UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO, CONSTRUÇÃO DAS CIÊNCIAS E PRÁTICAS EDUCATIVAS

RAFAEL JOSÉ ALVES DO REGO BARROS

PESQUISAS SOBRE HISTÓRIA E EPISTEMOLOGIA DA MATEMÁTICA

Contribuições para abordagem da matemática no Ensino Médio

Natal/RN
2016

RAFAEL JOSÉ ALVES DO REGO BARROS

PESQUISAS SOBRE HISTÓRIA E EPISTEMOLOGIA DA MATEMÁTICA

Contribuições para abordagem da matemática no Ensino Médio

Tese apresentada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação (área de EDUCAÇÃO MATEMÁTICA).

Orientador: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

Natal/RN

2016

Catalogação da Publicação na Fonte.
UFRN / Biblioteca Setorial do CCSA

Barros, Rafael José Alves do Rego.
Pesquisas sobre história e epistemologia da matemática contribuições para abordagem da matemática no Ensino Médio / Rafael José Alves do Rego Barros. - Natal, 2016.
243f: il.

Orientador: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes.

Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Educação. Programa de Pós-graduação em Educação.

1. História da matemática – Tese. 2. Epistemologia da matemática – Tese. 3. Ensino Médio – Tese. 4. Programa de Pós-graduação - Brasil – Tese. 5. Conteúdos Matemáticos - Tese. 6. Potenciais Didáticos - Tese. 7. Dissertações e teses - Tese. I. Mendes, Iran Abreu. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/BS/CCSA CDU 51:378(091)

RAFAEL JOSÉ ALVES DO REGO BARROS

PESQUISAS SOBRE HISTÓRIA E EPISTEMOLOGIA DA MATEMÁTICA

Contribuições para abordagem da matemática no Ensino Médio

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação.

Aprovada em

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes - Orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Profa. Dra. Lígia Arantes Sad - Avaliadora Externa
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Espírito Santo – IFES

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma – Avaliador Externo
Universidade Federal do Pará – UFPA

Prof. Dr. Carlos Aldemir Farias da Silva – Suplente Externo
Universidade Federal do Pará – UFPA

Prof. Dra. Claudianny Amorim Noronha – Avaliadora Interna
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Prof. Dra. Bernadete Barbosa Morey – Avaliadora Interna
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Prof. Dra. Marlúcia Menezes de Paiva – Suplente Interna
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

DEDICATÓRIA

Em especial, ao meu avô Dr. José do Rêgo Barros, um grande homem, inteligentíssimo. Foi um excelente professor, querido por todos. Muito orgulho de ser seu neto. (In Memoriam)

Ao meu padrasto, Professor Ms. Simão Rosembaum, por ter sido a minha principal referência intelectual e profissional, com participação fundamental na minha formação básica e superior com inúmeras cobranças positivas, explorando o máximo da minha capacidade intelectual, pessoa em quem sempre me espelhei e de quem sempre busco me aproximar.

À minha adorável esposa, Kívia Pimentel S. Rego Barros, por estar sempre ao meu lado, incentivando-me em todos os momentos desta etapa da minha vida, sempre me proporcionando muito amor e carinho nas horas em que mais precisei.

À minha mãe, Professora Patrícia Alves Rosembaum, por toda a dedicação que teve em todas as etapas da minha vida, principalmente em minha formação inicial, proporcionando-me sempre do melhor, dentro de suas condições.

AGRADECIMENTOS

Em especial, ao professor Dr. Iran Abreu Mendes, por sua competência e dedicação. E por ter acreditado no meu trabalho e aceitado me orientar neste período importantíssimo de minha formação acadêmica. Serei sempre grato. Esse foi apenas o início de uma grande parceria.

Aos integrantes da banca examinadora, Professora Dra. Lígia Arantes Sad, Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma, Prof. Dr. Carlos Aldemir Farias da Silva, Professora Dra. Claudianny Amorim Noronha, Professora Dra. Bernadete Barbosa Morey e Profa. Dra. Marlúcia Menezes de Paiva, pelas importantes contribuições que deram a este trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Em especial, às Professoras Marlúcia Menezes de Paiva e Alda Maria Duarte Araújo Castro pela importante colaboração com o Convênio de Doutorado realizado com o Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia da Paraíba.

Aos meus colegas do IFPB que fizeram parte da primeira turma do convênio de Doutorado em Educação com a UFRN, Alysson Régis, Ana Lúcia Queiroga, Cleomar Porto, Emmanuelle Arnaud, Evaldo Mota, Francisco Thadeu, Márcio Carvalho, Maria da Conceição Cavalcanti e Zoraida Arruda.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba - IFPB, por nos proporcionar essa oportunidade de realizar um Doutorado por Convênio e ter auxiliado no que foi possível, desde transporte, diminuição de carga horária, até o afastamento total na metade do Curso.

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, da Educação Matemática, pelas importantes discussões em sala de aula e pelo companheirismo na minha estadia em Natal e fora de Natal nos Eventos da área de Educação Matemática.

Aos colegas da Coordenação de Matemática e Estatística do IFPB, por ter me dado incentivo para o afastamento das minhas atividades como docente para a conclusão do Doutorado.

RESUMO

O presente trabalho originou-se do projeto de pesquisa Cartografias da Produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990 e 2010, com o objetivo geral de investigar os potenciais didáticos das Pesquisas em História e Epistemologia da Matemática produzidas nas dissertações e teses, nos programas de pós-graduação do Brasil neste período, sugerindo encaminhamentos didáticos para o ensino de conteúdos matemáticos do Ensino Médio. Inicialmente, descrevemos os artigos de História e Epistemologia da Matemática publicados no Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, no período de 1987 a 2010. Em seguida, classificamos os artigos da Revista Brasileira de História da Matemática, segundo as tendências em História da Matemática, de acordo com Mendes (2010, 2014), e caracterizamos cada artigo de História e Epistemologia da Matemática publicados no período de 2001 a 2012. Descrevemos as dissertações e teses produzidas nos Programas de Pós-Graduação do Brasil em História e Epistemologia da Matemática no período de 1990 a 2010, encontradas nas bibliotecas virtuais, e analisamos cada trabalho publicado neste período, verificando quais temas matemáticos são abordados e apontando os potenciais didáticos para o Ensino Médio. Para que nossa pesquisa se desenvolvesse, elaboramos nossa Matriz Paradigmática, com base nas ideias de Sánchez Gamboa (2012), e utilizamos como objeto de estudo quarenta e sete dissertações e teses no período entre 1990 e 2010. Entre elas, encontramos trinta dissertações e teses que envolvem conteúdos do Ensino Superior, dezenove dissertações e onze teses e dezessete trabalhos que envolvem conteúdos do Ensino Médio, dez dissertações e sete teses. Para identificar se uma dissertação ou tese abordava conteúdos do Ensino Médio, usamos como parâmetro as áreas de conhecimentos do Exame Nacional do Ensino Médio, ENEM, e, para classificar os conteúdos de Ensino Superior, tomamos como referência as grandes áreas da matemática encontradas no site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES. Defendemos a tese de que existem Dissertações e Teses de História e Epistemologia da Matemática produzidas nos programas de pós-graduação do Brasil entre 1990 e 2010, com potencialidades didáticas para o Ensino Médio, que podem ser utilizados para abordar conceitos matemáticos na Educação Básica a partir de uma reorganização pedagógica adequada ao Ensino Médio. E tentamos mostrar a abundância de material que consta nestes trabalhos, que podem, de alguma forma, ser inseridos na nossa prática docente, focalizando aqueles trabalhos que abordam conteúdos do Ensino Médio, pois, muitas vezes, essas dissertações e teses, depois de defendidas, pouco são utilizadas e são esquecidas nas bibliotecas. Essa tese servirá para a disseminação destas publicações para um público maior, no sentido de possibilitar uma divulgação dos conteúdos matemáticos que podem ser explorados para abordar conceitos matemáticos na Educação Básica.

Palavras-chave: Dissertações e teses; Programa de Pós-graduação no Brasil; História e Epistemologia da Matemática; Conteúdos Matemáticos; Potenciais Didáticos; Ensino Médio.

ABSTRAT

This work originated from the Cartografias research project Production in History of Mathematics in Brazil: a study focused on dissertations and theses between 1990 and 2010, with the overall goal of investigating the educational potential of Research in History and Epistemology of Mathematics produced in dissertations and theses in Brazil graduate programs in this period, suggesting learning referrals for teaching mathematical content of high school. Initially, we describe the History and Epistemology of Mathematics articles published in Mathematics Education National Meeting - ENEM, from 1987 to 2010. Then classify the articles of the Journal of History of Mathematics, according to the trends in the history of mathematics, according to Mendes (2010, 2014), and each feature History and Epistemology of Mathematics article published from 2001 to 2012. we describe the dissertations and theses produced in Brazil Graduate Program in History and Epistemology of Mathematics in the period 1990-2010, found in the virtual libraries, and analyze each published over this period, which mathematical topics are addressed and pointing to the potential for teaching high school. For our research to develop, we make our Paradigmatic Matrix, based on Sánchez Gamboa ideas (2012), and used as an object of study forty-seven dissertations and theses in the period between 1990 and 2010. Among them, we find thirty dissertations and theses involving content of higher education, nineteen dissertations and theses eleven and seventeen jobs involving high school content ten dissertations and theses seven. To identify whether a dissertation or thesis addressed high school content, used as a parameter the areas of expertise of the National Examination of high school, ESMS, and to classify the higher education content, we take as reference the major areas of mathematics found at of Higher Education Personnel Improvement Coordination - CAPES. We defend the thesis that there are History Dissertations and Theses and Epistemology of Mathematics produced in graduate programs in Brazil between 1990 and 2010, with didactic potential for secondary education, which can be used to address mathematical concepts in basic education from adequate pedagogical reorganization to high school. And we try to show the wealth of material contained in these works, which may somehow be inserted into our teaching practice, focusing on those works that address high school content, because often these dissertations and theses, after advocated, they are little used and forgotten in libraries. This thesis will serve to disseminate these publications to a wider audience, to enable dissemination of mathematical content that can be explored to address mathematical concepts in basic education.

Keywords: Dissertations and theses; Postgraduate program in Brazil; History and Epistemology of Mathematics; Mathematicians content; Didactic potential; High school.

RÉSUMÉ

Ce travail provient de la production de projet de recherche Cartografias dans l'histoire des mathématiques au Brésil: une étude a porté sur dissertations et thèses entre 1990 et 2010, avec l'objectif général d'enquêter sur le potentiel éducatif de la recherche en histoire et épistémologie des mathématiques produit en dissertations et thèses en Brésil programmes d'études supérieures dans cette période, ce qui suggère des références d'apprentissage pour enseigner le contenu mathématique de l'école secondaire. Dans un premier temps, nous décrivons l'Histoire et épistémologie des articles mathématiques publié en mathématiques Réunion nationale de l'éducation - ENEM, de 1987 à 2010. Ensuite, classer les articles du Journal of Histoire des mathématiques, selon les tendances dans l'histoire des mathématiques, selon Mendes (2010, 2014), et chaque histoire de fonctionnalité et épistémologie de l'article publié en mathématiques de 2001 à 2012. nous décrivons les mémoires et les thèses produites dans Graduate Program Brésil en Histoire et épistémologie des mathématiques dans la période 1990-2010, trouvé dans les bibliothèques virtuelles, et analyser chaque publiée au cours de cette période, les sujets mathématiques sont abordés et montrant le potentiel pour l'enseignement secondaire. Pour notre recherche pour développer, nous faisons notre Matrice paradigmatique, basée sur des idées Sánchez Gamboa (2012), et utilisé comme un objet d'étude de quarante-sept mémoires et thèses dans la période entre 1990 et 2010. Parmi eux, on trouve trente mémoires et thèses impliquant le contenu de l'enseignement supérieur, dissertations dix-neuf et thèses onze et dix-sept emplois impliquant le contenu du secondaire dix dissertations et thèses sept. Pour déterminer si un mémoire ou une thèse adressées contenu du secondaire, utilisé comme paramètre les domaines d'expertise de l'examen national de la haute école, ESMS, et de classer le contenu de l'enseignement supérieur, nous prenons comme référence les principaux domaines des mathématiques trouvés au de l'enseignement supérieur du personnel amélioration de la coordination - CAPES. Nous défendons la thèse selon laquelle il y a Histoire et Mémoires Thèses et Epistémologie des mathématiques produites dans les programmes d'études supérieures au Brésil entre 1990 et 2010, avec un potentiel didactique pour l'enseignement secondaire, qui peut être utilisé pour traiter des concepts mathématiques dans l'éducation de base à partir réorganisation pédagogique adéquate à l'école secondaire. Et nous essayons de montrer la richesse de la matière contenue dans ces œuvres, qui peuvent en quelque sorte être insérés dans notre pratique de l'enseignement, en se concentrant sur les œuvres qui traitent du contenu du secondaire, parce que souvent ces mémoires et thèses, après préconisé, ils sont peu utilisés et oubliés dans les bibliothèques. Cette thèse servira à la diffusion de ces publications à un public plus large, pour permettre la diffusion de contenu mathématique qui peut être explorée pour aborder les concepts mathématiques dans l'enseignement de base.

Mots-clés: mémoires et thèses; programme de troisième cycle au Brésil; Histoire et Epistemológie mathématiques; contenu Mathématiciens; potentiel didactique; High School.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

Sumário

INTRODUÇÃO

Alguns estudiosos vêm discutindo sobre o ensino de matemática, em busca de uma abordagem diferenciada, no qual o que se ensina seja repleto de reflexão, significado, contextualizado de acordo com a realidade educacional em que o aluno se encontra. Quando falamos do ensino visando à disciplina matemática, fica mais evidente a necessidade de uma atualização de comportamento diante do modelo de ensino adotado por muitos professores dessa disciplina. É possível que uma das razões que corrobore para o insucesso dos alunos seja a maneira como os conteúdos matemáticos são ensinados, ou seja, um ensino puramente abstrato. A falta de sentido e significado para o objeto matemático em estudo pode inviabilizar o desempenho dos jovens como a sociedade espera e precisa. Algumas dessas discussões decorrem da História da Matemática.

Nas últimas três décadas, houve um grande esforço de alguns pesquisadores da Educação Matemática no sentido de criar um espaço acadêmico para a história da matemática, com o objetivo de se viabilizar a realização de pesquisas nesta área. Segundo Mendes (2012), com a criação, em 1983, do International Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM), grupo filiado à Comissão Internacional de Ensino de Matemática (ICMI) e criado durante a realização do Workshop História na Educação Matemática, ocorrido em Toronto no Canadá, começou a discussão relativa às relações entre História, Pedagogia e Sociologia da Matemática e da Educação Matemática.

As pesquisas em História da Matemática no Brasil são um pouco mais recentes, tendo se estruturado a partir de 1995 com a realização do 1º Seminário Nacional de História da Matemática e a criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHmat) no dia 30 de março de 1999, durante o III Seminário Nacional de História da Matemática (III SNHM), na cidade de Vitória, no Espírito Santo, oportunizando, assim, a criação da Revista Brasileira de História da Matemática, de cunho internacional, cuja política editorial recebe de autores de todos os países, com publicação também em outros idiomas diferentes do português, tanto de pesquisadores em história da matemática como aqueles que trabalham relacionando história da matemática e educação matemática e também filosofia da matemática. Todavia, sabemos que alguns estudos isolados relacionados a esse tema iniciaram-se em 1990, com a volta de pesquisadores que estavam em seus doutoramentos em outros países. Isso justifica o período inicial pelo qual escolhemos realizar nossa pesquisa.

A escolha por um tema que fosse relacionado com Ensino Médio vem da experiência adquirida nos meus dez anos de docência, tanto na sala de aula do Ensino Médio, como também em turmas de formação de professores.

Atualmente, sou professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB, Campus João Pessoa, lecionando em turmas do Ensino Médio integrado ao técnico, e com a minha experiência em algumas escolas particulares de Recife, a partir de 2005, como também no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco – IFPE, Campus Pesqueira, e em cursos de graduação, na Faculdade de Formação de Professores de Goiana – FFPG, Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, Faculdade Salesiana do Nordeste – FASNE e o IFPE (cursos presenciais e a distância), com turmas dos primeiros períodos, onde me deparei com alunos que terminaram recentemente o Ensino Médio. Sabemos, com a nossa experiência de quase uma década, que é uma realidade a dificuldade e o desinteresse pela Matemática por parte dos alunos, como também é comum encontrar professores que não relacionam os conteúdos programáticos com a realidade vivenciada pelos alunos. Neste sentido, a pesquisa almejou explorar as dissertações e teses em História e Epistemologia da Matemática, na perspectiva de identificar o potencial pedagógico desses trabalhos, de modo a sugerir encaminhamentos didáticos para seu uso nas aulas de matemática do Ensino Médio. Mendes (2009) afirma que uma abordagem histórica pode ser uma fonte geradora de conhecimentos matemáticos, levando os alunos à compreensão da necessidade e do surgimento de tais conteúdo.

> A pesquisa em História da Matemática e em História da Educação Matemática tem gerado valiosos resultados e apontado novos caminhos e focos de abordagem para a melhoria do processo de formação docente e de aprendizagem na Educação Matemática. Isso possivelmente ocorre porque as reflexões sobre tais estudos evidenciam a importância do processo formativo na superação de obstáculos encontrados na trajetória dos sujeitos da docência em matemática (MENDES, 2012b, p.1).

Ainda em torno dessa questão, a História da Matemática permite compreender que as teorias que hoje aparecem elaboradas elegantemente, e aparentemente concluídas, resultaram, quase sempre, de desafios enfrentados pela sociedade em geral e que os matemáticos buscaram soluções para vencer tais desafios por meio de processos de criação, recriação e descoberta. Nesse contexto, as culturas matemáticas foram sistematizadas, e uma delas, a cultura matemática escolar, foi produzida com a finalidade de ser proposta ao aluno como um saber que tem significado social e que se constitui em um dos requisitos fundamentais para sua inserção social.

Igualmente, os estudos e pesquisas em Educação Matemática nos mostram que, ao longo dos últimos vinte e cinco anos, tem sido feito um investimento intelectual muito significativo nos programas de pós-graduação de Brasil, em torno da pesquisa em História da Matemática, com a obtenção de resultados bastante satisfatórios, dentre os quais, podemos destacar a formação de grupos de pesquisa com produtividade sustentável e produção de teses e dissertações, que têm dado retorno para a formação de professores de matemática e muito contribuído para o ensino de matemática na Educação Básica. Além disso, tem-se investido fortemente na tradução de livros clássicos da área da matemática, que são importantes, como, por exemplo, o "Elementos de Euclides" [1], entre outros. Com base nos estudos em história da matemática, percebemos que se trata de um conjunto de conhecimentos em contínua transformação e que desempenha um importante papel na formação educativa da sociedade.

Para justificar nossas formas de ir em busca dessas afirmações a respeito das evidências em relação à produção em história da matemática, apoiamo-nos nos pressupostos de Sánchez Gamboa (2003, p. 403), quando assegura que

> [...] Na hora de compreender um problema, de diagnosticar uma situação problemática e de elaborar uma resposta valem todos esses elementos técnicos, desde que articulados a um procedimento científico e a uma lógica do conhecimento. O que deve estar claro é a condução do processo, e esta condução vem da concepção epistemológica na qual o pesquisador está trabalhando, e não depende da escolha ou não de uma técnica qualitativa ou não. Então, a questão da qualidade da pesquisa depende mais da lógica das articulações das formas de abordar os problemas, dos processos da elaboração das respostas para esses problemas, das formas de compreender a ciência e a produção do conhecimento, que das escolhas técnicas.

As afirmações de Sánchez Gamboa compreendem aspectos essenciais aos encaminhamentos de estudos e pesquisa no campo científico, especificamente nas pesquisas em Educação Matemática. Neste sentido, deparei-me com essa perspectiva de focar o problema da pesquisa, em agosto de 2013, ao ingressar no programa de pós-graduação em Educação, na linha de pesquisa de Educação Matemática e Ensino de Ciências em nível de doutorado, quando conheci o projeto de pesquisa intitulado *Cartografias da produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990 e 2010*, cuja pesquisa originou-se de uma proposição de classificação dos

[1] Esta obra de matemática é composta por 13 livros em que, além de definições, postulados e noções comuns/axiomas, demonstram-se 465 proposições, em sequência lógica, referentes à geometria euclidiana, à da régua e compasso, e à aritmética, isto é, à teoria dos números. Os seis primeiros livros dão conta da geometria plana; os três seguintes, da teoria dos números; o livro X, o mais complexo, estuda uma classificação de incomensuráveis/irracionais, e os três últimos abordam a geometria no espaço/estereometria.

trabalhos em História da Matemática apresentados por Sad (2005), nos Anais do VI Seminário Nacional de História da Matemática. Assim, ampliaram-se os estudos sobre a produção presente nos Anais desses Seminários Nacionais entre 1995 e 2007 (MENDES, 2008), iniciando as atividades com a investigação das dissertações e teses em 2010, coordenada pelo professor Dr. Iran Abreu Mendes, com a finalidade principal de descrever a produção cientifica na área de História da Matemática nos programas de pós-graduação *stricto sensu* do país, das áreas de Educação, Educação Matemática, Ensino de Ciências Naturais e Matemática e áreas afins, com vistas a traçar uma cartografia dos estudos em História da Matemática oriundos das pesquisas realizadas pelos estudantes de pós-graduação dos diversos programas existentes no Brasil entre 1990 e 2010, sob três dimensões: História e Epistemologia da Matemática, História da Educação Matemática e História no Ensino da Matemática.

Para essa classificação, os seguintes critérios propostos por Mendes (2010, 2014) foram tomados como parâmetro: 1) Os trabalhos considerados de História e Epistemologia da Matemática são os aqueles que tratam das produções científicas relacionadas à vida e à obra de matemáticos e ao desenvolvimento de suas ideias matemáticas, bem como o desenvolvimento da área em pauta enquanto conteúdo científico; 2) Foram considerados como trabalhos de História da Educação Matemática aqueles que tratam de estudos relacionados à história de instituições, biografias de matemáticos e professores de matemática (antigos e atuais), bem como suas contribuições para a formação de professores de Matemática e para a melhoria do ensino dessa disciplina escolar, além de, certamente, contribuírem para a constituição dos acervos documentais, das memórias e do patrimônio da Educação Matemática brasileira; 3) Os trabalhos agrupados na categoria de História no Ensino da Matemática foram aqueles que se caracterizam pela preocupação com fins pedagógicos, como elaboração de materiais didáticos para ensinar Matemática, usando fragmentos da História da Matemática, tomando como referência as tendências atuais das pesquisas em história da matemática.

No contexto do referido projeto de pesquisa coordenado por Mendes (2010, 2014), a dissertação de mestrado (Mestrado Profissional), produzida por Mello (2012), teve como principal finalidade fazer um levantamento dos produtos educacionais presentes nas dissertações de mestrado e teses de doutorado centradas no uso da História no ensino da Matemática e na Didática da Matemática com fundamentação francesa, produzidas nos programas de Pós-Graduação *stricto sensu* do Brasil entre 1990 e 2010, das áreas de Educação, Educação Matemática, Ensino de Ciências Naturais e Matemática e áreas afins, de acordo com a proposta de pesquisa apresentada por Mendes (2010). O objeto de estudo de Mello (2012) consistiu nos produtos que apresentassem propostas concretas de atividades didáticas que pudessem ser utilizadas na sala de aula da Educação Básica e na Formação de Professores de Matemática. Para perseguir seu objetivo, Mello fez um estudo bibliográfico documental no Banco de dissertações e teses da CAPES, nas bibliotecas e arquivos de alguns programas de Pós-graduação existentes no país, que focam seus estudos no tema objeto desta pesquisa, além da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDBTD) e, com base nesse levantamento, selecionou os trabalhos que apresentavam produtos educacionais materializados em blocos de atividades baseadas no uso didático da História da Matemática para a sala de aula, bem como nas sequências de atividades baseadas na Didática da Matemática e, por fim, produziu um CD-ROM, contendo as atividades selecionadas, com vistas a contribuir para apoiar o trabalho dos professores com relação ao uso dessas atividades, na forma de um material complementar ao livro didático em suas aulas de Matemática. Identifiquei que Mello (2012) preocupou-se exclusivamente com o que já havia sido produzido e estava pronto para ser usado pelos professores do ensino fundamental e médio.

No âmbito do mesmo projeto, Gonçalves (2015) elaborou sua dissertação de mestrado em Educação, tomando também como objeto de estudo as dissertações e teses defendidas no Brasil, em Programas de Pós-graduação das áreas de Educação, Educação Matemática, Ensino de Ciências Naturais e Matemática e áreas afins, entre 1990 a 2010, que tinham como área focal de pesquisa a História da Matemática e História da Educação. Todavia, seu foco central foi nas pesquisas relacionadas à História da Educação Matemática, com a finalidade de analisar de que modo as produções nesta área, no período descrito, podem contribuir para as ações didáticas dos professores que ensinam matemática na Educação Básica. Para tanto, Gonçalves (2015) verificou os tipos de abordagens metodológicas contempladas, a contribuição das mesmas num víeis didático para o ensino da matemática para a Educação Básica e a lista dos possíveis conteúdos matemáticos presentes nessas dissertações e teses analisadas. Para perseguir seu objetivo, Gonçalves (2015) também tomou o levantamento realizado na pesquisa coordenada por Mendes (2010, 2014), sobre as produções defendidas na área da História da Educação Matemática, disponíveis no banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), bem como nas bibliotecas digitais dos Programas de Pós-Graduação em *stricto sensu* do país, organizando, daí, seus critérios de identificação e classificação do material. Além disso, Gonçalves (2015) investigou as contribuições dos anais dos 10 primeiros Encontros Nacionais de Educação Matemática

(ENEM) que retrataram e estruturaram as informações acerca da consolidação do campo de pesquisa da Educação Matemática, especificamente, da área sob a qual o conteúdo dessa dissertação se apropriou. Como resultado, sua pesquisa mostrou a existência de dissertações e teses que possuem potencial didático e conceitual para uso na formação inicial e continuada de professores da disciplina matemática, porém necessitam de um pouco mais de estudo e adaptação do material produzido, para que possa usar essas informações em sala de aula.

Outra pesquisa, também vinculada ao projeto de Mendes (2010, 2014), originou a tese de doutorado de Ângelo (2014), cujo objetivo geral foi analisar reflexivamente a produção acadêmica gerada nos programas de pós-graduação *stricto sensu* do país, produzidas no período de 1990 a 2010, no campo da História da Matemática, especificamente os trabalhos que versam sobre História da Matemática no ensino de Matemática e que apresentam propostas didáticas que utilizam a História da Matemática com o intuito de ensinar Matemática. A autora partiu do pressuposto de que os trabalhos que têm a finalidade de propor o uso de proposta didática devem apresentar conexões entre os aspectos epistemológicos inerente à História da Matemática e os elementos ontológicos materializados nas concepções de Matemática, de História da Matemática e de aprendizagem Matemática. Nesse sentido, Ângelo (2014) catalogou e analisou quatorze trabalhos, dos quais nove eram dissertações de mestrado e cinco, teses de doutorado. Sua análise reflexiva apoiou-se em duas matrizes, uma de natureza teórica e outra de natureza ontológica, elaboradas pela autora, a partir dos pressupostos de Sánchez Gamboa, no que diz respeito à análise epistemológica de produções acadêmicas no campo da Educação e das seguintes perspectivas teóricas no campo da História na Educação Matemática: evolucionista linear, estrutural construtivista operatória, evolutiva descontínua, investigação histórica, sociocultural e jogo de vozes e ecos. Essas perspectivas foram fundamentadas nos trabalhos de Miguel e Miorim, Mendes e Radford. O trabalho de Ângelo (2014) constatou que havia algumas dissonâncias entre as categorias pertencentes ao nível teórico e ao nível ontológico e a proposta didática apresentada nas pesquisas. Todavia, encontrou trabalhos que estabelecem consonâncias entre os elementos teóricos e ontológicos e a proposta didática apresentada e, assim, apresentam contribuições significativas para a área da História da Matemática no Ensino de Matemática, inclusive apresentando elementos teóricos significativos para a produção do conhecimento reconhecido como científico nessa área.

Tomando como referência essas duas dissertações e uma tese já defendidas no âmbito do projeto e o andamento da pesquisa, mencionados anteriormente, decidimos focar nossa temática de tese de doutorado em um aspecto relacionado ao meu trabalho docente: os tópicos de matemática abordados no Ensino Médio. Entretanto, meu objeto de pesquisa direcionou-se para uma das dimensões da pesquisa de Mendes (2010, 2014) que ainda precisava ser investigada de modo a dar contribuições mais diretas para a formação de professores de matemática e para o ensino de matemática. Conjuntamente com o orientador, optamos por olhar as dissertações e teses que haviam sido enquadradas no tipo *história e epistemologia da matemática*, conforme descrito no quadro 01, mostrado a seguir.

Considerando o que se propôs nesse projeto, decidimos conjuntamente (orientador e orientando) tomar como objeto de estudo as dissertações e teses em História e Epistemologia da Matemática do Brasil no período entre 1990 e 2010[2], centrando o uso dessas informações históricas em tópicos do ensino médio, partindo do pressuposto de que os alunos compreendam o processo de construção da matemática em cada contexto e momento histórico específico. Entretanto, refletimos imediatamente que, em primeiro lugar, precisaríamos fazer um uma seleção das dissertações e teses, já levantadas na pesquisa de Mendes (2010, 2014).

Quadro 01: Dissertações e Teses relacionadas à História da Matemática (1990-2010)

Subáreas da História da Matemática	Nº de Dissertações	Nº de Teses	Total
História e Epistemologia da Matemática	38	24	62
História da Educação Matemática	135	48	183
História da Matemática para o Ensino	27	9	36
Total	200	81	281

Fonte: Mendes (2015, p.162)

Para essa seleção, foram tomados os trabalhos classificados como pertencentes ao grupo de História e Epistemologia da Matemática, caracterizados como aqueles que tratam das produções científicas relacionadas à vida e à obra de matemáticos e ao desenvolvimento de suas ideias matemáticas, bem como o desenvolvimento da matemática enquanto conteúdo científico. A partir dessa seleção, investigamos quais as dissertações e Teses em História e Epistemologia da Matemática que abordavam temas relacionados à matemática do Ensino Médio, a fim de identificar os seus potenciais didáticos e descrevê-los com vistas a propor encaminhamentos didáticos que possam contribuir para uma ação docente. Dividimos esses temas em duas partes: conteúdo principal focalizado, que é aquele que encontramos com mais recorrência em cada produção, e os conteúdos secundários mobilizados, que são aqueles que aparecem para fundamentar o tema principal de cada trabalho. Além de apresentar os temas

---

[2] Outros trabalhos também serão olhados nesta tese, com a mesma finalidade.

matemáticos, classificamos as dissertações e teses levando em consideração as seguintes abordagens de acordo com o quadro 02, a seguir:

Quadro 02: Abordagens das Pesquisas em História e Epistemologia da Matemática nas Dissertações e Teses publicadas no Brasil (1990-2010)

Tipos de Pesquisa	Nº de Dissertações	Nº de Teses	Total de Trabalhos	Percentual
Vida e Obra de Matemáticos e desenvolvimento de suas ideias matemáticas	18	12	30	64%
Desenvolvimento conceitual da Matemática	11	6	17	36%
Total	29	18	47	100%

Fonte: Elaboração própria com base nas ideias de Mendes (2010)

Devido às dificuldades encontradas no aprendizado de alguns conteúdos matemáticos em nível médio, consideramos pertinente realizar esta pesquisa a partir das reflexões destacadas anteriormente, centralizando nos seguintes questionamentos:

1) *Quais as dissertações e teses em História e Epistemologia da Matemática possuem potenciais conceituais e didáticos para serem usadas nas abordagens conceituais no ensino de matemática em nível médio?*
2) *De que modo esses potenciais aparecem nas dissertações e teses produzidas?*
3) *Como esses potenciais podem ser usados pedagogicamente no Ensino Médio?*

A escolha desses problemas partiu da hipótese de que *Os Conteúdos Matemáticos apresentados em algumas dissertações e Teses de História da Matemática podem contribuir para o ensino da Matemática em Nível Médio, desde que sejam analisados do ponto de vista da exploração de seus potenciais conceituais e didáticos.*

Com base nessa hipótese, pretendemos defender a tese de que *Existem Dissertações e Teses de História da Matemática produzidas nos programas de pós-graduação do Brasil entre 1990 e 2010 com potencialidades conceituais e didáticas para o Ensino Médio, que podem ser utilizados para abordar conceitos matemáticos na Educação Básica a partir de uma reorganização pedagógica adequada a esse nível de ensino.*

A partir dessas considerações, passamos a descrever os objetivos. Estabelecemos como objetivo geral:

- Investigar os potenciais didáticos das Pesquisas em História e Epistemologia da Matemática produzidas nas dissertações e teses, nos programas de pós-graduação do Brasil no período de 1990 a 2010 e sugerir encaminhamentos didáticos para o ensino de conteúdos matemáticos do Ensino Médio.

A fim de alcançar esse objetivo geral, estabelecemos como objetivos específicos:

- Caracterizar os artigos de História e Epistemologia da Matemática publicados no Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM no período de 1987 a 2010;
- Caracterizar os artigos de História e Epistemologia da Matemática publicados na Revista Brasileira de História da Matemática no período de 2001 a 2012;
- Categorizar as Dissertações e Teses em História da Matemática produzidas nos Programas de Pós-Graduação no Brasil (1990 – 2010) disponíveis nas Bibliotecas virtuais;
- Descrever as dissertações e teses produzidas nos Programas de Pós-Graduação do Brasil em História e Epistemologia da Matemática no período de 1990 a 2010;
- Analisar cada trabalho publicado neste período, verificando quais temas matemáticos do ensino médio são abordados, e apontar as possibilidades de utilização no ensino de matemática.

Na busca do alcance destes objetivos, apoiamo-nos na proposição de Sánchez Gamboa (2003, p. 403-404), quando assevera que

> a qualidade da pesquisa depende da lógica científica que fundamenta cada modelo. E essa lógica se constrói quando se articulam, técnicas, métodos, teorias numa abordagem epistemológica. Essa epistemologia que dá unidade aos processos da produção do conhecimento tem como base uma teoria do conhecimento que permite compreender os interesses que motivam e comandam o processo. Nesse nível das teorias do conhecimento podemos identificar, as perspectivas filosóficas, políticas e ideológicas e os compromissos que o pesquisador tem com a realidade que conhece e pretende conservar ou transformar.

Apoiamo-nos nas assertivas de Sánchez Gamboa por considerar que nossa pesquisa tem um apelo forte no tocante à necessidade de enveredar pelos caminhos dos estudos e pesquisas realizados na área, para compreender em que direcionamentos estão sendo norteados esses trabalhos e quais contribuições podem ser dadas à comunidade a partir desses trabalhos. Isso porque a proposta de Mendes (2010, 2014), em seu projeto de pesquisa, foi de verificar, nessas produções, os métodos de pesquisa, os temas recorrentes, as contribuições para a formação de professores e se ensinar matemática na educação básica e as contribuições para a constituição de espaços de memória.

Para que nossa pesquisa se desenvolvesse, foi necessário estabelecermos nossa *Matriz Paradigmática*, na visão de Sánchez Gamboa (2012), segundo a qual se trata de uma matriz ou esquema que se constitui de um conjunto de princípios e instrumentos construídos pelo pesquisador, entendendo-o como uma forma de materialização lógica da maneira pensada para praticar a busca de informações que, após organizadas e analisadas, constituir-se-ão no conhecimento produzido na pesquisa. Para outros pesquisadores, entretanto, trata-se da elaboração de um modelo teórico de investigação para obtenção e análise de informações, de modo a responder às perguntas de pesquisa. Em nosso estudo, a unidade básica da análise paradigmática foi estabelecida na matriz de busca da produção de conhecimento nas pesquisas sobre história e epistemologia da matemática, presente no conjunto de dissertações e teses investigadas. Essa matriz à qual me refiro está desenhada e comentada nos parágrafos a seguir e sintetizada no quadro 03.

Foi assim que, a partir dos nossas primeiras reflexões sobre o que estava sendo desenvolvido no projeto, compreendemos que, concretamente, havia necessidade de investir em uma procura de possíveis potenciais para o ensino de matemática, que pudessem ser identificados em trabalhos cujos objetivos não estavam direcionados para esse fim, como foi o caso do nosso objeto de pesquisa: as dissertações ou teses que tinham como objeto de estudo discussões e reflexões sobre a produção histórica em algum tema de matemática em uma perspectiva epistemológica, diretamente ligada à matemática, desvinculada, de certo modo, das reflexões sobre história e memória e sobre apelo pedagógico para o ensino. Entretanto, nosso foco era encontrar nesses trabalhos, potenciais para o ensino, sejam eles no campo conceitual como no campo didático. Com base nessas expectativas, perseguimos nossos objetivos norteados por um método de pesquisa e análise que se apoiasse na interpretação e compreensão das produções estudadas, e, assim, os resultados nos levaram a propor a seguinte estruturação para o nosso trabalho.

No primeiro capítulo, “Pesquisas em História da Matemática no Brasil: Encontros Nacionais de Educação Matemática – ENEM”, apresentou-se um panorama geral do ENEM, em busca do que foi publicado em História e Epistemologia da Matemática. A escolha foi devido a ser um dos mais importantes eventos em Educação Matemática do nosso país. Além de citar cada trabalho publicado, comentamos um pouco sobre cada um, apresentando, no final, os conteúdos matemáticos que foram abordados em cada artigo publicado.

No segundo capítulo, “Tendências da Pesquisa em História da Matemática, presentes na Revista Brasileira de História da Matemática (2001-2012) ”, na mesma perspectiva do capítulo anterior, apresentamos um Panorama das Revistas Brasileiras de História da Matemática, fazendo uma classificação em relação às atuais tendências em História da Matemática no Brasil, tomando como base Mendes (2010). Depois, descrevemos todas as Revistas em História e Epistemologia da Matemática.

No terceiro capítulo, iniciamos os trabalhos com as Dissertações e Teses em História da Matemática, mostramos como as atuais tendências em História da Matemática aparecem nos trabalhos publicados entre 1990 e 2010, apresentamos quais desses trabalhos abordam conteúdos Matemáticos, separando em Ensino Médio e Superior e descrevemos os trabalhos que abordam conteúdos do Ensino Superior.

Tomamos como referência para classificação os conteúdos de Ensino Superior, definidos nas grandes áreas da matemática, encontrados no site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES. São eles: Álgebra; Conjuntos; Lógica Matemática; Teoria dos Números; Grupos de álgebra não-cumulativa; Álgebra Comutativa, Geometria Algébrica; Análise; Análise Complexa; Análise Funcional não-linear, Equações Diferenciais Ordinárias; Equações Diferenciais Parciais; Equações Diferenciais Funcionais, Geometria e Topologia; Geometria Diferencial; Topologia Algébrica; Topologia das Variáveis, Sistemas dinâmicos; Teoria das Singularidades e Teoria das Catástrofes; Teoria das Folheações; Matemática Aplicada; Física Matemática; Análise Numérica; Matemática Discreta e Combinatória. Por ter identificado que nem todos esses conteúdos, nas produções das dissertações e teses, aparecem na pesquisa, optamos por fazer uma adaptação própria para mostrarmos esse estudo, classificando os conteúdos nas seguintes áreas: álgebra, análise, cálculo diferencial e integral, cálculo numérico, física matemática, geometria analítica vetorial, lógica e teoria dos conjuntos, teoria dos números e variáveis complexas. Para descrever cada trabalho, elaboramos um quadro no qual consta: Título, Autor, Orientador, Ano da Defesa, Instituição onde foi defendida, Abordagem, Conteúdo Principal Focalizado, Conteúdos Secundários Mobilizados e Resumo do trabalho[3]. No texto corrido, descrevemos os objetivos, os problemas de pesquisa, a fundamentação teórica e comentamos um pouco sobre cada capítulo do trabalho. Vejamos a seguir o quadro que usamos para a descrição dos trabalhos investigados:

[3] O resumo foi o mesmo elaborado pelos autores de cada dissertação ou tese analisadas.

Quadro 03: Descritores de análise das dissertações e teses

Título:
Autor (a):
Orientador (a):
Ano de defesa:
Instituição onde foi defendida:
Abordagem:
Conteúdo Principal Focalizado:
Conteúdos Secundários Mobilizados:
Resumo

Fonte: Elaboração própria

No quarto capítulo, deu-se ênfase aos trabalhos que apresentam conteúdos do Ensino Médio, que é o foco principal de nosso trabalho, interligando-se diretamente com nosso objetivo geral. Fazemos a descrição dos trabalhos e, em seguida, apresentamos os potenciais didáticos dessas dissertações e teses para o Ensino Médio. Também usamos o quadro 03 para a descrição dos trabalhos e apresentamos, no texto corrido, objetivos, problemas de pesquisa, fundamentação teórica e breve comentário de cada capítulo, mas com o acréscimo do apontamento das potencialidades didáticas para o Ensino Médio.

Para classificar cada trabalho voltado para o Ensino Médio, descrevemos as dissertações e teses que possuem conteúdos de Ensino médio, usando como critério as áreas de conhecimentos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM):

1) Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

2) Conhecimentos geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

3) Conhecimentos de estatística e probabilidade: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

4) Conhecimentos algébricos: gráficos e funções; funções algébricas do 1º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

5) Conhecimentos algébricos/geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

E criamos uma sexta área, que chamamos de *outros*, que contemplam aqueles conteúdos que são do Ensino Médio, mas não estão no programa do ENEM, destacando, como exemplo, os números complexos.

Por último, nossas considerações finais acerca da pesquisa realizada, com a intenção de refletir sobre o que foi realizado e direcionar os leitores para possíveis pesquisas futuras.

1 PESQUISAS EM HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO BRASIL: ENCONTROS NACIONAIS DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ENEM

Neste capítulo, serão apresentados os trabalhos que foram publicados nos anais dos ENEM, com vista ao panorama geral das pesquisas, organizados por Gonçalves (2015), posteriormente, apresentando uma síntese dos artigos que apoiaram suas pesquisas na História e Epistemologia da Matemática, mostrando, em seguida, alguns apontamentos acerca desta produção, no que se refere a conteúdos de Ensino Médio nas publicações em História e Epistemologia da Matemática.

Salientamos que o estudo sobre os trabalhos publicados do ENEM foi tomado como uma maneira de constatar, também, como há potencialidades pedagógicas nas pesquisas, uma vez que vários trabalhos são organizados das dissertações e teses produzidas nos programas de pós-graduação do Brasil.

1.1 Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM

Para entendermos melhor o cenário dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM), fez-se necessário recorrer a alguns fatos que antecedem o início da realização dos Encontros.

Para compreendermos o contexto do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), mais adequadamente se faz necessário recordar fatos anteriores ao início dos encontros. Na década de 1970, segundo Fernandes e Menezes (2004), foi caracterizado pela matemática moderna, fruto do Movimento Internacional da Matemática Moderna. É neste movimento que ocorre a produção dos livros didáticos, e, em relação ao conteúdo, o marco foi a Teoria dos Conjuntos. Ressaltamos que, na década de 1950, já havia ocorrido o Seminário de Royaumont (França), que objetivava discutir as novas perspectivas para o ensino da matemática, com ênfase na reforma do programa de matemática.

Um marco desse momento da década de 1970 foi a criação dos grupos de pesquisa, a saber: o Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM), em São Paulo, 1965, cujo objetivo principal era preparar os professores para a Matemática Moderna. O GEEM era liderado por Oswaldo Sangiorgi e Renata Watanabe e foi desativado no final da década de 1970; o Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação (GEEMPA), em Porto Alegre, 1970, surgido sob a liderança da professora Ester Pilar Grossi. Inicialmente, a ideia era atualizar professores com base nas ideias de Zoltan Paul Dienes. Depois, passou a desenvolver estudos e pesquisas sobre alfabetização em sentido amplo; o Grupo de Estudos de Matemática do Estado da Guanabara (GEMEG), no Rio de Janeiro, 1970, era liderado pelo professor Arago Backx, seguindo as ideias de Georges Papy, tendo encerrado suas atividades por falta de recursos financeiros; o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM), novo grupo em substituição ao supracitado, foi fundado em 1976, sendo eleita como presidente a professora Maria Laura Leite Lopes, que ficou por oito anos na presidência. Este grupo, em convênio com a Universidade Santa Úrsula, realizou o primeiro curso de pós-graduação *lato sensu* em Educação Matemática para seus professores e foi pioneiro com curso de Mestrado em Educação Matemática no Rio de Janeiro.

A partir do início da década de 1980, a Educação Matemática no Brasil ganhou forças com a implantação de cursos, programas e pesquisas. Neste espaço, foi fundado o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP, Rio Claro/SP, a Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, a linha de pesquisa ‘Educação Matemática’ existente no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, etc.

O ENEM representa o maior evento organizado em âmbito nacional, constituindo-se num espaço privilegiado para o intercâmbio entre professores e pesquisadores, caracterizando-se por uma vasta programação de cunho científico e pedagógico, em que são apresentadas as novas produções do conhecimento na área.

Na seção, a seguir, apresentamos um panorama geral dos trabalhos publicados nos anais dos ENEM, na intenção de identificar e destacar os primeiros sinais de pesquisas que, posteriormente, foram classificadas por Mendes (2008, 2010, 2014) em *História e Epistemologia da Matemática, a História da Educação Matemática e a História no Ensino da Matemática*[4], tendo sido apresentados durante a realização dos ENEM.

1.2 Trabalhos Publicados nos Anais dos ENEM: Um Panorama das Pesquisas

O intuito desta sessão da tese é compreender o desenvolvimento das pesquisas que foram apresentadas durante a realização de cada ENEM. Não temos pretensão de fazer uma

[4] Nos estudos e pesquisas realizados por Mendes entre 2008 e 2014 a respeito dessa temática (conforme consta nas referências), encontramos diferentes expressões como *História e Pedagogia da Matemática*, *História na Educação Matemática* e *História no Ensino da Matemática*, correspondendo ao mesmo significado. Assim, optamos por utilizar nos quadros uma única expressão *História no Ensino da Matemática*.

avaliação, mas um panorama das produções[5] (artigos científicos) que tratam da História e Epistemologia da Matemática. O objetivo é identificar os potenciais didáticos dos artigos publicados no ENEM em História e Epistemologia da Matemática para o Ensino Médio. Para tanto, iremos descrever cada trabalho e, em seguida, destacar aqueles de nosso interesse.

O Quadro 04, a seguir, como já mencionado anteriormente, apresenta as produções (comunicações científicas e relatos de experiências) que foram aceitas e disponibilizadas nos Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática. Neste espaço, destacamos as pesquisas relacionadas com a História da Matemática, de acordo com a categorização de Mendes (2010, 2014).

Quadro 04: Trabalhos que abordaram a história da Matemática e Educação Matemática nos ENEM (1987-2010)

Encontros Realizados			**Tendências dos Estudos e Pesquisas (Nº de Trabalhos)**			**Total de Trabalhos**
Ano	**Ordem**	**Cidade/Estado**	**História e Epistemologia da Matemática**	**História da Educação Matemática**	**História no Ensino da Matemática**	
1987	1° ENEM	São Paulo/SP	-	1	2	3
1988	2° ENEM	Maringá/SC	-	-	2	2
1990	3° ENEM	Natal/RN	-	-	1	1
1992	4° ENEM	Blumenau/SC	2	2	2	6
1995	5° ENEM	Aracaju/SE	4	-	1	5
1998	6° ENEM	São Leopoldo/RS	1	7	2	10
2001	7° ENEM	Rio de Janeiro/RJ	-	6	1	7
2004	8° ENEM	Recife/PE	-	6	1	7
2007	9° ENEM	Belo Horizonte/MG	1	4	2	7
2010	10°ENEM	Salvador/BA	8	30	7	45
Total			**16**	**56**	**21**	**93**

Fonte: Elaboração própria a partir de uma ampliação de Gonçalves (2015)

[5] O estudo foi feito por meio dos relatos de experiências e das comunicações científicas, por apresentarem textos completos.

De acordo com o quadro 04, é possível verificar a quantidade de trabalhos que apresentavam pesquisas relacionadas com a História da Matemática e Educação Matemática. Ressaltamos que a organização dessas publicações se deu em decorrência da familiaridade dos autores em relação ao campo de pesquisa. Neste contexto, caracterizamos, a seguir, cada artigo deste quadro, referente à coluna A, o que foi proposto desde o início, de modo a apresentarmos o desenvolvimento da História e Epistemologia da Matemática ao longo dos dez encontros. Para tanto, descrevemos as principais informações obtidas por meio da leitura das comunicações orais e dos relatos de experiências. Em seguida, analisamos e qualificamos os trabalhos de acordo com estudos desenvolvidos por Mendes (2008, 2012, 2014).

De posse dos artigos que compuseram os Anais dos ENEM (1987-2010), apresentamos as principais características que abordaram as reflexões sobre a História e Epistemologia da Matemática, caracterizadas por mostrar os pressupostos teóricos de um determinado conceito, temas específicos de Matemática, relações entre Matemática e outras áreas, aplicações da História da Matemática, História da Matemática nos livros didáticos e desenvolvimento de produções sobre História da Matemática.

Como consta nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), "conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo" (BRASIL, 1998, p. 42). Por isso, a utilização da história da matemática se torna importante, tanto para compreendermos quais os mecanismos usados para chegar a determinados conhecimentos, quanto sabermos as necessidades que os grupos sociais tiveram para formar estes conhecimentos, exercendo o papel de um recurso para se estudar a matemática, com a capacidade de resgatar a própria identidade cultural.

1.3 Trabalhos em História e Epistemologia da Matemática que Compuseram os Anais dos ENEM: Descrição e Análise

A partir deste momento, descrevemos sucintamente cada trabalho em História e Epistemologia da Matemática, coluna A do quadro 04. O objetivo é verificar quais deles apresentam conteúdos voltados para o Ensino Médio. Consideramos relevante trazer as informações dos ENEM para esta tese, por se tratar hoje do evento mais importante do Brasil referente à Educação Matemática, atualmente.

Nas edições I, II, III, VII e VIII do ENEM, não foi encontrado nenhum trabalho relacionado à História e Epistemologia da Matemática.

Os anais do IV ENEM possibilitaram identificar dois trabalhos que focavam a História e Epistemologia da Matemática. O primeiro deles foi a comunicação "Princípio de Cavalieri", escrito por Armindo Cassol, que fez uma pequena incursão pela história da Matemática, com o uso das principais linhas de pensamento para calcular volumes de sólidos. O texto apresenta o Princípio de Cavalieri e a comparação entre as ideias de Arquimedes para o cálculo de volumes. O segundo trabalho, escrito por Maria Cecília Costa e Silva e Joaquim F. Prado Ribeiro, foi a comunicação "História da Trigonometria na Grécia", apresentou a história, associada aos métodos indiretos de mensuração comuns à agrimensura, astronomia e geodesia. Neste espaço, os autores apresentaram os métodos e procedimentos para obtenção das fórmulas para a corda da metade de um arco, entre outros, de modo a elaborar tabelas de cordas da antiguidade.

Nos anais do V ENEM, verificaram-se quatro trabalhos sobre História e Epistemologia da Matemática. No primeiro, intitulado "Equação do primeiro grau - uma abordagem histórica", de Celso de Oliveira Faria e Izídia Gonçalves Piau Rodrigues, relatou-se o envolvimento deles no ensino das equações do 1º grau, com alunos da 6ª série e suas dificuldades na resolução de problemas envolvendo as equações. Em seguida, os autores mencionaram que construíram o conhecimento sobre tal conteúdo, por meio da inserção da história do desenvolvimento da álgebra. Com este aspecto, considero que a comunicação pode ser inserida na história e epistemologia da matemática, de forma que os autores utilizaram a história e epistemologia do conteúdo para desenvolver o ensino e a aprendizagem da matemática em sala de aula.

O segundo, intitulado "Números-abordagem: histórica, epistemológica, prática", de Ivete Fernandes Alves Bernardo, Luz Catalina Riveros Rivera, Maria Carolina Bonna Bosquetti, Sílvia Rugani Ribeiro de Castro Matheus e Sílvio Gomes Bispo, retratou o tema "números", no qual discutiram como se deu o desenvolvimento dos sistemas de numeração ao longo da história, passando pelas civilizações Egípcia, Babilônica, Romana e Hindu, com o intuito de descrever o Sistema de Numeração Decimal, e, em seguida, por meio da epistemologia, construíram o conceito de número. Desse modo, o resumo foi classificado na história e epistemologia da matemática, por apresentar a evolução histórica do conceito de sistema de numeração, apoiado na epistemologia do conceito de número.

O terceiro, intitulado "Conjuntos infinitos", de José Carlos Pinto Leivas, apresentou a história e evolução do conceito de infinito, de modo que chegasse à cardinalidade de conjuntos. Com isso, o autor desenvolveu o conceito dos conjuntos numéricos (Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, Reais e Complexos) por meio da história da matemática.

Assim, como os dois trabalhos anteriores, esse pode ser classificado como história e epistemologia da matemática.

O quarto, “Probabilidade – história e aplicações”, de Mercedes Puga Las Casas, com o objetivo de apresentar um pouco da história da probabilidade. É necessário salientar que o resumo não estava claro o suficiente para retirar as informações necessárias para o entendimento da classificação feita neste trabalho.

Em relação ao VI ENEM, constatou-se que havia um trabalho que abordavam a História e Epistemologia da Matemática, intitulado “A matemática do século XVIII em Portugal: o critério de convergência de José Anastácio da Cunha”, de autoria de Inocêncio Fernandes Balieiro apresentou os conceitos matemáticos por meio da história e epistemologia da matemática. Retratou a formalidade (estrutura axiomática, lógica e o rigor) e os trabalhos que foram desenvolvidos, com destaque para aqueles que não foram publicados no idioma oficial da comunidade, ou, ainda, por pessoas que residiram em países distantes dos centros matemáticos. Neste espaço, o autor apresenta J. A. da Cunha e sua influência em livros-texto atuais de análise como critério de Cauchy ou critério Bolzano-Cauchy para verificar a condição necessária e suficiente da convergência de séries.

Ao verificar os anais do IX ENEM, foi possível identificar um trabalho que representava a história e epistemologia da matemática. O relato de experiência “História da Matemática na educação matemática: espelho ou pintura?”, de Cristina Dalva Van Berghem Motta, mostrou a história e epistemologia da matemática, de modo a favorecer os principais aspectos da história da matemática na educação. De modo geral, a autora percorre os instrumentos de aquisição do conhecimento que integram a esfera biológica do indivíduo e não dependem do meio histórico ou cultural. Remeteu à história das ciências para responder a uma necessidade interna da epistemologia e à crença na possibilidade de explicar a origem e a natureza do conhecimento matemático. Neste espaço, a autora apresentou a perspectiva sociocultural de Radford e Furinghetti que enxergam o conhecimento matemático como resultante da negociação social de significados e a História da Matemática como uma fonte de experiências humanas que podem ser trabalhadas nas atividades didáticas em matemática, por meio de diálogo com as práticas atuais e o contexto da época da produção do conceito.

Por conseguinte, a autora entende a importância das crenças no processo de ensino e aprendizagem de matemática que pode ser um dos caminhos para a integração da História da Matemática em Educação Matemática, como forma de ajudar a promover uma interlocução entre as diferentes culturas em diferentes épocas. Desse modo, estudar a História da Matemática como uma das múltiplas manifestações culturais da humanidade torna o conhecimento matemático significativo e facilita o entendimento das relações entre este conhecimento e o homem, em um dado contexto cultural.

No X ENEM, foi possível verificar 46 trabalhos que envolviam a história da matemática, dos quais oito apresentavam História e Epistemologia da Matemática. O trabalho "O quinto postulado apresentado como história de problemas", de Línlya Natássia Sachs Camerlengo de Barbosa, mostrou uma reflexão sobre a forma de apresentar a história das geometrias não-euclidianas. Neste contexto, a autora apresentou a história como "história de problemas", em que a história caracteriza-se pela apresentação de problemas, e não pela apresentação de períodos. Assim, foi introduzida uma discussão acerca do quinto postulado de Euclides, algumas tentativas de prova e, para finalizar, a convicção na possibilidade de construção de outras geometrias, negando o postulado das paralelas. Portanto, a autora, com uso da história e epistemologia da matemática, desenvolveu o conceito do quinto postulado de Euclides.

João Cláudio Brandemberg apresentou o trabalho "Uma classificação do desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de grupo a luz dos processos de pensamento matemático avançado", com o objetivo de indicar algum caminho para o desenvolvimento de uma abordagem no processo de ensino-aprendizagem do conceito de grupo. O autor utilizou a história do conceito de grupo com vistas a obter subsídios para minimizar obstáculos de aprendizagem encontrados no ensino deste conceito. Os aspectos históricos relacionados ao conteúdo constituíram num componente importante para a descrição dos processos de pensamento matemático e a consolidação da aprendizagem da disciplina.

O trabalho intitulado "A origem do zero e suas abordagens nos livros didáticos", de Tássio de Oliveira Araújo, construiu a trajetória do desenvolvimento do zero por meio da história, com ênfase na compreensão e presença nos livros didáticos. Para tanto, considerou a dissertação de Padrão (2008) como base para relatar essa origem e evolução histórica nas diversas civilizações antigas. Confirmou ainda que os pressupostos da Educação Matemática não são trabalhados na fundamentação do conceito [número zero]. Neste contexto, eram fundamentais alguns questionamentos referentes à origem dos símbolos (números) e apontamentos sobre a necessidade de inventar ou criar uma forma, um modo de fazer a representação da contagem.

Após a caracterização inicial sobre a representação do zero nas diversas civilizações antigas, o autor apresentou algumas inquietações acerca da conceituação do número zero nos livros didáticos. Neste espaço, afirmou que esse conceito mereceria maior destaque nos níveis elementares de ensino, pelo fato de que facilitaria a compreensão mais detalhada dos sistemas de numeração criados pelos antepassados e de sua influência para esta formação. Para confirmar isso, destaca que alguns autores mencionam que o zero não é utilizado no quotidiano. Assim,

> O zero como número não representava nenhuma quantidade, assim podemos pensar que não haveria necessidade de representação, pois era uma situação que antecedia a aquisição do bem ou da riqueza, que seria representada pelo número 1. Em situações do dia-a-dia, dificilmente se utiliza o zero em uma operação (PADRÃO, 2008, p.68).

Com isso, Araújo relata a necessidade e importância de estudos de natureza epistemológica no processo de investigação e caracterização dos conteúdos matemáticos, sinalizando a História e Epistemologia da Matemática como o meio de inter-relação com o desenvolvimento da aprendizagem do conceito do número zero.

O trabalho intitulado "Os paradoxos no desenvolvimento da Matemática: possíveis contribuições para o ensino e a aprendizagem", de Inocêncio Fernandes Balieiro Filho, apresentou alguns momentos históricos da Matemática em relação aos paradoxos, de modo que foi possível identificar as contradições e reafirmações ao longo do tempo dos conceitos matemáticos. Para tanto, o autor descreveu a função dos paradoxos, as revoluções, as transformações e as contribuições dos diversos períodos para o progresso da Matemática. Dessa forma, discutiu a construção axiomática e formalização de conceitos, apontamentos sobre os paradoxos como um recurso para o ensino e a aprendizagem da disciplina Matemática, bem como as curiosidades, motivações decorrentes dos pressupostos lógicos e argumentativos dessa Ciência. Neste sentido, Balieiro Filho apresentou o paradoxo como uma palavra que possui uma gama de significados, porém esclareceu que o vocabulário utilizado na construção do artigo constituía numa afirmação ou crença contrária às expectativas, que provoca uma reação de surpresa e perplexidade.

Durante o texto, identificamos o uso da História e Epistemologia da Matemática, com a apresentação de elementos históricos para a construção de significados, detalhamento de uma época e caracterização de elos entre matemáticos e suas contribuições acerca de fórmulas (significado e funcionalidade). A evolução da Matemática em diferentes períodos e os impactos dos paradoxos para o refinamento e a reformulação de conceitos, bem como a ampliação de teorias existentes, foram algumas informações presentes neste artigo. O autor preocupou-se em expor historicamente as inconsistências lógicas e o 'rigor' inerente à época, presentes desde o nascimento de conceitos, por meio de discussões apoiados na História e

Epistemologia da Matemática como recurso metodológico, com o contributo de atividades, oferecendo aos docentes a oportunidade de ampliar seus conhecimentos com as informações históricas e filosóficas. Assim, segundo o autor, essas informações são relevantes para os docentes, com vistas a desenvolver a capacidade de promover ambientes propícios para o debate, caracterizando a evolução das ideias da Matemática, bem como de seus conceitos e teorias.

O trabalho de Andressa Cesana Biral, intitulado “Problemas práticos de trigonometria em livros didáticos dos séculos XVIII, XIX e XX”, examinou o problema trigonométrico sobre como encontrar a altura de um objeto vertical de base acessível, proposto em livros didáticos. Essa produção representou um recorte da dissertação da autora que analisou dez livros, dos quais nove apresentaram esse problema e sua respectiva solução. Ela relatou que sua pesquisa constituía numa análise documental, caracterizada pelo uso da História e Epistemologia da Matemática como recurso metodológico para o ensino de Matemática.

Na concepção da autora, a pesquisa histórica em Educação Matemática favorece para a aprendizagem de conceitos e, ao examinar a resolução de um problema trigonométrico num determinado tempo, fornece ferramentas importantes para fazer o julgamento crítico do ensino de Trigonometria atual. Neste contexto, apresentou suas constatações acerca de um livro didático, expressando os principais elementos e justificando como o seu trabalho pode servir como um parâmetro para os professores de Matemática.

O trabalho intitulado “O declínio da cultura Grega e o desenvolvimento da Matemática até a Idade Média: em busca de uma compreensão sociológica”, de Maria Deusa Silva, mostrou o conhecimento matemático por ocasião da sociologia da matemática, de modo a explicar o crescimento da matemática e seu distanciamento de suas origens. Para tanto, aprofundou seus estudos no declínio da cultura Grega antiga, em particular da matemática, por meio do qual discutiu a produção do conhecimento matemático nas sociedades greco-romana, hindu-árabe e medieval.

Esse trabalho foi estruturado por secções que apresentaram a História e Epistemologia da Matemática com o objetivo de expor o desenvolvimento sociológico da Matemática. Na segunda secção, “declínio da cultura grega”, a autora descreveu aspectos relevantes da civilização Grega, com vistas a favorecer os dados históricos, geográficos, entre outros. Neste contexto, mencionou sobre o arquiteto Vitrúvio e suas relações com os conteúdos de matemática, relacionando as descobertas feitas pelo arquiteto, como, por exemplo, a irracionalidade da diagonal do quadrado de lado 1 (um). Ainda nesta secção, apresentou a ascensão do cristianismo no mundo greco-romano, bem como as obras sobre astronomia e as contribuições dos trabalhos de Diofanto e Pappus para o desenvolvimento do cálculo. Assim, ao término de seu artigo, considerou a consolidação dos conceitos matemáticos atrelados às condições sociais, culturais, políticas e religiosas em cada época (momento histórico).

Outro trabalho publicado foi "O infinito e o uso sagrado das formas geométricas na Obra de Nicolau de Cusa", de Tercio Girelli Kill, que apresentou um recorte de uma pesquisa de doutorado, cuja intenção era ilustrar e analisar os usos e apropriações de formas geométricas aliadas ao conceito de infinito, na obra do Cardeal alemão Nicolau de Cusa (1401-1464). Inserido na História e Epistemologia da Matemática, o texto descreveu sobre o valor simbólico, para a doutrina cristã, de algumas figuras geométricas na Idade Média e ilustrou a maneira pela qual a matemática tornava-se útil na apreensão das coisas divinas, conforme a obra de Nicolau de Cusa.

O autor situou os leitores acerca do contexto medieval ocidental, na qual a Igreja Católica gerou repercussões na maneira de pensar e nas diferentes formas de comportamento daqueles tempos. Ressaltou que a produção intelectual ficava com a Igreja Católica, bem como as representações artísticas e arquitetônicas próprias. No contexto, mostrou que as produções de Nicolau de Cusa não envolveram apenas a filosofia e a teologia, mas também contemplava, em certa medida, a matemática. Assim, o autor revelou que existia uma correspondência entre entes geométricos e o divino, com uma característica comum a ambos, o infinito.

O trabalho intitulado "A importância da obra de Bernhard Varenius", de Aline Mendes Penteado, apresentou resultados parciais de uma pesquisa de mestrado, inserida na área de História da Matemática. O objetivo era construir, por meio da interpretação histórica, a difusão do conceito de loxodromia (espiral logarítmica). Para tanto, a autora analisou textos de Pedro Nunes (1502-1578) e Bernhard Varenius (1622-1650), com vistas a observar as similaridades em relação à curva loxodrômica, considerando dois séculos (XVI e XVII), nos países de Portugal e de Holanda. A escolha feita por Penteado corresponde ao período em que esses dois autores viveram nesses países, enquanto os países eram considerados as principais potências navais e econômicas.

O contexto histórico refletiu que, nesse período, diversos países europeus estavam preocupados com as Grandes Navegações (descobertas e explorações de novas terras e a intensificação do comércio), e essas condições foram favoráveis para o desenvolvimento da geografia, como também da matemática nela inserida. Neste sentido, a autora retratou um pouco da biografia de Bernhard Varenius, mostrando a relação dele com o contexto histórico. A intenção foi apresentar a Obra Geografia Geral como a primeira obra moderna de

Geografia, constituindo-se como resultado do novo tipo de racionalidade que estava emergindo na sua publicação. Na sequência do texto, Penteado enumera alguns tópicos que estão relacionados com a importância da obra, a saber: 1) ele fez a distinção entre Geografia Geral (Absoluta) e Especial (Relativa); 2) pela sistematização que ele realizou dos conhecimentos que se possuía sobre nosso planeta, em meados do século XVII, elaborando uma geografia matemática baseada nas teorias científicas da época; 3) foi a primeira obra que adotou o sistema copernicano e 4) relação com a matemática.

1.4 Anais dos ENEM: Apontamentos Conclusivos

Podemos verificar que, incialmente, não se publicava no ENEM com tanta frequência trabalhos na área de História da Matemática, mas, com o passar do tempo, até o IX ENEM, a média de trabalhos publicados não chegava a seis por evento, tendo o VI ENEM apresentado dez publicações. A partir da décima edição, houve um aumento considerável, pois foram publicados 45 trabalhos na área de história da matemática, sendo apenas sete na área de História e Epistemologia da Matemática. No quadro 05, apresentamos uma divisão dos trabalhos em História e Epistemologia da Matemática em relação aos seus conteúdos e verificamos um quantitativo maior de trabalhos publicados que abordam conteúdos do Ensino Superior. Mais adiante, constatamos que as dissertações e teses publicadas na área, também em sua maioria, referem-se a conteúdos do Ensino Superior. Vejamos no quadro 05:

Quadro 05: Trabalhos de História e Epistemologia da Matemática publicados no ENEM (1987-2010)/Níveis de Conteúdos Abordados

Níveis	A
Educação Básica	6
Ensino Superior	10
Total	16

Fonte: Elaboração Própria com base na Pesquisa de Gonçalves (2015)

Legenda:

A: Trabalhos em História e Epistemologia da Matemática Pulicados no Encontro Nacional de Educação Matemática (1987-2010)

No quadro 06 adiante, podemos verificar uma comparação feita entre o número de trabalhos publicados e aqueles que se referem à História e Epistemologia da Matemática. Vejamos o quadro:

Quadro 06: Trabalhos publicados nos Anais dos ENEM (1987-2010): comunicações científicas e relatos de experiências

Encontros Realizados			Publicações do ENEM	
Ano	**Ordem**	**Cidade/Estado**	**N° de Trabalhos Publicados**	**N° de Trabalhos sobre História e Epistemologia da Matemática**
1987	1° ENEM	São Paulo/SP	77	-
1988	2° ENEM	Maringá/SC	92	-
1990	3° ENEM	Natal/RN	81	-
1992	4° ENEM	Blumenau/SC	61	2
1995	5° ENEM	Aracaju/SE	152	4
1998	6° ENEM	São Leopoldo/RS	282	1
2001	7° ENEM	Rio de Janeiro/RJ	177	-
2004	8° ENEM	Recife/PE	236	-
2007	9° ENEM	Belo Horizonte/MG	400	1
2010	10°ENEM	Salvador/BA	865	8
Total			**2 423**	**16**

Fonte: Elaboração Própria com base na Pesquisa de Gonçalves (2015)

De acordo com Gonçalves (2015), a consolidação da Educação Matemática como campo de pesquisa foi determinada pela criação dos programas de pós-graduação em educação, educação matemática, ensino de ciências e matemática, entre outros.

