



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL

Espectro das Ondas de Spin Lineares e Não-Lineares em Multicamadas Magnéticas Anisotrópicas

Dory Hélio Aires de Lima Anselmo.

Tese apresentada ao Departamento de Física
Teórica e Experimental da Universidade Federal
do Rio Grande do Norte como requisito parcial
para a obtenção do grau de Doutor em Física.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
Campus Universitário, 59072-970 Natal-RN - Tel (084 215-3791)

DECLARAÇÃO

Declaramos, para todos os fins, que o aluno **DORY HÉLIO AIRES DE LIMA ANSELMO** defendeu sua Tese de Doutorado intitulada "Espectro das ondas de Spin lineares e não-lineares em multicamadas magnéticas anisotrópicas", em 29 de outubro de 1999, no Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, tendo obtido conceito ".....".

Natal, 29 de outubro de 1999.

Eudenilson Lins de Albuquerque

Prof. Dr. Eudenilson Lins de Albuquerque - Orientador/UFRN

Roberto Bechara Muniz

Prof. Dr. Roberto Bechara Muniz - Examinador Externo/UFRN

Valder Nogueira Freire

Prof. Dr. Valder Nogueira Freire - Examinador Externo/UFRN

Liacer dos Santos Lucena

Prof. Dr. Liacer dos Santos Lucena - Examinador Interno/UFRN

Luciano Rodrigues da Silva

Prof. Dr. Luciano Rodrigues da Silva - Examinador Interno/UFRN

VISTO

Nilson Sena de Almeida
Prof. Dr. Nilson Sena de Almeida
Coordenador do PPGF

Agradecimentos

Ao Prof. Eudenilson Lins de Albuquerque, por sua orientação durante este período. Sem sua determinação e apoio este trabalho não teria sido possível. Meus sinceros agradecimentos.

Ao Prof. Michael G. Cottam, da University of Western Ontario, por sua co-orientação segura durante minha estadia naquela Universidade.

A todos os Professores do DFTE/UFRN, que colaboraram para minha formação e me apoiaram, em especial a Ezequiel Silva de Souza, Artur da Silva Carriço, Nilson Sena de Almeida, Ananias Mariz, Luciano Silva, Paulo Fulco e Liacir Lucena.

A todos os colegas do curso de Física. Em particular a Ana Lúcia, Selma Rozane, Vamberto Dias, Umberto Fulco, Manoel Silva, João Medeiros e Samuel Rodrigues pelos agradáveis momentos que partilhamos.

À todos os funcionários do DFTE/UFRN. Em particular a Nalva, Jacira, D. Benícia, Lindalva e Carlos por sua ajuda e atenção.

Aos meus amigos Reverson, Anivaldo, Adriana, Jalmira, Silvânia, Ceiza, Takeo, Sílvio, Mantovani, Israel, Jackson, Alba e Arthur. Peço desculpas aos que eu omiti (são muitos!) por causa da limitação do espaço..

À Mônica Lúcia, pelo carinho que recebi durante esses anos.

À Antônia Aires de Lima, minha mãe, pelo apoio em todas as horas, e sempre.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À Tázia Magno, *in memoriam*, por tudo que você fez, e eu não te agradei antes.

"Talvez não tenhamos conseguido fazer o melhor,
mas lutamos para que o melhor fosse feito. Não
somos o que deveríamos ser, não somos o que
iremos ser, mas graças a Deus, não somos o que
éramos."

Martin Luther King.

"Aquele que conhece aos outros é um sábio;
o que conhece a si mesmo é um iluminado."

Tao Te Ching.

Resumo

Apresentamos um estudo teórico sobre ondas de spin em diferentes regimes magnéticos, que se propagam em materiais cristalinos e super-redes ferromagnéticas e antiferromagnéticas. Nosso trabalho se concentra na descrição dos modos de superfície e volume das ondas de spin que se propagam em tais estruturas, através do emprego de técnicas de matriz-transferência, segunda quantização e funções de Green. Também apresentamos uma extensão de trabalhos anteriores, baseados somente no método matricial. O espectro das ondas de spin no regime de troca (*exchange*) é estudado através da resolução da equação de movimento na representação de Heisenberg da mecânica quântica para operadores de spin. Técnicas matriciais são aplicadas para o estudo dos magnons no citado regime em materiais ferromagnéticos, antiferromagnéticos e que apresentam metamagnetismo. Nosso Hamiltoniano é composto de termos Zeeman, de troca, e quando se aplicar o caso, de anisotropias uniaxial e não-uniaxial. Uma componente não-uniaxial no Hamiltoniano produz complicações matemáticas na equação de movimento resultante. As matrizes de spin que seriam bloco-diagonais apresentam termos na forma de blocos fora da diagonal neste caso. Os parâmetros físicos principais considerados são o spin médio S , o campo magnético externo H_0 aplicado (que pode ter uma orientação arbitrária), a constante de acoplamento (no caso do regime de troca) e a função permeabilidade (no regime magnetostático). Também descrevemos o comportamento das ondas de spin em super-redes quasiperiódicas, apresentando os espectros de dispersão no regime magnetostático. Definimos como construir tais estruturas a partir de blocos constituintes não-periódicos. Com o crescente desenvolvimento de métodos de crescimento de super-redes e sistemas de multi-camadas, foi possível crescer tais estruturas, tais como GaAs-AlAs e Mo-V. Técnicas experimentais, incluindo espalhamento de raios-X e Raman, podem ser aplicadas para a verificação de nossos resultados. Finalmente, apresentamos possíveis extensões para nossa teoria, incluindo o estudo do comportamento fractal das soluções.

Abstract

We present a theoretical investigation of spin waves (SW) in different magnetic regimes, which propagate in crystalline materials, and in ferromagnetic and antiferromagnetic superlattices. Our work is aimed to the description of surface and bulk modes, propagating in such structures, by employing the transfer-matrix, second quantization and Green function methods. We also present an extension of previous work, which was based only in the transfer-matrix method. The SW spectra in the exchange regime is obtained by finding the solutions for the quantum-mechanical equations of motion for spin operators in the Heisenberg picture. Matrix techniques are applied to study the magnons in the regimes cited above, including the metamagnetic materials. Our Hamiltonian is therefore build up by considering Zeeman, exchange, and when needed, uniaxial and nonuniaxial anisotropy terms. A nonuniaxial component gives rise to mathematical complications in the resulting equation of motion. The spin matrices, that otherwise would be block-diagonal, have off-diagonal blocks in this case. The physical parameters considered here are the average spin S , the external applied magnetic field H_0 (which can have an arbitrary orientation), the coupling constant (for the exchange regime) and the permeability function (for the magnetostatic regime). Also, we describe the behavior of spin waves in quasiperiodic superlattices, giving their spectra in the magnetostatic regime. We describe how to set up such structures from non-periodic building blocks. With the increasing development of growth techniques for superlattices and multilayers, it was possible to construct superlattices with such structures, such as GaAs-AlAs and Mo-V. Experimental techniques, including X-ray and Raman scattering can be applied to verify our results. Finally, we describe extensions for our theory, including the study of fractal behavior of the solutions.

Sumário

1	Introdução às Ondas de Spin em Meios Magnéticos	2
1.1	Roteiro da Tese	3
1.2	Regimes Magnéticos	4
1.3	Ondas de Spin: Algumas Definições	6
1.4	Métodos de Cálculo	7
1.4.1	Método da Equação de Movimento para os Operadores	7
1.4.2	Método da Função de Green	9
1.5	Métodos Experimentais para o Estudo das Ondas de Spin	12
2	Ondas de Spin Lineares em Cristais Metamagnéticos	16
2.1	Introdução	16
2.2	Ondas de Spin em Metamagnetos Uniaxiais	19
2.2.1	Modelo Uniaxial	19
2.2.2	Fase Antiferromagnética	21
2.2.3	Fase Ferromagnética	24
2.2.4	Aplicações Para FeCl_2	25
2.3	Ondas de Spin em Metamagnetos Não-Uniaxiais	28
2.3.1	Modelo Anisotrópico	29
2.4	Resultados Numéricos	34
2.4.1	Material FeCl_2	34
2.4.2	Material FeBr_2	35

2.5	Conclusões	44
3	Ondas de Spin Não-Lineares em Super-redes Ferromagnéticas	45
3.1	Ondas de Spin Lineares em Ferromagnetos Anisotrópicos	45
3.1.1	A Super-rede Magnética	46
3.1.2	Modos de Superfície	51
3.2	Ondas de Spin Não-Lineares em Ferromagnetos Anisotrópicos	55
3.2.1	A Transformação de Holstein-Primakoff	55
3.2.2	Super-rede Não Linear	58
3.3	Resultados Numéricos	61
3.4	Conclusões	69
4	Modos Magnetostáticos das Ondas de Spin em Quasicristais	70
4.1	Introdução	70
4.2	Modos Magnetostáticos em Cristais Periódicos	74
4.2.1	Modos Magnetostáticos em uma Camada Ferromagnética	76
4.3	Sequências Quasiperiódicas	87
4.4	Teoria de Modos Magnetostáticos com Magnetização Perpendicular às Interfaces	90
4.5	Método da Matriz-Transferência	97
4.5.1	Super-rede de Fibonacci	102
4.5.2	Super-rede de Thue-Morse	105
4.5.3	Super-rede de Período-Duplo	107
4.6	Resultados Numéricos	109
4.6.1	Localização dos Modos Magnetostáticos	112
4.7	Conclusões	122
5	Conclusões	123
A	Cálculo das Matrizes Metamagnéticas	126

B	Forma das Matrizes M_J e N_J	129
C	Trabalhos Publicados	131
C.1	Spin Wave Spectrum in Magnetic Superlattices with Anisotropic Fields . .	131
C.2	Surface Spin Waves in Metamagnets with Nonuniaxial Single-Ion Anisotropy	132
C.3	Non-Linear Spin-Wave Spectra in Anisotropic Magnetic Superlattices . . .	133
C.4	Magnetostatic Modes in Quasiperiodic Fibonacci Magnetic Superlattices .	134
C.5	Localization and Scaling Properties of Magnetostatic Modes in Quasiperi- odic Magnetic Superlattices (submetido)	135

Capítulo 1

Introdução às Ondas de Spin em Meios Magnéticos

O estudo da ciência do magnetismo se apresenta hoje como um dos campos mais profícuos e competitivos do conhecimento. Desde o descobrimento da magnetita (Fe_2O_3) há 4000 anos atrás, passando por novas e intrigantes descobertas sobre crescimento e comportamento de estruturas multicristalinas, até investigações em nanomateriais, o interesse por seu estudo só tem aumentado. A razão para isso é a quantidade de aplicações práticas de dispositivos magnéticos: sensores magnéticos feitos com materiais que apresentam magnetoresistência colossal, gravação de dados em fitas magnéticas e discos rígidos, memórias magnetoresistivas, etc.

O presente trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre as ondas de spin em super-redes e cristais magnéticos. Para tanto, usaremos os formalismos de segunda quantização, funções de Green, e matriz transferência, para estudarmos os modos de propagação (soluções da equação de movimento) dessas excitações no interior do sistema (super-rede, amostra uniforme de material, etc.) ou em sua superfície. Nossa atenção será concentrada não somente nos ordenamentos ferromagnético e antiferromagnético, mas também estudaremos as ondas de spin em materiais metamagnéticos, que apresentam os dois tipos de interação. Quanto às características estruturais, a introdução de

super-redes (que são sistemas virtualmente infinitos ou semi-infinitos construídos a partir do empilhamento de um grande número de camadas de materiais diferentes) e sistemas de multi-camadas magnéticas tem fornecido uma gama de novos materiais, com propriedades distintas de seus constituintes. Muito se tem estudado com relação às excitações magnéticas em tais estruturas (para uma revisão, ver as referências [1] e [2]). Exemplos de tais excitações são os **polaritons**, que são essencialmente interações da luz com uma ou mais excitações elementares do material ou da super-rede, e as **ondas de spin**, que são oscilações locais dos momentos magnéticos no cristal ou em super-redes. Elas se propagam na forma de ondas com frequências tipicamente na faixa de poucos MHz até poucas centenas de GHz. Novas aplicações tecnológicas têm aparecido. Por exemplo, a descoberta da magnetoresistência gigante por Baibich *et al.*³ levou ao aperfeiçoamento das chamadas **válvulas de spin**, e de sistemas de armazenamento de dados de enorme capacidade (discos rígidos de computadores), sem falar no ganho conseguido utilizando o efeito Kerr (rotação da polarização da luz quando espalhada por uma superfície magnética) para aumento da densidade de momentos magnéticos, o que leva também diretamente a um aumento na capacidade de armazenamento de dados por discos magnéticos.

1.1 Roteiro da Tese

Esta tese está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2 empregaremos uma teoria microscópica para investigarmos o espectro das ondas de spin em materiais meta-magnéticos, que consistem de camadas ordenadas ferromagneticamente, de forma que a interação de troca intracamadas ferromagnética é muito maior que a fraca interação antiferromagnética entre camadas adjacentes⁴.

Usando técnicas de funções de Green e de diagramas de Feynman no Capítulo 3, descreveremos os modos de volume e superfície das ondas de spin que se propagam em super-redes magnéticas não-lineares⁵, onde a descrição física do fenômeno é feita através dos operadores de criação e destruição de **magnons** (que são os *quanta* das ondas de spin) a^\dagger e a , respectivamente.

No Capítulo 4 apresentaremos um estudo das propriedades das ondas de spin no regime magnetostático, que se propagam em super-redes do tipo **quasiperiódicas**^{6,7}. Tal denominação vem da analogia entre estas estruturas artificiais e os cristais que apresentam simetrias incomuns, denominados *quasicristais*. A propriedade mais interessante dos quasicristais é ainda seu padrão de difração. O conjunto de picos de difração bem definidos tem uma simetria de ponto não cristalográfica, e portanto não constitui uma rede de Bravais. Consequentemente, a estrutura tem uma ordem de longo alcance, sem no entanto ter uma simetria translacional. Para o estudo numérico das estruturas quasiperiódicas, empregaremos o método da matriz-transferência, que se mostra bastante útil nestes tipos de estruturas. Comparações com resultados prévios são feitas quando possível, e novas e interessantes propriedades dessas estruturas são descritas. Para estes modos, no entanto, a obtenção de resultados numéricos fica limitada pela quantidade infinita de bandas, mas isto não compromete a qualidade dos resultados, pois determinamos nossos espectros com alta precisão.

Finalmente, as discussões, conclusões e possíveis extensões do nosso trabalho são descritas no capítulo 5.

1.2 Regimes Magnéticos

Um entendimento do espectro completo das ondas de spin em materiais e filmes magnéticos é a chave para a solução de muitos problemas fundamentais e de aplicações de magnetismo em Física do Estado Sólido. Os trabalhos publicados na literatura sobre as investigações teóricas das características de dispersão da propagação de ondas de magnetização em filmes na região de altas frequências podem ser divididos em dois grupos: aqueles que consideram o espectro das ondas de spin fora do limite de *exchange* (troca) (onde somente as interações de dipolo-dipolo são levadas em conta), e aqueles que consideram o espectro das ondas de spin levando em conta ambas as interações, dipolo-dipolo e troca. As características de dispersão de ondas puramente dipolares, que são geralmente chamadas de *ondas magnetostáticas* (MSW, de "magnetostatic spin waves") foram bem

descritas por Cottam *et al.*² e Adam *et al.*⁸. Nesta tese nos concentraremos em ambos os casos. Nos Capítulos 2 e 3 depreveremos as ondas de spin em materiais ferromagnéticos e antiferromagnéticos, considerando os casos lineares e não lineares, respectivamente. O estudo dessas excitações no caso onde ambos os regimes estão presentes simultaneamente (ondas de spin de dipolo-troca) não é considerado nesta tese. Uma boa referência neste assunto pode ser encontrada no artigo de Kalinikos⁹.

Em geral, existem outras contribuições, além das de troca e de dipolo-dipolo, que podem (e às vezes *devem*) ser incluídas no Hamiltoniano de um material ferromagnético ordenado. Em particular, existem efeitos de *anisotropias*, que podem surgir através das interações entre os momentos magnéticos dos átomos e o campo elétrico da rede cristalina. Uma descrição completa destes campos seria muito complexa, mas existem referências¹⁰ onde os autores dão uma descrição simplificada (através da conexão com a interação spin-órbita). Geralmente, usa-se um enfoque fenomenológico no qual a contribuição para o Hamiltoniano magnético é representada por uma expansão em série de potências das componentes dos operadores de spin em cada sítio da rede cristalina. Neste caso, somente necessitam ser considerados os termos dominantes da expansão que são consistentes com a simetria total da rede cristalina. Por exemplo, em um ferromagneto *uniaxial*, o resultado é da forma

$$\mathcal{H}_a = - \sum_i K (S_i^z)^2 \quad (1.1)$$

onde K é a constante de anisotropia. Quando $K > 0$, a energia de anisotropia mínima é atingida quando a magnetização é *paralela* ao eixo fácil (neste caso o eixo z). Por outro lado, quando $K < 0$, a energia mínima corresponde à magnetização permanecendo no plano xy (anisotropia planar). Combinações distintas dos operadores de spin são requeridas para representar a anisotropia de um cristal em outros tipos de simetria. Vale lembrar que a forma da anisotropia na superfície (ou em interfaces) pode ser diferente da forma no “bulk” (volume), por causa da quebra de simetria induzida.

Alguns materiais apresentam outros tipos de anisotropia. Pode-se ter o caso em que,

quando se aplica um campo magnético, o vetor magnetização \vec{M} é desviado para uma nova direção na qual o torque exercido pelo campo magnético externo equilibra o torque originado na energia anisotrópica. Então, uma componente não-uniaxial (chamada às vezes de “plano-fácil”, do inglês *easy-plane*) anisotrópica aparece. A anisotropia não-uniaxial existe em muitos materiais magnéticos, como o ferromagneto $CrBr_3$ e o antiferromagneto NiO , e também pode ter diferentes valores nas superfícies ou interfaces porque os campos elétricos cristalinos são geralmente diferentes nestas regiões¹¹.

1.3 Ondas de Spin: Algumas Definições

A idéia de ondas de spin como excitações elementares em materiais magnéticos ordenados foi inicialmente proposta por Bloch¹². Ele imaginou os spins como sendo desviados levemente de sua orientação de equilíbrio (ou de estado fundamental), e que essas perturbações se propagavam com um comportamento ondulatório através do cristal. A situação é um tanto análoga à ocorrência de modos vibracionais em um sólido, onde as pequenas amplitudes de oscilação dos átomos ao redor das posições de equilíbrio são os modos normais de vibração do sólido. Analogamente, as ondas de spin são os modos normais associados com os spins interagentes em um cristal. Quando a natureza quântica dos spins é levada em conta, as ondas de spin são quantizadas, e o *quantum* dessa oscilação é chamado de **magnon**, por analogia com o **fonon**, que é o quantum de oscilação das vibrações da rede. Em seu trabalho original, Bloch usou a teoria das ondas de spin para prever que a magnetização do ferromagneto de Heisenberg a baixas temperaturas (comparadas com T_c) deveria ser desviada de seu valor de temperatura zero com uma dependência do tipo $T^{3/2}$ em campo nulo ($H_{aplicado} = 0$). Isto foi confirmado em medidas subsequentes das propriedades termodinâmicas. A evidência experimental para ondas de spin em ferromagnetos, antiferromagnetos e ferrimagnetos é agora muito extensa, vindo principalmente de espalhamento de luz, espalhamento de neutrons, espectroscopia na região de micro-ondas, e ressonância magnética (para uma introdução a essas técnicas, ver a ref. [13]). Pode-se encontrar, além disso, várias referências com evidências experimentais para ondas de spin

de volume¹⁴⁻¹⁷.

Existem diversos formalismos para se tratar o problema das ondas de spin. Por exemplo, a teoria semiclássica¹⁸ trata os spins como vetores precessionantes. Este ponto de vista é particularmente útil para nos ajudar a ter uma interpretação física (ou geométrica) das ondas de spin, e é ilustrado esquematicamente para um ferromagneto na figura 1.1. Representações semiclássicas análogas com spins precessionantes podem ser feitas para outros ordenamentos, incluindo antiferromagnetos e ferrimagnetos. Outros tratamentos usam mecânica quântica, tal como o método de operadores desenvolvido por Holstein e Primakoff¹⁹, baseado em segunda quantização. Em termos quânticos, uma onda de spin pode ser pensada como sendo um quantum de inversão de spin que se espalha coerentemente sobre todo o cristal.

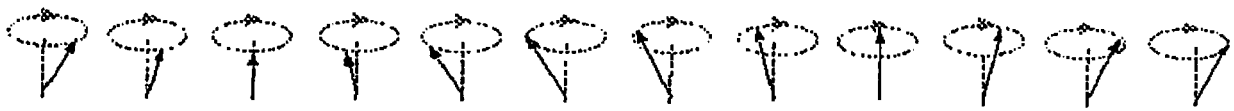
A baixas temperaturas as ondas de spin se comportam, com uma boa aproximação, como excitações elementares não interagentes, podendo ser tratadas através de uma estatística de *bosons* (já que são excitações coletivas, ou seja, pode existir mais de um *quantum* se propagando com a mesma frequência, ou energia). Olhando-se mais de “perto” (ou seja, lançando mão de cálculos mais precisos) pode-se mostrar que as ondas de spin não são modos normais exatos do sistema magnético, e isto leva a interações entre as ondas de spin, e conseqüentemente a efeitos não-lineares.

1.4 Métodos de Cálculo

Descreveremos agora de maneira resumida alguns métodos alternativos para obtermos as soluções das equações de movimento que descrevem o comportamento das ondas de spin na matéria. Tais métodos são bastante gerais, e podem ser aplicados numa vasta gama de regimes e geometrias.

1.4.1 Método da Equação de Movimento para os Operadores

Este método é baseado no resultado padrão de mecânica quântica onde qualquer operador A dentro da representação de Heisenberg²⁰ tem a sua equação de movimento dada por:



(a)



(b)

Figura 1.1: Visão semiclássica de uma onda de spin. (a) spins vistos de perfil. (b) spins vistos de cima.

$$\frac{dA}{dt} = i[H, A] \quad (1.2)$$

Aqui os operadores (as funções de onda) são considerados(as) como dependentes (independentes) do tempo. Os colchetes denotam o comutador e estamos usando unidades onde $\hbar = 1$. A princípio podemos encontrar uma equação diferencial para qualquer um dos operadores de bosons (modos coletivos), rotulados pelas variáveis tempo e espaço. Faz-se então uma transformada de Fourier da representação temporal para a representação de frequências. A equação resultante contém os operadores de bosons para sítios vizinhos que também são descritos por uma equação da forma de (1.2). Podemos também explorar a simetria no plano xy para considerar a transformada de Fourier do espaço real para o espaço recíproco, envolvendo o operador vetor de onda k_{\parallel} . Encontramos então um conjunto de equações acopladas envolvendo os operadores de bosons, rotulados pelo índice da camada n , que são acoplados com aqueles das camadas adjacentes $n + 1$ e $n - 1$. Este método é o que se convencionou chamar de tratamento microscópico. Essas equações podem ser re-escritas na forma de uma equação matricial homogênea. A condição de existência de uma solução então geralmente requer que seu determinante seja igual a zero. Esta condição de existência pode ser usada para achar uma relação entre as energias (ou frequências) das ondas de spin e os vetores de onda (portanto nos fornecendo a desejada relação de dispersão).

1.4.2 Método da Função de Green

Descrevemos brevemente a derivação da equação de movimento da função de Green, primeiramente definindo as funções de Green em termos de funções de correlação, seguindo a notação de Zubarev²¹. Então descreveremos a relação entre funções de correlação de intensidades espectrais contidas no teorema de flutuação-dissipação, e demonstraremos como as funções de Green podem ser usadas para encontrar ambas as quantidades. As propriedades estáticas e dinâmicas do sistema podem ser determinadas uma vez que as funções de correlação sejam conhecidas. O que segue é apenas um breve sumário de

métodos de teoria de funções de Green. Para maiores detalhes sugere-se a leitura de Zubarev²¹, Parry²² ou Rickayzen²³.

O comutador da função de Green *retardada* para operadores arbitrários A e B é definido por

$$\ll A(t); B(t') \gg = -i\theta(t-t') \langle [A(t), B(t')] \rangle \quad (1.3)$$

onde $\theta(t)$ é a *função degrau*

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Aqui, $[A(t), B(t')]$ é o comutador para os operadores na representação de Heisenberg, e $\langle \dots \rangle$ denota uma média térmica (estatística) associada ao Hamiltoniano do sistema. É possível definir outras funções de Green similares, a saber as funções de Green *avançada* e *causal*, contudo elas não serão usadas aqui. A equação de movimento é encontrada pela derivada da função de Green com respeito ao tempo:

$$\frac{d}{dt} \ll A(t); B(t') \gg = -i \frac{d}{dt} \theta(t-t') \langle [A(t), B(t')] \rangle + \ll \frac{d}{dt} A(t); B(t) \gg \quad (1.5)$$

Usando (1.4) podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \theta(t-t') = \delta(t-t') \quad (1.6)$$

Logo, encontramos que

$$\frac{d}{dt} \ll A(t); B(t') \gg = -i\delta(t-t') \langle [A(t), B(t')] \rangle + i \ll C(t); B(t') \gg \quad (1.7)$$

onde $C = [H, A]$, e uma nova função de Green foi então introduzida. A equação de movimento para esta nova função de Green é encontrada da mesma maneira, e assim por

diante. Se o resultado não é um conjunto fechado de equações acopladas, algum esquema de desacoplamento deve ser usado. O conjunto de equações acopladas é resolvido de maneira análoga àquela descrita acima para os operadores, exceto que teremos que resolver um sistema de equações *não-homogêneo*.

A definição da função de Green contém as funções de correlação $\langle A(t)B(t') \rangle$ e $\langle B(t')A(t) \rangle$. As *intensidades espectrais* (ou funções espectrais) $\xi(\omega)$ e $\xi'(\omega)$ correspondentes são definidas como:

$$\langle A(t)B(t') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi'(\omega) \exp[-i\omega(t-t')] d\omega \quad (1.8)$$

$$\langle B(t')A(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega) \exp[-i\omega(t-t')] d\omega \quad (1.9)$$

Pode ser mostrado que²¹

$$\xi'(\omega) = \xi(\omega) \exp(\beta\omega) \quad (1.10)$$

onde $\beta = 1/k_B T$, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura. Este resultado nos permite calcular ambas as funções de correlação a partir de uma única densidade espectral.

As funções de Green possuem transformada de Fourier dadas por

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') \exp(-i\omega t) dt \quad (1.11)$$

onde foi introduzida a notação $G(t-t') = \langle\langle A(t); B(t') \rangle\rangle$. A função de Green e a função espectral estão relacionadas pelo teorema da *flutuação-dissipação*²¹

$$\xi(\omega) = \frac{-2}{\exp(\beta\omega) - 1} \Im G(\omega + i\epsilon) \quad (1.12)$$

onde $\Im G$ é a parte imaginária da função G , e ϵ é um número real, positivo e infinitesimal. As funções de Green que encontramos têm pólos relacionados com as frequências das ondas de spin. Nos casos mais simples (tais como ferromagnetos isotrópicos ou uniaxiais) os denominadores da função de Green podem ser escritos na forma explícita $(\omega - \omega^0)$, onde ω^0 é uma frequência da onda de spin. Neste caso podemos fazer uma continuação analítica $\omega \rightarrow \omega + i\epsilon$ e fazer uso de (1.12) para encontrarmos as funções espectrais e consequentemente as funções de correlação via (1.9)-(1.10). As partes imaginárias de $G(\omega + i\epsilon)$ são extraídas usando a identidade²²:

$$\left(\frac{1}{x + i\epsilon}\right) = P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta(x) \quad (1.13)$$

onde P significa o valor principal de Cauchy em uma integração sobre qualquer variável real x .

Ao se estudar as ondas de spin os operadores A e B são geralmente operadores de spin (S^\pm e S^z) ou os operadores de bosons correspondentes a eles pela transformação de Holstein-Primakoff¹⁹. Quantidades termodinâmicas tais como a magnetização, susceptibilidade magnética e calor específico podem todas ser calculadas das funções de correlação envolvendo aqueles operadores .

1.5 Métodos Experimentais para o Estudo das Ondas de Spin

Nesta seção nós revisaremos brevemente alguns métodos experimentais gerais. Entre os métodos correntemente disponíveis para estudar as ondas de spin em filmes finos estão o espalhamento inelástico de luz e ressonância de ondas de spin.

O espalhamento inelástico de luz por ondas de spin foi descrito por Cottam *et al.*²⁴ e Grünberg²⁵. Os autores tratam tipos distintos de sistemas magnéticos, incluindo-se os filmes finos. Vários artigos de revisão detalhados (ex. Demokritov e Tsymbal²⁶ e Dutcher²⁷) abordam os resultados recentes sobre espalhamento de luz. As principais

técnicas de espalhamento de luz são: espalhamento Raman e espalhamento Brillouin. Ambas se diferenciam pela maneira de detectar a luz espalhada, isto é, um espectrômetro de grade ("grating spectrometer") para o espalhamento Raman e um interferômetro de Fabry-Perot para espalhamento de Brillouin, mas a base de funcionamento é a mesma em ambas as técnicas. Resumidamente, a luz incidente pode ser espalhada com uma mudança na energia devida à criação ou aniquilação de uma onda de spin. O vetor de onda da onda de spin é estreitamente relacionado com o vetor de onda associado com a luz, tal que $|\mathbf{k}| \approx 10^5 \text{ cm}^{-1}$. Experiências de espalhamento de luz podem portanto estudar as ondas de spin próximo do centro da zona de Brillouin. Dependendo da fonte de luz e da geometria de espalhamento, geralmente é possível detectar modos de dipolo, modos de dipolo-troca ou somente modos de troca. O mecanismo é descrito resumidamente como se segue. Flutuações magnéticas termicamente excitadas (ondas de spin) na amostra de espalhamento dão origem a modulações na susceptibilidade elétrica através das quais o vetor campo elétrico do foton incidente interage com a amostra e é espalhado. Cottam e Lockwood²⁴ mostraram como a seção de choque de espalhamento é construída de funções de correlação envolvendo elementos do tensor susceptibilidade. Estes elementos podem por sua vez ser representados por expansões em séries de potências dos operadores de spin com coeficientes conhecidos como constantes de acoplamento magneto-ópticas. Leis de conservação de energia e de momento permitem a dedução da energia e do vetor de onda da onda de spin envolvida no espalhamento. Em adição às relações de dispersão, os espectros da luz espalhada são fontes de informação sobre tempos de vida das ondas de spin, o tipo de acoplamento magneto-óptico, anisotropias de superfície, etc. Este tipo de informação pode ter alguma relevância para o desenvolvimento de meios de gravação magneto-ópticos²⁸.

Em experiências de ressonância de ondas de spin (SWR, de "Spin Wave Resonance"), uma onda de spin é excitada pela absorção ressonante de energia de um campo de rádio-frequência (RF) transversal. As ondas de spin podem tanto ser modos de superfície com $k_{\parallel} = 0$ ou modos de volume estacionários. Este último caso é portanto também denominado de ressonância de ondas de spin estacionárias. No caso de filmes simétricos, somente

aqueles modos estacionários que são simétricos com respeito ao centro do filme são excitados pela campo RF espacialmente uniforme. Na prática, somente modos de superfície acústicos (i.e. de baixas frequências) são excitados. As medidas de SWR são geralmente efetuadas com um campo estático aplicado perpendicularmente ao campo oscilante. A frequência do campo oscilante ω_0 é mantida fixa, enquanto o campo estático é variado e a absorção ressonante ocorre quando ω_0 coincide com a frequência de um modo das ondas de spin. Desta maneira, a relação de dispersão é determinada. A intensidade da absorção ressonante pode ser calculada de um conjunto apropriado de funções de correlação de spin²⁹. A SWR foi prevista primeiramente por Kittel³⁰, e revisada por Puzskarski³¹.

A interação dos spins de neutrons com spins atômicos fornece meios poderosos de estudar estruturas magnéticas através de espalhamento elástico, e dispersão de ondas de spin, principalmente modos de volume, através de espalhamento inelástico. Para o estudo das ondas de spin de *superfície*, o espalhamento de nêutrons não tem sido tão útil, desde que na maioria dos materiais os neutrons penetram profundamente, e portanto este tipo de espalhamento não é sensível à superfície. Em contraste, no espalhamento de luz pode-se ter o material alvo opaco (metálico, por exemplo) e portanto a luz incidente interage preferencialmente com excitações na vizinhança da superfície, ou pode ser possível escolher um comprimento de onda da luz incidente para o qual o material é ópticamente absorvente. O desenvolvimento de técnicas de espalhamento de neutrons com sensibilidade à superfície realçada inclui incidência quase paralela e o uso de multicamadas como alvos tal que o espalhamento de volume contenha um certo número de superfícies (ou interfaces)³². Avanços têm sido feitos na área importante de medidas de estruturas magnéticas (i.e. magnetismo de superfície) onde progressos no estudo de dinâmica de superfícies, tais como espalhamento de ondas de spin, parecem ser mais elusivos. O alcance dos comprimentos de onda de de Broglie de nêutrons térmicos geralmente permite o estudo de dispersão de ondas de spin de volume através da zona de Brillouin. Portanto, é possível que a adaptação para as ondas de spin poderiam estender o conhecimento ganho usando as técnicas mencionadas acima (SWR e espalhamento Brillouin), que são restritas à vizinhança do centro da zona. A literatura bastante extensa sobre espalhamento de

neutrons inclui os trabalhos de Marshall e Lovesey¹⁵, e Lovesey³³.

Outras técnicas experimentais relevantes incluem aquelas pelas quais anisotropias, particularmente de superfície, são exploradas. Estas técnicas incluem magnetometria de torção (veja, por exemplo, Gradmann³⁴), espectroscopia Mössbauer³⁴, efeito Kerr magneto-óptico de superfície (SMOKE)³⁵ e ressonância ferromagnética (FMR), que é similar à técnica SWR, mas o modo uniforme ($k = 0$) é excitado³⁶. Esses autores fazem referência aos resultados para filmes de *Fe*. O artigo de revisão de Falicov *et al.*²⁸ discute uma variedade de técnicas para a caracterização e fabricação de filmes finos magnéticos.

Capítulo 2

Ondas de Spin Lineares em Cristais Metamagnéticos

2.1 Introdução

Enquanto que o fenômeno do ferromagnetismo é conhecido desde a antiguidade, o antiferromagnetismo somente foi descoberto neste século. Na verdade, é pouco conhecido o fato de que o conceito de antiferromagnetismo foi proposto *independentemente* por Néel³⁷ em 1932 e Landau³⁸ em 1933. Ambos buscavam explicar o – naquela época estranho – comportamento da susceptibilidade magnética a baixas temperaturas de certos materiais: metais como *Cr* e *Mn*, no caso de Néel, e de isolantes com estruturas de camadas como os cloretos de *Cr*, e os bivalentes *Fe*, *Co* e *Ni*, no caso de Landau. Néel sugeriu corretamente a existência de sub-redes interpenetrantes no *Cr* e *Mn* com magnetizações opostas; Landau por sua vez previu corretamente a existência de empilhamentos de camadas ferromagneticamente ordenadas cuja magnetização alterna de camada para camada. Em ambos os casos, a magnetização espontânea total é nula. Fazendo a hipótese de que o acoplamento intercamadas era suficientemente fraco, Landau argumentou que um campo magnético externo relativamente pequeno seria suficiente para modificar a orientação mútua dos momentos em cada camada. Isto leva a desvios da dependência

linear do momento magnético total com o campo, isto é, a um aumento anômalo da susceptibilidade, e finalmente – em campos altos – a uma saturação da magnetização. Tal comportamento foi de fato observado por Becquerel e van der Handel em 1939³⁹ no mineral *mesitita* (carbonato de *Fe* e *Mg*) a baixas temperaturas. Não tendo conhecimento dos trabalhos de Landau ou Néel, eles não podiam explicar sua observação em termos de ferro- e paramagnetismo, e portanto sugeriram para isto o nome de **metamagnetismo**⁴⁰.

Qualitativamente similares, mas ainda mais drásticos, foram os efeitos de magnetização observados em muitos outros sistemas dos quais FeCl_2 e $\text{Dy}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ (DAG) são protótipos bastante estudados⁴¹. Estes materiais são isolantes onde os elétrons de valência estão localizados nos íons de *Fe* e *Dy*, respectivamente. Os momentos locais resultantes se ordenam antiferromagneticamente e são obrigados a permanecer ao longo de um *eixo fácil* \vec{e} , implicando numa forte anisotropia tal que a transição de spin-flop não pode ocorrer, ou seja, o sistema sofre uma transição do estado antiferromagnético para o paramagnético. Além dos materiais citados acima, existem também compostos de Urânio^{41,42}, SmMn_2Ge_2 ⁴³, e $\text{TbRh}_{2-x}\text{Ir}_x\text{Si}_2$ ⁴⁴.

Hoje, o termo “transição metamagnética” é usado em um sentido muito mais amplo^{45,46}, a saber, sempre que a susceptibilidade homogênea $\xi(H)$ tem um máximo para algum valor H_c , com $M(H)$ sendo bastante aumentada para $H > H_c$ ⁴⁶. Metamagnetismo então é um fenômeno não raro, que ocorre também em paramagnetos (ex. TiBe_2 , YCo_2 ^{47,48} e outros (CeRuSi_2 , Upt_3 ⁴⁶). Os modos de volume foram objeto de estudo por vários anos^{49,50,24,51}. Tipicamente, um metamagneto consiste de camadas ferromagneticamente ordenadas, com a interação de troca ferromagnética intra-camadas sendo muito mais forte que a fraca interação antiferromagnética entre camadas adjacentes. Na figura 2.1 esboçamos tal estrutura, onde J e J_1 são as constantes de troca ferromagnética e antiferromagnética, respectivamente, com $J \gg |J_1|$. Para pequenos valores do campo magnético H (aplicado perpendicularmente às camadas), as camadas adjacentes se ordenam antiparalelas umas às outras, fornecendo a fase antiferromagnética (AFM), enquanto que para grandes valores de H (suficientes para sobrepor o acoplamento antiferromagnético intercamadas) o ordenamento geral é ferromagnético (FM). O termo *metamagneto* é muito

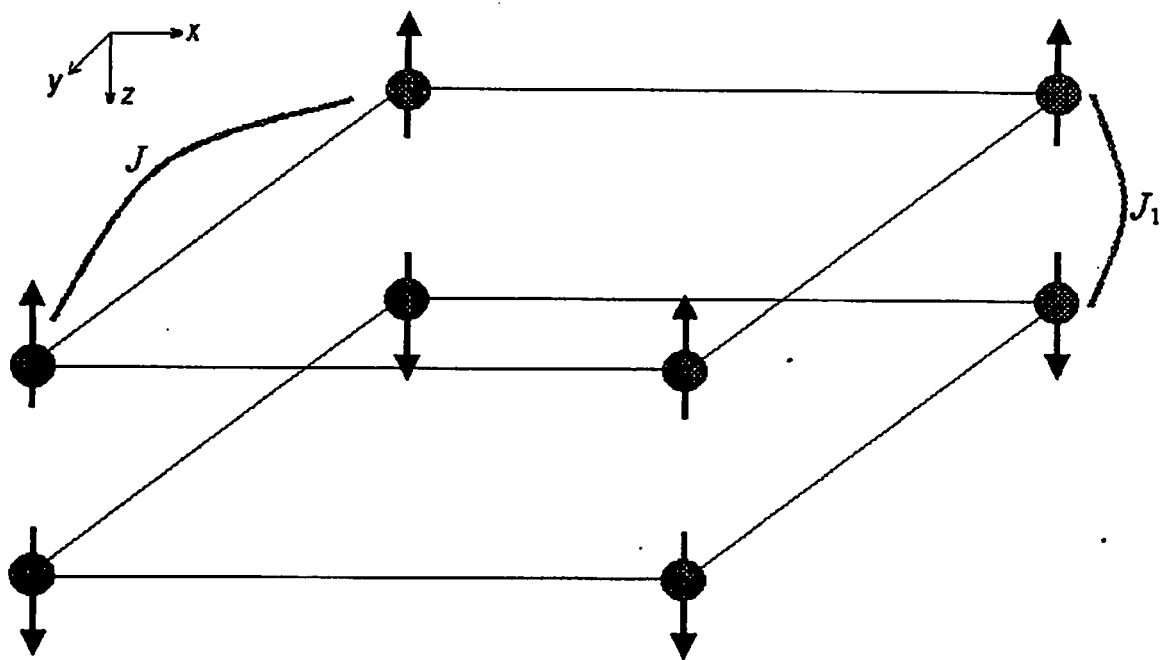


Figura 2.1: Material metamagnético. Aqui, J_1 é a interação antiferromagnética entre planos adjacentes, e $J \gg |J_1|$ é a interação ferromagnética entre os spins em sítios no mesmo plano. A denominação J, J_1 é apenas ilustrativa e nós usaremos outros nomes no texto para estas variáveis, devido à existência de interações de segundos vizinhos.

usado para aqueles materiais, tais como FeCl_2 e FeBr_2 nos quais a anisotropia magnética é suficientemente larga comparada com o fraco acoplamento antiferromagnético tal que não existe nenhuma fase *spin-flop* intermediária entre as fases FM e AFM⁵⁰. As ondas de spin em amostras de FeCl_2 e FeBr_2 foram estudadas experimentalmente por técnicas de espalhamento de nêutrons^{52,53} e espalhamento de luz^{24,54,55}, principalmente na fase AFM. Nosso formalismo se aplica a qualquer metamagneto, mas nós iremos nos concentrar nos materiais FeCl_2 e FeBr_2 . Ambos diferem em sua estrutura cristalina, e isto leva a diferenças significativas no espectro dos modos de superfície. Nas próximas seções descrevemos o nosso Hamiltoniano magnético e derivamos um conjunto de equações de diferenças finitas satisfeitas pelas amplitudes das ondas de spin. Técnicas matriciais são então aplicadas para resolver tais equações e obter as relações de dispersão das ondas de spin (modos de volume e superfície).

2.2 Ondas de Spin em Metamagnetos Uniaxiais

2.2.1 Modelo Uniaxial

Nosso Hamiltoniano *uniaxial* tem a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{i,j} J_{ij} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \sigma S_i^z S_j^z) - \frac{1}{2} \sum_{i,i'} J'_{ii'} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i'} + \sigma' S_i^z S_{i'}^z) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j,j'} J'_{jj'} (\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j'} + \sigma' S_j^z S_{j'}^z) - g\mu_B H \left(\sum_i S_i^z + \sum_j S_j^z \right) \\ & - D \left(\sum_i (S_i^z)^2 + \sum_j (S_j^z)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Aqui i e i' denotam sítios em uma sub-rede (isto é, um tipo de camada) e j e j' denotam sítios na outra sub-rede (o conjunto de camadas adjacentes) tal que J_{ij} é a interação de troca antiferromagnética intercamadas, enquanto que $J'_{ii'}$ e $J'_{jj'}$ são as interações de troca ferromagnéticas intracamadas. O efeito da anisotropia de troca (anisotropia de Ising) pode ser incluído se os parâmetros σ e σ' são não-nulos. O campo magnético aplicado na

direção z (perpendicular às camadas) é denotado por H , e o parâmetro $D > 0$ caracteriza a anisotropia uniaxial. Nós tomamos os sítios i como sendo a sub-rede com spin para cima (*spin-up*, com média térmica $\langle S_i^z \rangle$ positiva). Então, $\langle S_j^z \rangle$ para a outra sub-rede (*spin-down*) é negativa na fase AFM, se tornando positiva na fase FM para valores suficientemente altos do campo H .

Para examinar as excitações das ondas de spin, consideramos um metamagneto semi-infinito que possui uma superfície (001) e ocupa a região $z \geq 0$. Rotulamos as camadas ferromagneticamente alinhadas paralelas à superfície por um índice $n (= 1, 2, 3, \dots)$, onde $n = 1$ é a camada de superfície, $n = 2$ a próxima camada e assim por diante. Associamos valores pares e ímpares de n com as sub-redes *spin-up* e *spin-down*, respectivamente. Como em trabalhos prévios em ferromagnetos semi-infinitos¹¹, as ondas de spin de volume e superfície podem ser encontradas resolvendo-se a equação de movimento para um operador de spin S^+ em qualquer sítio l dentro do meio semi-infinito, i.e:

$$i \frac{dS_l^+}{dt} = [S_l^+, \mathcal{H}] \quad (2.2)$$

onde o comutador pode ser calculado na aproximação de fase aleatória (RPA)¹¹. Tal aproximação consiste em considerar o spin S_i^z como sendo saturado na direção z e substituído por sua média térmica $\langle S_i^z \rangle = S$. Como nosso modelo possui invariância translacional em um plano paralelo a superfície, podemos nos beneficiar dessa simetria, e considerar também uma dependência temporal do tipo $\exp(-i\omega t)$ para as excitações, ou seja:

$$S_l^+ = s_n(\mathbf{k}_{||}) \exp[i(\mathbf{k}_{||} \cdot \rho - \omega t)] \quad (2.3)$$

onde $\rho = (x, y)$, $\mathbf{k}_{||} = (k_x, k_y)$ é um vetor de onda bi-dimensional, e a coordenada z do ponto r_l da rede corresponde ao índice da camada n . Isto nos leva a um conjunto de equações lineares acopladas nas amplitudes s_n (com $n = 1, 2, 3, \dots$). Os detalhes de todos os cálculos são dados na próxima seção, onde trataremos de um sistema mais complexo. Podemos expressar os resultados em uma forma matricial. É conveniente neste estágio

introduzir transformadas de Fourier bi-dimensionais das interações de troca intra-camadas de volume:

$$u(\mathbf{k}_{\parallel}) = \sum_i J'_{ii'} \exp[i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i'})] = \sum_j J'_{jj'} \exp[i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'})] \quad (2.4)$$

enquanto que para a interação de troca inter-camadas, definimos:

$$v(\mathbf{k}_{\parallel}) = \sum_{\delta} J_{ij} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \delta) \quad (2.5)$$

onde δ é um vetor unindo os sítios i na camada n aos sítios j na camada $(n+1)$. A forma explícita de $u(\mathbf{k}_{\parallel})$ e $v(\mathbf{k}_{\parallel})$ depende da estrutura cristalina em cada camada e do empilhamento das camadas. Expressões específicas para FeBr_2 e FeCl_2 serão dadas na próxima seção. Para simplificação dos cálculos fazemos a hipótese de que as interações individuais próximas da superfície possuem os mesmos valores que no volume. Apresentamos agora os resultados separadamente para as fases FM e AFM, supondo a temperatura $T \ll T_c$.

2.2.2 Fase Antiferromagnética

No limite de baixas temperaturas, esta é a fase estável quando $H < H_c$, onde o campo crítico no volume é dado aproximadamente por:

$$g\mu_B H_c = 2(1 + \sigma)Sv(0) \quad (2.6)$$

Aqui S é o número quântico de spin, e $\langle S_i^z \rangle = -\langle S_j^z \rangle \simeq S$ para $T \ll T_c$. As equações acopladas para as amplitudes das ondas de spin s_n são:

$$\begin{aligned} [E - g\mu_B H_A - (1 + \sigma')Su(0) + Su(k_{\parallel}) - (1 + \sigma)Sv(0)]s_1 \\ - Sv(k_{\parallel})s_2 = 0, \quad (n = 1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$[E - g\mu_B H_A - (1 + \sigma')Su(0) + Su(k_{\parallel}) - 2(1 + \sigma)Sv(0)]s_{2m+1} - Sv(k_{\parallel})s_{2m+2} - Sv(-k_{\parallel})s_{2m} = 0, \quad (n = 2m + 1, m \geq 1) \quad (2.8)$$

$$[E + g\mu_B H_A + (1 + \sigma')Su(0) - Su(k_{\parallel}) + 2(1 + \sigma)Sv(0)]s_{2m} + Sv(k_{\parallel})s_{2m+1} + Sv(-k_{\parallel})s_{2m-1} = 0, \quad (n = 2m, m \geq 1) \quad (2.9)$$

Aqui nós definimos $E = \omega - g\mu_B H$ e $g\mu_B H_A = (2S - 1)D$ é um campo de anisotropia efetivo. As equações (2.7) e (2.8) podem ser usadas para eliminar os termos em s_n com n ímpar do conjunto de equações representado por (2.9). As equações resultantes conectando os s_n com n par podem ser escritas na forma matricial como

$$(A_0 + \Delta)F = 0 \quad (2.10)$$

onde F é uma matriz coluna de dimensão infinita cujos elementos são especificados por $F_m = s_{2m}$, e A_0 é uma matriz tridiagonal

$$A = \begin{bmatrix} d & -\tau^{-1} & 0 & 0 & \dots \\ -\tau & d & -\tau^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & -\tau & d & -\tau^{-1} & \dots \\ 0 & 0 & -\tau & d & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

com

$$d = \frac{[g\mu_B H_A + (1 + \sigma')Su(0) - Su(k_{\parallel}) + 2(1 + \sigma)Sv(0)]^2 - E^2}{S^2 v(k_{\parallel})v(-k_{\parallel})} - 2 \quad (2.12)$$

$$\tau = \frac{v(-k_{\parallel})}{v(k_{\parallel})} \quad (2.13)$$

A matriz Δ em (2.10) descreve o efeito da perturbação da superfície, e no presente caso é dada simplesmente por

$$\Delta_{m,m'} = \Delta_0 \delta_{m,1} \delta_{m',1} \quad (2.14)$$

com

$$\Delta_0 = \frac{(1 + \sigma)Sv(0)}{E - g\mu_B H_A - (1 + \sigma')Su(0) + Su(k_{\parallel}) - (1 + \sigma)Sv(0)} \quad (2.15)$$

Considere $(A_0 + \Delta) = A_0(I + B\Delta)$, onde I é a matriz identidade e $B = A_0^{-1}$. Seguindo o formalismo matricial usado nas referências [56] e [57] para outros problemas de superfície, as soluções das ondas de spin correspondem a

$$\det(I + B\Delta) = 0 \quad (2.16)$$

que pode ser facilmente calculado, usando o resultado que a inversa de A_0 é conhecida exatamente (generalizando as referências [56] e [57]). Suas soluções são:

$$B_{m,m'} = \begin{cases} \tau(\tau^{2m}x^{m+m'} - x^{m'-m})/(\tau^2x - x^{-1}), & m \leq m'; \\ \tau^{2m+1}(x^{m+m'} - \tau^{-2m}x^{m-m'})/(\tau^2x - x^{-1}), & m > m' \end{cases} \quad (2.17)$$

onde x é um número complexo satisfazendo $|x| \leq 1$, e a seguinte relação^{56,57} é válida

$$\tau x + (\tau x)^{-1} = d \quad (2.18)$$

Substituindo (2.15) e (2.17) em (2.16) e simplificando, nós obtemos a condição para a existência de uma onda de spin na superfície como sendo simplesmente

$$x = -1/(\tau\Delta_0) \quad (2.19)$$

Quando este termo é substituído em (2.18) obtemos uma expressão que pode ser resolvida para a energia E correspondendo às ondas de spin de superfície. O parâmetro x é relacionado com a atenuação de uma onda de spin de superfície através da propriedade $|x| = \exp(-2\lambda c_0)$, onde $2c_0$ representa a distância entre camadas adjacentes de camadas pares (ou seja, c_0 é a separação entre camadas) e $\lambda > 0$ é um fator de atenuação⁵⁷. Desta forma, nós temos $|x| < 1$ como uma condição necessária para a existência de uma onda de spin de superfície.

Em contrapartida, as ondas de spin de volume correspondem a $|x| = 1$ ⁵⁷. Isto implica que agora, $x = \exp(2ik_z c_0)$ em (2.18), onde k_z é a terceira componente do vetor de onda tridimensional $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_{\parallel}, k_z)$. Resolvendo a equação, temos que

$$E^2 = [g\mu_B H_A + (1 + \sigma')Su(0) - Su(\mathbf{k}_{\parallel}) + 2(1 + \sigma)Sv(0)]^2 - S^2 v(\mathbf{k}_{\parallel})v(-\mathbf{k}_{\parallel})[2 + \tau \exp(2ik_z c_0) + \tau^{-1} \exp(-2ik_z c_0)] \quad (2.20)$$

2.2.3 Fase Ferromagnética

Esta é a fase para $H > H_c$. A análise do comportamento das ondas de spin é mais direta neste caso, pois a direção do alinhamento do spin resultante é o mesmo em ambas as sub-redes, e não há nenhuma necessidade de tratar diferentemente as camadas com n par ou n ímpar diferentemente. As equações acopladas para as amplitudes das ondas de spin s_n em $T \ll T_c$ (onde agora $\langle S_i^z \rangle = \langle S_j^z \rangle \simeq S$) são então:

$$[E - g\mu_B H_A - (1 + \sigma')Su(0) + Su(k_{\parallel}) + (1 + \sigma)Sv(0)]s_1 - Sv(k_{\parallel})s_2 = 0, \quad (n = 1) \quad (2.21)$$

$$[E - g\mu_B H_A - (1 + \sigma')Su(0) + Su(k_{\parallel}) + 2(1 + \sigma)Sv(0)]s_n - Sv(k_{\parallel})s_{n+1} - Sv(-k_{\parallel})s_{n-1} = 0, \quad (n \geq 2) \quad (2.22)$$

onde nós empregamos a mesma notação que na sub-seção anterior. Estas equações também podem ser escritas na mesma forma matricial que as equações (2.10)-(2.15). Porém, o elemento geral da matriz F é dado agora por $F_n = s_n$, e assim:

$$d = \frac{-[g\mu_B H_A + (1 + \sigma')Su(0) - Su(\mathbf{k}_{\parallel}) - 2(1 + \sigma)Sv(0) - E]}{S|v(\mathbf{k}_{\parallel})|}, \quad (2.23)$$

$$\tau = \frac{v(-\mathbf{k}_{\parallel})}{v(\mathbf{k}_{\parallel})}, \quad (2.24)$$

$$\Delta_0 = \frac{-(1 + \sigma)v(0)}{|v(\mathbf{k}_{\parallel})|}. \quad (2.25)$$

O mesmo formalismo usado para a fase AFM pode ser agora empregado. Em particular, o valor de x correspondendo a uma onda de spin de superfície é ainda dado por (2.19), contanto que a condição de existência (localização) $|x| < 1$ seja satisfeita. A relação de dispersão das ondas de spin de superfície é obtida então de (2.18), (2.19), e (2.23)-(2.25).

A relação de dispersão das ondas de spin de volume é obtida substituindo-se $x = \exp(ik_z c_0)$ em (2.18) e usando (2.23) e (2.24), ou seja:

$$E = [g\mu_B H_A + (1 + \sigma')Su(0) - Su(\mathbf{k}_{\parallel}) - 2(1 + \sigma)Sv(0)]^2 + S|v(\mathbf{k}_{\parallel})|[\tau \exp(ik_z c_0) + \tau^{-1} \exp(-ik_z c_0)] \quad (2.26)$$

2.2.4 Aplicações Para FeCl_2

Vamos agora discutir os resultados das seções anteriores em maior detalhe para o caso específico do FeCl_2 ⁵⁸. Este material possui a estrutura trigonal para os íons Fe^{2+} dentro de cada camada ordenada ferromagneticamente (veja figura 2.2).

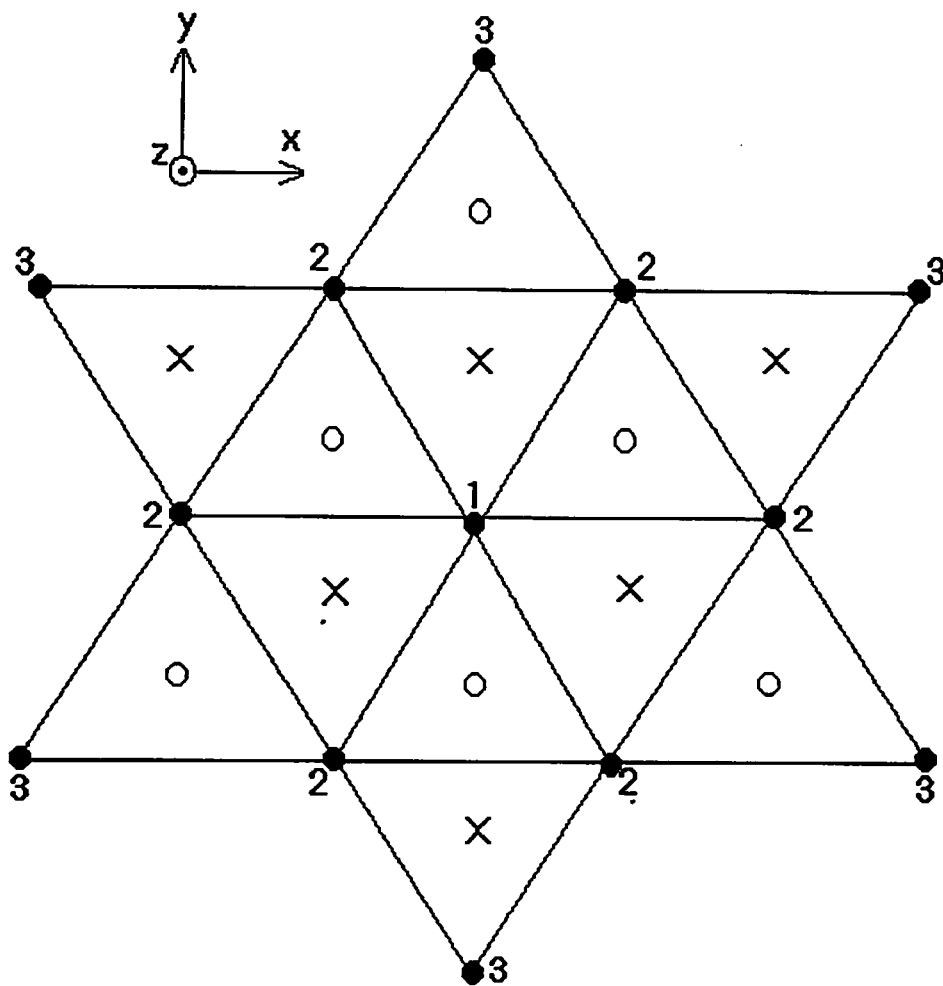


Figura 2.2: Visão planar da estrutura triangular dos íons Fe^{2+} (círculos sólidos) das camadas ferromagnéticas de $FeBr_2$ e $FeCl_2$. Os primeiros e segundos vizinhos no mesmo plano do íon rotulado por 1 são aqueles rotulados por 2 e 3, respectivamente. Para o $FeBr_2$ os íons das camadas adjacentes estão verticalmente acima e abaixo dos círculos sólidos. No $FeCl_2$ as camadas estão deslocadas uma com respeito à outra, e as cruzes e círculos abertos representam as posições dos íons nas camadas adjacentes acima e abaixo do plano de referência.

