



Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Centro de Ciências Exatas e da Terra  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística

**Anna Rafaella da Silva Marinho**

**Modelo de Risco com Dependência entre os Valores  
das Indenizações e seus Intervalos entre Ocorrências**

Natal, janeiro de 2014

Anna Rafaella da Silva Marinho

## **Modelo de Risco com Dependência entre os Valores das Indenizações e seus Intervalos entre Ocorrências**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Probabilidade e Estatística

Orientadora:  
Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Débora Borges Ferreira

Natal, janeiro de 2014

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial  
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Marinho, Anna Rafaella da Silva.

Modelo de risco com dependência entre os valores das indenizações e seus intervalos entre ocorrências / Anna Rafaella da Silva Marinho. - Natal, 2014.

71 f. : il.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Débora Borges Ferreira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística.

1. Probabilidade estatística – Dissertação. 2. Probabilidade de sobrevivência – Dissertação. 3. Carteira de seguros – Dissertação. 4. Transformada de Laplace – Dissertação. 5. Modelo dependente – Dissertação. I. Ferreira, Débora Borges. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET

CDU: 519.2

ANNA RAFAELLA DA SILVA MARINHO

MODELO DE RISCO COM DEPENDÊNCIA  
ENTRE OS VALORES DAS  
INDENIZAÇÕES E SEUS INTERVALOS  
ENTRE OCORRÊNCIAS

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em: 30/01/2014

**Banca Examinadora**



---

Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. DEBORA BORGES FERREIRA – UFRN  
Presidente



---

Prof. Dr. BERNARDO BORBA DE ANDRADE – UFRN  
Examinador Interno



---

Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. CIRA ETHEOWALDA OTINIANO GUEVARA - UnB  
Examinador Externo

Janeiro, 2014

# Dedicatória

À minha mãe, Graça, com amor.

# Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por ter me dado forças e capacidade para chegar até aqui.

Agradeço a minha mãe pelo esforço constante, amor e dedicação que tornou tudo isso possível. À toda a minha família e amigos próximos que sempre me incentivaram a percorrer esse caminho.

À Thiago, meu companheiro nas horas mais alegres e difíceis também, por todas as horas que se dispôs a estudar comigo, por cada palavra e gesto de incentivo.

À Professora Débora pela orientação desse trabalho, pela dedicação, confiança, paciência e ensinamentos preciosos. Sem você nada disso teria sido possível, tens minha eterna gratidão.

À todos os professores do PPGMAE, aos que foram meus professores em disciplinas e por esse motivo contribuíram diretamente para a elaboração desse trabalho e aos demais pelos conselhos e incentivo.

Aos Professores Jacques e Fagner que estiveram em minha pré qualificação e deram as primeiras sugestões ao andamento desse trabalho; ao Professor Juan que esteve em minha qualificação juntamente com o professor Bernardo.

A todos os professores da graduação em especial a Professora Viviane que além de ter sido minha professora na graduação me orientou durante os dois anos de estágio à docência, um exemplo a ser seguido.

Aos professores Bernardo e Cira que participaram da minha banca de defesa, pelas sugestões que contibuíram para a finalização desse trabalho.

Aos amigos: Antonio Marcos, Rafaela, Andressa, Allyson, Jocelânio, Bruno, Herberth, Eduardo, Wênia, Aldemir, Elisângela, Josemir, Hérica e a todos os outros colegas do PPGMAE, pelo aprendizado compartilhado, pela amizade e torcida constante. Foi um prazer estudar/conviver com todos vocês!

À capes pelo auxílio financeiro.

”Cest le temps que tu a perdu  
pour ta rose qui fait ta rose si im-  
portante.”

**Le Petit Prince**

# Resumo

Neste trabalho apresentamos um modelo de risco dependente para descrever o excedente de uma carteira de seguros, com base no artigo "A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals"(Albrecher e Boxma [1]). Obtemos uma expressão exata para a probabilidade de sobrevivência através da Transformada de Laplace da função de sobrevivência do superávit. Ilustramos os resultados obtidos através de exemplos numéricos e investigamos o que acontece ao se ignorar a estrutura de dependência presente no modelo. Estudamos também a probabilidade de sobrevivência para indenizações que possuem distribuição do Tipo Fase, considerando que esta é uma classe de distribuições, computacionalmente tratáveis, bem mais geral.

**Palavras-chave:** Probabilidade de sobrevivência. Carteira de Seguros. Transformada de Laplace. Modelo Dependente. Distribuições do Tipo Fase.



# Abstract

We present a dependent risk model to describe the surplus of an insurance portfolio, based on the article "A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals"(Albrecher and Boxma [1]). An exact expression for the Laplace transform of the survival function of the surplus is derived. The results obtained are illustrated by several numerical examples and the case when we ignore the dependence structure present in the model is investigated. For the phase type claim sizes, we study by the survival probability, considering this is a class of distributions computationally tractable and more general.

**Keywords:** Survival Probability. Insurance Portfolio. Laplace Transform. Dependent Model. Phase Type Distributions.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Considerações Iniciais . . . . .	1
1.2	Conceitos Básicos . . . . .	2
1.2.1	Processo de Poisson . . . . .	2
1.2.2	Transformada de Laplace ou Função Geradora de Momentos . . . . .	3
1.2.3	Transformada Inversa de Laplace . . . . .	4
1.2.4	Função de Variação Limitada . . . . .	4
1.3	Modelo de Risco Clássico . . . . .	5
1.4	Modelo de Risco Dependente . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Probabilidade de Sobrevivência e Solução Exata</b>	<b>9</b>
2.1	Probabilidade de Sobrevivência . . . . .	9
2.2	Solução Exata . . . . .	14
2.3	Modelo Independente . . . . .	17
2.3.1	Probabilidade de Sobrevivência . . . . .	18
2.3.2	Solução Exata . . . . .	19
2.4	Solução exata para o superávit com indenizações do Tipo Fase . . . . .	21
2.4.1	Distribuição do Tipo Fase . . . . .	21
2.4.2	Probabilidade de Sobrevivência para o Superávit com Indenizações do Tipo Fase . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Exemplos Numéricos</b>	<b>26</b>
3.1	Simulação do Excedente de uma Carteira de Seguros . . . . .	26
3.1.1	Método da Composição . . . . .	27
3.2	Resultados Numéricos . . . . .	30
3.3	Considerações Finais . . . . .	37
<b>A</b>	<b>Modelo Dependente de Albrecher e Boxma</b>	<b>39</b>
A.1	Modelo . . . . .	39

A.2	Probabilidade de Sobrevivência no Modelo de Albrecher-Boxma . . . . .	41
A.2.1	Soluções Exatas . . . . .	42
<b>B</b>	<b>Algoritmos de Simulação</b>	<b>51</b>
B.1	Curvas de Sobrevivência . . . . .	51
B.2	Simulação do Superávit $R(t)$ . . . . .	52
B.3	Função Densidade de uma Variável Aleatória do Tipo Fase . . . . .	57

# Lista de Figuras

1.1	Figura ilustrativa do superávit de uma seguradora ao longo do tempo. . . . .	7
2.1	Superávit de uma carteira de seguros no intervalo de tempo $[0, dt]$ dado que até o instante $dt$ não houve pedidos de indenização . . . . .	11
3.1	Simulação do excedente de uma carteira de seguros descrito pelo modelo dependente. . . . .	29
3.2	Simulação do excedente de uma carteira de seguros descrito sem a estrutura de dependência presente no modelo. . . . .	30
3.3	A curva sólida é referente a $\phi_{ind}$ e a curva tracejada a $\phi_{dep}$ . . . . .	34
3.4	Simulação do superávit descrito com e sem dependência. . . . .	35
3.5	A curva sólida é referente a $\phi_{ind}$ e a tracejada a $\phi_{dep}$ . . . . .	36
B.1	Curva sólida é referente a $f1$ e a tracejada a $f2$ . . . . .	52

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais

Não é de hoje que o homem se preocupa com sua segurança financeira. Desde a antiguidade tem se tentado controlar os riscos provenientes das mais diversas ações como, por exemplo, atividades comerciais em geral, adversidades cotidianas/desastres naturais. De acordo com Lemos (2008) [11] os primeiros indícios que se tem a respeito da preocupação do homem com sua estabilidade financeira são os contratos de seguro informais feitos por grupos de vizinhos para compensar as perdas uns dos outros. Um exemplo disso eram os acordos entre os comerciantes que viajavam em caravanas de uma cidade para outra: aquele que tivesse prejuízos, seja com carga ou animal morto, tinha garantido que os demais se uniriam em prol de seu ressarcimento. Entretanto, os primeiros registros formais que se tem de contratos de seguros estão associados à expansão marítima, com a emissão de apólices cuja criação é atribuída a italianos e espanhóis no século XIV. A partir daí a necessidade de quantificar, gerenciar e analisar o risco de crédito inerente à transações financeiras foi se tornando cada vez mais evidente e as atividades envolvendo seguros foram se popularizando.

De acordo com Shiryayev (1999) [18], o mercado financeiro opera sob a incerteza considerando riscos provenientes das mais diversas causas: decisões de investimento, alterações políticas/econômicas, desastres naturais, entre outros. A teoria do risco aborda, principalmente, os riscos de mercado, utilizando modelos matemáticos para prever e gerenciar o risco de crédito.

Neste trabalho, apresentamos um modelo de risco dependente para descrever o excedente de uma carteira de seguros. Entenda-se por seguro, o contrato sob o qual uma das partes, a seguradora, se obriga a indenizar a outra, o segurado, no caso em que ocorra efetivação de um risco considerado no contrato, em troca do recebimento de

um prêmio de seguro. Consideramos os resultados teóricos apresentados no artigo "A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals" por Albrecher e Boxma (2004) [1] para obter a probabilidade de sobrevivência desse excedente. Assim como foi feito no artigo, obtemos a solução exata através do método da transformada de Laplace da função de sobrevivência (veja esse e outros métodos no contexto de ruína em [3]). Destacamos a importância de obter resultados desse tipo, para modelos dependentes, já que na maioria das vezes o que se faz é supor independência entre as variáveis que compõem o modelo e com isso perde-se informação, gerando erro de interpretação. Além disso, a suposição de independência é algo muito restritivo na prática. Investigaremos numericamente o risco de se ignorar a estrutura de dependência entre as variáveis do modelo e apresentaremos uma solução fechada para a probabilidade do superávit considerando que as indenizações têm distribuição do Tipo Fase, visto que essa é uma classe de distribuições, computacionalmente tratáveis.

## 1.2 Conceitos Básicos

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos necessários à compreensão dos cálculos desenvolvidos ao longo desse trabalho.

### 1.2.1 Processo de Poisson

Considere um processo de contagem, por exemplo, o número de pedidos de indenização que chegam em uma seguradora no intervalo de tempo  $(0, t]$ . Suponha que o tempo de chegada de pedido de indenização na empresa de seguros é aleatório. Vamos definir  $T_1$  como sendo o tempo até a chegada do primeiro pedido,  $T_2$  o tempo entre a chegada do primeiro e o segundo pedido, ...,  $T_n$  o tempo decorrido entre as chegadas do  $(n-1)$ -ésimo e o  $n$ -ésimo pedido de indenização. Considerando que a taxa de chegadas de pedidos de indenização é  $\lambda$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Vamos assumir que  $T_1, T_2, \dots$  são variáveis aleatórias independentes e exponencialmente distribuídas com taxa de intensidade  $\lambda$ . Seja  $\tau_n = \sum_{i=1}^n T_i$ . Chamamos  $\tau_i$  de tempo de chegada. Note que  $\tau_i$  é uma soma de variáveis aleatórias independentes e exponencialmente distribuídas com parâmetro  $\lambda$ , logo  $\tau_i$  tem distribuição *Gama* $(n, \lambda)$ ,  $\forall i$ . Para  $t \geq 0$  vamos considerar  $N(t)$  como sendo o número de pedidos de indenização que chegaram à seguradora no intervalo de tempo  $(0, t]$ . Desse modo,

$$N(t) = \max \{n; \tau_n \leq t\},$$

é um processo de Poisson com taxa de chegada  $\lambda$  e  $N(t) \stackrel{d}{=} \text{Poisson}(\lambda t)$ , ver Ross (2010) [16].

**Definição 1.2.1.** *Seja  $\{N(t); t \geq 0\}$ , um processo de contagem que satisfaz:*

- i)  $\mathbb{P}(N(t + dt) - N(t) = 0 | N(s), 0 \leq s \leq t) = e^{-\lambda dt} = 1 - \lambda dt + o(dt)$ ;
- ii)  $\mathbb{P}(N(t + dt) - N(t) = 1 | N(s), 0 \leq s \leq t) = e^{-\lambda dt} \lambda dt = \lambda dt + o(dt)$ ;
- iii)  $\mathbb{P}(N(t + dt) - N(t) > 1 | N(s), 0 \leq s \leq t) = o(dt)$ .

Então esse processo é chamado de Processo de Poisson (ver Kaas et al. (2008) [10]).

## 1.2.2 Transformada de Laplace ou Função Geradora de Momentos

**Definição 1.2.2.** *A Transformada de Laplace ou Função Geradora de Momentos de uma variável aleatória  $X$ , cuja densidade é uma função de variação limitada  $g(t)$  tal que  $g(t) = 0 \forall t < 0$ , é dada por:*

$$\tilde{g}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt,$$

onde  $s$  é uma variável complexa.

A Transformada de Laplace é um mecanismo operacional que facilita o processo de obtenção da solução de equações diferenciais e é um conhecido método para obter solução exata para a probabilidade de sobrevivência de uma carteira de seguros descrita por modelos independentes [3].

**Teorema 1.2.1. (Valor Final)** *Considere  $g(t)$  uma função do tempo ( $t$ ). Se  $s\tilde{g}(s)$  não tiver singularidades na parte direita do plano complexo, isto é, a parte real de  $s$ , ( $Re(s)$ ), e for não negativa, então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{g}(s).$$

Chamamos de valor final o valor que  $g$  assume quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja, o valor final de  $g(t)$  é dado pela igualdade acima.

A demonstração desse teorema foi omitida, porém, pode ser consultada em [13].

### 1.2.3 Transformada Inversa de Laplace

**Definição 1.2.3.** O processo inverso de determinação de uma função  $g(t)$ , onde  $g$  é de variação limitada, a partir da Transformada Inversa de Laplace  $\tilde{g}(s)$  é definida por

$$\tilde{g}^{-1}(s) = g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{g}(s)e^{st} ds, \text{ com } t > 0,$$

onde  $c$ , a abscissa de convergência, é uma constante real e é escolhida com valor superior à parte real de todos os pontos de singularidade de  $\tilde{g}(s)$ .

Visto que o cálculo de inversão é aparentemente complicado, utilizamos métodos mais simples para obtê-la. Sempre que possível, podemos, por exemplo, manipular a expressão de  $\tilde{g}(s)$  a fim de obter outra equivalente que possua transformada inversa tabelada. Um tipo de manipulação mais comumente utilizada é transformar  $\tilde{g}(s)$  em uma soma de frações simples por meio de sua decomposição em frações parciais. As demonstrações das propriedades e teoremas aqui referidos dentre outros detalhes podem ser consultados em Arendt et al (2001) [2].

### 1.2.4 Função de Variação Limitada

**Definição 1.2.4.** Seja  $f$  uma função real definida no intervalo  $[a, b]$ , e seja  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$  uma subpartição de  $[a, b]$ . Definimos

$$p = \sum_1^k [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+,$$

$$n = \sum_1^k [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-,$$

$$t = p + n = \sum_1^k |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Aqui  $r^+$  é definido como sendo  $r$  se  $r \geq 0$  e 0 caso contrário, e  $r^- = |r| - r^+$ . Temos ainda que  $f(b) - f(a) = p - n$ .

Denote

$$P = \sup p,$$

$$N = \sup n$$



e

$$T = \sup t,$$

O supremo é tomado entre todas as possíveis subdivisões de  $[a, b]$ .  $T$  é chamado variação total de  $f$  sobre  $[a, b]$  e  $P$  e  $N$  são, respectivamente, a variação positiva e negativa de  $f$  em  $[a, b]$ . Dizemos que  $f$  é de variação limitada se  $T < \infty$ .

Essa definição e mais detalhes podem ser consultados em [17].