Por conseguinte, ressaltamos que essa pesquisa nos Anais do ENEM, baseada em Gonçalves (2015), mostrou que a consolidação da área da História da Matemática ocorreu apenas na décima edição do Encontro, em 2010. E, com isso, em 2013, já se formou um eixo de Pesquisa na área de História da Educação Matemática com um aumento considerável das produções divididos em seis subeixos: História da Educação Matemática e Cultura; História da Educação Matemática e Matemática; História da Educação Matemática e Filosofia; História da Educação Matemática e Formação de Professores; História da Educação Matemática e História da Educação Matemática e suas fontes de pesquisa. Em 2016, no XII ENEM, a tendência é que o número de trabalhos em História da Matemática cresça ainda mais, pois são quatro eixos temáticos voltados para História da Matemática: Histórias de formação de professores de matemática, com a coordenação dos professores Vicente Garnica, Luzia Aparecida de Souza e Maria Laura Magalhães Gomes; História da Educação Matemática e Ensino, com a coordenação dos professores Wagner Valente, Claudia Regina Flores e Maria Célia Leme da Silva; História da Educação Matemática: grupos culturais específicos, a produção científico-acadêmica em Educação Matemática e seus agentes, coordenado por Cristiane Coppe de Oliveira, e, por fim, História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática, coordenado pelos professores Iran Abreu Mendes e Miguel Chaquiam.

Isso evidencia que os trabalhos em História da Matemática vêm aparecendo com mais frequência no ENEM com o fortalecimento dos Grupos de Pesquisas na área, o que pode estar relacionado ao aumento do número de dissertações e teses nesta área e que identificamos, ao longo desta pesquisa, como será tratado no terceiro e quarto capítulos.

No próximo capítulo, apresentamos um panorama geral das Revistas Brasileiras de História da Matemática (2001 – 2012), a escolha dessas Revistas se justifica pela sua importância na área de História da Matemática. Fazemos uma classificação em relação às atuais tendências em História da Matemática no Brasil, tomando como base Mendes (2010), depois descrevemos todas as Revistas em História e Epistemologia da Matemática.

2 TENDÊNCIAS DA PESQUISA EM HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PRESENTES NA REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA (2001 – 2012)

Este capítulo refere-se a um estudo sobre Tendências da Pesquisa em História da Matemática na Revista Brasileira de História da Matemática, que teve como objetivo compreender as três tendências de pesquisas mencionadas anteriormente, para que, logo em seguida, pudéssemos usar esse conhecimento para classificar as dissertações e teses em história da matemática (1990-2010), no intuito de, por fim, selecionar a tendência escolhida de nossa pesquisa e analisar o prometido em nossos objetivos.

A *Revista Brasileira de História da Matemática* é um boletim científico, de caráter internacional, no qual são publicados trabalhos acadêmicos originais sobre História da Matemática em geral e sobre suas relações com outros campos como a Educação Matemática e a Filosofia da Matemática. Eventualmente, são publicadas resenhas de livros e de dissertações, e notas referentes a projetos de investigação científica.

Inicialmente, agrupamos os artigos publicados na Revista Brasileira de História da Matemática em cada uma das três tendências e elaboramos um quadro com o número de artigos publicados em cada volume. Em seguida, comentamos sobre cada volume da referida revista referente à História e Epistemologia da Matemática. Nossa escolha por esse periódico ocorreu por causa da sua importância para a área de pesquisa em âmbito nacional e internacional, e ainda pela qualidade dos trabalhos publicados sobre a temática central de uma pesquisa para a elaboração de uma tese de doutorado.

Para localizar cada artigo referente aos doze volumes, procuramos, inicialmente, no site da Revista e verificamos que nem todos os exemplares estavam postados na época da pesquisa. Agora, o site encontra-se atualizado, constando já todos os volumes, com exceção do primeiro. Em seguida, recolhemos outros volumes impressos, de modo a totalizar todos aqueles de que necessitávamos para o estudo.

Salientamos que se tomou o estudo sobre os artigos publicados na Revista Brasileira de História da Matemática como uma maneira de constatar, também, como há potencialidades pedagógicas nos artigos, uma vez que vários deles são organizados das dissertações e teses produzidas nos programas de pós-graduação do Brasil.

Antes de analisar cada revista, organizamos um arquivo digital contendo o título, o nome do autor e o resumo. Para viabilizar a segunda etapa da pesquisa, que foi a classificação dos artigos nas três categorias citadas, apresentaremos um quadro com essa classificação e, em seguida, faremos nossos breves comentários sobre os volumes publicados na Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), cujos artigos tratam diretamente da história e Epistemologia da Matemática. Vejamos o quadro a seguir:

Quadro 07: Artigos publicados na Revista Brasileira de História da Matemática - RBHMat (2001 – 2012)

Volumes Publicados na SBHMat	Tendências identificadas nos trabalhos			Nº de trabalhos publicados
	História e Epistemologia da Matemática	História da Educação Matemática	História no Ensino de Matemática	
VOL. 1/Nº 1	04	01	-	05
VOL. 1/Nº 2	04	01	-	05
VOL. 2/Nº3	04	01	-	05
VOL. 2/Nº4	03	01	-	04
VOL. 3/Nº5	05	-	-	05
VOL. 3/Nº6	04	01	-	05
VOL. 4/Nº7	02	02	-	04
VOL. 4/Nº8	02	02	01	05
VOL. 5/Nº9	04	01	-	05
VOL. 5/Nº10	04	01	-	05
VOL. 6/Nº11	03	02	-	05
VOL. 6/Nº12	03	02	-	05
VOL. 7/Nº13	06	03	-	09
VOL. 7/Nº14	04	02	-	06
VOL. 8/Nº15	03	03	-	06
VOL. 8/Nº16	04	01	-	05
VOL. 9/ Nº17	07	-	-	07
VOL. 9/Nº18	06	-	-	06
VOL 10/Nº19	04	02	-	06
VOL 10/Nº20	05	01	-	06
VOL 11/Nº21	03	03	-	06
VOL 11/Nº22	05	-	-	05
VOL 11/Nº23	09	02		11
VOL 12/Nº24	03	02	-	05
VOL 12/Nº25	04	02	-	06
Total	105	36	1	142

Fonte: Elaboração Própria

2.1 Comentários Gerais Sobre os Volumes Mencionados no Quadro

O volume 1, Nº 1, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado no início do ano de 2001, com cinco artigos, quatro em História e Epistemologia da Matemática, tendo sido o primeiro deles escrito por Ubiratan D'Ambrosio, intitulado *"A Matemática na época das Grandes Navegações e Início da Colonização"*, no qual ele tratava dos conhecimentos matemáticos que possuíam os navegantes ibéricos, os conhecimentos matemáticos de outras nações europeias e os conhecimentos matemáticos encontrados nas novas terras.

O segundo trabalho foi publicado por I. Grattan-Guinness, em inglês, cujo título foi *"Manifestations of Mathematics in and Around the Christianities: Some Examples and Issues"*, que examina onde a matemática representa papéis na formação e nos textos canônicos do Cristianismo e em seus artefatos. Nele são encontradas especialmente fontes pré-cristãs na matemática egípcia e na grega, e o último vínculo sugere algumas relações históricas a movimentos que conduzem à Maçonaria.

No terceiro trabalho, escrito por Hans Wubing, em inglês, cujo título foi *"Implicit Group Theory in the Domain of Number Theorie, Especially Gaus and the Group Theory in his "Disquisitiones Arithmeticae (1801)"*, foi feita uma análise sobre o implícito aparecimento da Teoria dos Grupos, no domínio da Teoria dos números, na obra "Disquitiones arithmetic", de Carl Friedrich Gauss.

O quarto artigo escrito por Eduardo L. Ortiz, *"Proyectos de Cambio Científico y Proyectos de Cambio Político em la Tercera República: El Caso de La Teoría de los Cuaterniones"*, escrito em espanhol, tem foco no processo de aceitação dos números complexos com entidades próprias, a descoberta da interpretação geométrica dos números complexos, ajudando na introdução da álgebra vetorial.

O volume 1, Nº 2, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em outubro de 2001, com cinco artigos, sendo quatro sobre História e Epistemologia da Matemática– o primeiro, *"A Perspectiva Exata e o Desenvolvimento da Geometria Ótica"*, escrito por Júlio Roberto Katinsky. Este texto propõe a "perspectiva exata" de Brunelleschi e Alberti como a passagem do conceito euclidiano de geometria dos sólidos para o espaço tridimensional cartesiano. Discute também a ideologia nacionalista germânica presente no livro de Erwin Panofsky, "A Perspectiva como forma simbólica".

O segundo artigo escrito é de autoria de Rosa Lúcia Sverzut Baroni, escrito em inglês e intitulado *"Aspects of Differential Equations in José Anastácio da Cunha's Mathematical*

Principles". O terceiro artigo, escrito em espanhol, por Alejandro R. Garciadiego, *"Uma Interpretación Alternativa de Um Concepto Matemático. El Caso de La Paradoja de Burali-Forti"*. Neste artigo, o autor discute brevemente algumas das tentativas frustradas de Philip Joudain (1879-1919) de demonstrar o "Teorema da Boa Ordem", que incluiu o uso construtivo do argumento contraditório, hoje conhecido como o "Paradoxo de Burali-Forti". O autor ainda propõe um exemplo de argumento matemático que foi entendido e usado de maneiras alternativas por matemáticos conteporâneos.

O quarto e último trabalho deste volume foi escrito em inglês por Luis Manuel Ribeiro Saraiva, *"Garção Stockler and the Foundations of the Calculus at the end of the 18th Century"*, integrando a obra de Stockler no contexto do debate que se desenvolve no século XVIII sobre os fundamentos do cálculo e caracterizando os principais aspetos desta importante obra da Matemática portuguesa. Classificamos este trabalho como História e Epistemologia da Matemática.

O volume 2, Nº 3, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em abril de 2002, com cinco artigos, quatro de História e Epistemologia da Matemática. O segundo artigo, de Gert Schubring, foi escrito em inglês, e o título é *"A Framework for Comparing Transmission Processes of Mathematics to the Americas"*. O primeiro trabalho escrito por Sérgio Nobre foi *"Introdução à História da História da Matemática: Das origens ao século XIII"*, texto em que o autor tem por objetivo apresentar uma visão geral sobre a história da escrita da História da Matemática, desde os primórdios até o final do século XVIII.

O terceiro trabalho escrito por Lígia Arantes Sales é *"Problemas Epistemológicos no Período de Emergência do Cálculo Infinitesimal"*, artigo em que se propõe uma análise epistemológica de alguns importantes resíduos históricos inerentes ao cálculo infinitesimal. Essas produções matemáticas históricas desenvolveram ideias férteis que ela vê relacionadas ao Cálculo até hoje.

O quarto trabalho, escrito em espanhol por Mario H. Otero, é *"La Utilidad como Presunta Retorica en Textos de Matemáticas"*, que classificamos como História e Epsitemologia da Matemática. E o último artigo, escrito por Renata C. Geromel Meneghetti e Irineu Bicudo,*"O que a História do Desenvolvimento do Cálculo pode nos Ensinar quando Questionamos o Saber Matemático, seu Ensino e seus Fundamentos"*, classificado, em nossa pesquisa, como História e Epistemologia da Matemática, focando, principalmente, na história do desenvolvimento do cálculo, com o propósito de mostrar que existe uma profunda relação entre o caminhar da filosofia da matemática, o da história da matemática, o da própria matemática e, em consequência, o da educação matemática e também aborda a**s** posturas filosóficas de Leibniz e Newton e suas contribuições para a edificação do Cálculo.

O volume 2, Nº 4, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em outubro de 2002, com quatro artigos, três em História e Epistemologia da Matemática, o primeiro escrito por Manoel de Campos Almeida, *"Talhas Numéricas e o Antigo Testamento"*. Este artigo mostra quando as Talhas numéricas foram empregadas pela primeira vez, pelo menos, há quarenta mil anos e comenta que elas podem ter sido um método de contabilidade primitivo, mostrando o emprego destas técnicas em textos bíblicos.

O segundo artigo, escrito por José Ferreirós, *"O Surgimento da Abordagem Conjuntista em Matemática"*, faz uma revisão de algumas das ideias centrais que o autor apresentou em uma tentativa para analisar o desenvolvimento da abordagem conjuntista em matemática, entre os anos 1850 e 1920. O foco central são pontos de vista que podem ser considerados como representantes de novos direcionamentos na historiografia de matemática recente, como a ênfase em escolas de pesquisa e a atenção para os contextos institucionais. Para complementar a já famosa história do trabalho de Cantor e Dedekind, discutiu-se, principalmente, a contribuição pioneira de Riemann e o papel de Hilbert na virada do século.

O terceiro artigo foi escrito em inglês, por George Gheverghese Joseph, **"***The Enormity of Zero"*, e fala sobre a origem do zero, o seu significado, o zero em várias culturas, o direcionamento dado pelo ocidente, conceito do zero hindu e as suas operações aritméticas.

O volume 3, Nº 5, publicado em abril de 2003, foi uma edição temática, cuja origem se deu a partir do 4º Encontro das Jornadas Unespianas de História da Matemática, cujo tema foi *David Hilbert e os Problemas Matemáticos para o século XX - Cem anos de História*. Os textos aqui publicados são frutos da Jornada realizada em novembro de 2000, no Departamento de Matemática da Unesp, campus de Rio Claro. Este volume traz uma conferência proferida por Hilbert sobre Problemas Matemáticos no 2º Congresso Internacional de Matemáticos realizado em Paris em 1900, 6 problemas de Hilbert (Problemas: 1, 2, 3, 6, 7 e 18) e 5 artigos, dentre eles, quatro análises dos problemas de Hilbert, o primeiro escrito por Irineu Bicudo, *"A Hipótese do Continuum ou o Primeiro Problema de Hilbert"*, o segundo escrito por Jairo José da Silva, *"O Segundo Problema de Hilbert"*, o terceiro por Antônio Conde, *"O Terceiro Problema de Hilbert",* o quarto por Wilson Castro Ferreira Jr., *"O Sexto Problema de Hilbert: Quando o fim se tornou método"* e um artigo publicado por Ubiratan D' Ambrosio sobre um Matemático que estava presente no 2º Congresso Internacional de Matemática de 1900.

O volume 3, Nº 6, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em outubro de 2003, com cinco artigos, sendo quatro deles sobre História e Epistemologia da Matemática, e o primeiro, escrito por Paulus Gerdes, *"Níjtyubane – Sobre Alguns Aspectos da Cestaria Bora na Amazônia Peruana"*, analisando alguns aspectos geométricos da cestaria Bora na Amazónia peruana, em particular, de cestos de rebordo circular e de fundo entrecruzado chamados *níjtyubane*, comparando-os com cestos similares doutras culturas. Estudam-se elementos da sua fabricação, bem como da criação e da transformação de padrões geométricos. Apresenta-se um esboço do desenvolvimento histórico, destacando-se a semelhança e a diversidade cultural.

O segundo artigo, escrito por Marcos Vieira Teixeira, intitula-se *"Uma Análise Histórica de Alguns Aspectos do Texto "Na Essay on The Aplication of Mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism", de George Green"*. Este artigo apresenta uma análise das seções 1 a 4 da terceira parte do "An Essay on the Aplication of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism", de George Green. Nessas seções é que aparece o que, hoje em dia, chamamos primeira fórmula de Green e teorema de Green, também chamada Segunda Fórmula de Green.

O terceiro artigo, escrito por Edgardo Fernández Stacco, "La Matemática em La Argentina entre las Guerras Mundiales", mostra o que estava acontecendo em relação à matemática na Argentina no período entre Guerras, com a chegada de estrangeiros no país, com destaque pelo autor para a chegada de Rey Pastor, o amadurecimento da matemática na Argentina, entre outros acontecimentos da época.

O quarto trabalho escrito em espanhol, por Mario H. Otero, *"Una Filosofia Histórica de las Matemáticas em Collins (1998)"*, é um artigo que fala como Randall Collins enfatiza a natureza essencialmente social e histórica da matemática, como sua filosofia da matemática adquire um caráter peculiar que merece ser destacado.

O volume 4, Nº 7, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em abril de 2004, com quatro artigos e três resenhas. Para nossa classificação, utilizaremos apenas os dois artigos referentes à História e Epistemologia da Matemática, o primeiro deles, escrito por Carlos Ziller Camenietzki, Luís Miguel Carolino e Bruno Martins Boto Leite, *"A disputa do Cometa: Matemática e Filosofia na controvérsia entre Manuel Bocarro Francês e Mendo Pacheco de Brito acerca do Cometa de 1618"*. Neste artigo, o autor pretendeu demonstrar o importante papel que os diferentes sistemas filosóficos tiveram no debate matemático sobre cometas. Ele centra-se na controvérsia sobre o cometa de 1618 em Portugal e, em particular, na polêmica que opôs, de forma impetuosa, os matemáticos portugueses Manuel Bocarro Francês e Mendo Pacheco de Brito.

O segundo trabalho, escrito em inglês, por Tibor Frank, *"George Pólya and the Heuristic Tradition"*, mostra como o pensamento heurístico tornou-se uma ferramenta e um método para uma geração inteira de cientistas. Traçando as origens deste método à matemática e à educação científica em Budapeste, por volta do século XIX, o autor mostra como até mesmo a Competição Matemática de Stanford (1946-1965) estava arraigada na Competição de Eötvös, organizada em Budapeste desde 1894. Ele afirma que os críticos tinham razão ao notar que a influência de Pólya se estendia além da comunidade da educação matemática: em muitos casos, ajudou na transferência da grande tradição liberal de raciocínio independente e da tática de resolver problemas da Hungria e do Império Austro-húngaro para os Estados Unidos. Classificamos em História e Epistemologia da Matemática.

O volume 4, Nº 8, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em outubro de 2004, possui uma nota sobre a morte *"Mariano Hormigón Blánquez"*, feita por Ubiratam D'Ambrosio, cinco artigos, dois de História e Epistemologia da Matemáticae uma resenha. Iremos utilizar em nosso trabalho apenas os artigos, o primeiro deles escrito por Luiz Carlos Arboleda e Luiz Cornelio Recalde**,** *"Baire, Fréchet y los inicios de la Topologia de Conjuntos de Puntos"*, o objetivo deste artigo é o de avançar o estudo da influência de René Baire nas investigações de topologia, Maurice Fréchet em conjuntista e teoria da dimensão. Especificamente alguns aspectos que mobilizaram o pensamento de Fréchet analisados e concretos permitiram vários tópicos relativos à convergência generalizada de seqüências, a noção de invariância na passagem ao limite, a caracterização da estrutura do espaço "dimensão zero" e algumas outras noções topológicas. Baire teve que incorporar a teoria de funções às suas pesquisas.

O segundo artigo, escrito por Bruno Alves Dassie e João Bosco Pitombeira de Carvalho, *"O Teorema de Pitágoras e matemáticos amadores do Brasil"*, tem o objetivo de mostrar o interesse por Matemática existente no Brasil por pessoas que não eram matemáticos profissionais. São reproduzidas dezoito demonstrações do teorema de Pitágoras, tendo sido feita uma comparação com as que se encontram no livro clássico *The Pythagorean Proposition* de Elisha Scott Loomis, a fim de verificar quais delas estão incluídas nesta obra.

O volume 5, Nº 9, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em abril de 2005, possui cinco artigos, quatro de História e Epistemologia da Matemática, e uma resenha. Para nossa classificação, utilizaremos apenas os artigos, o primeiro deles escrito por Irineu Bicudo, *"Histórias Paralelas: O V Postulado de Euclides e o*

Axioma da Escolha", Inspirado nas "Vidas (Paralelas)", de Plutarco, mostrando como o V Postulado de Euclides e o Axioma da Escolha têm histórias absolutamente paralelas.

No segundo artigo, escrito por Sérgio Nobre, "*Isidoro de Sevilla e a História da Matemática presente em sua Enciclopédia* Etimologias *(séc. 7)"*, apresenta-se uma visão geral sobre a matemática presente na obra *Etymologiarvm sive Originvm libri XX*, uma enciclopédia escrita pelo Santo Isidoro de Sevilla no início do século 7 da era Cristã. A apresentação da história da matemática presente nesta enciclopédia é o objeto central deste trabalho.

No terceiro trabalho, escrito em inglês, por John A. Fossa e Glenn W. Erickson, *"The Divided Line and the Golden Mean",* faz-se uma revisão da interpretação dos autores da estrutura matemática da Linha Dividida de Platão e a estende para a Linha Duplamente Dividida, mostrando, assim, o alcance da teoria. Então, explica-se, detalhadamente, de que maneira a solução de Eudoxo para o problema de incomensurabilidade é relacionada à teoria de *lógos*, o que faz possível o desenvolvimento de Linhas Divididas com componentes "irracionais". Finalmente, linhas Divididas não aritméticas que Platão usou para modelar contextos não-matemáticos.

O último artigo, escrito por Fábio Maia Bertato, "*Fratre Luca Pacioli e su Divin Proportion (In Interlingua)"*, objetivou descrever o texto original de Pacioli, de 1498, um trabalho de História e Epistemologia da Matemática.

O volume 5, Nº 9, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em outubro de 2005, com cinco artigos, quatro de História e Epistemologia da Matemática e um de Albert Einstein, sobre a eletrodinâmica dos corpos, em uma edição especial comemorativa ao centenário da Teoria da Relatividade. Ubiratan D'Ambrosio escreveu esse primeiro artigo *("Albert Einstein e sua atuação para a Paz"*) em 2005, proclamado o Ano Internacional da Física, marcando as comemorações de três eventos intimamente relacionados: *(i)* o Centenário do *Annus Mirabilis* de Albert Einstein; *(ii)* os sessenta anos do lançamento das bombas atômicas sobre Hiroshima e Nagasaki e *(iii)* os cinquenta anos da fundação do Movimento Pugwash (*Pugwash Conference on Science and World Affairs*). Neste trabalho, comentou-se brevemente sobre esses três eventos e seus reflexos no mundo atual, tendo como elemento de ligação a figura de Albert Einstein, o grande cientista, politicamente comprometido e essencialmente humanista.

No segundo artigo, de Carlos Romero e Fábio Dahia, "*A Brief Note on how Einstein's General Relativity has influenced the Development of Modern Differential Geometry"*, discutiram-se alguns aspectos do desenvolvimento da geometria diferencial que podem ser considerados como tendo sido influenciados pela teoria da Relatividade Geral, mostrando como a busca de Einstein por uma completa geometrização da matéria e do eletromagnetismo deu origem a uma quantidade enorme de trabalhos, tanto em Física Teórica como em Matemática.

No terceiro trabalho, de Maria Inês Nobre Ota, "*Eletromagnetismo e Relatividade: continuidade formal – ruptura conceitual"*, foi discutida uma das revoluções provocadas: a reestruturação da teoria eletromagnética clássica. No quarto artigo, escrito por Wladimir Seixas, "*O Princípio da Relatividade – de Galileu a Einstein"*, o autor relaciona os diversos resultados das formulações teóricas da Mecânica e do Eletromagnetismo até a Teoria da Relatividade Especial proposta por Albert Einstein em 1905.

O volume 6, Nº 11, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em abril de 2006, com cinco artigos, três deles referentes à História e Epistemologia da Matemática. O primeiro, escrito em inglês, por I. Grattan-Guinness, *"Cournot on mechanics 1826-1834, especially using inequalities"*, fala sobre os trabalhos de Cournot que envolviam o cálculo aplicado na mecânica celeste.

O segundo trabalho, de Luís Miguel Carolino, *"João Delgado SJ e a "Quaestio de Certitudine Mathematicarum" em inícios do século XVII"*, analisa a posição de João Delgado na controvérsia sobre a *Quaestio de Certitudine Mathematicarum*, tendo como base as suas lições de matemática no Colégio de Santo Antão, em 1606. Desafiando as concepções tradicionalmente preconizadas pelos filósofos sobre esta temática, Delgado defendeu que a matemática possuía todas as características principais da ciência aristotélica e, como tal, deveria ser considerada como uma verdadeira ciência.

E por fim, o trabalho de Eduardo Sebastiani Ferreira, *"Onze Avos, Doze Avos,... De onde vem este termo Avo?"*, que aborda sobre a história da numeração, sustentando o autor uma hipótese sobre o surgimento do termo avo das frações.

O volume 6, Nº 12, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em outubro de 2006, com cinco artigos, tendo sido o primeiro deles escrito por Fernando Flores Morador e Mario A. Natiello, *"La filosofía matemática de Karl Marx en los manuscritos de 1881. Un esbozo"*, iniciando, com alguns antecedentes filosóficos, como a filosofia matemática de Hegel, a filosofia científica de Engels e a filosofia matemática de Marx contam um pouco da história do cálculo, mostrando, depois, os manuscritos matemáticos de Marx, envolvendo Cálculo diferencial.

No segundo trabalho, "*On the Pentagram as a Pythagorean Emblem"*, John A. Fossa trata de uma investigação das propriedades matemáticas do pentágono, mostrando que ele foi usado como um emblema pitagórico para representar a metempsicose. Ainda mais, uma comparação das propriedades matemáticas dos números figurados e figuras geométricas indicam que os primeiros pitagóricos sustentaram uma cosmogonia genética, isto é, uma forma rudimentar da teoria de emanações que poderia ter desenvolvido, por meio de Platão, até o pensamento de Plotino.

E, por fim, o trabalho de Mario H. Otero, *"Tres Momentos de una Construcción Geométrica: Apollonius de Perga, François Viète, Joseph-Diez Gergonne"*, o texto da tradução inédita, por Joseph-Diez Gergonne texto latino escrito por François Vieta (1540-1603), sob o título de Apollonius Gallus – que se refere ao trabalho do geômetra grego (Perga, por volta de 262-190).

O volume 7, Nº 13, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em abril de 2007, este número da Revista Brasileira de História da Matemática contém os trabalhos apresentados na Sessão Ibero-American Mathematics in the 19th and in the 20th centuries, sob a responsabilidade da Comissão Internacional de História da Matemática, durante o Congresso Internacional de Matemáticos, realizado na cidade de Madrid, Espanha, nos dias 22 a 30 de agosto de 2006 e conta com nove publicações, sendo seis referentes à História e Epistemologia da Matemática. A primeira, por Ubiratan D'Ambrosio, *"Enlightenment and its Reflection in Mathematics in Latin America, particularly in Brazil, in the 19th Century"*, procedendo a uma breve apresentação da Matemática na América Latina no século XVIII e início do século XIX.

O segundo trabalho, de Santiago Garma, *"Mathématiques et mathématiciens espagnols de XIX et sa influence à latinoamerique"*, faz algumas considerações sobre a comunidade científica espanhola, em respeito à matemática. No terceiro trabalho, de Luis Saraiva "*The beginnings of the Royal Military Academy of Rio de Janeiro"*, o autor analisou os começos da Academia Real Militar do Rio de Janeiro, fazendo uma breve resenha sobre a Reforma da Universidade Portuguesa de 1772, no que diz respeito à criação da Faculdade de Matemática, a primeira no país, e que foi uma inspiração direta para a Academia Real Militar.

No artigo, escrito por Sérgio Nobre, "*The beginnings of the professionalization in mathematics in Brazil starting from the 19th century"*, foi apresentado o desenvolvimento da investigação matemática após a criação da Academia Real Militar no ano de 1810. Em 1842, instituiu-se o doutorado em matemática. Também foi apresentada a criação da primeira escola de engenharia no século XIX, a fundação da Academia Brasileira de Ciências no início do século XX, a criação da primeira universidade do país e, consequentemente, o início da profissionalização em matemática nestas instituições.

Na publicação "*Las matemáticas en España en el siglo XX: El doctorado hasta la II República y el papel de Julio Rey Pastor"*, de Luis Español González, apresentou-se o desenvolvimento da matemática na Espanha no período 1900-1931, que precede a Segunda República, estudando o doutorado. E foi destacado o papel desempenhado por Rey Pastor e conexões da América Latina. E, por fim, o trabalho*"Algunos recuerdos sobre los orígenes del cálculo automático en Argentina, y sus antecendentes en España e Italia"*, escrito por Ernesto Garcia Camarero.

O volume 7, Nº 14, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado no início do ano de 2007, com seis artigos, quatro sendo de História e Epistemologia da Matemática. O texto de John A. Fossa e Marta Figueiredo dos Anjos, "*Sobre a incompatibilidade dos números negativos com o conceito grego de Årithmós"*, faz uma análise epistemológica do conceito grego de *årithmós*, revelando que a Aritmética tinha quatro partes, compondo uma Linha Dividida: a Aritmética Prática, a Logística Prática, a Logística Teórica e a Aritmética Teórica. Dentro da Aritmética Teórica, número foi concebido como coleções de mônadas e, portanto, incompatível com números negativos. Não obstante, números negativos surgiram implicitamente dentro da Logística.

A publicação escrita por Luis Radford, "La Arithmetica Practica del Padre Padilla y los inicios de la Matemática en Centro América en el Período Colonial", apresenta um estudo dos métodos "avançados" de solução de problemas do segundo livro escrito de matemática na América Central, no período colonial, que é apresentado.

No trabalho "*Ecuaciones Diferenciales y Contemporaneidad"*, de Juan E. Nápoles Valdes, apresentaram-se algumas ideias matemáticas em relação a certas tendências da física e da filosofia em torno dos gregos.

E, por fim, o trabalho escrito por Tatiana Roque, *"De Andronov a Peixoto: a noção de estabilidade estrutural e as primeiras motivações da escola brasileira de Sistemas Dinâmicos"*, em que se abordou o período da história da Teoria dos Sistemas Dinâmicos, que vai de meados dos anos 1930 ao início dos anos 1960, procurando investigar a gênese de conceitos e ferramentas que participaram da constituição deste novo domínio da matemática.

O volume 8, Nº 15, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em abril de 2008, com seis artigos, três de História e Epistemologia da Matemática. O primeiro, escrito por Plínio Zornoff Táboas, intitulado *"Três momentos no desenvolvimento da Teoria dos Funcionais Analíticos segundo Luigi Fantappiè"*, teve o objetivo de demonstrar a importância das atividades brasileiras de Luigi Fantappiè (1901-1956), em sua estada na USP entre 1934 e 1939, para o desenvolvimento da Teoria dos Funcionais e para a consolidação das atividades de pesquisas científicas matemáticas no Brasil.

O trabalho, de Vicente Meavilla, *"Leyendo a Euler: algunos problemas concernientes a ciertas clases de triângulos"*, fornece uma adaptação da obra original de Euler Proprietates, *Triangulorum, anguli quorum inter se tenent rationem Art Competition* (1767). E, por fim, a publicação de Eduardo Sebastiani Ferreira, "*O Ábaco de Silvester II"*, em que o autor tenta esclarecer o uso que fazia Gerbet de Aurillac do seu ábaco com numeração posicional. Tendo sido eleito o primeiro papa francês, cujo nome ficou sendo Silvester II, ele era um grande conhecedor de matemática e introduziu na Europa Cristã o sistema arábico e a numeração.

O volume 8, Nº 16, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em outubro de 2008, com 5 artigos, quatro de História e Epistemologia da Matemática e um ensaio. Focaremos nos artigos. O primeiro trabalho escrito por Alejandro R. Garciadiego e Magally Martínez Reyes, *"Francisco Antonio Bataller (1751-1800) y la adaptación de su obra en el Real Seminario de Minería"*, examina a originalidade de seu trabalho no que diz respeito a um dos representantes mais importantes da física deste período, Isaac Newton.

O segundo trabalho, *"Prefácio ao Begriffsschrift (1879) de Gottlob Frege (1848-1925): tradução e introdução ao texto"*, foi escrito por Fernando Raul Neto, com o objetivo de trazer para o leitor brasileiro a tradução do prefácio ao livro *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (1789), escrito pelo próprio autor, o lógico e filósofo alemão Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925). Na terceira publicação, de Lorí Viali, *"Algumas Considerações sobre a Origem da Teoria da Probabilidade"*, traçou-se um panorama do desenvolvimento da probabilidade.

O quarto artigo, *"Uma Abordagem da Análise Matemática para Alguns Problemas Derivados das Concepções Filosóficas de Zenon, Antifon e Brison"*, escrito por I. F. Balieiro & M. R. Soares, expõe, identifica, analisa e discute vestígios de processos infinitos implícitos nos pensamentos filosóficos de Zenon, Antifon e Brison. E, por meio de uma metodologia de pesquisa em História da Matemática, tais pensamentos são interpretados em uma linguagem da Análise Matemática, utilizando-se dos conceitos de sequências, séries, supremo e ínfimo.

O volume 9, Nº 17, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em abril de 2009. Todos os sete artigos foram em homenagem aos três séculos de Euler, considerado o maior matemático do século XVIII e classificados como trabalhos em História e Epistemologia da Matemática. O primeiro artigo, escrito por Ubiratan D'Ambrosio, intitula-se *"Euler, Um Matemático Multifacetado"*, e traça o perfil biográfico de Euler. A seguir, Circe Mary Silva da Silva publica *"O Livro Didático Mais Popular de Leonhard Euler e Sua Repercussão no Brasil"*, apresentando um resultado de um original trabalho de reconstrução das condições que resultaram na publicação e circulação, no Brasil em 1809, de uma versão em português do conhecido livro de álgebra. A autora destaca que esse foi um dos primeiros livros didáticos publicados após o surgimento da imprensa no Brasil e foi adotado para o ensino de álgebra na Academia Real Militar do Rio de Janeiro.

No terceiro artigo *"História, Tradição e Pesquisa Sob Disputa: O Caso dos Poliedros Na Geometria"*, escrito por Rogério Monteiro de Siqueira, examina-se a fórmula que relaciona o número de vértices, arestas e faces de um poliedro, uma das fórmulas mais famosas de Euler enunciada em 1752, estudando-se três subáreas da disciplina de geometria: a topologia combinatória, a geometria diferencial e a geometria discreta. Este trabalho pretendeu mostrar que Euler e o seu *"Elementa doctrinae solidorum"* têm desempenhado o papel de mito fundador dessas subáreas, especialmente da topologia combinatória e da geometria discreta. No quarto trabalho, publicado em inglês, por Daciberg Lima Gonçalves, intitulado *"Historical Aspects Of Discovery of the Euler Characteristic and some of its Developmentes in Modern Topology"*, descreve-se onde e quando Euler obteve a famosa expressão V+F = A+2, que relaciona o número de vértices, arestas e faces de um poliedro que satisfaz certas relações, fazendo relações entra a fórmula e a topologia e certas dificuldades com a demonstração original de Euler. E, por fim, apresenta generalizações da característica de Euler que tem sido utilizada em desenvolvimentos recentes (últimos 50 anos) da topologia.

No quinto artigo, publicado *"A Matemática Recreativa de Euler: Números Amigos"*, por Nelo D'Alan, o objetivo do trabalho é fazer comentários sobre os três trabalhos de Euler neste tópico. O artigo tem esse título (Matemática Recreativa) em alusão ao fato de a teoria dos números ser, até o século XVIII, considerada como matemática recreativa.

Este foi o último dos artigos publicados nesta revista que foram objeto da apresentação no Encontro Brasileiro do Tricentenário e Leonhard Euler. Os outros dois artigos foram traduções diretas do Latim e comentam trabalhos de Euler.

O primeiro, assinado por John Fossa e Sarah Mara Silva Leôncio, intitulado *"Sobre Números Amigáveis*", era uma tradução do primeiro artigo sobre números amigáveis, escrito por Euler, em que ele lamenta o pouco interesse dado à teoria dos números, critica o método de Fermat para achar os mesmos e dá a lista de pares de números amigáveis.

A segunda tradução (e último trabalho publicado neste volume da RBHM) foi assinada por Carlos H. B. Gonçalves e Thomás A. S. Haddad, com o título *"Demonstrações de Certos Teoremas Referentes a Números Primos"*, fazendo-se uma tradução para a língua portuguesa de um importante texto de Leonhard Euler ("Theoremathum quorundam ad números primos spectarium demonstratio"), lido perante a Academia de Ciências de São Petersburgo em 1736 e publicado em 1741 nos seus anais, contendo uma demonstração do chamado pequeno teorema de Fermat, um resultado fundamental em Teoria dos Números.

No volume 9, Nº 18, publicado em outubro de 2009, foram publicados seis artigos, que classificamos todos em História e Epistemologia da Matemática. No primeiro, em inglês, *"On The Foundation of the Academy of Athens",* escrito por Christine Phili, a intenção do trabalho foi apresentar as fases primárias que contribuíram para a fundação da Academia na Grécia, antes da sua inauguração oficial em 1926, mostrando a importância da Academia Platônica, junto com o museu de Alexandria, a Academia Jônia de Corfu e a Sociedade Científica em 1988.

O segundo trabalho, cujo título é *"Minkowski, Geometria e Relatividade"*, escrito por José Carlos Santos, mostra que, mesmo a Teoria da Relatividade sendo publicada por Einstein em 1905, teve pouco interesse dos físicos sobre o assunto, e, em 1908, quando o matemático Hermann Minkowski proferiu uma palestra em 1908 sobre Espaço e Tempo é que a Teoria da Relatividade começou a ser conhecida num âmbito mais vasto. E também mostra as razões que levaram os matemáticos, como David Hilbert, Hermann Weyl e, em menor grau, Felix Klein e Emmy Noether, se interessam por esta área da Física.

O terceiro trabalho, intitulado *"João Ângelo Brunelli: Um Padre Matemático e Astrônomo Italiano Participante da Comissão Demarcadora de Limites da Amazônia na Era Pombalina"*, publicado por Iran Abreu Mendes e Sérgio Nobre, aborda a participação de Brunelli na comissão demarcadora de limites territoriais no Norte do Brasil, no século XVIII. Nesta pesquisa, foram consultados documentos originais existentes no Arquivo Histórico Ultramarino de Lisboa (AHU).

A quarta publicação *"Sinais da Organização da Comunidade Matemática Brasileira: Sociedade de Matemática de São Paulo"*, escrita por Lucieli M. Trivizolli, tratou da importância desta instituição para o desenvolvimento e organização da matemática e da comunidade matemática no Brasil, bem como apontou as pessoas fundamentais na criação dessa sociedade e em sua organização.

O quinto artigo, escrito por Mario H. Otero, publicado em espanhol, intitulado, *"Ideologia Purista e Ideologia Tecnicista em El Desarrollo de lãs Matemáticas Uruguayas"*, aborda as características da ideologia purista em pesquisa matemática expressas na matemática uruguaia, quase até os dias atuais, através de neo humanismo estudado por

Pyenson Lewis (1982), juntamente com as ideias de José Ferreiros expressas no humanismo organicismo: Gauss, Cantor e matemática pura (2003).

O sexto artigo, publicado em alemão, por Fernando Raul Neto, *"Das Historisches Bild Von Lazare Carnot (1753-1823): Ungelöste Fragen"*, trata da obra do matemático e político francês Lazare Carnot, particularmente do "*Géométrie de Position"* (1803), tido como sua maior obra. O objetivo do artigo é mostrar como a geometria de Carnot é apresentada e discutida na literatura secundária do século XX. O artigo conclui com certas questões que, embora sugeridas pela literatura secundária, não têm sido ainda devidamente respondidas.

O volume 10, Nº 19, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em abril de 2010, com seis artigos, quatro sobre História e Epistemologia da Matemática. O primeiro, escrito por Plínio Zornoff Táboas, *"Um Estudo Sobre as Origens dos Espaços Vetoriais"*, apresenta uma reflexão sobre as origens da estrutura axiomática dos espaços vetoriais a partir de obras sobre geometria e álgebra vetorial, como o Cálculo do Baricentro de Möbius, o Cálculo de Equipolência de Bellavitis, os Quaternions de Hamilton e a Teoria da Extensão de Grassmann, levando-se em consideração, ainda, as concepções de Leibniz a respeito de uma junção entre as geometrias sintética e analítica.

O segundo trabalho, de Guillermo Ortíz Rico e Sergio Iván Valencia Marín, *"La categoricidad de los reales en Hilbert"*, apresenta uma visão panorâmica estruturalista ao redor para ver que, em 1900, a apresentação axiomática de Hilbert, sua noção de integralidade foi
fortemente influenciada pelo trabalho de Dedekind e pensamento filosófico da época, que representamos em Husserl.

O terceiro trabalho, "*O Prefácio do livro De Re Physica de Luis Antonio Verney"*, escrito por Frederico José Andries Lopes, apresenta uma tradução da carta que Luís Antonio VERNEY (1713-1792) escreveu em 13 de janeiro de 1765 ao então Rei de Portugal, D. José I, acerca da importância da emergente física-matemática na constituição da felicidade de uma nação.

Na publicação de Carlos Roberto de Moraes, intitulada *"Os primeiros livros de lógica moderna editados no Brasil"*, abordaram-se três obras que foram relevantes na história da lógica no Brasil: *As Ideas Fundamentaes da Matemática,* de Manuel Amoroso Costa; *Elementos de Lógica Matemática,* de Vicente Ferreira da Silva e *O Sentido da Nova Lógica,* de Willian Van Orman Quine. A ideia é verificar a relevância, principalmente desta última obra comparando-a a uma obra importante publicada na mesma época de autoria de Alfred

Tarsky, intitulada "*Introduction to Logic and to the methodology of deductive sciences"*, publicada em 1941.

O volume 10, Nº 20, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em outubro de 2010, possui seis artigos, cinco de História e Epistemologia da Matemática. O artigo *"A Atividade Matemática de Adriaan van Roomen"*, de Carlos H. B. Gonçalves e Zaqueu V. Oliveira, apresenta e analisa as atividades matemáticas de Adriaan van Roomen, tais como se encontram em um subconjunto de sua correspondência. O artigo *"What makes a Pythagorean Pythagorean?*, de John Fossa, caracteriza os pitagóricos como os pensadores que mantêm que o *logos* do universo é revelado por uma teoria matemática de proporção.

O trabalho *"Nicomede e os três Problemas Clássicos Gregos"*, de Eduardo Sebastiani Ferreira, apresenta a solução de três problemas clássicos da matemática grega que influenciaram enormemente no desenvolvimento da geometria: a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo. O sexto trabalho, "*A Filosofia da Matemática de Popper",* de Fábio Maia Bertato, apresenta sucintamente algumas de suas ideias que constituem o que podemos denominar Filosofia da Matemática de Popper.

O volume 11, Nº 21, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em abril de 2011, com seis artigos, três de história e epistemologia da matemática. O primeiro, *Unidades de medida em textos bíblicos"*, foi escrito por Edilson Roberto Pacheco, trazendo a singularidade e a diversidade de métodos de medição que caracterizaram antigas civilizações no emprego de rudimentares unidades de medidas, cujas raízes estão atreladas à história desses povos. A quarta publicação foi de Mario H. Otero, *"Sobre cierta dudosa influencia generalizada de Condillac"*. Como o próprio título sugere, tende a mostrar errado, em graus variados, algumas declarações sobre o trabalho de Condillac e, especialmente, difusão e influência. Considerando as recentes alegações, Eduardo Ortiz e mais distante e mais forte do grupo Jean Dhombres. Enfrentamos muitos textos críticos interessantes que atingem Gergonne JD adequada interpretação das limitações de Condillac. O sexto trabalho publicado, escrito por Teresa Cristina de Carvalho Piva e Nadja Paraense dos Santos, *"O brigadeiro José Fernandes Pinto Alpoim: o cálculo do número de balas de canhão empilhadas na obra Exame de Artilheiros"*, tem como foco a matemática usada por Brigadeiro Alpoim (1700-1765), que foi o homem escolhido pela coroa portuguesa para fortalecer a segurança do Brasil no auge do período aurífero colonial. D. João V, em 1738, designou-o para comandar o Terço de Artilharia do Rio de Janeiro. Este trabalho teve como foco mais a parte matemática da obra de Alpoim.

O volume 11, Nº 22, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em outubro de 2011, com cinco artigos, todos de história e epistemologia da matemática. O primeiro, *"On the Development of Logic in Brazil I: The early logic studies and the path to contemporary logic"*, escrito por Itala M. Loffredo D'Ottaviano e Evandro Luís Gomes, apresenta a primeira parte de um panorama histórico sobre o desenvolvimento da lógica no Brasil, que tem por objetivo descrever o desenvolvimento da lógica contemporânea no país, com ênfase no aspecto socioinstitucional e na interdisciplinaridade. O segundo artigo, *"Development of Teaching and Research in Pure Mathematics in Brazil: Current View"*, escrito por Clóvis Pereira, apresenta uma visão panorâmica do desenvolvimento do ensino e da pesquisa em Matemática Pura no Brasil a partir de 1811 até os anos de 2010, com visão atual.

No terceiro trabalho, *"Revisiting the Electrical Engineering History and Educacional Proposals"*, Gilmar Barreto e Paulo David Battaglin mostram a utilização da Eletricidade por civilizações antigas, como a dos Chineses, Sumérios e Pártias nos primórdios, o desenvolvimento de conhecimentos e aplicações básicos sobre ela, bem como o conhecimento sobre as inter-relações das formas de Eletricidade existentes na natureza são exemplos verdadeiros deste desenvolvimento e são abordados neste projeto de pesquisa. O quarto trabalho deste volume, *"Sobre o Processo Histórico de Institucionalização da área de Análise Matemática no Brasil"*, de José do Carmo Toledo, argumenta em favor da existência, no Brasil, de uma tradição em pesquisa na área de Análise Matemática.

No último trabalho, "*Leibniz e a aritmética binária"*, escrito por Frederico José Andries Lopes, há uma tradução de *Explication de l'arithmétique binaire, qui se sert des seuls caractères 0 et 1, avec des remarques sur son utilité, et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures Chinoises de Fohi*, de G. W. Leibniz (1646-1716), publicado nas *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1703, e considerado o artigo fundador da moderna Ciência da Computação.

O volume 11, Nº 23, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em abril de 2012, com 11 artigos. Foi edição especial, pois referiu-se aos anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática, e nove deles foram de história e epistemologia da Matemática. O primeiro, escrito por John Fossa, *"Razão e Proporção: A Herança Antiga"* aborda sobre o papel da razão e da proporção na matemática antiga, tanto com respeito ao desenvolvimento da própria matemática, quanto com respeito às relações da matemática com outras áreas de conhecimento.

O segundo artigo, *"Instabilidade no tratamento de razões no contexto do desenvolvimento da matemática",* de Oscar João Abdounur, destaca a importância de certa instabilidade estrutural no tratamento matemático do conceito de razão, fortemente presente em tratados envolvendo as artes liberais. O terceiro artigo, *"Um pouco mais sobre Galileu e as ciências mistas"*, foi escrito por Carlos Arthur Ribeiro do Nascimento.

No quarto artigo, de Fábio Maia Bertato, *"Contribuições dos pensamentos medieval e renascentista para o desenvolvimento da Matemática"*, apresentam-se alguns aspectos das discussões, realizadas na Idade Média e no Renascimento, acerca da natureza das demonstrações matemáticas. O quinto artigo, Lilian Al-Chueyr Pereira Martins e Katia Regina Venturineli, *"Relações entre biologia e estatística: Karl Pearson e o princípio da homotipose (1901-1902)"*, discute o princípio da homotipose proposto pelo matemático e estatístico inglês Karl Pearson e leva em conta tanto os aspectos estatísticos como os aspectos biológicos, procurando-se elucidar se a baixa aceitação que recebeu pela maioria dos biólogos da época foi procedente. Este estudo levou à conclusão de que, embora a análise estatística de Pearson tenha sido bastante cuidadosa, o conceito biológico da homotipose era equivocado.

O sexto trabalho publicado neste volume é de Tatiana Roque, *"Contribuições para uma história da noção de modelo: aspectos metodológicos e direções de pesquisa"*, no qual a noção de "modelo" é frequentemente citada em estudos de epistemologia e filosofia da ciência e é um dos conceitos-chave na reflexão sobre o papel da matemática em outros campos de conhecimento. O sétimo artigo foi escrito por Ubiratan D'Ambrosio, *"Revistas e Sociedades Matemáticas"*, tendo sido feitas algumas considerações gerais sobre o surgimento de associações e academias científicas e de sociedades específicas de matemática, a partir do XVII. Será discutida a importância das publicações especializadas e breve observação sobre o surgimento das primeiras revistas de matemática, em meados do século XIX.

O oitavo trabalho, *"A década prodigiosa da Matemática Portuguesa: Os Começos da Sociedade Portuguesa de Matemática (1936-1945)"*, foi escrito por Luis M. R. Saraiva e traz um panorama da década de 1940 em Portugal. O décimo primeiro artigo, que foi escrito por Irineu Bicudo, "Beppo Levi e os Elementos de Euclides", trata do homem, do matemático e da sua leitura dos Elementos.

O volume 12, N° 24, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em abril de 2012, com cinco artigos, sendo três artigos classificados em História e Epistemologia da Matemática. O primeiro deles, *"On the Development of Logic in Brazil II:* intiatives in Brazil related to logic and Brazilian research groups dedicated to logic", escrito por Itala M. Loffredo D' Ottaviano e Evandro Luis Gomes, apresenta a segunda parte de um panorama histórico do desenvolvimento da lógica no Brasil, procurando caracterizar o desenvolvimento da lógica contemporânea no país, com ênfase no aspecto histórico socioinstitucional e na interdisciplinaridade.

O terceiro artigo, escrito por Zaqueu Vieira Oliveira, *"Os Fundamentos da Astronomia segundo Adriaan Van Roomem",* fala um pouco sobre quem foi Adriaan Van Roomem e sobre uma das suas três obras, a *Ouranographia sive caeli descriptio (1591)*, parte em que traz as discussões sobre o número e ordem das esferas celestes e a definição de círculos celestes, sustentando sua discussão na filosofia aristotélica. O quinto trabalho, escrito por Josiney A. Souza, apresenta um breve relato histórico sobre a teoria dos grupos. Sintetizou-se a evolução do conceito de grupo a partir de sua origem, com os grupos de Galois, direcionando os fatos até os modernos grupos de calibre da teoria de Gauge.

O volume 12, N° 25, da Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), foi publicado em agosto de 2012, com seis artigos, sendo quatro deles em História e Epistemologia da Matemática. O primeiro foi escrito por José Carlos Magossi e Elaine Cristina Catapani Poletti, *"O Movimento das Estruturas Matemáticas",* defendendo a relevância de se observar a matemática sob a ótica de estruturas e objetos e, como consequência, identificar certo movimento dessas estruturas ao longo de sua história. O segundo artigo, *"Um Histórico do Curso de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo (USP)"*, escrito por Mariana Feiteiro Cavalari, foi um trabalho que teve como objetivo investigar o percurso histórico do curso de Matemática da FFCL da USP. O quinto trabalho, escrito por Sílvio César Otero-Garcia, *"Sobre uma generalização da integral definida: tradução do primeiro trabalho de Henri Lebesgue sobre sua nova integral",* apresentou uma tradução comentada do artigo de Lebesgue *Sur une Généralisation de I' Integral Définie,* no qual o matemático francês propõe, no início do século XX, novos conceitos de integral, generalizando as propostas por Riemann e Cauchy, reparando suas deficiências e também novos conceitos de medidas, sanando o que foi proposto por Jordan e Borel.

2.2 Revista Brasileira de História da Matemática: apontamentos conclusivos

Conforme já foi destacado ao longo desse capítulo, os artigos publicados nos 25 números da RBHM, que tratam diretamente da história e Epistemologia da Matemática, representam 74% (105 artigos) de um total de 142 artigos publicados, mostrando a característica da produção das Revistas neste periódico. Não avaliamos nem buscamos os potenciais didáticos de cada artigo, mas, ao descrever cada trabalho, percebemos que temos um importante material que pode ser explorado para a utilização em sala de aula.

Todavia, mesmo que a maioria dos trabalhos publicados sejam de História e Epistemologia da Matemática, ficou evidenciado que a revista manteve, pelo menos, um artigo de história da Educação Matemática para cada número publicado, e as temáticas variaram entre biografias de educadores matemáticas e história das disciplinas escolares. Poucos artigos trataram da história das instituições ou de outras temáticas mais evidenciadas nos últimos anos, como está mencionado em Mendes (2014), quando destaca que, entre 1990 e 2010, foram produzidas 135 dissertações e 48 teses voltadas para a história da Educação Matemática, com temáticas centradas na história de vida, formação e ação docente de professores ou educadores matemáticos, história da disciplinarização da matemática e de outras práticas sociais e história da formação de professores de Matemática.

Igualmente, foi possível percebermos que diversos artigos caracterizados como potencialmente de história da Matemática, denotam abordagens e construções historiográficas que nos levam a inseri-los no campo da história da Educação Matemática, uma vez que as temáticas abordadas não separam aspectos epistemológicos dessa disciplina, mas evidenciam as conexões entre a Matemática como uma prática que se insere no campo educativo em diferentes dimensões. Esse talvez seja o maior desafio: separar o que pode ser considerado história da Matemática e história da Educação Matemática.

No próximo capítulo, apresentamos as descrições das dissertações e teses produzidas nos Programas de Pós-Graduação no Brasil entre 1990 e 2010. Para tanto, selecionamos aqueles trabalhos que possuem conteúdos matemáticos em texto, com o objetivo de apresentar os potenciais didáticos para o Ensino Médio, separando os trabalhos que consideramos com conteúdo de nível superior e os de nível médio, descrevendo os que são relativos ao Ensino Superior e apontando seus conteúdos. E, em seguida, além de descrever e apontar os conteúdos daqueles trabalhos de nível médio, também apontamos os potenciais didáticos de cada um.

3 LEVANTAMENTO E DESCRIÇÃO DAS DISSERTAÇÕES E TESES EM HISTÓRIA E EPISTEMOLOGIA DA MATEMÁTICA PRODUZIDAS NOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DO BRASIL ENTRE 1990 E 2010 QUE APRESENTAM CONTEÚDOS DO ENSINO SUPERIOR

O objetivo deste capítulo é descrever os trinta trabalhos sobre História e Epistemologia da Matemática produzidos nos programas de pós-graduação do Brasil entre 1990 e 2010, que apresentam conteúdos do Ensino Superior. Inicialmente, foi feito um levantamento geral das dissertações e teses de história da matemática produzidas nos programas de pós-graduação no Brasil entre 1990 e 2010. Em seguida, categorizaram-se e classificaram-se as mesmas em História e Epistemologia da Matemática, História da Educação Matemática e História para Ensino da Matemática. Durante essas duas etapas, fizemos apenas um complemento do que já havia sido produzido pelo grupo de pesquisa em *Cartografias da produção em história da matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990 e 2010*, sob a coordenação do Professor Iran Abreu Mendes. Com essa pesquisa, conseguimos reunir os seguintes trabalhos de História e Epistemologia da Matemática, com conteúdos matemáticos a serem explorados, conforme mostramos no quadro a seguir:

Quadro 08: Distribuição do Total de Dissertações e Teses de História e Epistemologia da Matemática/Níveis de Conteúdos Abordados

Níveis	Dissertação	Teses	Total
Educação Básica	10	7	17
Ensino Superior	19	11	30
Total	29	18	47

Fonte: Elaboração própria com base na pesquisa de Mendes (2015)

Neste capítulo, descrevemos sobre cada uma das trinta dissertações e teses encontradas em nossas pesquisas que possuem conteúdo do Ensino Superior. A análise dos dezessete trabalhos que abordam temas ou conteúdo relacionados diretamente à matemática do Ensino Médio será apresentada no próximo capítulo desta tese. Tomamos como referência para classificação os conteúdos de Ensino Superior, definidos nas grandes áreas da matemática, encontrados no site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, são eles: Álgebra; Conjuntos; Lógica Matemática; Teoria dos Números; Grupos de álgebra não cumulativa; álgebra Comutativa, Geometria Algébrica; Análise; Análise

Complexa; Análise Funcional não linear, Equações Diferenciais Ordinárias; Equações Diferenciais Parciais; Equações Diferenciais Funcionais, Geometria e Topologia; Geometria Diferencial; Topologia Algébrica; Topologia das Variáveis, Sistemas dinâmicos; Teoria das Singularidades e Teoria das Catástrofes; Teoria das Folheações; Matemática Aplicada; Física Matemática; Análise Numérica; Matemática Discreta e Combinatória. Por ter identificado que nem todos esses conteúdos nas produções das dissertações e teses aparecem na pesquisa, optamos por fazer uma adaptação própria para mostrarmos esse estudo, conforme quadro abaixo:

Quadro 09: Dissertações e Teses que abordam conteúdos do Ensino Superior

Áreas	Dissertações	Teses	Total	Percentual
Álgebra	1	2	3	10%
Análise	2	2	4	14%
Cálculo Diferencial e Integral	5	1	6	20%
Cálculo Numérico	1	-	1	4%
Física Matemática	1	1	2	4%
Geometria Analítica Vetorial	1	1	2	7%
Lógica e Teoria dos Conjuntos	4	3	7	23%
Teoria dos Números	3	1	4	14%
Variáveis Complexas	1	-	1	4%
Total	19	11	30	100%

Fonte: Elaboração própria embasado nas grandes áreas da matemática encontradas no site da CAPES

Para categorizar sobre em que foco central de conteúdos podemos considerar que cada trabalho pertence, separamos dois tipos: conteúdo principal focalizado e conteúdos secundários mobilizados. O conteúdo principal focalizado foi o que levamos em consideração para classificação mostrada no quadro 09, pois é aquele mais relevante apresentado em cada trabalho. Os outros conteúdos que aparecem no texto e que são importantes para o desenvolvimento deste conteúdo principal serão apresentados junto com as descrições de cada trabalho que será apresentada a seguir. A partir de agora, passaremos à descrição. Antes de iniciar, apresentamos um quadro que contém algumas informações sobre os trabalhos: Título, Autor, Orientador, Ano de Defesa, Instituição e Programa de Pós-graduação onde foi defendida, Abordagem, Conteúdo Principal Focalizado, Conteúdos Secundários Mobilizados e Resumo da Dissertação ou Tese.

3.1 Descrição das Dissertações

Dissertação 1: Newton e Berkeley: as críticas aos fundamentos do método das fluxões n' O Analista

Quadro 10: Descritores de análise da dissertação 1 – Ensino Superior

Título: Newton e Berkeley: As Críticas aos Fundamentos do Método das Fluxões n'O Analista
Autor (a): Alex Calazans
Orientador (a): Eduardo Salles de Oliveira Barra
Ano de defesa: 2008
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Paraná – UFPR
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo Principal Focalizado: Cálculo Diferencial e Integral
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Plana e Equações Algébricas
Resumo Newton manifesta em sua careira matemática uma posição crítica quanto aos métodos matemáticos inspirados no estilo analítico. O curioso é que o seu próprio trabalho não escapa da sua própria avaliação. O método das fluxões, que uma das suas principais contribuições no campo da matemática, sofre modificações com a finalidade de se tornar mais bem fundamentado. Isso significa sim um direto abandono dos procedimentos analíticos (que marca a fase inicial de sua carreira) para assumir uma técnica que estaria muito mais próxima dos procedimentos sintéticos dos geômetras antigos. Por sua vez, Berkeley, em O Analista (1734) realiza uma profunda avaliação desses novos procedimentos matemáticos, entre eles está essa principal contribuição de Newton. Visto que se constrói a crítica berkeleyana a partir do trabalho de Newton já reavaliado e fundamentado no estilo sintético, o que se pretende nesse trabalho é localizar o porquê do próprio Berkeley não considerar os esforços de Newton para bem fundamentar o método das fluxões. Para isso, trabalha-se com duas hipóteses: seria Newton, na perspectiva de Berkeley, alguém incompetente em aplicar as suas próprias exigências? Ou ainda, estaria Berkeley exigindo um padrão de rigor muito mais rígido, para fundamentar a matemática, em comparação com aquele que Newton aceitou para seu método? Veremos que ambas as hipóteses se aplicam, porém, cabe identificar as peculiaridades com que isso se manifesta no texto de O Analista.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Calazans (2008).

Este trabalho, defendido no Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal do Paraná , teve o objetivo de localizar o porquê de o próprio Berkeley não considerar os esforços de Newton para bem fundamentar o método das Fluxões. O autor parte de duas hipóteses: 1) Seria Newton na Perspectiva de Berkeley, alguém incompetente em aplicar suas próprias exigências? 2) Estaria Berkeley exigindo um padrão de rigor muito mais rígido, para fundamentar a matemática, em comparação com aquela que Newton aceitou para seu método?

Calazans (2008) afirma que Newton teve duas fases diferentes em seu trabalho matemático, a primeira delas chamada Nova Análise (os primeiros trabalhos de Newton) que tinha como principal representante Descartes; e o Método Sintético dos antigos geômetras gregos. Nesta perspectiva, a principal descoberta de Newton, o Método das Fluxões, pode ser interpretado pelas duas maneiras, o Sentido Analítico e o Sentido Sintético. Um dos principais motivos para essa mudança foi sua desconfiança em relação ao estatuto geométrico de quantidades infinitamente pequenas, que o motivaram a elaborar um *Método das Primeiras e últimas Razões*, proporcionando a ampliação das propriedades geométricas ao Método das Fluxões.

Essas mudanças de fase de Newton, da Analítica para Sintética, consistiram em dar ênfase ao caráter geométrico da sua matemática, ampliando a exatidão e o rigor do Método das Fluxões. Mesmo com essa mudança, Calazans (2008) mostra, em sua dissertação que Berkely faz críticas contundentes ao Método das Fluxões, alegando deficiências em termos do próprio rigor e exatidão. Essas críticas foram feitas por Berkeley (1734) em *N' O Analista*. O interessante é que, além da crítica, ele aborda uma tese de “Comparação de Erros”, sugerindo que o Método das Fluxões possa ser reabilitado, ou seja, Berkely faz uma sugestão para a melhora do Método no sentido do rigor matemático.

A Dissertação foi dividida em três capítulos. No primeiro, o autor trata sobre o que é o método das fluxões e como Newton o fundamentou. São analisados alguns textos, escolhendo o problema do infinitamente pequeno para mostrar as duas fases do estilo matemático de Newton: Analítica e Sintética, em que ele considera que o caráter geométrico fundamenta o Método das Fluxões. Ainda no primeiro capítulo, ao escrever sobre o Método das Fluxões, aborda o assunto de Geometria Plana, em nível avançado, possivelmente, incompatível com a Educação Básica, mas talvez importantes para a licenciatura em matemática. Primeiramente, ele mostra que, nos primeiros escritos Matemáticos de Newton, é nítido o uso de Equações Algébricas na Solução de Problemas Geométricos. Segundo Calazans (2008), o Método das Fluxões era sempre reformulado por Newton, e tudo devido ao problema do infinitamente pequeno, ou seja, o método não precisava ser transformado em outro, apenas modificado com a finalidade de melhorá-lo com outros fundamentos, devido ao problema do infinitamente pequeno.

No segundo capítulo, aborda-se o texto *O Analista* pela primeira vez, com o objetivo de fazer críticas ao Método das Fluxões, procurando esclarecer as razões de Berkeley para anular os esforços de Newton em distanciar-se dos métodos analíticos infinitesimais. Segundo Calazans (2008), foi neste momento da pesquisa que se fez a investigação se os critérios utilizados por Berkeley para a elaboração da crítica são realmente seus, exigindo um confronto com um texto central de Berkeley chamado *Tratado Sobre os Princípios do Conhecimento Humano (1710).* Também foram procuradas as razões de Berkeley para anular os esforços de Newton para se afastar dos métodos analíticos infinitesimais.

A tese “Comparação de Erros” foi abordada no último capítulo, de forma aprofundada. Na dissertação de Calazans (2008), podemos perceber claramente a tentativa dele de mostrar que o seu propósito não era de reprovar o Método da Fluxões, no sentido de eliminá-lo da prática matemática com um todo. Ao invés disso, dever-se-ia interpretar a crítica de Berkeley ao método newtoniano como uma postura que o aproxima da atitude dos Princípios, isto é, a de corrigir uma prática matemática para torná-la mais estruturada como conhecimento.

Percebemos que essa dissertação traz conteúdos de Ensino Superior, cujo tema principal focalizado é o Cálculo Diferencial e Integral, com abordagem feita por interpretação geométrica. Não observamos, em nossa leitura, nenhum aspecto que a torne um trabalho com potenciais didáticos para o Ensino Médio, mas importante para o Ensino Superior, principalmente para a licenciatura em matemática.

Dissertação 2: Alguns Aspectos da Obra Matemática de Joaquim Gomes de Souza

Quadro 11: Descritores de análise da dissertação 2 – Ensino Superior

Título: Alguns Aspectos da Obra Matemática de Joaquim Gomes de Souza
Autor (a): Carlos Ociran Silva Nascimento
Orientador (a): Eduardo Sebastiani Ferreira
Ano de defesa: 2008
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Cálculo Diferencial e Integral
Conteúdos Secundários Mobilizados: Funções
Resumo Este trabalho é voltado para a área de História da Matemática, notadamente a do século XIX, tendo como um dos objetivos, fornecer material para o ensino de Cálculo e História da matemática, tomando como base o resgate da vida e obra do matemático maranhense Joaquim Gomes de Souza, com foco em uma de suas proposições, a saber: Redução de Funções Descontínuas à Forma de Funções Contínuas. Tal resultado tem relação direta com a série de Fourier, convergência de séries, continuidade, derivada, culminando com o exemplo de função contínua sem derivada de Weierstrass. Constitui-se, dessa forma, material com o fim de auxiliar pesquisadores, professores e alunos nessas disciplinas.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Nascimento (2008).

Este trabalho teve como objeto de estudo As Obras Matemáticas do Maranhense Joaquim Gomes de Souza e apresenta como objetivo fornecer um material para o ensino de cálculo e história da matemática, tomando como base o resgate da vida e obra do matemático, com foco em uma de suas proposições presentes na sua obra *Mélanges de Calcul Intégral.*

No primeiro capítulo, o autor tenta situar o Maranhão no cenário brasileiro e faz um panorama histórico-cultural do Brasil, realizando uma pequena referência ao cenário mundial, mostrando as condições socioeconômicas em que viveu Joaquim Gomes de Souza. Por fim, escreveu sobre sua vida.

No segundo capítulo, mostra seu problema de Pesquisa *Redução de funções descontínuas em funções contínuas.* Em sua dissertação, Nascimento (2008) comenta que Gomes de Souza afirma ser sempre possível transformar funções descontínuas em contínuas, com condições dadas, independentemente da função que entra sob o sinal de integração. Achando essa afirmação muito forte, da maneira como a mesma foi apresentada, sem clareza nas hipóteses, rigor matemático e sem as passagens fundamentais da suposta demonstração, Nascimento (2008) mostra, neste capítulo, a Análise da *"Mémoire" que Joaquim Gomes de Sousa apresentou à Academia de Sciênces de Paris*. É neste capítulo que percebemos a riqueza de conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral que são apresentados no trabalho.

O segundo capítulo inicia com o extrato encaminhado a Academie des Sciênces de Paris em 1855 que Gomes de Souza se propõe a determinar:

> A função $\varphi(x)$ que satisfaz às seguintes equações:
>
> $$\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\varphi(x+\theta)d\theta = F(x) \qquad (2.1)$$
>
> $$\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta x)\varphi(\theta x)d\theta = F(x) \qquad (2.2)$$
>
> $$\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta) + xf_1(\theta)]\varphi(x+\theta)d\theta = F(x) \qquad (2.3)$$
>
> $$\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta) + xf_1(\theta)]\varphi(x\theta)d\theta = F(x) \qquad (2.4)$$
>
> Onde $f(\theta)$ e $f_1(\theta)$ são funções quaisquer de $\theta; F(x)$ uma função também qualquer de x, dada como as anteriores α e β constantes, tomadas à vontade, e independentes, portanto de x e θ. (NASCIMENTO, 2008, p. 15)

Nascimento (2008) mostra, em seu trabalho, que Gomes de Souza comenta a importância dessas equações para física-matemática e apresenta várias tentativas de resoluções. A partir dos resultados encontrados em uma dessas tentativas de resolução da equação 2.1., ele enuncia dois Teoremas:

> **Teorema 2.1 (Teorema I).** Se temos a equação $\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\varphi(x+\theta)d\theta = F(x)$, onde $f(x)$ e $F(x)$ são duas funções quaisquer de x; α e β duas constantes finitas ou infinitas, reais ou imaginárias, e se fazermos $\int_{a}^{b} e^{-hwx} F_1(w)dw$ é sempre possível satisfazer primeira equação tomando por $\varphi(x)$ a função $\varphi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-hwx} F_1(w)}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{h\theta w} f(\theta)d\theta} dw$.
>
> **Teorema 2.2 (Teorema III).** Se temos a equação $\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\varphi(x+\theta)d\theta = F(x)$, onde $f(x), F(x)$ são funções quaisquer de x, α e β, quantidades independentes de x e θ; e se fizermos:
>
> $$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)e^{hm\theta}} = \int_{\gamma}^{\delta} F_1(w)e^{hmw}dw$$
>
> podemos sempre satisfazer a primeira equação tomando $\varphi(x)$ a função:
>
> $$\varphi(x) = \int_{\gamma}^{\delta} F_1(w)F(x+w)dw$$
>
> (NASCIMENTO, 2008, p. 18)

A partir daí, Nascimento (2008) comenta que encontrou as resoluções 2.2, 2.3. e 2.4. Mas foca o objetivo da dissertação e mostra "Mémoire sur la Détermination des fonctions inconnues qui entrent sous le signe d´integration défine", que tem como um dos seus subtítulos: "Réduction des fonctions discontinues `a la forme des fonctions continues", ou seja, problema de Pesquisa *Redução de funções descontínuas em funções contínuas*. Neste momento da dissertação, ele traz outra riqueza de conteúdos matemáticos do Ensino Superior, envolvendo Cálculo Diferencial e Integral. Nascimento (2008) afirma que Gomes de Souza, ao tentar fazer a demonstração do que se propôs, chega à conclusão de que sua proposição não é válida para todas as funções.

No terceiro capítulo, mostra-se sua biografia, tomando como referência a obra de Bacelar Portela. E, por fim, o quarto capítulo trata da evolução do conceito de função ao longo do tempo. Neste capítulo, também foi apresentada a biografia de Karl Theodor Wilhelm Wierstranss e o seu famoso exemplo da função sem derivada.

