UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

Tomada de Decisão em Grupo e Multi-Atributos Baseada na Lógica Fuzzy Intuicionista de Atanassov Intervalarmente Valorada

Ivanosca Andrade da Silva

Orientador: Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da UFRN (área de concentração: Engenharia de Computação) como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Natal/RN–Brasil
Maio de 2016

Catalogação da Publicação na Fonte
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Sistema de Bibliotecas
Biblioteca Central Zila Mamede / Setor de Informação e Referência

Silva, Ivanosca Andrade da.
Tomada de decisão em grupo e multi-atributos baseada na Lógica fuzzy intuicionista de Atanassov intervalarmente valorada / Ivanosca Andrade da Silva. - Natal, RN, 2016.
152 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Tomada de decisão - Tese. 2. Lógica fuzzy - Tese. 3. Lógica fuzzy intuicionista de Atanassov intervalarmente valorada - Tese. 4. Média ponderada ordenada - Tese. 5. Ordens admissíveis - Tese. 6. Fusão de rankings - Tese. I. Bedregal, Benjamín René Callejas. II. Título.

RN/UF/BCZM CDU 510.6

Tomada de Decisão em Grupo e Multi-Atributos Baseada na Lógica Fuzzy Intuicionista de Atanassov Intervalarmente Valorada

Ivanosca Andrade da Silva

Tese de Doutorado aprovada em 20 de Maio de 2016 pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal (orientador) ...... DIMAp/UFRN

Prof. Dr. Regivan Nunes Santiago (examinador) .... DIMAp/UFRN

Prof. Dra. - Graçaliz Pereira Dimuro (examinadora) .... CCC/UFRG

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha (examinador) .... DM/UFPA

Prof. Dr. Ivan Mezzomo (examinador) .... DCETH/UFERSA

Ao meu filho, Pablo Labán Andrade Bedregal (in memoriam)

Pablito, você nasceu e se tornou o centro do nosso mundo, nos trouxe muito amor, carinho e felicidade. Deu significado a nossas existências e fez nascer em nossas vidas um grande e incondicional amor. Filho você sempre será parte de nossas vidas. Sua presença permanecerá sempre viva em nossos corações, fazendo parte de nossos melhores sentimentos.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela capacidade cognitiva.

Ao meu orientador Benjamin, pela orientação, dedicação, paciência e grande contribuições no desenvolvimento dessa pesquisa. Com certeza este trabalho não teria os mesmos resultados se não fosse por seu empenho e dedicação.

A Juan e ao professor Humberto Bustince pelo carinho, orientação, acessibilidade e principalmente por ter me aceito no período sanduiche na UPNA, Pamplona, Espanha.

Ao programa de pós-graduação por ter me aceito no programa mesmo sendo de outra área.

A Francisco Chiclana por que sua tese deu grandes contribuições no amadurecimento da minha pesquisa.

Aos meus diretores do IMD professor Ivonildo e Adrião que me liberaram para o período sanduiche.

Aos meus amados filhos Ruan, Pablo (in memoria), minhas enteadas Letícia e Natália, Benjamín, Lúcia, amigos e toda minha família, razão maior da minha existência.

Às professoras Claudilene, Fabiana com os incentivos e materiais para as disciplinas.

Em especial a Benjamín e Lúcia por amarem e cuidarem dos meus filhos na minha ausência no período do meu doutorado sanduiche.

Aos meus pais (pai in memoria) por me incentivarem e contribuírem para meus estudos, educação e valores.

Ao meu marido pelo amor, força, apoio e cumplicidade.

Aos meus amigos brasileiros e espanhóis Javier, Amaia, Daniel, Edurne e demais membros do grupo GIARA que tornaram minha vida durante o período sanduiche que realizei na UPNA muito mais fácil, amenizando a saudade e principalmente a tristeza na morte do meu Pablito.

A Marcus Rocha, Lucélia, Hélida e Graçaliz que foram amigos, companheiros na academia.

Aos colegas de pós-graduação pelo apoio e contribuição no período das disciplinas.

A todos os professores que contribuíram para o meu aprendizado na minha vida acadêmica.

Aos funcionários da UFRN que são de grande importância para ensino pesquisa e extensão.

A todos os amigos que conquistamos e aprendemos a amar na convivência cotidiana e acadêmica, que uma forma ou de outra nos deixa muitos legados. Em especial aos amigos Felismina, Graçaliz, Marcus Rocha, Lucélia, Hélida, Regivan, Adriane, Cleodon, Karla, Claudio, Rafaela, Giovani, Sonia, Soni, Scaymenn, Lêda, Anderson, Marcelly, Roberto, Claudilene, Markus Jung, Augusto Neto e Paula que na morte do meu filho nos deram grande apoio e carinho. Não vou citar mais nomes porque seria uma lista longa, pois sabemos que temos vários amigos especiais que se fazem presentes na nossas vidas tornando a vida mais alegre e feliz, mesmo quando a tristeza que sentimos vai além da nossa capacidade de aceitação. Muito obrigada a todos os amigos, colegas de trabalho que passaram por minha vida contribuindo para o meu caráter e formação.

Resumo

A lógica fuzzy surge em 1965 com o trabalho de Lotfi Zadeh que tem por objetivo tratar de forma rigorosa a incerteza inerente na definição de noções e propriedades imprecisas ou vagas presentes em diversas situações do cotidiano, como por exemplo, temperatura alta, pendente acentuada, etc. Para isto, Zadeh considerou um grau (um valor no intervalo [0,1]) para expressar o quanto um determinado elemento pertence a um conjunto, ou seja, satisfaz uma determinada propriedade. No entanto, algumas críticas a esta teoria foram feitas, principalmente no sentido dela se propor lidar com incertezas usando valores exatos, o que motivou vários pesquisadores (entre eles o próprio Zadeh) em 1975, de forma independente, a estender esta teoria relaxando o conjunto onde os graus de pertinência tomam seus valores. Uma destas extensões, é a Lógica Fuzzy Intuicionista de Atanassov Intervalarmente Valorada, proposta em 1989 por Atanassov e Gargov, que usa um par de subintervalos de $[0,1]$, um deles representa o quanto, considerando alguma inacurácia, se acredita que o elemento satisfaz a propriedade enquanto o outro descreve o quanto se acredita que não satisfaz a propriedade. Este par de graus intervalares visam capturar a hesitação e inacurácia presente ao momento de se atribuir o grau com que o elemento satisfaz a propriedade.

A lógica fuzzy e suas diversas extensões, tem sido aplicada com sucesso nas mais variadas áreas, como por exemplo: medicina, engenharia, agricultura, econômia e em administração. Em particular, uma das principais aplicações de lógica fuzzy em administração diz respeito ao apoio na tomada de decisão. Um problema típico de tomada de decisão consiste em escolher a melhor alternativa entre um conjunto delas ou em ordenar as alternativas de melhor a pior, considerando alguns critérios a serem satisfeitos, assim como a opinião de um ou mais especialistas. Os métodos fuzzy para problemas de tomada de decisão baseados em matrizes de decisão, usam graus fuzzy (ou de suas extensões) para expressar o quanto uma alternativa satisfaz um determinado atributo ou critério. Por outro lado, os métodos fuzzy para problemas de tomada de decisão baseados em relações de preferências, usam graus fuzzy (ou de suas extensões) para expressar o quanto uma alternativa é preferível a uma outra alternativa. Em ambos casos, a opinião de todos os especialistas é agregada para se determinar uma única matriz de decisão ou relação de preferência, segundo seja o caso, e a partir delas extrair uma pontuação (que pode ser um valor numérico ou não) que permita decidir qual é a potencialmente melhor alternativa.

Nesta tese são apresentados avanços teóricos significativos na teoria dos conjuntos fuzzy intuicionistas de Atanassov intervalarmente valorados assim como, são propostos dois métodos de tomada de decisão que consideram múltiplos atributos (ou critérios) e um grupo de especialistas, esses métodos são aplicados em problemas específicos e são comparados com resultados obtidos com outros métodos de tomada de decisão.

Por outro lado, um dos grandes problemas com os métodos ou processos de tomada de decisão é que, quando aplicado em problemas reais, em geral, não é possível determinar a qualidade da solução (ranking das alternativas) obtida pelo método. De fato, diferentes métodos de tomada de decisão para um mesmo problema podem resultar em diferentes soluções. Nesta tese, se propõe considerar os resultados obtidos por diferentes métodos (independente do tipo de extensão fuzzy usada e tipo de problema de tomada de decisão) como informações que podem ser usadas por um outro método capaz de determinar um ranking das alternativas que de alguma maneira represente a fusão ou consenso desses rankings.
Palavras-chave: Lógica fuzzy, Tomada de decisão, Lógica fuzzy intuicionista de Atanassov intervalarmente valorada, Ordens admissíveis, Médias ponderadas ordenadas, Representação intervalar, Fusão de rankings.

Abstract

Fuzzy logic emerged in 1965 with the work of Lotfi Zadeh that aims rigorously deal with the uncertainty inherent in the definition of notions and inaccurate or vague properties in several everyday situations, such as high temperature, sharp drop, etc. For this, Zadeh considered a degree (a value in the range [0,1]) in order to express how much an element belongs to a set, i.e. satisfies a given property. However, some criticism of this theory have been made, mainly because that this theory deal with uncertainties using exact values, which led to several researchers (including himself Zadeh) in 1975 and independently, to extend this theory relaxing the set where the membership degrees take their values. One of these extensions, interval-valued Atanassov's intuitionistic fuzzy logic, proposed in 1989 by Atanassov and Gargov, uses a pair of subintervals of [0,1], the first represent how much, considering some inaccuracy, it is believed that the element satisfies the property while the second describes how much it is believed that does not satisfy the property. This pair of interval degrees aim to capture the hesitation and inaccuracy present at the time of assigning the degree to which the element satisfies the property.

Fuzzy logic and its various extensions, has been successfully applied in various areas, such as: medicine, engineering, agriculture, economics and management. In particular, one of the main applications of fuzzy logic in management concerns with the support to the decision making. A typical decision-making problem is the choice of the best alternative among a set of them or the obtention of a ranking of the alternatives, considering some criteria to be satisfied, as well as the opinion of one or more experts. The fuzzy methods for decision making problems based on decision matrices, use fuzzy degrees (or of their extensions) to express how much an alternative satisfies a particular attribute or criterion. On the other hand, the methods of fuzzy decision making problems based on preference relations, use fuzzy degrees (or of their extensions) to express how much an alternative is preferred to other alternative. In both cases, the opinion of all experts is aggregated to determine only a single decision matrix or preference relation, according be the case, and from them extract a score (which can be a numeric value or not) in order to decide which is the potentially best alternative.

In this thesis are presents significant theoretical advances in the theory of interval-valued Atanassov's intuitionistic fuzzy sets as well as are proposed two new decision-making methods, considering multiple attributes (or criteria) and a group of experts, these methods are applyed on specific problems and made a comparison with the results obtained by others decision-making methods.

On the other hand, one of the major problems with the methods or processes of decision-making is that, when applied to real problems, in general, can not determine the quality of the solution (ranking of the alternatives) obtained by the method. In fact, different decision making methods to the same problem may result in different solutions. In this thesis, it is proposed to consider the results obtained by different methods (independent of the fuzzy extension considered and of the type of decision-making problem) as information that can be used by another method capable of determining a ranking of the alternatives representing the fusion or consensus of these rankings.
Key-words: Fuzzy, Decision Making, Interval-valued Atanassov Intuitionistic fuzzy logic, Admissible orders, Ordered weighted average, Interval representation, Rankings fusion.

Sumário

Lista de Símbolos **xiv**

Lista de Abreviaturas e Siglas **xviii**

Lista de Tabelas **xix**

1 Introdução **1**

1.1 Motivação 1

1.2 Justificativa 6

1.3 Objetivos da Tese 6

2 Paradigmas (Linhas de Pensamentos) da Tomada de Decisão **8**

2.1 Tipos de Abordagens Científicas dos Processos de Tomada de Decisão . . 9

2.2 Teoria da Racionalidade Limitada 9

2.3 Etapas dos Processos de Decisão 10

2.4 Tomada de Decisão 11

2.4.1 Ambiente da Tomada de Decisão 12

2.4.2 Tipos de Decisões no Ambiente Administrativo 13

2.4.3 Fundamentos da Tomada de Decisão 16

2.4.4 Processo de Tomada de Decisão 16

2.4.5 Processos Administrativos na Teoria do Funcionamento da Organização 21

2.4.6 Tecnologias de Informação usadas na Tomada de Decisão 21

2.4.7 Sistemas de Suporte à Decisão 22

2.5 Estratégia no Contexto de Tomada de Decisão 25

2.6 Tomada de Decisão em Grupo ou Multi Especialista (Processos Administrativos) 25

2.6.1 Vantagens da Tomada de Decisão em Grupo 26

2.6.2 Desvantagens das Tomadas de Decisões em Grupo 26

2.7 Tomada de Decisão em Grupo (Modelos Matemáticos) 27

2.7.1 Etapas do Processo de Tomada de Decisão em Grupo 28
2.8 Pesquisa Operacional no Processo Decisório 30
2.8.1 Influência da Psicologia Quantitativa na Teoria dos Modelos Matemáticos da Pesquisa Operacional 31
2.9 Tipos de Estruturas de Representação de Preferências 32
2.10 Escolas De Métodos de Tomada de Decisão 33
2.10.1 Escola Americana 34
2.10.2 Escola Francesa 35
2.10.3 As Novas Versões dos Métodos ELECTRE 35
2.10.4 Família dos Métodos PROMETHEE 38
2.11 Definições de Conceitos e Terminologias no Contexto de TD 42

3 Preliminares 44
3.1 Operadores de Agregação sobre Reticulados 44
3.2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas de Atanassov 46
3.3 Conjuntos Fuzzy Intervalarmente Valorados 47
3.4 Ordens Totais Admissíveis em $\mathbb{L}$ e L^* 49
3.4.1 Ordens Totais Admissíveis em $\mathbb{L}$ 49
3.4.2 Ordens Totais Admissíveis em L^* 50
3.5 As Melhores $\mathbb{L}$ e L^* Representações do Operador OWA 51

4 Conjuntos Fuzzy Intuicionistas de Atanassov Intervalarmente Valorados 55
4.1 Conceitos Básicos 55
4.2 Funções de Pontuação e Acurácia 56
4.3 Ordens para $\mathbb{L}^*$-Valores 59
4.3.1 Ordem de Inclusão para $\mathbb{L}^*$-Valores 59
4.3.2 Extensão da Ordem Total $\leqslant_{XY}$ para $\mathbb{L}^*$-Valores 61
4.4 $\mathbb{L}^*$-Representação do OWA 67
4.4.1 $\mathbb{L}^*$-Representação de Funções sobre $\mathbb{L}$ 67
4.4.2 $\mathbb{L}^*$-Representações de Funções $[0,1]$-Valoradas 69
4.4.3 A Melhor $\mathbb{L}^*$-Representação do Operador OWA 70

5 Proposta de Métodos de Tomada de Decisão 75
5.1 Método de Tomada de Decisão Multi-atributo e Multi-Especialista Baseado em Matrizes de Decisão $\mathbb{L}^*$-Valoradas 75
5.2 Exemplos Ilustrativos do Primeiro Método 77
5.2.1 Primeiro Exemplo Ilustrativo 77

5.2.2 Segundo Exemplo Ilustrativo 78
5.3 Método de Tomada de Decisão Baseado em Relações de Preferência $\mathbb{L}^*$-Valoradas 80
5.4 Exemplos Ilustrativos do Segundo Método 82
5.4.1 Primeiro Exemplo Ilustrativo 83
5.4.2 Segundo Exemplo Ilustrativo 86
5.4.3 Terceiro Exemplo Ilustrativo 88

6 Fusão de Rankings **91**
6.1 Funções de Fusão de Rankings 92
6.2 Geração de Funções de Fusão de Rankings via Funções de Pontuação . . 95
6.3 Fusão de Ranking e Ordens Parciais sobre Rankings 99
6.4 Exemplos Ilustrativos 102
6.4.1 Primeiro Exemplo Ilustrativo 102
6.4.2 Segundo Exemplo Ilustrativo 105

7 Conclusões e Trabalhos Futuros **108**
7.1 Contribuições à Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas de Atanassov Intervalarmente Valorados 108
7.2 Contribuições à Tomada de Decisão 110
7.3 Trabalhos Futuros 111

Referências Bibliográficas **112**

Lista de Símbolos

δ	Bijeção entre $[0,1]$ e $\mathcal{D}_{L^*}$
η	Bijeção entre $[0,1]$ e os intervalos degenerados de $\mathbb{L}$
ϕ	Bijeção entre $[0,1]$ e $\mathcal{D}$
ψ	Bijeção entre L^* e $\mathcal{D}_S$
φ	Bijeção entre $\mathbb{L}$ e $\mathcal{D}_S$
$Card(A)$	Cardinalidade do conjunto A
X^c	Complemento do intervalo X
$\mathbf{X}^c$	Complemento de $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$
$w(X)$	Comprimento do intervalo X
$\mathbb{N}_n$	Conjunto $\{1,\ldots,n\}$
$\mathcal{D}_{L^*}$	Conjunto de elementos diagonais de L^*
$\mathcal{D}_S$	Conjunto dos elementos semi-diagonais de $\mathbb{L}^*$
$\mathcal{D}$	Conjunto dos elementos diagonais de $\mathbb{L}^*$
I	Conjunto finito de índices
$S_{\mathbf{X}}$	Conjunto de intervalos que pertencem a $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\wp_A$	Conjunto das partições ordenadas de A
$\mathbb{L}$	Conjunto dos sub-intervalos do intervalo unitário $[0,1]$
L^*	Conjunto dos valores intuicionistas de Atanassov
$\mathbb{L}^*$	Conjunto dos valores intuicionistas de Atanassov intervalarmente valorados
$L_n([0,1])$	Conjunto dos valores intervalos n-dimensionais
$\emptyset$	Conjunto vazio
$T(\mathbf{X})$	Diferença entre o comprimento das projeção esquerda com o comprimento da projeção direita de $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$
d_E	Distância Euclideana
$x \sim y$	Equivalência entre as alternativas x e y num ranking

$\bigtriangledown(X)$	Extremo inferior do intervalo $X \in \mathbb{L}$
$\bigtriangleup(X)$	Extremo superior do intervalo $X \in \mathbb{L}$
$\underline{X}$	Extremo inferior do intervalo $X \in \mathbb{L}$
$\overline{X}$	Extremo superior do intervalo $X \in \mathbb{L}$
h^*	Função de acurácia para L^*-valores
h	Função de acurácia para $\mathbb{L}$-valores
H_1	Função de acurácia para $\mathbb{L}^*$-valores proposta por Xu
H_2	Função de acurácia para $\mathbb{L}^*$-valores proposta por Ye
H_3	Função de acurácia para $\mathbb{L}^*$-valores proposta por Nagayan e outros
H_4	Função de acurácia para $\mathbb{L}^*$-valores proposta por Nagayan e Sivaraman
H_5	Função de acurácia para $\mathbb{L}^*$-valores proposta por da Silva e outros
$\mathcal{A}$	Função de agregação $\mathbb{L}^*$-valorada
RF	Função de fusão de ranking
RF_γ	Função de fusão de rankings γ-conjugada
$RF/\wp_A^2$	Função de fusão de ranking RF restrita ao conjunto $\wp_A^2$ (só dois ranking)
s^*	Função de pontuação para L^*-valores
s	Função de pontuação para $\mathbb{L}$-valores
S	Função de pontuação para $\mathbb{L}^*$-valores
θ	Função de posição
ϑ_A	Função que transforma as pontuações das alternativas em A em um ranking de A
M	Função que transforma tuplas de ranking em pontuações das alternativas
$\mu_A(x)$	Grau de pertinência do elemento x a A
$\nu_A(x)$	Grau de não pertinência do elemnto x a A
$x_{\sigma(i)}$	i-ésimo maior elemento de $\{x_1,\ldots,x_n\}$
O_i	Índice coletivo total $\mathbb{L}^*$-valorado
$\pi^*(\mathbf{x})$	Índice fuzzy de $\mathbf{x} \in L^*$
$\Pi(X)$	Índice fuzzy de $X \in \mathbb{L}$
$\Pi^*(\mathbf{X})$	Índice fuzzy de $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$
inf	Ínfimo
$\overleftarrow{\mathbf{X}}$	Intervalo inferior de $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$ quando visto como um intervalo de intervalos
$\overrightarrow{\mathbf{X}}$	Intervalo superior de $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$ quando visto como um intervalo de intervalos
ρ	Isomorfismo entre os reticulados $\langle L^*, \leqslant_{L^*}\rangle$ e $\langle \mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}}\rangle$
1_L	Maior elemento de L
R^l	Matriz de decisão $\mathbb{L}^*$-valorada do especialista l
$\mathcal{RC}$	Matriz de decisão $\mathbb{L}^*$-valorada de consenso

max	Máximo
wa	Média aritmética
wa_{Λ}	Média ponderada
$\mathbb{L}^*-WA_{\Lambda}$	Média ponderada $\mathbb{L}^*$-valorada
$\mathbb{L}^*-OWA_{\Lambda}$	Média ponderada ordenada $\mathbb{L}^*$-valorada
owa_{Λ}	Média ponderada ordenada (função)
$\check{f}$	Melhor L^*-representação da função f
$\widehat{f}$	Melhor $\mathbb{L}$-representação da função f
$\ddot{F}$	Melhor $\mathbb{L}^*$-representação da função intervalar F
$\ddot{\widehat{f}}$	Melhor $\mathbb{L}^*$-representação da função f
$\widecheck{owa}$	Melhor L^*-representação do OWA
$\widehat{owa}$	Melhor $\mathbb{L}$-representação do OWA
0_L	Menor elemento de L
min	Mínimo
$\sqsubseteq_{\mathbb{L}}$	Ordem de acurácia entre funções sobre $\mathbb{L}$
$\sqsubseteq_{\mathbb{L}^*}$	Ordem de acurácia entre funções sobre $\mathbb{L}^*$
$\preceq_{L^*}$	Ordem de Bustice e Burillo para o conjunto L^*
$\leqslant_L$	Ordem de um conjunto arbitrário L
$\trianglelefteq_{\mathbb{L}}^d$	Ordem dualmente gerável à ordem $\trianglelefteq_{\mathbb{L}}$
$\preceq_{XY}^d$	Ordem dualmente gerável à ordem $\preceq_{XY}$
$\trianglelefteq_{\mathbb{L}}$	Ordem lêxica sobre $\mathbb{L}$-valores
$\trianglelefteq_{L^*}$	Ordem lêxica sobre L^*-valores
$\curlyeqprec$	Ordem total sobre $\mathbb{L}^*$ proposta por Wang, Li e Wang
$\preceq$	Ordem total sobre $\mathbb{L}^*$ baseada em S, H_1, H_5 e T
$\lessapprox$	Ordem total sobre $\mathbb{L}$ gerada por duas funções
$\leqslant^*$	Ordem total sobre $\mathbb{L}^*$ obtida apartir de uma ordem total sobre $\mathbb{L}$
$\leqslant^{\star}$	Ordem total sobre $\mathbb{L}^*$ obtida apartir de uma ordem total sobre $\mathbb{L}$
$\preceq_{XY}^*$	Ordem total sobre $\mathbb{L}^*$ obtida apartir $\preceq_{XY}$
$\preceq_{XY}^{d*}$	Ordem total sobre $\mathbb{L}^*$ obtida apartir $\preceq_{XY}^d$
$\trianglelefteq_{\mathbb{L}}^*$	Ordem total sobre $\mathbb{L}^*$ obtida apartir $\trianglelefteq_{\mathbb{L}}$
$\trianglelefteq_{\mathbb{L}}^{d*}$	Ordem total sobre $\mathbb{L}^*$ obtida apartir $\trianglelefteq_{\mathbb{L}}^d$
$\leqslant_{L^*}$	Ordem usual do conjunto L^*
$\leqslant_{\mathbb{L}}$	Ordem usual do conjunto $\mathbb{L}$

$\leqslant_{L_n}$	Ordem usual do conjunto $L_n([0,1])$
$\leqslant_{XY}$	Ordem de Xu e Yager para o conjunto L^*
$\preceq_{XY}$	Ordem de Xu e Yager para o conjunto $\mathbb{L}$
$\vec{A}$	Partição ordenada de A
τ_1	Permutação dos índices de um conjunto de valores em $\mathbb{L}$ que ordena decrescentemente os extremos inferiores desses valores
τ_2	Permutação dos índices de um conjunto de valores em $\mathbb{L}$ que ordena decrescentemente os extremos superiores desses valores
σ	Permutação dos índices de um conjunto de valores que ordena decrescentemente esses valores
R^l_{ij}	Posição (i,j) na matriz R^l
$\odot$	Produto escalar em $\mathbb{L}^*$
$r(\mathbf{x})$	Projeção direita de $\mathbf{x} \in L^*$
$l(\mathbf{x})$	Projeção esquerda de $\mathbf{x} \in L^*$
$\widetilde{\mathbf{x}}$	Projeção direita de $\mathbf{x} \in L^*$
$\underset{\sim}{\mathbf{x}}$	Projeção esquerda de $\mathbf{x} \in L^*$
$r(\mathbf{X})$	Projeção direita de $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$
$l(\mathbf{X})$	Projeção esquerda de $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$
$\widetilde{\mathbf{X}}$	Projeção direita de $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$
$\underset{\sim}{\mathbf{X}}$	Projeção esquerda de $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$
$\in^*$	Relação de pertinência de intervalos em valores de $\mathbb{L}^*$
$\in^{**}$	Relação de pertinência de valores pontuais em valores de $\mathbb{L}^*$
R	Relação de preferência
$\subseteq$	Relação de subconjunto
$\subseteq^*$	Relação de subconjunto entre $\mathbb{L}^*$-valores
α^*	Solução $\mathbb{L}^*$-valorada ideal
$G(\mathbf{X})$	Soma dos comprimentos das projeções esquerda e direita de $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$
$v(X)$	Soma dos extremos do intervalo X
$\sum$	Somatória
$[+]$	Soma limitada entre elementos de $\mathbb{L}$
$\oplus$	Soma limitada entre elementos de $\mathbb{L}^*$
sup	Supremo
$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}$	União de uma família de conjuntos indexada pelos números naturais positivos
Λ	Vetor de pesos

Lista de Abreviaturas e Siglas

AHP	Analytic Hierarchy Process
BD	Banco de dados
CFIV	Conjunto fuzzy intervalarmente valorado
CFIA	Conjunto fuzzy intuicionista de Atanassov
CFIAIV	Conjunto fuzzy intuicionista de Atanassov intervalarmente valorado
ELECTRE	Elinúnation Et Choix Traduisant Ia Réalité
MDFIAIV	Matriz de Decisão Fuzzy Intuicionista de Atanassov Intervalarmente Valorada
WA	Média ponderada
OWA	Média ponderada ordenada
MTDMAME	Método de tomada de decisão multi-atributo e multi-especialista
MAUT	Multiple Attribute Utility Theory
PROMETHEE	Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations
sss	Se e somente se
SSD	Sistemas de Suporte à Decisão
TI	Tecnologia da informação
TCFIV	Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intervalarmente Valorados
TCFIA	Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas de Atanassov
TCFIAIV	Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionista de Atanassov Intervalarmente Valorada
TD	Tomada de decisão
TDG	Tomada de decisão em grupo
TDI	Tomada de decisão individual
TDME	Tomada de decisão multi especialista

Lista de Tabelas

5.1 Avaliação do especialista p_1. 77
5.2 Avaliação do especialista p_2. 77
5.3 Avaliação do especialista p_3. 77
5.4 Matriz de decisão de consenso 78
5.5 Rankings obtidos considerando algumas ordens totais admissíveis sobre $\mathbb{L}^*$. 78
5.6 Avaliação do especialista e_1. 79
5.7 Avaliação do especialista e_2. 79
5.8 Avaliação do especialista e_3. 79
5.9 Ranking obtidos pelo método proposto considerando diversas ordens totais e os rankings em [159, 160]. 80
5.10 Comparação baseada na Tabela 5.9. 80
5.11 Relação de preferência do tomador de decisão d_1 em [182] 83
5.12 Relação de preferência do tomador de decisão d_2 em [182] 84
5.13 Relação de preferência do tomador de decisão d_3 em [182] 84
5.14 Relação de Preferência $\mathbb{L}^*$-valorada coletiva. 84
5.15 Relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada do especialista d_1. 86
5.16 Relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada do especialista d_2. 86
5.17 Distância Euclideana entre as preferências de cada especialista para cada alternativa e α^* 86
5.18 Relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada coletiva R^c 87
5.19 Relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada de d_1. 88
5.20 Relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada de d_2. 88
5.21 Distância Euclideana entre as preferências de cada especialista para cada alternativa e α^* 88
5.22 Relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada coletiva. 89

6.1 Exemplo de sete rankings para seis alternativas. 93
6.2 Fusão dos sete rankings da Tabela 6.1. 94
6.3 Avaliação do especialista e_1. 103
6.4 Avaliação do especialista e_2. 103

6.5 Avaliação do especialista e_3. 103
6.6 Resumo dos rankings obtidos em [52, 53, 108]. 103
6.7 Avaliação do especialista e_1. 106
6.8 Avaliação do especialista e_2. 106
6.9 Avaliação do especialista e_3. 106
6.10 Avaliação do especialista e_4. 106
6.11 Resumo dos rankings obtidos em [37, 184]. 106

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A teoria dos conjuntos fuzzy, que surge em 1965 com o trabalho de Lotfi Asker Zadeh [200], propõe relaxar a teoria usual de conjuntos por considerar a possibilidade de infinitos níveis ou graus de pertinência de um elemento a um conjunto, para assim incluir na teoria de conjuntos as incertezas que se têm na hora de se definir a pertinência de um objeto a um conjunto. A teoria dos conjuntos fuzzy, tem se mostrado uma ferramenta muito útil, que pela sua própria natureza é adequada para lidar com incerteza, ignorância e vagueza presentes em problemas do mundo real. No entanto, a definição de conjunto fuzzy não permite levar em consideração completamente esta vagueza, pois impõe que seja dado um valor numérico pertencente ao intervalo $[0,1]$, para descrever o grau com o qual um elemento do universo pertence a um determinado conjunto[1], o qual pode não ser simples de se fazer e, como quem determina esse valor é um "especialista", o valor provavelmente seria diferente se mudarmos de especialista ou mesmo mantendo o mesmo especialista e pedirmos para fazer sua avaliação um tempo depois. Ou seja, esse valor exato não consegue encapsular as diferênças de avaliações de diferentes especialistas, nem as hesitações que tem um especialista em sua avaliação. Assim, parece razoável considerar formas alternativas de proporcionar a informação, que não requeiram de tal exatidão, ou que, ao menos, levem em consideração de alguma forma, a inacurácia[2] ou a vagueza inerente

[1] onde "zero" indica que se está seguro de que o elemento não pertence ao conjunto, e "um" que certamente o elemento pertence ao conjunto. Já os valores intermediários indicam uma certa incerteza na sua pertinência, de forma que quanto mais próximo de "um" ou de "zero", menor é a incerteza (de que esteja ou não esteja, respectivamente, no conjunto). Assim a máxima incerteza é quando se atribui um valor $0,5$ ao grau de pertinência de um elemento ao conjunto.

[2] Acurácia é a exatidão de uma medição ou de um instrumento de medição [62] e portanto inacurácia seria a inexatidão de uma medição ou de um instrumento de medição. Assim, acurácia refere-se à proximidade (enquanto inacurácia refere-se ao distanciamento) da medida relativamente ao verdadeiro valor de

ao problema que está sendo abordado. Neste sentido, existem diversas propostas para abordar este problema, entre as que destacamos a Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intervalarmente Valorados (TCFIV) introduzida de forma independente por diversos pesquisadores em 1975 ([77, 87, 143, 201]) e a Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas proposta por Krassimir T. Atanassov (TCFIA) em 1986 [8, 10]. Aplicações destas teorias podem ser vista em [10, 17, 32, 38, 88, 122, 145]. Na TCFIV é atribuído a cada elemento do universo um intervalo em vez de um simples número, onde o comprimento (amplitude) do intervalo é visto como uma medida da falta de conhecimento ou inacurácia no grau de pertinência. Na segunda abordagem é considerado um grau extra para modelar hesitação e incerteza sobre o grau de pertinência de um elemento a um determinado conjunto fuzzy. Na teoria dos conjuntos fuzzy esse grau de hesitação (ou grau de não pertinência) é implicitamente entendido como o complemento do grau de pertinência, enquanto na teoria dos conjuntos intuicionistas esse grau de hesitação é, de certa forma, independente do grau de pertinência. Analogamente ao caso da TCFIV, também há uma forma de medir o tamanho da incerteza na TCFIA. Porém, como foi demonstrado por diversos autores ambas extensões são equivalentes do ponto de vista matemático, ou seja, existe um isomorfismo entre Conjuntos Fuzzy Intervalarmente Valorados (CFIV) e conjuntos fuzzy intuicionistas de Atanassov (CFIA), porém do ponto de vista semântico eles são diferentes e portanto têm diferentes aplicações [162]. Em 1989, Atanassov junto com Gargov integraram ambas extensões por considerar em [11] um intervalo tanto para o grau de pertinência como para o grau de não pertinência, permitindo dessa forma modelar a incerteza ou inacurácia que se pode ter ao momento de atribuir esses valores. Ultimamente, esta extensão, denominada de Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionista de Atanassov Intervalarmente Valorada (TCFIAIV), tem motivado diversas aplicações, principalmente em apoio à tomada de decisão, como por exemplo em [45, 116, 182]. Mas recentemente, em [147] foi introduzida a noção de conjuntos fuzzy n-dimensionais, onde os grau de pertinências são intervalos n-dimensionais, ou seja, tuplas da forma $[a_1, \ldots, a_n]$ onde $0 \leqslant a_i \leqslant a_{i+1} \leqslant 1$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Em [16] foram estabelecidas algumas possíveis interpretações e motivações, assim como, uma aplicação em tomada de decisão desta extensão.

Os graus dos conjuntos fuzzy tomam valores no intervalo fechado $[0,1]$, já os CFIA, CFIV, Conjuntos Fuzzy Intuicionistas de Atanassov Intervalarmente Valorados (CFIAIV) os conjuntos fuzzy n-dimensionais tomam valores, respetivamente, nos seguintes conjuntos:

- $L^* = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x + y \leqslant 1\}$;

uma variável. Veja também [63, 131].

- $\mathbb{L} = \{[x,y] : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$;
- $\mathbb{L}^* = \{([u,v],[x,y]) \in \mathbb{L}^2 : v + y \leqslant 1\}$; e
- $L_n([0,1]) = \{[x_1,\ldots,x_n] : 0 \leqslant x_1,\ x_n \leqslant 1$ e $x_i \leqslant x_{i+1}$ para todo $i = 1,\ldots,n-1\}$.

Enquanto $[0,1]$ possui uma ordem (total) subjacente natural, L^* e $\mathbb{L}$ têm associada uma ordem, porém parcial, obtida a partir da ordem de $[0,1]$. A saber:

$$(x_1,x_2) \leqslant_{L^*} (y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1 \wedge y_2 \leqslant x_2$$

e

$$[x_1,y_1] \leqslant_{\mathbb{L}} [x_2,y_2] \Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1 \wedge x_2 \leqslant y_2$$

Já $\mathbb{L}^*$ tem sua ordem obtida das ordens de L^* e $\mathbb{L}$ como segue:

$$(X_1,X_2) \leqslant_{\mathbb{L}^*} (Y_1,Y_2) \Leftrightarrow X_1 \leqslant_{\mathbb{L}} Y_1 \wedge Y_2 \leqslant_{\mathbb{L}} X_2$$

Finalmente,uma vez que $L_n([0,1])$ estende $[0,1]$ e $\mathbb{L}$, no sentido de que $[0,1] = L_1([0,1])$ e $\mathbb{L} = L_2([0,1])$, também podemos estender as ordens de $[0,1]$ e $\mathbb{L}$, para obtermos uma ordem em $L_n([0,1])$ da seguinte forma:

$$[x_1,\ldots,x_n] \leqslant_{L_n} [y_1,\ldots,y_n] \Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leqslant y_n$$

Por outro lado, Joseph Goguen em 1967 com seu artigo [71], proporciona uma teoria geral de conjuntos fuzzy, onde os graus de pertinencias tomam seus valores em um reticulado e que são chamados de conjuntos L-fuzzy. Como claramente, $(L^*,\leqslant_{L^*})$, $(\mathbb{L},\leqslant_{\mathbb{L}})$, $(\mathbb{L}^*,\leqslant_{\mathbb{L}^*})$ e $(L_n([0,1]),\leqslant_{L_n})$ são todos reticulados limitados, podemos concluir que todas estas extensões são casos particulares da teoria dos conjuntos fuzzy L-valoradas (onde L é um reticulado limitado) proposta por Goguen. Porém, é interessante estudar estas extensões, já que alguns resultados e propriedades que valem para o caso particular não necessariamente valem para o caso geral e além disso a motivação semântica de cada uma destas extensões, fazem com que possam ser aplicadas de forma diferente e natural em alguns casos reais.

Do ponto de vista de reticulados, podemos notar que há algumas relações entre estas extensões: há um isomorfismo entre os reticulados L^* e $\mathbb{L}$ e entre $\mathbb{L}^*$ e $L_4([0,1])$. Podemos também verificar que existe uma retração do reticulado $\mathbb{L}$ (e portanto de L^*) ao reticulado $([0,1],\leqslant)$ e do reticulado $\mathbb{L}^*$ ao reticulado L^* (e portanto ao reticulado $\mathbb{L}$) e em geral há uma retração do reticulado $L_n([0,1])$ ao reticulado $L_m([0,1])$ quando $m \leqslant n$.

Existem outras extensões e generalizações de conjuntos fuzzy, como a dos conjuntos fuzzy de tipo-N[3] [201], multiconjuntos fuzzy [190], conjuntos fuzzy hesitantes [19, 163], etc. Uma análise histórica e hierárquica dessas extensões pode ser encontrada em [33].

A teoria dos conjuntos (clássica) e sua lógica (subjacente), são a base de toda a matemática (convencional) a qual dá suporte, por exemplo, às engenharias e ao desenvolvimento de software convencional. No entanto, ao se mudar desse paradigma para o fuzzy, é natural e necessário desenvolver uma matemática e lógica para esta teoria, afim dela poder ser usada em aplicações de engenharia e em outros campos onde se use a matemática e lógica, e se lide com a presença de vagueza ou incerteza. De fato, o sucesso de aplicações que se baseiam nesta matemática fuzzy, tem feito com que mais e mais aplicações da matemática fuzzy, nos mais variados campos (economia, medicina, agricultura, engenharia, robótica, etc), tenham sido desenvolvidas e como contrapartida, também tem-se desenvolvido diversas pesquisas a fim desenvolver novas técnicas e formas de usá-las, e como corolário, tem-se aprofundado as pesquisas no campo teórico, generalizando construções matemáticas usuais como integrais, topologias, álgebras, etc para este mundo fuzzy. Porém, ainda se está muito longe de se atingir o nível de maturidade da matemática convencional. Por outro lado, por serem mais novas e terem menos gente trabalhando nas extensões da teoria dos conjuntos fuzzy, elas ainda estão mais longe de tal status e, pelo tanto, é fundamental o esforço desses poucos (quando comparados com os que trabalham com lógica fuzzy $[0,1]$-valorada) pesquisadores para cimentar essa base teórica que permita o aproveitamento de suas particularidades, para desenvolver novas técnicas de uso e portanto novas aplicações dessas extensões fuzzy. E é justamente, neste ponto que esta tese pretende contribuir.

Por outro lado, na administração, a tomada de decisão consiste no processo cognitivo através do qual se escolhe, baseados em variados cenários, ambientes, análises e fatores, uma alternativa ou plano de ação dentre vários outros [150]. Todo processo decisório produz uma escolha final, a qual pode ser uma ação ou uma opinião de escolha. Ou seja, a tomada de decisão refere-se ao processo de escolher a alternativa mais adequada para a empresa, em uma determinada circunstância. Qualquer decisão tomada, afetará a gestão da empresa, e por isso tem que ser feita de forma planejada, pensando no que poderá afetar esta decisão, e embasada em métodos e técnicas bem consolidadas e respeitadas para ter um grau de confiança em que a escolha se não foi a melhor foi uma boa escolha. Conhecer qual é a decisão que deve ser tomada e o momento certo para faze-la é fundamental, ela em geral depende da gravidade e análise que se faz da adversidade e desafios da empresa. An-

[3]CFIV são casos particulares de conjuntos fuzzy de tipo-2 e analogamente, conjecturamos, que conjuntos fuzzy n-dimensionais são casos particulares de conjuntos fuzzy de tipo-n.

tes de tomar uma decisão, os especialistas devem fazer um estudo minucioso das necessidades da empresa, para tentar diminuir a chance de que a decisão que será realizada esteja errada e resulte em consequências negativas para a empresa. A necessidade de se tomar uma decisão em geral ocorre num momento de impasse em que há mais de uma alternativa. Usualmente, cada pessoa toma suas decisões baseadas em aspectos subjetivos, mas a subjetividade não tem medida perfeita, e não é organizada, sistemática e nem objetiva. Por isto, é que em administração há uma preocupação crescente em embasar os tomadores de decisão com métodos e técnicas que o ajudem nesta complexa tarefa. Neste sentido, o uso de lógica fuzzy, por sua capacidade de trabalhar com vaguezas e incertezas, tem-se tornado uma ferramenta eficaz para desenvolver métodos de tomada de decisão, em situações de incertezas e subjetividades. Assim, a lógica fuzzy tem desempenhado um papel importante neste campo (ver por exemplo [26, 39, 49, 118, 122, 123, 189]) e portanto, não é surpreendente que alguns métodos fuzzy utilizados na tomada decisão tenham sido estendidos para extensões da lógica fuzzy, por exemplo, [16, 37, 46, 176, 177, 178, 179].

Várias aplicações de CFIAIV e extensões de noções habituais fuzzy para os CFIAIV foram feitas, ver, por exemplo, [9, 34, 35, 127, 167, 170, 180, 182]. Por outro lado, a tomada de decisão de uma escolha dentre diversas alternativas feita por um grupo de especialistas, usualmente é feita considerando as opiniões de cada especialista, que expressam suas preferências entre as várias alternativas [50] e quando consideramos a TCFIAIV para este fim, as preferencias dos especialistas é dada usando como graus de preferencia valores em $\mathbb{L}^*$ [56, 116, 170, 181, 182, 197, 199].

Uma ferramenta matemática importante para a tomada de decisão fuzzy é o operador de média ponderada ordenada (OWA) que foi introduzida em [191] e variações destes, tal como OWA geométrico [186], OWA geométrico parametrizado [100], Operador de media ponderada de Bonferroni generalizado [25], etc. (para outras variantes do operador OWA ver [195]). Diversas versões das variantes de operadores OWA para várias extensões de lógica fuzzy tem sido propostas, entre elas destacamos [43, 107, 202, 203] e em particular para TCFIAVI temos [55, 58, 176, 185, 204]. No entanto, estas últimas, apesar de satisfazer as propriedades principais do OWA (monotonicidade, idempotência, simetria, e são limitadas [68]), não têm o mesmo comportamento que o OWA quando aplicado a elementos diagonais.

Outro aspecto importante em tomada de decisão em extensões de lógica fuzzy, é a escolha da ordem a ser adotada. É importante que esta ordem seja total e admissível, num sentido análogo ao conceito de ordens admissíveis introduzido em [36] para $\mathbb{L}$. Neste sentido, nesta tese adaptaremos esta definição de ordem admissível para o contexto de $\mathbb{L}^*$ e verificaremos entre as diversas ordens admissíveis qual a mais adequada para os métodos de tomada de decisão, sob incerteza intuicionista intervalarmente valorada que serão propostas nesta tese.

1.2 Justificativa

A Lógica Fuzzy é uma ferramenta poderosa para modelar conhecimentos nebulosos e incertos o qual tem diversas aplicações práticas cada vez mais bem sucedidas. Com a lógica Fuzzy é possível desenvolver modelos mais flexíveis, que contenham uma certa incerteza e inacurácia na base conhecimento, como é o caso das ciências Humanas. Por exemplo, podemos citar a tomada de decisão (TD) na economia, administração, entre outras áreas humanísticas. O desenvolvimento desta tese, justifica a necessidade de se estender e criar métodos de TD que possam lidar com conhecimentos nebulosos e com os vários pontos de vista dos especialistas. Na tomada de decisão mudanças nas comparações dos atributos pode acarretar a mudança do ponto de vista dos especialistas, e assim gerar inconssistências entre os pontos de vista. Com esses métodos baseados em modelos matemáticos, especialmente baseados em lógica fuzzy, vem sendo possível considerar a hesitação do especialista na TD e assim trabalhar de forma mais sistemática as áreas humanísticas onde o conhecimento apresenta alguns tipos de incertezas.

1.3 Objetivos da Tese

O objetivo principal desta tese é apresentar a Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas de Atanassov Intervalarmente Valorados (TCFIAIV), como sendo uma generalização da teoria dos conjuntos fuzzy, teoria dos conjuntos fuzzy intuicionistas de Atanassov e teoria dos conjuntos fuzzy intervalarmente valorados, no sentido que podemos encarar operadores valorados em $\mathbb{L}^*$ como representações de operadores valorados em $[0,1]$, L^* e $\mathbb{L}$, de forma análoga como vemos operadores intervalarmente valorados como representações de operadores fuzzy (ver [15, 18, 20, 23]). Assim, analogamente ao caso de operadores intervalarmente valorados, podemos estabelecer um método para transformar operadores fuzzy, intuicionistas e intervalarmente valorados para operadores intuicionistas intervalarmente valorados e podemos aplicar estas construções em métodos fuzzy de apoio à tomada de decisão em grupo e considerando múltiplos atributos ou múltiplos critérios.

Os objetivos secundários desta tese são:

1. Fornecer uma extensão do operador de média ponderada, variantes do OWA e outros operadores importantes em tomada de decisão fuzzy para o contexto de TCFIAIV preservando suas principais propriedades, assim como, o seu comportamento com os elementos das diagonais e semidiagonais.

2. Estudar ordens admissíveis (totais e parciais) sobre $\mathbb{L}^*$ que possam ser usadas para classificar alternativas em métodos de tomada de decisão fuzzy considerando um grupo de especialistas e multiplos atributos para o contexto de TCFIAIV.

3. Estender diversos métodos de tomada de decisão fuzzy considerando um grupo de especialistas e múltiplos atributos para o contexto de TCFIAIV e considerar exemplos ilustrativos que permitam comparar as classificações obtidas, com as obtidas por outros métodos.

4. Fornecer uma base teórica e alguns métodos que possibilitem amalgamar o resultado de diferentes métodos de tomada de decisão.

Capítulo 2

Paradigmas (Linhas de Pensamentos) da Tomada de Decisão

Existem vários paradigmas (linhas de pensamentos) na literatura que procuram sistematizar o processo decisório. Neste capítulo vamos abordar dois desses paradigmas, o linear e o sistêmico, para introduzir as linhas de pensamentos de alguns pesquisadores do processo de decisão baseados nesses paradigmas. O pensamento linear procura simplificar a complexidade do processo decisório, porém na prática, esta linha não tem uma boa aplicação para tomada de decisão estratégica. De fato, Montana e Charnov em [113] consideram que, apesar dos decisores serem fascinados pela simplicidade das soluções do pensamento linear, muitas vezes elas não são as maneiras mais eficazes de lidarem com os problemas organizacionais. A outra forma de abordagem é o pensamento sistêmico, que vem tentar resolver as lacunas citadas pelo método linear, muito embora eles não considerem que sejam de fácil tratamento. O pensamento sistêmico considera que as soluções dos processos de decisão não são constantes, pois se alteram o tempo todo e as mudanças afetam o todo. Segundo a visão de Maximiano em [105], o sistema é visto como um todo, no qual existem interdependências de suas partes. O enfoque sistêmico é um sistema de idéias, que pode ser entendido como uma filosofia ou forma de produzir, interpretar e utilizar conhecimentos, podendo ser aplicado em todas as áreas de atividades e de raciocínio humano, além de ser um método de resolver problemas e organizar conjuntos complexos de componentes. Através do enfoque sistêmico, o administrador adquire uma visão integrada das organizações e dos processos administrativos além de ser uma ferramenta para organizar sistemas que produzam resultados. Convém ressaltar que a idéia inicial do enfoque sistêmico vem dos gregos antigos, porém o enfoque sistêmico moderno teve suas origens na mesma época em que os pioneiros lançavam as fundamentações da administração científica do processo administrativo e da qualidade total [105]. Considerando o todo das organizações nos processos de tomada de decisão e suas implicações, muitas críticas foram feitas ao método linear, em contrapartida se acredita que o enfoque do tratamento sistêmico nos processos de tomada de decisões, seja o método mais eficaz para se aplicar, visto que, dessa forma, alcançamos uma abordagem mais ampla e consideramos melhor a complexidade dos problemas [113].

