

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Polaritons em Materiais Magnéticos  
Nanoestruturados**

Carlos Alexandre Amaral Araújo

Natal, Junho de 2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Polaritons em Materiais Magnéticos  
Nanoestruturados**

Carlos Alexandre Amaral Araújo

**Orientador: Eudenilson Lins de Albuquerque**

Natal, Junho de 2007

*"Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre".*

*Paulo Freire*

---

**Para Pessoas Especiais:**

---

Meus Pais

Luiz Carlos Tavares Costa Araújo

Antonia Amaral Araújo

Minha Namorada

Karina Barbosa Silva

# Agradecimentos

- A Deus, que sempre iluminou a minha trajetória, conduzindo-me para o meu objetivo e fortalecendo-me nas horas difíceis.
- A Luiz Carlos Tavares Costa Araújo (meu pai) e Antonia Amaral Araújo (minha mãe), pelo apoio incondicional durante toda a minha vida, sempre proporcionando todas as condições para que eu conquiste o meu espaço e tenha sucesso na minha vida. Agradeço por terem me conduzido por esse caminho e por todo amor que vocês sempre me deram.
- A Karina Barbosa Silva, pelo carinho, amor, dedicação e compreensão durante estes mais de três anos de namoro.
- Ao Prof. Eudenilson Lins de Albuquerque, que é um excelente professor e pesquisador, por sua exímia orientação e incentivo durante a elaboração deste trabalho.
- Ao Prof. Manoel Silva de Vasconcelos, meu co-orientador, que contribuiu de modo significativo para a realização deste trabalho. Além de ser o principal responsável pela minha inserção em pesquisa científica.
- A todos os Professores do Departamento de Ciências Exatas/CEFET-MA, que foram muito importantes para a minha formação durante a graduação no curso de Licenciatura em Física, e em especial ao professor Paulo Wilson Mauriz.
- A todos os professores do DFTE-UFRN que contribuíram para minha formação durante o meu curso de Mestrado em Física.
- A todos os funcionários do DFTE-UFRN, em especial a Celina.
- A todos os amigos do CEFET-MA, em especial a Agmael Mendonça Silva, Márcio Antonio Pires Pereira e Sidney Rocha Reis que foram grandes companheiros durante a graduação.

- A todos os amigos da pós-graduação, pela agradável convivência durante todo este período.

- Finalmente, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro concedido.

# Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo teórico sobre as propriedades dos polaritons magnéticos em super-redes organizadas em padrões periódico e quasi-periódico. Na super-rede periódica, objetivando descrever o comportamento destes modos, tanto no volume quanto na superfície, foi utilizada a teoria do meio efetivo, que facilita enormemente a álgebra envolvida. Para a super-rede quasi-periódica usamos um conveniente modelo teórico baseado no tratamento da matriz-transferência, para derivar a relação de dispersão, utilizando as equações de Maxwell (incluindo efeitos de retardamento). Aqui, encontramos um espectro fractal caracterizado por uma lei de potência para a distribuição de bandas de energia. A localização e o comportamento de escala da estrutura quasi-periódica são estudadas numa geometria onde o vetor de onda e o campo aplicado estão no mesmo plano (geometria de Voigt). Resultados numéricos são apresentados para o ferromagneto Fe e para os metamagnetos FeBr<sub>2</sub> e FeCl<sub>2</sub>.

# Abstract

In this work we present a theoretical study about the properties of magnetic polaritons in superlattices arranged in a periodic and quasiperiodic fashions. In the periodic superlattice, in order to describe the behavior of the bulk and surface modes an effective medium approach, was used that simplify enormously the algebra involved. The quasi-periodic superlattice was described by a suitable theoretical model based on a transfer-matrix treatment, to derive the polariton's dispersion relation, using Maxwell's equations (including effect of retardation). Here, we find a fractal spectra characterized by a power law for the distribution of the energy bandwidths. The localization and scaling behavior of the quasiperiodic structure were studied for a geometry where the wave vector and the external applied magnetic field are in the same plane (Voigt geometry). Numerical results are presented for the ferromagnet Fe and for the metamagnets  $\text{FeBr}_2$  and  $\text{FeCl}_2$ .



# Índice

<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Teoria Geral de Sistemas Magnéticos Periódicos e Quasi- Periódicos</b>	<b>9</b>
2.1 Introdução . . . . .	9
2.2 Ondas de Spin em Filmes Finos . . . . .	12
2.3 Modos Magnetostáticos em Filmes Finos . . . . .	17
2.3.1 Magnetização Paralela à Superfície do Filme . . . . .	18
2.3.2 Magnetização Perpendicular à Superfície do Filme . . . . .	25
2.4 Super-Rede Terra-Rara . . . . .	26
2.5 Fimes Finos Metamagnéticos . . . . .	36
2.6 Estruturas Quasi-Periódicas . . . . .	49
2.7 Conclusões . . . . .	57
<b>3 Polaritons em Super-Redes Magnéticas Periódicas: Teoria do Meio Efetivo</b>	<b>60</b>

3.1	Introdução . . . . .	60
3.2	Super-Redes Periódicas . . . . .	61
3.3	Polaritons Magnéticos em Super-Redes Periódicas Magnética/Não-Magnética . . . . .	61
3.4	Polaritons Magnéticos em Super-Redes Periódicas Metamagnética/Não-Magnética . . . . .	63
3.5	Conclusões . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Polaritons em Super-redes Metamagnéticas Periódicas e Quasi-Periódicas: Teoria Microscópica</b>	<b>73</b>
4.1	Introdução . . . . .	73
4.2	Método da Matriz-Tranferência: Super-Rede de Fibonacci. . . . .	75
4.3	Resultados Numéricos . . . . .	77
4.4	Conclusões . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas Futuras</b>	<b>85</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>87</b>

# Lista de Figuras

1.1	Bússola Chinesa antiga retirada da referência 1. . . . .	2
1.2	Alguns exemplos de arranjos magnéticos; curva de histerese mostrando valores de campo de coercividade. . . . .	4
1.3	Material metamagnético. . . . .	6
1.4	Visão semiclássica de uma onda de spin. . . . .	8
2.1	Diferentes regiões para o comportamento magnético. . . . .	11
2.2	Ondas de spins num ferromagneto semi-infinito de Heisenberg. .	17
2.3	Geometria do filme ferromagnético. . . . .	18
2.4	Modos magnetostáticos de superfície e volume. . . . .	22
2.5	Espectro dos polaritons magnéticos para o caso do estado cone.	35
2.6	Espectro dos polaritons magnéticos para o caso do estado espiral.	37
2.7	Cristal metamagnético. . . . .	39
2.8	Relação de dispersão dos polaritons magnéticos para $\text{FeBr}_2$ na sua fase FM. . . . .	48
2.9	Relação de dispersão dos polaritons magnéticos para $\text{FeCl}_2$ na sua fase AFM. . . . .	50
2.10	Espectro de polariton para a super-rede ferromagnética/não-magnética. . . . .	56
2.11	Espectro de polariton para a super-rede antiferromagnética/não-magnética. . . . .	58
3.1	Exemplos de super-redes. . . . .	62

3.2	Geometria da super-rede periódica ferromagnética. . . . .	63
3.3	Espectro de polaritons magnético numa super-rede periódica ferromagnética. . . . .	64
3.4	Geometria da super-rede periódica metamagnética/não-magnética.	65
3.5	Espectro dos polaritons de volume numa super-rede periódica metamagnética (FeBr <sub>2</sub> )/não-magnética. . . . .	70
3.6	Espectro dos polaritons de volume numa super-rede periódica metamagnética (FeCl <sub>2</sub> )/não-magnética. . . . .	71
4.1	Células unitárias para as gerações da estrutura de Fibonacci. . .	78
4.2	Espectro de polariton para o metamagneto FeBr <sub>2</sub> na sua fase FM (caso periódico). . . . .	80
4.3	Espectro de polariton para o metamagneto FeBr <sub>2</sub> na sua fase AFM (caso periódico). . . . .	81
4.4	Espectro de polariton para o metamagneto FeBr <sub>2</sub> na sua fase FM para a quarta geração da sequência de Fibonacci. . . . .	81
4.5	Espectro de polariton para o metamagneto FeBr <sub>2</sub> na sua fase AFM para a quarta geração da sequência de Fibonacci. . . . .	82
4.6	Distribuição das larguras de bandas dos polaritons magnéticos para $k_x d_A = 2.5$ . . . . .	83
4.7	Gráfico log-log para a largura total das regiões permitidas $\Delta$ versus o número de Fibonacci $F_n$ . . . . .	84

# Capítulo 1

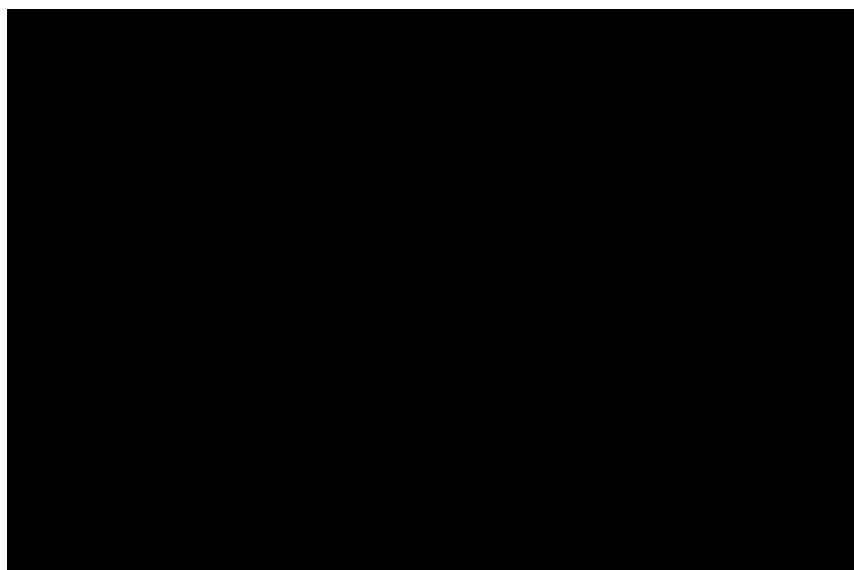
## Introdução

O estudo e o desenvolvimento do magnetismo e dos materiais magnéticos são, sem dúvida, assuntos muito interessantes da Física. Os fenômenos magnéticos são largamente utilizados no desenvolvimento de novas tecnologias, desde sistemas de geração e distribuição de energia, sistemas de conversão eletromecânica, eletrônicos e telecomunicações, informática, passando por novas e intrigantes descobertas sobre crescimento e comportamento de estruturas multicristalinas, até investigações em nanomateriais. No mundo todo, grupos teóricos e experimentais estudam o magnetismo na matéria. A motivação para este interesse pode ser tanto acadêmica quanto dirigida para aplicações práticas em dispositivos magnéticos, tais como: sensores magnéticos feitos com materiais que apresentam magnetoresistência colossal, gravação de dados em fitas magnéticas e discos rígidos, memórias magnetoresistivas, etc.

Isto só foi possível com o entendimento dos fenômenos magnéticos, e com a descoberta de novos materiais magnéticos. Estes Fenômenos são rigorosamente descritos pela Mecânica Quântica e pela Mecânica Estatística, mas podem ser compreendidos em uma primeira análise utilizando-se uma abordagem macroscópica, possibilitando assim a aplicação de conceitos de Física Clássica.

Existem relatos da utilização de materiais magnéticos naturais na região da

Magnésia, Ásia Menor, há mais de 3500 anos [1]. As pedras eram chamadas de ‘magnes lapis’, que significaria Pedra da Magnésia, hoje conhecida como magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ). Na Grécia Antiga, Thales de Mileto afirmava que a interação entre a magnetita e o ferro era conhecida desde 600 anos antes de Cristo. Há evidências históricas do uso, por antigos chineses, de pedras de magnetita moldadas em uma forma ornamental de colher. Quando colocadas sobre superfícies planas, podiam ser usadas para indicar uma direção, ou seja, as primeiras bússolas. Essa antiga bússola está ilustrada na figura 1.1.



**Figura 1.1:** Bússola Chinesa antiga retirada da referência 1.

Os materiais podem ter momentos de dipolo magnéticos intrínsecos ou podem ter momentos de dipolo magnéticos induzidos pela aplicação de um campo de indução magnética externo. Na presença de um campo de indução magnética, os dipolos magnéticos elementares, tanto permanentes quanto induzidos, reagirão de forma a produzir um campo de indução próprio que modificará o campo original. Os momentos de dipolo magnético que podem ser

considerados como correntes microscópicas são fontes de indução magnética  $\vec{B}$  exatamente como as correntes macroscópicas. Assim, podemos escrever a indução magnética como [2]:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}), \quad (1.1)$$

onde  $\vec{M}$  é a magnetização e  $\vec{H}$  é o campo magnético.

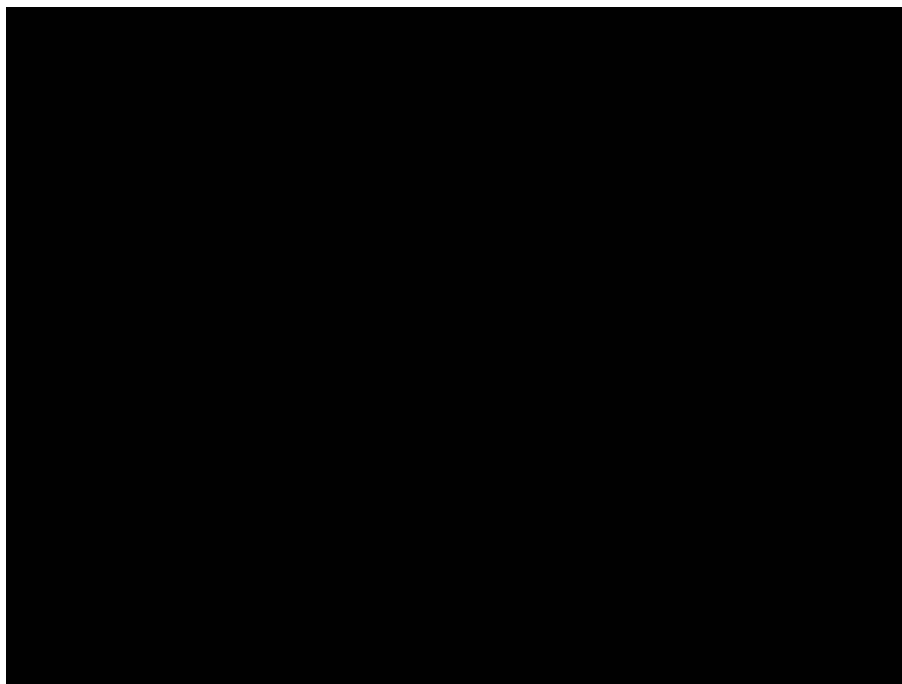
Em certos materiais magnéticos, observa-se empiricamente que a magnetização  $\vec{M}$  é proporcional a  $\vec{H}$ . Assim, pode-se escrever

$$\vec{M} = \chi\vec{H}, \quad (1.2)$$

onde a grandeza adicional  $\chi$  é chamada de susceptibilidade magnética. O magnetismo pode aparecer de diversas formas, e podemos classificar os materiais pela forma como estes respondem a um campo magnético aplicado, de acordo com sua susceptibilidade magnética relativa, que pode variar entre  $10^{-5}$  até  $10^6$ . Deste ponto de vista teremos a seguinte classificação básica: diamagnetismo ( $\chi < 1$ ), paramagnetismo ( $\chi \geq 1$ ), antiferromagnetismo, ferrimagnetismo e ferromagnetismo ( $\chi \gg 1$ ). Neste trabalho vamos nos restringir aos materiais ferromagnéticos e antiferromagnéticos.

Microscopicamente, a interação de troca pode originar diversos tipos de arranjos especiais dos spins atômicos. Do ponto de vista técnico, ou seja, das aplicações do magnetismo, é mais conveniente classificar os materiais de acordo com a sua dureza magnética [3]. A dureza do material pode ser caracterizada através da sua curva de histerese, de acordo com o chamado campo coercivo, definido como o valor do campo para o qual a magnetização no ciclo de histerese se anula. O arranjo dos spins e a curva de histerese são mostrados na figura

1.2.



**Figura 1.2:** Alguns exemplos de arranjos magnéticos; curva de histerese mostrando valores de campo de coercividade.

Ferromagnetismo é a existência de uma magnetização espontânea em pequenas regiões de um material, que persiste mesmo na ausência de um campo de indução externo. Essa magnetização espontânea, nos materiais ferromagnéticos, varia com a temperatura atingindo seu valor máximo à  $T = 0K$  e caindo a zero a uma temperatura específica, denominada temperatura de Curie ferromagnética ( $T_C$ ). Em temperaturas superiores a  $T_C$ , esses materiais tornam-se paramagnéticos e apresentam uma susceptibilidade magnética dada pela seguinte relação:

$$\chi = C/(T - T_C). \quad (1.3)$$



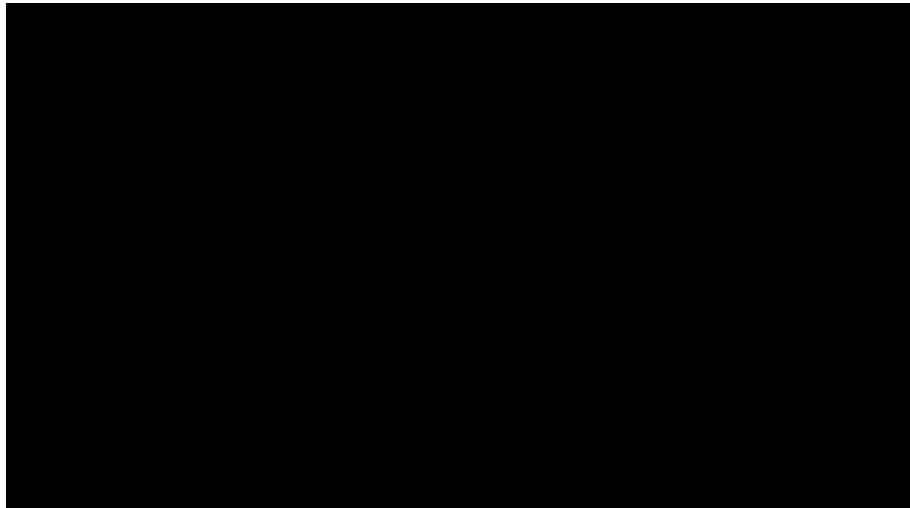
Esta é uma relação de Curie modificada na qual  $\chi$  não é definida para temperaturas inferiores a  $T_C$ , quando o material ferromagnético tem uma magnetização permanente. Um material ferromagnético não tem todo seu volume magnetizado na mesma direção, mas tem muitas pequenas regiões de direção de magnetização uniforme, denominadas de domínios, que podem estar orientadas ao acaso uns em relação aos outros. O Fe, Co e Ni são exemplos desse tipo de material.

Nos materiais antiferromagnéticos, como por exemplo o  $\text{MnO}_2$ , a interação de troca força átomos vizinhos a assumir orientações de spins antiparalelos, como mostra a figura 1.2. Tais materiais apresentam um magnetismo efetivo externo muito pequeno ou mesmo nulo. Quando aquecidos suficientemente tornam-se paramagnéticos, com a sua interação de troca deixando de ser dominante.

Enquanto o fenômeno do ferromagnetismo é conhecido desde a antiguidade, o antiferromagnetismo somente foi descoberto no século XX. Esse conceito foi proposto independentemente por dois pesquisadores: Néel [4] em 1932 e Landau [5] em 1933. Ambos buscavam uma explicação para descrever o comportamento da susceptibilidade magnética a baixas temperaturas de certos materiais. Néel fez sua pesquisa utilizando metais como Cr e Mn, já Landau trabalhou com isolantes compostos de estruturas de camadas como cloretos de Cr, e os bivalentes Fe, Co e Ni. Néel sugeriu corretamente a existência de sub-redes interpenetrantes no Cr e Mn com magnetizações opostas; Landau por sua vez previu corretamente a existência de empilhamentos de camadas ferromagneticamente ordenadas cuja magnetização alterna de camada para camada. Em ambos os casos a magnetização espontânea total é nula. Fazendo uma hipótese de que o acoplamento inter-camada era suficientemente fraco, Landau argumentou que um campo magnético externo relativamente pequeno seria suficiente para modificar a orientação mútua dos momentos em cada camada. Isto leva a desvios de

dependência linear do momento magnético total do campo, isto é, a um aumento anômalo da susceptibilidade, e, em campos altos, a uma saturação da magnetização. Tal comportamento foi observado por Becquerel e van der Handel em 1939 [6] no mineral mesitita (carbonato de Fe e Mn) a baixas temperaturas. Por não terem conhecimento dos trabalhos de Landau e Néel, eles não podiam explicar sua observação em termos de ferromagnetismo e paramagnetismo, e sugeriram para isto a nomenclatura de metamagnetismo.

Metamagnetismo é um fenômeno não raro, que ocorre também em paramagnetos. Um metamagneto consiste de camadas ferromagneticamente ordenadas, com a interação de troca ferromagnética intra-camadas sendo muito mais forte que a fraca interação antiferromagnética entre camadas adjacentes. Na figura 1.3 há um esboço dessa estrutura, onde  $J$  e  $J_1$  são as constantes de troca ferromagnética e antiferromagnética, respectivamente, com  $J \gg |J_1|$ .

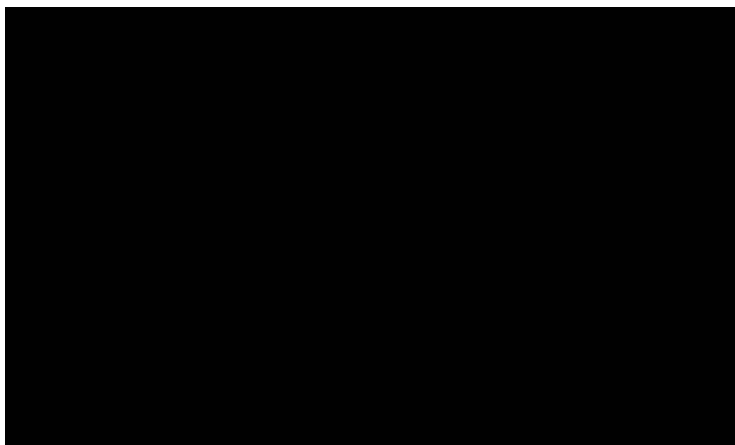


**Figura 1.3:** Material metamagnético. Aqui,  $J_1$  é a interação antiferromagnética entre planos adjacentes, e  $J \gg |J_1|$  é a interação ferromagnética entre os spins em sítios no mesmo plano.

A idéia de ondas de spin como excitações elementares em materiais magnéticos ordenados foi inicialmente proposta por Felix Bloch [7]. Ele imaginou os spins como sendo desviados levemente de seu estado fundamental, e que essas perturbações se propagavam com um comportamento ondulatório através do cristal. As ondas de spins são os modos normais de vibração (fazendo-se uma analogia com os sólidos cristalinos) associados com os spins que interagem em um cristal. Quando a natureza quântica dos spins é levada em conta, as ondas de spin são quantizadas, e o quantum de oscilação é chamado de magnon. Em seu trabalho original, Bloch usou a teoria das ondas de spin para prever que a magnetização do ferromagneto de Heisenberg a baixas temperaturas (comparadas com a temperatura  $T_C$ ) deveria ser desviada de seu valor de temperatura zero com uma dependência do tipo  $T^{3/2}$  em campo nulo ( $H_{aplicado} = 0$ ). Na literatura existem vários formalismos para se tratar o problema das ondas de spin. Uma delas é a teoria semiclássica [8] (ilustrada esquematicamente para um ferromagneto na figura 1.4), que trata os spins como vetores precessionantes. Essa teoria é muito útil para a interpretação física das ondas de spin.

Quando a radiação eletromagnética propaga-se em um dielétrico polarizado (ou cristal magnético) ela provoca excitações na extensão interna desse cristal, dando origem a um modo híbrido (ou misto) chamado polariton. Polaritons são modos coletivos formados por duas ou mais excitações elementares (tais como fonons, plasmons, magnons, excitons, etc.) onde uma de suas componentes é o fóton (a luz). Essas excitações em cristais foram estudadas pela primeira vez por Huang [9]-[11] em 1951, que utilizou um cristal cúbico iônico do tipo NaCl em seu trabalho.

