

13

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL

EFEITOS DE CAMPO ALEATÓRIO NO MODELO
SHERRINGTON-KIRKPATRICK

ROOSEWELT FONSECA SOARES

Orientador: Fernando Dantas Nobre

Tese apresentada à Universidade
Federal do Rio Grande do Norte como
requisito parcial à obtenção do grau de
MESTRE em Física.

Natal, Março de 1993.

ANALISE BIBLIOGRÁFICA

Este trabalho tem como objetivo analisar a obra de Ruy de Azevedo e a sua importância para a história da literatura brasileira. O autor aborda a vida e a obra de Ruy de Azevedo, destacando sua contribuição para a literatura e a cultura brasileira. A análise é feita sob o ponto de vista da crítica literária, considerando o contexto histórico e social em que a obra foi produzida. O autor também discute a recepção da obra de Ruy de Azevedo e sua influência na literatura brasileira.

Aos meus pais Rui e Nanú,
meu irmão Rudson,
minha mulher Isis, e
meus filhos Marília, Lívia e Márcio.

AGRADECIMENTOS

Aos professores, funcionários e alunos do Departamento de Física, em especial: o professor Fernando Dantas Nobre pela paciência com que soube me orientar em todos os momentos em que trabalhamos juntos, o professor Remarque Fernandes pelo incentivo permanente, e os colegas Piólho e Edvaldo Nogueira Júnior pela presença marcante de confiança e otimismo.

Ao desenhista do CCE Fernando Feitosa pela colaboração nas figuras.

Ao Departamento de Matemática pelo apoio que me foi dado, principalmente na parte computacional, que foi de extrema importância para a realização deste trabalho.

À minha família pela compreensão e renúncias que foram muitas vezes necessárias.

Banca Examinadora

Fernando Dantas Nobre

Prof. Dr. Fernando Dantas Nobre

Presidente-Orientador - UFRN

Jairo Rolim Lopes de Almeida

Prof. Dr. Jairo Rolim Lopes de Almeida

Examinador Externo - UFPe

Francisco Alexandre da Costa

Prof. Dr. Francisco Alexandre da Costa

Examinador Interno - UFRN

Data da Defesa: 05/03/93 .

RESUMO

O vidro de spins de Ising com interações de alcance infinito (modelo Sherrington-Kirkpatrick), na presença de um campo magnético aleatório distribuído segundo uma lei de probabilidades gaussiana, é investigado pelo método das réplicas. Na aproximação de simetria entre réplicas, a fronteira crítica que separa as duas fases possíveis, Ferromagnética (F) e Independente (I), é determinada. A análise de estabilidade de Almeida-Thouless é efetuada e as regiões de instabilidade da solução de simetria entre réplicas são encontradas: I' (parte instável da fase I) e F' (parte instável da fase F). Tais regiões podem ser identificadas respectivamente, com as fases de vidro de spins e ferromagnética mista do modelo Sherrington-Kirkpatrick.

ABSTRACT

The infinite-range Ising spin glass (Sherrington-Kirkpatrick model), in the presence of a gaussian-distributed random magnetic field, is investigated by the replica method. Within the replica symmetry approximation, the critical boundary between the two possible phases, Ferromagnetic (F) and Independent (I), is determined. The Almeida-Thouless stability analysis is performed and the replica-symmetric-solution instability regions are found: I' (unstable part of phase I) and F' (unstable part of phase F). Such regions may be identified, respectively, with the spin-glass and mixed-ferromagnetic phases of the Sherrington-Kirkpatrick model.

ÍNDICE

Notação Utilizada		1
Capítulo 1:	INTRODUÇÃO	3
Capítulo 2:	VIDROS DE SPINS COM INTERAÇÕES DE ALCANCE INFINITO (Modelo Sherrington–Kirkpatrick)	
Seção 2.1:	Introdução	6
Seção 2.2:	O Modelo Sherrington–Kirkpatrick: Definição e Energia Livre no Espaço das Réplicas	10
Seção 2.3:	Solução de Simetria entre Réplicas para o Modelo Sherrington–Kirkpatrick	20
Seção 2.4:	Análise de Estabilidade de Almeida–Thouless	26
Seção 2.5:	Solução de Parisi para o Modelo Sherrington–Kirkpatrick	29
Seção 2.6:	Conclusão	32
Capítulo 3:	O MODELO SHERRINGTON–KIRKPATRICK NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO ALEATÓRIO	
Seção 3.1:	Introdução	37
Seção 3.2:	O Modelo	39

Seção 3.3:	Solução de Simetria entre Réplicas para o Modelo SK na Presença de um Campo Magnético Aleatório	42
Seção 3.4:	Equação da Fronteira Crítica Ferromagnética-Independente em Simetria de Réplicas	44
Seção 3.5:	Fronteira Crítica F-I em Altas Temperaturas	47
Seção 3.6:	Fronteira Crítica F-I em Baixas Temperaturas	50
Seção 3.7:	A Fronteira Crítica F-I em Simetria de Réplicas	54
Seção 3.8:	A Análise de Estabilidade de Almeida-Thouless para o Modelo SK na Presença de um Campo Magnético Aleatório	57
Seção 3.9:	Conclusão	61
Capítulo 4:	CONCLUSÃO	68
Apêndice A:	Hipótese de Simetria entre Réplicas para o Modelo Sherrington-Kirkpatrick	69
Apêndice B:	Extremização da Energia Livre por Spin em Simetria de Réplicas para o Modelo SK	73
Apêndice C:	Expansões em Altas Temperaturas para o Modelo SK	75
Apêndice D:	Cálculos em Baixas Temperaturas para o Modelo SK	77
Apêndice E:	A Matriz de Estabilidade G	91
Apêndice F:	Análise da Fronteira Crítica Ferromagnética-Independente	97
Apêndice G:	A Entropia por Spin na Fase Independente em $T = 0$	103
Referências:		106

Notação Utilizada

a) As abreviaturas empregadas neste trabalho têm o seguinte significado:

RKKY – Ruderman, Kittel, Kasuya e Yosida [23–25]

EA – Edwards e Anderson [22]

SK – Sherrington e Kirkpatrick [2]

AT – Almeida e Thouless [3]

b) Diversos tipos de somatórios são utilizados:

\sum_{ij} : soma irrestrita sobre todos os índices de sítios i e j ;

\sum'_{ij} : soma sobre todos os índices $i \neq j$;

$\sum_{(ij)}$: soma sobre pares distintos (ij) ;

$\langle \sum_{ij} \rangle$: soma sobre sítios primeiros vizinhos;

$\sum_{\alpha\beta}$: soma irrestrita sobre todos os índices de réplicas α e β ;

$\sum'_{\alpha\beta}$: soma sobre todos os índices $\alpha \neq \beta$;

$\sum_{(\alpha\beta)}$: soma sobre pares distintos $(\alpha\beta)$.

c) Médias :

$\langle \rangle_T$: média térmica com relação ao hamiltoniano inicial;

$[\]_J$: média sobre a desordem nas constantes de acoplamento;

$[\]_{J,h}$: média sobre a desordem nas constantes de acoplamento e campo magnético externo;

$\langle \rangle$: média térmica com relação ao hamiltoniano efetivo (espaço das réplicas).

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Podemos considerar que a teoria de campo médio para os vidros de spins de Ising [1], está atualmente bem entendida devido à compreensão do modelo de interações de alcance infinito, proposto em 1975 por Sherrington e Kirkpatrick (SK) [2]. A solução introduzida por SK, tem um único parâmetro de ordem e apresenta uma entropia negativa à temperatura zero; além disso, como foi mostrado por Almeida e Thouless, (AT) [3], tal solução é instável na fase de vidro de spins. O esquema de quebra de simetria entre réplicas de Parisi [4-8], é no momento, aceito como a solução correta para este problema. Nesta solução, a energia livre à temperatura zero, apresenta uma estrutura altamente não trivial, com muitos vales separados por barreiras que divergem no limite termodinâmico. Isto implica na existência de distintos estados termodinâmicos não relacionados por simetria, com mínimos de energia livre que diferem uns dos outros por uma grandeza da ordem da unidade, no limite termodinâmico, significando que muitos estados contribuem para a soma estatística.

Há na atualidade, uma quantidade razoável de dados que dá sustentação a argumentação de que existe uma temperatura de transição não nula para vidros de spins com interações de curto alcance em três dimensões, pelo menos para sistemas de Ising, ou não-Ising com anisotropia unidirecional. Certamente as interações de alcance infinito no modelo SK são completamente artificiais, de modo que suas propriedades não são necessariamente similares àquelas de modelos mais realísticos com interações de curto alcance. De fato, idéias recentes baseadas no modelo da "gota" [9,10], sugerem que os vidros de spins de curto alcance são completamente diferentes, pelo fato de apresentarem apenas dois estados termodinâmicos

relacionados através de uma inversão global dos spins. Tais estados podem ser caracterizados por uma distribuição de parâmetros de ordem $P(q)$ [5-8], a qual consiste somente de funções δ nos valores $q = \pm q_{EA}$, onde q_{EA} (parâmetro de ordem de Edwards-Anderson para a fase de vidro de spins), é diferente de zero abaixo da temperatura de transição. Contrariamente, a teoria de Parisi prevê para $P(q)$, no modelo SK, além das funções δ , uma parte contínua que se estende até $q = 0$, isto é, $P(0) \neq 0$ no limite termodinâmico. Alguns trabalhos usando simulações de Monte Carlo já foram feitos no sentido de investigar se o resultado de Parisi se mantém para vidros de spins de Ising com interações de curto alcance, ou se em vez disso segue o comportamento prognosticado pelo modelo da "gota", de acordo com o qual $P(0) \rightarrow 0$ no limite termodinâmico, mas os resultados ainda não são conclusivos [15-17].

Apesar desta grande controvérsia que existe sobre se tais comportamentos, ou seja, se as interações de alcance infinito são adequadas para descrever sistemas reais [9-16], aplicações recentes desta teoria de campo médio nas áreas de redes neurais e problemas de otimização de alta complexidade, dão um grande encorajamento para que se continue estudando os modelos de vidros de spins de alcance infinito; generalizações do modelo SK, com o objetivo de incluir variáveis de spins que não sejam variáveis de Ising, também foram realizadas.

Outros sistemas magnéticos desordenados experimentaram um enorme avanço nesta última década. Entre estes, o problema de um ferromagneto em um campo magnético aleatório atingiu um estágio onde, após muita controvérsia, muitos de seus comportamentos estão agora bem entendidos [18]. Este problema manteve-se, durante algum tempo, puramente teórico até a sua identificação com um antiferromagneto diluído na presença de um campo magnético uniforme [19,20]. No decorrer dos esforços teóricos para entender o problema do campo aleatório e em particular, a questão de sua dimensão crítica inferior, algumas técnicas de grupo de

renormalização têm sido usadas, umas com sucesso e outras não. Por exemplo, a técnica de grupo de renormalização no espaço real tem sido aplicada com êxito no estudo dos ferromagnetos em campos aleatórios, revelando seu comportamento complicado, especialmente a temperaturas muito baixas. Estudos de grupo de renormalização em vidros de spins usando o método de Migdal-Kadanoff, têm previsto corretamente a dimensão crítica inferior para este tipo de sistema complexo, sendo possível, deste modo, concluir que no caso de campo aleatório este tratamento também dê bons resultados. A dimensão crítica inferior para o ferromagneto de Ising na presença de um campo magnético aleatório é exatamente igual a 2 [21].

Dentre os sistemas magnéticos desordenados portanto, podemos destacar os problemas dos vidros de spins e dos ferromagnetos na presença de campo magnético aleatório como dos mais estudados nos dias presentes. Neste trabalho nos propomos a estudar uma união entre estes problemas, ou seja, o vidro de spins de Ising com interações de alcance infinito na presença de um campo magnético aleatório. Utilizamos para isto, o método das réplicas [2,22], o qual nos permite determinar o diagrama de fases, assim como as regiões de instabilidade da solução de simetria entre réplicas (solução SK), dando margem a que, num procedimento de quebra desta simetria seja possível formular a parametrização de Parisi.

Capítulo 2

VIDROS DE SPINS COM INTERAÇÕES DE ALCANCE INFINITO

(Modelo Sherrington-Kirkpatrick)

2.1 Introdução

Podemos considerar Vidros de Spins como uma classe de materiais magnéticos desordenados que, em algum sentido, estão relacionados com magnetos ordinários, assim como os vidros estão relacionados com sólidos cristalinos. Os Vidros de Spins convencionais consistem de uma pequena porcentagem de íons magnéticos como Fe, Mn, Cr, etc., espalhados em uma matriz metálica não magnética (matriz hospedeira), tais como Au, Cu, Ag, etc., formando assim as ligas metálicas diluídas AuFe, CuMn, AgCr, etc. Estes tipos padrões de Vidros de Spins têm sido por mais de 40 anos motivo de muitas pesquisas e no início, a motivação maior era a esperança de que estes sistemas permitiriam o estudo das interações simples entre dois íons magnéticos, sem a interferência de fenômenos coletivos predominantes em ligas muito concentradas ou em magnetos puros. A interação típica entre os momentos magnéticos (spins) depende da concentração destes na matriz metálica. A altas concentrações estas ligas tornam-se magneticamente ordenadas, enquanto a concentrações muito baixas (regime Kondo), as impurezas magnéticas estão tão separadas que uma não consegue influenciar a outra. A faixa de concentração dos Vidros de Spins está entre estes dois extremos, sendo da ordem de 10%.

A interação indireta entre spins, conhecida como interação RKKY (Ruderman-Kittel-Kasuya-Yosida) [23-25] é resultado do fato de que um spin localizado em uma matriz metálica polariza os elétrons de condução do metal hospedeiro e estes influenciam os outros spins, induzindo um acoplamento efetivo

entre eles. Tal acoplamento oscila com a distância r_{ij} entre dois spins situados nos sítios i e j , segundo

$$J_{ij} = J_0 \cos(2k_F r_{ij} + \Phi_0) / (k_F r_{ij})^3, \quad (2.1.1)$$

onde J_0 e Φ_0 são constantes e k_F é o vetor de onda de Fermi do metal hospedeiro.

Os Vidros de Spins mencionados acima são preparados através do rápido esfriamento da liga a partir de altas temperaturas, isto é, através de um processo de temperamento (quenching); por isto é razoável considerar que as impurezas congelam em sítios completamente aleatórios da rede hospedeira. Isto faz com que os acoplamentos efetivos J_{ij} em (2.1.1), sejam também variáveis aleatórias.

Isto levou Edwards e Anderson [22] em 1975 a proporem um modelo (modelo EA) de interações de curto alcance com o objetivo de descrever este tipo de sistema onde a aleatoriedade na posição dos átomos magnéticos foi substituída por uma aleatoriedade nas ligações.

Imaginemos uma rede cristalina com N íons magnéticos situados nos sítios da rede. Suponhamos que o cristal seja fortemente anisotrópico de tal forma que possa ser descrito em termos de spins de Ising, os quais podem apontar somente ao longo de um único eixo, para cima ou para baixo. Podemos então representar o spin no sítio i da rede por uma variável S_i admitindo somente dois valores possíveis: $S_i = +1$ (para cima) e $S_i = -1$ (para baixo).

O modelo EA na presença de um campo magnético externo h é descrito em termos do hamiltoniano

$$\mathcal{H}_{EA} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j - h \sum_i S_i, \quad (2.1.2)$$

onde o símbolo $\langle ij \rangle$ no primeiro termo significa que o somatório está restrito a pares

de sítios primeiros vizinhos.

Façamos agora algumas considerações sobre as distribuições de probabilidades $P(J_{ij})$ das ligações J_{ij} . Antes de tudo consideramos que os J_{ij} 's são variáveis aleatórias independentes com funções de distribuição idênticas. Os dois tipos de distribuições $P(J_{ij})$ mais utilizados são respectivamente, a gaussiana [22,2]

$$P(J_{ij}) = \left[\frac{1}{2\pi J^2} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[- (J_{ij} - J_0)^2 / 2J^2 \right] \quad , \quad (2.1.3)$$

e a bimodal (ou " $\pm J$ ") [26],

$$P(J_{ij}) = p\delta(J_{ij} - J) + (1-p)\delta(J_{ij} + J) \quad . \quad (2.1.4)$$

Devido a dependência do hamiltoniano (2.1.2) com relação à realização efetiva dos acoplamentos J_{ij} 's, todas as grandezas termodinâmicas derivadas dele serão, em princípio, também dependentes de tal realização. Por exemplo, a energia livre F para uma dada realização $\{J_{ij}\}$ é dada por

$$F\{J_{ij}\} = -kT \ln Z\{J_{ij}\} \quad , \quad (2.1.5)$$

onde k é a constante de Boltzmann e $Z\{J_{ij}\}$ é a função de partição dada por

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}} \quad , \quad (2.1.6)$$

com $\beta = 1/kT$. Como de costume, para sistemas temperados a média sobre a desordem é efetuada na energia livre $F\{J_{ij}\}$, de modo que

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} [F\{J_{ij}\}]_J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int \langle \Pi_{ij} \rangle [dJ_{ij} P(J_{ij})] F\{J_{ij}\} \quad , \quad (2.1.7)$$

é a energia livre por spin e $[]_J$ denota uma média sobre os acoplamentos $\{J_{ij}\}$. Na expressão acima, temos de calcular a média do logaritmo da função de partição, $[\ln Z\{J_{ij}\}]_J$. Para isto, Edwards e Anderson utilizaram o método das réplicas, ou seja, aplicaram a identidade

$$\ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} (Z^n - 1) \quad , \quad (2.1.8)$$

onde n é o número de cópias idênticas e independentes, ou réplicas, do sistema.

O parâmetro de ordem definido por Edwards–Anderson para caracterizar a fase de Vidro de Spins é dado por

$$q_{EA} = \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i \rangle_T^2 \quad , \quad (2.1.9)$$

onde $\langle \rangle_T$ representa a média térmica usual com relação ao hamiltoniano em (2.1.2).

Na próxima seção introduziremos o modelo Sherrington–Kirkpatrick que surgiu logo em seguida ao modelo EA.

2.2 O Modelo Sherrington–Kirkpatrick: Definição e Energia Livre no Espaço das Réplicas

Como uma proposta de uma aproximação de campo médio para o modelo de Edwards–Anderson, Sherrington e Kirkpatrick (SK) [2] consideraram um sistema com N spins de Ising interagindo através de interações de alcance infinito, distribuídas independentemente segundo uma distribuição de probabilidades gaussiana. O modelo SK na presença de um campo magnético externo h é dado pelo hamiltoniano,

$$\mathcal{H} = - \sum_{(ij)} J_{ij} S_i S_j - h \sum_i S_i \quad , \quad (2.2.1)$$

onde $S_i = \pm 1$ e $\sum_{(ij)}$ representa uma soma sobre todos os pares distintos de sítios i e j .

A distribuição de probabilidades para os J_{ij} 's será dada por

$$P(J_{ij}) = \left[\frac{N}{2\pi J^2} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[- \frac{N(J_{ij} - J_0/N)^2}{2J^2} \right] \quad , \quad (2.2.2)$$

onde a dependência em N é introduzida de tal forma a garantir uma energia livre por spin finita no limite termodinâmico. Fazendo-se uso da integral gaussiana,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-a(x-x_0)^2 + bx] = \left(\frac{\pi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{b^2}{4a} + bx_0 \right] \quad , \quad (2.2.3)$$

temos então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dJ_{ij} P(J_{ij}) = 1 \quad , \quad (2.2.4)$$

assim como os momentos de ordens mais baixas,

$$[J_{ij}]_J = \int_{-\infty}^{\infty} dJ_{ij} J_{ij} P(J_{ij}) = \frac{J_0}{N} \quad , \quad (2.2.5)$$

$$[J_{ij}^2]_J = \int_{-\infty}^{\infty} dJ_{ij} J_{ij}^2 P(J_{ij}) = \frac{J_0^2}{N} \quad ; \quad (2.2.6)$$

todos os outros momentos $[J_{ij}^k]_J$ com $k > 2$ são dependentes de $[J_{ij}]_J$ e $[J_{ij}^2]_J$. Seguindo o procedimento usual, fazemos a média na energia livre, pois trata-se de um sistema temperado ("quenched"), como mencionado na seção anterior, e não na função de partição que seria o caso se tratássemos de um sistema recozido ("annealed").