2.1 Tipos de Abordagens Científicas dos Processos de Tomada de Decisão

Uma das abordagens científicas adotadas para o estudo dos problemas decisórios é a abordagem normativa, que procura conseguir uma decisão "ótima", ou seja, prescreve como as decisões deverão ser tomadas, com uma visão comportamental, que se preocupa em entender como as pessoas agem diante de problemas decisórios. Na abordagem de tomada de decisão normativa, o modelo admite que o decisor tome sempre decisões de forma racional, no sentido de maximizar a utilidade de sua escolha. Em outras palavras, ele é capaz de calcular as conseqüências de cada uma das alternativas e relaciona-las em ordem de preferências e finalmente escolher aquela que maximiza melhor a sua utilidade. Essa teoria procura formalizar e tornar mais objetivas as soluções dos problemas, assim como a escolha de uma entre várias alternativas em um ambiente organizacional de incertezas. A abordagem científica não proporciona a fórmula correta para se tomar as melhores decisões, pois os mesmos apoiam-se em grande parte nos conceitos de valores ou preferências dos decisores. Segundo Porto e Azevedo em [125], o homem soluciona problemas a partir de dois elementos essenciais: a informação, que permite conhecer numa determinada situação que requer a sua atuação, e a concepção intelectual do problema, ou seja, suas variáveis e como elas se interagem entre si.

2.2 Teoria da Racionalidade Limitada

Herbert A. Simon (⋆ 1916 – † 2001) foi o primeiro pesquisador a caracterizar os processos administrativos como processos de decisão e por isso é considerado um dos precursores na investigação dos processos de tomada de decisão. Na sua investigação, ele analisou a estrutura da escolha racional humana, ou seja, o modo como o indivíduo decide, para estudar a anatomia (estrutura) e a fisiologia (funcionamento) da organização e assim descrever o trabalho do administrador. Na sua obra ele via o homem como um ator econômico bombardeado por escolhas e decisões, mas possuindo um número limitado de informações e capacidades de processamentos dessas informações. Na sua visão, a organização é um sistema de decisão, onde o decisor participa de forma racional e consciente, escolhendo entre alternativas mais ou menos racionais. A racionalidade da decisão (adequação entre meios e fins) torna-se então, a principal preocupação da teoria administrativa, cabendo ao administrador a tarefa de distribuir e influenciar a decisão numa determinada organização [153].

2.3 Etapas dos Processos de Decisão

Os processos de decisões são compostos por três etapas:

1. Os relacionamentos de todas as possíveis estratégias que poderão ser adotadas, onde elas representam o conjunto de decisões que determinam o comportamento a serem seguidos em um determinado período de tempo;

2. A determinação de todas as consequências decorrentes da adoção de cada estratégia; e

3. As avaliações comparativas de cada grupo de consequências e escolha de uma alternativa entre as várias disponíveis, a partir de valores pessoais e organizacionais [153].

O pesquisador Herbert Simon considerava que só existe otimização de soluções de alternativas se:

1. Existir um conjunto de critérios que permita que todas as alternativas sejam comparadas entre si; e

2. Se a alternativa escolhida pelo decisor respeitar o conjunto de critérios.

Por outro lado, Simon ainda considerava que uma alternativa é satisfatória quando:

1. Existe um conjunto de critérios que descrevem com um mínimo de satisfação as alternativas; e

2. A alternativa escolhida pelo decisor satisfaz esses critérios [153].

2.4 Tomada de Decisão

Decidir é escolher uma opção entre diversas alternativas. Assim, a tomada de decisão é uma tarefa usual, que ocorre na maioria das atividades de uma empresa e boas decisões numa empresa são fundamentais para o bom desempenho da mesma. Toda decisão é a solução de um problema, uma vez que todo problema resulta da necessidade de escolher uma dentre as várias ações possiveis diante de uma situação [1]. Segundo o ponto de vista de Abramczuk em [1], uma situação designa o resultado de uma afirmação sobre alguma realidade, seja na forma de relato de um fato, ou seja, na forma de suposição sobre algum aspecto da realidade. Dessa forma, a solução de um problema é a ação final numa cadeia de ações. A ação no processo decisório, seria os meios para se chegar a um determinado fim. Todo problema organizacional tem solução subjetiva, ou seja, existe a própria necessidade de decidir e agir diante de uma situação. Decidir com objetividade é o ideal de todo especialista e administrador (decisor), principalmente quando as decisões devem conciliar múltiplos critérios, exigências e preferências de vários decisores [1]. Assim, o estudo e propostas de modelos de decisão é uma área de intensas pesquisas impulsionadas pelo fato de cada vez ser mais frequente o uso de modelos de decisões para auxiliar os gestores de uma empresas nos processos decisórios. De acordo com Chiavenato em [47] “decisão é o processo de análise e escolha entre várias alternativas disponíveis do curso de ação, em que a pessoa deverá seguir; e decidir a de recomendar entre vários caminhos alternativos que levam a determinados resultados”.

Segundo Sobral e Peci em [157], a tomada de decisão é descrita como a escolha da melhor alternativa entre diversas possíveis, com o objetivo de resolver um problema ou aproveitar uma oportunidade. No entanto, em [130], Robbins e Decenzo consideram que essa visão é excessivamente simplista, pois para eles a TD é o processo de como se escolher essa melhor alternativa. Por outro lado, Hall em [79] define a TD como o processo pelo qual as organizações são estruturadas e reestruturadas. Contudo [157] considera que a TD não é um processo fácil, pois associada a cada alternativa de decisão estam as incertezas com suas consequências e impactos. Maximiano em [106] afirma que administrar é tomar decisões e vice-versa. De fato, as tarefas de liderar, planejar e organizar, executar e controlar são todas feitas baseadas em decisões interligadas. Toda decisão deve partir de parâmetros que possam embasar o processo decisório, assim como, se deve utilizar ferramentas que ajudem na análise e interpretação desses parâmetros, garantindo um aumento da probabilidade de sucesso da TD. No ambiente organizacional é difícil evitar os riscos, mas os mesmos podem ser avaliados e, em algumas situações, até quantificados. O excesso de confiança de alguns decisores pode ser um viés cognitivo que em geral tem relação direta com o otimismo acerca das probabilidades de sucesso. Quanto maior a dificuldade ou desconhecimento do problema, maior a probabilidade do indivíduo superestimar a possibilidade de resolver o problema, podendo gerar alternativas mais ou menos simples, e assim não avaliar adequadamente o risco que se está correndo com aquela alternativa.

2.4.1 Ambiente da Tomada de Decisão

A tomada de decisão dentro do ambiente organizacional ocorre em geral, dentro de quatro tipos de situações de ambientes sendo eles: situação de certeza, situação de risco, situação de incerteza e situação de conflito [74]. O ambiente que preserva a situação de certeza é cada vez mais raro entre as organizações que lidam com mercados dinâmicos e mutantes. Atualmente, o ambiente que antes era classificado como certo, apresenta mais incertezas do que certezas e, em consequência disso, revela-se mais difícil para o decisor tomar uma decisão embasado com informação suficiente para praticar sua gestão. No entanto, o decisor munido de fundamentos e técnicas para lhe auxiliar consegue mesmo nestas condições realizar uma tomada de decisão de boa qualidade. Nesses casos, basta que o decisor escolha uma opção entre as várias possíveis, podendo escolher a opção que lhe parece mais favorável para solucionar um determinado problema. Devemos considerar que nesse tipo de ambiente o risco ainda é muito pequeno. Todavia, conforme [74], o grau de certeza é muito grande, ou seja, se trabalha quase sem riscos. Acreditamos que este ambiente é mais encontrado no nível operacional, ou seja, muito distante do ambiente de decisões estratégicas que as decisões são mais incertas. Este tipo de risco (zero) é o que se pretende na tomada de decisão a nível estratégico. Há controversias na literatura no conceito de ambiente de risco zero organizacional, já que há dúvidas se realmente seria possível existir esse ambiente de cem por cento de certezas, isto é, se pensarmos de maneira sistêmica, em que cada decisão tomada em um processo de decisão tem influência sobre o todo, é possível concluir que não há certezas envolvidas no processo decisório. Já [74], classifica o ambiente de situação de risco como sendo aquele que apresenta várias alternativas na resolução dos problemas para alcançar os objetivos, mas com certa probabilidade de risco no processo. O decisor, considerando a perspectiva do ambiente organizacional, detém uma certa quantidade de informações para análises dos processos [74]. Neste ambiente, o risco nas decisões está sempre presente, muito embora se possam tomar decisões satisfatórias e adequadas, as soluções de determinados problemas podem ser inadequadas tendo em vista as incertezas presentes em algumas variáveis econômicas e outros fatores dos processos. O último ambiente é chamado de ambiente de incerteza pela impossibilidade de prever resultados ou atribuir probabilidades [113]. Se considera que os possíveis problemas ocasionados por essas condições de ambientes são os excessos de variáveis a serem analisadas no ambiente organizacional e a falta de conhecimento sobre as mesmas. Hoje em dia, nas grandes corporações esses ambientes são melhores administrados com ferramentas de tecnologias da informação, técnicas de inteligência artificial e modelos matemáticos [50].

Como já foi mencionado, uma decisão implica na escolha de uma alternativa em detrimento de outras e tem como objetivo resolver um problema ou aproveitar uma oportunidade de negócio. Contudo a tomada de decisão não é fácil, pois associada a cada alternativa de decisão está a incerteza de suas consequências e impactos, já que a mesma lida com fatores internos e externos, e muitas vezes seus resultados futuros são totalmente desconhecidos. Herbet Simon, em suas pesquisas alertou que é impossível, que o indivíduo conheça todas as alternativas de soluções possiveís que dispõe o processo decisório, ou que, todas as suas consequências sejam avaliadas, no entanto, ele considerava que o decisor podería percorrer apenas uma possibilidade de solução (um caminho) e nunca tería a certeza se aquela decisão escolhida era a melhor em termos de resultados, muito embora sob certas condições avaliadas ele pudesse ter uma intuição (palpite) razoável sobre a qualidade da solução do problema em questão no processo decisório [153].

Baseado nesses parâmetros de multiciplidade de alternativas e incertezas, o decisor (gestor) deve avaliar o máximo dessas alternativas, de preferência utilizando ferramentas computacionais, uma vez que a complexidade do processo, muitas vezes está associada à necessidade de avaliar as alternativas e analisá-las em um contexto futuro, assim como, estimar suas consequências e seus impactos nas organizações. Os gestores na TD, calculam e gerenciam essse riscos. Entretanto, por mais sofisticadas que sejam os métodos matemáticos e as ferramentas computacionais de apoio à TD utilizadas, a imprevisibilidade estará sempre dentro dos processos decisórios em função de diversas variáveis enconômicas que são mutantes no tempo futuro. Baseado nessas motivações, cada situação de decisão pode ser organizada em uma escala que vai da completa certeza à mais completa incerteza, dependendo das informações disponíveis sobre o problema e cada alternativa de solução e seus resultados.

2.4.2 Tipos de Decisões no Ambiente Administrativo

Na literatura sobre tomada de decisão, existem vários tipos de classificações de decisões. Uma delas classifica a decisão como tendo dois tipos: a **decisão sequêncial** e a **decisão única**. A decisão sequêncial se refere à escolha de uma dentre possíveis ações em consequência de resultados de uma decisão anterior tomada sob condições de incertezas e não nulas. Diferentemente da decisão sequêncial, na decisão única se determina o curso da ação orientado por um determinado proposito, mas não se impõe a necessidade de outras decisões posteriores, a não ser aquelas referentes aos meios para implantar o curso da ação escolhida [1]. Em um outro tipo de classificação no ambiente organizacional, se considera que as decisões podem ser classificadas de acordo com a natureza do problema em **decisões programadas** e **decisões não programadas** [64, 105]. Também podem-se classificar as decisões em termos de tipos de métodos usados (por regras, por procedimentos ou por políticas) [1].

Decisões Programadas

As decisões programadas são utilizadas para a resolução de problemas repetitivos, do cotidiano das empresas. Antigamente nas organizações, as tomadas de decisões eram baseadas nas intuições, nos métodos tradicionais de procedimentos padrões e nas rotinas burocratizadas. De acordo com Peter Drucker em [64] existem decisões que devem ser tomadas pragmaticamente no ambiente organizacional. As decisões programadas são de soluções repetitivas e estruturadas, determinadas por abordagens específicas para as quais a organização já desenvolveu mecanismos de atuação e controle. Por exemplo, as decisões tomadas no serviço de administração de pessoal. As decisões programadas encurtam o tempo do processo decisório e possibilitam aos decisores (administradores) disponibilizar parte do seu tempo para tarefas mais importantes. No entanto, devemos salientar que elas têm a desvantagem de limitar a liberdade do decisor, por já serem pré-estabelecidas e já existirem um processo de rotina de execução das mesmas na organização [1].

Decisões Não Programadas

Decisões não programadas são soluções específicas, para resolver situações desestruturadas e pouco frequentes, para as quais as informações são incompletas e/ou ambíguas. São normalmente decisões que por sua importância para a organização, exigem que se desenvolvam uma resposta customizada, quando envolve o financeiro. Quase todas as decisões não programadas são de carater estratégicos e relevantes. Como exemplo, a criação de uma nova filial, lançamento de um produto, etc. A medida que se sobe na hierarquia organizacional são mais frequentes as necessidades de se tomarem decisões importantes para as organizações. Nessas decisões, o administrador deve analisar cuidadosamente todas as informações que conseguir coletar e usar seu julgamento individual para tomar a decisão mais adequada às circunstâncias. Assim como, existem poucas situações de completa certeza ou incerteza do ambiente, também poucas decisões podem ser classificadas como totalmente programadas ou não programadas. As decisões programadas dificilmente dispensam totalmente a escolha individual do administrador (gestor por formação) ou decisor (profissionais de várias especialidades) que fazem parte da cúpula hierárquica). As decisões não programadas são problemas em lançamentos ou inovadores, nos quais não existem soluções pré-estabelecidas ou sistematizadas, requerendo sempre um protocolo novo de solução [1].

Método por Regra

Os métodos por regras são normas explícitas sobre como o decisor deve proceder diante de uma situação de decisão estruturada, como por exemplo, dizendo como agir ou as medidas que devem ser tomadas diante a falta ao trabalho de um empregado. Elas já existem de uma forma sistemática para esses tipos de procedimentos. Neste método as regras são simples, fáceis de serem usadas e garantem uniformidade e consistência nas decisões tomadas [1].

Método por Procedimento

O método por procedimento é feito seguindo uma série de etapas sequenciais e inter-relacionadas, que devem ser seguidas para responder a uma situação bem estruturada. Por exemplo, os procedimentos sistemáticos na implantação de um manual de rotina de uma empresa. Depois de identificar a situação do problema, o decisor deve apenas executar a sequências de passos já pré-definidas no seu manual de procedimentos [1].

Método por Políticas

Nos métodos por políticas, são feitas orientações genéricas sobre como proceder em situações recorrentes, mas pouco estruturadas. Ao contrário dos métodos por regras e dos métodos por procedimento, que são pré determinados, o método por política apenas estabelece parâmetros de atuação, não indicando as soluções específicas a serem implantadas. Por exemplo a Política de marketing (política aberta para criação). As políticas podem ou não conter alguma tipo de ambiguidades, deixando espaços para as interpretações e criações ou inovações do decisor [1].

A Figura 2.1 descreve, o nível hierárquico da organização onde as decisões acontecem assim como, o tipo de decisão que é tomada.

.

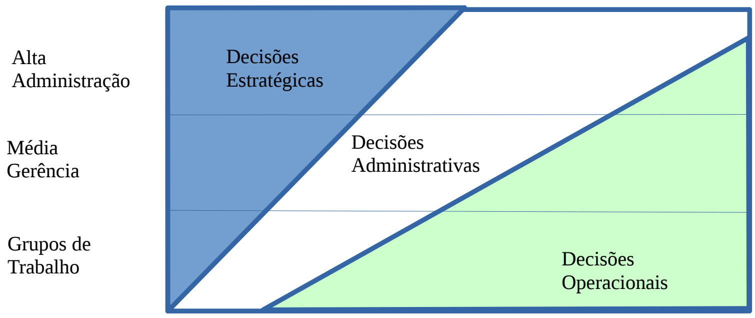

Figura 2.1: Tipos de Decisão [105, Figura 5.4]

2.4.3 Fundamentos da Tomada de Decisão

Diariamente se tomam decisões, sobre os mais diversos assuntos e a qualidade dessas decisões, têm um impacto significativo no desempenho das organizações. Nos fundamentos da TD, podem se destacar dois aspectos que estão presentes na administração. O primeiro refere-se à dificuldade que o decisor tem em prever o futuro. Quando os administradores tomam decisões em um ambiente de incertezas, a avaliação da eficácia da decisão só pode ser efetuada após sua implementação. O segundo fundamento, é a dificuldade de reverter uma decisão que não deu certo, pois as consequências podem ser drásticas para as empresas. No entanto, a maioria das decisões têm impactos positivos para as organizações. Para sistematizar estas decisões são criadas continuamente técnicas e ferramentas computacionais de Tecnologias da Informação (TI), para auxiliar os administradores a melhorarem a qualidade das decisões e a evitar erros na escolha e decisões gerênciais.

2.4.4 Processo de Tomada de Decisão

O processo de TD no ambiente organizacional, começa com a identificação de um problema e em seguida é gerada uma reflexão de possiveis soluções. O grupo de decisores avalia inúmeras variáveis antes de tomar uma decisão. Esse processo é uma ação rotineira e comum não apenas no ambiente empresarial, mas no cotidiano de qualquer pessoa. Vale a pena salientar que a necessidade de escolher uma alternativa de decisão no ambiente organizacional ocorre em um momento de impasse, no qual temos mais de um curso de ação a seguir, do contrário não teríamos dúvidas e não necessitaríamos de estruturar o procedimento. Quando optamos por uma alternativa, renunciamos a todas as outras, mesmo correndo o risco da decisão não ser a “mais acertada”. Toda decisão é, portanto, um processo que envolve simultanemente uma escolha e renuncias das outras possibilidades.

“Decisão é o ato ou efeito de decidir” [1], o seja, optar por uma dentre várias alternativas de ações, que se oferecem para alcançar determinado objetivo. O processo de decisão, se encerra com a escolha de uma das alternativas por parte do decisor e a avaliação de sua eficácia. Nas organizações, os processos de decisões envolvem diferentes instâncias hierárquicas e funcionais [1]. Para Chiavenato em [48, Página 253], as pessoas decidem em função da sua interpretação das situações e não na situação real e, por tanto, é um processo fortemente subjetivo.

Etapas do Processo de Tomada de Decisão

O processo de tomada de decisão é um processo contínuo e deve passar pelas seguintes (oito) etapas [130].

1. **Identificação do Problema:** Consiste em identificar necessidades e carências da organizações e de potenciais alternativas de soluções.

2. **Identificação das soluções do problema:** Nesta etapa são determinadas as alternativas de potenciais soluções a serem consideradas para uma boa resolução do problema. A identificação do problema tem como primeiro passo, estudar bem o problema e a partir daí estruturar as possíveis soluções do problema. As possiveis soluções do problema neste contexto é o conjunto de aspectos considerados importantes para que o decisor escolha a decisão mais acertada e otimizada dentro de suas possibilidades. A estruturação do problema de decisão, faz parte da etapa de identificação das solução do problema. Estruturar o contexto de decisão é colocar as coisas em ordem, uma vez que o problema já foi estruturado, a partir da identificação das várias relações e das estruturas que serão interligadas na possível solução do seu problema de TD.

3. **Identificação dos pesos de cada índice**: A alocação de pesos aos **índices**, consiste em criar uma escala de pesos, onde o peso máximo, por exemplo a nota 10 (dez), se lhe atribui à melhor alternativa e depois se determina o peso do resto das alternativas, usando esse peso máximo como referência. Com essa ponderação, por exemplo, a um índice que lhe atribuiram peso 5 (cinco), significa que a alternativa que detenta o máximo peso é considerada duas vezes mais importante que ele. O

objetivo dessa ponderação é usar as preferências pessoais de cada decisor, para atribuir prioridades aos índices relevantes de sua decisão, assim como, indicar seu grau de importância.

4. **Triagens de alternativas**: Nesta etapa o tomador de decisão seleciona as alternativas que poderiam ter êxito na solução do problema, descartando alternativas claramente indesejáveis, diminuindo assim o espectro de alternativas e portanto simplificando o processo de TD. Nesta etapa não são feita as avaliações de alternativas, são apenas definidas quais serão as alternativas que devem ser consideradas no processo de TD.

5. **Análises das alternativas:** Os tomadores de decisões precisam analisar cada uma das alternativas selecionadas na etapa anterior de maneira crítica, considerando os pontos fortes e fracos. Algumas avaliações podem ser feitas de forma relativamente objetivas, no entanto, as análises das alternativas são feitas nitidamente como um julgamento pessoal. Estes julgamentos refletem os critérios de escolhas da etapa 2, os pesos atribuidos aos critérios e avaliação das alternativas. Isso explica porque dois decisores podem examinar um conjunto de alternativas e classifica-las de forma totalmente diferentes.

6. **Escolha de uma das alternativas:** Nesta etapa é feita a escolha da alternativa, entre aquelas avaliadas e ponderadas que geraram a maior nota (ponderação). Se for considerado um grupo de decisores, na etapa anterior, como classificação das alternativas, então nesta fase se determina como agregar todas elas de forma a se obter uma classificação de consenso que reflita as opiniões de todos eles.

7. **Implementações das alternativas de decisão:** Implementação da decisão ainda pode fracassar, se não for corretamente implementada. Nesta etapa executa-se a ação escolhida na TD. A implementação da decisão também incluí transmitir a decisão para aqueles envolvidos no problema e obter o comprometimento na implementação da decisão.

8. **Avaliações da eficácia das decisões:** Avaliação da eficácia da decisão, verifica se o problema foi resolvido com a escolha da alternativa da etapa 6, e se a implementação da etapa 7 obteve o resultado desejado.

Dificuldades do Processo de Tomada de Decisão

Montana e Charnov em [113] consideram que existem três dificuldades associadas à abordagem dos processos de tomada de decisão:

1. Toda e qualquer decisão tomada em uma organização deve invariavelmente afetar o todo e não somente a área onde se executa a estratégia proposta. Eles consideram que isso ocorre face à integração entre os departamentos e os cenários voláteis em que as empresas estão inseridas.

2. A decisão não necessariamente é uma solução simplista do problema, por meio desta abordagem, a mesma deve tentar resolver o todo, pois caso não consiga, haverá um severo comprometimento da eficácia da solução do problema.

3. A validade da solução encontrada na tomada de decisão não pode ser sempre válida em ambientes muito dinâmicos e velozes, pois as situações e os cenários tendem a mudar constantemente.

Erros no Processo de Tomada de Decisão

Eventualmente, podem ocorrer erros nos processos de tomada de decisão, uma vez que os decisores precisam fazer escolhas entre as alternativas do processo de decisão (informações passadas) e as mesmas podem não ser as mais adequadas. Isso requer uma análise cuidadosa de muitas informações e, consequentemente, muitas vezes os gestores se engajam em comportamentos que aceleram o processo, para evitar excesso de informações. Assim, os decisores dependem de heurísticas (atalhos) que é um método ou processo criado com o objetivo de encontrar boas soluções (não necessariamente as melhores) para um determinado problema. O ato de decidir é humano o qual fica suscetível às preferências, fraquezas, aos erros e a outros fatores inerentes a esta condição. Tomar decisão é objeto de discussão em diversos campos da psicologia (social, comportamental, cognitiva, etc), onde são apresentadas teorias e modelos que ajudam a entender melhor o comportamento do decisor diante de problemas decisórios. Entre os aspectos das distorções ou desvios que os decisores costumam apresentar diante de problemas decisórios, os nove que ocorrem com mais frequência são:

1. Disponibilidade: eles costumam em algumas situações utilizarem apenas as informações disponíveis, ignorando aquelas que não são fáceis de se obter, muito embora sejam significativas para o processo decisório.

2. Desvios de confirmação: usualmente, as pessoas tendem a utilizar informações que confirmam crenças consagradas na organização e costumam desprezar (ou conferir um menor peso) àquelas que distorcem estas crenças.

3. Conservadorismo: tendência a não rever estimativas e procedimentos com a freqüência necessária.

4. Hábito: no ambiente organizacional as pessoas tendem a agir com famíliaridade ou rotineramente, considerando experiências passadas, diante de situações semelhantes, não considerando devidamente as características diferentes de cada decisão.

5. Saturação de dados: decisores decidem encerrar a coleta de dados prematuramente antes de concluir a triagem completa de informações, ignorando dados que possam chegam mais tarde e que podem influenciar no processo.

6. Confiança exagerada: as vezes as pessoas tendem a ter muita confiança quando dispõem de abundância de informações e dedicam pouca atenção à qualidade e consistência das informações ou dados.

7. Pistas empíricas sem nenhum fundamento lógico: isto pode ocorrer com freqüencia, uma vez que temos a efetiva realização de eventos com pequena probabilidade de ocorrência, ou porque é aceita pelas pessoas com um peso muito maior do que realmente elas têm.

8. Correlação de eventos: admite-se erradamente que dois eventos sejam correlacionados, quando na verdade a correlação é espúria ou pouco significativa.

9. Distorções de julgamento: os desvios e erros nos processos decisórios estam relacionados, ou seja, não são independentes entre si.

Heurísticas do Processo de Decisão

Na literatura existem diversos tipos de heurísticas, sendo que as mais comuns usadas no ambiente organizacional são: Heurísticas de disponibilidades e heurísticas representativas. As heurísticas de disponibilidades no ambiente administrativo tendem a basear os julgamentos em informações que estejam prontamente disponíveis. Os decisores que utilizam heurísticas de disponibilidades tendem a utilizar informações relacionadas às soluções dos problemas que estão disponíveis para eles em processos mais recentes. Enquanto, as heurísticas representativas fazem com que um decisor compare a probabilidade de uma ocorrência de um evento, com algo que já estejam famíliarizados no passado, ou seja, o mesmo ou algo muito similar que já ocorreu no ambiente organizacional em algum momento do passado.

Alguns métodos heurísticos estimulam, ou guiam, um procedimento empírico, do qual resultam alternativas satisfatórias de soluções para um problema, mas não conseguem comprovar que foram levantadas todas as alternativas possíveis de soluções para um determinado problema [1, 69].

2.4.5 Processos Administrativos na Teoria do Funcionamento da Organização

Herbert A. Simon foi o primeiro pesquisador a desenvolver os processos administrativos como processos de decisões. Nas suas investigações ele analisava a estrutura da escolha racional humana, ou seja, o modo como o individuo decide, para estudar a anatomia (estrutura), a filosofia (funcionamento da organização) e descrever o trabalho do administrador. Em 1957, ele desenvolveu o conceito de racionalidade limitada, que exprime a incapacidade do decisor de dominar a complexidade organizacional (diversos tipos de problemas), de informações, de dominar o tempo, como também o aspecto cognitivo (modo como o individuo decide). Estas características estão presentes no modelo comportamental, no qual as informações são imperfeitas e incompletas, no sentido de que não se tem um conjunto completo de alternativas conhecidas, e o decidor deve escolher a primeira alternativa minimamente aceitável. Simon via o homem como um ator econômico bombardeado por decisões, mas possuindo um número limitado de informações e capacidade de processamento. A racionalidade da decião (adequação entre meios e fins) tornou-se a sua principal preocupação no seus estudos na teoria administrativa.

Ele também usava computadores para aplicar e implementar suas técnicas de pesquisas operacionais na modelagem de sistemas complexos. Para Simon, a modelagem era a principal, ou talvez a primeira técnica para estudar o comportamento de sistemas complexos, sendo usados parapredizer, analisar e prescrever algo sobre esses sistemas [156].

2.4.6 Tecnologias de Informação usadas na Tomada de Decisão

Herbert Simon, considerava o computador a mais importante tecnologia surgida desde a máquina a vapor ou talvez desde a invenção da escrita. Ele enfatizava que todos os cientistas da computação deveriam ter uma responsabilidade para pensar profundamente sobre as implicações e os recursos dessas tecnologias para a comunidade em geral.

Segundo Herbert Simon, a computação tem sido usada intensivamente na psicologia para simular os processos cognitivos humanos, agora também em problemas de filosofia voltados à natureza do conhecimento humano. Dessa forma, acredita-se que as habilidades que determinam a qualidade da tomada de decisão e solução de problemas, além de serem armazenadas na mente das pessoas, também podem ser armazenadas em computadores [155]. Em virtude do aumento dos recursos computacionais (hardwares e softwares), Simon já considerava na época que:

1. Os sistemas de inteligência artificiais serveriam tanto para entender, quanto para aumentar a capacidade de pensamento do ser humano; e

2. Os sistemas computacionais serveríam para ampliar a fronteira da racionalidade limitada do ser humano.

A TI [94] tem auxiliado na TD das organizações, proporcionando aos decisores uma importante fonte de apoio na TD. Entre estas tecnologias poderemos citar as várias tecnologias da área de inteligência artificial tais como: os sistemas especialistas,redes neurais, groupware e softwares específicos para auxiliar na TD. Na TD baseada em sistemas especialistas, usa softwares capazes de codificar experiências anteriores de um tomador de decisão para estruturar problemas mal estruturados. Estes sistemas operam em níveis mais elevados do que o dos humanos (especialistas), além disso têm a capacidade de memorizar, comparar e escolher entre diversas simulações em poucos minutos, coisa que não seria posível pelos seres humanos. Estes sistemas guiam os usuários pelos problemas, fazendo uma sequência de perguntas sobre a situação e tirando conclusões, com base nas respostas obtidas. Vários outros tipos TI auxiliam na TD de grandes corporações assim como, numa menor escala, na TD em pequenas e médias empresas. Os sistemas baseados em redes neurais, têm a capacidade de distinguir modelos e tendências excessivamente sutís ou complexas para a capacidade dos seres humanos. As pessoas não conseguem avaliar mais do que duas ou três alternativas em paralelo (ao mesmo tempo), enquanto, as redes neurais conseguem perceber correlações entre centenas de alternativas de soluções. Hoje em dia, estes sistemas são usados nas grandes corporações para auxiliar nos processos decisórios junto com métodos matemáticos de tomada de decisão.

2.4.7 Sistemas de Suporte à Decisão

Os sistemas computacionais de Suportes às Decisões, inicialmente receberam o nome de sistemas de decisões gerenciais. Na década de setenta, as empresas e pesquisadores começaram a caracterizá-los como sistemas computacionais interativos, uma vez que por meio de software, ajudavam às pessoas a tomarem decisões. Quando os problemas começaram a se tornarem conflitivos e complexos, foram realizadas pesquisas para lidar com estes novos conceitos de bancos de dados (BD). Nessa época a maioria dos sistemas de BD, que apoiavam os processos de TD eram considerados de apoio à tomada de decisão.

De acordo com Porto e Azevedo em [125], o termo Sistema de Suporte a Decisões (SSD), tem sido objeto de discussões e recebidos diferentes interpretações nos últimos anos. SSD são sistemas voltados para a resoluções de problemas menos estruturados e menos especificados, ou seja, são problemas que não servem apenas para uma situação, eles englobam várias outras que poderão ser afetadas por estes. Onde combinam o uso de modelos matemáticos para funções de recuperações de informações. Sua principal característica é uma flexibilização na sua utilização, uma vez que tanto serve para apoiar as pessoas qualificadas quanto as menos qualificadas. Nestes sistemas, quando ocorre alguma mudança no ambiente organizacional, o sistema deve-se adequar para se adaptar à nova situação do usuário final.

Quando os SSD foram desenvolvidos e implementados, os dados armazenados passaram a ser processados com melhor qualidade e maior velocidade, podendo assim auxiliar os processos de tomada de decisões, pois surgiram novos problemas mais complexos, que necessitavam de maior acurácia das informações e com uma interface amigável para o usuário final [119]. Nestes sistemas, o que se procura é enfatizar na construção de um SSD o conjunto de conhecimentos (informações, dados) que podem ajudar a melhorar a qualidade do processo de tomada de decisão. Hoje, o desenvolvimento dos SSD são feitos em grandes bancos de dados, os quais usam técnicas de inteligência artificial e são baseados em modelos matemáticos que procuram evitar erros nos processos de TD e/ou minimizar ocorrências de falhas de julgamentos que antes eram feitos por seres humanos.

Suporte à Decisão

Segundo Porto e Azevedo em [125] os SSD são baseados na experiência armazenadas, onde eles possuem um alto potencial para resolver problemas onde as soluções algorítmicas não existem ou não são adequadas. Nos sistemas SSD, o computador auxilia o homem na utilização das informações (dados) e nos modelos, obedecendo aos três principais componentes de sua arquitetura. Sendo eles a base de dados, a base de modelos e a interface de diálogo.

A Base de Dados de um sistema SSD, deve ser capaz de reunir e estruturar todas as informações importantes sobre as soluções dos problemas abordados e gerenciá-las de forma apropriada. Eles são compostos pelas funções de gerenciamento, onde são geradas a importação e a exportação de dados, assim como, a agregação e a desagregação das informações. Também faz a recuperação e a emissão de relatórios entre outras funções de acordo com o tipo do banco de dados.

Nos componentes centrais dos SSD, estão reunidos o “conhecimento” das soluções dos problemas. Eles funcionam como uma base de métodos, que por sua vez, deve conter todos os instrumentos conceituais (modelos), necessários às análises e formulações das alternativas de soluções dos problemas em questão. Os SSD têm entre suas funções, solicitar e receber dados, os quais são necessários para o armazenamento de informações, gerando assim os arquivos do banco de dados. O sistema também faz a conferência dos dados e a adequação dos significados dos mesmos, para realimentar a base de dados. Nos SSD também existem outras funções, dependededendo do tipo de gerenciamento que eles façam e dos modelos responsáveis pelo tipo de dados que eles coletam e geram como conhecimento do banco de dados. A Base de Conhecimento destes sistemas incorporam novas informações, que geralmente, não são possíveis de tratamento pelos módulos anteriores, mas que são indispensáveis para os decisores nos processos de tomada de decisões. Esses conhecimentos armazenados se referem às experiências anteriores organizacionais, ou mesmo conhecimentos empíricos de fatos passados. Eles costumam ser constituídos por regras de inferência do tipo *modus ponens*, “Se então”, que representam parte importante do modelo lógico do mesmo. O Módulo de Diálogo é responsável pela comunicação do usuário com o computador. O mesmo deve ser capaz de receber instruções tais como: consultas e informações dos usuários, e transmitir as respostas a estes da forma mais apropriada possível de acordo com sua base de dados. O tratamento dessas interações homem-máquina se dá através de menus, planilhas, gráficos, até mesmo de voz, sons e imagens, assim como, através de realidade virtual em decorrência dos crescentes avanços tecnológicos. O objetivo destes sistemas é melhorar a eficácia da decisão, e não sua eficiência, ou dar mais importância à qualidade das decisões do que ao tempo necessário para encontra-la.

Estes sistemas enfatizam as características de flexibilidade e adaptabilidade das informações, assim como combinam o uso de modelos (técnicas analíticas) com funções de acesso a dados e enfatizam a facilidade de uso, inclusive por usuários inesperientes ou pessoas não especializadas.

Estes sistemas têm como característica facilitar a interação entre o usuários e o banco de dados. Os mesmos permitem o processo de buscas de soluções de problemas específicos, por processos de tentativas de uma ou mais interações dentro de sua base de dados. Eles permitem em sua base de dados a incorporação de julgamentos e informações subjetivas. Assim, eles conseguem incorporar vários tipos de conhecimentos e efetivar julgamentos de vários especialistas (decisores) no ambiente organizacional.

2.5 Estratégia no Contexto de Tomada de Decisão

Segundo Michael Porter em [124], todas as organizações precisam ter estratégias bem definidas, sejam elas, explícitas ou implícitas. As estratégias resumem o propósito e o direciona à razão de ser das organizações. Baseado nestas premissas as estratégias nas organizações devem ser tratadas com critérios e formalismos. É através das estratégias que podem-se identificar tanto os pontos fortes como os pontos fracos de uma organização. As estratégias devem ser encaradas em termos de ações, uma vez que podem causar bloqueios cognitivos e resistências a mudanças organizacionais pelo corpo funcional. Quando não existem estátégias, as empresas ficam sem rumo, ou seja, sem senso de direção, sem parâmetros que possam ser seguidos e mesurados no seus desempenhos.

As estratégias nas empresas são como um mapa corporativo, são necessárias, para todos os que trabalham, para direcionar o mesmo objetivo, no entanto não existe uma receita pronta que identifique qual a melhor estratégia a se seguir. Segundo Andrews em [5], em cada organização, existe a combinação entre a capacidade distintiva, os recursos e os valores, com o intuito de gerar resultados ímpares para cada empresa e para cada situação.

2.6 Tomada de Decisão em Grupo ou Multi Especialista (Processos Administrativos)

De acordo com Maximiano em [106] a Tomada de Decisão em Grupo (TDG) ou Multi Especialista (TDME) são escolhas que um grupo de gestores, especialistas ou decisores fazem entre um conjunto de alternativas. Segundo [157] a TDG tem um dinamismo diferente da tomada de decisão individual (TDI), isto porque, nas decisões em grupo os decisores precisam discutir suas idéias, procurar consensos, assim como, fazer alianças e coalizões. Dependendo do tipo de problema, em alguns casos, será mais apropriado uma decisão em grupo, enquanto, em outros uma decisão individual seria mais eficaz. A TDG é tomada em um nível mais elevado das organizações (ou perto dele) a nível estratégico [79]. A premissa básica para a TDG é perceber que os individuos diferem ao longo de suas dimensões [130], por exemplo, na maneira como pensam. Alguns decisores são lógicos e racionais outros não, assim como há decisores que são empíricos e outros teóricos. Por exemplo, alguns pensam criativamente e usam a sua intuição, para tomar decisão de forma totalmente empírica ou baseada em heurísticas baseadas em experiências passadas.

A TDG, como dito anteriormente, é essencialmente uma forma de encontrar ou mesmo optar, pela melhor alternativa entre as opções existentes para resolver um problema considerando a opinião de um grupo de decisores. Essa é uma tarefa cotidiana, inerente ao dia a dia de todo ser humano, tanto nas decisões individuais quanto nas decisões em grupo (coletivas) no ambiente organizacional. Em geral, nas decisões relacionadas a diferentes ações, no ambiente empresarial, não se podem ser tomadas considerando um único critério, ou o ponto de vista de uma única pessoa. Isto porque na TDG pode existir múltiplos critérios a serem atendidos. Estes critérios, na maioria das vezes, são fornecidos pelos próprios grupos de decisores. Isto faz com que os processos decisórios tenham várias alternativas possíveis, gerando assim, múltiplos esquemas de possíveis alternativas para a solução de problemas.

2.6.1 Vantagens da Tomada de Decisão em Grupo

1. A TDG proporciona informações mais completas do que as TDI.
2. Diversidade de experiências entre os tomadores de decisões.
3. A TDG gera mais alternativas nos processos de decisões.
4. Quantidade e diversidade de informações são maiores quando os membros dos grupos têm especialidades diferentes.
5. A TDG aumenta a aceitação da solução do problema.
6. Há mais facilidade na implantação da implementação da solução do problema.
7. Existe uma maior coerência com ideaís democráticos.
8. As TDG são mais legítimas do que as TDI, uma vez que no processo de decisão se preserva o ponto de vista de vários decisores ou especialistas.

2.6.2 Desvantagens das Tomadas de Decisões em Grupo

1. No processo de TDG se demora muito tempo para se chegar a uma decisão.
2. A interação quando o grupo já está formado se mostra ineficiente.
3. Há domínio do grupo maior em detrimento dos grupos menores.

4. Pequenos grupos tendem a sofrer pressões e se conformar com as decisões tomadas.

5. A responsabilidade da decisão é ambígua quando tomada em grupo.

2.7 Tomada de Decisão em Grupo (Modelos Matemáticos)

Na TDG os decisores expressam as suas preferências, sobre as alternativas do processo decisório, e dessas diversas preferências se usa um método para chegar a uma única decisão que reflita, de alguma forma, a opinião de todos os gestores ou especialistas. No caso da Tomada de Decisão Multi Especilista (TDME) se conciliam uma diversidade de opiniões, critérios e especialidades. Francisco Chiclana em [49], define a tomada de decisão basicamente como sendo a forma de encontrar a melhor opção dentre as disponiveis, e considera que isso é uma tarefa a qual enfrentamos constatemente na realização de qualquer atividade no nosso cotidiano.

Por outro lado, o pesquisador Hebert Simon em [152] considera que "é impossível o indivíduo conhecer todas as alternativas de que dispõe e as suas consequências. Por isso, a teoria administrativa deve ser a teoria da racionalidade intencional e limitada do comportamento do ser humano, porque não possui meios para maximizar os resultados". No entanto, existe uma necessidade constante de tomar decisões, as mesmas as vezes são realizadas através de comparações, classificações e ordenação das alternativas (possíveis soluções do problema). Nas decisões em grupo, de multi especialistas ou de gestores, cada um tem o seu ponto de vista, e portanto, em algumas situações, diferentes especialistas escolhem diferentes caminhos para a solução de problemas idênticos. Isso comprova que cada especialista, aponta uma importância diferente para cada critério em análise para solução de um determinado problema.

O processo de TDG pode ser conceituado como um conjunto de opções de alternativas de um conjunto de critérios, onde cada especialista ou decisor determina suas preferências sobre um conjunto de opções de alternativas. Eles procuram encontrar uma solução, que seja, o conjunto de alternativas de maior aceitação pelos especialistas. A solução de um problema parece extremamente simples e normal, mas no entanto, existe uma complexa dificuldade de escolher uma alternativa de decisão, onde a mesma satisfaça um conjunto condições igualmente aceitáveis no método [7].

A dificuldade desses modelos é que o processo de resolução deles devem se apoiar em alguns modelos formais matemáticos, para sistematizar o processo de tomada de decisão. Isso acontece frequentemente, mesmo priorizando a escolha baseada na concepção humana, feita através do especilista ou decisor, uma vez que, não se pode desassociar a importância de ambos os métodos e paradigmas.

2.7.1 Etapas do Processo de Tomada de Decisão em Grupo

Em um processo de TDG temos a etapa de identificação e a etapa de elaboração do processo de resolução de TDG as quais vão depender do método escolhido.

A etapa de identificação do modelo, consiste na seleção de alternativas e na seleção de critérios apropriados. Segundo K J. Arrow e Raynaud em [6], essa etapa geralmente é uma operação aproximativa, uma vez que os conjuntos de alternativas e critérios são diferentes para cada problema de TDG. Com frequência os limites de esta etapa não estam claramente definidos no sentido de que nem sempre existe um limite de quanto e quais critérios de deve considerar assim como, em algumas situações, quais alternativas serão consideradas [49]. Na etapa de resolução do TDG, é escolhido um método adequado de tratamento para determinado tipo de problema.

Por outro lado, em [51] considera-se que a resolução de um problema de TDG consiste das seguintes etapas:

1. A representação uniforme das informações: Nesta etapa, as informações inicialmente podem ser heterogêneas na formulação do problema, ou seja, as informações podem ser representadas por meio de ordens de preferência, funções de utilidade ou ainda relações de preferências Fuzzy. Em seguida, elas são traduzidas em informações homogêneas por meio de diferentes tipos de representação do conhecimento, de acordo com o tipo de relação explicitada pelo especialista ou decisor [49, 51].

2. A aplicação de um processo de seleção na tomada de decisão: Esta etapa consiste de duas fases:

    (a) A fase de agregação, onde é feita a estruturação das preferências coletivas de acordo com o ponto de vista de cada especialista. Nesta fase é concebido um conjunto de estruturas de preferências, com participação individual de cada especialista do grupo. As preferências do grupo deverão ser homogenizadas ou uniformizadas através funções de transformações. Na maioria dos problemas de tomada de decisão com vários especialistas ou decisores [49].

    (b) A fase de explotação, onde o método aplica as estruturas de preferências coletivas, para obter uma variedade de alternativas adequadas ao processo de tomada de decisão. A fase de explotação atua sobre a fase da agregação das informações globais, fazendo comparações e classificando a decisão mediante uma ordem parcial das alternativas de acordo com a metodologia escolhida para implementação do processo.

A fase de agregação pode ser feita, de várias maneiras, dependendo da metodologia do modelo utilizado. A forma de agregar mais utilizada na literatura, são as metodologias dos modelos matemáticos da escola americana. Elas utilizam uma função que associa um valor de utilidade global a cada alternativa, para assim obter de forma natural uma ordem das alternativas. É nesta fase que o método classifica as alternativas da melhor para pior.

Quando as preferências ou avaliações sobre um conjunto de alternativas são expressas de forma numérica, uma das formas de se expressar a opinião de cada especialista é considerar as alternativas como um conjunto fuzzy. Neste caso, segundo Chiclana [49], uma das formas de aproximação de agregação dessas preferências é utilizando os modelos da teoria da utilidade [66], pois a mesma é feita de forma direta. Existem três classes básicas operações de agregações nos processos de tomada de decisão, sendo elas as operações conjuntivas, disjuntivas e promédios [14].

Para as operações conjuntivas e dijuntivas, respectivamente, são usadas em geral um tipo especial de operações de agregação conhecidas como t-normas e t-conormas. As t-normas quando aplicadas a um par de valores sempre resultam num valor menor ou igual ao mínimo desses valores e as t-conormas resultam num valor maior ou igual ao máximo desses valores. Segundo Francisco Chiclana, o limite entre estes operadores, podem ser usados nos processos de tomada de decisão nos quais se permitem compensações de um critério sobre outro, na presença de critérios conflitivos. Enquanto que os operadores promédios, deveria situar-se na quota inferior mais otimista do grupo e na quota superior mais pessimista, ou seja retornam um valor entre o mínimo e máximo dos valores dados como entrada.

Existem também operadores de agregações paramétricos tais como: operadores de média aritmética e de média geométrica. Estes operadores podem ser ponderados ou não ponderados. Entre os operadores de agregações paramétricos destacam-se os operadores e compensatórios proposto por Zimmermann e Zysno em [205]. Estes operadores indicam o parâmetro da localização entre o "e" e o "ou" lógico. Temos também outros operadores de compensação paramétricos, são os operadores obtidos pelas combinações de funções lineares dos tipos convexas, que seriam cada uma das funções de pertinência, de cada um dos conjuntos de elementos a agregar. Os operadores paramétricos foram caracterizados por Yager em [191, 193]. Eles constituem uma transição contínua, entre o operador mínimo e o operador máximo. Segundo Francisco Chiclana o problema do uso destes operadores está no cálculo dos parâmetros das combinações lineares convexas, pois existia problemas para se estabelecer uma ordem entre eles. Yager solucionou o segundo dos problemas, ordenando as entradas de maior para menor.