**Teorema 1.2.2.** *Se  $f$  é não decrescente em  $[a, b]$  então  $f$  é de variação limitada nesse intervalo e sua variação é  $V(f, [a, b]) = f(b) - f(a)$ .*

A demonstração desse teorema pode se consultada em [8]

### 1.3 Modelo de Risco Clássico

O Modelo de Risco Clássico é um modelo de Poisson composto a tempo contínuo, desenvolvido por Lundberg-Cramér no início do século XX, para descrever a trajetória do superávit de uma seguradora até um dado instante. Esse modelo considera apenas o capital inicial (reserva em dinheiro necessária para a seguradora entrar em funcionamento), o recebimento de prêmios (importância paga pelos segurados pela contratação do seguro) a uma taxa de entrada constante ao longo do tempo, e as indenizações pagas aos segurados no momento em que os sinistros ocorrem. A reserva ou lucro da seguradora até um dado instante é dada pela soma do capital inicial com os prêmios recebidos descontando-se as indenizações pagas até esse instante.

Numa linguagem formal, utilizando argumentos estocásticos, o superávit descrito através do Modelo de Risco Clássico é definido da seguinte maneira:

$$R(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} B_i,$$

na qual,

- $R(t)$  é o superávit no instante  $t$ ;
- $x \geq 0$  é o capital inicial da seguradora;
- $\{N(t), t \geq 0\}$  é um processo de Poisson com taxa de chegada  $\lambda > 0$  que expressa o número de indenizações a serem pagas em um intervalo de tempo  $(0, t]$ ;

- $\{B_1, B_2, \dots\}$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e independentes de  $N(t)$ , com  $\mathbb{E}(B) = \beta > 0$ , finita e  $B_n$  denota o  $n$ -ésimo pedido de indenização. Neste modelo, supõe-se que o pagamento das indenizações ocorre quando é feito o pedido;
- $c > 0$  é a taxa fixa de prêmios por unidade de tempo.

Note que,

$$\mathbb{E}(R(t)) = \mathbb{E}\left(x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} B_i\right) = x + ct - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} B_i\right).$$

Pela equação de Wald, dado uma sequência de variáveis aleatórias  $B_1, B_2, \dots$ , independentes e identicamente distribuídas e independentes de  $N$ , tal que,

- $N > 0$  é uma variável aleatória inteira e mensurável;
- $\mathbb{E}(B) < \infty$  e  $\mathbb{E}(N) < \infty$ ;

temos,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N B_i\right) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(B).$$

Portanto,

$$\mathbb{E}(R(t)) = x + ct - \lambda t \beta.$$

Veja que para garantirmos que  $E(R(t)) > 0$ ,  $\forall t$  precisamos que  $x + (c - \lambda\beta)t > 0$ ,  $\forall t$ . Assim é natural pensarmos em  $c - \lambda\beta > 0$  como sendo uma condição de segurança necessária para que  $E(R(t)) > 0$ , ou seja, para que a seguradora mantenha-se lucrando em média. Para isso, no Modelo de Risco Clássico, é necessário assumir  $c > \lambda\beta$ .

## 1.4 Modelo de Risco Dependente

Baseados no Modelo de Risco proposto por Albrecher e Boxma (2004) [1], propomos uma nova estrutura de dependência entre as indenizações e seus tempos entre chegadas e apresentamos aqui, um novo modelo, que é uma generalização do Modelo de Risco Clássico.

Novamente,

$$R(t) = x + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} B_j$$

sendo,

- $x \geq 0$ , o capital inicial;
- $c > 0$ , constante, é a taxa de prêmio por unidade de tempo;
- $\{N(t), t > 0\}$  é um processo de Poisson com taxa de chegada  $\lambda > 0$  e representa o número de pedidos de indenização que chegaram à seguradora em  $(0, t]$ .
- $B_1, B_2, \dots$  são variáveis aleatórias não negativas, independentes com função de distribuição  $F$  e com função geradora de momentos bem definida;

Definimos  $T_1, T_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes e exponencialmente distribuídas, com média  $\lambda > 0$  finita, denotando o tempo entre o  $i$ -ésimo e o  $(i - 1)$ -ésimo pedido de indenização. Sejam  $W_1, W_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes e com distribuição comum e independentes de  $T_i, \forall i$ . Esta sequência dará a estrutura de dependência do modelo da seguinte forma:  $W_i$  é um comparativo para o  $i$ -ésimo tempo entre chegadas  $T_i$ , assumiremos que se  $W_i \leq T_i$ , então  $B_i \stackrel{d}{=} F_1(\cdot)$ , senão,  $B_i \stackrel{d}{=} F_2(\cdot)$ . Em outras palavras,

$$B_i \stackrel{d}{=} \begin{cases} F_1, & \text{se } T_i \leq W_i, \\ F_2, & \text{se } T_i > W_i. \end{cases}$$

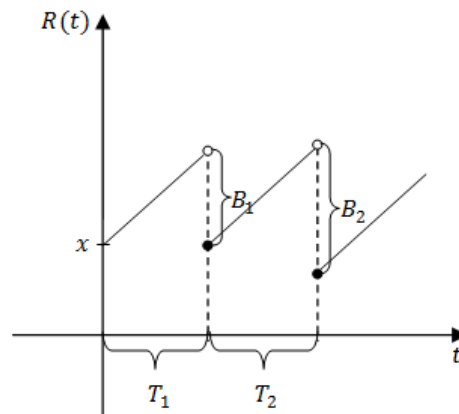


Figura 1.1: Figura ilustrativa do superávit de uma seguradora ao longo do tempo.

Então, podemos reescrever,

$$B_i = B_{F_1} 1_{(T_i \leq W_i)} + B_{F_2} 1_{(T_i > W_i)}.$$

onde  $B_{F_1}$  e  $B_{F_2}$  são variáveis aleatórias independentes de  $W_i$  e  $T_i$ , com  $B_{F_1} \stackrel{d}{=} F_1$  e  $B_{F_2} \stackrel{d}{=} F_2$ . Assumimos que,  $F_1$  e  $F_2$  sejam tais que  $\mathbb{E}[B_{F_1}] < \mathbb{E}[B_{F_2}]$ , visto que de acordo

com a estrutura de dependência que definimos a seguradora passa um tempo maior recebendo prêmios quando o tempo entre chegadas é maior do que o comparativo, daí, tem mais sentido supormos que a média das indenizações é maior do que quando ocorre o oposto. Caso contrário correríamos um risco mais elevado de ficar com excedente negativo.

Note que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_i \leq y) &= \mathbb{P}(B_{F_1} 1_{(T_i \leq W_i)} \leq y) + \mathbb{P}(B_{F_2} 1_{(T_i > W_i)} \leq y) \\ &= \mathbb{P}(B_{F_1} \leq y, T_i \leq W_i) + \mathbb{P}(B_{F_2} \leq y, T_i > W_i) \\ &= \mathbb{P}(B_{F_1} \leq y) \mathbb{P}(T_i \leq W_i) + \mathbb{P}(B_{F_2} \leq y) \mathbb{P}(T_i > W_i).\end{aligned}$$

Relembrando que  $c > \mathbb{E}(B) \frac{\mathbb{E}(N(t))}{t}$  é a condição de segurança para o superávit descrito através do Modelo de Risco Clássico para garantir a sobrevivência do superávit da seguradora. Para este modelo, a condição de segurança é obtida utilizando o mesmo raciocínio que foi usado para o modelo clássico, ou seja, precisamos supor que  $\mathbb{E}(R(t)) > 0$ . Procedendo assim, obtemos a condição de segurança para o Modelo Dependente,

$$c > \mathbb{E}(B) \mathbb{E}^{-1}(T) = [\mathbb{E}(B_{F_1}) \mathbb{P}(T_i \leq W_i) + \mathbb{E}(B_{F_2}) \mathbb{P}(T_i > W_i)] \lambda.$$

O Modelo de Risco Dependente é mais geral do que o clássico, devido a estrutura de dependência entre as variáveis que o compõem. No capítulo que segue, para este modelo específico iremos mostrar, passo-a-passo, como obter uma solução exata para a probabilidade de sobrevivência do superávit por meio da Transformada de Laplace de sua função de sobrevivência. Esse método para obter a solução exata foi baseado em [1] e segundo seus autores, esta parece ser a primeira solução exata já obtida para um modelo dependente de superávit. Até então trabalhava-se apenas com aproximações, por esse motivo pode ser considerada um ponto de partida para a obtenção de soluções analíticas em cenários mais gerais, em modelos mais realistas.

# Capítulo 2

## Probabilidade de Sobrevivência e Solução Exata

### 2.1 Probabilidade de Sobrevivência

Nosso principal interesse nesse trabalho é o cálculo da probabilidade de sobrevivência do excedente de uma carteira de seguros, ou seja, queremos mensurar as chances de uma empresa de seguros permanecer com reserva financeira suficiente para pagar as indenizações que lhe forem solitadas, ao longo do tempo. Probabilidade de sobrevivência é definida como sendo a probabilidade de um indivíduo ou objeto durar mais do que um dado instante. Nesse contexto definimos a probabilidade de sobrevivência como sendo a probabilidade do excedente de uma carteira de seguros se manter positivo ao longo do tempo. Para obter a função de sobrevivência do superávit, a qual chamaremos  $\phi(x)$ , recorreremos a um conhecido mecanismo utilizado para se obter uma forma fechada para essa função (ver [3]): o método da Transformada de Laplace, o qual detalharemos em breve. Antes disso, relembremos que

$$R(t) = x + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} B_j,$$

na qual,

- $x \geq 0$  é o capital inicial;
- $c > 0$  é a taxa de prêmio constante por unidade de tempo;
- $\{N(t); t > 0\}$  é um processo de Poisson com taxa de chegada  $\lambda$ ;

- $\{B_1, B_2, \dots\}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que  $B_i$  denota o valor do  $i$ -ésimo pedido de indenização.

Definimos,

$$\phi(x) = \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t | R(0) = x), \quad (2.1)$$

a probabilidade de sobrevivência de  $R(t)$ .

Relembremos que

- $T_1, T_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes e exponencialmente distribuídas, com média  $\lambda > 0$ , finita.  $T_i$  é o tempo entre o  $i$ -ésimo e o  $(i - 1)$ -ésimo pedido de indenização.
- $W_1, W_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e independentes de  $T_i \forall i$ . Aqui,  $W_i$  é um comparativo para o  $i$ -ésimo tempo entre chegadas,  $T_i$ . Assumiremos que se  $W_i \leq T_i$ , então  $B_i \stackrel{d}{=} F_1(\cdot)$ , senão,  $B_i \stackrel{d}{=} F_2(\cdot)$ ;

e considerando ainda, o processo  $R(t)$  e  $N(t)$  como definimos na Seção 1.2.1, reescrevemos  $\phi(x)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t, N(dt) = 0 | R(0) = x) + \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t, N(dt) = 1 | R(0) = x) \\ &\quad + \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t, N(dt) > 1 | R(0) = x) \\ &= \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t | R(0) = x, N(dt) = 0) \mathbb{P}(N(dt) = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t | R(0) = x, N(dt) = 1) \mathbb{P}(N(dt) = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t | R(0) = x, N(dt) > 1) \mathbb{P}(N(dt) > 1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Calcularemos cada parcela da soma acima separadamente.

Lembrando que  $\mathbb{P}(N(dt) = 0) = 1 - \lambda dt + o(dt)$  (ver Definição 1.2.1), precisamos calcular  $\mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t | R(0) = x, N(dt) = 0)$ . Observe a imagem a seguir.

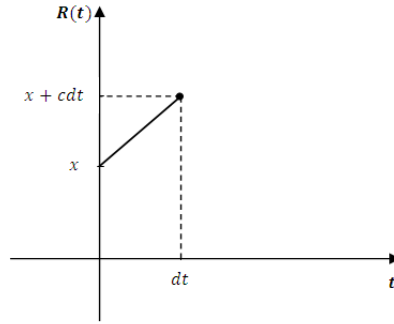


Figura 2.1: Superávit de uma carteira de seguros no intervalo de tempo  $[0, dt]$  dado que até o instante  $dt$  não houve pedidos de indenização

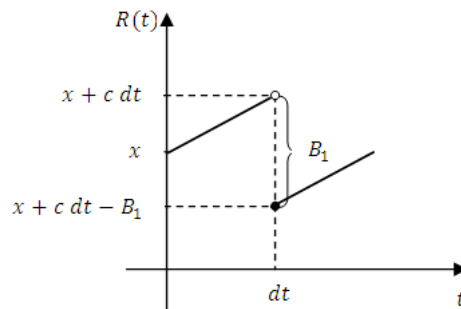
Atentemos para o fato de que no tempo  $t = 0$  o excedente da carteira é  $x$  e que a informação dada,  $N(dt) = 0$ , nos diz que até o tempo  $dt$  não houve pedidos de indenização. Logo,  $R(dt) = x + c dt$  e, então

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t | R(0) = x, N(dt) = 0) \mathbb{P}(N(dt) = 0) = \\
 & = \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t | R(0) = x + c dt) \mathbb{P}(N(dt) = 0) \\
 & = \phi(x + c dt) (1 - \lambda dt + o(dt)).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

A segunda parcela da função de sobrevivência é

$$\mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t, N(dt) = 1 | R(0) = x) \mathbb{P}(N(dt) = 1).$$

Dispondo da informação de que a seguradora recebeu apenas um pedido de indenização (ver figura que segue), temos duas possibilidades para o primeiro tempo entre chegadas:  $T_1 \leq W_1$  ou  $T_1 > W_1$ .



Então, reescrevemos a expressão anterior da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(R_t \geq 0 \forall t, T_1 \leq W_1 | R_0 = x, N(dt) = 1) \mathbb{P}(N(dt) = 1) \\
& + \mathbb{P}(R_t \geq 0 \forall t, T_1 > W_1 | R_0 = x, N(dt) = 1) \mathbb{P}(N(dt) = 1) \\
= & \mathbb{P}(R_t \geq 0 \forall t | T_1 \leq W_1, R_0 = x, N(dt) = 1) \mathbb{P}(T_1 \leq W_1 | R_0 = x, N(dt) = 1) \mathbb{P}(N(dt) = 1) \\
& + \mathbb{P}(R_t \geq 0 \forall t | T_1 > W_1, R_0 = x, N(dt) = 1) \mathbb{P}(T_1 > W_1 | R_0 = x, N(dt) = 1) \mathbb{P}(N(dt) = 1) \\
= & \mathbb{P}(R_t \geq 0 \forall t | T_1 \leq W_1, R_0 = x, N(dt) = 1) \mathbb{P}(T_1 \leq W_1 | N(dt) = 1) \mathbb{P}(N(dt) = 1) \\
& + \mathbb{P}(R_t \geq 0 \forall t | T_1 > W_1, R_0 = x, N(dt) = 1) \mathbb{P}(T_1 > W_1 | N(dt) = 1) \mathbb{P}(N(dt) = 1) \\
= & \mathbb{P}(R_t \geq 0 \forall t | T_1 \leq W_1, R_0 = x, N(dt) = 1) \mathbb{P}(T_1 \leq W_1, N(dt) = 1) + \\
& + \mathbb{P}(R_t \geq 0 \forall t | T_1 > W_1, R_0 = x, N(dt) = 1) \mathbb{P}(T_1 > W_1, N(dt) = 1).
\end{aligned}$$

Como houve um pedido de indenização até o instante  $dt$ , então  $R(dt) = x + c dt - y$ , onde,  $y$  é o valor de  $B_1$ , isto é,  $y$  é o custo do primeiro pedido de indenização. Considerando esse fato temos que a expressão anterior equivale a

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \phi(x + c dt - y) dF_1(y) \mathbb{P}(T_1 \leq W_1, N(dt) = 1) \\
& + \int_0^\infty \phi(x + c dt - y) dF_2(y) \mathbb{P}(T_1 > W_1, N(dt) = 1).
\end{aligned}$$

Precisamos supor que  $x + c dt - y > 0$  caso contrário,  $R(t) < 0$  e não faria mais sentido calcular sua probabilidade de sobrevivência. Sendo assim, a segunda parcela da probabilidade de sobrevivência pode ser reescrita como segue

$$\begin{aligned}
& \int_0^{x+c dt} \phi(x + c dt - y) dF_1(y) \mathbb{P}(T_1 \leq W_1, N(dt) = 1) \\
& + \int_0^{x+c dt} \phi(x + c dt - y) dF_2(y) \mathbb{P}(T_1 > W_1, N(dt) = 1). \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Para a terceira parcela da Equação (2.2) temos, como informação dada, que até o instante  $dt$  houve mais de um pedido de indenização, ou seja,  $R(dt) = x + c dt - y - \sum_{j=2}^{N(dt)} B_j$ . Contudo, sabemos que  $\mathbb{P}(N(dt) > 1) = o(dt)$  (ver Subseção 1.2.1). Portanto,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t | R(0) = x, N(dt) > 1) \mathbb{P}(N(dt) > 1) \\
= & o(dt). \tag{2.5}
\end{aligned}$$