As equações (2.1.5) e (2.1.7) nos dão a energia livre por spin,

$$-\beta f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int \prod_{(ij)} [dJ_{ij} P(J_{ij})] \ln Z\{J_{ij}\} \quad . \quad (2.2.7)$$

Definindo n cópias idênticas e independentes do sistema podemos empregar o truque das réplicas (ver equação (2.1.8)),

$$Z^n = \prod_{\alpha=1}^n Z_{\alpha} = \text{Tr}_{\alpha} \exp \left[-\beta \sum_{\alpha=1}^n \mathcal{H}_{\alpha} \right] \quad , \quad (2.2.8)$$

isto é,

$$Z^n = \text{Tr}_\alpha \exp \left[\beta \sum_{\alpha} \sum_{(ij)} J_{ij} S_i^\alpha S_j^\alpha + \beta h \sum_{\alpha} \sum_i S_i^\alpha \right] , \quad (2.2.9)$$

onde Tr_α denota um traço sobre todas as réplicas α , com $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Assim, a equação (2.2.7) toma a seguinte forma,

$$\begin{aligned} -\beta f = & \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{Nn} \int \prod_{(ij)} \left\{ dJ_{ij} (N/2\pi J^2)^{\frac{1}{2}} \exp[-N(J_{ij} - J_0/N)^2/2J^2] \right\} \\ & \times \left\{ \text{Tr}_\alpha \exp \left[\beta \sum_{\alpha} \sum_{(ij)} J_{ij} S_i^\alpha S_j^\alpha + \beta h \sum_{\alpha} \sum_i S_i^\alpha \right] - 1 \right\} , \quad (2.2.10) \end{aligned}$$

que após a realização das integrais gaussianas resulta em,

$$\begin{aligned} -\beta f = & \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{Nn} \left\{ \text{Tr}_\alpha \exp \left[\frac{(\beta J)^2}{2N} \sum_{(ij)} \sum_{\alpha\beta} S_i^\alpha S_j^\alpha S_i^\beta S_j^\beta \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\beta J_0}{N} \sum_{(ij)} \sum_{\alpha} S_i^\alpha S_j^\alpha + \beta h \sum_{\alpha} \sum_i S_i^\alpha \right] - 1 \right\} . \quad (2.2.11) \end{aligned}$$

A seguir, empregaremos a notação para somatórios introduzida no início deste trabalho. Temos então,

$$\sum_{(ij)} \sum_{\alpha} S_i^\alpha S_j^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left[\sum_i S_i^\alpha \right]^2 - \frac{1}{2} Nn ,$$

$$\sum_{(ij)} \sum_{\alpha\beta} S_i^\alpha S_j^\alpha S_i^\beta S_j^\beta = \sum_{(\alpha\beta)} \left[\sum_i S_i^{\alpha\beta} \right]^2 + \frac{1}{2} N^2 n - \frac{1}{2} Nn^2 .$$

Substituindo estes resultados em (2.2.11), temos

$$\begin{aligned}
-\beta f &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{Nn} \left\{ \exp \left[\frac{(\beta J)^2}{4} (Nn - n^2) - \frac{\beta J_0}{2} n \right] \right. \\
&\times \text{Tr}_\alpha \exp \left[\frac{\beta J_0}{2N} \sum_\alpha \left[\sum_i S_i^\alpha \right]^2 + \frac{(\beta J)^2}{2N} \sum_{(\alpha\beta)} \left[\sum_i S_i^\alpha S_i^\beta \right]^2 + \beta h \sum_\alpha \sum_i S_i^\alpha \right] - 1 \left. \right\} \quad (2.2.12)
\end{aligned}$$

No limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$), o único termo constante que sobrar  na expressão acima, será

$$\exp \left[\frac{(\beta J)^2}{4} Nn \right] ,$$

enquanto que os termos quadráticos $\left[\sum_i S_i^\alpha \right]^2$ e $\left[\sum_i S_i^\alpha S_i^\beta \right]^2$ podem ser linearizados através da transforma o,

$$e^{\lambda a^2} = \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} + (2\lambda)^{\frac{1}{2}} az \right] . \quad (2.2.13)$$

Reescrevendo a equa o (2.2.12) ficamos com,

$$\begin{aligned}
-\beta f &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{Nn} \left\{ \exp \left[\frac{(\beta J)^2}{4} Nn \right] \text{Tr}_\alpha \int \left[\prod_\alpha \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dx^\alpha \right] \left[\prod_{(\alpha\beta)} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dy^{\alpha\beta} \right] \right. \\
&\times \exp \left[-\sum_\alpha \frac{(x^\alpha)^2}{2} - \sum_{(\alpha\beta)} \frac{(y^{\alpha\beta})^2}{2} + \left[\frac{\beta J_0}{N} \right]^{\frac{1}{2}} \sum_\alpha \sum_i x^\alpha S_i^\alpha + \right. \\
&\left. + \frac{\beta J}{N^{\frac{1}{2}}} \sum_{(\alpha\beta)} \sum_i y^{\alpha\beta} S_i^\alpha S_i^\beta + \beta h \sum_\alpha \sum_i S_i^\alpha \right] - 1 \left. \right\} . \quad (2.2.14)
\end{aligned}$$

Conseguimos reduzir as somas sobre dois sítios em somas sobre sítios em

separado, como acontece em geral na aproximação de campo médio. Façamos agora a seguinte mudança de variáveis:

$$x^\alpha \rightarrow N^{\frac{1}{2}} x^\alpha \quad ,$$

$$y^{\alpha\beta} \rightarrow N^{\frac{1}{2}} y^{\alpha\beta} \quad .$$

Substituindo as novas variáveis em (2.2.14) temos,

$$\begin{aligned} -\beta f = & \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{Nn} \left\{ \exp \left[\frac{(\beta J)^2}{4} Nn \right] \int \left[\prod_{\alpha} \left[\frac{N}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dx^\alpha \right] \left[\prod_{(\alpha\beta)} \left[\frac{N}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dy^{\alpha\beta} \right] \right. \\ & \times \exp \left[-N \sum_{\alpha} \frac{(x^\alpha)^2}{2} - N \sum_{(\alpha\beta)} \frac{(y^{\alpha\beta})^2}{2} \right] \\ & \left. \times \text{Tr}_{\alpha} \prod_i \exp \left[(\beta J_0)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha} x^\alpha S_i^\alpha + \beta J \sum_{(\alpha\beta)} y^{\alpha\beta} S_i^\alpha S_i^\beta + \beta h \sum_{\alpha} S_i^\alpha \right] - 1 \right\} \quad . \quad (2.2.15) \end{aligned}$$

Observemos que,

$$\text{Tr}_{\alpha} \prod_i \exp[] = \prod_i \text{Tr}_{\alpha} \exp[] = (\text{Tr}_{\alpha} \exp[])^N = \exp \left\{ N \ln(\text{Tr}_{\alpha} \exp[]) \right\} \quad ;$$

logo podemos descartar o índice de sítio i e escrever (2.2.15) como,

$$\begin{aligned} -\beta f = & \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{Nn} \left\{ \exp \left[\frac{(\beta J)^2}{4} Nn \right] \int \left[\prod_{\alpha} \left[\frac{N}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dx^\alpha \right] \left[\prod_{(\alpha\beta)} \left[\frac{N}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dy^{\alpha\beta} \right] \right. \\ & \left. \times \exp[-N g(x^\alpha, y^{\alpha\beta})] - 1 \right\} \quad , \quad (2.2.16) \end{aligned}$$

onde

$$g(x^\alpha, y^{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (x^\alpha)^2 + \frac{1}{2} \sum_{(\alpha\beta)} (y^{\alpha\beta})^2$$

$$- \ln \text{Tr}_{\alpha} \exp \left[(\beta J_0)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha} x^{\alpha} S^{\alpha} + \beta J \sum_{(\alpha\beta)} y^{\alpha\beta} S^{\alpha} S^{\beta} + \beta h \sum_{\alpha} S^{\alpha} \right] . \quad (2.2.17)$$

Neste ponto, faremos duas suposições:

1^a) A ordem dos limites pode ser invertida, vale dizer, o limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) será tomado primeiro. Chamemos de I a integral que aparece na equação (2.2.16). Então, no limite $N \rightarrow \infty$ pode-se avaliar,

$$I = \int \left[\prod_{\alpha} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} dx^{\alpha} \right] \left[\prod_{(\alpha\beta)} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} dy^{\alpha\beta} \right] \exp[-N g(x^{\alpha}, y^{\alpha\beta})] ,$$

pelo método do ponto de sela, que nos assegura que I é dominada pelo mínimo de $g(x^{\alpha}, y^{\alpha\beta})$. Portanto,

$$I = \exp[-N \min(g(x^{\alpha}, y^{\alpha\beta}))] .$$

Logo, a equação (2.2.16) torna-se

$$-\beta f = \lim_{n \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Nn} \left\{ \exp \left[\frac{(\beta J)^2}{4} Nn \right] \exp[-N \min(g(x^{\alpha}, y^{\alpha\beta}))] - 1 \right\} ,$$

$$-\beta f = \lim_{n \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Nn} \left\{ \exp Nn \left[\frac{(\beta J)^2}{4} - \frac{1}{n} \min(g(x^{\alpha}, y^{\alpha\beta})) \right] - 1 \right\} .$$

2^a) A aplicação dos limites é tal que, o produto Nn seja pequeno de modo que

possamos expandir a exponencial. Então,

$$-\beta f = \lim_{n \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Nn} \left\{ 1 + Nn \left[\frac{(\beta J)^2}{4} - \frac{1}{n} \min (g(x^\alpha, y^{\alpha\beta})) \right] - 1 \right\} ,$$

o que resulta em

$$\beta f = \lim_{n \rightarrow 0} \left\{ -\frac{(\beta J)^2}{4} + \frac{1}{n} \min (g(x^\alpha, y^{\alpha\beta})) \right\} . \quad (2.2.18)$$

Façamos agora uma nova mudança de variáveis,

$$x^\alpha \rightarrow (\beta J_0)^{\frac{1}{2}} m^\alpha ,$$

$$y^{\alpha\beta} \rightarrow (\beta J) q^{\alpha\beta} .$$

Assim, as equações (2.2.18) e (2.2.17) podem ser escritas respectivamente como,

$$\beta f = -\frac{(\beta J)^2}{4} + \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \min g(m^\alpha, q^{\alpha\beta}) , \quad (2.2.19)$$

$$g(m^\alpha, q^{\alpha\beta}) = \frac{\beta J_0}{2} \sum_{\alpha} (m^\alpha)^2 + \frac{(\beta J)^2}{2} \sum_{(\alpha\beta)} (q^{\alpha\beta})^2 - \ln \text{Tr}_{\alpha} \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}}) , \quad (2.2.20a)$$

com

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \beta J_0 \sum_{\alpha} m^{\alpha} S^{\alpha} + (\beta J)^2 \sum_{(\alpha\beta)} q^{\alpha\beta} S^{\alpha} S^{\beta} + \beta h \sum_{\alpha} S^{\alpha} , \quad (2.2.20b)$$

onde \mathcal{H}_{eff} é chamado de "hamiltoniano efetivo" no espaço das réplicas.

A extremização de $g(m^\alpha, q^{\alpha\beta})$ nos dá,

$$\frac{\partial g(m^\alpha, q^{\alpha\beta})}{\partial m^\alpha} = 0 \Rightarrow m^\alpha = \frac{\text{Tr}_\alpha S^\alpha \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}})}{\text{Tr}_\alpha \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}})} , \quad (2.2.21a)$$

$$\frac{\partial g(m^\alpha, q^{\alpha\beta})}{\partial q^{\alpha\beta}} = 0 \Rightarrow q^{\alpha\beta} = \frac{\text{Tr}_\alpha S^\alpha S^\beta \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}})}{\text{Tr}_\alpha \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}})} , \quad (\alpha \neq \beta) . \quad (2.2.21b)$$

As equações (2.2.21) podem ainda ser escritas como

$$m^\alpha = \langle S^\alpha \rangle , \quad (2.2.22a)$$

$$q^{\alpha\beta} = \langle S^\alpha S^\beta \rangle , \quad (\alpha \neq \beta) \quad (2.2.22b)$$

onde $\langle \rangle$ denota uma média térmica tomada com relação a \mathcal{H}_{eff} .

Passamos agora a calcular a energia interna (u) e a entropia (s) por spin.

Temos que

$$s = - \left[\frac{\partial f}{\partial T} \right]_h , \quad (2.2.23)$$

e da relação

$$f = u - Ts ,$$

temos

$$u = f - T \left[\frac{\partial f}{\partial T} \right]_h . \quad (2.2.24)$$

Estas grandezas podem ainda ser expressas como:

$$u = \left[\frac{\partial(\beta f)}{\partial\beta} \right]_h, \quad (2.2.25)$$

$$\frac{s}{k} = \beta \left[\frac{\partial(\beta f)}{\partial\beta} \right]_h - \beta f. \quad (2.2.26)$$

Assim, a partir das equações (2.2.19) e (2.2.20), podemos calcular u:

$$u = -\frac{\beta J^2}{2} + \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left[\frac{\partial}{\partial\beta} \right]_h g(m^\alpha, q^{\alpha\beta}),$$

onde

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial g}{\partial\beta} \right]_h &= \frac{J_0}{2} \sum_{\alpha} (m^\alpha)^2 + \beta J^2 \sum_{(\alpha\beta)} (q^{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{\text{Tr}_{\alpha} \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}})} \\ &\times \text{Tr}_{\alpha} \left[\left[J_0 \sum_{\alpha} m^\alpha S^\alpha + 2\beta J^2 \sum_{(\alpha\beta)} q^{\alpha\beta} S^\alpha S^\beta + h \sum_{\alpha} S^\alpha \right] \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}}) \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left[\frac{\partial g}{\partial\beta} \right]_h = \frac{J_0}{2} \sum_{\alpha} (m^\alpha)^2 + \beta J^2 \sum_{(\alpha\beta)} (q^{\alpha\beta})^2 - J_0 \sum_{\alpha} (m^\alpha)^2 - 2\beta J^2 \sum_{(\alpha\beta)} (q^{\alpha\beta})^2 - h \sum_{\alpha} m^\alpha.$$

Ficamos então com,

$$\beta u = -\frac{(\beta J)^2}{2} - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left\{ \frac{\beta J_0}{2} \sum_{\alpha} (m^\alpha)^2 + (\beta J)^2 \sum_{(\alpha\beta)} (q^{\alpha\beta})^2 + \beta h \sum_{\alpha} m^\alpha \right\}. \quad (2.2.27)$$

Escrevendo a entropia por spin na forma

$$\frac{s}{k} = \beta u - \beta f \quad (2.2.28)$$

e substituindo as equações (2.2.19) e (2.2.27) na expressão acima, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{s}{k} = & -\frac{(\beta J)^2}{4} - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left\{ \beta J_0 \sum_{\alpha} (m^{\alpha})^2 + \frac{3}{2} \sum_{(\alpha\beta)} (q^{\alpha\beta})^2 \right. \\ & \left. + \beta h \sum_{\alpha} m^{\alpha} - \ln \text{Tr}_{\alpha} \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}}) \right\} . \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Na próxima seção, analisaremos o modelo Sherrington-Kirkpatrick considerando a mais simples das soluções, ou seja, a solução de simetria entre réplicas [2].

2.3 Solução de Simetria entre Réplicas para o Modelo Sherrington-Kirkpatrick

O "Ansatz" de simetria entre réplicas [2] consiste em considerar

$$m^\alpha = m \quad ; \quad \forall \alpha \quad , \quad (2.3.1a)$$

$$q^{\alpha\beta} = q \quad ; \quad \forall (\alpha\beta) \quad , \quad (2.3.1b)$$

em termos do qual, a energia livre em (2.2.19) pode ser escrita como (ver Apêndice A),

$$\beta f(m,q) = -\frac{(\beta J)^2}{4} (1-q)^2 + \frac{\beta J_0}{2} m^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \ln(2\cosh \xi) \quad (2.3.2)$$

onde,

$$\xi = \beta J_0 m + \beta J q^{\frac{1}{2}} z + \beta h \quad . \quad (2.3.3)$$

Extremizando $f(m,q)$ na equação acima (ver Apêndice B), obtemos para a magnetização e para o parâmetro de ordem de vidro de spins, respectivamente

$$\frac{\partial(\beta f)}{\partial m} = 0 \Rightarrow m = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \operatorname{tgh} \xi \quad , \quad (2.3.4a)$$

$$\frac{\partial(\beta f)}{\partial q} = 0 \Rightarrow q = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \operatorname{tgh}^2 \xi \quad . \quad (2.3.4b)$$

A energia interna por spin dada por (2.2.27) na solução de simetria entre réplicas pode ser escrita como

$$\beta u = -\frac{(\beta J)^2}{2} (1 - q^2) - \frac{\beta J_0}{2} m^2 - \beta h m \quad . \quad (2.3.5)$$

Substituindo (2.3.5) e (2.3.2) em (2.2.28) temos a entropia por spin,

$$\begin{aligned} \frac{s}{k} = & -\frac{(\beta J)^2}{2} (1 - q^2) + \frac{(\beta J)^2}{4} (1 - q)^2 - \beta J_0 m^2 - \beta h m \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \ln(2 \cosh \xi) \quad . \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Consideremos agora as diversas soluções possíveis para as equações (2.3.4), as quais denominaremos de

Paramagnética (P): $m = 0$ e $q = 0$,

Ferromagnética (F): $m \neq 0$ e $q \neq 0$,

Vidro de Spins (VS): $m = 0$ e $q \neq 0$.

O caso $J = 0$ recupera o limite de um sistema ferromagnético puro, onde as únicas soluções possíveis são a P e a F. A seguir, discutiremos apenas os casos onde $J \neq 0$.

$$\text{Caso 1)} \quad J_0 = 0 \text{ e } h = 0 \Rightarrow \xi = \beta J q^{\frac{1}{2}} z$$

Temos apenas as soluções P e VS.

$$\text{Caso 2)} \quad J_0 \neq 0 \text{ e } h = 0 \Rightarrow \xi = \beta J_0 m + \beta J q^{\frac{1}{2}} z$$

As três soluções são agora, possíveis.

$$\text{Caso 3)} \quad J_0 = 0 \text{ e } h \neq 0 \Rightarrow \xi = \beta J q^{\frac{1}{2}} z + \beta h$$

Somente a solução F (induzida pelo campo h) é possível.

No Caso 3 ($h \neq 0$), não há transição de fase, isto é, a introdução de um campo magnético externo h destrói a transição de fase. Portanto, consideraremos no tratamento a seguir somente casos com $h = 0$, o que torna

$$\xi = \beta(J_0 m + J q^{\frac{1}{2}} z) \quad . \quad (2.3.7)$$

Para traçarmos o diagrama de fases, faremos um estudo sobre as diversas fronteiras críticas.

a) Fronteira Crítica P-VS:

Temos $m = 0$ e o surgimento de $q \neq 0$ indica o ordenamento VS. Uma expansão em potências de q nos leva a (ver Apêndice C),

$$q = (\beta J)^2 q - 2 (\beta J)^4 q^2 + O(q^3) \quad . \quad (2.3.8)$$

A solução possível com $q \neq 0$ é do tipo,

$$q \cong \frac{(\beta J)^2 - 1}{2(\beta J)^4} \quad , \quad (2.3.9)$$

onde $q \rightarrow 0$, quando $kT \rightarrow J$ (com $kT < J$). Isto nos dá a fronteira crítica P-VS a uma temperatura T_g , tal que $kT_g = J$.

Definindo,

$$\tau = \frac{1}{T_g} (T_g - T) = 1 - \frac{T}{T_g} = 1 - \frac{kT}{J} \quad , \quad (2.3.10)$$

então, a equação (2.3.9) pode ser escrita como,

$$q = \tau + O(\tau^2) \quad . \quad (2.3.11)$$

b) Fronteira Crítica P-F:

O ordenamento F é caracterizado pelo surgimento de $m \neq 0$. Vamos então nos concentrar em soluções $m \neq 0$, deixando por enquanto $q = 0$; as soluções $q \neq 0$ surgem naturalmente como consequência do ordenamento de m .

