



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
TESE DE DOUTORADO

**SOLUÇÕES ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS E INFLAÇÃO EM  
TEÓRIAS DE GRAVIDADE DE ORDENS SUPERIORES**

GESIEL RODRIGUES DA SILVA NETO

NATAL/RN  
NOVEMBRO DE 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
TESE DE DOUTORADO

# SOLUÇÕES ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS E INFLAÇÃO EM TEORIAS DE GRAVIDADE DE ORDENS SUPERIORES

GESIEL RODRIGUES DA SILVA NETO

*Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor** em física.*

**Orientador:** Prof. Dr. Léo Gouvêa Medeiros

NATAL/RN  
NOVEMBRO DE 2022

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN  
Sistema de Bibliotecas - SISBI  
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Silva Neto, Gesiel Rodrigues da.

Soluções esfericamente simétricas e inflação em teorias de gravidade de ordens superiores / Gesiel Rodrigues da Silva Neto. - 2022.

201 f.: il.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Física. Natal, RN, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Léo Gouvêa Medeiros.

1. Física - Tese. 2. Gravidades de Ordens Superiores - Tese. 3. Soluções Esfericamente Simétricas - Tese. 4. Inflação Cósmica - Tese. I. Medeiros, Léo Gouvêa. II. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 53(043.2)

## AGRADECIMENTOS

Inicialmente, quero agradecer em especial às pessoas que decisivamente contribuíram ao longo do meu doutorado. Sou imensamente grato ao meu orientador, Prof. Léo Medeiros, pela orientação, parceria, profissionalismo e exemplo. Sou não menos grato à minha família pela minha vida, educação, apoio e amor. Gratidão infinita, seu Carlos, dona Theolina, dona Salvina, Carla, Ricardo, Joyce, Lelê e Lalá.

Sou bastante grato ao apoio e inspiração dos meus amigos e colegas da física: Arthur Cavalcanti, Gival Pordeus, William Jouse, Jéfferson Costa, Tharcisyo Duarte, Neto Crisanto, Pierre Niau, Nathan Pessoa, Guilherme Monteiro, Fabrizio Oliviero, Tibério Azevedo, Cristóvão Nascimento, Nyladih Theodory, Francys Anthony, Arcênio Lourenço, Hebertt Leandro, Raphael Benjamim e tantos outros.

Agradeço ao Departamento de Física, ao Programa de Pós-Graduação em Física, seu corpo docente e funcionários. À todos, desde ao coordenador do PPGF, Prof. Felipe Bohn, passando pelos professores de quem fui aluno ou que se fizeram presentes contribuindo nas minhas bancas, à exemplo do Prof. Raimundo Silva Junior, e funcionários, engrenagens responsáveis por permitir que tudo funcione bem.

Agradeço à UFRN por tudo: pela formação profissional e pessoal, por todo aprendizado, pelas possibilidades e oportunidades, e pelas pessoas que de outra maneira não conheceria ou conviveria não fosse tal instituição. Gratidão e honra, UFRN.

Agradeço ao apoio financeiro da CAPES, que desempenhou um importante papel durante o período de isolamento social devido à pandemia da COVID-19.

Por fim, agradeço a Deus por me acompanhar na minha trajetória. Agradeço por me possibilitar concluir mais um ciclo desafiador.

*We are a way for the Cosmos to know itself.*

*Carl Sagan*

Extensões da relatividade geral nas quais correções de ordens superiores da curvatura são incluídas na ação de Einstein-Hilbert têm recebido bastante atenção principalmente por modelos na física de altas energias — teoria de cordas e gravidade quântica — e na cosmologia da expansão acelerada do universo primordial. Nesta tese de doutorado, propomos uma gravidade de ordem superior, caracterizada pela inclusão de todos os termos envolvendo o escalar de Ricci até a segunda ordem de correção. A partir de então, abordamos dois temas de interesse. O primeiro tema diz respeito a investigação de soluções esfericamente simétricas, onde exploramos soluções em um regime de campo fraco e soluções de buracos negros. Nós obtivemos todas as soluções no limite de campo fraco e endereçamos o tema da possibilidade de existência de soluções de buracos negros além de Schwarzschild. Por sua vez, o segundo tema envolve a pesquisa no contexto da inflação cósmica, motivados pelo sucesso do modelo de Starobinsky. Nesse sentido, desenvolvemos uma pesquisa detalhada das inflações de Starobinsky+ $R^3$  e Starobinsky+ $R^3 + R \square R$ , confrontando-os com os dados observacionais mais recentes oriundos do satélite Planck e do BICEP3/Keck Array.

**Palavras-chave:** Gravidades de ordens superiores. Soluções esfericamente simétricas. Inflação cósmica.

## ABSTRACT

Extensions of general relativity in which higher-order curvature corrections are included in Einstein-Hilbert's action have received increasing attention mainly by model building in high-energy physics — string theory and quantum gravity — and in the accelerated expansion of the very early universe. In this PhD thesis, we proposed a higher-order gravity, characterized by the inclusion of all correction terms up to the second-order involving the Ricci scalar. From then on, we approached two topics of interest. The first topic concerns the investigation of spherically symmetric solutions, where we explored weak-field regime and black hole solutions. We obtained all solutions in the weak-field regime and also addressed the issue of the possibility of existence of non-Schwarzschild black hole solutions. In turn, the second topic involves research in the context of cosmic inflation, motivated by the success of the Starobinsky model. In this sense, we developed a detailed research of Starobinsky+ $R^3$  and Starobinsky+ $R^3 + R\Box R$  inflationary models, confronting them with the most recent observational data from the Planck satellite and the BICEP3/Keck Array.

**Keywords:** Higher-order gravities. Spherically symmetric solutions. Cosmic Inflation.

Las extensiones de la relatividad general en las que se incluyen correcciones de curvatura de orden superior en la acción de Einstein-Hilbert han recibido una atención considerable principalmente para modelos en física de alta energía — teoría de cuerdas y gravedad cuántica — y en inflación cósmica. En esta tesis de doctorado, proponemos una gravedad de orden superior, caracterizada por la inclusión de todos los términos que involucran al escalar de Ricci hasta la corrección de segundo orden. A partir de ahí, abordamos dos temas de interés. El primer tema se refiere a la investigación de soluciones esféricamente simétricas, donde exploramos soluciones en un régimen de campo débil y soluciones de agujeros negros. Obtuvimos todas las soluciones en el límite del campo débil y abordamos el tema de la posibilidad de existencia de soluciones de agujeros negros más allá de Schwarzschild. A su vez, el segundo tema involucra la investigación en el contexto de la inflación cósmica, motivado por el éxito del modelo de Starobinsky. En este sentido, desarrollamos un estudio detallado de las inflaciones de Starobinsky+ $R^3$  y Starobinsky+ $R^3 + R \square R$ , comparándolos con los datos observacionales más recientes del satélite Planck y el BICEP3/Keck Array.

**Palabras clave:** Gravedades de órdenes superiores. Soluciones esféricamente simétricas. Inflación cósmica.

## LISTA DE FIGURAS

3.1	Diagrama de espaço-tempo, em $z = 0$ , para frentes de onda emanando de um ponto $P$ em instantes $t_1, t_2$ e $t_3$ . Fonte: (d’Inverno, 1992). . . . .	22
3.2	Estrutura dos cones de luz para geodésicas radiais nulas em coordenadas de Schwarzschild. Fonte: (Hobson G. P. Efstathiou, 2005). . . . .	25
3.3	Estrutura dos cones de luz para geodésicas de uma partícula em queda livre radial em coordenadas de Eddington-Finkelstein. Fonte: (Hobson G. P. Efstathiou, 2005). . . . .	27
5.1	Gráfico em escalas logarítmicas, onde é apresentado um resumo da evolução do universo em escalas comóveis, incluindo a geração e evolução das perturbações de modo $k$ . Fonte: (BAUMANN, 2013). . . . .	44
5.2	Gráfico comparativo entre o modelo padrão de Friedmann (curva tracejada) e um modelo incluindo uma fase inflacionária. Os eixos representam a taxa de expansão $\dot{a}$ em função do tempo $t$ . Fonte: (MUKHANOV, 2005). . . . .	48
5.3	Região de homogeneidade e isotropia compreendida nos círculos concêntricos de raios $r_e(t)$ e $2r_e(t)$ . Fonte: (MUKHANOV, 2005). . . . .	49
5.4	Potencial de Coleman-Weinberg. Ele é capaz de gerar um regime inflacionário do tipo slow-roll, uma vez que (1) possui uma região de platô, onde o campo desliza lentamente, $\dot{\phi}^2 \ll V$ , e (2) possui uma região de mínimo global, onde ocorrem as oscilações coerentes, processo responsável por transferir energia do campo ínflaton para os campos de matéria. Fonte: (MUKHANOV, 2005). . . . .	55
5.5	Espaço de fase $\varphi \times \dot{\varphi}$ das soluções de Eq. (5.52). Fonte: (MUKHANOV, 2005). . . . .	56
5.6	Potencial do modelo de Starobinsky, Eq. (5.59), para $V_0 = M_{Pl} = 1$ . . . . .	58
5.7	Espaço de fase $\varphi \times \dot{\varphi}$ das soluções de Eq. (5.52). . . . .	59
5.8	Diagrama onde se apresentam hipersuperfícies de tempo constante. Fonte: (MUKHANOV, 2005). . . . .	62

- 
- 5.9 Espaço de parâmetros  $n_s \times r_{0.002}$  marginalizado contendo regiões de 68% e 95% CL para os dados do Planck sozinho e combinados com BK14 ou BK14 mais BAO. Comparação com as previsões de alguns modelos teóricos inflacionários. Fonte: (AKRAMI et al., 2018). . . . . 98
- 6.1 Potencial  $V(\chi)$  como função de  $\chi$  normalizado para  $\kappa_0 = 1$ . Os máximos estão localizados em  $\chi_c \simeq 3.06, 5.18$  e  $7.46$  para  $\alpha_0 = 10^{-2}, 10^{-4}$  e  $10^{-6}$ , respectivamente. . . . . 102
- 6.2 Espaço de fase  $(\chi, \dot{\chi})$  considerando  $\kappa_0 = 1$  e  $\alpha_0 = 10^{-2}$ . Os pontos vermelho e preto correspondem aos pontos críticos  $(0, 0)$  e  $(\chi_c, 0)$  com  $\chi_c = 3.06$ , respectivamente. Já as linhas vermelha e preta representam duas trajetórias que caminham em direções opostas com relação ao ponto de sela  $(\chi_c, 0)$ . . . . . 103
- 6.3 Os contornos em azul correspondem aos vínculos em 68% e 95% C.L. do plano  $n_s \times r_{0.002}$  dados pelo Planck mais BICEP3/Keck mais BAO (ADE et al., 2021). Os círculos pretos representam o modelo de Starobinsky ( $\alpha_0 = 0$ ) para  $N_k = 52$  (menor) e  $N_k = 59$  (maior). Na medida em que  $\alpha_0$  aumenta, as curvas se movem para a esquerda e levemente para baixo (região verde clara), diminuindo os valores para a razão tensorial-escalar e do índice espectral escalar. Os círculos em cinza representam os limites superiores para  $\alpha_0$  associados a 95% C.L.. Nesse caso,  $N_k = 52$  corresponde a  $\alpha_0 = 4.1 \times 10^{-5}$  e  $r = 4.1 \times 10^{-3}$ ; e  $N_k = 59$  corresponde a  $\alpha_0 = 8.7 \times 10^{-5}$  e  $r = 2.7 \times 10^{-3}$ . . . . . 117
- 7.1 Gráficos  $\chi_t \times \chi$  considerando cortes no espaço de fase  $(\chi, \lambda, \chi_t, \lambda_t)$  fixando  $\lambda_t = \lambda_{tt} = 0$  e  $\beta_0 = 0.001$  com  $(\lambda, \alpha_0) = (173, 0.0001)$  (gráfico da esquerda) e  $(\lambda, \alpha_0) = (94, 0.00034)$  (gráfico da direita). Os pontos em vermelho e preto correspondem aos pontos críticos  $P_0$  e  $P_c$ , respectivamente. Para  $\alpha_0 = 0.0001$  temos  $P_c = (5.18, 173, 0, 0)$  e para  $\alpha_0 = 0.00034$  temos  $P_c = (4.58, 94, 0, 0)$ . As trajetórias vermelhas (cianas) representam trajetórias que ao alcançarem a linha atratora próxima de  $\dot{\chi} = 0$  se aproximam (afastam) da origem. Detalhes sobre a interpretação dos gráficos são apresentadas no corpo do texto. . . . . 129
- 7.2 Gráficos  $\lambda_t \times \lambda$  considerando cortes no espaço de fase  $(\chi, \chi_t, \lambda, \lambda_t)$  fixando  $\chi_t = 0$  e  $\beta_0 = 0.001$  com  $(\chi, \alpha_0) = (5.18, 0.0001)$  e (gráfico da esquerda) e  $(\chi, \alpha_0) = (4.58, 0.00034)$  (gráfico da direita). Os pontos em preto correspondem aos pontos crítico  $P_c = (5.18, 173, 0, 0)$  (gráfico da esquerda) e  $P_c = (4.58, 94, 0, 0)$  (gráfico da direita). Detalhes sobre a interpretação dos gráficos são apresentadas no corpo do texto. . . . . 130

- 7.3 Os contornos em azul representam os vínculos do plano  $n_s \times r_{0.002}$  em 68% e 95% C.L. devido os dados observacionais do Planck mais BICEP3/Keck mais BAO (ADE et al., 2021). À esquerda, fixamos o parâmetro  $\beta_0$  e variamos os demais. Os círculos em vermelho claro representam o modelo Starobinsky+ $R^3$  para  $N = 52$  (menor) e  $N = 59$  (maior). Já os círculos em amarelo representam o modelo completo com  $\beta_0 = 1.5 \times 10^{-2}$  para  $N = 52$  e  $N = 59$ . Na medida em que os valores de  $\alpha_0$  aumentam, a região prevista pelo modelo se desloca para baixo e para a esquerda, até cruzarem a região de 95% C.L.. Ao cruzarem, as curvas para Starobinsky+ $R^3$  e modelo completo com  $\beta_0 = 1.5 \times 10^{-2}$  para  $N = 52$  correspondem a  $\alpha_0 = 3.5 \times 10^{-5}$  e  $r_{0.002} = 4.1 \times 10^{-3}$  e  $\alpha_0 = 4 \times 10^{-5}$  e  $r_{0.002} = 4.1 \times 10^{-3}$ , respectivamente; já para  $N = 59$  correspondem a  $\alpha_0 = 8.2 \times 10^{-5}$  e  $r_{0.002} = 2.8 \times 10^{-3}$  e  $\alpha_0 = 5.4 \times 10^{-5}$  e  $r_{0.002} = 2.9 \times 10^{-3}$ , respectivamente. À direita, por sua vez, fixamos o parâmetro  $\alpha_0$  e variamos os demais. Os círculos em vermelho claro representam o modelo Starobinsky- $R \square R$  para  $N = 52$  (menor) e  $N = 59$  (maior). Já os círculos em verde representam o modelo completo com  $\alpha_0 = 10^{-5}$  para  $N = 52$  e  $N = 59$ . Na medida em que os valores de  $\beta_0$  aumentam, a região prevista pelo modelo se deslocam para a direita e levemente para cima, até cruzarem a região de 95% C.L.. Ao cruzarem, as curvas para  $N = 52$  correspondem aproximadamente a  $\beta_0 = 1.7 \times 10^{-2}$  e  $r_{0.002} = 5.2 \times 10^{-3}$ ; para  $N = 59$  correspondem aproximadamente a  $\beta_0 = 1.5 \times 10^{-2}$  e  $r_{0.002} = 3.9 \times 10^{-3}$ . . . . . 144
- 7.4 As regiões em azul representam as regiões permitidas para os parâmetros  $\alpha_0 \times \beta_0$  em 68% e 95% C.L. devido os dados observacionais do Planck mais BICEP3/Keck mais BAO (ADE et al., 2021). À esquerda temos o Plot para  $N = 52$ , enquanto à direita, o temos para  $N = 59$ . Note que os vínculos para  $N = 59$  permitem uma região maior para os parâmetros  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , em consonância com o que vimos na figura 7.3, cujas previsões para  $N = 59$  estão mais no interior da região de 68% C.L.. Observe que para grandes valores de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , por volta de  $\alpha_0 = 1.5 \times 10^{-4}$  e  $\beta_0 = 2.5 \times 10^{-2}$  ( $N = 52$ ) e  $\alpha_0 = 2.2 \times 10^{-4}$  e  $\beta_0 = 1.2 \times 10^{-2}$  ( $N = 59$ ), as regiões previstas para os parâmetros convergem para uma região assintótica. Nessa região, as observações não descartam valores maiores para os parâmetros. No entanto, se faz necessário um ajuste fino entre  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , tornando cada vez mais improvável a ocorrência. . . . . 145

## LISTA DE TABELAS

4.1	Esta tabela nos mostra os valores obtidos para $l_{\pm}$ em cada um dos intervalos de $\beta_0$ para $\kappa_0$ positivo. Note que apenas o intervalo $0 < \beta_0 < 3/4$ nos dá quantidades reais para ambos $l_{\pm}$ . . . . .	32
4.2	Esta tabela nos mostra os valores obtidos para $l_{\pm}$ em cada um dos intervalos de $\beta_0$ para $\kappa_0$ negativo. Nenhum deles nos dá valores reais para ambos $l_{\pm}$ . . . . .	32
5.1	Soluções para as perturbações escalares $\phi$ e $\delta$ nos regimes sub e super-horizonte para um universo dominado pela matéria. . . . .	75
5.2	Soluções para as perturbações escalares $\phi$ e $\delta$ nos regimes sub e super-horizonte para um universo dominado pela radiação. . . . .	78
6.1	Valores máximos para $N_k$ considerando diferentes valores de $\alpha_0$ . Observe que a existência de um período mínimo de slow-roll consistente com as aproximações feitas na Sec. 6.3.2 exige que $\alpha_0 \lesssim 10^{-3}$ . . . . .	114
6.2	Valores mínimos para $N_k$ considerando diferentes valores de $\alpha_0$ . Como no caso anterior, $\alpha_0$ está limitado por $\alpha_0 \lesssim 10^{-3}$ . . . . .	115
6.3	Valores de $R_{\max}$ variando $\alpha_0$ para $N_k = 52$ e $N_k = 59$ . Devido aos resultados da Sec. 6.4.2, consideramos $\alpha_0 \leq 10^{-4}$ . Observe que para $\alpha_0 \sim 10^{-18}$ , a quantidade $R_{\max}$ alcança a escala de Planck. . . . .	118
6.4	Probabilidade $P(\alpha_0, N_k)$ para diferentes valores de $\alpha_0$ com $N_k = 52$ e $N_k = 59$ . Novamente consideramos $\alpha_0 \leq 10^{-4}$ . . . . .	119
6.5	Cálculo de $\delta^{(1)}$ e $\delta^{(2)}$ para diferentes valores de $\alpha_0$ considerando $N_k = 52$ e $\delta_c^2 = \alpha_0/3$ . . . . .	120

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Relatividade geral em poucas palavras</b>	<b>5</b>
2.1	Fundamentos . . . . .	5
2.2	Partícula em queda livre . . . . .	7
2.3	Curvatura e tensor energia-momento . . . . .	11
2.4	Equações de campo . . . . .	12
2.5	A solução de Schwarzschild . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Buracos negros de Schwarzschild</b>	<b>19</b>
3.1	Caracterização das coordenadas e singularidades . . . . .	19
3.2	Diagramas do espaço-tempo . . . . .	22
3.3	Espaço-tempo em coordenadas de Schwarzschild . . . . .	23
3.4	Coordenadas de Eddington-Finkelstein . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Soluções esfericamente simétricas</b>	<b>28</b>
4.1	Soluções em um regime de campo fraco . . . . .	28
4.1.1	Análise de estabilidade . . . . .	32
4.2	Soluções de buracos negros . . . . .	35
4.2.1	Desvios da solução de Schwarzschild . . . . .	38
4.3	Comentários finais . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Introdução à inflação</b>	<b>43</b>
5.1	Inflação no background cosmológico . . . . .	44
5.1.1	O problema das condições iniciais . . . . .	45

5.1.2	Inflação: uma visão geral . . . . .	47
5.1.3	A física da inflação . . . . .	52
5.2	Perturbações em cosmologia . . . . .	61
5.2.1	Perturbações e variáveis invariantes de <i>gauge</i> . . . . .	62
5.2.2	Equações para as perturbações cosmológicas . . . . .	67
5.2.3	Soluções das equações perturbadas . . . . .	73
5.3	Perturbações escalares na inflação . . . . .	80
5.3.1	Quantização canônica no espaço de de Sitter . . . . .	83
5.3.2	Flutuações quânticas no estado de vácuo . . . . .	89
5.3.3	Perturbação de curvatura . . . . .	91
5.4	Perturbações tensoriais . . . . .	94
5.5	Conexão com as observações . . . . .	95
<b>6</b>	<b>A inflação de Starobinsky+<math>R^3</math></b>	<b>99</b>
6.1	Equações de campo . . . . .	100
6.2	Potencial e espaço de fase no background de Friedmann . . . . .	101
6.3	Dinâmica inflacionária do campo escalar . . . . .	104
6.3.1	Região assintótica do potencial $V(\chi)$ . . . . .	104
6.3.2	Regime inflacionário em ordem dominante de slow-roll . . . . .	105
6.3.3	Término da inflação e reaquecimento . . . . .	108
6.4	Vínculos observacionais . . . . .	111
6.4.1	Intervalo no número de e-folds $N_k$ da inflação . . . . .	111
6.4.2	Vínculos obtidos a partir das anisotropias da RCF . . . . .	115
6.4.3	Condições iniciais . . . . .	116
6.5	Comentários finais . . . . .	121
<b>7</b>	<b>A inflação de Starobinsky+<math>R^3 + R\Box R</math></b>	<b>123</b>
7.1	Equações de campo . . . . .	123
7.2	Inflação no background de Friedmann . . . . .	124
7.3	Espaço de fase . . . . .	125
7.4	Inflação em ordem dominante de slow-roll . . . . .	129
7.4.1	Cálculo dos parâmetros de slow-roll e número de $e$ -folds . . . . .	131
7.5	Inflação via cosmologia perturbativa . . . . .	133
7.5.1	Equações para as perturbações escalares . . . . .	134
7.5.2	Equações em ordem dominante de slow-roll . . . . .	135
7.5.3	Perturbações adiabáticas e de isocurvatura . . . . .	136

7.5.4	Soluções para as perturbações . . . . .	140
7.6	Conexão com as observações . . . . .	142
7.7	Comentários finais . . . . .	145
<b>8</b>	<b>Conclusão e Perspectivas</b>	<b>148</b>
<b>A</b>	<b>Obtenção das equações de campo</b>	<b>150</b>
<b>B</b>	<b>Perturbações em torno de Schwarzschild: análise via perturbação singular</b>	<b>156</b>
<b>C</b>	<b>Dedução das equações para a evolução das perturbações</b>	<b>162</b>
<b>D</b>	<b>Conservação da perturbação de curvatura comóvel</b>	<b>166</b>
<b>E</b>	<b>Frame de Einstein de Starobinsky+<math>R^3</math></b>	<b>168</b>
<b>F</b>	<b>Frame de Einstein de Starobinsky+<math>R^3 + R \square R</math></b>	<b>172</b>
<b>G</b>	<b>Determinação de <math>\chi_t</math> e <math>\lambda</math></b>	<b>177</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>187</b>

A relatividade geral (RG) ainda é nossa teoria padrão para descrever a gravidade. Isso se deve ao seu imenso poder preditivo. Mesmo após um século desde sua publicação, ela continua sendo corroborada pelas observações, a saber, pelas detecções diretas das ondas gravitacionais oriundas de fusões de buracos negros e estrelas de neutrons (ABBOTT et al., 2016a; ABBOTT et al., 2016b; ABBOTT et al., 2017).

No entanto, apesar de seu sucesso, propostas de extensões têm sido motivadas por diversas áreas. Na física de altas energias, incluem-se modelos de gravidade quântica e teoria de cordas, cuja principal motivação é o de dar um passo na direção da solução do problema fundamental da não renormalizabilidade da RG (Utiyama; DeWitt, 1962; STELLE, 1977). Tais modelos visam a completude no ultravioleta da RG. Nesse cenário, a ação gravitacional da RG necessita ser suplementadas por termos adicionais de ordens superiores na medida em que aumentamos a escala de energia (HOOFT; VELTMAN, 1974). Há também motivações emergentes da cosmologia principalmente devido o universo primordial inflacionário (Starobinsky, 1980).

De acordo com o teorema de Lovelock, fundamentalmente, a RG é construída com base em algumas hipóteses: ela é uma teoria de gravidade métrica riemanniana 4-dimensional, contendo a métrica  $g_{\mu\nu}$  como único campo fundamental, invariante por diffeomorfismo e cujas equações de campo são de segunda ordem. Nesse sentido, extensões à RG são alcançadas ao violar quaisquer dessas hipóteses (CLIFTON et al., 2012). Ao violarmos a primeira hipótese, por exemplo, podemos permitir um espaço-tempo com dimensão de ordem mais alta, ou mesmo considerar uma ação gravitacional construída com invariantes de curvatura e torção devido um espaço-tempo de Riemann-Cartan (HEHL et al., 1976). Se violarmos a hipótese de que a teoria de gravidade possui a métrica como único campo fundamental, por exemplo, podemos obter as teorias de Horndeski (HORNDESKI, 1974). Essas, por sua vez, são as teorias de gravidade mais gerais em quatro dimensões cuja ação, construída com a métrica e um campo escalar, conduz à equações de campo de segunda ordem. Por outro lado, ao permitirmos que as equações de campo da teoria sejam acima da segunda ordem e preservarmos todas as demais hipóteses, encontramos as gravidades de ordens superiores.

As teorias de gravidade de ordens mais altas são caracterizadas pela inclusão

de termos de correção na ação de Einstein-Hilbert (EH) que conduzem a equações de campo de ordens superiores. Tais correções podem ser convenientemente classificadas conforme sua escala de massa (energia). Nesse cenário, EH mais a constante cosmológica representa o termo usual de ordem zero. As correções de primeira ordem à EH são termos de massa a quarta construídos a partir dos 4 possíveis invariantes<sup>1</sup>

$$R^2, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} \text{ e } \square R.$$

Por sua vez, os termos de correção de segunda ordem à EH são aqueles de massa a sexta, construídos com os invariantes (BONORA et al., 1986)

$$\begin{aligned} & R^3, RR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, RR_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}, R_{\mu\nu}R^{\nu\alpha}R_{\alpha}{}^{\mu}, R_{\mu\nu}R^{\mu\alpha\beta\nu}R_{\alpha\beta}, \\ & R_{\mu\nu}R^{\mu\alpha\beta\kappa}R^{\nu}{}_{\alpha\beta\kappa}, R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\alpha\beta\kappa\lambda}R_{\kappa\lambda}{}^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\kappa\nu\alpha\lambda}R^{\mu}{}_{\kappa\lambda}{}^{\beta}, R\square R, \\ & R_{\mu\nu}\square R^{\mu\nu}, R^{\mu\nu\alpha\beta}\square R_{\mu\nu\alpha\beta}, R_{\mu\nu}\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}R, \nabla^{\alpha}R^{\mu\nu}\nabla_{\alpha}R_{\mu\nu}, \\ & \nabla^{\alpha}R^{\mu\nu}\nabla_{\mu}R_{\alpha\nu}, \nabla^{\mu}R^{\alpha\beta\kappa\lambda}\nabla_{\mu}R_{\alpha\beta\kappa\lambda}, \square R^2 \text{ e } \square^2 R. \end{aligned}$$

E assim por diante, teremos mais termos de correção de ordens mais altas na medida em que aumentamos as escalas de energia.

Modelos envolvendo gravidades de ordens superiores têm sido bastante explorados em vários contextos. Existe na literatura trabalhos cujo propósito é mostrar a equivalência entre diferentes classes de teorias de gravidade, em particular, entre as teorias  $f(R)$  ou  $f(R, \square^k R)$  e as teorias escalar-tensoriais (GOTTLOBER et al., 1990; Sotiriou; Faraoni, 2010; CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2011; CUZINATTO et al., 2016). Em geral, se torna mais conveniente fazer a passagem do frame geométrico original para o frame de Jordan ou de Einstein, através de uma transformação conforme, de modo a tratar equações para campos escalares em vez de tratar equações de ordens mais altas para a métrica. Um outro tema de bastante interesse é o da investigação de soluções esféricamente simétricas e estáticas em gravidades de ordens mais altas, sendo o paper de Stelle (STELLE, 1978) um dos responsáveis por jogar luz nessa linha de pesquisa. Em especial, o estudo da possibilidade de soluções de buracos negros além de Schwarzschild, por meio de diferentes abordagens, são endereçados em Refs. (FROLOV; SHAPIRO, 2009; NELSON, 2010; LÜ et al., 2015; LU et al., 2015; KOKKOTAS et al., 2017; BUENO; CANO, 2017; GOLDSTEIN; MASHIYANE, 2018; PODOLSKY et al., 2018; SILVA; MEDEIROS, 2020), ao passo que pesquisas envolvendo soluções em um regime de campo fraco são abordados em Refs. (ACCIOLY et al., 2017; GIACCHINI, 2017; GIACCHINI; NETTO, 2019; SILVA; MEDEIROS, 2020). Há ainda modelos de energia escura como em Ref. (CUZINATTO et al., 2015), e modelos que estudam a geração e as propriedades de ondas gravitacionais em teorias de gravidade de ordens mais altas (BERRY; GAIR, 2011; FABRIS et al., 2012; SHAPIRO et al., 2014; BHATTACHARYYA; SHANKARANARAYANAN, 2017; ZINHAILO, 2018; HÖLSCHER, 2019; DATTA; BOSE, 2019; KIM et al., 2021; YAMADA et al., 2019; GOGOI; GOSWAMI, 2020; FARIA, 2020; EZQUIAGA et al., 2021; VILHENA et al., 2021; ALVES et al., 2022). Esse

<sup>1</sup>Apesar de apresentarmos todos os termos a seguir, nem todos eles são relevantes para as equações de campo. O termo  $\square R$  é de superfície e não contribui. Além disso, devido o invariante de Gauss-Bonnet

$$I_{GB} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2 \right),$$

a contração do tensor de Riemman pode ser escrita em termos dos dois demais termos.

último sendo um tópico de bastante apelo atual devido as detecções diretas (ABBOTT et al., 2016a; ABBOTT et al., 2016b; ABBOTT et al., 2017), que possibilitam o surgimento da astrofísica de ondas gravitacionais.

Com relação à inflação, é bem conhecido da literatura que o modelo de Starobinsky<sup>2</sup> (Starobinsky, 1980) possui um ótimo ajuste aos recentes dados observacionais oriundos do satélite Planck, BICEP3/Keck e BAO (AKRAMI et al., 2018; ADE et al., 2021). Além disso, o fato de possuir uma motivação teórica bem fundamentada o credencia o status de um dos candidatos inflacionários mais fortes, a despeito da imensa pletora de modelos de inflação (MARTIN et al., 2014). Tais razões motivam a investigação de modelos baseados em extensões ao modelo de Starobinsky via teorias de gravidade de ordens superiores. Existe uma grande quantidade de pesquisas nesse contexto. Algumas delas são baseadas em teorias do tipo  $f(R)$ , como em Refs. (HUANG, 2014; CHEONG et al., 2020; SILVA et al., 2022), outras consideram a introdução do termo de Weyl (SALVIO, 2017; SALVIO, 2019; ANSELMINI et al., 2020; ANSELMINI, 2021; ANSELMINI et al., 2021). Há aquelas que consideram ações gravitacionais locais envolvendo um número finito de termos de derivadas de curvatura (BERKIN; MADEIRA, 1990; ASOREY et al., 1997; IHHOSHI, 2011; MODESTO, 2016; CUZINATTO et al., 2019; CUZINATTO et al., 2019; CASTELLANOS et al., 2018), ao passo que outras são não-locais, envolvendo infinitas derivadas (KOSHELEV et al., 2016; EDHOLM, 2017; DIAMANDIS et al., 2017; KUMAR; MODESTO, 2018).

Nesta tese, nos propomos a investigar soluções esfericamente simétricas e estáticas, e a natureza da extensão ao modelo de Starobinsky devido a inclusão de todos os termos até a segunda ordem de correção envolvendo apenas a curvatura escalar  $R$ . Nesse sentido, temos a seguinte ação gravitacional

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R + \frac{1}{2\kappa_0} R^2 + \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2} R^3 - \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} R \square R \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (1.1)$$

onde  $\kappa_0$  tem unidade de massa ao quadrado e os parâmetros  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  são quantidades adimensionais. Além disso,  $M_{Pl}$  é a massa de Planck reduzida, de tal modo que  $M_{Pl}^2 \equiv (8\pi G)^{-1}$  e  $\square \equiv \nabla_\sigma \nabla^\sigma$  representa o operador d'Alembertiano covariante. Neste cenário em que abordamos apenas o setor escalar das correções,  $R^2$  representa a correção de primeira ordem, enquanto os dois últimos termos correspondem às correções de segunda ordem à EH. Observe portanto que, no âmbito inflacionário, o parâmetro  $\kappa_0$  é o responsável por estabelecer a escala de energia da inflação, ao passo que os parâmetros  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  nos dão uma medida do desvio à Starobinsky. Vale pontuar que nossa pesquisa em Ref. (SILVA; MEDEIROS, 2022) dá um passo além em pesquisas recentes desenvolvidas em Refs. (SILVA et al., 2022) e (CUZINATTO et al., 2019; CASTELLANOS et al., 2018), que abordam os modelos Starobinsky+ $R^3$  e Starobinsky+ $R\square R$ , respectivamente.

Uma vez proposta a ação gravitacional (1.1), é possível obter suas equações de campo através de diferentes formalismos, e diferentes formalismos, em geral, conduzem a diferentes equações de campo. Os dois principais formalismos são o métrico e o de Palatini. No primeiro, a extremização da ação é avaliada com relação à métrica, sendo esta o campo fundamental. No segundo, por sua vez, as conexões são indepen-

<sup>2</sup>Juntamente com a inflação de Higgs (BEZRUKOV; SHAPOSHNIKOV, 2008), já que ambos os modelos são caracterizados pelo mesmo potencial.

dentos da métrica — ambos são os campos fundamentais — e a extremização da ação é avaliada com relação a ambas, com a suposição de que a ação de matéria não dependem das conexões. No caso particular da ação de Einstein-Hilbert, ambos os formalismos conduzem às mesmas equações de campo. De acordo com Ref. (Sotiriou; Faraoni, 2010), existe ainda um terceiro formalismo, chamado de métrico-afim, em que se utiliza o formalismo de Palatini mas sem a suposição de que a ação de matéria não depende das conexões. Para uma boa apresentação das equações de campo de uma gravitação do tipo  $f(R)$  em ambos os formalismos, indicamos ao leitor a verificação de Ref. (CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2011). Nesta tese, as equações de campo do modelo são obtidas por meio do formalismo métrico.

É importante deixar claro de início que o modelo abordado (1.1) não é encarado como uma teoria fundamental de gravidade. Ele é, em contrapartida, enxergado com um modelo clássico de gravidade em um contexto de teoria efetiva. Nesse sentido, apesar do termo de derivadas  $R\Box R$  em (1.1) introduzir instabilidades do tipo ghost<sup>3</sup>, podemos sempre pensar na existência de um regime de energia em que tais instabilidades não são excitadas, de maneira que o modelo é capaz de fornecer resultados preditivos. Para além da construção apresentada para (1.1), temos a motivação clara de que os termos de correção de ordens superiores incluídos no modelo são tais que devem estar presentes em uma teoria fundamental para a gravitação.

Esta tese está estruturada da seguinte maneira. Antes de mais nada, fazemos uma breve revisão da RG em Sec. 2, onde apresentamos seus fundamentos, como a estrutura teórica e matemática sob a qual ela é construída, equações de campo, limite de campo fraco, a solução de Schwarzschild, etc. Logo após, em Sec. 3, apresentamos uma revisão da literatura acerca de buracos negros de Schwarzschild. Em Sec. 4, abordamos nossa pesquisa envolvendo soluções esfericamente simétricas das equações de campo associadas à ação (1.1), tanto no contexto de soluções em um regime de campo fraco, Sec. 4.1, quanto no contexto de soluções de buracos negros, Sec. 4.2. Por sua vez, fazemos em Sec. 5.1 uma revisão da literatura acerca da inflação em um background cosmológico, em um âmbito perturbativo e como se dá a comparação de modelos inflacionários com a observações. Em seguida, apresentamos nossas pesquisas envolvendo as extensões Starobinsky+ $R^3$  e Starobinsky+ $R^3 + R\Box R$  (modelo completo proposto) em Secs. 6 e 7, respectivamente.

Por fim, um comentário sobre as convenções utilizadas. Os capítulos de revisão bibliográfica como Secs. 2, 3 e 5 foram baseados, entre outros, em textos como Refs. (Weinberg, 1972; d’Inverno, 1992; MUKHANOV, 2005; BAUMANN, 2013), que utilizam a assinatura para a métrica  $(+, -, -, -)$ . Nestes casos, decidimos por preservar a convenção original. Por outro lado, nossas pesquisas, Secs. 4, 6 e 7, foram desenvolvidas com a assinatura  $(-, +, +, +)$ , e assim as apresentamos nesta tese. Assumimos um sistema de unidades em que  $c = \hbar = 1$ . Ao longo de todo o texto, o tensor de Riemann é escrito como  $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$  enquanto o tensor de Ricci é definido por  $R_{\lambda\nu} \equiv R^\mu{}_{\lambda\mu\nu}$ . Além disso, índices gregos  $\mu, \nu, \dots$  variam de 0 a 3, enquanto índices latinos  $i, j, \dots$  variam de 1 a 3.

---

<sup>3</sup>Isso ocorre para  $\beta_0 > 0$ .

## CAPÍTULO 2

# RELATIVIDADE GERAL EM POUCAS PALAVRAS

Antes de tudo, a RG é uma teoria de gravitação e teve como objetivo generalizar a relatividade especial, possibilitando a descrição em referenciais quaisquer, não inerciais, e também a gravitação newtoniana ao contê-la como um caso particular de campo fraco. Enquanto na gravitação newtoniana a gravidade é uma força atrativa e representa o efeito da massa gravitacional dos corpos, na RG, a gravidade é o efeito da curvatura do espaço-tempo, podendo inclusive ser repulsiva, que força os corpos a descreverem trajetórias geodésicas. Construída utilizando geometria diferencial e sustentada por alguns princípios físicos, em particular, o princípio da equivalência e o princípio da covariância geral, a RG, após ser corroborada por sucessivos testes, ainda é nossa teoria padrão de gravidade. Experimentos e observações têm verificado até os dias atuais que a descrição de Einstein consegue dar conta de vários fenômenos na qual a gravitação newtoniana falha, tal como a anomalia na órbita de mercúrio, e prevê vários outros como a deflexão da luz, ondas gravitacionais, lentes gravitacionais, redshift gravitacional, etc.

Neste capítulo, apresentaremos brevemente os fundamentos da RG, como os princípios da equivalência e da covariância geral, bem como a estrutura matemática sob a qual ela é construída. Estudamos suas equações de campo bem como seu limite newtoniano, nos fornecendo as bases para o estudo dos capítulos subsequentes. Destacamos que o estudo aqui apresentado segue de perto Ref. (Weinberg, 1972).

### 2.1 Fundamentos

O princípio da equivalência, em suas várias versões, tem um papel fundamental na construção da teoria da RG. Ele é baseado na igualdade das massas gravitacional e inercial, investigada por Galileo, Huygens, Newton, Bessel e Eötvös. Einstein percebeu que, como consequência, nenhum campo gravitacional estático e homogêneo externo a um elevador em queda livre poderia ser detectado, pois para os observadores, seus corpos e o próprio elevador respondem ao campo da mesma maneira. De acordo com a construção realizada pela citada referência, isso pode ser verificado considerando um sistema de  $N$  partículas não relativísticas sob a influência de forças do

tipo  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ , como as forças gravitacional e eletromagnética, mais um campo gravitacional externo  $\vec{g}$ . As equações de movimento, para a  $i$ -ésima partícula, escrevemos

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = m_i \vec{g} + \sum_{j \neq i} \vec{F}(\vec{r}_i - \vec{r}_j). \quad (2.1)$$

Fazendo uma transformação de coordenadas não Galileana, da forma

$$\vec{r}' = \vec{r} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad t' = t, \quad (2.2)$$

obtemos que  $\vec{g}$  é cancelado pela força de inércia, e a equação de movimento se torna

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}'_i}{dt'^2} = \sum_{j \neq i} \vec{F}(\vec{r}'_i - \vec{r}'_j). \quad (2.3)$$

A partir das considerações anteriores, é possível relacionar um referencial não inercial a um campo gravitacional estático e uniforme. O observador original  $S$ , que usa coordenadas  $(t, \vec{r})$ , e o outro  $S'$ , cujas coordenadas utilizadas são  $(t', \vec{r}')$ , não detectam diferença alguma nas leis da mecânica, com a exceção de que o primeiro diz que sente o campo gravitacional, enquanto o último, não. O princípio da equivalência afirma que o cancelamento da força gravitacional pela força de inércia ocorre para todos os sistemas em queda livre.

O princípio da equivalência também abrange campos gravitacionais não homogêneos e variáveis com o tempo. Embora as forças inerciais não cancelem exatamente forças gravitacionais em sistemas caindo livremente em um campo gravitacional geral, é possível esperar um cancelamento aproximado se for considerada uma região suficientemente pequena do espaço e do tempo onde o campo muda muito pouco. Portanto, o princípio da equivalência pode ser enunciado da seguinte forma: *em cada ponto do espaço-tempo em um campo gravitacional arbitrário, é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial, tal que, dentro de uma região suficientemente pequena em torno do ponto considerado, as leis da natureza assumem a mesma forma como em um sistema de coordenadas cartesiano não acelerado na ausência de gravidade.* Aqui, com "a mesma forma como em um sistema de coordenadas cartesiano não acelerado", se quer dizer "a forma que as leis da natureza assumem na relatividade especial".

Há uma certa semelhança entre o princípio da equivalência e o axioma assumido por Gauss como base da geometria não euclidiana. O princípio da equivalência diz que em qualquer ponto do espaço-tempo pode-se tomar um sistema de coordenadas localmente inercial, tal que os objetos satisfazem as leis da relatividade especial. Por sua vez, Gauss assumiu que em qualquer ponto em uma superfície curva pode-se tomar um sistema de coordenadas localmente cartesiano, em que as distâncias obedecem ao teorema de Pythagoras. Devido a essa profunda analogia, deve-se esperar que as leis da gravitação carreguem grande semelhança com as equações da geometria riemanniana. Em particular, a suposição de Gauss implica que todas as propriedades intrínsecas de uma superfície curva podem ser descritas em termos das derivadas  $\partial \zeta^\alpha / \partial x^\mu$  da função  $\zeta^\alpha(x)$  que definem a transformação  $x \rightarrow \zeta$  de algum sistema de coordenadas geral  $x^\mu$  que cobre a superfície, para o sistema localmente cartesiano  $\zeta^\alpha$ . Por sua vez, o princípio da equivalência afirma que todos os efeitos de um campo

gravitacional podem ser descritos em termos das derivadas  $\partial\zeta^\alpha/\partial x^\mu$  da função  $\zeta^\alpha(x)$  que definem a transformação das coordenadas  $x^\mu$  do laboratório para as coordenadas localmente inerciais  $\zeta^\alpha$ . Essas funções geometricamente relevantes são as quantidades  $g_{\mu\nu}$ , que possibilitam calcular distâncias em uma variedade.

Podemos encontrar na literatura diferentes formulações do princípio da equivalência, em particular, as versões fraca e forte. O princípio da equivalência forte é o que foi enunciado anteriormente, com leis da natureza significando *todas* as leis da natureza. Já a formulação fraca, é o mesmo com a substituição do termo leis da natureza por leis do movimento de partículas em queda livre. Assim, o princípio fraco é a reafirmação da igualdade entre as massas gravitacional e inercial, enquanto que o princípio forte é uma generalização dessas observações que governam os efeitos da gravitação para todos os sistemas físicos (Weinberg, 1972; Wald, 1984).

Um outro princípio de suma importância na construção da RG é o princípio da covariância geral. De acordo com este, todas as leis da física devem ser independentes do sistema de coordenadas, isto é, devem ser do tipo tensorial — já que estes são invariantes por transformações gerais de coordenadas (Ryder, 2009). Aliando essa ideia ao princípio da equivalência, é possível estabelecer a prescrição do acoplamento mínimo, que permite escrever qualquer lei física sob a influência do campo gravitacional. Se uma determinada lei da física está escrita com respeito a um sistema de coordenadas localmente inercial na ausência de gravidade, ela mantém-se em um outro sistema de coordenadas na presença de campos gravitacionais. Para tanto, a prescrição do acoplamento mínimo diz, neste caso, que a métrica plana de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  deve ser substituída por  $g_{\mu\nu}$  e as derivadas usuais  $\partial_\mu$ , pelas derivadas covariantes  $\nabla_\mu$ .

Em síntese, podemos afirmar o seguinte: as propriedades intrínsecas do espaço-tempo são descritas pela métrica, como na relatividade especial; no entanto, a métrica do espaço-tempo não necessita ter a forma plana; pelo contrário, a curvatura, isto é, o desvio da métrica plana levam ao efeito físico associado ao campo gravitacional. Além disso, a curvatura do espaço-tempo está relacionada com o conteúdo material através de equações de campo, que em RG são conhecidas por equações de campo de Einstein.

## 2.2 Partícula em queda livre e limite newtoniano

Nesta seção faremos uma exposição sucinta acerca de uma partícula em queda livre, o que possibilitará ao leitor o entendimento de alguns conceitos fundamentais como o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , as conexões de Levi-Civita  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ , a derivada covariante, etc.

Seguindo a construção exposta em (Weinberg, 1972), considere uma partícula se movendo em queda livre, isto é, sob a influência apenas de forças gravitacionais. De acordo com o princípio da equivalência, existe um sistema de coordenadas  $\zeta^\alpha$  em queda livre, cuja equação de movimento é a de uma linha reta no espaço-tempo, dada por

$$\frac{d^2\zeta^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.4)$$

sendo  $d\tau$  o tempo próprio, definido através de

$$d\tau^2 \equiv dt^2 - dr^2, \quad (2.5)$$

que nesse caso se torna

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\zeta^\alpha d\zeta^\beta. \quad (2.6)$$

Suponha agora que se deseje utilizar algum outro sistema de coordenadas  $x^\mu$ , podendo ser um sistema de coordenadas cartesiano em repouso no laboratório, bem como um curvilíneo, acelerado, girante, etc. As coordenadas em queda livre  $\zeta^\alpha$  serão funções de  $x^\mu$ , de forma que pela regra da cadeia, teremos para a Eq. (2.4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\partial x^\lambda / \partial \zeta^\alpha$  e utilizando o fato de que  $\partial x^\lambda / \partial x^\mu = \delta_\mu^\lambda$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \\ \delta_\mu^\lambda \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

que é a chamada equação da geodésica, onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  são as conexões afim, definidas por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.8)$$

Observe que as conexões  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  são simétricas nos índices inferiores. Além disso, nesse novo sistema de coordenadas arbitrário, o tempo próprio pode ser expresso como

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu \\ d\tau^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico, definido por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (2.10)$$

Por sua vez, para o caso de partículas não massivas como o fóton, a variável independente não pode ser o tempo próprio  $\tau$ . Assim, utilizando um parâmetro  $\sigma \equiv \zeta^0$ , as Eqs. (2.4) e (2.6) se reescrevem

$$\frac{d^2 \zeta^\alpha}{d\sigma^2} = 0,$$

e

$$0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{d\zeta^\alpha}{d\sigma} \frac{d\zeta^\beta}{d\sigma}.$$

Seguindo o mesmo procedimento, verificamos que as equações de movimento em um campo gravitacional arbitrário e em um sistema de coordenadas também arbitrário são

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0, \quad (2.11)$$

com

$$0 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}. \quad (2.12)$$

Tais relações são bastante exploradas ao avaliar tanto as geodésicas radiais nulas, associadas às partículas sem massa, quanto as de partículas massivas no espaço-tempo de Schwarzschild.

Antes de verificar como a equação da geodésica (2.11) se comporta em um regime de campo fraco e estático, será obtida uma relação entre o tensor métrico e as conexões, nesse caso chamadas de conexões de Levi-Civita ou símbolos de Christoffel. Nesse sentido, diferenciando o tensor métrico da Eq. (2.10) com relação à  $x^\lambda$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} \right) \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \zeta^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

onde foi utilizada a relação

$$\frac{\partial^2 \zeta^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\lambda}.$$

Novamente utilizando a relação (2.10) para o tensor métrico, obtemos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho}. \quad (2.13)$$

Somando à relação anterior a mesma equação com  $\mu$  e  $\lambda$  trocados e subtraindo a mesma com  $\nu$  e  $\lambda$  trocados, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} &= \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho} + \\ &\Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\rho\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\mu\rho}. \end{aligned}$$

Como a métrica e as conexões são simétricas nos índices inferiores, temos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2\Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu}.$$

Em geometria diferencial, quando há simetria nos índices inferiores da conexão, a variedade não apresenta torção, apenas curvatura. Definindo um tensor inverso  $g^{\rho\nu}$ , tal que

$$g^{\sigma\nu} g_{\kappa\nu} = \delta_{\kappa}^{\sigma}, \quad (2.14)$$

e multiplicando a relação para as conexões por  $g^{\nu\alpha}$ , obtemos a relação de dependência de  $\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha}$  com  $g_{\mu\nu}$

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right). \quad (2.15)$$

As conexões de Levi-Civita aqui obtidas surgiram ao representar uma equação física — a equação de movimento — em um outro sistema de coordenadas. Elas surgem no processo de derivação de vetores e tensores. O que ocorre é que a derivada usual de um vetor não se transforma como um tensor, gerando um problema se é desejado representar as leis da física, que em geral envolvem variações, através de objetos tensoriais. O problema está no fato de que a derivada envolve a diferença de vetores em diferentes pontos da variedade. Para subtraí-los no mesmo ponto é necessário realizar um transporte paralelo e a imposição de que essa diferenciação se transforme como um tensor dá origem às conexões (Ryder, 2009). A partir daí, é possível definir um operador chamado derivada covariante, cuja aplicação sobre um vetor  $A^{\alpha}$  se escreve

$$\nabla_{\mu} A^{\alpha} \equiv \partial_{\mu} A^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} A^{\lambda},$$

com  $\Gamma_{\kappa\lambda}^{\alpha}$  dados por (2.15). A notação  $A^{\alpha}{}_{;\mu} \equiv \nabla_{\mu} A^{\alpha}$  também é encontrada na literatura. Considerando a condição de metricidade  $\nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} = 0$  e a relação  $g^{\sigma\nu} g_{\kappa\nu} = \delta_{\kappa}^{\sigma}$ , é possível mostrar que a derivada covariante atuando em um tensor  $T^{\alpha\beta\dots}{}_{\kappa\lambda\dots}$  genérico se comporta como (Ryder, 2009)

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} T^{\alpha\beta\dots}{}_{\kappa\lambda\dots} &\equiv \partial_{\mu} T^{\alpha\beta\dots}{}_{\kappa\lambda\dots} + \\ &+ \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} T^{\sigma\beta\dots}{}_{\kappa\lambda\dots} + \dots \\ &- \Gamma_{\kappa\mu}^{\sigma} T^{\alpha\beta\dots}{}_{\sigma\lambda\dots} - \dots \end{aligned}$$

Para avaliarmos o limite de campo fraco da RG, consideremos uma partícula se movendo a baixas velocidades em um campo gravitacional fraco e estático. Baixas velocidades significa  $t \approx \tau$ ,  $dx^0/d\tau \approx 1$  e  $dx^i/d\tau \approx v^i \ll 1$ . Por sua vez, um campo gravitacional fraco significa que o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  difere da métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  por apenas uma pequena perturbação  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ , isto é

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Assim, escrevemos a equação da geodésica como

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i &= 0. \end{aligned}$$

Nesse regime, os símbolos de Christoffel são dados, em primeira ordem para  $h_{\mu\nu}$ , por

$$\Gamma_{00}^i \approx -\frac{1}{2}\eta^{ij}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^j}.$$

De modo que

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^i}{dt^2} &\approx \frac{1}{2}\eta^{ij}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^j} \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &\approx -\frac{1}{2}\vec{\nabla} h_{00} \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &\approx -\vec{\nabla} \phi,\end{aligned}\tag{2.17}$$

representa o resultado newtoniano, de onde é possível identificar  $h_{00} = 2\phi + C$ , sendo  $\phi$  o potencial gravitacional e  $C$ , uma constante. Essa tal constante, por sua vez, deve ser zero pois em grandes distâncias devemos recair no espaço-tempo de Minkowski. Por fim, obtemos que a componente  $g_{00}$  da métrica é escrita como

$$g_{00} \approx 1 + 2\phi.\tag{2.18}$$

## 2.3 Curvatura e tensor energia-momento

Como bem expresso, a curvatura desempenha uma papel fundamental na RG. Descreveremos aqui a gravitação por meio da propriedade de curvatura da variedade, e esta por sua vez está diretamente relacionada à métrica  $g_{\mu\nu}$ . Anteriormente, observamos que as leis da física devem ser invariantes por transformações gerais de coordenadas, isto é, devem ser equações tensoriais. A questão que se põe agora é: quais quantidades tensoriais podem ser formadas a partir da métrica e de suas derivadas? De acordo com (Weinberg, 1972), o único tensor que pode ser construído a partir da métrica e de suas primeira e segunda derivadas, e que é linear na segunda derivada, é o tensor de Riemann-Christoffel  $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}$ .

O tensor de Riemann-Christoffel ou tensor de curvatura é definido como

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa + \Gamma_{\rho\mu}^\kappa \Gamma_{\lambda\nu}^\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\kappa \Gamma_{\lambda\mu}^\rho.\tag{2.19}$$

Observe que em um espaço-tempo plano, caracterizado por  $\eta_{\mu\nu}$ , onde as conexões de Levi-Civita são todas nulas, temos que  $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} = 0$ . Como era de se esperar: não há curvatura em um espaço-tempo plano.

Ele possui uma série de simetrias, que podem ser apresentadas convenientemente exprimindo-o na forma completamente covariante  $R_{\kappa\lambda\mu\nu} \equiv g_{\kappa\rho} R^\rho{}_{\lambda\mu\nu}$  (Ryder, 2009):

- $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ ,
- $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}$ ,
- $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}$ ,

- $R_{\kappa\lambda\mu\nu} + R_{\kappa\nu\lambda\mu} + R_{\kappa\mu\nu\lambda} = 0$ .

Além dessas simetrias, vale a pena também destacar a identidade de Bianchi

$$\nabla_{\sigma}R_{\kappa\lambda\mu\nu} + \nabla_{\mu}R_{\kappa\lambda\nu\sigma} + \nabla_{\nu}R_{\kappa\lambda\sigma\mu} = 0. \quad (2.20)$$

A partir do tensor de curvatura é possível obter duas outras quantidades através de contrações com a métrica: o tensor de Ricci  $R_{\nu\beta}$  e o escalar de curvatura  $R$ . O tensor de Ricci se escreve

$$R_{\nu\beta} \equiv g^{\mu\alpha}R_{\mu\nu\alpha\beta} = R^{\alpha}{}_{\nu\alpha\beta}, \quad (2.21)$$

que pode ser representado também por

$$R_{\nu\beta} \equiv g^{\kappa\lambda}R_{\kappa\nu\lambda\beta} \quad (2.22)$$

$$R_{\nu\beta} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_{\lambda}\partial_{\nu}g_{\kappa\beta} - \partial_{\beta}\partial_{\nu}g_{\kappa\lambda} + \partial_{\beta}\partial_{\kappa}g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}\partial_{\kappa}g_{\nu\beta}) + g^{\kappa\lambda}g_{\rho\sigma}(\Gamma_{\beta\kappa}^{\rho}\Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\lambda\kappa}^{\rho}\Gamma_{\nu\beta}^{\sigma}). \quad (2.23)$$

Por sua vez, o escalar de curvatura é dado por

$$R \equiv g^{\nu\beta}R_{\nu\beta} = R^{\beta}{}_{\beta}. \quad (2.24)$$

Uma outra quantidade fundamental em RG é o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . De uma forma genérica, é no tensor energia-momento que está encapsulada toda a informação acerca da distribuição de matéria e energia no espaço-tempo. A título de exemplo, o tensor energia-momento para a poeira, isto é, uma matéria fracamente interagente, se escreve

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon_0 u^{\mu}u^{\nu},$$

no qual  $\varepsilon_0$  é a densidade de matéria que acompanha o fluxo e  $u^{\mu} = c^{-1}(dx^{\mu}/d\tau)$  é sua quadri-velocidade<sup>1</sup>. A componente  $T^{00}$  representa a densidade de energia da matéria. As componentes  $T^{0j}$  e  $T^{i0}$  representam um fluxo de energia na direção  $j$  e um fluxo de momento na direção  $i$ , respectivamente. Por sua vez,  $T^{ij}$  é a taxa do fluxo da  $i$ -ésima componente do momento por unidade de área na direção  $j$ . Uma característica geral do tensor energia-momento, e não algo apenas exclusivo deste exemplo tomado, é que ele é um tensor simétrico. Além disso, como energia e momento são quantidades conservadas, é natural que ele obedeça a uma equação de conservação. Tal equação é dada por

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0.$$

## 2.4 Equações de campo

Uma diferença marcante entre as equações que descrevem os fenômenos eletromagnéticos e as equações que descrevem os fenômenos gravitacionais é que estas

<sup>1</sup>Aqui é um dos poucos pontos da dissertação em que  $c$  não é feito igual a unidade.

últimas são não lineares. No eletromagnetismo de Maxwell, não há interação entre o campo eletromagnético com ele mesmo. Nesse caso se diz que o campo não carrega (no sentido de levar, conduzir) cargas, e assim as equações fundamentais da teoria são lineares. Por outro lado, o campo gravitacional carrega energia e momento e deve contribuir como fonte. Um exemplo que pode ser apresentado aqui é que em um átomo, a massa total não é dada pela soma da massa das partes: a massa total é menor que a soma da massa das partes, estando o restante na forma de energia de ligação. Isso ocorre para qualquer sistema ligado independente do tipo de interação como por exemplo o sistema terra-sol. Assim, as equações para o campo gravitacional são equações diferenciais parciais não lineares, onde a não linearidade representa o efeito da gravitação sobre ela mesma.

Para lidar com esses efeitos de não linearidade, lança-se mão do princípio da equivalência. De acordo com a construção feita em (Weinberg, 1972), em um ponto  $X$  em um campo gravitacional arbitrariamente forte, podemos definir um sistema de coordenadas localmente inercial, tal que

$$g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.25)$$

e

$$\left[ \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\gamma} \right]_{x=X} = 0. \quad (2.26)$$

Para  $x$  próximo de  $X$ , o tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  pode diferir de  $\eta_{\alpha\beta}$  apenas por termos quadráticos em  $x - X$ . Assim, nesse sistema de coordenadas, o campo gravitacional pode ser considerado fraco nas proximidades de  $X$ , de modo que a descrição do campo através de equações diferenciais parciais lineares é uma boa aproximação. Uma vez que estas equações de campo fraco são conhecidas, é possível encontrar as equações de campo gerais revertendo a transformação de coordenadas.

Como foi verificado anteriormente, em um campo fraco e estático produzido por uma partícula que se move com velocidades não relativísticas, a componente  $g_{00}$  do tensor métrico é aproximadamente dada por

$$g_{00} \approx 1 + 2\phi,$$

onde o potencial newtoniano  $\phi$  é determinado pela equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho. \quad (2.27)$$

Além disso, a densidade de energia  $T_{00}$  para a matéria não relativística é igual a densidade de massa  $\rho$ , se for adotado  $c = 1$ . Combinando as informações anteriores, obtemos

$$\nabla^2 g_{00} = 8\pi G T_{00}. \quad (2.28)$$

Essa equação de campo é supostamente válida para campos fracos e estáticos devido matéria não relativística. No entanto, ela sugere que as equações de campo fraco, para distribuições gerais  $T_{\alpha\beta}$  de energia e momento, assumem a forma

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}, \quad (2.29)$$

onde  $G_{\alpha\beta}$  é uma combinação da métrica com suas primeira e segunda derivadas. Do princípio da equivalência, segue que as equações que descrevem o campo gravitacional — de intensidade arbitrária — devem assumir a forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

sendo  $G_{\mu\nu}$  um tensor que se reduz para  $G_{\alpha\beta}$  para campos fracos.

Em geral, pode haver uma grande variedade de tensores  $G_{\mu\nu}$  que podem ser formados a partir do tensor métrico e de suas derivadas. De antemão, pelo regime de campo fraco e estático, sabemos que a equação diferencial é de ordem  $N = 2$  para a métrica. Resumindo o que é conhecido sobre as equações de campo:

1. Por definição,  $G_{\mu\nu}$  é um tensor.
2.  $G_{\mu\nu}$  contém apenas termos de  $N = 2$  derivadas da métrica.
3. Como  $T_{\mu\nu}$  é simétrico,  $G_{\mu\nu}$  também é.
4. Como  $T_{\mu\nu}$  é conservado (sua derivada covariante é zero),  $G_{\mu\nu}$  também é:

$$\nabla_\mu G^\mu{}_\nu = G^\mu{}_{\nu;\mu} = 0 \quad (2.31)$$

5. Para um campo fraco e estático gerado pela matéria não relativística, a componente  $G_{00}$  deve recair em

$$G_{00} \approx \nabla^2 g_{00}. \quad (2.32)$$

A maneira mais geral de construir um campo, a partir da curvatura do espaço-tempo, satisfazendo as duas primeiras condições é contraindo o tensor de curvatura  $R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}$ . A propriedade anti-simétrica de  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$  mostra que há apenas dois objetos que podem ser formados contraindo  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ , que são o tensor de Ricci  $R_{\mu\kappa} \equiv R^\lambda{}_{\mu\lambda\kappa}$ , e o escalar de curvatura  $R \equiv R^\mu{}_\mu$ . Assim, as duas primeiras condições exigem que  $G_{\mu\nu}$  assuma a forma

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R, \quad (2.33)$$

com  $C_1$  e  $C_2$  constantes.

A partir da contração da identidade de Bianchi (2.20), segue

$$g^{\kappa\mu} (\nabla_\sigma R_{\kappa\lambda\mu\nu} + \nabla_\mu R_{\kappa\lambda\nu\sigma} + \nabla_\nu R_{\kappa\lambda\sigma\mu}) = 0 \Rightarrow \\ \nabla_\sigma R_{\lambda\nu} + \nabla_\mu R^\mu{}_{\lambda\nu\sigma} - \nabla_\nu R_{\lambda\sigma} = 0.$$

Por sua vez, contraindo  $\lambda$  com  $\nu$ , temos

$$g^{\lambda\nu} (\nabla_\sigma R_{\lambda\nu} + \nabla^\mu R_{\mu\lambda\nu\sigma} - \nabla_\nu R_{\lambda\sigma}) = 0 \Rightarrow \\ \nabla_\sigma R - \nabla^\mu R_{\mu\sigma} - \nabla^\lambda R_{\lambda\sigma} = 0 \Rightarrow \\ \nabla_\mu (\delta^\mu{}_\sigma R - 2R^\mu{}_\sigma) = 0. \quad (2.34)$$

Utilizando agora Eq. (2.34) para avaliar a derivada covariante de  $G_{\mu\nu}$ , obtemos

$$\nabla_{\mu}G^{\mu}_{\nu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) \nabla_{\nu}R = 0,$$

de modo que, ou  $C_2 = -C_1/2$ , ou  $\nabla_{\nu}R = 0$ . Se  $\nabla_{\nu}R$  é zero, então o mesmo ocorre com a quantidade  $\partial T^{\mu}_{\mu}/\partial x^{\nu}$ . No entanto, esse não é o caso na presença de matéria não relativística não homogênea. Portanto, concluímos que  $C_2 = -C_1/2$ , e a equação de campo se torna

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right). \quad (2.35)$$

Para ajustar a constante  $C_1$ , utilizamos a quinta propriedade do tensor  $G_{\mu\nu}$ , isto é, verificamos sua componente  $G_{00}$  em um regime de campo fraco e estático. A componente  $R_{00}$  de Eq. (2.23) nesse regime em que são considerados apenas termos lineares em  $h_{\mu\nu}$ , é dada por

$$R_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}.$$

Além disso, um sistema não relativístico possui a característica de que  $|T_{ij}| \ll |T_{00}|$ , de modo que aqui, lidamos com um caso em que  $|G_{ij}| \ll |G_{00}|$ , onde temos aproximadamente

$$R_{ij} \approx \frac{1}{2}h_{ij}R. \quad (2.36)$$

Assim, o escalar de curvatura  $R$  é

$$R \approx \eta^{00}R_{00} + \eta^{ij}R_{ij} \approx R_{00} + \frac{3}{2}R,$$

de modo que

$$R \approx -2R_{00}.$$

Portanto,

$$G_{00} \approx C_1 \left( R_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}R \right)$$

$$G_{00} \approx C_1 (R_{00} + R_{00})$$

$$G_{00} \approx 2C_1 R_{00}$$

$$G_{00} \approx C_1 \nabla^2 h_{00},$$

de onde verificamos que a constante  $C_1 = 1$ . As equações de campo de Einstein, portanto se escrevem

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

O tensor  $G_{\mu\nu}$  é conhecido como tensor de Einstein. As Eqs. (2.37) formam um conjunto de dezesseis equações diferenciais parciais não lineares acopladas, e como  $G_{\mu\nu}$  é um tensor simétrico em seus índices, temos a princípio dez equações distintas. Observe que do lado esquerdo, há apenas informações acerca da geometria do espaço-tempo,

em particular, da curvatura. Por outro lado, o lado direito está associado ao conteúdo energético material. Dadas a forma da métrica do espaço-tempo e a informação relativa ao seu conteúdo, é possível obter as equações de movimento. Na prática, poucas são as soluções analíticas para as equações de campo de Einstein. Duas em particular, importantes para o desenvolvimento da presente tese são a solução de Schwarzschild, que é a solução com simetria esférica e estática no vácuo, e as soluções de Friedmann, que para fontes de matéria simples, descrevem a evolução do background homogêneo e isotrópico do universo. As Eqs. (2.37) podem ainda ser expressas de uma maneira alternativa. Tomando seu traço, temos

$$R = -8\pi GT.$$

Substituindo nas equações de campo, obtemos

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (2.38)$$

que é uma equação interessante para se estudar soluções no vácuo, onde  $T_{\mu\nu}$  se anula, resultando em

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

## 2.5 A solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild, a primeira solução exata das equações de campo da RG, permite com boa aproximação descrever o campo gravitacional nas redondezas de um objeto esfericamente simétrico como uma estrela ou um buraco negro. A deflexão da luz pelo Sol, bem como a precessão do periélio de Mercúrio, dois dos testes propostos por Einstein para testar sua teoria foram realizados utilizando a solução esfericamente simétrica, estática e no vácuo das equações de campo.

Para construirmos a métrica que descreve um espaço-tempo com simetria esférica e estático, é necessário satisfazer as seguintes condições: em primeiro lugar, todas as componentes da métrica  $g_{\mu\nu}$  devem ser independentes da coordenada  $x^0$  bem como das coordenadas angulares; em segundo, o elemento de linha  $ds^2$  deve ser invariante sob a transformação  $x^0 \rightarrow -x^0$ , de modo que não deve haver termos envolvendo  $dx^i dx^0$ . Isso significa que  $g_{i0} = g_{0i} = 0$ . A primeira condição não implica a segunda: fazer a transformação  $x^0 \rightarrow -x^0$  para o caso de uma estrela em rotação, por exemplo, altera o sentido de rotação mas as componentes da métrica são constantes com o tempo. Um espaço-tempo que satisfaz a primeira condição mas não a segunda é chamado estacionário (Hobson G. P. Efstathiou, 2005). O elemento de linha  $ds^2$  satisfazendo essas condições se escreve

$$ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - C(r) r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (2.39)$$

Devido à simetria em questão, as dez componentes da métrica, que em geral dependem de todas as coordenadas  $x^\mu$ , reduzem-se a três funções dependentes apenas de  $r$ . Ainda é possível reduzi-la apenas a duas funções. Como  $r$  é um parâmetro radial e não de fato

uma distância, podemos substituí-lo por qualquer função de  $r$  (Ryder, 2009). Fazendo  $Cr^2 = \bar{r}^2$ , temos que  $\bar{r} = \sqrt{C}r$  e

$$\frac{d\bar{r}}{dr} = \sqrt{C} \left( \frac{r}{2C} \frac{dC}{dr} + 1 \right).$$

Com isso, podemos reescrever

$$Bdr^2 = \frac{B}{C} \left( \frac{r}{2C} \frac{dC}{dr} + 1 \right)^{-2} d\bar{r}^2 \equiv \bar{B}d\bar{r}^2,$$

e também tomar  $A(r) = \bar{A}(\bar{r})$ . Reescrevendo o elemento de linha, substituindo todas as funções sem barra pelas funções com barra, temos

$$ds^2 = \bar{A}dt^2 - \bar{B}d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Por fim, retirando as barras e fazendo

$$A(r) = e^{2\nu(r)} \text{ e } B(r) = e^{2\lambda(r)},$$

obtemos a métrica que descreve um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, dependente apenas das duas funções  $\nu(r)$  e  $\lambda(r)$

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.40)$$

Matricialmente, podemos representá-la da seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

O segundo passo é encontrar todas as conexões de Levi-Civita  $\Gamma_{\mu\nu}^0$  não nulas. As conexões de Levi-Civita não nulas são (Ryder, 2009)

$$\begin{aligned} \Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \cot \theta, \\ \Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = r^{-1}, \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = r^{-1}, \\ \Gamma^1_{33} &= -re^{-2\lambda} \sin^2 \theta, \\ \Gamma^1_{22} &= -re^{-2\lambda}, \\ \Gamma^1_{11} &= \lambda', \\ \Gamma^1_{00} &= \nu' e^{2\nu-2\lambda}, \\ \Gamma^0_{01} &= \Gamma^0_{10} = \nu'. \end{aligned}$$

O passo seguinte é avaliar o tensor de Ricci. As componentes não nulas do tensor de Ricci e por conseguinte, as equações de campo no vácuo são

$$R_{00} = \nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + 2r^{-1}\nu' = 0, \quad (2.42)$$

$$R_{11} = -\nu'' - \nu'^2 + \nu'\lambda' + 2\lambda'r^{-1} = 0, \quad (2.43)$$

$$R_{22} = (-1 - r\nu' + r\lambda') e^{-2\lambda} + 1 = 0, \quad (2.44)$$

$$R_{33} = \left[ (-1 - r\nu' + r\lambda') e^{-2\lambda} + 1 \right] \sin^2 \theta = 0, \quad (2.45)$$

onde a linha representa a derivada com relação ao parâmetro radial. Dessas equações, observamos que apenas duas são independentes. Somando as duas primeiras equações, temos

$$2r^{-1} (\nu' + \lambda') = 2r^{-1} (\nu + \lambda)' = 0,$$

de modo que a soma  $\nu + \lambda$  é uma constante. Mas como na medida em que  $r \rightarrow \infty$ , a métrica dada (2.40) deve recair na métrica de Minkowski, tem-se que  $\nu, \lambda \rightarrow 0$  e portanto a constante deve ser zero. Assim,

$$\nu(r) = -\lambda(r).$$

Substituindo este resultado na eq. (2.44), temos

$$\begin{aligned} -(1 + 2rv') e^{2\nu} + 1 &= 0 \Rightarrow (1 + 2rv') e^{2\nu} = 1, \\ (re^{2\nu})' &= 1 \Rightarrow re^{2\nu} = r - 2m, \end{aligned}$$

onde foi escolhida a quantidade  $2m$  como constante de integração, e portanto, é obtida a seguinte relação

$$e^{2\nu} = 1 - \frac{2m}{r} = g_{00}.$$

O elemento de linha, por fim, se escreve

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.46)$$

A equação dada em (2.46) é a chamada solução de Schwarzschild, que representa a solução exata das equações de campo de Einstein com simetria esférica no vácuo. Algo interessante ocorre na superfície  $r = 2m$ , pois a métrica se torna indefinida, com  $g_{00} \rightarrow 0$  e  $g_{11} \rightarrow \infty$ , dando origem aos chamados buracos negros, que serão discutidos a seguir.