Nessas reflexões, apontamos que esse trabalho não possui potenciais didáticos para o Ensino Médio, visto que seu conteúdo aborda exclusivamente conceitos aplicados do cálculo diferencial e integral, mobilizando conceitos avançados de funções.

Dissertação 3: Resolução de Equações Algébricas por Radicais

Quadro 12: Descritores de análise da dissertação 3 – Ensino Superior

Título: Resolução de Equações Algébricas por Radicais
Autor (a): César Ricardo P. Martins
Orientador (a): Marcos Vieira Teixeira
Ano de defesa: 2006
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Rio Claro
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo Principal Focalizado: Equações Algébricas (Álgebra)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Radiciação, Números Complexos e Polinômios
Resumo O problema de encontrar as raízes de uma equação algébrica motiva os matemáticos desde a Antiguidade. Somente resolvido por completo no início do século XIX, tal problema foi abordado de diferentes modos ao longo da História da Matemática, os quais edificaram o desenvolvimento da teoria que hoje denominamos Álgebra. Nesta dissertação propomos uma reconstrução histórica de uma parte desse desenvolvimento; mais precisamente, do período entre as descobertas, meados do século XVI, das fórmulas para exibir as soluções das equações de 3° e 4° graus e a publicação dos artigos de Evariste Galois em 1846. Em nossa reconstrução destacamos as relações entre as principais idéias de Cardano, Lagrange e Galois, que aparecem em suas tentativas de resolução de uma equação algébrica por radicais. Esta narrativa ainda tem a pretensão de que o material compilado sirva de apoio para um primeiro curso de Álgebra.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Martins (2006).

Neste trabalho, o autor propõe uma reconstrução histórica de uma parte desse desenvolvimento; mais precisamente, do período entre as descobertas, meados do século XVI, das fórmulas para exibir as soluções das equações de 3° e 4° graus e a publicação dos artigos de Evariste Galois em 1846.

Essa dissertação possui dois objetivos: 1) Abordar a História da busca pelas soluções por radicais de equações algébricas de grau n. 2) Desenvolver um material de apoio à professores do Ensino Superior em Álgebra Abstrata. Só pelos objetivos, já sabemos que se trata de um trabalho que aborda conteúdos do Ensino Superior. Nesta reconstrução, o autor destaca as relações entre as principais ideias de Cardano, Lagrange e Galois.

Martins (2006) usou a pesquisa bibliográfica, usando tanto fontes primárias, como fontes secundárias. O objeto de estudo foram as equações algébricas de grau n, dos artigos de Evariste Galois em 1846. O autor partiu do problema de pesquisa: por que é possível exibir as soluções algébricas de equações gerais de grau menor ou igual a quatro, e o mesmo não pode ocorrer para as equações gerais de grau superiores? É possível, então, estudar soluções para casos particulares?

No desenvolvimento de sua dissertação, no primeiro capítulo, encontramos um breve relato da história das equações algébricas, abordando-se as equações até o início do século XII, o estudo das equações na Europa Medieval, as equações cúbicas e quárticas, os números imaginários, as equações quínticas, as condições de solubilidade de equações por radicais e o desenvolvimento da álgebra após Galois. Ele divide esse capítulo em oito partes, a primeira chamada de preliminares, em que ele faz uma abordagem geral do que vem adiante. A segunda parte refere-se às equações até o início do século XII. A terceira parte aborda o estudo das equações na Europa Medieval. Em seguida, um tópico sobre Equações Cúbicas e quádricas, momento em que Martins já traz a relação entre Tartaglia e Cardano. A quinta sobre Números Imaginários, a sexta referindo-se a equações quínticas, a sétima referente a solução de solubilidade de equações por radicais e, para finalizar, a oitava parte sobre o desenvolvimento da álgebra após Galois.

Este capítulo, como anunciado anteriormente, trata sobre o contexto histórico das equações algébricas desde século XII até o XIX, mas o quinto tópico já traz conteúdos matemáticos, Martins (2006), em linguagem moderna, mostra o procedimento que Bombelli utilizou para a multiplicação e divisão entre pares de complexos. Foi mostrada a resolução dos seguintes exemplos: 1) $\sqrt[3]{2+\sqrt{-3}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{-3}}$; 2) a divisão entre 1000 e $2+11\sqrt{-1}$.

Com isso, Martins (2006) aborda o que Bombelli discute sobre as regras formais para o cálculo de números imaginários, verificando que a adição de irracionais quadráticos é suficiente para resolver equações quadráticas, da mesma forma com as equações cúbicas, usando adição de irracionais cúbicos e também mostra porque não existe número real como resposta de raízes quadradas negativas.

Também se mostra, neste capítulo, o uso do Método de Cardano para a resolução da equação $x^3 = 6x + 40$. Na sequência, comenta sobre Albert Girard (1595 – 1632), no que diz respeito à introdução do símbolo $\sqrt{-1}$, e o fato de a criação do termo imaginário ser de René Descarte. Também aborda o uso do i para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler (1707-1783) e sobre o termo número complexo introduzido por Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Daí por diante, continua o histórico dos números complexos, chegando às fórmulas trigonométricas e comentando sobre o Teorema Fundamental da Álgebra.

No segundo capítulo, abordou-se sobre a resolução de equações algébricas por radicais focando nas relações entre as principais ideias matemáticas em três momentos da história: (i) as descobertas das fórmulas para as soluções das equações gerais do terceiro e quarto graus no século XVI; (ii) a descoberta do resolvente de Lagrange no século XVIII e (iii) a publicação, no século XIX, do artigo *"Sur lês conditions de résolubilité des équations par radicaux"* escrito por Evariste Galois em 1831. E, neste momento de sua dissertação, Martins apresenta seu segundo objetivo, o de elaborar um material didático de álgebra abstrata.

Na primeira parte do segundo capítulo, chamada de Preliminares, aqui Martins (2006) afirma que o objetivo do capítulo é mostrar a sua análise do artigo de Evariste Galois (1811-1832), *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux,* levando em consideração as relações existentes entre as principais ideias matemáticas levantadas por Joseph Lagrange (1736-1813), no que diz respeito à solubilidade de equações algébricas por meio de radicais.

Na segunda parte do capítulo, chamada de Equação geral Cúbica, Martins (2006) mostra alguns exemplos para a resolução das equações cúbicas. O seu primeiro exemplo é a resolução pelo método de Cardano/Tartaglia da equação $x^3 - 3x^2 + 39x + 55 = 0$. Faz-se uma resolução que reduz o grau da equação de 3 para 2. Na terceira parte do segundo capítulo, Equação Geral do 4º grau, Martins (2006) mostra o método de Ferrari para a resolução da equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Na quarta parte do capítulo, Martins (2006) apresenta conceitos propostos por Galois contidos no artigo *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux,* com a pretensão de estabelecer relações destes conceitos com as ideias de Lagrange, associando os polinômios introduzidos por Lagrange e descritos nas secções anteriores da dissertação para puder analisar as soluções cúbicas e quárticas, usando as propriedades de Galois para estabelecer em que condições uma equação algébrica irredutível é solúvel por radicais. E finaliza, apresentando um tópico com métodos para soluções de equações com graus superiores, retomando sempre as ideias de Lagrange e depois suas conclusões finais, usando, em trabalho, textos de fontes primárias e secundárias.

Apesar de os conteúdos apresentados serem de conhecimento dos alunos do último ano do Ensino Médio, como equações algébricas, polinômios, números complexos e radiciação, considerados um nível avançado para ser tratado com os alunos na educação básica, constatamos que esse nível de abordagem pode ser trabalhado no Ensino Superior.

Dissertação 4: A Regra de L'hôpital – Análise Histórica da Regra de L'hôpital: A Importância da História da Matemática na Disciplina de Cálculo

Quadro 13: Descritores de análise da dissertação 4 – Ensino Superior

Título: A Regra de L'hôpital - Análise Histórica da Regra de L'hôpital: A Importância da História da Matemática na Disciplina de Cálculo
Autor (a): Everaldo Fernandes Barbosa
Orientador (a): Eduardo Sebastiani Ferreira
Ano de defesa: 2008
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Cálculo Diferencial e Integral
Conteúdos Secundários Mobilizados: Equações Diferenciais Ordinárias e Geometria Plana
Resumo O trabalho apresenta uma biografia do marquês de L'Hôpital e de Johann Bernoulli e as discussões sobre o cálculo do limite de uma função racional cujo numerador e denominador tendem a zero (conhecida como Regra de L'Hôpital), publicado no livro Análise dos Infinitamente Pequenos por Linhas Curvas pelo Marquês de L'Hôpital. Apresentamos a demonstração de ambos, L'Hôpital e Bernoulli e a demonstração rigorosa de Cauchy. Discutimos as controvérsias com relação à autoria da regra e as reivindicações de Johann Bernoulli pela sua autoria, pois Bernoulli foi pago para produzir e desvendar os mistérios, que para L'Hôpital, existiam na matemática de Leibniz. Incluímos também a interpretação geométrica que sugere a veracidade da regra e outras variantes que dependem dela. Além disso, são apresentadas discussões com relação ao uso da História da Matemática como material pedagógico para ensino de Cálculo Diferencial e Integral I e a altercação feita nos livros brasileiros e estrangeiros de cálculo sobre a aplicação da regra.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Barbosa (2008).

O objetivo deste trabalho foi analisar os principais fatos históricos para o descobrimento da regra de L'Hôpital, mostrando na íntegra o desenvolvimento feito por

L’Hôpital e Bernoulli. O autor também analisa o processo histórico para confirmar se as reivindicações de autoria da regra criada por Bernoulli eram aceitáveis. Este trabalho também enfatiza as demonstrações dessa regra em diferentes épocas e discute a importância da história da matemática nos cursos de cálculo.

O autor não deixa clara sua problemática, mas interpretamos que sua maior preocupação para ter iniciado essa pesquisa é o fato da ferramenta da Regra de L’ Hôpital ser apresentada para os alunos apenas como um método de calcular limites indeterminados, sem mostrar nenhuma justificativa, fazendo com que ele se preocupasse com o que os alunos pensam sobre a definição que está apresentada em todos os livros de cálculo, defendendo que é possível resgatar e difundir a história da matemática, projetando-a como uma das tendências em Educação Matemática e destacando os principais personagens responsáveis pela criação dos conceitos envolvidos.

Este trabalho foi dividido em cinco capítulos. O primeiro trata da biografia de matemáticos: L’Hôpital e Johann Bernoulli e a árvore genealógica de sua família, bem como suas contribuições para a elaboração do primeiro livro de cálculo diferencial. No segundo capítulo, o desenvolvimento da regra feita por L’Hôpital, dos conceitos preliminares, definições, postulados até a sua apresentação e demonstração. E também as reivindicações de Bernoulli sobre a autoria da regra e a demonstração sistemática e rigorosa de Cauchy.

Na terceira parte, foram discutidas as publicações da Regra de L’Hôpital. A quarta parte mostra três maneiras de justificar a regra:

1) Utilizando o Teorema do Valor Médio de Cauchy;

2) Sem utilizar o Teorema do Valor Médio;

3) Usando análise não standard.

4) E, para finalizar, a última parte se refere às discussões sobre a importância da utilização da história da matemática nos cursos de cálculo.

O método utilizado foi o de pesquisas bibliográficas disponíveis em internet e bibliotecas. Fica claro que é uma dissertação voltada para o ensino superior que aborda conteúdos de cálculo diferencial e integral com resoluções de Equações Diferenciais Ordinárias e conhecimentos geométricos.

Dissertação 5: Dos Complexos aos Números de Cayley: Uma Abordagem Geométrica

Quadro 14: Descritores de análise da dissertação 5 – Ensino Superior

Título: Dos Complexos aos Números de Cayley: Uma Abordagem Geométrica
Autor (a): Evangelina Helena Gentili
Orientador (a): Sueli Irene Rodrigues Costa
Ano de defesa: 2002
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo Principal Focalizado: Números Complexas
Conteúdos Secundários Mobilizados: Álgebra Linear e Geometria Analítica
Resumo A extensão do campo numérico aos chamados números hipercomplexos é apresentada nesta dissertação numa abordagem que buscou integrar diferentes formulações algébricas e aspectos geométricos associados. O objetivo foi a produção de um texto acessível sobre um tema que contemplasse também a evolução histórica.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Gentili (2002).

Este trabalho teve como objetivo produzir um material que fizesse uma interface entre álgebra e geometria para descrever alguns tipos de movimentos em Espaços Vetoriais. O autor dividiu a dissertação em três capítulos.

O primeiro capítulo trata de um resumo dos conceitos básicos de álgebra linear, pois a autora julga importante uma revisão deste conteúdo para que o leitor possa acompanhar como a ideia dos hipercomplexos, como generalização dos complexos, se constrói ao longo do tempo.

Os conteúdos apresentados de álgebra linear são definições diretas que aparecem em qualquer dos principais livros de Álgebra Linear adotados em cursos de graduação na área de matemática, porém, a autora apresenta de forma resumida. Seguem aqui os conteúdos abordados: Espaço Vetorial; Norma; Transformações; Base e Dimensão; Transformações Lineares e Matrizes; Subespaços Invariantes; Autovetores e Autovalores; Produto Interno; Vetores Ortogonais; Conjunto Ortonormal. No final deste capítulo, apresenta-se um contexto histórico referente aos números complexos.

No segundo capítulo, a autora mostra algumas construções de sistemas algébricos que surgem no desenvolvimento dos números complexos para abordar os Hipercomplexos. São eles: os quatérnios H e os octônios K. Iniciando com as ideias de Grassmann (fornecimento de tabelas de multiplicações de unidades básicas) e a construção de Cayley-Dickson (produção de sequência infinita de álgebras), deixando claro que *H* não é comutativa e K não é associativa. O mais importante deste capítulo, segundo Gentili (2002), foi mostrar que era impossível encontrar uma álgebra de divisão normada tridimensional, e, por isso, o primeiro caso dos hipercomplexos com as propriedades desejadas está em dimensão 4.

Depois de mostrada, neste capítulo, a construção de Grassmann, a autora traz as definições de números complexos. Mesmo que seja o conteúdo de Ensino Médio abordado nesta teoria dos complexos, não encontramos potenciais didáticos, pois se trata de um resumo do conteúdo que encontramos em qualquer livro do didático do 3º ano do Ensino Médio. Em seguida, após a abordagem dos números complexos ela nos apresenta os quatérnios H e octônios K, uma representação de números que segue a mesma lógica dos números complexos. Gentili (2002) também aborda outros conceitos matemáticos no segundo capítulo de sua dissertação para poder provar o que se propôs no início.

No terceiro capítulo, são abordados outros conceitos de álgebra Linear. De forma bem resumida, ela define: Transformações, Matrizes e Grupos Ortogonais. Em seguida, aborda diversos conteúdos avançados de álgebra linear, tanto em representação algébrica, como em representação geométrica, até chegar ao seu objetivo.

Com este resumo da dissertação de Gentili, podemos verificar que não temos potenciais didáticos para o Ensino Médio, pois os temas apresentados são de nível superior e, quando aparece em nível básico, que foi o caso da introdução aos números complexos, foram apresentadas apenas definições encontradas em qualquer livro didático do Ensino Médio. Vimos também que, apesar de o tema principal consistir nos números complexos, Gentilli precisou apresentar muitos conceitos de álgebra linear e geometria analítica para poder definir os Números Hipercomplexos.

Por isso, podemos detectar claramente que esse trabalho é uma ferramenta interessante para ser trabalhada em disciplinas de matemática em nível superior, ficando inviável seu uso para o Ensino Médio, mesmo apresentando algumas definições números complexos.

Dissertação 6: O Livro "Théorie Des Approximations Numériques et Du Calcul Abrégé" de Agliberto Xavier

Quadro 15: Descritores de análise da dissertação 6 – Ensino Superior

Título: O Livro "Théorie Des Approximations Numériques et Du Calcul Abregé" de Agliberto Xavier
Autor (a): Fabiane Cristina Höpner Noguti
Orientador (a): Marcos Vieira Teixeira
Ano de defesa: 2005
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP – Rio Claro
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Cálculo Numérico
Conteúdos Secundários Mobilizados: Equações Algébricas e Logaritmos
Resumo O objetivo deste trabalho é apresentar uma análise do livro escrito pelo Prof. Agliberto Xavier, intitulado Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé, publicado na França em 1909. Considerando que são poucos os documentos que versam a respeito do desenvolvimento do Cálculo Numérico no Brasil, decidimos por analisar um período na História do Ensino de Cálculo Numérico, mediante o livro de Agliberto Xavier. O referido livro é fonte primária e, portanto, essencial para o desenvolvimento deste trabalho. A proposta foi desenvolvida por meio de uma pesquisa histórico-documental, realizada na Biblioteca da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC/USP), na Biblioteca do Instituto de Ciências Matemáticas e da Computação (ICMC/USP); na Biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística (IME/USP), no Museu Casa Benjamin Constant, e no NUDOM - Núcleo de Documentação do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro. Este trabalho inclui uma análise do livro feita através de uma descrição do conteúdo exposto pelo autor, e comentários ao final de cada capítulo, de forma a compreender os passos utilizados pelo mesmo.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Noguti (2005).

Este trabalho teve o objetivo de apresentar uma análise do Livro *Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé*, publicado na França em 1909, escrito pelo Professor Agliberto Xavier na França em 1909, no intuito de contribuir para a história do Ensino do Cálculo Numérico no Brasil, no século XX, bem como compreender o processo de formação e desenvolvimento do conteúdo da disciplina cálculo numérico. Segundo Noguti (2005), o material utilizado nesta dissertação foi encontrado em três bibliotecas: Biblioteca da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC/USP), Biblioteca do Instituto de Ciências

Matemáticas e da Computação (ICMC/USP); Biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística (IME/USP).

O livro Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé foi analisado em duas fases; na primeira, ocorreu a leitura e a tradução do texto; na segunda, análise e compreensão do conteúdo exposto pelo autor. Nuguti (2005), para iniciar sua pesquisa, partiu da seguinte afirmação: “existem poucos documentos no Brasil que versam a respeito do desenvolvimento do cálculo numérico”.

Para construção desta dissertação, em seu primeiro capítulo, Noguti (2005) traz uma breve introdução, na qual situa o Cálculo Numérico no mundo ocidental, citando alguns dos trabalhos que contribuíram para o seu desenvolvimento; em seguida, fala sobre o Cálculo Numérico no Brasil e apresenta como funcionou o primeiro curso de Cálculo Numérico do Brasil em 1953 na Escola de Engenharia de São Carlos, inclusive, matrizes curriculares e docentes envolvidos. No segundo capítulo, detalha a vida de Agliberto Xavier.

No terceiro capítulo, faz-se uma análise do texto *Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé*, escrito por Xavier. Noguti faz essa análise mostrando e comentando os exemplos resolvidos do livro que não apresenta demonstrações dos teoremas que enuncia, fazendo a validação dos resultados por meio sempre dos exemplos. O texto de Agliberto é dividido em 7 partes: 1) Do Grau de Precisão sobre a avaliação de uma fórmula; 2) Cálculo algébrico e de aproximações; 3) Separação das raízes de equações algébricas quaisquer; 4) Método de Avaliações de Raízes Incomensuráveis, esboçado por Newton e constituído por Fourier; 5) Da Extração das Raízes de Números; 6) Teoria dos Logaritmos. 7) Das curvas de Erros.

O quarto capítulo encerra-se com suas considerações finais. O conteúdo desta dissertação é Cálculo Numérico. Como nós sabemos, um conteúdo de Ensino Superior, Porém, no terceiro capítulo, há uma grande mobilização do conteúdo de equações algébricas, e um dos tópicos abordados é o conteúdo de logaritmos, mas ambos serviram como embasamento para tema principal e foram abordados com nível avançado em relação ao que é trabalhado no Ensino Médio. Por isso, consideramos essa dissertação como um material que não possui potencial didático para o Ensino Médio.

Dissertação 7: Uma Reavaliação do pensamento lógico de George Boole: À luz da História da Matemática

Quadro 16: Descritores de análise da dissertação 7 – Ensino Superior

Título: Uma Reavaliação do Pensamento Lógico de George Boole: À Luz da História da Matemática
Autor (a): Giselle Costa de Souza
Orientador (a): John Andrew Fossa
Ano de defesa: 2005
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Central Focalizado: Lógica e Teoria dos Conjuntos
Conteúdos Secundários Mobilizados: Equações Algébricas
Resumo O presente estudo tem como objetivo fazer uma reavaliação do pensamento lógico do matemático inglês George Boole (1815 – 1864). Dessa forma nossa pesquisa versa sobre reflexões concernentes a análise matemática da lógica permeada pela história da matemática. Para isso, realizamos uma coletânea de considerações biográficas deste personagem à luz de um estudo dos acontecimentos ocorrido no século XIX e seu reflexo na produção da matemática. Descrevemos brevemente as inovações feitas por Boole nas áreas de equações diferenciais e da teoria de invariantes. Fizemos ainda uma análise da lógica de Boole, especialmente como formulada no livro The *Mathematical Analysis of Logic*, fazendo uma comparação desta com a lógica aristotélica formal, quanto a lógica moderna. Concluímos que Boole, como pretendia, expandiu a lógica, não somente em termos do seu conteúdo, mas também em termos dos seus métodos e elaboração formal. Concluímos ainda que seu propósito foi a modelagem matemática do raciocínio dedutivo, o que o levou a apresentar um formalismo que marcou época para lógica e que, através de suas interpretações distintas, levou Boole a uma nova conceituação do que é a própria matemática.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Souza (2005).

O objetivo deste trabalho foi fazer uma reavaliação do pensamento lógico do matemático inglês George Boole (1815-1864), frente aos acontecimentos históricos de sua época. E analisar o que Boole queria sustentar no sistema contido em seu livro à luz de seu tempo. A autora não deixa clara sua problemática e usa como objeto de pesquisa o livro *The Mathematical Analysis of lógic*.

A Dissertação foi estruturada em cinco capítulos, o primeiro deles com informações biográficas de George Boole, com base no livro de MacHale (1985) intitulado *George Boole:*

his life and work. No decorrer do capítulo, também foi abordada a relação de Boole com o ensino, principalmente de matemática. O segundo capítulo trata das atividades literárias de Boole, o que pouco se fala desse lado de Boole, inclusive, quase não se tem literatura a esse respeito. Por isso, Souza resolveu dedicar um capítulo específico de sua dissertação sobre esse tema para explorar a relação de Boole com a poesia e o estudo clássico.

O terceiro capítulo aborda sobre a matemática de Boole e sua época, fazendo um breve resumo da matemática desenvolvida em sua fase áurea no século XIX, investigando temas de interesse de Boole, como cálculo, equações diferenciais, teoria de invariantes, álgebra e lógica. Segundo Souza (2005), para compreender a concepção e a evolução do pensamento matemático no século XIX, auxiliou a identificar as influências que o mesmo teve para o desenvolvimento de suas pesquisas, especialmente, com relação à lógica matemática.

No capítulo seguinte, denominado *Lógica*, foi analisado o livro *The Mathematical Analysis of lógic*, publicado em 1847. Nele, Souza descreve o conteúdo do referido livro, juntamente com uma análise do mesmo, objetivando dar ênfase às inovações presentes na obra, à relação com os padrões lógicos existentes até a época que o desígnio de Boole neste livro foi alcançado. Foi neste capítulo que se abordou toda a matemática que aparece na dissertação. O quinto capítulo, Souza reservou para suas considerações finais.

Consideramos que esta dissertação não tem potenciais didáticos para o Ensino Médio, pois os conteúdos apresentados são de Lógica, entre eles, proposições, tabela-verdade, silogismo, entre outros, observamos que o conteúdo de Teoria dos Conjuntos e algumas Equações Algébricas também foram mobilizados de forma secundária, mas em nível avançado para a Educação Básica, ou seja, os conteúdos apresentados nesta dissertação possuem nível para alunos do Ensino Superior e podem ser aproveitados por professores que ministram disciplinas de Lógica.

Dissertação 8: Silvanus Phillips Thompson e a desmistificação do Cálculo: Resgatando uma história antiga

O objetivo deste trabalho, dividido em cinco capítulos, era estudar a história do ensino de cálculo e, mais especialmente, os desdobramentos do livro *Calculus mad Easy (1910),* no contexto da Educação Matemática, procurando fazer uma análise histórica que elucidasse as relações entre Silvanus Phillips Thompson e a educação do início do século XX, particularmente a educação matemática.

Vejamos o quadro 17:

Quadro 17: Descritores de análise da dissertação 8 – Ensino Superior

Título: Silvanus Phillips Thompson e a desmistificação do Cálculo: Resgatando uma história antiga.
Autor (a): Gustavo Alexandre de Miranda
Orientador (a): Ubiratan D'Ambrosio
Ano de defesa: 2004
Instituição onde foi defendida: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Cálculo Diferencial e Integral
Conteúdos Secundários Mobilizados: Funções
Resumo Com o intuito de estudar a história do ensino de Cálculo e, mais especificamente, os desdobramentos do livro *Calculus Made Easy (1910)* no contexto da educação matemática, este trabalho procura fazer uma análise histórica que elucide as relações entre Silvanus Phillips Thompson (autor do livro) e a educação do início do século XX, particularmente a educação matemática. Thompson legou muito a às áreas de física e da radiologia, porém com a chegada do novo século, passou a se dedicar intensamente à educação técnica de seus compatriotas ingleses. Tal dedicação, aliada a preocupações políticas e sociais da época, foi crucial para publicação do seu texto didático mais polêmico: o *Calculus Made Easy (1910)*. A polêmica estava atrelada às discussões sobre o rigor e a intuição no ensino de matemática, visto que o didático tratava dos conceitos fundamentais do Cálculo e maneira intuitiva e com aplicações. Apesar das críticas e do repúdio dos matemáticos da época, Thompson granjeou a admiração e o respeito de muitos alunos de Cálculo durante o século XX. Tornou-se, assim, parte da história do ensino de Cálculo.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Miranda (2004).

O primeiro capítulo confirma-se como uma introdução apresentando os problemas de pesquisa: 1) Em quais aspectos o livro de Thompson difere dos livros da mesma época? 2) Que repercussão teve o livro calculus Made Easy? 3) Qual era de fato, a proposta de Silvanus Thompson? 4) A quem eram endereçadas suas exposições intuitivas e pouco formalistas? No segundo capítulo, são abordados os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa. No terceiro capítulo, foram feitas considerações do cálculo diferencial e integral e sua formalização no século XIX e seu ensino no início do século XX. No quarto capítulo, abordam-se reflexões sobre o movimento de modernização do ensino de matemática em 1990 e suas consequências no Brasil em 1920. No quinto capítulo, faz-se uma análise do curso de cálculo de Silvanus Thompson e a abordagem do livro *Calculus mad Easy*. Nesta dissertação, não encontramos potenciais didáticos para o Ensino Médio, pois trata-se de um trabalho voltado para história do Cálculo Diferencial e Integral e só pode ser abordada no Ensino Superior.

Dissertação 9: Prova e Explicação em Bernard Bolzano

Quadro 18: Descritores de análise da dissertação 9 – Ensino Superior

Título: Prova e Explicação em Bernard Bolzano
Autor (a): Humberto Assis Clímaco
Orientador (a): Michel Friederich Otte
Ano de defesa: 2007
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Mato Grosso
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Análise
Conteúdos Secundários Mobilizados: Lógica
Resumo Este trabalho tem o objetivo de contribuir para o debate atual da Educação Matemática e da Filosofia da Matemática acerca de provas que provam e provas que explicam. Pretende-se fornecer elementos históricos a respeito do período em que surgiu o problema de que provas matemáticas devem cumprir o papel de mostrar a ordem objetiva dos conceitos matemáticos e comunicar as ideias matemáticas para os estudantes. Para tanto, estudou-se a grande transformação da matemática que ocorreu no século XIX e que colocou a necessidade de provas rigorosas. Em particular, evidenciou-se, nessa transformação, o papel de Bernard Bolzano (1781-1842), matemático, filósofo e teólogo, apelidado por Félix Klein de *o pai da aritmetização da análise* e o primeiro moderno a estabelecer a distinção entre provas que provam e provas que explicam. Bolzano provou, sem o auxílio do tempo ou do espaço – ou seja, dos sentidos – o Teorema do Valor Intermediário, ao passo que os matemáticos de sua época julgavam ser impossível demonstrar algo tão óbvio. Ao fazer essa demonstração, Bolzano inaugurou uma nova fase na matemática, e desde então ela se tornaria definitivamente aritmetizada. Utilizou-se neste estudo a metodologia documental-bibliográfica. Teoricamente o trabalho fundamentou-se em documentos matemáticos, históricos e filosóficos do período da chamada aritmetização da análise, sobretudo aqueles escritos por Bolzano, e em artigos e livros atuais e mais recentes que discutem esse tema; também buscamos obras que discutem a relação provas e explicações; e, por fim, alguns artigos que discutem a relação entre demonstrações e a Reforma da Matemática Moderna. Além de contribuir para a reflexão e compreensão sobre os temas acima citados por parte de pesquisadores da Educação Matemática, esse debate pode apresentar elementos para que professores se questionem acerca do caráter da matemática e seus objetos e a natureza social, histórica, filosófica e cultural do crescimento do conhecimento matemático. Essas reflexões podem repercutir positivamente na prática em sala de aula de professores que se aventurem à difícil tarefa de buscar uma reflexão mais profunda relativa à natureza da matemática.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Clímaco (2007)

Este trabalho foi escrito por Humberto Assis Clímaco, e o objeto de pesquisa foram duas obras de Bolzano: 1) Prova puramente analítica; 2) Wissenshaftslehre (Doutrina da Ciência). O objetivo foi contribuir para o debate atual da Educação Matemática e da Filosofia da matemática acerca de provas que provam e provas que explicam.

O Método de Pesquisa utilizado foi o bibliográfico, fundamentando-se em documentos matemáticos, históricos e filosóficos do período da chamada aritmetização da análise, sobretudo aqueles escritos por Bolzano, obras que discutem a relação provas e explicações; artigos sobre relações entre demonstrações e a Reforma da Matemática Moderna.

No primeiro capítulo, Clímaco (2007) apresenta o que está se debatendo na educação matemática, acerca de provas que provam e provas que explicam, usando textos de educadores matemáticos e filósofos da ciência. No segundo capítulo, traz uma discussão do artigo de Bolzano, *Prova puramente analítica*, demonstrando o Teorema do Valor Intermediário para polinômios.

No terceiro capítulo, Clímaco (2007) mostra concepções de Bolzano que o levaram a acreditar que era necessária uma demonstração, sem a utilização de elementos dos sentidos, do Teorema do Valor Intermediário, e que se esforçava para formular uma Teoria da Ciência (*Wissenschaftslehre*) concentrada na análise do conteúdo das proposições, e não na análise do conteúdo da mente humana. Também se aborda um pouco sobre as relações de Bolzano com a filosofia analítica e suas convergências e divergências com Kant.

No quarto capítulo, Clímaco (2007) discute de forma rápida e com exemplos de como acontece o pensamento relacional, à luz de demonstrações importantes historicamente para o contexto que diz respeito a este trabalho. Para finalizar, mostra os extratos do *Wissenschaftslehre*, com traduções feitas em colaboração com Humberto Clímaco e Michael Otte, algumas do inglês e revisadas do original em alemão, e outras diretamente do alemão.

Essa dissertação refere-se ao conteúdo de Análise Matemática, mas traz algumas definições e discussões na área de Lógica Matemática e não possuem potenciais didáticos para o Ensino Médio, é um trabalho totalmente voltado para o Ensino Superior.

Dissertação 10: O Processo de Integração de Blaise Pascal

Este trabalho tem como objeto de pesquisa as três obras de Pascal: 1) Postestatum Numericarum Summa; 2) Lettre De M. Dettonville a M. De Carvavi; 3) Tratado do Triângulo Aritmético. Venturin contou com a ajuda de seu orientador para traduzir as sentenças em latim das duas primeiras obras.

Vejamos o quadro 19:

Quadro 19: Descritores de análise da dissertação 10 – Ensino Superior

Título: O Processo de Integração de Blaise Pascal
Autor (a): Jamur André Venturin
Orientador (a): Irineu Bicudo
Ano de defesa: 2007
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Rio Claro
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Cálculo Diferencial e Integral
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica e Aritmética.
Resumo O propósito desse trabalho é identificar de que maneira Pascal solucionava problemas matemáticos de integração, fazendo uso dos indivisíveis. Para isso, consultamos em particular três de suas obras: Postestatum Numericarum Summa[6], Lettre de M. Dettonville A M. de Carcavi[7] e o *Tratado do Triângulo Aritmético*. Vimos a estreita relação que existe entre essas obras, a saber, na primeira delas é exibida a regra geral para encontrar áreas sob curvas do tipo $y = x^n$, bem como mostra a relação entre a *soma de potências numéricas* com *grandezas contínuas*. Faz a integração das curvas segundo a abordagem dos indivisíveis. Já na segunda, que é associada diretamente com a terceira obra, é apresentada tanto a compreensão do indivisível e do infinitamente pequeno na constituição do contínuo, quanto à relação de soma simples, triangular e piramidal (encontradas a partir do triângulo aritmético) com suas respectivas integrais. Desse modo, a fim de entendermos o que aconteceu no século XVII, e sabermos quais as possíveis influências matemáticas de Pascal, buscamos outros métodos de integração como aqueles utilizados pelos gregos, isto é, o método de exaustão e as técnicas do século XVI. Sendo assim, foi possível observar que seus procedimentos de integração podem ser contemplados em dois aspectos: no primeiro, como contribuição para a história do desenvolvimento do cálculo, em um período em que ele estava na eminência de ser estruturado. No segundo, destacamos a relação existente com o cálculo moderno, contudo seu campo teórico é fundamentado nos indivisíveis.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Venturin (2007).

O objetivo da pesquisa foi mostrar que os procedimentos de integração de Pascal podem ser vistos como uma das fases do desenvolvimento formal do processo de integração. Segundo Venturin:

[6] Soma de Potências Numéricas.
[7] Carta do Sr. Dettonville ao Sr. De Carcavi.

> O tema da pesquisa surgiu quando participamos da disciplina Gênese do Pensamento Diferencial. Naquele momento foi apresentado – juntamente com um grupo – um trabalho que expôs algumas concepções matemáticas de Pascal. A partir de então, caracterizou-se interesse por esse assunto (VENTURIN, 2007, p. 4).

Diante disto, Venturin elaborou a seguinte pergunta de pesquisa: *Qual foi o processo utilizado por Pascal para determinar a solução de problemas matemáticos envolvendo integração, segundo a abordagem dos "indivisíveis"?*

Este trabalho é composto por cinco capítulos. No primeiro deles, Venturin trata da introdução, destacando seus objetos e problema. No segundo capítulo, traz o contexto social e científico de Blaise Pascal, ou seja, uma biografia do matemático. No terceiro, trata do panorama científico, comentando-se qual foi a razão que levou os antigos geômetras a formular o método de demonstração conhecido como dupla redução ao absurdo, alguns pontos de vista matemáticos do século XVI, bem como as ideias matemáticas de Francisco Maurolico, de Federigo Commandino, de Simon Stevin e de Luca Valerio, a compreensão matemática de Kepler, Galileu e Cavalieri, em relação aos indivisíveis no século XVII. Tanto esse capítulo quanto o próximo são os mais importantes da dissertação. Venturine destaca como seus dois maiores objetivos para esse capítulo:

> Compreender a importância de alguns métodos de integração; bem como entender a relação entre o indivisível, o infinitesimal, e o contínuo. Achamos necessário expor as compreensões do indivisível e do infinitesimal. Temas que hoje são pouco tratados, mas que causaram muita repercussão na história da matemática. Um exemplo é que essa questão foi estudada pelos gregos e perpetuou-se até os séculos XVI e XVII, provocando muitos debates sobre a constituição do contínuo, ou seja, são aproximadamente dois mil anos de história (VENTURIN, 2007, p. 3).

O quarto foi dedicado a responder à pergunta da dissertação, com base nas realizações matemáticas de Pascal. Está dividido em três partes: 1) Exame do processo de integração de curvas do tipo $y = x^n$, da passagem do discreto ao geométrico; 2) síntese do tratado *O Triângulo Aritmético*; 3) A obra de Pascal concernente à competição da cicloide, organizada por ele.

Nesta dissertação, fica claro que o tema principal é Cálculo Diferencial e Integral, e seu conteúdo pode ser aproveitado no Ensino Superior. No desenvolvimento do trabalho, também se veem os conteúdos de geometria plana, espacial e analítica, em forma de aplicação do cálculo, mas também de forma isolada, podendo ser trabalhados em disciplinas na Licenciatura em Matemática e também alguns problemas envolvendo aritmética que podem ser usados nas disciplinas de introdução a álgebra, porém não observamos potenciais didáticos para serem abordados no Ensino Médio.

Dissertação 11: Prof. J. O. Monteiro de Camargo e o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise na Universidade de São Paulo

Quadro 20: Descritores de análise da dissertação 11 – Ensino Superior

Título: Prof. J. O. Monteiro de Camargo e o Ensino do Cálculo Diferencial e Integral e de Análise na Universidade de São Paulo
Autor (a): Luiz Roberto Rosa Silva
Orientador (a): Lúcia Suerzut Baroni
Ano de defesa: 2006
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Rio Claro
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Análise
Conteúdos Secundários Mobilizados: Álgebra e Cálculo
Resumo O intento deste trabalho é apresentar a trajetória da carreira do Prof. José Octávio Monteiro de Camargo, da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, bem como verificar se suas *Notas de Aula* de Cálculo Diferencial e Integral, conforme calhamaço datilografado nos anos de 1958 a 1960, podem ser consideradas como uma contribuição ao ensino e divulgação da Análise Matemática no Brasil. Pretende-se, desta forma, contribuir para com a história do ensino de Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática por terras brasileiras – um contributo à permanente pesquisa que objetiva traçar a História da Matemática no Brasil. Todo o estudo foi realizado através de pesquisas em documentos obtidos, fundamentalmente, junto ao Setor de Arquivo Histórico da Escola Politécnica e Bibliotecas desta Escola, bem como junto ao Centro de Apoio à Pesquisa em História “Sérgio Buarque de Holanda” – CAPH –, e junto às Bibliotecas do Departamento de História da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo. Também recorri à Secretaria Acadêmica e à Biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. E para finalizar, destaco o importante estudo que realizei, através de vários livros de História da Matemática (em particular a do Cálculo e da Análise), para me pautar na análise da referida obra do Prof. Catedrático J. O. Monteiro de Camargo.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Silva (2006).

Essa Pesquisa teve como objetivo apresentar a carreira do Professor José Octávio Monteiro de Camargo da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, bem como verificar se suas notas de aula de cálculo Diferencial e Integral, conforme calhamaço datilografado nos anos de 1958 a 1960, podendo ser considerados como uma contribuição ao ensino e divulgação da Análise Matemática no Brasil.

O autor faz uma pesquisa documental, utilizando documentos do Setor de Arquivo Histórico da Escola Politécnica e Bibliotecas da mesma e também pesquisa no Centro de Apoio À Pesquisa em História "Sérgio Buarque de Holanda" – CAPH e nas bibliotecas do Departamento de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo, a Secretaria Acadêmica e a Biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística de São Paulo.

Esta dissertação é composta de cinco capítulos. O primeiro deles é a introdução; o segundo trata da biografia do Professor J. O. Monteiro de Camargo, com foco na sua formação e carreira. O terceiro traz alguns programas e algumas grades de Cálculo Diferencial e Integral e Análise, segundo Silva (2006), e o objetivo desta parte da pesquisa foi traçar um panorama geral de alguns programas de Cálculo diferencial e integral da Escola Politécnica entre 1864 e 1960 e alguns programas das disciplinas *Análise Matemática e Cálculo diferencial e integral* da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo – USP, entre 1934 e 1970 e dos programas iniciais de Análise Matemática e de Cálculo Diferencial e Integral do Instituto de Matemática e Estatística da USP, relacionando essas três instituições até a criação do Instituto Militar de Engenharia – IME.

Para finalizar, apresentou-se o quarto capítulo, que se refere às Notas de Aula de Monteiro Camargo. É nessa parte da pesquisa que o conteúdo matemático aparece. Consideramos esta pesquisa voltada para o Ensino Superior, abordando o conteúdo de análise matemática com principal focalizado. E por que não Cálculo Diferencial e Integral como conteúdo principal focalizado? Pois, segundo Silva:

> Será foco da minha apresentação, essencialmente, a parte I, *Introdução e Fundamentos,* que diz respeito ao nomeado Livro I. Faço esta escolha por verificar a proximidade dessa parte com a Análise Matemática. Embora todo o restante dos escritos do Prof. Monteiro de Camargo segue o estilo e os fundamentos dessa parte inicial. Em relação a parte II, referente ao Livro II, alguns pontos serão colocados. (SILVA, 2006, p. 91)

Ou seja, o que foi abordado pelo autor sobre as notas de aula de Monteiro Camargo diz respeito à Análise Matemática, mas observamos que os conteúdos tanto de álgebra (Grupo, anel e corpo) como conteúdo de cálculo também são abordados de forma secundária nesta dissertação, que, por sua vez, não possui nenhum potencial didático para o Ensino Médio a ser explorado.

Dissertação 12: A Axiomática da Aritmética: E a Contribuição Hermann Günther Grassmann

Quadro 21: Descritores de análise da dissertação 12 – Ensino Superior

Título: A Axiomática da Aritmética: E a Contribuição Hermann Günther Grassmann
Autor (a): Maria do Carmo Pereira Servidoni
Orientador (a): Sonia Barbosa Camargo Igliori
Ano de defesa: 2006
Instituição onde foi defendida: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimentos de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Teoria dos Números
Conteúdos Secundários Mobilizados: Álgebra e Aritmética
Resumo Esta pesquisa teve como objetivo o desenvolvimento epistemológico do objeto de conhecimento – número – em sua constituição como entidade matemática. Ficou evidenciado que, no final do século XIX, a necessidade dessa constituição gerou muitas controvérsias, porque número ser concebido como presente de Deus e, consequentemente, considerado algo perfeito. Para o desenvolvimento dessa pesquisa, tivemos como referência principal foi o artigo intitulado: A *debate about the axiomatization of aritmetic: Otto Hölder against Robert Gra β Mann* de Mircea Radu (2003), no qual se encontra um debate a respeito da Axiomatização da Aritmética sob dois pontos de vista; por um lado Otto Hölder que acreditava na natureza sintética da Matemática, sendo assim rejeitava o método axiomático como base para a mesma; por outro lado, Robert Grassmann e Hermann Grassmann que, também, concordam com a ideia de Hölder, pois rejeitam o método axiomático. No entanto, apresentaram uma abordagem da Aritmética, aparentemente, axiomática. Na verdade, Grassmann não entedia assim seu tratamento da Aritmética, pois as leis que definiríamos números naturais pertenciam a Álgebra, outra disciplina que Grassmann considerou como geradora de todas as outras. No desenvolvimento dessa pesquisa, indicamos que as bases da axiomatização da Aritmética estavam no bojo das grandes transformações ocorridas na Matemática durante o século XIX e início do século XX, o aparecimento das Geometrias não-euclidianas, a libertação da Álgebra das veias da Aritmética e o processo intricado da Aritmetização da Análise. Nesse período, também, desenvolveu-se a discussão da pertinência ou não do uso do método axiomático, como fundamento da aritmética. Conclui-se que apesar de toda polêmica desse período, a possibilidade da axiomatização da aritmética e a adoção do princípio axiomático nas ciências formais contribuíram para o avanço das ciências exatas.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Servidoni (2006).

É um trabalho que faz parte de um projeto de pesquisa e teve como objetivo estudar o artigo *A Debate About the Axiomatization of Arithmetic: Otto Hölder against Robert Grassmann*, de Mircea Radu (2003), no qual discute a axiomatização da aritmética sob dois pontos de vista: por um lado, Otto Hölder, um matemático intuicionista que rejeita explicitamente o método axiomático para lidar com os fundamentos da matemática: por outro, Robert Grassmann, que apresentou, em 1891 (apoiado nas ideias desenvolvidas por seu irmão Hermann Grassman), uma abordagem da aritmética como proposta para seus fundamentos e foi alvo de crítica de Hölder.

Essa pesquisa partiu da possibilidade de existirem consequências cognitivas e didáticas em decorrência das três grandes mudanças ocorridas na matemática no decorrer de 200 anos: a Axiomatização da Matemática, a mudança na noção de axioma e nova noção de objeto matemático. O autor divide a pesquisa em três momentos: o primeiro deles é composto por dois capítulos, tendo sido feito um levantamento histórico de três grandes acontecimentos, o desenvolvimento da Geometria não-euclidiana, a separação da álgebra abstrata da aritmética e a aritmetização da análise.

O segundo momento é composto por um capítulo no qual foi apresentada a história de Hermann Grassmann e os elementos de sua concepção da matemática. O terceiro momento é composto por um capítulo que traz as reflexões geradas pelo debate entre Grassmann e Hölder sobre o princípio axiomático.

Podemos observar que se trata de uma dissertação voltada para o Ensino Superior, que traz muita teoria voltada aos Fundamentos da Matemática, ou seja, um material muito rico para ser usado tanto em disciplinas de graduação como em pós-graduação, abordando sobre Geometria não-euclidiana, álgebra abstrata, aritmetização da análise e aritmética. Este trabalho me fez lembrar alguns cursos de Fundamentos e Filosofia da Matemática que lecionei em cursos de Especialização em Matemática. Esse seria um material que, certamente, poderia usar com os alunos em sala de aula, pois representa uma riqueza de informações da área, em relação ao conteúdo matemático propriamente dito. Observamos pouca coisa de aritmética e, numa perspectiva geral, percebemos que aritmética foi o tema principal desta dissertação, que não possui nenhum potencial didático para o Ensino Médio.

Dissertação 13: A Difícil Aceitação dos Números Negativos: "Um Estudo da Teoria dos Números de Peter Barlow (1776-1862)"

Este trabalho teve o objetivo de propor um estudo que, ao direcionar o olhar sobre a obra de Peter Barlow (um dos últimos a não aceitar os números negativos), tentará entender as resistências históricas perante números negativos, pois, segundo Anjos (2008), o entendimento dessas resistências contribuirá para a construção de materiais que auxiliem o professor nas elaborações de atividades ministradas em sala de aula. O objeto de pesquisa foram as obras: *An Elementary Investigation of the Theory of Numbers*, publicada em 1811 e *A New Mathematical and Philosophical Dictionary*, de 1814. Vejamos o quadro 22:

Quadro 22: Descritores de análise da dissertação 13 – Ensino Superior

Título: A Difícil Aceitação dos Números Negativos: "Um Estudo da Teoria dos Números de Peter Barlow (1776-1862)"
Autor (a): Marta Figueiredo dos Anjos
Orientador (a): John Andrew Fossa
Ano de defesa: 2008
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Teoria dos Números
Conteúdos Secundários Mobilizados: Equações Algébricas
Resumo O presente estudo visa apresentar um incurso histórico-epistemológico no desenvolvimento do conceito matemático de número negativo. Para tanto, inter-relacionamos as diferentes formas e condições de construção do conhecimento matemático e, assim, identificando as consequentes características no estabelecimento do referido conceito, em diferentes comunidades matemáticas e momentos históricos. Com isso, diante de um entendimento das barreiras construídas historicamente perante o conceito de número negativo, especialmente, as de origem ontológicas, que incompatibilizava o conceito de número negativo com o conceito de número natural, impedindo o desenvolvimento do conceito de número negativo. Assim, esboçamos as razões de rejeição aos números negativos, como raízes de equações, pelo inglês Peter Barlow (1776 –1862) em *An Elementary Investigation of the Theory of Numbers*, publicada em 1811. Nós também diagnosticamos a continuidade das dificuldades com o tratamento com os números negativos, já em pleno transcurso do século XIX.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Anjos (2008).

A autora dividiu sua pesquisa em quatro capítulos. No primeiro deles, intitulado *Um esboço da história dos números negativos até o século XVIII*, foi feita uma descrição sobre as considerações sociomatemáticas a partir das antigas civilizações egípcias, chinesas, hindus, gregas; o império árabe, os centros italianos, destacando as características matemáticas e as consequências para o desenvolvimento do conceito dos números negativos em cada civilização até as considerações levantadas por meio do advento do simbolismo de Viète, indicando as consequências dessa postura de fundamentação, estabelecidas sobre o projeto matemático das primeiras décadas do século XIX.

No segundo capítulo, cujo título é *Os números negativos na matemática inglesa,* foi feito um estudo das características da matemática produzida na Inglaterra com foco maior no século XVIII na matemática de Newton.

No terceiro capítulo, *Os números negativos na obra de Peter Barlow*, foi feito um estudo de caso em relação a algumas considerações e questionamentos sobre as atitudes implícitas e explícitas nas produções matemáticas de Peter Barlow diante dos números negativos, inserindo no contexto sociomatemático do período em que viveu e também foi realizado um estudo sobre a vida e a obra de Barlow, analisando as concepções e métodos que envolvem os negativos, usando *An Elementary Investigation of the Theory of Numbers*, publicado em 1811, e *A New Mathematical and Philosophical Dictionary,* de 1814.

Este trabalho é voltado para o Ensino Superior e, da mesma forma que a dissertação que descrevemos anteriormente, de Maria do Carmo Pereira Servidoni, também se refere à Teoria dos Números e pode ser bem trabalhada nas disciplinas de Fundamentos da Matemática. Em um momento do trabalho, reservou-se um estudo sobre equações algébricas que consideramos como conteúdo secundário, mas que também não possui potenciais didáticos para o Ensino Médio.

Dissertação 14: Número: Reflexões sobre as conceituações de Russell e Peano

Neste trabalho, cujo objetivo foi realizar um estudo sobre a epistemologia filosófica do conceito de número, a autora assume como problemática a dualidade filosófica das conceituações de número, sustentadas pela axiomática (proposta de Peano) e pela teoria dos conjuntos e Lógica (proposta por Russell), sendo o problema de pesquisa dessa dissertação a Conceituação de Número frente a essa dualidade e a possibilidade de ser apresentada uma definição em definitivo ao conceito de número.

O objeto de Pesquisa da autora é o artigo de Otte: B. Russel *"Introduction to Mathematical Philosophy",* publicado em 2001, com foco na polêmica existente entre a concepção de número apresentada por Russell (1872-1970) contraposta à de Peano (1858-1932). Essa pesquisa é parte do projeto de pesquisa intitulado: "Os Números e a aritmetização do pensamento matemático", de autoria de Michael Otte e Sonia Barbosa Camargo Igliori, aprovado pelo CNPQ em 2004. Vejamos o quadro 23:

Quadro 23: Descritores de análise da dissertação 14 – Ensino Superior

Título: Números: Reflexão sobre as Conceituações de Russell e Peano
Autor (a): Michaela Costa Schön
Orientador (a): Sônia Barbosa Camargo Igliori
Ano de defesa: 2006
Instituição onde foi defendida: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Teoria dos Números
Conteúdos Secundários Mobilizados: Lógica
Resumo Este trabalho objetivou realizar um estudo sobre a epistemologia filosófica do conceito de número, na qual ainda faz sentido o questionamento: O que é número? Nesta perspectiva, assumiu-se como problemática a dualidade filosófica das conceituações de número, sustentadas pela axiomática (proposta por Peano) e pela Teoria dos Conjuntos e Lógica (proposta por Russell), sendo o problema de pesquisa a Conceituação de Número frente a essa dualidade e à possibilidade de ser apresentada uma definição em definitivo ao conceito e número. O foco da presente pesquisa está na polêmica existente entre a concepção de número apresentada por Russell (1872 – 1970) contraposta à de Peano (1858 – 1932), tomando-se por base as críticas de Otte, apresentadas no artigo: B. Russell “Introduction to Mathematical Philosophy”, de 2001. A pesquisa desenvolveu-se tendo por referência a noção de Complementaridade, tendo sido utilizados procedimentos metodológicos adequados às pesquisas qualitativas. Como conclusão pode-se afirmar que os números são: por um lado, características de certas classes e, por outro, conceitos operativos. Deste modo a existência da polêmica entre filósofos como Frege e Russell, que favorecem os aspectos predicativos, isto é, definem os números em termos de cardinalidade e outros como Grassmann, Dedekind e Peano que estacam os números ordinais, justifica a proposição de Otte da complementaridade entre abordagens. A possibilidade de existirem consequências cognitivas e didáticas na utilização no ensino de uma ou outra abordagem da conceitualização de número ou de ambas como pretende Otte torna, este estudo, uma contribuição para Educação Matemática.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Schön (2006).

A dissertação foi dividida em cinco capítulos. No primeiro deles, apresenta-se a pesquisa, o conceito de número e as personagens que discutem esse conceito. O segundo foi dedicado a alguns elementos relativos ao método axiomático e à noção de complementaridade. No terceiro capítulo, aborda-se a concepção de Russell sobre número. No quarto capítulo, encontra-se o estudo do artigo de Otte, centro da pesquisa e, por fim, no quinto capítulo, as considerações finais. Esta pesquisa é voltada para o Ensino Superior, pois faz uma discussão filosófica profunda de conceitos da Teoria dos Números, com tendências para serem trabalhadas em disciplinas de Fundamentos da Matemática. E com nenhum potencial didático para o Ensino Médio.

Dissertação 15: Um Estudo sobre a Concepção de "Paradoxo segundo o Pensamento de Augustus de Morgan"

Quadro 24: Descritores de análise da dissertação 15 – Ensino Superior

Título: Um Estudo sobre a Concepção de "Paradoxo segundo o Pensamento de Augustus de Morgan"
Autor (a): Nemone de Souza
Orientador (a): John Andrew Fossa
Ano de defesa: 2009
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Abordagem: Vida e Obra de matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Lógica e Teoria dos Conjuntos
Conteúdos Secundários Mobilizados:
Resumo O presente trabalho tem como objetivo fazer uma análise do conceito de "Paradoxo" suscitado na obra de *A Budget of paradoxe* (1872) do matemático e lógico inglês Augustus de Morgan (1806-1871). Neste aspecto é importante salientar que uma grande parte deste livro consiste de re-impressões de uma série de escritos do autor no periódico científico *Athenaeum*, quando se sua atuação como revisor bibliográfico. Os ensaios se referem a alguns trabalhos científicos produzidos entre os anos de 1499 e 1866 cujo critério de seleção para composição da referida obra reside, basicamente, no aspecto metodológico adotado ou ainda na conclusão divulgada por tais estudiosos. A concentração de paradoxo é apresentada em dois momentos distintos. No primeiro momento, promovemos um estudo das definições encontradas para o termo segundo um enfoque filosófico, caracterizando-o como algo que exige investigação adicional; ao que foi complementado com exemplos clássicos do contexto científico. No segundo, apresentamos a conceituação defendida por De Morgan, e, sob essa perspectiva, o que ele conceitua "paradoxo" esta diretamente relacionado às metodologias não-usuais empregadas na formulação de novas teorias científicas. Neste estudo algumas dessas concepções científicas são pormenorizadas, onde, através do resgate histórico, embrenhamos nosso estudo em questões da matemática, da física, da lógica, entre outras. De posse da análise preliminar e em confrontação com a concepção de De Morgan, tornou-se possível diagnosticar algumas limitações na conceituação sugerida pelo autor. Por outro lado, evidenciamos, diante dos casos apresentados, a não-linearidade do processo de produção do conhecimento e, consequentemente do progresso da ciência.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Souza (2009).

Este trabalho teve o objetivo de analisar o conceito de “Paradoxo” suscitado na obra “*A Budget of Paradoxes (1872)* do matemático inglês Augustus De Morgan (1806-1871). Essa pesquisa foi bibliográfica, e a obra de Augustus de Morgan, citada anteriormente, foi o objeto de pesquisa da autora, tendo grande parte deste material consistido em reimpressões de uma série de escritos do autor no periódico científico inglês da época chamado *Athenaeum*.

O trabalho tenta fazer um retrato fiel das argumentações sugeridas pelo autor na referida obra, enquanto historiador da ciência em sua concepção de paradoxo. Para atingir os objetivos, a pesquisa foi dividida em seis etapas: 1) a introdução; 2) Um biografa de Augustus de Morgan e também uma discussão da matemática do século XIX, bem como algumas características políticas, econômicas e sociais da época; 3) Uma introdução sobre a definição de paradoxo e a classificação de paradoxos; 4) A essa etapa da pesquisa o autor dá o nome do capítulo de *O Pensamento Científico de Augustus de Morgan*, dando enfoque na visão do mesmo em relação a paradoxo, esclarecendo, em uma análise específica, a diferença da definição, também abordando uma visão histórica do pensamento científico e dados biográficos da obra *A Budget of Paradoxes; 5)* É feito um diagnóstico específico dos paradoxos enunciados na obra.

O capítulo recebe o título de *A Budget of Paradoxes, Concepção irônica da evolução da ciência*. Essas concepções irônicas tornam-se evidentes com as críticas criativas e bem-humoradas feitas por De Morgan aos criadores dos paradoxos científicos, filosóficos, matemáticos, religiosos, lógicos e variados; 6) As conclusões finais, trazendo uma comparação entre a concepção de paradoxo de Augusto de Morgan e a definição tradicionalmente sugerida para o termo.

É uma dissertação que aborda conteúdos de Lógica Matemática e são voltados para o Ensino Superior. Tal estudo pode ser bem trabalhado em disciplinas de lógicas nas licenciaturas em matemáticas, bem como em outros cursos que também abordam esse conteúdo. Em relação à educação básica, não possui potenciais didáticos nem pedagógicos que possam ser desenvolvidos no Ensino Médio.

Dissertação 16: A História dos Problemas da Tautócrona e da Branquistócrona

Quadro 25: Descritores de análise da dissertação 16 – Ensino Superior

Título: A História dos Problemas da Tautócrona e da Branquistócrona
Autor (a): Rejane Alexandre Coelho
Orientador (a): Marcos Vieira Teixeira
Ano de defesa: 2008
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Rio Claro
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Física Matemática
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Plana
Resumo O objetivo deste trabalho é analisar a forma como Huygens e os irmãos Bernoulli, propuseram e resolveram, respectivamente, os problemas do Isocronismo do Pêndulo (Tautócrona) e da Braquistócrona, buscando, assim, contribuir para o entendimento dos métodos utilizados pelos eruditos para essas demonstrações. Trata-se de uma pesquisa de cunho histórico-analítico, centrada no século XVII, que fez-se uso de bibliografias que transcreviam os originais dos dois cientistas. Observou-se que para o sucesso da resolução dos problemas propostos, muitos conceitos matemáticos conhecidos até então foram usados, contudo os que mais deram suporte ao sucesso dos trabalhos em questão foram as teorias de Galileu e as contribuições de Mersenne. Tanto os Bernoulli quanto Huygens concluíram no final de seus trabalhos, que a curva procurada era uma Ciclóide. A Braquistócrona é um problema que faz parte de todo o desenvolvimento do Cálculo de Variações e o Isocronismo contribuiu para a construção de relógios de pêndulo mais precisos e dos marítimos.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Coelho (2008).

Este trabalho teve o objetivo de analisar a forma como Huygens e os irmãos Bernoulli propuseram e resolveram, respectivamente, os problemas do Isocronismo do Pêndulo (Tautócrona) e da Braquistócrona, buscando, assim, contribuir para o entendimento dos métodos utilizados pelos eruditos para essas demonstrações. Ou seja, o interesse será analisar esses trabalhos sem o uso do Cálculo diferencial e integral. Mas o que é mesmo Tautócrona e Branquistócrona? *Tautócrona* que é a curva plana ao longo da qual uma partícula material atinge um ponto dado da trajetória num espaço de tempo que não depende do ponto de onde ela saiu, e *Braquistócrona* é a curva de descida mais rápida, ou seja, a curva que minimiza o tempo de queda, entre dois pontos num mesmo plano vertical, de um corpo largado de um ponto inicial e sujeito apenas a força da gravidade.

A dissertação ficou dividida em dois capítulos. No primeiro, foi feito um breve histórico da família Bernoulli, a biografia de Jacob Bernoulli e de seu irmão Johann Bernoulli e sobre a Braquistócrona. No segundo capítulo, uma breve biografia de Huygens e o problema da Isocrononia do pêndulo, ou seja, a Tautócrona.

Consideremos esse trabalho na área de física matemática, que originalmente seria uma aplicação para o Cálculo Diferencial e Integral, porém, como já foi dito, o autor tem como objetivo fazer as demonstrações sem o uso do Cálculo e, para isso, mobiliza conceitos de física e geometria plana em nível avançado para o Ensino Médio, motivo pelo qual consideramos esse trabalho sem potenciais didáticos para Educação Básica, podendo ser bem trabalhado em disciplinas de Física nas graduações dos cursos de ciências exatas. Por ter experiência na Licenciatura em Matemática, considero uma importante aplicação para ser desenvolvida nas disciplinas de Física do referido curso.

Dissertação 17: A Noção de Função em Frege

Quadro 26: Descritores de análise da dissertação 17 – Ensino Superior

Título: A Noção de Função de Frege
Autor (a): Rodrigo Rafael Gomes
Orientador (a): Irineu Bicudo
Ano de defesa: 2009
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Rio Claro
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo Principal Focalizado: Lógica e Teoria dos Conjuntos
Conteúdos Secundários Mobilizados:
Resumo Neste trabalho apresentamos e analisamos o conceito fregiano de função, presente nos três livros de Frege: *Begriffsschrift*, *Os Fundamentos da Aritmética* e *Leis Fundamentais da Aritmética*. Discutimos ao longo dele o que Frege entendia por função e argumento, as modificações conceituais que tais noções sofreram no período de publicação de seus livros e a importância dessas noções para a sua filosofia. Para tanto, analisamos a linguagem artificial do primeiro livro, a definição de número do segundo, e os casos particulares de funções que são definidos no terceiro, bem como as considerações contidas em outros escritos do filósofo alemão. Verificamos uma caracterização puramente sintática de função em *Begriffsschrift*, uma distinção entre o sinal de uma função e aquilo que ele denota em *Os Fundamentos da Aritmética*, e a associação de dois elementos distintos a uma expressão funcional em *Leis Fundamentais da Aritmética*: o seu sentido e a sua referência. Finalmente, constatamos que a originalidade do sistema fregiano reside na possibilidade de considerar esse ou aquele termo de uma proposição como o argumento (ou os argumentos) de uma função.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Gomes (2009).

Este trabalho, cujo objetivo é analisar o conceito fregiano de função, presente nos três livros de Frege, *Begriffsschrift*, *Os Fundamentos da Aritmética* e *Leis Fundamentais da Aritmética*, teve cinco questões de pesquisa discutidas ao longo da dissertação: 1) O que Frege entendia por função? 2) E por argumento de uma função? 3) Estas noções sofreram alguma modificação conceitual em toda a extensão de sua obra? 4) Por que elas são importantes? 5) Em que reside sua originalidade? Todo o trabalho foi organizado seguindo a diretriz da noção fregiana de função e foi dividido em três capítulos.

No primeiro capítulo, segundo Gomes (2009), foi analisada a noção de função como Frege a entendia na época em que escreveu seu primeiro livro, puramente sintática e ausente de questões de natureza semântica ou ontológica. O capítulo foi dividido em sete partes: 1) As duas espécies de símbolos e seu significado; 2) Conteúdo conceitual e o sinal de identidade de conteúdo; 3) Função e argumento; 4) Função e generalidade; 5) Lógica proposicional; 6) Lógica de predicados (ou funcional) de primeira ordem; 7) Séries e lógica de predicados (ou funcional) de segunda ordem.

No segundo capítulo, de acordo com Gomes (2009), foi discutida a distinção fregiana entre função e objeto, examinando-se a definição de Frege da noção de número à luz de tal distinção, pretendendo mostrar que a aritmética era uma parte da lógica. O capítulo foi dividido em seis partes: 1) Função e objeto; 2) Atribuições numéricas; 3) Uma definição recursiva de número; 4) Uma definição contextual de número; 5) Uma definição explícita de número; 6) Definição dos números individuais e da relação sucessor.

No terceiro capítulo, foi mostrado o entendimento do conceito de função por Frege, depois da publicação do seu segundo livro. Segundo Gomes (2009):

> Foram analisadas algumas ideias contidas em dois artigos: 1) *Função e Conceito* (Funktion und Begriff), 2) *Sobre Sentido e Referência* (Über Sinn und Bedeutung); 3) *Sobre Conceito e Objeto* (Über Begriff und Gegenstand), 4) *Considerações sobre Sentido e Referência* (Ausführungen über Sinn und Bedeutung) e 5) *Cálculo Lógico de Boole e a Conceitografia* (Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift), publicados pela primeira vez em 1891, 1892, 1892, 1969 e 1969, respectivamente, e o impacto dessas ideias sobre seu projeto. (GOMES, 2009, p. 3)

Esta dissertação é da área de Lógica Matemática, com conceitos totalmente voltados para o Ensino Superior, não tendo nenhuma relação com Ensino Médio.

Dissertação 18: Platonismo e Naturalismo em Matemática: Os Axiomas da Teoria dos Conjuntos

Quadro 27: Descritores de análise da dissertação 18 – Ensino Superior

Título: Platonismo e Naturalismo em Matemática: Os Axiomas da Teoria dos Conjuntos
Autor (a): Ronaldo Pimentel
Orientador (a): Túlio Roberto Xavier
Ano de defesa: 2010
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo Principal Focalizado: Lógica e Teoria dos Conjuntos
Conteúdos Secundários Mobilizados:
Resumo A demonstração é a principal atividade de um matemático. Na matemática, a maioria das proposições que são aceitas como verdadeiras possui uma demonstração, em outras palavras, é um teorema. Mas uma demonstração necessita dos axiomas para iniciar o processo demonstrativo. Na teoria de conjuntos ocorre o mesmo processo, uma vez que a teoria de conjuntos é uma teoria formal. Um axioma da teoria de conjuntos pode não ser demonstrado, mas é aceito como verdadeiro. Ou é simplesmente aceito. Este trabalho avalia os processos pelos quais os axiomas da teoria de conjuntos são aceitos, ou justificados pelo platonismo e o naturalismo na matemática. Nesse contexto, este trabalho inicia com a descrição de um estudo de caso, que são os raciocínios não-construtivos e a noção de existência na teoria de conjuntos. Escolhemos, para iniciar a nossa análise filosófica, o platonismo na matemática, que considera a existência de objetos matemáticos num contexto metafísico. Analisamos aqui o platonismo na matemática de Gödel e o problema epistemológico contido nesse platonismo colocado num argumento com viés da teoria causal do conhecimento. Com a impossibilidade de existir uma justificação dos axiomas da teoria e conjuntos com uma base na metafísica, através da intuição intelectual, o problema de justificar os axiomas da teoria de conjuntos persiste. O problema é encontrar uma justificação dos axiomas da teoria de conjuntos conveniente com o afazer matemático. Apresentamos, então, o naturalismo na matemática de Maddy como uma solução plausível com a prática matemática para a justificação dos axiomas da teoria de conjuntos, o que constitui um abandono do platonismo na matemática a favor de uma epistemologia matemática condizente com o cotidiano matemático.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Pimentel (2010).

Este trabalho foi defendido em 2010 no programa de pós-graduação em filosofia da UFMG, com o objetivo de apresentar um modo de justificação dos axiomas da teoria de conjuntos em conformidade com o cotidiano matemático. A pesquisa foi teórico-descritiva, sendo elaborada a descrição da teoria de conjuntos, o platonismo e o naturalismo. No primeiro capítulo, segundo Pimentel (2010), realizou-se a apresentação da teoria de conjuntos.

Segundo a noção de infinito de Dedekind, a Hipótese do contínuo de Cantor, a hierarquia cumulativa, os axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo e Fraenkel e a ideia de demonstração de existência não construtiva com o objetivo de apresentar métodos não construtivos na teoria de conjuntos que se relacionam com a noção de existência na matemática. Este capítulo apresenta vários conteúdos de Teoria de Conjuntos em nível superior, sem qualquer possibilidade de uso no Ensino Médio.

No segundo capítulo, foi apresentada a caracterização do platonismo na matemática de Gödel, mostrando que o platonismo na matemática de Gödel é criticado com os argumentos que possuem um viés pela teoria causal do conhecimento. É um capítulo bastante teórico, em que o autor vai mostrar a diferença entre o Platonismo Ontológico e o Platonismo Mitológico, o princípio do círculo vicioso relacionado à matemática não construtivista. Também foi mostrado como é presente na filosofia de Gödel o realismo conceitual e a intuição matemática. No terceiro capítulo, apresenta-se o Naturalismo de Maddy e introduzido como a solução naturalista a exclusão de entidades metafísicas nas metodologias matemáticas. Nesta parte da pesquisa, o conteúdo de Lógica Matemática aparece com frequência no desenvolvimento de todo o capítulo.

Essa pesquisa não pode ser trabalhada no Ensino Médio, é um trabalho voltado para a filosofia da matemática traz conceitos de lógica e teoria dos conjuntos de nível avançado, logo pode ser abordado no Ensino Superior, em cursos de graduação e pós-graduação.

