

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANÁLISE DE LINHAS DE FITA NÃO-HOMOGÊNEAS
COM CAMADAS DIELÉTRICAS ANISOTRÓPICAS

MARIA ROSA MEDEIROS LINS DE ALBUQUERQUE

ORIENTADOR: ADAILDO GOMES D'ASSUNÇÃO

ABRIL - 1985

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANÁLISE DE LINHAS DE FITA NÃO-HOMOGÊNEAS
COM CAMADAS DIELÉTRICAS ANISOTRÓPICAS

MARIA ROSA MEDEIROS LINS DE ALBUQUERQUE

Orientador: ADAILDO GOMES D'ASSUNÇÃO

Tese apresentada ao Centro de Tecnologia da
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
- UFRN, como parte dos requisitos exigidos
para a obtenção do título de MESTRE EM
ENGENHARIA ELÉTRICA.

ABRIL - 1985

Aos meus pais,
esposo e
filhas.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. ADAILDO GOMES D'ASSUNÇÃO, pela dedicação, incentivo e amizade demonstrados na orientação e desenvolvimento deste trabalho.

A todos os amigos do Departamento de Engenharia Elétrica que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Aos colegas de curso, pela amizade.

À Maria Elioneide de Medeiros e a José Pereira Lima, pela datilografia e desenhos, respectivamente.

À Universidade Federal do Rio Grande do Norte, pelo apoio financeiro.

RESUMO

A análise de linhas de fita não-homogêneas com camadas dielétricas anisotrópicas uniaxiais é desenvolvida para uma formulação quase-estática. Consideram-se o método da equação integral, o método do mapeamento e o método da permissividade efetiva equivalente. O primeiro método é o mais geral, permitindo a análise diretamente das estruturas dadas. Nos outros dois métodos, as estruturas dadas são transformadas em estruturas equivalentes com substratos isotrópicos.

Curvas de impedâncias características, velocidades de fase e permissividades efetivas são apresentadas para linhas de microfita: (a) invertidas, (b) suspensas e (c) com camada superposta (com "overlay"). O efeito da espessura finita da fita condutora em linha de microfita convencional sobre substratos anisotrópicos é também determinado, com uma maior simplicidade computacional. Observa-se concordância com resultados de outros autores.

As estruturas analisadas são adequadas ao desenvolvimento de circuitos de microondas, tais como: radiadores de microfita, bloqueadores CC e acopladores direcionais.

ABSTRACT

The analysis of non-homogeneous striplines on uniaxial anisotropic substrates is developed by employing a quasi-static approach. The integral equation method, the mapping method and the equivalent effective permittivity method are taken into account. The first method is the more general one, allowing an analysis directly from the given structures. In the other two methods, the given structures are transformed into equivalent structures with isotropic substrates.

The curves of characteristic impedances, phase velocities and effective permittivities are presented for: (a) inverted microstrip lines, (b) suspended microstrip lines and (c) microstrip lines with overlay. The effect of the finite thickness of the conducting strip for conventional microstrip line on anisotropic substrates is also determined with a very simple computational work. All the results are in agreement with those of other authors.

The analysed structures are adequate to the development of microwave circuits such as microstrip radiators, DC blocks and directional couplers.

SUMÁRIO

RESUMO	iv
ABSTRACT	v
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - ANÁLISE DE LINHAS DE FITA NÃO-HOMOGÊNEAS ..	
2.1 - Formulação quase-estática	5
2.2 - Método da equação integral	7
2.3 - Método do mapeamento	9
2.4 - Método da permissividade efetiva equivalente	12
CAPÍTULO 3 - CARACTERÍSTICAS DE LINHAS DE FITA NÃO-HOMOGÊNEAS COM CAMADAS ANISOTRÓPICAS.	
3.1 - Introdução	14
3.2 - Aplicação do método da equação integral	16
CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DE LINHAS DE MICROFITA ESPESSAS SOBRE SUBSTRATOS ANISOTRÓPICOS	
4.1 - Introdução	31
4.2 - Aplicação do método da equação integral	33
4.3 - Utilização de expressões aproximadas	36
4.4 - Resultados	38
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÃO	44
APÊNDICE A - DETERMINAÇÃO DA EXPRESSÃO INTEGRAL DA FUNÇÃO DE GREEN PARA UMA LINHA DE MICROFITA COM TRÊS CAMADAS.	47
APÊNDICE B - OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO DA EXPRESSÃO SÉRIE DA FUNÇÃO DE GREEN.	52

APÊNDICE C - OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO INTEGRAL DA FUNÇÃO DE GREEN PARA UMA LINHA DE MICROFITA ESPESSA..	59
APÊNDICE D - OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO SÉRIE DA FUNÇÃO DE GREEN PARA A ANÁLISE DE LINHA DE MICROFITA ESPESSA USANDO A TEORIA DE RESÍDUOS.	65
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	76

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

As linhas de transmissão planares têm contribuído de forma significativa para o desenvolvimento de circuitos integrados de microondas. A variedade destas estruturas permite escolhas adequadas para aplicações específicas em frequências desde 1 GHz até algumas centenas de gigahertz.

Especificamente, tem sido grande a utilização de linhas de transmissão planares de fita, tais como: a linha de fita (Fig.1.1.a), a linha de microfita (Fig.1.1.b), a linha de microfita invertida (Fig.1.1.c) e a linha de microfita suspensa (Fig.1.1.d). Enquanto as primeiras devem ser usadas em frequências inferiores a 60 GHz, as últimas são também adequadas para utilização em frequências mais elevadas.

As aplicações de linhas de transmissão de fita não-homogêneas incluem o desenvolvimento de dispositivos ativos e passivos (p. ex., filtros, acopladores direcionais, bloqueadores CC, amplificadores, osciladores, antenas de microfita,...).

A utilização de linhas de transmissão de fita não-homogêneas requer a determinação das características de propagação das ondas guiadas. Assim, a análise de estruturas de linhas de fita é de fundamental importância. Esta análise tem sido efetuada por diversos métodos, para estruturas com camadas dielétricas isotrópicas [1]-[17] e anisotrópicas [18]-[28].

A caracterização de estruturas com camadas anisotrópicas, embora mais complexa, permite que a análise de estruturas com camadas isotrópicas seja efetuada como um caso simplificado. Um dos métodos adequados para o estudo destas estruturas é o método da equação integral [19]-[24]. Entretanto, convém ressaltar que a utilização de um mapeamento [23], ou de um modelo de permissividade efetiva equivalente [6], permite a

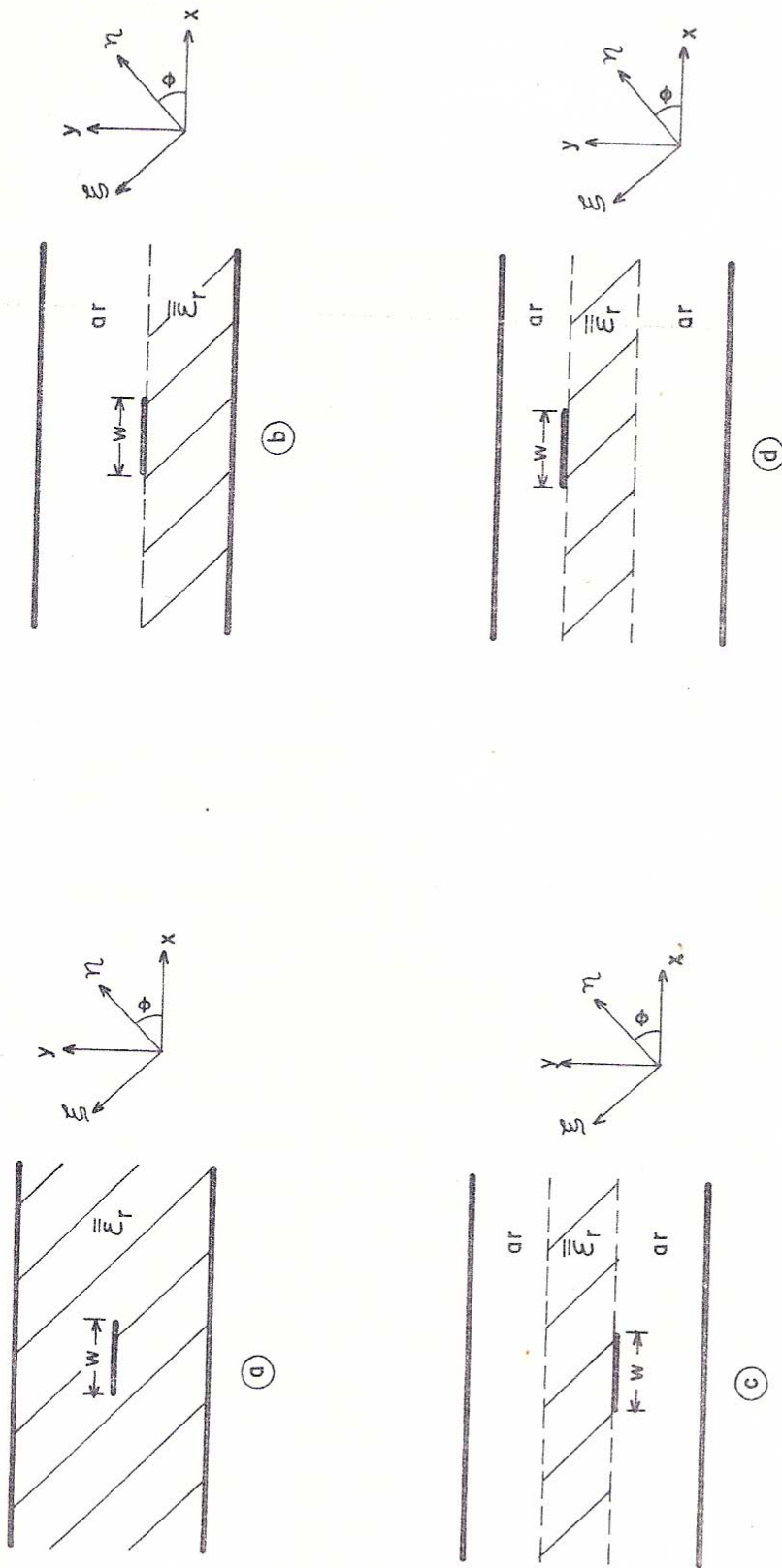


Fig. 1.1 - Seções transversais de linhas de transmissão planares de fita: (a) linha de fita, (b) linha de microfita, (c) linha de microfita invertida e (d) linha de microfita suspensa. Eixos do cristal (η, ξ) e da estrutura (x, y).

análise de estruturas com camadas anisotrópicas a partir de estudos de estruturas com camadas isotrópicas. Estes métodos são adequados quando a análise das estruturas com camadas isotrópicas pode ser efetuada com simplicidade [6], [23].

A anisotropia dielétrica, inicialmente vista como uma dificuldade a mais na caracterização das linhas de transmissão, tem sido considerada visando: (a) o aproveitamento de propriedades intrínsecas (tais como: baixas perdas e alta homogeneidade) e (b) a melhoria do desempenho de dispositivos ou circuitos de microondas, entre os quais: filtros, acopladores e radiadores de microfita. Em dispositivos de linhas acopladas, a melhoria do desempenho está fortemente relacionada com a redução da diferença de velocidades de fase dos modos - par e ímpar de propagação.

Em geral, são consideradas camadas dielétricas anisotrópicas uniaxiais, em que o eixo ótico do cristal pode apresentar uma orientação específica (por exemplo, $\theta = 0^\circ$ na Fig.1.1) de modo a diagonalizar o tensor permissividade relativa [18], [25]. Entretanto, a determinação do efeito de uma orientação arbitrária para o eixo ótico ($\theta \neq 0^\circ$ na Fig.1.1) e a utilização de camadas dielétricas anisotrópicas biaxiais também têm sido consideradas [20], [24], [28].

Neste trabalho, é efetuada a análise de linhas de fita não-homogêneas, com camadas anisotrópicas uniaxiais, para a formulação quase-estática. Os resultados desta análise são adequados para frequências até 10 GHz, podendo ser estendidos para frequências mais elevadas através de modelos dispersivos de análise [5]-[7].

No Capítulo 2, que apresenta as relações fundamentais válidas para o modelo quase-estático, é feita a introdução dos métodos da equação integral [23], [24], do mapeamento [18], [23] e do modelo de permissividade efetiva equivalente [6]. Enquanto o primeiro permite uma abordagem direta da estrutura dada, nos outros dois métodos esta análise é efetuada para estruturas isotrópicas equivalentes de forma bastante precisa [6], [23].

No Capítulo 3, as linhas de fita não-homogêneas com camadas anisotrópicas uniaxiais são consideradas. A análise é efetuada através do método da equação integral para

algumas configurações básicas e frequentes em microondas. São estudadas as linhas de microfita invertidas, as linhas de microfita suspensas, as linhas de microfita com camada superposta e as linhas de microfita sobre camada dupla. Para estas linhas de transmissão, os métodos que utilizam estruturas com camadas isotrópicas equivalentes não seriam adequados, pois não seriam suficientemente simples.

O Capítulo 4, apresenta o estudo para a determinação do efeito da espessura finita da fita condutora em linhas de microfita sobre camadas anisotrópicas uniaxiais. A análise é efetuada através do método da equação integral [23], [24] e de expressões aproximadas (para a impedância característica e para a permissividade efetiva) com fatores corretivos [7], [17]. Este estudo é essencial à determinação de perdas nas estruturas.

No Capítulo 5, é efetuada uma discussão dos resultados obtidos. São apresentadas as conclusões principais e as sugestões para trabalhos posteriores.

CAPÍTULO 2

ANÁLISE DE LINHAS DE FITA NÃO - HOMOGÊNEAS

2.1 - Formulação quase-estática

No modelo quase-estático, o modo de propagação em linhas de microfita é considerado puramente TEM. Esta aproximação é adequada para projetos de circuitos na faixa inferior de frequências de microondas, onde a largura da fita e a espessura do substrato são muito menores que o comprimento de onda no substrato dielétrico. A linha de microfita aberta constitui a configuração mais simples destas estruturas (Fig. 2.1).

Na formulação quase-estática [5], as características de transmissão das linhas de microfita são determinadas a partir da capacitância por unidade de comprimento para a estrutura em análise, C , e da capacitância correspondente à estrutura quando o dielétrico é removido, C_v . Os valores de impedância característica e de permissividade efetiva podem ser obtidos diretamente em termos dessas capacitâncias.

Assim, a impedância característica, Z_0 , é obtida a partir de

$$Z_0 = \frac{1}{v\sqrt{C C_v}} \quad (2.1)$$

onde v representa a velocidade da luz no espaço livre.

A permissividade efetiva, ϵ_{ef} , é dada por

$$\epsilon_{ef} = \frac{C}{C_v} \quad (2.2)$$

O comprimento de onda na estrutura analisada, λ_m , e a velocidade de fase, v_p , são definidos, respectiva-

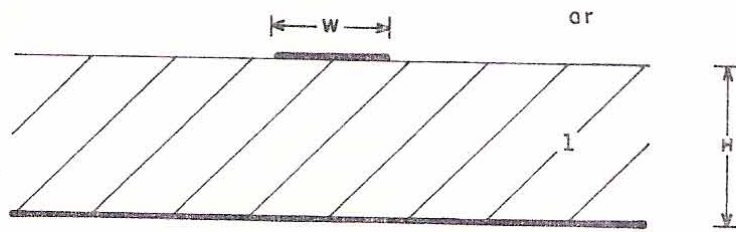


Fig. 2.1 - Seção transversal de linha de microfita aberta.

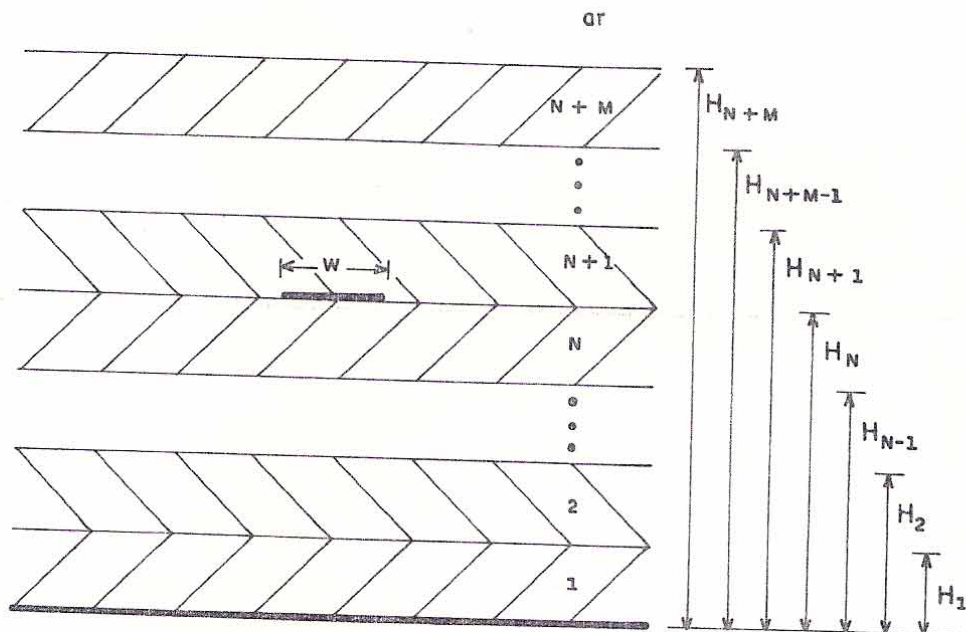


Fig. 2.2 - Seção transversal de linha de microfita com camadas múltiplas.

mente, por

$$\lambda_m = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{ef}}} \quad (2.3)$$

e

$$v_p = \frac{v}{\sqrt{\epsilon_{ef}}} \quad (2.4)$$

λ_0 é o comprimento de onda no espaço livre.

A determinação das capacitâncias eletrostáticas C e C_v da estrutura em análise pode ser obtida através do método das diferenças finitas [2], do método variacional no domínio da transformada de Fourier [3], do método da equação integral [4] e do método da transformação conforme [5].

A presente análise considera a utilização do método da equação integral no estudo de estruturas com camadas dielétricas isotrópicas e anisotrópicas [19]-[24]. Este método é geral, permitindo a análise de linhas de microfita com camadas dielétricas múltiplas, como mostrado na Fig. 2.2.

2.2 - Método da equação integral

O cálculo da distribuição de carga para uma linha de microfita, através do método da equação integral, pode ser efetuado a partir da expressão [5]

$$\Phi(r) = \int_{\text{condutor}} G(r/r') \sigma(r') dx' \quad (2.5)$$

onde $G(r/r')$, definida como a função de Green, é o potencial em $r(x,y)$ produzido por uma linha ou densidade de carga unitária localizada em $r'(x',y')$. A função G deve satisfazer às condições de contorno e da interface da linha de microfita, mas não à condição da fonte. As funções Φ e σ representam as distribuições de potencial e de carga superficial, respectivamente. A integração em (2.5) é efetuada sobre a seção transversal da fita condutora.

A utilização deste método consiste, inicialmente, na determinação da função de Green, G , adequada. Em se-

guida, obtêm-se a solução da equação integral (2.5), escrevendo-a na forma matricial e efetuando-se numericamente a inversão da matriz obtida [4]-[12].

A equação matricial correspondente à solução de (2.5) pode ser expressa como sendo [5]:

$$[V] = [D] [\sigma] \quad (2.6)$$

Considerando-se a fita condutora dividida em N subseções idênticas de larguras iguais a W, (2.6) corresponde a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1N} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N1} & D_{N2} & \cdots & D_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

onde [V] e [\sigma] são matrizes colunas que representam o potencial Φ e a densidade de carga, σ , respectivamente. A matriz [D] é denominada matriz dos coeficientes potenciais de Maxwell.

A densidade de carga desconhecida é obtida por inversão da matriz [D], como segue:

$$[\sigma] = [D]^{-1} [V] \quad (2.8)$$

onde $[D]^{-1}$ representa a matriz capacitância estática para o sistema com N subseções.

A determinação da capacitância por unidade de comprimento da linha de microfita, C, é obtida de

$$C = \sum_{j=1}^N \sigma_j \quad (2.9)$$

para $V_i = 1$.

Os elementos da matriz capacitância estática $[D]^{-1}$ correspondem às expressões da função de Green para o modelo da linha de carga ou para o modelo da fita elementar. Assim, D_{ij} representa o potencial na subseção i devido a uma linha de

de carga, ou uma fita elementar, uniformemente carregada, localizada na subseção j .

Nesta análise que, através do método dos momentos [26], transforma a solução da equação integral em uma equação matricial, as funções peso $W_i(x)$ são consideradas impulsivas. As funções de expansão $f_j(x')$ são consideradas impulsivas (modelo da linha de carga) ou pulsivas (modelo da fita elementar).