Denotamos por J_1 e J_2 a interação de troca dominante entre primeiros vizinhos, e a interação de troca entre segundos vizinhos, respectivamente. Portanto, a transformada de Fourier da interação de troca intra-camadas $u(\mathbf{k}_{||})$, definida em (2.4), é dada por:

$$u(\mathbf{k}_{||}) = 2J_1[\cos(k_x a) + 2\cos(k_x a/2)\cos(k_y a\sqrt{3}/2)] + 2J_2[\cos(k_y a\sqrt{3}/2) + 2\cos(k_y a\sqrt{3}/2)\cos(k_x a\sqrt{3}/2)] \quad (2.27)$$

onde a é a distância entre vizinhos mais próximos e a escolha dos eixos coordenados é dada na figura 2.2. Para o FeCl_2 , existem 3 vizinhos mais próximos em cada uma das camadas adjacentes. Então o valor de $v(\mathbf{k}_{||})$ é dado por:

$$v(\mathbf{k}_{||}) = J_3[\exp(ik_y a/\sqrt{3}) + 2\cos(k_x a/2)\exp(-ik_y a/2\sqrt{3})] \quad (2.28)$$

A distância c_0 entre as camadas é igual a c e a $c/3$ para FeBr_2 e FeCl_2 respectivamente, onde c denota a distância ao longo do eixo c da célula unitária.

Para a fase AFM, após resolvermos explicitamente para ω por substituição direta a partir de (2.12), (2.15), (2.18) e (2.19), obtemos as seguintes expressões para os modos de volume (ω_B) e superfície (ω_S):

$$\omega_B^\pm(\mathbf{k}) = g\mu_B H \pm \left\{ [E_0(\mathbf{k}_{||}) + 6(1 + \sigma)SJ_3]^2 - [2SJ_3\alpha_B(\mathbf{k})]^2 \right\}^{1/2} \quad (2.29)$$

$$\omega_S^\pm(\mathbf{k}_{||}) = g\mu_B H - A' \pm \left\{ [E_0(\mathbf{k}_{||}) + 3(1 + \sigma)SJ_3 + A']^2 - [SJ_3\alpha_S(\mathbf{k}_{||})]^2 \right\}^{1/2} \quad (2.30)$$

onde

$$E_0(\mathbf{k}_{||}) = g\mu_B H_A + (1 + \sigma')Su(0) - Su(\mathbf{k}_{||}) \quad (2.31)$$

e A' é dado por

$$A' = \left[\frac{3}{2}(1 + \sigma) - \frac{1}{6(1 + \sigma)} \alpha_S^2(\mathbf{k}_{\parallel}) \right] S J_3 \quad (2.32)$$

Aqui,

$$\begin{aligned} \alpha_B(\mathbf{k}) &= \text{Re}[\exp(-ik_z c/3)v(\mathbf{k}_{\parallel})]/J_3 \\ \alpha_S(\mathbf{k}_{\parallel}) &= |v(\mathbf{k}_{\parallel})|/J_3 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Neste caso a condição de existência para os modos de superfície $\omega_S^{\pm}(\mathbf{k}_{\parallel})$ representarem soluções físicas é

$$3(1 + \sigma)S J_3 > |E_0(\mathbf{k}_{\parallel}) + 3(1 + \sigma)S J_3 - \omega_S^{\pm}(\mathbf{k}_{\parallel}) + g\mu_B H| \quad (2.34)$$

Para a fase FM, os resultados para as frequências das ondas dos modos de volume e superfície são

$$\omega_B(\mathbf{k}) = g\mu_B H + E_0(\mathbf{k}_{\parallel}) - 6(1 + \sigma)S J_3 + 2S J_3 \alpha_B(\mathbf{k}) \quad (2.35)$$

$$\omega_S(\mathbf{k}_{\parallel}) = g\mu_B H + E_0(\mathbf{k}_{\parallel}) - 3(1 + \sigma)S J_3 + \frac{1}{3}(1 + \sigma)^{-1} S J_3 \alpha_S^2(\mathbf{k}_{\parallel}) \quad (2.36)$$

Neste caso o ramo da onda de spin de superfície existe contanto que $\sigma > \frac{-2}{3}$, o que é satisfeito para o material FeCl_2 . Resultados numéricos são apresentados e discutidos na seção 2.4.

2.3 Ondas de Spin em Metamagnetos Não-Uniaxiais

Nesta seção estenderemos os resultados da seção anterior, onde consideramos o nosso Hamiltoniano (2.1) como possuindo um termo anisotrópico, mas este favorecia somente o

alinhamento dos spins em uma direção. Agora, nós consideramos um termo não-uniaxial, que favorece um alinhamento planar dos spins. Isto também poderia favorecer o aparecimento de uma fase spin-flop, e é nosso intuito estudar o efeito do campo anisotrópico não-uniaxial nos materiais FeBr₂ e FeCl₂. Também por simplicidade consideraremos $J_0 = J$, ou seja, que a interação de troca entre os sítios na superfície é igual à do volume. Tal simplificação não compromete nossos cálculos, desde que se resume a não considerar efeitos de reconstrução de superfície, que são secundários, e são tratados para o caso ferromagnético no regime de troca na referência [68].

2.3.1 Modelo Anisotrópico

Nosso Hamiltoniano é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{i,j} J_{ij}(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \sigma S_i^z S_j^z) - \frac{1}{2} \sum_{i,i'} J'_{ii'}(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i'} + \sigma' S_i^z S_{i'}^z) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j,j'} J'_{jj'}(\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j'} + \sigma' S_j^z S_{j'}^z) + H_Z + H_A \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde o termo da energia Zeeman é:

$$H_Z = -g\mu_B H \left[\sum_i S_i^z + \sum_j S_j^z \right] \quad (2.38)$$

e o Hamiltoniano anisotrópico é expresso por:

$$\begin{aligned} H_A = & -D \left[\sum_i (S_i^z)^2 + \sum_j (S_j^z)^2 \right] - F \left[\sum_i (S_i^x)^2 - (S_i^y)^2 \right] \\ & - F' \left[\sum_j (S_j^x)^2 - (S_j^y)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Novamente aqui os índices i e j referem-se a sítios com *spin-up* e *spin-down*, respectivamente. Os demais índices são definidos como anteriormente. Em nosso modelo, levamos

em conta que o campo anisotrópico não-uniaxial local sobre o spin pode ter valores diferentes para as camadas adjacentes, e isto é expresso pela existência das duas constantes F e F' , embora possamos considerar $F = F'$. Como em trabalhos anteriores¹¹, a existência de uma anisotropia não-uniaxial dá origem a um acoplamento entre os operadores de spin S^+ e S^- . Portanto, faz-se necessário encontrar a equação de movimento para *ambos* os operadores. Supomos soluções do tipo onda plana:

$$S_l^+ = s_n(k_{||}) \exp[i(\mathbf{k}_{||} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)] \quad (2.40)$$

e

$$S_l^- = r_n(k_{||}) \exp[i(\mathbf{k}_{||} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)] \quad (2.41)$$

onde n é o índice da camada. Usamos agora a equação de movimento de Heisenberg (2.2), com $\hbar = 1$. Teremos então os seguintes pares de equações acopladas para as amplitudes das ondas de spin, onde a primeira equação refere-se ao operador S^+ , e a segunda ao operador S^- , respectivamente. Para a primeira camada ($n = 1$), temos:

$$\begin{aligned} [E - E_0(\mathbf{k}_{||}) - (1 + \sigma)Sv(0)]s_1 - Sv(\mathbf{k}_{||})s_2 + 2FS\eta^{1/2}r_1 &= 0 \\ [E - E_0(\mathbf{k}_{||}) - (1 + \sigma)Sv(0) - 2\omega]r_1 - Sv(\mathbf{k}_{||})r_2 + 2FS\eta^{1/2}s_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde $E_0(\mathbf{k}_{||})$ é dado pela eq. (2.31). Para as camadas ímpares ($l = i, n = 2m + 1$), nós temos:

$$\begin{aligned} [E - E_0(\mathbf{k}_{||}) - 2(1 + \sigma)Sv(0)]s_{2m+1} - Sv(\mathbf{k}_{||})s_{2m+2} - Sv(-\mathbf{k}_{||})s_{2m} + \\ 2FS\eta^{1/2}r_{2m+1} &= 0 \\ [E - E_0(\mathbf{k}_{||}) - 2(1 + \sigma)Sv(0) - 2\omega]r_{2m+1} - Sv(-\mathbf{k}_{||})r_{2m} - Sv(\mathbf{k}_{||})r_{2m+2} + \\ 2FS\eta^{1/2}s_{2m+1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Para as camadas pares, ($l = j, n = 2m$), as equações de movimento ficam:

$$\begin{aligned}
& [E + E_0(\mathbf{k}_{\parallel}) + 2(1 + \sigma)Sv(0)]s_{2m} + Sv(\mathbf{k}_{\parallel})s_{2m+1} + Sv(-\mathbf{k}_{\parallel})s_{2m-1} - \\
& 2F'S\eta^{1/2}r_{2m} = 0 \\
& [E + E_0(\mathbf{k}_{\parallel}) + 2(1 + \sigma)Sv(0) - 2\omega]r_{2m} + Sv(\mathbf{k}_{\parallel})r_{2m+1} + Sv(-\mathbf{k}_{\parallel})r_{2m-1} + \\
& 2F'S\eta^{1/2}s_{2m} = 0
\end{aligned} \tag{2.44}$$

onde no último par de equações usamos F' ao invés de F , pois $l = j$ na equação de movimento, e $E = \omega - g\mu_B H$. De posse destas equações, pode-se achar uma relação entre os s_i e os r_i . Nas equações acima, definimos uma nova variável η , dada por

$$\eta = 1 - \frac{1}{2S} \tag{2.45}$$

Esta variável surge diretamente ao se aplicar a transformação de Holstein-Primakoff¹⁹ (Capítulo 3). Vamos encontrar uma relação matricial para estas equações (os detalhes dos cálculos são dados no apêndice A). Nossas equações de movimento se tornam

$$\begin{aligned}
[A + \Delta_1] F &= \Theta G \\
[A^* + \Delta_1^*] G &= \Theta^* F
\end{aligned} \tag{2.46}$$

A partir da equação acima, podemos definir

$$\begin{aligned}
\Theta &= \delta I + \Delta_2 \\
\Theta^* &= \delta^* I + \Delta_2 \\
A_1 &= A + \Delta_1 \\
A_1^* &= A + \Delta_1^*
\end{aligned} \tag{2.47}$$

e o equivalente da equação (2.16) para os modos de propagação das ondas de spin em um cristal com anisotropia não uniaxial é então

$$\det [I - (\Theta^*)^{-1} A_1^* \Theta^{-1} A_1] = 0 \tag{2.48}$$

Observe-se a semelhança entre esta equação e a equação (2.16). Nominalmente, a matriz Θ é:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \delta + \Delta_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \delta & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \delta & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Pela aplicação sucessiva da regra de Cramer sobre a equação (2.48), a equação resultante para os modos de superfície é:

$$\begin{aligned} & [(\xi_1 - t\xi_3)(1 - gt)(\Gamma + \beta) + (1 - gt)(s\xi_3\xi_4 - \xi_2\xi_4 + gt^2\xi_3) \\ & + (h - gs)(ht\xi_1 - t\xi_3\xi_4 + t\xi_2 - s\xi_1) - (1 - gt)gt\xi_1(\Gamma - gt)] \cdot \overline{M} = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde

$$\begin{aligned} s &= \tau(d + d^*)/\delta\delta^*, \quad t = -\tau^2/\delta\delta^* \\ h &= \tau^{-1}(d + d^*)/\delta\delta^*, \quad g = -\tau^{-2}/\delta\delta^* \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\Gamma = 1 - 2/\delta\delta^* - dd^*/\delta\delta^*, \quad \beta = \frac{\Delta_2}{\delta\delta^*(\delta + \Delta_2)} \quad (2.52)$$

e \overline{M} é o determinante dado por

$$\overline{M} = \begin{vmatrix} \Gamma & h & g & 0 & 0 & 0 & \dots \\ s & \Gamma & h & g & 0 & 0 & \dots \\ t & s & \Gamma & h & g & 0 & \dots \\ 0 & t & s & \Gamma & h & g & \dots \\ 0 & 0 & t & s & \Gamma & h & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad (2.53)$$

Observe que agora temos que lidar com uma matriz penta-diagonal ao invés da matriz tri-diagonal do caso anterior. Os valores dos ξ_i , $i = 1-4$ na equação (2.50) são encontrados através de aplicações sucessivas da regra de Cramer sobre a equação (2.48). Os resultados são:

$$\xi_1 = 1 - \frac{(d^* + \Delta_1^*)(d + \Delta_1)}{(\delta^* + \Delta_2)(\delta + \Delta_2)} - \frac{1}{\delta(\delta^* + \Delta_2)} \quad (2.54)$$

$$\xi_2 = \frac{\tau^{-1}(d^* + \Delta_1^*)}{(\delta^* + \Delta_2)(\delta + \Delta_2)} + \frac{\tau^{-1}d}{\delta(\delta^* + \Delta_2)} \quad (2.55)$$

$$\xi_3 = \frac{\tau^{-2}d}{\delta(\delta^* + \Delta_2)} \quad (2.56)$$

$$\xi_4 = \frac{\tau(d + \Delta_1)}{\delta^*(\delta + \Delta_2)} + \frac{\tau d^*}{\delta \delta^*} \quad (2.57)$$

Fazendo o termo entre colchetes da equação (2.50) igual a zero, e $\bar{M} \neq 0$, temos as soluções implícitas (calculadas numericamente) para os modos de superfície.

Para os modos de volume, usamos um procedimento um pouco diferente. Fazemos

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.58)$$

onde \mathbf{M} agora é uma *matriz* com os elementos representando coeficientes de amplitudes das nossas equações. Logo, para um n -ésimo termo geral:

$$tu_{n-2} + su_{n-1} + \Gamma u_n + hu_{n+1} + gu_{n+2} = 0 \quad (2.59)$$

Usando uma solução geral $u_n \propto x^n$ (x desconhecido):

$$tx_2 + sx + \Gamma + hx^{-1} + gx^{-2} = 0 \quad (2.60)$$

chegamos a uma equação da forma

$$a(y^2 + y^{-2}) - b(y + y^{-1}) = \Gamma \quad (2.61)$$

onde $y = \tau x$, e a e b são funções de $\{\delta, \delta^*, d, d^*\}$. Esta equação é o análogo da equação (2.18)⁵⁸. Temos agora uma equação do 4º grau em y . Supondo soluções do tipo $x \propto \exp(\pm 2ik_z c_0)$, onde $2c_0$ é a distância entre camadas adjacentes (pares ou ímpares), obtemos a seguinte expressão:

$$2 \cos(2k_z c_0) = \frac{d + d^* \pm \sqrt{(d + d^*)^2 - 4(dd^* - \delta\delta^*)}}{2\tau}. \quad (2.62)$$

A equação acima é uma relação de dispersão implícita para os modos de volume das ondas de spin que se propagam em um material metamagneto, no regime AFM, usando (2.61) e supondo que as suas raízes ocorrem aos pares.

2.4 Resultados Numéricos

2.4.1 Material FeCl₂

Aplicaremos agora nossa teoria para materiais específicos. Trataremos primeiro do caso uniaxial, depois consideraremos o caso não-uniaxial. A figura 2.3 mostra a relação de dispersão para as ondas de spin de volume e superfície para o FeCl₂ na fase AFM. As constantes de rede para o FeCl₂ (onde $S = 1$ e $T_c = 23.5\text{K}$) são dadas por⁵⁹: $a = 3.58 \text{ \AA}$ e $c = 17.54 \text{ \AA}$. Para os parâmetros de troca e de anisotropia, tomamos $J_1 = 5.5 \text{ cm}^{-1}$, $J_2 = -1.2 \text{ cm}^{-1}$, $J_3 = 0.28 \text{ cm}^{-1}$, $D = 9.4 \text{ cm}^{-1}$, e $\sigma = \sigma' = 0.2$, seguindo dados obtidos de espalhamento de neutrons e Raman^{54,60,61}. A linha pontilhada representa os modos de superfície, enquanto que as duas linhas contínuas representam os limites da bandas de volume. A distância c_0 entre camadas é igual a c para o FeBr₂ e igual a $c/3$ para o FeCl₂, onde c é a distância medida ao longo do eixo c da célula unitária. Aqui, consideramos o caso onde $H = 0$, e fazemos $k_{||} = k_x$. Os modos de superfície “nascem” independentes da banda de volume, e permanecem destacados da mesma por toda a zona de Brillouin. Na figura 2.4 nós apresentamos outro espectro, para a propagação na direção $k_{||} = k_y$. Devido à simetria translacional no plano, não observamos diferenças qualitativas entre esta direção de propagação e a anterior.

Na figura 2.5 apresentamos o mesmo espectro dos modos de volume e superfície, mas agora para a fase ferromagnética. Neste caso os modos de superfície possuem um comportamento do tipo puramente real, pois visivelmente nascem da banda de volume. Tal terminologia tem origem no estudo dos fonons. Além disso, observa-se um alargamento da banda das ondas de spin, que é a região entre as linhas sólidas.

2.4.2 Material FeBr_2

Agora aplicamos nossos resultados para o metamagneto FeBr_2 . Este material caracteriza-se por ter spin $S = 1$ e temperatura crítica $T_c = 14.2$ K. As constantes de rede são⁵⁹ $a = 3.75\text{\AA}$ e $c = 12.38\text{\AA}$. Os valores aproximados dos parâmetros de troca e de anisotropia são conhecidos através de espalhamento de neutrons e Raman^{53,55}, e aqui nós consideramos $J_1 = 5.07 \text{ cm}^{-1}$, $J_2 = -1.2 \text{ cm}^{-1}$, $J_3 = 1.45 \text{ cm}^{-1}$, $D = 7.34 \text{ cm}^{-1}$ e $\sigma = \sigma' = 0.28$.

A estrutura cristalina do FeBr_2 está esboçada na figura 2.6, onde os círculos sólidos representam os íons de Fe^{2+} , e os círculos abertos representam os íons de Br^- . As interações no FeBr_2 são mais complicadas. Existem evidências⁶² de anomalias na magnetização e no calor específico na fase antiferromagnética deste material. Estas anomalias podem surgir devido ao papel da interação de super-troca (*superexchange*) mediada pelos planos não-magnéticos de Br .

Já para os íons de Fe , devido à essa interação de super-troca, existem 10 íons equivalentes no plano (figura 2.7), no sentido que cada um colabora igualmente com 1/10 da energia de troca total entre as camadas.

Na figura 2.8 apresentamos a relação de dispersão para os modos de volume e superfície que se propagam no FeBr_2 , levando-se em conta a existência de uma anisotropia não-uniaxial. Consideramos apenas a fase antiferromagnética, embora uma extensão para a fase ferromagnética seja direta. Consideramos o campo aplicado $g\mu_B H = 1.6 \text{ cm}^{-1}$. Expressamos a frequência ω (em unidades de 10 cm^{-1}) versus o vetor de onda reduzido $k_x a$ (ou seja, aqui nós consideramos $k_{\parallel} = k_x$). A comparação deste espectro com aquele no qual não existe componente não-uniaxial do campo anisotrópico (figura 2 na referência

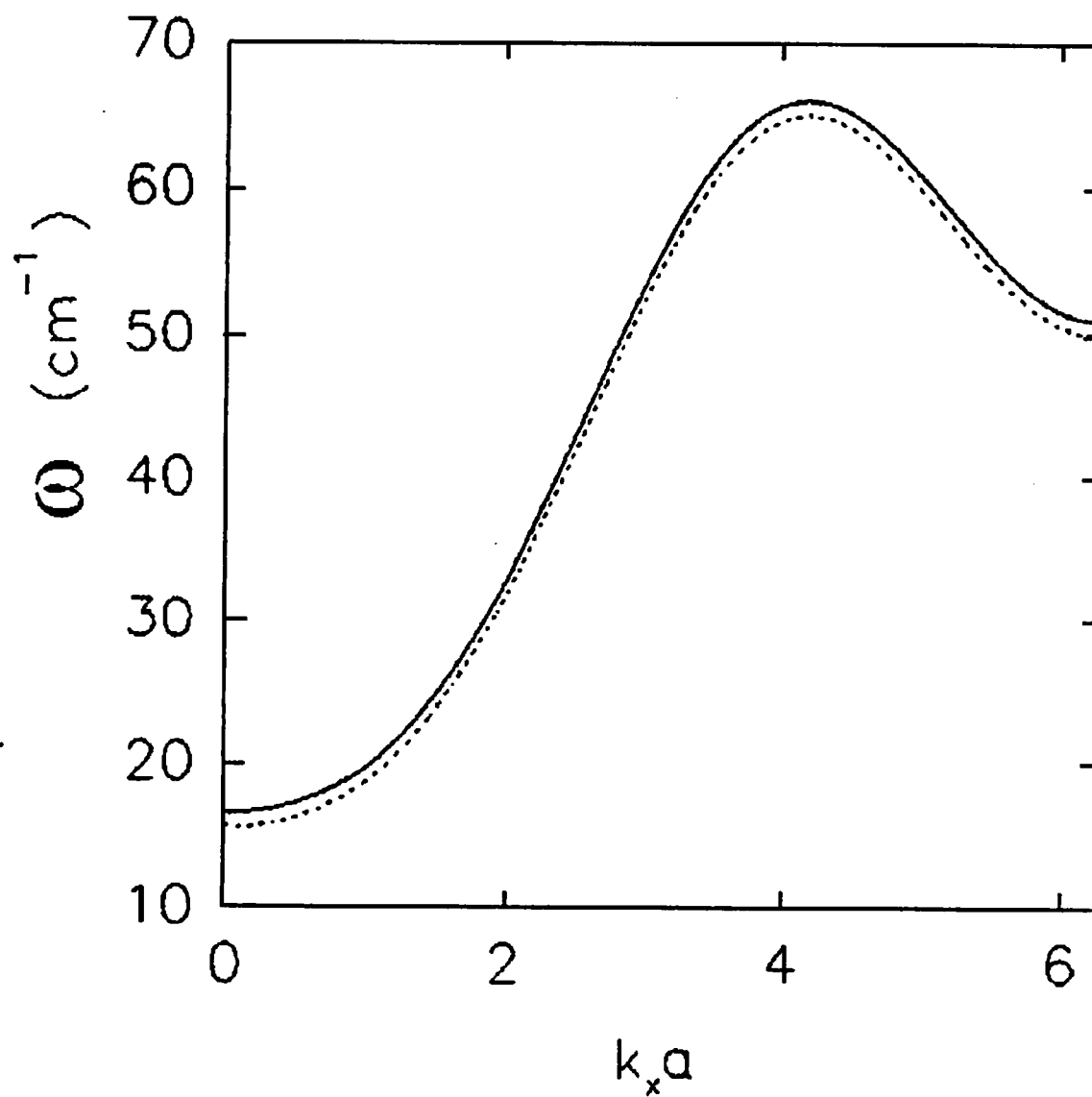


Figura 2.3: Relação de dispersão para ondas de spin de volume (linhas contínuas) e de superfície (linhas pontilhadas), no FeCl_2 na fase antiferromagnética. Considera-se o campo aplicado $H = 0$ e a direção de propagação na direção x ($k_{||} = k_x$).

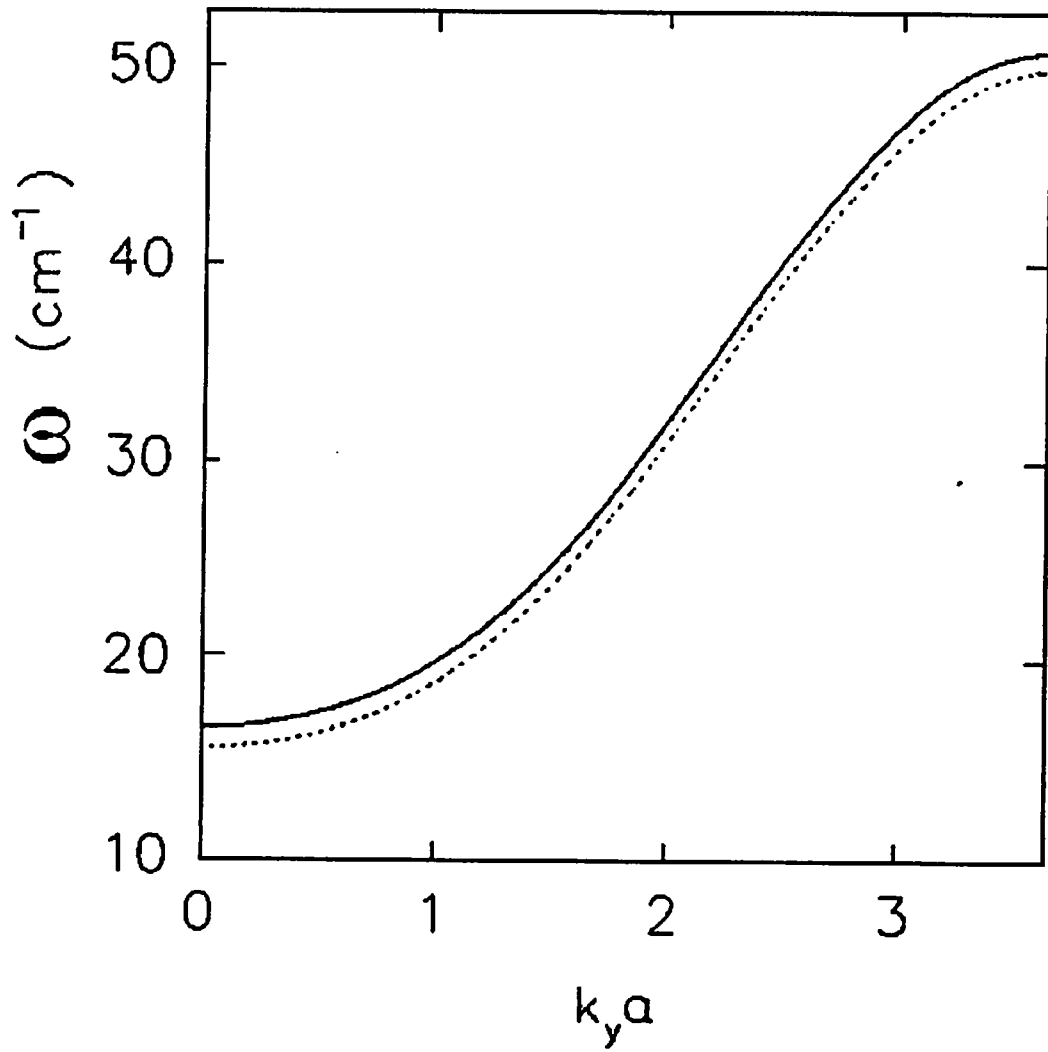


Figura 2.4: O mesmo que a figura anterior para o FeCl_2 na fase AFM, mas com k_{\parallel} na direção y .

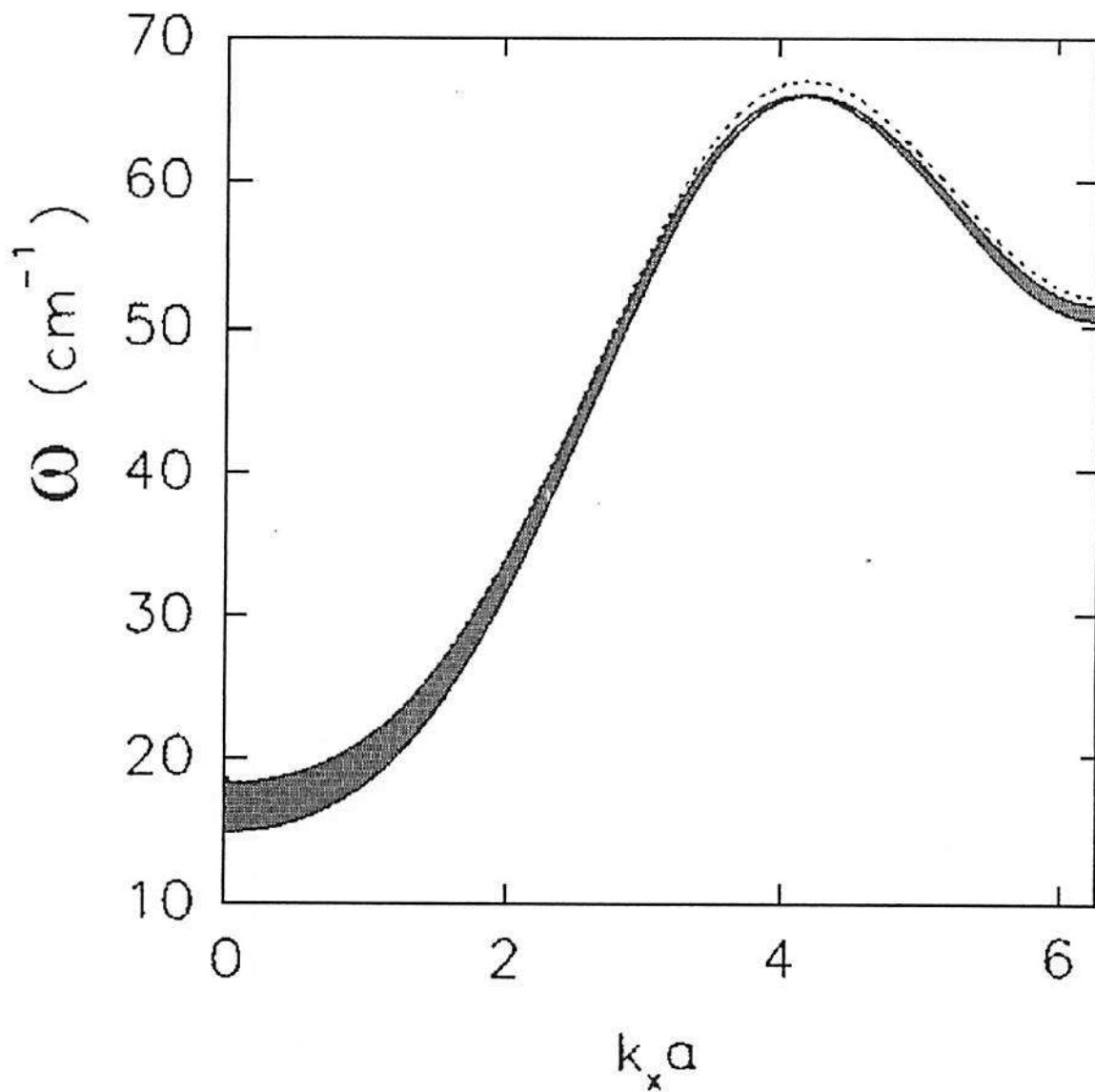


Figura 2.5: Relação de dispersão dos modos de volume e superfície no FeCl_2 , na fase ferromagnética, considerando $g\mu_B H = 4 \text{ cm}^{-1}$ para o campo aplicado, e k_{\parallel} ao longo da direção x .

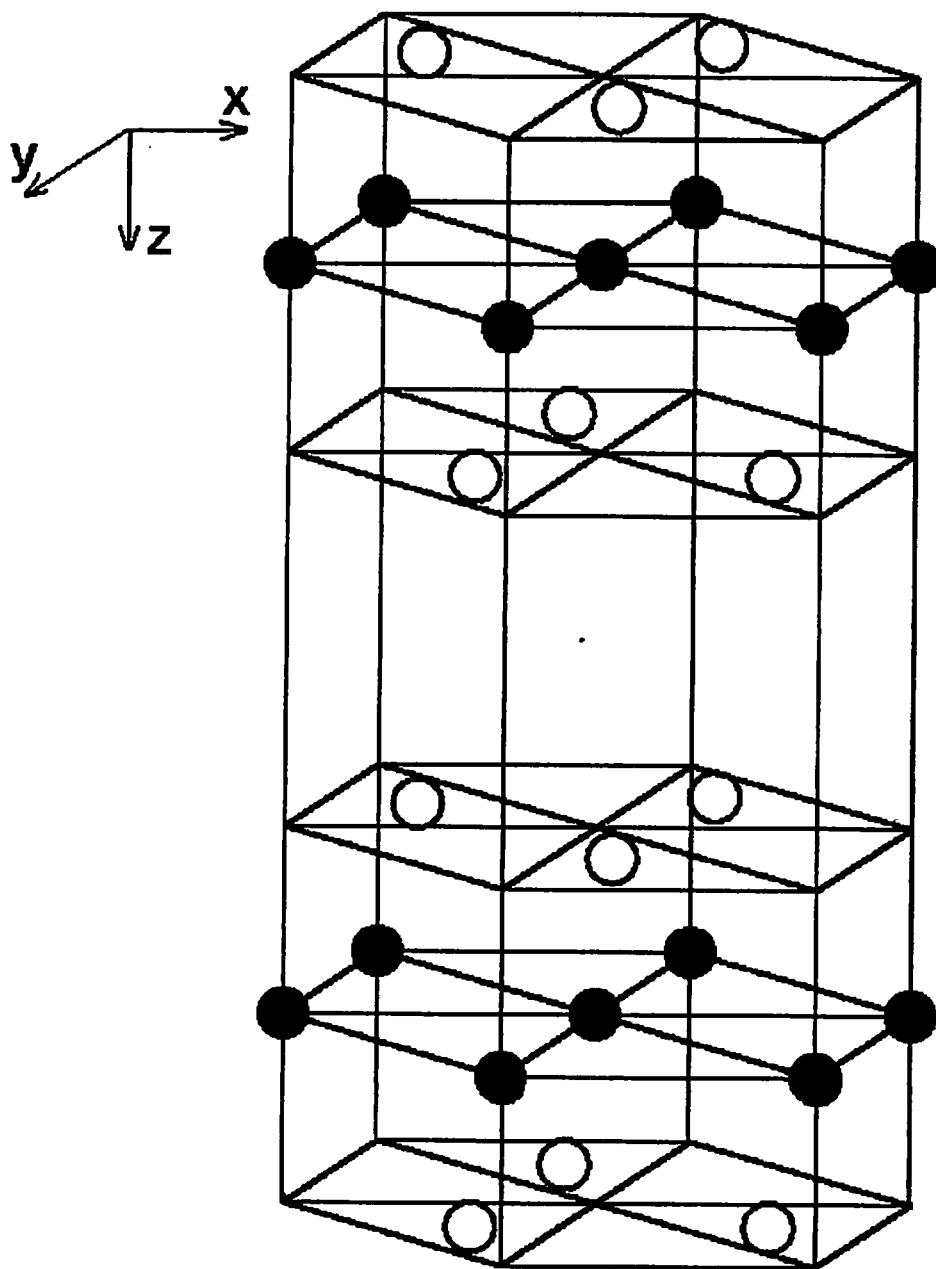


Figura 2.6: Estrutura cristalina hexagonal do FeBr_2 . Os íons magnéticos de ferro formam camadas triangulares perpendiculares ao eixo c (correspondendo ao eixo z do sistema de coordenadas cartesianas.)

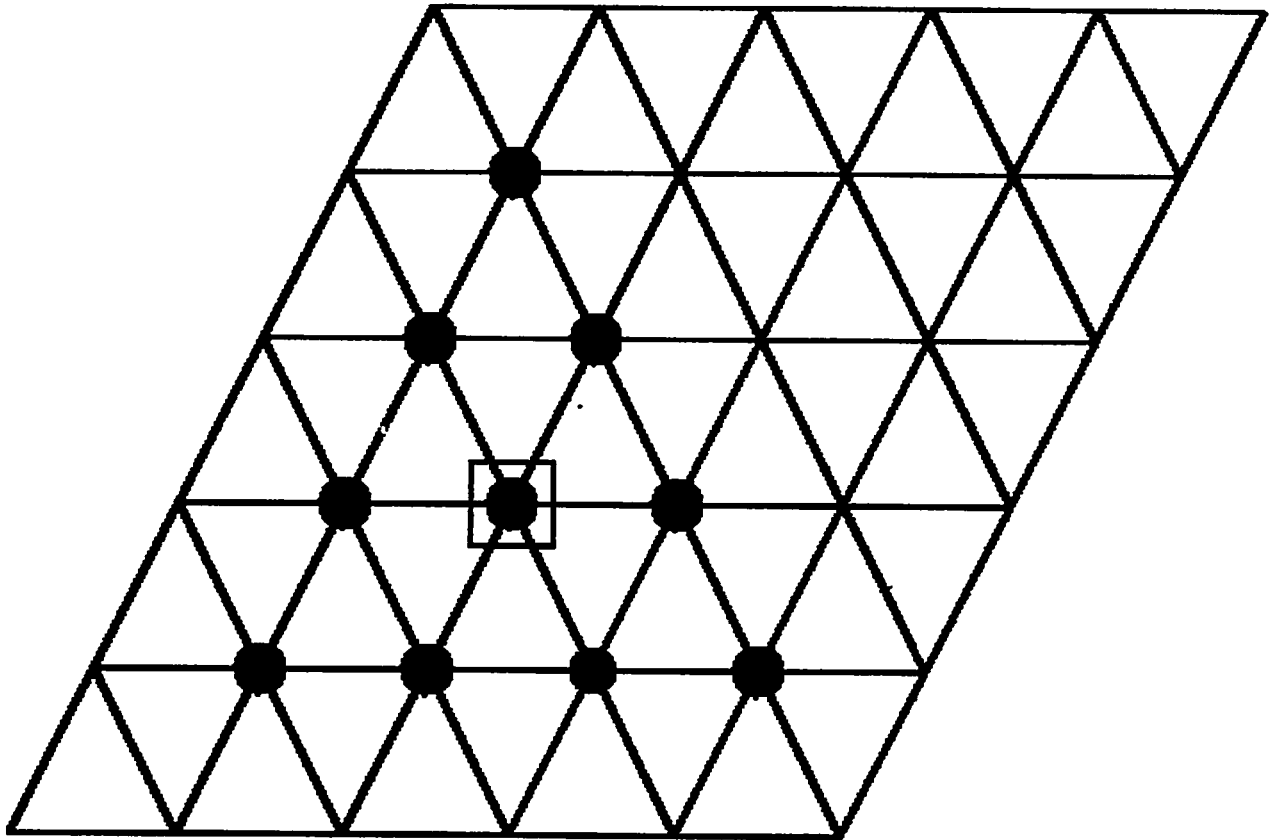


Figura 2.7: Vista superior de uma camada de íons de *Fe*. Os dez íons contribuem equivalentemente para a interação de troca intercamadas, através de uma interação de *superexchange*.

[58]) mostra que a banda de volume se separa em duas regiões com soluções reais limitadas por $k_2 a = 0$ e $k_2 a = \pi$. Além disso, existem agora dois modos de superfície (linhas tracejadas) bem definidos, um abaixo das bandas de volume e outro entre as mesmas. O *inset* na figura representa uma ampliação da região entre $k_x a = 0$ e $k_x a = 1.0$, e dá uma melhor resolução dos modos.

Na figura 2.9 apresentamos o mesmo espectro, agora considerando $k_{||} = k_y$. Como se pode ver, não existe diferença qualitativa entre a propagação nesta direção e na direção x , a não ser por um deslocamento dos valores máximos da frequência quando se passa de uma direção de propagação para a outra.

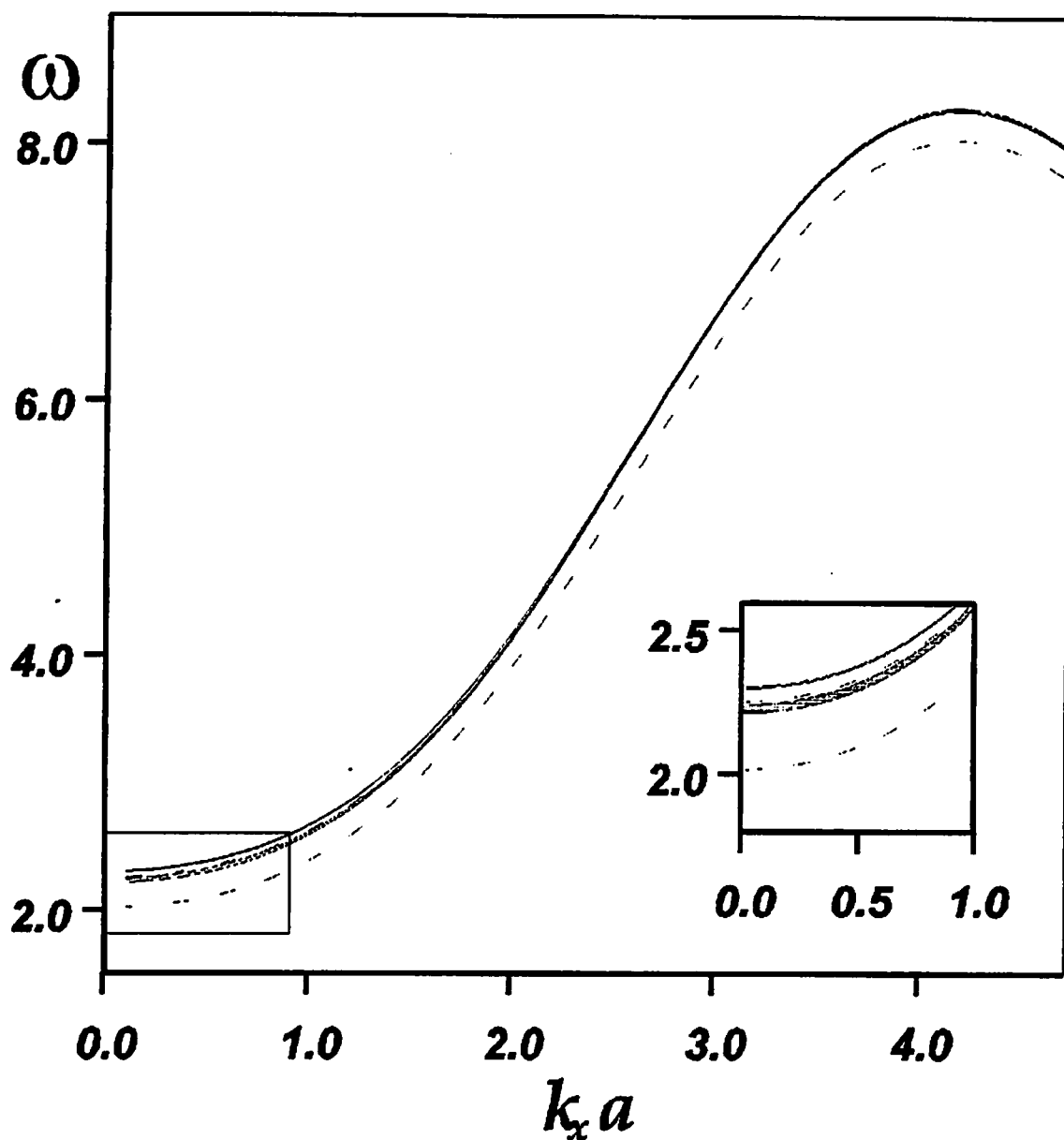


Figura 2.8: Relação de dispersão das ondas de spin de volume (áreas sombreadas e linhas contínuas) e de superfície (linhas pontilhadas) no material FeBr_2 na fase AFM como uma função do vetor de onda planar $k_x a$ para o campo magnético aplicado $g\mu_B H = 1.6 \text{ cm}^{-1}$. Aqui, ω está em unidades de 10 cm^{-1} .

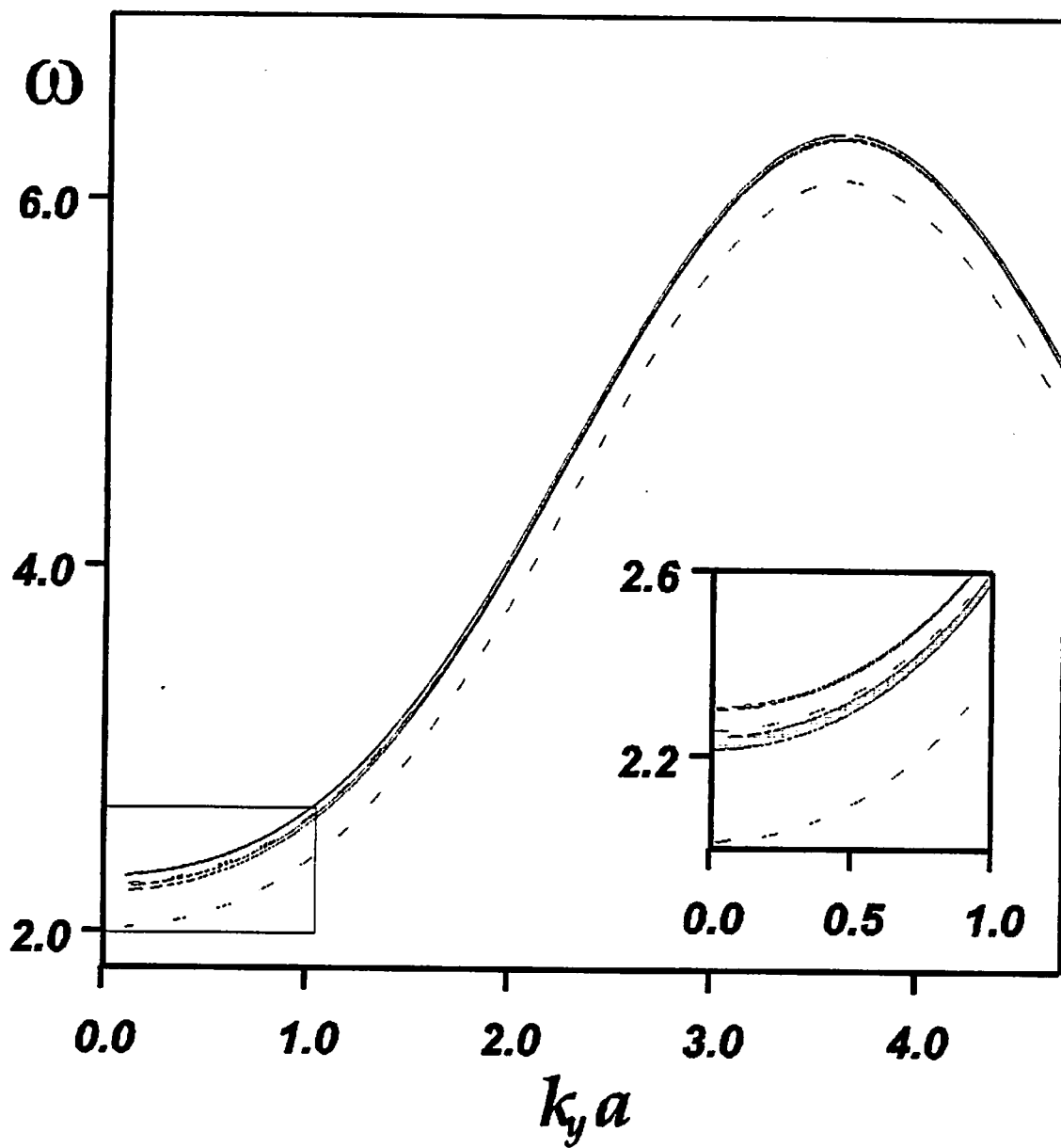


Figura 2.9: O mesmo que a figura anterior, considerando a propagação na direção y .

2.5 Conclusões

Neste capítulo apresentamos os espectros das ondas de spin para os metamagnetos isolantes FeCl_2 e FeBr_2 . Para valores suficientemente altos da constante anisotrópica não-uniaxial, uma fase spin-flop poderia existir, no entanto isto levaria a conflitos com resultados experimentais e teóricos de trabalhos anteriores, e nós impomos um limite superior para o valor do campo anisotrópico. Como exemplos de técnicas experimentais apropriadas para o estudo das excitações das ondas de spin em metamagnetos, podemos citar o espelhamento de luz do tipo Raman e do tipo Brillouin, e ressonância magnética. Para o FeBr_2 , a técnica de espalhamento de luz pode ser mais adequada, pois nossas previsões teóricas indicam que pelo menos um ramo (o de menor frequência) das ondas de spin de superfície é separado o suficiente em frequência (mesmo na ausência do campo anisotrópico não-uniaxial) dos modos de volume. Esta separação é suficientemente larga para ser resolvida através do uso de espectroscopia Raman, e naturalmente favoreceria as observações experimentais do espectro dos modos de propagação dos magnons, em comparação com o FeCl_2 .

Também para o FeBr_2 , nossos resultados também indicam que o campo anisotrópico não-uniaxial dá origem a novos modos de superfície, o que pode ser interpretado, em analogia com os modos que surgem no estudo de super-redes ferromagnéticas anisotrópicas (Capítulo 3), como uma quebra de degenerescência na energia desses modos.

Capítulo 3

Ondas de Spin Não-Lineares em Super-redes Ferromagnéticas

Neste capítulo nos concentraremos no estudo das ondas de spin em super-redes lineares e não-lineares, usando os formalismos da matriz transferência e de segunda quantização, respectivamente.

3.1 Ondas de Spin Lineares em Ferromagnetos Anisotrópicos

Como já foi afirmado nesta tese, o estudo das ondas de spin pode ser feito através de diversas técnicas experimentais e teóricas. Nesta seção estudaremos os modos de propagação das ondas de spin no regime de troca, fazendo uso de um formalismo microscópico, através da equação de movimento para operadores de Heisenberg. Embora a maioria dos materiais magnéticos possua pelo menos a anisotropia uniaxial, existem aqueles que possuem além dela a anisotropia não-uniaxial. Exemplos destes são o ferromagneto CrBr_3 e o antiferromagneto NiO . Nesta seção estudaremos o modelo de super-rede ferromagnética onde se incluem ambas as anisotropias, para o estudo dos modos de volume e superfície das ondas de spin que se propagam nestes materiais. Como nos demais capítulos, todos os cálculos

são desenvolvidos considerando $T \ll T_c$. Trabalhos semelhantes já foram feitos usando o método da função de Green para a investigação dos modos de volume⁶³⁻⁶⁵ e superfície⁶⁶ em ferromagnetos de Heisenberg, e usando a equação semi-clássica de torque⁶⁷.

3.1.1 A Super-rede Magnética

A geometria do nosso modelo de super-rede magnética está descrita na figura 3.1, onde a super-rede é composta de dois materiais ferromagnéticos A e B de estrutura cúbica simples, tendo cada um n_1 e n_2 camadas atômicas, respectivamente. Desta forma o tamanho da célula unitária da super-rede é $D = (n_1 + n_2)a$, onde a é o parâmetro de rede (o mesmo em cada material). Consideramos aqui somente interações de troca entre primeiros vizinhos, iguais respectivamente a J_A e J_B . Os dois materiais são caracterizados no volume pelos parâmetros de anisotropia D_A e D_B (para o termo uniaxial ou “easy-axis”) e por F_A e F_B (para o termo não-uniaxial, ou “easy-plane”). Na interface A-B, estes parâmetros podem ser modificados para D_{SJ} e F_{SJ} ($J=A,B$), e a interação de troca nesta interface é igual a I . Deste modo, o nosso Hamiltoniano toma a forma

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - g\mu_B H_0 \sum_i S_i^z - \sum_i D_i (S_i^z)^2 - F_i \sum_i [(S_i^x)^2 - (S_i^y)^2] \quad (3.1)$$

A equação de movimento para o operador $S_i^\pm = S_i^x \pm iS_i^y$ em qualquer sítio do volume do material A (ou B) é

$$i\hbar \frac{\partial S_i^\pm}{\partial t} = [S_i^\pm, \mathcal{H}] \quad (3.2)$$

Usando isto na equação (3.1) encontramos o seguinte resultado.

$$(\pm\hbar\omega - \Delta) S_i^\pm = S \sum J_{ij} (S_i^\pm - S_j^\pm) - 2FS\eta^{1/2} S_i^\mp \quad (3.3)$$

Onde $\Delta = g\mu_B H_0 + 2DS\eta$. Aqui introduzimos o fator $\eta = 1 - \frac{1}{2S}$, que surge devido à linearização dos termos de anisotropia, ao usarmos a transformação de Holstein-Primakoff

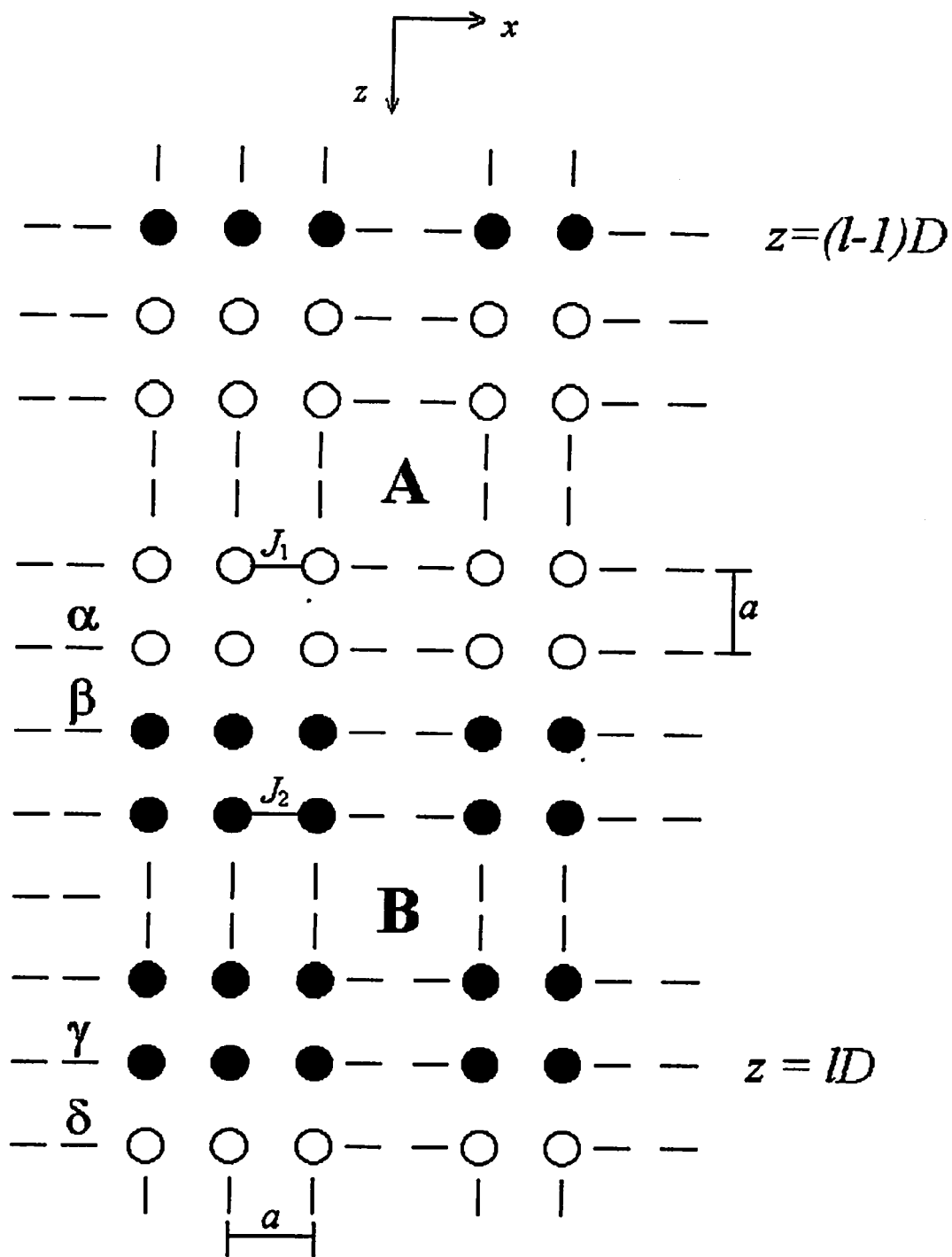


Figura 3.1: Célula unitária de nossa super-rede. A relação de dispersão é obtida através da aplicação da equação de movimento nas camadas α , β , γ e δ .

diretamente no Hamiltoniano¹⁹, como veremos na seção 3.2.1, e S pode ter os valores S_A e S_B nos materiais A e B, respectivamente. De (3.3) vemos que ao considerarmos o termo de anisotropia não-uniaxial, surge um acoplamento entre as variáveis de spin S^+ e S^- , fato que não ocorre quando tratamos do caso sem anisotropia^{68,69}. Resolvendo a equação acima diretamente para um meio infinito (modos de volume) chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\hbar\omega - \Delta}{2S} S_i^+ &= \Gamma S_i^+ - F\eta^{1/2} S_i^- \\ \frac{-\hbar\omega - \Delta}{2S} S_i^- &= \Gamma S_i^- - F\eta^{1/2} S_i^+ \end{aligned} \quad (3.4)$$

Onde $\Gamma = 3 - \gamma(k_{\parallel}) - \cos(k_z a)$ e $\gamma(k_{\parallel}) = \cos(k_x a) - \cos(k_y a)$. Definindo $\Omega = \frac{\hbar\omega}{JS}$, obtemos de (3.5):

$$\cos(k_z a) = \frac{\Delta}{2JS} + 3 - \gamma(k_{\parallel}) \pm \left[\left(\frac{\Omega}{2} \right)^2 + \frac{F^2 \eta}{J^2} \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

Esta é a relação de dispersão para as ondas de spin que se propagam no volume de um ferromagneto não-uniaxial. Os sinais \pm dão origem a duas soluções (k_1 e k_2) para k_z .