Dissertação 19: Questões Metodológicas e Ontológicas nas Práticas Matemáticas de Descartes e Newton

Este trabalho, cujo objetivo foi investigar em que medida a crítica de Newton endereçada a Descartes exerce na fundamentação dos seus próprios conceitos matemáticos, físicos e, em última análise, ontológicos, é determinante para a prática matemática de Newton e, consequentemente, para suas diversas implicações, trazendo conteúdos de geometria plana para o ensino superior através do desenvolvimento do Problema de Pappus, matemático da escola de Alexandria, que viveu do final do século IV ao início do século III a.C. Em seu livro VII da chamada Coleção Matemática, Pappus apresenta um problema que consiste, inicialmente, em encontrar um ponto que obedeça a certas condições de proporcionalidade entre as linhas que são traçadas a partir dele em direção a outras linhas dadas, mostrando importantes instrumentos para se compreender o método utilizado por Descartes na Geometria. Vejamos o quadro 28:

Quadro 28: Descritores de análise da dissertação 19 – Ensino Superior

Título: Questões Metodológicas e Ontológicas nas Práticas Matemáticas de Descartes e Newton
Autor (a): Veronica Ferreira Bahr Calazans
Orientador (a): Eduardo Salles de Oliveira Barra
Ano de defesa: 2008
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Paraná – UFPR
Abordagem: Desenvolvimento da matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo Principal Focalizado: Geometria Analítica
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Plana
Resumo Os estudos matemáticos de Descartes e Newton têm consequências importantes tanto no que diz respeito à metodologia quanto à metafísica. A crítica de Newton dirigida à matemática cartesiana é determinante para a prática matemática de Newton e, consequentemente, para suas diversas implicações e, portanto, constitui um ponto central de investigação para esta dissertação. A essa crítica, segue-se uma passagem do método analítico para o sintético, conhecida como a "virada metodológica" de Newton, em que o elemento principal refere-se ao caráter não representativo de alguns dos termos utilizados nas equações analíticas, particularmente, das grandezas infinitamente pequenas. Considerando que o método cartesiano e seus fundamentos epistemológicos estão diretamente assentados em uma ontologia relacional, a crítica a esse mesmo método revela a total discordância com a ontologia que está relacionada a ele. Da mesma forma, a crítica de Newton à concepção cartesiana de movimento evidencia o caráter realista de sua ontologia, na medida em que conduz diretamente à formulação do conceito de espaço absoluto. Embora o enfoque da discussão considerada aqui seja prioritariamente matemático, as dificuldades de ordem mecânica que a concepção cartesiana de movimento suscita, fornecem a Newton uma outra via para refutar os princípios metafísicos assumidos por Descartes e, como consequência disso, erguer seus próprios fundamentos.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Calazans (2008).

O autor divide o texto em duas partes, a primeira compreendida de três capítulos: o primeiro, intitulado *A Matemática como método em Descartes*, tem como objetivo principal esclarecer e articular os elementos principais de um projeto cartesiano chamado *mathesis universalis*, que, segundo Calazans (2008):

> [...] É uma ciência geral, definida por seu método: investigar a ordem e a medida, sem que estejam aplicadas a alguma matéria especial. Tudo se resume a ordenar os objetos de investigação de modo a reduzir sua complexidade aos elementos mais simples e, em seguida, reconstituir essa complexidade de forma organizada a fim de torná-la compreensível (CALAZANS, 2008, p. 5).

Esse capítulo não traz conteúdos matemáticos, o seu foco é uma abordagem teórica voltada para a filosofia da matemática.

O segundo capítulo, intitulado *O problema de Pappus: modelo de aplicação do método*, segundo Calazans (2008), mostra como o projeto *mathesis universalis* é aplicado na matemática, afirmando que esse projeto foi importante para o surgimento da geometria analítica, com isso faz uma análise da solução do problema de Pappus. No terceiro capítulo, intitulado *A crítica Newtoniana ao método de Descartes e sua opção pelo método sintético dos antigos*, o autor traz a solução newtoniana para o problema de Pappus, com o objetivo de tornar evidentes os elementos dessa virada metodológica.

Na segunda parte do trabalho, composta de um único capítulo, Calazans (2008) realiza um paralelo entre Descartes e Newton em relação aos fundamentos da mecânica, mais especificamente, os conceitos de espaço e movimento.

O conteúdo matemático desta dissertação se refere à Geometria Analítica e aparece em dois capítulos: o terceiro e o quarto, mas inviável para aplicabilidade no Ensino Médio, por isso não apresentando potenciais didáticos para esse nível de ensino. E consideremos um bom material para ser trabalhado no Ensino Superior.

3.2 Descrição das Teses

Tese 1: Uma História da Lógica no Brasil

O objetivo desta tese foi avançar a partir da dissertação de mestrado de Evandro Luiz Gomes, intitulada *Sobre A História da Lógica no Brasil: da Lógica das faculdades à lógica positiva (1808-1909)*, defendida em 2002, abordando a lógica, e apresentar o desenvolvimento da Lógica Matemática no Brasil, focando, principalmente, nos sessenta anos iniciais do século XX, apresentando as primeiras obras e os primeiros matemáticos que contribuíram para a consolidação e o desenvolvimento da lógica como áreas de pesquisa no Brasil.

Vejamos o quadro 29:

Quadro 29: Descritores de análise da Tese 1 – Ensino Superior

Título: Uma História da Lógica no Brasil	
Autor (a): Carlos Roberto de Moraes	
Orientador (a): Sérgio Roberto Nobre	
Ano de defesa: 2007	
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Rio Claro	
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas	
Conteúdo Principal Focalizado: Lógica e Teoria dos Conjuntos	
Conteúdos Secundários Mobilizados:	
Resumo Pretendemos mostrar o desenvolvimento da lógica matemática no Brasil focando principalmente nos sessenta anos iniciais do século XX apresentando obras e estudiosos que contribuíram para a consolidação e o desenvolvimento da lógica como um campo de pesquisa no Brasil. Abordaremos três obras que acreditamos serem relevantes na história da lógica no Brasil: *As Ideias Fundamentais da Matemática*, de Manuel Amoroso Costa, publicada em 1929; *Elementos de Lógica Matemática*, de Vicente Ferreira da Silva, publicada em 1940 e *O Sentido da Nova Lógica*, de Willian Van Orman Quine, publicada em 1944. A lógica apresenta um salto qualitativo a partir do final dos anos 50, quando dois centros se destacam: um na Universidade de São Paulo (USP), em São Paulo, com o Prof. Edison Farah e outro na antiga Faculdade Nacional de Filosofia, no Rio de Janeiro. Neste trabalho, dedicaremos especial atenção aos pioneiros do "grupo de São Paulo", que, no final da década de 50 reuniam-se sob a liderança do Prof. Edison Farah em um grupo de estudiosos de lógica e fundamentos da matemática do qual fizeram parte os professores Benedito Castrucci, Newton Carneiro Affonso da Costa, Mario Tourasse Teixeira e Leonidas Hegenberg que se reuniam em seminários no Departamento de Matemática da Universidade de São Paulo.	

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Moraes (2007).

O trabalho dividiu-se em quatro capítulos. O primeiro apresentou uma visão geral sobre a evolução da Lógica na Civilização Ocidental. No segundo capítulo, realizou-se uma pesquisa da evolução dos estudos em matemática no Brasil.

O terceiro capítulo está separado em duas partes: a primeira delas faz um levantamento histórico de como a lógica no Brasil se desenvolve até meados do século XX, utilizando como base a dissertação de mestrado "*Sobre a história da lógica no Brasil: da lógica das faculdades à lógica positiva (1808-1909)",* de Evandro Luis Gomes, em 2002. Na segunda parte, Moraes discute três obras que considera importante: "*As Ideias Fundamentais da Matemática",* de Manuel Amoroso Costa publicada em 1929; "*Elementos de Lógica Matemática",* de Vicente Ferreira da Silva, publicada em 1940, e a publicada em 1944, intitulada "*O Sentido da Nova Lógica",* de Willian Van Orman Quine. Segundo Moraes

(2007), mesmo *o último trabalho citado acima*, não sendo de um autor brasileiro, o livro é escrito originalmente em português, quando Quine esteve no Brasil, por um convite da Escola de Sociologia e Política da USP.

O último capítulo da tese foca na chamada *Era dos Pioneiros,* em que um grupo denominado *Grupo de São Paulo,* no final da década de 1950, começa a desenvolver pesquisas e seminários na área de lógica no Brasil. O autor cita: Benedito Castrucci; Edison Farah; Leonidas Helmuth Baebler Hegenberg; Mario Tourasse Teixeira e Newton Carneiro Affonso da Costa.

É na segunda parte do terceiro capítulo que o conteúdo de lógica aparece, quando o autor faz os comentários referente às obras. Esse conteúdo volta-se para o Ensino Superior e não possui potenciais didáticos para o Ensino Médio.

Tese 2: A Influência da Matemática nas Regras para a Direção do Espírito e em O Discurso do Método

Este trabalho teve como objetivo compreender, numa perspectiva histórica, a influência da matemática nas *Regras para a Direção do Espírito* e em *O Discurso do Método*.

No primeiro capítulo, fez-se um estudo sobre a formação acadêmica de Descartes em *La Flèche*. A tese que Vaz teve o interesse de confirmar neste capítulo se refere ao pensamento de Descartes. Segundo a autora, o ambiente acadêmico vivido por Descartes teve uma influência significativa, e, para compreender esse pensamento matemático, investigou-se o currículo estabelecido na Ratio Studiorum de 1599 e o pensamento matemático de Clavius, sua produção matemática cartesiana na época em que mantinha contato com Isaac Beeckman. E, para finalizar, foi feita uma investigação do pensamento de Descartes em suas obras: *Solidorum Elementis* e *Cogitationes privatae*.

No segundo capítulo, intitulado o *Método de Análise e Síntese de Descartes,* Vaz (2007) tinha como meta mostrar a recuperação, reconstrução e generalização de Descartes com o método de análise e síntese dos antigos geômetras gregos, aplicando aos problemas que o incomodavam, mostrando que o método é base de todo seu pensamento. Finaliza com exemplos ilustrativos num estudo sobre *As Regras,* em que o método cartesiano aparece, nitidamente, pela primeira vez.

Em uma das partes do segundo capítulo, apresentou-se um pouco de aritmética com a síntese da obra *A Aritmética* de Diofanto, como também uma análise contextual das obras de Papus e Diofanto. Em segida, algumas considerações sobre a arte analítica de Viète

E, para finalizar, o terceiro capítulo, chamado o discurso do método e os ensaios em que se esclarece de que forma a Matemática influenciou Descartes em *O Discurso do Método* e nos três ensaios. Neste capítulo, o conteúdo matemático de Geometria Analítica aparece com bastante frequência com a resolução de diversos problemas matemáticos, inclusive com algumas aplicações para a física. Vejamos o quadro 30:

Quadro 30: Descritores de análise da Tese 2 – Ensino Superior

Título: A Influência da Matemática nas Regras para a Direção do Espírito e em O Discurso do Método
Autor (a): Duelci Aparecido de Freitas Vaz
Orientador (a): Irineu Bicudo
Ano de defesa: 2007
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Rio Claro
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias
Conteúdo Principal Focalizado: Geometria Analítica
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Plana, Aritmética, Polinômios e Equações Algébricas
Resumo O objetivo deste trabalho é estabelecer a relação entre a Matemática e Filosofia nas *Regras para a Direção do Espírito* e em *O Discurso sobre o Método*. Para tanto, procuramos estabelecer a educação matemática que Descartes recebeu na escola jesuíta La Flèche e depois as influências externas de seus contatos com homens como Isaack Beeckman. Depois de seu encontro com Beeckman, Descartes engajou-se no projeto de construir uma ciência completamente nova. Desse modo, reconstruímos a trajetória seguida inicialmente por Descartes, avaliando a sua produção científica em trabalhos como *Cogitationes Privatae*, *De Solidorum Elementis*, *Regulae ad Directionem Ingenii*, onde podemos detectar o envolvimento de Descartes com questões científicas que serão coligidas na sua principal obra *O Discurso do Método*. Nesses três trabalhos colocamos em evidência a produção matemática cartesiana e nas *Regulae ad Directionem Ingenii* apresentamos um estudo, revelando que Descartes foi um seguidor do método de análise e síntese dos antigos geômetras gregos. Finalmente, apresentamos um estudo sobre a principal obra cartesiana, *O Discurso do Método*, com seus três ensaios: *A Dióptrica*, *Os Meteoros*, *A Geometria*. Nessa obra, Descartes define, oficialmente, a sua concepção metodológica, aplicando-a nos ensaios. O método é utilizado para resolver diversos problemas. Destacamos o caso do arco-íris em *Os Meteoros*. Em *A Geometria*, Descartes mostra a eficiência das suas mudanças conceituais, onde, reunindo sua proposta metodológica com um moderno simbolismo, rompe com velhos paradigmas, introduzindo a análise geométrica e dando importante contribuição para o desenvolvimento da matemática.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Vaz (2007).

Essa dissertação teve como tema principal focalizado a Geometria Analítica, mas com um nível elevado para alunos do Ensino Médio, motivo pelo qual consideramos um trabalho com uma perspectiva de trabalho voltada para o Ensino Superior com diversos problemas a serem analisados e trabalhados em turmas de diversos cursos de graduação que tenham em sua grade a disciplina de Geometria Analítica.

Tese 3: O Infinito de Georg Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática

Quadro 31: Descritores de análise da Tese 3 – Ensino Superior

Título: O Infinito de Georg Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática
Autor (a): Eberth Eleutério dos Santos
Orientador (a): Ítala Maria Loffredo D' Ottaviano
Ano de defesa: 2008
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo Principal Focalizado: Lógica e Teoria dos Conjuntos
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Plana
Resumo Georg Cantor foi um dos mais importantes matemáticos do final do século XIX. A idealização de sua teoria de conjuntos representa um marco no desenvolvimento da matemática. De fato, o aparecimento e o desenvolvimento dessa teoria tiveram profundas consequências que não se limitaram ao círculo da matemática. O debate científico que se seguiu a certos resultados como, por exemplo, a apresentação dos números transfinitos, reavivou uma discussão que remonta a antigas disputas ontológicas da filosofia pré-socrática, exatamente àquelas discussões que se voltavam para a afirmação do *Ser* como infinito. Essa discussão nasce na Grécia antiga e perpassa toda a história do pensamento ocidental. Conhecemo-la por meio de nomes como Anaximandro, Pitágoras, Parmênides, Platão, Aristóteles. Atravessando os séculos, essas ideias povoaram a mente de personagens como Bruno, Galileu, Leibniz, Kant e muitos outros. Nos séculos XIX e XX, os trabalhos de Cantor reavivaram e deram novo impulso ao tema. Esforçamo-nos em mostrar que estes trabalhos são absolutamente revolucionários. Motivados pelo filósofo da ciência Thomas Kuhn, concluímos que o aparecimento da Teoria de Conjuntos de Cantor representa a revisão de um antigo paradigma filosófico-matemático. Paradigma este que teve sua primeira elaboração lógica e filosófica com Aristóteles e que se desenvolveu como a maneira dominante de pensar a ideia de infinito. Destacamos que alguns dos aspectos apontados por Kuhn como sintomáticos de uma revolução científica estão presentes no trabalho de Cantor e que há, possivelmente, outras maneiras de argumentar em favor da qualidade revolucionária deste trabalho. Em um sentido mais amplo, foi-nos possível vislumbrar que o desenvolvimento da matemática também pode ser lido através do enfoque das *revoluções*, e o mais recente exemplo disto é representado pelo esforço intelectual de Cantor.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Santos (2008).

O objetivo desta tese foi argumentar que o núcleo dos resultados matemáticos obtidos por Georg Cantor no final do século XIX, cujas ideias mais fundamentais orbitam em torno de sua especial concepção de infinito, possui as necessárias qualidades de inovação e grandeza para ser considerado como um avanço revolucionário em matemática foi dividida em quatro capítulos.

No primeiro deles, construiu-se uma análise de fragmentos do pensamento de alguns estudiosos, personagens da filosofia ocidental, sobre seus pensamentos em relação ao conceito de infinito, com a finalidade de criação de um contexto para se chegar ao objetivo da tese. Este capítulo foi dividido em duas partes: a primeira, os pensamentos da Antiguidade, destacando a disputa filosófica de Platão e Aristóteles. A segunda parte fica por conta dos pensamentos medievais, renascentistas e modernos, dando ênfase a Plotino, Santo Agostinho, Santo Tomás, Giordano Bruno, Galileu, Descartes, Leibniz e Kant, entre outros.

No segundo capítulo, o autor introduz o novo conceito de infinito de Cantor, fazendo uma separação do nível mais filosófico e da parte matemática, traçando um caminho para chegar à Teoria dos Conjuntos.

No terceiro capítulo, discutiu-se a historiografia elaborada por Thomas Kuhn para descrever o avanço das ciências. No quarto capítulo, apresentou-se a interpretação do infinito de Cantor, seguindo o modelo kuhniano, pretendendo Santos (2008) apresentar uma análise para a ideia de revolução em matemática. Para tanto, apoiou-se na argumentação do historiador da matemática J. Dauben, um dos que primeiramente observaram, na década de 1960, a relação entre a obra de Kuhn e o desenvolvimento da matemática.

Esta tese, na área de Lógica e Teoria dos Conjuntos, não possui potencial didático para ser trabalhado com alunos de Ensino Médio, podendo, sim, ser aproveitado em turmas de graduação e pós-gradução em disciplinas na área de lógica. O texto também mobiliza conceitos de Geometria plana.

Tese 4: Um Estudo sobre as Origens da Lógica Matemática

Esta teve o objetivo de elucidar as origens da lógica matemática. Sousa (2008) realizou uma pesquisa histórica com caráter bibliográfico e cunho exploratório, investigando a lógica de Richard Whately (um dos mais importantes lógicos aristotélicos ingleses do século XIX), Augustus de Morgan e George Boole, acrescentando um pouco de suas biografias, bem como caracterizando-os como homens e cientistas inseridos na história. Vejamos o quadro 32:

Quadro 32: Descritores de análise da Tese 4 – Ensino Superior

Título: Um Estudo sobre as Origens da Lógica Matemática
Autor (a): Giselle Costa de Sousa
Orientador (a): John Andrew Fossa
Ano de defesa: 2008
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de Suas ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Lógica e Teoria dos Conjuntos
Conteúdos Secundários Mobilizados:
Resumo O presente estudo tem como objetivo uma elucidação das origens da lógica matemática. Esta tem seu início atribuído ao matemático inglês autodidata George Boole (1815 – 1864), especialmente porque seus livros *The Mathematical Analysis of Logic (1847)* e *Na Investigation of the Laws Of Thought (1854)* são reconhecidos como as obras inaugurais do referido ramo. Contudo, curiosamente, na mesma época um outro matemático chamado Augustus de Morgan (1806 – 1871) também lançou um livro, intitulado *Formal Logic (1847)*, em defesa da matematização da lógica. Mesmo assim, tempos depois neste mesmo século, uma outra obra nomeada *Elements of Logic (1875)* surgiu evidenciando a lógica aristotélica a partir da figura de Richard Whately (1787 – 1863), considerado o maior lógico aristotélico da época. Desta forma, nossa pesquisa, permeada pela história da matemática, propõe estudar a lógica produzida por estes personagens imersos na idade áurea da matemática (século XIX) a fim de compararmos os sistemas vigentes no referido período e clarificarmos as origens da lógica matemática. Para isso buscamos delinear o panorama histórico envoltório deste estudo. Descrevemos, brevemente, considerações biográficas destes três representantes da lógica do século XIX aliadas à exposição de seus pontos de vista quanto à lógica à luz das obras citadas acima. Neste sentido, aspiramos ainda apresentar considerações acerca do que existia de lógica aristotélica vigente no período de Boole e De Morgan comparando-a com a nova lógica emergente (a lógica matemática). Além disso, diante da análise textual das obras citadas acima, buscamos ainda confrontar os sistemas de Boole e De Morgan a fim de chegarmos ao motivo pelo o qual o de Boole ter sido considerado melhor e mais eficiente. À parte desta preponderância, almejamos estudar as falhas constatadas nos sistemas lógicos de Boole frente à produção de seus contemporâneos, verificando, por exemplo, se elas se repetiram ou não. Concluímos que as origens da lógica matemática residem nas obras de lógica de George Boole, visto que, nelas, há a apresentação de uma nova lógica, matematizada pelas leis do pensamento análogas às de aritmética, enquanto De Morgan conseguiu em seu trabalho expandir a lógica aristotélica, mas ainda esteve preso a ela.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Sousa (2008).

O trabalho foi dividido em seis capítulos, o primeiro deles, a introdução. No segundo, com o título de *Panorama histórico*, foi feita uma descrição do contexto das origens da Lógica Matemática, abordando um retrato das principais transformações sociais ocorridas na

Europa no século XIX, especialmente na Inglaterra, no que diz respeito à matemática, e também foi mostrado um pouco da lógica ao longo dos tempos para se compreender a evolução desse conceito.

No terceiro capítulo, chamado de *A lógica aristotélica vigente no século XIX*, segundo Sousa (2008), foi mostrado que, embora o século XIX marque a origem da lógica matemática, a lógica tradicional ainda estava presente, não tendo sido repentina esta transição, tendo necessitado, como toda novidade, de um tempo para ser compreendida e aceita. Este capítulo também mostra a lógica de Whately, apresentando sua obra *Elements of Logic (1875).*

O quarto capítulo, *A lógica de Augustus de Morgan*, trouxe a bibliografia de De Morgan e abordou o tratamento dado por ele em direção à formalização da Lógica, referenciando-se no livro *Formal Logic (1845)* e alguns artigos com a mesma temática. Para finalizar, fez comentários sobre um sistema proposto em paralelo ao aristotélico vigente.

No quinto capítulo, intitulado *A lógica de George Boole*, traz um levantamento biográfico de George Boole, analisando, em seguida, a sua Lógica, por meio do seu primeiro e segundo livros à luz da lógica de Richard Whately e Augustus de Morgan, tentando esclarecer a origem e a importância da Lógica Matemática. Para finalizar, o sexto capítulo é composto pelas conclusões, destacando os resultados do estudo e implicações futuras, mostrando, segundo a autora, que o objetivo foi alcançado.

Como vimos, esta tese aborda conteúdos de Lógica Matemática voltados para o Ensino Superior, sendo um ótimo material para ser aplicado em disciplinas na área de Lógica, mas que não tem nenhuma relação com a Educação Básica.

Tese 5: Sobre Revoluções Científicas na Matemática

Este trabalho, dividido em três partes, tem o objetivo central de mostrar que as teses apresentadas por Thomas Kuhn, em sua principal obra, se aplicam, nos seus aspectos mais importantes, quando se trata de analisar o processo, segundo o qual o conhecimento matemático, naqueles aspectos mais significativos, é produzido. Vejamos o quadro 33:

Quadro 33: Descritores de análise da Tese 5 – Ensino Superior

Título: Sobre Revoluções Científicas na Matemática
Autor (a): João Carlos Gili Martins
Orientador (a): Romulo Campos Lins
Ano de defesa: 2005
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Rio Claro
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Álgebra
Conteúdos Secundários Mobilizados:
Resumo Tem sido unanimidade entre os filósofos da Matemática a compreensão de que as revoluções científicas, na forma como são apresentadas em A Estrutura das Revoluções Científicas, de Thomas S. Kuhn, não ocorrem na Matemática. Este trabalho pretende o contrário: fundado no Modelo Teórico dos Campos Semânticos e tendo a história da Matemática como cenário – mais especificamente, a história da Álgebra – esta tese foi elaborada para mostrar que a obra Kitab al mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabalah, de al- Khwarizmi, inaugura o primeiro período de pesquisa normal no desenvolvimento da Álgebra na Europa, um período altamente cumulativo e extraordinariamente bem sucedido em seus objetivos paradigmáticos e que se estendeu até as décadas iniciais do século XIX. Mostramos, ainda, que a demonstração do, hoje denominado, Teorema Fundamental da Álgebra, por Gauss, e a publicação do trabalho sobre a resolução algébrica de equações, de Abel, trouxe à luz, na forma de um fato, uma anomalia irresolúvel do primeiro paradigma da Álgebra no Velho Continente. A partir daí, abriu-se um período de pesquisa extraordinária no âmbito dessa disciplina – um período revolucionário – de onde viria emergir um novo período de pesquisa normal, um novo paradigma para a Álgebra – os sistemas algébricos abstratos – fundado nas realizações matemáticas de Galois, Peacock e Hamilton.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Martins (2005).

A primeira delas incluiu o primeiro capítulo que foi reservado para apresentar a própria concepção do autor sobre História da Matemática. A segunda parte se refere ao segundo capítulo, em que Martins (2005) trata das condições históricas (objetivas e Subjetivas) determinantes da gênese da filosofia positivista da ciência que, hoje, dá sustentação à ideologia de que o desenvolvimento da matemática é sempre contínuo e cumulativo. E o terceiro capítulo, que exerce críticas às concepções positivistas de desenvolvimento, tratando sobre o fim da teoria do conhecimento e o desabrochar da teoria da ciência.

A terceira parte possui dois capítulos, um deles o quarto capítulo, o principal da tese, que se inicia com uma pequena introdução, abordando-se o tema central da tese novamente. Em seguida, tratou-se sobre noções da teoria da ciência de Thomas Kuhn, algumas considerações sobre paradigmas e as contribuições de Viète para o desenvolvimento da álgebra na Europa a partir das realizações matemáticas de al-Khwarizmi e al-Karaji. Segundo Martins:

> as obras desses dois matemáticos – essencialmente a Kitab al mukhtasar fi hisabal-jabr wa'l-muqabalah de al-Khwarizmi, governaram, por séculos, enquanto realizações matemáticas, o primeiro paradigma da álgebra na cultura ocidental até que a conjunção de dois fatos matemáticos: as demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra e da impossibilidade de, via radicais, encontrar uma fórmula geral para as raízes de polinômios de graus maiores do que quatro, mostrou uma anomalia irredutível desse paradigma. (MARTINS, 2005, p. 3)

No quinto capítulo, fez-se um confronto entre a concepção do autor sobre como se dá o desenvolvimento da matemática com a apresentada por Michael Crowe em *Ten "laws" concerning patterns of change in the history of mathematics*. Nessa discussão, foram abordados alguns aspectos do desenvolvimento da geometria euclidiana nos marcos do primeiro paradigma da geometria, cuja realização matemática consiste nos Elementos de Euclides. No entendimento do autor, a ordem dos momentos de sua tese é: primeiro momento: capítulos quatro e cinco; segundo momento: capítulos dois e três, e terceiro momento: capítulo um (introdução).

É uma tese mais teórica, com muita discussão filosófica e com poucos conteúdos matemáticos. Apenas no quarto capítulo, podemos verificar um pouco de Álgebra, iniciando com algumas aplicações da física, mas com um aporte mais forte na Equações Algébricas, chegando a introduzir o Teorema Fundamental da Álgebra. Consideramos esse trabalho sem potenciais didáticos para o Ensino Médio, pois, nesta perspectiva teórica, voltada para a filosofia da matemática, com que o trabalho foi elaborado, seu potencial é mais para ser trabalhados em disciplinas da área de Fundamentos da Matemática.

Tese 6: Uma Análise Histórico-epistemológica do Conceito de Grupo

Esta pesquisa foi bibliográfica e arqueológica, realizada a partir de fontes históricas originais primárias e secundárias, cujo objeto de estudo foi o desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de Grupo. Vejamos o quadro 34:

Quadro 34: Descritores de análise da Tese 6 – Ensino Superior

Título: Uma Análise Histórica – epistemológica do Conceito de Grupo
Autor (a): João Cláudio Brandemberg Quaresma
Orientador (a): Iran Abreu Mendes
Ano de defesa: 2009
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo principal Focalizado: Álgebra
Conteúdos Secundários Mobilizados:
Resumo O presente estudo analisa o desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de Grupo à luz da teoria do *pensamento matemático avançado,* proposto por Dreyfus (1991) e apresenta subsídios didáticos que contribuam para o ensino-aprendizagem das estruturas algébricas, visando dar maior significado ao referido conceito abordado na graduação em Matemática. Nesse sentido, o estude responde a seguinte pergunta: de que maneira uma abordagem de ensino, inicialmente, centrada na Teoria dos Números e na Teoria das Equações se constituiria em um modelo de efetivação do ensino do conceito de Grupo? Para responder a questão fizemos uma reconstrução histórica do desenvolvimento desse conceito, de Lagrange a Cayley, em uma reescrita orientada na *arqueologia do saber* proposta e discutida por Foucault (2007) e com o apoio teórico em Dreyfus (1991) analisamos o material histórico elaborado. Em seguida, fizemos uma pesquisa exploratória com turmas da graduação em Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA) e da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), para avaliar a formação de *imagens conceituais* nos alunos participantes de dois cursos de álgebra baseado em um modelo tradicional de ensino. Além disso, realizamos outra experiência, na UFPA, com o ensino de álgebra envolvendo, conjuntamente, a inclusão da componente histórica (MENDES, 2001a; 2001b; 2006b), o desenvolvimento de múltiplas representações (Dreyfus, 1991) e a formação das *imagens conceituais* (VINNER, 1991). Avaliamos a eficácia da abordagem em termos da profundidade no alcance do aprendizado, ou seja, a imagem conceitual estabelecida na mente dos alunos. Ao final, apresentamos uma classificação, baseada em Dreyfus (1991), que relaciona períodos históricos do desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de grupo aos processos de representação, generalização, síntese e abstração, e uma proposta para um curso de álgebra na graduação em Matemática.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Brandemberg (2009).

O objetivo desta tese foi analisar o desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de Grupo, à luz do *pensamento matemático avançado* proposto por Dreyfus (1991), visando a apontar melhorias didáticas para o ensino desse conceito a partir da inclusão da componente histórica nas aulas de Matemática. O interesse de Brandemberg, neste trabalho, foi levantar discussões sobre o ensino formal da teoria dos grupos, pensando na melhoria do ensino-aprendizagem deste conceito, partindo da seguinte pergunta de pesquisa: de que maneira uma abordagem de ensino, inicialmente, centrada na Teoria dos Números e na Teoria das Equações, se constituiria em um modelo de efetivação do ensino do conceito de Grupo?

Essa pergunta gerara outras: é possível contribuir para o desenvolvimento de um pensamento matemático "avançado" a partir do uso das representações na formação de *entidades conceituais*? Qual o papel do uso da componente histórica neste processo? Ou, ainda, de que forma o conhecimento do processo de desenvolvimento histórico do conceito de Grupo, pode garantir uma melhor e mais sólida aprendizagem do assunto?

Para alcançar o objetivo geral, bem como responder às perguntas enunciadas acima, Brandemberg trabalha com os seguintes objetivos específicos: 1) Discutir o desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de Grupo a partir de fontes históricas. 2) Estabelecer relações entre a história do conceito de Grupo, os processos de *pensamento matemático avançado* proposto por Dreyfus (1991) e o ensino desse conceito na graduação.

Nesta tese, o conteúdo abordado foi sobre álgebra abstrata, mais especificamente, Grupos. O trabalho foi dividido em cinco capítulos, o primeiro deles, a introdução. No segundo capítulo, foi feito um estudo do desenvolvimento histórico epistemológico do conceito de Grupo, enfatizando sua relação direta ou indiretamente ligada à Teoria dos Números e a Teoria das Equações Algébricas, fornecendo elementos de estudo para uma discussão da Teoria de Grupos com a finalidade de contribuir para o trabalho de professores em sala de aula. No terceiro e quarto capítulos, fez-se uma análise das características de pensamento matemático, relacionadas ao conceito de Grupos, e, no capítulo cinco, o autor faz sugestões de uma forma de abordagem do conteúdo de Grupos no curso de graduação em Matemática. Com isso, podemos ver que essa tese não possui nenhum potencial didático para o Ensino Médio.

Tese 7: Uma História do Processo de Institucionalização da Área de Análise Matemática no Brasil

Essa pesquisa tem três objetivos: 1) Elaborar uma compreensão acerca das circunstâncias históricas que teriam levado a área de análise a se constituir em um campo autônomo de investigação no Brasil; 2) Avaliar como, historicamente, foram sendo constituídas, automatizadas e institucionalizadas, no Brasil, as regras que definem o que é a "A Área de Análise"; 3) Apresentar alguns elementos históricos que permitam identificar particularidades do período em que se passou a realizar – de forma autônoma e institucionalizada – pesquisas em análise no país, a que elas se referiam e que condições começaram a ser desenvolvidas em nosso meio.

A pesquisa é historiográfica e tem como referencial teórico Bazi & Silveira (2008), autores que indicam uma pequena diferença entre os conceitos de Bunge (1980), os quais se referem à *constituição* de uma disciplina científica, e Whintley (1974; 1980), que se refere a respeito da *institucionalização* de uma disciplina científica, mas o que interessa a Toledo não é essa distinção dos conceitos, e sim a junção. Vejamos o quadro 35:

Quadro 35: Descritores de análise da Tese 7 – Ensino Superior

Título: Uma História do Processo de Institucionalização da Área de Análise Matemática no Brasil
Autor (a): José do Carmo Toledo
Orientador (a): Sérgio Roberto Nobre
Ano de defesa: 2008
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Rio Claro
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo Principal Focalizado: Análise
Conteúdos Secundários Mobilizados:
Resumo Este trabalho – uma investigação inserida no campo da História da Matemática – argumenta em favor da existência, no Brasil, de uma tradição em pesquisa na área de análise matemática e propõe uma narrativa historiadora sobre o processo de institucionalização dessa área no país. Algumas práticas sociais no âmbito da comunidade de analistas brasileiros são enfatizadas: umas, por terem sido cruciais para os processos locais de constituição e autonomização desse campo científico; outras, por conferirem à Análise o status de área institucionalizada no país.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Toledo (2008).

A pesquisa está dividida em sete capítulos, o primeiro deles, intitulado *Bases Teóricas e Metodológicas que subsidiam a presente pesquisa histórica*, em que o autor tenta dialogar com o leitor sobre os sucessos e revezes deste tipo de investigação, comentando sobre suas experiências pessoais, principalmente sobre a produção do texto da tese. No segundo capítulo, intitulado *Uma Reflexão sobre os Padrões do Desenvolvimento Institucional da Ciência no Brasil*, ele tenta estabelecer características institucionais que podem ser evidenciadas na história da prática científica no Brasil. O terceiro capítulo, *Estado-da-arte: uma leitura* *aborda sobre o nível de desenvolvimento da Análise Matemática no Brasil*, faz um levantamento das produções acadêmicas.

No capítulo quatro, *1957: O 1º Colóquio Brasileiro de Matemática e sua relevância para o processo de institucionalização da Matemática no país*, discute sobre a importância deste Colóquio realizado em Poços de Calda – MG, o que, para Toledo (2008) foi um marco na História da Ciência no Brasil. No quinto capítulo, *1967-1974: Práticas sociais decisivas para os processos de constituição e autonomização da área de análise no Brasil*, o autor defende que as sete reuniões científicas de Análise organizadas no Brasil entre 1967 e 1974 foram prática sociais importantes para o processo de constituição e autonomização da análise matemática no país, se apoiando nas ideias de Maria Ângela Miorim e Antônio Miguel. No capítulo seis, *1974: As Reuniões para planejamento de atividades na área de Análise*, comenta-se sobre as reuniões realizadas com a coordenação do Prof. Pedro Nowosad do IMPA, sobre planejamentos de atividades para diminuir as dificuldades da área da Análise no Brasil, e o sétimo capítulo, *1975: A Criação do Seminário Brasileiro de Análise*.

Essa tese traz pouco de conteúdo matemático, e sim uma abordagem teórica em quase todo seu material, focando na História do Processo de Institucionalização da Área de Análise Matemática no Brasil. Porém, no capítulo cinco, aborda sobre a primeira Quinzena da Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais no Brasil organizadas pelo IMPA em 1967. Nesta parte da tese, apresentaram-se dois artigos: 1) *Teorema da Regularidade do Tipo dos Teoremas de Sobolev*, de Chaim Samuel Hönig; 2) *Modelo Probabilísticode Programação Dinânimica*, de Carlos A. Dantas, que, segundo Toledo (2008), foram discutidos no evento com a intenção de oferecer informações sobre questões que dizem respeito às bases formal e específica da análise, ao seu fundo de conhecimento, ao seu domínio, as suas problemáticas, aos seus objetivos e métodos, ou seja, para se ter alguma noção sobre a formação do *Sistema Conceitual* que se definia para área de Análise, naquele período. Nesses dois Teoremas, podemos verificar conteúdos de Análise Matemática presentes na Tese.

Com isso, finalizamos essa descrição, apontando que essa tese de Toledo não possui potenciais didáticos para serem explorados no Ensino Médio, visto que esse conteúdo de Análise Matemática é voltado para o Ensino Superior e que seu aprofundamento só é trabalhado nos cursos de Mestrado e Doutorado em Matemática.

Tese 8: A Concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue

Quadro 36: Descritores de análise da Tese 8 – Ensino Superior

Título: Matemática A Concepção de Educação de Henri Lebesgue
Autor (a): Luzia Aparecida Palaro
Orientador (a): Michel Frederich Otte
Ano de defesa: 2008
Instituição onde foi defendida: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Cálculo Diferencial e Integral
Conteúdos Secundários Mobilizados: Teoria dos Conjuntos, Análise, Binômio de Newton, Geometria Plana e Funções, mas nenhum apresentaram potenciais didáticos para o Ensino Médio
Resumo O objetivo geral deste trabalho foi levantar os aspectos caracterizadores da concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue (1875-1941), que além de ter sido um dos mais eminentes matemáticos do século XX – pois revolucionou a Análise Matemática com a criação de uma nova teoria da medida e, fundamentado nesta, uma nova definição de integral –, foi também um professor extremamente dedicado e que se preocupava com a formação de professores e, muito contribuiu para os assuntos didáticos, históricos e filosóficos da Matemática. A metodologia do estudo baseou-se em uma pesquisa de caráter bibliográfico, sob a abordagem histórico-descritiva; iniciando-se com uma breve apresentação da vida e das obras de Lebesgue. Em seguida, foram apresentadas uma contextualização histórico-filosófica da Matemática de sua época e a filosofia da Matemática que propagava. Buscando realçar a originalidade de Lebesgue, pela sua forma de fazer Matemática, foi apresentado um estudo do desenvolvimento histórico do Cálculo, do século XVII até Lebesgue, sendo a teoria das funções o “fio condutor” desse desenvolvimento. Tendo como base este desenvolvimento histórico, é apresentado um estudo de como alguns livros didáticos de Cálculo e Análise definem a integração e como abordam o Teorema Fundamental do Cálculo, identificando assim, a perspectiva adotada. Por fim, é apresentado um estudo da obra Sobre a Medida das Grandezas de autoria de Lebesgue, buscando identificar aspectos do processo que Lebesgue considerava para o Ensino da Matemática. O estudo concluiu que Lebesgue, construtivista que era, não gostava da tendência axiomática de fazer Matemática de sua época; dava ênfase a atividade e considerava a Matemática um instrumento que não tem objetos próprios; propagava uma filosofia da Matemática simples e utilitária, que seria apenas um relato das práticas desenvolvidas pelos matemáticos; considerava que, no ensino assim como na prática de fazer matemática, se deveria iniciar com uma atividade, a partir da qual poderiam ser abstraídos conceitos, fazer generalizações, deixando as definições axiomáticas por último.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Palaro (2006).

Este trabalho, de caráter bibliográfico, sob a abordagem histórico-descritiva, apresentou como objetivo geral identificar os aspectos caracterizadores da concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue (1875-1941). Para ter sucesso em seu objetivo, Palaro propõe, em sua tese, desenvolver os seguintes objetivos específicos: 1) Pesquisar o contexto histórico-filosófico da Matemática da época em que viveu Lebesgue, buscando identificar as necessidades que o levaram às suas mais importantes criações matemáticas (Teoria da Medida e Teoria da Integração); 2) Levantar as premissas da filosofia da Matemática que Lebesgue propagava e chamava de "filosofia da segunda zona" para contrastar com a filosofia acadêmica, dominada pelo chamado empirismo lógico ou filosofia analítica da ciência; 3) Apresentar aspectos do desenvolvimento histórico do Cálculo do século XVII até Lebesgue, sendo a teoria das funções o "fio condutor" desse desenvolvimento e, em comparação com esse desenvolvimento, identificar as perspectivas adotadas atualmente em alguns livros didáticos de Cálculo e Análise; 4) Pesquisar como Lebesgue pensava o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e o papel do professor nesse processo.

O trabalho foi dividido em seis capítulos. No primeiro, *Henri Lebesque: uma personalidade na história da matemática*, foi apresentado um estudo sobre a vida e obra de Henri Lebesgue, destacando sua vida escolar, sua trajetória profissional, suas primeiras publicações e sua tese de doutorado.

No segundo capítulo, *A Filosofia da Matemática na França, na virada do século XIX para o século XX*, foi elaborada uma contextualização filosófica da época em que Lebesgue estava inserido, mostrando também sua atuação no período. Foram abordados três aspectos, Segundo Palaro (2006): primeiro, a caracterização da revolução da Matemática ocorrida no século XIX, descrita por Pierre Boutroux (1920). O segundo aspecto foi uma discussão que aconteceu, em 1905, entre Borel, Hadamard, Baire e Lebesgue sobre a teoria dos conjuntos. E, para finalizar, foram discutidos aspectos da filosofia da Matemática que Lebesgue propagava e denominava "filosofia da segunda zona".

O terceiro capítulo, *Aspectos do desenvolvimento histórico do Cálculo até o século XVIII*, teve como foco mostrar o contexto histórico-matemático das bases da teoria da integração que antecederam Cauchy, Riemann e Lebesgue, caracterizando a origem e o auge do Teorema Fundamental do Cálculo. Este capítulo também inclui as contribuições de Newton e Leibniz para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

No quarto capítulo, *Teoria da integração de Cauchy a Lebesgue*, esse tópico mostra o desenvolvimento da teoria da integração, iniciando com o desenvolvimento do conceito de função nos séculos XVII e XVIII, passando pelas contribuições de Bolzano, Cauchy e Riemann, até chegar a originalidade de Lebesgue na sua forma de fazer matemática, em que define integral de forma bem diferente de Cauchy e Riemann. Segundo Palaro (2008), essa teoria de integração de Lebesgue revolucionou a análise matemática na época, pois, até então, os procedimentos de integração eram praticamente os mesmos, e, somente trinta anos depois, Riemann apresenta uma generalização do conceito de integral definida dado por Cauchy, aplicável a uma classe de funções muito mais ampla.

No quinto capítulo, *Uma discussão sobre o Teorema Fundamental do Cálculo apresentado em alguns livros didáticos*, apresentou-se e discutiu-se a forma como alguns livros didáticos de Cálculo e Análise definem e desenvolvem O Teorema Fundamental do Cálculo. Foram analisados seguintes livros: 1) Cálculo, de George F. Simmons; 2) Cálculo, de George B. Thomas Jr; 3) Elementos de Cálculo Diferencial e Integral, de Willian A. Granville, Percey F. Smith e William R. Longley; 4) Curso de Análise, de Elon Lages Lima.

No capítulo seis, *Ideias contidas na obra Sobre a medida das grandezas de Henri Lebesgue*, foram apresentados os aspectos do processo que o autor considerava para o Ensino da Matemática. Segundo Palare (2008) para Lesbegue, a Matemática pura tem origem na Matemática aplicada, e a Matemática aplicada, por sua vez, origina-se na “medida de grandezas”. Entre essas ideias de Lesbegue, destaca-se: Comparação de conjuntos e números inteiros, Comprimento de segmentos e número, Áreas, Grandezas Mensuráveis e Integração e diferenciação.

Além dos seis capítulos, Palare, inclui, em seus anexos, traduções próprias para língua portuguesa de alguns artigos usados na elaboração da tese, para facilitar os estudos de leitores com dificuldades em francês, e algumas dessas traduções também aparecem no decorrer do texto da tese.

Fica bem evidente que essa tese trata de conteúdo do Ensino Superior, mais precisamente, o cálculo diferencial e integral. Trata-se de um trabalho farto de noções na área de cálculo importantes para todo professor que ministrar essa disciplina em turmas de graduação, sejam de matemática, física, engenharia ou áreas afins. Destaco também a presença de outros conteúdos na tese: Teoria dos Conjuntos, Análise, Binômio de Newton, Geometria Plana e Funções, mas nenhum apresentou potenciais didáticos para o Ensino Médio.

Tese 9: Matemática e Filosofia da Natureza no Século XIV: Thomas Bradwardine

Quadro 37: Descritores de análise da Tese 9 – Ensino Superior

Título: Matemática e Filosofia da Natureza no Século XIV: Thomas Bradwardine
Autor (a): Marcio Augusto Damim Custódio
Orientador (a): Fátima Regina Rodrigues Évora
Ano de defesa: 2004
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Abordagem: Vida e Obras de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Física Matemática
Conteúdos Secundários Mobilizados: Aritmética
Resumo Investigo o conceito de movimento em Thomas Bradwardine (cerca de 1290/1300 – 1349) com o objetivo de compreender em que medida o uso da matemática no cálculo da velocidade, especialmente no *Tractatus de proportionibus* (1328), é um ponto de passagem entre a filosofia da natureza aristotélica e física copernicano – galilena. Bradwardine teve seu procedimento de cálculo adotado por um grupo de autores em Oxford, no século XIV, que ficou conhecido como “Calculadores de MERTON”. Estabeleceu um projeto que carregava, em seus fundamentos, elementos contraditórios: de um lado a ciência do movimento exposta pela *física*, a qual Bradwardine considerava uma ciência completa no que diz respeito ao estudo das causas; de outro lado elementos de tradição matemáticas que possibilitaram a aplicação da linguagem das proporções à natureza. Mesmo que estes elementos matemáticos fossem integrantes de um projeto de Bradwardine não deixa de ser uma antecipação da modernidade. Mais significativo que isso, sua obra permite caracterizar seu período em Oxford como um momento de investigação da ciência para além do aristotelismo vigente.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Custódio (2004).

Esta pesquisa bibliográfica, com fontes primárias e secundárias, com objeto de pesquisa a obra de Thomas Bradwardine, a partir da investigação de seu conceito e movimento, teve como objetivo compreender em que medida o uso da matemática no cálculo da velocidade, especialmente no *Tractatus de proportionibus*, é um ponto de passagem entre a filosofia da natureza aristotélica e a física copernicano-galileana.

A tese é dividida em seis capítulos. No primeiro, intitulado *O Movimento*, segundo Custódio (2004), fez-se uma reconstituição de como Bradwardine pôde efetuar a transição do conceito de movimento, que lhe permitiu estabelecer um cálculo de proporção, focando no conceito de movimento da Física de Aristóteles e sua vinculação com o objeto da metafísica.

O segundo capítulo, *A Viabilidade da Matematização da Física,* segundo Custódio (2004), mostrou detalhadamente a estrutura do arcabouço matemático da *Geometria Speculativa e do De Proportionibus,* para compreender a relevância que a terminologia e a sintaxe da linguagem geométrica e aritmética das proporções têm para Bradwardine calcular o movimento.

O terceiro capítulo, *A Restauração da Física,* aborda o que Bradwardine considera como causa do insucesso das seguintes teorias: velocidade como valor absoluto; duas teorias sobre velocidade como valor relativo e da impossibilidade da relação de proporção. O quarto capítulo, *A Estrutura da Lei do Movimento,* analisa a Teoria do Cálculo de Bradwardine, e o capítulo cinco, *Continuidade e movimento,* aborda o tema da medição do movimento e traça as estratégias de Bradwardine, consistindo em estabelecer uma correspondência entre o contínuo geométrico (linha, plano e figura) e o contínuo físico (temperatura, movimento).

É uma tese que tem como tema principal a Física Matemática, focando mais em uma discussão filosófica, mas que, no terceiro capítulo, com a refutação de quatro teoremas, e, no quarto capítulo, com apresentação de doze teoremas, mobiliza conteúdos físicos e matemáticos, entre os conteúdos matemáticos. O destaque é para as proporções, que são importantes na teoria física apresentada na tese. O conteúdo apresentado não possui potenciais didáticos para o Ensino Médio, eles podem ser trabalhados em disciplinas de física, inclusive, nas Licenciaturas em Matemática.

Tese 10: Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) e suas Obras em Teoria dos Números

O objetivo desta pesquisa foi inventariar, sistematizar e avaliar as obras em Teoria dos Números do matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833), bem como realizar um estudo histórico da vida desse matemático.

O método de pesquisa utilizado foi o bibliográfico. Segundo Silva (2010), o acervo matemático das bibliotecas brasileiras não contém informação alguma sobre os trabalhos de Legendre em Teoria dos Números. Por isso, foram utilizadas no trabalho, como principais referências, o livro Teoria dos Números (LEGENDRE, 1830) e as fontes primárias, secundárias e terciárias, a saber: todas as demais obras em Teoria dos Números de Legendre, informações dos arquivos das academias as quais Legendre esteve associado, cartas trocadas entre Legendre e seus pares, bibliografias realizadas por diferentes autores, livros originais sobre a História da Matemática, etc., obtidas no Centro François Viète da Universidade de Nantes. Vejamos o quadro 38:

Quadro 38: Descritores de análise da Tese 10 – Ensino Superior

Título: Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) e suas Obras em Teoria dos Números
Autor (a): Maria Aparecida Roseane Ramos Silva
Orientador (a): Jonh Andrew Fossa
Ano de defesa: 2010
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Teoria dos Números
Conteúdos Secundários Mobilizados:
Resumo Este trabalho teve por objetivo inventariar, sistematizar e avaliar as obras em Teoria dos Números do matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833), com certa ênfase no seu livro *Teoria dos Números,* edição francesa de 1830, bem como realizar um estudo histórico da vida desse matemático. Para tanto, foi investigado o papel desempenhado por essas obras e sua influência no desenvolvimento da Teoria dos Números no contexto de sua época. Uma leitura da vida de Adrien-Marie Legendre foi realizada por meio de suas relações pessoais e de suas produções científicas e colocou em evidência certos elementos históricos do desenvolvimento de um povo, das ciências e suas possíveis consequências que nortearam a própria evolução da sociedade francesa dos séculos XVIII-XIX, e revelou características marcantes da personalidade de Legendre no meio matemático contemporâneo, como as infindáveis querelas com Gauss a respeito de prioridades de descobertas científicas. Um estudo sistemático da obra *Teoria dos Números* (1830) num contexto histórico-social e a análise de certos conteúdos da obra comparados a alguns textos de outros autores nos permitiram compreender a evolução dinâmica dos caminhos percorridos pelo autor, quanto a semântica, à organização das demonstrações, à estrutura lógico-dedutiva que permearam suas descobertas matemáticas em Teoria dos Números, a exemplo da sua famosa lei de reciprocidade. O impacto causado por suas obras e Teoria dos Números na comunidade matemática francesa da época e as contribuições do autor à ciência antes e depois da publicação da obra revelo que *Teoria dos Números,* obra à qual o autor consagrou mais da metade de sua vida no intuito de aperfeiçoá-la, tornou notícia a honra que lhe é devida como o primeiro tratado de uma Aritmética superior que tanto inspirou a outros matemáticos para o avanço dessa ciência no século XX. Legendre recebeu homenagens póstumas dos matemáticos Beaumont, e Poisson, que inclusive discursou em seu funeral, e o seu nome se encontra perpetuado na face *Trocadéro* da torre Eiffel que contém uma lista de 72 ilustres cientistas e dá nome a uma passagem e a uma rua do 17º bairro da cidade e Paris.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Silva (2010).

O conteúdo abordado nesta tese foi o de Teoria dos Números. O trabalho foi dividido em três capítulos, o primeiro deles, *Adrien-Marie Legendre (1752-1833): sua vida, suas obras*, que abordou a participação de Legendre e o desenvolvimento científico de seus trabalhos em Matemática, da Academia de Ciências de Paris, em quatro momentos políticos importantes da sociedade francesa: o Antigo Regime (1752-1789), a Revolução Francesa (1789-1799), o Primeiro Império de Napoleão (1803-1814) e a Restauração (1814-1833). Neste capítulo, também foram feitas análises de suas relações com alguns matemáticos contemporâneos: Fourier, Poisson, Sophie Germain, Jacobi e Galois, e alguns conflitos de prioridade de descobertas científicas com Laplace e com Gauss. E, por fim, uma análise de alguns fatores sobre o caráter de Legendre: modéstia, severidade, perfeccionismo, timidez, generosidade e parcialidade.

A tese traz algumas questões de pesquisa que levam em consideração a vasta história da Teoria dos Números: como percorrer a via aritmética e algébrica da Teoria dos Números, sem lançarmos um olhar sobre os trabalhos de Legendre? Em quais contextos específicos foram realizadas as suas obras em Teoria dos Números? Essas obras tiveram alguma influência na Teoria dos Números desenvolvida nos séculos XVIII e XIX? Para respondê-las, Silva desenvolve o segundo capítulo intitulado, *Legendre e a Teoria dos Números*, em que foi feita uma análise detalhada de todas as obras de Legendre, desde seu primeiro trabalho de 1785, passando por todas as edições do Ensaio até a sua última obra.

O terceiro e último capítulo, *A receptividade pela comunidade matemática dos trabalhos de Legendre em Teoria dos Números*, apresentou um panorama sobre as críticas dos matemáticos e as contribuições das obras de Legendre à comunidade matemática em variadas épocas. Dentre algumas obras que sofreram influência de Legendre, Silva (2008) apresenta, em seu trabalho, algo como um legado, uma pequena amostragem das obras de alguns renomados autores de livros sobre Teoria dos Números: História da Teoria dos Números de Leonard-Eugene Dickson (1952); Números primos, mistérios e recordes, de Paulo Ribenboim (2001); Leituras em Teoria dos Números de Lejeune-Dirichlet (1999); Curso de Análise da Escola Real Politécnica, de Cauchy (1821) apud Dhombres (2002).

Essa tese é longa e traz uma quantidade grande de conteúdos matemáticos na área de Teoria dos Números, sendo um material excelente para ser usado no Ensino Superior em disciplinas de Introdução à Álgebra, principalmente em cursos de formação de professores, porém não encontramos potenciais didáticos para o Ensino Médio. Mas talvez, com um estudo um pouco mais detalhado do material, até possamos encontrar algumas demonstrações interessantes que se possam usar com alunos do Ensino Médio de nível alto, principalmente com aqueles que estudam para Olimpíadas de Matemática, masm para isso, é preciso analisar o material de forma bastante aprimorada.

Tese 11: Luigi Fantappiè: Influências na Matemática Brasileira. Um Estudo de História como Contribuição para a Educação Matemática

Quadro 39: Descritores de análise da Tese 11 – Ensino Superior

Título: Luigi Fantappiè: Influências na Matemática Brasileira. Um Estudo de História como Contribuição para a Educação Matemática
Autor (a): Plínio Zornoff Táboas
Orientador (a): Ubiratan D'Ambrosio
Ano de defesa: 2005
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Rio Claro
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Análise
Conteúdos Secundários Mobilizados: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Abstrata, Aplicações da Física e Geometria Analítica.
Resumo Apresentar uma proposta de ação em Educação Matemática, através da investigação histórica de textos matemáticos avançados e relevantes para a matemática brasileira, é o objetivo deste trabalho. Inicialmente, ampliam-se as possibilidades de investigação, ou seja, toma-se a matéria sob observação como fenômeno do conhecimento e, assim, as peças matemáticas que surgem desta investigação são tidas como parte do contexto histórico e da cultura analisados. O estudo e a interpretação de tais peças redimensiona a temporalidade convencional, presentifica o passado e faz do presente o futuro em que se quer chegar. A peça que exemplifica a proposta feita é uma Memória de Luigi Fantappiè, sobre Funcionais Analíticos. Ela surge como elemento de um emaranhado peculiar da constituição da cultura brasileira: a década de 1930. Além disso, corrobora a tese de que Fantappiè tem papel importante na determinação do ponto de inflexão da sorte da Matemática no Brasil, que passa de consumidora para também produtora no cenário globalizado das ciências.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Táboas (2005).

Esta tese teve como objetivo apresentar uma proposta de ação em Educação Matemática, mediante a investigação histórica de textos matemáticos avançados e relevantes para a matemática brasileira, propondo Segundo Táboas (2005):

> Uma possibilidade de intervenção educacional em nível superior a partir de textos históricos comprovadamente relevantes para o desenvolvimento da matemática, tomada do conhecimento humano como uma disciplina com características individuais próprias e independentes, em suas mais diversas áreas, cuja principal intenção é a discussão de temas avançados da própria matemática vistos como subprodutos da análise crítica da história, e no caso específico deste projeto, da história brasileira. (TÁBOAS, 2005, p. 1).

O autor faz uma análise de textos históricos como um suporte para a discussão de temas avançados do ensino superior nos mais diversos currículos nacionais de Cursos de Graduação em Matemática, partindo das seguintes problemáticas: 1)Se um texto matemático é comprovadamente relevante, há, realmente, a necessidade de tomá-lo como subproduto da análise histórica? 2) Determinação do critério a ser utilizado para se classificar o ‘matematicamente relevante’; 3) Para o seu sucesso, a intervenção deve permear toda a grade curricular de um curso de matemática, e uma carreira de História da Matemática deve ser adotada em praticamente toda a duração do curso, a fim de subsidiar as demais disciplinas?

Esta tese apresenta seis capítulos, os quatro primeiros são curtos. O primeiro representa a introdução, em que o autor trata dos objetivos e questões da pesquisa e também aborda sobre questões preliminares da relação entre História da Matemática e Educação Matemática. No segundo capítulo, foi apresentada uma concepção de história da matemática. Inclusive, Táboas (2005) apresenta um diagrama bastante interessante e, antes de entender a História da Matemática, ele aponta que se deve entender o que é história.

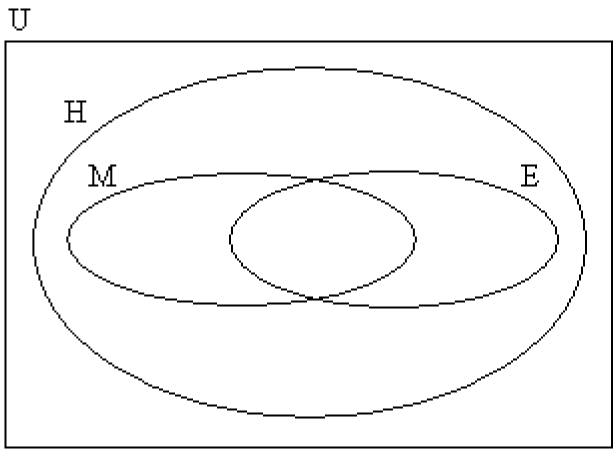


Figura 1: Relação entre História, Matemática e Educação, Táboas (2005)

Nesse diagrama H: História; M: Matemática e E: Educação, considerando a Educação Matemática como a intersecção entre Matemática e Educação. Em seguida, continua apresentando uma concepção de História da Matemática, entrando também no campo da Etnomatemática. Nos dois próximos capítulos, Táboas relaciona o cenário de 1930, com a vida de Luigi Fantappiè.

O quinto capítulo, intitulado *Relevância Matemática e Relevância Histórica*, o capítulo mais longo e mais importante da tese, é o momento em que todo conteúdo matemático aparece, em que o tema principal focalizado é Análise Funcional, mais precisamente, o estudo de Funcionais Analíticos. Outros conteúdos também são mobilizados neste trabalho, entre eles, o cálculo diferencial e integral, álgebra abstrata, geometria analítica e algumas aplicações da Física. O sexto capítulo são as conclusões do autor, mas que ele nomeia e intitula de *A Sublimação da Educação através da História*.

E finaliza com dois apêndices: o primeiro se refere à tradução do texto *'I funzionali delle funzioni di piu variabili – Memoria de Luigi Fantappiè'*, e, no segundo apêndice, fotos do Jornal da Matemática Pura e Aplicada relacionadas a Fantappiè.

Fica claro que esse trabalho não possui potenciais didáticos para o Ensino Médio, pois o conteúdo de Análise Funcional, geralmente, é visto em cursos de Doutorado em Matemática pura. Então, trata-se de uma tese que tem sua importância para leituras e análise no Ensino Superior.

4 TEMAS, PROBLEMATIZAÇÕES E SEUS POTENCIAIS DIDÁTICOS SOBRE AS DISSERTAÇÕES E TESES QUE INVESTIGAM CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, fazemos uma descrição e apontamos os potenciais didáticos das dezessete dissertações e teses que possuem conteúdos de Ensino Médio. Fizemos um quadro, no qual separamos o quantitativo de trabalho em função dos conteúdos, usando como critério as áreas de conhecimentos do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM:

1) Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

2) Conhecimentos geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

3) Conhecimentos de estatística e probabilidade: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade

4) Conhecimentos algébricos: gráficos e funções; funções algébricas do 1º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

5) Conhecimentos algébricos/geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Criamos um novo critério, já que alguns conteúdos do Ensino Médio não estão mais entre os conteúdos da prova do ENEM, e chamamos de outros, conteúdos como números complexos e determinantes, considerados como conteúdos do Ensino Médio, mesmo não sendo abordados no ENEM.

No quadro 40, a seguir, apresenta-se o quantitativo dos conteúdos do Ensino Médio nas dissertações e teses em história e epistemologia da matemática produzidas nos programas de pós-graduação do Brasil no período de 1990 a 2010.

Quadro 40: Dissertações e Teses que Abordam Conteúdos do Ensino Médio

Áreas	Dissertações	Teses	Total	Percentual
Conhecimentos numéricos	4	2	6	35%
Conhecimentos geométricos	3	3	6	35%
Conhecimentos de estatística e probabilidade	-	1	1	6%
Conhecimentos algébricos	-	1	1	6%
Conhecimentos algébricos/geométricos	1	-	1	6%
Outros	2	-	2	12%
Total	10	7	17	100%

Fonte: Elaboração própria

A partir de agora, iniciamos a descrição e investigação dos potenciais didáticos dos dezessete trabalhos. Dividimos o capítulo em duas partes: 1) As Dissertações: Temas, Problematizações e Potenciais Didáticos e 2) As Teses: Temas, Problematizações e potenciais didáticos.

Antes de iniciar, apresentamos um quadro que contém algumas informações sobre os trabalhos: Título, Autor, Orientador, Ano de Defesa, Instituição e Programa de Pós-graduação onde foram defendidas, Abordagem, Conteúdo Principal Focalizado, Conteúdos Secundários Mobilizados e Resumo original da Dissertação ou Tese.

4.1 Dissertações: Temas, Problematizações e Potenciais Didáticos

Quadro 41: Descritores de análise da Dissertação 1 – Ensino Médio

Título: A Quadratura do Círculo e a gênese do número π
Autor (a): Aloísio Daniel Vendemiatti
Orientador (a): Benedito Antônio da Silva
Ano de defesa: 2009
Instituição onde foi defendida: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo Principal Focalizado: Número Irracional (Conhecimentos Numéricos)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Plana, Trigonometria e Polinômios
Resumo O objeto deste trabalho é apresentar aspectos da gênese do número π, inerente à questão da quadratura do círculo, a qual consiste em construir um quadrado de igual área de um círculo de raio r dado. Esse problema não diz respeito a uma aplicação prática da matemática, mas sim a uma questão teórica que envolve uma distinção entre uma boa aproximação e a exatidão do século V a.C. Posteriormente, ficou estabelecido que essa construção deveria ser realizada utilizando-se, um número finito de vezes, a régua não graduada e o compasso. Nas construções com régua e compasso, estamos nos referindo aos três primeiros postulados dos *Elementos* de Euclides: 1) é possível unir dois pontos por uma reta, 2) prolongar uma linha reta até onde seja necessário e 3) traçar uma circunferência em torno de qualquer ponto e com qualquer raio. Esses postulados são a base dessas construções, muitas vezes chamadas de *Construções Euclidianas*. Um número real α é construtível, se for possível “construir com régua e compasso um segmento de comprimento igual a α, a partir de um segmento tomado como unidade”. Apresentamos a ideia de traduzir o problema geométrico das construções com régua e compasso para a linguagem algébrica, e isso permitiu solucionar o problema da quadratura do círculo. Expomos que todo número construtível é algébrico sobre os racionais, estabelecendo a impossibilidade de quadrar o círculo com a demonstração de Lindemann, em 1882, da transcendência do número π. Vemos que esse problema fascinou estudiosos por mais de 20 séculos. Procuramos fornecer todas as ferramentas matemáticas necessárias para essa demonstração. As demonstrações desempenham um papel fundamental no desenvolvimento deste trabalho, que tem por finalidade não só contribuir para a formação do professor de matemática, mas também detalhar a resolução do problema da quadratura do círculo.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Vendemiatti (2009).

O objetivo deste trabalho foi apresentar aspectos da gênese do número π, inerentes ao problema da quadratura do círculo, e mostrar a impossibilidade da construção de tal quadrado, fundamentando todas as etapas envolvidas, inclusive, a demonstração do resultado definitivo, a saber: a transcendência do número π. Nesse sentido, Vendemiatti (2009) teve como uma de suas finalidades a elaboração de um material didático para contribuir na formação de professores de matemática e para sua prática no exercício do magistério. Os problemas propostos em sua pesquisa foram: 1) Como tornar a leitura da demonstração da transcendência do número π mais acessível aos professores e aos alunos dos cursos de licenciatura em Matemática? 2) Como aprender a demonstração da impossibilidade da Quadratura do Círculo de forma mais detalhada em um único texto com todos os resultados necessários envolvidos para tal demonstração?

O método de pesquisa utilizado pelo autor foi a pesquisa bibliográfica em busca da explicação da transcendência do π com a finalidade de demonstrar a impossibilidade da quadratura do círculo, um dos problemas mais famosos da história da matemática, que obcecou matemáticos desde Platão no século III a.C., com o intuito de contribuir para a formação de professores de matemática e complementação da teoria do π apresentada na maioria dos livros didáticos.

No primeiro capítulo, o autor descreve de forma breve o problema da quadratura do círculo e sua relação com o número π, em que é apresentada uma justificativa de como se pode obter a área do círculo e o comprimento da circunferência, dois conceitos abordados no Ensino Médio, e, para finalizar, apresentou-se o cálculo de estimativas do número π para aproximação, utilizando processos algébricos e geométricos.

No segundo capítulo, o foco são os números algébricos, enquanto, no terceiro capítulo, é abordada a Teoria dos Números Transcendentes, mostrando o Teorema de Liouville e a prova de Cantor para existência de tais números. No quarto capítulo, o autor estuda os polinômios simétricos e três resultados que serão empregados na transcendência do número π, tratando o primeiro deles de uma revisão sobre as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial, conteúdo este abordado no Ensino Médio. Por fim, o quinto capítulo mostra a demonstração da Transcendência do π.

Como já foi dito no quadro 41, o conteúdo principal focalizado, abordado neste trabalho foi o Número Irracional, com o objetivo de apresentar aspectos da gênese do π, abordando conteúdos tanto de Ensino Básico, como de Ensino Superior. Fizemos uma análise apenas dos conteúdos que possuem potenciais didáticos para o Ensino Médio. Nesta dissertação, apenas no primeiro capítulo, que trataremos a seguir, encontramos conteúdos que satisfazem nosso objetivo, pois, no quarto capítulo da dissertação, o conteúdo de Polinômio, por mais que seja do Ensino Médio, a forma como se mostra neste trabalho encontra-se em qualquer livro didático da mesma maneira.

De acordo com Vendemiatti (2009), talvez o problema da quadratura do círculo seja um dos mais famosos da história. Na dissertação, o enunciado do problema aparece da seguinte maneira: *Construir um Quadrado de área igual à área de um círculo de raio* r *dado, utilizando apenas régua sem escala e compasso um número finito de vezes.* Vendemiatti assevera que, em uma versão atual, esse problema seria enunciado da seguinte forma:

> Construir um quadrado de área igual à área de um círculo de raio r dado, utilizando apenas uma régua sem escala e um compasso. Dado um círculo de raio r, sua área é dada por, $\pi \cdot r^2$. Vamos considerar um círculo de raio unitário, ou seja, $r = 1$. Então a área deste círculo será igual a $\pi \cdot 1^2 = \pi \cdot 1 = \pi$. Assim, se a área de um quadrado de lado ℓ for igual de um círculo de raio unitário, devemos ter $\ell^2 = \pi$, o que nos dá $\ell = \sqrt{\pi}$ (VENDEMIATTI, 2009, p. 20).

Neste caso, o próprio autor da dissertação faz essa tradução do problema para uma linguagem mais atual. Todavia, em muitos trabalhos que abordam a história da Matemática para o ensino, esse procedimento é preciso ser feito pelo professor de matemática antes de o material ser utilizado em sala de aula, para que a aplicação tenha êxito.

Em situações como a almejada por Vendemiatti (2009), o estudo de conceitos como o de Círculo e Circunferência usando um problema tão famoso da matemática pode motivar o aluno a aprender o restante do conteúdo. Segundo Mendes (2009), com a prática do uso da história da matemática como recurso pedagógico pode ser possível imprimir uma maior motivação e criatividade cognitiva às atividades de sala de aula durante a ação docente, podendo construir agentes provocadores de ruptura da prática tradicional educativa vivida até hoje nas aulas de matemática.

No segundo tópico do primeiro capítulo, aborda-se o Método de Arquimedes para o cálculo do π, mostrando-se o desenvolvimento do método de aproximação para o cálculo da medida do comprimento da circunferência. Na descrição deste método feita por Vendemiatti (2009), observamos a presença de polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência, quando Arquimedes, (240 a.C.) desenvolveu este método, com a finalidade de definir um intervalo que contava a medida do comprimento da circunferência.

