é simétrico e o segundo é anti-simétrico.

Outro fato importante é que a forma quadrática associada com uma matriz anti-simétrica é sempre zero. Denotando M como uma matriz $n \times n$ anti-simétrica e x um vetor arbitrário $n \times 1$, a definição de uma matriz anti-simétrica implica que

$$x^T M x = -x^T M^T x$$

Uma vez que $x^T M^T x$ é um escalar, o lado esquerdo da equação acima pode ser substituído por sua transposta. Portanto,

$$x^T Mx = -x^T Mx$$

Isto mostra que

$$x^T Mx = 0, \forall x$$

Com estes conhecimentos, pode-se introduzir o importante conceito de matriz definida positiva. Uma matriz M quadrada $n \times n$ é definida positiva (d.p) se

$$x \neq 0 \Rightarrow x^T Mx > 0$$

Em outras palavras, a matriz M é definida positiva se a forma quadrática $x^T Mx$ é uma função definida positiva. Isto implica que a toda matriz definida positiva está associada a uma função definida positiva. Obviamente, o contrário não é verdade. Uma condição necessária para que a matriz M seja d.p é que os elementos de sua diagonal sejam estritamente positivos.

A.3.1.2 Funções de Lyapunov para Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Dado um sistema linear da forma $\dot{x} = Ax$, considere uma função quadrática candidata à função de Lyapunov

$$V = x^T P x$$

onde P é uma matriz simétrica definida positiva. Diferenciando a função definida positiva V ao longo da trajetória do sistema recai-se em outra forma quadrática

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = -x^T Q x \quad (\text{A.7})$$

onde

$$A^T P + P A = -Q \quad (\text{A.8})$$

A questão, portanto, é determinar se a matriz simétrica Q definida pela equação de Lyapunov (A.8) acima, é d.p. Se este é o caso, V satisfaz as condições dos teoremas anteriormente expostos, e a origem é globalmente assintoticamente estável. Contudo, este método "natural" pode levar a resultados inconclusivos, isto é, Q pode não ser definida positiva até mesmo para sistemas estáveis.

Um método mais útil de estudar um dado sistema linear usando funções escalares quadráticas, é encontrar uma matriz definida positiva P de uma dada matriz definida positiva Q , isto é,

- escolher uma matriz definida positiva Q , geralmente escolhe-se $Q = I$, por simplicidade computacional.
- resolver a equação (A.8) e encontrar P
- checar se P é d.p

Se P é definida positiva, para a matriz definida positiva Q associada, então $x^T P x$ é uma função de Lyapunov para o sistema linear e a estabilidade assintótica global é garantida.

A.4 Projeto de Controle Baseado no Método Direto de Lyapunov

Ao realizar a análise de um sistema, tem-se presumido que uma certa lei de controle tenha sido escolhida para o sistema. Contudo, em muitas aplicações de controle, a tarefa é encontrar uma lei de controle apropriada para uma determinada planta.

Há basicamente duas formas utilizando o método direto de Lyapunov para o projeto de controle, e ambas têm o aspecto de tentativa e erro. A primeira técnica envolve a escolha de uma forma para a lei de controle e, então, a busca de uma função de Lyapunov que justifique tal escolha. A segunda técnica é o oposto, isto é, requer a escolha de uma candidata à função de Lyapunov e, então, a busca de uma lei de controle que torne esta candidata uma real função de Lyapunov.

Abaixo seguem mais alguns resultados (lemas) necessários para o perfeito entendimento das provas de estabilidade para os métodos de controle adaptativo apresentados neste trabalho (Apêndice B.2), inclusive estendendo os resultados para sistemas não-autônomos.

A.5 Análise de Sistemas Usando o Lema de Barbalat

Inicialmente, são apresentadas algumas propriedades úteis de funções para o entendimento deste lema.

A.5.1 Propriedades Assintóticas de Funções e Suas Derivadas

Dada uma função diferenciável f do tempo t , os três fatos a seguir são importantes:

- $\dot{f} \rightarrow 0 \not\Rightarrow f$ converge para uma constante

o fato de $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ não implica que $f(t)$ tem um limite quando $t \rightarrow \infty$.

- f converge $\not\Rightarrow \dot{f} \rightarrow 0$

o fato de $f(t)$ ter um limite quando $t \rightarrow \infty$ não implica que $\dot{f}(t) \rightarrow 0$.

- Se f é limitada inferiormente e decrescente ($\dot{f} \leq 0$), então ela converge para um limite.

A.5.2 Lema de Barbalat

Dado que uma função tende para um limite finito, que requisito adicional pode garantir que sua derivada convirja para zero? O lema de Barbalat indica que a derivada em si deve ter alguma suavidade. Mais precisamente, tem-se:

Se a função diferenciável $f(t)$ tem um limite finito quando $t \rightarrow \infty$, e se $\dot{f}$ é uniformemente contínua, então $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

A continuidade uniforme de uma função pode ser examinada com base em sua derivada. Uma condição suficiente bem simples para uma função ser uniformemente contínua é sua derivada ser limitada. Desta forma pode-se reescrever o lema da seguinte forma:

Se a função diferenciável $f(t)$ tem um limite finito quando $t \rightarrow \infty$, de tal forma que $\ddot{f}$ existe e é limitada, então $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

A.5.3 Usando o Lema de Barbalat para Análise de Estabilidade

Para análise de estabilidade pode-se escrever o lema da seguinte forma:

Se uma função escalar $V(x, t)$ satisfaz as seguintes condições:

- $V(x, t)$ é uniformemente limitada ($V(x, t) \in \mathcal{L}_\infty$)
- $\dot{V}(x, t)$ é semi-definida negativa
- $\dot{V}(x, t)$ é uniformemente contínua no tempo

então $\dot{V}(x, t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

A.6 Funções de Transferência Reais Positivas e Estritamente Reais Positivas

Na análise e projeto de sistemas não-lineares, é geralmente possível e útil decompor o sistema em um subsistema linear e um subsistema não-linear. Se a função de transferência (ou matriz de transferência) do subsistema linear é real positiva, então esta tem propriedades importantes que podem levar à geração de uma função de Lyapunov para todo o sistema.

Considere funções de transferência racionais de ordem n SISO (Single Input - Single Output) da forma

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

onde os coeficientes do numerador e denominador são considerados números reais e $n \geq m$. A diferença $n - m$ entre a ordem do denominador e do numerador é também chamada de *grau relativo do sistema*, também representado por n^* .

A função de transferência $G(s)$ é real positiva se

$$\operatorname{Re}[G(s)] \geq 0, \forall \operatorname{Re}[s] \geq 0$$

Ela é estritamente real positiva (ERP) se $G(s - \varepsilon)$ é real positiva para algum $\varepsilon > 0$. Esta definição significa que $G(s)$ sempre tem uma parte real positiva (ou zero) quando s tem parte real positiva (ou zero).