Buracos negros de Schwarzschild, também conhecidos como buracos negros estáticos, são um caso particular de buracos negros, em que apenas sua propriedade de massa é considerada. De acordo com o teorema no-hair, devido a John Wheeler, buracos negros são caracterizados completamente por sua massa, carga e momento angular (Lambourne, 2010). Como todo buraco negro possui massa, existem essencialmente quatro tipos distintos: massivos, massivos e com rotação, massivos e carregados, e massivos, carregados e com rotação<sup>1</sup>. Buracos negros astrofísicos surgem na natureza devido ao colapso gravitacional de estrelas suficientemente massivas —  $\gtrsim 3 M_{\odot}$  —, e nesse sentido, uma descrição realista leva em conta sua rotação (Hobson G. P. Efstathiou, 2005). Aqui serão abordados os buracos negros de Schwarzschild, que apesar de serem os mais simples existentes, já apresentam as características chave de seu estudo: o horizonte de eventos e a singularidade. Destacamos que o estudo aqui apresentado acerca de buracos negros segue de perto o desenvolvido em Ref. (d’Inverno, 1992).

### 3.1 Caracterização das coordenadas e singularidades

Antes de explorar detalhadamente a solução de Schwarzschild, será discutido brevemente acerca da caracterização das coordenadas. Em geral, se desejamos escrever uma solução das equações de campo de Einstein, então é necessário fazê-lo em um determinado sistema de coordenadas. Qual será a importância, se houver, de um sistema de coordenadas em particular? Por exemplo, considere a solução de Schwarzschild dada pela Eq. (2.46) e aplique uma transformação de coordenadas  $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$ . A métrica resultante ainda será uma solução das equações de campo no vácuo, mas é provável que haja pouco ou nenhum significado físico ou geométrico associado às novas coordenadas  $x'^{\mu}$ . Observe que se a métrica possui simetrias, então um sistema de coordenadas que apresenta explicitamente estas simetrias será um sistema de coordenadas preferencial (d’Inverno, 1992).

<sup>1</sup>As métricas que os descrevem são a métrica de Schwarzschild, a de Kerr, a de Reissner-Nordström e a de Kerr-Newman, respectivamente.

Uma caracterização que auxilia na descrição do sistema de coordenadas é estabelecer se uma hiper-superfície

$$x^{(\mu)} = \text{constante}, \quad (3.1)$$

é do tipo tempo, nula ou tipo espaço em um ponto<sup>2</sup>. Escrevendo o campo vetorial normal como

$$n_\nu = \delta_\nu^{(\mu)},$$

ou em sua forma contravariante

$$n^\alpha = g^{\alpha\nu} n_\nu = g^{\alpha\nu} \delta_\nu^{(\mu)} = g^{\alpha(\mu)},$$

temos que sua magnitude quadrada é dada por

$$n^2 = n^\alpha n_\alpha = g^{\alpha(\mu)} \delta_\alpha^{(\mu)} = g^{(\mu)(\mu)}.$$

Assim, se a assinatura é  $(+, -, -, -)$ , a hiper-superfície (3.1) em um ponto  $P$  é tipo tempo, nula ou tipo espaço dependendo de se  $g^{(\mu)(\mu)}$  é  $> 0$ ,  $= 0$ , ou  $< 0$ , respectivamente. Em outras palavras, fixando as outras coordenadas em seus valores no ponto  $P$  e considerando uma variação infinitesimal  $dx^\mu$  na coordenada de interesse, se a correspondente mudança em  $ds^2$  for positiva, zero, ou negativa, então a superfície é do tipo tempo, nula ou do tipo espaço.

Com essas ideias em mente, avaliamos a solução de Schwarzschild na forma (2.46) para observar se é possível caracterizar as coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ . Da Eq. (2.46), temos que

$$g^{00} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad g^{11} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta},$$

de onde observamos que para  $r > 2m$ ,  $x^0 = t$  é do tipo tempo e as demais, do tipo espaço. Como a métrica é independente do tempo e não há termo cruzados em  $dt$ , segue que a solução é estática e  $t$  representa o tempo próprio medido por um observador em repouso no infinito (Hobson G. P. Efstathiou, 2005). A coordenada  $r$  é um parâmetro radial, com a propriedade de que em uma 2-esfera com  $t$  e  $r$  fixos, o elemento de linha se escreve

$$ds^2 = -r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2\right),$$

e cuja área é  $4\pi r^2$ . Por fim,  $\theta$  e  $\phi$  são as coordenadas angulares esféricas usuais da 2-esfera, que são definidas pela simetria esférica. Por outro lado, para  $r < 2m$ , a configuração se inverte com  $g_{00}$  e  $g_{11}$  trocando de sinal: as coordenadas  $x^0$  e  $x^1$  passam a ser do tipo espaço e do tipo tempo, respectivamente.

Um problema associado ao sistema de coordenadas é o fato de que, em geral, eles cobrem apenas uma porção da variedade. Tomando como exemplo as coordenadas de Schwarzschild, observamos que há uma falha na caracterização para quando  $\theta = 0, \pi$ , pois nesse caso não é possível especificar a coordenada  $\phi$  e o elemento de linha (2.46) se torna degenerado. Tal degenerescência pode ser removida introduzindo coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , nas quais,

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad \text{e} \quad z = r \cos \theta.$$

<sup>2</sup>Onde o parêntese englobando o índice  $\mu$  significa que ela deve ser tomada como fixa.

Tais pontos são chamados de singularidades de coordenadas ou aparentes pois refletem uma deficiência no sistema de coordenadas utilizado, e portanto, são removíveis (d’Inverno, 1992). Como já indicado, existem outros dois valores do parâmetro radial  $r$  na solução de Schwarzschild que apresentam um comportamento singular, a saber,  $r = 0$  e  $r = 2m$ . Esse último é conhecido como raio de Schwarzschild e frequentemente é denotado por  $r_S$ , de modo que, no sistema de unidades aqui utilizado, temos

$$r_S = 2m.$$

Devemos recordar, entretanto, que a solução de Schwarzschild foi deduzida solucionando as equações de campo de Einstein no vácuo, onde  $R_{\mu\nu} = 0$ , de forma que ela é válida apenas para além da superfície esféricamente simétrica da distribuição de matéria. Por exemplo, o raio de Schwarzschild do Sol é

$$r_S = 2,95 \text{ km},$$

que é muito menor que seu raio ( $r_{\odot} = 7 \times 10^5 \text{ km}$ ). Semelhantemente, o raio de Schwarzschild de um próton é

$$r_S \sim 10^{-52} \text{ m},$$

que, novamente, é muito menor que seu raio característico ( $r_p \sim 10^{-15} \text{ m}$ ). De fato, para a maior parte dos objetos, o raio de Schwarzschild se encontra muito profundamente em seu interior, onde as equações de campo no vácuo não se aplicam. Mas e se houverem objetos suficientemente compactos, tais que se encontrem completamente encerrados no interior de seus raios de Schwarzschild? Para um tal objeto, a solução (2.46) parece ser razoável.

Para verificar se uma determinada singularidade é aparente ou real, fazemos uso das quantidades geométricas escalares da teoria — pois são invariantes por transformações gerais de coordenadas: se divergem em uma região, divergem em todas as outras. Utilizando, por exemplo, o invariante de Kretschmann

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48m^2}{r^6}, \quad (3.2)$$

observa-se que em  $r = 0$ , esta quantidade diverge e portanto, temos uma singularidade real ou intrínseca. Por outro lado, a quantidade (3.2) possui um valor finito em  $r = 2m$ . Isso sugere (mas não prova) que  $r = 2m$  é na verdade uma singularidade aparente — uma falha do sistema de coordenadas na caracterização da indicada região — e que a curvatura do espaço-tempo em  $r = 2m$  é perfeitamente bem comportada. É possível, através de uma adequada transformação de coordenadas, remover essa aparente singularidade, como será apresentado adiante. Ainda assim, a região  $r = 2m$  é de suma importância no presente estudo, pois  $g^{11}(r_S) = 0$  representa uma superfície do tipo nula (horizonte), isto é, uma “membrana” de uma única direção que separa o espaço-tempo em duas regiões bem distintas (BEKENSTEIN, 1972).

O objetivo ao longo deste estudo é explorar a solução de Schwarzschild para um objeto de raio  $a$ , sendo  $a < 2m$ , nas regiões  $2m < r < \infty$ , que será dita região I, e  $a < r < 2m$ , que será a região II.

## 3.2 Diagramas do espaço-tempo

De acordo com (d’Inverno, 1992), a principal técnica utilizada para ajudar a interpretar a solução é a investigação da estrutura local de seu cone de luz futuro. Um cone de luz local é definido como o conjunto dos pontos  $x_0^\mu + dx^\mu$ , nas vizinhanças de um ponto  $x_0^\mu$ , para o qual

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0. \quad (3.3)$$

A estrutura do cone de luz impõe vínculos às possíveis histórias de um observador, já que um observador se move em uma linha de mundo do tipo-tempo, cuja direção em qualquer ponto deve estar no interior do cone de luz futuro.

Em um diagrama puramente espacial, analisamos o que ocorre em vários pontos da variedade em dois intervalos de tempo sucessivos,  $t_1$  e  $t_2$ . Por exemplo, se no instante  $t_1$ , um flash de luz é emitido de cada ponto de interesse, tal diagrama espacial indica até onde as frentes de onda desses flashes alcançam no instante  $t_2$ . Em um diagrama do espaço-tempo, por outro lado, o que interessa são as histórias desses flashes de luz. Suponha que sejam tiradas sucessivas “fotografias” das frentes de onda emanando de algum ponto  $P$  em instantes distintos  $t_1, t_2, t_3$ , etc. A ideia em um diagrama de espaço-tempo é “empilhar” estas figuras com o passar do tempo. Como isso envolveria uma figura quadridimensional, para visualização suprimimos uma dimensão espacial. Podemos, a título de exemplo, restringir a atenção ao plano  $z = 0$  e então as frentes de onda se tornarão círculos (dependendo da perspectiva, aparecerão como elipses) localizados no cone de luz futuro de  $P$ . Veja figura 3.1. Por outro lado, é possível ter uma noção da geometria do espaço fixando um instante específico. Em um espaço-tempo curvo, a curvatura se manifesta em diagramas de espaço-tempo através de cones de luz sendo espremidos, esticados ou inclinados de várias maneiras, como poderemos ver mais a seguir na figura 3.2.

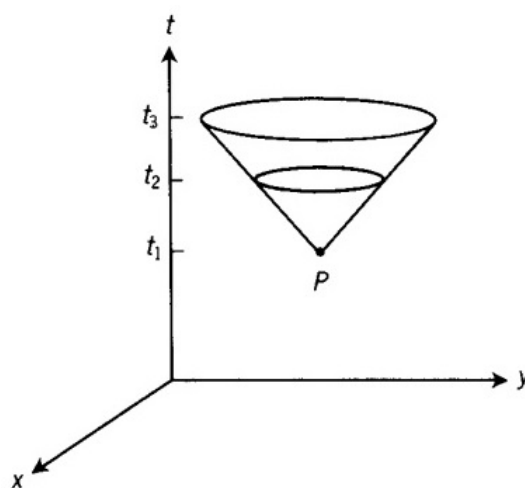


Figura 3.1: Diagrama de espaço-tempo, em  $z = 0$ , para frentes de onda emanando de um ponto  $P$  em instantes  $t_1, t_2$  e  $t_3$ . Fonte: (d’Inverno, 1992).

### 3.3 Espaço-tempo em coordenadas de Schwarzschild

Ao derivar a solução de Schwarzschild (2.46), foram calculadas todas as conexões de Levi-Civita  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  para tal métrica. Poderíamos então, escrever as equações da geodésica para a geometria de Schwarzschild na forma como em Eq. (2.11), a saber,

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\sigma} \frac{dx^{\nu}}{d\sigma} = 0,$$

onde  $\sigma$  é algum parâmetro afim ao longo da geodésica  $x^{\lambda}(\sigma)$ . No entanto, considerando inicialmente a classe de geodésicas radiais nulas ( $ds^2 = d\theta^2 = d\phi^2 = 0$ ), segue que

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0, \quad (3.4)$$

onde o ponto representa diferenciação com relação ao parâmetro afim  $\sigma$ . Por outro lado, a equação da geodésica correspondente a  $\lambda = 0$ , se escreve

$$\frac{d}{d\sigma} \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0,$$

que conduz a

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (3.5)$$

sendo  $k$  uma constante. Substituindo esta informação em Eq. (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 \\ \dot{r}^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \dot{t}^2 \\ \dot{r}^2 &= k^2 \\ \dot{r} &= \pm k, \end{aligned} \quad (3.6)$$

de onde segue que  $r$  é um parâmetro afim. Em vez de encontrar a equação paramétrica dessas curvas, olhamos diretamente para suas equações na forma  $t = t(r)$ . Nesse sentido, temos

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= \frac{\frac{dt}{d\sigma}}{\frac{dr}{d\sigma}} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = \pm \frac{\frac{k}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}}{k} \\ \frac{dt}{dr} &= \pm \frac{r}{r - 2m}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para integrar esta equação, avaliamos por partes. Chamando  $u = r$  e  $dv = dr / (r - 2m)$ , obtemos

$$\begin{aligned} t &= r \ln |r - 2m| - \int \ln |r - 2m| dr + C \\ t &= r \ln |r - 2m| - [|r - 2m| \ln |r - 2m| - |r - 2m|] + C \\ t &= 2m \ln |r - 2m| + r + C', \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde restringimos para o caso em que  $dt/dr > 0$  — sinal positivo em (3.7). Assim,  $r$  aumenta com o passar do tempo. Portanto, as curvas (3.8) são definidas como sendo geodésicas radiais nulas que afastam-se de  $r = 2m$ . Similarmente, a expressão associada ao sinal negativo em (3.7), fornece geodésicas radiais nulas que aproximam-se<sup>3</sup>

$$t = -(2m \ln |r - 2m| + r + C). \quad (3.9)$$

É possível agora plotar essas curvas e desenhar um diagrama de espaço-tempo com duas dimensões suprimidas, como mostrado na figura 3.2. O diagrama é desenhado para  $\theta$  e  $\phi$  fixos. Como o diagrama será o mesmo para todos os  $\theta$  e  $\phi$ , pode-se pensar em cada ponto  $(t, r)$  do diagrama como representando uma 2-esfera de área  $4\pi r^2$ . Observe que na região I, a medida em que  $r \rightarrow \infty$ , o campo gravitacional torna-se fraco e a métrica de Schwarzschild tende para a métrica de Minkowski da relatividade especial. Assim, a estrutura de cone de luz torna-se aquela do espaço-tempo de Minkowski, onde as geodésicas nulas fazem ângulos de  $45^\circ$  com os eixos coordenados. Na medida em que analisa-se próximo ao raio de Schwarzschild, observa-se que os raios de luz que aproximam-se tendem à ordenada  $t \rightarrow \infty$ , e por sua vez, os raios de luz que afastam-se tendem à  $t \rightarrow -\infty$ . Isso parece sugerir que um sinal de luz que aproxime-se de  $r = 2m$  levaria um tempo infinito para atravessar o raio de Schwarzschild. No entanto, mais adiante será verificado que este diagrama de espaço-tempo está equivocado.

Na região II, os cones de luz locais giram sua orientação em  $90^\circ$ , pois as coordenadas  $t$  e  $r$  alternam seu caráter. Observamos que todos os fótons nessa região devem terminar na singularidade  $r = 0$ . Neste ponto há de fato uma singularidade real, onde a curvatura da solução de Schwarzschild diverge. Além disso, qualquer partícula massiva, na região II, também deve terminar na singularidade, já que uma linha de mundo do tipo tempo deve se encontrar no interior do cone de luz futuro em cada ponto. Assim, concluímos que uma vez no interior do raio de Schwarzschild, se deve necessariamente ir em direção da singularidade  $r = 0$ . Escapar seria uma violação da causalidade.

### 3.4 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Para eliminar o problema em  $r = 2m$  mudamos para uma nova coordenada temporal  $\bar{t}$ , de modo que as geodésicas radiais nulas que se aproximam, se tornem linhas retas. Segue da equação (3.8), que a mudança apropriada é dada por

$$t \rightarrow \bar{t} = t + 2m \ln (r - 2m), \quad (3.10)$$

para  $r > 2m$ , pois no novo sistema de coordenadas  $(\bar{t}, r, \theta, \phi)$ , a equação (3.9) se torna

$$\bar{t} = -r + \text{constante}, \quad (3.11)$$

---

<sup>3</sup>O termo afastando-se refere-se às curvas que afastam-se do raio de horizonte — tanto para dentro quanto para fora. Por sua vez, o termo aproximando-se refere-se às curvas que aproximam-se sempre em direção da singularidade.

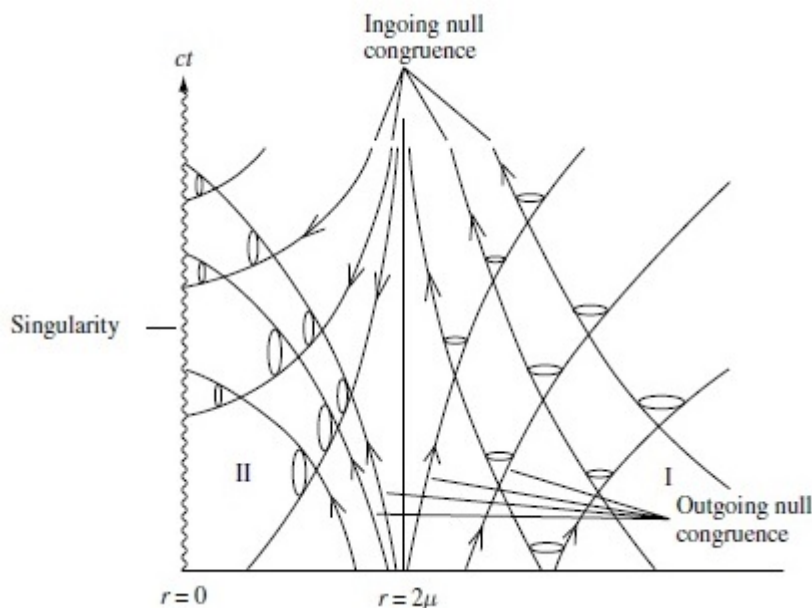


Figura 3.2: Estrutura dos cones de luz para geodésicas radiais nulas em coordenadas de Schwarzschild. Fonte: (Hobson G. P. Efstathiou, 2005).

que corresponde à uma linha reta cruzando o eixo- $r$  com um ângulo de  $-45^\circ$ . Diferenciando a relação (3.10), obtemos

$$d\bar{t} = dt + \frac{2m}{r-2m}dr, \quad (3.12)$$

e substituindo  $dt$  no elemento de linha de Schwarzschild (2.46), encontramos a forma de Eddington-Finkelstein

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(d\bar{t} - \frac{2m}{r-2m}dr\right)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} d\bar{t}dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Note que a transformação de coordenadas (3.10) em  $r = 2m$ , é singular. No entanto, ela é apenas um artifício conveniente para obtermos o elemento de linha de Eddington-Finkelstein — que é regular em todo o intervalo — a partir do elemento de linha de Schwarzschild, solucionando sua falha em  $r = 2m$ . Dadas essas soluções, é feita a pergunta: qual é o maior intervalo das coordenadas para as quais cada solução é regular? A resposta é o pedaço  $2m < r < \infty$  (junto com  $-\infty < t < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ , apesar do problema usual das coordenadas sobre o eixo  $\theta = 0, \pi$ ) para (2.46) e o pedaço  $0 < r < \infty$  para a solução (3.13). Na região de sobreposição ( $2m < r < \infty$ ), as duas soluções estão relacionadas através de (3.10), e assim, elas devem representar a mesma solução nesta região. Esse procedimento em que se parte de um sistema de coordenadas que cobre uma parte da variedade para um outro com

maior alcance, pode ser visto como uma extensão analítica (d'Inverno, 1992). Observe que a solução nas coordenadas de Eddington-Finkelstein não é mais simétrica com o tempo.

Podemos escrever a eq. (3.13) em uma forma mais simples introduzindo uma coordenada nula

$$v = \bar{t} + r, \quad (3.14)$$

que por motivos históricos é chamada de parâmetro temporal avançado. O elemento de linha resultante é

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} d\bar{t}dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dv - dr)^2 - \frac{4m}{r} (dv - dr) dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

É possível mostrar que a congruência das geodésicas radiais nulas que aproximam-se é dada por  $v = \text{constante}$ , que deveria ser evidente da relação (3.11). O diagrama de espaço-tempo para a solução de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein é apresentada na figura 3.3. Como antes, os cones de luz abrem para cones de  $45^\circ$  na medida em que  $r \rightarrow \infty$ . Ao lado esquerdo da fronteira, os cones de luz são todos inclinados  $-45^\circ$  com o eixo- $r$ . Ao lado direito da fronteira, inicia-se  $45^\circ$  com relação ao eixo- $r$  no infinito e se orienta para cima na medida em que  $r$  diminui, se tornando vertical em  $r = 2m$ , e aponta para dentro para  $r < 2m$ . Observe que fótons descrevendo geodésicas nulas se afastando, em  $r = 2m$ , “ficam onde estão”.

Na medida em que se movem para próximo da origem, as frentes de onda esféricas são atraídas para dentro, de modo que os pontos dos quais eles emanam não mais estão no centro. Isso se torna mais marcante até a hiper-superfície a  $r = 2m$ , onde apenas fótons radiais se afastando “ficam onde estão” e todo o resto é arrastado para dentro. Na região II, todos os fótons, mesmo os radiais se afastando, são arrastados em direção à singularidade.

A hiper-superfície  $r = 2m$  atua como uma membrana de apenas um sentido, permitindo que curvas nulas ou do tipo tempo orientadas para o futuro atravessem apenas de fora (região I) para dentro (região II). Além disso, nenhuma curva nula ou do tipo tempo orientadas para o futuro podem escapar de dentro para fora. Essa fronteira é chamada de horizonte de eventos, pois ela representa a fronteira de todos os eventos que podem ser observados, em princípio, por um observador inercial externo. O horizonte de eventos de Schwarzschild é absoluto, pois ele bloqueia todos os eventos internos de todos os observadores externos. Um objeto compacto que possui um horizonte de eventos é chamado de buraco negro.

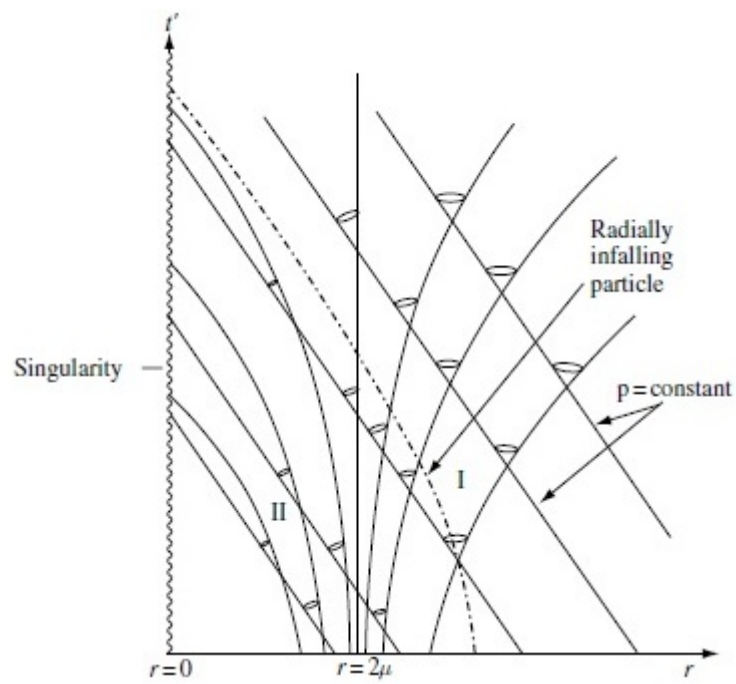


Figura 3.3: Estrutura dos cones de luz para geodésicas de uma partícula em queda livre radial em coordenadas de Eddington-Finkelstein. Fonte: (Hobson G. P. Efstathiou, 2005).

# SOLUÇÕES ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS EM GRAVIDADES DE ORDENS SUPERIORES

Um tópico de interesse no contexto de gravidades de ordens superiores é o da investigação de soluções esfericamente simétricas, sendo Ref. (STELLE, 1978) um dos papers responsáveis por jogar luz nessa linha de pesquisa. Destacamos o estudo da possibilidade de soluções de buracos negros além de Schwarzschild, por meio de diferentes abordagens, em Refs. (FROLOV; SHAPIRO, 2009; NELSON, 2010; LÜ et al., 2015; LU et al., 2015; KOKKOTAS et al., 2017; BUENO; CANO, 2017; GOLDSTEIN; MASHIYANE, 2018; PODOLSKY et al., 2018; SILVA; MEDEIROS, 2020), e as pesquisas envolvendo soluções em um regime de campo fraco em Refs. (ACCIOLY et al., 2017; GIACCHINI, 2017; GIACCHINI; NETTO, 2019; SILVA; MEDEIROS, 2020).

## 4.1 Equações de campo e soluções em um regime de campo fraco do modelo

Iniciamos nossa investigação apresentando as equações de campo de Eq. (1.1) e explorando suas soluções em um limite de campo fraco devido uma massa pontual. Em seguida encontramos as condições necessárias para suas estabilidades. Uma vez que, para grandes distâncias de um buraco negro, a gravidade experimentada é aproximadamente a devida uma massa pontual, tais soluções no limite de campo fraco se mostrarão úteis no nosso método para estudar a possibilidade de soluções de buracos negros além de Schwarzschild. Os principais resultados desta seção podem ser encontrados em nosso paper (SILVA; MEDEIROS, 2020).

As equações de campo no formalismo métrico associadas à ação (1.1) podem

ser escritas como

$$\begin{aligned}
& R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{1}{\kappa_0} \left[ R \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \right) - \nabla_\mu \nabla_\nu R + g_{\mu\nu} \square R \right] + \\
& + \frac{\alpha_0}{\kappa_0^2} \left[ R^2 \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{6}g_{\mu\nu}R \right) - \nabla_\mu \nabla_\nu R^2 + g_{\mu\nu} \square R^2 \right] + \\
& + \frac{\beta_0}{\kappa_0^2} \left[ \nabla_\mu \nabla_\nu \square R + \frac{1}{2} \nabla_\mu R \nabla_\nu R - R_{\mu\nu} \square R - g_{\mu\nu} \left( \square^2 R + \frac{1}{4} \nabla_\alpha R \nabla^\alpha R \right) \right] = 8\pi G T_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{4.2}$$

Para detalhes da obtenção, ver apêndice A. Essas são equações de campo de sexta ordem para a métrica. Como já dito, os termos além ao de Einstein-Hilbert nas equações de campo (4.1) tornam-se cada vez mais relevantes no regime UV e são regulados por potências de  $\kappa_0$  no denominador.

Deste ponto em diante até o final da seção, focaremos na análise do limite de campo fraco da gravidade (1.1). Seguindo a abordagem desenvolvida na Ref. (QUANDT; SCHMIDT, 1991), analisaremos detalhadamente todas as soluções possíveis no limite de campo fraco devido às correções de ordem superior.

Na aproximação de campo fraco, em que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , com  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ , as equações de campo podem ser expressas como

$$R_{\mu\nu}^{lin} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{lin} + \frac{1}{\kappa_0} \left( \eta_{\mu\nu} \square R^{lin} - \partial_\mu \partial_\nu R^{lin} \right) + \frac{\beta_0}{\kappa_0^2} \left( \partial_\mu \partial_\nu \square R^{lin} - \eta_{\mu\nu}^2 \square R^{lin} \right) = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{4.3}$$

uma vez que ignoramos todos os termos não lineares em  $h_{\mu\nu}$ . Na Eq. (4.3), o sobrescrito *lin* indica que as quantidades são linearizadas. Além disso, neste regime o operador  $\square$  se simplifica para  $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ . Tomando seu traço e considerando um tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$  de um fluido tipo poeira, a saber,  $T^{\mu\nu}$ , onde  $u^0 \gg u^i$ , temos

$$R^{lin} - \frac{3}{\kappa_0} \left( 1 - \frac{\beta_0}{\kappa_0} \square \right) \square R^{lin} = 8\pi G \rho, \tag{4.4}$$

que em um regime estático se reduz a

$$R^{lin} - \frac{3}{\kappa_0} \left( 1 - \frac{\beta_0}{\kappa_0} \nabla^2 \right) \nabla^2 R^{lin} = 8\pi G \rho. \tag{4.5}$$

Por outro lado, relacionando a Eq. (4.5) para o componente  $\mu = \nu = 0$  da Eq. (4.3), em que a equação da geodésica nos dá  $h_{00} = -2\phi$ , com  $\phi$  representando o potencial gravitacional clássico, obtemos

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{6} R^{lin} = \frac{16}{3} \pi G \rho. \tag{4.6}$$

A expressão (4.5) representa uma equação diferencial de quarta ordem para a curvatura escalar  $R^{lin}$ . Assim, considerando uma distribuição esfericamente simétrica, na qual  $\rho = M\delta(r)$ , tem-se quatro soluções linearmente independentes. No entanto, se impormos a condição de planura assintótica no infinito, em que  $R^{lin} \rightarrow 0$ , reduzimos o número de soluções para apenas duas. Da mesma forma, a solução geral da Eq. (4.6) consiste em seis soluções linearmente independentes, e a imposição física de planura assintótica no infinito descarta três delas.

Para obter as soluções da Eq. (4.5), propomos o *ansatz*

$$R^{lin} = \frac{b_+}{r} e^{-\frac{r}{l_+}} + \frac{b_-}{r} e^{-\frac{r}{l_-}}, \quad (4.7)$$

onde  $b_+$ ,  $b_-$ ,  $l_+$  e  $l_-$  são constantes a serem determinadas e  $Re(l_{\pm}) \geq 0$ . Além disso, considerando uma massa pontual  $M$  na origem, de modo que  $\rho = M\delta(r)$ , e usando

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{l}} \right) = \frac{1}{r l^2} e^{-\frac{r}{l}} - 4\pi\delta(r), \quad (4.8)$$

com

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(r), \quad (4.9)$$

obtemos para a Eq. (4.5) a expressão

$$\begin{aligned} & \frac{b_+}{r} e^{-\frac{r}{l_+}} \left( 1 - \frac{3}{\kappa_0} \frac{1}{l_+^2} + \frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} \frac{1}{l_+^4} \right) + \frac{b_-}{r} e^{-\frac{r}{l_-}} \left( 1 - \frac{3}{\kappa_0} \frac{1}{l_-^2} + \frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} \frac{1}{l_-^4} \right) + \\ & + \frac{12}{\kappa_0} \left[ b_+ + b_- - \frac{\beta_0}{\kappa_0} \left( \frac{b_+}{l_+^2} + \frac{b_-}{l_-^2} \right) \right] \pi\delta(r) - \frac{12\beta_0}{\kappa_0^2} (b_+ + b_-) \pi\nabla^2\delta(r) = 8\pi GM\delta(r). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Devido à independência dos vários termos na expressão anterior, obtemos as seguintes relações:

$$b_+ + b_- = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{3}{\kappa_0} \left[ b_+ + b_- - \frac{\beta_0}{\kappa_0} \left( \frac{b_+}{l_+^2} + \frac{b_-}{l_-^2} \right) \right] = 2GM, \quad (4.12)$$

e

$$l_{\pm}^4 - \frac{3}{\kappa_0} l_{\pm}^2 + \frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} = 0. \quad (4.13)$$

Os coeficientes  $l_{\pm}$  podem ser obtidos solucionando a equação biquadrática (4.13). Desta forma

$$l_{\pm} = \sqrt{\frac{3}{2\kappa_0} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta_0}{3}} \right)}, \quad (4.14)$$

e como  $b_+ + b_- = 0$ , podemos obter da Eq. (4.12) que

$$b_+ = \frac{2GM\kappa_0}{3} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\beta_0}{3}}} = -b_- \quad (4.15)$$

No limite  $|\beta_0| \rightarrow 0$ , que representa o limite do campo fraco da gravidade de Starobinsky, podemos escrever

$$l_+ = \sqrt{\frac{3}{\kappa_0}} \text{ e } l_- = 0. \quad (4.16)$$

Assim, para  $\kappa_0 > 0$  o  $l_+$  está associado ao termo de Yukawa devido à correção de Starobinsky e o  $l_-$  torna a outra exponencial na expressão (4.7) desprezível.

Para obter a solução da Eq. (4.6), usamos novamente que  $\rho = M\delta(r)$ , a Eq. (4.7) para a curvatura escalar  $R^{lin}$  e o *ansatz*

$$\phi = -\frac{GM}{r} \left( 1 + a_+ e^{-\frac{r}{l_+}} + a_- e^{-\frac{r}{l_-}} \right), \quad (4.17)$$

em que  $a_+$  e  $a_-$  são constantes a serem determinadas.

Seguindo o mesmo procedimento realizado anteriormente, obtemos

$$a_+ = \frac{1}{6} \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4\beta_0}{3}}}{\sqrt{1 - \frac{4\beta_0}{3}}} \right) \text{ e } a_- = -\frac{1}{6} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\beta_0}{3}}}{\sqrt{1 - \frac{4\beta_0}{3}}} \right). \quad (4.18)$$

Assim, a generalização para o potencial newtoniano é dada pela Eq. (4.17) com coeficientes (4.14) e (4.18). É interessante avaliar o potencial gravitacional  $\phi$  no limite onde  $\beta_0 \rightarrow 0$ . Neste caso, temos

$$a_+ = \frac{1}{3}, \quad a_- = 0 \text{ e } l_+ = \sqrt{\frac{3}{\kappa_0}}, \quad (4.19)$$

de modo que

$$\phi = -\frac{GM}{r} \left( 1 + \frac{1}{3} e^{-\sqrt{\frac{\kappa_0}{3}} r} \right). \quad (4.20)$$

Para investigar a natureza de todas as soluções possíveis, realizamos uma análise de caso das relações (4.14). Definindo as quantidades reais positivas

$$\begin{aligned} A_{\pm} &= 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta_0}{3}} \text{ com } 0 < \beta_0 < 3/4, \\ B_{\pm} &= \sqrt{1 + \frac{4|\beta_0|}{3}} \pm 1 \text{ com } \beta_0 < 0, \\ C_{\pm} &= \sqrt{\sqrt{\frac{4\beta_0}{3}} \pm 1} \text{ com } \beta_0 > 3/4, \end{aligned}$$

Tabela 4.1: Esta tabela nos mostra os valores obtidos para  $l_{\pm}$  em cada um dos intervalos de  $\beta_0$  para  $\kappa_0$  positivo. Note que apenas o intervalo  $0 < \beta_0 < 3/4$  nos dá quantidades reais para ambos  $l_{\pm}$ .

$\kappa_0 > 0$		
$\beta_0$	$l_+$	$l_-$
$0 < \beta_0 < 3/4$	$\sqrt{\frac{3}{2\kappa_0} A_+}$	$\sqrt{\frac{3}{2\kappa_0} A_-}$
$\beta_0 < 0$	$\sqrt{\frac{3}{2\kappa_0} B_+}$	$i\sqrt{\frac{3}{2\kappa_0} B_-}$
$\beta_0 > 3/4$	$\sqrt{\frac{3}{4\kappa_0} (C_+ + iC_-)}$	$\sqrt{\frac{3}{4\kappa_0} (C_+ - iC_-)}$

Tabela 4.2: Esta tabela nos mostra os valores obtidos para  $l_{\pm}$  em cada um dos intervalos de  $\beta_0$  para  $\kappa_0$  negativo. Nenhum deles nos dá valores reais para ambos  $l_{\pm}$ .

$\kappa_0 < 0$		
$\beta_0$	$l_+$	$l_-$
$0 < \beta_0 < 3/4$	$i\sqrt{\frac{3}{2 \kappa_0 } A_+}$	$i\sqrt{\frac{3}{2 \kappa_0 } A_-}$
$\beta_0 < 0$	$i\sqrt{\frac{3}{2 \kappa_0 } B_+}$	$\sqrt{\frac{3}{2 \kappa_0 } B_-}$
$\beta_0 > 3/4$	$\sqrt{\frac{3}{4 \kappa_0 } (C_- - iC_+)}$	$\sqrt{\frac{3}{4 \kappa_0 } (C_- + iC_+)}$

todas as soluções possíveis podem ser resumidas nas duas tabelas 4.1 e 4.2.

O caso  $\kappa_0 > 0$  com  $0 < \beta_0 < 3/4$  é o único em que  $l_{\pm} \in \mathbb{R}$ , implicando correções Yukawa  $r^{-1}e^{-r/l_{\pm}}$  para o potencial gravitacional. Por outro lado,  $\kappa_0 < 0$  com  $0 < \beta_0 < 3/4$  é o único caso em que  $l_{\pm}$  são imaginários puros, implicando em correções oscilatórias. Em todos os outros casos,  $l_{\pm} \in \mathbb{C}$ , e as correções contêm partes do tipo Yukawa e oscilatórias.

É interessante notar que as partes reais  $Re(l_{\pm})$  são sempre não negativas. Assim, todos os casos apresentados representam boas soluções para  $R$ , pois todos são compatíveis com as condições de contorno estabelecidas no infinito. Em alguns casos, como normalmente podemos ver quando  $\kappa_0 > 0$  e  $\beta_0 < 0$ , uma solução tem um comportamento oscilatório, porém, o fator  $r$  no denominador de (4.7) causa  $R \rightarrow 0$  no infinito. No entanto, uma questão relevante é: todos os casos mostrados acima são fisicamente realizáveis, ou existem intervalos em que os parâmetros  $\kappa_0$  e  $\beta_0$  devem ser restritos? Ao investigar a estabilidade das soluções para o potencial gravitacional  $\phi$ , responderemos a esta pergunta.

#### 4.1.1 Análise de estabilidade

No sentido de restringir os possíveis valores que os parâmetros  $\kappa_0$  e  $\beta_0$  podem assumir, analisaremos a estabilidade das soluções no limite de campo fraco, semelhante ao desenvolvido em Ref. (PERIVOLAROPOULOS; KAZANTZIDIS, 2019). O leitor interessado em estabilidade de soluções de gravidades de ordens superiores no contexto cosmológico e de ondas gravitacionais, veja Refs. (SALLES; SHAPIRO, 2014;

PETER et al., 2018; REIS et al., 2019).

Como podemos ver na Eq. (4.6) o potencial gravitacional  $\phi$  depende da curvatura escalar  $R$ , tal que, qualquer instabilidade em  $R$  produz uma instabilidade em  $\phi$ . Assim, a análise de estabilidade pode ser realizada perturbando a Eq. (4.4) assumindo que

$$R = R_0(r) + \delta R(r, t). \quad (4.21)$$

Esta perturbação deve, em princípio, ser induzida por uma perturbação em  $\rho$  tal que  $\rho \rightarrow \rho_0 + \delta\rho$ . Neste caso, temos para a equação perturbada

$$\delta R - \frac{3}{\kappa_0} \left[ 1 - \frac{\beta_0}{\kappa_0} \left( -\partial_0^2 + \nabla^2 \right) \right] \left( -\partial_0^2 + \nabla^2 \right) \delta R = 8\pi G \delta\rho. \quad (4.22)$$

Tomando a transformada de Fourier da Eq. (4.22), temos

$$\delta R_k + \frac{3}{\kappa_0} \left[ 1 + \frac{\beta_0}{\kappa_0} \left( \partial_0^2 + k^2 \right) \right] \left( \partial_0^2 + k^2 \right) \delta R_k = 8\pi G \delta\rho_k. \quad (4.23)$$

Esta equação é uma EDO linear não homogênea e a análise de estabilidade pode ser estudada olhando apenas para a solução homogênea. Então, ignorando  $\delta\rho_k$ , temos

$$\frac{3}{\kappa_0} \left[ 1 + \frac{\beta_0}{\kappa_0} \left( \partial_0^2 + k^2 \right) \right] \left( \partial_0^2 + k^2 \right) \delta R_k + \delta R_k = 0. \quad (4.24)$$

Para  $\beta_0 = 0$ , temos

$$\delta \ddot{R}_k + \omega_k^2 \delta R_k = 0, \quad (4.25)$$

com

$$\omega_k^2 = k^2 + \frac{\kappa_0}{3}. \quad (4.26)$$

Para  $\kappa_0 > 0$ , a solução perturbativa  $\delta R_k$  é oscilatória para todos os modos  $k$  e, portanto, estável. Por outro lado, para  $\kappa_0 < 0$  existem modos  $k$  instáveis que crescem exponencialmente, produzindo instabilidades no sistema.

Vejam agora o caso da equação completa. Manipulando a Eq. (4.24), podemos obter

$$\delta \ddot{R}_k + \left( \frac{\kappa_0}{\beta_0} + 2k^2 \right) \delta \ddot{R}_k + \left( k^4 + \frac{\kappa_0}{\beta_0} k^2 + \frac{\kappa_0^2}{3\beta_0} \right) \delta R_k = 0. \quad (4.27)$$

Considerando uma solução para  $\delta R_k$  na forma  $e^{i\omega t}$ , temos

$$\left[ \omega^4 - \left( \frac{\kappa_0}{\beta_0} + 2k^2 \right) \omega^2 + \left( k^4 + \frac{\kappa_0}{\beta_0} k^2 + \frac{\kappa_0^2}{3\beta_0} \right) \right] \delta R_k = 0, \quad (4.28)$$

que resulta em

$$\sqrt{2}\omega = \pm \sqrt{\left( \frac{\kappa_0}{\beta_0} + 2k^2 \right)} \pm \sqrt{\left( \frac{\kappa_0}{\beta_0} + 2k^2 \right)^2 - 4 \left( k^4 + \frac{\kappa_0}{\beta_0} k^2 + \frac{\kappa_0^2}{3\beta_0} \right)}. \quad (4.29)$$

A estabilidade das soluções ocorre somente se os quatro  $\omega$ 's forem reais para qualquer valor de  $k$ . Uma condição necessária, mas não suficiente, para que isso aconteça é

$$\frac{\kappa_0}{\beta_0} + 2k^2 > 0, \quad (4.30)$$

o que implica que  $\kappa_0$  e  $\beta_0$  devem ter o mesmo sinal. Se essa condição for atendida, devemos ter

$$0 < 4 \left( k^4 + \frac{\kappa_0}{\beta_0} k^2 + \frac{\kappa_0^2}{3\beta_0} \right) < \left( \frac{\kappa_0}{\beta_0} + 2k^2 \right)^2.$$

Para  $\beta_0$  e  $\kappa_0$  ambos negativos, a primeira parte da desigualdade não é satisfeita para todo  $k$ . De fato, com  $\beta_0 < 0$ , a expressão

$$0 < 4 \left( k^4 + \frac{\kappa_0}{\beta_0} k^2 + \frac{\kappa_0^2}{3\beta_0} \right),$$

será violada com um valor suficientemente pequeno de  $k$ . Para  $\beta_0$  e  $\kappa_0$  ambos positivos, a primeira parte da desigualdade é sempre satisfeita porque todos os termos de  $k^4 + (\kappa_0/\beta_0)k^2 + \kappa_0^2/3\beta_0$  são positivos. Além disso

$$4 \left( k^4 + \frac{\kappa_0}{\beta_0} k^2 + \frac{\kappa_0^2}{3\beta_0} \right) < \left( \frac{\kappa_0}{\beta_0} + 2k^2 \right)^2 \Rightarrow \beta_0 < \frac{3}{4}. \quad (4.31)$$

Portanto, a estabilidade das soluções no limite de campo fraco só ocorre se

$$\kappa_0 > 0 \text{ e } 0 \leq \beta_0 < \frac{3}{4}. \quad (4.32)$$

Esta análise exclui soluções oscilatórias, pois restringe o intervalo dos parâmetros em  $\kappa_0 > 0$  e  $0 \leq \beta_0 < 3/4$ . Como visto na seção anterior, neste intervalo  $l_{\pm} \in \mathbb{R}$  e as correções do potencial gravitacional são do tipo Yukawa.

É interessante notar que este último resultado também pode ser obtido considerando uma decomposição da métrica nos modos escalar e tensorial não massivo. Para mostrar essa afirmação, usamos alguns resultados encontrados na Ref. (ACCIOLY et al., 2017). Nesse caso, a métrica pode ser decomposta como

$$h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\Phi - \eta_{\mu\nu}\bar{\Phi}, \quad (4.33)$$

assumindo o *gauge*

$$\partial^\mu \tilde{\gamma}_{\mu\nu} = 0, \text{ com } \tilde{\gamma}_{\mu\nu} \equiv \tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\tilde{h}, \quad (4.34)$$

onde  $\tilde{h} = \eta^{\alpha\beta}\tilde{h}_{\alpha\beta}$ . Além disso, considerando a correspondência entre os parâmetros das teorias e a diferença de assinatura da métrica, obtemos as equações

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (4.35)$$

$$\left( \square - m_+^2 \right) \Phi = 0, \quad (4.36)$$

$$\left( \square - m_-^2 \right) \bar{\Phi} = -m_+^2 \Phi, \quad (4.37)$$

em que para as equações escalares

$$m_{\pm}^2 = \frac{\kappa_0}{2\beta_0} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta_0}{3}} \right). \quad (4.38)$$

Para que tenhamos  $m_{\pm}^2 > 0$ , concluímos que  $\kappa_0$  e  $\beta_0$  devem estar restritos nos intervalos expressos em relação (4.32). Por fim, observe que as condições que levam a  $m_{\pm}^2 > 0$ , ou seja, a ausência de táquions são as mesmas que garantem a estabilidade das soluções em regime de campo fraco.

## 4.2 Soluções de buracos negros

A partir deste ponto, passaremos para o estudo de soluções de buracos negros, que culminará na investigação da possibilidade de soluções além de Schwarzschild na gravidade (1.1).

Nos últimos anos, tem havido um interesse crescente em investigar soluções de buracos negros em teorias de gravidade de ordem superior, particularmente em teorias de quarta ordem (FROLOV; SHAPIRO, 2009; NELSON, 2010; LU et al., 2015; MAURO et al., 2015; GOLDSTEIN; MASHIYANE, 2018; BUENO; CANO, 2017; KOKKOTAS et al., 2017; PODOLSKY et al., 2018). Tais análises nos permitem compreender melhor, além da estrutura e natureza das soluções, essas teorias em regimes de campos gravitacionais fortes. Sabemos que a solução esfericamente simétrica e estática no vácuo da RG é a solução de Schwarzschild. Além disso, o teorema de Birkhoff nos diz que ela é a única. Nesta seção, investigamos a existência de soluções exteriores de buracos negros além de Schwarzschild das equações de campo (4.1), e discutimos sob quais condições elas podem ser fisicamente realizáveis. Os principais resultados desta seção encontram-se em nosso paper (SILVA; MEDEIROS, 2020).

Na metodologia utilizada nesta investigação, as equações de campo (4.1) não são solucionadas explicitamente. Em vez disso, usamos uma abordagem chamada na literatura de método de Lichnerowicz, semelhante ao que é feito em Refs. (NELSON, 2010; LU et al., 2015; LÜ et al., 2015). Em poucas palavras, essa metodologia nos informa sobre a possibilidade da solução exterior de Schwarzschild ser única — o que é interessante no nosso caso, pois  $R_{\mu\nu} = 0$ , ou seja, a solução de Schwarzschild, é uma solução das equações de campo (4.1) no vácuo.

Iniciamos esta investigação considerando o elemento de linha devido a um objeto esfericamente simétrico e estático, que é escrito como

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right), \quad (4.39)$$

onde  $g_{00}$  e  $g_{11}$  são funções apenas da coordenada radial. Então, tomamos o traço das equações de campo (4.1) no vácuo, multiplicamos pela curvatura escalar  $R$  e usamos a regra de Leibniz algumas vezes de modo a obtermos termos derivadas totais. Isso nos

dá

$$\begin{aligned}
& R^2 + \frac{3}{\kappa_0} \nabla_\mu R \nabla^\mu R - \frac{3\beta_0}{2\kappa_0^2} R \nabla_\mu R \nabla^\mu R + \frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} \square R \square R - \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2} R^4 + \frac{3\alpha_0}{\kappa_0^2} \nabla_\mu R \nabla^\mu R^2 + \\
& - \frac{3}{\kappa_0} \nabla_\mu (R \nabla^\mu R) + \frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} \nabla_\mu (R \nabla^\mu \square R) - \frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} \nabla_\mu (\nabla^\mu R \square R) + \frac{\beta_0}{\kappa_0^2} \nabla_\mu (R^2 \nabla^\mu R) - \frac{3\alpha_0}{\kappa_0^2} \nabla_\mu (R \nabla^\mu R^2) = 0.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Agora, integrando a Eq. (4.40) na região exterior ao horizonte  $r_h$  onde  $g_{00} < 0$  e  $g_{11} > 0$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R^2 + \frac{3g^{11}}{\kappa_0} \left( 1 - \frac{\beta_0}{2\kappa_0} R + \frac{2\alpha_0}{\kappa_0} R \right) (\partial_1 R)^2 + \frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} (\square R)^2 - \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2} R^4 \right] + \\
& - \frac{3}{\kappa_0} K \left( \int_{r_h} + \int_\infty \right) dS_1 \left( r^2 \sqrt{-g_{00}g^{11}} R \partial_1 R \right) + \frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} K \left( \int_{r_h} + \int_\infty \right) dS_1 \left[ r^2 \sqrt{-g_{00}g^{11}} R \partial_1 (\square R) \right] + \\
& \quad - \frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} K \left( \int_{r_h} + \int_\infty \right) dS_1 \left( r^2 \sqrt{-g_{00}g^{11}} \partial_1 R \square R \right) + \\
& + \frac{\beta_0}{\kappa_0^2} K \left( \int_{r_h} + \int_\infty \right) dS_1 \left( r^2 \sqrt{-g_{00}g^{11}} R^2 \partial_1 R \right) - \frac{3\alpha_0}{\kappa_0^2} K \left( \int_{r_h} + \int_\infty \right) dS_1 \left( r^2 \sqrt{-g_{00}g^{11}} g^{11} R \partial_1 R^2 \right) = 0,
\end{aligned} \tag{4.41}$$

onde a notação escolhida na segunda, terceira e quarta linhas significa que a integração é avaliada nas hipersuperfícies esfericamente simétricas  $r = r_h$  e  $r \rightarrow \infty$ . Além disso,  $K$  é um termo constante envolvendo coordenadas angulares e temporais e

$$\square R = \frac{1}{r^2 \sqrt{-g_{00}g^{11}}} \partial_1 \left( r^2 \sqrt{-g_{00}g^{11}} g^{11} \partial_1 R \right). \tag{4.42}$$

Se considerarmos que a curvatura escalar e suas derivadas até a terceira ordem são quantidades bem comportadas em  $r = r_h$ , o que é razoável, pois o horizonte de eventos  $r_h$  é uma singularidade aparente, temos que os termos de superfície são nulos. Isso ocorre porque, por definição, um horizonte de eventos é uma hipersuperfície nula na qual  $g^{11}(r_h) = g_{00}(r_h) = 0$  (BEKENSTEIN, 1972). Por sua vez, os termos de superfície avaliados no infinito também desaparecem, pois nesta região distante da origem, as expressões para o limite de campo fraco são válidas, de modo que as soluções do tipo Yukawa (4.7) decaem mais rapidamente do que quaisquer potências em  $r$ . Assim, obtemos

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[ R^2 + \frac{3g^{11}}{\kappa_0} \left( 1 - \frac{\beta_0}{2\kappa_0} R + \frac{2\alpha_0}{\kappa_0} R \right) (\partial_1 R)^2 + \frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} (\square R)^2 - \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2} R^4 \right] = 0. \tag{4.43}$$

Note que ao fazer  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ , que representa a gravidade com correção quadrática  $R^2$  da curvatura escalar, temos

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[ R^2 + \frac{3g^{11}}{\kappa_0} (\partial_1 R)^2 \right] = 0. \tag{4.44}$$

Como  $\kappa_0$ , assim como  $g^{11}$ , é uma quantidade positiva e  $R^2$  e  $(\partial_1 R)^2$  são termos quadráticos, notamos que para satisfazer a relação (4.44), ambos os termos devem desaparecer

independentemente, de tal forma que  $R = 0$ . Substituindo esse resultado na Eq. (4.1) livre de fonte (com  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ ), encontramos que  $R_{\mu\nu} = 0$ . Assim, a solução exterior de Schwarzschild é a única solução esfericamente simétrica e estática da gravidade com correção quadrática na curvatura escalar.

Da mesma forma, seguindo a mesma abordagem para a relação completa (4.43), observamos inicialmente que o primeiro e o terceiro termos são não negativos, pois vimos na seção 4.1.1 que  $\beta_0 > 0$ . Assim, para que a única solução esfericamente simétrica das equações de campo (4.1) no vácuo seja a solução de Schwarzschild  $R_{\mu\nu} = 0$ , é necessário que  $\alpha_0 \leq 0$  e que a curvatura escalar fora do horizonte  $R_{out}$  satisfaçam

$$R_{out} \leq \frac{2\kappa_0}{4|\alpha_0| + \beta_0}. \quad (4.45)$$

Se essas duas condições forem satisfeitas, todos os termos na Eq. (4.43) serão não negativos e, para satisfazê-la, cada termo deve desaparecer independentemente. Então, concluímos que  $R_{out} = 0$ . Com base em (4.45), podemos afirmar que se  $R_{out}$  for menor ou igual a tal quantidade, então ela será necessariamente zero naquela região. Infelizmente, como não podemos garantir que  $R_{out} = 0$  irrestritamente, o método de Lichnerovicz é inconclusivo para discriminar se a solução de Schwarzschild é a única.

Por outro lado, também podemos afirmar que se  $R_{out}$  exceder esse valor, soluções de buracos negros além de Schwarzschild podem existir. Então, estimemos a ordem de magnitude de  $R_{out}$  para que isso ocorra. A primeira consideração a ser feita é que  $(4|\alpha_0| + \beta_0) \sim \beta_0$  em (4.45). Isso se justifica uma vez que  $R^3$  e  $R\Box R$  são termos de correção de segunda ordem e, portanto, de maneira conservadora, esperamos que  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  tenham magnitudes semelhantes. Além disso, a análise de estabilidade das soluções de limite de campo fraco nos mostra que existe um limite superior para o parâmetro  $\beta_0$ , a saber, o valor de  $3/4$ , que leva a um potencial gravitacional estável. No limite em que  $\beta_0$  assume tal valor, segue que

$$R_{out} \gtrsim \frac{8\kappa_0}{3}. \quad (4.46)$$

Se assumirmos que os termos adicionais além ao de Einstein-Hilbert na ação (1.1) são correções clássicas de uma teoria quântica da gravidade, é razoável esperar que  $\kappa_0 \sim M_{pl}^2$ . Dessa forma,

$$R_{out} \gtrsim \frac{8\kappa_0}{3} \sim 10^{36} \text{GeV}^2. \quad (4.47)$$

Outra possibilidade é supor que a inflação cósmica é gerada pela gravidade modificada (1.1). Neste caso, podemos estabelecer a ordem de grandeza de  $R_{out}$  com base na escala de energia da inflação. Usando os resultados apresentados em Ref. (CUZINATTO et al., 2019), a saber,

$$\kappa_0 \approx 6\pi^2 A_s r M_p^2 \sim 10^{-9} M_p^2 \text{ e } \beta_0^{\max} \lesssim 10^{-2}, \quad (4.48)$$

onde a amplitude escalar  $A_s \approx 1.96 \times 10^{-9}$  (AKRAMI et al., 2018) e a razão tensorial-escalar  $r \sim 10^{-2}$  (CUZINATTO et al., 2019), fomos capaz de estimar que

$$R_{out} \gtrsim \frac{2\kappa_0}{\beta_0^{\max}} \sim \frac{10^{27}}{10^{-2}} = 10^{29} \text{GeV}^2. \quad (4.49)$$

Assim, soluções de buracos negros além de Schwarzschild podem existir apenas para valores de  $R_{out}$  que excedam  $10^{29}\text{GeV}^2$ . Grosseiramente, podemos estimar a ordem de magnitude do horizonte extrapolando a validade dos resultados de campo fraco. Usando Eqs. (4.7), (4.15), (4.48) e impondo a relação (4.49), obtemos

$$\frac{GM}{r} \left( e^{-\frac{r}{l_+}} - e^{-\frac{r}{l_-}} \right) \gtrsim 10^2, \quad (4.50)$$

onde  $l_{\pm}$  é dado pela Eq. (4.14). Assim, devido ao decaimento exponencial, a condição necessária, mas não suficiente para  $R_{out} \gtrsim 10^{29}\text{GeV}^2$  é

$$r \lesssim l_{\pm} \sim \sqrt{\frac{3}{2\kappa_0}} \Rightarrow r \lesssim 10^4 M_P^{-1} \sim 10^{-31}\text{m}. \quad (4.51)$$

Como é esperado que  $R_{out}$  atinja seu valor máximo próximo ao horizonte, obtemos

$$R_{out} \gtrsim 10^{29}\text{GeV}^2 \Rightarrow r_h \lesssim 10^{-31}\text{m}.$$

A análise anterior é um tanto grosseira e a estimativa de  $r_h$  pode variar algumas ordens de magnitude. No entanto, mesmo considerando essa variação, fica claro que a existência de soluções além de Schwarzschild não ocorrerá no contexto astrofísico usual, pelo menos para os valores de  $\kappa_0$  considerados.

## 4.2.1 Desvios da solução de Schwarzschild

Vimos na seção anterior que o uso do método de Lichnerovicz se mostrou inconclusivo para nos dar uma resposta à questão de se existem ou não soluções exteriores além de Schwarzschild. Vimos também, fazendo uso de algumas estimativas e extrapolações, que tais soluções podem se manifestar apenas em buracos negros cujos horizontes são extremamente pequenos. Queremos agora investigar se existem soluções esfericamente simétricas e estáticas no vácuo que podem ser obtidas a partir de uma deformação contínua da solução de Schwarzschild. A abordagem em nosso paper (SILVA; MEDEIROS, 2020) se assemelha à desenvolvida em Ref. (LÜ et al., 2015).

Em primeiro lugar, vejamos como o traço das equações de campo (4.1) no vácuo se comporta para o caso em que a curvatura escalar  $R$  desvia infinitesimalmente da solução de Schwarzschild, isto é,

$$R(r) = \varepsilon f(r), \quad (4.52)$$

com  $\varepsilon \ll 1$ . Descartando termos além da primeira ordem em  $\varepsilon$ , temos

$$-f + \frac{3}{\kappa_0} \square_{Sch} f - \frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} \square_{Sch}^2 f = 0, \quad (4.53)$$

onde  $\square_{Sch}$  é construído com a métrica de Schwarzschild. Escrevendo explicitamente os

dois últimos termos da Eq. (4.53), obtemos

$$\begin{aligned}
& -f + \left\{ \frac{3}{\kappa_0} \frac{1}{r^2} \left[ 2r \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right) + r_h \right] + \frac{12\beta_0}{\kappa_0^2} \frac{r_h}{r^4} \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right) \right\} \frac{df}{dr} + \\
& + \left\{ \frac{3}{\kappa_0} \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right) - \frac{6\beta_0}{\kappa_0^2} \frac{1}{r^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right)^2 \right] \right\} \frac{d^2f}{dr^2} + \\
& - \frac{6\beta_0}{\kappa_0^2} \left[ \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right)^2 + \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right) + \frac{r_h}{r^2} \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right) \right] \frac{d^3f}{dr^3} + \\
& - \frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} \left( 1 - \frac{r_h}{r} \right)^2 \frac{d^4f}{dr^4} = 0.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Da Eq. (4.54), fazemos uma construção semelhante à desenvolvida na seção anterior com base no método de Lichnerovicz. A ideia é estabelecer uma relação quadrática para  $f$ , integrá-la fora do horizonte  $r_h$ , e verificar se podemos concluir, através do desaparecimento independente de cada um dos termos, que  $f$  é nulo naquela região. Nesse sentido, multiplicando a Eq. (4.54) por  $r^5$ , podemos expressá-la na forma

$$h_0f + h_1f' + h_2f'' + h_3f^{(3)} + h_4f^{(4)} = 0, \tag{4.55}$$

onde

$$\begin{aligned}
h_0 &= -r^5, \\
h_1 &= \frac{3}{\kappa_0} r^3 (2r - r_h) + \frac{12\beta_0}{\kappa_0^2} r_h (r - r_h), \\
h_2 &= \frac{3}{\kappa_0} r^4 (r - r_h) - \frac{6\beta_0}{\kappa_0^2} r \left[ r^2 - (r - r_h)^2 \right], \\
h_3 &= -\frac{12\beta_0}{\kappa_0^2} r^3 (r - r_h), \\
h_4 &= -\frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} r^3 (r - r_h)^2.
\end{aligned}$$

Multiplicando a Eq. (4.55) por  $u(r)f$ , onde  $u$  é uma função cuja forma será obtida posteriormente, temos

$$h_0uf^2 + h_1uff' + h_2uff'' + h_3uff^{(3)} + h_4uff^{(4)} = 0. \tag{4.56}$$

Agora, realizando uma série de manipulações envolvendo derivadas na Eq. (4.56), é possível reescrevê-la em termos do quadrado das funções  $f, f', f''$  e termos da derivada total, como

$$\begin{aligned}
& h_0uf^2 + \left[ -h_2u + \frac{3}{2} (h_3u)' - 2(h_4u)'' \right] f'^2 + h_4uf''^2 + \\
& + \left[ h_1u - (h_2u)' + (h_3u)'' - (h_4u)^{(3)} \right] ff' + \\
& + (h_2uff')' + (h_3uff'')' - \frac{1}{2} (h_3uf'^2)' + \\
& - ((h_3u)' ff')' - (h_4uff'')' + (h_4uff^{(3)})' + \\
& - ((h_4u)' ff'')' + ((h_4u)' f'^2)' + ((h_4u)'' ff')' = 0.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Então, escolhamos a forma de  $u(r)$  de modo que a quantidade entre parênteses que acompanha o termo cruzado  $ff'$  seja cancelada, a saber,

$$h_1 u - (h_2 u)' + (h_3 u)'' - (h_4 u)^{(3)} = 0 \Rightarrow u \propto 1/r^3. \quad (4.58)$$

Integrando a Eq. (4.57) na região exterior ao horizonte, concluímos que

$$\int \left\{ r^2 f^2 + \left[ \frac{3}{\kappa_0} r (r - r_h) + \frac{6\beta_0 (r - r_h)^2}{\kappa_0^2 r^2} \right] f'^2 + \frac{3\beta_0}{\kappa_0^2} (r - r_h)^2 f''^2 \right\} dr + I_S = 0, \quad (4.59)$$

onde  $I_S$  representa a integral de todos os termos da superfície

$$I_S = \int_{r_h}^{\infty} \left[ \left( \frac{h_2}{r^3} f f' \right)' + \left( \frac{h_3}{r^3} f f'' \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{h_3}{r^3} f'^2 \right)' - \left( \left( \frac{h_3}{r^3} \right)' f f' \right)' - \left( \frac{h_4}{r^3} f' f'' \right)' \right] dr + \\ + \int_{r_h}^{\infty} \left[ \left( \frac{h_4}{r^3} f f^{(3)} \right)' - \left( \left( \frac{h_4}{r^3} \right)' f f'' \right)' + \left( \left( \frac{h_4}{r^3} \right)' f'^2 \right)' + \left( \left( \frac{h_4}{r^3} \right)'' f f' \right)' \right] dr.$$

A integração dos vários termos de superfície avaliados no infinito desaparece, pois nessa região  $f$  e suas primeiras derivadas têm um comportamento do tipo Yukawa, decaindo mais rapidamente do que qualquer termo polinomial. Por sua vez, para mostrar que os termos da superfície se cancelam no horizonte, basta considerar que a função  $f$  e suas primeiras derivadas são bem comportadas em  $r = r_h$ . Com isso em mente, é fácil mostrar que no horizonte,

$$I_S = - \left( - \frac{6\beta_0}{\kappa_0^2} f f' \right) - ((0) f f'') + \frac{1}{2} ((0) f'^2) + \\ + \left( - \frac{12\beta_0}{\kappa_0^2} f f' \right) + ((0) f' f'') - ((0) f f^{(3)}) + ((0) f f'') - ((0) f'^2) - \left( - \frac{6\beta_0}{\kappa_0^2} f f' \right),$$

e portanto

$$I_S = 0.$$

Voltemos nossa atenção para a Eq. (4.59). Observamos que fora do horizonte ( $r > r_h$ ) cada um dos coeficientes que acompanham os termos quadráticos são não negativos. Vemos então que a única maneira da Eq. (4.59) ser satisfeita é se cada um dos termos for nulo independentemente, ou seja, se  $f = f_{out} = 0$ . Esse é um resultado interessante pois significa que uma perturbação infinitesimal da solução exterior de Schwarzschild não existe, pelo menos não em primeira ordem.

O próximo passo é analisar perturbações de ordens superiores da solução de Schwarzschild. Verificamos pelo método de Lichnerovicz que a perturbação de primeira ordem da curvatura escalar  $R$  é nula. Na presente análise verificaremos que essas perturbações de ordens superiores de  $R$ , que levam a um conjunto hierárquico de relações, também são todas nulas.

Uma perturbação da solução de Schwarzschild pode ser representada por

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \varepsilon g_{\mu\nu}^{(1)} + \varepsilon^2 g_{\mu\nu}^{(2)} + \dots, \quad (4.60)$$

onde  $\varepsilon$  é o parâmetro da perturbação e  $g_{\mu\nu}^{(0)}$  é a métrica de Schwarzschild. Tal perturbação representada na Eq. (4.60) induz uma perturbação na curvatura escalar  $R$  dada por

$$R = R^{(0)} + \varepsilon R^{(1)} + \varepsilon^2 R^{(2)} + \dots, \quad (4.61)$$

em que  $R^{(0)} = R_{Sch} = 0$ , e da análise anterior,  $R_{out}^{(1)} \equiv f_{out} = 0$ . Tomando o traço das equações de campo (4.1) no vácuo e considerando termos até a segunda ordem de perturbação, obtemos

$$-R_{out}^{(2)} + \frac{3}{\kappa_0} \square_{Sch} R_{out}^{(2)} - 3 \frac{\beta_0}{\kappa_0^2} \square_{Sch}^2 R_{out}^{(2)} = 0. \quad (4.62)$$

A relação (4.62) é a mesma para a perturbação de primeira ordem  $f$ , a saber (4.53), cujo resultado já conhecemos: desaparece fora do horizonte. Então podemos concluir que não há perturbação  $R_{out}^{(2)}$ . Extrapolando esse resultado é possível mostrar que perturbações de ordens superiores  $R_{out}^{(n)}$  são todas nulas.

Com base na análise anterior, poderíamos pensar que o resultado  $R_{out}^{(n)} = 0$  é válido para qualquer  $r_h$ , mas isso não é verdade. O ponto principal é que a abordagem perturbativa desenvolvida aqui representa uma análise via perturbação regular e, formalmente, esse tipo de análise não pode ser empregado em nosso caso porque os termos perturbativos são termos diferenciais de ordens superiores. Nesta situação, a abordagem correta é utilizar uma análise via perturbação singular<sup>1</sup>. No entanto, é seguro empregar a perturbação regular usual se a região de interesse estiver longe da região da camada limite. Para nosso modelo, a camada limite está localizada próxima à origem e sua espessura pode ser estimada como  $\kappa_0^{-1/2}$ . Veja apêndice B, para detalhes. Como estamos interessados em soluções fora do horizonte, nosso resultado, baseado no método de perturbação regular, permanece válido para  $r_h \gg \kappa_0^{-1/2}$ . Portanto, concluímos que não há desvios da solução de Schwarzschild fora do horizonte, desde que  $r_h \gg \kappa_0^{-1/2}$ . Este resultado está de acordo com a conclusão apresentada na seção 4.2.

### 4.3 Comentários finais

Nesta seção, estudamos soluções esfericamente simétricas e estáticas tanto em um regime de campo fraco como no contexto de buracos negros de uma teoria da gravidade que inclui todos os termos até a segunda ordem de correção envolvendo a curvatura escalar  $R$ , Eq. (1.1).

No regime de campo fraco, desenvolvemos um estudo completo da gravidade proposta, no qual obtivemos todas as soluções possíveis devido a uma massa pontual. Além disso, verificamos que dentre todas as soluções encontradas, apenas aquelas que apresentam comportamento do tipo Yukawa ( $\kappa_0 > 0$  e  $0 \leq \beta_0 < 3/4$ ) são estáveis quando é realizada uma perturbação temporal.

Motivados pelo crescente interesse em soluções de buracos negros em gravidades de ordens superiores, veja as Refs. (FROLOV; SHAPIRO, 2009; NELSON, 2010; LU

<sup>1</sup>Veja Refs. (JOHNSON, 2004; HOLMES, 2012) para uma introdução à teoria da perturbação singular.

et al., 2015; LÜ et al., 2015; GOLDSTEIN; MASHIYANE, 2018; BUENO; CANO, 2017; KOKKOTAS et al., 2017; PODOLSKY et al., 2018), desenvolvemos uma análise das soluções de buracos negros esfericamente simétricos e estáticos. Nessa investigação, utilizamos o método de Lichnerovicz para investigar a possibilidade de existência de soluções exteriores além de Schwarzschild. Em ambas as abordagens utilizadas, a saber, 1) considerando o traço das equações de campo da teoria completa e 2) assumindo uma deformação contínua da solução exterior de Schwarzschild, nossos resultados sugerem a ausência de buracos negros macroscópicos além de Schwarzschild. Isso se deve ao fato de que a curvatura escalar  $R_{out}$  deve exceder, na estimativa mais conservadora,  $10^{29}\text{GeV}^2$  para sua ocorrência, implicando em buracos negros cujos horizontes são menores ou da ordem de  $10^{-31}\text{m}$ . Assim, estamos falando de mini buracos negros além de Schwarzschild com massas extremamente pequenas. Nesse contexto, há duas questões principais que devem ser abordadas: a primeira diz respeito se esses mini buracos negros realmente existem; e a segunda diz respeito se eles são estáveis com relação à radiação Hawking (veja Ref. (KONOPLYA; ZINHAILO, 2019) e referências nela).

Em meados da década de 1980, vários autores pesquisando no contexto de teorias de grande unificação observaram que o universo primordial poderia ter passado por um regime de expansão acelerada, aproximadamente exponencial ou quase de Sitter, indo de encontro com o modelo padrão da cosmologia (STAROBINSKY, 1979; Kazanas, 1980; SATO, 1981). Historicamente, Alan Guth foi o responsável por reconhecer que um tal regime inflacionário, conduzido por um campo escalar, poderia solucionar alguns problemas que surgem na descrição da evolução do universo quando realizada a partir do modelo padrão desacelerado de Friedmann (GUTH, 1981). Inicialmente, os problemas abordados foram os da planura, do horizonte e dos monopolos magnéticos — como tratado em (LINDE, 1982). O problema da planura diz respeito ao fato de o modelo padrão da cosmologia não conseguir descrever a extrema planura do universo primordial. Esse problema pode ser posto também através do seguinte questionamento: por que a densidade de energia total era tão próxima da densidade crítica no universo primordial? Já o problema do horizonte pode ser brevemente resumido com a pergunta: por que duas regiões do universo que nunca tiveram contato causal possuem as mesmas propriedades — no caso da radiação cósmica de fundo (RCF), a mesma temperatura. Por sua vez, o problema dos monopolos magnéticos, em verdade, surge apenas em modelos além ao modelo padrão da física de partículas. Ocorreu-se que modelos de grande unificação em conjunto com o modelo padrão da cosmologia previam uma imensa quantidade de monopolos magnéticos (pelo menos um monopolo para cada nucleon), em total desacordo com o universo observado. No entanto, com o passar dos anos, a principal motivação para a inflação se tornou descrever o mecanismo capaz de gerar as perturbações iniciais responsáveis pelas estruturas de larga escala do universo (MUKHANOV, 2005; WEINBERG, 2008). De fato, a inflação fornece uma descrição para a geração das perturbações iniciais responsáveis pelas estruturas de larga escala do universo. As escalas das flutuações quânticas do campo que conduz a inflação são esticadas durante a expansão acelerada. No cenário mais simples com apenas um campo escalar, as flutuações se congelam após as escalas das perturbações deixarem o horizonte durante a inflação, e bem após o fim desta, as perturbações reentram no horizonte. Isso pode ser verificado na imagem 5.1.