Concluimos, por (2.3), (2.4) e (2.5) que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(x + c dt) (1 - \lambda dt + o(dt)) + \mathbb{P}(T_1 \leq W_1, N(dt) = 1) \int_0^{x+cdt} \phi(x + c dt - y) dF_1(y) \\ &\quad + \mathbb{P}(T_1 > W_1, N(dt) = 1) \int_0^{x+cdt} \phi(x + c dt - y) dF_2(y) + o(dt). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Note que

$$\mathbb{P}(T_1 \leq W_1) = \mathbb{P}(T_1 \leq W_1, N(dt) = 0) + \mathbb{P}(T_1 \leq W_1, N(dt) = 1) + \mathbb{P}(T_1 \leq W_1, N(dt) > 1).$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 \leq W_1, N(dt) = 0) &= \mathbb{P}(T_1 \leq W_1, T_1 > dt) = \mathbb{P}(dt < T_1 \leq W_1) \\ &= \mathbb{P}(T_1 \leq W_1) - \mathbb{P}(T_1 < dt) \end{aligned}$$

e

$$\mathbb{P}(T_1 \leq W_1, N(dt) > 1) = o(dt).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 \leq W_1, N(dt) = 1) &= \mathbb{P}(T_1 \leq W_1) - \mathbb{P}(T_1 < dt) + \mathbb{P}(T_1 < dt) - o(dt) = \\ &= \mathbb{P}(T_1 < dt) - o(dt) \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > W_1, N(dt) = 1) &= \mathbb{P}(N(dt) = 1) - \mathbb{P}(T_1 \leq W_1, N(dt) = 1) = \\ &= \lambda dt + o(dt) - \mathbb{P}(T_1 < dt) + o(dt) = \lambda dt - \mathbb{P}(T_1 < dt) + o(dt). \end{aligned}$$

Além disso, se subtrairmos  $\phi(x)$  em ambos os lados da Equação (2.6), teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(x + c dt) - \phi(x) - \lambda dt \phi(x + c dt) + o(dt) \phi(x + c dt) \\ &\quad + (\mathbb{P}(T_1 < dt) + o(dt)) \int_0^{x+cdt} \phi(x + c dt - y) dF_1(y) \\ &\quad + (\lambda dt - \mathbb{P}(T_1 < dt) + o(dt)) \int_0^{x+cdt} \phi(x + c dt - y) dF_2(y) + o(dt). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por  $dt$  e fazendo algumas manipulações algébricas, temos:

$$\begin{aligned}
0 &= c \frac{\phi(x + c dt) - \phi(x)}{c dt} + \frac{o(dt) \phi(x + c dt)}{dt} - \frac{\lambda dt \phi(x + c dt)}{dt} \\
&+ \frac{\mathbb{P}(T_1 < dt)}{dt} \int_0^{x+cdt} \phi(x + c dt - y) dF_1(y) \\
&+ \frac{o(dt)}{dt} \int_0^{x+cdt} \phi(x + c dt - y) dF_2(y) + \frac{o(dt)}{dt}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Observe, na expressão acima, que  $\mathbb{P}(T_1 < dt) = \lambda dt + o(dt)$ , sendo assim aplicando o limite com  $dt \rightarrow 0$  obtemos,

$$\phi(x) = \frac{c}{\lambda} \phi'(x) + \int_0^x \phi(x - y) dF_1(y), \tag{2.9}$$

a probabilidade de sobrevivência de uma carteira de seguros descrita pelo nosso modelo dependente.

**Observação 2.1.1.** *Convencionamos  $dF_1(y) = f_1(y)dy$ , onde  $f_1$  é a função densidade das indenizações que possuem distribuição  $F_1$ . Consideremos para  $dF_2$  uma convenção análoga.*

Precisamos ainda obter a solução exata para essa probabilidade de sobrevivência e para isso, recorreremos a um conhecido método no contexto da Teoria do Risco que é aplicar a Transformada de Laplace na função de sobrevivência de  $R(t)$ .

## 2.2 Solução Exata

Nesta seção, apresentamos uma solução exata para a função de sobrevivência do processo do superávit de uma carteira de seguros,  $R(t)$ . A importância de ter posse de um resultado como esse é a facilidade de se calcular, numericamente, a probabilidade de sobrevivência desse superávit independente de qual seja a distribuição das indenizações.

Para tanto, defina, para  $\text{Re } s > 0$ ,

$$\tilde{\phi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \phi(x) dx,$$

a transformada de Laplace (Definição 1.2.2) da função de sobrevivência,  $\phi(x)$ .

Note que  $\phi(x)$  é de variação limitada, pois, é uma função não decrescente definida

no intervalo  $[0, 1]$  (Teorema 1.2.2). Então podemos aplicar a Transformada de Laplace na Equação (2.13) e fazendo isso obtemos, para  $\text{Re } s \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \left[ \frac{c}{\lambda} \phi'(x) + \int_0^x \phi(x-y) dF_1(y) \right] dx \\ &= \int_0^\infty e^{-sx} \frac{c}{\lambda} \phi'(x) dx + \int_0^\infty \int_0^x e^{-sx} \phi(x-y) dF_1(y) dx.\end{aligned}$$

Observe que separamos a expressão de  $\tilde{\phi}(s)$  em somas de integrais, pois cada uma delas é bem definida e fazer isso torna o cálculo mais simples. Resolveremos cada uma dessas separadamente:

$$\text{i) } \int_0^\infty e^{-sx} \frac{c}{\lambda} \phi'(x) dx$$

Integrando por partes, obtemos,

$$\begin{aligned}& \frac{c}{\lambda} \left[ e^{-sx} \phi(x) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \phi(x) (-s e^{-sx}) dx \right] \\ &= \frac{c}{\lambda} \left( s \tilde{\phi}(s) - \phi(0+) \right).\end{aligned}$$

$$\text{ii) } \int_0^\infty \int_0^x e^{-sx} \phi(x-y) dF_1(y) dx.$$

Note que

$$\int_0^x e^{-sx} \phi(x-y) dF_1(y) \leq \int_0^x dF_1(y) = F_1(x) - F_1(0) < \infty,$$

visto que,  $e^{-sx} \leq 1$  e  $\phi(x-y) \leq 1$ . Além disso,

$$\int_0^\infty e^{-sx} \phi(x-y) dx \leq \int_0^\infty e^{-sx} dx < \infty,$$

pelo mesmo argumento anterior. Logo, podemos utilizar o Teorema de Fubini [7] para invertermos a ordem de integração de (ii), agindo dessa forma obtemos,

$$\int_0^\infty \int_y^\infty e^{-sx} \phi(x-y) dx dF_1(y),$$

fazendo  $u = x - y$ , temos,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+y)} \phi(u) du dF_1(y) = \int_0^\infty e^{-sy} \left[ \int_0^\infty e^{-su} \phi(u) du \right] dF_1(y) \\ &= \tilde{\phi}(s) \int_0^\infty e^{-sy} dF_1(y) \\ &= \tilde{\phi}(s) \tilde{f}_1(s). \end{aligned}$$

Note que  $\int_0^\infty e^{-sy} dF_1(y)$  é a função geradora de momentos das indenizações que tem função de distribuição  $F_1$ , a qual denotamos por  $\tilde{f}_1(s)$ .

Por (i), (ii), temos,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(s) &= \frac{c}{\lambda} \left( s\tilde{\phi}(s) - \phi(0+) \right) + \tilde{\phi}(s) \tilde{f}_1(s) \\ \lambda \tilde{\phi}(s) &= cs \tilde{\phi}(s) - c\phi(0+) + \lambda \tilde{\phi}(s) \tilde{f}_1(s) \\ c\phi(0+) &= \tilde{\phi}(s) (cs + \lambda \tilde{f}_1(s) - \lambda) \\ \Rightarrow \phi(s) &= \frac{c\phi(0+)}{cs + \lambda \tilde{f}_1(s) - \lambda}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Para concluir a solução analítica da probabilidade de sobrevivência do superávit  $R(t)$  basta apenas obter  $\phi(0+)$ .

Note que, se multiplicarmos  $s$  em ambos os lados da Equação (2.14), teremos,

$$s \tilde{\phi}(s) = \frac{s c \phi(0+)}{cs + \lambda \tilde{f}_1(s) - \lambda}.$$

Fazendo  $s \rightarrow 0$  em ambos os lados dessa igualdade, utilizando o Teorema 1.2.1, verificando o fato que se  $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 1$  então  $\lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{\phi}(s) = 1$ , obtemos

$$1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s c \phi(0+)}{cs + \lambda \tilde{f}_1(s) - \lambda}.$$

Observe, que

$$\tilde{f}_1(0) = \int_0^\infty e^0 dF_1(y) = 1.$$

Sendo assim, em

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s c \phi(0+)}{cs + \lambda \tilde{f}_1(s) - \lambda}$$

temos uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$  e podemos aplicar a Regra de L'Hôpital [7]. Procedendo desse modo, obtemos,

$$1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{c\phi(0+)}{c + \lambda \tilde{f}'_1(s)}, \quad (2.11)$$

onde,

$$\begin{aligned} \tilde{f}'_1(s) &= \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-sy} dF_1(y) = \int_0^\infty -ye^{-sy} dF_1(y) \\ \Rightarrow \tilde{f}'_1(0) &= \int_0^\infty -y dF_1(y) \Rightarrow \tilde{f}'_1(0) = -\mathbb{E}(B_{F_1}). \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\phi(0+) = \frac{c - \lambda \mathbb{E}(B_{F_1})}{c},$$

e com isso, completamos a solução analítica de  $\phi(x)$ , a saber, basta inverter a Transformada de Laplace abaixo:

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{c - \lambda \mathbb{E}(B_{F_1})}{cs + \lambda \tilde{f}'_1(s) - \lambda}. \quad (2.12)$$

Destacamos a semelhança da Equação (2.12), nossa solução exata para a probabilidade de sobrevivência, com a Fórmula de Pollaczek-Khintchine [18], que é uma expressão exata para a probabilidade de sobrevivência para modelos de risco de Poisson composto que possuem apenas variáveis independentes aos pares, isto é, os valores das indenizações são independentes dois a dois e são independentes do processo de Poisson.

## 2.3 Modelo Independente

Nesta seção apresentamos uma solução exata para a probabilidade de sobrevivência desconsiderando a estrutura de dependência do nosso modelo de risco. A definição das variáveis do modelo é idêntica, por esse motivo não iremos repeti-la (ver Seção 1.4). Chamaremos esse "novo modelo" de Modelo Independente.

Os cálculos realizados para obter os resultados que apresentaremos nesta seção são análogos aos que fizemos nas Seções 2.1 e 2.2 para encontrar a solução exata para a probabilidade de sobrevivência do excedente descrito pelo nosso modelo dependente, logo, omitiremos alguns detalhes.

### 2.3.1 Probabilidade de Sobrevivência

Suponha que as indenizações têm como distribuição uma mistura de duas distribuições, isto é, se  $B$  é uma indenização definimos sua distribuição como sendo  $F_{B_1}\mathbb{P}(T \leq W) + F_{B_2}\mathbb{P}(T > W)$ , para simplificar a notação colocamos  $F_{B_1} = F_1$  e  $F_{B_2} = F_2$ . Essa definição é análoga a que demos para as indenizações do modelo de risco dependente na Seção 1.4.

Definimos na Seção 2.1 a função de sobrevivência de  $R(t)$ , que, lembrando, é dada por:

$$\phi(x) = \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t | R(0) = x),$$

que reescrevemos como:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t, N(dt) = 0 | R(0) = x) + \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t, N(dt) = 1 | R(0) = x) \\ &\quad + \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t, N(dt) > 1 | R(0) = x) \\ &= \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t | R(0) = x, N(dt) = 0) \mathbb{P}(N(dt) = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t | R(0) = x, N(dt) = 1) \mathbb{P}(N(dt) = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t | R(0) = x, N(dt) > 1) \mathbb{P}(N(dt) > 1), \end{aligned}$$

obtendo,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(x + c dt) (1 - \lambda dt + o(dt)) + (\lambda dt + o(dt)) \int_0^{x+c dt} \phi(x + c dt - y) \mathbb{P}(T \leq W) dF_1(y) \\ &\quad + (\lambda dt + o(dt)) \int_0^{x+c dt} \phi(x + c dt - y) \mathbb{P}(T > W) dF_2(y) + o(dt) \\ \Rightarrow 0 &= \phi(x + c dt) - \phi(x) - \lambda dt \phi(x + c dt) + o(dt) \phi(x + c dt) \\ &\quad + (\lambda dt + o(dt)) \int_0^{x+c dt} \phi(x + c dt - y) \mathbb{P}(T \leq W) dF_1(y) \\ &\quad + (\lambda dt + o(dt)) \int_0^{x+c dt} \phi(x + c dt - y) \mathbb{P}(T > W) dF_2(y) + o(dt). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por  $\lambda dt$ , aplicando o limite com  $dt \rightarrow 0$  e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos:

$$\phi(x) = \frac{c}{\lambda} \phi'(x) + \int_0^x \phi(x-y) \mathbb{P}(T \leq W) dF_1(y) + \int_0^x \phi(x-y) \mathbb{P}(T > W) dF_2(y), \quad (2.13)$$

### 2.3.2 Solução Exata

Utilizando procedimentos análogos aos que foram usados para obter a Transformada de Laplace da função de sobrevivência do superávit descrito pelo modelo dependente, encontramos

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(s) &= \frac{c}{\lambda} \left( s\tilde{\phi}(s) - \phi(0+) \right) + \tilde{\phi}(s)M_1(s) + \tilde{\phi}(s)M_2(s) \\ \frac{c}{\lambda} \phi(0+) &= \tilde{\phi}(s) \frac{cs + \lambda(M_1(s) + M_2(s))}{\lambda} - \tilde{\phi}(s) \\ \Rightarrow \tilde{\phi}(s) &= \frac{c\phi(0+)}{cs - \lambda + \lambda(M_1(s) + M_2(s))}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

sendo

$$M_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} \mathbb{P}(T \leq W) dF_1(y)$$

e

$$M_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} \mathbb{P}(T > W) dF_2(y).$$

Completamos a solução exata para a probabilidade de sobrevivência do modelo independente calculando a quantidade  $\phi(0+)$ .

Multiplicando ambos os lados da Equação (2.14) por  $s$ , temos

$$s\tilde{\phi}(s) = \frac{sc\phi(0+)}{cs - \lambda + \lambda(M_1(s) + M_2(s))}.$$

Fazendo  $s \rightarrow 0$  em ambos os lados dessa igualdade, obtemos

$$1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sc\phi(0+)}{cs - \lambda + \lambda(M_1(s) + M_2(s))}.$$

Observe, que

$$\begin{aligned} M_1(0) + M_2(0) &= \int_0^{\infty} e^0 \mathbb{P}(T \leq W) dF_1(y) + \int_0^{\infty} e^0 \mathbb{P}(T > W) dF_2(y) \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T \leq W) dF_1(y) + \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T > W) dF_2(y) = 1. \end{aligned}$$

Sendo assim, em

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sc\phi(0+)}{cs - \lambda + \lambda(M_1(s) + M_2(s))}$$

temos uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ , podemos aplicar a Regra de L'Hôpital [7]. Procedendo desse modo, obtemos,

$$1 = \frac{c\phi(0+)}{c + \lambda(M_1'(0) + M_2'(0))}, \quad (2.15)$$

onde,

$$\begin{aligned} M_1'(s) &= \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-sy} \mathbb{P}(T \leq W) dF_1(y) = \int_0^\infty -ye^{-sy} \mathbb{P}(T \leq W) dF_1(y) \\ \Rightarrow M_1'(0) &= \int_0^\infty -y \mathbb{P}(T \leq W) dF_1(y) \Rightarrow -M_1'(0) = \int_0^\infty y \mathbb{P}(T \leq W) dF_1(y). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$-M_2'(0) = \int_0^\infty y \mathbb{P}(T > W) dF_2(y).$$

Logo, podemos concluir que  $-M_1'(0) - M_2'(0) = \beta$  e, portanto,

$$M_1'(0) + M_2'(0) = -\beta. \quad (2.16)$$

Lembrando que

$$\beta = \mathbb{E}(B) = \int_0^\infty y \mathbb{P}(T \leq W) dF_1(y) + \int_0^\infty y \mathbb{P}(T > W) dF_2(y).$$

Substituindo (A.11) em (2.15), obtemos o valor de  $\phi(0+)$ ,

$$\phi(0+) = \frac{c - \lambda\beta}{c},$$

e então completamos a solução analítica de  $\phi(x)$  invertendo a Transformada de Laplace abaixo,

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{c - \lambda\beta}{cs - \lambda + \lambda(M_1(s) + M_2(s))}. \quad (2.17)$$

Destacamos ainda que  $M_1(s) + M_2(s)$  é a função geradora de momentos das indenizações. Vamos denotar essa soma por  $\tilde{f}(s)$ . E com isso, reescrevemos a Equação (2.17)



da seguinte maneira:

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{c - \lambda\beta}{cs + \lambda\tilde{f}(s) - \lambda}. \quad (2.18)$$

## 2.4 Solução exata para o superávit com indenizações do Tipo Fase

Já colocamos a relevância de se apresentar um resultado computacionalmente tratável para a função de sobrevivência do excedente de uma carteira de seguros. Para tanto, consideraremos que as indenizações possuem distribuição do Tipo Fase e assim, obteremos uma forma padrão para obter essa função de sobrevivência.