Para funções de transferência de ordem elevada, é geralmente difícil usar a definição acima para testar a condição de positividade real das funções, porque envolve o teste da

condição de positividade ao longo de todo o lado direito do plano complexo. Assim, pode-se simplificar esta condição da seguinte maneira

Uma função $G(s)$ é estritamente real positiva (ERP) se e somente se

- i) $G(s)$ é uma função de transferência estritamente estável (pólos no semiplano esquerdo aberto do plano complexo);
- ii) a parte real de $G(s)$ é estritamente positiva ao longo do eixo imaginário, isto é,
 $\text{Re}[G(j\omega)] > 0, \forall \omega \geq 0$

Os itens acima implicam nas seguintes condições necessárias para garantir que uma função $G(s)$ é ERP:

- $G(s)$ é estritamente estável (pólos no semiplano esquerdo aberto do plano complexo);
- A curva de Nyquist de $G(j\omega)$ deve estar totalmente no semiplano direito do plano complexo. Equivalentemente, o diagrama de fase do sistema em resposta a entradas senoidais é sempre menor que 90° ;
- O grau relativo de $G(s)$ é 0 ou 1;
- $G(s)$ é estritamente de fase-mínima (isto é, todos os zeros estão no semiplano esquerdo aberto do plano complexo).

A.7 Lema de Kalman-Yakubovich

Se a função de transferência de um sistema é ERP, existe uma propriedade matemática associada com sua representação no espaço de estado, a qual é descrita pelo Lema de Kalman-Yakubovich (KY).

Considere um sistema monovariável, controlável, linear e invariante no tempo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x\end{aligned}$$

A função de transferência

$$G(s) = c^T [sI - A]^{-1} b$$

é estritamente real positiva se, e somente se, existem matrizes definidas positivas P e Q tal que

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -Q \\ Pb &= c \end{aligned} \tag{A.9}$$

Neste lema o sistema envolvido deve ser assintoticamente estável.

A.8 Equação Diofantina

A seguir tem-se um resultado algébrico importante que será útil no desenvolvimento do vetor de parâmetros do controlador adaptativo na condição de “matching” (Apêndice B), denominado Equação Diofantina [Ioannou e Sun, 1996].

Sejam os seguintes polinômios

$n_p(s)$ mônico com grau $n - n^*$

$d_p(s)$ mônico com grau n

$x(s)$ mônico com grau $2n - 1$

e

$n_p(s)$ e $d_p(s)$ coprimos

$x(s)$ arbitrário

então

$\exists! p_1(s)$ mônico com grau $n - 1$

$\exists! p_2(s)$ mônico com grau $n - 1$

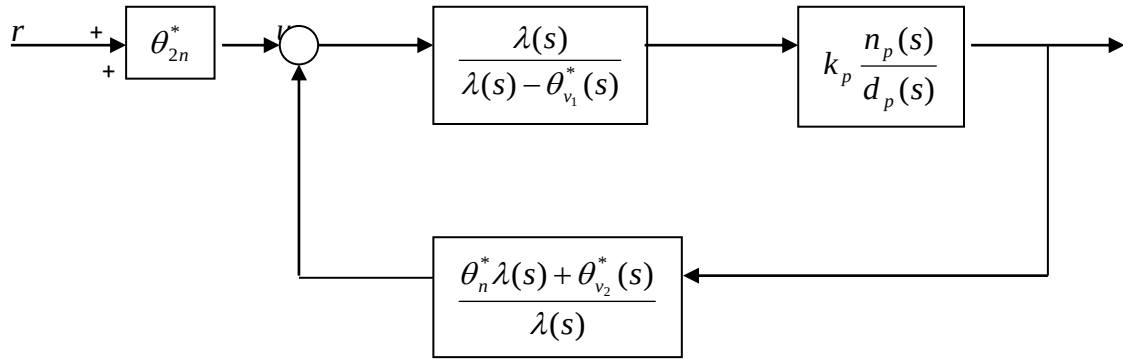
tal que

$$p_1(s)d_p(s) + p_2(s)n_p(s) \equiv x(s) \quad (\text{equação diofantina}) \quad (\text{A.10})$$

$$F_1 = \frac{1}{1 - \theta_{v_1}^{*T} (sI - \Lambda)^{-1} g} = \frac{1}{1 - \frac{\theta_{v_1}^*(s)}{\lambda(s)}} = \frac{\lambda(s)}{\lambda(s) - \theta_{v_1}^*(s)}; \theta_{v_1}^*(s) = \gamma \theta_{v_1}^{*T} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s^{n-2} \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

$$F_2 = \theta_n^* + \theta_{v_2}^{*T} (sI - \Lambda)^{-1} g = \theta_n^* + \frac{\theta_{v_2}^*(s)}{\lambda(s)} = \frac{\theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s)}{\lambda(s)}; \theta_{v_2}^*(s) = \gamma \theta_{v_2}^{*T} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s^{n-2} \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

Simplificando o diagrama de blocos, tem-se



$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\theta_{2n}^* k_p n_p(s) \lambda(s)^2}{\lambda(s) [\lambda(s) - \theta_{v_1}^*(s)] d_p(s) - \lambda(s) [\theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s)] k_p n_p(s)}$$

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\theta_{2n}^* k_p n_p(s) \lambda(s)}{[\lambda(s) - \theta_{v_1}^*(s)] d_p(s) - [\theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s)] k_p n_p(s)}$$

Obs: $n_p(s)$ é um fator de $[\lambda(s) - \theta_{v_1}^*(s)]$

Utilizando a equação diofantina (A.10) e considerando

$n_m(s)$ um fator de $\lambda(s)$

e

$$x(s) = \frac{d_m(s) n_p(s) \lambda(s)}{n_m(s)}$$

Então,

$$p_1(s)d_p(s) + p_2(s)n_p(s) \equiv \frac{d_m(s)n_p(s)\lambda(s)}{n_m(s)} \quad (\text{B.3})$$

Sejam

$$\theta_{2n}^* = \frac{k_m}{k_p}$$

$$\theta_{v_1}^*(s) = -p_1(s) + \lambda(s)$$

$$\theta_n^*\lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s) = \frac{-1}{k_p} p_2(s)$$

então

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{r(s)} &= \frac{\frac{k_m}{k_p} k_p n_p(s) \lambda(s)}{[\lambda(s) + p_1(s) - \lambda(s)]d_p(s) + \frac{1}{k_p} p_2(s)k_p n_p(s)} \\ &= \frac{k_m n_p(s) \lambda(s)}{p_1(s)d_p(s) + p_2(s)n_p(s)} = \frac{k_m n_p(s) \lambda(s)}{\frac{d_m(s)n_p(s)\lambda(s)}{n_m(s)}} = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)} \end{aligned}$$

Resolvendo para grau relativo um ($n^* = 1$), tem-se

$$n_m(s) = \lambda(s)$$

$$n_p(s) = \lambda(s) - \theta_{v_1}^*(s) \Rightarrow n_p(s) = n_m(s) - \theta_{v_1}^*(s) \Rightarrow \theta_{v_1}^*(s) = n_m(s) - n_p(s)$$

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\frac{k_m}{k_p} k_p n_p(s) n_m(s)}{n_p(s)d_p(s) - [\theta_n^*\lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s)]k_p n_p(s)} = \frac{k_m n_m(s)}{d_p(s) - k_p [\theta_n^*\lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s)]} = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)}$$

$$d_p(s) - k_p [\theta_n^*\lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s)] = d_m(s) \Rightarrow \theta_n^*\lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s) = \frac{d_p(s) - d_m(s)}{k_p}$$