A equação (C.5) para $m \neq 0$ e $q = 0$, torna-se,

$$1 = \beta J_0 - \frac{1}{3} (\beta J_0)^3 m^2 + O(m^4) \quad ,$$

isto é,

$$m = \sqrt{3} \frac{(\beta J_0 - 1)^{\frac{1}{2}}}{(\beta J_0)^{3/2}} \quad , \quad (2.3.12)$$

onde $m \rightarrow 0$, quando $kT \rightarrow J_0$ (com $kT < J_0$). Isto nos dá a fronteira crítica P-F a uma temperatura T_c , tal que $kT_c = J_0$.

c) Fronteira Crítica F-VS:

A determinação desta fronteira é mais complicada. Temos $q \neq 0$ ao longo desta linha (e em geral, q não é pequeno), resultando em que as equações de equilíbrio (2.3.4) somente poderão ser resolvidas através de métodos numéricos.

Existem dois pontos desta fronteira que podem ser determinados facilmente, como descritos a seguir.

1) O ponto onde a linha F-VS encontra a fase P; devemos ter simultaneamente,

$$\begin{cases} q \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kT \rightarrow J \\ kT \rightarrow J_0 \end{cases} ;$$

logo,

$$J = J_0 \quad . \quad (2.3.13)$$

2) O ponto onde a linha F-VS encontra o eixo $T = 0$; para $m \rightarrow 0$ em $T = 0$, (ver Apêndice D), teremos

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{J}{J_0} \Rightarrow \frac{J_0}{J} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$\frac{J_0}{J} \cong 1.2533 \quad . \quad (2.3.14)$$

As fronteiras críticas discutidas acima estão mostradas na Figura 2.1 onde o diagrama de fases do modelo SK com a solução de simetria entre réplicas é apresentado.

É um fato bem conhecido que tal solução é incorreta na região de baixas temperaturas; um indicativo disto é dado pela "catástrofe" da entropia negativa em $T = 0$ (ver Apêndice D) ,

$$s = -\frac{k}{2\pi} \quad . \quad (2.3.15)$$

Na seção seguinte, discutiremos a análise de estabilidade de Almeida-Thouless, mostrando as regiões de instabilidade das soluções (2.3.1) para o modelo SK.

2.4 Análise de Estabilidade de Almeida-Thouless

A fim de verificar se m e q dados pelas equações (2.3.1) asseguram um mínimo para a energia livre por spin (equação (2.2.19)), Almeida-Thouless (AT) [3] consideraram flutuações em torno destas soluções:

$$m^\alpha = m + \varepsilon^\alpha \quad ,$$

$$q^{\alpha\beta} = q + \eta^{\alpha\beta} \quad ,$$

onde ε^α e $\eta^{\alpha\beta}$ são pequenos. Expandindo $g(m^\alpha, q^{\alpha\beta})$ em série de Taylor (ver Apêndice E) até termos de segunda ordem, pode-se obter a matriz de estabilidade G , que é construída a partir das segundas derivadas do funcional $g(m^\alpha, q^{\alpha\beta})$, calculadas no ponto ($m^\alpha = m$; $q^{\alpha\beta} = q$). A matriz G deve ser positivo definida, ou seja, todos os seus autovalores devem ser positivos para garantir a estabilidade da solução (2.3.1).

A matriz G , mostrada na Figura 2.2, segundo Almeida-Thouless, apresenta sete tipos diferentes de elementos (ver Apêndice E), a saber

$$1) \quad G_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 g}{\partial m^\alpha \partial m^\beta} \quad ,$$

$$1a) \quad G_{\alpha\alpha} = A$$

(2.4.1a)

$$1b) \quad G_{\alpha\beta} = B \quad ; \quad \alpha \neq \beta \quad ,$$

$$2) \quad G_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} = \frac{\partial^2 g}{\partial q^{\alpha\beta} \partial q^{\gamma\delta}} \quad ,$$

$$2a) G_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)} = P \quad ,$$

$$2b) G_{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)} = Q \quad ; \quad \beta \neq \gamma \quad , \quad (2.4.1b)$$

$$2c) G_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} = R \quad ; \quad \text{par } (\alpha\beta) \text{ distinto do par } (\gamma\delta) \quad ,$$

$$3) \quad G_{\gamma(\alpha\beta)} = \frac{\partial^2 g}{\partial m \gamma \partial q^{\alpha\beta}} \quad ,$$

$$3a) G_{\alpha(\alpha\beta)} = C \quad ,$$

(2.4.1c)

$$3b) G_{\gamma(\alpha\beta)} = D \quad ; \quad \gamma \neq \alpha, \beta \quad .$$

A Equação de Autovalores $G \mu = \lambda \mu$ (ver Apêndice E), nos dá cinco autovalores distintos para n qualquer, que se reduzem a três, no limite $n \rightarrow 0$, a saber,

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ (A-B+P-4Q+3R) \pm [(A-B-P+4Q-3R)^2 - 8(C-D)^2]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad , \quad (2.4.2)$$

$$\lambda = P - 2Q + R \quad . \quad (2.4.3)$$

Os autovalores dados pela equação (2.4.2) não assumem valores negativos em nenhuma região do diagrama de fases, e seus zeros dão as fronteiras críticas mostradas na Figura 2.1.

O autovalor dado por (2.4.3) torna-se negativo definindo uma região de instabilidade da solução (2.3.1) conforme mostrado na Figura 2.3. Este autovalor ao

se anular define uma linha de instabilidade, conhecida como linha de instabilidade de Almeida-Thouless, ou simplesmente linha AT.

Na próxima seção apresentaremos a solução de quebra de simetria entre réplicas de Parisi para o modelo SK, completando assim uma visão superficial da teoria dos vidros de spins de Ising com interações de alcance infinito.

2.5 Solução de Parisi para o Modelo Sherrington–Kirkpatrick

O modelo SK com um único parâmetro q foi tratado com o uso do método das réplicas, como visto anteriormente. Com este tipo de solução, entretanto, foram obtidos resultados não físicos, ou seja, uma entropia negativa a temperaturas suficientemente baixas e uma instabilidade na fase de vidro de spins, como mostrado por Almeida–Thouless, quando um dos autovalores da matriz de estabilidade tornava-se negativo.

O esquema de quebra da simetria entre réplicas de Parisi [4,5] é, no momento, aceito como a solução correta para este problema. Neste esquema de Parisi, em vez de um único parâmetro q , é usada uma função $q(x)$, contínua e monotonicamente crescente no intervalo $0 \leq x \leq 1$, para descrever a fase de baixas temperaturas, isto é, são usados infinitos parâmetros. Abaixo da temperatura de vidro de spins, a energia livre apresenta uma estrutura altamente não trivial, com muitos vales separados por barreiras, as quais divergem no limite termodinâmico, resultando na existência de estados metaestáveis assim como em multiplicidade de estados de menor energia.

A parametrização de Parisi para a matriz \vec{q} , de dimensão $n \times n$, cujos elementos são dados por $q^{\alpha\beta}$, consiste em um processo hierárquico no qual os blocos diagonais da matriz da Figura 2.4 são quebrados em sub-blocos, a saber:

- Passo 0) Definimos $m_0 = n$ e tomamos todos os elementos de matriz $q^{\alpha\beta} = q_0$, com $\alpha \neq \beta$;
- Passo 1) Dividimos a matriz grande $n \times n$ em blocos $m_1 \times m_1$ tal que o quociente n/m_1 seja inteiro e atribuímos um valor q_1 a todos os elementos em blocos diagonais;

Passo 2) Dividimos os blocos diagonais em sub-blocos $m_2 \times m_2$ tal que o quociente m_1/m_2 seja inteiro e atribuímos um valor q_2 a todos os elementos em sub-blocos diagonais.

Repetindo este procedimento k vezes temos,

$$n = m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k \geq 1 \quad ,$$

o que resulta em um conjunto de parâmetros q_0, q_1, \dots, q_k . Observamos que cada linha da matriz tem o mesmo número de elementos q_0, q_1, \dots, q_k .

Temos então que

$$\sum_{\alpha\beta} (q^{\alpha\beta})^\sigma = n \sum_{i=0}^{k-1} (m_i - m_{i+1}) q_i^\sigma \quad . \quad (2.5.1)$$

No limite quando $n \rightarrow 0$, temos

$$0 = m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k \leq 1 \quad , \quad (2.5.2)$$

e no limite onde o procedimento é repetido indefinidamente, isto é, quando $k \rightarrow \infty$, podemos introduzir uma variável contínua x ($0 \leq x \leq 1$), donde passamos a ter

$$m_i \rightarrow x \quad ; \quad m_i - m_{i+1} = -dx \quad ,$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} 1 \rightarrow \int_0^1 dx \quad .$$

As informações sobre o conjunto dos q_i 's passam a estar contidas em uma função $q(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$. Podemos então, escrever a energia livre por spin

como um funcional de $q(x)$ e a determinação da forma de $q(x)$ torna-se um problema de cálculo das variações.

A solução de Parisi apresenta uma entropia zero em $T = 0$, mas é apenas marginalmente estável uma vez que, na análise de estabilidade, os autovalores são todos não-negativos, mas um autovalor zero é encontrado [27,28]. Sua interpretação física em termos da estrutura de vales da energia livre [6-8], é reconhecidamente, um dos formalismos mais ricos da mecânica estatística, com inúmeras aplicações nas mais diversas áreas da ciência, como por exemplo, em problemas de otimização, inteligência artificial e biologia [1].

2.6 Conclusão

Neste capítulo apresentamos uma noção superficial sobre os vidros de spins e discutimos dois modelos de interações entre spins de Ising: o modelo Edwards–Anderson de interações de curto alcance, e o modelo Sherrington–Kirkpatrick de interações de alcance infinito. Para o modelo SK com uma distribuição de probabilidades gaussiana, calculamos a energia livre, a energia interna e a entropia por spin, no espaço de réplicas em geral. Depois, apresentamos a solução de simetria entre as réplicas e o respectivo diagrama de fases. Mostramos o resultado não físico obtido por SK, qual seja, a entropia negativa à temperatura zero, e em seguida discutimos a análise de estabilidade de Almeida–Thouless para esta solução, mostrando a região de instabilidade e a linha AT. Finalmente, apresentamos a solução de quebra de simetria entre réplicas de Parisi, que eliminou o problema da entropia negativa à temperatura zero e que hoje é considerada como a solução correta do problema.

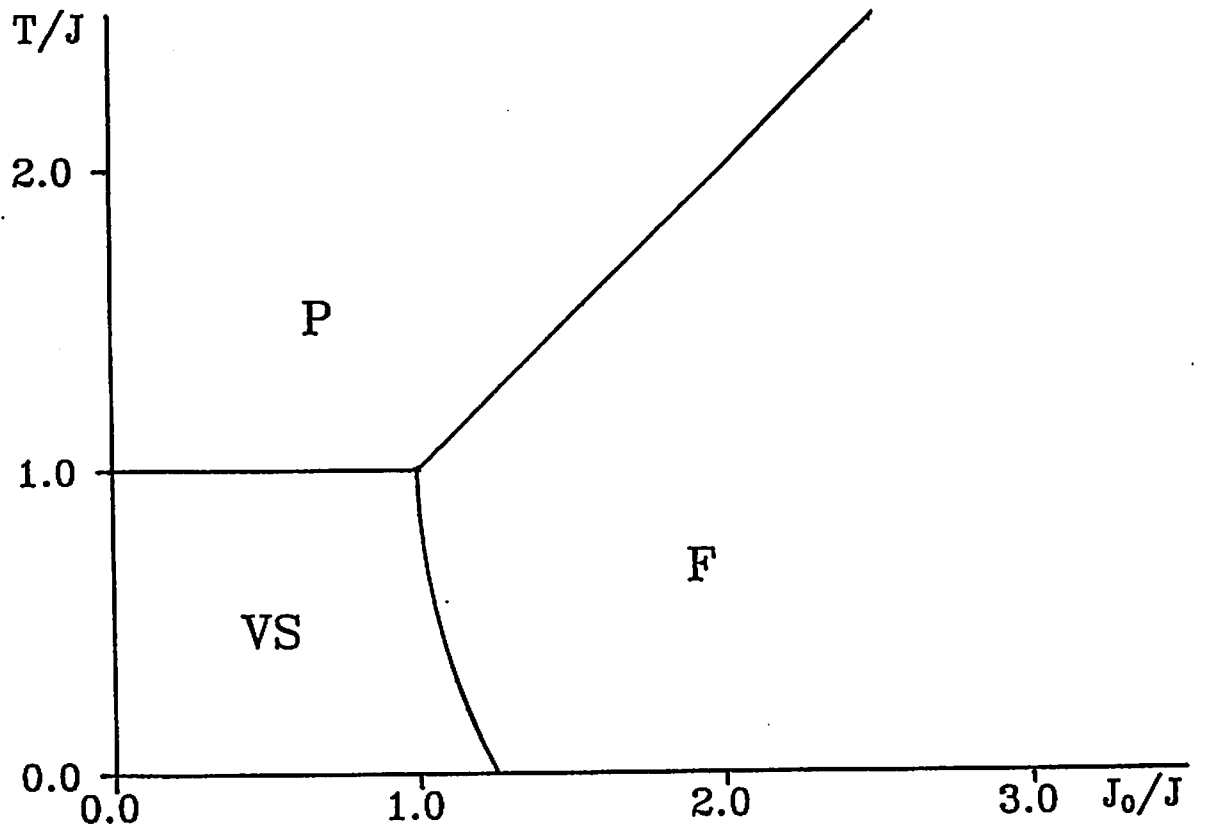


Figura 2.1: O diagrama de fases do modelo Sherrington-Kirkpatrick.

$$\mathbf{G} \equiv \left[\begin{array}{c|c} \overset{\leftarrow n \rightarrow}{G_{\alpha\beta}} & \overset{\leftarrow \frac{1}{2}n(n-1) \rightarrow}{G_{\alpha(\beta\gamma)}} \\ \hline G_{(\alpha\beta)\gamma} & G_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} \end{array} \right] \begin{array}{l} \uparrow n \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \frac{1}{2}n(n-1) \\ \downarrow \end{array}$$

Figura 2.2: A matriz de estabilidade utilizada na análise de Almeida-Thouless.

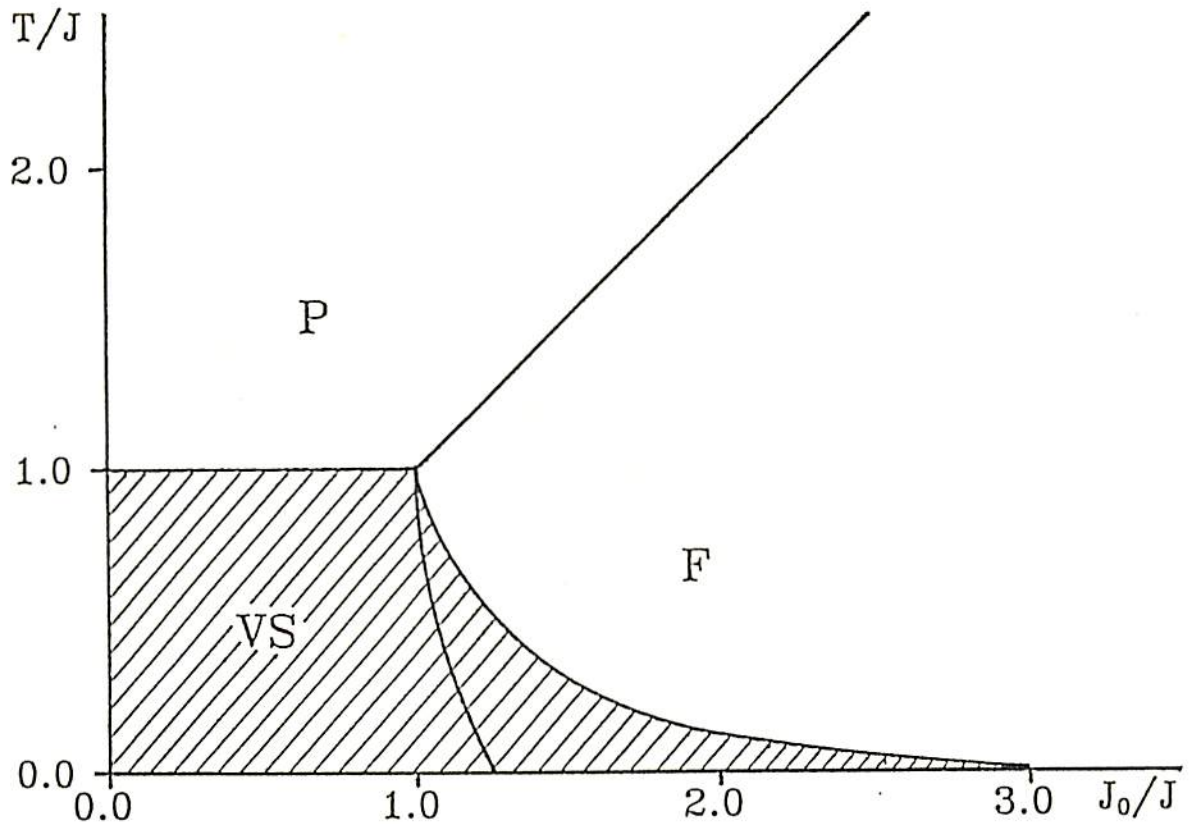


Figura 2.3: O diagrama de fases do modelo Sherrington-Kirkpatrick, mostrando a região de instabilidade da solução de simetria entre réplicas (região hachurada) e a linha de Almeida-Thouless.

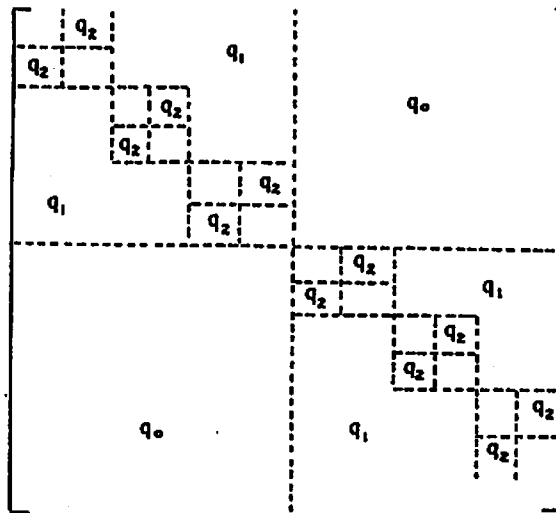


Figura 2.4: Passos iniciais da parametrização de Paris.

Capítulo 3

O MODELO SHERRINGTON-KIRKPATRICK NA PRESENÇA DE
UM CAMPO MAGNÉTICO ALEATÓRIO

3.1 Introdução

Sistemas desordenados representam hoje uma classe de problemas dos mais estudados em Mecânica Estatística. Dentre estes, podemos salienta os vidros de spins, como descritos no capítulo anterior, onde a desordem é introduzida nas constantes de acoplamento, assim como modelos ferromagnéticos na presença de campo magnético aleatório (desordem introduzida no campo externo) [18]. Este segundo problema passou a despertar grande interesse após a sua identificação com sistemas reais, ou melhor, com antiferromagnetos diluídos quando submetidos a um campo magnético uniforme [19,20].

Modelos teóricos que unificam estes dois problemas são citados na literatura como apropriados para descrever vidros de prótons (ou dêuterons) [29-36], que podem ser considerados como os análogos elétricos dos vidros de spins magnéticos. Tais sistemas consistem de soluções sólidas de compostos com ligações de hidrogênio (ou deutério), ferroelétricos com antiferroelétricos, onde as interações entre dipolos elétricos são frustradas devido a uma desordem temperada. Um exemplo bastante conhecido de um vidro de prótons é o $\text{Rb}_{(1-x)} (\text{NH}_4)_x \text{H}_2 \text{PO}_4$ que consiste em uma mistura desordenada do ferroelétrico RbH_2PO_4 com o antiferroelétrico $(\text{NH}_4)\text{H}_2\text{PO}_4$. Se compostos de deutério forem utilizados, obtemos um vidro de dêuterons, como por exemplo, $\text{Rb}_{(1-x)} (\text{ND}_4)_x \text{D}_2 \text{PO}_4$. De fato, medidas experimentais efetuadas em vidros de prótons e dêuterons têm detetado muitas das características inerentes aos vidros de spins [34-41].

Estudos teóricos de tais sistemas foram realizados no limite de interações de alcance infinito [29–36], utilizando o método das réplicas [29,30,32,33], assim como o método do campo local [31], na tentativa de descrever seus comportamentos estáticos; além disso, estudos da dinâmica de tais modelos foram também efetuados [35,36]. Apesar de um considerável esforço já haver sido empregado, muitas questões fundamentais não foram ainda respondidas a contento, como por exemplo, que modificações no diagrama de fases, na linha de Almeida–Thouless e na parametrização de Parisi, devem ocorrer devido a introdução de um termo de campo magnético aleatório na hamiltoniana do modelo Sherrington–Kirkpatrick.