Voltemos agora à super-rede. Existe ainda uma simetria translacional no plano xy , de forma que as soluções nesta direção são proporcionais a $\exp(\pm i \vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel})$, com $\vec{r}_{\parallel} = (x, y)$. É natural então procurarmos soluções do tipo onda plana na direção z , considerando as duas soluções acima citadas. As se fazer isso, percebe-se no entanto que é mais conveniente (a título de simplificação) supor as soluções com os coeficientes como mostrado abaixo:

$$\begin{cases} S_{iJ}^+ = A_1^n e^{ik_{1J}z} + B_1^n e^{-ik_{1J}z} - F_{JJ}(C_1^n e^{ik_{2J}z} + D_1^n e^{-ik_{2J}z}) \\ S_{iJ}^- = -Q_{1J} F_{JJ}(A_1^n e^{ik_{1J}z} + B_1^n e^{-ik_{1J}z}) + Q_{2J}(C_1^n e^{ik_{2J}z} + D_1^n e^{-ik_{2J}z}) \end{cases} \quad (3.6)$$

onde aqui suprimimos por conveniência o fator temporal comum $\exp(-i\omega t)$, e n se refere ao número da célula da super-rede. Aqui, k_{1J} e k_{2J} são relacionados com Ω_J através da eq. (3.5). Os valores dos coeficientes são

$$Q_{1J} = -\frac{1}{Q_{2J}} = \frac{-2}{\Omega_J + (\Omega_J^2 + 4F_{JJ}^2)^{1/2}} \quad (3.7)$$

$$F_{JJ} = \frac{F_J \eta_J^{1/2}}{J_J} \quad (3.8)$$

onde $J = A, B$. De posse das soluções (3.5), vamos agora estudar a propagação de magnons na super-rede, considerando a presença destes campos de anisotropia. Devido ao acoplamento entre S_{iJ}^+ e S_{iJ}^- , é necessário calcular separadamente a equação de movimento para cada um destes operadores nas camadas α , β , γ e δ , mostradas na figura 3.1. Para S_{iJ}^+ , no meio A, a equação de movimento na camada α fica:

$$\begin{aligned} & (\bar{\lambda}_{1A} + 2Q_{1A}F_{AA}F'_{SA})A_1\bar{f}_{1A}t_{1A} + (\lambda_{1A} + 2Q_{1A}F_{AA}F'_{SA})B_1f_{1A}\bar{t}_{1A} \\ & - (\bar{\lambda}_{2A}F_{AA} + 2Q_{2A}F'_{SA})C_1\bar{f}_{2A}t_{2A} - (\lambda_{2A}F_{AA} + 2Q_{2A}F'_{SA})D_1f_{2A}\bar{t}_{2A} \\ & = I_A S_{BA} [A_2 + B_2 - F_{BB}(C_2 + D_2)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Enquanto que para S_{iJ}^- :

$$\begin{aligned} & -(\bar{\lambda}'_{1A}Q_{1A}F_{AA} + 2F'_{SA})A_1\bar{f}_{1A}t_{1A} - (\lambda'_{1A}Q_{1A}F_{AA} + 2F'_{SA})B_1f_{1A}\bar{t}_{1A} \\ & + (\bar{\lambda}'_{2A}Q_{2A} + 2F_{AA}F'_{SA})C_1\bar{f}_{2A}t_{2A} + (\lambda'_{2A}Q_{2A} + 2F_{AA}F'_{SA})D_1f_{2A}\bar{t}_{2A} \\ & = I_A S_{BA} [-Q_{1B}F_{BB}(A_2 + B_2) + Q_{2B}(C_2 + D_2)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde os coeficientes são dados por (nas equações abaixo, $J = A, B$; $j = 1, 2$):

$$\bar{\lambda}_{1J} = I_J - (1 - f_{1J} - [\Omega_J - \sqrt{\Omega_J^2 + 4F_{jJ}^2}]) \quad (3.11)$$

$$\bar{\lambda}_{2J} = I_J - (1 - f_{2J}) - 2Q_{2J} \quad (3.12)$$

$$\bar{\lambda}'_{1J} = I_J - (1 - f_{2J}) + 2Q_{2J} \quad (3.13)$$

$$\bar{\lambda}'_{2J} = I_J - (1 - f_{2J}) - [\Omega_J - \sqrt{\Omega_J^2 + 4F_{jJ}^2}] \quad (3.14)$$

$$I_J = \frac{I}{J_J} \quad (3.15)$$

$$S_{BA} = \frac{1}{S_{AB}} = S_B/S_A \quad (3.16)$$

$$F'_{SJ} = F_{SJ}\eta_J^{1/2}/J_J \quad (3.17)$$

$$t_{jJ} = (f_{jJ})^{n_J} = \exp(in_J k_{jJ} a) \quad (3.18)$$

$$\bar{f}_{jJ} = 1/f_{jJ} ; \bar{t}_{jJ} = 1/t_{jJ} \quad (3.19)$$

As equações de movimento nas camadas β , γ e δ têm forma semelhante. Nas camadas α e β (veja fig. 3.1), estas equações relacionam as amplitudes A_1^n , B_1^n , C_1^n , D_1^n do meio A com as correspondentes amplitudes A_2^n , B_2^n , C_2^n , D_2^n do meio B. Também as equações de movimento nas camadas γ e δ relacionam A_1^{n+1} , B_1^{n+1} , C_1^{n+1} , D_1^{n+1} com A_2^n , B_2^n , C_2^n , D_2^n . Se definirmos os vetores-coluna

$$|A^n\rangle = \begin{bmatrix} A_1^n \\ B_1^n \\ C_1^n \\ D_1^n \end{bmatrix} ; |B^n\rangle = \begin{bmatrix} A_2^n \\ B_2^n \\ C_2^n \\ D_2^n \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

as equações de movimento (3.9) e (3.10), assim como as demais equações nas camadas das interfaces podem se escritas em forma matricial como:

$$\begin{aligned} M_A |A^n\rangle &= N_B |B^n\rangle \\ M_B |B^n\rangle &= N_A |A^{n+1}\rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

Com as equações acima e utilizando o *Ansatz* de Bloch, temos:

$$T |A^n\rangle = e^{iQL} |A^n\rangle \quad (3.22)$$

onde a matriz T (4x4) é definida por:

$$\mathcal{T} = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A \quad (3.23)$$

e as matrizes M_J e N_J ($J=A,B$) são dadas no apêndice B. Pode-se demonstrar, através de cálculo direto (mas tedioso), que o $\det(\mathcal{T})=1$ neste caso. Devido a isto, os autovalores da eq. (3.22) ocorrem aos pares (t_i, t_i^{-1}) , $i = 1, 2$, e são relacionados aos dois vetores de onda de Bloch Q_i por $t_i = \exp(iQ_i L)$. Desta forma, se a matriz \mathcal{T} é conhecida, os autovalores podem ser determinados da maneira padrão, isto é, eles são soluções da equação:

$$\det[\vec{\mathcal{T}} - t_i \vec{I}] = 0, \quad (3.24)$$

o que nos dá a equação matricial de autovalores:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{T}_{11} - t_1 & \mathcal{T}_{12} & \mathcal{T}_{13} & \mathcal{T}_{14} \\ \mathcal{T}_{21} & \mathcal{T}_{22} - t_1^{-1} & \mathcal{T}_{23} & \mathcal{T}_{24} \\ \mathcal{T}_{31} & \mathcal{T}_{32} & \mathcal{T}_{33} - t_2 & \mathcal{T}_{34} \\ \mathcal{T}_{41} & \mathcal{T}_{42} & \mathcal{T}_{43} & \mathcal{T}_{44} - t_2^{-1} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

3.1.2 Modos de Superfície

Vamos nos dedicar agora aos modos de superfície de nossa super-rede. Para uma descrição mais detalhada, pode-se considerar dois modelos distintos: *com relaxação* e *sem relaxação*. Tais modelos são esboçados nas figuras (3.2) e (3.3). No entanto, por simplicidade nos restringiremos ao caso sem relaxação.

De posse da equação de movimento (3.3), e das soluções na superfície:

$$\begin{cases} S_i^+ = A_0 e^{ik_1 A z} + B_0 e^{-ik_1 A z} - F_{AA}(C_0 e^{ik_2 A z} + D_0 e^{-ik_2 A z}) \\ S_i^- = -Q_{1A} F_{AA}(A_0 e^{ik_1 A z} + B_0 e^{-ik_1 A z}) + Q_{2A}(C_0 e^{ik_2 A z} + D_0 e^{-ik_2 A z}) \end{cases} \quad (3.26)$$

chegamos à seguinte equação

$$\begin{aligned} & (\lambda_{10} + 2Q_{1A} F_{AA} F'_0) A_0 + (\bar{\lambda}_{10} + 2Q_{1A} F_{AA} F'_0) B_0 \\ & - (\lambda_{20} F_{AA} + 2Q_{2A} F'_0) C_0 - (\bar{\lambda}_{20} F_{AA} + 2Q_{2A} F'_0) D_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

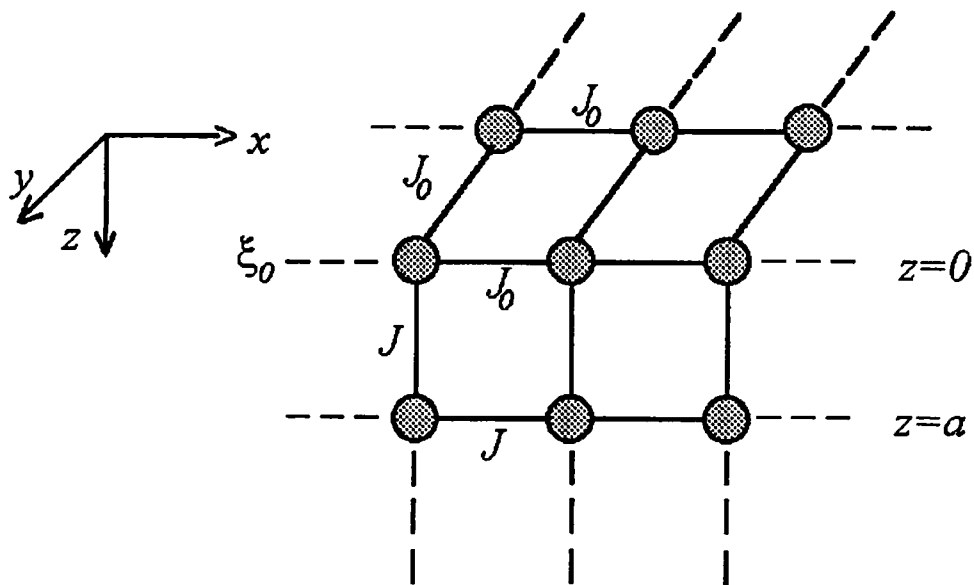


Figura 3.2: Modelo sem relaxação. A constante de interação muda abruptamente ao sair da superfície.

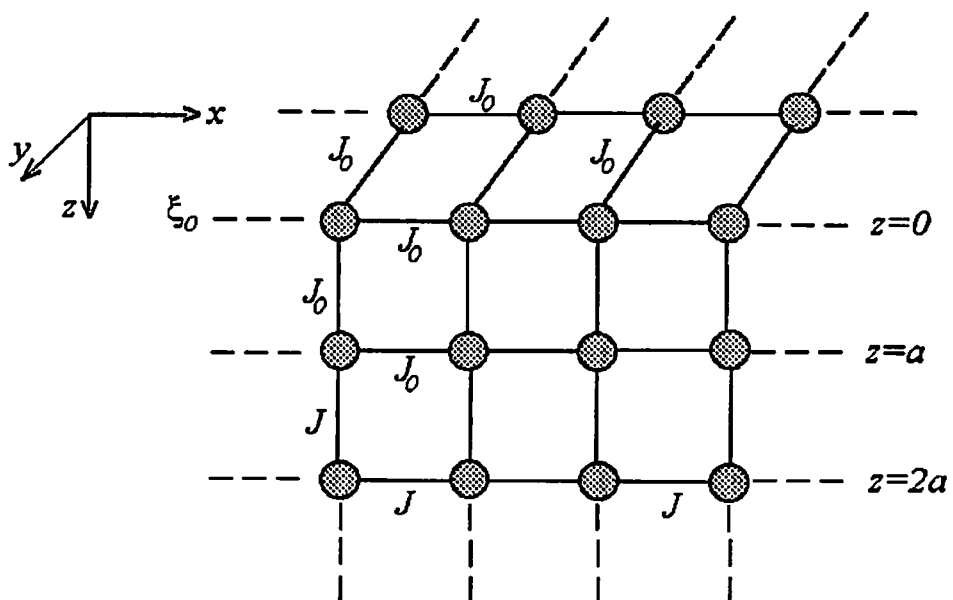


Figura 3.3: Modelo com relaxação. A partir da 3ª camada a constante de troca em todo o volume passa a ser J .

onde

$$F'_0 = \frac{F_{S_0} \eta_A^{1/2}}{J_0} \quad (3.28)$$

$$\lambda_{j0} = \frac{-\hbar\omega + \Delta}{S_A J_0} + (4 - 2\gamma_k) + \frac{J}{J_0}(1 - f_{jA}), \quad j = 1, 2 \quad (3.29)$$

Agora, para S_i^- , chegamos a:

$$\begin{aligned} & (\lambda'_{10} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_0) A_0 + (\bar{\lambda}'_{10} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_0) B_0 \\ & - (\lambda'_{20} Q_{2A} + 2F_{AA} F'_0) C_0 - (\bar{\lambda}'_{20} Q_{2A} + 2F_{AA} F'_0) D_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde

$$\lambda'_{j0} = \lambda_{j0} + \frac{2\hbar\omega}{S_A J_0} \quad (3.31)$$

Aqui, $\bar{\lambda}'_{j0}$ e $\bar{\lambda}_{j0}$ são obtidos de λ'_{j0} e λ_{j0} substituindo os f_{jA} por \bar{f}_{jA} . Como só obtivemos duas equações em ξ_0 , é necessário que calculemos mais duas equações para resolver o problema. Na seção anterior obtivemos as equações para os modos de volume na super-rede. Vamos definir os vetores-coluna:

$$|A_0\rangle = \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{bmatrix}; \quad |B\rangle = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Das equações anteriores (eq. (3.21) e (3.32)), temos:

$$|B\rangle = N_B^{-1} M_A |A_0\rangle = \Gamma |A_0\rangle \quad (3.33)$$

onde nós introduzimos a variável $\Gamma = N_B^{-1} M_A$. De posse destas equações, podemos escrever explicitamente as equações de movimento para a camada α , seguindo o procedimento anterior. As equações resultantes são:

$$\begin{aligned}
& [\alpha_1\Gamma_{11} + \bar{\alpha}_1\Gamma_{21} - \alpha_2\Gamma_{31} - \bar{\alpha}_2\Gamma_{41} - \gamma T_{11} - \gamma T_{21} + F_{AA}\gamma T_{31} + F_{AA}\gamma T_{41}]A_0 + \\
& [\alpha_1\Gamma_{12} + \bar{\alpha}_1\Gamma_{22} - \alpha_2\Gamma_{32} - \bar{\alpha}_2\Gamma_{42} - \gamma T_{12} - \gamma T_{22} + F_{AA}\gamma T_{32} + F_{AA}\gamma T_{42}]B_0 + \\
& [\alpha_1\Gamma_{13} + \bar{\alpha}_1\Gamma_{23} - \alpha_2\Gamma_{33} - \bar{\alpha}_2\Gamma_{43} - \gamma T_{13} - \gamma T_{23} + F_{AA}\gamma T_{33} + F_{AA}\gamma T_{43}]C_0 + \\
& [\alpha_1\Gamma_{14} + \bar{\alpha}_1\Gamma_{24} - \alpha_2\Gamma_{34} - \bar{\alpha}_2\Gamma_{44} - \gamma T_{14} - \gamma T_{24} + F_{AA}\gamma T_{34} + F_{AA}\gamma T_{44}]D_0 = 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

e

$$\begin{aligned}
& [-\alpha_3\Gamma_{11} + \bar{\alpha}_3\Gamma_{21} - \alpha_4\Gamma_{31} - \bar{\alpha}_4\Gamma_{41} - \gamma_q T_{11} - \gamma_q T_{21} + Q_{2A}\gamma T_{31} + Q_{2A}\gamma T_{41}]A_0 + \\
& [-\alpha_3\Gamma_{12} + \bar{\alpha}_3\Gamma_{22} - \alpha_4\Gamma_{32} - \bar{\alpha}_4\Gamma_{42} - \gamma_q T_{12} - \gamma_q T_{22} + Q_{2A}\gamma T_{32} + Q_{2A}\gamma T_{42}]B_0 + \\
& [-\alpha_3\Gamma_{13} + \bar{\alpha}_3\Gamma_{23} - \alpha_4\Gamma_{33} - \bar{\alpha}_4\Gamma_{43} - \gamma_q T_{13} - \gamma_q T_{23} + Q_{2A}\gamma T_{33} + Q_{2A}\gamma T_{43}]C_0 + \\
& [-\alpha_3\Gamma_{14} + \bar{\alpha}_3\Gamma_{24} - \alpha_4\Gamma_{34} - \bar{\alpha}_4\Gamma_{44} - \gamma_q T_{14} - \gamma_q T_{24} + Q_{2A}\gamma T_{34} + Q_{2A}\gamma T_{44}]D_0 = 0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

onde

$$\alpha_1 = (\bar{\lambda}_{1B} + 2F'_{SB}Q_{1B}F_{BB})\bar{f}_{1B}t_{1B} \tag{3.36}$$

$$\alpha_2 = (\bar{\lambda}_{2B}F_{BB} + 2F'_{SB}Q_{2B})\bar{f}_{2B}t_{2B} \tag{3.37}$$

$$\alpha_3 = (\bar{\lambda}_{1B}Q_{1B}F_{BB} + 2F'_{SB})\bar{f}_{1B}t_{1B} \tag{3.38}$$

$$\alpha_4 = (\bar{\lambda}_{2B}Q_{2B} + 2F_{BB}F'_{SB})\bar{f}_{2B}t_{2B} \tag{3.39}$$

$$\gamma_q = Q_{1A}F_{AA}\gamma \tag{3.40}$$

$$\gamma = I_B S_{AB} \tag{3.41}$$

Com as equações (3.30), (3.27), (3.34) e (3.35) obtemos um sistema 4x4 homogêneo, que tem solução não-trivial desde que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo. Através desta imposição, obtemos a relação de dispersão dos modos de superfície para o nosso modelo. É necessário impormos adicionalmente a condição de localização (ou seja, que os vetores de onda sejam puramente imaginários ou complexos com a parte real positiva) para garantirmos a existência dos modos de superfície no espectro.

Na seção 3.3 apresentamos resultados numéricos e discussões dos modos lineares das ondas de spin em super-redes anisotrópicas.

3.2 Ondas de Spin Não-Lineares em Ferromagnetos Anisotrópicos

Nesta seção nos dedicaremos ao estudo do comportamento dos magnons ao se incluir na descrição do sistema termos que representam interações entre as ondas de spin. Tal método permite um estudo mais preciso, pois consiste em uma expansão em série dos operadores que representam as interações. Antes disso daremos uma breve introdução sobre uma transformação para operadores muito usada no formalismo de segunda quantização para o estudo das ondas de spin.

3.2.1 A Transformação de Holstein-Primakoff

A transformação de Holstein-Primakoff¹⁹ tem por intuito escrever o Hamiltoniano do sistema em uma forma que se permita obter soluções por aproximações sucessivas, através de uma expansão em série dos operadores de criação e destruição de bosons, a^\dagger e a , ou seja, podemos re-escrever nosso Hamiltoniano na forma $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(1)} + \mathcal{H}^{(2)} + \mathcal{H}^{(3)} + \mathcal{H}^{(4)} + \dots$. Nós fazemos esta transformação a fim de podermos usar a teoria padrão de muitos corpos, estabelecida para aqueles operadores, e que não se aplica diretamente aos operadores de spin S^x e S^y . Esses operadores são primeiro escritos em termos de S^+ e S^- , ou seja:

$$S^\pm = S^x \pm iS^y \quad (3.42)$$

e os operadores S^+ , S^- e S_j^z são escritos como

$$S_j^+ = (2S)^{1/2} \left[1 - \frac{a_j^\dagger a_j}{2S} \right]^{1/2} a_j \quad (3.43)$$

$$S_j^- = (2S)^{1/2} a_j^\dagger \left[1 - \frac{a_j^\dagger a_j}{2S} \right]^{1/2}$$

e

$$S_j^z = S - a_j^\dagger a_j \quad (3.44)$$

Os operadores a^\dagger e a obedecem às conhecidas relações de comutação

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, [a_i, a_i] = [a_j, a_j] = 0 \quad (3.45)$$

Para seguirmos adiante, vamos fazer uma expansão de Fourier das variáveis atômicas em termos das variáveis no espaço recíproco dos vetores de onda k dentro da zona de Brillouin:

$$\begin{aligned} a_j^\dagger &= N^{-1/2} \sum_k e^{ik \cdot r_j} a_k^\dagger \\ a_j &= N^{-1/2} \sum_k e^{-ik \cdot r_j} a_k \end{aligned} \quad (3.46)$$

Para a parte de Heisenberg e Zeeman do Hamiltoniano (3.1), após fazer as substituições e expansões em termos dos operadores de bosons, e considerando apenas interações entre os α primeiros vizinhos, chegamos ao resultado

$$\mathcal{H} = \frac{-J\alpha S}{2} \sum_k \{ \gamma_k a_k a_k^\dagger + \gamma_{-k} a_k a_k^\dagger - 2a_k^\dagger a_k \} + g\mu_B H_0 \sum_k a_k^\dagger a_k \quad (3.47)$$

onde

$$\gamma_k = \frac{1}{\alpha} \sum_\delta e^{ik \cdot \delta} \quad (3.48)$$

Aqui δ é um vetor unindo um sítio ao seu vizinho mais próximo. Também usamos a aproximação RPA (de "Random Phase Approximation", também chamada de *aproximação de quase-saturação*) para podermos considerar a média térmica (estatística) $\langle S_j^z \rangle \simeq S$ em $T \ll T_c$. Desta forma, nosso Hamiltoniano fica

$$\mathcal{H} = \sum_k \hat{n}_k \omega_k \quad (3.49)$$

com $\omega_k = JS\alpha(1 - \gamma_k) + g\mu_B H_0$ e $\hat{n}_k = a_k^\dagger a_k$. A equação acima mostra que se fizermos uma transformada de Fourier para as variáveis de magnons a_k^\dagger, a_k , a parte quadrática do Hamiltoniano (3.1) é diagonalizada, com autovalores ω_k .

O procedimento para os termos de anisotropia é um pouco mais complicado. Walker⁷⁰ e Hutchings *et al.*⁷¹ argumentam que certos elementos de matriz devem ser preservados sob esta transformação. Nós vemos que o fator η surge ao incluirmos os termos uniaxial e não uniaxial. Pode-se demonstrar como este fator surge como uma consequência da expansão das definições (3.44) e (3.44). Para a parte uniaxial do Hamiltoniano anisotrópico, temos:

$$\mathcal{H}_A^U = - \sum_j D_j [S^2 - 2Sa_j^\dagger a_j + a_j^\dagger a_j a_j^\dagger a_j] \quad (3.50)$$

As relações de comutação (3.45) para os operadores de bosons nos permitem escrever:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A^U &= \sum_j D_j (S_j^z)^2 = - \sum_j D_j [S^2 - 2Sa_j^\dagger a_j + a_j^\dagger (1 + a_j^\dagger a_j) a_j] \quad (3.51) \\ &\simeq 2S \sum_j D_j a_j^\dagger a_j (1 - 1/2S) \end{aligned}$$

onde desprezamos termos de ordem mais alta. Rotulamos agora o fator $1-1/2S$ de η . Para a parte não-uniaxial do Hamiltoniano, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A^N &= -S \sum_j F_j [a_j a_j - a_j a_j^\dagger a_j a_j / 4S - a_j^\dagger a_j a_j a_j / 4S - a_j a_j^\dagger a_j a_j^\dagger a_j a_j / 32S^2 \dots \quad (3.52) \\ &\quad + a_j^\dagger a_j^\dagger - a_j^\dagger a_j^\dagger a_j^\dagger a_j / 4S - a_j^\dagger a_j^\dagger a_j a_j^\dagger / 4S - a_j^\dagger a_j^\dagger a_j a_j^\dagger a_j a_j^\dagger / 32S^2 \dots] \end{aligned}$$

Novamente usamos as relações de comutação para escrever $a_j a_j^\dagger$ como $(1 + a_j^\dagger a_j)$. Desprezando termos de ordens superiores nos operadores, temos:

$$\mathcal{H}_A^N = -S \sum_j F_j [a_j a_j (1 - 1/4S - 1/32S^2 \dots) + a_j^\dagger a_j^\dagger (1 - 1/4S - 1/32S^2 \dots)] \quad (3.53)$$

Notamos que

$$1 - \frac{1}{4S} - \frac{1}{32S^2} \dots = (1 - \frac{1}{2S})^{1/2} = \eta^{1/2} \quad (3.54)$$

Logo, a parte anisotrópica do nosso Hamiltoniano fica:

$$\mathcal{H}_A = 2S\eta \sum_j D_j a_j^\dagger a_j - S\eta^{1/2} \sum_j F_j (a_j a_j + a_j^\dagger a_j^\dagger) \quad (3.55)$$

3.2.2 Super-rede Não Linear

Nesta seção iremos tratar do caso mais específico onde consideramos as interações entre as ondas de spin. Empregaremos uma teoria microscópica, mas ao invés de usar um formalismo de matriz transferência, a relação de dispersão das ondas de spin é obtida considerando-se a parte do Hamiltoniano de apenas “um corpo” (isto é, os termos com dois operadores de magnons). Este termo dá origem a um problema de autovalores $2N \times 2N$, onde N é o número total de camadas atômicas da super-rede.

Por outro lado, a descrição de processos de ordem superior devidos às interações entre os modos das ondas de spin é feita levando-se em conta os termos de “dois corpos” no Hamiltoniano, que envolvem quatro operadores de magnons. Uma teoria de perturbação pode ser então desenvolvida para obter os deslocamentos na energia das ondas de spin, e para estudar como a ordem de longo alcance (que surge ao se incluir os campos de anisotropia) pode afetar suas propriedades não lineares. Isto nos permite obter resultados aplicáveis a sistemas de multicamadas e testar as limitações das teorias macroscópicas, o que pode ser feito através da extensão de diagramas prévios de função de Green em filmes de Heisenberg para geometrias de super-rede^{72,73}.

Nosso Modelo

Nossa super-rede é a mesma tratada anteriormente, e cuja geometria está descrita na figura 3.1. Em uma notação um pouco diferente, nosso Hamiltoniano fica:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{i,j} \mathbf{S}_i^\nu \cdot \mathbf{S}_j^\nu - g\mu_B H_0 \sum_{i,j} S_i^{z\nu} + \mathcal{H}_A \quad (3.56)$$

com

$$\mathcal{H}_A = - \sum_{i,j} \left\{ D^\nu (S_i^{z\nu})^2 + F^\nu [(S_i^{x\nu})^2 - (S_i^{y\nu})^2] \right\} \quad (3.57)$$

Aqui os campos D^ν e F^ν são as amplitudes uniaxiais e não-uniaxiais dos campos anisotrópicos, respectivamente. O índice $\nu = A, B, I$ ou S representa a localização

geométrica do parâmetro, ou seja, no meio A , no meio B , na interface $A - B$ ou na superfície externa da super-rede, respectivamente. Usando a transformação de Holstein-Primakoff podemos expressar o Hamiltoniano na forma $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^{(2)} + \mathcal{H}^{(4)} + \dots$, onde o índice especifica o número de operadores de criação e destruição de magnons. A excitação *linear* das ondas de spin surge devido ao termo

$$\mathcal{H}^{(2)} = \sum_{\mathbf{q}nn'} \left\{ A_{nn'}^{(2)}(\mathbf{q}) a_{\mathbf{q}n}^\dagger a_{\mathbf{q}n'} + B_{nn'}^{(2)}(\mathbf{q}) [a_{\mathbf{q}n} a_{-\mathbf{q}n'} - a_{\mathbf{q}n}^\dagger a_{-\mathbf{q}n'}^\dagger] \right\} \quad (3.58)$$

onde $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ é um vetor de onda bi-dimensional paralelo às superfícies, e n e n' ($= 1, 2, \dots, N$) são os índices das camadas. Aqui, os fatores de amplitudes são dados por

$$A_{nn'}^{(2)}(\mathbf{q}) = \{g\mu_B H_0 - S^\nu [u_n(0) - u_n(\mathbf{q}) + r_{n,n+1} + r_{n,n-1} - D^\nu]\} \delta_{nn'} \quad (3.59)$$

$$- S^\nu [r_{n,n+1} \delta_{n',n+1} + r_{n,n-1} \delta_{n',n-1}]$$

$$B_{n,n'}^{(2)}(\mathbf{q}) = S^\nu F^\nu \delta_{nn'} \quad (3.60)$$

onde $u_n(\mathbf{q}) = 2J^\nu \sigma(\mathbf{q})$ e $r_{n,n\pm 1}(\mathbf{q}) = J^\nu$ são as transformadas de Fourier intra-camadas e inter-camadas, respectivamente, com $\sigma(\mathbf{q}) = \cos(q_x a) + \cos(q_y a)$. Se o Hamiltoniano (3.58) é diagonalizado através do método usual, as energias E das ondas de spin lineares são encontradas das soluções da equação de auto-valores

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{q}) - E\mathbf{I}_N & 2\mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{q}) \\ 2\mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{q}) & \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{q}) - E\mathbf{I}_N \end{pmatrix} = 0 \quad (3.61)$$

onde $\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{q})$ e $\mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{q})$ são matrizes $N \times N$ com elementos definidos por (3.59) e (3.60). Aqui, \mathbf{I}_N é a matriz unitária de N -ésima ordem.

Vamos agora descrever o termo que fornece os aspectos não-lineares dominantes, que é o termo $\mathcal{H}^{(4)}$:

$$\mathcal{H}^{(4)} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}nn'} \{A_{nn'}^{(4)}(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}'n}^\dagger a_{\mathbf{q}-\mathbf{k}'n}^\dagger a_{\mathbf{q}-\mathbf{k}n} a_{\mathbf{k}n'}\} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}
& + A_{nn'}^{(4)}(-\mathbf{k}') a_{\mathbf{k}'n'}^\dagger a_{\mathbf{q}-\mathbf{k}'n'}^\dagger a_{\mathbf{q}-\mathbf{kn}} a_{\mathbf{kn}} \\
& - 2B_{nn'}^{(4)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') a_{\mathbf{k}'n'}^\dagger a_{\mathbf{q}-\mathbf{k}'n'}^\dagger a_{\mathbf{q}-\mathbf{kn}} a_{\mathbf{kn}'} \\
& - \frac{1}{4} F^\nu [a_{\mathbf{qn}}^\dagger a_{\mathbf{q}-\mathbf{k}-\mathbf{k}'n} a_{\mathbf{k}'n} a_{\mathbf{kn}} + O(a^5)]
\end{aligned}$$

os coeficientes são dados por

$$A_{nn'}^{(4)}(\mathbf{q}) = u_n(\mathbf{q}) \delta_{nn'} + r_{n,n+1} \delta_{n',n+1} + r_{n,n-1} \delta_{n',n-1} \quad (3.63)$$

$$B_{nn'}^{(4)}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} A_{nn'}^{(4)}(\mathbf{q}) D^\nu \delta_{nn'} \quad (3.64)$$

A auto-energia $\Sigma_\lambda(\mathbf{q})$ para um dado ramo da onda de spin e um dado vetor de onda planar \mathbf{q} é agora convenientemente calculado através de uma teoria de perturbação diagramática. Os detalhes são omitidos, mas podem ser vistos na referência [74]. Primeiro é preciso fazer uma transformação de Bogolyubov-Tyablikov:

$$\begin{aligned}
a_{q,n} &= \sum_l S_{nl}(q) \alpha_{ql} + T_{nl}^*(q) \alpha_{-ql} \\
a_{q,n}^\dagger &= \sum_l S_{nl}^*(q) \alpha_{q1}^\dagger + T_{nl}(q) \alpha_{-ql}
\end{aligned} \quad (3.65)$$

Os produtos do tipo $a^\dagger a^\dagger a a$, $a^\dagger a^\dagger a^\dagger a$ e $a^\dagger a a a$ devem ser escritos em termos dos novos operadores α , e a expressão formal para o deslocamento de energia $\Delta E_\lambda(\mathbf{q})$ devido aos processos de quatro magnons envolvendo ondas de spin de ramos distintos ou do mesmo ramo é dada por

$$\Delta E_\lambda = - \sum_{Q''} \Lambda_a n^0(E_{Q''}) \quad (3.66)$$

onde $n^0(x)$ é a população de magnons em equilíbrio térmico, e Λ_a é o coeficiente das amplitudes para os processos de espalhamento de quatro magnons. Na próxima seção apresentaremos os resultados numéricos relativos aos modos das ondas de spin anisotrópicas, para os casos lineares e não-lineares.

3.3 Resultados Numéricos

Nesta seção apresentaremos os resultados numéricos relativos às ondas de spin em meios anisotrópicos. Em primeiro lugar apresentaremos os resultados para os modos lineares, usando o formalismo de matriz-transferência e de segunda quantização, e depois os modos não-lineares. Os parâmetros físicos principais considerados são o spin S_J , e as anisotropias $F_{JJ}(= F_J/J_J)$ e $F_{JS}(= F_{SJ}/J_J)$, $J = A, B$. As frequências são dadas em unidades de $\Omega = \omega/S_A J_A$ ($\hbar = 1$)

A figura 3.4 mostra os modos de volume (região sombreada) das ondas de spin que se propagam em uma super-rede infinita, obtidos através do método da matriz-transferência, que correspondem às bandas com soluções permitidas, limitadas pelas equações $QL = 0$ e $QL = \pi$, onde Q é o vetor de onda da super-rede (seção 3.1). Como no capítulo anterior, esta ordem se inverte quando se passa de uma banda para outra. As figuras 3.5, 3.6 e 3.7 mostram exemplos das relações de dispersão em uma super-rede semi-infinita considerando a aproximação linear (isto é, termos com $\mathcal{H}^{(2)}$ do Hamiltoniano total), mas usando o formalismo de segunda quantização. Novamente, consideramos a frequência $\Omega = \omega/S_A J_A$, mas agora nosso vetor de onda reduzido é $K = k_x a/\pi$. Nosso material A é o ferromagneto *EuS*, enquanto que para o material B nós consideramos como sendo o CrBr_3 ^{67,75}. Nos gráficos que seguem, o número de camadas na célula unitária da super-rede é $n_A = n_B = 3$, e a magnitude dos spins são $S_A = 1.0$, $S_B = 1.5$, respectivamente. Os termos de troca, em unidades de J_A são: $J_B = 0.5$, $I = 1.2$ e $J_{AS} = J_{BS} = 0.25$. O campo magnético externo adimensional $g\mu_B H_0/J_A S_A$ é tomado como sendo 1. Na figura 3.5, o espectro das ondas de spin é apresentado para o caso onde não se considera a presença da anisotropia, isto é, $F = D = 0$. A figura 3.6 mostra o caso anisotrópico, isto é, onde ambos os materiais possuem uma componente uniaxial e outra não-uniaxial dos campos anisotrópicos. Podemos também estudar o caso uniaxial-não-uniaxial, onde o material A apresenta somente a componente uniaxial do campo anisotrópico, e o material B apresenta ambas as componentes. Isto está ilustrado na figura 3.7. O comportamento dos espectros é bastante similar para frequências mais altas, e o conjunto das curvas que

estão juntas representam os modos de volume, que são as regiões limitadas por $q_z a/\pi = 0$ e 1. Nota-se a existência de modos superficiais nas regiões entre as bandas de volume. Para o caso uniaxial-não-uniaxial, a figura 3.7 mostra que os modos de superfície são virtuais neste caso, isto é, eles não existem em toda a faixa de soluções para K . Por exemplo, existem 3 modos, o primeiro em $\Omega = 3.75$, evanescendo na banda de volume em $K = 0.3$, o segundo existe na faixa $0.33 < K < 0.52$, e o terceiro sai da banda de volume em $K = 0.53$, evanescendo-se novamente na próxima banda de volume perto do limite da zona de Brillouin.

As figuras 3.8 e 3.9 representam os casos onde se incluiu a contribuição diagonal para o deslocamento da energia, $\Delta E_1(\mathbf{q})(\lambda = 1, l' = 1)$, ou seja, consideramos o ramo inferior das soluções. A figura 3.8 mostra o comportamento na ausência de anisotropia, enquanto que a figura 3.9 representa o caso onde se incluiu as anisotropias. Todas as somas das contribuições foram feitas numericamente. As linhas contínuas representam a energia renormalizada (isto é, com o deslocamento da energia incluído) e as linhas tracejadas representam a energia não-renormalizada (ou linear). Os parâmetros físicos são os mesmos das figuras anteriores. Para o caso isotrópico (sem os campos anisotrópicos) o deslocamento na energia somente é notado na segunda metade da primeira zona de Brillouin (em $K = 0.5$), não sendo notado na primeira metade (veja figura 3.8). No caso anisotrópico, vemos uma maior sensibilidade à renormalização da energia, sendo manifestada em toda a zona de Brillouin.

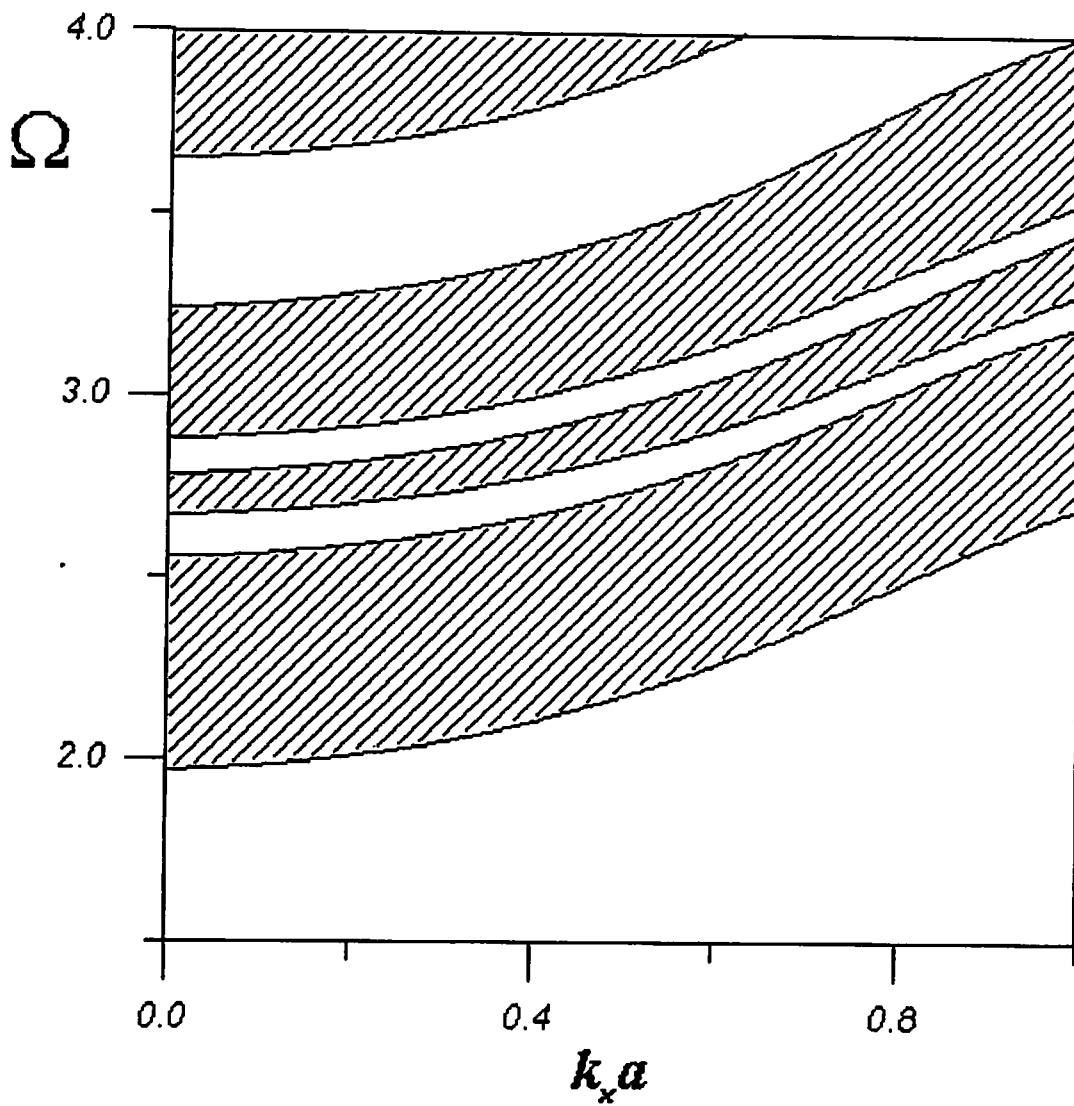


Figura 3.4: Relação de dispersão Ω versus $k_x a$ para os modos de volume em uma super-rede linear com campo de anisotropia. Os parâmetros físicos são $n_A = n_B = 3$, $S_A = 1.5$, $S_B = 2.0$, $I_A = 1.2$, $I_B = 2.4$, $H_0/J_A = 1.0$ e $H_0/J_B = 2.0$. Os parâmetros anisotrópicos são $D_{AA} = D_{BB} = 1.2$, $F_{AA} = F_{BB} = 0.8$, $F_{AS} = 0.8$ e $F_{BS} = 0.6$.

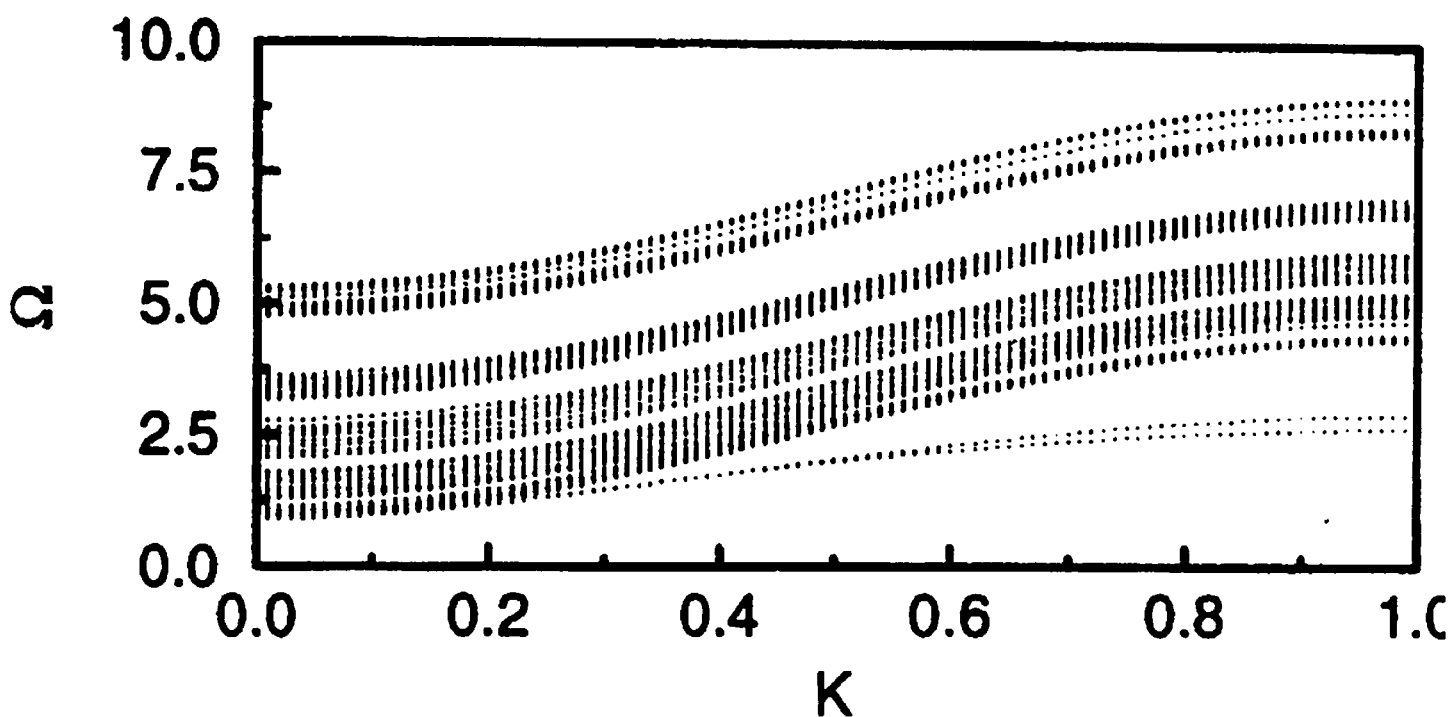


Figura 3.5: Relação de dispersão, modos de volume e superfície, para uma super-rede finita na aproximação linear. Caso sem anisotropia, ou seja, $D^\nu = F^\nu = 0$.

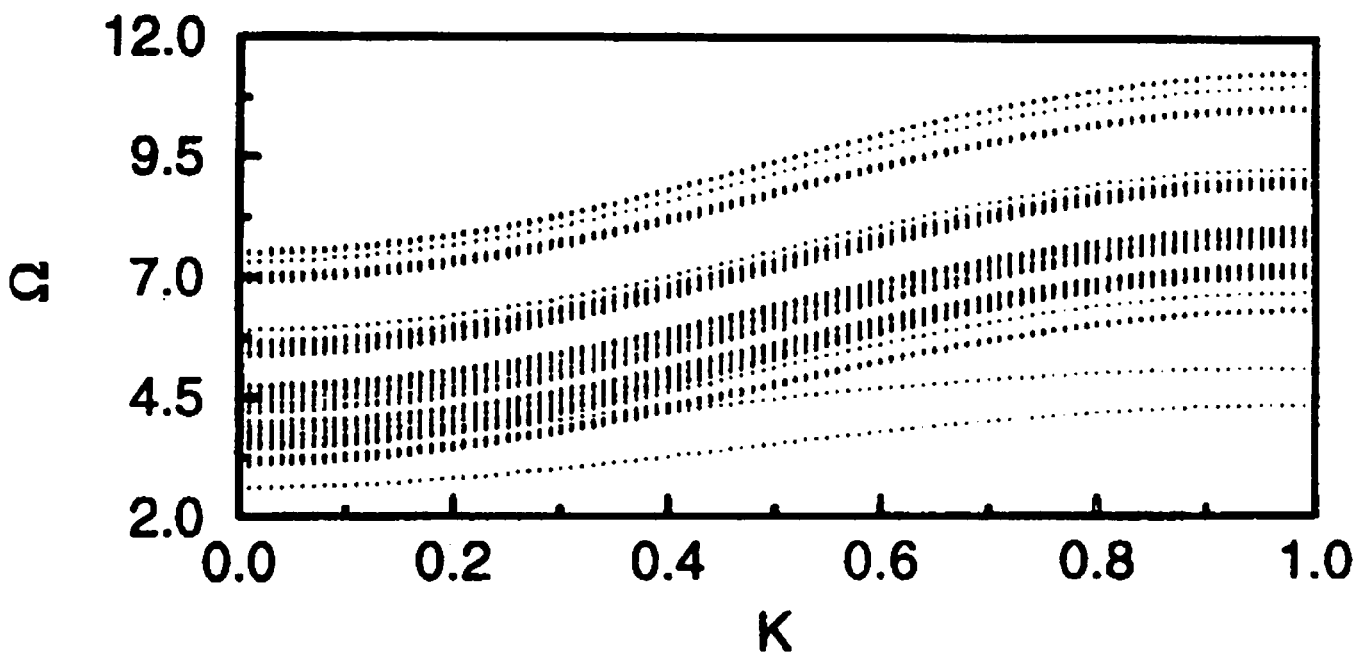


Figura 3.6: Mesmo que a figura anterior, mas agora consideramos os campos anisotrópicos como sendo (em unidades de J_A): $D^A = 1.2$, $D^B = 0.6$, $D^{AS} = 1.2$, $D^{BS} = 0.45$, $F^A = F^{AS} = 0.8$, $F^B = 0.4$ e $F^{BS} = 0.3$.

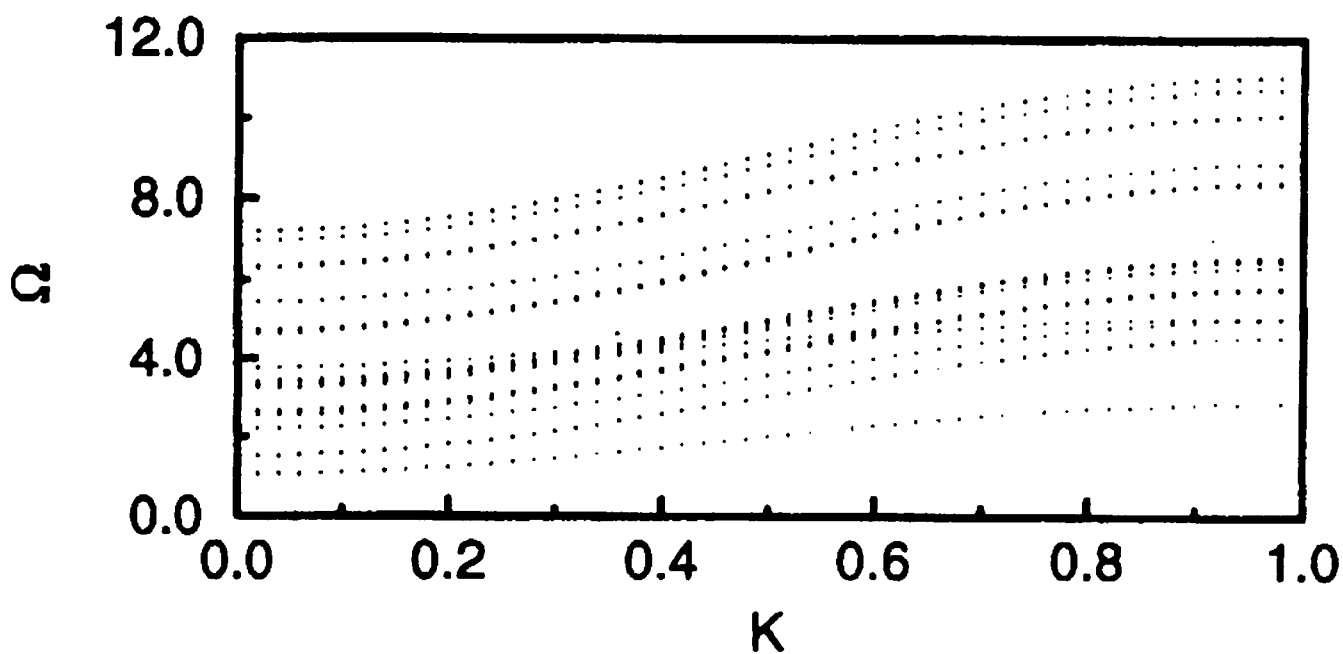


Figura 3.7: Mesmo que a figura anterior, mas agora o meio A é uniaxial, e o meio B é não-uniaxial: $D^A = D^{AS} = 1.2$, $F^A = F^{AS} = 0.8$, $F^B = 0.4$, $F^{BS} = 0.3$ e $D^B = D^{BS} = F^A = F^{AS} = 0$.

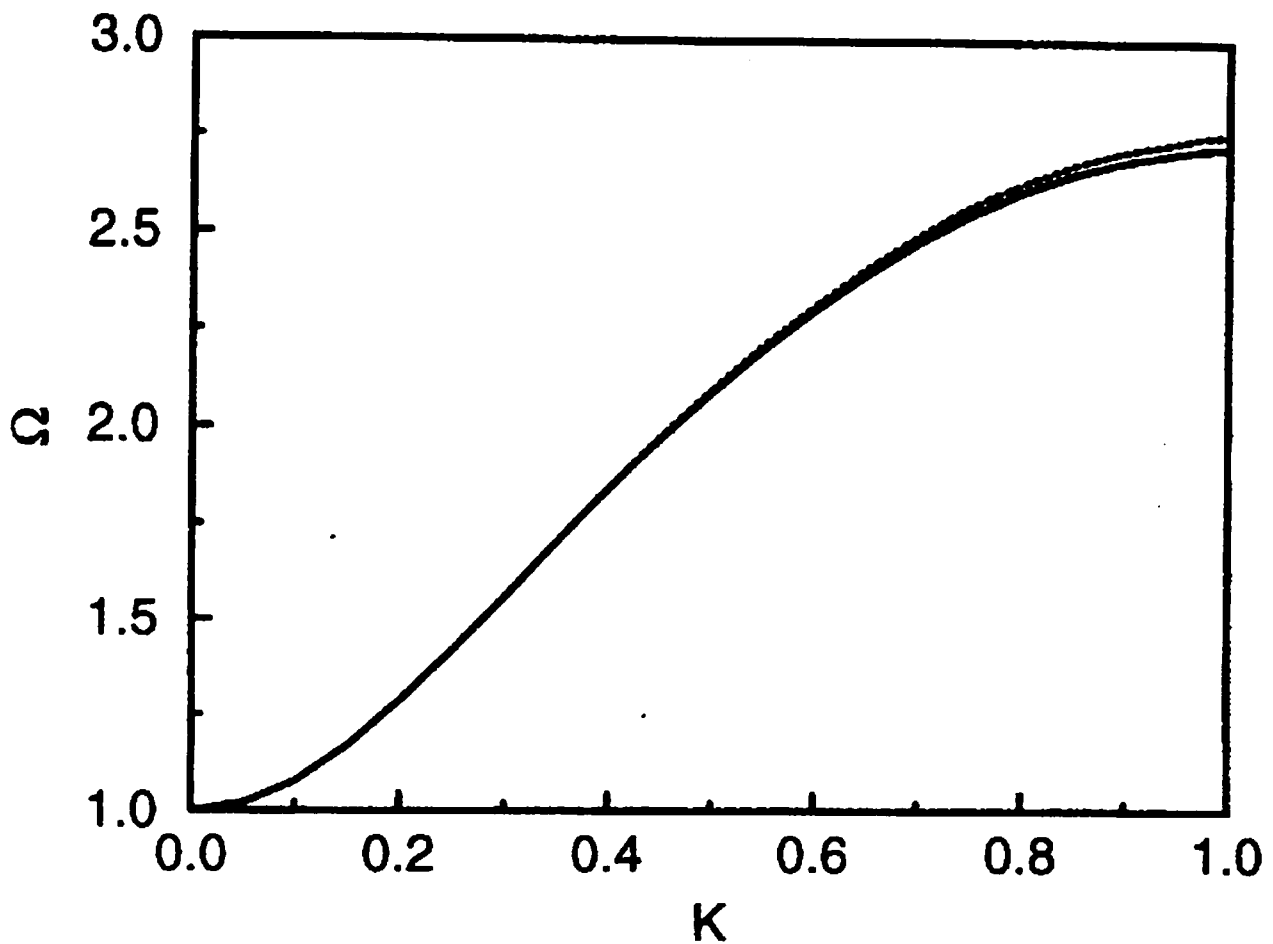


Figura 3.8: A contribuição para o deslocamento da energia quando se incluem termos superiores no Hamiltoniano, caso sem anisotropia. As linhas sólidas representam a energia renormalizada (com o deslocamento na energia incluído) e as linhas tracejadas representam a energia não-renormalizada. Os parâmetros físicos são os mesmos das figuras anteriores.

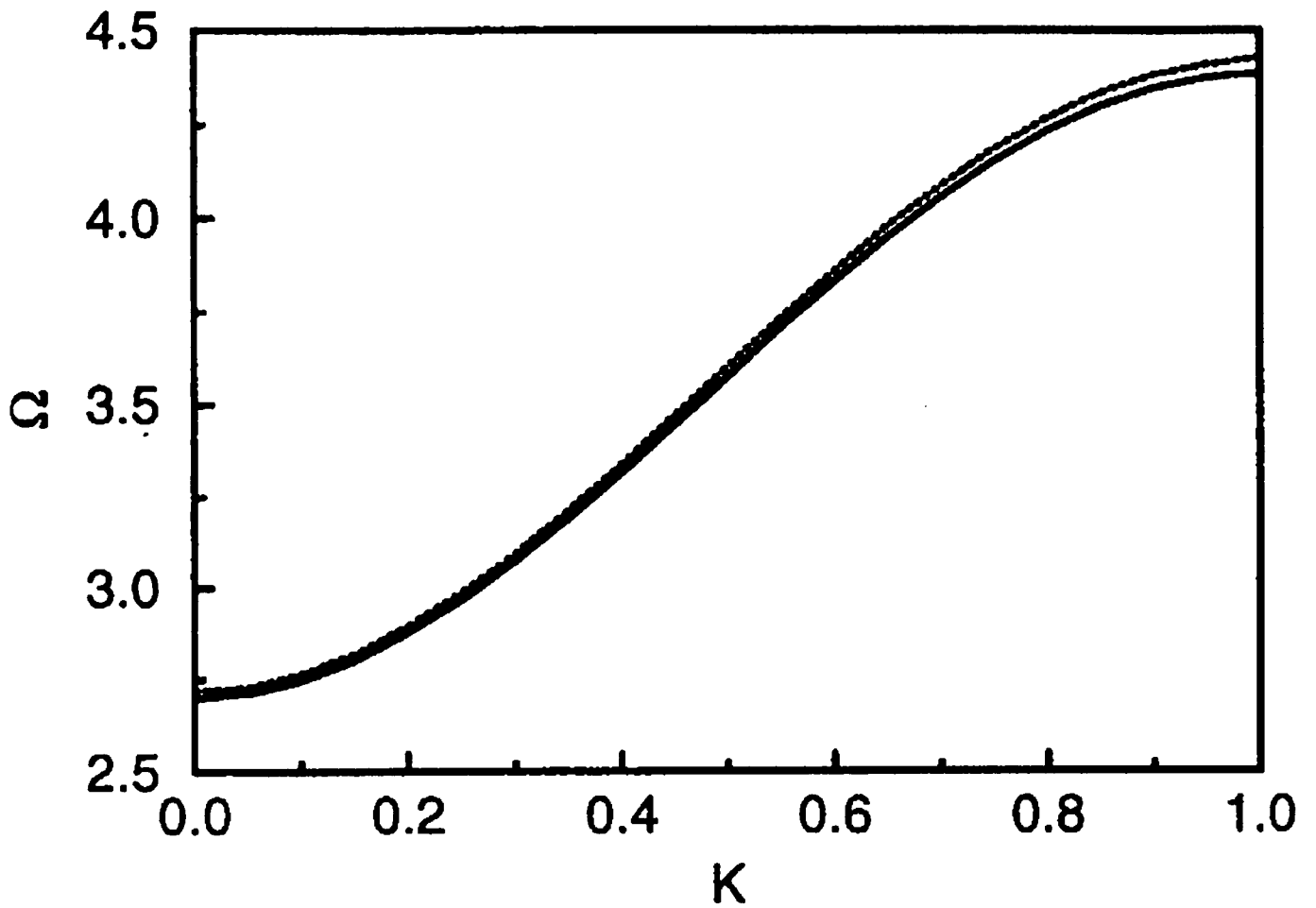


Figura 3.9: Mesmo que a figura anterior, mas agora se inclui todos os campos de anisotropia.

3.4 Conclusões

Neste capítulo apresentamos descrições teóricas usando diferentes métodos que nos permitiram estudar as propriedades lineares e não-lineares de ondas de spin que se propagam em super-redes anisotrópicas.

Para os modos lineares, obtivemos os mesmos através de um formalismo de matriz-transferência, onde tanto o Hamiltoniano quanto as soluções contém explicitamente as componentes uniaxiais e não-uniaxiais do campo anisotrópico. Observamos que a inclusão da componente não-uniaxial leva a um acoplamento entre as variáveis de spin S^+ e S^- , fato que não ocorre quando se inclui apenas a componente uniaxial da anisotropia no Hamiltoniano. Este acoplamento por sua vez implica numa complicação maior do ponto de vista matemático, duplicando a ordem da matriz-transferência T . Além disso, a componente não-uniaxial causa uma quebra de degenerescência nos modos de volume e superfície, como no Capítulo 2.

Para o caso não-linear é mister que se faça uso de uma teoria mais poderosa, que leve em conta as interações entre as ondas de spin. Isto foi feito através de teoria de perturbações diagramáticas e soluções através de equações matriciais. Neste caso, a ordem das matrizes cresce rapidamente com o número de camadas da célula unitária da super-rede. Lançamos mão de uma expansão em série do Hamiltoniano em termos dos operadores de criação e aniquilação de magnons, onde os termos que representam interações entre 2 magnons estão presentes, através de produtos de 4 operadores. Ao se considerar os campos anisotrópicos no nosso modelo, observamos que o sistema ficou mais susceptível aos efeitos não-lineares. As técnicas experimentais mais apropriadas para estudar estes modos discutidos aqui são as espectroscopias de espalhamento inelástico de luz do tipo Raman e Brillouin.

Capítulo 4

Modos Magnetostáticos das Ondas de Spin em Quasicristais

4.1 Introdução

O estudo de estruturas quasiperiódicas teve início com a descoberta espetacular de ligas de AlMn com simetria icosaédrica⁷⁶. Experimentalmente, técnicas de resfriamento rápido de ligas super-aquecidas fornecem estruturas com essas novas simetrias. Tais estruturas violam a periodicidade tridimensional de um cristal através do aparecimento de simetrias de ponto proibidas. Em outras palavras, cristais quasiperiódicos não apresentam simetrias de translação, apenas de rotação (para uma revisão, veja as refs. [77,78]).^{77,78} Exemplos de quasicristais que já foram produzidos experimentalmente são dados na tabela 4.1, juntamente com os tipos de simetria, e técnicas de produção .

