

25  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**ONDAS DE SPIN EM SUPER-REDES FERROMAGNÉTICAS  
COM CAMPO DE ANISOTROPIA.**

*Dory Hélio Aires de Lima Anselmo.*

Tese apresentada à Universidade  
Federal do Rio Grande do Norte  
como requisito parcial à obtenção  
do grau de Mestre em Física.

Natal, Junho de 1995.

*“Poderá existir tempos melhores, mas este é o NOSSO tempo.”*

*Sartre.*

## AGRADECIMENTOS

Ao *Prof. Eudenilson Lins de Albuquerque*, pela sua orientação segura e caráter idôneo, que me ajudaram a transpor todas as dificuldades no meio desta jornada, meus sinceros agradecimentos.

Aos *Profs. Artur da Silva Carriço e Ezequiel Silva de Souza*, pela amizade e atenção que me dispensaram durante os últimos anos da minha formação.

A *todos os Professores* que contribuíram para a minha formação profissional.

A *todos os colegas* do curso, pela agradável convivência no Departamento de Física, em especial a *Ana Lúcia Dantas, João Medeiros de Araújo, Vamberto Dias de Melo, Manoel Silva de Vasconcelos, Umberto Laino Fulco e Selma Rozane Vieira* pelos quais tenho um carinho especial.

A *todos os funcionários* do DFTE.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Apresentamos o espectro teórico das ondas de spin em uma super-rede onde ambos os materiais são ferromagnetos de Heisenberg. Consideraremos o caso geral em que eles podem apresentar as componentes uniaxial e não-uniaxial do campo de anisotropia, enfatizando a contribuição dos modos de superfície, bem como os de volume.

Uma componente não-uniaxial ("easy plane") da anisotropia existe em muitos materiais, tais como o ferromagneto  $\text{CrBr}_3$  e o antiferromagneto  $\text{NiO}$ . Em certos casos a anisotropia pode ser não-uniaxial somente na superfície (por exemplo, em filmes monocristalinos de Fe). Nossa teoria engloba todos estes casos.

Nossos cálculos são feitos para o regime de troca ("exchange") usando o Hamiltoniano de Heisenberg para descrever o sistema. Usamos o formalismo da matriz transferência para simplificar a álgebra, que de outra forma seria mais complexa. Resultados numéricos mostram que os efeitos não-uniaxiais são mais fortes para pequenos  $k_x a$ , onde  $k_x$  é o vetor de onda planar e  $a$  é o parâmetro de rede. Também verificamos a existência de "gaps" de frequência onde não existem modos de volume. A localização e largura destes gaps são influenciados pela anisotropia não-uniaxial. Um caso especial de super-rede feita de um material uniaxial suportado por um não-uniaxial é também considerado com detalhes, com seu espectro de ondas de spin apresentado e discutido.

Acreditamos que com o recente desenvolvimento de super-redes magnéticas de boa qualidade, possa ser possível provar-se experimentalmente o espectro das ondas de spin nestas estruturas, a fim de testar nossas previsões teóricas. Além disso, se os constituintes da super-rede são feitos de materiais magnéticos isolantes ou semicondutores, a grande vetores de onda da excitação os efeitos de troca são dominantes e o sistema pode ser melhor descrito usando-se o modelo de Heisenberg, empregado neste trabalho.

## ABSTRACT

We present a theoretical spin wave spectrum in a superlattice made up of two Heisenberg ferromagnet. We consider the general case in which both materials may present uniaxial and nonuniaxial components of the single-ion anisotropy, stressing the contribution of the surface as well as the bulk modes.

A nonuniaxial ("easy plane") component to the anisotropy exists in many materials, such as in the ferromagnet  $\text{CrBr}_3$  and in the antiferromagnet  $\text{NiO}$ . In certain cases the anisotropy may be nonuniaxial only at surface (e.g., in the single-crystal Fe films). Our theory encompass all these cases.

Our calculations are carried out for the exchange-dominated regime by using a Heisenberg Hamiltonian to describe the system. A transfer-matrix approach is used to simplify the algebra, which otherwise can be quite heavy. Numerical results show that the nonuniaxial effects are stronger for small  $k_x a$ ,  $k_x$  being the in-plane wavevector while  $a$  is the lattice parameter. Also, there are frequency gaps where there are no bulk modes. The locations and widths of these gaps are influenced by the nonuniaxial anisotropy. A special case of a superlattice made up of a uniaxial material supported by a non-uniaxial one is also considered with details, with its spin-wave spectrum presented and discussed.

We believe that with the recent development of good quality magnetic superlattices, it can be possible to probe experimentally the spin-wave spectra in these structures in order to test our theoretical predictions. Furthermore, if the superlattice constituents are made up of magnetic insulators or magnetic semiconductors, at larger excitation wavevectors, where exchange effects are dominant, the system can be better described by using the Heisenberg model employed in this work.

# SUMÁRIO

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. Introdução.....</b>                                    | <b>1</b> |
| <b>2. Introdução às Ondas de Spin</b>                        |          |
| 2.1 Introdução.....  | 4        |
| 2.2 Regime de <i>EXCHANGE</i> .....                          | 8        |
| 2.3 A transformação de <i>Holstein-Primakoff</i> .....       | 13       |
| 2.4 Magnons de volume (aproximação <i>RPA</i> ).....         | 19       |
| 2.5 Magnons de superfície.....                               | 24       |
| 2.6 Conclusões.....  | 30       |
| <b>3. Super-rede Ferromagnética Sem Campo de Anisotropia</b> |          |
| 3.1 Introdução.....  | 31       |
| 3.2 O método da matriz transferência.....                    | 33       |
| 3.3 Relação de dispersão: modos de volume.....               | 40       |
| 3.4 Modos de superfície.....                                 | 43       |
| 3.4.1 Modelo sem relaxação.....                              | 45       |
| 3.4.2 Modelo com relaxação.....                              | 48       |
| 3.5 Resultados numéricos e conclusões.....                   | 52       |
| 3.5.1 Modos de volume.....                                   | 52       |
| 3.5.2 Modos de superfície.....                               | 63       |
| <b>4. Super-rede Ferromagnética Com Campo de Anisotropia</b> |          |
| 4.1 Introdução.....  | 69       |
| 4.2 Modelo teórico.....                                      | 70       |
| 4.2.1 Modos de volume.....                                   | 71       |
| 4.2.2 Modos de superfície.....                               | 79       |
| 4.2.2.1 Caso sem relaxação.....                              | 79       |
| 4.2.2.2 Caso com relaxação.....                              | 84       |
| 4.3 Caso particular: sistema uniaxial—não-uniaxial.....      | 86       |
| 4.3.1 Modos de volume.....                                   | 86       |

|  |     |
|--|-----|
| 4.3.2 Modos de superfície.....             | 89  |
| 4.4 Resultados numéricos e conclusões..... | 91  |
| 4.4.1 Modos de volume.....                 | 91  |
| 4.4.2 Sistema uniaxial—não-uniaxial.....   | 97  |
| 5. Conclusões.....                         | 101 |
| Referências Bibliográficas.....            | 104 |

# 1

## *Introdução*

---

O estado fundamental de um cristal ferromagnético pode ser excitado de tal maneira que a densidade local do spin eletrônico efetua movimento de rotação em torno da direção de equilíbrio da magnetização; os modos normais desta rotação são chamados de ondas de spin.

O estudo das ondas de spin na Física de sistemas ferromagnéticos é importante em vários aspectos, por exemplo :

a) Elas são responsáveis pelo termo  $T^{3/2}$  devido à expansão para baixas temperaturas do desvio da magnetização espontânea da saturação;

b) Elas contribuem para o calor específico dos sólidos com um termo que vai como  $T^{3/2}$  (quando  $T \rightarrow 0$ );

c) Em alguns materiais (tais como o ferro e suas ligas), elas desempenham um papel importante na determinação da temperatura de Curie.

As ondas de spin podem ser excitadas por nêutrons e são, conseqüentemente, observadas por técnicas de espalhamento de nêutrons. São também excitações coletivas correspondentes às oscilações dos momentos magnéticos que se propagam no sólido, onde o seu grau de correlação é devido à interação elétron-elétron dentro do cristal. O fato do acoplamento spin-órbita ser normalmente desprezado significa que a energia de uma onda de spin com comprimento de onda infinito é zero. Com efeito, a energia de uma onda de spin com comprimento de onda finito é proporcional ao

---



quadrado do seu vetor de onda  $\vec{q}$ , i.é, no limite em que  $|\vec{q}| \rightarrow 0$ , a energia da onda de spin  $\hbar\omega_q \rightarrow Dq^2$ . Aqui a constante  $D$  é diretamente relacionada com o inverso da susceptibilidade transversal estática, e é portanto uma propriedade intrínseca do ferromagnetismo.

Com o sucesso da teoria de Bloch [1] para explicar a propagação das ondas de spin em sólidos, muitos trabalhos teóricos e experimentais foram realizados e, com efeito, no final dos anos 60 tinha-se chegado a um razoável entendimento nesta área.

O início da década de 70 foi surpreendido com o surgimento de estruturas artificiais tipo super-redes, que são estruturas compostas de camadas alternadas de diferentes materiais (veja a ref. 2 para uma revisão). Embora inicialmente as super-redes tivessem sido construídas para estudar-se poços quânticos e estruturas eletrônicas, nos anos 80 um interesse considerável foi também despertado para o estudo das propriedades de micro-estruturas magnéticas de multi-camadas, também chamadas de super-redes magnéticas (veja a ref. 3 para uma revisão). Muito deste interesse foi direcionado para o estudo das ondas de spin a baixas temperaturas, onde pelo menos um dos componentes da super-rede é um material ferromagnético.

O comportamento das ondas de spin em cristais depende, entre outras coisas, da importância relativa da interação de troca ("exchange"). Para vetores de onda da excitação pequenos, os efeitos dipolares são predominantes. Por outro lado, para vetores de onda tipicamente maiores ou iguais a  $10^8 \text{ m}^{-1}$  (em ferromagnetos) os efeitos de "exchange" são dominantes.

Neste trabalho, nós estudamos a propagação das ondas de spin no regime de "exchange" em super-redes magnéticas, formadas por dois materiais ferromagnéticos distintos. A interação entre eles é também ferromagnética. Ambos os modos de volume e de superfície são considerados. Consideramos também o campo de anisotropia com contribuição uniaxial (ou "easy-axis") e não-uniaxial (ou "easy-plane").

A anisotropia não-uniaxial existe em muitos materiais magnéticos (por exemplo no ferromagneto  $\text{CrBr}_3$  e no anti-ferromagneto  $\text{NiO}$ ) e pode ser diferente na superfície (ou interface) devido ao fato do campo cristalino ser diferente.

O método de cálculo utilizado está baseado no Hamiltoniano de Heisenberg. Utilizamos também a técnica de matriz transferência para simplificar a álgebra. Este trabalho está organizado da seguinte maneira : no capítulo 2 apresentamos uma introdução à teoria geral de ondas de spin em um ferromagneto. Esta teoria será amplamente utilizada nos capítulos posteriores. No capítulo 3 estudamos a propagação das ondas de spin (modos de volume e superfície) para o caso em que o campo de anisotropia está ausente. Este capítulo é uma extensão da ref. 4, onde apenas os modos de volume são estudados. O capítulo 4 é devotado ao estudo das ondas de spin em super-redes com campo de anisotropia. Apresentamos um tratamento geral para o problema, incluindo os modos de superfície, e tendo como casos particulares os tratados na ref. 5. As conclusões do trabalho estão no capítulo 5.

# 2

## *Introdução às Ondas de Spin*

---

### *2.1 Introdução*

Existem na natureza diversas formas de ordenamento magnético, resultantes dos diferentes tipos de estruturas cristalinas e principalmente dos momentos magnéticos não-nulos dos átomos individuais. Dentre estes estados magneticamente ordenados, podemos destacar os *ferromagnetos*, que são materiais que apresentam, quando abaixo de uma certa temperatura crítica  $T_c$  uma magnetização espontânea mesmo na ausência de um campo magnético externo aplicado. Estritamente falando, o termo "ferromagneto" é frequentemente reservado àquelas estruturas nas quais todos os momentos magnéticos locais têm uma componente positiva ao longo da direção da magnetização espontânea, magnetização esta que é revelada claramente pelo campo magnético macroscópico resultante [6,7]. Exemplos de ordenação magnética são dados na figura 2.1, onde as setas indicam os momentos magnéticos locais.

Quando a temperatura se aproxima do valor  $T_c$  (que depende do material), observa-se que a susceptibilidade (definida por  $\chi = \frac{\partial M}{\partial H}$ ) e a magnetização se tornam proporcionais a  $(T - T_c)^{-\gamma}$  e  $(T_c - T)^\beta$ , respectivamente. Aqui,  $\gamma$  e  $\beta$  são denominados de *expoentes críticos*. Valores típicos de  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $T_c$  para ferromagnetos são dados na tabela 2.1, juntamente com a magnetização de saturação  $M_0$  (valor máximo da magnetização em um material ferri- ou ferromagnético).

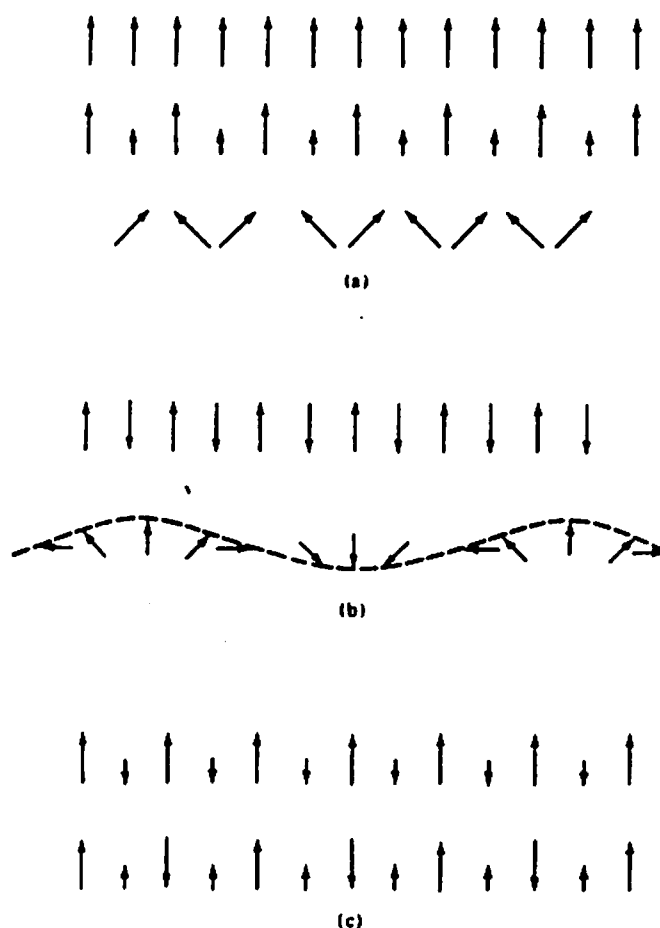


Fig. 2.1. Arranjo linear de spins ilustrando possíveis ordenamentos (a) ferromagnético, (b) antiferromagnético, (c) ferrimagnético.

Tabela 2.1 Ferromagnetos selecionados com temperatura crítica  $T_c$  e magnetização  $M_0$ .

| Material          | $\gamma$         | $\beta$           | $T_c(K)$ | $M_0(\text{Gauss})^a$ |
|-------------------|------------------|-------------------|----------|-----------------------|
| Fe                | $1.33 \pm 0.015$ | $0.34 \pm 0.04$   | 1043     | 1752                  |
| Co                | $1.21 \pm 0.04$  | —                 | 1388     | 1446                  |
| Ni                | $1.35 \pm 0.02$  | $0.42 \pm 0.04$   | 627.2    | 510                   |
| Gd                | $1.3 \pm 0.1$    | —                 | 292.5    | 1980                  |
| CrBr <sub>3</sub> | $1.215 \pm 0.02$ | $0.368 \pm 0.005$ | 32.56    | 270                   |

<sup>a</sup> A  $T=0^\circ \text{K}$

Um sistema cristalino, magnético ou não, pode apresentar excitações coletivas [8] a partir do seu estado fundamental. Uma das maneiras de excitá-lo é, por exemplo, através de um campo magnético externo aplicado. Exemplos de excitações coletivas são os *fonons*, *polaritons* e *magnons*.

Magnons, ou ondas de spin, são as excitações mais elementares que existem em sistemas de spins acoplados. Pode-se demonstrar [9,10] que a única condição necessária para a existência de magnons é que os spins que ocupam os sítios da rede sejam interagentes. Dessa maneira, os magnons são encontrados em vários tipos de sistemas magnéticos (tais como ferromagnetos, ferrimagnetos e antiferromagnetos), em isolantes, semicondutores ou metais, e na forma cristalina ou amorfa. O termo "magnon" é geralmente usado para caracterizar as excitações envolvendo os spins eletrônicos, mas ele é também utilizado para excitações coletivas dos spins nucleares.

A frequência (ou energia) destas excitações depende da forma detalhada das interações entre os spins em cada material, e da distribuição espacial da perturbação dos spins. Frequências típicas caem na faixa de poucas centenas até milhões de MHz.

Desde o trabalho pioneiro de Bloch, as ondas de spin têm sido estudadas tanto teórica quanto experimentalmente, e o seu interesse reside em pelo menos dois fatores: primeiro, como outras excitações da matéria, os magnons desempenham um papel importante para se determinar as propriedades termodinâmicas de um sistema. Isto é devido ao fato de, desde que os magnons são excitações de spin a partir do estado fundamental, eles são termicamente excitados quando o sistema se encontra a uma temperatura finita. A quantidade de magnons excitados determina o comportamento de várias quantidades termodinâmicas, tais como a magnetização e o calor específico. Podemos afirmar portanto que, se de um lado o conhecimento das propriedades de magnons a temperaturas nas quais eles não estão muito densamente povoados nos permite prever as propriedades termodinâmicas, de outro lado a medida das quantidades termodinâmicas fornece informações gerais sobre as propriedades dos magnons. Segundo, as ondas de spin são afetadas por estímulos externos de diferentes tipos, tal como a radiação eletromagnética. Então eles têm uma influência direta na resposta dinâmica de um sistema magnético. Os magnons têm sido excitados e detectados em um grande número de materiais sob diferentes circunstâncias por várias técnicas, tais como rádio-frequência, microondas, espectroscopia ótica e no infravermelho, e espalhamento inelástico de nêutrons e da luz.

Suas excitações experimentais servem não somente para dar um melhor entendimento das vibrações coletivas da matéria mas também para fornecer medidas dos parâmetros do material, como por exemplo a constante de troca ( $J$ ) entre spins vizinhos. Além disso, os magnons também possuem um potencial tecnológico para aplicações em processamento de sinais. O que os fazem mais atrativos para este tipo de aplicação é o fato de que suas propriedades podem ser monitoradas através de um campo magnético externo aplicado. Na figura 2.2 é mostrada uma representação semi-clássica da propagação de magnons.

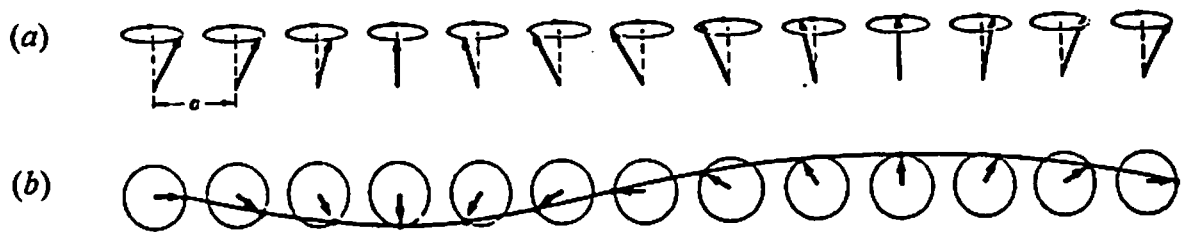


Fig. 2.2 Uma onda de spin. (a) os spins vistos em perspectiva. (b) Spins vistos de cima, mostrando um comprimento de onda. A onda é desenhada através das pontas dos vetores de spin.

## 2.2 Regime de EXCHANGE

Ferromagnetismo e outras formas de ordenação magnética surgem da interação coulombiana entre íons adjacentes, e dependem essencialmente da interação de *exchange* (ou de troca) [11-15]. O ponto de partida para seu estudo é a interação entre dois íons vizinhos  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  com um elétron em cada átomo.

Sejam, respectivamente,  $\psi_a(\mathbf{r})$  e  $\psi_b(\mathbf{r})$  as funções de onda desses íons. A função de onda dos dois elétrons é o produto das partes espacial e de spin, isto é:

$$\phi_+ = \psi_+(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi_\Lambda \quad (2.1)$$

$$\phi_{\pm} = \psi_{\pm}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \chi_s \quad (2.2)$$

onde

$$\psi_{\pm}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(\bar{r}_1) \psi_b(\bar{r}_2) \pm \psi_a(\bar{r}_2) \psi_b(\bar{r}_1)] \quad (2.3)$$

Aqui,  $\psi_+$  ( $\psi_-$ ) é simétrica (anti-simétrica) sob a troca ("exchange") das coordenadas espaciais  $\bar{r}_1$  e  $\bar{r}_2$ .  $\psi_+$  é multiplicada pela função de spin  $\chi_A$  (anti-simétrica) de singleto e  $\psi_-$  por  $\chi_S$  (simétrica) de tripleto, tal que a função de onda total  $\Phi_+$  ou  $\Phi_-$  satisfaça o princípio de exclusão de Pauli.

Como  $\Phi_+$  e  $\Phi_-$  podem ser usadas como funções no Hamiltoniano, que inclui a interação coulombiana  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}$  entre os dois elétrons, dos textos básicos de mecânica quântica tiramos

$$\langle \Phi_{\pm} | H | \Phi_{\pm} \rangle = C \pm E \quad (2.4)$$

onde  $C$  é a chamada *integral de coulomb* e  $E$  de *integral de troca*. Ambas surgem da interação coulombiana, e a integral  $E$  pode ter ambos os sinais. A diferença entre os valores  $C+E$  e  $C-E$  é devida à diferença entre as partes espaciais  $\psi_+$  e  $\psi_-$ . Contudo, o mesmo resultado é encontrado se nós calcularmos o elemento de matriz entre as funções de spin de

$$(C - \frac{1}{4} \hbar^2 J) - J \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 \quad (2.5)$$



onde  $J = \frac{2E}{\hbar^2}$  e  $\bar{S}_1, \bar{S}_2$  são os operadores (spin 1/2) para os dois elétrons. O primeiro termo é uma constante, de modo que a interação entre os dois elétrons é escrita como um *acoplamento de troca*

$$U_{\alpha\alpha} = -J \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 \quad (2.6)$$

que surge da combinação da interação coulombiana com o princípio de Pauli. Desde que  $J$  é decorrente da sobreposição das funções de onda nos sítios  $a$  e  $b$ , ele diminui rapidamente com a distância entre os sítios.

A integral de troca pode ser deduzida de várias experiências :

- Diretamente do espectro de ressonância paramagnética e/ou espectro ótico de pares de íons em cristais diamagnéticos;
- Das relações de dispersão de magnons por espalhamento de nêutrons;
- Analisando os dados magnéticos, particularmente a dependência com a temperatura da magnetização total e/ou magnetização de sub-redes; etc.

Para íons em um sólido, o cálculo acima é generalizado para produzir o *Hamiltoniano de troca de Heisenberg*

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \bar{S}_i \cdot \bar{S}_j \quad (2.7)$$

Aqui a soma é sobre todos os pares de sítios  $\langle i,j \rangle$ . Como  $J_{ij}$  é de curto alcance a soma é freqüentemente tomada somente sobre os vizinhos mais próximos. O operador  $\bar{S}$  é usado por convenção aqui; ele representa o momento angular total  $\bar{J}$  para um íon do tipo terra-rara, mas para um metal de transição no qual o momento orbital magnético é nulo, ele representa o spin total  $\bar{S}$ .

Em um cristal de pouca simetria, as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  não são equivalentes. O Hamiltoniano de troca pode então tomar a seguinte forma:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} (\epsilon_x S_i^x S_j^x + \epsilon_y S_i^y S_j^y + \epsilon_z S_i^z S_j^z) \quad (2.8)$$

Conhecido como o *Hamiltoniano de Heisenberg anisotrópico*. Claramente,  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$  recupera o Hamiltoniano de Heisenberg isotrópico. Também importante é o caso  $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ ,  $\epsilon_z = 1$ , que fornece o chamado *Hamiltoniano de Ising*

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} S_i^z S_j^z \quad (2.9)$$

O modelo de Ising bi-dimensional foi resolvido exatamente por Onsager em seu trabalho clássico [16]. Este foi o primeiro exemplo de uma solução exata para um Hamiltoniano envolvendo uma transição de fase.

Nós temos assumido que os íons  $i$  e  $j$  são fixos no espaço, e o Hamiltoniano de Heisenberg com troca de curto alcance se aplica a isolantes magnéticos, tais como  $\text{FeF}_2$  (antiferromagneto) ou  $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  ou YIG (ferrimagnetos). Nos metais de transição magnéticos os orbitais 3d se sobrepõem suficientemente tal que os elétrons são deslocados. Isto é chamado de *magnetismo eletrônico itinerante* e nós não iremos estudá-lo neste trabalho. Em particular, Fe, Ni e Co são ferromagnetos itinerantes enquanto Cr é um antiferromagneto itinerante.

Nos metais do tipo terra-rara (Dy, Eu, Sm, etc.) os orbitais 4f são fortemente localizados. De fato, há uma superposição desprezível entre orbitais adjacentes, de modo que não há uma interação de troca direta ("direct exchange"). Ao

invés disso existe uma *troca indireta* ("indirect exchange") devido à polarização dos spins dos elétrons de condução (figura 2.3).

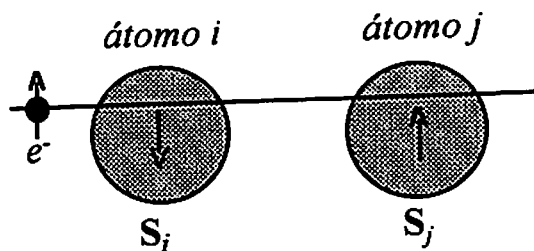


Fig. 2.3. A interação de troca indireta. A direção da polarização do spin de um elétron de condução é afetada por sua interação de troca direta com o átomo *i*; o átomo *j* sente então a polarização daquele elétron e por isso interage indiretamente com o átomo *i*.

As duas mais importantes propriedades da troca indireta, geralmente chamada de RKKY, são:

- (a) Ela é de relativamente longo alcance, decaindo com a distância como  $\frac{1}{r^3}$ ;
- (b) Seu sinal oscila com a distância.

Estas propriedades são as razões subjacentes pelas quais uma ampla faixa de ordenamentos magnéticos, incluindo vários estados helicoidais, são encontrados nos metais do tipo terra rara. Neste trabalho consideraremos apenas as interações no regime de troca direta ("direct exchange"), não levando em conta as interações do tipo dipolar e troca indireta.

## 2.3 A transformação de Holstein-Primakoff

Ao se estudar um sistema de spins de maneira mais aprofundada, faz-se necessário o uso de uma técnica mais refinada, que valha tanto para um sistema de muitos *quanta*, quanto para Hamiltonianos mais complicados. A técnica mais poderosa é, sem dúvida, a chamada *segunda quantização*, que consiste basicamente em obter o Hamiltoniano do sistema na forma diagonal, em função dos operadores de criação e destruição  $a_k^+$  e  $a_k$ , respectivamente.