Este método também permite considerar o acoplamento paralelo ou face-a-face de linhas de fita não-homogêneas sobre camadas dielétricas isotrópicas e anisotrópicas arbitrárias. Este acoplamento é analisado para os modos par e ímpar de propagação, permanecendo válidas as equações (2.1) a (2.6). Na equação (2.7), as matrizes colunas $[V]$ e $[\sigma]$ terão um número de linhas iguais ao número total de subseções em que foram divididas as fitas condutoras. A dimensão da matriz $[D]$ em (2.7) é definida da mesma forma, isto é, considerando o número total de subseções das fitas condutoras [12], [23].

2.3 - Método do mapeamento

A análise quase-estática de linhas de transmissão de fita com camadas dielétricas anisotrópicas uniaxiais pode ser efetuada através de uma transformação ou mapeamento [18], [19]. Este método considera a transformação da estrutura dada em uma outra de igual capacitância (por unidade de comprimento), com camadas isotrópicas.

Este mapeamento se aplica a cada camada anisotrópica uniaxial sendo suas equações dadas por

$$u = x \quad (2.10)$$

$$v = y \sqrt{\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}^2} / \epsilon_{yy} \quad (2.11)$$

e a permissividade relativa da camada isotrópica obtida como

$$\epsilon'_r = \sqrt{\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}^2} \quad (2.12)$$

para a anisotropia arbitrária descrita no Capítulo 3.

Para estruturas como a da Fig. 2.3a, uma linha de microfita espessa sobre camada dielétrica anisotrópica

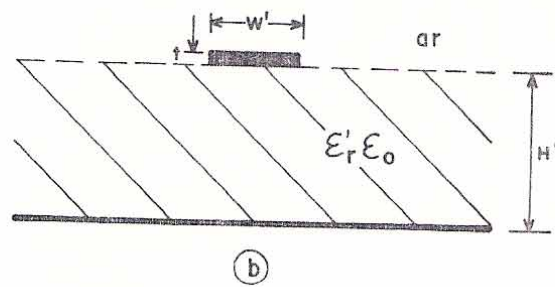
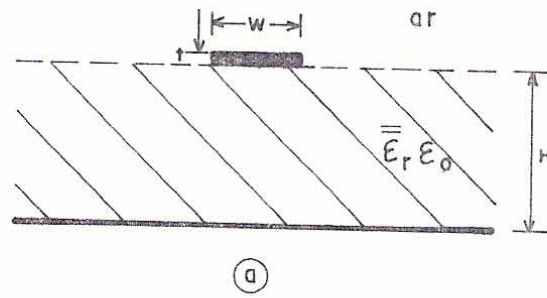


Fig. 2.3 - Geometrias de linhas de microfita espessa: (a) com substrato anisotrópico e (b) com substrato isotrópico (obtido pelo mapeamento).

arbitrária, a aplicação de (2.10) e (2.11) permite obter a estrutura da Fig. 2.3b, na qual

$$H' = H \sqrt{\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}^2} / \epsilon_{yy} \quad (2.13)$$

$$W' = W \quad (2.14)$$

A equivalência das capacitâncias das estruturas da Fig. 2.3 e as equações (2.1) e (2.2) permitem obter a impedância característica, Z_0 , da linha de microfita sobre substrato anisotrópico (Fig. 2.3a), como

$$Z_0 = Z'_0 \sqrt{Z_V / Z'_V} \quad (2.15)$$

e a permissividade efetiva, ϵ_{ef} , como

$$\epsilon_{ef} = \left(\frac{Z_V}{Z_0} \right)^2 \quad (2.16)$$

onde Z'_0 é a impedância característica da linha de microfita da Fig. 2.3b, com o substrato isotrópico, Z'_V é a impedância característica desta linha de microfita com o substrato isotrópico removido (substituído por ar) e Z_V é a impedância característica da estrutura da Fig. 2.3a para o caso em que o substrato anisotrópico é removido.

Portanto, para a determinação de Z_0 e ϵ_{ef} (Fig. 2.3a), torna-se necessário o cálculo de Z'_0 , Z'_V e Z_V através de qualquer dos métodos disponíveis para a análise de linhas de microfita sobre substratos isotrópicos [1]-[4]. Para a estrutura da Fig. 2.3b, recomenda-se a utilização de expressões aproximadas e precisas [1].

Este método é geral, podendo ser aplicado às estruturas de transmissão com camadas anisotrópicas. A precisão e a eficiência obtidas são determinadas pelo método adotado na análise das estruturas resultantes com camadas isotrópicas.

A análise de linhas de microfita espessas ($t/H \neq 0$ na Fig. 2.3a) sobre substratos anisotrópicos, através do mapeamento, é proposta nesta seção. Em trabalhos anteriores [18], [19], [23], a espessura da fita condutora foi considerada desprezível.

Na análise de linhas de microfita paralelas

acopladas, permanecem válidas as equações do mapeamento (2.10) e (2.11). Assim, o espaçamento entre as fitas condutoras deverá ser mantido na estrutura equivalente, da mesma forma que a largura de cada fita condutora.

2.4 - Método da permissividade efetiva equivalente

Neste método, a determinação das características de uma linha de microfita sobre substrato anisotrópico uniaxial (Fig. 2.4a) é efetuada através de uma estrutura similar, em que o substrato anisotrópico é substituído por um outro isotrópico equivalente (Fig. 2.4b). A permissividade relativa equivalente deste substrato isotrópico [6], [19], $\epsilon_{req}(W/H)$, depende da geometria da linha de microfita. O substrato isotrópico é definido de forma que as linhas de microfita da Fig. 2.4 apresentem a mesma permissividade efetiva.

A importância da obtenção de $\epsilon_{req}(W/H)$ reside no fato de que, para cada W/H , a impedância característica e a permissividade efetiva da linha de microfita mostrada na Fig. 2.4a podem ser determinadas através dos métodos de análise para estruturas com substratos isotrópicos [6], [19]. Observe-se que nestas Referências a espessura da fita condutora é considerada desprezível.

A determinação de $\epsilon_{req}(W/H)$ é feita numericamente [6], [19]. Entretanto, dispõe-se de uma expressão aproximada, obtida ajustando-se curvas aos resultados do método das diferenças finitas [6], para safira anisotrópica. O procedimento numérico proposto em [19] é geral e muito eficiente.

A determinação de $\epsilon_{req}(W/H)$, efetuada em [19], considera o mapeamento através de (2.15) e o uso iterativo da expressão para a impedância característica, Z_{oi} , de linhas de microfita abertas sobre um substrato isotrópico de permissividade relativa, ϵ_{ri} , com dimensões W_i e H_i , dada por [1]

$$Z_{oi} = \frac{42,4}{\sqrt{\epsilon_{ri} + 1}} \log \left\{ 1 + 4 \left(\frac{H_i}{W_i} \right) \left[\left(\frac{14 + 8/\epsilon_{ri}}{11} \right) \left(\frac{4H_i}{W_i} \right) + \left[\left(\frac{14 + 8/\epsilon_{ri}}{11} \right)^2 \left(4 \frac{H_i}{W_i} \right)^2 + \frac{1 + 1/\epsilon_{ri}}{2} \pi^{21/2} \right] \right] \right\}$$

(2.17)

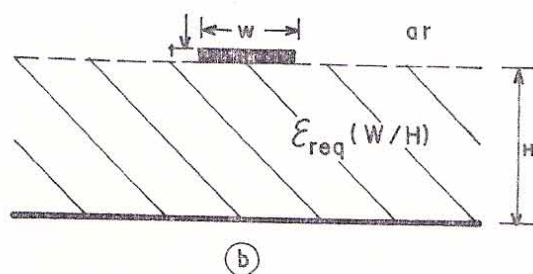
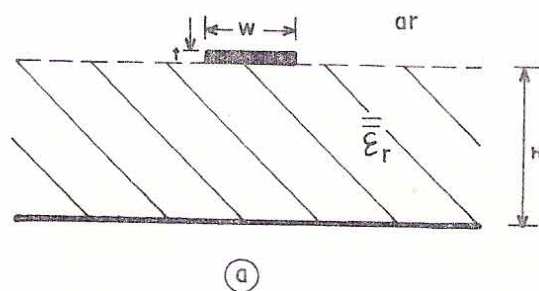


Fig. 2.4 - Geometrias de linhas de microfita espessas equivalentes com substrato: (a) anisotrópico e (b) isotrópico (obtido pelo método da permissividade efetiva equivalente).

CAPÍTULO 3

CARACTERÍSTICAS DE LINHAS DE
FITA NÃO-HOMOGÊNEAS COM CAMA-
DAS ANISOTRÓPICAS

3.1 - Introdução

O método da equação integral descrito no Capítulo 2 é utilizado na determinação de características de linhas de fita não-homogêneas com três camadas dielétricas.

A Fig. 3.1 mostra a seção transversal das estruturas consideradas. São considerados dielétricos uniaxiais e anisotrópicos arbitrários, sendo o tensor permissividade relativa de cada dielétrico não-diagonal. Estruturas de linhas de fita não-homogêneas com substratos isotrópicos e anisotrópicos (orientados de modo a diagonalizar os tensores permissividade relativa [23]) correspondem a casos simplificados que são igualmente estudados.

O tensor permissividade relativa de cada dielétrico i ($i = 1, 2, 3$), na Fig. 3.1, tem a forma [22], [24]

$$\bar{\epsilon}_{r_i} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx_i} & \epsilon_{xy_i} & 0 \\ \epsilon_{yx_i} & \epsilon_{yy_i} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

sendo

$$\epsilon_{xx_i} = \epsilon_{\xi\xi_i} \cos^2 \theta_i + \epsilon_{\eta\eta_i} \sin^2 \theta_i \quad (3.2)$$

$$\epsilon_{yy_i} = \epsilon_{\xi\xi_i} \sin^2 \theta_i + \epsilon_{\eta\eta_i} \cos^2 \theta_i \quad (3.3)$$

$$\epsilon_{xy_i} = \epsilon_{yx_i} = (\epsilon_{\xi\xi_i} - \epsilon_{\eta\eta_i}) \sin \theta_i \cos \theta_i \quad (3.4)$$

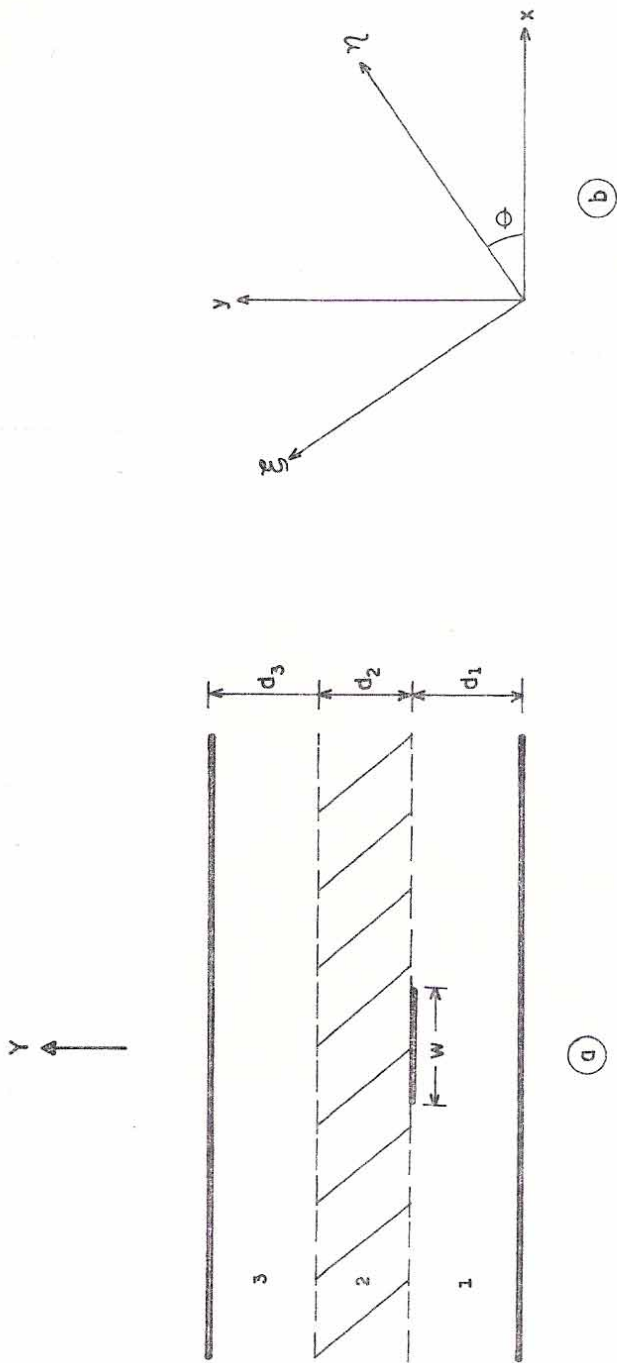


Fig. 3.1 - (a) Seção transversal de linha de microfita com três camadas anisotrópicas.
 (b) Eixos do cristal (η, ξ) e da linha de microfita (x, y).

onde os índices x, y correspondem aos eixos da linha de microfita e os índices ξ, η referem-se aos eixos do cristal. Para determinadas orientações do eixo ótico, os substratos anisotrópicos apresentam tensores permissividades diagonais ($\epsilon_{xyi} = \epsilon_{yx_i} = 0$). Os substratos isotrópicos apresentam permissividade relativa ϵ_{ri} ($\epsilon_{xyi} = \epsilon_{yx_i} = 0$ e $\epsilon_{xx_i} = \epsilon_{yy_i} = \epsilon_{zz_i} = \epsilon_{ri}$).

A estrutura mostrada na Fig. 3.1 é empregada em circuitos integrados de microondas [5]-[7] e tem sido considerada para aplicações em ondas milimétricas [15],[25]. Como casos particulares da estrutura apresentada na Fig. 3.1, destacam-se: a linha de microfita invertida (Fig. 3.2a), a linha de microfita suspensa (Fig. 3.2b), a linha de microfita com duas camadas (Fig. 3.2c) e a linha de microfita com camada superposta ou com "overlay" (Fig. 3.2d).

Neste Capítulo, o método da equação integral é aplicado no estudo da estrutura da Fig. 3.1. Os casos particulares, de estruturas frequentes em microondas, apresentados na Fig. 3.2 são considerados. Os resultados obtidos da aplicação do método da equação integral são confrontados com resultados disponíveis na literatura [13], [25].

3.2 - Aplicação do método da equação integral

A análise desenvolvida se baseia na aproximação quase-estática [5]. A espessura da fita condutora é considerada desprezível. Uma solução para o potencial é determinada resolvendo-se as equações de Laplace nas regiões dielétricas e considerando-se as condições de contorno correspondentes. A função de Green obtida para a estrutura da Fig. 3.3 (Apêndice A) é dada por:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \cos[k(x + \beta_1(d_1 - y))] \frac{\sinh(ky\delta_1)}{\sinh(kd_1\delta_1)} \cdot \{\gamma_1\delta_1 \coth(kd_1\delta_1) + \beta_2\gamma_2 \tan(kx) + \gamma_2\delta_2 D\}^{-1} \quad (3.5)$$

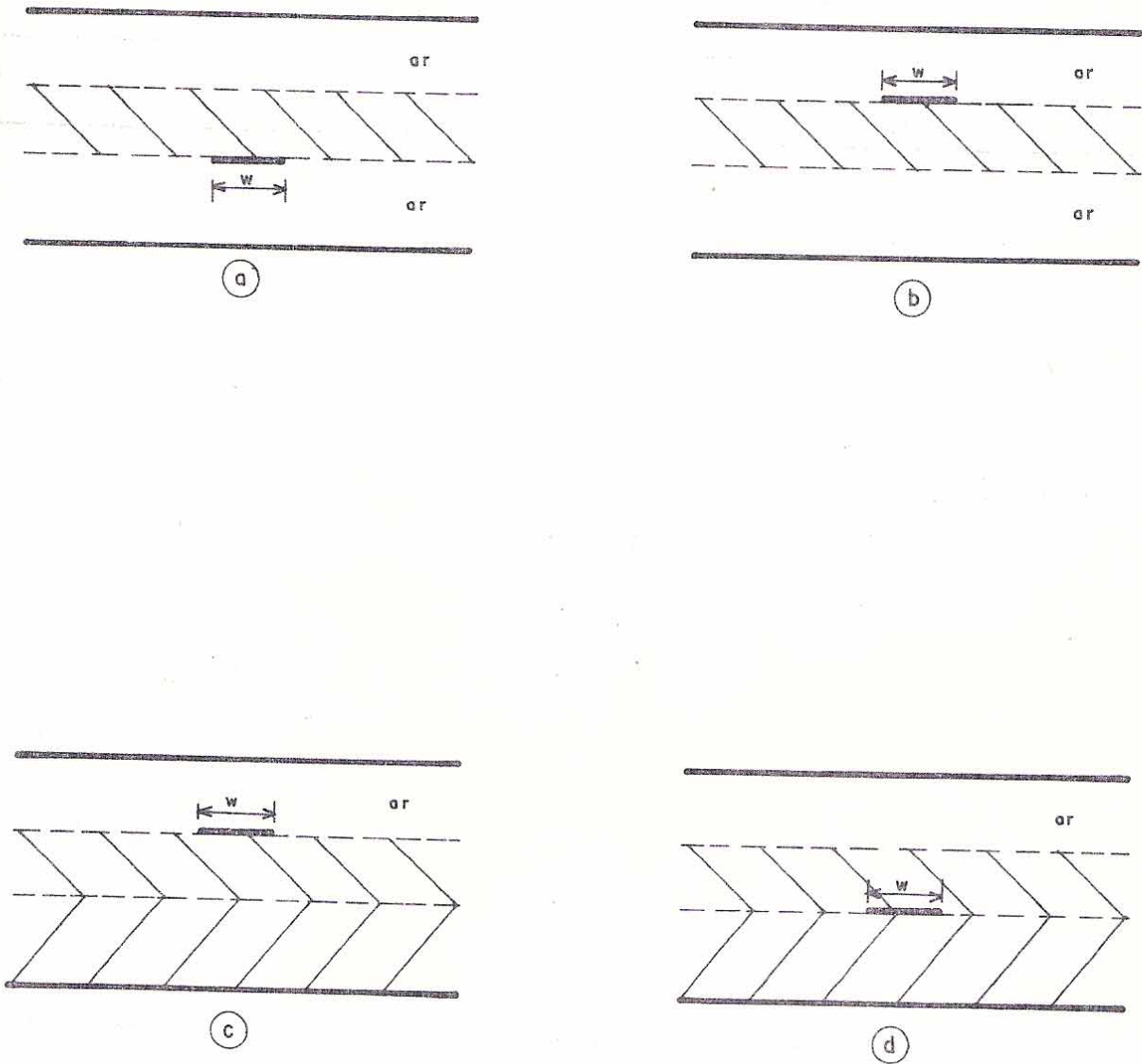


Fig. 3.2 - Geometrias de : (a) linha de microfita invertida, (b) linha de microfita suspensa, (c) linha de microfita com duas camadas e (d) linha de microfita com camada superposta.