Desenvolvendo a expressão $\theta_{v_1}^*(s) = n_m(s) - n_p(s)$, tem-se

$$\theta_{v_1}^*(s) = \gamma \sum_{i=1}^{n-1} \theta_{v_1, n-i}^* s^{n-1-i}$$

e usando as equações (2.1) e (2.3), obtém-se

$$\gamma \theta_{v_1, n-i}^* = \beta_{m_i} - \beta_i \Rightarrow \theta_{v_1, i}^* = \frac{\beta_{m, n-i} - \beta_{n-i}}{\gamma}; i = 1, \dots, n-1$$

Desenvolvendo a expressão $\theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s) = \frac{d_p(s) - d_m(s)}{k_p}$, tem-se

$$\theta_n^* \lambda(s) + \theta_{v_2}^*(s) = \theta_n^* (s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{m_i} s^{n-1-i}) + \gamma \sum_{i=1}^{n-1} \theta_{v_2, n-i}^* s^{n-1-i} = \theta_n^* s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_n^* \beta_{m_i} + \gamma \theta_{v_2, n-i}^*) s^{n-1-i}$$

e, usando as equações (2.2) e (2.4), fica-se com

$$\begin{aligned} \theta_n^* &= \frac{\alpha_1 - \alpha_{m1}}{k_p} \\ \theta_n^* \beta_{m_i} + \gamma \theta_{v_2, n-i}^* &= \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_{m, i+1}}{k_p} \Rightarrow \theta_{v_2, n-i}^* = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_{m, i+1} - k_p \theta_n^* \beta_{m_i}}{k_p \gamma} \\ \Rightarrow \theta_{v_2, i}^* &= \frac{\alpha_{n-i+1} - \alpha_{m, n-i+1} - k_p \theta_n^* \beta_{m, n-i}}{k_p \gamma}; i = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Resumindo, tem-se as seguintes expressões para os parâmetros do controlador na condição de *matching*, para o caso $\boxed{n^* = 1}$

$$\begin{aligned}
 \theta_{v_1,i}^* &= \frac{\beta_{m,n-i} - \beta_{n-i}}{\gamma}; i = 1, \dots, n-1 \\
 \theta_n^* &= \frac{\alpha_1 - \alpha_{m1}}{k_p} \\
 \theta_{v_2,i}^* &= \frac{\alpha_{n-i+1} - \alpha_{m,n-i+1} - k_p \theta_n^* \beta_{m,n-i}}{k_p \gamma}; i = 1, \dots, n-1 \\
 \theta_{2n}^* &= \frac{k_m}{k_p}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Apêndice C

Provas de Estabilidade

C.1 MRAC DIRETO

Para a demonstração de estabilidade do sistema, é necessário utilizar o lema de Kalman-Yakubovitch (Seção A.7). Reescrevendo o lema para a notação adotada, consideremos um sistema linear, invariante no tempo, estabilizável e detectável, representado por

$$\begin{cases} \dot{X}_m = A_c X_m + b_c r \\ y_m = c_c^T X_m \end{cases} \quad (C.1)$$

A função de transferência $M(s) = c_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c$ é ERP se e somente se $\exists P = P^T > 0, Q = Q^T > 0$ (P, Q matrizes definidas positivas), tal que

$$\begin{cases} A_c^T P + P A_c = -2Q \\ P b_c = c_c \end{cases}$$

Seja a seguinte candidata à função de Lyapunov para o sistema

$$V(e, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} (e^T P e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}) > 0 \quad (C.2)$$

onde

$$P = P^T > 0$$

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta^* \quad (C.3)$$

$$e = X - X_m \quad (C.4)$$

São úteis as seguintes observações:

$$\tilde{\theta}^T \tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 & \tilde{\theta}_2 & \dots & \tilde{\theta}_{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_{2n} \end{bmatrix} = \tilde{\theta}_1^2 + \tilde{\theta}_2^2 + \dots + \tilde{\theta}_{2n}^2 \geq 0, \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} = 0 \text{ se e somente se } \tilde{\theta} = 0.$$

$$e^T P e > 0 \text{ para } P = P^T > 0$$

$$b_c^T P e = e^T P b_c, (b_c^T P e = \text{escalar})$$

$$w^T \tilde{\theta} = \tilde{\theta}^T w, (\tilde{\theta}^T w = \text{escalar})$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}^* = \dot{\theta}, (\theta^* = \text{cte} \Rightarrow \dot{\theta}^* = 0)$$

$$u - u^* = \theta^T w - \theta^{*T} w = (\theta^T - \theta^{*T}) w = \tilde{\theta}^T w$$

$$\dot{\theta} = -e_0 w \Rightarrow \dot{\tilde{\theta}} = -e_0 w^T$$

$$\dot{e} = A_c e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c (u - u^*) \Rightarrow \dot{e}^T = e^T A_c^T + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c^T (u - u^*) \quad (\text{C.5})$$

Então,

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}) &= \frac{1}{2} \left\{ \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \frac{1}{\theta_{2n}^*} (\tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} + \dot{\tilde{\theta}}^T \tilde{\theta}) \right\} \\ \dot{V}(e, \tilde{\theta}) &= \frac{1}{2} \left\{ \left[e^T A_c^T + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c^T (u - u^*) \right] P e + e^T P \left[A_c e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c (u - u^*) \right] + \frac{1}{\theta_{2n}^*} \left[-e_0 w^T \tilde{\theta} + \dot{\tilde{\theta}}^T (-e_0 w) \right] \right\} \\ \dot{V}(e, \tilde{\theta}) &= \frac{1}{2} \left\{ e^T A_c^T P e + e^T P A_c e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c^T (u - u^*) P e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} e^T P b_c (u - u^*) - \frac{1}{\theta_{2n}^*} e_0 w^T \tilde{\theta} - \frac{1}{\theta_{2n}^*} e_0 \tilde{\theta}^T w \right\} \\ \dot{V}(e, \tilde{\theta}) &= \frac{1}{2} \left\{ e^T (A_c^T P + P A_c) e + \frac{2}{\theta_{2n}^*} e^T P b_c \tilde{\theta}^T w - \frac{2}{\theta_{2n}^*} e_0 \tilde{\theta}^T w \right\} \end{aligned}$$

Pelo lema de Kalman-Yakubovitch, tem-se:

$$\begin{cases} A_c^T P + P A_c = -2Q \\ P b_c = c_c \end{cases}$$

Assim,

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} \left\{ -2e^T Q e + \frac{2}{\theta_{2n}^*} e^T c_c \tilde{\theta}^T w - \frac{2}{\theta_{2n}^*} e_0 \tilde{\theta}^T w \right\}$$

e como

$$e_0 = c_c^T e = e^T c_c \quad (C.6)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}) &= -e^T Q e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} e_0 \tilde{\theta}^T w - \frac{1}{\theta_{2n}^*} e_0 \tilde{\theta}^T w \\ \dot{V}(e, \tilde{\theta}) &= -e^T Q e \end{aligned} \quad (C.7)$$

de onde conclui-se que

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}) \leq 0, \quad (C.8)$$

De (C.8) conclui-se que:

- i) $e \in \mathcal{L}_\infty$ (uniformemente limitado);
- ii) $\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$;
- iii) de (C.6), $e_0 \in \mathcal{L}_\infty$;
- iv) de (C.3), $\theta \in \mathcal{L}_\infty$;
- v) como $r \in e$ e $M(s)$ é estável (C.1), $X_m \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow y_m \in \mathcal{L}_\infty$;
- vi) de (C.4), $X \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow x \in \mathcal{L}_\infty, v_1 \in \mathcal{L}_\infty, v_2 \in \mathcal{L}_\infty, y \in \mathcal{L}_\infty$;
- vii) $w \in \mathcal{L}_\infty$ ($w = [v_1 \ y \ v_2 \ r]^T$);

viii) $u \in \mathcal{L}_\infty (u = \theta^T w);$

ix) de (C.5), $\dot{e} \in \mathcal{L}_\infty;$

x) $\dot{\theta} \in \mathcal{L}_\infty \left(\dot{\theta} = -\Gamma e_o w \right);$

xi) de (C.8) tem-se que $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_\infty$. Precisa-se demonstrar de que $\dot{V}$ é uniformemente contínua, o que pode ser feito da seguinte forma:

$$\int_0^\infty e^T Q e = - \int_0^\infty \dot{V}(t) dt = -(V_\infty - V_o) \Rightarrow \text{finito}. \quad (\text{C.9})$$

Pelo Lema de Barbalat (Seção A.5.3), de $V \in \mathcal{L}_\infty$ (C.2), $\dot{V} \leq 0$ (C.8) e (C.9), tem-se

que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta} = \dot{\theta} = 0$.

xii) $\lim_{t \rightarrow \infty} [\theta(t) - \theta^*] = 0$ se u é persistentemente excitante (P.E.)

C.2 MRAC INDIRETO

Seja a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V = \frac{e^T P e}{2} + \frac{1}{k_m} \left(\frac{\tilde{k}_p^2}{2\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \tilde{\beta}}{2\gamma} |k_p| + \frac{\tilde{\alpha}_1^2}{2\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \tilde{\alpha}}{2\gamma} \right) \quad (C.10)$$

com

$$P = P^T > 0$$

$$\gamma_1, \gamma_p > 0$$

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^T > 0, \Gamma_\beta = \Gamma_\beta^T > 0$$

Tem-se ainda que

$$\dot{e} = A_c e + \frac{b_c}{k_m} [k_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha], \text{ conforme (2.21).}$$

e

$$\theta_p = [k_p, \beta^T, \alpha_1, \alpha^T]^T; \tilde{\theta}_p = \theta_p - \theta_p^* \quad (C.11)$$

Escolhendo as seguintes leis adaptativas

$$\dot{\hat{\beta}} = \Gamma_\beta e_0 v_1 \operatorname{sgn}(k_p)$$

$$\dot{\hat{\alpha}}_1 = -\gamma_1 e_0 \zeta_1$$

$$\dot{\hat{\alpha}} = -\Gamma_\alpha e_0 v_2$$

Se $|\hat{k}_p| > k_0$ ou se $|\hat{k}_p| = k_0$ e $e_0 \zeta_p \operatorname{sgn}(\hat{k}_p) \leq 0$ (onde deve-se ter $\operatorname{sgn}(\hat{k}_p) = \operatorname{sgn}(k_p)$)

$$\dot{\hat{k}}_p = -\gamma_p e_0 \zeta_p$$

e, em caso contrário,

$$\dot{\hat{k}}_p = 0$$

Obs.: k_0 é o limite inferior escolhido para $\hat{k}_p$ para que não ocorra uma indeterminação, pois $\hat{k}_p$ faz parte do denominador das expressões de vários parâmetros do controlador. Em geral, escolhe-se k_0 bem pequeno. Deve-se também inicializar $\hat{k}_p$ de acordo com o seguinte critério: $\left| \hat{k}_p(0) \right| \geq k_0$.

Se $\left| \hat{k}_p \right| > k_0$ ou se $\left| \hat{k}_p \right| = k_0$ e $e_0 \zeta_p \operatorname{sgn}(\hat{k}_p) \leq 0$, tem-se a seguinte expressão para a derivada de (C.10)

$$\dot{V} = -e^T Q e \tag{C.12}$$

o que pode ser demonstrado através do desenvolvimento da derivada de (C.10) para os casos onde $k_p > 0$ e $k_p < 0$.

Para $k_p > 0$, $\left| \hat{k}_p \right| = k_p$. Assim,

$$V = \frac{e^T P e}{2} + \frac{1}{k_m} \left(\frac{\tilde{k}_p^2}{2\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_{\beta}^{-1} \tilde{\beta}}{2\gamma} \left| k_p \right| + \frac{\tilde{\alpha}_1^2}{2\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_{\alpha}^{-1} \tilde{\alpha}}{2\gamma} \right)$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{1}{2} (\dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}) + \frac{1}{k_m} \left[\frac{2 \tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{2\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p + \dot{\tilde{\beta}}^T \Gamma_\beta^{-1} \tilde{\beta} k_p + \tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p + \dot{\tilde{\beta}}^T \Gamma_\beta^{-1} \tilde{\beta} k_p}{2\gamma} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2 \tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{2\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}} + \dot{\tilde{\alpha}}^T \Gamma_\alpha^{-1} \tilde{\alpha}}{2\gamma} \right] \\
\dot{V} &= \frac{1}{2} \left\{ \left[e^T A_c^T + \frac{b_c^T}{k_m} \left(\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) \right] P e + \right. \\
&\quad \left. + e^T P \left[A_c e + \frac{b_c}{k_m} \left(\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{k_m} \left[\frac{\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma} \right] \\
\dot{V} &= \frac{1}{2} \left[e^T (A_c^T P + P A_c) e \right] + \frac{e^T P b_c}{k_m} \left(\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) + \\
&\quad + \frac{1}{k_m} \left(\frac{\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma} \right)
\end{aligned}$$

Pelo lema de Kalman-Yakubovitch (Seção A.7), tem-se

$$A_c^T P + P A_c = -2Q, Q = Q^T > 0$$

$$P b_c = c_c \Rightarrow e^T c_c = c_c^T e = e_0$$

$$\text{Também, } \dot{\tilde{k}}_p = \dot{k}_p, \dot{\tilde{\beta}} = \dot{\beta}, \dot{\tilde{\alpha}}_1 = \dot{\alpha}_1, \dot{\tilde{\alpha}} = \dot{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T Q e + \frac{e_0}{k_m} \left(\tilde{k}_p \zeta_p - \frac{k_p \tilde{\beta}^T v_1}{\gamma} + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \frac{\tilde{\alpha}^T v_2}{\gamma} \right) + \\ & + \frac{1}{k_m} \left[\frac{\tilde{k}_p (-\gamma_p e_0 \zeta_p)}{\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} k_p (\Gamma_\beta e_0 v_1 \operatorname{sgn}(k_p))}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 (-\gamma_1 e_0 \zeta_1)}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} (-\Gamma_\alpha e_0 v_2)}{\gamma} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T Q e + \frac{\tilde{k}_p e_0 \zeta_p}{k_m} - \frac{k_p e_0 \tilde{\beta}^T v_1}{\gamma k_m} + \frac{\tilde{\alpha}_1 e_0 \zeta_1}{k_m} + \frac{\tilde{\alpha}^T e_0 v_2}{\gamma k_m} - \frac{\tilde{k}_p e_0 \zeta_p}{k_m} + \\ & + \frac{e_0 \tilde{\beta}^T v_1 k_p \operatorname{sgn}(k_p)}{\gamma k_m} - \frac{\tilde{\alpha}_1 e_0 \zeta_1}{k_m} - \frac{\tilde{\alpha}^T e_0 v_2}{\gamma k_m} \end{aligned}$$