Sugerimos que, ao usarmos o Método de Arquimedes, podemos trabalhar com diversos conceitos de geometria plana. Com a demonstração do método, descobre-se a relação que expressa um valor para o comprimento da circunferência, o que refere a um dos significados geométricos do número π.

Consideramos, ainda, que, ao usar essa abordagem no ensino de matemática, proposta de ensino, podemos trabalhar bastante o desenvolvimento cognitivo dos alunos e também transformar o conteúdo aprendido em um desafio, fazendo com que o aluno redescubra o que já foi feito por matemáticos no passado. Nesse sentido, Mendes (2009) assegura que:

> Para que se efetive um ensino-aprendizagem significativo em matemática, ele propõe o uso da história na geração do conhecimento matemático, desde que propicie o uso do material histórico como o conteúdo matemático a ser ensinado pelo professor e aprendido pelo aluno, tomando por base o ensino-aprendizagem por meio da redescoberta. (MENDES, 2009, p. 15).

Por isso, diferentemente do que é proposto pelos livros didáticos atuais, que trazem apenas uma História da Matemática informativa, ao usar o Método de Arquimedes para o cálculo do π, com a intensão de mostrar o comprimento de uma circunferência ou a área do círculo, estamos realmente gerando conhecimentos com um material histórico importante e fazendo com que os alunos se motivem em desenvolver os problemas matemáticos.

Ao usarmos o Método de Arquimedes, podemos trabalhar com diversos temas de geometria plana, partindo da seguinte problemática, abordada na dissertação de Vendemiatti (2009): Considere uma circunferência de raio r e um polígono regular de n lados inscrito nessa circunferência. Use l_n para representar o lado do polígono e p_n para seu perímetro. Desse modo, analisaremos a resolução feita na dissertação de Vendemiatti temos:

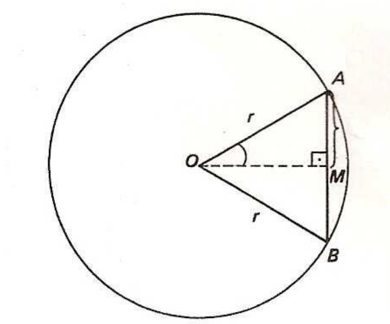


Figura 2: Circunferência A (VENDEMIATTI, 2009, p. 24)

A partir desta figura, usaram-se propriedades de geometria plana, mais especificamente Polígonos Regulares, chegando ao resultado que $p_n = 2 \cdot n \cdot r \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right)$, enfatizando que o perímetro do polígono regular inscrito à circunferência é igual ao produto do número $n \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right)$ pelo diâmetro da circunferência, ou seja, o número $n \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right)$ depende exclusivamente do polígono.

Sugerimos que, neste momento, o professor pode detalhar bem com os alunos o conceito de perímetro e mostrar como chegamos ao resultado de p_n. Sabemos que esse perímetro é soma de todos os n lados do polígonos, mas esse polígono não foi bem explorado na dissertação e no Ensino Médio. Quando estivermos trabalhando o conteúdo circunferência, podemos explorar bem a ideia dos polígonos regulares e explicando como que se chega ao resultado de $A\hat{O}M = \frac{180°}{n}$. Vendemiatti, em sua dissertação, não explica como um ângulo central $A\hat{O}B = \frac{360°}{n}$, apenas afirma que, sendo $AB = l_n$ (lado do polígono regular), o ângulo é $A\hat{O}B = \frac{360°}{n}$. Neste momento, podemos usar esse resultado para detalhar porque o ângulo central tem esse valor, aumentando os conhecimentos dos alunos em relação a propriedades de polígonos regulares e ângulos de uma circunferência. Lembrando que também é possível revisar trigonometria no triângulo retângulo no resultado do valor de AB.

Em seguida, usar um polígono regular de n lados circunscrito nessa circunferência de raio r. Representando o lado desse polígono por L_n e o seu perímetro por P_n. Como mostra a figura 3 a seguir:

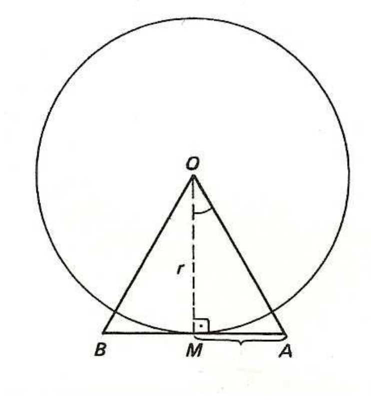


Figura 3: Circunferência B (VENDEMIATTI, 2009, p. 25)

A partir desta outra figura, usaram-se novamente, as propriedades do conteúdo de geometria plana, mais especificamente Polígonos Regulares e Trigonometria no Triângulo Retângulo e chegando ao resultado que $P_n = 2 \cdot r \cdot n \cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)$, enfatizando que o perímetro do polígono regular inscrito à circunferência é igual ao produto do número $n \cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)$ pelo diâmetro da circunferência, ou seja, o número $n \cdot tg\left(\dfrac{180°}{n}\right)$ depende exclusivamente do polígono.

Percebemos que também mobilizamos os conceitos de polígonos regulares, porém explorando as propriedades de polígonos circunscritos em uma circunferência.

Usando como auxílio uma calculadora científica, Vendemiatti (2009) obteve os valores $n \cdot sen\left(\dfrac{180°}{n}\right) = \dfrac{p_n}{2r}$ e os valores de $n \cdot tg\left(\dfrac{180°}{n}\right) = \dfrac{P_n}{2r}$ para vários polígonos.

Consideramos muito importante esse momento, pois os alunos podem realizar um trabalho mobilizando o instrumento da calculadora científica, que será muito importante no futuro, dependendo da área que ele escolher para trabalhar e estudar e também para a própria vida cotidiana, mesmo que não use em seus cursos superiores e em seu trabalho. É importante aprender a manusear uma calculadora científica.

Esses valores foram calculados por Vendemiatti e encontram-se com aproximação de 8 casas decimais. Como mostra o quadro 42, a seguir:

Quadro 42: Primeiro Cálculo de Aproximação do π

N	$\frac{p_n}{2r}$	$\frac{P_n}{2r}$	$\frac{P_n}{2r} - \frac{p_n}{2r}$
3	**2,59807621**	**5,19615242**	**2,59807621**
4	2, 82842712	4, 00000000	1, 17157288
5	2, 93892626	3, 63271264	0, 69378638
6	**3,00000000**	**3,46410161**	**0,46410161**
10	3, 09016994	3, 24919696	0, 15902702
12	**3,10582854**	**3,21539030**	**0,10956176**
24	**3,13262861**	**3,15965994**	**0,02703133**
48	**3,13935020**	**3,14608621**	**0,00673601**
96	**3,14103195**	**3,1427146**	**0,00168264**
500	3, 14157198	3, 14163399	0, 00006201
1000	3, 14158748	3, 14160298	0, 00001550

Fonte: Vendemiatti (2009).

Segundo Vendemiatti (2009), os valores em negrito correspondem aos polígonos utilizados por Arquimedes para obter a aproximação $3\dfrac{10}{71} < \pi < 3\dfrac{1}{7}$.

Logo em seguida, ele finaliza usando o conceito de sequências, com ideias de limite, e usando o método das aproximações sucessivas, que, particularmente, consideramos que não é preciso abordar no Ensino Médio com tanto detalhe, tal como é feito na dissertação. Mas é preciso mostrar, pelo menos intuitivamente, que $\frac{p_n}{2r} < \frac{C}{2r} < \frac{P_n}{2r}, \forall n \in N, n \geq 3$. E que, quanto maior n, $\frac{P_n}{2r} - \frac{p_n}{2r}$, se aproxima de zero, ou seja, podemos mostrar, por meio do quadro 42, que: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{2r} - \frac{p_n}{2r} = 0$ e que o comprimento da circunferência se aproxima muito dos perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos nela e com isso que $\pi = \frac{C}{2r}$.

Com a demonstração anterior, descobre-se a fórmula do comprimento da circunferência, e, ao mesmo tempo, um dos significados geométricos do número π, mobilizando diversos conceitos de geometria plana do Ensino Médio. E, respondendo a uma pergunta feita por quase todos os alunos e pouco respondidas pelos professores: porque $C = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Consideramos que, ao usar essa proposta de ensino, podemos trabalhar bastante o desenvolvimento cognitivo dos alunos e também transformar o conteúdo aprendido em um desafio, fazendo com que o aluno redescubra o que já foi feito por matemáticos no passado. Segundo Mendes (2009),

> Para que se efetive um ensino-aprendizagem significativo em matemática, ele propõe o uso da história na geração do conhecimento matemático, desde que propicie o uso do material histórico como o conteúdo matemático a ser ensinado pelo professor e aprendido pelo aluno, tomando por base o ensino-aprendizagem por meio da redescoberta (MENDES, 2009, p. 15).

Após o uso do método de Arquimedes para demonstrar o comprimento da circunferência, também foi feita demonstração referente à determinação da área do círculo. Vejamos como Vendemiatti (2009) abordou.

Seja $AB = \ell_n$ o lado do polígono regular de n lados inscrito num círculo de raio *r*.

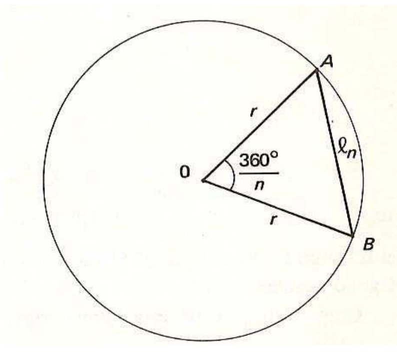


Figura 4: A circunferência C (Vendemiatti, 2009, p. 30)

A medida do ângulo central AÔB é igual a $\frac{360°}{n}$. A área a_n do polígono regular inscrito é igual a *n* vezes a área do ΔAOB. A área do ΔAOB é dada por $\frac{r \cdot r}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{n}\right)$. Logo $a_n = n \cdot \frac{r \cdot r}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{n}\right)$ ou $a_n = \left(\frac{n}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{n}\right)\right) \cdot r^2$.

Novamente, podemos explorar bem as propriedades dos polígonos regulares. Na dissertação de Vendemiatti, ele não se preocupa em mostrar por que a área do polígono de *n* lados é *n* vezes a área do ΔAOB da figura anterior e também detalhar a área do triângulo, sabendo dois lados e o ângulo do meio.

Dado o triângulo ΔAOB e sabendo o valor do ângulo AÔB, a área do triângulo tem o valor: $\frac{AO \cdot AB}{2} \cdot sen(A\hat{O}B)$.

O autor destaca o fato de que a área do polígono regular inscrito ao círculo de raio *r* é o produto do número $\frac{n}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{n}\right)$ pelo quadrado do raio. O número $\frac{n}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{n}\right)$ depende apenas do número de lados do polígono. Em seguida, passa a calcular a área do polígono regular de n lados circunscrito num círculo de raio *r*. Indicando esta área por A_n. Seja $AB = L_n$.

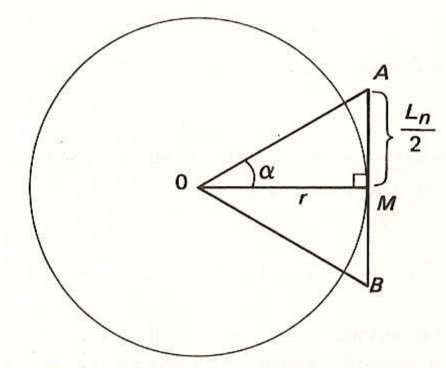


Figura 5: Circunferência D (VENDEMIATTI, 2009, p. 31).

Com a mobilização dos conceitos de polígonos regulares, acha-se que o ângulo α é a metade do ângulo central AÔB, logo: $\alpha = \frac{\frac{360°}{n}}{2} = \frac{180°}{2}$.

Com isso, Vedemiatti encontra no triângulo AOM que: $tg\alpha = \frac{AM}{r} = \frac{\frac{L_n}{2}}{r} = \frac{L_n}{2r} \therefore L_n = 2r \cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)$. E, em seguida, mostra que área A_n do polígono regular circunscrito é igual a n vezes a área do triângulo AOB, portanto: $A_n = n \cdot \frac{AB \cdot r}{2} = \frac{n \cdot r}{2} \cdot 2r \cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)$ *ou* $A_n = \left(n \cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)\right) \cdot r^2$.

Neste caso, a área do polígono regular circunscrito ao círculo de raio *r* é o produto do número $n \cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)$ pelo quadrado do raio, e o número $n \cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)$ também depende apenas do número de lados do polígono.

Mais uma vez, verificamos a mesma aplicabilidade em geometria plana com a mobilização dos conceitos de polígonos regulares e trigonometria, mas agora, ao invés de seno, foi utilizada a tangente.

Com o auxílio de uma calculadora científica, foram obtidos os valores de $\frac{A_n}{r^2} = \frac{n}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{n}\right)$ e de $\frac{A_n}{r^2} = n \cdot tg\left(\frac{360°}{n}\right)$ para vários polígonos.

Esses valores foram apresentados por Vendemiatti (2009) na tabela abaixo, com aproximação de 8 casas decimais, obtidas por truncamento.

Quadro 43: Segundo Cálculo de Aproximação do π

N	$\frac{a_n}{r^2}$	$\frac{A_n}{r^2}$	$\frac{A_n}{r^2} - \frac{a_n}{r^2}$
3	1,29903810	5,19615242	3,89711432
4	2,00000000	4,00000000	2,00000000
5	2,37764129	3,63271264	1,25507135
6	2,59807621	3,46410161	0,86602540
10	2,93892626	3,24919696	0,31027070
20	3,09016994	3,16768880	0,07751886
60	3,13585389	3,14446675	0,00861286
10	3,13952597	3,14262660	0,00310063
180	**3,14095470**	**3,14191168**	**0,00095698**
360	**3,14143315**	**3,14167240**	**0,00023925**
500	**3,14150997**	**3,14163399**	**0,00012402**

Fonte: Vendemiatti (2009).

Logo em seguida, finaliza usando o conceito de sequências, com ideias de limite, usando novamente o método das aproximações sucessivas, sendo que, dessa vez, mostrando que $\frac{a_n}{r^2} < \frac{A}{r^2} < \frac{A_n}{r^2}, \forall n \in N, n \geq 3$. E que quanto maior n, $\frac{P_n}{2r} - \frac{p_n}{2r}$, se aproxima de zero, ou seja, podemos mostrar, por meio das figuras geométricas, que: $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{2r} - \frac{p_n}{2r} = 0$, e que a área do circunferência se aproxima muito dos perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos nela e com isso que $\pi = \frac{A}{r^2}$.

Percebemos que podemos usar bem o Método de Arquimedes para o estudo do Círculo e da circunferência e explorando o conteúdo de polígonos regulares e trigonometria no triângulo retângulo. Geralmente, em turmas de 2° ano do Ensino Médio, esse conteúdo é visto. Mas são poucos materiais que mostram detalhes das demonstrações das áreas e ainda mais explorando diversos conteúdos.

Essas duas demonstrações feitas na dissertação de Vendemiatti (2009) tratam de conteúdos com potenciais didáticos para o Ensino Médio, encontrados na dissertação em História e Epistemologia da Matemática, escrita por Vendemiatti. Podemos, em nossas aulas, mostrar essas demonstrações, bem como sua explicação histórica. Não podemos deixar de citar aqui que o livro Fundamentos da Matemática Elementar Volume 9, de 1993, de Osvaldo Dolce e José Nicolau, ainda traz uma dessas demonstrações, a do comprimento da circunferência. Em outros livros mais modernos, quando muito, trazem apenas o contexto histórico, sem a demonstração, como é caso do livro de Dante (2013), Contexto e Aplicações, volume 2.

O que concluímos, nesta primeira parte do primeiro capítulo, é que podemos fazer uma adaptação dessas demonstrações e, junto com o contexto histórico, trabalhá-las em sala de aula do Ensino Médio quando estivermos abordando o conteúdo de Geometria Plana de círculo e circunferência, pois, além de demonstrar as fórmulas, também fazemos uma das demonstrações do π e mobilizamos conteúdos de áreas de figuras planas, como o triângulo, e trigonometria no triângulo retângulo.

Em nossa experiência no Ensino Médio, observamos que perguntas do tipo: *por que π é aproximadamente 3,14? Por que o comprimento da circunferência é $C = 2\pi \cdot r$? Por que a área do círculo é $A = \pi \cdot r^2$?* ocorrem com muita frequência e neste trabalho, temos relevantes demonstrações usando o método de Arquimedes, que alguns professores não conhecem e, por isso, não mostram em sala de aula, pois, de acordo com Radford (2011):

> seguindo o mesmo caminho feito pelos matemáticos antigos na construção do seu conhecimento, nos parece que a mudança de cenário intelectual, permitida pela análise histórica fornece aos professores novos pontos de referência e uma maior flexibilidade em suas escolhas de sala de aula (RADFORD, 2011, p. 17).

No momento em que fazemos essas construções com nossos alunos, as perguntas anteriores citadas deixam de existir, pois se mostra o surgimento das fórmulas através das demonstrações.

Mas o primeiro capítulo da dissertação de Vendemiatti ainda tem mais três tópicos, um deles é a expressão de Viète para o número π. Em sua dissertação, não foi feita a demonstração, mas realizou uma justificativa da expressão que traz bastante mobilização matemática, que iremos comentar abaixo. A Expressão de Viète, representada pela expressão:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \ldots$$

De acordo com Vendemiatti (2009), a expressão foi desenvolvida pelo matemático francês François Viète, em 1579, quando calculou as nove primeiras casas decimais do número π pelo método clássico, usando polígonos de 393216 lados. Viète usou para sua demonstração o cálculo das áreas dos polígonos regulares com 4, 8, 16, 32, ... , lados inscritos num círculo de raio $r = 1$, ou seja, a área do círculo é igual a π.

Para justificar a origem da expressão de Viète, Vendemiatti (2009) utilizou como apoio a relação de determinação da área do polígono regular dada por $a_n = \frac{n}{2} \cdot sen\left(\frac{360^o}{n}\right) \cdot r^2$ e desenvolvida no exemplo anterior. Neste sentido, o autor atribui os valores n = 4, n = 8, n = 16 e n = 32 na relação dada por a_n, obtendo os seguintes resultados:

a) Para $n = 4 \therefore a_4 = \frac{4}{2} \cdot sen\,90^o = 2 \cdot 1 = 2$;

b) Para $n = 8 \therefore a_8 = \frac{8}{2} \cdot sen\,45^o = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$;

c) Para $n = 16 \therefore a_{16} = \frac{16}{2} \cdot sen\,22{,}5^o$.

Neste momento, podemos trabalhar com os alunos conceitos de trigonometria, pois Vendemiatti usa a fórmula do arco metade, que sabemos ser pouco utilizada no Ensino Médio em Trigonometria, e, quando é, os alunos não conseguem detectar aplicações e, muitas vezes, acham um conteúdo que não faz sentido de ser aprendido. Com uso dessa fórmula, temos:

$$sen\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \text{ logo } sen\,22{,}5^o = sen\,\frac{45^o}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45^o}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Então:

$$n = 16 \therefore a_{16} = \frac{16}{2} \cdot sen\,22{,}5^{o} = 8 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = 4 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} =$$

$$4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Ou seja,

$$n = 16 \therefore a_{16} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Analogamente, Vendemiatti (2009) mostra como foi feito para n = 32 e encontra $a_{32} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, percebendo que $\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$, pois ele parte do pressuposto de que $a_n = \frac{n}{2} \cdot sen\left(\frac{360^{o}}{n}\right) \cdot r^2$ converge para π quando n é cada vez maior. Essa convergência ele demonstra em sua dissertação.

Consideramos a justificava da Expressão de Viète, elaborada na dissertação de Vendemiatti com potenciais didáticos para serem explorados no Ensino Médio com turmas que já possuem uma boa base do conteúdo de Trigonometria e já conhecem o conteúdo de Polígonos Regulares, ou seja, com turmas do 2º ano do Ensino Médio, quando eles estiverem aprendendo, em Geometria Plana, o conteúdo de Circunferência e Círculo. Geralmente, além de ver uma forma do cálculo de π, podemos explorar seu contexto histórico, trabalhar com radicais e explorar diversas propriedades de um tópico de trigonometria, para o qual, geralmente, os alunos não enxergam utilidades, que o exemplo do arco metade, do arco duplo e da adição de arcos. Mais um tópico da dissertação que pode ser abordado no Ensino Médio.

Existem outros tópicos no primeiro capítulo da dissertação de Vendemiatti, mas que abordam conteúdos do Ensino superior, por isso não iremos citá-los.

No segundo e terceiro capítulos, as demonstrações do que foram abordadas por Vendemiatti em sua dissertação tratavam de abordagens do Ensino Superior, divergindo do objetivo de nossa tese que investiga potenciais didáticos para o Ensino Médio.

No quarto capítulo desta dissertação, foram estudados os polinômios simétricos e de três resultados que serão empregados na transcendência do número π, e o primeiro deles será uma revisão sobre as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial, conteúdo abordado no Ensino Médio. O autor se fundamentou teoricamente na Teoria dos Números Transcendentes e como Lioville e Cantor provavam a existência de tais números.

Neste capítulo da dissertação, inicialmente, pensamos que iria ter novos potenciais didáticos para o Ensino Médio, pois, em seu primeiro tópico, foi abordado o conteúdo de Equações Polinomiais, mais precisamente, as relações entre coeficientes e raízes de um polinômio, porém, ao investigar, verificamos que todas as demonstrações feitas constam em qualquer livro didático do Ensino Médio, por isso, optamos por não comentar, pois se trata de conteúdos já abordados sem novidades para os estudantes. O outro tópico trata sobre Polinômios simétricos e traz uma abordagem mais voltada para o Ensino Superior.

Para finalizar, o quinto capítulo apresenta a demonstração da transcendência do número π, de forma bem detalhada, justificando todas as etapas da demonstração. Ao resolver este problema, Vendemiatti (2009) afirma que não é possível efetuar a construção de um quadrado com área igual à de um círculo usando régua e compasso, mesmo a região quadrada existindo. Neste tópico, não encontramos potências para o Ensino Médio.

Dissertação 2: O Ensino de Matemática na Academia Real Militar do Rio de Janeiro, de 1811 a 1874

O objeto de pesquisa desta dissertação foi o currículo de Matemática da Academia Real Militar do Rio de Janeiro entre 1811 e 1874. O autor partiu da seguinte problemática: quais foram as principais fontes de inspiração para elaboração desse currículo? Ele precisou entender o contexto em que estava a matemática militar. E será que ela vinha de encontro às necessidades desse ensino? Ou fazia parte apenas de uma cultura ornamental?

Vejamos o quadro 44 em seguida:

Quadro 44: Descritores de análise da Dissertação 2 – Ensino Médio

Título: O Ensino de Matemática na Academia Real Militar do Rio de Janeiro, de 1811 a 1874
Autor (a): Ben Hur Mormello
Orientador (a): Rogério Monteiro Siqueira
Ano de defesa: 2010
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Geometria Plana (Conhecimentos Geométricos)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Espacial
Resumo Neste trabalho, a proposta é analisar como foi concebido o currículo de matemática da Academia Real Militar do Rio de Janeiro e suas modificações posteriores, estabelecidas pelas reformas dos seus estatutos, desde 1811, quando tem início o primeiro ano de funcionamento da Academia, a 1874, quando o ensino de engenharia passa a ser responsabilidade de um ministério civil, com a transformação da Escola Central em Escola Politécnica. Partindo de uma breve análise das suas principais influências, em especial, a Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, discutiremos em detalhe os estatutos da Academia Real Militar, particularmente o seu currículo de Matemática, procurando entender até que ponto as suas disposições eram realmente inovadoras (em relação às academias militares estabelecidas pelo governo de Portugal), e como se aclimataram as duas correntes curriculares mais importantes em sua história: a dos “profissionalistas”, para os quais o foco da formação deveria ser militar, e a dos “culturalistas”, que defendiam uma sólida base de conhecimentos científicos.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Mormello (2010).

A proposta desta dissertação foi analisar como se concebeu o currículo de matemática da Academia Real Militar do Rio de Janeiro e suas modificações posteriores, estabelecidas pelas reformas dos seus estatutos, desde 1811, quando tem início o primeiro ano de funcionamento da Academia, 1874, e o ensino de engenharia passa a ser responsabilidade de um ministério civil, com a transformação da Escola Central em Escola Politécnica. Especificamente, os objetivos deste trabalho foram, em primeiro lugar, entender qual foi o papel das “matemáticas” nas escolas militares de Portugal e do Brasil (no século XVIII) e na academia Real Militar. Em seguida, entender as origens do currículo científico e, em última análise, a orientação dada por D. Rodrigo de Sousa Coutinho[8] à Academia Real Militar. Por último, como foi situado o Ensino das matemáticas, à medida que as modificações impostas

[8] D. Rodrigo de Sousa Coutinho era uma das vozes que defendiam a colônia brasileira como a mais importante do Reino.

pelas reformas curriculares iam sendo aplicadas à academia, bem como levantar as dificuldades encontradas pela escola em cumprir os estatutos.

Quanto ao último objetivo, apresentaram-se as mudanças de currículo da Academia Real Militar, decorrentes das várias reformas estatutárias, desde a primeira delas ocorrida em 1832, até o Advento da Escola Politécnica, em 1874.

A metodologia utilizada para alcançar esses objetivos foi uma sequência de estudos documentais. Primeiramente, para entender qual foi o papel das "matemáticas" nas escolas militares, antes do estabelecimento da Academia Real Militar, foram apresentados alguns estabelecimentos de ensino civis e militares de Portugal e Brasil, criados no século XVIII. Em seguida, apresentadas também algumas obras utilizadas para o ensino, nesses estabelecimentos. E, por fim, foram estabelecidas as ligações entre a Academia Real Militar, por meio de sua apresentação, e os estabelecimentos de ensino de Portugal, apontados como fontes de inspiração para a criação da Academia.

Na pesquisa documental, foram utilizadas fontes primárias (os estatutos das escolas civis e militares portuguesas e das escolas militares do Brasil, com exceção da Academia Real de Artilharia, Fortificação e Desenho, encontrados na obra de Pirassinunga), os livros de Alpoim e Bélidor e Serrão Pimentel. As fontes secundárias (os livros de Telles, Carvalho, Freire, Tavares, Mota, Pardal, Pirassinunga, o livro de Johvah Motta, "Formação de Oficial do Exército", por ser uma referência para quantos queiram estudar a História da Academia Real Militar e seus desdobramentos ao longo de quase dois séculos. Nesta dissertação, aparecem conteúdos de Geometria Plana nas obras utilizadas no Ensino Militar no século XVIII, apresentando-se, resumidamente, quatro obras: O Método Lusitânico de Desenhar as Fortificações, Exame de Artilheiros, Exame de Bombeiros e O Novo Curso de Matemática, que podem ser abordados no Ensino Médio.

Como já foi dito no quadro 38, o conteúdo central abordado neste trabalho foi geometria plana. Mormello, em sua dissertação de mestrado, apresentou quatro obras utilizadas no Ensino Militar no Século XVIII: 1) O Método Lusitânico de Desenhar as Fortificações; 2) Exames de Artilheiros; 3) Exames de Bombeiros; 4) O Novo Curso de Matemática. Ele procurava entender como o Ensino militar abordava o Ensino da Matemática, antes da Academia Real Militar do Rio de Janeiro. O seu objetivo em analisar estas obras foi saber o papel das *matemáticas* no Ensino Militar na época, ou seja, verificar se os conteúdos matemáticos ensinados nos cursos militares estavam relacionados com as necessidades dos conteúdos destinados a formar os profissionais militares. Iremos analisar os potenciais didáticos para o Ensino Médio, presente nestas obras.

Na primeira obra, o Método Lusitânico de Desenhar as Fortificações, escrita por Serrão Pimentel, foi abordada uma prática para que qualquer soldado conseguisse desenhar todo tipo de fortificações, usando proporções, sem a necessidade do uso de geometria nem aritmética, apenas multiplicar e dividir.

Neste livro, Serrão Pimentel aborda o conteúdo de Polígonos Regulares, explorando as fortificações. Ele inicia mostrando como achar os ângulos internos dos polígonos sem saber da fórmula, seguindo um determinado procedimento. Vejamos o exemplo:

> Seja o pentágono ABGHI (figura de cinco lados regular) cujo valor de ângulos queremos conhecer. Deitem-se fora dois por regra geral, restam 3. Estes se multipliquem por 180 graus; resultam 540, os quais repartidos por todo o número dos lados, ou ângulos da figura que são 5, saem a cada um 108 graus, e de tantos diremos ser cada um dos ângulos da circunferência desta figura (MORMELLO, 2010, p. 41).

Podemos utilizar exemplo desse tipo em sala de aula, antes de demonstrar as fórmulas de soma de ângulos internos de um polígono regular e valores de cada ângulo interno.

Outro exemplo trazido na dissertação é uma forma fácil de desenhar qualquer fortificação e, mediante esse estudo, definir diversos conceitos de geometria plana: ângulo reto, valores de ângulos, polígonos regulares, descrição de qualquer polígono regular até 20 lados e técnicas de proporcionalidades, ou seja, é usado um instrumento bastante conhecido pelos soldados, “as fortificações”, para ensinar geometria plana. Nós consideramos que isso também pode ser feito hoje com os alunos, pois, no Brasil, dispomos de vários fortes, os alunos têm conhecimento deles, sendo possível elaborar uma aula de campo sobre polígonos.

Vamos mostrar um exemplo de como Serrão Pimentel aborda o que ele denomina de parte operativa, mostrada por Mormello:

> Divida-se o lado KO do polígono interior em 6 partes iguais: tome-se uma delas para a demigolla[9] KA, ou OB. Dos pontos A, B se levantem as perpendiculares AC, BD cada uma igual a 3/20 do mesmo lado KO. Tome-se por flanco secundário a porção BF igual à vigésima parte da cortina[10] AB. Do ponto F por C se tire a linha rasante indefinita FCH de longura estimada; que se pode promover quando aquela não baste. Obre-se semelhantemente da parte do lado KS, tirando a rasante do ponto T da cortina por R; que se virá a cortar com a primeira rasante FCH no ponto H, formando as duas faces CH, RH, e ângulo flanqueado RHC. Isto se executa na campanha bem facilmente por meio de piques arvorados nos pontos FC, TR, e borneando por eles para se riscar direito. (MORMELLO, 2010, p. 41).

[9] É a linha que com outra da mesma sorte faz o ângulo do polígono, ou praça que se quer fortificar.
[10] É a parte do reparo com sua muralha de pedra, e cal, ou sem ela que fica entre os flancos de dois baluartes.

Vejamos a figura a seguir:

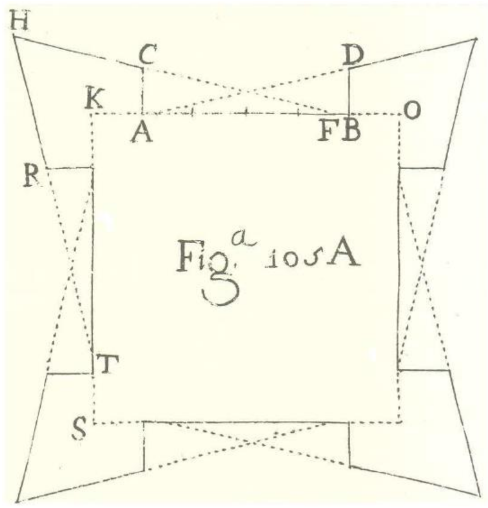


Figura 6: Figura 105ª do livro de Serrão Pimentel
(MORMELLO, 2010, p. 42)

Nesta passagem, conseguimos verificar que não é preciso existir conhecimento de fórmulas geométricas, pois existem sequências de procedimentos para se chegar aos resultados, no qual cada um apenas irá seguir o modelo.

Muitas vezes, professores de História fazem atividades extraclasses com os alunos para conhecer alguns fortes em diversas regiões do país. Claro que cada escola conhecerá os fortes presentes em sua cidade ou nas proximidades. Caso não exista nenhum forte na cidade, o professor pode sugerir uma pesquisa na internet sobre os fortes brasileiros em geral. Em seguida, solicitará que sejam explorados os aspectos já mencionados anteriormente.

O professor de Matemática pode aproveitar esse momento para desenvolver com seus alunos atividades de polígonos regulares, em que é possível abordar a seguinte sequência: 1) Desenho do Forte, usando as técnicas de Serrão Pimentel; 2) Discussão sobre o conceito de polígonos regulares, desde seus elementos, até as fórmulas de ângulos e soma de ângulos, internos e externos e explorar também o conceito de diagonais. Assim, o professor atenderá à proposta de Mendes (2009, p. 13), quando sugere que “o ensino da matemática por meio de atividades pressupõe uma interação mútua entre o professor e os estudantes e entre os próprios estudantes durante o processo gerativo da matemática escolar”.

A seguir, temos o desenho do Forte na Beira do Vale do Guaporé em Rondônia, usado para as atividades de Serrão Pimentel.

Figura 7: Forte na Beira do Vale do Guaporé, em Rondônia
(MORMELLO, 2010, p. 42)

Logo após, Mormello apresenta o que Serrão Pimentel chama de a Trigonometria Prática Retilínea, em que foram apresentadas as principais propriedades dos triângulos retângulos. Mas tudo que já é apresentado em nossos livros didáticos. Posteriormente, apresentou resoluções de triângulos por meio de problemas – outro assunto que pode ser abordado no Ensino Médio, mas esses problemas são triviais, e consideramos que os potenciais didáticos apresentados nesses exemplos não valem ser abordados. Vejamos o exemplo:

> No triângulo retângulo ABC busca-se a área. Dados os lados, a saber AB = 1124 e BC = 606. Multiplique-se um lado por outro, e sairá no produto 681144 cuja metade 340572 será a área buscada. Ou também se multiplicar um lado por metade do outro sairá no produto a mesma área buscada 340572. (MORMELLO, 2010, p. 44).

Nesse exemplo, Mormello faz o cálculo sem uso de fórmulas, dando um procedimento que chega ao resultado. Diferente da situação dos polígonos regulares, compreendo que, com o triângulo retângulo, essa abordagem utilizada por Serrão Pimentel e mostrada por Mormello em sua dissertação não influenciará no aprendizado dos alunos do Ensino Médio.

Na sua dissertação, Mormello também aborda um pouco de geometria espacial, trazendo o que Serrão Pimentel denomina de *"Dimensão da Solidade"* ou *"Corpórea Quantidade"*, que se refere ao volume de alguns sólidos como cubo, paralelepípedos, outros prismas, cilindros, cones, pirâmides e tronco de pirâmide ou de cone. Mas ele usa a mesma metodologia do triângulo retângulo, e achamos que não vai interessar ao leitor.

Mormello (2010) conclui que, com a utilização do livro de Serrão Pimentel, pode-se afirmar que a matemática por ele usada tem por finalidade tratar das aplicações de interesse dos engenheiros, ou seja, subsidiam o ensino dos assuntos relacionados à arquitetura militar. Isto me faz lembrar a importância desse trabalho para tratar de matemática nas turmas dos Cursos Técnicos integrados ao Ensino Médio de Edificações dos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia de todo o país, pois, com essa afirmação, sugiro que este conteúdo do livro de Serrão Pimentel seja uma aplicação interessante com esses alunos. Segundo Mendes (2009), é importante a discussão dos modos de uso da história como um recurso que favoreça a construção das noções matemáticas pelos alunos durante suas atividades na Escola. E, neste caso, pode ser uma aplicação interessante para os alunos desses cursos técnicos.

Ao ter trabalhado com turmas de Edificações tanto no IFPE, no campus Pesqueira, como no IFPB campus João Pessoa, em que os alunos cobram aplicações para sua realidade, consideramos que arquitetura militar seja uma boa e curiosa aplicação da geometria para essas turmas, pois se trata de práticas de desenhos das Fortificações, que, no caso de cursos técnicos em Edificações, são aplicações que podem ser repassadas para os professores de Desenho, e nisso, ao trabalharmos em conjunto, podemos elaborar uma prática interdisciplinar bastante produtiva.

Em seguida, Mormello apresenta as obras Exame de Artilheiros (1744) e Exames de Bombeiros (1748). Segundo o autor, essas obras foram escritas com o objetivo de facilitar os estudos dos novos soldados do batalhão e foram utilizadas nas aulas do Terço de Artilharia, no Rio de Janeiro, tendo sido o conteúdo matemático desenvolvido por meio de perguntas e respostas.

A primeira obra, o Exame de Artilheiros (1744), estrutura-se em três partes (Aritmética, Geometria e Artilharia), chamada por Alpoim de tratados, e possui 95 perguntas sobre Aritmética. Nesta parte em que Alpoim aborda aritmética, 2/3 das páginas da obra referem-se às operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão), e apenas o restante com frações e regra de três. Segundo Mormello (2010), isso comprova que os alunos que ingressavam na aula não tinham conhecimentos das operações básicas de matemática, o que ainda hoje acontece com a maioria dos alunos que ingressam no Ensino Médio, ratificando a importância de aplicações deste tipo para os alunos. Em sua obra, Alpoim seguiu três passos para ensinar: definição, explicação e exemplos. Nada diferente do que é feito hoje em sala de aula pela maioria dos professores, ou seja, caso seja de interesse esta aplicação, sabemos que a metodologia utilizada não será novidade para alunos e professores. Os exemplos apresentados na dissertação são insuficientes para considerá-los com potenciais didáticos para o Ensino Médio, pois o foco de Mormello foi a discussão da obra.

Provavelmente, se o professor tivesse o acesso ao estudo original de Alpoim, poderia tentar explorar alguma coisa para levar à sala de aula.

Agora vejamos a parte da obra que apresenta Geometria. Segundo Mormello (2010), Alpoim divide em especulativa e prática. No que tange ao termo especulativa, refere-se ao que apresenta propriedades de tudo o que é comensurável e prática, é o que dá as regras para as operações que saiam certas e iriam tratar. Alpoim mostrava apenas o que ele considerava importante para os Artilheiros, e o que era fundamental para a Artilharia era saber graduar uma escala, construir um nível e um petipé [11].

Segundo Mormello (2010), a Geometria Prática tinha sua importância para formar o profissional da artilharia e Alpoim a apresenta, por meio de setenta e cinco perguntas e respostas, dispostas em vinte e cinco páginas, em que cinco perguntas tratavam de mostrar como graduar uma esquadra (instrumento que servia para posicionar uma peça de artilharia num ângulo desejado em relação ao horizonte). Com isso, instrumentos, como compasso, eram ensinados para os alunos. E também era preciso ter uma boa noção de triângulos.

Também escrita por Alpoim, a obra Exame de Bombeiros, basicamente, é uma continuação do Exame de Artilheiros e aborda geometria e trigonometria, seguindo o autor a mesma ideia de perguntas e respostas, porém apresenta referências bibliográficas. Neste livro, aborda noções fundamentais de Geometria plana, como posições relativas entre duas retas, círculo, circunferência, triângulos, triângulos semelhantes, proporcionalidade, parábola, volumes. Estes conteúdos não estão abordados na dissertação, e sim na obra, portanto, consideramos como potencial didático para o Ensino Médio, o uso e análise de obra de Alpoim por parte dos docentes.

Então, com essa pequena abordagem sobre o trabalho de Mormello (2010), observamos que temos como explorar didaticamente conteúdos de Geometria Plana, no Ensino Médio, por meio dos exemplos mostrados em seu trabalho de como essa geometria foi abordada no século XVIII no Ensino Militar, com as atividades de construção de polígonos regulares, relacionadas as fortificações, aproveitando para desenvolver todo o conteúdo matemático de Polígonos com os alunos. As outras considerações feitas por Mormello em sua dissertação só terão potencial didático se os docentes fizerem uso das obras comentadas, porém essas obras não constam na dissertação. Consideramos que, para fazer uma análise do que realmente pode ser utilizado em sala de aula, com exceção da atividade com polígonos, é preciso ter acesso às obras citadas.

[11]Figura para ser utilizada na graduação do calibre das peças de artilharia.

Dissertação 3: Análise do Livro I do Geometria de Descartes: Apontando Caminhos para o Ensino da Geometria Analítica Segundo uma abordagem Histórica

Quadro 45: Descritores de análise da Dissertação 3 – Ensino Médio

Título: Análise do Livro I do Geometria de Descartes: Apontando Caminhos para o Ensino da Geometria Analítica Segundo uma abordagem Histórica
Autor (a): Carmen Rosane Pinto Franzon
Orientador (a): Arlete de Jesus Brito
Ano de defesa: 2004
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Geometria Analítica (Conhecimento Algébrico/Geométrico)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Equações Algébricas e Geometria Plana
Resumo: O objetivo central desse trabalho é de apresentar uma análise do livro I do *Geometria* de Descartes fazendo uma reflexão sobre o ensino de Geometria Analítica atual indicando algumas questões pedagógicas, a partir das quais podem ser criadas situações problematizadoras a serem discutidas em sala de aula a partir de tal texto. Para atingir tais objetivos primeiramente fizemos uma revisão bibliográfica sobre a importância e potencialidades pedagógicas da história da matemática. Em seguida explicitamos nossas opções metodológicas tanto em relação às questões de cunho pedagógico quanto às questões de histórico que são abordadas no texto. Depois fizemos uma retrospectiva histórica da matemática dos gregos até o século XVII. Posteriormente fizemos um estudo da vida e da trajetória dos estudos de René Descartes tentando compreender as razões que o levaram a dedicar-se à matemática e à construção de seu método. Daí, analisamos o livro I da obra *Geometria* de Descartes, pois nela estão os princípios da Geometria Analítica. Discutimos alguns pontos importantes de seu método, analisamos a criação e o desenvolvimento de sua geometria estabelecendo um paralelo com os princípios da Geometria Analítica, indicando questões pedagógicas que podem ser desenvolvidas a partir de seu texto. Finalmente, tendo por base os estudos desenvolvidos elaboramos a conclusão.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Franzon (2004).

Este trabalho, escrito por Carmen Rosane Pinto Franzon, foi uma dissertação de mestrado defendida em 2004 na UFRN, orientada pela professora Arlete de Jesus Brito, cujo objetivo foi apresentar uma análise do livro I do *Geometria* de Descartes, fazendo uma reflexão sobre o ensino de Geometria Analítica atual, indicando algumas questões pedagógicas, a partir das quais podem ser criadas situações problematizadoras a serem discutidas em sala de aula. Franzon partiu da seguinte problemática: quais as discussões pedagógicas acerca de conceitos envolvidos na Geometria Analítica que podem ser levantadas a partir do livro I da obra *Geometria* de Descartes?

Para atingir o objetivo, primeiramente, realizou-se uma revisão bibliográfica sobre a importância e as potencialidades pedagógicas da história da matemática. Em seguida, explicitadas as opções metodológicas tanto em relação às questões de cunho pedagógico quanto em relação às questões históricas abordadas no texto. Depois foi feita uma retrospectiva histórica da matemática dos gregos até o século XVII. Posteriormente, realizou-se um estudo da vida e da trajetória dos estudos de René Descartes, tentando compreender as razões que o levaram a dedicar-se à matemática e à construção de seu método. Daí foi analisado o livro I da obra *Geometria* de Descartes, pois nela estão os princípios da Geometria Analítica. Discutem-se alguns pontos importantes de seu método, analisando a criação e o desenvolvimento de sua geometria, estabelecendo um paralelo com os princípios da Geometria Analítica, indicando questões pedagógicas que podem ser desenvolvidas a partir de seu texto. A dissertação teve como objetivo específico a disponibilização de material que sirva de suporte na preparação de atividades didáticas, envolvendo conteúdos de Geometria Analítica, segundo uma abordagem histórica, que poderá ser consultado por professores que desejem trabalhar seguindo essa perspectiva.

Os conteúdos de Ensino Médio trabalhados foram geometria analítica, geometria plana e equações algébricas. A autora se fundamentou no artigo *Reflexões acerca da educação matemática contemporânea*, de Antônio Miguel, levantando algumas concepções pedagógicas predominantes entre os professores, no que se refere ao ensino da matemática e usou o método da pesquisa documental.

Neste trabalho, a autora já aponta quais discussões pedagógicas podem ser feitas em sala de aula referentes a conceitos de Geometria Analítica, após a análise do livro I da obra Geometria de Descartes, assim como podem ser abordados outros conceitos matemáticos, principalmente resoluções de equações algébricas. Neste trabalho, separamos somente o que achamos próprio para discussão no ensino médio e o que consideramos viável para fazer discussões em turmas de formação de professores.

Foram apresentados pela autora oito tópicos que ela considera que podem ser discutidos em sala de aula. Porém, em nossa análise, consideramos que seis deles podem ser discutidos apenas em salas de aula de Licenciatura em Matemática, na formação de professores, não pelo seu grau de complexidade, mas pelos objetivos de cada discussão. Esses tópicos mencionados são: o papel das convenções quanto à simbologia matemática; ao aspecto de generalidade na matemática obtido ao substituir números específicos por letras; ao significado e vantagem de usar variáveis para representar números específicos associando esta ideia às fórmulas da Geometria Analítica; à importância da compreensão do significado da linguagem matemática para sua manipulação coerente; à importância e dificuldade na transformação de um problema, da linguagem materna para a linguagem algébrica; à importância de trabalhar com resolução de problemas e necessidade de trabalhar não apenas com problemas determinados, mas também com problemas indeterminados.

Na discussão dos seis tópicos citados, visualizamos como objetivo ampliar o campo conceitual dos futuros professores, mostrando que não podemos dar ênfase apenas ao sentido algébrico dos problemas, também há que se trabalhar com os sentidos geométricos, pois, em nossa experiência, verificamos que muitos professores, mesmo ensinando o conteúdo de geometria, muitas vezes, focam apenas na resolução algébrica. Também podemos focar no papel das convenções das simbologias matemáticas, abordando a importância de deixar clara a simbologia usada no problema, por mais que seja natural para o professor, pois nem sempre isso está claro para os alunos, principalmente aqueles que estão iniciando no estudo de álgebra. Segundo Mendes e Fossa (1996), os professores têm bastante interesse em se apropriar do conhecimento histórico da matemática, a fim de compreender melhor seu desenvolvimento epistemológico, podendo, assim, usar tais informações como um recurso pedagógico.

Essas discussões também mostram a importância da utilização de variáveis para representações de números, discutindo o significado das fórmulas, evitando que os alunos as usem mecanicamente, sem nenhum conhecimento do que estão fazendo, mas focando na resposta final do problema, podendo usar os textos de Descartes também para mostrar as dificuldades que se tinha de interpretar um problema e transformá-lo na linguagem algébrica e, com isso, discutir as diversas formas de resolução dos alunos.

Em relação aos dois tópicos com potenciais didáticos para serem utilizados diretamente em sala de aula, separamos: a dualidade do significado de expressões do tipo a^2 e a^3, ou seja, seu significado geométrico e seu significado algébrico, e a abordagem histórica da resolução de equações de segundo grau. Nestes dois tópicos, Franzon (2004) mostra, diretamente do livro I de Geometria de Descartes, problemas matemáticos, de modo que possamos explorar alguns conceitos matemáticos importantes. Vejamos o primeiro deles:

1) Dualidade do significado de expressões do tipo a^2 e a^3, ou seja, seu significado geométrico e seu significado algébrico.

A partir de um problema geométrico de multiplicações de dois segmentos, podemos discutir com os alunos os significados geométricos e algébricos de expressões do tipo a^2 e b^3

e, com isso, explicar como foi introduzido por Descartes que o produto de dois segmentos é outro segmento, e não uma grandeza plana como se pensava desde os gregos, assim como se pensava que o produto de três segmentos era necessariamente um volume, deixando de lado a limitação de só puder multiplicar três segmentos. Segundo Franzon (2004), hoje se dá maior ênfase ao sentido algébrico de expressões, mas elas não deixam de ter significado geométrico, ou seja, é possível abordar em sala de aula que a matemática não se desenvolve apenas por acréscimo de novos conteúdos, mas também por modificação nos conceitos existentes. Neste sentido, Mendes (2009) assegura que:

> Pressupõe-se com isso, uma reconstrução dos aspectos matemáticos a serem abordados na sala de aula, visto que as informações históricas raramente são utilizadas como elemento gerador de aprendizagem da matemática, quer seja na ação pedagógica do professor, quer seja nos livros didáticos adotados por ele. Apenas alguns livros paradidáticos contêm certas atividades que se aproximam do que proponho para o ensino da Matemática (MENDES, 2009, p. 7).

Baseado nessas assertivas de Mendes, verificamos. na dissertação de Franzon, que foi apresentado o problema resolvido por Descartes e que o mesmo pode ser usado em atividades na sala de aula para abordar conceitos de semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras. O problema referiu-se à explicação de como fazer a multiplicação entre dois segmentos. *“Multiplicar BD por BC devia-se tomar AB como unidade, depois unir os pontos A e C e então traçar DE paralelo a CA. Daí, afirmou que BE seria o produto de BC por BD”*. Como na figura a seguir:

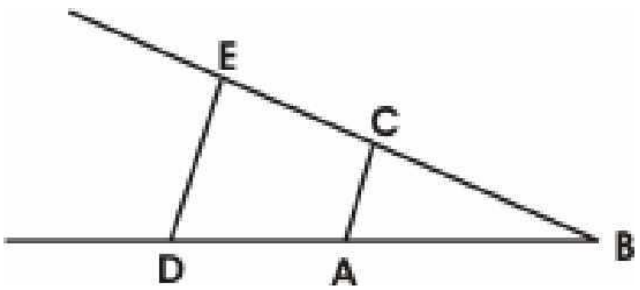


Figura 8: Multiplicação entre dois segmentos (FRANZON, 2004, p.110)

A solução do problema foi complementada por Franzon (2004) da seguinte forma:

> Os triângulos BAC e BDE são semelhantes
> Então, em notação atual, tem-se a proporção $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$
> Daí $BD \cdot BC = BA \cdot BE$.
> E como BA é a unidade, ou seja, $BA = 1$, temos $BD \cdot BC = BE$, ou seja, BE é o produto entre BD e BC. (FRANZON, 2004, p. 110).

Nesta solução, Descartes mostrou que o produto entre dois segmentos é outro segmento. Com ela, podemos fazer uma discussão da dualidade dos termos a² e a³, tanto na forma algébrica como geométrica. E mostrar para os alunos um pouco da história por meio da resolução de um problema e como esse conceito surgiu.

Apesar de simples, esta resolução é bastante importante, pois mostra o surgimento em uma determinada época de um novo conceito, sendo uma relevante informação para ser utilizada em sala de aula ao abordar o conceito de semelhança de triângulos. Segundo uma pesquisa realizada por Fossa (1996) e Mendes (2006), existe uma falta de informações entre os professores em relação ao desenvolvimento histórico da matemática que ensinam e da necessidade deles de adaptar as informações sobre o desenvolvimento histórico-epistemológico da Matemática como forma de superação das suas dificuldades conceituais, melhorando, assim, as suas atividades didáticas em sala de aula.

2) Abordagem histórica da resolução de equações de segundo grau

No estudo sobre equações do segundo grau de Descartes, ele considera apenas as soluções positivas e, com isso, resolveu as seguintes equações: $z^2 = az + b^2$, $y^2 = -ay + b^2$ e $x^2 = ax - b^2$, segundo Franzon (2004), Descartes propôs a solução das três equações, não de forma algébrica, como os babilônios[12], mas geometricamente, como os gregos, mas não utilizou o método das áreas, buscando sempre resultados gerais, característica de sua geometria. Ao resolver essas equações quadráticas, Descartes considerava apenas as raízes positivas, por isso não resolveu a equação do tipo $z^2 = -az - b^2$. Isso só mostra como é normal a dificuldade de nossos alunos com os números negativos. Radford (2011) comentava sobre a dificuldade que matemáticos ocidentais medievais tiveram ao se deparar com números negativos. Na resolução da primeira equação $z^2 = az + b^2$, utilizou a seguinte figura:

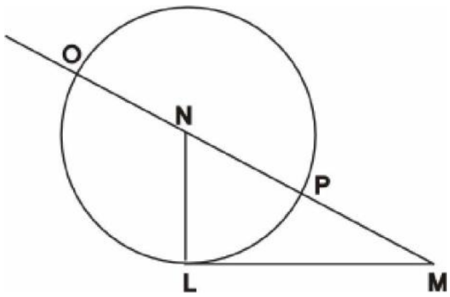


Figura 9: Resolução da equação do tipo $z^2 = az + b^2$ (FRAZON, 2004, p. 123).

[12] Quem tiver o interesse em uma aplicação bem interessante da equação do segundo grau, usando o método geométrico babilônico, sugiro o livro RADFORD, Luiz. Cognição Matemática: História, Antropologia e Epistemologia. São Paulo: Editora Livraria da Física: 2011. Em que Radford dedica seu quarto capítulo a uma sequência de ensino bastante interessante sobre equação do segundo grau.

Vejamos a solução trazida por Frazon (2004):

> Primeiramente instruiu que fosse construído o triângulo retângulo NLM com o lado LM igual a b, a raiz quadrada da quantidade conhecida b^2, o outro lado LN igual a $\frac{1}{2}a$, metade da outra quantidade conhecida que foi multiplicada por z, que supõe ser a linha desconhecida. Indicou então que prolongasse a hipotenusa MN até O tal que NO ficasse igual a NL. Daí afirmou que a linha inteira OM era a linha requerida z e que ela era expressa por $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. (FRAZON, 2004, p. 123).

Segundo Franzon (2004), ainda foi feito um complemento pelos tradutores do livro em nota de rodapé para poder explicar como $z^2 = az + b^2$, usando a figura a cima. Essa foi toda a explicação dada por Descartes juntamente com o diagrama. Eles usaram o raciocínio do problema anterior:

> $OM \cdot PM = LM^2$. Considerando $OM = z$, como $OP = a$, $PM = z - a$ e $LM = b$, temos $z \cdot (z - a) = b^2$. Daí $z^2 = az + b^2$.
>
> Mas $MN = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Como $OM = z$, e $OM = ON + NM$, Então $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ (FRANZON, 2004, p. 123).

Se compararmos a equação do segundo grau pela fórmula de Bhaskara, vemos que é a mesma coisa, pois:

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, na equação resolvida por Descartes $z^2 = az + b^2$, ou seja, $z^2 - az - b^2 = 0$ temos que a variável x representa o z, $1 = a$, $-a = b$, $-b^2 = c$, fazendo a comparação com a fórmula de Bhaskara, chegamos ao resultado: $z^2 - az - b^2 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$.

Analogamente é feita a resolução da equação $y^2 = -ay + b^2$ e $x^2 = ax - b^2$, porém é usado como $y = PM$ e $x = MQ$. Não vamos desenvolver essas duas resoluções, mas quem tiver o interesse pode pesquisar em Franzon (2004, p.124).

Podemos verificar que os problemas citados podem ser abordados no conteúdo de Função de Quadrática, pois os alunos já terão uma boa base de Equações do Segundo Grau e também conhecimentos de semelhança de triângulos, bem como manipulação algébrica, facilitando o uso dessa aplicação.

No conteúdo de funções quadráticas, podemos utilizar essa demonstração para trabalhar Geometria e Álgebra e podemos fazer a comparação com a fórmula de Bhaskara, mostrando mais uma demonstração da fórmula. Essa retomada do conteúdo de Geometria também se torna importante no desenvolvimento para relembrar e sempre está exercitando os conceitos de geometria, mostrando também aos alunos as dificuldades encontradas pelos matemáticos ao passar do tempo, comentando essa dificuldade de Descartes em resolver equações com resultados negativos.

Segundo Mendes (2009), é possível, portanto, afirmar que alguns modos de usar a história da matemática na sala de aula podem contribuir para o trabalho do professor e, consequentemente a aprendizagem dos alunos. E, com isso, consideramos essas aplicações de Descartes com possíveis potenciais didáticos para serem explorados no Ensino Médio em diversos níveis de ensino, pois apresentam conteúdos de álgebra, geometria e aritmética, sendo uma aplicação bastante propícia para o aprendizado dos alunos.

Dissertação 4: Perspectiva no Olhar – Ciência e Arte do Renascimento

O objeto de pesquisa desta dissertação foram os trabalhos dos pintores e arquitetos do Renascimento italiano. O objetivo foi realizar, a partir das experiências e técnicas desenvolvidas por artistas do Renascimento, atividades de caráter interdisciplinar e transdisciplinar no Ensino Médio e, especificamente, desenvolver inteligências compatíveis com a capacidade cognitiva, não apenas quanto à aquisição de conceitos geométricos, mas quanto à compreensão e representação espacial conquistada pelo olhar. Foi utilizada a metodologia da Engenharia Didática, um processo que se interessa pela concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino.

Essa sequência foi elaborada por meio de uma atividade realizada com 15 alunos da 2ª série do Ensino Médio, com inspiração em trabalhos dos pintores e arquitetos daquela época, a fim de preparar o olhar para a compreensão das técnicas da perspectiva e da geometria projetiva e espacial. Seu problema de pesquisa foi: que meios (técnicas, instrumentos, situações e sequências) favorecem a apropriação do espaço pelo olhar e levam a perceber as relações entre o que é visto, o que é sábio e o que conhecido? Este trabalho apresenta conteúdos de Geometria Espacial para o ensino médio. Vejamos o quadro 46 a seguir:

Quadro 46: Descritores de análise da Dissertação 4 – Ensino Médio

Título: Perspectiva no Olhar – Ciência e Arte do Renascimento
Autor (a): Cristiano Ohton de Amorim Costa
Orientador (a): Vincenzo Bongiovanni
Ano de defesa: 2004
Instituição onde foi defendida: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo abordado: Geometria Espacial (Conhecimentos Geométricos)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Plana
Resumo: Recentes trabalhos acadêmicos vêm abordando o tema da perspectiva e como o espaço tridimensional pode ser representado bidimensionalmente. Este trabalho propõe contribuir no pólo do visto e no pólo do sabido do espaço tridimensional através de técnicas oriundas do Renascimento Italiano. A investigação dá-se sobre a descoberta da perspectiva no Quattrocento, onde cidades italianas propiciaram, graças a um conjunto de fatores, o desenvolvimento de uma técnica da pintura que visava melhor representar o espaço. Inserido dentro deste contexto histórico-social, foi elaborada uma sequência de atividades inspiradas em trabalhos dos pintores e arquitetos daquela época, a fim de preparar o olhar para a compreensão das técnicas da perspectiva e da geometria projetiva e espacial. Pretende-se, assim, levar a uma análise sobre o domínio do uso de técnicas de perspectivas e da geometria projetiva e espacial. Pretende-se, assim, levar uma análise sobre o domínio do uso de técnicas de perspectiva em obras Renascentistas, que, com o aprimoramento do olhar, permitirá a aquisição do espaço pictórico, reconstruído em uma representação por meio de maquetes.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Costa (2004).

O estudo fundamenta-se, basicamente, na construção do conhecimento geométrico espacial (Piaget e Vygotsky), e sua percepção, conceituação e representação (Vergnaud e Duval), mais especificamente os Fundamentos da Psicologia Genética, Fundamentos Socioconstrutivistas, Campos Conceituais e Registros de Representações Semióticas.

Neste trabalho, fica bem claro que há potenciais didáticos para o Ensino Médio, pois o autor já traz em sua dissertação uma sequência didática dividida em cinco blocos. No 1º bloco, chamado de histórico-expositivo, exibem-se, em sala de aula, mediante retroprojetor ou Datashow, imagens de épocas (desde as civilizações, romanas e idade média) e mapas históricos, principalmente do Renascimento, com o objetivo de trabalhar a imagem visual dos alunos.

No 2º bloco, chamado exploratório-vivencial, os alunos fazem um já conhecido percurso de trem, com o objetivo de explorar os potenciais de perspectivas de espaço, educando o olhar tridimensional. No 3º bloco, chamado de ótico-científico, eles irão desenhar, fazendo-se quatro atividades até chegar ao 4º bloco, chamado técnico-representativo, em que eles usaram técnicas de perspectiva. Por fim, no 5º bloco, chamado plástico-espacial, eles fizeram construção de maquetes. Temos uma sequência de ensino bastante rica para desenvolver no aluno uma perspectiva espacial adequada para que tenha um bom desempenho em geometria. Segundo Rêgo (2012), algumas das ações ligadas ao raciocínio espacial compreendem: gerar imagens; analisar imagens para responder às questões sobre elas; transformar e operar sobre imagens e utilizar imagens em processos envolvendo outras operações mentais, ratificando nosso pensamento da importância de se trabalhar a visão espacial do aluno.

Foi um trabalho longo com 15 alunos e durabilidade de 60 horas, 15 encontros de 4 horas. Consideramos uma excelente atividade que pode ser elaborada com os alunos como um trabalho de extensão, pois fica claro que essa atividade visa a melhorar a percepção espacial dos alunos, facilitando o aprendizado tanto de geometria plana, como de geometria espacial e geometria analítica. Sabemos que alunos com uma boa base de conceitos básicos de matemática e uma apurada percepção espacial tende a ter mais facilidade em aprender conceitos de geometria.

Dissertação 5: A Origem do Zero

O objetivo desta dissertação foi investigar as dificuldades que surgiram ao longo da história para que o zero fosse considerado um elemento integrante da matemática. Essa pesquisa foi bibliográfica, tendo sido feito um levantamento histórico sobre as civilizações que introduziram o zero em seus sistemas de numeração, evidenciando as dificuldades encontradas até que chegassem a uma denotação para significado dele.

O problema de pesquisa para a construção dessa dissertação foi: quais foram as dificuldades encontradas pelas civilizações, ao longo da história, até instituírem o zero como elemento integrante da matemática?

No quadro 47 a seguir, trazemos algumas informações sobre a dissertação de Padrão:

Quadro 47: Descritores de análise da Dissertação 5 – Ensino Médio

Título: A Origem do Zero
Autor (a): Darice Lascala Padrão
Orientador (a): Barbosa Luftaif Bianchini
Ano de defesa: 2008
Instituição onde foi defendida: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo abordado: Números Inteiros (Conhecimentos Numéricos)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Não Possui
Resumo: Este trabalho é uma pesquisa bibliográfica que tem como objetivo investigar as dificuldades que surgiram ao longo da história para que o zero fosse considerado um elemento integrante da matemática. Os trabalhos citados abordam, de alguma forma, o zero. São eles: *Sentidos Atribuídos ao Zero por Alunos da 6ª Série*, artigo de Salvador e Nacarato (2003), apresentado na AMPED 2003, *Sentido do Zero de Guimarães,* dissertação de mestrado – PUCSP – 2008; *A História do Zero*, artigo de Pinedo e Sbardelotto – 2004, publicado no boletim eletrônico nº 3 – Júnior do Grupo de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática – CEFET – Paraná unidade Sudoeste – Campus Pato Branco. Neste trabalho mostraremos a importância do conhecimento da História da Matemática para uma melhor compreensão do conceito a ser estudado. O desenvolvimento desta pesquisa se deu por meio de um levantamento histórico sobre as civilizações que introduziram o zero em seu sistema de numeração, evidenciando as dificuldades encontradas, até que chegassem a uma denotação para o “vazio”. A civilização babilônica utilizou um sistema de numeração posicional sexagesimal e atribuiu um símbolo para indicar a ausência de uma ou mais ordens na representação de um número. O povo maia utilizou um sistema de numeração posicional de base vinte, com uma irregularidade no valor relativo à terceira ordem. Este povo representou a ausência de uma ou mais ordens com o símbolo de uma “concha”. O sistema de numeração criado pelos chineses foi baseado em um sistema híbrido, no qual foi atribuído um símbolo para indicar ausência de ordens, que chamaram de *ling*. A civilização hindu desenvolveu um sistema de numeração posicional de base dez e usou um símbolo para representar a falta de uma ordem, associado ao “nada”. Mais tarde esse símbolo tornou-se um número, o zero. Assim foi possível descrever a trajetória da origem do zero nas civilizações citadas anteriormente, conhecendo as dificuldades enfrentadas pelos povos.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Padrão (2008).

Foi a partir do segundo capítulo que se iniciou a pesquisa, partindo de uma revisão bibliográfica, entre as quais mencionaram o trabalho: “Sentidos atribuídos ao zero por alunos da 6ª série”, de autoria de Nacarato e Salvador, apresentado na ANPED, 2003. Este trabalho mostra o surgimento da ideia “nada” como nada e o surgimento de uma representação para esse nada. O “Sentido do zero”, de Guimarães, dissertação de mestrado PUC-SP, 2008, mostra a importância da posição do zero e aborda a construção do sistema de numeração, enquanto a “História do zero” de Pinedo e Sbardelotto, em 2004, aborda desde antes de Cristo com os Babilônios, os Olmecas, os Parmenides, os chineses e os gregos, e depois de Cristo com Ptolomeu, os Maias, os Indianos, focando a importância da descoberta do zero em um sistema posicional, trazendo avanços na matemática.

O terceiro capítulo trata da origem do zero na história, em que Padrão (2008) fornece uma visão geral do conceito de algarismo e do número zero. Nesta parte da pesquisa, há muitos detalhes que podem ser explorados em aulas do conteúdo de conjuntos numéricos, tanto no ensino fundamental como no ensino médio, pois, ao trazer a história do zero, existe uma discussão bastante produtiva do que seja número e algarismo, e consideramos importante que o aluno tenha esse conceito bem formado. Segundo Mendes (2009):

> A busca da reconstrução histórica do conhecimento matemático passa a ter significativas implicações pedagógicas na construção dos conhecimentos escolares cotidiano, escolar e científico dos nossos alunos, bastando para isso utilizarmos tais informações históricas numa perspectiva atual de geração do conhecimento matemático (MENDES, 2009, p. 10).

E, nesse trabalho, podemos utilizar tais informações históricas para definir e explorar alguns conceitos matemáticos, dentre o sistema de numeração, que nem sempre foi o utilizado hoje, que é o sistema de numeração decimal. Aproveitamo-nos dessas informações para ir mostrando outros sistemas de numeração, transformação de uma base para outra. Esses conteúdos, geralmente, quando são apresentados para os alunos no Ensino Médio, não trazem nenhum atrativo, pois que interesse o aluno vai ter em transformar, por exemplo, o número 95 da base 10 para 20? Mas, se mostrarmos a ele que o povo Maia usava essa base 20 para sua representação numérica, contando um pouco de sua história, talvez o aluno se interesse em aprender a técnica.

Na dissertação, foi apresentado um pouco de algumas civilizações, dentre elas: Babilônicas, Maias, Chinesas e Indianos. Para cada apresentação, inicialmente, a autora trazia mapas que mostravam cada região. Vejamos um desses mapas:

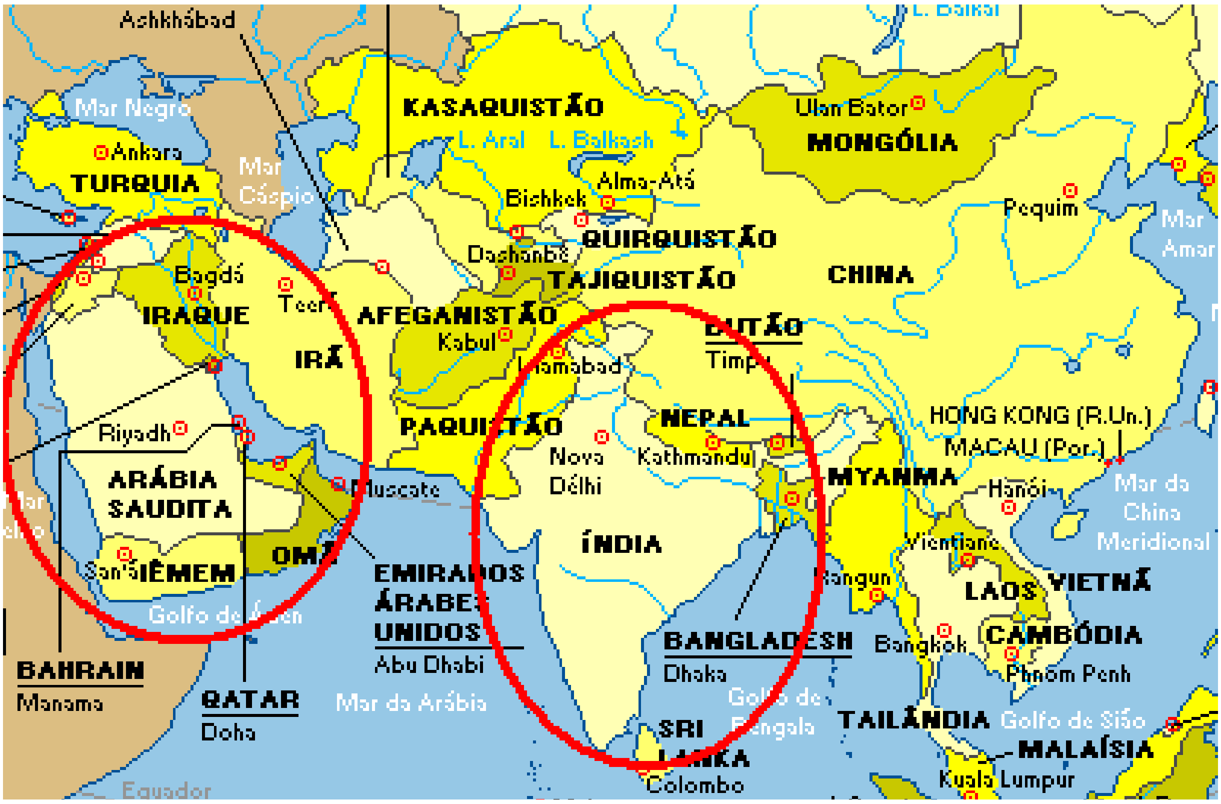


Figura 10: Mapa da região da Arábia Saudita e Índia (PADRÃO, 2008, p. 58)

Achamos muito interessante essa forma de abordagem, pois sabemos que muitos alunos que ingressam no Ensino Médio ainda possuem uma dificuldade sobre localizações de alguns países, por isso esse trabalho interdisciplinar é muito importante para sua formação e atende às demandas atuais para o Ensino de Matemática, que diz respeito à contextualização e à interdisciplinaridade. Em relação a esse último, o estudo da origem do zero permite que integre outras disciplinas, como história e geografia.