A seguir definiremos distribuição do tipo fase, apresentaremos algumas propriedades da mesma (ver mais em [3]) e determinaremos uma expressão analítica para a probabilidade de sobrevivência do superávit com indenizações do Tipo Fase.

### 2.4.1 Distribuição do Tipo Fase

**Definição 2.4.1.** *Distribuição do Tipo fase é a distribuição do tempo de absorção de um Processo de Markov, seja este a tempo discreto ou contínuo, com espaço de estados finito (ver Asmussen [3]), donde um desses estados é absorvente e todos os outros são transientes. Denotamos por  $E$  o conjunto de estados transientes.*

Os parâmetros dessa distribuição são: a matriz de intensidade do processo,  $\mathbf{Q}_{n \times n}$ , e  $\boldsymbol{\alpha}_{1 \times n} = (\alpha_i)_{i \in E}$ , com  $n$  sendo o número de fases do processo, é o vetor linha de probabilidades iniciais. Utilizamos a notação:

$$B \stackrel{d}{=} PH(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Q})$$

para dizer que a variável aleatória  $B$  tem distribuição do Tipo Fase. O par  $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Q})$  é chamado de representação da distribuição.

**Definição 2.4.2.** *Uma variável aleatória é dita do tipo fase quando sua função de distribuição for do tipo fase.*

**Exemplo 2.4.1.** *A distribuição hiperexponencial (mistura de exponenciais) é uma distribuição do tipo fase, com  $p$  fases. Para verificar esse fato basta definir uma mistura de  $p$  variáveis com distribuição exponencial cujas taxas de intensidade são  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$*

e função densidade de probabilidade,

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}.$$

Daí, temos  $E = \{1, \dots, p\}$ ,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_p \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$$

Podemos citar também como exemplo de distribuição do tipo fase as distribuições exponencial, Gamma, Erlang e Coxian. Abaixo, um exemplo de distribuição do tipo fase no contexto deste trabalho.

**Exemplo 2.4.2.** *Seja  $B_i$ , o  $i$ -ésimo pedido de indenização, com distribuição hiperexponencial de parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , então*

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} (\alpha_1 \ \alpha_2).$$

Para chegar aos resultados que objetivamos nesse trabalho precisaremos lançar mão de alguns resultados importantes referentes à as distribuições do tipo fase, vejamos a seguir.

**Teorema 2.4.1.** *(Asmussen [3]) Seja  $B$  uma variável aleatória com distribuição do tipo fase cuja representação é  $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Q})$ . Então:*

- a) *Sua função de distribuição acumulada é dada por  $F(x) = 1 - \boldsymbol{\alpha} e^{\mathbf{Q}x} \mathcal{I}$ ;*
- b) *A função densidade de probabilidade é dada pela expressão:  $f(x) = \boldsymbol{\alpha} e^{\mathbf{Q}x} \mathbf{q}$ , onde  $\mathbf{q} = -\mathbf{Q} \mathcal{I}$ , com  $\mathcal{I} = (1)_{n \times 1}$ ;*
- c) *A Transformada de Laplace ou função geradora de momentos, definida como  $\tilde{b}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x) = \boldsymbol{\alpha} (sI - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{q}$ , com  $I$  sendo a matriz identidade de ordem  $n$ .*
- d) *O  $m$ -ésimo momento da variável aleatória  $B$  é dado por  $(-1)^m (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{Q}^{-m} \mathcal{I})$ .*

**Propriedade 2.4.1.** (*Misturas Finitas – Exemplo A5.8 – Asmussen [3]*) Sejam  $B_1, B_2$  variáveis aleatórias do tipo fase com representação  $(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \mathbf{Q}_1), (\boldsymbol{\alpha}^{(2)}, \mathbf{Q}_2)$ , e espaços de estados  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente. Então a mistura  $B = \theta B_1 + (1 - \theta) B_2$ , tal que  $0 \leq \theta \leq 1$ , é do tipo fase com representação  $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Q})$  e espaço de estados  $E = E_1 + E_2$ , a união disjunta de  $E_1$  e  $E_2$ , e

$$\alpha_i = \begin{cases} \theta \alpha_i^{(1)}, & \text{se } i \in E_1, \\ (1 - \theta) \alpha_i^{(2)}, & \text{se } i \in E_2. \end{cases}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}.$$

Ou simplesmente,  $\boldsymbol{\alpha} = (\theta \boldsymbol{\alpha}^{(1)}, (1 - \theta) \boldsymbol{\alpha}^{(2)})$ .

Essa propriedade é extremamente importante para a parte numérica do nosso trabalho, pois, recordando, temos como objetivo obter uma expressão fechada para a probabilidade de sobrevivência para o superávit quando a distribuição das indenizações é do tipo fase, mais precisamente, iremos supor  $F_1$  e  $F_2$  como sendo duas distribuições do tipo fase distintas, então as indenizações serão uma mistura dessas duas tipo fase ponderadas pela probabilidade dos tempos entre chegadas de pedido de indenização serem maiores ou não que um comparativo estabelecido.

**Observação 2.4.1.** A definição de uma mistura de  $n$  variáveis aleatórias do tipo fase,  $2 < n < \infty$ , é análoga a que foi dada para apenas duas variáveis. Não vamos tratar sobre essa extensão aqui, pois não nos seria útil.

## 2.4.2 Probabilidade de Sobrevivência para o Superávit com Indenizações do Tipo Fase

Relembrando que a probabilidade de sobrevivência do excedente de uma carteira de seguros com indenizações de uma distribuição qualquer, descrito pelo modelo dependente, é dada pela inversa da Transformada de Laplace,

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{c - \lambda \mathbb{E}(B_{F_1})}{cs + \lambda \tilde{f}_1(s) - \lambda}.$$

Note que  $\tilde{\phi}(s)$  depende da função geradora de momentos das indenizações que possuem distribuição  $F_1$ . Sendo assim, para obter a probabilidade de sobrevivência do superávit de uma carteira com indenizações do tipo fase, basta determinarmos  $\tilde{f}_1(s)$  e  $\mathbb{E}(B_{F_1})$  considerando esse tipo de distribuição. É o que faremos.

Seja

$$B_i \stackrel{d}{=} \begin{cases} F_1, & \text{se } T_i \leq W_i, \\ F_2, & \text{se } T_i > W_i. \end{cases},$$

ou seja,

$$B_i = B_{F_1} 1_{(W_i \leq T_i)} + B_{F_2} 1_{(W_i > T_i)},$$

onde,  $B_{F_1}$  e  $B_{F_2}$  são do tipo fase e têm representação  $(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \mathbf{Q}_1)$  e  $(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}, \mathbf{Q}_2)$ , respectivamente. Com isso, pelo Teorema 2.4.1 temos que,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(s) &= \int_0^\infty e^{-sy} dF_1(y) \\ &= \int_0^\infty e^{-sy} [\boldsymbol{\alpha}^{(1)} e^{\mathbf{Q}_1 y} \mathbf{q}_1] dy \\ &= \boldsymbol{\alpha}^{(1)} (sI - \mathbf{Q}_1)^{-1} \mathbf{q}_1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

e

$$\mathbb{E}(B_{F_1}) = -\boldsymbol{\alpha}^{(1)} (\mathbf{Q}_1)^{-1} \mathcal{I}. \quad (2.20)$$

**Observação 2.4.2.** A exponencial  $e^{\mathbf{Q}}$  de uma matriz  $\mathbf{Q}_{p \times p}$ , é definida pela expansão usual da série de potências

$$e^{\mathbf{Q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^n}{n!} < \infty.$$

**Propriedade 2.4.2.** Destacamos de [3], as seguintes propriedades fundamentais:

$$i) \quad \frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}.$$

$$ii) \quad \mathbf{A} \int_0^x e^{\mathbf{A}t} dt = e^{\mathbf{A}x} - I.$$

Para entender mais detalhadamente ver exemplos no Apêndice A3 de Asmussen (2000) [3].

**Observação 2.4.3.** Para obter  $\tilde{f}_1(s)$  sem utilizar o Teorema 2.4.1, bastaria lançar mão da Propriedade 2.4.2 de matriz exponencial.

Completamos a solução analítica para a probabilidade de sobrevivência de uma carteira de seguros, com indenizações do tipo fase, combinando as Equações (2.19),

(2.20), (2.12) e aplicando a Transformada Inversa na expressão obtida:

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{c - \lambda (-\boldsymbol{\alpha}^{(1)} (\mathbf{Q}_1)^{-1} \mathcal{I})}{cs + \lambda (\boldsymbol{\alpha}^{(1)} (sI - \mathbf{Q}_1)^{-1} \mathbf{q}_1) - \lambda}. \quad (2.21)$$

Para o superávit descrito desconsiderando a estrutura de dependência, cujas indenizações têm distribuição do tipo fase, a solução exata para a probabilidade de sobrevivência é obtida de modo análogo ao caso dependente, por esse motivo omitiremos os cálculos. Para obter essa solução basta aplicar a Transformada Inversa na equação que segue,

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{c - \lambda (-\boldsymbol{\alpha} (\mathbf{Q})^{-1} \mathcal{I})}{cs + \lambda (\boldsymbol{\alpha} (sI - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{q}) - \lambda}. \quad (2.22)$$

Resumimos os resultados discutidos nesse trabalho na tabela a seguir.

Modelo	Superávit: $R(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} B_i$	Solução analítica para a probabilidade de sobrevivência
Dependente	Estrutura de Dependência: $B_i \stackrel{d}{=} \begin{cases} F_1, & \text{se } T_i \leq W_i, \\ F_2, & \text{se } T_i > W_i. \end{cases}$	$\tilde{\phi}(s) = \frac{c - \lambda \mathbb{E}(B_{F_1})}{cs + \lambda \tilde{f}_1(s) - \lambda}$
Albrecher e Boxma [1]	$T_i \stackrel{d}{=} \begin{cases} \exp(\lambda_2), & \text{se } B_{i-1} \leq W_{i-1}, \\ \exp(\lambda_1), & \text{se } B_{i-1} > W_{i-1}. \end{cases}$	A solução exata é obtida combinando três equações e supondo a distribuição das variáveis que compõem o modelo (ver Apêndice A).
Independente	—	$\tilde{\phi}(s) = \frac{c - \lambda \beta}{cs + \lambda \tilde{f}(s) - \lambda}$

No próximo capítulo, exemplificamos numericamente todos os resultados obtidos aqui, evidenciando como fizemos para chegar em cada um destes resultados.

# Capítulo 3

## Exemplos Numéricos

Nesse capítulo mostraremos alguns exemplos numéricos para ilustrar o comportamento do superávit definido pelo nosso modelo, o Modelo de Risco com Dependência entre os Valores das Indenizações e seus Intervalos entre Ocorrências (ver Seção 1.4). Apresentaremos também, resultados numéricos para ilustrar a função de sobrevivência do superávit. As funções serão todas ilustradas graficamente. Além disso, compararemos essas funções com uma outra função de sobrevivência para a qual ignoramos a estrutura de dependência presente no modelo do superávit. Todos os resultados foram obtidos assumindo que as indenizações possuem distribuição do tipo fase, utilizando os resultados obtidos na Seção 2.4.

Observando os gráficos das funções de sobrevivência e analisando o superávit ao longo do tempo, poderemos verificar se as probabilidades obtidas fazem realmente sentido. Com isso, verificaremos numericamente que há risco de se cometer erro quando se ignora a estrutura de dependência presente no modelo.

### 3.1 Simulação do Excedente de uma Carteira de Seguros

Considere o Modelo de Risco com Dependência entre os Valores das Indenizações e dos seus Intervalos entre Ocorrências, Seção 1.4. Relembremos a estrutura de dependência do modelo:

$$B_i \stackrel{d}{=} \begin{cases} PH(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \mathbf{Q}_1) & \text{se } T_i \leq W_i, \\ PH(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}, \mathbf{Q}_2) & \text{se } T_i > W_i. \end{cases}$$

Para gerar a função superávit  $R(t)$ , ou seja, mostrar o comportamento do superávit ao longo do tempo, precisamos discretizar o processo de chegada das indenizações, para isso vamos considerar o processo a cada chegada de indenização. Por exemplo, denotando  $y$  como sendo o pedido de indenização que chegou no instante  $\tau_i$ , calculamos  $R(\tau_i) = x + c(\tau_i - \tau_{i-1}) - y$ , e fazemos isso para cada indenização que chegue no processo. Inicialmente, precisamos produzir uma amostra dos tempos de ocorrência de cada pedido de indenização. Se denotarmos como  $\tau_i$  o tempo de chegada do  $i$ -ésimo sinistro, temos que  $\tau_i = \sum_{j \leq i} T_j$  (veja Subseção 1.2.1). Sob esse raciocínio teremos que gerar primeiramente os tempos entre chegadas e a partir deles vamos produzir os tempos de chegada.

Fizemos toda a simulação utilizando o software R.

Destacamos, novamente, que estamos considerando duas estruturas para o superávit: uma com a configuração dependente, descrita pelo nosso modelo e outra desconsiderando a estrutura de dependência. Para gerar o processo do superávit descrito pelo nosso modelo dependente fazemos a seguinte comparação: se  $T_i \leq W_i$ , então geramos  $B_i$  com distribuição  $PH(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \mathbf{Q}_1)$ , caso contrário, geramos  $B_i$  com distribuição  $PH(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}, \mathbf{Q}_2)$ . No entanto, é preciso ressaltar que para produzir uma amostra qualquer de uma variável aleatória é necessário conhecer a sua função de distribuição, tendo essa informação em mãos podemos gerá-la de várias formas distintas, porém, neste trabalho consideramos apenas duas: utilizando uma função do R, caso haja, ou através do Método da Composição, o qual descreveremos a seguir. Já para gerar o superávit desconsiderando a estrutura de dependência teremos que a distribuição das indenizações é uma mistura de tipo fase, isto é, simplesmente iremos gerar  $n$  valores de uma variável aleatória que tem distribuição  $F$ , com representação  $PH(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Q})$ . Para tanto, iremos usar o Método da Composição, descrito na sequência.

### 3.1.1 Método da Composição

Como já dissemos anteriormente, existem diversos métodos para gerar valores aleatórios provindos de uma determinada distribuição. Neste trabalho estamos considerando o Método da Composição [19] porque precisamos gerar variáveis aleatórias que são misturas de tipo fase, e este é o método que mais se adequa, visto que a grande maioria das funções de distribuição resultantes desse tipo de mistura não podem ser facilmente invertidas. O Método da Composição, em nosso contexto, funciona da se-

guinte maneira: sabemos que

$$B_i = \mathbb{P}(T_i \leq W_i)B_{F_1} + \mathbb{P}(T_i > W_i)B_{F_2},$$

desse modo, para produzir a sequência  $B_1, B_2, \dots, B_n$  gere  $n$  variáveis aleatórias com distribuição Uniforme Padrão,  $U_1, U_2, \dots, U_n$ ; se  $U_i < \mathbb{P}(T_i \leq W_i)$ , então gere  $B_i$  com distribuição  $F_1$ , caso contrário, gere  $B_i$  com distribuição  $F_2$ .