Neste capítulo estudaremos a propagação de modos magnetostáticos em estruturas artificiais que apresentam algumas similaridades com os quasicristais. O termo *quasicristal* é mais apropriado para compostos cristalinos naturais ou ligas artificiais, ainda que em uma dimensão não exista nenhuma diferença entre aqueles e a estrutura quasiperiódica formada pelo empilhamento periódico incomensurável de células unitárias⁷⁹. Uma grande motivação para seu estudo surge do fato das estruturas quasiperiódicas exibirem um espec-

tro de energia (ou espectro de dispersão) altamente fragmentado, exibindo padrões auto-similares. De fato, de um ponto de vista puramente matemático, pode-se demonstrar⁸⁰⁻⁸² que seus espectros são conjuntos de Cantor no limite termodinâmico.

Liga	Composição Química (x, y, z, w em % at.)	Técnica de Produção	Tipo do Quasicristal
$Al_{100-x}Mn_x$	x = 8-20	RS, I, IM, E, GD	Ico
$Al_{100-x}Mn_x$	x = 18-21	RS, IM, I, E	Ico+Dec
$Al_{100-x}Cr_x(Fe)$	x = 15	RS, IM	Dec
$Al_{100-x}V_x$	x = 14.3, 16	RS	Ico
$Al_{100-x}Mo_x(W)$	x = 7.7	RS	Ico
$Al_{100-x}Re_x$	x = 22	RS	Ico
$Al_{100-x}Ru_x$	x = 21	RS	Ico
$Al_{100-x}Pt_x$	x = 16	RS	Dec
$Al_{100-x}Pd_x$	x = 14	RS	Dec
$Al_{100-x}Co_x$	x = 14	RS	Dec
$Al_{(1-x-y)}Si_y$	x = 0.21, y = 0.6-0.8	RS	Ico
$Al_{(1-x-y)}Mn_xNi_y$	x = 0.11, y = 0.4	SS	Ico
$Al_{(1-x-y)}Mn_xFe_y$	x = 0.9, y = 0.1-0.125 y = 2.2, 5.6	RS	Ico
$Al_{(1-x-y)}Mn_xFe_y$	x = 0.18, y = 0.2	RS	Dec
$Al_{(1-x-y-z)}Mn_xSi_yFe_z$	x = 0.17, y = 0.6, z = 0.2	RS	Ico
$Al_{(1-x-y)}Mn_xRu_y$	x = 0.17, y = 0.4	RS	Ico
$Al_{(1-x-y-z)}Mn_xRu_ySi_z$	x = 0.17, y = 0.4, z = 0.3	RS	Ico
$Al_{(1-x-y)}Cr_xRu_y$	x = 0.17, y = 0.4	RS	Ico
$Al_{(1-x-y)}Cr_xSi_y$	x = 0.2, y = 0.21	RS	Ico
	x = 0.14, y = 0.2	RS	A+Ico
$Al_{(1-x-y)}Fe_xCu_y$	x = 0.15, y = 0.2	SS, RS, A	Ico
$Al_{(1-x-y)}Ru_xCu_y$	x = 0.15, y = 0.2	SS, RS	Ico
$Al_{(1-x-y)}Li_xCu_y$	x = 0.1, y = 0.3	RS, SL	Ico
$Al_{(1-x-y-z)}Li_xCu_yMg_z$	x = 0.25, y = 0.13, z = 0.1	SS	Ico
$Al_xCu_yMn_zZn_w$	x=2.5, y=1.3, z=0.9, w=0.1	SS+A	Ico
$Al_{(1-x-y)}V_xSi_y$	x = 0.21, y = 0.9	RS	Ico
$(Al-Zn)_xMg_y$	x = 0.49, y = 0.32	RS+A	Ico
$Al_6Cu_xMg_y$	x = 1, y = 4	RS	Ico
$Al_{(1-x-y)}Cu_xM_y$	x = 0.20, y = 0.15	SS,SL	Dec
(M = Mn, Co, Ni)			
$(Al-Zn-Cu)_xMg_y$	x = 49, y = 32	RS	Ico
$Mn_xNi_ySi_z$	x = 3, y = 2, z = 1	RS	Ico
$Cd_{(100-x)}Cu_x$	x = 29.5	RS	Ico
$Fe_{(100-x)}Ti_x$	x = 66.6	RS	Ico
$Ni_{(100-x)}Cr_x$	x = 70.6	E	Dod
$Ni(Ti_{1-x}V_x)_2$	x = 0.0-0.3	RS	Ico
$Pd_{(1-x-y)}U_xSi_y$	x = 0.2, y = 0.2	RS	Ico
$Ga_xMn_yZn_z$	x=1, y=1.8-2.1, z=2.1-3.0	RS	Ico
$Cr_xNi_ySi_z$	x = 5, y = 3, z = 2	RS	Oct
$V_xNi_ySi_z$	x = 15, y = 10, z = 1	RS	Oct
CrMo-aço		Oxidação	Fase $\bar{5}$

Tabela 4.1. Composição química de sistemas quasicristalinos. Aqui, usamos a notação SL = solidificação lenta; RS = solidificação rápida; I = implantação; IM = Mistura iônica; E = Evaporação; GD = Devitrificação gasosa; A = "annealing"; Ico = Fase icosaedro; Oct = Fase octogonal; Dec = Fase decagonal; Dod = Fase dodecagonal, A = amorfo.

Com os avanços em técnicas de fabricação de multicamadas (incluindo deposição epitaxial⁷⁹, entre outras) e nas técnicas de caracterização, tais como espalhamento de raios-X ou de difração de nêutrons, é possível revelar novas características de tais estruturas. Diversas técnicas matemáticas, incluindo grupo de renormalização^{83,84} e métodos de matriz-transferência^{85,86} têm sido aplicadas com sucesso, levando a resultados impressionantes. Por exemplo, para o espectro de Thue-Morse, é sabido que o fator de estrutura é composto de uma sequência de picos δ , ainda que eles não escalem com L^2 , L sendo o comprimento típico do sistema. Neste último caso, existem alguns resultados conflitantes. Alguns autores⁸⁶ defendem que os resultados no caso das propriedades eletrônicas da sequência de Thue-Morse devem depender do tipo do modelo empregado. Contudo, isto não é conclusivo e pode não ser aplicável no caso das propriedades magnéticas.

O espectro das ondas de spin em estruturas magnéticas quasiperiódicas tem sido recentemente investigado, considerando-se a natureza das soluções para o campo de ondas apropriado em cada filme. Os modos nestas estruturas são acoplados através das interfaces (via condições de contorno), e são calculados com a assistência do teorema de Bloch, quando apropriado. As superfícies e interfaces nestas estruturas de camadas desempenham um papel muito importante nas propriedades do sistema inteiro e nas excitações em particular. Muitos trabalhos anteriores têm se concentrado nas excitações de ondas de spin no regime de baixas temperaturas, onde pelo menos um dos componentes é um ferromagneto ou um antiferromagneto. Além disso, dependendo da importância relativa das interações magnéticas de dipolo-dipolo e de troca, modelos distintos para o comportamento magnético podem ser aplicados. Por exemplo, para valores suficientemente pequenos do vetor de onda da excitação ($k \leq 10^7 m^{-1}$), os efeitos dipolares são dominantes, e modos magnetostáticos podem se propagar^{25,87,88} nestas estruturas (e/ou super-redes). Por outro lado, no regime onde os vetores de onda das excitações são maiores (tipicamente $k \geq 10^8 m^{-1}$ em um ferromagneto), a interação de troca, que é a força restauradora para as ondas de spin, é dominante⁸⁸⁻⁹⁰.

É nosso objetivo neste capítulo investigarmos os modos magnetostáticos que se propagam em estruturas feitas de materiais magnéticos e não-magnéticos. Existem na

literatura trabalhos^{87,88,91} onde os autores consideram a geometria onde o vetor de onda e o campo aplicado estão no mesmo plano (chamada de geometria de Voigt). Nós aqui consideraremos um vetor de onda no plano paralelo à superfície (ou interface) mas um campo externo aplicado \vec{H}_0 e uma magnetização (ou magnetização da sub-rede, no caso de um antiferromagneto) na direção perpendicular às interfaces. Nosso modelo é baseado no formalismo de matriz-transferência, o que simplifica bastante a álgebra, que de outro modo seria bem mais tediosa. A localização e as propriedades de escala do sistema são apresentadas e discutidas.

4.2 Modos Magnetostáticos em Cristais Periódicos

Existem várias maneiras de definir o regime magnetostático. Fisicamente, o vetor de onda nesse regime se situa entre as regiões eletromagnética (propagação de sinais de TV, por exemplo, onde se deve empregar a forma completa das equações de Maxwell, incluindo efeitos de retardamento) e a região de troca, onde a interação de Heisenberg, através da integral de troca, é dominante. Os vetores de onda nessa região se situam tipicamente entre 3×10^3 e 10^7 m^{-1} para ferromagnetos. Isto está ilustrado esquematicamente na figura 4.1. Outra forma de entender estas excitações é observar que os comprimentos de onda das ondas de spin nesse regime são longos o suficiente de modo que a influência das interações de troca (que são inerentemente de curto alcance) pode ser desconsiderada, mas ao mesmo tempo são curtos o suficiente de forma que

$$(2\pi/\lambda)c \gg \omega \quad (4.1)$$

onde λ é o comprimento de onda da onda de spin, ω é a frequência e c é a velocidade da luz no vácuo. Para descrever fisicamente a interação de dipolo-dipolo, lembramos que cada spin S_i tem um momento magnético $g\mu_B S_i$, e que a interação de dipolo-dipolo clássica entre todos os momentos dá uma contribuição à energia da forma

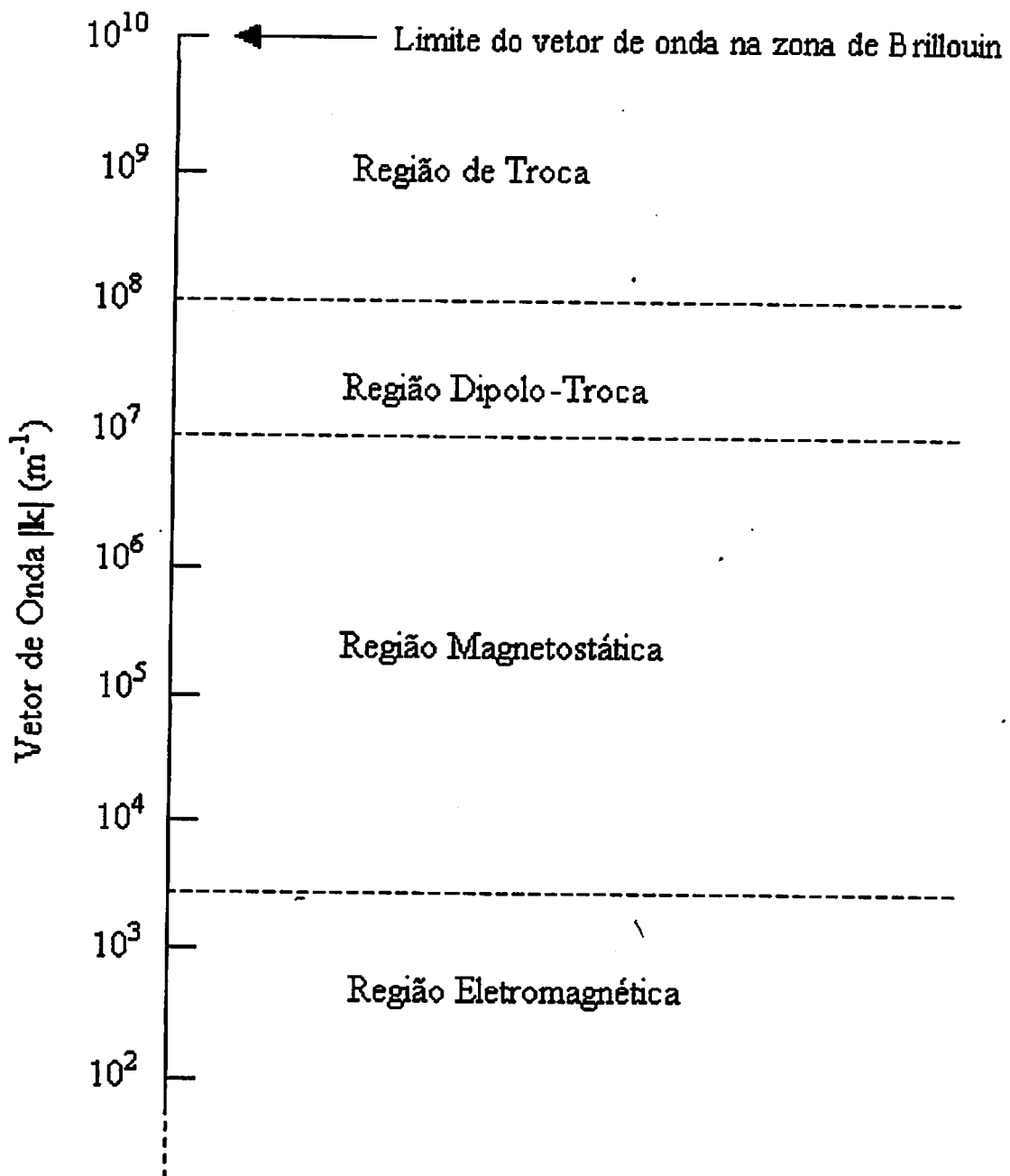


Figura 4.1: Diferentes regiões do comportamento magnético em termos da magnitude $|k|$ do vetor de onda. Os números são aproximados e podem variar para diferentes materiais.

$$\mathcal{H} = \frac{\mu_0}{4\pi} g^2 \mu_B^2 \sum_{\langle i,j \rangle} \left(\frac{\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j}{r_{ij}^3} - \frac{3(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^5} \right) \quad (4.2)$$

onde \mathbf{r}_{ij} é um vetor conectando os sítios i e j , g é o fator de Landé, e μ_B é o magneton de Bohr. Uma interação de dipolo-dipolo individual é tipicamente muito mais fraca que a interação de troca entre sítios vizinhos na rede (geralmente menor por 2 ou 3 ordens de magnitude). Então se pode afirmar que é a interação de troca que predominantemente determina o ordenamento magnético e as propriedades estáticas dos materiais magnéticos. Contudo, a influência das interações de dipolo-dipolo se tornam importantes para o estudo da dinâmica (por exemplo das ondas de spin) para longos comprimentos de onda. Essencialmente isto acontece porque a interação de troca é de curto alcance, e as interações de dipolo-dipolo são de longo alcance. Vale lembrar no entanto que quando os termos dipolares são dominantes, eles podem ser tratados microscopicamente (através do Hamiltoniano 4.2), ou quando for conveniente, macroscopicamente usando as equações de Maxwell do eletromagnetismo.

4.2.1 Modos Magnetostáticos em uma Camada Ferromagnética

Descreveremos agora brevemente os modos magnetostáticos de volume e superfície para uma camada ferromagnética finita, esclarecendo os detalhes das excitações das ondas de spin. É mais conveniente neste caso obter os resultados usando o formalismo macroscópico baseado nas equações de Maxwell (sem retardamento) ao invés de usar o método microscópico.

A configuração padrão para os modos magnetostáticos de superfície é tomar a magnetização \vec{M}_0 paralela à superfície (estudaremos depois o caso com o campo aplicado perpendicularmente à superfície). Nossa geometria está descrita na figura 4.2, com a magnetização ao longo do eixo z , e o eixo x perpendicular à superfície da camada. O vetor bi-dimensional planar $\mathbf{q}_{||}$ tem suas componentes dadas por

$$\mathbf{q}_{||} = (q_y, q_z) = q_{||}(\sin \phi, \cos \phi) \quad (4.3)$$

onde $q_{||} = (q_y^2 + q_z^2)^{1/2}$ e ϕ é o ângulo entre $q_{||}$ e \vec{M}_0 . Damon e Eshbach foram os primeiros a estudar este modelo teoricamente⁹². Existem também vários artigos descrevendo aspectos da teoria magnetostática em meios magnéticos, por exemplo Mills⁹³, Tilley⁹⁴, Wolfram e Dewames⁹⁵ e Cottam e Maradudin⁹⁶. Nossa camada consiste de um material ferromagneto de espessura L , tal que as superfícies se encontram em $x = 0$ e $x = -L$. Os casos de um meio semi-infinito ($L \rightarrow \infty$) e de um filme fino serão obtidos como casos limites.

Na região magnetostática, o comprimento de onda de qualquer excitação é muito grande comparado com o espaçamento da rede, e uma aproximação contínua para o ferromagneto deve ser válida. As variáveis macroscópicas de campo \mathbf{B} e \mathbf{H} são relacionadas por $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$, e a magnetização total \mathbf{M} na posição \mathbf{r} é dada em termos do operador de spin correspondente através da relação $\mathbf{M} = \nu_0 g \mu_B \mathbf{S}$, onde ν_0 é o número de spins por unidade de volume. Como estamos tratando do regime magnetostático, podemos utilizar o tratamento semi-clássico; e usar a *equação de torque* (equação de movimento para este sistema) :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma(\mathbf{M} \times \mathbf{B}) = \gamma\mu_0(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \quad (4.4)$$

onde $\gamma(= g\mu_B/\hbar)$ é a razão giromagnética, e \mathbf{B} e \mathbf{H} representam os campos totais efetivos. Escrevemos então

$$\mathbf{M} = M_0 \mathbf{i}_z + \mathbf{m}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (4.5)$$

$$\mu_0 \mathbf{H} = B_0 \mathbf{i}_z + \mu_0 \mathbf{h}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (4.6)$$

onde \mathbf{i} é um vetor unitário paralelo à magnetização estática M_0 e ao campo externo estático B_0 , ambos orientados na direção z , e \mathbf{m} e \mathbf{h} são as componentes oscilantes dos campos, com frequência ω . Usando as equações (4.5) e (4.6) em (4.4), e usando a aproximação linear, ou seja desprezando termos menores de segunda ordem em \mathbf{m} e \mathbf{h} (porque $|\vec{m}| \ll M_0$ em $T \leq T_C$), obtemos

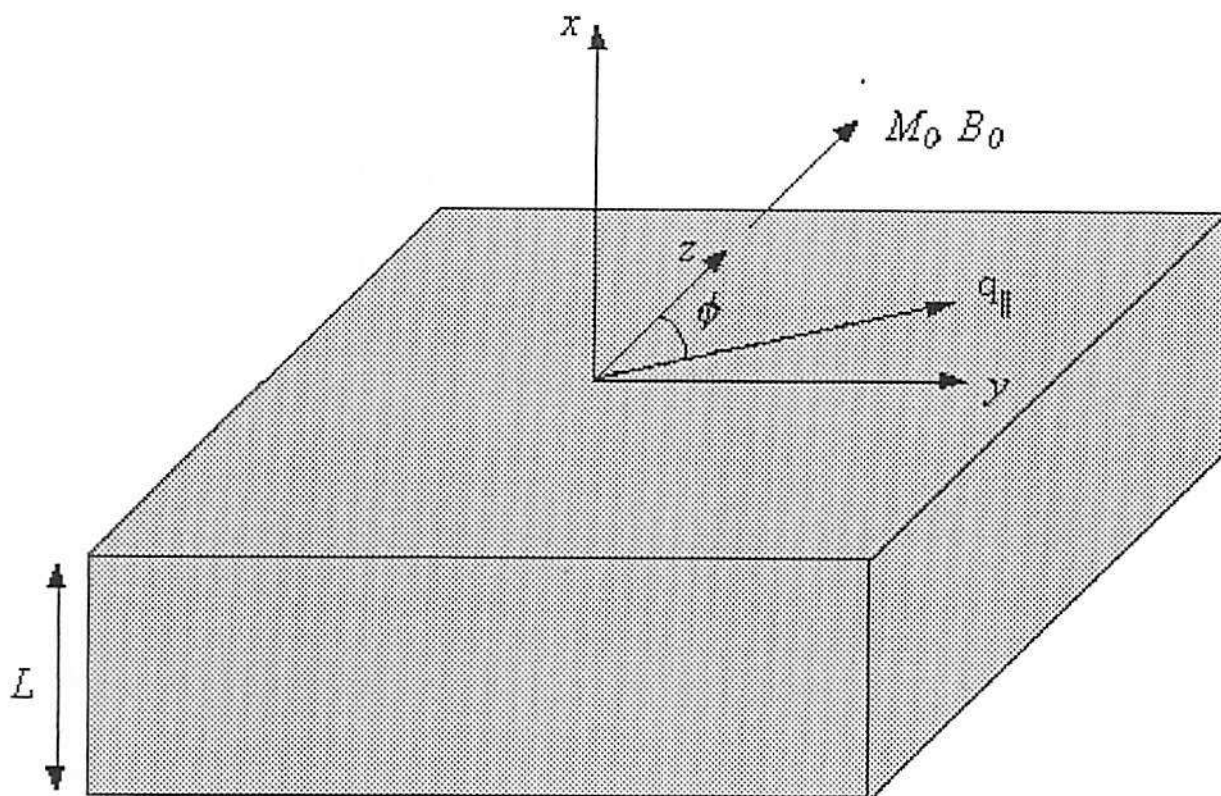


Figura 4.2: Geometria e eixos coordenados de nosso modelo de camada magnética

$$-i\omega\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \gamma\mathbf{i}_z \times [\mu_0 M_0 \mathbf{h}(\mathbf{r}) - B_0 \mathbf{m}(\mathbf{r})] \quad (4.7)$$

isto pode ser re-escrito como uma relação de susceptibilidade envolvendo as componentes x e y dos campos oscilantes, isto é:

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_a & i\chi_b \\ i\chi_b & \chi_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

onde

$$\chi_a = \omega_m \omega_0 / (\omega_0^2 - \omega^2) \quad (4.9)$$

$$\chi_b = \omega_m \omega / (\omega_0^2 - \omega^2) \quad (4.10)$$

e também definimos as frequências

$$\omega_0 = \gamma B_0, \quad \omega_m = \gamma \mu_0 M_0 \quad (4.11)$$

Das equações de Maxwell (sem considerar os efeitos de retardamento, como discutido anteriormente) os campos $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ têm que satisfazer as relações

$$\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \cdot [\mathbf{h}(\mathbf{r}) + \mathbf{m}(\mathbf{r})] = 0 \quad (4.12)$$

A primeira das equações acima é automaticamente satisfeita se \mathbf{h} é derivado de um potencial escalar ψ , i.e:

$$\mathbf{h} = \nabla \psi \quad (4.13)$$

usando a equação (4.8) e a segunda de (4.12), a equação para ψ dentro da camada ferromagnética é

$$(1 + \chi_a) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.14)$$

enquanto que fora do ferromagneto nós temos simplesmente

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (4.15)$$

Devido à simetria translacional de nossa geometria nas direções y e z , segue que $\psi(\mathbf{r})$ deve ser da forma $\psi_1(x) \exp(i\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \vec{\rho})$, onde $\vec{\rho} = (y, z)$. Para (4.14) e (4.15) serem satisfeitas, e também para se ter $\psi = 0$ em $x = \pm\infty$ (a fim de se evitar divergências não-físicas), devemos ter

$$\psi = \begin{cases} a_1 \exp(-q_{\parallel} x) \exp(i\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \rho) & x > 0 \\ [a_2 \exp(iq_x x) + a_3 \exp(-iq_x x)] \exp(i\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \rho) & 0 > x > -L \\ a_4 \exp(iq_{\parallel} x) \exp(i\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \rho) & x < -L \end{cases} \quad (4.16)$$

a componente q_x que pode ser real ou imaginária, é dada por

$$(1 + \chi_a)(q_x^2 + q_{\parallel}^2) - \chi_a q_x^2 = 0 \quad (4.17)$$

os coeficientes a_j ($j = 1, \dots, 4$) podem ser determinados aplicando-se as condições de contorno eletromagnéticas usuais (a continuidade da componente tangencial de \mathbf{h} e da normal de \mathbf{B}) em $x = 0$ e $x = -L$. No caso magnetostático isto é equivalente a exigir que (i) ψ deve ser contínua através de uma interface, e (ii) $(h_x + m_x)$ dentro do ferromagneto em $x = 0$ e $x = -L$ deve ser igual h_x fora da camada. Estas condições levam a quatro equações lineares homogêneas para os quatro coeficientes a_j . A condição para um solução é:

$$q_{\parallel}^2 + 2q_{\parallel}q_x(1 + \chi_a) \cot(q_x L) - q_x^2(1 + \chi_a)^2 - q_y^2 \chi_b^2 = 0 \quad (4.18)$$

quando q_x é substituído de (4.17), a equação acima determina a relação de dispersão dos modos de propagação das ondas de spin.

As soluções para as frequências desses modos se tornam particularmente simples quando $q_x = 0$, i.e., $\phi = 90^\circ$. Isto corresponde aos modos se propagando perpendicularmente aos campos aplicados, e essa configuração chama-se *geometria de Voigt*. Em

primeiro lugar, vemos que (4.17) é satisfeita se $\chi_a = -1$. De (4.9) esta condição é satisfeita para $\omega = \pm\omega_B$, onde

$$\omega_B = [\omega_0(\omega_0 + \omega_m)]^{1/2} \quad (4.19)$$

Isto representa a frequência dos modos magnetostáticos de volume na camada, e é de fato equivalente ao resultado obtido quando se considera a equação de movimento da mecânica quântica para um operador qualquer A :

$$i\frac{dA}{dt} = [A, \mathcal{H}] \quad (\hbar = 1) \quad (4.20)$$

onde aqui \mathcal{H} é o Hamiltoniano do sistema, e A é o operador de spin S^\pm . Vale notar que (4.19) é independente das componentes q_x e q_y do vetor de onda. A equação (4.17) pode ser satisfeita se $q_x = \pm iq_{||}$, e estas possibilidades correspondem a *modos de superfície*, pois pode-se notar que com isto a segunda equação em (4.16) possui soluções localizadas (decaimento exponencial das amplitudes), ao invés das soluções do tipo onda-plana para $0 > x > -L$. As duas soluções de superfície possuem uma frequência comum $\omega_S(\mathbf{q}_{||})$, que pode ser encontrada facilmente substituindo q_x em (4.18). Usando (4.9) e (4.10), o resultado pode ser escrito como

$$\omega_S(\mathbf{q}_{||}) = [(\omega_0 + \omega_m/2)^2 - \omega_m^2 \exp(-2q_{||}L)/4]^{1/2} \quad (4.21)$$

É importante notar que as soluções dos modos (dadas em termos dos coeficientes a_j em (4.16)) são diferentes para os dois estados de superfície. Se $q_y > 0$, pode ser demonstrado que $q_x = iq_{||}$ ou $q_x = -iq_{||}$ corresponderiam a estados de superfícies localizados perto da superfície *inferior* (em $x = -L$) ou da superfície superior (em $x = 0$), respectivamente. Por outro lado, se $q_y < 0$ teremos o efeito inverso. Este efeito incomum é conhecido como *propagação não-recíproca*. De (4.19) e (4.21) segue que ω_S é maior que ω_B , com frequências limites dos modos dadas por

$$\omega_S(q_{\parallel}) = \begin{cases} [\omega_0(\omega_0 + \omega_m)]^{1/2} & (q_{\parallel}L \ll 1) \\ (\omega_0 + \frac{1}{2}\omega_m) & (q_{\parallel}L \gg 1) \end{cases} \quad (4.22)$$

a última das equações acima corresponde aos modos magnetostáticos de superfície para um ferromagneto semi-infinito. O comportamento de ω_B e ω_S como função de $q_{\parallel}L$ é ilustrado na figura 4.3.

Quando $q_z \neq 0$ os modos magnetostáticos de volume e superfície podem ainda serem investigados usando (4.17), ainda que os resultados sejam mais complicados. Para os modos de superfície, os valores imaginários de q_x são agora $q_x = \pm i\beta$, onde

$$\beta = \left[q_y^2 + \frac{q_z^2}{(1 + \chi_a)} \right]^{1/2} \quad (4.23)$$

e a quantidade dentro dos colchetes deve ser positiva. Portanto a constante de atenuação é transformada de q_y para β . De (4.18), os modos de superfície satisfazem

$$q_{\parallel}^2 + 2q_{\parallel}\beta(1 + \chi_a) \coth(\beta L) - \beta^2(1 + \chi_a)^2 - q_y^2\chi_b^2 = 0 \quad (4.24)$$

Algumas das características gerais das relações de dispersão estão esboçadas na figura 4.4, onde as frequências são mostradas em função das componentes q_y e q_z do vetor de onda no plano yz , q_{\parallel} . Para um valor geral de q_z o espectro dos modos magnetostáticos de volume consiste de "folhas" discretas, que se tornam degeneradas em $\omega = [\omega_0(\omega_0 + \omega_m)]^{1/2}$ no limite em que $q_z \rightarrow 0$. Estas folhas correspondem a soluções com q_x real em (4.17) e na prática são suficientemente próximas para dar um espectro quase contínuo de modos de volume. As frequências são

$$\omega_B(\mathbf{q}) = [\omega_0(\omega_0 + \omega_m) - \omega_0\omega_m q_z^2/q^2]^{1/2} \quad (4.25)$$

Portanto os modos de volume se situam numa faixa de frequência entre ω_0 e $[\omega_0(\omega_0 + \omega_m)]^{1/2}$. Acima da região de volume na figura 4.4 existe uma única "folha" correspondendo

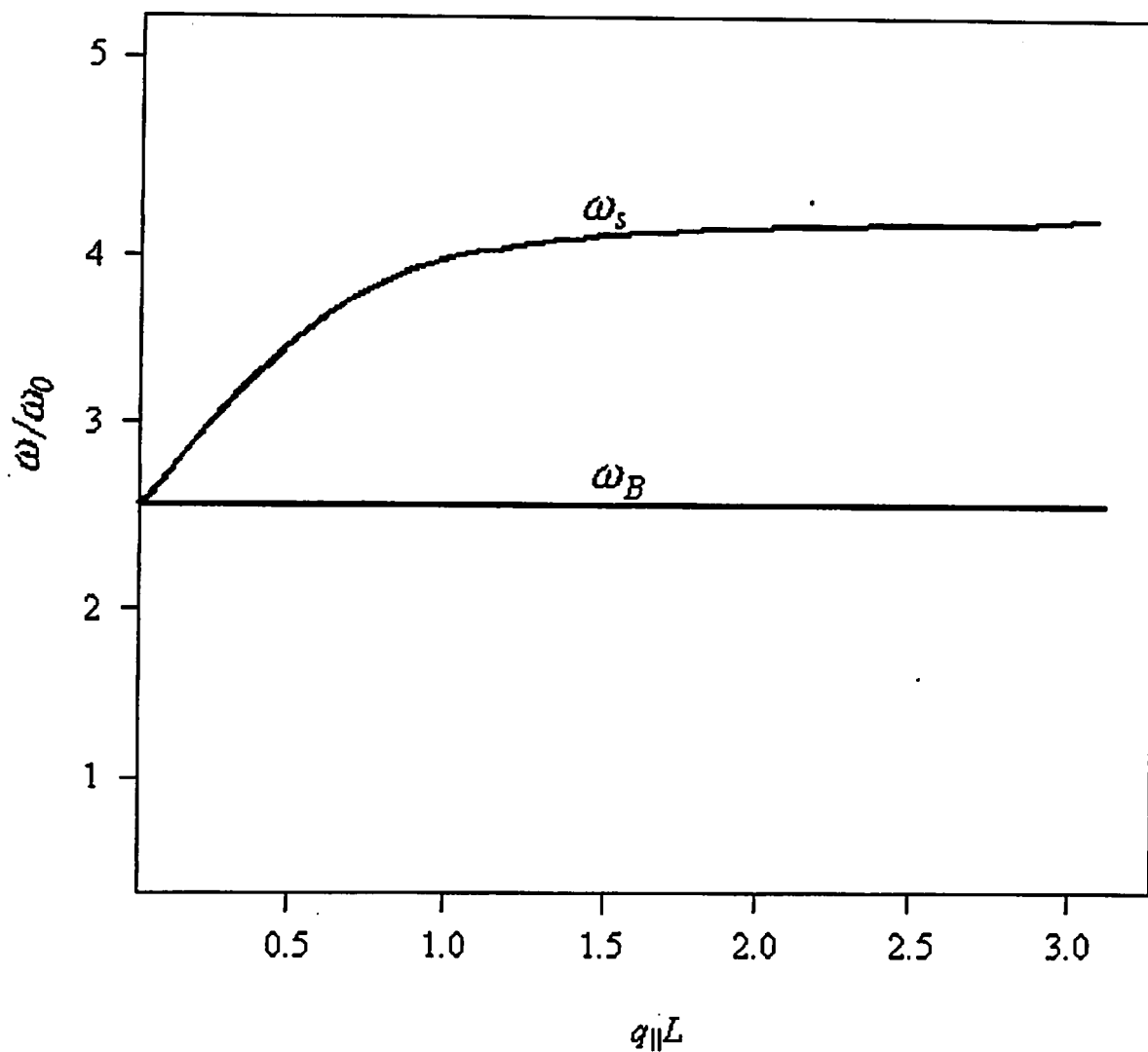


Figura 4.3: Dependência das frequências dos modos magnetostáticos de volume e superfície com $q_{\parallel}L$ para um material ferromagneto. Aqui, $\omega/\omega_0 = 6$, e consideramos $q_z = 0$.

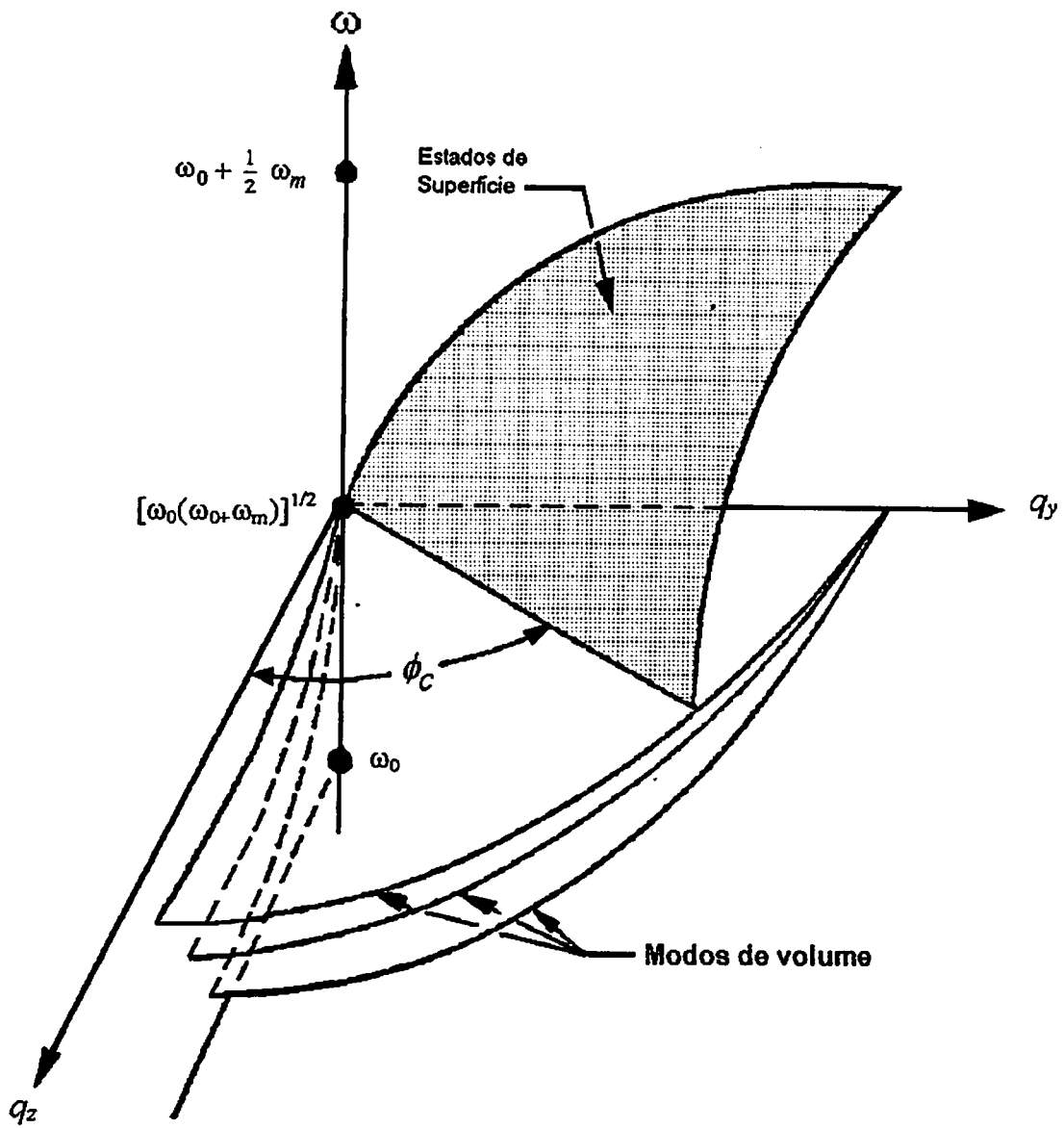


Figura 4.4: Gráfico esquemático das curvas de dispersão para os modos magnetostáticos em uma camada ferromagnética como função de q_y e q_z .

aos modos de superfície (região sombreada). A frequência dos modo de superfície diminui quando o vetor de onda da propagação é girado na direção do eixo q_z : por exemplo, se $q_{||}L \gg 1$ a frequência do modo de superfície é

$$\omega_s(\mathbf{q}_{||}) = \frac{1}{2}[(\omega_0/\sin\phi) + (\omega_0 + \omega_m)\sin\phi] \quad (4.26)$$

Quando $\mathbf{q}_{||}$ se afasta do eixo y (ou em outras palavras, quando ϕ se afasta de 90°) a magnitude de $\omega_s(\mathbf{q}_{||})$ diminui até que a um ângulo crítico ela atinge o valor $[\omega_0(\omega_0 + \omega_m)]^{1/2}$ correspondendo ao topo da região dos magnons de volume (figura 4.4). De fato, a equação (4.26) continua válida somente para $\phi_c < \phi < 180^\circ - \phi_c$, onde ϕ_c é dado por

$$\sin\phi_c = [\omega_0/(\omega_0 + \omega_m)]^{1/2} \quad (4.27)$$

Portanto os modos magnetostáticos de superfície são previstos para terem propriedades de propagação não-recíproca, no sentido que $\omega_s(\mathbf{q}_{||}) \neq \omega_s(-\mathbf{q}_{||})$. De fato nenhum modo de superfície é permitido, localizado na *mesma* superfície, quando $\mathbf{q}_{||}$ é invertido. O comportamento da inversão de $\mathbf{q}_{||}$ é ilustrado na figura 4.5 para o caso de $\phi = 90^\circ$. Nós supomos que para uma direção de $\mathbf{q}_{||}$ existe um modo de superfície localizado na superfície inferior da camada, como na figura 4.5(a). Então se $\mathbf{q}_{||}$ tem sua direção invertida, mantendo-se B_0 e M_0 fixos, o novo modo de superfície é localizado próximo da superfície superior, como na figura 4.5(b). Os dois modos são degenerados em frequência e têm o mesmo comprimento de atenuação $q_{||}^{-1}$. Uma explicação convincente do porquê dos modos magnetostáticos de superfície poderem apresentar não-reciprocidade foi dada por Mills⁹³, que concluiu que se deve empregar considerações de grupos de simetria do sistema dipolar bem como a falta de simetria de inversão temporal.

Modos magnetostáticos de superfície em ferromagnetos têm frequências típicas que correspondem à região de microondas, e existem aplicações para processamento de sinais⁹⁷. As frequências são também muito adequadas para estudos experimentais por espalhamento Brillouin. Para se ter uma comparação completa entre os dados de espalhamento Brillouin e cálculos teóricos é necessário obter resultados para as funções de Green

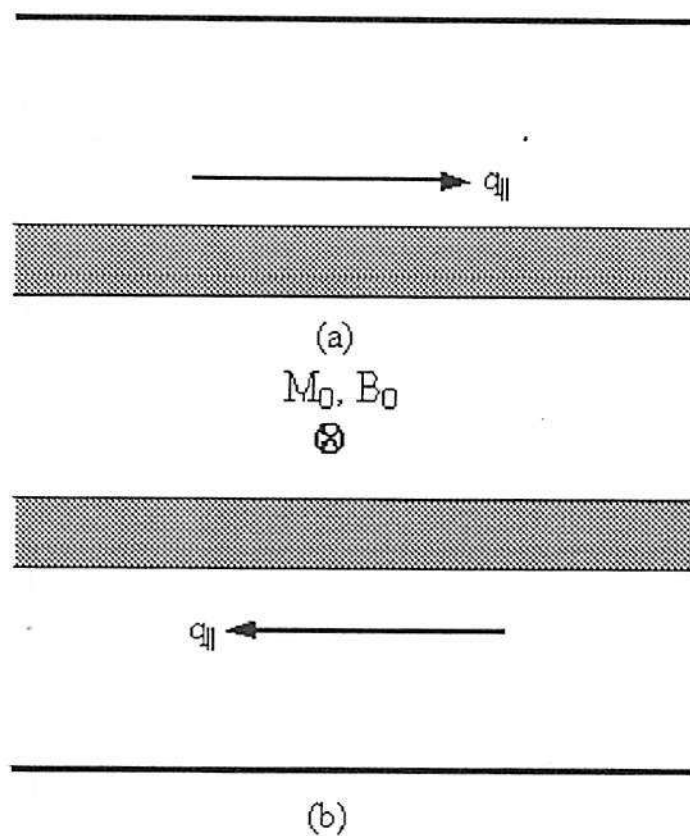


Figura 4.5: Ilustração da propagação não-recíproca de modos magnetostáticos de superfície em uma camada ferromagnética. Quando $q_{||}$ é invertido, a localização do modo de superfície (região sombreada) muda de uma superfície para outra como nos casos (a) e (b).

magnéticas, e estas quantidades foram derivadas para uma camada ferromagnética no limite magnetostático por Cottam⁹⁸.

É necessário lembrar que nossa discussão sobre os modos magnetostáticos foi feita considerando-se somente a geometria na qual a magnetização M_0 é paralela à superfície (veja a figura 4.2). Pode-se demonstrar⁹⁵ que, quando M_0 é perpendicular às superfícies de uma camada ferromagnética, os modos de Damon-Eshbach não podem existir, e existem múltiplos ramos dos modos de superfície no espectro das ondas de spin. Li *et al.*⁹¹ estudaram numericamente o comportamento das ondas de spin magnetostáticas em super-redes *finitas* e periódicas, e também demonstraram esta propriedade.

Na próxima seção estudaremos as chamadas sequências quasiperiódicas, para posteriormente investigarmos os modos magnetostáticos (volume e superfície) que se propagam nestas estruturas.

4.3 Sequências Quasiperiódicas

Antes de nos devotarmos ao estudo estruturas quasiperiódicas em si, faz-se necessário apresentarmos alguns conceitos e sequências.

Seja um conjunto finito λ (onde $\lambda = A, B, C, D$) chamado de alfabeto e defina λ^* o conjunto de todas as *palavras* finitamente longas que se podem escrever com esse alfabeto. Agora seja Υ um mapa de λ^* em λ , com a regra de que Υ age sobre uma palavra desse alfabeto substituindo cada letra da palavra (por exemplo, A) por sua imagem correspondente (que chamaremos $\Upsilon(A)$). Uma sequência de letras é chamada de *substitucional* se ela é um *ponto fixo* de Υ , isto é, ela permanece invariante se, no limite de infinitas aplicações do mapa, cada letra na sequência for substituída por sua imagem em Υ . Algumas sequências substitucionais que têm atraído bastante atenção nos últimos anos são as sequências de *Fibonacci*, *Thue-Morse* e *período-duplo*.

A sequência de Fibonacci é a mais antiga das que consideraremos aqui. Ela surgiu no ano de 1202, e foi criada por Leonardo de Pisa (mais conhecido popularmente pelo nome de *Fibonacci*, que significa "filho de Bonacci"), para descrever como se desenvolvia

uma população de coelhos, dadas determinadas regras de reprodução, e qual seria sua população total depois de um período fixo (a princípio um ano). Fibonacci observou que em cada geração de coelhos, existia uma relação entre esta e as duas gerações anteriores. Esta relação é uma *relação de recorrência*, definida por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$ e seus primeiros termos são $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$. Esta sequência é uma sequência infinita, e tem uma característica muito interessante: no limite em que n tende para infinito, a razão entre dois termos consecutivos (F_n/F_{n-1}) tende para um número irracional, mais conhecido pelo nome de “razão áurea”, a saber $\tau = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.61803398874\dots$. Este número é solução da equação polinomial $x^2 = x + 1$. Um fato notório e curioso é que todos os termos da sequência de Fibonacci podem ser gerados a partir da razão áurea, através da relação:

$$F_n = \frac{\tau^n - (-1/\tau)^n}{\sqrt{5}} \quad (4.28)$$

ou seja, uma sequência de números *inteiros* é gerada por potências de número *irracionalis*! Essa relação é conhecida na literatura como *Fórmula de Binet*.

Existem na literatura diversos trabalhos aplicando a sequência de Fibonacci a sistemas físicos, incluindo estudos de propriedades supercondutoras⁹⁹, excitações de polaritons de plasmons em super-redes do tipo Fibonacci constituídas de materiais dielétricos^{100,101} e piezoelétricos⁷⁵, e transmissão de luz^{102,103}

A sequência de Thue-Morse surgiu em 1906. Ela pode ser definida de uma maneira mais “matemática” como a representação binária da constante de Thue-Morse (constante de paridade)¹⁰⁴:

$$P \equiv \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} P(n)2^{-n} = 0.41245400336401075977\dots \quad (4.29)$$

onde $P(n)$ é a *paridade* de n e é definida como a soma dos seus *bits* em representação binária (mod 2), como visto na tabela 4.2. Essa constante pode ser gerada na base binária por estágios, tomando-se a iteração prévia a_n , calculando-se seu complemento \bar{a}_n ,

e anexando-o ao final de a_n . Aqui, $a_n + \bar{a}_n = (0.\underbrace{111\dots 1}_{2^n})_2$. Definindo $a_0 = 0.0_2$, tem-se:

$$a_0 = 0.0_2$$

$$a_1 = 0.01_2$$

$$a_2 = 0.0110_2$$

$$a_3 = 0.01101001_2$$

$$a_4 = 0.0110100110010110_2$$

e assim por diante. Isto pode ser escrito simbolicamente como

$$a_{n+1} = a_n + \bar{a}_n 2^{-2^n} \quad (4.30)$$

N	Binário	P(N)	N	Binário	P(N)
1	1	1	11	1011	1
2	10	1	12	1100	0
3	11	0	13	1101	1
4	100	1	14	1110	1
5	101	0	15	1111	0
6	110	0	16	10000	1
7	111	1	17	10001	0
8	1000	1	18	10010	0
9	1001	0	19	10011	1
10	1010	0	20	10100	0

Tabela 4.2. A função paridade dos 20 primeiros inteiros.

Esta não é a única definição da sequência de Thue-Morse. Outros autores analisaram esta sequência em outros contextos da Física¹⁰⁵ e da Matemática^{106,107}. Albuquerque⁸⁵ e Liu *et al.*¹⁰⁸ desenvolveram uma teoria para propagação de polaritons de plasmons e de ondas de luz, respectivamente, para estes tipos de estruturas.

Outra sequência que consideraremos neste trabalho é a sequência de *período duplo*. Na verdade o termo sequência é mais apropriado quando se fala de um cadeia de valores ou elementos matemáticos, seguindo uma dada regra, enquanto que neste caso a

“sequência” de período duplo teve sua origem no estudo da dinâmica de sistemas¹⁰⁹. Por exemplo, Steinmeyer *et al.*¹¹⁰ observaram dobramento de período em fibras óticas não-lineares, através da aplicação de lasers. Outras aplicações incluem o estudo da propagação de elétrons na aproximação *tight-binding*^{82,111}. Detalhes de como crescer uma estrutura seguindo esta sequência serão dados na próxima seção.

4.4 Teoria de Modos Magnetostáticos com Magnetização Perpendicular às Interfaces

Agora trataremos do problema da propagação de magnons magnetostáticos em uma super-rede, utilizando uma teoria macroscópica. Aqui, diferentemente da seção 4.2, nós consideraremos a geometria onde a magnetização é *perpendicular* à superfície da super-rede. Veremos que isto leva a novos resultados, e em particular, os modos de Damon-Eshbach não existem em nossa geometria. Além disso, ao invés de considerar que nossa super-rede é construída a partir do simples empilhamento de células unitárias periódicas (do tipo *AB*, por exemplo, onde *A* é um material magnético e *B* um não-magnético), descreveremos uma super-rede onde o crescimento é feito à base de um empilhamento periódico de células unitárias não-periódicas. Este tratamento recebeu na literatura a terminologia de *aproximação racional* seguindo Hawrylak *et al.*¹¹². Com este formalismo, apesar da ausência de periodicidade das células unitárias em si, a existência de um empilhamento periódico nos permite usar o teorema de Bloch em cada geração de crescimento da super-rede. Outro modelo possível seria considerar a célula unitária como sendo uma multicamada não-periódica, e estudar suas propriedades. Neste caso não se trata mais de uma super-rede, no sentido estrito do termo, e sim de um sistema de multi-camadas finito, onde o teorema de Bloch não é aplicável. Na figura 4.6 nós ilustramos este último modelo, para a sequência de Fibonacci (2,3,5,...). As camadas *A* e *B* consistem de materiais magnético e não-magnético, respectivamente.

Do ponto de vista físico, ambos os modelos fornecem resultados equivalentes quando se

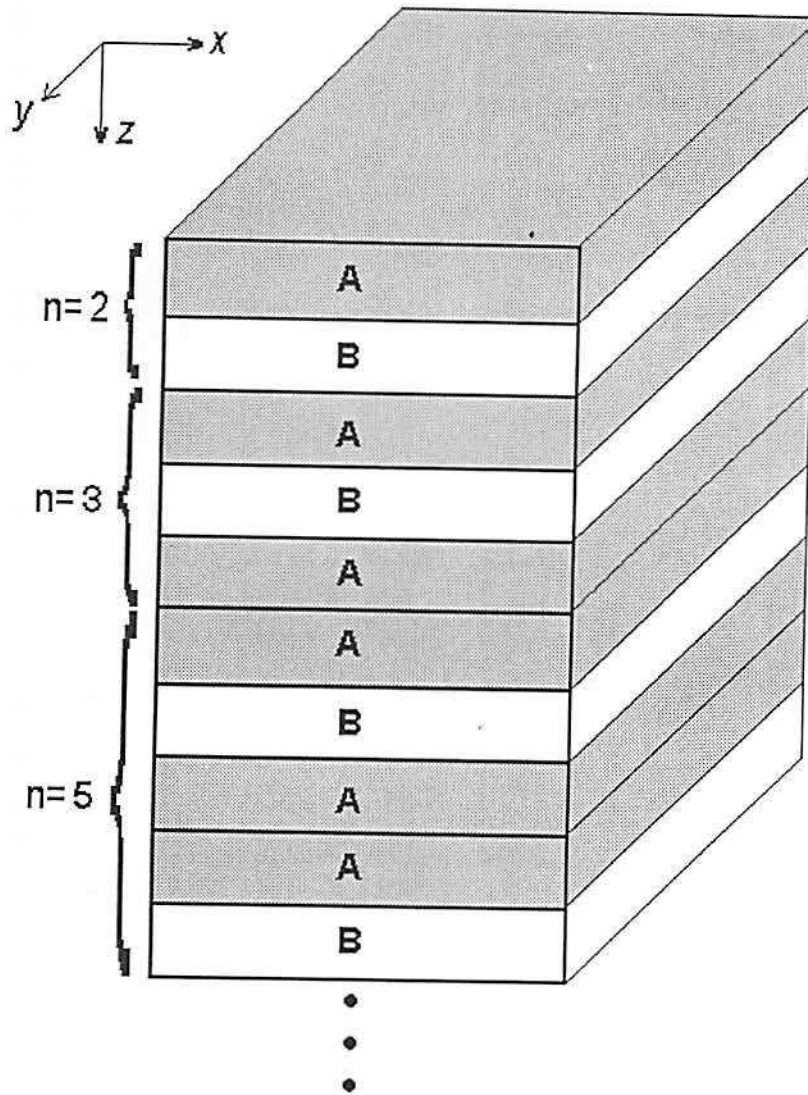


Figura 4.6: Modelo de multicamadas quasiperiódicas, onde o empilhamento segue a sequência de Fibonacci. **A** é um material magnético, enquanto que **B** é um isolante não magnético.

aumenta consideravelmente o tamanho L da célula unitária (ou da multicamada, quando for o caso). No caso das estruturas quasiperiódicas, isto é feito considerando células unitárias crescidas seguindo uma alta geração da sequência desejada. Tais estruturas foram crescidas pioneiramente por Merlin *et al.*⁷⁹, utilizando como blocos de construção GaAs-AlAs. Eles consideraram uma amostra construída através do empilhamento de camadas seguindo a sequência de Fibonacci contendo 13 gerações, e fizeram um estudo de espalhamento Raman (figura 4.7) e de raios-X (figura 4.8). Maiores detalhes podem ser encontrados no próprio artigo. Todd *et al.*¹¹³ também estudaram o espalhamento de raios-X por uma “super-rede” quasiperiódica de GaAs-AlAs, construída seguindo a sequência de Fibonacci. Na verdade, os autores consideraram uma multicamada finita, mas com um número grande de camadas de GaAs, e AlAs (nominalmente 13.200 camadas). Também Axel *et al.*¹¹⁴ estudaram o espectro de difração de alta resolução devido ao espalhamento de raios-X para uma estrutura quasiperiódica de GaAs-AlAs, mas considerando a sequência de Thue-Morse.

No regime magnetostático, as equações de Maxwell se tornam:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = 0 \quad (4.32)$$

onde \mathbf{B} e \mathbf{h} não são independentes, e estão vinculados através da relação tensorial constitutiva $\mathbf{B} = \vec{\mu} \mathbf{h}$, onde $\vec{\mu}$ é o tensor permeabilidade. Aqui, nós fazemos a hipótese de uma dependência temporal dos campos do tipo $\exp(-i\omega t)$, e a forma do tensor $\vec{\mu}$ para um material uniaxial é

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

onde os elementos de $\vec{\mu}$ são dados por⁹³

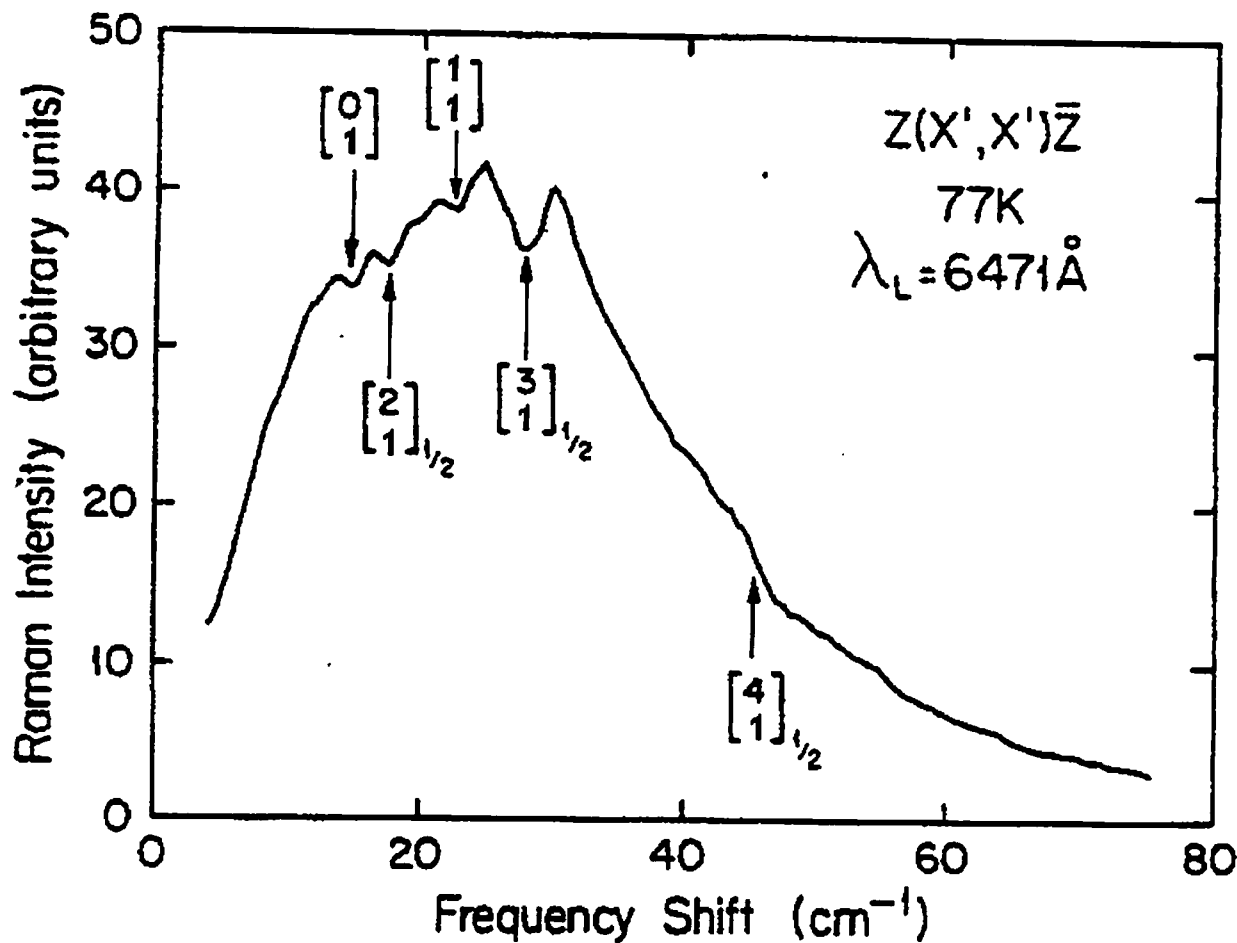


Figura 4.7: Espectro Raman para a super-rede de Fibonacci, mostrando o espalhamento devido a fônons LA (longitudinais acústicos) se propagando na direção [001] (ver a referência [79]).