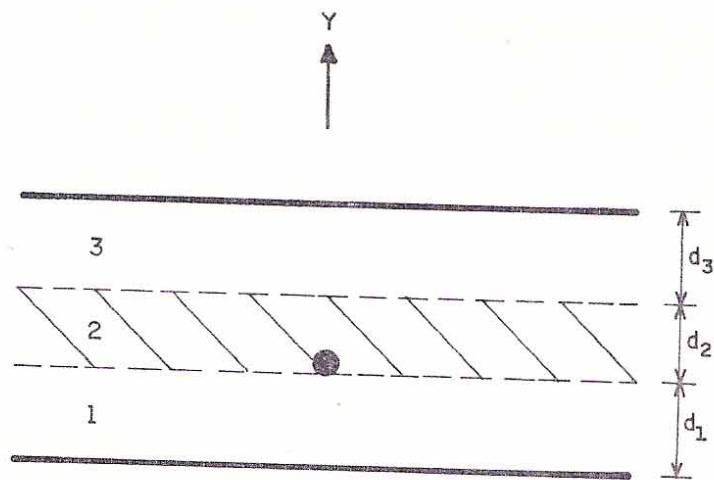


Fig. 3.3 - Seção transversal de linha de microfita com três camadas para o modelo da linha de carga.

onde

$$D = \frac{P}{Q} \quad (3.6)$$

com

$$P = \gamma_2 \delta_2 \cos(kx) - \beta_2 \gamma_2 \sin(kx) \coth(kd_2 \delta_2) + \\ + \gamma_3 \delta_3 \cos(kx) \coth(kd_2 \delta_2) \coth(kd_3 \delta_3) + \beta_3 \gamma_3 \sin(kx) \coth(kd_2 \delta_2) \quad (3.7)$$

e

$$Q = \gamma_2 \delta_2 \cos(kx) \coth(kd_2 \delta_2) - \beta_2 \gamma_2 \sin(kx) + \\ + \gamma_3 \delta_3 \cos(kx) \coth(kd_3 \delta_3) + \beta_3 \gamma_3 \sin(kx) \quad (3.8)$$

sendo

$$\beta_i = \epsilon_{xy_i} / \epsilon_{yy_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.9)$$

$$\gamma_i = \epsilon_{yy_i} \quad (3.10)$$

$$\delta_i = [(\epsilon_{xx_i} / \epsilon_{yy_i}) - (\epsilon_{xy_i} / \epsilon_{yy_i})^2]^{1/2} \quad (3.11)$$

Para estruturas com substratos dielétricos anisotrópicos uniaxiais, orientados de maneira a apresentarem tensores permissividades relativas diagonais ($\epsilon_{xy_i} = \epsilon_{yx_i} = 0$), a função de Green correspondente é determinada, a partir de (3.5) a (3.11), como sendo

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\pi \epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \cos(kx) \frac{\sinh(kyn_{x_1} / n_{y_1})}{\sinh(kd_1 n_{x_1} / n_{y_1})} \cdot \{n_{x_1} n_{y_1} \coth(kd_1 n_{x_1} / n_{y_1}) + n_{x_2} n_{y_2} D\}^{-1} \quad (3.12)$$

onde D é dado por

$$D = \frac{n_{x_2} n_{y_2} + n_{x_3} n_{y_3} \coth(kd_2 n_{x_2} / n_{y_2}) \coth(kd_3 n_{x_3} / n_{y_3})}{n_{x_2} n_{y_2} \coth(kd_2 n_{x_2} / n_{y_2}) + n_{x_3} n_{y_3} \coth(kd_3 n_{x_3} / n_{y_3})} \quad (3.13)$$

com

$$n_{x_i} = (\epsilon_{xx_i})^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.14)$$

$$n_{y_i} = (\epsilon_{yy_i})^{1/2} \quad (3.15)$$

Para linhas de microfita invertidas e abertas ($d_3 \rightarrow \infty$ na Fig. 3.1), como mostrado na Fig. 3.4, a equação (3.13) reduz-se a:

$$D = \frac{n_{x_2} n_{y_2} + n_{x_3} n_{y_3} \coth(kd_2 n_{x_2} / n_{y_2})}{n_{x_2} n_{y_2} \coth(kd_2 n_{x_2} / n_{y_2}) + n_{x_3} n_{y_3}} \quad (3.16)$$

Para estruturas de linhas de microfita suspensas (Fig. 3.5), nas quais uma camada de ar é introduzida entre o plano de terra e o substrato dielétrico, a função de Green obtida é:

$$\begin{aligned} \Phi(x, d_2 + d_3) &= \frac{1}{\pi \epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \cos(kx) \\ &\cdot \{n_{x_1} n_{y_1} + n_{x_2} n_{y_2} D\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde D é dado por (3.13).

Expandindo-se o integrando em (3.12) em série de Taylor, obtêm-se, para linhas de microfita invertidas (Apêndice B)

$$\begin{aligned} \Phi(x, d_1) &= \frac{1}{\pi \epsilon_0 (n_{x_1} n_{y_1} + n_{x_2} n_{y_2})} \left\{ -\beta \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k} [e^{-2kd_2 \alpha_2} \right. \\ &\quad \left. - e^{-2k(d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2)}] m(k) dk \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k} [1 - e^{-2kd_1 \alpha_1}] m(k) dk \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

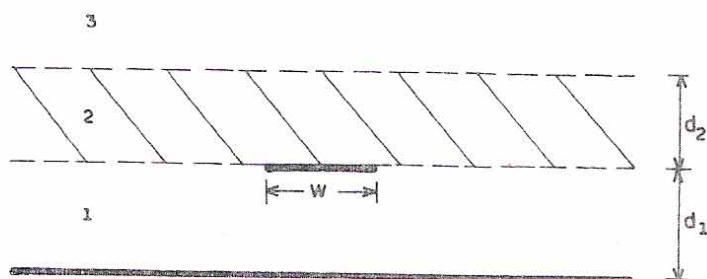


Fig. 3.4 - Geometria de linha de microfita invertida com três camadas.

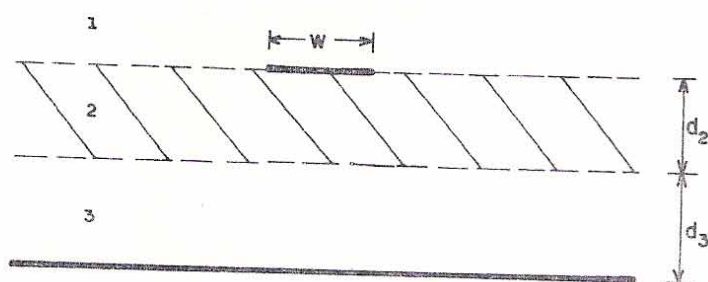


Fig. 3.5 - Geometria de linha de microfita suspensa com três camadas.

e para linhas de microfita suspensas

$$\begin{aligned} \Phi(x, d_2 + d_3) = & \frac{1}{\pi \epsilon_0 (n_{x_1} n_{y_1} + n_{x_2} n_{y_2})} \left\{ -\alpha \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k} [e^{-2kd_2 \alpha_2} \right. \\ & \left. - e^{-2kd_3 \alpha_3}] n(k) dk \right. \\ & \left. + \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k} [1 - e^{-2k(d_2 \alpha_2 + d_3 \alpha_3)}] n(k) dk \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

sendo

$$m(k) = \left\{ \frac{1}{1 + \alpha g} + \beta q \frac{(\alpha + g)}{(1 + \alpha g)^2} + \beta^2 q^2 \frac{(\alpha + g)^2}{(1 + \alpha g)^3} + \dots \right\} \quad (3.20)$$

$$n(k) = \left\{ \frac{1}{1 + \beta f} + \alpha q \frac{(\beta + f)}{(1 + \beta f)^2} + \alpha^2 q^2 \frac{(\beta + f)^2}{(1 + \beta f)^3} + \dots \right\} \quad (3.21)$$

$$\alpha_i = n_{x_i} / n_{y_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.22)$$

$$\alpha = \frac{n_{x_1} n_{y_1} - n_{x_2} n_{y_2}}{n_{x_1} n_{y_1} + n_{x_2} n_{y_2}} \quad (3.23)$$

$$\beta = \frac{n_{x_3} n_{y_3} - n_{x_2} n_{y_2}}{n_{x_2} n_{y_2} + n_{x_3} n_{y_3}} \quad (3.24)$$

$$f = e^{-2kd_3 \alpha_3} \quad (3.25)$$

$$g = e^{-2kd_1 \alpha_1} \quad (3.26)$$

$$q = e^{-2kd_2 \alpha_2} \quad (3.27)$$

Cada termo da s\u00e9rie em (3.18) e (3.19) \u00e9 expandido em s\u00e9rie de pot\u00eancia [9], obtendo-se ap\u00f3s integra\u00e7\u00e3o termo a termo uma express\u00e3o s\u00e9rie para linhas de microfita invertidas dada por

$$\begin{aligned} \Phi(x, d_1) = & \frac{1}{2\pi\epsilon_0(n_{x_1} n_{y_1} + n_{x_2} n_{y_2})} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \\ & \cdot \{(-\beta) \log \frac{(x/d_1)^2 + 4[r(n+1)\alpha_2 + (m+1)\alpha_1]^2}{(x/d_1)^2 + 4[r(n+1)\alpha_2 + m\alpha_1]^2} \\ & + \log \frac{(x/d_1)^2 + 4[nr\alpha_2 + (m+1)\alpha_1]^2}{(x/d_1)^2 + 4(nr\alpha_2 + m\alpha_1)^2} \} \end{aligned} \quad (3.28)$$

e para linhas de microfita suspensas

$$\begin{aligned} \Phi(x, d_2 + d_3) = & \frac{1}{2\pi\epsilon_0(n_{x_1} n_{y_1} + n_{x_2} n_{y_2})} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} \\ & \cdot \{(-\beta) \log \frac{(x/d_3)^2 + 4[ns\alpha_2 + (m+1)\alpha_3]^2}{(x/d_3)^2 + 4[s(n+1)\alpha_2 + m\alpha_3]^2} \\ & + \log \frac{(x/d_3)^2 + 4[s(n+1)\alpha_2 + (m+1)\alpha_3]^2}{(x/d_3)^2 + 4(ns\alpha_2 + m\alpha_3)^2} \} \end{aligned} \quad (3.29)$$

sendo

$$\begin{aligned} A_{nm} = & (-1)^m \alpha^{n-m} \left[\frac{(n+m)!}{n! (0! m!)} \alpha^{2m} - \frac{(n+m-1)!}{(n-1)! [1! (m-1)!]} \alpha^{2m-2} \right. \\ & \left. + \frac{(n+m-2)!}{(n-2)! [2! (m-2)!]} \alpha^{2m-4} + \dots + \frac{n!}{(n-m)! (m! 0!)} \alpha^0 \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
B_{nm} = & (-1)^m \beta^{n-m} \left[\frac{(n+m)!}{n!(0!m!)} \beta^{2m} - \frac{(n+m-1)!}{(n-1)![1!(m-1)!]} \beta^{2m-2} \right. \\
& + \frac{(n+m-2)!}{(n-2)![2!(m-2)!]} \beta^{2m-4} + \dots + \left. \frac{n!}{(n-m)!(m!0!)} \beta^0 \right]
\end{aligned}
\tag{3.31}$$

$$r = d_2/d_1 \tag{3.32}$$

$$s = d_2/d_3 \tag{3.33}$$

As séries duplamente infinitas indicadas em (3.28) e (3.29) convergem rapidamente. São usados menos de cem termos em todos os casos analisados. Resultados numéricos de impedâncias características e permissividades efetivas são apresentados.

O programa computacional, empregado na avaliação da série (3.28) e (3.29), consiste de uma generalização com correção do desenvolvido inicialmente por Farrar [9].

A obtenção de resultados numéricos foi efetivada através de um mini-computador COBRA-530.

Foram obtidos resultados para linhas de microfita invertidas (na Fig. 3.4, $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_0$) e para linhas de microfita com camada dielétrica superposta (na Fig. 3.4, $\epsilon_3 = \epsilon_0$). Como substratos foram considerados o "pyrolytic boron nitride" ($\epsilon_{xx} = \epsilon_{zz} = 5,12$ e $\epsilon_{yy} = 3,4$), o quartzo ($\epsilon_r = 3,78$) e materiais dielétricos com permissividades relativas iguais a 6,0 e a 50,0 equivalentes, respectivamente, às constantes dielétricas do tecido subcutâneo e do tecido muscular [13].

As Figs. 3.6 e 3.7 mostram as curvas de impedância característica e permissividade dielétrica efetiva plotadas versus a espessura d_2 , e para larguras de fita W dadas por $0,5\text{cm} \leq W \leq 1,5\text{cm}$. A linha de microfita é coberta com uma camada finita de material dielétrico de permissividade correspondente $\tilde{\epsilon}$ do tecido subcutâneo ($\epsilon_{r2} = 6,0$) e uma camada infinita de material dielétrico equivalente ao tecido muscular

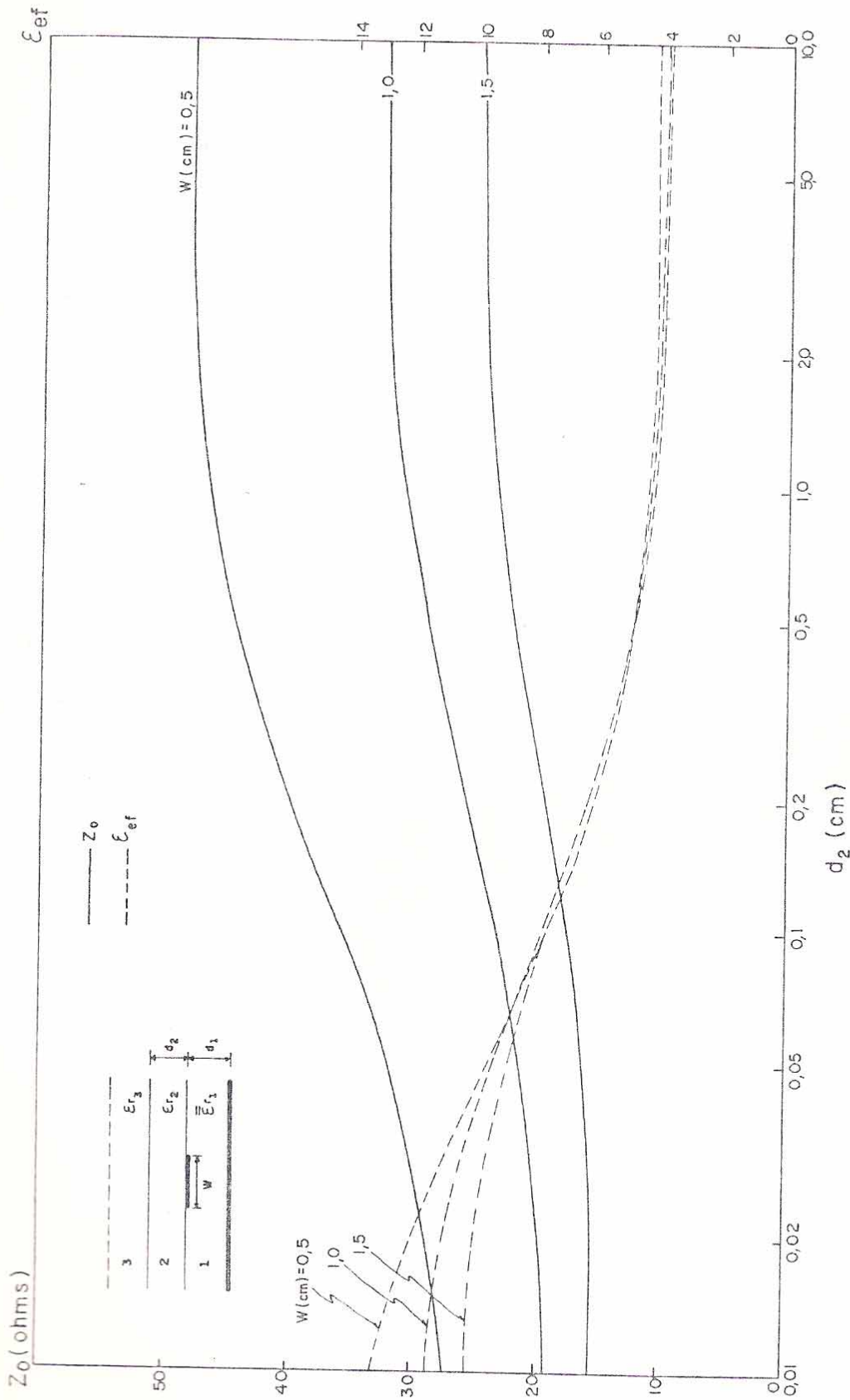


Fig. 3.6 - Impedância característica e permissividade dielétrica efetiva em função de d_2 para vários W , $\bar{\epsilon}_1$ ($\epsilon_{xx} = \epsilon_{zz} = 5,12$; $\epsilon_{yy} = 3,4$), $\epsilon_{r2} = 6,0$ e $\epsilon_{r3} = 50,0$.

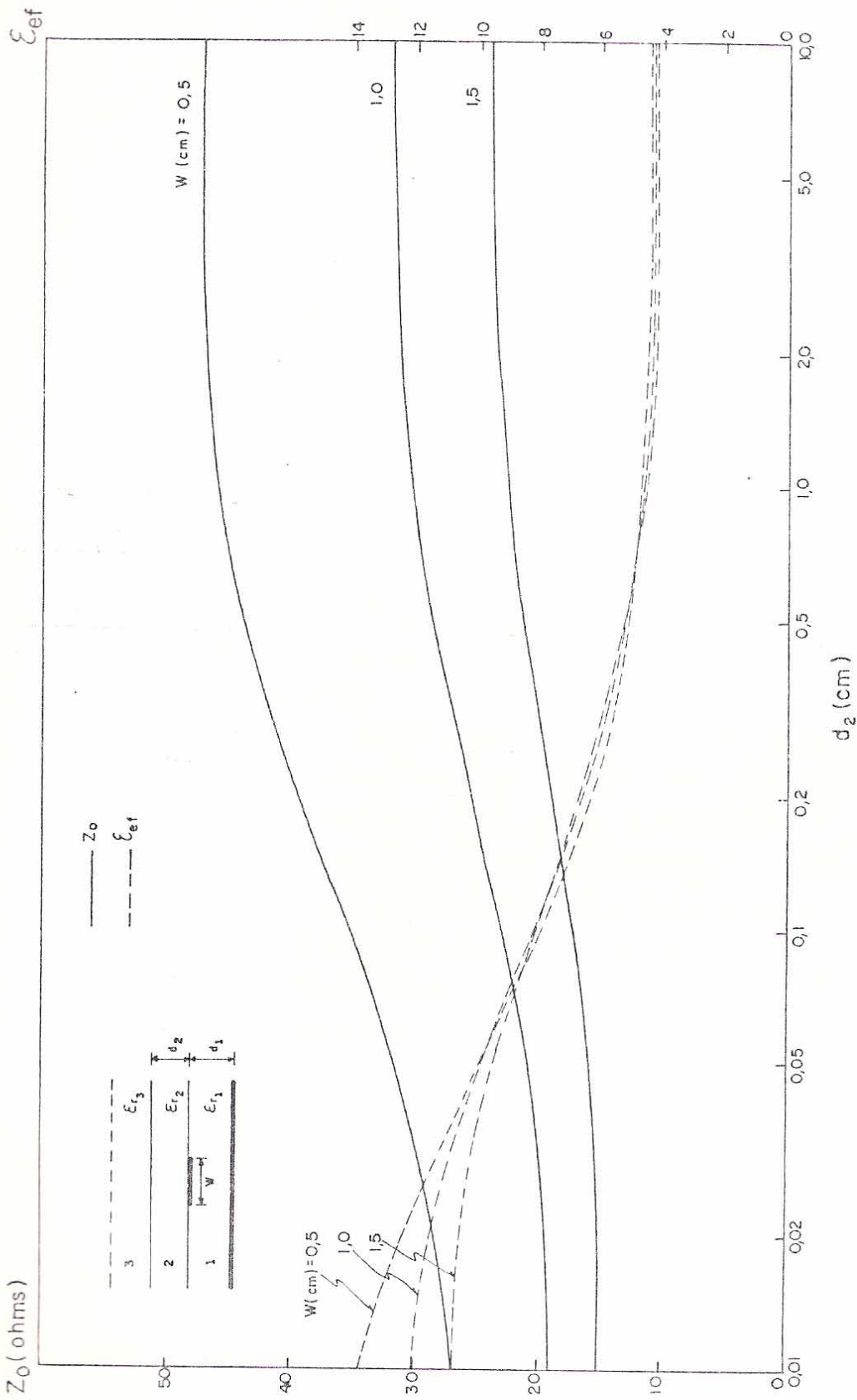


Fig. 3.7 - Impedância característica e permissividade dielétrica efetiva em função de d_2 para vários w , $\epsilon_{r1} = 3,78$, $\epsilon_{r2} = 6,0$ e $\epsilon_{r3} = 50,0$.

($\epsilon_{r_3} = 50,0$). Nas Figs. 3.6 e 3.7 foram usados o "pyrolytic boron nitride" e o quartzo como substratos dielétricos, respectivamente.

Os resultados obtidos nesta análise para linhas de microfita cobertas apresentam uma boa concordância com os obtidos por métodos diferentes e apresentados por Bahl e Stuchly [13] e Koul e Bhat [25].

Os resultados obtidos para linhas de microfita suspensas sobre "pyrolytic boron nitride" e sobre quartzo são apresentados nas Figs. 3.8 e 3.9, respectivamente. As curvas de impedâncias características e permissividades dielétricas efetivas são obtidas em função da relação d_2/d_3 , para diversos valores de W/d_3 .

Os resultados desta análise para linhas de microfita suspensas sobre p.b.n. apresentam uma boa concordância com os resultados obtidos através do método da linha de transmissão transversa com o método variacional e um mapeamento [25]. As linhas de microfita suspensas sobre quartzo apresentam resultados que convergem com os obtidos por [15] através de expressões empíricas.

As variações das impedâncias características e das constantes dielétricas efetivas em função da relação ϵ_x/ϵ_y estão indicadas na Fig. 3.10. A razão ϵ_x/ϵ_y é normalizada para $\epsilon_y = 3,78$. À medida que a relação ϵ_x/ϵ_y cresce, as impedâncias características decrescem enquanto as constantes dielétricas crescem. Este comportamento é observado para estruturas de linhas de microfita invertidas e suspensas e os resultados estão em concordância com os obtidos por [25].