Abaixo um exemplo de como esse método funciona.

– Rotina implementada no R. [15]–

Recordando que a ideia da simulação é discretizar o processo  $R(t)$  para conseguir simulá-lo, isto é, considerar as chegadas de indenização uma a uma, logo,

1. Geramos  $n$  instantes de tempo entre chegadas de indenização utilizando a função `rexp`;
2. A partir dos tempos entre ocorrências de indenização, obtemos os tempos de chegada.
3. Geramos  $n$  comparativos  $W$ , isso pode ser feito de modo análogo a como foi feito para gerar os tempos entre chegadas, se  $W$  for exponencialmente distribuído. Caso estejamos desconsiderando a estrutura de dependência entre as variáveis do modelo este passo não é necessário.
4. Para gerar os valores das indenizações, caso estejamos considerando o superávit descrito sem a estrutura de dependência, utilizaremos o Método da Composição, lembrando que a distribuição das indenizações é uma mistura de tipo fase com representação  $PH(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Q})$ .

Por outro lado, se considerarmos a estrutura de dependência, fazemos o seguinte:

- Se  $T_i \leq W_i$  então gere  $B_i \stackrel{d}{=} F_1$ ; supondo que  $F_1$  tem representação  $PH(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \mathbf{Q}_1)$ ;
- Se  $T_i > W_i$  então gere  $B_i \stackrel{d}{=} F_2$ ; supondo que  $F_2$  tem representação  $PH(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}, \mathbf{Q}_2)$ ;

**Observação 3.1.1.** Se  $F_1$  e  $F_2$  forem funções de distribuição cujo gerador de números aleatórios seja conhecido, por exemplo, se estamos tratando de um processo com apenas uma fase, sabemos que a distribuição das variáveis é exponencial e conhecemos a função do  $R$  que gera valores desta distribuição, então não precisamos recorrer ao Método da Composição.



5. Calculamos o valor de  $R(t)$  em cada tempo de chegada. Após isso usamos a função `plot` para produzir o gráfico de  $R(t) \times t$  e mostrar o comportamento do superávit ao longo do tempo.

Abaixo, um exemplo. O algoritmo utilizado na simulação dos gráficos pode ser consultado no Apêndice B deste trabalho.

**Exemplo 3.1.1.** *Suponha  $B_{F_1} \stackrel{d}{=} PH(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \mathbf{Q}_1)$ ,  $B_{F_2} \stackrel{d}{=} PH(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}, \mathbf{Q}_2)$ ,  $T \stackrel{d}{=} Exp(1)$ ,  $W \stackrel{d}{=} exp(\frac{1}{2})$ ,  $c = 3$ , o capital inicial é 5 e temos,*

$$\mathbf{Q}_1 = (-2), \quad \mathbf{Q}_2 = (-1), \quad \boldsymbol{\alpha}^{(1)} = (1) \quad e \quad \boldsymbol{\alpha}^{(2)} = (1).$$

*Sendo assim, temos  $B \stackrel{d}{=} PH(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Q})$ , com*

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad \boldsymbol{\alpha} = \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Obtemos os seguintes gráficos:

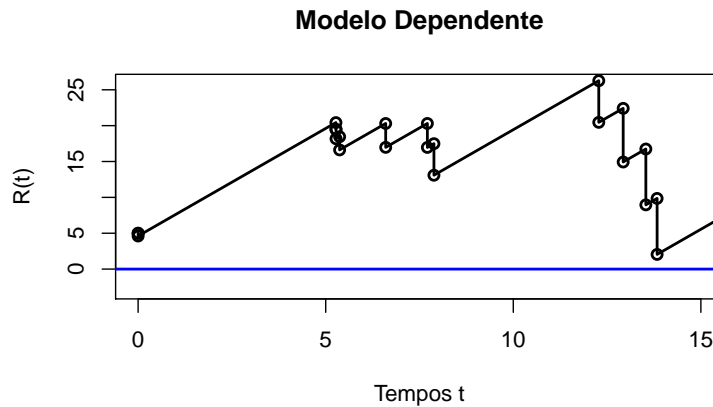


Figura 3.1: Simulação do excedente de uma carteira de seguros descrito pelo modelo dependente.

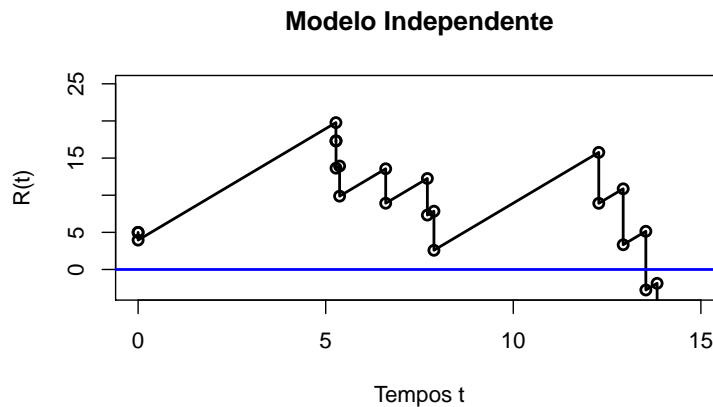


Figura 3.2: Simulação do excedente de uma carteira de seguros descrito sem a estrutura de dependência presente no modelo.

## 3.2 Resultados Numéricos

Nesta seção, apresentamos exemplos numéricos para ilustrar os resultados que foram obtidos ao longo deste trabalho para probabilidade de sobrevivência do excedente descrito pelo nosso modelo de risco dependente. Iremos mostrar, numericamente, o que ocorre ao desconsiderarmos a estrutura de dependência presente no modelo. Para tanto, faremos uma comparação entre o comportamento ao longo do tempo do superávit descrito pelo modelo dependente e o descrito ignorando-se essa dependência, com isso, evidenciaremos o que acontece ao negligenciarmos a estrutura de dependência, o que é muito comum na literatura já que isso facilita a obtenção da função de sobrevivência.

Para obter a função de sobrevivência quando ignoramos a dependência que foi proposta por nós no modelo risco, iremos utilizar o resultado obtido na Seção 2.3.

Mostramos abaixo, os resultados numéricos que foram obtidos computacionalmente com base na teoria que apresentamos no Capítulo 2 deste trabalho. Todos os cálculos foram feitos utilizando o software **Maple 12** e toda a parte gráfica foi obtida no **R**, assim como já havíamos evidenciado. Detalharemos os cálculos realizados através do Maple. Já a rotina utilizada no **R** para construir os gráficos pode ser conferida no Apêndice B deste trabalho.

Relembre que, para um processo de superávit no qual as indenizações são misturas de Tipos Fase, temos que a probabilidade de sobrevivência do superávit é dada pela

Transformada Inversa de Laplace da função

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{c - \lambda \mathbb{E}(B_{F_1})}{cs + \lambda \tilde{f}_1(s) - \lambda}.$$

Expomos a seguir, por meio de um exemplo, como procedemos para obter a probabilidade de sobrevivência do superávit. Destacamos que os cálculos foram feitos no Maple devido a complexidade destes. A variável  $B$  foi definida como sendo uma mistura de duas tipo fase com duas fases cada uma, o que resultou em uma matriz de intensidade  $4 \times 4$  e os cálculos relativos a obtenção da função de sobrevivência do excedente descrito desconsiderando a dependência do modelo, tornam-se extremamente trabalhosos de se fazer manualmente considerando uma matriz dessa ordem.

**Exemplo 3.2.1.** *Suponha,  $B_{F_1} \stackrel{d}{=} PH(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \mathbf{Q}_1)$ ,  $B_{F_2} \stackrel{d}{=} PH(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}, \mathbf{Q}_2)$ ,  $T \stackrel{d}{=} \exp(1)$ ,  $W \stackrel{d}{=} \exp(\frac{1}{2})$ ,  $c = 3$ , o capital inicial é 1 e temos,*

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{9}{14} \\ \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad e \quad \boldsymbol{\alpha}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

A seguir, passo-a-passo do procedimento numérico realizado no Maple.

Primeiramente, para obter a função de sobrevivência do superávit com a configuração dependente de variáveis, a qual denotamos por  $\phi_{dep}$ , precisamos definir a matriz  $\mathbf{Q}_1$ , o vetor de probabilidades iniciais  $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$ , a matriz identidade de ordem 2 e o vetor coluna  $\mathcal{I}_{2 \times 1}$ . Utilizado o Teorema 2.4.1 escrevemos o código que segue

```
> restart :
> with(linalg) :
> with(intrans) :
> alpha := matrix([[ [ [ 1/2, 1/2 ] ] ])
                                     alpha := [ 1/2  1/2 ]
> Q1 := matrix([[ -1, 0 ], [ 0, -2 ]])
                                     Q1 := [ -1  0 ]
                                           [  0 -2 ]
```

```

> U := matrix([[s, 0], [0, s]])
                                     U :=  $\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ 

> M := evalm(U - QI)
                                     M :=  $\begin{bmatrix} s + 1 & 0 \\ 0 & s + 2 \end{bmatrix}$ 

I2 x1 = ind
> ind := matrix([[1], [1]])
                                     ind :=  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 

> q1 := evalm(-QI & ind)
                                     q1 :=  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 

> mom := evalm(alpha & (inverse(M)) & q1)
                                     mom :=  $\left[ \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{s+2} \right]$ 

> media := -evalm(alpha & (inverse(QI)) & ind)
                                     media :=  $-\left[ -\frac{3}{4} \right]$ 

> phi_s := evalf  $\left( \frac{\left( 3 - \frac{3}{4} \right)}{3s - 1 + \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{s+2}} \right)$ 
                                     phi_s :=  $\frac{2.250000000}{3.s - 1. + \frac{1}{2.s + 2.} + \frac{1}{s + 2.}}$ 

> phi_dep := invlaplace(phi_s, s, x)
                                     phi_dep :=  $1 - 0.04594305850 e^{-1.860379610 x} - 0.2040569415 e^{-0.8062870562 x}$ 

```

Destacando, para o modelo dependente, a probabilidade de sobrevivência é dada por,

$$\phi_{dep} = 1 - 0.04594305850 e^{-1.860379610x} - 0.2040569415 e^{-0.8062870562x}.$$

Para obter a função de sobrevivência para o excedente descrito desconsiderando a estrutura de dependência do modelo precisamos conhecer a função de distribuição das indenizações, a qual é uma mistura de duas tipo fase como definimos na Seção 2.3. Lançando mão da propriedade 2.4.1, obtemos a função de sobrevivência desejada. Para tanto, definimos a matriz  $\mathbf{Q}$ , o vetor de probabilidades iniciais  $\boldsymbol{\alpha}$ , a matriz identidade de ordem 4 e o vetor coluna  $\mathcal{I}_{4 \times 1}$  como mostramos no código a seguir

```
> restart :
```

```
> with(linalg) :
```

```
> with(intrans) :
```

```
> Q := matrix([[[-1, 0, 0, 0], [0, -2, 0, 0], [0, 0, -3/2, 9/14], [0, 0, 7/2, -11/2]]])
```

$$Q := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{14} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

```
> alpha := matrix([[1/3, 1/3, 1/6, 1/6]])
```

$$\alpha := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

```
I4x1 = H1
```

```
> H1 := matrix([[1], [1], [1], [1]])
```

$$H1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> H := matrix([[s, 0, 0, 0], [0, s, 0, 0], [0, 0, s, 0], [0, 0, 0, s]])
```

$$H := \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

```
> q := evalm(-Q&H1)
```

$$q := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{6}{7} \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> A := evalm(H - Q);
```

$$A := \begin{bmatrix} -s + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s + 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s + \frac{3}{2} & -\frac{9}{14} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -s + \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

**Função Geradora de Momentos**

```

> mom := evalm(α&(inverse(A))&q)
mom = ⎣ - 1 / (3(s-1)) - 2 / (3(s-2)) - 1/14 * (2s-11) / (s^2-7s+6) + 5 / (7(s^2-7s+6)) - 1/6 * (2s-3) / (s^2-7s+6) ⎤
>
> media := -evalm(α&(inverse(Q))&H1)
media = - ⎣ - 17 / 21 ⎤
> φ_s := evalf( (3 - 17/21) / (-1 + 3s + ( 0.6666666667 / (2.s+2) + 0.5666666667 / (s+2) + 0.07142857143 (2.s+11.) / (s^2+7s+6.) + 5 / (7.s^2+49.s+42.) + 0.1666666667 (2.s+3.) / (s^2+7s+6.) ) ) )
φ_s = 2.190476190 / (-1. + 3.s + 0.6666666667 / (2.s+2) + 0.5666666667 / (s+2) + 0.07142857143 (2.s+11.) / (s^2+7.s+6.) + 5 / (7.s^2+49.s+42.) + 0.1666666667 (2.s+3.) / (s^2+7.s+6.))
> φ_ind := invlaplace(φ_s, s, x)
φ_ind = -0.001012810506 e^{-5.991103028x} - 0.02749352942 e^{-1.909773182x} - 0.2413349299 e^{-0.7657904564x} + 0.9999999996 e^{-2.402173913 10^{-11}x}

```

Denotamos a função de sobrevivência para o modelo com configuração independente por  $\phi_{ind}$  e evidenciamos o resultado obtido:

$$\phi_{ind} \cong 1 - 0.001012810506e^{-5.991103028x} - 0.02749352942e^{-1.909773182x} - 0.2413349299e^{-0.7657904564x}$$

Para  $\phi_{dep}$  e  $\phi_{ind}$ , construímos o gráfico que segue, o qual nos permitiu comparar essas duas funções de probabilidade. Vejamos,

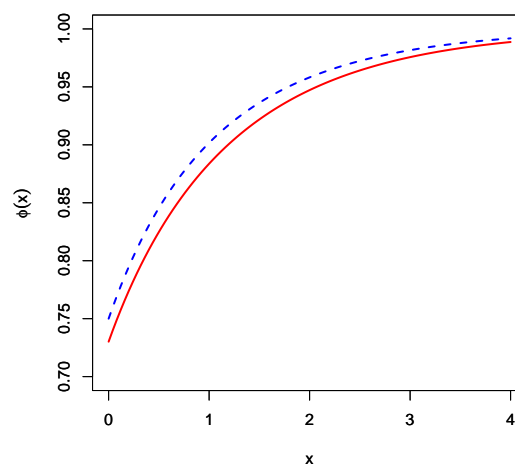


Figura 3.3: A curva sólida é referente a  $\phi_{ind}$  e a curva tracejada a  $\phi_{dep}$

Veja que a função de sobrevivência do superávit descrito desconsiderando a es-

estrutura de dependência se aproxima bastante da função obtida para a configuração dependente. A figura anterior nos trás a informação de que a probabilidade de sobrevivência desconsiderando a dependência no modelo é menor do que para a configuração dependente, dado que o capital inicial é  $x = 1$ . Vamos observar ainda o comportamento do superávit para os dois casos. O algoritmo que fizemos para essa simulação pode ser visto no Anexo B deste trabalho. Observemos,

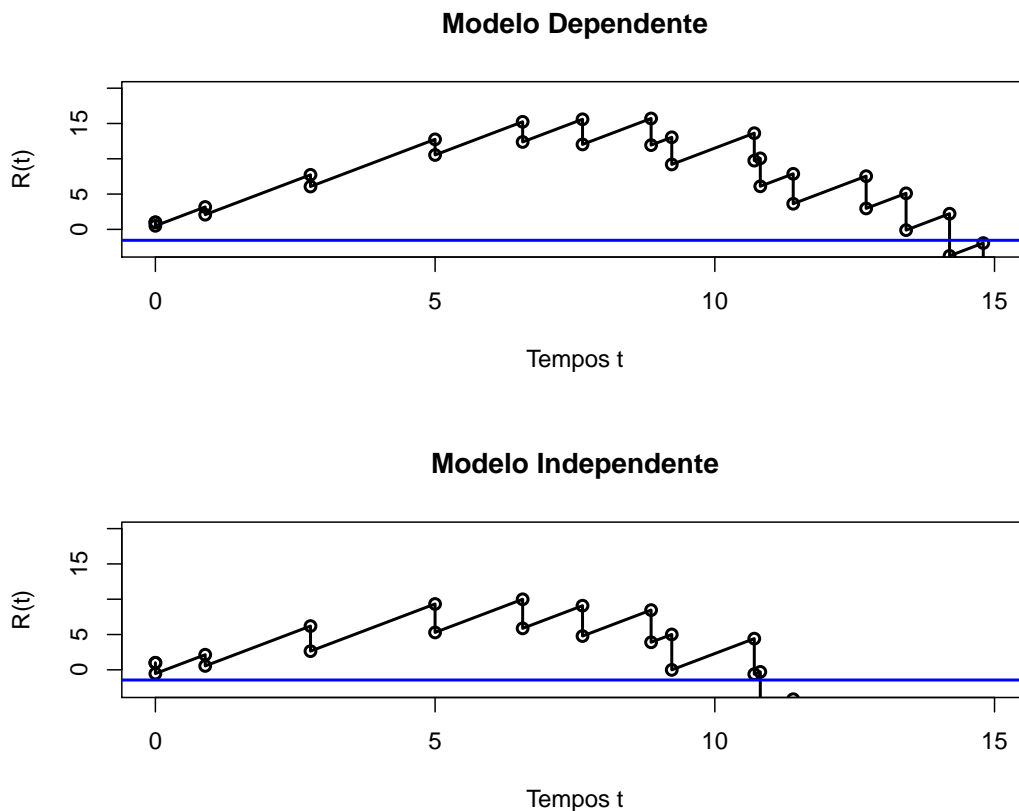


Figura 3.4: Simulação do superávit descrito com e sem dependência.