Nesse sentido, a inflação nos dá um mecanismo causal para a origem das es-

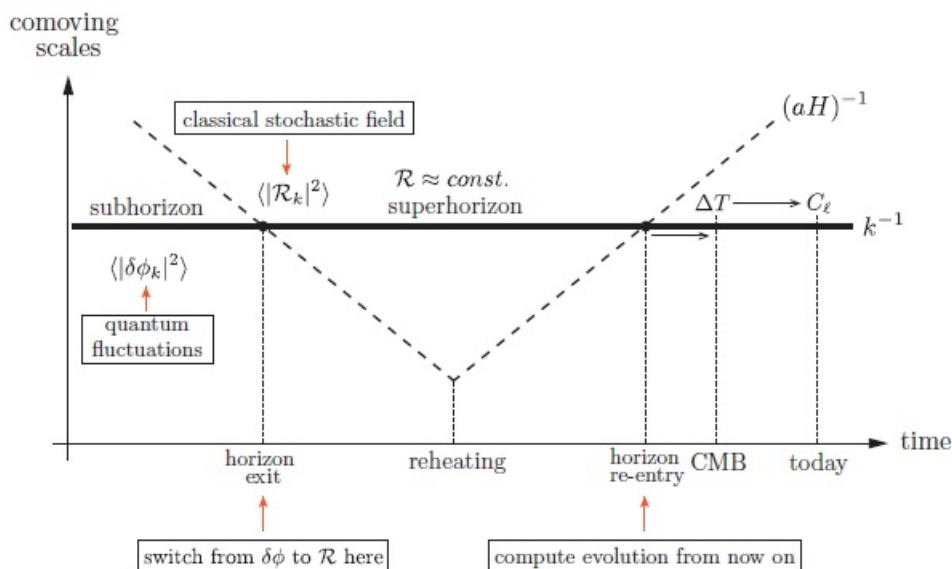


Figura 5.1: Gráfico em escalas logarítmicas, onde é apresentado um resumo da evolução do universo em escalas comóveis, incluindo a geração e evolução das perturbações de modo  $k$ . Fonte: (BAUMANN, 2013).

truturas em larga escala. Uma de suas previsões é que as perturbações de curvatura associadas ao grau de liberdade escalar geralmente exibem um espectro aproximadamente invariante de escala. Essa previsão pode ser diretamente testada pelas medidas das anisotropias de temperatura da RCF, realizadas pelo satélite Planck (AKRAMI et al., 2018)

Além de gerar um regime de expansão do tipo quase de Sitter, um modelo de inflação consistente precisa durar tempo suficiente para solucionar os problemas anteriormente mencionados, e ter um final suave (saída elegante), isto é, sair de um regime cuja expansão é acelerada para o universo desacelerado de Friedmann, de modo a preservar as previsões bem sucedidas deste último. Tudo isso pode ser realizado no âmbito do paradigma slow-roll: não conhecemos o real mecanismo que gera a inflação, no entanto, um regime inflacionário consistente conduzido por um ou mais campos escalares é alcançado se as condições de slow-roll forem satisfeitas (MUKHANOV, 2005). Existem vários modelos propostos na literatura sugerindo a existência de um campo escalar, ou múltiplos (LINDE, 1994; WANDS, 2008), conduzindo a inflação.

Neste capítulo, após lembrarmos o leitor de alguns conceitos fundamentais acerca da cosmologia do background, faremos uma breve introdução à inflação, onde apresentamos seus fundamentos, a saber, suas dinâmicas no background cosmológico e no contexto perturbativo, bem como a conexão com as observações.

## 5.1 Inflação no background cosmológico

Antes de abordarmos de fato a inflação, lembramos de alguns conceitos fundamentais da cosmologia do background.

A cosmologia moderna é fundamentada em dois fatos observacionais para além de seu pilar teórico, a RG. O primeiro é o de que o universo está se expandindo. O segundo baseia-se no que chamamos de princípio cosmológico: em escalas maiores ou da ordem de 100 Mpc, podemos considerar a distribuição da matéria como homogênea e isotrópica. De fato, essa última é uma aproximação tão mais precisa quanto mais no passado voltamos. O espaço-tempo que descreve um tal universo é o devido a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (5.1)$$

onde  $a = a(t)$  é o fator de escala e  $k$  representa a curvatura espacial do universo, podendo assumir os valores  $k = 0$ ,  $k = 1$  e  $k = -1$ , para um universo plano, com curvatura positiva e curvatura negativa, respectivamente. A menos onde seja dito o contrário, restringiremos nossa discussão ao caso  $k = 0$ . Ao escrevermos as equações de Einstein para a métrica FLRW plana, assumindo um tensor energia-momento de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

com  $\varepsilon$  e  $p$  sendo as densidade de energia e pressão, e  $u_\mu$  a 4-velocidade, obtemos as equações de Friedmann

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \varepsilon \text{ e } \dot{H} + H^2 = -\frac{1}{6M_{Pl}^2} (\varepsilon + 3p), \quad (5.3)$$

onde  $H = \dot{a}/a$  é o parâmetro de Hubble. Além dessas duas equações dinâmicas, temos também a relação advinda da conservação do tensor energia-momento,  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , que para o caso de um fluido perfeito, escrevemos<sup>1</sup>

$$\dot{\varepsilon} = -3H(\varepsilon + p). \quad (5.4)$$

As Eqs. (5.3), (5.4) em conjunto com uma equação de estado, que usualmente é do tipo barotrópica,  $p = p(\varepsilon)$ , formam a base para o estudo de modelos cosmológicos de universos espacialmente planos.

A seguir, apresentaremos alguns dos problemas cosmológicos que motivaram a inflação.

### 5.1.1 O problema das condições iniciais

Neste ponto, apresentamos alguns dos problemas cosmológicos, a saber, o do horizonte e o da planura, que surgem quando tentamos descrever o universo através do modelo padrão da cosmologia (o modelo  $\Lambda$ CDM). Esses são os chamados problemas das condições iniciais: o universo que conhecemos hoje deveria ter surgido a partir de condições muito especiais ou finamente ajustadas. Como uma aproximação, suporemos as condições iniciais em  $t_i = t_{Pl} \sim 10^{-43}$ s. Nesta seção, seguiremos de perto a apresentação em Ref. (MUKHANOV, 2005).

<sup>1</sup>Como estamos supondo um universo homogêneo e isotrópico, onde  $\varepsilon$  e  $p$  são funções apenas do tempo, obtemos apenas uma relação.

Antes de pontuarmos os problemas tratados a seguir, mencionamos aqui o problema da geração das perturbações iniciais. A RCF nos fornece informações sobre o universo da época da recombinação. Ela nos diz, por exemplo, que o universo primordial era bastante homogêneo e isotrópico. Sabemos das observações nas anisotropias da RCF que as perturbações  $\phi$  e  $\delta$  — perturbação escalar da métrica que no *gauge* newtoniano representa a generalização do potencial, e o contraste de densidade de energia<sup>2</sup> — devem possuir uma amplitude inicial de aproximadamente  $10^{-5}$  praticamente independentes da escala  $k$ . O mecanismo para geração dessas perturbações, cujas escalas inicialmente estão em uma região super-horizonte, é um problema em um universo macroscópico dominado pela matéria e/ou radiação.

### O problema do horizonte

O atual domínio de homogeneidade e isotropia do universo é pelo menos da ordem de grandeza da atual escala de curvatura (raio de Hubble),  $c/H_0 = ct_0 \sim 10^{28}$  cm, em que  $t_0$  representa a idade atual do universo<sup>3</sup>. Inicialmente, o tamanho desse domínio foi menor pela razão dos fatores de escala correspondentes:  $a_i/a_0$ . Podemos então estimar que o tamanho da região de homogeneidade e isotropia do qual nosso Universo emergiu em  $t = t_i$  era

$$l_i \sim ct_0 \frac{a_i}{a_0}. \quad (5.5)$$

Agora, comparemos essa escala com o tamanho da região causal  $l_c \sim ct_i$ :

$$\frac{l_i}{l_c} \sim \frac{t_0}{t_i} \frac{a_i}{a_0}. \quad (5.6)$$

Para obtermos uma primeira estimativa — mesmo que grosseira — dessa razão, consideremos que o universo em  $t_i = t_{pl}$ , cuja temperatura era  $T_{pl} \sim 10^{32}$  K, tenha sido dominado por uma radiação primordial. Assim, considerando que a temperatura média atual do universo ( $T_0$ ) é da ordem da unidade, temos

$$(a_i/a_0) \sim (T_0/T_{pl}) \sim 10^{-32}, \quad (5.7)$$

e obtemos

$$\frac{l_i}{l_c} \sim \frac{10^{17}}{10^{-43}} 10^{-32} \sim 10^{28}. \quad (5.8)$$

Portanto, o domínio de homogeneidade e isotropia no universo primordial era maior que a região de causalidade em 28 ordens de grandeza. Isso significa que em  $(10^{28})^3 = 10^{84}$  regiões causalmente desconectadas a densidade de energia estava suavemente distribuída, com flutuações que não excederam  $(\delta\varepsilon/\varepsilon) \sim 10^{-4}$ . Como nenhum sinal pode se propagar mais rápido que a luz, nenhum processo físico causal pode ser responsável por uma distribuição tão finamente ajustada.

<sup>2</sup>Discutiremos essas perturbações em Sec. 5.2.

<sup>3</sup>Assumindo um modelo  $\Lambda$ CDM mínimo, podemos estimar a idade do universo com base na constante de Hubble  $H_0 = (67.4 \pm 0.5) \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  (AGHANIM et al., 2020). A mesma referência nos dá  $t_0 = (13.8 \pm 0.02) \text{ Gy}$  (bilhões de anos).

Assumindo que o fator de escala varia através de alguma lei de potência, podemos estimar  $a/t \sim \dot{a}$  e reescrevermos a Eq. (5.6) como

$$\frac{l_i}{l_c} \sim \frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_0} \quad (5.9)$$

Assim, a razão  $l_i/l_c$  é da ordem de grandeza das taxas de expansão correspondentes. Se considerarmos que a gravidade sempre foi atrativa e portanto desacelerando a expansão ao longo do tempo, concluímos da Eq. (5.9) que a escala de homogeneidade e isotropia sempre foi maior que a escala de causalidade.

### O problema da planura

A equação de Friedmann, de primeira ordem, para um universo com curvatura espacial  $k$  se escreve

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon. \quad (5.10)$$

Ela pode ser reescrita em termos do parâmetro de densidade  $\Omega(t)$ , em que

$$\Omega(t) \equiv \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_{cr}(t)} \text{ e } \varepsilon_{cr}(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (5.11)$$

sendo  $\rho_{cr}$  a energia crítica do universo no instante  $t$ . Assim, obtemos a equação de Friedmann equivalente:

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{(Ha)^2}. \quad (5.12)$$

Avaliando agora a razão, para o universo primordial e o atual, da Eq. (5.12), considerando o resultado obtido em Eq. (5.9), e a medida de  $\Omega_0 \approx 1.001$  (AGHANIM et al., 2020), temos

$$\Omega_i - 1 = (\Omega_0 - 1) \frac{(Ha)_0^2}{(Ha)_i^2} = (\Omega_0 - 1) \left( \frac{\dot{a}_0}{\dot{a}_i} \right)^2 \leq 10^{-59}. \quad (5.13)$$

Concluímos que o parâmetro cosmológico no universo primordial era extremamente próximo da unidade, correspondendo a um universo espacialmente plano.

### 5.1.2 Inflação: uma visão geral

Vimos anteriormente que a razão  $\dot{a}_i/\dot{a}_0$  determina tanto o número de regiões causalmente desconectadas quanto a proximidade de  $\Omega_i(t)$  da unidade. Se a gravidade sempre possuiu um efeito atrativo, então a razão  $\dot{a}_i/\dot{a}_0$  é necessariamente maior que a unidade, pois a gravidade desacelera a expansão. Portanto, a conclusão  $\dot{a}_i/\dot{a}_0 \gg 1$  pode ser evitada apenas se supormos que durante algum período da expansão a gravidade atuou como uma força repulsiva, acelerando a expansão. Nesse caso, podemos ter  $\dot{a}_i/\dot{a}_0 < 1$  e o surgimento de nosso universo a partir de uma única região causalmente

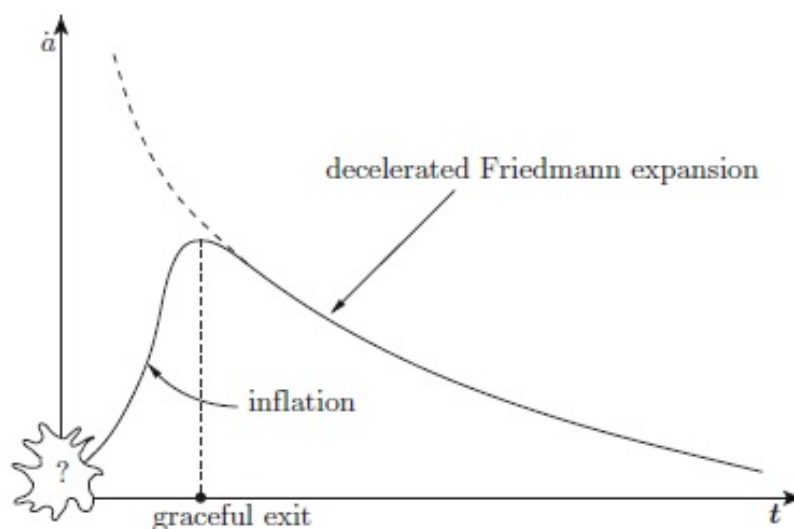


Figura 5.2: Gráfico comparativo entre o modelo padrão de Friedmann (curva tracejada) e um modelo incluindo uma fase inflacionária. Os eixos representam a taxa de expansão  $\dot{a}$  em função do tempo  $t$ . Fonte: (MUKHANOV, 2005).

conectada se torna possível. Com essas considerações em mente, chegamos à seguinte definição de inflação: *a inflação foi uma fase de expansão acelerada do universo primordial, quando a gravidade atuou como uma força repulsiva.*

A figura 5.2 nos mostra como o modelo padrão de Friedmann pode ser modificado com a inclusão de uma fase inflacionária. Notemos que após a fase inflacionária a curva recai, de forma suave, no modelo padrão de Friedmann: isso é a chamada saída elegante. Naturalmente, isso deve ocorrer para que a inflação preserve, além da homogeneidade e isotropia, as previsões bem-sucedidas do modelo padrão. Para preservar a nucleossíntese primordial, por exemplo, a inflação deve iniciar e terminar suficientemente cedo; para que haja a geração das perturbações iniciais, a inflação fica restrita a uma escala de energia em que nos modelos inflacionários mais simples ela deve terminar em um  $t_f$  entre  $10^{-36}$ s e  $10^{-34}$ s.

A inflação pode produzir todo o universo observável a partir de uma pequena região homogênea, mesmo se o universo fosse bastante inhomogêneo fora dessa região. Isso acontece pois em um universo que se expande aceleradamente sempre haverá um horizonte de eventos. Essa distância no instante  $t$  é

$$r_e(t) = a(t) \int_t^{t_{\max}} \frac{dt}{a} = a(t) \int_{a(t)}^{a_{\max}} \frac{da}{\dot{a}}. \quad (5.14)$$

A integral converge mesmo se  $a_{\max} \rightarrow \infty$  porque a taxa de expansão cresce com  $a$ . A existência de um horizonte de eventos significa que qualquer coisa num instante  $t$  a uma distância maior que  $r_e(t)$  de um observador não poderá influenciar o futuro desse observador. A figura ?? consiste em dois círculos concêntricos, de raios  $r_e(t)$  e  $2r_e(t)$ , que contém uma região homogênea e isotrópica do universo primordial em  $t = t_i$ ; fora dessa região o universo é inhomogêneo. Assim, a evolução futura da região dentro do círculo menor é completamente independente das condições fora do círculo maior: sua

região interna apenas poderá ser influenciada pelos eventos que ocorreram em  $t = t_i$  na região entre os dois círculos.

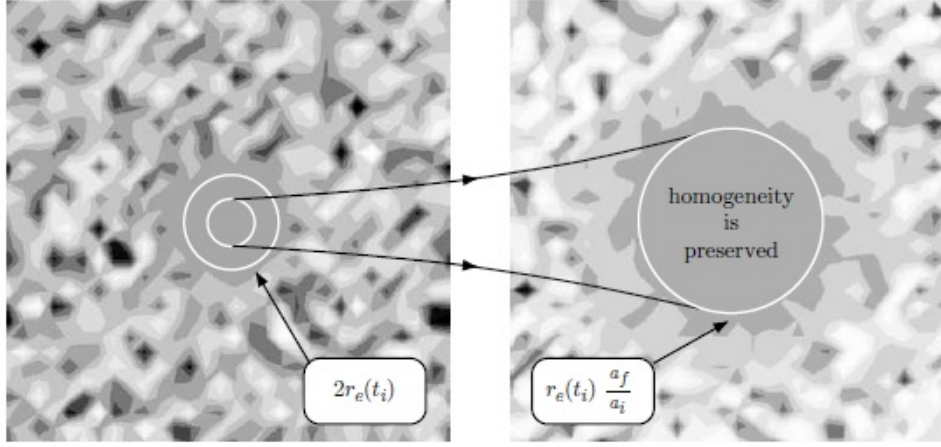


Figura 5.3: Região de homogeneidade e isotropia compreendida nos círculos concêntricos de raios  $r_e(t)$  e  $2r_e(t)$ . Fonte: (MUKHANOV, 2005).

O tamanho da região (de homogeneidade e isotropia) de raio  $r_e(t)$  cresce e ao fim da inflação, no instante  $t = t_f$  é

$$r_h(t_f) = r_e(t_i) \frac{a_f}{a_i}. \quad (5.15)$$

Comparando essa escala ao tamanho do horizonte de partículas, que para um universo que se expande aceleradamente pode ser estimado por

$$r_p(t) = a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt}{a} = a(t) \int_{a_i}^a \frac{da}{\dot{a}a} \sim \frac{a(t)}{a_i} r_e(t_i), \quad (5.16)$$

pois a principal contribuição na integral vem de  $a \sim a_i$ . Ao fim da inflação,  $r_p(t_f) \sim r_h(t_f)$ , isto é, o tamanho da região de homogeneidade, originária de uma região causal, é da ordem do horizonte de partículas.

Portanto, em vez de considerarmos um universo homogêneo em muitas regiões causalmente desconectadas, podemos iniciá-lo a partir de um pequeno domínio causalmente conectado e a inflação se encarrega de transformá-lo em um imenso domínio, preservando a homogeneidade independente das condições fora do horizonte de eventos.

Agora, abordaremos a questão de se podemos abrir mão da restrição de homogeneidade nas condições iniciais. Se o universo for iniciado a partir de uma região causalmente conectada fortemente inhomogênea, poderá a inflação produzir um imenso universo homogêneo? A resposta é sim. A seguir, faremos uma abordagem bastante aproximada.

Consideremos que as flutuações iniciais na densidade de energia sejam da ordem da unidade em escalas  $\sim H_i^{-1}$ , isto é,

$$\left( \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \right)_{t_i} \sim \frac{1}{\varepsilon} \frac{|\nabla\varepsilon|}{a_i} H_i^{-1} = \frac{|\nabla\varepsilon|}{\varepsilon} \frac{1}{\dot{a}_i} \sim \mathcal{O}(1), \quad (5.17)$$

onde  $\nabla$  representa o gradiente com relação às coordenadas comóveis. Em  $t \gg t_i$ , as flutuações na densidade de energia dentro da escala de curvatura  $H^{-1}(t)$  podem ser estimadas por

$$\left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)_t \sim \frac{1}{\varepsilon} \frac{|\nabla\varepsilon|}{a(t)} H^{-1}(t) \sim \mathcal{O}(1) \frac{\dot{a}_i}{\dot{a}(t)}, \quad (5.18)$$

em que assumimos que  $|\nabla\varepsilon|/\varepsilon$ , que chamamos de amplitude das perturbações, não varia substancialmente durante a expansão. Da Eq. (5.18), podemos concluir que se o universo passa por uma fase de expansão acelerada, em que  $\dot{a}(t) > \dot{a}_i$  para  $t > t_i$ , as grandes inomogeneidades iniciais desaparecerão na escala de curvatura. Um domínio de tamanho  $H^{-1}$  se torna cada vez mais homogêneo pois o tamanho físico das flutuações, que é  $\propto a$ , cresce mais rápido que a escala de curvatura  $H^{-1} = a/\dot{a}$ , enquanto a amplitude das perturbações não varia substancialmente.

De acordo com Eq. (5.18), se quisermos evitar que as grandes inomogeneidades iniciais reentrem na atual escala de curvatura,  $H_0^{-1}$ , teremos que assumir que a taxa de expansão inicial foi muito menor que a taxa de expansão atual,  $\dot{a}_i/\dot{a}_0 \ll 1$ . As observações da radiação cósmica de fundo nos dizem que as flutuações na densidade de energia na atual escala de curvatura não devem exceder  $10^{-5}$ . Assim, os traços de uma grande inomogeneidade inicial serão suficientemente dissolvidas se  $\dot{a}_i/\dot{a}_0 < 10^{-5}$ . Reescrevendo a Eq. (5.13) como

$$\Omega_0 = 1 + (\Omega_i - 1) \left(\frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_0}\right)^2, \quad (5.19)$$

vemos que se  $|\Omega_i - 1| \sim \mathcal{O}(1)$ , então com boa precisão

$$\Omega_0 = 1. \quad (5.20)$$

Essa importante previsão da inflação afirma que a densidade de energia total de todas as componentes do universo, independente de sua origem, deve ser igual a atual densidade de energia crítica. A título de comparação, enquanto no modelo padrão de Friedmann  $\Omega \rightarrow 1$  para  $t \rightarrow 0$ , com uma fase inflacionária,  $\Omega \rightarrow 1$  para  $t \rightarrow \infty$ , isto é,  $\Omega = 1$  é seu futuro atrator.

### Como a gravidade pode ser repulsiva

A equação de Friedmann da aceleração pode ser posta como

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G (\varepsilon + 3p) a. \quad (5.21)$$

Quando o universo atravessa um regime dominado por radiação, cuja equação de estado é  $p = (1/3)\varepsilon$ , o fator de escala é  $\propto \sqrt{t}$ ; por sua vez, quando ele passa por um regime dominado pela matéria, cuja equação de estado é  $p \approx 0$ , o fator de escala varia  $\propto t^{2/3}$ . Em ambos os casos, podemos observar de (5.21) que  $\ddot{a}$  é negativo. Por isso que o gráfico da figura 5.2 tem o aspecto apresentado para  $\dot{a}$  no modelo padrão desacelerado de Friedmann.

Da Eq. (5.21), se  $\varepsilon + 3p > 0$  for satisfeita, então  $\ddot{a}$  é negativo e o universo se expande desaceleradamente. Por outro lado, se a condição de energia forte for violada o universo se expande aceleradamente. Historicamente, o primeiro modelo de universo em que isso aconteceu foi o proposto por de Sitter, que pode ser encarado como um universo espacialmente plano contendo apenas a constante cosmológica, cuja equação de estado é  $p_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda$ . No universo de de Sitter,  $a \propto \exp(H_\Lambda t)$ , onde  $H_\Lambda = (8\pi G\rho_\Lambda/3)^{1/2}$ , e  $\dot{a} \propto a$  (MUKHANOV, 2005). Como ele descreve um universo que se expande aceleradamente, poderia-se pensar ser possível utilizá-lo para representar um regime inflacionário. No entanto, o universo de de Sitter falha em satisfazer as condições necessárias exigidas para uma inflação bem sucedida: a saber, ele não possui uma saída elegante recaindo no modelo padrão de Friedmann.

### Condições gerais para a inflação

Agora, determinaremos as condições gerais que devem ser satisfeitas para termos um modelo inflacionário bem sucedido. Como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H}, \quad (5.22)$$

e  $\ddot{a}$  deve se tornar negativo durante a saída elegante, a derivada do parâmetro de Hubble,  $\dot{H}$ , também deve ser negativa. A razão  $|\dot{H}|/H^2$  ao fim da inflação, atingindo a saída elegante, se aproxima da unidade. Assumindo que  $H^2$  varia mais rápido que  $\dot{H}$ , isto é,  $|\dot{H}| < 2H\dot{H}$ , obtemos a seguinte estimativa para a duração da inflação:

$$t_f \sim \frac{H_i}{|\dot{H}_i|}, \quad (5.23)$$

em que  $H_i$  e  $\dot{H}_i$  se referem ao início da inflação. Em  $t \sim t_f$ , o lado direito da Eq. (5.22) muda de sinal e a expansão se torna desacelerada.

A inflação deve durar tempo suficiente para transformar um pequeno domínio do universo primordial em um na escala do universo observável. Assim, reescrevendo a condição  $\dot{a}_f/\dot{a}_0 < 10^{-5}$  como

$$\frac{\dot{a}_f}{\dot{a}_0} = \frac{a_f}{a_i} \frac{H_i}{H_f} \frac{\dot{a}_f}{\dot{a}_0} < 10^{-5}, \quad (5.24)$$

e considerando que  $\dot{a}_f/\dot{a}_0$  deve ser maior que  $10^{28}$ , concluímos que a inflação é bem sucedida apenas se

$$\frac{a_f}{a_i} > 10^{33} \frac{H_i}{H_f}. \quad (5.25)$$

Se assumirmos que  $|\dot{H}_i| \ll H_i^2$  e desprezarmos a variação do parâmetro de Hubble, então a razão dos fatores de escala pode ser grosseiramente estimada por

$$\frac{a_f}{a_i} \sim \exp(H_i t_f) \sim \exp\left(\frac{H_i^2}{|\dot{H}_i|}\right) > 10^{33}, \quad (5.26)$$

de modo que a inflação pode solucionar o problema das condições iniciais apenas se  $t_f > 75H_i^{-1}$ , isto é, se durar mais que 75 tempos de Hubble. Reescrevendo em termos dos valores iniciais do parâmetro de Hubble e de sua derivada, essa condição se escreve

$$\frac{|\dot{H}_i|}{H_i^2} < \frac{1}{75}. \quad (5.27)$$

Utilizando as Eqs. (5.3) e (5.4), podemos ainda reformular a condição em termos da equação de estado inicial

$$\frac{(\varepsilon + p)_i}{\varepsilon_i} < 10^{-2}. \quad (5.28)$$

Isso significa que no início da inflação, o desvio da equação de estado do vácuo ( $p = -\varepsilon$ ) não excedeu 1%. Podemos ainda concluir que a solução de de Sitter é uma boa aproximação para o estágio inicial da inflação.

### 5.1.3 A física da inflação

Em um background cosmológico de FLRW, o universo atravessa um regime de expansão acelerada se uma tal quantidade  $\varepsilon$  obedecer a seguinte relação

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN} \ll 1, \quad (5.29)$$

com,

$$dN \equiv d \ln a = H dt, \quad (5.30)$$

medindo o número de  $e$ -folds  $N$  da inflação. Isso significa que o parâmetro de Hubble  $H$  deve ser aproximadamente constante. Por sua vez, para que essa condição se sustente por tempos de Hubble suficientes, é necessário que a relação

$$|\eta| \equiv \left| -\frac{1}{H} \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{d \ln \varepsilon}{dN} \right| \ll 1, \quad (5.31)$$

isto é, a variação de  $\ln \varepsilon$  com respeito ao número de  $e$ -folds seja muito lenta.

As quantidades  $\varepsilon$  e  $\eta$  são os chamados parâmetros de slow-roll, e as condições estabelecidas acima são independentes do mecanismo que gera a inflação. A seguir, apresentaremos a dinâmica inflacionária devido um campo escalar canônico minimamente acoplado à RG.

### Dinâmica para um campo escalar

Considere um campo escalar canônico  $\varphi$ , o inflaton, minimamente acoplado à RG. A esse campo inflaton está associado um termo cinético canônico e um potencial  $V(\varphi)$ , ao qual está encapsulado as características do modelo. Nesse caso, a ação gravitacional se escreve

$$S(g^{\mu\nu}, \varphi) = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{M_{Pl}^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right). \quad (5.32)$$

Por sua vez, o tensor energia momento associado ao campo escalar é

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \partial_\lambda \varphi \partial^\lambda \varphi - V(\varphi) \right), \quad (5.33)$$

de onde inferimos que sua componente temporal,  $T^0_0 = \varepsilon_\varphi$ , é a densidade de energia

$$\varepsilon_\varphi \equiv \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (5.34)$$

ao passo que sua componente espacial,  $T^i_j = -p_\varphi \delta^i_j$ , é a pressão

$$p_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi), \quad (5.35)$$

com

$$u_\mu = \frac{\partial_\mu \varphi}{\sqrt{g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}}, \quad (5.36)$$

a 4-velocidade. Note pelas Eqs. (5.21), (5.34) e (5.35), que uma configuração que conduz a um regime inflacionário ocorre para um potencial que domina sobre o termo cinético, isto é, se  $\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$ .

Nesse contexto, em um background cosmológico de FLRW plano, as equações de Friedmann são dadas por

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right), \quad (5.37)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{Pl}^2} \dot{\varphi}^2. \quad (5.38)$$

Lembremos que uma terceira equação dinâmica surge devido a conservação covariante do tensor energia momento,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= 0 \\ \nabla_\mu \nabla^\mu \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \varphi) + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Essa relação nos dá a equação de movimento para o campo  $\varphi$ , a conhecida equação de Klein-Gordon

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V' = 0, \quad (5.40)$$

com  $V' \equiv \partial_\varphi V$ . Observe nessa expressão que o termo do potencial atua como uma força, ao passo que o termo  $H\dot{\varphi}$  representa um atrito. Além disso, uma vez que ela é uma EDO de segunda ordem, se fazem necessárias duas condições iniciais  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  e  $\dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0$  para a descrição completa da evolução do sistema. Veremos ao longo do texto que há modelos em que condições iniciais relativamente gerais conduzem a uma região atratora do espaço de fase  $\varphi \times \dot{\varphi}$  onde  $\dot{\varphi}^2 \ll V$  (um regime inflacionário do tipo slow-roll ocorre), enquanto outros, requerem algum tipo de restrição.

## Inflação em um regime de slow-roll

Vamos apresentar agora como se dá a dinâmica das equações para o campo  $\varphi$  assumindo um regime inflacionário do tipo slow-roll. Vimos anteriormente que a inflação ocorre, e perdura por tempo suficiente, se os parâmetros de slow-roll satisfizerem a condição  $\epsilon, \eta \ll 1$ . Avaliaremos como as condições para  $\epsilon$  e  $\eta$  se reescrevem em termos das equações para o campo escalar  $\varphi$ .

A condição  $\epsilon \ll 1$  em termos de Eqs. (5.37) e (5.38) implica em

$$\dot{\varphi}^2 \ll V, \quad (5.41)$$

$$H^2 \approx \frac{1}{3M_{Pl}^2} V. \quad (5.42)$$

Tomando a derivada de Eq. (5.42) e fazendo uso de Eq. (5.38), obtemos

$$3H\dot{\varphi} + V' \approx 0. \quad (5.43)$$

Comparando com a equação original de Klein-Gordon (5.40), vemos que

$$|\ddot{\varphi}| \approx 3H|\dot{\varphi}|. \quad (5.44)$$

Em termos do potencial, os parâmetros  $\epsilon$  e  $\eta$ , na aproximação de slow-roll, tomando Eqs. (5.38), (5.42), (5.43), (5.44), se escrevem

$$\epsilon \approx \frac{M_{Pl}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2, \quad (5.45)$$

$$\eta \approx 2M_{Pl}^2 \left[ \frac{V''}{V} - \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \right]. \quad (5.46)$$

Por fim, o número de  $e$ -folds  $N$  da inflação, que nos dá uma medida de sua duração, fazendo uso de Eqs. (5.30), (5.42) e (5.43), nos dá

$$N = \int_t^{t_f} H dt \approx -\frac{1}{M_{Pl}^2} \int_{\varphi}^{\varphi_f} \frac{V}{V'} d\varphi. \quad (5.47)$$

Observe que essa é uma expressão que relaciona o campo escalar  $\varphi$  e  $\varphi_f$ , o número de  $e$ -folds  $N$  e os parâmetros do potencial (modelo).

Um potencial  $V(\varphi)$  capaz de gerar um regime inflacionário do tipo slow-roll é o de Coleman-Weinberg, apresentado na figura 5.4.

A saída elegante ocorre quando  $\varphi$  caminha em direção ao mínimo do potencial e oscila em torno deste mínimo. Esta é uma condição necessária para que o regime inflacionário seja consistente, possibilitando que o universo possua uma fase de reaquecimento e recaia na subsequente era dominada pela radiação. Faremos alguns comentários acerca desse período em Sec. 5.1.3.

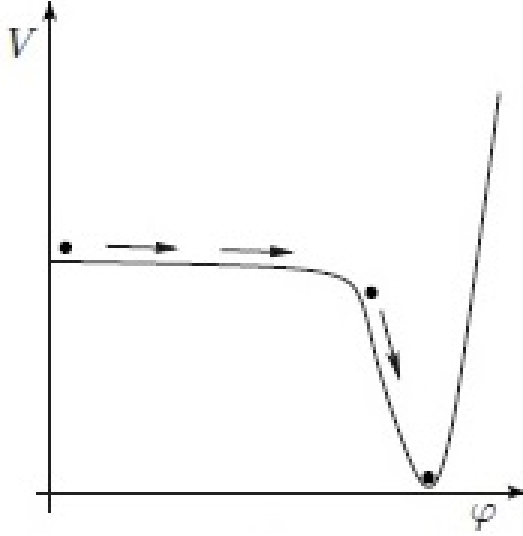


Figura 5.4: Potencial de Coleman-Weinberg. Ele é capaz de gerar um regime inflacionário do tipo slow-roll, uma vez que (1) possui uma região de platô, onde o campo desliza lentamente,  $\dot{\phi}^2 \ll V$ , e (2) possui uma região de mínimo global, onde ocorrem as oscilações coerentes, processo responsável por transferir energia do campo ínflaton para os campos de matéria. Fonte: (MUKHANOV, 2005).

Para entendermos de maneira simples esse período, vamos supor que o período de oscilação é muito mais rápido do que a escala de expansão. Nesse caso, durante um período de oscilação, podemos desprezar o termo de atrito em Eq. (5.40) e escrever

$$\ddot{\phi} + V' \approx 0 \Rightarrow \phi\ddot{\phi} + \phi V' \approx 0 \Rightarrow (\phi\dot{\phi})' - \dot{\phi}^2 + \phi V' \approx 0.$$

Tomando a média em um período de oscilação, temos

$$\langle (\phi\dot{\phi})' \rangle - \langle \dot{\phi}^2 \rangle + \langle \phi V' \rangle \approx 0 \Rightarrow \langle \dot{\phi}^2 \rangle \approx \langle \phi V' \rangle, \quad (5.48)$$

onde, utilizamos que

$$\langle (\phi\dot{\phi})' \rangle = 0.$$

Assim, vemos de Eq. (5.48) que durante esse período, a equação de estado efetiva em média se comporta como

$$\frac{p}{\varepsilon} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V}{\dot{\phi}^2 + 2V} \approx \frac{\langle \phi V' \rangle - \langle 2V \rangle}{\langle \phi V' \rangle + \langle 2V \rangle}. \quad (5.49)$$

Para o caso de um potencial do tipo lei de potência  $V \propto \phi^n$  com  $n \geq 2$ , obtemos de Eq. (5.49) que

$$\omega = \frac{p}{\varepsilon} \approx \frac{n-2}{n+2},$$

representando um universo desacelerado com  $0 < \omega < 1$ . Nesse sentido, observe que para  $n = 2$  recaímos em um universo dominado pela matéria e para  $n = 4$ , recaímos em um universo dominado pela radiação.

## Inflação devido um campo escalar massivo

Neste ponto, apresentaremos o regime inflacionário para o caso de um potencial específico: o campo escalar massivo.

O campo escalar mais simples é o campo escalar massivo livre descrito pela equação de Klein-Gordon (5.40). Nesse caso, o potencial é dado por

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \quad (5.50)$$

onde  $m$  é um parâmetro com dimensão de massa.

Tomando um sistema de unidades em que  $M_{Pl} = G^{-1} = 1$ , ao substituir Eqs. (5.37) e (5.50) em Eq. (5.40), obtemos

$$\ddot{\varphi} + \sqrt{12\pi(\dot{\varphi}^2 + m^2\varphi^2)}\dot{\varphi} + m^2\varphi = 0. \quad (5.51)$$

Uma vez que essa equação é uma EDO de segunda ordem, não linear e autônoma, isto é, que não possui uma dependência explícita com o tempo, por regra da cadeia escrevemos

$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi},$$

e reescrevemos Eq. (5.51) como uma EDO de primeira ordem

$$\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = -\frac{\sqrt{12\pi(\dot{\varphi}^2 + m^2\varphi^2)}\dot{\varphi} + m^2\varphi}{\dot{\varphi}}, \quad (5.52)$$

que, por sua vez, pode ser estudada usando o método de diagramas de fase. Veja a figura 5.5

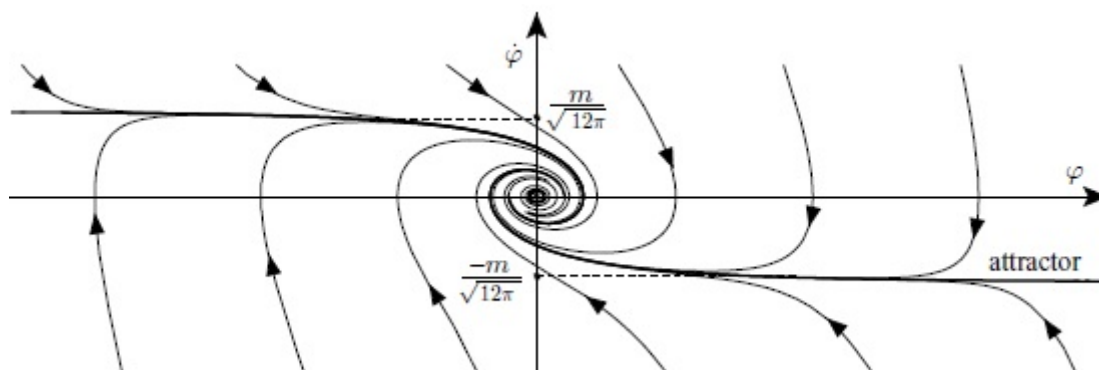


Figura 5.5: Espaço de fase  $\varphi \times \dot{\varphi}$  das soluções de Eq. (5.52). Fonte: (MUKHANOV, 2005).

A característica mais importante presente na figura 5.5 é a existência das soluções atratoras  $\dot{\varphi} = \pm m/\sqrt{12\pi}$ , para as quais todas as outras, a partir de condições iniciais  $\varphi_0$  e  $\dot{\varphi}_0$  bem gerais ( $|\varphi_0| \gg m/\sqrt{12\pi}$ ), tendem a convergir com o tempo. Vamos, além disso, que no entorno da origem  $(\varphi, \dot{\varphi}) = (0, 0)$ , as soluções espiralam, o que está intimamente relacionado às oscilações do campo em torno do mínimo do potencial quadrático.

Para mostrar que a linha atratora corresponde à uma solução inflacionária, reescrevemos Eq. (5.52) como

$$\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = -\frac{m|\varphi|}{\dot{\varphi}} \left( \sqrt{12\pi \left( \frac{\dot{\varphi}^2}{m^2\varphi^2} + 1 \right)} \dot{\varphi} \pm m \right), \quad (5.53)$$

onde o sinal superior (inferior) está associado a  $\varphi$  positivo (negativo). Por outro lado, uma vez que na região atratora temos

$$\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \approx 0 \Rightarrow \sqrt{\left( \frac{\dot{\varphi}^2}{m^2\varphi^2} + 1 \right)} \dot{\varphi} \approx \mp \frac{m}{\sqrt{12\pi}}. \quad (5.54)$$

Agora, por consistência com a solução numérica, onde  $\dot{\varphi} \approx \mp m / \sqrt{12\pi}$ , devemos ter

$$\dot{\varphi}^2 \ll m^2\varphi^2, \quad (5.55)$$

em concordância com a condição Eq. (5.29).

Avaliemos agora os parâmetros de slow-roll  $\epsilon$  e  $\eta$ , bem como o número de  $e$ -folds  $N$ . Para o potencial em questão (5.50), como  $V' = m^2\varphi$  e  $V'' = m^2$ , temos

$$\epsilon \approx 2 \left( \frac{M_{Pl}}{\varphi} \right)^2 \quad \text{e} \quad \eta \approx - \left( \frac{2M_{Pl}}{\varphi} \right)^2, \quad (5.56)$$

de modo que um regime inflacionário ocorre quando  $M_{Pl} \ll \varphi$ . Por sua vez, se tomarmos  $\varphi_{end} \approx 0$  (mínimo do potencial quadrático), obtemos para o número de  $e$ -folds

$$N \approx -\frac{1}{2M_{Pl}^2} \int_{\varphi}^0 \varphi d\varphi \approx \left( \frac{\varphi}{2M_{Pl}} \right)^2. \quad (5.57)$$

Para termos, por exemplo,  $N = 60$ , é necessário  $\varphi \approx 15.5M_{Pl}$ , o que nos dá

$$\epsilon \approx 8.3 \times 10^{-3} \quad \text{e} \quad \eta \approx -1.67 \times 10^{-2}. \quad (5.58)$$

### A inflação de Starobinsky

O modelo de Starobinsky na representação escalar-tensorial no frame de Einstein é caracterizado por uma ação que possui um termo cinético canônico para o campo escalar  $\varphi$  e um potencial  $V(\varphi)$  dado por (FELICE; TSUJIKAWA, 2010)

$$V(\varphi) = V_0 \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}} \right)^2, \quad \text{com} \quad V_0 = \frac{1}{4} \kappa_0 M_{Pl}^2. \quad (5.59)$$

Nesse sentido, as equações que descrevem sua dinâmica são as de Friedmann

$$H^2 = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2M_{Pl}^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} \kappa_0 \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}} \right)^2 \right], \quad (5.60)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{Pl}^2} \dot{\varphi}^2, \quad (5.61)$$

bem com a equação de movimento para o campo  $\varphi$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa_0 M_{Pl} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\varphi}{M_{Pl}}} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\varphi}{M_{Pl}}}\right) = 0. \quad (5.62)$$

O comportamento do potencial do modelo de Starobinsky é representado na figura 5.6, no qual tomamos  $V_0 = M_{Pl} = 1$ .

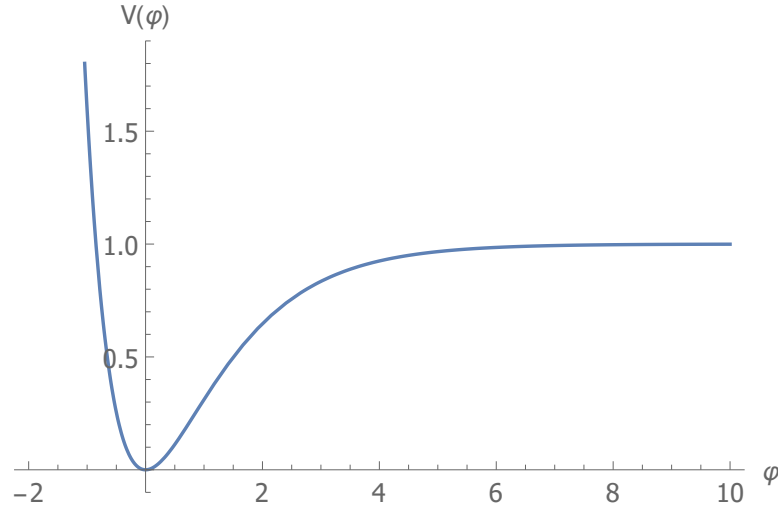


Figura 5.6: Potencial do modelo de Starobinsky, Eq. (5.59), para  $V_0 = M_{Pl} = 1$ .

Observe que para grandes valores de  $\varphi$  há um comportamento do tipo slow-roll, no qual o campo varia lentamente<sup>4</sup>, e em  $\varphi = 0$  há um mínimo global do potencial.

Seguindo um procedimento análogo ao desenvolvido para o caso anterior do campo escalar massivo, notamos que Eq. (5.62) é uma EDO autônoma, onde não há dependência explícita no tempo  $t$ . Nesse caso, por regra da cadeia, escrevemos

$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi},$$

e a Eq. (5.62) é reescrita como

$$\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = -\frac{3 \left[ \frac{1}{6}\dot{\varphi}^2 + \frac{V_0}{3} \left(1 - e^{-\sqrt{2/3}\varphi}\right)^2 \right]^{1/2} \dot{\varphi} + 2V_0 \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-\sqrt{2/3}\varphi} \left(1 - e^{-\sqrt{2/3}\varphi}\right)}{\dot{\varphi}}, \quad (5.63)$$

de modo que podemos estudá-la via método de diagramas de fase.

A figura 5.7 representa o espaço de fase  $\varphi \times \dot{\varphi}$  para o modelo de Starobinsky. Ela indica a existência de uma linha atratora horizontal, onde as soluções para praticamente quaisquer condições iniciais tendem à ela. É nesta linha atratora em que um regime inflacionário do tipo slow-roll se desenvolve, região que está intimamente relacionada ao platô do potencial (5.59). Em seguida, as soluções são conduzidas para a origem do espaço de fase, onde espiralam, correspondendo às oscilações no mínimo do potencial, características do final da inflação.

<sup>4</sup>Termo cinético desprezível com relação ao potencial:  $\dot{\Phi}^2 \ll V(\Phi)$ .

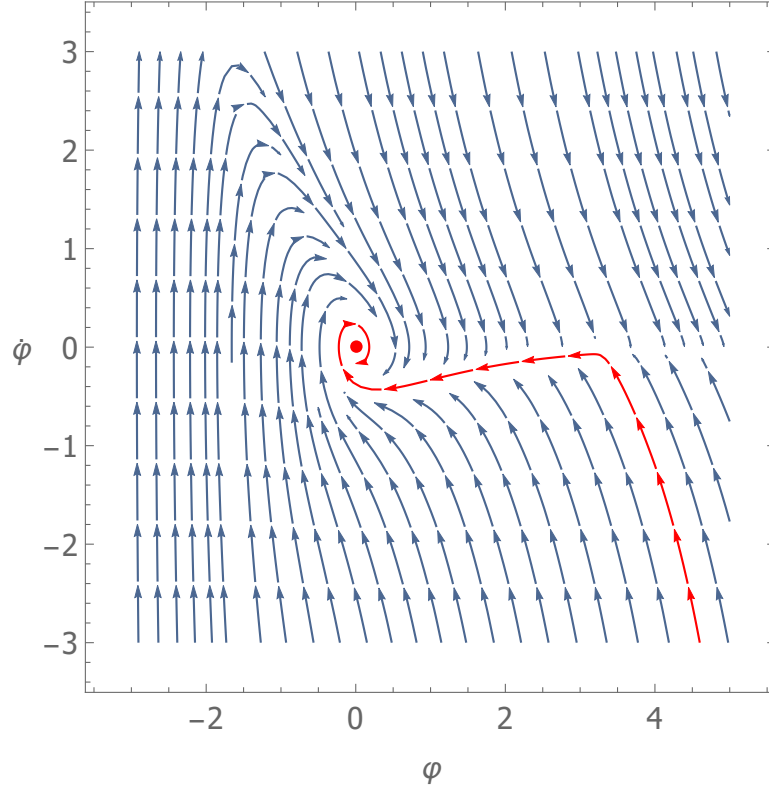


Figura 5.7: Espaço de fase  $\varphi \times \dot{\varphi}$  das soluções de Eq. (5.52).

Vimos anteriormente que uma inflação física ocorre, e por um tempo suficiente, se as condições de slow-roll para os parâmetros forem satisfeitas, isto é,  $\epsilon, |\eta| \ll 1$ . Para analisarmos tais condições, é interessante definirmos o que chamaremos ao longo do texto de fator de slow-roll  $\delta = e^{-M_p^{-1}\sqrt{2/3}\varphi}$ . Essa é uma definição conveniente pois  $\delta$  passa a nos dar uma medida da ordem de slow-roll das relações. O termo  $\delta^n$  é tal que é tão menor quanto maior o valor de  $n$ . Além disso, derivadas temporais de  $\delta$  aumentam uma ordem de slow-roll<sup>5</sup>. Com isso, somos capazes de mostrar que em um regime em ordem dominante de slow-roll, a duração da inflação medida através do número de  $e$ -folds  $N$  é

$$N = \int_t^{t_{end}} H dt \approx \frac{31}{4\delta}, \quad (5.64)$$

e os parâmetros de slow-roll  $\epsilon$  e  $\eta$  são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{\dot{H}}{H^2} \approx \frac{4}{3}\delta^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{N}\right)^2, \\ \eta &= -\frac{1}{H}\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} \approx -\frac{8}{3}\delta = -\frac{2}{N}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Avaliando os parâmetros de slow-roll  $\epsilon$  e  $\eta$  tomando um número de  $e$ -folds  $N = 60$ , obtemos

$$\epsilon \approx 2.1 \times 10^{-4} \text{ e } \eta \approx -3.3 \times 10^{-2},$$

correspondendo à valores razoáveis com um regime inflacionário consistente.

<sup>5</sup>Esta é uma discussão que será novamente abordada ao estudar as extensões ao modelo de Starobinsky.

## Reaquecimento

Durante a inflação, a maior parte da densidade de energia no universo está no potencial do campo ínflaton  $V(\varphi)$ . A inflação começa a terminar na região onde o potencial deixa de ter a forma de um platô e adquire um declive. A partir de então, o campo ínflaton adquire energia cinética. Por sua vez, essa tal energia do ínflaton precisa então, através de algum processo, ser transferida para as partículas do modelo padrão. Este processo é chamado de reaquecimento e é o responsável por dar início ao universo de Friedmann, o big bang quente. Neste espaço, discutiremos de maneira breve e qualitativa alguns dos fundamentos do reaquecimento. Seguimos de perto a apresentação de Ref. (BAUMANN, 2013)

Após a inflação, o campo ínflaton começa a oscilar no mínimo do potencial  $V(\varphi)$ . Nessa região, se supormos que a amplitude de oscilação é pequena, o potencial  $V(\varphi)$  pode devidamente ser aproximado através de  $V(\varphi) \approx (1/2) m^2 \varphi^2$ . Assim, sua equação de movimento se escreve

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = -m^2\varphi. \quad (5.66)$$

Nesse contexto, a escala de tempo da expansão logo se torna muito mais longa do que o período de oscilação, isto é,  $H^{-1} \gg m^{-1}$ . Podemos então desprezar o termo de atrito, de modo que o campo passa a oscilar com frequência  $m$ . Além disso, a equação da continuidade, se escreve como

$$\dot{\varepsilon}_\varphi + 3H\varepsilon_\varphi = -3Hp_\varphi = -\frac{3}{2}H(m^2\varphi^2 - \dot{\varphi}^2). \quad (5.67)$$

A média do lado direito da equação acima é zero durante um período de oscilação, e isso no diz que, sendo  $p_\varphi \approx 0$ , campo oscilante se comporta como uma componente de matéria, na qual  $\varepsilon_\varphi \propto a^{-3}$ . A queda na densidade de energia é refletida através de uma diminuição da amplitude de oscilação.

Para evitar que o universo termine vazio, o ínflaton precisa se acoplar com partículas do modelo padrão. Nesse sentido, a energia do ínflaton é transferida para essas partículas. Se o decaimento é lento, que é o caso quando ínflaton apenas decai em férmions, a densidade de energia é governada pela relação

$$\dot{\varepsilon}_\varphi + 3H\varepsilon_\varphi = -\Gamma_\varphi\varepsilon_\varphi, \quad (5.68)$$

onde  $\Gamma_\varphi$  representa a taxa de decaimento do ínflaton. Já se o ínflaton puder decair em bósons, o decaimento pode ser bastante rápido, envolvendo um mecanismo chamado ressonância paramétrica, originado por efeitos de condensação de Bose. Esse rápido decaimento é chamado de *preheating* (*parametric resonance heating*), uma vez que os bósons assim criados estão longe de estar em equilíbrio térmico.

As partículas produzidas pelo decaimento do ínflaton irão interagir, criar outras partículas através de reações de partículas, e a sopa de partículas resultante eventualmente atingirá o equilíbrio térmico em alguma temperatura  $T_{re}$ . Essa temperatura de reaquecimento é determinada pela densidade de energia  $\varepsilon_{re}$  no final da época de reaquecimento. Necessariamente,  $\varepsilon_{re} < \varepsilon_{\varphi_f}$ , onde  $\varepsilon_{\varphi_f}$  é a densidade de energia do ínflaton ao final da inflação. Se o reaquecimento demorar muito, podemos ter  $\varepsilon_{re} \ll \varepsilon_{\varphi_f}$ . A evolução do gás de partículas para um estado térmico pode ser bastante demorado. Para

se atingir o equilíbrio térmico é necessário que a interação seja suficientemente efetiva. Via de regra, o equilíbrio térmico é alcançado quando a taxa de reação se torna da ordem da taxa de expansão, isto é,  $\Gamma \approx H$ . Depois que pelo menos a termalização dos bárions, fótons e neutrinos estiver completa, o universo de Friedmann dominado pela radiação começa.

## 5.2 Perturbações em cosmologia

Nesta seção, estudaremos a cosmologia não mais baseada em um background de Friedmann, onde consideramos um universo que evolui de maneira homogênea e isotrópica. A partir deste ponto, apresentaremos as bases da cosmologia perturbativa, essencial para, no contexto do nosso trabalho, entendermos como a inflação é capaz de fornecer um mecanismo causal para a geração das inhomogeneidades primordiais, e como é possível fazer a conexão entre modelos inflacionários e as observações. O estudo apresentado nesta seção segue de perto notas de aulas sobre cosmologia ainda não publicadas do Prof. Dr. Léo Medeiros. O leitor pode encontrar algo próximo em Ref. (MUKHANOV, 2005) bem como em Ref. (BAUMANN, 2013).

Descreveremos aqui as perturbações no âmbito da relatividade geral. Ocorre que nesta abordagem nos deparamos com uma dificuldade que é a de estabelecer as coordenadas em relação as quais as perturbações são descritas<sup>6</sup>. Diferentemente da descrição no background, onde as propriedades de homogeneidade e isotropia fornecem um sistema de coordenadas preferencial (coordenadas comóveis), não existe uma escolha óbvia de coordenadas para descrever as perturbações. Essa liberdade na escolha das coordenadas, ou liberdade de *gauge*, leva ao surgimento de modos de perturbação fictícios. Esses, por sua vez, refletem apenas propriedades dos sistemas de coordenadas usados e portanto, não descrevem inhomogeneidades reais.

Para ilustrar esse efeito suponha que estamos em um universo não perturbado, cuja densidade de energia é descrita por  $\varepsilon(t)$ . Em seguida fazemos uma mudança de coordenadas  $t \rightarrow \hat{t}$ , de tal forma que  $\hat{t} = t + \delta t(x, t)$ . Assim, supondo que  $\delta t \ll t$ , podemos escrever

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\hat{t} - \delta t(x, \hat{t})) \approx \varepsilon(\hat{t}) - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \delta t \equiv \varepsilon(\hat{t}) + \delta \varepsilon(x, \hat{t}).$$

A densidade de energia nesse novo sistema de coordenadas  $(\hat{t}, \vec{x})$  possui uma parte homogênea e isotrópica  $\varepsilon(\hat{t})$ , mas possui também uma perturbação linear na forma  $\delta \varepsilon(x, \hat{t})$ . Essa perturbação é não física e só está presente devido a escolha do novo tempo  $\hat{t}$ . Veja figura 5.8. Além disso, é possível "remover" uma perturbação real de densidade de energia escolhendo hipersuperfícies de tempo constante como sendo as mesma hipersuperfícies de densidade de energia constante.

Para resolver esse problema é necessário reescrever todas as quantidades perturbadas de uma forma independente do sistema de coordenadas, isto é, precisamos obter um conjunto completo de quantidades, perturbações de métrica e de matéria, invariantes de *gauge*. Desenvolveremos esse procedimento a seguir.

<sup>6</sup>Lembremos que as equações da relatividade geral são covariante (não alteram sua forma) por transformações gerais de coordenadas.

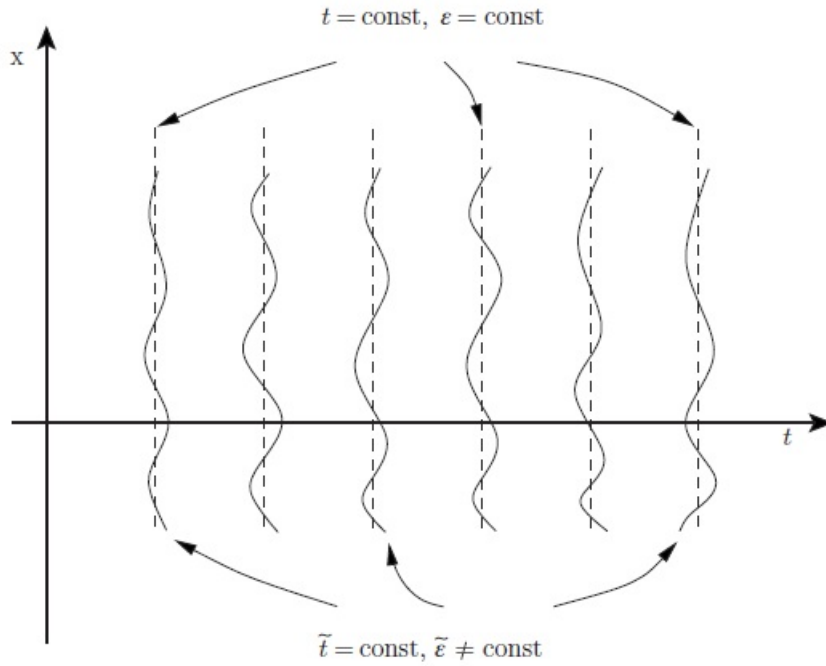


Figura 5.8: Diagrama onde se apresentam hipersuperfícies de tempo constante. Fonte: (MUKHANOV, 2005).

### 5.2.1 Perturbações e variáveis invariantes de *gauge*

Inomogeneidades na distribuição de matéria induzem perturbações na métrica que, por sua vez, podem ser decompostas em partes irreduzíveis<sup>7</sup>. Essas partes irreduzíveis são classificadas de três formas: escalar, vetorial e tensorial. Assim, as perturbações na métrica podem ser decompostas em perturbações escalares, vetoriais e tensoriais — decomposição SVT. O interessante dessa decomposição é que no regime linear os diferentes tipos de perturbação evoluem de forma independente, e portanto, podem ser analisados de forma separada. Isso será discutido mais adiante.

Começamos com uma métrica FLRW plana perturbada na forma

$$ds^2 = \left[ g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} (x^\lambda) \right] dx^\mu dx^\nu,$$

onde  $g_{\mu\nu}$  representa o background e  $\delta g_{\mu\nu}$  representa a perturbação com  $|\delta g_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}|$ . Utilizando o tempo conforme  $\eta$ , definido por  $d\eta = a^{-1}(t) dt$ , escrevemos a métrica do background como

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta) \left( d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j \right). \quad (5.69)$$

A parte perturbada da métrica é um tensor simétrico do espaço-tempo, e portanto,

<sup>7</sup>A decomposição de um tensor de rank  $n$  em partes irreduzíveis consiste em decompor o tensor no máximo de componentes escalares, vetoriais e tensoriais de rank  $m$  (com  $m \leq n$ ) preservando a simetria do sistema.

deve conter 10 funções independentes. Assim, podemos escrever

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ (1 + 2\phi) d\eta^2 + 2C_i dx^i d\eta - (\delta_{ij} - \gamma_{ij}) dx^i dx^j \right]. \quad (5.70)$$

O termo  $2a^2\phi = \delta g_{00}$  é uma quantidade escalar com um grau de liberdade,  $a^2 C_i = \delta g_{0i}$  é uma quantidade 3-vetorial com três graus de liberdade e  $a^2 \gamma_{ij} = \delta g_{ij}$  é uma quantidade 3-tensorial simétrica com seis graus de liberdade. Além disso  $C_i$  e  $\gamma_{ij}$  são tensores no espaço euclidiano  $E^3$ , e portanto, esses índices são levantados e abaixados pela métrica identidade  $\delta_{ij}$ .

O próximo passo é decompor as quantidades perturbadas em componentes irredutíveis preservando a simetria espacial. A parte puramente temporal  $\delta g_{00}$  já se encontra em sua forma irredutível (escalar). A componente vetorial é decomposta como

$$C_i = B_{,i} + S_i,$$

onde  $B$  é um escalar e  $S_i$  é um 3-vetor de divergência nula ( $S^i_{,i} = 0$ ). A vírgula representa derivação com relação as coordenadas espaciais, isto é,  $B_{,i} \equiv \partial_i B = \partial B / \partial x^i$ . A parte tensorial é reescrita da forma

$$\gamma_{ij} = 2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij},$$

onde  $\psi$  e  $E$  são escalares,  $F$  é um 3-vetor de divergência nula ( $F^i_{,i} = 0$ ) e  $h_{ij}$  é um 3-tensor transverso ( $h^i_{,j,i} = 0$ ) e de traço nulo ( $h^i_i = 0$ ).

Uma vez realizada a decomposição SVT, observamos a seguinte estrutura:

- Perturbações escalares: são caracterizadas pelas quatro funções  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $B$  e  $E$ . Elas são acopladas às inomogeneidades da densidade de energia e, por exibirem instabilidade gravitacional, são as responsáveis pela formação de estrutura no universo.
- Perturbações vetoriais: são descritas pelos dois 3-vetores  $S_i$  e  $F_i$  de divergência nula, e portanto, contém 4 funções independentes. Elas decaem rapidamente, e assim, não tem muito interesse do ponto de vista cosmológico.
- Perturbação tensorial: é caracterizada pelo 3-tensor  $h_{ij}$  simétrico, transverso (três vínculos) e de traço nulo (um vínculo), e portanto, contém 2 funções independentes. Essas perturbações descrevem as chamadas onda gravitacionais cosmológicas. No regime linear e considerando um fluido perfeito,  $h_{ij}$  se propaga livremente.

Como dito anteriormente, os diferentes tipos de perturbação se desacoplam, podendo ser estudados separadamente.

O próximo passo é estudar os efeitos de mudanças de coordenadas, liberdade de gauge, nas perturbações. Suponha uma transformação infinitesimal de coordenadas  $\zeta^\mu$  na forma

$$\hat{x}^\mu = x^\mu + \zeta^\mu(x^\alpha). \quad (5.71)$$

A relação entre o tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  e o tensor  $\hat{g}_{\mu\nu}$  segue da lei de transformação geral de tensores, isto é,

$$g_{\alpha\beta}(x^\lambda) = \frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \hat{x}^\nu}{\partial x^\beta} \hat{g}_{\mu\nu}(\hat{x}^\lambda). \quad (5.72)$$

Além disso, vamos separar as métricas em um background e uma parte perturbada<sup>8</sup>

$$g_{\alpha\beta}(x^\lambda) = \tilde{g}_{\alpha\beta}(x^\lambda) + \delta g_{\alpha\beta}, \quad (5.73a)$$

$$\hat{g}_{\mu\nu}(\hat{x}^\lambda) = \tilde{g}_{\mu\nu}(\hat{x}^\lambda) + \delta \hat{g}_{\mu\nu}, \quad (5.73b)$$

onde supomos que a transformação infinitesimal afeta somente a parte perturbada.

O próximo passo é substituir Eqs. (5.71), (5.73a) e (5.73b) em Eq. (5.72) considerando apenas o regime linear. Nesse sentido, obtemos

$$\delta g_{\alpha\beta} \approx (\partial_\beta \tilde{\zeta}^\nu) \tilde{g}_{\alpha\beta} + (\partial_\alpha \tilde{\zeta}^\mu) \tilde{g}_{\mu\beta} + (\partial_\lambda \tilde{g}_{\alpha\beta}) \tilde{\zeta}^\lambda + \delta \hat{g}_{\alpha\beta},$$

ou

$$\delta \hat{g}_{\alpha\beta} \approx \delta g_{\alpha\beta} - (\partial_\beta \tilde{\zeta}^\nu) g_{\alpha\nu} - (\partial_\alpha \tilde{\zeta}^\mu) g_{\mu\beta} - (\partial_\lambda g_{\alpha\beta}) \tilde{\zeta}^\lambda, \quad (5.74)$$

onde retiramos a notação  $\sim$  por economia de notação. Por sua vez, perturbações  $\delta q$  e  $\delta u_\mu$  de um escalar  $q(x^\lambda) = q + \delta q$  e de um 4-vetor covariante  $u_\mu(x^\lambda) = u_\mu + \delta u_\mu$ , respectivamente, se transformam como

$$\delta \hat{q} \approx \delta q - (\partial_\lambda q) \tilde{\zeta}^\lambda, \quad (5.75)$$

$$\delta \hat{u}_\mu \approx \delta u_\mu - (\partial_\mu \tilde{\zeta}^\nu) u_\nu - (\partial_\lambda u_\mu) \tilde{\zeta}^\lambda. \quad (5.76)$$

Para ser condizente com a decomposição SVT da métrica, é conveniente decompor a parte espacial de  $\tilde{\zeta}^\mu \equiv (\tilde{\zeta}^0, \tilde{\zeta}^i)$  como

$$\tilde{\zeta}^i = \pi^i + \theta^i,$$

onde  $\pi$  é um escalar e  $\theta^i$  é um 3-vetor de divergência nula ( $\theta^i_{;i} = 0$ ). Além disso  $\theta_i \equiv \theta^i$ .

Assim, utilizando Eq. (5.74) e a métrica do background (5.69), obtemos

$$\delta \hat{g}_{00} = \delta g_{00} - 2a \left( a \tilde{\zeta}^0 \right)', \quad (5.77)$$

$$\delta \hat{g}_{0i} = \delta g_{0i} + a^2 \left[ \theta^i_{;i} + \left( \pi' - \tilde{\zeta}^0 \right)_{;i} \right], \quad (5.78)$$

e

$$\delta \hat{g}_{ij} = \delta g_{ij} + a^2 \left( 2 \frac{a'}{a} \delta_{ij} \tilde{\zeta}^0 + 2 \pi_{;ij} + \theta_{i,j} + \theta_{j,i} \right), \quad (5.79)$$

onde a linha representa derivada com relação ao tempo conforme  $\eta$ .

Essas três equações acima mostram como as perturbações da métrica variam devido a uma mudança de coordenadas. Observe que em  $\delta \hat{g}_{00}$ , temos apenas variação do tipo escalar, em  $\delta \hat{g}_{0i}$  temos duas variações do tipo escalar e uma do tipo vetorial (primeiro termo), e em  $\delta \hat{g}_{ij}$  temos duas variações do tipo escalar e duas do tipo vetorial (dois últimos termos).

<sup>8</sup>Usamos o sobrescrito  $\sim$  para diferenciar o background da quantidade completa.

### Perturbações escalares

Considerando apenas perturbações escalares, temos a seguinte métrica

$$ds^2 = a^2 \left\{ (1 + 2\phi) d\eta^2 + 2B_{,i} dx^i d\eta - [(1 - 2\psi) \delta_{ij} - 2E_{,ij}] dx^i dx^j \right\}. \quad (5.80)$$

Assim, devido a mudanças de coordenadas, temos

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \phi - \frac{1}{a} (a\zeta^0)', & \hat{B} &= B + \pi' - \zeta^0, \\ \hat{\psi} &= \psi + \frac{a'}{a} \zeta^0, & \hat{E} &= E + \pi. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Observe que somente  $\pi$  e  $\zeta^0$  contribuem para as perturbações escalares, assim é possível escolhê-los de forma que duas das quatro funções  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $B$  e  $E$  se anulem. Além disso, a combinação linear invariante de gauge mais simples dessas funções que determinam as duas perturbações físicas são

$$\Phi \equiv \phi - \frac{1}{a} [a(B - E')] \quad \text{e} \quad \Psi \equiv \psi + \frac{a'}{a} (B - E'). \quad (5.82)$$

Assim, as perturbações invariantes de gauge  $\Phi$  e  $\Psi$  não se alteram sobre mudanças gerais de coordenadas. Portanto, se elas forem zero em um sistema de coordenadas, elas serão zero em qualquer outro sistema. Com isso, somos capazes de distinguir as inomogeneidades físicas das perturbações fictícias geradas por transformações de coordenadas.

Com base na expressão para a transformação de quantidades escalares, Eq. (5.75), temos que

$$\bar{\delta\varepsilon} \equiv \delta\varepsilon - \varepsilon' (B - E') \quad \text{e} \quad \bar{\delta p} \equiv \delta p - p' (B - E') \quad (5.83)$$

são invariantes de gauge e caracterizam as perturbações de densidade de energia e pressão, respectivamente.

### Perturbações vetoriais

Para perturbações vetoriais apenas, a métrica assume a seguinte forma

$$ds^2 = a^2 \left[ d\eta^2 + 2S_i dx^i d\eta - (\delta_{ij} - F_{i,j} - F_{j,i}) dx^i dx^j \right],$$

onde  $S_i$  e  $F_i$  se transformam como

$$\hat{S}_i \equiv S_i + \theta'_i \quad \text{e} \quad \hat{F}_i \equiv F_i + \theta_i. \quad (5.84)$$

Analogamente ao caso escalar, é possível escolher  $\theta_i$  de forma que uma das duas perturbações vetoriais se anulem. Além disso, podemos definir uma perturbação vetorial invariante de gauge como

$$\bar{V}_i \equiv S_i - F'_i. \quad (5.85)$$

## Perturbações tensoriais

Considerando somente perturbações tensoriais, a métrica é da forma

$$ds^2 = a^2 \left[ d\eta^2 - (\delta_{ij} - h_{ij}) dx^i dx^j \right],$$

sendo que  $h_{ij}$  não muda devido a transformações de coordenadas. Ou seja,  $h_{ij}$  descreve ondas gravitacionais de forma invariante de gauge.

A liberdade de gauge é manifestamente mais importante no caso de perturbações escalares. De fato, como dito anteriormente, podemos por uma escolha conveniente de  $\pi$  e  $\zeta^0$  anular duas das quatro perturbações escalares. Essas escolhas que fixam o sistema de coordenadas, ou pelo menos uma classe deles, nada mais são do que a imposição de condições de gauge. Existem na literatura várias escolhas de gauge dos quais os mais utilizados são os gauges longitudinal e síncrono<sup>9</sup>.

### Gauge longitudinal ou newtoniano conforme

Este gauge é definido por  $E_l = B_l = 0$  para a parte escalar e  $S_i = 0$  para a parte vetorial. Considerando primeiramente apenas os graus de liberdade escalar, vemos de Eq. (5.81) que essas condições fixam o sistema de coordenadas de forma única. De fato, a condição  $E_l = 0$  é violada para qualquer  $\pi \neq 0$ . Além disso, com  $\pi = 0$ , vemos que qualquer transformação temporal  $\zeta^0 \neq 0$  destroi a condição  $B_l = 0$ . Portanto,  $E_l = B_l = 0$  fixam completamente os graus de liberdade escalares de gauge. Nessa situação, a métrica escalar perturbada se simplifica para

$$ds^2 = a^2 \left[ (1 + 2\phi) d\eta^2 - (1 - 2\psi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right].$$

É interessante observar de Eqs. (5.82) e (5.83) que as quantidades invariantes de gauge  $\Psi$ ,  $\Phi$  e  $\bar{\delta}\varepsilon$  nada mais são do que as perturbações escalares da métrica e da densidade de energia no gauge longitudinal, isto é,  $\Psi = \psi_l$ ,  $\Phi = \phi_l$  e  $\bar{\delta}\varepsilon = \delta\varepsilon_l$ . Além disso, na situação em que as perturbações espaciais do tensor energia momento são diagonais, isto é,  $\delta T_j^i \sim \delta_j^i$  veremos que  $\phi_l = \psi_l$ , sendo esse o único grau de liberdade da perturbação escalar. A variável  $\phi_l$  é a generalização do potencial newtoniano.

Analisando agora a parte vetorial, vemos que a condição  $S_i = 0$  não fixa completamente o sistema de coordenadas. De fato, de Eq. (5.84), vemos que qualquer mudança de coordenada na forma  $\theta = C(x^i)$  ainda satisfaz o gauge  $S_i = 0$ . Contudo, essa escolha tem a vantagem de matar a parte vetorial da componente  $\delta g_{0i}$ . Assim,

$$ds^2 = a^2 \left[ d\eta^2 - (\delta_{ij} - F_{i,j} - F_{j,i}) dx^i dx^j \right].$$

<sup>9</sup>No nosso trabalho utilizamos o chamado gauge espacialmente plano. Ele será apresentado mais adiante.