A estrutura deste trabalho está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2 estudaremos a teoria geral dos sistemas magnéticos, tais como ondas de spins e polaritons, em estruturas magnéticas simples (como, por exemplo, filmes finos) e empilhadas em camadas (de dois materiais diferentes) formando super-redes



**Figura 1.4:** (a) Figura clássica do estado fundamental de um ferromagneto simples, mostrando os vetores dos spins alinhados; (b) um possível estado excitado, com só um spin invertido; (c) visão semiclássica de uma onda de spin, com os spins vistos de perfil; (d) os spins vistos de cima.

periódicas e quasi-periódicas. Nele mostraremos, principalmente, a relação de dispersão dos polaritons magnéticos. No Capítulo 3, investigaremos, usando-se a teoria do meio efetivo, os modos de volume e superfície dos polaritons magnéticos em super-redes periódicas. No Capítulo 4, estudaremos a propagação dos polaritons magnéticos em super-redes que seguem a sequência matemática de Fibonacci. Além de mostrar as curvas da relação de dispersão, será apresentada a existência de leis de escalas que caracterizam a fractalidade destes espectros. Por fim, no Capítulo 5 apresentaremos as conclusões gerais juntamente com uma discussão das possíveis extensões deste trabalho.

## Capítulo 2

# Teoria Geral de Sistemas Magnéticos Periódicos e Quasi-Periódicos

### 2.1 Introdução

Polaritons são modos coletivos formados por duas excitações elementares (fonons, magnons, plasmons, excitons, etc.) onde uma de suas componentes é o fóton. Como exemplo destes modos coletivos destacamos o polariton magnético, que é o objeto de estudo desta dissertação. O regime destas excitações corresponde a grandes comprimentos de onda. Isto se deve essencialmente ao fato de que o fóton e a excitação no cristal possuem energias comparáveis somente para pequenos vetores de onda  $\vec{k}$  ( $|\vec{k}| \leq 10^3 m^{-1}$ ), devido a grande velocidade de fase da luz. Neste regime podemos descrever as propriedades dos polaritons usando as equações de Maxwell com efeitos de retardamento.

As duas principais interações magnéticas entre sítios atômicos diferentes num material magnético são devido as interações de troca e as interações dipolo-dipolo. Em geral as interações dipolo-dipolo são de curto alcance, estabelecendo a ligação entre um sítio do cristal e o seu próximo vizinho, porém são relativamente fortes e responsáveis, em toda extensão do material, pelo esquema do ordenamento magnético. Por outro lado, as interações de troca são usual-

mente mais fracas, mas são de longo alcance. Como uma consequência, a interação dipolo-dipolo pode tornar-se importante (e eventualmente dominante) para efeitos dinâmicos se considerarmos valores suficientemente pequenos de  $k \equiv |\vec{k}|$ , ou seja, que o comprimento de onda seja grande comparado com o parâmetro de rede. Para um ferromagneto, no volume, os efeitos de troca são caracterizados, para vetores de onda pequenos, por um termo proporcional a  $JSa^2k^2$ , como pode ser visto na seguinte equação

$$\omega_B(\vec{k}) = g\mu_B H_0 + 2JSa^2k^2 + O(k^4), \quad (2.1)$$

onde  $\omega_B$  é frequência (ferromagnética) do magnon (ou *quantum* da onda de spin) no volume,  $g$  é o fator de Landé,  $\mu_B$  é o magneton de Bohr,  $H_0$  é o campo magnético externo,  $J$  é o termo de troca,  $S$  é o spin e  $a$  é o parâmetro de rede. Os termos de dipolo-dipolo são proporcionais a magnetização  $M$ , portanto para o termo de troca ser pequeno devemos assumir  $JSa^2k^2 \ll M$ . Para valores pequenos de  $k$ , satisfazendo a condição anterior, temos  $k \sim \omega/c$  e os efeitos de retardamento tornam-se importantes nas equações eletromagnéticas. Este é o regime dos polaritons magnéticos. Em termos de  $\vec{k}$ , podemos resumir as diferentes regiões do comportamento magnético como (ver Fig. 2.1):

(a) *Região de troca.* O vetor de onda  $\vec{k}$  é suficientemente grande tal que o efeito de troca domina sobre os termos de dipolo-dipolo na determinação das propriedades do magnon (ou onda de spin). Neste caso  $k > 10^8 m^{-1}$ . O vetor de onda do limite da zona de Brillouin é da ordem de  $10^{10} m^{-1}$ .

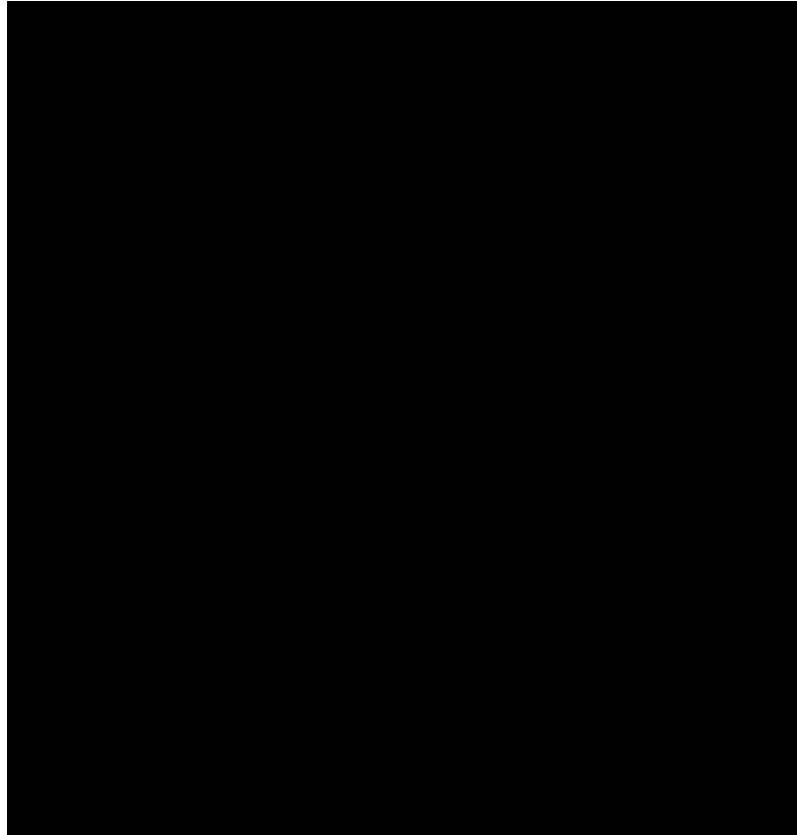
(b) *Região dipolo-troca.* Aqui as contribuições de troca e dipolo-dipolo são comparáveis para a dinâmica das ondas de spin, e nenhuma delas pode ser ignorada. Este caso corresponde a  $10^7 m^{-1} < k < 10^8 m^{-1}$ .

(c) *Região magnetostática.* Neste caso  $\vec{k}$  é suficientemente pequeno tal que os efeitos de troca possam ser ignorados, enquanto os termos dipolo-dipolo podem

ser tratados dentro da aproximação magnetostática (aqui, não consideramos o efeito de retardamento nas equações de Maxwell). Isto ocorre para  $3 \times 10^3 m^{-1} < k < 10^7 m^{-1}$ .

(d) *Região eletromagnética.* Neste caso os termos dipolo-dipolo têm que ser tratados usando a forma completa das equações de Maxwell com retardamento. Isto ocorre para  $k < 3 \times 10^3 m^{-1}$ .

Estes valores do vetor de onda  $k$  podem variar para diferentes materiais. As regiões de interesse para os polaritons magnéticos são a região eletromagnética e a região magnetostática (como um caso limite).



**Figura 2.1:** Diferentes regiões do comportamento magnético em termos da magnitude  $|\vec{k}|$  do vetor de onda. Os números são aproximados e podem variar para diferentes materiais.

Neste capítulo apresentaremos resultados que foram publicados sobre o estudo de excitações em estruturas magnéticas simples, tais como filmes finos, e em super-redes periódicas e quasi-periódicas (para uma revisão do assunto ver Ref. [12]). Ondas de spin em filmes serão, primeiramente, discutidas na seção 2.2 para a região de troca e na seção 2.3 para região magnetostática. Investigaremos a relação de dispersão para os polaritons magnéticos numa super-rede periódica na seção 2.4 (para terras-raras) e numa super-rede quasi-periódica na seção 2.6 (em ferromagnetos e antiferromagnetos). Na seção 2.5 faremos os cálculos dos polaritons em filmes finos metamagnéticos.

## 2.2 Ondas de Spin em Filmes Finos

Nesta seção vamos apresentar a relação de dispersão do magnon num ferromagneto de Heisenberg para o caso de uma geometria de filme fino. Vamos adotar uma abordagem semi-clássica, inicialmente proposta por Helle e Kramers [8], e mais tarde por Herring e Kittel [13]. Nesta abordagem o spin  $\vec{S}$  é tratado como um vetor clássico (ver Fig. 1.4), que precessiona em torno da direção de um pequeno campo aplicado e possui comprimento  $[S(S+1)]^{1/2}\hbar$ . No estado fundamental todos os spins possuem uma componente na direção  $z$ ,  $M_S = S_i^z$ . O estado excitado é um estado no qual uma onda viaja através dos spins que estão precessionando de tal maneira que, na direção de propagação da onda, o ângulo de fase entre spins vizinhos é uma constante. O Hamiltoniano do problema [14, 15] é dado por

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - g\mu_B H_0 \sum_i S_i^z. \quad (2.2)$$

Esta equação apresenta uma parte de troca e um termo Zeeman para um campo



magnético aplicado  $H_0$  na direção  $z$ . Empregamos um modelo microscópico em que o filme é constituído de  $N$  camadas atômicas paralelas ao plano  $xy$ . Rotulamos as camadas pelo número inteiro  $n$  ( $= 1, 2, \dots, N$ ) com  $n = 1$  representando o topo da superfície (em  $z = 0$ ) e  $n = N$  representando a parte inferior da superfície em  $z = -(N - 1)a$ , onde  $a$  é o parâmetro de rede. Por conveniência a nossa rede é uma estrutura cúbica simples.

A equação de movimento para o operador de spin  $S_i^+$  em qualquer sítio  $i$  é dada por (adotando unidades em que  $\hbar = 1$ )

$$idS_i^\pm/dt = [S_i^\pm, H]. \quad (2.3)$$

Usando a Eq. (2.2) temos

$$idS_i^\pm/dt = g\mu_B H_0 S_i^\pm \pm \sum_j J_{ij} (S_j^z S_i^\pm - S_i^z S_j^\pm). \quad (2.4)$$

O produto dos operadores de spin na Eq. (2.4) pode ser simplificado por meio da ‘random-phase approximation’ (RPA) [16, 17]. Esta aproximação consiste em substituir o operador de spin  $S^z$  na Eq. (2.4) por sua média térmica  $\langle S_z \rangle$  (que por simetria é a mesma para todos os sítios). Também, nossos cálculos restringem-se ao regime de baixas temperaturas  $T \ll T_C$  (onde  $T_C$  é a temperatura de Curie), em que se considera todos os spins ordenados, i.e.  $\langle S_z \rangle = S$ . Então a equação de dispersão para onda de spin no volume pode ser encontrada resolvendo a seguinte equação

$$idS_i^+/dt = g\mu_B H_0 S_i^+ + S \sum_j J_{ij} (S_i^+ - S_j^+). \quad (2.5)$$

Há uma simetria translacional no plano  $xy$ , e portanto procuramos soluções na forma

$$S_i^+ = s_n(\vec{k}_{||}) \exp(i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}) \exp(i\omega t) \quad (2.6)$$

em concordância com o teorema de Bloch. Aqui  $\vec{k}_{||} = (k_x, k_y)$  e  $\vec{r}_{||} = (x, y)$  são vetores bidimensionais (2D). Das Eqs. (2.5) e (2.6) verifica-se que os coeficientes da amplitude  $s_n(\vec{k}_{||})$  satisfazem o seguinte conjunto de equações acopladas para as diferentes camadas:

$$[\omega - g\mu_B H_0 - SJ - 4SJ_S \Lambda(\vec{k}_{||})]s_1 + SJs_2 = 0 \quad (n = 1), \quad (2.7)$$

$$[\omega - g\mu_B H_0 - 2SJ - 4SJ_S \Lambda(\vec{k}_{||})]s_n + SJ(s_{n+1} + s_{n-1}) = 0 \quad (2 \leq n \leq N-1), \quad (2.8)$$

$$[\omega - g\mu_B H_0 - SJ - 4SJ'_S \Lambda(\vec{k}_{||})]s_N + SJs_{N-1} = 0 \quad (n = N), \quad (2.9)$$

onde aqui introduzimos a notação

$$\Lambda(\vec{k}_{||}) = [2 - \cos(k_x a) - \cos(k_y a)]/2. \quad (2.10)$$

Nas equações anteriores,  $J$  é o parâmetro de troca entre primeiros vizinhos dentro do filme ferromagnético, enquanto consideramos possíveis modificações na constante de acoplamento da superfície através dos parâmetros  $J_S$  e  $J'_S$  que representam a interação de troca entre um par de primeiros vizinhos com o topo ( $n = 1$ ) e a parte inferior ( $n = N$ ) da camada, respectivamente.

As Eqs. (2.7)-(2.9) podem ser resolvidas por uma variedade de técnicas para a obtenção das frequências dos modos da onda de spin [18]-[20]. Porém, uma aproximação simples é tentar a solução para ondas de spin no volume utilizando

$$s_n(\vec{k}_{\parallel}) = A(\vec{k}_{\parallel}) \exp(ik_z na) + B(\vec{k}_{\parallel}) \exp(-ik_z na), \quad (2.11)$$

onde  $k_z$  é uma componente real do vetor de onda e os dois termos representam a propagação na direção positiva e negativa de  $z$ . Substituindo isto nas Eqs. (2.7)-(2.9), encontramos a seguinte expressão para a relação de dispersão dos modos de volume

$$\tan(k_z d) = \frac{Re\{[\Delta - \exp(-ik_z a)][\Delta' - \exp(-ik_z a)]\}}{Im\{[\Delta - \exp(-ik_z a)][\Delta' - \exp(-ik_z a)]\}}. \quad (2.12)$$

Aqui  $d = (N - 1)a$  é a espessura do filme, enquanto  $\Delta$  é o parâmetro associado com a superfície superior, definido por

$$\Delta = [1 + 4(1 - J_S/J)\Lambda(\vec{k}_{\parallel})]^{-1}. \quad (2.13)$$

O parâmetro  $\Delta'$  para a parte inferior da superfície é definido de maneira similar, apenas com  $J'_S$  no lugar de  $J_S$ . A Eq. (2.12) poderá ser satisfeita apenas para certos valores discretos de  $k_z$ , representando uma ‘quantização’ do mesmo e, conseqüentemente, da frequência das ondas de spin no volume, devido a espessura finita do filme.

Este resultado também é previsto para as ondas de spin na superfície. Neste caso, em vez de usar a Eq. (2.11), devemos ter soluções cuja amplitude decaia com a distância à superfície. Assim supomos uma solução tentativa da forma,

$$s_n(\vec{k}_{\parallel}) = A'(\vec{k}_{\parallel}) \exp(-\mathbf{k}na) + B'(\vec{k}_{\parallel}) \exp(\mathbf{k}na), \quad (2.14)$$

onde assumimos  $Re(\mathbf{k}) > 0$  como uma condição de localização. Procedendo

desta forma, encontramos a solução  $\omega = \omega_S(\vec{k}_{\parallel})$ , onde [19]

$$\omega_S(\vec{k}_{\parallel}) = g\mu_B H_0 + 4SJ\Lambda(\vec{k}_{\parallel}) + SJ[2 - \exp(\mathbf{k}a) - \exp(-\mathbf{k}a)], \quad (2.15)$$

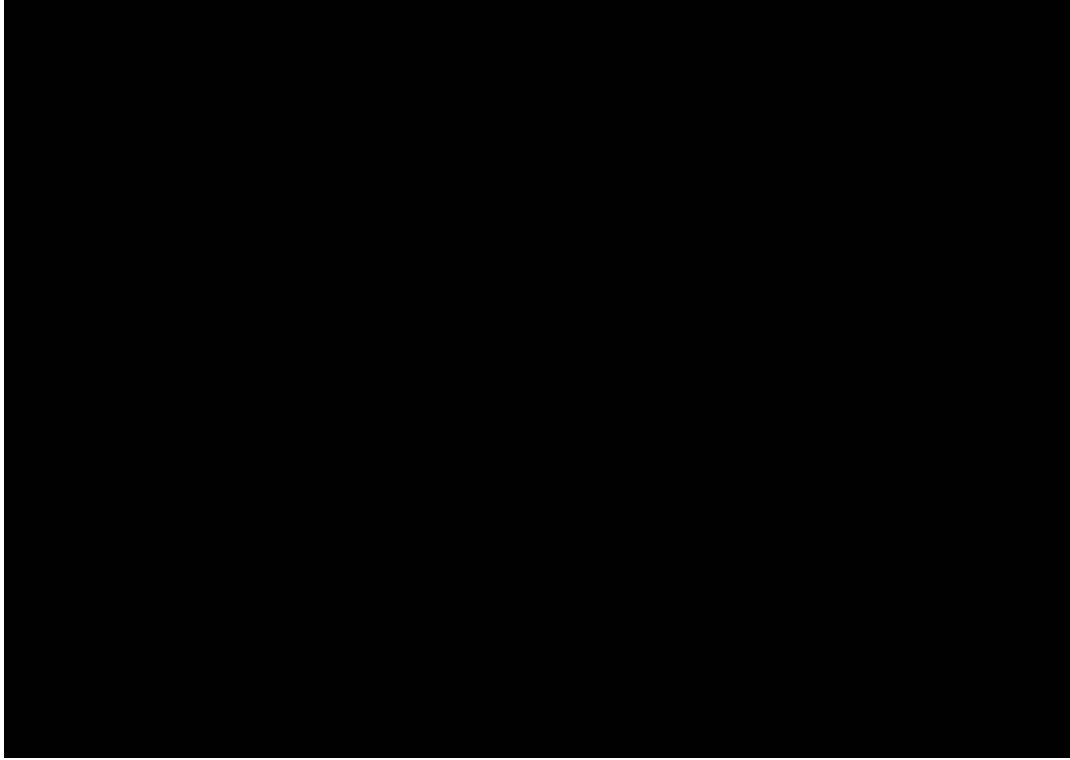
e  $\mathbf{k}$  deve satisfazer a condição

$$\tanh(\mathbf{k}d) = \frac{\{[\Delta - \exp(\mathbf{k}a)][\Delta' - \exp(\mathbf{k}a)] - [\Delta - \exp(-\mathbf{k}a)][\Delta' - \exp(-\mathbf{k}a)]\}}{\{[\Delta - \exp(\mathbf{k}a)][\Delta' - \exp(\mathbf{k}a)] + [\Delta - \exp(-\mathbf{k}a)][\Delta' - \exp(-\mathbf{k}a)]\}}. \quad (2.16)$$

Vamos agora discutir o caso para o filme de espessura infinita ( $d \rightarrow \infty$ ). Desta forma, temos  $\tanh(\mathbf{k}d) \rightarrow 1$ , e a Eq. (2.16) tem duas soluções possíveis para  $\mathbf{k}$  correspondendo a  $\exp(-\mathbf{k}a) = \Delta$  (desde que  $|\Delta| < 1$ ) e  $\exp(-\mathbf{k}a) = \Delta'$  (desde que  $|\Delta'| < 1$ ). Se estas condições são satisfeitas (e isto depende das razões  $J_S/J$  e  $J'_S/J$ ), os dois modos são essencialmente meios semi-infinitos, localizados nas superfícies de cima e de baixo, respectivamente. Tomando a superfície de cima, para determinar a solução do problema, temos

$$\omega_S(\vec{k}_{\parallel}) = g\mu_B H_0 + 4SJ\Lambda(\vec{k}_{\parallel}) - SJ(\Delta - 1)^2/\Delta. \quad (2.17)$$

Assim, podemos mostrar que a condição de localização dos modos pode ser satisfeita das duas formas. Para  $J_S < J$  temos o caso das ondas de spin de superfície de baixas frequências e para  $J_S > 5J/4$  temos as ondas de spin de superfície de altas frequências. Elas ocorrem abaixo ou acima dos modos de volume, respectivamente. Para as ondas de spin de volume há um intervalo de frequência onde eles podem se propagar para um dado valor de  $\vec{k}_{\parallel}$ . Esta faixa permitida é chamada banda de volume. Um exemplo de curva de dispersão é mostrado na Fig. (2.2) [12].



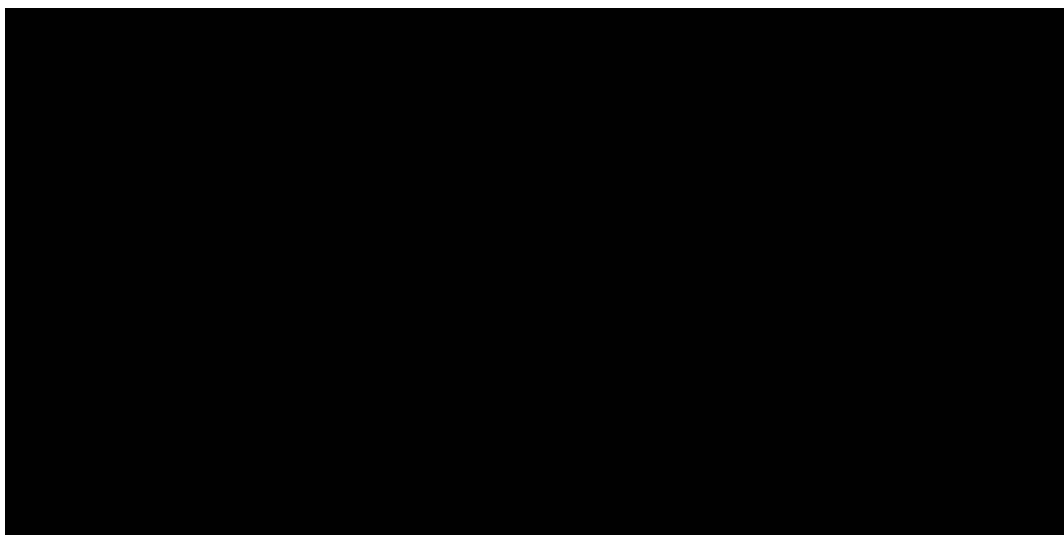
**Figura 2.2:** Frequência das ondas de spins (em unidades de  $SJ$ ) versus  $k_x a$  num ferromagneto semi-infinito de Heisenberg para a propagação do vetor  $\vec{k}_{||} = (k_x, 0)$ . A região da onda de spin de volume é representada pela área sombreada, junto com dois ramos da onda de spin de superfície correspondendo a: A,  $J_S/J = 0.5$ ; B,  $J_S/J = 1.8$ . Também  $g\mu_B H_0/SJ = 1.0$ .

## 2.3 Modos Magnetostáticos em Filmes Finos

Neta seção faremos uma breve investigação sobre os modos magnetostáticos de volume e superfície para uma camada ferromagnética finita. Vamos utilizar a aproximação magnetostática, ou seja, não consideraremos o efeito de retardamento nas equações de Maxwell (efetivamente tomamos o limite de  $c \rightarrow \infty$ ).

### 2.3.1 Magnetização Paralela à Superfície do Filme

A configuração para os modos magnetostáticos de superfície é tomar a magnetização paralela à superfície (estudaremos depois o caso com o campo aplicado perpendicularmente à superfície). Vamos adotar a geometria da Fig 2.3 onde o vetor de onda no plano  $\vec{k}_{||}$  faz um ângulo  $\phi$  com o eixo  $z$ . O filme de espessura  $d$  ocupa a região entre  $y = 0$  e  $y = -d$ . Damon e Eshbach [21] foram os primeiros a estudar este modelo teoricamente. Existem vários artigos descrevendo aspectos da teoria magnetostática em meios magnéticos. Como exemplos podemos citar Mills [22], Tilley [23], Wolfram e Dewames [18], e Cottam [24].