Ao se escrever o Hamiltoniano na forma:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \bar{S}_i \cdot \bar{S}_j - g\mu_B H_0 \sum_i S_i^z \quad (2.10)$$

onde o segundo termo é devido ao efeito Zeeman, e o fator 1/2 no primeiro termo tem a finalidade de excluir os termos duplicados, as componentes de  $\bar{S}_i$  não são independentes. É mais conveniente trabalhar com os dois operadores  $S^\pm$ , que são independentes e definidos por:

$$S_i^\pm = S_{ix} \pm iS_{iy} \quad (2.11)$$

com relações de comutação ( $\hbar = 1$ ):

$$[S_i^+, S_j^-] = 2 S_i^z \delta_{ij} \quad (2.12-a)$$

$$[S_i^z, S_j^\pm] = \pm S_i^\pm \delta_{ij} \quad (2.12-b)$$

A transformação de *Holstein-Primakoff* [17] consiste em definir  $S^+$  e  $S^-$  em função dos operadores de criação e aniquilação  $a_i^\dagger, a_i$  da seguinte forma:

$$S_i^+ = (2S)^{1/2} \left[ 1 - \frac{a_i^\dagger a_i}{2S} \right]^{1/2} a_i \quad (2.13)$$

$$S_i^- = (2S)^{1/2} a_i^\dagger \left[ 1 - \frac{a_i^\dagger a_i}{2S} \right]^{1/2} \quad (2.14)$$

Usando estas equações, podemos mostrar que [18]

$$S_i^z = S - a_i^\dagger a_i \quad (2.15)$$

Aqui os operadores de criação e aniquilação obedecem à seguinte relação de comutação:

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (2.16)$$

a fim de que  $S^+$  e  $S^-$  satisfaçam a relação (2.12). Podemos fazer uma expansão de (2.13) e (2.14):

$$S_i^+ = (2S)^{1/2} \left[ a_i - \frac{1}{4S} a_i^\dagger a_i a_i + \dots \right] \quad (2.17)$$

$$S_i^- = (2S)^{1/2} \left[ a_i^\dagger - \frac{1}{4S} a_i^\dagger a_i^\dagger a_i + \dots \right] \quad (2.18)$$

A baixas temperaturas o desvio do spin no sítio  $i$ , definido por  $n_i = S_i - S_i^z$  é pequeno. Então, como  $a_i^\dagger a_i$  tem autovalor  $n_i$ ,

$$\frac{a_i^\dagger a_i}{S} \ll 1 \quad (2.19)$$

desta forma, (2.17) e (2.18) ficam:

$$S_i^+ = \sqrt{2S} a_i \quad (2.20-a)$$

$$S_i^- = \sqrt{2S} a_i^\dagger \quad (2.20-b)$$

$$S_i^z = S - a_i^\dagger a_i \quad (2.20-c)$$

Vamos fazer agora uma expansão de Fourier das variáveis atômicas em termos dos vetores de onda  $\vec{k}$  dentro da zona de Brillouin:

$$a_i^\dagger = N^{-1/2} \sum_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} a_k^\dagger \quad (2.21)$$

$$a_i = N^{-1/2} \sum_k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} a_k \quad (2.22)$$

Onde  $N$  é o número de sítios da rede,  $\vec{r}_i$  é o vetor posição do átomo  $i$ , e os  $a_k^\dagger, a_k$  são as *variáveis de magnons*. Note que o operador total de spin é:

$$NS - \mathcal{S}_z = NS - \sum_i S_i^z \quad (2.23)$$

onde, de (2.15),

$$\mathcal{S}_z = NS - N^{-1} \sum_{k,k'} e^{i(k-k') \cdot \eta} a_k^+ a_{k'} \quad (2.24)$$

Pode-se mostrar que [19]:

$$\sum_i e^{i(k-k') \cdot \eta} = N \delta_{kk'} \quad (2.25-a)$$

$$\sum_k e^{ik \cdot (\eta - r_j)} = N \delta_{ij} \quad (2.25-b)$$

e portanto,

$$\mathcal{S}_z = NS - \sum_k a_k^+ a_k \quad (2.26)$$

que é um resultado exato.

O operador  $a_k^+$  cria um magnon de vetor de onda  $k$  e o operador  $a_k$  destrói um magnon. Sua relação de comutação é:

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'} \quad (2.27)$$

Dessa forma,  $a_k^+ a_k$  pode ser encarado (em analogia com os  $a_i$ 's) como o *operador número de ocupação*  $\hat{n}_k$  para o estado de magnon  $k$ , sendo  $n_k$  seus autovalores. É fácil mostrar que:

$$\sum_i n_i = \sum_k n_k \quad (2.28)$$

O Hamiltoniano (2.9) nas variáveis de spin  $S^\pm$  fica:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left[ \frac{1}{2} (S_i^- S_j^+ + S_j^- S_i^+) + S_j^z S_i^z \right] - g\mu_B H_0 \sum_i S_i^z \quad (2.29)$$

Usando as equações (2.19) e (2.20), e considerando somente os  $\alpha$  vizinhos mais próximos:

$$H = -\frac{1}{2} JN\alpha S^2 - 2\mu_0 H_0 NS + H_0 \quad (2.30)$$

onde

$$H_0 = -\frac{JS}{2N} \sum_{i\delta kk'} \{ e^{-i(k-k')\cdot\eta} e^{ik\cdot\delta} a_k a_{k'}^\dagger + e^{i(k-k')\cdot\eta} e^{-ik'\cdot\delta} a_k^\dagger a_{k'} - e^{i(k-k')\cdot\eta} a_k^\dagger a_{k'} - e^{-i(k-k')\cdot(\eta+\delta)} a_k a_{k'}^\dagger \} + \frac{g\mu_B H_0}{N} \sum_{i\delta kk'} e^{i(k-k')\cdot\eta} a_k^\dagger a_{k'} \quad (2.31)$$

Aqui  $\delta$  é o vetor unindo o sítio  $i$  aos seus  $\alpha$  vizinhos mais próximos.

Usando (2.25) temos:

$$H_0 = -\frac{J}{2} \alpha S \sum_k \{ \gamma_k a_k a_k^\dagger + \gamma_{-k} a_k^\dagger a_k - 2a_k^\dagger a_k \} + g\mu_B H_0 \sum_k a_k^\dagger a_k \quad (2.32)$$

onde

$$\gamma_k = \frac{1}{\alpha} \sum_\delta e^{ik\cdot\delta} \quad (2.33)$$



$$\sum_k \gamma_k = 0 \quad (2.34)$$

Supondo um centro de simetria de inversão, i.é,  $\gamma_k = \gamma_{-k}$ , temos

$$H_0 = \sum_k \hat{n}_k \omega_k \quad (2.35)$$

Com

$$\omega_k = JS\alpha(1 - \gamma_k) + g\mu_B H_0 \quad (2.36)$$

e

$$\hat{n}_k = a_k^\dagger a_k \quad (2.37)$$

A equação (2.35) é a mais importante desta seção. Ela mostra que se fizermos uma transformada de Fourier para as variáveis de magnons  $a_k^\dagger, a_k$ , a parte quadrática do Hamiltoniano (2.9) é diagonalizada, com autovalores dados por (2.36). Além disso, de (2.27) vemos que os operadores  $a_k^\dagger, a_k$  são operadores de Bose [20] (ou seja, os magnons são bosons) e a transformação é canônica. De (2.35) vemos também que a energia dos magnons é quantizada. No limite de pequenos  $k$ 's :

$$\omega_k \sim g\mu_B H_0 + \frac{1}{2} JS \sum_{\delta} (k \cdot \delta)^2 \quad (2.38)$$

Para redes cúbicas simples de parâmetro de rede  $\alpha$ :

$$\omega_k \sim g\mu_B H_0 + Dk^2 \quad (2.39)$$

onde

$$D = 2JSa^2 \quad (2.40)$$

Este resultado foi verificado experimentalmente [21,22]. Usando o método de segunda quantização, é possível estudar também as interações entre os magnons e outras excitações, e as interações magnon-magnon [19]. Para tanto, é necessário considerar a interação dipolar no Hamiltoniano (2.10) e termos de maior ordem na expansão de (2.13) e (2.14). No entanto, o estudo destas interações está fora do escopo deste trabalho.

## ***2.4 Magnons de volume (aproximação RPA)***

As excitações de magnons podem ser calculadas de diversas formas, a partir do Hamiltoniano (2.10). Contudo, como dito na seção anterior, é conveniente trabalhar diretamente em termos dos operadores de spin  $S^{\pm}$ . Sabemos que a equação de movimento para um operador  $A$  tem a forma:

$$i\hbar \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + [A, H] \quad (2.41)$$

Usando isto para  $S_i^{\pm}$ , temos:

$$i\hbar \frac{dS_i^\pm}{dt} = - \left[ S_i^\pm, \sum_j J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \right] - \left[ S_i^\pm, g\mu_B H_0 \sum_i S_i^z \right] \quad (2.42)$$

De (2.11)

$$i\hbar \frac{dS_i^\pm}{dt} = - \sum_j J_{ij} \left\{ [S_i^x, S_i^\pm] S_j^x + [S_i^y, S_i^\pm] S_j^y + [S_i^z, S_i^\pm] S_j^z \right\} \pm g\mu_B H_0 S_i^\pm \quad (2.43)$$

Portanto:

$$i\hbar \frac{dS_i^\pm}{dt} = \pm g\mu_B H_0 S_i^\pm \pm \sum_j J_{ij} (S_j^z S_i^\pm - S_i^z S_j^\pm) \quad (2.44)$$

A equação acima é a equação de movimento para os operadores  $S_i^\pm$ , atuando no sítio  $i$ . Note-se que não há acoplamento entre estes operadores. Isto é devido ao fato de não ter-se considerado termos de anisotropia no Hamiltoniano (2.9), como veremos posteriormente. Portanto, a escolha de qual operador ( $S^+$  ou  $S^-$ ) utilizar em (2.41) é completamente arbitrária. Esta equação não tem solução exata, mas uma solução aproximada bastante utilizada é a chamada *aproximação RPA* (de "Random Phase Approximation"), que consiste em considerar os spins tendo sua componente  $S_i^z$  substituída por sua média térmica:

$$S_i^z \rightarrow \langle S_i^z \rangle = S \quad (2.45)$$

Deste modo, a equação (2.44) toma a forma:

$$\pm i\hbar \frac{dS_i^\pm}{dt} = g\mu_B H_0 S_i^\pm \pm S \sum_j J_{ij} (S_i^\pm - S_j^\pm). \quad (2.46)$$

Como a escolha é arbitrária, iremos trabalhar de agora em diante com o operador  $S_i^+$ . Supondo solução do tipo onda plana

$$S_i^+ \propto e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2.47)$$

e usando (2.46), temos que

$$\hbar\omega = g\mu_B H_0 + S \sum_j J_{ij} - S \sum_j J_{ij} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (2.48)$$

Se considerarmos apenas os  $n$  vizinhos mais próximos, com todos os  $J_{ij}$  iguais, temos :

$$\hbar\omega = g\mu_B H_0 + JS(n - \gamma_k) \quad (2.49)$$

onde

$$\gamma_k = \sum_{\vec{\delta}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{\delta}} \quad (2.50-a)$$

$$\vec{\delta} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad (2.50-b)$$

Para redes do tipo cúbica simples (sc) e parâmetro de rede  $a$ ,  $\gamma_k$  toma a forma:

$$\gamma_k = 2(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a) \quad (2.51)$$

Logo, a relação de dispersão para magnons em uma rede cúbica simples, com campo Zeeman é:

$$\hbar\omega = g\mu_B H_0 + 2JS(3 - \cos k_x a - \cos k_y a - \cos k_z a) \quad (2.52)$$

Obviamente a equação de dispersão depende da direção do vetor de onda  $\vec{k}$  mesmo em um cristal cúbico. Valores específicos são listados abaixo, juntamente com 3 exemplos de curva de dispersão (figura 2.4).

$$\vec{k} = 0 \text{ (centro da zona)} \quad : \quad \hbar\omega = g\mu_B H_0 \quad (2.53)$$

$$\vec{k} < \frac{\pi}{a} \quad : \quad \hbar\omega = g\mu_B H_0 + 2JSa^2 k^2 \quad (2.54)$$

$$\vec{k} = \left(\frac{\pi}{a}, 0, 0\right) \quad : \quad \hbar\omega = g\mu_B H_0 + 4JS \quad (2.55)$$

$$\vec{k} = \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, 0\right) \quad : \quad \hbar\omega = g\mu_B H_0 + 8JS \quad (2.56)$$

$$\vec{k} = \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right) \quad : \quad \hbar\omega = g\mu_B H_0 + 12JS \quad (2.57)$$

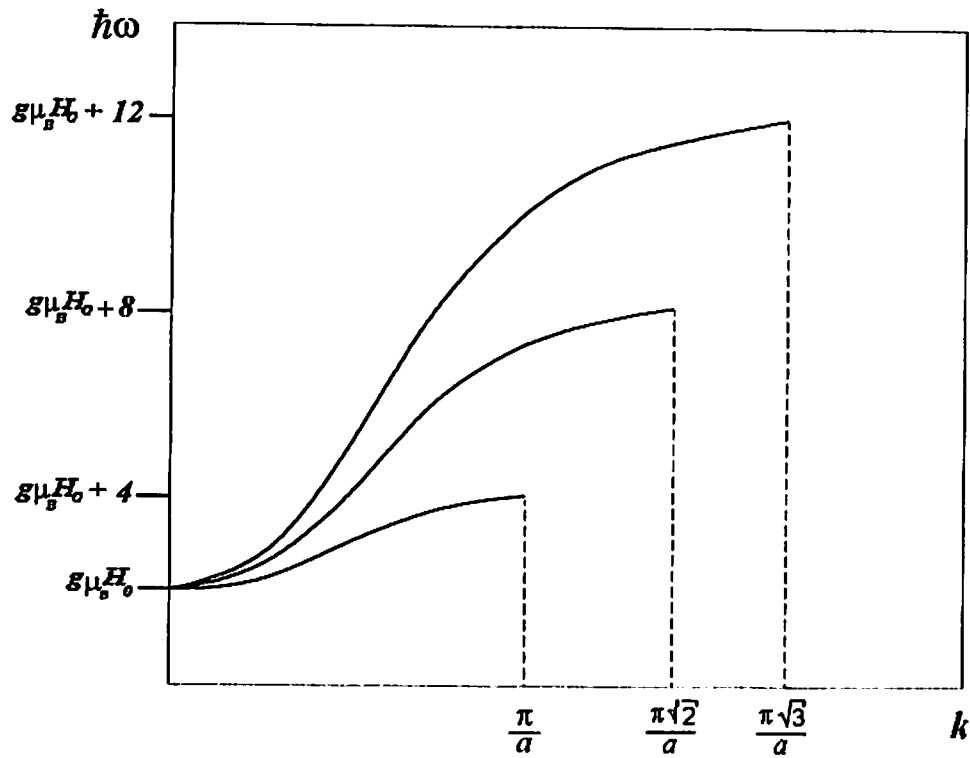


Fig. 2.4 Relação de dispersão para magnons . a) tomando  $k=(\pi/a,0,0)$  ; b)  $k=(\pi/a,\pi/a,0)$  ; c)  $k=(\pi/a,\pi/a,\pi/a)$ .

A principal técnica experimental para investigação de ondas de spin é o espalhamento inelástico de nêutrons. A cinemática é ilustrada na figura 2.5.

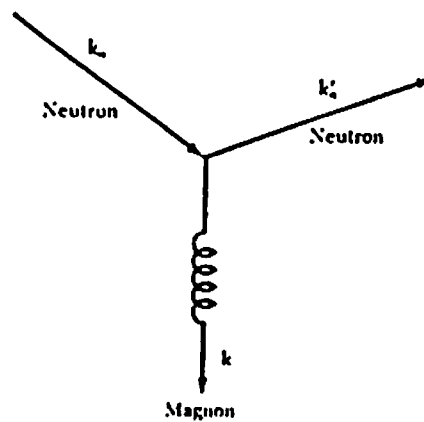


Fig. 2.5 Interação de um nêutron com um magnon

Um nêutron incide com vetor de onda  $\vec{k}_n$ , interage com um magnon e é espalhado inelásticamente. Mede-se então o vetor de onda  $\vec{k}_n'$  espalhado. Usando-se as leis de conservação de energia,

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2M_n} = \frac{\hbar^2 k'^2}{2M_n} + \hbar\omega_k \quad (2.58)$$

e momentum,

$$\vec{k}_n = \vec{k}_n' + \vec{k} + \vec{G} \quad (2.59)$$

onde  $\vec{G}$  é um vetor de onda da rede recíproca; determina-se então  $\omega_k$  e  $\vec{k}$  [21].

## 2.5 Magnons de superfície

Nesta seção, iremos estudar os magnons de superfície. Para tanto, consideraremos o modelo de material ferromagneto semi-infinito, descrito pelo Hamiltoniano de Heisenberg (termo de troca e Zeeman). Ao se estudar modos de superfície, no entanto, deve-se levar em conta o fato de que os parâmetros físicos próximos da superfície são diferentes no volume.

Além disso, o número de vizinhos mais próximos é menor na superfície. Por estas razões,  $\langle S_z \rangle_1$  diminui mais rapidamente que  $\langle S_z \rangle_n$  ( $n$  é o número da camada) quando a temperatura aumenta. Este efeito é chamado de *reconstrução de superfície*. O gráfico abaixo mostra a dependência de  $\langle S_z \rangle_n$  com  $T$  (fig. 2.6).

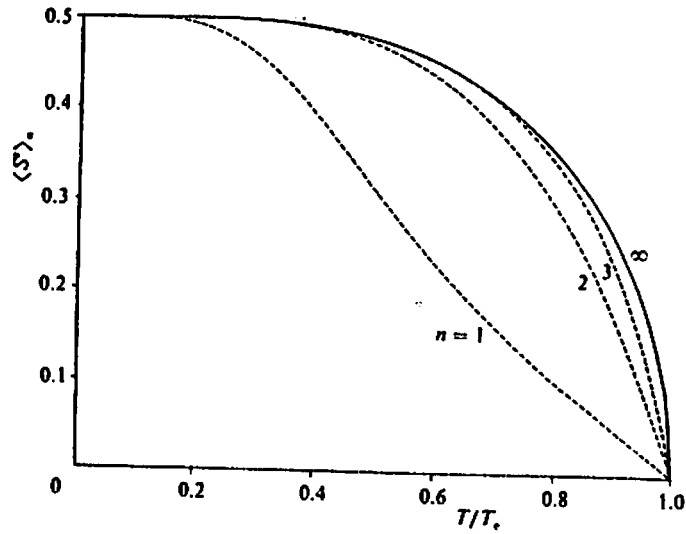


Fig 2.6. O spin médio  $\langle S^z \rangle_n$  como função da temperatura para vários valores do índice da camada  $n$  em um ferromagneto de Heisenberg semi-infinito com estrutura cúbica simples, com  $H_0 = 0$  e  $J_s/J = 0.5$ .

No entanto, nós iremos nos restringir às baixas temperaturas, de forma que não exista reconstrução de superfície, ou seja  $\langle S^z \rangle_n = S$ . Como deduzido anteriormente, a equação de movimento é:

$$\pm i\hbar \frac{dS_i^\pm}{dt} = g\mu_B H_0 S_i^\pm + S \sum_j J_{ij} (S_i^\pm - S_j^\pm) \quad (2.60)$$

Agora não é mais possível considerar-se soluções do tipo onda plana nas 3 direções, desde que a presença da superfície quebra a invariância translacional na direção  $z$ . Além disso, a constante de troca na superfície é modificada, e tem valor  $J_s$ . Usaremos então na equação acima uma solução tentativa, para o spin  $i$  na camada  $n$ ,

$$S_i^\pm = S_n e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} \quad (2.61)$$



onde  $\vec{p} = (x, y)$  é um vetor 2D no plano  $xy$  e  $\vec{k}_p = (k_x, k_y)$ . Usando (2.61) em (2.60), temos:

$$\begin{cases} \{\hbar\omega - g\mu_B H_0 - SJ - 4SJ_s[1 - \gamma(\vec{k}_p)]\}S_1 + SJ S_2 = 0 \\ \{\hbar\omega - g\mu_B H_0 - 2SJ - 4SJ[1 - \gamma(\vec{k}_p)]\}S_n + SJ(S_{n+1} + S_{n-1}) = 0, \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (2.62)$$

onde

$$\gamma(\vec{k}_p) = \frac{1}{2}[\cos k_x a + \cos k_y a] \quad (2.63)$$

As equações acima podem ser resolvidas por meio de várias técnicas [23] para se obter as frequências  $\omega$  dos diversos modos de magnons. Iremos resolvê-las por meio de uma solução tentativa (ondas incidente e refletida) do tipo:

$$S_n = A(\vec{k}_p) e^{-ik_x(n-1)a} + B(\vec{k}_p) e^{ik_x(n-1)a} \quad (2.64)$$

Usando esta equação em (2.63), chegamos ao resultado:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_B = g\mu_B H_0 + 2JS(3 - \cos k_x a - \cos k_y a - \cos k_z a)$$

que é a mesma relação derivada anteriormente para um meio *infinito*. Note-se que a equação de dispersão não envolve a constante  $J_s$ , mas a razão  $(B/A)$  – conhecida como o coeficiente de reflexão para os magnons de volume em  $z=0$  – é um número complexo com módulo unitário e com ângulo de fase que depende de  $J_s$ , como pode ser deduzido a partir de (2.62).

Para os modos de superfície, devemos obrigatoriamente ter soluções que decaiam com a distância. Logo, é natural supor soluções do tipo

$$S_n = C(\vec{k}_p) e^{-kna} \quad (2.65)$$

Usando esta equação em (2.62) temos,

$$\hbar\omega = g\mu_B H_0 + 4SJ[1 - \gamma(\vec{k}_p)] - SJ \frac{(\Delta - 1)^2}{\Delta} \quad (2.66)$$

onde

$$\Delta = e^{ka} = \frac{S_{n+1}}{S_n} \quad (2.67)$$

Na interface, a partir de (2.62), temos

$$\hbar\omega = g\mu_B H_0 + 4SJ_s[1 - \gamma(\vec{k}_p)] - SJ(\Delta - 1) \quad (2.68)$$

Comparando as duas equações, vemos que

$$\Delta = \frac{1}{1 + 4[1 - \gamma(\vec{k}_p)](1 - \frac{J_s}{J})} \quad (2.69)$$

O quociente  $\Delta$  possui um significado físico: ele é a diminuição fracional por camada das amplitudes de magnons. Nesse contexto, a equação (2.66) representa um modo localizado de superfície somente se

$$|\Delta| < 1 \quad (2.70)$$

Esta equação é satisfeita caso  $\Delta$  assumo os valores :

- i)  $0 < \Delta < 1$ , que ocorre para todos os  $k_p$  desde que  $J_s < J$ . Neste caso, todas as camadas de spin se movem em fase, pois  $k$  é real, e o modo de propagação é chamado de *magnon de superfície acústico* em analogia com os fonons. Suas frequências são menores que aquelas correspondentes aos magnons de volume, isto é,  $\omega_s(\vec{k}_p) < \omega_B(\vec{k}_p, k_z)$  (Fig. 2.7-a).
- ii)  $-1 < \Delta < 0$ . Neste caso,  $k$  é complexo da forma  $\alpha + i\pi$  ( $\alpha$  real). Ou seja, há uma mudança de fase de  $\pi$  entre camadas sucessivas, e o modo é chamado de *magnon de superfície ótico*, novamente em analogia com os fonons. Suas frequências são tais que  $\omega_s(\vec{k}_p) > \omega_B(\vec{k}_p, k_z)$ . A condição de existência dos modos óticos é que  $J_s > 5J/4$ , ocorrendo para algum  $\vec{k}_p$  dentro da zona de Brillouin (Fig. 2.7-b).

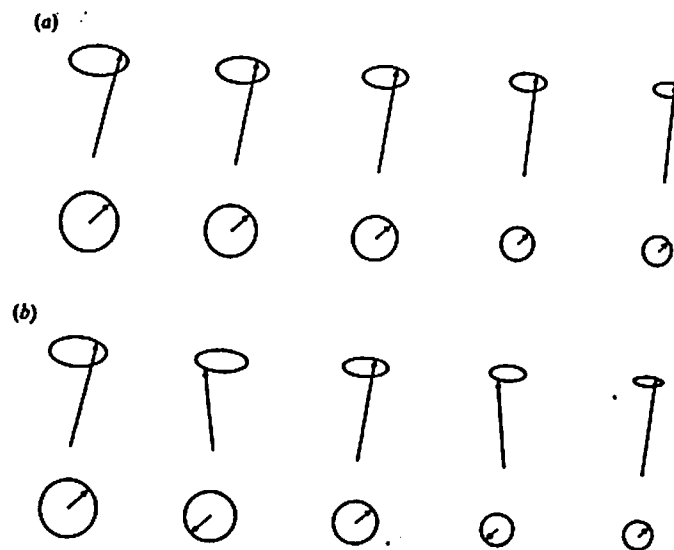


Fig. 2.7. Representação semi-clássica de magnons de superfície em um ferromagneto: (a) magnon acústico de superfície; (b) magnon ótico de superfície.

Discussões adicionais sobre relações de dispersão têm sido feitas por vários autores [24,25]. Pode-se considerar outros efeitos, tal como a anisotropia de superfície (também conhecida como *pinning*) bastando para isto adicionar um termo no Hamiltoniano (2.9) da forma:

$$-g\mu_B \sum_i H_{as}(i) S_i^z \quad (2.71)$$

Esta anisotropia pode ter origem na menor simetria do campo cristalino na superfície ou devido a impurezas na superfície [26]. No caso mais simples  $H_{as}$  pode ter um valor constante na camada da superfície e 0 nas demais. Levando isto em conta, a equação (2.66) ainda é válida, mas  $\Delta$  passa a ser dado por:

$$\Delta = \frac{1}{1 - \frac{g\mu_B H_{as}}{SJ} + 4[1 - \gamma(\bar{k}_p)](1 - \frac{J_s}{J})} \quad (2.72)$$

Na figura (2.8) damos alguns exemplos numéricos de relação de dispersão. Os magnons de volume aparecem como um contínuo, com frequências na faixa de

$$g\mu_B H_0 - 2SJ - 2SJ[3 - 2\gamma(k_p)] < \hbar\omega < g\mu_B H_0 + 2SJ - 2SJ[3 - 2\gamma(k_p)] \quad (2.73)$$

onde o lado esquerdo da desigualdade corresponde a  $k_z = 0$ , e o lado direito a  $k_z = \frac{\pi}{a}$ .

As curvas *A* e *B* são exemplos de magnons de superfície acústico e ótico, respectivamente.

Outros modelos para o cálculo do espectro de magnons de superfície são encontrados na literatura. Extensões possíveis e diretas são considerar as estruturas *bcc* e *fcc*, bem como superfícies do tipo (111).

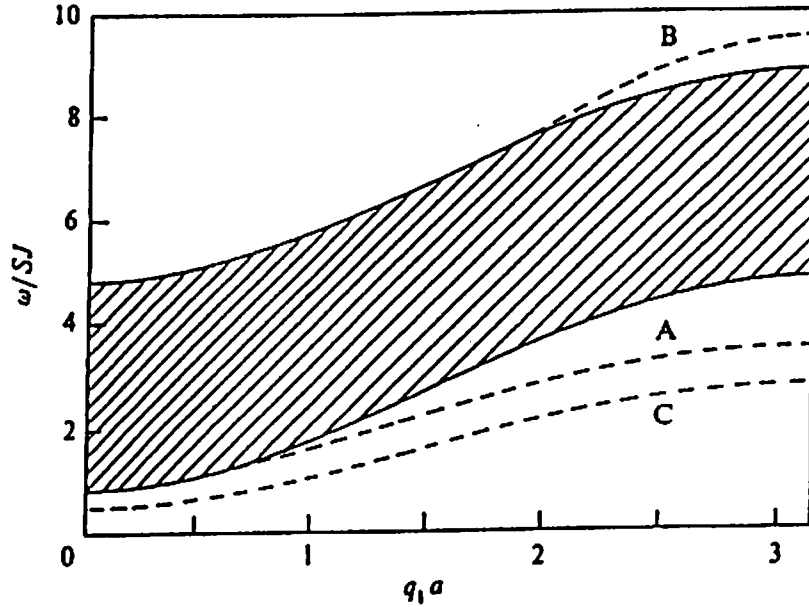


Fig. 2.8. Um gráfico da frequência de magnon (em unidades de  $JS$ ) versus  $|q_{||}a|$  em um ferromagneto de Heisenberg, para  $q_{\perp} = (q_{\perp}, 0)$ . A Banda contínua de magnons é mostrada, juntamente com os três ramos de superfície correspondentes a: A -  $J_{\theta}/J = 0.5$ ,  $H_{as} = 0$ ; B -  $J_{\theta}/J = 1.8$ ,  $H_{as} = 0$ ; C -  $J_{\theta}/J = 0.5$ ,  $g\mu_B H_{as}/JS = -0.8$ . O campo magnético aplicado é tal que  $g\mu_B H_0/JS = 0.8$ .

## 2.6 Conclusões

Neste capítulo demos uma breve introdução sobre ferromagnetismo e os principais temas relacionados com o estudo de magnons em um meio ferromagnético. Descrevemos o comportamento dos mesmos no volume, e consideramos também os modos de superfície (todos dentro da aproximação RPA). Nos capítulos seguintes iremos tratar de magnons em super-redes, considerando também termos de anisotropia.

# 3

## *Super-rede ferromagnética sem campo de anisotropia*

---

### *3.1 Introdução*

Durante décadas o estudo das propriedades óticas e magnéticas de materiais tem se restringido a sólidos de estrutura monocristalina e a ligas. Com o desenvolvimento tecnológico houve um considerável esforço devotado à síntese e ao estudo de materiais compostos e de estruturas artificiais tipo super-redes, formadas a partir de camadas alternadas de diferentes materiais. Desta maneira foi possível criar-se novos materiais em laboratórios com propriedades distintas daquelas encontradas em seus constituintes isoladamente. Exemplos de técnicas de crescimento de super-redes são o *crescimento epitaxial por feixe molecular* ("Molecular Beam Epitaxy") e a *deposição química de vapor organo-metálico* ("Metal Organic Chemical Vapor Deposition"). Através de tais técnicas pode-se preparar amostras formadas por diferentes materiais, cada uma individualmente sendo um filme com espessura variando de poucos Angstrons até várias centenas de Angstrons [27-32]. Quando estes materiais são magnéticos, as super-redes assim formadas podem ter respostas (na faixa de microondas ou no infravermelho) características.

No início dos anos 80, a maioria dos trabalhos experimentais e teóricos em sistemas de multi-camadas (ou super-redes) tratavam das propriedades eletrônicas de sistemas semicondutores ou metálicos, compostos de dois diferentes materiais. As propriedades magnéticas não recebiam tanta atenção quanto os fenômenos de transporte. Contudo, pôde-se observar um crescente interesse em estruturas magnéticas nos últimos anos [33-37]. Em super-redes magnéticas, as ondas de spin são excitações coletivas da estrutura como um todo, e como consequência têm propriedades distintas dos modos associados com qualquer um dos constituintes. Para valores suficientemente pequenos do vetor de onda da excitação, os efeitos dipolares são dominantes, e estudos neste regime têm sido feitos teórica e experimentalmente por diversos autores [38-41]. Neste capítulo iremos nos restringir ao estudo destas excitações no regime de "exchange direto".