É importante ressaltar que utilizamos para a simulação a mesma definição de variáveis nos dois modelos, com exceção da estrutura de dependência. Atentemos para o fato de que o comportamento do superávit ao longo do tempo reforça o que nos sugerem as curvas de sobrevivência. Para a amostra de variáveis aleatórias geradas, fizemos a simulação do superávit 10000 vezes e obtivemos uma proporção de 70.32%, isto é, das dez mil vezes que simulamos  $R(t)$ , 7032 vezes o excedente com configuração independente tornou-se negativo antes do que o superávit modelado considerando a dependência. Vimos que há um risco inerente ao se ignorar a dependência entre as variáveis do modelo para calcular a probabilidade de sobrevivência de uma carteira de

seguros.

Abaixo um outro exemplo no qual comparamos as funções de sobrevivência obtidas considerando os dois modelos aqui discutidos.

**Exemplo 3.2.2.** *Suponha,  $\mathbf{Q}_1 = (-7)$ ,  $\mathbf{Q}_2 = (-3)$ ,  $\alpha_1 = (1)$ ,  $\alpha_2 = (1)$ ,  $c = 2$ ,  $T \stackrel{d}{=} \exp\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $W \stackrel{d}{=} \exp\left(\frac{1}{3}\right)$  e capital inicial 3.*

*Sabemos que as variáveis aleatórias  $B_i$ 's são definidas da seguinte maneira:*

$$B_i = \mathbb{P}(T \leq W) B_{F_1} + \mathbb{P}(T > W) B_{F_2},$$

*sendo  $PH(\alpha_{(1)}, \mathbf{Q}_1)$  e  $PH(\alpha_{(2)}, \mathbf{Q}_2)$  as representações de  $B_{F_1}$  e  $B_{F_2}$ , respectivamente. Portanto,*

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad e \quad \alpha = (0.5426920272, 0.4573079728).$$

*Para essa configuração de variáveis obtivemos as funções:*

$$\phi_{dep} = 1 - 0.03571428572e^{-6.750000000x},$$

$$\phi_{ind} = 1 - 0.01754731710e^{-6.868221757x} - 0.03994353872e^{-2.881778243x}$$

e os gráficos

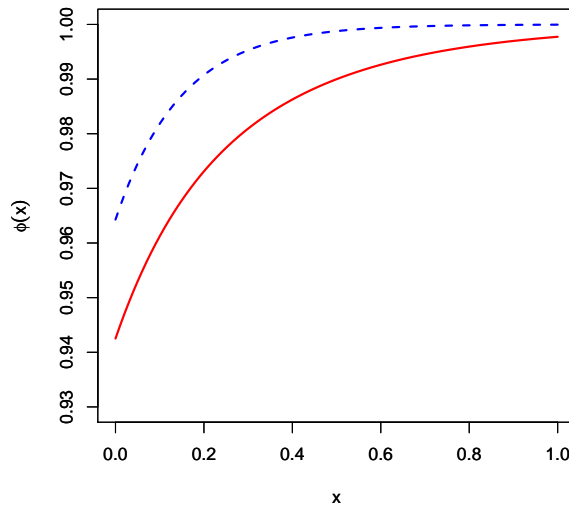
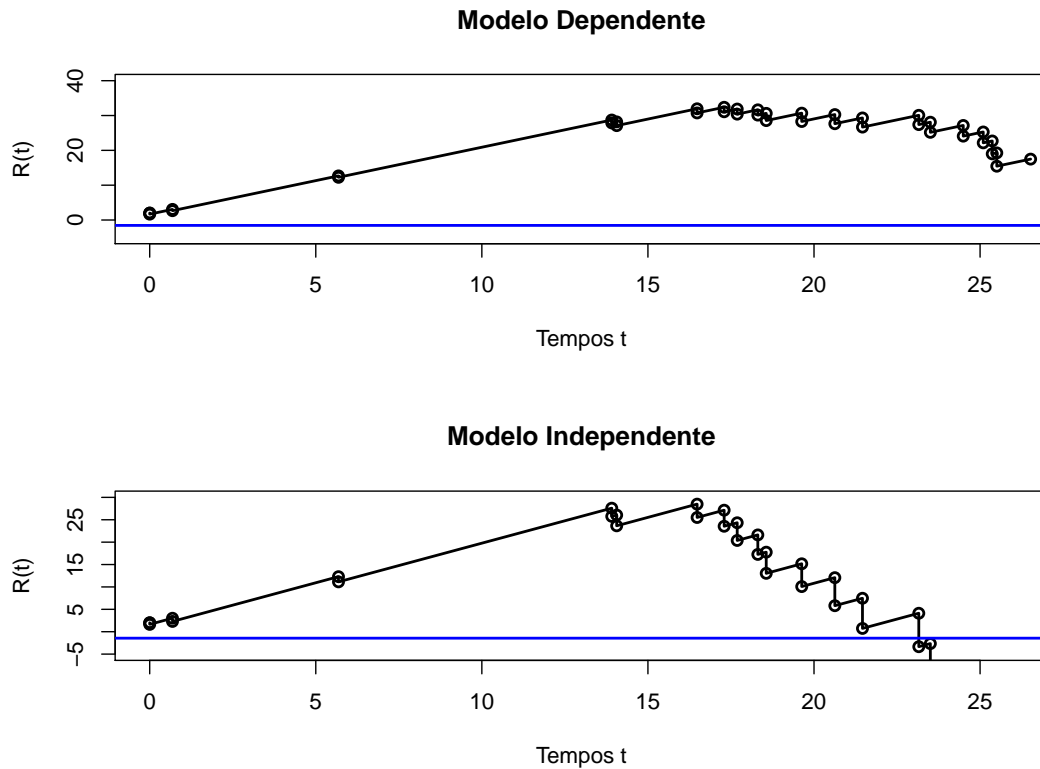


Figura 3.5: A curva sólida é referente a  $\phi_{ind}$  e a tracejada a  $\phi_{dep}$





Para a configuração de variáveis desse exemplo também simulamos o excedente dez mil vezes. Desse total o superávit descrito pelo modelo dependente sobreviveu mais que o descrito desconsiderando a dependência do modelo em 89,34% das simulações. Assim, podemos concluir que acrescentar uma estrutura de dependência ao modelo, como a proposta por este trabalho, torna a atividade seguradora mais confiável, isto é, a probabilidade de sobrevivência é maior.

### 3.3 Considerações Finais

Desenvolvemos aqui um modelo de risco dependente baseado no modelo proposto por Albrecher e Boxma (2004) [1]. Utilizamos uma metodologia semelhante à que eles utilizaram e obtivemos uma solução fechada para a probabilidade de sobrevivência do excedente de uma carteira de seguros.

O resultado mais importante que obtemos foi a expressão analítica para a função de sobrevivência para um excedente cujas indenizações têm como distribuição uma mistura de tipo fase. Já destacamos inicialmente a importância de ter um resultado desse tipo. No Anexo B deste trabalho mostramos o quanto torna-se fácil calcular essa probabilidade numericamente utilizando o nosso resultado. Além disso vale ressaltar que

---

não localizamos na literatura nenhum resultado semelhante e que a solução fechada obtida aqui para a probabilidade de sobrevivência considerando uma classe geral de distribuições, como é o caso das distribuições do tipo fase, parece ser a primeira já obtida. Ainda destacamos a necessidade de se realizar estudos nessa área, principalmente o desenvolvimento de modelos de risco dependentes, visto que na prática a suposição de independência entre as variáveis que compõem um modelo de risco é algo muito restritivo, como já destacaram [5] e [6].

# Apêndice A

## Modelo Dependente de Albrecher e Boxma

### A.1 Modelo

Considere o modelo de risco clássico para o superávit de uma seguradora,

$$R(t) = x + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} B_j.$$

O Modelo de Risco Dependente, proposto por Albrecher e Boxma (2004) [1], carrega a mesma expressão do modelo clássico, porém a configuração das variáveis é modificada, há uma estrutura de dependência entre elas, que vale ressaltar, é diferente da nossa. Novamente,

- $x$  é o capital inicial;
- $\{N(t), t > 0\}$  é um processo de contagem definido como  $\max \left\{ n : \sum_{i=1}^n T_i \leq t \right\}$  e determina o número de pedidos de indenização que chegaram na seguradora no intervalo de tempo  $[0, t)$ ;
- $c > 0$  é a taxa de entrada de prêmio, constante em todo o tempo;
- $\{B_1, B_2, \dots\}$  uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. e independentes de  $N(t)$  com função de distribuição  $B(\cdot)$ , média  $\beta > 0$ , Transformada de Laplace-Stieltjes (TLS) [9]  $\tilde{b}(\cdot)$  sendo  $B_j$  o valor da  $j$ -ésima indenização.

Vamos definir também

- $W_1, W_2, \dots$  variáveis aleatórias iid's e independentes de  $B_i, \forall i$ , com função de distribuição  $W(\cdot)$ ;  $W_i$  é um comparativo para a  $i$ -ésima indenização.

A estrutura de dependência do modelo é definida do seguinte modo: se uma indenização  $B_i$  é maior que um comparativo  $W_i$ , então o tempo até a próxima indenização é exponencialmente distribuído com taxa  $\lambda_1$ , caso contrário, é exponencialmente distribuído com taxa  $\lambda_2$ . Assumiremos que  $\lambda_1 < \lambda_2$  e vamos denotar por  $T_i$  o tempo entre a  $i$ -ésima e a  $(i-1)$ -ésima indenização.

Assim, considerando a estrutura de dependência presente no modelo, temos que a distribuição do tempo entre chegadas é dada da seguinte maneira:

$$T_i \stackrel{d}{=} \begin{cases} \exp(\lambda_2), & \text{se } B_{i-1} \leq W_{i-1}, \\ \exp(\lambda_1), & \text{se } B_{i-1} > W_{i-1}. \end{cases}$$

Assim, podemos escrever

$$T_i = T_{\lambda_1} \mathbf{1}_{(B_{i-1} > W_{i-1})} + T_{\lambda_2} \mathbf{1}_{(B_{i-1} \leq W_{i-1})},$$

onde,  $T_{\lambda_1} \stackrel{d}{=} \exp(\lambda_1)$  e  $T_{\lambda_2} \stackrel{d}{=} \exp(\lambda_2)$ , são variáveis aleatórias independentes de  $B_i$  e  $W_i$ .

Observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_i \leq x) &= \mathbb{P}(T_{\lambda_1} \mathbf{1}_{(B_{i-1} > W_{i-1})} + T_{\lambda_2} \mathbf{1}_{(B_{i-1} \leq W_{i-1})} \leq x) \\ &= \mathbb{P}(T_{\lambda_1} \leq x, B_{i-1} > W_{i-1}) + \mathbb{P}(T_{\lambda_2} \leq x, B_{i-1} \leq W_{i-1}). \end{aligned}$$

Como  $T_{\lambda_j}$  é independente de  $B_i$  e  $W_i$ , temos

$$\mathbb{P}(T_i \leq x) = \mathbb{P}(T_{\lambda_1} \leq x) \mathbb{P}(B_{i-1} > W_{i-1}) + \mathbb{P}(T_{\lambda_2} \leq x) \mathbb{P}(B_{i-1} \leq W_{i-1}).$$

Sabemos que  $T_i$  é exponencialmente distribuída  $\forall i$ , então, a função densidade de probabilidade dos tempos entre chegadas,  $f_{T_i}$  é dada por

$$f_{T_i}(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \mathbb{P}(B_{i-1} > W_{i-1}) + \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \mathbb{P}(B_{i-1} \leq W_{i-1}), \quad (\text{A.1})$$

que é uma mistura de exponenciais.

A condição de segurança para esse modelo de risco, é obtida de modo análogo ao que procedemos para o nosso, é dada por

$$\beta < c \left[ \frac{\mathbb{P}(B_{i-1} > W_{i-1})}{\lambda_1} + \frac{\mathbb{P}(B_{i-1} \leq W_{i-1})}{\lambda_2} \right]. \quad (\text{A.2})$$

## A.2 Probabilidade de Sobrevivência no Modelo de Albrecher-Boxma

Lembrando que,

$$\phi(x) = \mathbb{P}(R(t) \geq 0, \forall t > 0 | R(0) = x), \quad (\text{A.3})$$

é a probabilidade de sobrevivência do processo  $R(t)$ . Vamos definir novas funções que facilitarão a obtenção de uma solução exata para  $\phi(x)$ . Sejam  $\phi_1(x)$ , a probabilidade de sobrevivência de  $R(t)$  dado o capital inicial  $x$  e que o tempo até a chegada do primeiro pedido de indenização ( $B_1$ ) tem distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda_1$ , ou seja,

$$\phi_1(x) = \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t > 0 | T_1 \stackrel{d}{=} \exp(\lambda_1), R(0) = x)$$

e  $\phi_2(x)$  a probabilidade de sobrevivência de  $R(t)$  dado o capital inicial  $x$  e que o tempo até a chegada do primeiro pedido de indenização ( $B_1$ ) tem distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda_2$ , ou seja,

$$\phi_2(x) = \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t > 0 | R(0) = x, T_1 \stackrel{d}{=} \exp(\lambda_2)).$$

Desse modo, podemos reescrever:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t > 0, T_1 \stackrel{d}{=} \exp(\lambda_1) | R(0) = x) + \\ &\quad \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t > 0, T_1 \stackrel{d}{=} \exp(\lambda_2) | R(0) = x). \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\phi(x) = \phi_1(x)\mathbb{P}(T_1 \stackrel{d}{=} \exp(\lambda_1)) + \phi_2(x)\mathbb{P}(T_1 \stackrel{d}{=} \exp(\lambda_2)).$$

### A.2.1 Soluções Exatas

Precisamos obter uma expressão analítica para  $\phi_1(x)$  e outra para  $\phi_2(x)$ . Para tanto, procederemos de modo análogo ao que fizemos para o nosso modelo, logo não detalharemos muito os passos necessários para se chegar aos dos resultados.