**Figura 2.3:** Geometria para o cálculo dos modos magnetostáticos em um filme ferromagnético com magnetização paralela a sua superfície.

Das equações de Maxwell (sem considerar os efeitos de retardamento, como discutimos anteriormente) os campos  $\vec{h}(\vec{r})$  e  $\vec{m}(\vec{r})$  têm que satisfazer as relações

$$\vec{\nabla} \times \vec{h}(\vec{r}) = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot [\vec{h}(\vec{r}) + \vec{m}(\vec{r})] = 0. \quad (2.18)$$

A primeira das equações acima é automaticamente satisfeita se  $\vec{h}$  é derivado de um potencial escalar  $\psi$ ,

$$\vec{h} = \vec{\nabla}\psi. \quad (2.19)$$

O tensor susceptibilidade magnética é dado por [12]

$$\bar{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_a(\omega) & i\chi_b(\omega) \\ -i\chi_b(\omega) & \chi_a(\omega) \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

onde  $\chi_a$  e  $\chi_b$ , para um ferromagneto, são [12]

$$\chi_a(\omega) = \omega_M\omega_0/(\omega_0^2 - \omega^2), \quad (2.21)$$

$$\chi_b(\omega) = \omega_M\omega/(\omega_0^2 - \omega^2). \quad (2.22)$$

Aqui introduzimos as seguintes frequências características para o campo magnético aplicado e a magnetização:

$$\omega_0 = -\gamma H_0, \quad \omega_M = -\gamma M. \quad (2.23)$$

Usando a relação da susceptibilidade da Eq. (2.20) e a segunda equação de (2.18), a expressão para  $\psi$  dentro da camada ferromagnética é

$$(1 + \chi_a)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.24)$$

Fora do material (região não-magnética)  $\chi_a = 0$  e portanto,

$$\nabla^2\psi = 0. \quad (2.25)$$

Devido à simetria translacional de nossa geometria nas direções  $x$  e  $z$ , segue que  $\psi(\vec{r})$  deve ser da forma  $\psi_1(y) \exp(i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel})$ , onde  $\vec{r}_{\parallel} = (x, z)$ . Para as Eqs. (2.24) e (2.25) serem satisfeitas nas suas respectivas regiões, e também para  $\psi_1 \rightarrow 0$  em  $y = \pm\infty$ , a forma geral da solução deve ser

$$\psi_1(y) = A_1 \exp(-k_{\parallel}y), \quad y > 0, \quad (2.26)$$

$$\psi_1(y) = A_2 \exp(ik_y y) + A_3 \exp(-k_y y), \quad 0 > y > -d, \quad (2.27)$$

$$\psi_1(y) = A_4 \exp(k_{\parallel}y), \quad y < -d, \quad (2.28)$$

onde  $k_{\parallel} = (k_x^2 + k_z^2)^{1/2} > 0$ . Usando a Eq. (2.24) a quantidade  $k_y$ , que pode ser real ou imaginária, satisfaz

$$(1 + \chi_a)(k_y^2 + k_{\parallel}^2) - \chi_a k_z^2 = 0. \quad (2.29)$$

Os coeficientes  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) nas Eqs. (2.26)-(2.28) podem ser determinados aplicando-se as condições de contorno eletromagnéticas usuais nas superfícies  $y = 0$  e  $y = -d$ . No caso magnetostático isto é equivalente a exigir que  $\psi$  deve ser contínua em cada interface, e que  $(h_y + m_y)$  dentro do ferromagneto em  $y = 0$  e  $y = -d$  deve ser igual a  $h_y$  fora da camada. Estas condições levam a quatro equações homogêneas com quatro coeficientes. A condição para uma solução é:

$$k_{\parallel}^2 + 2k_{\parallel}k_y(1 + \chi_a) \cot(k_y d) - k_y^2(1 + \chi_a)^2 - k_x^2\chi_b^2 = 0. \quad (2.30)$$

Quando  $k_y$  é substituído da Eq. (2.29), a equação acima determina a relação



de dispersão para os modos magnetostáticos. As soluções para as frequências desses modos tornam-se simples para o caso especial onde a propagação no plano é paralela ou antiparalela à direção  $x$  (i.e.  $k_z = 0$  ou o ângulo  $\phi = \pi/2$ ). Essa configuração chama-se geometria de Voigt. Neste caso notamos que a Eq. (2.29) é satisfeita se  $\chi_a(\omega) = -1$ . Da Eq. (2.21) esta condição é satisfeita para  $\omega = \omega_B$ , onde

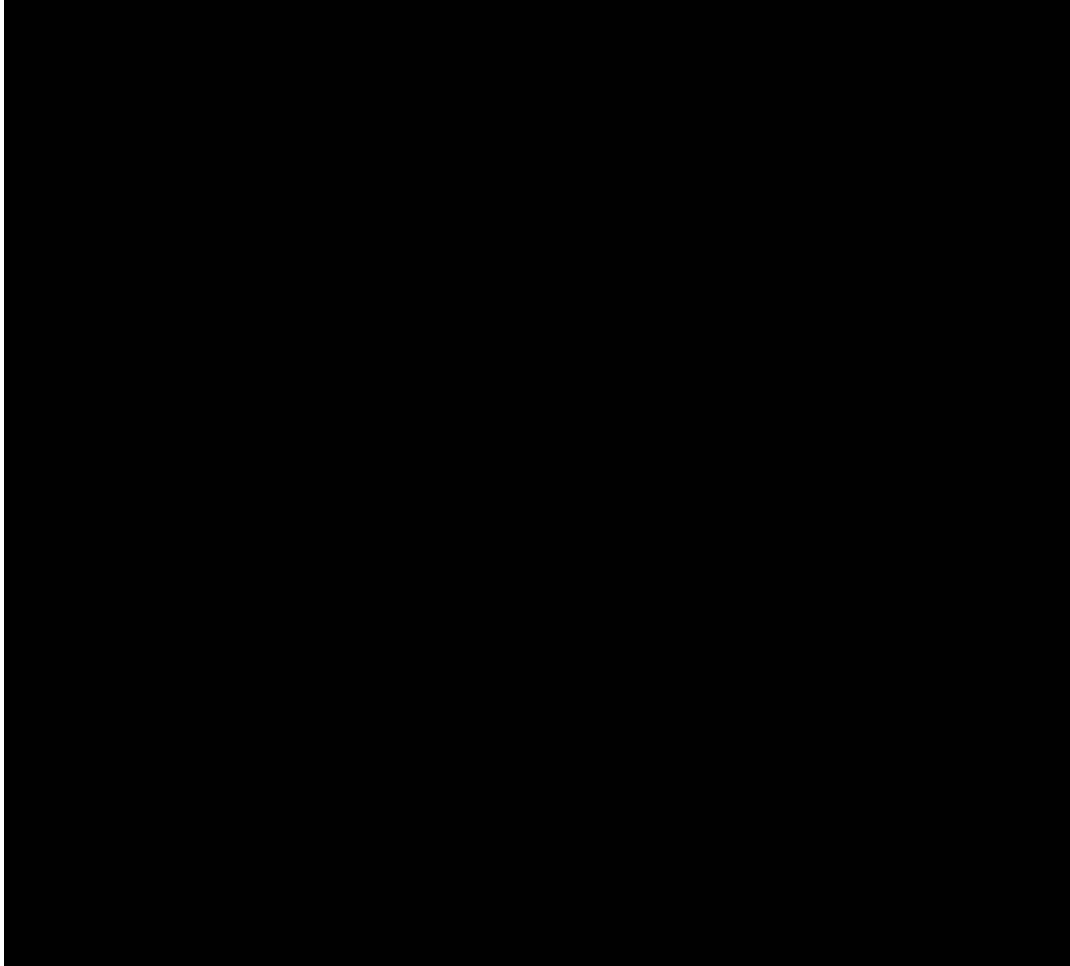
$$\omega_B = [\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2}. \quad (2.31)$$

Isto corresponde aos modos de volume no filme, e independe das componentes  $k_x$  e  $k_y$  do vetor de onda. Por outro lado, a Eq. (2.29) pode ser satisfeita na configuração de Voigt quando  $k_y = \pm ik_{\parallel}$ . Estes dois valores imaginários de  $k_y$  correspondem os modos magnetostáticos de superfície com a frequência

$$\omega_S = \frac{1}{2}[(2\omega_0 + \omega_M)^2 - \omega_M^2 \exp(-2k_{\parallel}d)]^{1/2}. \quad (2.32)$$

É importante notar que as duas soluções de superfície, em termos dos coeficientes  $A_j$  nas Eqs. (2.26)-(2.28), são diferentes. Se  $k_x > 0$ , pode ser demonstrado que  $k_y = ik_{\parallel}$  ou  $k_y = -ik_{\parallel}$  corresponderiam a estados de superfícies localizados perto da superfície inferior ( $y = -d$ ) ou da superfície superior ( $y = 0$ ), respectivamente, e vice-versa se  $k_x < 0$ . Esta propriedade, que não é compartilhada pelos modos de superfície no regime de troca, é um exemplo de *propagação não-recíproca*. Notamos nesta geometria que  $\omega_S > \omega_B$ , e as frequências limites dos modos de superfície são  $[\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2}$ , quando  $k_{\parallel}d \ll 1$ , e  $(\omega_0 + \omega_M)/2$ , quando  $k_{\parallel}d \gg 1$ . A dependência de  $k$  dos modos  $\omega_B$  e  $\omega_S$  é mostrada na Fig. 2.4.

Usando as Eqs. (2.26) a (2.30) os modos magnetostáticos podem, também,



**Figura 2.4:** Modos magnetostáticos de superfície e volume em um filme ferromagnético, com magnetização paralela a sua superfície, como uma função de  $k_{\parallel}d$  para  $k_z = 0$  e  $\omega_M/\omega_0 = 6$ .

ser investigados para outras direções do vetor de onda no plano (i.e. quando  $k_z \neq 0$ ). Por exemplo, se  $k_{\parallel}$  está ao longo da direção  $z$  (paralelo a  $H_0$ ), significando um ângulo  $\phi_0 = 0$ , é fácil mostrar que não existe modos de superfície localizados. Porém, o espectro dos modos de volume neste caso consiste de uma

série de modos discretos (ou "quantizados"). Para um filme espesso ( $d \rightarrow \infty$ ) os modos de volume juntam-se formando um modo contínuo, com a relação de dispersão sendo

$$\omega_B = \left[ \omega_0^2 + \omega_0 \omega_M \frac{k_y^2}{(k_y^2 + k_{\parallel}^2)} \right]^{1/2}. \quad (2.33)$$

Da expressão acima podemos identificar que a frequência dos modos de volume, quando  $\phi = 0$ , decresce com o aumento de  $k_{\parallel}$ . Conseqüentemente, sua velocidade de grupo paralela a superfície, dada por  $\partial\omega_B/\partial k_{\parallel}$ , é negativa. Por esta razão eles são chamados de *modos magnetostáticos de volume atrasados*.

Para valores gerais de  $\phi$  o comportamento é mais complicado que o descrito anteriormente. Porém, podemos mostrar que existem modos magnetostáticos de superfície não-recíprocos no intervalo  $\phi_c < \phi < \pi - \phi_c$  [21], onde o ângulo crítico  $\phi_c$  corresponde a

$$\sin(\phi_c) = [\omega_0/(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2}. \quad (2.34)$$

A frequência dos modos de superfície decresce quando  $\phi$  diminui de  $\pi/2$  (a geometria de Voigt), finalmente unindo-se com a região de volume ao atingir o valor crítico definido acima.

A teoria magnetostática para um filme ferromagnético com uma direção da magnetização no plano tem, também, sido generalizada para a região diplo-troca, onde efeitos de troca são incluídos (ainda numa aproximação contínua para grandes comprimentos de onda). Existem duas aproximações alternativas encontradas na literatura. Uma envolve a equação do torque de movimento dado por

$$d\vec{M}_i/dt = \gamma(\vec{M}_i \times \vec{H}_i^{eff}), \quad i = 1, 2, \quad (2.35)$$

para incluir o efeito dinâmico da troca no termo de campo efetivo [18]. A outra aproximação é o método da função de Green tensorial em que as interações dipolo-dipolo são introduzidas como uma perturbação [25]. Para uma boa aproximação, na configuração de Voigt, devemos encontrar um espectro do filme que consiste de [18]:

(i) um modo de superfície tipo magnetostático com frequência dada pela Eq. (2.32);

(ii) uma série de ondas de spin de volume com a componente do vetor de onda  $k_y$  real e tendo frequências discretas.

Um tratamento simplificado, dando valores de  $k_y$  como  $n\pi/d$  com  $n = 1, 2, 3, \dots$ , pode mostrar que a Eq. (2.31) tem como caso mais geral a expressão

$$\omega_B = [\omega_0 + Dk_{\parallel}^2 + D(n\pi/d)^2][\omega_0 + \omega_M + Dk_{\parallel}^2 + D(n\pi/d)^2]^{1/2}. \quad (2.36)$$

Mais recentemente uma teoria macroscópica, válida para vetores de onda gerais e filmes ultrafinos, para ondas de spins dipolo-troca em ferromagnetos foi publicada na Ref. [26].

Outra extensão da teoria magnetostática, proposta por Stamps e Camley [27], foi feita para filmes antiferromagnéticos com magnetização da subrede paralelas a superfície. O Cálculo das frequências dos modos são realizados de maneira similar ao caso ferromagnético. A diferença é que teremos outras equações para a susceptibilidade. Por simplicidade, trataremos aqui o caso limite  $d \rightarrow \infty$  na configuração de Voigt ( $k_z = 0$ ). Quando o campo aplicado é nulo, existem duas frequências para os modos de volume  $\omega_B^{\pm}$  dadas por

$$\omega_B^+ = [\omega_A(2\omega_E + \omega_A) + 2\omega_A\omega_M]^{1/2}, \quad (2.37)$$

$$\omega_B^- = [\omega_A(2\omega_E + \omega_A)]^{1/2}. \quad (2.38)$$

Os dois ramos são não-degenerados na frequência como uma consequência do efeito dipolo-dipolo. O espectro do modo de superfície consiste de um ramo simples com frequência

$$\omega_S = [\omega_A(2\omega_E + \omega_A) + \omega_A\omega_M]^{1/2}, \quad (2.39)$$

localizado entre os dois modos de volume. Na presença de um campo aplicado,  $\omega_S$  aumenta de uma quantidade igual a  $\omega_0$  se  $k_x > 0$  e decresce de  $\omega_0$  se  $k_x < 0$ . Isto é outro exemplo de propagação não recíproca, i.e. a propriedade que

$$\omega_S(\vec{k}_{\parallel}) \neq \omega_S(-k_{\parallel}). \quad (2.40)$$

Isto é diferente, porém, da não-reciprocidade do caso ferromagnético, onde não existe modos de superfície *na mesma superfície* quando  $k_{\parallel}$  é invertido.

### 2.3.2 Magnetização Perpendicular à Superfície do Filme

Por completeza, agora voltaremos nossa atenção para o caso quando a magnetização (ou magnetização da subrede) é perpendicular a superfície do filme. Quando repetimos o cálculo magnetostático nesta geometria não encontramos modos de superfície, essencialmente porque a condição de localização não pode

ser satisfeita; isto resiste para ambos os materiais ferromagnéticos e antiferromagnéticos uniaxiais.

Os modos de volume quantizados podem, também, ser estudados em ambos os materiais seguindo a mesma aproximação usada na subseção anterior. Para um ferromagneto encontramos que

$$\omega_B = \left[ \omega_0^2 - \omega_0 \omega_M \frac{k_z^2}{(k_z^2 + k_{\parallel}^2)} \right]^{1/2}, \quad (2.41)$$

onde o eixo  $z$  (na direção da magnetização) é agora perpendicular à superfície. A velocidade de grupo  $\partial\omega_B/\partial k_{\parallel}$  é facilmente determinada e apresenta valor positivo para estes modos; eles são chamados *modos de volume magnetostáticos avançados*, em contraste ao modo de volume atrasado da Eq. (2.33).

Os modos de volume, neste caso, podem ser simétricos e anti-simétricos em relação ao plano central do filme, e são dados, respectivamente, por

$$k_z \tan(k_z d) = k_{\parallel}, \quad (2.42)$$

$$k_z \cot(k_z d) = -k_{\parallel}. \quad (2.43)$$

Estas equações determinam a série de componentes do vetor de onda discreto  $k_z$ . As equações destes modos podem ser resolvidas facilmente por métodos gráficos.

## 2.4 Super-Rede Terra-Rara

Agora estenderemos os cálculos feitos em filmes magnéticos (mostrados nas

seções anteriores) para uma super-rede periódica semi-infinita. Como um primeiro exemplo envolvendo a aplicação de materiais específicos, consideraremos os metais terras-raras. Suas propriedades magnéticas no volume foram objeto de estudos intensivos na década de sessenta (para uma revisão, veja as Refs. [32] e [29]). Muito do interesse ao longo do tempo tem sido estimulado pela variedade fascinante de ordenamentos magnéticos encontrado em vários metais terras-raras (tais como Tb, Dy, Ho, Er e Tm) quando resfriados abaixo da região paramagnética. Em particular, as técnicas de difração de neutrons permitiram a determinação de vários ordenamentos complexos [30, 31]. Para cada um dos metais terra-rara uma transição à temperatura de Néel  $T_N$  foi observada para uma configuração antiferromagnética oscilatória tipo helicoidal ou linear-oscilatória. Acima da temperatura de Curie  $T_C$ , transições adicionais para configurações ferromagnéticas simples, espiral ferromagnética, ou anti-fase tipo domínio foram observadas.

Metais terras-raras exibem, além do alinhamento ferromagnético simples, vários ordenamentos magnéticos. Para determinar estes estados magnéticos (necessários antes de resolver o problema das excitações elementares) é adequado tratar os momentos localizados usando a teoria de campo molecular (ou campo médio) [32]-[34], que ignora as flutuações dos spins. Dentre estes ordenamentos magnéticos, dois dos mais importantes são os chamados estados espiral e cone. Os cristais cristalizam-se totalmente numa estrutura "hexagonal-close-packed" (hcp).

O principal mecanismo responsável pelos estados espiral e cone é a competição entre os termos de troca ferromagnético de primeiros vizinhos e anti-ferromagnético de segundos vizinhos. A característica básica destes estados é a rotação da direção da magnetização do plano compactado em relação ao próximo plano, também compactado, por um ângulo  $\phi$ . Além disso, no estado cone a direção de magnetização estática faz um ângulo  $\theta$  com a normal do plano

compactado, enquanto que no estado espiral a direção da magnetização estar situada no plano ( $\theta = \pi/2$ ). A troca deriva da chamada interação Ruderman-Kittel-Kasuya-Yosida (RKKY), que é um processo oscilatório de longo alcance via polarização dos elétrons de condução [35] [36] [37]. Outra contribuição para a energia total vem da energia de anisotropia da rede espontânea resultando da interação de cada íon terra-rara com o campo elétrico cristalino devido à outros íons carregados na rede hcp [38] [39]. Esta, porém, é uma contribuição menor comparada à interação RKKY, e por isso não levaremos em consideração aqui.

O estado espiral ocorre no disprósio (Dy) no intervalo de temperatura entre  $T_N$  e  $T_C$ , isto é,  $179K > T > 85K$ . O ângulo de rotação espiral entre os momentos das camadas hexagonais sucessivas varia com a temperatura, decrescendo aproximadamente  $43^\circ$  a temperatura de Néel ( $T_N$ ) e quase  $26^\circ$  a temperatura de Curie  $T_C$ . O estado cone ocorre, por exemplo, no "holmium" (Ho) para  $T < T_C$  ( $= 20K$ ). O cálculo do Hamiltoniano RKKY, que descreve com êxito estes estados pode ser encontrado na Ref. [40].

Nesta seção desenvolveremos uma teoria para os polaritons magnéticos, que se propagam numa super-rede crescida artificialmente com um material magnético terra-rara intercalado por outro material não-magnético. Consideraremos os dois estados, espiral e cone, no constituinte terra-rara da super-rede, e incluiremos o limite magnetostático (ou não-retardado) como parte da nossa discussão.

Na resolução deste problema vamos utilizar o *método do meio efetivo*, que é muito apropriado para descrever excitações na região do infravermelho distante, correspondendo ao regime de grandes comprimentos de onda, ou seja,  $\lambda \gg L$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da excitação e  $L$  é o período da rede.

O método do meio efetivo para super-redes foi estabelecido por Agranovich e Kravstov em 1985 [41], e desde então tem sido empregado com êxito para vários materiais [42]-[45]. Justificamos a utilização desta técnica no presente



contexto porque muitas frequências de ressonância das terras-raras estão situadas na faixa de frequência do infravermelho de  $0.1 - 10THz$ . Por essa razão, ela é justificável para estudos no infravermelho distante de super-redes semicondutoras, como procurado por vários grupos experimentais (veja e.g. Refs. [46]-[48]), para ser estendida para estes sistemas magnéticos.

Consideramos uma super-rede constituída de camadas alternadas de um material magnético terra-rara e um material não-magnético, de modo que a direção das coordenadas do eixo  $z$  é escolhida paralela ao eixo fácil da camada magnética. A espessura do material magnético (não-magnético) é dada por  $a$  ( $b$ ), e conseqüentemente o tamanho da célula unitária da super-rede é dado por  $L = a + b$ . O sistema ocupa o semi-espço  $y \leq 0$ , com sua superfície paralela ao plano  $xy$ . No regime  $y > 0$  temos vácuo. A geometria do problema em questão é análoga a da Fig. 2.3. Os polaritons de superfície propagam-se ao longo do eixo  $x$ , normais ao eixo cone, e paralelos à superfície (isso corresponde a geometria de Voigt).

As camadas não-magnéticas podem ser descritas por uma constante dielétrica  $\varepsilon_2$  e a permeabilidade magnética  $\mu_2$ , ambas independentes da frequência. Por outro lado, o material terra-rara é descrito por uma função dielétrica dada por [49]

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\Omega_1^2}{\omega(\omega + i\gamma_1)} - \frac{\Omega_2^2}{\omega(\omega + i\gamma_2)}, \quad (2.44)$$

onde  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são duas frequências do plasma associadas aos dois tempos de colisão constantes  $\gamma_1^{-1}$  e  $\gamma_2^{-1}$ . Também, seu tensor permeabilidade magnética pode ser expressado como

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 + \chi_a(\omega) & i\chi_b(\omega) & 0 \\ -i\chi_b(\omega) & 1 + \chi_a(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

onde os elementos da susceptibilidade são

$$\chi_{a,b}(\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{A_+}{D_+} \pm \frac{A_-}{D_-} \right). \quad (2.46)$$

As definições para  $\chi_a$  e  $\chi_b$  correspondem ao sinais superior e inferior do lado direito da expressão anterior, respectivamente, equanto

$$A_{\pm}/(\gamma\mu N) = -S(K_2 + 6K_4S^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta - [f(k_0) \cos \theta - f(2k_0) \cos \theta \pm \omega] \cos \theta, \quad (2.47)$$

onde  $f(k) = 2J_1S \cos(kd_c/2) - 2J_2S \cos(kd_c)$ , e

$$\begin{aligned} D_{\pm} = & [f(0) \cos \theta - f(k_0) \cos \theta \pm \omega][f(k_0) \cos \theta - f(2k_0) \cos \theta \pm \omega] \\ & - 2S[K_2 + 6K_4S^2 \cos^2 \theta][f(k_0) - (1/2)f(0) - (1/2)f(2k_0)] \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.48)$$

(2.49)

Aqui  $J_1$  e  $J_2$  definem a troca ferromagnética, de primeiros vizinhos, e antiferromagnética, de segundos vizinhos, respectivamente, enquanto  $S$  é o número quântico de spin total,  $N$  é o número de camadas por unidade de volume,  $\mu$  é o momento magnético por camada, e  $K_2$  e  $K_4$  são os coeficientes dos campos de anisotropia. A condição de equilíbrio na teoria de campo médio nos fornece a relação [40]

$$4K_4S^3 \cos^3 \theta + 2S(K_2 + 2J_2 - J_1 + J_1^2/8J_2) \cos \theta - \gamma H_0 = 0. \quad (2.50)$$

O campo magnético externo  $H_0$  age na direção  $z$ , paralelo ao eixo fácil da camada magnética; esse valor está abaixo da transição de fase "spin flop". Finalmente,  $k_0$  é definido como o vetor de onda da configuração de equilíbrio, para que  $k_0 d_c = 2\phi$ , com  $d_c$  denotando o comprimento da célula unitária ao longo do eixo  $c$  cristalográfico (por isso  $d_c/2$  é a distância entre os planos "close-packed").