Por outro lado, a fase da explotação, se entende como sendo o processo de resolução que se utiliza, para transformar a informação global das alternativas, em uma ordenação global crescente ou decrescente das mesmas, de acordo com os pontos de vistas dos especialistas e necessidades de solução dos problemas. Nesta fase, se faz uma ordenação global das as alternativas através da comparações entre as alternativas. O mesmo é baseado em algum tipo de grau de seleção de alternativas, obtidas a partir das informações conjuntas dos especialistas [49]. A fase de explotação, que vem depois da fase de agregação, atua nas comparações das informações agregadas gerais, com o objetivo de classificar a decisão, mediante a obtenção de uma ordem parcial das alternativas. Baseada nessa ordem das alternativas é que a decisão irá ser tomada ou implementada.

2.8 Pesquisa Operacional no Processo Decisório

A teoria da Pesquisa Operacional, surgiu na época da segunda guerra mundial, com o intuito de planejar a estrategia militar. Na década de 1970, pesquisadores norte americanos utilizaram esta teoria, para auxiliar os decisores a estruturar e analisar os processos de tomada de decisões no ambiente organizacional. No inicio se utilizavam basicamente os modelos matemáticos aleatórios. Depois os pesquisadores perceberam que em certas condições, as limitações dos modelos e os riscos associados às decisões, eram muitas vezes, inaceitáveis e geravam grandes prejuizos. Nessa época, vários pesquisadores perceberam que as decisões no mundo real, nunca se dão visando apenas um único critério de decisão, ou seja, as decisões humanas se dão em presença de pelo menos dois critérios conflitantes. Em decorrência disso, surgiram as metodologias de Apoio à Decisão Multicritério, que são modelos matemáticos, baseados em vários princípios, axiomas e proposições. Baseados nas proposições destes modelos, pode se deduzir uma teoria para construir um sistema lógico matemático, de métodos analíticos, para auxiliar na teoria da tomada de decisão, uma vez que este ambiente é considerado complexo, dinâmico e dificil a tomada de decisões. O objetivo destes modelos e metodologias de tomada de decisão, quando foram criados, era para trazer luz a estes processos complexos, onde o decisor teria que avaliar cada uma das variáveis alternativas de decisões e valora-las, para poder concluir o processo decisório. Os métodos de otimização inicialmente desenvolvidos na pesquisa operacional, na teoria da tomada de decisão, foram chamados de programação matemática. Nestes métodos, a programação era feita com várias funções objetivas. Eles envolviam processos teóricos complexos, que exigiam uma sólida base de programação matemática e buscavam pelo menos uma resposta "ótima" num sentido mais amplo, também denominada "ótimo de Pareto", com o objetivo de ajudar na solução do problema de decisão. Nessa área, a palavra otimização se usa para designar o processo de busca da solução ideal para um problema. Existem vários tipos de métodos de otimização dentro da pesquisa operacional, que podem trabalhar também com vários objetivos simultâneos, que são designados na otimização multiobjetiva, que tanto trabalha com conjuntos de números discretos, como contínuos. Baseados nestes modelos matemáticos, diversos métodos foram desenvolvidos com o objetivo de atender os mais variados objetivos.

Assim foram criados os primeiros modelos matemáticos aplicados à teoria da tomada de decisão das escolas americana e francesa, assim como, outros modelos matemáticos desenvolvidos de forma independente por outros pesquisadores. Alguns destes métodos abordados foram baseados em modelos matemáticos, desenolvidos dentro da teoria da Pesquisa operacional, os quais incorporaram a modelagem matemática, para apoio aos processos de tomada decisão complexos, nos quais as soluções dos problemas envolvem vários critérios de decisões, sendo alguns desses critérios, qualificáveis, quantificáveis e outros dificilmente quantificáveis pelo tipo da natureza do problema.

2.8.1 Influência da Psicologia Quantitativa na Teoria dos Modelos Matemáticos da Pesquisa Operacional

A pesquisa operacional no desenvolvimento dos processos de tomada de decisão, utiliza recursos da psicologia quantitativa que é uma especialidade da psicologia. A psicologia quantitativa trabalha com as expressões de preferências de pessoas ao longo de uma escala. Há métodos de tomada de decisão multi critérios que foram desenvolvidas utilizando esta teoria para lidar com processos cognitivos e escalas, para expressar as suas preferências com relação a aspectos totalmente subjetivos. A psicologia quantitativa, através de técnicas matemáticas bem definidas, procura priorizar a escolha das alternativas e esta priorização automática permite simular a solução do problema. Foram pesquisadores da psicologia quantitativa que descobriram em seus estudos, que a melhor escala de decisão é aquela que termina em sete, mais ou menos dois. Com isso se evitava as armadilhas comuns em longos processos decisórios de ancoragem. A ancoragem é quando as notas ficam ancoradas em sub intervalo da escala. Para quebrar esse efeito, quando se faz uma enquete geralmente são usadas escalas de um até sete ou até nove. Essa técnica foi descoberta pelos psicólogos desde os anos cinquenta, quando iniciava os estudos de psicologia, os quais influenciaram os modelos matemáticos de apoio à tomada de decisão.

2.9 Tipos de Estruturas de Representação de Preferências

A seguir descrevemos os três modelos de estruturas de representação de preferências:

1. Nos modelos funções de utilidades, são usadas funções reais para agregar os atributos de um conjunto discreto de alternativas, ou seja, as funções associam a cada alternativa e atributo um número real, que indica o grau de satisfação dessa alternativa com respeito ao ponto de vista do especialista [50]. Nos modelos baseados na função de utilidade, as estruturas de represenção de preferências, são feitas pelo o especialista, onde o mesmo proporciona uma valoração (monetária) para cada alternativa. Estas funções de utilidade, também são conhecidas como matrizes de decisão como por exemplo em [29, 86, 187].

2. Nos modelos de ordens de preferências, os especialistas, proporcionam suas preferências, sobre um conjunto de alternativas, em forma de ordens de preferências individuais. Esta ordem é uma função de permutação, sobre um conjunto de índices [161]. Desta forma o especialista, de acordo com o seu ponto de vista, propociona um vetor ordenado de alternativas, chamado de ranking das alternativas, da melhor à pior opção. Nas ordens de preferência quanto menor é a posição no ranking de uma alternativa, melhor esta alternativa satifaz o critério do especialista [50].

3. Relações de preferências, são relações sobre um conjunto de alternativas, as quais podem ser modeladas, através de uma relação binária reflexiva R a qual associa um número real, chamado valoração, de tal forma que $R(x,y)$ representa o grau de verdade da afirmação “a alternativa x é melhor que a alternativa y”. Quando o conjunto de alternativas é finito, podemos representar a relação R como uma matriz de preferência, de tal forma que o elemento (i,j)-ésimo contem o valor $R(x_i,x_j)$. A interpretação dessa relação em um processo tomada de decisão, pode ser diferente, uma vez, que os mesmos especialistas podem ter pontos de vistas diferentes. Assim, nas relações de preferências binárias, o especialista proporciona uma relação binária sobre um conjunto de alternativas em alguma escala de valores, ou seja, uma função que associa a cada par de alternativas a um valor numa determinada escala de valores, que reflita um certo sentimento no grau de preferência de uma alternativa, sobre outra qualquer [50]. Por exemplo, nas relações de preferências fuzzy: os grau de preferências de uma alternativa x sobre uma alternativa y são valores no intervalo $[0,1]$, onde “1” indica que o especialista tem certeza de que a alternativa

x é preferível à alternativa *y*, já um valor “0” indica justamente o contrário, ou seja que o especialista tem certeza de que a alternativa *x* não é melhor que a alternativa *y*. Valores intermediários indicam que há uma certa incerteza na sua preferência [42, 49, 67, 80, 89, 91, 96, 120, 121, 122].

2.10 Escolas De Métodos de Tomada de Decisão

O surgimento das escolas começaram com pesquisas e com equipes multidisciplinares, envolvendo processos de TD. No inicio, elas não eram suficientemente aceitas e divulgadas. No entanto, a partir de 1950, aumentaram o interesse em aproximar os princípios econômicos com a prática do processos decisórios. Um dos precursores é Herbert Simon com os seus modelos da racionalidade limitada [154], pois a partir destes modelos é que começa a preocupação em adequar métodos de análises de alternativas em cursos de ação. Na década de 60, surgem os métodos probabilísticos voltados para a tomada de decisão dentro da teoria da pesquisa operacional. Estes métodos foram aplicados em diversos trabalhos técnicos, mas com os anos, os mesmos foram sendo suplantados por métodos cuja matemática era menos complexa e existia uma maior transparência nas decisões do ponto de vista científico. Estes novos métodos são fundamentados em axiomas matemáticos mais rigorosos em sua metodologia. Um número crescente de organizações e pesquisadores, interessados nos processos de TD, começaram a surgir em diversos paises. Instituições envolvendo várias áreas, tais como: matemáticos, estatísticos, cientistas da computação, economistas e especialistas em pesquisa operacional, etc. Na década de 70, começa uma nova etapa do desenvolvimento no processo de apoio à tomada de decisão, a qual se carateriza pela organização e consolidação da comunidade científica, antes dispersa, interessada pelo domínio do paradigma de tomada de decisão multi critério. Em 1975, Roy organizou, na cidade de Bruxelas, o primeiro encontro sobre este assunto, o “*Euro Working Group on Multicriteria Aid for Decisions*” e Hervè Thiriez e Stanley Zionts organizaram, a primeira conferência científica da área, que posteriomente tornou-se a *International Society on Multiple Criteria Decision Making*. Assim começaram o desenvolvimentos dos primeiros modelos matemáticos, onde paralelamente foram criados duas correntes científicas de modelos, de apoio à tomada de decisão. Uma desenvolvida pela a escola americana, que mais tarde ficou conhecida como *Multiple Attribute Utility Theory* (MAUT), a outra pela escola européia ou francesa e posteriormente veio a escola holandesa. Essas escolas concordavam que, para tomar uma decisão que se aproximasse o mais possível da realidade, era necessário considerar, além dos fatores econômicos, financeiros, etc, outros valores subjetivos inerentes ao processo humano de TD, teoria que

Simon já vinha investigando na teoria racional limitada [154].

2.10.1 Escola Americana

Escola Americana ou Escola da Teoria da Utilidade Multi atributo (*Multiple Attribute Utility Theory*- MAUT). A Escola Americana desenvolveu seus primeiros métodos de tomada de decisão, dentro da teoria da utilidade, considerando o processo multi atributo, como por exemplo, o *Analytic Hierarchy Process* (AHP) desenvolvido pelo prof. Thomas Saaty em [141]. Estes métodos se baseiam na hipótese de que para solucionar um problema de tomada de decisão, pode ser usado uma função de valor real, sobre um conjunto de alternativas, onde esta função vai agregar os atributos definidos pelo especialista. Assim o especialista é capaz de identificar várias alternativas (conjunto de alternativas discretos) para sua posterior escolha (alternativas) e ser capaz de estruturar os critérios (importância), sobre os quais as alternativas serão avaliadas de maneira hierárquica. A Escola Americana desenvolveu um dos métodos de tomada de decisão mais conhecidos e possivelmente o mais utilizado mundialmente. Esse método é baseado na Análise Hierárquica [142]. O AHP vai fazer a análise hierárquica, estabelece uma estrutura de critérios de níveis hierárquicos, assim, ele procura desenvolver uma homogeneidade entre os critérios do mesmo nível. Nesse método os critérios devem possuir o mesmo nível de importância, para facilitar a compreensão e sua avaliação. Depois de construir a estrutura hierárquica do método, cada especialista deve realizar uma comparação entre os pares de alternativas no mesmo nível hierárquico. Dessa forma o método desenvolve uma matriz de preferência ou matriz de decisão das alternativas (matriz de conseqüências) da solução do problema.

Versões da Escola Americana

Outras versões dessa escola foram desenvolvidas, tomando como referência o método multi atributo, com o objetivo de conseguir algum melhoramento no seu desempenho e sanar algumas deficiências em suas escolhas no processo de tomada de decisão, tais como:

1. *Analytic Hierarchy Process Multiplicative* (PAHM), proposto por Lootsma [101], onde o pesquisador modificou a regra de agregação das preferências do método AHP clássico.

2. *Analytic Hierarchy Process Referenced* (PAHR), desenvolvido por Watson e Freeling [173, 174], que colocou uma constante de proporcionalidade no método AHP

clássico, para assim quantificar os resultados das comparações dos valores relativos dos atributos e das alternativas.

2.10.2 Escola Francesa

Os primeiros métodos criados por essa escola, foram os da família ELECTRE (*Elinúnation Et Choix Traduisant Ia Réalité*) proposto por Bernard Roy em [133]. ELECTRE é mais do que um método de tomada de decisão, e poderia ser considerada uma filosofia. Nas metodologias destes métodos, ou sejam que seguem a sua filosofia, a maior parte dos seus critérios são considerados concordantes, essa afirmativa é verdadeira e o oposto a esta afirmativa são feitas pelos critérios divergentes. Onde não são suficientementes fortes para combate-los. Este método permite ao especialista desenvolver as suas preferências, considerando que as informações iniciais são instáveis ou inexistentes [136]. Portanto, ao contrário dos métodos baseados na teoria clássica da administração, que geralmente envolvem de tomada de decisão, onde longas entrevistas com os especialista para os processos de tomada de decisão, os métodos ELECTRE, retira do especialista apenas as informações, consideradas confiáveis e significativas do método. Normalmente o método procura ser sucinto, envolvendo as especificações das alternativas, com poucos parâmetros de entrada no modelo do sistema computacional. Praticamente só com as necessárias para a execução do programa computacional. No modelo matemático, são realizadas as comparações entre os pares de alternativas, que quando informatizados, o sistema tem objetivo gerar um método as informações as quais deverão serem alimentadas pelos especialistas (decisores). Em alguns dos métodos ELECTRE, se considera os pesos, como uma medida importante para cada critério do problema. É importante ressaltar, que esses pesos não atuam como uma taxa marginal de substituição, isto porque, o procedimento de agregação dos vários critérios utilizados pelo método ELECTRE, não tem caráter compensatório nos critérios. Nos modelos da escola americana eles empregam a informação dos pesos com a finalidade de construir índices de concordância ou discordância nos pontos de vista dos especialistas.

2.10.3 As Novas Versões dos Métodos ELECTRE

O Método ELECTRE I (clássico) se baseia na sobreclassificação (ou subordinação) de classes (categorias). Também denominado métodos de subordinação ou prevalecência. Estes métodos se fundamentam na construção de uma relação de sobreclassificação, a qual incorpora as preferências estabelecidas pelo especialista, diante das soluções dos problemas e das alternativas disponiveis. Nas novas versões dos métodos ELECTRE se diferenciam dos demais métodos, pela diferenciação dos seus objetivos, apesar de preservar alguns dos seus fundamentos. Os métodos ELECTRE I e ELECTRE II são destinados a problemas que envolvem seleção e ordenação de alternativas, respectivamente, e somente consideram critérios verdades [112]. Nas novas metodologia dessa generalização dos métodos ELECTRE, ou seja, nas versões dos métodos II, III IV, IS e TRI, foram desenvolvidos com novos tipos de modelagem de preferências mais refinadas. Segundo Vincke em [168], eles tratam de problemas que são modelados por uma família de pseudocritérios. Os métodos III e IV têm como objetivo ordenar as alternativas da melhor para pior ou ao contrário. O método ELECTRE IV é destinado a problemas em que não se pode introduzir qualquer ponderação nos critérios. O ELECTRE TRI é um método multicritério de classificação, ou seja, ele aloca alternativas em categorias pré definidas. A alocação de uma alternativa "A", resulta da comparação de "A" com parâmetros definidos nos limites das categorias. Para obter a ordenação das alternativas, eles utilizam o conceito de superação para a captura das relações de preferências, que estão bem definidas nas relações geradas pelos métodos. O conceito de superação desse método, está associado a uma combinação de três relações sendo elas: Relação "I" (indiferença), Relação "Q", Relação "P" (preferência estrita).

A seguir descrevemos separamente os seis métodos da família ELECTRE que foram desenvolvidos dentro do paradigma da escola francesa:

1. ELECTRE I, é a primeira versão do método ELECTRE, foi proposto pelo pesquisador Roy [133]. O método, usa em seus fundamentos conceitos tais como: classificação das alternativas e superação nas relações de preferências. Por conseguinte, pode-se afirmar que o método ELECTRE I, busca solucionar um problema de tomada de decisão, consiste em encontrar o mínimo de um conjunto de alternativas, não dominadas, que seria o núcleo do grafo reduzido gerado pelas relações de preferências construídas a partir dos julgamentos do(s) especialistas (agente(s) de decisões).

   Ele usa em sua metodologia o conceito de superação para tentar resolver o problema a partir da escolha, ou seja, tenta esclarecer a decisão por meio da opção de uma alternativa em um sub conjunto, tão restrito quanto possível, contendo as ações que foram consideradas como melhores. Para atingir esse objetivo, é feita a exploração das relações de superação, onde deverão ser conduzidas de tal modo, que consiga obter um subconjunto mínimo dominante das alternativas, ou seja o conjunto das alternativas que satisfaz as seguintes propriedades:

   (a) Uma alternativa pertencente a este subconjunto, não é superada por nenhuma outra alternativa;

(b) Para toda alternativa não pertencente a este subconjunto, existe uma alternativa neste subconjunto que a supera.

O conceito fundamental no uso do método ELECTRE I, é a relação de preferência fraca, onde, em relação a um determinado critério, a alternativa “A” tem preferência fraca sobre a alternativa “B”, se o especialista está em dúvida se “A” é realmente preferível a “B” ou se são indiferentes uma a outra. Ou seja, “A” tem preferência fraca sobre “B” se “A” não é pior que “B” em determinado critério. Pode ainda acontecer o seguinte: A preferência fraca de “A” sobre “B” é inversamente proporcional à preferência fraca de “B” sobre A. Caso isso aconteça se caracteriza, como a indiferença entre as duas alternativas, no critério analisado. Se, em um determinado critério, “A” se prefere a “B” (sendo esta preferência estrita ou fraca), então esse critério faz parte da chamada coalizão concordante em relação à alternativa “A” superar “B”. O método considera ainda critérios de discordância, que formam uma colizão discordante.

2. ELECTRE II, foi a segunda versão do método ELECTRE, foi proposto por Roy e Bertier em [138]. O método usa duas relações de superação, mas pelo fato de trabalhar somente com critérios verdadeiros, seus fundamentos têm sido preteridos pelos métodos ELECTRE III e IV. Algumas das aplicações do ELECTRE II, podem serem vistos em [27, 41, 111].

3. ELECTRE III, é a terceira versão da família ELECTRE, foi proposto por Roy em [135]. Nessa nova versão do método ELECTRE, foi introduzido nos seus fundamentos anoção de pseudos critérios. Uma outra característica que foi introduzida, foi a possibilidade de veto no processo de decisão, por parte do especialista, como uma forma de expressar a não aceitação da escolha de determinada alternativa, ou mesmo pela incapacidade de realizar uma melhor comparação entre as alternativas. Algumas das aplicações do ELECTRE III, podem serem vistos em [27, 73].

4. ELECTRE IV, foi a quarta versão do método ELECTRE, proposta por Roy e Hugonnard em [139], o qual se baseia em uma família de pseudo-critérios que são critérios que possuem limites de preferência e indiferença. O objetivo é determinar a ordem das alternativas sem incluir uma ponderação dos critérios [168] através da utilização de pseudos critérios. Assim, ao invês de utilizar noções de concordância e discordância do ponto de vista dos especialistas do método clássico I, este método

obtém a solução por meio de uma sequência de relações de superação agrupadas com a exigência de considerar um limiar de discordância e de um limiar de veto. Este método é considerado por alguns autores da literatura, como um dos mais mais fáceis para o processo de decisão.

5. ELECTRE IS, é a quinta versão do método ELECTRE, foi proposto por Roy e Skalka [140]. Nesta nova versão o método procura otimizar melhor o processo de tomada de decisão, por meio das seleções das alternativas. Ele trabalha com pseudo critérios e, incorpora aos resultados as incertezas ou inacurácia das informações, onde as mesmas serão associadas aos desempenhos do método. Para isso exige no método a definição de um limiar de veto e de um limiar de preferência estrita.

6. ELECTRE TRI, é a sexta versão do método ELECTRE, foi proposto por Yu e Roy em [198]. Nesta nova versão multicritério de ordenação das alternativas, alocam-se as alternativas em categorias pré-definidas, de tal forma que a alocação de uma alternativa "A" é resultado da comparação entre "A" e uma outra alternativa "B" de acordo aos parâmetros (perfis) definidos de limites de categorias. Ou seja, na sua metodologia busca a solução do problemas, por meio de um processo de comparação das alternativas do mesmo grupo, tomando como referência uma alternativa "X" que foi estimada como padrão [134, 198]. O método incorporou também as relações de preferências fuzzy. Neste método o especialista precisa fornecer certos parâmetros de ordenação.

2.10.4 Família dos Métodos PROMETHEE

A família de métodos de tomada de decisão PROMETHEE (*Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations*) proposta por Brans em [30], com o objetivo de melhorar a performance do método ELECTRE. A metodologia desta nova família consiste em construir uma relação de sobreclassificação de valores no método de tomada de decisão.

Os métodos da família PROMETHEE, abordam em sua metodologia o processo de tomada de decisão multicritério de subordinação o qual consiste em construir uma relação de superação entre as alternativas [148]. Ele Atribuí a cada critério, um peso ponderado, proporcional a sua importância no processo de tomada de decisão. Nele também calcula para cada par de ações o grau de superação nas alternativas. Este método possui como vantagem o fato de possibilitar a abordagem de um problema baseado em múltiplos critérios, além de ter um formalismo matemático simples e de fácil entendimento para os especialistas. O método usa relações binárias para realizar comparações entre as alternativas no processo de tomada de decisão, para assim, avaliar sua importância, critérios por critério e depois colocar as alternativas em ordem de prioridade.

Também utiliza o conceito de pseudo critério, com a possibilidade de associar aos pseudo critérios, os limites de rejeição e de preferência estrita entre as alternativas. Dessa forma, o método é baseado nas diferenças dos desempenhos existentes entre as alternativas. O especialista poderá variar o grau de preferência (ou índice de credibilidade) de uma alternativa em relação à outra. A vantagem desses métodos da família PROMETHEE, são os resultados obtidos com a sua objetividade e flexibilidade. Existe uma maior transparência nos resultados. Eles utilizam ferramentas computacionais, que tanto podem ser aplicadas em processos de tomada de decisão em grupo, como processos de tomada de decisão individual.

Os métodos da família PROMETHEE, destacam-se dos demais da literatura, por procurar envolver conceitos e parâmetros, os quais têm alguma interpretação não abstrata ou econômica (palpável), facilmente entendida pelos especialistas, tendo sido abordados em uma quantidade considerável de trabalhos de pesquisas com aplicações em diferentes áreas e lidando com problemas de diversas naturezas. Entre eles podemos citar os métodos abaixo relacionados.

1. Método PROMETHEE I: Este método estabelece uma pré-ordem parcial entre as alternativas, onde onde a mesma é obtida através de uma pré-ordenação parcial, pois permite uma relação de incomparabilidade entre as alternativas. Na referência abaixo os autores descrevem a metodologia do método em uma nova versão desenvolvida pelos professores B. Mareschal, J.P. Brans e P. Vincke, em 1984 [104].

2. Método PROMETHEE II: Impede a relação de incomparabilidade entre as alternativas e usa uma ordem total das alternativas. O diferencial dele foi resolver o problema da ordenação completa das alternativas, evitando assim qualquer situação de incomparabilidade.

3. Método PROMETHEE III: Amplia a noção de indiferença do especialista utilizando conceitos de matemática intervalar, ou seja, através de números intervalares ao invés do uso de números pontuais. Os números intervalares são usados para representar os limites de indiferenças dos especialistas com relação às alternativas.

4. Método PROMETHEE IV: Generaliza a versão PROMETHEE II para o caso de números contínuos. O método ao invés de trabalhar com um conjunto finito de variáveis, ele pode trabalhar com um conjunto infinito de alternativas, ou seja, ele

é uma generalização do PROMETHEE II, onde método deixa de trabalhar com conjuntos finitos de alternativas, para trabalhar com conjuntos contínuos de alternativas. O mesmo pode estabelecer tanto uma pré-ordem completa ou parcial das alternativas. Ele se destina às situações em que o conjunto de soluções viáveis é um conjunto contínuo [3, 40, 151].

5. Método PROMETHEE V : Aumenta o potencial de aplicações do PROMETHEE II, sendo agora também adequado para o caso dos problemas de TD, onde seja necessário selecionar um subconjunto de alternativas, dentre as consideradas possíveis, em razão das restrições existentes na solução do problema. Neste método as implementações, após estabelecer uma ordem completa entre as alternativas, como o PROMETHEE II, são introduzidas restrições, que são identificadas no problema, nas alternativas selecionadas. Na sua metodologia incorporou uma técnica de otimização utilizando programação linear inteira para a problemática de portfólio [31, 72, 102].

6. Método PROMETHEE VI: Estabelece tanto uma pré-ordem completa ou parcial das alternativas. Ele é aplicado principalmente para processos de TD, que se tenha problema de escolha e necessiste da ordenação das mesmas. Ele é adequado para problemas onde o conjunto de soluções viáveis (alternativas) são números contínuos. O mesmo consegue estabelecer uma pré-ordem completa ou parcial, dependendo da necesidade da solução do problema. Eles são destinados às situações em que o especialista não consegue estabelecer um valor fixo de peso para cada critério do conjunto contínuo. Ele auxilia o especialista na determinação dos pesos, (coeficientes de importância que é associado aos critérios), com o objetivo de facilitar o julgamento das suas preferências dos especialistas.

7. PROMÉTHÉE GAIA: É uma extensão do método utilizando alguns conceitos dos métodos PROMETHEES, sendo um método de procedimento visual e interativo. Um diferencial deste método é que o especialista pode representar suas preferências, não necessariamente usando a mesma forma de representação do conhecimento para todos os critérios,ou seja, ele pode apresentar diferentes tipos de estruturas de representação do conhecimento, como por exemplo ordem de preferência, função de utilidade entre outras. Isso facilita as representações das expressões das preferência do especialistas, isso porque as vezes os mesmos não conseguem uniformizar suas preferências numa mesma estrutura de conhecimento.

Comparando os Paradigmas das Escolas Americana e Francesa

Comparando os paradigmas das escolas americana e francesa, Vanderpooten [166] fala que a escola francesa se foca nas preferências de pontos de vistas dos especialistas, e portanto tem menor influência na alternativa escolhida, enquanto a escola americana, busca parâmetros para melhor explicitar estas preferências, e consequentemente tem uma grande influência na escolha final do processo de tomada de decisão. No entanto, ele concluí que o método só será eficiente quando as duas influências forem equilibradas, de forma implícita ou explícita. Todos os métodos da família ELECTRE, são baseados em relações de superação. Ao contrário dos métodos da escola americana, os quais não fornecem um indicador final agregado como resultado de um critério de síntese. Os métodos da família ELECTRE são não compensatórios [137], ou seja, não permitem que o mau desempenho de algum critério, seja compensado por um excelente desempenho em outro critério.

Bana e Costa em [13] defende a Escola Americana, por utilizar modelos simultaneamente descritivos e prescritivos, onde os mesmos estam associados à credibilidade, enquanto a escola francesa ou européia usa modelos baseados em paradigmas construtivistas, onde o mesmo está associado à intensidade das preferências dos especialistas. Os modelos da escola francesa, são considerados mais realistas que os modelos da escola americana, isso porque na sua metodologia, eles admitem as preferências humanas dos seus especialistas, assim como, também consideram as incertezas inerentes nos processos de decisões. Alguns métodos aceitam as situações de incomparabilidade entre alternativas e as vezes os julgamentos não consensuais dos especialistas. Por outro lado, as desvantagens desses modelos está na implementação, pois são baseados em vários fundamentos matemáticos complexos de se utilizar por especialistas (decisores), uma vez que eles dependem de uma equipe multidisciplinar, capaz de desenvolver estas ferramentas computacionais. As mesmas usam técnicas de inteligência artificial e precisa de analistas de sistemas e de modelagem matemática e nem sempre os especialista (decisores) têm esta formação, assim como micro e pequenas empresas não têm no seu quadro funcional estes desenvolvedores. O desenvolvimento dessas plataformas computacionais, dependem de muito conhecimento de matemática para modelagem dos sistemas.

Uma outra crítica feita à escola francesa, e portanto aos modelos matemáticos multi critério, é que no seu desenvolvimento, exigem um grande conhecimento em programação matemática. Este problema atualmente está sendo parcialmente resolvido, com softwares de sistemas de tomada de decisão baseados em inteligência artificial mais amigaveís, que juntos com pesquisadores de várias áreas tem sido desenvolvidos para médias e grandes corporações. Os softwares destes modelos são desenvolvidos usando técnicas de modelagem matemática, necessitando na sua implementação, tanto de uma equipe com conhecimento matemático, como de informática para fazer a modelagem inicial do sistema. Isso dificulta para os especialistas que não têm conhecimento técnico de toda a programação computacional necessária para o desenvolvimento destes sistemas. Para a maior parte dos especialistas (decisores) destes sistemas, a tecnologia dos mesmos precisam estar adequadas com uma fácil utilização, para que os especialistas possam apenas estruturar seu problema de decisão e simular os resultados com o método.

2.11 Definições de Conceitos e Terminologias no Contexto de TD

1. Critérios no processo de tomada de decisão, são padrões de julgamentos ou conjuntos de regras que procuram avaliar as alternativas de um processo, através de objetivos ou atributos.

2. Objetivos na TD são baseados no desejo e intuição dos especialistas, ou seja, onde eles indicam a direção na qual eles querem seguir (decidir) ou que acreditam seja a correta.

3. Atributos no processo de Tomada de decisão, são as características que representam as propriedades ou capacidades das alternativas, para satisfazer as necessidades e/ou desejos dos especialistas.

4. Especialista (administração), decisor, agente de decisão, e tomador de decisão. É a pessoa que faz a decisão individual, ou faz parte do grupo de pessoas (grupo de especialistas), que direta ou indiretamente, proporcionam o julgamento do valor final, o qual poderá ser usado para avaliar as alternativas disponíveis, com o objetivo de identificar a melhor escolha.

5. Moderador do processo de decisão, também chamado analista, é a pessoa ou grupo de pessoas (Grupo Moderador) encarregada, de moderar o problema e eventualmente, fazer as recomendações e orientações relativas aos processos de seleções de alternativas finais do processo de tomada de decisão.

6. Conjunto de alternativas no processo de TD, também é chamado de conjunto de escolha finito, do ponto de vista matemático e prático, é constituído por um número

relativamente pequeno de elementos que buscam alcançar os objetivos da resolução de um determinado problema.

7. No processo de TD devem serem elencadas todas as alternativas possíveis, considerando os diferentes ângulos do problema, de forma exaustiva, ou seja, que contemple todas as possíveis evetuais soluções. A inclusão de novas alternativas no processo, implicam na reformulação do modelo. Na criação das alternativas no processo decisório não são permitidas alternativas de soluções ambiguas (não claras).

8. Pesos, são valores usados para representar a importância de cada atributo ou especialista. Assim, o decisor deve estabelecer para cada critério, atributo ou especialista um peso o qual aumenta na medida que o critério for mais importante [194].

9. Conceito de maioria em TDME é quando a maioria de seu membros aceitam a solução do problema.

10. Dominância indica o grau com que uma alternativa domina as demais alternativas.

Capítulo 3

Preliminares

3.1 Operadores de Agregação sobre Reticulados

O processo de combinar diversos valores numéricos num único valor, que de alguma forma represente todos eles é chamado de agregação e a função numérica que realiza este processo é denominada de função de agregação [76]. Esta definição simples e informal deixa em evidência que funções de agregação têm um grande potêncial de aplicações em diversas áreas de conhecimentos tais como: em matemática aplicada (probabilidade, estatística e teoria de decisão, por exemplo), ciência da computação (por exemplo em inteligência artificial, processamento digital de imagens e algoritmos experimentais), em economia (por exemplo, em análises de risco), etc. Porém quando esses valores são graus de pertinência ou valores verdades num contexto fuzzy (ou de alguma de suas extensões) essas funções ou operadores de agregação têm que satisfazer certas propriedades. Se considerarmos que cada um dos graus de pertinência a ser agregado, são resultados das opiniões de diversos especialistas ou da aplicação de diversos métodos, então quando esses graus são todos zero ou todos um, o resultado da agregação também deve ser zero ou um, respectivamente, e além disso quanto maiores os graus de pertinências, maior deve ser o resultado da agregação. Ou seja, num contexto fuzzy, um operador de agregação A necessita no mínimo satisfazer as propriedades: $A(0,\ldots,0) = 0$, $A(1,\ldots,1) = 1$ e se $x_i \leqslant y$ então $A(x_1,\ldots,x_n) \leqslant A(x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n)$ para todo $i \in \mathbb{N}_n = \{1,\ldots,n\}$. É claro que outras condições também podem ser impostas em determinadas circunstâncias, como por exemplo que sejam comutativa, idempotente, associativa, etc. As funções de agregações são classificadas em conjuntivas (o resultado sempre é menor ou igual ao menor dos graus de pretinências), disjuntiva (o resultado sempre é maior ou igual ao menor dos graus de pertinências), média (o resultado sempre é um valor que está entre o menor e o maior grau de pertinência de entrada), e híbrida (quando não é nem conjuntiva, nem disjuntiva e nem uma média).

Em [109] a noção de operador de agregação fuzzy foi generalizada para o contexto da teoria dos conjuntos fuzzy valoradas em reticulados (limitados) proposta por Goguen em [71], como segue:

Definição 3.1.1 *Seja $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant_L, 0_L, 1_L \rangle$ um reticulado limitado. Uma função $A : L^n \to L$ é um operador de agregação de aridade n em $\mathcal{L}$ se for isotônico, ou seja $A(x_1, \ldots, x_n) \leqslant_L A(y_1, \ldots, y_n)$ sempre que $x_i \leqslant_L y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}_n$, $A(0_L, \ldots, 0_L) = 0_L$ e $A(1_L, \ldots, 1_L) = 1_L$. Dizemos ainda que A é conjuntivo se $A(x_1, \ldots, x_n) \leqslant_L \inf\{x_1, \ldots, x_n\}$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in L$. Dualmente, dizemos ainda que A é disjuntivo se $\sup\{x_1, \ldots, x_n\} \leqslant_L A(x_1, \ldots, x_n)$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in L$. Finalmente, caso $\inf\{x_1, \ldots, x_n\} \leqslant_L A(x_1, \ldots, x_n) \leqslant_L \sup\{x_1, \ldots, x_n\}$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in L$, dizemos que A é uma média .*

Em particular observe que uma função de agregação A em um reticulado $\mathcal{L}$ é uma média, se e somente se, é idempotente, ou seja, $A(x, \ldots, x) = x$ para todo $x \in L$.

No caso particular do reticulado $\langle [0,1], \leqslant \rangle$, há duas médias muito estudadas: a média ponderada e a média ponderada ordenada. Seja $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ um vetor de pesos de dimensão n, isto é $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. O operador de média ponderada, cuja sigla em Inglês é WA, é definido por:

$$wa_\Lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

No caso dos pesos serem todos iguais, ou seja, $\lambda_i = \frac{1}{n}$ para cada $i \in \mathbb{N}_n$ omitimos o vetor de pesos, ou seja, usamos wa em vez de wa_Λ.

O operador de média ponderada ordenada, cuja sigla em Inglês é OWA, foi introduzido por Yager em [191] e é definido por:

$$owa_\Lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\sigma(i)}$$

onde $\sigma : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ é a permutação tal que $x_{\sigma(i)} \geqslant x_{\sigma(i+1)}$ para qualquer $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, ou seja ordena $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de forma decrescente. Assim, $x_\sigma(i)$ é o i-ésimo maior elemento de $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Observe que:

$$owa_\Lambda(x_1, \ldots, x_n) = wa_\Lambda(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}). \tag{3.1}$$

3.2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas de Atanassov

Atanassov em [8] estendeu a noção de conjuntos fuzzy, adicionando um grau extra para capturar a hesitação e incerteza que se tem no momento de atribuir o grau de pertinência de um elemento ao conjunto. Este segundo grau é chamado de grau de não pertinência, pois reflete o quanto se acredita que o elemento não está no conjunto. Na teoria dos conjuntos fuzzy é pressuposto que o grau de não pertinência é o complemento do grau de pertinência o que significa que não há hesitação no grau de pertinência. Assim, em teoria dos conjuntos fuzzy esse grau de não-pertinência está em função do grau de pertinência, ou seja, é completamente determinado pelo grau de pertinência, enquanto que o grau de não-pertinência em conjuntos fuzzy intuicionistas de Atanassov de alguma forma é independente do grau de pertinência.

Definição 3.2.1 *[8] Seja U um conjunto de referência (universo de discurso) não vazio e duas funções $\mu_A, \nu_A : U \to [0,1]$. Então a classe*

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) : x \in U\}$$

é um conjunto fuzzy intuicionista de Atanassov (CFIA) sobre U se $\mu_A(x) + \nu_A(x) \leqslant 1$ para cada $x \in U$.

As funções μ_A e ν_A proporcionam os graus de pertinência e não-pertinência, respectivamente, de um elemento no conjunto de referência U para o CFIA A. Seja $L^* = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x+y \leqslant 1\}$. Elementos de L^* são chamados de L^*-valores. Definimos as projeções $l, r : L^* \to [0,1]$ por $l(x,y) = x$ e $r(x,y) = y$, mas por simplicidade notacional escreveremos, respectivamente, $\underset{\sim}{\mathbf{x}}$ e $\widetilde{\mathbf{x}}$ em vez de $l(\mathbf{x})$ e $r(\mathbf{x})$ para qualquer $\mathbf{x} \in L^*$.

A ordem parcial usual (e natural) sobre L^* é a seguinte:

$$\mathbf{x} \leqslant_{L^*} \mathbf{y} \text{ sss } \underset{\sim}{\mathbf{x}} \leqslant \underset{\sim}{\mathbf{y}} \text{ e } \widetilde{\mathbf{y}} \leqslant \widetilde{\mathbf{x}}$$

Deschrijver e Kerre em [59] observaram que, uma vez que $\langle L^*, \leqslant_{L^*} \rangle$ é um reticulado completo, todo CFIA é um conjunto L-fuzzy no sentido de Goguen [71].

Seja A um CFIA sobre um conjunto de referência X. O índice fuzzy intuicionista[1] de um elemento $x \in X$ a A é dado por $\pi_A^*(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$. Em particular, o índice fuzzy intuicionista de $\mathbf{x} \in L^*$ é definido de forma similar: $\pi^*(\mathbf{x}) = 1 - \underset{\sim}{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{x}}$. Este índice mede o grau de hesitação presente em cada $\mathbf{x} \in L^*$.

[1]Em [8], este índice foi chamado de grau de indeterminância de um elemento $x \in X$ ao CFIA A.

Os L^*-valores $\mathbf{x}$ que satisfazem $\widetilde{\mathbf{x}} = 1 - \underset{\sim}{\mathbf{x}}$ são chamados de elementos diagonais de L^*. Claramente a função $\delta(x) = (x, 1-x)$ é uma bijeção entre $[0,1]$ e o conjunto dos elementos diagonais de L^*, denotado por $\mathcal{D}_{L^*}$. Observe que para qualquer $x \in [0,1]$, $\pi^*(\delta(x)) = 0$, o que reflete que os elementos diagonais não carregam hesitação.

Em [44], Chen e Tan introduziram a noção de pontuação (*score*) de um L^*-valor como sendo a função $s^* : L^* \to [-1,1]$ definida na equação seguinte.

$$s^*(\mathbf{x}) = \underset{\sim}{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{x}}. \tag{3.2}$$

Em [82], Hong e Choi, introduziram a noção de função de acurácia para um L^*-valor como sendo a função $h^* : L^* \to [0,1]$ definida na equação (3.3).

$$h^*(\mathbf{x}) = \underset{\sim}{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}}. \tag{3.3}$$

Xu e Yager em [188], baseados nas funções de pontuação e acurácia sobre L^* e com objetivo de ordenar L^*-valores, introduziram a ordem total sobre L^* definida na próxima equação.

$$\mathbf{x} \leqslant_{XY} \mathbf{y} \text{ sss } s^*(\mathbf{x}) < s^*(\mathbf{y}) \text{ ou } (s^*(\mathbf{x}) = s^*(\mathbf{y}) \text{ e } h^*(\mathbf{x}) \leqslant h^*(\mathbf{y})). \tag{3.4}$$

Bustince e Burillo [34] propôs a seguinte ordem parcial sobre L^*:

$$(x_1, y_1) \preceq_{L^*} (x_2, y_2) \text{ sss } x_1 \leqslant x_2 \text{ e } y_1 \leqslant y_2$$

Esta ordem é consistente com as medidas de hesitação e acurácia de L^*-valores, no seguinte sentido:

Proposição 3.2.2 *Seja* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^*$. *Se* $\mathbf{x} \prec_{L^*} \mathbf{y}$ *então* $\pi(\mathbf{x}) < \pi(\mathbf{y})$.

Demonstração: Se $\mathbf{x} \prec_{L^*} \mathbf{y}$ então (1) $\underset{\sim}{\mathbf{x}} < \underset{\sim}{\mathbf{y}}$ e $\widetilde{\mathbf{x}} \leqslant \underset{\sim}{\mathbf{y}}$, ou (2) $\underset{\sim}{\mathbf{x}} \leqslant \underset{\sim}{\mathbf{y}}$ e $\widetilde{\mathbf{x}} < \widetilde{\mathbf{y}}$. Em ambos os casos $\underset{\sim}{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}} < \underset{\sim}{\mathbf{y}} + \widetilde{\mathbf{y}}$. Portanto, $1 - (\underset{\sim}{\mathbf{y}} + \widetilde{\mathbf{y}}) < 1 - (\underset{\sim}{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}})$ o qual implica que $\pi(\mathbf{y}) < \pi(\mathbf{x})$. □

Corolário 3.2.3 *Se* $\mathbf{x} \prec_{L^*} \mathbf{y}$, *então* $h^*(\mathbf{x}) < h^*(\mathbf{y})$.

Demonstração: Se $\mathbf{x} \prec_{L^*} \mathbf{y}$ então pela Proposição 3.2.2, $1 - (\underset{\sim}{\mathbf{y}} + \widetilde{\mathbf{y}}) < 1 - (\underset{\sim}{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}})$ e portanto $\underset{\sim}{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}} < \underset{\sim}{\mathbf{y}} + \widetilde{\mathbf{y}}$. Consequentemente, $h^*(\mathbf{x}) < h^*(\mathbf{y})$. □

3.3 Conjuntos Fuzzy Intervalarmente Valorados

Em [77, 87, 143, 201] de forma independente, os conjuntos fuzzy foram estendidos por considerar subintervalos do intervalo unitário $[0,1]$ em vez de um valor em $[0,1]$.

Definição 3.3.1 *Seja* $\mathbb{L} = \{[a,b] : 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1\}$ *o conjunto de subintervalos de* $[0,1]$. *O conjunto*

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in U\}$$

onde $\mu_A : X \to \mathbb{L}$ *e* U *é um conjunto de referência não vazio, é chamado de conjunto fuzzy intervalarmente valorado (CFIV)* A *sobre* U.

Definem-se as projeções $\triangledown, \triangle : \mathbb{L} \to [0,1]$ por

$$\triangledown([a,b]) = a \text{ e } \triangle([a,b]) = b.$$

Por simplicidade notacional, para cada $X \in \mathbb{L}$, $\triangledown(X)$ e $\triangle(X)$ serão denotados por $\underline{X}$ e $\overline{X}$, respectivamente. Um intervalo $X \in \mathbb{L}$ é dito degenerado se $\underline{X} = \overline{X}$, ou seja, se $X = [x,x]$ para algum $x \in [0,1]$. Dado um $X \in \mathbb{L}$, o seu complemento, ou seja, $[1-\overline{X}, 1-\underline{X}]$, será denotado por X^c.

Seja a seguinte ordem parcial sobre $\mathbb{L}$,

$$X \leqslant_{\mathbb{L}} Y \text{ sss } \underline{X} \leqslant \underline{Y} \text{ e } \overline{X} \leqslant \overline{Y}. \tag{3.5}$$

É bem conhecido que $\langle \mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}} \rangle$ é um reticulado completo e portanto também pode ser visto como um conjunto L-fuzzy de Goguen.

Como mencionado por Moore em [114, página 9], um intervalo tem duas naturezas: ora pode ser visto como um conjunto de números reais, outra como um tipo de número (um par ordenado de números reais com a restrição de que o primeiro seja menor ou igual ao segundo valor do par ordenado). A ordem parcial $\leqslant_{\mathbb{L}}$ é a ordem natural de intervalos quando vistos sob a ótica da segunda natureza de intervalos enquanto a ordem parcial de inclusão de conjuntos captura a natureza conjuntista de intervalos. Contudo, a ordem de inclusão sobre $\mathbb{L}$ também pode ser expressa a partir dos extremos dos intervalos, da seguinte forma:

$$X \subseteq Y \text{ sss } \underline{Y} \leqslant \underline{X} \leqslant \overline{X} \leqslant \overline{Y}$$

Os índices de pontuação e acurácia para intervalos $X \in \mathbb{L}$ são dados pelas funções $s : \mathbb{L} \to [-1,1]$ e $h : \mathbb{L} \to [0,1]$ definidas como:

$$s(X) = v(X) - 1 \text{ e } h(X) = 1 - w(X) \tag{3.6}$$

onde $v(X) = \underline{X} + \overline{X}$ e $w(X) = \overline{X} - \underline{X}$.

Como é bem conhecido, os reticulados $\langle L^*, \leqslant_{L^*}\rangle$ e $\langle \mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}}\rangle$ são isomorfos, segundo o mapeamento $\rho : \mathbb{L} \to L^*$, definido por $\rho(X) = (\underline{X}, 1-\overline{X})$. Apesar de ambos reticulados serem algebricamente equivalentes, do ponto de vista semântico eles são diferentes, o que implica que eles podem ser aplicados em diferentes contextos [162].

Observação 3.3.2 *$s = s^* \circ \rho$ e $h = h^* \circ \rho$.*

A noção correspondente do índice fuzzy para elementos de L^* para elementos de $\mathbb{L}$, via o isomorfismo ρ, é a função $\Pi : \mathbb{L} \to [0,1]$ definida para todo $X \in \mathbb{L}$ por $\Pi(X) = \pi^*(\rho(X)) = \overline{X} - \underline{X} = w(X)$. Assim, o comprimento do intervalo é, de alguma forma, uma medida da inacurácia presente no intervalo.

3.4 Ordens Totais Admissíveis em $\mathbb{L}$ e L^*

As ordens usuais ou naturais para os conjuntos $\mathbb{L}$ e L^*, isto é $\leqslant_{\mathbb{L}}$ e $\leqslant_{L^*}$ respetivamente, não são totais. Ordens totais são desejáveis em muitas situações, mas não é qualquer ordem total que é adequada ou admissível em determinadas situações. Bustince et al [36] introduziu a noção de ordem total admissível para $\mathbb{L}$ como sendo qualquer ordem total sobre $\mathbb{L}$ que estenda $\leqslant_{\mathbb{L}}$. Formalmente, uma ordem total $\preceq$ em $\mathbb{L}$ é admissível se $\leqslant_{\mathbb{L}} \subseteq \preceq$, isto é, se para todo $X, Y \in \mathbb{L}$, $X \leqslant_{\mathbb{L}} Y$ implica que $X \preceq Y$. Baseando-se nesse trabalho, alguns autores usaram o memo princípio para definir a noção de ordem admissível em outras extensões de lógica fuzzy, como por exemplo em [57, 54, 175]. Analogamente, dizemos que uma ordem total $\preceq$ em L^* é admissível se $\leqslant_{L^*} \subseteq \preceq$, isto é, se para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^*$, $\mathbf{x} \leqslant_{L^*} \mathbf{y}$ implica que $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$.