Foi um trabalho curto, mas que considero com potenciais didáticos para o Ensino Médio, pois é uma importante ferramenta para se ensinar o sistema de numeração, ao mesmo tempo em que se conhece a história de alguns povos, através da origem do zero, e também se trabalha um pouco de localização de países, mediante os mapas trazidos pela autora em seu trabalho, fazendo com que o professor de matemática também entre em assuntos atuais que envolvam esses países e essas regiões, o que pode despertar os alunos a fazerem pesquisas em casa, enriquecendo seus conhecimentos de atualidade.

Dissertação 6: Lógica Racional, Geométrica e Analítica (1744) de Manoel de Azevedo Fortes (1660-1749): Um estudo das possíveis contribuições para desenvolvimento educacional Luso-Brasileiro

Quadro 48: Descritores de análise da Dissertação 6 – Ensino Médio

Título: Lógica Racional, Geométrica e Analítica (1744) de Manoel de Azevedo Fortes (1660-1749): Um estudo das possíveis contribuições para desenvolvimento educacional Luso-Brasileiro
Autor (a): Dulcyene Maria Ribeiro
Orientador (a): Sérgio Roberto Nobre
Ano de defesa: 2003
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Rio Claro
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo abordado: Geometria Plana (Conhecimentos Geométricos)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Aritmética
Resumo: Este trabalho realiza um estudo histórico-analítico da obra *Lógica Racional, Geométrica e Analítica*, publicada em Lisboa no ano de 1744, de autoria do engenheiro militar Manoel de Azevedo Fortes (1660-1749), com o objetivo de identificar sua importância para o desenvolvimento da matemática em Portugal e no Brasil, bem como quais foram suas possíveis contribuições para o desenvolvimento educacional luso-brasileiro. A obra apresenta vários aspectos originais, sendo considerada a primeira escrita no idioma português, trazendo concepções da então filosofia moderna e apresentando questões da álgebra e, uma das pioneiras a tratar da geometria. Manoel de Azevedo Fortes teve sua formação em outros países europeus, regressando a Portugal com moral elevada, o que lhe valeu uma cadeira de matemática na Academia Militar da Fortificação da corte portuguesa em 1695. O estudo tem como base uma fonte primária que é a própria obra em si, mas outras fontes também são consideradas, a fim de realizar uma contextualização da época na qual o autor viveu, refinando ainda mais seus dados biográficos.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Ribeiro (2003).

O objetivo deste trabalho foi identificar a importância da obra Lógica racional, geométrica e analítica, publicada em Lisboa no ano de 1744, de autoria do engenheiro militar Manoel de Azevedo Fortes (1660-1749) para o desenvolvimento da matemática em Portugal e no Brasil, bem como quais foram suas possíveis contribuições para o desenvolvimento educacional luso-brasileiro.

A pesquisa foi bibliográfica, com base em uma fonte primária, que é a própria obra em si, também seu objeto de estudo, mas outras fontes também são consideradas. No primeiro capítulo, o autor faz sua introdução do trabalho; no segundo capítulo, foram discutidas algumas questões pertinentes à pesquisa em história, relatando-se sobre a possível neutralidade do pesquisador em relação aos fatos que estuda, sobre a concepção de documento, a objetividade da pesquisa e a busca da verdade. Há ainda pequenos trechos, que tratam a respeito da classificação e organização das fontes. No terceiro capítulo, foi apresentada uma introdução histórica sobre o período em que viveu Manoel de Azevedo Fortes, destacando um pouco da história política e econômica de Portugal e do Brasil, a história filosófica geral e, mais particularmente, sobre a história da filosofia em Portugal.

O quarto capítulo foca os dados biográficos de Manoel de Azevedo Fortes sobre sua formação e atuações no campo do saber filosófico, no ensino da matemática e na engenharia militar. E, no quinto capítulo, foi analisada a obra *Lógica Racional, Geométrica e Analítica*. É neste capítulo que o autor traz os conteúdos de Geometria Plana, trazendo problemas diretamente da obra com suas resoluções. Por fim, o autor conclui sua dissertação, não esclarecendo, em nenhum momento, seus problemas de pesquisa, mas traz diversos exemplos de Geometria plana de nosso interesse.

A obra *Lógica Racional Geometria e Analítica* está dividida em três partes, como o próprio título já informa: a primeira é a *Lógica Racional*, com 151 páginas, a segunda, a *Lógica Geométrica*, conta com 270 páginas e a terceira, a *Lógica Analítica*, com 224 páginas. Na primeira parte, chamada *Lógica Racional*, é feita uma discussão teórica sobre lógica, ou seja, uma discussão direcionada para filosofia.

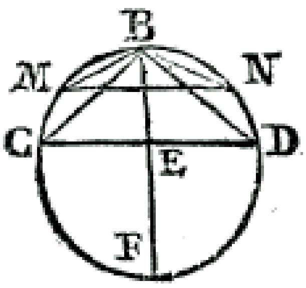
Na segunda parte, *Lógica Geométrica*, Ribeiro (2003) aborda diversos conteúdos de geometria plana, tanto em forma de demonstrações como também resolução de problemas, tudo baseado em Euclides, as definições, as proposições e os teoremas. Quando Ribeiro apresenta a obra de Fortes em sua discussão e explica cada livro e cada capítulo, aparecem diversas contribuições para o Ensino de Geometria no Ensino Médio, primeiramente, alguns conceitos matemáticos importantes para que qualquer aluno comece a estudar geometria: definição, axioma, proposição, postulado, lema, problema e corolário.

Também são feitos comentários sobre os significados dos sinais: adição, subtração, multiplicação e divisão, além das relações de igualdade e desigualdade. Porém, nem todos esses conceitos são abordados na dissertação, a maioria deles é apenas citada por Ribeiro (2003), como abordados no livro de Fortes. Da mesma forma, os conceitos de ponto, linha, superfície, círculo, circunferência, raio, diâmetro, grau, ângulo, perpendicularidade, paralelismo, entre outros. Os termos geométricos que são apresentados como exemplos podem ser aproveitados para ser trabalhados em turmas do Ensino Médio que estão estudando Geometria Plana, de acordo com as ideias de Rego:

> a leitura e compreensão de uma definição dada, bem como de suas consequências em uma teoria geral, compreendem parte de um processo de formação do aluno, lembrando, porém, que o conceito de um elemento matemático é muito amplo que sua definição e que é fundamental que haja coerência interna na teoria. (REGO, 2012, p. 28)

Por isso, o que representa a principal contribuição para ser abordado na Educação Básica são os exemplos que, no decorrer da dissertação, são descritos por Ribeiro (2003). Vamos apontar dois deles a partir de agora e, ao mesmo tempo, indicaremos os conteúdos que podem ser trabalhados em sala de aula. Em seguida, apontaremos quais conteúdos de geometria plana são abordados nos outros exemplos abordados, e fica a critério do leitor, caso tenha interesse em usá-los em sua prática docente, ir à dissertação de Ribeiro e fazer a pesquisa, pois a quantidade é muito grande para apresentá-los todos neste texto. Vejamos:

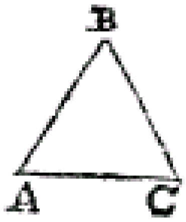
> Dous arcos comprehendidos entre duas linhas paralelas são iguaes.



> Os dous arcos MC, ND comprehendidos entre as duas linhas paralelas MN, e CD são iguaes, por quanto lançando o diametro BF perpendicular sobre CD (num. 45) cahirà tambem perpendicular sobre MN (*num. 68*) e assim BM = BN, BC = BD (*num. 42*) as cordas desses dous arcos iguaes saõ iguaes (*num. 31*) logo o arco BC - BM = BD - BN; mas o arco BC - BM = CM; e da mesma sorte BD - BN = ND: logo CM = MD; e he o que se queria demonstrar. Se em lugar da corda MN, se supozesse huma tangente no ponto B, paralela a CD, ainda se demonstraria mais promptamente, que os arcos BC, e BD saõ iguaes (FORTES, 1744, p .40 apoud RIBEIRO, 2003, p. 83).

Neste exemplo, conseguimos trabalhar bem com as propriedades de arco de circunferência, perpendicularismo, paralelismo e semelhança de triângulos em turmas de segundo ano do Ensino Médio que já possuem uma boa base geometria plana.

Antes de apresentar mais exemplos em sua dissertação, Ribeiro (2003) comenta sobre definições de ângulos e, em seguida, de triângulos, trazendo o seguinte exemplo:

> Em qualquer triangulo quaesquer de seus lados são em soma mayores, que o terceiro. *Euclid. Liv.1. prop. 20.*
>
> 
>
> Os dous lados AB+BC saõ mayores, que o lado AC, o que he evidente, porque entre AC não se póde perceber nenhuma linha mais curta, que a mesma recta (*liv. 1. num.12.*) e he o que se queria demonstrar. (FORTES, 1744, p.80, apoud RIBEIRO, 2003, p.84).

Neste exemplo, ele mostra condição de existência de um triângulo. Não mostraremos todos os exemplos, mas destacaremos cada conteúdo que aparece em todos os exemplos abordados na dissertação de Ribeiro (2003), retirados da Lógica Geométrica de Fortes. São eles: casos de congruência; semelhança de triângulos, razões e proporções de segmentos, quadriláteros, triângulos retângulos, círculos e circunferências, polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência, áreas de figuras planas e alguns problemas envolvendo sólidos geométricos.

Uma boa forma para trabalhar esses problemas do século XVIII em sala de aula é comparar a resolução feita pelos alunos com as apresentadas no livro de Fortes, na dissertação de Ribeiro. Essa discussão é propícia para o aprendizado desses conteúdos de geometria e ajudará para tornar a aula mais provocativa e talvez possa causar o maior interesse ao estudante, por estar desenvolvendo uma prática diferente da tradicional, pois, conforme salienta Mendes (2001, p. 32),

> o professor pode usá-la como fonte de enriquecimento pedagógico e conduzir suas atividades num caminhar crescente, em que o aluno investigue, discuta, sintetize e reconstrua as noções matemáticas anteriores vistas como definitivas sem que o aspecto histórico tivesse sido usado para despertar o interesse de quem aprende (MENDES, 2001, p. 32).

Podemos observar que todos são conteúdos do Ensino do Médio, e isso comprova que podemos explorar a dissertação de Ribeiro (2003) para desenvolver atividades para a sala de aula que possam ajudar no Ensino de Geometria Plana, por meio da história da matemática. De acordo com Radford (2011), uma maneira de ver a história da Matemática é como um arsenal de problemas ordenados cronologicamente para serem “importados” para a sala de aula e fazer com que os alunos por meio de ambas os resolvam. Na parte em que o livro trata da *Lógica Analítica*, observamos que o foco fica por conta da aritmética, mas achamos que os exemplos seriam mais bem explorados em turmas de nível superior, principalmente na formação de professores de matemática em disciplinas de Introdução a álgebra. Por isso, não vamos comentá-los, já que nosso objetivo se resume a conteúdos de Ensino Médio.

Dissertação 7: O Número de Euler e os Fundamentos dos Números Reais

Quadro 49: Descritores de análise da Dissertação 7 – Ensino Médio

Título: O Número de Euler e os Fundamentos dos Números Reais
Autor (a): Evilásio José de Arruda
Orientador (a): Michael Friederich Otte
Ano de defesa: 2007
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Mato Grosso – UFMT
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo Principal Focalizado: Número Irracional (Conhecimentos Numéricos)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Plana (Ensino Superior), Juros Compostos e Função Exponencial e Logaritmos.
Resumo: Reflexões sobre o conceito de número estão presentes na Educação Matemática que nos direciona a uma questão essencial do ensino da Matemática, que é a questão do como ensinar ideias, porque para aprender alguma coisa temos que saber que coisa e essa. Os conceitos matemáticos são instrumentos complicados, por isso, nós não podemos usá-los sem saber nada sobre a sua natureza em geral. Este “conhecimento sobre conhecimento” e fornecido por meio da pesquisa histórica e epistemológica. O presente texto trata dos números irracionais e analisa a problemática da construção desse conceito. O número de Euler **e** que é um exemplo importante de número irracional e tratado superficialmente na escola, quando comparado com o π, por exemplo. Neste trabalho investigamos várias definições e aplicações do número e, bem como analisamos sua natureza no contexto da teoria dos números reais para o qual nos apresentamos vários fundamentos. Normalmente, na escola assim como na universidade, se fala dos números irracionais como números não racionais e na realidade não há outra possibilidade no contexto do mundo discreto da Matemática. As considerações geométricas, em contraste com o mundo discreto, oferecem a possibilidade de indicar algumas caracterizações positivas dos números irracionais. Finalmente observando que o número de Euler **e** é computável, embora seja irracional, nós usamos este fato para considerado sob o aspecto da teoria computacional. A partir do ponto de vista prático e imediato nem todas as definições do número e são equivalentes. Isto nos dá oportunidade para indicar a relevância da noção de complementaridade no que diz respeito aos conceitos matemáticos, levando em conta seus lados operativos e descritivos e esta noção possibilita o enfrentamento dos métodos de ensino.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Arruda (2007).

O foco temático desta pesquisa foi a discursão dos aspectos históricos e epistemológicos do processo de construção do conceito desse número ***e***, e da função que tenha esse número como base. Com isso, fundamentou-se teoricamente na noção de complementaridade publicada no livro O Formal, O Social e o Subjetivo (1993) e no artigo, Complementarity, Sets and Numbers (2003) de Michael Otte.

Nesta dissertação, Arruda (2007) indagava como um número de valor numérico aparentemente simples como o número de Euler ***e*** aparece na Matemática aplicada e na Matemática pura, ou seja, estabelece conexões com os ramos internos desta ciência e com outras áreas do conhecimento. Atualmente, o autor imagina e tenta entender o porquê de o número de Euler ***e*** ser trabalhado superficialmente no ensino médio, e somente no ensino superior lhe ser dado um tratamento mais sistemático, ou seja, no Ensino Médio, valoriza-se de maneira excessiva o logaritmo na base 10, e o número ***e*** como base é tratado, às vezes, como nota de rodapé.

O objetivo desta dissertação foi investigar várias definições e aplicações do número ***e***, bem como sua natureza no contexto da teoria dos números reais para o qual foram apresentados vários fundamentos. Este trabalho traz diversos conteúdos de Ensino Médio, tendo como conteúdo principal números irracionais, mas também foram abordados os conteúdos funções exponenciais, logaritmo e juros compostos no capítulo em que ele aborda as definições, conexões e aplicações do número ***e***. No último capítulo da dissertação, o autor também mostra a evolução histórica do conceito do número de Euler.

Apesar da abordagem dessa dissertação no que tange a diversos conteúdos do Ensino Médio, temos uma quantidade ainda maior de conteúdos do Ensino Superior. No primeiro capítulo, chamado Fundamentos da Teoria dos Números Reais, aparecem: A Biunivocidade entre Pontos da Reta e os Números; Incomensurabilidade da Diagonal do Quadrado; O Algoritmo de Euclides e o Contínuo na Interpretação da Incomensurabilidade da Diagonal do Quadrado; O Argumento Discreto Geométrico na Interpretação da Incomensurabilidade da Diagonal do Quadrado e o Argumento Analítico; O Número Primo 3 e a Irracionalidade da Raiz Quadrada de Dois; A Definição do Contínuo: O Exemplo do Número de Euler; Intervalos Encaixados; Cortes de Dedekind; Contínuo Numérico de Cantor e Construção Axiomática dos Números Reais. Todos esses conteúdos são de Teoria dos Números, com potencial aplicação em disciplinas de introdução à álgebra.

O segundo capítulo, chamado de Definições, Conexões e Aplicações do Número de Euler, aborda, em sua maioria, conteúdos do ensino superior: Séries, Limites, Derivadas, Integrais, Variáveis Complexas, a Espiral Logarítmica e algumas aplicações da física.

Em relação aos conteúdos do Ensino Médio, destacamos: Juros Compostos e algumas Aplicações de Função Exponencial.

Quando Arruda explora o conceito de Juros Compostos, inicialmente, é definida a fórmula tradicional para cálculo do montante $M = C(1+i)^t$ em um determinado instante t. Em seguida, ele faz a demonstração da fórmula do montante para juros contínuos, fazendo a comparação com a fórmula tradicional e trazendo uma abordagem histórica, inclusive, citando o matemático Jakob Bernoulli (1654-1705) por propor o problema:

> Qual é a lei que estabelece a forma como cresce um capital, depositado em um banco a juros compostos, quando os juros são acrescidos ao capital a cada instante, isto é, quando o número de capitalizações tende a ser contínuo? (MAOR, 2004, p. 156, apoud ARRUDA, 2007, p. 58).

Nesta demonstração, o professor em sala de aula pode elaborar atividades investigatórias com os alunos para chegar ao resultado do valor do ***e*** através do uso da Matemática Financeira e com auxílio da calculadora científica. Mendes (2009) defende a eficácia da história da matemática associada a um panorama investigatório, podendo ser usado como fonte geradora de conhecimento matemático escolar.

O problema utilizado por Arruda em sua dissertação, para responder ao problema proposto por Jakob Bernoulli, foi:

> Considere hipoteticamente um capital de R$1,00 aplicado a juros compostos no prazo de um ano, com uma taxa fictícia de 100% ao ano da seguinte forma: o banco calcula o montante acumulado não uma vez, mas várias vezes por ano. Observe o que ocorre se as capitalizações forem feitas por dia, por hora e por minuto.

Para capitalizações diárias, foi encontrado: $M = 1\left(1+\frac{100\%}{365}\right)^{365} = \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$ que, com o auxílio da calculadora científica, foi obtido: $M = 2{,}71456\ldots$.

Para capitalizações a cada hora, temos: $M = 1\left(1+\frac{100\%}{8760}\right)^{8760} = 1\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760}$ que, com o auxílio da calculadora científica, foi obtido: $M = 2{,}71812\ldots$.

Para capitalizações a cada minuto, temos: $M = 1\left(1+\frac{100\%}{525600}\right)^{525600} = \left(1+\frac{1}{525600}\right)^{525600}$ que, com o auxílio da calculadora científica, foi obtido: $M = 2{,}7182\ldots$.

Pode-se ver que o montante se aproxima do número ***e***, quando as capitalizações são feitas continuamente. Arruda faz uma generalização, considerando a mesma taxa de 100% aplicada a um ano em que o montante seja determinado n vezes nesse período.

Chegando à fórmula $M = C\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, podendo mostrar aos alunos intuitivamente que

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, pois estamos considerando C = 1.

Usando a fórmula de tradicional de juros compostos $M = C(1+i)^n$ e considerando o capital C aplicado y vezes ao ano, encontramos: $M = C\left(1+\frac{i}{y}\right)^{yt}$, fazendo $\frac{i}{y} = \frac{1}{n}$. Teremos:

$. M = C\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nit} \Rightarrow M = C\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{it}$ Com esse n sendo aplicado continuamente, temos que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Logo, $M = Ce^{it}$.

Ainda no segundo capítulo, Arruda traz aplicações de Função Exponencial em que explora Problemas de Crescimento de Bactérias e Desintegração Radioativa. Essas duas últimas aplicações referentes a função estão sendo abordadas com muita frequência em problemas das provas do ENEM, ou seja, não podem deixar de ser trabalhadas em sala de aula. Elas precisam do conhecimento de logaritmos e também da fórmula $M = Ce^{it}$, que serve também para outras aplicações de crescimento e decrescimento, desde que de forma contínua. Vejamos um exemplo similar ao mostrado na dissertação de Arruda (2007): *A energia nuclear, derivada de isótopos radioativos, pode ser usada em veículos espaciais para fornecer potência. Fontes de energia nuclear perdem potência gradualmente, no decorrer do tempo. Isso pode ser descrito pela função exponencial* $P = P_0 \cdot e^{-\frac{t}{250}}$*, na qual P é a potência instantânea, em watts, de radioisótopos de um veículo espacial;* P_0 *é a potência inicial do veículo; t é o intervalo de tempo, em dias, a partir de* t_0*; e é a base do sistema de logaritmos neperianos. Nessas condições, quantos dias são necessários, aproximadamente, para que a potência de um veículo espacial se reduza a quarta parte da potência inicial?*

Para a que a população se reduza à quarta parte da potência inicial, temos que: $P = \frac{1}{4} \cdot P_0$. Com isso, temos:

$\frac{1}{4} \cdot P_0 = P_{0.} \cdot e^{-\frac{t}{250}}$, ou seja, $\frac{1}{4} = e^{-\frac{t}{250}}$. Com conhecimentos de logaritmos, sabemos que:

$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln e^{-\frac{t}{250}} \Rightarrow -\frac{t}{250} = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow t = -250 \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right)$. E, com a ajuda da calculadora científica, chegamos ao resultado de $t = 174$ dias.

No terceiro capítulo, mostra-se a Prova da Irracionalidade do Número de Euler. Neste momento, aparecem apenas conteúdos de nível superior, os já citados anteriormente.

No quarto capítulo, foi apresentada a Evolução Histórica do número ***e***. Apesar de muita aplicação matemática voltada para o ensino superior, há muitas informações importantes que devem ser trabalhadas no Ensino Médio, pois esse conteúdo é ensinado de forma muita superficial, e os alunos ficam sem entender a importância deste número irracional e sua origem, ou seja, é dada, muitas vezes, apenas a informação do que representa o número em forma quantitativa, portanto, consideramos esse capítulo uma boa fonte de conhecimentos que provavelmente fará o aprendizado mais interessante, pois despertara a curiosidade dos alunos em relação ao número ***e***. Segundo Mendes (2009), é favorável o uso pedagógico da história nas aulas de matemática para elaborar e executar algumas introduções históricas aos conceitos que se apresentam como novidades para os alunos, visando a estimulá-los. Por isso, consideramos um capítulo com um potencial didático importante para ser explorado no Ensino Médio.

Dissertação 8: A Interpretação Geométrica dos Números Imaginários no Século XIX: A Contribuição de Jean Robert Argand (1768 – 1822)

O objetivo desta dissertação foi apresentar a representação geométrica dos *números imaginários* feita pelo bibliotecário suíço e matemático não profissional Jean Robert Argand (1768−1822).

Vejamos o quadro 50 a seguir:

Quadro 50: Descritores de análise da Dissertação 8 – Ensino Médio

Título: A Interpretação Geométrica dos Números Imaginários no Século XIX: A Contribuição de Jean Robert Argand (1768 – 1822)
Autor (a): Luciene de Paula
Orientador (a): Michael Friederich Otte
Ano de defesa: 2007
Programa e Instituição onde foi defendida: Programa de Pós-graduação em Educação/ Universidade Federal do Mato Grosso – UFMT
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo Principal Focalizado: Números Complexos (Outros)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Equações Algébrica, Polinômios e Geometria Plana.
Resumo: Nesse trabalho, objetivamos apresentar a representação geométrica dos *números imaginários* feito pelo bibliotecário suíço e matemático não profissional Jean Robert Argand (1768−1822). Para tratar de tal questão, fizemos uma abordagem sobre *Simbolização*, apresentando a evolução da Álgebra que começa com *Álgebra Retórica*, passa pela *Álgebra Sincopada*, culminado na *Álgebra Simbólica* atualmente utilizada. Essa abordagem acontece principalmente no contexto das equações. Posteriormente, buscamos enfocar a importância da *prática algébrica*, por meio de trabalhos com as *equações do segundo* e *do terceiro graus* que possibilitaram a descoberta de alguns casos insolúveis e, a partir desses, o reaparecimento das *quantidades impossíveis* ou *imaginárias*. Em seguida, mostramos que, com a ampliação da geometria de figuras planas de Euclides para a geometria do espaço no sentido do século XIX, os matemáticos ganharam um novo instrumento para assegurar a existência dos seus objetos em termos de *modelos* e de *estruturas*. A representação geométrica foi, portanto, um fruto do pensamento relacional para o qual a ideia do espaço fora essencial. Os objetos matemáticos controversos, como as *raízes quadradas de números negativos*, ganharam realidade somente como elementos de uma estrutura e, por isso, em poucos anos, muitos matemáticos independentes (não profissionais) como Caspar Wessel (1745−1818), Adrien Quentin Buée (1748−1826), Jean Robert Argand (1768−1822), Hermann Günther Grassmann (1809−1877) entre outros, tiveram a ideia de ganhar a existência dos números imaginários à base da geometria plana.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Paula (2007).

Para tratar de tal tema, foi feita uma abordagem sobre *Simbolização*, apresentando a evolução da álgebra que começa com *Álgebra Retórica*, passa pela *Álgebra Sincopada*, chegando à *Álgebra Simbólica* atualmente utilizada. Essa abordagem acontece principalmente no contexto das equações. Posteriormente, a autora busca enfocar a importância da *prática algébrica*, por meio de trabalhos com as *equações do segundo grau* e *do terceiro grau* que possibilitaram a descoberta de alguns casos insolúveis e, a partir desses, o reaparecimento das *quantidades impossíveis* ou *imaginárias*. Em seguida, mostra-se que, com a ampliação da geometria de figuras planas de Euclides para a geometria do espaço no sentido do século XIX, os matemáticos ganharam um novo instrumento para assegurar a existência dos seus objetos em termos de *modelos* e de *estruturas*. A representação geométrica foi, portanto, um fruto do pensamento relacional para o qual a ideia do espaço fora essencial.

Consideramos esta dissertação propícia para ser explorada seu conteúdo de Números Complexos e Equações do segundo grau e terceiro grau no Ensino Médio. A autora inicia com um capítulo sobre equações do segundo em que são abordadas as equações no antigo Egito, antiga Babilônia, antiga Grécia, antiga Índia, mundo árabe e Europa e o surgimento das equações do terceiro grau, iniciando, em seguida, as representações geométricas dos números imaginários.

Vamos agora descrever o que foi apresentado no segundo capítulo de sua dissertação sobre as equações do segundo grau. Na primeira parte do capítulo, abordou-se um pouco da história da equação do segundo grau, inclusive comentando sobre o hábito brasileiro de chamar a fórmula de resolução da equação $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$, cuja solução é $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (Fórmula de Bhaskara), dentre outras histórias. Em seguida, foi apresentado pelo menos um procedimento usado por alguns povos do passado ao trabalharem com as equações do segundo grau. A primeira resolução que aparece na dissertação é feita pelos egípcios, apesar de Paula (2007) deixar bem claro que:

> Não são conhecidos documentos que provem que os antigos egípcios tenham-se ocupado da resolução de equações do segundo grau, mas, no papiro de Berlim, datado, aproximadamente, de 1.800 a.C., há dois problemas que dependem da resolução de um sistema de duas equações, uma do primeiro grau e outra do segundo grau. (PAULA, 2007, p. 41)

Um dos problemas foi apresentado na dissertação, e o que nos pareceu bastante produtivo foi o fato de ser apresentado o problema e sua resolução na íntegra e depois em linguagem atual. Vejamos o problema:

> **Problema**
> É te dito ... a área de um quadrado de 100 [cúbitos quadrados] é igual à de dois quadrados mais pequenos. O lado de um dos quadrados é 1/2 + 1/4 o lado do outro. Diz-me quais são os lados dos dois quadrados desconhecidos.
> **Resolução:**
> Toma sempre o quadrado de lado 1. Então o lado do outro é 1/2 + 2/4.
> Multiplica-os por 1/2 + 2/4. Dá 1/2 + 1/16, área do quadrado pequeno. Depois juntos estes quadrados têm uma área de 1 + 1/2 + 1/16.
> Tira a raiz quadrada de 1 + 1/2 + 1/16. Que é 1 + 1/4.
> Tira a raiz quadrada de 100 cúbitos. Que é 10.
> Divide estes 10 por 1 + 1/4. Dá 8, o lado de um quadrado.

> Calcula 1/2 + 1/4 de 8. Dá 6, o lado do outro quadrado. (GILLLINGS, 1982, apoud, PAULA, 2007, p. 41)

Uma parte complexa dos trabalhos em História da Matemática é transformar o enunciado antigo para uma linguagem atual, para que ele possa ser explorado em sala de aula e, nesse caso, já foi feito pela autora. Vejamos como ficou:

> *A área de um quadrado é* 100 *e tal quadrado é igual à soma de dois quadrados menores, em que o lado de um é igual a 4/3 do lado do outro. Determine o lado dos dois quadrados menores.*
>
> Transformando em uma linguagem simbólica temos:
>
> $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 4x = 3y \end{cases}$$
>
> (PAULA, 2007, p. 42)

Em seguida, apresenta-se a resolução da Equação do segundo grau feita na Antiga Babilônia. No texto, afirma-se sobre a dificuldade dos egípcios em resolver equações do segundo grau com três termos e que foram os babilônicos que conseguiram desenvolver. Na dissertação de Paula (2007), mostrou-se o seguinte problema: *lado de um quadrado, em que a área menos o lado é igual a 14,30.* Os Babilônios usavam uma combinação da base 60 com a base 10 para representar os números por isso o 14,30 representava $14 \times 60^1 + 30 \times 60^0 = 870$. Na linguagem atual o problema representa a solução da equação $x^2 - x = 870$, ou seja, nesta dissertação, foi mostrado como os Babilônios resolviam as equações da forma $x^2 - px = q$, com p e q positivos, de forma a encontrar uma solução positiva. Na dissertação, também aparece a forma pela qual os Babilônios resolviam os sistemas de equações da forma $\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$, o que equivale à equação $x^2 + q = px$.

Vejamos o exemplo trazido por Paula sobre como o babilônios resolviam as equações do tipo $x^2 - px = q$.

> Tome a unidade: 1
> Divida a unidade em duas partes: 0;30 → 0;30 significa 1/2
> Cruze (multiplique) 0;30 por 0;30: 0;15 (significa 0,25) → 1/2×1/2 = 1/4
> Some 0;15 a 14;30, para obter 14;30;15 → 14;30;15 = 870 + 1/4 = 870,25
> Isto é o quadrado de 29;30 → 29;30 significa 29,5, ou $(29,5)^2$ = 870,25
> Some agora 0;30, que você multiplicou, com 29;30 e o resultado é 30, isto é, 1/2 + 59/2 = 30 que é o lado do quadrado. (PAULA, 2007, p. 43)

De acordo com Paula, o uso desse procedimento era o mesmo que utilizar a fórmula $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$, porém os babilônios não dispunham dessa ferramenta algébrica para resolução.

Neste caso, podemos perceber que, além do conteúdo de equações do segundo e sistemas de equações, também podemos abordar sistema de numeração e mostrar para os alunos esse conteúdo que não aparece mais nos livros didáticos modernos, mas que são explorados em alguns concursos de nível médio. Um exemplo são os concursos de carreira militar.

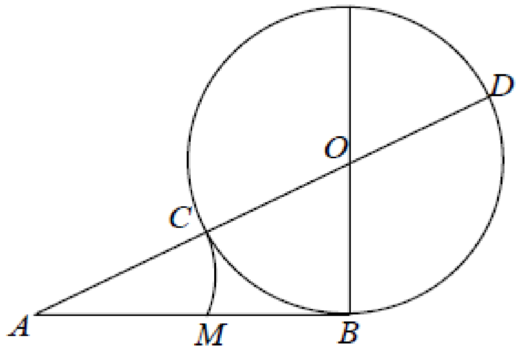
Depois disso, a autora abordou, em sua dissertação, como os gregos resolviam as equações do segundo grau. Segundo Paula:

> O caráter da Matemática grega é completamente diferente daquele da Matemática babilônica. Embora os próprios gregos reconhecessem que muito deviam à Matemática egípcia e babilônica, eles transformaram os conhecimentos dessas duas civilizações em um corpo de resultados bem estruturado no qual a argumentação é feita com um tipo bem específico de discurso, a demonstração matemática. Por razões possivelmente associadas à descoberta da existência de grandezas incomensuráveis, a maneira de os matemáticos gregos apresentarem seus resultados é *geométrica*, como em *Os Elementos* de Euclides (PAULA, 2007, p. 45).

Como exemplo, Paula (2007) apresenta a resolução do seguinte exemplo: *Dividir um segmento de reta em duas partes tais que o retângulo contido pelo segmento dado e uma das partes seja igual ao quadrado da outra parte.* A resolução refere-se à equação $a \cdot (a - x) = x^2$ em que a representa o segmento dado. A equação também foi escrita da forma: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$, significando a divisão do segmento a em *média* e *extrema razão.*

Em sua dissertação, Paula (2007) apresenta uma forma bem diferente de resolução de equações do segundo grau, do povo grego, explorando bem a geometria plana, aplicação que pode ser feita em turmas de Ensino Médio, as quais já possuem base de geometria plana, quando estiverem estudando Funções Quadráticas. Vejamos o exemplo:

> Seja $\overline{AB}$ o segmento dado e consideremos a circunferência tangente ao segmento $\overline{AB}$ em *B* e cujo raio é $\frac{a}{2}$. A reta definida por *A* e pelo centro *O* da circunferência intercepta a circunferência nos pontos *C* e *D*, conforme mostra a figura seguinte.



O arco de circunferência de centro *A* e raio $\overline{AC}$ intercepta o segmento $\overline{AB}$ no ponto *M*. As partes pedidas são, precisamente, $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$, e temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$.

Portanto, temos $a^2 = (a+x)\cdot x$, onde a e x designam, respectivamente, o comprimento da tangente $\overline{AB} = \overline{CD}$ e o comprimento de $\overline{AM}$ (o quadrado da tangente é igual ao produto da secante pela sua parte externa) e da igualdade $a^2 = (a+x)\cdot x$, resulta $a\cdot(a-x) = x^2$, quer dizer, a área do retângulo que tem por lados a e $a - x$ é igual ao quadrado da outra parte, pois $a - (a - x) = x$.

A igualdade $a^2 = (a+x)\cdot x$ resulta imediatamente da aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo *ABO*. Assim, temos $\overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 = \overline{OA}^2$, isto é, $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$, onde, $a^2 = x^2 + ax = (a+x)\cdot x$, como se pretendia. (PAULA, 2007, p. 46)

A outra resolução que aparece no trabalho é a Resolução da Equação do Segundo Grau da Antiga Índia. O forte do povo hindu era a aritmética e a álgebra, por isso, nesta dissertação, a autora mostra a regra de resolução de uma equação do segundo grau deixada pelo matemático Sridhara (aprox. 870−aprox. 930), e citada por Bhaskara, já que os originais foram perdidos. Vejamos a citação e, em seguida, a regra:

> Multiplicar ambos os membros da equação por um número igual a quatro vezes o coeficiente do quadrado do desconhecido; adicionar em ambos os lados o número igual ao quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida; então extraia a raiz quadrada (PAULA, 2007, p. 47).

Paula (2007) apresenta a regra de Sridhara, usando a linguagem simbólica atual:

$$ax^2 + bx = c$$

(Multiplicando ambos os lados por 4a)

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac$$

(Somando a ambos os membros o quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida)

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2 \text{ , com isso, temos:}$$

$$(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$$

(Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros)

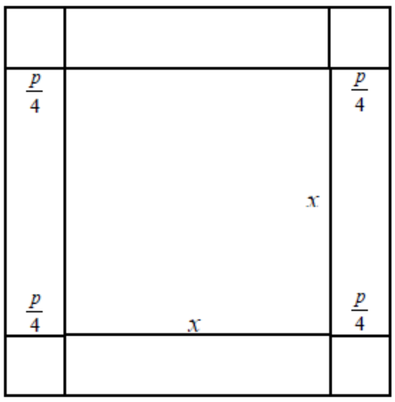
$$2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$$

Segundo Paula (2007), não existe registro que Sridhara tomou dois valores quando extraiu a raiz quadrada. E, com isso, resta resolver a equação do primeiro grau.

Essa demonstração já é feita em livros de nono ano do Ensino Fundamental, em que os autores estabelecem dois valores quando extraem a raiz (um negativo e outro positivo) e, em seguida, faz o isolamento de x, chegando à conhecida Fórmula de Bhaskara, mas nem sempre o professor demonstra a fórmula em sala de aula. Mas essa informação sobre que essa demonstração vem diretamente da regra de Sridhara não é repassada em sala de aula, e muitos professores desconhecem, inclusive, antes de fazer a leitura dessa dissertação, também não sabia dessa informação, que pode sim ser compartilhada com os alunos.

Logo depois, foi apresentado a Resolução da Equação do Segundo Grau do Mundo Árabe. Nesta parte do texto, foi apresentado um dos métodos de resolução de Al-Khowarizmi para resolver equações do tipo: $x^2 + px = q$. Este método foi uma mistura de técnicas algébricas e geométricas. Vejamos um dos métodos apresentados por Paula (2007) em sua dissertação de mestrado:

> Constrói-se um quadrado de lado x e, sobre os lados x, para o exterior do quadrado, constrói-se retângulos de lados x e $\frac{1}{4}p$. Completa-se a figura, construindo-se em cada um dos quatro cantos um quadrado de lado igual a $\frac{1}{4}p$.



Com isso a área do quadrado de lado $\left(x + \frac{p}{2}\right)$ é $x^2 + xp + \frac{p^2}{4}$

Somando-se $\frac{1}{4}p^2$ a ambos os membros da equação $x^2 + px = q$, obtemos:

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2 \Rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{1}{4}p^2 \text{, donde:}$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} \Rightarrow x = \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} - \frac{p}{2}.$$

(PAULA, 2007, p. 49)

Lembrando que os números negativos ainda não existiam. Novamente, temos uma demonstração que pode ser aplicada quando os alunos estiverem estudando conteúdos de geometria plana, podendo ser explorada pelo professor em sala de aula em momentos distintos, de acordo com sua escolha e se os conhecimentos prévios dos alunos comportarem tal resolução.

Para finalizar essas resoluções de Equações do segundo grau, a autora apresentou dois métodos desenvolvidos por François Viète e René Descartes entre os séculos XV e XVII. Vejamos esses dois métodos, iniciando com o de Viète:

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:
Fazendo $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, e substituindo na equação, temos:

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0$$

$$a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u+v) + c = 0$$

Viète reescreve a expressão na variável v, obtendo:

$$av^2 + (2au + v)b + au^2 + bu + c = 0$$

Viète transformou essa equação numa incompleta do segundo grau, anulando o coeficiente de *v*, isto é, escolhendo $u = \frac{-b}{2a}$. Obtendo a equação:

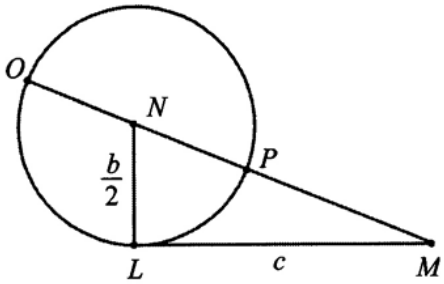
$$av^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

Chegando a simples manipulação que $v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow v = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, se $b^2 - 4ac \geq 0$

Logo, se $x = u + v \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
Chegando a fórmula de Bhaskara. (PAULA, 2007, p. 51)

Vamos agora apresentar o método de Descartes, que, de acordo com Paula (2007), resolve equações do tipo $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$, sempre com b e c positivos, no Apêndice *La Géométri* de sua obra *O Discurso do Método*. Paula demonstra, em sua dissertação, apenas $x^2 = bx + c^2$. Vejamos:

Traça-se um segmento $\overline{LM}$, de comprimento *c*, e, em *L*, levanta-se um segmento $\overline{NL}$ igual a $\frac{b}{2}$ e perpendicular a $\overline{LM}$. Com centro em *N*, construímos um círculo de raio $\frac{b}{2}$ e traçamos a reta por *M* e *N* que intercepta a circunferência em *O* e *P*. Então a raiz procurada é o segmento $\overline{OM}$.



Com efeito, no triângulo retângulo MLN, se $\overline{OM} = x$, temos:

$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+c^2$, e daí: $x^2-bx=c^2$

Atualmente sabemos que a segunda raiz é $-\overline{PM}$, mas Descartes não considerava a raiz negativa. (PAULA, 2007, p. 52)

Essa reconstrução histórica da solução de uma equação do segundo grau, usando de artifícios geométricos, é bem interessante para se trabalhar em salas de aulas do Ensino Médio, pois, se mobiliza diversos conteúdos de álgebra e geometria que podem ser revisados para os alunos. Dentre eles: Propriedades de circunferências e triângulos, teorema de Pitágoras.

Neste sentido, assegura que:

> a busca da reconstrução histórica do conhecimento matemático passa ater significativas implicações pedagógicas na construção dos conhecimentos cotidiano, escolar e científico dos nossos alunos, bastando para isso utilizarmos tais informações históricas numa perspectiva atual de geração do conhecimento matemático. (MENDES, 2009, p.10).

Por isso, as resoluções de Equações apresentadas e contextualizadas com seus momentos históricos fazem parte de um material propício para ser trabalhado tanto no Ensino Fundamental em turmas de nono ano, onde os alunos aprendem as equações de segundo grau pela primeira vez e também estudam funções quadrática. Muitas dessas resoluções, poderão, inclusive, ser mais bem utilizadas em turmas de primeiro ano do Ensino Médio, pois já terão uma boa base do assunto e poderão fazer diversas aplicações. Essas resoluções podem ser trabalhadas por meio de atividades investigatórias usando a história da matemática, ou simplesmente, colocadas para os alunos como problemas históricos a serem resolvidos, o que corrobora a proposição de Mendes, segundo o qual

> a função geradora de conhecimento matemático, atribuída à história da matemática, concretiza-se no seu uso manipulativo das informações históricas em sala de aula, quer seja por meio de atividades investigatórias ou mesmo por outra estratégia didática como, por exemplo, o uso de vídeos, softwares ou na resolução de problemas históricos originados de fontes primárias. (MENDES, 2009, p. 14).

No mesmo capítulo, Paula (2007) escreve um tópico sobre resolução de equações do terceiro grau da forma: $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$ e $x^3 + q = px$ em que, inicialmente, foi retratado o contexto histórico dos acontecimentos relevantes das descobertas matemática no que se refere ao estudo sobre equações do terceiro grau do século XV. Em seguida, apresenta as três resoluções das equações cúbicas pelo método que Tartaglia confiou a Cardano e depois faz uma análise sobre uma dessas resoluções. Estas equações cúbicas também podem ser trabalhadas no Ensino Médio, quando os alunos estiverem estudando as Equações Polinomiais. Vejamos a análise que Paula (2007) faz da resolução de uma das equações acima:

A autora demonstrou a solução dsa equação do terceiro grau $x^3 + px = q$.

Primeiramente, ela lembra do produto notável cubo da diferença de dois termos $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Neste momento, é possível revisar com os alunos todos os produtos notáveis, independente da série do Ensino Médio e que o professor estiver fazendo essa demonstração, pois muitos alunos chegam ao Ensino Médio com essa deficiência. E essas fórmulas dos produtos notáveis são importantes como ferramentas para desenvolvimento de diversas expressões.

Em seguida, usa-se o artifício da fatoração e coloca ab em evidência:

$(a-b)^3 = -3ab(a-b) + (a^3 + b^3)$, ou seja,

$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = (a^3 + b^3)$

Na sequência, Paula chama $ab = \dfrac{p}{3}$ e $a^3 - b^3 = q$, formando:

$(a-b)^3 + p(a-b) = q$.

E faz a comparação com a expressão inicial $x^3 + px = q$, percebendo que $x = a - b$ será uma solução desta equação. Portanto, para resolvermos a equação proposta, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} a \cdot b = \dfrac{p}{3} \\ a^3 - b^3 = q \end{cases}$$

Pois achando a e b, teremos x, uma vez que $x = a - b$.

O Método usado na dissertação para resolver o sistema foi:

Elevar na primeira equação os dois termos ao cubo, obtendo:

$$\begin{cases} a^3 \cdot b^3 = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \\ a^3 - b^3 = q \end{cases}$$

Depois, foi feita a seguinte substituição: $a^3 = A \; e \; b^3 = B$, temos:

$$\begin{cases} A \cdot B = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \\ A - B = q \end{cases}$$

Dessa forma, A e $-B$ são raízes da equação $X^2 - qX + \left(-\dfrac{p}{3}\right)^3 = 0$, pelo método da soma e produto em que numa equação do tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, sendo $x' \; e \; x''$ raízes, temos que $S = -\dfrac{b}{a}$ (soma) e $P = \dfrac{c}{a}$ (produto). Logo,

$$X = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4\left(-\dfrac{p}{3}\right)}}{2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Uma dessas raízes é A e a outra é – B e com $a = \sqrt[3]{A}$, $b = \sqrt[3]{B}$ e $x = a - b$, teremos a solução enunciada por Tartaglia: $x = \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$.

Finalmente, substituindo A e B pelos seus respectivos valores, resulta a conhecida fórmula que, nos textos, é chamada de *Fórmula de Cardano* ou *de Tartaglia*:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Esses foram os potenciais didáticos para o Ensino Médio apresentados na dissertação de Paula (2007) referentes a conteúdo de equações do segundo grau e equações do terceiro grau, que o docente pode usar em sala de aula, de acordo com perfil de sua turma.

Ainda no segundo capítulo, o último tópico aborda o número imaginário *i*, da mesma forma que foi feito com os outros tópicos, mostrando todo um contexto histórico desse número. E, como antes foram trabalhadas as equações do terceiro grau, Paula (2007) escreve sobre a necessidade do uso dos números imaginários na resolução dessas equações, ao aparecerem raízes quadradas de números negativos nas resoluções, sendo interpretadas como um problema sem solução. Neste tópico, são mostrados alguns problemas históricos e sua resolução. Vejamos um exemplo citado por Paula (2007), em que Cardano considera dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes de forma que seu produto seja 40.

Se chamarmos de x o comprimento de uma das partes, a outra terá comprimento $10 - x$ e a condição do problema traduz-se na equação:

$$x(10 - x) = 40 \Rightarrow x^2 - 10x + 40 = 0,$$

Cujas soluções são: $x = 5 \pm \sqrt{-15}$. Usando a fórmula de resolução de equações do segundo grau. Segundo Paula (2007), Cardano reconheceu que o problema não tinha solução, mas observou que o produto realmente resulta em 40 e, por isso, chamou as soluções de *raízes sofísticas*.

Outro exemplo que aparece na dissertação foi publicado por Bombelli em 1572, em Veneza. Trata-se da resolução da equação $x^3 = 15x + 14$. Segundo Paula (2007), ao aplicar a fórmula de Cardano, obteve-se como raiz: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Esta solução geral gerou uma grande discussão, pois, pela primeira vez, Bombelli se deparou com uma expressão com raiz negativa, sabendo que x = 4 era uma solução da equação.

Como sabemos, essa discussão de números imaginários deve ser trabalhada no Ensino Médio ao se estudarem os números complexos, e o que foi abordado nesta dissertação apresenta formas bem interessantes de se desenvolver essa teoria por meio de um contexto histórico, fazendo com que alunos entendam que diversos processos foram surgindo até chegar ao tipo resolução que temos hoje. Isso faz com que se desmistifique um pouco a matemática, ajudando o processo de ensino-aprendizagem.

Vejamos como Bombelli chegou ao resultado de x =4, de acordo com a solução proposta por Paula (2007):

Primeiramente, ele considerou que a raiz cúbica de $2+\sqrt{-121}$ era um número da forma $a+\sqrt{-b}$, ou seja, que $\left(a+\sqrt{-b}\right)^3 = 2+\sqrt{-121}$.

Da mesma forma fez, considerando $\left(a-\sqrt{-b}\right)^3 = 2-\sqrt{121}$. Como ele sabia que $x=4$. Então, $a+\sqrt{-b}+a-\sqrt{-b}=4 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$. Vamos verificar como b foi encontrado:

$$\left(2+\sqrt{-b}\right)^3 = 2+\sqrt{-121}$$

$$8+12\sqrt{-b}-6b-b\sqrt{-b} = 2+\sqrt{-121}$$

$$8+12\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}-6b-b\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1} = 2+\sqrt{-121}$$

Igualando os termos comuns:

$\begin{cases} 8-6b=2 \\ 12\sqrt{b}-b\sqrt{b}=11 \end{cases} \Rightarrow b=1$. Chegando ao resultado que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$ e analogamente $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$.

Ratificando que $x=4$ era solução da equação, pois $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, que por sua vez $x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}$.

O terceiro capítulo tem como foco mostrar que o elo legitimador dos números complexos é a representação geométrica, e, com isso, são abordados tanto teoria, como exemplos e problemas, não deixando de fazer uma contextualização de cada momento histórico importante. Segundo Paula:

> A representação geométrica foi, portanto, uma necessidade de *realizar* geometricamente os objetos matemáticos controversos, como as *raízes quadradas de números negativos* e, por isso, em poucos anos, muitos matemáticos independentes (não profissionais) como Caspar Wessel (1745−1818), Adrien Quentin Buée (1748−1826), Jean Robert Argand (1768−1822), Hermann Günther Grassmann (1809−1877) entre outros, tiveram a idéia de ganhar a existência dos *números imaginários* à base da geometria plana. (PAULA, 2007, p. 70).

Nesta parte da dissertação, Paula apresenta um pouco das ideias desses autores. Vamos destacar Caspar Wessel, pois o conteúdo que aparece neste capítulo pode ser trabalhado no Ensino Médio, principalmente em turmas de cursos técnicos integrados ao médio na área de Eletrônica e Eletrotécnica. Na minha experiência como professor tanto no IFPE como no IFPB, recebo muitas reclamações dos professores da área de Elétrica, a respeito da dificuldade dos alunos em Números Complexos e, muitas vezes, até da falta total de conhecimento. No IFPB campus João Pessoa, este conteúdo é antecipado em turmas do Ensino Médio Integrado ao Técnico de Eletrônica e Eletrotécnica para o segundo ano do Ensino Médio. Porém, os relatos dos alunos apontam que tudo que é visto sobre números complexos nas disciplinas técnicas é bastante diferente do que é visto na disciplina de matemática, e, com a leitura desse terceiro capítulo da dissertação de Paula, verificamos que o problema é de notação – e vamos analisar isso agora.

A notação geométrica apresentada por Wessel não muda nada do que é Ensinado no Médio como Plano de Argand – Gauss, com a diferença na notação polar abordada. Esta notação, segundo Paula (2007), é muito utilizada por Engenheiros Elétricos e, consequentemente, apresentada por eles aos alunos do Ensino Médio, que estudam com o professor de Matemática uma notação diferente. Vejamos agora a representação geométrica e, em seguida, as notações estudas pelo professor de matemática e a notação usada pelos Engenheiros Eletrônicos:

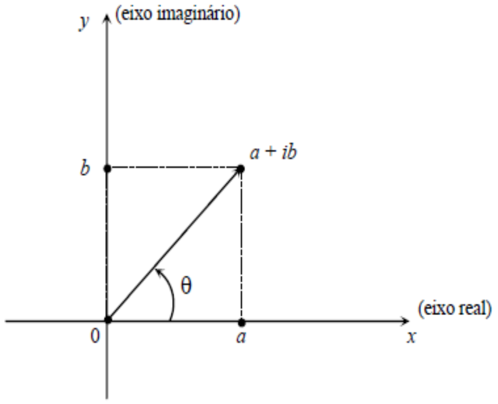


Figura 11: Representação Geométrica do Número Complexo de Caspar Wessel (PAULA, 2207, p. 72)

A notação estudada nas aulas de matemática para forma polar de um número complexo:

$a+bi=\rho\cdot(\cos\theta+isen\theta)$, sendo $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$, em que: θ é denominado argumento e o comprimento do vetor denominado por $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ de módulo do número complexo $a+bi$.

A notação usada por Engenheiros Elétricos para forma polar de um número complexo:

$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\angle\tan^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)$, sendo $\tan^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ denominado argumento e o comprimento do vetor denominado por $\sqrt{a^2+b^2}$ de módulo do número complexo $a+bi$.

Verificamos que essa contribuição pode ajudar os professores de Matemática que trabalham com turmas de Ensino Médio integrados ao Técnico em cursos como Eletrônica, Eletrotécnica, Telecomunicações e áreas afins, a ensinar os números complexos de forma mais próxima ao que o aluno vai estudar nas disciplinas técnicas, diminuindo a dificuldade dos alunos nessas disciplinas. Com essas informações contidas na dissertação de Paula, os professores possuem bastante ferramenta para transformar em material didático aplicável em sala de aula. Por isso, sugiro ao leitor que tiver interesse fazer uma pesquisa neste trabalho, que apresenta muito mais detalhes de como Caspar Wessel desenvolve sua Teoria dos Números Complexos.

O quarto capítulo foi dedicado à representação geométrica dos números complexos de Jean Robert Argand, novamente iniciado com um panorama histórico e depois apresentado um Ensaio de como representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas. Este ensaio é de 1806, e aparecem diversas situações problemas, todas elas comentadas, analisadas e resolvidas. Mas consideramos um pouco avançado para alunos do Ensino Médio, por isso não iremos fazer uma análise mais detalhada.

No quinto capítulo, intitulado *A Geometria e o Ensino dos Números Complexos*, Paula (2007) apresenta algumas reflexões sobre abordagens de ensino dos números complexos, reflexões essas resultantes dos estudos dos capítulos anteriores e também de observações de sua experiência como docente. Ainda neste capítulo, foi apresentado um resumo bem detalhado de como ensinar os números complexos por meio da abordagem geométrica.

A autora faz uma observação importante quando diz que, muitas vezes, esses conteúdos não são trabalhados nem no Ensino Médio, por ser muito complexo naquele momento, nem no Ensino Superior, por ser considerado elementar e conteúdo da Educação Básica. Sabemos disso, e realmente foi ratificado na dissertação que este conteúdo, quando trabalhado no Ensino Médio, é visto de forma muito superficial, tendo sido, neste capítulo, abordado de maneira bem detalhada, podendo o docente explorar e escolher o que usar para montar sua aula de números complexos, podendo explorar o contexto histórico e a relação geométrica. Paula (2007) espera que este último capítulo de sua dissertação possa contribuir para esclarecer dúvidas talvez já antigas, ou despertar o interesse para buscar, com rigor e profundidade, o entendimento de qualquer conteúdo científico, sem desprezar o estudo minucioso das descobertas e das dificuldades dos estudiosos.

Sabemos que o conteúdo de números complexos é um dos assuntos mais geradores de dúvidas entre os alunos em seu aprendizado, por ser um pouco abstrato e possuir poucas aplicações, e, muitas vezes, os professores não aprofundam a definição. É por isso que considero o uso das informações contidas na dissertação de Paula (2007) como um conteúdo histórico que pode fazer diminuir essas lacunas e dar mais sentido às aulas deste conteúdo. Minha consideração se apoia em Mendes (2015) quando assevera que:

> O conteúdo histórico deve ser o elemento provocador da investigação e gerador da matemática a ser explorada nas discussões de toda a classe, pois se constitui um fator esclarecedor dos porquês matemáticos tão questionados pelos estudantes de todos os níveis de ensino. (MENDES, 2015, p. 134).

Em relação aos trabalhos publicados e analisados nesta tese, em História e Epistemologia da Matemática, esse é um dos que mais apresentam contribuições para o Ensino Médio, mesmo sendo um conteúdo pouco visto. Trata-se de um trabalho repleto de detalhes que, se bem explorado, pode render diversas atividades e formas de ensinar. Além dos números complexos, não podemos esquecer que o segundo capítulo é um excelente material sobre equações quadráticas e cúbicas, com ênfase nas quadráticas, que, por sua vez, é um conteúdo mais explorado na educação básica, ou seja, um dos conteúdos abordados na dissertação de Paula (2007) é trabalhado sempre, por todos os docentes, tanto no Ensino Fundamental, como no Médio.

A partir das reflexões apesentadas anteriormente, considero que esse trabalho é uma fonte de material com um potencial didático incrível para ser estudado por professores da Educação Básica, para ser explorado nos conteúdos de equações do segundo grau (Ensino Fundamental e Médio), polinômios (os estudos sobre as equações cúbicas) e números complexos.

Dissertação 9: Uma Visita ao Universo Matemático de Lewis Carroll e o (Re)encontro com sua Lógica do Nonsense

Esta dissertação aborda como o professor de matemática, Lewis Carroll, pseudônimo de Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), estabeleceu conexões entre a matemática e a literatura um ambiente lúdico de aprendizagem dessa disciplina. Autor dos conhecidos Alice no País das Maravilhas e Alice Através do Espelho, acabou utilizando um universo real e complexo, chamado de lógica nonsense, como elemento para motivar o desenvolvimento do pensamento do leitor, levando-o, assim, a aprender, estabelecendo uma ligação entre o concreto (matemática) e o imaginário (seu universo).

Vejamos o quadro 51:

Quadro 51: Descritores de análise da Dissertação 9 – Ensino Médio

Título: Uma Visita ao Universo Matemático de Lewis Carroll e o (Re)encontro com sua Lógica do Nonsense
Autor (a): Rafael Montoito Teixeira
Orientador (a): Iran Abreu Mendes
Ano de defesa: 2007
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimentos de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Lógica (Outros)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria plana, geometria analítica, equações e Aritmética
Resumo: Exímio professor de matemática, Lewis Carroll, pseudônimo de Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), fez da mistura da matemática com a literatura um ambiente lúdico para aprendizagem dessa disciplina. Autor dos conhecidos Alice no país das Maravilhas E Alice através do Espelho, acabou utilizando um universo real e complexo no qual se utiliza do que chamamos de lógica nonsense[13], como elemento para motivar o desenvolvimento do pensamento do leitor, levando-o, assim, a aprender, estabelecendo uma ligação entre o concreto (matemática) e o imaginário (seu universo). Com o objetivo de investigar e discutir as potencialidades didáticas de suas obras e de elencar alguns elementos que possam contribuir para uma educação matemática descentralizada da tradicional metodologia de seguir os modelos e decorar fórmulas, visitamos suas obras tendo por base os estudos sobre arqueologia do saber (FOUCAULT, 2007), o pensamento racional e o pensamento simbólico (VERGANI, 2003) e sobre a importância das histórias e narrativas para o desenvolvimento da cognação humana (FARIAS, 2006). Por meio de um estudo descritivo analítico, utilizamos a construção literária, apresentamos parte de nosso estudo através de um romance matemático, visando conferir à matemática escolar um encanto particular, sem privar-lhe de suas propriedades básicas enquanto disciplina e conteúdo. Nosso estudo mostrou o quanto as obras de Carroll possuem uma forte vertente didática que podem se desdobrar nas mais variadas atividades de estudo e ensino para as aulas de matemática.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Teixeira (2007).

O objetivo deste trabalho foi investigar e discutir as potencialidades didáticas das obras do professor Lewis Carroll, elencando alguns elementos que possam contribuir para

[13]*Nonsense*, oriundo do termo francês *non-sens*, é um termo utilizado para designar algo *sem sentido*, irreal, fora dos parâmetros comuns, desprovido da razão. Embora apareça mais frequentemente na literatura (outro bom exemplo é *Dom Quixote*, de Miguel de Cervantes), também é utilizado para qualificar obras das demais manifestações artísticas.

uma educação matemática descentralizada da tradicional metodologia de seguir modelos e decorar fórmulas. O autor se fundamenta teoricamente em Arqueologia do saber (Foucault, 2007); Pensamento Racional e pensamento simbólico (Vergani, 2003); Histórias e Narrativas para o desenvolvimento da cognição Humana (Farias, 2006). Este estudo mostrou o quanto as obras de Carroll possuem uma forte vertente didática que pode se desdobrar nas mais variadas atividades de estudo e ensino para as aulas de matemática, principalmente em conteúdos de aritmética, geometria e lógica, apesar de abordar diversos conteúdos, sendo o conteúdo de lógica o conteúdo principal focalizado.

Consideramos esta dissertação com potenciais didáticos para o Ensino Médio, pois Teixeira escreve toda em forma de romance para nos mostrar como Lewis Carroll aborda a matemática em sua literatura, retratando muitos conceitos de geometria, lógica e aritmética. Segundo Teixeira (2007), o objetivo de Carroll não era dar aulas de matemática com seus romances, mas despertar a curiosidade matemática sobre alguns conceitos. Todavia, existe uma exceção na obra *Euclid and his modern rivals*, um romance matemático relacionado às discussões epistemológicos referentes à Geometria Euclidiana.

No início da dissertação, Teixeira faz comentários sobre outros autores além de Lewis Carroll, que escreveram romances matemáticos, dentre eles, Monteiro Lobato, na obra *Aritmética da Emília*, em 1935, abordando, em sua obra, os conteúdos: números decimais, frações, operações de números decimais, MMC, Algarismos romanos, raízes quadradas, entre outros assuntos de aritmética. Ele comenta sobre a diferença entre a obra de Lobato e Carroll. Na primeira, a matemática é explícita, ela está claramente presente nas obras, enquanto, na segunda, a matemática está implícita e vai sendo apresentada na própria narrativa, o mundo matemático é apresentado através da lógica nonsense. Também foi citado Malba Tahan e sua obra *O Homem que Calculava*. Nesta parte inicial, a dissertação já aponta uma boa contribuição didática para os docentes, pois cita importantes romances matemáticos que podem ser fatores de motivação nas aulas de matemática. As obras de Malba Tahan são bastante conhecidas, mas as de Lewis Carroll e Monteiro Lobato, não, inclusive, no que tange às obras de Lobato, são conhecidas apenas aquelas que são usadas em Língua Portuguesa. Segundo Teixeira (2007):

> Carroll vai além da aritmética de Monteiro Lobato, dos problemas de cálculo de Malba Tahan e das situações geométricas expostas por Jonathan Swift: ele se dedica à formação do pensamento lógico-matemático, base para a compreensão de tudo que se pode encontrar nestes referidos livros. Suas obras não estão focadas em apenas uma área do conhecimento matemático, mas misturam várias delas através de narrativas cujo cerne é a lógica matemática e, assim, constrói uma via de acesso ao

> conhecimento matemático à medida que adequa o conteúdo à ideia do aluno (TEIXEIRA, 2007, p. 21).

Esta dissertação foi escrita em forma de romance, de acordo com as obras de Carroll. Os tópicos foram chamados de Chá de Lewis Carroll e dividida em três partes: 1) Biografia – mostrando como sua personalidade influenciou nas suas obras; 2) Análise de algumas obras – em que teve como objetivo a comentar as obras mais raras de Carroll; 3) Os livros de Alice – esta escolha se deu pelo fato das obras serem mundialmente conhecidas e também porque o interesse de Teixeira por esse assunto aconteceu devido à obra *Alice no País das Maravilhas.*

> *Chá com Lewis Carroll* não ensina conceitos matemáticos e não apresenta exercícios a serem resolvidos e, por isso, não pode ser classificado como um projeto de livro didático. É, ao contrário, uma proposta de fonte didática construída na forma de um romance matemático, no qual a matemática lúdica das obras de Carroll é interpretada e comentada sob a luz da sua *lógica do nonsense*; é uma maneira diferente de se falar sobre matemática, cuja estrutura propõe ao leitor-aluno uma pequena viagem pela vida e obras de Carroll (TEIXEIRA, 2007, p.41).

A primeira parte se limita a biografia de Lewis Carroll, já a segunda, inicialmente, no que Teixeira chama de *Jogos e Desafios* são apresentadas quatro situações problemas denominadas, por Teixeira, de: desafios gráficos, desafios numéricos e desafios lógicos geométricos que, para serem resolvidos, mobilizam conceitos de eixo de simetria, reflexão, distâncias entre pontos, problemas numéricos, onde precisamos de equações, números fracionários e MMC e problemas lógicos, em que podemos trabalhar a lógica nonsense e também usar um pouco de lógica proposicional. Todos esses problemas são apresentados em forma de histórias literárias. Vejamos os três exemplos abordados por Teixeira:

O problema geométrico é chamado de *Bolinhos em Fila,* retirado do livro Alice no País das Maravilhas, no momento da história em que Alice está presa dentro da casa, e uma chuva de pedrinhas a atinge, transformando-as em bolinhos. O problema é o seguinte:

> Antes de Alice engolir os bolinhos, ela tentou alguns outros problemas sobre como organizá-los em filas.
> 1. Seu primeiro problema foi colocar nove bolinhos em oito linhas com três bolinhos cada.
> 2. Depois ela tentou colocar nove bolinhos em nove linhas com três bolinhos cada.
> 3. Finalmente, pensando mais um pouquinho ela organizou os nove bolinhos em dez linhas com três bolinhos cada (TEIXEIRA, 2007, p. 81 apud CARROLL, 1992, p. 3).

Como resposta, foi apresentada a seguinte figura:

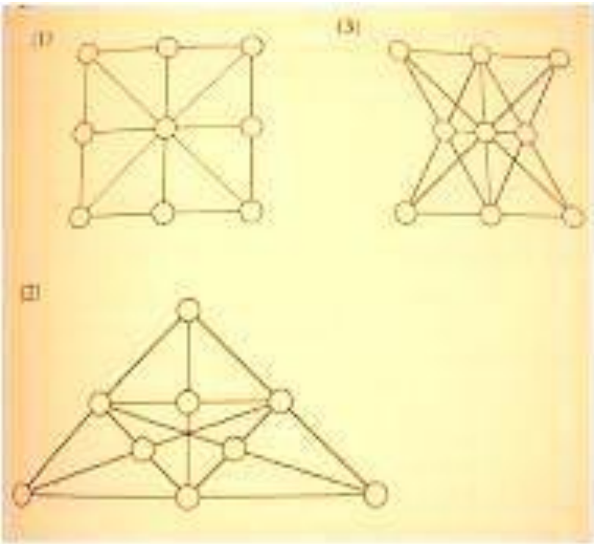


Figura 12: Resposta do problema dos Bolinhos em Fila retirada da parte que contém as soluções dos desafios de *Lewis Carroll's games and puzzles*

Percebemos que conteúdos como simetria, reflexão e distância entre pontos podem ser abordados com esse exemplo, por isso o autor considera um desafio gráfico, pois trata-se de um estudo com foco na geometria.

Vejamos agora o problema chamado Ladrões e Maçãs, que Teixeira (2007, p. 87) expõe da seguinte maneira: "O primeiro ladrão, ao ver uma loja de maçãs, roubou metade delas e mais meia maçã. O segundo ladrão, chegando depois dele, roubou metade do que o primeiro tinha roubado e mais meia maçã. Não sobrou nenhuma. Quantas maçãs havia na loja?" O interessante é que, na apresentação deste problema, há um diálogo entre dois personagens, e um deles pergunta se é possível roubar meia maçã, sendo respondido que sim, pois, no mundo de Carroll, pode tudo, ou seja, a lógica nonsense. Esse problema foi classificado em desafio numérico devido a sua solução.

> Se chamarmos de x a quantidade de maçãs que havia na loja, então o primeiro ladrão, que roubou metade da loja mais meia maçã, saiu de lá com $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ de maçãs.
>
> E o segundo, que roubou metade do que havia roubado o primeiro, saiu com $\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{2}$
>
> antecipou-se Bruno.
>
> Isso! Mas não esqueça que ele ainda pegou mais meia maçã, e que sendo assim não sobrou nada na loja. Ou seja, a soma destes dois furtos tem que ser x, que era a quantidade que havia na loja. Isto dá a equação: _ apertou a tecla com entusiasmo

> para fazer a tela mudar para $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{2}=x$ Resolvendo isso, o resultado dá x = 5 maçãs! (TEIXEIRA, 2007, p. 88).

Esse problema apresentado em forma de romance aborda os conteúdos de equações, números fracionários e MMC. Por isso, o autor classificou como um desafio numérico. O último problema do livro Jogos e Desafios de Carroll apresentado por Teixeira foi classificado como sendo um desafio lógico.

> O Dodô diz que o Chapeleiro mente.
> O Chapeleiro diz que a Lebre de Março mente.
> A Lebre de Março diz que tanto o Dodô quanto o Chapeleiro mentem
> Quem está dizendo a verdade?

Para essa solução, precisamos usar lógica proposicional e saber um pouco de tabela-verdade, pois, na terceira afirmação, temos o conectivo “e”. Vejamos uma solução usando lógica proposicional:

Lembrete: Tabela-verdade do conectivo “e”

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p : O Dodô diz que o Chapeleiro mente

q : O Chapeleiro diz que a Lebre de Março mente.

r_1 : Dodô Mente

r_2 : Chapeleiro Mente

r : A Lebre de Março diz que tanto o Dodô quanto o Chapeleiro mentem

Quem está dizendo a verdade?

Primeira Situação p é verdadeira:

p : O Dodô diz que o Chapeleiro mente (V)

Se o Chapeleiro mente, então, a Lebre diz a verdade, de acordo com a preposição q, pois, se p é verdade, então, q é falsa.

Se a Lebre diz a verdade, então, a preposição r é verdadeira, como $r : r_1 \wedge r_2$. Então, para r ser verdade, r_1 e r_2 também são verdadeiras. Logo, Dodô mente, e o Chapeleiro mente.

Chegamos a uma contradição, pois consideramos que Dodô fala a verdade, quando dizemos que p é verdade.

Agora vamos levar em consideração que uma segunda situação p é falsa.

p : O Dodô diz que o Chapeleiro mente (F).