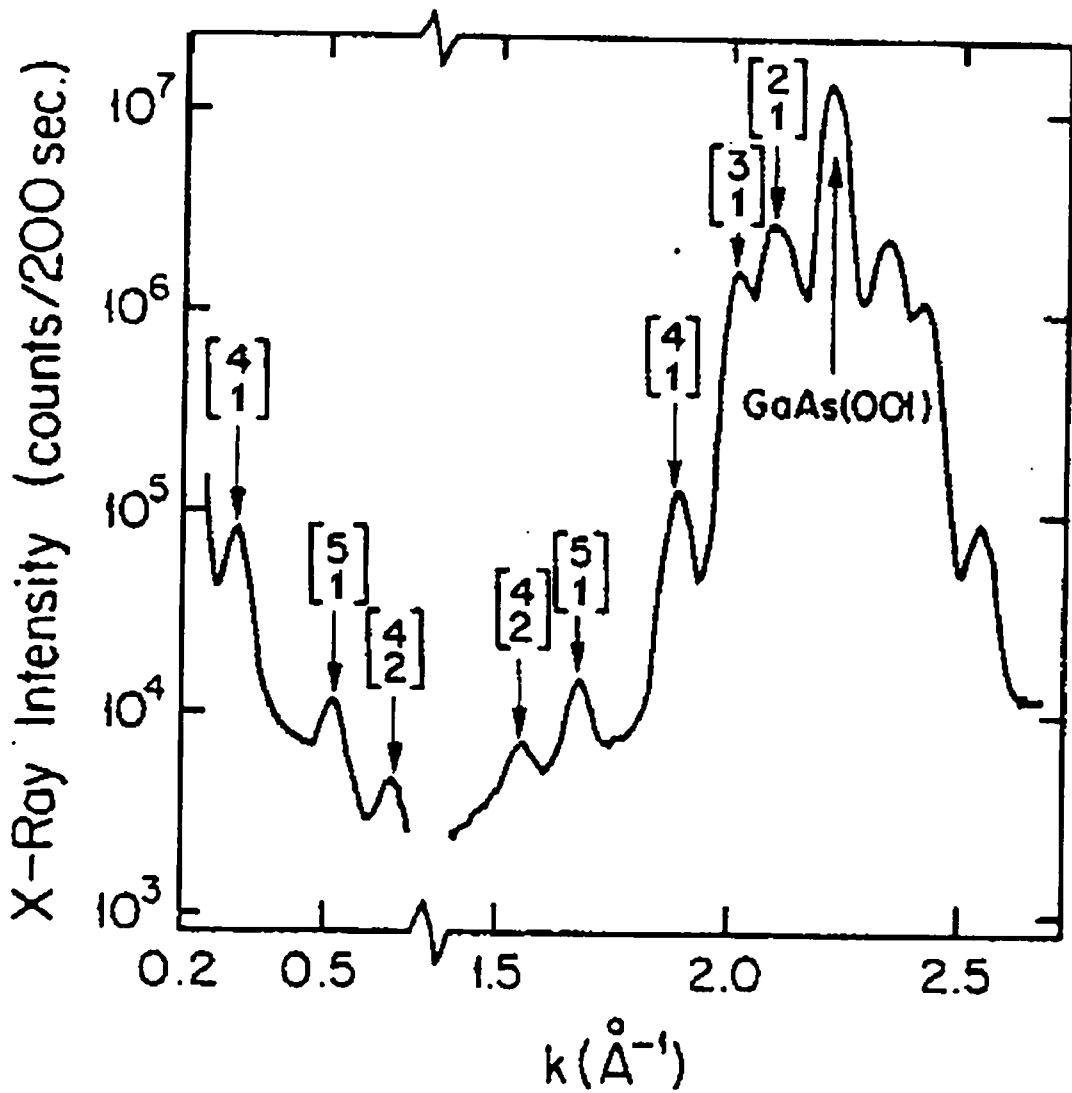


Figura 4.8: Padrão de difração de raios-X a temperatura ambiente para a super-rede de Fibonacci, sendo k perpendicular às camadas. Os rótulos $[p, n]$ indicam as posições dos picos $k_{p,n} = 2\pi d^{-1}n\tau^p$ e correspondentes reflexões satélites (ver a referência [79]).

$$\mu_1 = 1 + \frac{4\pi\gamma^2 H_i M}{\gamma^2 H_i^2 - \omega^2} \quad (4.34)$$

$$\mu_2 = \frac{4\pi\gamma^2 \omega M}{\gamma^2 H_i^2 - \omega^2} \quad (4.35)$$

Aqui, H_i é o campo magnético interno na direção z , dado por $H_i = H_0 - 4\pi M$. Também, H_0 é o campo externo aplicado, M é a magnetização de saturação e γ é a razão giro-magnética. Os valores de γ dependem do sistema de medidas. Para expressar os campos em Kilogauss, utilizamos $\gamma = 1$. Quando M é perpendicular à superfície, como em nosso caso aqui, ele dá origem a campos despolarizantes, e esta é a razão para uma diminuição no campo magnético efetivo dentro do material. Para um antiferromagneto, as componentes do tensor são⁹³:

$$\mu_1 = 1 + \frac{4\pi\gamma^2 H_A M}{\omega_0^2 - (\omega + \gamma H_0)^2} + \frac{4\pi\gamma^2 H_A M}{\omega_0^2 - (\omega - \gamma H_0)^2} \quad (4.36)$$

$$\mu_2 = \frac{4\pi\gamma^2 H_A M}{\omega_0^2 - (\omega + \gamma H_0)^2} - \frac{4\pi\gamma^2 H_A M}{\omega_0^2 - (\omega - \gamma H_0)^2} \quad (4.37)$$

onde

$$\omega_0 = |\gamma| [H_A (2H_E + H_A)]^{1/2} \quad (4.38)$$

Aqui H_E é o campo de troca efetivo e H_A é o campo de anisotropia. Para este caso, M é a magnetização de saturação de uma das sub-redes, e o parâmetro físico ω_0 é a chamada frequência de ressonância antiferromagnética a campo nulo. De (4.31) e (4.32), podemos definir um potencial escalar magnético ϕ , através de $\mathbf{h} = -\nabla\phi$. Usando isto junto com (4.33), nós obtemos:

$$\left[\mu_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi = 0 \quad (4.39)$$

Esta equação é válida para ambas as camadas magnéticas ou não-magnéticas de uma super-rede (mas no último caso, $\vec{\mu} = \vec{I}$, a matriz identidade). Considerando soluções da forma

$$\phi = \phi(z)e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.40)$$

onde k é o vetor de onda (tomado na direção x , no nosso caso) paralelo à superfície, e substituindo em (4.39), se tem

$$\left(-\mu_1 k^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) \phi(z) = 0 \quad (4.41)$$

A equação acima tem soluções da forma $\phi(z) = Ae^{\alpha z} + Be^{-\alpha z}$, onde α pode ser complexo e é diretamente relacionado com k por $\alpha = (\mu_1)^{1/2}k$. Para obtermos as soluções desta equação diferencial, precisamos impor algumas condições de contorno nas interfaces da estrutura. Isto nos leva à exigência de que ambos ϕ e $\partial\phi/\partial z$ sejam contínuos através das interfaces. Aplicando as condições de contorno, juntamente com o conjunto de equações acima, obtemos expressões para as relações de dispersão. Pode-se demonstrar¹¹⁵ que é necessário considerar somente as frequências correspondentes a $\mu_1 < 0$ a fim de se obter os modos de volume e superfície. O mesmo vale para os modos que se propagam em monocamadas de espessura finita. Isto tem a consequência de que, para um ferromagneto, a faixa de frequências é $|\gamma|H_i < \omega < |\gamma|(H_i H_0)^{1/2}$, enquanto que para um antiferromagneto com campo aplicado nulo, as frequências são confinadas a $\omega_0 < \omega < (\omega_0^2 + 8\pi\gamma^2 H_A M)^{1/2}$.

Antes de prosseguirmos nos cálculos, devemos agora definir como crescemos nossa super-rede, a fim de podermos obter corretamente os modos que se propagam na mesma. Nossa regra de crescimento consiste em um empilhamento periódico de blocos constituintes, onde os mesmos servirão como células unitárias de nossa super-rede. O empilhamento das camadas magnéticas/não-magnéticas dentro do bloco é que segue a sequência desejada (Fibonacci, Thue-Morse ou período-duplo). Isto está ilustrado na figura 4.9, onde nós apenas consideramos a sequência de Fibonacci, embora obviamente

o processo de crescimento seja o mesmo para as outras sequências. Na próxima seção descreveremos a aplicação das equações acima para as estruturas quasiperiódicas.

4.5 Método da Matriz-Transferência

Para obtermos os modos de propagação em super-redes, faz-se necessário o uso de técnicas que levem em conta a estrutura geométrica ou magnética da super-rede como um todo, e não apenas de seus componentes. O uso da técnica da matriz transferência é bem adequado para esse propósito, e suas aplicações incluem vários tipos de excitações diferentes, como por exemplo polaritons de plasmons^{101,116}, magnons no regime de troca para estruturas periódicas^{11,69} e quasiperiódicas^{89,90}, e também magnons no regime magnetostático⁶. Propriedades óticas dessas estruturas como por exemplo localização¹¹⁷ e fotoluminescência¹¹⁸ também foram estudadas utilizando-se dessa técnica. Além disso, Suto⁸⁰ usou deste formalismo para demonstrar propriedades importantes de espectros obtidos usando o conjunto de Fibonacci.

Usando os resultados da seção anterior, aplicamos a soluções das equações de movimento às interfaces. Este procedimento é padrão e independe da sequência considerada. Dentro de uma camada A , escolhemos soluções da forma:

$$\phi(z) = A_+ e^{\alpha z} + A_- e^{-\alpha z}, \quad \alpha = (\mu_1)^{1/2} k \quad (4.42)$$

Para uma camada B :

$$\phi(z) = B_+ e^{kz} + B_- e^{-kz} \quad (4.43)$$

Definindo $L = n_A d_A + n_B d_B$ (onde n_j , $j = A, B$ é o número de camadas do tipo j), como sendo o tamanho da célula unitária, aplicamos as condições de contorno em $z = nL$ e $z = nL + d_A$, onde n é o índice para a célula. Estas posições vêm do fato de considerarmos que a célula unitária *sempre* começa com um material magnético. Claro que isto não é imperativo, e consiste apenas numa escolha arbitrária. Em $z = nL$:

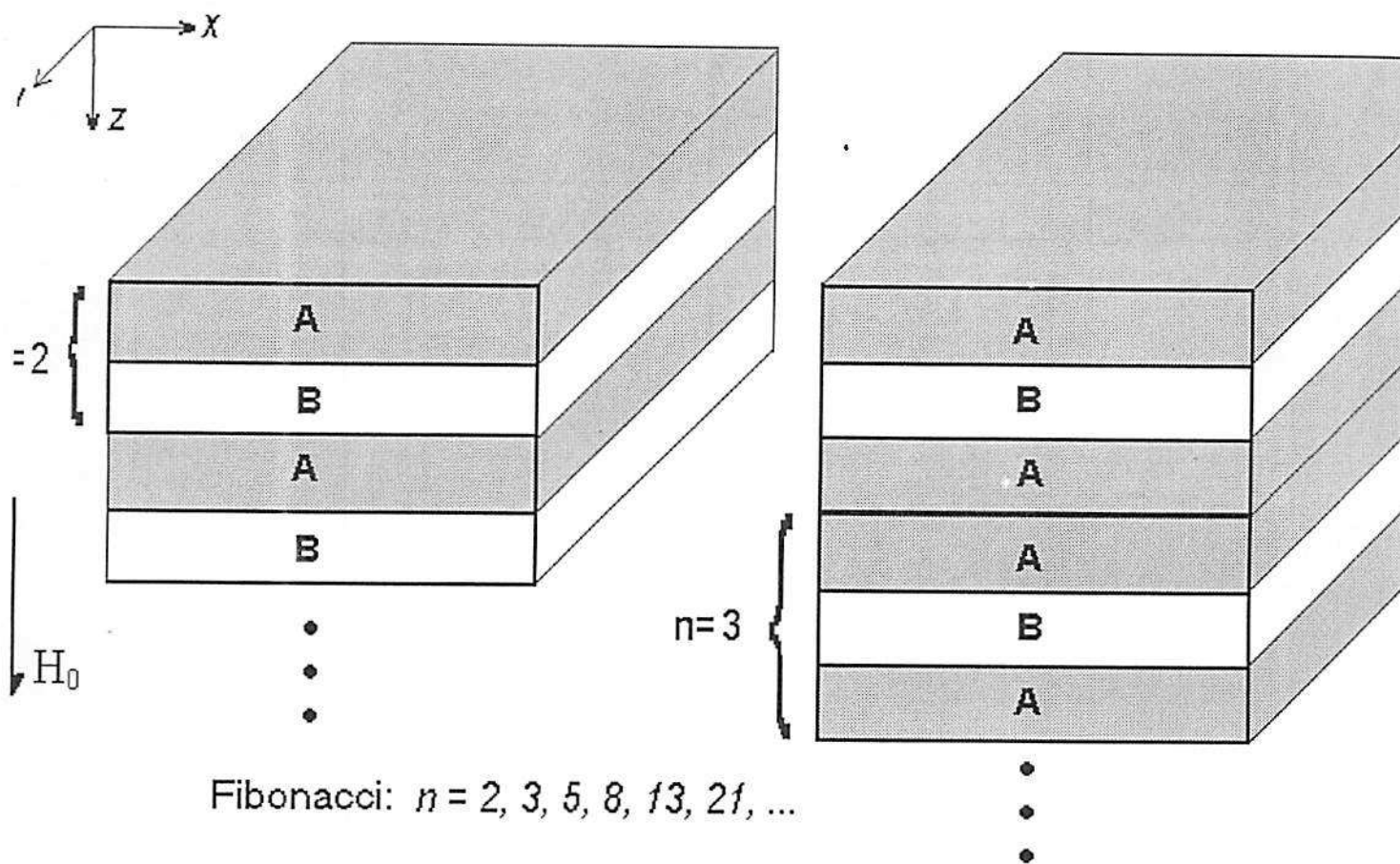


Figura 4.9: Modelo da super-rede quasiperiódica. O empilhamento das células unitárias é periódico, mas o crescimento da célula segue uma determinada regra de crescimento. Neste caso consideramos a sequência de Fibonacci, para a segunda e terceira gerações.

$$\begin{cases} A_+^{(n)} f_\alpha + A_-^{(n)} \bar{f}_\alpha & = B_+^{(n)} + B_-^{(n)} \\ \alpha(A_+^{(n)} f_\alpha - A_-^{(n)} \bar{f}_\alpha) & = k(B_+^{(n)} - B_-^{(n)}) \end{cases} \quad (4.44)$$

e em $z = nL + d_A$:

$$\begin{cases} A_+^{(n+1)} + A_-^{(n+1)} & = B_+^{(n)} f_k + B_-^{(n)} \bar{f}_k \\ \alpha[A_+^{(n+1)} - A_-^{(n+1)}] & = k[B_+^{(n)} f_k - B_-^{(n)} \bar{f}_k] \end{cases} \quad (4.45)$$

onde em ambos os conjuntos de equações, a primeira equação refere-se à condição de continuidade do potencial ϕ , e a segunda se refere à continuidade de sua derivada, $\partial\phi/\partial z$.

Aqui,

$$f_\alpha = e^{\alpha d_A} ; \bar{f}_\alpha = 1/f_\alpha \quad (4.46)$$

$$f_k = e^{k d_B} ; \bar{f}_k = 1/f_k \quad (4.47)$$

Definindo as matrizes-coluna referentes às amplitudes das excitações nos meios A e B , respectivamente, por

$$|A^{(n)}\rangle = \begin{bmatrix} A_+^{(n)} \\ A_-^{(n)} \end{bmatrix} ; |A^{(n+1)}\rangle = \begin{bmatrix} A_+^{(n+1)} \\ A_-^{(n+1)} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

e

$$|B^{(n)}\rangle = \begin{bmatrix} B_+^{(n)} \\ B_-^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

as equações (4.44) e (4.45) podem ser escritas na forma matricial como

$$M_\alpha |A^{(n)}\rangle = N_k |B^{(n)}\rangle \quad (4.50)$$

$$M_k |B^{(n)}\rangle = N_\alpha |A^{(n+1)}\rangle \quad (4.51)$$

As matrizes M_j e N_j , ($j = \alpha, k$) são dadas por:

$$M_j = \begin{bmatrix} f_j & \bar{f}_j \\ jf_j & -j\bar{f}_j \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$N_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Usando as equações (4.50) e (4.51), temos

$$|A^{n+1}\rangle = T|A^n\rangle \quad (4.54)$$

onde T é a matriz-transferência. Para o nosso caso, ela é dada por:

$$T = N_\alpha^{-1} M_k N_k^{-1} M_\alpha \quad (4.55)$$

A equação (4.54) relaciona as amplitudes das soluções para o potencial magnetostático de uma célula *arbitrária* $n + 1$ da super-rede com sua célula n precedente. Daí a origem do nome matriz transferência, haja visto que a mesma contém todos os parâmetros físicos que descrevem o sistema. Como regra geral temos:

$$|A^{(n+m)}\rangle = T^m |A^{(n)}\rangle \quad (4.56)$$

devido ao fato de termos crescido nossa super-rede através de um empilhamento *periódico*, podemos aplicar o *Teorema de Bloch*:

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{L}) = e^{iqL} \psi(\mathbf{r}) \quad (4.57)$$

Em nossa notação ele se torna

$$|A^{(n+1)}\rangle = e^{iqL}|A^{(n)}\rangle, \quad (4.58)$$

Onde Q é o vetor de onda de Bloch, e L é o tamanho da célula unitária. Usando este teorema, juntamente com (4.54), obtemos as equações de auto-valores

$$T|A^{(n)}\rangle = \exp(iQL)|A^{(n+1)}\rangle \quad (4.59)$$

$$T^{-1}|A^{(n)}\rangle = \exp(-iQL)|A^{(n+1)}\rangle \quad (4.60)$$

Combinando as duas equações acima, temos:

$$\left[\cos(QL)\mathbf{I} - \frac{1}{2}(T + T^{-1}) \right] |A^{(n)}\rangle = 0 \quad (4.61)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Para não obtermos as soluções triviais $|A^{(n)}\rangle = 0$, temos

$$\cos(QL) = \frac{1}{2}(T + T^{-1}) \quad (4.62)$$

Pode ser demonstrado que T é uma matriz unimodular ($\det(T) = 1$). Logo $T + T^{-1} = \text{Tr}(T)$, e nós então chegamos a uma expressão para a relação de dispersão dos modos de volume das ondas de spin no regime magnetostático:

$$\cos(QL) = \frac{1}{2}\text{Tr}(T) \quad (4.63)$$

onde Q é o vetor de onda da super-rede, chamado de *vetor de Bloch*. Este vetor é que representa a propagação dos modos da super-rede, e não dos seus constituintes em si. Esta teoria é geral é vale para qualquer das três sequências consideradas.

Se nós considerarmos agora uma super-rede semi-infinita (construída na região $z \geq 0$), o teorema de Bloch continua válido, mas nós devemos considerar, além dos modos de volume com Q real, modos de superfície com Q complexo da forma $Q \equiv i\beta$, de forma

a garantir um decaimento exponencial das amplitudes. Para os modos de superfície, as equações (4.58) e (4.54) nos fornecem:

$$T_{11} + \lambda^{-1}T_{12} = e^{-\beta L} = T_{22} + \lambda T_{21} \quad (4.64)$$

onde $\lambda = (\alpha + k)/(\alpha - k)$, e a constante β deve ser escolhida tal que $Re(\beta) > 0$. Vamos então aplicar este formalismo às sequências específicas.

4.5.1 Super-rede de Fibonacci

A super-rede de Fibonacci, crescida seguindo uma regra análoga àquela da sequência de Fibonacci, está ilustrada na tabela abaixo, onde a regra de empilhamento das camadas dentro da célula unitária para esta sequência é:

$$S_n = S_{n-1}S_{n-2}, \quad n > 2. \quad (4.65)$$

N	S_N	F_N
1	A	1
2	AB	2
3	ABA	3
4	ABAAB	5
5	ABAABABA	8
6	ABAABABAABAAB	13
7	ABAABABAABAABAABAABA	21
8	ABAABABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAABA	34

Tabela 4.3. Tamanho da célula unitária para a sequência de Fibonacci

Para a sequência de Fibonacci, podemos crescer nossa super-rede também fazendo a substituição $A \rightarrow AB$ e $B \rightarrow A$. O tamanho da célula unitária escala com F_n , como

pode ser visto diretamente da tabela. Observe que o valor de F_n corresponde exatamente ao número *total* de camadas da célula.

Em super-redes magnéticas quasiperiódicas, uma quantidade relevante é a razão entre o número de camadas magnéticas e não magnéticas. Para a sequência de Fibonacci, quando a geração tende para o infinito, esta razão tende justamente para a razão áurea, $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, como ilustrado na figura 4.10. Isto pode ser provado como se segue. Seja $\tau_n = F_n/F_{n-1}$. Como, da definição desta sequência, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, segue que

$$\tau_n = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\tau_{n-1}} \quad (4.66)$$

mas quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\tau_{n-1} = \tau_n = \tau$, logo, neste limite:

$$\tau = 1 + \tau^{-1} \quad (4.67)$$

cujas soluções são $\tau = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Aqui consideramos somente a solução positiva.

Para calcularmos numericamente a relação de dispersão para uma dada sequência e uma geração específica, precisamos determinar a matriz transferência da mesma. Isto pode ser obtido da seguinte maneira: para a primeira geração de Fibonacci ($S_1 = A$):

$$T_{S_1} = N_A^{-1} M_A \quad (4.68)$$

para a segunda ($S_2 = AB$),

$$T_{S_2} = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A \quad (4.69)$$

para a terceira ($S_3 = ABA$),

$$T_{S_3} = N_A^{-1} M_A N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A = T_{S_1} T_{S_2} \quad (4.70)$$

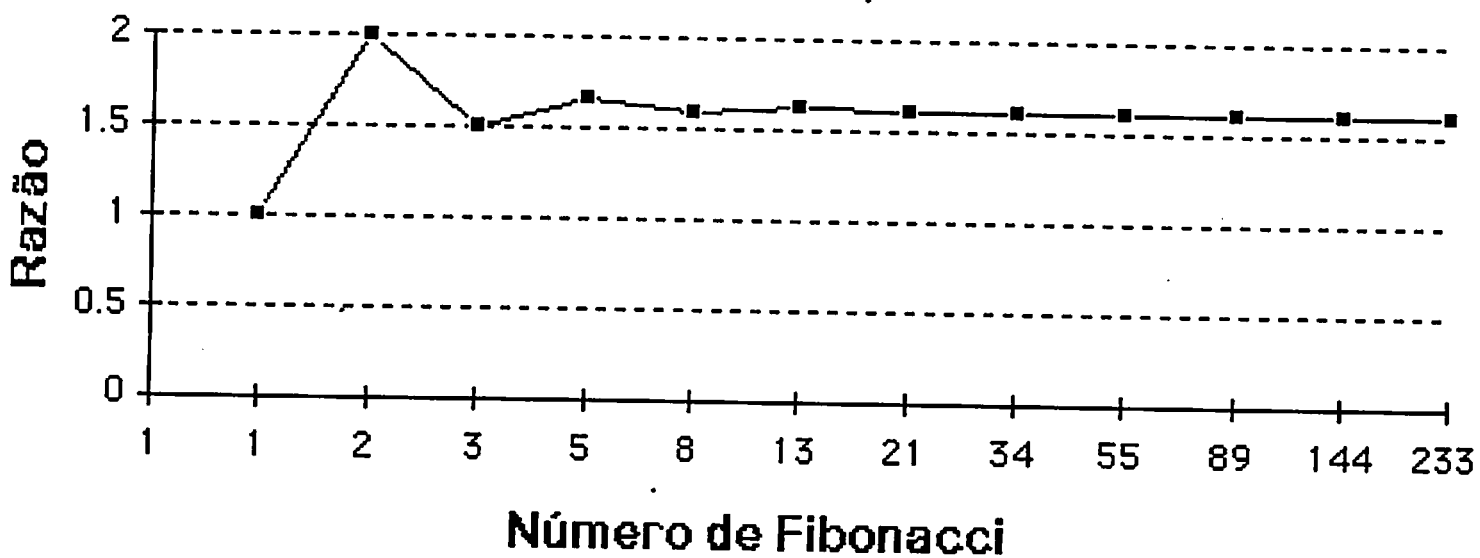


Figura 4.10: Razão entre o número de camadas magnéticas e não-magnéticas para a sequência de Fibonacci, de acordo com a geração considerada. Note-se que a curva tende para a razão áurea $\tau \approx 1.618034$.

Generalizando para uma geração arbitrária n :

$$T_{S_{n+2}} = T_{S_n} T_{S_{n+1}} \quad (4.71)$$

Logo, conhecendo-se T_{S_1} , T_{S_2} e T_{S_3} podemos então determinar diretamente a matriz transferência para qualquer geração.

Vale salientar que, tanto para a sequência de Fibonacci, quanto para as sequências de Thue-Morse e período-duplo, os modos de superfície são obtidos pelo conhecimento de todos os elementos da matriz T_{S_n} . Independentemente da geração da sequência, deve-se impor também as condições físicas necessárias dadas pela eq. 4.64 e pela condição $Re(\beta) > 0$.

4.5.2 Super-rede de Thue-Morse

Para a sequência de Thue-Morse, o crescimento da célula unitária é definido por:

$$S_n = S_{n-1} S_{n-1}^+ \quad (4.72)$$

$$S_n^+ = S_{n-1}^+ S_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (4.73)$$

$$(4.74)$$

aqui $S_0 = A$ e $S_0^+ = B$. Outro modo de se construir a super-rede é seguir a regra de substituição, que neste caso é $A \rightarrow AB$ e $B \rightarrow BA$. Para a sequência de Thue-Morse, a razão entre o número de camadas magnéticas e não magnéticas é constante e igual à unidade, e isto pode ser visto diretamente da tabela abaixo:

N	S_N
1	AB
2	ABBA
3	ABBABAAB
4	ABBABAABBAABABBA
5	ABBABAABBAABABBABAABABBAABBABAAB

Tabela 4.4. Tamanho da célula unitária para a sequência de Thue-Morse.

As matrizes-transferência para esta sequência são calculadas de maneira análoga à sequência anterior. Para a primeira geração, temos que

$$T_{S_1} = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A = N_A^{-1} T_{B_1} T_{A_1} N_A \quad (4.75)$$

onde

$$T_{j_1} = M_j N_j^{-1}, \quad j = A, B \quad (4.76)$$

para a segunda geração ($S_2 = ABBA$),

$$T_{S_2} = N_A^{-1} M_A N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_B N_B^{-1} M_A = N_A^{-1} T_{A_1} T_{B_1} T_{B_1} T_{A_1} N_A \quad (4.77)$$

Multiplicando o lado direito por $N_A^{-1} N_A$, temos:

$$T_{S_2} = N_A^{-1} T_{A_1} T_{B_1} T_{B_1} T_{A_1} N_A = N_A^{-1} T_{B_2} T_{A_2} N_A \quad (4.78)$$

onde

$$T_{A_2} = T_{B_1} T_{A_1} \quad (4.79)$$

$$T_{B_2} = T_{A_1} T_{B_1} \quad (4.80)$$

generalizando para a n -ésima geração:

$$T_{S_n} = N_A^{-1} T_{B_n} T_{A_n} N_A \quad (4.81)$$

com:

$$T_{A_{n+1}} = T_{B_n} T_{A_n} \quad (4.82)$$

$$T_{B_{n+1}} = T_{A_n} T_{B_n} \quad (4.83)$$

4.5.3 Super-rede de Período-Duplo

Para esta super-rede, a regra de recorrência é análoga à regra de Thue-Morse, e é dada por $S_n = S_{n-1}S_{n-1}^+$, com $S_n^+ = S_{n-1}S_{n-1}$. Aqui, $n \geq 1$ e $S_0 = A$, $S_0^+ = B$. As primeiras células unitárias são dadas na tabela abaixo:

N	S_N
1	AB
2	ABAA
3	ABAAABAB
4	ABAAABABABAAABAA
5	ABAAABABABAAABAAABAAABABABAAABAB

Tabela 4.5. Tamanho da célula unitária para a sequência de período-duplo.

A regra de invariância (ou de crescimento) para esta estrutura é $A \rightarrow AB$, $B \rightarrow AA$. Estas regras de substituição também podem ser entendidas como condições de invariância, pois ao aplicá-las às super-redes infinitas, as mesmas ficam invariantes. O tamanho da célula unitária da n -ésima geração também escala com 2^n , mas a razão entre o número de camadas magnéticas e não-magnéticas não é constante: de fato tende para 2 quando se aumenta indefinidamente o número de gerações¹¹⁹.

Para as sequências de Thue-Morse e período-duplo, o tamanho da célula unitária aumenta como uma potência da geração da sequência. Isto pode ser visto diretamente das regras de substituição, e está ilustrado na figura 4.11, onde esboçamos um gráfico log-log do tamanho da célula em função da geração. Como veremos, esta dependência tem a consequência de que para as sequências de Thue-Morse e período-duplo, a *localização* dos modos de volume é maior para valores mais baixos do número da geração.

Em analogia à sequência de Thue-Morse, para a segunda geração da sequência de período duplo ($S_2 = ABAA$), a matriz transferência é dada por:

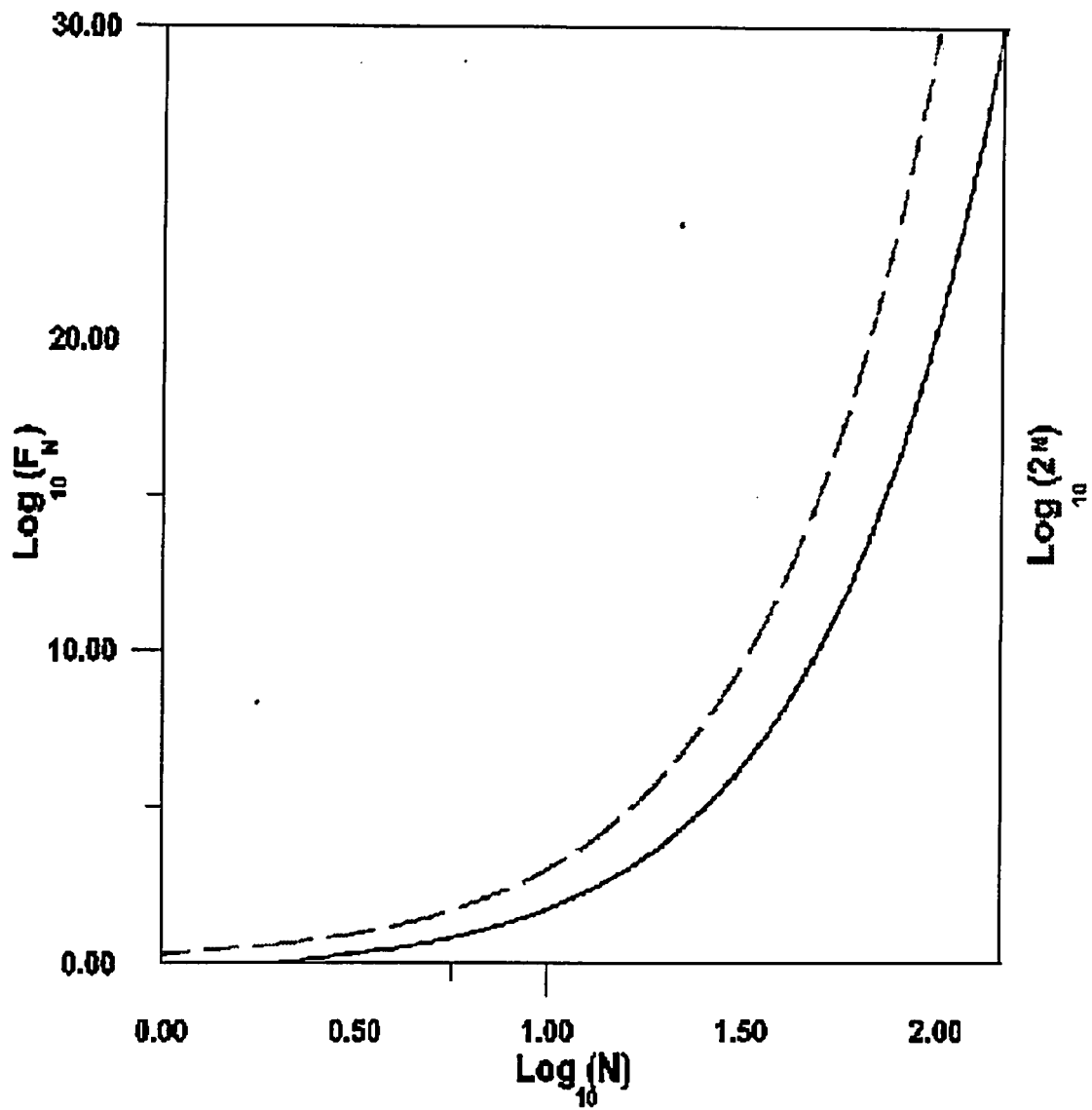


Figura 4.11: Comparação entre o crescimento das super-redes de Fibonacci (linha contínua) e Thue-Morse e período-duplo (linha tracejada).

$$T_{S_2} = N_A^{-1} M_A N_A^{-1} M_A N_B^{-1} M_B N_B^{-1} M_A \quad (4.84)$$

que pode ser escrito como

$$T_{S_2} = T_{S_0} T_{S_0} T_{S_1} \quad (4.85)$$

$$T_{S_0} = N_A^{-1} M_A \quad (4.86)$$

$$T_{S_1} = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A \quad (4.87)$$

Para o caso geral da n -ésima geração, a matriz-transferência é:

$$T_{S_{n+2}} = T_{S_n} T_{S_n} T_{S_{n+1}} \quad (4.88)$$

$$(4.89)$$

4.6 Resultados Numéricos

Nesta seção apresentaremos os resultados numéricos que obtivemos para as excitações de magnons, no regime magnetostático, em super-redes quasiperiódicas de Fibonacci, Thue-Morse e período-duplo. Consideraremos como o meio A os ferromagnetos Fe e EuS , e o antiferromagneto MnF_2 . O meio B pode ser *a princípio* qualquer meio não-magnético. Definimos aqui $R = d_B/d_A$ como a razão entre a espessura da camada magnética e não-magnética, e veremos que as frequências dos modos também variam com este parâmetro. Os parâmetros físicos para o Fe são o campo externo aplicado $H_0 = 22$ kG, e $M = 1.68$ kG. Para o EuS , os campos são $H_0 = 13.5$ kG e $M = 1.0$ kG. Para o antiferromagneto MnF_2 , os campos são $H_0 = 0.15$ kG, e $M = 0.6$ kG (magnetização de uma das sub-redes), o campo de troca efetivo $H_E = 550$ kG, e o campo de anisotropia $H_A = 7.78$ kG. Em nossa representação, a razão giromagnética é $\gamma = 1.0$, a fim de podermos expressar os

campos em kilogauss, e as frequências em GHz. Os restantes dos parâmetros são dados nas figuras respectivas. As relações de dispersão apresentadas aqui são gráficos da frequência ω em função do vetor de onda reduzido kd_A . Os valores das frequências são dados em GHz. Como pode se ver claramente em todos os gráficos das frequências, existe um limite inferior bem definido para os espectros, para todos os valores do número de geração, e para todas as sequências consideradas. Isto acontece quando nos aproximamos do valor da frequência para o qual nós temos o limite $\mu_1 \rightarrow \infty$. Por exemplo, para o *Fe*, com os parâmetros dados aqui, esse valor é $\omega \approx 2.48$ GHz.

Na figura 4.12, apresentamos o espectro das bandas de volume (regiões sombreadas) e modos de superfície (curvas pontilhadas) para a terceira geração da sequência de Fibonacci, para o ferromagneto *Fe*. Em analogia com trabalhos anteriores¹¹, observamos que os limites das bandas de volume (correspondentes aos valores de QL iguais a 0 e π , os limites da zona de Brillouin) alternam de uma banda para outra, ou seja, correspondem à sequência $QL = 0, \pi, \pi, 0, 0, \pi, \pi, 0, \dots$. Com relação aos modos de superfície, deve-se ter cuidado e se impor invariavelmente a condição $Re(\beta) > 0$, pois de outra forma obteríamos “modos” de superfície não-físicos. Tais modos são caracterizados por ter uma amplitude com *aumento* exponencial, e devem portanto ser excluídos. Vê-se claramente um estreitamento das bandas ao se aumentar o valor do vetor de onda k . Na região de frequências mais baixas, nota-se uma perda de resolução. Isto é causado pelo fato de que o número de bandas torna-se infinito, levando a uma região contínua (embora infinitamente estreita) quando se aproxima da frequência de corte para a qual $\mu_1 \rightarrow -\infty$. Também notamos a presença de modos de superfície “reais” (modos que “nascem” das bandas de volume e se separam delas para maiores valores de k) e de modos de superfície “virtuais” (modos que nascem “desgarrados” das bandas de volume, e colapsam na mesma para maiores valores de k). Esta característica foi observada para todas as sequências consideradas aqui. A região de soluções obedece aos limites impostos pela teoria magnetostática, e isto também independe da estrutura considerada.

Na figura 4.13 examinamos o comportamento da frequência em função da razão R , para a 6ª geração de Fibonacci, onde o material considerado é o ferromagneto EuS.

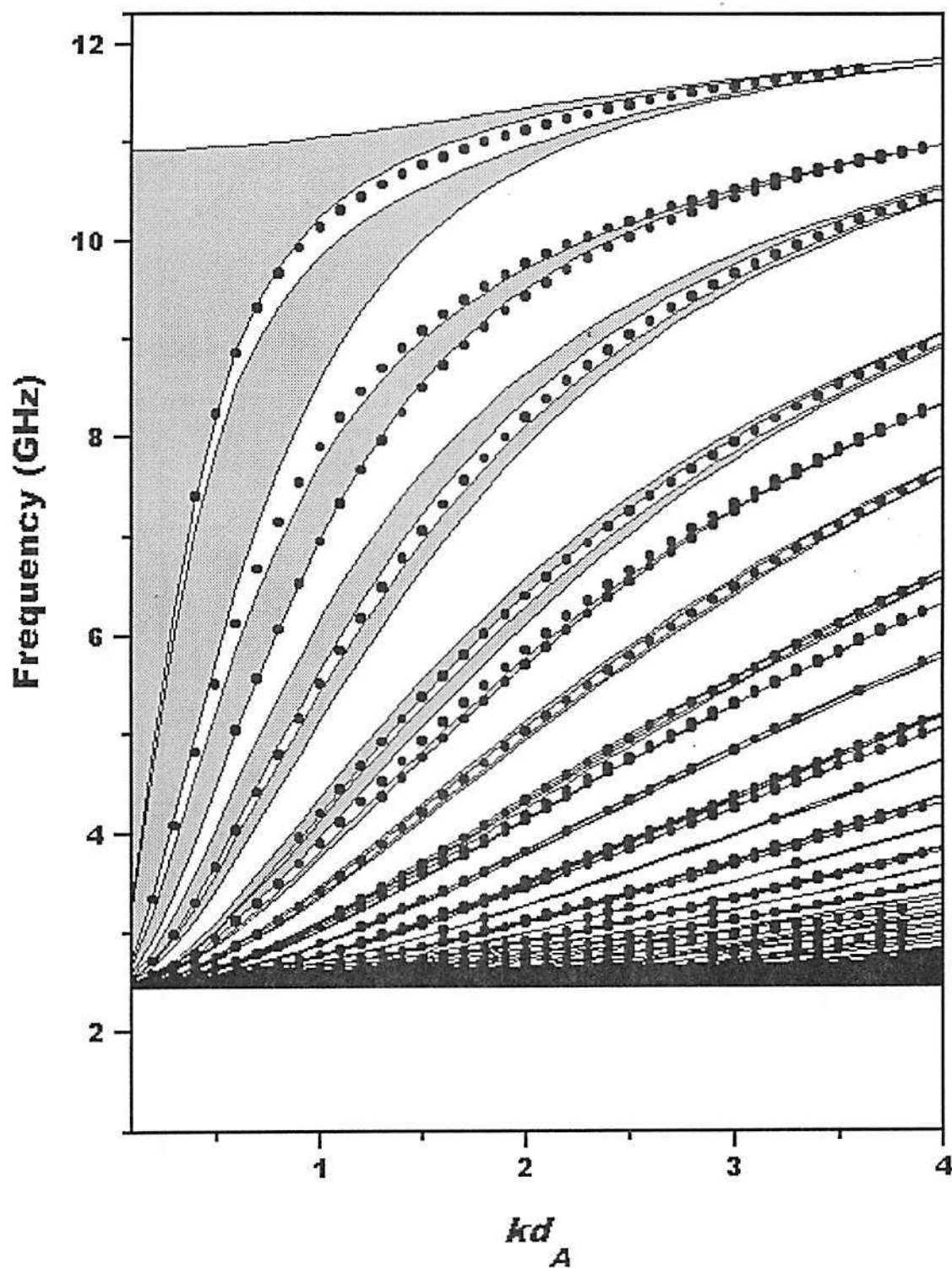


Figura 4.12: Relação de dispersão para os modos magnetostáticos, para a terceira geração de Fibonacci (célula unitária ABA). Aqui, $R(= d_B/d_A)$ é igual a 0.5, e o material é Fe .

Consideramos o vetor de onda reduzido kd_A constante e igual a 2.0. A região sombreada corresponde aos modos de volume, e a linha pontilhada aos modos de superfície. Observa-se que com o aumento da proporção de material não-magnético com relação ao magnético (o que é análogo a fazer uma liga A_xB_{1-x} , onde a proporção de concentração $(1-x)/x$ seria a razão R), temos uma localização maior dos modos de volume. Os modos de superfície se situam muito próximos das bandas de volume, a maioria se situando no limite das bandas.

Os modos de volume e superfície para a 3ª geração da sequência de período-duplo para o antiferromagneto MnF_2 são ilustrados na figura 4.14. Neste caso a existência de um campo aplicado dá origem a duas regiões com soluções reais para os modos de volume e superfície, correspondentes ao elemento do tensor permeabilidade $\mu_1 < 0$. A largura do "gap" entre as duas regiões é função do campo externo aplicado H_0 . Se considerarmos o campo externo aplicado como sendo nulo, as duas regiões colapsam, como pode ser visto na figura 4.15, onde nós consideramos os modos de volume para a 5ª geração da sequência de Thue-Morse, com campo externo nulo, e $R = 0.5$. Também observamos que as posições relativas dos modos são funções do campo de anisotropia H_A .

Nós também estudamos o comportamento da frequência em função do número de geração n das sequências consideradas. Na figura 4.16 apresentamos o gráfico ω versus N para a sequência de período-duplo, para o antiferromagneto MnF_2 . Como podemos observar, existe uma separação entre as duas regiões, independente da geração considerada. Esse comportamento também não depende da sequência. Pode-se ver claramente que a distribuição das frequências tem um comportamento bastante similar ao conjunto de Cantor. Esta é a primeira pista para a indicação de um comportamento fractal do espectro!

4.6.1 Localização dos Modos Magnetostáticos

Em Física da Matéria Condensada, muitas vezes se está interessado em sistemas que tenham resposta numa faixa bastante estreita dos espectros considerados (de frequências, de espalhamento, etc.). Uma maneira de se fazer tais sistemas em cristais é manipular

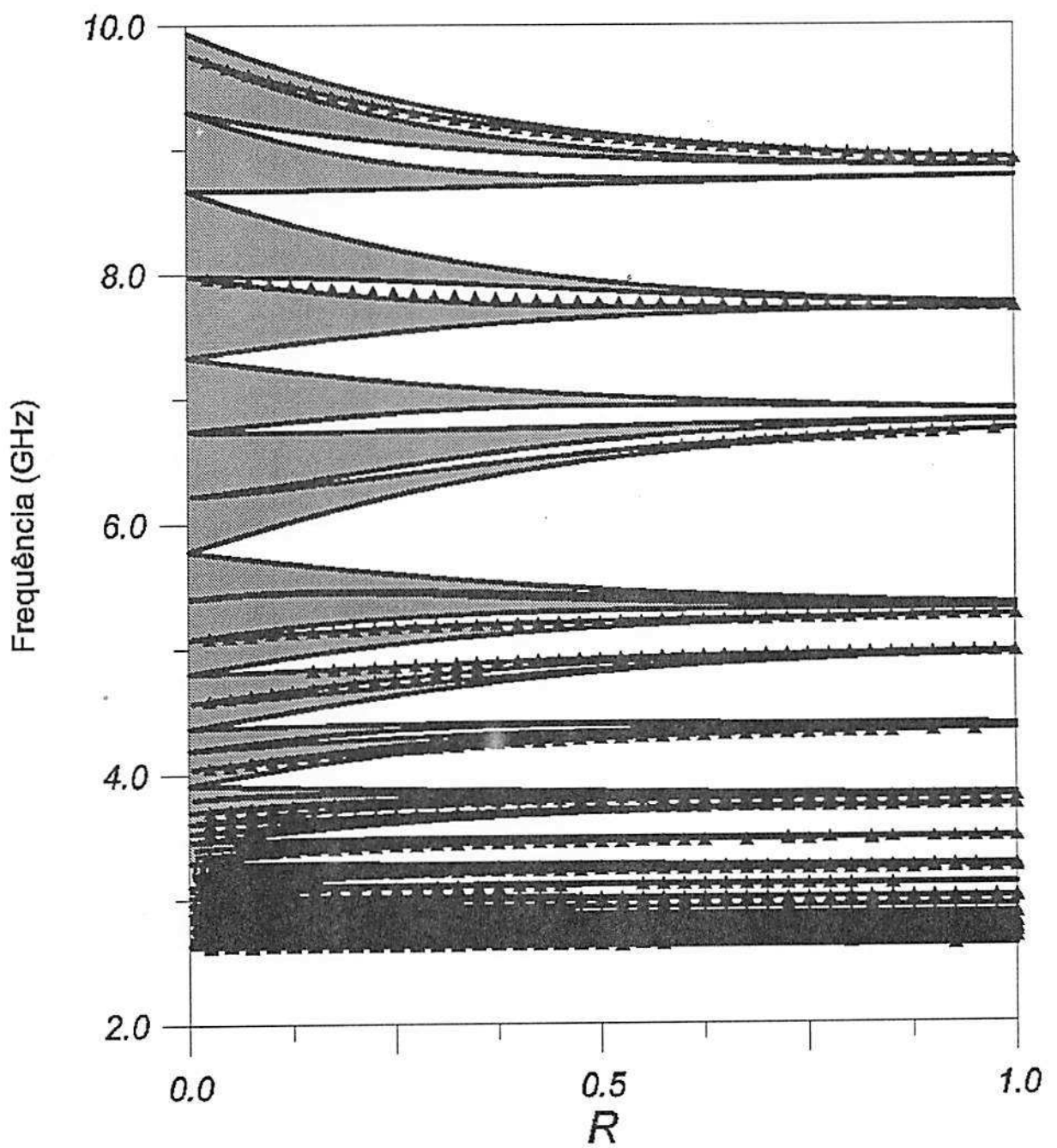


Figura 4.13: Frequência versus razão R para a sexta geração de Fibonacci. Observe-se a alta localização dos modos para $R \approx 1$.

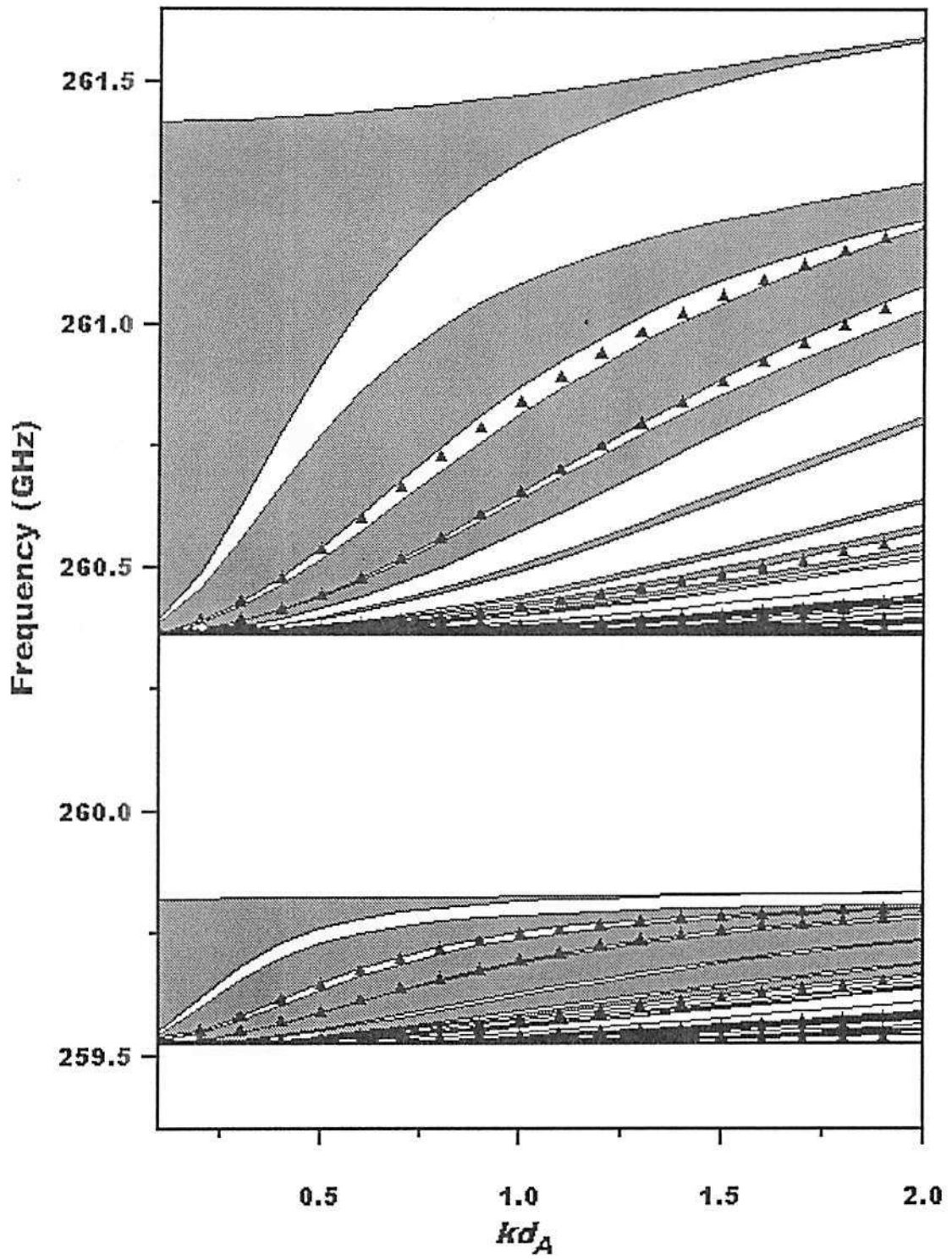


Figura 4.14: Modos magnetostáticos para a terceira geração da sequência de período duplo.

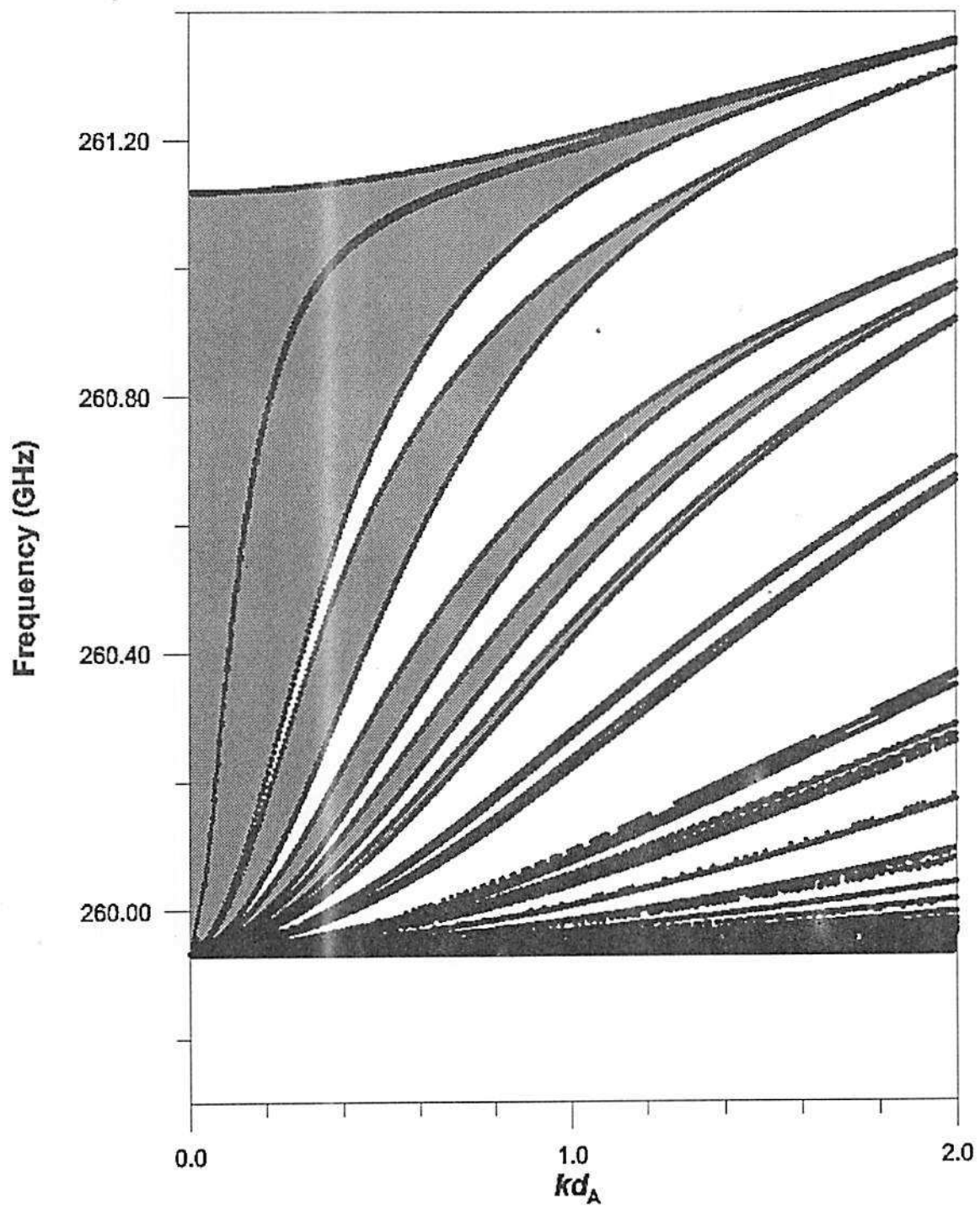


Figura 4.15: Relação de dispersão para a quinta geração de Thue-Morse. Aqui o material é MnF_2 . Também o campo externo é nulo, o que leva a uma fusão das duas regiões que estariam presentes caso $H_0 \neq 0$.

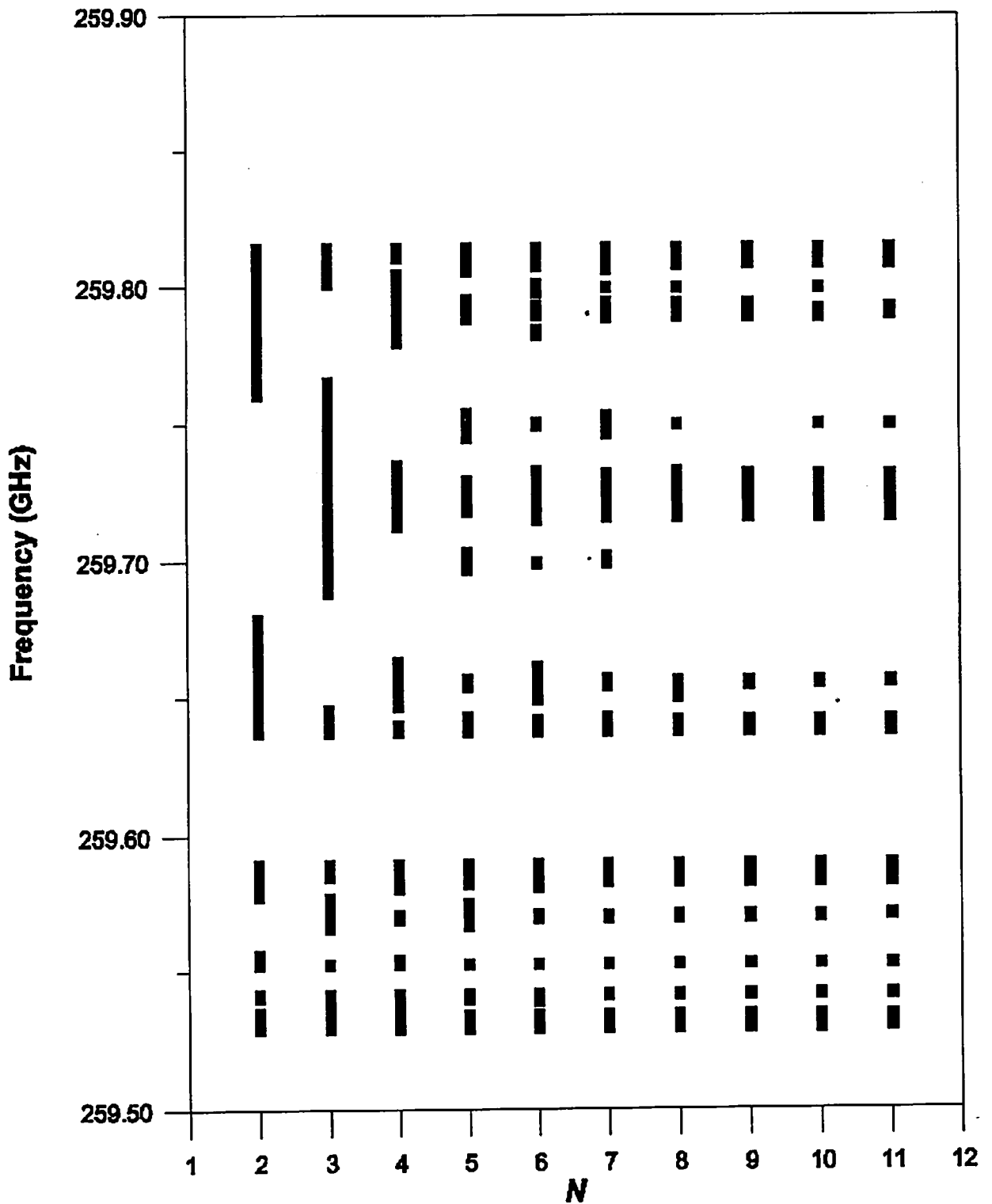


Figura 4.16: Frequência versus geração N . A sequência é a de período-duplo. Observe-se que para grandes valores da geração, as regiões de soluções ficam cada vez mais fragmentadas.

as propriedades dos materiais através de técnicas de dopagem, por exemplo. No caso de super-redes magnéticas, pode-se “simular” esta dopagem também através de diferentes técnicas de crescimento. No nosso modelo, observamos que os espectros das frequências dos modos magnetostáticos nas estruturas quasiperiódicas apresentam *leis de escala*, que variam de acordo com a sequência considerada. Esta lei pode ser determinada fazendo-se uma análise da largura total das bandas de volume dos modos (que representaremos por Δ), para dados valores do vetor de onda, e da geração considerada. Para a sequência de Fibonacci, esta lei está na forma de uma lei de potência $\Delta \sim F_n^{-\delta}$, onde F_n é o número de Fibonacci, e δ é um índice de escala, que alguns autores interpretam como um coeficiente de difusão¹²⁶. Este índice é função do vetor de onda, o que significa que no caso onde a geometria de Voigt é válida essa lei de escala tenha que ser re-escrita levando-se em conta a não-reciprocidade da propagação.