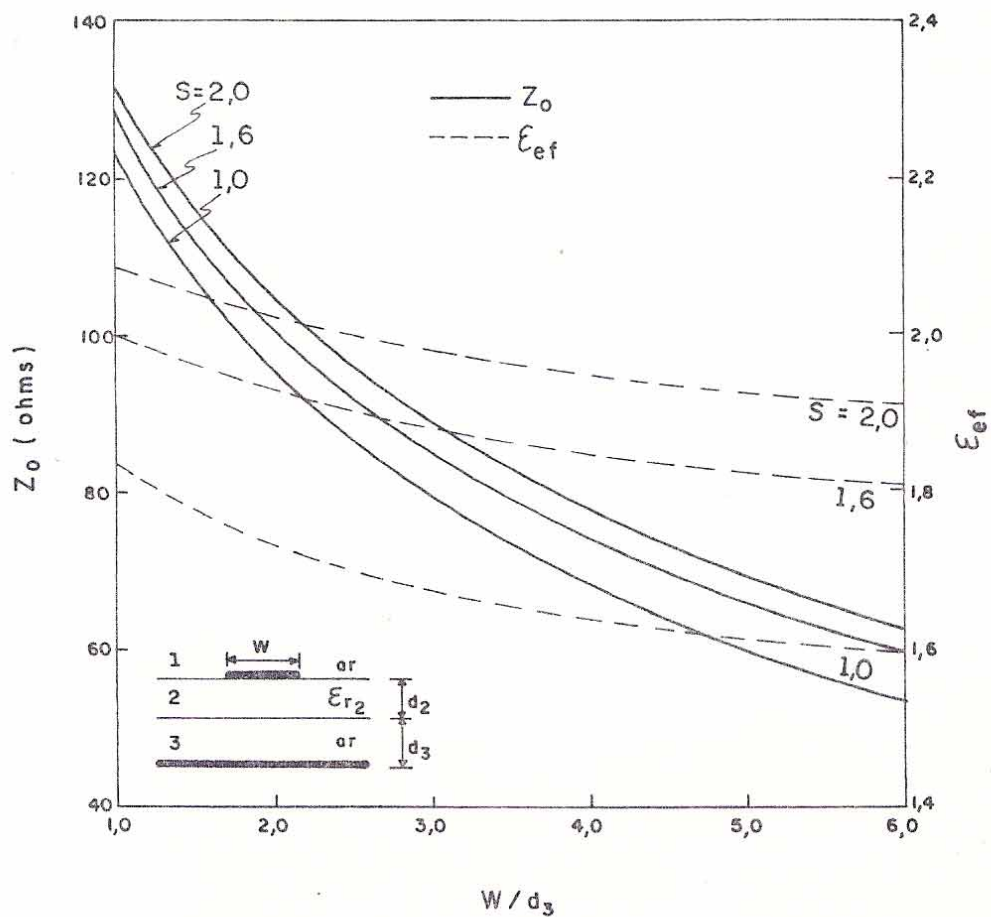


Fig. 3.9 - Impedância característica e permissividade dielétrica efetiva versus W/d_3 para diversos valores de $s = d_2/d_3$, $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 1,0$ e $\epsilon_{r2} = 3,78$

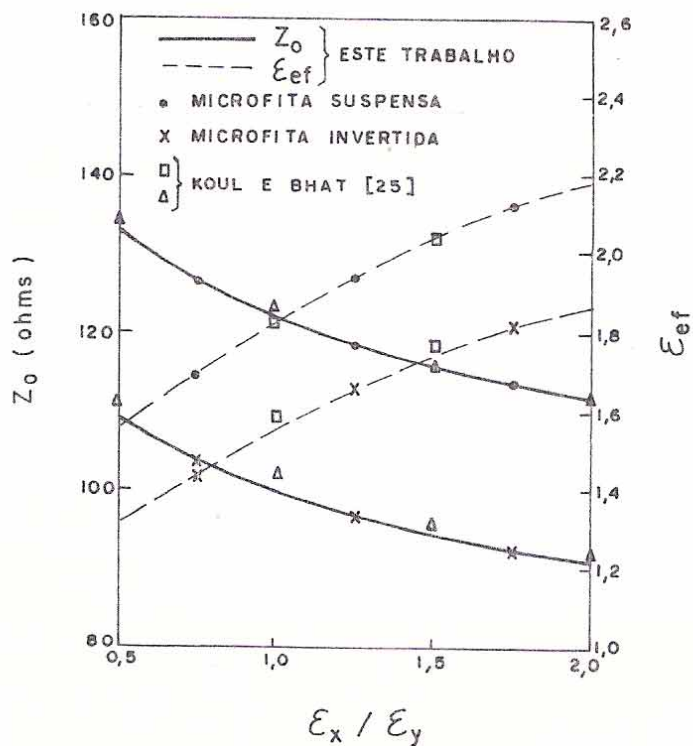


Fig. 3.10 - Impedância característica e permissividade efetiva versus ϵ_x / ϵ_y ($r=s=1,0$; ϵ_x / ϵ_y normalizado para $\epsilon_y = 3,78$, $W/d_1 = 1,0$ para microfita invertida e $W/d_3 = 1,0$ para microfita suspensa).

CAPÍTULO 4ANÁLISE DE LINHAS DE MICROFITA
ESPESSAS SOBRE SUBSTRATOS
ANISOTRÓPICOS4.1 - Introdução

O efeito da espessura da fita condutora ($t \neq 0$, na Fig. 4.1) nas características de propagação de estruturas de microfita sobre substratos isotrópicos e anisotrópicos tem sido considerado [2], [3], [17], [21]. A avaliação deste efeito permite uma melhor caracterização do caso prático em relação ao modelo ideal da fita condutora de espessura desprezível ($t \rightarrow 0$, na Fig. 4.1).

A determinação das propriedades elétricas de uma linha de microfita espessa ($t \neq 0$, na Fig. 4.1), sobre substratos dielétricos, tem sido efetuada para o modelo quase-estático, sendo o dielétrico isotrópico [2], [3], [17] ou anisotrópico [21].

Dois métodos são comumente referidos quando da consideração de linhas de microfita espessas sobre substratos isotrópicos: (a) o método variacional [3] e (b) expressões aproximadas [2], [17]. As linhas de microfita sobre substratos anisotrópicos foram investigadas através do método variacional, com um procedimento de Galerkin e utilização de um conjunto de funções exponenciais como funções de expansão e de teste [21].

Neste Capítulo a análise de linhas de microfita espessas sobre substratos anisotrópicos será efetuada através do método da equação integral [5], [23]: (a) generalizado ($t \neq 0$ na Fig. 4.1) e (b) combinado com expressões aproximadas para as impedâncias e permissividades efetivas.

Na análise através do método da equação integral generalizado, a função de Green obtida para o modelo da fita elementar é expressa em forma de série, usando-se a teoria dos resíduos. Através do método dos momentos, a capacitância da

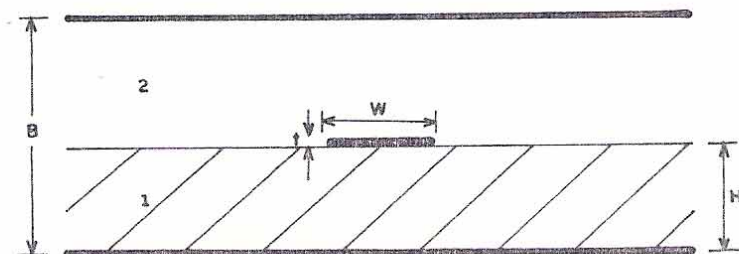


Fig. 4.1 - Geometria de linha de microfita espessa.

linha por unidade de comprimento e demais características da linha são determinadas.

Os métodos descritos são utilizados na obtenção de impedâncias características e velocidades de fase para linhas de microfita sobre dois substratos anisotrópicos: (a) safira e (b) "pyrolytic boron nitride".

Na análise através do método da equação integral combinado com expressões aproximadas, utiliza-se um mapeamento [23] e as expressões de Wheeler [1]. Estas foram adotadas por Stinehelfer [2] e Jansen [17] para linhas de microfita sobre substratos isotrópicos.

4.2 - Aplicação do método da equação integral

A análise de linhas de microfita espessas é desenvolvida para a estrutura com a geometria indicada na Fig. 4.1. Nesta estrutura, a região dielétrica $0 < y < H$ é considerada anisotrópica com eixo ótico na direção y e tensor permissividade relativa dado por

$$\bar{\epsilon}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Na região $H < y < B$, o meio é homogêneo e isotrópico com permissividade relativa ϵ_{r2} . A espessura da fita condutora, t , é considerada finita.

Uma solução quase-estática para o potencial é obtida resolvendo-se as equações de Laplace nas interfaces dielétricas e aplicando-se as condições de contorno correspondentes (Apêndice C).

Resolvendo-se a equação de Laplace para as regiões dielétricas da Fig. 4.1, obtém-se, para a fita elementar de largura "a", com espessura desprezível, a função potencial $\Phi(x,H)$, expressa como segue:

$$\Phi(x, H) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \frac{\cos(kx/n_x) \operatorname{sen}(ka/2n_x)/(ka/2n_x)}{\{n_x n_y \coth(kH/n_y) + \epsilon_{r2} \coth[k(B-H)/n_x]\}} \quad (4.2)$$

onde

$$n_x = (\epsilon_{xx})^{1/2} \quad \text{e} \quad n_y = (\epsilon_{yy})^{1/2} \quad (4.3)$$

A análise é estendida para o caso em que a espessura da fita, t , apresenta um valor finito. A função potencial $\Phi(x, H+t)$, nesse caso, é dada por

$$\Phi(x, H+t) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \frac{\cos(kx/n_x) \operatorname{senh}[k(B-(H+t))/n_x] \operatorname{sen}(ka/2n_x)/(ka/2n_x)}{\operatorname{senh}[k(B-H)/n_x] \{n_x n_y \coth(kH/n_y) + \epsilon_{r2} \coth[k(B-H)/n_x]\}} \quad (4.4)$$

A função de Green para linhas de microfita espessas é obtida através da média aritmética entre $\Phi(x, H)$ e $\Phi(x, H+t)$. Essa análise é uma aproximação para valores t/H pequenos [3]. A expressão obtida para a função de Green a partir de (4.2) e (4.4) é

$$\frac{1}{2} [\Phi(x, H) + \Phi(x, H+t)] = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \cos(kx/n_x) \operatorname{sen}(ka/2n_x)/(ka/2n_x) \frac{\operatorname{senh}[k(B-H)/n_x] + \operatorname{senh}[k(B-(H+t))/n_x]}{\operatorname{senh}[k(B-H)/n_x] \{n_x n_y \coth(kH/n_y) + \epsilon_{r2} \coth[k(B-H)/n_x]\}} \quad (4.5)$$

A solução numérica de (4.5) para linhas de microfita espessas pode ser efetuada diretamente da forma integral, através do algoritmo de Bryant e Weiss [12], ou a partir de uma expressão série obtida pela teoria dos resíduos [19].

Na presente análise, utiliza-se a teoria dos resíduos (Apêndice D). A expressão série é obtida através da mē

dia aritmética entre $\phi(x, H)$ e $\phi(x, H+t)$, onde

$$\phi(x, H) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[r_p (B-H)/n_x] \exp[-(|x| - a/2)r_p/n_x] - \exp[-(|x| + a/2)r_p/n_x]}{r_p^2 (a/2n_x) \text{sen}[r_p (B-H)/n_x] \{n_x n_y \text{Ccossec}^2(r_p H/n_y) + \epsilon_{r_2} \text{Dcossec}^2[r_p (B-H)/n_x]\}} \quad (4.6)$$

$$\phi(x, H+t) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[r_p (B-(H+t))/n_x] \{ \exp[-(|x| - a/2)r_p/n_x] - \exp[-(|x| + a/2)r_p/n_x] \}}{r_p^2 (a/2n_x) \text{sen}[r_p (B-H)/n_x] \{n_x n_y \text{Ccossec}^2(r_p H/n_y) + \epsilon_{r_2} \text{Dcossec}^2[r_p (B-H)/n_x]\}} \quad (4.7)$$

para $|x| \geq a/2$

$$\phi(x, H) = \frac{1}{2\epsilon_0} \{ (n_x/n_y) (2H/a) \frac{[(B-H)/n_x]}{\{n_x n_y [(B-H)/n_x] + \epsilon_{r_2} (H/n_y)\}} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[r_p (B-H)/n_x] \{ \exp[-(a/2 + |x|)r_p/n_x] + \exp[-(a/2 - |x|)r_p/n_x] \}}{r_p^2 (a/2n_x) \text{sen}[r_p (B-H)/n_x] \{n_x n_y \text{Ccossec}^2(r_p H/n_y) + \epsilon_{r_2} \text{Dcossec}^2[r_p (B-H)/n_x]\}} \} \quad (4.8)$$

$$\phi(x, H+t) = \frac{1}{2\epsilon_0} \{ (n_x/n_y) (2H/a) \frac{[(B-(H+t))/n_x]}{\{n_x n_y [(B-H)/n_x] + \epsilon_{r_2} (H/n_y)\}} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[r_p (B-(H+t))/n_x] \{ \exp[-(a/2 + |x|)r_p/n_x] + \exp[-(a/2 - |x|)r_p/n_x] \}}{r_p^2 (a/2n_x) \text{sen}[r_p (B-H)/n_x] \{n_x n_y \text{Ccossec}^2(r_p H/n_y) + \epsilon_{r_2} \text{Dcossec}^2[r_p (B-H)/n_x]\}} \} \quad (4.9)$$

para $|x| \leq a/2$

E para $x = 0$, obtêm-se

$$\Phi(0, H) = \frac{1}{2\epsilon_0} \{n_x/n_y (2H/a) \frac{[(B-H)/n_x]}{\{n_x n_y [(B-H)/n_x] + \epsilon_{r_2} (H/n_y)\}} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[r_{p1} (B-H)/n_x] \{\exp[-(a/2) r_{p1}/n_x]\}}{r_{p1}^2 (a/2n_x) \text{sen}[r_{p1} (B-H)/n_x] \{n_x n_y C \cos^2(r_{p1} H/n_y) + \epsilon_{r_2} D \cos^2[r_{p1} (B-H)/n_x]\}} \} \quad (4.10)$$

$$\Phi(0, H+t) = \frac{1}{2\epsilon_0} \{n_x/n_y (2H/a) \frac{[(B-(H+t))/n_x]}{\{n_x n_y [(B-H)/n_x] + \epsilon_{r_2} (H/n_y)\}} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[r_{p1} (B-(H+t))/n_x] \{\exp[-(a/2) r_{p1}/n_x]\}}{r_{p1}^2 (a/2n_x) \text{sen}[r_{p1} (B-H)/n_x] \{n_x n_y C \cos^2(r_{p1} H/n_y) + \epsilon_{r_2} D \cos^2[r_{p1} (B-H)/n_x]\}} \} \quad (4.11)$$

Um programa computacional baseado no método dos momentos usa valores numéricos obtidos de (4.6), (4.7), (4.10) e (4.11) para determinar a capacitância da linha por unidade de comprimento, a impedância característica e a velocidade de fase normalizada para linhas de fita isoladas. Valores numéricos para as funções de Green dos modos de propagação são obtidos a partir de (4.6), (4.7), (4.10) e (4.11) [8].

Para solução da equação transcendental e inversão de matriz são utilizadas subrotinas SSP/IBM nos programas de computação [30].

4.3 - Utilização de expressões aproximadas

A análise de linhas de microfita abertas ($B/H \rightarrow \infty$ na Fig. 4.1) sobre substratos isotrópicos pode ser efetuada com precisão e simplicidade, através da utilização das expressões para impedância característica e permissividade efe-

tiva mostradas abaixo [7]

$$Z_o = \left[\frac{60}{\sqrt{\epsilon_{r_e}}} \ln \left(\frac{8H}{W_e} + 0,25 \frac{W_e}{H} \right) \right] \quad (W/H \leq 1) \quad (4.12)$$

$$Z_o = \left[\frac{376,7}{\sqrt{\epsilon_{r_e}}} \left[\frac{W_e}{H} + 1,393 + 0,667 \ln \left(\frac{W_e}{H} + 1,444 \right) \right]^{-1} \right] \quad (W/H \geq 1) \quad (4.13)$$

onde

$$\frac{W_e}{H} = \frac{W}{H} + \frac{\Delta W}{H} \quad (4.14)$$

com

$$\frac{\Delta W}{H} = \left[\frac{1,25}{\pi} \frac{t}{H} \left(1 + \ln \frac{4\pi W}{t} \right) \right] \quad (W/H \leq 1/2\pi) \quad (4.15)$$

$$\frac{\Delta W}{H} = \left[\frac{1,25}{\pi} \frac{t}{H} \left(1 + \ln \frac{2H}{t} \right) \right] \quad (W/H \geq 1/2\pi) \quad (4.16)$$

e

$$\epsilon_{r_e} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} F(W/H) - Q \quad (4.17)$$

com

$$Q = \frac{\epsilon_r - 1}{4,6} \frac{t/H}{\sqrt{W/H}} \quad (4.18)$$

$$F(W/H) = (1 + 10H/W)^{-1/2} \quad (4.19)$$

A utilização destas expressões em linha de microfita sobre substrato anisotrópico requer a utilização de uma estrutura equivalente, com substrato isotrópico, cuja permissividade é função da relação W/H [6], [19].

A determinação da estrutura isotrópica equivalente é feita através do método da permissividade efetiva equivalente, descrito na seção 2.4, do Capítulo 2.

Entretanto, para a determinação da permissividade relativa equivalente, $\epsilon_{\text{req}}(W/H)$, faz-se uso do método do mapeamento, descrito na seção 2.3, do Capítulo 2, conforme proposto em [19].

A expressão para $F(W/H)$, em (4.19), pode ser substituída por uma outra ligeiramente mais precisa, dada por [6]

$$F(W/H) = \begin{cases} (1 + 12H/W)^{-1/2} + 0,04[1 - (W/H)^2] & (4.20) \\ & (W/H \leq 1) \\ (1 + 10H/W)^{-0,555} & (4.21) \\ & (W/H \geq 1) \end{cases}$$

4.4 - Resultados

Os métodos da equação integral (com a aproximação mencionada em [3]) e de expressões aproximadas, descritos anteriormente, foram usados na obtenção de resultados.

Os resultados dos dois métodos considerados neste trabalho, para linhas de microfita espessas sobre safira anisotrópica são apresentados nas Figs. 4.2 e 4.3. Os resultados do método da equação integral, devido à aproximação considerada, são válidos para pequenas variações de t/H , enquanto os resultados do método de expressões aproximadas são válidos também para grandes variações de t/H .

As Figs. 4.2 a 4.5 mostram curvas obtidas, para linhas de microfita espessas, pelo método de expressões aproximadas, que se mostrou preciso e eficiente. A Fig. 4.2 mostra curvas de impedâncias características versus t/H . A Fig. 4.3 mostra curvas de velocidade de fase normalizada em função de t/H .

Nas Figs. 4.2a e 4.3a foram introduzidos resultados obtidos pelo método da equação integral aproximado, para alguns valores de t/H e W/H .