3.4.1 Ordens Totais Admissíveis em $\mathbb{L}$

Em [36] foi demonstrado que as ordens definidas nas Equações (3.7), (3.8) e (3.9) são ordens totais admissíveis em $\mathbb{L}$. As duas primeiras são ordens léxicas enquanto a terceira é adaptação para $\mathbb{L}$ da ordem sobre L^* dada por Xu and Yager em [188].

$$X \trianglelefteq_{\mathbb{L}} Y \text{ sss } \underline{X} < \underline{Y} \text{ ou } (\underline{X} = \underline{Y} \text{ e } \overline{X} \leqslant \overline{Y}), \tag{3.7}$$

$$X \trianglelefteq_{\mathbb{L}}^{d} Y \text{ sss } \overline{X} < \overline{Y} \text{ ou } (\overline{X} = \overline{Y} \text{ e } \underline{X} \leqslant \underline{Y}), \tag{3.8}$$

$$X \preceq_{XY} Y \text{ sss } s(X) < s(Y) \text{ ou } (s(X) = s(Y) \text{ e } h(X) \leqslant h(Y)). \tag{3.9}$$

Uma ordem total $\lessapprox$ sobre $\mathbb{L}$ é gerada por duas funções $f : \mathbb{L} \to A$ e $g : \mathbb{L} \to B$, onde $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se para todo $X, Y \in \mathbb{L}$ temos que

$$X \lessapprox Y \text{ sss } f(X) < f(Y) \text{ ou } (f(X) = f(Y) \text{ e } g(X) \leqslant g(Y)). \tag{3.10}$$

Observe que $\trianglelefteq_{\mathbb{L}}$ é gerada a partir das funções $\triangledown$ e $\vartriangle$ enquanto $\trianglelefteq_{\mathbb{L}}^{d}$ é gerada por $\vartriangle$ e $\triangledown$. Neste sentido dizemos que $\trianglelefteq_{\mathbb{L}}$ e $\trianglelefteq_{\mathbb{L}}^{d}$ são dualmente geráveis. Analogamente a ordem dualmente gerável à ordem de Xu e Yager é a seguinte:

$$X \preceq_{XY}^{d} Y \text{ sss } h(X) < h(Y) \text{ ou } (h(X) = h(Y) \text{ e } s(X) \leqslant s(Y)). \tag{3.11}$$

Em [36] foram apresentadas algumas formas de obter ordens totais admissíveis, e provado que as ordens admissíveis são todas geradas por um par de funções em um sentido um pouco mais restrito que o da equação (3.10).

3.4.2 Ordens Totais Admissíveis em L^*

A seguinte proposição mostra que a ordem total de Xu e Yager é admissível e também se relaciona com a ordem parcial $\preceq_{L^*}$ proposta por Bustince e Burillo em [34].

Proposição 3.4.1 *Seja* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^*$*, então*

1. *Se* $\mathbf{x} \leqslant_{L^*} \mathbf{y}$ *então* $\mathbf{x} \leqslant_{XY} \mathbf{y}$*;*
2. *Se* $s^*(\mathbf{x}) = s^*(\mathbf{y})$ *e* $\mathbf{x} \preceq_{L^*} \mathbf{y}$ *então* $\mathbf{x} \leqslant_{XY} \mathbf{y}$*; e*
3. *Se* $x \leqslant y$ *então* $\delta(x) \leqslant_{XY} \delta(y)$.

Demonstração: Seja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^*$, então:

1. Se $\mathbf{x} <_{L^*} \mathbf{y}$ então $\underset{\sim}{\mathbf{x}} < \underset{\sim}{\mathbf{y}}$ e $\widetilde{\mathbf{y}} \leqslant \widetilde{\mathbf{x}}$, ou $\underset{\sim}{\mathbf{x}} \leqslant \underset{\sim}{\mathbf{y}}$ e $\widetilde{\mathbf{y}} < \widetilde{\mathbf{x}}$. Em ambos casos, temos que $\underset{\sim}{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{y}} < \widetilde{\mathbf{x}} + \underset{\sim}{\mathbf{y}}$. Portanto, $s^*(\mathbf{x}) < s^*(\mathbf{y})$ e consequentemente $\mathbf{x} <_{XY} \mathbf{y}$;
2. Se $\mathbf{x} \prec_{L^*} \mathbf{y}$ então $\underset{\sim}{\mathbf{x}} < \underset{\sim}{\mathbf{y}}$ e $\widetilde{\mathbf{x}} \leqslant \widetilde{\mathbf{y}}$, ou $\underset{\sim}{\mathbf{x}} \leqslant \underset{\sim}{\mathbf{y}}$ e $\widetilde{\mathbf{x}} < \widetilde{\mathbf{y}}$. Em ambos casos, temos que $\underset{\sim}{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}} < \underset{\sim}{\mathbf{y}} + \widetilde{\mathbf{y}}$. Portanto, $h^*(\mathbf{x}) < h^*(\mathbf{y})$ e como $s^*(\mathbf{x}) = s^*(\mathbf{y})$, então temos que $\mathbf{x} <_{XY} \mathbf{y}$; e
3. Se $x \leqslant y$, então $1 - y \leqslant 1 - x$ e portanto $\delta(x) \leqslant_{XY} \delta(y)$.

Observe que, nos items 1) e 2), caso $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, então trivialmente $\mathbf{x} \leqslant_{XY} \mathbf{y}$ □

Observação 3.4.2 *No entanto, a recíproca desta proposição não vale, isto é, existem casos tais que,* $\mathbf{x} \leqslant_{XY} \mathbf{y}$*, por exemplo,* $(0.3, 0.5) \leqslant_{XY} (0.2, 0.1)$*, porém nem* $\mathbf{x} \leqslant_{L^*} \mathbf{y}$ *nem* $(s^*(\mathbf{x}) = s^*(\mathbf{y})$ *e* $\mathbf{x} \preceq_{L^*} \mathbf{y})$.

A seguir propomos uma nova ordem total admissível para L^* a qual também estende $\preceq_{L^*}$ (com uma pequena restrição).

Definição 3.4.3 *Seja* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^*$.

$$\mathbf{x} \trianglelefteq_{L^*} \mathbf{y} \text{ } sss \text{ } \underset{\sim}{\mathbf{x}} < \underset{\sim}{\mathbf{y}} \text{ } ou \text{ } (\underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underset{\sim}{\mathbf{y}} \text{ } e \text{ } \widetilde{\mathbf{y}} \leqslant \widetilde{\mathbf{x}}). \tag{3.12}$$

Teorema 3.4.4 $\trianglelefteq_{L^*}$ *é uma ordem total.*

Demonstração: Direta. □

Proposição 3.4.5

$$\mathbf{x} \trianglelefteq_{L^*} \mathbf{y} \text{ } sss \text{ } \mathbf{x} \leqslant_{L^*} \mathbf{y} \text{ } ou \text{ } (\mathbf{x} \preceq_{L^*} \mathbf{y} \text{ } e \text{ } \underset{\sim}{\mathbf{x}} \neq \underset{\sim}{\mathbf{y}})$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $\mathbf{x} \trianglelefteq_{L^*} \mathbf{y}$ então (*) $\underset{\sim}{\mathbf{x}} < \underset{\sim}{\mathbf{y}}$ ou (**) $\underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underset{\sim}{\mathbf{y}}$ e $\widetilde{\mathbf{y}} \leqslant \widetilde{\mathbf{x}}$. Caso (*), então $\widetilde{\mathbf{y}} \leqslant \widetilde{\mathbf{x}}$, e portanto $\mathbf{x} \leqslant_{L^*} \mathbf{y}$, ou $\widetilde{\mathbf{x}} < \widetilde{\mathbf{y}}$, e consequentemente, $\mathbf{x} \preceq_{L^*} \mathbf{y}$ (com $\underset{\sim}{\mathbf{x}} \neq \underset{\sim}{\mathbf{y}}$). Caso (**), então trivialmente $\mathbf{x} \leqslant_{L^*} \mathbf{y}$.

($\Leftarrow$) Se $\mathbf{x} \leqslant_{L^*} \mathbf{y}$ então $\underset{\sim}{\mathbf{x}} \leqslant \underset{\sim}{\mathbf{y}}$ e $\widetilde{\mathbf{y}} \leqslant \widetilde{\mathbf{x}}$. Caso $\underset{\sim}{\mathbf{x}} < \underset{\sim}{\mathbf{y}}$, então pela Equação (3.12), $\mathbf{x} \trianglelefteq_{L^*} \mathbf{y}$. Caso $\underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underset{\sim}{\mathbf{y}}$, então uma vez que $\widetilde{\mathbf{y}} \leqslant \widetilde{\mathbf{x}}$, temos que $\mathbf{x} \trianglelefteq_{L^*} \mathbf{y}$.

Se $\mathbf{x} \preceq_{L^*} \mathbf{y}$ e $\underset{\sim}{\mathbf{x}} \neq \underset{\sim}{\mathbf{y}}$ então $\underset{\sim}{\mathbf{x}} < \underset{\sim}{\mathbf{y}}$ e logo, pela Equação (3.12), $\mathbf{x} \trianglelefteq_{L^*} \mathbf{y}$. □

Observação 3.4.6 *O último item da Proposição 3.4.1 trivialmente vale quando for considerado* $\trianglelefteq_{L^*}$ *em lugar de* $\leqslant_{XY}$*. Inclusive, diferentemente de* $\leqslant_{XY}$*,* $\trianglelefteq_{L^*}$ *também estende a ordem parcial* $\preceq_{L^*}$*.*

Esta observação junto com a Proposição 3.4.5 relaciona $\trianglelefteq_{L^*}$ com $\leqslant_{L^*}$ e $\preceq_{L^*}$ de forma mais forte que $\leqslant_{XY}$; compare com a Proposição 3.4.1 e Observação 3.4.2.

3.5 As Melhores $\mathbb{L}$ e L^* Representações do Operador OWA

Em [22] a noção de representação intervalar introduzida em [21, 144], foi adaptada para o contexto da TCFIV para o caso particular dos operadores de normas triangulares (t-normas) intervalares. Representações intervalares capturam, de uma maneira formal, a propriedade de corretude de funções intervalares no sentido de Hickey et al em

[81]. Desde então, representações intervalares de diversos outros conectivos e construções fuzzy (ver por exemplo [15, 18, 126, 128]) tem sido estudados. Nesta tese estamos interessados em funções intervalares de aridade n que são crescentes em cada um de seus argumentos.

Definição 3.5.1 *Seja $f : [0,1]^n \to [0,1]$ uma função de aridade n. Uma função $F : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}$, é uma representação intervalar ou $\mathbb{L}$-representação de f se para cada $X_1,\ldots,X_n \in \mathbb{L}$ e $x_i \in X_i$, com $i \in \mathbb{N}_n$, temos que $f(x_1,\ldots,x_n) \in F(X_1,\ldots,X_n)$.*

Sejam as funções $F,G : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}$. Denotamos por $F \sqsubseteq_{\mathbb{L}} G$, quando para cada $X_1,\ldots,X_n \in \mathbb{L}$, $G(X_1,\ldots,X_n) \subseteq F(X_1,\ldots,X_n)$. Observe que dado dois intervalos arbitrários $X,Y \in \mathbb{L}$, se $X \subseteq Y$ então $h(X) \geqslant h(Y)$. Assim, $F \sqsubseteq_{\mathbb{L}} G$ significa que sempre G tem mais acurácia que F, ou seja, que $h(F(X_1,\ldots,X_n)) \leqslant h(G(X_1,\ldots,X_n))$ para qualquer $X_1,\ldots,X_n \in \mathbb{L}$. Note também que se G é uma $\mathbb{L}$-representação de uma função f e $F \sqsubseteq_{\mathbb{L}} G$, então F também é uma $\mathbb{L}$-representação de f, porém F tem menos acurácia que G. Portanto, G é uma $\mathbb{L}$-representação melhor de f que F.

Proposição 3.5.2 *[61] Seja $f : [0,1]^n \to [0,1]$ uma função crescente de aridade n. Então a função $\widehat{f} : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}$ definida por*

$$\widehat{f}(X_1,\ldots,X_n) = [f(\underline{X_1},\ldots,\underline{X_n}), f(\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n})] \tag{3.13}$$

é uma $\mathbb{L}$-representação de f. Para qualquer outra $\mathbb{L}$-representação F de f, $F \sqsubseteq_{\mathbb{L}} \widehat{f}$.

Assim, $\widehat{f}$ é a $\mathbb{L}$-representação de f que possui maior acurácia e portanto, é a melhor $\mathbb{L}$-representação de f com respeito à ordem $\sqsubseteq_{\mathbb{L}}$. Logo, $\widehat{f}$ tem a propriedade de otimalidade no sentido de [81].

Observação 3.5.3 *[18] Uma boa característica da melhor $\mathbb{L}$-representação é que quando identificamos intervalos degenerados com números reais via a função $\eta(x) = [x,x]$, ambos, f e $\widehat{f}$, têm o mesmo comportamento, ou seja, $\eta(f(x_1,\ldots,x_n)) = \widehat{f}(\eta(x_1),\ldots,\eta(x_n))$. Outra propriedade da melhor $\mathbb{L}$-representação de alguma função crescente é que ela é isotônica com respeito às ordens de inclusão e $\leqslant_{\mathbb{L}}$. Ou seja, se $X_i \subseteq Y_i$ para cada $i \in \mathbb{N}_n$ temos que $\widehat{f}(X_1,\ldots,X_n) \subseteq \widehat{f}(Y_1,\ldots,Y_n)$ e, analogamente, se $X_i \leqslant_{\mathbb{L}} Y_i$ para cada $i \in \mathbb{N}_n$ temos que $\widehat{f}(X_1,\ldots,X_n) \leqslant_{\mathbb{L}} \widehat{f}(Y_1,\ldots,Y_n)$.*

Tem sido propostas diversas extensões do operador OWA, tanto para a teoria dos conjuntos fuzzy intervalarmente valorados, como para a teoria dos conjuntos fuzzy intuicionista de Atanassov (ver por exemplo [24, 60, 110, 183, 192]), porém a maioria delas não são $\mathbb{L}$ (L^*)-representações do operador OWA e nem são iguais, a menos de isomorfismo, com o operador OWA quando restrito aos intervalos degenerados.

A melhor $\mathbb{L}$-representação do owa_Λ é a função $\widehat{owa_\Lambda} : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}$ definida por

$$\widehat{owa_\Lambda}(X_1,\ldots,X_n) = [owa_\Lambda(\underline{X_1},\ldots,\underline{X_n}), owa_\Lambda(\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n})] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{\tau(i)}$$

onde $X_{\tau(i)} = [\underline{X}_{\tau_1(i)}, \overline{X}_{\tau_2(i)}]$ com $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ sendo as permutações tais que $\underline{X}_{\tau_1(i)} \geqslant \underline{X}_{\tau_1(i+1)}$ e $\overline{X}_{\tau_2(i)} \geqslant \overline{X}_{\tau_2(i+1)}$ para qualquer $i \in \mathbb{N}_{n-1}$[2]. Embora a somatoria a rigor seja com respeito à soma limitada definida por $X[+]Y = [\min(\underline{X}+\underline{Y},1), \min(\overline{X}+\overline{Y},1)]$, pode ser considerada a soma usual entre intervalos (ver por exemplo [114]). De fato, uma vez que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, então para qualquer $i, j \in \mathbb{N}_n$ com $i \neq j$, temos que

$$\lambda_i X_i [+] \lambda_j X_j = [\lambda_i \underline{X_i} + \lambda_j \underline{X_j}, \lambda_i \overline{X_i} + \lambda_j \overline{X_j}] = \lambda_i X_i + \lambda_j X_j. \tag{3.14}$$

Analogamente, a função $F : {L^*}^n \to L^*$ é uma L^*-representação da função $f : [0,1]^n \to [0,1]$ se para cada $\mathbf{x}_i \in L^*$ e $\underset{\sim}{\mathbf{x}_i} \leqslant x_i \leqslant 1 - \widetilde{\mathbf{x}}_i$, com $i \in \mathbb{N}_n$, então

$$\underset{\sim}{F(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)} \leqslant f(x_1,\ldots,x_n) \leqslant 1 - \widetilde{F(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)}.$$

Seja $F, G : {L^*}^n \to L^*$. Nos denotamos por $F \sqsubseteq_{L^*} G$, se para todo $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n \in L^*$, $G(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) \subseteq_{L^*} F(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$, onde $\mathbf{x} \subseteq_{L^*} \mathbf{y}$ se $\underset{\sim}{\mathbf{x}} \leqslant \underset{\sim}{\mathbf{y}}$ e $\widetilde{\mathbf{x}} \leqslant \widetilde{\mathbf{y}}$. Observe que $F \sqsubseteq_{L^*} G$ significa que o resultado de G sempre é mais acurado que o resultado de F, ou seja $h^*(F(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)) \leqslant h^*(G(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n))$ para cada $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n \in L^*$.

Seja $f : [0,1]^n \to [0,1]$ uma função crescente. Então a função $\breve{f} : {L^*}^n \to L^*$ definida por

$$\breve{f}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) = (f(\underset{\sim}{\mathbf{x}_1},\ldots,\underset{\sim}{\mathbf{x}_n}), 1 - f(1-\widetilde{\mathbf{x}}_1,\ldots,1-\widetilde{\mathbf{x}}_n))$$

é a maior L^*-representação de f com respeito à ordem $\sqsubseteq_{L^*}$ e portanto é a melhor L^*-representação de f. Se fé uma função de agregação então $\breve{f}$ é uma função de agregação L^*-valorada [109, Lema 1]. Claramente, $\breve{f} = \rho \circ \widehat{f} \circ \rho^{-1}$, ou equivalentemente, $\widehat{f} = \rho^{-1} \circ \breve{f} \circ \rho$. Portanto, $\widetilde{owa_\Lambda}$ é a melhor L^*-representação do owa_Λ .

Proposição 3.5.4 *Seja $f, g : [0,1]^n \to [0,1]$. Se $f \leqslant g$ então $\widehat{f} \leqslant \widehat{g}$ e $\breve{f} \leqslant \breve{g}$.*

Demonstração: Direto. □

[2]O produto escalar é o usual em matemática intervalar (ver por exemplo [114]), ou seja, para qualquer $\lambda \in [0,1]$ e $X, Y \in \mathbb{L}$, $\lambda X = [\lambda\underline{X}, \lambda\overline{X}]$.

Observação 3.5.5 *O* $\widecheck{owa}$ *e* $\widehat{owa}$ *são funções de agregação intuicionistas de Atanassov e intervalarmente valoradas, respectivamente, com respeito às ordens* $\leqslant_{L^*}$ *e* $\leqslant_{\mathbb{L}}$*. Além disso, ambas são comutativas e idempotentes, e por tanto são médias. De fato, âmbas são limitadas pelo infimo e supremo, ou equivalentemente, por* $\widehat{owa_{(0,\ldots,0,1)}}$*, ou seja,* $\widehat{\min}$ *(*$\widecheck{\min}$*) e* $\widehat{owa_{(1,0,\ldots,0)}}$*, como,* $\widehat{\max}$ *(*$\widecheck{\max}$*).*

Capítulo 4

Conjuntos Fuzzy Intuicionistas de Atanassov Intervalarmente Valorados

Em [11], Atanassov junto com Gargov, proposeram uma generalização da noção de conjunto fuzzy intuicionista seguindo o mesmo estilo de teoria que os conjunto fuzzy intervalarmente valorados. Assim, nesta extensão cada elemento do conjunto de referência tem um grau de pertinência e outro de não pertinência, como em conjuntos fuzzy intuicionistas de Atanassov, mas esses graus são intervalos, com a restrição de que a soma de ambos não exceda $[1,1]$. Esta extensão de conjuntos fuzzy, conjuntos fuzzy intervalares e conjuntos fuzzy intuicionistas de Atanassov, tem sido aplicada com sucesso em algumas áreas como em diagnóstico médico [2, 115], em controle e automação de plantas [165], reconhecimento de padrões [180] e principalmente em tomada de decisão [56, 58, 116, 158, 167, 169, 185, 197].

4.1 Conceitos Básicos

Definição 4.1.1 *[12] Um Conjunto Fuzzy Intuicionista de Atanassov Intervalarmente Valorado (CFIAIV) A sobre um conjunto não vazio de referência U é dada pela expressão*

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) : x \in U\}$$

onde $\mu_A, \nu_A : U \to \mathbb{L}$ *com a condição* $\overline{\mu_A(x)} + \overline{\nu_A(x)} \leqslant 1$.

Deschrijver e Kerre deram em [59] uma abordagem alternativa para CFIA em termos de conjuntos L-fuzzy no sentido de Goguen [71]. Analogamente, podemos ver CFIAIV como um caso particular de conjuntos L-fuzzy por considerar o reticulado completo $\langle \mathbb{L}^*, \leqslant_{\mathbb{L}^*} \rangle$ onde

$$\mathbb{L}^* = \{(X,Y) \in \mathbb{L} \times \mathbb{L} : \overline{X} + \overline{Y} \leqslant 1\}$$

e

$$(X_1,X_2) \leqslant_{\mathbb{L}^*} (Y_1,Y_2) \text{ sss } X_1 \leqslant_{\mathbb{L}} Y_1 \text{ e } Y_2 \leqslant_{\mathbb{L}} X_2. \tag{4.1}$$

A ordem parcial $\leqslant_{\mathbb{L}^*}$ é denominada de ordem usual de $\mathbb{L}^*$.

Note que $0_{\mathbb{L}^*} = ([0,0],[1,1])$ e $1_{\mathbb{L}^*} = ([1,1],[0,0])$. Analogamente a L^*, definem-se as projeções $l, r : \mathbb{L}^* \to \mathbb{L}$ por

$$l(X_1,X_2) = X_1 \text{ e } r(X_1,X_2) = X_2$$

e para cada $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$, $l(\mathbf{X})$ e $r(\mathbf{X})$ denotam-se por $\utilde{\mathbf{X}}$ e $\widetilde{\mathbf{X}}$, respectivamente.

Definição 4.1.2 *Os elementos de $\mathbb{L}^*$ serão chamados de $\mathbb{L}^*$-valores. Um $\mathbb{L}^*$-valor $\mathbf{X}$ é um elemento* ***semi-diagonal*** *se $\utilde{\mathbf{X}}$ e $\widetilde{\mathbf{X}}$ são intervalos degenerados. Um $\mathbb{L}^*$-valor $\mathbf{X}$ é um* ***elemento diagonal*** *se $\utilde{\mathbf{X}} + \widetilde{\mathbf{X}} = [1,1]$, ou seja, se $\mathbf{X} = ([x,x],[1-x,1-x])$ para algum $x \in [0,1]$. Denote por $\mathcal{D}_S$ e $\mathcal{D}$ o conjunto dos elementos semi-diagonais e diagonais de $\mathbb{L}^*$, respectivamente.*

Claramente, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_S$ e existe uma bijeção entre $[0,1]$ e $\mathcal{D}$ ($\phi(x) = ([x,x],[1-x,1-x])$), entre L^* e $\mathcal{D}_S$ ($\psi(\mathbf{x}) = ([\utilde{\mathbf{x}},\utilde{\mathbf{x}}],[\widetilde{\mathbf{x}},\widetilde{\mathbf{x}}])$) e entre $\mathbb{L}$ e $\mathcal{D}_S$ ($\varphi(X) = ([\underline{X},\underline{X}],[\overline{X},\overline{X}]^c)$, ou seja, $\varphi = \psi \circ \rho$) [56].

Em [127] foi estendido o índice fuzzy intuicionista de Atanassov para CFIAIV, com o objetivo de proporcionar uma medida intervalar do grau de hesitação em CFIAIV. O índice fuzzy intuicionista de Atanassov intervalarmente valorado de um elemento $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$ é definida por:

$$\Pi^*(\mathbf{X}) = [1,1] - \utilde{\mathbf{X}} - \widetilde{\mathbf{X}}. \tag{4.2}$$

4.2 Funções de Pontuação e Acurácia

A medida de pontuação de Chen e Tan em [44] foi estendida para $\mathbb{L}^*$-valores em [181] [1] e [95]. Nesta tese consideramos a definição de Xu: Seja $S : \mathbb{L}^* \to [-1,1]$ a função definida por

$$S(\mathbf{X}) = \frac{v(\utilde{\mathbf{X}}) - v(\widetilde{\mathbf{X}})}{2}. \tag{4.3}$$

[1] Como não tivemos sucesso em obter esta referência, baseamos esta definição em [170].

Para cada $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$, $S(\mathbf{X})$ é denominado de pontuação de $\mathbf{X}$.

A seguinte observação justifica o porquê são adequadas estas definições de função pontuação para $\mathbb{L}^*$-valores.

Observação 4.2.1 *Quando S é aplicada a elementos semi-diagonais é o mesmo que s^*, a menos do isomorfismo ψ, ou seja, $S(\psi(\mathbf{x})) = s^*(\mathbf{x})$ para qualquer $\mathbf{x} \in L^*$. Analogamente, quando S é aplicada a elementos semi-diagonais é o mesmo que s, a menos do isomorfismo φ, ou seja, $S(\varphi(X)) = s(X)$ para qualquer $X \in \mathbb{L}$. Observe que a imagem de S ($[-1,1]$) é a mesma de s^*. Além disso, S pode ser obtido a partir de s e s^*, conforme mostrado na seguinte equação.*

$$S(\mathbf{X}) = \frac{s^*(s(\underset{\sim}{\mathbf{X}}), s(\widetilde{\mathbf{X}}))}{2}. \tag{4.4}$$

Um vez que é possível encontrar dois $\mathbb{L}^*$-valores diferentes tendo a mesma pontuação, por exemplo, $S([0.2,0.3],[0.4,0.5]) = S([0.1,0.2],[0.3,0.4]) = -0.2$, a pontuação determina uma pré-ordem[2] sobre $\mathbb{L}^*$, a saber:

$$\mathbf{X} \leqslant_S \mathbf{Y} \text{ sss } S(\mathbf{X}) \leqslant S(\mathbf{Y})$$

Como $\leqslant_S$ é uma pré-ordem, então a seguinte relação é uma relação de equivalência: $\mathbf{X} \equiv_S \mathbf{Y}$ sss $\mathbf{X} \leqslant_S \mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y} \leqslant_S \mathbf{X}$. É claro que podemos usar a pré-ordem $\leqslant_S$ e a relação de equivalência $\equiv_S$ para definir uma ordem parcial da seguinte forma:

$$\mathbf{X} \preceq_S \mathbf{Y} \text{ sss } \mathbf{X} = \mathbf{Y} \text{ ou } (\mathbf{X} \leqslant_S \mathbf{Y} \text{ e } \mathbf{X} \not\equiv_S \mathbf{Y})$$

Um outro índice importante para $\mathbb{L}^*$-valores é a extensão da função de acurácia. No entanto, na literatura tem sido propostas diversas formas de se estender esta função para $\mathbb{L}^*$-valores.

1. Função de acurácia $H_1 : \mathbb{L}^* \to [0,1]$ definida por Xu [181]:

$$H_1(\mathbf{X}) = \frac{v(\underset{\sim}{\mathbf{X}}) + v(\widetilde{\mathbf{X}})}{2}. \tag{4.5}$$

2. Função de acurácia $H_2 : \mathbb{L}^* \to [-1,1]$ definida por Ye [197]:

$$H_2(\mathbf{X}) = v(\underset{\sim}{\mathbf{X}}) - 1 + \frac{v(\widetilde{\mathbf{X}})}{2}.$$

[2] Uma pré-ordem é uma relação binária reflexiva e transitiva.

3. Função de acurácia $H_3 : \mathbb{L}^* \to [-1,1]$ definida por Nayagam *et al.* [116]:

$$H_3(\mathbf{X}) = \frac{v(\underset{\sim}{\mathbf{X}}) - v(\widetilde{\mathbf{X}}) + v(\underset{\sim}{\mathbf{X}} \cdot \widetilde{\mathbf{X}})}{2}$$

   onde "·" é a multiplicação entre intervalos no sentido de [114] restrito a $\mathbb{L}$; ou seja, $X \cdot Y = [\underline{X} \cdot \underline{Y}, \overline{X} \cdot \overline{Y}]$.

4. Função de acurácia $H_4 : \mathbb{L}^* \to [0,1]$ definida por Nayagam *et al.* [117]: Seja $\delta \in [0,1]$ então

$$H_4(\mathbf{X}) = \frac{v(\underset{\sim}{\mathbf{X}}) + (2 - v(\underset{\sim}{\mathbf{X}}) - v(\widetilde{\mathbf{X}})) \cdot \delta}{2}.$$

5. Função de acurácia $H_5 : \mathbb{L}^* \to [0,1]$ definida por da Silva *et al.* [54, 56]:

$$H_5(\mathbf{X}) = 1 - (w(\underset{\sim}{\mathbf{X}}) + w(\widetilde{\mathbf{X}})). \tag{4.6}$$

Observe que a acurácia dos elementos diagonais de L^*, medidos por h^* definido na Eq. (3.3) é 1, isto é, o máximo, o qual é razoável, pois esses casos são interpretados como aqueles em que não há hesitação e nem inacurácia nos graus e pertinência dados. Porém, no caso das funções de acurácia propostas para $\mathbb{L}^*$, isto só é válido para as funções H_1 e H_5, ou seja, para cada $x \in [0,1]$ e $H_1(\phi(x)) = H_5(\phi(x)) = 1 = h^*(x, 1-x)$. Por outro lado, as funções H_2, H_3 e H_4 não seguem este paradigma. De fato, $H_i(\phi(x)) = H_i([x,x],[1-x,1-x]) = x$, para $i = 2,4$ e $H_3(\phi(x)) = H_3([x,x],[1-x,1-x]) = -x^2 + 3x - 1$. Outro aspecto negativo de H_2 e H_3 é que sua imagem não é a mesma de h^*.

Analogamente, à função de pontuação S, quando aplicada a H_1 elementos semi-diagonais, resulta equivalente a aplicar h^*, no sentido que $H_1(\psi(\mathbf{x})) = h^*(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in L^*$. No entanto, $H_k \circ \psi \neq h^*$, para $k = 2, \ldots, 5$.

Assim, por preservar mais propriedades, H_1 é a função de acurácia sobre $\mathbb{L}^*$ mais razoável. Porém, H_5 poderia também ser uma boa escolha uma vez que preserva quase as mesmas propriedades de H_1 com respeito a h^* mas também porque tem a seguinte propriedade extra: H_5 é a única que pode ser obtida a partir de h^* e h (definido na Eq. (3.6)) da mesma forma como S pode ser obtido a partir de s^* e s — ver Equação (4.4) — ou seja:

$$H_5(X,Y) = \frac{h^*(h(X), h(Y))}{2}$$

4.3 Ordens para $\mathbb{L}^*$-Valores

Em [147] foi introduzida a noção de conjuntos fuzzy n-dimensionais e observado que conjuntos fuzzy 4-dimensionais são isomorfos a CFIAIV. Os graus num conjunto fuzzy n-dimensional tomam valores no conjunto $L_n([0,1]) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in [0,1]^n : x_i \leqslant x_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}_{n-1}\}$. Em [16] os elementos de $L_n([0,1])$ são chamados de intervalos n-dimensionais e foi apresentada a bijeção $\rho : \mathbb{L}^* \to L_4([0,1])$ definida por $\rho(\mathbf{X}) = (\triangledown(\utilde{\mathbf{X}}), \triangle(\utilde{\mathbf{X}}), 1-\triangle(\widetilde{\mathbf{X}}), 1-\triangledown(\widetilde{\mathbf{X}}))$. Em uma das possíveis interpretações consideradas em [16] para intervalos 4-dimensionais, digamos (x_1,x_2,x_3,x_4), é que os intervalos $[x_1,x_2]$ e $[x_3,x_4]$ representam uma incerteza intervalar nos extremos um grau intervalarmente valorado, ou seja, de um elemento $[x,y] \in \mathbb{L}$, e assim $x \in [x_1,x_2]$ e $y \in [x_3,x_4]$. Tendo isto em mente, introduzimos a seguinte noção de pertinência de $\mathbb{L}$-valores em $\mathbb{L}^*$-valores.

Definição 4.3.1 *Seja $X \in \mathbb{L}$ e $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$. Dizemos que, $X \in^* \mathbf{X}$ se $\underline{X} \in \utilde{\mathbf{X}}$ e $\overline{X} \in \widetilde{\mathbf{X}}^c$.*

Note que, para cada $X,Y,Z \in \mathbb{L}$,

1. Se $X \subseteq Y \subseteq Z$ e $X,Z \in^* \mathbf{Y}$ para algum $\mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$, então $Y \in^* \mathbf{Y}$;
2. Se $X \leqslant_{\mathbb{L}} Y \leqslant_{\mathbb{L}} Z$ e $X,Z \in^* \mathbf{X}$ para algum $\mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$, então $Y \in^* \mathbf{Y}$;
3. $Y \in^* \varphi(X)$ sss $Y = X$.

Para qualquer $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$ denotaremos

$$\overleftarrow{\mathbf{X}} = [\triangledown(\utilde{\mathbf{X}}), \triangledown(\widetilde{\mathbf{X}}^c)] \text{ e } \overrightarrow{\mathbf{X}} = [\triangle(\utilde{\mathbf{X}}), \triangle(\widetilde{\mathbf{X}}^c)] \tag{4.7}$$

ou seja, $\overleftarrow{\mathbf{X}} = [\triangledown(\utilde{\mathbf{X}}), 1-\triangle(\widetilde{\mathbf{X}})]$ e $\overrightarrow{\mathbf{X}} = [\triangle(\utilde{\mathbf{X}}), 1-\triangledown(\widetilde{\mathbf{X}})]$. Observe que, o conjunto $S_{\mathbf{X}} = \{X \in \mathbb{L} : X \in^* \mathbf{X}\}$ é limitado, ou seja, para cada $X \in S_{\mathbf{X}}$, $\overleftarrow{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} X \leqslant_{\mathbb{L}} \overrightarrow{\mathbf{X}}$ e $\overleftarrow{\mathbf{X}}, \overrightarrow{\mathbf{X}} \in S_{\mathbf{X}}$. Assim, $S_{\mathbf{X}}$ é um intervalo fechado ($[\overleftarrow{\mathbf{X}}, \overrightarrow{\mathbf{X}}]$) de $\mathbb{L}$-valores e portanto, analogamente a $\mathbb{L}$-valores, $\mathbb{L}^*$-valores também têm uma natureza dual: um par ordenado de $\mathbb{L}$-valores com alguma condição e como um conjunto (um intervalo) de $\mathbb{L}$-valores.

4.3.1 Ordem de Inclusão para $\mathbb{L}^*$-Valores

Uma vez que a noção de pertinência é usada para introduzir a relação de subconjunto em teoria dos conjuntos, a pertinência $\in^*$ nos possibilitará introduzir uma relação de subconjunto entre $\mathbb{L}^*$-valores. Seja $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$, dizemos que $\mathbf{X} \subseteq^* \mathbf{Y}$ se para cada $X \in^* \mathbf{X}$ tem-se que $X \in^* \mathbf{Y}$. Analogamente, para o caso de $\mathbb{L}$-valores, também podemos definir esta relação de inclusão via os extremos do intervalo associado aos $\mathbb{L}^*$-valores.

Proposição 4.3.2 *Seja* $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$. *Então*

Natureza intervalar:

$$\mathbf{X} \subseteq^* \mathbf{Y} \textit{ sss } S_{\mathbf{X}} \subseteq S_{\mathbf{Y}}. \tag{4.8}$$

Natureza de número:

$$\mathbf{X} \subseteq^* \mathbf{Y} \textit{ sss } \overleftarrow{\mathbf{Y}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overleftarrow{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overrightarrow{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overrightarrow{\mathbf{Y}}. \tag{4.9}$$

Natureza de conjunto

$$\mathbf{X} \subseteq^* \mathbf{Y} \textit{ sss } \underset{\sim}{\mathbf{X}} \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{Y}} \textit{ e } \widetilde{\mathbf{X}} \subseteq \widetilde{\mathbf{Y}}. \tag{4.10}$$

Demonstração:

1. $\mathbf{X} \subseteq^* \mathbf{Y} \Rightarrow S_{\mathbf{X}} \subseteq S_{\mathbf{Y}}$: Se $\mathbf{X} \subseteq^* \mathbf{Y}$ então para cada $X \in^* \mathbf{X}$ também $X \in^* \mathbf{Y}$, e assim $S_{\mathbf{X}} \subseteq S_{\mathbf{Y}}$.

2. $S_{\mathbf{X}} \subseteq S_{\mathbf{Y}} \Rightarrow \overleftarrow{\mathbf{Y}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overleftarrow{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overrightarrow{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overrightarrow{\mathbf{Y}}$: Direto, uma vez que $S_{\mathbf{X}} = [\overleftarrow{\mathbf{X}}, \overrightarrow{\mathbf{X}}]$.

3. $\overleftarrow{\mathbf{Y}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overleftarrow{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overrightarrow{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overrightarrow{\mathbf{Y}} \Rightarrow \underset{\sim}{\mathbf{X}} \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ e $\widetilde{\mathbf{X}} \subseteq \widetilde{\mathbf{Y}}$: Se $\overleftarrow{\mathbf{Y}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overleftarrow{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overrightarrow{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overrightarrow{\mathbf{Y}}$ então por definição

   $[\bigtriangledown(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}), \bigtriangledown(\widetilde{\mathbf{Y}}^c)] \leqslant_{\mathbb{L}} [\bigtriangledown(\underset{\sim}{\mathbf{X}}), \bigtriangledown(\widetilde{\mathbf{X}}^c)] \leqslant_{\mathbb{L}} [\bigtriangleup(\underset{\sim}{\mathbf{X}}), \bigtriangleup(\widetilde{\mathbf{X}}^c)] \leqslant_{\mathbb{L}} [\bigtriangleup(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}), \bigtriangleup(\widetilde{\mathbf{Y}}^c)]$

   Logo, $\bigtriangledown(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}) \leqslant \bigtriangledown(\underset{\sim}{\mathbf{X}}) \leqslant \bigtriangleup(\underset{\sim}{\mathbf{X}}) \leqslant \bigtriangleup(\underset{\sim}{\mathbf{Y}})$ e $\bigtriangledown(\widetilde{\mathbf{Y}}^c) \leqslant \bigtriangledown(\widetilde{\mathbf{X}}^c) \leqslant \bigtriangleup(\widetilde{\mathbf{X}}^c) \leqslant \bigtriangleup(\widetilde{\mathbf{Y}}^c)$, ou seja, $1 - \bigtriangleup(\widetilde{\mathbf{Y}}) \leqslant 1 - \bigtriangleup(\widetilde{\mathbf{X}}) \leqslant 1 - \bigtriangledown(\widetilde{\mathbf{X}}) \leqslant 1 - \bigtriangledown(\widetilde{\mathbf{Y}})$. Portanto, $\underset{\sim}{\mathbf{X}} \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ e $\widetilde{\mathbf{X}} \subseteq \widetilde{\mathbf{Y}}$.

4. $\underset{\sim}{\mathbf{X}} \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ e $\widetilde{\mathbf{X}} \subseteq \widetilde{\mathbf{Y}} \Rightarrow \mathbf{X} \subseteq^* \mathbf{Y}$: Se $X \in^* \mathbf{X}$ então $\underline{X} \in \underset{\sim}{\mathbf{X}}$ e $\overline{X} \in \widetilde{\mathbf{X}}^c$. Logo, como $\underset{\sim}{\mathbf{X}} \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ e $\widetilde{\mathbf{X}} \subseteq \widetilde{\mathbf{Y}}$, então $\underline{X} \in \underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ e $\overline{X} \in \widetilde{\mathbf{Y}}^c$. Portanto, $X \in^* \mathbf{Y}$ e assim $\mathbf{X} \subseteq^* \mathbf{Y}$.

$\square$

Observação 4.3.3 *Algumas propriedades de* $\subseteq^*$*:*

1. *É uma ordem parcial sobre* $\mathbb{L}^*$*-valores;*

2. *Para cada* $X, Y \in \mathbb{L}$, $\varphi(X) \subseteq^* \varphi(Y)$ *sss* $X = Y$*;*

3. *Para cada* $x, y \in [0,1]$, $\phi(x) \subseteq^* \phi(y)$ *sss* $x = y$*;*

4. *Definindo o complemento de* $\mathbb{L}^*$*-valores por* $\mathbf{X}^c = (\widetilde{\mathbf{X}}, \underset{\sim}{\mathbf{X}})$*, então*

   $\mathbf{X} \subseteq^* \mathbf{Y}$ *sss* $\mathbf{X}^c \subseteq^* \mathbf{Y}^c$

4.3.2 Extensão da Ordem Total $\leqslant_{XY}$ para $\mathbb{L}^*$-Valores

No intuito de ordenar qualquer possível conjunto de $\mathbb{L}^*$-valores é necessário contemplar uma ordem total sobre $\mathbb{L}^*$ como feito em [188] para L^*-valores e que foi baseado nos índices de pontuação e acurácia. Assim, de forma análoga, define-se a seguinte relação binária sobre $\mathbb{L}^*$-valores para cada H_i, com $i \in \mathbb{N}_5$:

$$\mathbf{X} \leqslant_{S,H_i} \mathbf{Y} \text{ sss } \begin{cases} \mathbf{X} <_S \mathbf{Y} \text{ ou} \\ \mathbf{X} \equiv_S \mathbf{Y} \text{ e } H_i(\mathbf{X}) \leqslant H_i(\mathbf{Y}) \end{cases} \tag{4.11}$$

para qualquer $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$, onde $\mathbf{X} <_S \mathbf{Y}$ sss $S(\mathbf{X}) < S(\mathbf{Y})$.

No entanto, como observado em [170], esta relação não é uma ordem parcial para $i = 1$, pois falha a antisimetria. O seguinte exemplo mostra que também para os outros H_i, a relação $\leqslant_{S,H_i}$ não é antisimétrica e portanto não é uma ordem parcial. Antes, consideremos a relação, $\mathbf{X} \equiv_i \mathbf{Y}$ sss $\mathbf{X} \leqslant_{S,H_i} \mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y} \leqslant_{S,H_i} \mathbf{X}$. Uma vez que $\leqslant_{S,H_i}$ é claramente reflexiva e transitiva $\equiv_i$ é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{L}^*$.

Exemplo 4.3.4 *Sejam os seguintes elementos de $\mathbb{L}^*$: $\mathbf{X}_1 = ([0.1, 0.3], [0.2, 0.6])$, $\mathbf{X}_2 = ([0.2, 0.2], [0.3, 0.5])$, $\mathbf{X}_3 = ([0.1, 0.4], [0.2, 0.3])$ e $\mathbf{X}_4 = ([0.2, 0.3], [0.1, 0.4])$. Então, $S(\mathbf{X}_1) = S(\mathbf{X}_2) = -0.2$, $S(\mathbf{X}_3) = S(\mathbf{X}_4) = 0$, $H_1(\mathbf{X}_1) = H_1(\mathbf{X}_2) = 0.6$, $H_2(\mathbf{X}_1) = H_2(\mathbf{X}_2) = -0.2$, $H_3(\mathbf{X}_3) = H_3(\mathbf{X}_4) = 0.07$, $H_4(\mathbf{X}_1) = H_4(\mathbf{X}_2) = 0.2 + 0.4\delta$ e $H_5(\mathbf{X}_3) = H_5(\mathbf{X}_4) = 0.6$. Portanto, $\mathbf{X}_1 \equiv_i \mathbf{X}_2$ para $i \in \{1, 2, 4\}$. Analogamente, $\mathbf{X}_3 \equiv_i \mathbf{X}_4$ para $i \in \{3, 5\}$. Logo, $\leqslant_{S,H_i}$ para qualquer $i \in \mathbb{N}_5$ não é uma relação antisimétrica.*

Porém, os próprios autores em [170] proporcionaram a seguinte ordem total[3] sobre $\mathbb{L}^*$:

$$\mathbf{X} \leqslant \mathbf{Y} \text{ sss } \begin{cases} \mathbf{X} <_S \mathbf{Y} \text{ ou} \\ \mathbf{X} \equiv_S \mathbf{Y} \text{ e } H_1(\mathbf{X}) < H_1(\mathbf{Y}) \text{ ou} \\ \mathbf{X} \equiv_S \mathbf{Y} \text{ e } H_1(\mathbf{X}) = H_1(\mathbf{Y}) \text{ e } T(\mathbf{X}) < T(\mathbf{Y}) \text{ ou} \\ \mathbf{X} \equiv_S \mathbf{Y} \text{ e } H_1(\mathbf{X}) = H_1(\mathbf{Y}) \text{ e } T(\mathbf{X}) = T(\mathbf{Y}) \text{ e } G(\mathbf{X}) \leqslant G(\mathbf{Y}) \end{cases} \tag{4.12}$$

para cada $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$, onde $T(\mathbf{X}) = w(\underset{\sim}{\mathbf{X}}) - w(\widetilde{\mathbf{X}})$[4] e $G(\mathbf{X}) = w(\underset{\sim}{\mathbf{X}}) + w(\widetilde{\mathbf{X}})$.

Exemplo 4.3.5 *Considere os $\mathbf{X}_i$, com $i \in \mathbb{N}_4$ do Exemplo 4.3.4. Então $S(\mathbf{X}_1) = S(\mathbf{X}_2) = -0.2$ e $S(\mathbf{X}_3) = S(\mathbf{X}_4) = 0$. Portanto, considerando a ordem $\leqslant$ só sabemos que $\mathbf{X}_1$ e*

[3] Em [170] não foi afirmado isto mas de fato $\leqslant$ é uma ordem total.

[4] Em [95] este índice foi chamado de índice de desviação.

$\mathbf{X}_2$ *estão abaixo de* $\mathbf{X}_3$ *e* $\mathbf{X}_4$ *no ranking. Assim, para dirimir entre* $\mathbf{X}_1$ *e* $\mathbf{X}_2$ *e entre* $\mathbf{X}_3$ *e* $\mathbf{X}_4$ *necessitamos calcular o índice de acurácia. Mas,* $H_1(\mathbf{X}_1) = H_1(\mathbf{X}_2) = 0.6$ *e* $H_1(\mathbf{X}_3) = H_1(\mathbf{X}_4) = 0.5$*; o qual permite determinar que* $\mathbf{X}_4 \preccurlyeq \mathbf{X}_3$ *mas ainda não permite decidir se* $\mathbf{X}_1 \preccurlyeq \mathbf{X}_2$ *ou* $\mathbf{X}_2 \preccurlyeq \mathbf{X}_1$*. Para isto, precisamos computar o índice* T *de ambos:* $T(\mathbf{X}_1) = T(\mathbf{X}_2) - 0.2$ *o qual ainda não possibilita comparar* $\mathbf{X}_1$ *e* $\mathbf{X}_2$*. Logo, só resta calcular o índice* G *de ambos que de fato é* $G(\mathbf{X}_1) = 0.6$ *e* $G(\mathbf{X}_2) = 0.2$*. Portanto, o ranking dos* $\mathbf{X}_i$ *é*

$$\mathbf{X}_2 \preccurlyeq \mathbf{X}_1 \preccurlyeq \mathbf{X}_4 \preccurlyeq \mathbf{X}_3.$$

Observe que o índice G é inversamente proporcional a H_5. A seguir introduziremos uma nova ordem total sobre $\mathbb{L}^*$, semelhante à ordem total "$\preccurlyeq$", mas que é baseada nos índices S, H_1, H_5 e T.

$$\mathbf{X} \preceq \mathbf{Y} \text{sss} \begin{cases} \mathbf{X} <_S \mathbf{Y}, \text{ ou} \\ \mathbf{X} \equiv_S \mathbf{Y} \text{ e } H_1(\mathbf{X}) < H_1(\mathbf{Y}), \text{ ou} \\ \mathbf{X} \equiv_S \mathbf{Y} \text{ e } H_1(\mathbf{X}) = H_1(\mathbf{Y}) \text{ e } H_5(\mathbf{X}) < H_5(\mathbf{Y}), \text{ ou} \\ \mathbf{X} \equiv_S \mathbf{Y} \text{ e } H_1(\mathbf{X}) = H_1(\mathbf{Y}) \text{ e } H_5(\mathbf{X}) = H_5(\mathbf{Y}) \text{ e } T(\mathbf{X}) < T(\mathbf{Y}). \end{cases} \tag{4.13}$$

Uma definição alternativa para esta ordem é a seguinte:

$$\mathbf{X} \preceq \mathbf{Y} \text{ sss } \begin{cases} \mathbf{X} <_1 \mathbf{Y}, \text{ ou} \\ \mathbf{X} \equiv_1 \mathbf{Y} \text{ e } \mathbf{X} \preccurlyeq_5 \mathbf{Y}, \text{ ou} \\ \mathbf{X} \equiv_1 \mathbf{Y} \text{ e } \mathbf{X} \equiv_5 \mathbf{Y} \text{ e } T(\mathbf{X}) \preccurlyeq T(\mathbf{Y}) \end{cases} \tag{4.14}$$

para todo $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$.