Agora, aplicando os resultados da teoria do meio efetivo, que deduz uma relação entre a média espacial dos campos elétricos e magnéticos [41] [75] [51], podemos escrever expressões para o tensor dielétrico efetivo  $\varepsilon_{eff}$  e para o tensor permeabilidade efetivo  $\mu_{eff}$  da seguinte forma

$$\varepsilon_{eff} = \begin{pmatrix} f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & f_1\varepsilon_1^{-1} + f_2\varepsilon_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

$$\mu_{eff} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & i\mu_{xy} & 0 \\ -i\mu_{xy} & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

onde

$$\mu_{xx} = (f_1^2 + f_2^2)\mu_a(\omega) + f_1f_2[1 + \mu_a^2(\omega) - \chi_b^2(\omega)]/D, \quad (2.53)$$

$$\mu_{yy} = [\mu_a(\omega)/f_1\chi_b(\omega)]\mu_{xy} = \mu_a(\omega)/D, \quad (2.54)$$

$$D = [f_1 + f_2\mu_a(\omega)]. \quad (2.55)$$

Aqui  $\mu_a(\omega) = 1 + \chi_a(\omega)$ , e as frações da super-rede são  $f_j = j/L$  ( $j = a, b$ ).

A relação de dispersão para os polaritons magnéticos no limite não-retardado (ou magnetostático) pode agora ser encontrado através das equações de Maxwell, como resolvido na subseção 2.3.1. Assim introduzimos o potencial magnetostático  $\psi$ , como na Eq. (2.19), enquanto a Eq. (2.24) é generalizada na forma

$$\mu_{xx} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \mu_{yy} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.56)$$

O cálculo dos modos de volume e superfície é análogo ao que foi feito na subseção 2.3.1 (tomando o limite  $d \rightarrow \infty$  e a geometria de Voigt). A única diferença é que  $\mu_{xx} \neq \mu_{yy}$  no presente caso. Assim, os modos de volume satisfazem a seguinte equação

$$\mu_{xx}k_x^2 + \mu_{yy}k_y^2 = 0. \quad (2.57)$$

Diferentemente do caso anterior, descrito pela Eq. (2.31), a solução para  $\omega_B$  depende das componentes do vetor de onda.

Para os modos de superfície magnetostáticos, obtemos a seguinte relação de dispersão

$$(1 + \mu_{xy})^2 - \mu_{xx}\mu_{yy} = 0, \quad (2.58)$$

com a seguinte restrição (condição de localização)

$$1 + \mu_{xy} < 0. \quad (2.59)$$

Esta relação de dispersão é análoga ao conhecido modo magnetostático de Damon-Eshbach (veja a subseção 2.3.1).

Agora vamos tratar dos modos retardados que se propagam na região do infravermelho. Neste caso, não podemos usar o potencial escalar magnetostático; é necessário empregar a forma completa das equações de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\varepsilon_{eff}}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.60)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. O cálculo, para o problema em questão, é realizado de maneira similar ao caso dos polaritons numa interface simples de média anisotrópica [52]-[55]. A diferença é que para o meio efetivo representar a super-rede devemos ter um tensor dielétrico e um tensor permeabilidade magnética na forma das Eqs. (2.50) e (2.51). Da condição determinante obtida das equações lineares dos coeficientes do campo magnético, encontramos que a relação de dispersão para os modos de volume é dada por

$$\mu_{xx}k_x^2 + \mu_{yy}k_y^2 = \varepsilon_{zz}(\omega/c)^2(\mu_{xx}\mu_{yy} - \mu_{xy}^2), \quad (2.61)$$

onde  $\varepsilon_{zz}$  é a componente  $zz$  do tensor  $\varepsilon_{eff}$  definido na Eq. (2.50).

Os modos de superfícies retardados são obtidos através de soluções localizadas para o campo magnético nas regiões  $y < 0$  e  $y > 0$ . Depois de muita álgebra, a desejada relação de dispersão de superfície é obtida como

$$\alpha_0^2(\mu_{xx}\mu_{yy} - \mu_{xy}^2) - 2k_x^2\alpha_0\mu_{xy} = (k_x^2 - \varepsilon_{zz}\mu_{yy}\omega_2/c^2), \quad (2.62)$$

desde que a restrição

$$\alpha_0(\mu_{xx}\mu_{yy} - \mu_{xy}^2) - k_x\mu_{xy} < 0, \quad (2.63)$$

seja satisfeita. Aqui definimos  $\alpha_0 = [k_x^2 - (\omega/c)^2]^{1/2}$ .

Exemplos das curvas de dispersão dadas pelas Eqs. (2.60) e (2.61) calculadas para uma super-rede composta pelo Ho, no estado cone, alternado com o ZnF<sub>2</sub> são mostradas na Fig. (2.5) [56]. Os parâmetros físicos usados aqui para o Ho ( $\theta = 4\pi$ ,  $\phi = \pi/6$ ) são dados na Ref. [29]. Para o material não-magnético (ZnF<sub>2</sub>), temos  $\varepsilon_2 = 8$  e  $\mu_2 = 1$ . Embora a assimetria entre o lado positivo e negativo de  $k_x$  não seja muito evidente na ausência de campo magnético (Fig. 2.5a), o espectro dos polaritons de superfície exibe uma não-reciprocidade prevista pela Eq. (2.40). Esta propagação não recíproca aparece aqui devido ao termo fora da diagonal e não-nulo  $\mu_{xy}$  no tensor permeabilidade dado pela Eq. (2.51). As três bandas de volume, regiões sombreadas, são uma consequência dos dois polos na susceptibilidade [veja Eq. (2.46)], e são dados apenas para o estado cone. Os modos de superfície (linhas tracejadas), que são sensíveis ao valor do campo magnético externo, propagam-se nas regiões entre as bandas de volume. A aplicação de um campo magnético externo ( $H_0 > 0$ ) implica no aumento da não-reciprocidade nos modos de superfície. A Fig. (2.5b) descreve esta situação com  $H_0 = 200G$ . As bandas de volume também são modificadas pela aplicação de  $H_0$ .

Por completeza também apresentamos na Fig. (2.6) o espectro para o caso do estado espiral Dy como o componente terra-rara da super-rede, usando  $\theta = \pi/2$  e  $\phi = \pi/6$  para os parâmetros físicos [29]. O cálculo para este caso é exatamente a situação limite onde  $\theta = \pi/2$  no caso do estado cone, algumas propriedades físicas interessantes surgem desta estrutura. Primeiro notamos



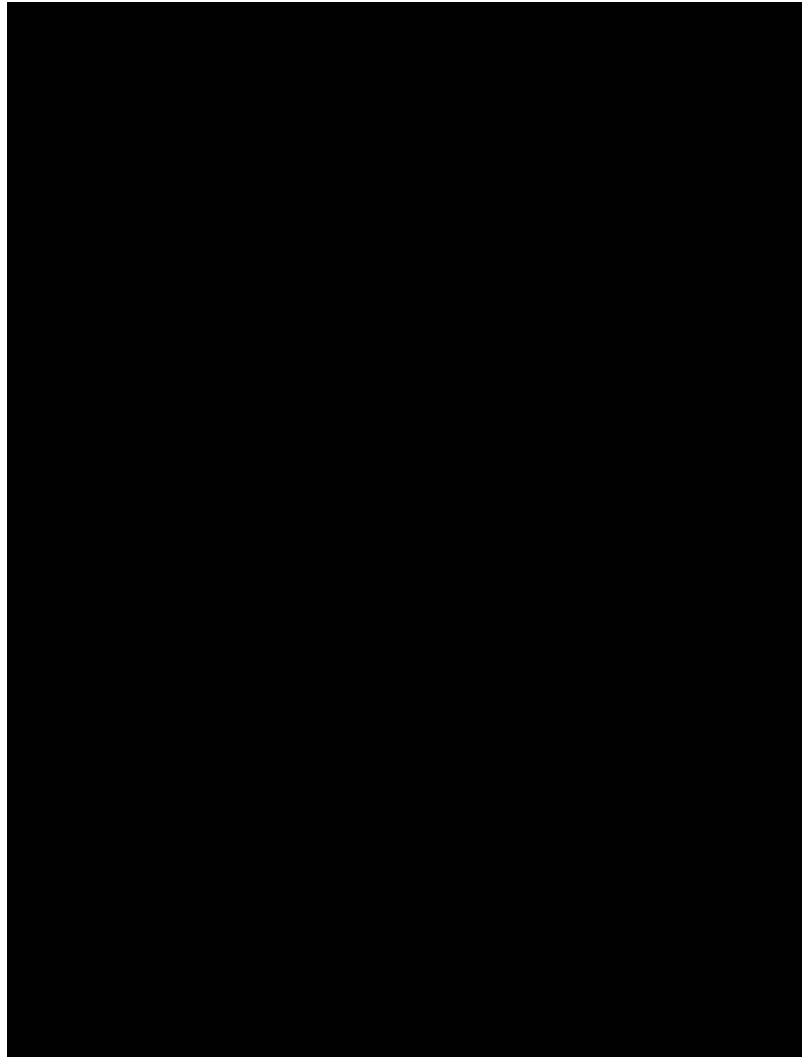
**Figura 2.5:** Espectro dos polaritons magnéticos para o caso do estado cone. Aqui os modos de volume são regiões sombreadas, enquanto os modos de superfície são representados por linhas tracejadas. Os parâmetros físicos usados aqui, apropriados ao  $H_0$ , são descritos no texto. Os valores do campo magnético externo são (a)  $H_0 = 0$  e (b)  $H_0 = 200kG$ .

que, quando o termo fora da diagonal  $\mu_{xy}$  do tensor permeabilidade magnética [veja Eq. (2.53)] tende a zero para  $H_0 = 0$ , o espectro é recíproco na ausência de campo magnético como na Fig. (2.6a). Além disso, esta estrutura comporta-se exatamente como uma super-rede com camadas alternadas de um antiferromagneto simples e um material não-magnético. Isto pode ser visto tomando o caso limite para a susceptibilidade, resultando em apenas duas bandas de volume na ausência de um campo magnético externo. Porém, se um campo magnético externo é aplicado, a banda de volume superior divide-se em duas, como mostra a Fig. (2.6b). Também, uma não-reciprocidade extraordinária está aparente nos modos de superfície de baixa frequência, mas o aspecto recíproco das bandas de volume não é afetado devido a simetria da relação de dispersão de volume nas terras-raras espirais. Percebemos o aparecimento de um novo modo de superfície, que não existe no limite magnetostático, surgindo no lado  $-k_x$  do espectro. Isto é uma consequência do caráter antiferromagnético do modo terra-rara espiral, e estas propriedades são análogas àquelas encontradas em outra super-rede antiferromagnética/não-magnética na região dos polaritons [57].

## 2.5 Fimes Finos Metamagnéticos

Sistemas magnéticos mistos, incluindo aqueles em que camadas de dois materiais diferentes são justapostas numa estrutura finita ou numa super-rede, têm sido uma considerável fonte de pesquisa nas últimas décadas por causa da competição das interações e das propriedades das interfaces (veja e.g. Refs [58] e [59]). Eles constituem uma das mais complexas classes de estruturas, apresentando desafios excitantes do ponto de vista teórico e experimental [60]-[62]. Por exemplo, interações fortemente competitivas podem levar os magnetos mistos a frustração e frequentes comportamentos de vidro de spin [63]-[65].





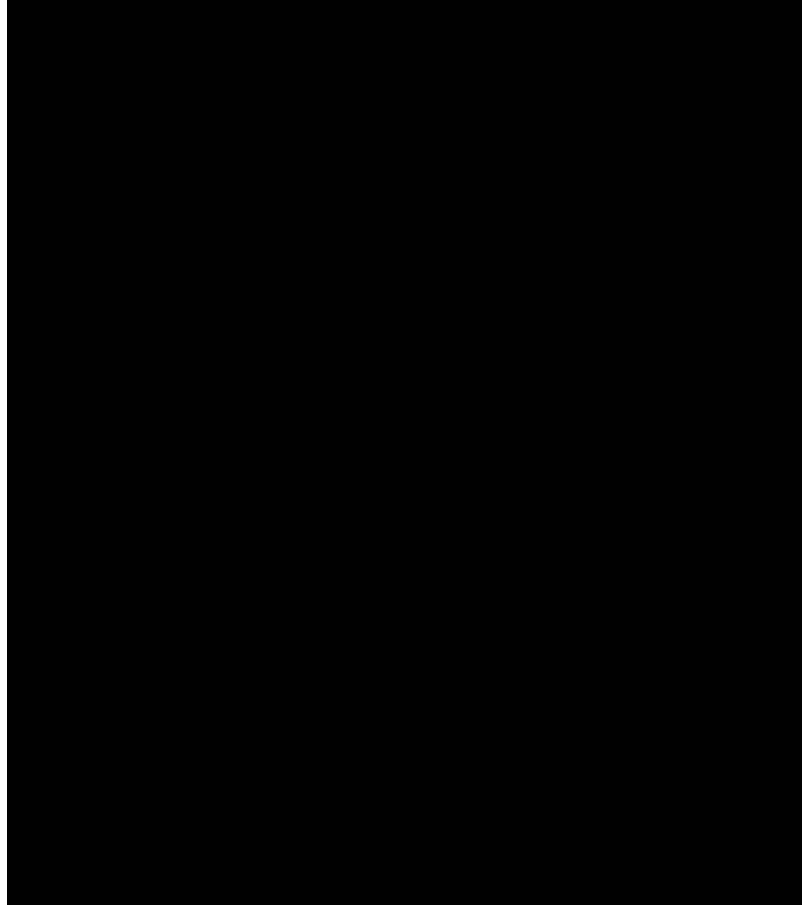
**Figura 2.6:** O mesmo da Fig. 2.5, mas para o estado espiral, assumindo o material terra-rara Dy.

Outro exemplo envolvendo troca mista (ou competição) é fornecido pelos materiais *metamagnéticos*. Basicamente, eles têm uma estrutura magnética organi-

zada em camadas, que são ordenadas ferromagneticamente, cuja magnetização alterna de camada para camada de tal forma que a magnetização espontânea total é nula. O fraco acoplamento antiferromagnético intercamada (Fig. 1.3) permite que um campo magnético externo  $\vec{H}_0$ , relativamente pequeno, aplicado perpendicularmente às camadas, modifique a orientação mútua dos momentos em cada camada. Isto leva a um desvio da dependência linear do momento total sobre o campo, isto é, a um aumento anômalo de sua susceptibilidade magnética, gerando a fase antiferromagnética (AFM). Para grandes valores de  $\vec{H}_0$ , suficientes para superar o acoplamento antiferromagnético intercamada, a magnetização atinge uma saturação, definindo a fase ferromagnética (FM).

Recentemente, procurou-se entender o comportamento das ondas de spin de superfície em ambas as fases (AFM e FM). Um rico espectro foi encontrado para os metamagnetos  $\text{FeBr}_2$  e  $\text{FeCl}_2$ , que têm uma anisotropia magnética intracamada suficientemente grande comparada ao fraco acoplamento antiferromagnético intercamada, e com uma diferente estrutura cristalina, levando a uma diferença na relação de dispersão das ondas de spin de superfície e nas condições de existência [66]-[69]. Os dois materiais têm a mesma estrutura hexagonal dos íons magnéticos dentro da camada, mas o empilhamento das mesmas é diferente (veja Fig. 2.7). Suas amostras de volume foram estudadas experimentalmente por técnicas como espalhamento de luz [70] e espalhamento de neutrons [71], principalmente na fase antiferromagnética. Estudos teóricos também foram realizados, levando a resultados bem próximos dos experimentais [72]. Os metamagnetos têm, tipicamente, uma ressonância ferromagnética abaixo de  $1\text{cm}^{-1}$ , em que todas as subredes precessam em fase e, além disso, uma ou mais frequências de ressonância de troca em que algumas das subredes não estão em fase.

Nesta seção investigaremos os modos de polaritons magnéticos que se propagam em filmes finos metamagnéticos. Direcionaremos nossas discussões



**Figura 2.7:** Visão no plano do arranjo hexagonal dos íons  $\text{Fe}^{2+}$  (círculos sólidos) em uma camada ordenada ferromagneticamente dos metamagnetos  $\text{FeBr}_2$  e  $\text{FeCl}_2$ . Os primeiros e segundos vizinhos do íon 1 são os de número 2 e 3, respectivamente. No  $\text{FeBr}_2$  os íons nas camadas adjacentes estão diretamente acima e abaixo dos círculos sólidos. No  $\text{FeCl}_2$  as camadas são desviadas umas em relação as outras.

aos metamagnetos  $\text{FeBr}_2$  e  $\text{FeCl}_2$  sem fase ‘spin-flop’ intermediária entre as fases AFM e FM. Vamos considerar uma geometria em que a superfície do filme está no plano  $xy$ , perpendicular à magnetização e ao campo magnético externo, que

está direcionado ao longo da direção  $z$ . Os polaritons de superfície propagam-se ao longo do eixo  $x$  (veja Fig. 2.7). O filme fino com espessura  $L$  ocupa a região  $0 < z < L$ , e o meio em torno do filme é vácuo (com  $\varepsilon = \mu = 1$ ).

O Hamiltoniano de spin para metamagnetos uniaxiais é dado por [66]-[67]:

$$H = \sum_{i,j} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,i'} J'_{ii'} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i'} - \frac{1}{2} \sum_{j,j'} J'_{jj'} \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j'} + H_Z + H_{anis}, \quad (2.64)$$

onde o termo Zeeman devido ao campo aplicado é

$$H_Z = -\gamma H_0 \left[ \sum_i S_i^z + \sum_j S_j^z \right], \quad (2.65)$$

e o termo de anisotropia é dado pela expressão

$$H_{anis} = -D \left[ \sum_i (S_i^z)^2 + \sum_j (S_j^z)^2 \right]. \quad (2.66)$$

Aqui  $i$  e  $i'$  denotam sítios numa subrede (i.e. um tipo de camada no cristal metamagnético), enquanto  $j$  e  $j'$  denotam sítios na outra subrede (o conjunto de camadas adjacentes). Também  $J_{ij}$  é a interação de troca antiferromagnética intercamada e  $J_{ii'}$ ,  $J_{jj'}$  são os termos de troca ferromagnética intracamada. O coeficiente de anisotropia uniaxial  $D$  está associado ao campo de anisotropia efetiva  $H_A$  pela relação  $H_A = (2S - 1)D$ , válida à baixas temperaturas.

Usando a equação de Heisenberg do movimento para um operador de spin  $S_i^+ = S_i^x + iS_i^y$ , encontramos a seguinte relação de dispersão das ondas de spin, utilizando a aproximação RPA (como fizemos na seção 2.2), para o volume do material metamagnético (veja e.g. Ref. [69]):

(a) fase FM (um ramo):

$$\cos(ka) = [-1 + 3(J_1 + J_2)/J_3] - (J_1/J_3)\phi_M(\vec{k}_{\parallel}) + (\Delta_M^+ - \hbar\omega)/2J_3S, \quad (2.67)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_M(\vec{k}_{\parallel}) &= \cos(k_x a) + 2 \cos(k_x a/2) \cos(k_y a\sqrt{3}/2) \\ &+ 2(J_2/J_1)[\cos(k_y a\sqrt{3}) + 2 \cos(k_x a/2) \cos(k_y a\sqrt{3}/2)] \end{aligned} \quad (2.68)$$

e  $\Delta_{\pm} = \gamma[H_0 \pm H_A]$ . Aqui  $J_1$  e  $J_2$  são os termos de troca do primeiro e do segundo vizinho, respectivamente;  $J_3$  é o fraco termo de troca intercamada antiferromagnética.

(b) fase AFM (dois ramos):

$$\cos(ka) = \pm(1/2SJ_3)[\lambda + (\Delta_M^+ - \hbar\omega)][\lambda - (\Delta_M^- - \hbar\omega)]^{1/2}, \quad (2.69)$$

onde

$$\lambda = 2J_1S[3(1 + J_2/J_1) + (J_3/J_2) - \phi_M(\vec{k}_{\parallel})]. \quad (2.70)$$

Vamos agora tratar o caso dos polaritons. Antes de discutirmos sua relação de dispersão, é necessário determinar a resposta dinâmica do material metamagnético como função da frequência  $\omega$  para a geometria de Voigt. Considere para cada subrede magnetizações iguais a  $M_i$  e  $M_j$ , respectivamente. Sua equação clássica do movimento é dado por

$$d\vec{M}_p/dt = \gamma(\vec{M}_p \times \vec{H}^{eff}), \quad p = i, j. \quad (2.71)$$

Aqui

$$\vec{M} = S\hat{z} + \vec{m} \exp(-i\omega t), \quad (2.72)$$

$$\vec{H}^{eff} = \vec{H}_0 + \vec{H}_A - \vec{H}_E + \frac{1}{3}(\vec{M}_i + \vec{M}_j) + \vec{h}(t), \quad (2.73)$$

onde  $\vec{m}_p$  e  $\vec{h}$  são os campos flutuantes na frequência  $\omega$  e  $p = i$  ou  $j$ . Também o campo magnético externo aplicado na direção  $z$  (perpendicular ao filme) é representado por  $\vec{H}_0$ , o termo  $\vec{H}_E = SJ_{ij}$  é o acoplamento de troca intercarnada, e  $(1/3)(\vec{M}_i + \vec{M}_j)$  é um termo de Lorentz descrevendo as correções do campo local. A necessidade de incluir este termo foi apontado por [73], e é de particular importância aqui, desde que a contribuição que ele faça não seja nula (como num ferromagneto), nem negligenciável (como num antiferromagneto).

A equação do movimento é agora linearizada nos campos flutuantes  $\vec{m}_p$  e  $\vec{h}$ . Considerando as subredes ordenadas nas direções  $\pm z$ , desde que os desvios  $m_{iz}$  e  $m_{jz}$  de seu valores estáticos sejam de segunda ordem, é conveniente usar a representação de rotação das ondas

$$m_i^\pm = m_{ix} \pm im_{iy}, \quad (2.74)$$

$$h^\pm = h_{ix} \pm im_y. \quad (2.75)$$

As equações do movimento então tomam a forma:

$$(\omega + \omega_{ij})m_i^+ + \omega_{ii}m_j^+ = \omega_{Mii}h^+, \quad (2.76)$$

$$\omega_{jj}m_i^+ - (\omega - \omega_{ji})m_j^+ = \omega_{Mjj}h^+. \quad (2.77)$$

É fácil ver que mudando o sinal de  $\omega$  nas equações anteriores, obtemos um novo conjunto de equações para  $m_p^-$  e  $h^-$ . As frequências acima são dadas por

$$\gamma^{-1}\omega_{ij} = H_E - H_A - H_0 - (1/3)M_j^z, \quad (2.78)$$

$$\gamma^{-1}\omega_{ji} = -H_E - H_A + H_0 + (1/3)M_i^z, \quad (2.79)$$

$$\gamma^{-1}\omega_{\mu\mu} = \mp H_E \pm (1/3)M_\mu^z, \quad (2.80)$$

$$\gamma^{-1}\omega_{\mu\mu} = \mp M_\mu^z. \quad (2.81)$$

Aqui  $\mu$  significa  $i$  ou  $j$ , com o sinal superior (inferior) referindo a  $i$  ( $j$ ). Depois de um pouco de álgebra os termos não nulos do tensor permeabilidade magnética são

$$\mu_{xx} = \mu_{zz} = 1 + \frac{4\pi(A_1\omega^2 - B_1)}{(\omega^2 - \omega_{FM}^2)(\omega^2 - \omega_{AFM}^2)}, \quad (2.82)$$

$$\mu_{yy} = \frac{4\pi(A_2\omega^2 - B_2)}{(\omega^2 - \omega_{FM}^2)(\omega^2 - \omega_{AFM}^2)}, \quad (2.83)$$

onde

$$A_1 = (\omega_{M_{ii}} - \omega_{M_{jj}})(\omega_{FM} - \omega_{AFM}) + b, \quad (2.84)$$

$$A_2 = M_{ii} - M_{jj}, \quad (2.85)$$

$$B_1 = b\omega_{FM}\omega_{AFM}, \quad (2.86)$$

$$B_2 = (\omega_{M_{ii}} - \omega_{M_{jj}})\omega_{FM}\omega_{AFM} - b(\omega_{FM} - \omega_{AFM}), \quad (2.87)$$

$$b = \omega_{M_{ii}}(\omega_{ii} - \omega_{ji}) + \omega_{M_{jj}}(\omega_{ii} - \omega_{ij}). \quad (2.88)$$

Também

$$\omega_{FM} = (1/2)(\omega_{ji} - \omega_{ij}) + (1/2)[(\omega_{ij} + \omega_{ji})^2 - 4\omega_{ii}\omega_{jj}]^{1/2} \quad (2.89)$$

e

$$\omega_{AFM} = (1/2)(\omega_{ji} - \omega_{ij}) - (1/2)[(\omega_{ij} + \omega_{ji})^2 - 4\omega_{ii}\omega_{jj}]^{1/2} \quad (2.90)$$

definem as duas frequências de ressonância do material metamagnético. A primeira frequência de ressonância  $\omega_{FM}$ , que está associada com a precessão da magnetização  $\vec{M} = \vec{M}_i + \vec{M}_j$  em torno do campo efetivo estático, define a fase FM; ela aumenta linearmente com o campo externo aplicado  $H_0$ . A segunda,  $\omega_{AFM}$ , que está associada com a precessão em torno do campo de troca  $H_E$ , define a fase AFM.