Se Dodô mente, então, o Chapeleiro diz a verdade. Ou seja, q é falsa.

Se o Chapeleiro diz a verdade, então, a Lebre mente. Ou seja, r é falsa.

Podemos ter três situações:

1) Dodô Mente, e Chapeleiro fala a verdade.
2) Dodô não Mente, e Chapeleiro não mente.
3) Dodô fala a verdade, e Chapeleiro mente.

Para não entrar em contradição, a primeira opção é correta.

Logo,

A resposta para a pergunta que foi: quem está dizendo a verdade?

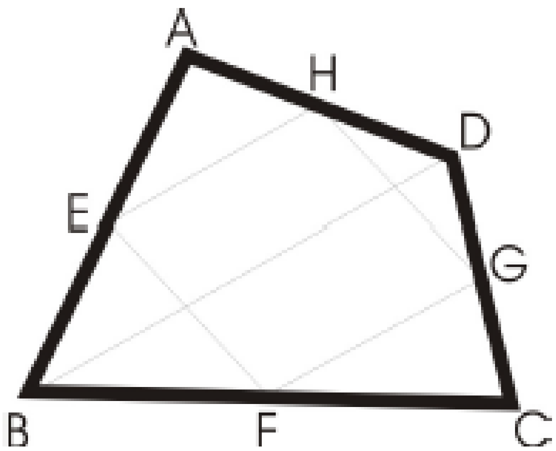
O Chapeleiro.

Esta solução, usando lógica proposicional, foi de elaboração própria. Para este livro de Carroll, *Jogos e Desafios*, Teixeira apresentou três situações que podem ser trabalhadas em diversos níveis de Ensino (Fundamental, Médio e Superior).

Um outro livro abordado, chamado *Algumas Aventuras de Sílvia e Bruno*, apresentam conteúdos de MMC, regra de três e elipses. No final da dissertação, Teixeira apresenta um roteiro de atividades usando esta obra como exemplo. Diferente do Livro de *Jogos e Desafios*, neste, a matemática aparece bem discreta, não tendo sido apresentados problemas nem desafios, os conceitos matemáticos foram citados nas histórias, e a ideia é que alguém que saiba o significado esteja lendo para quem não conhece, desenvolvendo, assim, o conceito. Vejamos como é apresentada a ideia de elipse:

> ‘Do que são feitas essas rodas, então?’
> ‘Elas são ovais, senhor. Por essa razão, ao se deslocar, a carruagem sobe e desce.’
> ‘Sim, e arremessam a carruagem para frente e para trás. Mas como elas conseguem também *agitá la*?’
> ‘Elas não estão alinhadas, senhor. O ponto superior de uma oval corresponde ao meio da outra. Assim, ao deslocar-se, a carruagem primeiro se eleva de um lado, depois do outro. E ela balança o tempo todo. Ah!, você precisa ser um bom marinheiro para viajar nas nossas carruagens-canoas!’(CARROL, 1997, p. 193 – 194 apud TEIXEIRA, 2007, p. 93).

Teixeira também faz uma análise de alguns livros considerados desprezados de Carroll, comentando o porquê desse desprezo. A esse respeito, cita dois. O primeiro deles, *Problemas de Travesseiros*, que apresenta 72 problemas que abordam álgebra, geometria e trigonometria com demonstrações formais e organizadas. Na dissertação, Teixeira mostra um exemplo resolvido de geometria plana, que aborda o conteúdo de quadriláteros, cujo enunciado, na dissertação de Teixeira (2007, p. 96), é: “Se os lados de um quadrilátero passam pelos vértices de um paralelogramo, e se três deles se bissecam nos vértices deste, demonstre que o quarto também o faz”. Vejamos a solução:



> Seja ABCD o quadrilátero; façamos que os três lados AB, BC e CD sejam bissecados pelos vértices do paralelogramo EFGH.
>
> Unamos B e D.
>
> Em consequência, no triângulo BCD, os lados BC e CD são bissecados em F e G e, portanto, FG é paralela a BD mas EH é paralela a BD, portanto, os triângulos AEH e ABD são semelhantes;
> Como AE é a metade de AB então AH é a metade de AD (TEIXEIRA, 2007, p. 96).

De acordo com Teixeira (2007), esse livro deve ser usado em aulas de geometria e trigonometria no Ensino Superior, devendo haver discussão entre professores e alunos que gostam de desafios matemáticos. Depois dessa afirmação, chego à conclusão de que podemos aplicar com alunos do Ensino Médio também, desde que os conceitos utilizados sejam pertinentes à sua formação, mais especificamente com aqueles alunos que se preparam para as Olimpíadas de Matemática.

O segundo livro, *Uma História Embrulhada*, apresenta uma série de dez histórias chamadas de *nós*, com o objetivo de transformar cálculos matemáticos em brincadeiras, utilizando histórias com, no mínimo, três páginas. Segundo Teixeira (2007), o livro é mais leve que *Problemas de Travesseiros* e pode ser usado do Ensino Fundamental ao Superior, inclusive, em cursos de formação de professores.

Em seguida, para finalizar a segunda parte, foi apresentado o jogo que Carroll apresentava para ensinar lógica a seus alunos, o *Jogo da Lógica*, retirado do livro de mesmo nome. Na dissertação, Teixeira mostrava detalhadamente como se jogava e o que se explorava de lógica com os alunos.

Na terceira parte da dissertação, foram analisados dois livros, *Alice no País das Maravilhas e Através do Espelho*, que Teixeira divide em dezenove itens. Iremos fazer uma descrição comentada, sempre buscando potenciais didáticos de cada item.

Os sete primeiros itens abordam o livro *Através do Espelho*, que ensina a jogar xadrez. A partir da História de Alice, Teixeira apresenta um diálogo entre Carroll e um garoto chamado Bruno. Nesta parte do diálogo, o objetivo foi, por intermédio do livro, ensinar o garoto a jogar xadrez. Nesta aventura de Alice, os personagens que ela encontrará na história estavam baseados nos movimentos do xadrez. Menezes (2008, p. 52) nos diz que “o xadrez é um jogo muito rico em matemática e lógica, que estão presentes em sua estrutura”. Por isso, consideramos importante um trabalho com xadrez no Ensino Médio, ratificando a relevância deste trabalho de Carroll.

No diálogo apresentado por Teixeira, toda história se baseia numa partida de xadrez, com o objetivo inicial de ensinar os movimentos do jogo de xadrez e também a lógica do jogo. Vejamos uma dessas passagens, ensinando o movimento dos peões:

> Junto à estaca de dois metros a Rainha virou o rosto e disse: ‘Um peão avança duas casas em seu primeiro movimento, como você sabe. Assim, você vai avançar *muito* rápido para a Terceira Casa... de trem, eu acho... e num instante vai se ver na Quarta Casa. Bem, *essa* casa pertence a Tweedledum e Tweedledee... a Quinta Casa é quase

> só água... a Sexta Casa pertence a Humpty Dumpty... (...) a Sétima Casa é toda no bosque... contudo, um dos Cavaleiros lhe mostrará o caminho... e na Oitava Casa, nós as Rainhas, estaremos juntas; é tudo festa e diversão!’ Alice se levantou, fez uma reverência e se sentou de novo. Na estaca seguinte a Rainha se virou e, desta vez, disse: ‘Fale em francês quando a palavra em inglês para alguma coisa não lhe ocorrer... ande com as pontas dos pés para fora... e lembre-se de quem você é.’ Não esperou que Alice fizesse uma reverência dessa vez, caminhando rápido para a outra estaca, onde se virou por um instante para dizer ‘Adeus’ e correu para a seguinte (CARROLL, 2002, p. 158-159 apud TEIXEIRA, 2007, p. 120).

Na continuação da história e o aprendizado sobre o xadrez, foi abordado o conteúdo de simetria, lógica matemática, premissas, lógica binária e teoria dos conjuntos, tudo isso de forma literária, na história do livro *Através do Espelho*, com Carroll ensinado Bruno a jogar xadrez.

Em sua dissertação, Teixeira inicia um diálogo entre Carroll, Bruno, Stuart, Newton e Andréa, sobre o livro *Alice no País das Maravilhas*, comentando, primeiramente, sobre o conteúdo de figuras semelhantes, citando os triângulos e fazendo a relação com a mudança de tamanho de Alice no decorrer da História. Em seguida, aborda Indução Matemática. Vejamos:

> Na história, até este ponto, Alice já passou por três *eventos absurdos*, cada evento ou situação vivenciada por ela cumpre o papel de um número positivo para indução: P(1) – um coelho que usa colete e vê as horas num relógio de bolso, P(n) – sua queda para dentro da Terra e P(n + 1) – sua diminuição de tamanho. Todos estes eventos absurdos foram reais para ela e, sendo assim, parece-lhe lógico supor que todos os próximos acontecimentos também serão estranhos e incomuns, o que de fato se mostrará verdade no País das Maravilhas (TEIXEIRA, 2007, p. 147).

Também foi citado o conteúdo de Lógica Matemática, mais precisamente, Lógica de Proposições, comentando sobre o capítulo cinco do livro *Alice no País das Maravilha*, mostrando diversos problemas de lógicas com as proposições retiradas do texto, inclusive, provando algumas implicações lógicas. A existência do zero também foi abordada, além do conteúdo de circunferência e polígonos, tabuada, números negativos, números primos, conjuntos e igualdades.

O interessante dessa dissertação é que, em suas considerações finais, Teixeira dá dicas de como utilizar as obras de Carroll em sala de aula. Vejamos algumas: 1) Criação de ambiente de literatura matemática em sala de aula com foco no aprendizado; 2) Utilização do imaginário dos alunos para conduzir os estudos sobre as histórias agindo como acionador cognitivo; 3) Trabalho com um livro inteiro ou apenas com trechos intercalados com determinados conteúdos; 4) Elaboração de atividades sobre os romances matemáticos explorando o pensamento lógico-matemático dos alunos; 5) Exploração dos jogos e desafios que já estão prontos nos romances de Carroll. Para finalizar a dissertação, Teixeira apresentou um roteiro de atividade usando o livro *Algumas Aventuras de Sílvia e Bruno*, abordando os níveis fundamental, médio e superior.

Dissertação 10: Um estudo sobre elementos matemáticos presentes na narrativa da descrição do Templo de Jerusalém

Quadro 52: Descritores de análise da Dissertação 10 – Ensino Médio

Título: Um estudo sobre elementos matemáticos presentes na narrativa da descrição do Templo de Jerusalém
Autor (a): Sabrina Helena Bonfim
Orientador (a): Ubiratan D'Ambrosio
Ano de defesa: 2007
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Rio Claro
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo abordado: Sistemas Métricos Decimal (Conhecimentos Numéricos)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Plana
Resumo: O escopo dessa pesquisa trata de identificar elementos matemáticos presentes na narrativa da descrição do primeiro templo do povo judeu, ou seja, do Templo de Jerusalém, em quatro versões bíblicas distintas. Deste modo, durante seu desenvolvimento, fizeram-se presentes determinadas *ticas* de *matema* relacionadas a essa descrição que corroboram o quadro da análise efetuada. Para tanto, a condução do trabalho teve como aportes os "olhares" da Etnomatemática, além de recorrências a estudos de História da Arquitetura, bem como de Geometria Sagrada e Simbolismo Religioso. Um conciso relato sobre a história do povo judeu, compreendendo desde a sua formação até a destruição da última reconstrução do Templo, com a conseqüente invasão da cidade de Jerusalém pelos romanos, compõe o texto com vistas a uma contextualização histórica. Ao final, verificaram-se características de uma descrição de natureza simples, embora a obra tenha possuído um caráter suntuoso. Além disso, depreende-se também a existência de uma matemática voltada à aplicabilidade construtiva, à presença de formas geométricas, unidades de peso, comprimento, capacidade, etc., possivelmente relacionadas à edificação do Templo e às atividades realizadas. Essas características se constituem como parte do quadro dos elementos matemáticos procurados.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da dissertação de Bonfim (2007).

Esta dissertação teve como foco temático a matemática envolvida na construção do templo de Jerusalém, objetivando identificar elementos matemáticos presentes na narrativa da descrição do primeiro templo do povo judeu, ou seja, do templo de Jerusalém, em quatro versões da Bíblia: O Tanach (1996), que é um acrônimo de: Torá (Pentateuco), Neviim (Profetas) e Ketuvim; a Bíblia de Jerusalém (2.ed., 2004), a Bíblia Shedd (2.ed.,1997) e a Bíblia Chouraqui (1995).

A autora se fundamentou teoricamente na Etnomatemática, história da arquitetura e geometria sagrada e simbolismo religioso, não deixando claro seu problema de pesquisa, mas, para elaboração, ela parte do pressuposto da dificuldade de encontrar materiais de pesquisa que abordassem elementos matemáticos da cultura judaica/hebraica, em conversas com pesquisadores em história da matemática e por seu interesse pessoal, motivo pelo qual resolveu fazer essa pesquisa. Segundo Bonfim:

> Diante do intento da pesquisa, identifica-se, a priori, dois conjuntos de elementos matemáticos presentes na narrativa da descrição do Templo de Jerusalém, referindo-se o primeiro àqueles que se encontram evidenciados na descrição propriamente dita e um segundo conjunto, constando de elementos relacionados às atividades realizadas no Templo, atividades estas das quais transcenderam espaço e tempo podendo, ainda hoje, ser evidenciadas em diferentes culturas (BONFIM, 2007, p. 74).

Foi utilizado o método da pesquisa documental, e são abordados conteúdos de aritmética, como medidas de capacidade, medidas de área, medidas de comprimento e medidas de tempo nas descrições das quatro versões da Bíblia. E são justamente nesses conceitos que encontramos os potenciais didáticos que podem ser trabalhados no Ensino Médio, elaborando problemas, usando as unidades mencionadas na bíblia relacionadas à construção do Templo de Jerusalém e transformando-as para unidades atuais. Vejamos os quadros apresentados por Bonfim em sua dissertação:

Quadro 53: Unidades de Medidas de Peso

Nome	Correspondente Bíblico	Equivalente Atual
Gera ou Óbolo	1/10 do Beca ou 1/20 do Siclo	0,571 g
Beca	10 Geras ou 1/2 Siclo	5,712 g
Siclo (unidade básica)	10 Geras ou 2 Becas	11,424 g
Mina ou Arrátel	50 Siclos	571,,2 g
Talento	3000 Siclos ou 60 Minas	34, 272 g

Fonte: Bonfim (2007, p. 77)

Vejamos agora as medidas de capacidades que, segundo Bonfim (2007), ao longo do texto bíblico, são divididas em duas partes: secas e líquidas. As medidas são comparadas com o litro.

Quadro 54: Unidades de Medida de Capacidade Seca

Nome	Correspondente Bíblico	Equivalente Atual em litros
Cabo	1/18 do Efa ou 1/6 da Medida	1
Gômer	1/10 do Efa	1,761
Alqueire ou Seá	1/3 do Efa	5,871
Chaliche e Medida		
Efa (unidade básica)	10 Gômeres ou 1/10 do Ômer	17,621
Leteque ("um omêr e meio")	5 Efas ou ½ do Ômer	88,11
Coro ou Ômer	10 Efas	176,21

Fonte: Bonfim (2007, p. 79)

Quadro 55: Unidade de Medida de Capacidade Líquida

Nome	Correspondente Bíblico	Equivalente Atual em litros
Sextário ou Logue	1/12 do Him	0,291
Him	1/6 do Bato	3,471
Bato (unidade básica) e Cado	1/10 do Coro	20,821
Coro	10 Batos	208,21

Fonte: Bonfim (2007, p. 79)

Também foram apresentadas as medidas de comprimento e distância:

Quadro 56: Unidades de Medidas de Comprimento

Nome	Correspondente Bíblico	Equivalente Atual
Dedo	1/4 de Quatro Dedos	1,8 cm
Quatro Dedos	1/3 do Palmo ou 1/6 do Côvado	7,4 cm
Palmo	1/2 do Côvado	22,2 cm
Côvado (unidade básica)	2 Palmos	44,4 cm
Braça	4 Côvados	1,80 m

Fonte: Bonfim (2007, p. 80)

Quadro 57: Unidades de Medidas de Distância

Nome	Correspondente Bíblico	Equivalente Atual
Tiro de Pedra		20 a 30 m
Tiro de Arco		100 a 150 m
Jornada de um Sábado	200 Côvados	888 m
Jornada de um dia		30 a 40 km
Estádio Romano		185 m
Milha Romana[14]	8 Estádios	1480 m

Fonte: Bonfim (2007, p. 80)

Aparecem na dissertação as unidades monetárias que eram usadas na época.

Quadro 58: Unidades Monetárias

Nome	Correspondente Bíblico	Tipo
Lepto ("pequenas moedas")	1/2 do Quadrante ou 1/128 do Denário.	Moeda de cobre ou bronze
Quadrante ("cinco réis")	1/4 do Asse ou 1/64 do Denário	Moeda romana de cobre
Asse ("ceitil")	1/6 do Denário	Moeda romana de cobre
Denário (unidade básica, "dinheiro").	Salário de um dia de Trabalho	Moeda romana de prata
Dracma (unidade básica)	Igual a 1 Denário	Moeda grega de prata
Didracma	2 Dracmas ou 2 Denários	Moeda grega de prata
Tetradracma ("moedas de prata")	4 Dracmas ou 4 Denários	Moeda grega de prata
Estáter	2 Didracmas ou 4 Denários	Moeda grega de prata

Fonte: Bonfim (2007, p. 78)

As medidas de área também constaram no texto. Equivalente a essas medidas, encontra-se a Jeira, cuja área é de aproximadamente 2.500 metros quadrados, o que equivale a uma junta que bois podem arar em um dia. Também pode ser comparado a um quarteirão quadrado com 50 metros de lado.

Esse assunto de grandezas e medidas pode ser trabalhado no Ensino Fundamental e Médio. Na prova de Matemática e suas Tecnologias do ENEM, por exemplo, exigem-se algumas competências e habilidades dos alunos quanto a isso. Segundo Viana (2013), são sete competências e a terceira diz respeito a construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. Vejamos as habilidades:

[14] Na dissertação de Bonfim, a Milha Romana, que representa 8 estádios, tinha como equivalente atual o valor de 1,479 m. Fizemos a correção, baseando-nos na informação anterior de que o Estádio correspondia a 185 m.

> H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
> H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
> H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas e grandezas.
> H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
> H14 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandeza e medidas. (VIANA, 2013, p. 6).

Com isso, podemos utilizar as informações históricas contidas na Bíblia Sagrada, mais precisamente, no que se refere à construção do Templo de Jerusalém, para formular problemas em que os professores possam relacionar as medidas e grandezas daquela época com a realidade atual. Como afirma D'Ambrosio (2012), conhecer, historicamente, pontos altos da matemática de ontem poderá, na melhor das hipóteses, e de fato faz isso, orientar no aprendizado e no desenvolvimento da matemática de hoje. Finalizamos, afirmando que a dissertação de Bonfim, se bem explorada, possui potenciais didáticos a serem explorados no Ensino Médio no que diz respeito a conteúdos de aritmética.

4.2 As Teses: Temas, Problematizações e Potenciais Didáticos

Tese 1: A Obra "De Triangulis Omnimodis Libri Quinque" de Johann Müller Regiomantanus (1436 – 1476): Uma Contribuição para o Desenvolvimento da Trigonometria

O objeto de estudo desta tese foi A Obra *"De Triangulis Omnimodis Libri Quinque"*, de Johann Müller Regiomantanus (1436 – 1476): Uma Contribuição para o Desenvolvimento da Trigonometria e foco temático a História da Trigonometria. A pesquisa foi bibliográfica, tendo sido utilizada, para tradução em Português, uma versão em inglês de Barnabas Hughes de 1967, na qual se encontra o trabalho original em latim, porém algumas dúvidas foram tiradas diretamente da obra original, como algumas demonstrações e algumas figuras.

Vejamos o quadro 59 a seguir:

Quadro 59: Descritores de análise da Tese 1 – Ensino Médio

Título: A Obra “De Triangulis Omnimodis Libri Quinque” de Johann Müller Regiomantanus (1436 – 1476): Uma Contribuição para o Desenvolvimento da Trigonometria
Autor (a): Ana Carolina Costa Pereira
Orientador (a): Bernadete Barbosa Morey
Ano de defesa: 2010
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Abordagem: Vida e Obra de Matemático e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Trigonometria (Conhecimentos algébricos)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Plana, Geometria Espacial, Aritmética e Equações Algébricas
Resumo: A trigonometria, ramo da matemática relacionada com o estudo de triângulo, desenvolveu-se a partir de necessidades práticas, principalmente ligadas à Astronomia, Agrimensura e Navegação. Johann Müller Regiomantanus (1436 – 1476) matemático e astrônomo do século XV, desempenhou um importante papel para o desenvolvimento dessa ciência. Sua obra intitulada *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* escrita por volta de 1464, e publicada postumamente em 1533, apresenta a primeira exposição européia sistemática de Trigonometria Plana e Esférica, num tratamento independente da Astronomia. No presente estudo apresentaremos a descrição, a tradução e a análise de alguns aspectos desta importante obra da História da Trigonometria. Para tanto, a tradução foi realizada a partir de uma versão do livro *Regiomontanus on Triangles* de Barnabas Hughes de 1967. Nele, encontra-se o trabalho original em latim e uma tradução em inglês. Para este estudo, utilizamos, para a maior parte da nossa tradução em português, a versão em inglês, porém algumas dúvidas de enunciado, demonstração e figuras foram feitas com base do original em latim. Nessa obra, podemos perceber que a Trigonometria é abordada como um ramo da Matemática subordinado à Geometria, isto é, voltada para o estudo dos triângulos. Regiomontanus fornece um grande número de teoremas originais como a fórmula trigonométrica para a área de um triângulo. Usa Álgebra para resolver problemas geométricos e principalmente mostra o primeiro teorema prático para a lei dos Cossenos na Trigonometria Esférica. Assim, este estudo mostra um pouco do desenvolvimento da Trigonometria no século XV, principalmente no que diz respeito a alguns conceitos como seno e cosseno (seno reverso), exposto na obra analisada. É de suma importância para a linha de pesquisa em História da Matemática, mais especificamente na área de análise histórica e crítica de fontes literárias ou no estudo da obra de um matemático particular.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Pereira (2010).

O objetivo geral desta pesquisa foi realizar uma tradução comentada e anotada do livro *“De Triangulis Omnimodis Libri Quinque”*, impresso em 1533, cujo autor é Johann Müller Regiomantanus, personagem de grande importância no cenário do século XV. A tese consta de quatro objetivos específicos: 1) Apresentar a versão geral da história da trigonometria; 2)

Situar Regiomontanus no contexto do desenvolvimento da trigonometria; 3) Colocar à disposição da comunidade de Educadores e Historiadores brasileiros o texto *De Triangulis Omnimodes Libri Quinque*, traduzido para o português como cinco livros de todos os tipos de triângulos; 4) Destacar as contribuições de Regiomantus e de sua obra *De Triangulis* para o desenvolvimento da trigonometria.

A tese foi dividida em três capítulos. O primeiro deles aborda um pouco da História da Trigonometria, antes do século XV, referindo-se ao nascimento da trigonometria para uso na Astronomia, a Trigonometria das cordas e semicordas, a expansão da Trigonometria e as funções trigonométricas e o surgimento da Trigonometria como ciência independente na Europa.

No primeiro capítulo desta tese, já foram apresentados pelo autor conteúdos matemáticos. Na parte que se refere à Trigonometria das cordas, Pereira (2010) apresenta como é possível, por meio de raciocínio geométrico, estabelecer a equivalência entre conceito de comprimento de corda de um ângulo central e o seno da metade deste mesmo ângulo, baseando-se nesta equivalência para argumentar que a tabela de cordas de Ptolomeu é uma tabela trigonométrica. Vejamos a figura a seguir:

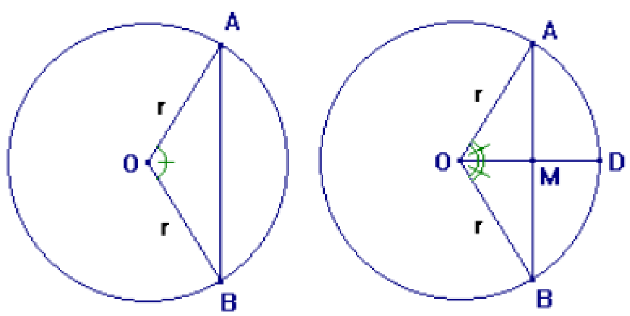
AO = OB = r = 60 partes

AB é a corda = $crd2\alpha$

$2\alpha = A\hat{O}B$

$A\hat{O}M = B\hat{O}M = \alpha$

$OD \perp AB$



Então,

$$sen\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{2AM}{2OA} = \frac{crd2\alpha}{120}$$

Figura 13: Equivalência entre Seno e corda, retirado da tese de Pereira (2010, p. 15)

Seguindo esse raciocínio, apresentou-se, em forma de quadro, uma tábua de cordas com vários ângulos. Segundo Pereira (2010), Ptolomeu utilizou alguns ângulos para calcular essas cordas, fazendo a relação com os lados de polígonos regulares inscritos. Exemplos: crd36° é o lado do decágono inscrito; crd60° é o lado do hexágono inscrito; crd72° é o lado do pentágono inscrito; crd90° é o lado do quadrado inscrito; crd120° é o lado do triângulo equilátero inscrito. Para isso, ele apresenta a construção desses polígonos e a determinação do comprimento do lado desses polígonos, utilizando o que ele chamou de parte (p), ou seja, 1/120 do comprimento do diâmetro da circunferência. A medida usada para o arco foi o grau (1/360 da circunferência completa). Para expressar as subdivisões dos comprimentos das cordas, Ptolomeu lançou mão do sistema sexagesimal.

Quadro 60: Tábuas com Cordas de alguns Ângulos

Ângulo	**Corda**
36°	37^p 04 ‘55”
60°	60^p
72°	70^p 32’ 03”
90°	84^p 51’ 10”
108°	97^p 04’ 56”
120°	103^p 55’ 23”
144°	114^p 07’ 37”
180°	120^p

Fonte: Morey (2001, p. 36 apud PEREIRA, 2010p. 16)

É um conteúdo possível de fazer uma adaptação para o Ensino Médio, relacionando a geometria plana e a trigonometria, comparando o comprimento da corda com os polígonos regulares inscritos. Nesta atividade, o professor pode fazer uso da tecnologia de software, como, por exemplo, geogebra, sempre fazendo a conexão da forma com que Ptolomeu calculava, com a forma que podemos calcular na atualidade.

Ainda neste capítulo, a autora faz um estudo do surgimento das funções trigonométricas através da meia-corda usada pelos indianos, para quem o comprimento da meia-corda do ângulo central representava o seno. Pereira apresenta a demonstração do seno e do cosseno indianos e mostra uma tabela com vários senos e cossenos de diversos ângulos diferentes. Achamos essa parte do trabalho propícia para utilização no Ensino Médio, incluindo as informações históricas contidas na tese, que podem ser utilizadas para introduzir o conceito de funções trigonométricas em sala de aula, pois foram retratados, nesta parte da tese de Pereira, conteúdos de trigonometria que geralmente são pouco trabalhados em sala de aula e que os alunos possuem dificuldades quando estão aprendendo. É o caso das fórmulas do arco metade, soma e subtração de arcos. Com esses conteúdos sendo abordados de forma diferenciada, com o uso da história, poderá ser um recurso favorável à construção dessas noções matemáticas. Segundo Mendes (2009), as atividades que ele desenvolveu em sala de aula a partir de informações históricas, com estudantes do Ensino Médio, fizeram com que eles olhassem a trigonometria sob outro ponto de vista que não fosse aquele exclusivamente matemático.

Continuando, Pereira (2010) mostra a expansão da Trigonometria por intermédio dos árabes, com o desenvolvimento das seis funções trigonométricas básicas, algumas identidades trigonométricas que envolvem o seno e a construção de tábuas trigonométricas. Também temos demonstração de Leis do Seno, em que Pereira (2010), demonstra a Lei dos Senos, relacionando a trigonometria com os conceitos de Geometria Plana referentes a propriedades de circunferências. Vejamos a figura que ele usa para demonstração:

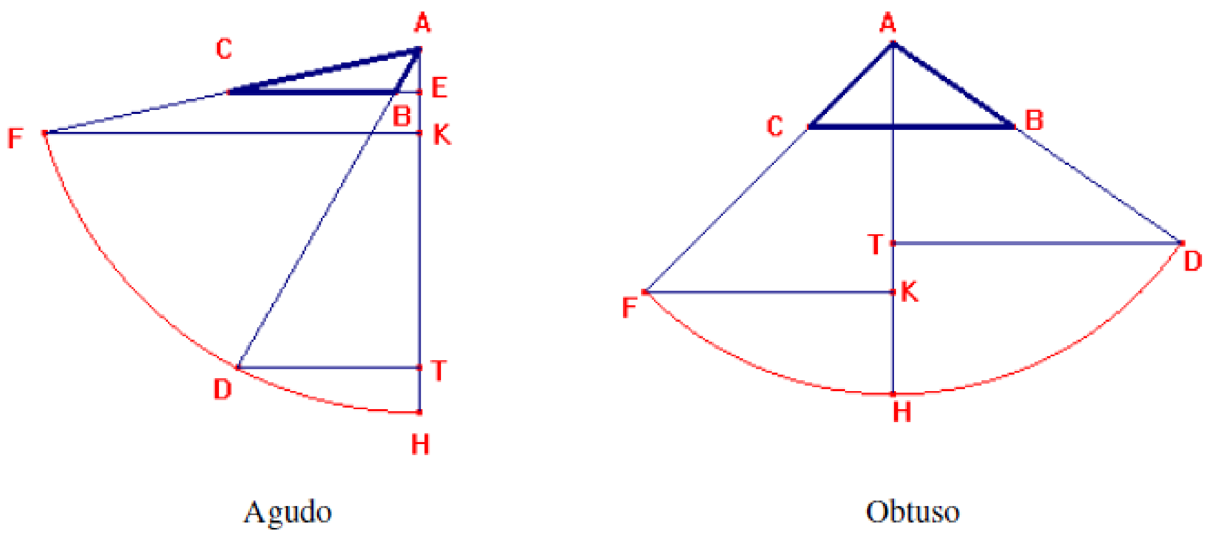


Figura 14: Lei dos Senos para triângulos agudos e obtusângulos, retirados de Pereira (2010, p. 23).

Vejamos a demonstração:

> Seja ABC, na figura anterior, os triângulos dados, acutângulo e obtusângulo. Trace AE perpendicular a BC. Prolongue AB e AC de modo que AF = AD = 60 = R. Descreva o arco DH. Trace FK e TD perpendicular a AH. No triângulo ABE, o ângulo E sendo um ângulo reto, B será o complemento de A; DT = senA; AT = senB. No triângulo AEC, FK = senA; KA = senC. Devido à semelhança dos dois triângulos ABE e ADT, temos:
> Devido à semelhança dos dois triângulos AEC e AKF, é possível deduzir a afirmação:
>
> $\frac{AB}{AC} = \frac{AK \cdot sen\, C}{AT \cdot sen\, B}$ (PEREIRA, 2010, p. 23).

No segundo capítulo, apresenta-se a biografia de Johann Müller Regiomantanus, usando como referência o livro: *Regiomantanus: His Life and Work, de Ernst Zinner*.

No terceiro capítulo, é feita a descrição da obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*, de Johann Müller Regiomantanus, seguida dos comentários. Essa obra é dividida em cinco livros, com os dois primeiros voltados para Trigonometria plana, enquanto os três últimos abordam Trigonometria esférica. O capítulo foi dividido em três momentos: 1) Descrição do livro; 2) Notas explicativas sobre a tradução em Português e 3) Comentários da obra estudada. O foco desta terceira parte do capítulo é responder ao problema de pesquisa: Como Johann Müller Regiomontanus aborda a trigonometria em sua obra *"De Triangulis Omnimodis Libri Quinque"*? E, assim, atender o objetivo de pesquisa. Em suas notas explicativas, Pereira aborda algumas informações que serão necessárias na leitura da tradução da obra. No terceiro tópico do livro, nos Comentários da obra estudada, foram escolhidos alguns exemplos em que foi feita, além da tradução, a análise e discussão dos teoremas. Provavelmente, Pereira não analisou e comentou todos os teoremas, devido à grande quantidade. Só no primeiro livro, são cinquenta e sete teoremas demonstrados. Mas, em anexo, consta a tradução de todos os cinco livros. Segundo Pereira:

> No Primeiro Livro, os teoremas do 1 ao 19, trata-se basicamente dos conceitos de grandezas ou magnitudes e razões. Dos teoremas 20 a 57, propõem-se soluções geométricas para triângulos retângulos, isósceles e escalenos, porém dos teoremas 20, 27 e 28 são exceção, pois usam explicitamente o seno de um ângulo. Vale ressaltar que o teorema 20 mostra a definição do seno. (PEREIRA, 2010, p. 68).

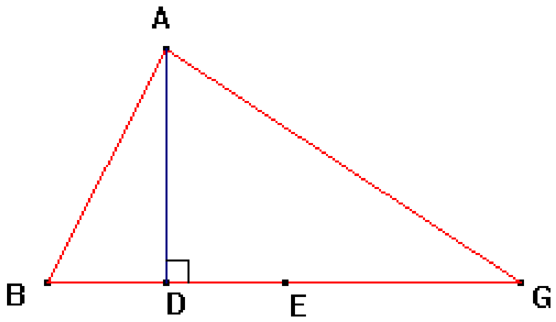
A dinâmica utilizada por Regiomontanus era apresentar o teorema, esquematizar e, em seguida, demonstrar.

No segundo livro, é o início do estudo da Trigonometria Plana. O primeiro exemplo trazido pelo autor é o Teorema da Lei dos Senos. Segundo Pereira (2010), há uma forte presença de métodos algébricos em alguns teoremas. Um aspecto de relevância no livro de Regiomontanus é o fato de ele deixar evidente, nas suas demonstrações, que só usa de artifícios algébricos quando não tem como fazer as demonstrações de forma geométrica. Vamos confirmar isso, mostrando o Teorema 12, do livro 2, apresentado na tese de Pereira:

> **Teorema 12:** Se a perpendicular é dada e a base e a razão dos lados são conhecidas, cada lado pode ser encontrado.
>
> **Esquematizando...**
> Este problema não pode ser provado neste momento através de meios geométricos, mas vamos nos empenhar para realizar isto pela arte da álgebra. Assim, se _ABG

tem perpendicular AD e base BG conhecidas, e se a razão dos lados AB e AG é dada, nós procuramos cada um destes [lados].

Demonstração



Por exemplo, deixe que a razão de AB para AG seja de 3 para 5, de forma que o lado AB seja menor que o lado AG. Disto, segue que o segmento BD é menor que segmento DG, inegavelmente. Então, deixe DE ser igual a BD, e deixe que a perpendicular AD seja dada como 5 [pés] e a base BG como 20 pés. Pegue a linha EG como 2x; consequentemente, a linha BE será (20 – 2x), e BD será a metade 10 - x, enquanto o resto [da linha] será 10 + x.

O quadrado de BD resulta em $x^2 + 100 – 20x$, para qual somando com o quadrado da perpendicular, isto é 25, são obtidos $x^2 + 125 – 20x$. De forma semelhante, o quadrado de BG será $x^2 + 20x + 100$ para qual somando com o quadrado da perpendicular, isto é, 25, são obtidos $x^2 + 20X + 125$. Assim, você terá o quadrado das duas linhas AB e AG cuja razão é de 9 para 25 - isto é, o quadrado da razão de 3 para 5 que foi a razão dos lados. Portando, como a razão do primeiro quadrado para o segundo quadrado é de 9 para 25, então, se o primeiro quadrado é multiplicado por 25 e o segundo quadrado por 9, os produtos são iguais. Restabelecendo os déficits, como é habitual, e subtraindo em ambos os lados da igualdade [da equação], nós obtemos $16x^2 + 2000 = 680x$. Sendo os restos das regras [como foi feito] como mostra a tese.

Então, a linha GE que foi determinada como sendo 2x será conhecida; consequentemente o resto da base, BE, e a metade BD serão conhecidos. [BD] juntamente com a perpendicular AD resulta no lado AB. Daí, finalmente, o lado AG é conhecido, como foi proposto. (PEREIRA, 2010, p. 73)

É possível perceber que, se fizermos um tratamento dessas informações, podemos trabalhar com os alunos do Ensino Médio esses conceitos trazidos das obras de Regiomontanus. No segundo livro, temos um total de trinta e três teoremas demonstrados, totalizando – os dois livros – noventa teoremas que podem ser usados tanto em trigonometria, como também em aulas de Geometria Plana, pois abordam muitas propriedades de triângulos que os alunos só aprendem quando estão estudando geometria. Por isso, consideramos com potenciais didáticos, desde que seja feito um tratamento dessas informações por parte dos professores.

No terceiro livro, é apresentada a fundamentação da Trigonometria Esférica com a geometria Espacial, apresentando, do primeiro teorema ao trigésimo quarto, a geometria de grandes círculos em esferas e, do trigésimo quinto teorema até o quinquagésimo sexto, um estudo de triângulos esféricos. Enquanto o quarto livro também é uma continuação da Trigonometria Esférica, dando ênfase a resoluções que precisavam de técnicas de aritmética simples, enquanto o quinto livro é uma continuação de problemas envolvendo triângulos esféricos.

Esses cinco livros de Regiomontanus possuem um potencial didático forte para ser explorado no Ensino Médio, com diversos Teoremas na área de Trigonometria, tanto no triângulo retângulo como na circunferência, mobilizando outros conceitos, como geometria plana, geometria espacial e alguns tópicos de aritmética e álgebra. Segundo Pereira:

> Apesar de a obra estudada ser direcionada à área de Geometria e Trigonometria, há momentos que, em algumas demonstrações dos Teoremas, Regiomontanus se utiliza da Aritmética e da Álgebra. Alguns teoremas e o manuseio da Álgebra se adequam para o autor à medida que existem teoremas que não podem se provados, no momento, por meios geométricos. Regiomontanus aplica assim exemplos, utilizando Álgebra para ilustrar a aplicação. É importante ressaltar que não há evidências sobre uma obra escrita por Regiomontanus que envolva essa parte da Matemática. (PEREIRA, 2010, p. 83)

Nos anexos da tese, Pereira, traz a tradução em português dos cinco livros de Regiomontanus, com a demonstração de todos os teoremas, um material com mais de 200 laudas, excelente para ser aproveitado para formulação de material a ser usado em sala de aula. Algumas demonstrações precisam de uma mobilização de diversos conceitos matemáticos, sendo considerados de nível alto para trabalhar nas turmas em geral, mas podem ser materiais bem usados voltados à formulação de desafios para serem usados em turmas de preparatório para Olimpíadas de Matemáticas, ou seja, temos um material que pode ser usado de diversas formas positivas, desde que as informações sejam bem tratadas pelos professores, antes de chegar para os alunos.

Alguns conceitos matemáticos mais profundos que não são de conhecimentos dos professores podem ser adquiridos para serem posteriormente trabalhados em sala de aula. Segundo Mendes (2009), o uso didático da História da Matemática em sala de aula requer um entendimento profundo da própria Matemática e do seu desenvolvimento histórico-epistemológico, para que, assim, seja garantido o significado dessa abordagem pedagógica. E, nesse caso, a tese de Pereira não traz apenas alguns exemplos, e sim o material completo traduzido e bem detalhado para uso do professor.

Não podemos desconsiderar também que o fato de vários problemas terem nível bastante elevados. Podemos considerar também um ótimo material para ser trabalhado em turmas de formação de professores, tanto em nas licenciaturas em matemáticas, como também em turmas de cursos de Especialização na área de Ensino da Matemática.

Tese 2: A Dinâmica do Pensamento Geométrico: Aprendendo a Enxergar Meias Verdades e a Construir Novos Significados

Quadro 61: Descritores de análise da Tese 2 – Ensino Médio

Título: A Dinâmica do Pensamento Geométrico: Aprendendo a Enxergar Meias Verdades e a Construir Novos Significados
Autor (a): Ana Lúcia Assunção Aragão Gomes
Orientador (a): Maria Cristina Dal Pian Nobre
Ano de defesa: 1997
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo abordado: Geometria Plana (Conhecimentos Geométricos)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Aritmética (Unidades de áreas) e Geometria Espacial
Resumo: Este trabalho se propõe a investigar a dinâmica do pensamento dos historiadores ao comporem um conhecimento sobre a história dos sistemas de medidas de área, enquanto forma de expressões e representações históricas, através de um estudo de caso. Para subsidiar teoricamente o nosso entendimento sobre a operação do pensamento, recorremos a algumas ideias de David Bohm (1989, 1992, 1994, 1996). Elegemos um período reconhecido pelos teóricos como contendo as origens do pensamento geométrico – abrangendo os conhecimentos desenvolvidos pelos egípcios, babilônicos, chineses, hindus, gregos e romanos e referido como comportamento um ciclo de desenvolvimento desse conhecimento, descrito como iniciação, apogeu e declínio. Assumimos essa história, tal como contada pelos teóricos, como uma versão, que organizamos e relatamos com o auxílio de três conjuntos de categorias. Um referente aos elementos envolvidos sobre o desenvolvimento do conhecimento científico. Este exercício nos possibilitou extrair as principais crenças dos teóricos que criticavam à luz do conhecimento sobre cubação (Dal Pian, 1994). Destacamos a importância da abordagem metodológica adotada neste estudo para o ensino da geometria e de sua história.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Gomes (1997).

Este trabalho corresponde a uma tese de doutorado defendida em 1997, na UFRN, orientado pela professora Maria Cristina Dal Pian Nobre, cujo foco temático foi o ensino de geometria, com o objetivo de investigar formas de expressões e representações históricas mediante um estudo de caso sobre sistemas de medidas de área. O autor se fundamentou teoricamente em David Bohm (1989, 1992, 1994, 1996) e Dal Pian (1994), e sua pesquisa foi um estudo de caso.

A tese investiga as formas de expressões e representações históricas por meio de um estudo de caso sobre sistemas de medidas de área. A pesquisa foi dividida em três capítulos. O primeiro deles apresenta subsídios para se entender como se dá a operação do pensamento. Para essa discussão, a autora escreve o capítulo todo baseado nas ideias de pensamento e diálogo de Daivid Bohm: Pensamento e Fragmentação; Pensamento: Categorias e Ordem; Pensamento: Ordem e Estrutura; Pensamento como Sistema e a Importância do Diálogo.

No segundo capítulo, Gomes (1997) procura entender o movimento do pensamento dos historiadores ao comporem um conhecimento sobre história dos sistemas de medidas de área, privilegiando um período reconhecido como contendo as origens do pensamento geométrico e que abrange os conhecimentos desenvolvidos pelos egípcios, babilônios, chineses, hindus, gregos e romanos.

Neste capítulo, começam a aparecer os conteúdos matemáticos no subtítulo chamado *Os Sistemas de Medidas de áreas e o contexto histórico*, em que Gomes vai apresentar a matemática referente aos sistemas de medidas de área em cada uma das civilizações citadas anteriormente, iniciando pela civilização Egípcia.

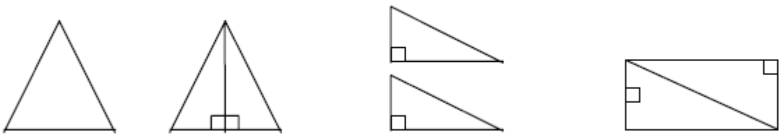
Figura 15: Papiro de Rhind. (GOMES, 1997, p. 75)

Segundo Gomes (1997), para ser feita a análise dos sistemas de medidas dos egípcios, foram usados os papiros encontrados, entre eles, um dos mais importantes foi o Papiro Rhind, escrito por volta de 2000 a 1800 a.C., mas existem outros, como o papiro de Moscou, papiro de Kaum e papiro de Berlin, todos considerados escritos matemáticos. Vejamos o exemplo de um deles.

Um dos conteúdos que podemos observar nesta parte do capítulo é o de aritmética em alguns problemas de unidades de medidas da época, em que os egípcios identificavam área e volume, relacionando com quantidades de grãos, mas isso não impedia que eles tivessem suas unidades próprias. Nos textos, aparecem alguns exemplos que podem ser reformulados e aplicados em sala de aula pelo professor, tentando relacionar com as medidas atuais. A autora faz um resumo apresentando todas as unidades de áreas utilizadas pelos egípcios.

Também foram mostrados os cálculos geométricos do povo do Egito sobre áreas. Gomes traz alguns problemas resolvidos de forma correta, e outros de forma incorreta, feitos por ele. São vários exemplos abordados, áreas de quadriláteros, triângulos, círculos. Vejamos um desses exemplos:

> "... a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamaríamos base e multiplicando isso pela altura. Ahmes justifica seu método para achar a área sugerindo que o triângulo isósceles [fig.5] pode ser pensado como dois triângulos retângulos [fig.6], um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos formam um retângulo [fig. 7]."



(GOMES, 1997, p. 86)

Ainda em relação aos egípcios, Gomes também traz um pouco de como era calculada a área de uma pirâmide. Então, é possível, por essa investigação verificar um material de grande potencial didático para ser aplicado no Ensino Médio, pois, só neste primeiro momento, percebemos a presença de conteúdos como: Sistema Métrico Decimal, Áreas de Figuras Planas e um pouco de Geometria Espacial, ao abordar sobre o cálculo da área da pirâmide. Segundo Mendes (2009), para fazer uso dessas informações históricas, elas devem passar por algumas adaptações pedagógicas que, conforme os objetivos almejados, devem configurar-se em atividades a serem desenvolvidas em sala de aula ou fora dela (extraclasse).

Depois dos Egípcios, a tese continua com a abordagem sobre os babilônios. Segundo Gomes (1997), a geometria dos babilônios apresenta um estágio mais avançado em relação à do povo do Egito, principalmente por apresentar cálculos mais bem elaborados e uma presença maior de processos algébricos. A matemática dos babilônios era encontrada no que eles chamavam de tabelas. Vamos ver um exemplo na figura a seguir da tabela chamada de Plimpton 322.

Figura 16: Tabela Plimpton 322. (GOMES, 1997, p. 96)

Da mesma forma que Gomes iniciou, apresentando os conteúdos matemáticos do povo do Egito, não foi diferente com os babilônicos, e o primeiro conceito que aparece é o de aritmética, com as unidades de medidas de área usadas, relacionando-as com as atuais. Em seguida, também foram apresentados exemplos de cálculos de áreas de figuras planas, dando ênfase à resolução algébrica desses problemas. Mas pude conferir que, na tese de Gomes, na parte destinada a abordar os babilônios, temos os conteúdos de Geometria Plana e Aritmética em forma agora de problemas que podem ser bem aproveitados por professores do Ensino Médio em suas aulas de Matemática.

Da mesma forma, foi feito com os outros povos citados anteriormente: China, índia, Grécia e Roma, sempre iniciando com as unidades de medidas de área e, logo em seguida, apresentando como cada povo calculava área de figuras planas.

A medida em que vai se passando o tempo, e que Gomes vai apresentando o cálculo de áreas dos povos (chineses, indianos, gregos e romanos, nesta ordem), os problemas vão ficando mais bem elaborados, mais parecidos com a forma que trabalhamos atualmente. Não vamos citar todos os exemplos, pois esse não é nosso objetivo. Quem tiver o interesse pode ler a tese de Gomes (1997), mas consideramos em excelente material de Geometria Plana que pode ser organizado e transformado numa ferramenta didática interessante e que certamente pode facilitar e deixar as aulas de matemática mais interessantes. Segundo Mendes (2009), os benefícios desse tipo de proposta são gratificantes, tanto para o professor quanto para os estudantes, desde que ambos percebam e utilizem produtivamente a viabilidade de tal proposta. Por isso, constatamos que esta tese apresenta potenciais pedagógicos referentes à Geometria Plana que podem ser explorados em sala de aula, devido a sua grande quantidade de fatos históricos relacionados com a matemática, mais precisamente com o conceito de áreas.

No terceiro capítulo, foi elaborada uma crítica ao pensamento dos historiadores relatado no capítulo anterior, mas também temos o que explorar, pois em um dos tópicos investigados, verificamos que o autor aborda o processo de cubação enquanto prática de mensuração de área. Mais uma parte da tese com potencial didático para o Ensino Médio.

Tese 3: O Quadrivium na Obra de Isidoro de Servilha

Quadro 62: Descritores de análise da Tese 3 – Ensino Médio

Título: O Quadrivium na Obra de Isidoro de Servilha
Autor (a): Arlete de Jesus Brito
Orientador (a): Antônio Miguel
Ano de defesa: 1999
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Aritmética (Conhecimentos Numéricos)
Conteúdos Secundários Mobilizados:
Resumo: As obras de Isidoro Servilha (c. 550 – 636) tinham finalidades pedagógicas, relativas a formação de clérigos ou da nobreza. Tais obras foram difundidas em toda Europa Medieval. Dentre estas obras, algumas dizem respeito ao conhecimento matemático. Nesta pesquisa, analisamos quais os saberes matemáticos e quais os discursos acerca da matemática estão contidos na obra de Isidoro, bem como as crenças subjacentes a ele.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Brito (1999).

O objetivo desta tese foi analisar quais os saberes matemáticos e quais os discursos acerca da matemática estão contidos na Obra de Isidoro, bem como suas crenças subjacentes a eles. A pesquisa foi bibliográfica e fundamentou-se em Foucault (1972) para analisar, comparativamente, os escritos de Isidoro e os textos que lhe serviam de fonte.

Inicialmente, Brito (1999) tinha três perguntas de pesquisa: 1) Como se constituíram as verdades acerca da matemática e de seu ensino? No período de tempo denominado Idade

Média Ocidental, o que se entendia por matemática? 2) Quais as condições de emergência destas verdades? Quais as relações destas verdades como outros acontecimentos anteriores ou simultâneos, discursivos ou não? 3) Como essas verdades acerca da matemática e de seu ensino participaram da formação do campo de possibilidades discursivas da época? Mas, por orientação da banca de qualificação, sua tese ficou limitada apenas à análise da Obra de Isidoro Servilha.

A tese foi dividida em dois capítulos: o primeiro deles aborda a vida e obra de Isidoro e a difusão de suas obras na Idade Média. O segundo capítulo mostra a matemática nas obras de Isidoro e foi dividido em quatro partes: Aritmética, Geometria, Música e Astronomia. Em uma primeira leitura dinâmica, pensávamos que, nos quatro tópicos, teríamos potenciais didáticos para o Ensino Médio, principalmente nos dois primeiros, pois os conteúdos analisados, em sua maioria, são referentes a este nível de ensino. Porém, o foco de Brito em sua análise, no nosso entendimento, foi de como esses conteúdos foram discutidos no livro, com foco em suas definições e apresentação do que o mesmo abordava. Também foram discutidos os autores citados por Isidoro, as fontes por ele utilizadas para poder formular suas definições.

Vejamos um exemplo referente à primeira parte de Aritmética, que, segundo Brito (1999), do mesmo modo que Nicômaco, Boécio e Cassiodoro, é pela separação entre números pares e ímpares que Isidoro inicia sua classificação dos números: *"O número par é aquele que pode ser dividido em duas partes iguais, como 2, 4 e 8. Ímpar é aquele que não pode ser dividido em duas partes iguais, pois, na metade, ou faltará ou sobrará uma unidade, por exemplo, 3, 5, 7 e 9, etc.".*

Pode-se perceber que Brito está explicando como Isidoro classifica os números. Considerando que essas discussões não têm sentido de ser trabalhadas no Ensino Médio, talvez, em uma disciplina de teoria dos números, podendo até fazermos uso dessas análises. Outras definições foram discutidas na tese de Brito, porém com essa mesma tendência. O mesmo ocorreu com o segundo tópico na parte de geometria. Mas, então, pode vir a seguinte pergunta: por que esta tese está aqui no meio das que possuem potenciais didáticos para o Ensino Médio? A resposta pode vir do fato de que, no terceiro tópico de Música, aparecem exemplos e aplicações que podem ser utilizados.

Inicialmente, Brito apresenta da mesma forma que nos outros dois tópicos comentados, começando com definições e análises dessas definições, citando de onde surgiu o pensamento de Isidoro, fazendo uma discussão teórica, mas, logo em seguida, mostra exemplos interessantes que podem ser trabalhados em turma de Ensino Médio. Um dos motivos que me fizeram procurar potenciais didáticos com mais detalhe neste tópico sobre música foi o fato de já ter dado aula no curso de técnico integrado ao médio de Instrumento Musical no IFPB, tentando ver a possibilidade de aplicações que pudessem ser realizadas para esse público, mas lembrando que não porque as aplicações são na área de música que, necessariamente, só poderão ser aplicadas nestas turmas. Pelo contrário, são atividades que podem ser trabalhadas em qualquer turma de Ensino Médio, desde que o conteúdo esteja contemplando o que está sendo trabalhado naquele exato momento em sala de aula. Nesse sentido, salienta que

> é muito importante que essas experiências (atividades construtivistas) sejam orientadas pelo professor, sempre que necessário, para que possa leva-los a formular conceitos e/ou propriedades e interpretar essas formulações visando aplica-las na solução de problemas práticos que assim o exijam. (MENDES, 2009, p. 12)

O primeiro exemplo trazido por Brito em sua tese, que pode ser abordado pelos professores em sala de aula, consiste nas aplicações que podem ser relacionadas com o assunto de médias aritméticas, geométricas e harmônicas, fazendo uma relação com as notas musicais, também aparecendo exemplos de sequências numéricas, razões e proporções e também mencionando ideias da relação entre música e movimento dos astros. Finalizamos a análise desta tese, afirmando que ela possui potenciais didáticos para o Ensino Médio, no que se refere à abordagem de aplicações da música relacionadas com aritmética.

Tese 4: Sobre Condição Judaica e Matemática

O objetivo deste trabalho foi evidenciar a presença Judaica na história da Matemática e Compreender possíveis relações entre a condição judaica e o fazer matemático. Nesta pesquisa, o autor fundamentou-se em D’ Ambrosio, na Etnomatemática.

A pesquisa sobre a presença da matemática no povo judeu parte da seguinte problemática: quais foram as contribuições dos Judeus na matemática? No decorrer da pesquisa, surgiram outras questões de pesquisa relacionadas ao fato da grande presença da matemática no supracitado povo: há algo na condição judaica que desperte o interesse na matemática?

Como parte da pesquisa, estudos sobre elementos da história judaica e da cultura judaica, Pacheco fez um estágio em Israel e realizou, para sua pesquisa, entrevistas com judeus matemáticos, educadores matemáticos, judeus estudiosos de história da ciência e um rabino.

Vejamos mais informações desta tese no quadro 63 a seguir:

Quadro 63: Descritores de análise da Tese 4 – Ensino Médio

Título: Sobre Condição Judaica e Matemática
Autor (a): Edilson Roberto Pacheco
Orientador (a): Ubiratan D'Ambrosio
Ano de defesa: 2006
Instituição onde foi defendida: UNESP – Rio Claro
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo Principal Focalizado: Geometria Plana (Conhecimentos Geométricos)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Sistema Métrico Decimal
Resumo: O intento, neste trabalho, é evidenciar a presença dos judeus na Matemática, bem como procurar compreender possíveis relações entre a condição judaica e o fazer matemático. Nesse encalço, empreenderam-se estudos sobre história e cultura judaicas e uma visita à literatura sobre a Matemática relativamente aos judeus. Também se realizaram entrevistas com judeus que atuam no campo da Matemática, cujo tratamento contemplou gravação, transcrição e análise. Parte deste estudo foi efetivado durante um estágio de pesquisa realizado em Israel. Constatou-se que a presença de judeus na Matemática é vultosa, principalmente nos últimos duzentos anos, e que, decorrente dessa expressividade, estudos foram engendrados sobre a proeminência judaica na Ciência. Verificou-se também que a condição de ser matemático e ter uma origem judaica são questões não claramente interligadas. Há, contudo, algumas convergências possíveis no perfil do judeu que se revelou neste grupo, metaforicamente configurado aqui, na análise, por meio de um mosaico. Das multifaces dessa configuração detectaram-se alguns elementos invariantes sobre "ser judeu", "Matemática" e "Educação Matemática". Dessas três asserções depreenderam-se qualificativos comuns que remetem a um mesmo campo de sentido, o da auto definição.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Pacheco (2006).

A tese foi dividida em cinco capítulos, sendo o primeiro deles um breve histórico do povo judeu. O segundo capítulo aborda a presença judaica na matemática, mostrando um pouco da matemática presente na literatura hebraica em livros sagrados. O contexto do século dezoito é situado no terceiro capítulo, em que a emergência de outro tipo de judeu é olhada mais especificamente. Também se trata sobre a admissão de judeus nas universidades e o ingresso na matemática acadêmica. Foram abordados os prêmios internacionais de matemática recebidos por Judeus nesse capítulo, a avultada presença judaica na Matemática, ilustrada pelos prêmios. No quarto capítulo, encontra-se o foco principal da tese, pois foi feita uma descrição, a partir de uma investigação com um grupo de judeus, cuja atividade profissional está relacionada à Matemática, um estudo sobre as possíveis relações entre a condição judaica e a escolha para a Matemática.

O quinto capítulo ficou para as considerações finais, valendo também destacar a presença de um Glossário na tese, devido a termos específicos da cultura judaica presentes no texto. E, em anexo, foram apresentadas as transcrições das entrevistas. Vamos agora apresentar os potenciais didáticos desta tese para o Ensino Médio.

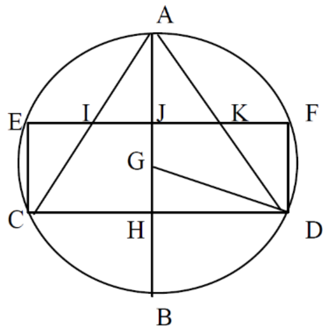
Inicialmente, a tese mostra as unidades matemática na bíblia hebraica, peso, capacidade (secos e líquidos), medidas de comprimento e medidas de área. Essas unidades são as mesmas que encontramos na dissertação de Bonfim (2007), conteúdo que já foi discutido e apresentado anteriormente no tópico em que apresentamos os potenciais didáticos das dissertações para o Ensino Médio. Encontramos algumas diferenças na tese de Pacheco (2006), pois ele também apresenta a própria nomenclatura hebraica dessas unidades e passagens da Bíblia em que constavam estas unidades matemática.

O interessante dessas passagens da Bíblia referente às unidades de medidas são as possibilidades de usá-las para a resolução de problemas em sala de aula, fazendo a relação com unidades de medidas atuais, enquanto, com o conteúdo da dissertação de Bonfim (2007), esses problemas precisariam ser formulados pelos professores, pois só tínhamos a relação entre as unidades e não tínhamos as passagens da Bíblia pelo qual elas apareciam. Como já foi comentado ao analisar a dissertação de Bonfim (2007), esses problemas podem servir para diversas aplicações, dentre elas, destacamos as resoluções de problemas do ENEM, em que uma das competências exige o domínio do conteúdo de unidades e medidas.

Então, consideramos uma atividade interessante entender algumas passagens da matemática hebraica na Bíblia e procurar resolver alguns problemas, tentando relacionar com a matemática atual, o que faz com que os alunos passem a trabalhar bem o raciocínio lógico, pois irão trocar um pouco daqueles exercícios tradicionais por atividades interpretativas. E, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 2000), um dos objetivos da matemática no Ensino Médio é fazer com que os alunos passem a entendê-la como um processo de raciocínio no qual eles podem produzir conclusões lógicas sobre ela a partir de modelos, fatos conhecidos, propriedades e relações explicativas do seu pensamento.

Os conteúdos de geometria plana e espacial também foram abordados na tese de Pacheco, mais precisamente, regras para cálculo de áreas e volumes. Encontramos, na tese, área de círculo, volume de tronco de pirâmide, comprimento de circunferência, triângulos, quadriláteros, entre outros, tudo relacionado com a literatura hebraica. Vejamos um exemplo de um problema geométrico que aparece na tese de Pacheco:

> *Se fizermos o diâmetro do círculo igual a esse número e desenhar uma corda no seu terço, então o número do triângulo isósceles será igual ao número do perímetro, e então também ao retângulo interno ao círculo*:



ECI = JIA e FDK = JKA
CIKD é comum a ACD e a EFDC
CIKD + ECI + FDK = EFDC
JIA + JKA+ CIDK = ACD
DACD = retEFDC

(PACHECO, 2006, p. 62)

Com isso, podemos resumir que esta tese nos apresenta conteúdos de aritmética e geometria, retirados da literatura hebraica, que podem, se bem formulados, ser utilizados por professores de matemática do Ensino Médio.

Tese 5: “De Divina Proportione” de Luca Pacioli

O objetivo desta tese foi traduzir e comentar a obra de Luca Pacioli, a partir do manuscrito que se encontra na biblioteca Ambrosiana de Milão. A pesquisa teve como método o bibliográfico e seu objeto de estudo: a obra de Luca Pacioli: “De Divina Proportione”, abordando muitos conteúdos de Geometria Plana e Espacial. Segundo Bertato, autor da tese:

> Luca Pacioli (1445 - 1517), famoso matemático renascentista, escreveu "Summa di Arithmetica Geometria Proportione e Proportionalita" (1494), o que podemos considerar a obra que sintetiza todo o conhecimento matemático europeu acumulado até 1500. Não obstante, sua outra obra, "De Divina Proportione" (1509), é a que contém, dentre as teorias das proporções, aqueles temas que mais lhe interessavam e que ele considerava "secretíssima scientia": a "Divina Proporção", isto e, a "razão áurea". (BERTATO, 2008, p. v)

Vejamos o quadro 64 a seguir:

Quadro 64: Descritores de análise da Tese 5 – Ensino Médio

Título: "De Divina Proportione" de Luca Pacioli (Tradução Anotada e Comentada)
Autor (a): Fábio Maia Bertato
Orientador (a): Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano
Ano de defesa: 2008
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Abordagem: Vida e Obra de Matemáticos e Desenvolvimento de suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Proporcionalidade (Conhecimentos Numéricos)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Plana e Geometria Espacial
Resumo: Luca Pacioli (1445 - 1517), famoso matemático renascentista, escreveu "Summa di Arithmetica Geometria Proportione e Proportionalita" (1494), o que podemos considerar a obra que sintetiza todo o conhecimento matematico europeu acumulado ate 1500. Não obstante, sua outra obra,"De Divina Proportione" (1509), e a que contem, dentre as teorias das proporções, aqueles temas que mais lhe interessavam e que ele considerava "secretissima scientia": a "Divina Proporção", isto e, a "razão áurea". Os resultados contidos na obra, o papel que propunha para a Matemática ante as demais áreas do saber, bem como todas as suas concepções místicas, muito atraíram a atenção de artistas, nobres e intelectuais. Nosso trabalho consiste de uma tradução anotada e comentada da referida obra, a partir do manuscrito que se encontra na Biblioteca Ambrosiana de Milão.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Bertato (2008).

A tese foi dividida em duas partes. Na Parte I, encontram-se algumas considerações sobre Luca Pacioli e sua obra, uma breve história do Quadrivium e a sua participação no que foi denominado "Querela da Perspectiva". A Parte II consiste da tradução da De Divina Proportione e dos Comentários e Notas. Nesta tese, são trabalhados os conceitos de proporcionalidade em conteúdos de Geometria Plana e Espacial.

O primeiro tópico de Geometria Espacial abordado foi sobre a relação entre elementos da Esfera e dos polígonos regulares, mais precisamente, a proporção entre o lado do polígono e o diâmetro da esfera, Inicialmente, ele mostra essa relação com o cubo. Vejamos:

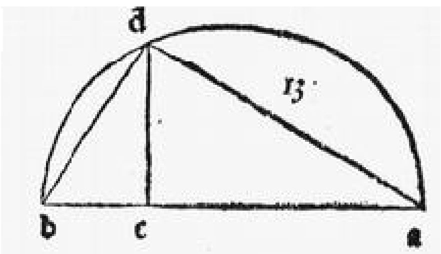


Figura 17: Semi-circunferência de diâmetro ab

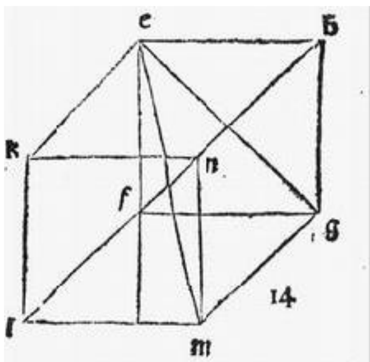


Figura 18: Cubo cujo lado foi formado pelo segmento db da figura 17

De acordo com Pacioli, o cubo deve se formar tomando-se o diâmetro da esfera, que é o segmento ab da figura 17. Logo em seguida, dividir o diâmetro no ponto c, traçando a linha cd perpendicular à linha ab, traçando também as linhas db e da, tudo isso de forma que a linha ac seja o dobro de bc.

Depois, foi feito um quadrado com a linha bd, formando-se, desse quadrado, um cubo. E este tal estará circunscrito exatamente pela esfera do proposto diâmetro, donde o quadrado desse diâmetro será sempre três vezes o quadrado do lado do cubo. Dessa maneira, se o diâmetro fosse $\sqrt{300}$, o lado seria exatamente 10. Segundo Pacioli, este conhecimento, em muitos casos é necessário e oportuno.

Além do cubo, uma construção similar foi feita no livro de Pacioli, traduzido na tese de Bertato, com o dodecaedro, octaedro e icosaedro. Outro problema apresentado foi: como saber encontrar os lados dos cinco poliedros regulares, todos circunscritos exatamente por uma mesma esfera, da qual só conhecemos apenas o diâmetro?

O livro não traz as demonstrações, apenas cita onde elas estão, mas, mesmo que as trouxesse, consideramos a maioria dos exemplos com um nível um pouco elevado para ser abordado na sala de aula do Ensino Médio, podendo ser trabalhado em aulas de aprofundamento com alunos interessados em Olimpíadas de Matemática.

Sobre os poliedros, cita-se a formação de várias situações entre elas: dodecaedro no icosaedro, tetraedro no cubo, tetraedro no octaedro, octaedro no cubo, entre outras. Também aborda como se forma a esfera em cada um dos polígonos regulares, os poliedros oblíquos, pirâmides (ele cita o cone como uma pirâmide redonda), colunas cilíndricas, ou seja, é uma tese que apresenta diversos conceitos de geometria espacial, alguns de fácil entendimento para alunos do Ensino Médio, e a grande maioria um pouco complexa, com perfil para ser trabalhado no Ensino Superior.

Já se pode afirmar a presença de conteúdos desse material na área da geometria espacial, comprovando seu potencial didático para o Ensino Médio.

Esse material trata de uma fonte literária primária (texto histórico) que pode ser explorada pedagogicamente na forma de problemas históricos adaptados de trechos originais, conforme Mendes (2009, p. 105).

Tese 6: Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya – Quatro Episódios da História da Heurística

Quadro 65: Descritores de análise da Tese 6 – Ensino Médio

Título: Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya – Quatro Episódios da História da Heurística
Autor (a): Inocêncio Fernandes Balieiro Filho
Orientador (a): Irineu Bicudo
Ano de defesa: 2004
Instituição onde foi defendida: Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Abordagem: Desenvolvimento da Matemática como Conteúdo Científico
Conteúdo Principal Focalizado: Geometria Espacial (Conhecimento Geométrico)
Conteúdos Secundários Mobilizados: Geometria Plana, Geometria Analítica e Física Mecânica.
Resumo: O presente trabalho apresenta uma análise e discussão de indícios heurísticos presentes nas obras *O Método* de Arquimedes, *A Coleção Matemática* de Pappus e *Regras para a Direção do Espírito* de Descartes, buscando estabelecer relações com a sistematização da atividade heurística apresentada nas obras *A arte de Resolver Problemas* e *Matemática e Raciocínio Plausível* de George Polya. Através de uma metodologia de pesquisa em História da Matemática, foi consultado o original da obra de Arquimedes e traduções das demais obras citadas. Considerando que *O Método* é a mais antiga obra de heurística de que tem-se conhecimento, foi feita a primeira tradução do original em Grego Clássico para o Português desse texto de Arquimedes. A atividade heurística, definida como um esquema psíquico através do qual o homem cria, elabora e descobre a resolução de um problema, é o eixo central dos estudos sobre como pensamos, estabelecidos por Polya, e que fundamentam a Resolução de Problemas, linha de pesquisa em Educação Matemática.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Balieiro Filho (2004).

Este trabalho teve o objetivo de analisar e discutir os indícios heurísticos presentes nas obras *O Método* de Arquimedes, *A Coleção Matemática* de Pappus e *Regras para a Direção do Espírito* de Descartes, buscando estabelecer relações com a sistematização da atividade heurística apresentada nas obras *A arte de Resolver Problemas* e *Matemática e Raciocínio Plausível* de George Polya, abordando-se o conteúdo do Ensino Médio de geometria espacial, Mais adiante, mostraremos em detalhes.

A pesquisa usou o método bibliográfico, consultando a obra original de Arquimedes e traduções das demais obras. A primeira obra *O Método*, de Arquimedes, é a mais antiga, tendo sido feita uma tradução do original em grego clássico para o português. Quanto à obra *A Coleção Matemática*, de Pappus, foi utilizada a tradução do Professor Ireneu Bicudo, também do grego clássico para o português, fazendo-se uso de um trecho do livro VII que fornecia ideias sobre a heurística. No que diz respeito à obra *Regras para a direção do Espírito*, de Descartes, foi feita uma tradução do francês para o português. Essa obra em francês já era uma tradução do original em latim, feita por J. Sirven.