Para as sequências de Thue-Morse e período-duplo, a lei de escala é $\Delta \sim (2^n)^{-\delta}$. Na figura 4.17 apresentamos o gráfico log-log da largura de banda Δ versus o índice de geração para a sequência de Fibonacci. Nesta e em todas as figuras o material considerado é o *Fe*, com os mesmos parâmetros das figuras anteriores. Nesta figura e nas seguintes, as magnitudes do vetor de onda são representadas por símbolos. As cruces (\times) se referem a $kd_A = 0.25$, os triângulos (Δ) a $kd_A = 0.5$, as círculos (\circ) a $kd_A = 1.0$ e os quadrados (\square) a $kd_A = 2.0$. O mesmo gráfico é mostrado na figura 4.18 para a sequência de Thue-Morse, e o comportamento de escala para a sequência de período-duplo é mostrado na figura 4.19. Para a sequência de Thue-Morse, verificamos uma forte dependência do expoente δ com o vetor de onda planar, enquanto que para a sequência de Fibonacci esta dependência é menos intensa. Foi observado que o comportamento de escala linear para todas as sequências não se ajusta bem para pequenos valores do índice de geração das estruturas quasiperiódicas (2 e 3 para Fibonacci, 1 e 2 para Thue-Morse e período-duplo). Argumentamos que a razão para isso é que para pequenos valores do índice de geração n , as estruturas consideradas ainda não têm a marca da quasiperiodicidade, que pode ser observada mais facilmente para altas gerações. Por exemplo, a célula unitária para a super-rede de Fibonacci para $n = 2$ é *AB* (a célula unitária puramente periódica, como

considerada no trabalho de Camley *et al.*¹¹⁵), e para $n = 3$ é ABA , que dá praticamente o mesmo resultado para os modos de volume que a segunda geração, bastando nesta fazer a substituição $A \rightarrow 2A$. Por outro lado, quando se aumenta o valor de n , se obtém um rápido aumento na fragmentação dos ramos em todas as sequências consideradas, e isto causa uma perda de precisão considerável para a região inferior do espectro, devido ao comportamento limite de μ_1 .

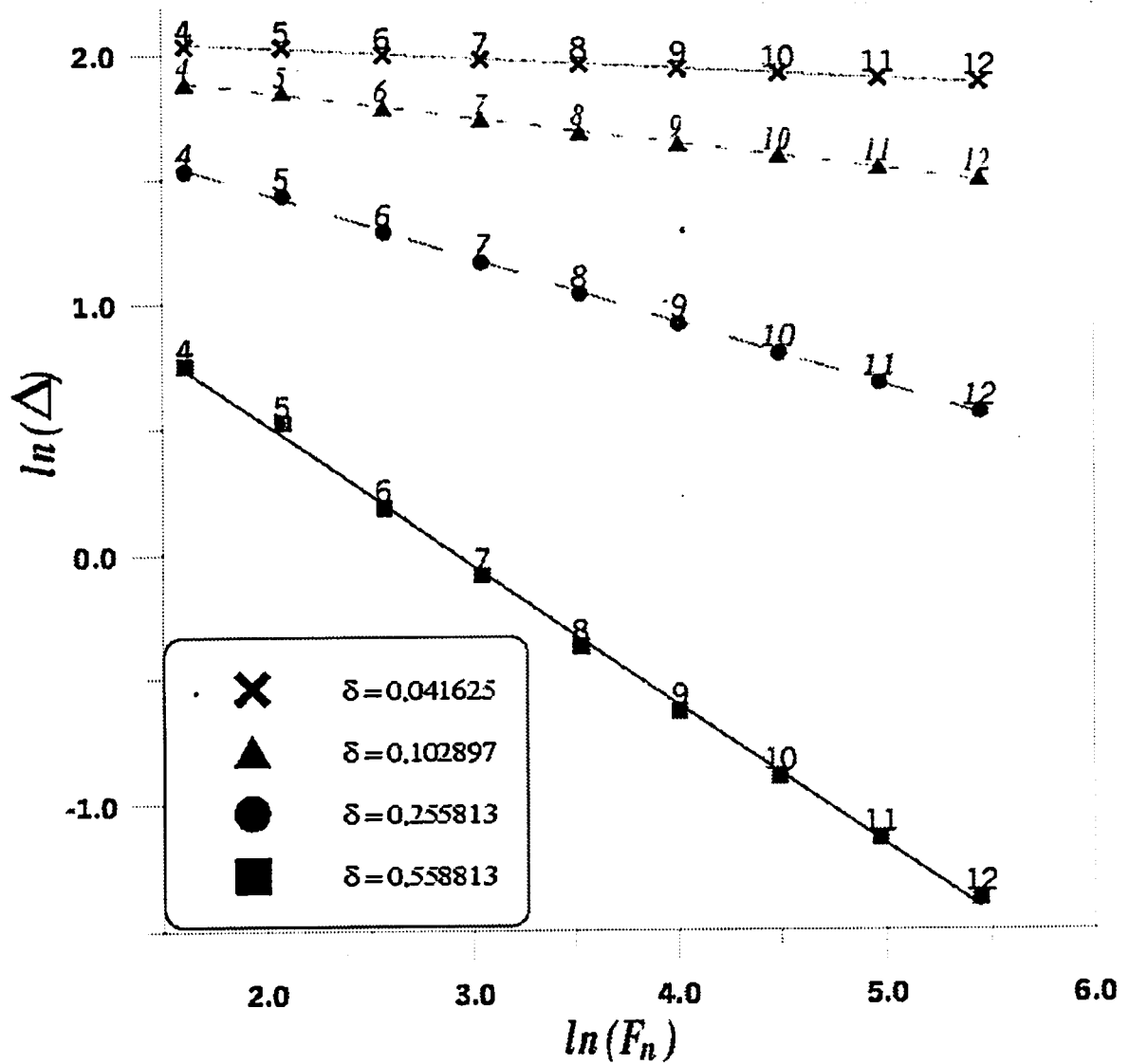


Figura 4.17: Comportamento de escala para a seqüência de Fibonacci, modos magnetostáticos de volume, considerando o material A como sendo Fe. Os valores de δ para cada kd_A são dados nas figuras.

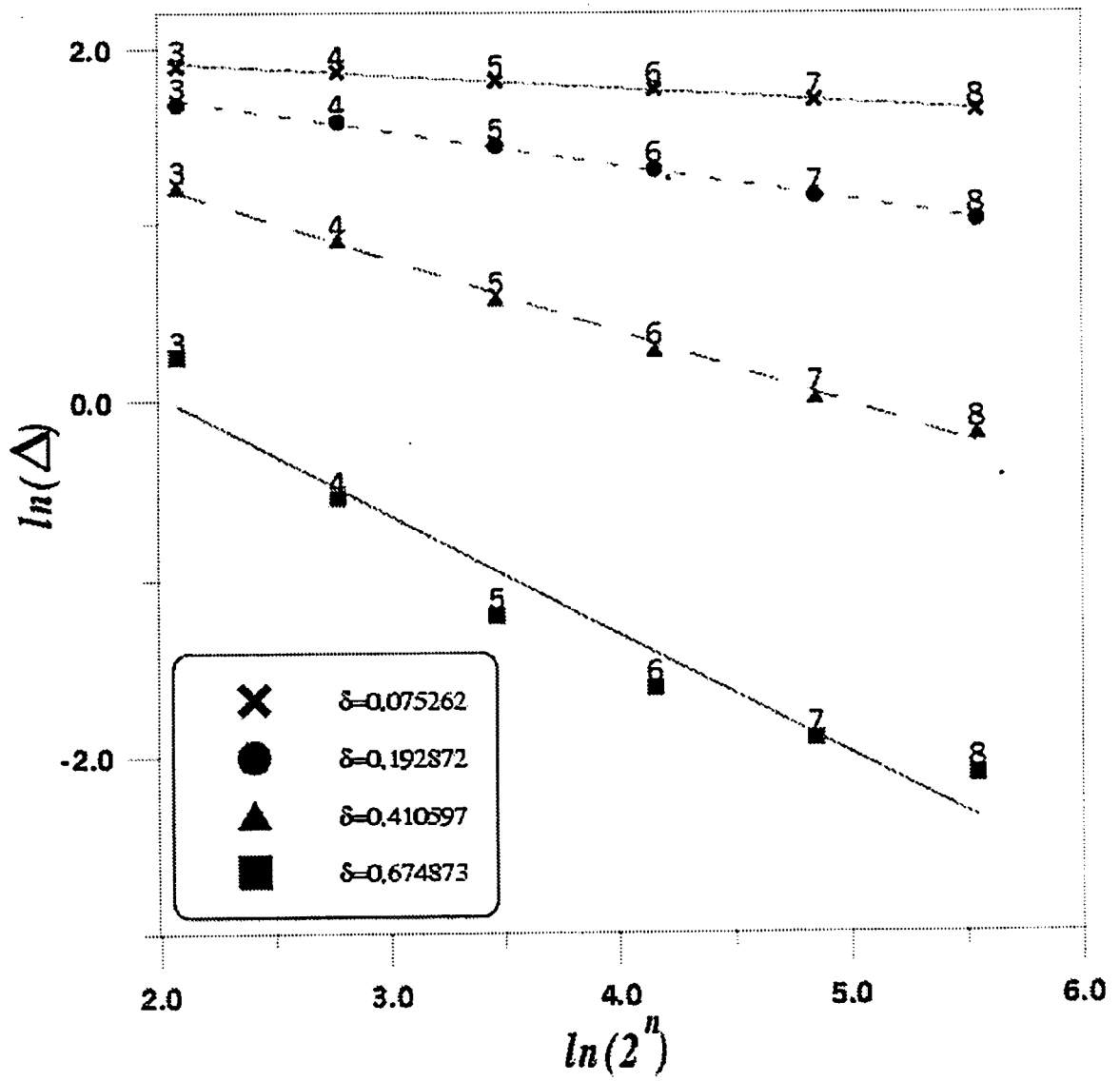


Figura 4.18: Mesmo que a figura anterior, mas para a sequência de Thue-Morse.

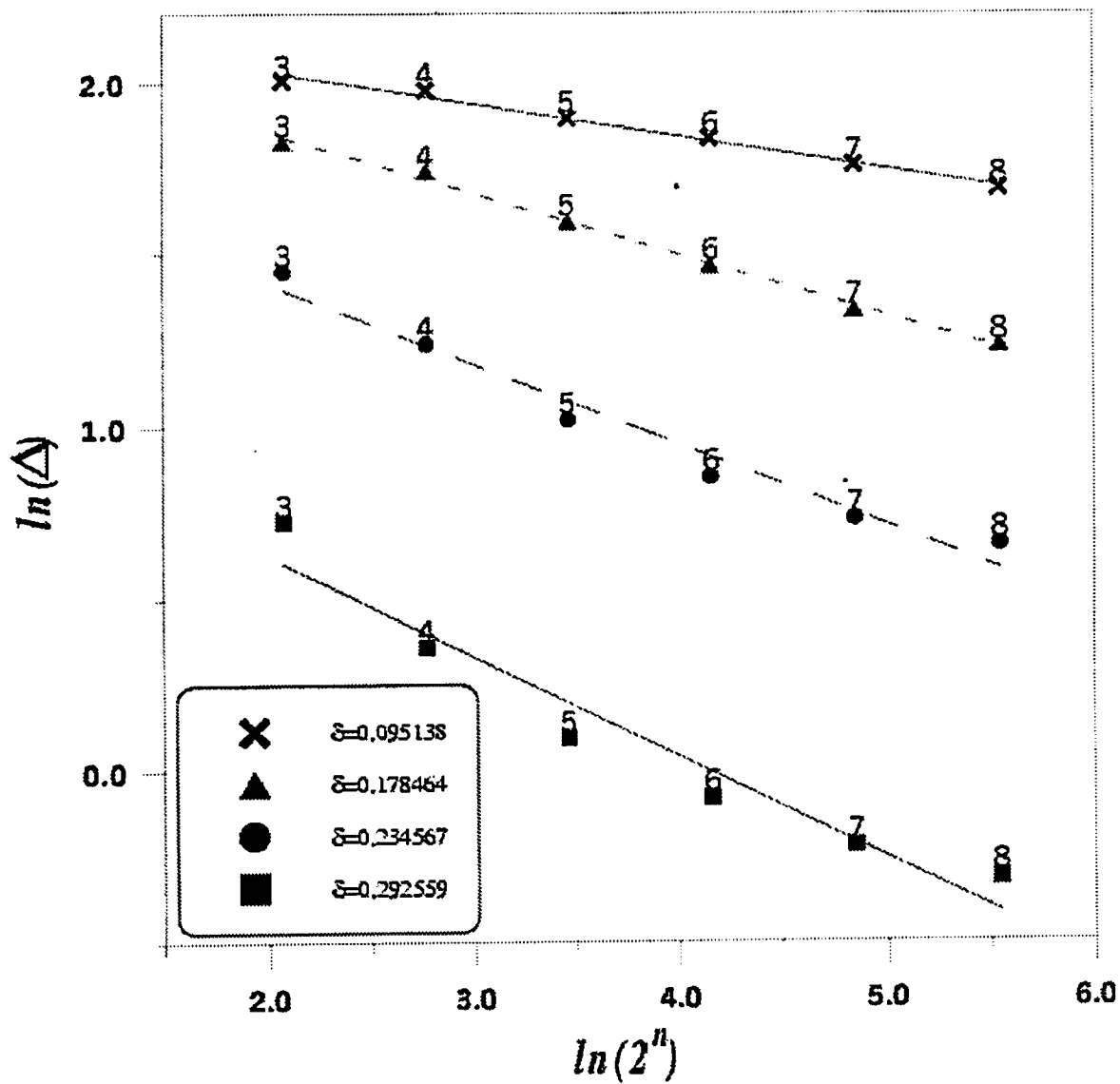


Figura 4.19: Mesmo que a frequência anterior, mas para a sequência de período-duplo.

4.7 Conclusões

Neste capítulo apresentamos uma teoria válida para descrever os modos de volume e superfície que se propagam em estruturas quasiperiódicas. Para as estruturas de Thue-Morse e período-duplo, a forte fragmentação das bandas de volume para grandes valores do vetor de onda $kd_A > 2$ causaram perda de precisão dos nossos cálculos. Então nós consideramos este valor com um bom limite superior para o vetor de onda planar. Para o caso antiferromagnético com campo aplicado não-nulo, as duas regiões com soluções reais exibem padrões bastante semelhantes, embora não se possa afirmar que uma seja apenas uma “escala reduzida” da outra. Esta característica foi observada como sendo independente da sequência e do índice de geração. No entanto, a ordem da geração desempenha um papel importante no comportamento da localização dos modos. Foi feito um estudo sistemático dos parâmetros físicos, e se encontrou que o tamanho das bandas de volume é bastante sensível à razão R .

Encontramos também que existem soluções reais para os modos de volume e superfície mesmo com $R > 1$ (estruturas com um espaçador não-magnético com uma espessura maior que o material magnético) o que difere dos resultados obtidos por Cheng *et al.*¹²¹ e Camley *et al.*¹¹⁵. Do ponto de vista experimental, existem trabalhos que tratam da aplicação de ondas magnetostáticas em dispositivos de processamento de sinais na região de micro-ondas⁸. O conhecimento do espectro das ondas de spin em uma super-rede também nos permite descrever sua resposta linear a uma fonte externa, tal como uma onda eletromagnética. Esta análise pode ser feita através do uso de técnicas de funções de Green.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta tese nós estudamos as ondas de spin se propagando em vários regimes e estruturas magnéticas, bem como usando diferentes formalismos. Vale salientar que não se pode afirmar que este ou aquele formalismo é o mais apropriado (salvo raras exceções): é um processo quase de “tentativa e erro”, baseado em metodologia científica e na experiência de trabalhos anteriores.

Comparamos os resultados obtidos através das diferentes técnicas, e concluímos que o método da matriz-transferência ainda se mostra muito adequado para o estudo das excitações em estruturas artificiais, quer ela seja uma super-rede binária periódica (Capítulo 3) quer seja uma estrutura aperiódica (ou quasiperiódica) que pode apresentar características multifractais (Capítulo 4). Quando se deseja levar em conta interações de ordens superiores, faz-se necessário o uso de técnicas mais poderosas. De maneira análoga, pode-se empregar o método de matriz-transferência para a inclusão de interações de segundos vizinhos (feito por Almeida *et al.*¹²²). No entanto, a influência no espectro de magnons em estruturas ferromagnéticas é muito pequena, comparada com as magnitudes das energias dos modos. Daí só termos considerado interações entre primeiros vizinhos, salvo o caso dos metamagnetos (Capítulo 2) onde tal interação teve que ser levada em conta.

No Capítulo 2, obtivemos os modos de volume e superfície dos modos de propagação lineares em metamagnetos, através do uso de uma teoria microscópica e técnicas matri-

ciais. Obtivemos bons resultados para o FeBr_2 , no sentido que alguns modos superficiais das ondas de spin possuem um deslocamento na energia (com relação às bandas de volume) grande o suficiente para poderem ser medidos experimentalmente. No entanto, os cálculos para o FeCl_2 deram soluções espúrias, e nós interpretamos que a inclusão de anisotropias suficientemente altas neste material levaria a soluções não-físicas, como por exemplo a possível existência de uma fase spin-flop, não existente nestes tipos de materiais. Nós associamos estes resultados discrepantes ao fato do FeCl_2 possuir uma estrutura de camadas mais complexa que o FeBr_2 , tendo isto influência direta nas transformadas de Fourier das interações de troca, que por sua vez têm uma considerável importância para o comportamento dos modos superficiais e de volume.

Por outro lado, também fizemos um estudo microscópico de termos de ordem superior nas variáveis de magnons. No Capítulo 3 apresentamos resultados para uma super-rede binária, composta de dois ferromagnetos de estrutura cúbica simples.

A inclusão de interações entre magnons através de termos com produtos de quatro operadores de magnons, revelou que ao se considerar os campos de anisotropia o sistema fica mais sensível à renormalização das ondas de spin, ou seja, existe um efeito tipo “casca”, pois além da anisotropia ter um papel de quebrar a degenerescência dos modos⁶⁸, ainda faz o sistema ficar mais susceptível aos efeitos das interações de ordens superiores.

Para os modos magnetostáticos que se propagam em super-redes quasiperiódicas (Capítulo 4), obtivemos resultados bastante interessantes. Por exemplo, para uma super-rede puramente periódica semi-infinita (do tipo AB), Camley *et al.*¹¹⁵, ao estudar os modos de superfície que se propagam na mesma, tiveram que *induzir* uma quebra de simetria adicional, através do aumento da espessura da primeira camada (a camada superficial) da super-rede. No nosso caso, a existência de uma quasiperiodicidade nas células unitárias das super-redes fornece condições necessárias e suficientes para que se obtenha tais modos superficiais. Nossa explicação para esse fato é que a super-rede quasiperiódica possui uma “quebra de simetria” natural, regida pelas leis de crescimento das células unitárias, apesar do empilhamento das mesmas ser periódico.

Possíveis extensões da tese incluem:

- (i) A inclusão de outros tipos de anisotropia: cúbica, biquadrática, etc.;
- (ii) O estudo de super-redes quasiperiódicas cujo material magnético possua um regime metamagnético. Neste caso deve-se usar um formalismo microscópico, a fim de se levar em conta o fato de que as camadas adjacentes podem ter magnetizações paralelas ou anti-paralelas;
- (iii) O estudo das propriedades fractais dos modos que se propagam em super-redes no regime magnetostático, seguindo o trabalho de Bezerra *et al.*¹²³ onde os autores aplicaram o estudo da função $f(\alpha)$ para ondas de spin no regime de troca em super-redes quasiperiódicas;
- (iv) A inclusão de interações não-lineares para as ondas de spin que se propagam em estruturas quasiperiódicas;
- (v) O estudo das propriedades de transporte em sistemas de multicamadas quasiperiódicas semicondutoras;
- (vi) A inclusão de interações não-lineares para se estudar a propagação das ondas de spin em sistemas que apresentam o regime metamagnético.

Em suma, estudamos as ondas de spin que se propagam em diversos tipos de estruturas e geometrias. Esperamos que este trabalho possa ser útil àqueles interessados em conhecer o estado de arte deste tipo de excitação coletiva, bem como possa servir como complemento a um estudo mais geral do comportamento da matéria sob a ótica do magnetismo.

Apêndice A

Cálculo das Matrizes

Metamagnéticas

A partir das equações (2.42), (2.43) e (2.44), podemos achar equações na forma matricial. Sejam

$$\begin{aligned}\alpha &= 2FS\eta^{1/2} \\ \alpha' &= 2F'S\eta^{1/2}\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\delta_0 = (1 + \sigma)Sv(0)\tag{A.2}$$

$$d_1 = E_0(\mathbf{k}_{\parallel}) + \delta_0\tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}a &= d_1 + \delta_0 = E_0(\mathbf{k}_{\parallel}) + 2\delta_0 \\ c &= 2\omega\end{aligned}\tag{A.4}$$

Através de substituições sucessivas nas equações, chegamos ao resultado:

$$-\tau^{-1}s_{2m+2} + ds_{2m} - \tau s_{2m-2} = \delta r_{2m}\tag{A.5}$$

onde

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{\gamma\gamma^*} [\alpha(E + a - c) - \alpha'(E - a)] \\ \tau &= \frac{\gamma}{\gamma^*} = \frac{v(\mathbf{k}_{\parallel})}{v(-\mathbf{k}_{\parallel})}\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

Aqui:

$$\begin{aligned}d &= \frac{a^2 - E^2}{\gamma\gamma^*} - 2 + \frac{\alpha\alpha'}{\gamma\gamma^*} \\ \gamma &= Sv(\mathbf{k}_{\parallel}), \quad \gamma^* = Sv(-\mathbf{k}_{\parallel})\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

Note-se que se $\alpha = \alpha' = 0$ (ou seja, se não tivermos anisotropia não-uniaxial), então $\delta = 0$ e teremos o caso homogêneo⁵⁸. Seguindo um procedimento análogo, chegamos a equação para as amplitudes de S^-

$$-\tau^{-1}r_{2m+2} + d^*r_{2m} - \tau r_{2m-2} = \delta^*s_{2m}\quad (\text{A.8})$$

onde

$$\begin{aligned}d^* &= \frac{a^2 - (E^*)^2}{\gamma\gamma^*} - 2 + \frac{\alpha\alpha'}{\gamma\gamma^*} \\ \delta^* &= \frac{1}{\gamma\gamma^*} [\alpha(E + a) - \alpha'(E^* - a)] \\ E^* &= E - 2\omega\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

Definindo agora as matrizes-coluna das amplitudes $F_m = s_{2m}$ e $G_m = r_{2m}$, e levando-se em conta os efeitos de superfície (ou seja, fazendo uma generalização da equação (2.42)), chegamos às seguintes equações matriciais acopladas, que representam nossas equações de movimento resultantes, ainda numa forma um pouco rebuscada:

$$\begin{aligned}[A + \Delta_1] F &= [\delta I + \Delta_2] G \\ [A^* + \Delta_1^*] G &= [\delta^* I + \Delta_2] F\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

onde I é a matriz identidade, e nós definimos as matrizes tri-diagonais infinitas

$$A = \begin{bmatrix} d & -\tau^{-1} & 0 & 0 & \dots \\ -\tau & d & -\tau^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & -\tau & d & -\tau^{-1} & \dots \\ 0 & 0 & -\tau & d & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

e

$$A^* = \begin{bmatrix} d^* & -\tau^{-1} & 0 & 0 & \dots \\ -\tau & d^* & -\tau^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & -\tau & d^* & -\tau^{-1} & \dots \\ 0 & 0 & -\tau & d^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Aqui, fizemos algumas definições de novas variáveis, a saber:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\delta_0}{E - d_1} [1 + \alpha\kappa] \\ \Delta_1^* &= \frac{\delta_0}{E^* - d_1} [1 + \alpha\kappa] \\ \Delta_2 &= \delta_0\kappa \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\kappa = \frac{\alpha}{(E^* - d_1)(E - d_1) - \alpha^2} \quad (\text{A.14})$$

E as matrizes Δ_i são dadas por

$$[\Delta_i]_{m,m'} = \Delta_i \delta_{m,1} \delta_{m',1}, \quad i = 1, 2 \quad (\text{A.15})$$

e os $\delta_{a,b}$ na equação acima são os delta de Kroenecker.

Apêndice B

Forma das Matrizes M_J e N_J

A forma explícita das matrizes é:

$$M_A = \begin{bmatrix} \bar{p}_{1A}x_{1A} & p_{1A}\bar{x}_{1A} & -\bar{P}_{2A}x_{2A} & -P_{2A}\bar{x}_{2A} \\ \frac{L_1^{BA}}{Q_{1A}} & \frac{\bar{L}_1^{BA}}{Q_{1A}} & -\frac{L_2^{BA}F_{AA}}{Q_{2A}} & -\frac{\bar{L}_2^{BA}F_{AA}}{Q_{2A}} \\ -\bar{C}_{1A}x_{1A} & -C_{1A}\bar{x}_{1A} & \bar{X}_{2A}x_{2A} & X_{2A}\bar{x}_{2A} \\ -L_1^{BA}F_{AA} & -\bar{L}_1^{BA}F_{AA} & L_2^{BA} & \bar{L}_2^{BA} \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

$$M_B = \begin{bmatrix} \bar{p}_{1B}x_{1B} & p_{1B}\bar{x}_{1B} & -\bar{P}_{2B}x_{2B} & -P_{2B}\bar{x}_{2B} \\ \frac{L_1^{AB}}{Q_{1B}} & \frac{\bar{L}_1^{AB}}{Q_{1B}} & -\frac{L_2^{AB}F_{BB}}{Q_{2B}} & -\frac{\bar{L}_2^{AB}F_{BB}}{Q_{2B}} \\ -\bar{C}_{1B}x_{1B} & -C_{1B}\bar{x}_{1B} & \bar{X}_{2B}x_{2B} & X_{2B}\bar{x}_{2B} \\ -L_1^{AB}F_{BB} & -\bar{L}_1^{AB}F_{BB} & L_2^{AB} & \bar{L}_2^{AB} \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

$$N_A = \begin{bmatrix} I_B S_{AB} & I_B \bar{S}_{AB} & -I_B S_{AB} F_{AA} & -I_B \bar{S}_{AB} F_{AA} \\ p_{1A} & \bar{p}_{1A} & -P_{2A} & -\bar{P}_{2A} \\ -\frac{L_1^{BA} F_{AA}}{x_{1A}} & -\frac{\bar{L}_1^{BA} F_{AA}}{x_{1A}} & \frac{L_2^{BA}}{x_{2A}} & \frac{\bar{L}_2^{BA}}{x_{2A}} \\ -C_{1A} & -\bar{C}_{1A} & X_{2A} & \bar{X}_{2A} \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

$$N_B = \begin{bmatrix} I_A S_{BA} & I_A \bar{S}_{BA} & -I_A S_{BA} F_{BB} & -I_A \bar{S}_{BA} F_{BB} \\ p_{1B} & \bar{p}_{1B} & -P_{2B} & -\bar{P}_{2B} \\ -\frac{L_1^{AB} F_{BB}}{x_{1B}} & -\frac{\bar{L}_1^{AB} F_{BB}}{x_{1B}} & \frac{L_2^{AB}}{x_{2B}} & \frac{\bar{L}_2^{AB}}{x_{2B}} \\ -C_{1B} & -\bar{C}_{1B} & X_{2B} & \bar{X}_{2B} \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

onde aqui ($j = 1, 2$; $J = A, B$):

$$x_{jJ} = \bar{f}_{jJ} t_{jJ} = \frac{1}{\bar{x}_{jJ}} ; y_{jJ} = 2F'_{sJ} Q_{jJ} F_{JJ} \quad (\text{B.5})$$

$$p_{jJ} = \lambda_{jJ} + y_{jJ} ; P_{jJ} = \lambda_{jJ} F_{JJ} + \frac{y_{jJ}}{F_{JJ}} \quad (\text{B.6})$$

$$C_{jJ} = \lambda'_{jJ} Q_{jJ} F_{JJ} + 2F'_{sJ} ; X_{jJ} = \lambda'_{jJ} Q_{jJ} + \frac{y_{jJ}}{Q_{jJ}} \quad (\text{B.7})$$

$$L_j^{AB} = I_A S_{BA} Q_{jB} x_{jB} ; L_j^{BA} = I_B S_{AB} Q_{jA} x_{jA} \quad (\text{B.8})$$

e as variáveis “ $\bar{}$ ” são obtidas das variáveis normais substituindo-se λ_{jJ} por $\bar{\lambda}_{jJ}$, ou x_{jJ} por \bar{x}_{jJ} , por exemplo $\bar{p}_{jJ} = \bar{\lambda}_{jJ} + y_{jJ}$, $j = 1, 2$; $J = A, B$.

Apêndice C

Trabalhos Publicados

C.1 Spin Wave Spectrum in Magnetic Superlattices with Anisotropic Fields

phys. stat. sol. (b) 198, 827 (1996)

Subject classification: 75.25 and 75.30; 75.70

Departamento de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal¹⁾ (a) and Department of Physics, Harvard University, Cambridge²⁾ (b)

Spin Wave Spectrum in Magnetic Superlattices with Anisotropic Fields

By

D. H. A. L. ANSELMO (a) and E. L. ALBUQUERQUE (a, b)

(Received February 7, 1996; in revised form July 1, 1996)

We present a microscopic theory, based on the Heisenberg model, to investigate the spin wave spectrum in a magnetic superlattice whose constituents may present the uniaxial and nonuniaxial components of the single-ion anisotropy. Our calculations are carried out for the exchange-dominated regime, stressing the contribution of the bulk as well as the surface modes associated with the truncation of the superlattice. We derive general dispersion relations which encompass previous works in the field. Interesting new aspects of the spectrum are obtained due to the presence of the non-uniaxial component of the anisotropic field.

1. Introduction

As a result of recent advances in fabrication techniques, superlattice structures of impressive quality are now synthesized from films composed of a wide variety of materials. They form an intriguing new class of materials, in that their macroscopic properties are subject to design or control by varying the thickness or composition of the constituent films; in fact some of these properties may be unique to the multilayer structure (for a review see [1, 2]). Examples of works in this subject include films of ferromagnetic metals, such as Ni or Fe, as well as rare-earth materials, including spiral spin materials, with nonmagnetic "spacers" in between [3 to 7].

Theoretical studies of spin wave excitations in magnetic superlattices have been also extensively studied, by considering the nature of the solutions for the appropriate wave field in each film. They are then linked together through appropriate boundary conditions, and the assistance of Bloch's theorem [8 to 16]. The surfaces and interfaces in these layered structures play an important role in the properties of the entire system, and indeed, most of the interesting properties of these excitations are due to the surface and interface effects. Many of these works have been concerned with the spin wave excitations at the low-temperature regime, where at least one of the components is a ferromagnetic or an antiferromagnetic material. Furthermore, depending on the relative importance of the magnetic dipole-dipole and exchange interactions, different models for the magnetic behaviour can be employed. For instance, for sufficiently small values of the excitation wave vector, dipolar effects are dominant and magnetostatic modes should propagate in such superlattices [8 to 12]. On the other hand, at large excitation

¹⁾ 59072-970 Natal RN, Brazil.

²⁾ Cambridge, MA 02138, USA.

wave vectors typically greater than 10^8 m^{-1} in a ferromagnet, exchange interaction, which is the restoring force for spin waves, will be dominant [13 to 17].

On the experimental side, the use of Brillouin scattering spectroscopy has proven to be an important tool to probe experimentally some theoretical predictions of these excitations [18 to 20]. Besides, a knowledge of the spectrum of the spin waves in a superlattice, allows one to describe its linear response to an external source, such as an electromagnetic wave. The analysis can be done through the use of Green function techniques.

In this paper we are concerned with the spin wave spectra in exchange-dominated ferromagnetic superlattices. Rather than using a "continuum" approximation, as it was done in a recent paper [21] dealing with some nonuniaxial effects in magnetic superlattices, we develop here a microscopic Green function theory, taking into account surface effects in a semi-infinite ferromagnetic superlattice. The method of calculation is the same as the one presented in previous papers [22, 23], which describe particular situations of the general aspect of the problem discussed here. Furthermore, we stress the contribution of the surface modes due to the truncation of the superlattice, as well as we discuss in detail the important special case of a superlattice made up of uniaxial/non-uniaxial ferromagnetic layers.

We consider that the constituents of the ferromagnetic superlattice have single-ion anisotropic energy. This is the fine structure energy of an ion under the influence of the crystalline electrical field, to which the spin-orbit coupling and intra-atomic magnetic interactions among the spins contribute. The forms of the anisotropic spin Hamiltonian is determined from the point symmetry around the ion, and is assumed to be a function of the direction cosines of the magnetization vector M with respect to the crystallographic axes. In the absence of an external magnetic field, M lies in the direction in which the free energy is minimal. This direction is called the axis of "easy" magnetization, and usually we call the related anisotropic field as uniaxial ("easy-axis") single-ion anisotropy. When an external magnetic field is applied, the magnetization vector deviates to a new direction at which the torque exerted by the external magnetic field balances the torque originating in the anisotropic energy. Thus, a nonuniaxial ("easy-plane") single-ion anisotropy component appears. We take into account in this paper both types of anisotropic fields.

Nonuniaxial anisotropy exists in many magnetic materials, like the ferromagnet CrBr_3 and the antiferromagnet NiO , and it can be different at a surface or interface because the crystalline electric fields are different there. We employ the Heisenberg model to describe the spin waves in the ferromagnetic layers, together with a transfer-matrix approach to simplify the algebra, which can be, otherwise, much more involved. This method was used with success in dealing with the theory of superlattice plasmon-polaritons (for a review see [24]), and it leads to a compact expression for the spin wave dispersion relation of the magnetic superlattice. Experimental systems are likely to be more complicated than the model described here, with less simple crystal structures and possible different ordering at interface layers [25]. However, these details would influence only the detailed form of the transfer matrix, and neither the general method nor the qualitative form of the dispersion relations should be affected.

The plan of this paper is as follows: in Section 2 we present the method of calculation, which is based on the Heisenberg model and the transfer-matrix technique. We discuss also the interesting special case of a magnetic superlattice whose constituents

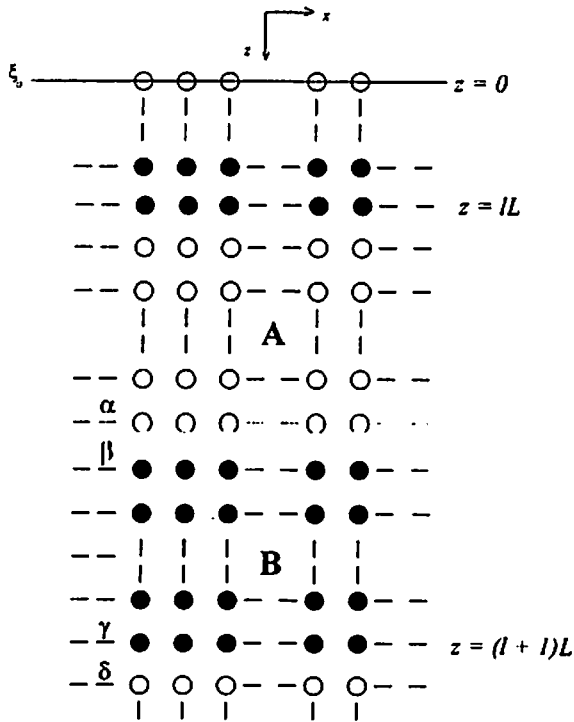


Fig. 1. Schematic representation of the ferromagnetic superlattice considered in this paper

are a uniaxial/nonuniaxial material. The numerical results are presented and their main features are discussed in Section 3. Finally, Section 4 is devoted to the conclusions of this work.

2. Method of Calculation

As is depicted in Fig. 1, we consider a superlattice in which n_a layers of material A alternate with n_b layers of material B. Both materials are taken to be simple cubic nonuniaxial Heisenberg ferromagnets, having bulk exchange constants J_A and J_B , with nearest-neighbor exchange inter-

action. The size of the superlattice unit cell is $L = (n_a + n_b) a$, where a is the lattice constant of both materials. A static applied magnetic field \mathbf{H}_0 is assumed to be in the z -direction. The superlattice is truncated at $z = 0$, with vacuum occupying the region $z < 0$.

The two materials are characterized by single-ion uniaxial anisotropy parameters D_A and D_B , as well as single-ion nonuniaxial anisotropy parameters F_A and F_B . At the interfaces, between constituents, these values are D_{S_J} and F_{S_J} ($J = A$ or B), while at the free surface (material A), defined by $z = 0$, we have D_0 and F_0 , respectively. The exchange constant across each interface A-B is equal to I .

The Heisenberg Hamiltonian for a bulk specimen of component $J = A$ or B is

$$H = -(1/2) \sum_{i,j} J_J \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - g\mu_B H_0 \sum_i S_i^z + H_{\text{anis}} \quad (1)$$

with

$$H_{\text{anis}} = -\sum_i D_J (S_i^z)^2 - \sum_i F_J [(S_i^x)^2 - (S_i^y)^2]. \quad (2)$$

Here, \mathbf{S}_i denotes the spin operator at magnetic site i , g is the usual Landé factor, and μ_B is the Bohr magneton.

The dispersion equation for a bulk spin wave in medium J is found within the random-phase approximation (RPA) from the equation of motion for the operator $S_i^\pm = S_i^x \pm iS_i^y$. This equation is

$$(\pm\hbar\omega - \Delta_J) S_i^\pm = S_J \sum_j J_J (S_i^\pm - S_j^\pm) - 2F_J S_J \eta^{1/2} S_i^\mp, \quad (3)$$

where we have made a Fourier transform to frequency ω . Also, $\eta = [1 - (2S_J)^{-1}]$, and S_J is the RPA approximation for S_i^z . The value of Δ_J is

$$\Delta_J = g\mu_B H_0 + 2D_J S_J \eta. \quad (4)$$

Considering plane-wave solution for the operators S_i^\pm , and either by diagonalizing the Hamiltonian (1) or by solving (3) directly, we can find that the spin wave dispersion relation in a infinite nonuniaxial ferromagnet J is given by

$$\cos(k_z a) = (\Delta_J/2J_S S_J) + [3 - \gamma(k_p)] \pm [(\Omega_J/2)^2 + F_J^2 \eta/J_J^2]^{1/2}. \quad (5)$$

Here, $\Omega_J = \hbar\omega/J_S S_J$ and $\gamma(k_p) = \cos(k_x a) + \cos(k_y a)$, with $k_p = (k_x, k_y)$.

We now turn to the magnetic superlattice depicted in Fig. 1. At non-zero temperature the equilibrium configuration must exhibit the analog of surface reconstruction. This implies that the mean spin S in both materials is a function of its distance from the nearest A-B interface. However, although this effect is important, we can overcome it by restricting our attention to the low-temperature regime, that is $T \ll T_c$, at which the spins are fully ordered. The spin wave dispersion equation can then be found by solving the RPA equations of motion for the spin operators S_j^\pm . A spin that is not in an interface layer labeled $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, and ξ_0 in Fig. 1, has the same nearest-neighbor environment and therefore the same equation of motion as a spin in the corresponding bulk medium. Thus, the spin wave amplitudes should be given, within each bulk material, by a linear combination of the positive- and negative-going solutions, i.e.

$$S_j^+ = \zeta_{1J} + F_{JJ} \zeta_{2J}, \quad (6)$$

$$S_j^- = Q_{1J} F_{JJ} \zeta_{1J} + Q_{2J} \zeta_{2J}, \quad (7)$$

where

$$\zeta_{1J} = A_1^n \exp(ik_{1J}z) + A_2^n \exp(-ik_{1J}z) \quad (8)$$

and ζ_{2J} is equal to ζ_{1J} provided we replace A_1^n, A_2^n , and k_{1J} by A_3^n, A_4^n , and k_{2J} . Also, ($J = A$ or B)

$$F_{JJ} = F_J \eta_J^{1/2} / J_J, \quad (9)$$

$$Q_{1J} = -2[\Omega_J + (\Omega_J^2 + 4F_{JJ}^2)^{1/2}]^{-1} = -(Q_{2J})^{-1}. \quad (10)$$

The wave vectors k_{1J} and k_{2J} are related to Ω_J by (5).

The equations of motion for layers α and β relate the amplitudes A_j^n , ($j = 1$ to 4) of medium A with the corresponding amplitudes B_j^n ($j = 1$ to 4) of medium B. Similarly, the equations of motion for layers γ and δ relate the amplitudes A_j^{n+1} ($j = 1$ to 4) of medium A with the corresponding amplitudes B_j^n ($j = 1$ to 4) of medium B. In layer α , the equation of motion for S^+ reads

$$\begin{aligned} & (\lambda_{1A} + 2Q_{1A}F'_{AA}F'_{SA}) A_1 f_{1A} t_{1A} + (\lambda_{1A} + 2Q_{1A}F'_{AA}F'_{SA}) B_1 f_{1A} \bar{t}_{1A} \\ & - (\bar{\lambda}_{2A}F_{AA} + 2Q_{2A}F'_{SA}) C_1 \bar{f}_{2A} t_{2A} - (\lambda_{2A}F_{AA} + 2Q_{2A}F'_{SA}) D_1 f_{2A} \bar{t}_{2A} \\ & = X I_A S_{BA} [A_2 + B_2 - F_{BB}(C_2 + D_2)], \end{aligned} \quad (11)$$

while for S^- we have

$$\begin{aligned} & -(\bar{\lambda}'_{1A} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_{SA}) A_1 \bar{f}_{1A} t_{1A} - (\lambda'_{1A} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_{SA}) B_1 f_{1A} \bar{t}_{1A} \\ & + (\bar{\lambda}'_{2A} Q_{2A} + 2F'_{SA} F_{AA}) C_1 \bar{f}_{2A} t_{2A} + (\lambda'_{2A} Q_{2A} + 2F'_{SA} F_{AA}) D_1 f_{2A} \bar{t}_{2A} \\ & = X I_A S_{BA} [-Q_{1B} F_{BB} (A_2 + B_2) + Q_{2B} (C_2 + D_2)], \end{aligned} \quad (12)$$

where the coefficients are defined in Appendix A. The equations of motion in the layers β, γ , and δ have a similar form. Following the procedure described in [22], we define the

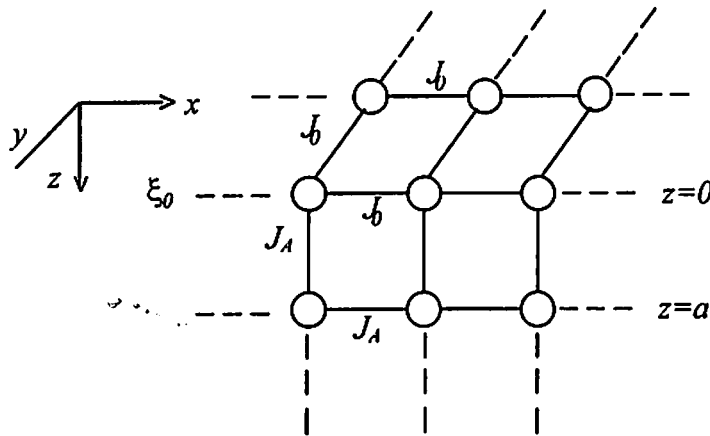


Fig. 2. Truncation of the ferromagnetic superlattice, showing the exchange terms near the free surface

matrix vectors as

$$|A^n\rangle = \begin{bmatrix} A_1^n \\ B_1^n \\ C_1^n \\ D_1^n \end{bmatrix}; \quad |B^n\rangle = \begin{bmatrix} A_2^n \\ B_2^n \\ C_2^n \\ D_2^n \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Then, (11) and (12), as well as all the other equations on the interface layers, can be cast in matrix forms as

$$M_A |A^n\rangle = N_B |A^{n+1}\rangle, \quad (14)$$

$$M_B |B^n\rangle = N_A |A^{n+1}\rangle, \quad (15)$$

where the 4×4 matrices M and N can be found in Appendix A.

Now, making use of the transfer-matrix treatment and Bloch's theorem, as in previous works [13, 22], we find that

$$\mathbf{T} |A^n\rangle = \exp(iQL) |A^n\rangle, \quad (16)$$

where Q is the Bloch wave vector, and the 4×4 transfer matrix \mathbf{T} is defined by

$$\mathbf{T} = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A. \quad (17)$$

Also, as \mathbf{T} is a unimodular matrix, the eigenvalues of (17) occur in pairs (t_i, t_i^{-1}) , $i = 1, 2$, and they are related to the two Bloch wave vectors Q_i by $t_i = \exp(iQ_i L)$. Thus, once \mathbf{T} is evaluated, the required eigenvalues can be determined in a standard way. This calculation generalizes those presented in a previous paper [22], where we discussed two limiting cases, namely first the nonuniaxial parameter F in each medium has the same value at the interface as in the bulk, and secondly the nonuniaxial anisotropy is considered only at the interfaces.

Now we consider the truncation of the superlattice at the plane $z = 0$, with vacuum occupying the half space $z < 0$. This allows us to investigate the occurrence of surface spin waves for this superlattice structure. For these modes (16) still holds, provided we replace the Bloch wave vector Q by $i\beta$, with $\text{Re}(\beta) > 0$ to guarantee a localized mode. Furthermore, (see Fig. 2) we should take into account the equations of motion (3) for layer ξ_0 at $z = 0$, considering the single-ion anisotropy parameters and the exchange interaction on the surface as D_0 , F_0 , and J_0 , respectively. For the spin operators S^+ we

have

$$(\lambda_{10} + 2F'_0 Q_{1A} F_{AA}) A_0 + (\bar{\lambda}_{10} + 2F'_0 Q_{1A} F_{AA}) B_0 - (\lambda_{20} F_{AA} + 2F'_0 Q_{2A}) C_0 - (\bar{\lambda}_{20} F_{AA} + 2F'_0 Q_{2A}) D_0 = 0, \quad (18)$$

while for S^- we get

$$-(\lambda'_{10} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_0) A_0 - (\bar{\lambda}'_{10} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_0) B_0 + (\lambda'_{20} Q_{2A} + 2F'_0 F_{AA}) C_0 + (\bar{\lambda}'_{20} Q_{2A} + 2F'_0 F_{AA}) D_0 = 0, \quad (19)$$

where λ_{i0} , λ'_{i0} and F'_0 are defined in Appendix A. On the other hand, in layer γ of the first cell (see Fig. 1) the equations of motion are

$$\alpha_1 A_1 + \bar{\alpha}_1 B_1 - \alpha_2 C_1 - \bar{\alpha}_2 D_1 = \sigma A_0^{(1)} + \sigma B_0^{(1)} - F_{AA} \sigma C_0^{(1)} - F_{AA} \sigma D_0^{(1)} \quad (20)$$

and

$$-\alpha_3 A_1 - \bar{\alpha}_3 B_1 + \alpha_4 C_1 + \bar{\alpha}_4 D_1 = -Q_{1A} F_{AA} \sigma A_0^{(1)} - Q_{1A} F_{AA} \sigma B_0^{(1)} + Q_{2A} \sigma C_0^{(1)} + Q_{2A} \sigma D_0^{(1)}. \quad (21)$$

Also, we know that

$$|A^1\rangle = T |A^0\rangle \quad (22)$$

and

$$|B^1\rangle = N_B^{-1} M_A |A^0\rangle = \Gamma |A^0\rangle \quad (23)$$

and therefore, after a straightforward, but tedious calculation, we get

$$\begin{aligned} & [\alpha_1 \Gamma_{11} + \bar{\alpha}_1 \Gamma_{21} - \alpha_2 \Gamma_{31} - \bar{\alpha}_2 \Gamma_{41} - \sigma T_{11} - \sigma T_{21} + F_{AA} \sigma T_{31} + F_{AA} \sigma T_{41}] A_0 \\ & + [\alpha_1 \Gamma_{12} + \bar{\alpha}_1 \Gamma_{22} - \alpha_2 \Gamma_{32} - \bar{\alpha}_2 \Gamma_{42} - \sigma T_{12} - \sigma T_{22} + F_{AA} \sigma T_{32} + F_{AA} \sigma T_{42}] B_0 \\ & + [\alpha_1 \Gamma_{13} + \bar{\alpha}_1 \Gamma_{23} - \alpha_2 \Gamma_{33} - \bar{\alpha}_2 \Gamma_{43} - \sigma T_{13} - \sigma T_{23} + F_{AA} \sigma T_{33} + F_{AA} \sigma T_{43}] C_0 \\ & + [\alpha_1 \Gamma_{14} + \bar{\alpha}_1 \Gamma_{24} - \alpha_2 \Gamma_{34} - \bar{\alpha}_2 \Gamma_{44} - \sigma T_{14} - \sigma T_{24} + F_{AA} \sigma T_{34} + F_{AA} \sigma T_{44}] D_0 \\ & = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & [-\alpha_3 \Gamma_{11} - \bar{\alpha}_3 \Gamma_{21} + \alpha_4 \Gamma_{31} + \bar{\alpha}_4 \Gamma_{41} + Q_{1A} F_{AA} \sigma T_{11} + Q_{1A} F_{AA} \sigma T_{21} - Q_{2A} \sigma T_{31} - Q_{2A} \sigma T_{41}] A_0 \\ & + [-\alpha_3 \Gamma_{12} - \bar{\alpha}_3 \Gamma_{22} + \alpha_4 \Gamma_{32} + \bar{\alpha}_4 \Gamma_{42} + Q_{1A} F_{AA} \sigma T_{12} + Q_{1A} F_{AA} \sigma T_{22} - Q_{2A} \sigma T_{32} - Q_{2A} \sigma T_{42}] B_0 \\ & + [-\alpha_3 \Gamma_{13} - \bar{\alpha}_3 \Gamma_{23} + \alpha_4 \Gamma_{33} + \bar{\alpha}_4 \Gamma_{43} + Q_{1A} F_{AA} \sigma T_{13} + Q_{1A} F_{AA} \sigma T_{23} - Q_{2A} \sigma T_{33} - Q_{2A} \sigma T_{43}] C_0 \\ & + [-\alpha_3 \Gamma_{14} - \bar{\alpha}_3 \Gamma_{24} + \alpha_4 \Gamma_{34} + \bar{\alpha}_4 \Gamma_{44} + Q_{1A} F_{AA} \sigma T_{14} + Q_{1A} F_{AA} \sigma T_{24} - Q_{2A} \sigma T_{34} - Q_{2A} \sigma T_{44}] D_0 \\ & = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

In these equations the coefficients α are given in Appendix A. If one solves (18) to (25) by the canonical way, we can obtain the implicit dispersion relation for the surface modes. However, a better physical insight can be given if we consider the special case of a ferromagnetic superlattice made up of uniaxial/nonuniaxial materials. To obtain the surface modes in this case, it is sufficient to put $F_{AA} = F_{AS} = 0$ in (18) to (25). The implicit dispersion relation for the surface spin waves is then given by

$$\begin{aligned} & (T'_{11} - T'_{22} + T'_{12} \alpha_0^{-1} - T'_{21} \alpha_0) (T'_{33} - T'_{44} + T'_{34} \sigma_0^{-1} - T'_{43} \sigma_0) \\ & = (T'_{23} + \sigma_0^{-1} T'_{24} - \alpha_0^{-1} T'_{13} - \alpha_0^{-1} \sigma_0^{-1} T'_{14}) (\alpha_0 \sigma_0 T'_{41} + \sigma_0 T'_{42} - \alpha_0 T'_{31} - T'_{32}), \end{aligned} \quad (26)$$

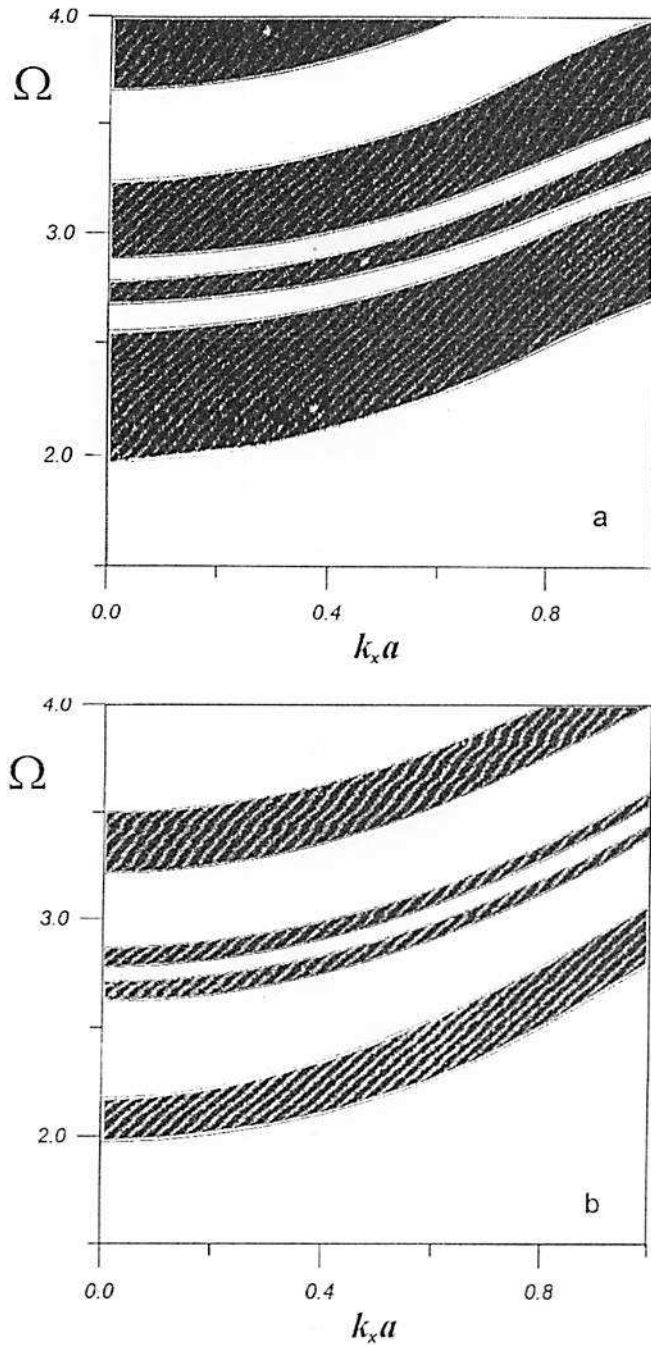


Fig. 3. Bulk spin wave dispersion relation Ω vs. $k_x a$. The physical parameters used here are: a) $n_A = 3$, $n_B = 3$, $S_A = 1.0$, $S_B = 1.5$, $XJ_{AB} = 2.0$, $XI_A = 1.2$, $XI_B = 2.4$, $XH_{0A} = 1.0$, $XH_{0B} = 2.0$, $D_{AA} = D_{BB} = 1.2$, $F_{AA} = F_{BB} = 0.8$, $F_{AS} = 0.8$ and $F_{BS} = 0.6$; b) same as a), but with $F_{AS} = 0.6$ and $F_{BS} = 0.8$

where the elements of the new matrix T' can be found from T by considering $F_{AA} = F_{AS} = 0$. As one can see, when the nonuniaxial term F_{BB} is zero, the right-hand side of this relation vanished. Therefore the two uncoupled terms of the left-hand side provide individually the implicit dispersion relation for the surface modes on the absence of the nonuniaxial anisotropy, and, as expected, they come from the S_i^+ and S_i^- equation, respectively. It is interesting to observe that this dispersion relation has the same form as those obtained from the surface polaritons in a piezoelectric superlattice [26].

3. Numerical Results

In this section we present some numerical illustrations of the spin wave dispersion relation as a function of the reduced frequency $\Omega = \hbar\omega/J_A S_A$. A complete description of these spectra should be given

in the 3D space defined by Ω , $k_x a$, and QL . We will first show the spectrum defined by the plane Ω versus $k_x a$, while later we will deal with the region Ω versus QL .

The physical parameters used here are the number of layers in each material n_A and n_B , respectively; the average spin S_A and S_B , respectively; the ratio between the exchange terms $XJ_{AB} = J_A/J_B$, $XI_J = I/J_J$ and $XJ_{0A} = J_0/J_A$; the relative external magnetic field $XH_{0J} = H_0/J_J$ and the anisotropy parameters $D_{JJ} (= D_J/J_J)$, $F_{JJ} (= F_J/J_J)$ and $F_{Js} (= F_{sJ}/J_J)$, ($J = A, B$).

Fig. 3a and b show the spin wave dispersion relation for the plane Ω versus $k_x a$. The bulk bands are shown shaded, and are limited by the curves $QL = 0$ and $QL = \pi$. In between these curves there are gap regions, where the surface modes can propagate. The

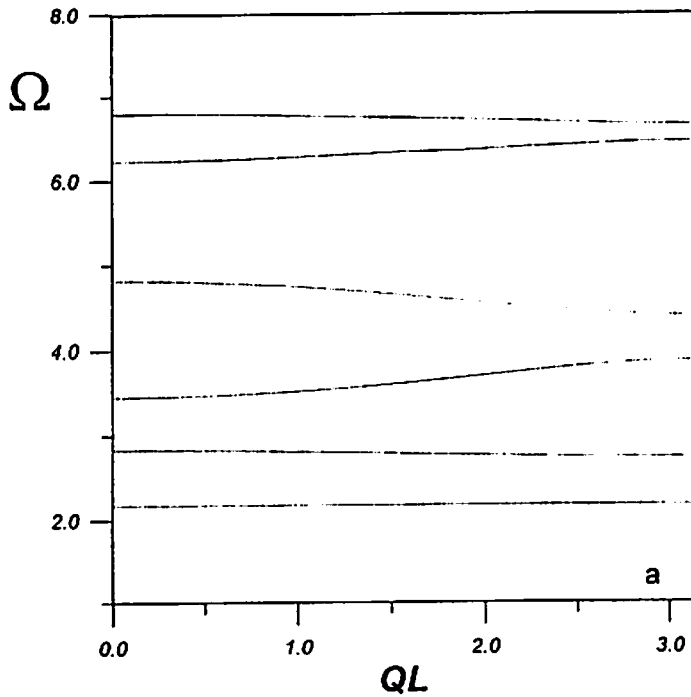
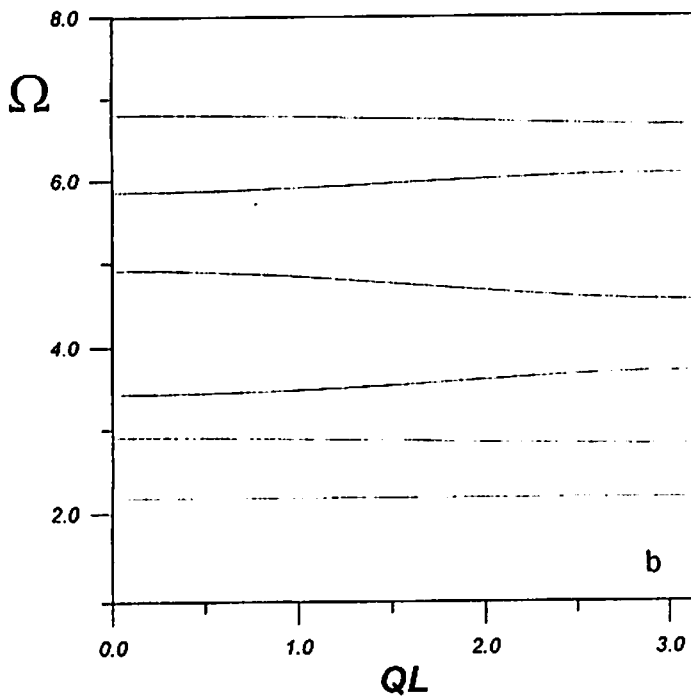


Fig. 4. Bulk spin wave dispersion relation Ω vs. QL , for $k_x a = 0.5$. The physical parameters used here are the same as in Fig. 3a and b



“zone-folding” behavior of these spectra are better seen in Fig. 4a and b, where we present the spectra in the plane Ω versus QL . Their behavior is of the same type as found experimentally and theoretically for other superlattices.