Nas Figs. 4.2b e 4.3b, foram introduzidos resultados disponíveis da análise efetuada para uma formulação mais complexa através do método variacional [21]. São valores

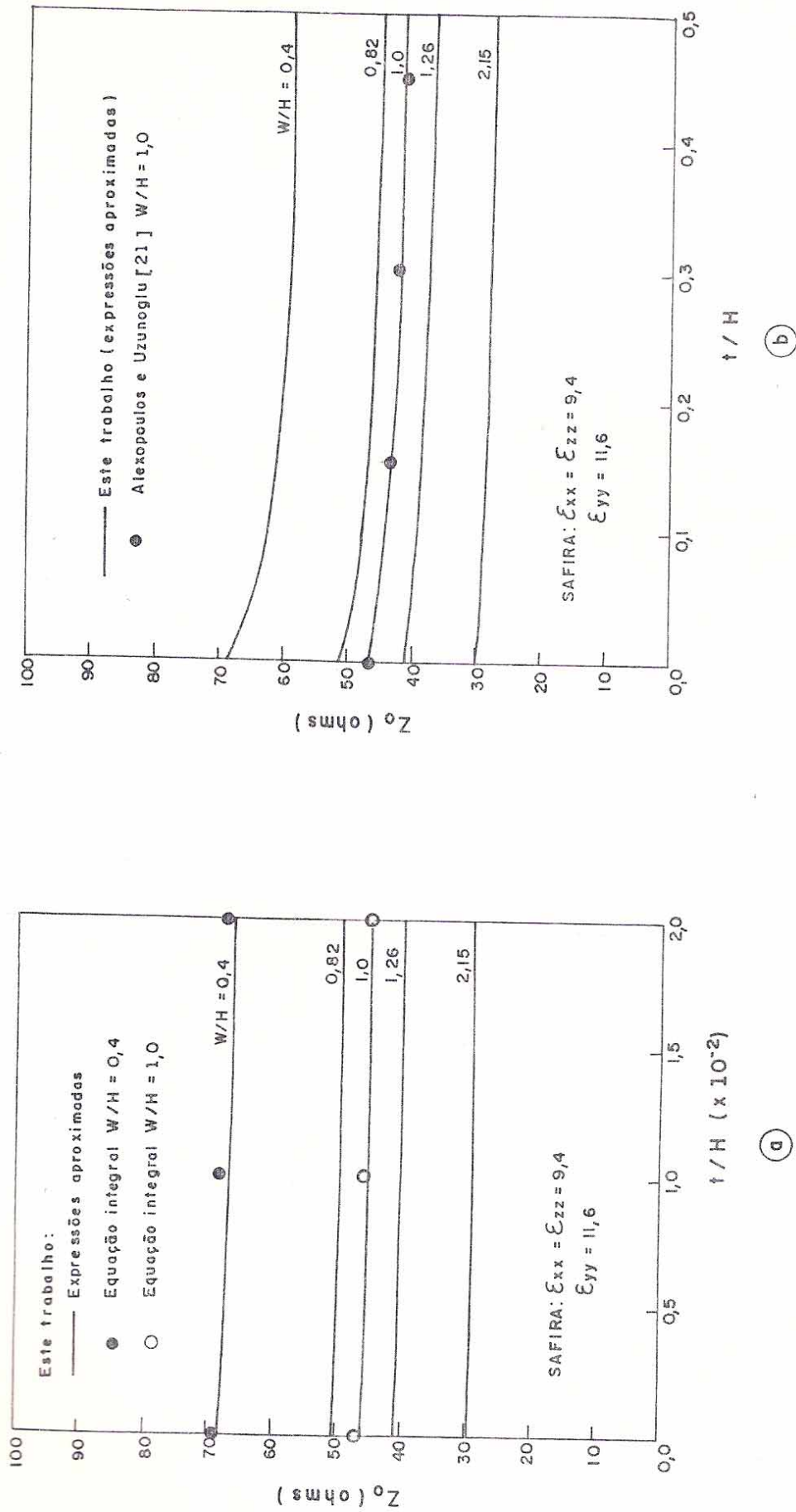


Fig. 4.2 - Impedância característica, Z_0 , de microfita espessa, em função de t/H . (a) pequenas variações de t/H e (b) grandes variações de t/H .

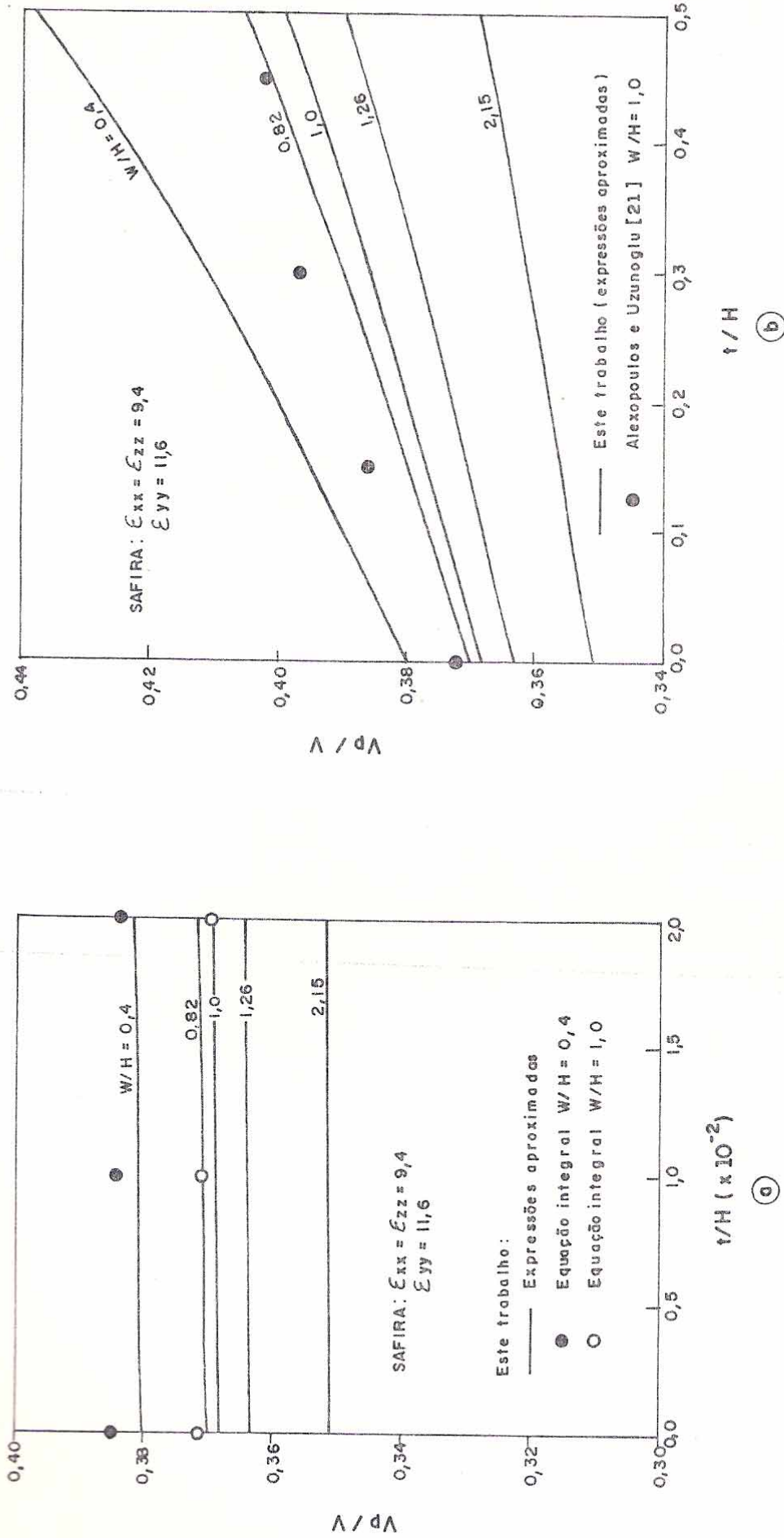


Fig. 4.3 - Velocidade de fase normalizada, v_p/v , de microfita espessa, em função de t/H (a) pequenas variações de t/H e (b) grandes variações de t/H .

para $W/H = 1$ e $t/H = 0,0; 0,15; 0,30$ e $0,45$ em linhas de microfita cobertas (a distância entre os planos de terra é igual a seis vezes a espessura do substrato dielétrico anisotrópico).

As Figs. 4.4 e 4.5 apresentam curvas de impedâncias características e permissividades efetivas versus t/H , respectivamente. Foram consideradas linhas de microfita espessas sobre a safira anisotrópica (9,4; 11,6) e sobre dois substratos isotrópicos com permissividades relativas iguais a 8,875 e a 10,0 (alumina).

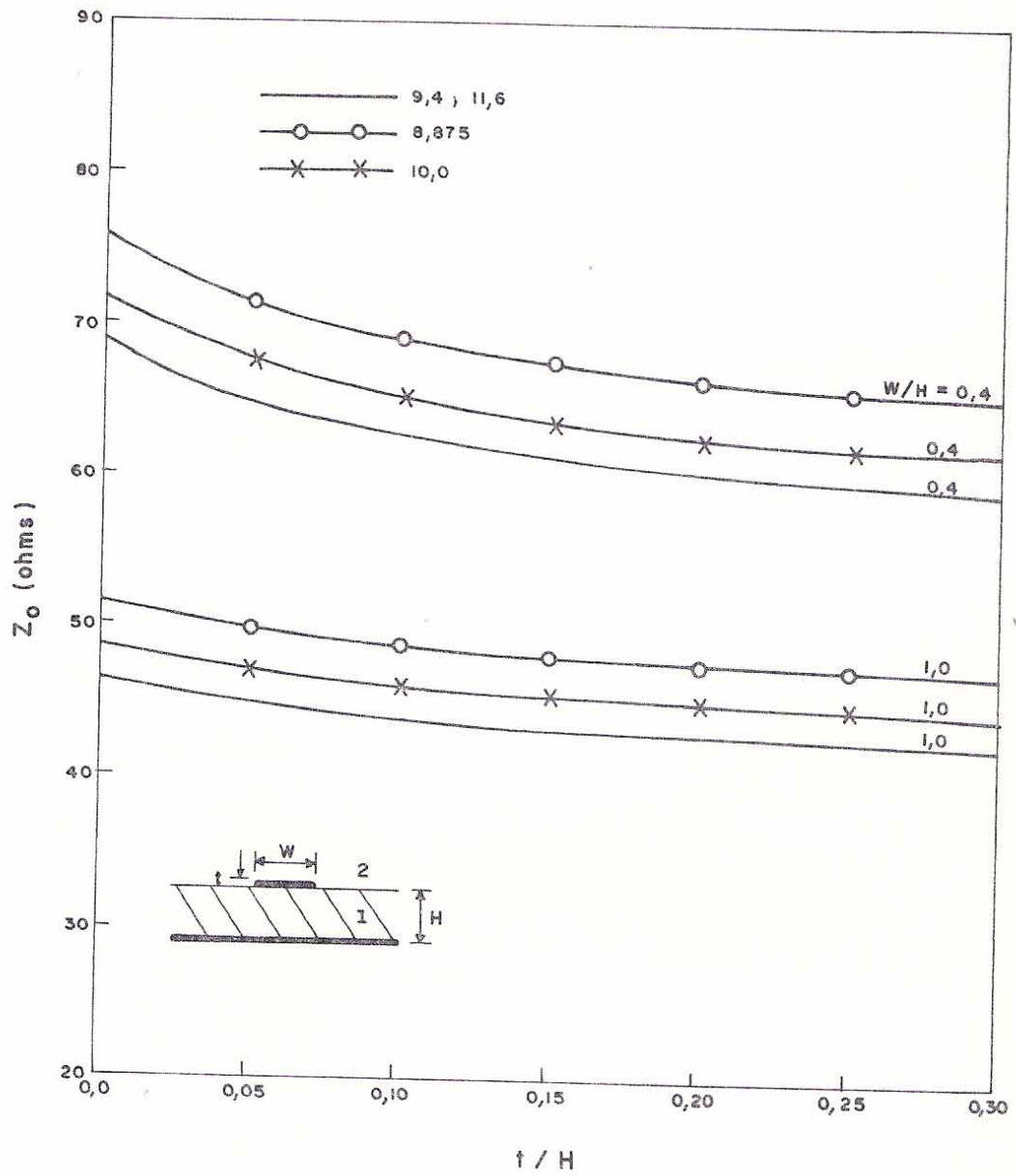


Fig. 4.4 - Impedância característica, Z_0 , de microfita espessa, em função de t/H para diversos substratos.

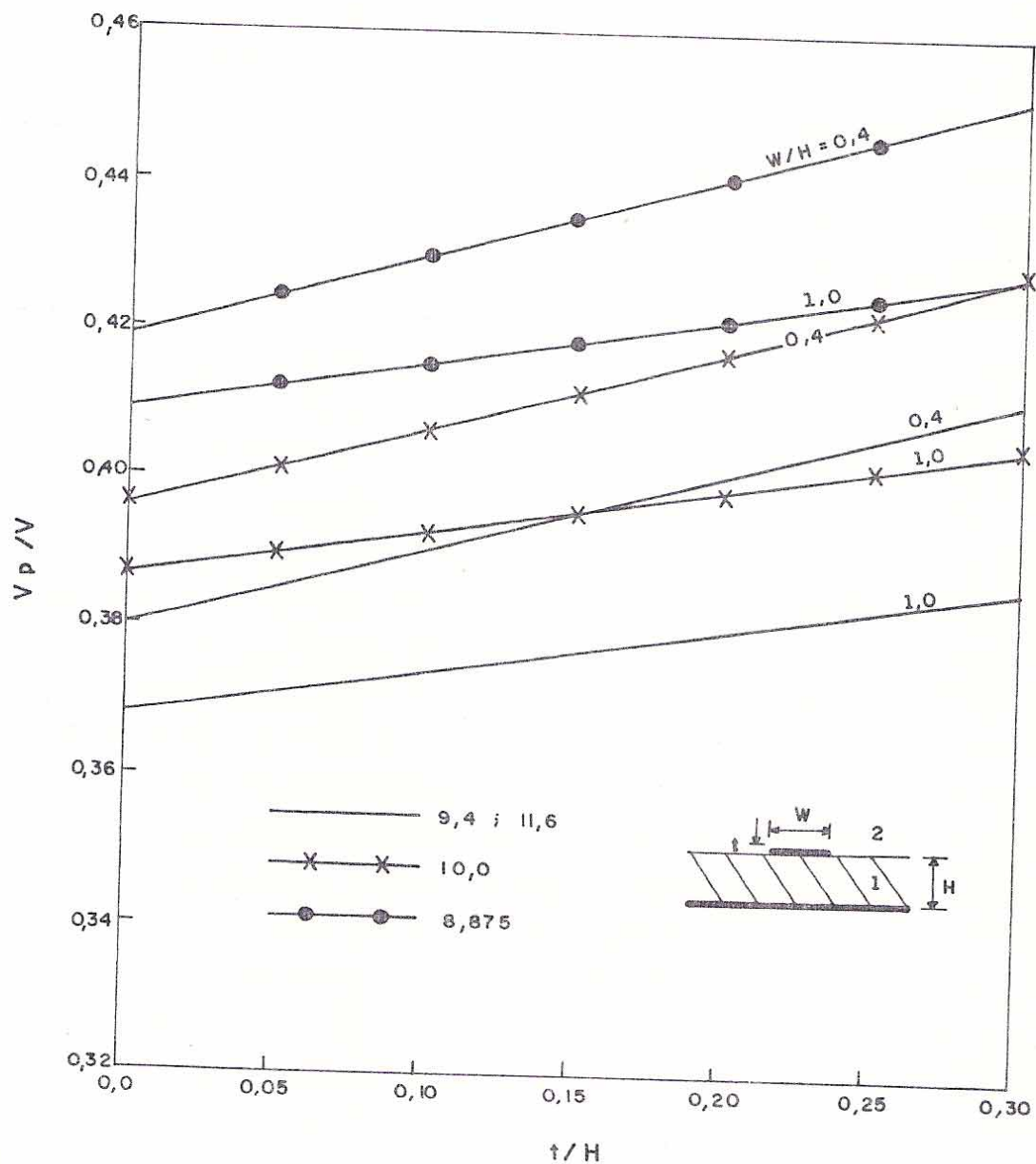


Fig. 4.5 - Velocidade de fase normalizada, v_p/v , de microfita espessa, em função de t/H para diversos substratos.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Foram analisadas diversas estruturas de linhas planares de fita com camadas dielétricas anisotrópicas uniaxiais. Estas estruturas são adequadas para circuitos integrados de microondas, sendo que algumas delas permitem operação em frequências mais elevadas, ou mais especificamente, em ondas milimétricas.

A utilização de substratos anisotrópicos uniaxiais (como a safira e o "boron nitride"), em circuitos integrados de microondas, visa a melhoria do desempenho de vários dispositivos. Isto ocorre devido às características dos substratos anisotrópicos uniaxiais, entre as quais: propriedades elétricas bem definidas, baixas perdas e alta homogeneidade.

Neste trabalho, foram usados os métodos da equação integral, um mapeamento e o método da permissividade efetiva equivalente. O método da equação integral permite uma análise diretamente da estrutura com camadas dielétricas anisotrópicas. Os outros dois métodos consideram a transformação da estrutura dada em outras equivalentes, porém com camadas dielétricas isotrópicas. Estes dois métodos são especificamente destinados à análise de estruturas com dielétricos anisotrópicos.

O método da equação integral, bastante geral, foi usado na caracterização de linhas de microfita: (a) suspensas, (b) invertidas e (c) com camadas superpostas (com "overlay"). Este método compreende duas etapas: a determinação da função de Green adequada e a aplicação do método dos momentos na discretização da equação integral. Na obtenção da função de Green, foram consideradas estruturas com camadas dielétricas anisotrópicas arbitrárias (inclinação qualquer para o eixo óptico, em cada camada). A segunda etapa, resulta em um procedimento numérico geral.

Na obtenção de resultados para as estruturas de linhas de microfita mencionadas, cada camada dielétrica

foi considerada orientada de modo a diagonalizar o tensor permissividade relativa. Observe-se que um caso particular desta estrutura foi analisado por um método variacional, combinado com o método da linha de transmissão equivalente e um mapeamento [25].

Os resultados obtidos neste trabalho, para linhas de microfita invertidas e suspensas com camadas anisotrópicas, apresentaram uma boa concordância com os resultados de outros autores [25].

Para linhas de microfita com camadas superpostas (com "overlay"), utilizadas em radiadores de microfita para aplicações biomédicas (estudadas em [13], para camadas isotrópicas, pelo método variacional), foram propostos resultados para o caso mais geral em que são utilizados substratos anisotrópicos. Observou-se uma boa concordância entre os resultados obtidos neste trabalho e os apresentados em [13], para o caso simplificado com substratos isotrópicos.

A análise do efeito da espessura finita da fita condutora, em linhas de microfita ($t/H \neq 0$, na Fig. 4.1), foi efetuada através: (a) do método da equação integral com uma distribuição de potencial aproximada [3] e (b) do uso de expressões com termos de correção [6], [17]. Neste trabalho, estes métodos foram estendidos à análise de estrutura com substratos anisotrópicos uniaxiais.

No método da equação integral, a função de Green obtida com aproximação foi resolvida através da teoria dos resíduos [19]. Os resultados deste método (para $t/H \neq 0$) se mostraram precisos para as impedâncias características, mas inadequados para as velocidades de fase normalizadas. Embora a influência de t/H nas velocidades de fase seja reduzida, observou-se que através deste método, a variação das velocidades de fase se dá em sentido oposto. Assim, apesar da influência de t/H ser marcante, para finalidades práticas, apenas na impedância característica, recomenda-se atenção na utilização da aproximação mencionada em [3].

Entretanto, um tratamento mais complexo do problema de valor de contorno, para a estrutura da Fig. 4.1, permite a determinação de uma expressão adequada para a função de Green [21]. Neste caso, resultados precisos são obtidos.

Em linhas de microfita espessas ($t/H \neq 0$), a utilização do modelo da permissividade efetiva equivalente e do mapeamento permitiu a determinação numérica da permissividade relativa do substrato isotrópico da estrutura equivalente, $\epsilon_{req}(W/H)$. Segundo o procedimento proposto neste trabalho, foi feita a utilização deste $\epsilon_{req}(W/H)$ em expressões válidas para a caracterização de linhas de microfita sobre substratos isotrópicos. Os resultados deste método, para linhas de microfita espessas sobre substratos anisotrópicos, apresentaram uma boa concordância com os resultados do método da equação integral para um tratamento rigoroso [21] e com grande simplicidade computacional, mesmo para grandes valores de t/H .

Em prosseguimento, pretende-se a obtenção de resultados para as estruturas sobre substratos anisotrópicos arbitrários, a partir: (a) da utilização da expressão integral obtida e (b) da adaptação do programa desenvolvido. Pretende-se ainda o estudo de linhas de microfita paralelas acopladas: (a) com duas camadas e (b) com camadas superpostas.

O prosseguimento deste trabalho pode também ocorrer: (a) na extensão dos resultados quase-estáticos para frequências elevadas, através de modelos dispersivos, (b) na obtenção de expressões aproximadas, obtidas por ajuste de curvas ("curve fitting"), bem adequadas na utilização de PAC (Projeto Auxiliado por Computador) e (c) no desenvolvimento de radiadores de microfita, acopladores direcionais e bloqueadores CC.

As listagens dos programas computacionais utilizados neste trabalho foram publicadas em [31].