Note que

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t > 0 | R(0) = x, T_1 \stackrel{d}{=} \exp(\lambda_1)) \\ &= \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t > 0, B_1 > W_1 | R(0) = x, T_1 \stackrel{d}{=} \exp(\lambda_1)) \\ &+ \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t > 0, B_1 \leq W_1 | R(0) = x, T_1 \stackrel{d}{=} \exp(\lambda_1)).\end{aligned}$$

Sabemos que  $B_1$  e  $W_1$  são independentes de  $T_1$  por definição. Logo,

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t > 0 | B_1 > W_1, T_1 \stackrel{d}{=} \exp(\lambda_1), R(0) = x) \mathbb{P}(B_1 > W_1) \\ &+ \mathbb{P}(R(t) \geq 0 \forall t > 0 | B_1 \leq W_1, T_1 \stackrel{d}{=} \exp(\lambda_1), R(0) = x) \mathbb{P}(B_1 \leq W_1).\end{aligned}$$

Analizamos cada parcela da soma acima separadamente, considerando, em ambas, o processo  $R(t)$  em intervalos infinitesimais, similarmente ao que fizemos na Seção 2.1 obtemos:

$$\phi_1(x) = \frac{c}{\lambda_1} \frac{d\phi_1}{dx} + \int_0^x \mathbb{P}(W < y) \phi_1(x + c dt - y) dB(y) + \int_0^x \mathbb{P}(W \geq y) \phi_2(x + c dt - y) dB(y). \quad (\text{A.4})$$

Como já comentamos anteriormente, basta proceder de maneira semelhante para conseguir uma expressão equivalente para  $\phi_2(x)$ . A saber,

$$\phi_2(x) = \frac{c}{\lambda_2} \frac{d\phi_2}{dx} + \int_0^x \mathbb{P}(W \geq y) \phi_1(x - y) dB(y) + \int_0^x \mathbb{P}(W > y) \phi_2(x - y) dB(y). \quad (\text{A.5})$$

Para a  $\text{Re } s \geq 0$ , defina:

$$\begin{aligned}\chi_1(s) &= \mathbb{E}[e^{-sB} \mathbf{1}_{B>W}] = \int_0^\infty e^{-sx} W(x) dB(x), \\ \chi_2(s) &= \mathbb{E}[e^{-sB} \mathbf{1}_{B \leq W}] = \int_0^\infty e^{-sx} (1 - W(x)) dB(x).\end{aligned}$$

E denote a Transformada de Laplace - Stieltjes [9] de  $\phi_i(x)$  por

$$\tilde{\phi}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \phi_i(x) dx.$$

Vimos na Seção 1.2.2 que podemos utilizar a Transformada de Laplace para facilitar o cálculo da solução de uma equação diferencial, sabendo disso, vamos aplicar a Transformada de Laplace nas Equações A.4 e A.5. Com isso, obtemos

$$c\phi_1(0+) = \tilde{\phi}_1(s) [cs + \lambda_1\chi_1(s) - \lambda_1] + \lambda\tilde{\phi}_2(s)\chi_2(s). \quad (\text{A.6})$$

Analogamente,

$$c\phi_2(0+) = \tilde{\phi}_2(s) [cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] + \lambda_2\tilde{\phi}_1(s)\chi_1(s). \quad (\text{A.7})$$

Combinando (A.6) em (A.7) obtemos

$$\tilde{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)[cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] - c\lambda_1\chi_2(s)\phi_2(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)][cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] - \lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)}, \quad (\text{A.8})$$

e

$$\tilde{\phi}_2(s) = \frac{c\phi_2(0+)[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)] - c\lambda_2\chi_1(s)\phi_1(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)][cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] - \lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)}. \quad (\text{A.9})$$

Para  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  em A.8 e A.9 vemos que  $\phi_1 = \phi_2$ , sendo assim podemos escrever,

$$\tilde{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)[cs - \lambda]}{(cs - \lambda)(cs - \lambda + \lambda\tilde{b}(s))}. \quad (\text{Fórmula de Pollaczek-Khintchine}) \quad (\text{A.10})$$

Precisamos obter um valor numérico para  $\phi_i(0+)$ , daí completaremos a solução exata da probabilidade de sobrevivência,  $\phi(x)$ , do superávit  $R(t)$ .

Desde que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_i(x) = 1$ , temos, pelo Teorema do valor final (ver 1.2.2), que

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{\phi}_i(s) = 1; \quad i = 1, 2.$$

Assim,

$$1 = \frac{c\phi_1(0+)\lambda_2(\chi_2(0) - 1) - c\lambda_1\chi_2(0)\phi_1(0+)}{\lim_{s \rightarrow 0} \left( c^2s + c\lambda_2(\chi_2(s) - 1) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{s} - [\chi_1(s) + \chi_2(s) - 1] \right)}.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \chi_1(0) + \chi_2(0) &= \int_0^\infty e^{-0x}W(x)dB(x) + \int_0^\infty e^{-0x}(1 - W(x))dB(x) \\ &= \int_0^\infty W(x)dB(x) + \int_0^\infty (1 - W(x))dB(x) = \int_0^\infty dB(y) = 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &c\lambda_1(\chi_1(0) - 1) + c\lambda_2(\chi_2(0) - 1) + \lambda_1\lambda_2(-\chi_1'(0) - \chi_2'(0)) \\ &= c\lambda_2\phi_1(0+)(-1 + \chi_2(0)) - c\lambda_1\chi_2(0)\phi_2(0+), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Além disso, observe que

$$\beta = \mathbb{E}(B) = \mathbb{E}(B1_{(B>W)}) + \mathbb{E}(B1_{(B \leq W)}) = -\chi_1'(0) - \chi_2'(0). \quad (\text{A.12})$$

Daí, substituindo (A.12) em (A.11) e rearranjando esta última, obtemos,

$$\lambda_1(\chi_1(0) - 1) + \lambda_2(\chi_2(0) - 1) + \frac{\lambda_1\lambda_2\beta}{c} = \lambda_2\phi_1(0+)(-1 + \chi_2(0)) - \lambda_1\chi_2(0)\phi_2(0+).$$

Portanto,

$$\frac{\beta}{c} = (1 - \phi_1(0+))\frac{1 - \chi_2(0)}{\lambda_1} + (1 - \phi_2(0+))\frac{\chi_2(0)}{\lambda_2},$$

lembrando que,  $\chi_1(0) + \chi_2(0) = 1$ , podemos escrever,

$$\frac{\beta}{c} = (1 - \phi_1(0+))\frac{\mathbb{P}(B > W)}{\lambda_1} + (1 - \phi_2(0+))\frac{\mathbb{P}(B \leq W)}{\lambda_2}. \quad (\text{A.13})$$

Vale salientar que se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  temos  $\phi_1(0+) = \phi_2(0+)$ . Se utilizarmos essas suposições em A.13, temos,

$$\frac{\beta}{c} = \frac{(1 - \phi_1(0+))(\chi_1(0) + \chi_2(0))}{\lambda} \Rightarrow \phi_1(0+) = \phi_2(0+) = \frac{c - \lambda\beta}{c}. \quad (\text{A.14})$$



**Observação A.2.1.** A Equação (A.14) é, de acordo com Albrecher e Boxma (2004) [1], uma fórmula bastante conhecida para a probabilidade de sobrevivência considerando uma modelagem clássica para o superávit de uma seguradora com capital inicial zero.

Adiante, mostraremos um resultado que completa a solução analítica para  $\phi(x)$ . Vejamos,

**Proposição A.2.1.** O denominadores das Equações (A.8) e (A.9) possuem exatamente uma raiz,  $\sigma$ , cuja a parte real é positiva.

Lembrando que

$$\tilde{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)[cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] - c\lambda_1\chi_2(s)\phi_2(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)][cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] - \lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)} \quad (\text{Equação (A.8)})$$

e

$$\tilde{\phi}_2(s) = \frac{c\phi_2(0+)[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)] - c\lambda_2\chi_1(s)\phi_1(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)][cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] - \lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)} \quad (\text{Equação (A.9)}).$$

**Demonstração A.2.1.** Para demonstrar essa proposição, iremos utilizar o Teorema de Rouché [4] para funções analíticas. Vamos começar nossa demonstração reescrevendo o denominador de (A.8) e (A.9) que, vale ressaltar, são iguais. Observe:

$$\begin{aligned} & [cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)][cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] - \lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s) \\ &= (cs)^2 - \lambda_2cs + \lambda_2cs\chi_2(s) - \lambda_1cs + \lambda_1\lambda_2(1 - \chi_1(s) - \chi_2(s)) + \lambda_1\chi_1(s)cs. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Já sabemos que  $\chi_1(s) + \chi_2(s) = \tilde{b}(s)$ , logo podemos reescrever a expressão (A.15) acima como

$$cs(cs - \lambda_2(1 - \chi_2(s)) - \lambda_1(1 - \chi_1(s))) + \lambda_1\lambda_2(1 - \tilde{b}(s)). \quad (\text{A.16})$$

Lembrando que estamos manipulando um denominador, podemos multiplicar a fração (A.8) por  $\frac{1/cs}{1/cs}$  o que não altera o resultado. Daí, o denominador – expressão (A.16) – pode ser reescrito da seguinte forma:

$$cs - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1\chi_1(s) + \lambda_2\chi_2(s) + \frac{\lambda_1\lambda_2\beta}{c} \frac{1 - \tilde{b}(s)}{\beta s}.$$

Agora defina

$$f(s) = cs - \lambda_1 - \lambda_2 \quad e \quad g(s) = \lambda_1 \chi_1(s) + \lambda_2 \chi_2(s) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} \frac{(1 - \tilde{b}(s))}{\beta s}.$$

Para utilizar o Teorema de Rouché precisamos mostrar que  $f(s)$  e  $g(s)$  são analíticas em uma região conexa  $R$  e que para um contorno fechado simples orientado positivamente  $C \subset R$  temos  $|f(s)| > |g(s)|$ . Mostrando isso, poderemos garantir que  $f(s)$  e  $f(s) + g(s)$  tem o mesmo número de zeros no interior de  $C$ .

Primeiramente, verificaremos se  $f(s)$  e  $g(s)$  são analíticas.

Por hipótese, ambas as funções estão definidas em  $C \subset R$ , vamos analisá-las separadamente. Vejamos,

$$i) \quad f(s) = cs - \lambda_1 - \lambda_2$$

Sabemos que  $s$  é uma variável complexa, logo, podemos escrever  $s = a + bi$ . além disso, temos que  $f(s) = u(a, b) + iv(a, b) \Rightarrow f(a, b) = c(a + bi) - \lambda_1 - \lambda_2 = ca - \lambda_1 - \lambda_2 + cbi$ , com  $u(a, b) = ca - \lambda_1 - \lambda_2$  e  $v(a, b) = cb$ . Note que,

$$\frac{\partial u}{\partial a} = c \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial b} = c \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial v}{\partial b},$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial b} = 0 \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial b} = -\frac{\partial v}{\partial a}.$$

As equações, acima satisfeitas, são chamadas de Equações de Cauchy-Riemann, e são condição suficiente e necessária para garantir a analiticidade de  $f(s)$  em uma região  $R$  simplesmente conexa (ver Ávila (2001) [4]).

Precisamos ainda analisar  $g(s) = \lambda_1 \chi_1(s) + \lambda_2 \chi_2(s) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} \frac{1 - \tilde{b}(s)}{\beta s}$ . Primeiramente vamos atentar ao fato de que a soma de funções analíticas é uma função analítica. Sendo assim, suponha que  $g(s) = g_1(s) + g_2(s)$ , com  $g_1(s) = \lambda_1 \chi_1(s) + \lambda_2 \chi_2(s)$  e  $g_2(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} \frac{1 - \tilde{b}(s)}{\beta s}$ . Note que  $g_1(s)$  é claramente analítica, nos resta verificar se  $g_2(s)$  também é analítica.

Temos que

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x \frac{1 - B(y)}{\beta} dy \right\} = \frac{1}{\beta} \mathcal{L} \left\{ \int_0^x (1 - B(y)) dy \right\} = \frac{1}{\beta} \mathcal{L} \{1 - B(y)\} = \frac{1 - \tilde{b}(s)}{\beta s},$$

então, pela analiticidade da transformada de Laplace, segue que  $\frac{1 - \tilde{b}(s)}{\beta s}$  é analítica. Temos ainda que  $\frac{\lambda_1 \lambda_2}{c}$  é constante. Portanto,  $g_2(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} \frac{1 - \tilde{b}(s)}{\beta s}$  é uma função analítica (ver propriedades de funções analíticas em Ávila (2001) [4]). E para que todas as hipóteses do Teorema de Rouché sejam verificadas ainda precisamos provar que  $|f(s)| > |g(s)|$ . Vejamos:

i) Sabemos que  $\beta < c \left[ \frac{\mathbb{P}(B > W)}{\lambda_1} + \frac{\mathbb{P}(B \leq W)}{\lambda_2} \right]$  (veja Inequação A.2 - condição de segurança para o Modelo Dependente 1), e como  $\chi_1(0) = \mathbb{P}(B > W)$  e  $\chi_2(0) = \mathbb{P}(B \leq W)$ , temos  $\beta < c \left[ \frac{\chi_1(0)}{\lambda_1} + \frac{\chi_2(0)}{\lambda_2} \right] \Rightarrow 0 < \lambda_2 \chi_1(0) + \lambda_1 \chi_2(0) - \frac{\beta \lambda_1 \lambda_2}{c}$ , o que nos garante que  $0 < \lambda_1 \chi_1(0) + \lambda_2 \chi_2(0) - \frac{\beta \lambda_1 \lambda_2}{c}$ . Observe que  $\chi_1(0) \geq \chi_1(s)$ . Já que  $0 < e^{-sx} \leq 1$ , podemos ver que se  $s \rightarrow 0 \Rightarrow e^{-sx} \rightarrow 1$  e  $\chi_1(s) = \chi_1(0)$ . Quando  $s \rightarrow \infty$ ,  $e^{-sx} \rightarrow 0$  e  $\chi_1(s) < \chi_1(0)$ . Assim, podemos afirmar que  $\chi_1(0) \in [0, 1]$  e  $\chi_2(0) \in [0, 1] \Rightarrow \lambda_1 \chi_1(0) + \lambda_2 \chi_2(0) \leq \lambda_1 + \lambda_2$ . Note que  $\frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} > 0$ , daí, podemos concluir que

$$|g(s)| < \lambda_1 \chi_1(0) + \lambda_2 \chi_2(0) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} \leq \lambda_1 + \lambda_2.$$

ii) Temos que  $f(s) = cs - \lambda_1 - \lambda_2 \Rightarrow |f(s)| = |cs - \lambda_1 - \lambda_2|$ . Note que  $|cs - (\lambda_1 + \lambda_2)| > |cs| - |\lambda_1 + \lambda_2| > 0$ , então,  $|cs| > |\lambda_1 + \lambda_2| \Rightarrow |cs - \lambda_1 - \lambda_2| > \lambda_1 + \lambda_2$ .

Portanto, por (i) e (ii) concluímos que  $|f(s)| < |g(s)|$  e com isso completamos as hipóteses do Teorema de Rouché.

Veja que dentro da região  $C$ , considerando um raio  $r$  suficientemente grande,  $f(s)$  tem exatamente um zero dentro de  $C$ . Como segue,

$$f(s) = 0 \Rightarrow cs - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow s = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}.$$

Note que  $s > 0$ . Já mostramos que  $f(s) + g(s)$  é uma função analítica e acabamos de mostrar que  $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}$  é um zero de  $f(s)$ . Precisamos encontrar um zero de  $f(s) + g(s)$ .

Para isso, vamos analisar o comportamento de  $f(s) + g(s)$  para  $s = 0$  e  $s = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}$ .