Neste capítulo trataremos o modelo de vidro de spins de Ising com interações de alcance infinito, ou seja, o modelo SK na presença de um campo magnético aleatório. Utilizaremos para isto o método das réplicas, o qual no caso particular da aproximação de simetria entre réplicas, nos permite obter como caso particular a solução de campo local [31], onde um diagrama de fases parcial foi obtido. Além disto, é possível determinar as regiões de instabilidade de tal solução, abrindo perspectivas para implementação do procedimento de quebra da simetria entre réplicas de Parisi, como descrito no capítulo anterior.

3.2 O Modelo

Consideremos um modelo com N spins de Ising interagindo através de interações de alcance infinito, onde cada spin S_i será acoplado a um campo magnético aleatório h_i obedecendo uma distribuição de probabilidades gaussiana. O hamiltoniano para este modelo é dado por

$$\mathcal{H} = - \sum_{(ij)} J_{ij} S_i S_j - \sum_i h_i S_i \quad , \quad (3.2.1)$$

onde teremos agora duas distribuições de probabilidades gaussianas: uma para os J_{ij} 's já considerada no capítulo anterior (equação (2.2.2)), dada por

$$P(J_{ij}) = \left[\frac{N}{2\pi J^2} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[- \frac{N(J_{ij} - J_0/N)^2}{2J^2} \right] \quad , \quad (3.2.2)$$

e outra para os h_i 's (a mesma para todos os sítios), dada por

$$P(h_i) = \left[\frac{1}{2\pi\Delta^2} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[- \frac{(h_i - h_0)^2}{2\Delta^2} \right] \quad . \quad (3.2.3)$$

A energia livre para uma dada amostra $(\{J_{ij}\}, \{h_i\})$ será dada por

$$F(\{J_{ij}\}, \{h_i\}) = -kT \ln Z(\{J_{ij}\}, \{h_i\}) \quad , \quad (3.2.4)$$

e, como continuamos tratando de um sistema temperado, a média sobre a desordem será tomada na energia livre, de modo que

$$[F\{J_{ij}\}, \{h_i\}]_{J,h} = \int \prod_{(ij)} [dJ_{ij} P(J_{ij})] \prod_i [dh_i P(h_i)] F(\{J_{ij}\}, \{h_i\}) \quad , \quad (3.2.5)$$

onde $[]_{J,h}$ denota uma média sobre os acoplamentos $\{J_{ij}\}$ e sobre os campos $\{h_i\}$.

Usando o método das réplicas visto no capítulo anterior (equação (2.1.8)), um procedimento análogo ao desenvolvido para o modelo SK nos leva a energia livre por spin,

$$\beta f = -\frac{(\beta J)^2}{4} - \frac{(\beta \Delta)^2}{2} + \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \min g(m^\alpha, q^{\alpha\beta}) \quad , \quad (3.2.6)$$

com

$$g(m^\alpha, q^{\alpha\beta}) = \frac{\beta J_0}{2} \sum_{\alpha} (m^\alpha)^2 + \frac{(\beta J)^2}{2} \sum_{(\alpha\beta)} (q^{\alpha\beta})^2 - \ln \text{Tr}_{\alpha} \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}}) \quad , \quad (3.2.7a)$$

sendo,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}} = & \beta J_0 \sum_{\alpha} m^{\alpha} S^{\alpha} + (\beta J)^2 \sum_{(\alpha\beta)} q^{\alpha\beta} S^{\alpha} S^{\beta} \\ & + (\beta \Delta)^2 \sum_{(\alpha\beta)} S^{\alpha} S^{\beta} + \beta h_0 \sum_{\alpha} S^{\alpha} \quad . \end{aligned} \quad (3.2.7b)$$

Assim como no capítulo anterior, as condições de equilíbrio são dadas por

$$m^{\alpha} = \langle S^{\alpha} \rangle \quad , \quad (3.2.8a)$$

$$q^{\alpha\beta} = \langle S^{\alpha} S^{\beta} \rangle \quad , \quad (\alpha \neq \beta) \quad , \quad (3.2.8b)$$

onde $\langle \rangle$ denota uma média térmica tomada com relação a \mathcal{H}_{eff} .

Podemos obter a energia interna e a entropia por spin para o modelo na presença de campo aleatório a partir das equações (3.2.6) e (3.2.7). Da relação,

$$u = \frac{\partial(\beta f)}{\partial\beta} \quad ,$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \beta u = & -\frac{(\beta J)^2}{2} - (\beta \Delta)^2 - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left\{ \frac{\beta J_0}{2} \sum_{\alpha} (m^{\alpha})^2 \right. \\ & \left. + (\beta J)^2 \sum_{(\alpha\beta)} (q^{\alpha\beta})^2 + 2(\beta \Delta)^2 \sum_{(\alpha\beta)} q^{\alpha\beta} + \beta h_0 \sum_{\alpha} m^{\alpha} \right\} . \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

A entropia por spin é obtida substituindo-se as equações (3.2.9) e (3.2.6) na relação

$$\frac{s}{k} = \beta u - \beta f \quad ,$$

ficando na forma,

$$\begin{aligned} \frac{s}{k} = & -\frac{(\beta J)^2}{4} - \frac{(\beta \Delta)^2}{2} - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left\{ \beta J_0 \sum_{\alpha} (m^{\alpha})^2 + \frac{3}{2} \sum_{(\alpha\beta)} (q^{\alpha\beta})^2 \right. \\ & \left. + 2(\beta \Delta)^2 \sum_{(\alpha\beta)} q^{\alpha\beta} + \beta h_0 \sum_{\alpha} m^{\alpha} - \ln \text{Tr}_{\alpha} \exp(\mathcal{H}_{\text{eff}}) \right\} . \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

De maneira análoga ao capítulo anterior, consideraremos a seguir a solução de simetria entre réplicas.

3.3 Solução de Simetria entre Réplicas para o Modelo SK na Presença de um Campo Magnético Aleatório

Considerando a solução de simetria entre réplicas (equações (2.3.1)) a equação (3.2.6) torna-se

$$\beta f = -\frac{(\beta J)^2}{4} (1 - q)^2 + \frac{\beta J_0}{2} m^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \ln(2 \cosh \xi) \quad , \quad (3.3.1)$$

que é análoga à energia livre do modelo SK (equação (2.3.2)) mas com

$$\xi = \beta J_0 m + \beta J \left[q + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} z + \beta h_0 \quad . \quad (3.3.2)$$

A energia interna por spin na solução de simetria entre réplicas, fica sendo dada por,

$$\beta u = -\frac{(\beta J)^2}{2} (1 - q^2) - (\beta \Delta)^2 (1 - q) - \frac{\beta J_0}{2} m^2 - \beta h_0 m \quad , \quad (3.3.3)$$

enquanto que para a entropia por spin temos,

$$\begin{aligned} \frac{s}{k} = & -\frac{(\beta J)^2}{2} (1 - q^2) - (\beta \Delta)^2 (1 - q) + \frac{(\beta J)^2}{4} (1 - q)^2 - \beta J_0 m^2 - \beta h_0 m \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \ln(2 \cosh \xi) \quad . \quad (3.3.4) \end{aligned}$$

As condições de equilíbrio (equações (3.2.8)), obtidas através da extremização da

energia livre, podem ser escritas como,

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \operatorname{tgh} \xi \quad , \quad (3.3.5a)$$

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \operatorname{tgh}^2 \xi \quad . \quad (3.3.5b)$$

Nas próximas seções analisaremos as diversas fronteiras críticas para o caso $h_0 = 0$, com a finalidade de construirmos o diagrama de fases do modelo, e logo em seguida faremos um estudo sobre a entropia na fase de vidro de spins em baixas temperaturas, sempre considerando a solução de simetria entre réplicas. Iniciaremos pela fronteira crítica que separa as fases Ferromagnética (F) e Independente (I) (ou Paramagnética (P)). Vale salientar neste ponto que a nomenclatura "Independente" tem sido utilizada no problema do campo aleatório para designar uma fase onde o parâmetro de Edwards-Anderson (q) é induzido pela introdução do campo aleatório. Ao se tomar o limite de campo aleatório zero, o parâmetro q vai a zero, sendo por esta razão, esta fase também chamada na literatura de fase Paramagnética.

3.4 Equação da Fronteira Crítica Ferromagnética-Independente em Simetria de Réplicas

Consideremos a expressão da energia livre dada pela equação (3.3.1), para pequenos valores de m , e escrevamos a equação (3.3.2) na forma

$$\xi = \beta J_0 m + \xi_0 \quad , \quad (3.4.1)$$

onde,

$$\xi_0 = [(\beta J)^2 q + (\beta \Delta)^2]^{\frac{1}{2}} z \quad . \quad (3.4.2)$$

Fazendo uso das devidas identidades hiperbólicas, uma expansão em série de potências em m , nos leva a (ver Apêndice F, Parte A)

$$\begin{aligned} \ln (2 \cosh \xi) &= \ln (2 \cosh \xi_0) + \beta J_0 m \operatorname{tgh} \xi_0 \\ &+ \frac{(\beta J_0)^2}{2} m^2 \operatorname{sech}^2 \xi_0 + O(m^3) \quad . \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

A energia livre pode então ser expressa na forma de uma expansão de Landau [42],

$$\begin{aligned}
\beta f = & -\frac{(\beta J)^2}{4} (1-q)^2 + \frac{\beta J_0}{2} \left[1 - \beta J_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{sech}^2 \xi_0 \right] m^2 \\
& - \beta J_0 m \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{tgh} \xi_0 \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \ln(2 \cosh \xi_0) + O(m^4) \quad . \quad (3.4.4)
\end{aligned}$$

Observando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{tgh} \xi_0 = 0 \quad ,$$

ficamos com,

$$\begin{aligned}
\beta f = & -\frac{(\beta J)^2}{4} (1-q)^2 + A_2 m^2 \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \ln(2 \cosh \xi_0) + O(m^4) \quad , \quad (3.4.5a)
\end{aligned}$$

onde $A_4 > 0$ e

$$A_2 = \frac{\beta J_0}{2} \left[1 - \beta J_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{sech}^2 \xi_0 \right] \quad . \quad (3.4.5b)$$

Os pontos da fronteira crítica são determinados pela equação $A_2 = 0$. Deste modo, temos

$$1 - \beta J_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{sech}^2 \xi_0 = 0 \quad ,$$

ou seja,

$$kT_c = J_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{sech}^2 \xi_0 \quad . \quad (3.4.6a)$$

Na equação acima T_c é a temperatura crítica associada à transição Ferromagnética-Independente; ao longo desta fronteira,

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{tgh}^2 \xi_0 \quad . \quad (3.4.6b)$$

A equação (3.4.6a) pode ainda ser escrita como

$$\frac{kT_c}{J} = \frac{J_0}{J} (1 - q) \quad . \quad (3.4.7)$$

3.5 Fronteira Crítica F-I em Altas Temperaturas

A fronteira crítica F-I é definida pelas equações (3.4.6),

$$\frac{kT_c}{J} = \frac{J_0}{J} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \operatorname{sech}^2 \xi_0 = \frac{J_0}{J} (1 - q) \quad , \quad (3.5.1a)$$

onde,

$$\xi_0 = [(\beta J)^2 q + (\beta \Delta)^2]^{\frac{1}{2}} z = \beta J \left[q + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} z \quad . \quad (3.5.1b)$$

Em altas temperaturas ($\beta \rightarrow 0$), q é pequeno; logo,

$$(\beta J)^2 q \ll (\beta \Delta)^2 \quad ,$$

e portanto, $\xi_0 \cong \beta \Delta z$ é pequeno.

Assim temos,

$$\operatorname{tgh} \xi_0 \cong \xi_0 - \frac{\xi_0^3}{3} \quad ,$$

e utilizando as integrais dadas em (C.4), (ver Apêndice C), obtemos

$$q \cong (\beta \Delta)^2 - 2(\beta \Delta)^4 \quad . \quad (3.5.2)$$

Ficamos então com,

$$\frac{kT_c}{J} \cong \frac{J_0}{J} \left[1 - (\beta\Delta)^2 \right] ; \quad (3.5.3)$$

considerando o termo de ordem mais baixa com $\beta \rightarrow 0$, temos

$$\frac{kT}{J} = \frac{J_0}{J} \Rightarrow \beta = \frac{1}{J_0} . \quad (3.5.4)$$

Substituindo este resultado na equação (3.5.3), obtemos

$$\frac{kT_c}{J} \cong \frac{J_0}{J} \left[1 - \left[\frac{\Delta}{J_0} \right]^2 \right] , \quad (3.5.5)$$

na variável $\frac{\Delta}{J_0}$.

A equação (3.5.5) pode ainda ser escrita como,

$$\frac{kT_c}{J} \cong \frac{J_0}{J} \left[1 - \left[\frac{J}{J_0} \right]^2 \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right] ,$$

ou seja,

$$\frac{kT_c}{J} \cong \frac{J_0}{J} - \frac{(\Delta/J)^2}{(J_0/J)} . \quad (3.5.6)$$

Dois tipos de diagramas podem ser traçados dependendo se escalamos a largura da distribuição dos campos (Δ) por J_0 ou J . No primeiro caso (escala Δ/J_0), a fronteira F - I no plano $\frac{kT}{J}$ versus $\frac{J_0}{J}$ em altas temperaturas (equação (3.5.5)) é uma reta com coeficiente angular

$$\left[1 - \left[\frac{\Delta}{J_0} \right]^2 \right] .$$

No segundo caso (escala Δ/J), esta fronteira em altas temperaturas se aproxima de

uma linha reta com coeficiente angular 1, a princípio, apenas para pequenos valores de $\frac{\Delta}{J}$. No entanto, verifica-se numericamente que, quando $\frac{\Delta}{J}$ aumenta, os valores de $\frac{J_0}{J}$ ao longo da fronteira aumentam mais rápido de tal forma que, o segundo termo do lado direito da equação (3.5.6) contribui pouco para mudar o comportamento retilíneo em altas temperaturas e apenas pequenos desvios da reta com coeficiente angular 1 são encontrados.

3.6 Fronteira Crítica F-I em Baixas Temperaturas

Para baixas temperaturas, as grandezas $\frac{kT}{J}$ e $\frac{J_0}{J}$ estão relacionadas através da equação (ver Apêndice F, Parte B),

$$\frac{kT}{J} = \pi \left[1 + \left(\frac{\Delta}{J} \right)^2 \right]^2 \left\{ \frac{J}{J_0} - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{[1 + (\Delta/J)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} . \quad (3.6.1)$$

Quando $T = 0$, ficamos com

$$\frac{J_0}{J} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \left(\frac{\Delta}{J} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (3.6.2)$$

que nos dá o ponto onde a fronteira F-I toca o eixo de temperatura zero. Definindo,

$$y = \frac{kT}{J} \quad ; \quad x = \frac{J_0}{J} ,$$

a equação (3.6.1) pode ser escrita na forma

$$y = \pi \left[1 + \left(\frac{\Delta}{J} \right)^2 \right]^2 \left\{ \frac{1}{x} - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{[1 + (\Delta/J)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} .$$

Podemos então calcular a inclinação da linha F-I ao encontrar o eixo de temperatura zero, ou seja, no ponto

$$x = x_0 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \left(\frac{\Delta}{J} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad y = 0 .$$

A inclinação da curva neste ponto será dada por,

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(x=x_0, y=0)} = \pi \left[1 + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right]^2 \left[-\frac{1}{x^2} \right]_{(x=x_0, y=0)},$$

isto é,

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(x=x_0, y=0)} = -2 \left[1 + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right] \quad . \quad (3.6.3)$$

No caso de escalarmos a largura da distribuição dos campos por J_0 , os cálculos realizados acima podem ser facilmente refeitos. A equação (3.6.1), que fornece a relação entre $\frac{kT}{J}$ e $\frac{J_0}{J}$, pode ser reescrita como,

$$\frac{kT}{J} = \pi \left[1 + \left[\frac{J_0}{J} \right]^2 \left[\frac{\Delta}{J_0} \right]^2 \right]^2 \left\{ \frac{J}{J_0} - \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{[1 + (J_0/J)^2 (\Delta/J_0)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\}, \quad (3.6.4)$$

ou ainda, fazendo uso das variáveis (x, y) acima,

$$y = \pi \left[1 + x^2 \left[\frac{\Delta}{J_0} \right]^2 \right]^2 \left\{ \frac{1}{x} - \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{[1 + x^2 (\Delta/J_0)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad . \quad (3.6.5)$$

Observamos que para $T = 0$, a equação (3.6.1) nos fornece

$$\frac{J}{J_0} = \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{[1 + (J_0/J)^2 (\Delta/J_0)^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.6.6)$$

ou seja,

$$\left[\frac{J_0}{J}\right]^2 = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left[\frac{J_0}{J}\right]^2 \left[\frac{\Delta}{J_0}\right]^2\right] ,$$

$$\left[\frac{J_0}{J}\right]^2 \left[1 - \frac{\pi}{2} \left[\frac{\Delta}{J_0}\right]^2\right] = \frac{\pi}{2} ,$$

que finalmente nos dá,

$$\frac{J_0}{J} = \left[\frac{2}{\pi} - \left[\frac{\Delta}{J_0}\right]^2\right]^{-\frac{1}{2}} . \quad (3.6.7)$$

Podemos então calcular a inclinação da curva no ponto

$$x = x_0 = \left[\frac{2}{\pi} - \left[\frac{\Delta}{J_0}\right]^2\right]^{-\frac{1}{2}} ; \quad y = 0 .$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\pi}{x^2} \left[1 + x^2 \left[\frac{\Delta}{J_0}\right]^2\right]^2 + \frac{\pi}{x} 2 \left[1 + x^2 \left[\frac{\Delta}{J_0}\right]^2\right] 2x \left[\frac{\Delta}{J_0}\right]^2 \\ &\quad - \frac{3}{2} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left[1 + x^2 \left[\frac{\Delta}{J_0}\right]^2\right]^{\frac{1}{2}} 2x \left[\frac{\Delta}{J_0}\right]^2 , \end{aligned}$$

com,

$$x_0^2 = \frac{1}{\frac{2}{\pi} - \left[\frac{\Delta}{J_0}\right]^2} .$$

Então,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x=x_0, y=0)} = -\frac{\pi}{x_0^2} \frac{4}{\pi^2} x_0^4 + 4\pi \frac{2}{\pi} x_0^2 \left[\frac{\Delta}{J_0}\right]^2 - 3 (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{\pi}\right]^{\frac{1}{2}} x_0^2 \left[\frac{\Delta}{J_0}\right]^2 ,$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(x=x_0, y=0)} = -\frac{4}{\pi} x_0^2 + 2 x_0^2 \left[\frac{\Delta}{J_0} \right]^2 = -2 \left[\frac{2}{\pi} - \left[\frac{\Delta}{J_0} \right]^2 \right] x_0^2 .$$

Substituindo o valor de x_0^2 na expressão acima concluímos que

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(x=x_0, y=0)} = -2 . \quad (3.6.8)$$

A seguir, traçaremos e discutiremos a fronteira crítica F-I por nós obtida na hipótese de simetria entre réplicas.

3.7 A Fronteira Crítica F-I em Simetria de Réplicas

Antes de apresentarmos os diagramas de fases por nós obtidos em ambas as escalas $\frac{\Delta}{J_0}$ e $\frac{\Delta}{J}$, apresentaremos um diagrama de fases mostrando as linhas da fronteira crítica F-I na escala $\frac{\Delta}{J_0}$ que foi obtido por Ma et al. [31] (ver Figura 3.1), do qual nós discordamos basicamente de três aspectos como mencionamos a seguir.

a) O comportamento retilíneo da fronteira crítica que separa as fases Ferro - Independente (equação (3.5.5)) só é válido em altas temperaturas, não podendo ser prolongado até a região de baixas temperaturas.

b) O bico apresentado em todas as fronteiras no ponto em que $\frac{J_0}{J} = 1$, só pode existir quando $\frac{\Delta}{J_0} = 0$, ou seja, no modelo SK. Na Figura 3.2 mostramos as curvas que representam o parâmetro q no plano q versus $\frac{T}{J}$ para diferentes valores de $\frac{\Delta}{J_0}$ e que são análogas às obtidas em [30] e [33]; todas as curvas são suaves para $\frac{\Delta}{J_0} \neq 0$. Como consequência disto, a equação (3.4.7) implicará em fronteiras críticas suaves para $\frac{\Delta}{J_0} \neq 0$, justificando a nossa contestação.

c) O ponto da fronteira onde $\frac{J_0}{J}$ é mínimo, é deslocado para a direita à medida que $\frac{\Delta}{J_0}$ aumenta, como mostram os resultados numéricos que apresentaremos.