APÊNDICE A

DETERMINAÇÃO DA EXPRESSÃO INTEGRAL DA
FUNÇÃO DE GREEN PARA UMA LINHA DE MI-
CROFITA COM TRÊS CAMADAS ANISOTRÓPI-
CAS - EQUAÇÃO (3.5)

A análise de uma linha de microfita com três camadas dielétricas anisotrópicas é efetuada através do método da equação integral que requer a determinação da função de Green. O modelo da linha de carga com espessura da fita condutora desprezível, é considerado. A equação de Laplace é resolvida nas regiões com dielétricos anisotrópicos para as condições de contorno correspondentes. A solução pode ser obtida considerando-se

$$\Phi(x,y) = \text{Re}[V(x,y)] \quad (\text{A.1})$$

e a representação espectral

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k,y) e^{jkx} dk \quad (\text{A.2})$$

com

$$\Psi(k,y) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x,y) e^{-jkx} dx \quad (\text{A.3})$$

Para a estrutura considerada, a equação de Laplace correspondente é dada por

$$\epsilon_{xx} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \epsilon_{yy} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2\epsilon_{xy} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Derivando-se (A.1) em relação às componentes x e y e substituindo-se o resultado em (A.4), obtém-se

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} (-\epsilon_{xx} k^2 \Psi + \epsilon_{yy} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + 2jk \epsilon_{xy} \frac{\partial \Psi}{\partial y}) e^{jkx} dk\right\} = 0 \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\epsilon_{yy} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + 2jk \epsilon_{xy} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \epsilon_{xx} k^2 \Psi = 0 \quad (\text{A.6})$$

cuja solução é

$$\Psi = -2A_1 e^{-j\beta ky} \operatorname{senh}(ky\delta) \quad (\text{A.7})$$

donde

$$\beta = \epsilon_{xy} / \epsilon_{yy} \quad (\text{A.8})$$

$$\delta = [(\epsilon_{xx}/\epsilon_{yy}) - (\epsilon_{xy}/\epsilon_{yy})^2]^{1/2} \quad (\text{A.9})$$

Substituindo-se (A.7) em (A.2), vem

$$V(x,y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(k) e^{-j\beta ky} \operatorname{senh}(ky\delta) e^{jkx} dk \quad (\text{A.10})$$

Para atender às condições de contorno, tem-se

$$\Phi_1(x,y) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} A_1(k) \frac{e^{-j\beta_1 ky} \operatorname{senh}(ky\delta_1)}{e^{-j\beta_1 kd_1} \operatorname{senh}(kd_1\delta_1)} e^{jkx} dk\right\} \quad (\text{A.11})$$

(0 < y < d₁)

$$\Phi_2(x,y) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} A_2(k) [C_2(k) \operatorname{senh}[k(y-d_1)\delta_2] + D_2(k) \operatorname{cosh}[k(y-d_1)\delta_2]] e^{jkx} dk\right\} \quad (\text{A.12})$$

$$d_1 < y < (d_1+d_2)$$

$$\Phi_3(x,y) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} A_3(k) \frac{\operatorname{senh}[k((d_1+d_2+d_3)-y)\delta_3]}{\operatorname{senh}(kd_3\delta_3)} e^{jkx} dk\right\} \quad (\text{A.13})$$

$$(d_1+d_2) < y < (d_1+d_2+d_3)$$

onde

$$\beta_i = \epsilon_{xy_i} / \epsilon_{yy_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.14})$$

$$\delta_i = [(\epsilon_{xx_i} / \epsilon_{yy_i}) - (\epsilon_{xy_i} / \epsilon_{yy_i})^2]^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.15})$$

Considerando-se a continuidade do potencial tem-se

$$\Phi_1(x, d_1) = \Phi_2(x, d_1) \quad (\text{A.16})$$

$$\Phi_2(x, d_1 + d_2) = \Phi_3(x, d_1 + d_2) \quad (\text{A.17})$$

donde

$$A_1(k) = A_2(k)D_2(k) \quad (\text{A.18})$$

$$A_3(k) = [A_2(k)C_2(k)\tanh(kd_2\delta_2) + A_2(k)D_2(k)]\cosh(kd_2\delta_2) \quad (\text{A.19})$$

Das condições de contorno aplicadas em $y = d_1$, vem

$$\hat{y} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = -\rho_\ell \delta(x) \quad (\text{A.20})$$

onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac. Ou ainda,

$$(\epsilon_{xy_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \epsilon_{yy_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}) - (\epsilon_{xy_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \epsilon_{yy_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}) = \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0} \delta(x) \quad (\text{A.21})$$

Das condições de contorno aplicadas em $y = (d_1 + d_2)$, vem

$$\hat{y} \cdot (\bar{D}_2 - \bar{D}_3) = 0 \quad (\text{A.22})$$

ou, ainda,

$$-(\epsilon_{xy_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \epsilon_{yy_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}) + (\epsilon_{xy_3} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \epsilon_{yy_3} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Substituindo-se as derivadas parciais de (A.11) e (A.12) em (A.21), obtém-se em $y = d_1$

$$\frac{1}{\pi} \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A_1(k) e^{jkx} (jk\epsilon_{xy_1}) dk + \int_{-\infty}^{\infty} A_1(k) e^{jkx} k\epsilon_{yy_1} [\delta_1 \coth(kd_1\delta_1)] \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -j\beta_1] dk - \int_{-\infty}^{\infty} A_2(k) D_2(k) e^{jkx} (jk\epsilon_{xy_2}) dk - \\
 & - \int_{-\infty}^{\infty} A_2(k) C_2(k) e^{jkx} (\delta_2 k \epsilon_{yy_2}) dk = - \frac{\rho \ell}{\epsilon_0} \delta(x)
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

Mas,

$$e^{jkx} = \cos(kx) + j \operatorname{sen}(kx) \tag{A.25}$$

Substituindo-se (A.25) em (A.24), vem

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi} \{ \int_{-\infty}^{\infty} A_1(k) \cos(kx) (\delta_1 k \epsilon_{yy_1}) \operatorname{coth}(kd_1 \delta_1) dk + \\
 & + \int_{-\infty}^{\infty} A_1(k) \operatorname{sen}(kx) (K \epsilon_{xy_2}) dk - \int_{-\infty}^{\infty} A_2(k) C_2(k) \cos(kx) (\delta_2 k \epsilon_{yy_2}) dk \} \\
 & = - \frac{\rho \ell}{\epsilon_0} \delta(x)
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

Considerando-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) dk = 2\pi \delta(x) \tag{A.27}$$

e fazendo-se $\rho \ell = 1$,

$$\tag{A.28}$$

então, (A.26) é escrita como segue

$$\begin{aligned}
 & A_1(k) [\delta_1 \epsilon_{yy_1} \operatorname{coth}(kd_1 \delta_1) + \epsilon_{xy_2} \tan(kx) - \\
 & - \delta_2 \epsilon_{yy_2} A_2(k) C_2(k) / A_1(k)] = - \frac{1}{2\epsilon_0 k}
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Substituindo-se as derivadas parciais de (A.12) e (A.13) em (A.23), obtém-se em $y = (d_1 + d_2)$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \{ \int_{-\infty}^{\infty} A_2(k) C_2(k) e^{jkx} \operatorname{senh}(kd_2 \delta_2) [\delta_2 K \epsilon_{yy_2} \operatorname{coth}(kd_2 \delta_2) + \\
 & + jk \epsilon_{xy_2}] dk + \int_{-\infty}^{\infty} A_2(k) D_2(k) e^{jkx} \operatorname{senh}(kd_2 \delta_2) [\delta_2 k \epsilon_{yy_2} + \\
 & + jk \epsilon_{xy_2} \operatorname{coth}(kd_2 \delta_2)] dk + \int_{-\infty}^{\infty} A_3(k) e^{jkx} [\delta_3 k \epsilon_{yy_3} \operatorname{coth}(kd_3 \delta_3) - \\
 & = jk \epsilon_{xy_3}] dk \} = 0
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

Substituindo-se (A.18), (A.19) e (A.25) em (A.30),
obtêm-se

$$A_2(k)C_2(k) = -DA_1(k) \quad (\text{A.31})$$

onde

$$D = \frac{P}{Q} \quad (\text{A.32})$$

com

$$P = \gamma_2 \delta_2 \cos(kx) - \beta_2 \gamma_2 \sin(kx) \coth(kd_2 \delta_2) + \\ + \gamma_3 \delta_3 \cos(kx) \coth(kd_2 \delta_2) \coth(kd_3 \delta_3) + \beta_3 \gamma_3 \sin(kx) \coth(kd_2 \delta_2) \quad (\text{A.33})$$

e

$$Q = \gamma_2 \delta_2 \cos(kx) \coth(kd_2 \delta_2) - \beta_2 \gamma_2 \sin(kx) + \\ + \gamma_3 \delta_3 \cos(kx) \coth(kd_3 \delta_3) + \beta_3 \gamma_3 \sin(kx) \quad (\text{A.34})$$

sendo

$$\gamma_i = \epsilon_{yy_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.35})$$

Substituindo-se (A.31) em (A.29) e considerando-se (A.14), (A.15) e (A.35), vem

$$A_1(k) = - \frac{1}{2\epsilon_0 k} \{ \gamma_1 \delta_1 \coth(kd_1 \delta_1) + \beta_2 \gamma_2 \tan(kx) + \gamma_2 \delta_2 D \}^{-1} \quad (\text{A.36})$$

Substituindo-se (A.36) em (A.11), obtêm-se a expressão

$$\Phi_1(x, y) = \frac{1}{\pi \epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \cos[k(x + \beta_1(d_1 - y))] \frac{\sinh(ky \delta_1)}{\sinh(kd_1 \delta_1)} \\ \cdot \{ \gamma_1 \delta_1 \coth(kd_1 \delta_1) + \beta_2 \gamma_2 \tan(kx) + \gamma_2 \delta_2 D \}^{-1} \quad (\text{A.37})$$

onde D está definido em (A.32).

APÊNDICE B

OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO DA EXPRESSÃO SÉRIE
DA FUNÇÃO DE GREEN - EQUAÇÃO (3.28)

A função de Green para a linha de microfita invertida com três camadas anisotrópicas, na forma integral, é

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \cos kx \frac{\sinh(ky n_{x_1}/n_{y_1})}{\sinh(kd_1 n_{x_1}/n_{y_1})} \cdot \left\{ \frac{1}{n_{x_1} n_{y_1} \coth(kd_1 n_{x_1}/n_{y_1}) + n_{x_2} n_{y_2} D} \right\} \quad (B.1)$$

onde

$$D = \frac{n_{x_2} n_{y_2} + n_{x_3} n_{y_3} \coth(kd_2 n_{x_2}/n_{y_2})}{n_{x_2} n_{y_2} \coth(kd_2 n_{x_2}/n_{y_2}) + n_{x_3} n_{y_3}} \quad (B.2)$$

Substituindo-se (B.2) em (B.1), vem

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \cos kx \frac{\sinh(ky\alpha_1)}{\sinh(kd_1\alpha_1)} \cdot \frac{\lambda_2 \coth(kd_2\alpha_2) + \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \coth(kd_1\alpha_1) \coth(kd_2\alpha_2) + \lambda_1 \lambda_3 \coth(kd_1\alpha_1) + \lambda_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 \coth(kd_2\alpha_2)} \quad (B.3)$$

sendo

$$\lambda_i = n_{x_i} n_{y_i} \quad , \quad \alpha_i = n_{x_i}/n_{y_i} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (B.4)$$

$$n_{x_i} = (\epsilon_{xx_i})^{1/2} \quad e \quad n_{y_i} = (\epsilon_{yy_i})^{1/2}$$

A equação (B.3) pode ser escrita na forma

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \cos(kx) \sinh(ky\alpha_1) \cdot \frac{[\lambda_3 \sinh(-kd_2\alpha_2) - \lambda_2 \cosh(-kd_2\alpha_2)]}{Q} \quad (B.5)$$

onde

$$Q = \lambda_1 \lambda_3 \cosh(kd_1\alpha_1) \sinh(-kd_2\alpha_2) - \lambda_1 \lambda_2 \cosh(kd_1\alpha_1) \cosh(-kd_2\alpha_2) + \lambda_2 \lambda_2 \sinh(kd_1\alpha_1) \sinh(-kd_2\alpha_2) - \lambda_2 \lambda_3 \sinh(kd_1\alpha_1) \cosh(-kd_2\alpha_2) \quad (B.6)$$

Escrevendo-se (B.6) na forma exponencial e combinando-se os termos do lado direito da equação, obtêm-se

$$Q = \left[\frac{A'}{4} (e^{kd_1\alpha_1} + e^{-kd_1\alpha_1}) + \frac{C'}{4} (e^{kd_1\alpha_1} - e^{-kd_1\alpha_1}) \right] e^{-(kd_2\alpha_2)} - \left[\frac{B'}{4} (e^{kd_1\alpha_1} + e^{-kd_1\alpha_1}) + \frac{D'}{4} (e^{kd_1\alpha_1} - e^{-kd_1\alpha_1}) \right] e^{(kd_2\alpha_2)} \quad (B.7)$$

sendo

$$\begin{aligned} A' &= (\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2) \\ B' &= (\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2) \\ C' &= (\lambda_2 \lambda_2 - \lambda_2 \lambda_3) \\ D' &= (\lambda_2 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3) \end{aligned} \quad (B.8)$$

A equação (B.7) pode ser escrita como

$$Q = \left[\left(\frac{A'+C'}{4} \right) e^{kd_1 \alpha_1} + \left(\frac{A'-C'}{4} \right) e^{-kd_1 \alpha_1} \right] e^{-(kd_2 \alpha_2)} - \left[\left(\frac{B'+D'}{4} \right) e^{kd_1 \alpha_1} + \left(\frac{B'-D'}{4} \right) e^{-kd_1 \alpha_1} \right] e^{(kd_2 \alpha_2)} \quad (\text{B.9})$$

ou ainda,

$$Q = - \left(\frac{B'+D'}{4} \right) e^{k(d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2)} \left[1 + \left(\frac{B'-D'}{B'+D'} \right) e^{-2kd_1 \alpha_1} \right] \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{A'-C'}{B'+D'} \right) e^{-2k(d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2)} \cdot \left[\frac{1 + \left(\frac{A'+C'}{A'-C'} \right) e^{2kd_1 \alpha_1}}{1 + \left(\frac{B'-D'}{B'+D'} \right) e^{-2kd_1 \alpha_1}} \right] \right\} \quad (\text{B.10})$$

Em (B.10), os termos que estão em colchetes são da forma $(1+x)^{-1}$ com $|x| < 1$. Cada um dos termos pode ser expandido em série de Taylor. Substituindo-se (B.10) em (B.5), vem

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\pi \epsilon_0} \frac{4}{B'+D'} \int_0^\infty e^{-k(d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2)} \frac{\cos(kx) \sinh(ky \alpha_1) [\lambda_2 \cosh(-kd_2 \alpha_2) - \lambda_3 \sinh(-kd_2 \alpha_2)] dk}{k \left(1 + \left(\frac{B'-D'}{B'+D'} \right) e^{-2kd_1 \alpha_1} \right) \left[1 - \left(\frac{A'-C'}{B'+D'} \right) e^{-2k(d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2)} \left(\frac{1 + \left(\frac{A'+C'}{A'-C'} \right) e^{2kd_1 \alpha_1}}{1 + \left(\frac{B'-D'}{B'+D'} \right) e^{-2kd_1 \alpha_1}} \right) \right]} \quad (\text{B.11})$$

onde

$$\left(\frac{B'-D'}{B'+D'} \right) = \left(\frac{A'+C'}{A'-C'} \right) = \alpha = \frac{n_{x_1} n_{y_1} - n_{x_2} n_{y_2}}{n_{x_1} n_{y_1} + n_{x_2} n_{y_2}} \quad (\text{B.12})$$

$$\left(\frac{A'-C'}{B'+D'} \right) = \beta = \frac{n_{x_3} n_{y_3} - n_{x_2} n_{y_2}}{n_{x_2} n_{y_2} + n_{x_3} n_{y_3}} \quad (\text{B.13})$$

Substituindo-se (B.12) e (B.13) em (B.11), vem

$$\Phi(x,y) = \frac{4}{\pi\epsilon_0(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-k(d_1\alpha_1+d_2\alpha_2)} \cos(kx) \sinh(ky\alpha_1) [\lambda_2 \cosh(-kd_2\alpha_2) - \lambda_3 \sinh(-kd_2\alpha_2)] dk}{k(1+\alpha e^{-2kd_1\alpha_1})(1-\beta e^{-2k(d_1\alpha_1+d_2\alpha_2)}) \cdot \frac{1+\alpha e^{2kd_1\alpha_1}}{1+\alpha e^{-2kd_1\alpha_1}}}$$

(B.14)

Como em (B.14) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são constantes positivas, α e β são menores que a unidade, então:

$$\alpha e^{-2kd_1\alpha_1} < 1 \quad \text{para } 0 < k < \infty, \quad 0 < d_1 < \infty \quad (\text{B.15})$$

$$\beta e^{-2k(d_1\alpha_1+d_2\alpha_2)} \cdot \frac{1+\alpha e^{2kd_1\alpha_1}}{1+\alpha e^{-2kd_1\alpha_1}} < 1$$

$$\text{para } (0 < k < \infty, d_1\alpha_1 > 0 \text{ e } (d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2) > d_1\alpha_1) \quad (\text{B.16})$$

O termo da direita na desigualdade (B.16) pode ser escrito como

$$\beta q \frac{\alpha + g}{1 + \alpha g} \quad \text{onde } g = e^{-2kd_1\alpha_1} \quad \text{e } q = e^{-2kd_2\alpha_2} \quad (\text{B.17})$$

Considerando-se (B.17), a equação (B.14) pode ser escrita como

$$\Phi(x,y) = \frac{4}{\pi\epsilon_0(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)} \cdot \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k} \frac{e^{-k(d_1\alpha_1+d_2\alpha_2)} \sinh(ky\alpha_1) [\lambda_2 \cosh(-kd_2\alpha_2) - \lambda_3 \sinh(-kd_2\alpha_2)] dk}{(1+\alpha g)(1-\beta q \frac{\alpha + g}{1 + \alpha g})}$$

(B.18)

Escrevendo-se (B.18) na forma exponencial, obtêm-se

$$\begin{aligned} \Phi(x,y) = & \frac{1}{\pi \epsilon_0 (\lambda_1 + \lambda_2)} \{ (-\beta) \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k} \frac{[e^{-k(2d_2 \alpha_2 + d_1 \alpha_1 - y \alpha_1)} - e^{-k(2d_2 \alpha_2 + d_1 \alpha_1 + y \alpha_1)}]}{(1 + \alpha g) (1 - \beta q \frac{\alpha + g}{1 + \alpha g})} dk \\ & + \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k} \frac{[e^{-k(d_1 \alpha_1 - y \alpha_1)} - e^{-k(d_1 \alpha_1 + y \alpha_1)}]}{(1 + \alpha g) (1 - \beta q \frac{\alpha + g}{1 + \alpha g})} dk \} \end{aligned} \quad (B.19)$$

O termo $(1 - \beta q \frac{\alpha + g}{1 + \alpha g})^{-1}$ é da forma $(1 - x)^{-1}$ cuja expansão em série de Taylor é dada por

$$(1 - \beta q \frac{\alpha + g}{1 + \alpha g})^{-1} = 1 + \beta q \frac{\alpha + g}{(1 + \alpha g)} + (\beta q)^2 \frac{(\alpha + g)^2}{(1 + \alpha g)^2} + (\beta q)^3 \frac{(\alpha + g)^3}{(1 + \alpha g)^3} + \dots \quad (B.20)$$

Fazendo-se

$$\begin{aligned} m(k) &= \left(\frac{1}{1 + \alpha g} \right) \left[1 + \beta q \frac{(\alpha + g)}{(1 + \alpha g)} + (\beta q)^2 \frac{(\alpha + g)^2}{(1 + \alpha g)^2} + \dots \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n q^n \frac{(\alpha + g)^n}{(1 + \alpha g)^{n+1}} \end{aligned} \quad (B.21)$$

e substituindo-se (B.21) em (B.19), obtêm-se, em $y = d_1$, que

$$\begin{aligned} \Phi(x, d_1) &= \frac{1}{\pi \epsilon_0 (\lambda_1 + \lambda_2)} \{ -\beta \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k} [e^{-2kd_2 \alpha_2} - e^{-2k(d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2)}] m(k) dk + \\ &+ \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k} [1 - e^{-2kd_1 \alpha_1}] m(k) dk \} \end{aligned} \quad (B.22)$$

O primeiro termo em (B.21) é uma série infinita da forma $(1+x)^{-1}$ onde $x = \alpha g = \alpha e^{-2kd_1} \alpha_1$. O segundo, terceiro e o n-ésimo termos são da forma $(\alpha + g)^n / (1 + \alpha g)^{n+1}$. Em (B.21), expandindo-se o último termo em série de potências, vem

$$\begin{aligned}
 & (\alpha + g)^n / (1 + \alpha g)^{n+1} \\
 &= \frac{\alpha^n}{0!} - \frac{(n+1)}{1!} \alpha^{n+1} g + \frac{(n+2)(n+1)}{2!} \alpha^{n+2} g^2 - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} \alpha^{n+3} g^3 + \dots \\
 & \quad + \frac{n}{0!} \alpha^{n-1} g - \frac{(n+1)n}{1!} \alpha^n g^2 + \frac{(n+2)(n+1)n}{2!} \alpha^{n+1} g^3 - \dots \\
 & \quad \quad + \frac{n(n-1)}{2!} \alpha^{n-2} g^2 - \frac{(n+1)n(n-1)}{2!} \alpha^{n-1} g^3 + \dots \\
 & \quad \quad \quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \alpha^{n-3} g^3 - \dots \\
 & \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

O termo genérico em (B.23) é dado por

$$\begin{aligned}
 A_{nm} &= (-1)^m \alpha^{n-m} \left[\frac{(n+m)!}{n!(0!m!)} \alpha^{2m} - \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!(1!(m-1)!)} \alpha^{2m-2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(n+m-2)!}{(n-2)!(2!(m-2)!)} \alpha^{2m-4} + \dots + \frac{n!}{(n-m)!(m!0!)} \alpha^0 \right]
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

e, portanto,

$$m(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \beta^n g^m q^n A_{nm} \tag{B.25}$$

e A_{nm} tem $(n+1)$ termos.