A principal motivação para introduzir esta nova ordem não é determinar uma ordem total "melhor" que "$\preccurlyeq$", mas obter uma ordem total mais fiel à ordem total de Xu e Yager para L^*, ou seja ser exclusivamente baseada nos índices de pontuação e acurácia. Embora, a nova ordem use o índice T, este é só o último critério de desempate. Além disto, esta ordem prescinde do índice G e em seu lugar usa o índice de acurácia H_5.

Teorema 4.3.6 *$\preceq$ é uma ordem total sobre $\mathbb{L}^*$.*

Demonstração: Claramente $\preceq$ é reflexiva e transitiva, ou seja, é uma pré-ordem. Suponha que existem $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$ tal que $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}$, mas $\mathbf{X} \preceq \mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y} \preceq \mathbf{X}$. Por simplicidade notacional consideraremos que $\mathbf{X} = ([a,b],[c,d])$ e $\mathbf{Y} = ([e,f],[g,h])$. Das Equações (4.13), (4.3), (4.5), (4.6) e definição do índice T, temos o seguinte sistema de equações:

$$a+b-c-d=e+f-g-h \tag{4.15}$$

$$a+b+c+d=e+f+g+h \tag{4.16}$$

$$b-a+d-c=f-e+h-g \tag{4.17}$$

$$b-a+c-d=f-e+g-h \tag{4.18}$$

Pela Equação (4.15) temos que $b-c=e+f-g-h-a+d$ e, pela Equação (4.17), $b-c=f-e+h-g+a-d$. Portanto,

$$e+d=a+h \tag{4.19}$$

Pela Equação (4.16) temos que $a+c=e+f+g+h-b-d$ e pela Equação (4.17), $-(a+c)=f-e+h-g-b-d$. Assim,

$$b+d=f+h \tag{4.20}$$

Pela Equação (4.17) temos que $d-c=f-e-g+h+a-b$ e pela Equação (4.18), $-(d-c)=f-e+g-h+a-b$. Logo,

$$a+f=e+b \tag{4.21}$$

Se $a<e$ então, pela Equação (4.19), $d<h$ e portanto pela Equação (4.20) $f<b$ e pela Equação (4.21) $e<a$ que é uma contradição. Portanto, $\preceq$ é antisimétrica[5] e consequentemente $\preceq$ é uma ordem parcial.

Seja $\mathbf{X},\mathbf{Y}\in\mathbb{L}^*$. Se $S(\mathbf{X})\neq S(\mathbf{Y})$ ou $H_1(\mathbf{X})\neq H_1(\mathbf{Y})$ ou $H_5(\mathbf{X})\neq H_5(\mathbf{Y})$ or $T(\mathbf{X})\neq T(\mathbf{Y})$, então claramente $\mathbf{X}\prec\mathbf{Y}$ ou $\mathbf{Y}\prec\mathbf{X}$. Em qualquer outro caso, $\mathbf{X}\preceq\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}\preceq\mathbf{X}$ e portanto, pela simetria, $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$. Consequentemente, $\preceq$ é uma ordem total. $\square$

Exemplo 4.3.7 *Considere os $\mathbb{L}^*$-valores $\mathbf{X}_i$, para $i\in\mathbb{N}_4$ no exemplo 4.3.4. Como visto no Exemplo 4.3.5, após avaliar S e H_1, é possível concluir que tanto $\mathbf{X}_1$ como $\mathbf{X}_2$ são menores que $\mathbf{X}_3$ e $\mathbf{X}_4$. Agora, computando o índice H_5 temos que, $H_5(\mathbf{X}_1)=0.4$, $H_5(\mathbf{X}_2)=0.8$ e $H_5(\mathbf{X}_3)=H_5(\mathbf{X}_4)=0.6$. Assim, ainda falta determinar a ordem entre $\mathbf{X}_3$ e $\mathbf{X}_4$; ou a qual o fazemos calculado o índice T deles $T(\mathbf{X}_3)=0.2$ e $T(\mathbf{X}_4)=-0.2$. Portanto,*

$$\mathbf{X}_1\preceq\mathbf{X}_2\preceq\mathbf{X}_4\preceq\mathbf{X}_3$$

[5] Esta parte da prova foi inspirada na prova do [170, Theorem 3.1.] o qual se refere à ordem total $\preccurlyeq$.

Observação 4.3.8 *Se S, H_1, H_5 e T são trocadas entre si na Equação (4.13) obteremos novas ordens totais sobre $\mathbb{L}^*$. Essas ordens totais também poderiam ser usadas para obter um ranking dos $\mathbb{L}^*$-valores, porém aqui só consideraremos a ordem total "$\preceq$", por ser a mais fiel à ordem de Xu e Yager, no sentido que usamos como primeiro critério (são igual que Xu e Yager) o índice de pontuação e como segundo critério a mais razoável extensão do índice de acurácia. Além disso, o terceiro critério foi a segunda mais fiel extensão do índice de acurácia e é como último critério o índice T que não é nem índice de pontuação nem índice de acurácia.*

No que segue daremos uma maneira de se obter ordens totais para $\mathbb{L}^*$ a partir de ordens totais sobre $\mathbb{L}$.

Teorema 4.3.9 *Seja $\leqslant$ uma ordem total sobre $\mathbb{L}$. Então a relação binária $\leqslant^*$ sobre $\mathbb{L}^*$, definida para qualquer $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$, por*

$$\mathbf{X} \leqslant^* \mathbf{Y} \; sss \; \underset{\sim}{\mathbf{X}} < \underset{\sim}{\mathbf{Y}} \; ou \; (\underset{\sim}{\mathbf{X}} = \underset{\sim}{\mathbf{Y}} \; e \; \widetilde{\mathbf{Y}} \leqslant \widetilde{\mathbf{X}}) \tag{4.22}$$

é uma ordem total sobre $\mathbb{L}^*$.

Demonstração: Trivialmente $\leqslant^*$ é reflexiva, antisimétrica e transitiva, ou seja, é uma ordem parcial. Como $\leqslant$ é uma ordem total, então para qualquer $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$, temos que $\underset{\sim}{\mathbf{X}} < \underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ em cujo caso $\mathbf{X} \leqslant^* \mathbf{Y}$, ou $\underset{\sim}{\mathbf{X}} > \underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ em cujo caso $\mathbf{Y} \leqslant^* \mathbf{X}$, ou $\underset{\sim}{\mathbf{X}} = \underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ em cujo caso temos as seguintes três alternativas: 1) $\widetilde{\mathbf{X}} < \widetilde{\mathbf{Y}}$ e portanto $\mathbf{Y} \leqslant^* \mathbf{X}$, 2) $\widetilde{\mathbf{Y}} < \widetilde{\mathbf{X}}$ e portanto $\mathbf{X} \leqslant^* \mathbf{Y}$, ou 3) $\widetilde{\mathbf{X}} = \widetilde{\mathbf{Y}}$ e consequentemente $\mathbf{X}$=$\mathbf{Y}$. Portanto, $\leqslant^*$ é total. $\square$

Claramente, $\leqslant^*$ é a ordem lexicográfica com respeito a $\langle \mathbb{L}, \leqslant \rangle$ considerando a ordem oposta na segunda componente.

Nos também consideraremos as ordens totais sobre $\mathbb{L}^*$ que são obtidas desta maneira e que são baseadas nas ordens totais de Xu e Yager $\preceq_{XY}$ e lexicográfica $\trianglelefteq_{\mathbb{L}}$ e respectivas ordens dualmente geradas.

Exemplo 4.3.10 *Considere os $\mathbf{X}_i$, com $i \in \mathbb{N}_4$ do Exemplo 4.3.4. No intuito de se obter um ranking desses $\mathbb{L}^*$-valores, com respeito à ordem $\preceq^*_{XY}$, computamos o índice de pontuação do grau de pertinência intervalar ou seja, $s([0.1, 0.3]) = s([0.2, 0.2]) = -0.6$ e $s([0.1, 0.4]) = s([0.2, 0.3]) = -0.5$. Depois calculamos o índice de acurácia dos graus intervalares de não pertinência, ou seja, $h([0.1, 0.3]) = 0.8$, $h([0.2, 0.2]) = 1$, $h([0.1, 0.4]) = 0.7$ e $h([0.2, 0.3]) = 0.9$. Com essa informação, podemos concluir que $[0.1, 0.3] \prec_{XY} [0.2, 0.2] \prec_{XY} [0.1, 0.4] \prec_{XY} [0.2, 0.3]$ e pelo tanto*

$$\mathbf{X}_1 \preceq^*_{XY} \mathbf{X}_2 \preceq^*_{XY} \mathbf{X}_3 \preceq^*_{XY} \mathbf{X}_4.$$

Observe que com essa mesma informação também podemos concluir que $[0.1, 0.4] \prec^d_{XY} [0.1, 0.3] \prec^d_{XY} [0.2, 0.3] \prec^d_{XY} [0.2, 0.2]$ *e pelo tanto*

$$\mathbf{X}_3 \preceq^{d*}_{XY} \mathbf{X}_1 \preceq^{d*}_{XY} \mathbf{X}_4 \preceq^{d*}_{XY} \mathbf{X}_2.$$

Por outro lado, se consideramos a ordem total admissível $\trianglelefteq_{\mathbb{L}}$ *temos que*

$$\mathbf{X}_1 \trianglelefteq^*_{\mathbb{L}} \mathbf{X}_3 \trianglelefteq^*_{\mathbb{L}} \mathbf{X}_2 \trianglelefteq^*_{\mathbb{L}} \mathbf{X}_4.$$

Já considerando a ordem $\trianglelefteq^d_{\mathbb{L}}$ *temos que*

$$\mathbf{X}_2 \trianglelefteq^{d*}_{\mathbb{L}} \mathbf{X}_1 \trianglelefteq^{d*}_{\mathbb{L}} \mathbf{X}_4 \trianglelefteq^{d*}_{\mathbb{L}} \mathbf{X}_3.$$

Observação 4.3.11 *As primeiras três ordens* $(\preccurlyeq, \preceq, \preceq^*_{XY})$ *em* $\mathbb{L}^*$ *preservam as ordens de Xu e Yager sobre* L^* *assim como, a ordem usual de* $[0, 1]$, *isto é, cada* $\leqq \in \{\preccurlyeq, \preceq, \preceq^*_{XY}\}$ *satisfaz as seguintes duas propriedades:* $x \leqslant y$ *sss* $\phi(x) \leqq \phi(y)$ *e* $\mathbf{x} \leqslant_{XY} \mathbf{y}$ *sss* $\psi(\mathbf{x}) \leqq \psi(\mathbf{y})$. *Por outro lado, a ordem total* $\trianglelefteq^*_{\mathbb{L}}$ *preserva tanto a ordem usual de* $[0, 1]$ *quanto a ordem* $\trianglelefteq_{L^*}$.

Corolário 4.3.12 $\langle \mathbb{L}^*, \preccurlyeq \rangle$, $\langle \mathbb{L}^*, \preceq \rangle$, $\langle \mathbb{L}^*, \trianglelefteq^*_{\mathbb{L}} \rangle$, $\langle \mathbb{L}^*, \preceq^*_{XY} \rangle$, $\langle \mathbb{L}^*, \trianglelefteq^{d*}_{\mathbb{L}} \rangle$, *e* $\langle \mathbb{L}^*, \preceq^{d*}_{XY} \rangle$ *são reticulados limitados.*

Demonstração: Como toda ordem total é trivialmente um reticulado, então faltaria provar que $\langle \mathbb{L}^*, \preccurlyeq \rangle$, $\langle \mathbb{L}^*, \preceq \rangle$, $\langle \mathbb{L}^*, \trianglelefteq^*_{\mathbb{L}} \rangle$, $\langle \mathbb{L}^*, \preceq^*_{XY} \rangle$, $\langle \mathbb{L}^*, \trianglelefteq^{d*}_{\mathbb{L}} \rangle$, e $\langle \mathbb{L}^*, \preceq^{d*}_{XY} \rangle$ são limitados, ou seja, têm um menor e um maior elemento. Como $0_{\mathbb{L}^*}$ e $1_{\mathbb{L}^*}$ são os únicos $\mathbb{L}^*$-valores com índice de pontuação -1 e 1, respectivamente, então $0_{\mathbb{L}^*}$ e $1_{\mathbb{L}^*}$ e são os menores e os maiores elemento dos reticulados $\langle \mathbb{L}^*, \preccurlyeq \rangle$ e $\langle \mathbb{L}^*, \preceq \rangle$. Além disso, claramente, $0_{\mathbb{L}^*}$ e $1_{\mathbb{L}^*}$ também são os menores e maiores elementos dos reticulados $\langle \mathbb{L}^*, \trianglelefteq^*_{\mathbb{L}} \rangle$, $\langle \mathbb{L}^*, \trianglelefteq^{d*}_{\mathbb{L}} \rangle$ e $\langle \mathbb{L}^*, \preceq^*_{XY} \rangle$. Porém, para $\langle \mathbb{L}^*, \preceq^{d*}_{XY} \rangle$ temos que o menor elemento é $([0, 1], [0, 0])$ e o maior elemento é $1_{\mathbb{L}^*}$. $\square$

Analogamente à noção de ordem total admissível para $\mathbb{L}$ e L^* vistas na seção 3.4, podemos também dizer que uma ordem total $\leqslant$ sobre $\mathbb{L}^*$ é admissível se $\leqslant_{\mathbb{L}^*} \subseteq \leqslant$, ou seja, se $\mathbf{X} \leqslant \mathbf{Y}$ sempre que $\mathbf{X} \leqslant_{\mathbb{L}^*} \mathbf{Y}$.

Teorema 4.3.13 *Se* $\mathbf{X} \leqslant_{\mathbb{L}^*} \mathbf{Y}$ *então* $\mathbf{X} \preccurlyeq \mathbf{Y}$, $\mathbf{X} \preceq \mathbf{Y}$, $\mathbf{X} \trianglelefteq^*_{\mathbb{L}} \mathbf{Y}$.

Demonstração: Seja $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$ tal que $\mathbf{X} \leqslant_{\mathbb{L}^*} \mathbf{Y}$. Então pela Equação (3.5), $\underset{\sim}{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} \underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ e $\widetilde{\mathbf{Y}} \leqslant_{\mathbb{L}} \widetilde{\mathbf{X}}$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}$ e portanto $v(\underset{\sim}{\mathbf{X}}) - v(\widetilde{\mathbf{X}}) < v(\underset{\sim}{\mathbf{Y}}) - v(\widetilde{\mathbf{Y}})$ e, consequentemente, $S(X_1,Y_1) < S(X_2,Y_2)$. So, $\mathbf{X} \preccurlyeq \mathbf{Y}$ e $\mathbf{X} \preceq \mathbf{Y}$. Por outro lado, pela Proposição 3.4.5, $\underset{\sim}{\mathbf{X}} \trianglelefteq_{\mathbb{L}} \underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ e $\widetilde{\mathbf{Y}} \trianglelefteq_{\mathbb{L}} \widetilde{\mathbf{X}}$. Portanto, pela Equação (4.22), temos que $\mathbf{X} \trianglelefteq^*_{\mathbb{L}} \mathbf{Y}$. □

Desta forma, $\trianglelefteq^*_{\mathbb{L}}$, $\preccurlyeq$ e $\preceq$ são ordens totais admissíveis sobre $\mathbb{L}^*$. No entanto, a ordem total $\preceq^*_{XY}$, definida pela Equação (4.22) considerando $\preceq_{XY}$, **não é admissível**. De fato, dado os seguintes elementos de $\mathbb{L}^*$: $\mathbf{X} = ([0.2,0.5],[0.2,0.3])$ e $\mathbf{Y} = ([0.1,0.4],[0.3,0.4])$. Então $s([0.1,0.4]) = -0.5 < -0.3 = s([0.2,0.5])$ e portanto $[0.1,0.4] \prec_{XY} [0.2,0.5]$. Logo, $\mathbf{X} \preceq^*_{XY} \mathbf{Y}$. Porém, como $[0.1,0.4] \leqslant_{\mathbb{L}} [0.2,0.5]$ e $[0.2,0.3] \leqslant_{\mathbb{L}} [0.3,0.4]$, temos que $\mathbf{Y} \leqslant_{\mathbb{L}^*} \mathbf{X}$. Desta forma podemos concluir que a admissibilidade de $\leqslant$ não é uma condição suficiente para $\leqslant^*$ ser admissível. Mas, como será provado a seguir, a admissibilidade de $\leqslant$ é uma condição necessária para a admissibilidade de $\leqslant^*$.

Proposição 4.3.14 *Seja $\leqslant$ uma ordem total sobre $\mathbb{L}$. Se $\leqslant^*$ é uma ordem total admissível sobre $\mathbb{L}^*$, então $\leqslant$ é uma ordem total admissível sobre $\mathbb{L}$.*

Demonstração: Seja $X,Y \in \mathbb{L}$ tal que $X \leqslant_{\mathbb{L}} Y$. Então, pela Equação (4.1), $(X,[0,0]) \leqslant_{\mathbb{L}^*} (Y,[0,0])$. Assim, uma vez que $\leqslant^*$ é admissível, temos que $(X,[0,0]) \leqslant^* (Y,[0,0])$. Logo, pela Equação (4.22), $X < Y$ ou ($X = Y$ e $[0,0] \leqslant [0,0]$) e portanto $X \leqslant Y$. □

Esta proposição motiva o seguinte **problema em aberto:**

> *Caracterizar as ordens admissíveis $\leqslant$ sobre $\mathbb{L}$ que satisfazem a propriedade de $\leqslant^*$ ser uma ordem total admissível sobre $\mathbb{L}^*$.*

Também propomos uma nova forma de construir ordens totais (admissíveis e não admissíveis) para $\mathbb{L}^*$-valores, seguindo o mesmo princípio do Teorema 4.3.9 mas considerando outros intervalos.

Teorema 4.3.15 *Seja $\leqslant$ uma ordem total sobre $\mathbb{L}$. Então a relação binária $\leqslant^\star$ sobre $\mathbb{L}^*$, definida para qualquer $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$, por*

$$\mathbf{X} \leqslant^\star \mathbf{Y} \textit{ sss } \overleftarrow{\mathbf{X}} < \overleftarrow{\mathbf{Y}} \textit{ ou } (\overleftarrow{\mathbf{X}} = \overleftarrow{\mathbf{Y}} \textit{ e } \overrightarrow{\mathbf{X}} \leqslant \overrightarrow{\mathbf{Y}}) \tag{4.23}$$

é uma ordem total sobre $\mathbb{L}^*$. Além disso, se $\leqslant$ é admissível então $\leqslant^\star$ também é admissível.

Demonstração: Segue de forma análoga à prova do Teorema 4.3.9 que $\leqslant^\star$ é uma ordem total. Por outro lado, suponha que $\leqslant$ é admissível. Seja $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$ tal que $\mathbf{X} \leqslant_{\mathbb{L}^*} \mathbf{Y}$.

Então pela Equação (4.1), $\underset{\sim}{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} \underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ e $\widetilde{\mathbf{Y}} \leqslant_{\mathbb{L}} \widetilde{\mathbf{X}}$. Logo, $\widetilde{\mathbf{X}}^c \leqslant_{\mathbb{L}} \widetilde{\mathbf{Y}}^c$. Assim, pela Eq. (3.5), $\triangledown(\underset{\sim}{\mathbf{X}}) \leqslant \triangledown(\underset{\sim}{\mathbf{Y}})$, $\triangle(\underset{\sim}{\mathbf{X}}) \leqslant \triangle(\underset{\sim}{\mathbf{Y}})$, $\triangledown(\widetilde{\mathbf{X}}^c) \leqslant \triangledown(\widetilde{\mathbf{Y}}^c)$ e $\triangle(\widetilde{\mathbf{X}}^c) \leqslant \triangle(\widetilde{\mathbf{Y}}^c)$. Portanto, pelas Equações (4.7) e (3.5), $\overleftarrow{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overleftarrow{\mathbf{Y}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} \overrightarrow{\mathbf{Y}}$. Consequentemente, por $\leqslant$ ser admissível, temos que $\overleftarrow{\mathbf{X}} \leqslant \overleftarrow{\mathbf{Y}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{X}} \leqslant \overrightarrow{\mathbf{Y}}$. Portanto, pela Eq. (4.23), temos que $\mathbf{X} \leqslant^{\star} \mathbf{Y}$. $\square$

4.4 $\mathbb{L}^*$-Representação do OWA

4.4.1 $\mathbb{L}^*$-Representação de Funções sobre $\mathbb{L}$

A noção de pertinência sobre $\mathbb{L}^*$-valores também permite adaptar a noção de representação intervalar para a $\mathbb{L}^*$-valores da seguinte forma.

Definição 4.4.1 *Seja $F : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}$ e $\mathcal{F} : \mathbb{L}^{*^n} \to \mathbb{L}^*$. $\mathcal{F}$ é uma $\mathbb{L}^*$-representação de F se para cada $\mathbf{X}_i \in \mathbb{L}^*$, e $X_i \in^* \mathbf{X}_i$, com $i \in \mathbb{N}_n$, $F(X_1, \ldots, X_n) \in^* \mathcal{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$.*

Dada duas funções $\mathcal{G}, \mathcal{F} : \mathbb{L}^{*^n} \to \mathbb{L}^*$, dizemos que $\mathcal{F}$ é mais estreita que $\mathcal{G}$, denotado por $\mathcal{G} \sqsubseteq_{\mathbb{L}^*} \mathcal{F}$ se para qualquer $\mathbf{X}_i \in \mathbb{L}^*$ com $i \in \mathbb{N}_n$, temos que $\mathcal{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) \subseteq^* \mathcal{G}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$. Analogamente ao caso de $\mathbb{L}$-representações, dizemos que $\mathcal{F}$ é uma $\mathbb{L}^*$-representação melhor de uma função $F : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}$ que uma $\mathbb{L}^*$-representação $\mathcal{G}$ de F se $\mathcal{G} \sqsubseteq_{\mathbb{L}^*} \mathcal{F}$.

Teorema 4.4.2 *Seja $F : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}$ uma função isotônica. Então $\ddot{F} : \mathbb{L}^{*^n} \to \mathbb{L}^*$ definida por*

$$\ddot{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) = ([\underline{F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overleftarrow{\mathbf{X}_n})}, \underline{F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{X}_n})}], [1 - \overline{F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{X}_n})}, 1 - \overline{F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overleftarrow{\mathbf{X}_n})}]) \tag{4.24}$$

é uma $\mathbb{L}^*$-representação de F. Além disso, se $\mathcal{F}$ é uma outra $\mathbb{L}^*$-representação de F então $\mathcal{F} \sqsubseteq_{\mathbb{L}^*} \ddot{F}$.

Demonstração: Seja $\mathbf{X}_i \in \mathbb{L}^*$ com $i \in \mathbb{N}_n$. Uma vez que, F é isotônica em relação a $\leqslant_{\mathbb{L}}$, então para cada $X_i \in \mathbf{X}_i$ com $i \in \mathbb{N}_n$, temos que $F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overleftarrow{\mathbf{X}_n}) \leqslant_{\mathbb{L}} F(X_1, \ldots, X_n) \leqslant_{\mathbb{L}} F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{X}_n})$ e portanto $\underline{F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overleftarrow{\mathbf{X}_n})} \leqslant \underline{F(X_1, \ldots, X_n)} \leqslant \underline{F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{X}_n})}$ e $\overline{F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overleftarrow{\mathbf{X}_n})} \leqslant \overline{F(X_1, \ldots, X_n)} \leqslant \overline{F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{X}_n})}$. Logo,

$\underline{F(X_1, \ldots, X_n)} \in [\underline{F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overleftarrow{\mathbf{X}_n})}, \underline{F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{X}_n})}] = \underset{\sim}{\ddot{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)}$ e

$\overline{F(X_1, \ldots, X_n)} \in [\overline{F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overleftarrow{\mathbf{X}_n})}, \overline{F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{X}_n})}] = \widetilde{\ddot{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)}^c$.

Consequentemente, $F(X_1, \ldots, X_n) \in^* \ddot{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$.

Se $\mathcal{F} : \mathbb{L}^{*^n} \to \mathbb{L}^*$ é uma outra $\mathbb{L}^*$-representação de F, então para cada $\mathbf{X}_i \in \mathbb{L}^*$, e $X_i \in^* \mathbf{X}_i$, com $i \in \mathbb{N}_n$, temos que $F(X_1, \ldots, X_n) \in^* \mathcal{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$. Em particular, $F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1}, \ldots, \overleftarrow{\mathbf{X}_n})$,

$F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathbf{X}_n}) \in^* \mathcal{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)$. Logo, por definição de $\in^*$, $\underline{F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overleftarrow{\mathbf{X}_n})}, \underline{F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathbf{X}_n})} \in \utilde{\mathcal{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)}$ e $\overline{F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathbf{X}_n})}, \overline{F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overleftarrow{\mathbf{X}_n})} \in \widetilde{\mathcal{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)}^{c}$, ou seja, $1-\overline{F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathbf{X}_n})}$, $1-\overline{F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overleftarrow{\mathbf{X}_n})} \in \widetilde{\mathcal{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)}$. Consequentemente,

$$\utilde{\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)} \subseteq \utilde{\mathcal{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)} \text{ e } \widetilde{\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)}.$$

Assim, pela Equação (4.10), $\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n) \subseteq^* \mathcal{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)$ e portanto $\mathcal{F} \sqsubseteq_{\mathbb{L}^*} \ddot{F}$.

□

Corolário 4.4.3 *Seja $F : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}$ uma função isotônica. Então*

$$\overleftarrow{\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)} = F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overleftarrow{\mathbf{X}_n}) \text{ e } \overrightarrow{\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)} = F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathbf{X}_n}). \tag{4.25}$$

Demonstração: Direto do Teorema 4.4.2 e da Equação (4.7). □

Corolário 4.4.4 *Seja $f : [0,1]^n \to [0,1]$ uma função isotônica. Então*

$$\ddot{\widehat{f}}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n) = (\widehat{f}(\utilde{\mathbf{X}_1},\ldots,\utilde{\mathbf{X}_n}), \widehat{f}(\widetilde{\mathbf{X}_1}^{c},\ldots,\widetilde{\mathbf{X}_n}^{c})^{c}). \tag{4.26}$$

Demonstração: Direto do Teorema 4.4.2 e da Equação (4.7). □

Proposição 4.4.5 *Se $F : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}$ uma função isotônica, então $\ddot{F}(\mathcal{D}_S) \subseteq \mathcal{D}_S$ e $\ddot{F}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$.*

Demonstração: Suponha que $\mathbf{X}_i \in \mathcal{D}_S$ para todo $i \in \mathbb{N}_n$. Então $\mathbf{X}_i = ([x_i,x_i],[y_i,y_i])$ para algum $x_i,y_i \in [0,1]$ tal que $x_i + y_i \leqslant 1$. Como $\overleftarrow{\mathbf{X}_i} = [x_i, 1-y_i] = \overrightarrow{\mathbf{X}_i}$ então, pela Equação (4.24), $\utilde{\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)}$ e $\widetilde{\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)}$ são intervalos degenerados e portanto $\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n) \in \mathcal{D}_S$.

Por outro lado, suponha que $\mathbf{X}_i \in \mathcal{D}$ para cada $i \in \mathbb{N}_n$. Então $\mathbf{X}_i = ([x_i,x_i], [1-x_i, 1-x_i])$ para algum $x_i \in [0,1]$. Uma vez que $\overleftarrow{\mathbf{X}_i} = [x_i,x_i] = \overrightarrow{\mathbf{X}_i}$ então, pela Equação (4.24), $\utilde{\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)}$ e $\widetilde{\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)}$ são intervalos degenerados e $\utilde{\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)} = \widetilde{\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)}^{c}$. Logo, $\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n) \in \mathcal{D}$. □

Lema 4.4.6 *Seja $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$. Então $\overleftarrow{\mathbf{X}} \subseteq \overleftarrow{\mathbf{Y}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{X}} \subseteq \overrightarrow{\mathbf{Y}}$ sss $\utilde{\mathbf{X}} \leqslant \utilde{\mathbf{Y}}$ e $\widetilde{\mathbf{X}} \leqslant \widetilde{\mathbf{Y}}$. Dualmente, $\utilde{\mathbf{X}} \subseteq \utilde{\mathbf{Y}}$ e $\widetilde{\mathbf{X}} \subseteq \widetilde{\mathbf{Y}}$ sss $\overleftarrow{\mathbf{X}} \leqslant \overleftarrow{\mathbf{Y}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{X}} \leqslant \overrightarrow{\mathbf{Y}}$.*

Demonstração: $\overleftarrow{\mathbf{X}} \subseteq \overleftarrow{\mathbf{Y}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{X}} \subseteq \overrightarrow{\mathbf{Y}}$ sss $\triangledown(\utilde{\mathbf{Y}}) \leqslant \triangledown(\utilde{\mathbf{X}})$, $\triangle(\utilde{\mathbf{Y}}) \leqslant \triangle(\utilde{\mathbf{X}})$, $\triangledown(\widetilde{\mathbf{X}}^c) \leqslant \triangledown(\widetilde{\mathbf{Y}}^c)$ e $\triangle(\widetilde{\mathbf{X}}^c) \leqslant \triangle(\widetilde{\mathbf{Y}}^c)$ sss $\utilde{\mathbf{X}} \leqslant \utilde{\mathbf{Y}}$ e $\widetilde{\mathbf{X}}^c \leqslant \widetilde{\mathbf{Y}}^c$ sss $\utilde{\mathbf{X}} \leqslant \utilde{\mathbf{Y}}$ e $\widetilde{\mathbf{X}} \leqslant \widetilde{\mathbf{Y}}$. O outro caso é análogo. □

Proposição 4.4.7 *Seja $F : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}$ uma função isotônica. Então,*

$$\ddot{F}(\underbrace{\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n}) = F(\underset{\sim}{\mathbf{X}_1},\ldots,\underset{\sim}{\mathbf{X}_n}) \text{ e } \ddot{F}(\widetilde{\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n}) = F(\widetilde{\mathbf{X}_1},\ldots,\widetilde{\mathbf{X}_n}). \tag{4.27}$$

Demonstração: Direto do Lema 4.4.6 e Corolário 4.4.3. □

Proposição 4.4.8 *Sejam $F,G : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}$ funções isotônicas. Se $F \sqsubseteq_{\mathbb{L}} G$ então $\ddot{F} \sqsubseteq_{\mathbb{L}^*} \ddot{G}$.*

Demonstração: Uma vez que, $F \sqsubseteq_{\mathbb{L}} G$, então para todo $i \in \mathbb{N}_n$ e $\mathbf{X}_i \in \mathbb{L}^*$, temos que $G(\overleftarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overleftarrow{\mathbf{X}_n}) \subseteq F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overleftarrow{\mathbf{X}_n})$ e $G(\overrightarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathbf{X}_n}) \subseteq F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathbf{X}_n})$. Logo, $\underline{F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overleftarrow{\mathbf{X}_n})} \leqslant \underline{G(\overleftarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overleftarrow{\mathbf{X}_n})} \leqslant \overline{G(\overleftarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overleftarrow{\mathbf{X}_n})} \leqslant \overline{F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overleftarrow{\mathbf{X}_n})}$ e $\underline{F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathbf{X}_n})} \leqslant \underline{G(\overrightarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathbf{X}_n})} \leqslant \overline{G(\overrightarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathbf{X}_n})} \leqslant \overline{F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathbf{X}_n})}$. Portanto, pelo Teorema 4.4.2, temos que $\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n) \subseteq^* \ddot{G}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)$, ou seja, $\ddot{F} \sqsubseteq_{\mathbb{L}^*} \ddot{G}$. □

Note que, considerando o ponto de vista intervalar para $\mathbb{L}^*$-valores, temos que:

$$\ddot{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n) \simeq [F(\overleftarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overleftarrow{\mathbf{X}_n}), F(\overrightarrow{\mathbf{X}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathbf{X}_n})].$$

4.4.2 $\mathbb{L}^*$-Representações de Funções $[0,1]$-Valoradas

Seja $x \in [0,1]$ e $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$. Então $x \in^{**} \mathbf{X}$ se $\phi(x) \subseteq^* \mathbf{X}$, ou seja, se $1 - \bigtriangledown(\widetilde{\mathbf{X}}) \leqslant x \leqslant \bigtriangleup(\underset{\sim}{\mathbf{X}})$. Há uma estreita relação entre $\in^*$ e $\in^{**}$ como pode ser apreciado na seguinte proposição.

Proposição 4.4.9 *Seja $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$ e $X \in \mathbb{L}$. $X \in^* \mathbf{X}$ sss $\underline{X} \in^{**} \mathbf{X}$ e $\overline{X} \in^{**} \mathbf{X}$*

Demonstração: Como, trivialmente, $\overleftarrow{\phi(x)} = [x,x] = \overrightarrow{\phi(x)}$ para qualquer $x \in \mathbb{L}$, então

$X \in^* \mathbf{X}$	sss	$\overleftarrow{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} X \leqslant_{\mathbb{L}} \overrightarrow{\mathbf{X}}$	
	sss	$\overleftarrow{\mathbf{X}} \leqslant_{\mathbb{L}} [\underline{X},\underline{X}] \leqslant_{\mathbb{L}} [\overline{X},\overline{X}] \leqslant_{\mathbb{L}} \overrightarrow{\mathbf{X}}$	
	sss	$\phi(\underline{X}) \subseteq^* \mathbf{X}$ e $\phi(\overline{X}) \subseteq^* \mathbf{X}$	pela Eq. (4.9)
	sss	$\underline{X} \in^{**} \mathbf{X}$ e $\overline{X} \in^{**} \mathbf{X}$	pela def. de $\in^{**}$

□

Considerando esta noção de pertinência podemos naturalmente estender a noção de $\mathbb{L}$-representação de funções fuzzy para $\mathbb{L}^*$-representação de funções fuzzy e introduzir uma nova noção de inclusão para $\mathbb{L}^*$-valores.

Definição 4.4.10 *Seja $f : [0,1]^n \to [0,1]$ e $\mathcal{F} : \mathbb{L}^{*^n} \to \mathbb{L}^*$. $\mathcal{F}$ é uma $\mathbb{L}^*$-representação de f se para cada $\mathbf{X}_i \in \mathbb{L}^*$ e $x_i \in^{**} \mathbf{X}_i$, com $i \in \mathbb{N}_n$, temos que $f(x_1,\ldots,x_n) \in^{**} \mathcal{F}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)$*

Seja $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$. Então, $\mathbf{X} \subseteq^{**} \mathbf{Y}$ se quando $x \in^{**} \mathbf{X}$, também temos que $x \in^{**} \mathbf{Y}$. Porém, $\subseteq^{**}$ não é uma ordem parcial (não satisfaz a propriedade de antisimetria por exemplo, falha para $\mathbf{X} = ([0.2, 0.3], [0.4, 0.5])$ e $\mathbf{Y} = ([0.1, 0.3], [0.2, 0.5])$). Portanto, só consideramos $\subseteq^*$ como a extensão da ordem de inclusão para $\mathbb{L}^*$.

Analogamente ao caso de $\mathbb{L}$-representação, dizemos que uma $\mathbb{L}^*$-representação $\mathcal{F}$ de uma função $f : [0,1]^n \to [0,1]$ é melhor que uma outra $\mathbb{L}^*$-representação $\mathcal{G}$ de f se $\mathcal{G} \sqsubseteq_{\mathbb{L}^*} \mathcal{F}$.

Proposição 4.4.11 *Seja $f : [0,1]^n \to [0,1]$ e $F : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}$ funções isotônicas. Se F é uma $\mathbb{L}$-representação de f então $\ddot{F}$ é uma $\mathbb{L}^*$-representação de f.*

Demonstração: Se $x_i \in^{**} \mathbf{X}_i$ para todo $i \in \mathbb{N}_n$ então $\phi(x_i) = ([x_i, x_i], [1-x, 1-x]) \subseteq^* \mathbf{X}_i$. Assim, pela Equação (4.10), temos que $[x_i, x_i] \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i$ e $[x_i, x_i]^c \subseteq \widetilde{\mathbf{X}}_i$, ou equivalentemente, $[x_i, x_i] \subseteq \widetilde{\mathbf{X}}_i^{\,c}$. Portanto, $x_i \in \widetilde{\mathbf{X}}_i$ e $x_i \in \widetilde{\mathbf{X}}_i^{\,c}$. Assim, por F ser uma $\mathbb{L}$-representação de f, temos que $f(x_1, \ldots, x_n) \in F(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_1, \ldots, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_n)$ e portanto, $[f(x_1, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n)] \subseteq F(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_1, \ldots, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_n)$ e $[f(x_1, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n)]^c \subseteq F(\widetilde{\mathbf{X}_1}^{c}, \ldots, \widetilde{\mathbf{X}_n}^{c})^c$. Consequentemente, pelo Corolário 4.4.4, temos que $[f(x_1, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n)] \subseteq \ddot{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ e $[f(x_1, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n)]^c \subseteq \ddot{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$. Portanto, $\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) \subseteq^* \ddot{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$, ou seja, $f(x_1, \ldots, x_n) \in^{**} \ddot{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$. Logo, $\ddot{F}$ é uma $\mathbb{L}^*$-representação de f. □

Teorema 4.4.12 *Seja $f : [0,1]^n \to [0,1]$ uma função isotônica. Então $\ddot{\widehat{f}}$ é a melhor $\mathbb{L}^*$-representação de f, com respeito a $\sqsubseteq_{\mathbb{L}^*}$.*

Demonstração: Das proposições 3.5.2 e 4.4.11 e Observação 3.5.3 segue que $\ddot{\widehat{f}}$ é uma $\mathbb{L}^*$-representação de f. Assim, somente faltaria provar que é de fato a melhor $\mathbb{L}^*$-representação de f.

Dada uma outra $\mathbb{L}^*$-representação $\mathcal{F} : {\mathbb{L}^*}^n \to \mathbb{L}^*$ de f e $\mathbf{X}_i \in \mathbb{L}^*$ para cada $i \in \mathbb{N}_n$, se $X_i \in^* \mathbf{X}_i$, com $i \in \mathbb{N}_n$, então pela Proposição 4.4.9, temos que: $\underline{X_i} \in^{**} \mathbf{X}_i$ e $\overline{X_i} \in^{**} \mathbf{X}_i$. Logo, como $\mathcal{F}$ é uma $\mathbb{L}^*$-representação de f, $f(\underline{X_1}, \ldots, \underline{X_n}) \in^{**} \mathcal{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ e $f(\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n}) \in^{**} \mathcal{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$. Portanto, pela Equação (3.13), $\underline{\widehat{f}(X_1, \ldots, X_n)} \in^{**} \mathcal{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ e $\underline{\widehat{f}(X_1, \ldots, X_n)} \in^{**} \mathcal{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$. Consequentemente, pela Proposição 4.4.9, $\widehat{f}(X_1, \ldots, X_n) \in^* \mathcal{F}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$, ou seja, $\mathcal{F}$ é uma $\mathbb{L}^*$-representação de $\widehat{f}$. Assim, pelo Teorema 4.4.2, $F \sqsubseteq_{\mathbb{L}^*} \ddot{\widehat{f}}$, e portanto $\ddot{\widehat{f}}$ é uma melhor $\mathbb{L}^*$-representação de f que $\mathcal{F}$.
□

4.4.3 A Melhor $\mathbb{L}^*$-Representação do Operador OWA

Funções de Agregação têm um papel importante em teoria dos conjuntos fuzzy e, portanto, resulta natural estender esta definições para o contexto de CFIAIV.

Definição 4.4.13 *Uma função $\mathcal{A} : \mathbb{L}^{*^n} \to \mathbb{L}^*$ é uma função de agregação intuicionista intervalarmente valorada de aridade n quando satisfaz as seguintes condições:*

1. *Se $\mathbf{X}_i \leqslant_{\mathbb{L}^*} \mathbf{Y}_i$, para cada $i \in \mathbb{N}_n$, então $\mathcal{A}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) \leqslant_{\mathbb{L}^*} \mathcal{A}(\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n)$;*
2. *$\mathcal{A}(0_{\mathbb{L}^*}, \ldots, 0_{\mathbb{L}^*}) = 0_{\mathbb{L}^*}$ e $\mathcal{A}(1_{\mathbb{L}^*}, \ldots, 1_{\mathbb{L}^*}) = 1_{\mathbb{L}^*}$*

Com o objetivo de fornecer subsídio às extenções dos operadores de agregação de média ponderada (WA) e de média ponderada ordenada (OWA) para o contexto de $\mathbb{L}^*$-valores, introduzimos as seguintes operações sobre $\mathbb{L}^*$:

Produto escalar: A multiplicação $\odot$ de um escalar $\lambda \in [0,1]$ por $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^*$ é definida como:

$$\lambda \odot \mathbf{X} = (\lambda \underset{\sim}{\mathbf{X}}, \lambda \widetilde{\mathbf{X}}). \tag{4.28}$$

Divisão por um inteiro positivo: Seja $n \in \mathbb{Z}^+$ um inteiro positivo, então $\frac{\mathbf{X}}{n} = \frac{1}{n} \odot \mathbf{X}$.

Soma limitada: Seja $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{L}^*$. Então

$$\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y} = (\underset{\sim}{\mathbf{X}}[+]\underset{\sim}{\mathbf{Y}}, \widetilde{\mathbf{X}}[+]\widetilde{\mathbf{Y}}). \tag{4.29}$$

Claramente estas operações estão bem definidas, ou seja, sempre retornam um elemento de $\mathbb{L}^*$.

Definição 4.4.14 *Seja I um conjunto finito de índices e Λ um vetor de pesos de tamanho n, ou seja, $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, onde n é a cardinalidade de I. Defina a média ponderada intuicionista intervalarmente valorada $\mathbb{L}^*\!-\!WA_\Lambda$ por*

$$\mathbb{L}^*\!-\!WA_\Lambda(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \mathbf{X}_i \tag{4.30}$$

onde a somatória é relativa à soma limitada.

Lema 4.4.15 *Seja $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{L}^*$ e $\lambda_1, \Lambda_2 \in [0,1]$ tal que $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1$. Então $\lambda_1 \odot \mathbf{X}[+]\lambda_2 \odot \mathbf{Y} = (\lambda_1 \underset{\sim}{\mathbf{X}} + \lambda_2 \underset{\sim}{\mathbf{Y}}, \lambda_1 \widetilde{\mathbf{X}} + \lambda_2 \widetilde{\mathbf{Y}})$.*

Demonstração: Direto das Equações (3.14), (4.28) e (4.29). □

Teorema 4.4.16 *Seja Λ um vetor de pesos. Então $\mathbb{L}^*\!-\!WA_\Lambda = \ddot{\widehat{wa_\Lambda}}$, ou seja, é a melhor $\mathbb{L}^*$-representação do operador de média ponderada.*

Demonstração: Primeiro note que pela monotonicidade do operador de média ponderada, $\widehat{wa_\Lambda}(X_1,\ldots,X_n) = [wa_\Lambda(\underline{X_1},\ldots,\underline{X_n}), wa_\Lambda(\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n})] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$. Logo, pelo Corolário 4.4.4 e Lema 4.4.15,

$$\ddot{\widehat{wa_\Lambda}}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i, (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{\mathbf{X}}_i^{\,c})^c) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \mathbf{X}_i$$

□

Definição 4.4.17 *Seja I um conjunto finito de índices e Λ um vetor de pesos de dimensão n. Defina a média ponderada ordenada intuicionista intervalarmente valorada $\mathbb{L}^*-OWA_\Lambda$ como:*

$$\mathbb{L}^*-OWA_\Lambda(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \mathbf{X}_{\gamma(i)} \tag{4.31}$$

onde o somatório é com respeito à soma limitada e

$$\mathbf{X}_{\gamma(i)} = ([\bigtriangledown(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_1(i)}, \bigtriangleup(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_2(i)}], [\bigtriangledown(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_3(i)}, \bigtriangleup(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_4(i)}]) \tag{4.32}$$

com $\gamma_j : \{0,1\ldots,n\} \to \{0,1\ldots,n\}$ para cada $j \in \mathbb{N}_4$, sendo permutações tais que para qualquer $i \in \mathbb{N}_{n-1}$:

1. $\bigtriangledown(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_1(i)} \geqslant \bigtriangledown(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_1(i+1)}$,
2. $\bigtriangleup(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_2(i)} \geqslant \bigtriangleup(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_2(i+1)}$,
3. $\bigtriangledown(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_3(i)} \geqslant \bigtriangledown(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_3(i+1)}$, *e*
4. $\bigtriangleup(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_4(i)} \geqslant \bigtriangleup(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_4(i+1)}$.