Uma vez conhecido o tensor permeabilidade magnética apropriado para o material metamagnético, podemos determinar o espectro de polariton usando as equações de Maxwell no filme magnético. Depois de eliminar a variável do campo elétrico  $\vec{E}$ , obtemos a seguinte equação de onda para o campo magnético:

$$\nabla^2 \vec{H} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - (\varepsilon\bar{\mu}/c)\partial^2 \vec{H}/\partial t^2 = 0, \quad (2.91)$$



enquanto a condição de divergência é dada por

$$\vec{\nabla} \cdot (\bar{\mu}\vec{H}) = 0. \quad (2.92)$$

Para as regiões de vácuo a equação de onda eletromagnética é simplesmente

$$c^2\nabla^2\vec{H} - \partial^2\vec{H}/\partial t^2 = 0. \quad (2.93)$$

A solução da Eqs. (2.90)-(2.92) são da seguinte forma:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 \exp(-\beta z) \exp(ik_{||}x) \exp(-i\omega t) \quad \text{para } z > L, \quad (2.94)$$

$$\vec{H} = [A \exp(ik_z z) + B \exp(-ik_z z)] \exp(ik_{||}x) \exp(-i\omega t) \quad \text{para } 0 < z < L, \quad (2.95)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_3 \exp(\beta z) \exp(ik_{||}x) \exp(-i\omega t) \quad \text{para } z < 0, \quad (2.96)$$

onde  $k_z$  é real para os modos guiados e imaginário (isto é,  $k_z = i\alpha$ , com  $\alpha$  real e positivo) para os modos de superfície. Como uma condição para uma excitação limitada,  $\beta$  é real e positivo. As expressões anteriores são soluções não-triviais desde que

$$\alpha^2 = (\mu_{xx}/\mu_{zz})k_{||}^2 - (\omega/c)\varepsilon_{\perp}\mu_V, \quad (2.97)$$

$$\beta^2 = k_{||}^2 - \omega^2/c^2. \quad (2.98)$$

A quantidade  $\mu_V$  é a permeabilidade de Voigt, definida por

$$\mu_V = \mu_{xx} - \mu_{xz}^2/\mu_{zz}. \quad (2.99)$$

A determinação da relação de dispersão agora requer a aplicação das condições de contorno eletromagnéticas usuais em  $z = 0$  e  $z = L$ , isto é, a continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético. Depois de um pouco de álgebra, obtemos [74]

$$\frac{g_+ - \beta(\mu_{xx}\mu_{zz} - \mu_{xz}^2)}{g_- - \beta(\mu_{xx}\mu_{zz} - \mu_{xz}^2)} \exp(-k_z L) = \frac{g_+ + \beta(\mu_{xx}\mu_{zz} - \mu_{xz}^2)}{g_- + \beta(\mu_{xx}\mu_{zz} - \mu_{xz}^2)} \exp(k_z L), \quad (2.100)$$

onde definimos os fatores  $g_{\pm} = \mu_{xz}k_{\parallel} \pm \mu_{zz}k_z$ . A Eq. (2.100) é a expressão analítica que descreve a propagação dos polaritons magnéticos de superfície. Isto pode ser usado para reproduzir resultados previamente apresentados para uma interface simples fazendo  $L \rightarrow \infty$ , i.e. o caso de um meio metamagnético semi-infinito [75, 76].

No limite magnetostático, onde  $k_{\parallel} \gg \omega/c$ , os resultados tornam-se mais fáceis. A constante decaí nas regiões de vácuo reduzindo-se a  $\beta = k_{\parallel}$ , e

$$k_z = (\mu_{xx}/\mu_{zz})^{1/2} k_{\parallel} \quad (2.101)$$

dentro do filme. A Eq. (2.90) então torna-se

$$(\mu_{xx}\mu_{zz} - \mu_{xz}^2 + 1) \tanh[(\mu_{xx}/\mu_{zz})^{1/2} |k_{\parallel}| L] + 2\mu_{zz}(\mu_{xx}/\mu_{zz})^{1/2} = 0. \quad (2.102)$$

Como esperado para esta geometria, a relação de dispersão neste limite é recíproca.

Vamos agora discutir nossos resultados analíticos mais detalhadamente para os casos específicos dos metamagnetos  $\text{FeBr}_2$  e  $\text{FeCl}_2$  nas suas fases FM e AFM, respectivamente. Como já foi discutido, estes materiais têm diferentes arranjos cristalográficos dos íons magnéticos, levando à diferenças no espectro de polariton. Embora eles tenham o mesmo arranjo trigonal do íon magnético  $\text{Fe}^{2+}$  dentro de cada camada ordenada ferromagneticamente, os dois materiais diferem no empilhamento das camadas (veja Fig. 2.7). No  $\text{FeBr}_2$ , os íons  $\text{Fe}^{2+}$  em uma camada estão diretamente acima e abaixo daqueles nas camadas adjacentes. Por outro lado, para o  $\text{FeCl}_2$ , o empilhamento das camadas não é alinhado, levando a três vizinhos mais próximos em cada uma das camadas adjacentes.

A Fig. 2.8 mostra a relação de dispersão dos polaritons magnéticos para os modos de volume e superfície considerando um filme fino metamagnético de espessura  $L = 200\mu m$  para o  $\text{FeBr}_2$  na sua fase FM [77]. Este material tem spin  $S = 1$  e temperatura crítica  $T_c = 14.2K$ . Os valores aproximados dos parâmetros de troca e dos outros parâmetros físicos relevantes são conhecidos pelo experimento de espalhamento Raman [71] [70]:  $J_1 = 5.07cm^{-1}$ ,  $J_2 = -1.2cm^{-1}$ ,  $J^3 = 1.45cm^{-1}$ ,  $H_A = 7.34cm^{-1}$ , e  $M_i^z = M_j^z = 1.45kG$ . O gráfico é construído com a frequência reduzida  $\omega/\omega_{FM}$  contra o vetor de onda adimensional no plano  $k_x L$ , tomando  $\vec{k}_{||} = (k_x, 0)$ .

As linhas tracejadas, aproximadamente verticais, nesta figura são as linhas da luz no vácuo  $\omega = ck_x$ . Consideramos um filme magnético livre, tal que os meios  $z > L$  e  $z < 0$  são ambos vácuo. Por causa da espessura finita do filme, os modos de volume são quantizados, correspondendo a diferentes ondas estacionárias no filme. Porém, por simplicidade, representamos os modos de volume como regiões sombreadas. Há duas bandas de volume, e regiões de "gap" onde os quatro modos de superfícies (representados por linhas contínuas identificadas pela letra S) podem se propagar. Conforme  $|k_x L|$  aumenta, eles



**Figura 2.8:** Relação de dispersão dos modos de polaritons magnéticos, volume (áreas sombreadas) e superfície (linhas contínuas), para o metamagneto  $\text{FeBr}_2$  na sua fase FM como uma função do vetor de onda adimensional no plano  $k_x L$ . Consideramos um campo externo aplicado  $H_0 = 50kG$ , que é suficiente para superar o fraco acoplamento antiferromagnético intercarnada.

aproximam-se assintoticamente de um valor bem definido para suas frequências. Os espectros são agora não-recíprocos, i.e. aplica-se a Eq. (2.40). A não reciprocidade torna-se mais marcante no caso do filme apoiado em um substrato, devido aos termos fora da diagonal que não se anulam  $\mu_{xz} = -\mu_{zx}$  no tensor permeabilidade magnética. O perfil do campo magnético para o modo  $+k_x L$  é agora influenciado na direção de uma interface, enquanto que o perfil do campo para o modo  $-k_x L$  é influenciado na direção da outra interface.

Por completeza, também mostramos na Fig. 2.9 os modos de polaritons magnéticos para o caso do  $\text{FeCl}_2$  na sua fase AFM [77]. Consideramos um filme de espessura igual a  $200\mu\text{m}$ , e construímos o gráfico com a frequência reduzida  $\omega/\omega_{AFM}$  contra o vetor de onda adimensional no plano,  $k_x L$ . Os outros parâmetros físicos, de acordo com dados de espalhamento de nêutrons e Raman [72], são:  $J_1 = 5.5\text{cm}^{-1}$ ,  $J_2 = -1.2\text{cm}^{-1}$ ,  $J_3 = 0.28\text{cm}^{-1}$ ,  $H_A = 9.6\text{cm}^{-1}$ , e  $M_i^z = -M_j^z = 1.2\text{kG}$ . Há três regiões de volume (áreas sombreadas), e nas regiões de "gap" há cinco modos de superfície (representados por linhas contínuas identificadas pela letra S). Isto é possível para distinguir dois tipos diferentes de modos de superfície: aqueles que persistem quando  $|k_x L| \rightarrow \infty$ , e outros que desaparecem dentro da região de volume a um valor finito de  $|k_x L|$ . As bandas de volume são mais largas que aquelas na fase FM (veja Fig 2.8), essencialmente porque os polaritons são mais localizados dentro do filme como uma consequência do pequeno valor de  $J_3$  e do diferente empilhamento das camadas.

## 2.6 Estruturas Quasi-Periódicas

Nesta seção estudaremos o espectro de polariton numa estrutura quasi-periódica cujos blocos de construção são compostos de uma camada magnética (bloco de construção  $A$ ) e um material não-magnético (bloco de construção  $B$ ) empilhados alternadamente seguindo a seqüência matemática de Fibonacci. Nosso modelo é baseado no formalismo da matriz-transferência para simplificar a álgebra envolvida no problema. A localização do espectro será também apresentada e discutida.

Consideramos primeiro, por simplicidade, uma estrutura periódica em que as coordenadas do eixo  $y$  estão paralelas ao eixo fácil da camada magnética. A



**Figura 2.9:** O mesmo da Fig. 2.8, mas para o metamagneto  $\text{FeCl}_2$  na sua fase AFM, na ausência de campo magnético aplicado.

espessura da camada magnética (não-magnética) é  $a$  ( $b$ ), e conseqüentemente o tamanho da célula unitária da super-rede periódica é  $L = a + b$ . O sistema ocupa o semi-espço  $z \leq 0$ , com sua superfície paralela ao plano  $xy$ , e na região  $z > 0$  temos vácuo. Os polaritons de superfície propagam-se ao longo do eixo  $x$ , paralela à superfície (geometria de Voigt). Assumindo polarização  $s$  os campos elétrico e magnético têm a seguinte forma

$$\vec{H}_j(x, y, z) = (H_{xj}, 0, H_{zj}) \exp(ik_x x - i\omega t), \quad (2.103)$$

$$\vec{E}_j(x, y, z) = (0, E_{yj}, 0) \exp(ik_x x - i\omega t). \quad (2.104)$$

Para a camada magnética  $A$  as componentes dos campos acima são

$$H_{xA}(z) = A_{1A}^n \exp(k_A z) + A_{2A}^n \exp(-k_A z), \quad (2.105)$$

$$H_{zA}(z) = (-i/\mu_0)[\mu_{eff}^- A_{1A}^n \exp(k_A z) + \mu_{eff}^+ A_{2A}^n \exp(-k_A z)], \quad (2.106)$$

$$E_{yA}(z) = (i/k_x)(\omega/c)[\mu^- A_{1A}^n \exp(k_A z) + \mu^+ A_{2A}^n \exp(-k_A z)], \quad (2.107)$$

onde

$$\mu_0 = -k_x^2 + \mu_1 \varepsilon_A \omega^2 / c^2, \quad (2.108)$$

$$\mu_{eff}^\pm = \pm k_x k_A + \mu_2 \varepsilon_A \omega^2 / c^2, \quad (2.109)$$

$$\mu^\pm = \mu_2 - \mu_1 \mu_{eff}^\pm / \mu_0, \quad (2.110)$$

$$k_A = [k_x^2 - \mu_V \varepsilon_A \omega^2 / c^2]^{1/2}. \quad (2.111)$$

A constante dielétrica do meio  $A$  é  $\varepsilon_A$ . Os termos da permeabilidade  $\mu_1$  e  $\mu_2$  que aparecem nas Eqs. (2.108)-(2.111) são simplesmente associados às componentes da susceptibilidade derivadas das equações

$$\mu_1(\omega) = 1 + \chi_a(\omega), \quad \mu_2(\omega) = \chi_b(\omega). \quad (2.112)$$

As expressões explícitas para  $\chi_a$  e  $\chi_b$  são dadas pelas Eqs. (2.21) e (2.22) para os ferromagnetos. Para um antiferromagneto podemos escrever [12]

$$\chi_a(\omega) = \frac{1}{2}(\chi^+ + \chi^-), \quad \chi_b(\omega) = \frac{1}{2}(\chi^+ - \chi^-), \quad (2.113)$$

onde

$$\chi^\pm = \frac{2\omega_A\omega_B}{\omega_A(2\omega_E + \omega_A) - (\omega \mp \omega_0)}. \quad (2.114)$$

As frequências relacionadas à anisotropia e a troca são definidas por:

$$\omega_A = -\gamma H_A, \quad \omega_E = -\gamma H_E. \quad (2.115)$$

Por outro lado, para a camada não magnética temos

$$H_{xB}(z) = A_{1B}^n \exp(k_B z) + A_{2B}^n \exp(-k_B z), \quad (2.116)$$

$$H_{zB}(z) = (-ik_x/k_B)[A_{1B}^n \exp(k_B z) - A_{2B}^n \exp(-k_B z)], \quad (2.117)$$

$$E_{yB}(z) = (i/k_B)(\omega/c)[A_{1B}^n \exp(k_B z) - A_{2B}^n \exp(-k_B z)], \quad (2.118)$$

onde  $\varepsilon_B$  é constante dielétrica do meio  $B$  e

$$k_B = [k_x^2 - \varepsilon_B \omega^2/c^2]^{1/2}. \quad (2.119)$$



Usando as condições de contorno eletromagnéticas nas interfaces  $z = nL + a$  e  $z(n+1)L$ , encontramos as seguintes equações para as amplitudes dos campos eletromagnéticos

$$A_{1A}^n f_A + A_{2A}^n \bar{f}_a = A_{1B}^n + A_{2B}^n, \quad (2.120)$$

$$\mu^- A_{1A}^n f_A + \mu^+ A_{2A}^n \bar{f}_a = (k_x/k_B)(-A_{1B}^n + A_{2B}^n), \quad (2.121)$$

$$A_{1B}^n f_A + A_{2B}^n \bar{f}_a = A_{1A}^{n+1} + A_{2A}^{n+1}, \quad (2.122)$$

$$(k_x/k_B)(A_{1B}^n f_A - A_{2B}^n \bar{f}_a) = \mu^- A_{1A}^{n+1} + \mu^+ A_{2A}^{n+1}. \quad (2.123)$$

Aqui, ( $j = A$  ou  $B$ )

$$f_j = \exp(-k_j d_j), \quad \bar{f}_j = 1/f_j. \quad (2.124)$$

Definindo para cada meio, os dois vetores coluna

$$|A_j^n\rangle = \begin{bmatrix} A_{1j}^n \\ A_{2j}^n \end{bmatrix}, \quad (2.125)$$

as Eqs. (2.120)-(2.123) podem ser escritas na forma de uma matriz

$$M_A |A_A^n\rangle = N_B |A_B^n\rangle, \quad (2.126)$$

$$M_B |A_B^n\rangle = N_A |A_A^{n+1}\rangle, \quad (2.127)$$

onde,

$$M_A = \begin{pmatrix} f_A & \bar{f}_A \\ \mu^- f_A & \mu^+ \bar{f}_A \end{pmatrix}, \quad (2.128)$$

$$M_B = \begin{pmatrix} f_B & \bar{f}_B \\ -(k_x/k_B)f_B & (k_x/k_B)\bar{f}_B \end{pmatrix}, \quad (2.129)$$

$$N_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu^- & \mu^+ \end{pmatrix}, \quad (2.130)$$

$$N_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -k_x/k_B & k_x/k_B \end{pmatrix}. \quad (2.131)$$

Das equações (2.126) e (2.127) é fácil ver que

$$|A_A^{n+1}\rangle = T|A_A^n\rangle, \quad (2.132)$$

onde a matriz  $T$  é dada por

$$T = N_A^{-1}M_A N_B^{-1}M_B. \quad (2.133)$$

A matriz  $T$  é uma matriz de transferência porque ela relaciona os coeficientes dos campos elétricos de uma célula com os da outra que a precede. Levando em consideração a simetria translacional do problema, podemos usar o teorema de Bloch, que nos dá

$$|A_A^{n+1}\rangle = \exp(iQL)|A_A^n\rangle, \quad (2.134)$$

onde  $Q$  é o vetor de onda de Bloch. Então,

$$T|_A^n\rangle = \exp(iQL)|A_A^n\rangle, \quad (2.135)$$

$$T^{-1}|_A^n\rangle = \exp(-iQL)|A_A^n\rangle. \quad (2.136)$$

Conseqüentemente,

$$\cos(QL)I = \frac{1}{2}(T + T^{-1}). \quad (2.137)$$

Como  $T$  é uma matriz unimodular, nossa relação de dispersão para os modos de volume é simplesmente dada por

$$\cos(QL) = \left(\frac{1}{2}\right)Tr(T). \quad (2.138)$$

Para os modos de superfície, truncamos a super-rede periódica em  $z = 0$ . Nesse caso podemos usar a Eq. (2.135), levando em conta que,  $Q$  é complexo na forma  $Q \equiv i\beta$ . Deste modo, aplicando as condições de contorno em  $z = 0$ , e resolvendo as equações para  $\exp(-\beta L)$ , temos que,

$$T_{11} + \lambda T_{12} = e^{-\beta L} = T_{21}\lambda^{-1} + T_{22}, \quad (2.139)$$

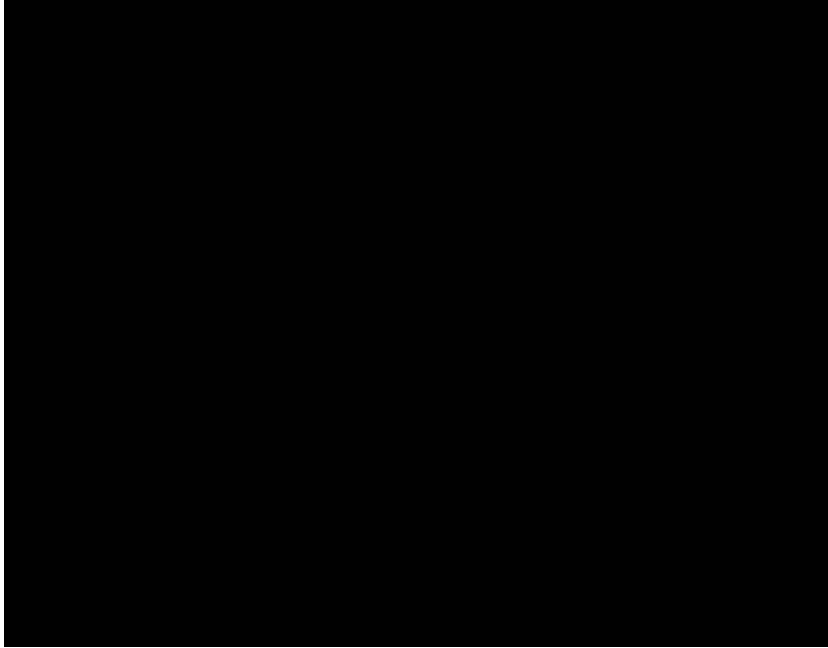
onde

$$\lambda = (k_C + k_x\mu^-)/(k_C - k_x\mu^+). \quad (2.140)$$

Aqui  $k_C$  é puramente real e dado por  $k_C = [k_x - \omega^2/c^2]^{1/2}$ . A constante  $\beta$  deve ser escolhida de modo que  $Re(\beta) > 0$ .

Este método pode agora ser estendido para super-redes complexas, considerando-se outras matrizes-transferência  $T$  para a estrutura em consideração (mostraremos com detalhes no Cap. 4 a aproximação da matriz-transferência para a estrutura quasiperiódica de Fibonacci). Uma vez determinadas estas matrizes-transferência, devemos usar as equações (2.138) e (2.139), para encontrar os modos dos polaritons magnéticos no volume e na superfície.

Agora aplicaremos nossos cálculos para alguns materiais magnéticos específicos. Definimos  $R = d_B/d_A$  como a razão entre as espessuras das camadas não-magnética e magnética, respectivamente. Inicialmente, consideramos uma super-rede ferromagnética/não-magnética onde o material  $A$  é o ferromagneto EuS e o material  $B$  é o  $\text{ZnF}_2$ . O espectro de polariton  $\omega/\gamma$  versus  $k_x d_A$  para a quarta geração da seqüência de Fibonacci está mostrado na Fig. 2.10.



**Figura 2.10:** Espectro de polariton, frequência reduzida  $\omega/\gamma$  versus  $k_x d_A$ , para a quarta seqüência da super-rede quasi-periódica de Fibonacci.