A tese foi dividida em seis capítulos. O primeiro deles discute o significado da Heurística, o segundo capítulo aborda a metodologia da pesquisa em História da Matemática utilizada no trabalho. O terceiro capítulo discute as origens da atividade heurística encontradas em *O Método*, de Arquimedes. O quarto capítulo trata da investigação do livro VII, de *A Coleção Matemática* de Pappus, abordando os vestígios da heurística.

No quinto capítulo, é feita a análise da obra *Regras para a Direção do Espírito*. Em seguida, no sexto capítulo, foi feita uma comparação entre a sistematização da atividade heurística apresentada nas obras *A arte de Resolver Problemas* e *Matemática e Raciocínio Plausível* de Polya e os aspectos heurísticos evidenciados nas obras de Arquimedes, Pappus e Descarte.

A parte matemática propícia para o Ensino Médio, discutida pelo autor em sua tese, foi a proposição 2 do Método de Arquimedes que aparece no terceiro capítulo da tese:

> Que toda esfera é o quádruplo do cone tendo a base igual ao grande círculo da esfera, e altura igual a partir do centro para fora[15] da esfera, e o cilindro tendo a base igual ao grande círculo da esfera e altura igual ao diâmetro da esfera, é o que contém outro tanto e mais metade da esfera (ARQUIMEDES, ANEXO, p. 174, trad. A, apoud BALIEIRO FILHO, 2004, p. 56).

De acordo com Balieiro Filho (2004), o cálculo do volume da esfera é calculado por meio do conceito físico do princípio da estática. Arquimedes usa uma haste rígida equilibrada sobre um cutelo, chamado ponto de apoio, sob a ação de duas forças, F_1 e F_2 . Se as forças F_1 e F_2 estão distantes d_1 e d_2 respectivamente, do ponto de apoio, então $F_1 \times d_1 = F_2 \times d_2$.

Vejamos na figura 19:

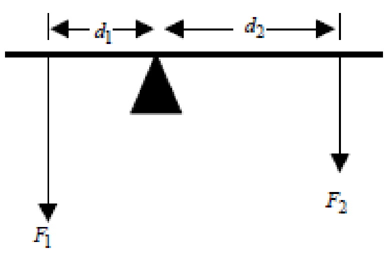


Figura 19: haste rígida equilibrado sobre um cutelo (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 56)

[15]Significa o raio.

O professor de Matemática precisará de um pouco de conhecimento de física, mais precisamente da área de mecânica, se quiser utilizar um exemplo desse em sala de aula com os seus alunos do Ensino Médio. Provavelmente, os alunos já possuam esse conhecimento, pois Física Mecânica é apresentada no 1° ano do Ensino Médio, e Geometria Espacial, no 2° ano, o que faz essa aplicação possuir potencial didático para esse nível de ensino.

Voltando para o problema, o que se abordou neste momento da tese foi a forma como Arquimedes encontrou o volume de uma esfera, comparando sua massa com a de um cone e com a de um cilindro, considerando, inicialmente, os sólidos mostrados na figura 20: uma esfera de raio *r*, um cilindro circular reto com uma base de raio 2*r* e altura 2*r* e um cone circular reto com uma base de raio 2*r* e altura 2*r*.

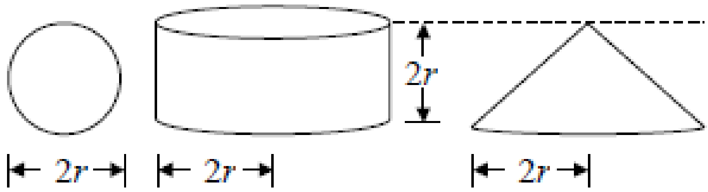


Figura 20: Esfera, Cilindro e Cone (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 57)

Segundo Balieiro Filho (2004), Arquimedes mostrou que a esfera e o cone equilibravam o cilindro sobre o braço de uma alavanca, sendo *o* o ponto de apoio, como mostra a figura 21.

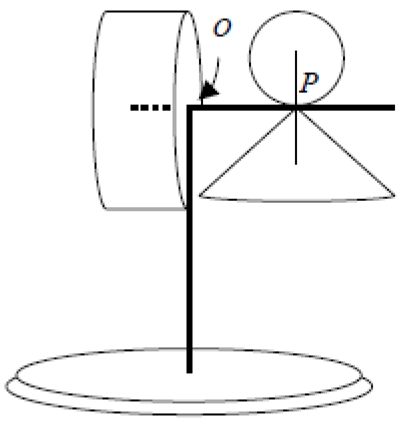


Figura 21: Equilíbrio dos sólidos em uma alavanca 1 (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 58)

Em seguida, de acordo com Balieiro Filho:

> Arquimedes demonstrou que o momento de uma fina partição do cilindro a uma distância *x* do ponto de apoio *o* equilibraria a soma dos momentos de cada uma das finas partições da esfera e do cone a uma distância *x* do ponto *P*. Usando esse fato, ele mostrou que o cilindro equilibraria a esfera e o cone. (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 58)

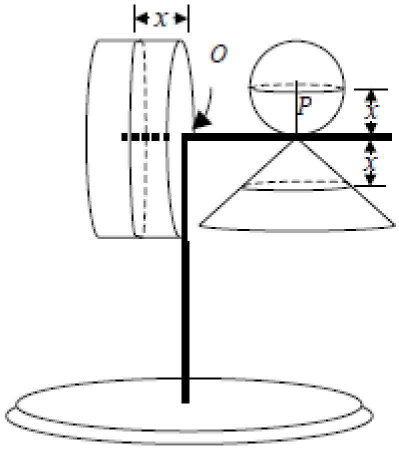


Figura 22: Equilíbrio dos sólidos em uma alavanca 2 (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 58)

De acordo com Balieiro Filho (2004), os argumentos usados por Arquimedes em sua demonstração são interpretados da seguinte maneira: a espessura de cada fina partição sendo Δx, com Δx é muito pequena. Assim, a fina partição do cilindro é um círculo de raio $2r$, e a espessura dessa partição é Δx. Então, o volume desta fina partição do cilindro será $V_c = \pi \cdot (2r)^2 \cdot \Delta x = 4\pi r^2 \Delta x$, como mostra a figura 23:

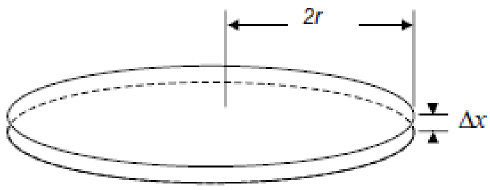


Figura 23: Corte da Esfera (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 58)

Considerando a esfera, sua fina partição tem raio igual a $\sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{2rx - r^2}$. Então, o volume desta fina partição da esfera será $V_e = \pi \cdot \left(2rx - x^2\right) \cdot \Delta x = 2\pi rx\Delta x - \pi x^2 \Delta x$, como mostra a figura 24:

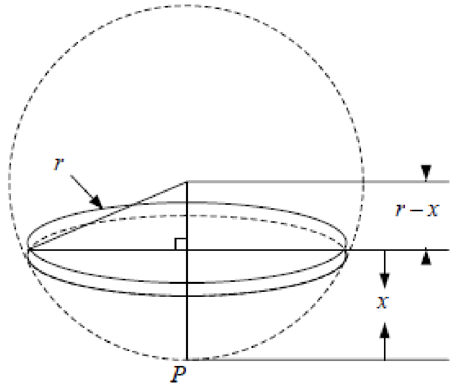


Figura 24: Esfera (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 58)

Por fim, a altura do cone é igual ao raio da base, e o raio da partição é igual a *x*, então, o volume desta partição do cone será $V_k = \pi x^2 \Delta x$, como mostra a figura 25:

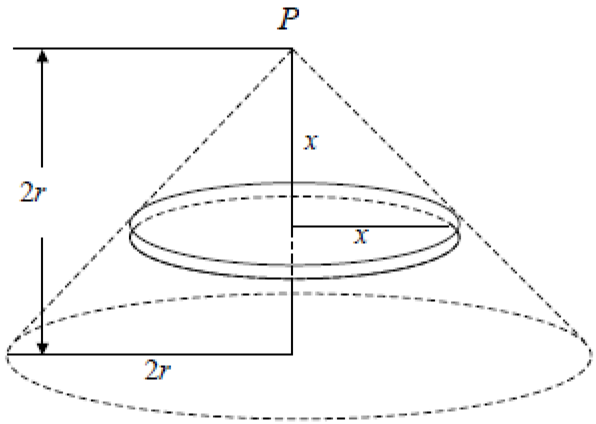


Figura 25: Cone (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 59)

De acordo com Balieiro Filho:

> Supõe que os três sólidos são feitos do mesmo material homogêneo e que a massa de cada um, por unidade de volume, seja igual a 1. A força da gravidade sobre as massas de cada fina partição circular pode ser considerada como atuando nos centros dessas finas partições circulares. Para a fina partição do cilindro o centro de gravidade está a *x* unidades do ponto de apoio *o*. Os centros de gravidade das finas partições da esfera e do cone estão sobre uma linha vertical que passa pelo ponto *P*, o qual está situado a 2*r* unidades do ponto de apoio *o*. Portanto, o momento da fina partição do cilindro próximo do ponto de apoio *o* é igual a $V_k = 4\pi r^2 \Delta x(x)$. A soma dos momentos das finas partições da esfera e do cone próximas do ponto de apoio *o* é igual $\left[\pi\left(2\pi r x \Delta x + \pi x^2 \Delta x\right)\right]2r = \left(2\pi r x \Delta x\right)2r = 4\pi r^2 \Delta x(x)$. (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 60)

Ao considerar que os momentos são iguais e opostos, a fina partição do cilindro equilibra as finas partições da esfera e do cone combinadas, fazendo com que Arquimedes considerasse o cilindro como a soma de um grande número de finas partições, como mostra a figura 26.

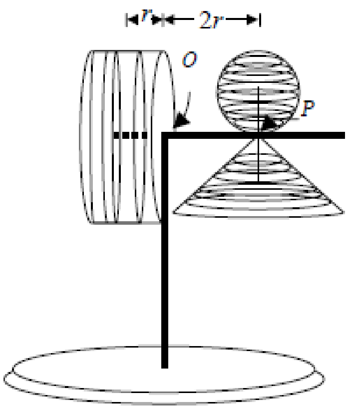


Figura 26: Equilíbrio dos sólidos em uma alavanca 3 (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 59)

Segundo Balieiro Filho (2004), a soma dessas finas partições produzirá o cilindro, a esfera e o cone. Então, fazendo a comparação, Arquimedes conclui que o momento do cilindro próximo do ponto de apoio *o* era igual à soma dos momentos da esfera e do cone próximas do ponto de apoio *o*.

> A força da gravidade sobre um sólido simétrico pode ser considerada como a que atua em seu centro geométrico. O centro do cilindro está a *r* unidades do ponto de apoio *o*. Os centros da esfera e do cone estão sobre uma linha vertical a uma distância 2*r* do ponto de apoio *o*. Arquimedes usa, provisoriamente, que o volume de um cone é um terço do volume de um cilindro de mesma base e mesma altura. (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 62)

Para finalizar, ao denominar o volume da esfera de V_e e o volume do cone de V_c, tem-se que o volume do cilindro é $3V_c$.

Assim, as massas da esfera, cone e cilindro são V_e, V_c e $3V_c$, respectivamente. Tomando momentos próximos do ponto de apoio *o*, tem-se: $3V_c r = (V_e 2r + V_c 2r) = (V_e + V_c)2r$, então, $V_e = \dfrac{V_c}{2}$.

O volume do cilindro é $3V_c = \pi(2r)^2 2r = 8\pi r^3$.Portanto $V_c = \dfrac{8}{3}\pi r^3$. Chega-se ao resultado $V_e = \dfrac{V_c}{2} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Geralmente, o conteúdo de esfera é visto como último sólido geométrico no Ensino Médio, estudando-se, primeiramente, os Primas, depois a Pirâmide, Cilindro, Cone e, por fim, Esfera. Esse conteúdo é trabalhado no fim do segundo ano do Ensino Médio, em que os alunos também já possuem uma boa noção de física, principalmente a parte de Mecânica, que geralmente é toda vista no primeiro ano do Ensino Médio. Consideramos essa demonstração do volume da Esfera com potenciais didáticos para serem aplicadas no Ensino Médio, sendo uma atividade interdisciplinar, pois estaremos trabalhando com conceitos de física e, ao mesmo tempo, revisando os outros sólidos geométricos. Em muitos livros, nem sequer a demonstração do volume da esfera é mostrada.

Além dos conceitos de física e geometria espacial, também mobilizamos conceitos de geometria plana, que é o caso das áreas de figuras planas, muito natural para quem está trabalhando com geometria espacial. Então, em única demonstração, mostramos que a tese de Balieiro Filho (2004) pode ser utilizada por professores do Ensino Médio.

Tese 7: Um Estudo sobre a Relação entre Matemática e Religião na Obra de Blaise Pascal

O objetivo geral desta tese foi investigar a relação entre a matemática e a religião na obra de Blaise Pascal. E, especificamente, os objetivos foram: 1) Fazer um levantamento da produção matemática e da experiência religiosa de Pascal para contextualizar a investigação; 2) Fazer um levantamento na literatura, das diversas categorias presentes no campo de interseção entre a matemática e a religião; 3) Analisar de que maneira estas categorias comuns à matemática e à religião emergem na obra de Blaise Pascal.

O problema de pesquisa foi: *há relação entre a matemática e a religião na obra de Blaise Pascal?* Em caso afirmativo: *de que modo esta relação se manifesta?*

O método de pesquisa utilizado foi bibliográfico e documental, com leitura analítico-comparativa de textos referenciais: As Oeuvres complètes de Pascal; Le fonds Pascalien à Clermont- Ferrand; As edições de Os Pensamentos (em português, espanhol e italiano), do Tratados de Pneumática e das Cartas Provinciais (em espanhol) e os Textos Matemáticos (em italiano); As publicações com material sobre o tema da pesquisa como os Anais dos Seminários Nacionais de História da Matemática e a Revista Brasileira de História da Matemática; Os livros Mathematics in a postmodern age: a cristian perspective de Howell e

Bradley (2001) e Mathematics and the divine: a historical study de Koetsier e Bergmans (2005).

Vejamos agora, mais informações da tese no quadro 66:

Quadro 66: Descritores de análise da Tese 7 – Ensino Médio

Título: Um Estudo sobre a Relação entre Matemática e Religião na Obra de Blaise Pascal
Autor (a): Severino de Barros Melo
Orientador (a): John Andrew Fossa
Ano de defesa: 2009
Instituição onde foi defendida: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Abordagem: Vida e obra de matemáticos e desenvolvimento suas Ideias Matemáticas
Conteúdo Principal Focalizado: Binômio de Newton
Conteúdos Secundários Mobilizados: Análise combinatória
Resumo: O presente estudo tem como objetivo investigar o modo pelo qual as relações entre a matemática e a religião na obra de Blaise Pascal. A pesquisa justifica-se pela necessidade de se aprofundar estas relações, até agora pouco exploradas se comparadas com pontos de interseção entre a matemática e os outros campos do conhecimento. A escolha de Pascal deve-se ao fato dele ter sido um dos matemáticos que melhor elaborou uma reflexão no campo religioso provocando reações contarditórias. Como metodologicamente, é uma pesquisa bibliográfica e documental com leitura analítico-comparativa de textos referenciais; dentre os quais os *Oeuvres completes dePascal* (1954), *Le pascalien à Clermont-Ferrand* (2001), *Mathematics in postmodern ag: a cristian perspective* de Howell e Brasley (2001), *Mathematics and the divine: a historical study* de Koetsier e Bergmans (2005), os *Anais dos Seminários Nacionais de História da Matemática e a Revista Brasileira de História da Matemática.* Foi feita uma pesquisa sobre a vida de Pascal como matemático e sua esperiência religiosa. Além disso, foi pesquisado um cenário mais amplo no qual emerge o tema em questão. Foram identificadas sete categorias a partir de leitura de textos escritos por matemáticos e historiadores da matemática, no que se refere à relação matemática e religião. Como conclusão, contatou-se que quatro categorias aparecem na obra de Pascal.

Fonte: Elaboração própria, com base na leitura da tese de Melo (2009).

A tese foi dividida em quatro capítulos. No primeiro capítulo, foi feito um levantamento sobre a contribuição de Pascal para a matemática, segundo uma sequência cronológica. No segundo capítulo, foi feito um levantamento das etapas da vida e obra de Pascal sob a ótica da sua experiência religiosa e também apresentado as visões de Pascal sobre a matemática e a ciência, a partir de sua experiência religiosa.

No terceiro capítulo, foi feita uma revisão da literatura, permitindo, desse modo, a construção de um cenário mais amplo no qual emerge o tema em questão. E, para finalizar, no quarto capítulo, foram investigados os aspectos que se encontram na área de interseção entre a matemática, a religião e a obra de Pascal.

Nesta tese, inicialmente, pensamos que teria muito conteúdo matemático do Ensino Médio para ser explorado, porém, com uma leitura mais detalhada, percebemos que sua discussão está centralizada muito para a filosofia, e sobre a vida e obra de Pascal com sua relação com a religião. Verificamos, no primeiro capítulo, que foi apresentada a evolução das ideias matemáticas de Pascal. Neste capítulo, foi citado um conteúdo do Ensino Médio: O Triângulo de Pascal, abordado no conteúdo de Binômio de Newton, logo depois de o aluno ter estudado Análise Combinatória.

De acordo com Melo (2009), mesmo não sendo uma coisa absolutamente nova no contexto da história da matemática, o *Traité du triangle arithmétique et traites connexes* pode ser considerado uma obra de Pascal. De fato, ele deu ao tema um tratamento especial, tendo encontrado uma multiplicidade de aplicações, apesar desse triângulo aritmético já ter sido apresentado muito antes de Pascal na China e no Japão. Vejamos as figuas 27 e 28:

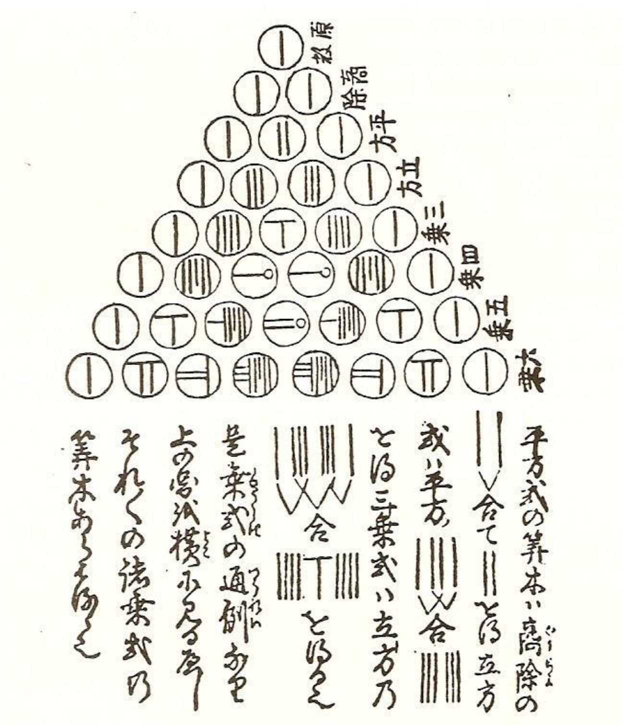


Figura 27: Versão Japonesa do Triângulo de Pascal (BOYER, 2001, p. 251, apud, MELO, 2009, p. 31)

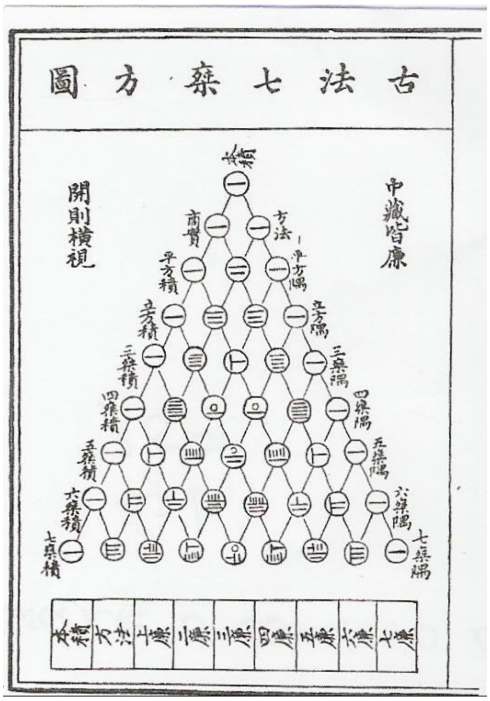


Figura 28: Versão Chinesa do Triângulo de Pascal (BOYER, 2001, p. 141, apud, MELO, 2009, p. 32)

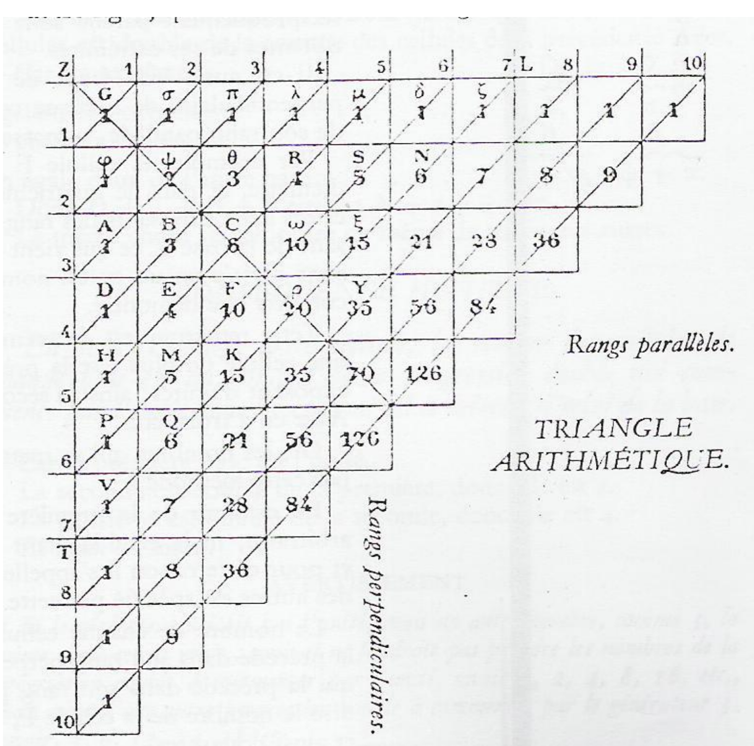


Figura 29: Triângulo Aritmético na versão de Pascal (PASCAL,1954, p. 97 apud MELO, 2009, p. 33)

Para elaborar o triângulo de Pascal, seguimos as seguintes regras:

1) O primeiro e o último elementos de cada linha é 1.

2) A partir da terceira linha, cada elemento (exceto o primeiro e o último) é a soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima deles; ou seja, considerando um elemento genérico aij, temos $a_{ij} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$.
3) Em uma linha qualquer, dois elementos equidistantes dos extremos são iguais.
4) A soma dos elementos da enésima linha é 2^{n-1}.
5) A soma dos elementos de uma linha qualquer é duas vezes a soma dos elementos da linha precedente.

Sabemos que cada número de um triângulo está relacionado a um coeficiente binomial, por isso, no início de nosso comentário, comentamos que esse triângulo é visto no conteúdo de Binômio de Newton para os alunos de Ensino Médio.

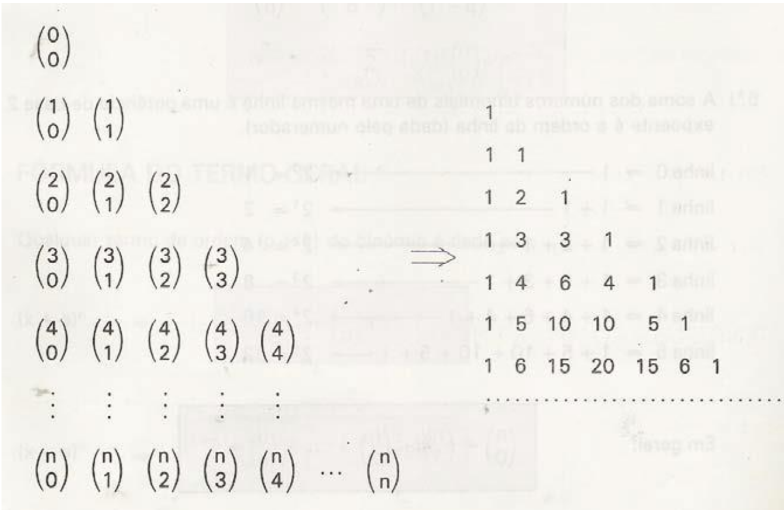


Figura 29: O Triângulo Aritmético como aparece nos livros didáticos (MACHADO,1996, p. 190, apud, MELO, 2009, p. 34)

O que podemos observar por exemplo na sexta linha é que os números 1, 5, 10, 10, 5 e 1, são coeficientes do binômio $(x+a)^5$. Segundo Melo (2009), essas eram algumas das aplicações feitas por Pascal com o triângulo aritmético e o que é ensinado para alunos do Ensino Médio hoje em dia.

A tese ainda traz outras informações históricas sobre Pascal e o triângulo aritmético que podem ser abordadas quando o professor estiver ensinando o conteúdo de Binômio de Newton, fazendo com que o aluno se motive mais ao estudar esse conteúdo dentro de uma abordagem histórica, e foi por isso que consideramos essa tese com potenciais didáticos para o Ensino Médio.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo da nossa pesquisa, analisamos as teses e dissertações produzidas e defendidas nos programas de pós-graduação *stricto sensu* do Brasil, no período de 1990 a 2010, no campo da História da Matemática, especificamente os trabalhos que versavam sobre história e epistemologia da Matemática, tendo centrado nossa pesquisa na seleção e na análise dos trabalhos que produziram informações históricas sobre tópicos matemáticos relacionados ao Ensino Médio. Nossa intenção foi localizar produções que tivessem potenciais conceituais e didáticos que pudessem contribuir para estabelecermos uma abordagem mais esclarecedora dos conteúdos do Ensino Médio, de modo que os alunos possam compreender melhor o processo de construção da matemática em cada contexto e momento histórico específico.

Usamos como objeto de estudo quarenta e sete trabalhos, entre dissertações e teses, em história e epistemologia da matemática. Primeiramente, fizemos um levantamento das dissertações e teses de História da Matemática produzidas nos programas de pós-graduação no Brasil no período mencionado. Em seguida, categorizou-se cada dissertação e tese, classificando-as em História e Epistemologia da Matemática, História da Educação Matemática e História da Matemática no Ensino, utilizando-se, para tal, os critérios propostos por Mendes (2010, 2014). Como essa classificação estava em andamento pelo Grupo de Pesquisa em Cartografias da Produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990 e 2010, fizemos apenas alguns complementos.

No intuito de apresentar as últimas considerações relacionadas à investigação a que nos propusemos, materializada nessa tese, faremos uma breve revisão dos capítulos que compuseram esse trabalho.

Iniciamos a tese apresentando o cenário atual no campo da História da Matemática, por meio da exposição de um panorama geral sobre o tema objeto de nosso estudo, ratificando a História da Matemática como uma área de pesquisa em crescimento. Também apresentamos nossa justificativa pela escolha do tema, abordando nossa trajetória profissional e, posteriormente, apresentando um pouco sobre o Grupo de Pesquisa em Cartografias da Produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990 e 2010, coordenado pelo Professor Iran Abreu Mendes, pois a convergência entre o projeto do professor Iran e minha trajetória profissional fez com que escolhêssemos esse tema de pesquisa para a realização da nossa tese. Também apresentamos as questões que nortearam essa pesquisa, bem como os objetivos que foram elaborados no intuito de respondê-las e expusemos o delineamento metodológico percorrido na presente investigação.

No primeiro capítulo, “Pesquisas em História da Matemática no Brasil: Encontros Nacionais de Educação Matemática – ENEM”, fizemos um recorte da pesquisa feita por Gonçalves (2015), apresentando um panorama geral do ENEM, em busca do que foi publicado em História e Epistemologia da Matemática. A escolha foi devido a ser um dos mais importantes encontros em Educação Matemática do nosso país, sendo seus trabalhos resultados de dissertações e teses defendidas nos programas de pós-graduação do Brasil. E, como já tínhamos feito uma pesquisa parecida com as Revistas Brasileiras de História da Matemática, achamos que se adequaria bem à nossa tese. Esse capítulo comtemplou um de nossos objetivos específicos, caracterizar os artigos de História e Epistemologia da Matemática publicados no Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM no período de 1987 a 2010.

No segundo capítulo, “Tendências da Pesquisa em História da Matemática presentes na Revista Brasileira de História da Matemática (2001 – 2012). Apresentamos o resultado da nossa pesquisa realizada com a Revista Brasileira de História da Matemática, que classificamos cada artigo publicado em História e Epistemologia da Matemática, História da Educação Matemática e História da Matemática no Ensino, baseado em Mendes (2010, 2014) com todos os volumes publicados entre 2001 e 2012, que usamos como um dos capítulos de nossa tese. O motivo pelo qual realizamos essa pesquisa foi a necessidade de aprimoramento dessa classificação, visto que esse trabalho seria complementado e avaliado com as dissertações e teses produzidas no Brasil entre 1990 e 2010. Esse capítulo contemplou um dos objetivos específicos de nossa tese, caracterizar os artigos de História e Epistemologia da Matemáticapublicados na Revista Brasileira de História da Matemática no período de 2001 a 2012.

Para contemplar o objetivo geral de nossa tese, fizemos uma separação entre os trabalhos em História e Epistemologia da Matemática que apresentavam conteúdos matemáticos do Ensino Médio e aqueles que apresentavam conteúdos do Ensino Superior. Encontramos, entre os quarenta e sete trabalhos, vinte e nove dissertações e dezoito teses, sendo trinta trabalhos com perfil para o Ensino Superior, com dezenove dissertações e onze teses, e dezessete trabalhos com perfil para o Ensino Médio, sendo dez dissertações e sete teses.

No terceiro capítulo, descrevemos apenas as dissertações e teses encontradas em nossas pesquisas que apresentavam conteúdo do Ensino Superior. Apesar de não fazer uma análise desses conteúdos em nossa tese, pois apenas apontamos quais conteúdos são abordados, fizemos um pequeno levantamento e descrição de cada um, percebendo que temos um material excelente para ser explorado na formação de professores com os alunos das Licenciaturas em Matemática, pois esses discentes irão, no futuro, para sala de aula do Ensino Médio, e o acesso a este tipo de trabalho é um importante aprofundamento de seus conhecimentos epistemológicos da matemática, tornando-se um ganho de informação conceitual, ou seja, um aprofundamento dos conceitos matemáticos. Como a maioria dos alunos não tiveram acesso a esse tipo de material em sua graduação, sugerimos a apresentação desses conteúdos em cursos de pós-graduação, tanto *lato sensu*, como também stricto senso, pois, a maioria dos alunos formados nas licenciaturas não tem acesso a esse tipo de conhecimento.

Outro dado importante é o número de trabalhos na área de cálculo diferencial e integral, são cinco dissertações e uma tese, representando 20% dos trabalhos encontrados que abordam conteúdos do ensino superior, ficando atrás em quantidade, apenas para os trabalhos de Lógica e Teoria dos conjuntos, que totalizaram sete trabalhos, representando em valores relativos, o percentual de 23%. Destaco o assunto de Cálculo Diferencial e Integral, por ser uma disciplina presente em todos os cursos de graduação na área de ciências exatas e tecnologias, inclusive nos cursos de Licenciatura em Matemática, por ser o primeiro desafio dos alunos que estão saindo do Ensino Médio para o Ensino Superior. Ou seja, temos um bom material de Cálculo relacionado à História da Matemática, que pode ser explorado em sala de aula, despertando, certamente, uma motivação maior por partes dos alunos.

Fica como sugestão para os pesquisadores que tiverem acesso a esta tese a exploração didática desses materiais do Ensino Superior. Os docentes podem usar os conteúdos abordados nas dissertações e teses para elaborar atividades que possam ser desenvolvidas com os alunos, tanto de formação de professores, como também de outros cursos, pois se trata de um material rico em fundamentos epistemológicos, que, diferente do que alguns professores mais “tradicionais” podem pensar, não facilitarão os conteúdos, eles irão aprofundar mais seus conhecimentos.

O desafio do professor será desenvolver uma estratégia metodológica de ensino que utilize o desenvolvimento Histórico e Epistemológico da Matemática como um aspecto mobilizador de ensino, possibilitando a ampliação dos conhecimentos dos alunos e também dos próprios professores, pois, estudando a história, estaremos sempre aprendendo uma coisa nova que pode ser reelaborada e introduzida em sala de aula, fazendo com que as aulas sejam mais interessantes.

No quarto capítulo, deu-se ênfase aos trabalhos que apresentam conteúdos do Ensino Médio, o foco principal de nosso estudo, e está interligada diretamente com nosso objetivo geral, hipótese, tese e problemas de pesquisa. Fizemos a descrição dos trabalhos e, em seguida, apresentamos os potenciais didáticos dessas dissertações e teses para o Ensino Médio, apresentando quais seus conteúdos matemáticos principais e também aqueles conteúdos secundários mobilizados.

Foram dezessete trabalhos apresentados, e, levando em consideração a classificação de conteúdos matemáticos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), encontramos seis deles sobre conhecimentos numéricos (quatro dissertações e duas teses), seis de conhecimentos geométricos (três dissertações e três teses), uma tese de conhecimentos algébricos, uma tese com conhecimentos de estatística e probabilidade e uma dissertação em conhecimentos algébricos/geométricos. E, na categoria *outros*, encontramos duas dissertações, uma que aborda o conteúdo dos números complexos e outra sobre lógica. Vejamos os quadros a seguir com os conteúdos apresentados em cada categoria e, em seguida, sugestões de como alguns desses conteúdos podem ser aplicados no Ensino Médio, aproveitando o que foi proposto em cada dissertação e tese apresentada:

Quadro 67: Conteúdos de Conhecimentos Algébricos do Ensino Médio apresentados nas dissertações e teses

Trabalhos	**Conteúdo Principal Focalizado**	**Conteúdos Secundários Mobilizados**
Tese 1	Trigonometria	Geometria Plana: Circunferências e triângulos, Geometria Espacial, Aritmética e Equações Algébricas.

Fonte: Elaboração própria

Tese 1: A Obra “De Triangulis Omnimodes Libri Quinque” de Johann Müller Regiomantunus (1436 – 1477): Uma Contribuição para o desenvolvimento da Trigonometria

Sugestão 1: Uso das Tabelas de Cordas de Ptolomeu – Essa abordagem traz a Equivalência entre seno e corda de circunferência, fazendo uma relação entre os ângulos e os lados de polígonos regulares inscritos na circunferência.

Público: Pode ser usado em turmas de 2° Ano do Ensino Médio para aprofundamento de conceitos de circunferência e polígono regular.

Sugestão 2: Leis dos Senos relacionando a trigonometria com a geometria plana, usando métodos árabes.

Conteúdo mobilizado: Propriedades de triângulos e circunferências.

Público: Alunos do 2° Ano do Ensino Médio.

Quadro 68: Conteúdos de Conhecimentos de Estatística e Probabilidade do Ensino Médio apresentados nas dissertações e teses

Trabalhos	Conteúdo Principal Focalizado	Conteúdos Secundários Mobilizados
Tese 7	Binômio de Newton	Análise Combinatória: Combinações

Fonte: Elaboração Própria

Tese 7: Um Estudo Sobre a Relação entre Matemática e Religião na Obra de Blaise Pascal

Sugestão: Ensino do triângulo de Pascal por meio de uma abordagem histórica.

Público: Alunos do 2° Ano do Ensino Médio.

Quadro 69: Conteúdos de Conhecimentos Algébricos/Geométricos do Ensino Médio apresentados nas dissertações e teses

Trabalhos	Conteúdo Principal Focalizado	Conteúdos Secundários Mobilizados
Dissertação 3	Geometria Analítica	Equações Algébricas e Geometria Plana: Semelhança de triângulos

Fonte: Elaboração Própria

Dissertação 3: Análise do Livro I do Geometria de Descartes: Apontando Caminhos para o Ensino da Geometria Analítica segundo uma abordagem histórica

Sugestão: Abordagem histórica de Resolução de Equações do 2° grau do tipo $z^2 = az + b^2$, $x^2 = ax - b^2$ e $y^2 = -ay + b^2$ abordando desenvolvimento geométrico, usando a metodologia de Descartes e comparando e demonstrando a atual fórmula conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara.

Público: Alunos do 1° ano que estão estudando as Funções Quadráticas.

Conteúdos Mobilizados: Geometria Plana: Triângulos e Circunferência.

Quadro 70: Conteúdos referentes ao que classificamos de outros do Ensino Médio apresentados nas dissertações e teses

Trabalhos	Conteúdo Principal Focalizado	Conteúdos Secundários Mobilizados
Dissertação 8	Números Complexos	Equações Algébricas (Equações de 2° grua, Equações de 3° grau e Sistemas de Equações); Polinômios e Geometria Plana: Circunferência, Triângulo Retângulo, Áreas e Perímetros de Figuras Planas
Dissertação 9	Lógica Nonsense	Geometria Plana: Simetria, Reflexão, quadriláteros, circunferências, polígonos. Geometria Analítica: Distância entre dois pontos e Elipse. Aritmética: Números Fracionários, Regra de Três, Indução, Números Inteiros, Números Fracionários e MMC. Equações e Sistemas de Equações. Lógica Proposicional.

Fonte: Elaboração Própria

Dissertação 8: A Interpretação Geométrica dos Números Imaginários no Século XIX: A Contribuição de Jean Robert Argand (1768 – 17822)

Sugestão 1: Desenvolvimento de Equações do 2° grau por povos das Antigas: Babilônia, Grécia, Índia e Europa do Século XV e XVII.

Público: Alunos de 1° ano do Ensino Médio que estão trabalhando o conteúdo de funções quadráticas.

Conteúdos Mobilizados: Geometria Plana,

Sugestão 2: Resolução de Equações cúbicas pelo método de Tartaglia.

Público: Alunos do 3° Ano do Ensino Médio.

Conteúdo: Polinômios e Equações Algébricas.

Sugestão 3: Notação da Forma trigonométrica dos Números Complexos de Caspar Wessel (Essa notação é usada atualmente por profissionais da área de eletricidade).
Público: Alunos do 3° Ano do Ensino Médio de Cursos técnicos integrados ao técnico na área eletrônica e eletrotécnica.

Conteúdo: Números Complexos.

Dissertação 9: Uma visita ao Universo Matemático de Lewis Carroll e o (Re)encontro com sua lógica Nonsense

Sugestão 1: Ensinar o Jogo de Xadrez abordando o livro *Através do Espelho* de Lewis Carroll, por meio de um diálogo literário entre Carroll e garoto chamado Bruno.

Público: Alunos do Ensino Fundamental e Médio de qualquer série que não tenham conhecimento de como jogar xadrez.

Conteúdos Mobilizados: Simetria, lógica e teoria dos conjuntos.

Objetivo: Aprender a jogar xadrez.

Observação: Existem outros diálogos citados na dissertação de que abordam conteúdos de lógica, geometria e aritmética.

Sugestão 2: Problemas retirados dos livros de Lewis Carroll. Exemplo: Ladrões e Maçãs: “O primeiro ladrão, ao ver uma loja de maçãs, roubou metade delas e mais meia maçã. O segundo ladrão, chegando depois dele, roubou metade do que o primeiro tinha roubado e mais meia maçã. Não sobrou nenhuma. Quantas maçãs havia na loja?”

Público: Alunos do 1° ano do ensino médio.

Conteúdos: MMC, Equações e números fracionários.

Quadro 71: Conteúdos de Conhecimentos Numéricos do Ensino Médio apresentados nas dissertações e teses

Trabalhos	Conteúdo Principal Focalizado	Conteúdos Secundários Mobilizados
Dissertação 1	Números Irracionais: O número π	Geometria Plana: Círculo, circunferência, polígonos inscritos e circunscritos na circunferência, trigonometria no triângulo retângulo, arco metade e Polinômios.
Dissertação 5	Números Inteiros: O número zero	Não apresentou.
Dissertação 7	Número Irracional: O número e	Geometria Plana (Ensino Superior); Matemática Financeira: Juros Compostos; Função Exponencial e Logaritmos.
Dissertação 10	Sistema Métrico Decimal	Geometria Plana: Áreas e Perímetro.
Tese 3	Aritmética	Números pares e impares; MMC, números primos.
Tese 5	Proporcionalidade	Geometria Plana e Geometria Espacial

Fonte: Elaboração Própria

Dissertação 1: A Quadratura do Círculo e a gênese do Número π

Sugestão: Uso do Método de Arquimedes (240 a. C.) para cálculo do número π com o objetivo de demonstrar a fórmula da área do círculo e comprimento de uma circunferência.

Público: Alunos do 2° Ano do Ensino Médio.

Dissertação 5: A Origem do Zero.

Sugestão: A História do Número zero por Babilônicos, Maias, chineses e Indianos e Ensino de Sistema de numeração decimal a partir de uma abordagem histórica.

Público: Alunos de 1° ano do Ensino Médio quando estiverem estudando os conjuntos numéricos.

Dissertação 10: Um Estudo sobre Elementos Matemáticos presentes na narrativa da descrição do Templo de Jerusalém.

Sugestão: Elaboração de problemas envolvendo as unidades mencionadas na bíblia com as unidades de medidas atuais.

Público: Alunos de 1° Ano do Ensino Médio para estudar o sistema métrico decimal.

Tese 3: O Quadrivium na Obra de Isidoro de Sevilha.

Sugestão: Desenvolvimentos de conceitos de aritmética na Obra de Isidoro de Sevilha na área de Música.

Conteúdos Trabalhados: Razões, Proporção e Médias.

Público: Alunos do 1° Ano do Ensino Médio e principalmente alunos de cursos técnicos integrados ao médio na área de instrumento musical.

Tese 5: "De Divina Proportione" De Luca Pacioli (Tradução Anotada e Comentada)

Sugestão: Atividade relacionando elementos da Esfera e dos polígonos regulares, mais precisamente a proporção entre o lado do polígono e o diâmetro da Esfera.

Público: Alunos do 2° Ano do Ensino Médio que estudam para Olímpiadas de Matemática.

Conteúdos Mobilizados: Geometria Espacial e Geometria Plana.

Quadro 72: Conteúdos de Conhecimentos Geométricos do Ensino Médio apresentados nas dissertações e teses

Trabalhos	Conteúdo Principal Focalizado	Conteúdos Secundários Mobilizados
Dissertação 2	Geometria Plana: Polígonos Regulares	Geometria Espacial: Volumes de Sólidos Geométricos
Dissertação 4	Geometria Espacial: Perspectiva Espacial	Geometria Plana: Simetria
Dissertação 6	Geometria Plana: Casos de congruência; semelhança de triângulos, razões e proporções de segmentos, quadriláteros, triângulos retângulos, Círculos e circunferências, polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência, áreas de figuras planas	Aritmética
Tese 2	Geometria Plana	Aritmética: Sistema Métrico Decimal; Geometria Espacial: áreas de pirâmides
Tese 4	Geometria Plana	Aritmética: Sistema Métrico Decimal
Tese 6	Geometria Espacial	Geometria Plana: Áreas de Figuras Planas; Física Mecânica

Fonte: Elaboração Própria

Dissertação 2: O Ensino da Matemática na Academia Real Militar do Rio de Janeiro, de 1811 a 1874

Sugestão: Atividade Extraclasse de Polígonos regulares usando o Método Lusitano de Desenhar as Fortificações de Serrão Pimentel do Séc. XVIII.

Objetivo: 1) Desenho do forte, usando as técnicas de Serrão Pimentel; 2) Discussão sobre o conceito de polígonos regulares: seus elementos e suas fórmulas.

Conteúdo Mobilizado: Geometria Plana – Polígonos Regulares.

Público: Alunos do 2° ano do Ensino Médio.

Observação: É uma boa aplicação para alunos de cursos técnicos integrados ao médio de Edificações, pois, segundo o autor, trata-se de uma atividade referente à arquitetura militar de interesse de engenheiros.

Dissertação 4: Perspectiva no Olhar – Ciência e Arte do Renascimento

Sugestão: A própria autora já traz uma sugestão de uma sequência didática dividida em cinco blocos: o 1º bloco, chamado de histórico-expositivo, é mostrado em sala de aula, por meio de retroprojetor ou Datashow, imagens de épocas (desde as civilizações, romanas e idade média) e mapas históricos, principalmente do Renascimento, com o objetivo de trabalhar a imagem visual dos alunos. Sugerimos como uma atividade extraclasse.

Objetivo: Desenvolver perspectiva espacial dos alunos

Público: Alunos do 2° ano do Ensino Médio que estão estudando Geometria Espacial ou alunos de cursos técnicos integrados ao médio da área de desenho.

Dissertação 6: Lógica Racional, Geométrica e Analítica (1744) de Manoel de Azevedo Fortes (1660 – 1749): Um estudo das possíveis contribuições para o desenvolvimento educacional luso brasileiro.

Sugestão: Explorar os exemplos de geometria da obra de Manoel de Azevedo Fortes para resolução de problemas geométricos por meio da história da matemática.
Observação: Os problemas citados na dissertação precisam ser adaptados pelos professores de matemática, antes de serem levados para a sala de aula.

Público: Alunos do 2° ano do Ensino Médio.

Tese 2: A Dinâmica do Pensamento Geométrico: Aprendendo a enxergar meias verdades e a construir novos significados

Sugestão: Atividades com áreas de figuras planas desenvolvidas por egípcios, chineses, babilônios, indianos, gregos e romanos.

Público: Alunos de 1° ano ou 2° ano do Ensino Médio que estiverem estudando áreas de figuras planas.

Tese 4: Sobre a Condição Judaica e Matemática

Sugestão: Elaboração de problemas envolvendo as unidades mencionadas na bíblia com as unidades de medidas atuais.

Público: Alunos de 1° Ano do Ensino Médio para estudar o sistema métrico decimal.

Tese 6: Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya – Quatro Episódios da História da Heurística.

Sugestão: Desenvolvimento do Volume da Esfera através do Método de Arquimedes.

Conteúdos mobilizados: Volume de Cilindro e Cone e Princípio da Estática.

Público: Alunos do 2° Ano do Ensino Médio que estão finalizando o assunto de Geometria Espacial.

Nos quadros mostrados anteriormente, apresentamos todos os conteúdos identificados nas dissertações e teses, que possuem potenciais didáticos para o Ensino Médio. Quando levamos em consideração as grandes áreas do ENEM, encontramos 35% de trabalhos na área de conhecimentos numéricos, 35% na área de conhecimentos geométricos, 6% na área de conhecimento algébricos, 6% de conhecimentos algébricos/geométricos, 6% de conhecimentos de probabilidade e estatística, e a categoria que chamamos de *outros*, que traz um trabalho focado nos números complexos e outro em lógica, encontramos em 12% dos trabalhos.

Um outro dado importante em nosso trabalho é sobre o conteúdo de geometria: se olharmos apenas pelos conteúdos principais, encontramos 35% dos trabalhos que abordam esta temática. Porém, quando analisamos o todo, ou seja, os conteúdos secundários mobilizados, verificamos que 70% dos trabalhos mobilizam conceitos de geometria. Sabemos que, muitas vezes, a geometria não é trabalhada como deveria, com professores dando prioridades a conteúdos algébricos, significando que, com essas dissertações e teses, o professor tem uma ferramenta bastante interessante para ser usada em sala de aula, até porque o conteúdo de geometria vem sempre aparecendo com muita frequência na prova do ENEM, além de ser muito importante para a formação dos alunos.

Na exploração das dissertações e teses, mostramos quais são os conteúdos do Ensino Médio que podem ser tomados pelo professor de matemática, justificando sua importância e apontando os principais potenciais didáticos e algumas formas de abordar em sala de aula, como foi mostrado anteriormente em nossas sugestões, ficando por parte do docente que tiver o interesse, se apropriar do trabalho, já sabendo do que ele se trata e o que pode ser trabalhado em sala de aula para desenvolver de acordo com o potencial cognitivo de sua turma e também de acordo com a realidade de cada ambiente escolar, o que poderá ser feito de atividades futuras. Sugerimos onde utilizar certos conteúdos de acordo com suas aplicações e seus níveis de complexidades, por exemplo alguns conteúdos de níveis avançados, sugerimos trabalhar em projetos de Olimpíadas de Matemática, outros que podem ser trabalhados em turmas de ensino técnico integrado ao ensino médio com aplicações nas áreas de música, edificações, eletrônica, eletrotécnica, entre outros, atividades que podem ser desenvolvidas em momentos externos, como feiras de matemática, aulas de campo, projetos de investigação histórica. Todas essas sugestões são dadas no capítulo quatro ao fazer as análises dos potenciais didáticos de cada trabalho.

Uma importante contribuição de nosso trabalho é apresentar aos docentes ou futuros docentes que, por meio da leitura dos materiais produzidos de História da Matemática no Brasil nos cursos de pós-graduação *stricto senso*, é possível desenvolver e produzir materiais que possam ser utilizados em sala de aula com alunos do Ensino Médio. Para isso, apontamos os trabalhos encontrados em 20 anos, de 1990 a 2010, nas bibliotecas virtuais, quais conteúdos matemáticos aparecem nesses e de que forma podem ser usados. E consideramos que, se o professor conseguir elaborar atividades pedagógicas com esse material, as aulas ganharão em qualidade. Podemos observar, pelos quadros apresentados em nossas considerações finais, que temos materiais para serem abordados em todos os três anos do ensino médio, em diversos assuntos da grade curricular.

As dissertações e teses em História da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento, muitas vezes depois de defendidas, são esquecidas em estantes de bibliotecas ou até mesmo nas bibliotecas virtuais. E esta tese mostra uma descrição comentada de quarenta e sete dissertações e teses, detalhando dezessete delas, por se tratar do nosso objetivo de pesquisa. Com isso, em apenas um trabalho, o leitor vai ser capaz de ver do que trata cada um dos quarenta e sete trabalhos de História e Epistemologia da Matemática e pesquisar aquele que lhe interessar em cada momento de sua carreira docente, ajudando com mais um material que pode ser explorado se bem tratado por cada docente e, ao mesmo tempo, ajudá-lo no aprofundamento de seus conhecimentos matemáticos.

Entre nossos cinco objetivos específicos, já mostramos que dois deles foram cumpridos, e podemos afirmar também que o terceiro objetivo específico, categorizar as Dissertações e Teses em História da Matemática produzidas nos Programas de Pós-Graduação no Brasil (1990 – 2010) disponíveis nas Bibliotecas virtuais, também foi atingido, pois fizemos esse levantamento e apresentamos nos capítulos três e quatro. O quarto objetivo específico, descrever as dissertações e teses produzidas nos Programas de Pós-Graduação do Brasil em História e Epistemologia da Matemática no período de 1990 a 2010, também concluímos no terceiro e quarto capítulos.

O último objetivo específico de nossa tese foi analisar cada trabalho publicado neste período, verificando quais temas matemáticos do Ensino Médio são abordados, apontando as possibilidades de utilização no ensino de matemática. Nos quadros 67, 68, 69, 70, 71 e 72, mostramos todos esses conteúdos e, no capítulo quatro, abordamos sobre essas possibilidades de utilização no Ensino Médio. Por isso, podemos constatar que a tese contemplou todos os cinco objetivos específicos.

Nosso estudo baseou-se nas seguintes questões norteadoras: quais dissertações e teses em História e Epistemologia da Matemática possuem potenciais didáticos para serem usadas nas abordagens conceituais no ensino de matemática em nível médio? De que modo esses potenciais aparecem nas dissertações e teses produzidas? Como esses potenciais podem ser usados pedagogicamente no Ensino Médio?

A escolha desses problemas partiu da Hipótese de que os conteúdos matemáticos apresentados em algumas dissertações e Teses de História da Matemática podem contribuir para o ensino da Matemática em Nível Médio, desde que sejam analisados do ponto de vista da exploração de seus potenciais conceituais e didáticos. Com o que foi apresentado no decorrer de nossa tese, constatamos que todas as três perguntas foram respondidas no decorrer do trabalho. E, com isso, foi contemplado com sucesso nosso objetivo geral de investigar os potenciais didáticos das Pesquisas em História e Epistemologia da Matemática produzidas nas dissertações e teses, nos programas de pós-graduação do Brasil, no período de 1990 a 2010, e sugerir encaminhamentos didáticos para o ensino de conteúdos matemáticos do Ensino Médio.

O descritor a seguir sintetiza o percurso da pesquisa realizada:

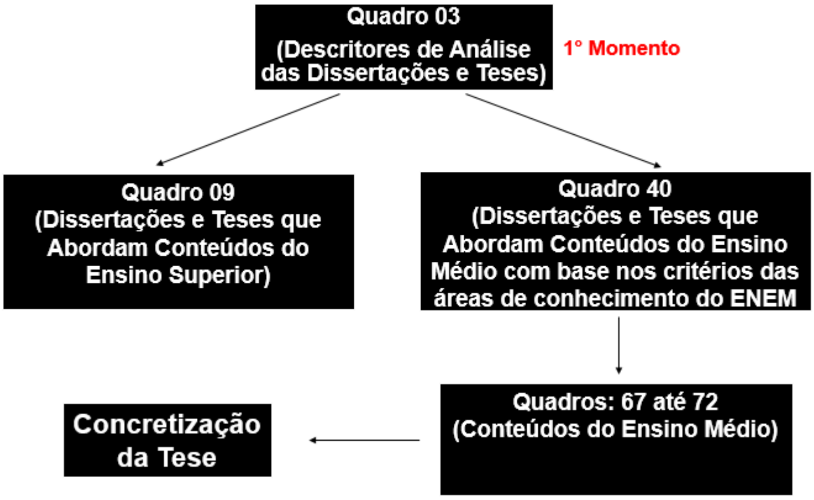


Figura 30: Descritor Processual Empírico

Com isso, podemos concluir que nosso trabalho fez emergir um aspecto novo que ainda não havia sido tomado como foco de análise: as potencialidades didáticas dos estudos em História e Epistemologia da Matemática para o desenvolvimento de conteúdos de matemática escolar, bem como as possibilidades didáticas explícitas ou não nessas pesquisas. Assim, podemos considerar que os objetivos da pesquisa foram alcançados integralmente, pois as dissertações e teses analisadas mostraram que há conteúdos de matemática estabelecidos nas histórias construídas e que podem ser inseridos pedagogicamente na sala de aula do Ensino Médio, comprovando nossa tese de que existem Dissertações e Teses de História da Matemática produzidas nos programas de pós-graduação do Brasil entre 1990 e 2010 com potencialidades conceituais e didáticas para o Ensino Médio, podendo ser utilizados para abordar conceitos matemáticos na Educação Básica a partir de uma reorganização pedagógica adequada a esse nível de ensino, embora as mesmas não tenho sido planejadas, desenvolvidas e avaliadas com essa intenção.

Finalizamos nosso trabalho assegurando que há uma necessidade premente de aprofundamento acerca da potencialidade didática desses trabalhos para uso escolar pelos professores de matemática, desde que se estabeleça um exercício investigatório de pesquisa em sala de aula, para que os alunos possam ler, discutir, refletir e reelaborar as propostas didáticas reelaboradas a partir da utilização das informações geradas na pesquisa histórica, de modo a fazer delas uma prática de renovação desses indicativos matemáticos que poderão se constituir em aparatos didáticos elaborados com base em formas de produção matemática validadas em outras épocas e que podem ser relidos, revividos e reavaliados nas atividades em didáticas em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ANGELO, Cristiane Borges. **Cenário da Produção Acadêmica em História da Matemática no Ensino da Matemática: uma análise reflexiva das teses e dissertações (1990 a 2010).** Tese de Doutorado. Natal: UFRN: 2014.

ANJOS, Marta Figueiredo dos. **A Difícil Aceitação do Números Negativos: Um Estudo da Teoria dos Números de Peter Barlow (1776-1862).** Dissertação de Mestrado. Natal: UFRN: 2008.

ARRUDA, Evilásio José. **O Número de Euler e os Fundamentos dos Números Reais**. Dissertação de Mestrado. Cuiabá: UFMT: 2007.

BALIEIRO FILHO, Inocêncio Fernandes. **Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya – Quatro Episódios da História da Heurística.** Tese de Doutorado. Rio Claro: UNESP: 2004.

BARBOSA, Everaldo Fernandes. **A Regra de L'hôpital - Análise Histórica da Regra de L'hôpital:** A Importância da História da Matemática na Disciplina de Cálculo. Dissertação de Mestrado. Campinas: Unicamp: 2008.

BERTATO, Fabio Maia. **"De Divina Proportione" de Luca Pacioli (Tradução Anotada e Comentada).** Tese de Doutorado. Campinas: UNICAMP: 2008.

BONFIM, Sabrina Helena. **Um Estudo sobre Elementos Matemáticos Presentes na Narrativa da Descrição do Templo de Jerusalém**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP: 2007.

BRANDEMBERG, Joao Cláudio. **Uma Análise Histórico – epistemológica do Conceito de Grupo.** Tese de Doutorado. Natal: UFRN: 2009.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da educação e do Desporto (MEC). **Organizações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: SEF, 2006.

BRITO, Arlete de Jesus. **O Quadrivium na Obra de Isidoro de Servilha.** Tese de Doutorado. Campinas: UNICAMP: 1999.

CALAZANS, Alex. **Newton e Berkeley: As críticas aos fundamentos do método das fluxões n' O Analista**. Dissertação de Mestrado. Curitiba: UFPR: 2008.

CALAZANS, Verônica Ferreira Bahr. **Questões Metodológicas e Oncológicas nas Práticas Matemáticas de Descartes e Newton**. Dissertação de Mestrado. Curitiba: UFPR: 2008.

CLÍMACO, Humberto Assis. **Prova e Explicação em Bernard Bolzano.** Dissertação de Mestrado. Cuiabá: UFMT: 2007.

COELHO, Rejane Alexandre. **A História dos Problemas da Tautócrona e da Branquistócrona**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP: 2008.

COSTA, Cristiano Ohton de Amorim. **Perspectiva no Olhar – Ciência e Arte do Renascimento.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC: 2004.

CUSTÓDIO, Marcio Augusto Damim. **Matemática e Filosofia da Natureza no Século XIV: Thomas Bradwardine**. Tese de Doutorado. Campinas: UNICAMP: 2004.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática da Teoria à Prática.** Campinas: Papirus, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto e Aplicações, v. 2.** 2.ed. São Paulo: Ática, 2014.

DOLCE, Osvaldo. POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar, v. 9.** 7.ed. São Paulo: Editora Atual, 1993.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 1987, São Paulo. **Anais do I ENEM**. São Paulo: Atual Editora. 1988.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 1988, Maringá. **Anais do II ENEM**. São Paulo: Atual Ática.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 1990, Natal. **Anais do III ENEM**. Natal: Editora Universitária. 1993.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 1992, Blumenau. **Anais do IV ENEM**. Blumenau: 1995.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 1995, Aracajú. **Anais do V ENEM**. Aracajú: 1995.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 1998, São Leopoldo. **Anais do VI ENEM**. São Leopoldo: 1998.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2001, Rio de Janeiro. **Anais Eletrônicos do VII ENEM**. Rio de Janeiro: 2001. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem> Acesso em: 19 de Jun. 2015.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Recife. **Anais do VIII ENEM**. Recife: 2004. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/Index.htm> Acesso em: 19 de Jun. 2015.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte. **Anais do IX ENEM**. Belo Horizonte: 2007. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/index.htm > Acesso em: 19 de Jun. 2015.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. **Anais do X ENEM**. Salvador: 2010. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/?info_type=home&lang_user=> Acesso em: 19 de Jun. 2015

FERNANDES, George Pimentel; MENEZES, Josinalva Estácio. **O Movimento da Educação Matemática no Brasil: cinco décadas de existência**. Recife: UFRPE, 2004. p. 85-102. BBE.

FOSSA, John Andrew; MENDES, Iran Abreu. Conception and atitudes of mathematics teachers towards the history of mathematics as a pedagogical device. In: LAGARTO, M. J., VIEIRA, A.; VELOSO, E. (orgs.). **História e Educação Matemática.** Braga, Portugal: Associação de Professores de Matemática da Universidade do Minho, 1996. Actas, v .2, p. 198-205.

FRANZON, Carmen Rosane. **Análise do Livro I do Geometria de Descartes: Apontando Caminhos para o Ensino da Geometria Analítica Segundo uma abordagem Histórica.** Dissertação de Mestrado. Natal: UFRN: 2004.

GENTILI, Evangelina Helena. **Dos Complexos aos Números de Cayley: Uma Abordagem Geométrica.** Dissertação de Mestrado. Campinas: UNICAMP: 2002.

GOMES, Ana Lúcia Assunção. **A Dinâmica do Pensamento Geométrico: Aprendendo a Enxergar Meias Verdades e a Construir Novos Significados.** Tese de Doutorado. Natal: UFRN: 1997.

GOMES, Rodrigo Rafael. **A Noção de Função em Frege**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP: 2009.

GONÇALVES, Francisco Djnnathan da Silva. **História da Educação Matemática no Brasil:** Contribuições das pesquisas para professores da Educação Básica. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação. Natal: UFRN, 2015.

MARTINS, César Ricardo. **Resolução de Equações Algébricas por Radicais.** Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP: 2006.

MARTINS, João Carlos Gilli. **Sobre Revoluções Científicas na Matemática**. Tese de Doutorado. Rio Claro: UNESP: 2005.

MELLO, Albimar Gonçalves de. **Recorte dos Produtos Educacionais em História no Ensino da Matemática e em Didática da Matemática a partir das Dissertações e Teses defendidas no Brasil entre 1990-2010**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Natal: UFRN, 2012.

MELO, Severino Barros. **Um Estudo sobre a Relação entre Matemática e Religião na Obra de Baise Pascal.** Tese de Doutorado. Natal: UFRN: 2009.

MENDES, Iran Abreu. **História da Matemática no Ensino:** Entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

MENDES, Iran Abreu. **Cartografias da produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990-2010**. Relatório de Pesquisa (Bolsa produtividade CNPq). Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014. Impresso.

MENDES, Iran Abreu (a). **Tendências da Pesquisa em História da Matemática no Brasil: A Propósito das Dissertações e Teses (1990 – 2010).** Educação Matemática e Pesquisa. São Paulo, v. 14, Nº3, PP. 465 - 480, 2012.

MENDES, Iran Abreu (b). Pesquisas em história da Educação Matemática no Brasil em três dimensões. **Quipu**, vol. 14, núm. 1. pp. 69-92. enero-abril de 2012.

MENDES, Iran Abreu. **Cartografias da produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990-2010**. Projeto de pesquisa (Bolsa produtividade CNPq). Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010. Impresso.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MENDES, Iran Abreu. Uma radiografia dos textos publicados nos Anais dos SNHM. In: **Anais**. 11º Seminário Nacional de História da Ciência e Tecnologia. Niterói: SBHC, 2008. p. 1-11.

MENDES, Iran Abreu. **Uso da História no Ensino da Matemática:** Reflexões Teóricas e experiências. Belém: EDUEPA. 90p. Série Educação; n.1. 2001

MENEZES, Josinalva Estácio. **Conhecimento, Interdisciplinaridade e Atividades de ensino com Jogos Matemáticos: uma Proposta Metodológica.** Séries Contextos Matemáticos volume 5. Recife: Editora da UFRPE, 2008.

MIRANDA, Gustavo Alexandre de. **Silvanus Phillips Thompson e a desmistificação do Cálculo: Resgatando uma história antiga**. São Paulo: PUC: 2004.

MORAES, Carlos Roberto de. **Uma História da Lógica no Brasil.** Tese de Doutorado. Rio Claro: UNESP: 2007.

MORMÊLLO, Ben Hur. **O Ensino de Matemática na Academia Real Militar do Rio de Janeiro, de 1811 a 1874.** Dissertação de Mestrado. Campinas: UNICAMP: 2010.

NASCIMENTO, Carlos Ociran Silva. **Alguns Aspectos da Obra de Joaquim Gomes de Souza**. Dissertação de Mestrado. Campinas: UNICAMP: 2008.

NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner. **O Livro "Théorie Des Approximations Numériques et Du Calcul Abrégé" de Agliberto Xavier**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP: 2005.

PACHECO, Edilson Roberto. **Sobre Condição Judaica e Matemática**. Tese de Doutorado. Rio Claro: UNESP: 2006.

PADRÃO, Darice Lascala. **A Origem do Zero**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC/SP: 2008.

PALARO, Luzia Aparecida. **A Concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue.** Tese de Doutorado. São Paulo: PUC: 2008.

PAULA, Luciene de**. A Interpretação Geométrica dos Números Imaginários no Século XIX**: A Contribuição de Jean Robert Argand (1768 – 1822). Dissertação de Mestrado. Cuiabá: UFMT: 2007.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **A Obra "De Triangulis Omnimodis Libri Quinque" de Johann Müller Regiomantanus (1436 – 1476): Uma Contribuição para o Desenvolvimento da Trigonometria.** Tese de Doutorado. Natal: UFRN: 2010.

PESSOA, Nemone de Sousa. **Um Estudo sobre a Concepção de Paradoxo Segundo o Pensamento de Augustus de Morgan.** Dissertação de Mestrado. Natal: UFRN: 2009.

PIMENTEL, Ronaldo. **Platonismo e Naturalismo em Matemática:** Os Axiomas da Teoria dos Conjuntos. Dissertação de Mestrado. Belo Horizonte: UFMG: 2010.

RADFORD, Luis. **Cognição Matemática:** História, Antropologia e Epistemologia. São Paulo: Editora Livraria da Física: 2011.

RADU, Mircua. **A Debate about the axiomatization of arithmetic**. Otto Hölder Against Grassmann. Germany. Elsiever, p. 340-377. 2003.

REGO, Rogéria G.; REGO, Rômulo M.; VIEIRA. Kleber M**. Laboratório de Ensino da Geometria**. Campinas: Editora Autores Associados: 2012.

REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. Rio Claro: SBHMat, 2000 – 2012. Semestral. ISSN 1519-955X.

RIBEIRO, Dulcyene Maria. **Lógica Racional, Geométrica e Analítica (1744) de Manoel de Azevedo Fortes (1660-1749):** Um estudo das possíveis contribuições para desenvolvimento educacional Luso-Brasileiro. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP: 2003.

SAD, Ligia Arantes (Ed.). **Anais. VI Seminário Nacional de História da Matemática**. Rio Claro: SBHMat, 2005.

SÁNCHEZ GAMBOA, Silvio Ancisar. Pesquisa qualitativa: superando tecnicismos e falsos dualismos. **Contrapontos** - volume 3 - n. 3 - p. 393-405 - Itajaí, set./dez. 2003.

SÁNCHEZ GAMBOA, Silvio Ancisar. **Pesquisa em Educação**: Métodos e Epistemologias. 2. ed. – Chapecó: Argos, 2012.

SANTOS, Eberth Eleutério**. O Infinito de Georg Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática.** Tese de Doutorado. Campinas: UNICAMP: 2008.

SCHÖN, Michaela Costa. **Número:** Reflexões sobre as Conceituações de Russel e Peano. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC: 2006.

SERVIDONI, Maria do Carmo Pereira. **A Axiomatização da Aritmética:** E a Contribuição de Hermann Günther Grasmann. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC: 2006.

SILVA, Luiz Roberto Rosa. **Prof. J. O. Monteiro de Camargo e o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise na Universidade de São Paulo**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP: 2006.

SILVA, Maria Aparecida Roseane. **Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) e suas Obras em Teoria dos Números.** Tese de Doutorado. Natal: UFRN: 2010.

SOUZA, Giselle Costa de. **Uma Reavaliação do pensamento lógico de George Boole: à luz da História da Matemática.** Dissertação de Mestrado. Natal: UFRN: 2005.

SOUZA, Giselle Costa de. **Um Estudo sobre as Origens da Lógica Matemática.** Tese de Doutorado. Natal: UFRN: 2008.

TÁBOAS, Plínio Zornoff. **Luigi Fantappiè: Influências na Matemática Brasileira. Um Estudo de História como Contribuição para a Educação Matemática**. Tese de Doutorado. Rio Claro: UNESP: 2005.

TEIXEIRA, Rafael Montoito. **Uma Visita ao Universo Matemático de Lewis Carroll e o (Re) encontro com sua Lógica do Nonsense.** Dissertação de Mestrado. Natal: UFRN: 2007.

TOLEDO, José do Carmo. **Uma História do Processo de Institucionalização da Área de Análise Matemática no Brasil**. Tese de Doutorado. Rio Claro: UNESP: 2008.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas. **A Influência da Matemática nas Regras para a Direção do Espírito e em O Discurso do Método.** Tese de Doutorado. Rio Claro UNESP: 2007.

VENDEMIATTI, Aluísio Daniel. **A Quadratura do Círculo e a gênese do número π.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC: 2009.

VENTURIN, Jamur André. **O Processo de Integração de Blaise Pascal**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro. Unesp: 2007.

VIANA, Fernando César de Abreu. SOUZA, Herbert José Cavalcanti de. **Matemática e suas Tecnologias**. João Pessoa. Editora Imprell: 2013.