### 3.2 O método da matriz transferência

Existem vários métodos utilizados para o estudo das propriedades físicas de super-redes. Dentre estes, um dos mais utilizados nos últimos anos é o chamado *método da matriz transferência*, que foi originalmente concebido por Onsager [16]. Sua principal vantagem em relação aos outros métodos é o fato de este ser bastante flexível, podendo ser utilizado para o estudo de várias excitações, como por exemplo fonons [42,43], polaritons [44] e magnons no regime de "direct exchange" [4] e nos demais regimes [45].

Para descrever este método, vamos inicialmente supor um modelo de super-rede composta de  $n_1$  camadas do material 1 alternando com  $n_2$  camadas do material 2 (figura 3.1). Ambos os materiais são ferromagnetos de Heisenberg, com estrutura cristalina do tipo cúbica simples, constante de rede  $a$  e constante de troca  $J_1$  e  $J_2$ , para os meios 1 e 2, respectivamente. Na interface, a constante de troca é  $I$ . Definimos  $n = n_1 + n_2$ , tal que o tamanho da célula unitária no nosso modelo é  $D = na$ . A célula  $l$  é definida desde a posição  $z = (l-1)na$  até a posição  $z = lna$  (ver fig. 3.1). Vamos supor também a existência de um campo magnético externo uniforme  $H_0$  aplicado na direção  $z$ , tal que o nosso Hamiltoniano para o meio 1 seja definido por:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - g\mu_B H_0 \sum_i S_i^z \quad (3.1)$$

com definição análoga para o meio 2.



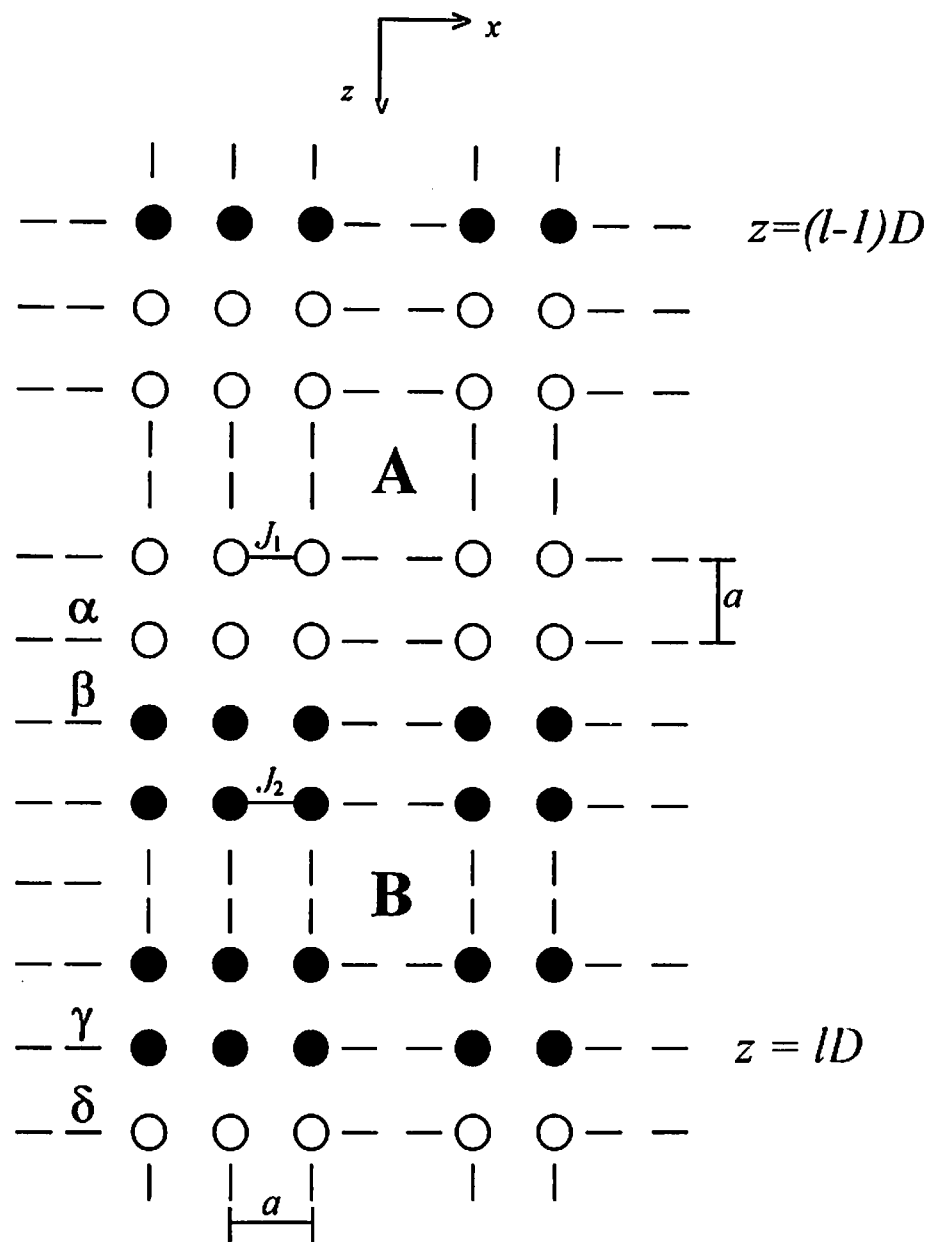


Fig. 3.1. Representação esquemática da super-rede ferromagnética infinita.

Aqui, a soma é somente sobre o sítio  $i$  e seus vizinhos mais próximos  $j$ . Como deduzido no capítulo 2, a equação de movimento (dentro da aproximação RPA) para o operador  $S_i^+ = S_i^x + iS_i^y$  é:

$$i\hbar \frac{dS_i^+}{dt} = g\mu_B H_0 S_i^+ + S \sum_j J_1 (S_i^+ - S_j^+) \quad (3.2)$$

Supondo soluções do tipo onda plana, é fácil demonstrar a já conhecida relação de dispersão para as ondas de spin de volume no meio 1:

$$\hbar\omega = g\mu_B H_0 + J_1 S(z - \gamma_k) \quad (3.3)$$

Onde

$$\gamma_k = \sum_{\delta} e^{ik \cdot \delta} \quad (3.4)$$

Aqui,  $z$  é o número de vizinhos mais próximos, e  $\delta$  é o vetor unindo o sítio  $i$  ao seu vizinho mais próximo  $j$ . No nosso caso  $z = 6$ , e, portanto:

$$\gamma_k = 2(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a) \quad (3.5)$$

Voltemos à estrutura tipo super-rede. Para evitarmos o problema da reconstrução de superfície (descrito no capítulo 2), vamos estudar a propagação das ondas de spin a temperaturas muito inferiores à temperatura crítica  $T_c$  dos constituintes da super-rede. As amplitudes das ondas de spin dentro de cada componente são dadas por uma combinação linear das soluções incidente e refletida para o meio, ou seja:

$$S_i^+ = \{A_i \exp[i\vec{k}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)] + B_i \exp[-i\vec{k}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)]\} \exp(-i\omega t) \quad (3.6)$$

para o componente 1, na célula  $l$  e

$$S_i^+ = \{C_i \exp[i\vec{k}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)] + D_i \exp[-i\vec{k}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)]\} \exp(-i\omega t) \quad (3.7)$$

para o componente 2, na célula  $l$ . Aqui,  $\vec{r}_i$  e  $\vec{r}_i$  são as posições das primeiras camadas acima dos correspondentes componentes da célula  $l$ , a saber:

$$\vec{r}_i = [(l-1)na + a]\hat{z} \quad (3.8-a)$$

$$\vec{r}_i = [(l-1)na + (n_i + 1)a]\hat{z} \quad (3.8-b)$$

Os fatores de fase  $\exp[\pm i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_i]$ , etc. em (3.6) e (3.7) foram introduzidos por conveniência algébrica. Os vetores de onda  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_2$  são relacionados com  $\omega$  através da equação (3.3) e seu análogo para o componente 2. Obviamente, existe uma simetria translacional no plano  $xy$ , e portanto, para uma onda se propagando na super-rede,  $k_x = k_{1x} = k_{2x}$ , e  $k_y = k_{1y} = k_{2y}$  devem ser reais. Por outro lado, as componentes  $z$ ,  $k_{1z}$  e  $k_{2z}$  são reais somente quando  $\omega$  permanece dentro de uma banda permitida ("pass band") para o meio. Fora da banda permitida,  $k_{1z}$  ou  $k_{2z}$  são imaginários puros ou complexos da forma  $(\pi/a) + i\delta$ , onde  $\delta$  é real. Usando a equação de movimento (3.2) na camada  $\alpha$ , obtemos:

$$(\hbar\omega - g\mu_B H_0)[A_i t_i \bar{f}_i + B_i \bar{t}_i f_i] = S \sum_j J_i (S_i^+ - S_j^+) \quad (3.9)$$

Onde ( $j=1,2$ ):

$$t_j = e^{i n_j k_j a} \quad ; \quad f_j = e^{i k_j a} \quad (3.10-a)$$

$$\bar{t}_j = \frac{1}{t_j} \quad ; \quad \bar{f}_j = \frac{1}{f_j} \quad (3.10-b)$$

O somatório em (3.9) é dado por:

$$\sum_j J_1(S_i^+ - S_j^+) = J_1[(S_i - S_i^{x-a}) + (S_i - S_i^{y+a}) + (S_i - S_i^{y-a}) + (S_i - S_i^{x+a}) + (S_i - S_i^{x-a})] \\ + I(S_i - S_i^{x+a}) \quad (3.11)$$

Logo, (3.9) fica:

$$A_i \lambda_i t_i \bar{f}_i + B_i \bar{\lambda}_i f_i \bar{t}_i = I(C_i + D_i) \quad (3.12)$$

Onde

$$\lambda_i = I - (\hbar\omega - g\mu_B H_0) / S_A + 5J_1 - J_1(\gamma + \bar{f}_i) \quad (3.13).$$

$\bar{\lambda}_i$  é obtido de  $\lambda_i$  substituindo-se  $\bar{f}_i$  por  $f_i$ . Aqui,

$$\gamma = 2(\cos k_x a + \cos k_y a) \quad (3.14).$$

Para a camada  $\beta$  temos:

$$(\hbar\omega - g\mu_B H_0)[C_i + D_i] = S_b \sum_j J_2(S_i^+ - S_j^+) \quad (3.15)$$

onde o somatório acima é dado por:

$$\sum_j J_2(S_i^+ - S_j^+) = J_2[(S_i - S_i^{z+a}) + (S_i - S_i^{y+a}) + (S_i - S_i^{y-a}) + (S_i - S_i^{x+a}) + (S_i - S_i^{x-a})] + I(S_i - S_i^{z-a}) \quad (3.16)$$

Aqui,  $z = 6$ , e  $\gamma$  é o mesmo definido em (3.14). Desse modo, (3.15) fica:

$$\bar{\lambda}_2 C_l + \lambda_2 D_l = A_l I l_1 \bar{f}_l + B_l I f_l \bar{l}_1 \quad (3.17)$$

$\lambda_2$  e  $\bar{\lambda}_2$  são definidos de maneira análoga à equação (3.13), substituindo-se os índices 1 por 2 e  $A$  por  $B$ . As equações relacionando os coeficientes nas camadas  $\gamma$  e  $\delta$  são deduzidas de maneira análoga. Todas as equações podem ser escritas em forma matricial como

$$H \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} = K' \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

e

$$K \begin{pmatrix} A_{l+1} \\ B_{l+1} \end{pmatrix} = H' \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix} \quad (3.10).$$

Aqui,

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 l_1 \bar{f}_l & \bar{\lambda}_1 f_l \bar{l}_1 \\ I l_1 \bar{f}_l & I f_l \bar{l}_1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$H' = \begin{pmatrix} \lambda_2 \overline{f_2} & \overline{\lambda_2} f_2 \overline{f_2} \\ I \overline{f_2} & I f_2 \overline{f_2} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$K = \begin{pmatrix} I & I \\ \overline{\lambda_1} & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

$$K' = \begin{pmatrix} I & I \\ \overline{\lambda_2} & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Usando as equações (3.18) e (3.19), temos que:

$$\begin{pmatrix} A_{l+1} \\ B_{l+1} \end{pmatrix} = K^{-l} H' K'^{-l} H \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} \quad (3.24).$$

Definindo

$$T = K^{-l} H' K'^{-l} H \quad (3.25)$$

temos

$$\begin{pmatrix} A_{l+1} \\ B_{l+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} \quad (3.26).$$

Usando as equações (3.2), (3.6) e (3.7) para a célula  $l-1$ , chegamos ao resultado

$$\begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A_{l-1} \\ B_{l-1} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

A matriz  $T$ , definida em (3.25), é denominada de *matriz transferência*. Ela recebe este nome devido ao fato de relacionar os coeficientes de uma célula com os coeficientes da célula seguinte (ou da anterior). Na próxima seção demonstraremos como esse conceito pode ser utilizado para obtermos a relação de dispersão de magnons na super-rede.

### 3.3 Relação de dispersão: modos de volume

De acordo com o teorema de Bloch, os autoestados  $|\psi\rangle$  do Hamiltoniano para uma estrutura periódica podem ser escolhidos de forma que associado com cada  $|\psi\rangle$  está um vetor de onda  $\vec{k}$ , tal que

$$|\psi(\vec{r} + \vec{R})\rangle = e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} |\psi(\vec{r})\rangle \quad (3.28)$$

Vamos aplicar a equação acima ao nosso caso, tendo como modelo a super-rede descrita na seção anterior. Inicialmente vamos considerar apenas os modos de volume, tratando posteriormente os modos de superfície. Definindo os *kets*

$$|A_{l+1}\rangle = \begin{pmatrix} A_{l+1} \\ B_{l+1} \end{pmatrix} ; |A_l\rangle = \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

teremos, pelo teorema de Bloch,

$$|A_{l+1}\rangle = \exp(iQD) |A_l\rangle \quad (3.30).$$

Onde  $D$  é o tamanho da célula unitária da super-rede e  $Q$  é o vetor de onda da excitação coletiva dos magnons (vetor de onda de Bloch). Combinando as equações (3.26), (3.29) e (3.30), obtemos:

$$T|A_l\rangle = \exp(iQD) |A_l\rangle \quad (3.31)$$

enquanto que as equações relacionando  $(A_{l-1}, B_{l-1})$  com  $(A_l, B_l)$  fornecem:

$$T^{-1}|A_l\rangle = \exp(-iQD) |A_l\rangle \quad (3.32)$$

As equações (3.31) e (3.32) são duas equações de autovalores. Ao invés de tentar resolvê-las pelo método tradicional, vamos seguir um caminho diferente. Como essas equações são válidas para qualquer célula  $l$ , a soma dá como resultado

$$\cos(QD) = \frac{1}{2}(T + T^{-1}) \quad (3.33).$$

Como  $T$  no nosso caso é uma matriz  $2 \times 2$  com  $\det(T)=1$  (matriz unimodular), pode-se demonstrar que:

$$T + T^{-1} = Tr(T) \quad (3.34)$$

onde  $Tr(T)$  é o traço da matriz  $T$ . Logo, a equação (3.33) toma a forma:



$$\cos(QD) = \frac{1}{2} \text{Tr}(T) \quad (3.35)$$

que é a relação de dispersão para magnons de volume na super-rede. Esta prova da equação de dispersão é a mesma usada para os modos óticos [46] e acústicos [47] em super-redes. A forma explícita dos elementos de matriz  $T_{11}$  e  $T_{22}$  é:

$$T_{11} = \frac{1}{\Delta} t_1 \bar{f}_1 [t_2 \bar{f}_2 (\lambda_1 \lambda_2 - I^2)^2 - \bar{t}_2 \bar{f}_2 (\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_1 - I^2)^2] \quad (3.36-a)$$

$$T_{22} = \frac{1}{\Delta} \bar{t}_1 \bar{f}_1 [\bar{t}_2 \bar{f}_2 (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 - I^2)^2 - t_2 \bar{f}_2 (\lambda_1 \lambda_2 - I^2)^2] \quad (3.36-b)$$

$$\Delta = I^2 (\lambda_1 - \bar{\lambda}_1) (\lambda_2 - \bar{\lambda}_2) \quad (3.36-c)$$

onde os  $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$  ( $i=1,2$ ) são os mesmos definidos anteriormente. Como  $T_{11} = T_{22}^*$ , a equação (3.35) toma a forma extremamente simples

$$\cos(QD) = \text{Re}(T_{11}) \quad (3.37)$$

A equação (3.35) (ou (3.37)) é o principal resultado desta seção, pois descreve a propagação de ondas de spin de volume em uma direção geral na super-rede magnética. Resultados numéricos são fornecidos na seção 3.5.

### 3.4 Modos de superfície

É bem sabido [48] que na superfície de um material magneticamente ordenado pode existir ondas de spin superficiais localizadas, em adição às ondas de volume. Vamos agora então generalizar a teoria descrita anteriormente para o caso de uma super-rede semi-infinita. Novamente, a super-rede é formada por camadas alternantes de dois ferromagnetos  $A$  e  $B$ , efetivamente infinitos nas direções  $x$  e  $y$  e ocupando a região do espaço  $z \geq 0$ . Vamos considerar o vácuo em  $z < 0$  (ver figura 3.2).

O Hamiltoniano neste caso tem a mesma forma da eq. (3.1), exceto que a constante de troca  $J_y$  perto da superfície difere do seu valor no volume. Esta diferença pode ocorrer porque a interação de troca está relacionada com as integrais de troca (como descrito no capítulo 2) entre funções de onda eletrônicas, e estas funções e/ou os parâmetros da rede podem ser perturbados próximos da superfície. Na seção anterior vimos que os elementos da matriz transferência (que são funções da frequência  $\omega$ ) estão relacionados com o vetor de onda da excitação coletiva através da equação de autovalores:

$$T|A_I\rangle = e^{iQD}|A_I\rangle \quad (3.38)$$

onde o *ket*  $|A_I\rangle$  representa o vetor coluna  $(A_I, B_I)$ . Ao se considerar modos localizados de superfície, a eq. (3.38) permanece válida, mas deve-se substituir o fator  $\exp(iQD)$  – que representa a propagação de uma "onda plana" – por um termo que decaia exponencialmente com a distância medida a partir da superfície, ou seja, substituímos  $Q$  por  $i\beta$ , com  $\text{Re}(\beta) > 0$ . Assim, a eq. (3.38) toma a forma:

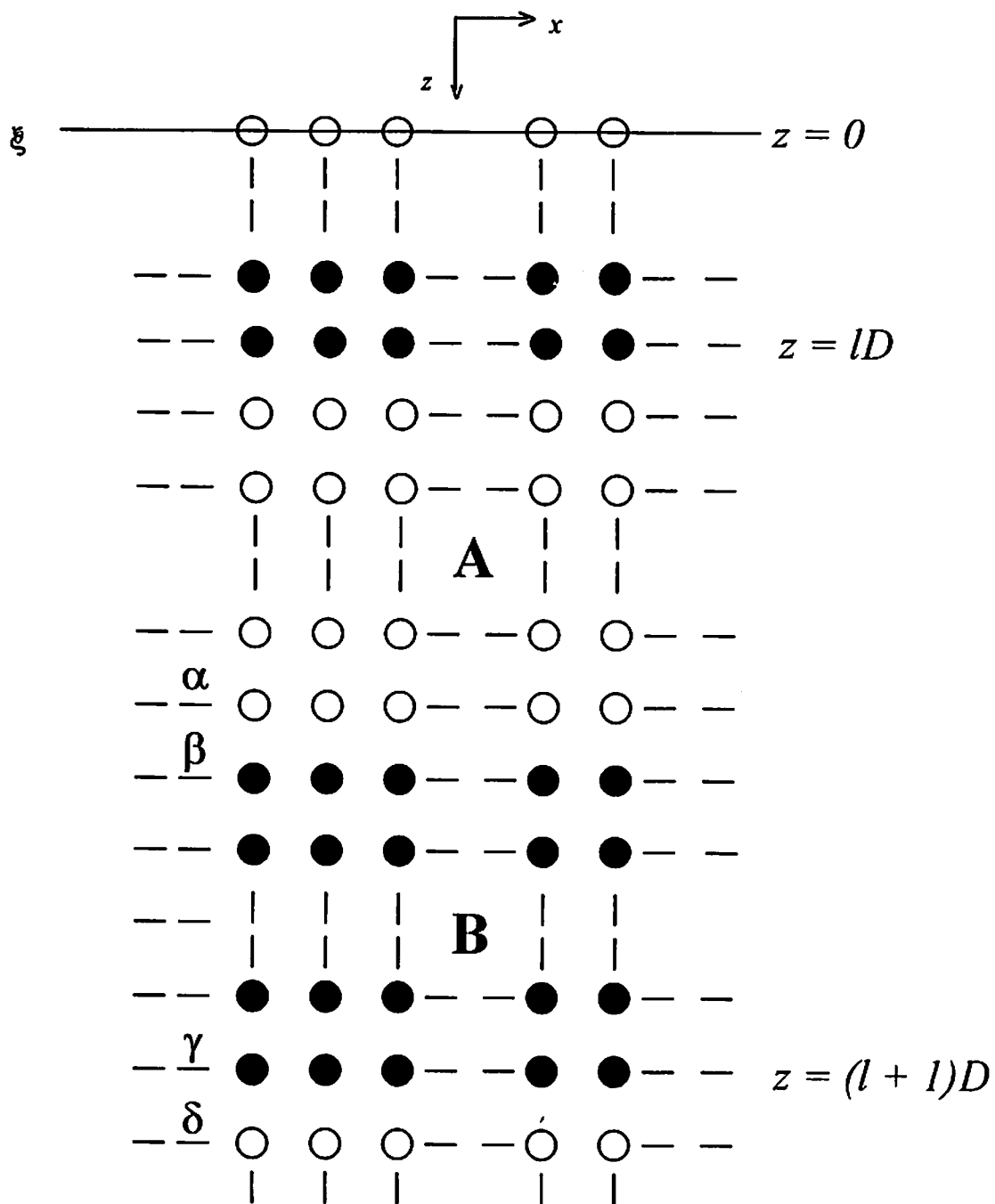


Fig. 3.2. Representação esquemática da super-rede ferromagnética semi-infinita.

$$T|A_l\rangle = e^{-\eta D}|A_l\rangle \quad (3.39)$$

Aqui, ao invés de considerarmos um único par de coeficientes para toda a célula  $l$ , passamos a usar um par  $(A_n, B_n)$  para cada camada  $n$  do componente. Vamos agora considerar os modos de superfície em 2 situações fisicamente diferentes: os modelos *sem* e *com relaxação*. Estes modelos diferem entre si por causa da constante  $J_y$ , como será descrito a seguir, e esta nomenclatura tem origem na analogia com a atenuação (relaxação) da amplitude de uma onda eletromagnética incidindo em um meio condutor.

### 3.4.1 Modelo sem relaxação

Neste modelo, a constante de troca  $J_y$  assume o valor  $J_0$  em toda a superfície  $(x, y, 0)$ , e a interação entre os sítios do plano  $z = 0$  e os sítios do plano  $z = a$  se dá através da constante  $J$  (fig. 3.3).

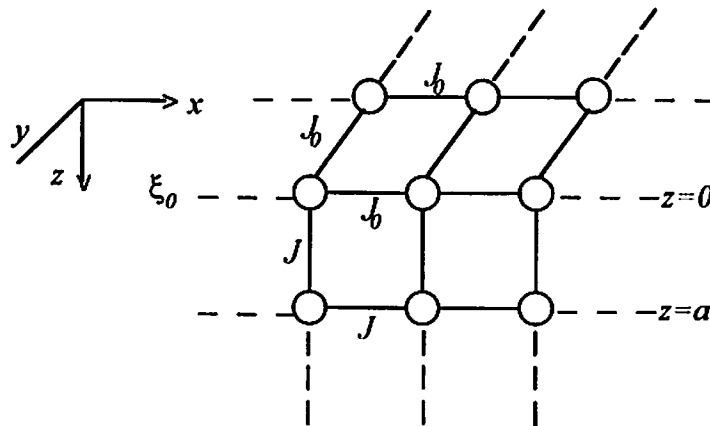


Fig. 3.3. Modelo sem relaxação.

A forma funcional da equação de movimento (3.2) continua a mesma, bastando substituir  $J_1$  por  $J_\alpha$  ( $\alpha=0,1$ ). Desta maneira, as soluções que procuramos são da forma:

$$S_i' = \{A_i \exp[i\vec{k}_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)] + B_i \exp[-i\vec{k}_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)]\} \exp(-i\omega t) \quad (3.40)$$

Usando a equação acima, juntamente com a eq. (3.2) para a camada  $\xi_0$ , temos:

$$(\hbar\omega - g\mu_B H_0)[A_0 + B_0] = S_\lambda \sum_j J_\alpha (S_i' - S_j') \quad (3.41)$$

a soma acima fica:

$$\sum_{nn} J_\alpha (S_i' - S_j') = (4J_0 - \gamma J_0 + J_1)S_i - J_1 S_{i+a} \quad (3.42)$$

logo:

$$[(\hbar\omega - g\mu_B H_0) / S_\lambda - J_0(4 - \gamma) - J_1](A_0 + B_0) = -J_1(\lambda_0 f_1 + B_0 \bar{f}_1) \quad (3.43)$$

onde  $\gamma = 2(\cos k_x a + \cos k_y a)$  e  $f_1, \bar{f}_1$  são como definidos anteriormente. Definindo

$$\lambda_0 = (\hbar\omega - g\mu_B H_0) / S_\lambda - J_0(4 - \gamma) - J_1(1 - f_1) \quad (3.44)$$

a eq. (3.43) toma a forma

$$\lambda_0 A_0 + \bar{\lambda}_0 B_0 = 0 \quad (3.45)$$

ou

$$\frac{A_0}{B_0} = -\frac{\bar{\lambda}_0}{\lambda_0} \quad (3.46)$$

onde  $\bar{\lambda}_0$  é dado por (3.44) substituindo  $f_1$  por  $\bar{f}_1$ . Mas, da eq. (3.39):

$$T|A_0\rangle = e^{-\beta D}|A_0\rangle. \quad (3.47)$$

Logo, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} T_{11} A_0 + T_{12} B_0 = e^{-\beta D} A_0 \\ T_{21} A_0 + T_{22} B_0 = e^{\beta D} B_0 \end{cases} \quad (3.48)$$

Isto implica que

$$T_{11} \left( \frac{A_0}{B_0} \right) + T_{12} = \frac{A_0}{B_0} \left[ T_{21} \left( \frac{A_0}{B_0} \right) + T_{22} \right]. \quad (3.49)$$

Usando (3.46), e rearranjando os termos:

$$T_{11} - T_{22} + \left( \frac{\bar{\lambda}_0}{\lambda_0} \right) T_{21} - \left( \frac{\bar{\lambda}_0}{\lambda_0} \right)^{-1} T_{12} = 0. \quad (3.50)$$

De (3.47) também podemos mostrar que

$$T^{-1}|A_0\rangle = e^{\beta D}|A_0\rangle \quad (3.51)$$

e portanto, somando (3.51) com (3.47),

$$\cosh(\beta D) = \frac{1}{2} \text{Tr}(T) \quad (3.52)$$

A equação (3.50) é uma relação de dispersão implícita para os modos de superfície do nosso modelo. De fato, uma vez (3.50) sendo resolvida, devemos obter um valor para  $\beta$  que satisfaça a eq. (3.52), contanto que  $\text{Re}(\beta) > 0$ . Na seção 3.5 apresentamos alguns resultados numéricos.

### 3.4.2 Modos com relaxação

Neste caso, a constante de troca tem o valor  $J_0$  tanto para a interação entre os átomos da superfície quanto para a interação entre estes e os átomos da camada seguinte (figura 3.4). Deste modo, as soluções que procuramos têm a forma:

$$S_i^+ = \{A_n \exp[i\vec{k}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)] + B_n \exp[-i\vec{k}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)]\} \exp(-i\omega t) \quad (3.53)$$

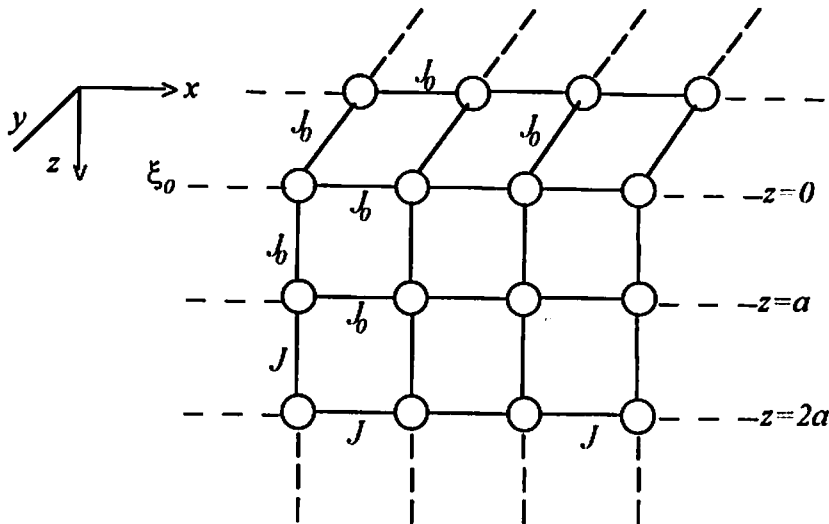


Fig. 3.4. Modelo com relaxação. A partir da 3ª camada a constante de troca em todo o volume passa a ser  $J$ .