## Gauge síncrono

O gauge síncrono corresponde ao caso onde  $\delta g_{0\mu} = 0$ , o que segundo a nossa decomposição significa  $\phi_s = B_s = S_i = 0$ . Esse *gauge* é interessante pois ele mata as componentes temporais da métrica, facilitando a análise numérica do sistema de equações diferenciais. Apesar dessa vantagem, o *gauge* síncrono tem a patologia de não fixar completamente a parte escalar do sistema de coordenadas. De fato, pela primeira linha de Eq. (5.81), vemos que

$$\phi_s = 0 \Rightarrow (a\zeta^0)' = 0 \Rightarrow \zeta^0 = \frac{C}{a},$$

e

$$B_s = 0 \Rightarrow \pi' = \zeta^0 = \frac{C}{a} \Rightarrow \pi = D + C \int \frac{d\eta}{a},$$

onde  $C = C(x^i)$  e  $D = D(x^i)$ . Portanto, lembrando que  $\hat{x}^0 = x^0 + \zeta^0$  e  $\hat{x}^i = x^i + \pi^i + \theta^i$  qualquer mudança de coordenadas do tipo

$$\hat{\eta} = \eta + \frac{C}{a} \text{ e } \hat{x}^i = x^i + D^i + C^i \int \frac{d\eta}{a},$$

ainda satisfaz o gauge síncrono. Essa liberdade de coordenadas residual leva ao surgimento de modos não físicos de perturbação, o que dificulta na interpretação de resultados especialmente na situação de escalas maiores do que o raio de Hubble.

## 5.2.2 Equações para as perturbações cosmológicas

As equações da cosmologia no regime linear são obtidas a partir da linearização das equações de Einstein e da conservação do tensor energia momento

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (5.86)$$

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0. \quad (5.87)$$

O primeiro passo para determinar as equações perturbadas é escrever a derivada covariante e os tensores de Einstein  $G^\mu_\nu$  e de energia momento  $T^\mu_\nu$  como um background mais uma perturbação,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu &= \nabla_\mu + \delta\nabla_\mu, \\ G^\mu_\nu &= G^\mu_\nu + \delta G^\mu_\nu, \\ T^\mu_\nu &= T^\mu_\nu + \delta T^\mu_\nu. \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões nas Eqs. (5.86) e (5.87), obtemos para o background

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0, \quad (5.88)$$

$$G^\mu_\nu = 8\pi GT^\mu_\nu, \quad (5.89)$$

e para a perturbação no regime linear

$$\delta(\nabla_\mu T^\mu_\nu) = 0 \quad (5.90)$$

$$\delta G^\mu_\nu = 8\pi G\delta T^\mu_\nu. \quad (5.91)$$

Como estamos além do background não existe uma razão a priori para considerarmos o tensor energia momento de um fluido perfeito. Contudo, por simplicidade adotaremos um  $T^\mu_\nu$  de fluido perfeito, Eq. (5.2), isto é,

$$T^\mu_\nu = (\varepsilon + p) u^\mu u_\nu - p \delta^\mu_\nu,$$

onde  $\varepsilon$ ,  $p$  e  $u^\mu$  agora dependem de pontos do espaço-tempo  $x^\mu$ . Utilizando,

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu &= T^\mu_\nu(\eta) + \delta T^\mu_\nu(\eta, \vec{x}), \\ \varepsilon &= \varepsilon(\eta) + \delta\varepsilon(\eta, \vec{x}), \\ p &= p(\eta) + \delta p(\eta, \vec{x}), \\ u^\mu &= u^\mu(\eta) + \delta u^\mu(\eta, \vec{x}), \end{aligned}$$

segue

$$T^\mu_\nu + \delta T^\mu_\nu \approx [(\varepsilon + \delta\varepsilon) + (p + \delta p)] (u^\mu + \delta u^\mu) (u_\nu + \delta u_\nu) - (p + \delta p) \delta^\mu_\nu.$$

Assim, para o background temos

$$T^\mu_\nu(\eta) = [\varepsilon(\eta) + p(\eta)] u^\mu(\eta) u_\nu(\eta) - p(\eta) \delta^\mu_\nu, \quad (5.92)$$

e para a perturbação no regime linear

$$\delta T^\mu_\nu = (\varepsilon + p) (u^\mu \delta u_\nu + \delta u^\mu u_\nu) + (\delta\varepsilon + \delta p) u^\mu u_\nu - \delta p \delta^\mu_\nu. \quad (5.93)$$

Lembremos que em coordenadas de Friedmann  $(t, x^i_{Fr})$ , a 4-velocidade não perturbada é

$$u^i_{Fr} = \frac{dx^i}{d\tau} = \delta^i_0 = (1, 0, 0, 0).$$

Assim, em coordenadas conforme  $(\eta, x^i)$ ,  $u^\mu$  é dado por

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^i_{Fr}} u^i_{Fr} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^0_{Fr}} \delta^0_i = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^0_{Fr}} = \frac{1}{a} \delta^\mu_0. \quad (5.94)$$

Além disso,

$$u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu = \frac{1}{a} g_{\mu 0} = a \delta^0_\mu. \quad (5.95)$$

Observe que

$$u_\mu u^\mu = g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu = \frac{1}{a} \delta^0_\mu a \delta^0_\mu = 1,$$

como esperado pela condição de normalização da 4-velocidade.

A condição de normalização

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1,$$

deve valer ordem a ordem, e portanto, afeta também a parte perturbada gerando um vínculo para  $\delta u^\mu$ . De fato,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1 &\Rightarrow (g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) (u^\mu + \delta u^\mu) (u^\nu + \delta u^\nu) \approx 1 + \delta g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + 2g_{\mu\nu} u^\nu \delta u^\mu = 1 \Rightarrow \\ u_\mu \delta u^\mu &= -\frac{1}{2a^2} \delta g_{\mu\nu} \delta^0_\mu \delta^0_\nu \Rightarrow a \delta^0_\mu \delta u^\mu = -\frac{1}{2a^2} \delta g_{00} \Rightarrow \delta u^0 = -\frac{1}{2a^3} 2a^2 \phi \Rightarrow \delta u^0 = -\frac{\phi}{a}. \end{aligned}$$

Ou seja, a componente zero de  $\delta u^\mu$  está determinada completamente pelas perturbações de métrica.

Portanto, definindo  $\delta u^i \equiv v^i/a$ , obtemos

$$\delta u^\mu = \frac{1}{a} (-\phi, v^i). \quad (5.96)$$

Além disso,

$$u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu \Rightarrow u_\mu + \delta u_\mu = (g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) (u^\nu + \delta u^\nu) \approx g_{\mu\nu} u^\nu + \delta g_{\mu\nu} u^\nu + g_{\mu\nu} \delta u^\nu.$$

Para o background

$$u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu = \frac{1}{a} g_{\mu 0} = a \delta_{\mu'}^0,$$

e para a parte perturbada

$$\begin{aligned} \delta u_\mu &= \delta g_{\mu\nu} u^\nu + g_{\mu\nu} \delta u^\nu = \frac{1}{a} \delta g_{\mu 0} + g_{\mu 0} \delta u^0 + g_{\mu i} \delta u^i \Rightarrow \\ \delta u_\mu &= \frac{1}{a} (\delta g_{\mu 0} - g_{\mu 0} \phi + g_{\mu i} v^i) = \frac{1}{a} (a^2 \phi, a^2 (B_{,i} + S_i) - a^2 \delta_{ij} v^j), \end{aligned}$$

ou seja

$$\delta u_\mu = a (\phi, B_{,i} + S_i - v_i), \quad (5.97)$$

onde  $v_i \equiv \delta_{ij} v^j$ .

Devido a decomposição SVT, é conveniente decompor  $v_i$  em uma parte escalar e uma parte vetorial

$$v_i = v_{,i} + w_i, \quad (5.98)$$

onde  $v$  é um escalar e  $w_i$  é um 3-vetor de divergência nula ( $w^i_{,i} = 0$ ). Dessa forma, escrevemos Eq. (5.97) explicitamente como

$$\delta u_\mu = a (\phi, (B - v)_{,i} + S_i - w_i), \quad (5.99)$$

onde separamos sua dependência escalar e vetorial.

Utilizando a expressão para transformação de quantidades vetoriais, Eq. (5.76), temos que

$$\bar{v} \equiv \hat{v} - \hat{E}', \quad (5.100)$$

é um invariante de *gauge* que caracteriza a parte escalar da perturbação de velocidade. Observe que a parte vetorial  $w_i$  é naturalmente invariante de *gauge*.

No sentido de obter as equações para as perturbações, consideraremos duas características importantes:

- A liberdade de gauge nos permite fixar 4 dos 10 graus de liberdade originais. Adotaremos o gauge newtoniano suprimindo o índice  $l$ .
- No regime linear, as perturbações SVT evoluem de forma independente. Portanto, podemos derivar as equações para perturbações escalares, vetoriais e tensoriais de forma separada.

## Perturbações escalares

No gauge newtoniano, as perturbações escalares nos levam a métrica

$$ds^2 = a^2 \left[ (1 + 2\phi) d\eta^2 - (1 - 2\psi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right]. \quad (5.101)$$

Procedendo com cálculo direto, obtemos as seguintes conexões escalares perturbadas:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{00}^0 &= \phi'; \delta\Gamma_{00}^i = \phi'^i; \\ \delta\Gamma_{0i}^0 &= \phi_{,i}; \\ \delta\Gamma_{ij}^0 &= -[\psi' + 2\mathcal{H}(\phi + \psi)] \delta_{ij}; \\ \delta\Gamma_{0j}^i &= -\psi' \delta_j^i; \\ \delta\Gamma_{jk}^i &= -\psi_{,j} \delta_k^i - \psi_{,k} \delta_j^i + \psi'^i \delta_{jk}, \end{aligned} \quad (5.102)$$

com  $\mathcal{H} = a'/a$ .

Após um longo cálculo, cujos detalhes deixamos no apêndice C, obtemos as equações de conservação

$$\delta\varepsilon' + (\varepsilon + p) \left( \nabla^2 v - 3\psi' \right) + 3\mathcal{H} (\delta\varepsilon + \delta p) = 0, \quad (5.103)$$

$$[v (\varepsilon + p)]' + (\varepsilon + p) (4\mathcal{H}v + \phi) + \delta p = 0, \quad (5.104)$$

as equações de Einstein perturbadas

$$\nabla^2 \psi - 3\mathcal{H} (\psi' + \mathcal{H}\phi) = 4\pi G a^2 \delta\varepsilon, \quad (5.105)$$

$$\psi' + \mathcal{H}\phi = -4\pi G a^2 (\varepsilon + p) v, \quad (5.106)$$

$$\psi'' + \mathcal{H} (2\psi + \phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \phi + \frac{1}{3} \nabla^2 (\phi - \psi) = 4\pi G a^2 \delta p, \quad (5.107)$$

além de uma equação de vínculo

$$(\phi - \psi)_{,ij} = 0 \Rightarrow \phi = \psi. \quad (5.108)$$

Observe que a última igualdade é a única solução física aceitável considerando cada modo de Fourier  $k$  independente<sup>10</sup>.

Essas últimas quatro equações são as equações para a evolução das perturbações escalares. Se adicionarmos uma equação de estado adiabática  $p = p(\varepsilon)$ , obtemos um conjunto fechado de cinco equações e cinco funções  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\delta\varepsilon$ ,  $v$  e  $\delta p$  incógnitas. Esse conjunto determina completamente a evolução das perturbações escalares no regime linear.

Alternativamente, podemos substituir duas das três primeiras equações acima pelas equações de conservação (5.103) e (5.104). Podemos ainda combinar essas cinco equações para obter um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem na parte temporal. Isso é particularmente interessante quando adotamos uma abordagem numérica na procura de soluções.

Por fim, é interessante ressaltar dois pontos associados a dedução acima:

<sup>10</sup>A equação de vínculo (5.108) só é válida para um tensor energia momento sem stress anisotrópico.

1. Todo o desenvolvimento anterior foi realizado no *gauge* newtoniano, onde  $E = B = 0$ . Contudo, utilizando as variáveis invariantes de *gauge* definidas em Eqs. (5.82), (5.83) e (5.100), podemos escrever o conjunto de equações perturbadas em uma forma invariante de *gauge*.
2. O desenvolvimento acima pode ser generalizado de forma direta para um sistema multi-componente onde cada componente é independente e se comporta como um fluido perfeito. Nesse caso, cada componente se conserva de forma independente<sup>11</sup>.

Considerando os dois pontos acima para um sistema de  $n$  componentes e utilizando Eq. (5.108) podemos generalizar os resultados anteriores obtendo 3 equações de Einstein

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G a^2 \bar{\delta}\varepsilon, \quad (5.109)$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = -4\pi G a^2 (\varepsilon + p) \bar{v}, \quad (5.110)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 \bar{\delta}p, \quad (5.111)$$

e  $2n$  equações de conservação

$$\bar{\delta}\varepsilon'_n + (\varepsilon + p) (\nabla^2 \bar{v}_n - 3\Psi') + 3\mathcal{H}(\bar{\delta}\varepsilon_n + \bar{\delta}p_n) = 0, \quad (5.112)$$

$$[\bar{v}_n (\varepsilon + p)]' + (\varepsilon + p) (4\mathcal{H}\bar{v}_n + \Phi) + \bar{\delta}p_n = 0, \quad (5.113)$$

onde

$$\bar{\delta}\varepsilon = \sum_n \bar{\delta}\varepsilon_n \text{ e } \bar{\delta}p = \sum_n \bar{\delta}p_n. \quad (5.114)$$

Para um universo sem expansão,  $\mathcal{H} = 0$ , a Eq. (5.109) coincide com a equação usual de Poisson. Além disso, podemos mostrar que para perturbações de pequena escala<sup>12</sup>, o fator  $3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi)$  pode ser desprezado. Assim, Eq. (5.109) generaliza a equação de Poisson e fornece a base para interpretarmos  $\Phi$  como a generalização relativística do potencial gravitacional newtoniano.

### Perturbações vetoriais

No *gauge* newtoniano, onde  $S_i = 0$ , as perturbações vetoriais nos levam a métrica

$$ds^2 = a^2 \left[ d\eta^2 - (\delta_{ij} - F_{i,j} - F_{j,i}) dx^i dx^j \right]. \quad (5.115)$$

<sup>11</sup>Em geral, essa aproximação é bastante simplista para sistemas multi-componentes.

<sup>12</sup>Pequena escala comparável ao tamanho do universo observável.

De forma análoga ao caso escalar, obtemos as seguintes conexões vetoriais perturbadas:

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{00}^0 &= \delta\Gamma_{00}^i = \delta\Gamma_{0i}^0 = 0; \\ \delta\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2} (F_{i,j} + F_{j,i})' + \mathcal{H} (F_{i,j} + F_{j,i}); \\ \delta\Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2} (F_{i,j} + F_{j,i})'; \\ \delta\Gamma_{jk}^i &= F_{,j,k}^i.\end{aligned}\tag{5.116}$$

A partir de então, podemos deduzir para a equação de conservação

$$[w_i (\varepsilon + p)]' + 4\mathcal{H}w_i (\varepsilon + p) = 0,\tag{5.117}$$

e as equações de Einstein perturbadas

$$\nabla^2 \bar{V}_i = -16\pi G a^2 (\varepsilon + p) w_i,\tag{5.118}$$

$$(\bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{j,i})' + 2\mathcal{H} (\bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{j,i}) = 0.\tag{5.119}$$

Observe que entre as três Eqs. (5.117), (5.118) e (5.119), apenas duas são linearmente independentes. Isso é condizente com o fato de termos apenas duas funções vetoriais  $w_i$  e  $\bar{V}_i$ .

### Perturbações tensoriais

Para as perturbações tensoriais, temos a seguinte métrica invariante de gauge:

$$ds^2 = a^2 \left[ d\eta^2 - (\delta_{ij} - h_{ij}) dx^i dx^j \right].\tag{5.120}$$

As conexões para as perturbações tensoriais são

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{00}^0 &= \delta\Gamma_{00}^i = \delta\Gamma_{0i}^0 = 0; \\ \delta\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2} h'_{ij} + \mathcal{H} h_{ij}; \\ \delta\Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2} h_j^{i'}; \\ \delta\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} (h_{k,j}^i + h_{j,k}^i - h_{jk}^i).\end{aligned}\tag{5.121}$$

Utilizando essas conexões na equação de Einstein, chegamos a

$$\delta G_j^i = \frac{1}{2a^2} \left( h_{ij}'' + 2\mathcal{H} h_{ij}' - \nabla^2 h_{ij} \right) = 8\pi G \delta T_j^i.\tag{5.122}$$

Lembrando que não há perturbações tensoriais no tensor energia momento de um fluido perfeito, obtemos

$$h_{ij}'' + 2\mathcal{H} h_{ij}' - \nabla^2 h_{ij} = 0.\tag{5.123}$$

### 5.2.3 Soluções das equações perturbadas

Quando discutimos soluções em cosmologia perturbativa surge naturalmente a escala conhecida como comprimento comóvel de Hubble ou simplesmente raio de Hubble, caracterizado por  $\mathcal{H}^{-1} = (aH)^{-1}$ . Essa escala está relacionada a ideia de causalidade momentânea entre duas regiões distintas. Em um universo dominado por matéria ou radiação, essa escala é aproximadamente a mesma que o horizonte de partículas comóvel  $r_p$ , discutido na seção 5.1.2. Assim,  $\mathcal{H}^{-1} \sim r_p$ .

Observe que apesar de relacionadas,  $\mathcal{H}^{-1}$  e  $r_p$  são quantidades conceitualmente distintas. Enquanto  $r_p$  é uma escala obtida de considerações cinemáticas,  $\mathcal{H}^{-1}$  é uma escala dinâmica que caracteriza a taxa de expansão comóvel e entra nas equações de evolução das perturbações.

Pela discussão anterior, podemos estabelecer dois limites para as escalas de perturbação  $\lambda \sim k^{-1}$ :

Perturbações super-horizonte $\rightarrow \lambda \gg \mathcal{H}^{-1} \Rightarrow \frac{1}{k} \gg \eta \Rightarrow k\eta \ll 1,$
Perturbações sub-horizonte $\rightarrow \lambda \ll \mathcal{H}^{-1} \Rightarrow \frac{1}{k} \ll \eta \Rightarrow k\eta \gg 1.$

As soluções determinadas a seguir serão estudadas nestes limites.

Antes de partimos para o estudo das soluções é interessante descrever o quadro geral que será analisado. Em primeiro lugar, devemos ressaltar que as perturbações serão caracterizadas no espaço de Fourier, onde cada modo de Fourier  $k = |\vec{k}|$  está associado a uma escala  $\lambda$  específica, isto é,  $k \sim \lambda^{-1}$ . Além disso, as escalas físicas de interesse ligadas às observações das anisotropias da RCF e da distribuição de matéria estão entre  $10^{-3} \text{ Mpc} \lesssim k^{-1} \lesssim 10^4 \text{ Mpc}$ . Assim, a evolução das perturbações dentro dessa faixa pode ser qualitativamente descrita pelos seguintes passos:

1. As perturbações de métrica junto com as perturbações do(s) campo(s) inflaton são inicialmente produzidas durante o período inflacionário com uma amplitude pequena e quase invariante de escala.
2. Como durante a inflação o raio de Hubble diminui enormemente, logo após o término da inflação todas as escalas físicas relevantes para as observações atuais estão em regime super-horizonte.
3. Conforme o universo desacelerado evolui (era da radiação e matéria), as perturbações voltam a cruzar o horizonte e se tornam sub-horizontes.
4. Perturbações de pequenas escalas (grandes valores de  $k$ ) cruzam o horizonte primeiramente e se tornam sub-horizonte mais no passado em uma era da radiação. Já perturbações de grandes escalas (pequenos valores de  $k$ ) entram no horizonte mais recentemente em uma era dominada pela matéria.
5. Partindo de condições iniciais super-horizonte para as perturbações da métrica<sup>13</sup>, descrevemos a evolução das várias quantidades perturbadas durante o domínio da radiação, matéria e energia escura até chegarmos aos dias atuais.

<sup>13</sup>Pós período inflacionário.

## Soluções para as perturbações escalares

Como dito anteriormente, o conjunto das três Eqs. (5.105), (5.106) e (5.107) mais Eq. (5.108) advindas da equação de Einstein regem a evolução das perturbações escalares. Além disso, supondo uma equação de estado barotrópica,  $p = p(\varepsilon)$ , podemos escrever a perturbação da pressão como

$$\delta p = c_s^2 \delta \varepsilon, \quad \text{com } c_s \equiv \left( \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right)^{1/2},$$

sendo  $c_s$  a velocidade de ondas acústicas (velocidade do som). Combinando  $\delta p$  com as Eqs. (5.105), (5.107) e (5.108), podemos escrever uma equação fechada para o potencial:

$$\phi'' + 3 \left( 1 + c_s^2 \right) \mathcal{H} \phi' - c_s^2 \nabla^2 \phi + \left[ 2\mathcal{H}' + \left( 1 + 3c_s^2 \right) \mathcal{H}^2 \right] \phi = 0. \quad (5.124)$$

A seguir resolveremos essa equação para duas situações distintas:

1. Fluido do tipo poeira, isto é,  $p = 0$ .
2. Fluido relativístico descrito por uma equação de estado  $p = \omega \varepsilon$ , com  $\omega$  constante.

**Fluido tipo poeira** Um fluido do tipo poeira<sup>14</sup> possui pressão nula, isto é,  $p = 0$ . Assim, Eq. (5.124) se simplifica para

$$\phi'' + 3\mathcal{H}\phi' + \left( 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 \right) \phi = 0.$$

Por outro lado, sabemos que se  $p = 0$ , então  $\mathcal{H} = \frac{2}{\eta}$ . Logo,

$$\phi'' + \frac{6}{\eta} \phi' = 0,$$

cuja solução é

$$\phi = C_1(\vec{x}) + \frac{C_2(\vec{x})}{\eta^5}. \quad (5.125)$$

Assim, obtemos um modo constante com o tempo e um modo que decai.

Para obter as perturbações de densidade de energia, substituímos o resultado acima em Eq. (5.105) com  $\phi = \psi$ . Nesse sentido, segue:

$$4\pi G a^2 \eta^2 \delta \varepsilon = \eta^2 \nabla^2 C_1 - 12C_1 + \left( \eta^2 \nabla^2 C_2 + 18C_2 \right) \frac{1}{\eta^5}. \quad (5.126)$$

Utilizando a equação de Friedmann

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \varepsilon = \frac{4}{\eta^2} \Rightarrow 4\pi G a^2 \eta^2 = \frac{6}{\varepsilon},$$

<sup>14</sup>Fluido não relativístico não interagente.

podemos reescrever Eq. (5.126) em termos do contraste de densidade

$$\delta \equiv \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{6} \left[ \eta^2 \nabla^2 C_1 - 12C_1 + \left( \eta^2 \nabla^2 C_2 + 18C_2 \right) \frac{1}{\eta^5} \right].$$

Diferentemente do potencial, o contraste de densidade depende crucialmente da escala. Tomando a transformada de Fourier da equação acima, temos<sup>15</sup>

$$\bar{\delta}_k = \frac{1}{6} \left[ -12\bar{C}_1 - \eta^2 k^2 \bar{C}_1 + \left( 18\bar{C}_2 - \eta^2 k^2 \bar{C}_1 \right) \frac{1}{\eta^5} \right]. \quad (5.127)$$

Para perturbações super-horizonte,  $k\eta \ll 1$ , a Eq. (5.127) se reduz a

$$\bar{\delta}_k \approx -2\bar{C}_1 + \frac{3\bar{C}_2}{\eta^5}.$$

Desprezando o modo de decaimento, verificamos que a relação entre o contraste de densidade e o potencial é  $\delta = -2\phi$ .

Já para perturbações sub-horizonte,  $k\eta \gg 1$ , a Eq. (5.127) se reduz a

$$\bar{\delta}_k \approx -\frac{k^2}{6} \left( \bar{C}_1 \eta^2 + \frac{\bar{C}_2}{\eta^3} \right). \quad (5.128)$$

Sabemos que para poeira  $\eta \propto a^{1/2} \propto t^{1/3}$ . Logo,

$$\bar{\delta}_k \approx -\frac{k^2}{6} \left( \bar{C}_1 t^{2/3} + \bar{C}_2 t^{-1} \right).$$

Veja um resumo das perturbações escalares para um universo dominado pela matéria (fluido tipo poeira) na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Soluções para as perturbações escalares  $\phi$  e  $\delta$  nos regimes sub e super-horizonte para um universo dominado pela matéria.

	$\phi$	$\delta$
Perturbações super-horizonte	$C = cte$	$-2C$
Perturbações sub-horizonte	$C = cte$	$a \sim \eta^2$

Uma vez que o contraste de densidade de poeira entra no horizonte, ele começa a crescer proporcionalmente ao fator de escala. Esse crescimento era esperado pois matéria não relativística sofre de instabilidade gravitacional. Já a perturbação do potencial gravitacional  $\phi$  permanece constante em qualquer regime.

**Fluido relativístico** Agora vamos estudar o comportamento de perturbações adiabáticas em um universo dominado por uma componente relativística com equação de

<sup>15</sup>Quantidades barradas estão no espaço de Fourier.

estado  $p = \omega\varepsilon$ , onde  $\omega$  é uma constante positiva. Nesse caso, tomando a transformada de Fourier da Eq. (5.124), obtemos

$$\phi_k'' + 3(1 + \omega) \mathcal{H}\phi_k' + \omega k^2 \phi_k + \left[ 2\mathcal{H}' + (1 + 3\omega) \mathcal{H}^2 \right] \phi_k = 0,$$

onde usamos que  $c_s^2 = \omega$ . Uma vez que

$$\mathcal{H} = \frac{2}{(1 + 3\omega)\eta} \Rightarrow \mathcal{H}' = -\frac{2}{(1 + 3\omega)\eta^2},$$

temos,

$$\phi_k'' + \frac{6(1 + \omega)}{(1 + 3\omega)\eta} \phi_k' + \omega k^2 \phi_k = 0. \quad (5.129)$$

O próximo passo é mostrar que essa equação diferencial é uma equação do tipo Bessel. De acordo com Ref. (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2007), uma função de Bessel de ordem  $\nu$  é uma função  $Z_\nu$  solução da equação diferencial

$$\frac{d^2 Z_\nu}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dZ_\nu}{dz} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) Z_\nu = 0. \quad (5.130)$$

Para mostrar que a Eq. (5.129) é de fato uma equação de Bessel, vamos reescrever a Eq. (5.130) utilizando a expressão

$$Z_\nu(z) = z^\nu F_\nu(z).$$

Nesse sentido, obtemos

$$\frac{d^2 F_\nu}{dz^2} + (2\nu + 1) \frac{1}{z} \frac{dF_\nu}{dz} + F_\nu = 0. \quad (5.131)$$

Por outro lado, se fizermos a mudança de variável

$$z = \sqrt{\omega} k \eta \Rightarrow \frac{d}{d\eta} = \frac{dz}{d\eta} \frac{d}{dz} = \sqrt{\omega} k \frac{d}{dz} \Rightarrow \frac{d^2}{d\eta^2} = \omega k^2 \frac{d^2}{dz^2},$$

em Eq. (5.129), obtemos

$$\frac{d^2 \phi_k}{dz^2} + \frac{6(1 + \omega)}{(1 + 3\omega)} \frac{1}{z} \frac{d\phi_k}{dz} + \phi_k = 0. \quad (5.132)$$

Ou seja, Eqs. (5.131) e (5.132) são equivalentes se

$$2\nu + 1 = \frac{6(1 + \omega)}{1 + 3\omega} \Rightarrow \nu = \frac{3 + 3\omega}{1 + 3\omega} - \frac{1}{2} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2} \left( \frac{5 + 3\omega}{1 + 3\omega} \right). \quad (5.133)$$

Assim,  $\phi_k(z) = F_\nu(z)$ , o que resulta em

$$\phi_k(\sqrt{\omega} k \eta) = (\sqrt{\omega} k \eta)^{-\nu} Z_\nu(\sqrt{\omega} k \eta).$$

Portanto, a solução geral de Eq. (5.129) é

$$\phi_k(\sqrt{\omega} k \eta) = (\sqrt{\omega} k \eta)^{-\nu} \left[ \bar{C}_1 J_\nu(\sqrt{\omega} k \eta) + \bar{C}_2 Y_\nu(\sqrt{\omega} k \eta) \right] \quad (5.134)$$

onde  $J_\nu$  e  $Y_\nu$  são as funções de Bessel de ordem  $\nu$  de primeiro e de segundo tipo. Essas funções são definidas a partir de séries de potências, cujos comportamentos  $\sqrt{\omega}k\eta \ll 1$  e  $\sqrt{\omega}k\eta \gg 1$  estão bem definidos. Para perturbações do tipo super-horizonte,  $k\eta \ll 1$ , temos<sup>16</sup>

$$J_\nu(\sqrt{\omega}k\eta) \approx \bar{A}_\nu(k\eta)^\nu \quad \text{e} \quad Y_\nu(\sqrt{\omega}k\eta) \approx \bar{B}_\nu(k\eta)^\nu + \bar{C}_\nu(k\eta)^{-\nu},$$

onde  $\bar{A}_\nu$ ,  $\bar{B}_\nu$  e  $\bar{C}_\nu$  são constantes que dependem de  $\nu$  mas não de  $k$ . Podemos desprezar o modo que decai, pois inicialmente as perturbações são muito pequenas, isto é,  $\bar{C}_\nu \ll 1$ . Assim, para perturbações super-horizonte

$$\phi_k \approx \bar{D}_\nu,$$

é constante no tempo. Por sua vez, no regime super-horizonte, o contraste de densidade é  $\delta_k \approx -2\phi_k$ .

Já para perturbações do tipo sub-horizonte,  $k\eta \gg 1$ , as expansões assintóticas de  $J_\nu$  e  $Y_\nu$  fornecem<sup>17</sup>

$$J_\nu \approx \frac{\bar{A}_\nu}{\sqrt{k\eta}} \cos(\sqrt{\omega}k\eta + \alpha_\nu) \quad \text{e} \quad Y_\nu \approx \frac{\bar{B}_\nu}{\sqrt{k\eta}} \cos(\sqrt{\omega}k\eta + \beta_\nu),$$

onde  $\bar{A}_\nu$ ,  $\bar{B}_\nu$ ,  $\alpha_\nu$  e  $\beta_\nu$  são constantes que dependem somente de  $\nu$ . Logo, as inhomogeneidades em pequenas escalas decaem como

$$\phi_k \approx \bar{A}_\pm(k\eta)^{-(\nu+\frac{1}{2})} e^{\pm i\sqrt{\omega}k\eta}. \quad (5.135)$$

Observe de Eq. (5.133) que para  $\omega > -1/3 \Rightarrow \nu > 0$ .

Utilizando Eq. (5.105) com  $\phi = \psi$ , podemos determinar o comportamento do contraste de densidade para perturbações em pequenas escalas:

$$-k^2\phi_k - \frac{6}{(1+3\omega)\eta}(\phi'_k + \mathcal{H}\phi_k) = 4\pi G a^2 \delta\varepsilon_k.$$

Como  $k\eta \gg 1$ , a equação acima pode ser aproximada por

$$-k^2\phi_k = 4\pi G a^2 \delta\varepsilon_k. \quad (5.136)$$

Considerando a aproximação de escala fixa<sup>18</sup>,

$$\phi \approx \phi_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad \text{e} \quad \delta\varepsilon \approx \delta\varepsilon_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (5.137)$$

reescrevemos a Eq. (5.136), como

$$-k^2\phi_k = 4\pi G a^2 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \delta\varepsilon. \quad (5.138)$$

<sup>16</sup>Ref. (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2007), seção 8.44.

<sup>17</sup>Ref. (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2007), seção 8.45.

<sup>18</sup>A aproximação de escala fixa considera que apenas um modo  $k$  da transformada de Fourier é relevante.

Por outro lado, pela equação de Friedmann, temos

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \varepsilon = \left( \frac{2}{1+3\omega} \right)^2 \frac{1}{\eta^2} \Rightarrow 4\pi G a^2 = \frac{3}{2} \left( \frac{2}{1+3\omega} \right)^2 \frac{1}{\eta^2 \varepsilon}. \quad (5.139)$$

Portanto, substituindo Eqs. (5.135) e (5.139) em Eq. (5.138), obtemos

$$\begin{aligned} \delta_{\pm} &= \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \approx -\frac{2}{3} \left( \frac{1+3\omega}{2} \right)^2 (\eta k)^2 \phi_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Rightarrow \\ \delta_{\pm} &\approx D_{\pm} (k\eta)^{-(\nu-\frac{3}{2})} e^{i(\pm\sqrt{\omega}k\eta + \vec{k}\cdot\vec{x})}. \end{aligned}$$

Em um universo dominado pela radiação  $\omega = 1/3 \Rightarrow \nu = 3/2$ . Nesse caso, resumidamente, temos apresentados na tabela 5.2 os comportamentos para as perturbações.

Tabela 5.2: Soluções para as perturbações escalares  $\phi$  e  $\delta$  nos regimes sub e super-horizonte para um universo dominado pela radiação.

	$\phi$	$\delta$
Perturbações super-horizonte	$\bar{D}_{3/2} = cte$	$-2\bar{D}_{3/2}$
Perturbações sub-horizonte	$\frac{A_{\pm}}{(k\eta)^2} e^{i(\pm\frac{k\eta}{\sqrt{3}} + \vec{k}\cdot\vec{x})}$	$D_{\pm} e^{i(\pm\frac{k\eta}{\sqrt{3}} + \vec{k}\cdot\vec{x})}$

Diferentemente do caso de poeira, o contraste de densidade da radiação não cresce em escalas sub-horizonte e somente oscila. Isso era esperado uma vez que a pressão não deixa que a matéria relativística, nesse caso a radiação, se aglomere. Além disso, a perturbação do potencial gravitacional em regime sub-horizonte decai com  $\eta^{-2} \sim a^{-2}$ . Esse fato tem o papel de inibir a aglomeração de matéria fria (bárions e CDM) em um universo multi-componente dominado pela radiação.

### Soluções para as perturbações vetoriais

A perturbação vetorial de velocidade<sup>19</sup>, caracterizada por  $w_i$ , pode ser estudada resolvendo a Eq. (5.117). Nesse sentido, obtemos

$$\frac{d[w_i(\varepsilon + p)]}{da} = -4 \frac{w_i(\varepsilon + p)}{a} \Rightarrow w_i(\varepsilon + p) = \frac{C}{a^4}. \quad (5.140)$$

Por outro lado, para um universo descrito por uma equação de estado do tipo  $p = \omega\varepsilon$ , a equação de conservação do background (5.4) nos conta que

$$\frac{d\varepsilon}{da} = -3 \frac{\varepsilon}{a} (1 + \omega) \Rightarrow \varepsilon \propto a^{-3(1+\omega)}.$$

Assim, para uma era da matéria,  $\omega = 0$ , temos

$$w_i \propto \frac{1}{\varepsilon a^4} \propto \frac{1}{a},$$

<sup>19</sup>Lembrete:  $\delta u_{\mu} = a(0, -\omega_i)$  com  $\omega_i^i = 0$ .

ou seja, as perturbações vetoriais de velocidade decaem por um fator de  $a^{-1}$ . Já para uma era da radiação,  $\omega = 1/3$ , temos

$$w_i \propto \frac{1}{\varepsilon a^4} \propto \text{cte.}$$

Além disso, por Eq. (5.118), sabemos que

$$\bar{V}_i \propto a^2 (\varepsilon + p) w_i \Rightarrow \bar{V}_i \propto \frac{1}{a^2}.$$

Assim, uma perturbação vetorial de métrica  $\bar{V}_i$  decai com  $a^{-2}$  independentemente do valor de  $\omega$ . Como essas perturbações (criadas durante a inflação) são originariamente pequenas, elas podem ser completamente ignoradas nos dias de hoje.

### Soluções para as perturbações tensoriais

Para obter o comportamento das perturbações tensoriais (ondas gravitacionais), devemos solucionar a Eq. (5.123). Considerando uma solução na forma de "onda plana"<sup>20</sup>, isto é,

$$h_{ij} = \frac{v}{a} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e_{ij},$$

onde  $v$  é uma função somente do tempo e  $e_{ij}$  é o tensor de polarização constante, obtemos de Eq. (5.123) a seguinte equação:

$$\frac{v''}{a} - \frac{va''}{a^2} + k^2 \frac{v}{a} = 0,$$

ou seja

$$v'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) v = 0. \quad (5.141)$$

Supondo um universo dominado por um fluido, cuja equação de estado é  $p = \omega\varepsilon$ , com  $-1/3 < \omega < 1$ , temos que

$$a \sim \eta^{n(\omega)}, \text{ com } n(\omega) = \frac{2}{1+3\omega},$$

e portanto

$$\frac{a''}{a} = \frac{n(n-1)}{\eta^2}.$$

Substituindo esse resultado em Eq. (5.141), temos

$$v'' + k^2 \left[ 1 - \frac{n(n-1)}{(k\eta)^2} \right] v = 0. \quad (5.142)$$

Considerando perturbações sub-horizonte,  $k\eta \gg 1$ , podemos desprezar o termo  $(k\eta)^{-2}$  na equação acima, obtendo

$$v'' + k^2 v = 0 \Rightarrow v_{\pm} = C_{\pm} e^{\pm ik\eta},$$

<sup>20</sup>Perturbação com uma escala  $\lambda \sim 1/k$  fixa.

que resulta em

$$h_{ij} = \frac{C_{\pm}}{a} e^{i(\pm k\eta + \vec{k} \cdot \vec{x})} e_{ij}.$$

Assim, ondas gravitacionais com comprimento de onda  $\lambda$  menores do que a escala de Hubble  $\mathcal{H}^{-1}$  decaem com um fator  $a^{-1}$ , sendo esse resultado independente do valor de  $\omega$ . Essa última expressão representa ondas planas que sofrem um red-shift devido a expansão.

Por outro lado, no limite de perturbações super-horizonte ( $k\eta \ll 1$ ), a Eq. (5.142) para  $n \neq 1$  é aproximada por

$$v'' - \frac{n(n-1)}{\eta^2} v = 0. \quad (5.143)$$

A equação acima é uma equação do tipo Euler, em que uma das solução é da forma  $v \propto \eta^l$ . Substituindo essa proposta de solução em Eq. (5.143), temos

$$[l(l-1) - n(n-1)] v^{l-2} = 0 \Rightarrow l^2 - l - n(n-1) = 0.$$

Essa equação de segundo grau resulta em duas soluções:

$$l = \frac{1}{2} [1 \pm (2n-1)] \Rightarrow l = \begin{cases} n \\ 1-n \end{cases}.$$

Portanto, a solução geral de Eq. (5.143) é

$$v = C_1 \eta^n + C_2 \eta^{1-n} = C_1 a + C_2 \eta^{1-n},$$

que resulta em

$$h_{ij} = (C_1 + C_2 \eta^{1-2n}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e_{ij}.$$

O primeiro modo, associado a  $C_1$ , é um modo constante. Já o segundo modo decai sempre que

$$n > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{1+3\omega} > \frac{1}{2} \Rightarrow 1+3\omega < 4 \Rightarrow \omega < 1.$$

Assim, para um universo dominado por um fluido em que  $-1/3 < \omega < 1$ , o segundo modo sempre decai e pode ser desprezado.

Portanto, concluímos que ondas gravitacionais com comprimento de onda  $\lambda$  maiores do que o raio de Hubble  $\mathcal{H}^{-1}$  ( $k\eta \ll 1$ ) permanecem constantes ao longo da evolução do universo independente do valor de  $\omega$ .

### 5.3 Perturbações escalares na inflação

A geração das inhomogeneidades iniciais está associada às flutuações quânticas das perturbações escalares. Assim, o primeiro passo para entendermos esse processo de geração é obter equações perturbadas ligadas ao campo escalar. Em princípio, temos 5 graus de liberdade escalar: 4 vindos da métrica e 1 do campo ínflaton. Contudo, a

liberdade de gauge em conjunto com o vínculo (5.108) nos permite reduzir os graus de liberdade para apenas 2 funções. Portanto, podemos descrever todo o sistema através de apenas duas equações. Vamos trabalhar com a Eq. de Einstein (5.110) na sua forma invariante de gauge e com a equação do campo escalar (5.39).

Para obter a Eq. (5.110) explicitamente, precisamos determinar quem é  $\bar{v}$  no caso do campo escalar. Perturbando Eq. (5.36), temos

$$\delta u_\mu = \frac{\partial_\mu \delta \varphi}{\sqrt{g^{\beta\nu} \partial_\beta \varphi \partial_\nu \varphi}} - \frac{\partial_\mu \varphi}{2g^{\beta\nu} \partial_\beta \varphi \partial_\nu \varphi} \delta \left( \sqrt{g^{\beta\nu} \partial_\beta \varphi \partial_\nu \varphi} \right),$$

onde  $\delta \varphi$  é a perturbação do campo  $\varphi$ , isto é,

$$\varphi = \varphi(\eta) + \delta \varphi(\eta, \vec{x}). \quad (5.144)$$

Para  $\mu = i$ , o segundo termo é nulo, resultando em

$$\delta u_i = \frac{\partial_i \delta \varphi}{\sqrt{g^{00} \partial_0 \varphi \partial_0 \varphi}} = \frac{a}{\varphi'} \delta \varphi_{,i}.$$

Por outro lado, por Eq. (5.99), sabemos que a parte escalar de  $\delta u_i$  é

$$\delta u_i = a(B - v)_{,i}.$$

Logo, comparando esses dois últimos resultados, obtemos

$$a(B - v)_{,i} = \frac{a}{\varphi'} \delta \varphi_{,i} \Rightarrow v - B = -\frac{\delta \varphi}{\varphi'}. \quad (5.145)$$

Por outro lado, sabemos de Eq. (5.100) que  $\bar{v} = v - E'$ . Portanto,

$$\bar{v} = (B - E') - \frac{\delta \varphi}{\varphi'}. \quad (5.146)$$

Juntando esse resultado com

$$\varepsilon + p = \frac{1}{a^2} (\varphi')^2,$$

calculado a partir de Eqs. (5.34) e (5.35), reescrevemos Eq. (5.110) como

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{1}{2M_{Pl}^2} (\varphi')^2 \left[ \frac{\delta \varphi}{\varphi'} - (B - E') \right]. \quad (5.147)$$

Por fim, escolhemos o gauge newtoniano,  $E = B = 0$ , e passamos para o tempo físico  $t$ , obtendo

$$\dot{\phi} + H\phi = \frac{1}{2M_{Pl}^2} \dot{\phi} \delta \varphi. \quad (5.148)$$

O próximo passo é perturbar Eq. (5.39). Utilizando o gauge newtoniano e a equação de movimento no background (5.40), obtemos

$$\delta \ddot{\varphi} + 3H\delta \dot{\varphi} - \bar{\nabla}^2 \delta \varphi + V'' \delta \varphi - 4\dot{\phi} \dot{\phi} + 2V' \phi = 0, \quad (5.149)$$

onde linha em  $V$  representa derivada com relação  $\varphi$ ,  $\phi = \phi(t, x^i)$  é a perturbação da métrica no gauge newtoniano e  $\bar{\nabla}^2$  é o laplaciano físico definido por  $\bar{\nabla}^2 \equiv \frac{1}{a^2} \nabla^2$ .

O conjunto de Eqs. (5.147) e (5.149) mais a equação de movimento no background (5.40) torna praticamente inviável obter soluções analíticas para as perturbações  $\phi$  e  $\delta\varphi$ . Contudo, durante o regime de slow-roll, essas equações podem ser simplificadas fornecendo uma EDO desacoplada para  $\delta\varphi$ . O primeiro ponto a se notar é que, no regime de slow-roll,  $\phi$  e  $\delta\varphi$  não contribuem da mesma forma. De fato, substituindo Eq. (5.38) em Eq. (5.147) vemos que

$$\frac{\dot{\phi}}{H} + \phi = \frac{1}{2M_{Pl}^2} \frac{\sqrt{-2M_{Pl}^2 \dot{H}}}{H} \delta\varphi \Rightarrow \frac{\dot{\phi}}{H} + \phi = \frac{1}{\sqrt{2M_{Pl}^2}} \sqrt{\frac{-\dot{H}}{H^2}} \delta\varphi,$$

e portanto

$$\frac{\dot{\phi}}{H} + \phi = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \frac{\delta\varphi}{M_{Pl}}.$$

Essa expressão nos conta que  $\phi$  é  $\sqrt{\epsilon}$  menor do que  $\delta\varphi/M_{Pl}$ . Além disso, colocando Eq. (5.149) em uma forma adimensional

$$\frac{1}{H^2} \frac{\delta\ddot{\varphi}}{M_{Pl}} + \frac{3}{H} \frac{\delta\dot{\varphi}}{M_{Pl}} - \frac{1}{H^2} \bar{\nabla}^2 \frac{\delta\varphi}{M_{Pl}} + \frac{V''}{H^2} \frac{\delta\varphi}{M_{Pl}} - 4 \frac{\dot{\phi}}{M_{Pl} H} \frac{\phi}{H} + 2 \frac{V'}{H^2} \frac{\phi}{M_{Pl}} = 0,$$

e utilizando Eq. (5.42) ou Eq. (5.38) nos três últimos termos, obtemos

$$\frac{1}{H^2} \frac{\delta\ddot{\varphi}}{M_{Pl}} + \frac{3}{H} \frac{\delta\dot{\varphi}}{M_{Pl}} - \frac{1}{H^2} \bar{\nabla}^2 \frac{\delta\varphi}{M_{Pl}} + 3M_{Pl}^2 \frac{V''}{V} \frac{\delta\varphi}{M_{Pl}} - 4\sqrt{2} \sqrt{\frac{-\dot{H}}{H}} \frac{\phi}{H} + 6M_{Pl}^2 \frac{V'}{V} \frac{\phi}{M_{Pl}} \approx 0.$$

Em seguida, utilizando Eqs. (5.29), (5.45) e (5.46) para reescrever a expressão acima como

$$\frac{1}{H^2} \frac{\delta\ddot{\varphi}}{M_{Pl}} + \frac{3}{H} \frac{\delta\dot{\varphi}}{M_{Pl}} - \frac{1}{H^2} \bar{\nabla}^2 \frac{\delta\varphi}{M_{Pl}} + \frac{3}{2} (\eta + 4\epsilon) \frac{\delta\varphi}{M_{Pl}} - 4\sqrt{2} \sqrt{\epsilon} \frac{\phi}{H} + 6\sqrt{2}\epsilon\phi \approx 0. \quad (5.150)$$

Portanto, lembrando que  $\phi/H \sim \phi \sim \sqrt{\epsilon} (\delta\varphi/M_{Pl})$ , vemos que os três últimos termos de Eq. (5.150) são suprimidos em uma ordem de slow-roll quando comparados com os três primeiros termos. Assim, em ordem dominante, podemos aproximar Eq. (5.150) por

$$\frac{1}{H^2} \frac{\delta\ddot{\varphi}}{M_{Pl}} + \frac{3}{H} \frac{\delta\dot{\varphi}}{M_{Pl}} - \frac{1}{H^2} \bar{\nabla}^2 \frac{\delta\varphi}{M_{Pl}} \approx 0. \quad (5.151)$$

Um ponto importante da expressão acima é que ela independe do potencial, ou seja, em ordem dominante, a equação para as perturbações do ínflaton é a mesma para qualquer modelo inflacionário descrito por um único campo escalar canônico.

Definindo

$$\delta\varphi \equiv a\delta\varphi,$$

a Eq. (5.151) pode ser colocada na forma

$$\delta\varphi'' - \nabla^2\delta\varphi - \frac{a''}{a}\delta\varphi \approx 0, \quad (5.152)$$

onde linha é a derivada com relação ao tempo conforme  $\eta$ . Essa equação é conhecida como equação de Mukhanov-Sasaki em ordem dominante.

A Eq. (5.152) pode ser escrita no espaço de Fourier como

$$\delta\varphi''_{\vec{k}} + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\delta\varphi_{\vec{k}} = 0, \quad (5.153)$$

onde  $k = |\vec{k}|$ . Ela representa infinitos osciladores harmônicos de frequência dependente do tempo  $\omega_k^2(\eta) = k^2 - a''/a$ . Além disso, sabemos que  $a''/a$  é proporcional ao inverso do quadrado do raio de Hubble  $(aH)^{-1}$ , uma vez que

$$a' = \frac{da}{dt} \frac{dt}{d\eta} = Ha^2 \Rightarrow a'' \approx 2aa'H \Rightarrow \frac{a''}{a} \approx 2(aH)^2, \quad (5.154)$$

onde na segunda passagem usamos o fato de que durante o regime inflacionário  $H$  é aproximadamente constante. Então, para escalas muito menores que o raio de Hubble,  $aH \ll k$ , temos  $k^2 \gg \frac{a''}{a}$ , e a equação acima se reduz para  $\delta\varphi'' + k^2\delta\varphi \approx 0$ , que é a equação de um oscilador harmônico simples de frequência  $\omega_k = k$ . São justamente as flutuações quânticas no estado de vácuo desses osciladores que darão origem as perturbações iniciais.

Um comentário final importante que deve ser ressaltado é que a variável a ser quantizada deve ser uma quantidade invariante de *gauge*. Em princípio, esse não é o caso da perturbação  $\delta\varphi$ . Contudo, mostraremos na Sec. 5.3.3 que no gauge newtoniano e em ordem dominante de slow-roll,  $\delta\varphi$  é proporcional a quantidade invariante conhecida como perturbação de curvatura. Assim, nesse contexto, qualquer efeito espúrio devido a liberdade de *gauge* será suprimido em pelo menos uma ordem em slow-roll.

### 5.3.1 Quantização canônica no espaço de de Sitter

Antes de realizarmos a quantização de  $\delta\varphi$  no espaço de de Sitter vamos relembrar como se procede a quantização de  $n$  osciladores de frequência  $\omega_i$  em mecânica quântica. Começamos com a lagrangeana de  $n$  osciladores de posição  $q_i$  e velocidade  $\dot{q}_i$  dada por

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i \left( \frac{1}{2}\dot{q}_i^2 - \frac{\omega_i^2}{2}q_i^2 \right).$$

Em seguida, definimos o momento canonicamente conjugado a  $q_i$  como

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

e a partir desse e da transformada de Legendre

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L,$$

obtemos a hamiltoniana do sistema

$$H(q_i, p_i) = \sum_i \left( \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{\omega_i^2}{2} q_i^2 \right).$$

Observe que a equação de movimento desses osciladores é dada por

$$\dot{q}_i + \omega_i q_i = 0.$$

O próximo passo é elevar o status de  $q_i$  e  $p_i$  a operadores e realizar o processo de quantização canônica através da imposição de relações de comutação

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \text{ e } [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (5.155)$$

Os espectros desses osciladores podem ser facilmente determinados se definirmos operadores escada  $a_j$  e  $a_j^\dagger$

$$\hat{q}_j \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}} (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger) \text{ e } \hat{p}_j \equiv -i\sqrt{\frac{\omega_j}{2}} (\hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger), \quad (5.156)$$

cujas relações de comutação satisfazem

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \text{ e } [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \quad (5.157)$$

em concordância com Eq. (5.155). Em termos dos operadores escada a hamiltoniana é escrita como

$$\hat{H} = \sum_i \omega_i \left( \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right),$$

e por Eq. (5.157) é fácil de verificar que

$$[\hat{H}, \hat{a}_j^\dagger] = \omega_j \hat{a}_j^\dagger \text{ e } [\hat{H}, \hat{a}_j] = -\omega_j \hat{a}_j. \quad (5.158)$$

Assim, se definirmos que existe um estado  $|0\rangle$  de mínima energia (estado de vácuo), tal que  $\hat{a}_j |0\rangle = 0$ , podemos construir estados excitados a partir da aplicação dos operadores  $\hat{a}_j^\dagger$  em  $|0\rangle$ , isto é,

$$|n_1, n_2, \dots\rangle \equiv \left[ (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \dots \right] |0\rangle.$$

De fato, a partir de Eq. (5.158) é simples de mostrar que

$$\hat{H} |n_1, n_2, \dots\rangle = \left[ \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \omega_1 + \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \omega_2 + \dots \right] |n_1, n_2, \dots\rangle.$$

Um ponto importante a se ressaltar é que a estrutura e a normalização de Eq. (5.156) permitem reconhecer  $|0\rangle$  como o auto-estado de energia mínima da hamiltoniana, isto é,

$$\hat{H} |0\rangle = \sum_i \frac{\omega_i}{2} |0\rangle.$$

Vamos realizar um processo análogo de quantização de  $\delta\varphi$  em um background tipo de Sitter. O primeiro passo é reconhecer o momento  $\delta\pi$  canonicamente conjugado a  $\delta\varphi$ . Para isso, partimos da Eq. (5.32) reconhecendo que a lagrangeana de matéria é

$$\mathcal{L}_m = \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right).$$

Além disso, por se tratar de equações perturbadas no regime linear, precisamos expandir  $\mathcal{L}_m$  retendo apenas os termos quadráticos nas perturbações. Nesse caso,

$$\mathcal{L}_m^{(2)} = \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu (\delta\varphi) \partial_\nu (\delta\varphi) - \frac{1}{2} V'' (\delta\varphi)^2 \right],$$

de onde obtemos

$$\mathcal{L}_m^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ (\delta\varphi')^2 + (\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) (\delta\varphi)^2 \right] + \dots$$

Portanto, o momento canonicamente conjugado obtido da forma usual é

$$\delta\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_m^{(2)}}{\partial (\delta\varphi')} = \delta\varphi'. \quad (5.159)$$

Uma vez que a densidade hamiltoniana é definida como

$$\mathcal{H}(\delta\varphi, \delta\pi) = \delta\pi \delta\varphi' - \mathcal{L},$$

podemos mostrar que, mantendo apenas termos quadráticos para as perturbações, ela se escreve

$$\mathcal{H}_m^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ (\delta\pi)^2 + (\vec{\nabla} \delta\varphi)^2 + \left( a^2 \frac{d^2 V}{d\varphi^2} - \frac{a''}{a} \right) (\delta\varphi)^2 \right].$$

Em seguida elevamos  $\delta\varphi(\eta, \vec{x})$  e  $\delta\pi(\eta, \vec{x})$  ao status de operadores  $\delta\hat{\varphi}(\eta, \vec{x})$  e  $\delta\hat{\pi}(\eta, \vec{x})$  e impomos a relação de quantização canônica

$$[\delta\hat{\varphi}(\eta, \vec{x}), \delta\hat{\pi}(\eta, \vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'),$$

onde  $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$  é a assinatura de localidade, isto é, diferentes modos (osciladores) são independentes entre si e portanto seus operadores comutam. Observe que estamos no picture de Heisenberg, onde os operadores variam no tempo, enquanto que os estados permanecem constantes<sup>21</sup>.

No espaço de Fourier, temos

$$\begin{aligned} [\delta\hat{\varphi}_{\vec{k}}(\eta), \delta\hat{\pi}_{\vec{k}'}(\eta)] &= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^{3/2}} [\delta\hat{\varphi}(\eta, \vec{x}), \delta\hat{\pi}(\eta, \vec{x}')] e^{-i\vec{k}\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\vec{x}'} \\ [\delta\hat{\varphi}_{\vec{k}}(\eta), \delta\hat{\pi}_{\vec{k}'}(\eta)] &= i \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{x}} = i\delta(\vec{k} + \vec{k}'). \end{aligned} \quad (5.160)$$

<sup>21</sup>A variável  $\vec{x}$  é uma variável comóvel.

O próximo passo é escrever o operador  $\delta\hat{\varphi}_{\vec{k}}(\eta)$  em termos de duas funções que formam uma base de soluções da Eq. de Mukhanov-Sasaki, isto é,

$$\delta\hat{\varphi}_{\vec{k}}(\eta) = \delta\varphi_k(\eta)\hat{a}_{\vec{k}} + \delta\varphi_k^*(\eta)\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger. \quad (5.161)$$

onde  $\hat{a}_{\vec{k}}$  e  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$  são operadores hermitianos conjugados independentes do tempo. As funções  $\delta\varphi_k(\eta)$  e  $\delta\varphi_k^*(\eta)$  são as duas soluções linearmente independentes de Eq. (5.153). Além disso, como a frequência  $\omega_k$  depende apenas de  $k = |\vec{k}|$ , a evolução temporal não depende da direção de  $\vec{k}$  e portanto  $\delta\varphi_k(\eta)$  e  $\delta\varphi_k^*(\eta)$  são os mesmos para todos os modos de Fourier  $k = |\vec{k}|$ . A estrutura de Eq. (5.161) em termos de  $\hat{a}_{\vec{k}}$  e  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$  garante que  $\delta\hat{\varphi}(\eta, \vec{x})$  seja hermitiano<sup>22</sup>,  $\delta\hat{\varphi}^\dagger(\eta, \vec{x}) = \delta\hat{\varphi}(\eta, \vec{x})$ .

O próximo passo é substituir Eq. (5.161) em Eq. (5.160):

$$\left[ \delta\varphi_k\hat{a}_{\vec{k}} + \delta\varphi_k^*\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger, \delta\varphi_{k'}\hat{a}_{\vec{k}'} + \delta\varphi_{k'}^*\hat{a}_{-\vec{k}'}^\dagger \right] = \delta\varphi_k\delta\varphi_{k'}^* \left[ \hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{-\vec{k}'}^\dagger \right] + \delta\varphi_{k'}\delta\varphi_k^* \left[ \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'} \right] = i\delta(\vec{k} + \vec{k}').$$

Trocando a ordem do segundo comutador e lembrando que  $\delta(\vec{k} + \vec{k}') \Rightarrow k = k'$ , temos

$$\delta\varphi_k\delta\varphi_{k'}^* \left[ \hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{-\vec{k}'}^\dagger \right] - \delta\varphi_{k'}\delta\varphi_k^* \left[ \hat{a}_{\vec{k}'}, \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \right] = i\delta(\vec{k} + \vec{k}').$$

Além disso, como  $\delta(\vec{k} + \vec{k}') \Rightarrow \vec{k} = -\vec{k}'$ , podemos no segundo comutador realizar a troca  $\vec{k} \leftrightarrow -\vec{k}'$ :

$$\delta\varphi_k\delta\varphi_{k'}^* \left[ \hat{a}_{\vec{k}'}, \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \right] - \delta\varphi_{k'}\delta\varphi_k^* \left[ \hat{a}_{-\vec{k}'}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \right] = i\delta(\vec{k} + \vec{k}'). \quad (5.162)$$

A partir de Eq. (5.162), outra expressão pode ser obtida se trocarmos  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$  e  $\vec{k}' \rightarrow -\vec{k}'$  na equação acima. Nesse sentido, obtemos

$$\delta\varphi_k\delta\varphi_{k'}^* \left[ \hat{a}_{-\vec{k}'}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \right] - \delta\varphi_{k'}\delta\varphi_k^* \left[ \hat{a}_{\vec{k}'}, \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \right] = i\delta(-\vec{k} - \vec{k}') = i\delta(\vec{k} + \vec{k}'). \quad (5.163)$$

Logo, somando Eq. (5.162) com Eq. (5.163), vemos que

$$W(\delta\varphi_k, \delta\varphi_{k'}^*) \left( \left[ \hat{a}_{-\vec{k}'}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \right] + \left[ \hat{a}_{\vec{k}'}, \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \right] \right) = 2\delta(\vec{k} + \vec{k}'), \quad (5.164)$$

onde

$$W(\delta\varphi_k, \delta\varphi_{k'}^*) \equiv -i(\delta\varphi_k\delta\varphi_{k'}^* - \delta\varphi_{k'}\delta\varphi_k^*), \quad (5.165)$$

é o determinante wronskiano. Como os operadores  $\hat{a}_{\vec{k}}$  e  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$  não dependem de  $\eta$ , o wronskiano também não dependerá (veja Eq. (5.164)). Nesse caso, podemos escolher uma normalização para  $\delta\varphi_k$ , dependente de  $k$ , tal que

$$W(\delta\varphi_k, \delta\varphi_k^*) = 1. \quad (5.166)$$

Assim,

$$\left[ \hat{a}_{-\vec{k}'}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \right] + \left[ \hat{a}_{\vec{k}'}, \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \right] = 2\delta(\vec{k} + \vec{k}'),$$

<sup>22</sup>Essa condição é necessária para que  $\delta\hat{\varphi}(\eta, \vec{x})$  tenha sempre auto-valores reais.

cuja solução é a relação usual de comutação de operadores de criação e aniquilação

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (5.167)$$

Isso nos permite reconhecer  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$  como operador de criação e  $\hat{a}_{\vec{k}}$  como operador de aniquilação. Definindo o estado de vácuo  $|0\rangle$  como

$$\hat{a}_{\vec{k}} |0\rangle \equiv 0, \quad (5.168)$$

podemos construir qualquer outro estado do espaço de Fock a partir de aplicações sucessivas dos operadores de criação

$$|m_{\vec{k}_1}, n_{\vec{k}_2}, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n!\dots}} \left[ \left( \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger \right)^m \left( \hat{a}_{\vec{k}_2}^\dagger \right)^n \dots \right] |0\rangle, \quad (5.169)$$

onde  $m!$ ,  $n!$ , etc, é um fator de normalização conveniente. Logo, a hamiltoniana (livre) aplicada no estado (5.169) gera  $m$  partículas de energia  $\omega_{k_1}$ ,  $n$  partículas de energia  $\omega_{k_2}$  e assim sucessivamente.

Até o momento a única imposição implementada para as funções de base  $\delta\varphi_k$  e  $\delta\varphi_k^*$  foi a escolha da normalização de  $W(\delta\varphi_k, \delta\varphi_k^*)$  (5.166). Contudo, é necessário que essas funções sejam determinadas de forma única para que o vácuo seja único. De um modo geral, quantização em backgrounds dependentes do tempo possuem ambiguidades na escolha de  $\delta\varphi_k$ , levando a inconsistências no processo de quantização. Entretanto, no caso específico da inflação existe uma escolha preferencial que elimina qualquer tipo de ambiguidade. Para ver como surge essa escolha, vamos analisar como  $a''/a$  evolui no tempo. Em um universo tipo de Sitter<sup>23</sup>,

$$\frac{a''}{a} \approx 2(aH)^2.$$

Além disso, o tempo conforme é calculado como

$$\eta = \int \frac{dt}{a} = \int \frac{da}{Ha^2} \approx -\frac{1}{Ha}. \quad (5.170)$$

Logo,

$$\frac{a''}{a} \approx \frac{2}{\eta^2},$$

e a Eq. (5.153) pode ser reescrita como

$$\delta\varphi_k'' + \left( k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) \delta\varphi_k = 0. \quad (5.171)$$

No limite de perturbações bem dentro do horizonte, em um passado remoto na inflação, temos

$$k \gg aH \Rightarrow k|\eta| \gg 1.$$

Nesse limite, a Eq. (5.171) se simplifica para

$$\delta\varphi_k'' + k^2\delta\varphi_k \approx 0.$$

<sup>23</sup>Veja Eq. (5.154).

Essa equação nada mais é do que a equação de um campo escalar livre sem massa no espaço de Minkowski, cujas soluções são

$$\delta\varphi_k^\pm = A_\pm e^{\pm ik\eta} \text{ válidas para } \eta \rightarrow -\infty. \quad (5.172)$$

Impondo que o estado de vácuo é um auto-estado da hamiltoniana<sup>24</sup> e que a condição (5.166) deve ser satisfeita, fixamos o sinal e a normalização de Eq. (5.172) em

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \delta\varphi_k = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}. \quad (5.173)$$

Assim, essas duas imposições determinam de forma única  $\delta\varphi_k$ , produzindo um único vácuo físico — vácuo de Bunch-Davies. Como veremos a seguir, a Eq. (5.173) atuará como condição inicial para a solução geral da equação de Mukhanov-Sasaki (5.171).

É interessante comparar o resultado obtido no regime sub-horizonte com a decomposição usual de um campo escalar sem massa no espaço de Minkowski. De estudos em teoria quântica de campos<sup>25</sup>, sabemos que o campo escalar sem massa é corretamente quantizado através da decomposição

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k}} \left( \hat{a}_{\vec{k}} e^{-ik^0 x^0 + i\vec{k}\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{ik^0 x^0 - i\vec{k}\vec{x}} \right), \quad (5.174)$$

em que  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$  e  $\hat{a}_{\vec{k}}$  são operadores de criação e aniquilação, respectivamente, que satisfazem a relação de comutação (5.167). A introdução do termo  $\sqrt{2k}$  é necessária para preservar a invariância relativística do campo. Separando a parte temporal da espacial em Eq. (5.174)

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k}} \left( \hat{a}_{\vec{k}} e^{-ikt} e^{i\vec{k}\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{ikt} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right),$$

e realizando a troca  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$  apenas no segundo termo, obtemos

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \delta\hat{\varphi}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3k,$$

onde

$$\delta\hat{\varphi}_{\vec{k}}(t) = \hat{a}_{\vec{k}} \frac{e^{-ikt}}{\sqrt{2k}} + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2k}}.$$

Esse resultado é idêntico a Eq. (5.161), com  $\delta\varphi_k$  dado por Eq. (5.173), se fizermos as correspondências  $t \rightarrow \eta$  e coordenada física para coordenada comóvel. Isso corrobora a consistência entre o desenvolvimento realizado e os resultados usuais de quantização de um campo escalar.

O próximo passo é obter soluções para  $\delta\varphi_k$  em qualquer regime. A solução geral de Eq. (5.171) é dada por

$$\delta\varphi_k(\eta) = \alpha_1 \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left( 1 - \frac{i}{k\eta} \right) + \alpha_2 \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left( 1 + \frac{i}{k\eta} \right), \quad (5.175)$$

<sup>24</sup>Condição física que possibilita estabelecer a energia do estado de vácuo como sendo a energia mínima do sistema.

<sup>25</sup>Veja capítulo 2 de Ref. (PESKIN; SCHROEDER, 1995) para detalhes.

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes arbitrárias fixadas pelas condições iniciais. Assim, aplicando Eq. (5.173) nessa equação, concluímos que  $\alpha_1 = 1$  e  $\alpha_2 = 0$ . Logo, a solução que descreve os diversos modos durante toda a época de inflação é

$$\delta\varphi_k(\eta) = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta}\right). \quad (5.176)$$

### 5.3.2 Flutuações quânticas no estado de vácuo

A perturbação do campo ínflaton quando quantizada apresenta um conteúdo de partícula que pode ser caracterizada por combinações envolvendo o operador  $\delta\hat{\varphi}$  e os respectivos estados do espaço de Fock (5.169). Além disso, por serem campos quânticos, esses estados apresentam flutuações. O que queremos calcular são essas pequenas flutuações em meio ao background homogêneo e isotrópico.

O primeiro passo é determinar em qual estado encontra-se o sistema. Se for suposto que uma quantidade razoável de expansão exponencial ocorreu antes que as primeiras escalas relevantes terem cruzado o horizonte, então o sistema quântico (universo) deve se encontrar no estado de vácuo. A ideia aqui é que anterior a inflação tínhamos um campo  $\varphi$  com uma energia média  $\varepsilon_\varphi$  distribuída de forma homogênea e isotrópica em todo o universo. Com o início da inflação, essa energia se dilui rapidamente devido ao aumento exponencial do espaço. Após um período razoável de inflação, uma interpretação clássica para  $\varepsilon_\varphi$  nos permite concluir que essa energia média tende a zero. Já quando abordamos o problema do ponto de vista quântico, essa diluição de energia é equivalente ao sistema evoluir para o seu estado de mínima energia, isto é, o seu estado de vácuo. Assim, as flutuações de  $\delta\hat{\varphi}$  que queremos calcular serão em relação ao seu estado de vácuo.

Em termos dos modos de Fourier, o operador  $\delta\hat{\varphi}(\eta, \vec{x})$  é escrito como

$$\delta\hat{\varphi}(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[ \delta\varphi_k(\eta) \hat{a}_{\vec{k}} + \delta\varphi_k^*(\eta) \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \right] e^{i\vec{k}\vec{x}}.$$

Devido as atuações dos operadores de criação e aniquilação no vácuo, é trivial perceber que  $\langle 0 | \delta\hat{\varphi} | 0 \rangle = 0$ . Ou seja, o valor esperado de  $\delta\hat{\varphi}$  no vácuo é nulo. No entanto, o mesmo não ocorre com a variância  $\delta\hat{\varphi}$  que, de fato, possui flutuações quânticas não nulas:

$$\langle 0 | \delta\hat{\varphi}^\dagger \delta\hat{\varphi} | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\delta\varphi_k(\eta)|^2 e^{i\vec{k}(\vec{x}' - \vec{x})}.$$

O objeto  $P_{\delta\varphi}(k) = |\delta\varphi_k(\eta)|^2$  é conhecido como espectro de potência (power spectrum) e nada mais é do que a transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos  $\langle 0 | \delta\hat{\varphi}^\dagger \delta\hat{\varphi} | 0 \rangle$ .

Para definir o espectro de potência adimensional, é interessante realizar a inte-

gração na parte angular

$$\begin{aligned} \langle 0 | \delta \hat{\varphi}^\dagger \delta \hat{\varphi} | 0 \rangle &= \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} |\delta \varphi_k(\eta)|^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ik|\vec{x}' - \vec{x}| \cos \theta} \\ &= \int_0^\infty d \ln k \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta \varphi_k(\eta)|^2 \frac{\sin(k|\vec{x}' - \vec{x}|)}{k|\vec{x}' - \vec{x}|}. \end{aligned}$$

Baseado na expressão acima, definimos o espectro de potência adimensional (power spectrum adimensional) como

$$\Delta_\varphi^2(k, \eta) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\delta\varphi}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta \varphi_k(\eta)|^2. \quad (5.177)$$

De Eqs. (5.176) e (5.170) e lembrando que  $\delta \underline{\varphi} = \delta \varphi / a$ , escrevemos o espectro de potência para  $\delta \underline{\varphi}$  como

$$\Delta_{\delta \underline{\varphi}}^2(k, \eta) = \frac{1}{a^2} \Delta_{\delta\varphi}^2(k, \eta) = \frac{k^2}{(2\pi)^2 a^2} \left[ 1 + \left( \frac{Ha}{k} \right)^2 \right] = \frac{H^2}{(2\pi)^2} \left[ 1 + \left( \frac{k}{Ha} \right)^2 \right].$$

Calculando  $\Delta_{\delta \underline{\varphi}}^2$  em um instante onde a escala  $k^{-1}$  já cruzou o horizonte, em algum tempo ( $k \ll Ha$ ), obtemos a quantidade independente do tempo

$$\Delta_{\delta \underline{\varphi}}^2 \approx \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2. \quad (5.178)$$

Assim, durante o período inflacionário,  $H \sim cte$ , o espectro de potência de  $\delta \underline{\varphi}$  para escalas super-horizonte se torna aproximadamente constante no tempo.

Por fim, vamos analisar a estrutura dos operadores  $\delta \hat{\varphi}$  e  $\delta \hat{\pi}$  no regime super-horizonte. Utilizando Eq. (5.176) no regime  $k|\eta| \ll 1$

$$\delta \varphi_k \approx \frac{(1 - ik\eta)}{\sqrt{2k}} \left( 1 - \frac{i}{k\eta} \right) \approx \frac{-i}{\sqrt{2kk\eta}},$$

escrevemos  $\delta \hat{\varphi}(\eta, \vec{x})$  e  $\delta \hat{\pi}(\eta, \vec{x}) = \delta \varphi'(\eta, \vec{x})$  como

$$\begin{aligned} \delta \hat{\varphi}(\eta, \vec{x}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{-i}{\sqrt{2kk\eta}} \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{i}{\sqrt{2kk\eta}} \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \right) e^{i\vec{k}\vec{x}}, \\ \delta \hat{\pi}(\eta, \vec{x}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{i}{\sqrt{2kk\eta^2}} \hat{a}_{\vec{k}} - \frac{i}{\sqrt{2kk\eta^2}} \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \right) e^{i\vec{k}\vec{x}}. \end{aligned}$$

Manipulando a expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} \delta \hat{\varphi}(\eta, \vec{x}) &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left( \hat{a}_{\vec{k}} - \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \right) \frac{i}{\sqrt{2kk\eta}} e^{i\vec{k}\vec{x}}, \\ \delta \hat{\pi}(\eta, \vec{x}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left( \hat{a}_{\vec{k}} - \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \right) \frac{i}{\sqrt{2kk\eta^2}} e^{i\vec{k}\vec{x}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\delta\hat{\phi}(\eta, \vec{x}) = -\eta\delta\hat{\pi}(\eta, \vec{x}).$$

Assim, para escalas super-horizonte,  $\delta\hat{\phi}$  e  $\delta\hat{\pi}$  são proporcionais, e portanto, comutam entre si. Isso evidencia uma estrutura clássica (não quântica) do sistema. Portanto, após cruzar o horizonte, as flutuações de  $\delta\phi$  podem ser interpretadas como campos clássicos estocásticos. De fato, após cruzar o horizonte, podemos identificar a variância quântica do estado de vácuo como uma média clássica de ensemble que segue uma distribuição gaussiana. Portanto, se a inflação se desenvolveu nos moldes usuais (um campo escalar, slow-roll, etc) é de se esperar que as flutuações presentes nas anisotropias da RCF apresentem uma distribuição gaussiana<sup>26</sup>.