Teorema 4.4.18 *Seja Λ um vetor de pesos. Então $\mathbb{L}^*-OWA_\Lambda = \ddot{\widehat{owa_\Lambda}}$. Em outras palavras, $\mathbb{L}^*-OWA_\Lambda$ é a melhor $\mathbb{L}^*$-representação do OWA.*

Demonstração:

$$\begin{array}{lll}
 & \mathbb{L}^*-OWA_\Lambda(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n) & \\
= & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \mathbf{X}_{\gamma(i)} & \text{pela Eq. (4.31)} \\
= & \mathbb{L}^*-WA_\Lambda(\mathbf{X}_{\gamma(1)},\ldots,\mathbf{X}_{\gamma(n)}) & \text{pela Eq. (4.30)} \\
= & \ddot{\widehat{wa_\Lambda}}(\mathbf{X}_{\gamma(1)},\ldots,\mathbf{X}_{\gamma(n)}) & \text{pelo Teo. 4.4.16} \\
= & (\widehat{wa_\Lambda}(\underset{\sim}{\mathbf{X}_{\gamma(1)}},\ldots,\underset{\sim}{\mathbf{X}_{\gamma(n)}}), \widehat{wa_\Lambda}(\widetilde{\mathbf{X}_{\gamma(1)}}^{\,c},\ldots,\widetilde{\mathbf{X}_{\gamma(n)}}^{\,c})^c) & \text{pela Eq. (4.26)}
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\widehat{wa_\Lambda}([\triangledown(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_1(1)}, \triangle(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_2(1)}], \ldots, [\triangledown(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_1(n)}, \triangle(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_2(n)}], \\
&\quad \widehat{wa_\Lambda}([\triangledown(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_3(i)}, \triangle(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_4(i)}]^c, \ldots, [\triangledown(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_3(i)}, \triangle(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_4(i)}]^c)^c) && \text{pela Eq. (4.32)} \\
&= ([wa_\Lambda(\triangledown(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_1(1)}, \ldots, \triangledown(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_1(n)}), wa_\Lambda(\triangle(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_2(1)}, \ldots, \triangle(\underset{\sim}{\mathbf{X}})_{\gamma_2(n)})], \\
&\quad [wa_\Lambda(1 - \triangle(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_4(1)}, \ldots, 1 - \triangle(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_4(n)}), \\
&\quad wa_\Lambda(1 - \triangledown(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_3(1)}, \ldots, 1 - \triangledown(\widetilde{\mathbf{X}})_{\gamma_3(n)})]^c) && \text{pela Eq. (3.13)} \\
&= ([owa_\Lambda(\triangledown(\underset{\sim}{\mathbf{X}_1}), \ldots, \triangledown(\underset{\sim}{\mathbf{X}_n})), owa_\Lambda(\triangle(\underset{\sim}{\mathbf{X}_1}), \ldots, \triangle(\underset{\sim}{\mathbf{X}_n}))], \\
&\quad [owa_\Lambda(1 - \triangle(\widetilde{\mathbf{X}_1}), \ldots, 1 - \triangle(\widetilde{\mathbf{X}_n})), owa_\Lambda(1 - \triangledown(\widetilde{\mathbf{X}_1}), \ldots, 1 - \triangledown(\widetilde{\mathbf{X}_n}))]^c) && \text{pela Eq. (3.1)} \\
&= (\widehat{owa_\Lambda}(\underset{\sim}{\mathbf{X}_1}, \ldots, \underset{\sim}{\mathbf{X}_n}), \widehat{owa_\Lambda}(\widetilde{\mathbf{X}_1}^c, \ldots, \widetilde{\mathbf{X}_n}^c)^c) && \text{pela Eq. (3.13)} \\
&= \ddot{\widehat{owa_\Lambda}}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) && \text{pela Eq. (4.26)}
\end{aligned}
$$

□

Teorema 4.4.19 *$\mathbb{L}^*-WA_\Lambda$ e $\mathbb{L}^*-OWA_\Lambda$ são operadores de agregações sobre $\mathbb{L}^*$. Além disso ambas são comutativas, idempotentes e limitadas pelo ínfimo e supremo do reticulado $\langle \mathbb{L}^*, \leqslant_{\mathbb{L}^*} \rangle$.*

Demonstração: Direto do Corolário 4.4.4, temos que: $\mathbb{L}^*-WA_\Lambda$ e $\mathbb{L}^*-OWA_\Lambda$ são isotônicas com respeito à ordem $\leqslant_{\mathbb{L}^*}$. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{L}^*-WA_\Lambda(0_{\mathbb{L}^*}, \ldots, 0_{\mathbb{L}^*}) &= (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [0,0], (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [1,1]^c)^c) \quad \text{pelo Teo. 4.4.16} \\
&= ([0,0], (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [0,0])^c) \\
&= ([0,0], [0,0]^c) \\
&= 0_{\mathbb{L}^*}
\end{aligned}
$$

Analogamente, temos que: $\mathbb{L}^*-WA_\Lambda(1_{\mathbb{L}^*}, \ldots, 1_{\mathbb{L}^*}) = 1_{\mathbb{L}^*}$. Portanto, $\mathbb{L}^*-WA_\Lambda$ é um operador de agregação em $\langle \mathbb{L}^*, \leqslant_{\mathbb{L}^*} \rangle$. A comutatividade de $\mathbb{L}^*-WA_\Lambda$ resulta trivialmente da comutatividade e da soma intervalar. Já a idempotência, segue:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{L}^*-WA_\Lambda(\mathbf{X}, \ldots, \mathbf{X}) &= (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}, (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{\mathbf{X}}^c)^c) \quad \text{pelo Teo. 4.4.16} \\
&= (\underset{\sim}{\mathbf{X}}, (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{\mathbf{X}})^c) \\
&= (\underset{\sim}{\mathbf{X}}, ([1,1] - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{\mathbf{X}})^c) \\
&= (\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{\mathbf{X}}) \\
&= (\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{X}}) = \mathbf{X}
\end{aligned}
$$

A prova de que $\mathbb{L}^*-WA_\Lambda$ é limitado segue da Proposição 4.4.8 e Observação 3.5.5.

Finalmente, a prova de que $\mathbb{L}^*\!-\!OWA_{\Lambda}$ é um operador de agregação com respeito a $\langle \mathbb{L}^*, \leqslant_{\mathbb{L}^*} \rangle$, comutativo, idempotente e limitado é analoga. $\square$

Capítulo 5

Proposta de Métodos de Tomada de Decisão

Existem diversos métodos em que lógica fuzzy pode auxiliar na tomada de decisão. Estes métodos podem ser classificados em dois: aqueles que são baseados em relações de preferências fuzzy (por exemplo ver [42, 80, 96, 122]) e aqueles baseados em matrizes de decisão fuzzy (por exemplo ver [29, 86, 187]).

Apresentaremos um exemplo de método de tomada de decisão multi-critério que considera um grupo de especialistas, baseado em matrizes de decisão fuzzy intuicionistas de Atanassov intervalarmente valoradas, onde os operadores de OWA e WA $\mathbb{L}^*$-valorados que foram propostos no capítulo anterior podem ser usados.

5.1 Método de Tomada de Decisão Multi-atributo e Multi-Especialista Baseado em Matrizes de Decisão $\mathbb{L}^*$-Valoradas

Seja $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ um conjunto de especialistas, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito e não vazio de alternativas, e $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ um conjunto de atributos ou critérios. O tomador de decição determina um vetor de pesos $W = (w_1, \ldots, w_p)^T$ para os atributos. Um método de tomada de decisão multi-atributo e multi-especialista (MTDMAME) baseado em matrizes de decisão fuzzy intuicionistas de Atanassov intervalarmente valoradas (MDFIAIV) é um algoritmo que determina o ranking das alternativas em X baseado na opinião de cada especialista em E, os quais avaliam o quanto cada alternativa satisfaz cada atributo. Em particular, consideraremos o caso onde essa avaliação o especialista tem certa imprecisão e hesitação ao momento de fornecer sua nota o que modelamos usando valores intuicionistas de Atanassov intervalares.

Propomos o seguinte método (algoritmo) para obter tal ranking:

Entrada: X, W, e para cada $l = 1,\dots,m$ uma matriz de decisão R^l de dimensão $n \times p$ onde cada posição (i, j) em R^l, denotada por R^l_{ij}, contém um $\mathbb{L}^*$-valor, o qual reflete o quanto a alternativa x_i atende o atributo (ou critério[1]) a_j.

Saída: Um ranking $r : X \to \{1,\dots,n\}$, significando que uma alternativa $x \in X$ é melhor que uma alternativa $y \in X$, denotado por $x > y$, sempre que $r(x) < r(y)$ e $r(x) = r(y)$ significa que o método foi incapaz de determinar se x é uma alternativa pior ou melhor que y[2], denotado por $x \sim y$.

Passo 1: Agregar as MDFIAIV dos especialistas em uma única MDFIAIV $\mathcal{RC}$, chamada de matriz de decisão de consenso, definida para cada $i = 1,\dots,n$ e $j = 1,\dots, p$, como:

$$\mathcal{RC}_{ij} = \widehat{\ddot{owa}_{\Lambda}}(R^1_{ij},\dots,R^m_{ij}) \tag{5.1}$$

onde $\Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ é o vetor de pesos:

- Caso m for par: $\lambda_i = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}+2-i}} + \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}m}$ para todo $i = 1,\dots,\frac{m}{2}$, e $\lambda_i = \lambda_{m+1-i}$ para cada $i = \frac{m}{2}+1,\dots,m$.
- Caso m for ímpar: $\lambda_i = \frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}+2-i}} + \frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}}m} + \frac{1}{4m}$ para todo $i = 1,\dots,\frac{m+1}{2}$, e $\lambda_i = \lambda_{m+1-i}$ para cada $i = \frac{m+1}{2}+1,\dots,m$.

Passo 2: Para cada alternativa x_i, com $i = 1,\dots,n$, usando $\widehat{\ddot{wa}_W}$, determine o índice coletivo total $\mathbb{L}^*$-valorado O_i como segue:

$$O_i = \widehat{\ddot{wa}_W}(\mathcal{RC}_{i1},\dots,\mathcal{RC}_{in}) \tag{5.2}$$

Passo 3: Determinar um ranking das alternativas considerando uma ordem total admissível em $\mathbb{L}^*$ e escolher a alternativa que tiver o maior índice coletivo total. A função de saída $r : X \to \{1,\dots,n\}$ é definida por $r(x_i) = j$ sss O_i é o j-ésimo maior índice coletivo total. Observe que se duas ou mais alternativas, por exemplo x e y, têm o mesmo índice coletivo total, então $r(x) = r(y)$ e portanto $x \sim y$.

[1]No caso de se tratar de um critério de custo (ou seja negativo) será considerado seu complemento (a negação $\mathbb{L}^*$-valorada padrão).

[2]A maioria dos métodos de tomada de decisão admitem situações (configurações) em que eles são incapazes de discriminar qual entre duas alternativas diferentes é melhor.

Tabela 5.1: Avaliação do especialista p_1.

R^1	a_1	a_2	a_3	a_4
A_1	([0.4,0.8],[0.0,0.1])	([0.3,0.6],[0.0,0.2])	([0.2,0.7],[0.2,0.3])	([0.3,0.4],[0.4,0.5])
A_2	([0.5,0.7],[0.1,0.2])	([0.3,0.5],[0.2,0.4])	([0.4,0.7],[0.0,0.2])	([0.1,0.2],[0.7,0.8])
A_3	([0.5,0.7],[0.2,0.3])	([0.6,0.8],[0.1,0.2])	([0.4,0.7],[0.1,0.2])	([0.6,0.8],[0.0,0.2])

Tabela 5.2: Avaliação do especialista p_2.

R^2	a_1	a_2	a_3	a_4
A_1	([0.5,0.9],[0.0,0.1])	([0.4,0.5],[0.3,0.5])	([0.5,0.8],[0.0,0.1])	([0.4,0.7],[0.1,0.2])
A_2	([0.7,0.8],[0.1,0.2])	([0.5,0.6],[0.2,0.3])	([0.5,0.8],[0.0,0.2])	([0.5,0.6],[0.3,0.4])
A_3	([0.5,0.6],[0.1,0.4])	([0.6,0.7],[0.1,0.2])	([0.4,0.8],[0.1,0.2])	([0.2,0.6],[0.2,0.3])

5.2 Exemplos Ilustrativos do Primeiro Método

Apresentaremos dois exemplos ilustrativos da aplicação do método proposto considerando quatro ordens totais admissíveis e compararemos os ranking obtidos com o obtido por [169] no primeiro caso e com os obtidos em [159, 160] para o segundo caso.

5.2.1 Primeiro Exemplo Ilustrativo

Considere o problema de adquirir um sistema de ar condicionado central usado como exemplo em [169]. Consideram-se três alternativas de sistemas de ar-condicionado central $\{A_1, A_2, A_3\}$; quatro atributos: a_1 (economia), a_2 (funcionalidade), a_3 (operacionalidade) e a_4 (longevidade); e três especialistas $\{p_1, p_2, p_3\}$. Via o uso de métodos estatísticos, para cada especialista p_l, alternativa A_i e atributo a_j, determina-se um grau intervalar de pertinência e um grau intervalar de não-pertinência, ou seja, um $\mathbb{L}^*$-valor, conforme constam nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 (o mesmo usado em [169]). O vetor de pesos para os atributos é $W = (0.2134, 0.1707, 0.2805, 0.3354)$ [3].

Como há três especialistas ($m = 3$), então o vetor de pesos é calculado como segue:

$\lambda_1 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3{\cdot}2^2} + \frac{1}{4{\cdot}3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = 0.291\overline{6}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3{\cdot}2^2} + \frac{1}{4{\cdot}3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 0.41\overline{6}$

$\lambda_3 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3{\cdot}2^2} + \frac{1}{4{\cdot}3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = 0.291\overline{6}$

[3] Em [169] foram considerados os pesos $V = (0.35, 0.28, 0.46, 0.55)$ que não satisfazem a condição que a soma dos pesos seja 1. W é o vetor de pesos obtidos através da normalização padrão de V.

Tabela 5.3: Avaliação do especialista p_3.

R^3	a_1	a_2	a_3	a_4
A_1	([0.3,0.9],[0.0,0.1])	([0.2,0.5],[0.1,0.4])	([0.4,0.7],[0.1,0.2])	([0.3,0.6],[0.3,0.4])
A_2	([0.3,0.8],[0.1,0.2])	([0.5,0.6],[0.1,0.3])	([0.2,0.8],[0.0,0.2])	([0.3,0.5],[0.2,0.3])
A_3	([0.2,0.6],[0.1,0.2])	([0.2,0.6],[0.2,0.3])	([0.3,0.6],[0.1,0.3])	([0.4,0.7],[0.1,0.2])

Tabela 5.4: Matriz de decisão de consenso
4

RC	a_1	a_2	a_3	a_4
A_1	([0.4,0.871],[0.0,0.1])	([0.3,0.53],[0.13,0.371])	([0.371,0.73],[0.1,0.2])	([0.33,0.571],[0.271,0.371])
A_2	([0.5,0.771],[0.1,0.2])	([0.441,0.571],[0.171,0.33])	([0.371,0.771],[0.0,0.2])	([0.3,0.441],[0.387,0.487])
A_3	([0.412,0.63],[0.13,0.3])	([0.483,0.7],[0.13,0.23])	([0.371,0.7],[0.1,0.23])	([0.4,0.7],[0.1,0.23])

A Tabela 5.4 apresenta matriz de decisão de consenso obtida das Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 considerando a Equação (5.1).

O índice coletivo total é calculado usando a Equação (5.2) como segue:

- $O_1 = ([0.3509555488, 0.6721], [0.140916, 0.2651])$
- $O_2 = ([0.3867014634, 0.6262], [0.180441, 0.3184])$
- $O_3 = ([0.4086795732, 0.6848], [0.111192, 0.2443])$

Assim, considerando este índice coletivo total e as ordens totais admissíveis apresentadas na seção 4.3, obtemos os rankings na Tabela 5.5.

Portanto, a ampla maioria dos rankings obtidos (80%) coincidem em que A_3 é a melhor alternativa e e que A_1 é melhor de que A_2. Assim, podemos dizer que o ranking que mais concorda com os 5 rankings obtidos (4 obtidos pelo método proposto e o outro obtido em [169]) seria o ranking

$$A_3 > A_1 > A_2$$

que de fato se repete em 3 deles.

Tabela 5.5: Rankings obtidos considerando algumas ordens totais admissíveis sobre $\mathbb{L}^*$.

$\trianglelefteq^*_{\mathbb{L}}$	$\preccurlyeq$	$\preceq$	$\preccurlyeq^{\star}_{XY}$	[169]
A_1	A_3	A_3	A_3	A_3
A_2	A_1	A_1	A_2	A_1
A_3	A_2	A_2	A_1	A_2

5.2.2 Segundo Exemplo Ilustrativo

Considere o problema de escolha de um investimento usado como exemplo em [159, 160]. Este problema considera uma empresa de investimentos à qual lhe gostaria investir uma determinada quantia de dinheiro em uma das seguintes possíveis alternativas: A_1 uma revendedora de carros; A_2 um restaurante; A_3 uma loja de venda de equipamentos de

Tabela 5.6: Avaliação do especialista e_1.

R^1	a_1	a_2	a_3	a_4
A_1	([0.4,0.5],[0.3,0.4])	([0.4,0.6],[0.2,0.4])	([0.1,0.3],[0.5,0.6])	([0.3,0.4],[0.3,0.5])
A_2	([0.6,0.7],[0.2,0.3])	([0.6,0.7],[0.2,0.3])	([0.4,0.7],[0.1,0.2])	([0.5,0.6],[0.1,0.3])
A_3	([0.6,0.7],[0.1,0.2])	([0.5,0.6],[0.3,0.4])	([0.5,0.6],[0.1,0.3])	([0.4,0.5],[0.2,0.4])
A_4	([0.3,0.4],[0.2,0.3])	([0.6,0.7],[0.1,0.3])	([0.3,0.4],[0.1,0.2])	([0.3,0.7],[0.1,0.2])
A_5	([0.7,0.8],[0.1,0.2])	([0.3,0.5],[0.1,0.3])	([0.5,0.6],[0.2,0.3])	([0.3,0.4],[0.5,0.6])

Tabela 5.7: Avaliação do especialista e_2.

R^2	a_1	a_2	a_3	a_4
A_1	([0.3,0.4],[0.4,0.5])	([0.5,0.6],[0.1,0.3])	([0.4,0.5],[0.3,0.4])	([0.4,0.6],[0.2,0.4])
A_2	([0.3,0.6],[0.3,0.4])	([0.4,0.7],[0.1,0.2])	([0.5,0.6],[0.2,0.3])	([0.6,0.7],[0.2,0.3])
A_3	([0.6,0.8],[0.1,0.2])	([0.5,0.6],[0.1,0.2])	([0.5,0.7],[0.2,0.3])	([0.1,0.3],[0.5,0.6])
A_4	([0.4,0.5],[0.3,0.5])	([0.5,0.8],[0.1,0.2])	([0.2,0.5],[0.3,0.4])	([0.4,0.7],[0.1,0.2])
A_5	([0.6,0.7],[0.2,0.3])	([0.6,0.7],[0.1,0.2])	([0.5,0.7],[0.2,0.3])	([0.6,0.7],[0.1,0.3])

informática; A_4 uma farmácia; e A_5 uma academia. Esta escolha deve ser feita tomando em conta os seguintes quatro critérios benéficos: c_1 rentabilidade; c_2 análises de crescimento; c_3 impacto socio-político; e c_4 cultura da empresa. As cinco possíveis alternativas serão avaliadas por três especialistas e_1, e_2 e e_3, os quais avaliam o quanto cada alternativa satisfaz e o quanto não satisfaz cada um dos critérios por separado e considerando uma imprecisão ou nível de segurança na sua avaliação. Essas avaliações são então normalizadas para serem elementos de $\mathbb{L}^*$ e colocadas na forma de matrizes como apresentados nas Tabelas 5.6, 5.7 e 5.8 (as mesmas consideradas em [158, 159, 160]).

Como em [159, 160] não foram considerados um peso para os critérios, porem aqui consideramos que todos têm o mesmo peso, ou seja, $W = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$. Os rankings obtidos usando o método proposto considerando as quatro ordens totais admissíveis do exemplo anterior assim como os ranking obtidos em [159, 160] são apresentados na Tabela 5.9.

Fazendo uma análise minuciosa destes rankings, podemos concluir que há um consenso absoluto de que a alternativa A_1 é a pior de todas seguida da alternativa A_4. Por outro lado, se calculamos para as outras três alternativas, a quantidade de vezes que obtiveram melhores posições nos rankings que as outras alternativas, obteremos a Tabela

Tabela 5.8: Avaliação do especialista e_3.

R^3	a_1	a_2	a_3	a_4
A_1	([0.2,0.5],[0.3,0.4])	([0.4,0.5],[0.1,0.2])	([0.3,0.6],[0.2,0.3])	([0.3,0.7],[0.1,0.3])
A_2	([0.2,0.7],[0.2,0.3])	([0.3,0.6],[0.2,0.4])	([0.4,0.7],[0.1,0.2])	([0.5,0.8],[0.1,0.2])
A_3	([0.5,0.6],[0.3,0.4])	([0.7,0.8],[0.1,0.2])	([0.5,0.6],[0.2,0.3])	([0.4,0.5],[0.3,0.4])
A_4	([0.3,0.6],[0.2,0.4])	([0.4,0.6],[0.2,0.3])	([0.1,0.4],[0.3,0.6])	([0.3,0.7],[0.1,0.2])
A_5	([0.6,0.7],[0.1,0.3])	([0.5,0.6],[0.3,0.4])	([0.5,0.6],[0.2,0.3])	([0.5,0.6],[0.2,0.4])

Tabela 5.9: Ranking obtidos pelo método proposto considerando diversas ordens totais e os rankings em [159, 160].

Método Proposto				Métodos Propostos em [159, 160]				
$\trianglelefteq_{\mathbb{L}}^{*}$	$\preccurlyeq$	$\leq$	$\leqslant_{XY}^{\star}$	[160]	[159] γ<0.378	[159] γ=0.378	[159] 0.378<γ<1	[159] γ=1
A_5	A_2	A_2	A_5	A_5	A_3	$A_3 \sim A_5$	A_5	A_5
A_3	A_5	A_5	A_3	A_2	A_5		A_3	$A_3 \sim A_2$
A_2	A_3	A_3	A_2	A_3	A_2	A_2	A_2	
A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4
A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1

Tabela 5.10: Comparação baseada na Tabela 5.9.

R^3	A_2	A_3	A_5
A_2	–	3	2
A_3	5	–	1
A_5	7	7	–

5.10. Desta tabela, podemos concluir que o ranking mais razoável baseado nos rankings obtidos com o método proposto e os de Tan et al, seria:

$$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$$

Este ranking de fato, coincide com o obtido em [159] para $\gamma \in (0.378, 1)$ e com o método proposto com as ordens totais admissíveis $\trianglelefteq_{\mathbb{L}}^{*}$ e $\leqslant_{XY}^{\star}$.

5.3 Método de Tomada de Decisão Baseado em Relações de Preferência $\mathbb{L}^*$-Valoradas

Seja L um reticulado. Uma relação de preferência L-valorada sobre um conjunto finito e não vazio X, é uma relação binária fuzzy L-valorada R sobre X.

Consideremos uma indexação de X, isto é uma bijeção $I : \mathbb{N}_n \to X$, onde n é a cardinalidade de X. Por simplicidade notacional, para cada $i, j \in \mathbb{N}_n$, usaremos x_i e $R_{i,j}$ em vez de $I(i)$ e $R(x_i, x_j)$, respectivamente. O significado de $R_{i,j}$ é que a alternativa x_i é preferida à alternativa x_j (denotado por $x_i \succ x_j$) com um grau L-valorado $R_{i,j}$. Usualmente, é requerido que a relação de preferência também satisfaça propriedade de N-reprocidade, ou seja, $R_{i,j} = N(R_{j,i})$, onde N é uma negação L-valorada forte [129] ou alguma outra condição, por exemplo, consistência ou aditividade [50, 75].

A tomada de decisão em grupo ou multi-especialista baseada em relações de preferência L-valoradas consiste em: um conjunto finito, não vazio e indexado $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de alternativas, um conjunto finito, não vazio e indexado $D = \{d_1, \ldots, d_m\}$ de tomadores de decisão ou especialistas junto com um vetor de pesos $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, ou seja $\lambda_i > 0$ para cada $i \in \mathbb{N}_m$ e $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$, e as relações de preferência L-valoradas sobre X de cada tomador de decisão. Denotaremos a relação de preferência do tomador de decisão d_k por R^k.

Existem diversos métodos para obter, de modo razoável, um ranking das alternativas como por exemplo os propostos em [4, 56, 98, 164, 182]. No entanto, o método do voto é uma das estrategias mais simples e bem sucedidas para tomada de decisão (ver por exemplo [65, 84, 85, 97, 122]). Para o caso de valores fuzzy, a avaliação final de uma alternativa x_i considerando uma única relação de preferência R, é calculada como segue:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} R_{i,j}\right) - R_{i,i}.$$

É claro que para o ranking final da o mesmo se normalizamos esses valores dividindo-os por $n-1$, isto é, se usarmos a média aritmética dos valores na posição da linha i de R que são diferentes de $R_{i,i}$. Analogamente como foi feito em [176], quando um grupo de tomadores de decisão com diferentes pesos é considerado, cada um com suas próprias relações de preferência, agregamos essas relações de preferências $\mathbb{L}^*$-valoradas usando em cada posição a melhor $\mathbb{L}^*$-representação da média ponderada. Assim, o método é o seguinte:

Entrada: X, Λ, e para cada $l = 1, \ldots, m$ uma relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada R^l de dimensão $n \times n$ onde cada posição (i, j) em R^l, denotada por R^l_{ij}, contém um $\mathbb{L}^*$-valor, o qual reflete o quanto a alternativa x_i é considerada melhor que a alternativa x_j de acordo com o tomador de decisão d_l.

Saída: Um ranking $r : X \to \mathbb{N}_n$, significando que uma alternativa $x \in X$ é melhor que uma alternativa $y \in X$, denotado por $x > y$, sempre que $r(x) < r(y)$ e $r(x) = r(y)$ significa que o método foi incapaz de determinar se x é uma alternativa pior ou melhor que y, denotado por $x \sim y$.

Passo 1. Agregar as relações de preferência $\mathbb{L}^*$-valoradas de cada tomador de decisão em uma única relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valoradas R^c, chamada de relação de preferência coletiva, usando o operador de agregação média ponderada considerando Λ como vetor de pesos. Assim, R^c é uma matriz de dimensão $n \times n$ onde a posição $R^c_{k,i}$ contém a média ponderada das preferências dos tomadores de decisão para a alternativa x_i sobre a alternativa x_j, ou seja,

$$R_{i,j}^{c} = \widehat{\ddot{wa}}_{\Lambda}(R_{i,j}^{1}, \ldots, R_{i,j}^{m})$$

Passo 2. Obter a pontuação final de cada alternativa x_i, que denotaremos por V_i, com $i = 1, \ldots, n$, "somando os votos", usando a média ponderada, em R^c para x_i, ou seja,

$$V_i = \widehat{\ddot{wa}}(R_{i,1}^{c}, \ldots, R_{i,i-1}^{c}, R_{i,i+1}^{c}, \ldots, R_{i,n}^{c})$$

Passo 3. Determinar um ranking das alternativas considerando uma ordem total admissível em $\mathbb{L}^*$ e escolher a alternativa que tiver o maior pontuação final. A função de saída $r : X \to \{1, \ldots, n\}$ é definida por $r(x_i) = j$ sss V_i é a j-ésima maior pontuação final. Observe que se duas ou mais alternativas, por exemplo x e y, têm a mesma pontuação final então $r(x) = r(y)$ e portanto $x \sim y$.

Observe que, se considerarmos $\leqslant_{\mathbb{L}^*}$, ou qualquer outra ordem parcial não total em vez de uma ordem total admissível haveria uma maior incidência de situações em que o método não consegue decidir entre duas ou mais alternativas qual é a melhor. Já se consideramos uma ordem total, tal que a média ponderada não seja isotônica com respeito a essa ordem, então existe a possibilidade de que alternativas evidentemente piores que outras. Por exemplo, quando todos os especialistas dão graus de preferências ($\mathbb{L}^*$-valores) menores para uma alternativa x_i que para a uma outra alternativa x_j, após a aplicação da média ponderada a alternativa x_i obtenha uma pontuação final maior de que x_j, ganhando dessa forma a pior alternativa.

Observe que, se alteramos a ordem entre os passos 1 e 2 no método proposto, ou seja, para cada tomador de decisão, aplicamos primeiro a média aritmética de seus graus de preferências para obter uma pontuação $\mathbb{L}^*$-valorada de cada alternativa e depois, para cada alternativa, usamos a média ponderada das pontuações no passo anterior, então as pontuações finais de cada alternativa são as mesmas que as obtidas pelo método proposto.

5.4 Exemplos Ilustrativos do Segundo Método

Compararemos o uso do nosso método com o proposto por Z. Xu em [182]. Consideraremos três exemplos ilustrativos. Aqui não estamos interessados na forma como são elicitadas os graus intuicionistas intervalares que expressam as preferencias de cada especialista. Por exemplo, poderia ser requerido que cada experto de um valor (um grau) no intervalo $[0, 1]$ que represente o quanto ele acha que uma alternativa é preferível a outra

Tabela 5.11: Relação de preferência do tomador de decisão d_1 em [182]

R^1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.4,0.5],[0.2,0.3])	([0.2,0.4],[0.3,0.5])	([0.3,0.5],[0.4,0.5])	([0.7,0.8],[0.1,0.2])	([0.2,0.3],[0.5,0.7])
x_2	([0.2,0.3],[0.4,0.5])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.1,0.3],[0.3,0.4])	([0.2,0.4],[0.4,0.5])	([0.2,0.3],[0.2,0.4])	([0.0,0.2],[0.5,0.6])
x_3	([0.3,0.5],[0.2,0.4])	([0.3,0.4],[0.1,0.3])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.3,0.4],[0.3,0.6])	([0.4,0.6],[0.1,0.3])	([0.1,0.4],[0.3,0.5])
x_4	([0.4,0.5],[0.3,0.5])	([0.4,0.5],[0.2,0.4])	([0.3,0.6],[0.3,0.4])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.5,0.8],[0.1,0.2])	([0.2,0.3],[0.6,0.7])
x_5	([0.1,0.2],[0.7,0.8])	([0.2,0.4],[0.2,0.3])	([0.1,0.3],[0.4,0.6])	([0.1,0.2],[0.5,0.8])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.3,0.5],[0.4,0.5])
x_6	([0.5,0.7],[0.2,0.3])	([0.5,0.6],[0.0,0.2])	([0.3,0.5],[0.1,0.4])	([0.6,0.7],[0.2,0.3])	([0.4,0.5],[0.3,0.5])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])

alternativa, em seguida podem ser usadas funções de ignorância, como em [38, 146], para transformar esses valores em graus de pertinência intuicionistas intervalares.

5.4.1 Primeiro Exemplo Ilustrativo

Em [171] foi proposto um ambiente de hierarquia analítica baseada em técnicas de tomada de decisão fuzzy de múltiplos critérios para ajudar aos bancos a escolher estratégias de fusão com base em seis critérios seguintes: desempenho da gestão, direitos e interesses dos funcionários, orientação ao cliente, análise financeira, política financeira do governo e gestão de risco. Em [182] foi considerado um comitê composto por três tomadores de decisão, cada um advindo de uma área estratégica de decisão diferente, os quais comparam individualmente cada par de critérios e expressam suas preferências através de um valor intuicionista de Atanassov intervalar, a fim de incluir a sua incerteza e imprecisão na avaliação. Foi considerado um peso para cada tomador de decisão

Condições Iniciais: Há seis alternativas ($X = \{x_1, \dots, x_6\}$), três tomadores de decisão (d_1, d_2 e d_3) com suas respectivas relações de preferências $\mathbb{L}^*$-valoradas (R^1, R^2 e R^3) apresentadas nas tabelas 5.11, 5.12 e 5.13, respectivamente, e o vetor de pesos $\Lambda = (0.4, 0.3, 0.3)$ para os tomadores de decisão. Como as relações de preferências $\mathbb{L}^*$-valoradas de d_3 em [182] para as alternativas x_3 e x_4 é invalido, ou seja, não é um $\mathbb{L}^*$-valor. Nós mudamos esses valores para um $\mathbb{L}^*$-valor o mais próximo possível do par de intervalos dados por [182] para não afetar o ranking final de Xu e manter o princípio de aditividade N-recíproca com respeito à negação forte padrão em $\mathbb{L}^*$, ou seja, $N(X,Y) = (Y,X)$[5]. Assim, a menos desse $\mathbb{L}^*$-valor, nos consideramos as mesmas condições iniciais de Xu em [182].

Passo 1: Relação de preferência coletiva R^c é apresentada na Tabela 5.14[6].

Por exemplo,

[5]Observe que em [182, Table 3] só não respeita este princípio em $R^3_{2,3}$ e $R^3_{3,2}$, pois $R^3_{2,3} \neq N(R^3_{3,2})$.

[6]omitimos os zeros à esquerda para diminuir o comprimento da tabela.

Tabela 5.12: Relação de preferência do tomador de decisão d_2 em [182]

R^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.3,0.5],[0.1,0.3])	([0.3,0.4],[0.2,0.5])	([0.4,0.5],[0.3,0.4])	([0.6,0.7],[0.2,0.3])	([0.2,0.4],[0.5,0.6])
x_2	([0.1,0.3],[0.3,0.5])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.0,0.3],[0.2,0.3])	([0.3,0.4],[0.2,0.5])	([0.1,0.2],[0.3,0.5])	([0.2,0.5],[0.3,0.4])
x_3	([0.2,0.5],[0.3,0.4])	([0.2,0.3],[0.0,0.3])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.2,0.4],[0.4,0.5])	([0.5,0.7],[0.1,0.2])	([0.3,0.4],[0.4,0.6])
x_4	([0.3,0.4],[0.4,0.5])	([0.2,0.5],[0.3,0.4])	([0.4,0.5],[0.2,0.4])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.4,0.7],[0.2,0.3])	([0.0,0.2],[0.5,0.7])
x_5	([0.2,0.3],[0.6,0.7])	([0.3,0.5],[0.1,0.2])	([0.1,0.2],[0.5,0.7])	([0.2,0.3],[0.4,0.7])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.2,0.3],[0.3,0.6])
x_6	([0.5,0.6],[0.2,0.4])	([0.3,0.4],[0.2,0.5])	([0.4,0.6],[0.3,0.4])	([0.5,0.7],[0.0,0.2])	([0.3,0.6],[0.2,0.3])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])

Tabela 5.13: Relação de preferência do tomador de decisão d_3 em [182]

R^3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.5,0.7],[0.1,0.2])	([0.3,0.5],[0.2,0.4])	([0.2,0.3],[0.3,0.5])	([0.5,0.8],[0.0,0.2])	([0.3,0.5],[0.4,0.5])
x_2	([0.1,0.2],[0.5,0.7])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.3,0.4],[0.4,0.6])	([0.1,0.3],[0.2,0.5])	([0.2,0.4],[0.3,0.5])	([0.2,0.3],[0.4,0.7])
x_3	([0.2,0.4],[0.3,0.5])	([0.3,0.4],[0.4,0.6])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.4,0.6],[0.3,0.4])	([0.3,0.6],[0.1,0.2])	([0.2,0.3],[0.3,0.4])
x_4	([0.3,0.5],[0.2,0.3])	([0.2,0.5],[0.1,0.3])	([0.3,0.4],[0.4,0.6])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.4,0.5],[0.2,0.4])	([0.4,0.6],[0.2,0.3])
x_5	([0.0,0.2],[0.5,0.8])	([0.3,0.5],[0.2,0.4])	([0.1,0.2],[0.3,0.6])	([0.2,0.4],[0.4,0.5])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.4,0.5],[0.3,0.5])
x_6	([0.4,0.5],[0.3,0.5])	([0.4,0.7],[0.2,0.3])	([0.3,0.4],[0.2,0.3])	([0.2,0.3],[0.4,0.6])	([0.3,0.5],[0.4,0.5])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])

$$
\begin{aligned}
R^c_{1,2} &= ([0.4\cdot0.4+0.3\cdot0.3+0.3\cdot0.5, 0.4\cdot0.5+0.3\cdot0.5+0.3\cdot0.7],\\
&\quad [0.4\cdot0.2+0.3\cdot0.1+0.3\cdot0.1, 0.4\cdot0.3+0.3\cdot0.3+0.3\cdot0.2])\\
&= ([0.16+0.09+0.15, 0.2+0.15+0.21],\\
&\quad [0.08+0.03+0.03, 0.12+0.09+0.06])\\
&= ([0.4, 0.56], [0.14, 0.27])
\end{aligned}
$$

Passo 2: O vetor V com a pontuação final de cada alternativa é o seguinte:

- $V_1 = ([0.36, 0.518], [0.258, 0.41])$;
- $V_2 = ([0.152, 0.318], [0.33, 0.504])$;
- $V_3 = ([0.28, 0.46], [0.236, 414])$;
- $V_4 = ([0.318, 0.504], [0.282, 0.428])$;
- $V_5 = ([0.184, 0.332], [0.392, 0.582])$ e
- $V_6 = ([0.4, 0.558], [0.208, 0.376])$.

Por exemplo, o cálculo de V_1 foi feito como segue:

Tabela 5.14: Relação de Preferência $\mathbb{L}^*$-valorada coletiva.

R^c	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	([.5,.5],[.5,.5])	([.4,.56],[.14,.27])	([.26,.43],[.24,.47])	([.3,.44],[.34,.47])	([.61,.77],[.1,.23])	([.23,39],[.47,.61])
x_2	([.14,.27],[.4,.56])	([.5,.5],[.5,.5])	([.13,.33],[.3,.43])	([.2,.37],[.28,.5])	([.17,.3],[.26,.46])	([.12,.32],[.41,.57])
x_3	([.24,.47],[.26,.43])	([.27,.37],[.16,.39])	([.5,.5],[.5,.5])	([.3,.46],[.33,.51])	([.4,.63],[.1,.24])	([.19,.37],[.33,.5])
x_4	([.34,.47],[.3,.44])	([.28,.5],[.2,.37])	([.33,.51],[.3,.46])	([.5,.5],[.5,.5])	([.44,0.68],[.16,.29])	([.2,.36],[.45,.58])
x_5	([.13,.23],[.61,.77])	([.26,.46],[.17,.3])	([.1,.24],[.4,.63])	([.16,.29],[.44,.68])	([.5,.5],[.5,.5])	([.3,.44],[.34,.53])
x_6	([.47,.61],[.23,.39])	([.41,.57],[.12,.32])	([.33,.5],[.19,.37])	([.45,.58],[.2,.36])	([.34,.53],[.3,.44])	([.5,.5],[.5,.5])

$$\begin{aligned} V_1 =& ([\tfrac{0.4+0.26+0.3+0.61+0.23}{5}, \tfrac{0.56+0.43+0.44+0.77+0.39}{5}], \\ & [\tfrac{0.14+0.24+0.34+0.1+0.47}{5}, \tfrac{0.27+0.47+0.47+0.23+0.61}{5}]) \\ =& ([\tfrac{1.8}{5}, \tfrac{2.59}{5}], [\tfrac{1.29}{5}, \tfrac{205}{5}]) \\ =& ([0.36, 0.518], [0.258, 0.41]) \end{aligned}$$

Passo 3: Como $S(V_1) = 0.105$, $S(V_2) = -0.182$, $S(V_3) = 0.045$, $S(V_4) = 0.056$, $S(V_5) = -0.229$ e $S(V_6) = 0.187$, então considerando as ordens totais admissíveis $\preccurlyeq$ e $\preceq$, em ambos os casos, o ranking obtido é o seguinte:

$$x_6 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_5 \tag{5.3}$$

Por outro lado, considerando a ordem total admissível $\trianglelefteq^*_{\mathbb{L}}$, o ranking obtido por este método é o seguinte:

$$x_6 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_2 \tag{5.4}$$

Considerando, a ordem total admissível $\leqslant^{\star}_{XY}$ tem-se o seguinte ranking:

$$x_6 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_5 \tag{5.5}$$

Já o ranking obtido por Xu em [182] foi

$$x_6 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_5 \tag{5.6}$$

Observação 5.4.1 *Assim, todos os rankings obtidos concordam nas quatro melhores alternativas, ou seja, em que $x_6 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$. Porém, no ranking obtido com o método de Xu e com o nosso com as ordens $\preccurlyeq$, $\preceq$ e $\leqslant^{\star}_{XY}$, a alternativa x_2 é melhor que x_5 enquanto com o método proposto mas para a ordem $\trianglelefteq^*_{\mathbb{L}}$ é o oposto. No entanto, de acordo com as Tabelas 5.11, 5.12 e 5.13, $P^1_{2,5} = ([0.2,0.3],[0.2,0.4]) \leqslant_{\mathbb{L}^*} ([0.2,0.4],[0.2,0.3]) = P^1_{5,2}$, $P^2_{2,5} = ([0.1,0.2],[0.3,0.5]) \leqslant_{\mathbb{L}^*} ([0.3,0.5],[0.1,0.2]) = P^2_{5,2}$ e $P^3_{2,5} = ([0.2,0.4],[0.3,0.5]) \leqslant_{\mathbb{L}^*} ([0.3,0.5],[0.2,0.4]) = P^3_{5,2}$. Portanto, todos os três tomadores de decisão coincidem em que a alternativa x_5 é melhor do que a alternativa x_2 e isto deveria ter sido refletido no ranking final.*

Tabela 5.15: Relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada do especialista d_1.

R^1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.2,0.3],[0.4,0.5])	([0.3,0.4],[0.2,0.4])	([0.0,0.5],[0.3,0.6])
x_2	([0.4,0.5],[0.2,0.3])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.1,0.2],[0.6,0.7])	([0.4,0.4],[0.2,0.2])
x_3	([0.2,0.4],[0.3,0.4])	([0.6,0.7],[0.1,0.2])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.0,0.2],[0.4,0.7])
x_4	([0.3,0.6],[0.0,0.5])	([0.2,0.2],[0.4,0.4])	([0.4,0.7],[0.0,0.2])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])

Tabela 5.16: Relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada do especialista d_2.

R^2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.4,0.5],[0.4,0.5])	([0.1,0.2],[0.7,0.8])	([0.2,0.3],[0.4,0.6])
x_2	([0.4,0.5],[0.4,0.5])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.3,0.3],[0.5,0.6])	([0.2,0.5],[0.3,0.5])
x_3	([0.7,0.8],[0.1,0.2])	([0.5,0.6],[0.3,0.3])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.1,0.1],[0.8,0.9])
x_4	([0.4,0.6],[0.2,0.3])	([0.3,0.5],[0.2,0.5])	([0.8,0.9],[0.1,0.1])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])

5.4.2 Segundo Exemplo Ilustrativo

Baseado no curriculum de 4 candidatos $(x_1,\ldots,x_4)$ que competem por uma vaga no instituto I, a comisão julgadora composta por dois especialistas (d_1 e d_2) com o mesmo peso ($\Lambda = (0.5, 0.5)$), devem decidir qual dos candidatos ficará com a vaga. As Tabelas 5.15 e 5.16 mostram, respectivamente, as relações de preferências $\mathbb{L}^*$-valoradas de d_1 e d_2.

Aplicando o método de Xu em [182], temos que:

1. Cálculo da distância Euclideana d_E entre cada linha da relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada de cada especialista e a solução $\mathbb{L}^*$-valorada ideal $\alpha^* = (\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$ onde $\alpha = ([1,1],[0,0])$.

$$d_E(R_i^k,\alpha^*)=\sqrt{\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\left[(\underline{X_{ij}}-1)^2+(\overline{X_{ij}}-1)^2+\underline{Y_{ij}}^2+\overline{Y_{ij}}^2\right]}$$

   onde R_i^k é o vetor que representa a linha i, com $i = 1,\ldots,4$, de R^k, com $k = 1,2$.

   Os valores que resultam deste cálculo são apresentados na Tabela 5.17.

2. Considerando o vetor de pesos Λ agregamos as distancias $d_E(R_i^1,\alpha^*)$ com $d_E(R_i^2,\alpha^*)$ para cada $i = 1,\ldots,4$ resultando em

Tabela 5.17: Distância Euclideana entre as preferências de cada especialista para cada alternativa e α^*

d	x_1	x_2	x_3	x_4
R^1	1.15	1.1	1.1	0.998
R^2	1.25	1.1	1.1	0.83

Tabela 5.18: Relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada coletiva R^c .

R^c	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.3,0.4],[0.4,0.5])	([0.2,0.3],[0.45,0.6])	([0.1,0.4],[0.35,0.6])
x_2	([0.4,0.5],[0.3,0.4])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.2,0.25],[0.55,0.65])	([0.3,0.45],[0.25,0.35])
x_3	([0.45,0.6],[0.2,0.3])	([0.55,0.65],[0.2,0.25])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.05,0.15],[0.6,0.8])
x_4	([0.35,0.6],[0.1,0.4])	([0.25,0.35],[0.3,0.45])	([0.6,0.8],[0.05,0.15])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])

$d_E(R_1,\alpha^*) = 1.2$, $d_E(R_2,\alpha^*) = 1.1$, $d_E(R_3,\alpha^*) = 1.1$ e $d_E(R_4,\alpha^*) = 0.914$

3. Assim, o ranking final das alternativas baseadas na agregação dessas distâncias é:

$$x_1 \succ x_2 \sim x_3 \succ x_4 \tag{5.7}$$

e portanto o método só consegue determinar que as alternativas x_1 e x_4 são, respectivamente, a melhor e pior. Já as alternativas x_2 e x_3 têm o mesmo ranking de acordo com este método.

Agora aplicando o método proposto, a agregação das duas relações de preferências $\mathbb{L}^*$-valoradas numa relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada coletiva R^c, é apresentada na Tabela 5.18:

Desde relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada coletiva R^c na Tabela 5.18 obtemos o vetor de pontuação final V pelo uso da média aritmética $\widehat{\ddot{wa}}$ entre os $\mathbb{L}^*$-valores de cada linha:

- $V_1 = ([0.275, 0.4], [0.425, 0.55])$;
- $V_2 = ([0.3, 0.4], [0.3\overline{6}, 0.4\overline{6}])$;
- $V_3 = ([0.35, 0.4\overline{6}], [0.\overline{3}, 0.45])$; e
- $V_4 = ([0.425, 0.5625], [0.2375, 0.375])$.

Portanto, considerando as ordens totais admssíveis $\trianglelefteq^*_{\mathbb{L}}$, $\preccurlyeq$, $\preceq$ e $\leqslant^{\star}_{XY}$ obtemos em todas o mesmo ranking das alternativas:

$$x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1 \tag{5.8}$$

Observação 5.4.2 *Observe que o ranking da Equação (5.7) só mostra que x_4 é a pior alternativa e que x_1 é a melhor alternativa. Mas com o método proposto (considerando 4 ordens totais admissíveis diferentes), obtemos exatamente o oposto, ou seja, que x_1 é a pior alternativa e x_4 é a melhor alternativa. Então, qual desses rankings é o mais correto? Se analizarmos as relações de preferência de cada especialista temos que $R^1_{1,4} =$*

Tabela 5.19: Relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada de d_1.

R^1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.0,0.1],[0.4,0.4])	([0.1,0.3],[0.2,0.4])	([0.2,0.2],[0.3,0.4])
x_2	([0.4,0.4],[0.0,0.1])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.2,0.6],[0.3,0.3])	([0.3,0.5],[0.0,0.5])
x_3	([0.2,0.4],[0.1,0.3])	([0.3,0.3],[0.2,0.6])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.1,0.2],[0.3,0.6])
x_4	([0.3,0.4],[0.2,0.2])	([0.0,0.5],[0.3,0.5])	([0.3,0.6],[0.1,0.2])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])

Tabela 5.20: Relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada de d_2.

R^2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.2,0.3],[0.6,0.7])	([0.3,0.5],[0.4,0.5])	([0.4,0.4],[0.5,0.6])
x_2	([0.6,0.7],[0.2,0.3])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.6,0.9],[0.1,0.1])	([0.0,0.2],[0.3,0.8])
x_3	([0.4,0.5],[0.3,0.5])	([0.1,0.1],[0.6,0.9])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.1,0.3],[0.3,0.7])
x_4	([0.5,0.6],[0.4,0.4])	([0.3,0.8],[0.0,0.2])	([0.3,0.7],[0.1,0.3])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])

$([0.0,0.5],[0.3,0.6]) \leqslant_{\mathbb{L}^*} ([0.3,0.6],[0.0,0.5]) = R^1_{4,1}$ *e* $R^2_{1,4} = ([0.2,0.3],[0.4,0.6]) \leqslant_{\mathbb{L}^*} ([0.4,0.6],[0.2,0.3]) = R^2_{4,1}$, *e pelo tanto, na opinião de cada especialista, o candidato* x_4 *é melhor de que o candidato* x_1 *consequentemente o ranking obtido pelo uso do método de Xu não é razoável. Já o ranking obtido com o método proposto, com respeito a estas duas alternativas é correto. Com respeito aos outros dois candidatos o método de Xu não consegue decidir qual deles é melhor. Já com o método proposto se obtém que o candidato* x_3 *é melhor que* x_2 *que também concorda com a opinião particular de ambos especialistas.*

5.4.3 Terceiro Exemplo Ilustrativo

Considere o mesmo problema de tomada de decisão anterior mas com quatro diferentes relações de preferência $\mathbb{L}^*$-valoradas. As Tabelas 5.19 e 5.20 apresentam, respectivamente, as novas relações de preferência $\mathbb{L}^*$-valoradas de d_1 e d_2.

Aplicando o método de Xu em [182], temos que

1. Cálculo da distância Euclideana d_E entre cada linha da relação de preferência de cada especialista e a solução fuzzy ideal $\alpha^* = (\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$ onde $\alpha = ([1,1],[0,0])$. Os valores que resultam deste cálculo são apresentados na Tabela 5.21.

2. Considerando o vetor de pesos Λ agregamos as distâncias $d_E(R^1_i,\alpha^*)$ com $d_E(R^2_i,\alpha^*)$

Tabela 5.21: Distância Euclideana entre as preferências de cada especialista para cada alternativa e α^*

d	x_1	x_2	x_3	x_4
R^1	0.96954	1.235	1.022	1.164
R^2	0.875	1.259	0.869	1.283

Tabela 5.22: Relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada coletiva.