como $k_p \operatorname{sgn}(k_p) = |k_p|$ e $k_p > 0$, $|k_p| = k_p$. Assim,

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T Q e + \frac{\tilde{k}_p e_0 \zeta_p}{k_m} - \frac{k_p e_0 \tilde{\beta}^T v_1}{\gamma k_m} + \frac{\tilde{\alpha}_1 e_0 \zeta_1}{k_m} + \frac{\tilde{\alpha}^T e_0 v_2}{\gamma k_m} - \frac{\tilde{k}_p e_0 \zeta_p}{k_m} + \\ & + \frac{e_0 \tilde{\beta}^T v_1 k_p}{\gamma k_m} - \frac{\tilde{\alpha}_1 e_0 \zeta_1}{k_m} - \frac{\tilde{\alpha}^T e_0 v_2}{\gamma k_m} \end{aligned}$$

$$\dot{V} = -e^T Q e$$

Para $k_p < 0$, $|k_p| = -k_p$. Assim,

$$\begin{aligned}
V &= \frac{e^T P e}{2} + \frac{1}{k_m} \left(\frac{\tilde{k}_p^2}{2\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \tilde{\beta}}{2\gamma} |\tilde{k}_p| + \frac{\tilde{\alpha}_1^2}{2\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \tilde{\alpha}}{2\gamma} \right) \\
\dot{V} &= \frac{1}{2} (\dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}) + \frac{1}{k_m} \left[\frac{2\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{2\gamma_p} - \frac{\dot{\tilde{\beta}}^T \Gamma_\beta^{-1} \tilde{\beta} k_p - \tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p - \tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \tilde{\beta} \dot{k}_p}{2\gamma} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{2\gamma_1} + \frac{\dot{\tilde{\alpha}}^T \Gamma_\alpha^{-1} \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{2\gamma} \right] \\
\dot{V} &= \frac{1}{2} \left\{ \left[e^T A_c^T + \frac{b_c^T}{k_m} \left(\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) \right] P e + \right. \\
&\quad \left. + e^T P \left[A_c e + \frac{b_c}{k_m} \left(\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{k_m} \left[\frac{\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{\gamma_p} - \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma} \right] \\
\dot{V} &= \frac{1}{2} [e^T (A_c^T P + P A_c) e] + \frac{e^T P b_c}{k_m} \left(\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) + \\
&\quad + \frac{1}{k_m} \left(\frac{\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{\gamma_p} - \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma} \right)
\end{aligned}$$

Pelo lema de Kalman-Yakubovitch, tem-se

$$A_c^T P + P A_c = -2Q, Q = Q^T > 0$$

$$P b_c = c_c \Rightarrow e^T c_c = c_c^T e = e_0$$

$$\text{Também, } \dot{\tilde{k}}_p = \dot{\hat{k}}_p, \dot{\tilde{\beta}} = \dot{\hat{\beta}}, \dot{\tilde{\alpha}}_1 = \dot{\hat{\alpha}}_1, \dot{\tilde{\alpha}} = \dot{\hat{\alpha}}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T Q e + \frac{e_0}{k_m} \left(\tilde{k}_p \zeta_p - \frac{k_p \tilde{\beta}^T v_1}{\gamma} + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \frac{\tilde{\alpha}^T v_2}{\gamma} \right) + \\ & + \frac{1}{k_m} \left[\frac{\tilde{k}_p (-\gamma_p e_0 \zeta_p)}{\gamma_p} - \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} k_p (\Gamma_\beta e_0 v_1 \operatorname{sgn}(k_p))}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 (-\gamma_1 e_0 \zeta_1)}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} (-\Gamma_\alpha e_0 v_2)}{\gamma} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T Q e + \frac{\tilde{k}_p e_0 \zeta_p}{k_m} - \frac{k_p e_0 \tilde{\beta}^T v_1}{\gamma k_m} + \frac{\tilde{\alpha}_1 e_0 \zeta_1}{k_m} + \frac{\tilde{\alpha}^T e_0 v_2}{\gamma k_m} - \frac{\tilde{k}_p e_0 \zeta_p}{k_m} + \\ & - \frac{e_0 \tilde{\beta}^T v_1 k_p \operatorname{sgn}(k_p)}{\gamma k_m} - \frac{\tilde{\alpha}_1 e_0 \zeta_1}{k_m} - \frac{\tilde{\alpha}^T e_0 v_2}{\gamma k_m} \end{aligned}$$

como $k_p \operatorname{sgn}(k_p) = |k_p|$ e $k_p < 0$, $|k_p| = -k_p$. Assim,

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T Q e + \frac{\tilde{k}_p e_0 \zeta_p}{k_m} - \frac{k_p e_0 \tilde{\beta}^T v_1}{\gamma k_m} + \frac{\tilde{\alpha}_1 e_0 \zeta_1}{k_m} + \frac{\tilde{\alpha}^T e_0 v_2}{\gamma k_m} - \frac{\tilde{k}_p e_0 \zeta_p}{k_m} + \\ & + \frac{e_0 \tilde{\beta}^T v_1 k_p}{\gamma k_m} - \frac{\tilde{\alpha}_1 e_0 \zeta_1}{k_m} - \frac{\tilde{\alpha}^T e_0 v_2}{\gamma k_m} \\ \dot{V} = & -e^T Q e \end{aligned}$$

$$\text{Se } \left| \hat{k}_p \right| = k_0 \text{ e } e_0 \zeta_p \operatorname{sgn}(\hat{k}_p) > 0$$

$$\dot{V} = -e^T Q e + \frac{\tilde{k}_p e_0 \zeta_p}{k_m} \quad (\text{C.13})$$

Uma vez que $k_m > 0$, $e_0 \zeta_p \operatorname{sgn}(\hat{k}_p) > 0$ e $\left| \hat{k}_p \right| = k_0$ tem-se que

$$\begin{cases} e_0 \zeta_p > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\hat{k}_p) > 0 \Rightarrow \hat{k}_p = k_0 \Rightarrow \hat{k}_p - k_p < 0 \Rightarrow \tilde{k}_p < 0 \Rightarrow \frac{\tilde{k}_p e_0 \zeta_p}{k_m} < 0 \\ e_0 \zeta_p < 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\hat{k}_p) < 0 \Rightarrow \hat{k}_p = -k_0 \Rightarrow \hat{k}_p - k_p > 0 \Rightarrow \tilde{k}_p > 0 \Rightarrow \frac{\tilde{k}_p e_0 \zeta_p}{k_m} < 0 \end{cases}$$

o que resulta em

$$\dot{V} \leq -e^T Q e \quad (C.14)$$

De (C.14) conclui-se que:

- i) $e \in \mathcal{L}_\infty$; $\mathcal{L}_\infty$
- ii) $\hat{k}_p, \hat{\beta}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha} \in \mathcal{L}_\infty$;
- iii) de (C.6), $e_o \in \mathcal{L}_\infty$;
- iv) de (C.11), $\theta_p \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow \theta \in \mathcal{L}_\infty$;
- v) como $r \in \mathcal{L}_\infty$ e $M(s)$ é estável (C.1), $X_m \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow y_m \in \mathcal{L}_\infty$;
- vi) de (C.4), $X \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow x \in \mathcal{L}_\infty, v_1 \in \mathcal{L}_\infty, v_2 \in \mathcal{L}_\infty, y \in \mathcal{L}_\infty$;
- vii) $w \in \mathcal{L}_\infty (w = [v_1 \ y \ v_2 \ r]^T)$;
- viii) $u \in \mathcal{L}_\infty (u = \theta^T w)$;
- ix) de (2.21), $\dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$;
- x) das expressões para as leis adaptativas, $\dot{k}_p, \dot{\beta}, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha} \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow \dot{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$;
- xi) de (C.14) tem-se que $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_\infty$. Precisa-se demonstrar de que $\dot{V}$ é uniformemente contínua, o que pode ser feito da seguinte forma:
- xii)
$$\int_0^\infty e^T Q e = - \int_0^\infty \dot{V}(t) dt = -(V_\infty - V_o) \Rightarrow \text{finito} . \quad (C.15)$$
- xiii) Pelo Lema de Barbalat (Seção A.5.3), de $V \in \mathcal{L}_\infty$ (C.10), $\dot{V} \leq 0$ (C.14) e (C.15), tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_p = \dot{\theta}_p = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta} = \dot{\theta} = 0$.
- xiv) $\lim_{t \rightarrow \infty} [\theta_p(t) - \theta_p^*] = 0$ e, conseqüentemente $\lim_{t \rightarrow \infty} [\theta(t) - \theta^*] = 0$ se u é persistentemente excitante (P.E.)

C.3 SISTEMAS COM ESTRUTURA VARIÁVEL

O sistema considerado tem a seguinte descrição

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \text{ e } s(x) = cx_1 + x_2 = 0, c > 0$$

Então,

$$\dot{s} \cdot \dot{s} = s(c \dot{x}_1 + \dot{x}_2) = s(cx_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + u)$$

e como

$$u = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$$

fica-se com

$$\begin{aligned} \dot{s} \cdot \dot{s} &= s[(cx_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2)] \\ \dot{s} \cdot \dot{s} &= s[(a_1 + \theta_1)x_1 + (a_2 + c + \theta_2)x_2] \end{aligned}$$

e, sabendo que

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\bar{\theta}_1 \operatorname{sgn}(sx_1) \\ \theta_2 &= -\bar{\theta}_2 \operatorname{sgn}(sx_2) \end{aligned}$$

obtem-se

$$\begin{aligned}\dot{s} &= s\{[a_1 - \bar{\theta}_1 \operatorname{sgn}(sx_1)]x_1 + [a_2 + c - \bar{\theta}_2 \operatorname{sgn}(sx_2)]x_2\} \\ \dot{s} &= a_1 sx_1 - \bar{\theta}_1 sx_1 \operatorname{sgn}(sx_1) + (a_2 + c)sx_2 - \bar{\theta}_2 sx_2 \operatorname{sgn}(sx_2)\end{aligned}$$

Como

$$v \cdot \operatorname{sgn}(v) = |v|$$

tem-se

$$\dot{s} = a_1 sx_1 - \bar{\theta}_1 |sx_1| + (a_2 + c)sx_2 - \bar{\theta}_2 |sx_2|$$

Das relações

$$\bar{\theta}_1 > |a_1|$$

$$\bar{\theta}_2 > |a_2 + c|$$

chega-se a

$$\dot{s} < 0$$

Desta forma, escolhendo a lei de controle conforme indicado, a superfície de deslizamento é alcançada e, quanto maiores forem os valores de $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$, mais rapidamente a superfície é alcançada. No capítulo seis será demonstrado que, além destas propriedades, a superfície é alcançada em tempo finito.

Durante o deslizamento ocorre uma redução de ordem no sistema. Sobre a superfície tem-se

$$s(x) = cx_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -cx_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = -cx_1$$

e

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-ct} x_1(0) \\ x_2(t) = -ce^{-ct} x_1(0) \end{cases}$$

o que mostra que a escolha de $c > 0$ é importante na rapidez do deslizamento.

C.4 VS-MRAC DIRETO

Para a prova de estabilidade, utiliza-se a teoria de Lyapunov para uma função apenas do vetor de erro.

Escolhendo a seguinte candidata à função Lyapunov

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T P e, P = P^T > 0 \quad (C.16)$$

e derivando $V(e)$ em relação ao tempo, obtém-se

$$\dot{V}(e) = \frac{1}{2} (\dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}) \quad (C.17)$$

Substituindo (C.5) em (C.17), fica-se com

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \frac{1}{2} \left\{ [e^T A_c^T + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c^T (u - u^*)] P e + e^T P [A_c e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c (u - u^*)] \right. \\ \dot{V}(e) &= \frac{1}{2} \left\{ e^T (A_c^T P + P A_c e) + \frac{2}{\theta_{2n}^*} b_c^T P e (u - u^*) \right\} \end{aligned}$$

Pelo lema de Kalman-Yakubovich,

$$A_c^T P + P A_c = -2Q, Q = Q^T > 0$$

e, ainda

$$e^T P b_c = b_c^T P e = e^T c_c = c_c^T e = e_0$$

Continuando

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= -e^T Q e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} e_0 (u - u^*) \\ \dot{V}(e) &= -e^T Q e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} e_0 (\theta^T w - \theta^{*T} w) \\ \dot{V}(e) &= -e^T Q e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} e_0 \left[\sum_{i=1}^{2n} (\theta_i w_i - \theta_i^* w_i) \right] \\ \dot{V}(e) &= -e^T Q e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} e_0 \left[\sum_{i=1}^{2n} (-\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_0 w_i) w_i - \theta_i^* w_i) \right] \\ \dot{V}(e) &= -e^T Q e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} \left[\sum_{i=1}^{2n} (-\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_0 w_i) e_0 w_i - \theta_i^* e_0 w_i) \right] \\ \dot{V}(e) &= -e^T Q e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} \left[\sum_{i=1}^{2n} (-\bar{\theta}_i |e_0 w_i| - \theta_i^* e_0 w_i) \right]\end{aligned}$$

Como

$$-e^T Q e < 0$$

e

$$\frac{1}{\theta_{2n}^*} \left[\sum_{i=1}^{2n} (-\bar{\theta}_i |e_0 w_i| - \theta_i^* e_0 w_i) \right] \leq 0$$

pois,

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_i &> |\theta_i^*| \\ |e_0 w_i| &\geq e_0 w_i\end{aligned}$$

tem-se

$$\dot{V}(e) < 0, \text{ função definida negativa.} \quad (\text{C.18})$$

Pela análise de (C.18), consegue-se garantir a estabilidade assintótica do sistema, sendo todos os sinais presentes em malha fechada uniformemente limitados.

Define-se agora o erro de saída nulo $e_0(t) \equiv 0$ como *superfície deslizante*.