### 5.3.3 Perturbação de curvatura

A conexão entre as perturbações do campo inflacionário e as condições iniciais que determinam a evolução das perturbações de matéria e radiação se dá através de uma quantidade conhecida como perturbação de curvatura comóvel  $\mathcal{R}$ . A primeira motivação para a introdução dessa nova quantidade é que durante o reaquecimento o campo ínflaton decai. Assim, é conveniente trabalhar com perturbações (induzidas por  $\delta\phi$ ) que perdurem durante as eras subsequentes de um universo quente. O segundo ponto relevante é que  $\mathcal{R}$  é uma quantidade invariante de gauge, e portanto, nunca apresentará perturbações espúrias devido a efeito de sistemas de coordenadas. Inclusive, de um ponto de vista mais formal, a perturbação quantizada anteriormente deveria ter sido uma quantidade invariante de *gauge*<sup>27</sup>. No entanto, mostraremos nesta seção que, em ordem dominante de slow-roll,  $\delta\phi \propto \mathcal{R}$ , e portanto, qualquer efeito espúrio de gauge será suprimido em uma ordem em  $\underline{\text{slow-roll}}$ . O terceiro e mais importante ponto, é que, diferentemente das perturbações de métrica  $\Phi$  e  $\Psi$ , a quantidade  $\mathcal{R}$  se conserva em escalas super-horizonte sempre que não há perturbações de entropia. Isso ocorre mesmo em situações multicomponente e permite conectar as perturbações geradas na época inflacionária (escalas de  $\sim 10^{15}\text{GeV}$ ) com as perturbações na época de reentrada no horizonte (escalas de  $\sim 10\text{eV}$ ) sem precisarmos conhecer os detalhes da expansão do universo. Em situações mais simples, onde as perturbações são gaussianas e adiabáticas, a perturbação de curvatura é a única perturbação escalar relevante para as condições iniciais.

Formalmente, a perturbação de curvatura é obtida do escalar de curvatura  ${}^{(3)}R$  calculado a partir da métrica induzida  $g_{ij}$ . Partindo de Eq. (5.70), o elemento de linha espacial é dado por

$$dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j = a^2 [(1 - 2\psi)\delta_{ij} - 2\tilde{\gamma}_{ij}] dx^i dx^j,$$

onde

$$2\tilde{\gamma}_{ij} = 2\partial_i\partial_j E + \partial_j F_i + \partial_i F_j + h_{ij}.$$

<sup>26</sup>Na verdade a situação é um pouco mais complicada pois podem existir outros processos (além da inflação) que induzem não gaussianidades nas observações.

<sup>27</sup>É possível mostrar que para a inflação descrita por um único campo escalar canônico,  $\mathcal{R}$  satisfaz uma equação tipo Mukhanov-Sasaki sem qualquer aproximação de slow-roll.

Em primeira ordem de perturbação, é possível mostrar que

$$a^2 \left( {}^{(3)}R \right) = \delta^{ik} \partial_l \left( {}^{(3)}\Gamma_{ik}^l \right) - \delta^{ik} \partial_k \left( {}^{(3)}\Gamma_{il}^l \right), \quad (5.179)$$

onde

$${}^{(3)}\Gamma_{jk}^i = -\delta_j^i \partial_k \psi - \delta_k^i \partial_j \psi + \delta^{im} \delta_{jk} \partial_m \psi - \partial_j \bar{\gamma}_k^i - \partial_k \bar{\gamma}_j^i + \delta^{im} \partial_m \bar{\gamma}_{jk}.$$

Assim,

$${}^{(3)}\Gamma_{ik}^l \delta^{ik} = \delta^{il} \partial_i \psi - 2\partial_i \bar{\gamma}^{il} + \delta^{lm} \partial_m \bar{\gamma}_k^k,$$

e

$${}^{(3)}\Gamma_{il}^l = -3\partial_i \psi - \partial_i \bar{\gamma}_l^l.$$

Logo,

$$a^2 \left( {}^{(3)}R \right) = 4\delta^{il} \partial_l \partial_i \psi - 2\partial_l \partial_i \bar{\gamma}^{il} + 2\delta^{lm} \partial_l \partial_m \bar{\gamma}_k^k.$$

De  $\bar{\gamma}_{ij}$  nessa expressão sobra apenas a parte escalar, uma vez que  $\partial_i F^i = \partial_i h^{ij} = 0$ . Logo,

$$a^2 \left( {}^{(3)}R \right) = 4\delta^{il} \partial_l \partial_i \psi - 2\partial_l \partial_i \partial^l E + 2\delta^{lm} \partial_l \partial_m \partial^k \partial_k E,$$

ou seja

$$a^2 \left( {}^{(3)}R \right) = 4\delta^{il} \partial_l \partial_i \psi. \quad (5.180)$$

A expressão acima é um invariante no 3-espaço induzido e não no espaço-tempo. Por outro lado, é de se esperar que o escalar  ${}^{(3)}R$  esteja relacionado a uma quantidade invariante de gauge do espaço-tempo quando calculado em um referencial comóvel caracterizado pelo gauge  $\delta g_{0i} = \delta v_i = 0$ .<sup>28</sup> Com base nessas informações, definimos a perturbação de curvatura comóvel como

$$\mathcal{R} \equiv -\psi + \mathcal{H}(v - B). \quad (5.181)$$

A perturbação de curvatura comóvel é uma quantidade invariante de gauge no espaço-tempo que se torna "proporcional" a  ${}^{(3)}R$  no sistema de referência comóvel. Além disso, mostramos no apêndice D que  $\mathcal{R}$  se conserva em escalas super-horizonte, isto é,  $\mathcal{R}' \approx 0$  se não houver perturbações de entropia.

Uma vez estabelecidas as propriedades de  $\mathcal{R}$ , vamos obter qual sua relação com  $\delta \underline{\varphi}$  e o respectivo espectro de potência. Substituindo Eq. (5.145) em Eq. (5.181), temos

$$\mathcal{R} = -\psi - \mathcal{H} \left( \frac{\delta \varphi}{\varphi'} \right).$$

Como o espectro de potência (5.178) foi obtido no gauge newtoniano, devemos analisar a expressão acima nesse *gauge*. Com isso,

$$\mathcal{R} = -\frac{H}{\dot{\varphi}} \left[ \frac{\delta \varphi}{M_{Pl}} + \sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{-\dot{H}}{H^2}} \right) \phi \right] M_{Pl}. \quad (5.182)$$

<sup>28</sup>A ideia aqui é que uma perturbação na folha 3-espaço é uma quantidade de espaço-tempo se adotarmos um sistema de coordenadas comóvel.

Por outro lado, vimos anteriormente que, no *gauge* newtoniano

$$\phi \sim \sqrt{\epsilon} \frac{\delta\phi}{M_{Pl}}, \text{ com } \epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}.$$

Portanto, o segundo termo de Eq. (5.182) é suprimido em uma ordem de slow-roll quando comparado com o primeiro. Assim, em ordem dominante de slow-roll

$$\mathcal{R} \approx -\frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi.$$

A expressão anterior nos permite obter o espectro de potência para a perturbação de curvatura. Nesse sentido,

$$\langle |\mathcal{R}|^2 \rangle = \left( \frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \langle |\delta\phi|^2 \rangle \Rightarrow P_{\mathcal{R}} = \left( \frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 P_{\delta\phi}$$

Seguindo a nomenclatura estabelecida em Eq. (5.177), definimos o espectro de potência de curvatura adimensional como

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}|^2, \quad (5.183)$$

e assim

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 \approx \left( \frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\delta\phi} \approx \left( \frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \Delta_{\delta\phi}^2.$$

Substituindo Eqs. (5.42), (5.43), (5.45) e (5.178) em  $\Delta_{\mathcal{R}}^2$ , obtemos

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 \approx \frac{1}{8\pi^2 M_{Pl}^2} \frac{H^2}{\epsilon}.$$

Como visto anteriormente, as flutuações quânticas do vácuo se tornam perturbações clássicas ao cruzar o horizonte e, nesse processo, elas se congelam<sup>29</sup>. Fisicamente, isso ocorre pois a escala de tempo  $a/k$  (lembre que  $c = 1$ ) da perturbação se torna maior do que o tempo de Hubble  $H^{-1}$ . Assim, a amplitude de uma dada escala  $k$  se congela em

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \frac{1}{8\pi^2 M_{Pl}^2} \frac{H^2}{\epsilon} \Big|_{k=Ha}. \quad (5.184)$$

Observe que uma vez calculado  $\Delta_{\mathcal{R}}^2$  em  $k = Ha \approx 1/|\eta|$  tornamos o espectro de potência uma função que depende exclusivamente de  $k$ . Se  $\Delta_{\mathcal{R}}^2$  for independente de  $k$  teremos um espectro invariante de escala e, nesse caso, as flutuações em qualquer escala terão sempre a mesma amplitude. No entanto,  $H$  e  $\epsilon$  variam ligeiramente com o tempo e portanto modos diferentes que cruzam o horizonte em instantes diferentes terão amplitudes ligeiramente diferentes.

<sup>29</sup>Grosseiramente podemos pensar que ao se tornar uma quantidade clássica a perturbação deixa de "variar".

## 5.4 Perturbações tensoriais

Vimos na Sec. 5.2.3 que perturbações tensoriais em escalas super-horizonte permanecem constantes<sup>30</sup>. Assim, possíveis perturbações desse tipo geradas durante o regime inflacionário são, em princípio, passíveis de serem observadas.

A equação de campo para a parte tensorial foi obtida na Sec. 5.2.2 e resulta em

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = 0.$$

Além disso, vimos pela decomposição SVT que  $h_{\mu\nu}$  é um tensor transverso  $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$  de traço nulo  $h^\mu{}_\mu = 0$ . Assim, temos apenas dois graus de liberdade físicos. Esses dois graus de liberdade representam as duas polarizações associadas às ondas gravitacionais cosmológicas. É conveniente reescrever esses graus de liberdade físicos como

$$h_{ij} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nessa situação, temos para  $i = j = 1$

$$h'_{11} = \frac{h'_+}{a} - \frac{h_+ a'}{a^2} \quad \text{e} \quad h''_{11} = \frac{h''_+}{a} - 2\frac{h'_+ a'}{a^2} - \frac{h_+ a''}{a^2} + 2\frac{h_+ a'^2}{a^3}.$$

Logo, Logo,

$$\begin{aligned} \frac{h''_+}{a} - 2\frac{h'_+ a'}{a^2} - \frac{h_+ a''}{a^2} - 2\frac{h_+ a'^2}{a^3} + 2\frac{a'}{a} \left( \frac{h'_+}{a} - \frac{h_+ a'}{a^2} \right) - \frac{1}{a} \nabla^2 h_+ &= 0 \Rightarrow \\ h''_+ - \frac{h_+ a''}{a} - \nabla^2 h_+ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, no espaço de Fourier, temos

$$h''_I + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) h_I = 0, \quad \text{onde } I = +, \times.$$

Observe que essas duas equações são idênticas, em forma, a equação de Mukhanov-Sasaki (5.153). Isso nos permite utilizar todos os procedimentos da seção anterior e concluir que o espectro de potência da parte tensorial deve ser proporcional a  $H^2$  como em Eq. (5.178). Contudo, para termos o fator numérico correto é necessário observar as diferenças de  $h_{ij}$  e  $\varphi$  advindas da ação original. De fato, se inspecionarmos Eq. (5.32) de forma cuidadosa, vemos que o fator numérico dimensional correto é  $M_{Pl}/2$ . Assim, se definirmos

$$\delta\varphi_I = a\delta\underline{\varphi}_I \equiv \frac{M_{Pl}}{2} h_I,$$

temos que a quantização de  $\delta\underline{\varphi}_I$  nos levará exatamente ao espectro de potência (5.178). Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta_h^2 &= \langle |h_{11}|^2 \rangle + \langle |h_{12}|^2 \rangle = \frac{2}{a^2} \langle |h_I|^2 \rangle = \frac{8}{M_{Pl}^2} \langle |\delta\underline{\varphi}_I|^2 \rangle \Rightarrow \\ \Delta_h^2(k) &= \frac{8}{M_{Pl}^2} \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 \Big|_{k=Ha}, \end{aligned} \quad (5.185)$$

<sup>30</sup>Na situação de uma única componente com equação de estado constante.

onde, de forma análoga ao caso escalar, calculamos  $H$  quando uma dada escala cruza o horizonte. Vale observar que se conseguirmos medir o espectro de potência das ondas gravitacionais, teremos uma medida direta da escala de energia da inflação, isto é,  $H^2$ .

## 5.5 Conexão com as observações

A conservação de  $\mathcal{R}$  e  $h_{ij}$  em escalas super-horizonte nos permite comparar diretamente os espectros de potência gerados na inflação com os espectros de potência utilizados como condições iniciais na evolução das anisotropias presentes na RCF. Em primeira ordem, essa comparação é feita utilizando uma parametrização para os espectros de potência de condições iniciais na forma

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1}, \quad (5.186)$$

$$\Delta_h^2(k) = A_t \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_t}, \quad (5.187)$$

onde  $A_s$  é a amplitude escalar,  $n_s$  é o índice espectral escalar,  $A_t$  é a amplitude tensorial e  $n_t$  o seu respectivo índice espectral tensorial com  $k_*$  sendo uma escala de referência (escala de pivô). Pela parametrização acima, percebemos que as amplitudes são medidas a partir da escala de pivô e que os índices espectrais medem a variação das outras escalas com relação a  $k_*$ . No contexto da inflação de slow-roll, espera-se uma pequena variação de amplitude e portanto  $n_s \sim 1$  e  $n_t \sim 0$ . Além disso, a amplitude tensorial é comumente expressa em termos da amplitude escalar através da relação

$$r = \frac{A_t}{A_s}, \quad (5.188)$$

a conhecida razão tensorial-escalar.

Vejamos a seguir como essas quatro grandezas observacionais se relacionam com os parâmetros da inflação descrita por um único campo escalar.

Comparando Eq. (5.184) com Eq. (5.186), vemos que  $A_s$  é dado por

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k_*) = A_s = \frac{1}{8\pi^2 M_{Pl}^2} \frac{H^2}{\epsilon} \Big|_{k_*=H_* a_*}.$$

Utilizando Eqs. (5.42) e (5.45), obtemos

$$A_s = \frac{1}{12\pi^2 M_{Pl}^6} \frac{V^3}{V'^2}, \quad (5.189)$$

onde  $V$  e  $V'$  são calculados quando a escala de pivo  $k_*$  cruza o horizonte. Usualmente, a medida de  $A_s$  estabelece qual é a escala de energia da inflação.

A razão tensorial-escalar  $r$  é obtida através das expressões (5.184) e (5.185), sendo dada por

$$r = \frac{A_t}{A_s} = \frac{\Delta_h^2(k)}{\Delta_{\mathcal{R}}^2(k)} = 16\epsilon, \quad (5.190)$$

e que em termos do potencial é escrita como

$$r = 8M_{Pl}^2 \left( \frac{V'}{V} \right)^2. \quad (5.191)$$

Essa equação estabelece um vínculo observacional importante na restrição de modelos de inflação.

Por sua vez, o índice espectral escalar pode ser obtido através da expansão  $\log \times \log$  do espectro de potência escalar (5.184):

$$\ln \Delta_{\mathcal{R}}^2 \left( \ln \left( \frac{k}{k_*} \right) \right) = \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2 \Big|_{k=k_*} + \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \ln k} \Big|_{k=k_*} \ln \left( \frac{k}{k_*} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \ln k^2} \Big|_{k=k_*} \ln^2 \left( \frac{k}{k_*} \right) + \dots$$

Comparando essa expansão com a parametrização (5.186), percebemos que  $(n_s - 1)$  representa a correção linear na expansão  $\log \times \log$  de  $\ln \Delta_{\mathcal{R}}^2$ , isto é,

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \ln k} \Big|_{k=k_*}.$$

Se  $N_* = \ln(a_{end}/a_*)$  representa o número de  $e$ -folds ocorridos entre o instante em que  $k_*$  cruza o horizonte e o fim da inflação, podemos reescrever  $n_s - 1$  em termos dos parâmetros de slow-roll:

$$\begin{aligned} n_s - 1 &= \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d N_*} \frac{d N_*}{d \ln k_*} = \left( 2 \frac{d \ln H_*}{d N_*} - \frac{d \ln \epsilon}{d N_*} \right) \frac{d N_*}{d \ln k_*} \Rightarrow \\ n_s - 1 &= (2\epsilon - \eta) \frac{d N_*}{d \ln k_*}, \end{aligned}$$

onde na última passagem utilizamos as definições (5.29) e (5.31). Além disso, como  $k_* = H_* a_*$  temos

$$\ln k_* = \ln H_* + \ln a_* = \ln H_* - N_* + \ln a_{end} \Rightarrow d \ln k_* = d \ln H_* - d N_*.$$

Assim,

$$\frac{d N_*}{d \ln k_*} = \left( \frac{d \ln k_*}{d N_*} \right)^{-1} = \left( \frac{d \ln H_*}{d N_*} - 1 \right)^{-1} = - (1 - \epsilon)^{-1} \approx - (1 + \epsilon). \quad (5.192)$$

Portanto, em primeira aproximação

$$n_s - 1 \approx (\eta - 2\epsilon) (1 + \epsilon) \Rightarrow n_s \approx 1 + \eta - 2\epsilon. \quad (5.193)$$

Por fim, utilizando Eqs. (5.45) e (5.46), reescrevermos a expressão acima em termo do potencial e suas derivadas:

$$n_s = 1 + 2M_{Pl}^2 \left( \frac{V''}{V} \right) - 3M_{Pl}^2 \left( \frac{V'}{V} \right)^2.$$

As quantidades acima devem ser calculadas quando  $\varphi = \varphi_*$  referente a  $k = k_*$ . Essa última expressão em conjunto com (5.47) nos permite determinar o índice espectral escalar em termos dos parâmetros do potencial e do número de  $e$ -folds  $N_*$ .

Por sua vez, o índice espectral tensorial é obtido de forma análoga, resultando em

$$n_t = -\frac{r}{8}. \quad (5.194)$$

Essa equação nos mostra que em ordem dominante de slow-roll, apenas três dos quatro parâmetros observacionais ( $A_s$ ,  $A_t$ ,  $n_s$  e  $n_t$ ) são independentes.

As observações feitas pelo satélite Planck (AKRAMI et al., 2018), mostram que para o modelo  $\Lambda$ CDM mínimo<sup>31</sup>

$$n_s = 0.9649 \pm 0.0042 \text{ e } \ln(A_s 10^{10}) = 2.975 \pm 0.056 \Rightarrow A_s = (1.959 \pm 0.11) \times 10^{-9}, \quad (5.195)$$

para uma escala de pivo  $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ .

Até o presente momento, não se observou perturbações tensoriais (ondas gravitacionais cosmológicas) nas anisotropias da RCF<sup>32</sup>. Entretanto, essa não observação impõem um limite observacional superior para a razão tensorial-escalar. Dados do Planck em conjunto BICEP3/Keck Array (ADE et al., 2021) nos fornecem o vínculo

$$r_{0.05} < 0.036 \text{ com } 95\% \text{ CL}, \quad (5.196)$$

para a escala de pivo  $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ .

De forma geral, os parâmetros  $n_s$  e  $r$  são correlacionados e as observações selecionam uma região específica do espaço de parâmetros. Apresentamos na figura 5.9 essa região para três conjuntos de dados.

<sup>31</sup>Modelo mínimo com seis parâmetros:  $h^2\Omega_{b0}$ ,  $h^2\Omega_{DM0}$ ,  $A_s$ ,  $n_s$ ,  $\theta_{MC}$  e  $\tau$  sendo os dois últimos parâmetros o tamanho angular do horizonte sonoro na superfície de último espalhamento e a profundidade ótica de reionização respectivamente.

<sup>32</sup>A princípio a perturbação tensorial pode ser medida a partir da sua influência no modo de polarização  $B$  da RCF. Contudo, esse sinal é extremamente fraco e muito difícil de ser detectado.

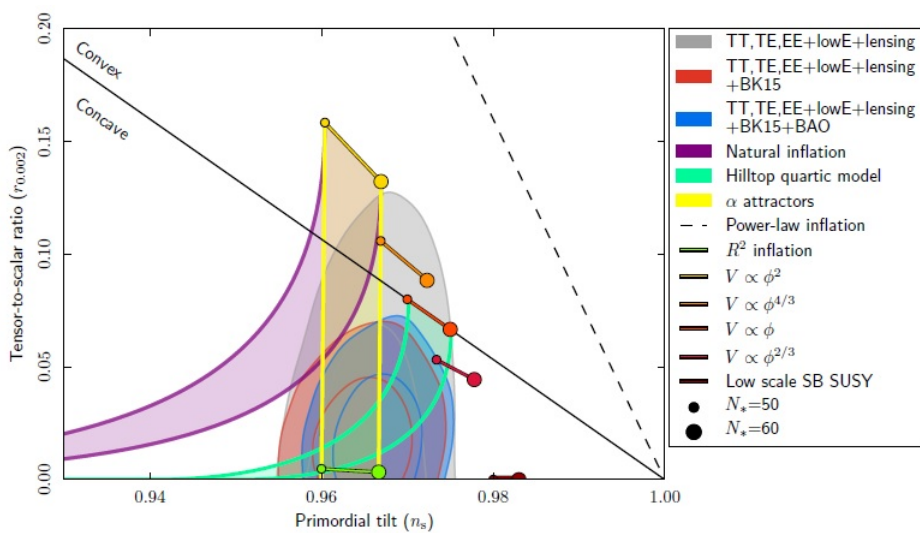


Figura 5.9: Espaço de parâmetros  $n_s \times r_{0.002}$  marginalizado contendo regiões de 68% e 95% CL para os dados do Planck sozinho e combinados com BK14 ou BK14 mais BAO. Comparação com as previsões de alguns modelos teóricos inflacionários. Fonte: (AKRAMI et al., 2018).

O objetivo inicial da nossa pesquisa, neste cenário inflacionário, foi o de investigar a inflação devido a ação gravitacional<sup>1</sup> (1.1). No entanto, para que pudéssemos convenientemente compreender esse trabalho, foi interessante estudar e ter toda a bagagem conceitual e técnica dos modelos intermediários Starobinsky+ $R^3$  e Starobinsky +  $R \square R$ . Como já comentado, a título de exemplo, temos na literatura Refs. (CUZINATTO et al., 2019; CASTELLANOS et al., 2018) que descrevem a extensão Starobinsky+ $R \square R$ . Ao estudarmos a extensão Starobinsky+ $R^3$ , tendo como referências Refs. (HUANG, 2014; CHEONG et al., 2020), verificamos que havia pontos interessantes pouco explorados que justificaram nossa publicação dada em Ref. (SILVA et al., 2022). Tais pontos são a análise completa do espaço de fase do modelo e sua relação com as condições iniciais necessárias para gerar uma inflação física, além da restrição para o intervalo do número de  $e$ -folds  $N$  da inflação oriunda de uma modelagem do reaquecimento. Esse e outros pontos serão apresentados logo a seguir, para por sua vez, estudarmos a inflação devido ao modelo completo (1.1).

O objetivo deste capítulo é apresentar nosso estudo da generalização da inflação de Starobinsky devido a inclusão de um termo  $R^3$  na ação. Os principais pontos deste capítulo encontram-se em nosso paper (SILVA et al., 2022).

A ação que descreve este modelo é

$$S(g_{\mu\nu}) = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R + \frac{1}{2\kappa_0} R^2 + \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2} R^3 \right). \quad (6.1)$$

Novamente, como dito na introdução,  $\kappa_0$  tem unidade de massa ao quadrado e o parâmetro  $\alpha_0$  é uma quantidade adimensional. Por consistência com o modelo de Starobinsky, assumimos que  $\kappa_0 > 0$ .

<sup>1</sup>Neste cenário em que abordamos a inflação, podemos negligenciar o termo da lagrangeana de matéria em Eq. (1.1).

## 6.1 Equações de campo

O primeiro passo nesse estudo é reescrever a ação (6.1) fazendo a passagem da representação original, que podemos chamar de frame geométrico, para a representação escalar-tensorial no frame de Einstein, em que temos uma descrição através de um campo escalar auxiliar  $\chi$  minimamente acoplado com a gravitação. Nesse sentido, a ação (6.1) pode ser convenientemente reescrita como<sup>2</sup>

$$\bar{S}(\bar{g}_{\mu\nu}, \chi) = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \bar{R} - 3 \left( \frac{1}{2} \bar{\partial}^\rho \chi \bar{\partial}_\rho \chi + V(\chi) \right) \right], \quad (6.2)$$

cujo potencial associado é

$$V(\chi) = \frac{\kappa_0}{72\alpha_0^2} e^{-2\chi} \left( 1 - \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\chi)} \right) \left[ -1 + 8\alpha_0(1 - e^\chi) + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\chi)} \right]. \quad (6.3)$$

As quantidades com barra são definidas a partir da métrica conforme  $\bar{g}_{\mu\nu} = e^\chi g_{\mu\nu}$  e o campo  $\chi$  adimensional é definido como

$$e^\chi = 1 + \frac{R}{\kappa_0} + \alpha_0 \left( \frac{R}{\kappa_0} \right)^2. \quad (6.4)$$

**Adendo** Para recuperar o notação e a dimensão usual do campo escalar e do potencial devemos fazer

$$\chi = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}} \quad \text{e} \quad \bar{V}(\varphi) = \frac{3M_{Pl}^2}{2} V(\chi). \quad (6.5)$$

Neste caso, a ação (6.2) é reescrita como

$$\bar{S}(\bar{g}_{\mu\nu}, \varphi) = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left( \frac{M_{Pl}^2}{2} \bar{R} - \frac{1}{2} \bar{\partial}^\rho \varphi \bar{\partial}_\rho \varphi - \bar{V}(\varphi) \right). \quad (6.6)$$

Partindo da ação (6.2), teremos duas equações de campo: uma para  $\bar{g}_{\mu\nu}$  e outra para o campos  $\chi$ . Tomando a variação com relação à métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$  obtemos

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R} = \frac{1}{M_{Pl}^2} \bar{T}_{\mu\nu}^{(\text{eff})}, \quad (6.7)$$

onde

$$\frac{1}{M_{Pl}^2} \bar{T}_{\mu\nu}^{(\text{eff})} = \frac{3}{2} \left[ \bar{\partial}_\mu \chi \bar{\partial}_\nu \chi - \bar{g}_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \bar{\partial}^\rho \chi \bar{\partial}_\rho \chi + V(\chi) \right) \right]. \quad (6.8)$$

Já a variação com relação ao campo  $\chi$  resulta em

$$\bar{\square} \chi - V'(\chi) = 0, \quad (6.9)$$

<sup>2</sup>Para detalhes da passagem, ver apêndice E.

onde "linha" representa derivada com relação a  $\chi$ . Calculando explicitamente  $V'(\chi)$  obtemos

$$V'(\chi) = \frac{\kappa_0}{36\alpha_0^2} e^{-2\chi} \left( -1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\chi)} \right) \left[ -1 + 2\alpha_0(4 - e^\chi) + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\chi)} \right]. \quad (6.10)$$

## 6.2 Potencial e espaço de fase no background de Friedmann

Damos início a esta seção escrevendo as equações de campo no background cosmológico de Friedmann. Considerando a métrica de FLRW plana

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (6.11)$$

obtemos

$$H^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + V(\chi) \right), \quad (6.12)$$

$$\dot{H} = -\frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 \right), \quad (6.13)$$

e

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + V'(\chi) = 0, \quad (6.14)$$

onde "ponto" representa a derivada temporal e  $H = \dot{a}/a$ . O potencial e sua derivada são dadas pelas Eqs. (6.3) e (6.10), com  $\chi = \chi(t)$ .

Os primeiros pontos para análise são as características do potencial  $V(\chi)$ . A estrutura do potencial depende do parâmetro  $\alpha_0$ . Além disso, para que  $V(\chi)$  esteja bem definido para todos os reais é necessário que<sup>3</sup>

$$0 \leq \alpha_0 \leq \frac{1}{4}. \quad (6.15)$$

O limite inferior (superior) de  $\alpha_0$  faz com que a  $V(\chi)$  seja uma função real para qualquer valor de  $\chi$  maior (menor) que zero. Além disso,  $\alpha_0 \geq 0$  garante estabilidade do modelo gravitacional durante todo o regime inflacionário<sup>4</sup>. Dentro do intervalo (6.15)

<sup>3</sup>Durante todo este trabalho adotaremos que  $\alpha_0$  está contido neste intervalo.

<sup>4</sup>Modelos  $f(R)$  são estáveis sempre que  $f'(R) > 0$  e  $f''(R) \geq 0$  (Sotiriou; Faraoni, 2010). Para o nosso caso

$$f(R) = R + \frac{1}{2\kappa_0} R^2 + \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2} R^3$$

onde

$$R = 6 \left( \dot{H} + 2H^2 \right) = -\frac{3}{2} \dot{\chi}^2 + 6V(\chi).$$

Durante o regime inflacionário onde  $\dot{\chi}^2 \ll V(\chi)$  e  $\kappa_0 > 0$ , a condição de estabilidade implica em  $\alpha_0 \geq 0$ .

excetuando  $\alpha_0 = 0$ , o potencial possui dois pontos críticos dados por

$$\chi_0 = 0 \rightarrow \text{(ponto de m\u00ednimo)}, \quad (6.16)$$

$$\chi_c = \ln \left( 4 + \sqrt{\frac{3}{\alpha_0}} \right) \rightarrow \text{(ponto de m\u00e1ximo)}. \quad (6.17)$$

O comportamento do potencial para diferentes valores de  $\alpha_0$  \u00e9 visto na figura 6.1.

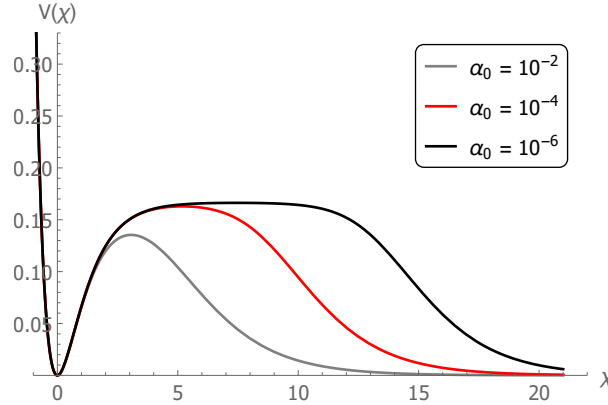


Figura 6.1: Potencial  $V(\chi)$  como fun\u00e7\u00e3o de  $\chi$  normalizado para  $\kappa_0 = 1$ . Os m\u00e1ximos est\u00e3o localizados em  $\chi_c \simeq 3.06, 5.18$  e  $7.46$  para  $\alpha_0 = 10^{-2}, 10^{-4}$  e  $10^{-6}$ , respectivamente.

O plat\u00f4 que surge neste gr\u00e1fico nos d\u00e1 um indicativo de que um regime inflacion\u00e1rio tipo slow-roll pode ser alcan\u00e7ado. Observamos que quanto menor a magnitude de  $\alpha_0$ , mais o ponto  $\chi_c$  se move para a direita e maior se torna o plat\u00f4. Assim, no limite de  $\alpha_0 \rightarrow 0$ , o plat\u00f4 se torna infinito e recuperamos a infla\u00e7\u00e3o de Starobinsky. A estrutura do gr\u00e1fico na figura 1 parece indicar tamb\u00e9m que para  $\chi < \chi_c$  temos um rolamento lento para a esquerda, enquanto que para  $\chi > \chi_c$  temos um rolamento para direita. Para entendermos melhor essa din\u00e2mica devemos realizar um estudo do espa\u00e7o de fase desse modelo.

O espa\u00e7o de fase pode ser estudado combinando as equa\u00e7\u00f5es (6.12) e (6.14) em uma \u00fanica EDO cuja vari\u00e1vel independente \u00e9  $\chi$ . Nesse caso, temos

$$\frac{d\dot{\chi}}{d\chi} = \frac{-3\sqrt{\frac{1}{4}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}V(\chi)\dot{\chi} - V'(\chi)}}{\dot{\chi}}, \quad (6.18)$$

onde  $V(\chi)$  e  $V'(\chi)$  s\u00e3o dados por (6.3) e (6.10), respectivamente. A an\u00e1lise da Eq. (6.18) como um sistema aut\u00f4nomo param\u00e9trico mostra que o espa\u00e7o de fase possui dois pontos cr\u00edticos localizados em  $(\chi, \dot{\chi})_0 = (0, 0)$  e  $(\chi, \dot{\chi})_c = (\chi_c, 0)$  sendo  $\chi_c$  dado em (6.17). Al\u00e9m disso, a lineariza\u00e7\u00e3o deste sistema em torno dos pontos cr\u00edticos mostra que  $(\chi_c, 0)$  \u00e9 um ponto de sela inst\u00e1vel, enquanto que para  $(0, 0)$ , tal caracteriza\u00e7\u00e3o se mostra inconclusiva<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Na descri\u00e7\u00e3o linearizada nas proximidades dos pontos cr\u00edticos do sistema, ao se obter ra\u00edzes imagin\u00e1rias puras associadas, como ocorre em  $(\chi, \dot{\chi})_0 = (0, 0)$ , sua natureza \u00e9 incerta, podendo ser um ponto de centro ou um ponto espiral. A seguir, mostraremos atrav\u00e9s de m\u00e9todos num\u00e9ricos que o ponto cr\u00edtico  $(0, 0)$  \u00e9 de fato um ponto espiral.

A caracterização completa do espaço de fase é realizada a partir de uma análise numérica da Eq. (6.18).

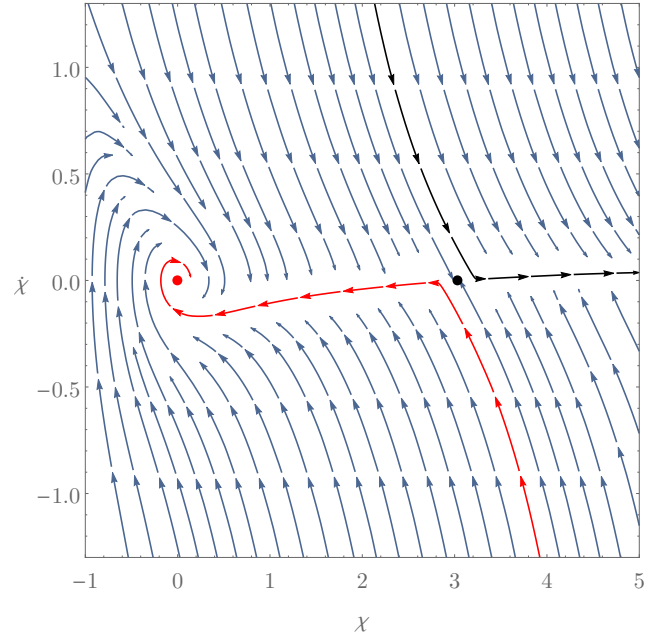


Figura 6.2: Espaço de fase  $(\chi, \dot{\chi})$  considerando  $\kappa_0 = 1$  e  $\alpha_0 = 10^{-2}$ . Os pontos vermelho e preto correspondem aos pontos críticos  $(0, 0)$  e  $(\chi_c, 0)$  com  $\chi_c = 3.06$ , respectivamente. Já as linhas vermelha e preta representam duas trajetórias que caminham em direções opostas com relação ao ponto de sela  $(\chi_c, 0)$ .

A partir da figura 6.2 é possível extrair uma série de conclusões a respeito do espaço de fase do sistema. Próximo de  $\dot{\chi} \approx 0$  existe uma linha atratora na qual uma grande quantidade de condições iniciais conduz a esta linha ( $\chi \gtrsim 2$  e  $\dot{\chi}$  qualquer). Além disso, na sub-região dessa linha atratora que corresponde ao platô do potencial na figura 1, temos um regime tipo slow-roll onde  $\dot{\chi} \ll 1$  e  $\chi$  é pelo menos da ordem da unidade. Como esperado, o regime de slow-roll leva a uma expansão (quase) exponencial que caracteriza a inflação. Isto pode ser identificado explicitamente quando comparamos (6.12) com (6.13). De fato, na região do platô temos  $\dot{\chi}^2 \ll V(\chi)$  (compare os valores numéricos das figuras 1 e 2 nesta região) e assim

$$\left| \frac{\dot{H}}{H^2} \right| \simeq \frac{3\dot{\chi}^2}{2V(\chi)} \ll 1.$$

A condição acima é a condição necessária para que um regime inflacionário tipo slow-roll ocorra.

Um segundo ponto importante é que o ponto crítico  $(\chi_c, 0)$  divide a linha atratora em duas regiões distintas. Se estamos a esquerda deste ponto a rolagem lenta ocorre para a esquerda (linha vermelha da figura 6.2) e inflação se desenrola de forma usual. Neste caso, o campo  $\chi$  caminha em direção ao ponto de crítico  $(0, 0)$  e, ao se aproximar dele, espiralá-la de forma contínua em torno da origem. Esse estágio corresponde a fase de oscilações coerentes que ocorrem no começo do processo de reaquecimento. Já se estamos a direita do ponto  $(\chi_c, 0)$  a rolagem lenta ocorre para a direita (linha preta da figura 6.2) e o campo  $\chi$  cresce de forma indefinida. Nesta segunda região tanto  $\dot{\chi}$  quanto  $V(\chi)$  se aproximam de zero quando  $\chi \gg 1$ .

A partir da discussão anterior e da figura 1, reconhecemos três regiões distintas associadas a dinâmica do campo  $\chi$ : região assintótica onde  $V(\chi) \rightarrow 0$  para  $\chi \gg 1$ , a região do platô onde ocorre o regime inflacionário e a região de oscilação em torno da origem do potencial que caracteriza o término da inflação. Na próxima seção vamos analisar cada uma dessas regiões de forma mais detalhada.

## 6.3 Dinâmica inflacionária do campo escalar

Nesta seção, vamos descrever a evolução do campo  $\chi$  nas três regiões de interesse: região assintótica onde  $V(\chi) \rightarrow 0$  para  $\chi \gg 1$ ; região do platô onde ocorre o regime inflacionário; região de oscilação em torno da origem do potencial que caracteriza o término da inflação.

### 6.3.1 Região assintótica do potencial $V(\chi)$

Vimos na Sec. 6.2 que dependendo das condições iniciais para o campo  $\chi$ , esse campo evolui para a direita no gráfico do espaço de fase (ver figura 2). Nesse caso, o campo  $\chi$  cresce de forma indefinida e alcança uma região assintótica do potencial onde  $V(\chi) \rightarrow 0$ . O objetivo desta seção é analisar a dinâmica cósmica nessa região.

Em uma região suficientemente grande de  $\chi$ , o potencial (6.3) e sua derivada (6.10) se comportam como

$$V(\chi) \approx \frac{2\kappa_0}{9\sqrt{\alpha_0}} e^{-\frac{1}{2}\chi} \quad \text{e} \quad V'(\chi) \approx -\frac{\kappa_0}{9\sqrt{\alpha_0}} e^{-\frac{1}{2}\chi} \quad \text{para } \chi \gg 1.$$

Nesse caso, a equação de campo (6.14) pode ser escrita como

$$\ddot{\chi} + \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{2\kappa_0}{9\sqrt{\alpha_0}} e^{-\frac{1}{2}\chi}} \dot{\chi} - \frac{\kappa_0}{9\sqrt{\alpha_0}} e^{-\frac{1}{2}\chi} \approx 0.$$

Um bom ansatz para soluções dessa equação é  $\dot{\chi} = Ae^{-k\chi}$ . Substituindo essa proposta de solução na equação anterior, encontramos

$$k = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad A = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\kappa_0}{35\sqrt{\alpha_0}}} \Rightarrow \dot{\chi} \approx \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\kappa_0}{35\sqrt{\alpha_0}}} e^{-\frac{1}{4}\chi}.$$

De posse de  $\dot{\chi}$  e  $V(\chi)$ , podemos determinar explicitamente o parâmetro da equação de estado<sup>6</sup>

$$w = \frac{p_\chi}{\rho_\chi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - V(\chi)}{\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + V(\chi)} \approx -\frac{17}{18} \quad \text{para } \chi \gg 1.$$

Esse último resultado mostra que quando o campo rola para a direita partindo do platô do potencial, o parâmetro da equação de estado sai de um valor de  $w \approx -1$  (região

<sup>6</sup>Observe que  $\rho_\chi = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + V(\chi)$  tem dimensão de massa ao quadrado, pois pela escolha adotada  $\chi$  é adimensional.

do platô) e se encaminha assintoticamente para  $w \approx - (17/18)$ . Ou seja, a dinâmica inflacionária migra de um regime (quase) de Sitter para uma inflação do tipo lei de potência com  $a \sim t^{12}$ . Portanto, nessa região, a expansão acelerada nunca termina. Isso mostra explicitamente que a existência do ponto crítico  $(\chi_c, 0)$  limita as condições iniciais favoráveis a uma inflação física i.e. uma inflação que se conecta a um modelo de Big-Bang quente tipo era da radiação. Para mais discussões sobre o quão limitadas são as condições iniciais para a ocorrência de um regime inflacionário consistente, veja a Sec.6.4.3.

### 6.3.2 Regime inflacionário em ordem dominante de slow-roll

Nesta seção, investigaremos o regime inflacionário de slow-roll que ocorre na região do platô da figura 1. Em ordem dominante de slow-roll, as equações (6.14) e (6.12) são aproximadas por

$$3H\dot{\chi} \approx -V', \quad (6.19)$$

$$H^2 \approx \frac{1}{2}V(\chi), \quad (6.20)$$

que quando combinadas resultam em

$$\dot{\chi}(\chi) \approx -\frac{\sqrt{2}V'}{3\sqrt{V}}. \quad (6.21)$$

O próximo passo é obter  $V$  e  $V'$  em ordem dominante de slow-roll. Definindo o parâmetro de slow-roll,  $\delta \equiv e^{-\chi}$ , escrevemos o potencial (6.3) como

$$V(\chi) = -\frac{\kappa_0}{72\alpha_0^2} \left( -\delta + \delta\sqrt{1 - 4\alpha_0\delta^{-1}(\delta - 1)} \right) \times \\ \times \left[ -\delta + 8\alpha_0(\delta - 1) + \delta\sqrt{1 - 4\alpha_0\delta^{-1}(\delta - 1)} \right].$$

Além disso, sabemos que o valor máximo do potencial condizente com um regime inflacionário físico ocorre para  $V(\chi_c)$ , onde

$$e^{\chi_c} = 4 + \sqrt{\frac{3}{\alpha_0}} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{3}{(e^{\chi_c} - 4)^2}.$$

Assim, em ordem dominante de slow-roll, temos

$$\alpha_0 \approx \frac{3}{e^{2\chi_c}} \equiv 3\delta_c^2. \quad (6.22)$$

Como o valor mínimo de  $\delta$  condizente com uma inflação física é  $\delta_c$ , temos

$$4\alpha_0\delta^{-1} \approx 12\delta_c^2\delta^{-1} \lesssim 12\delta \ll 1. \quad (6.23)$$

A relação acima mostra que a quantidade  $4\alpha_0\delta^{-1}$  contribui no máximo em primeira ordem de slow-roll.

A partir das considerações anteriores, podemos aproximar o potencial e suas derivadas por

$$V(\chi) \approx \frac{\kappa_0}{6} \left( 1 - 2\delta - \frac{2}{3}\delta^{-1}\alpha_0 \right), \quad (6.24)$$

$$V'(\chi) \approx \frac{\kappa_0}{3} \left( \delta - \frac{1}{3}\delta^{-1}\alpha_0 \right), \quad (6.25)$$

$$V''(\chi) \approx -\frac{1}{3}\kappa_0 \left( \delta + \frac{1}{3}\alpha_0\delta^{-1} \right). \quad (6.26)$$

Uma vez determinado  $V(\chi)$  e  $V'(\chi)$  aproximados, podemos calcular  $\dot{\chi}$  em ordem dominante de slow-roll. Partindo de Eq. (6.21), temos

$$\dot{\chi} \approx -\frac{\sqrt{2}V'}{3\sqrt{V}} \Rightarrow \dot{\chi} \approx -\frac{2\sqrt{3}\kappa_0}{9} \left( \delta - \delta_c^2\delta^{-1} \right). \quad (6.27)$$

Ou seja, em ordem dominante de slow-roll, temos  $\dot{\chi} \sim \delta$  mais uma correção proporcional a  $\delta_c^2\delta^{-1} \lesssim \delta$ .

De posse dos resultados anteriores, podemos calcular os parâmetros de slow-roll

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \text{ e } \eta \equiv -\frac{1}{H} \dot{\epsilon}. \quad (6.28)$$

Utilizando as Eqs. (6.13), (6.20), (6.24) e (6.27), obtemos em ordem dominante de slow-roll

$$\epsilon \approx \frac{4}{3} \left( \delta - \delta^{-1}\delta_c^2 \right)^2, \quad (6.29)$$

$$\eta \approx -\frac{8}{3} \left( \delta + \delta^{-1}\delta_c^2 \right). \quad (6.30)$$

Essas duas expressões deixam claro que para  $\delta \ll 1$ , temos  $\epsilon \ll 1$  e  $\eta \ll 1$ , e portanto estamos em regime de expansão (quase) de Sitter.

O próximo passo é calcular o número de  $e$ -folds  $N$ . Utilizando as Eqs. (6.24) e (6.25), temos

$$N = \int_t^{t_e} H dt \approx \frac{3}{4} \int_{\delta}^{\delta_e} \frac{1 - 2\delta - 2\delta^{-1}\delta_c^2}{\delta - \delta^{-1}\delta_c^2} \frac{d\delta}{\delta}, \quad (6.31)$$

onde  $\delta_e$  corresponde a  $\delta$  calculado no fim da inflação e pode ser obtido impondo  $\epsilon = 1$ . A expressão (6.31) pode ser integrada mais facilmente se definirmos  $x = \delta_c/\delta$ . Nesse caso

$$N \approx \frac{3}{4\delta_c} \int_{x_e}^x \frac{x - 2\delta_c - 2x^2\delta_c}{(1 - x^2)x} dx. \quad (6.32)$$

Como vimos anteriormente, a inflação física ocorre no intervalo de

$$0 < \chi \leq \chi_c \Rightarrow \delta_c < x \leq 1.$$

Dentro desse intervalo, o integrando em Eq. (6.32) possui uma divergência no ponto  $x = 1$  ( $\chi = \chi_c$ ). Matematicamente, a origem desta divergência está associada a existência do ponto crítico  $(\chi, \dot{\chi}) = (\chi_c, 0)$  na linha atratora do espaço de fase<sup>7</sup>. Já do ponto de vista físico, essa divergência deve ser entendida como um caso limite que ocorre somente quando as condições iniciais são ajustadas com precisão infinita para que a solução passe pelo ponto crítico  $(\chi, \dot{\chi}) = (\chi_c, 0)$ . Nesse caso idealizado, ao atingir o ponto crítico o campo permanece nele, em equilíbrio instável, e o universo atinge um estado puro de de Sitter. Condições iniciais ajustadas com precisão infinita não são fisicamente realizáveis. Contudo, podemos através de um ajuste fino nessas condições aumentar o número de  $e$ -folds para um valor arbitrariamente grande. Na seção 6.4.3, veremos o quão preciso deve ser este ajuste para que alcancemos um valor específico no número de  $e$ -folds.

Integrando Eq. (6.32) em ordem dominante de slow-roll e considerando que  $x_{end} \ll 1$ , obtemos

$$N \approx \frac{3}{8\delta_c} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \approx \frac{3}{4\delta} \left( 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} + \dots \right). \quad (6.33)$$

Observe que  $N$  diverge quando  $x \rightarrow 1$ . Essa última expressão pode ser invertida explicitamente resultando em

$$\delta = \delta_c \left[ \frac{\exp \left( \frac{8\delta_c N}{3} \right) + 1}{\exp \left( \frac{8\delta_c N}{3} \right) - 1} \right]. \quad (6.34)$$

Por fim, é conveniente escrever os parâmetros de slow-roll  $\epsilon$  e  $\eta$  em termos do número de  $e$ -folds. Substituindo Eq. (6.34) nas Eqs. (6.29) e (6.30), obtemos

$$\epsilon \approx \frac{4^3}{3} \delta_c^2 \frac{\exp \left( \frac{16\delta_c N}{3} \right)}{\left[ 1 - \exp \left( \frac{16\delta_c N}{3} \right) \right]^2}, \quad (6.35)$$

$$\eta \approx \frac{16}{3} \delta_c \left[ \frac{1 + \exp \left( \frac{16\delta_c N}{3} \right)}{1 - \exp \left( \frac{16\delta_c N}{3} \right)} \right]. \quad (6.36)$$

Vale observar ainda que em uma região onde  $\delta_c \ll \delta \Rightarrow \delta_c N \ll 1$ , os parâmetros de slow-roll acima podem ser aproximados por

$$\epsilon \approx \frac{3}{4N^2} \left[ 1 - \frac{1}{12} \left( \frac{16\delta_c N}{3} \right)^2 \right],$$

$$\eta \approx -\frac{2}{N} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{16\delta_c N}{3} \right)^2 \right],$$

onde  $\delta_c N$  leva em conta as primeiras correções a inflação de Starobinsky.

<sup>7</sup>Observe que isso é uma característica única do modelo contendo  $R^3$ . De fato, para o modelo puro de Starobinsky isso não ocorre, uma vez  $\dot{\chi}$  é sempre diferente de zero na linha atratora.

### 6.3.3 Término da inflação e reaquecimento

Nesta seção, investigaremos o término da inflação e o período do reaquecimento. De forma relativamente geral, essa fase pode ser dividida em duas partes: preheating e termalização. A fase do preheating corresponde a fase inicial do reaquecimento onde uma grande quantidade de partículas de matéria é gerada a partir de um processo conhecido como ressonância paramétrica. Esse processo surge assumindo que a transferência de energia do campo inflaton para os campos de matéria ocorre quando o inflaton oscila coerentemente em torno do mínimo do potencial (KOFMAN et al., 1997; BASSETT et al., 2006a). Como o preheating é um processo essencialmente não térmico, se faz necessário um estágio de termalização para que o universo alcance um estado de domínio da radiação com a matéria em equilíbrio termodinâmico. Para detalhes sobre a fase de reaquecimento ver Refs. (AMIN et al., 2014; LOZANOV, 2019).

A descrição detalhada de todo o período de reaquecimento é complexa, pois ela envolve efeitos não perturbativos fora do equilíbrio e depende dos processos de interação entre o inflaton e os campos de matéria. Contudo, de uma perspectiva fenomenológica podemos estudar a dinâmica cósmica deste período através de uma equação de estado<sup>8</sup>

$$p = w_{re}(N) \varepsilon, \quad (6.37)$$

onde o número de  $e$ -folds  $N$  leva em conta a dependência temporal de  $w_{re}$ . Por construção, no final do reaquecimento, isto é, início de uma era da radiação, o parâmetro  $w_{re}$  da equação de estado deve valer  $1/3$ . Já no início do reaquecimento, o parâmetro  $w_{re}$  depende da forma do potencial durante a fase de oscilações coerentes. Expandindo o potencial (6.3) em torno do mínimo  $\chi = 0$ , temos

$$V(\chi) \approx \frac{1}{2} V''(0) \chi^2 = \frac{\kappa_0}{6} \chi^2. \quad (6.38)$$

Considerando o comportamento médio do campo  $\chi$  em torno deste mínimo e levando em conta que  $V \sim \chi^2$  obtemos  $\langle w_{re} \rangle \approx 0$  (TURNER, 1983; MUKHANOV, 2005). Assim, no começo do reaquecimento o universo se comporta como em uma era de domínio da matéria. Portanto, durante a fase de reaquecimento  $w_{re}(N)$  transita de 0 (domínio da matéria) para  $1/3$  (era da radiação).

Uma quantidade importante na caracterização do reaquecimento é a temperatura de termalização  $T_{re}$  alcançada no início do domínio da radiação (término do reaquecimento). Essa temperatura se relaciona com a densidade de energia  $\varepsilon_{re}$  através da expressão

$$\varepsilon_{re} = \frac{\pi^2}{30} g_{re} T_{re}^4 \quad (6.39)$$

<sup>8</sup>Nesta seção, adotaremos a dimensão usual de massa a quarta para  $\varepsilon$ . A relação desta quantidade com  $\varepsilon_\chi$  é

$$\varepsilon = \frac{3M_{Pl}^2}{2} \varepsilon_\chi,$$

onde

$$\varepsilon_\chi = \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + V(\chi).$$

Veja Eq. (6.5) para detalhes de notação.

onde  $g_{re}$  é o número efetivo de graus de liberdade relativístico ao final do reaquecimento.<sup>9</sup> Por outro lado, pelas equações de estado (6.37) e de conservação covariante podemos relacionar  $\rho_{re}$  com a densidade de energia  $\rho_e$  ao final da inflação

$$\dot{\varepsilon} = -3H\varepsilon [1 + w_{re}(N)] \Rightarrow \varepsilon_{re} = \varepsilon_e e^{-3N_{re}(1+w_a)}, \quad (6.40)$$

onde o número de  $e$ -folds  $N_{re}$  caracteriza a duração do período de reaquecimento e

$$w_a \equiv \frac{1}{N_{re}} \int_0^{N_{re}} w_{re}(N) dN. \quad (6.41)$$

Observe que a quantidade  $w_a$  representa a média do parâmetro  $w_{re}$  durante o reaquecimento. Além disso, para  $w_{re}$  monotonicamente crescente<sup>10</sup> temos

$$0 < w_a < 1/3, \quad (6.42)$$

sendo que quanto mais próxima de  $1/3$  mais efetivo é o reaquecimento. Combinando as Eqs. (6.39) e (6.40), obtemos a temperatura de reaquecimento em termos de  $w_a$  e  $N_{re}$

$$T_{re} = \left( \frac{30\varepsilon_e}{g_{re}\pi^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{3}{4} (1 + w_a) N_{re} \right]. \quad (6.43)$$

O próximo passo é obter  $N_{re}$  em termos de quantidades cosmológicas de interesse. Para isso será necessário "acompanhar" a evolução da escala  $k$  desde o momento que ela cruza o horizonte durante a inflação até os dias atuais. Ao cruzar o horizonte podemos escrever  $k = a_k H_k$ , onde  $a_k H_k$  é o raio de Hubble comóvel no instante de saída do horizonte. A partir dessa relação, podemos escrever (MUNOZ; KAMIONKOWSKI, 2015; MISHRA et al., 2021)

$$\frac{k}{a_0 H_k} = \left( \frac{a_k}{a_e} \right) \left( \frac{a_e}{a_{re}} \right) \left( \frac{a_{re}}{a_{eq}} \right) \left( \frac{a_{eq}}{a_0} \right), \quad (6.44)$$

onde  $a_e$ ,  $a_{re}$ ,  $a_{eq}$  e  $a_0$  são os valores do fator de escala no término da inflação, no começo da era da radiação, no instante de equivalência e nos dias atuais, respectivamente. Cada uma das frações acima representa uma era específica de expansão cósmica<sup>11</sup>:

$\frac{a_k}{a_e}$	→ Período inflacionário contado a partir do instante de saída do horizonte da escala $k$ ;
$\frac{a_e}{a_{re}}$	→ Período de reaquecimento;
$\frac{a_{re}}{a_{eq}}$	→ Era de domínio da radiação;
$\frac{a_{eq}}{a_0}$	→ Era de domínio da matéria até os dias atuais.

O passo seguinte é tomar o logaritmo da Eq. (6.44):

$$\ln \left( \frac{k}{a_0 H_k} \right) = -N_k - N_{re} + \ln \left( \frac{a_{re}}{a_{eq}} \right) + \ln \left( \frac{a_{eq}}{a_0} \right) \quad (6.45)$$

<sup>9</sup>Considerando apenas partículas do modelo padrão temos  $g_{re} = 106.75$  (HUSDAL, 2016).

<sup>10</sup>Modelagens numéricas via lattice simulations indicam um comportamento primordialmente monotônico para a equação de estado do reaquecimento (LOZANOV; AMIN, 2018; MAITY; SAHA, 2019; SAHA et al., 2020).

<sup>11</sup>Observe que estamos ignorando a fase de domínio da energia escura, uma vez que ela só é relevante muito próximo dos dias atuais.

onde  $N_{re} = \ln\left(\frac{a_{re}}{a_e}\right)$  e  $N_k = \ln\left(\frac{a_e}{a_k}\right)$  sendo este último o número de  $e$ -folds do período inflacionário medido desde a saída do horizonte da escala  $k$ . Os dois últimos termos da equação anterior podem ser reescritos levando em conta a conservação de entropia  $S = g a^3 T^3$  nas eras de domínio da radiação e matéria (KOLB; TURNER, 1990)(HUSDAL, 2016). Nesse caso, podemos escrever

$$T_{eq} = \frac{a_0}{a_{eq}} T_0 \text{ e } T_{eq} = \left(\frac{a_{re}}{a_{eq}}\right) \left(\frac{g_{re}}{g_0}\right)^{\frac{1}{3}} T_{re} \quad (6.46)$$

onde consideramos que os graus de liberdade relativísticos na equivalência e nos dias atuais são idênticos, isto é,  $g_0 = g_{eq}$ .<sup>12</sup> Substituindo as Eqs. (6.43) e (6.46) em Eq. (6.45), obtemos

$$N_{re} = \frac{4}{3\left(w_a - \frac{1}{3}\right)} \left\{ N_k + \ln\left(\frac{\rho_e^{1/4}}{H_k}\right) + \ln\left[\left(\frac{k}{a_0 T_0}\right) \left(\frac{30}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{g_{re}}{g_0^4}\right)^{\frac{1}{12}}\right] \right\}. \quad (6.47)$$

As expressões (6.47) e (6.43), que determinam a duração e temperatura do reaquecimento, são gerais e valem para uma ampla gama de modelos inflacionários. Para particularizar estas expressões para o nosso modelo é necessário determinar explicitamente a densidade de energia ao final da inflação. Em modelos de um único campo,  $\rho_e$  pode ser escrita em termos do potencial  $\tilde{V}_e = \frac{3M_{Pl}^2}{2} V(\chi_e)$ , dado em (6.5). Impondo  $\epsilon = 1$  (término da inflação), obtemos por Eqs. (6.12), (6.13) e (6.28) que  $V(\chi_e) = \dot{\chi}_e^2$ . Assim,

$$\epsilon_e = \frac{3}{2} \tilde{V}_e = \frac{9M_{Pl}^2}{4} V(\chi_e). \quad (6.48)$$

Pela Eq. (6.23), vimos que  $\alpha_0$  é uma quantidade pequena tipicamente de segunda ordem em slow-roll. Assim, no final da inflação termos do tipo  $4\alpha_0 e^{\chi_e}$  que aparecem no potencial são desprezíveis e a Eq. (6.3) pode ser aproximada pelo potencial de Starobinsky

$$V(\chi_e) \approx \frac{\kappa_0}{6} (1 - e^{-\chi_e})^2. \quad (6.49)$$

Uma estimativa para  $\chi_e$  é obtida impondo  $\epsilon = 1$  na expressão aproximada em slow-roll para o parâmetro  $\epsilon$ :

$$\epsilon \approx \frac{1}{3} \left( \frac{V'(\chi_e)}{V(\chi_e)} \right)^2 = 1 \Rightarrow e^{-\chi_e} \approx 2\sqrt{3} - 3. \quad (6.50)$$

Assim, substituindo Eqs. (6.50) e (6.49) em Eq. (6.48), obtemos a densidade de energia ao final da inflação:

$$\epsilon_e \approx \frac{3\zeta^4}{4} (2 - \sqrt{3})^2 M_{Pl}^4, \quad (6.51)$$

<sup>12</sup>Considerando apenas partículas do modelo padrão e desprezando as massas dos neutrinos temos  $g_0 = 3.94$  (HUSDAL, 2016).

onde o parâmetro adimensional  $\zeta$  é definido como

$$\zeta \equiv \left( \frac{\kappa_0}{M_{Pl}^2} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (6.52)$$

Portanto, considerando  $H_k$  em ordem dominante de slow-roll ( $H_k^2 \approx \kappa_0/12$ ) e substituindo Eq. (6.51) nas Eqs. (6.47) e (6.43), obtemos

$$N_{re} = \frac{4}{1-3w_a} \left[ -N_k - 0.79 + \ln \left( \frac{a_0 T_0 \zeta}{k} \right) + \frac{1}{12} \ln \left( \frac{g_0^4}{g_{re}^4} \right) \right], \quad (6.53)$$

e

$$T_{re} = \frac{0.64\zeta}{g_{re}^{1/4}} \exp \left[ -\frac{3}{4} (1+w_a) N_{re} \right] M_{Pl}. \quad (6.54)$$

Veremos na próxima seção como vínculos em  $N_{re}$  e  $T_{re}$  restringem o intervalo do número de  $e$ -folds  $N_k$  da inflação.

## 6.4 Vínculos observacionais

Baseado no desenvolvimento das seções anteriores, vamos estabelecer vínculos ao modelo inflacionário em questão. Esses vínculos seguem diferentes abordagens e estão relacionados aos períodos de antes, durante e depois do regime inflacionário.

### 6.4.1 Intervalo no número de $e$ -folds $N_k$ da inflação

A descrição do período do reaquecimento como apresentado na seção 6.3.3 em conjunto com a suposição de eras posteriores de domínio da radiação e matéria, nos permite estabelecer um intervalo para o número de  $e$ -folds  $N_k$  da inflação. Para isso é necessário fornecer alguns detalhes sobre as características mínimas do período de reaquecimento a ser considerado.

O período cosmológico que compreende escalas de energia acima de  $10^4$  GeV até o término da inflação  $10^{15} - 10^{16}$  GeV é um período incerto para a física de partículas. De fato, extensões do modelo padrão em conjunto com possíveis acoplamentos não mínimos podem propiciar processos extras de acoplamento do ínflaton com os campos de matéria. Contudo, mesmo que esses novos processos não estejam presentes (ou não sejam relevantes para o reaquecimento), podemos adotar como hipótese mínima os acoplamentos usuais dos campos do modelo padrão com a gravitação. Nesse contexto, já no frame de Einstein, isso significa que o campo ínflaton  $\phi$  decai predominantemente no dubleto de Higgs  $h$  e em segunda ordem em um par de glúons. Considerando esses dois canais de decaimento, a taxa de decaimento do ínflaton é dada por (GORBUNOV; TOKAREVA, 2013; BERNAL et al., 2020)

$$\Gamma_\phi \approx \frac{1}{24\pi} \left[ (1-6\zeta)^2 + \frac{49\alpha_s^2}{4\pi^2} \right] \frac{m_\phi^3}{M_{Pl}^2}, \quad (6.55)$$

onde  $\zeta$  é a constante de acoplamento não mínima entre o Higgs e a gravitação, isto é,  $\zeta |h|^2 R$ ,<sup>13</sup>  $\alpha_s$  é a constante de acoplamento da cromodinâmica quântica (*quantum chromodynamics*,) QCD na escala de energia do reaquecimento<sup>14</sup> e  $m_\phi$  é a massa efetiva do inflaton dada por

$$m_\phi^2 \equiv V''(0) = \frac{\zeta^4}{3} M_{Pl}^2. \quad (6.56)$$

O próximo passo é determinar  $\zeta$  em termos dos parâmetros do modelo e da amplitude escalar  $A_s$  medida pelo satélite Planck (AGHANIM et al., 2020). Considerando a escala de pivô  $k = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$  como escala de interesse<sup>15</sup>, temos em ordem dominante de slow-roll (BAUMANN, 2018)

$$A_s = \frac{3}{16\pi^2 M_p^2} \frac{V_k^3}{V_k'^2}, \quad (6.57)$$

onde a amplitude escalar  $A_s^{0.002} = 2.3 \times 10^{-9}$  é obtida a partir da expressão  $A_s^k = A_s^*(k/k^*)^{n_s-1}$  considerando que  $A_s^* = 2.1 \times 10^{-9}$ ,  $k^* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$  e  $n_s = 0.9665$ . Veja Ref. (AGHANIM et al., 2020) para detalhes.

Assim, substituindo Eqs. (6.24) e (6.25) em Eq. (6.57), obtemos

$$\kappa_0 \approx 2^7 \pi^2 M_{Pl}^2 A_s^{0.002} \left( \delta_k - \frac{1}{3} \delta_k^{-1} \alpha_0 \right)^2.$$

Além disso, podemos reescrever a equação acima em termos do número de  $e$ -folds  $N_k$  e do parâmetro  $\zeta$  dados em Eqs. (6.34) e (6.52), respectivamente:

$$\zeta^4 \approx 2^{11} \pi^2 A_s^{0.002} \left[ \frac{\delta_c \exp\left(\frac{8}{3} \delta_c N_k\right)}{\exp\left(\frac{16}{3} \delta_c N_k\right) - 1} \right]^2, \quad (6.58)$$

lembrando que  $\alpha_0 \approx 3\delta_c^2$ . No caso de  $\delta_c \rightarrow 0$ , recuperamos a conhecida relação do modelo de Starobinsky  $\zeta^4 \approx 72\pi^2 A_s^{0.002} N_k^{-2}$ .

Tendo determinado a taxa de decaimento do inflaton, podemos estimar a temperatura de reaquecimento  $T_{re}$  da seguinte maneira. O equilíbrio térmico do fluido cósmico é alcançado quando  $\Gamma_\phi \sim H$  (KOFMAN et al., 1997). Assim, a temperatura de reaquecimento pode ser obtida a partir de  $3M_{Pl}^2 H_{re}^2 = \epsilon_{re} = \pi^2 g_{re} T_{re}^4/30$ , que resulta em

$$T_{re} \approx 0.5 \sqrt{\Gamma_\phi M_{Pl}} \approx 6 \times 10^{16} \zeta^3 \sqrt{\left[ (1 - 6\zeta)^2 + \frac{49\alpha_s^2}{4\pi^2} \right]} \text{ GeV}, \quad (6.59)$$

<sup>13</sup>O acoplamento não mínimo é necessário devido a questões de renormalizabilidade de campos escalares em espaços curvos (CALLAN et al., 1970).

<sup>14</sup>Extrapolando os resultados experimentais do running coupling de  $a_s$  (ALEKHIN et al., 2015), podemos estimar que durante o reaquecimento  $0.01 \lesssim \alpha_s \lesssim 0.03$ .

<sup>15</sup>Usamos esta escala de pivô em concordância as observações apresentadas em Refs. (AKRAMI et al., 2018; ADE et al., 2021) associadas às observações  $n_s \times r_{0.002}$ .

onde usamos  $g_{re} = 106.75$  e  $M_{Pl} = 2.4 \times 10^{18}$  GeV. Observe que o valor de  $T_{re}$  acima depende dos parâmetros inflacionários através de  $\zeta$ . Substituindo a Eq. (6.58) na Eq. (6.59), obtemos

$$T_{re} \approx 3.4 \times 10^{13} \left[ \frac{\delta_c \exp\left(\frac{8}{3}\delta_c N_k\right)}{\exp\left(\frac{16}{3}\delta_c N_k\right) - 1} \right]^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1 - 6\zeta)^2 + \frac{49\alpha_s^2}{4\pi^2}} \text{ GeV.} \quad (6.60)$$

Baseado na Eq. (6.60), podemos estimar a ordem de grandeza da temperatura de reaquecimento. Considerando  $N_k = 50$  e  $\delta_c = 0$  (Starobinsky), temos (GORBUNOV; TOKAREVA, 2013)

$$T_{re} \sim \begin{cases} 10^{10} |1 - 6\zeta| \text{ GeV} & \text{se } \zeta \neq 1/6 \\ 10^8 \text{ GeV} & \text{se } \zeta = 1/6 \end{cases},$$

onde adotamos  $\alpha_s \sim 10^{-2}$ . Apesar de  $T_{re}$  depender do valor de  $\zeta$ ,<sup>16</sup> a expressão acima fornece uma estimativa mínima para  $T_{re}$ . De fato, mesmo o campo de Higgs possuindo um acoplamento conforme com a gravitação, isto é,  $\zeta = 1/6$ , o canal de decaimento do ínflaton em dois gluons fornece uma  $T_{re} \sim 10^8$  GeV.

A construção anterior permite estabelecer uma temperatura mínima  $T_{re}^{(\min)}$  de forma relativamente independente dos detalhes da fase de reaquecimento. De fato, mesmo considerando hipóteses mínimas para o reaquecimento e um acoplamento conforme do Higgs com a gravitação, temos que

$$\begin{aligned} T_{re}^{(\min)} &\approx 3.4 \times 10^{13} \left( \frac{7\alpha_s}{2\pi} \right) \left[ \frac{\delta_c \exp\left(\frac{8}{3}\delta_c N_k\right)}{\exp\left(\frac{16}{3}\delta_c N_k\right) - 1} \right]^{\frac{3}{2}} \text{ GeV} \\ &\approx 3.8 \times 10^{11} \left[ \frac{\delta_c \exp\left(\frac{8}{3}\delta_c N_k\right)}{\exp\left(\frac{16}{3}\delta_c N_k\right) - 1} \right]^{\frac{3}{2}} \text{ GeV.} \end{aligned} \quad (6.61)$$

Uma vez caracterizada a fase do reaquecimento, vejamos como as expressões de  $N_{re}$  e  $T_{re}$  obtidas ao final da Sec. 6.3.3, fornecem restrições para o número de  $e$ -folds  $N_k$ .

Considerando a escala de interesse  $k = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $T_0 = 2.73 \text{ K}$ ,  $g_{re} = 106.75$  and  $g_0 = 3.94$ , podemos reescrever a Eq. (6.53) como<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} N_{re} &= \frac{4}{1 - 3w_a} [64.36 - N_k + \ln(\zeta)] \\ &= \frac{4}{1 - 3w_a} \left\{ 61.87 - N_k + \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\delta_c \exp\left(\frac{8}{3}\delta_c N_k\right)}{\exp\left(\frac{16}{3}\delta_c N_k\right) - 1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

<sup>16</sup>O debate sobre o intervalo de valores permitidos para  $\zeta$  é complexo e está diretamente relacionado à estabilidade do campo de Higgs a altas energias. Essa análise depende de diversos fatores tais como o valor da massa do quark top e o running coupling de  $\zeta$  em um background de Friedmann (HERRANEN et al., 2015; MARKKANEN et al., 2018).

<sup>17</sup>Recuperando as unidades temos  $\log\left(\frac{k}{a_0 T_0}\right) = \ln\left(\frac{k\hbar}{a_0 T_0 k_B}\right) = -65.079$ .

O limite superior para  $N_k$  é obtido levando em conta que por consistência física  $N_{re} \geq 0$ . Assim, devido a Eq. (6.42), temos

$$N_k - \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\delta_c \exp\left(\frac{8}{3}\delta_c N_k\right)}{\exp\left(\frac{16}{3}\delta_c N_k\right) - 1} \right] \leq 61.87. \quad (6.63)$$

A tabela 6.1 mostra os limites superiores de  $N_k$  para diferentes valores de  $\alpha_0$ .

Tabela 6.1: Valores máximos para  $N_k$  considerando diferentes valores de  $\alpha_0$ . Observe que a existência de um período mínimo de slow-roll consistente com as aproximações feitas na Sec. 6.3.2 exige que  $\alpha_0 \lesssim 10^{-3}$ .

$\alpha_0$	$\delta_c$	$N_k$
0	0	58.99
$10^{-5}$	$1.85 \times 10^{-3}$	58.99
$10^{-4}$	$5.8 \times 10^{-3}$	58.92
$5 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-2}$	58.69
$10^{-3}$	$1.83 \times 10^{-2}$	58.45

Já o limite inferior para o número de  $e$ -folds  $N_k$  é obtido levando em conta que  $T_{re} \gtrsim T_{re}^{(\min)}$ . Assim, utilizando as Eqs. (6.54), (6.58), (6.61) e (6.62), temos

$$\left[ \frac{\exp\left(\frac{16}{3}\delta_c N_k\right) - 1}{\delta_c \exp\left(\frac{8}{3}\delta_c N_k\right)} \right] \exp \left[ -\frac{3(1+w_a)}{1-3w_a} \bar{N}_{re} \right] \gtrsim 10^{-5}, \quad (6.64)$$

onde

$$\bar{N}_{re} = 61.87 - N_k + \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\delta_c \exp\left(\frac{8}{3}\delta_c N_k\right)}{\exp\left(\frac{16}{3}\delta_c N_k\right) - 1} \right]. \quad (6.65)$$

Pela expressão (6.65), vemos que conforme  $N_k$  diminui,  $\bar{N}_{re}$  aumenta e consequentemente a exponencial que contém  $\bar{N}_{re}$  reduz o valor do l.h.s. da expressão (6.64). A velocidade de decaimento desta exponencial depende do coeficiente

$$3 < \frac{3(1+w_a)}{1-3w_a} < \infty,$$

onde os limites inferior e superior foram estabelecidos a partir da Eq. (6.42). Assim, para que o vínculo inferior em  $N_k$  seja robusto, isto é, relativamente independente dos detalhes do reaquecimento, devemos adotar  $w_a \rightarrow 0$  em (6.64).<sup>18</sup> Nesse caso, a expressão (6.64) é reescrita como

$$\left[ \frac{\exp\left(\frac{16}{3}\delta_c N_k\right) - 1}{\delta_c \exp\left(\frac{8}{3}\delta_c N_k\right)} \right] \exp \left\{ -3 \left[ 61.87 - N_k + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\delta_c \exp\left(\frac{8}{3}\delta_c N_k\right)}{\exp\left(\frac{16}{3}\delta_c N_k\right) - 1} \right) \right] \right\} \gtrsim 10^{-5}. \quad (6.66)$$

Tabela 6.2: Valores mínimos para  $N_k$  considerando diferentes valores de  $\alpha_0$ . Como no caso anterior,  $\alpha_0$  está limitado por  $\alpha_0 \lesssim 10^{-3}$ .