Novamente, a equação de movimento (3.2) continua válida, contanto que substituamos  $J_1$  por  $J_\alpha$  ( $\alpha=0,1$ ). Aqui,  $\vec{r}_i$  é o mesmo definido anteriormente. Usemos agora as soluções (3.53) para a camada  $\xi_0$ . Neste caso,  $\vec{r} = \vec{r}_i$  e (3.2) fica:

$$(\hbar\omega - g\mu_B H_0)[A_0 + B_0] = S_\lambda \sum_{n,n'} J_\alpha (S_i^+ - S_j^+) \quad (3.54)$$

Analogamente ao caso anterior, calculemos a soma acima:

$$\sum_{n,n'} J_\alpha (S_i^+ - S_j^+) = J_0(5-\gamma)S_i - J_0[A_1 f_1 + B_1 \bar{f}_1] \quad (3.55)$$

Definindo:

$$\gamma_1 = \frac{\hbar\omega - g\mu_B H_0}{S_\lambda} - J_0(5-\gamma) \quad (3.56)$$



a eq. (3.54) fica:

$$\gamma_1(A_0 + B_0) = -J_0(A_1 f_1 + B_1 \overline{f_1}) \quad (3.57)$$

Aqui,  $\gamma = 2(\cos k_x a + \cos k_y a)$  e  $\gamma_1$  é real. Usando agora as soluções para os átomos no plano  $\xi_1$ , temos que  $e^{i \vec{k}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_h)} = e^{i k_1 a} = f_1$ . Logo,

$$(\hbar\omega - g\mu_B H_0)[A_1 f_1 + B_1 \overline{f_1}] = S_A[(5 - \gamma)J_1 + J_0] - J_0[A_0 + B_0] - J_1[A_1 f_1^2 + B_1 \overline{f_1}^2].$$

Definindo

$$\gamma_2 = [(\hbar\omega - g\mu_B H_0) / S_A - J_1(5 - \gamma) - J_0 + J_1 f_1] f_1 \quad (3.58-a)$$

$$\overline{\gamma_2} = [(\hbar\omega - g\mu_B H_0) / S_A - J_1(5 - \gamma) - J_0 + J_1 \overline{f_1}] \overline{f_1} \quad (3.58-b)$$

temos então que

$$\gamma_2 A_1 + \overline{\gamma_2} B_1 = -J_0(A_0 + B_0) \quad (3.59)$$

onde  $\gamma_2$  é complexo. Das equações (3.57) e (3.58), vemos que

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{\gamma_1 \overline{\gamma_2} - J_0^2 \overline{f_1}}{\gamma_1 \gamma_2 - J_0^2 f_1} \quad (3.60)$$

Mas, da eq. (3.39):

$$T|A_n\rangle = e^{-\beta D}|A_n\rangle \quad (3.61)$$

ou, como já foi demonstrado:

$$T_{11}\left(\frac{A_1}{B_1}\right) + T_{12} = \frac{A_1}{B_1}\left[T_{21}\left(\frac{A_1}{B_1}\right) + T_{22}\right]. \quad (3.62)$$

Definindo

$$\lambda_1 = \gamma_1 \gamma_2 - J_0^2 f_1 \quad (3.63)$$

e usando (3.60), chegamos ao resultado

$$T_{11} - T_{22} + \left(\frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1}\right) T_{21} - \left(\frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1}\right)^{-1} T_{12} = 0 \quad (3.64)$$

que é uma relação de dispersão implícita, análoga ao caso anterior (sem relaxação). Resultados numéricos serão fornecidos na próxima seção.

### 3.5 Resultados numéricos e conclusões

Iremos agora apresentar os resultados numéricos relativos aos modos de volume e superfície em uma super-rede sem campo de anisotropia. Observe que em geral a curva de dispersão é definida pelo triedro  $\Omega$ ,  $k_x a$  e  $QD$ . O que iremos representar aqui são os "cortes"  $\Omega$  versus  $k_x a$  e  $\Omega$  versus  $QD$  que clarificam completamente o espectro das ondas de spin no material. Aqui,  $Q$  é o vetor de onda de Bloch,  $D$  é o tamanho da célula unitária da super-rede,  $a$  é o parâmetro de rede e  $\Omega$  é uma *frequência reduzida*, definida por  $\Omega = \hbar\omega / J_a S_a$ .

Os parâmetros físicos que foram variados são o nº de camadas ( $n_1$  e  $n_2$ ) de cada material; a razão  $J_{AB}$  ( $=J_A/J_B$ ) entre as constantes de troca; a razão relativa para a constante de troca na interface  $I_j$  ( $=I/J_j$ ), ( $j=A,B$ ), e na superfície  $J_{0A}$  ( $=J_0/J_A$ ); o campo magnético relativo  $H_0 J_j$  ( $=H_0/I_j$ ), ( $j=A,B$ ) e o spin médio  $S_A$  e  $S_B$ .

#### 3.5.1 Modos de volume

Na figura 3.5-a apresentamos um gráfico da relação de dispersão  $\Omega$  x  $k_x a$  para os modos de volume em uma super-rede descrita geometricamente pela fig. 3.1. Aqui, como nos demais gráficos deste trabalho,  $k_x$  é a componente  $x$  do vetor de onda de Bloch. Vale salientar que a escolha de  $k_x$  como vetor referência é arbitrária, pois poderíamos igualmente ter escolhido  $\vec{k}_p = (k_x, k_y)$  para esse fim, já que existe uma simetria translacional no plano  $xy$ . O fato de termos usado  $k_x$  significa que estamos estudando a propagação das ondas de spin na direção (100).

Como podemos ver nas figs. 3.5-a até 3.5-d, o espectro de volume das ondas de spin é formado por *bandas permitidas* ("pass bands"), que são intervalos da frequência  $\Omega$  para os quais a componente  $k_x$  é real. Estes intervalos são representados pelas regiões hachuradas, que correspondem às *bandas de volume*, e são limitados pelas curvas correspondentes a  $QD=0$  e  $QD=\pi$ . Observe que esta ordem se inverte quando se passa de uma banda para outra, isto é, ela obedece à sequência  $QD = 0, \pi, \pi, 0, 0, \pi, \pi, 0, \dots$

Comparando as figs. 3.5-a até 3.5-d, podemos ver que há um aumento gradativo do nº de ramos e uma diminuição no espaçamento entre eles quando aumentamos o nº de camadas de cada material. Este comportamento foi verificado para várias combinações dos parâmetros físicos, tanto neste caso quanto para o sistema com anisotropia. Nas regiões entre estas bandas nota-se a presença de *zonas proibidas*, ou "gaps". Estes "gaps" correspondem às regiões do intervalo de frequência onde o vetor de onda  $k_x$  é imaginário. É justamente nestes intervalos onde surgem os modos de superfície (se existirem), como veremos adiante.

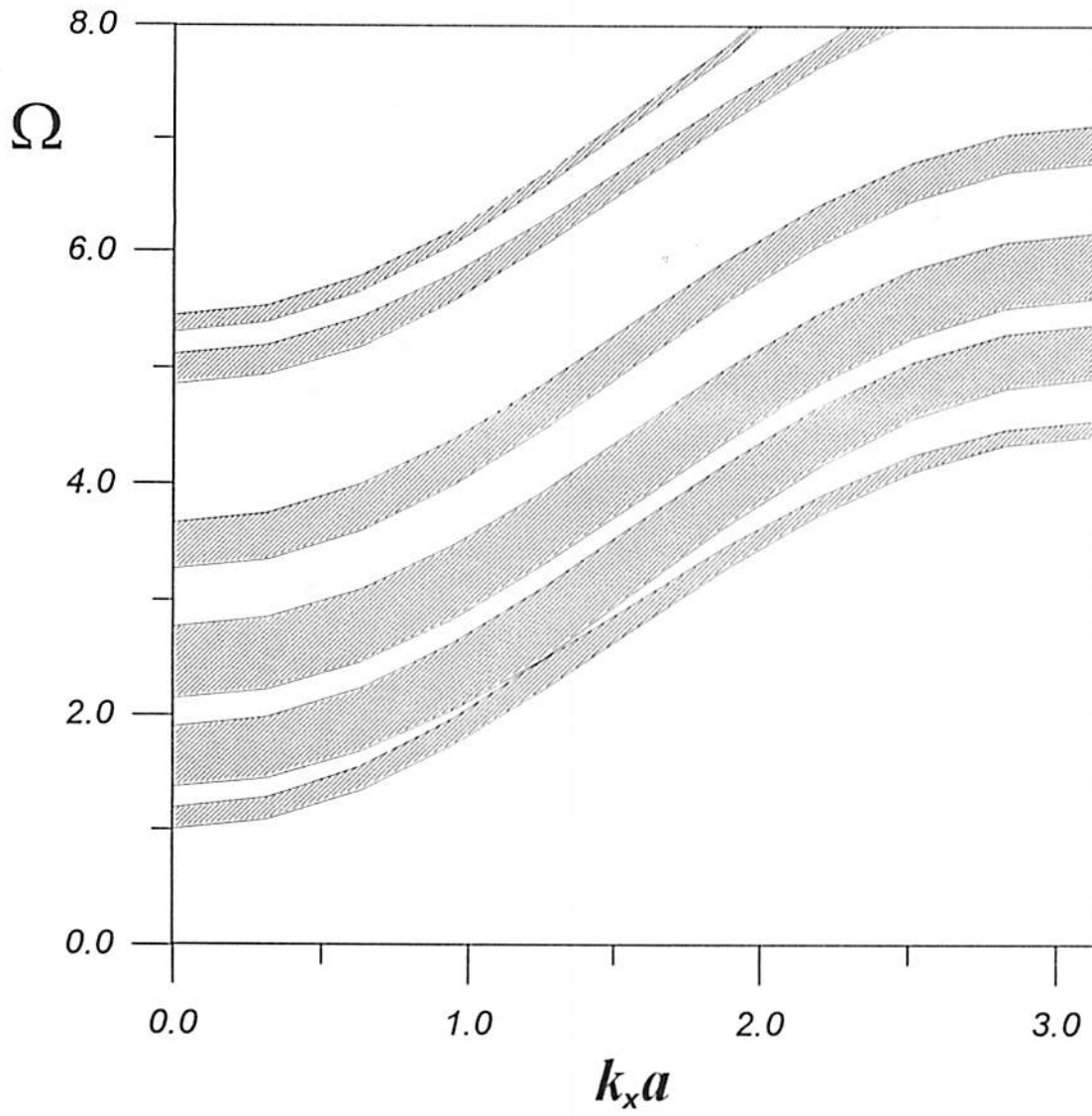


Fig. 3.5-a. Relação de dispersão  $\Omega$  versus  $k_x a$  para os modos de volume em uma super-rede sem campo de anisotropia. Os parâmetros físicos são  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 3$ ,  $S_A = 1.0$ ,  $S_B = 1.5$ ,  $J_{AB} = 2.0$ ,  $I_A = 1.2$ ,  $I_B = 2.4$ ,  $H_0 I_A = 1.0$ , e  $H_0 I_B = 2.0$ .

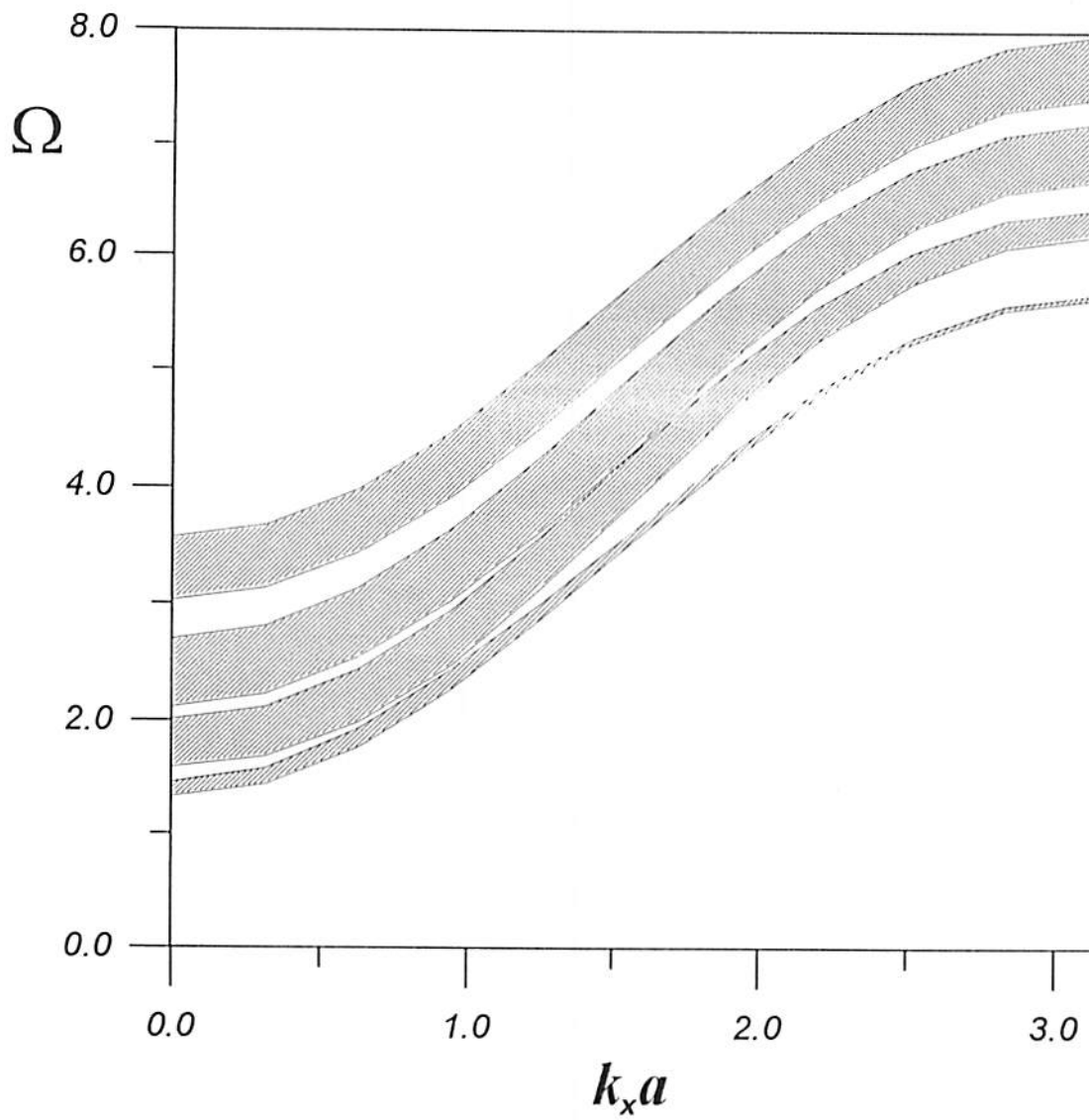


Fig. 3.5-b. Mesmo que a figura anterior. Os parâmetros físicos são  $n_1 = 5$ ,  $n_2 = 3$ ,  $S_A = 1.5$ ,  $S_B = 1.0$ ,  $J_{AB} = 0.5$ ,  $I_A = 2.4$ ,  $I_B = 1.2$ ,  $H_0 J_A = 2.0$ , e  $H_0 J_B = 1.0$ .

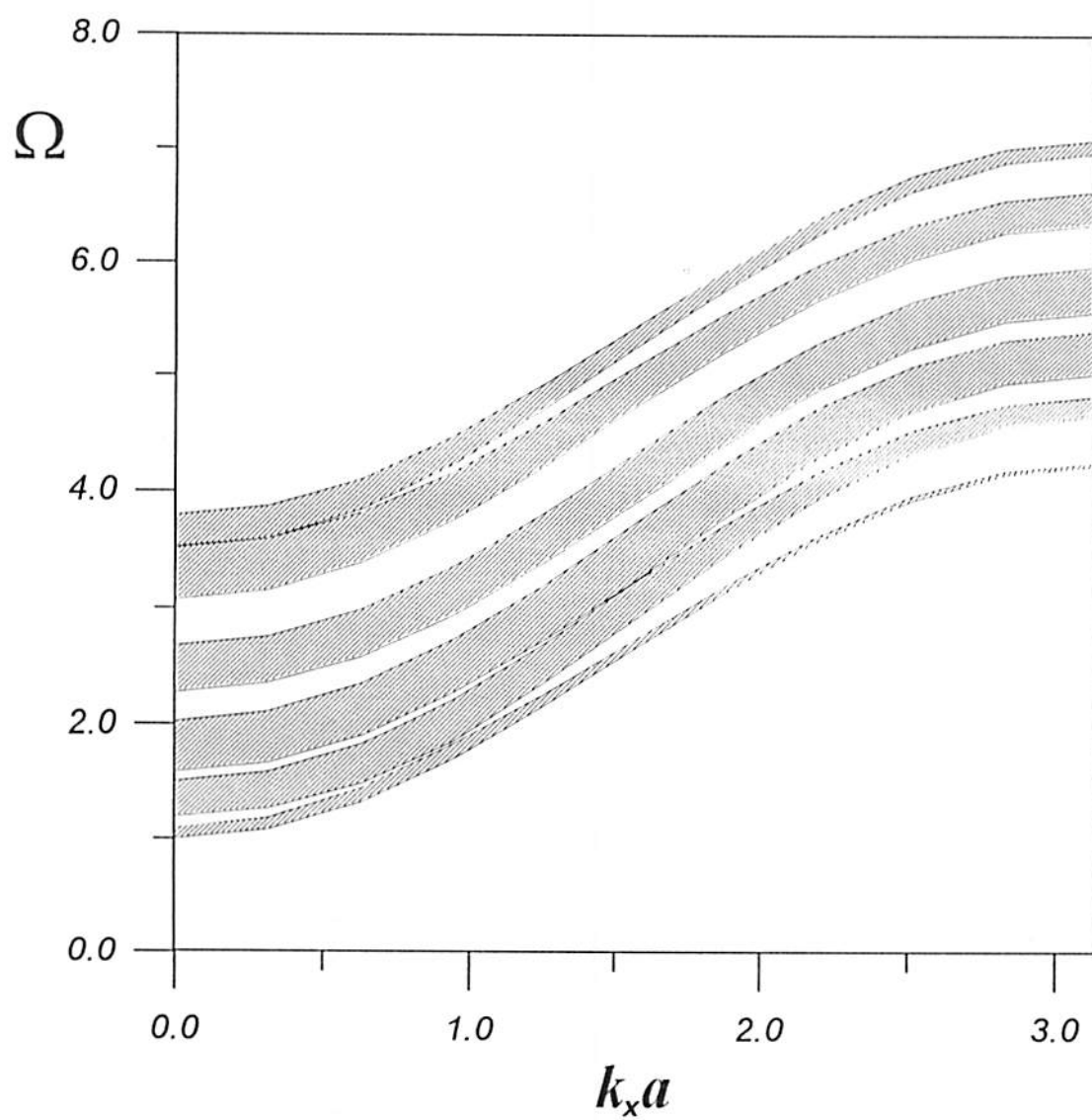


Fig. 3.5-c. Mesmo que a figura anterior. Os parâmetros físicos são  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 5$ ,  $S_A = 1.0$ ,  $S_B = 1.5$ ,  $J_{AB} = 2.0$ ,  $I_A = 1.2$ ,  $I_B = 2.4$ ,  $H_0 J_A = 1.0$ , e  $H_0 J_B = 2.0$ .

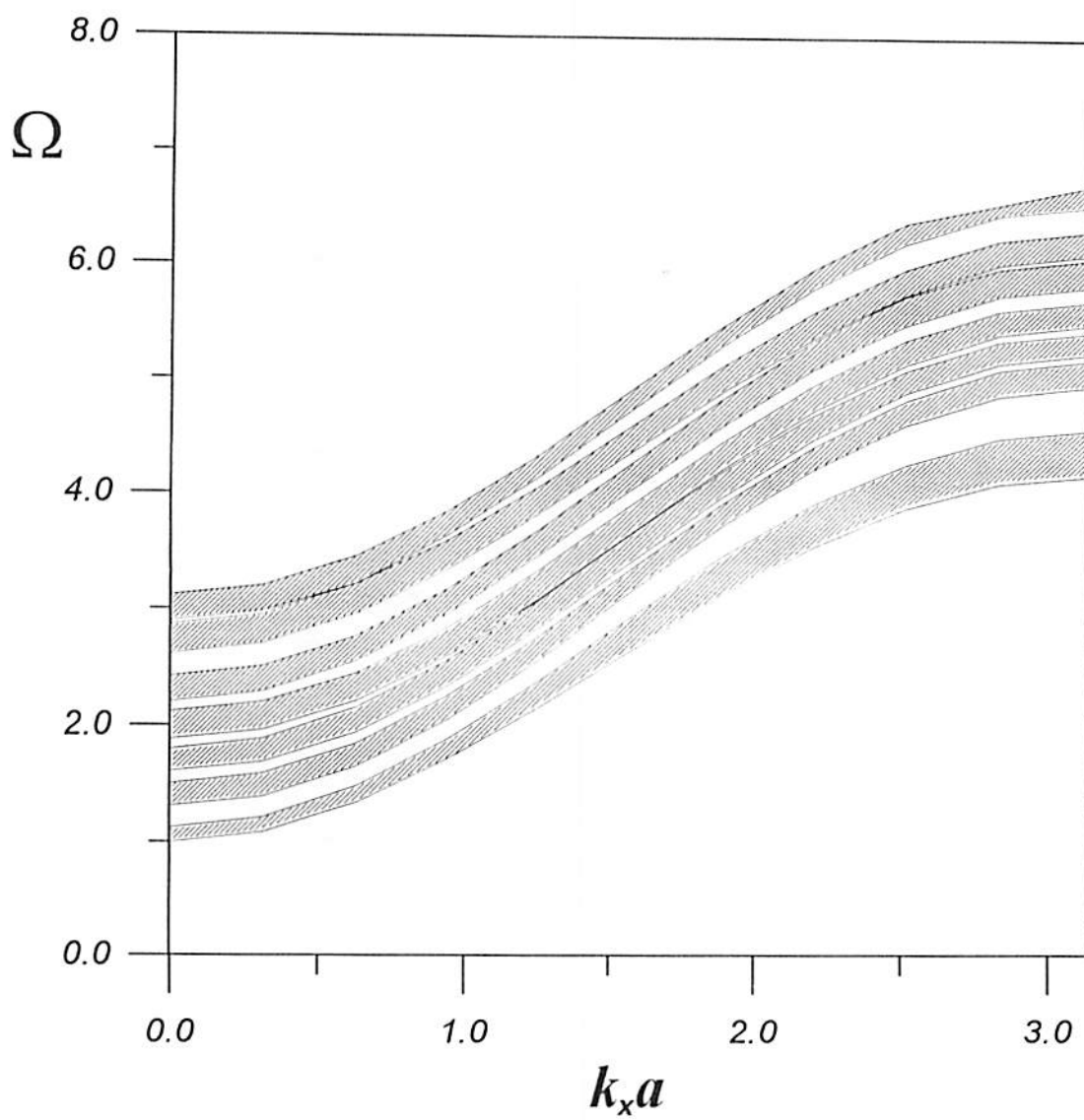


Fig. 3.5-d. Mesmo que a figura anterior. Os parâmetros físicos são  $n_1 = 10$ ,  $n_2 = 6$ ,  $S_A = 1.0$ ,  $S_B = 1.5$ ,  $J_{AB} = 2.0$ ,  $I_A = 1.2$ ,  $I_B = 2.4$ ,  $H_0 J_A = 1.0$ , e  $H_0 J_B = 2.0$ .



Nas figs. 3.6-a até 3.6-d vemos a relação de dispersão  $\Omega$  versus  $QD$ . As curvas correspondem às soluções da eq. (3.35) (ou 3.37), e são obtidas para um valor de  $k_x$  fixo. Analogamente ao caso anterior, ao se aumentar o valor de  $k_x$ , nota-se um aumento no nº de "ramos", e uma diminuição do espaçamento entre eles.

Neste caso nota-se claramente o espectro tipo "zig-zag" para as ondas de spin. A razão destas curvas reside no fato de que a 1ª zona de Brillouin da super-rede é "dobrada" em relação às 1ªs zonas de Brillouin dos seus constituintes. Isto ocorre porque na super-rede o limite da 1ª zona é dado por  $Q = \pi / (n_1 + n_2)a$ , bem menor que os valores  $Q = \pi / n_1 a$  e  $Q = \pi / n_2 a$  encontrado no caso dos constituintes. Este "dobramento" da zona de Brillouin é também responsável pelos "gaps" entre as curvas permitidas.

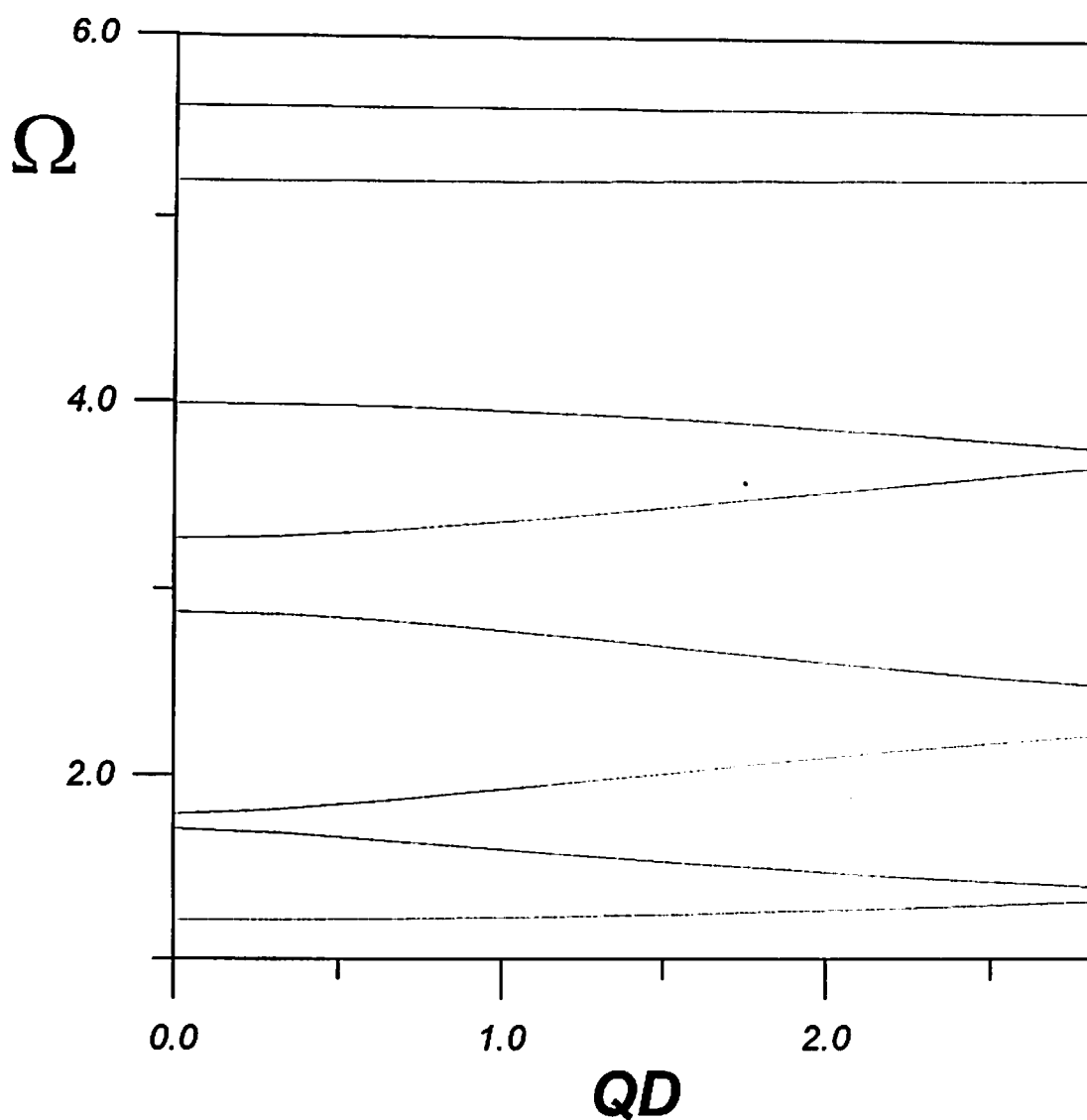


Fig. 3.6-a. Relação de dispersão  $\Omega$  versus  $QD$  para os modos de volume em uma super-rede sem campo de anisotropia. Os parâmetros físicos são  $k_x = 0.1$ ,  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 5$ ,  $S_A = 1.0$ ,  $S_B = 1.5$ ,  $J_{AB} = 2.0$ ,  $I_A = 1.2$ ,  $I_B = 2.4$ ,  $H_0 J_A = 1.0$ , e  $H_0 J_B = 2.0$ .