Para  $s = 0$ ,

$$f(0) + g(0) = -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 \chi_1(0) + \lambda_2 \chi_2(0) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \tilde{b}(s)}{\beta s}.$$

Lembrando que  $\tilde{b}(s) = \chi_1(s) + \chi_2(s)$ , temos,

$$f(0) + g(0) = -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1\chi_1(0) + \lambda_2\chi_2(0) + \frac{\lambda_1\lambda_2\beta}{c} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \chi_1(s) - \chi_2(s)}{\beta s}.$$

Veja que  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \chi_1(s) - \chi_2(s)}{\beta s}$  é uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ , em virtude disso podemos aplicar a Regra de L'Hôpital. Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned} f(0) + g(0) &= -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1\chi_1(0) + \lambda_2\chi_2(0) + \frac{\lambda_1\lambda_2\beta}{c} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\chi_1(0) - \chi_2(0)}{\beta} \\ &= -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1\chi_1(0) + \lambda_2\chi_2(0) + \frac{\lambda_1\lambda_2\beta}{c} \\ &= \lambda_1(\chi_1(0) - 1) + \lambda_2(\chi_2(0) - 1) + \frac{\lambda_1\lambda_2\beta}{c}. \end{aligned}$$

Da Inequação (A.2), que é a condição de segurança para o superávit com o Modelo dependente 1, temos,

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{c} &\leq \frac{\mathbb{P}(B > W)}{\lambda_1} + \frac{\mathbb{P}(B \leq W)}{\lambda_2} \\ \Rightarrow \frac{\beta\lambda_1\lambda_2}{c} &\leq \lambda_2\mathbb{P}(B > W) + \lambda_1\mathbb{P}(B \leq) \\ \Rightarrow \frac{\beta\lambda_1\lambda_2}{c} - \lambda_2\mathbb{P}(B > W) + \lambda_1\mathbb{P}(B \leq) &\leq 0 \\ \Rightarrow \frac{\beta\lambda_1\lambda_2}{c} + \lambda_2(\chi_2(0) - 1) + \lambda_1(\chi_1(0) - 1) &\leq 0 \\ \Rightarrow f(0) + g(0) &\leq 0. \end{aligned}$$

Para  $s = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}$ , temos

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) + g\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) &= c \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 \chi_1\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) + \lambda_2 \chi_2\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) \\
&\quad + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} \beta \frac{1 - \tilde{b}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right)}{\beta \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}} \\
&= \lambda_1 \chi_1\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) + \lambda_2 \chi_2\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) + \lambda_1 \lambda_2 \left( \frac{1 - \chi_1\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) - \chi_2\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right)}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) \\
&= \chi_1\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) \left[ \lambda_1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right] + \chi_2\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) \left[ \lambda_2 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right] + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&= \chi_1\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \chi_2\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} > 0.
\end{aligned}$$

Mostramos acima que  $f(0) + g(0) < 0$  e que  $f\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) + g\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) > 0$ , logo, pelo Teorema do Valor Intermediário [12],  $\exists \sigma \in \mathbb{R}$  com  $0 < \sigma < \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}$  tal que  $f(\sigma) + g(\sigma) = 0$ . E, portanto, concluímos que  $\sigma$  é zero dos denominadores das Equações (A.8) e (A.9) e como  $\tilde{\phi}_1(s)$  e  $\tilde{\phi}_2(s)$  são funções analíticas, para a parte real de  $s \geq 0$ ,  $\sigma$  também deve ser zero dos respectivos numeradores, caso contrário,  $\tilde{\phi}_1(s)$  e  $\tilde{\phi}_2(s)$  não seriam analíticas.

Agora que encontramos um zero para os numeradores de  $\tilde{\phi}_1(s)$  e  $\tilde{\phi}_2(s)$  podemos, finalmente, obter uma expressão exata para a probabilidade de sobrevivência do superávit definido pelo Modelo Dependente 1, isto é, calcularemos uma solução analítica para  $\phi(x)$ .

Sabendo que  $\sigma$  é zero de  $c\phi_1(0+) [c\sigma - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(\sigma)] - c\lambda_1 \chi_2(\sigma) \phi_2(0+)$ , numerador de  $\tilde{\phi}_1(s)$ , podemos escrever

$$c\phi_1(0+) [c\sigma - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(\sigma)] - c\lambda_1 \chi_2(\sigma) \phi_2(0+) = 0.$$

Com isso, verificamos que

$$\phi_2(0+) = \frac{\lambda_2 \chi_1(\sigma)}{c\sigma - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(\sigma)} c\phi_1(0+) = \frac{c\sigma - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(\sigma)}{\lambda_1 \chi_2(\sigma)}. \quad (\text{A.17})$$

Então, combinando, (A.17), (A.13), (A.8) e (A.9) completamos a solução exata para a

probabilidade de sobrevivência,  $\phi(x)$ .

# Apêndice B

## Algoritmos de Simulação

### B.1 Curvas de Sobrevivência

Para construir um gráfico e comparar as curvas de sobrevivência obtidas escrevemos, no R, o algoritmo que segue:

```
rm(list=ls())
>
> f1=function(x)1-0.04947*exp(-6.5196*x)-0.18053*exp(-2.48029*x)
> f2=function(x)1-0.24409*exp(-2.28263*x)-0.025753*exp(-6.717356*x)
> curve(f1(x), lwd=2, xlim=c(0,3),ylim=c(0.2,1), col="red",
ylab=expression(phi(x)))
> par(new=TRUE)
> curve(f2(x), lty=2, lwd=2,xlim=c(0,3),ylim=c(0.2,1), col="blue",
ylab=expression(phi(x)))
>
```

Gráfico resultante:

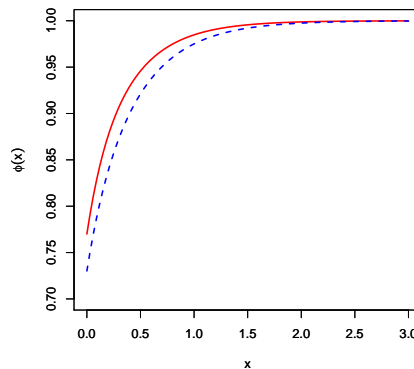


Figura B.1: Curva sólida é referente a  $f_1$  e a tracejada a  $f_2$ .

## B.2 Simulação do Superávit $R(t)$

Segue, o algoritmo que fizemos para simular o superávit com as duas configurações de variáveis consideradas nesse trabalho: sob o modelo de risco dependente e desconsiderando essa dependência. Explicaremos cada passo da simulação destacando o laço de repetições que fizemos para mostrar que acontece ao desconsiderarmos a dependência entre as variáveis do modelo.

Inicialmente definimos as variáveis:

```
> #----- Superávit - Modelo Independente -----
> rm(list=ls()) #limpando informações de variáveis armazenadas para evitar
#possíveis erros;
>
> n=20 #tamanho das amostras produzidas
> l=n+1
>t=rexp(1,1) #gerando 20 instantes de tempo entre chegadas de indenização
#Exp(1);
> t[1]=0 #definindo que o primeiro tempo entre chegadas é 0;
> v=1 #capital inicial
> tau=0 #vetor de tempos de chegada
> c=3 #taxa de prêmios
> p=0 #variável auxiliar
>
```



Utilizando o Método da Composição geramos os valores de indenização para o superávit do modelo independente através do procedimento a seguir.

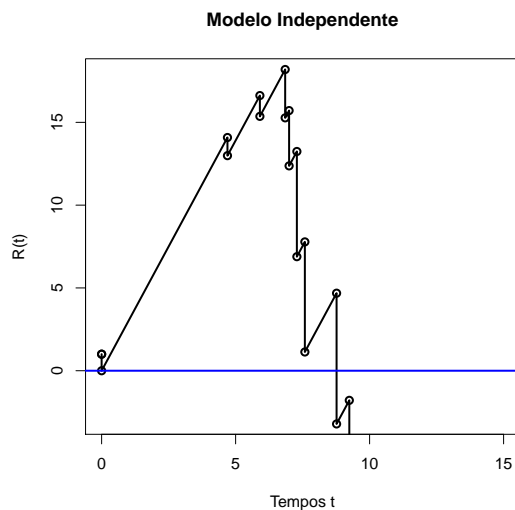
```
> #aqui começamos o laço repetitivo. Estamos repetindo a construção do superávit
  #mil vezes para contarmos quantas dessas vezes o superávit do modelo independente
  #tornou-se negativo antes do dependente
>
> for(i in 1:10000){
+
> Uni=runif(n);
> for(i in 1:n){
+
+ if(Uni[i]<2/3){
+
+ B[i]=rexp(1,1/2)
+
+ } else{
+
+ B[i]=rexp(1,1)
+
+ }
+
+ }
+
+ }
+
+#Gerando os tempos de chegada
+
+ tau[1]=t[1] #o primeiro tempo de chegada coincide com o primeiro tempo
+ #entre chegadas;
+ for (i in 1:l){
+ tau[i+1]=tau[i]+t[i+1];
+}
+
+ s=0;
+ for (i in 1:l){
+ s[i+1]=sum(B[1:(i+1)]); #montante de indenizações
```

```

+ }
+
+ V = v #R(0)=v
+ z = 0;#variável auxiliar para os tempos de chegada
+
+ #Calculando o superávit em cada tempo de chegada;
+ for (i in 1:n){
+ j = 2*i;
+ V[j] = V[j-1] + c*(t[i]);
+ V[j+1] = V[j] - s[i+1];
+ z[j] = z[j+1] = tau[i];
+}
+
+ #Construindo o gráfico R(t) x tempo
+ plot(z,V,type="o",lwd=2, main="Modelo Independente", xlim=c(0,15),
+ ylim = c(-3,18), xlab="Tempos t",ylab="R(t)")
+ abline(h=0,col="blue",lwd=2)
+

```

Um dos dez mil gráficos gerados:



Continuando,

```

+ #----- Modelo Dependente -----

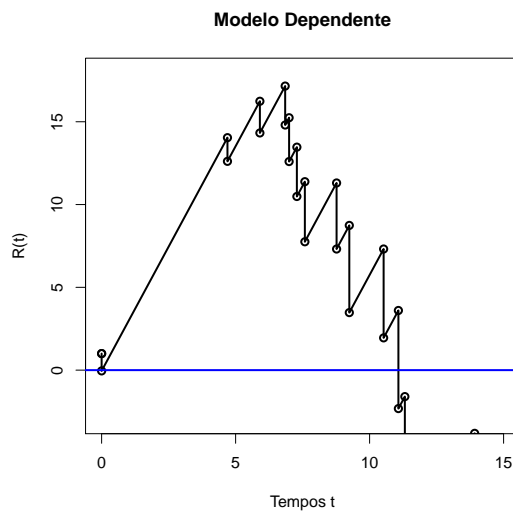
```

```
+ w=rexp(1,0.5) #gerando n comparativos
+ X=0 #definindo a variável indenização
+ U=0 #definindo a variável superávit
+
+#Estrutura de dependência
+ for(i in 1:l){
+ if(t[i]>w[i]){
+
+ X[i]=rexp(1,1);
+
+ }else{
+
+ X[i]=rexp(1,2)
+
+ }
+
+}
+
+ #Calculando o montante de indenizações à cada chegada
+ S=0;
+ for (i in 1:l){
+ S[i+1]=sum(X[1:(i+1)]);
+ }
+
+ y = 0; #variável auxiliar para representar os tempos de chegada no gráfico;
+
+ U[1]=v #R(0)=v
+
+#Superávit à cada pedido de indenização
+for (i in 1:n){
+ j = 2*i;
+ U[j] = U[j-1] + c*(t[i]);
+ U[j+1] = U[j] - S[i+1];
+ y[j] = y[j+1] = tau[i];
+}
```

```

+
+#Gráfico Superávit x tempo - Modelo de risco dependente
+plot(y,U,type="o",lwd=2, main="Modelo Dependente", xlab="Tempos t",
+ xlim=c(0,15), ylim = c(-3,18), ylab="R(t)")
+> abline(h=0,col="blue",lwd=2)
+

```



```

+#Variáveis auxiliares para a contagem: número de vezes que o superávit
+#descrito ignorando-se a estrutura de dependência tornou-se negativo
+# antes do modelado com dependência
+ o=1
+ r=1
+ m=0
+ q=0
+ for (i in 1:n){
+ if(U[o]>0){
+ q=q+1
+ o=q
+ }
+
+ if(V[r]>0){
+ m=m+1
+ r=m

```

```

+ }
+ }
+ if(o>=r){
+ p=p+1
+ }
+
+ }
>

```

## B.3 Função Densidade de uma Variável Aleatória do Tipo Fase

Definimos na Seção 2.4.1 que a função densidade,  $f$ , de uma variável aleatória que possui distribuição do tipo fase é

$$f(x) = \alpha e^{\mathbf{Q}x} \mathbf{q}.$$

Note que se quisermos esboçar essa função ou utilizar sua expressão a fim de obter algum resultado, é necessário calcular a exponencial de uma matriz, e esse não é um cálculo trivial. Há várias formas de se calcular a exponencial de uma matriz computacionalmente. Nós optamos por fazer isso no Maple utilizando os comandos que seguem: Considere a matriz  $\mathbf{Q}$ ,

```

> Q := matrix([[[-1, 0, 0, 0], [0, -2, 0, 0], [0, 0, -3/2, 9/14], [0, 0, 7/2, -11/2]]])

```

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{14} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

Calculamos a exponencial de  $\mathbf{Q}$  da seguinte maneira,

$$\begin{array}{l} \text{> } \text{exponential}(\mathbf{Q} \cdot x) \\ \left[ \begin{array}{cccc} e^{-x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} e^{-6x} + \frac{9}{10} e^{-x} & \frac{9}{70} e^{-x} - \frac{9}{70} e^{-6x} \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} e^{-x} - \frac{7}{10} e^{-6x} & \frac{9}{10} e^{-6x} + \frac{1}{10} e^{-x} \end{array} \right] \end{array}$$

Observe que a matrix exponencial de  $\mathbf{Q}$  pode ser escrita como uma soma, a saber:  $e^{-x}J + e^{-6x}L + e^{-2x}K$ , com  $J$ ,  $L$  e  $K$ , matrizes tais que

$$\begin{array}{l} \text{> } J := \text{matrix}\left(\left[\left[1, 0, 0, 0\right], \left[0, 0, 0, 0\right], \left[0, 0, \frac{9}{10}, \frac{9}{70}\right], \left[0, 0, \frac{7}{10}, \frac{1}{10}\right]\right]\right) \\ J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{10} & \frac{9}{70} \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \\ \text{> } L := \text{matrix}\left(\left[\left[0, 0, 0, 0\right], \left[0, 0, 0, 0\right], \left[0, 0, \frac{1}{10}, -\frac{9}{70}\right], \left[0, 0, -\frac{7}{10}, \frac{9}{10}\right]\right]\right) \\ L := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{9}{70} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{10} & \frac{9}{10} \end{bmatrix} \\ \text{> } K := \text{matrix}\left(\left[\left[0, 0, 0, 0\right], \left[0, 1, 0, 0\right], \left[0, 0, 0, 0\right], \left[0, 0, 0, 0\right]\right]\right) \\ K := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

E por fim, calculamos a função densidade de uma variável aleatória, como definimos na Seção 2.4.1, utilizando os comandos que seguem.

$$\begin{array}{l} \text{> } f := e^{-x} \cdot \text{evalm}(\alpha \& J \& q) + e^{-6x} \cdot \text{evalm}(\alpha \& L \& q) + e^{-2x} \cdot \text{evalm}(\alpha \& K \& q) \\ f := e^{-x} \begin{bmatrix} 163 \\ 210 \end{bmatrix} + e^{-6x} \begin{bmatrix} 12 \\ 35 \end{bmatrix} + e^{-2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \text{> } \end{array}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Albrecher, H. e Boxma, A., A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Insurance: Mathematics and Economics*, 35: 245-254, 2004.
- [2] Arendt, W., Batty, C., Hieber, M., Neubrander, F., *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*, Monographs in Mathematics, Vol. 96, Birkhäuser, Basel (2001).
- [3] Asmussen, S., *Ruin Probabilities*, World Scientific, Vol. 2, 2000.
- [4] Ávila, G., *Variáveis Complexas e Aplicações*. LTC, São Paulo, 2001.
- [5] Cai, J., Zhou, M., A perturbed risk model with dependence between premium rates and claim sizes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45 (2009) 382-392.
- [6] Dufresne, F., Gerber, H. U. Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics*, 10 (1991) 51-59.
- [7] Guidorizzi, L. H., Um Curso de Cálculo, 5ed, LTC, vol. 1, São Paulo, 2001.
- [8] Gordon, R. A., *Real Analysis: A First Course*, Pearson Education, Boston, 2002.
- [9] Insua, R. D., Ruggeri, F., Wiper, M. P., *Appendix B: Generating Functions and the Laplace-Stieltjes Transform*, John Wiley & Sons, 2012.
- [10] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. e Denuit, M. *Modern Actuarial Risk Theory*. Springer, 2008.
- [11] Lemos, S. R. R., *Probabilidade da Ruína no Mercado de Seguros: Fundamentos Teóricos e Alguns Resultados de Simulação*, Dissertação (mestrado) - UFPE, 2008.
- [12] Lima, E. L., *Análise Real*, IMPA, 2008.
- [13] Ogata, K., *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Education - Br, 2011.

- 
- [14] Pinto, D. Morgado, M. C. F., *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias variáveis*, UFRJ, 161-162, 2000.
- [15] R Development Core Team (2012 v 2.15.1) *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria: <http://www.R-project.org>
- [16] Ross, S., *Introduction to Probability Models*, Elsevier, 2010.
- [17] Royden, H. L., *Real Analysis*, The Macmillan Company, Stanford University, Londres, 2ed., 1968.
- [18] Shiryaev, A. N., *Essential of stochastic Finance: facts, models, theory*, Vol. 3, World Scientific, 1999.
- [19] Stewart, W. J., *Probability, Markov Chains, Queues and Simulation*, Vol. 3, Princeton University Press, New Jersey, 2009.