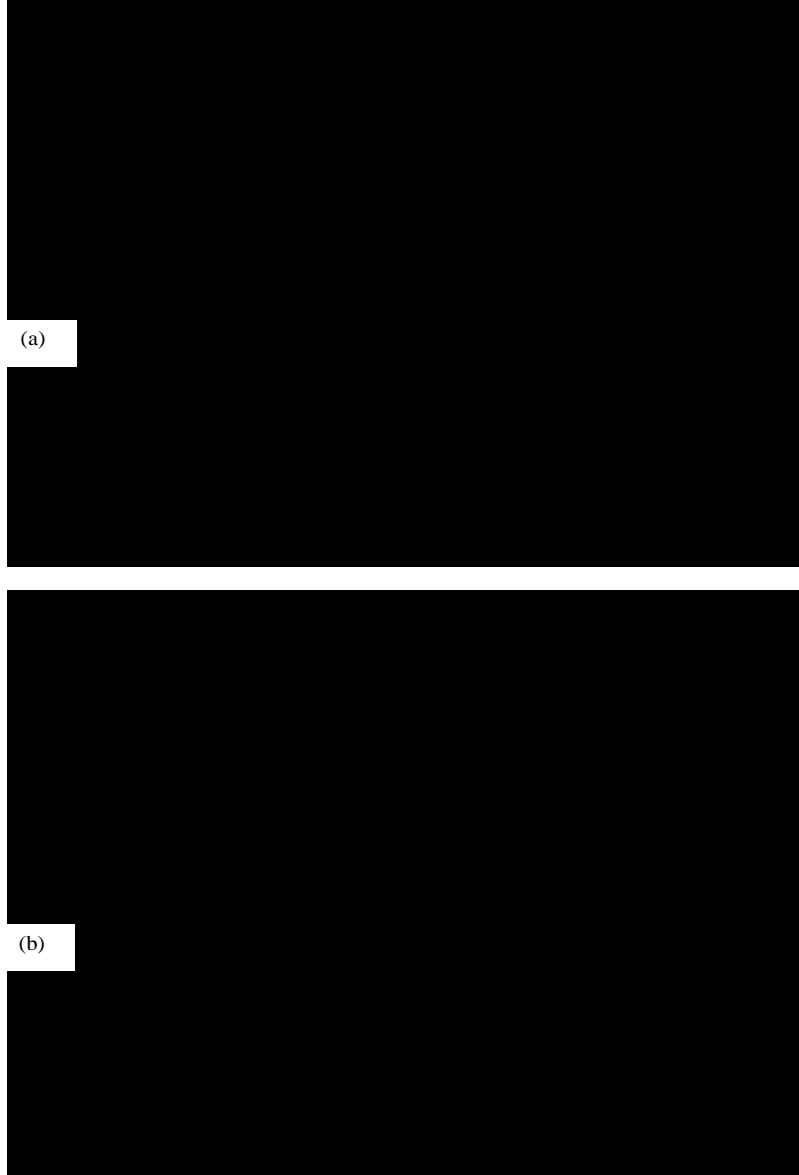
Observe que o número de bandas de volume é igual ao número de Fibonacci ( $F_n$ ), ou seja,  $F_4 = 5$ . Os parâmetros físicos usados aqui são:  $\gamma H_0 = 13.5$  kG,

$\gamma M = 1.0$  kG,  $\varepsilon_A = 1.5$  e  $R = 0.5$ . O material não-magnético,  $\text{ZnF}_2$ , tem  $\varepsilon_B = 8$ . Os modos de superfícies são representados por linhas cheias, enquanto as bandas de volume são caracterizadas por regiões sombreadas, limitadas pelas equações  $QL = 0$  e  $QL = \pi$ . As linhas tracejadas representam, respectivamente, a linha da luz no vácuo e no material ferromagnético, de onde estão partindo os modos de superfície. Para esses modos, nas gerações da seqüência onde  $n > 2$ , temos uma quebra na simetria da estrutura. Isto implica que não precisamos variar a espessura do material magnético (ou não-magnético) para obtê-los [78], fato verificado para todas as seqüências. Contudo, devemos ser cuidadosos ao impor a condição  $Re(\beta) > 0$  na equação (2.138), porque podemos encontrar modos de superfície espúrios.

Na Fig. 2.11(a) mostramos o espectro para o antiferromagneto  $MnF_2$ , na sexta geração da seqüência de Fibonacci. Aqui a frequência reduzida é dada por  $\omega/\omega_0$ , onde  $\omega_0 = |\gamma|[H_A(2H_E + H_A)]^{1/2}$ . Os parâmetros físicos, apropriados para este material são:  $\gamma H_0 = 13.5kG$ ,  $\gamma H_A = 7.87kG$ ,  $\gamma H_E = 550kG$ ,  $\gamma M = 1.0kG$  e  $\varepsilon_A = 5.5$ . Os modos de superfície são novamente representados por linhas cheias e os modos de volume por regiões sombreadas limitadas pelas equações  $QL = 0$  e  $QL = \pi$ . As linhas tracejadas definem a linha da luz no vácuo. Neste caso a existência de um campo aplicado faz aparecer um ‘gap’ entre as duas regiões de soluções reais para os modos de volume e superfície. Quando o campo externo é nulo as duas regiões colapsam (Fig. 2.11(b)).

## 2.7 Conclusões

Neste Capítulo apresentamos uma teoria geral para a propagação de excitações em estruturas magnéticas periódicas e quasi-periódicas, cujos espectros estão ilustrados nas Figs. 2.2, 2.4, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11. Destacamos



**Figura 2.11:** (a) Espectro de polariton, frequência reduzida  $\omega/\omega_0$  versus  $k_x d_A$ , para a sexta seqüência da super-rede quasi-periódica de Fibonacci com  $\gamma H_0 = 13.5kG$ . (b) O mesmo de (a) com  $\gamma H_0 = 0kG$ .

aqui o estudo de super-redes periódica (seção 2.4), onde aplicamos a teoria do meio efetivo para encontrar e discutir a relação de dispersão do espectro de polaritons magnéticos utilizando materiais terras-raras, nos seus estados cone e espiral. Também, merece destaque, a propagação desta excitação em super-redes quasi-periódica tipo Fibonacci (seção 2.6). Nelas aplicamos a técnica da

matriz-transferência, para a obtenção dos modos de volume e superfície, que é muito eficaz no estudo de estruturas deste tipo.

Para contemplar melhor o estudos da propagação dos polaritons magnéticos em estruturas periódicas, vamos estudar no próximo capítulo, utilizando novamente a teoria do meio efetivo, os casos das super-redes ferromagnética/não-magnética e metamagnética/não-magnéticas.

## Capítulo 3

# Polaritons em Super-Redes Magnéticas Periódicas: Teoria do Meio Efetivo

### 3.1 Introdução

Nos últimos anos houve uma grande concentração de pesquisas científicas no estudo de multicamadas magnéticas. A investigação da propagação de excitações elementares em multicamadas foi iniciada no começo da década de 80 e, desde então, uma grande quantidade de trabalhos teóricos e experimentais foram desenvolvidos [79]-[81]. Grande parte desses trabalhos se deve ao desenvolvimento de técnicas de crescimento de filmes cada vez mais finos, atendendo uma demanda tecnológica crescente. Isso tem motivado e conduzido pesquisadores a um intenso estudo teórico e experimental de uma variedade imensa de estruturas magnéticas. Neste capítulo faremos um estudo da propagação de polaritons magnéticos em estruturas artificiais periódicas tipo super-redes não-magnética/magnética e não-magnética/metamagnética, utilizando a teoria do meio efetivo [56, 80].



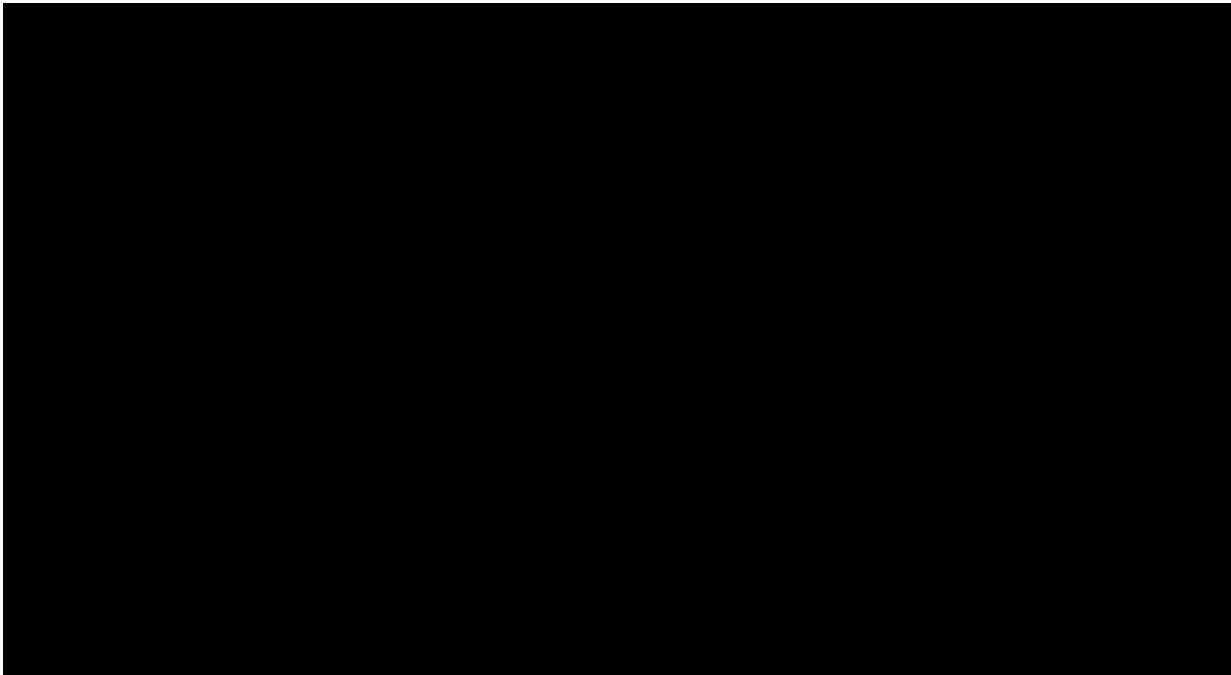
## 3.2 Super-Redes Periódicas

Esaki e Tsu [86] propuseram em 1970 a fabricação de uma estrutura periódica artificial que consiste em camadas alternadas de dois semicondutores dissimilares, com espessura de camada da ordem de nanômetros. Eles chamaram esta estrutura sintética de *super-rede*. Hoje em dia, o termo super-rede tende a ser usado para qualquer estrutura de multicamada constituída por dois ou mais materiais, tal que exista uma periodicidade e, conseqüentemente, uma simetria de translação para a estrutura, na direção de crescimento e perpendicular ao plano das interfaces. Podemos gerar uma super-rede a partir da repetição de uma *célula unitária*  $AB$  com duas componentes que corresponde a uma super-rede  $\cdots ABABAB \cdots$ , ou repetir  $ABC$  com três componentes que corresponde a uma *super-rede*  $\cdots ABCABCABC \cdots$  (onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  representam camadas de materiais diferentes). A Fig. 3.1 mostra exemplos de super-redes.

## 3.3 Polaritons Magnéticos em Super-Redes Periódicas Magnética/Não-Magnética

Nesta seção vamos calcular a relação de dispersão da propagação dos polaritons magnéticos em super-redes finitas ferromagnética/não-magnética, apresentando os resultados através de gráficos teóricos para o ferromagneto Fe.

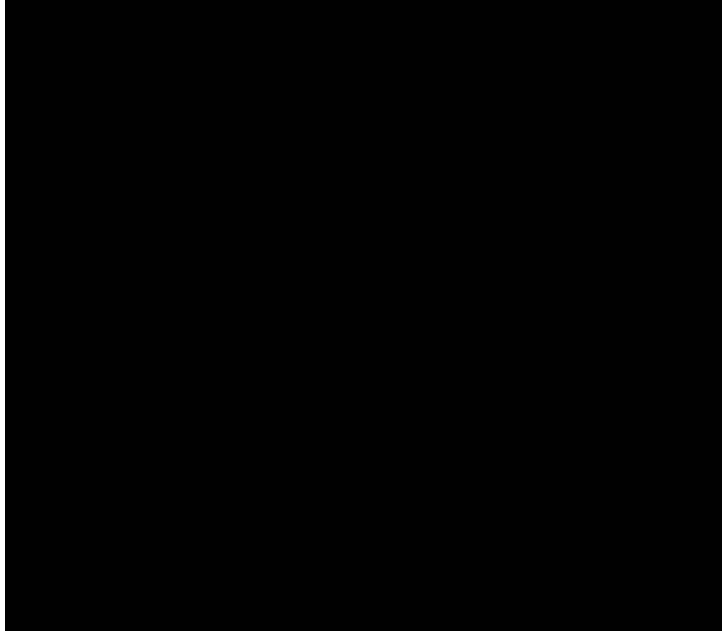
Vamos considerar, para fazer os nossos cálculos, a geometria ilustrada na Fig. 3.2. O tensor permeabilidade magnética para a camada ferromagnética  $\mu_1$  é dado pela Eq. (2.45), onde  $\chi_a$  e  $\chi_b$  são dados pelas Eqs. (2.21) e (2.22), respectivamente. Para a camada não-magnética  $\mu_2 = 1$ . O cálculo da relação de dispersão é análogo ao que fizemos na seção 2.4 para a super-rede terra-rara.



**Figura 3.1:** (a) super-rede periódica com duas componentes; (b) super-rede periódica com três componentes;  $A$ ,  $B$ , e  $C$  representam materiais diferentes;  $n$  é a célula unitária que será repetida ao longo da super-rede.

Assim, a relação de dispersão para os modos de volume é dada pela Eq.(2.60) e para os modos de superfície pela Eq. (2.61), desde que a Eq. (2.62) seja satisfeita.

As curvas de dispersão dadas pelas Eqs. (2.60) e (2.61) calculadas agora para a super-rede composta pelo ferromagneto Fe alternado com um material não-magnético é mostrada na Fig. 3.3. Aqui estamos considerando as camadas com a mesma espessura ( $d_1 = d_2$ ). Os parâmetros físicos para o Fe (retirados da Ref. [81]) são:  $\mu_0 M_0^{Fe} = 2.15\text{T}$  e  $g^{Fe} = 2.15$ . As regiões sombreadas representam as bandas dos polaritons de volume enquanto que a curva pontilhada descreve os modos de superfície. Neste espectro verificamos que para altas frequências ( $\omega \rightarrow$



**Figura 3.2:** Geometria da super-rede periódica utilizada no problema onde o material (1) é ferromagnético e o material (2) não-magnético.

$\infty$ ) temos os polaritons de volume se comportando como fóton, e para os valores da frequência em torno de  $\omega = 2.1T$  a  $\omega = 2.15T$  eles têm um comportamento tipo magnon. Como era esperado existe uma região proibida onde o vetor de onda  $k$  se torna imaginário, permitindo apenas a propagação do modo de superfície. Os modos de superfície se propagam na direção  $x$ , perpendicular à superfície das camadas (geometria de Voigt), e decaem exponencialmente para pequenos valores do vetor de onda ( $x \rightarrow \pm\infty$ ). Observamos, ainda, o efeito de não-reciprocidade (Eq. 2.40), esperado para este sistema [89].

### **3.4 Polaritons Magnéticos em Super-Redes Periódicas Metamagnética/Não-Magnética**

Materiais com estruturas antiferromagnéticas têm sido utilizados amplamente na tecnologia de sensores magnetoresistivos e de armazenagem de da-



**Figura 3.3:** Espectro de polaritons magnético, modos de volume (áreas sombreadas e superfície (linha pontilhada), em uma super-rede ferromagnética/não-magnética com  $d_1 = d_2 = 5 \times 10^{-4}cm$  e  $\mu_0 H_0 = 1T$ .

dos, principalmente depois da descoberta de materiais com magnetoresistência colossal, também conhecidos como efeito válvula de spin [90, 91]. Dentre os materiais que apresentam características antiferromagnéticas em sua estrutura nós destacamos os metamagnetos (veja seção 2.5).

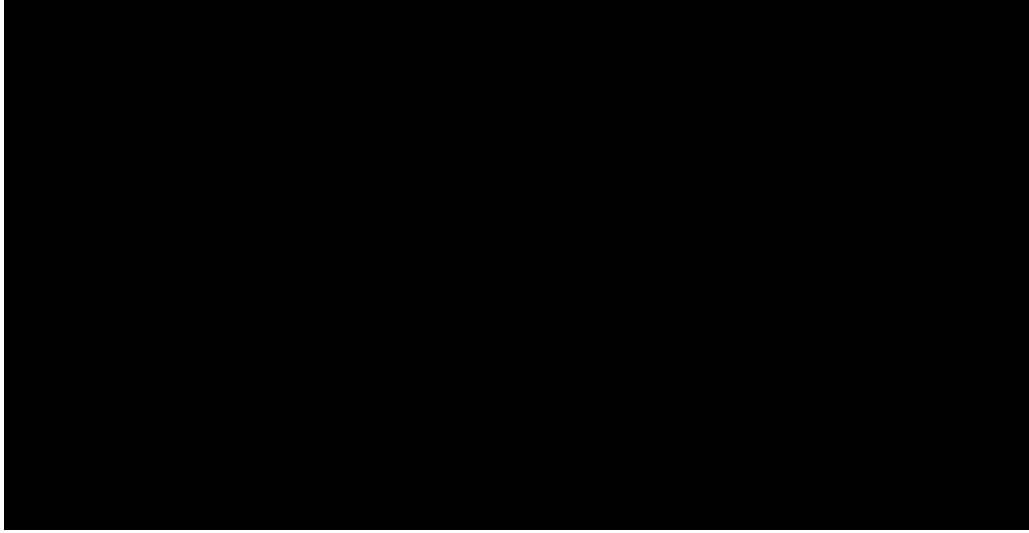
Materiais metamagnéticos tais como o  $FeBr_2$  e o  $FeCl_2$  apresentam anisotropia magnética muito grande comparada à fraca ligação antiferro-

magnética entre camadas, deste modo, qualquer fase de spin-flop intermediária não existe entre as fases FM e AFM quando submetidas a campos aplicados.

A nossa geometria é ilustrada na Fig. 3.4. O tensor permeabilidade magnética  $\mu$  é dado por

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & -i\mu_2 \\ 0 & \mu_3 & 0 \\ i\mu_2 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

onde  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são dados pelas Eqs. (2.81) e (2.82), respectivamente, e  $\mu_3$  é uma constante positiva.



**Figura 3.4:** Geometria da super-rede periódica metamagnética/não-magnética.

Vamos, novamente, calcular a relação de dispersão utilizando a teoria do meio efetivo. O tensor dielétrico efetivo ( $\varepsilon_{eff}$ ) é dado pela Eq. (2.50). O tensor permeabilidade magnética efetivo ( $\mu_{eff}$ ) é dado por:

$$\mu_{eff} = \begin{pmatrix} \mu_{1eff} & 0 & -i\mu_{2eff} \\ 0 & \mu_{3eff} & 0 \\ i\mu_{2eff} & 0 & \mu_{1eff} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

onde  $\mu_{1eff}$  e  $\mu_{2eff}$  são dados pelas Eq. (3.52) e (3.53), respectivamente.  $\mu_{3eff}^{-1} = \mu_3^{-1}f_a + \mu_3^{-1}f_b$ .

A relação de dispersão para os polaritons, que se propagam no meio efetivo infinito, segue das equações de Maxwell. Depois de eliminar a componente do campo elétrico  $\vec{E}$  nessas equações, obtemos a seguinte expressão para o campo magnético  $\vec{H}$ :

$$\vec{k} \times \varepsilon_{eff}^{-1} \cdot (\vec{k} \times \vec{H}) + q_0^2 \mu_{eff} \cdot \vec{H} = 0, \quad (3.3)$$

onde  $q_0(= \omega/c)$  é o vetor de onda no vácuo,  $\omega$  é a frequência angular e  $\varepsilon_{eff}^{-1}$  é a inversa da Eq. (2.50). Já que  $x$  e  $z$  são equivalentes supomos que  $\vec{k} = (k_x, k_y, 0)$  e a Eq. (3.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} q_0^2 \varepsilon_{\perp} \mu_{1eff} - k_y & k_x k_y & -i q_0^2 \varepsilon_{\perp} \mu_{2eff} \\ k_x k_y & q_0^2 \varepsilon_{\perp} \mu_{3eff} - k_x & 0 \\ i q_0^2 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \mu_{2eff} & 0 & q_0^2 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \mu_{1eff} - k_x - k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Aqui,  $\varepsilon_{\perp}$  e  $\varepsilon_{\parallel}$  são as componentes  $xx(=zz)$  e  $yy$ , respectivamente, do tensor dielétrico efetivo dado pela Eq. (2.50).

A Eq. (3.4) é um conjunto de três equações homogêneas lineares satisfeitas por  $\vec{H}$  no meio efetivo. A condição para a solução não-trivial é dada por

$$\varepsilon_{\parallel}\mu_{3eff}\alpha^4 - (\varepsilon_{\parallel}\mu_{1eff}k_3^2 + \varepsilon_{\perp}\mu_{3eff}k_1^2)\alpha_2 + k_3^2(\varepsilon_{\perp}\mu_{1eff}k_1^2 + q_0^2\mu_{2eff}^2\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}) = 0, \quad (3.5)$$

onde

$$k_1^2 = k^2 - q_0^2\varepsilon_{\parallel}\mu_{1eff}, \quad (3.6)$$

$$k_3^2 = k^2 - q_0^2\varepsilon_{\perp}\mu_{3eff}. \quad (3.7)$$

Aqui, definimos também que  $\alpha^2 = -k_y^2$  e  $k = k_x$ . A solução para a Eq. (3.5) é determinado por:

$$\begin{aligned} \alpha^2 = & k^2 \left( \frac{\varepsilon_{\parallel}\mu_{1eff} + \varepsilon_{\perp}\mu_{3eff}}{2\varepsilon_{\parallel}\mu_{3eff}} \right) - q_0^2\varepsilon_{\perp}\mu_{1eff} \\ & \pm \left( k^4 \left( \frac{\varepsilon_{\parallel}\mu_{1eff} - \varepsilon_{\perp}\mu_{3eff}}{2\varepsilon_{\parallel}\mu_{3eff}} \right)^2 + \frac{q_0^2k_3^2\varepsilon_{\perp}\mu_{2eff}^2}{\varepsilon_{\parallel}\mu_{3eff}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Fazendo  $\alpha = 0$  na expressão acima temos duas soluções [80]:

$$k^2 = q_0^2\varepsilon_{\parallel}\mu_V, \quad (3.9)$$

para as janelas de superfície, onde  $\mu_V = \mu_{1eff}\mu_{2eff}^2/\mu_{3eff}$ . As fronteiras de volume contínuas são dadas por

$$k^2 = q_0^2\varepsilon_{\perp}\mu_{3eff}, \quad (3.10)$$

que é análogo para a linha da luz desde que  $\varepsilon_{\perp}$  e  $\mu_{3eff}$  sejam constantes.