Na Figura 3.3 apresentamos o diagrama de fases por nós obtido com as linhas críticas F-I para diferentes valores de $\frac{\Delta}{J_0}$, onde o comportamento retilíneo somente é verificado na região de altas temperaturas, conforme equação (3.5.5), e que julgamos ser o diagrama de fases correto. Na Figura 3.4 apresentamos o diagrama de fases com as linhas críticas F-I para diversos valores de $\frac{\Delta}{J}$, onde também se verifica o comportamento retilíneo somente em altas temperaturas, conforme argumentos descritos após a equação (3.5.6).

Na região de baixas temperaturas encontramos para a escala $\frac{\Delta}{J_0}$, o ponto onde as linhas críticas F-I encontram o eixo $T = 0$, conforme a equação (3.6.7) (que está de acordo com o encontrado em [31]) e mostramos também a inclinação destas linhas

neste ponto conforme equação (3.6.8). Para a escala $\frac{\Delta}{J}$, a equação (3.6.2) nos fornece o ponto em $T = 0$, enquanto a equação (3.6.3) nos dá a inclinação neste ponto.

Com relação à região de temperaturas intermediárias, em ambos diagramas de fases, as linhas críticas F-I foram obtidas a partir de soluções numéricas das equações (3.4.6).

Em ambos os casos, verificamos que a reentrância diminui quando a largura da distribuição de campos aumenta, ou seja, quando $\frac{\Delta}{J_0}$ ou $\frac{\Delta}{J}$ aumentam. Esta é uma diferença que consideramos ser fundamental com relação ao diagrama de fases obtido por Ma et al. [31].

Consideremos agora, a entropia da fase Independente ($m = 0$) na região de baixas temperaturas com $h_0 = 0$; as equações (3.3.4) e (3.3.2) nos dão que

$$\begin{aligned} \frac{s}{k} = & -\frac{(\beta J)^2}{2} (1 - q^2) - (\beta \Delta)^2 (1 - q) + \frac{(\beta J)^2}{4} (1 - q)^2 \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \ln(2 \cosh \xi_0) \quad , \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

onde,

$$\xi_0 = \beta J \left[q + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} z \quad . \quad (3.7.2)$$

De maneira análoga ao desenvolvido e efetuado no Apêndice D para o modelo SK, pode-se mostrar que a entropia em $T = 0$ na fase Independente é dada por (ver Apêndice G),

$$s = -\frac{k}{2\pi} \frac{1}{1 + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2} \quad . \quad (3.7.3)$$

Podemos então concluir que a entropia por spin é negativa, porém tende a zero quando $\frac{\Delta}{J}$ tende a infinito.

No caso da escala $\frac{\Delta}{J_0}$, temos

$$s = -\frac{k}{2\pi} \frac{1}{1 + \left[\frac{J_0}{J}\right]^2 \left[\frac{\Delta}{J_0}\right]^2} \quad (3.7.4)$$

Observamos que, ao longo do eixo $T = 0$ da Figura 3.3, como $\frac{\Delta}{J_0}$ é finito, isto é, $\frac{\Delta}{J_0} \in [0, 2/\pi]$, a entropia é sempre negativa para qualquer $\frac{J_0}{J}$ finito, tendendo a zero apenas quando $\frac{J_0}{J} \rightarrow \infty$. Esta última situação acontece para pontos da fase I próximos à fronteira F-I quando $\frac{\Delta}{J_0} \rightarrow \frac{2}{\pi}$.

Como no modelo SK, esta "catástrofe" da entropia negativa em $T = 0$ é uma consequência direta da solução de simetria entre réplicas. Na seção seguinte, discutiremos a análise de estabilidade de Almeida-Thouless, mostrando as regiões de instabilidade de tal solução.

3.8 A Análise de Estabilidade de Almeida–Thouless para o Modelo SK na Presença de um Campo Magnético Aleatório

O mesmo procedimento empregado para o modelo SK (ver Apêndice E) é válido para o presente problema; a linha de instabilidade de Almeida–Thouless é definida no caso $h_0 = 0$, por (equação E.15),

$$\left(\frac{kT}{J}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \operatorname{sech}^4 \xi \quad , \quad (3.8.1)$$

onde,

$$\xi = \beta J_0 m + \beta J Q^{\frac{1}{2}} z \quad , \quad (3.8.2)$$

com

$$Q = q + \left(\frac{\Delta}{J}\right)^2 \quad . \quad (3.8.3)$$

A equação (3.8.1) em conjunto com as equações de equilíbrio (3.3.5), nos permitem determinar numericamente, a fronteira de validade da solução de simetria entre réplicas. Consideremos inicialmente, a fase Independente ($m = 0$). Na escala $\frac{\Delta}{J}$, o par de equações (3.8.1) e (3.3.5b) nos fornece uma temperatura crítica $T_f(\Delta/J)$, independente de $\frac{J_0}{J}$, ao passo que na escala $\frac{\Delta}{J_0}$ surge uma dependência da temperatura crítica também em $\frac{J_0}{J}$: $T_f = T_f(\Delta/J_0, J_0/J)$. Abaixo da temperatura T_f a solução de simetria entre réplicas é instável; isto define uma nova fase na região I com as mesmas características da fase de Vidro de Spins do modelo Sherrington–Kirkpatrick e por isto a denominaremos de fase VS. Acima de T_f , temos

uma fase com $q \neq 0$, mas com as características da fase Paramagnética do modelo SK e por isto a denominaremos de fase P. Estas fases são mostradas respectivamente, nas Figuras 3.5 (diversos valores de $\frac{\Delta}{J}$) e 3.6 (diversos valores de $\frac{\Delta}{J_0}$).

Consideremos agora, a região Ferromagnética ($m \neq 0$); as equações (3.8.1) e (3.3.5a,b) podem ser resolvidas numericamente, de tal forma a fornecer uma linha análoga à existente no modelo SK (ver Figura 2.3), separando duas fases distintas: a fase Ferromagnética usual (F) onde $m \neq 0$; $q \neq 0$, com validade da solução de simetria entre réplicas e a fase Ferromagnética mista (F') onde $m \neq 0$ e o parâmetro de vidro de spins é não trivial (simetria entre réplicas deve ser quebrada).

A baixas temperaturas esta linha pode ser obtida analiticamente como mostraremos a seguir. De (3.8.2) temos,

$$kT \xi = J_0 m + J Q^{\frac{1}{2}} z \quad ,$$

onde podemos obter

$$z = \frac{kT \xi - J_0 m}{J Q^{\frac{1}{2}}} \quad ;$$

e

$$dz = \frac{k T}{J Q^{\frac{1}{2}}} d\xi \quad .$$

A variável ξ é controlada por $\text{sech}^4 \xi$; quando ξ cresce, $\text{sech}^4 \xi$ tende rapidamente a zero. Então,

$$\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] = \exp\left[-\frac{(kT \xi - J_0 m)^2}{2J^2 Q}\right] \cong \exp\left[-\frac{(J_0 m)^2}{2J^2 Q}\right] ,$$

para,

$$kT \xi \ll J_0 m .$$

Em baixas temperaturas, a equação (3.8.1) é dada por

$$\left(\frac{kT}{J}\right)^2 \cong \frac{kT}{JQ^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{(J_0 m)^2}{2J^2 Q}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} dz \operatorname{sech}^4 \xi . \quad (3.8.4)$$

Temos que, (ver [43], Integral 2.418-2)

$$\int d\xi \operatorname{sech}^4 \xi = \frac{1}{3} \sinh \xi (\operatorname{sech}^3 \xi + 2 \operatorname{sech} \xi) = \frac{1}{3} (\operatorname{tgh} \xi \operatorname{sech}^2 \xi + 2 \operatorname{tgh} \xi) ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \operatorname{sech}^4 \xi = \frac{4}{3} .$$

Então,

$$\frac{kT}{J} \cong \frac{4}{3} \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left[q + \left(\frac{\Delta}{J}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\left[\frac{J_0}{J}\right]^2 \frac{m^2}{2[q + (\Delta/J)^2]}\right\} . \quad (3.8.5)$$

Para T pequeno e $\frac{J_0}{J} \gg 1$, temos que $q \cong 1$ e $m \cong 1$. Então, no plano $\frac{kT}{J}$ versus $\frac{J_0}{J}$ temos,

$$\frac{kT}{J} \cong \frac{4}{3} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left[1 + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ - \left[\frac{J_0}{J} \right]^2 \frac{1}{2[1 + (\Delta/J)^2]} \right\} \quad (3.8.6)$$

Na escala $\frac{\Delta}{J_0}$ a equação (3.8.6) fica,

$$\frac{kT}{J} \cong \frac{4}{3} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left[1 + \left[\frac{J_0}{J} \right]^2 \left[\frac{\Delta}{J_0} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ - \left[\frac{J_0}{J} \right]^2 \frac{1}{2[1 + (J_0/J)^2 (\Delta/J_0)^2]} \right\} \quad (3.8.7)$$

Nas Figuras 3.5 e 3.6 apresentamos os diagramas de fases completos no plano $\frac{kT}{J}$ versus $\frac{J_0}{J}$ para diversos valores de $\frac{\Delta}{J}$ e $\frac{\Delta}{J_0}$, respectivamente. As fases P, VS, F e F' possuem características similares às do modelo SK discutidas no Capítulo 2 (ver Figura 2.3).

3.9 Conclusão

Neste capítulo apresentamos um modelo de vidros de spins de Ising onde foram consideradas interações de alcance infinito na presença de um campo magnético aleatório, com distribuições de probabilidades gaussianas. Foi utilizado o método das réplicas e obtivemos a energia livre, a energia interna e a entropia por spin, no espaço das réplicas em geral. Em seguida, consideramos a solução de simetria entre réplicas para a qual foram obtidas as condições de equilíbrio, assim como as fronteiras críticas separando as fases Ferromagnética-Independente para diferentes valores de $\frac{\Delta}{J_0}$ ou $\frac{\Delta}{J}$. Para o caso da escala $\frac{\Delta}{J_0}$, discutimos as diferenças entre a nossa fronteira F-I e a encontrada em um trabalho anterior [31]. Determinamos a entropia na fase Independente em $T = 0$, mostrando a "catástrofe" da entropia negativa já conhecida em vidros de spins, quando tratados via solução de simetria entre réplicas. Finalmente, efetuamos a análise de estabilidade de Almeida-Thouless, apresentando as regiões onde tal solução é instável. Mostramos os diagramas de fases para diversos valores de $\frac{\Delta}{J}$ ou $\frac{\Delta}{J_0}$ com as respectivas fases Paramagnética, Vidro de Spins, Ferromagnética e Ferromagnética Mista.

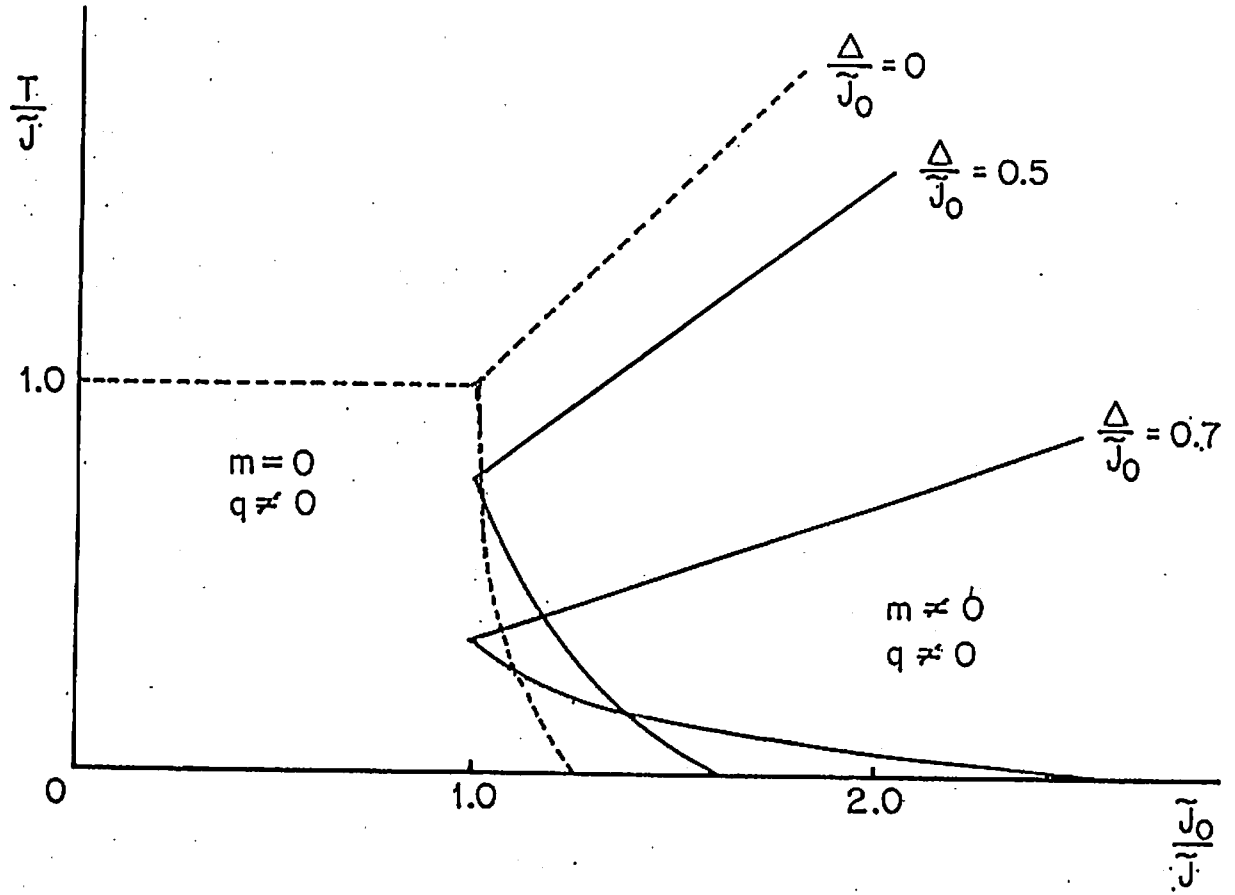


Figura 3.1: A fronteira crítica F-I obtida por Ma et al. [31], para diferentes valores de Δ/J_0 .

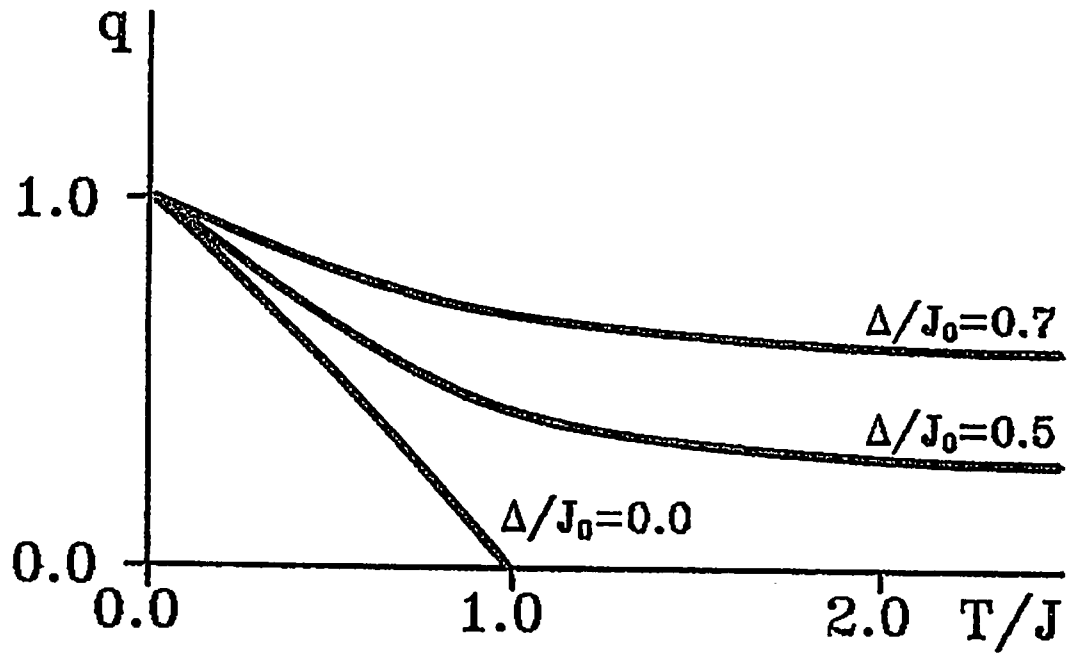


Figura 3.2: O parâmetro de vidro de spins q em função da temperatura, para diferentes valores de Δ/J_0 .

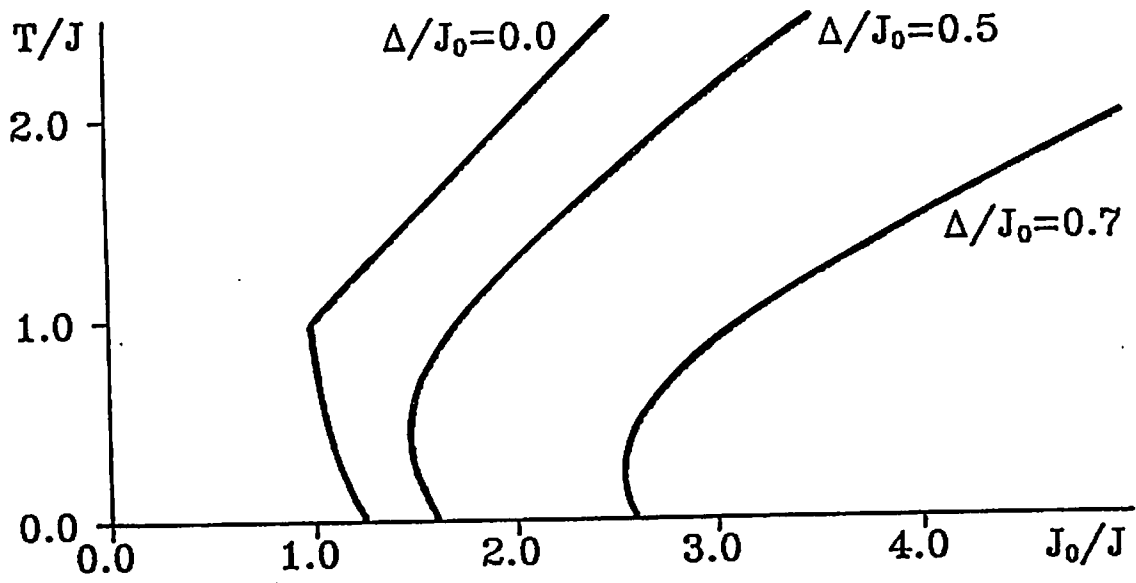


Figura 3.3: A fronteira crítica F-I para diferentes valores de Δ/J_0 .