Fig. 5a and b show the curves for the special case where one of the superlattice constituent is uniaxial (say layer A) while the nonuniaxiality effect is kept in the other layer. In this case, besides the bulk bands, we show the propagation of the surface modes. It is possible to distinguish two different types of surface modes: those, which persist as

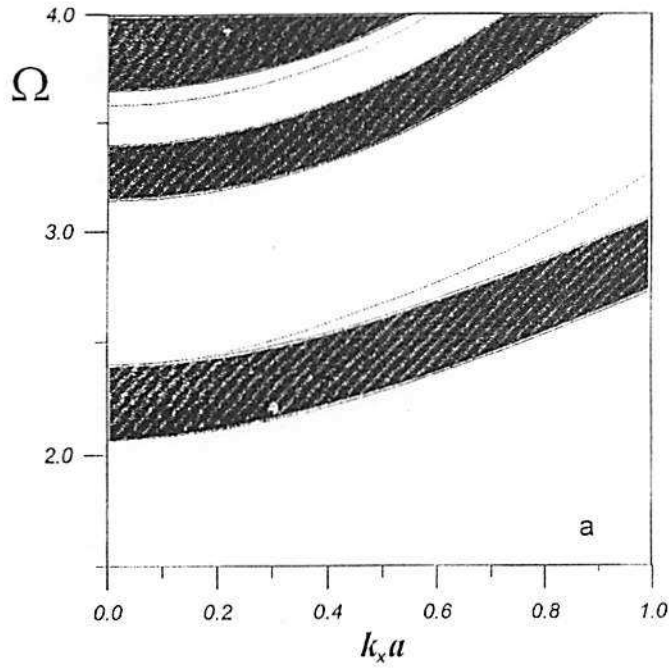
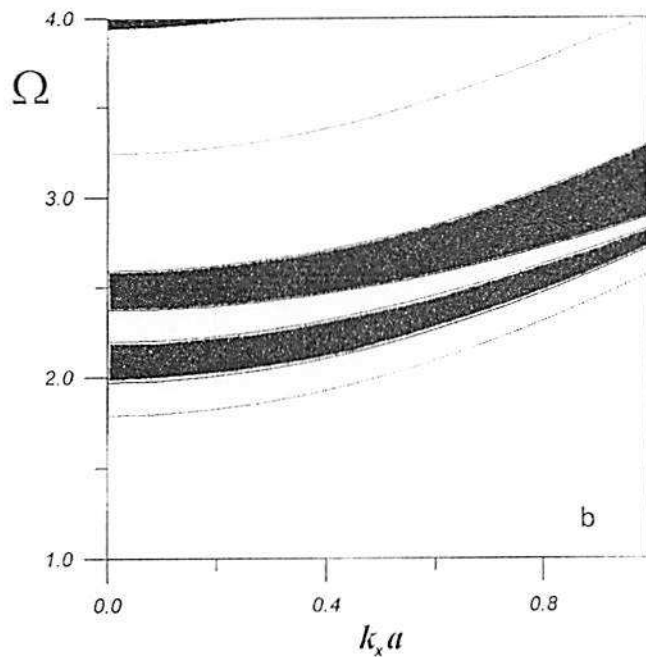


Fig. 5. Bulk and surface spin wave dispersion relation Ω vs. $k_x a$ for a uniaxial/nonuniaxial ferromagnetic superlattice. The physical parameters used here, considering $XJ_{0A} = 0.75$, are the same as in Fig. 3a and b



$k_x \rightarrow \infty$, and the others, which merge at the high-frequency end into a bulk region at a finite value of k_x . These latter surface modes, as far as we know, were not found in the spectrum *without the nonuniaxial anisotropic component*, and deserves an experimental verification. Unfortunately, so far most of the experimental studies of materials with nonuniaxial surface anisotropy have been for transition metals (e.g. see [27 to 29]), and we believe that it would be of considerable interest to have further experimental studies carried out for multilayer structures of magnetic insulator or magnetic semiconductor materials, that would be better described by the Heisenberg model employed in this paper. Examples of collective excitation which has this kind of similar behavior are the

surface plasmon-polaritons [24], where the surface modes which persist as $k_x \rightarrow \infty$, are called *real* surface modes, while the modes which merge into a bulk band for finite k_x are known as *virtual* surface modes.

4. Conclusions

We have presented in this work the dispersion relation for spin waves which propagate in a ferromagnetic superlattice at low temperatures. Our theory was based on a Heisenberg Hamiltonian in the exchange-dominated regime and with nonuniaxial anisotropic field. Our theoretical expressions extend and generalize those discussed in previous works [22, 23]. Besides, the spin wave spectra discussed here present new features not shown previously. In particular, the special case, where the unit cell of the superlattice is formed by the juxtaposition of a uniaxial layer with a nonuniaxial ferromagnetic material, brings new evidences related with the surface modes in the spin wave spectra.

The most appropriate experimental technique for studying the superlattice spin waves is the inelastic light scattering spectroscopy of Raman and Brillouin type. Techniques involving magnetic resonance (for example, ferromagnetic resonance, standing spin-wave resonance, etc.) can also be used, and indeed they have previously been successfully applied to surface and bulk spin waves in various magnetic microstructures (for a good account of these techniques, see [30]).

Other experimental techniques, like the grating coupling and attenuated total reflection (ATR), were proposed by a number of authors (for a review see [1]). However, there are some difficulties in probing surface modes on ferromagnets, due to the fact that their resonance frequencies are quite low (less than 1 cm^{-1} in YIG, for instance). Therefore the samples should be very large and, in addition, the frequencies are below the range of conventional far-infrared spectrometers. This leaves the study of antiferromagnetic surfaces a very promising proposal, and indeed, high quality antiferromagnetic superlattices have recently been fabricated [31]. We have interest to extend the present theory to Heisenberg antiferromagnets as well.

Acknowledgement This research was partially financed by the Brazilian Research Council CNPq.

Appendix A

The coefficients in (11) and (12) are ($J = A, B; j = 1, 2$)

$$\bar{\lambda}_{1J} = XI_J - (1 - f_{1J}) - [\Omega_J - \sqrt{\Omega_J^2 + 4F_{jJ}^2}], \quad (\text{A1})$$

$$\bar{\lambda}_{2J} = XI_J - (1 - f_{2J}) - 2Q_{2J}, \quad (\text{A2})$$

$$\bar{\lambda}'_{1J} = XI_J - (1 - f_{1J}) - 2Q_{2J}, \quad (\text{A3})$$

$$\bar{\lambda}'_{2J} = XI_J - (1 - f_{2J}) + [\Omega_J - \sqrt{\Omega_J^2 + 4F_{jJ}^2}], \quad (\text{A4})$$

$$XI_J = I/J_J, \quad (\text{A5})$$

$$S_{BA} = 1/S_{AB} = S_B/S_A, \quad (\text{A6})$$

$$F'_{sJ} = F_{sJ}\eta_J^{1/2}/J_J, \quad (\text{A7})$$

$$f_{jJ} = \exp(ik_{jJ}a), \quad (A8)$$

$$t_{jJ} = (f_{jJ})^{n_j} = \exp(in_j k_{jJ}a), \quad (A9)$$

$$\bar{f}_{jJ} = 1/f_{jJ}, \quad \bar{t}_{jJ} = 1/t_{jJ}. \quad (A10)$$

Also the terms λ_{iJ} are the same as $\bar{\lambda}_{iJ}$, providing we replace f_{iJ} by \bar{f}_{iJ} . The matrices M and N are given by

$$M_A = \begin{bmatrix} (\bar{\lambda}_{1A} + y_{1A}) x_{1A} & (\lambda_{1A} + y_{1A}) \bar{x}_{1A} & -\left(\bar{\lambda}_{2A} F_{AA} + \frac{y_{2A}}{F_{AA}}\right) x_{2A} & -\left(\lambda_{2A} F_{AA} + \frac{y_{2A}}{F_{AA}}\right) \bar{x}_{2A} \\ X I_B S_{AB} x_{1A} & X I_B S_{AB} \bar{x}_{1A} & -X I_B S_{AB} F_{AA} x_{2A} & -X I_B S_{AB} F_{AA} \bar{x}_{2A} \\ -(\bar{\lambda}'_{1A} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_{SA}) x_{1A} & -(\lambda'_{1A} Q_{1A} F_{AA} + 2F'_{SA}) \bar{x}_{1A} & \left(\bar{\lambda}_{2A} Q_{2A} + \frac{y_{2A}}{Q_{2A}}\right) x_{2A} & \left(\lambda'_{2A} Q_{2A} + \frac{y_{2A}}{Q_{2A}}\right) \bar{x}_{2A} \\ X I_B S_{AB} Q_{1A} F_{AA} x_{1A} & X I_B S_{AB} Q_{1A} F_{AA} \bar{x}_{1A} & X I_B S_{AB} Q_{2A} F_{AA} x_{2A} & X I_B S_{AB} Q_{2A} F_{AA} \bar{x}_{2A} \end{bmatrix}, \quad (A11)$$

$$N_B = \begin{bmatrix} X I_A S_{BA} & X I_A S_{BA} & -X I_A S_{BA} F_{BB} & -X I_A S_{BA} F_{BB} \\ \lambda_{1B} + y_{1B} & \bar{\lambda}_{1B} + y_{1B} & -\left(\lambda_{2B} F_{BB} + \frac{y_{2B}}{F_{BB}}\right) & -\left(\bar{\lambda}_{2B} F_{BB} + \frac{y_{2B}}{F_{BB}}\right) \\ -X I_A S_{BA} Q_{1B} F_{BB} & -X I_A S_{BA} Q_{1B} F_{BB} & X I_A S_{BA} Q_{2B} & X I_A S_{BA} Q_{2B} \\ -(\bar{\lambda}'_{1B} Q_{1B} F_{BB} + 2F'_{SB}) & -(\lambda'_{1B} Q_{1B} F_{BB} + 2F'_{SB}) & \left(\bar{\lambda}'_{2B} Q_{2B} + \frac{y_{2B}}{Q_{2B}}\right) & \left(\lambda'_{2B} Q_{2B} + \frac{y_{2B}}{Q_{2B}}\right) \end{bmatrix}, \quad (A12)$$

where

$$x_{jJ} = \bar{f}_{jJ} t_{jJ} = \frac{1}{\bar{x}_{jJ}}, \quad y_{jJ} = 2F'_{SJ} Q_{jJ} F_{JJ}. \quad (A13)$$

The matrix $M_B(N_A)$ can be obtained from the matrix $M_A(N_B)$ by the substitution of the label A(B) by B(A) and $X I_A(X I_B)$ by $X I_B(X I_A)$.

The values of the coefficients λ_{i0} , λ'_{i0} , and F'_0 of (18) and (19) are

$$F'_0 = \frac{F_{S0} \eta_A^{1/2}}{J_0}, \quad (A14)$$

$$\lambda_{i0} = \frac{-\hbar\omega + \Delta}{S_A J_0} + (4 - 2\gamma_k) + \frac{J}{J_0} (1 - f_{iA}), \quad (A15)$$

$$\lambda'_{i0} = \lambda_{i0} + \frac{2\hbar\omega}{S_A J_0}; \quad i = 1, 2 \quad (A16)$$

and the values of γ_k and f_{1A} , f_{2A} are as defined before. $\bar{\lambda}_{i0}$ and $\bar{\lambda}'_{i0}$ are obtained from λ_{i0} , λ'_{i0} by substituting f_{iA} by \bar{f}_{iA} .

The coefficients in (24) and (25) are

$$\alpha_1 = (\bar{\lambda}_{1B} + 2F'_{SB} Q_{1B} F_{BB}) \bar{f}_{1B} t_{1B}, \quad (A17)$$

$$\alpha_2 = (\bar{\lambda}_{2B} F_{BB} + 2F'_{SB} Q_{2B}) \bar{f}_{2B} t_{2B}, \quad (A18)$$

$$\alpha_3 = (\lambda'_{1B} Q_{1B} F_{BB} + 2F'_{SB}) \bar{f}_{1B} t_{1B}, \quad (A19)$$

$$\alpha_4 = (\bar{\lambda}'_{2B} Q_{2B} + 2F'_{SB} F_{BB}) \bar{f}_{2B} t_{2B}, \quad (A20)$$

$$\sigma = X I_B S_{AB}. \quad (A21)$$

The value of $\bar{\alpha}_i$ is found from α_i by replacing $\bar{\lambda}_i$, \bar{f}_{iB} , and t_{iB} by λ_{iB} , f_{iB} , and \bar{t}_{iB} ($i = 1, 4$).

The coefficients in (26) are

$$\alpha_0 = -\frac{\bar{\lambda}_{10}}{\lambda_{10}} = \frac{A_0}{B_0}, \quad \sigma_0 = -\frac{\bar{\lambda}'_{20}}{\lambda'_{20}} = \frac{C_0}{D_0}, \quad (\text{A22})$$

where the coefficients A_0 , B_0 , C_0 , and D_0 are the amplitudes of the solutions on the free surface.

References

- [1] M. G. COTTAM and D. R. TILLEY, *Introduction to Surface and Superlattice Excitations*, Cambridge University Press, Cambridge 1989.
- [2] D. L. MILLS, in: *Light Scattering in Solids V*, Ed. G. GÜNTHERODT and M. CARDONA, Springer-Verlag, Heidelberg 1989.
- [3] A. KUENY, M. R. KHAN, I. K. SCHULER, and M. GRIMSDITCH, *Phys. Rev. B* **29**, 2879 (1984).
- [4] P. GRÜNBERG, R. SCHREIBER, Y. PANG, M. N. BRODSKY, and H. SOWERS, *Phys. Rev. Letters* **57**, 2442 (1986).
- [5] M. BAIBICH, J. M. BROTO, A. FERT, F. NGUYEN VAN DAU, F. PETROFF, P. ETIENNE, G. CREUZET, A. FRIEDERCH, and J. CHAZELAS, *Phys. Rev. Letters* **61**, 2472 (1988).
- [6] S. S. P. PARKIN, N. MORE, and K. P. ROCHE, *Phys. Rev. Letters* **64**, 2304 (1990).
- [7] D. M. EDWARDS, J. MATHON, R. B. MUNIZ, and M. S. PHAN, *Phys. Rev. Letters* **67**, 493 (1991).
- [8] R. E. CAMLEY, T. S. RAHMAN, and D. L. MILLS, *Phys. Rev. B* **27**, 261 (1983).
- [9] P. GRÜNBERG and K. MIKA, *Phys. Rev. B* **27**, 2955 (1983).
- [10] R. E. CAMLEY and M. G. COTTAM, *Phys. Rev. B* **35**, 189 (1987).
- [11] R. E. CAMLEY, M. G. COTTAM, and D. R. TILLEY, *Solid State Commun.* **81**, 571 (1992).
- [12] B. LI, J. YANG, J.-L. SHEN, and G.-Z. YANG, *J. Phys.: Condensed Matter* **7**, 1405 (1995).
- [13] E. L. ALBUQUERQUE, P. FULCO, E. F. SARMENTO, and D. R. TILLEY, *Solid State Commun.* **58**, 41 (1986).
- [14] L. L. HINCHEY and D. L. MILLS, *Phys. Rev. B* **33**, 3329 (1986); **34**, 1689 (1986).
- [15] L. DOBRZYNSKI, B. DJAFARI-ROUHANI, and H. PUSZKARSKI, *Phys. Rev. B* **33**, 3251 (1986).
- [16] J. BARNAS, *J. Phys. C* **21**, 1021, 4097 (1988).
- [17] W.-Z. SHEN and Z.-Y. LI, *J. Phys.: Condensed Matter* **4**, 5873 (1992).
- [18] I. K. SCHULLER and M. GRIMSDITCH, *J. appl. Phys.* **55**, 2491 (1985).
- [19] B. HILLEBRANDS, O. BAUMGART, R. MOCK, G. GUNTHERÖDT, A. BOUFELFEL, and C. M. FALCO, *Phys. Rev. B* **34**, 9000 (1986).
- [20] P. GRÜNBERG, see [2].
- [21] E. L. ALBUQUERQUE and M. G. COTTAM, *Phys. Rev. B* **46**, 14543 (1992).
- [22] E. L. ALBUQUERQUE and M. G. COTTAM, *Solid State Commun.* **89**, 249 (1994).
- [23] E. L. ALBUQUERQUE, *J. appl. Phys.* **76**, 6552 (1994).
- [24] E. L. ALBUQUERQUE and M. G. COTTAM, *Physics Rep.* **233**, 67 (1993).
- [25] J. KWO, E. M. GEORGY, D. B. McWHAN, M. HONG, F. J. DISALVO, C. VERTIER, and J. E. BOWER, *Phys. Rev. Letters* **55**, 1402 (1985).
- [26] E. L. ALBUQUERQUE and M. G. COTTAM, *Solid State Commun.* **83**, 545 (1992).
- [27] H. TAKAYAMA, K.-P. BOHNEN, and P. FULDE, *Phys. Rev. B* **14**, 2287 (1976).
- [28] G. A. PRINZ, G. T. RADO, and J. J. KREBS, *J. appl. Phys.* **53**, 2087 (1982).
- [29] U. GRADMANN, J. KORECKI, and G. WALLER, *Appl. Phys. A* **39**, 101 (1986).
- [30] M. G. COTTAM and D. J. LOCKWOOD, in: *Light Scattering in Magnetic Solids*, Wiley, New York 1986.
- [31] C. A. RAMOS, D. LEDERMAN, A. R. KING, and V. JACCARINO, *Phys. Rev. Letters* **65**, 2913 (1990).

C.2 Surface Spin Waves in Metamagnets with
Nonuniaxial Single-Ion
Anisotropy

Surface spin waves in metamagnets with nonuniaxial single-ion anisotropy

D. H. A. L. Anselmo and E. L. Albuquerque^{a)}

Departamento de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN 59072-970, Brazil

M. G. Cottam

Department of Physics and Astronomy, University of Western Ontario, London, Ontario N6A 3K7, Canada

A microscopic theory is employed to investigate the spin wave spectra in metamagnetic materials that consist of ferromagnetically ordered layers, with the intralayer ferromagnetic exchange interactions being much stronger than the weak antiferromagnetic interaction between adjacent layers. © 1998 American Institute of Physics. [S0021-8979(98)29911-7]

Theoretical and experimental studies of surface spin waves in ordered magnetic materials have been the focus of considerable interest for many years. Many of these works have been concerned with the spin wave properties, at the low-temperature regime, of Heisenberg ferromagnets and antiferromagnets, mainly in terms of their dispersion relations, thermodynamics, and Green functions (for a review see Refs. 1–3). Besides, as a result of recent advances in fabrication techniques, spin wave excitations in magnetic superlattices of impressive quality have been also extensively studied by considering the nature of the solutions for the appropriate wave field in each film. They are then linked together through appropriate boundary conditions and with the assistance of Bloch's theorem. The surfaces and interfaces in these layered structures play an important role in the properties of the entire system and, indeed, most of the interesting properties of these excitations are due to the surface and interface effects.^{4–7}

In this article we extend previous studies in this subject by considering the propagation of surface spin waves in metamagnets which present nonuniaxial anisotropy. The metamagnetic materials consist of ferromagnetically ordered layers, with the intralayer ferromagnetic exchange interactions being much stronger than the weak antiferromagnetic interaction between adjacent layers. We consider also the presence of a weak external magnetic field \mathbf{H} applied perpendicular to the layers. In the regime of low temperatures and for small values of an external magnetic field \mathbf{H} the adjacent layers of the metamagnet material order are antiparallel to one another, giving the antiferromagnetic (AFM) phase. On the other hand, for larger \mathbf{H} , enough to overcome the interlayer antiferromagnetic coupling, the overall ordering is ferromagnetic (FM phase). The spin wave analysis is more straightforward in this case since the direction of net spin alignment is the same on both sublattices (this case is not treated here).

We consider that the metamagnet has single-ion anisotropic energy. This is a fine structure energy of an ion under the influence of the crystalline electrical field, to which the spin-orbit coupling and intraatomic magnetic interactions among the spins contribute. The forms of the anisotropic spin Hamiltonian is determined from the point symmetry

around the ion, and is assumed to be a function of the direction cosines of the magnetization vector \mathbf{M} with respect to the crystallographic axes. In the absence of an external magnetic field, \mathbf{M} lies in the direction in which the free energy is minimal. This direction is called the axis of "easy" magnetization, and usually we call the related anisotropic field as uniaxial ("easy-axis") single-ion anisotropy. When an external magnetic field is applied, the magnetization vector deviates to a new direction at which the torque exerted by the external magnetic field balances the torque originating in the anisotropic energy. Thus a nonuniaxial ("easy-plane") single-ion anisotropy component appears. We take into account in this article both types of anisotropic field.

Rather than using a "continuum" approximation, as was done in a recent paper⁸ dealing with some nonuniaxial effects in magnetic superlattices, we develop here a microscopic theory, taking into account surface effects in a semi-infinite metamagnet that has a (001) surface and occupies the half space $z > 0$. The method of calculation is the same as the one presented in previous papers.^{9,10}

The spin Hamiltonian for nonuniaxial metamagnets can be written as:^{10,11}

$$H = \sum_{ij} J_{ij} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \sigma S_i^z S_j^z) - \frac{1}{2} \sum_{i,i'} J'_{ii'} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i'} + \sigma' S_i^z S_{i'}^z) - \frac{1}{2} \sum_{j,j'} J''_{jj'} (\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j'} + \sigma'' S_j^z S_{j'}^z) + H_z + H_A, \quad (1)$$

where the Zeeman Hamiltonian is given by

$$H_z = -g\mu_B H \left(\sum_i S_i^z + \sum_j S_j^z \right), \quad (2)$$

and the anisotropic Hamiltonian is expressed by

$$H_A = -D \left(\sum_i (S_i^x)^2 + \sum_j (S_j^x)^2 \right) - F \left(\sum_i (S_i^y)^2 - (S_i^z)^2 \right) - F' \left(\sum_j (S_j^y)^2 - (S_j^z)^2 \right). \quad (3)$$

We suppose plane-wave solutions of the type $S_i^+ = s_n(k_1) \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)]$ and $S_i^- = r_n(k_1) \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)]$ where n stands for the layer index. Using these assumptions

^{a)}Electronic mail: ela@dfte.ufrn.br

in the Heisenberg equation for the spin operator S_l^+ , with $\hbar=1$, we get the following set of coupled equations for the spin wave amplitudes:

for $n=1$:

$$[E_- + (1 + \sigma)Sv(0)]s_1 - Sv(k_0)s_2 + 2FS\eta^{1/2}r_1 = 0, \quad (4)$$

$$[E_- + (1 + \sigma)Sv(0) - 2\omega]r_1 - Sv(k_0)r_2 + 2FS\eta^{1/2}s_1 = 0; \quad (5)$$

for $n=2m+1$; $l=i$:

$$E_-s_{2m+1} - Sv(k_0)s_{2m+2} - Sv(-k_0)s_{2m} + 2FS\eta^{1/2}r_{2m+1} = 0, \quad (6)$$

$$(E_- - 2\omega)s_{2m+1} - Sv(k_0)s_{2m+2} - Sv(-k_0)s_{2m} + 2FS\eta^{1/2}r_{2m+1} = 0; \quad (7)$$

for $n=2m$; $l=j$:

$$E_+s_{2m} - Sv(k_0)s_{2m+1} - Sv(-k_0)s_{2m-1} - 2F'S\eta^{1/2}r_{2m} = 0, \quad (8)$$

$$[E_+ - 2\omega]r_{2m} - Sv(k_0)r_{2m+1} - Sv(-k_0)r_{2m-1} + 2FS\eta^{1/2}s_{2m} = 0, \quad (9)$$

where $E_{\pm} = \omega - g\mu_B H \pm E_0 \pm 2(1 + \sigma)Sv(0)$, $E_0 = E_0(k_0) = g\mu_B H_A + (1 + \sigma')Su(0) - Su(k_0)$, and we have defined the Fourier transforms of the intralayer bulk exchange interaction by

$$u(k_0) = \sum_i J'_{ii'} \exp[ik_0 \cdot (r_i - r_{i'})] \\ = \sum_j J'_{jj'} \exp[ik_0 \cdot (r_j - r_{j'})], \quad (10)$$

while for the interlayer exchange interaction we consider

$$v(k_0) = \sum_j J_{ij} \exp[ik_0 \cdot \delta], \quad (11)$$

where δ is a vector joining the i sites in layer n to that j sites in layer $n+1$. After a tedious algebraic manipulation of these equations, we get the following matrix set of equations:

$$(A + \Delta_1)F = \Theta G, \quad (12)$$

$$(A^* + \Delta_1^*)G = \Theta^* F. \quad (13)$$

Here F and G are infinite-dimensional column matrices, whose elements are specified by $F_m = s_{2m}$ and $G_m = r_{2m}$. Also, A is a trigonal matrix given by

$$A = \begin{bmatrix} d & -\tau^{-1} & 0 & 0 & \dots \\ -\tau & d & -\tau^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & -\tau & d & -\tau^{-1} & \dots \\ 0 & 0 & -\tau & d & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (14)$$

while the matrix $\Theta = \delta I + \Delta_2$ ($\Theta^* = \delta^* I + \Delta_2$), where I is the identity matrix. The matrix Δ_i ($i=1$ or 2) describes the perturbing effect of the surface, and is expressed by

$$(\Delta_i)_{m,m'} = \Delta_i \delta_{m,1} \delta_{m',1}; \quad i=1,2. \quad (15)$$

The surface spin wave equation corresponds to

$$\det(I - \Theta^* A_1^* \Theta^{-1} A_1) = 0, \quad (16)$$

where

$$A_1 = A + \Delta_1; \quad A_1^* = A^* + \Delta_1^*, \quad (17)$$

whose solutions are

$$[(\xi_1 - t\xi_3)(\Gamma + \beta) - \xi_2\xi_4 + (s - ht)\xi_3\xi_4 + \xi_5 - gt\xi_1(\Gamma - gt)] \cdot \bar{M} = 0, \quad (18)$$

where

$$s = -\tau b; \quad t = \tau^2 a, \\ h = -\tau^{-1} b; \quad g = \tau^{-2} a, \quad (19)$$

$$\Gamma = 1 - 2a - c; \quad \beta = \Delta_2 a / (\delta + \Delta_2).$$

In all these matrix equations, the terms d , τ , δ , δ^* , Δ_i , Δ_i^* ($i=1$ or 2), and ξ_j ($j=1-5$) are complicated expressions involving the physical parameters of the metamagnet materials. Their full algebraic expressions can be found elsewhere.¹² Also, \bar{M} is the determinant:

$$\bar{M} = \begin{vmatrix} \Gamma & h & g & 0 & 0 & 0 & \dots \\ s & \Gamma & h & g & 0 & 0 & \dots \\ t & s & \Gamma & h & g & 0 & \dots \\ 0 & t & s & \Gamma & h & g & \dots \\ 0 & 0 & t & s & \Gamma & h & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}. \quad (20)$$

If we choose $\bar{M} \neq 0$, the surface spin-wave dispersion relation is then given by the first term of Eq. (18).

On the other hand, the bulk spin-wave dispersion relation can be found using the ansatz $M \cdot u = 0$, where u is a column matrix with elements $u(n)$ representing a mode amplitude. Then,

$$t u_{n-2} + s u_{n-1} + \Gamma u_n + h u_{n+1} + g u_{n+2} = 0. \quad (21)$$

By choosing the solutions such that $u(n) = ax^n$ (for x unknown), using the definitions of a , b , and τ , and denoting $y = \tau x$, we get

$$a(y^2 + y^{-2}) - b(y + y^{-1}) = -\Gamma. \quad (22)$$

This is a fourth-degree equation for y . The roots of this equation, together with the assumption that $x = \exp(2ik_z c_0)$, where $2c_0$ is the distance between even (or odd) adjacent layers, yield the following bulk dispersion relations:

$$\cos(2k_z c_0) = \frac{1}{2\tau} \left(\pm \sqrt{(d + d^*)^2 + 4(dd^* - \delta\delta^*) + 16} + (d + d^*) \right). \quad (23)$$

Equation (23) is an implicit dispersion relation. It can be obtained by supposing that the roots of Eq. (22) occur at pairs, and that the pairs are complex conjugate one of the other. In compact form they can be written as

$$[\tau \cos(2k_z c_0)]^2 - (d + d^*) \tau \cos(2k_z c_0) - (dd^* - \delta\delta^*) - 4 = 0. \quad (24)$$

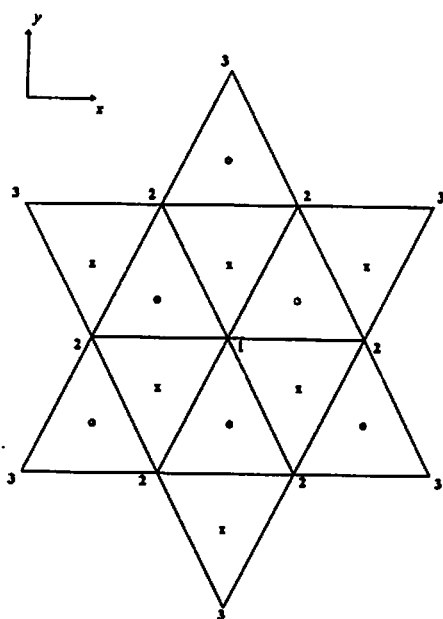


FIG. 1. Crystallographic arrangements of Fe^{2+} ions (solid circles) in the ferromagnetically ordered layers for FeBr_2 and FeCl_2 . The nearest and next-nearest intralayer neighbors to the ion labeled 1 are those labeled 2 and 3, respectively. The crosses and open circles represent the positions of the ions in the adjacent layers above and below the planes for FeCl_2 .

The solutions of the above expression give the bulk modes for the spin waves, and they are valid in the antiferromagnetic phase.

We now apply the surface and bulk (for completeness) dispersion equations to determine the spin-wave spectra for the specific cases of FeBr_2 and FeCl_2 . They have their crystallographic arrangements of magnetic ions as depicted in Fig. 1. Both materials have the same trigonal arrangements of magnetic Fe^{2+} ions within each ferromagnetically ordered layer. They differ, however, in the stacking arrangements of the layers. In FeBr_2 , the Fe^{2+} ions in one layer are vertically situated above and below those in the adjacent layers, although in FeCl_2 the layers are staggered with respect to one another. The crosses and open circles in Fig. 1 represent the positions of the ions in the adjacent layers above and below the planes.

Figure 2 shows the dispersion relation for bulk and surface spin waves in FeBr_2 in the AFM phase. We take as the applied magnetic field $g\mu_B H = 1.6 \text{ cm}^{-1}$. We plot the frequency ω (in units of 10 cm^{-1}) against $k_x a$ (here we consider $k_y = k_z$). The physical parameters used here are those described in Ref. 10, with the nonuniaxial anisotropic field $F = F' = 2 \text{ cm}^{-1}$. Comparison of this spectrum with those in which there is no nonuniaxial component of the anisotropic field (Fig. 2 in Ref. 10) shows that the bulk band is now split, giving rise to two separated bands limited by the curves $k_x a = 0$ and $k_x a = \pi$. Besides, there are also two well defined surface modes (shown by the dashed lines) below and between these bulk bands. The inset gives a better insight into this situation (observe that the bulk bands are shown as shaded).

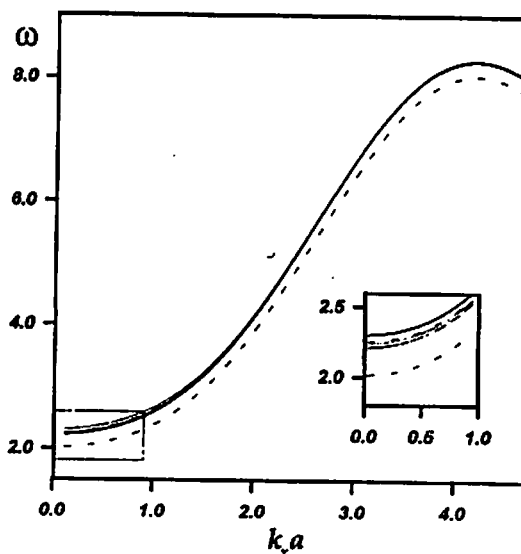


FIG. 2. Dispersion relations of bulk (shaded areas) and surface (dashed lines) spin waves in FeBr_2 in the AFM phase as a function of the in-plane wave vector $k_x a$ for the applied magnetic field $g\mu_B H = 1.6 \text{ cm}^{-1}$.

The spin-wave spectra for the FeCl_2 metamagnet (not shown here) is qualitatively quite the same of that for FeBr_2 , but the low-frequency surface branch is very close to the first bulk band. This fact, which is due to their different crystal structure, presents an additional difficulty in probing this mode experimentally.

Appropriated experimental techniques for studying the spin-wave spectrum in metamagnets would include light scattering spectroscopy of the Raman and Brillouin types and magnetic resonance. For FeBr_2 , the light scattering technique may be more suitable, since our theoretical predictions indicate that at least one branch (the low-frequency one) of the surface spin waves is well separated in frequency (even in the absence of the nonuniaxial anisotropic field) from the bulk modes.

- ¹M. G. Cottam and A. A. Maradudin, in *Surface Excitations*, edited by V. M. Agranovich and R. Loudon (North-Holland, Amsterdam, 1984).
- ²M. G. Cottam and D. J. Lockwood, *Light Scattering in Magnetic Solids* (Wiley, New York, 1986).
- ³M. G. Cottam and D. R. Tilley, *Introduction to Surface and Superlattice Excitations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- ⁴E. L. Albuquerque, P. Fulco, E. F. Sarmiento, and D. R. Tilley, *Solid State Commun.* **58**, 41 (1986).
- ⁵R. E. Camley and M. G. Cottam, *Phys. Rev. B* **35**, 189 (1987); R. E. Camley, M. G. Cottam, and D. R. Tilley, *Solid State Commun.* **81**, 571 (1992).
- ⁶J. Barnas, *J. Phys. C* **21**, 1021 (1988); **21**, 4097 (1988).
- ⁷C. A. Ramos, D. Lederman, A. R. King, and V. Jaccarino, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2913 (1990).
- ⁸E. L. Albuquerque and M. G. Cottam, *Phys. Rev. B* **46**, 14 543 (1992).
- ⁹S. Gopalan and M. G. Cottam, *Phys. Rev. B* **42**, 624 (1990).
- ¹⁰J. H. Baskey and M. G. Cottam, *Phys. Rev. B* **42**, 4304 (1990).
- ¹¹D. H. A. L. Anselmo and E. L. Albuquerque, *Phys. Status Solidi B* **198**, 827 (1996).
- ¹²D. H. A. L. Anselmo, E. L. Albuquerque, and M. G. Cottam (unpublished).

C.3 Non-Linear Spin-Wave Spectra in Anisotropic Magnetic Superlattices



PII: S0038-1098(98)00447-3

NON-LINEAR SPIN-WAVE SPECTRA IN ANISOTROPIC MAGNETIC SUPERLATTICES

R.N. Costa Filho^{a,*}, D.H.A.L. Anselmo^b, E.L. Albuquerque^b and M.G. Cottam^c^a Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, 60455-760, Fortaleza, Ceará, Brazil^b Departamento de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 59072-970 Natal-RN, Brazil^c Department of Physics and Astronomy, University of Western Ontario, London, Ontario N6A3K7, Canada

(Received 2 April 1998; accepted 3 September 1998 by C.E.T. Goncalves da Silva)

We present a theory for the dispersion relation and non-linear processes of spin-waves in a superlattice made up of two Heisenberg ferromagnets. Our calculations are carried out for the exchange-dominated regime, stressing the contribution of the surface modes. We consider the ferromagnetic materials described by a Heisenberg Hamiltonian, with the inclusion of both the uniaxial and non-uniaxial components of the single-ion anisotropy. Our theoretical model is based on the Holstein-Primakoff transformation to boson operators, while a Green function formalism with Feynman diagrams is employed as a perturbation theory to calculate the non-linear processes. © 1998 Elsevier Science Ltd. All rights reserved

Magnetic superlattices have attracted considerable interest in the last decades. Such interest comes from the fact that superlattices are artificial layered materials, in which their macroscopic properties are tailored by the physical parameters of their constituents. [1]

Investigation of spin-wave excitations in magnetic superlattices has also been extensively studied through the use of a transfer-matrix approach with the assistance of Bloch's theorem. Many of these works are concerned with linear spin-wave excitations at low temperatures in alternating superlattices, where at least one of the components is an ordered ferromagnetic or antiferromagnetic material. The overall characteristics of the spin wave are due to the dipole-dipole and exchange interactions and, depending on their relative importance, different models of the magnetic behavior can be employed. For instance, the magnetic dipolar effects are dominant for small values of the excitation wavevector, [2-6] while for large excitation wavevectors (typically $|k| \geq 10^8 m^{-1}$ in a ferromagnet), exchange effects will be dominant. [7-11] Furthermore, the magnetic crystal anisotropy is also important in determining the behavior of the superlattice spin-waves. On the experimental side, the use of light scattering spectroscopy has proven to be an important tool to probe these excitations. [12]

* e-mail: rai@fisica.ufc.br

Many crystals show, in the absence of an external magnetic field, a preferential direction of magnetization and no anisotropy in the plane normal to this direction. This is called the uniaxial (or "easy-axis") anisotropy. When an external magnetic field is applied, the magnetization vector may deviate to a new direction at which the torque exerted by the external magnetic field balances the torque originating in the anisotropic energy. Thus, a non-uniaxial (or "easy-plane") single-ion anisotropy component appears. The presence of this kind of anisotropy in a quasi-two-dimensional system like a superlattice can establish a true long-range order in the system. [13]

Non-uniaxial anisotropy can exist in materials like the ferromagnet $CrBr_3$ and the antiferromagnet NiO . Its role in superlattices has been studied experimentally, [14] as well as theoretically by using a microscopic Green function theory together with a transfer-matrix approach. [15-17]

It is the aim of this work to use the Heisenberg Hamiltonian to study the linear and non-linear spin-wave spectra of anisotropic, finite magnetic superlattices (for an up-to-date account of the general properties of magnetic superlattices, see [18] and the references therein). We employ a microscopic theory but, instead of using a transfer-matrix technique, the spin-wave dispersion relation is obtained by considering

the one-body part of the Hamiltonian (i.e. the terms with two magnon operators). This term gives rise to a $2N \times 2N$ eigenvalue problem, where N is the total number of atomic layers of the superlattice. On the other hand, the description of the higher order processes due to the interactions between the spin-wave modes is determined taking into account the two-body terms in the Hamiltonian, which involve four magnon operators. A diagrammatic perturbation theory is then developed to obtain the spin-wave energy shift, as well as to study how the long-range order that comes from the anisotropy fields can affect its non-linear properties. This enables us to obtain results applicable to multilayer systems and to probe the limitations of the macroscopic theories, which can be done by extending previous diagrammatic Green function calculations for Heisenberg films [19, 20] to the superlattice geometry.

We consider a finite binary superlattice, formed by two simple cubic non-uniaxial Heisenberg ferromagnet, in which n_a atomic layers of material A alternate with n_b atomic layers of material B . The total number of atomic layers is $N = n_{cell}L$, where $L = n_a + n_b$ is the number of layers in each superlattice unit cell, and n_{cell} is the total number of cells. We assume an external magnetic field H_0 applied along the z -axis, i.e. perpendicular to the surfaces of the superlattice. The Heisenberg Hamiltonian has the form

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij}^{\nu} \mathbf{S}_i^{\nu} \cdot \mathbf{S}_j^{\nu} - g\mu_B H_0 \sum_{ij} S_i^{z\nu} + H_{anis}, \quad (1)$$

with

$$H_{anis} = - \sum_{ij} \left\{ D^{\nu} (S_i^{z\nu})^2 + F^{\nu} \left[(S_i^{x\nu})^2 - (S_i^{y\nu})^2 \right] \right\}. \quad (2)$$

The first (second) term of (2) is due to the uniaxial (non-uniaxial) component of the anisotropy field, whose magnitude is given by D^{ν} (F^{ν}). The nearest-neighbor exchange coupling is given by J_{ij}^{ν} , and the label $\nu = A, B, I, \text{ or } S$, indicates the geometrical location of the parameter, i.e., in the medium A , in the medium B , in the A - B interface, or in the external surface of the superlattice, respectively.

Using the Holstein-Primakoff transformation we can express the Hamiltonian (apart from a constant) in the form $H = H^{(2)} + H^{(4)} + \dots$, where the superscripts specify the number of magnon creation and annihilation operators. The linear spin-wave excitation in the superlattice arises due to the term

$$H^{(2)} = \sum_{qnn'} \left\{ A_{nn'}^{(2)}(q) a_{qn}^{\dagger} a_{qn'} + B_{nn'}^{(2)}(q) \left[a_{qn} a_{-qn'} - a_{qn}^{\dagger} a_{-qn'}^{\dagger} \right] \right\}, \quad (3)$$

where $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ is a two-dimensional wavevector parallel to the surfaces, and n and n' ($= 1, 2, \dots, N$) are layer indices. Here the amplitude factors are given by:

$$\begin{aligned} A_{nn'}^{(2)}(q) &= \{ g\mu_B H_0 + S^{\nu} [u_n(0) - u_n(q) \\ &\quad + r_{n,n+1} + r_{n,n-1} - D^{\nu}] \} \delta_{nn'} \\ &\quad - S^{\nu} [r_{n,n+1} \delta_{n',n+1} + r_{n,n-1} \delta_{n',n-1}], \quad (4) \\ B_{nn'}^{(2)}(q) &= S^{\nu} F^{\nu} \delta_{nn'}. \quad (5) \end{aligned}$$

where $u_n(q) = 2J^{\nu} \sigma(q)$ and $r_{n,n\pm 1}(q) = J^{\nu}$ are the intra-layer and the adjacent-layer Fourier transforms of the exchange interactions, respectively, with $\sigma(q) = [\cos(q_x a) + \cos(q_y a)]$. If the Hamiltonian (3) is diagonalized, the linear spin-wave energies E are found from the solutions of the determinantal equation

$$\det \begin{pmatrix} \Lambda^{(2)}(q) - EI_N & 2B^{(2)}(q) \\ 2B^{(2)}(q) & \Lambda^{(2)}(q) - EI_N \end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

where $\Lambda^{(2)}(q)$ and $B^{(2)}(q)$ are $N \times N$ matrices with elements defined in (4) and (5). Also, I_N is the $N \times N$ unit matrix. On the other hand, the term $H^{(4)}$ provides the leading-order non-linear aspects of the spin-wave spectra, and is given by:

$$\begin{aligned} H^{(4)} &= \frac{1}{2} \sum_{kk'qnn'} \left\{ A_{nn'}^{(4)}(k) a_{k'n}^{\dagger} a_{q-k'n}^{\dagger} a_{q-kn} a_{kn'} \right. \\ &\quad + A_{nn'}^{(4)}(-k') a_{k'n'}^{\dagger} a_{q-k'n'}^{\dagger} a_{q-kn} a_{kn} \\ &\quad - 2B_{nn'}^{(4)}(k-k') a_{k'n'}^{\dagger} a_{q-k'n}^{\dagger} a_{q-kn} a_{kn'} \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} F^{\nu} \left[a_{qn}^{\dagger} a_{q-k-k'n} a_{k'n} a_{kn} + h.c. \right] \right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

where the coefficients are defined by

$$A_{nn'}^{(4)}(q) = u_n(q) \delta_{nn'} + r_{n,n+1} \delta_{n',n+1} + r_{n,n-1} \delta_{n',n-1}, \quad (8)$$

$$B_{nn'}^{(4)}(q) = A_{nn'}^{(4)}(q) \frac{1}{2} D^{\nu} \delta_{nn'}. \quad (9)$$

The proper self-energy $\Sigma_{\lambda}(q)$ for a given spin-wave branch λ and in-plane wavevector q is now conveniently evaluated by a diagrammatic perturbation theory. To set up the method, we define a non-perturbed Green function evaluated with respect to the one-body Hamiltonian $H^{(2)}$ in its diagonalized form. Then, after a Bogoliubov-Tyablikov transformation, the two-body Hamiltonian $H^{(4)}$ gives the interaction vertices. This is a generalization of the methods described in Ref. [19, 20]; further details can be found elsewhere [21]. The formal expression for the energy shift $\Delta E_{\lambda}(q)$ due to the four-magnon processes involving spin-waves from the same or different branches is given by:

$$\Delta E_{\lambda} = - \sum_{\mathcal{Q}'\nu} \Lambda_{\mathcal{Q}'\nu}^0(E_{\mathcal{Q}'\nu}). \quad (10)$$

Here $n^0(x)$ is the population of magnons in thermal equilibrium, and Λ_a is the amplitude coefficient for the four-magnons scattering processes.

Figure 1 shows examples of the spin-wave dispersion relation for a finite superlattice in the linear approximation (i.e., using the term $H^{(2)}$ of the total Hamiltonian). We have plotted the reduced frequency $\Omega = \omega/S_A J_A$ against the reduced in-plane wavevector $K = q_x a/\pi$. We have considered only the x-component of the in-plane wavevector since, due to the fact that our system is isotropic in the xy -plane, we can take $q_y = 0$. For numerical purpose we have considered physical parameters of material A as EuS (see Ref. [4]), while for material B we have assumed parameter values typical of CrBr₃ (see Ref. [15]). The number of layers in the superlattice unit cell is $n_A = n_B = 3$, and the magnitude of the spins are $S^A = 1.0$, $S^B = 1.5$, respectively. The exchange terms, in units of J^A , are: $J^B = 0.5$, $J^{AB} = 1.2$, and $J^{AS} = J^{BS} = 0.25$. The dimensionless external magnetic field, defined as $g\mu_B H^0/S^A J^A$, is supposed to be equal to one. In Fig. 1(a) the spin-wave spectra is presented in the absence of the anisotropic fields, while Fig. 1(b) shows the anisotropic case (i.e., both materials are supposed to have uniaxial as well as non-uniaxial anisotropic field). The case where A is uniaxial and B is a non-uniaxial material is presented in Fig. 1(c). The sets of modes that are close together constitute the regions of bulk bands and have boundaries corresponding to $q_x a/\pi = 0$ and 1, while the surface modes exist in the gap regions between the bulk bands. The behavior of all spectra is quite similar for high frequencies, with a real surface mode (i.e. modes which persist as $q_x \rightarrow \infty$) between the bulk bands. In the mid-frequency range, we have again a real surface mode between the bulk bands in Figs 1(a) and (b), although in the anisotropic case, this surface mode is quite apart from the bulk band. For the uniaxial/non-uniaxial superlattice, however, Fig. 1(c) shows that at this range of frequency the surface modes are virtual, i.e. they do not exist in the whole range of K . There are three of such modes, the first one around the frequency $\Omega = 3.75$, merging into the bulk band at $K = 0.3$. The second one exists in the range $0.33 < K < 0.52$, while the third one comes from the bulk band at $K = 0.53$, merging again into the next bulk band near the limit of the Brillouin zone. In the low-frequency range there are some interesting differences between the isotropic (Fig. 1(a)) and the anisotropic (Fig. 1(b)) cases, namely:

a) Fig. 1(a) (zero anisotropy field case) shows the surface mode around the frequency $\Omega = \omega/S_A J_A = 1.25$ merging into the bulk band at $K = 0.4$. Then it appears again near the boundary of the Brillouin zone.

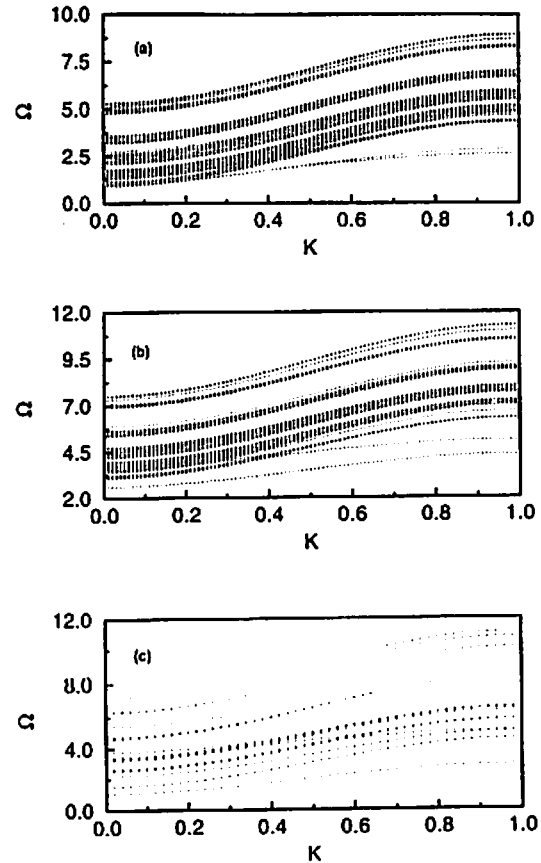


Fig. 1. The bulk and surface spin-wave dispersion relations for a finite superlattice in the linear approximation. The physical parameters used here are described in the main text; (a) in the absence of anisotropy, with $D^v = F^v = 0$; (b) in the case of non-zero anisotropy, with the anisotropic fields, in units of J^A , given by: $D^A = 1.2$, $D^B = 0.6$, $D^{AS} = 1.2$, $D^{BS} = 0.45$, $F^A = 0.8$, $F^B = 0.4$, $F^{AS} = 0.8$, $F^{BS} = 0.3$; (c) considering A as an uniaxial material and B as a non-uniaxial material, i.e., $D^A = 1.2$, $D^{AS} = 1.2$, $F^B = 0.4$, $F^{BS} = 0.3$, and $D^B = D^{BS} = F^A = F^{AS} = 0$.

For the anisotropic case, the surface mode comes from the bulk band at $K = 0.3$. Both modes are virtual.

b) The lowest surface modes in both cases are virtual, and come from the bulk band at $K = 0.19$ (in the absence of the anisotropy fields) and 0.4 (for the anisotropic case).

c) The lowest bulk band in Fig. 1(a) splits into two new bulk bands when the anisotropy fields are present (see the lower bulk bands of Fig. 1(b)).

Results for the unrenormalized (i.e., linear) and renormalized (i.e., including the energy shift) spin-wave energy $\Omega = \omega/S_A J_A$ of the lowest branch versus the dimensionless wavevector $K = q_x a/\pi$ are shown in Fig. 2. We have taken $\lambda = 1$ and $l' = 1$ to evaluate the dominant "diagonal" contribution to $\Delta E_1(q)$.

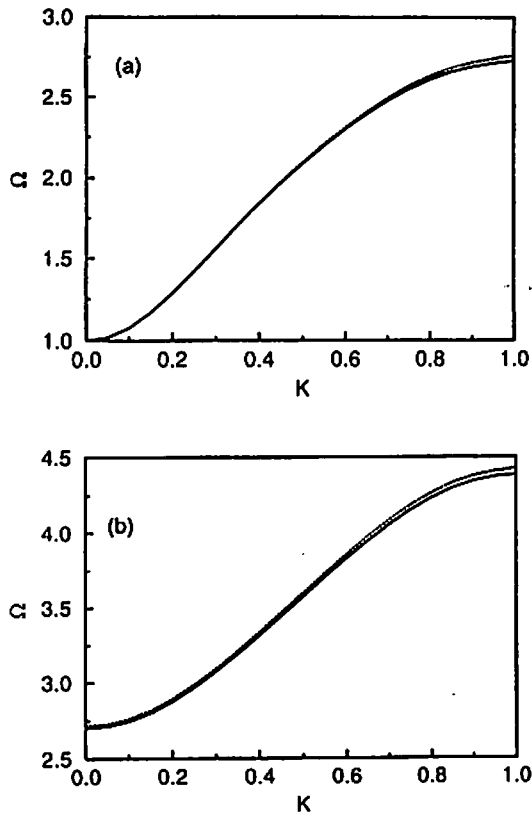


Fig. 2. The "diagonal" contribution to the energy shift of the first branch of the spin-wave dispersion relation: (a) in the absence of anisotropy, (b) in the case of non-zero anisotropy. The solid lines represent the renormalized energy (with energy shift included) and the long dashed line represents the unrenormalized (linear) energy. The physical parameters used here are the same as in Fig. 1.

The wave vector summation (over Q') was performed numerically. The cases with and without anisotropy fields are given in Figs 2(a) and (b) respectively. For the isotropic case, the energy shift is only noted in the second half region of the first Brillouin zone (from $K = 0.5$), being unaffected in the other half (see Fig. 2(a)). The anisotropic case is, however, more sensitive to the renormalization of the spin-wave energy, with the shift of the renormalized energy throughout the first Brillouin zone being more pronounced from $K = 0.5$ (see Fig. 2(b)).

In conclusion, we present here a theoretical analysis that permits us to study the linear and non-linear properties of bulk and surface spin-waves in a finite superlattice with and without the anisotropy terms. In the linear approximation, we obtained the dispersion relations for both bulk and surface modes, with interesting differences between the isotropic and anisotropic cases. Further, using a diagrammatic perturbation theory, we obtained the leading term of

the four-magnons interactions in the presence (and absence) of anisotropy, which is responsible for the energy shift of the spin-waves.

The most appropriate experimental technique for studying the spin-wave modes discussed here is the inelastic light-scattering spectroscopies of the Raman and Brillouin type [12], and we hope that our calculations will be helpful to the experimentalists.

Acknowledgements—This work was partly financed by the Brazilian Research Council CNPq, and by the National Science and Engineering Research Council (NSERC) of Canada.

REFERENCES

1. For a review see Tilley, D.R. and Cottam, M.G., *Introduction to Surface and Superlattice Excitations* (Cambridge University Press, Cambridge 1989).
2. Camley, R.E., Rahman, T.S. and Mills, D.L., *Phys. Rev. B*, **27**, 1983, 261.
3. Grünberg, P. and Mika, K., *Phys. Rev. B*, **27**, 1983, 2955.
4. Camley, R.E. and Cottam, M.G., *Phys. Rev. B*, **35**, 1987, 189.
5. Camley, R.E., Cottam, M.G. and Tilley, D.R., *Solid State Commun.*, **81**, 1992, 571.
6. Li, B., Yang, J., Shen, J.-L. and Yang, G.-Z., *J. Phys.: Condensed Matt.*, **7**, 1995, 1405.
7. Albuquerque, E.L., Fulco, P., Sarmiento, E.F. and Tilley, D.R., *Solid State Commun.*, **58**, 1986, 41.
8. Hinchey, I.L. and Mills, D.L., *Phys. Rev. B*, **33**, 1986, 3329; *ibid*, **34**, 1986, 1689.
9. Dobrzynski, L., Djafari-Rouhani, B. and Puzkarski, H., *Phys. Rev. B*, **33**, 1986, 3251.
10. Barnas, J., *Solid State Commun.*, **61**, 1987, 405; *ibid J. Phys. C*, **21**, 1988, 1021; *ibid* **21**, 1988, 4097.
11. Shen, W.-Z. and Li, Z.-Y., *J. Phys.: Condensed Matt.*, **4**, 1992, 5873.
12. Cottam, M.G. and Lockwood, D.J., *Light Scattering in Magnetic Solids*, (Wiley, New York 1986).
13. Wang, R.W. and Mills, D.L., *Phys. Rev. B*, **48**, 1993, 3792.
14. Prinz, G.A., Rado, G.T. and Krebs, J.J., *J. Appl. Phys.*, **53**, 1982, 2087.
15. Albuquerque, E.L. and Cottam, M.G., *Phys. Rev. B*, **46**, 1992, 14543; *ibid, Solid State Commun.*, **83**, 1992, 545.
16. Albuquerque, E.L., *J. Appl. Phys.*, **76**, 1994, 6552.
17. Anselmo, D.H.A.L. and Albuquerque, E.L., *Phys. Stat. Sol. (b)*, **198**, 1996, 827.

18. Cottam, M.G., editor, *Linear and Nonlinear Spin Waves in Magnetic Films and Superlattices* (World Scientific, Singapore 1994).
19. Kontos, D. and Cottam, M.G., *J.Phys. C*, 19, 1986, 1189; *ibid*, 1986, 1203.
20. Cottam, M.G. and Zhu, N.J., in *Nonlinear Micro-*

wave Signal Processing: Towards a New Range of Devices, R. Marcelli and S. A. Nikitov, editors (Kluwer, Dordrecht, 1996), p.121.
21. Costa Filho, R.N., Ph. D. Thesis, 1997 (unpublished); also R. N. Costa Filho and M. G. Cottam, to be published.

C.4 Magnetostatic Modes in Quasiperiodic Fibonacci Magnetic Superlattices

Magnetostatic modes in quasiperiodic Fibonacci magnetic superlattices

D. H. A. L. Anselmo

Department of Physics and Astronomy, University of Western Ontario, London, Ontario N6A 3K7, Canada
and Departamento de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Norte,
Natal-RN 59072-970, Brazil

M. G. Cottam^{a)}

Department of Physics and Astronomy, University of Western Ontario, London, Ontario N6A 3K7, Canada

E. L. Albuquerque

Departamento de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN 59072-970, Brazil

The magnetostatic modes are studied in multilayer structures that exhibit deterministic disorders. Some models that have attracted particular attention are the quasiperiodic magnetic multilayers that obey a substitutional sequence of the Fibonacci type. The spin wave spectra are evaluated in the geometry where the magnetization is perpendicular to the surfaces of the layers of the superlattice by using a transfer-matrix approach. Numerical results are presented for the ferromagnets EuS and Fe and for the antiferromagnet MnF₂. © 1999 American Institute of Physics. [S0021-8979(99)46708-8]

With advances in the technology of small scale devices and multilayered structures, there has been an increase in recent years in the number of works on the physical properties of these systems (for a review see Ref. 1). More recently, a new kind of structure has also caught the attention of both theoretical and experimental fields of research on multilayered systems: the so-called *quasiperiodic structures*.²

Excitations in quasiperiodic superlattices have been studied by many methods, as well as for many types.³ For magnetic quasiperiodic systems the behavior of the surface spin waves in the conventional Voigt geometry (where the applied field and the wave vector are both in the surface plane) has quite different features compared with the geometry considered here, where the applied field is perpendicular to the surface plane. For example, in the case of periodic superlattices in the perpendicular geometry,⁴ it is known from magnetostatic theory that multiple surface branches can occur even when the thickness of the nonmagnetic material is larger than the magnetic one. Here we present a theory for the *quasiperiodic superlattices*.