$\alpha_0$	$\delta_c$	$N_k$
0	0	53.32
$10^{-5}$	$1.85 \times 10^{-3}$	53.31
$10^{-4}$	$5.8 \times 10^{-3}$	53.23
$5 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-2}$	52.91
$10^{-3}$	$1.83 \times 10^{-2}$	52.57

A tabela 6.2 mostra limites inferiores de  $N_k$  para diferentes valores de  $\alpha_0$ .

Vemos das tabelas 6.1 e 6.2 que para  $\alpha_0 \leq 10^{-3}$  a variação de  $N_k$  é de no máximo 0.75. Portanto, baseado nestas tabelas e considerando a variação máxima permitida para  $N_k$ , adotaremos o seguinte intervalo para o número de  $e$ -folds:

$$52 \leq N_k \leq 59. \quad (6.67)$$

Apesar de não ser um intervalo muito restritivo, ele foi obtido a partir de considerações bastante gerais. Nesse sentido, o resultado acima é bastante robusto e pouco dependente dos detalhes das eras de reaquecimento, radiação e matéria que caracterizam o universo pós-inflacionário. Esse intervalo de  $N_k$  será usado nas próximas seções.

A modelagem anterior foi desenvolvida utilizando a temperatura de equilíbrio térmico. No entanto, em alguns modelos inflacionários, a temperatura de reaquecimento  $T_{re}$  é estabelecida muito depois do equilíbrio entre as taxas de decaimento  $\Gamma_\phi$  e de expansão  $H$  (ALLAHVERDI et al., 2010; ALLAHVERDI; MAZUMDAR, 2006; ALLAHVERDI; MAZUMDAR, 2005). Nesse caso, ainda podemos obter um resultado idêntico à Eq. (6.67), mas usando uma abordagem diferente. Podemos tratar o problema não através de uma temperatura de reaquecimento  $T_{re}$ , dada na Eq. (6.59), mas através de uma densidade de energia quase térmica e de uma taxa de decaimento de um universo em uma fase quase térmica. Neste caso, a relação  $\varepsilon_{qt} = 3M_{Pl}^2 \Gamma_\phi^2$  é preservada e, à semelhança do que foi desenvolvido anteriormente, podemos estabelecer uma densidade de energia quase térmica mínima

$$\varepsilon_{qt}^{(\min)} \approx 10^{48} \left[ \frac{\delta_c \exp\left(\frac{8}{3}\delta_c N_k\right)}{\exp\left(\frac{16}{3}\delta_c N_k\right) - 1} \right] \text{GeV}^4,$$

com a qual estabelecemos o resultado robusto para o limite inferior do número de  $e$ -folds  $N_k$  e, conseqüentemente, a restrição Eq. (6.67).

## 6.4.2 Vínculos obtidos a partir das anisotropias da RCF

Uma das principais motivações para o paradigma inflacionário é a geração de flutuações iniciais causalmente ligadas que fornecem as condições iniciais para o

<sup>18</sup>Observe que quando  $w_a \rightarrow 0$ , o processo de termalização ocorre de forma mais lenta possível.

processo de formação de estrutura. Essas flutuações surgem a partir da quantização das perturbações de métrica e do(s) campo(s) ínflaton(s) (MUKHANOV et al., 1992; MUKHANOV, 2005). Para detalhes, veja Secs. 5.3 e 5.4.

Na imensa maioria dos casos, as perturbações relevantes produzidas pelos modelos inflacionários são perturbações do tipo escalar e tensorial. As perturbações escalares são as responsáveis por gerar as inomogeneidades primordiais, enquanto que as perturbações tensoriais (ondas gravitacionais) carregam informações diretamente do período inflacionário. Nos modelos mais simples envolvendo apenas um campo escalar canônico acoplado minimamente com a relatividade geral<sup>19</sup>, as perturbações escalares e tensoriais são caracterizadas predominantemente por quatro parâmetros: amplitudes escalar e tensorial  $A_s$  e  $A_t$ , respectivamente; e índices espectrais escalar e tensorial,  $n_s$  e  $n_t$  respectivamente. Desses quatro parâmetros apenas três são independentes, pois  $n_t$  pode ser escrito como combinação de  $A_s$  e  $A_t$ .

Do ponto de vista das observações atuais, as anisotropias na RCF medem as quantidades escalares e estabelecem um vínculo superior para as quantidades tensoriais (AKRAMI et al., 2018; ADE et al., 2021). Nesse contexto, é conveniente descrever o vínculo superior a partir da razão tensorial-escalar  $r \equiv A_t/A_s$ . Veja Sec. 5.5.

Em ordem dominante de slow-roll, temos (LONGDEN, 2017; BAUMANN, 2018)

$$n_s = 1 + \eta - 2\epsilon \text{ e } r = 16\epsilon, \quad (6.68)$$

onde  $\epsilon$  e  $\eta$  são os parâmetros de slow-roll.<sup>20</sup> Para o presente modelo,  $\epsilon$  e  $\eta$  são dados nas Eqs. (6.35) e (6.36), e portanto dependem do número de  $e$ -folds  $N_k$  e do parâmetro  $\alpha_0 \approx 3\delta_c^2$ .

A figura 6.3 mostra o espaço de parâmetros  $n_s \times r_{0.002}$  contendo os vínculos observacionais (azul) obtidos na Ref. (ADE et al., 2021) e a evolução teórica do modelo (verde claro) obtido a partir da Eq. (6.68). A análise é feita considerando o intervalo (6.67) para o número de  $e$ -folds.

Os pontos pretos na figura 6.3 representam a solução de Starobinsky onde  $\alpha_0 = 0$ . Conforme  $\alpha_0$  aumenta a região prevista pelo modelo (verde claro) se desloca para a esquerda e levemente para baixo. O limite de 95% C.L. é representado pela curva que une os pontos cinza. Essa fronteira estabelece valores máximos permitidos para  $\alpha_0$  sendo o maior deles  $8.7 \times 10^{-5}$ . Assim, podemos considerar que as observações da CMB limitam superiormente o valor de  $\alpha_0$  em  $10^{-4}$ . Resultados similares foram obtidos nas refs. (HUANG, 2014; CHEONG et al., 2020) considerando o termo  $R^3$  como uma pequena correção a inflação de Starobinsky.

### 6.4.3 Condições iniciais

Como mostrado na Sec. 6.2, a existência de um ponto de máximo no potencial limita as condições iniciais que levam a inflação. Assim, o objetivo desta seção é determinar o quão severa é essa limitação.

Pelo estudo do espaço de fase, exemplificado na figura 2, vemos que qualquer conjunto de condições iniciais  $(\chi_{ini}, \dot{\chi}_{ini})$  que alcança a linha atratora a direita do ponto

<sup>19</sup>Esse é exatamente o presente caso quando descrito no frame de Einstein.

<sup>20</sup>A amplitude escalar  $A_s$  é dada pela Eq. (6.57).

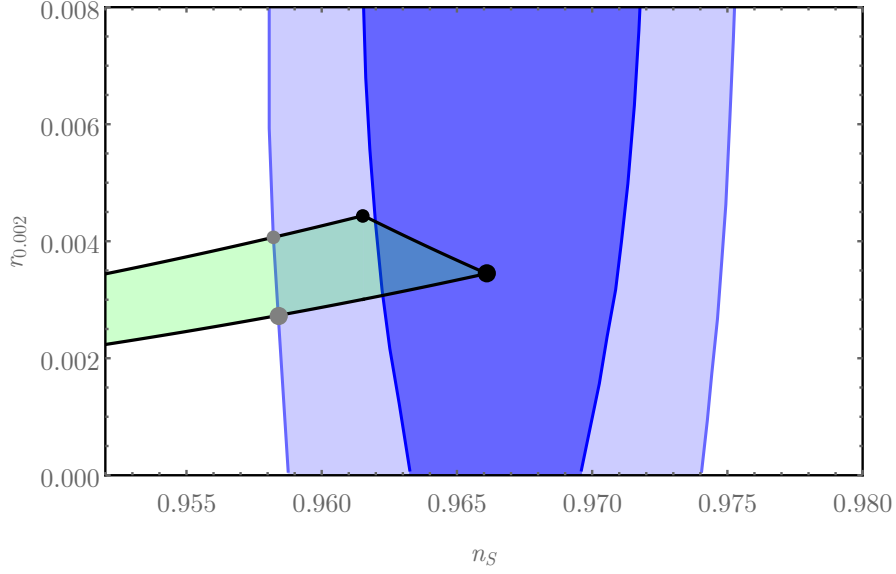


Figura 6.3: Os contornos em azul correspondem aos vínculos em 68% e 95% C.L. do plano  $n_s \times r_{0.002}$  dados pelo Planck mais BICEP3/Keck mais BAO (ADE et al., 2021). Os círculos pretos representam o modelo de Starobinsky ( $\alpha_0 = 0$ ) para  $N_k = 52$  (menor) e  $N_k = 59$  (maior). Na medida em que  $\alpha_0$  aumenta, as curvas se movem para a esquerda e levemente para baixo (região verde clara), diminuindo os valores para a razão tensorial-escalar e do índice espectral escalar. Os círculos em cinza representam os limites superiores para  $\alpha_0$  associados a 95% C.L.. Nesse caso,  $N_k = 52$  corresponde a  $\alpha_0 = 4.1 \times 10^{-5}$  e  $r = 4.1 \times 10^{-3}$ ; e  $N_k = 59$  corresponde a  $\alpha_0 = 8.7 \times 10^{-5}$  e  $r = 2.7 \times 10^{-3}$ .

crítico  $(\chi_c, 0)$  conduz a um regime de expansão acelerada que nunca termina. Além disso, pela mesma figura vemos que a dinâmica futura de  $\chi$  depende essencialmente da condição inicial  $\chi_{ini}$ . De fato, os campos de direção próximos da vertical na figura 2 implicam que o valor de  $\dot{\chi}_{ini}$  influencia pouco na dinâmica subsequente do campo  $\chi$ . Baseado nessa observação, podemos assumir (aproximadamente) que apenas uma condição inicial  $\chi_{ini} < \chi_c$  conduz a uma inflação física (inflação com uma saída elegante).

A limitação em  $\chi_{ini}$  leva a uma limitação no escalar de curvatura  $R_{ini}$ . De fato, pela Eq. (6.4), podemos escrever

$$R(\chi) = \zeta^4 \left( \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha_0(e^\chi - 1)}}{2\alpha_0} \right) M_{Pl}^2, \quad (6.69)$$

e assim  $\chi = \chi_c$  resulta em um valor máximo do escalar de curvatura  $R_{\max} = R(\chi_c)$  ainda consistente com uma inflação física. Portanto, qualquer que seja o modelo cosmológico pré-inflacionário ele deve fornecer como condição inicial  $R_{ini} < R_{\max}$ .

Vejamos a seguir como  $R_{\max}$  depende de  $\alpha_0$  e  $N_k$ . Substituindo as Eqs. (6.17) e (6.58) em Eq. (6.69), obtemos

$$R_{\max}(\alpha_0, N_k) \simeq 1.5 \times 10^{-5} \alpha_0 \left[ \frac{\exp\left(\frac{8}{3}\sqrt{\frac{\alpha_0}{3}}N_k\right)}{\exp\left(\frac{16}{3}\sqrt{\frac{\alpha_0}{3}}N_k\right) - 1} \right]^2 \left( \frac{-1 + \sqrt{1 + 12\alpha_0 + 4\sqrt{3\alpha_0}}}{2\alpha_0} \right) M_{Pl}^2.$$

Conforme  $\alpha_0$  diminui  $R_{\max}$  aumenta e no limite  $\alpha_0 \rightarrow 0$  (Starobinsky) obtemos  $R_{\max} \rightarrow \infty$ . Na tabela 6.3, mostramos  $R_{\max}$  para diferentes valores de  $\alpha_0$  considerando  $N_k = 52$  e  $N_k = 59$ :

Tabela 6.3: Valores de  $R_{\max}$  variando  $\alpha_0$  para  $N_k = 52$  e  $N_k = 59$ . Devido aos resultados da Sec. 6.4.2, consideramos  $\alpha_0 \leq 10^{-4}$ . Observe que para  $\alpha_0 \sim 10^{-18}$ , a quantidade  $R_{\max}$  alcança a escala de Planck.

$\alpha_0$	$R_{\max}^{52} (M_{Pl}^2)$	$R_{\max}^{59} (M_{Pl}^2)$
0	$\infty$	$\infty$
$10^{-18}$	1.01	0.79
$10^{-5}$	$3 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-7}$
$10^{-4}$	$8 \times 10^{-8}$	$6 \times 10^{-8}$

A análise probabilística que determina se um  $R_{ini}$  genérico produz uma inflação física não é trivial. De fato, essa análise depende da distribuição de probabilidade do escalar de curvatura em modelos pré-inflacionários. Contudo, se for suposto uma distribuição uniforme para  $R_{ini}$ , os resultados da tabela 3 indicam severas limitações para as condições iniciais permitidas. Por exemplo, para  $\alpha_0 \sim 10^{-5}$ , devemos ter  $R_{ini} \lesssim 10^{-7} M_{Pl}^2$ , o que corresponde a uma probabilidade de  $10^{-5} \%$  de um  $R_{ini}$  genérico levar a um regime inflacionário físico.<sup>21</sup> Essa probabilidade aumenta conforme  $\alpha_0$  diminui, contudo para  $\alpha_0$  muito pequeno o termo  $R^3$  na ação se torna desprezível e o modelo se comporta essencialmente como o modelo de Starobinsky. Observe que esse tipo de limitação pode ser evitada se o modelo pré-inflacionário possuir algum mecanismo dinâmico que retarde o começo da inflação tal que  $R_{ini}$  seja sempre menor que  $R_{\max}$ .

Além de um limite superior, a condição inicial  $R_{ini}$  possui também um limite inferior relacionado a necessidade de um período inflacionário  $N$  suficientemente longo. De fato, devido a restrição (6.67), o regime inflacionário deve satisfazer a condição  $N > N_k$ . Para entender as restrições impostas por essa condição, vamos considerar a região da linha atratora onde ocorre a inflação física. Sabemos que o "comprimento" total dessa região é  $\chi_c - \chi_e$ , onde  $\chi_e$  é dado por Eq. (6.50). Por outro lado, podemos selecionar uma sub-região na qual o número de  $e$ -folds é maior ou igual a um  $N_k$  fixo. O comprimento desta sub-região é dado por  $\chi_c - \chi_k$ . Assim, definimos uma função probabilidade

$$P(\alpha_0, N_k) = \frac{\chi_c - \chi_k}{\chi_c - \chi_e}, \quad (6.70)$$

que mede (aproximadamente) o quão provável condições iniciais arbitrárias levam a uma inflação com um número de  $e$ -folds  $N$  maior ou igual a  $N_k$ . Note que nesta análise estamos excluindo todo o conjunto de condições iniciais que levam  $\chi$  à linha atratora a direita do ponto crítico  $(\chi_c, 0)$ . Veja figura 6.2 para detalhes.

<sup>21</sup>Para esta estimativa, consideramos que  $R_{ini}/M_{Pl}^2$  possui igual probabilidade de assumir um valor entre 0 e 1. O limite superior de 1 leva em conta o desconhecimento da teoria de gravitação na escala de Planck.

Substituindo Eqs. (6.17), (6.34) e (6.50) em Eq. (6.70), obtemos

$$P(\alpha_0, N_k) \approx \frac{\ln \left[ \frac{\exp\left(\frac{8N_k}{3} \sqrt{\frac{\alpha_0}{3}}\right) + 1}{\exp\left(\frac{8N_k}{3} \sqrt{\frac{\alpha_0}{3}}\right) - 1} \right]}{\ln \left( \frac{6-3\sqrt{3}}{\sqrt{\alpha_0}} \right)}. \quad (6.71)$$

Na tabela 6.4, calculamos  $P(\alpha_0, N_k)$  para diferentes valores de  $\alpha_0$  considerando  $N_k = 52$  e  $N_k = 59$ :

Tabela 6.4: Probabilidade  $P(\alpha_0, N_k)$  para diferentes valores de  $\alpha_0$  com  $N_k = 52$  e  $N_k = 59$ . Novamente consideramos  $\alpha_0 \leq 10^{-4}$ .

$\alpha_0$	$P(\alpha_0, 52)$	$P(\alpha_0, 59)$
0	$\infty$	$\infty$
$10^{-18}$	0.83	0.82
$10^{-5}$	0.37	0.35
$10^{-4}$	0.22	0.19

Os resultados da tabela 6.4 mostram que a probabilidade de obtermos um período inflacionário com pelo menos  $N_k$   $e$ -folds aumenta conforme  $\alpha_0$  diminui. Ainda assim, para  $\alpha_0 \sim 10^{-5}$  esta probabilidade não chega a 40%.

Ainda com relação às condições iniciais, um terceiro ponto a ser destacado diz respeito ao regime inflacionário nas proximidades do ponto crítico  $\chi_c$ . Nessa vizinhança, as flutuações quânticas dominam o regime clássico de slow-roll, e o universo atinge um regime de inflação eterna (VILENKIN, 1983; LINDE, 1986).

De acordo com Ref. (CREMINELLI et al., 2008), as flutuações quânticas dominam sempre que

$$\pi^2 M_{Pl}^2 \frac{\dot{\chi}^2}{H^4} < 1. \quad (6.72)$$

Em um regime em ordem dominante de slow-roll, podemos reescrever as condições acima como (LYTH, 2009)

$$\frac{9}{8\pi^2 M_{Pl}^2} \frac{V^3}{V'^2} > 1. \quad (6.73)$$

Substituindo Eqs. (6.24), (6.25) e (6.58) em Eq. (6.73), obtemos

$$\left| \delta - \frac{\alpha_0}{3} \delta^{-1} \right| < Q \sqrt{\frac{\alpha_0}{3}}, \quad (6.74)$$

onde

$$Q \equiv \sqrt{24A_s^{0.002}} \left[ \frac{\exp\left(\frac{8}{3} \sqrt{\frac{\alpha_0}{3}} N_k\right)}{\exp\left(\frac{16}{3} \sqrt{\frac{\alpha_0}{3}} N_k\right) - 1} \right].$$

Analisando a condição (6.74), concluímos que o regime de inflação eterna é atingido sempre que  $\delta = e^{-\chi}$  está no interior do intervalo

$$\delta^{(2)} < \delta < \delta^{(1)}, \quad (6.75)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &= \left(Q + \sqrt{Q^2 + 1}\right) \sqrt{\frac{\alpha_0}{3}}, \\ \delta^{(2)} &= \left(-Q + \sqrt{Q^2 + 1}\right) \sqrt{\frac{\alpha_0}{3}}. \end{aligned}$$

Considerando o intervalo  $52 \leq N_k \leq 59$  e  $\alpha_0 \leq 10^{-4}$ , uma análise numérica mostra que os valores de  $\delta^{(1)}$  e  $\delta^{(2)}$  dependem apenas dos valores de  $\alpha_0$ . Na tabela 6.5, calculamos  $\delta^{(1)}$  e  $\delta^{(2)}$  para diferentes valores de  $\alpha_0$ .

Tabela 6.5: Cálculo de  $\delta^{(1)}$  e  $\delta^{(2)}$  para diferentes valores de  $\alpha_0$  considerando  $N_k = 52$  e  $\delta_c^2 = \alpha_0/3$ .

$\alpha_0$	$\delta_c$	$\delta^{(2)}$	$\delta^{(1)}$
$10^{-18}$	$5.8 \times 10^{-10}$	$2 \times 10^{-13}$	$1.7 \times 10^{-6}$
$10^{-5}$	$1.8 \times 10^{-3}$	$1.7992 \times 10^{-3}$	$1.8008 \times 10^{-3}$
$10^{-4}$	$5.8 \times 10^{-3}$	$5.7992 \times 10^{-3}$	$5.8008 \times 10^{-3}$

Os resultados na tabela 6.5 mostram que para valores relevantes  $\alpha_0$  (tipicamente  $\alpha_0 \geq 10^{-5}$ ), a inflação eterna ocorre apenas se  $\chi$ , quando ao atingir a linha atratora, for muito próximo de  $\chi_c$ .

As discussões realizadas anteriormente nos permite concluir que a presença de um termo  $R^3$  como correção ao modelo de Starobinsky altera qualitativamente as características iniciais da inflação. Se sem o termo  $R^3$  (quase) qualquer condição inicial leva a um regime inflacionário, com ele, algum tipo de ajuste fino é necessário. A precisão desse ajuste fino é altamente incerta e depende da estrutura probabilística do modelo pré-inflacionário. Mesmo assim, a idéia atraente de inflação caótica (LINDE, 1986; MUKHANOV, 2005) se perde com a inclusão do termo  $R^3$ , independentemente do valor de  $\alpha_0$ .

Outro cenário possível que deve ser levado em consideração é aquele em que o campo ínflaton fornece diferentes condições iniciais para diferentes regiões do espaço. Nesse cenário, a existência de um intervalo no espaço de fase (por menor que seja) que produza um regime de inflação eterna torna-se bastante relevante. Isso ocorre porque nesse regime é gerado um volume arbitrariamente grande. Assim, diferentes regiões do espaço produzem diferentes "universos" causalmente desconectados, alcançando a ideia de multiverso (LYTH, 2009). Nesse contexto, é razoável supor que vivemos em um desses "universos", embora a probabilidade de termos condições iniciais que levem à inflação eterna seja extremamente baixa. Portanto, em tal cenário, a inclusão do termo  $R^3$  no modelo de Starobinsky não gera a necessidade de um ajuste fino para que ocorra a inflação física.

No próximo capítulo, investigaremos como se dá a inflação devido a extensão à Starobinsky, em que além do termo cúbico  $R^3$ , introduzimos o termo de derivadas  $R\Box R$ , caracterizando a ação gravitacional proposta em (1.1).

## 6.5 Comentários finais

Nesta seção, abordamos a extensão ao modelo de Starobinsky caracterizada pela adição do termo de ordem superior  $R^3$  na ação, Eq. (6.1).

Nós desenvolvemos um estudo completo no contexto do background cosmológico. Analisamos o potencial e o espaço de fase do presente modelo de modo que observamos a existência de três regiões com dinâmicas diferentes para o campo escalar  $\chi$ . Tal análise permitiu verificar qualitativamente que a introdução do termo  $R^3$  na ação de Starobinsky restringe as condições iniciais que levam o sistema a uma inflação física. Descrevemos a dinâmica do campo escalar em cada uma das três regiões, a saber, a região assintótica para  $V(\chi) \rightarrow 0$ , quando  $\chi \gg 1$ , a região de platô, onde ocorre o regime inflacionário de slow-roll, e a região onde ocorre a fase de reaquecimento. Enquanto a dinâmica ao longo do platô nos permitiu construir as quantidades com as quais pudemos comparar o modelo com as observações, a fase de reaquecimento juntamente com a hipótese mínima dos acoplamentos usuais entre os campos de matéria padrão e a gravidade nos permitiu obter uma restrição para o número de  $e$ -folds da inflação. Assim, nós confrontamos devidamente o modelo com os dados observacionais do Planck, BICEP3/Keck e BAO. Vimos que à medida que o parâmetro  $\alpha_0$  aumenta, a região no plano  $n_s \times r$  prevista pelo modelo se desloca para a esquerda e ligeiramente para baixo. Além disso, podemos considerar que as observações das anisotropias da RCF limitam o valor de  $\alpha_0$  a  $10^{-4}$ .

Vale a pena comentar qualitativamente o papel que um termo  $R^n$  de ordem superior com  $n > 3$  desempenha nos modelos Starobinsky+ $R^n$ . Assumindo que o termo  $R^n$  de ordem superior é uma pequena correção à Starobinsky, o autor da Ref. (HUANG, 2014) verifica que seu potencial associado é semelhante ao do modelo discutido neste capítulo. Nesse caso, podemos dizer que em um contexto clássico a existência de um ponto crítico máximo com  $\chi_c > 0$  no potencial pode levar a um problema de ajuste fino nas condições iniciais. Por outro lado, a contribuição de tais termos  $R^n$  de ordem superior torna-se desprezível para valores crescentes de  $n$  como mostrado nas Refs. (HUANG, 2014; FERRARA et al., 2013).

Nós concluimos com a discussão sobre a limitação que a inclusão de um termo  $R^3$  impõe às condições iniciais: enquanto no modelo de Starobinsky, praticamente quaisquer condições iniciais levam o sistema a um regime inflacionário, a inclusão de um tal termo acarreta a necessidade de algum tipo de ajuste fino. Isso restringe as condições iniciais capazes de levar o sistema a uma inflação física, e o conceito de inflação caótica se perde para um valor não desprezível de  $\alpha_0$ . Por outro lado, discutimos que um regime de inflação eterna no contexto de multiverso gera regiões arbitrariamente grandes. Assim, na hipótese de que o campo ínflaton assume diferentes valores iniciais em diferentes pontos do espaço, tais regiões arbitrariamente grandes acabam dominando mesmo que a probabilidade da ocorrência de uma região desse tipo seja ínfima. Nesse caso, a inclusão do termo  $R^3$  no modelo de Starobinsky não requer um ajuste fino das

condições iniciais para a ocorrência de uma inflação física.

Neste capítulo, exploraremos a natureza da extensão ao modelo de Starobinsky devido à inclusão de todos os termos até a segunda ordem de correção envolvendo apenas a curvatura escalar  $R$ . Os principais resultados deste capítulo encontram-se em nosso paper (SILVA; MEDEIROS, 2022).

Relembrando a ação gravitacional (1.1) proposta em Sec. 1, escrevemos

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R + \frac{1}{2\kappa_0} R^2 + \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2} R^3 - \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} R \square R \right). \quad (7.1)$$

## 7.1 Equações de campo

O primeiro passo nesse estudo é reescrever a ação (1.1) no frame de Einstein. Nesse sentido, escrevemos

$$\bar{S} = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \bar{R} - 3 \left( \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\rho \chi \bar{\nabla}^\rho \chi - \frac{\beta_0}{6} e^{-\chi} \bar{\nabla}_\rho \lambda \bar{\nabla}^\rho \lambda + V(\chi, \lambda) \right) \right], \quad (7.2)$$

com

$$V(\chi, \lambda) = \frac{\kappa_0}{3} e^{-2\chi} \lambda \left( e^\chi - 1 - \frac{1}{2} \lambda - \frac{\alpha_0}{3} \lambda^2 \right), \quad (7.3)$$

o potencial associado ao modelo. Veja apêndice F para detalhes da conta. Note de Eq. (7.2) que no frame de Einstein, o modelo é caracterizado pelo termo usual de Einstein-Hilbert, dois termos cinéticos, sendo apenas um deles canônico, e pelo potencial  $V(\chi, \lambda)$ . As quantidades com barra são definidas a partir da métrica conforme  $\bar{g}_{\mu\nu} = e^\chi g_{\mu\nu}$  e os campos adimensionais  $\chi$  e  $\lambda$  são definidos como

$$\lambda = \frac{R}{\kappa_0} \text{ e } \mu = e^\chi = 1 + \lambda + \alpha_0 \lambda^2 - \frac{\beta_0}{\kappa_0} \square \lambda. \quad (7.4)$$

**Adendo** Para recuperarmos a notação usual e as dimensões dos campos escalares e o potencial devemos tomar

$$\chi = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}}, \quad \lambda = \sqrt{2} \frac{\psi}{M_{Pl}} \quad \text{e} \quad \tilde{V}(\phi, \psi) = \frac{3M_{Pl}^2}{2} V(\chi, \lambda). \quad (7.5)$$

Desta forma, podemos reescrever a ação (6.2) como

$$\bar{S} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left( \frac{M_{Pl}^2}{2} \bar{R} - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\rho \phi \bar{\nabla}^\rho \phi + \frac{\beta_0 e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}}}}{2} \bar{\nabla}_\rho \psi \bar{\nabla}^\rho \psi - \tilde{V}(\phi, \psi) \right). \quad (7.6)$$

Partindo da ação (7.2), obtemos três equações de campo: uma para  $\bar{g}_{\mu\nu}$  e outras duas para cada um dos campos escalares  $\chi$  e  $\lambda$ . Tomando a variação com relação à métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$  encontramos

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R} = \frac{1}{M_{Pl}^2} \bar{T}_{\mu\nu}^{(\text{eff})}, \quad (7.7)$$

onde definimos um tensor energia-momento efetivo como

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_{Pl}^2} \bar{T}_{\mu\nu}^{(\text{eff})} &= \frac{3}{2} \left( \bar{\nabla}_\mu \chi \bar{\nabla}_\nu \chi - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\nabla}^\rho \chi \bar{\nabla}_\rho \chi \right) + \\ &- \frac{\beta_0}{2} e^{-\chi} \left( \bar{\nabla}_\mu \lambda \bar{\nabla}_\nu \lambda - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\nabla}^\rho \lambda \bar{\nabla}_\rho \lambda \right) - \frac{3}{2} \bar{g}_{\mu\nu} V(\chi, \lambda). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Já a variação com relação aos campos  $\chi$  e  $\lambda$  resultam em

$$\bar{\square} \chi - \frac{\beta_0}{6} e^{-\chi} \bar{\nabla}_\rho \lambda \bar{\nabla}^\rho \lambda - V_\chi = 0, \quad (7.9)$$

$$\beta_0 e^{-\chi} (\bar{\nabla}^\rho \chi \bar{\nabla}_\rho \lambda - \bar{\square} \lambda) - 3V_\lambda = 0. \quad (7.10)$$

onde  $V_\chi = \partial_\chi V$  e  $V_\lambda = \partial_\lambda V$  representam derivadas com relação aos campos  $\chi$  e  $\lambda$ , respectivamente.

## 7.2 Inflação no background de Friedmann

Nesta seção, escreveremos as equações de movimento do modelo no background cosmológico de FLRW.

Obter as equações de campo no background de Friedmann é escrever as equações de campo (7.7), (7.9) e (7.10) para a métrica (6.11). Da equação de campo para a métrica, obtemos duas independentes, a saber, as equações de Friedmann

$$H^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 - \frac{\beta_0}{6} e^{-\chi} \dot{\lambda}^2 + V(\chi, \lambda) \right), \quad (7.11)$$

$$\dot{H} = -\frac{3}{4} \dot{\chi}^2 + \frac{1}{4} \beta_0 e^{-\chi} \dot{\lambda}^2, \quad (7.12)$$

onde  $H = \dot{a}/a$ . Além dessas equações, temos também as equações para os campos  $\chi$  e  $\lambda$ . Uma vez que, para um campo escalar  $\Phi$ ,

$$\square\Phi = \bar{\nabla}_\sigma \bar{\nabla}^\sigma \Phi = -3H\dot{\Phi} - \ddot{\Phi},$$

para a equação de  $\chi$  dada em (6.9), temos

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{\beta_0}{6}e^{-\chi}\lambda^2 + V_\chi = 0. \quad (7.13)$$

Por sua vez, para a equação de  $\lambda$  dada em (7.10), temos

$$\beta_0 e^{-\chi} [\ddot{\lambda} - (\dot{\chi} - 3H)\dot{\lambda}] - 3V_\lambda = 0. \quad (7.14)$$

### 7.3 Espaço de fase

Nesta seção, analisaremos o espaço de fase do modelo em questão. Para tanto, se torna conveniente reescrever as equações de campo de forma adimensional: definimos a derivada temporal adimensional

$$A_t \equiv \frac{1}{\sqrt{\kappa_0}}\dot{A},$$

o parâmetro de Hubble adimensional  $h$

$$h \equiv \frac{1}{\sqrt{\kappa_0}}H,$$

e o potencial adimensional  $\bar{V}$  como

$$\bar{V}(\chi, \lambda) = \frac{1}{\kappa_0}V(\chi, \lambda).$$

Com isso, é possível reescrever as equações da dinâmica cosmológica (7.11), (7.12), (7.13) e (7.14) da seguinte maneira:

$$h^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}\chi_t^2 - \frac{\beta_0}{6}e^{-\chi}\lambda_t^2 + \bar{V}(\chi, \lambda) \right), \quad (7.15)$$

$$h_t = -\frac{3}{4}\chi_t^2 + \frac{1}{4}\beta_0 e^{-\chi}\lambda_t^2, \quad (7.16)$$

e

$$\chi_{tt} + 3h\chi_t - \frac{\beta_0}{6}e^{-\chi}\lambda_t^2 + \bar{V}_\chi = 0, \quad (7.17)$$

$$\beta_0 e^{-\chi} [\lambda_{tt} - (\chi_t - 3h)\lambda_t] - 3\bar{V}_\lambda = 0. \quad (7.18)$$

Já é de nosso conhecimento tanto a dinâmica inflacionária do modelo Starobinsky+ $R^3$ , abordado em Sec. 6, bem como a dinâmica inflacionária do modelo Starobinsky+ $R\square R$ , explorada em Ref. (CUZINATTO et al., 2019) via uma abordagem escalar-vetorial. Um primeiro passo no intuito de compreendermos a dinâmica do nosso caso atual, se dá

através do estudo de seu espaço de fase, tendo como referência os casos particulares conhecidos mencionados anteriormente. Nessa primeira parte, investigaremos acerca da existência de um regime inflacionário atrator, em alguma região do espaço de fase.

Uma vez que as equações adimensionais que regem a dinâmica dos campos  $\chi$  e  $\lambda$  são escritas como em (7.17) e (7.18), isto é, duas equações diferenciais autônomas de segunda ordem com o tempo, podemos reescrevê-las como um sistema de quatro equações diferenciais de primeira ordem. Fazendo  $\chi_t = \psi$  e  $\lambda_t = \phi$ , temos

$$\chi_t = \psi, \quad (7.19)$$

$$\psi_t = -3h\psi + \frac{\beta_0}{6}e^{-\chi}\phi^2 - \bar{V}_\chi, \quad (7.20)$$

$$\lambda_t = \phi, \quad (7.21)$$

$$\beta_0\phi_t = \beta_0(\psi - 3h)\phi + 3e^\chi\bar{V}_\lambda, \quad (7.22)$$

onde

$$h = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}\psi^2 - \frac{\beta_0}{6}e^{-\chi}\phi^2 + \bar{V} \right)}.$$

A partir desse ponto, estudaremos o comportamento aproximado das soluções do sistema acima nos pontos críticos. Os pontos críticos são pontos de equilíbrio do sistema e é de nosso interesse investigar sua estabilidade, que está diretamente relacionada às condições necessárias para a ocorrência de um regime inflacionário físico.<sup>1</sup> A análise do sistema anterior nos permite concluir que existem dois pontos críticos:

$$P_0 = (\chi_0, \lambda_0, \psi_0, \phi_0) = (0, 0, 0, 0) \quad (7.23)$$

$$P_c = (\chi_c, \lambda_c, \psi_c, \phi_c) = \left( \ln \left( 4 + \sqrt{\frac{3}{\alpha_0}} \right), \sqrt{\frac{3}{\alpha_0}}, 0, 0 \right) \quad (7.24)$$

Detalhes sobre esses pontos críticos e suas estabilidades encontram-se no apêndice ??.

O estudo sobre a estabilidade desses pontos críticos é feito através da linearização do sistema autônomo 4-dimensional  $(\chi, \lambda, \psi, \phi)$ . Linearizando o sistema (7.20) em torno de  $P_0$ , verificamos que os expoentes de Lyapunov  $r_0$ , associados a estabilidade do ponto crítico, satisfazem a equação característica de quarta ordem

$$\beta_0 r_0^4 + r_0^2 + \frac{1}{3} = 0, \quad (7.25)$$

cuja a solução é

$$r_0 = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta_0}{3}}}{2\beta_0}}.$$

Um ponto de centro ou espiral ocorre quando obtemos raízes imaginárias puras. Olhando para a expressão acima, vemos que isto ocorre sempre que a condição

$$0 \leq \beta_0 \leq \frac{3}{4}, \quad (7.26)$$

<sup>1</sup>Lembremos que por um regime inflacionário físico entende-se um regime que possua um número suficiente de  $e$ -folds que resolva os problemas de planura, horizonte e geração de perturbações, e que possua uma saída elegante.

é satisfeita. Qualquer valor de  $\beta_0$  fora deste intervalo contém ao menos um expoente de Lyapunov com parte real positiva. Ou seja, fora do intervalo (7.26) o ponto  $P_0$  é instável.<sup>2</sup> Uma análise numérica do sistema (7.20) mostra que dentro do intervalo (7.26) o ponto  $P_0$  é um ponto espiral atrator e portanto estável ver figura 7.1. Esse comportamento é essencial para a existência de uma saída elegante. De fato, a dinâmica espiral em torno de  $P_0$  constitui o período de oscilações coerentes consistente com as fases iniciais do reaquescimento. Vale observar ainda que a Eq. (7.25) é independente de  $\alpha_0$ , e portanto o termo  $R^3$  não desempenha qualquer papel no término do período inflacionário.

Por sua vez, linearizando o sistema (7.20) em torno de  $P_c$  verificamos que os expoentes de Lyapunov  $r_c$  satisfazem a equação característica de quarta ordem

$$\beta_0 \left[ r_c (r_c - G) - \frac{4}{9} G^2 \right] r_c (r_c - G) + \frac{4}{9} G^2 \left[ \left( \sqrt{3\alpha_0} + 6\alpha_0 \right) r_c (r_c - G) + \frac{1}{3} \sqrt{3\alpha_0} - \frac{4}{9} \left( \sqrt{3\alpha_0} + 6\alpha_0 \right) G^2 \right] = 0, \quad (7.27)$$

onde

$$G = \frac{-3}{2\sqrt{4\sqrt{3\alpha_0} + 3}}.$$

Um estudo numérico desta equação característica, considerando  $\alpha_0 > 0$  e  $\beta_0 > 0$ , mostra que pelo menos duas das quatro raízes de Eq. (7.27) são reais e possuem sinais opostos. Isso mostra que  $P_c$  é um ponto de sela e portanto instável. Essa conclusão também permanece válida para  $\beta_0 = 0$  e  $\alpha_0 > 0$ , sendo que neste caso temos apenas duas raízes<sup>3</sup>.

Para entender melhor a dinâmica dos campos  $\chi$  e  $\lambda$  vamos estudar numericamente o espaço de fase 4-dimensional. Neste estudo, analisaremos dois cortes bidimensionais deste espaço dados por  $\chi_t \times \chi$  e  $\lambda_t \times \lambda$ . Para isso manipulamos as Eqs. (7.17) e (7.18), escrevendo-as como

$$\frac{d\chi_t}{d\chi} = \frac{-3h\chi_t + \frac{\beta_0}{6} e^{-\chi} \lambda_t^2 - \bar{V}_\chi}{\chi_t},$$

$$\frac{d\lambda_t}{d\lambda} = (\chi_t - 3h) + \frac{3e^\chi}{\beta_0 \lambda_t} \bar{V}_\lambda,$$

onde  $h$  é dado por Eq. (7.15).

A análise numérica da equação  $d\chi_t/d\chi$  é mais facilmente realizada se escrevemos  $\lambda = \lambda(\chi, \chi_t, \lambda_t, \lambda_{tt}, \alpha_0, \beta_0)$ . Para isso é necessário trabalhar com as Eqs. (7.18) e (7.15). Resolvendo a equação de segundo grau para  $\lambda$  na Eq. (7.18), obtemos

$$\lambda = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0 \{1 - e^\chi + \beta_0 e^\chi [\lambda_{tt} - (\chi_t - 3h) \lambda_t]\}}}{2\alpha_0},$$

onde escolhemos o sinal positivo para garantir o bom limite de Starobinsky. Em princípio, podemos substituir Eq. (7.15) na expressão anterior, obter uma equação algébrica

<sup>2</sup>Um resultado idêntico foi obtido na Ref. (CUZINATTO et al., 2019).

<sup>3</sup>Em Sec. 6.2, mostramos que o potencial  $V$  do modelo real é bem comportado, independente do valor de  $\chi$ , para um  $\alpha_0 > 0$ . Dessa forma, assumiremos aqui um parâmetro  $\alpha_0$  restrito nesse intervalo.

de terceiro grau para  $\lambda$  e resolvê-la para obter  $\lambda = \lambda(\chi, \chi_t, \lambda_t, \lambda_{tt}, \alpha_0, \beta_0)$ . Contudo, veremos na Sec. 7.6 que os valores de interesse para  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  são tais que  $\alpha_0 < 10^{-3}$  e  $\beta_0 < 3 \times 10^{-2}$ .<sup>4</sup> Neste caso, é lícito considerar apenas correções linearizadas de  $\alpha_0$  e desprezar termos do tipo  $\alpha_0\beta_0$ . Realizando estas aproximações, obtemos as formas funcionais

$$F_\chi \equiv \frac{d\chi_t}{d\chi} \approx \frac{-3\bar{h}\chi_t + \frac{\beta_0}{6}e^{-\chi}\lambda_t^2 - \frac{1}{9}e^{-2\chi}\bar{\lambda} \{4 - e^\chi + \bar{\lambda} - 2\beta_0e^\chi [\lambda_{tt} - (\chi_t - 3\bar{h})\lambda_t]\}}{\chi_t}, \quad (7.28)$$

$$F_\lambda \equiv \frac{d\lambda_t}{d\lambda} = (\chi_t - 3h) + \frac{1}{\beta_0\lambda_t} \left[ 1 - e^{-\chi} (1 + \lambda + \alpha_0\lambda^2) \right], \quad (7.29)$$

onde

$$h \approx \bar{h} \equiv \frac{-3\beta_0^2\lambda_t + \sqrt{(3\beta_0^2\lambda_t)^2 + (12 + 9\beta_0^2\lambda_t^2) [3\chi_t^2 - \beta_0e^{-\chi}\lambda_t^2 - (\lambda_{tt} - \chi_t\lambda_t)^2\beta_0^2 + A]}}{12 + 9\beta_0^2\lambda_t^2}, \quad (7.30)$$

$$\lambda \approx \bar{\lambda} \equiv (e^\chi - 1) [1 - \alpha_0(e^\chi - 1)] - \beta_0e^\chi [\lambda_{tt} - (\chi_t - 3h)\lambda_t], \quad (7.31)$$

com

$$A = (1 - e^{-\chi})^2 \left[ 1 - \frac{2}{3}\alpha_0(e^\chi - 1) \right].$$

Nas figuras 7.1 e 7.2, mostramos campos de direção associados as Eqs. (7.28) e (7.29).

O primeiro ponto (e mais relevante) que se percebe da figura 7.1 é que existe uma linha atratora próximo de  $\chi_t \simeq 0$ . A existência desta região é consistente com qualquer valor de  $\alpha_0 < 10^{-3}$  e  $\beta_0 < 3 \times 10^{-2}$  e para qualquer intervalo de  $\lambda_t$  e  $\lambda_{tt}$  que produza resultados reais na região de interesse  $\chi \in [0, 8]$ .<sup>5</sup> Ao mesmo tempo que o campo  $\chi$  tende a linha atratora ( $\chi_t \simeq 0$ ), a figura 7.2 indica que  $\lambda$  tende a um valor finito e  $\lambda_t \rightarrow 0$ . Este valor finito de  $\lambda$  depende essencialmente do valor de  $\chi$  com variações em menor escala devido a mudanças do parâmetro  $\alpha_0$ . Os outros parâmetros fixos  $\chi_t$  e  $\beta_0$  na figura 7.2 alteram como  $\lambda$  se aproxima do ponto de acúmulo, mas não alteram o seu valor em si. Veremos na Sec. 7.4 que esta região atratora no espaço de fase 4-dimensional, onde  $(\chi, \lambda, \chi_t, \lambda_t) \simeq (\chi, \lambda(\chi), 0, 0)$ , corresponde a um regime de expansão inflacionária do tipo slow-roll.

Uma vez alcançada a região atratora, devemos nos perguntar se a inflação se denserola a contento, isto é, se ela gera um número suficiente de  $e$ -folds e se ela termina em uma fase de reaquecimento. A resposta a essa pergunta depende essencialmente da posição em que o campo  $\chi$  atinge a linha atratora na figura 7.1. Se o campo  $\chi$  está localizado a esquerda do ponto crítico  $P_c$  (pontos pretos nos gráficos da figura 7.1) a inflação se desenrola normalmente e termina em uma fase de oscilações coerentes associada ao começo do reaquecimento. Por outro lado, se  $\chi$  se encontra a direita de  $P_c$  o valor de  $\chi$  aumenta de forma indefinida e a inflação nunca termina (veja discussão em Sec. 6.2). Assim, um regime inflacionário físico, consistente com uma saída elegante,

<sup>4</sup>Veja Sec. 6.4.2 bem como Ref. (CUZINATTO et al., 2019).

<sup>5</sup>Estes intervalos estão tipicamente entre  $-10$  e  $10$ .

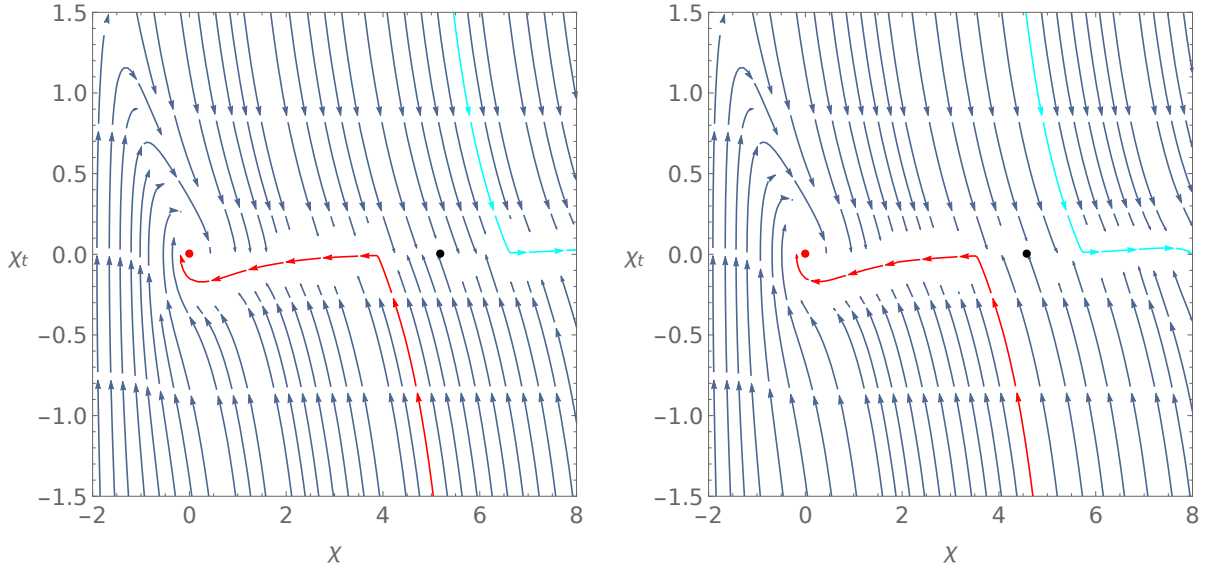


Figura 7.1: Gráficos  $\chi_t \times \chi$  considerando cortes no espaço de fase  $(\chi, \lambda, \chi_t, \lambda_t)$  fixando  $\lambda_t = \lambda_{tt} = 0$  e  $\beta_0 = 0.001$  com  $(\lambda, \alpha_0) = (173, 0.0001)$  (gráfico da esquerda) e  $(\lambda, \alpha_0) = (94, 0.00034)$  (gráfico da direita). Os pontos em vermelho e preto correspondem aos pontos críticos  $P_0$  e  $P_c$ , respectivamente. Para  $\alpha_0 = 0.0001$  temos  $P_c = (5.18, 173, 0, 0)$  e para  $\alpha_0 = 0.00034$  temos  $P_c = (4.58, 94, 0, 0)$ . As trajetórias vermelhas (cianas) representam trajetórias que ao alcançarem a linha atratora próxima de  $\dot{\chi} = 0$  se aproximam (afastam) da origem. Detalhes sobre a interpretação dos gráficos são apresentadas no corpo do texto.

ocorre apenas se  $\chi < \chi_c \Rightarrow \alpha_0 < 3(e^\chi - 4)^{-2}$ , o que para  $\chi$  suficientemente grande corresponde a  $\alpha_0 < 3e^{-2\chi}$ .

Na próxima seção veremos como descrever a dinâmica dos campos  $\chi$  e  $\lambda$  durante a fase inflacionária de slow-roll.

## 7.4 Inflação em ordem dominante de slow-roll

O objetivo desta seção é descrever a dinâmica dos campos  $\chi$ ,  $\lambda$  e de suas derivadas durante o regime inflacionário considerando a aproximação de slow-roll. Na região associada a uma inflação física, o parâmetro  $\chi$  é uma função monotônica decrescente com o tempo, assim podemos parametrizar as várias quantidades em termos de  $\chi$ . Para o caso de Starobinsky, sabemos que em ordem dominante de slow-roll  $\chi_t \sim \delta$  e  $\chi_{tt} \sim \delta^2$ , onde  $\delta$  é o fator de slow-roll  $\delta \equiv e^{-\lambda}$ . Já para o modelo de Starobinsky+ $R^3$  (isto é,  $\beta_0 = 0$  e  $\alpha_0 \neq 0$ ), temos

$$\chi_t \sim \left( \delta - \frac{\alpha_0}{3} \delta^{-1} \right). \quad (7.32)$$

Observe que, como  $\alpha_0 < 3\delta^2$ , o segundo termo da expressão acima é de mesma ordem ou menor que  $\delta$ . Relembre a descrição em Sec. 7.4.

A discussão anterior nos permite associar o fator  $\delta$  como um parâmetro que controla a ordem de aproximação de slow-roll, isto é, uma quantidade  $f \sim \delta^n$  será

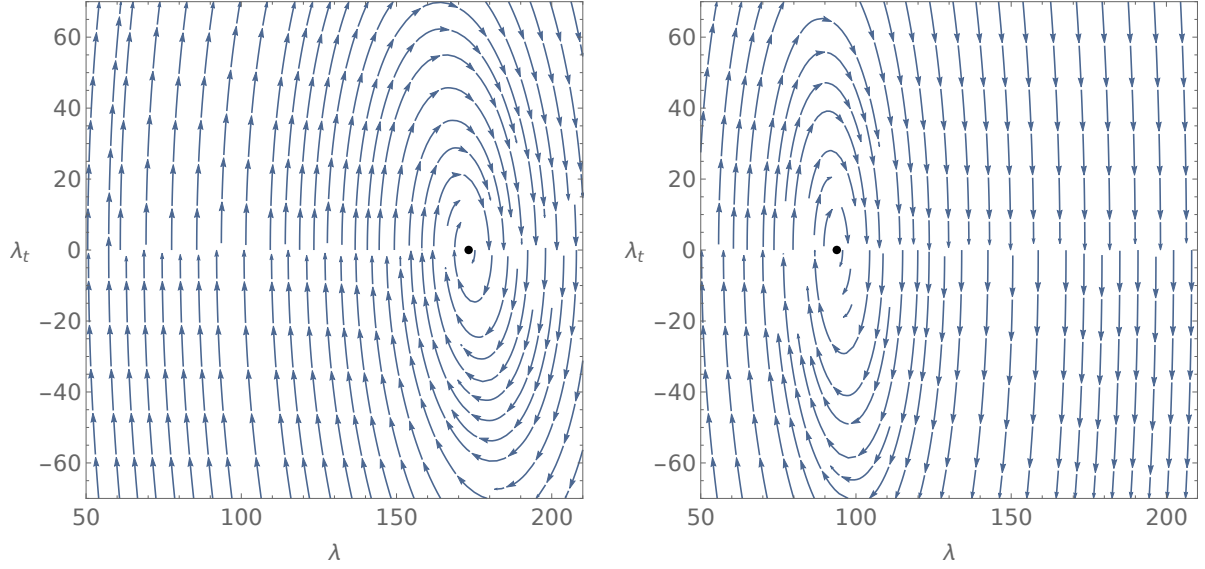


Figura 7.2: Gráficos  $\lambda_t \times \lambda$  considerando cortes no espaço de fase  $(\chi, \chi_t, \lambda, \lambda_t)$  fixando  $\chi_t = 0$  e  $\beta_0 = 0.001$  com  $(\chi, \alpha_0) = (5.18, 0.0001)$  e (gráfico da esquerda) e  $(\chi, \alpha_0) = (4.58, 0.00034)$  (gráfico da direita). Os pontos em preto correspondem aos pontos crítico  $P_c = (5.18, 173, 0, 0)$  (gráfico da esquerda) e  $P_c = (4.58, 94, 0, 0)$  (gráfico da direita). Detalhes sobre a interpretação dos gráficos são apresentadas no corpo do texto.

uma quantidade de ordem  $n$  em slow-roll. Nesse caso,  $\chi_t$  presente em Eq. (7.32) é de primeira ordem em slow-roll, pois tanto  $\delta$  quanto  $\alpha_0 \delta^{-1}$  são de primeira ordem. Para aplicar esse raciocínio no nosso modelo, é necessário estabelecer também qual é a ordem máxima de slow-roll do parâmetro  $\beta_0$ . Uma análise mais detalhada nas equações de campo na região atratora nos mostra que, para uma inflação de slow-roll,  $\beta_0 \lesssim \delta$ , isto é,  $\beta_0$  é um parâmetro de (no máximo) primeira ordem em slow-roll (para detalhes, veja Ref. (CUZINATTO et al., 2019)).

Uma vez conhecida as ordens (máximas) em slow-roll dos parâmetros  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , podemos propor o seguinte ansatz para  $\chi_t$ :

$$\chi_t \approx c_1 \delta + \beta_0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\beta_0 \delta^{-1})^n + \alpha_0 \delta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (\beta_0 \delta^{-1})^n \quad (7.33)$$

Esse ansatz possui as seguintes propriedades:

- Todos os termos são de primeira ordem em slow-roll, sendo essa a ordem dominante de  $\chi_t$ ;
- No limite de  $\beta_0 \rightarrow 0$ , recuperamos o resultado em Eq. (7.32);
- Derivando a Eq. (7.33) com relação a  $t$ , aumentamos a ordem em slow-roll, isto é,  $\chi_{tt}$  é de segunda ordem,  $\chi_{ttt}$  é de terceira ordem, etc.

Seguindo um raciocínio análogo, propomos o seguinte ansatz para  $\lambda$ :

$$\lambda \approx \delta^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} g_n (\beta_0 \delta^{-1})^n + \alpha_0 \delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} j_n (\beta_0 \delta^{-1})^n. \quad (7.34)$$

Nesse caso, o primeiro termo é de ordem  $\mathcal{O}(-1)$  em slow-roll e os outros termos, de ordem zero. O termo de ordem  $\mathcal{O}(-1)$  é necessário pois sabemos que no caso de Starobinsky,  $\lambda = \delta^{-1} - 1$  (veja Eq. (7.18) com  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ ). Semelhantemente à  $\chi_t$ , cada derivada de  $\lambda$  com relação a  $t$  aumenta em um a ordem em slow-roll.

O próximo passo é substituir esses dois ansatz e suas derivadas nas Eqs. (7.15), (7.17) e (7.18), levando em conta apenas a ordem dominante em slow-roll. Nessa situação, obtemos

$$3h\chi_t - \frac{1}{3}\delta\lambda \left(1 - \delta\lambda - 2\delta - \frac{2}{3}\alpha_0\delta\lambda^2\right) \approx 0, \quad (7.35)$$

$$3\beta_0 h\lambda_t - \left[1 - \delta \left(1 + \lambda + \alpha_0\lambda^2\right)\right] \approx 0, \quad (7.36)$$

onde

$$h^2 \approx \frac{1}{6}\delta\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\delta\lambda\right). \quad (7.37)$$

Substituindo explicitamente as Eqs. (7.33) e (7.34) nessas três últimas expressões, obtemos após um longo cálculo

$$\chi_t \approx -\frac{2\sqrt{3}}{3(3 - \beta_0\delta^{-1})}\delta \left(1 - \frac{\alpha_0}{3}\delta^{-2}\right), \quad (7.38)$$

$$\lambda \approx \delta^{-1} - \frac{3 - 2\beta_0\delta^{-1}}{3 - \beta_0\delta^{-1}} - \alpha_0\delta^{-2} \left(1 + \frac{\frac{1}{3}\beta_0\delta^{-1}}{3 - \beta_0\delta^{-1}}\right), \quad (7.39)$$

com

$$h^2 \approx \frac{1}{12} \left(1 - 2\delta - \frac{2}{3}\alpha_0\delta^{-1}\right). \quad (7.40)$$

Para detalhes, veja apêndice . Vale observar que as expressões acima estão bem definidas apenas para  $\beta_0\delta^{-1} < 3$ . Note em Eq. (7.38), a existência de dois termos que, em ordem dominante em slow-roll, são de primeira ordem. Em Eq. (7.39), temos o termo de ordem  $\mathcal{O}(-1)$  além das correções de ordem  $\mathcal{O}(0)$ . Por fim,  $h^2$ , relacionado ao parâmetro de Hubble, é dado pelo termo dominante de ordem  $\mathcal{O}(0)$  mais correções de primeira ordem (independentes de  $\beta_0$ ).

### 7.4.1 Cálculo dos parâmetros de slow-roll e número de $e$ -folds

A caracterização do regime inflacionário é feita através dos parâmetros de slow-roll

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{h_t}{h^2}, \quad (7.41)$$

$$\eta \equiv -\frac{1}{H}\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = -\frac{1}{h}\frac{\epsilon_t}{\epsilon}. \quad (7.42)$$

Substituindo Eqs. (7.38) e (7.39) em Eq. (7.16), obtemos

$$h_t \approx -\frac{\delta^2}{3(3 - \beta_0\delta^{-1})} \left(1 - \frac{\alpha_0}{3}\delta^{-2}\right)^2.$$

Assim, em ordem dominante de slow-roll, temos

$$\epsilon \approx \frac{4\delta^2}{(3 - \beta_0\delta^{-1})} \left(1 - \frac{\alpha_0}{3}\delta^{-2}\right)^2. \quad (7.43)$$

O próximo passo é calcular  $\eta$ . Derivando  $\epsilon$  e utilizando este resultado em conjunto com o próprio  $\epsilon$  em Eq. (7.42), obtemos

$$\eta \approx -\frac{4\delta}{(3 - \beta_0\delta^{-1})^2} \left[3\left(2 - \beta_0\delta^{-1}\right) + \alpha_0\delta^{-2} \left(2 - \frac{1}{3}\beta_0\delta^{-1}\right)\right]. \quad (7.44)$$

Observe que por construção  $\alpha_0\delta^{-2} < 3$  e  $\beta_0\delta^{-1} < 3$ .

Lembremos que para ter uma inflação robusta, isto é, com um bom número de  $e$ -folds, devemos ter  $\epsilon \ll 1$  e  $\eta \ll 1$ . Assim, pelas Eqs. (7.43) e (7.44), vemos que isso ocorre para  $\delta \ll 1$  (tipicamente  $\chi \gtrsim 4$ ). Contudo, diferentemente do caso de Starobinsky, temos também limites inferiores para  $\delta$ . De fato, o regime inflacionário de slow-roll só ocorre se

$$\delta > \frac{\beta_0}{3} \text{ e } \delta > \sqrt{\frac{\alpha_0}{3}}. \quad (7.45)$$

A primeira condição não representa uma dificuldade real para a existencia da inflação de slow-roll, pois mesmo que em algum momento tenhamos  $\delta < \beta_0$ ,<sup>6</sup> a dinâmica do espaço de fase garante que  $\chi$  diminui monotonicamente de forma que em algum momento  $\delta$  se torna maior que  $\beta_0$  (ver figura 7.1). Já a segunda condição representa uma restrição real para a realização de uma inflação física (veja discussão em Sec. 7.3). Para uma discussão sobre as implicações dessa segunda restrição e as condições iniciais da inflação, relembre Sec. 6.2.

Em seguida vamos calcular o número de  $e$ -folds  $N$  em ordem dominante de slow-roll. Pela definição de  $N$ , temos

$$N = \int_t^{t_e} H dt \approx \frac{1}{4} \int_{\delta}^{\delta_e} \frac{(1 - 2\delta - \frac{2}{3}\alpha_0\delta^{-1})(3 - \beta_0\delta^{-1})}{\delta^2(1 - \frac{\alpha_0}{3}\delta^{-2})} d\delta,$$

onde o índice  $e$  corresponde ao término da inflação. Para integrar essa expressão é conveniente realizar a seguinte mudança de variável:

$$x = \frac{\delta_m}{\delta} \text{ onde } \delta_m = \sqrt{\frac{\alpha_0}{3}}. \quad (7.46)$$

Nesse caso, obtemos

$$N \approx -\frac{1}{4\delta_m} \int_x^{x_e} \frac{(x - 2\delta_m - 2x^2\delta_m)(3 - \beta_0\delta_m^{-1}x)}{1 - x^2} \frac{dx}{x},$$

cuja solução é

$$N \approx -\frac{1}{4\delta_m} \left\{ -2x\beta_0 - 6\delta_m \ln x + \frac{\beta_0 + 12\delta_m^2}{2\delta_m} \ln[(1-x)(1+x)] + \frac{3 + 4\beta_0}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \right\}_x^{x_{end}}.$$

<sup>6</sup>Nesta situação, não temos garantia que exista um regime inflacionário.

Considerando apenas termos dominantes e levando em conta que  $x_e \ll x$ , obtemos finalmente

$$N \approx \frac{3}{8} \sqrt{\frac{3}{\alpha_0}} \ln \left[ (1-x)^{\gamma-1} (1+x)^{\gamma+1} \right] \quad \text{onde } \gamma^2 = \frac{\beta_0^2}{3\alpha_0}. \quad (7.47)$$

Por construção, a inflação física ocorre no intervalo  $0 \leq x < 1$ . De fato, quando  $x \rightarrow 1$ , temos  $\delta \rightarrow \delta_m$ , que corresponde aproximadamente a  $\chi \rightarrow \chi_c$  (veja Eq. (7.24)). Contudo, a expressão (7.47) apresenta uma restrição extra devido justamente a presença do termo  $\beta_0$ . Para  $\beta_0^2 > 3\alpha_0 \Rightarrow \gamma > 1$ , temos que quando  $x \rightarrow 1$ , o valor de  $N$  diverge para  $-\infty$ , e isso é claramente algo não físico. O que ocorre é que para  $\gamma > 1$  a função  $N$  apresenta um ponto de máximo dentro do intervalo  $0 \leq x < 1$ . Derivando  $N$  com relação ao tempo, temos

$$N_t \approx \frac{3x}{8} \sqrt{\frac{3}{\alpha_0}} \left[ \frac{-(\gamma-1)(1+x) + (\gamma+1)(1-x)}{(1-x)(1+x)} \right] \chi_t.$$

Assim, para  $\gamma > 1$ , temos

$$N_t = 0 \Rightarrow -(\gamma-1)(1+x_{\max}) + (\gamma+1)(1-x_{\max}) = 0 \Rightarrow x_{\max} = \frac{1}{\gamma} < 1. \quad (7.48)$$

Por outro lado, para valores de  $x$  tal que  $x_{\max} \leq x < 1$ , obtemos

$$\beta_0 \delta^{-1} = 3\gamma x \geq 3 \Rightarrow \delta \leq \frac{\beta_0}{3}$$

o que viola a primeira condição da expressão (7.45).

Portanto, baseado na análise anterior concluímos que as Eqs. (7.43), (7.44) e (7.47) referente as quantidades  $\epsilon$ ,  $\eta$  e  $N$  são válidas nos seguintes intervalos:

$$\begin{cases} \gamma \leq 1 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow \chi < \ln \left( \sqrt{\frac{3}{\alpha_0}} \right) \\ \gamma > 1 \Rightarrow x < x_{\max} \Rightarrow \chi < \ln \left( \frac{3}{\beta_0} \right) \end{cases}. \quad (7.49)$$

Na próxima seção vamos estudar o regime inflacionário do ponto de vista perturbativo.

## 7.5 Inflação via cosmologia perturbativa

Nesta seção, investigamos a inflação no âmbito perturbativo do modelo (6.2). Lembremos que suas equações dinâmicas no background são as de Friedmann, dadas por Eqs. (7.11) e (7.12), e as equações de movimento para os campos escalares  $\chi$  e  $\lambda$ , dadas por Eqs. (7.13) e (7.14).

Antes de prosseguirmos com nossos desenvolvimentos, vale a pena comentarmos acerca das perturbações escalares. Além das perturbações dos dois campos escalares auxiliares, as quais denotaremos por  $\delta\chi$  e  $\delta\lambda$ , temos as perturbações escalares da

métrica. O elemento de linha na métrica FLRW perturbada<sup>7</sup> é dado por

$$ds^2 = - (1 + 2A) dt^2 + 2a\partial_i B dx^i dt + a^2 [(1 - 2\psi) \delta_{ij} + 2\partial_{ij} E + h_{ij}] dx^i dx^j, \quad (7.50)$$

com  $A$ ,  $B$ ,  $\psi$  e  $E$  sendo as perturbações escalares da métrica (MUKHANOV et al., 1992; BASSETT et al., 2006b). Para obtermos as equações da dinâmica perturbativa através de uma perturbação diretamente na ação, precisamos escrevê-la até a segunda ordem nas perturbações. Nesse sentido, devemos considerar termos de segunda ordem para as perturbações envolvendo apenas perturbações dos campos escalares (e.g.  $\delta\chi^2$ ), termos envolvendo apenas perturbações escalares da métrica (e.g.  $A^2$ ) e termos cruzados, isto é, um produto de termos de primeira ordem (e.g.  $A\delta\chi$ ). Na seção a seguir, seguindo por um procedimento de perturbação diretamente na ação aos moldes do encontrado em Ref. (BAUMANN, 2013), também tomando como referências (WANDS, 2008; BASSETT et al., 2006b), e assumindo o gauge espacialmente plano<sup>8</sup>, obtemos e discutimos as equações de movimento para as perturbações.

### 7.5.1 Equações para as perturbações escalares

O primeiro passo no intuito de perturbarmos a ação é definirmos as perturbações dos campos escalares. Para uma distribuição não homogênea de matéria, escrevemos

$$\chi(t, x) = \chi(t) + \delta\chi(t, x), \quad (7.51)$$

$$\lambda(t, x) = \lambda(t) + \delta\lambda(t, x). \quad (7.52)$$

Por sua vez, a métrica em Eq. (7.50) é escrita como

$$g^{\rho\sigma}(t, x) = g^{\rho\sigma}(t) + \delta g^{\rho\sigma}(t, x). \quad (7.53)$$

Escrevendo Eq. (6.2) até a segunda ordem nas perturbações e tomando suas variações com relação a cada uma das perturbações, somos capazes de obter as seguintes equações de movimento para as perturbações  $\delta\chi$  e  $\delta\lambda$

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\chi} + 3H\delta\dot{\chi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2(\delta\chi) + \frac{\beta_0}{6}e^{-\chi}\lambda(\lambda\delta\chi - 2\delta\lambda) + V_{\chi\chi}\delta\chi + V_{\chi\lambda}\delta\lambda = \\ \dot{\chi}\dot{A} + \frac{1}{a}\dot{\chi}\nabla^2 B - 2V_{\chi}A, \end{aligned} \quad (7.54)$$

e

$$\begin{aligned} \beta_0 e^{-\chi} \left\{ \delta\ddot{\lambda} + (3H - \dot{\chi})\delta\dot{\lambda} - \frac{1}{a^2}\nabla^2(\delta\lambda) - \lambda\delta\dot{\chi} + [(-3H + \dot{\chi})\lambda - \ddot{\lambda}]\delta\chi \right\} + \\ -3(V_{\chi\lambda}\delta\chi + V_{\lambda\lambda}\delta\lambda) = \beta_0 e^{-\chi} \left( \dot{\lambda}\dot{A} + \dot{\lambda}\frac{1}{a}\nabla^2 B + \dot{\chi}\dot{\lambda}A \right) + 6V_{\lambda}A, \end{aligned} \quad (7.55)$$

<sup>7</sup>Note que comparando a métrica a seguir com a dada em Eq. (5.80), temos  $A \equiv \phi$ , além da assinatura distinta utilizada na revisão bibliográfica de Sec. 5.2.1.

<sup>8</sup>No gauge espacialmente plano, as perturbações  $\psi = E = 0$ , de modo a matar a parte espacial da métrica.

bem como as equações de Einstein

$$H \left( 3HA - \frac{k^2}{a} B \right) = -\frac{1}{4} \left[ 3\dot{\chi}\delta\dot{\chi} - \beta_0 e^{-\chi} \dot{\lambda}\delta\dot{\lambda} + \right. \\ \left. - \left( 3\dot{\chi}^2 - \beta_0 e^{-\chi} \dot{\lambda}^2 \right) A + \frac{1}{2} \beta_0 e^{-\chi} \dot{\lambda}^2 \delta\chi + V_{\chi} \delta\chi + V_{\lambda} \delta\lambda \right], \quad (7.56)$$

e

$$HA = \frac{1}{4} (3\dot{\chi}\delta\chi - \beta_0 e^{-\chi} \dot{\lambda}\delta\lambda). \quad (7.57)$$

onde o subscrito duplo no potencial  $V$  representa diferenciação de segunda ordem com relação aos campo escalares correspondentes.

## 7.5.2 Equações em ordem dominante de slow-roll

Uma vez que obtemos as Eqs. (7.54), (7.55), (7.56) e (7.57), que descrevem a evolução das perturbações escalares de forma completa, o próximo passo é escrevê-las em um regime em ordem dominante de slow-roll. Essa não é uma tarefa trivial e por isso, apresentaremos inicialmente o caso particular do modelo de Starobinsky ( $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ ). Neste caso, Eqs. (7.54), (7.55), (7.56) e (7.57) se reduzem a

$$\delta\ddot{\chi} + 3H\delta\dot{\chi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 (\delta\chi) + \hat{V}_{\chi\chi} \delta\chi + \hat{V}_{\chi\lambda} \delta\lambda = \\ \dot{\chi}\dot{A} + \frac{1}{a} \dot{\chi} \nabla^2 B - 2\hat{V}_{\chi} A, \quad (7.58)$$

$$\hat{V}_{\chi\lambda} \delta\chi + \hat{V}_{\lambda\lambda} \delta\lambda = -2\hat{V}_{\lambda} A, \quad (7.59)$$

$$H \left( 3HA - \frac{k^2}{a} B \right) = -\frac{1}{4} \left( 3\dot{\chi}\delta\dot{\chi} - 3\dot{\chi}^2 A + \hat{V}_{\chi} \delta\chi + \hat{V}_{\lambda} \delta\lambda \right) \quad (7.60)$$

e

$$HA = \frac{3}{4} \dot{\chi} \delta\chi, \quad (7.61)$$

com

$$\hat{V}(\chi, \lambda) = \frac{1}{3} \kappa_0 e^{-2\chi} \lambda \left( e^{\chi} - 1 - \frac{1}{2} \lambda \right). \quad (7.62)$$

Na Sec. 7.4 vimos, no âmbito do background, o comportamento dos campos escalares, suas derivadas e as relações que guardam entre si. Uma vez estabelecido o fator de slow-roll  $\delta = e^{-\chi}$ , lembremos que em ordem dominante de slow-roll obtivemos

$$\dot{\chi} \sim \delta, \quad \lambda \sim \delta^{-1}, \quad H \sim \delta^0, \quad \beta_0 \sim \delta \quad \text{e} \quad \alpha_0 \sim \delta^2,$$

e que a cada diferenciação com relação ao tempo nos campos escalares, aumenta-se uma ordem de slow-roll, isto é,  $\ddot{\chi} \sim \delta^2$  e  $\dot{\lambda} \sim \delta^0$ . Para fazermos as construções desta

seção, alguma suposição se faz necessária, a saber, para encontrarmos as ordens de slow-roll das perturbações precisamos estabelecer a ordem de slow-roll de uma delas. Nesse sentido, tomamos a perturbação  $\delta\chi$  como uma quantidade de ordem zero em slow-roll. Além disso, temos em mente que derivadas não mudam a ordem de slow-roll das perturbações. Agora somos capazes de escrever as equações de movimento em ordem dominante de slow-roll. Analisando Eq. (7.61), note que uma vez que  $\dot{\chi}\delta\chi \sim \delta$ , a perturbação  $A$  deve ser no máximo de primeira ordem em slow-roll. Com relação à Eq. (7.60), em seu membro direito temos os primeiro e terceiro termos, que são de primeira ordem, o segundo termo, que é subdominante  $3\dot{\chi}^2 A$  de terceira ordem em slow-roll, e o último é nulo, uma vez que  $\hat{V}_\lambda = 0$ . Além disso, uma vez que em seu membro esquerdo temos  $3H^2 A \sim \delta$ , concluímos que a perturbação  $B$  é de no máximo de primeira ordem em slow-roll. Por sua vez, como  $\hat{V}_{\chi\lambda} \sim \delta$  e  $\hat{V}_{\lambda\lambda} \sim \delta^2$ , vemos que Eq. (7.59) estabelece a ordem dominante da perturbação  $\delta\lambda$ , a saber,  $\delta\lambda \sim \delta^{-1}$ . Com a Eq. (7.59), podemos ainda escrever  $\delta\lambda$  em termos de  $\delta\chi$  e substituir em Eq. (7.58). Dessa forma, no membro esquerdo, os três primeiros termos são de ordem zero em slow-roll, enquanto todos os demais termos da equação nos dão contribuições subdominantes. Assim, podemos escrever

$$\delta\ddot{\chi} + 3H\delta\dot{\chi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2(\delta\chi) \approx 0. \quad (7.63)$$

Ao desenvolver a análise anterior agora para o caso das equações completas, encontramos que as perturbações evoluem, em ordem dominante em slow-roll, com as mesmas ordens obtidas anteriormente. Em suma, em ordem dominante em slow-roll, as perturbações escalares evoluem na forma  $A \sim B \sim \delta$  e  $\delta\lambda \sim \delta^{-1}$ . É interessante observar que a perturbação  $\delta\lambda$  vai em ordem dominante com  $\delta^{-1}$ , e que se de outra forma o fosse<sup>9</sup>, comprometeria gravemente a dinâmica de slow-roll.