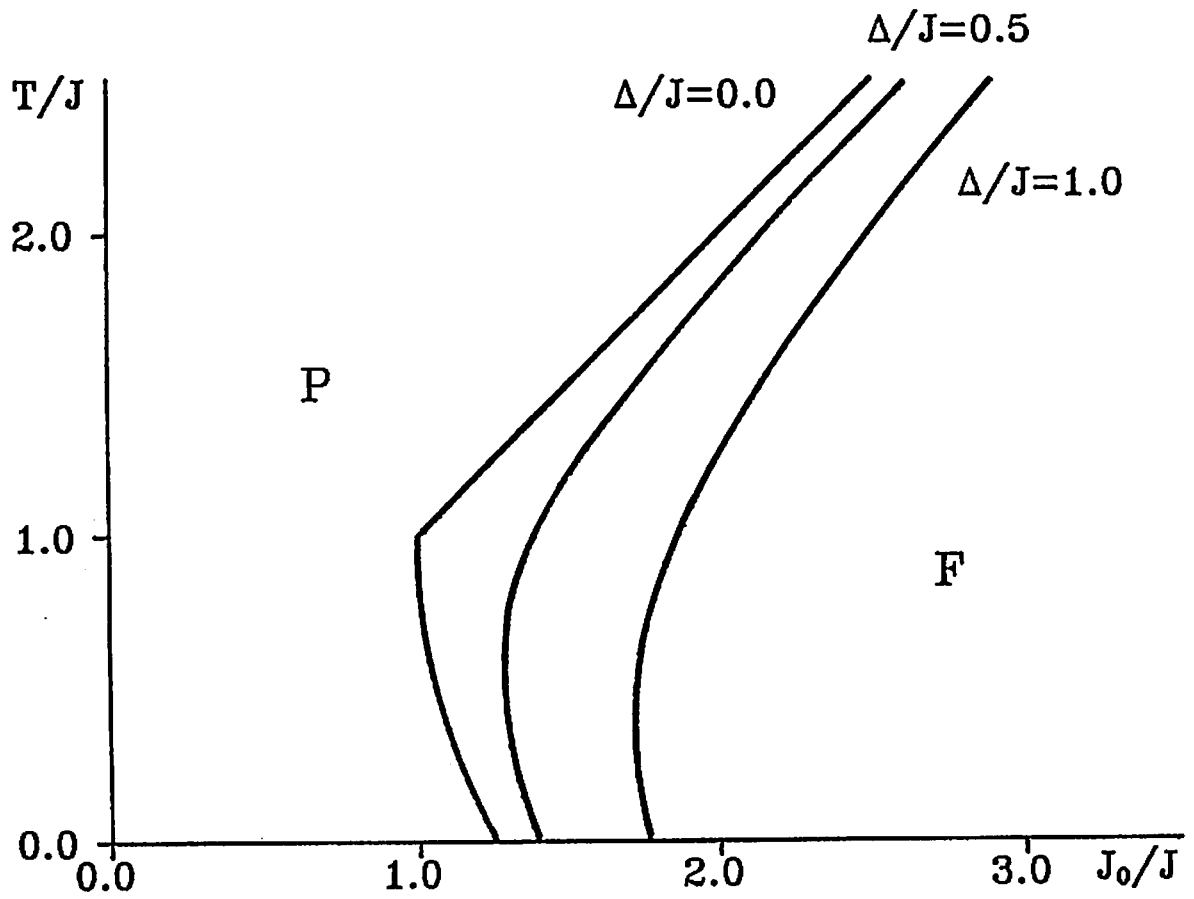


Figura 3.4: A fronteira crítica F-I para diferentes valores Δ/J .

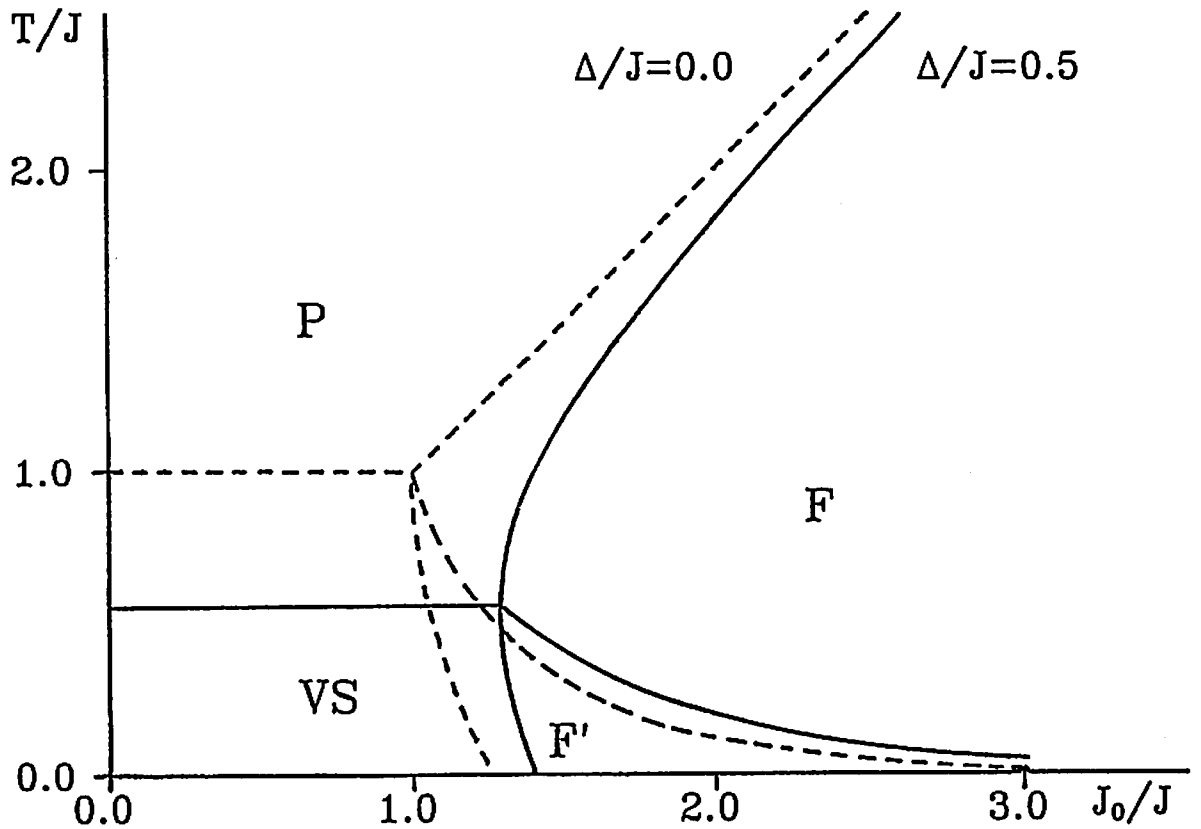


Figura 3.5: O diagrama de fases do modelo Sherrington-Kirkpatrick na presença de um campo magnético aleatório, com $\Delta/J = 0.5$. As linhas pontilhadas representam as fronteiras do modelo SK sem campo ($\Delta/J = 0.0$).

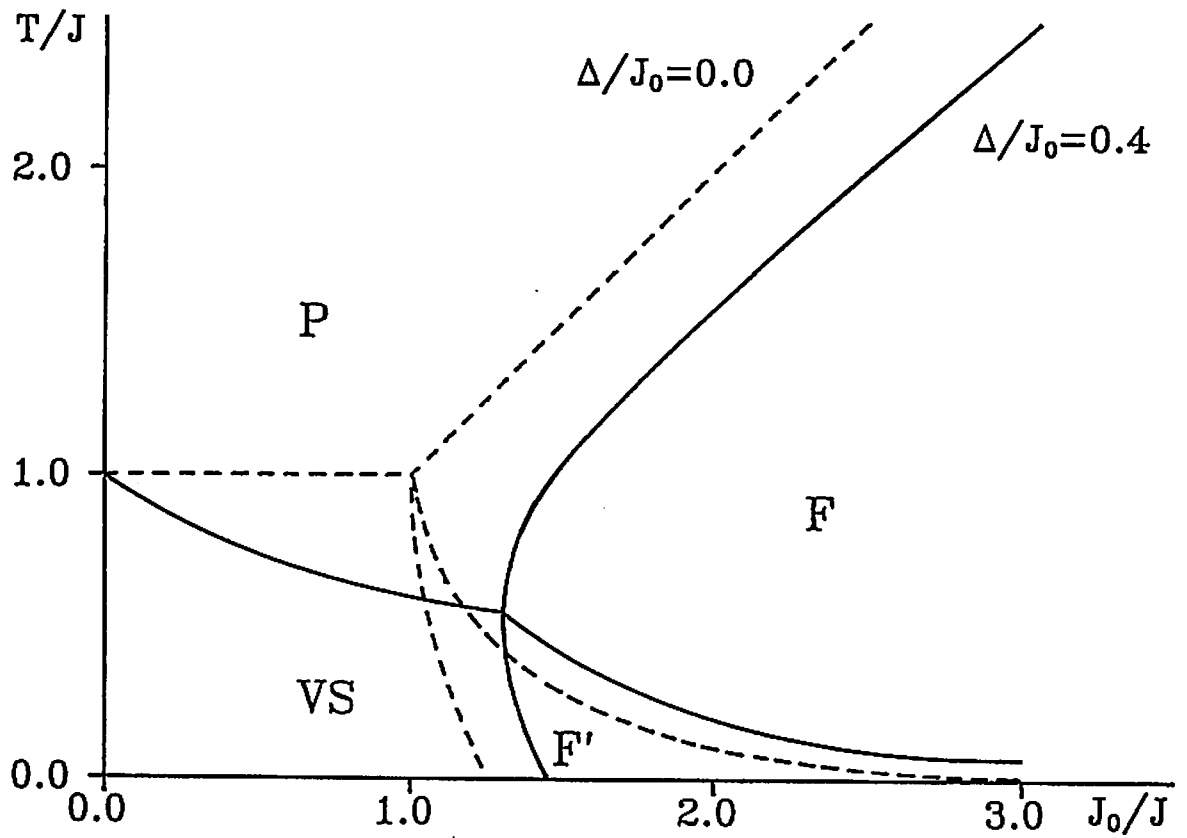


Figura 3.6: O diagrama de fases do modelo Sherrington-Kirkpatrick na presença de um campo magnético aleatório, com $\Delta/J_0 = 0.4$. As linhas pontilhadas representam as fronteiras do modelo SK sem campo ($\Delta/J_0 = 0.0$).

Capítulo 4

CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos os efeitos de um campo magnético aleatório sobre o vidro de spins de Ising com interações de alcance infinito através do método das réplicas, sendo assim possível, tanto obter um diagrama de fases na solução de simetria entre réplicas, como também determinar as regiões de instabilidade de tal solução.

Na aproximação de simetria entre réplicas, a fronteira crítica separando as fases Ferromagnética da Independente foi determinada para diferentes valores da largura da distribuição dos campos (Δ), em duas escalas diferentes ($\frac{\Delta}{J_0}$ e $\frac{\Delta}{J}$). Na escala $\frac{\Delta}{J_0}$ obtivemos uma fronteira significativamente distinta da encontrada em um trabalho anterior, calculada a partir do método do campo local.

Efetuamos a análise de estabilidade de Almeida–Thouless, a qual permitiu determinar as regiões de instabilidade da solução de simetria entre réplicas para ambas as fases mencionadas acima, sendo então possível identificar, em analogia ao modelo Sherrington–Kirkpatrick, as fases Paramagnética, Vidro de Spins, Ferromagnética e Ferromagnética Mista. Tal procedimento, sendo complicado de implementar para o método do campo local, não havia sido realizado anteriormente.

**Apêndice A: Hipótese de Simetria entre Réplicas para o
Modelo Sherrington–Kirkpatrick**

Consideremos a solução de simetria entre réplicas (equações (2.3.1)),

$$m^\alpha = m \quad ; \quad \forall \alpha \quad (\text{A.1a})$$

$$q^{\alpha\beta} = q \quad ; \quad \forall (\alpha\beta) \quad (\text{A.1b})$$

a qual nos dá,

$$\sum_{\alpha} (m^\alpha)^k = nm^k \quad , \quad (\text{A.2a})$$

$$\sum_{(\alpha\beta)} (q^{\alpha\beta})^k = \frac{1}{2} n(n-1) q^k \quad , \quad (\text{A.2b})$$

enquanto que o funcional $g(m^\alpha, q^{\alpha\beta})$ dado por (2.2.20) resulta em,

$$g(m, q) = \frac{\beta J_0}{2} nm^2 + \frac{(\beta J)^2}{2} \frac{n(n-1)}{2} q^2$$

$$- \ln \text{Tr}_{\alpha} \exp \left[\beta J_0 m \sum_{\alpha} S^{\alpha} + (\beta J)^2 q \sum_{(\alpha\beta)} S^{\alpha} S^{\beta} + \beta h \sum_{\alpha} S^{\alpha} \right] \quad . \quad (\text{A.3})$$

Usando o fato de que

$$\sum_{(\alpha\beta)} S^{\alpha} S^{\beta} = \frac{1}{2} \left[\sum_{\alpha} S^{\alpha} \right]^2 - \frac{n}{2} \quad ,$$

temos,

$$g(m, q) = n \frac{\beta J_0}{2} m^2 + n(n-1) \frac{(\beta J)^2}{4} q^2 + n \frac{(\beta J)^2}{2} q$$

$$- \ln \text{Tr}_\alpha \exp \left[\beta J_0 m \sum_\alpha S^\alpha + \frac{(\beta J)^2}{2} q \left[\sum_\alpha S^\alpha \right]^2 + \beta h \sum_\alpha S^\alpha \right] \quad . \quad (\text{A.4})$$

O termo quadrático $\left[\sum_\alpha S^\alpha \right]^2$ que aparece em (A.4) pode ser linearizado através da identidade de Hubbard–Stratonovitch (2.2.13)

$$e^{\lambda a^2} = \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} + (2\lambda)^{\frac{1}{2}} az \right] \quad , \quad (\text{A.5})$$

e então,

$$g(m, q) = n \frac{\beta J_0}{2} m^2 + n(n-1) \frac{(\beta J)^2}{4} q^2 + n \frac{(\beta J)^2}{2} q$$

$$- \ln \text{Tr}_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} + \beta J_0 m \sum_\alpha S^\alpha + \beta J q^{\frac{1}{2}} z \sum_\alpha S^\alpha + \beta h \sum_\alpha S^\alpha \right] \quad . (\text{A.6})$$

Seja,

$$A = \ln \text{Tr}_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} + \beta J_0 m \sum_\alpha S^\alpha + \beta J q^{\frac{1}{2}} z \sum_\alpha S^\alpha + \beta h \sum_\alpha S^\alpha \right] \quad .$$

Então,

$$A = \ln \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \text{Tr}_{\alpha} \Pi_{\alpha} \exp\left[\beta J_0 m S^{\alpha} + \beta J q^{\frac{1}{2}} z S^{\alpha} + \beta h S^{\alpha}\right] ,$$

isto é,

$$A = \ln \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \Pi_{\alpha} \text{tr}_{\alpha} \exp\left[\beta J_0 m S^{\alpha} + \beta J q^{\frac{1}{2}} z S^{\alpha} + \beta h S^{\alpha}\right] ,$$

onde,

$$\text{tr}_{\alpha} \exp\left[\beta J_0 m S^{\alpha} + \beta J q^{\frac{1}{2}} z S^{\alpha} + \beta h S^{\alpha}\right] = 2 \cosh \xi , \quad (\text{A.7})$$

com

$$\xi = \beta (J_0 m + J q^{\frac{1}{2}} z + h) , \quad (\text{A.8})$$

representa um traço sobre uma única réplica α . Logo,

$$A = \ln \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] (2 \cosh \xi)^n ,$$

ou seja,

$$A = \ln \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \exp[n \ln(2 \cosh \xi)] .$$

No limite quando $n \rightarrow 0$ podemos expandir a última exponencial na expressão anterior. Temos então,

$$A = n \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \ln(2 \cosh \xi) + O(n^2) \quad .$$

Assim, voltando à equação (A.6), temos

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} g(m, q) = \frac{\beta J_0}{2} m^2 - \frac{(\beta J)^2}{4} q^2 + \frac{(\beta J)^2}{2} q$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \ln(2 \cosh \xi) \quad . \quad (A.9)$$

Substituindo (A.9) em (2.2.19) ficamos com a energia livre por spin dada por

$$\beta f = -\frac{(\beta J)^2}{4} (1 - q)^2 + \frac{\beta J_0}{2} m^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \ln(2 \cosh \xi) \quad . \quad (A.10)$$

**Apêndice B: Extremização da Energia Livre por Spin
em Simetria de Réplicas para o Modelo SK**

Extremizando a energia livre por spin dada em (A.10) com relação a m e a q , temos

a) $\frac{\partial(\beta f)}{\partial m} = 0$, isto é,

$$\beta J_0 m - \beta J_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \frac{2 \operatorname{senh} \xi}{2 \cosh \xi} = 0 \quad . \quad (\text{B.1})$$

Portanto,

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \operatorname{tgh} \xi \quad . \quad (\text{B.2})$$

b) $\frac{\partial(\beta f)}{\partial q} = 0$, isto é,

$$(\beta J)^2 (1 - q) - \beta J q^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] z \operatorname{tgh} \xi = 0 \quad . \quad (\text{B.3})$$

Resolvendo por partes a integral em (B.3),

$$u = \operatorname{tgh} \xi \quad \Rightarrow \quad du = \beta J q^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech}^2 \xi dz \quad ,$$

$$dv = \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] z dz \quad \Rightarrow \quad v = -\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \quad ,$$

temos

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] z \operatorname{tgh} \xi \quad ,$$

$$B = \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ -\exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{tgh} \xi \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{sech}^2 \xi \beta J q^{\frac{1}{2}} dz \right\} \quad ,$$

logo

$$B = \beta J q^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{sech}^2 \xi \quad . \quad (\text{B.4})$$

Substituindo (B.4) em (B.3) ficamos com,

$$(\beta J)^2 (1 - q) - (\beta J)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{sech}^2 \xi = 0 \quad ,$$

ou seja,

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] [1 - \operatorname{sech}^2 \xi] \quad ,$$

resultando em,

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{tgh}^2 \xi \quad . \quad (\text{B.5})$$

Apêndice C: Expansões em Altas Temperaturas para o Modelo SK

Neste apêndice nos restringiremos ao caso $h = 0$, nas regiões das fases Vidro de Spins e Ferromagnética próximo à fase Paramagnética, isto é, próximo às fronteiras críticas P-VS e P-F (ver Figura 2.1). Temos que $m \cong 0$ e $q \cong 0$; conseqüentemente,

$$\xi = \beta(J_0 m + J q^{\frac{1}{2}} z) \quad (C.1)$$

também é pequeno. Portanto, expandindo $\operatorname{tgh} \xi$ e $\operatorname{tgh}^2 \xi$ obtemos:

$$\operatorname{tgh} \xi = \xi - \frac{1}{3} \xi^3 + O(\xi^5) \quad ,$$

$$\operatorname{tgh}^2 \xi = \xi^2 - \frac{2}{3} \xi^4 + O(\xi^6) \quad .$$

As equações de equilíbrio (B.2) e (B.5) ficam então dadas por

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \left\{ \beta J_0 m + \beta J q^{\frac{1}{2}} z - \frac{1}{3} \left[(\beta J_0 m)^3 + 3(\beta J_0 m)(\beta J)^2 q z^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 3(\beta J_0 m)^2 (\beta J q^{\frac{1}{2}}) z + (\beta J q^{\frac{1}{2}})^3 z^3 \right] + O(\xi^5) \right\} \quad , \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned}
q = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] & \left\{ (\beta J_0 m)^2 + 2(\beta J_0 m)(\beta J q^{\frac{1}{2}}) z + (\beta J)^2 q z^2 \right. \\
& - \frac{2}{3} \left[(\beta J_0 m)^4 + 4(\beta J_0 m)(\beta J q^{\frac{1}{2}})^3 z^3 + 6(\beta J_0 m)^2 (\beta J)^2 q z^2 \right. \\
& \left. \left. + 4(\beta J_0 m)^3 (\beta J q^{\frac{1}{2}}) z + (\beta J)^4 q^2 z^4 \right] + O(\xi^6) \right\} . \quad (C.3)
\end{aligned}$$

Usando as integrais,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz z^P \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] = \begin{cases} 0, & \text{se } P \text{ é ímpar} \\ (P-1)!! , & \text{se } P \text{ é par} \end{cases} , \quad (C.4)$$

onde,

$$P!! = P(P-2)(P-4)(P-6)\dots ,$$

ficamos então com as seguintes equações para m e q :

$$m = \beta J_0 m - \frac{1}{3} (\beta J_0)^3 m^3 - (\beta J_0)(\beta J)^2 m q + O(m^5, q m^3) , \quad (C.5)$$

e

$$\begin{aligned}
q = (\beta J_0)^2 m^2 + (\beta J)^2 q - \frac{2}{3} (\beta J_0)^4 m^4 \\
- 4 (\beta J_0)^2 (\beta J)^2 m^2 q - 2 (\beta J)^4 q^2 + O(m^5, q^3) . \quad (C.6)
\end{aligned}$$

Apêndice D: Cálculos em Baixas Temperaturas para o Modelo SK

Neste apêndice nos restringiremos ao caso $h = 0$, no limite de baixas temperaturas ($T \rightarrow 0$, ou seja, $\beta \rightarrow \infty$). Observaremos inicialmente, o comportamento dos parâmetros m e q , definidos pelas equações (2.3.4), nesta região de temperaturas; em seguida, computaremos a entropia por spin em $T = 0$ na fase de vidro de spins.