Para derivar a relação de dispersão dos polaritons de superfície, consideramos uma interface em  $y = 0$  (Fig. 3.4), entre a super-rede e o vácuo, para obter as soluções das equações de Maxwell. De posse dessas soluções, vamos aplicar as condições de contorno eletromagnética em  $y = 0$ , isto é, continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético. Depois de um pouco de álgebra, a relação de dispersão dos modos de superfície é dada por [80]

$$\begin{aligned} \frac{k_3^2}{\alpha_0 \mu_{3eff}} [\varepsilon_{\perp} k_1^2 + \varepsilon_{\parallel} \alpha_1 \alpha_2 + \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \alpha_0 (\alpha_1 + \alpha_2)] \\ + \varepsilon_{\parallel} \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) \\ + \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \alpha_0 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2) \\ - \varepsilon_{\perp}^2 \alpha_0 k_1^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aqui,  $\alpha_0 = k^2 - q_0^2$  e  $\alpha_1, \alpha_2$  são as duas raízes da Eq. (3.8). No limite magnetostático (ou não-retardado)  $k \gg q_0$ . Neste caso, é fácil ver que  $k_1 = k_2 = \alpha_0 = k$ , também

$$\alpha_1 = \left( \frac{\mu_1}{\mu_3} \right)^{1/2} k \quad (3.12)$$

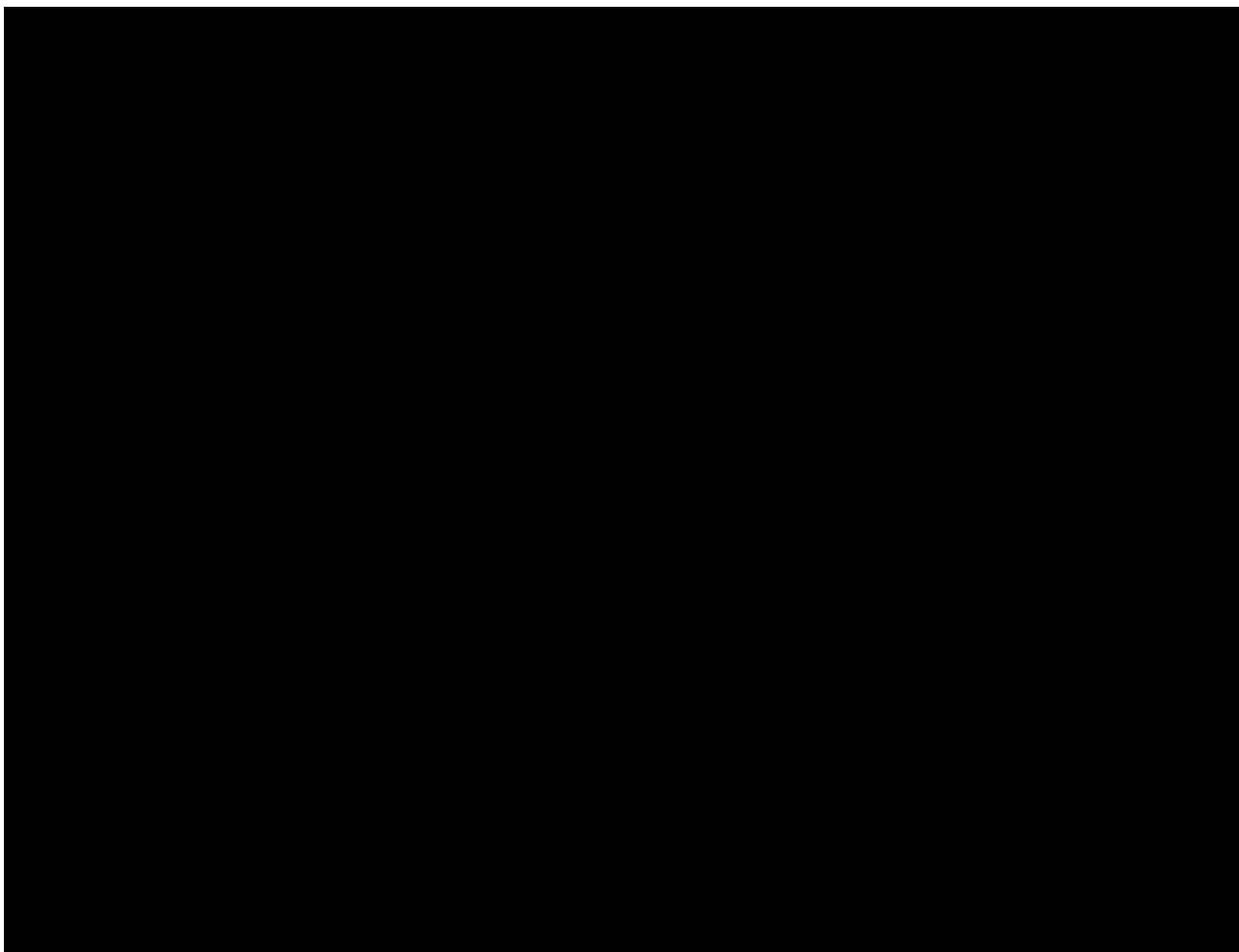
e

$$\alpha_2 = \left( \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \right)^{1/2} k. \quad (3.13)$$

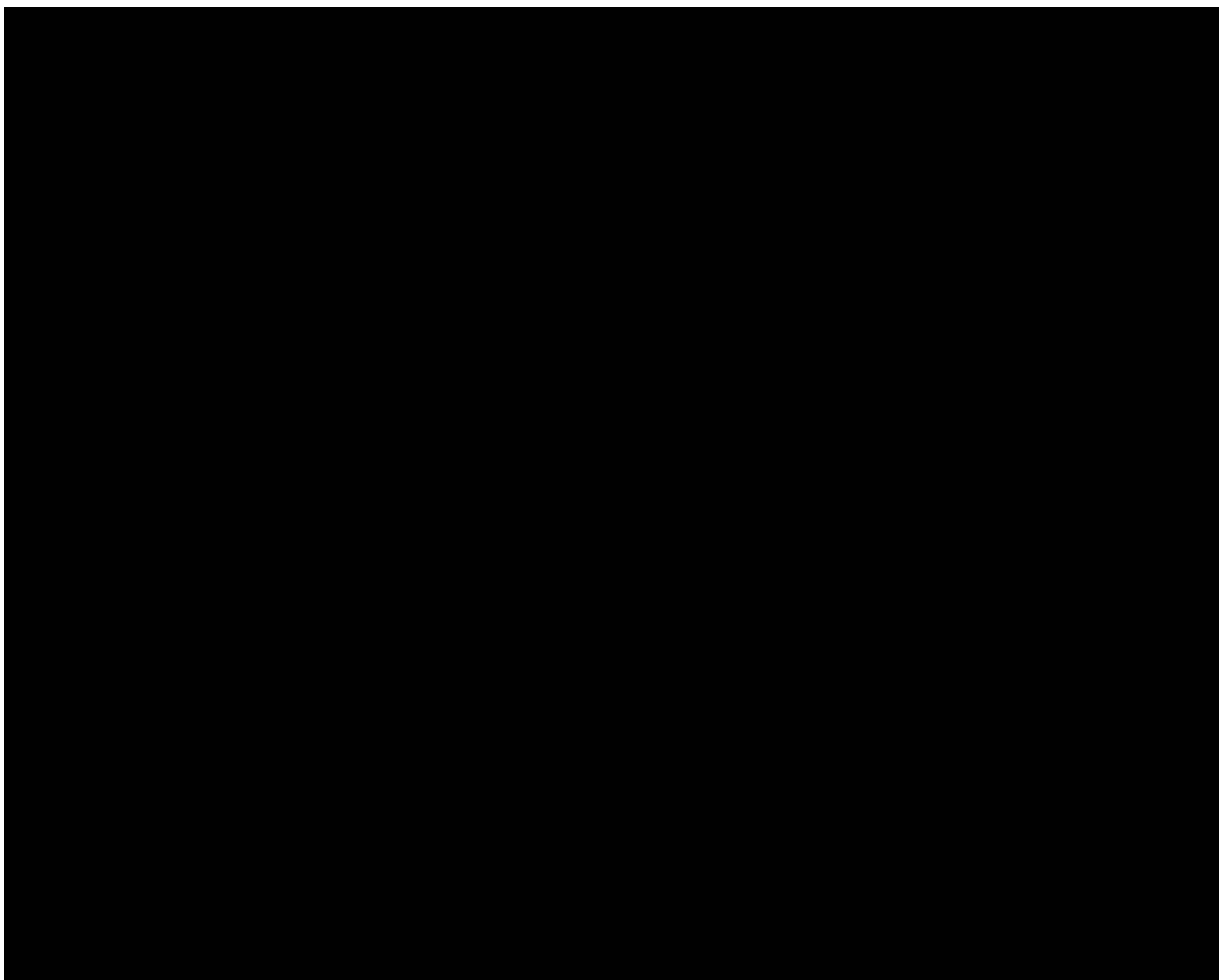
Agora apresentaremos alguns resultados numéricos para que possamos caracterizar os espectros de polaritons magnéticos, que podem se propagar na estrutura periódica que descrevemos anteriormente. Para esta estrutura consideramos no meio  $A$  os metamagnetos  $\text{FeBr}_2$  e  $\text{FeCl}_2$  na fase AFM, e no meio  $B$  um material não-magnético. As Figs. 3.5 e 3.6 mostram a relação de dispersão dos polaritons magnéticos para os modos de volume ( $\omega/2\pi c$  versus  $k/2\pi$ ),



que estão representados por áreas sombreadas. Aqui, estamos considerando o campo externo aplicado  $H_0$  nulo. Na Fig. 3.5a (3.6a) ilustramos o caso  $f_a = 1$  correspondendo a uma amostra semi-infinita do metamagneto  $\text{FeBr}_2$  ( $\text{FeCl}_2$ ), onde há duas regiões de volume. Da mesma forma que definimos na seção 2.4  $f_a (= a/L)$  é a fração de ocupação do material  $A$  na super-rede. Nas Figs. 3.5b-3.5d (3.6b-3.6d) fizemos uma análise variando o valor de  $f_a$ . A proporção que diminuimos o seu valor as duas bandas de volume tendem a se colapsar, ocorrendo um aumento da banda de volume de altas frequências e uma diminuição da banda de volume de baixas frequências.



**Figura 3.5:** Espectro dos polaritons de volume numa super-rede periódica metamagnética ( $\text{FeBr}_2$ )/não-magnética com  $H_0 = 0$ . (a)  $f_a = 1$ , (b)  $f_a = 0.8$ , (c)  $f_a = 0.5$  e (d)  $f_a = 0.2$ .



**Figura 3.6:** O mesmo da Fig. 3.5 para o metamagneto  $\text{FeCl}_2$ .

### 3.5 Conclusões

Neste capítulo desenvolvemos uma teoria para a propagação dos polaritons magnéticos em estruturas periódicas, formadas pela superposição de materiais magnéticos e não-magnéticos, alternadamente. Estudamos esta propagação no ferromagneto Fe (na seção 3.3) e nos metamagnetos FeBr<sub>2</sub> e FeCl<sub>2</sub> (na seção 3.4). Na resolução deste problema utilizamos a teoria do meio efetivo, que é apropriada para descrever excitações na região do infravermelho distante, correspondendo ao regime de grandes comprimentos de onda, ou seja,  $\lambda \gg L$ . Mostramos para o caso ferromagnético que o espectro apresenta duas bandas de volume e que na região proibida para propagação destes modos há um modo de superfície na região negativa de  $k$  exibindo um aspecto de não reciprocidade. No espectro dos polaritons magnéticos na super-rede metamagnética/não-magnética mostramos que as duas regiões permitidas para a propagação dos modos de volume são diretamente influenciadas com a variação da espessura do material metamagnético (e/ou não-magnético), tendendo a entrar em colapso com a sua diminuição.

No próximo Capítulo vamos estender o estudo da propagação dos polaritons magnéticos para super-redes quasi-periódica modeladas pela sequência matemática de Fibonacci. Para tanto, vamos utilizar o formalismo da matriz-transferência. Nosso objetivo será encontrar a localização do espectro para estudar as suas propriedades de escala e a sua fractalidade.

## Capítulo 4

# Polaritons em Super-redes Metamagnéticas Periódicas e Quasi-Periódicas: Teoria Microscópica

### 4.1 Introdução

Desde a descoberta da fase icosaédrica numa liga de Al-Mn por Shechtman et al. [93], pesquisas em estruturas quasi-periódicas (ou quasi-cristais) têm chamado muita atenção, por diversos motivos. Um desses motivos é que elas exibem um espectro de energia fragmentado mostrando regiões auto-similares. De uma perspectiva estritamente matemática, tem sido provado que seus espectros são conjuntos de Cantor no limite termodinâmico [94]-[96].

Com os avanços ocorridos na fabricação de multicamadas e nas técnicas de caracterização, tais como difração de nêutron ou espalhamento de raio-X, foi possível revelar novas características físicas destas estruturas. Merlin et al [97], motivados pelas idéias de Levine e Steinhardt [98], cresceram a primeira super-rede quasi-periódica baseada na seqüência de Fibonacci. Desde então,

vários trabalhos têm sido publicados no campo dos quasi-cristais unidimensionais [99]-[107]. Estes tipos de sistemas encontram-se classificados como sistemas intermediários entre um cristal periódico e um sólido amorfo [108]-[110]. Uma das principais motivações para se estudar estas estruturas deve-se ao reconhecimento de que a localização de estados eletrônicos, uma das áreas mais estudadas em física da matéria condensada [111], pode ocorrer não apenas em sistemas desordenados mas também em sistemas determinísticos quasi-periódicos [112].

Uma característica bastante interessante destas estruturas quasi-periódicas é o fato delas exibirem propriedades coletivas que são completamente diferentes das de seus constituintes. Isto ocorre por causa da presença de correlações de longo alcance, que são induzidas pela construção destes sistemas. Estas correlações interferem no seu espectro de polariton, definindo assim uma nova descrição de desordem [96, 113, 114]. De fato tratamentos teóricos usando matriz-transferência [102]-[107], demonstram que estes espectros são fractais.

Neste capítulo faremos o cálculo do espectro dos polaritons magnéticos em estruturas, periódicas e quasi-periódicas, compostas de dois materiais,  $A$  (metamagnético) e  $B$  (não-magnético), empilhados alternadamente seguindo a sequência matemática de Fibonacci. Nosso modelo é baseado no formalismo da matriz-transferência, que simplifica muito a álgebra envolvida no problema. Outro aspecto relevante aqui abordado diz respeito à localização e às propriedades de escala do espectro, onde apresentaremos uma análise qualitativa destes resultados, apontando uma distribuição de larguras de bandas de polaritons em altas gerações, o que nos dará uma idéia de suas leis de potência.

## 4.2 Método da Matriz-Tranferência: Super-Rede de Fibonacci.

Sequências geradas por regras substitucionais, como por exemplo a de Fibonacci, têm sido estudadas em várias áreas, incluindo-se a Matemática, Ciência da Computação, Criptografia e, mais recentemente, na Física. A sequência de Fibonacci é talvez a mais antiga de todos que conhecemos. Ela foi formulada em 1202 pelo italiano Leonardo de Pisa (que era conhecido como Fibonacci, que em latin significa ‘filho de Bonacci’) [115], para descrever o crescimento de uma população de coelhos. Esta sequência dá origem a uma série infinita de números que obedecem uma certa relação de recorrência, e cuja razão, entre um número da série e seu antecessor, conduz ao famoso número áureo (‘golden mean’)  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ .

Vamos agora investigar os modos de volume e superfície dos polaritons magnéticos em estruturas que exibem uma desordem determinística, isto é, super-redes que obedecem a sequência de Fibonacci. Para tanto, usaremos os cálculos da seção 2.6.

A estrutura de Fibonacci pode ser crescida experimentalmente pela superposição de dois blocos de construção  $A$  e  $B$ , de modo que o  $n$ -ésimo estágio da super-rede  $S_n$  é dado iterativamente pela regra de recorrência  $S_n = S_{n-1}S_{n-2}$ , sendo  $n \geq 2$ , com  $S_0 = B$  e  $S_1 = A$ . A estrutura de Fibonacci também é invariante sob as transformações  $A \rightarrow AB$  e  $B \rightarrow A$ . As gerações da super-rede de Fibonacci são:

$$S_0 = [B], \quad S_1 = [A], \quad S_2 = [AB], \quad S_3 = [ABA], \quad \text{etc.} \quad (4.1)$$

O número de blocos de construção desta estrutura aumenta de acordo com o

número de Fibonacci, cuja relação de recorrência é

$$F_l = F_{l-1} + F_{l-2}, \quad (4.2)$$

com  $F_0 = F_1 = 1$ . A razão entre o número de blocos de construção  $A$ , e o número de blocos de construção  $B$ , tende para o chamado ‘golden mean number’, quando o número de gerações tende para o infinito. Isto pode ser provado facilmente da seguinte maneira: seja

$$\tau_l = \frac{F_{l-1}}{F_{l-2}}, \quad (4.3)$$

a razão entre o número de blocos  $A$  e  $B$ , na  $l$ -ésima geração da sequência de blocos. Fazendo  $l \rightarrow l - 1$  na Eq. (4.2), e substituindo na Eq. (4.3), teremos:

$$\tau_l = 1 + \frac{F_{l-3}}{F_{l-2}}, \quad (4.4)$$

como  $\tau_{l-1} = F_{l-2}/F_{l-3}$ , temos que

$$\tau_l = 1 + \frac{1}{\tau_{l-1}}, \quad (4.5)$$

Tomando o limite de  $l \rightarrow \infty$  na Eq. (4.5) (que equivale a fazer  $\tau_l = \tau_{l-1} = \tau$ ), encontraremos a seguinte equação,

$$\tau = 1 + \tau^{-1} \quad (4.6)$$

que tem como uma das soluções  $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ .



As matrizes-transferência para as gerações da super-rede de Fibonacci podem ser determinadas através do método da indução. Deste modo, observando o crescimento da célula unitária (Fig. 4.1), podemos calcular estas matrizes da seguinte maneira:

(a) para  $S_0 = [B]$  ou  $S_1 = [A]$

$$T_{S_0} = N_B^{-1}M_B \quad \text{ou} \quad T_{S_1} = N_A^{-1}M_A; \quad (4.7)$$

(b) para  $S_2 = [AB]$

$$T_{S_2} = N_A^{-1}M_B N_B^{-1}M_A; \quad (4.8)$$

(c) para  $S_3 = [ABA]$

$$T_{S_3} = N_A^{-1}M_A N_A^{-1}M_B N_B^{-1}M_A = T_{S_1}T_{S_2}; \quad (4.9)$$

(d) generalizando ( $n \geq 1$ ), temos

$$T_{S_{n+2}} = T_{S_n}T_{S_{n+1}}. \quad (4.10)$$

Com o conhecimento das matrizes  $T_{S_0}$ ,  $T_{S_1}$  e  $T_{S_2}$  podemos então determinar a matriz-transferência para qualquer geração da sequência de Fibonacci.

### 4.3 Resultados Numéricos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados numéricos para que possamos caracterizar os espectros de polaritons magnéticos (modos de volume e superfície), que podem se propagar na estrutura quasi-periódica descrita na seção anterior. Para esta estrutura consideramos o meio  $A$  como o metamagneto  $\text{FeBr}_2$ , nas suas fases FM e AFM. A constante dielétrica deste meio é  $\varepsilon_A = 1.5$ . Os valores aproximados dos parâmetros de troca e anisotropia são conhecidos do



**Figura 4.1:** Células unitárias para as gerações da estrutura de Fibonacci.

experimento de espalhamento Raman [70, 71], e são dados por:  $J = 5.07cm^{-1}$ ,  $\gamma H_A = 7.34kG$ ,  $\gamma M_i^z = 1.2kG$  e  $\gamma M_j^z = 1.45kG$ . Para o meio  $B$ , consideramos o material não-magnético  $ZnF_2$ , cuja constante dielétrica é  $\varepsilon_B = 8$ . Definimos, também,  $R = d_B/d_A = 0.5$  como a razão entre as espessuras das camadas não-magnética e magnética, respectivamente. No cálculo da fase FM do metamagneto  $FeBr_2$  estamos considerando o campo magnético aplicado  $\gamma H_0 = 20kG$ , e para sua fase AFM o campo é nulo.

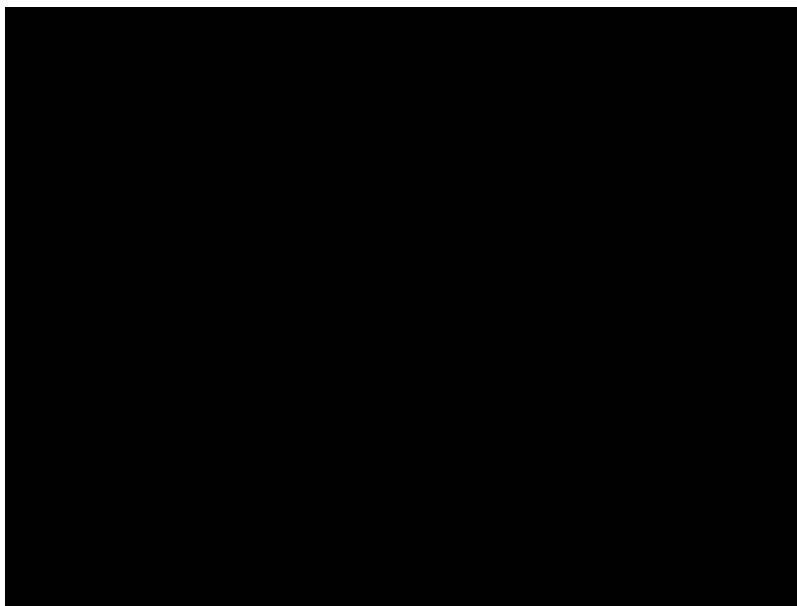
Nas Figs. 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, apresentamos os espectros de polaritons para a super-rede periódica, como também para a super-rede quasi-periódica de Fibonacci. Os espectros são representados graficamente como funções das frequências reduzidas  $\omega/\omega_{FM}$  e  $\omega/\omega_{AFM}$  versus o vetor de onda adimensional  $k_x d_A$ . Em todos estes espectros os modos de superfície são representados por linhas cheias, enquanto os modos de volume são representados por áreas sombreadas, que são limitadas pelas equações  $QL = 0$  e  $QL = \pi$ . As linhas tracejadas, de onde partem os modos de superfície, representam a linha da luz.

Para o caso periódico (que equivale à segunda geração da seqüência de Fibonacci), mostrado nas Figs. 4.2 e 4.3, o espectro dos polaritons magnéticos possui dois ramos bem definidos: um de altas frequências, nos intervalos  $1.3 < \omega/\omega_{FM} < 2.8$  (fase FM) e  $2.25 < \omega/\omega_{AFM} < 4.6$  (fase AFM), e um ramo de baixas frequências, em  $0 < \omega/\omega_{FM} < 1.2$  (fase FM) e  $0 < \omega/\omega_{AFM} < 1.7$  (fase AFM). Os modos de superfície, nas duas fases, apresentam o comportamento de não reciprocidade, ou seja,  $\omega(k) \neq \omega(-k)$ .

Nas Figs. 4.4 e 4.5 apresentamos o espectro de polariton magnético para a quarta geração da seqüência de Fibonacci. Observe que o número de bandas de volume é igual ao número de Fibonacci  $F_4 = 5$ , e de fato, geralmente, este número é sempre igual ao número de Fibonacci da geração correspondente. Os modos de superfície propagam-se a partir da linha da luz, e da mesma forma que o caso periódico, apresentando um comportamento não-recíproco.

O efeito do confinamento resultante da competição entre o ordenamento aperiódico de longo alcance, causado pela estrutura quasi-periódica, e a desordem de curto alcance será o próximo tema do nosso estudo a ser discutido. Para este fim, será levada em consideração uma análise quantitativa da localização e magnitude das bandas do espectro de polariton magnético descrito para a estrutura quasi-periódica de Fibonacci. Também, estudamos o seu comportamento de escala como uma função do número da geração da seqüência. Neste trabalho, fizemos essas investigações apenas para a super-rede metamagnética/não-magnética na fase AFM do material  $FeBr_2$ .

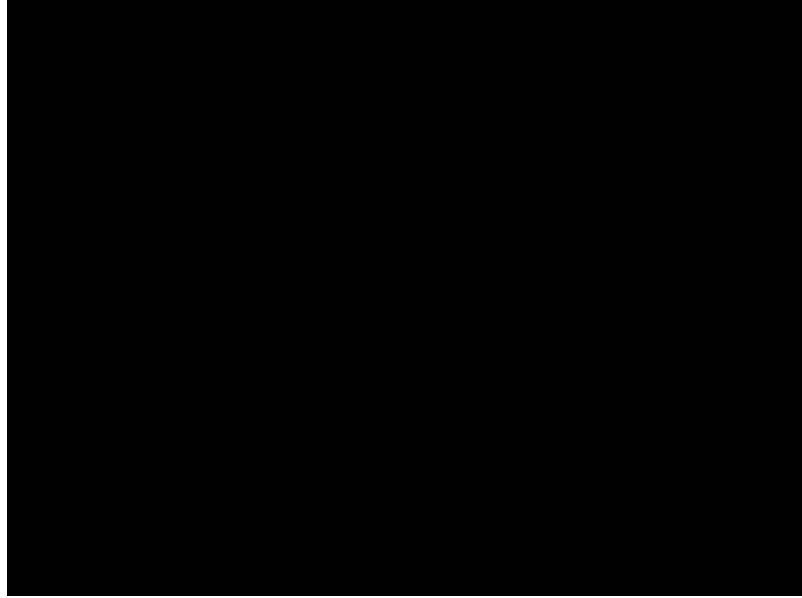
A distribuição da largura das bandas é mostrada na Fig. 4.6 para o vetor de onda adimensional  $k_x d_A = 2.5$ . Nelas pode-se observar as regiões de frequências permitidas e proibidas para a propagação dos polaritons no volume, em função da geração  $n$ , até a décima geração da seqüência de fibonacci na Fig. 4.6(a), o que significa uma célula unitária com 55 blocos do material  $A$  (metamagnético) e 34 blocos do material  $B$  (não-magnético). Na Fig. 4.6(b) mostramos até a



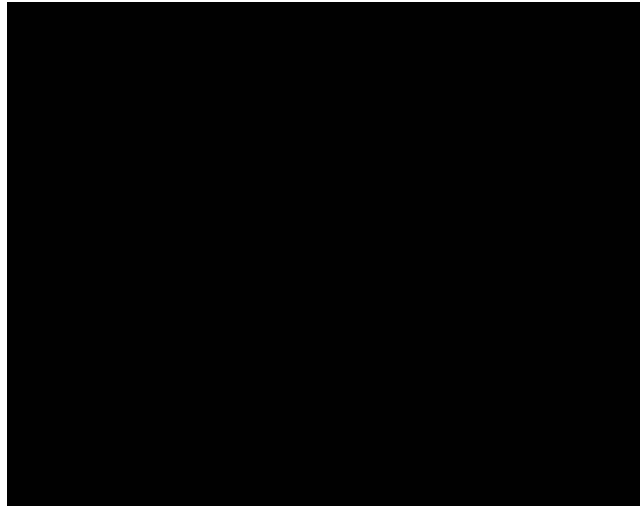
**Figura 4.2:** Espectro de polariton para o metamagneto  $\text{FeBr}_2$  na sua fase FM (caso periódico).

décima segunda geração da seqüência de Fibonacci, com uma célula unitária com 144 blocos do material  $A$  e 89 blocos do material  $B$ . Observe que para grandes valores de  $n$ , as regiões das bandas permitidas encontram-se cada vez mais estreitas, formando uma estrutura típica de um conjunto de Cantor. O aspecto auto-similar do espectro é mostrado na região delimitada pelo retângulo na Fig. 4.6(a), ampliada na Fig. 4.6(b). Como podemos ver, o espectro apresentado na Fig. 4.6(b) é similar ao representado na fig. 4.6(a). Se repetirmos esse processo encontraremos outro padrão auto-similar (veja o retângulo da Fig. 4.6(b)). Resultado igual foi encontrado por Vasconcelos et al. [116] para ondas de spin utilizando, também, o metamagneto  $\text{FeBr}_2$  numa super-rede quasi-periódica de Fibonacci.