Aplicando toda a discussão levantada anteriormente, encontramos, em ordem dominante em slow-roll, as seguintes equações de movimento para as perturbações dos campos escalares

$$\delta\ddot{\chi} + 3H\delta\dot{\chi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2(\delta\chi) \approx \frac{1}{3}\kappa_0(\delta\chi - e^{-\chi}\delta\lambda), \quad (7.64)$$

e

$$\beta_0 \left[ \delta\ddot{\lambda} + 3H\delta\dot{\lambda} - \frac{1}{a^2}\nabla^2(\delta\lambda) \right] \approx \kappa_0(\delta\chi - e^{-\chi}\delta\lambda). \quad (7.65)$$

Esses resultados estão de acordo com os obtidos em Ref. (CUZINATTO et al., 2019), onde é explorado o modelo Starobinsky+ $R^2$ .

### 7.5.3 Perturbações adiabáticas e de isocurvatura

Nesta subseção, definimos as perturbações adiabáticas e de isocurvatura, obtemos expressões que descrevem suas dinâmicas e estudamos algumas de suas soluções.

<sup>9</sup>Por exemplo  $\delta\lambda \sim \delta^{-2}$  ou ordens abaixo.

A ação (7.2) pode ser reescrita, aos moldes de Ref. (GUNDHI; STEINWACHS, 2020), de forma compacta como

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} G_{IJ}(\Phi) \partial_\mu \Phi^I \partial_\nu \Phi^J - 3V \right], \quad (7.66)$$

onde os escalares  $\Phi^I(x)$  são vistos como coordenadas locais no espaço dos campos com métrica  $G_{IJ}(\Phi)$

$$\Phi^I = \begin{pmatrix} \chi \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad G_{IJ}(\Phi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\beta_0 e^{-\chi} \end{pmatrix}, \quad (7.67)$$

e  $V$  representa o potencial da teoria Eq. (7.3). Em um modelo de dois campos escalares, o espaço dos campos é bidimensional e caracterizado por  $G_{IJ}(\Phi)$ . Para descrevermos a evolução das perturbações convenientemente, podemos definir uma base possuindo uma direção tangente, a qual denotaremos por  $\hat{\sigma}^I$ , e uma outra ortogonal,  $\hat{s}^I$ , às trajetórias do background. As direções tangentes às trajetórias do background estão associadas as perturbações adiabáticas, enquanto as ortogonais estão associadas as perturbações de isocurvatura. Nesse sentido, fazemos a construção da base através das definições, respectivamente, do módulo do vetor velocidade na direção tangente, do vetor unitário de velocidade e da regra de normalização

$$\dot{\sigma} = \sqrt{G_{IJ} \dot{\Phi}^I \dot{\Phi}^J}, \quad \hat{\sigma}^I = \frac{\dot{\Phi}^I}{\dot{\sigma}} \quad \text{e} \quad G_{IJ} \hat{\sigma}^I \hat{\sigma}^J = 1, \quad (7.68)$$

e para a direção ortogonal, as regras de normalização<sup>10</sup> e ortogonalidade

$$G_{IJ} \hat{s}^I \hat{s}^J = -1 \quad \text{e} \quad G_{IJ} \hat{s}^I \hat{\sigma}^J = 0. \quad (7.69)$$

Para o nosso caso, temos para o módulo da velocidade  $\dot{\sigma}$

$$\dot{\sigma} = \sqrt{3\dot{\chi}^2 - \beta_0 e^{-\chi} \dot{\lambda}^2}. \quad (7.70)$$

Observe que ela está diretamente relacionada à equação de Friedmann (5.38). Já para os vetores unitários de velocidade, escrevemos

$$\hat{\sigma}^\chi = \frac{\dot{\chi}}{\dot{\sigma}} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^\lambda = \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\sigma}}. \quad (7.71)$$

Por sua vez, para os vetores unitários na direção ortogonal às trajetórias, temos

$$\hat{s}^\chi = \sqrt{\frac{\beta_0 e^{-\chi}}{3}} \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\sigma}} \quad \text{e} \quad \hat{s}^\lambda = \sqrt{\frac{3}{\beta_0 e^{-\chi}}} \frac{\dot{\chi}}{\dot{\sigma}}. \quad (7.72)$$

Dando segmento em nosso estudo acerca da evolução das perturbações escalares, pontuamos que a quantidade  $\delta\Phi_g^I$  dada por

$$\delta\Phi_g^I = \delta\Phi^I + \frac{\dot{\Phi}^I}{H} \psi, \quad (7.73)$$

<sup>10</sup>Esta proposta de condição de normalização para  $\hat{s}^I$  se faz necessária devido ao sinal negativo na métrica  $G_{IJ}(\Phi)$ .

é um invariante de *gauge*. Ocorre que  $\psi = 0$  ao se trabalhar em um gauge espacialmente plano, de modo que  $\delta\Phi_g^I = \delta\Phi^I$ . Dito isso, projetando  $\delta\Phi^I$  nas direções  $\hat{\sigma}$  e  $\hat{s}$  construímos as perturbações adiabáticas  $Q_\sigma$  e de isocurvatura  $Q_s$ , respectivamente. Nesse sentido, temos

$$\begin{aligned} Q_\sigma &= \hat{\sigma}^J G_{IJ} \delta\Phi^I \\ Q_\sigma &= \frac{3\dot{\chi}\delta\chi - \beta_0 e^{-\chi} \lambda \delta\lambda}{\dot{\sigma}}, \end{aligned} \quad (7.74)$$

e

$$\begin{aligned} Q_s &= \hat{s}^J G_{IJ} \delta\Phi^I \\ Q_s &= \frac{\sqrt{3\beta_0 e^{-\chi}} (\lambda \delta\chi - \dot{\chi} \delta\lambda)}{\dot{\sigma}}. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Vale a pena destacar que do ponto de vista da aproximação de slow-roll tanto Eq. (7.74) quanto Eq. (7.75) são de ordem zero. Escritas as expressões para as perturbações adiabáticas e de isocurvatura, o passo a ser dado em seguida é inverter as relações de modo a obtermos  $\delta\Phi^I = \delta\Phi^I(Q)$ . Obtemos essas relações ao resolver o sistema linear dado pelas Eqs. (7.74) e (7.75). Solucionando, encontramos as expressões

$$\delta\chi = \frac{1}{\dot{\sigma}} \left( \dot{\chi} Q_\sigma - \sqrt{\frac{\beta_0 e^{-\chi}}{3}} \lambda Q_s \right), \quad (7.76)$$

$$\delta\lambda = \frac{1}{\dot{\sigma}} \left( \lambda Q_\sigma - \sqrt{\frac{3}{\beta_0 e^{-\chi}}} \dot{\chi} Q_s \right). \quad (7.77)$$

Uma vez obtidas as perturbações dos campos em termos das perturbações adiabáticas e de isocurvatura, além de sermos capazes de escrever as equações de movimento para  $Q_\sigma$  e  $Q_s$  e entender suas dinâmicas, podemos escrever a ação para as perturbações em segunda ordem em termos de  $Q_\sigma$  e  $Q_s$  em ordem dominante em slow-roll. Com isso, é de nosso interesse analisar especificamente o comportamento dos termos cinéticos e sua possível contribuição para o surgimento de instabilidades do tipo *ghosts*. Ao realizarmos essa tarefa, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} S^{(2)} &\approx \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} \partial_\kappa Q_\sigma \partial^\kappa Q_\sigma + \frac{1}{2} \partial_\kappa Q_s \partial^\kappa Q_s + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\kappa_0}{\dot{\sigma}^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{\beta_0 e^\chi} + \frac{\beta_0 e^\chi}{3} \right) \right] \dot{\chi}^2 Q_s^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

De cara, notamos que não há um termo cinético cruzado  $\partial_\kappa Q_\sigma \partial^\kappa Q_s$  e que os termos cinéticos são canônicos, iguais e com sinais trocados. Essa última característica indica, irremediavelmente, que a existência de instabilidades do tipo *ghost* é algo intrínseco ao modelo e que é fundamental levar isso em consideração ao realizar o processo de quantização das perturbações<sup>11</sup>.

<sup>11</sup>Esta conclusão é válida para o caso de um  $\beta_0$  positivo.

Voltamos agora nossa atenção para a tarefa de escrever as equações para a evolução das perturbações adiabáticas e de isocurvatura. Isso é feito substituindo as expressões (7.76) e (7.77) nas equações dinâmicas Eqs. (7.64) e (7.65). Nesse sentido, tomando as primeiras derivadas de Eqs. (7.76) e (7.77), lembrando que as quantidades do background podem ser consideradas constantes, somos capazes de escrever

$$\ddot{Q}_\sigma + 3H\dot{Q}_\sigma - \frac{1}{a^2}\nabla^2 Q_\sigma \approx 0, \quad (7.79)$$

e

$$\ddot{Q}_s + 3H\dot{Q}_s + m^2 Q_s \approx 0, \quad (7.80)$$

onde

$$m^2 = - \left[ \frac{1}{a^2}\nabla^2 + \frac{\kappa_0}{3} \left( 1 - \frac{3}{\beta_0 e^\chi} \right) \right]. \quad (7.81)$$

Observe que as relações (7.79) e (7.80) indicam que as perturbações adiabáticas  $Q_\sigma$  e de isocurvatura  $Q_s$  são desacopladas, isto é, elas evoluem independentemente no nosso modelo. Esse é um resultado interessante, uma vez que, em geral, as perturbações de entropia entram como fonte das perturbações adiabáticas, isto é, um tal desacoplamento geralmente não ocorre (GUNDHI; STEINWACHS, 2020).

A partir deste ponto, se torna conveniente tratar as equações de campo para as perturbações em uma forma tipo Mukhanov-Sasaki, fazemos uma redefinição das perturbações, assumindo o tempo conforme  $\eta$  e no espaço de Fourier. Uma vez que  $d\eta = a^{-1}(t) dt$ , temos

$$\delta\varphi_\sigma'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) \delta\varphi_\sigma \approx 0, \quad (7.82)$$

$$\delta\varphi_s'' + \left[ k^2 - \frac{a''}{a} - \frac{a^2\kappa_0}{3} \left( 1 - \frac{3}{\beta_0 e^\chi} \right) \right] \delta\varphi_s \approx 0, \quad (7.83)$$

com a linha representando derivada com relação ao tempo conforme e onde

$$\delta\varphi_\sigma \equiv aQ_\sigma \text{ e } \delta\varphi_s \equiv aQ_s. \quad (7.84)$$

Em um background de de Sitter (ordem zero de slow-roll), temos

$$\frac{a''}{a} \approx \frac{2}{\eta^2}, \quad a \approx -\frac{1}{H\eta} \text{ e } H^2 \approx \frac{\kappa_0}{12}. \quad (7.85)$$

Além disso, em ordem zero de slow-roll, temos que

$$\dot{\chi} \approx -\frac{1}{3} \frac{H^{-1}}{3 - \beta_0 \delta^{-1}} \delta \left( 1 - \frac{\alpha_0}{3} \delta^{-2} \right) \approx 0 \Rightarrow \chi = cte. \quad (7.86)$$

Por consistência com vários resultados anteriores, temos  $\beta_0 e^\chi < 3$ , de modo que podemos definir uma quantidade tal que

$$M \equiv \frac{3}{\beta_0 e^\chi} - 1 > 0, \quad (7.87)$$

e dessa forma escremos as expressões

$$\delta\varphi''_{\sigma} + k^2 \left(1 - \frac{2}{k^2\eta^2}\right) \delta\varphi_{\sigma} \approx 0, \quad (7.88)$$

$$\delta\varphi''_s + k^2 \left[1 - \frac{2}{k^2\eta^2} (1 - 2M)\right] \delta\varphi_s \approx 0. \quad (7.89)$$

A seguir, exploraremos as soluções das Eqs. (7.88) e (7.89) nos regimes de interesse.

### 7.5.4 Soluções para as perturbações

Uma vez estabelecidas as equações para a dinâmica das perturbações adiabáticas e de isocurvatura da forma conveniente, dadas por Eqs. (7.88) e (7.89), somos capazes de escrever e analisar suas soluções.

Em um regime sub-horizonte,  $k\eta \gg 1$ , as eqs. de perturbação são aproximadas por

$$\begin{aligned} \delta\varphi''_{\sigma} + k^2\delta\varphi_{\sigma} &\approx 0, \quad k\eta \gg 1, \\ \delta\varphi''_s + k^2\delta\varphi_s &\approx 0, \quad k\eta \gg 1. \end{aligned}$$

O processo de quantização em de Sitter leva as seguintes condições iniciais (BAUMANN, 2011; PIATTELLA, 2018)

$$\delta\varphi_{\sigma} \approx \delta\varphi_s \approx \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad k\eta \gg 1, \quad (7.90)$$

ou

$$Q_{\sigma} \approx Q_s \approx \frac{1}{\sqrt{2ka}} e^{-ik\eta} \approx -\frac{H\eta}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}. \quad (7.91)$$

Observe que devido ao comportamento tipo *ghost* das perturbações de isocurvatura, a quantização do campo  $Q_s$  foi realizada aos moldes das Refs. (IVANOV; TOKAREVA, 2016; SALVIO, 2017). Em princípio, este tipo de comportamento pode levantar questões sobre a unitariedade da teoria (SBISÁ, 2015). Contudo, como veremos a seguir, o campo  $Q_s$  decai rapidamente após cruzar o horizonte suprimindo qualquer efeito observável associado às perturbações de isocurvatura<sup>12</sup>.

A solução exata das Eqs. (7.88) e (7.89) pode ser escrita através de uma combinação das funções de Hankel como (PIATTELLA, 2018; GRADSHTEYN; RYZHIK, 2007)

$$\delta\varphi(\eta, k) = C_1(k) \sqrt{-\eta} H_{\nu}^{(1)}(-k\eta) + C_2(k) \sqrt{-\eta} H_{\nu}^{(2)}(-k\eta), \quad (7.92)$$

onde para as perturbações adiabáticas  $\delta\varphi_{\sigma}$ , temos  $\nu_{\sigma} = 3/2$ , e para as perturbações de isocurvatura  $\delta\varphi_s$ , temos

$$\nu_s = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{16M}{9}}. \quad (7.93)$$

<sup>12</sup>Observe também que em ordem dominante de slow-roll, as perturbações adiabáticas e de isocurvatura do modelo proposto evoluem de forma independente.

Para determinar as constantes, comparamos a solução geral com as condições iniciais em Eq. (7.90). Para o caso adiabático  $\nu_\sigma = 3/2$  no regime sub-horizonte, encontramos

$$C_{1\sigma} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ e } C_{2\sigma} = 0, \quad (7.94)$$

de modo que

$$\delta\varphi_\sigma(\eta, k) = -\frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2} H_{3/2}^{(1)}(-k\eta). \quad (7.95)$$

Por sua vez, para o caso das perturbações de isocurvatura, em que  $\nu_s$  é dado por Eq. (7.93), para um regime sub-horizonte, obtemos<sup>13</sup>

$$C_{1s} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu_s + \frac{1}{2})} \text{ e } C_{2s} = 0. \quad (7.96)$$

Dessa forma, a solução para as perturbações de isocurvatura se escreve como

$$\delta\varphi_s(\eta, k) = \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu_s + \frac{1}{2})} H_{\nu_s}^{(1)}(-k\eta). \quad (7.97)$$

Uma vez estabelecidas as soluções (7.95) e (7.97) para as perturbações, podemos agora analisar seu comportamento no limite super-horizonte ( $k\eta \ll 1$ ). Levando em consideração Eq. (7.85), que nos dá a relação entre  $\eta$  e  $a$  em um background de Sitter, para as perturbações adiabáticas, encontramos

$$\delta\varphi_\sigma(\eta, k) \approx -\frac{i}{4\eta} \left(\frac{k}{2}\right)^{-3/2} \text{ ou } Q_\sigma \approx \frac{iH}{4} \left(\frac{k}{2}\right)^{-3/2}, \quad k\eta \ll 1, \quad (7.98)$$

enquanto que para as perturbações de isocurvatura, temos

$$\delta\varphi_s(\eta, k) \approx -\frac{i\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{2}(\nu_s + \frac{1}{2})}}{2\sin(\nu_s\pi)\Gamma(1-\nu_s)} \left(\frac{k}{2}\right)^{-\nu_s} (-\eta)^{\frac{1}{2}-\nu_s}, \quad k\eta \ll 1, \quad (7.99)$$

ou

$$Q_s \approx -\frac{i\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{2}(\nu_s + \frac{1}{2})}H^{\nu_s - \frac{1}{2}}}{2\sin(\nu_s\pi)\Gamma(1-\nu_s)} \left(\frac{k}{2}\right)^{-\nu_s} a^{\nu_s - \frac{3}{2}}. \quad (7.100)$$

O resultado em Eq. (7.98) nos diz que as perturbações adiabáticas são constantes no limite super-horizonte, ao passo que Eq. (7.100) revela um comportamento decrescente para as perturbações de isocurvatura. Lembrando que para  $M > 0$ , temos as seguintes situações:

- Se a quantidade  $\nu_s$  é real, temos

$$0 < M \leq \frac{9}{16} \Rightarrow 0 \leq \nu_s < \frac{3}{2}, \quad (7.101)$$

representando uma solução para  $Q_s$  que decai com  $a$ .

<sup>13</sup>Note que no limite em que  $M \rightarrow 0$  (caso adiabático  $\nu_\sigma = 3/2$ ), temos  $C_{1s} = C_{1\sigma} = -\sqrt{\pi}/2$ .

- Se a quantidade  $\nu_s$  é imaginária,

$$M > \frac{9}{16} \Rightarrow \nu_s = i\frac{3}{2}\sqrt{\left|1 - \frac{16M}{9}\right|}, \quad (7.102)$$

também fornecendo uma solução que decai, uma vez que temos o produto de um termo oscilatório pelo termo que decai com  $a^{-\frac{3}{2}}$ .

Podemos fornecer uma medida quantitativa das perturbações de isocurvatura ao considerar escalas de interesse durante a inflação (medidas nas anisotropias da RCF). Essas estão compreendidas no intervalo  $10^{-3}Mpc^{-1} < k < 10^4Mpc^{-1}$ , onde a escala de pivô é  $k_* = 0.002$  com  $50 < N_* < 60$ . O ponto é que durante o regime inflacionário, uma dada escala  $k$  cruza o horizonte em um valor específico do número de  $e$ -folds  $N$ . Quanto menor/maior a escala  $k$ , menor/maior é o número de  $e$ -folds  $N$  que ela experimenta após cruzar o horizonte. Tomando a menor escala<sup>14</sup>  $k_{sm} = 10^4Mpc^{-1}$ , encontramos  $N_{sm} = N_* - 15.4$ . Nesse sentido, para  $N_* = 50$  e  $\nu_s = 1/2$ , obtemos

$$Q_s \approx \frac{1}{2} \left(\frac{k_{sm}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-N_{sm}} \sim 10^{-18}, \quad (7.103)$$

o que nos mostra que as perturbações de isocurvatura são negligenciáveis após a inflação. Uma vez que, somado a isso, elas não entram como fonte das perturbações adiabáticas, podemos considerá-las desprezíveis. Na próxima seção, faremos a análise da conexão do nosso modelo com as observações.

## 7.6 Conexão com as observações

Ao final da seção anterior, mostramos os motivos pelos quais as perturbações de isocurvatura são negligenciáveis após a inflação do nosso modelo, de forma a não contribuir para as observações. Além disso, uma vez que as perturbações adiabáticas possuem o mesmo comportamento que no caso para um único campo, reconhecemos o power spectrum e a sua conexão com os parâmetros observacionais. Veja seção 5.5.

Para fazermos a conexão com as observações, especificamente para escrevermos o power spectrum, é interessante recuperar as unidades de massa dos campos. Nesse sentido, equações como (7.11), (7.12), (7.68) e (7.74) necessitam ser escritas em termos de campos massivos dados em Eq. (7.5). Uma vez que a perturbação de curvatura é dada por  $\mathcal{R} = \left(\frac{H}{\dot{\sigma}}\right) \frac{\sqrt{2}}{M_{Pl}} Q_\sigma$ ,<sup>15</sup> o power spectrum das perturbações adiabáticas se escreve como

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}|^2 \Big|_{k=Ha} = \frac{1}{8\pi^2 M_{Pl}^2} \frac{H^2}{\epsilon} \Big|_{k=Ha}, \quad (7.104)$$

onde o avaliamos em  $k = Ha$  no instante em que  $k$  cruza o horizonte. O resultado em Eq. (7.104) é idêntico ao power spectrum para modelos inflacionários de um único

<sup>14</sup>Uma vez que todas as outras decaem mais.

<sup>15</sup>A quantidade  $\sqrt{2}/M_{Pl}$  é introduzida na definição da perturbação de curvatura  $\mathcal{R}$  para recuperarmos as unidades convencionais de  $Q_\sigma$ .

campo. Dessa maneira, em um regime em ordem dominante de slow-roll, os índice espectral escalar  $n_s$  e a razão tensorial escalar  $r$  são, respectivamente,

$$n_s = 1 + \eta - 2\epsilon \text{ e } r = 16\epsilon, \quad (7.105)$$

onde  $\epsilon$  e  $\eta$  são os parâmetros de slow-roll do modelo, Eqs. (7.43) e (7.44), que dependem de  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  e do número de  $e$ -folds  $N$  através de Eq. (7.47) que carrega a dependência entre  $N$  e  $\delta$ .

Nesta pesquisa, desenvolvemos dois tipos de Plots onde confrontamos nosso modelo com os dados observacionais oriundos do Planck mais BICEP3/Keck mais BAO (ADE et al., 2021), construídos a partir de Eq. (7.105) tomando os três parâmetros independentes  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  e  $N$ : o plano  $n_s \times r_{0.002}$  usual e o espaço de parâmetros  $\alpha_0 \times \beta_0$ . A abordagem é desenvolvida fixando um dos parâmetros e variando os demais. Utilizamos o intervalo  $52 \leq N \leq 59$  para o número de  $e$ -folds  $N$  da inflação obtido em Sec. 6.4.1. O resultado em (6.67) também se aplica para este caso em que  $\beta_0 \neq 0$ . O ponto principal é que no término e após a inflação onde  $\chi < 1 \Rightarrow \delta \sim 1$ , o modelo proposto se comporta essencialmente como o modelo de Starobinsky<sup>16</sup>. Assim, o único termo presente nas Eqs. (6.47) e (6.43) que pode ter alguma relevância quando  $\beta_0 \neq 0$  é o termo  $H_k$ . Contudo, por (7.40), vemos que  $H_k$  depende fracamente de  $\beta_0$  mesmo levando em conta correções em primeira ordem em slow-roll.

As figuras 7.3 apresentam o plano  $n_s \times r_{0.002}$  contendo os vínculos observacionais (em azul) obtidas a partir de Ref. (ADE et al., 2021) e a evolução teórica do modelo em duas situações distintas. Na figura à esquerda, fixamos o parâmetro  $\beta_0$  e variamos os demais. Nela, a região em vermelho claro representa o modelo Starobinsky+ $R^3$ , que se inicia nos pontos em vermelho claro. Por sua vez, a região em amarelo claro representa o modelo completo com  $\beta_0 = 1.5 \times 10^{-2}$ , iniciando nos pontos em amarelo. Na medida em que aumentamos os valores do parâmetro  $\alpha_0$ , a região prevista pelo modelo se desloca para a esquerda e para baixo, até cruzarem a região de 95% C.L.. Assim, concluímos que a variação de  $\alpha_0$  ocasiona um deslocamento característico para a esquerda e levemente para baixo da região que o modelo prevê para os parâmetros  $n_s$  e  $r_{0.002}$ , como pode ser visto também em Sec. 6.4.2. Esses vínculos estabelecem, na forma mais conservadora, um valor máximo para  $\alpha_0 \sim 10^{-4}$ .

Na figura à direita, por outro lado, fixamos o parâmetro  $\alpha_0$  e variamos os demais. A região em vermelho claro representa o modelo Starobinsky+ $R \square R$ , que se inicia nos pontos em vermelho claro. Por sua vez, a região em verde claro representa o modelo completo com  $\alpha_0 = 10^{-5}$ , iniciando nos pontos em verde claro. Com o aumento dos valores de  $\beta_0$ , a região prevista pelo modelo se desloca para a direita e para cima, até cruzarem a região de 95% C.L.. Vemos, então, este comportamento global devido a variação de  $\beta_0$ : a região prevista para os parâmetros  $n_s$  e  $r_{0.002}$  é deslocada para a direita e levemente para cima. Esses vínculos estabelecem um valor máximo para  $\beta_0 \sim 10^{-2}$ . Em Ref. (CASTELLANOS et al., 2018), um resultado consistente com a figura 7.3 à direita foi obtido. Por sua vez, em Ref. (CUZINATTO et al., 2019), um comportamento geral semelhante ficou estabelecido para a região do plano  $n_s \times r_{0.002}$  prevista pelo modelo Starobinsky+ $R \square R$ . No entanto, uma diferença considerável entre nossos resultados e os em Ref. (CUZINATTO et al., 2019) é verificada para a restrição da razão tensorial-escalar  $r_{0.002}$ . Lá,  $r_{0.002}$  pode assumir valores maiores, de modo que o crescimento da região prevista pelo modelo possui um crescimento bem mais acentuado.

<sup>16</sup>Isto ocorre pois consideramos  $\alpha_0 < 10^{-3}$  e  $\beta_0 < 3 \times 10^{-2}$ .

Essa diferença se deve ao fato de que em Ref. (CUZINATTO et al., 2019), a definição para a perturbação de curvatura não foi estabelecida de maneira adequada ao não fazer uma separação das trajetórias do espaço de fase do background nas direções tangente (perturbações adiabáticas) e ortogonal (perturbações de isocurvatura), como fizemos na subseção 7.5.3.

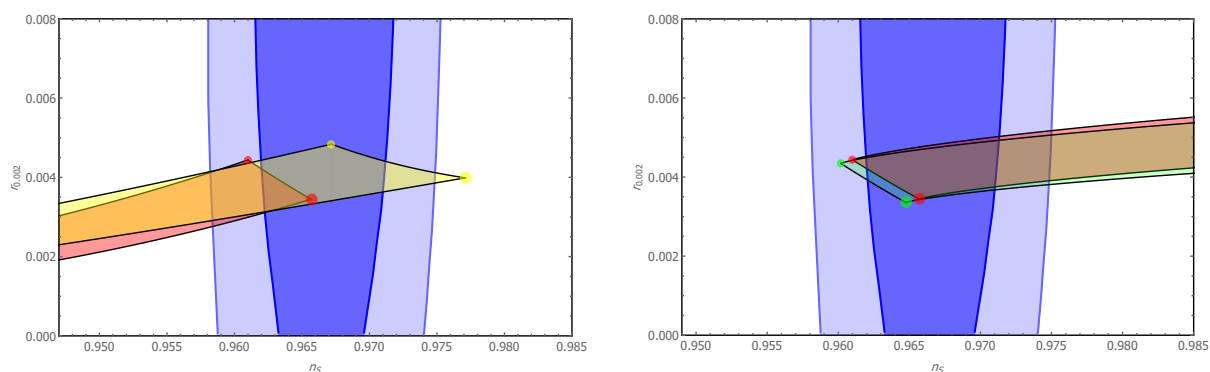


Figura 7.3: Os contornos em azul representam os vínculos do plano  $n_s \times r_{0.002}$  em 68% e 95% C.L. devido os dados observacionais do Planck mais BICEP3/Keck mais BAO (ADE et al., 2021). À esquerda, fixamos o parâmetro  $\beta_0$  e variamos os demais. Os círculos em vermelho claro representam o modelo Starobinsky+ $R^3$  para  $N = 52$  (menor) e  $N = 59$  (maior). Já os círculos em amarelo representam o modelo completo com  $\beta_0 = 1.5 \times 10^{-2}$  para  $N = 52$  e  $N = 59$ . Na medida em que os valores de  $\alpha_0$  aumentam, a região prevista pelo modelo se desloca para baixo e para a esquerda, até cruzarem a região de 95% C.L.. Ao cruzarem, as curvas para Starobinsky+ $R^3$  e modelo completo com  $\beta_0 = 1.5 \times 10^{-2}$  para  $N = 52$  correspondem a  $\alpha_0 = 3.5 \times 10^{-5}$  e  $r_{0.002} = 4.1 \times 10^{-3}$  e  $\alpha_0 = 4 \times 10^{-5}$  e  $r_{0.002} = 4.1 \times 10^{-3}$ , respectivamente; já para  $N = 59$  correspondem a  $\alpha_0 = 8.2 \times 10^{-5}$  e  $r_{0.002} = 2.8 \times 10^{-3}$  e  $\alpha_0 = 5.4 \times 10^{-5}$  e  $r_{0.002} = 2.9 \times 10^{-3}$ , respectivamente. À direita, por sua vez, fixamos o parâmetro  $\alpha_0$  e variamos os demais. Os círculos em vermelho claro representam o modelo Starobinsky- $R^2R$  para  $N = 52$  (menor) e  $N = 59$  (maior). Já os círculos em verde representam o modelo completo com  $\alpha_0 = 10^{-5}$  para  $N = 52$  e  $N = 59$ . Na medida em que os valores de  $\beta_0$  aumentam, a região prevista pelo modelo se deslocam para a direita e levemente para cima, até cruzarem a região de 95% C.L.. Ao cruzarem, as curvas para  $N = 52$  correspondem aproximadamente a  $\beta_0 = 1.7 \times 10^{-2}$  e  $r_{0.002} = 5.2 \times 10^{-3}$ ; para  $N = 59$  correspondem aproximadamente a  $\beta_0 = 1.5 \times 10^{-2}$  e  $r_{0.002} = 3.9 \times 10^{-3}$ .

Um outro tipo de Plot desenvolvido, figura 7.4, é o do espaço dos parâmetros  $\alpha_0 \times \beta_0$  permitido pelas observações. À esquerda temos o Plot para  $N = 52$ , enquanto à direita, o temos para  $N = 59$ . As regiões em azul representam as regiões permitidas para os parâmetros  $\alpha_0 \times \beta_0$  em 68% e 95% C.L.. Observe que o Plot para  $N = 52$  nos fornece uma região menor para os parâmetros, se o compararmos com o Plot para  $N = 59$ . O Plot para  $N = 59$  possibilitar uma região maior para os parâmetros do modelo está em concordância com os resultados para o plano  $n_s \times r_{0.002}$ . Na figura 7.3, as previsões do modelo para  $N = 59$  estão mais no interior da região de 68% C.L.. Uma característica interessante das figuras 7.4 é vista para grandes valores de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , onde a região aparenta convergir para uma região assintótica, na extremidade superior direita das figuras. Ao longo do nosso paper, estabelecemos restrições para os

valores de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  como pode ser visto na figura 7.3. O que esta figura nos faz concluir é que os valores dos parâmetros podem crescer, tendendo a uma região assintótica, com o preço de estabelecerem entre si um ajuste fino para sua ocorrência, que passa a ser cada vez mais improvável quanto maiores forem seus valores. Podemos constatar duas regiões em cada um dos Plots. Uma delas é uma região retangular completamente no interior da região de 95% C.L. (para  $N = 52$ , os lados correspondem a  $\alpha_0 = 2.8 \times 10^{-5}$  e  $\beta_0 = 1.7 \times 10^{-2}$ , e para  $N = 59$ ,  $\alpha_0 = 5.3 \times 10^{-5}$  e  $\beta_0 = 1.5 \times 10^{-2}$ ), onde os parâmetros  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  não guardam uma dependência entre si, podendo assumir quaisquer valores de maneira independente. A outra região, é a região assintótica para grandes valores de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , não descartada pelas observações, mas cuja ocorrência exige um ajuste fino entre os parâmetros, o que torna sua ocorrência mais desfavorecida.

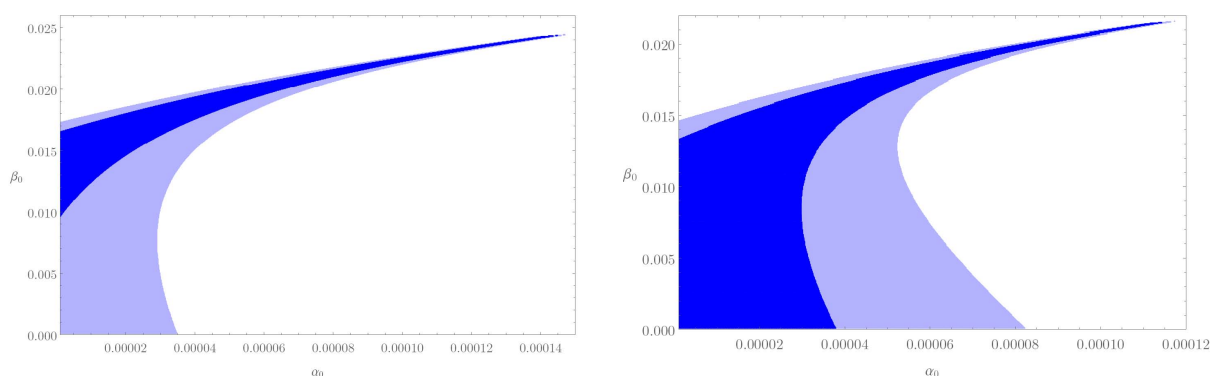


Figura 7.4: As regiões em azul representam as regiões permitidas para os parâmetros  $\alpha_0 \times \beta_0$  em 68% e 95% C.L. devido os dados observacionais do Planck mais BICEP3/Keck mais BAO (ADE et al., 2021). À esquerda temos o Plot para  $N = 52$ , enquanto à direita, o temos para  $N = 59$ . Note que os vínculos para  $N = 59$  permitem uma região maior para os parâmetros  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , em consonância com o que vimos na figura 7.3, cujas previsões para  $N = 59$  estão mais no interior da região de 68% C.L.. Observe que para grandes valores de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , por volta de  $\alpha_0 = 1.5 \times 10^{-4}$  e  $\beta_0 = 2.5 \times 10^{-2}$  ( $N = 52$ ) e  $\alpha_0 = 2.2 \times 10^{-4}$  e  $\beta_0 = 1.2 \times 10^{-2}$  ( $N = 59$ ), as regiões previstas para os parâmetros convergem para uma região assintótica. Nessa região, as observações não descartam valores maiores para os parâmetros. No entanto, se faz necessário um ajuste fino entre  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , tornando cada vez mais improvável a ocorrência.

## 7.7 Comentários finais

Nesta seção, nos propomos a investigar a inflação baseada na ação gravitacional de ordem superior caracterizada pela inclusão de todos os termos até a segunda ordem de correção envolvendo apenas a curvatura escalar, a saber, os termos  $R^2$ ,  $R^3$  e  $R \square R$ . Nesse sentido, nosso modelo proposto em Eq. (1.1) possui dois parâmetros adicionais,  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , cujos valores representam desvios à Starobinsky.

Ao passar do frame original para a representação no frame de Einstein, o modelo é descrito através da dinâmica de dois campos escalares  $\chi$  e  $\lambda$ , onde apenas um deles está associado a um termo cinético canônico, e cujo potencial é  $V(\chi, \lambda)$  dado em Eq. (7.3). O estudo da inflação em um background de Friedmann, através da análise

dos pontos críticos e do espaço de fase do modelo, é essencial para verificarmos a existência de uma região atratora associada à ocorrência de um regime inflacionário e para sabermos se um tal regime possui uma saída elegante, caindo no período de oscilações coerentes associadas às fases iniciais do reaquecimento. Tomamos como base o estudo dos casos particulares desenvolvidos em Ref. (CUZINATTO et al., 2019), que trata da extensão Starobinsky+ $R^2$ , e do trabalho desenvolvido no capítulo 6 acerca da extensão Starobinsky+ $R^3$ . Vimos que de fato existe uma linha atratora nas proximidades de  $\chi_t \approx 0$ , correspondente a uma inflação do tipo slow-roll, para qualquer valor de  $\alpha_0 < 10^{-3}$  e  $\beta_0 < 3 \times 10^{-2}$ . Além disso, a ocorrência de um tal regime de inflação física depende essencialmente das condições iniciais para o campo  $\chi$ . Se elas forem tais que o campo  $\chi$  esteja a direita do ponto crítico  $P_c$ , o valor de  $\chi$  aumenta indefinidamente e a inflação nunca termina. Por outro lado, a ocorrência de um regime inflacionário físico consistente que possua uma saída elegante requer essencialmente que as condições iniciais sejam tais que  $\chi < \chi_c$ , isto é, que esteja a esquerda do ponto crítico  $P_c$ . Por fim, concluímos a análise no âmbito do background com o estudo da inflação considerando a aproximação de slow-roll. Ao definirmos o fator de slow-roll  $\delta$ , que em nossa análise é responsável por controlar a ordem de aproximação de slow-roll, obtemos todas as quantidades relevantes em ordem dominante em slow-roll, além dos usuais parâmetros  $\epsilon$  e  $\eta$ , e do número de  $e$ -folds  $N$ .

Existe uma literatura considerável, que levamos em conta para desenvolvermos a análise em um âmbito perturbativo, acerca de modelos de inflação multi-campo (WANDS, 2008; BASSETT et al., 2006b). As equações de movimento para as perturbações escalares foram obtidas ao realizar a perturbação diretamente na ação fazendo uso do gauge espacicamente plano. Vimos, ao escrevermos as equações em ordem dominante em slow-roll, que as perturbações escalares da métrica são sub-dominantes com relação às perturbações  $\delta\chi$  e  $\delta\lambda$ . Através da definição das direções tangentes e ortogonais às linhas do espaço de fase do background, as quais tomamos como uma base por meio da qual as perturbações dos campos são decompostas, construímos as perturbações adiabáticas  $Q_\sigma$  e de isocurvatura  $Q_s$ . A ação escrita em termos de tais quantidades nos deixa claro que irremediavelmente há instabilidades do tipo *ghost* no modelo, uma vez que os termos cinéticos possuem sinais opostos. Em seguida, escrevemos suas equações de movimento em uma forma tipo Mukhanov-Sasaki, de maneira a convenientemente estudar suas soluções. Obtivemos as soluções exatas para as perturbações através de uma combinação linear das funções de Hankel e, ao estabelecer as condições iniciais, sua análise nos faz concluir que as perturbações de isocurvatura são negligenciáveis após a inflação e que as perturbações adiabáticas possuem o mesmo comportamento que no caso para um único campo. Tal construção nos fez reconhecer o power spectrum e a sua conexão com os parâmetros observacionais.

Por fim, confrontamos o modelo em questão com as observações recentes do satélite Planck, BICEP3/Keck e BAO (AKRAMI et al., 2018; ADE et al., 2021), fazendo uso da restrição para o número de  $e$ -folds  $N$  da inflação ( $52 \leq N \leq 59$ ) com base na modelagem do reaquecimento descrito em Sec. 6.4.1. Para tanto, fazemos dois tipos de Plot, a saber, o usual plano  $n_s \times r_{0.002}$  e o espaço dos parâmetros  $\alpha_0 \times \beta_0$  permitido pelas observações. Nessa análise, contamos com três parâmetros:  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  e  $N$ . Dessa forma, para construir os Plots fixamos um dos parâmetros e variamos os demais. Fixando o parâmetro  $\beta_0$ , observamos que a região prevista pelo modelo no plano  $n_s \times r_{0.002}$  se desloca para a esquerda e levemente para baixo. Por outro lado, fixando o parâme-

tro  $\alpha_0$ , notamos que a região prevista se desloca para a direita e levemente para cima. Fixar  $\alpha_0 = 0$  representa basicamente o modelo Starobinsky+ $R^2$ . Nesse contexto, vimos que uma inconsistência ao estabelecer a perturbação de curvatura em Ref. (CUZINATTO et al., 2019), os levaram a obter valores mais altos que os nossos para a razão tensorial-escalar. Por sua vez, fixando o número de  $e$ -folds  $N$ , construímos o espaço dos parâmetros  $\alpha_0 \times \beta_0$  restritos pelas observações. Em geral, as previsões do modelo estão mais de acordo com as observações para um número de  $e$ -folds  $N \approx 59$ . Nossas análises, de maneira conservadora, restringem os parâmetros em valores máximos da ordem de  $\alpha_0 \sim 10^{-4}$  e  $\beta_0 \sim 10^{-2}$ . Vale a pena ainda apontar acerca do comportamento do espaço dos parâmetros  $\alpha_0 \times \beta_0$ . Nele, existe uma região considerável na qual os parâmetros não guardam uma dependência entre si. No entanto, a região assintótica para grandes valores de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , requer um ajuste fino entre os parâmetros, o que torna sua ocorrência mais improvável.

Fundamentalmente, uma das principais motivações para a investigação das gravidades de ordens superiores é o fato de a RG ser uma teoria não renormalizável, o que impossibilita sua quantização da maneira convencional. Na busca por teorias fundamentais de gravidade evidenciou-se que termos de ordens superiores para a curvatura são tais que necessariamente devem estar presentes. É importante deixar claro, no entanto, que não encaramos nosso modelo (1.1) como uma teoria fundamental de gravidade, mas sim, como um modelo clássico de gravidade em um contexto de teoria efetiva. Com isso em mente, uma vez proposta a ação gravitacional (1.1), nossas pesquisas foram voltadas para aplicações em diferentes contextos, a saber, na busca por soluções esfericamente simétricas (SILVA; MEDEIROS, 2020) e na inflação cósmica (SILVA et al., 2022; SILVA; MEDEIROS, 2022).

No contexto das soluções no limite de campo fraco, vimos em Sec. 4.1.1 que a análise de estabilidade das soluções exclui soluções oscilatórias ao restringir o intervalo de parâmetros em  $\kappa_0 > 0$  e  $0 \leq \beta_0 < 3/4$ , determinando como únicas soluções fisicamente realizáveis as do tipo Yukawa. Observe que a mesma restrição para os parâmetros  $\kappa_0$  e  $\beta_0$  surge no contexto inflacionário em Sec. 7.3 de modo a garantir que o regime inflacionário seja consistente condizente com a existência de uma saída elegante. O mesmo resultado foi obtido em Ref. (CUZINATTO et al., 2019). Esse resultado, obtido em diferentes contextos, nos dá um indicativo de que é tal que se faz necessário para que a teoria (1.1) seja estável. Vimos também que o parâmetro  $\alpha_0$  não desempenha qualquer papel em nenhum dos casos particulares citados (soluções físicas no regime de campo fraco e fim da inflação).

Mesmo não tendo obtido as soluções completas explícitas para as Eqs. (4.1), nossos resultados em Secs. 4.2 e 4.2.1 são contundentes em sugerir a ausência de buracos negros macroscópicos além de Schwarzschild. Concluímos, através de estimativas conservadoras baseadas na escala de energia da inflação, que buracos negros astrofísicos além de Schwarzschild são bastante desfavorecidos ( $r_h \lesssim 10^{-31}\text{m}$ ) (SILVA; MEDEIROS, 2020).

No âmbito inflacionário, para ambos os modelos apresentados, Starobinsky+ $R^3$  e Starobinsky+ $R^3 + R\Box R$ , vimos que o parâmetro  $\alpha_0$  desempenha um papel crucial no desenrolar da inflação. Ele está diretamente relacionado com a limitação das condições

iniciais para a ocorrência de uma inflação física, isto é, um período de expansão quasi de Sitter quando se dá a inflação de slow-roll, mais a saída elegante, correspondente a fase de reaquecimento. Uma inflação física ocorre desde que tenhamos condições iniciais tais que  $\chi < \chi_c$  com  $\chi_c = \ln(4 + \sqrt{3/\alpha_0})$  (SILVA et al., 2022; SILVA; MEDEIROS, 2022). Um outro ponto de interesse é que para a descrição da inflação em um regime de slow-roll — por exemplo ao obter as quantidades, parâmetros de interesse, condições —, se fez necessário reconhecer/estabelecer a ordem de slow-roll limite para os parâmetros  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , de modo que em última análise toda a descrição da inflação de slow-roll se deu em termos de um parâmetro fundamental, o fator de slow-roll  $\delta \equiv e^{-\chi}$ . Veja Sec. 7.4.

Na Sec. 7.5.3, vimos que as equações de movimento para as perturbações adiabáticas  $Q_\sigma$  e de isocurvatura  $Q_s$  são desacopladas em nosso modelo. Assim, a característica usual na formulação inflacionária multi-campo de as perturbações de isocurvatura entrarem como fonte das perturbações adiabáticas, vide Ref. (GUNDHI; STEINWACHS, 2020), não ocorre no nosso caso. Para além disso, em Sec. 7.5.4, verificamos que as perturbações  $Q_s$  são desprezíveis após a inflação, de modo a não contribuir para as observações. Essa característica nos possibilita negligenciar quaisquer efeitos associados a perda de unitaridade advindos do comportamento tipo *ghost* associados às perturbações  $Q_s$ . Uma vez que as perturbações adiabáticas possuem o mesmo comportamento que no caso para um único campo, reconhecemos o power spectrum e a sua conexão com os parâmetros observacionais. Dessa forma, fazendo uso da restrição para o número de  $e$ -folds  $N$  da inflação ( $52 \leq N \leq 59$ ) com base na modelagem do reaquecimento descrito em Sec. 6.4.1, fomos capazes de obter os vínculos, oriundos das anisotropias da RCF, para os parâmetros da ordem de  $\alpha_0 \sim 10^{-4}$  e  $\beta_0 \sim 10^{-2}$  (SILVA; MEDEIROS, 2022).

Como perspectivas, no contexto da inflação podemos investigar modelos que introduzam na ação gravitacional termos envolvendo não apenas o escalar de curvatura, mas termos envolvendo os demais invariantes de curvatura como os tensores de Ricci, Riemann e Weyl. É interessante estudar qual o papel das perturbações de isocurvatura na construção do espectro de potência, bem como podemos ir além e investigar vínculos associados a produção de não gaussianidades (AKRAMI et al., 2019; BIAGETTI, 2019). Além da inflação, um tópico de bastante interesse atualmente é o estudo da geração e as propriedades de ondas gravitacionais em teorias de gravidade de ordens mais altas. Nesse outro cenário, podemos determinar a contribuição advindas dos termos de ordens superiores da ação gravitacional proposta e compararmos com os vínculos oriundos das observações de sistemas binários (CAPRINI et al., 2018; HÖLSCHER; SCHWARZ, 2019; Capozziello; Bajardi, 2019; ALVES et al., 2022). Há ainda a possibilidade da investigação dos modos quasi-normais de buracos negros esfericamente simétricos, análise da estabilidade das soluções exteriores e estudo da fase de ringdown na fusão de buracos negros (BHATTACHARYYA; SHANKARANARAYANAN, 2017; ZINHAILO, 2018; DATTA; BOSE, 2019).

## APÊNDICE A

### OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO

Este apêndice é destinado ao detalhamento da obtenção das equações de campo, no vácuo, associadas à ação dada em (1.1). A seguir, apresentamos a dedução completa das equações de campo da ação Starobinsky  $+\nabla_\mu R \nabla^\mu R$ , que é idêntica a ação Starobinsky  $+R\Box R$  (com sinais trocados). Consultas foram realizadas em Ref. (CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2011), principalmente para ao final escrever os termos das equações de campo associadas ao termo cúbico  $R^3$  da ação (1.1). Dito isso, tomando  $c_0 = -1/\kappa_0$  e  $c_1 = \beta_0/\kappa_0^2$  e extremizando a ação Starobinsky  $+\nabla_\mu R \nabla^\mu R$  com relação à métrica  $g_{\mu\nu}$ , escrevemos

$$\begin{aligned}\delta S_g &= -\frac{M_P^2}{2} \delta \int d^4x \sqrt{-g} \left( R - \frac{c_0}{2} R^2 + \frac{c_1}{2} \nabla_\mu R \nabla^\mu R \right) = 0 \\ \delta S_g &= \delta \int d^4x \sqrt{-g} \left( R - \frac{c_0}{2} R^2 + \frac{c_1}{2} \nabla_\mu R \nabla^\mu R \right) = 0 \\ \delta S_g &= \int d^4x \left[ \delta (\sqrt{-g} R) - \frac{c_0}{2} \delta (\sqrt{-g} R^2) + \frac{c_1}{2} \delta (\sqrt{-g} \nabla_\mu R \nabla^\mu R) \right] = 0.\end{aligned}$$

Separando termo a termo, podemos escrever diretamente para a ação de Einstein-Hilbert

$$\int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{c_0}{2} \int d^4x \delta (\sqrt{-g} R^2) + \frac{c_1}{2} \int d^4x \delta (\sqrt{-g} \nabla_\mu R \nabla^\mu R) = 0.$$

Para o segundo termo, associado ao termo quadrático na curvatura escalar  $R$ , escreve-se

$$\begin{aligned}\int d^4x \delta (\sqrt{-g} R^2) &= \int d^4x \left[ \delta (\sqrt{-g}) R^2 + \sqrt{-g} \delta R^2 \right] \\ \int d^4x \delta (\sqrt{-g} R^2) &= \int d^4x \left[ \delta (\sqrt{-g}) R^2 + 2\sqrt{-g} R \delta R \right].\end{aligned}$$

Como a variação  $\delta (\sqrt{-g})$  é

$$\delta (\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu},$$

tem-se

$$\int d^4x \delta (\sqrt{-g} R^2) = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} R^2 g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + 2R \delta R \right).$$

Por sua vez, a variação  $\delta R$  é

$$\begin{aligned}\delta R &= \delta (R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) \\ \delta R &= (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}),\end{aligned}$$

e assim

$$\delta S_0 \equiv \int d^4x \delta (\sqrt{-g} R^2) = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} R^2 g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + 2R R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + 2R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right). \quad (\text{A.1})$$

É preciso avaliar agora, a variação do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ . Utilizando a identidade de Palatini, a saber,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha), \quad (\text{A.2})$$

e escrevendo a variação das conexões de Levi-Civita em termos da variação da métrica, temos

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} \delta \left[ g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \right],$$

que após vários passos, fornece

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\beta} + \nabla_\nu \delta g_{\beta\mu} - \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}).$$

Substituindo este resultado na identidade de Palatini e fazendo uso da condição de metricidade, obtemos

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (\nabla_\mu \delta g_{\nu\beta} + \nabla_\nu \delta g_{\beta\mu} - \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}) + \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\nu (\nabla_\mu \delta g_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \delta g_{\beta\mu} - \nabla_\beta \delta g_{\mu\alpha}).\end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Como

$$g^{\kappa\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_{\lambda}^{\kappa},$$

segue que

$$\begin{aligned}\delta (g^{\kappa\nu} g_{\nu\lambda}) &= 0 \\ \delta g^{\kappa\nu} g_{\nu\lambda} + g^{\kappa\nu} \delta g_{\nu\lambda} &= 0.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}g^{\kappa\nu} \delta g_{\nu\lambda} &= -g_{\nu\lambda} \delta g^{\kappa\nu} \\ g_{\mu\kappa} g^{\kappa\nu} \delta g_{\nu\lambda} &= -g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} \delta g^{\kappa\nu} \\ \delta_\mu^\nu \delta g_{\nu\lambda} &= -g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} \delta g^{\kappa\nu} \\ \delta g_{\mu\lambda} &= -g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} \delta g^{\kappa\nu}.\end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Substituindo a relação (A.4) em (A.3) e realizando numerosas passagens, obtém-se para a variação  $\delta R_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \nabla_\alpha \left[ (-g_{\nu\kappa} \nabla_\mu \delta g^{\kappa\alpha}) - (g_{\lambda\mu} \nabla_\nu \delta g^{\alpha\lambda}) + (g_{\mu\kappa} g_{\lambda\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \delta g^{\kappa\lambda}) \right] + \\ &\quad - \frac{1}{2} \nabla_\nu \left[ (-g_{\lambda\beta} \nabla_\mu \delta g^{\beta\lambda}) - (g_{\lambda\mu} \nabla_\alpha \delta g^{\alpha\lambda}) + (g_{\mu\kappa} \nabla_\beta \delta g^{\kappa\beta}) \right].\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por  $g^{\mu\nu}$ ,

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \nabla_\alpha \left[ (-g^{\mu\nu} g_{\nu\kappa} \nabla_\mu \delta g^{\kappa\alpha}) - (g^{\mu\nu} g_{\lambda\mu} \nabla_\nu \delta g^{\alpha\lambda}) + (g^{\mu\nu} g_{\mu\kappa} g_{\lambda\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \delta g^{\kappa\lambda}) \right] + \\
&\quad - \frac{1}{2} \nabla_\nu \left[ (-g_{\lambda\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \delta g^{\beta\lambda}) - (g^{\mu\nu} g_{\lambda\mu} \nabla_\alpha \delta g^{\alpha\lambda}) + (g^{\mu\nu} g_{\mu\kappa} \nabla_\beta \delta g^{\kappa\beta}) \right] \\
g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \nabla_\alpha \left[ (-\delta_\kappa^\mu \nabla_\mu \delta g^{\kappa\alpha}) - (\delta_\lambda^\nu \nabla_\nu \delta g^{\alpha\lambda}) + (\delta_\kappa^\nu g_{\lambda\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \delta g^{\kappa\lambda}) \right] + \\
&\quad - \frac{1}{2} \nabla_\nu \left[ (-g_{\lambda\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \delta g^{\beta\lambda}) - (\delta_\lambda^\nu \nabla_\alpha \delta g^{\alpha\lambda}) + (\delta_\kappa^\nu \nabla_\beta \delta g^{\kappa\beta}) \right] \\
g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \nabla_\alpha \left[ (-\nabla_\mu \delta g^{\mu\alpha}) - (\nabla_\nu \delta g^{\alpha\nu}) + (g_{\lambda\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \delta g^{\nu\lambda}) \right] + \\
&\quad - \frac{1}{2} \nabla_\nu \left[ (-g_{\lambda\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \delta g^{\beta\lambda}) - (\nabla_\alpha \delta g^{\alpha\nu}) + (\nabla_\beta \delta g^{\nu\beta}) \right] \\
g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[ (-\nabla_\alpha \nabla_\mu \delta g^{\mu\alpha}) - (\nabla_\alpha \nabla_\nu \delta g^{\alpha\nu}) + (g_{\lambda\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta g^{\nu\lambda}) \right] + \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[ (-g_{\lambda\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g^{\beta\lambda}) - (\nabla_\nu \nabla_\alpha \delta g^{\alpha\nu}) + (\nabla_\nu \nabla_\beta \delta g^{\nu\beta}) \right]
\end{aligned}$$

e novamente suprimindo algumas passagens, obtém-se

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \square g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo essa relação em (A.1), tem-se

$$\begin{aligned}
\delta S_0 &= \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2RR_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \\
&\quad + 2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R \square (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) - R \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}) \right].
\end{aligned}$$

Restringindo a atenção para a segunda integral, pode-se chamar

$$h \equiv -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \text{ e } h^{\mu\nu} = -\delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.6})$$

e assim, tem-se

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[ R \square (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) - R \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}) \right] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R \nabla_\mu \nabla_\nu (h^{\mu\nu}) - R \square h \right].$$

Denotando esse termo por  $J$ ,

$$\begin{aligned}
J &= \int d^4x \sqrt{-g} R \nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \int d^4x \sqrt{-g} R \nabla_\kappa \nabla^\kappa h \\
J &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \nabla_\mu (R \nabla_\beta h^{\mu\beta}) - \nabla_\mu R \nabla_\nu h^{\mu\nu} \right] - \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \nabla_\kappa (R \nabla^\kappa h) - \nabla^\kappa R \nabla_\kappa h \right] \\
J &= \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu (R \nabla_\nu h^{\mu\nu}) - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu R \nabla_\nu h^{\mu\nu} + \\
&\quad - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\kappa (R \nabla^\kappa h) + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\kappa R \nabla_\kappa h \\
J &= \int d^4x \partial_\mu (\sqrt{-g} R \partial_\nu h^{\mu\nu}) - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \nabla_\nu [\nabla_\mu (R) h^{\mu\nu}] - \nabla_\nu \nabla_\mu (R) h^{\mu\nu} \right\} + \\
&\quad - \int d^4x \partial_\kappa (\sqrt{-g} R \partial^\kappa h) + \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \nabla_\kappa [\nabla^\kappa (R) h] - \nabla_\kappa \nabla^\kappa (R) h \right\}.
\end{aligned}$$

Considerando que as integrais na fronteira da hipersuperfície anulam-se, obtemos

$$\begin{aligned}
J &= - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu [\nabla_\mu (R) h^{\mu\nu}] + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu \nabla_\mu (R) h^{\mu\nu} + \\
&+ \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\kappa [\nabla^\kappa (R) h] - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\kappa \nabla^\kappa (R) h \\
J &= - \int d^4x \partial_\nu [\sqrt{-g} \partial_\mu (R) h^{\mu\nu}] + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu \nabla_\nu (R) h^{\mu\nu} + \\
&+ \int d^4x \partial_\kappa [\sqrt{-g} \partial^\kappa (R) h] - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\kappa \nabla^\kappa (R) h \\
J &= \int d^4x \sqrt{-g} h^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu R - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\kappa \nabla^\kappa (R) h \\
J &= \int d^4x \sqrt{-g} [h^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu R - h \square R] \\
J &= \int d^4x \sqrt{-g} [-\delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu R + g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \square R].
\end{aligned}$$

Portanto, juntando todos os termos de (A.1), obtém-se

$$\begin{aligned}
\delta S_0 &= \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2RR_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu} \square R - 2\nabla_\mu \nabla_\nu R \right) \delta g^{\mu\nu} \\
\delta S_0 &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ 2R \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right) + 2(g_{\mu\nu} \square R - \nabla_\mu \nabla_\nu R) \right] \delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Para o terceiro e último termo na ação (??), escrevemos

$$\begin{aligned}
\delta S_1 &= \int d^4x \delta (\sqrt{-g} \nabla_\mu R \nabla^\mu R) \\
\delta S_1 &= \int d^4x \{ \delta (\sqrt{-g}) (g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \nabla_\nu R) + \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \nabla_\nu R) + 2\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu R (\nabla_\nu \delta R) \} \\
\delta S_1 &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R \nabla_\beta R) \delta g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \nabla_\nu R + 2g^{\mu\nu} \nabla_\mu R (\nabla_\nu \delta R) \right],
\end{aligned}$$

no qual foi feita uma redefinição nos índices de  $g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \nabla_\nu R \rightarrow g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R \nabla_\beta R$ . Trabalhando com o terceiro termo do membro esquerdo da relação anterior, temos

$$\begin{aligned}
\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \nabla_\nu \delta R &= \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\nu (g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \delta R) - g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) \delta R] \\
\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \nabla_\nu \delta R &= \int d^4x \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu R \delta R) - \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) \delta R \\
\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \nabla_\nu \delta R &= - \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) \delta R.
\end{aligned}$$

Como a variação  $\delta R$  é

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu},$$

e

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}) + g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu},$$

temos

$$\begin{aligned}
\int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R \nabla_\beta \delta R &= - \int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \\
\int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R \nabla_\beta \delta R &= - \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R) R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \\
&- \int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R (g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}).
\end{aligned}$$

O segundo termo do lado direito da relação anterior pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R (g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R (g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \\
\int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R (g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R [-\nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}) + g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu}] \\
\int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R (g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) &= - \int d^4x \sqrt{-g} \square R \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}) + \\
&\quad + \int d^4x \sqrt{-g} \square R (g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu}) \\
\int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R (g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) &= \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu (\square R) \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}) + \\
&\quad - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\alpha (\square R) [g^{\alpha\beta} \nabla_\beta (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})] \\
\int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R (g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) &= - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu \nabla_\mu (\square R) \delta g^{\mu\nu} + \\
&\quad + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\alpha (\square R) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
\int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R (g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) &= - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu \nabla_\mu (\square R) \delta g^{\mu\nu} + \\
&\quad + \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \square^2 R \delta g^{\mu\nu},
\end{aligned}$$

e assim

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R (g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) = \int d^4x \sqrt{-g} [g_{\mu\nu} \square^2 R - \nabla_\mu \nabla_\nu (\square R)] \delta g^{\mu\nu}.$$

Unindo todos os termos de  $\delta S_1$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\delta S_1 &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R \nabla_\beta R) \right] \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu R \nabla_\nu R \delta g^{\mu\nu} + \\
&\quad - 2 \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R) R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - 2 \int d^4x \sqrt{-g} [g_{\mu\nu} \square^2 R - \nabla_\mu \nabla_\nu (\square R)] \delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Portanto, a variação total  $\delta S_g$  escreve-se

$$\begin{aligned}
&\int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \\
&- \frac{c_0}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ 2R \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right) + 2 (g_{\mu\nu} \square R - \nabla_\mu \nabla_\nu R) \right] \delta g^{\mu\nu} + \\
&\quad + \frac{c_1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R \nabla_\beta R) + \nabla_\mu R \nabla_\nu R \right] \delta g^{\mu\nu} + \\
&- \frac{c_1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} 2 \left[ (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R) R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square^2 R - \nabla_\mu \nabla_\nu (\square R) \right] \delta g^{\mu\nu} = 0,
\end{aligned}$$

fornecendo as seguintes equações de campo

$$\begin{aligned}
&G_{\mu\nu} - \frac{c_0}{2} \left[ 2R \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right) + 2 (g_{\mu\nu} \square R - \nabla_\mu \nabla_\nu R) \right] + \\
&+ \frac{c_1}{2} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha R \nabla^\alpha R + \nabla_\mu R \nabla_\nu R - 2 \square R R_{\mu\nu} - 2 g_{\mu\nu} \square^2 R + 2 \nabla_\mu \nabla_\nu \square R \right] = 0,
\end{aligned}$$

ou, lembrando que  $c_0 = -1/\kappa_0$  e  $c_1 = \beta_0/\kappa_0^2$ ,

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa_0} \left[ R \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right) + (g_{\mu\nu} \square R - \nabla_\mu \nabla_\nu R) \right] + \frac{\beta_0}{\kappa_0^2} \left[ \nabla_\mu \nabla_\nu \square R + \frac{1}{2} \nabla_\mu R \nabla_\nu R - R_{\mu\nu} \square R - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{4} \nabla_\alpha R \nabla^\alpha R + \square^2 R \right) \right] = 0.$$

Por fim, usamos Eq. (9.42) de Ref. (CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2011) para escrevermos de maneira direta a contribuição para as equações de campo oriunda do termo cúbico  $R^3$  na ação. Nesse sentido, obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{1}{\kappa_0} \left[ R \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right) - \nabla_\mu \nabla_\nu R + g_{\mu\nu} \square R \right] + \frac{\alpha_0}{\kappa_0^2} \left[ R^2 \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} R \right) - \nabla_\mu \nabla_\nu R^2 + g_{\mu\nu} \square R^2 \right] + \frac{\beta_0}{\kappa_0^2} \left[ \nabla_\mu \nabla_\nu \square R + \frac{1}{2} \nabla_\mu R \nabla_\nu R - R_{\mu\nu} \square R - g_{\mu\nu} \left( \square^2 R + \frac{1}{4} \nabla_\alpha R \nabla^\alpha R \right) \right] = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

## APÊNDICE B

# PERTURBAÇÕES EM TORNO DE SCHWARZSCHILD: ANÁLISE VIA PERTURBAÇÃO SINGULAR

Neste apêndice, faremos uma análise acerca das implicações do método das perturbações singulares sobre o limite de campo fraco da gravidade de Starobinsky — ação (1.1) com  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$  — assumindo uma massa pontual na origem e relacionaremos com o caso completo não linearizado em que se considera um horizonte  $r_h$ . Para uma introdução sobre perturbações singulares, veja Refs. (JOHNSON, 2004)(HOLMES, 2012).

O objetivo aqui é fornecer uma justificativa para considerar que a camada limite  $\Delta$  é dada por  $\Delta \approx \kappa_0^{-1/2}$ , e portanto, está muito no interior do horizonte. Uma vez mostrado que  $\Delta \ll r_r$ , se torna lícito seguir com a abordagem desenvolvida em Sec. 4.2.1. Na análise deste apêndice, consideramos apenas a gravitação de Starobinsky no limite de campo fraco. Ou seja, mesmo muito próximo da massa pontual, assumimos que a gravidade é dada pelas equações linearizadas. Essas hipóteses são fortes, porém apenas nesta situação conseguimos aplicar o método de perturbação singular.

Nesse ponto, retomaremos algumas das relações da análise do limite de campo fraco. Tomando o traço das equações de campo da gravidade de Starobinsky — que é o caso particular de (4.1) com  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ , com  $T = -\rho = -m\delta(r)$ , segue

$$-R + \frac{3}{\kappa_0} \nabla_\mu \nabla^\mu R = -8\pi G\rho.$$

Linearizando-a tendo a métrica de Minkowski como background ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , com  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ) e considerando um regime estático e esfericamente simétrico, escrevemos<sup>1</sup>

$$-R + \frac{3}{\kappa_0} \nabla^2 R = -8\pi Gm\delta(r); \quad (\text{B.1})$$

Além dessa relação, temos também a componente  $\mu = \nu = 0$  das equações de campo (linearizadas, com simetria esférica e estáticas),

$$R_{00} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{\kappa_0} \nabla^2 R = 8\pi GT_{00}.$$

<sup>1</sup>A curvatura escalar  $R$  está implicitamente linearizada: uma notação mais precisa seria  $R_{lin}$ , mas não faremos isso.

Uma vez que sabemos que  $R_{00} = \nabla^2\phi$  e  $T_{00} \approx \rho$ , escrevemos

$$\nabla^2\phi + \frac{1}{2}R - \frac{1}{\kappa_0}\nabla^2R = 8\pi Gm\delta(r), \quad (\text{B.2})$$

Podemos ainda combinar essas duas relações para obter

$$\nabla^2\phi + \frac{1}{6}R = \frac{16}{3}\pi Gm\delta(r). \quad (\text{B.3})$$

Vale a pena comentar sobre a natureza da solução geral do limite de campo fraco da gravidade de Starobinsky: ela é uma teoria de quarta ordem para a métrica; assim, seu limite de campo fraco possui quatro soluções linearmente independentes — uma solução constante, a conhecida solução newtoniana e duas soluções do tipo Yukawa; no entanto, a condição de contorno no infinito, onde impomos um limite assintoticamente plano "mata" duas das soluções. Por sua vez, a condição de contorno na origem, onde se localiza uma massa pontual, fixa a constante da solução do tipo Yukawa decrescente. Podemos então escrever

$$\phi(r) = -\frac{Gm}{r} \left(1 + a_0 e^{-\frac{r}{l_0}}\right),$$

para o potencial gravitacional  $\phi$  — com  $a_0 = 1/3$  e  $l_0 = \sqrt{3/\kappa_0}$ .

Vamos agora investigar as soluções das equações diferenciais da gravidade de Starobinsky linearizadas através do método de perturbações singulares. As condições de contorno são as já conhecidas: limite assintoticamente plano e a existência de uma massa pontual na origem.

O método de perturbação singular consiste em buscar soluções aproximadas das equações (B.1) e (B.2), que valem em regiões distintas do intervalo  $(0, \infty)$ , e em seguida fazer uma colagem das duas soluções aproximadas, pois afinal, elas são aproximações de uma mesma solução. A solução aproximada para grandes valores de  $r$  é a chamada solução exterior, enquanto a para pequenos valores de  $r$  é a chamada solução interior. Além disso, existe uma região intermediária, onde a solução exterior deixa de ser uma boa aproximação para valores de  $r$  menores, e analogamente, a solução interior deixa de ser uma boa aproximação para valores maiores de  $r$ . Essa região é conhecida como camada limite, que por sua vez possui uma espessura específica.

Podemos encarar a quantidade  $1/\kappa_0$  como sendo um parâmetro infinitesimal em (B.1). Notemos que  $1/\kappa_0$  acompanha os termos de derivadas, de modo que a solução aproximada associada deve possuir um comportamento sem tantas variações. Conhecendo a solução original, podemos dizer que esta solução aproximada deve descrever  $R$  e/ou  $\phi$  para grandes valores de  $r$ . Então, aproximando (B.1) por

$$-R \approx -8\pi Gm\delta(r),$$

segue que

$$R_o \approx 0, \quad (\text{B.4})$$

uma vez que longe da origem  $\delta(r) = 0$ . Substituindo esse resultado em (B.2) ou (B.3), temos

$$\nabla^2\phi_o \approx 0,$$

cuja solução é

$$\phi_0 \approx C_1 + \frac{C_2}{r}.$$

No entanto, a imposição do limite assintoticamente plano implica em  $C_1 = 0$ . Assim, a solução aproximada exterior se escreve

$$\phi_0 \approx \frac{C_2}{r}. \quad (\text{B.5})$$

O primeiro passo que daremos para obtermos a solução que descreva aproximadamente bem o potencial  $\phi$  para pequenos valores de  $r$  é desenvolvermos (B.1) com  $a = 1/\kappa_0$ . Nesse sentido

$$-R + 3a \left( \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{d^2R}{dr^2} \right) = -8\pi Gm\delta(r).$$

Nesse ponto, para adequadamente descrever a solução interior, é preciso fazer a mudança de variável para mudança de escala

$$\xi = \frac{r}{\Delta}, \quad \text{com} \quad R(r) \rightarrow R^* \left( \frac{r}{\Delta} \right), \quad (\text{B.6})$$

com  $\Delta = \Delta(a)$ , de modo que

$$\frac{d}{dr} \rightarrow \frac{1}{\Delta} \frac{d}{d\xi}, \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dr^2} \rightarrow \frac{1}{\Delta^2} \frac{d^2}{d\xi^2}, \quad (\text{B.7})$$

e a EDO é reescrita como

$$-\frac{\Delta^2}{3a} R^* + \frac{2}{\xi} \frac{dR^*}{d\xi} + \frac{d^2R^*}{d\xi^2} = -\frac{8\Delta^2}{3a} \pi Gm\delta(\xi).$$

A quantidade  $\Delta = \Delta(a)$  representa a ordem de magnitude da espessura da camada limite, a qual vai a zero quando  $a$  também o faz. Definindo-a de modo a manter  $\xi$  adimensional, temos  $\Delta = \kappa_0^{-1/2} = a^{1/2}$ . Assim,

$$\nabla^2 R^* - \frac{1}{3} R^* = -\frac{8}{3} \pi Gm\delta(\xi). \quad (\text{B.8})$$

A solução da equação homogênea associada é da forma

$$R_h^*(\xi) = \frac{C_3}{\xi} e^{-\xi/\sqrt{3}} + \frac{C_4}{\xi} e^{\xi/\sqrt{3}}. \quad (\text{B.9})$$

Queremos agora saber quais os valores que  $C_3$  e  $C_4$  devem assumir. Uma vez que o laplaciano de um termo de Yukawa  $\xi^{-1} e^{\alpha\xi}$ , é da forma

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{\xi} e^{\alpha\xi} \right) = \nabla^2 \left( \frac{1}{\xi} \right) e^{\alpha\xi} + \alpha^2 \frac{1}{\xi} e^{\alpha\xi},$$

que no sentido de distribuições na variável  $\xi = \sqrt{ar}$

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{\xi} \right) = -4\pi a^{\frac{3}{2}} \delta(\xi),$$

e como nas proximidades da origem  $e^{\alpha\tilde{\zeta}} \approx 1$ , segue

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{\tilde{\zeta}} e^{\alpha\tilde{\zeta}} \right) \approx \alpha^2 \frac{1}{\tilde{\zeta}} e^{\alpha\tilde{\zeta}} - 4\pi a^{\frac{3}{2}} \delta(\tilde{\zeta}). \quad (\text{B.10})$$

Prosseguindo em nossa construção, substituímos (B.9) em (B.8), e considerando (B.10), obtemos, dada a independência dos termos, a relação

$$-4\pi a^{\frac{3}{2}} \delta(\tilde{\zeta}) (C_3 + C_4) = -4\pi \delta(\tilde{\zeta}) \left( \frac{2}{3} Gm \right),$$

de modo que

$$C_3 + C_4 = \frac{2}{3} \frac{Gm}{a^{\frac{3}{2}}}, \text{ ou } C_4 = - \left( C_3 - \frac{2}{3a^{\frac{3}{2}}} Gm \right). \quad (\text{B.11})$$

Assim, a solução geral da EDO é da forma (B.9) com  $C_3$  e  $C_4$  dados por (B.11).