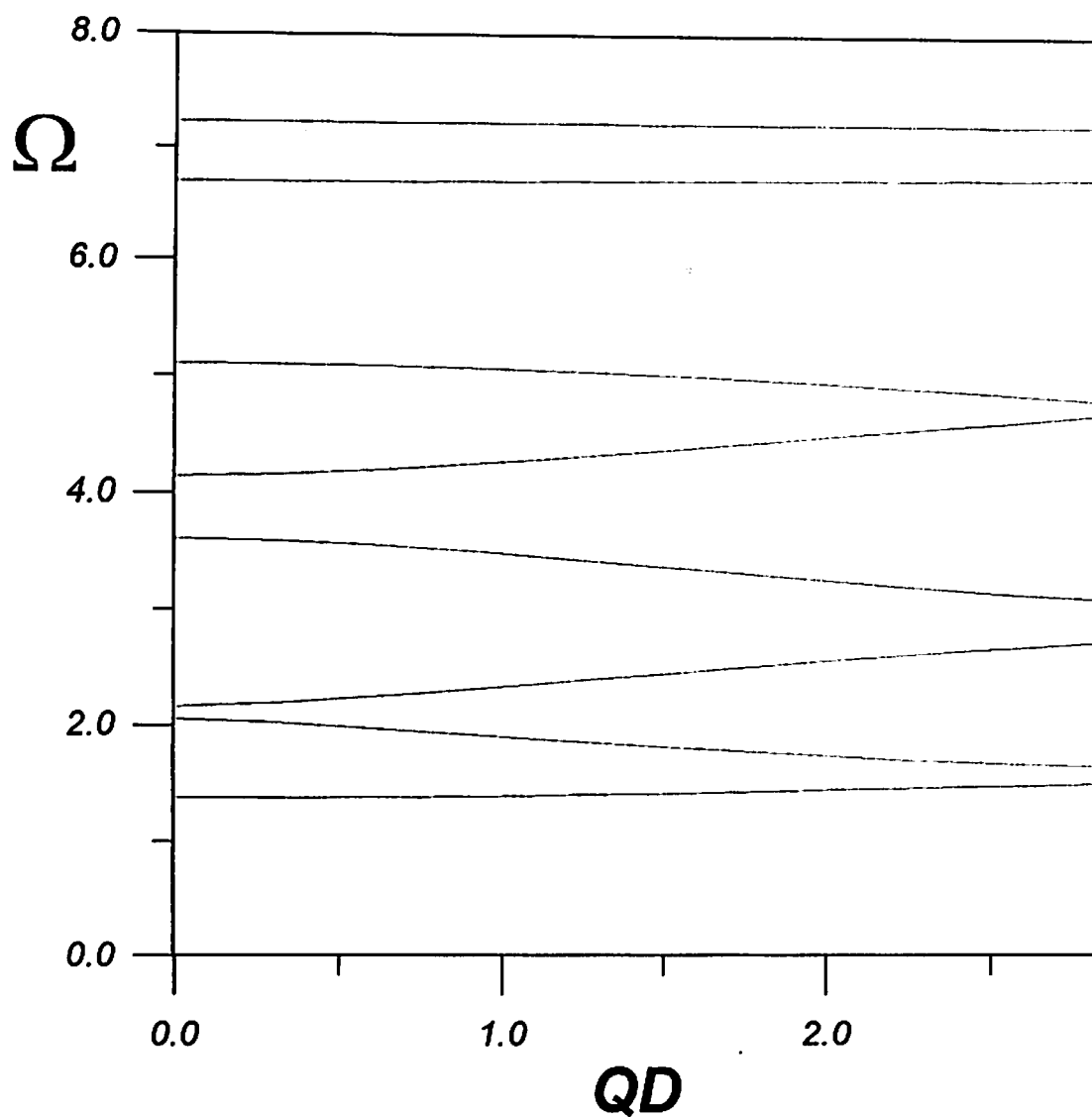


Fig. 3.6-b. Mesmo que a figura anterior. Os parâmetros físicos são  $k_x = 0.2$ ,  $n_1 = 5$ ,  $n_2 = 3$ ,  $S_A = 1.5$ ,  $S_B = 1.0$ ,  $J_{AB} = 0.5$ ,  $I_A = 2.4$ ,  $I_B = 1.2$ ,  $H_0 J_A = 2.0$ , e  $H_0 J_B = 1.0$ .

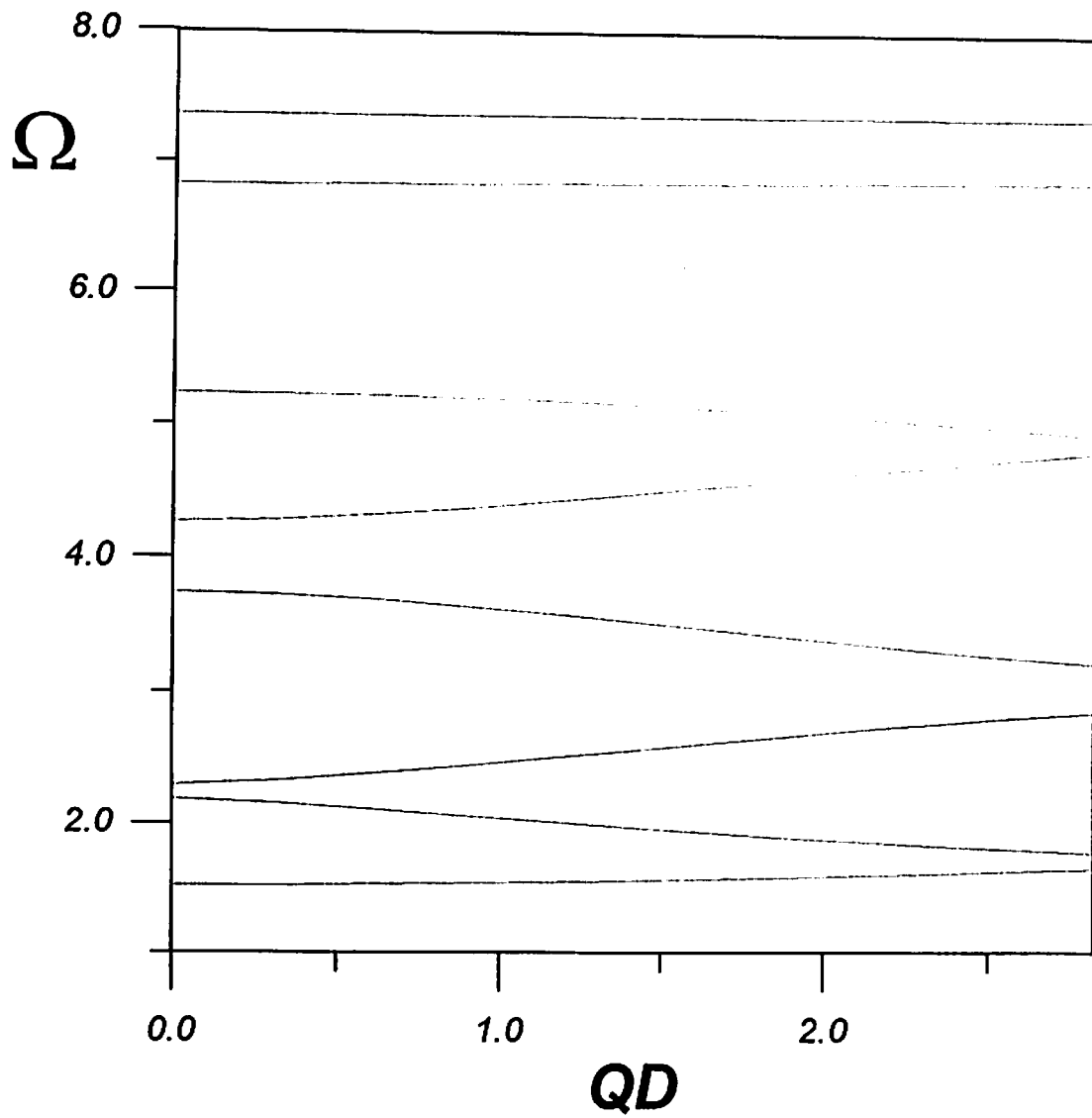


Fig. 3.6-c. Mesmo que a figura anterior. Os parâmetros físicos são  $k_x = 0.4$ ,  $n_1 = 5$ ,  $n_2 = 3$ ,  $S_A = 1.5$ ,  $S_B = 1.0$ ,  $J_{AB} = 0.5$ ,  $I_A = 2.4$ ,  $I_B = 1.2$ ,  $H_0 J_A = 2.0$ , e  $H_0 J_B = 1.0$ .

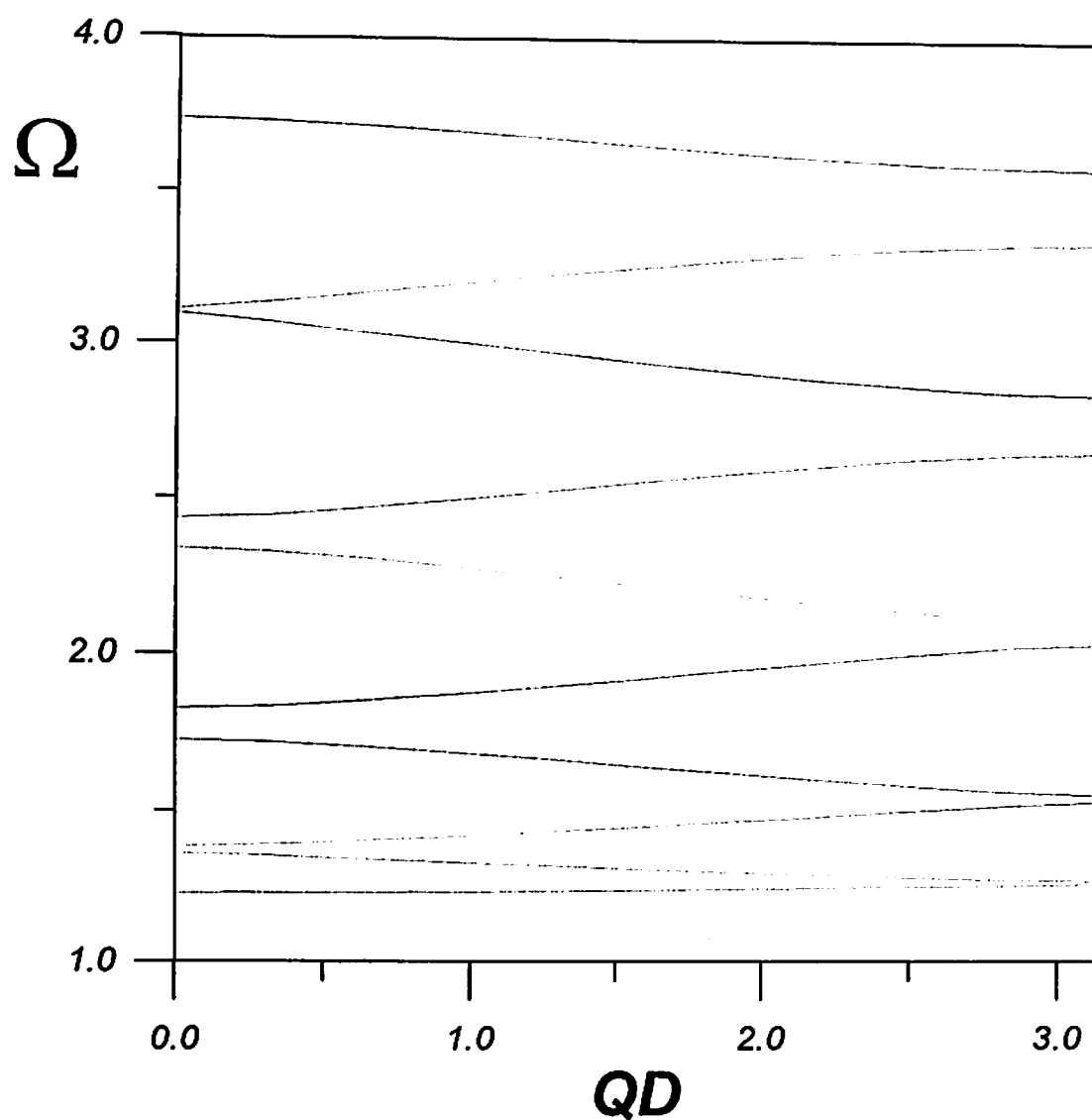


Fig. 3.6-d. Mesmo que a figura anterior. Os parâmetros físicos são  $k_x = 0.5$ ,  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 3$ ,  $S_A = 1.0$ ,  $S_B = 1.5$ ,  $J_{AB} = 2.0$ ,  $I_A = 1.2$ ,  $I_B = 2.4$ ,  $H_0 J_A = 1.0$ , e  $H_0 J_B = 2.0$ .

### 3.5.2 Modos de superfície

Nas figs. 3.7-a e 3.7-b podemos ver a relação de dispersão  $\Omega$  versus  $k_x a$  referente aos modos de superfície para o caso sem relaxação, tratado na seção 3.4.1. Aqui, como no caso com relaxação, não faz sentido se falar em "bandas" de superfície, pois os modos de superfície existem entre as bandas de volume, podendo surgir de uma destas bandas ou terminar em uma delas.

Nas figs. 3.7-c e 3.7-d temos o espectro das ondas de spin, modos de superfície, para o caso com relaxação. Os parâmetros físicos são os mesmos das figs. 3.7-a e 3.7-b, respectivamente. Comparando estas figuras com as que não apresentam relaxação, nota-se claramente uma mudança qualitativa no comportamento destas curvas. Além disso, todos os modos de superfície apresentados aqui são *reais*, isto é, eles existem mesmo que  $k_x \rightarrow \infty$ .

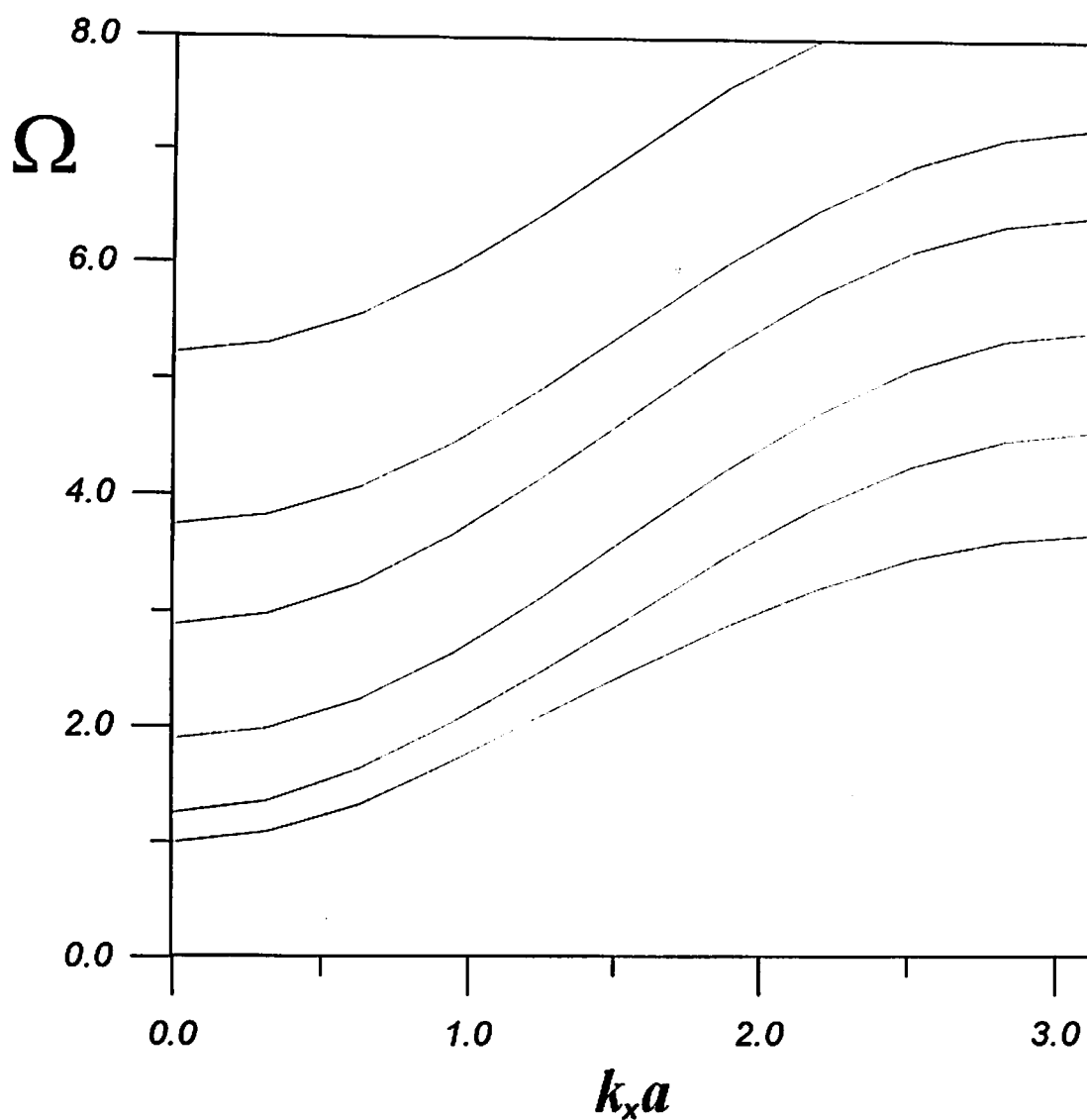


Fig. 3.7-a. Relação de dispersão  $\Omega$  versus  $k_x a$  para os modos de superfície sem relaxação em uma super-rede sem campo de anisotropia. Os parâmetros físicos são os mesmos da fig. 3.5-a, com o parâmetro adicional  $J_{0A} = 0.5$ .

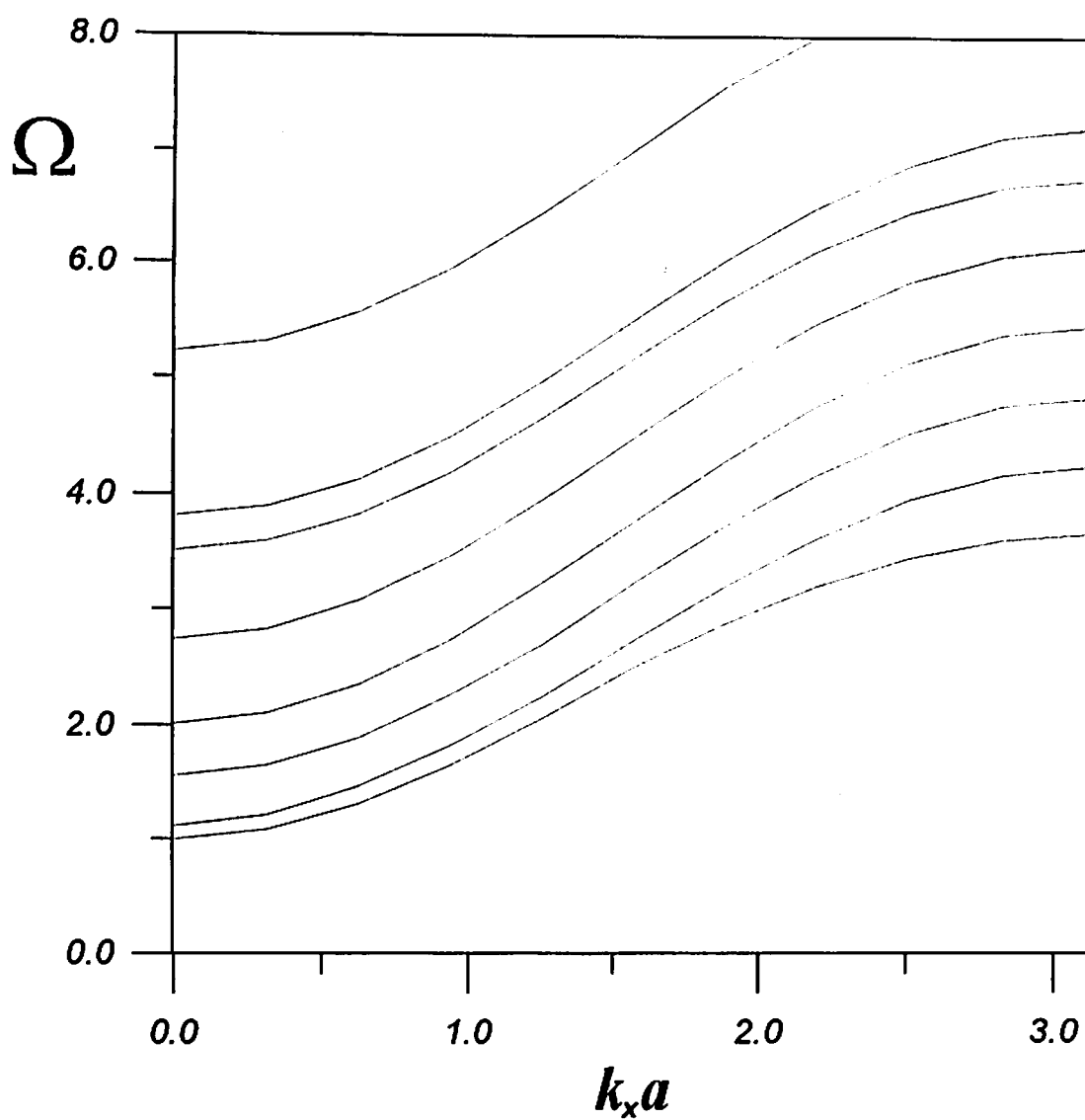


Fig. 3.7-b. Mesmo que a figura anterior. Os parâmetros físicos são os mesmos da fig. 3.5-c, com o parâmetro adicional  $XJ_{0A} = 0.5$ .



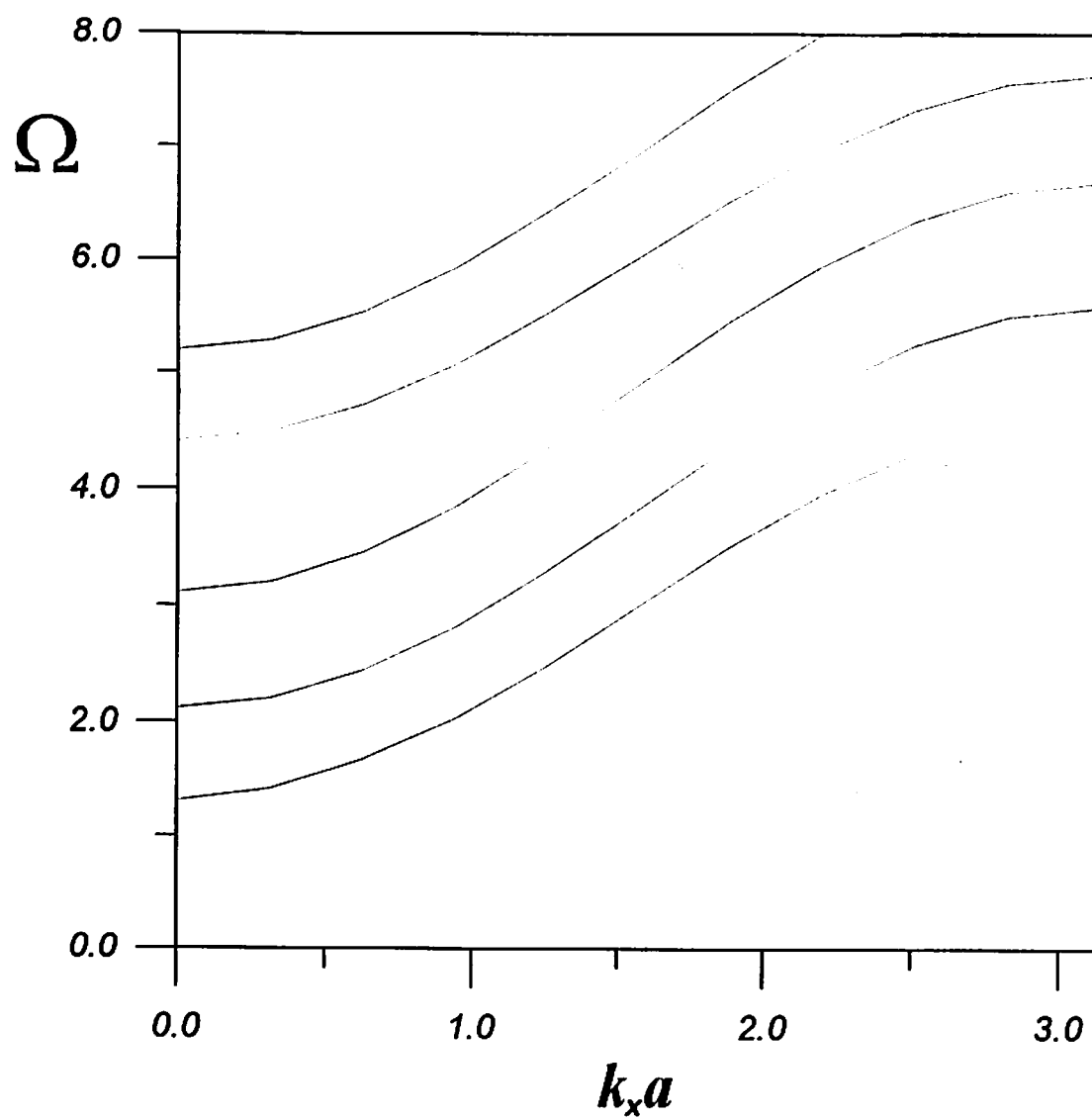


Fig. 3.7-c. Relação de dispersão  $\Omega$  versus  $k_x a$  para os modos de superfície com relaxação em uma super-rede sem campo de anisotropia. Os parâmetros físicos são os mesmos da fig. 3.7-a.

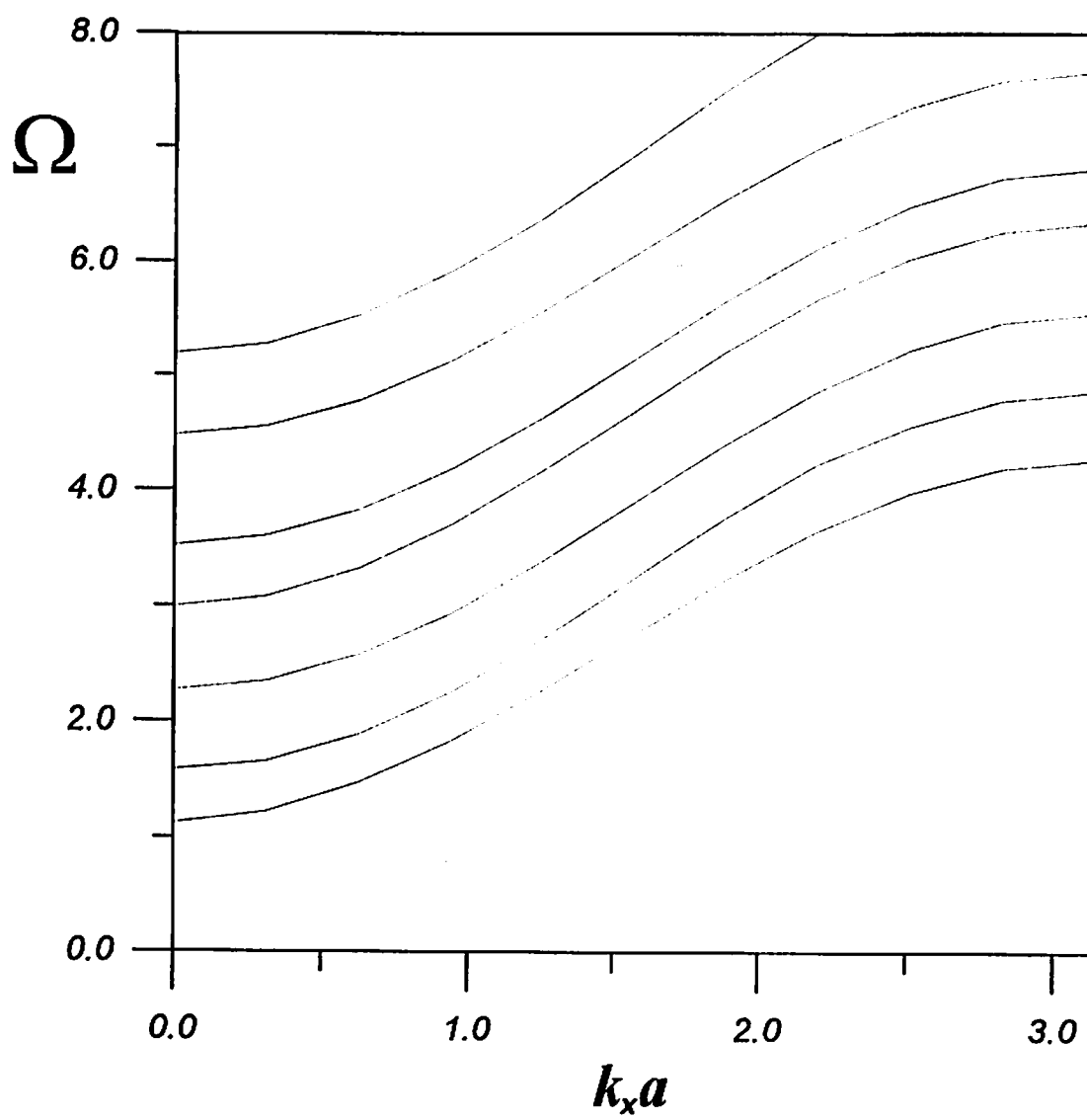


Fig. 3.7-d. Mesmo que a figura anterior. Os parâmetros físicos são os mesmos da fig. 3.7-b.