Expandindo-se (B.22) em série Taylor, obtém-se como resultado final duas séries infinitas. O termo típico é $A_{nm} g^m q^n$ e pode ser expresso como sendo

$$A_{nm} e^{-2kmd_1} \alpha_1^n e^{-2krd_1} \alpha_2^n \quad \text{onde } r = d_2/d_1 \tag{B.26}$$

Substituindo-se (B.25) e (B.26) em (B.22), resulta

$$\begin{aligned} \Phi(x, d_1) &= \frac{1}{\pi \epsilon_0 (\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \\ &\cdot \{ (-\beta) \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k} [e^{-k(2d_2 \alpha_2 + 2nr d_1 \alpha_2 + 2md_1 \alpha_1)} \\ &- e^{-k[2d_2 \alpha_2 + 2(m+1)d_1 \alpha_1 + 2nr d_1 \alpha_2]}] dk \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k} [e^{-k(2nr d_1 \alpha_2 + 2md_1 \alpha_1)} - e^{-k[2(m+1)d_1 \alpha_1 + 2nr d_1 \alpha_2]}] dk \end{aligned} \quad (B.27)$$

Mas,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x} (e^{-\gamma x} - e^{-\delta x}) dx = \frac{1}{2} \log \frac{a^2 + \delta^2}{a^2 + \gamma^2} \quad (B.28)$$

para $\text{Re } \gamma > 0$, $\text{Re } \delta > 0$

Substituindo-se (B.28) em (B.27), obtém-se

$$\begin{aligned} \Phi(x, d_1) &= \frac{1}{2\pi \epsilon_0 (n_{x_1} n_{y_1} + n_{x_2} n_{y_2})} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \\ &\cdot \{ (-\beta) \log \frac{(x/d_1)^2 + 4[r(n+1)\alpha_2 + (m+1)\alpha_1]^2}{(x/d_1)^2 + 4[r(n+1)\alpha_2 + m\alpha_1]^2} \\ &+ \log \frac{(x/d_1)^2 + 4[nr\alpha_2 + (m+1)\alpha_1]^2}{(x/d_1)^2 + 4(nr\alpha_2 + m\alpha_1)^2} \} \end{aligned} \quad (B.29)$$

A solução da expressão série da função de Green, para linhas de microfita suspensas (equação 3.17), é obtida de forma análoga.

APÊNDICE C

OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO INTEGRAL DA FUNÇÃO
DE GREEN PARA UMA LINHA DE MICROFITA
ESPessa - EQUAÇÃO (4.5)

A geometria da Fig. C.1. é considerada. A função potencial é devido a uma fita elementar condutora infinita, uniformemente carregada, de largura "a", centrada em $x=0$ e $y=y'$ paralelamente ao eixo z. Na análise, a região dielétrica isotrópica é dividida em duas, a região II abaixo e a região III acima da fita elementar condutora. A região I corresponde à região dielétrica ($0 < y < H$). As condições de contorno são impostas em $y=H$ e $y=y'$ para a obtenção da função potencial $\Phi(x, H+t)$. Na Fig. C.1, a dimensão p é usada para permitir uma separação entre as condições de contorno dos campos na interface e a continuidade em $y = H$.

A equação de Laplace na região I, anisotrópica, é dada por

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\epsilon} \cdot \bar{\nabla} \phi_1) = 0 \quad (C.1)$$

onde ϕ_1 é a função potencial escalar e $\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \bar{\epsilon}_r$ é o tensor permissividade diagonal.

A solução geral de (C.1) é da forma

$$\begin{aligned} \phi_1(x,y) = & [a_1(k) \cos(kx/n_x) + b_1(k) \sin(kx/n_x)] \\ & \cdot [c_1(k) \sinh(ky/n_y) + d_1(k) \cosh(ky/n_y)] \end{aligned} \quad (C.2)$$

onde k é uma variável contínua, correspondendo à constante de separação das variáveis x e y; n_x e n_y são, respectivamente, da-

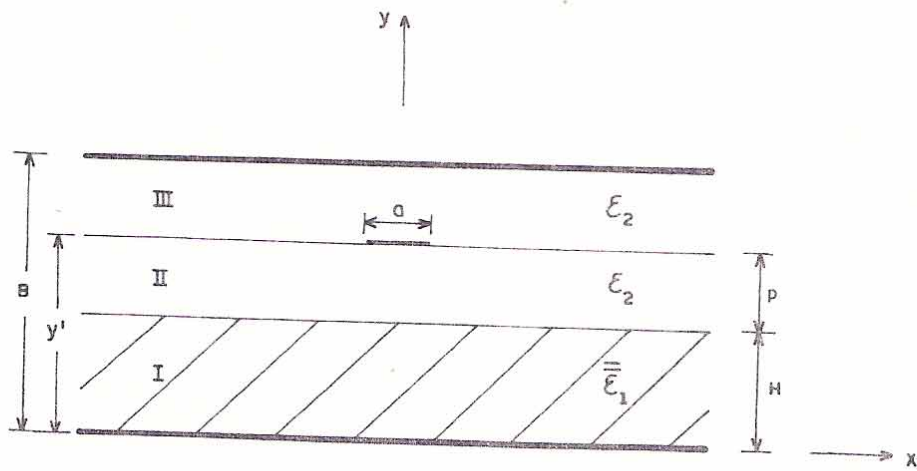


Fig. C.1 - Geometria de linha de microfita para a determinação da função de Green.

dos por

$$(\epsilon_x)^{1/2} \quad \text{e} \quad (\epsilon_y)^{1/2}$$

Considerando-se a simetria par em x e fazendo-se o potencial no plano de terra $\phi_1(x,0) = 0$, então (C.2) é escrita como

$$\phi_1(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(k) \cos(kx/n_x) \frac{\sinh(ky/n_y)}{\sinh(kH/n_y)} dk \quad (C.3)$$

$$(0 < y < H)$$

Usando-se a equação de Laplace na região isotrópica, $H < y < y'$, tem-se que

$$\bar{\nabla}^2 \phi_2 = 0 \quad (C.4)$$

cuja solução geral é da forma

$$\phi_2(x,y) = [a_2(k) \cos(kx) + b_2(k) \sin(kx)] [c_2(k) \sinh[k(y-H)] + d_2(k) \cosh[k(y-H)]] \quad (C.5)$$

Normalizando-se x e y em relação a n_x , a solução geral é escrita como sendo

$$\phi_2(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} A_2(k) \cos(kx/n_x) \{C_2(k) \sinh[k(y-H)/n_x] + D_2(k) \cosh[k(y-H)/n_x]\} dk \quad (C.6)$$

$$(H < y < y')$$

Aplicando-se a equação de Laplace à região isotrópica, $y' < y < B$, vem

$$\bar{\nabla}^2 \phi_3 = 0 \quad (C.7)$$

cuja solução geral é dada por

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, y) = & [a_3(k) \cos(kx) + b_3(k) \sin(kx)] [c_3(k) \sinh[k(B-y)] \\ & + d_3(k) \cosh[k(B-y)]] \end{aligned} \quad (C.8)$$

Considerando-se que $\Phi_3(x, B) = 0$ e normalizando-se as variáveis x e y em relação a n_x , a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} A_3(k) \cos(kx/n_x) \frac{\sinh[k(B-y)/n_x]}{\sinh[k(B-y')/n_x]} dk \quad (C.9) \\ (y' < y < B) \end{aligned}$$

Considerando-se a continuidade do potencial em:

$$\Phi_1(x, y)/y = H^- = \Phi_2(x, y)/y = H^+ \quad (C.10)$$

$$\Phi_2(x, y)/y = y'^- = \Phi_3(x, y)/y = y'^+ \quad (C.11)$$

então as constantes $A_1(k)$, $A_2(k)$, $A_3(k)$, $C_2(k)$ e $D_2(k)$ são determinadas e as equações (C.3), (C.6) e (C.9) são escritas como

$$\Phi_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos(kx/n_x) \frac{\sinh(ky/n_y)}{\sinh(kH/n_y)} dk \quad (C.12)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos(kx/n_x) \left\{ \frac{\cosh[k(y'-H)/n_x]}{\sinh[k(y'-H)/n_x]} \sinh[k(y-H)/n_x] \right. \\ \left. + \cosh[k(y-H)/n_x] \right\} dk \end{aligned} \quad (C.13)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} 2A(k) \cos(kx/n_x) \cosh[k(y'-H)/n_x] \frac{\sinh[k(B-y)/n_x]}{\sinh[k(B-y')/n_x]} dk \\ (C.14) \end{aligned}$$

Das condições de contorno aplicadas em $y = H$, vem

$$\hat{y} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = (\epsilon_{r_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \epsilon_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) \epsilon_0 = 0 \quad (C.15)$$

ou ainda,

$$\coth[k(y' - H)/n_x] = (n_x n_y / \epsilon_{r_2}) \coth(kH/n_y) \quad (C.16)$$

Usando as condições de contorno em $y = y'$, fica

$$\hat{y} \cdot (\bar{D}_2 - \bar{D}_3) = \epsilon_2 \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) \epsilon_0 = -\rho_s G_{a/2}(x) \quad (C.17)$$

com $\rho_s = q/a$, onde q representa a carga na fita elementar por unidade de comprimento na direção z e $G_{a/2}(x)$ é a função pulso, expressa por

$$G_{a/2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } |x| \leq a/2 \\ 0 & \text{para } |x| > a/2 \end{cases} \quad (C.18)$$

Das equações (C.13), (C.14), (C.16) e (C.17) tem-se que

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \epsilon_{r_2} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos(kx/n_x) (k/n_x) \cosh[k(y' - H)/n_x] (n_x n_y / \epsilon_{r_2}) \coth(kH/n_y) \\ + (\epsilon_{r_2} / n_x n_y) \tanh(kH/n_y) + 2 \coth[k(B - y')/n_x] \} dk = \rho_s G_{a/2}(x) \end{aligned} \quad (C.19)$$

Da transformada de Fourier, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(ka/2n_x)}{(ka/2n_x)} \cos(kx/n_x) dk = 2\pi n_x \left[\frac{1}{a} G_{a/2}(x) \right] \quad (C.20)$$

Assim, fazendo-se $q=1$, obtêm-se

$$A(k) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{k} \left[\frac{\sinh(kH/n_y) \sinh[k(B-y')/n_x] \sin(ka/2n_x)/(ka/2n_x)}{n_x n_y \cosh(kH/n_y) \sinh[k(B-H)/n_x] + \epsilon_{r_2} \sinh(kH/n_y) \cosh[k(B-H)/n_x]} \right] \right\} \quad (C.21)$$

Substituindo-se (C.21) em (C.12) e fazendo-se $y' = (H+t)$, a função de Green para o modelo da linha de microfita espessa, em $y = H$, é dada por

$$\Phi(x, H+t) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \frac{\cos(kx/n_x) \sinh[k(B-(H+t))/n_x] \sin(ka/2n_x)/(ka/2n_x)}{\sinh[k(B-H)/n_x] \{n_x n_y \coth(kH/n_y) + \epsilon_{r_2} \coth[k(B-H)/n_x]\}} \quad (C.22)$$

Este procedimento permite também analisar estruturas com a espessura da fita condutora t , considerada desprezível. A expressão integral da função de Green é obtida fazendo-se a espessura t tender a zero em (C.22).

Assim tem-se

$$\Phi(x, H) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \frac{\cos(kx/n_x) \sin(ka/2n_x)/(ka/2n_x)}{n_x n_y \coth(kH/n_y) + \epsilon_{r_2} \coth[k(B-H)/n_x]} \quad (C.23)$$

Para pequenos valores de t/H , determina-se a função de Green, para uma linha de microfita espessa, através da média aritmética entre $\Phi(x, H)$ e $\Phi(x, H+t)$, apresentadas em (C.22) e (C.23), respectivamente. A expressão obtida é

$$\frac{1}{2} [\Phi(x, H) + \Phi(x, H+t)] = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \cos(kx/n_x) \frac{\sinh[k(B-H)/n_x] + \sinh[k(B-(H+t))/n_x]}{\sinh[k(B-H)/n_x] \{n_x n_y \coth(kH/n_y) + \epsilon_{r_2} \coth[k(B-H)/n_x]\}} \quad (C.24)$$

APÊNDICE D

OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO SÉRIE DA FUNÇÃO
DE GREEN PARA A ANÁLISE DE LINHA DE
MICROFITA ESPESSA USANDO A TEORIA DE
RESÍDUOS - EQUAÇÃO (4.7), (4.9) e (4.11)

A função de Green na forma integral, para uma linha de microfita espessa utilizando substrato anisotrópico, é dada por

$$\Phi(x, H+t) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \frac{\cos(kx/n_x) \sinh[k(B-(H+t))/n_x] \sin(ka/2n_x)/(ka/2n_x)}{\sinh[k(B-H)/n_x] \{n_x n_y \coth(kH/n_y) + \epsilon_r \coth[k(B-H)/n_x]\}} \quad (D.1)$$

onde $n_x = (\epsilon_x)^{1/2}$, $n_y = (\epsilon_y)^{1/2}$ e "a" representa a largura da fita elementar

A equação (D.1) pode ser escrita na forma

$$\Phi(x, H+t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} [\Phi_1(x, H+t) + \Phi_2(x, H+t)] \quad (D.2)$$

sendo

$$\Phi_1(x, H+t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \frac{\sinh[k(B-(H+t))/n_x] \sin[k(a/2 + |x|)/n_x]}{(ka/2n_x) \sinh[k(B-H)/n_x] \{n_x n_y \coth(kH/n_y) + \epsilon_r \coth[k(B-H)/n_x]\}} \quad (D.3)$$

$$\Phi_2(x, H+t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \frac{\sinh[k(B-(H+t))/n_x] \sin[k(a/2 - |x|)/n_x]}{(ka/2n_x) \sinh[k(B-H)/n_x] \{n_x n_y \coth(kH/n_y) + \epsilon_r \coth[k(B-H)/n_x]\}} \quad (D.4)$$

As equações (D.3) e (D.4) são determinadas em forma de série através da utilização do método dos resíduos.

Fazendo-se $C = H/n_y$, $D = (B-H)/n_x$, $E = (B-(H+t))/n_x$,

$F = a/2n_x$, $G = x/n_x$, e considerando-se as identidades: $\sinh(z) = -j \operatorname{sen}(jz)$, $\cosh(z) = \cos jz$, $\operatorname{cossech}(z) = j \operatorname{cossec}(jz)$ e $\operatorname{coth}(z) = j \operatorname{cotg}(jz)$, a equação (D.1) é escrita como

$$\Phi(x, H+t) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \frac{\sinh(kE) \operatorname{sen}(kF) \cos(kG)}{(kF) \sinh(kD) \{n_x n_y \operatorname{coth}(kC) + \epsilon_{r_2} \operatorname{coth}(kD)\}} \quad (D.5)$$

A solução por meio da teoria dos resíduos considera a integral abaixo

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} \frac{e^{jAz} \sinh(zE)}{(zF) \sinh(zD) \{n_x n_y \operatorname{coth}(zC) + \epsilon_{r_2} \operatorname{coth}(zD)\}}, \quad A > 0 \quad (D.6)$$

onde Γ define o contorno da Fig. D.1. Neste contorno, a origem é excluída devido à singularidade existente neste ponto. O percurso escolhido contém um número infinito de polos, localizados ao longo do eixo imaginário, à medida que R tende para o infinito. Pela teoria de resíduos, a integral ao longo de um contorno fechado é igual à soma dos resíduos dos polos contidos dentro desse contorno. Assim, tem-se

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} \frac{e^{jAz} \sinh(zE)}{(zF) \sinh(zD) \{n_x n_y \operatorname{coth}(zC) + \epsilon_{r_2} \operatorname{coth}(zD)\}} \right] = j2\pi \sum_{p=1}^{\infty} Q_p \quad (D.7)$$

onde Q_p representa o resíduo associado ao polo z_p .

Ou ainda,

$$\lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} \frac{e^{jAx} \sinh(xE)}{(xF) \sinh(xD) \{n_x n_y \operatorname{coth}(xC) + \epsilon_{r_2} \operatorname{coth}(xD)\}} \right. \\ \left. + \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} \frac{e^{jAz} \sinh(zE)}{(zF) \sinh(zD) \{n_x n_y \operatorname{coth}(xC) + \epsilon_{r_2} \operatorname{coth}(zD)\}} \right]$$

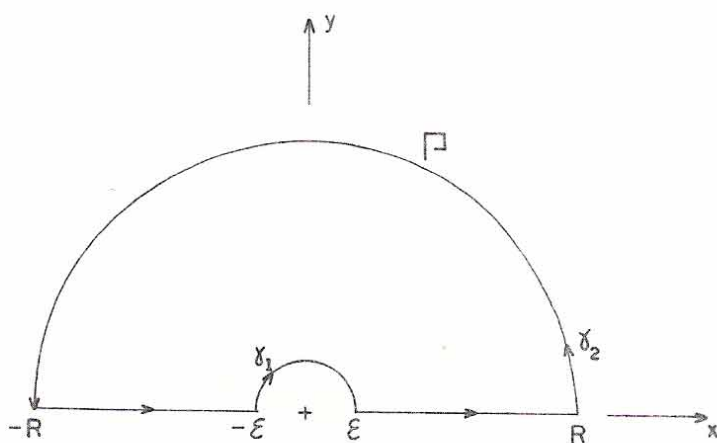


Fig. D.1 - Contorno de integração.

$$\begin{aligned}
& + \int_{\epsilon}^R \frac{dx}{x} \frac{e^{jAx} \sinh(xE)}{(xF) \sinh(xD) \{n_x n_y \coth(xC) + \epsilon_{r_2} \coth(xD)\}} \\
& + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} \frac{e^{jAz} \sinh(zE)}{(zF) \sinh(zD) \{n_x n_y \coth(zC) + \epsilon_{r_2} \coth(zD)\}}] = j 2\pi \sum_{p=1}^{\infty} Q_p
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Para valores reais de z a equação

$$n_x n_y \coth(zC) + \epsilon_{r_2} \coth(zD) = 0 \tag{D.9}$$

não apresenta solução. Fazendo-se $z = jr_{p_1}$, onde r_{p_1} é um valor real e considerando-se que

$$\coth(z) = j \cotg(jz) \tag{D.10}$$

então, os polos do integrando correspondentes à equação (D.9) são tais que

$$\frac{\cotg(r_{p_1} C)}{\cotg(r_{p_1} D)} = - \frac{\epsilon_{r_2}}{n_x n_y} \text{ com } p = 1, 2, \dots \tag{D.11}$$

As raízes para o ar são determinadas fazendo-se $\epsilon_{r_2} = 1$, em (D.11)

Para valores reais de z a equação

$$\sinh(zD) = -j \sen(jzD) = 0 \tag{D.12}$$

não apresenta solução. Os polos correspondentes à equação (D.12) são obtidos fazendo-se $z = jr_{p_2}$ onde r_{p_2} é real, tal que

$$Dr_{p_2} = (p - 1)\pi \text{ com } p = 1, 2, \dots \tag{D.13}$$

O cálculo dos resíduos associados aos polos z_p é efetuado, observando-se que

$$Q_p = \lim_{z \rightarrow z_p} (z - z_p) f(z) \tag{D.14}$$

onde

$$f(z) = \frac{e^{jAz} \sinh(zE)}{(z^2 F) \sinh(zD) \{n_x n_y \coth(zC) + \epsilon_{r_2} \coth(zD)\}} \quad (D.15)$$

ou, equivalentemente,

$$f(z) = \frac{e^{jAz} \sinh(zE)}{(z^2 F) \sinh(zD) j \{n_x n_y \coth(zD) + \epsilon_{r_2} \coth(zD)\}} \quad (D.16)$$

Fazendo-se $z = jr_{p_1}$ em (D.14), vem

$$\lim_{z \rightarrow jr_{p_1}} \frac{e^{jAz}}{z^2 F} \frac{\sinh(zE)}{\sinh(zD)} \lim_{z \rightarrow jr_{p_1}} \frac{z - z_{p_1}}{j \{n_x n_y \cotg(jzC) + \epsilon_{r_2} \cotg(jzD)\}} = \frac{0}{0}$$

(indeterminação)

(D.17)

daí, faz-se necessário o uso da regra de l'Hôpital.