R^c	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.1,0.2],[0.5,0.55])	([0.2,0.4],[0.3,0.45])	([0.3,0.3],[0.4,0.5])
x_2	([0.5,0.55],[0.1,0.2])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.4,0.75],[0.2,0.2])	([0.15,0.35],[0.15,0.65])
x_3	([0.3,0.45],[0.2,0.4])	([0.2,0.2],[0.4,0.75])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])	([0.1,0.25],[0.3,0.65])
x_4	([0.4,0.5],[0.3,0.3])	([0.15,0.65],[0.15,0.35])	([0.3,0.65],[0.1,0.25])	([0.5,0.5],[0.5,0.5])

para cada $i = 1,\ldots,4$ resultando em $d_E(R_1,\alpha^*) = 0.92209$, $d_E(R_2,\alpha^*) = 1.247$, $d_E(R_3,\alpha^*) = 0.946$ e $d_E(R_4,\alpha^*) = 1.223$

3. Assim, o ranking final das alternativas por este método é:

$$x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1 \tag{5.9}$$

Agora, aplicando o método proposto obtemos a relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada coletiva, R^c, descrita na Tabela 5.22.

A partir da relação de preferência $\mathbb{L}^*$-valorada coletiva da Tabela 5.22, computamos a média aritmética $\mathbb{L}^*$-valorada para cada alternativa, ou seja, o vetor de pontuação final V:

- $V_1 = ([0.2,0.3],[0.4,0.5])$;
- $V_2 = ([0.35,0.55],[0.15,0.35])$;
- $V_3 = ([0.2,0.3],[0.3,0.6])$; e
- $V_4 = ([0.28\overline{3},0.6],[0.18\overline{3},0.3])$.

Por tanto, se consideramos as ordens totais admissíveis $\trianglelefteq_{\mathbb{L}}^*$, $\preccurlyeq$ e $\leqslant_{XY}^{\star}$ temos, nos três casos, o seguinte ranking entre as alternativas:

$$x_2 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_3 \tag{5.10}$$

Já se consideramos a ordem total admissível $\preceq$ temos o ranking:

$$x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1 \tag{5.11}$$

Observação 5.4.3 *Logo, há um consenso de que a melhor alternativa é x_2 e que a segunda melhor é x_4, porém há discrepância sobre as duas piores alternativas. No entanto, baseado nas preferências dos especialistas, ou seja as Tabelas 5.19 e 5.20, é possível determinar que* $R^1_{1,3} = ([0.1,0.3],[0.2,0.4]) \leqslant_{\mathbb{L}^*} ([0.2,0.4],[0.1,0.3]) = R^1_{3,1}$

$R^2_{1,3} = ([0.3, 0.5], [0.4, 0.5]) \leqslant_{\mathbb{L}^*} ([0.4, 0.5], [0.3, 0.5]) = R^2_{3,1}$ *o que implica em que ambos especialistas preferem* x_3 *a* x_1. *Consequentemente, para estas relações de preferências* $\mathbb{L}^*$*-valoradas resulta mais razoável o ranking obtido pelo método proposto com a ordem* $\preceq$ *que o obtido pelo método de Xu ou pelo método proposto com as outras ordens consideradas.*

Capítulo 6

Fusão de Rankings

Na maioria das atividades dos seres humanos, há necessidade de se tomar decisões que envolvem a escolha de uma alternativa entre várias disponíveis. Algumas dessas decisões são rotineiras e podem ser feitas sem a necessidade de se pensar muito. Porém, problemas de tomada de decisão difíceis e/ou complexos exigem soluções complexas que podem necessitar a avaliação de um ou mais especialistas, por exemplo, a aquisição de um equipamento complexo e caro, ou o investimento no mercado de ações. Em geral, estes tipos de decisões envolvem: incerteza, complexidade, consequências de alto risco, várias alternativas, etc. Nestas circunstâncias, a utilização de um processo eficaz e robusto, aumentaria a qualidade das decisões e ajudaria a alcançar consistentemente bons resultados. A TD pode ser visto como o processo de escolher a alternativa mais adequada entre um conjunto de alternativas considerando alguns critérios, objetivos, ou preferências. Em geral, métodos de tomada de decisão fornecem como resultado um ranking das alternativas. Os métodos de tomada de decisões podem ser classificados de várias maneiras: por exemplo, se considera um grupo de especialistas ou apenas um, se considera vários atributos/critérios ou não, se leva em consideração o peso para os atributos ou especialistas, se utiliza relações de preferências ou matrizes de decisão, se os especialistas avaliam usando valores booleanos, fuzzy ou de algum tipo de extensão de valores fuzzy (por exemplo, valores hesitantes, intervalo, intuicionistas, etc.)[1], etc.

O grande problema com os métodos ou processos de TD é que quando aplicados em problemas reais, em geral, não é possível determinar a qualidade da solução (ordenação das alternativas) obtida pelo método. Por exemplo, o ranking de pós-graduação candidatos matriculados em algumas universidades não dá garantias de que o primeiro classificado tenha melhor desempenho durante o curso que um pior classificado. Além disso, considere o exemplo ilustrativo em [52, 53, 108], o qual é descrito na seção 6.4.1. Conforme

[1] Uma análise histórica e hierárquica dos diferentes tipos de extensões para conjuntos fuzzy pode ser encontrado em [33].

mostrado na Tabela 6.6, os rankings obtidos pelos diferentes métodos para as seis alternativas são todos diferentes. Assim, é razoável perguntar: *Qual destas classificações é a melhor*? existe um ranking ideal para este problema de tomada de decisão? Não há uma resposta positiva para a primeira pergunta e a segunda tem uma resposta negativa. Em seguida, os métodos são inúteis? Não, o método quando é razoável fornece evidências importantes e em alguns casos uma boa classificação que pode ajudar o decisor em sua tarefa de selecionar boas alternativas. Assim, quando aplicados vários métodos para um problema de TD, mais informações terá o decisor para determinar (aplicando uma espécie de metamétodo) o seu ranking das alternativas. Neste capítulo, forneceremos algumas condições e critérios para estes "metamétodos" determinar um ranking final baseado nos ranking obtidos pelos diferentes métodos aplicados ao mesmo problema de tomada de decisão. Estes "metamétodos", de um ponto de vista matemático, serão denominados de *funções de fusão de rankings*.

6.1 Funções de Fusão de Rankings

Dado um conjunto finito e não vazio de alternativas $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, definimos $\wp_A = \{(A_1, \ldots, A_k) : \{A_1, \ldots, A_k\}$ é uma partição[2] de $A\}$. Cada $\vec{A} = (A_1, \ldots, A_k) \in \wp_A$, com $A_i = \{a_{i1}, \ldots, a_{ip_i}\}$ denota o ranking: $a_{11} \sim \ldots \sim a_{1p_1} > a_{21} \sim \ldots \sim a_{2p_2} > \ldots > a_{k1} \sim \ldots \sim a_{kp_k}$, significado que as alternativas a_{ij} e $a_{i(j+1)}$ são equivalentes, ou seja, não é possível discernir entre as duas alternativas, e a_{ij} é melhor do que a alternativa $a_{(i+1)l}$ para cada $i \in \mathbb{N}_k$, $j \in \mathbb{N}_{p_i}$ e $l \in \mathbb{N}_{p_{i+1}}$. Por exemplo, $(\{a_1, a_2\}, \{a_3\}, \{a_4, a_5, a_6\})$ denota o ranking $a_1 \sim a_2 > a_3 > a_4 \sim a_5 \sim a_6$.

Definição 6.1.1 *Seja A um conjunto finito de alternativas. Uma* ***função de fusão de rankings*** *para A é qualquer função comutativa e idempotente* $RF : \bigcup_{m=1}^{\infty} \wp_A^m \to \wp_A$ *satisfazendo a propriedade:*

$$RF(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_m) = RF(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_m, RF(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_m)) \tag{6.1}$$

para cada $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_m \in \wp_A$.

Observação 6.1.2 *A Equação (6.1) está intimamente relacionada com a noção de auto-identidade para a família de funções de agregações dado em [196] a qual é a base para a*

[2] Uma partição de um conjunto A, é um conjunto não-vazio de conjuntos disjuntos dois a dois cuja união é o próprio conjunto A [149].

Tabela 6.1: Exemplo de sete rankings para seis alternativas.

	Rankings
$\vec{A}_1$	$a_2 > a_4 \sim a_5 > a_1 > a_3 > a_6$
$\vec{A}_2$	$a_3 \sim a_5 > a_1 > a_4 > a_2 \sim a_6$
$\vec{A}_3$	$a_5 > a_2 > a_3 > a_4 > a_1 > a_6$
$\vec{A}_4$	$a_5 > a_3 \sim a_2 > a_4 > a_6 > a_1$
$\vec{A}_5$	$a_5 \sim a_2 > a_1 > a_4 > a_3 > a_6$
$\vec{A}_6$	$a_3 > a_2 > a_1 > a_4 \sim a_6 > a_5$
$\vec{A}_7$	$a_5 > a_3 > a_2 \sim a_4 > a_1 > a_6$

noção de estabilidade das famílias de operadores de agregação como discutido por Rojas et al. [132].

Exemplo 6.1.3 *Seja $\vec{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik_i}) \in \wp_A$ para $i = 1, \ldots, m$ e $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Defina*

- $A'_1 = \bigcup_{i=1}^{m} A_{i1}$ *e*
- $A'_j = \bigcup_{i=1}^{m} A_{ij} - \bigcup_{l=1}^{j-1} A'_l$ *para cada* $j = 2, \ldots, n$

com $A_{ij} = \emptyset$ quando $j > k_i$.

Seja $RF_0 : \bigcup_{m=1}^{\infty} \wp_A^m \to \wp_A$ a função definida como $RF_0(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_m) = (A_1, \ldots, A_k)$, onde $(A_1, \ldots, A_k)$ resulta de $(A'_1, \ldots, A'_m)$ removendo os A'_j que são vazios. Note que $A'_1 \neq \emptyset$. Formalmente, para todo $j \in \mathbb{N}_k$, temos que $A_j = A'_i$ onde $i = \min\{l : A'_l \neq \emptyset$ e $A'_l \neq A_h$ para cada $h < j\}$. Como, $(A_1, \ldots, A_k) \in \wp_A$ então, RF_0 é uma função de fusão de rankings.

Agora, aplicamos esta função de fusão de rankings para os rankings das alternativas $A = \{a_1, \ldots, a_6\}$ mostrados na Tabela 6.1. A Tabela 6.2 mostra os conjuntos A'_j com $j = 1, \ldots, 6$ e A_j com $j = 1, \ldots, k = 3$. Por exemplo, A'_3 e A'_4 são calculados da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
A'_3 &= \bigcup_{i=1}^{7} A_{i3} - \bigcup_{l=1}^{2} A'_l \\
&= (\{a_1\} \cup \{a_4\} \cup \{a_3\} \cup \{a_4\} \cup \{a_4\} \cup \{a_1\} \cup \{a_2, a_4\}) - (A'_1 \cup A'_2) \\
&= \{a_1, a_2, a_3, a_4\} - (\{a_2, a_3, a_5\} \cup \{a_1, a_4\}) \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

Tabela 6.2: Fusão dos sete rankings da Tabela 6.1.

j	1	2	3	4	5	6
A'_j	$\{a_2,a_3,a_5\}$	$\{a_1,a_4\}$	$\varnothing$	$\{a_6\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
A_j	$\{a_2,a_3,a_5\}$	$\{a_1,a_4\}$	$\{a_6\}$			

$$\begin{aligned} A'_4 &= \bigcup_{i=1}^{7} A_{i4} - \bigcup_{l=1}^{3} A'_l \\ &= (\{a_3\}\cup\{a_2,a_6\}\cup\{a_4\}\cup\{a_6\}\cup\{a_3\}\cup\{a_4,a_6\}\cup\{a_1\}) - (A'_1\cup A'_2\cup A'_3) \\ &= \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_6\} - (\{a_2,a_3,a_5\}\cup\{a_1,a_4\}\cup\varnothing) \\ &= \{a_6\} \end{aligned}$$

Portanto, $RF_0(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_7) = (\{a_2,a_3,a_5\},\{a_1,a_4\},\{a_6\})$, ou seja, a fusão desses sete rankings resulta no ranking: $a_2 \sim a_3 \sim a_5 > a_1 \sim a_4 > a_6$.

Proposição 6.1.4 *Seja $RF : \bigcup_{j=1}^{\infty} \wp_A^j \to \wp_A$ uma função de fusão de rankings e $\gamma : \wp_A \to \wp_A$ uma bijeção. Então a função $RF_\gamma : \bigcup_{j=1}^{\infty} \wp_A^j \to \wp_A$ definida por*

$$RF_\gamma(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_m) = \gamma^{-1}(RF(\gamma(\vec{A}_1),\ldots,\gamma(\vec{A}_m)))$$

também é uma função de fusão de rankings, chamada da γ-conjugada de RF.

Demonstração: Trivialmente, a comutatividade e idempotência de RF implica na comutatividade e idempotência de RF_γ. Por outro lado,

$$\begin{aligned} RF_\gamma(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_m,RF_\gamma(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_m)) &= RF_\gamma(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_m,\gamma^{-1}(RF(\gamma(\vec{A}_1),\ldots,\gamma(\vec{A}_m)))) \\ &= \gamma^{-1}(RF(\gamma(\vec{A}_1),\ldots,\gamma(\vec{A}_m),RF(\gamma(\vec{A}_1),\ldots,\gamma(\vec{A}_m)))) \\ &= \gamma^{-1}(RF(\gamma(\vec{A}_1),\ldots,\gamma(\vec{A}_m))) \\ &= RF_\gamma(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_m). \end{aligned}$$

Portanto, RF_γ satisfaz a Equação (6.1) e consequentemente é uma função de fusão de rankings. □

Proposição 6.1.5 *Seja $RF : \bigcup_{j=1}^{\infty} \wp_A^j \to \wp_A$ uma função de fusão de rankings. Então a função $RF' : \bigcup_{j=1}^{\infty} \wp_A^j \to \wp_A$ definida por*

$$RF'(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_m) = RF(\vec{A}'_1,\ldots,\vec{A}'_k)$$

onde $\{\vec{A'_1},\ldots,\vec{A'_k}\} = \{\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}\}$ *e* $\vec{A'_i} = \vec{A'_j}$ *sss* $i = j$*, também é uma função de fusão de rankings.*

Demonstração: Claramente, pela comutatividade de RF e pelo fato de que a remoção de copias dos rankings não afeta a comutatividade, RF' também é comutativa.

Seja $\vec{A} \in \wp_A$. Então $RF'(\vec{A},\ldots,\vec{A}) = RF(\vec{A}) = \vec{A}$ e portanto RF' é idempotente.

Seja $\{\vec{A'_1},\ldots,\vec{A'_k}\} = \{\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}\}$ tal que $\vec{A'_i} = \vec{A'_j}$ sss $i = j$.

Caso $RF'(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}) \in \{\vec{A'_1},\ldots,\vec{A'_k}\}$ então

$$\begin{aligned} RF'(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m},RF'(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m})) &= RF(\vec{A'_1},\ldots,\vec{A'_k}) \\ &= RF'(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}). \end{aligned}$$

Caso $RF'(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}) \notin \{\vec{A'_1},\ldots,\vec{A'_k}\}$ então

$$\begin{aligned} RF'(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m},RF'(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m})) &= RF(\vec{A'_1},\ldots,\vec{A'_k},RF'(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m})) \\ &= RF(\vec{A'_1},\ldots,\vec{A'_k},RF(\vec{A'_1},\ldots,\vec{A'_k})) \\ &= RF(\vec{A'_1},\ldots,\vec{A'_k}) \\ &= RF'(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}). \end{aligned}$$

Logo, RF satisfaz a Equação (6.1) e portanto é uma função de fusão de rankings. □

Observe que é possivel definir funções de fusão de rakings que não são razoáveis. Por exemplo, dado um conjunto de alternativas A e um ranking $\vec{A_0} \in \wp_A$, a função $RF : \bigcup_{j=1}^{\infty} \wp_A^j \to \wp_A$ definida por

$$RF(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}) = \begin{cases} \vec{A_1} & \text{se } \vec{A_1} = \ldots = \vec{A_m} \\ \vec{A_0} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é uma função de fusão de rakings que desconsidera os rankings obtidos pelos métodos para sempre dar um ranking constante a menos do caso em que todos os rankings sejam iguais. Para evitar estes casos na seguinte seção introduziremos uma maneira de gerar funções de fusão de rankings sem este comportamento.

6.2 Geração de Funções de Fusão de Rankings via Funções de Pontuação

A função $\theta : A \times \wp_A \to \mathbb{N}_n$ definida, para cada $\vec{A_i} = (A_{i1},\ldots,A_{ik_i}) \in \wp_A$ e $a \in A$, por

$$\theta(a,\vec{A_i}) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in A_{i1} \\ 1 + Card(\bigcup_{p=1}^{l-1} A_{ip}) & \text{se } a \in A_{il} \text{ para } l \geqslant 2, \end{cases}$$

é denominada de **Função de posição**.

Por exemplo, $\theta(a_2,(\{a_1\},\{a_3,a_4\},\{a_2,a_5\},\{a_6\})) = 1 + Card(\{a_1,a_3,a_4\}) = 4$.

Seja A um conjunto finito e não vazio de alternativas, $n = Card(A)$ e $\rho_A : \mathbb{N}_n \to A$ uma bijeção. A função $\vartheta_A : \mathbb{N}^n \to \wp_A$ definida por

$$\vartheta_A(k_1,\ldots,k_n) = \begin{cases} (A_1) & \text{se } k_i = k_j \text{ para cada } i,j \in \mathbb{N}_n \\ (A_1, \vartheta_{A'}(k'_1,\ldots,k'_p)) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $A_1 = \{\rho_A(i) : k_i = \max(k_1,\ldots,k_n)\}$, $A' = A - A_1$, $p = n - Card(A_1)$ e $(k'_1,\ldots,k'_p)$ é $(k_1,\ldots,k_n)$ removendo os k_i's tais que $\rho_A(i) \in A_1$. Por exemplo, $\vartheta(2,5,2,4,1,5) = (\{a_2,a_6\},\{a_4\},\{a_1,a_3\},\{a_5\})$.

Na seguinte definição π_i denota i-esima função de projeção sobre $\mathbb{N}^n$.

Definição 6.2.1 *Seja A um conjunto de n alternativas. A função $M : \bigcup_{m=1}^{\infty} \wp_A^m \to \mathbb{N}^n$ é chamada de função de A-**pontuação** se*

(M1) *M é comutativa.*

(M2) *Seja $j,l \in \mathbb{N}_n$. Se $\theta(a_j,\vec{A_i}) \leqslant \theta(a_l,\vec{A_i})$ para cada $i \in \mathbb{N}_m$ então $\pi_j(M(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m})) \geqslant \pi_l(M(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}))$.*

(M3) $\vartheta_n(M(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m},\vartheta_n(M(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m})))) = \vartheta_n(M(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}))$.

(M4) $\pi_i(M(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m})) \leqslant \pi_i(M(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{m+1}}))$ *para cada $i \in \mathbb{N}_n$.*

A justificativa de cada uma destas propriedades para função de A-pontuação é a seguinte:

(M1) A comutatividade é necessária porque a ordem dos rankings não deve ser relevante. Assim, quando M métodos são aplicados a um mesmo problema de decisão, a ordem de aplicação deles não deve influenciar na pontuação de cada alternativa.

(M2) Se todos os métodos concordam em que a alternativa a é melhor do que a alternativa b, ou seja, a posição de a é menor que a do b, então, a pontuação de a deve ser maior que a pontuação de b.

(M3) Se incluírmos também o ranking naturalmente determinado a pela função ϑ, a nova pontuação não deve modificar o ranking.

(M4) Se adicionarmos um novo ranking a pontuação de todas as alternativas ou as mesmas se mantém ou aumentam.

Observação 6.2.2 *Seja A um conjunto de n alternativas e M uma função de A-pontuação. Então temos o seguinte resultado imediato:*

1. *Se* $\theta(a,\vec{A_i}) = 1$ *para cada* $i \in \mathbb{N}_m$ *então* $\theta(a,\vartheta(M(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}))) = 1$.

2. *Se* $\theta(a,\vec{A_i}) = n$ *para cada* $i \in \mathbb{N}_m$ *então* $\theta(a,\vartheta(M(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}))) = n$.

3. *Se* $\vec{A_i} = \vec{A_j}$ *para cada* $i, j \in \mathbb{N}_m$ *então* $\theta(a,\vartheta(M(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}))) = \theta(a,\vec{A_1})$ *para qualquer* $a \in A$.

Exemplo 6.2.3 *Seja* $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$. *A seguir fornecemos duas funções de fusão de rankings para A baseado em funções de A-pontuação:*

1. *Seja* $M_1 : \bigcup_{m=1}^{\infty} \wp_A^m \to \mathbb{N}^n$ *definido por* $M_1(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}) = (b_1,\ldots,b_n)$ *com*

$$b_j = m \cdot n - \sum_{i=1}^{m} \theta(a_j,\vec{A_i}) \text{ para todo } j \in \mathbb{N}_n.$$

   Definir $RF_1 : \bigcup_{m=1}^{\infty} \wp_A^m \to \wp_A$ *por* $RF_1(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}) = (A_1,\ldots,A_k)$ *tal que*

   (a) $A_1 = \{a_j \in A : b_j = \max(b_1,\ldots,b_n)\}$,

   (b) *para todo* $i = 2,\ldots,k$, $A_i = \{a_j \in A : a_j \notin \bigcup_{h<i} A_h$ *e* $b_j \geqslant b_l$ *para cada l tal que* $a_l \notin \bigcup_{h<i} A_h\}$.

   (c) $(A_1,\ldots,A_k) \in \wp_A$.

   Então RF_1 *é uma função de fusão de rankings.*

2. *Seja* $M_2 : \bigcup_{m=1}^{\infty} \wp_A^m \to \mathbb{N}^n$ *definida por* $M_2(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}) = (b_1,\ldots,b_n)$ *com*

$$b_j = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p(\theta(a_j,\vec{A_i}),\theta(a_l,\vec{A_i})) \text{ para todo } j \in \mathbb{N}_n$$

   onde $p : \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n \to \{0,1\}$ *é definido por*

$$p(j,l) = \begin{cases} 1 & \text{se } j < l \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

   Definir $RF_2 : \bigcup_{m=1}^{\infty} \wp_A^m \to \wp_A$ *por* $RF_2(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}) = (A_1,\ldots,A_k)$ *tal que* *(a)* $A_1 = \{a_j \in A : b_j = \max(b_1, \ldots, b_n)\}$,

(b) *para cada* $i = 2, \ldots, k$, $A_i = \{a_j \in A : b_j \notin \bigcup_{h<i} A_h$ *e* $b_j \geqslant b_l$ *para cada* l *tal que* $a_l \notin \bigcup_{h<i} A_h\}$.

(c) $(A_1, \ldots, A_k) \in \wp_A$.

Então RF_2 *é uma função de fusão de rankings.*

Assim, dado os seguintes rankings:

- $\vec{A_1} = (\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\})$, *isto é* $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$
- $\vec{A_2} = (\{a_2\}, \{a_1\}, \{a_3, a_4\})$, *isto é* $a_2 > a_1 > a_3 \sim a_4$
- $\vec{A_3} = (\{a_1\}, \{a_2, a_3\}, \{a_4\})$, *isto é* $a_1 > a_2 \sim a_3 > a_4$

temos que $M_1(\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}) = (12-(1+2+1), 12-(2+1+2), 12-(3+3+2), 12-(4+3+4)) = (8,7,4,1)$, *e consequentemente* $RF_1(\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}) = (\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\})$, *ou seja* $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$. *Analogamente,* $M_2(\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}) = (0+2+3+3, 1+0+2+3, 0+0+0+2, 0+0+0+0) = (8,6,2,0)$, *e portanto* $RF_2(\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}) = (\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\})$, *ou seja* $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$.

Poe outro lado, dado os seguintes rankings:

- $\vec{A_1} = (\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\})$, *isto é* $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$
- $\vec{A_2} = (\{a_4\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\})$, *isto é* $a_4 > a_1 > a_2 > a_3$
- $\vec{A_3} = (\{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1\}, \{a_4\})$, *isto é* $a_2 > a_3 > a_1 > a_4$

temos que $M_1(\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}) = (12-(1+2+3), 12-(2+3+1), 12-(3+4+2), 12-(4+1+4)) = (6,6,3,3)$, *e portanto novamente* $RF_1(\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}) = (\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\})$, *ou seja,* $a_1 \sim a_2 > a_3 \sim a_4$. *Analogamente,* $M_2(\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}) = (0+2+2+2, 1+0+3+2, 1+0+0+2, 1+1+1+0) = (6,6,3,3)$, *e portanto* $RF_2(\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}) = (\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3, a_4\})$, *isto é,* $a_1 > a_2 > a_3 \sim a_4$.

Em ambos os exemplos, a função M_i (para $i \in \{1,2\}$) tem um papel fundamental na obtenção da função de fusão de rankings RF_i. O seguinte teorema generaliza este procedimento.

Teorema 6.2.4 *Seja $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Para cada função de A-pontuação $M : \bigcup_{m=1}^{\infty} \wp_A^m \to \mathbb{N}^n$ a função $RF_M : \bigcup_{m=1}^{\infty} \wp_A^m \to \wp_A$, definida por*

$$RF_M(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_m) = \vartheta(M(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_m)) \tag{6.2}$$

é uma função de fusão de rankings.

Demonstração: A comutatividade de RF_M segue da comutatividade de M. Provaremos por indução em m a idempotência de RF_M. Para $m = 1$, primeiro note que por (M2) e definição de ϑ temos que $\vartheta(M(\vec{A})) = \vec{A}$ e portanto $RF_M(\vec{A}) = \vartheta(M(\vec{A})) = \vec{A}$. Agora suponhamos que $RF_M(\underbrace{\vec{A}, \ldots, \vec{A}}_{m-vezes}) = \vec{A}$ (hipotése indutiva – HI), então

$$\begin{aligned}
RF_M(\underbrace{\vec{A}, \ldots, \vec{A}}_{(m+1)-vezes}) &= \vartheta(M(\underbrace{\vec{A}, \ldots, \vec{A}}_{(m+1)-vezes})) && \text{por Eq. (6.2)} \\
&= \vartheta(M(\underbrace{\vec{A}, \ldots, \vec{A}}_{m-vezes}, \vartheta(M(\underbrace{\vec{A}, \ldots, \vec{A}}_{m-vezes})))) && \text{por (HI)} \\
&= \vartheta(M(\underbrace{\vec{A}, \ldots, \vec{A}}_{m-vezes})) && \text{por (M3)} \\
&= \vec{A} && \text{por (HI)}
\end{aligned}$$

Finalmente, a Equação (6.1) saí direto da Equação (6.2) e de (M3). □

6.3 Fusão de Ranking e Ordens Parciais sobre Rankings

Observe que é possível definir uma ordem (parcial) entre os possíveis rankings de um conjunto finito e não vazio de alternativas A. $\vec{A} \leq \vec{B}$ sss $\vec{A} = \vec{B}$ ou para todo $a, b \in A$ tal que $a < b \in \vec{A}$ tem-se que $a < b \in \vec{B}$. Os rankings $\vec{A} = (\{p(1)\}, \ldots, \{p(n)\})$, onde n é a cardinalidade de A e $p : \mathbb{N}_n \to A$ é uma bijeção, são os elementos maximais desta ordem parcial, enquanto $\vec{A} = (A)$ é o menor elemento. De fato, este conjunto parcialmente ordenado é um inf-semi-reticulado no sentido de [70, Def. O-1.8][3]. Claramente, se $(\wp_A, \leq)$ é um inf(sup)-semi-reticulado então a função $RF : \bigcup_{m=1}^{\infty} \wp_A^m \to \wp_A$ definida como

$$RF(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_m) = \inf(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_m) \tag{6.3}$$

[3]Desde um ponto de vista algébrico, inf(sup)-semi-reticulado corresponde a um $\wedge(\vee)$-semi-reticulado como em [78].

é uma função de fusão de rankings[4]. No entanto, esta função de fusão de rankings não é muito útil para alguns inf(sup)-semi-reticulados, pois em diversos casos (como com a ordem acima) o $RF(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m})$ será o menor elemento de $(\wp_A,\preceq)$, ou seja, $\vec{A}=(A)$, que diz que todas as alternativas são equivalentes. De fato o ideal seria termos uma ordem total sobre $\wp_A$, pois com isso minimizariamos as incidências de ranking contendo alternativas empatadas, ou seja, pares de alternativas que um determinado método de tomada de decisão não consegue discriminar qual delas é melhor que a outra. No entanto, nem toda ordem total sobre $\wp_A$ é boa para tomada de decisão. Por exemplo, considere a seguinte ordem total

$$\vec{A} \leqslant_p \vec{B} \text{ sss } \vec{A}=\vec{B} \text{ ou } \theta(p(i_0),\vec{A}) < \theta(p(i_0),\vec{B})$$

onde $p:\mathbb{N}_n \to A$ é uma bijeção e i_0 é o menor índice tal que $\theta(p(i_0),\vec{A}) \neq \theta(p(i_0),\vec{B})$. O problema aqui radica em que a função de fusão de rankings obtida como na Equação (6.3), com respeito à ordem $\leqslant_p$, escolhe um dos rankings baseado na bijeção p, o que resulta algo arbitrário. De fato, se um dos ranking for $\vec{A}_p=(p(1),\ldots,p(n))$ então RF retornará necessariamente $\vec{A}_p$, mesmo que todos os outros rankings sejam um outro ranking, digamos $\vec{A}$. Em outras palavras, $\vec{A}_p$ seria considerado o ranking ideal o qual não tem sentido, pois se conhecermos a priori o ranking ideal qual seria o objetivo de se aplicar métodos complexos de tomada de decisão para se obter rankings não ideais?

Por outro lado, a seguir veremos que algumas funções de fusão de rankings podem determinar ordens parciais em $\wp_A$.

Proposição 6.3.1 *Seja A um conjunto finito e não vazio de alternativas e $RF:\bigcup_{m=1}^{\infty}\wp_A^m \to \wp_A$ uma função de fusão de rankings tal que a lei auto-distributiva vale:*

$$RF(\vec{A},RF(\vec{B},\vec{C})) = RF(RF(\vec{A},\vec{B}),RF(\vec{A},\vec{C})). \qquad (AD)$$

Então $(\wp(A),\leqslant_{RF})$ onde

$$\vec{A} \leqslant_{RF} \vec{B} \text{ sss } RF(\vec{A},\vec{B}) = \vec{A} \qquad (6.4)$$

é uma ordem parcial. Se $RF/\wp_A^2$ também for associativa, isto é $RF(\vec{A},RF(\vec{B},\vec{C})) = RF(RF(\vec{A},\vec{B}),\vec{C})$, então $(\wp(A),\leqslant_{RF})$ é um inf-semi-reticulado limitado.

Demonstração: Primeiro provaremos que $\leqslant_{RF}$ é uma ordem parcial.

[4] Um outra forma de se obter uma função de fusão de rankings a partir de uma ordem parcial seria considerar o supremo em vez do ínfimo, isto é, $RF(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m}) = \sup(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_m})$.

- Reflexividade: Como, RF é idempotente, então para cada ranking $\vec{A}$ temos que $RF(\vec{A},\vec{A}) = \vec{A}$ e portanto $\vec{A} \leqslant_{RF} \vec{A}$.

- Antisimetria: Se $\vec{A} \leqslant_{RF} \vec{B}$ e $\vec{B} \leqslant_{RF} \vec{A}$ então pela comutatividade de RF, temos que $\vec{A} = RF(\vec{A},\vec{B}) = RF(\vec{B},\vec{A}) = \vec{B}$.

- Associatividade: Se $\vec{A} \leqslant_{RF} \vec{B}$ e $\vec{B} \leqslant_{RF} \vec{C}$ então (*) $RF(\vec{A},\vec{B}) = \vec{A}$ e (**) $RF(\vec{B},\vec{C}) = \vec{B}$. Logo, pela comutatividade temos que $RF(\vec{B},\vec{A}) = \vec{A}$ e $RF(\vec{C},\vec{B}) = \vec{B}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
RF(\vec{A},\vec{C}) &= RF(\vec{C},RF(\vec{A},\vec{B})) && \text{pela comutatividade e (*)}\\
&= RF(RF(\vec{C},\vec{A}),RF(\vec{C},\vec{B})) && \text{por (AD)}\\
&= RF(\vec{B},RF(\vec{A},\vec{C})) && \text{pela comutatividade e (**)}\\
&= RF(RF(\vec{B},\vec{A}),RF(\vec{B},\vec{C})) && \text{por (AD)}\\
&= RF(\vec{A},\vec{B}) && \text{pela comutatividade, (*) e (**)}\\
&= \vec{A} && \text{por (*)}
\end{aligned}$$

Consequentemente, pela Eq. (6.4), $\vec{A} \leqslant_{RF} \vec{B}$.

Finalmente provaremos que, para cada ranking $\vec{A}$ e $\vec{B}$, seu ínfimo é $RF(\vec{A},\vec{B})$. Como, pela lei (AD) e pela idempotência, $RF(\vec{A},\vec{B}) = RF(RF(\vec{A},\vec{A}),\vec{B})) = RF(\vec{A},RF(\vec{A},\vec{B}))$ e portanto, pela Eq. (6.4), $RF(\vec{A},\vec{B}) \leqslant_{RF} \vec{A}$. Analogamente, é provado que $RF(\vec{A},\vec{B}) \leqslant_{RF} \vec{B}$. Portanto, $RF(\vec{A},\vec{B})$ é um limite inferior de $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Agora suponha que $\vec{C}$ é um outro limite inferior. Então pela Eq. (6.4), $\vec{C} = RF(\vec{C},\vec{A})$ e $\vec{C} = RF(\vec{C},\vec{B})$. Logo, por idempotência e lei (AD), temos que $\vec{C} = RF(\vec{C},\vec{C}) = RF(RF(\vec{C},\vec{A}),RF(\vec{C},\vec{B})) = RF(\vec{C},RF(\vec{A},\vec{B}))$. Consequentemente, pela Eq. (6.4), $\vec{C} \leqslant_{RF} RF(\vec{A},\vec{B})$. Portanto, $RF(\vec{A},\vec{B})$ é o ínfimo de $\vec{A}$ e $\vec{B}$.
$\square$

Claramente, a inversa desta ordem é a ordem $\vec{A} \leqslant^{RF} \vec{B}$ sss $RF(\vec{A},\vec{B}) = \vec{B}$. Ou seja, de forma análoga poderíamos provar que $(\wp(A), \leqslant^{RF})$ é um ordem parcial que sob condições duais a (AD) determinaria um sup-semi-reticulado limitado.

Observação 6.3.2 *Se para cada* $\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_m \in \wp_A$ *temos que* $RF(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_m) \in \{\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_m\}$ *então* $\leqslant_{RF}$ *é uma ordem total.*

6.4 Exemplos Ilustrativos

6.4.1 Primeiro Exemplo Ilustrativo

Consideraremos o exemplo ilustrativo usado em [108] e [53] para mostrar o uso das funções de fusão de rankings apresentadas aqui.

Vamos supor que um investidor deseja investir parte de seu capital em uma empresa. Após uma análises de mercado o investidor reduz o leque de seus possíveis empreendimentos a seis:

1. Um industria química, denotada por x_1.
2. Uma cadeia de restaurantes, denotada por x_2.
3. Uma empresa de tecnologia da informação, denotada por x_3.
4. Uma montadora de carros, denotada por x_4.
5. Uma empresa de móveis, denotado por x_5.
6. Uma cadeia de farmácias, denotada por x_6.

O investidor é assessorado por um grupo de três especialistas (e_1, e_2 e e_3) com os seguintes pesos $\omega = (0.3, 0.3, 0.4)$. O grupo de especialistas estabelece que seis atributos serão tomados em consideração para avaliar cada um dos potenciais investimentos.

Os atributos benéficos são:

a_1) Benefícios a curto prazo.

a_2) Benefícios a médio prazo.

a_3) Benefícios a longo prazo.

Os atributos não-benéficos são:

a_4) Risco do investimento.

a_5) Dificuldade do investimento.

a_6) Outros fatores desfavoráveis do investimento.

Tabela 6.3: Avaliação do especialista e_1.

e_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1	0.7	0.8	0.6	0.7	0.5	0.9
x_2	0.8	0.6	0.9	0.7	0.6	0.7
x_3	0.5	0.4	0.8	0.3	0.8	0.8
x_4	0.6	0.7	0.6	0.7	0.8	0.6
x_5	0.9	0.8	0.4	0.7	0.7	0.8
x_6	0.8	0.3	0.7	0.7	0.6	0.7

Tabela 6.4: Avaliação do especialista e_2.

e_2	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1	0.6	0.8	0.5	0.6	0.4	0.8
x_2	0.7	0.6	0.8	0.6	0.7	0.7
x_3	0.7	0.6	0.8	0.7	0.8	0.8
x_4	0.6	0.7	0.5	0.6	0.8	0.7
x_5	0.7	0.8	0.7	0.7	0.6	0.8
x_6	0.6	0.4	0.8	0.7	0.6	0.7

Tabela 6.5: Avaliação do especialista e_3.

e_3	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1	0.7	0.6	0.6	0.6	0.4	0.7
x_2	0.7	0.6	0.7	0.6	0.6	0.7
x_3	0.6	0.5	0.8	0.5	0.8	0.8
x_4	0.6	0.7	0.7	0.5	0.8	0.6
x_5	0.7	0.8	0.6	0.7	0.6	0.8
x_6	0.4	0.5	0.9	0.7	0.6	0.6

Tabela 6.6: Resumo dos rankings obtidos em [52, 53, 108].

	Métodos	Fonte	Ranking
$\vec{A}_1$	Maximum	[108]	$x_2 > x_4 > x_5 > x_1 > x_3 > x_6$
$\vec{A}_2$	Minimum	[108]	$x_3 \sim x_5 > x_1 > x_4 > x_2 > x_6$
$\vec{A}_3$	NHD	[108]	$x_5 > x_2 > x_3 > x_4 > x_1 > x_6$
$\vec{A}_4$	WHD	[108]	$x_5 > x_3 > x_2 > x_4 > x_6 > x_1$
$\vec{A}_5$	Step-IOWAD	[108]	$x_5 > x_4 > x_6 > x_2 > x_3 > x_1$
$\vec{A}_6$	Hurwicz	[108]	$x_3 > x_2 > x_6 > x_4 > x_1 > x_5$
$\vec{A}_7$	OWAD	[108]	$x_5 > x_3 > x_2 > x_4 > x_1 > x_6$
$\vec{A}_8$	AOWAD	[108]	$x_5 > x_2 > x_4 > x_3 > x_6 > x_1$
$\vec{A}_9$	IOWAD	[108]	$x_5 > x_3 > x_2 > x_1 > x_4 > x_6$
$\vec{A}_{10}$	AIOWAD	[108]	$x_5 > x_2 > x_6 > x_4 > x_3 > x_1$
$\vec{A}_{11}$	Median-IOWAD	[108]	$x_5 > x_1 > x_6 > x_2 > x_4 > x_3$
$\vec{A}_{12}$	Olympic-IOWAD	[108]	$x_5 > x_4 > x_1 > x_2 > x_3 > x_6$
$\vec{A}_{13}$	$WA_{\omega}^{O^3_{0.5M}}$	[52]	$x_5 > x_2 > x_1 > x_4 > x_3 > x_6$
$\vec{A}_{14}$	$WA_{\omega}^{O^3_{2M}}$	[52]	$x_2 > x_1 > x_5 > x_4 > x_3 > x_6$
$\vec{A}_{15}$	WA_{w}^{P}	[53]	$x_2 \sim x_3 > x_6 > x_4 > x_1 > x_5$

Tabelas 6.3, 6.4 e 6.5 descrevem as avaliações dos peritos de quanto o investimento satisfaz cada atributo, isto é, as matrizes de decisão de cada especialista.

A Tabela 6.6, apresenta o ranking obtido por cada método para este exemplo de problema de tomada de decisão. Observe, que todos os rankings são diferentes.

Aplicando a função de A-pontuação M_1 do Exemplo 6.2.3 a estes rankings, nos obtemos

1. $\pi_1(M_1(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}})) = 90-(4+3+5+6+6+5+5+6+4+6+2+3+3+2+5) = 25$
2. $\pi_2(M_1(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}})) = 90-(1+5+2+3+4+2+3+2+3+2+4+4+2+1+1) = 56$
3. $\pi_3(M_1(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}})) = 90-(5+1+3+2+5+1+2+4+2+5+6+5+5+5+1) = 38$
4. $\pi_4(M_1(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}})) = 90-(2+4+4+4+2+4+4+3+5+4+5+2+4+4+4) = 35$
5. $\pi_5(M_1(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}})) = 90-(3+1+1+1+1+6+1+1+1+1+1+1+1+3+6) = 61$
6. $\pi_6(M_1(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}})) = 90-(6+6+6+5+3+3+6+5+6+3+3+6+6+6+3) = 17$

Assim, $M_1(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}}) = (25,56,38,35,61,17)$ e consequentemente $RF_1(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}}) = (a_5,a_2,a_3,a_4,a_1,a_6)$. Desta forma, a fusão dos rankings listados na Tabela 6.6, com o primeiro método do Exemplo 6.2.3, é o seguinte ranking:

$$a_5 > a_2 > a_3 > a_4 > a_1 > a_6$$

Agora, aplicando a função de A-pontuação M_2 do Exemplo 6.2.3 para esses mesmos rankings, obtemos

1. $\pi_1(M_2(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}})) = 0+3+5+5+3+9 = 25$
2. $\pi_2(M_2(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}})) = 12+0+9+12+4+13 = 50$
3. $\pi_3(M_2(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}})) = 10+5+0+7+2+12 = 36$
4. $\pi_4(M_2(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}})) = 10+3+8+0+3+11 = 35$

5. $\pi_5(M_2(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}})) = 12+11+12+12+0+13 = 60$

6. $\pi_6(M_2(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}})) = 6+2+3+4+2+0 = 17$

Assim, $M_2(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}}) = (25,50,36,35,60,17)$ e portanto $RF_2(\vec{A_1},\ldots,\vec{A_{15}}) = (a_5,a_2,a_3,a_4,a_1,a_6)$. Logo, a fusão dos rankings listados na Tabela 6.6, com o segundo método do Exemplo 6.2.3, é o mesmo ranking que foi obtido com o primeiro método, ou seja:

$$a_5 > a_2 > a_3 > a_4 > a_1 > a_6$$

6.4.2 Segundo Exemplo Ilustrativo

Em [184] foi considerado como exemplo ilustrativo, para o método proposto pelo autor desse artigo, o seguinte problema de tomada de decisão, que de fato é uma adaptação de um exemplo proposto em [172]:

Quatro estudantes universitários compartilham uma casa e pretendem contratar um provedor de internet de banda larga. Existem quatro opções disponíveis para escolha, que são fornecidos por quatro provedores de serviços de internet:

1. x_1: 1 Mb/s de banda larga;

2. x_2: 2 Mb/s de banda larga;

3. x_3: 3 Mb/s de banda larga;

4. x_4: 4 Mb/s de banda larga.

O serviço de internet e sua mensalidade serão compartilhados entre os quatro estudantes (os especialistas) $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$. Para escolher a empresa a ser contratada, eles decidem usar um método para problemas de tomada de decisão multi-especialista considerando o seguinte vetor de pesos $w = (0.3,0.3,0.2,0.2)$ estimados a partir de uma auto-avaliação do grau de conhecimento de cada estudante sobre internet banda larga. Cada estudante determina sua relação de preferência em uma forma independente. Em [184] Z.S. Xu considerou o uso de relações de preferências multiplicativas intuicionistas de Atanassov com valores no intervalo $\left[\frac{1}{9},9\right]$ e em [37] essas relações de preferências foram transformadas, via a transformação linear $f(x) = \frac{80x+1}{9}$, nas relações de preferência fuzzy intervalarmente valoradas mostradas nas Tabelas 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10.

A Tabela 6.11, apresenta o ranking obtido pelos diferentes métodos para este problema de tomada de decisão multi especialista.

Tabela 6.7: Avaliação do especialista e_1.

e_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	–	[0.01,0.675]	[0.025,0.9]	[0.04375,0.9]
x_2	[0.325,0.99]	–	[0.015625,0.7875]	[0.025,0.7875]
x_3	[0.1,0.975]	[0.2125,0.984375]	–	[0.025,0.9]
x_4	[0.1,0.95625]	[0.2125,0.975]	[0.1,0.975]	–

Tabela 6.8: Avaliação do especialista e_2.

e_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	–	[0.025,0.7875]	[0.015625,0.7875]	[0.025,0.9]
x_2	[0.2125,0.975]	–	[0.01,0.675]	[0.015625,0.7875]
x_3	[0.2125,0.984375]	[0.325,0.99]	–	[0.04375,0.9]
x_4	[0.1,0.975]	[0.2125,0.84375]	[0.1,0.95625]	–

Tabela 6.9: Avaliação do especialista e_3.

e_3	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	–	[0.2125,0.975]	[0.025,0.7875]	[0.1,0.975]
x_2	[0.025,0.7875]	–	[0.015625,0.675]	[0.01,0.675]
x_3	[0.2125,0.975]	[0.325,0.984375]	–	[0.1,0.95625]
x_4	[0.025,0.9]	[0.325,0.99]	[0.04375,0.9]	–

Tabela 6.10: Avaliação do especialista e_4.

e_4	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	–	[0.025,0.9]	[0.04375,0.9]	[0.04375,0.95625]
x_2	[0.1,0.975]	–	[0.01,0.5625]	[0.015625,0.675]
x_3	[0.1,0.95625]	[0.4375,0.99]	–	[0.04375,0.9]
x_4	[0.04375,0.95625]	[0.325,0.984375]	[0.1,0.95625]	–

Tabela 6.11: Resumo dos rankings obtidos em [37, 184].

	Métodos	Fonte	Ranking
$\vec{A}_1$	$\leq_{XY}$	[37]	$x_4 > x_3 > x_1 > x_2$
$\vec{A}_2$	$\leq_{Lex1}$	[37]	$x_3 > x_4 > x_1 > x_2$
$\vec{A}_3$	$\leq_{Lex2}$	[37]	$x_4 > x_3 > x_1 > x_2$
$\vec{A}_4$	$\leq_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}$	[37]	$x_3 > x_4 > x_1 > x_2$
$\vec{A}_5$	Abordagem I	[184]	$x_3 > x_4 > x_1 > x_2$
$\vec{A}_6$	Abordagem IIa	[184]	$x_3 > x_4 > x_1 > x_2$
$\vec{A}_7$	Abordagem IIb	[184]	$x_4 > x_3 > x_1 > x_2$

Aplicando a função de A-pontuação M_1 do Exemplo 6.2.3 foram obtidos estes rankings,

1. $\pi_1(M_1(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_7)) = 28-(3+3+3+3+3+3+3) = 7$
2. $\pi_2(M_1(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_7)) = 28-(4+4+4+4+4+4+4) = 0$
3. $\pi_3(M_1(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_7)) = 28-(2+1+2+1+1+1+2) = 18$
4. $\pi_4(M_1(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_7)) = 28-(1+2+1+2+2+2+1) = 17$

Assim, $M_1(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_7) = (7,0,18,17)$ e portanto $RF_1(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_7) = (a_3,a_4,a_1,a_2)$. Logo, o resultado da aplicação da função de fusão de rankings RF_1, isto é o primeiro método do Exemplo 6.2.3, aos rankings na Tabela 6.6 é o seguinte ranking:

$$x_3 > x_4 > x_1 > x_2$$

Agora, aplicando a função de A-pontuação M_2 do Exemplo 6.2.3 a esses mesmos rankings, serão obtidos

1. $\pi_1(M_2(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_7)) = 0+7+0+0 = 7$
2. $\pi_2(M_2(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_7)) = 0+0+0+0 = 0$
3. $\pi_3(M_2(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_7)) = 7+7+0+4 = 18$
4. $\pi_4(M_2(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_7)) = 7+7+3+0 = 17$

Ou seja, $M_2(\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_7) = (a_3,a_4,a_1,a_2)$. Desta maneira, a fusão dos ranking da Tabela 6.11, considerando o segundo método do Exemplo 6.2.3, isto é a função de fusão de rankings RF_2, é exatamente o mesmo obtido com o primeiro método e portanto é o seguinte:

$$x_3 > x_4 > x_1 > x_2$$

Na Tabela 6.11 pode ser vista que só dois rankings foram obtidos com os sete métodos: $x_4 > x_3 > x_1 > x_2$ (três vezes) e $x_3 > x_4 > x_1 > x_2$ (quatro vezes). Observe que ambas funções de fusão de rankings resultaram no ranking que mais vezes foi determinado pelos métodos.