Neste capítulo nós obtivemos as relações de dispersão relativas aos modos de volume e superfície para uma super-rede ferromagnética, onde se considera apenas o regime de "troca direta". O estudo é feito considerando no Hamiltoniano do sistema apenas este termo de troca e o termo Zeeman. A obtenção dos modos de superfície é uma extensão da ref. 4, onde foram obtidos apenas os modos de volume. No próximo capítulo consideraremos o caso mais geral de uma super-rede descrita por um Hamiltoniano com campo de anisotropia, além é claro dos dois termos aqui considerados. Os campos de anisotropia a serem considerados são de dois tipos, a saber: as anisotropias do tipo *uniaxial* e *não-uniaxial*. No espectro obtido das ondas de spin consideraremos os modos de volume e superfície, estendendo e generalizando os resultados encontrados na ref. 5.

# 4

## *Super-rede ferromagnética com campo de anisotropia uniaxial e não- uniaxial.*

---

### *4.1 Introdução*

Nos capítulos anteriores tratamos de sistemas ferromagnéticos (meio infinito e super-rede) onde usamos modelos descritos por Hamiltonianos onde somente os termos de troca e Zeeman estavam presentes.

Sabemos no entanto que, dependendo da constituição do material e/ou dos parâmetros que se deseja estudar, os campos de anisotropia têm importância suficiente para não serem desprezados. Estas anisotropias podem ser de dois tipos: *uniaxial* (ou seja, na direção de um eixo preferencial que denotamos de eixo  $z$ ) ou *não-uniaxial* (ou seja, perpendicular ao eixo preferencial – no nosso caso o plano  $xy$ ). Embora a maioria dos materiais magnéticos possua pelo menos a anisotropia uniaxial, existem materiais que possuem além dela a anisotropia não-uniaxial. Exemplos destes são o ferromagneto  $\text{CrBr}_3$  e o antiferromagneto  $\text{NiO}$ .

Neste capítulo iremos tratar do modelo onde se incluem estas anisotropias para os modos de volume e superfície em super-redes. Isto é feito considerando termos adicionais no Hamiltoniano. Trabalhos semelhantes já foram realizados usando o

método da função de Green para os modos de volume [49-51] e superfície [48] em ferromagnetos de Heisenberg, e usando a equação semi-clássica de torque [52] para super-redes ferromagnéticas.

Como nos demais capítulos, todos os cálculos são desenvolvidos considerando  $T \ll T_c$ , e no regime de troca direta, usando o formalismo da matriz transferência.

## ***4.2 Modelo teórico***

Vamos agora à descrição do nosso modelo. A geometria da super-rede é a mesma mostrada na figura 3.1. Como no capítulo 3, a nossa super-rede é composta de dois materiais ferromagnéticos  $A$  e  $B$  de estrutura cúbica simples, tendo cada um  $n_1$  e  $n_2$  camadas atômicas, respectivamente. Desta forma o tamanho da célula unitária da super-rede é  $D = (n_1 + n_2)a$ , onde  $a$  é o parâmetro de rede (o mesmo em cada material). Consideramos aqui somente interações de troca entre 1<sup>os</sup> vizinhos, iguais a  $J_A$  e  $J_B$ , respectivamente.

Os dois materiais são caracterizados no volume pelos parâmetros de anisotropia  $D_A$  e  $D_B$  (para o termo uniaxial ou "easy-axis") e por  $F_A$  e  $F_B$  (para o termo não-uniaxial, ou "easy-plane"). Na interface  $A-B$ , estes parâmetros podem ser modificados para  $D_{sv}$  e  $F_{sv}$  ( $J=A,B$ ), e a interação de troca nesta interface é igual a  $I$ .

Deste modo, o Hamiltoniano toma a forma:

$$H = -\frac{I}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - g\mu_B H_0 \sum_i S_i^z - \sum_i D_i (S_i^z)^2 - \sum_i F_i [(S_i^x)^2 - (S_i^y)^2] \quad (4.1)$$

De posse do operador Hamiltoniano, iremos calcular os modos de volume e superfície deste sistema anisotrópico.

### 4.2.1 Modos de volume

A equação de movimento para o operador  $S_i^\pm = S_i^x \pm iS_i^y$  em qualquer sítio do volume do material A (ou B) é:

$$i\hbar \frac{\partial S_i^\pm}{\partial t} = [S_i^\pm, H]. \quad (4.2)$$

Usando (4.1) em (4.2), juntamente com as devidas relações de comutação, chegamos ao resultado

$$(\pm\hbar\omega - \Delta)S_i^\pm = S \sum_j J_{ij}(S_i^\pm - S_j^\pm) - 2FS\eta^{1/2}S_i^\mp \quad (4.3)$$

onde  $\Delta = g\mu_B H_0 + 2DS\eta$ . Aqui introduzimos o fator  $\eta = 1 - 1/2S$ , que surge devido à linearização dos termos de anisotropia, ao usarmos a transformação de Holstein-Primakoff diretamente no Hamiltoniano [53], e  $S$  pode ter os valores  $S_A$  e  $S_B$  nos materiais A e B, respectivamente. De (4.3) vemos que ao considerarmos o termo de anisotropia não-uniaxial, surge um acoplamento entre as variáveis de spin  $S^+$  e  $S^-$ , fato que não ocorreu quando tratamos do caso sem anisotropia (cap. 3).

Resolvendo a eq. (4.3) diretamente, para o caso de um material *infinito* (modos de volume), chegamos a:

$$\frac{\hbar\omega - \Delta}{2S}S_i^+ = \Gamma S_i^+ - F\eta^{1/2}S_i^- \quad (4.4-a)$$

$$\frac{-\hbar\omega - \Delta}{2S}S_i^- = \Gamma S_i^- - F\eta^{1/2}S_i^+ \quad (4.4-b)$$

onde  $\Gamma = 3 - \gamma(\vec{k}_p) - \cos(k_x a)$  e  $\gamma(\vec{k}_p) = \cos(k_x a) + \cos(k_y a)$ , com  $\vec{k}_p = (k_x, k_y)$ . Definindo

$\Omega = \frac{\hbar\omega}{JS}$ , obtemos, de (4.4-a) e (4.4-b):

$$\cos(k_x a) = \frac{\Delta}{2JS} + 3 - \gamma(k_p) \pm \left[ \left( \frac{\Omega}{2} \right)^2 + \frac{F^2 \eta}{J^2} \right]^{1/2} \quad (4.5)$$

que é a relação de dispersão dos magnons que se propagam no volume de um ferromagneto não-uniaxial. Os sinais  $\pm$  dão origem a duas soluções ( $k_1$  e  $k_2$ ) para  $k_z$ .

Voltemos agora à super-rede. Existe ainda uma simetria translacional no plano  $xy$ , de forma que as soluções nesta direção são proporcionais a  $\exp[\pm i\vec{k}_p \cdot \vec{r}_p]$ , com  $\vec{r}_p = (x, y)$ . É natural então procurarmos soluções do tipo onda plana na direção  $z$ , considerando as duas soluções acima citadas. Definindo:

$$\begin{cases} S_i^+ = A_i e^{ik_1 z} + B_i e^{-ik_1 z} - \frac{F\eta^{1/2}}{J} (C_i e^{ik_2 z} + D_i e^{-ik_2 z}) \\ S_i^- = -\frac{F\eta^{1/2}}{J} (A_i' e^{ik_1 z} + B_i' e^{-ik_1 z}) + C_i' e^{ik_2 z} + D_i' e^{-ik_2 z} \end{cases} \quad (4.6)$$

e usando estas expressões em (4.3) para um sítio qualquer no meio A ou B, temos ( $J=A,B$ ):

$$\begin{aligned} A_i' &= Q_{11} A_i ; B_i' = Q_{11} B_i \\ C_i' &= Q_{21} C_i ; D_i' = Q_{21} D_i \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde

$$Q_{11} = -\frac{1}{Q_{21}} = \frac{-2}{\Omega_1 + (\Omega_1^2 + 4F_{11}^2)^{1/2}} \quad (4.8)$$

e

$$F_{11} = \frac{F_1 \eta_1^{1/2}}{J_1} ; \Omega_1 = \frac{\hbar \omega}{J_1 S_1} \quad (4.9)$$



desta forma, as equações (4.6) ficam :

$$\begin{cases} S_U^+ = A_1^n e^{ik_{1J}z} + B_1^n e^{-ik_{1J}z} - F_{JJ}(C_1^n e^{ik_{2J}z} + D_1^n e^{-ik_{2J}z}) \\ S_U^- = -Q_{1J}F_{JJ}(A_1^n e^{ik_{1J}z} + B_1^n e^{-ik_{1J}z}) + Q_{2J}(C_1^n e^{ik_{2J}z} + D_1^n e^{-ik_{2J}z}) \end{cases} \quad (4.10)$$

onde aqui suprimimos por conveniência o fator temporal comum  $\exp(-i\omega t)$ , e  $n$  se refere ao número da célula da super-rede. Aqui,  $k_{1J}$  e  $k_{2J}$  são relacionados com  $\Omega_J$  através da eq. (4.5). As soluções (4.10) generalizam as expressões (3.6), onde os termos de anisotropia não estão presentes.

Vamos agora, de posse das soluções (4.10), estudar a propagação de magnons na super-rede, considerando a presença de  $F_J$ ,  $D_J$ ,  $F_{SJ}$  e  $D_{SJ}$  ( $J = A, B$ ). Devido ao acoplamento entre  $S_U^+$  e  $S_U^-$ , é necessário calcular separadamente a equação de movimento para cada um destes operadores nas camadas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ , mostradas na fig. 3.1.

Para  $S_i^+$ , no meio  $A$ , a equação de movimento na camada  $\alpha$  fica:

$$\begin{aligned} &(\bar{\lambda}_{1\Lambda} + 2Q_{1\Lambda}F_{\Lambda\Lambda}F'_{S\Lambda})A_1\bar{f}_{1\Lambda}t_{1\Lambda} + (\lambda_{1\Lambda} + 2Q_{1\Lambda}F_{\Lambda\Lambda}F'_{S\Lambda})B_1f_{1\Lambda}\bar{t}_{1\Lambda} - (\bar{\lambda}_{2\Lambda}F_{\Lambda\Lambda} + 2Q_{2\Lambda}F'_{S\Lambda})C_1\bar{f}_{2\Lambda}t_{2\Lambda} \\ & - (\lambda_{2\Lambda}F_{\Lambda\Lambda} + 2Q_{2\Lambda}F'_{S\Lambda})D_1f_{2\Lambda}\bar{t}_{2\Lambda} = XI_{\Lambda}S_{B\Lambda}[A_2 + B_2 - F_{B\Lambda}(C_2 + D_2)] \end{aligned} \quad (4.11)$$

enquanto que para  $S_i^-$ :

$$\begin{aligned} &-(\bar{\lambda}'_{1\Lambda}Q_{1\Lambda}F_{\Lambda\Lambda} + 2F'_{S\Lambda})A_1\bar{f}_{1\Lambda}t_{1\Lambda} - (\lambda'_{1\Lambda}Q_{1\Lambda}F_{\Lambda\Lambda} + 2F'_{S\Lambda})B_1f_{1\Lambda}\bar{t}_{1\Lambda} + (\bar{\lambda}'_{2\Lambda}Q_{2\Lambda} + 2F'_{S\Lambda}F_{\Lambda\Lambda})C_1\bar{f}_{2\Lambda}t_{2\Lambda} \\ & + (\lambda'_{2\Lambda}Q_{2\Lambda} + 2F'_{S\Lambda}F_{\Lambda\Lambda})D_1f_{2\Lambda}\bar{t}_{2\Lambda} = XI_{\Lambda}S_{B\Lambda}[-Q_{B\Lambda}F_{B\Lambda}(A_2 + B_2) + Q_{2B}(C_2 + D_2)] \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde (J=A, B ; j=1, 2):

$$\bar{\lambda}_{1j} = XI_j - (1 - f_{1j}) - [\Omega_j - \sqrt{\Omega_j^2 + 4F_{1j}^2}] \quad (4.13)$$

$$\bar{\lambda}_{2j} = XI_j - (1 - f_{2j}) - 2Q_{2j} \quad (4.14)$$

$$\bar{\lambda}'_{1j} = XI_j - (1 - f_{1j}) + 2Q_{2j} \quad (4.15)$$

$$\bar{\lambda}'_{2j} = XI_j - (1 - f_{2j}) + [\Omega_j - \sqrt{\Omega_j^2 + 4F_{1j}^2}] \quad (4.16)$$

$$XI_j = I / J_j \quad (4.17)$$

$$S_{BA} = 1 / S_{AB} = S_B / S_A \quad (4.18)$$

$$F'_{sj} = F_{sj} \eta_j^{1/2} / J_j \quad (4.19)$$

$$f_{j1} = \exp(ik_{j1}a) \quad (4.20)$$

$$t_{j1} = (f_{j1})^{n_j} = \exp(in_j k_{j1}a) \quad (4.21)$$

$$\bar{f}_{j1} = 1 / f_{j1} ; \bar{t}_{j1} = 1 / t_{j1} \quad (4.22)$$

As equações de movimento nas camadas  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  têm forma semelhante. O desenvolvimento dos cálculos é análogo ao do capítulo 3. Nas camadas  $\alpha$  e  $\beta$  (veja fig. 3.1), estas equações relacionam as amplitudes  $A_1''$ ,  $B_1''$ ,  $C_1''$ ,  $D_1''$  do meio A com as correspondentes amplitudes  $A_2''$ ,  $B_2''$ ,  $C_2''$ ,  $D_2''$  do meio B. Também as equações de movimento nas camadas  $\gamma$  e  $\delta$  relacionam  $A_1^{n+1}$ ,  $B_1^{n+1}$ ,  $C_1^{n+1}$ ,  $D_1^{n+1}$  com  $A_2''$ ,  $B_2''$ ,  $C_2''$ ,  $D_2''$ . Se definirmos os vetores-coluna

$$|A''\rangle = \begin{bmatrix} A_1'' \\ B_1'' \\ C_1'' \\ D_1'' \end{bmatrix} ; |B''\rangle = \begin{bmatrix} A_2'' \\ B_2'' \\ C_2'' \\ D_2'' \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

e

$$|A^{n+1}\rangle = \begin{bmatrix} A_1^{n+1} \\ B_1^{n+1} \\ C_1^{n+1} \\ D_1^{n+1} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

as equações de movimento (4.11), (4.12), assim como as demais equações nas camadas das interfaces podem se escritas em forma matricial como:

$$M_A |A^n\rangle = N_B |A^{n+1}\rangle \quad (4.25-a)$$

$$M_B |B^n\rangle = N_A |A^{n+1}\rangle \quad (4.25-b)$$

Com as equações acima e o *ansatz* de Bloch, definido anteriormente, temos:

$$T |A^n\rangle = e^{iQ_L} |A^n\rangle \quad (4.26)$$

onde a matriz T (agora 4x4) é definida por:

$$T = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A \quad (4.27)$$

e as matrizes  $M_J$  e  $N_J$  ( $J=A,B$ ) são:

$$M_A = \begin{bmatrix} (\bar{\lambda}_{1A} + y_{1A})x_{1A} & (\lambda_{1A} + y_{1A})\bar{x}_{1A} & -(\bar{\lambda}_{2A}F_{AA} + \frac{y_{2A}}{F_{AA}})x_{2A} & -(\lambda_{2A}F_{AA} + \frac{y_{2A}}{F_{AA}})\bar{x}_{2A} \\ XI_B S_{AB} x_{1A} & XI_B S_{AB} \bar{x}_{1A} & -XI_B S_{AB} F_{AA} x_{2A} & -XI_B S_{AB} F_{AA} \bar{x}_{2A} \\ -(\bar{\lambda}'_{1A} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_{SA})x_{1A} & -(\lambda'_{1A} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_{SA})\bar{x}_{1A} & (\bar{\lambda}_{2A} Q_{2A} + \frac{y_{2A}}{Q_{2A}})x_{2A} & (\lambda'_{2A} Q_{2A} + \frac{y_{2A}}{Q_{2A}})\bar{x}_{2A} \\ -XI_B S_{AB} Q_{1A} F_{AA} x_{1A} & -XI_B S_{AB} Q_{1A} F_{AA} \bar{x}_{1A} & XI_B S_{AB} Q_{2A} x_{2A} & XI_B S_{AB} Q_{2A} \bar{x}_{2A} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$N_B = \begin{bmatrix} XI_A S_{BA} & XI_A S_{BA} & -XI_A S_{BA} F_{BB} & -XI_A S_{BA} F_{BB} \\ \lambda_{1B} + y_{1B} & \bar{\lambda}_{1B} + y_{1B} & -(\lambda_{2B} F_{BB} + \frac{y_{2B}}{F_{BB}}) & -(\bar{\lambda}_{2B} F_{BB} + \frac{y_{2B}}{F_{BB}}) \\ -XI_A S_{BA} Q_{1B} F_{BB} & -XI_A S_{BA} Q_{1B} F_{BB} & XI_A S_{BA} Q_{2B} & XI_A S_{BA} Q_{2B} \\ -(\lambda'_{1B} Q_{1B} F_{BB} + 2F'_{SB}) & -(\bar{\lambda}'_{1B} Q_{1B} F_{BB} + 2F'_{SB}) & (\lambda'_{2B} Q_{2B} + \frac{y_{2B}}{Q_{2B}}) & (\bar{\lambda}'_{2B} Q_{2B} + \frac{y_{2B}}{Q_{2B}}) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$M_B = \begin{bmatrix} (\bar{\lambda}_{1B} + y_{1B})x_{1B} & (\lambda_{1B} + y_{1B})\bar{x}_{1B} & -(\bar{\lambda}_{2B} F_{BB} + \frac{y_{2B}}{F_{BB}})x_{2B} & -(\lambda_{2B} F_{BB} + \frac{y_{2B}}{F_{BB}})\bar{x}_{2B} \\ XI_A S_{BA} x_{1B} & XI_A S_{BA} \bar{x}_{1B} & -XI_A S_{BA} F_{BB} x_{2B} & -XI_A S_{BA} F_{BB} \bar{x}_{2B} \\ -(\bar{\lambda}'_{1B} Q_{1B} F_{BB} + 2F'_{SB})x_{1B} & -(\lambda'_{1B} Q_{1B} F_{BB} + 2F'_{SB})\bar{x}_{1B} & (\bar{\lambda}'_{2B} Q_{2B} + \frac{y_{2B}}{Q_{2B}})x_{2B} & (\lambda'_{2B} Q_{2B} + \frac{y_{2B}}{Q_{2B}})\bar{x}_{2B} \\ -XI_A S_{BA} Q_{1B} F_{BB} x_{1B} & -XI_A S_{BA} Q_{1B} F_{BB} \bar{x}_{1B} & XI_A S_{BA} Q_{2B} x_{1B} & XI_A S_{BA} Q_{2B} \bar{x}_{1B} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$N_A = \begin{bmatrix} XI_B S_{AB} & XI_B S_{AB} & -XI_B S_{AB} F_{AA} & -XI_B S_{AB} F_{AA} \\ \lambda_{1A} + y_{1A} & \bar{\lambda}_{1A} + y_{1A} & -(\lambda_{2A} F_{AA} + \frac{y_{2A}}{F_{AA}}) & -(\bar{\lambda}_{2A} F_{AA} + \frac{y_{2A}}{F_{AA}}) \\ -XI_B S_{AB} Q_{1A} F_{AA} & -XI_B S_{AB} Q_{1A} F_{AA} & XI_B S_{AB} Q_{2B} & XI_B S_{AB} Q_{2A} \\ -(\lambda'_{1A} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_{SA}) & -(\bar{\lambda}'_{1A} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_{SA}) & (\lambda'_{2A} Q_{2A} + \frac{y_{2A}}{Q_{2A}}) & (\bar{\lambda}'_{2A} Q_{2A} + \frac{y_{2A}}{Q_{2A}}) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

aqui,

$$x_{jj} = \bar{f}_{jj} t_{jj} = \frac{1}{\bar{x}_{jj}} \quad ; \quad y_{jj} = 2F'_{SA} Q_{jj} F_{jj} \quad (4.32)$$

Pode-se demonstrar, através de cálculo direto (mas tedioso), que o  $\det(T)=1$  também neste caso. Devido a isto, os autovalores da eq. (4.6) ocorrem aos pares  $(t_i, t_i^{-1})$ ,  $i = 1, 2$ , e são relacionados aos dois vetores de onda de Bloch  $Q_i$  por  $t_i = \exp(iQ_i L)$ . Desta forma, se a matriz  $T$  é conhecida, os autovalores podem ser determinados da maneira padrão, isto é, eles são soluções da *equação secular*:

$$\det[\tilde{T} - t_i \tilde{I}] = 0 \quad (4.33-a)$$

o que nos dá:

$$\begin{bmatrix} T_{11} - t_1 & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} - t_1^{-1} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - t_2 & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} - t_2^{-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.33-b)$$

Na seção 4.4 apresentaremos exemplos numéricos da equação acima.

## 4.2.2 Modos de superfície.

Nesta seção calcularemos os modos de superfície relativos ao sistema com anisotropia, considerando-se novamente, como no cap. 3, os dois casos distintos: *sem* e *com relaxação*. Para tanto, usaremos o mesmo formalismo da seção 3.4.

### 4.2.2.1 Caso sem relaxação.

Considere a geometria descrita na figura 4.1. No plano  $\xi_0$ , a interação de troca entre 1<sup>os</sup> vizinhos é  $J_0$ , tendo o valor  $J$  nas demais camadas. Como demonstrado, a equação de movimento é:

$$(\pm\hbar\omega - \Delta)S_i^\pm = S \sum_j J_{ij}(S_i^\pm - S_j^\pm) - 2FS\eta'^{1/2}S_i^\mp \quad (4.34)$$

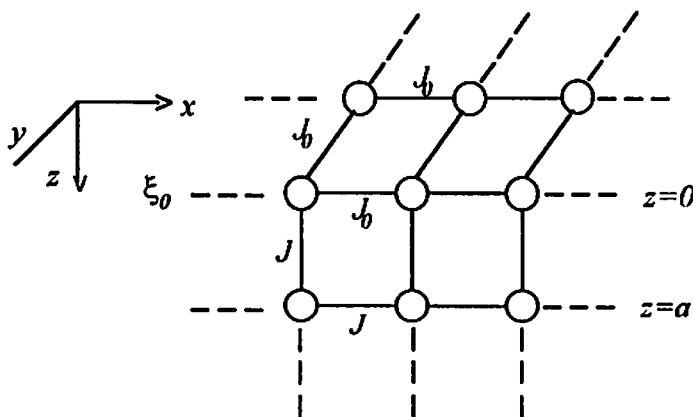


Fig. 4.1. Modelo sem relaxação.

onde (J=A,B):  $\Delta_J = g\mu_B H_0 + 2D_J S_J \eta_J$  ;  $\eta_J = 1 - 1/2S_J$ . Aqui, o parâmetro  $F$  assume o valor  $F_{S0}$  na superfície. As soluções de (4.32) são:

$$S_i^+ = A_0 e^{ik_{1A}z} + B_0 e^{-ik_{1A}z} - F_{AA} (C_0 e^{ik_{2A}z} + D_0 e^{-ik_{2A}z}) \quad (4.35-a)$$

$$S_i^- = -Q_{1A} F_{AA} (A_0 e^{ik_{1A}z} + B_0 e^{-ik_{1A}z}) + Q_{2A} (C_0 e^{ik_{2A}z} + D_0 e^{-ik_{2A}z}) \quad (4.35-b)$$

usando (4.35-a) em (4.34), na camada  $\xi_0$  ( $z=0$ ), temos:

$$(\lambda_{10} + 2F'_0 Q_{1A} F_{AA}) A_0 + (\bar{\lambda}_{10} + 2F'_0 Q_{1A} F_{AA}) B_0 - (\lambda_{20} F_{AA} + 2F'_0 Q_{2A}) C_0 - (\bar{\lambda}_{20} F_{AA} + 2F'_0 Q_{2A}) D_0 = 0 \quad (4.36)$$

onde

$$F'_0 = \frac{F_{S0} \eta_A^{1/2}}{J_0} \quad (4.37)$$

e

$$\lambda_{i0} = \frac{-\hbar\omega + \Delta}{S_A J_0} + (4 - 2\gamma_k) + \frac{J}{J_0} (1 - f_u) ; i = 1, 2 \quad (4.38)$$

Agora, para  $S_i^-$ , chegamos a:

$$\begin{aligned}
& -(\lambda'_{10} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_0) A_0 - (\bar{\lambda}'_{10} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_0) B_0 + (\lambda'_{20} Q_{2A} + 2F'_0 F_{AA}) C_0 \\
& + (\bar{\lambda}'_{20} Q_{2A} + 2F'_0 F_{AA}) D_0 = 0
\end{aligned} \tag{4.39}$$

onde

$$\lambda'_{10} = \lambda_{10} + \frac{2\hbar\omega}{S_A J_0} \tag{4.40}$$

Aqui,  $\gamma_k$  e  $f_{1A}, f_{2A}$  são como definidos anteriormente.  $\bar{\lambda}_{10}$  e  $\bar{\lambda}'_{10}$  são obtidos de  $\lambda_{10}, \lambda'_{10}$  substituindo os  $f_{1A}$  por  $\bar{f}_{1A}$ . Como só obtivemos duas equações em  $\xi_0$  é necessário que calculemos mais duas equações para resolver o problema. Na seção 4.2.1 obtivemos as equações para os modos de volume na super-rede. Se definirmos os vetores-coluna:

$$|A_0\rangle = \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{bmatrix} ; |B\rangle = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \tag{4.41-a}$$

$$|A_1\rangle = \begin{bmatrix} A_0^{(1)} \\ B_0^{(1)} \\ C_0^{(1)} \\ D_0^{(1)} \end{bmatrix} \tag{4.41-b}$$

temos que, como demonstrado anteriormente:

$$M_A |A_0\rangle = N_B |B\rangle \tag{4.42-a}$$

$$M_B |B\rangle = N_A |A_1\rangle \tag{4.42-b}$$



onde as matrizes  $M_J$ ,  $N_J$  ( $J=A,B$ ) são dadas pelas equações (4.28) a (4.31). Logo,

$$|A_1\rangle = T|A_0\rangle \quad (4.43)$$

e  $T$  é a mesma definida anteriormente. De (4.42), temos:

$$|B\rangle = N_B^{-1} M_A |A_0\rangle = \Gamma |A_0\rangle \quad (4.44)$$

onde  $\Gamma = N_B^{-1} M_A$ . Agora, escrevendo explicitamente as equações de movimento para a camada  $\gamma$ , temos:

$$\alpha_1 A_1 + \bar{\alpha}_1 B_1 - \alpha_2 C_1 - \bar{\alpha}_2 D_1 = \gamma A_0^{(1)} + \gamma B_0^{(1)} - F_{AA} \gamma C_0^{(1)} - F_{AA} \gamma D_0^{(1)} \quad (4.45)$$

e

$$-\alpha_3 A_1 - \bar{\alpha}_3 B_1 + \alpha_4 C_1 + \bar{\alpha}_4 D_1 = -Q_{1A} F_{AA} \gamma A_0^{(1)} - Q_{1A} F_{AA} \gamma B_0^{(1)} + Q_{2A} \gamma C_0^{(1)} + Q_{2A} \gamma D_0^{(1)} \quad (4.46)$$

onde

$$\alpha_1 = (\bar{\lambda}_{1B} + 2F'_{SB} Q_{1B} F_{BB}) \bar{f}_{1B} t_{1B} \quad (4.47-a)$$

$$\alpha_2 = (\bar{\lambda}_{2B} F_{BB} + 2F'_{SB} Q_{2B}) \bar{f}_{2B} t_{2B} \quad (4.47-b)$$

$$\alpha_3 = (\lambda'_{1B} Q_{1B} F_{BB} + 2F'_{SB}) \bar{f}_{1B} t_{1B} \quad (4.47-c)$$

$$\alpha_4 = (\bar{\lambda}'_{2B} Q_{2B} + 2F'_{SB} F_{BB}) \bar{f}_{2B} t_{2B} \quad (4.47-d)$$

$$\gamma = X I_B S_{AB} \quad (4.48)$$

Usando agora as equações (4.43) e (4.44) em (4.45), e fatorando os termos, temos:

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \Gamma_{11} + \bar{\alpha}_1 \Gamma_{21} - \alpha_2 \Gamma_{31} - \bar{\alpha}_2 \Gamma_{41} - \gamma T_{11} - \gamma T_{21} + F_{\wedge\wedge} \gamma T_{31} + F_{\wedge\wedge} \gamma T_{41} ] A_0 + \\
& \alpha_1 \Gamma_{12} + \bar{\alpha}_1 \Gamma_{22} - \alpha_2 \Gamma_{32} - \bar{\alpha}_2 \Gamma_{42} - \gamma T_{12} - \gamma T_{22} + F_{\wedge\wedge} \gamma T_{32} + F_{\wedge\wedge} \gamma T_{42} ] B_0 + \\
& \alpha_1 \Gamma_{13} + \bar{\alpha}_1 \Gamma_{23} - \alpha_2 \Gamma_{33} - \bar{\alpha}_2 \Gamma_{43} - \gamma T_{13} - \gamma T_{23} + F_{\wedge\wedge} \gamma T_{33} + F_{\wedge\wedge} \gamma T_{43} ] C_0 + \\
& \alpha_1 \Gamma_{14} + \bar{\alpha}_1 \Gamma_{24} - \alpha_2 \Gamma_{34} - \bar{\alpha}_2 \Gamma_{44} - \gamma T_{14} - \gamma T_{24} + F_{\wedge\wedge} \gamma T_{34} + F_{\wedge\wedge} \gamma T_{44} ] D_0 \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Para a eq. (4.46), temos:

$$\begin{aligned}
& -\alpha_3 \Gamma_{11} - \bar{\alpha}_3 \Gamma_{21} + \alpha_4 \Gamma_{31} + \bar{\alpha}_4 \Gamma_{41} + Q_{1\wedge} F_{\wedge\wedge} \gamma T_{11} + Q_{1\wedge} F_{\wedge\wedge} \gamma T_{21} - Q_{2\wedge} \gamma T_{31} - Q_{2\wedge} \gamma T_{41} ] A_0 + \\
& -\alpha_3 \Gamma_{12} - \bar{\alpha}_3 \Gamma_{22} + \alpha_4 \Gamma_{32} + \bar{\alpha}_4 \Gamma_{42} + Q_{1\wedge} F_{\wedge\wedge} \gamma T_{12} + Q_{1\wedge} F_{\wedge\wedge} \gamma T_{22} - Q_{2\wedge} \gamma T_{32} - Q_{2\wedge} \gamma T_{42} ] B_0 + \\
& -\alpha_3 \Gamma_{13} - \bar{\alpha}_3 \Gamma_{23} + \alpha_4 \Gamma_{33} + \bar{\alpha}_4 \Gamma_{43} + Q_{1\wedge} F_{\wedge\wedge} \gamma T_{13} + Q_{1\wedge} F_{\wedge\wedge} \gamma T_{23} - Q_{2\wedge} \gamma T_{33} - Q_{2\wedge} \gamma T_{43} ] C_0 + \\
& -\alpha_3 \Gamma_{14} - \bar{\alpha}_3 \Gamma_{24} + \alpha_4 \Gamma_{34} + \bar{\alpha}_4 \Gamma_{44} + Q_{1\wedge} F_{\wedge\wedge} \gamma T_{14} + Q_{1\wedge} F_{\wedge\wedge} \gamma T_{24} - Q_{2\wedge} \gamma T_{34} - Q_{2\wedge} \gamma T_{44} ] D_0 \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

onde os  $\bar{\alpha}_i$  são obtidos a partir dos  $\alpha_i$ , bastando substituir os  $\bar{\lambda}_{iB}$  por  $\lambda_{iB}$ ,  $\bar{f}_{iB}$  por  $f_{iB}$ , e  $\bar{t}_{iB}$  por  $t_{iB}$ , respectivamente.