For the magnetostatic region of the spectra ($k \approx 10^5 \text{ cm}^{-1}$) we must deal with Maxwell's equations:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{h} = 0 \quad (1)$$

with the constitutive tensorial relation $\mathbf{B} = \tilde{\mu} \mathbf{h}$ between magnetic fields, where $\tilde{\mu}$ is the permeability tensor. Assuming a temporal dependence $\exp(-i\omega t)$ with a frequency ω for the fluctuating fields, $\tilde{\mu}$ has the form:

$$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

for a uniaxial material. It can be shown⁵ that for a ferromagnetic material

$$\mu_1 = 1 + \frac{4\pi\gamma^2 H_i M}{\gamma^2 H_i^2 - \omega^2}, \quad (3)$$

$$\mu_2 = \frac{4\pi\gamma^2 \omega M}{\gamma^2 H_i^2 - \omega^2}, \quad (4)$$

where H_i is the internal magnetic field in the z direction, given by $H_i = H_0 - 4\pi M$, H_0 is the external applied field, M is the saturation magnetization, and γ is the gyromagnetic ratio. For an antiferromagnet we have

$$\mu_1 = 1 + \frac{4\pi\gamma^2 H_A M}{\omega_0^2 - (\omega + \gamma H_0)^2} + \frac{4\pi\gamma^2 H_A M}{\omega_0^2 - (\omega - \gamma H_0)^2}, \quad (5)$$

$$\mu_2 = \frac{4\pi\gamma^2 H_A M}{\omega_0^2 - (\omega + \gamma H_0)^2} - \frac{4\pi\gamma^2 H_A M}{\omega_0^2 - (\omega - \gamma H_0)^2}, \quad (6)$$

where

$$\omega_0 = \gamma [H_A (2H_E + H_A)]^{1/2}. \quad (7)$$

Here H_E is the effective exchange field and H_A is the anisotropy field. For this case, M is the saturation magnetization of one of the sublattices.

From Eq. (1) we can define a magnetic scalar potential ϕ , since $\mathbf{h} = -\nabla\phi$. Also, using Eqs. (1) and (2), we obtain an equation of motion for ϕ as

$$\left[\mu_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi = 0. \quad (8)$$

In order to obtain consistent solutions for the superlattice modes, we need to match the solutions for Eq. (8) at the boundaries. This condition leads to the statement that ϕ and $\partial\phi/\partial z$ must be continuous across any boundary perpendicular to the z axis. We can suppose solutions of the form:

$$\phi = \phi(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (9)$$

where k is a wave vector (taken in the x direction) parallel to the surface. Using this equation in Eq. (8), one gets

^{a)}Electronic mail: cottam@julian.uwo.ca

$$\left(-\mu_1 k^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right)\phi(z) = 0, \tag{10}$$

which has general solutions of the form $\phi(z) = Ae^{\alpha z} + Be^{-\alpha z}$, where α may be complex and is related to k by $\alpha = (\mu_1)^{1/2}k$.

The expressions for the dispersion relations are obtained by applying the boundary conditions, as described later. One can show⁵ that we need only consider $\mu_1 < 0$ in order to obtain the bulk and surface modes. This imposition leads us to confine the range of frequencies as being from $|\gamma|H_i$ up to $|\gamma|[H_i H_0]^{1/2}$, for a ferromagnet. In the case of an antiferromagnet, it can be seen from Eq. (5) that for $H_0 = 0$, the range of frequency extends from ω_0 up to $[\omega_0^2 + 8\pi\gamma^2 H_A M]^{1/2}$.

Now we introduce our superlattice model, which consists of a sequence of juxtaposed building blocks (or layers) stacked following the rule of growth for Fibonacci quasiperiodic systems:

$$S_n = S_{n-1}S_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

where $S_1 = A$, $S_2 = AB$. This rule is invariant under the transformation $A \rightarrow AB$ and $B \rightarrow A$. The layers A and B consist, respectively, of a magnetic material having thickness d_A and a nonmagnetic one having thickness d_B . Inside a layer A , we choose solutions of the form

$$\phi(z) = A_+ e^{\alpha z} + A_- e^{-\alpha z}, \quad \alpha = (\mu_1)^{1/2}k, \tag{11}$$

and for a layer B

$$\phi(z) = B_+ e^{kz} + B_- e^{-kz}. \tag{12}$$

We now apply these solutions to the interfaces, in order to find the dispersion relation. Defining $L = n_A d_A + n_B d_B$ as the size of the unit cell, we use the conditions that ϕ and $\partial\phi/\partial z$ are continuous at both $z = nL$ and $z = nL + d_A$, where n is the index for the cell. After some straightforward algebra we find that

$$|A^{n+1}\rangle = T|A^n\rangle, \tag{13}$$

where T is a transfer matrix and $|A^n\rangle$ is a column matrix of amplitudes in cell n that can be found elsewhere.⁶ Using this expression, together with the Bloch *ansatz*

$$|A^{n+1}\rangle = e^{iQL}|A^n\rangle \tag{14}$$

it can be easily shown that the implicit dispersion relation for the magnetostatic bulk modes is

$$\cos(QL) = \frac{1}{2}\text{Tr}(T), \tag{15}$$

where Q is a real wave vector.

For the surface modes in a semi-infinite quasiperiodic structure (occupying the region $z \geq 0$) the same formal result applies, but the superlattice wave vector Q becomes complex ($Q = i\beta$). The implicit dispersion relation for the surface modes is

$$T_{11} + \lambda^{-1}T_{12} = e^{\beta L} = T_{22} + \lambda T_{21}, \tag{16}$$

where $\lambda = (\alpha + k)/(\alpha - k)$. Note that the attenuation constant β must be chosen such that its real part is positive. By defining $x_j \equiv \frac{1}{2}\text{Tr}(T_j)$, where T_j is the transfer matrix for the j th generation for the sequence, the recursion relations for x_j is

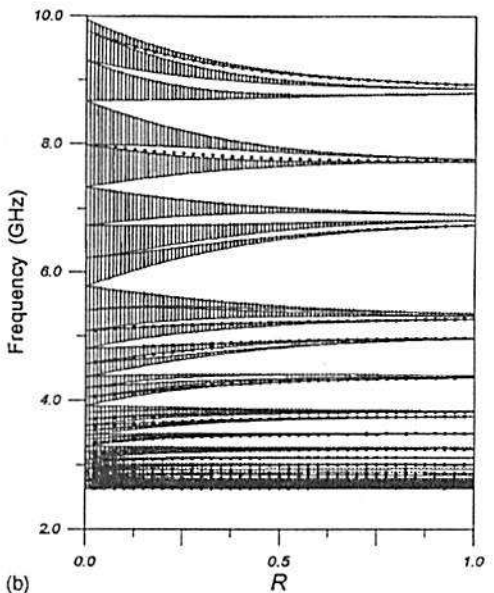
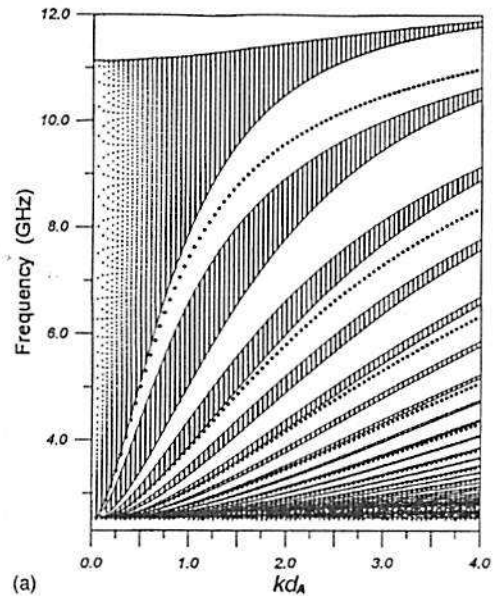


FIG. 1. The mode frequencies for ferromagnetic quasiperiodic superlattices. The bulk bands are shaded whereas the surface branches are represented by dotted lines. (a) ω vs reduced wave vector kd_A , where the magnetic material is Fe and the Fibonacci generation number is $N=3$; (b) ω vs $R (=d_B/d_A)$ for $kd_A=2$, where the magnetic material is EuS and the Fibonacci generation number is $N=6$.

$$x_{j+1} = 2x_j x_{j-1} - x_{j-2}. \tag{17}$$

As a consequence, one can show⁷ that the quantity

$$I = x_{j+1}^2 + x_j^2 + x_{j-1}^2 - 2x_{j+1}x_j x_{j-1} - 1 \tag{18}$$

is a constant of motion, in the sense that it is the same for any j th generation, and it reflects the strength of the quasiperiodicity.

Figure 1(a) shows the spin wave spectra ω vs kd_A for the third Fibonacci generation considering the magnetic material as Fe. The physical parameters used here are $H_0 = 22$ kG, $M = 1.68$ kG, and $R = d_B/d_A = 0.5$. From there, one can see

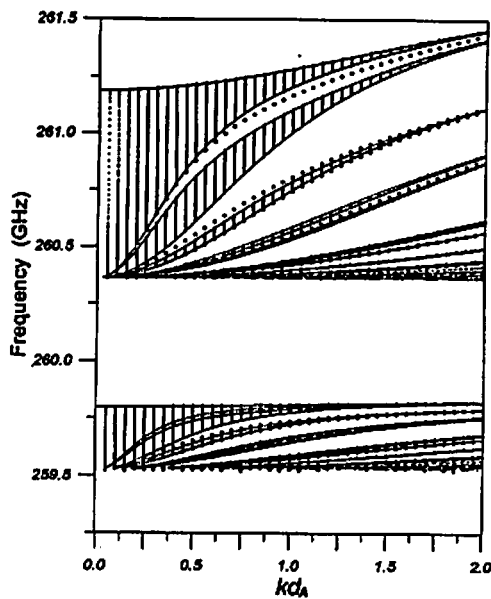


FIG. 2. Bulk and surface modes (ω vs kd_A) for the antiferromagnetic MnF_2 quasiperiodic superlattice with the Fibonacci generation number $N=5$. The surface modes are the dotted lines, and the bulk bands are the shaded regions.

that for the lower limit of the spectra ($\omega \approx 2.4$ GHz) both the bulk and surface modes become very dense, and there is a cutoff in the frequency, corresponding to the limit $\mu_1 \rightarrow -\infty$. This behavior was found for all values of the generation number and for all the materials shown here. We examine the frequency as a function of the ratio R in Fig. 1(b) for the ferromagnet EuS. We also note that the range of the frequencies for the surface and bulk branches can be adjusted by decreasing or increasing the magnitude of the applied field. The physical parameters used for EuS are $H_0 = 13.5$ kG, $M = 1.0$ kG, and $kd_A = 2$.

The bulk and surface bands for the antiferromagnetic case are depicted in Fig. 2. We choose MnF_2 as the antiferromagnetic material, taking $H_0 = 0.15$ kG, $M = 0.6$ kG, $H_E = 550$ kG, $H_A = 7.78$ kG, and $R = 1.0$. As a general feature, they are sensitive to the value of H_A . If one changes this value even slightly, one obtains a shift in all bands. It can be seen from Eq. (5) that the separation for the two regions (see Fig. 2) is governed by the value of the applied field H_0 . As in Ref. 4, if one puts $H_0 = 0$, the two regions "collapse" into one, with features similar to the ferromagnetic case.

A compelling feature of these quasiperiodic systems concerns the surface modes, which can be observed for all values of the sequence number $N > 2$. In the periodic case

($N = 2$), one would have to increase (or decrease) the thickness of the first layer of the semi-infinite superlattice in order to obtain the surface mode solutions,⁴ because of the impositions of the boundary conditions, through the constant β . Here, by contrast, this change is not needed, because the condition of a *different surface layer* is automatically satisfied in these quasiperiodic structures, when one goes to higher order terms ($N > 2$) of the sequence. This feature can be interpreted as a consequence of a natural broken symmetry for these structures. The sequence of roots for the boundaries of the bands follows the same sequence as in the periodic case ($QL = 0, \pi, \pi, 0, 0, \dots$) for both the ferromagnetic and antiferromagnetic case, independent of the Fibonacci generation number.

By varying the structure of our unit cell in both cases, as can be done by going to higher generations in the Fibonacci sequence, we also get an increase in the number of branches. It is an expected behavior because when we take $N \rightarrow \infty$, the ratio between the number of magnetic layers A and the non-magnetic ones B tends to the golden mean $\sigma = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$. Consequently, the overall effect of taking $R < 1$ for a finite sequence number N is similar to taking the limit $N \rightarrow \infty$ with $R = 1$.

The most appropriate experimental technique for studying these modes is the inelastic light scattering spectroscopy of Raman and Brillouin type. Techniques involving magnetic resonance (for example, ferromagnetic resonance, standing spin-wave resonance, etc.) can also be used, and indeed they were successfully applied previously to surface and bulk spin waves in various magnetic microstructures (for a good account of these techniques see Ref. 8).

The authors would like to thank CNPq and CAPES (Brazilian agencies) and NSERC (Canadian agency).

¹ M. G. Cottam and D. R. Tilley, *Introduction to Surface and Superlattice Excitations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).

² R. Merlin, K. Bajema, R. Clarke, F.-Y. Juang, and P. K. Bhattacharya, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1768 (1985); J. Todd, R. Merlin, R. Clarke, K. M. Mohanty, and J. D. Axe, *ibid.* **57**, 1157 (1986).

³ J. M. Luck, *Phys. Rev. B* **39**, 5834 (1989); M. S. Vasconcelos and E. L. Albuquerque, *ibid.* **57**, 2826 (1998); N.-h. Liu, *ibid.* **55**, 3543 (1997); C. G. Bezerra and E. L. Albuquerque, *Physica A* **245**, 379 (1997).

⁴ R. E. Camley and M. G. Cottam, *Phys. Rev. B* **35**, 189 (1987).

⁵ D. L. Mills, in *Surface Excitations*, edited by V. M. Agranovich and R. Loudon (North-Holland, Amsterdam, 1984), p. 379.

⁶ D. H. A. L. Anselmo and E. L. Albuquerque, *Phys. Status Solidi B* **198**, 827 (1996).

⁷ M. Kohmoto, L. P. Kadanoff, and C. Tang, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1870 (1983); M. Komoto and J. R. Banavar, *Phys. Rev. B* **34**, 563 (1986); M. Kohmoto, B. Sutherland, and C. Tang, *ibid.* **35**, 2436 (1987).

⁸ M. G. Cottam and D. J. Lockwood, *Light Scattering in Magnetic Solids* (Wiley, New York, 1986).

C.5 Localization and Scaling Properties of Magnetostatic Modes in Quasiperiodic Magnetic Superlattices (submetido)

Localization and Scaling Properties of Magnetostatic Modes in Quasiperiodic Magnetic Superlattices

Dory H.A.L. Anselmo (1,2), M.G. Cottam (1) and E.L. Albuquerque (2)

(1) *Department of Physics and Astronomy, University of Western Ontario, London, Ontario, N6A 3K7 Canada.*

(2) *Departamento de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 59072-970 Brazil.*

(October 4, 1999)

The localization and scaling behavior of quasiperiodic structures are studied for a geometry where the magnetization is perpendicular to the interfaces of the superlattices. Numerical results for the bulk and surface spin waves in the magnetostatic regime are presented for the Fibonacci, Thue-Morse and Period-doubling sequences. The results are obtained for both ferromagnetic and antiferromagnetic ordering by using the transfer-matrix method. Interesting features of the localized modes are shown for Fe, EuS, and MnF₂.

PACS numbers: 75.70.C; 75.30.D; 68.65.+g; 02.30.L

I. INTRODUCTION

Since the discovery of the icosahedral phase in Al-Mn alloys by Shechtman *et al.*¹, the field of quasiperiodic structures (or quasicrystals) has caught a lot of attention. Several studies have been made on these structures, for the electronic²⁻⁷ and phonon^{2,8} modes. Experimental and theoretical results have been reported for different kinds of quasiperiodic structures, such as Fibonacci^{9,10}, Thue-Morse¹¹⁻¹³ and period-doubling¹⁴. However, while these results were related mainly to electronic and structure properties, little has been made for the experimental studies of nonperiodic structures in the regime of magnetostatic modes.

The term *quasicrystal* is more appropriate for natural compounds or artificial alloys, although in one dimension there is no difference between this and the quasiperiodic structure formed by the incommensurate arrangement of periodic unit cells⁹. An appealing motivation for studying these structures is that they exhibit a highly fragmented energy spectrum displaying self-similar pattern. Indeed, from a strictly mathematical perspective, it has been proven that their spectra are Cantor sets in the thermodynamic limit^{15,16}.

With advances in multilayers fabrication (including epitaxial deposition⁹, among others) and in characterization techniques, such as x-ray scattering or neutron diffraction, it is possible to reveal novel features of such structures. Also, several different mathematical techniques including renormalization group^{17,18} and transfer matrix^{19,20} methods have been successfully applied, leading to remarkable results. For example, for the Thue-Morse spectrum, it is known that the structure factor is composed of a sequence of δ -peaks²¹, although they do not scale like L^2 , L being the typical length of the system. In this last case, there are some conflicting results. Some authors²⁰ argue that the results in the case of the electronic properties of the Thue-Morse sequence should depend on the kind of the model. However, this is not conclusive and it may not apply in the case of magnetic

properties.

Spin wave spectra in quasiperiodic magnetic structures have been recently investigated, by considering the nature of the solutions for the appropriate wave field in each film. The modes in these structures are coupled across the interfaces (through boundary conditions), and are calculated with the assistance of Bloch's theorem, where appropriate. The surfaces and interfaces in these layered structures play an important role in the properties of the entire system and for the excitations in particular. Many of the previous works have been concerned with the spin wave excitations in the low-temperature regime, where at least one of the components is a ferromagnetic or an antiferromagnetic material. Furthermore, depending on the relative importance of the magnetic dipole-dipole and exchange interactions, different models for the magnetic behavior can be employed. For instance, for sufficiently small values of the excitation wave vector ($k \lesssim 10^7 \text{ m}^{-1}$), dipolar effects are dominant and magnetostatic modes should propagate in such superlattices²²⁻²⁴. On the other hand, at larger excitation wavevectors typically $k \gtrsim 10^8 \text{ m}^{-1}$ in a ferromagnet, the exchange interaction, which is the restoring force for spin waves, will be dominant^{24,25}.

It is our aim in this work to investigate the magnetostatic modes in quasiperiodic structures made up of magnetic and nonmagnetic materials. By contrast to the case considered in refs. 19 and 21, in which the authors consider the geometry where the wave vector and the applied field are in the same plane (Voigt geometry), we consider here an in-plane wave vector and an applied field H_0 and magnetization (or sublattice magnetization for an antiferromagnet) in the direction perpendicular to the interfaces. Our model is based on a transfer matrix formalism, to simplify the algebra, which is otherwise quite involved. The localization and scaling properties of the spectra are also presented and discussed.

The remainder of this paper is organized as follows. The basic definitions of our structures and the mathematical outline are given in Sec. II. In Sec. III we present some results regarding the spin wave excitations in dif-

has the consequence that for the TM and PD sequences, the localization of the modes is stronger for lower values of the generation number.

In the above definitions, the layers A and B consist respectively of a magnetic material having thickness d_A and a nonmagnetic one having thickness d_B . The physical properties of such materials are included in the definitions of μ_1 and μ_2 . The external field H_0 in our calculations is applied in the z -direction, which is perpendicular to the interfaces. This causes the modes to behave quite differently from the case of the Voigt geometry^{22,24}. In particular, the Damon-Eshbach modes do not occur in our geometry, and there are multiple branches in the spin wave spectrum (e.g. see ref. 26 for the case of periodic superlattices).

In magnetic quasiperiodic superlattices a relevant quantity is the ratio between the numbers of magnetic and nonmagnetic building blocks. For the FB sequence, as the sequence number tends to infinity, this ratio tends to the *golden mean*, $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \simeq 1.618$. For the TM sequence, this ratio is constant and is equal to unity, but for the PD sequence this ratio is not constant, and actually tends to 2 when $n \rightarrow \infty$.

Now we apply our theory to the superlattices. Inside a layer A we consider solutions of the type:

$$\phi(z) = A_+ e^{\alpha z} + A_- e^{-\alpha z} \quad (12)$$

and for a layer B :

$$\phi(z) = B_+ e^{kz} + B_- e^{-kz} \quad (13)$$

Using these solutions, and defining $L = n_A d_A + n_B d_B$ as the length of the unit cell, we apply the boundary conditions (the continuity of ϕ and $\partial\phi/\partial z$) at the interfaces. The resulting equations can be cast in a matrix form, involving the transfer matrix T of the problem, which contains information describing the structure generated for a particular sequence. It can be used to study the behavior of the bulk and (when applied in an appropriate manner) the surface modes. After some algebra we find that

$$|A^{n+1}\rangle = T|A^n\rangle \quad (14)$$

where $|A^n\rangle$ is a column matrix of the amplitudes A_{\pm} in the n -th cell. The explicit form of the transfer matrix is given in the appendix A. A quasiperiodic superlattice is a structure whose unit cell is formed using a non-periodic rule of growth. These unit cells are then stacked periodically to form a superlattice. In these terms, Bloch's theorem is still applicable, giving

$$|A^{n+1}\rangle = e^{iQL} |A^n\rangle \quad (15)$$

where Q is a real wave vector of the infinite superlattice. Using (14) and (15), the implicit dispersion relation can be expanded as

$$\cos(QL) = \frac{1}{2} \text{Tr}(T) \quad (16)$$

If we consider now a semi-infinite superlattice (constructed in the region $z \geq 0$), we can still use eq. (16), but we must deal with, in addition to the bulk modes with Q real, surface modes with Q complex of the form $Q \equiv i\beta$. For the surface modes, eqns. (14) and (15) read

$$T_{11} + \lambda^{-1} T_{12} = e^{-\beta L} = T_{22} + \lambda T_{21} \quad (17)$$

where $\lambda = (\alpha + k)/(\alpha - k)$, and the constant β must be chosen such that $\text{Re}(\beta) > 0$. If we define the quantity $x_j \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}(T_j)$, where T_j stands for the transfer-matrix describing the j -th generation superlattice, one can show³ that for the FB sequence x_j obeys the recursion relation

$$x_{j+1} = 2x_j x_{j-1} - x_{j-2} \quad (18)$$

The expression above can be understood as a 3-D tracing map, as can be seen from the transformation

$$\mathbf{r}_{j+1} = T \mathbf{r}_j = (2x_j y_j - z_j, x_j, y_j) \quad (19)$$

where \mathbf{r}_j is a vector defined by $\mathbf{r}_j = (x_j, x_{j-1}, x_{j-2}) = (x_j, y_j, z_j)$. The quantity

$$I = x_{j+1}^2 + x_j^2 + x_{j-1}^2 - 2x_{j+1}x_jx_{j-1} - 1 \quad (20)$$

can be shown to be independent of the mapping (19) (i.e. independent of j), by using eq. (18).

III. NUMERICAL RESULTS

We now apply our calculations to some specific magnetic materials. We define $R = d_B/d_A$ as the ratio between the thicknesses of the nonmagnetic and the magnetic layers, respectively. The spectra ω versus kd_A of the spin waves in the magnetostatic regime are shown in Fig. 1. Starting with the ferromagnetic case in Fig. 1-a, we consider the magnetic material A as Fe, for the 5th generation of the FB sequence. The physical parameters used here are for Fe are²⁸ $H_0 = 22$ kG, $M = 1.68$ kG and $R = 0.5$, and for EuS $H_0 = 13.5$ kG and $M = 1.0$ kG. On the other hand, we consider MnF_2 as the antiferromagnetic material, whose physical parameters are²⁸: $H_0 = 0.15$ kG, $M = 0.6$ kG, $H_E = 550$ kG and $H_A = 7.78$ kG. As one can see clearly in this and in the subsequent figures, we have a well defined lower limit for the spectra, for all values of the generation number and for all the different sequences. This happens when we approach the frequency value ($\omega \simeq 2.48$ GHz for the FB sequence, with the parameters specified here for Fe) for which we have the limit $\mu_1 \rightarrow -\infty$. Also, there is an alternation of the sequence of the roots for the boundaries of the bulk bands, as in ref. 29. For the surface modes, which exist in the forbidden region of the spectra, corresponding to the imaginary value of the Bloch wavevector, whenever one considers the sequence generation number $n > 2$, we have a natural broken-symmetry for the structure. This

fact implies that we do not need to vary the thickness of the magnetic (or nonmagnetic) materials in order to obtain these modes²⁹, and this was also obeyed by all the sequences. However, we must be careful to impose the condition $Re(\beta) > 0$ in eq. (17), because otherwise we can obtain non-physical surface modes. Such modes are characterized by having an amplitude with exponential *increasing*, and must therefore be excluded. In Fig. 1-b we show the spectra for the antiferromagnet MnF_2 , for the third generation of the PD sequence. In this case the existence of an applied field gives rise to a gap between two regions of real solutions for the bulk and surface modes (or with $\mu_1 < 0$). If we set the external field equal to zero, the two regions collapse in one, still showing the same self-similar behavior as in the previous case. Also, the modes are sensitive to the value of the anisotropy field, having their relative position governed by the magnitude of H_A . In both figures cited above, the limits of the bands are given by $QL = 0$ and $QL = \pi$, such that we have an alternation from one band to another, following the sequence $0, \pi, \pi, 0, 0, \pi, \pi, 0, \dots$, starting from the upper band. Also, we do not need to explicitly calculate the value of β for the surface modes, since we just need the condition $Re(\beta) > 0$ to ensure physical solutions.

Fig. 2-a and fig. 2-b show the distribution of the magnetostatic bandwidths for high generations, which gives a good insight about their localization. From there we can infer the forbidden and allowed modes as a function of the generation number N . For large N the allowed band regions get narrow and narrower, as an indication of more localized modes. One can see clearly that this has a Cantor-like behavior, and we observed the same structure for the other sequences. For example, in Fig. 2-b we show a similar spectra, but now for the TM sequence, considering the antiferromagnet MnF_2 . As we have observed in other sequences, there is a splitting of the spectra in two regions, governed by the magnitude of the applied magnetic field H_0 . It can be also noticed that there exist a self-similarity between the two regions for real solutions, and for both figures there exist a strong localization when one goes to higher values of the generation number (because of the printing limitation, the regions get so narrow and close together that is difficult to see this feature). It has been reported³¹ that there exists a class of quasiperiodic potentials that do not exhibit localized states (i.e. they can only have continuous spectra), but in that case the authors have excluded the golden mean, while in our case it appears naturally for the FB sequence.

The log-log plot of the band-widths Δ against the generation number for the FB sequence is shown in Fig. 3-a. The labels in each point refer to the index n of generation. In each figure, the magnitudes of the in-plane wavevector are represented by different symbols. The crosses refers to $kd_A = 0.25$, the triangles to $kd_A = 0.5$, the circles to $kd_A = 1.0$ and the squares to $k = 2.0$. In figure 3-b the same log-log graph is shown now for the TM chain, and the scale behavior for the PD sequence is depicted in Fig.

3-c. For the FB sequence, the scaling law is $\Delta \sim (F_n)$ while for the TM and PD sequences, the band-width scale as $(2^n)^{-\delta}$. For the TM sequence, we see a strong dependence of δ with the in-plane wavevector, compared to the FB sequence, in the sense that the values of δ are higher for the same value of k . Observe that the linear behavior for all sequences is not well fitted for lower values of the generation numbers of the quasiperiodic structure (2 and 3 for FB, 1 and 2 for TM and PD). The reason is that is because this linear scaling is a typical property of a fractal system, and low values of the generation number n do not have yet a mark of quasiperiodicity. For example, the FB unit cell for $n = 2$ is AB (the pure periodic superlattice unit cell), and for $n = 3$ is ABA, which gives quite a same behavior for the bulk modes as the 2nd generation does, replacing $A \rightarrow 2A$. On the other hand, when one increases the value of n , one gets a fast increase of the number of the branches in all sequences, and, therefore, it causes a loss of precision for the low region of the spectra, due to the limiting behavior of μ

IV. CONCLUSIONS

In summary, we have obtained the bulk and surface solutions for the magnetostatic modes in quasiperiodic structures, where the magnetization is perpendicular to the interfaces. Different kinds of quasiperiodic systems were considered. For the dispersion curves of the PD (Fig. 1-b) and TM (Fig. 2-b) sequences, the strong fragmentation of the bulk bands for higher values of the generation number caused a loss of precision for $k > 2$. (mainly for the PD sequence), so we considered this value as a good upper-limit for the in-plane wavevector. For the antiferromagnetic modes with non-zero applied field the two regions of real solutions show patterns that are very similar to each other, and this feature was observed to be independent of the sequence and of the generation number. Also, the order of the generation plays an important role in the behavior of the localization of the modes. A systematic study of the physical parameters was made, and we found that the size of the bulk bands is quite sensitive to the ratio R , although here we have obtained solutions even for $R > 1.0$ (or with structures which have a non-magnetic spacer with a thickness greater than that of the magnetic material)^{21,28}. There exist other quasiperiodic sequences that can be studied as an extension of our work, following the procedure described here, such as the Cantor^{26,31-33}, the Rudin-Shapiro²⁶, and the random superlattice²⁶.

On the experimental side, the use of Brillouin scattering spectroscopy has proved to be an important tool to probe experimentally the theoretical predictions for these excitations³⁴. Besides, a knowledge of the spectrum of the spin waves in a superlattice allows one to describe its linear response to an external source, such as an electromagnetic wave. The analysis can be done through the

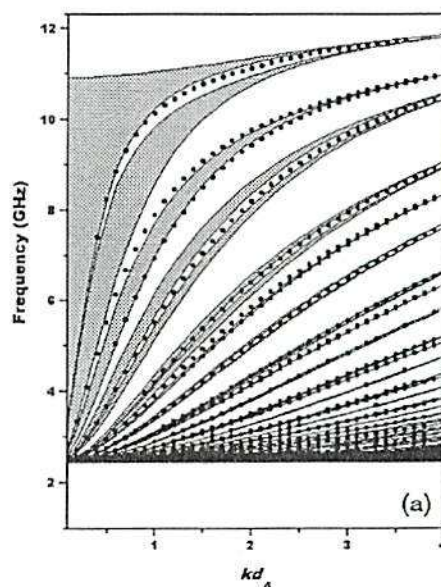
use of Green function techniques. Possible applications include spin valves and other multilayered devices.

Acknowledgements: We would like to thank CNPq and CAPES (Brazilian agencies) and NSERC of Canada for partial financial support.

- ¹ D. Shechtman, I. Blench, D. Gratias, and J.W. Cahn, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1951 (1984).
- ² M. Kohmoto and J.R. Banavar, *Phys. Rev. B* **34**, 563 (1986).
- ³ J.B. Sokoloff, *Phys. Rep.* **126**, 189 (1985).
- ⁴ Y. Liu and K.A. Chao, *Phys. Rev. B* **34**, 5247 (1986).
- ⁵ C.L. Roy, Arif Khan and Chandan Basu, *J. Phys.: Cond. Matter* **7**, 1843 (1995).
- ⁶ C.L. Roy and Arif Khan, *Phys. Rev. B* **49**, 14949(1994-I); *Phys. Lett. A* **196**, 346 (1995).
- ⁷ Y. Avishai and D. Berend, *Phys. Rev. B* **45**, 2717 (1992).
- ⁸ J.M. Luck and D. Petritis, *J. Stat. Phys.* **42**, 289 (1986); R. Riklund and M. Severin, *J. Phys. C* **21**, L965 (1988).
- ⁹ R. Merlin, K. Bajema, R. Clarke, F.-Y. Juang, and P.K. Bhattacharya, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1768 (1985).
- ¹⁰ J. Todd, R. Merlin, R. Clarke, K.M. Mohanty, and J.D. Axe, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1157 (1986).
- ¹¹ A. Thue, *Norske vid. Selsk. Skr. I. Mat. Nat. kl. Christiania* **7**, 1-22 (1906); **13**, 1-67 (1912).
- ¹² M. Morse, *Trans. Am. Math. Soc.* **22**, 84-100 (1921).
- ¹³ F. Axel and H. Terauchi, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2223 (1991).
- ¹⁴ A. Ghosh and S.N. Karmakar, *Phys. Rev. B* **57**, 2834 (1998).
- ¹⁵ A. Suto, *J. Stat. Phys.* **56**, 525 (1989).
- ¹⁶ J. Belisard, B. Iochum, E. Scoppola and D. Testard, *Commun. Math. Phys.* **125**, 527 (1989); J. Belisard, A. Bovier and J-M Ghez, *Commun. Math. Phys.* **135**, 379 (1991).
- ¹⁷ M. Kohmoto, B. Sutherland, and C. Tang, *Phys. Rev. B* **35**, 1020 (1987).
- ¹⁸ S. Ostlund and R. Pandit, *Phys. Rev. B* **29**, 1394 (1984).
- ¹⁹ E.L. Albuquerque, *Phys. Lett. A* **181**, 409 (1993).
- ²⁰ A. Chakrabarti, S.N. Karmakar, and R.K. Moitra, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1403 (1995).
- ²¹ Z. Cheng, R. Savit, and R. Merlin, *Phys. Rev. B* **37**, 4375 (1988).
- ²² H.K. Sy and Feng Chen, *Phys. Rev. B* **50**, 3411 (1994).
- ²³ P. Grünberg, in *Light Scattering in Solids V*, edited by G. Güntherodt and M. Cardona, 303 (Springer Verlag, Heidelberg, 1989).
- ²⁴ J.W. Feng, G.J. Jin, A. Hu, S.S. Kang, S.S. Jiang, and D. Feng, *Phys. Rev. B* **52**, 15312 (1995).
- ²⁵ C.G. Bezerra and E.L. Albuquerque, *Physica A* **245**, 379 (1997); *Physica A* **255**, 285 (1998).
- ²⁶ C.G. Bezerra, E.L. Albuquerque, and E. Nogueira Jr., *Physica A* **267**, 124 (1999).
- ²⁷ D. L. Mills in *Surface Excitations*, edited by V.M. Agranovich and R. Loudon (North-Holland, Amsterdam, 1984) 379.
- ²⁸ R.E. Camley and M.G. Cottam, *Phys. Rev. B* **35**, 189

(1987).

- ²⁹ D.H.A.L. Anselmo, M.G. Cottam, and E.L. Albuquerque, *J. Appl. Phys.* **85**, 5774 (1999).
- ³⁰ F. Delyon and D. Petritis, *Comm. Math. Phys.* **103**, 441 (1986).
- ³¹ M.S. Vasconcelos and E.L. Albuquerque, *Phys. Rev. B* **57**, 2826 (1998).
- ³² P.M.C. de Oliveira, E.L. Albuquerque, and A.M. Mariz, *Physica A* **227**, 206 (1996).
- ³³ M.S. Vasconcelos and E.L. Albuquerque, *Physica B* **222**, 113 (1996).
- ³⁴ A.S. Borovik-Romanov and N.M. Kreines, *Phys. Rep.* **81**, 351 (1982).



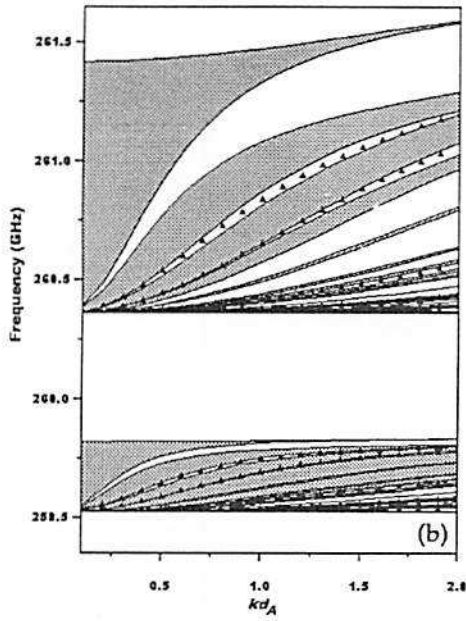


FIG. 1. Magnetostatic bulk (shaded areas) and surface (dotted lines) modes for some quasiperiodic structures:(a) the 5th generation of the Fibonacci sequence. The magnetic material is Fe, and the physical parameters used here are $H_0 = 22$ kG, $M = 1.68$ kG and $R = 0.5$; (b) the 3rd generation of the period-doubling sequence. Here the magnetic material is the antiferromagnet MnF₂, with physical parameters given by $H_0 = 0.15$ kG, $M = 0.6$ kG, $H_E = 550$ kG, $H_A = 7.78$ kG and $R = 0.5$.

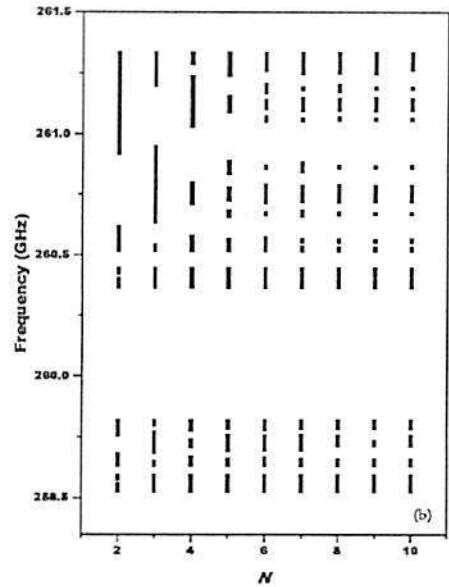
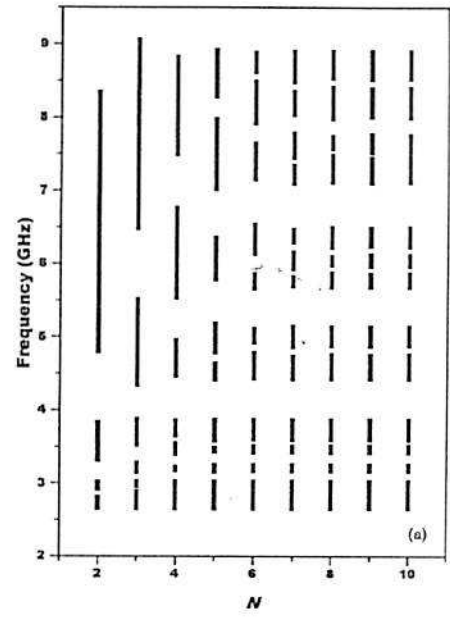


FIG. 2. The distribution of the bandwidths as a function of the quasiperiodic generation numbers. (a) Fibonacci sequence. The magnetic material used here is the ferromagnet EuS, with $H_0 = 13.5$ kG, $M = 1.0$ kG, $kd_A = 1.0$ and $R = 0.5$; (b) Thue-Morse sequence. The magnetic material is the antiferromagnet MnF₂, with the physical parameters given as in Fig. 1(b).

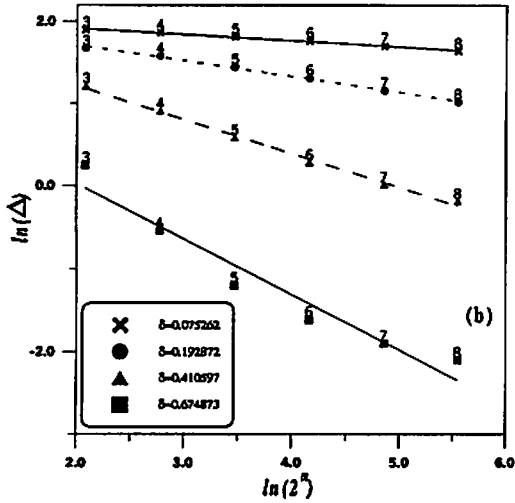
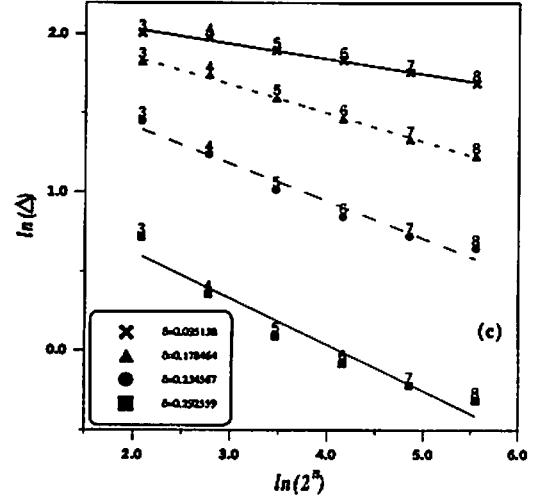
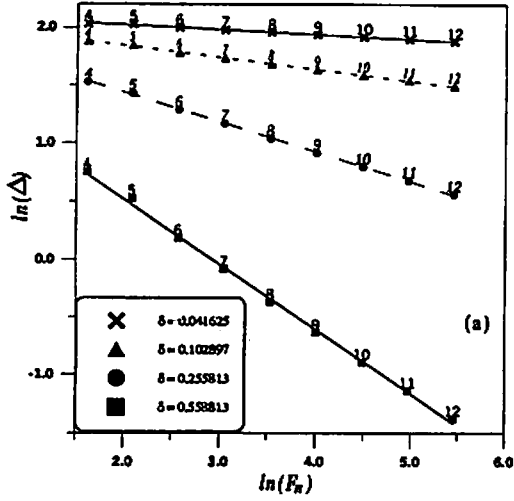


FIG. 3. Scaling behavior for the magnetostatic bulk modes. (a) Fibonacci sequence; (b) Thue-Morse sequence; (c) period-doubling sequence. The magnetic material for all quasiperiodic systems here is considered to be Fe, and the physical parameters are the same as in previous figures. The values of δ for each wavenumber are given in the insets.

APPENDIX A: EXPLICIT FORM OF THE TRANSFER MATRIX T

The transfer matrix T in equation (14) depends on the sequence and the generation considered. For the Fibonacci sequence, the T matrix for the n -th generation is given irreactively by :

$$T_{S_{n+2}} = T_{S_n} T_{S_{n+1}} \quad (\text{A1})$$

where, for $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} T_{S_2} &= N_\alpha^{-1} M_k N_k^{-1} M_\alpha \\ T_{S_1} &= M_\alpha N_\alpha^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

for the Thue-Morse sequence, we have a slightly more complicated rule for the n -th generation T matrix:

$$T_{S_n} = N_\alpha^{-1} T_{B_n} T_{A_n} N_\alpha \quad (\text{A3})$$

For $n \geq 1$, with:

$$T_{A_{n+1}} = T_{B_n} T_{A_n} \quad (\text{A4})$$

$$T_{B_{n+1}} = T_{A_n} T_{B_n} \quad (\text{A5})$$

and

$$T_{j_1} = M_\xi N_\xi^{-1} \quad (\text{A6})$$

In the equation above, we consider ($j = A, \xi = \alpha$) or ($j = B, \xi = k$).

Finally, for the period-doubling sequence, we have ($n \geq 1$)

$$T_{S_{n+2}} = T_{S_n} T_{S_n} T_{S_{n+1}} \quad (\text{A7})$$

where

$$T_{S_2} = T_{S_0} T_{S_0} T_{S_1} \quad (\text{A8})$$

$$T_{S_0} = N_\alpha^{-1} M_\alpha \quad (\text{A9})$$

$$T_{S_1} = N_\alpha^{-1} M_k N_k^{-1} M_\alpha \quad (\text{A10})$$

In all the equations above, the 2x2 matrices $N_\xi, M_\xi, \xi = \alpha, k$ have the general form

$$M_\xi = \begin{bmatrix} f_\xi & \bar{f}_\xi \\ \xi f_\xi & -\xi \bar{f}_\xi \end{bmatrix} \quad (\text{A11})$$

$$N_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \xi & -\xi \end{bmatrix} \quad (\text{A12})$$

$$f_\alpha = e^{\alpha d_A} ; \bar{f}_\alpha = 1/f_\alpha \quad (\text{A13})$$

$$f_k = e^{k d_B} ; \bar{f}_k = 1/f_k \quad (\text{A14})$$

Bibliografia

- ¹ M.G. Cottam e D.R. Tilley, *Introduction to Surface and Superlattice Excitations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- ² M.G. Cottam e A.N. Slavin, in *Linear and Nonlinear Spin Waves in Magnetic Films and Superlattices*, Edited by M.G. Cottam (World Scientific, USA, 1994), pp. 1-88.
- ³ M.N. Baibich *et al.*, Phys. Rev. Lett. **61**, 2472 (1988).
- ⁴ D.H.A.L. Anselmo, E.L. Albuquerque e M.G. Cottam, J. Appl. Phys. **83**, 6955 (1998).
- ⁵ R.N. Costa Filho, D.H.A.L. Anselmo, E.L. Albuquerque e M.G. Cottam, Solid State Commun. **108**, 827 (1998).
- ⁶ D.H.A.L. Anselmo, M.G. Cottam e E.L. Albuquerque, J. Appl. Phys. **85**, 5774 (1999).
- ⁷ D.H.A.L. Anselmo, M.G. Cottam e E.L. Albuquerque, J. of Phys.: Cond. Matt. (submitted) (1999).
- ⁸ J.D. Adam, M.R. Daniel, P.R. Emtage e S.H. Talisa, in *Physics of Thin Films: Thin Films for Advanced Electronic Devices* (Academic Press, USA, 1991), Vol. 15, pp. 1-141.
- ⁹ B.A. Kalinikos, in *Linear and Nonlinear Spin Waves in Magnetic Films and Superlattices*, Edited by M.G. Cottam (World Scientific, Singapore, 1994), pp. 89-156.
- ¹⁰ A.I. Akhiezer, V.G. Bar'yakhtar e S.V. Peletminskii, *Spin Waves* (North-Holland, Amsterdam, 1968).

- ¹¹ D.H.A.L. Anselmo e E.L. Albuquerque, *Phys. Status Solidi B* **198**, 827 (1996).
- ¹² F. Bloch, *Z. Phys.* **61**, 206 (1930).
- ¹³ J. Crangle, *Solid State Magnetism* (Edward Arnold, UK, 1991).
- ¹⁴ F. Keffer, *Handbuch der Physik* **18**, 1 (1966).
- ¹⁵ W. Marshall e S.W. Lovesey, *Theory of Thermal Neutron Scattering* (Clarendon Press, Oxford, 1971).
- ¹⁶ D. Bloor e G.M. Copland, *Rep. Prog. Phys.* **35**, 1173 (1972).
- ¹⁷ T.G. Phillips e H.M. Rosenberg, *Rep. Prog. Phys.* **29**, 285 (1966).
- ¹⁸ G. Heller e H.A. Kramers, *Proc. K. Akad. Wet.* **37**, 378 (1934).
- ¹⁹ T. Holstein e H. Primakoff, *Phys. Rev.* **58**, 1098 (1940).
- ²⁰ Claude-Cohen Tannoudji, Bernard Diu e Frank Lalöe, *Quantum Mechanics* (John Wiley and Sons, New York, 1977).
- ²¹ D.N. Zubarev, *Soviet Phys.* **3**, 320 (1960).
- ²² W.E. Parry, *The Many-Body Problem* (Clarendon Press, Oxford, 1973).
- ²³ G. Rickayzen, *Green's Functions and Condensed Matter* (W.B. Saunders, Philadelphia, 1966).
- ²⁴ M.G. Cottam e D.J. Lockwood, *Light Scattering in Magnetic Solids* (Wiley, New York, 1986).
- ²⁵ P. Grünberg, *Light Scattering in Solids* (Springer Verlag, Heidelberg, 1989), Vol. V, p. 303.
- ²⁶ S. Demokritov e E. Tsymbal, *J. Phys. Cond. Matter* **6**, 7145 (1994).

- ²⁷ J.R. Dutcher, in *Linear and Nonlinear Spin Waves in Magnetic Films and Superlattices*, Edited by M.G. Cottam (World Scientific, Singapore, 1994).
- ²⁸ L.M. Falicov *et al.*, J. Mater. Res. 5, 1299 (1990).
- ²⁹ R.C. Moul e M.G. Cottam, J. Phys. C 16, 1323 (1983).
- ³⁰ C. Kittel, Phys. Rev. 110, 1295 (1958).
- ³¹ H. Puzskarski, Prog. Surf. Sci. 9, 191 (1979).
- ³² G.P. Felchar, in *Dynamical Phenomena at Surfaces, Interfaces and Superlattices*, Edited by F. Nizzoli, K.-H. Rider and R.F. Willis (Springer, Berlin, 1985).
- ³³ S.W. Lovesey, *Theory of Neutron Scattering from Condensed Matter* (Clarendon Press, Oxford, 1984).
- ³⁴ U. Gradmann, J. Korecki e G. Waller, Appl. Phys. A 39, 101 (1986).
- ³⁵ S.D. Bader, Ultramicroscopy 47, 355 (1992).
- ³⁶ G.A. Prinz, G.T. Rado e J.J. Krebs, J. Appl. Phys. 53, 2087 (1982).
- ³⁷ L. Néel, Ann. Phys. 18, 5 (1932).
- ³⁸ L.D. Landau, Phys. Z. Sowjet. 4, 675 (1933).
- ³⁹ J. Becquerel e J. van den Handel, J. de Physique et le Radium 10, 10 (1939).
- ⁴⁰ Este nome foi aparentemente sugerido por H.A. Kramers; veja J. Becquerel em *Le Magnétisme* (Institute International de Cooperation Intellectuelle, CNRS, Paris, 1940), p. 97.
- ⁴¹ Para uma revisão, veja E. Stryjewski and N. Giordano, Adv. Phys. 26, 487 (1977).
- ⁴² V. Sechovský, J. Appl. Phys. 76, 6913 (1994).
- ⁴³ J.H.V.J. Brabers, Phys. Rev. B 50, 16410 (1994).

- ⁴⁴ V. Ivanov et al., *J. Alloys Comp.* **218**, L19 (1995).
- ⁴⁵ T. Goto et al., *J. Appl. Phys.* **76**, 6682 (1994).
- ⁴⁶ B. Lüthi, *J. Mag. Mag. Mat.* **90 and 91**, 37 (1991).
- ⁴⁷ F. Acker et al., *Phys. Rev. B* **24**, 5404 (1981).
- ⁴⁸ T. Sakakibara et al., *J. Phys.: Condens. Matter* **2**, 3381 (1990).
- ⁴⁹ I.S. Jacobs e P.E. Lawrence, *Phys. Rev.* **64**, 866 (1967).
- ⁵⁰ L. J. De Jongh e A.R. Miedema, *Experiments on Simple Magnetic Model Systems* (Taylor and Francis, London, 1974).
- ⁵¹ J.F. Dillon Jr., E.Yi Chen e H.J. Guggenheim, *Phys. Rev. B* **15**, 1422 (1977).
- ⁵² C. Vettier e W.B. Yelon, *Phys. Rev. B* **11**, 4700 (1975).
- ⁵³ W.B. Yelon e C. Vettier, *J. Phys. C* **8**, 2760 (1975).
- ⁵⁴ D.J. Lockwood *et al.*, *J. Phys. C* **15**, 2793 (1982).
- ⁵⁵ G.C. Psaltakis *et al.*, *J. Phys. C* **17**, 1735 (1984).
- ⁵⁶ R.E. DeWames e T. Wolfram, *Phys. Rev.* **185**, 720 (1969).
- ⁵⁷ M.G. Cottam, *J. Phys. C* **9**, 2121 (1976).
- ⁵⁸ J.H. Baskey e M.G. Cottam, *Phys. Rev. B* **42**, 4304 (1990).
- ⁵⁹ R.W. Wyckoff, *Crystal Structures* (Interscience, New York, 1963), Vol. 1.
- ⁶⁰ G.C. Psaltakis e M.G. Cottam, *J. Phys. C* **15**, 4847 (1982).
- ⁶¹ W.B. Yelon e R.J. Birgeneau, *Phys. Rev. B* **5**, 2615 (1972).
- ⁶² M. Pleimling e W. Selke, *Phys. Rev. B* **56**, 8855 (1997).

- ⁶³ U. Balucani, M. G. Pini e V. Tognetti, *J. Phys. C* **13**, 3895 (1980).
- ⁶⁴ V.N. Kitaev, M.P. Kashchenko e L.V. Kurbatov, *Sov. Phys.* **15**, 1530 (1974).
- ⁶⁵ M.G. Cottam e A.L. Awang, *J. Phys. C* **10**, 3673 (1977).
- ⁶⁶ S. Gopalan e M.G. Cottam, *Phys. Rev. B* **42**, 624 (1990).
- ⁶⁷ E.L. Albuquerque e M.G. Cottam, *Phys. Rev. B* **46**, 14543 (1992).
- ⁶⁸ Dory H. A. L. Anselmo, Tese de Mestrado, UFRN, 1995.
- ⁶⁹ E.L. Albuquerque, P. Fulco, E.F. Sarmiento e D.R. Tilley, *Solid State Commun.* **58**, 41 (1986).
- ⁷⁰ L.R. Walker, *Magnetism, Edited by G.T. Rado and M. Suhl* (Academic Press, New York, 1963), Vol. 1.
- ⁷¹ M.T. Hutchings *et al.*, *Phys. Rev. B* **2**, 1362 (1970).
- ⁷² D. Kontos e M.G. Cottam, *J. Phys. C* **19**, 1189 (1986).
- ⁷³ M.G. Cottam e N.J. Zhu, *Nonlinear Microwave Signal Processing: Towards a New Range of Devices* (Kluwer, Dordrecht, 1996).
- ⁷⁴ R.N. Costa Filho, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza-Ceará, 1997.
- ⁷⁵ E.L. Albuquerque e M.G. Cottam, *Solid State Commun.* **83**, 545 (1992).
- ⁷⁶ D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias e J.W. Can, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1951 (1984).
- ⁷⁷ P. Guyot, P. Kramer e M. de Boissieu, *Rep. Prog. Phys.* **54**, 1373 (1989).
- ⁷⁸ Ch. Janot e J.M. Dubois, *J. Phys. F.: Met. Phys.* **18**, 2303 (1988).
- ⁷⁹ R. Merlin *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1768 (1985).

- ⁸⁰ A. Süto, J. Stat. Phys. **56**, 525 (1989).
- ⁸¹ J. Belisard, B. Iochum, E. Scoppola e D. Testard, Commun. Math. Phys. **125**, 527 (1989).
- ⁸² J. Bellisard, A. Bovier e J.-M. Ghez, Commun. Math. Phys. **135**, 379 (1991).
- ⁸³ M. Kohmoto, B. Sutherland e C. Tang, Phys. Rev. B **35**, 1020 (1987).
- ⁸⁴ S. Ostlund e R. Pandit, Phys. Rev. B **29**, 1394 (1998).
- ⁸⁵ E.L. Albuquerque, Phys. Lett. A **181**, 409 (1993).
- ⁸⁶ A. Chakrabarti, S.N. Karmar e R.K. Moitra, Phys. Rev. Lett. **74**, 1403 (1995).
- ⁸⁷ H.K. Sy e Feng Chen, Phys. Rev. B **50**, 3411 (1994).
- ⁸⁸ J.W. Feng *et al.*, Phys. Rev. B **52**, 15132 (1995).
- ⁸⁹ C.G. Bezerra e E.L. Albuquerque, Physica A **245**, 379 (1997).
- ⁹⁰ C.G. Bezerra e E.L. Albuquerque, Physica A **255**, 285 (1998).
- ⁹¹ B. Li, J. Yang, J.-L. Shen e G.-Z. Yang, J. Phys: Condens. Matter **7**, 1405 (1995).
- ⁹² R.W. Damon e J.R. Eshbach, J. Phys. Chem. Solids **19**, 308 (1961).
- ⁹³ D.L. Mills, *Surface Excitations* (North-Holland, Amsterdam, 1984).
- ⁹⁴ E.F. Sarmiento e D.R. Tilley, in *Electromagnetic Surface Excitations*, Edited by A. Boardman (Wiley, New York, 1982).
- ⁹⁵ T. Wolfram e R.E. Dewames, Prog. Surf. Science **2**, 233 (1972).
- ⁹⁶ M.G. Cottam e A.A. Maradudin, in *Surface Excitations*, Edited by A.A. Maradudin (North-Holland, Amsterdam, 1984).
- ⁹⁷ W.S. Ishak e K.-W. Chang, Hewlett-Packard Journal **36**, 10 (1985).

- ⁹⁸ M.G. Cottam, *J. Phys. C* **12**, 1709 (1979).
- ⁹⁹ M.G. Karkut, J.-M. Triscone, D. Ariosa e Ø. Fischer, *Phys. Rev. B* **34**, 4390 (1986).
- ¹⁰⁰ E.L. Albuquerque e M.G. Cottam, *Solid State Commun.* **81**, 383 (1992).
- ¹⁰¹ E.L. Albuquerque, *Solid State Commun.* **99**, 311 (1996).
- ¹⁰² M. Kohmoto, B. Sutherland e K. Iguchi, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2436 (1987).
- ¹⁰³ W. Gellermann, M. Kohmoto e B. Sutherland, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 633 (1994).
- ¹⁰⁴ F.M. Dekking, *Compt. Rend. de l'Academie des Sciences de Paris* **285**, 157 (1977).
- ¹⁰⁵ A. Cobham, *Math. Syst. Theory* **3**, 186 (1969).
- ¹⁰⁶ F.M. Dekking, *J. Combinatorial Theory* **27 A**, 292 (1976).
- ¹⁰⁷ G. Christol, T. Kamae, M. Mendes-France e G. Rauzy, *Bull. Soc. Math. (France)* **108**, 410 (1980).
- ¹⁰⁸ N.-H. Liu, *Phys. Rev. B* **55**, 3543 (1997).
- ¹⁰⁹ J.M. Luck, *Phys. Rev. B* **39**, 5384 (1989).
- ¹¹⁰ G. Steinmeyer, D. Jaspert e F. Mitschke, *Opt. Commun.* **104**, 379 (1994).
- ¹¹¹ A. Ghosh e S.N. Karmakar, *Phys. Rev. B* **58**, 2586 (1999).
- ¹¹² P. Hawrylak e J.J. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 380 (1986).
- ¹¹³ J. Todd, R. Merlin e R. Clarke, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1157 (1986).
- ¹¹⁴ F. Axel e H. Terauchi, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2223 (1991).
- ¹¹⁵ R.E. Camley e M.G. Cottam, *Phys. Rev. B* **35**, 189 (1987).
- ¹¹⁶ M.S. Vasconcelos e E.L. Albuquerque, *Phys. Rev. B* **57**, 2826 (1998).

- ¹¹⁷ M.S. Vasconcelos, E.L. Albuquerque e A.M. Mariz, *J. Phys. Condens. Matter* **10**, 5839 (1998).
- ¹¹⁸ F. Laruelle, *Journal de Physique* **C5**, C5 (1987).
- ¹¹⁹ M.S. Vasconcelos, Tese de Doutorado, Departamento de Física - UFRN, 1999.
- ¹²⁰ M. Kohmoto, L.P. Kadanoff e C. Tang, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1870 (1983).
- ¹²¹ Z. Cheng, R. Savit e R. Merlin, *Phys. Rev. B* **37**, 43475 (1988).
- ¹²² N.S.Almeida, P. Fulco, E.L. Albuquerque e D.R. Tilley, *J. Phys.: Cond. Matter* **4**, 8909 (1992).
- ¹²³ C.G. Bezerra, E.L. Albuquerque e E. Nogueira Jr., *Physica A* **267**, 124 (1999).