Ao longo deste apêndice faremos uso das propriedades das funções erro e erro complementar introduzidas abaixo.

Função erro:
$$\operatorname{erf}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right] = 2 \int_0^x \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] . \quad (\text{D.1})$$

Função erro complementar:

$$\operatorname{erfc}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right] = 2 \int_x^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] . \quad (\text{D.2})$$

Temos que

$$\int_{-\infty}^x \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x/\sqrt{2}) , \quad (\text{D.3})$$

enquanto que,

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x) \quad ; \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad . \quad (\text{D.4})$$

Expansões para a função erro:

i) x pequeno ($x \ll 1$):

$$\operatorname{erf}(x) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \dots \right] \quad , \quad (\text{D.5a})$$

ii) x grande ($x \gg 1$):

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} x} \left[1 - \frac{1}{2x^2} + \dots \right] \quad . \quad (\text{D.5b})$$

Parte A: A magnetização em baixas temperaturas

Consideremos agora, a equação da magnetização (equação (2.3.4a)),

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \operatorname{tgh} \beta (J_0 m + J q^{\frac{1}{2}} z) \quad . \quad (\text{D.6})$$

Em baixas temperaturas, temos:

$$\operatorname{tgh} \beta (J_0 m + J q^{\frac{1}{2}} z) \begin{cases} > 0, & \text{se } z > \eta \\ < 0, & \text{se } z < \eta \end{cases} \quad ,$$

onde,

$$\Omega = -\frac{J_0 m}{Jq^{\frac{1}{2}}} .$$

Mas,

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{2 - (1 + e^{-2x})}{1 + e^{-2x}} = \frac{2}{1 + e^{-2x}} - 1 .$$

Ficamos então com,

$$m = -1 + \left[\frac{2}{\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \left\{ \exp\left[-2\beta(J_0 m + Jq^{\frac{1}{2}}z)\right] + 1 \right\}^{-1} ,$$

$$m = -1 + \left[\frac{2}{\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \left\{ \exp\left[-2\beta Jq^{\frac{1}{2}}(z - \Omega)\right] + 1 \right\}^{-1} .$$

Trocando z por $-z$ na integral acima, ficamos com

$$m = -1 + \left[\frac{2}{\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \left\{ \exp\left[2\beta Jq^{\frac{1}{2}}(z + \Omega)\right] + 1 \right\}^{-1} , \quad (D.7)$$

e a integral em (D.7) pode ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz h(z) f(z) , \quad (D.8)$$

onde,

$$h(z) = \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] ,$$

e

$$f(z) = \left\{ \exp\left[2\beta J q^{\frac{1}{2}}(z + \Omega)\right] + 1 \right\}^{-1} ,$$

é a função de Fermi.

A integral em (D.8) pode ser escrita em termos de uma expansão de Sommerfeld [44],

$$\int_{-\omega}^{\omega} dz h(z) f(z) = \int_{-\omega}^{-\Omega} dz h(z) + \sum_{n=1}^{\omega} a_n \left[\frac{kT}{2Jq^{\frac{1}{2}}} \right]^{2n} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} h(z) \Big|_{z=-\Omega} , \quad (D.9)$$

onde

$$a_n = \left[2 - \frac{1}{2^{2(n-1)}} \right] 2^{2n-1} \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} A_n , \quad (D.10a)$$

e A_n define uma sequência de números de Bernoulli,

$$A_1 = \frac{1}{6} ; A_2 = \frac{1}{30} ; A_3 = \frac{1}{42} ; A_4 = \frac{1}{30} ; A_5 = \frac{5}{66} . \quad (D.10b)$$

Usando as definições das funções erro e erro complementar (equações (D.1), (D.2) e (D.3)), temos,

$$m = -1 + \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-\omega}^{-\Omega} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] + \sum_{n=1}^{\omega} a_n \left[\frac{kT}{2Jq^{\frac{1}{2}}} \right]^{2n} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \Big|_{z=-\Omega} \right\} ,$$

$$m = \operatorname{erf}\left[-\frac{\Omega}{\sqrt{2}}\right] + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{kT}{2Jq^{\frac{1}{2}}}\right]^{2n} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \Big|_{z=\Omega} ,$$

ou ainda,

$$m = \operatorname{erf}\left[\frac{J_0 m}{J(2q)^{\frac{1}{2}}}\right] + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{kT}{2Jq^{\frac{1}{2}}}\right]^{2n} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \Big|_{z=\frac{J_0 m}{Jq^{\frac{1}{2}}}} . \quad (\text{D.11a})$$

Mas,

$$\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] = \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \frac{d}{dz} \left\{ \int_0^z dy \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] \right\} = \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{erf}\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\right] ,$$

e então,

$$m = \operatorname{erf}\left[\frac{J_0 m}{J(2q)^{\frac{1}{2}}}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{kT}{2Jq^{\frac{1}{2}}}\right]^{2n} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \operatorname{erf}\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\right] \Big|_{z=\frac{J_0 m}{Jq^{\frac{1}{2}}}} . \quad (\text{D.11b})$$

Para $T = 0$ a equação acima nos dá que (veremos a seguir que $q = 1$ em $T = 0$),

$$m = \operatorname{erf}(J_0 m / \sqrt{2} J) . \quad (\text{D.12})$$

Podemos agora fazer uso das expansões da função erro (equações (D.5)), para obtermos os dois limites extremos da magnetização ao longo do eixo de temperatura nula.

No limite $\frac{J_0}{J} \gg 1$, para $x = \frac{J_0 m}{\sqrt{2} J}$, de (D.5b), temos:

$$m \cong 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{J}{J_0 m}\right] \exp\left[-\frac{J_0^2 m^2}{2J^2}\right] \left[1 - O(J^2/J_0^2)\right] .$$

Observemos que m pode ser trocado por 1 no lado direito da expressão acima para termos até $O(J/J_0)$, ficando então:

$$m \cong 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{J}{J_0} \exp\left[-\frac{J_0^2}{2J^2}\right] , \quad (T = 0 \text{ e } \frac{J_0}{J} \gg 1) . \quad (\text{D.13})$$

No limite em que m é pequeno, de (D.5a), obtemos:

$$m = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{J_0 m}{\sqrt{2} J} - \frac{1}{3} \frac{J_0^3 m^3}{2^{3/2} J^3} + O(m^5) \right] . \quad (\text{D.14})$$

Para soluções com $m \neq 0$, temos:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{J_0}{J} - \frac{1}{6} \left(\frac{J_0}{J}\right)^3 m^2 + O(m^4) ,$$

$$m^2 \cong 6 \left(\frac{J}{J_0}\right)^3 \left[\frac{J_0}{J} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] ,$$

ou ainda,

$$m \cong (18\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{J}{J_0} \left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{J}{J_0} \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (T = 0 ; m \text{ pequeno}) . \quad (\text{D.15})$$

Podemos ver a partir de (D.15), que m se anula quando,

$$\frac{J_0}{J} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cong 1.2533 , \quad (\text{D.16})$$

que nos dá o ponto onde a fronteira crítica F-VS toca o eixo $T = 0$.

Parte B: O parâmetro de vidro de spins na fase VS em baixas temperaturas

Consideremos agora, a equação para o parâmetro de vidro de spins na fase VS ($m = 0$) (equação (2.3.4b)), que pode também ser escrita como,

$$q = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{sech}^2 (\beta J q^{\frac{1}{2}} z) . \quad (\text{D.17})$$

Definindo,

$$\xi = \beta J q^{\frac{1}{2}} z , \quad (\text{D.18})$$

podemos efetuar a mudança de variáveis,

$$z = \frac{kT\xi}{Jq^{\frac{1}{2}}} \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{kT}{Jq^{\frac{1}{2}}} d\xi ,$$

e então,

$$q = 1 - \frac{kT}{Jq^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} d\xi \exp \left[-\frac{(kT\xi)^2}{2J^2 q} \right] \operatorname{sech}^2 \xi .$$

Expandindo a função exponencial,

$$\exp\left[-\frac{(kT\xi)^2}{2J^2q}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m m!} \left[\frac{kT}{Jq^{\frac{1}{2}}}\right]^{2m} \xi^{2m} \quad ,$$

teremos,

$$q = 1 - \frac{kT}{Jq^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} d\xi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m m!} \left[\frac{kT}{Jq^{\frac{1}{2}}}\right]^{2m} \frac{4 \xi^{2m}}{[e^{\xi} + e^{-\xi}]^2} \quad ,$$

ou ainda,

$$q = 1 - 8 \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{Jq^{\frac{1}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m m!} \left[\frac{kT}{Jq^{\frac{1}{2}}}\right]^{2m} I_m \quad ,$$

onde

$$I_m = \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi^{2m}}{[e^{\xi} + e^{-\xi}]^2} = \int_0^{\infty} d\xi \frac{e^{2\xi} \xi^{2m}}{[e^{2\xi} + 1]^2} \quad .$$

Temos que,

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\xi^{2m}}{[e^{2\xi} + 1]} = -\frac{2e^{2\xi} \xi^{2m}}{[e^{2\xi} + 1]^2} + \frac{2m \xi^{2m-1}}{e^{2\xi} + 1} \quad ,$$

$$\frac{e^{2\xi} \xi^{2m}}{[e^{2\xi} + 1]^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \frac{\xi^{2m}}{[e^{2\xi} + 1]} + \frac{m \xi^{2m-1}}{e^{2\xi} + 1} \quad .$$

Então,

$$I_m = -\frac{1}{2} \frac{\xi^{2m}}{e^{2\xi} + 1} \Big|_0^\infty + m \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^{2m-1}}{e^{2\xi} + 1} .$$

Fazendo $x = 2\xi$ temos,

$$I_m = \frac{m}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1} \int_0^\infty dx \frac{x^{2m-1}}{e^x + 1} .$$

Temos que [41],

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{2m-1}}{e^{px} + 1} = (1 - 2^{1-2m}) \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{2m} \frac{|B_{2m}|}{4m} , \quad (m > 0)$$

onde B_{2m} define uma sequência de números de Bernoulli,

$$B_0 = 1 ; \quad B_1 = -\frac{1}{2} ; \quad B_2 = \frac{1}{6} ; \quad B_4 = -\frac{1}{30} .$$

Então,

$$I_m = \frac{m}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1} (1 - 2^{1-2m}) (2\pi)^{2m} \frac{|B_{2m}|}{4m} = \frac{1}{4} (1 - 2^{1-2m}) (\pi)^{2m} |B_{2m}| . \quad (m > 0)$$

Para o caso $m = 0$, temos para a integral I_0 ,

$$I_0 = \int_0^\infty d\xi \frac{e^{2\xi}}{[e^{2\xi} + 1]^2} ,$$

e definindo,

$$u = e^{2\xi} + 1 \Rightarrow du = 2 e^{2\xi} d\xi \quad ,$$

ficamos com,

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_2^{\infty} du u^{-2} = -\frac{1}{2u} \Big|_2^{\infty} = \frac{1}{4} \quad .$$

Temos então,

$$q = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{Jq^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{Jq^{\frac{1}{2}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m m!} (1 - 2^{1-2m}) (\pi)^{2m} \left[\frac{kT}{Jq^{\frac{1}{2}}} \right]^{2m} |B_{2m}| \quad ,$$

$$q = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{Jq^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m m!} (1 - 2^{1-2m}) (\pi)^{2m} \left[\frac{kT}{Jq^{\frac{1}{2}}} \right]^{2m} |B_{2m}| \right] \quad . \quad (D.19)$$

Ordem zero em T:

$$q^{(0)} = 1 \quad . \quad (D.20)$$

Primeira ordem em T:

$$q^{(1)} = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J(q^{(0)})^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow q^{(1)} = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J} \quad . \quad (D.21)$$

Segunda ordem em T:

$$q^{(2)} = 1 - \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J(q^{(1)})^{\frac{1}{2}}} ,$$

$$q^{(2)} = 1 - \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J} \left[1 + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J} \right] ,$$

$$q^{(2)} = 1 - \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J} - \frac{1}{2} \frac{2}{\pi} \left[\frac{kT}{J} \right]^2 .$$

Até termos de segunda ordem em T temos então,

$$q = 1 - \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{kT}{J} \right]^2 + O(T^3) . \quad (D.22)$$

Parte C: A entropia por spin na fase VS em $T = 0$

Consideremos agora, a entropia por spin na fase VS ($m = 0$) a baixas temperaturas. A equação (2.3.6) nos dá que,

$$\begin{aligned} \frac{s}{k} &= -\frac{(\beta J)^2}{2} (1 - q^2) + \frac{(\beta J)^2}{4} (1 - q)^2 \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \ln(2 \cosh \xi_0) , \end{aligned} \quad (D.23)$$

onde,

$$\xi_0 = \beta J q^{\frac{1}{2}} z . \quad (D.24)$$

Seja,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \ln(2\cosh \xi_0) \quad ,$$

isto é,

$$I = 2 \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \ln(2\cosh \xi_0) \quad . \quad (\text{D.25})$$

Para baixas temperaturas, $|\xi_0|$ é grande, de modo que para $z \geq 0$, temos:

$$\ln(2\cosh \xi_0) = \ln\left[e^{\xi_0} + e^{-\xi_0}\right] = \ln e^{\xi_0} \left[1 + e^{-2\xi_0}\right] = \xi_0 + \ln\left[1 + e^{-2\xi_0}\right]$$

ou seja,

$$\ln(2\cosh \xi_0) = \xi_0 + e^{-2\xi_0} + O\left[e^{-4\xi_0}\right] \quad .$$

Logo,

$$I \cong 2a \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] z + 2 \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2} - 2az\right] \quad , \quad (\text{D.26})$$

onde,

$$a = \beta J q^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (\text{D.27})$$

Das integrais (C.4) temos que,

$$\int_0^{\infty} dz z \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] = 1 \quad ,$$

e

$$\int_0^{\infty} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2} - 2az\right] = \frac{1}{2} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp(2a^2) \operatorname{erfc}(\sqrt{2} a) \quad ,$$

resultando em,

$$I = 2a \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} + \exp(2a^2) \operatorname{erfc}(\sqrt{2} a) + O(\exp(-4\beta J)) \quad .$$

Usando as propriedades (D.4) e (D.5b) para grandes argumentos,

$$\operatorname{erfc}(x) \cong \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} x} \left[1 - \frac{1}{2x^2}\right] \quad , \quad (\text{D.28})$$

ficamos com,

$$I = \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \left[2a + \frac{1}{a}\right] + O\left[(T/J)^3, \exp(-4\beta J)\right] \quad . \quad (\text{D.29})$$

Considerando somente termos até $O(T^2)$, temos então que a equação (D.29) fica,

$$I \cong \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \left[2a + \frac{1}{a}\right] \quad . \quad (\text{D.30})$$

Substituindo (D.27) e (D.22) em (D.30), e usando as expansões,

$$(1-x)^{\pm\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + O(x^2) \quad ; \quad -1 < x \leq 1 \quad , \quad (D.31)$$

ficamos com,

$$I \cong \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 2\beta J \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta J} \right] \right\} + \frac{1}{\beta J} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta J} \right] \quad ,$$

ou seja,

$$I \cong \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \beta J - \frac{1}{\pi} + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta J} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\beta J)^2} \quad . \quad (D.32)$$

Da equação (D.22), obtemos

$$1 - q^2 = 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta J} + O\left[\left(\frac{T}{J}\right)^2\right] \quad , \quad (D.33)$$

$$(1 - q)^2 = \frac{2}{\pi} \frac{1}{(\beta J)^2} + O\left[\left(\frac{T}{J}\right)^2\right] \quad . \quad (D.34)$$

Substituindo as equações (D.32), (D.33) e (D.34) em (D.23) , chegamos a

$$\frac{s}{k} = -\frac{1}{2\pi} + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta J} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\beta J)^2} \quad . \quad (D.35)$$

No limite quando $\beta \rightarrow \infty$, obtemos

$$s = -\frac{k}{2\pi} \quad . \quad (D.36)$$

Apêndice E: A Matriz de Estabilidade G

Consideremos a expansão de $g(m^\alpha, q^{\alpha\beta})$ numa série de Taylor em torno da solução de simetria de réplicas (2.3.1), até termos de segunda ordem, isto é, para

$$m^\alpha = m + \varepsilon^\alpha \quad ; \quad q^{\alpha\beta} = q + \eta^{\alpha\beta} \quad (\varepsilon^\alpha \text{ e } \eta^{\alpha\beta} \text{ pequenos}),$$

temos,

$$\begin{aligned} g(m^\alpha, q^{\alpha\beta}) = & g_0 + \left. \frac{\partial g}{\partial m^\alpha} \right|_{SR} \varepsilon^\alpha + \left. \frac{\partial g}{\partial q^{\alpha\beta}} \right|_{SR} \eta^{\alpha\beta} \\ & + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g}{\partial m^\alpha \partial m^\beta} \right|_{SR} \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g}{\partial q^{\alpha\beta} \partial q^{\gamma\delta}} \right|_{SR} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} + \left. \frac{\partial^2 g}{\partial q^{\alpha\beta} \partial m^\gamma} \right|_{SR} \varepsilon^\gamma \eta^{\alpha\beta}, \quad (\text{E.1}) \end{aligned}$$

onde $g_0 = g(m^\alpha = m, q^{\alpha\beta} = q)$ e $|_{SR}$ significa derivadas calculadas na solução de simetria de réplicas.

Os termos lineares se anulam nos fornecendo as equações de equilíbrio (2.3.4), enquanto que os termos quadráticos nos dão a matriz de estabilidade G, cujos elementos são descritos a seguir.

$$1) \quad G_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 g}{\partial m^\alpha \partial m^\beta} = \beta J_0 \left\{ \delta_{\alpha\beta} - \beta J_0 (\langle S^\alpha S^\beta \rangle - \langle S^\alpha \rangle \langle S^\beta \rangle) \right\} \quad (\text{E.2})$$

$$1a) \quad \alpha = \beta \quad \Rightarrow \quad G_{\alpha\alpha} = \beta J_0 \left\{ 1 - \beta J_0 [1 - \langle S^\alpha \rangle]^2 \right\} = A \quad (\text{E.2a})$$

$$1b) \quad \alpha \neq \beta \quad \Rightarrow \quad G_{\alpha\beta} = -(\beta J_0)^2 \left\{ \langle S^\alpha S^\beta \rangle - \langle S^\alpha \rangle \langle S^\beta \rangle \right\} = B \quad (\text{E.2b})$$

$$\begin{aligned}
2) \quad G_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} &= \frac{\partial^2 g}{\partial q^{\alpha\beta} \partial q^{\gamma\delta}} \\
&= (\beta J)^2 \left\{ \delta_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} - (\beta J)^2 \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \rangle - \langle S^\alpha S^\beta \rangle \langle S^\gamma S^\delta \rangle \right\} . \quad (E.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a) \quad (\alpha\beta) \equiv (\gamma\delta) &\Rightarrow \\
G_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)} &= (\beta J)^2 \left\{ 1 - (\beta J)^2 \left[1 - \langle S^\alpha S^\beta \rangle \right]^2 \right\} = P \quad (E.3a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2b) \quad \alpha = \gamma \text{ e } \beta \neq \delta &\Rightarrow \\
G_{(\alpha\beta)(\alpha\delta)} &= -(\beta J)^4 \left\{ \langle S^\beta S^\delta \rangle - \langle S^\alpha S^\beta \rangle^2 \right\} = Q \quad (E.3b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2c) \quad (\alpha\beta) \neq (\gamma\delta) &\Rightarrow (\alpha \neq \gamma, \delta; \beta \neq \gamma, \delta) \Rightarrow \\
G_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} &= -(\beta J)^4 \left\{ \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \rangle - \langle S^\alpha S^\beta \rangle^2 \right\} = R \quad (E.3c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad G_{(\alpha\beta)\gamma} &= G_{\gamma(\alpha\beta)} \Rightarrow \\
\frac{\partial^2 g}{\partial q^{\alpha\beta} \partial m^\gamma} &= \frac{\partial^2 g}{\partial m^\gamma \partial q^{\alpha\beta}} = -\beta J_0 (\beta J)^2 \left\{ \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma \rangle - \langle S^\alpha S^\beta \rangle \langle S^\gamma \rangle \right\} . \quad (E.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3a) \quad \alpha = \gamma &\Rightarrow \\
G_{\alpha(\alpha\beta)} &= -\beta J_0 (\beta J)^2 \left\{ \langle S^\beta \rangle - \langle S^\alpha S^\beta \rangle \langle S^\alpha \rangle \right\} = C \quad (E.4a)
\end{aligned}$$

$$3b) \quad \alpha, \beta \neq \gamma \Rightarrow$$

$$G_{\gamma(\alpha\beta)} = -\beta J_0 (\beta J)^2 \left\{ \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma \rangle - \langle S^\alpha S^\beta \rangle \langle S^\gamma \rangle \right\} = D \quad (\text{E.4b})$$

Para encontrar os autovalores da matriz de estabilidade G , devemos resolver a equação de autovalores

$$G \mu = \lambda \mu \quad , \quad (\text{E.5})$$

onde os autovetores μ de G são da forma

$$\mu = \begin{bmatrix} \{\epsilon^\alpha\} \\ \{\eta^{(\alpha\beta)}\} \end{bmatrix} \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots, n \quad . \quad (\text{E.6})$$

Consideremos inicialmente o vetor μ_1 com elementos dados por

$$\epsilon^{(\alpha)} = a \quad , \quad \forall \alpha \quad ; \quad \eta^{(\alpha\beta)} = b \quad , \quad \forall (\alpha\beta). \quad (\text{E.7})$$

O vetor μ_1 tem n componentes do tipo a e $\frac{1}{2}n(n-1)$ componentes do tipo b . Encontramos dois autovalores que no limite $n \rightarrow 0$ são dados por

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ (A-B+P-4Q+3R) \pm [(A-B-P+4Q-3R)^2 - 8(C-D)^2]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad . \quad (\text{E.8})$$

Consideremos agora o vetor μ_2 da forma

$$\epsilon^\alpha = a \quad , \quad \text{para } \alpha = 0 \quad ; \quad \epsilon^\alpha = b \quad , \quad \text{para } \alpha \neq 0$$

$$\eta^{(\alpha\beta)} = c \quad , \quad \text{para } \alpha \text{ ou } \beta = 0 \quad ; \quad \eta^{(\alpha\beta)} = d \quad , \quad \text{para } \alpha, \beta \neq 0.$$

Da condição de ortogonalidade de μ_1 com μ_2 , temos $a = (1 - n)b$, $c = (1 - \frac{1}{2}n)d$ e a equação (E.5) nos dá mais dois autovalores, a saber

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ [A-B+P+(n-4)Q-(n-3)R] \right. \\ \left. \pm \{ [A-B-P-(n-4)Q+(n-3)R]^2 + 4(n-2)(C-D)^2 \}^{\frac{1}{2}} \right\} , \quad (\text{E.9})$$

que se reduzem, no limite $n \rightarrow 0$, aos autovalores obtidos em (E.8).