Com as equações (4.36), (4.39), (4.49) e (4.50) obtemos um sistema 4x4 homogêneo, que tem solução não-trivial desde que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo. Através desta imposição, obtemos a relação de dispersão dos modos de superfície para o nosso modelo. É claro que é necessário impormos adicionalmente a condição de localização (ou seja, vetores de onda puramente imaginários) para garantirmos os modos de superfície no espectro.

### 4.2.2.2 Caso com relaxação

Como na seção 3.4, a constante de troca possui o valor  $J_0$  tanto para a interação entre os átomos da superfície quanto para a interação entre estes e os átomos da camada seguinte, tendo o valor  $J$  para as demais camadas (figura 4.2).

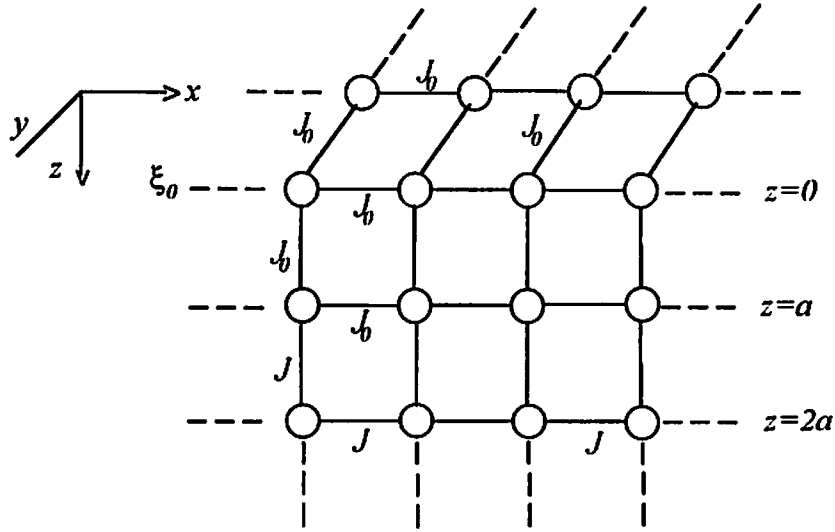


Fig. 4.2. Modelo com relaxação. A partir da 3ª camada a constante de troca em todo o volume passa a ser  $J$ .

Usando as equações (4.34) e (4.35) na camada  $\xi_0$  temos:

$$\begin{aligned}
 &(\lambda^0 + 2F'_0 Q_{1\Lambda} F_{\Lambda\Lambda})A_0 + (\lambda^0 + 2F'_0 Q_{1\Lambda} F_{\Lambda\Lambda})B_0 - (\lambda^0 F_{\Lambda\Lambda} + 2F'_0 Q_{2\Lambda})C_0 \\
 & - (\lambda^0 F_{\Lambda\Lambda} + 2F'_0 Q_{2\Lambda})D_0 = A_1 f_{1\Lambda} + B_1 \bar{f}_{1\Lambda} - F_{\Lambda\Lambda} (C_1 f_{2\Lambda} + D_1 \bar{f}_{2\Lambda})
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

onde

$$\lambda^0 = \frac{-\hbar\omega + \Delta}{S_A J_0} + 2(3 - \gamma_A) - 1 \quad (4.52)$$

e

$$\begin{aligned} &-(\lambda^1 Q_{1A} F_{AA} + 2F_0') A_0 - (\lambda^1 Q_{1A} F_{AA} + 2F_0') B_0 + (\lambda^1 Q_{2A} + 2F_0' F_{AA}) C_0 \\ &+ (\lambda^1 Q_{2A} + 2F_0' F_{AA}) D_0 = -Q_{1A} F_{AA} A_1 f_{1A} - Q_{1A} F_{AA} B_1 \bar{f}_{1A} + Q_{2A} C_1 f_{2A} + Q_{2A} D_1 \bar{f}_{2A} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Também:

$$\lambda^1 = \frac{\hbar\omega + \Delta}{S_A J_0} + 2(3 - \gamma_A) - 1 = \lambda^0 + 2\Omega_0 \quad (4.54)$$

com  $\Omega_0 = \frac{\hbar\omega}{J_0 S_A}$ . Para a camada  $\xi_1$ , usando (4.34) e (4.35):

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 + 2F_{AA}' Q_{1A} F_{AA}) A_1 f_{1A} + (\bar{\lambda}_1 + 2F_{AA}' Q_{1A} F_{AA}) B_1 \bar{f}_{1A} - (\lambda_2 F_{AA}' + 2F_{AA}' Q_{2A}) C_1 f_{2A} \\ &-(\bar{\lambda}_2 + 2F_{AA}' Q_{2A}) D_1 \bar{f}_{2A} = \frac{J_0}{J} \frac{S_A^0}{S_A} [A_0 + B_0 - F_{AA} (C_0 + D_0)] \end{aligned} \quad (4.55)$$

e

$$\begin{aligned} &-(\lambda_1' Q_{1A} F_{AA} + 2F_{AA}') A_1 f_{1A} - (\bar{\lambda}_1' Q_{1A} F_{AA} + 2F_{AA}') B_1 \bar{f}_{1A} + (\lambda_2' Q_{2A} + 2F_{AA}' F_{AA}) C_1 f_{2A} \\ &+ (\bar{\lambda}_2' Q_{2A} + 2F_{AA}' F_{AA}) D_1 \bar{f}_{2A} = \frac{J_0}{J} \frac{S_A^0}{S_A} [-Q_{1A} F_{AA} (A_0 + B_0) + Q_{2A} (C_0 + D_0)] \end{aligned} \quad (4.56)$$

Novamente o conjunto de equações (4.51), (4.53), (4.55) e (4.56), juntamente com o procedimento análogo para a obtenção das eqs. (4.49) e (4.50), nos dá a relação de dispersão implícita para os modos de superfície das ondas de spin. Tendo em

vista que tanto este conjunto de equações, como o apresentado na seção anterior são, algebricamente falando, de difícil entendimento, vamos apresentar na próxima seção um caso particular de grande interesse experimental, e que nos fornece uma visão qualitativa mais clara da influência do termo de anisotropia não-uniaxial. Ele servirá para ilustrar, qualitativamente falando, o espectro de magnons neste tipo de super-rede.

### ***4.3 Caso particular: Sistema uniaxial–não-uniaxial***

Nesta seção iremos estudar os modos de volume e superfície para uma super-rede formada a partir de dois materiais de mesma estrutura cristalina e parâmetro de rede mas com anisotropias distintas: um dos materiais (material A) é uniaxial (ou seja  $F_{As} = F_A = 0$ ), enquanto que o outro (material B) é não-uniaxial (isto é,  $F_{Bs} \neq F_B \neq 0$ ). A geometria neste caso é a mesma descrita na figura 3.1, com a equação de movimento para os operadores  $S_i^\pm$  tendo a mesma forma de (4.3).

#### ***4.3.1 Modos de volume***

Neste caso, as soluções para o meio A são:

$$S_{iA}^+ = A_1 e^{ik_{1A}z} + B_1 e^{-ik_{1A}z} \quad (4.57-a)$$

$$S_{iA}^- = C_1 e^{ik_{2A}z} + D_1 e^{-ik_{2A}z} \quad (4.57-b)$$

enquanto que para o meio B, temos

$$S_{IB}^+ = A_2 e^{ik_{IB}z} + B_2 e^{-ik_{IB}z} - F_{BB}(C_2 e^{ik_{2B}z} + D_2 e^{-ik_{2B}z}) \quad (4.58-a)$$

$$S_{IB}^- = -Q_{IB}F_{BB}(A_2 e^{ik_{IB}z} + B_2 e^{-ik_{IB}z}) + Q_{2B}(C_2 e^{ik_{2B}z} + D_2 e^{-ik_{2B}z}) \quad (4.58-b)$$

Usando a eq. (4.3) e as soluções (4.57) e (4.58) nas camadas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\xi$  e  $\zeta$ , chegamos a um conjunto de sistemas que podem ser escritos na forma matricial,

$$M_A |A_0\rangle = N_B |B\rangle \quad (4.59-a)$$

$$M_B |B\rangle = N_A |A_1\rangle \quad (4.59-b)$$

onde os *kets* são os mesmos definidos em (4.39), mas as matrizes  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $N_A$  e  $N_B$  ficam

$$M_A = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{1A} x_{1A} & \lambda_{1A} \bar{x}_{1A} & 0 & 0 \\ XI_B S_{AB} x_{1A} & XI_B S_{AB} \bar{x}_{1A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}'_{2A} Q_{2A} x_{2A} & \lambda'_{2A} Q_{2A} \bar{x}_{2A} \\ 0 & 0 & XI_B S_{AB} Q_{2A} x_{2A} & XI_B S_{AB} Q_{2A} \bar{x}_{2A} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$N_B = \begin{bmatrix} XI_A S_{BA} & XI_A S_{BA} & -XI_A S_{BA} F_{BB} & -XI_A S_{BA} F_{BB} \\ \lambda_{1B} + y_{1B} & \bar{\lambda}_{1B} + y_{1B} & -(\lambda_{2B} F_{BB} + \frac{y_{2B}}{F_{BB}}) & -(\bar{\lambda}_{2B} F_{BB} + \frac{y_{2B}}{F_{BB}}) \\ -XI_A S_{BA} Q_{1B} F_{BB} & -XI_A S_{BA} Q_{1B} F_{BB} & XI_A S_{BA} Q_{2B} & XI_A S_{BA} Q_{2B} \\ -(\lambda'_{1B} Q_{1B} F_{BB} + 2F'_{SB}) & -(\bar{\lambda}'_{1B} Q_{1B} F_{BB} + 2F'_{SB}) & (\lambda'_{2B} Q_{2B} + \frac{y_{2B}}{Q_{2B}}) & (\bar{\lambda}'_{2B} Q_{2B} + \frac{y_{2B}}{Q_{2B}}) \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$N_A = \begin{bmatrix} XI_B S_{AB} & XI_B S_{AB} & 0 & 0 \\ \lambda_{1A} & \bar{\lambda}_{1A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & XI_B S_{AB} Q_{2B} & XI_B S_{AB} Q_{2A} \\ 0 & 0 & \lambda'_{2A} Q_{2A} & \bar{\lambda}'_{2A} Q_{2A} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$$M_B = \begin{bmatrix} (\bar{\lambda}_{1B} + y_{1B})x_{1B} & (\lambda_{1B} + y_{1B})\bar{x}_{1B} & -(\bar{\lambda}_{2B}F_{BB} + \frac{y_{2B}}{F_{BB}})x_{2B} & -(\lambda_{2B}F_{BB} + \frac{y_{2B}}{F_{BB}})\bar{x}_{2B} \\ -(\bar{\lambda}'_{1B}Q_{1B}F_{BB} + 2F'_{SB})x_{1B} & -(\lambda'_{1B}Q_{1B}F_{BB} + 2F'_{SB})\bar{x}_{1B} & (\bar{\lambda}'_{2B}Q_{2B} + \frac{y_{2B}}{Q_{2B}})x_{2B} & (\lambda'_{2B}Q_{2B} + \frac{y_{2B}}{Q_{2B}})\bar{x}_{2B} \\ XI_A S_{BA}x_{1B} & XI_A S_{BA}\bar{x}_{1B} & -XI_A S_{BA}F_{BB}x_{2B} & -XI_A S_{BA}F_{BB}\bar{x}_{2B} \\ -XI_A S_{BA}Q_{1B}F_{BB}x_{1B} & -XI_A S_{BA}Q_{1B}F_{BB}\bar{x}_{1B} & XI_A S_{BA}Q_{2B}x_{1B} & XI_A S_{BA}Q_{2B}\bar{x}_{1B} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Das equações (4.59), vemos que

$$|A_1\rangle = T'|A_0\rangle \quad (4.64)$$

onde

$$T' = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A \quad (4.65)$$

Consequentemente, a relação de dispersão dos modos de volume será dada por (4.33), substituindo-se a matriz  $\tilde{T}$  pela matriz  $\tilde{T}'$  obtida nesta seção. É fácil ver que, para  $F_{BB} = 0$ , a matriz  $\tilde{T}'$  se desacopla na forma abaixo

$$\tilde{T}' = \begin{bmatrix} T_1 & | & 0 \\ \hline - & - & - \\ 0 & | & T_2 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

onde  $\tilde{T}_1$  e  $\tilde{T}_2$  são as matrizes obtidas para o caso sem campo de anisotropia relacionadas com as soluções  $S_l^\pm$ , respectivamente.

### 4.3.2 Modos de superfície

Vamos calcular os modos de superfície para o nosso modelo.

Supondo  $F_{As} = F_A = 0$ , obtemos a partir das equações (4.36) e (4.39)

$$\begin{cases} \lambda_{10} A_0 + \bar{\lambda}_{10} B_0 = 0 \\ \lambda'_{20} C_0 + \bar{\lambda}'_{20} D_0 = 0 \end{cases} \quad (4.67)$$

logo,

$$\begin{cases} \frac{A_0}{B_0} = -\frac{\bar{\lambda}_{10}}{\lambda_{10}} = \alpha_0 \\ \frac{C_0}{D_0} = -\frac{\bar{\lambda}'_{20}}{\lambda'_{20}} = \gamma_0 \end{cases} \quad (4.68)$$



Como discutido anteriormente, devemos substituir  $Q$  por  $i\beta$  em (4.63), de forma a obtermos a necessária condição de localização dos modos de superfície. Desta maneira:

$$T'|A_0\rangle = e^{-i\beta L}|A_0\rangle \quad (4.69)$$

ou:

$$T'_{11} + T'_{12}\alpha_0^{-1} + T'_{13}\frac{C_0}{A_0} + T'_{14}\frac{D_0}{A_0} = e^{-i\beta L} \quad (4.70-a)$$

$$T'_{21} + T'_{22}\alpha_0^{-1} + T'_{23}\frac{C_0}{A_0} + T'_{24}\frac{D_0}{A_0} = e^{-i\beta L}\alpha_0^{-1} \quad (4.70-b)$$

$$(T'_{31} + T'_{32}\alpha_0^{-1})A_0 + (T'_{33} + T'_{34}\gamma_0^{-1})C_0 = e^{-i\beta L}C_0 \quad (4.70-c)$$

$$(T'_{41} + T'_{42}\alpha_0^{-1})A_0 + (T'_{43} + T'_{44}\gamma_0^{-1})C_0 = e^{-i\beta L}\gamma_0^{-1}C_0 \quad (4.70-d)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} & (T'_{11} - T'_{22} + T'_{12}\alpha_0^{-1} - T'_{21}\alpha_0) \cdot (T'_{33} - T'_{44} + T'_{34}\gamma_0^{-1} - T'_{43}\gamma_0) = \\ & (T'_{23} + \gamma_0^{-1}T'_{24} - \alpha_0^{-1}T'_{13} - \alpha_0^{-1}\gamma_0^{-1}T'_{14}) \cdot (\alpha_0\gamma_0 T'_{41} + \gamma_0 T'_{42} - \alpha_0 T'_{31} - T'_{32}) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Esta é a relação de dispersão implícita para os modos de superfície do modelo uniaxial—não-uniaxial. Observe que quando o termo não-uniaxial  $F_{nn}$  é nulo, o lado direito da eq. (4.71) é nulo. Então os dois termos desacoplados do lado esquerdo fornecem independentemente a relação de dispersão implícita para os modos de superfície na ausência da anisotropia não-uniaxial. Estes termos são provenientes das soluções  $S_i^+$  e  $S_i^-$ , respectivamente. É curioso notar que esta relação de dispersão tem a mesma forma que a obtida para os modos de polaritons de superfície em uma super-rede piezoelétrica [54]. Na próxima seção discutiremos os resultados numéricos que descrevem os espectros das ondas de spin nestas super-redes.

## 4.4 Resultados numéricos e conclusões

Apresentamos agora os resultados numéricos relativos aos modos de volume e superfície para uma super-rede ferromagnética onde se consideram os campos de anisotropia. Como no capítulo anterior, os resultados são apresentados na forma de curvas de dispersão  $\Omega$  versus  $k_x a$  e  $\Omega$  versus  $QD$ . Os parâmetros físicos aqui variados são os mesmos descritos na seção 3.5, acrescidos agora dos parâmetros de anisotropia uniaxial  $D_{jj}$  ( $=D/J_j$ ), ( $j=A,B$ ) e dos parâmetros de anisotropia não-uniaxial  $F_{jj}$  ( $=F/J_j$ ) e  $F_{js}$  ( $=F_s/J_j$ ), ( $j=A,B$ ). A inclusão destes parâmetros altera significativamente o comportamento dos modos de volume e superfície na super-rede, em relação aos modos onde não se inclui esta anisotropia.

### 4.4.1 Modos de volume

Na fig. 4.3-a e seguintes podemos ver a relação de dispersão  $\Omega$  versus  $k_x a$  para os modos de volume descritos na seção 4.2.1. Aqui, os limites de  $\Omega$  e  $k_x$  são reduzidos. Isto foi necessário porque ao se incluir os campos de anisotropia uniaxial e não-uniaxial, o número de ramos aumentou consideravelmente. Este comportamento pode ser encarado como uma "quebra de degenerescência", ocasionada justamente pelos campos de anisotropia.

As regiões hachuradas correspondem às bandas permitidas, que são limitadas pelas equações  $QD=0$  e  $QD=\pi$ , respectivamente. Como no capítulo 3, esta ordem se inverte quando se passa de uma banda para outra. Devido à complexidade das equações que descrevem os modos de superfície das ondas de spin, elas só serão apresentadas e discutidas no caso especial descrito na seção 4.4.2.

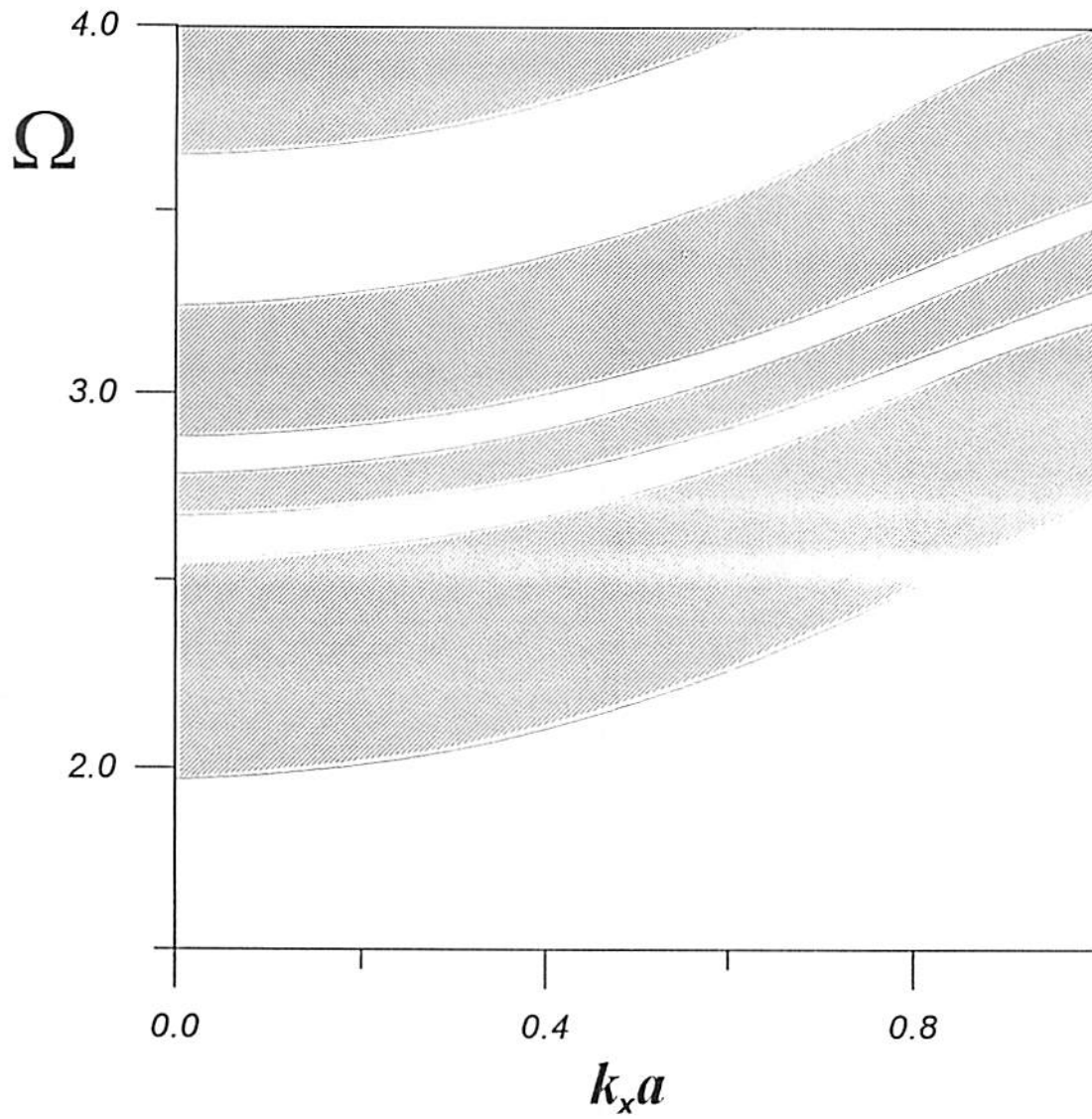


Fig. 4.3-a. Relação de dispersão  $\Omega$  versus  $k_x a$  para os modos de volume em uma super-rede com campo de anisotropia. Os parâmetros físicos são  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 3$ ,  $S_A = 1.0$ ,  $S_B = 1.5$ ,  $J_{AB} = 2.0$ ,  $I_A = 1.2$ ,  $I_B = 2.4$ ,  $H_0 J_A = 1.0$ ,  $H_0 J_B = 2.0$ ,  $D_{AA} = D_{BB} = 1.2$ ,  $F_{AA} = F_{BB} = 0.8$ ,  $F_{AS} = 0.8$  e  $F_{BS} = 0.6$ .

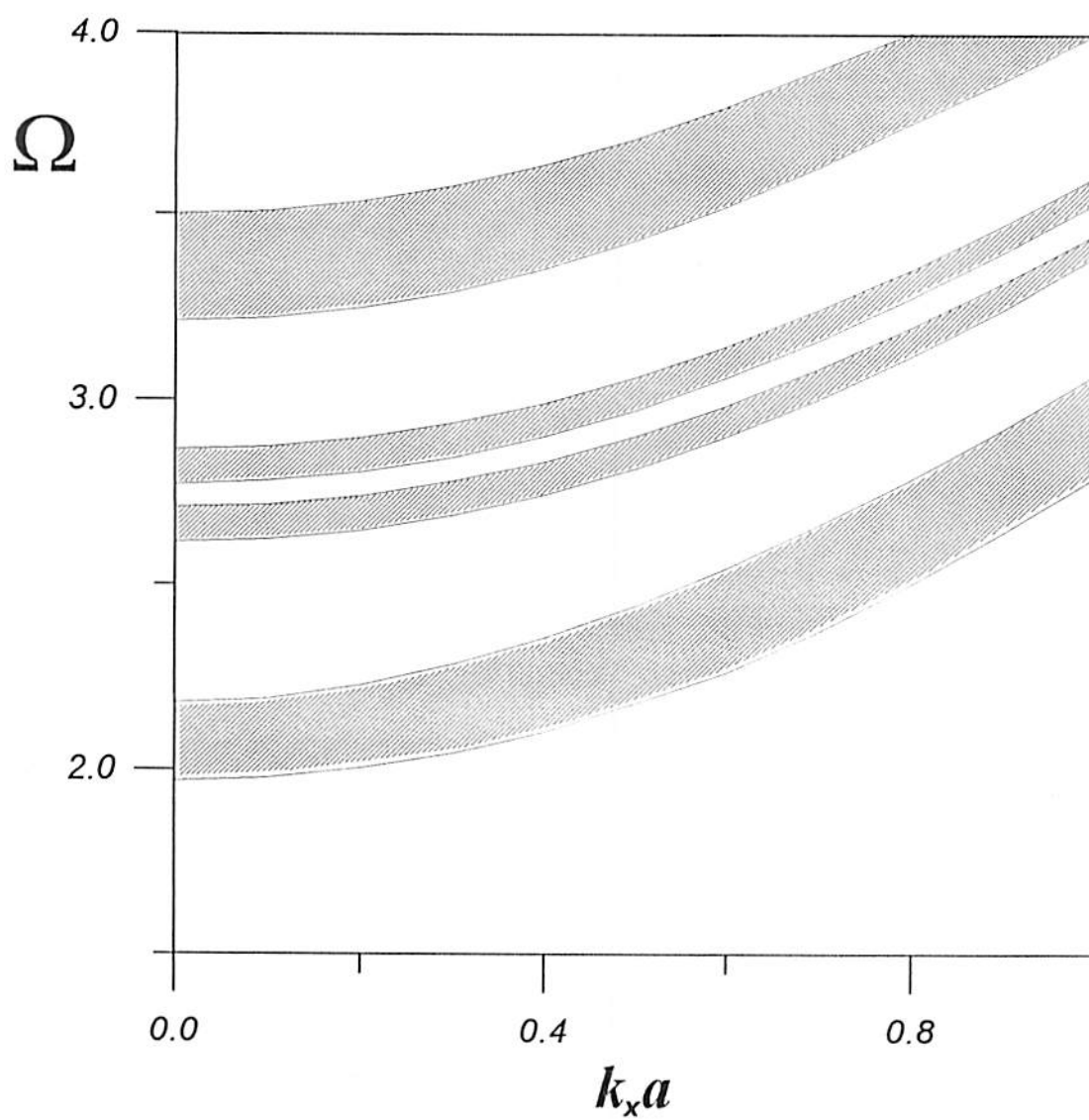


Fig. 4.3-b. Mesmo que a figura anterior. Os parâmetros físicos são os mesmos, com exceção de  $F_{AS} = 0.6$  e  $F_{BS} = 0.8$ .

Nas figs. 4.4-a e 4.4-b vemos a relação de dispersão agora representada pelo corte  $\Omega$  versus  $QD$  para os modos de volume numa super-rede com campo de anisotropia. Como descrito anteriormente, estas curvas mostram claramente as regiões permitidas ("pass bands") para a existência das ondas de spin.

Estas bandas são obtidas para um valor de  $k_x$  fixo, e são limitadas pelas curvas resultantes do "dobramento" dos modos de volume de cada ferromagneto, na 1ª zona de Brillouin (como já explicamos no cap. 3).

Este espectro é muito útil para mostrar as regiões de frequência que delimitam quão largas (ou estreitas) são estas bandas permitidas. Uma comparação deste espectro com o mostrado na ref. [4] mostra claramente o grau de sensibilidade das ondas de spin ao considerarmos a presença destes campos de anisotropia.