Definindo-se

$$N(z) = z - z_{p_1} \quad (D.18)$$

$$D(z) = j \{n_x n_y \cotg(jzC) + \epsilon_{r_2} \cotg(jzD)\} \quad (D.19)$$

tem-se que

$$\frac{dN(z)}{dz} = 1 \quad (D.20)$$

$$\frac{dD(z)}{dz} = n_x n_y C \operatorname{cosec}^2(jzC) + \epsilon_{r_2} D \operatorname{cosec}^2(jzD) \quad (D.21)$$

Portanto,

$$\lim_{z \rightarrow jr_{p_1}} \frac{z - z_{p_1}}{j \{n_x n_y \cotg(jzC) + \epsilon_{r_2} \cotg(jzD)\}} = \frac{1}{\{n_x n_y C \operatorname{cosec}^2(-r_{p_1} C) + \epsilon_{r_2} D \operatorname{cosec}^2(-r_{p_1} D)\}} \quad (D.22)$$

O cálculo dos resíduos associado a Q_{p_1} resulta em

$$Q_{p_1} = \lim_{z \rightarrow jr_{p_1}} (z - z_{p_1}) f(z) = \frac{e^{-Ar_{p_1}} \operatorname{sen}(rp_1 E)}{-(r_{p_1}^2 F) \operatorname{sen}(r_{p_1} D) \{n_x n_y \operatorname{Ccossec}^2(-r_{p_1} C) + \epsilon_{r_2} D \operatorname{cossec}^2(-r_{p_1} D)\}} \quad (\text{D.23})$$

Substituindo-se (D.13) em (D.14), obtêm-se

$$Q_{p_2} = \lim_{z \rightarrow jr_{p_2}} \frac{-e^{jAz} \operatorname{sen}(jzD)}{(z^2 F) \{n_x n_y \operatorname{cotg}(jzC) + \epsilon_{r_2} \operatorname{cotg}(jzD)\}} \lim_{z \rightarrow jr_{p_2}} \frac{z - z_{p_2}}{-j \operatorname{sen}(jzD)} = \frac{0}{0} \quad (\text{indeterminação}) \quad (\text{D.24})$$

Definindo-se,

$$N(z) = z - z_{p_2} \quad (\text{D.25})$$

$$D(z) = -j \operatorname{sen}(jzD) \quad (\text{D.26})$$

e aplicando-se l'Hôpital, obtêm-se

$$\frac{dN(z)}{dz} = 1 \quad (\text{D.27})$$

$$\frac{dD(z)}{dz} = D \cos(jzD) \quad (\text{D.28})$$

ou então,

$$\lim_{z \rightarrow jr_{p_2}} \frac{z - z_{p_2}}{-j \operatorname{sen}(jzD)} = \frac{1}{D \cos(-r_{p_2} D)} \quad (\text{D.29})$$

Determinando-se Q_{p_2} pela substituição de (D.29) em (D.24), obtêm-se

$$Q_{p_2} = 0 \quad \text{onde } r_{p_2} = (p-1) \frac{\pi}{D} \quad \text{com } p = 1, 2, \dots \quad (\text{D.30})$$

Então,

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} \frac{e^{jAz} \operatorname{senh}(zE)}{(zF) \operatorname{senh}(zD) \{n_x n_y \operatorname{coth}(zC) + \epsilon_{r_2} \operatorname{coth}(zD)\}} = j2\pi \sum_{p=1}^{\infty} Q_{p_1}$$

$$= j2\pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-Ar_{p1}} \operatorname{sen}(r_{p1} E)}{-r_{p1}^2 F \operatorname{sen}(r_{p1} D) \{n_x n_y C \operatorname{cosec}^2(-r_{p1} C) + \varepsilon_{r_2} D \operatorname{cosec}^2(-r_{p1} D)\}} \quad (\text{D.31})$$

O primeiro termo de (D.8) pode ser simplificado considerando-se que

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} \frac{e^{jAx} \operatorname{senh}(xE)}{(xF) \operatorname{senh}(xD) \{n_x n_y \operatorname{coth}(xC) + \varepsilon_{r_2} \operatorname{coth}(xD)\}} = -\int_{\varepsilon}^R \frac{dx}{x} \frac{e^{-jAx} \operatorname{senh}(xE)}{(xF) \operatorname{senh}(xD) \{n_x n_y \operatorname{coth}(xC) + \varepsilon_{r_2} \operatorname{coth}(xD)\}} \quad (\text{D.32})$$

Tem-se, assim, que

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} \frac{e^{jAx} \operatorname{senh}(xE)}{(xF) \operatorname{senh}(xD) \{n_x n_y \operatorname{coth}(xC) + \varepsilon_{r_2} \operatorname{coth}(xD)\}} \\ & + \int_{\varepsilon}^R \frac{dx}{x} \frac{e^{-jAx} \operatorname{senh}(xE)}{(xF) \operatorname{senh}(xD) \{n_x n_y \operatorname{coth}(xC) + \varepsilon_{r_2} \operatorname{coth}(xD)\}} \\ & = j2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{\operatorname{sen}(Ax) \operatorname{senh}(xE)}{(xF) \operatorname{senh}(xD) \{n_x n_y \operatorname{coth}(xC) + \varepsilon_{r_2} \operatorname{coth}(xD)\}} \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

conforme a Fig. D.1.

De (D.8), tem-se também que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} \frac{e^{jAz} \operatorname{senh}(zE)}{(zF) \operatorname{senh}(zD) \{n_x n_y \operatorname{coth}(zC) + \varepsilon_{r_2} \operatorname{coth}(zD)\}} = 0 \quad (\text{D.34})$$

pelo teorema fundamental do cálculo de integrais de funções complexas através do método dos resíduos.

Para o cálculo em (D.8) do valor da integral de $f(z)$ em γ_1 , conforme a Fig. D.1, considera-se $z = \epsilon e^{j\theta}$. Logo, $dz = j\epsilon d\theta$ e supondo-se $\epsilon \rightarrow 0$, fica:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} \frac{e^{jAz} \sinh(zE)}{(zF) \sinh(zD) \{n_x n_y \coth(zC) + \epsilon_{r_2} \coth(zD)\}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{e^{jA\epsilon e^{j\theta}} \sinh(\epsilon E e^{j\theta}) j d\theta}{\epsilon F e^{j\theta} \sinh(\epsilon D e^{j\theta}) \{n_x n_y \coth(\epsilon C e^{j\theta}) + \epsilon_{r_2} \coth(\epsilon D e^{j\theta})\}} \\ &= \int_{\pi}^0 \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{jA\epsilon e^{j\theta}}}{F e^{j\theta}} \right] \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(j\epsilon E e^{j\theta})}{\epsilon \text{sen}(j\epsilon D e^{j\theta}) n_x n_y \cotg(j\epsilon C e^{j\theta}) + \epsilon_{r_2} \cotg(j\epsilon D e^{j\theta})} \right] d\theta \\ &= \int_{\pi}^0 \frac{1}{F e^{j\theta}} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(j\epsilon E e^{j\theta})}{\epsilon} \right] \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(\text{sen} j\epsilon D e^{j\theta}) \{n_x n_y \cotg(j\epsilon C e^{j\theta}) + \epsilon_{r_2} \cotg(j\epsilon D e^{j\theta})\}} \right] d\theta \end{aligned} \quad (D.35)$$

Mas,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(j\epsilon E e^{j\theta})}{\epsilon} = \frac{0}{0} \quad (\text{indeterminação}). \quad (D.36)$$

Usando-se l'Hôpital, vem

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(j\epsilon E e^{j\theta})}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} jE e^{j\theta} \cos(j\epsilon E e^{j\theta}) = jE e^{j\theta} \quad (D.37)$$

Tem-se ainda que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(\text{sen} j\epsilon D e^{j\theta}) \{n_x n_y \cotg(j\epsilon C e^{j\theta}) + \epsilon_{r_2} \cotg(j\epsilon D e^{j\theta})\}}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(j\epsilon C e^{j\theta})}{n_x n_y \cos(j\epsilon C e^{j\theta}) \text{sen}(j\epsilon D e^{j\theta}) + \epsilon r_2 \cos(j\epsilon D e^{j\theta}) \text{sen}(j\epsilon C e^{j\theta})} = \frac{0}{0}$$

(indeterminação) (D.38)

Usando-se l'Hôpital, obtêm-se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(\text{sen} j\epsilon D e^{j\theta}) \{n_x n_y \cotg(j\epsilon C e^{j\theta}) + \epsilon r_2 \cotg(j\epsilon D e^{j\theta})\}} = \frac{C}{n_x n_y D + \epsilon r_2 C}$$

(D.39)

Considerando-se (D.37) e (D.39), a equação (D.35) tem como resultado

$$\int_{\pi}^0 \left(\frac{1}{F e^{j\theta}} \right) (j E e^{j\theta}) \left(\frac{C}{n_x n_y D + \epsilon r_2 C} \right) d\theta = -j \frac{\pi}{2} \frac{2CE}{F(n_x n_y D + \epsilon r_2 C)} \quad (D.40)$$

Considerando-se (D.7), (D.8), (D.31), (D.33) e (D.40), obtêm-se

$$j 2\pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-Ar_{p1}} \text{sen}(r_{p1} E)}{-r_{p1}^2 F \text{sen}(r_{p1} D)} \frac{1}{\{n_x n_y C \text{cossec}^2(-r_{p1} C) + \epsilon r_2 D \text{cossec}^2(-r_{p1} D)\}}$$

$$= -j \frac{\pi}{2} \frac{2CE}{F(n_x n_y D + \epsilon r_2 C)} + j 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{\text{sen}(Ax) \text{senh}(xE)}{(xF) \text{senh}(xD) \{n_x n_y \coth(xC) + \epsilon r_2 \coth(xD)\}}$$

(D.41)

Por conseguinte,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{\text{sen}(Ax) \text{senh}(xE)}{(xF) \text{senh}(xD) \{n_x n_y \coth(xC) + \epsilon r_2 \coth(xD)\}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{2CE}{F(n_x n_y D + \epsilon_{r_2} C)} - 2\pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-Ar_{p1}} \text{sen}(r_{p1} E)}{r_{p1}^2 F \text{sen}(r_{p1} D) \{n_x n_y C \text{cossec}^2(r_{p1} C) + \epsilon_{r_2} D \text{cossec}^2(r_{p1} D)\}} \quad (\text{D.42})$$

Substituindo-se (D.42) em (D.3) e (D.4) vem, respectivamente

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, H+t) &= \frac{\pi}{2} \frac{2H}{n_y} \frac{[B-(H+t)]}{n_x} \cdot \frac{1}{(a/2n_x) [n_x n_y (B-H)/n_x + \epsilon_{r_2} H/n_y]} \\ &- 2\pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\exp[-(|x| + a/2)r_{p1}/n_x] \text{sen}[r_{p1} (B-(H+t))/n_x]}{r_{p1}^2 (a/2n_x) \text{sen}[r_{p1} (B-H)/n_x] \{n_x n_y C \text{cossec}^2(r_{p1} H/n_y) + \epsilon_{r_2} D \text{cossec}^2[r_{p1} (B-H)/n_x]\}} \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, H+t) &= -\frac{\pi}{2} \frac{2H}{n_y} \frac{[B-(H+t)]}{n_x} \cdot \frac{1}{(a/2n_x) [n_x n_y (B-H)/n_x + \epsilon_{r_2} H/n_y]} \\ &+ 2\pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\exp[-(|x| - a/2)r_{p1}/n_x] \text{sen}[r_{p1} (B-(H+t))/n_x]}{r_{p1}^2 (a/2n_x) \text{sen}[r_{p1} (B-H)/n_x] \{n_x n_y C \text{cossec}^2(r_{p1} H/n_y) + \epsilon_{r_2} D \text{cossec}^2[r_{p1} (B-H)/n_x]\}} \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

De (D.43), (D.44) e (D.2), vem

$$\begin{aligned} \Phi(x, H+t) &= \\ &\frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[r_{p1} (B-(H+t))/n_x] \{ \exp[-(|x| - a/2)r_{p1}/n_x] - \exp[-(|x| + a/2)r_{p1}/n_x] \}}{r_{p1}^2 (a/2n_x) \text{sen}[r_{p1} (B-H)/n_x] \{n_x n_y C \text{cossec}^2(r_{p1} H/n_y) + \epsilon_{r_2} D \text{cossec}^2[r_{p1} (B-H)/n_x]\}} \\ &\text{para } |x| \geq a/2 \quad (\text{D.45}) \end{aligned}$$

$$\Phi(x, H+t) = \frac{1}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{n_x}{n_y} \left(\frac{2H}{a} \right) \frac{[(B-(H+t))/n_x]}{[n_x n_y ((B-H)/n_x) + \epsilon_{r_2} H/n_y]} \right.$$

$$\left. - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[r_{p1} (B-(H+t))/n_x] \{ \exp[-(a/2 + |x|) r_{p1}/n_x] + \exp[-(a/2 - |x|) r_{p1}/n_x] \}}{r_{p1}^2 (a/2n_x) \text{sen}[r_{p1} (B-H)/n_x] \{ n_x n_y C \text{cossec}^2(r_{p1} H/n_y) + \epsilon_{r_2} D \text{cossec}^2[r_{p1} (B-H)/n_x] \}} \right\}$$

para $|x| \leq a/2$ (D.46)

E para $x = 0$, tem-se

$$\Phi(0, H+t) = \frac{1}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{n_x}{n_y} \left(\frac{2H}{a} \right) \frac{[(B-(H+t))/n_x]}{[n_x n_y ((B-H)/n_x) + \epsilon_{r_2} H/n_y]} \right.$$

$$\left. - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[r_{p1} (B-(H+t))/n_x] \{ \exp[-(a/2) r_{p1}/n_x] \}}{r_{p1}^2 (a/2n_x) \text{sen}[r_{p1} (B-H)/n_x] \{ n_x n_y C \text{cossec}^2(r_{p1} H/n_y) + \epsilon_{r_2} D \text{cossec}^2[r_{p1} (B-H)/n_x] \}} \right\}$$

(D.47)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] WHEELER, H.A., "Transmission line properties of a strip on a dielectric sheet on a plane". IEEE Trans., Vol. MTT-25, pp. 631-647, Agosto 1977.
- [2] STINEHELPER, H.E., "An accurate calculation of uniform microstrip transmission lines". IEEE Trans., Vol. MTT - 16, pp. 439-444, Julho 1968.
- [3] YAMASHITA, E. e MITTRA, R., "Variational method for the analysis of microstrip lines". IEEE Trans., Vol. MTT-16, pp. 251-256, Abril 1968.
- [4] BRYANT, T.G. e WEISS, J.A., "Parameters of microstrip transmission lines and of coupled pairs of microstrip lines". IEEE Trans., Vol. MTT-16, pp. 1021-1027, Dezembro 1968.
- [5] GUPTA, K.C., GARG, R. e BAHL, I.J., Microstrip lines and slotlines. Dedham, MA. Artech House, 1979.
- [6] EDWARDS, T.C., Foundations for microstrip circuit design. John Wiley & Sons, 1981.
- [7] GUPTA, K.C., GARG, R. e CHADHA, R., Computer-aided design of microwave circuits. Dedham, MA. Artech House, 1981.
- [8] FARRAR, A. e ADAMS, A.T., Method of moments applications. Vol VI. Matrix methods for static microstrip. RADC - TR - 73 - 217, Fevereiro 1975.
- [9] FARRAR, A., Fourier integral methods for static and dynamic problems in microstrip. Tese de Doutorado, Syracuse University, Siracusa, Agosto 1975.
- [10] FARRAR, A. e ADAMS, A.T., "Characteristic impedance of microstrip by the method of moments". IEEE Trans., Vol. MTT-18, pp. 65-66, Janeiro 1970.
- [11] WEISS, J.A. e BRYANT, T.G., "Dielectric Green's function for parameters of microstrip". Electron. Lett., Vol. 6, No. 15, pp. 462-463, Julho 1970. Também Erratum, ibid., pp. 560.

- [12] BRYANT, T.G. e WEISS, J.A., "MSTRIP (parameters of microstrip), computer program description". IEEE Trans., Vol. MTT-19, pp. 418-419, Abril 1971.
- [13] BAHL, I.J., STUCHLY, S.S. e STUCHLY, M.A., "A new microstrip radiator for medical applications". IEEE Trans., Vol. MTT-28, pp. 1464-1468, Dezembro 1980.
- [14] BAHL, I.J. e STUCHLY, S.S., "Analysis of a microstrip covered with a lossy dielectric". IEEE Trans., Vol. 28, pp. 104-109, Fevereiro 1980.
- [15] PRAMANICK, P. e BHARTIA, P., "Closed-form equations for suspended microstrip circuit on quartz substrate". Microwave Journal, pp. 157-160, Agosto 1984.
- [16] DAS, B.N. e PRASAD, K.V.S.V.R., "A generalized formulation of electromagnetically coupled striplines". IEEE Trans., Vol. MTT-32, pp. 1427-1433, Novembro 1984.
- [17] JANSEN, R.H., "High-speed computation of single and coupled microstrip parameters including dispersion, high-order modes, loss and finite strip thickness". IEEE Trans., Vol. MTT-26, pp. 75-82, Fevereiro 1982.
- [18] HORNO, M., "Calculation of quasi-static characteristics of microstrip on an anisotropic substrate using mapping method". IEEE/MTT-S International Microwave Symposium Digest, Washington, D.C., pp. 450-452, Maio 1980.
- [19] D'ASSUNÇÃO, A.G., Análise de microlinhas de transmissão em estruturas homo/heterogêneas sobre substratos iso/anisotrópicos. Tese de Doutorado, FEC/UNICAMP, Campinas, Dez. 1981.
- [20] ALEXOPOULOS, N.G. e MAAS, S.A., "Characteristics of microstrip directional couplers on anisotropic substrates". IEEE Trans., Vol. MTT-30, pp. 1267-1270, Agosto 1982.
- [21] ALEXOPOULOS, N.G. e UZUNOGLU, N.K., "An efficient computation of thick microstrip properties on anisotropic substrates". J. Franklin Inst., Vol. 306, No. 1, pp. 9-22, Julho 1978.

- [22] ALEXOPOULOS, N.G. e MAAS, S.A., "Performance of microstrip couplers on an anisotropic substrate with an isotropic superstrate". IEEE Trans., Vol. MTT-31, pp. 671-674, Agosto 1983.
- [23] D'ASSUNÇÃO, A.G., GIAROLA, A.J. e ROGERS, D.A., "Analysis of single and coupled striplines with anisotropic substrates". IEEE/MTT-S International Microwave Symposium Digest, Los Angeles, California, pp. 83-85, Junho 1981.
- [24] D'ASSUNÇÃO, A.G., DÓRIA NETO, A.D. e GIAROLA, A.J., "Analysis of single and coupled microstrip lines on arbitrary anisotropic substrates". IEEE/EMC-S International Symposium on Electromagnetic Compatibility. Tóquio, Japão, Vol. 1, pp. 499-503, Outubro 1984.
- [25] KOUL, S.K. e BHAT, B., "Inverted microstrip and suspended microstrip with anisotropic substrates". Proc. IEEE, Vol. 70, pp. 1230-1231, Outubro 1982.
- [26] ALBUQUERQUE, M.R.M.L., D'ASSUNÇÃO, A.G. e GIAROLA, A.J., "Análise de linhas de microfita suspensas com substratos anisotrópicos". Anais do I Simpósio Internacional em Tecnologia de Microondas, Campinas-BR, jul/85 (aceito p/publicação).
- [27] HORNO, M., "Quasi-static characteristics of covered coupled microstrip on anisotropic substrates: spectral and variational analysis". IEEE Trans., Vol. MTT-30, pp. 1888-1892, Novembro 1982.
- [28] HORNO, M. e MARQUÉS, R., "Coupled microstrip on double anisotropic layers". IEEE Trans., Vol. MTT-32, pp. 467-470, Abril 1984.
- [29] HARRINGTON, R.F., Fiel computation by moment methods. Macmillan Co., New York, 1968.
- [30] IBM Application Program H20-0205-3, System/360 Scientific Subroutine Package (360A - CM - 03X), Version III, Programmer's Manual, 1968.
- [31] ALBUQUERQUE, M.R.M.L. e D'ASSUNÇÃO, A.G., "Programas computacionais para a análise de linhas de fita não-homogêneas com camadas dielétricas anisotrópicas". Relatório técnico Nº 01/85, PPGEE/CT/UFRN, Abril 1985.