Para atender a condição de deslizamento (Figura C.1) é necessário que $e_0 \dot{e}_0 < 0$, de tal forma que

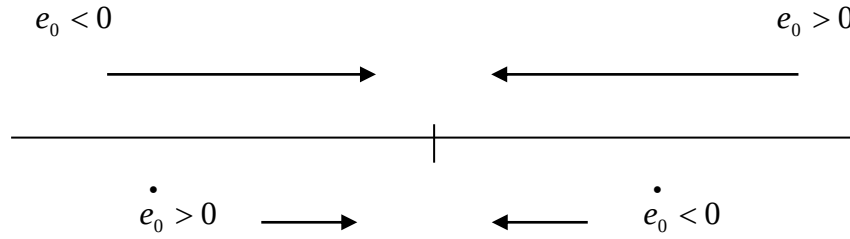


Figura C.1 Condição de deslizamento

Desenvolvendo a expressão para $e_0 \dot{e}_0$, tem-se

$$\begin{aligned}
 e_0 &= c_c^T e \\
 e_0 \dot{e}_0 &= e_0 (c_c^T \dot{e}) \\
 e_0 \dot{e}_0 &= e_0 c_c^T \left[A_c e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c (u - u^*) \right] \\
 e_0 \dot{e}_0 &= e_0 c_c^T A_c e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} c_c^T b_c e_0 (u - u^*)
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

Fazendo uma análise de cada termo de (6.19)

1º Termo:

$$e_0 c_c^T A_c e \leq |e_0 c_c^T A_c e| = |e_0| |c_c^T A_c e| \leq |e_0| k_1 \|e\|, k_1 > 0$$

Obs:

$$\begin{aligned}
 c_c^T A_c e &= \begin{bmatrix} c_{c1} & c_{c2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{c11} & a_{c12} \\ a_{c21} & a_{c22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \\
 &= (c_{c1} a_{c11} + c_{c2} a_{c21}) e_1 + (c_{c1} a_{c12} + c_{c2} a_{c22}) e_2 \leq |(c_{c1} a_{c11} + c_{c2} a_{c21}) e_1| + |(c_{c1} a_{c12} + c_{c2} a_{c22}) e_2| \leq \\
 &\leq |(c_{c1} a_{c11} + c_{c2} a_{c21}) e_1| + |(c_{c1} a_{c12} + c_{c2} a_{c22}) e_2| = \\
 &= |c_{c1} a_{c11} + c_{c2} a_{c21}| |e_1| + |c_{c1} a_{c12} + c_{c2} a_{c22}| |e_2| \leq \\
 &\leq k_1 |e_1| + k_1 |e_2| = k_1 (|e_1| + |e_2|) = k_1 \|e\|
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} k_1 \geq \max[|c_{c1} a_{c11} + c_{c2} a_{c21}|, |c_{c1} a_{c12} + c_{c2} a_{c22}|] > 0 \\ \|e\| = |e_1| + |e_2| \end{cases}$$

2º Termo:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\theta_{2n}^*} c_c^T b_c e_0 (u - u^*) &= \frac{1}{\theta_{2n}^*} c_c^T b_c e_0 (\theta - \theta^*)^T w = \\
 &= \frac{1}{\theta_{2n}^*} c_c^T b_c e_0 \left[\sum_{i=1}^{2n} (\theta_i - \theta_i^*) w_i \right] = \\
 &= \frac{1}{\theta_{2n}^*} c_c^T b_c e_0 \left\{ \sum_{i=1}^{2n} \left[-\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_0 w_i) - \theta_i^* \right] w_i \right\} = \\
 &= \frac{1}{\theta_{2n}^*} c_c^T b_c \sum_{i=1}^{2n} \left(-\bar{\theta}_i |e_0 w_i| - \theta_i^* e_0 w_i \right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{\theta_{2n}^*} c_c^T b_c \sum_{i=1}^{2n} \left(-\bar{\theta}_i |e_0| |w_i| + |\theta_i^*| |e_0| |w_i| \right) = \\
 &= -|e_0| \frac{1}{\theta_{2n}^*} c_c^T b_c \sum_{i=1}^{2n} \left(\bar{\theta}_i - |\theta_i^*| \right) |w_i| \leq \\
 &\leq -|e_0| \frac{1}{\theta_{2n}^*} c_c^T b_c \sum_{i=1}^{2n} \theta_m |w_i| \\
 &\leq -|e_0| k_2 \theta_m \sum_{i=1}^{2n} |w_i| = -|e_0| k_2 \theta_m \|w\|
 \end{aligned}$$

com

$$\bar{\theta}_i > |\theta_i^*| \text{ e } \theta_m = \min \left(\bar{\theta}_i - |\theta_i^*| \right)$$

$$0 < k_2 < \frac{1}{\theta_{2n}^*} c_c^T b_c \text{ e } \|w\| = \sum_{i=1}^{2n} |w_i|$$

Voltando à expressão (C.19), tem-se

$$e_0 \dot{e}_0 \leq |e_0| (k_1 \|e\| - k_2 \theta_m \|w\|)$$

com

$$k_1 \|e\| \geq 0 \text{ e } -k_2 \theta_m \|w\| \leq 0$$

Sabe-se da teoria de Lyapunov que $\|e\| \rightarrow 0$ assintoticamente. Se $\|w\| > C > 0$, então existe um T finito tal que $e_0 \dot{e}_0 < 0$ para $t > T$. Portanto, e_0 torna-se uma superfície deslizando sendo alcançada em um tempo finito $T_s \geq T$ ($|\dot{e}_0| > k_3 > 0$ para $t \geq T$) (Figura C.2).

Pode-se demonstrar que $|\dot{e}_0| > k_3 > 0$ através das seguintes considerações

$$\text{Se } e_0 > 0 \Rightarrow |e_0| = e_0$$

$$\dot{e}_0 \leq k_1 \|e\| - k_2 \theta_m \|w\|$$

$$\exists T \text{ tal que } \dot{e}_0 \leq -k_3$$

$$\Rightarrow \exists T \text{ tal que } |\dot{e}_0| \geq k_3 > 0$$

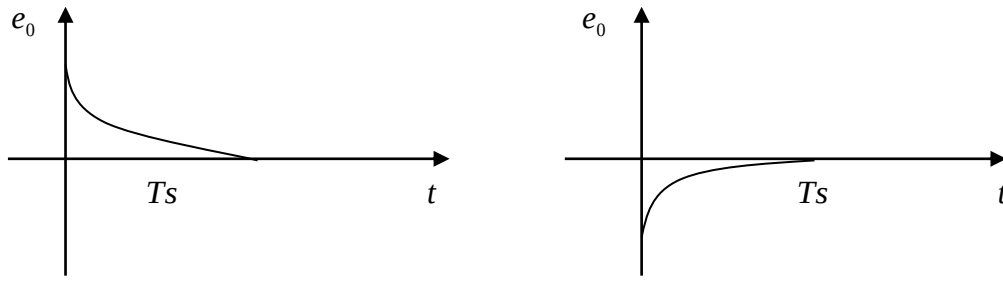
$$\text{Se } e_0 < 0 \Rightarrow |e_0| = -e_0$$

$$e_0 \dot{e}_0 \leq -e_0 (k_1 \|e\| - k_2 \theta_m \|w\|)$$

$$\dot{e}_0 \geq k_2 \theta_m \|w\| - k_1 \|e\|$$

$$\exists T \text{ tal que } \dot{e}_0 \geq k_3$$

$$\Rightarrow \exists T \text{ tal que } |\dot{e}_0| \geq k_3 > 0$$


 Figura C.2 Superfície deslizante atingida em um tempo finito T_s

Sobre a superfície de deslizamento obtém-se $e_0 \equiv 0$ (a partir do instante em que a superfície é alcançada). Isto significa que

$$\dot{e}_0 = 0 \Rightarrow c_c^T \dot{e} = 0 \Rightarrow c_c^T \left[A_c e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c (u_{eq} - u^*) \right] = 0$$

onde u_{eq} é o controle equivalente, ou seja, é o controle necessário para manter a trajetória sobre a superfície de deslizamento (condição de *Matching*).