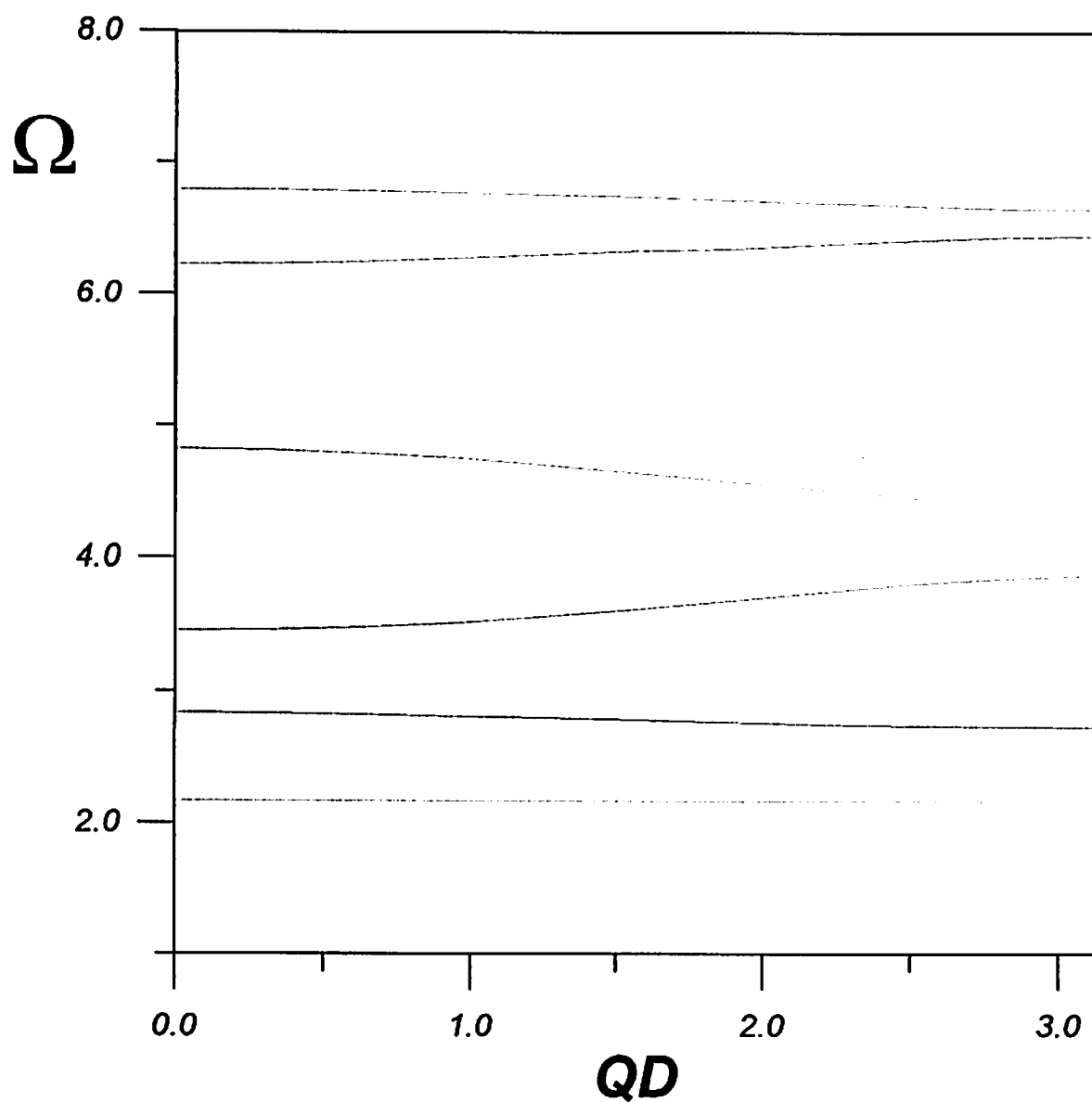


Fig. 4.4-a. Relação de dispersão  $\Omega$  versus  $QD$  para os modos de volume em uma super-rede com campo de anisotropia. Os parâmetros físicos são os mesmos da fig. 4.3-a, com  $k_x = 0.5$ .

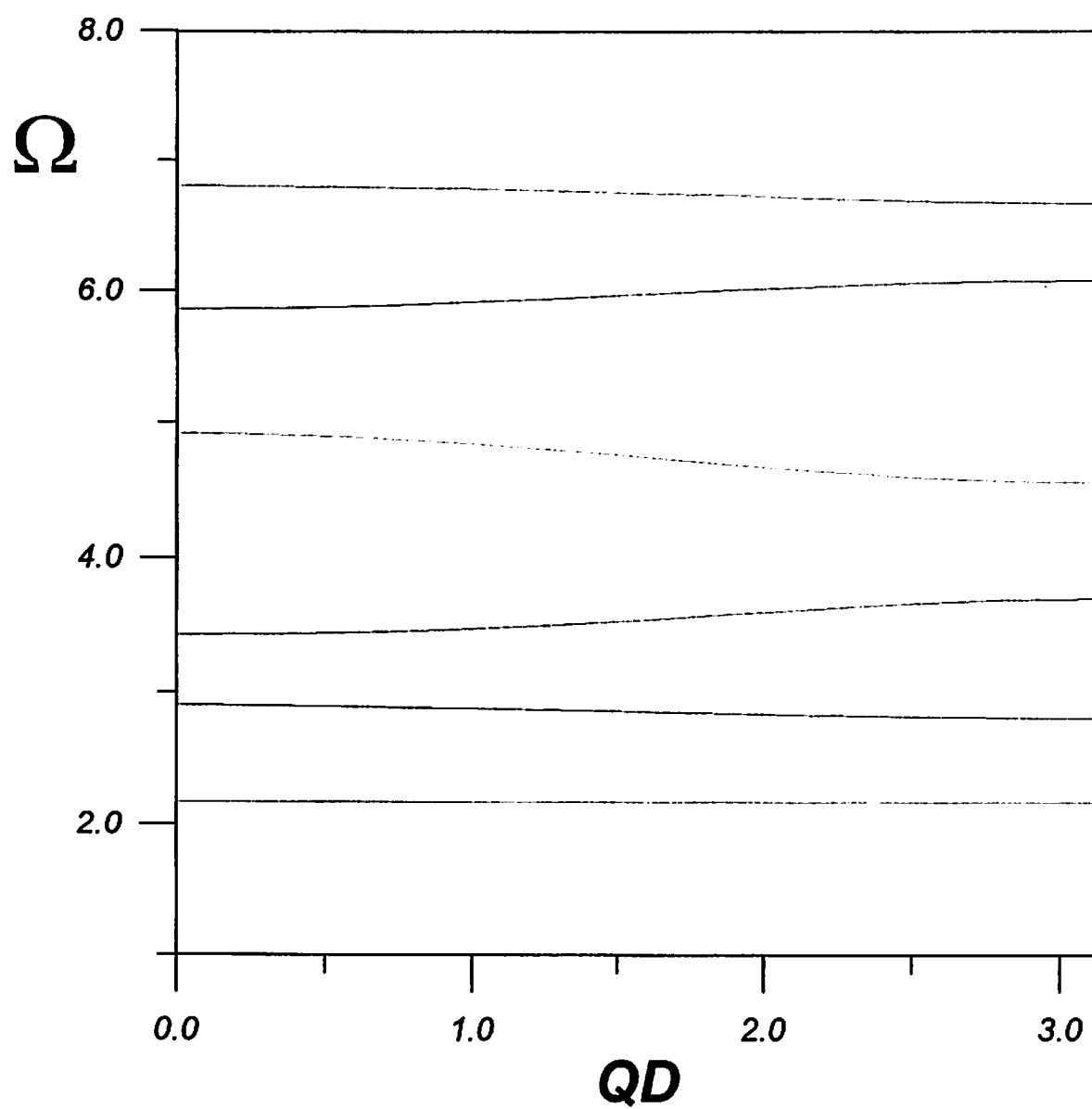


Fig. 4.4-b. Mesmo que a figura anterior. Os parâmetros físicos são os mesmos da fig. 4.3-b, com  $k_x = 0.5$ .

#### 4.4.2 Sistema uniaxial—não-uniaxial

As relações de dispersão relativas aos modos de volume e superfície para a super-rede descrita na seção 4.3, ou seja, uma super-rede binária, cujos constituintes são um ferromagneto uniaxial e um ferromagneto não-uniaxial, são mostradas nas figs. 4.5. Os modos de volume aparecem como bandas hachuradas, e os modos de superfície são representados por linhas pontilhadas. Observe-se que estas curvas de superfície existem entre as bandas de volume, assim como abaixo e acima das mesmas.

É importante destacarmos que neste caso distinguem-se dois tipos de modos de superfície: aqueles já discutidos no cap. 3, que existem mesmo para  $k_x \rightarrow \infty$  e são chamados de modos "*reais*", e os outros que terminam ou começam em uma banda de volume para um valor finito de  $k_x$ , e são considerados modos de superfície "*virtuais*". Este fato novo, não encontrado no caso do espectro sem campo de anisotropia, é bastante interessante e merece estudos posteriores, bem como constatação experimental. Acreditamos que técnicas experimentais, como o espalhamento inelástico da luz tipo Raman, poderá detectar este comportamento comprovado pela nossa teoria. Saliente-se que comportamento análogo foi encontrado no espectro de plasmon-polaritons em super-redes (para uma revisão deste assunto veja ref. 55)

Apesar de existir uma literatura científica teórica considerável relacionada com o espectro de ondas de spin em super-redes magnéticas, pouca coisa foi feita na parte experimental, principalmente no regime de "exchange", tratado aqui. Por outro lado, no caso do regime magnetostático, desde o clássico trabalho de Damon-Eshbach [56],



muitas predições teóricas já foram verificadas experimentalmente. Com efeito, a espectroscopia do espalhamento inelástico da luz tipo Brillouin já provou ser uma técnica experimental altamente eficaz no tratamento do espectro das ondas de spin neste regime (para uma visão geral desta técnica veja [57]).

Outras técnicas experimentais, tais como o acoplamento via grade ("grating") e a reflexão total atenuada ("Attenuated Total Reflexion", ATR) foram propostas por um grande número de autores (para uma revisão veja [3]). Fukui et al [58] discutiram o uso da técnica de ATR para estudar os modos de superfície em ferromagnetos, especificamente o YIG. A dificuldade experimental é que a frequência de ressonância em ferromagnetos é muito baixa (menos que  $1 \text{ cm}^{-1}$  no YIG), bem abaixo do intervalo convencional dos espectrômetros de infra-vermelho, como é o caso do ATR.

Por outro lado, em cristais antiferromagnéticos a situação está bem melhor, como mostrado pioneiramente por Camley e Mills [59] e Cao e Caillé [60]. Nestes casos é possível não só fazer-se medidas precisas com um espectrômetro tipo ATR, mas também usando-se espectroscopia mais tradicional tipo Raman [61].

De qualquer maneira, esperamos que as observações teóricas feitas aqui sirvam como uma motivação adicional para o surgimento de novos trabalhos experimentais, a fim de que o entendimento da propagação deste modo coletivo em super-redes magnéticas atinja o mesmo nível de conhecimento como nos cristais convencionais.

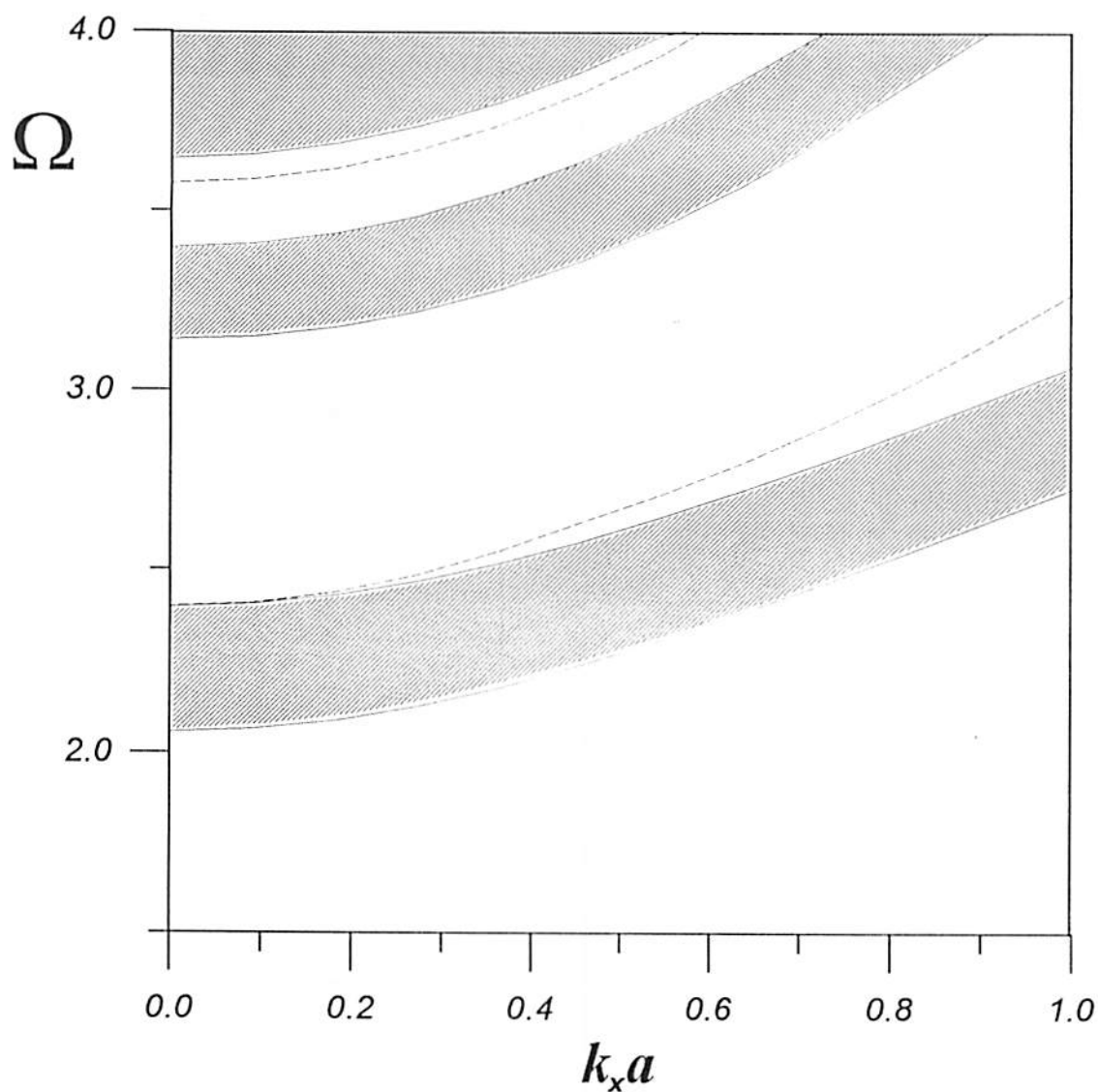


Fig. 4.5-a. Relação de dispersão  $\Omega$  versus  $k_x a$  para os modos de volume e superfície sem relaxação em uma super-rede binária com campo de anisotropia. Os parâmetros físicos são os mesmos da fig. 4.3-a, com exceção de  $F_{AA} = F_{AS} = 0$ ,  $F_{BB} = 0.8$  e  $F_{BS} = 0.6$ , com o parâmetro adicional  $J_{0A} = 0.75$ .

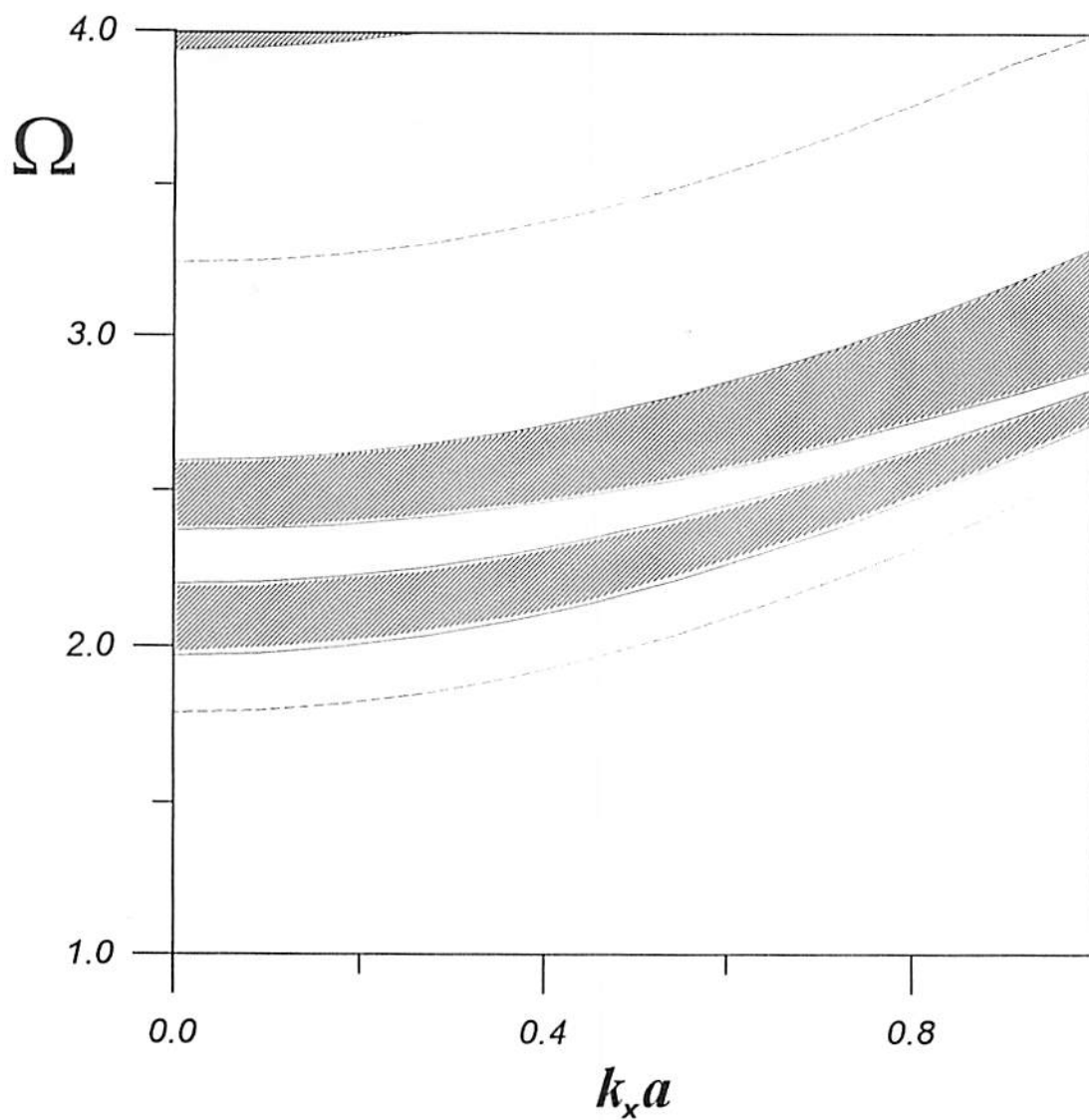


Fig. 4.5-b. Mesmo que a figura anterior. Os parâmetros físicos são os mesmos da fig. 4.4-b, com exceção de  $F_{AA} = F_{AS} = 0$ ,  $F_{BB} = 0.8$  e  $F_{BS} = 0.8$ , com o parâmetro adicional  $J_{0A} = 0.75$ .

# 5

## *Conclusões*

---

Neste trabalho nós apresentamos uma teoria, baseada no Hamiltoniano de Heisenberg, para ondas de spin (modos de volume e superfície) que se propagam em uma super-rede ferromagnética a baixas temperaturas ( $T \ll T_c$ ).

O principal resultado deste trabalho é a determinação teórica da relação de dispersão das ondas de spin em super-redes magnéticas com e sem campo de anisotropia (Caps. 3 e 4 respectivamente). Estes resultados generalizam casos anteriores [4] e trazem à tona espectros de magnons bem mais interessantes que os analisados previamente.

A técnica experimental mais apropriada para estudar-se o espectro de ondas de spin em super-redes é a espectroscopia de espalhamento inelástico de luz (Raman e Brillouin). A ressonância magnética, embora mais complicada do ponto de vista da obtenção pura do espectro, pode também ser usada com sucesso (para uma visão geral destas técnicas ver Ref. [57]). No entanto, até o momento, estudos experimentais para determinação deste espectro em cristais não-uniaxiais têm sido efetuados apenas em metais de transição (descritos pelo Hamiltoniano de Hubbard na aproximação "tight-binding") e não em sistemas descritos pelo Hamiltoniano de Heisenberg, como os aqui tratados.

As possíveis extensões deste trabalho são as seguintes:

a) Estudo das ondas de spin em materiais metamagnetos, que são super-redes ferromagnéticas acopladas antiferromagneticamente, de tal maneira que o acoplamento intra-camadas é muito mais intenso que o acoplamento antiferromagnético entre as camadas adjacentes;

b) Estudo das ondas de spin em super-redes antiferromagnéticas. Amostras de super-redes antiferromagnéticas de alta qualidade foram recentemente fabricadas [61] e portanto seria interessante estender nossa teoria para este caso;

c) Discussão sobre a configuração de equilíbrio, na qual a reconstrução de superfície em cada interface e a determinação da temperatura de Curie da estrutura composta são importantes fatores;

d) Determinação da função de Green das ondas de spin usando-se o método da função resposta linear. O conhecimento desta função nos leva à determinação teórica da seção de choque de espalhamento inelástico da luz, abrindo todo um novo campo para ser explorado;

e) Estudo da interação das ondas de spin com a radiação eletromagnética nestas estruturas nos levando aos modos mistos conhecidos por poláritons magnéticos. Novamente, neste caso também teremos toda uma nova gama de resultados teóricos a serem explorados;

f) Estudo do comportamento das ondas de spin em estruturas diferentes da cúbica simples, levando em conta interações até os 2<sup>os</sup> vizinhos. Para estruturas do tipo cúbica simples, estudos revelam [62] que ao se considerar os 2<sup>os</sup> vizinhos, nenhum resultado novo surge no espectro de magnons da super-rede.

Em suma, as ondas de spin (modos de volume e superfície) são estudadas com detalhes em super-redes formadas por 2 materiais ferromagnéticos. A inclusão de campo de anisotropia não-uniaxial, além de ser uma extensão matemática natural do caso uniaxial, nos trouxe novos resultados no entendimento desta excitação coletiva. Esperamos que este trabalho possa ser útil àqueles interessados em conhecer o estado de arte deste tipo de excitação coletiva.

## REFERÊNCIAS

- [1] F. Bloch, *Z. Phys.* **61**, 206 (1930); **74**, 295 (1932).
- [2] L. Esaki, *J. Physique C* **5**, 3 (1984).
- [3] M. G. Cottam and D. R. Tilley, *Introduction to Surface and Superlattice Excitations* (Cambridge University Press: Cambridge, 1989).
- [4] E. L. Albuquerque, P. Fulco, E. F. Sarmiento and D. R. Tilley, *Solid State Commun.* **58**, 41 (1986).
- [5] E. L. Albuquerque and M. G. Cottam, *Solid State Commun.* **89**, 249 (1994).
- [6] N. W. Ashcroft and D. Mermin, *Solid State Physics* (W. B. Saunders Company: Philadelphia, 1976).
- [7] D. C. Mattis, *The Theory of Magnetism* (Springer-Verlag: Heidelberg, 1981).
- [8] C. T. Walker and G. A. Slack, *Am. J. Phys.* **38**, 1380 (1970).
- [9] F. Keffer, H. Kaplan and Y. Yafet, *Am. J. Phys.* **21**, 250 (1953).
- [10] J. C. Slater, *Phys. Rev.* **35**, 509 (1930).
- [11] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **38**, 411 (1926); **49**, 619 (1928).
- [12] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A 112**, 661 (1928).
- [13] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill: New York, 1985).
- [14] D. Wagner, *Introduction to Theory of Magnetism* (Pergamon: Oxford, 1972).
- [15] E. P. Wohlfarth, *Ferromagnetic Materials* (North-Holland: London, 1982).
- [16] L. Onsager, *Phys. Rev.* **65**, 117 (1944).

- [17] T. Holstein and H. Primakoff, *Phys. Rev.* **58**, 1098 (1940).
- [18] C. Kittel, *Quantum Theory of Solids* (Wiley: New York, 1963).
- [19] C. Cohen, B. Diu and F. Laloë, *Quantum Mechanics, vols. I and II* (Wiley: London, 1977).
- [20] S. M. Rezende, notas de aula no *Winter College on the Interaction of Radiation with Condensed Matter*, Trieste (Italy), 1976.
- [21] B. Antonioni and V.J. Minkiewicz, *Solid State Commun.* **10**, 203 (1972).
- [22] R. N. Sinclair and B. N. Brookhouse, *Phys. Rev.* **120**, 1638 (1960).
- [23] T. Wolfram and R. E. Dewames, *Prog. Surf. Sci.* **2**, 233 (1970).
- [24] D. L. Mills in *Surface Excitations* (edited by North-Holland: Amsterdam, 1984).
- [25] J. C. S. Lévy, *Surf. Sci. Rep.* **1**, 39 (1981).
- [26] Z. Q. Zheng, C. M. Falco, J. B. Ketterson and I. K. Schuller, *Appl. Phys. Lett.* **38**, 424 (1981).
- [27] T. Jarlborg and A. J. Freeman, *J. Appl. Phys.* **53**, 8041 (1982).
- [28] N. K. Flevaris, J. B. Ketterson and J. E. Hilliard, *J. Appl. Phys.* **53**, 8046 (1982).
- [29] T. Shinjo, K. Kawagichi, R. Yamamoto, N. Hosaito and T. Takada, *J. Physique C* **5**, 367 (1984).
- [30] A. J. Freeman, Jian-hua Xu, S. Ohnishi and T. Jarlborg, *J. Physique C* **5**, 369 (1984).
- [31] R. Krishnan and W. Jantz, *Solid State Commun.* **50**, 533 (1984).
- [32] S. S. P. Parkin, N. More and K. P. Roche, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2304 (1990).
- [33] R. Krishnan, *J. Magn. Magn. Mater.* **50**, 189 (1985).
- [34] H. Sakarima, R. Krishnan and M. Teisser, *J. Appl. Phys.* **57**, 3651 (1985).
- [35] M. J. Pechan, M. B. Sacanon and I. K. Schuller, *J. Appl. Phys.* **57**, 3678 (1985).



- [36] T. Morishita, Y. Togami and K Tsushima, *J. Magn. Magn. Mater.* **54**, 789 (1986).
- [37] M. B. Stearns, C. H. Lee and S. P. Vernon, *J. Magn. Magn. Mater.* **54**, 791 (1986).
- [38] P. Grünberg and K Mika, *Phys. Rev. B* **27**, 2955 (1983).
- [39] R. E. Camley, T. S. Rahman and D. L. Mills, *Phys. Rev. B* **27**, 261 (1983).
- [40] P. Grünberg, *J. Appl. Phys.* **57**, 3673 (1985).
- [41] K. Mika and P. Grünberg, *Phys. Rev B* **31**, 4465 (1985).
- [42] E. L. Albuquerque, P. Fulco and D. R. Tilley, *Phys. Stat. Sol. b* **146**, 449 (1988).
- [43] E. L. Albuquerque, P. Fulco and D. R. Tilley, *Rev. Bras. Fis.* **16**, 315 (1986).
- [44] G. A. Farias, M. M. Auto and E. L. Albuquerque, *Phys. Rev. B* **38**, 12540 (1988).
- [45] J. Barnás, *J. Phys. C* **21**, 1021 (1988).
- [46] P. Yeh, A. Yariv and C. S. Hong, *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 423 (1977).
- [47] S. R. P. Smith, notas de 2nd. Int. Conf. on Phonon Physics, Budapest , 1985.
- [48] S. Gopalam and M. G. Cottam, *Phys. Rev. B* **42**, 624 (1990).
- [49] V. N. Kitaev, M. P. Kashchenko and L. V. Kurbatov, *Sov. Phys.* **15**, 1530 (1974).
- [50] M. G. Cottam and A. L. Awang, *J. Phys. C* **10**, 3673 (1977).
- [51] U. Balucani, M. G. Pini and V. Tognetti, *J. Phys. C* **13**, 3895 (1980).
- [52] E. L. Albuquerque and M. G. Cottam, *Phys. Rev. B* **46**, 14543 (1992).
- [53] M. T. Hutchings, M. F. Thorpe, R. J. Birgeneau, P. A. Fleury and H. J. Guggenheim,  
*Phys. Rev B* **2**, 1362 (1970).
- [54] E. L. Albuquerque and M. G. Cottam, *Solid State Commun.* **83**, 545 (1992).
- [55] E. L. Albuquerque and M. G. Cottam, *Phys. Rep.* **233**, 67 (1993).
- [56] R. W. Damon and J. R. Eshbach, *J. Phys. Chem. Sol.* **19**, 308 (1961).
- [57] M. G. Cottam and D. J. Lockwood, *Light Scattering in Magnetic Solids* (John

Wiley, 1986).

- [58] M. Fukui, H. Dohi, J. Matsura and O. Tada, *J. Phys. C* **17**, 1783 (1984).
- [59] R. E. Camley and D. L. Mills, *Phys. Rev. B* **26**, 1280 (1982).
- [60] S. Cao and A. Caillé, *Solid State Commun.* **42**, 233 (1982).
- [61] C. A. Ramos, D. Lederman, A. R. King and V. Jaccarino, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2913 (1990).
- [62] N. S. Almeida, P. Fulco, E. L. Albuquerque and D. R. Tilley, *J. Phys.: Cond. Matter* **4**, 8909 (1992).