A soma total das larguras destas regiões (ou bandas), representada por  $\Delta$ ,

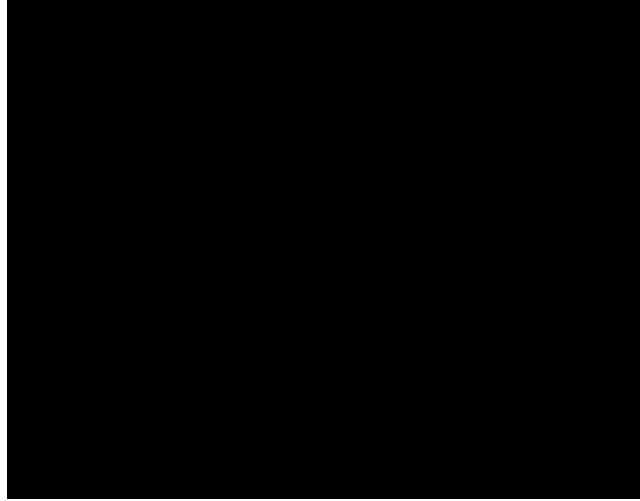


**Figura 4.3:** O mesmo da Fig. 4.2 para a fase AFM do metamagneto FeBr<sub>2</sub>.



**Figura 4.4:** Espectro de polariton para o metamagneto FeBr<sub>2</sub> na sua fase FM para a quarta geração da sequência de Fibonacci.

escala de acordo com a lei de potência  $\Delta \sim F_n^{-\delta}$ , onde  $F_n$  é o número de Fibonacci e  $\delta$  é um índice de escala, que é uma função de  $k_x d_A$ , e que pode ser interpretado como um tipo de coeficiente de difusão. Na Fig. 4.7 mostramos

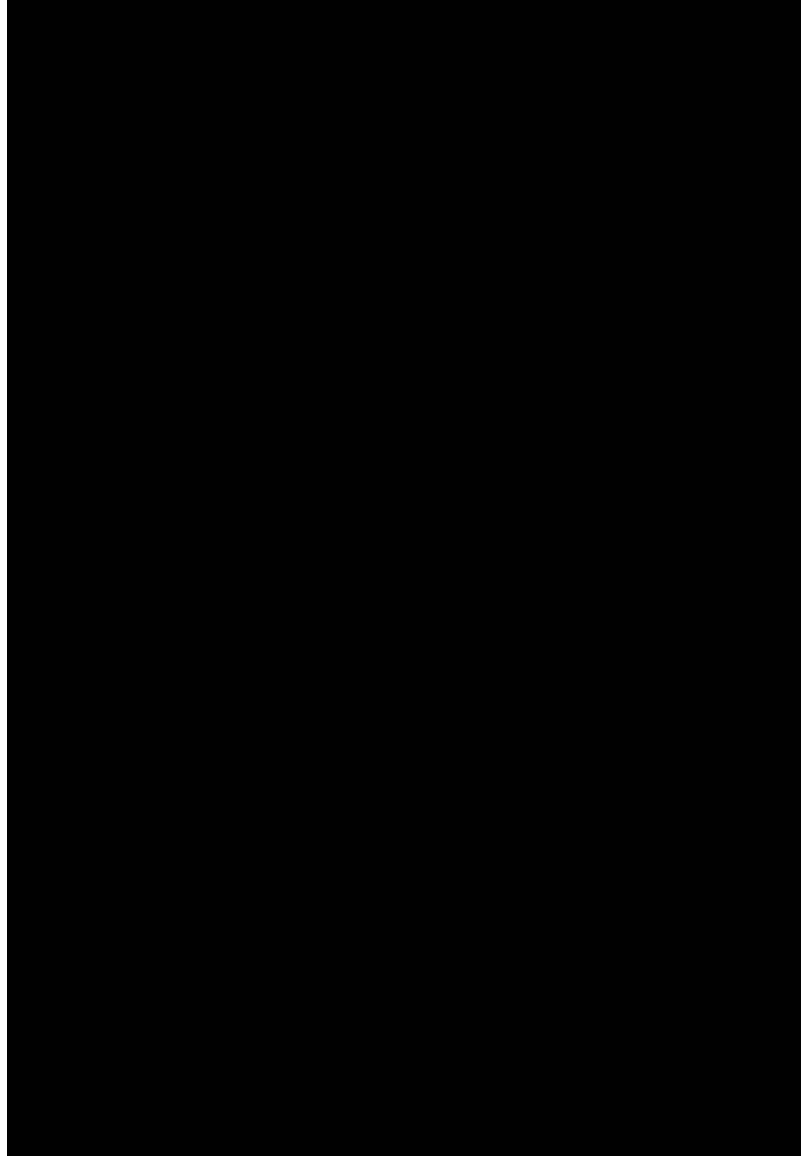


**Figura 4.5:** O mesmo da Fig. 4.4 para a fase AFM do metamagneto  $\text{FeBr}_2$ .

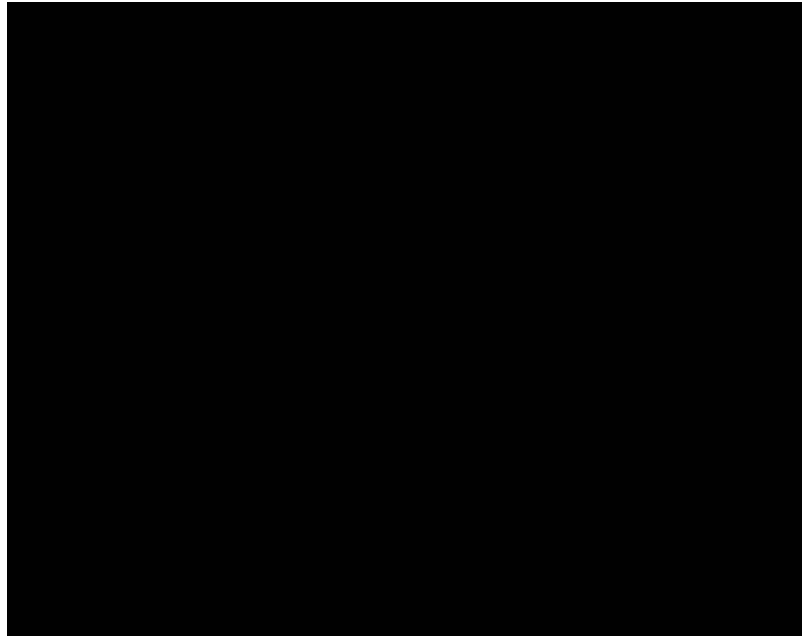
um gráfico log-log para demonstrar esta lei de potência para quatro valores de  $k_x d_A$  (1.0, 1.5, 2.0, 2.5).

## 4.4 Conclusões

Neste Capítulo, foi apresentada uma teoria geral para a propagação dos polaritons magnéticos em super-redes quasi-periódicas, cujos espectros estão ilustrados nas Figs. 4.2 a 4.5. Em seguida, estudamos algumas propriedades destas estruturas (para o caso específico do metamagneto  $\text{FeBr}_2$ ), principalmente àquelas relacionadas com os seus comportamentos auto-similares, cuja fractalidade pode ser descrita em termos de leis de potência apresentada na Fig. 4.7. Também foi dado destaque à discussão acerca da localização dos polaritons magnéticos, evidenciada pela distribuição das larguras de bandas de seus espectros (Fig. 4.6).



**Figura 4.6:** (a) Distribuição das larguras de bandas dos polaritons magnéticos para  $k_x d_A = 2.5$ . O retângulo mostra a janela onde o espectro é auto-similar. (b) O mesmo de (a), mas para a região destacada em (a). O novo retângulo caracteriza outra janela onde o espectro é auto-similar.



**Figura 4.7:** Gráfico log-log para a largura total das regiões permitidas  $\Delta$  versus o número de Fibonacci  $F_n$ .



## Capítulo 5

# Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste trabalho apresentamos uma teoria geral para os espectros de excitações (com destaque aos polaritons magnéticos) em super-redes periódicas e quasi-periódicas que seguem a sequência matemática de Fibonacci. No Capítulo 2 fizemos uma vasta e importante revisão dos principais resultados teóricos publicados em sistemas magnéticos periódicos e quasi-periódicos. Destacamos, nesse capítulo, o estudo em super-redes periódicas terras-raras utilizando o formalismo da teoria do meio efetivo que é bastante adequado para a observação dos polaritons magnéticos nas regiões do infravermelho distante, onde a propagação óptica ocorre frequentemente no regime de longos comprimentos de onda. Os principais resultados estão relacionados com a obtenção da relação de dispersão para os modos de volume e superfície, no limite magnetostático. Também, no Capítulo 3, utilizamos essa aproximação para calcular o espectro em super-redes ferromagnética e metamagnética. No Capítulo 4, estudamos esse espectro em estruturas quasi-periódicas (cuja teoria geral foi discutida no final do Capítulo 2 para super-redes ferromagnética e antiferromagnética) utilizando o metamagneto  $\text{FeBr}_2$ . Dentre os resultados teóricos obtidos nesse capítulo destacamos a fractalidade dos espectros descrita através de leis de escala para as larguras de bandas de volume com o número da geração do sistema quasi-periódico,

em conjunto com as relações de recorrência para as matrizes-transferência da quasi-estrutura de Fibonacci.

As possíveis extensões deste trabalhos são as seguintes:

a) Calcular o espectro de polaritons em uma super-rede quasi-periódica do tipo Fibonacci com três componentes;

b) Considerar outras seqüências quasi-periódicas para crescer a super-rede metamagnética/não-magnética, tais como Thue-Morse e Duplo Período;

c) Introdução de uma polarização não linear nas equações de Maxwell. Isto pode causar o surgimento de uma classe de polaritons de superfície cuja natureza é essencialmente não linear;

d) Estudo teórico dos espectros dos polaritons magnéticos por técnicas de espalhamento inelástico da luz dos tipos Raman e ATR ('Attenuated Total Reflection').

Em suma neste trabalho tratamos do estudo da propagação dos polaritons magnéticos em super-redes que obedecem a seqüência matemática de Fibonacci. Esperamos que nossos resultados motivem outros trabalhos, tanto experimentais quanto teóricos.

# Referências Bibliográficas

- [1] J. P. Sinnecker, RBEF **22** (2000) 396.
- [2] R. Eisberg e R. Resnick, *Física Quântica*, Editora Campus, Rio de Janeiro, 1994.
- [3] I. S. Oliveira e V. L. B. de Oliveira, *Introdução à Física do Estado Sólido*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2005.
- [4] L. Néel, Ann. Phys. **18** (1932) 5.
- [5] L. D. Landau, Phis. Z. Sowjet. **4** (1933) 675.
- [6] J. Becquerel and J. van den Handel, J. de Physique et le Radium **10** (1939) 10.
- [7] F. Bloch, Z. Phys. **61** (1930) 206.
- [8] G. Heller and H. A. Kramers, Proc. K. Akad. Wet. **37** (1934) 378.
- [9] K. Huang, Proc. Roy. Soc. (London) A **208** (1951) 352.
- [10] H. Pelzer, Proc. Roy. Soc. (London) A **208** (1951) 365.
- [11] M. Born and K. Huang, *Dynamical Theory of Crystal Lattices*, Oxford University Press, Oxford, 1954.
- [12] E. L. Albuquerque and M. G. Cottam, *Polaritons in Periodic and Quasiperiodic Structures*, Elsevier, Amsterdam, 2004.

- [13] C. Herring and C. Kittel, *Phys. Rev.* **81** (1951) 869.
- [14] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **38** (1926) 411; **49** (1928) 619.
- [15] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **112** (1928) 661.
- [16] R. Tahir-Kheli and D. ter Haar, *Phys. Rev.* **127** (1962) 88.
- [17] W. E. Parry, *The Many-Body Problem*, Oxford, Clarendon, 1973.
- [18] T. Wolfram and R. E. Dewames, *Prog. Surf. Sci.* **2** (1972) 233.
- [19] M. G. Cottam, *J. Phys. C* **9** (1976) 2121.
- [20] H. Puzskarskii, *Prog. Surf. Sci.* **9** (1979) 191.
- [21] R. W. Damon and J. R. Eshbach, *J. Phys. Chem. Solids* **19** (1961) 308.
- [22] D. L. Mills, *Surface Excitations*, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [23] E. F. Sarmiento and D. R. Tilley, in *Electromagnetic Surface Excitations*, Edited by A. Boardman, Wiley, New York, 1982.
- [24] M. G. Cottam and A. A. Maradudin, in *Surface Excitations*, Edited by A. A. Maradudin, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [25] B. A. Kalinikos and A. N. Slavin, *J. Phys. C* **19** (1986) 7013.
- [26] R. N. Costa Filho, M. G. Cottam and G. A. Farias, *Phys. Rev. B* **62** (2000) 6545.
- [27] R. L. Stamps and R. E. Camley, *J. Appl. Phys.* **56** (1984) 3497.
- [28] R. J. Elliott, in: *Magnetism*, Vol. IIA, Eds., G. T. Rado and H. Suhl, Academic Press, New York, 1965.
- [29] B. R. Cooper, in: *Solid State Physics*, Vol. 21, Eds., F. Seitz, D. Turnbull and H. Ehrenreich, Academic Press, New York, 1968.

- [30] W. C. Koehler, E. O. Wollan, M. K. Wilkinson and J.W. Cable, in: *Rare Earth Research*, Ed., E. V. Kleber, Macmillan, New York, 1961.
- [31] W. C. Koehler, *J. Appl. Phys.* **36** (1965) 1078.
- [32] R. J. Elliott, *Phys. Rev.* **124** (1961) 346.
- [33] H. Miwa and K. Yosida, *Progr. Theoret. Phys. (Kyoto)* **26** (1961) 693.
- [34] T. A. Kaplan, *Phys. Rev.*, **124** (1961) 329.
- [35] M. A. Ruderman and C. Kittel, *Phys. Rev.* **96** (1954) 99.
- [36] T. Kasuya, *Progr. Theoret. Phys. (Kyoto)* **16** (1956) 45.
- [37] K. Yosida, *Phys. Rev.* **106** (1957) 893.
- [38] K. W. H. Stevens, *Proc. Phys. Soc. (London) A* **65** (1952) 209.
- [39] R. J. Elliott and K. W. H. Stevens, *Proc. Roy. Soc. A* **219** (1953) 387.
- [40] N. S. Almeida and D. R. Tilley, *Phys. Rev. B* **43** (1991) 11145.
- [41] V. M. Agranovich and V. E. Kravstov, *Solid State Commun.* **55** (1985) 85.
- [42] N. S. Almeida and D. L. Mills, *Phys. Rev. B* **38** (1988) 6698.
- [43] N. S. Almeida and D. R. Tilley, *Solid State Commun.* **73** (1990) 23.
- [44] E. L. Albuquerque and P. Fulco, *Phys. Stat. Sol. (b)* **182** (1994) 357.
- [45] E. L. Albuquerque and P. Fulco, *Z Phys. B* **100** (1996) 289.
- [46] S. Perkowitz, R. Sudharsanan, K. A. Harris, J. W. Cook Jr., J. F. Schetzina and N. J. Schulman, *Phys. Rev. B* **36** (1987) 9290.
- [47] E. Jahne, A. Roselar and K. Ploog, *Superlattice and Microstructure* **9** (1991) 219.

- [48] B. Samson, T. Dumelow, A. A. Hamilton, T. J. Parker, S. R. P. Smith, D. R. Tilley, C. T. B. Foxon, D. Hilton and K. J. Moore, *Phys. Rev. B* **46** (1992) 2375.
- [49] Y. V. Knyazev and M. M. Noskov, *Phys. Stat. Sol. (b)* **80** (1972) 11.
- [50] N. Raj and D. R. Tilley, *Solid State Commun.* **55** (1985) 373.
- [51] W. M. Liu, G. Eliasson and J. J. Quinn, *Solid State Commun.* **55** (1985) 533.
- [52] G. Borstel, H. Falge and A. Otto, in: *Springer Tracts in Modern Physics*, Vol. 74, 1974, p. 107.
- [53] G. Borstel and H. Falge, *Phys. Stat. Sol. (b)* **83** (1977) 11.
- [54] G. Borstel and H. Falge, *Appl. Phys.* **16** (1978) 211.
- [55] D. N. Mirlin, in: *Surface Polaritons*, Eds., V. M. Abranovich and D. L. Mills, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [56] E. L. Albuquerque and L. R. da Silva, *Phys. Lett. A* **218** (1996) 333.
- [57] M. C. Oliveros, N. S. Almeida, D. R. Tilley, J. Thomas and R. E. Camley, *J. Phys.: Condens. Matter* **4** (1992) 8497.
- [58] *Ultrathin Magnetic Structures*, Vols. I and II, Eds., J. A. C. Bland and B. Heinrich, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [59] *Linear and Nonlinear Spin Waves in Magnetic Films and Superlattices*, Ed., M. G. Cottam, World Scientific, Singapore, 1994.
- [60] K. Held, M. Ulmke, N. Blumer and D. Vollhardt, *Phys. Rev. B* **56** (1997) 14469.
- [61] S. Galam, C. S. O. Yokoi and S. R. Salinas, *Phys. Rev. B* **58** (1998) 8370.

- [62] G. C. DeFotis et al, Phys. Rev. B **62** (2000) 6421.
- [63] J. A Mydosh, *Spin Glass: An Experimental Introduction*, Taylor and Francis, London, 1993.
- [64] Z. Neda, Phys. Rev. B **50** (1994) 3011.
- [65] K. Zenmyo and H. Kubo, J. Phys. Soc. Jpn. **65** (1996) 4045.
- [66] J. H. Baskey and M. G. Cottam, Phys. Rev. B, **42** (1990) 4304.
- [67] D. H. A. L. Anselmo, E. L. Albuquerque and M. G. Cottam, J. Appl. Phys. **83** (1998) 6955.
- [68] D. H. A. L. Anselmo, M. G. Cottam and E. L. Albuquerque, J. Phys.: Condens. Matter **12** (2000) 1041.
- [69] J. M. de Sousa, E. L. Albuquerque, D. H. A. L. Anselmo and G. A. Farias, Physica B **324** (2003) 218.
- [70] G. C. Psaltakis et al, J. Phys. C **17** (1984) 1735.
- [71] W. B. Yelon and C. Vettier, J. Phys. C **8** (1975) 2760.
- [72] G. C. Psaltakis and M. G. Cottam, J. Phys. C **15** (1982) 4847.
- [73] A. B. Harris, Phys. Rev. **143** (1966) 353.
- [74] E. S. Guimarães and E. L. Albuquerque, Solid State Commun. **122** (2002) 413.
- [75] N. Raj and D. R. Tilley, Phys. Rev. B **35** (1987) 189.
- [76] E. S. Guimarães and E. L. Albuquerque, J. Appl. Phys. **89** (2001) 7401.
- [77] E. S. Guimarães and E. L. Albuquerque, Phys. Lett. A **307** (2003) 172.
- [78] R. E. Camley and M. G. Cottam, Phys. Rev. B **57** (1987) 189.

- [79] A. Radkoscaya et al, J. Mag. Magn. Mater. **57** (2003) 258.
- [80] F. G. Elmezghi, N. C. Constantinou and D. R. Tilley, Phys. Rev. B **51** (1995) 11515.
- [81] J. Barnas, J. Phys.: Condens. Matter **2** (1990) 7173.
- [82] *Molecular Beam Epitaxy and Heterostructures*, L. L. Chang and K. Ploog, Eds., Plenum, New York, 1985.
- [83] *The Technology and Physics of Molecular Beam Epitaxy*, E. H. Parker, Ed., Plenum, New York, 1985.
- [84] J. George, Preparation of Thin Films, New York, 1992.
- [85] M. Jaros, *Physics and Applications of Semiconductor Microstructures*, Oxford University Press, Oxford, 1989.
- [86] L. Esaki and R. Tsu, IBM J. Res. Develop. **14** (1970) 61.
- [87] U. Fano, Phys. Rev. **103** (1956) 1202.
- [88] J. J. Hopfield, Phys. Rev. **112** (1958) 1555.
- [89] R. E. Camley, Surf. Sci. Rep. **7** (1987) 103.
- [90] B. Dieny, V. Speriosu, S. P. Parkin and D. Wilhoit, J. Appl. Phys. **69** (1991) 4774.
- [91] M. Baibich, J. Broto, A. Ferd, F. Nguyen Van Dau and F. Petroff, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 2472.
- [92] M. S. Vasconcelos, D. H. A. L. Anselmo and C. G. Bezerra, Solid State Commun. **135** (2005) 673.
- [93] D. Shechtman, I. Blench, D. Gratias and J. W. Cahn, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 1951.



- [94] A. Süto, J. Stat. Phys. **56** (1989) 525.
- [95] J. Bellisard, B. Iochum, E. Scoppola and D. Testard, Commun. Math. Phys. **125** (1989) 527.
- [96] J. Bellisard, A. Borier and J. M. Ghez, Commun. Math. Phys. **135** (1991) 379.
- [97] R. Merlin, K. Bajema, R. Clarke, F. Y. Juang and P. K. Bhattacharya, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1768.
- [98] D. Levine and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 2477.
- [99] R. Merlin, K. Bajema J. Nagle and K. Ploog, J. Phys. (Paris) Colloq. **48** (1987) C5.
- [100] M. Kohmoto and Y. Oono, Phys. Lett. A **102** (1984) 145.
- [101] Z. Cheng, R. Savit and R. Merlin, Phys. Rev. B **37** (1988) 4375.
- [102] M. Kohmoto and J. R. Banavar, Phys. Rev. B **34** (1986) 563.
- [103] M. Kohmoto, B. Sutherland and K. Iguchi, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 2436.
- [104] M. Kohmoto, B. Sutherland and C. Tang, Phys. Rev. B **35** (1987) 1020.
- [105] M. Kolár and M. K. Ali, Phys. Rev. B **39** (1989) 426.
- [106] M. Kolár and M. K. Ali, Phys. Rev. B **41** (1990) 7108.
- [107] M. Kolár, M. K. Ali and F. Nori, Phys. Rev. B **43** (1991) 1034.
- [108] P. J. Steinhardt and S. Ostlund, *The Physics of Quasicrystals*, World Scientific, Singapore, 1987.
- [109] C. Janot, *Quasicrystals: a Primer*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

- [110] M. Senechal, *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [111] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 287.
- [112] J. B. Sokoloff, *Phys. Rep.* **126** (1985) 189.
- [113] F. Axel and H. Terauchi, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 2223.
- [114] J. M. Luck, *Phys. Rev. B* **39** (1989) 5834.
- [115] *The Dictionary of Scientific Biography*, Ed., C. C. Gillispie, Charles Scribner's Sons, New York, 1979-1990.
- [116] M. S. Vasconcelos, P. W. Mauriz, U. L. Fulco and E. L. Albuquerque, *Phys. Lett. A* **363** (2007) 322.