$$\begin{aligned} c_c^T A_c e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} c_c^T b_c (u_{eq} - u^*) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{\theta_{2n}^*} c_c^T b_c (u_{eq} - u^*) &= -c_c^T A_c e \Rightarrow \\ u_{eq} - u^* &= -\theta_{2n}^* (c_c^T b_c)^{-1} c_c^T A_c e \end{aligned}$$

Como $\|e\| \rightarrow 0$ assintoticamente, então $u_{eq} \rightarrow u^*$ e $(\theta^T w)_{eq} \rightarrow \theta^{*T} w$. Porém, não pode ser garantido que $(\theta)_{eq} \rightarrow \theta^*$.

Referências

- [Araújo, 1993] Araújo, A. D. (1993), “Contribuição à Teoria de Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável: Uma Abordagem Entrada/Saída”, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1993.
- [Astrom e Wittenmark, 1989] Astrom, K. J. e Wittenmark, B. (1989), “Adaptive Control”, Addison-Wesley.
- [Bose, 2000] Bose, B. K. (2000), ”High Performance Control of Induction Motor Drive”, New Technologies, Department of Electrical Engineering, The University of Tennessee, Knoxville, U.S.A.
- [Boyd e Sastry, 1986] Boyd, S. e Sastry, S. S. (1986) “Necessary and Sufficient Conditions for Parameter Convergence in Adaptive Control”, Automatica, Vol. 22, N° 6, Pág. 629-639.
- [Branco, 1991] Branco, P. J. C. (1991), “Controle Vetorial de Motor de Indução por Microcomputador com Adaptação da Constante de Tempo Rotórica”, Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1991.
- [Blaschke, 1972] Blaschke, F. (1972), “The Principle of Field Orientation as Applied to the New Transvektor Closed Loop Control System for Rotating-Field Machines”, Siemens Review, 1972, Pag. 217-220.
- [Cunha, 2001] Cunha, C. D. (2001), “Controlador Dual Adaptativo Robusto para um Motor de Indução Trifásico”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2001.
- [Cunha e outros, 2002] Cunha, C. D., Araújo, A.D., Barbalho, D. S. e Mota, F. C. (2002), “A Dual Mode Adaptive Robust Controller Applied to the Speed Control of a Three-Phase Induction Motor”, 7th International Workshop on Variable Structure Systems, Sarajevo-Bósnia e Herzegovina, Vol. 1, Pag. 253-264, Julho/2002.
- [Filippov, 1960] Filippov, A. F. (1960), “A Differential Equation with a Discontinuous Right-Hand Side”, Matematicheskii sbornik, Vol. 52, N° 1 (em russo).
- [Fitzgerald e Kingsley, 1975] Fitzgerald, A. E. e Kingsley, Jr. C. (1975), “Máquinas Elétricas”, McGraw-Hill.
- [Furtunato, 1997] Furtunato, A. F. A. (1997), “Controle de Velocidade de Motor de Indução Usando as Técnicas de Campo Orientado Indireto e Escorregamento Controlado”. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1997.

- [Garcia, 1990] Garcia, G. O. (1990), “Controle de Velocidade de Motor de Indução Usando Técnicas de Campo Orientado Indireto e Escorregamento Controlado”, Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1990.
- [Hanselman e Littlefield, 1999] Hanselman, D. e Littlefield, B. (1999), “MATLAB® 5 Versão do Estudante – Guia do Usuário”. Makron Books.
- [Hsu, 1997] Hsu, L. (1997), “Smooth Sliding Control of Uncertain Systems Based on a Prediction Error”. I. J. Robust and Nonlinear Control, Vol. 7, Pág. 353-372.
- [Hsu e Costa, 1989] Hsu, L. e Costa, R.R. (1989), “Variable Structure Model Reference Adaptive Control Using Only Input and Output Measurements – Part I”, International Journal of Control, Vol. 49, Nº 2, Pag. 399-416.
- [Hsu, Araújo e Costa, 1994] Hsu, L., Araújo, A. D. e Costa, R. R. (1994), “Analysis and Design of I/O Based Variable Structure Adaptive Control”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, Nº 1, Pag. 4-21.
- [Ioannou e Sun, 1996] Ioannou, P. A. e Sun, J. (1996), “Robust Adaptive Control”, Prentice-Hall.
- [Khalil, 1992] Khalil, H. K. (1992), “Nonlinear Systems”, Macmillan Publishing Company.
- [Larrea, 1993] Larrea, J. A. S. (1993), “Estudo Comparativo dos Métodos de Controle Vetorial para Motores de Indução”, Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1993.
- [Leonhard, 1996] Leonhard, W. (1996), “Control of Electrical Drives”, Springer-Verlag, segunda edição.
- [Medeiros Júnior e Oliveira, 1998] Medeiros Júnior, E. e Oliveira, U. M. (1998), “Projeto de um Controlador Integrador Digital”, Trabalho da Disciplina Controle Digital – Período 1998.2, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
- [Narendra e Valavani, 1978] Narendra, K. S. e Valavani, L. S. (1978), “Stable Adaptive Controller Design-Part I-Direct Control”. IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-23, Nº 4, Pag. 570-583.
- [Novotny e Lorenz, 1986] Novotny, D. W. e Lorenz, R. D. (1986), “Introduction to Field Orientation and High Performance AC Drives”, IEEE Industry Applications Society, segunda edição.
- [Oliveira e Araújo, 2002] Oliveira, J. B. e Araújo, A. D. (2002), “Controle Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável: VS-MRAC Indireto”, Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática, Natal/RN, Pág. 2557-2562.

- [Ortega e Taoutaou, 1996] Ortega, R. e Taoutaou, D. (1996), “Indirect Field-Oriented Speed Regulation for Induction Motor is Globally Stable”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, Nº 11, Pág. 1238-1243.
- [Paiva, 1996] Paiva, J. A. (1996), “Controle de Nível Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável”, Projeto de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
- [Slotine e Li, 1991] Slotine J.J. E. e Li, W. (1991), “Applied Nonlinear Control”, Prentice-Hall International, New Jersey, Estados Unidos.
- [Stroustrup, 2000] Stroustrup, B. (2000), “A linguagem de programação C++”, 3ª ed., Editora Bookman, Porto Alegre (RS) – Brasil.
- [Utkin, 1978] Utkin, V. I. (1978), “Sliding Modes and Their Applications in Variable Structure Systems”, Mir Publishers, Moscou.