O espaço inteiro pode ser varrido com a definição do vetor μ_3 da forma

$$\epsilon^\alpha = a , \text{ para } \alpha = \theta \text{ ou } \nu ; \epsilon^\alpha = b , \text{ para } \alpha \neq \theta, \nu$$

$$\eta^{(\theta\nu)} = c , \eta^{(\theta\alpha)} = \eta^{(\nu\alpha)} = d \text{ para } \alpha \neq \theta, \nu$$

$$\eta^{(\alpha\beta)} = e , \text{ para } \alpha, \beta \neq \theta, \nu .$$

A ortogonalidade com os vetores μ_1 e μ_2 já encontrados impõe as condições $a = b = 0$, $c = (2-n)d$, $d = \frac{1}{2}(3-n)e$. Substituindo este vetor na equação (E.5) encontramos o autovalor

$$\lambda = P - 2Q + R . \quad (\text{E.10})$$

A condição para que o autovalor acima seja positivo, isto é,

$$P - 2Q + R > 0 , \quad (\text{E.11})$$

nos leva a

$$1 - \left[\frac{J}{kT} \right]^2 \left\{ 1 - \langle S^\alpha S^\beta \rangle^2 - 2 \left[\langle S^\beta S^\gamma \rangle - \langle S^\alpha S^\beta \rangle^2 \right] + \left[\langle S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \rangle - \langle S^\alpha S^\beta \rangle^2 \right] \right\} > 0$$

$$1 - \left[\frac{J}{kT} \right]^2 \left[1 - 2 \langle S^\beta S^\gamma \rangle + \langle S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \rangle \right] > 0 \quad ,$$

$$1 - \left[\frac{J}{kT} \right]^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] [1 - 2 \operatorname{tgh}^2 \xi + \operatorname{tgh}^4 \xi] \right\} > 0 \quad ,$$

$$1 - \left[\frac{J}{kT} \right]^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{sech}^4 \xi > 0 \quad , \quad (\text{E.12})$$

onde

$$\langle S^\alpha S^\beta S^\gamma S^\delta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{tgh}^4 \xi \quad , \quad (\text{E.13})$$

$$\xi = \frac{1}{kT} (J_0 m + Jq^{\frac{1}{2}} z + h) \quad .$$

Logo, da desigualdade (E.12) vem

$$\left[\frac{kT}{J} \right]^2 > \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{sech}^4 \xi \quad . \quad (\text{E.14})$$

Para o caso $h = 0$, a desigualdade (E.14) é satisfeita na fase paramagnética, onde $kT > J$, e na fase ferromagnética para altas temperaturas mas, é violada tanto na fase ferromagnética a baixas temperaturas como na de vidro de spins. O autovalor dado por (E.10) ao se anular define a linha de instabilidade (linha AT),

$$\left(\frac{kT}{J}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \operatorname{sech}^4 \xi \quad . \quad (\text{E.15})$$

Apêndice F: Análise da Fronteira Crítica Ferromagnética-Independente

Parte A: Consideremos a fronteira crítica Ferromagnética-Independente com $h_0 = 0$; a energia livre por spin é dada pela expressão (3.3.1), a saber

$$\beta f = -\frac{(\beta J)^2}{4} (1 - q)^2 + \frac{\beta J_0}{2} m^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \ln(2 \cosh \xi) \quad , \quad (\text{F.1})$$

com

$$\xi = \beta J_0 m + \xi_0 \quad , \quad (\text{F.2})$$

onde,

$$\xi_0 = [(\beta J)^2 q + (\beta \Delta)^2]^{\frac{1}{2}} z \quad . \quad (\text{F.3})$$

Na região da fase Ferromagnética próxima à fronteira F-I , m é pequeno e então,

$$\cosh \xi = \cosh (\beta J_0 m) \cosh \xi_0 + \sinh (\beta J_0 m) \sinh \xi_0 \quad ,$$

$$\cosh \xi = \cosh (\beta J_0 m) \cosh \xi_0 [1 + \text{tgh} (\beta J_0 m) \text{tgh} \xi_0] \quad ,$$

$$\ln (2 \cosh \xi) = \ln (2 \cosh \xi_0) + \ln [\cosh (\beta J_0 m)] + \ln [1 + \text{tgh} (\beta J_0 m) \text{tgh} \xi_0] \quad .$$

Utilizando as expansões para pequenos argumentos das funções,

$$\cosh x \cong 1 + \frac{x^2}{2} \quad ,$$

$$\ln(1 + x) \cong x - \frac{x^2}{2} \quad ,$$

$$\operatorname{tgh} x \cong x - \frac{x^3}{3} \quad ,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \ln(2\cosh \xi) &= \ln(2\cosh \xi_0) + \ln \left[1 + \frac{(\beta J_0 m)^2}{2} \right] \\ &+ \operatorname{tgh}(\beta J_0 m) \operatorname{tgh} \xi_0 - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2(\beta J_0 m) \operatorname{tgh}^2 \xi_0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \ln(2\cosh \xi) &= \ln(2\cosh \xi_0) + \frac{(\beta J_0)^2}{2} m^2 \\ &+ \beta J_0 m \operatorname{tgh} \xi_0 - \frac{1}{2} (\beta J_0 m)^2 \operatorname{tgh}^2 \xi_0 + O(m^4) \quad . \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Usando a identidade,

$$\operatorname{sech}^2 \xi_0 = 1 - \operatorname{tgh}^2 \xi_0 \quad , \quad (\text{F.6})$$

chegamos à equação

$$\begin{aligned} \ln(2\cosh \xi) &= \ln(2\cosh \xi_0) + \beta J_0 m \operatorname{tgh} \xi_0 \\ &+ \frac{(\beta J_0)^2}{2} m^2 \operatorname{sech}^2 \xi_0 + O(m^4) \quad . \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Parte B: A fronteira crítica F-I na região de baixas temperaturas

As equações (3.4.6) nos dão que,

$$kT_c = J_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{sech}^2 \xi_0 \quad , \quad (\text{F.8a})$$

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{tgh}^2 \xi_0 \quad , \quad (\text{F.8b})$$

onde

$$\xi_0 = \beta J \left[q + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} z = \left[(\beta J)^2 q + (\beta \Delta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} z \quad . \quad (\text{F.9})$$

A equação (F.8b) pode ainda ser escrita como,

$$q = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] \operatorname{sech}^2 \xi_0 \quad . \quad (\text{F.10})$$

Uma expansão de baixas temperaturas análoga à do modelo SK (ver Apêndice D) pode ser utilizada aqui desde que façamos,

$$q \rightarrow q + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \quad , \quad (\text{F.11})$$

na integral da equação (F.10). Usando a equação (D.19) do modelo SK, ficamos com:

$$1 - q = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{kT}{J[q + (\Delta/J)^2]^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m m!} (1 - 2^{1-2m}) (\pi)^{2m} \times \left[\frac{kT}{J[q + (\Delta/J)^2]^{\frac{1}{2}}} \right]^{2m} |B_{2m}| \right\}, \quad (\text{F.12})$$

onde B_{2m} são os números de Bernoulli,

$$B_0 = 1 \quad ; \quad B_1 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad ; \quad B_4 = -\frac{1}{30} \quad ; \quad \dots$$

i) Ordem zero em T:

$$1 - q^{(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^{(0)} = 1 \quad .$$

ii) Primeira ordem em T:

$$1 - q^{(1)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{kT}{J[q^{(0)} + (\Delta/J)^2]^{\frac{1}{2}}} \right],$$

$$1 - q^{(1)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{kT}{J[1 + (\Delta/J)^2]^{\frac{1}{2}}} \right].$$

iii) Segunda ordem em T:

$$1 - q^{(2)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{kT}{J[q^{(1)} + (\Delta/J)^2]^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Mas,

$$\left[q^{(1)} + \left(\frac{\Delta}{J} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta}{J} \right)^2 - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J[1 + (\Delta/J)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\left[q^{(1)} + \left(\frac{\Delta}{J} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 + \left(\frac{\Delta}{J} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J[1 + (\Delta/J)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\left[q^{(1)} + \left(\frac{\Delta}{J} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 + \left(\frac{\Delta}{J} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J[1 + (\Delta/J)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} + O(T^2).$$

Então,

$$1 - q^{(2)} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J} \left[1 + \left(\frac{\Delta}{J} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J[1 + (\Delta/J)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Para termos até a segunda ordem em T , temos então:

$$q = 1 - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J} \frac{1}{[1 + (\Delta/J)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{kT}{J} \right)^2 \frac{1}{[1 + (\Delta/J)^2]^2} + O(T^3). \quad (F.13)$$

A equação (3.4.7) que dá a fronteira crítica F-I,

$$\frac{kT}{J} = \frac{J_0}{J} (1 - q), \quad (F.14)$$

para baixas temperaturas, pode ser escrita como,

$$\frac{kT}{J} = \frac{J_0}{J} \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{J} \frac{1}{[1 + (\Delta/J)^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{kT}{J} \right)^2 \frac{1}{[1 + (\Delta/J)^2]^2} \right],$$

$$\frac{J}{J_0} - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{[1 + (\Delta/J)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\pi} \frac{kT}{J} \frac{1}{[1 + (\Delta/J)^2]^2},$$

$$\frac{kT}{J} = \pi \left[1 + \left(\frac{\Delta}{J} \right)^2 \right]^2 \left\{ \frac{J}{J_0} - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{[1 + (\Delta/J)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} . \quad (\text{F.15})$$

Apêndice G: A Entropia por Spin na Fase Independente em $T = 0$

Consideremos a entropia por spin na fase Independente ($m = 0$) para o caso $h_0 = 0$; a equação (3.3.4) fica,

$$\begin{aligned} \frac{s}{k} = & -\frac{(\beta J)^2}{2} (1 - q^2) - (\beta \Delta)^2 (1 - q) + \frac{(\beta J)^2}{4} (1 - q)^2 \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \ln(2 \cosh \xi_0) \quad , \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

onde,

$$\xi_0 = \beta J \left[q + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} z \quad . \quad (\text{G.2})$$

Um desenvolvimento análogo ao feito no Apêndice D (ver equação (D.29)) nos leva ao cálculo da integral em (G.1) a baixas temperaturas,

$$I = \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left[2a + \frac{1}{a} \right] + O\left[(T/J)^3, \exp(-4\beta J) \right] \quad ,$$

onde agora,

$$a = \beta J \left[q + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (\text{G.3})$$

Temos então,

$$\begin{aligned} \left[q + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right]^{\pm \frac{1}{2}} &\cong \left[1 + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 - \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta J} \frac{1}{[1 + (\Delta/J)^2]^{\frac{1}{2}}} \right]^{\pm \frac{1}{2}} \\ &= \left[1 + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right]^{\pm \frac{1}{2}} \times \left[1 - \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta J} \frac{1}{[1 + (\Delta/J)^2]^{3/2}} \right]^{\pm \frac{1}{2}} , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left[q + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right]^{\pm \frac{1}{2}} \cong \left[1 + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right]^{\pm \frac{1}{2}} \times \left[1 \mp \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta J} \frac{1}{[1 + (\Delta/J)^2]^{3/2}} \right] .$$

Então,

$$I \cong \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ 2\beta J b \left[1 - \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta J b^3} \right] + \frac{1}{\beta J b} \left[1 + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta J b^3} \right] \right\} ,$$

onde

$$b = \left[1 + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (G.4)$$

Usando (F.13), temos

$$1 - q^2 = 2 \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta J b} + O\left[(T/J)^2\right] ,$$

$$1 - q = \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta J b} + O\left[(T/J)^2\right] ,$$

$$(1 - q)^2 = \frac{2}{\pi} \frac{1}{(\beta J b)^2} + O\left[(T/J)^3\right] .$$

Substituindo estes resultados em (G.1), teremos:

$$\frac{s}{k} = -\beta J \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{b} - (\beta J)^2 \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta J b} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{b^2} + \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \beta J b - \frac{1}{\pi} \frac{1}{b^2} + O(T/J) \quad ,$$

$$\frac{s}{k} = -\frac{\beta J}{b} \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 + \left[\frac{\Delta}{J} \right]^2 \right] + \left[\frac{2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \beta J b - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{b^2} + O(T/J) \quad . \quad (G.5)$$

Temos então a entropia por spin em $T = 0$ dada por,

$$s = -\frac{k}{2\pi} \frac{1}{1 + (\Delta/J)^2} \quad . \quad (G.6)$$

Referências

- [1] Para artigos de revisão sobre Vidros de Spins, ver:
K. Binder e A. P. Young; *Rev. Mod. Phys.* **58**, 801 (1986);
M. Mézard, G. Parisi e M. A. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond*,
(World Scientific, Singapore) (1987);
J. L. van Hemmen e I. Morgenstern, *Heidelberg Colloquium on Spin Glasses*,
Lecture Notes in Physics 192, (Springer – Verlag, Heidelberg) (1983);
J. L. van Hemmen e I. Morgenstern, *Heidelberg Colloquium on Glassy Dynamics*,
Lecture Notes in Physics 275, (Springer – Verlag, Heidelberg)
(1987).
- [2] D. Sherrington e S. Kirkpatrick, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1792 (1975).
- [3] J. R. L. de Almeida e D. J. Thouless; *J. Phys. A* **11**, 983 (1978).
- [4] G. Parisi, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1754 (1979).
- [5] G. Parisi; *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1946 (1983).
- [6] A. Houghton, S. Jain e A. P. Young, *J. Phys. C* **16**, L375 (1983).
- [7] M. Mézard, G. Parisi, N. Surlas, G. Toulouse e M. A. Virasoro, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1156 (1984).
- [8] M. Mézard, G. Parisi, N. Surlas, G. Toulouse e M. A. Virasoro, *J. Phys. (Paris)* **45**, 843 (1984).
- [9] D. S. Fisher e D. Huse, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1601 (1986).
- [10] D. S. Fisher e D. Huse, *Phys. Rev. B* **38**, 386 (1988).
- [11] A. J. Bray e M. A. Moore, em *Heidelberg Colloquium on Glassy Dynamics*,
editado por J. L. van Hemmen e I. Morgenstern, Lecture Notes in
Physics 275, (Springer – Verlag, Heidelberg) (1987).
- [12] J. Villain, *Europhys. Lett.* **2**, 871 (1986).
- [13] N. Surlas, *Europhys. Lett.* **1**, 189 (1986).

- [14] N. Surlas, *Europhys. Lett.* **6**, 561 (1988).
- [15] S. Caracciolo, G. Parisi, S. Patarnello e N. Surlas, *Europhys. Lett.* **11**, 783 (1990).
- [16] S. Caracciolo, G. Parisi, S. Patarnello e N. Surlas, *J. Phys. (Paris)* **51**, 1877 (1990).
- [17] J. D. Reeger, R. N. Bhatt e A. P. Young, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1859 (1990).
- [18] Para artigos de revisão no problema de campo magnético aleatório, ver:
T. Nattermann e J. Villain, *Phase Transitions* **11**, 5 (1988);
T. Nattermann e P. Rujan, *Int. J. Mod. Phys. B* **3**, 1597 (1989).
- [19] S. Fishman e A. Aharony, *J. Phys. C* **12**, L729 (1979).
- [20] J. Cardy, *Phys. Rev. B* **29**, 505 (1984).
- [21] J. Bricmont e A. Kupiainen, *Commun. Math. Phys.* **116**, 539 (1988).
- [22] S. F. Edwards e P. W. Anderson, *J. Phys. F* **5**, 965 (1975).
- [23] M. A. Ruderman e C. Kittel, *Phys. Rev.* **96**, 99 (1954).
- [24] T. Kasuya, *Prog. Theor. Phys.* **16**, 45 (1956).
- [25] K. Yosida, *Phys. Rev.* **106**, 893 (1975).
- [26] G. Toulouse, *Commun. Phys.* **2**, 115 (1977).
- [27] D. J. Thouless, J. R. L. de Almeida e J. M. Kosterlitz, *J. Phys. C* **13**, 3271 (1980).
- [28] C. De Dominicis e I. Kondor, *Phys. Rev. B* **27**, 606 (1983).
- [29] R. Pirc, B. Tadić e R. Blinc, *Z. Phys. B* **61**, 69 (1985).
- [30] R. Pirc, B. Tadić e R. Blinc, *Phys. Rev. B* **36**, 8607 (1987).
- [31] Yu-qiang Ma, Chang-de Gong e Zhen-ya Li, *Phys. Rev. B* **43**, 8665 (1991).
- [32] R. Pirc, B. Tadić e R. Blinc, *Physica A* **185**, 322 (1992).
- [33] R. Pirc, R. Blinc e W. Wiotte, *Physica B* **182**, 137 (1992).
- [34] A. Levstik, C. Filipič, Z. Kutnjak, R. Pirc, B. Tadić e R. Blinc, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2368 (1991).

- [35] R. Pirc, B. Tadić, R. Blinc e R. Kind, *Phys. Rev. B* **43**, 2501 (1991).
- [36] R. Kind, R. Blinc, J. Dolinsek, N. Korner, B. Zalar, P. Cvec, N. S. Dalal e J. DeLooze, *Phys. Rev. B* **43**, 2511 (1991).
- [37] E. Courtens, *J. Phys.* **43**, L 199 (1982).
- [38] E. Courtens, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 69 (1984).
- [39] P. Prelovsek e R. Blinc, *J. Phys. C* **15**, L 985 (1982).
- [40] E. Matsushita e T. Matsubara, *Prog. Theor. Phys.* **71**, 235 (1984).
- [41] J. Stak, R. Kind, R. Blinc, E. Courtens e S. Zumer, *Phys. Rev. B* **30**, 85 (1984).
- [42] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, 3^a Edição – Parte 1 (Pergamon Press, Oxford) (1980).
- [43] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 4^a Edição (Academic Press, New York) (1965).
- [44] N. W. Ashcroft e N. D. Mermin, *Solid State Physics*, (Holt–Saunders, Tokyo) (1981).