Capítulo 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste capítulo, analizaremos as contribuições desta tese tanto na teoria dos conjuntos fuzzy intuicionistas de Atanassov intervalarmente valorados como na tomada de decisão. Também veremos alguns de possíveis desdobramentos desta tese que serão abordados em trabalhos no futuro.

7.1 Contribuições à Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas de Atanassov Intervalarmente Valorados

As contribuições à Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas de Atanassov Intervalarmente Valorados fazem parte do Capítulo 4 desta tese e as descrevemos a seguir.

Xu e Yager em [188] propuseram uma ordem para L^* a qual se baseia em dois índices: o índice de pontuação e o índice de precisão para L^*-valores. Esta ordem, assim como a lexicográfica, além de totais, são também admissíveis, no sentido que elas contém ou refinam a ordem usual de L^* [36]. Tendo em vista o isomorfismo entre os reticulados $\langle L^*, \leqslant_{L^*} \rangle$ e $\langle \mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}} \rangle$, tanto esses índices como essas ordens têm um correspondente em $\mathbb{L}$ com as mesmas propriedades.

No entanto, a generalização natural desta ordem total (baseada em funções de pontuação e precisão) para $\mathbb{L}^*$-valores leva a uma ordem que não é total. Isto motivou Wang, Li e Wang em [170] a "completar" essa generalização natural da ordem proposta por Xu e Yager considerando duas novas funções. Esta ordem, denotada aqui por "$\preccurlyeq$", é definida na Equação (4.12). Na Equação (4.13), propomos uma variante da ordem de Wang, Li e Wang, denotada por "$\preceq$", a qual também é total. Também, descrevemos duas maneiras de construir ordens totais em $\mathbb{L}^*$ a partir de ordens totais em $\mathbb{L}$. Em particular, consideramos duas ordens totais obtidas por estes métodos a obtida a partir da ordem lexicográfica usando o primeiro método de construção, denotada por $\trianglelefteq^*_{\mathbb{L}}$, e a originada pela ordem Xu e Yager usando o segundo método de construção, denotada por $\leqslant^{\star}_{XY}$. Também provamos que as ordens totais $\leqslant$, $\preceq$, $\trianglelefteq^{*}_{\mathbb{L}}$ e $\leqslant^{\star}_{XY}$ são admissíveis no sentido que contém a ordem parcial usual sobre $\mathbb{L}^*$ e que o segundo método preserva a adimissibilidade da ordem de origem. Cabe salientar que a proposta de estender a noção de ordens admisíveis proposto por Bustince et al. em [36] para ordens totais em $\mathbb{L}^*$ foi feita de forma independente em [54, 57]. Outra contribuição à Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas de Atanassov Intervalarmente Valorados é a proposta de um novo índice de precisão para $\mathbb{L}^*$-valores junto com um análise para determinar qual das cinco (5) propostas (incluido a nova) é melhor, no sentido que é mais fiel à noção de função de precisão para $\mathbb{L}$-valores chegando-se à conclusão de que as melhores propostas são a de [181] e a proposta nesta tese (e publicada em [54]).

Em [144] foi introduzido o conceito de representação intervalar e representação intervalar canônica (ou melhor representação intervalar em [21]) com o intuito de formalizar as propriedades de corretude e otimilidade na área de matemática intervalar [81, 114]. Estas duas noções foram adaptadas para o contexto da lógica fuzzy intervalarmente valorada por Bedregal e Takahashi em [22, 23]. Posteriormente à publicação desses artigos que investigava t-normas intervalarmente valoradas que representam t-normas, outros operadores e funções foram estudados à luz do conceito de representação intervalar, como por exemplo [15, 18, 20, 61, 99, 126, 128]. Esta noção de representação intervalar se baseia fortemente na noção de pertinencia e inclusão. Já por $\mathbb{L}^*$-valores não serem conjunto, não há uma noção natural nem de pertinência nem de subconjunto. Porém usando bijeção análoga à bijeção entre L^*-valores e $\mathbb{L}$-valores, podemos ver $\mathbb{L}^*$-valores como se fossem um intervalo de intervalos, e portanto como um conjunto. Com isto em mente, foi introduzida uma noção de pertinência e uma relação de subconjunto para $\mathbb{L}^*$-valores. Estas duas noções conjuntistas foram usadas para introduzir a noção de $\mathbb{L}^*$-representação e de melhor $\mathbb{L}^*$-representação. Propomos também uma nova extensão dos operadores de média aritmética, média ponderada e média ponderada ordenada no contexto de $\mathbb{L}^*$-valores e que tem como principal característica ser a melhor $\mathbb{L}^*$-representação desses operadores de agregação. Assim, quando aplicado a elementos diagonais esses novos operadores resultam nos elementos diagonais que são os mesmos que resultam ao aplicar esses operadores de agregação aos valores que geraram os elementos diagonais. Também provamos que estas novas extensões dos operadores de média ponderada (ordenada e não ordenada) também detentam propriedades similares aos operadores de média, como por exemplo, idempotência, comutatividade, crescentes com respeito à ordem usual, e limitados pelo ínfimo e supremo.

7.2 Contribuições à Tomada de Decisão

No Capítulo 5 apresentamos dois métodos de tomada de decisão multi-atributo e multi-especialista. O primeiro deles considera matrizes de decisão $\mathbb{L}^*$-valoradas e o segundo considera relações de preferência $\mathbb{L}^*$-valoradas. Ambos métodos consideram as ordens totais admissíveis apresentadas no Capítulo 4, assim como, as melhores $\mathbb{L}^*$-representações das médias aritméticas, médias ponderadas e médias ponderadas ordenadas. Fez-se uma análise dos rankings obtidos por ambos os métodos quando aplicados a problemas de tomada de decisão multi-atributo e multi-especialista já vistos na literatura, chegando à conclusão que nos cinco exemplos ilustrativos, sempre pelo menos uma das quatro ordens totais admissíveis consideradas consegue o melhor rankeamento para esses casos.

Lamentavelmente, nem sempre é possível discernir em qual é o ranking ideal em um problema de tomada de decisão específico. Isto nos motivou a desenvolvermos meta-métodos que considerem os ranking obtidos a partir de diversos métodos como evidências ou informações úteis para obter um ranking final que seja considerado uma espécie de consenso ou fusão dos rankings obtidos pelos métodos. Para isto seria necessário estabelecer alguns princípios e formalização desses metamétodos. Observe que esta fusão de ranking seria realizada independente do tipo de problema de tomada de decisão que esteja sendo considerado. Assim, no Capítulo 6 é introduzida a noção de função de fusão de rankings e apresentadas formas de gerar este tipo de função. Cabe salientar, que funções de fusão de rankings também poderiam ser usados como um método de tomada de decisão multi-especialista baseado em consenso como proposto em [28, 83, 123]. A diferença de ambas abordagens radica em que as funções de fusão de rankings não quantificam o nível de similaridade ou correspondência entre pares de rankings, em vez disso, funções de fusão de rankings proporcionam uma pontuação para cada alternativa baseado nos diversos ranking obtidos por cada método ou especialista. Outro aspecto positivo da abordagem proposta nesta tese é o fato das funções de fusão de ranking serem estáveis, no sentido que se adicionarmos o resultado da fusão dos rankings como sendo um novo ranking a ser considerado pelo meta-método, o ranking final continuará sendo o mesmo. A desvantagem com respeito à proposta de consenso quando visto como alternativa à fusão de rankings está em que o método de consenso permite considerar pesos nos rankings o qual em determinadas circunstâncias pode ser interessante ou necessário.

7.3 Trabalhos Futuros

Há diversos desdobramentos que podem ser desenvolvidos a partir dos resultados e conceitos introduzidos nesta tese. Entre eles destacamos:

1. Responder o problema em aberto deixado no Capítulo 4.

2. Verificar as condições, necessárias e no possível suficientes, que devem satisfazer as ordens totais admissíveis sobre $\mathbb{L}^*$ para que os operadores de média ponderada ordenada e não ordenada aqui proposto, assim como, o proposto em [58] (artigo do qual a autora desta tese é co-autora) sejam isotônica.

3. Usar os operadores de média ponderada ordenada propostos nesta tese para definir integrais tipo Choquet, como realizado em [58] e desenvolver novos métodos de tomada de decisão, assim como, aplicar em em classificação como feito em [103].

4. Considerar outras ordens totais admissíveis obtidas pelos métodos propostos no Capítulo 4, assim como, pelos métodos propostos em [57] em novos métodos de tomada de decisão baseado em relações de preferência e em matrizes de decisão $\mathbb{L}^*$-valoradas.

5. Estudar as melhores $\mathbb{L}^*$-representações de conectivos fuzzy e outros tipos de funções de agregação.

6. Desenvolver uma teoria de funções de fusão de rankings com pesos.

7. Aplicar os métodos propostos em problemas de tomada de decisão reais.

Referências Bibliográficas

[1] A.A. Abramczuk. *A Prática da Tomada de Decisão*. Atlas, São Paulo, 2009.

[2] J.Y. Ahn, K.S. Han, S.Y. Oh, C.D. Lee. An application of interval-valued intuitionistic fuzzy sets for medical diagnosis of headache. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 7(5B):2755–2762, 2011.

[3] P. H. M. Albuquerque. PROMETHEE IV as a Decision Analyst?s Tool for Site Selection in Civil Engineering. In: Patricia Guarnieri. (Org.). *Decision Engineering* (1^a ed.). New York: Springer, v. 1, p. 257–267, 2015.

[4] S. Alonso, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F. Herrera. A web based consensus support system for group decision making problems and incomplete preferences. *Information Sciences*, 180:4477–4495, 2010.

[5] K.R. Andrews. The concept of corporate strategy. In: Mintzberg, H.; Quinn, J. B. *The Strategy Process, Concepts, Contexts, Cases* (2^a ed.). Prentice-Hall, New Jersey, 1991.

[6] K. J. Arrow, H. Raynaud. *Opciones Sociales y Toma de Decisiones Mediante Criterios Múltiples*. Alianza Editorial, Madrid, S.A., 1989.

[7] K. J. Arrow. *Social Choise and individual Values*. Wiley, New York, 1964.

[8] K.T. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20:87–96, 1986.

[9] K.T. Atanassov. Operators over interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 64(2):159–174, 1994.

[10] K.T. Atanassov. *Intuitionistic Fuzzy Sets. Theory and Applications*. Physica-Verlag, Heidelberg, 1999.

[11] K.T. Atanassov, G. Gargov. Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 31:343–349, 1989.

[12] K. Atanassov, G. Gargov. Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 31:343–349, 1989.

[13] C.A. Bana e Costa. Três convicções fundamentais na prática do apoio à decisão. *Pesquisa Operacional*, 13(1):9–20, 1993.

[14] P.P. Bonissone, K.S. Decker. Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-off and Complexity. In: L.H. Kanal and J.F. Lemmer (Eds.), *Uncertainty in Artificial Intelligence*. North-Holland, 1986, pp. 217–247.

[15] B.C. Bedregal. On interval fuzzy negations. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(17):2290–2313, 2010.

[16] B. Bedregal, G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo, R. Mesiar, D. Paternain. A class of fuzzy multisets with a fixed number of memberships. *Information Sciences*, 189:1–17, 2012.

[17] B.C. Bedregal, G.P. Dimuro, A.C.R. Costa. Hand gesture recognition in an interval fuzzy approach. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 8(1):21–31, 2007.

[18] B.C. Bedregal, G.P. Dimuro, R.H.N. Santiago, R.H.S. Reiser. On interval fuzzy *S*-implications. *Information Sciences*, 180:1373–1389, 2010.

[19] B.C. Bedregal, R. Reiser, H. Bustince, C. Lopez-Molina, V. Torra. Aggregation functions for typical hesitant fuzzy elements and the action of automorphisms. *Information Sciences*, 255:82–99, 2014.

[20] B. Bedregal, R.H.N. Santiago. Interval representations, Łukasiewicz implicators and Smets-Magrez axioms. *Information Sciences*, 221:192–200, 2013.

[21] B. Bedregal, R.H.N. Santiago. Some continuity notions for interval functions and representation. *Computational and Applied Mathematics*, 32(3):435–446, 2013.

[22] B.C. Bedregal, A. Takahashi. Interval t-norms as interval representations of t-norms. In Proc. of IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems (Fuzz-IEEE), Reno, Nevada, 2005, pp. 909–914.

[23] B. C. Bedregal, A. Takahashi. The best interval representation of t-norms and automorphisms. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(24):3220–3230, 2006.

[24] G. Beliakov, H. Bustince, D.P. Goswani, U.K. Mukherjee, N.R. Pal. On averaging operators for Atanassov's intuitionistic fuzzy sets. *Information Sciences*, 181:116–1124, 2011.

[25] G. Beliakov, S. James, J. Mordelová, T. Rückschlossová, R.R. Yager. Generalized Bonferroni mean operators in multi-criteria aggregation. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(17): 2227–2242, 2010.

[26] R.E. Bellman, L.A. Zadeh. Decision making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17:141–164, 1970.

[27] V. Belton, T.J. Stewart. *Multiple Criteria Decision Analysis: An integrating approach*. Kluwer Academic Publisher, Boston, 2002.

[28] D. Ben-Arieh, Z. Chen. Linguistic-labels aggregation and consensus measure for autocratic decision making using group recommendations. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics – Part A: Systems and Humans*, 36(3):558–568, 2006.

[29] G. Bojadziev, M. Bojadziev. *Fuzzy Logic for Business, Finance, and Managenment* (2nd. Ed.). World Scientific Publishing, New Jersey, 2007.

[30] J.P. Brans. L'ingénierie de la décision: élaboration d'instruments d'aide à la décision. La méthode PROMETHEE. Presses de l'Université Laval, 1982.

[31] J.P. Brans, B. Mareschal. PROMETHEE V: MCDM problems with segmentation constraints. *INFOR*, 30(2):85–96, 1992.

[32] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernandez. Interval-valued fuzzy sets constructed from matrices: Application to edge detection. *Fuzzy Sets and Systems*, 160:1819–1840, 2009.

[33] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernandez, Z. Xu, B. Bedregal, J. Montero, H. Hagras, F. Herrera, B. De Baets. A historical account of types of fuzzy sets and their relationships. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 24(1):179–194, 2016.

[34] H. Bustince, P. Burillo. Correlation of interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 74(2):237–244, 1995.

[35] H. Bustince, P. Burillo. A theorem for constructing interval-valued intuitionistic fuzzy sets from intuitionistic fuzzy sets. *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, 1:5–16, 1995.

[36] H. Bustince, J. Fernández, A. Kolesárová, R. Mesiar. Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 220:69–77, 2013.

[37] H. Bustince, M. Galar, B. Bedregal, A. Kolesárová, R. Mesiar. A new approach to interval-valued Choquet integrals and the problem of ordering in interval-valued fuzzy set applications. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 21(6):1150–1162, 2013.

[38] H. Bustince, M. Pagola, E. Barrenechea, J. Fernandez, P. Melo-Pinto, P. Couto, H. Tizhoosh, J. Montero. Ignorance functions. An application to the calculation of the threshold in prostate ultrasound images. *Fuzzy Sets and Systems*, 161:20–36, 2010.

[39] C. Carlsson, R. Fullér. Fuzzy multiple criteria decision making: Recent developments. *Fuzzy Sets and Systems*, 78:139–153, 1996.

[40] C.A.V. Cavalcante, A.T. Almeida. Modelo multicritério de apoio a decisão para o planejamento de manutenção preventiva utilizando PROMETHEE II em situações de incerteza. *Pesquisa Operacional*, 25(2):1–15, 2005.

[41] M.C.C. Chaves, S.F. Gomes Jr., E.R. Pereira, J.C.C.B.S. de Mello. Utilização do método ELECTRE II para avaliação de pilotos no campeonato de fórmula 1. *Produção*, 20(1):102–113, 2010.

[42] S.M. Chen, S.J. Niou. Fuzzy multiple attributes group decision-making based on fuzzy preference relations. *Expert Systems with Applications*, 38(4):3865–3872, 2011.

[43] S.M. Chen, S.J. Niou. Fuzzy multiple attributes group decision-making based on fuzzy induced OWA operators. *Expert Systems with Applications*, 38(4):4097–4108, 2011.

[44] S.M. Chen, J.M. Tan. Handling multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 67:163–172, 1994.

[45] T.Y. Chen, H.P. Wang, Y.Y. Lu. A multicriteria group decision-making approach basen on interval-valued intuitionistic fuzzy sets: A comparative perspective. *Expert Systems with Applications*, 38:7647–7658, 2011.

[46] T.Y. Chen. Optimistic and pessimistic decision making with dissonance reduction using interval-valued fuzzy sets. *Information Sciences*, 181(3):479–502, 2011.

[47] I. Chiavenato. *Introdução à Teoria Geral da Administração* (5^a edição). Ed. Makron Books, São Paulo, 1997.

[48] I. Chiavenato. *Administração nos Novos Tempos* (2^a edição revista e atualizada). Elsevier/Campus, Rio de Janeiro, 2005.

[49] F. Chiclana. Integración de Modelos de Representación de preferencias en problemas de tomada de decisiones con múltiples expertos. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 2000.

[50] F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, S. Alonso, R.A.M. Pereira. Preference and consistency issues in group decision making. In H. Bustince et al. (eds), *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, aggregation and models*. Springer, Berlin, 2008.

[51] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, M.C Poyatos. A classification method of alternatives for preference ordering criteria based on fuzzy majority. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 4,:801–813, 1996.

[52] I.A. da Silva, B.C. Bedregal, H. Bustince. Weighted average operators generated by n-dimensional overlaps and an application in decision making. In Proceeding of joint conference 16th World Congress of the International Fuzzy Systems Association (IFSA) and 9th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT), Gijon, july 2015, p. 1473–1478. Doi:10.2991/ifsa-eusflat-15.2015.209

[53] I.A. da Silva, B.C. Bedregal, C.G. da Costa, E. Palmeira, M.P. da Rocha. Pseudo-uninorms and Atanassov's intuitionistic pseudo-uninorms. *J. of Intelligent and Fuzzy Systems*, 29(1):267–281, 2015.

[54] I.A. da Silva, B.C. Bedregal, R.H.N. Santiago. On admissible orders for interval-valued Atanassov's intuitionistic fuzzy membership degrees. *Fuzzy Information and Engineering*. Doi:10.1016/j.fiae.2016.06.003.

[55] I.A. da Silva, B.C. Bedregal, R.H.N. Santiago, C.G. da Costa, H. Bustince. A method for multi-attribute group decision making based on the interval-valued Atanassov's intuitionistic representation of the OWA operator. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2016 (Submetido).

[56] I.A. da Silva, B.C. Bedregal, R.H.N. Santiago, A.D. Dória Neto. A new method for interval-valued intuitionistic group decision making. In: Segundo Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, 2012, Natal-RN. Recentes Avanços em Sistemas Fuzzy. São Carlos-SP: SBMAC, 2012. v. 1. p. 282-294.

[57] L. De Miguel, H. Bustince, J. Fernández, E. Induráin, A. Kolesárová, R. Mesiar. Construction of admissible linear orders for interval-valued Atanassov intuitionistic fuzzy sets with an application to decision making. *Information Fusion*, 27:189–197, 2016.

[58] L. De Miguel, H. Bustince, B. Pękala, U. Bentkowska, I. da Silva, B. Bedregal, R. Mesiar, G. Ochoa. Interval-valued Atanassov intuitionistic OWA aggregations using admissible linear orders and their application to decision making. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* (2016) doi:10.1109/TFUZZ.2016.2543744

[59] G. Deschrijver, E.E. Kerre. On the relation between some extensions of fuzzy sets theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 133(2):227–235, 2003.

[60] G. Deschrijver, E.E.Kerre. Aggregation operation in interval-valued fuzzy and Atanassov's intuitionistic fuzzy sets theory. H. Bustince et al. (eds), *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, aggregation and models*. Springer, Berlin, pp. 183–203, 2008.

[61] G.P. Dimuro, B.C. Bedregal, R.H.N. Santiago, R.H.S. Reiser. Interval additive generators of interval t-norms and interval t-conorms. *Information Sciences*, 181(18):3898–3916, 2011.

[62] Dicionário do Aurélio online – Dicionário Português. Disponível em https://dicionariodoaurelio.com/acuracia (acessado em 02/05/2016).

[63] Dicio – Dicionário online de Português. Disponível em http://www.dicio.com.br/acuracia/ (acessado em 02/05/2016).

[64] P.F. Drucker. *Introdução à Administração*. Thomas Learning, São Paulo, 2006.

[65] A. Fernández, M. Calderón, E. Barrenechea, H. Bustince, F. Herrera. Solving multi-class problems with linguistic fuzzy rule based classification systems based on pairwise learning and preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 161:3064–3080, 2010.

[66] P.C. Fishburn. Utility theory. *Management Science*, 14(5):335–378, 1968.

[67] J. Fodor, M. Roubens. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decission Support*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[68] J. Fodor, R. Yager. Fuzzy sets theoretic-operators and quantifiers. In: D. Dubois and H. Prade (eds), *Fundamentals of Fuzzy Sets*. Springer, Berlin, 2000, p. 125–194.

[69] G. Gigerenze, W. Gaissmaier. Heuristic decision making. *Annual Review of Psychology*, 62:451–482, 2011.

[70] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M. Mislove, D.S. Scott. *Continuous Lattices and Domains*. Cambridge University Pres, Cambridge, 2003.

[71] J. Goguen. L-fuzzy sets. *Journal of Mathematics Analisys Applied*, 18:145–167, 1967.

[72] L.F.A.M. Gomes, M.C.G. Araya, C. Carignano. *Tomada de Decisões em Cenários Complexos: Introdução aos métodos discretos do apoio multicritério à decisão*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

[73] L.F.A.M. Gomes, M.A.L. Rocha. Análise multicritério pelos métodos ELECTRE III e ELECTRE IV – Um lançamento de um novo serviço dos correios. *Engevista*, 2(4):5–14, 1999.

[74] L.F.A.M. Gomes, C.F.S. Gomes. *Tomada de Decisão Gerencial– Enfoque Multicritério* (5^a Edição). Ed. Atlas, São Paulo, 2014.

[75] Z. Gong, L. Li, J. Cao, F. Zhou. On additive consistent properties of the intuitionistic fuzzy preference relation. *Int. J. of Information Technology & Decision Making*, 9(6):1009–1025, 2010.

[76] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar & E. Pap. Aggregation Functions. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2009.

[77] I. Grattan-Guiness. Fuzzy membership mapped onto interval and many-valued quantities. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundladen der Mathematik*, 22:149–160, 1975.

[78] G. Grätzer. *Lattice Theory: Foundations*. Birkhäuser, Berlim, 2011.

[79] R.H. Hall. *Organizações: Estruturas, processos e resultados* (8a Edição). Galman, R. (Trad.), Pearson, São Paulo, 2004.

[80] E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F, Herrera, S. Alonso. Group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, 37(1):176–89, 2007.

[81] T. Hickey, Q. Ju, M.H. Van Emdem. Interval arithmetic: From principles to implementation. *J. of ACM*, 48(5):1038–1068, 2001.

[82] D.H. Hong, C.H. Choi. Multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 114:103–113, 2000.

[83] F. Hou. A consensus gap indicator and its application to group decision making. *Group Decision and Negotiation*, 24:415–428, 2015.

[84] E. Hüllermeier, K. Brinker. Learning valued preference structures for solving classification problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(18):2337–2352, 2008.

[85] E. Hüllermeier, S. Vanderlooy. Combining predictions in pairwise classification: An optimal adaptive voting strategy and its relations to weighted voting. *Pattern Recognition*, 43(1):128–142, 2010.

[86] G.R. Jahanshahloo, F.H. Lotfi, M. Izadikhah. Extension of the TOPSIS method for decision-making problems with fuzzy data. *Applied Mathematics and Computation*, 181:1544–1551, 2006.

[87] K.U. Jahn. Intervall–wertige mengen. *Mathematische Nachrichten*, 68(1):115–132, 1975.

[88] A. Jurio, M. Pagola, R. Mesiar, G. Beliakov, H. Bustince. Image magnification using interval information. *IEEE Trans. on Image Processing*, 20(11):3112–3123, 2011.

[89] J. Kacprzyk, M. Fredrizzi. *Multiperson Decision Making Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

[90] J. Kacprzyk, M. Fredrizzi, H. Nurmi. Group decision making and consensus under fuzzy preference and fuzzy majority. *Fuzzy Sets and Sistems*, 49:21–31, 1992.

[91] J. Kacprzyk, M. Roubens. *Non-Conventional Preference Relations in Decision Making*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[92] J. Kacprzyk, M. Fredrizzi. A “Soft” measure of consensus in the setting of partial (fuzzy) preferences. *European Journal of Operational Research*, 34:316–325, 1988.

[93] L. Kitanik. *Fuzzy Decision Procedures With Binary Relations, Towards an Unified Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[94] K.C. Laudon, J.P. Laudon. *Sistemas de Informação Gerenciais* (7a ed.). Guimarães, T. (Trad.), Pearson, São Paulo, 2007.

[95] W. Lee. A novel method for ranking interval-valued intuitionistic fuzzy numbers and its applications to decision making. In IHMSC'09 Proc. of 2009 Int. Conf. on Intelligent-Human-Machine Systems and Cybernetics, vol. 2, IEEE computer Society, Washington-DC, 2009, p.282–285.

[96] H.S. Lee, C.H. Yeh. Fuzzy Multi-criteria decision making based on fuzzy preference relation. Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems, *Lecture Notes in Computer Science*, 5178:980–985, 2008.

[97] G. Levitin. Evaluating correct classification probability for weighted voting classification with plurality voting. *European Journal of Operational Research*, 141:596–607, 2002.

[98] D.F. Li, J.B. Yang. Fuzzy linear programming technique for multiatribute group decision making in fuzzy environments. *Information Sciences*, 158:263–275, 2004.

[99] L. Lima, B. Bedregal, H. Bustince, E. Barrenechea, M. Rocha. An interval extension of homogeneous and pseudo-homogeneous t-norms and t-conorms. *Information Sciences*, 355–356:328–347, 2016.

[100] X. Liu, L. Chen. On the properties of parametric geometric OWA operator. *Int. J. Approximate Reasoning*, 35(2):163–178, 2004.

[101] F.A. Lootsma. Scale sensitivity in a multiplicative variant of the AHP and SMART. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 2:87–110, 1993.

[102] H.M.L. López, A.T. Almeida. Utilizando PROMETHEE V para seleção de portfólio de projetos de uma empresa de energia elétrica. *Production*, 24(3):559–571, 2014.

[103] G. Lucca, J.A. Sanz, G.P. Dimuro, B. Bedregal, R. Mesiar, A. Kolesárová, H. Bustince. Pre-aggregation functions: Construction and an application. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 24(2):260–272, 2016.

[104] B. Mareschal, J.P. Brans, P. Vincke. PROMETHEE: A new family of outranking methods in multicriteria analysis. ULB – Universite Libre de Bruxelles, series ULB Institutional Repository N^o 2013/9305.

[105] A.C.A. Maximiano. *Introdução à Administração* (5^a Edição). Editora Atlas, São Paulo, 2000.

[106] A.C.A. Maximiano. *Fundamentos de Administração: Manual compacto para as disciplinas de TGA e Introdução à administração* (2a Edição). Editora Atlas, São Paulo, 2008.

[107] J.M. Merigó. Nuevas Extensiones a los Operadores OWA y su Aplicación en los Métodos de Decisión. Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona, Barcelona, 2008.

[108] J.M. Merigó, M. Casanova. Decision-making with distance measures and induced aggregation operators. *Computer & Industrial Engineering*, 60:66–76, 2011.

[109] R. Mesiar, M. Komorníková. Aggregation functions on bounded posets. In C. Cornelis et al. (eds), *35 Years of Fuzzy Set Theory*. Springer, Berlin, 2010.

[110] H.B. Mitchell. An intuitionistic OWA operator. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(6):843–860, 2004.

[111] C.M. Miranda, A.T. Almeida. Visão Multicritério da Avaliação de Programas de Pós-Graduação pela CAPES – O Caso da Área Engenharias III Baseado nos Métodos ELECTRE II e MAUT. *Gestão & Produção*, 11(2), 1–20, 2004.

[112] C.M. Miranda, A.T. Almeida. Método multicritério ELECTRE IV-H para priorização de atividades em projetos. *Pesquisa Operacional*, 27(2):247–269, 2007.

[113] P.J. Montana, B.H. Charnov. *Administração* (3^a Edição). Editora Saraiva, 2010.

[114] R.E. Moore. *Methods and Application of Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia, 1979.

[115] A. Mukherjee and S. Sarkar. Similarity measures for interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets and its application in medical diagnosis problem. *New Trends in Mathematical Sciences*, 2(3):159–165, 2014.

[116] V.L.G. Nayagam, S. Muralikrishnan, G. Sivaraman. Multi-criteria decision-making method based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Expert Systems with Applications*, 38:1464–1467, 2011.

[117] V.L.G. Nayagam, G. Sivaraman. Ranking interval-valued intutitionistic fuzzy sets. *Applied Soft Computing*, 11(4):3368–3372, 2011.

[118] S.B. de Oliveira, D. Dalcin, J.A.D. Machado. O processo de tomada de decisão sob a ótica fuzzy: Contribuições analíticas multicritérios. Anais do XIV Seminarios em Administração, São Paulo, outubro de 2011.

[119] W.T.R. Oliveira. Utilizando Integrais Fuzzy em Tomada de Decisão Multicritério. Dissertação Mestrado, UFSC, PPgCC, Florianópolis, SC, 2003.

[120] S.A. Orlovsky. Decision-making with a fuzzy preference relation. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:155–167, 1978.

[121] S.A. Orlovsky. *Calculus of Decomposable Properties, Fuzzy Sets and Decisions*. Allerton Press, 1994.

[122] D. Paternain, A. Jurio, E. Barrenechea, H. Bustince, B. Bedregal, E. Szmidt. An alternative to fuzzy methods in decision-making problems. *Expert Systems with Applications*, 39:7729–7735, 2012.

[123] W. Pedrycz, P. Ekel, R. Parreiras. *Fuzzy Multicriteria Decision-Making: Models, Methods and Applications*. John Wiley & Sons, 2011.

[124] M. Porter. *Estrategia Competitiva*. Elsevier/Campus, Rio de Janeiro, RJ, 2005.

[125] R.L.L. Porto, L.G.T. Azevedo. Sistemas de suporte a decisões de recursos hídricos. In: R.L.L. Porto (ed.), *Técnicas Quantitativas para o Gerenciamento de Recursos Hídrico*. UFRGS/ABRH, Porto Alegre, 1997, cap.2, p.43–95.

[126] R.H.S. Reiser, B.C. Bedregal, G.A.A. Dos Reis. Interval-valued fuzzy coimplications and related dual interval-valued conjugate functions. *J. of Computer and System Sciences*, 80(2):410–425, 2014.

[127] R.H.S. Reiser, B. Bedregal, L. Visintin. Index, expressions and properties of interval-valued intuitionistic fuzzy implications. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 14(2):193–208, 2013.

[128] R.H.S. Reiser, G.P. Dimuro, B. Bedregal, R.H.N. Santiago. Interval-valued QL-implications. In: D. Leivant, R. De Queiroz (Eds.), Proc. of the 14^{th} International Workshop on Logic, Language, Information and Computation (WoLLIC 2007), Rio de Janeiro. *Lecture Notes in Computer Sciences*, 4576: 307–321, 2007.

[129] R.H.S Reiser, G.P. Dimuro, B. Bedregal, H.S. Santos and R. Callejas-Bedregal. S-implications on complete lattices and the interval constructor. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 9(1):143–154, 2008.

[130] S.P. Robbins, D.A. Decenzo. *Fundamentos de Administração: Conceitos essenciais e aplicações* (4a Edição). Taylor R.B.; Da Silva, R.O. (Trad.), Pearson, São Paulo, 2004.

[131] A. Romariz. Há muitas formas de não saber: Imprecisão e aleatoriedade. Blog "Tecnicamente", 12 de maio de 2012. Disponível em http://tecnicamente.blogspot.pt/2012/05/ha-muitas-formas-de-nao-saber.html (acessado em 02/05/2016).

[132] K. Rojas, D. Gómez, J. Montero, J.T. Rodríguez. Strictly stable families of aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 228:44–63, 2013.

[133] B. Roy. Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE). *La Revue d'Informatique et de Recherche Opérationelle* (RIRO), (8):57–75, 1968.

[134] B. Roy. *Méthodologie Multicritère d'Aide a la Dècision*. Economica, Paris, 1985.

[135] B. Roy, 1978. ELECTRE III: Algorithme de Classement Basé Sur Une Représentation Floue Des Préférences en Présence de Critères Multiples. *Cahiers du CERO*, 20(1):3–24, 1978.

[136] B. Roy. The Outranking Approach and the Foundation of ELECTRE Methods. *Theory and Decision*, 31:49–73, 1991.

[137] B. Roy. *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1996.

[138] B. Roy, P. Bertier. La méthode ELECTRE II. SEMA-METRA, Paris, 1971.

[139] B. Roy, J.C. Hugonard. Ranking of suburban line extension projects on the Paris Metro System by a multicriteria method. *Transportation Research*, 16:301–312, 1982.

[140] B. Roy, J.M. Skalka. ELECTRE IS: Aspécts methodologiques et guide d'utilization. Université de Paris-Dauphine, Paris, 1984.

[141] T.L. Saaty. *The Analitic Hierarchy Process*. McGraW-Hill, New York, 1980.

[142] T. L. Saaty. *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analitic Hieararchy Process*. RSW Publications, Pittsburgh, 1994.

[143] R. Sambuc. Fonctions ϕ-floues. Application a l'aide au diagnostic en pathologie thyroidienne. Ph.D. Thesis, University of Marseille, Marseille, 1975.

[144] R.H.N. Santiago, B.C. Bedregal, B.M. Acióly. Formal aspects of correctness and optimality of interval computations. *Formal Aspects of Computing*, 18:231–243, 2006.

[145] J. Sanz, A. Fernandez, H. Bustince, F. Herrera. Improving the performance of fuzzy rule-based classification systems with interval- valued fuzzy sets and genetic amplitude tuning. *Information Sciences*, 180(19):3674–3685, 2010.

[146] J. Sanz, A Fernández, H. Bustince, F. Herrera. A genetic tunning to improve the performance of fuzzy rule-based classification systems with interval-valued fuzzy sets: Degree of ignorance and lateral position. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 52(6): 751–766, 2011.

[147] Y. Shang, X. Yuan, E.S. Lee. The n-dimensional fuzzy sets and Zadeh fuzzy sets based on the finite valued fuzzy sets. *Computers & Mathematics with Applications*, 60:442–463, 2010.

[148] A. Schärlig. Pratiquer Electre et Prométhé. Un complément à Décider sur plusieurs critères. Lausanne. Presses polytechniques et universitaires romandes. Collection Diriger l'entreprise 11.

[149] E.A. Scheinerman. *Mathematics: A Discrete Introduction* (3rd edition). Cencage Learning, 2012.

[150] T. Shimizu. *Decisão nas Organizações*. 2 ed. Atlas, São Paulo, 2006.

[151] V.B.S. Silva, F. Schramm, H.R.C. de Carvalho. O uso do método PROMETHEE para seleção de candidatos à bolsa-formação do Pronatec. *Pesquisa Operacional*, 24(3): 548–558, 2014.

[152] H.A. Simon. *The Shape of Automation for men and management*. Harper & Row, 1965.

[153] H.A. Simon. *Comportamento Administrativo: Estudo dos processos decisórios nas organizações administrativas*. FGV, Rio de Janeiro, 1979.

[154] H.A. Simon. *Models of Bounded Rationality* (vol I and II). MIT Press, Cambridge, MA, 1982.

[155] H.A. Simon. Rationality in psychology and economics. *The Journal of Business*, 59(4):S209–S224, 1986.

[156] H.A. Simon. *Models of Thought* (vol II). Yale University Press, New Haven, CT, 1989.

[157] F. Sobral, A. Peci. *Administração: Teoria e prática no contexto brasileiro*. Pearson, São Paulo, 2008.

[158] C. Tan. A multi-criteria interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making with Choquet integral-based TOPSIS. *Expert Systems with Applications*, 38:3023–3033, 2011.

[159] C. Tan, X. Chen. Interval-valued intuitionistic fuzzy multicriteria group decision making based on VIKOR and Choquet integral. *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2013, Article ID 656879, 16 pages.

[160] C. Tan, H. Deng, Y. Cao. A multi-criteria group decision making procedure using interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Journal of Computational Information Systems*, 6(3):855–863, 2010.

[161] T. Tanino. Fuzzy preference orderings in group decision making. *Fuzzy Sets and systems*, 12:117–131, 1984.

[162] H.R. Tizhoosh. Interval-valued versus intuitionistic fuzzy sets: Isomorphism versus semantics. *Pattern Recognition*, 41:1812–1813, 2008.

[163] V. Torra. Hesitant fuzzy sets. *Int. J. of Intelligent Systems*, 25:529–539, 2010.

[164] E. Triantaphyllou, C.T. Lin. Development and evaluation of five fuzzy multiattribute decision making methods. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 14(4):281–310, 1996.

[165] S.K. Tyagi. Reliability analysis of a powerloom plant using interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Applied Mathematics*, 5:2008–2015, 2014.

[166] D. Vanderpooten. The European School of MCDA: Emergence, Basic Features and Current Works. Cahier du Lamsade, n. 825, Université Paris-Dauphine, Paris, France, 1995.

[167] A.K. Verma, R. Verma, N.C. Mahanti. Facility location selection: An interval-valued intuitionistic fuzzy TOPSIS approach. *Modern Mathematics and Statistics*, 4(2):68–72, 2010.

[168] P. Vincke. *Multicriteria Decision-Aid*. Wiley, Bruxelles, 1992.

[169] S. Wan, J. Dong. A possibility degree method for interval-valued intuitionistic fuzzy multi-attribute group decision making. *Computer and System Sciences*, 80:237–256, 2014.

[170] Z. Wang, K.W. Li, W. Wang. An approach to multiattribute decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy assessments and incomplete weights. *Information Sciences*, 179:3026–3040, 2009.

[171] T.C. Wang, Y.L. Lin. Applying the consistent fuzzy preference relations to select merger strategy for commercial banks in new financial environments. *Expert Systems with Applications*, 36:7019–7026, 2009.

[172] Y.M. Wang, C. Parkan. Optimal aggregation of fuzzy preference relations with an application to broadband internet service selection. *European Journal of Operational Research*, 187:1476–1486, 2008.

[173] S.R. Watson, A.N.S. Freling. Assessing atribute weights by ratios. *Omega*, 10(6):582–583, 1982.

[174] S.R. Watson, A.N.S. Freling. Comments on: Assessing atribute weights by ratios. *Omega*, 11:13–13, 1983.

[175] H. Wang, Z. Xu. Admissible orders of typical hesitant fuzzy elements and their application in ordered information fusion in multi-criteria decision making. *Information Fusion*, 29(c):98–104, 2016.

[176] G. Wei. Some induced geometric aggregation operators with intuitionistic fuzzy information and their application to group decision making. *Applied Soft Computing*, 10(2):423–431, 2010.

[177] G. Wei, Hesitant fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 31:176–182, 2012.

[178] M. Xia, Z. Xu, Hesitant fuzzy information aggregation in decision making, *Int. J. of Approximate Reasoning*, 52(3):395–407, 2011.

[179] M. Xia, Z. Xu, N. Chen, Some hesitant fuzzy aggregation operators with their application in group decision making. *Group Decision and Negotiation*, 22(2):259–279, 2013.

[180] Z.S. Xu. On similarity measure of interval-valued intuitionistic fuzzy sets and their application to pattern recognitions. *Journal of Southeast University*, 23:139–143, 2007.

[181] Z. Xu. Methods for aggregating interval-valued intuitionistic fuzzy information and their application to decision making. *Control and Decision*, 22:215–219, 2007. (em chinese)

[182] Z. Xu. A method based on distance measure for interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making. *Information Sciences*, 180:181–190, 2010.

[183] Z. Xu. Integral of weighted intuitionistic fuzzy information. *Information Sciences*, 180:726–736, 2010.

[184] Z.S. Xu. Priority weight intervals derived from intuitionistic multiplicative preference relations. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 21(4):642–654, 2013.

[185] Z. Xu, J. Chen. An Approach to group decision making based on interval-valued intuitionistic judgement matrices. *Systems Engineering – Theory & Practice*, 27(4):126–133, 2007.

[186] Z.S. Xu, Q.L. Da. The ordered weighted geometric averaging operators. *Int. J. of Intelligent Systems*, 17(7):709–716, 2002.

[187] Z. Xu, H. Hu. Projection models for intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making. *Int. J. of Information Technology & Decision Making*, 9(2):267–280, 2010.

[188] Z. Xu, R. Yager. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets. *Int. J. of General Systems*, 35(4):417–433, 2006.

[189] R.R. Yager. Multiple objective decision-making using fuzzy sets. *Intl. J. Man-Machine Studies*, 9:375–382, 1977.

[190] R.R. Yager. On the theory of bags. *Int. J. General Systems*, 13:23–37, 1986.

[191] R. Yager. On ordered weighted averaging operators in multicriteria decision making. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 18:183–190, 1988.

[192] R. Yager. OWA aggregation of intuitionistic fuzzy sets. *Int. J. of General Systems*, 36(6):617–641, 2009.

[193] R.R. Yager. Families of OWA Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59:125–148, 1993.

[194] R.R. Yager, D. P. Filev. Parameterized And-like and Or-like OWA operators. *Int. J. of General Systems*, 22:297–316, 1994.

[195] R.R. Yager, J. Kacprzyk, G. Beliakov (Eds.). *Recent Developments in the Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Practice. Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin, 2011.

[196] R.R. Yager, A. Rybalov. Noncommutative self-identity aggregation. *Fuzzy Sets Systems*, 85:73–82, 1997.

[197] J. Ye. Multicriteria fuzzy decision-making method based on a novel accuracy function under interval-valued intuitionistic fuzzy environment. *Expert Systems with Applications*, 36:6899–6902, 2009.

[198] W. Yu, B. Roy (1992). Aspects mèthodologiques et manuel d'utilisation. Document N. 74, Université de Paris Dauphine. Paris.

[199] Z.L. Yue. An approach to aggregating interval numbers into interval-valued intuitionistic fuzzy information for group decision making. *Expert Systems with Applications*, 38:6333–6338, 2011.

[200] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.

[201] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - I. *Information Sciences*, 6:199–249, 1975.

[202] M. Zarghami, F. Szidarovszky. Revising the OWA operator for multi criteria decision making problems under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 198(1):259–265, 2009.

[203] L.G. Zhou, H.Y. Chen. Continuous generalized OWA operator and its application to decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 168(1):18–34, 2011

[204] L.G. Zhou, Z. Tao, H. Chen, J. Liu. Continuous interval-valued intuitionistic fuzzy aggregation operators and their applications to group decision making. *Applied Mathematical Modelling*, 38:2190–2205, 2014.

[205] H.J. Zimmermann, P. Zysno. Latent connectives in human decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:37–51, 1980.

Índice Remissivo

A-pontuação, 96
L^*-representação, 53
melhor, 53
OWA, 54
L^*-valor
projeções, 46
$\mathbb{L}$-representação, 52
melhor, 52
OWA, 53, 54
$\mathbb{L}$-valor
projeções, 48
$\mathbb{L}^*$-representação, 67, 69
melhor, 67
OWA, 70
$\mathbb{L}^*$-valor, 56
ordem de inclusão, 59
projeções, 56
γ-conjugada, 94

Acurácia, 1
Analytic Hierarchy Process, 34
Multiplicative, 34
Referenced, 34
Atributos, 42
Auto-identidade, 92

CFIA, 46
CFIAIV, 55
CFIV, 48
Complemento
de um intervalo, 48
Conjunto de referência, 46
Conjunto fuzzy, 1
hesitante, 4
intervalarmente valorado, 2, 48
intuicionista de Atanassov, 46
intuicionista de Atanassov, 2
intervalarmente valorado, 2, 55
n-dimensional, 2, 59
Conjunto L-fuzzy, 3, 48, 55
Critérios, 42
benéficos, 79

Decisão programada, 14
Decisor, 11

ELECTRE, 35
Elementos diagonais, 47
de $\mathbb{L}^*$, 56
de L^*, 47
Elementos semi-diagonais de $\mathbb{L}^*$, 56

Função
de acurácia, 47
de acurácia para $\mathbb{L}^*$-valores, 57
de acurácia para $\mathbb{L}$, 48
de acurácia para L^*-valores, 47
de fusão de rankings, 92
de pontuação, 47
de pontuação para $\mathbb{L}^*$-valores, 57
de pontuação para $\mathbb{L}$-valores, 48
de pontuação para L^*-valores, 47

Grau de não pertinência, 2
Grau de pertinência, 1
  intervalar, 64

Inacurácia, 1
Incerteza, 1
Indice coletivo total, 76
Indice fuzzy intuicionista, 46
  intervalarmente valorado, 56
Intervalo degenerado, 48
Intervalo n-dimensional, 2, 59

Média ponderada, 45, 81
  ordenada, 5, 45
Método da regra, 15
Método por políticas, 15
Método por procedimento, 15
Matemática intervalar, 53
Matriz de decisão, 32, 34
  de consenso, 76
Medida de hesitação, 47
Meta-método, 110
Metamétodo, 92

Operador de agregação, 44
  conjuntivo, 45
  disjuntivo, 45
  estabilidade, 93
  idempotente, 45
  média, 45
Ordem
  admissível, 5
  de Bustince e Burillo, 47
  de inclusão sobre $\mathbb{L}$, 48
  de Xu e Yager, 47, 49
  dualmente gerável, 50, 64
  geradas por funções, 50
  léxica, 49
  sobre rankings, 99
  total admissível, 49, 51, 77, 82
  usual sobre $\mathbb{L}$, 3
  usual sobre $\mathbb{L}^*$, 3, 56
  usual sobre L^*, 3, 46
Ordem total, 49, 61
  para $\mathbb{L}^*$, 64
Ordem usual para $\mathbb{L}$, 48
OWA, 5, 45
  intervalar, 53
  intuicionista, 54
  Intuicionista intervalarmente valorado, 71

Partição, 92
Pensamento sistêmico, 8
Pesquisa operacional, 30
Pré-ordem, 57
Processo de decisão, 9
  etapas, 17
  heurística, 20
Produto escalar, 53
PROMETHEE, 38

Racionalidade limitada, 9
Ranking, 32, 91, 92
Relação de pertinência estendida, 59
Relação de preferência, 32
  $\mathbb{L}$-valorada, 105
  $\mathbb{L}^*$-valorada, 81
  coletiva, 81
  L-valorada, 80
Representação intervalar, 52
  melhor, 52
Reticulado, 3
  completo, 46, 48, 55

Sistemas de suporte à decisão, 22
Solução ideal, 86
Soma limitada, 53

Tecnologia da informação, 16
TI, 16
Tomada de decisão, 6, 11
  abordagem científica, 9
  com múltiplos atributos, 6
  em grupo, 6
  escolas, 33
    americana, 34
    francesa, 35
    holandes, 33
  estratégica, 8
  fundamentos, 16
  fuzzy, 7
  multi especialista, 25
  paradigmas, 8

Vetor de pesos, 45