Em posse de  $R^*(\tilde{\zeta})$ , podemos utilizar (B.3) para obtermos  $\phi$ . Fazendo a mudança de variável  $\tilde{\zeta} \rightarrow r/\Delta$ , temos

$$\frac{1}{\Delta^2} \left( \frac{2}{\tilde{\zeta}} \frac{d\phi_i}{d\tilde{\zeta}} + \frac{d^2\phi_i}{d\tilde{\zeta}^2} \right) + \frac{1}{6} R^* = \frac{16}{3} \pi Gm \delta(\tilde{\zeta}).$$

Uma vez que  $\Delta = \kappa_0^{-1/2} = a^{1/2}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \left( \frac{2}{\tilde{\zeta}} \frac{d\phi_i}{d\tilde{\zeta}} + \frac{d^2\phi_i}{d\tilde{\zeta}^2} \right) + \frac{1}{6} R^* &= \frac{16}{3} \pi Gm \delta(\tilde{\zeta}) \\ \nabla^2 \phi_i &= \frac{16}{3} a \pi Gm \delta(\tilde{\zeta}) - \frac{1}{6} a \left( \frac{C_3}{\tilde{\zeta}} e^{-\tilde{\zeta}/\sqrt{3}} + \frac{C_4}{\tilde{\zeta}} e^{\tilde{\zeta}/\sqrt{3}} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

que possui genericamente como solução

$$\phi_i(\tilde{\zeta}) = c_1 - \frac{c_2}{\tilde{\zeta}} - a \frac{c_3}{\tilde{\zeta}} e^{-\tilde{\zeta}/\sqrt{3}} - a \frac{c_4}{\tilde{\zeta}} e^{\tilde{\zeta}/\sqrt{3}}. \quad (\text{B.13})$$

Para vincularmos as constantes, substituímos (B.13) em (B.12), e novamente levamos em conta a relação (B.10). Nesse sentido, devido a independência dos vários termos, obtemos as seguintes relações

$$c_2 + ac_3 + ac_4 = \frac{4}{3\sqrt{a}} Gm, \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{C_3}{2} - c_3 = 0, \text{ e } \frac{C_4}{2} - c_4 = 0, \quad (\text{B.15})$$

que nos dá

$$c_3 = \frac{C_3}{2}, \text{ e } c_4 = \frac{C_4}{2} = -\frac{1}{2} \left( C_3 + \frac{2}{3} Gm \right) = - \left( c_3 + \frac{Gm}{3} \right). \quad (\text{B.16})$$

Com isso, é fácil verificar que

$$c_2 = \frac{Gm}{\sqrt{a}}. \quad (\text{B.17})$$

Estamos agora interessados na colagem das soluções aproximadas. Para que  $r$  esteja na região intermediária, devemos ter que  $r = O(\Theta(a))$ , onde  $O(\Theta)$  está entre  $O(\Delta)$  e  $O(1)$ ; isto é,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Theta}{\Delta} = \infty \rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Theta}{a^{1/2}} = \infty, \text{ e } \lim_{a \rightarrow 0} \Theta = 0. \quad (\text{B.18})$$

É interessante que na região intermediária se introduza uma nova variável  $\eta$ , tal que

$$\eta = \frac{r}{\Theta} \quad \left( r = \eta\Theta, \xi = \frac{r}{\Delta} = \frac{\eta\Theta}{\Delta} \right), \quad (\text{B.19})$$

e fazer  $a \rightarrow 0$  com  $\eta$  fixo. A colagem requer que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ \phi_o(r)|_{r=\eta\Theta} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \phi_i(\xi)|_{\xi=\eta\Theta/\Delta} \right], \text{ com } \eta \text{ fixo.} \quad (\text{B.20})$$

Utilizaremos uma forma equivalente do limite acima, que se mostrará mais conveniente para a análise. Tomaremos o limite

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{\Theta}{a^{1/2}} \phi_o(\xi) \Big|_{\xi=\eta\Theta/\Delta} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{\Theta}{a^{1/2}} \phi_i(\xi) \Big|_{\xi=\eta\Theta/\Delta} \right], \text{ com } \eta \text{ fixo.} \quad (\text{B.21})$$

Assim, utilizando as expressões para  $\phi_o(\xi)$  e  $\phi_i(\xi)$ , chegamos em

$$\frac{C_2}{\eta} = \lim_{a \rightarrow 0} \left( c_1 \frac{\Theta}{a^{1/2}} - c_2 \frac{1}{\eta} - ac_3 \frac{1}{\eta} e^{-\eta\Theta/\sqrt{3a}} - ac_4 \frac{1}{\eta} e^{\eta\Theta/\sqrt{3a}} \right). \quad (\text{B.22})$$

Observamos com base nos limites que caracterizam  $\Theta$ , que o procedimento de colagem requer que as constantes  $c_1$  e  $c_4$  sejam nulas. Além disso,

$$C_2 = -c_2. \quad (\text{B.23})$$

Isso implica que a solução interior  $\phi_i(\xi)$  é da forma

$$\phi_i(\xi) = -\frac{c_2}{\xi} - a \frac{c_3}{\xi} e^{-\xi/\sqrt{3}}. \quad (\text{B.24})$$

Feita a colagem, construiremos uma aproximação unificada, constituída a partir da soma das aproximações exterior e interior, subtraída do termo comum em ambas.

$$\begin{aligned} \phi_u &= \phi_o(\xi) + \phi_i(\xi) - \text{Iguar} \Rightarrow \\ \phi_u &= \frac{C_2}{\xi} + \frac{C_2}{\xi} - a \frac{C_3}{2\xi} e^{-\xi/\sqrt{3}} - \frac{C_2}{\xi} \end{aligned}$$

com

$$C_2 = -\frac{Gm}{\sqrt{a}}, \text{ e } C_3 = \frac{2}{3} \frac{Gm}{a^{3/2}}. \quad (\text{B.25})$$

Logo,

$$\begin{aligned}\phi_u &= -\frac{Gm}{\sqrt{a}} \frac{1}{\xi} - \frac{1}{3} \frac{Gm}{a^{\frac{3}{2}}} a \frac{1}{\xi} e^{-\xi/\sqrt{3}} \Rightarrow \\ \phi_u &= -\frac{Gm}{r} \left( 1 + \frac{1}{3} e^{-r/\sqrt{3a}} \right).\end{aligned}\tag{B.26}$$

Portanto, concluímos através da presente análise que o método de perturbação singular para obter soluções aproximadas do limite de campo fraco da gravidade de Starobinsky produz resultados consistentes, uma vez que a solução aproximada (B.26) é a própria solução exata. Por outro lado, vimos que a quantidade  $\Delta = \kappa_0^{-1/2} = a^{1/2}$  representa a magnitude da espessura da camada limite. Estimativas realizadas anteriormente nos fazem assumir um  $\kappa_0 \sim 10^{33} \text{GeV}^2 = 10^{-3} M_{pl}^2$ , de modo que

$$\Delta \sim 3.2 \times 10 M_{pl}^{-1}.\tag{B.27}$$

Além disso, observamos que há um limite inferior para o raio de horizonte do buraco negro que é da ordem  $r \sim M_{pl}^{-1}$ . Uma vez que o horizonte  $r_h$  está bem no interior da camada limite  $\Delta$ , podemos prosseguir através de uma análise via perturbação regular.

## APÊNDICE C

# DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA A EVOLUÇÃO DAS PERTURBAÇÕES

Neste apêndice, daremos detalhes da dedução das equações para a evolução das perturbações escalares e vetoriais.

Com relação às perturbações escalares, vejamos como fica o caso para a conservação covariante do tensor energia momento. Trabalhando com Eq. (5.90) no regime linear, temos:

$$\delta(\nabla_\mu T^\mu_\nu) = 0 \Rightarrow \partial_\mu \delta T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} \delta T^\alpha_\nu - \Gamma^\beta_{\mu\nu} \delta T^\mu_\beta + \delta\Gamma^\mu_{\mu\alpha} T^\alpha_\nu - \delta\Gamma^\beta_{\mu\nu} T^\mu_\beta = 0, \quad (\text{C.1})$$

onde para cada um dos termos auxiliares, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \delta T^\mu_\nu &= \partial_0 \delta T^0_\nu + \partial_i \delta T^i_\nu \\ \partial_\mu \delta T^\mu_\nu &= (\varepsilon' + p') (u^0 \delta u_\nu + \delta u^0 u_\nu) + (\varepsilon + p) (u^0 \delta u_\nu + \delta u^0 u_\nu)' + (\delta\varepsilon' + \delta p') u^0 u_\nu + \\ &\quad + (\delta\varepsilon + \delta p) (u^0 u_\nu)' - \delta p' \delta^0_\nu + [(\varepsilon + p) (\partial_i \delta u^i u_\nu) - (\partial_i \delta p) \delta^i_\nu], \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\mu\alpha} \delta T^\alpha_\nu &= \Gamma^\mu_{\mu 0} \delta T^0_\nu + \Gamma^\mu_{\mu i} \delta T^i_\nu \\ \Gamma^\mu_{\mu\alpha} \delta T^\alpha_\nu &= 4\mathcal{H} [(\varepsilon + p) (u^0 \delta u_\nu + \delta u^0 u_\nu) + (\delta\varepsilon + \delta p) u^0 u_\nu - \delta p \delta^0_\nu], \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma^\beta_{\mu\nu} \delta T^\mu_\beta &= \Gamma^0_{0\nu} \delta T^0_0 + \Gamma^0_{i\nu} \delta T^i_0 + \Gamma^j_{0\nu} \delta T^0_j + \Gamma^j_{i\nu} \delta T^i_j \\ \Gamma^\beta_{\mu\nu} \delta T^\mu_\beta &= \mathcal{H} \delta^0_\nu [(\varepsilon + p) (u^0 \delta u_0 + \delta u^0 u_0) + (\delta\varepsilon + \delta p) u^0 u_0 - \delta p] \\ &\quad + \Gamma^0_{i\nu} [(\varepsilon + p) \delta u^i u_0] + \Gamma^j_{0\nu} [(\varepsilon + p) u^0 \delta u_j] - \Gamma^j_{i\nu} [\delta p \delta^i_j], \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

e

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu_{\mu\alpha} T^\alpha_\nu &= \delta\Gamma^\mu_{\mu 0} T^0_\nu + \delta\Gamma^\mu_{\mu i} T^i_\nu \\ \delta\Gamma^\mu_{\mu\alpha} T^\alpha_\nu &= \phi' [(\varepsilon + p) u^0 u_\nu - p \delta^0_\nu] - 3\psi' [(\varepsilon + p) u^0 u_\nu - p \delta^0_\nu] + \\ &\quad - \phi_{,i} p \delta^i_\nu + 3\psi_{,i} p \delta^i_\nu, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

e

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}T^{\mu}_{\beta} &= \delta\Gamma_{0\nu}^0T^0_0 + \delta\Gamma_{i\nu}^0T^i_0 + \delta\Gamma_{0\nu}^jT^0_j + \delta\Gamma_{i\nu}^jT^i_j \\ \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}T^{\mu}_{\beta} &= \delta\Gamma_{0\nu}^0\left[(\varepsilon + p)u^0u_0 - p\right] - \delta\Gamma_{i\nu}^i p.\end{aligned}\quad (\text{C.6})$$

A Eq. (C.1) contém quatro equações sendo uma para cada valor de  $\nu$ . Vamos então separá-la nos casos  $\nu = 0$  e  $\nu = k$ . Utilizando as velocidades  $u^{\mu}$ ,  $u_{\mu}$ ,  $\delta u^{\mu}$  e  $\delta u_{\mu}$  temos para cada um dos cinco termos auxiliares o seguinte:

**Para  $\nu = 0$ :** Para Eqs. (C.2), (C.3), (C.4), (C.5) e (C.6) temos o seguinte:

$$\partial_{\mu}\delta T^{\mu}_0 = \delta\varepsilon' + (\varepsilon + p)\nabla^2 v,$$

onde  $\nabla^2 \equiv \delta^{ij}\partial_i\partial_j$  e

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\mu}\delta T^{\alpha}_0 = 4\mathcal{H}\delta\varepsilon,$$

e

$$\Gamma_{\mu 0}^{\beta}\delta T^{\mu}_{\beta} = \mathcal{H}(\delta\varepsilon - 3\delta p),$$

e

$$\delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu}T^{\alpha}_0 = (\phi' - 3\psi')\varepsilon,$$

e

$$\delta\Gamma_{\mu 0}^{\beta}T^{\mu}_{\beta} = \phi'\varepsilon + 3\psi'p.$$

Juntando estes cinco resultados, obtemos

$$\delta\varepsilon' + (\varepsilon + p)\left(\nabla^2 v - 3\psi'\right) + 3\mathcal{H}(\delta\varepsilon + \delta p) = 0.\quad (\text{C.7})$$

**Para  $\nu = k$ :** Levando em conta que para os graus de liberdade escalar

$$\delta u^{\mu} = \frac{1}{a}\left(-\phi, v^k\right) \quad \text{e} \quad \delta u_{\mu} = a\left(\phi, -v_{,k}\right),$$

Temos que Eqs. (C.2), (C.3), (C.4), (C.5) e (C.6) resultam em:

$$\partial_{\mu}\delta T^{\mu}_k = -v_{,k}(\varepsilon' + p') - (\varepsilon + p)v'_{,k} - \partial_k\delta p,$$

e

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu}\delta T^{\alpha}_k = -4\mathcal{H}(\varepsilon + p)v_{,k},$$

e

$$\Gamma_{\mu k}^{\beta}\delta T^{\mu}_{\beta} = \mathcal{H}(\varepsilon + p)v_{,k} - \mathcal{H}[(\varepsilon + p)v_{,k}] = 0,$$

e

$$\delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu}T^{\alpha}_k = p(3\psi_{,k} - \phi_{,k}),$$

e

$$\delta\Gamma_{\mu k}^{\beta}T^{\mu}_{\beta} = \phi_{,k}\varepsilon + 3\psi_{,k}p.$$

Juntando esses cinco resultados, obtemos

$$[v(\varepsilon + p)]' + (\varepsilon + p)[4\mathcal{H}v + \phi] + \delta p = 0.\quad (\text{C.8})$$

Além da equação de conservação, temos as equações de Einstein perturbadas (5.91). Procedendo de forma análoga ao caso anterior, obtemos, após um longo cálculo, o seguinte resultado:

$$\delta G^0_0 = \frac{2}{a^2} \left[ \nabla^2 \psi - 3\mathcal{H} (\psi' + \mathcal{H}\phi) \right] = 8\pi G \delta T^0_0, \quad (\text{C.9})$$

$$\delta G^0_i = \frac{2}{a^2} (\psi' + \mathcal{H}\phi)_{,i} = 8\pi G \delta T^0_i, \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} \delta G^i_j = -\frac{2}{a^2} \left[ \psi'' + \mathcal{H} (2\psi + \phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \phi + \frac{1}{2} \nabla^2 (\phi - \psi) \right] \delta^i_j + \\ + \frac{1}{a^2} (\phi - \psi)_{,ij} = 8\pi G \delta T^i_j. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Por outro lado, vemos de Eq. (5.93), que

$$\delta T^0_0 = \delta \varepsilon, \quad (\text{C.12})$$

e

$$\delta T^0_i = -(\varepsilon + p) v_{,i}, \quad (\text{C.13})$$

e

$$\delta T^i_j = -\delta p \delta^i_j. \quad (\text{C.14})$$

Assim, substituindo Eqs. (C.12), (C.13) e (C.14) em Eqs. (C.9), (C.10) e (C.11) respectivamente, e considerando  $i = j$  na terceira expressão, obtemos

$$\nabla^2 \psi - 3\mathcal{H} (\psi' + \mathcal{H}\phi) = 4\pi G a^2 \delta \varepsilon \quad (\text{C.15})$$

$$\psi' + \mathcal{H}\phi = -4\pi G a^2 (\varepsilon + p) v \quad (\text{C.16})$$

$$\psi'' + \mathcal{H} (2\psi + \phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \phi + \frac{1}{3} \nabla^2 (\phi - \psi) = 4\pi G a^2 \delta p. \quad (\text{C.17})$$

Além disso, como  $\delta T^i_j$  é diagonal, temos de Eq. (C.11) para  $i \neq j$ ,

$$(\phi - \psi)_{,ij} = 0 \Rightarrow \phi = \psi. \quad (\text{C.18})$$

Com relação às perturbações vetoriais, a conservação do tensor energia momento produz somente a equação vetorial

$$\delta (\nabla_\mu T^\mu_i) = 0 \Rightarrow \partial_\mu \delta T^\mu_i + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} \delta T^\alpha_i - \Gamma^\beta_{\mu i} \delta T^\mu_\beta + \delta \Gamma^\mu_{\mu\alpha} T^\alpha_i - \delta \Gamma^\beta_{\mu i} T^\mu_\beta = 0. \quad (\text{C.19})$$

Para calcular os três primeiros termos de Eq. (C.19), podemos partir de Eqs. (C.2), (C.3) e (C.4) levando em conta apenas os graus de liberdade vetoriais, isto é,

$$\delta u_\mu = a (0, -w_i),$$

com  $w_{,i}^i = 0$ . Nesse caso,

$$\begin{aligned}\partial_\mu \delta T_i^\mu &= -(\varepsilon' + p') w_i - (\varepsilon + p) w'_i, \\ \Gamma_{\mu\alpha}^\mu \delta T_i^\alpha &= -4\mathcal{H} [(\varepsilon + p) w_i], \\ \Gamma_{\mu i}^\beta \delta T_\beta^\mu &= \Gamma_{ji}^0 [(\varepsilon + p) w^j] + \Gamma_{0i}^j [-(\varepsilon + p) w_j] = 0,\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre de  $w^j \Gamma_{ij}^0 = w_j \Gamma_{0i}^j = \mathcal{H} w_i$ . Além disso, lembrando que  $T_\beta^\mu \sim \delta_\beta^\mu$ , os dois últimos termos de Eq. (C.19) resultam em

$$\begin{aligned}\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T_i^\alpha &= \delta \Gamma_{0j}^0 T_i^j + \delta \Gamma_{jk}^j T_i^k, \\ \delta \Gamma_{\mu i}^\beta T_\beta^\mu &= \delta \Gamma_{0i}^0 T_0^0 + \delta \Gamma_{ji}^k T_k^j.\end{aligned}$$

O próximo passo é utilizar as conexões (5.116) e a relação  $T_k^j = -p \delta_k^j$  para reescrever esses dois últimos termos. Logo,

$$\begin{aligned}\partial_\mu \delta T_i^\mu &= -[w_i (\varepsilon + p)]', \\ \Gamma_{\mu\alpha}^\mu \delta T_i^\alpha &= -4\mathcal{H} [(\varepsilon + p) w_i], \\ \Gamma_{\mu i}^\beta \delta T_\beta^\mu &= 0, \\ \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T_i^\alpha &= -\delta \Gamma_{jk}^j p \delta_i^k = -p \delta \Gamma_{ji}^j, \\ \delta \Gamma_{\mu i}^\beta T_\beta^\mu &= -\delta \Gamma_{ji}^k p \delta_k^j = -p \delta \Gamma_{ki}^k.\end{aligned}$$

Por fim, substituímos estes resultados em Eq. (C.19), obtendo a equação de conservação

$$[w_i (\varepsilon + p)]' + 4\mathcal{H} w_i (\varepsilon + p) = 0. \quad (\text{C.20})$$

A perturbação na equação de Einstein resulta em duas equações:

$$\delta G_i^0 = -\frac{1}{2a^2} \nabla^2 F_i' = 8\pi G \delta T_i^0, \quad (\text{C.21})$$

$$\delta G^i_j = \frac{1}{2a^2} \left[ (F_{i,j} + F_{j,i})'' + 2\mathcal{H} (F_{i,j} + F_{j,i})' \right] = 8\pi G \delta T_j^i, \quad (\text{C.22})$$

onde de Eq. (5.93), vemos que

$$\delta T_i^0 = -(\varepsilon + p) w_i, \quad (\text{C.23})$$

$$\delta T_j^i = 0. \quad (\text{C.24})$$

Por outro lado, sabemos que a perturbação vetorial invariante de gauge é dada por  $\bar{V}_i = S_i - F_i'$ . Logo, utilizando o fato de que  $w_i$  é naturalmente invariante de gauge — ver Eq. (5.76) — obtemos as seguintes equações:

$$\nabla^2 \bar{V}_i = -16\pi G a^2 (\varepsilon + p) w_i, \quad (\text{C.25})$$

$$(\bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{j,i})' + 2\mathcal{H} (\bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{j,i}) = 0. \quad (\text{C.26})$$

## CONSERVAÇÃO DA PERTURBAÇÃO DE CURVATURA COMÓVEL

Neste apêndice, deduziremos a propriedade de conservação da perturbação de curvatura comóvel  $\mathcal{R}$  em escalas super-horizonte, isto é,  $\mathcal{R}' \approx 0$  se não houver perturbações de entropia. No gauge newtoniano,  $\mathcal{R}'$  é dado por

$$\mathcal{R}' = -\psi' + \partial_0(\mathcal{H}v).$$

Substituindo Eq. (5.106) nessa expressão, obtemos

$$\begin{aligned} -\mathcal{R}' = & \psi' + 2M_{Pl}^2 \left\{ \mathcal{H}' \left[ \frac{\psi' + \mathcal{H}\phi}{a^2(\varepsilon + p)} \right] + \mathcal{H} \left[ \frac{\psi'' + \mathcal{H}'\phi + \mathcal{H}\phi'}{a^2(\varepsilon + p)} \right] + \right. \\ & \left. - \mathcal{H} \left[ \frac{\psi' + \mathcal{H}\phi}{a^4(\varepsilon + p)^2} \right] \left( 2aa'(\varepsilon + p) + a^2(\varepsilon' + p') \right) \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando a equação de conservação  $\varepsilon' = -3\mathcal{H}(\varepsilon + p)$ , reescrevemos a expressão anterior como

$$\begin{aligned} -\frac{a^2(\varepsilon + p)}{2M_{Pl}^2} \mathcal{R}' = & \frac{a^2(\varepsilon + p)}{2M_{Pl}^2} \psi' + \mathcal{H}'(\psi' + \mathcal{H}\phi) + \\ & + \mathcal{H}(\psi'' + \mathcal{H}'\phi + \mathcal{H}\phi') + \mathcal{H}^2(\psi' + \mathcal{H}\phi) + 3\frac{p'}{\varepsilon'} \mathcal{H}^2(\psi' + \mathcal{H}\phi). \end{aligned}$$

Em seguida, utilizamos a equação de Friedmann  $\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' = a^2(\varepsilon + p)/2M_{Pl}^2$  e a equação de Poisson (5.105) no primeiro e no último termo do lado direito, respectivamente. Assim,

$$-\frac{a^2(\varepsilon + p)}{2M_{Pl}^2} \mathcal{R}' = \mathcal{H} \left[ \psi'' + \mathcal{H}(2\psi' + \phi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi + \frac{p'}{\varepsilon'} \left( \nabla^2\psi - \frac{a^2}{2M_{Pl}^2} \delta\varepsilon \right) \right].$$

Por fim, substituímos Eq. (5.107) nessa última expressão obtendo

$$-\frac{a^2(\varepsilon + p)}{2M_{Pl}^2} \mathcal{R}' = \mathcal{H} \left[ \frac{a^2}{2M_{Pl}^2} \delta p_{nad} + \frac{p'}{\varepsilon'} \nabla^2\psi - \frac{1}{3} \nabla^2(\phi - \psi) \right], \quad (\text{D.1})$$

onde

$$\delta p_{nad} \equiv \delta p - \frac{p'}{\epsilon'} \delta \epsilon,$$

é a perturbação de pressão não adiabática. Além disso,  $\delta p_{nad}$  é uma quantidade invariante de gauge e para  $p = p(\epsilon, S)$ , temos  $\delta p_{nad} = \tau \delta S$ , onde  $\tau \equiv (\partial p / \partial S)_\epsilon$ .

A expressão (D.1) obtida no gauge newtoniano, onde  $\Phi = \phi$  e  $\Psi = \psi$ , pode ser colocada em uma forma invariante de gauge:

$$-\frac{a^2(\epsilon + p)}{2M_{Pl}^2} \mathcal{R}' = \mathcal{H} \left[ \frac{a^2}{2M_{Pl}^2} \delta p_{nad} + \frac{p'}{\epsilon'} \nabla^2 \Psi - \frac{1}{3} \nabla^2 (\Phi - \Psi) \right].$$

No caso em que não temos perturbações de entropia,

$$-\frac{a^2(\epsilon + p)}{2M_{Pl}^2} \mathcal{R}' = \mathcal{H} \frac{p'}{\epsilon'} \nabla^2 \Psi - \frac{1}{3} \mathcal{H} \nabla^2 (\Phi - \Psi).$$

Além disso, sabemos pelas equações de Friedmann que

$$\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' = \frac{a^2(\epsilon + p)}{2M_{Pl}^2} \Rightarrow \mathcal{H}^2 \sim \frac{a^2(\epsilon + p)}{2M_{Pl}^2},$$

pois, em geral,  $\mathcal{H} \sim \eta^{-1}$ . Portanto, no espaço dos momentos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}' &\sim \frac{k^2}{\mathcal{H}} \left[ \frac{p'}{\epsilon'} \Psi - \frac{1}{3} (\Phi - \Psi) \right] \Rightarrow \\ \frac{d\mathcal{R}}{d \ln a} &\sim \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \left[ \frac{p'}{\epsilon'} \Psi - \frac{1}{3} (\Phi - \Psi) \right], \end{aligned}$$

e em regime super-horizonte, onde  $k/\mathcal{H} \ll 1$ , obtemos que  $\mathcal{R}$  se mantém constante com a expansão  $a$ .

## APÊNDICE E

### FRAME DE EINSTEIN DE STAROBINSKY + $R^3$

Neste apêndice vamos reescrever a ação

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R + \frac{1}{2\kappa_0} R^2 + \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2} R^3 \right], \quad (E.1)$$

no frame de Einstein.

Começamos escrevendo uma segunda ação na forma

$$\bar{S} = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \kappa_0 \left( \lambda + \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{\alpha_0}{3} \lambda^3 \right) + \mu \left( \frac{R}{\kappa_0} - \lambda \right) \right] \quad (E.2)$$

onde  $\mu$  é um multiplicador de Lagrange. Tomando a variação com relação a  $\mu$  obtemos

$$\lambda = \frac{R}{\kappa_0}$$

que mostra que  $S = \bar{S}$ . Além disso, tomando a variação com relação a  $\lambda$  temos

$$\mu = \kappa_0 \left( 1 + \lambda + \alpha_0 \lambda^2 \right). \quad (E.3)$$

O próximo passo é inverter (E.3) e obter  $\lambda$  como função de  $\mu$ . Reescrevendo (E.3) obtemos uma equação de segundo grau

$$\alpha_0 \lambda^2 + \lambda + 1 - \frac{\mu}{\kappa_0} = 0$$

cuja a solução é

$$\lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha_0 \left( 1 - \frac{\mu}{\kappa_0} \right)}}{2\alpha_0}$$

Para que o limite  $\alpha_0 \rightarrow 0$  esteja bem definido devemos escolher o sinal positivo:

$$\lambda = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0 \left( 1 - \frac{\mu}{\kappa_0} \right)}}{2\alpha_0}$$

onde definimos  $\bar{\mu} \equiv \mu/\kappa_0$ .

Em seguida devemos substituir  $\lambda$  em (E.2). Assim, utilizando a própria equação de segundo grau temos

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \mu \frac{R}{\kappa_0} + \kappa_0 \lambda \left( 1 + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{3} \alpha_0 \lambda^2 \right) - \mu \lambda \right] \Rightarrow \\ \bar{S} &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \bar{\mu} R - \kappa_0 \lambda \left( \bar{\mu} - 1 - \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{3} (\lambda + 1 - \bar{\mu}) \right) \right] \Rightarrow \\ \bar{S} &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \bar{\mu} R - \kappa_0 \lambda \left( \frac{2}{3} (\bar{\mu} - 1) - \frac{1}{6} \lambda \right) \right].\end{aligned}$$

Trabalhando apenas com o termo que depende de  $\lambda$  temos

$$\begin{aligned}\lambda \left( \frac{2}{3} (\bar{\mu} - 1) - \frac{1}{6} \lambda \right) &= \left( \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - \bar{\mu})}}{2\alpha_0} \right) \times \\ &\times \left[ \frac{2}{3} (\bar{\mu} - 1) - \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - \bar{\mu})}}{12\alpha_0} \right] \Rightarrow \\ \lambda \left( \frac{2}{3} (\bar{\mu} - 1) - \frac{1}{6} \lambda \right) &= \frac{1}{24\alpha_0^2} \left( -1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - \bar{\mu})} \right) \times \\ &\times \left[ 8\alpha_0 (\bar{\mu} - 1) - \left( -1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - \bar{\mu})} \right) \right] \Rightarrow \\ \lambda \left( \frac{2}{3} (\bar{\mu} - 1) - \frac{1}{6} \lambda \right) &= -\frac{1}{24\alpha_0^2} \left( -1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - \bar{\mu})} \right) \times \\ &\times \left( -1 + 8\alpha_0 (1 - \bar{\mu}) + \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - \bar{\mu})} \right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \bar{\mu} R + \frac{\kappa_0}{24\alpha_0^2} \left( -1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - \bar{\mu})} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( -1 + 8\alpha_0 (1 - \bar{\mu}) + \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - \bar{\mu})} \right) \right] \\ \bar{S} &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \bar{\mu} R + \frac{\kappa_0}{24\alpha_0^2} \left( -1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - \bar{\mu})} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( -1 + 8\alpha_0 (1 - \bar{\mu}) + \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - \bar{\mu})} \right) \right], \\ \bar{S} &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \bar{\mu} R - \frac{\kappa_0}{2} (1 - \bar{\mu})^2 \right].\end{aligned}$$

Em seguida devemos realizar as transformações

$$\bar{\mu} = e^\chi \text{ e } \bar{g}_{\mu\nu} = e^\chi g_{\mu\nu}$$

na ação  $\bar{S}$ .

**Adendo** Uma transformação conforme na forma

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^\chi g_{\mu\nu}$$

resulta na seguinte mudança do tensor de Ricci e do escalar de curvatura:

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu \chi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square \chi - \frac{1}{2} \nabla_\mu \chi \nabla_\nu \chi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\beta \chi \nabla_\beta \chi$$

e

$$R = e^\chi \bar{R} - \frac{3}{2} \nabla^\beta \chi \nabla_\beta \chi + 3e^{-\chi} \square e^\chi.$$

Observe que  $\nabla_\mu$  e  $\square$  nas expressões acima estão em termos de  $g_{\mu\nu}$ .

Utilizando os resultados acima temos

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{-2\chi} \left[ e^\chi \left( e^\chi \bar{R} - \frac{3}{2} \nabla^\beta \chi \nabla_\beta \chi + 3e^{-\chi} \square e^\chi \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\kappa_0}{24\alpha_0^2} \left( -1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\chi)} \right) \left( -1 + 8\alpha_0(1 - e^\chi) + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\chi)} \right) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \bar{R} - \frac{3}{2} e^{-\chi} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \chi \partial_\beta \chi + 3e^{-2\chi} \square e^\chi + \right. \\ &\left. + \frac{\kappa_0 e^{-2\chi}}{24\alpha_0^2} \left( -1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\chi)} \right) \left( -1 + 8\alpha_0(1 - e^\chi) + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\chi)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Alem disso,

$$e^{-2\chi} \square e^\chi = e^{-2\chi} \nabla_\rho \nabla^\rho e^\chi = \frac{e^{-2\chi}}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (g^{\rho\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu e^\chi) = \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_\rho (g^{\rho\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu e^\chi),$$

é um termo de superfície e pode ser desprezado. Logo,

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \bar{R} - \frac{3}{2} \bar{\partial}^\beta \chi \bar{\partial}_\beta \chi + \right. \\ &\left. + \frac{\kappa_0 e^{-2\chi}}{24\alpha_0^2} \left( -1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\chi)} \right) \left( -1 + 8\alpha_0(1 - e^\chi) + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\chi)} \right) \right]. \end{aligned}$$

**Adendo** Para obtermos unidades de massa para o campo escalar e um termo cinético padrão é interessante realizar a substituição

$$\chi = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}.$$

Assim,

$$\bar{S} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \frac{M_{Pl}^2}{2} \bar{R} - \frac{1}{2} \bar{\partial}_\rho \varphi \bar{\partial}^\rho \varphi + V(\varphi) \right],$$

onde

$$V(\varphi) = \frac{M_{Pl}^2 \kappa_0 e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}}}{48\alpha_0^2} \left( -1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0 \left( 1 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}} \right)} \right) \times \\ \times \left[ -1 + 8\alpha_0 \left( 1 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}} \right) + \sqrt{1 - 4\alpha_0 \left( 1 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}} \right)} \right].$$

É interessante notar que o limite de Starobinsky  $\alpha_0 \rightarrow 0$  está bem definido. Segue:

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} V(\varphi) \approx \frac{M_{Pl}^2 \kappa_0 e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}}}{48\alpha_0^2} \left[ -2\alpha_0 \left( 1 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}} \right) \right] \left[ 6\alpha_0 \left( 1 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} V(\varphi) \approx -\frac{M_{Pl}^2 \kappa_0 e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}}}{4} \left( 1 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} V(\varphi) \approx -\frac{M_{Pl}^2 \kappa_0}{4} \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}} \right)^2,$$

como esperado.

## APÊNDICE F

### FRAME DE EINSTEIN DE STAROBINSKY + $R^3 + R\Box R$

Neste apêndice, vamos reescrever a ação

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R + \frac{1}{2\kappa_0} R^2 + \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2} R^3 - \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} R\Box R \right),$$

no frame de Einstein.

Definindo os parâmetros

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= R, \\ \lambda_2 &= \Box R, \end{aligned}$$

podemos escrever uma segunda ação na forma

$$\begin{aligned} \bar{S} = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} & \left[ \lambda_1 + \frac{1}{2\kappa_0} \lambda_1^2 + \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2} \lambda_1^3 + \right. \\ & \left. - \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \lambda_1 \lambda_2 + \mu (R - \lambda_1) + \mu_1 (\Box \lambda_1 - \lambda_2) \right], \end{aligned}$$

onde  $\mu$  e  $\mu_1$  são multiplicadores de Lagrange. Tomando a variação com relação a  $\mu$  e  $\mu_1$ , obtemos

$$\begin{aligned} R &= \lambda_1, \\ \Box R &= \lambda_2, \end{aligned}$$

que mostra que  $S = \bar{S}$ . Além disso, tomando a variação com relação  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , temos

$$1 + \frac{1}{\kappa_0} \lambda_1 + \frac{\alpha_0}{\kappa_0^2} \lambda_1^2 - \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \lambda_2 - \mu + \Box \mu_1 = 0, \quad (\text{F.1})$$

$$-\frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \lambda_1 - \mu_1 = 0. \quad (\text{F.2})$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1 \\ \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2}\lambda_2 &= 1 + \frac{1}{\kappa_0}\lambda_1 + \frac{\alpha_0}{\kappa_0^2}\lambda_1^2 - \mu + \square\mu_1 \Rightarrow \\ \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2}\lambda_2 &= 1 + \frac{1}{\kappa_0}\left(-\frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1\right) + \frac{\alpha_0}{\kappa_0^2}\left(-\frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1\right)^2 - \mu + \square\mu_1 \Rightarrow \\ \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2}\lambda_2 &= 1 - \frac{2\kappa_0}{\beta_0}\mu_1 + \frac{4\alpha_0}{\beta_0^2}\kappa_0^2\mu_1^2 - \mu + \square\mu_1.\end{aligned}$$

Substituindo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  na ação  $\bar{S}$ , temos

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \lambda_1 + \frac{1}{2\kappa_0}\lambda_1^2 + \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2}\lambda_1^3 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2}\lambda_1\lambda_2 + \mu(R - \lambda_1) + \mu_1(\square\lambda_1 - \lambda_2) \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1 + \frac{1}{2\kappa_0}\left(-\frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1\right)^2 + \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2}\left(-\frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1\right)^3 + \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1\right)\left(1 - \frac{2\kappa_0}{\beta_0}\mu_1 + \frac{4\alpha_0}{\beta_0^2}\kappa_0^2\mu_1^2 - \mu + \square\mu_1\right) + \mu\left(R + \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1\right) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_1\left[\square\left(-\frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1\right) - \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\left(1 - \frac{2\kappa_0}{\beta_0}\mu_1 + \frac{4\alpha_0}{\beta_0^2}\kappa_0^2\mu_1^2 - \mu + \square\mu_1\right)\right] \right\},\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1 + \frac{2\kappa_0^4}{\kappa_0\beta_0^2}\mu_1^2 - \frac{8\alpha_0\kappa_0^4}{3\beta_0^3}\mu_1^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1\left(1 - \frac{2\kappa_0}{\beta_0}\mu_1 + \frac{4\alpha_0}{\beta_0^2}\kappa_0^2\mu_1^2 - \mu + \square\mu_1\right) + \mu\left(R + \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1\right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1\square\mu_1 - \mu_1\frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\left(1 - \frac{2\kappa_0}{\beta_0}\mu_1 + \frac{4\alpha_0}{\beta_0^2}\kappa_0^2\mu_1^2 - \mu + \square\mu_1\right) \right],\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1 + \frac{2\kappa_0^3}{\beta_0^2}\mu_1^2 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{8\alpha_0\kappa_0^4}{3\beta_0^3}\mu_1^3 + \mu\left(R + \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1\right) - \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0}\mu_1\square\mu_1 \right].\end{aligned}$$

Portanto, a menos de termos de superfície, temos

$$\begin{aligned}\bar{S} = & \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \mu R + \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0} \nabla_\rho \mu_1 \nabla^\rho \mu_1 + \right. \\ & \left. + \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0} (\mu - 1) \mu_1 + \frac{2\kappa_0^3}{\beta_0^2} \mu_1^2 - \frac{8\alpha_0 \kappa_0^4}{3\beta_0^3} \mu_1^3 \right]\end{aligned}$$

Em seguida devemos realizar as transformações

$$\mu = e^\chi \text{ e } \bar{g}_{\mu\nu} = e^\chi g_{\mu\nu},$$

na ação  $\bar{S}$ .

**Adendo** Uma transformação conforme na forma

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^\chi g_{\mu\nu}$$

resulta na seguinte mudança do tensor de Ricci e do escalar de curvatura:

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu \chi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square \chi - \frac{1}{2} \nabla_\mu \chi \nabla_\nu \chi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\beta \chi \nabla_\beta \chi,$$

e

$$R = e^\chi \bar{R} - \frac{3}{2} \nabla^\beta \chi \nabla_\beta \chi + 3e^{-\chi} \square e^\chi.$$

Observe que  $\nabla_\mu$  e  $\square$  nas expressões acima estão em termos de  $g_{\mu\nu}$ .

Utilizando os resultados acima temos

$$\begin{aligned}\bar{S} = & \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{-2\chi} \left[ e^\chi \left( e^\chi \bar{R} - \frac{3}{2} \nabla_\rho \chi \nabla^\rho \chi + 3e^{-\chi} \square e^\chi \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0} \nabla_\rho \mu_1 \nabla^\rho \mu_1 + \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0} (e^\chi - 1) \mu_1 + \frac{2\kappa_0^3}{\beta_0^2} \mu_1^2 - \frac{8\alpha_0 \kappa_0^4}{3\beta_0^3} \mu_1^3 \right] \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S} = & \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \bar{R} - \frac{3}{2} e^{-\chi} \nabla_\rho \chi \nabla^\rho \chi + 3e^{-2\chi} \square e^\chi + \right. \\ & \left. + \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0} e^{-2\chi} \nabla_\rho \mu_1 \nabla^\rho \mu_1 + \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0} e^{-2\chi} (e^\chi - 1) \mu_1 + \frac{2\kappa_0^3}{\beta_0^2} e^{-2\chi} \mu_1^2 - \frac{8\alpha_0 \kappa_0^4}{3\beta_0^3} e^{-2\chi} \mu_1^3 \right].\end{aligned}$$

Alem disso,

$$e^{-2\chi} \square e^\chi = e^{-2\chi} \nabla_\rho \nabla^\rho e^\chi = \frac{e^{-2\chi}}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_\rho (g^{\rho\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu e^\chi) = \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_\rho (g^{\rho\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu e^\chi),$$

é um termo de superfície e pode ser desprezado. Logo,

$$\begin{aligned} \bar{S} = & \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \bar{R} - \frac{3}{2} \bar{\nabla}_\rho \chi \bar{\nabla}^\rho \chi + \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0} e^{-2\chi} \bar{\nabla}_\rho \mu_1 \bar{\nabla}^\rho \mu_1 + \right. \\ & \left. + \frac{2\kappa_0^2}{\beta_0} e^{-2\chi} (e^\chi - 1) \mu_1 + \frac{2\kappa_0^3}{\beta_0^2} e^{-2\chi} \mu_1^2 - \frac{8\alpha_0 \kappa_0^4}{3\beta_0^3} e^{-2\chi} \mu_1^3 \right]. \end{aligned}$$

Substituindo  $\mu_1$  em termos de  $\lambda_1$ , e definindo

$$\lambda \equiv \frac{\lambda_1}{\kappa_0},$$

obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \bar{S} = & \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \bar{R} - \frac{3}{2} \bar{\nabla}_\rho \chi \bar{\nabla}^\rho \chi + \frac{\beta_0}{2} e^{-\chi} \bar{\nabla}_\rho \lambda \bar{\nabla}^\rho \lambda + \right. \\ & \left. - \kappa_0 e^{-2\chi} \lambda \left( e^\chi - 1 - \frac{1}{2} \lambda - \frac{\alpha_0}{3} \lambda^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

**Adendo** Para obtermos unidades de massa para os campos escalares e um termo cinético canônico, é interessante realizar as substituições

$$\chi = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{M_{Pl} \Psi}{\kappa_0}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \bar{S} = & \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \frac{M_{Pl}^2}{2} \bar{R} - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\rho \Phi \bar{\nabla}^\rho \Phi + \frac{\beta_0 M_{Pl}^4}{4\kappa_0^2} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} \bar{\nabla}_\mu \Psi \bar{\nabla}^\mu \Psi + \right. \\ & \left. - e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} \frac{\Psi M_{Pl}^3}{2} \left( e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} - 1 - \frac{M_{Pl} \Psi}{2\kappa_0} - \frac{\alpha_0 M_{Pl}^2 \Psi^2}{3\kappa_0^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Como  $\kappa_0$  tem dimensão de  $M_{Pl}^2$ , podemos definir

$$\tilde{\zeta}_0 \equiv \frac{M_{Pl}^2}{\kappa_0} \quad \text{e} \quad \bar{\kappa}_0 \equiv \frac{M_{Pl}^2}{\bar{\kappa}_0},$$

onde os  $\tilde{\zeta}_i$ 's são adimensionais. Logo,

$$\begin{aligned} \bar{S} = & \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ \frac{M_{Pl}^2}{2} \bar{R} - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\rho \Phi \bar{\nabla}^\rho \Phi + \frac{\beta_0 \tilde{\zeta}_0^2}{4} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} \bar{\nabla}_\mu \Psi \bar{\nabla}^\mu \Psi + \right. \\ & \left. - e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} \frac{\Psi}{2M_{Pl}} M_{Pl}^4 \left[ e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} - 1 - \frac{\tilde{\zeta}_0 \Psi}{2 M_{Pl}} - \frac{\alpha_0 \tilde{\zeta}_0^2}{3} \left( \frac{\Psi}{M_{Pl}} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

Por fim, é interessante notar que o limite de Starobinsky  $\alpha_0, \beta_0 \rightarrow 0$  está bem definido. Segue

$$\bar{S}_{Sta} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \frac{M_{Pl}^2}{2} \bar{R} - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\rho \Phi \bar{\nabla}^\rho \Phi + \right. \\ \left. - e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} \frac{\Psi}{2M_{Pl}} M_{Pl}^4 \left( e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} - 1 - \frac{\zeta_0}{2} \frac{\Psi}{M_{Pl}} \right) \right].$$

Por outro lado, de Eqs. (E.3) e (F.2), temos

$$\mu_1 = 0 \text{ e } \mu = e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} = 1 + \frac{1}{\kappa_0} \lambda_1 = 1 + \zeta_0 \frac{\Psi}{M_{Pl}} \Rightarrow \\ \frac{\Psi}{M_{Pl}} = \frac{1}{\zeta_0} \left( e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} - 1 \right).$$

Assim,

$$\bar{S}_{Sta} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ \frac{M_{Pl}^2}{2} \bar{R} - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\rho \Phi \bar{\nabla}^\rho \Phi + \right. \\ \left. - e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} \frac{M_{Pl}^4}{2\zeta_0} \left( e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} - 1 \right) \left[ e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} - 1 - \frac{1}{2} \left( e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} - 1 \right) \right] \right\},$$

$$\bar{S}_{Sta} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \frac{M_{Pl}^2}{2} \bar{R} - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\rho \Phi \bar{\nabla}^\rho \Phi + \right. \\ \left. - e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} \frac{M_{Pl}^4}{2\zeta_0} \left( e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} - \frac{1}{2} \right) \right],$$

$$\bar{S}_{Sta} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \frac{M_{Pl}^2}{2} \bar{R} - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\rho \Phi \bar{\nabla}^\rho \Phi - \frac{1}{4} \frac{M_{Pl}^4}{\zeta_0} \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_{Pl}}} \right)^2 \right].$$

As equações fundamentais do modelo podem ser explicitamente escritas em termos dos campos e suas primeiras derivadas como

$$\chi_{tt} + 3h\chi_t - \frac{\beta_0}{6}e^{-\chi}\lambda_t^2 + \frac{1}{3}e^{-2\chi}\lambda \left[ (2 - e^\chi) + \lambda + \frac{2}{3}\alpha_0\lambda^2 \right] = 0, \quad (\text{G.1})$$

$$\beta_0 [\lambda_{tt} - (\chi_t - 3h)\lambda_t] - \left[ 1 - e^{-\chi} \left( 1 + \lambda + \alpha_0\lambda^2 \right) \right] = 0, \quad (\text{G.2})$$

onde

$$h^2 = \frac{1}{4}\chi_t^2 - \frac{1}{12}\beta_0e^{-\chi}\lambda_t^2 + \frac{1}{6}e^{-2\chi}\lambda \left[ (e^\chi - 1) - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{3}\alpha_0\lambda^2 \right]. \quad (\text{G.3})$$

Estudando o caso em que os parâmetros do modelo se comportam como  $\beta_0 \sim \delta \equiv e^{-\chi}$  e  $\alpha_0 \sim \delta^2$ , assumimos as quantidades  $\chi_t$  e  $\lambda$  da seguinte maneira, respectivamente,

$$\chi_t \approx c_1\delta + \beta_0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left( \beta_0\delta^{-1} \right)^n + \alpha_0\delta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \left( \beta_0\delta^{-1} \right)^n, \quad (\text{G.4})$$

e

$$\lambda \approx \delta^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left( \beta_0\delta^{-1} \right)^n + \alpha_0\delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} j_n \left( \beta_0\delta^{-1} \right)^n, \quad (\text{G.5})$$

onde exploramos várias possibilidades de construção das quantidades  $\chi_t$  (em primeira ordem) e  $\lambda$  (até ordem zero). Além dos termos envolvendo  $\beta_0$  e  $\alpha_0$  separadamente, observamos a necessidade da introdução de termos cruzados devido a não linearidade da gravitação. Notamos também bons limites quando tomamos os casos particulares  $\alpha_0 \rightarrow 0$  (Starobinsky+ $R \square R$ ) e  $\beta_0 \rightarrow 0$  (Starobinsky+ $R^3$ ).

Para encontrarmos os coeficientes das séries Eqs. (G.4) e (G.5), as substituímos em Eqs. (G.1) e (G.2) e solucionamos os sistemas de equações correspondentes. Após um longo cálculo, obtemos que, por consistência com o caso de Starobinsky,  $g_0 \approx -1$ ,

assim como encontramos os seguintes  $n$ -ésimos coeficientes das séries

$$b_n \approx -\frac{2}{3^{n+\frac{5}{2}}}, \text{ para } n \geq 0, \quad (\text{G.6})$$

$$d_n \approx \frac{2}{3^{n+\frac{5}{2}}}, \text{ para } n \geq 0, \quad (\text{G.7})$$

$$g_n \approx \frac{1}{3^n}, \text{ para } n \geq 1, \quad (\text{G.8})$$

$$j_n \approx -\frac{1}{3^{n+1}}, \text{ para } n \geq 1, \quad (\text{G.9})$$

bem como

$$c_1 \approx -\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}} \text{ e } j_0 \approx -1. \quad (\text{G.10})$$

Em posse dos  $n$ -ésimos coeficientes, podemos substituí-los nas quantidades  $\chi_t$  e  $\lambda$ . Nesse sentido, para  $\chi_t$ ,

$$\chi_t \approx -\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}\delta \left[ 1 + \frac{1}{3}\beta_0\delta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\beta_0\delta^{-1}}{3} \right)^n - \frac{1}{3}\alpha_0\delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\beta_0\delta^{-1}}{3} \right)^n \right], \quad (\text{G.11})$$

que converge para

$$\frac{\beta_0\delta^{-1}}{3} < 1. \quad (\text{G.12})$$

Dessa forma,

$$\chi_t \approx -\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\delta}{3 - \beta_0\delta^{-1}} \left( 1 - \frac{1}{3}\alpha_0\delta^{-2} \right). \quad (\text{G.13})$$

Por sua vez, para  $\lambda$ , temos

$$\lambda \approx \delta^{-1} - \frac{3 - 2\beta_0\delta^{-1}}{3 - \beta_0\delta^{-1}} - \alpha_0\delta^{-2} \left( 1 + \frac{\frac{1}{3}\beta_0\delta^{-1}}{3 - \beta_0\delta^{-1}} \right). \quad (\text{G.14})$$

A relação acima recupera os resultados de Starobinsky

$$\lambda \approx \delta^{-1} - 1, \quad (\text{G.15})$$

e Starobinsky+ $R^3$ , a saber,

$$\lambda \approx \delta^{-1} - 1 - \alpha_0\delta^{-2}. \quad (\text{G.16})$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBOTT, B. P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.

ABBOTT, B. P. et al. Tests of general relativity with GW150914. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, n. 22, p. 221101, 2016. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.* 121, no. 12, 129902 (2018)].

ABBOTT, B. P. et al. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 119, p. 161101, Oct 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.161101>>.

ACCIOLY, A.; GIACCHINI, B. L.; SHAPIRO, I. L. Low-energy effects in a higher-derivative gravity model with real and complex massive poles. *Phys. Rev.*, D96, n. 10, p. 104004, 2017.

ADE, P. A. R. et al. Improved Constraints on Primordial Gravitational Waves using Planck, WMAP, and BICEP/Keck Observations through the 2018 Observing Season. *Phys. Rev. Lett.*, v. 127, n. 15, p. 151301, 2021.

AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, v. 641, p. A6, 2020. [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)].

AKRAMI, Y. et al. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation. 2018.

AKRAMI, Y. et al. Planck 2018 results. IX. Constraints on primordial non-Gaussianity. 2019.

ALEKHIN, S. et al. Proceedings, High-Precision  $\alpha_s$  Measurements from LHC to FCC-ee: Geneva, Switzerland, October 2-13, 2015. CERN, Geneva, 12 2015.

ALLAHVERDI, R. et al. Reheating in Inflationary Cosmology: Theory and Applications. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, v. 60, p. 27–51, 2010.

ALLAHVERDI, R.; MAZUMDAR, A. Quasi-thermal universe and its implication for gravitino production, baryogenesis and dark matter. 5 2005.

ALLAHVERDI, R.; MAZUMDAR, A. Supersymmetric thermalization and quasi-thermal universe: Consequences for gravitinos and leptogenesis. *JCAP*, v. 10, p. 008, 2006.

- ALVES, M. F. S.; REIS, L. F. M. A. M.; MEDEIROS, L. G. Gravitational waves from inspiraling black holes in quadratic gravity. 6 2022.
- AMIN, M. A. et al. Nonperturbative Dynamics Of Reheating After Inflation: A Review. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 24, p. 1530003, 2014.
- ANSELMINI, D. Perturbation spectra and renormalization-group techniques in double-field inflation and quantum gravity cosmology. *JCAP*, v. 07, p. 037, 2021.
- ANSELMINI, D.; BIANCHI, E.; PIVA, M. Predictions of quantum gravity in inflationary cosmology: effects of the Weyl-squared term. *JHEP*, v. 07, p. 211, 2020.
- ANSELMINI, D.; FRUZZA, F.; PIVA, M. Renormalization-group techniques for single-field inflation in primordial cosmology and quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, v. 38, n. 22, p. 225011, 2021.
- ASOREY, M.; LOPEZ, J. L.; SHAPIRO, I. L. Some remarks on high derivative quantum gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, A12, p. 5711–5734, 1997.
- BASSETT, B. A.; TSUJIKAWA, S.; WANDS, D. Inflation dynamics and reheating. *Rev. Mod. Phys.*, v. 78, p. 537–589, 2006.
- BASSETT, B. A.; TSUJIKAWA, S.; WANDS, D. Inflation dynamics and reheating. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 78, p. 537–589, May 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.78.537>>.
- BAUMANN, D. Inflation. In: *Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 523–686.
- BAUMANN, D. *Baummann Lectures*. [s.n.], 2013. Disponível em: <<https://cmb.wintherscoming.no/pdfs/baumann.pdf>>.
- BAUMANN, D. Primordial Cosmology. *PoS, TASI2017*, p. 009, 2018.
- BEKENSTEIN, J. D. Nonexistence of baryon number for static black holes. *Phys. Rev.*, D5, p. 1239–1246, 1972.
- BERKIN, A. L.; MAEDA, K.-i. Effects of  $R^3$  and  $R$  box  $R$  terms on  $R^2$  inflation. *Phys. Lett.*, B245, p. 348–354, 1990.
- BERNAL, N.; RUBIO, J.; VEERMÄE, H. UV Freeze-in in Starobinsky Inflation. *JCAP*, v. 10, p. 021, 2020.
- BERRY, C. P. L.; GAIR, J. R. Linearized  $f(R)$  Gravity: Gravitational Radiation and Solar System Tests. *Phys. Rev. D*, v. 83, p. 104022, 2011. [Erratum: *Phys.Rev.D* 85, 089906 (2012)].
- BEZRUKOV, F. L.; SHAPOSHNIKOV, M. The Standard Model Higgs boson as the inflaton. *Phys. Lett. B*, v. 659, p. 703–706, 2008.
- BHATTACHARYYA, S.; SHANKARANARAYANAN, S. Quasinormal modes as a distinguisher between general relativity and  $f(r)$  gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 96, p. 064044, Sep 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.064044>>.

- BIAGETTI, M. The Hunt for Primordial Interactions in the Large Scale Structures of the Universe. *Galaxies*, v. 7, n. 3, p. 71, 2019.
- BONORA, L.; PASTI, P.; BREGOLA, M. Weyl cocycles. *Classical and Quantum Gravity*, v. 3, n. 4, p. 635, jul 1986. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/3/4/018>>.
- BUENO, P.; CANO, P. A. On black holes in higher-derivative gravities. *Class. Quant. Grav.*, v. 34, n. 17, p. 175008, 2017.
- CALLAN, C. G.; COLEMAN, S.; JACKIW, R. A new improved energy-momentum tensor. *Annals of Physics*, v. 59, n. 1, p. 42–73, 1970. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491670903945>>.
- Capozziello, S.; Bajardi, F. Gravitational waves in modified gravity. *International Journal of Modern Physics D*, v. 28, n. 5, p. 1942002, jan. 2019.
- CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D. Extended Theories of Gravity. *Phys. Rept.*, v. 509, p. 167–321, 2011.
- CAPRINI, C.; HÖLSCHER, P.; SCHWARZ, D. J. Astrophysical Gravitational Waves in Conformal Gravity. *Phys. Rev. D*, v. 98, n. 8, p. 084002, 2018.
- CASTELLANOS, A. R. R. et al. On higher derivative corrections to the  $R + R^2$  inflationary model. *JCAP*, v. 1812, n. 12, p. 007, 2018.
- CHEONG, D. Y.; LEE, H. M.; PARK, S. C. Beyond the Starobinsky model for inflation. *Phys. Lett. B*, v. 805, p. 135453, 2020.
- CLIFTON, T. et al. Modified Gravity and Cosmology. *Phys. Rept.*, v. 513, p. 1–189, 2012.
- CREMINELLI, P. et al. The Phase Transition to Slow-roll Eternal Inflation. *JHEP*, v. 09, p. 036, 2008.
- CUZINATTO, R. R.; MEDEIROS, L. G.; POMPEIA, P. J. Higher-order modified Starobinsky inflation. *JCAP*, v. 1902, p. 055, 2019.
- CUZINATTO, R. R. et al. Observational constraints on a phenomenological  $f(R, \partial R)$ -model. *Gen. Rel. Grav.*, v. 47, n. 3, p. 29, 2015.
- CUZINATTO, R. R. et al. Scalar-multi-tensorial equivalence for higher order  $f(R, \nabla_\mu R, \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} R, \dots, \nabla_{\mu_1 \dots \mu_n} R)$  theories of gravity. *Phys. Rev.*, D93, n. 12, p. 124034, 2016. [Erratum: *Phys. Rev.* D98, no. 2, 029901 (2018)].
- CUZINATTO, R. R. et al.  $f(R, \nabla_{\mu_1} R, \dots, \nabla_{\mu_1 \dots \mu_n} R)$  theories of gravity in Einstein frame: a higher order modified Starobinsky inflation model in the Palatini approach. *Phys. Rev.*, D99, n. 8, p. 084053, 2019.
- DATTA, S.; BOSE, S. Quasi-normal Modes of Static Spherically Symmetric Black Holes in  $f(R)$  Theory. 2019.
- DIAMANDIS, G. A. et al. Deforming the Starobinsky model in ghost-free higher derivative supergravities. *Phys. Rev. D*, v. 96, n. 4, p. 044033, 2017.

- d'Inverno, R. *Introducing Einstein's relativity*. [S.l.]: Clarendon Press; Oxford University Press, 1992. ISBN 0198596537,9780198596530,0198596863.
- EDHOLM, J. UV completion of the Starobinsky model, tensor-to-scalar ratio, and constraints on nonlocality. *Phys. Rev. D*, v. 95, n. 4, p. 044004, 2017.
- EZQUIAGA, J. M. et al. Gravitational wave propagation beyond general relativity: waveform distortions and echoes. *JCAP*, v. 11, n. 11, p. 048, 2021.
- FABRIS, J. C. et al. Gravitational waves and stability of cosmological solutions in the theory with anomaly-induced corrections. *JCAP*, v. 02, p. 019, 2012.
- FARIA, F. F. Gravitational waves in massive conformal gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 7, p. 645, 2020.
- FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S.  $f(R)$  theories. *Living Rev. Rel.*, v. 13, p. 3, 2010.
- FERRARA, S. et al. Higher Order Corrections in Minimal Supergravity Models of Inflation. *JCAP*, v. 11, p. 046, 2013.
- FROLOV, V. P.; SHAPIRO, I. L. Black Holes in Higher Dimensional Gravity Theory with Quadratic in Curvature Corrections. *Phys. Rev. D*, v. 80, p. 044034, 2009.
- GIACCHINI, B. L. On the cancellation of newtonian singularities in higher-derivative gravity. *Physics Letters B*, v. 766, p. 306 – 311, 2017. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269317300266>>.
- GIACCHINI, B. L.; NETTO, T. de P. Weak-field limit and regular solutions in polynomial higher-derivative gravities. *Eur. Phys. J.*, C79, n. 3, p. 217, 2019.
- GOGOI, D. J.; GOSWAMI, U. D. A new  $f(R)$  gravity model and properties of gravitational waves in it. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 12, p. 1101, 2020.
- GOLDSTEIN, K.; MASHIYANE, J. J. Ineffective Higher Derivative Black Hole Hair. *Phys. Rev.*, D97, n. 2, p. 024015, 2018.
- GORBUNOV, D.; TOKAREVA, A.  $R^2$ -inflation with conformal SM Higgs field. *JCAP*, v. 12, p. 021, 2013.
- GOTTLOBER, S.; SCHMIDT, H. J.; STAROBINSKY, A. A. Sixth Order Gravity and Conformal Transformations. *Class. Quant. Grav.*, v. 7, p. 893, 1990.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of integrals, series, and products*. Seventh. [S.l.]: Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007. xlviii+1171 p. Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, With one CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX). ISBN 978-0-12-373637-6; 0-12-373637-4.
- GUNDHI, A.; STEINWACHS, C. F. Scalaron-Higgs inflation. *Nucl. Phys. B*, v. 954, p. 114989, 2020.
- GUTH, A. H. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev.*, D23, p. 347–356, 1981. [Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.3,139(1987)].

- HEHL, F. W. et al. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 48, p. 393–416, Jul 1976. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.48.393>>.
- HERRANEN, M. et al. Spacetime curvature and Higgs stability after inflation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 115, p. 241301, 2015.
- Hobson G. P. Efstathiou, A. N. L. M. P. *General relativity: an introduction for physicists*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521536394,0521536391,0521829518,9780521829519,9780511140471.
- HOLMES, M. H. *Introduction to Perturbation Methods*. 2nd ed. 2013. ed. [S.l.]: Springer, 2012. (Texts in Applied Mathematics). ISBN 146145476X,9781461454762.
- HÖLSCHER, P. Gravitational Waves and Degrees of Freedom in Higher Derivative Gravity. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 6, p. 064039, 2019.
- HÖLSCHER, P.; SCHWARZ, D. J. Gravitational waves from inspiralling compact binaries in conformal gravity. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 8, p. 084005, 2019.
- HOOFT, G. 't; VELTMAN, M. One-loop divergencies in the theory of gravitation. *Annales de l'I.H.P. Physique théorique*, Gauthier-Villars, v. 20, n. 1, p. 69–94, 1974. Disponível em: <[http://www.numdam.org/item/AIHPA\\_1974\\_\\_20\\_1\\_69\\_0/](http://www.numdam.org/item/AIHPA_1974__20_1_69_0/)>.
- HORNDESKI, G. W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 10, p. 363–384, 1974.
- HUANG, Q.-G. A polynomial  $f(R)$  inflation model. *JCAP*, v. 02, p. 035, 2014.
- HUSDAL, L. On Effective Degrees of Freedom in the Early Universe. *Galaxies*, v. 4, n. 4, p. 78, 2016.
- IHOSHI, M. Mutated hybrid inflation in  $f(R, \square R)$ -gravity. *JCAP*, v. 1102, p. 022, 2011.
- IVANOV, M. M.; TOKAREVA, A. A. Cosmology with a light ghost. *JCAP*, v. 12, p. 018, 2016.
- JOHNSON, R. *Singular perturbation theory: techniques with applications to engineering*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2004. (Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering). ISBN 0387232001,9780387232171,9780387232003.
- Kazanas, D. Dynamics of the universe and spontaneous symmetry breaking. *apjl*, v. 241, p. L59–L63, out. 1980.
- KIM, Y.; KOBAKHIDZE, A.; PICKER, Z. S. C. Probing Quadratic Gravity with Binary Inspirals. *Eur. Phys. J. C*, v. 81, n. 4, p. 362, 2021.
- KOFMAN, L.; LINDE, A. D.; STAROBINSKY, A. A. Towards the theory of reheating after inflation. *Phys. Rev. D*, v. 56, p. 3258–3295, 1997.
- KOKKOTAS, K.; KONOPLYA, R. A.; ZHIDENKO, A. Non-Schwarzschild black-hole metric in four dimensional higher derivative gravity: analytical approximation. *Phys. Rev.*, D96, n. 6, p. 064007, 2017.

KOLB, E. W.; TURNER, M. S. *The Early Universe*. [S.l.: s.n.], 1990. v. 69. ISBN 978-0-201-62674-2.

KONOPLYA, R. A.; ZINHAILO, A. F. Hawking radiation of non-Schwarzschild black holes in higher derivative gravity: a crucial role of grey-body factors. *Phys. Rev.*, D99, n. 10, p. 104060, 2019.

KOSHELEV, A. S. et al. Occurrence of exact  $R^2$  inflation in non-local UV-complete gravity. *JHEP*, v. 11, p. 067, 2016.

KUMAR, K. S.; MODESTO, L. Non-local Starobinsky inflation in the light of future CMB. 10 2018.

Lambourne, R. J. A. *Relativity, gravitation and cosmology*. draft. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780521131384,0521131383,0521761190,9780521761192.

LINDE, A. D. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett.*, v. 108B, p. 389–393, 1982. [Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.3,149(1987)].

LINDE, A. D. Eternally Existing Selfreproducing Chaotic Inflationary Universe. *Phys. Lett. B*, v. 175, p. 395–400, 1986.

LINDE, A. D. Hybrid inflation. *Phys. Rev.*, D49, p. 748–754, 1994.

LONGDEN, C. Non-standard hierarchies of the runnings of the spectral index in inflation. *Universe*, v. 3, n. 1, p. 17, 2017.

LOZANOV, K. D. Lectures on Reheating after Inflation. 7 2019.

LOZANOV, K. D.; AMIN, M. A. Self-resonance after inflation: Oscillons, transients, and radiation domination. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 97, p. 023533, Jan 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.023533>>.

LU, H. et al. Black Holes in Higher-Derivative Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, v. 114, n. 17, p. 171601, 2015.

LÜ, H. et al. Spherically symmetric solutions in higher-derivative gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 92, p. 124019, Dec 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.124019>>.

LYTH, A. R. L. D. H. *The primordial density perturbation: cosmology, inflation and the origin of structure*. Revised. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. ISBN 052182849X,9780521828499.

MAITY, D.; SAHA, P. (p)reheating after minimal plateau inflation and constraints from CMB. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2019, n. 07, p. 018–018, jul 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/07/018>>.

MARKKANEN, T.; RAJANTIE, A.; STOPYRA, S. Cosmological Aspects of Higgs Vacuum Metastability. *Front. Astron. Space Sci.*, v. 5, p. 40, 2018.

- MARTIN, J.; RINGEVAL, C.; VENNIN, V. Encyclopædia inflationaris. *Physics of the Dark Universe*, v. 5-6, p. 75 – 235, 2014. ISSN 2212-6864. Hunt for Dark Matter. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686414000053>>.
- MAURO, S. et al. Fourth derivative gravity in the auxiliary fields representation and application to the black hole stability. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 130, n. 7, p. 135, 2015.
- MISHRA, S. S.; SAHNI, V.; STAROBINSKY, A. A. Curing inflationary degeneracies using reheating predictions and relic gravitational waves. *JCAP*, v. 05, p. 075, 2021.
- MODESTO, L. Super-renormalizable or finite Lee-Wick quantum gravity. *Nucl. Phys.*, B909, p. 584–606, 2016.
- MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.
- MUKHANOV, V.; FELDMAN, H.; BRANDENBERGER, R. Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, v. 215, n. 5, p. 203–333, 1992. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739290044Z>>.
- MUNOZ, J. B.; KAMIONKOWSKI, M. Equation-of-State Parameter for Reheating. *Phys. Rev. D*, v. 91, n. 4, p. 043521, 2015.
- NELSON, W. Static Solutions for 4th order gravity. *Phys. Rev.*, D82, p. 104026, 2010.
- PERIVOLAROPOULOS, L.; KAZANTZIDIS, L. Hints of modified gravity in cosmos and in the lab? *Int. J. Mod. Phys.*, D28, n. 05, p. 1942001, 2019.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN 978-0-201-50397-5.
- PETER, P.; SALLES, F. D. O.; SHAPIRO, I. L. On the ghost-induced instability on de Sitter background. *Phys. Rev. D*, v. 97, n. 6, p. 064044, 2018.
- PIATTELLA, O. F. *Lecture Notes in Cosmology*. Cham: Springer, 2018. (UNITEXT for Physics).
- PODOLSKY, J. et al. Explicit black hole solutions in higher-derivative gravity. *Phys. Rev.*, D98, n. 2, p. 021502, 2018.
- QUANDT, I.; SCHMIDT, H.-J. The Newtonian limit of fourth and higher order gravity. *Astron. Nachr.*, v. 312, p. 97, 1991.
- REIS, S. Castardelli dos; CHAPIRO, G.; SHAPIRO, I. L. Beyond the linear analysis of stability in higher derivative gravity with the Bianchi-I metric. *Phys. Rev. D*, v. 100, n. 6, p. 066004, 2019.
- Ryder, L. *Introduction to general relativity*. 1, draft. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. ISBN 0521845637,9780521845632.
- SAHA, P.; ANAND, S.; SRIRAMKUMAR, L. Accounting for the time evolution of the equation of state parameter during reheating. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 102, p. 103511, Nov 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.103511>>.

- SALLES, F. d. O.; SHAPIRO, I. L. Do we have unitary and (super)renormalizable quantum gravity below the Planck scale? *Phys. Rev. D*, v. 89, n. 8, p. 084054, 2014. [Erratum: *Phys.Rev.D* 90, 129903 (2014)].
- SALVIO, A. Inflationary Perturbations in No-Scale Theories. *Eur. Phys. J. C*, v. 77, n. 4, p. 267, 2017.
- SALVIO, A. Quasi-Conformal Models and the Early Universe. *Eur. Phys. J. C*, v. 79, n. 9, p. 750, 2019.
- SATO, K. First Order Phase Transition of a Vacuum and Expansion of the Universe. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 195, p. 467–479, 1981.
- SBISÀ, F. Classical and quantum ghosts. *Eur. J. Phys.*, v. 36, p. 015009, 2015.
- SHAPIRO, I. L.; PELINSON, A. M.; SALLES, F. de O. Gravitational Waves and Perspectives for Quantum Gravity. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 29, p. 1430034, 2014.
- SILVA, G. Rodrigues-da; BEZERRA-SOBRINHO, J.; MEDEIROS, L. G. Higher-order extension of starobinsky inflation: Initial conditions, slow-roll regime, and reheating phase. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 105, p. 063504, Mar 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.063504>>.
- SILVA, G. Rodrigues-da; MEDEIROS, L. Spherically Symmetric Solutions in Higher-Derivative Theories of Gravity. *Phys. Rev. D*, v. 101, n. 12, p. 124061, 2020.
- SILVA, G. Rodrigues-da; MEDEIROS, L. G. Second-order corrections to Starobinsky inflation. 7 2022.
- Sotiriou, T. P.; Faraoni, V.  $f(r)$  theories of gravity. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 82, p. 451–497, Mar 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.451>>.
- Starobinsky, A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, v. 91, n. 1, p. 99 – 102, 1980. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026938090670X>>.
- STAROBINSKY, A. A. Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe. *JETP Lett.*, v. 30, p. 682–685, 1979. [767(1979)].
- STELLE, K. S. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 16, p. 953–969, Aug 1977. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.953>>.
- STELLE, K. S. Classical Gravity with Higher Derivatives. *Gen. Rel. Grav.*, v. 9, p. 353–371, 1978.
- TURNER, M. S. Coherent scalar-field oscillations in an expanding universe. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 28, p. 1243–1247, Sep 1983. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.28.1243>>.
- Utiyama, R.; DeWitt, B. S. Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields. *Journal of Mathematical Physics*, v. 3, n. 4, p. 608–618, 1962. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1724264>>.

VILENKIN, A. Birth of inflationary universes. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 27, p. 2848–2855, Jun 1983. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.27.2848>>.

VILHENA, S. G.; MEDEIROS, L. G.; CUZINATTO, R. R. Gravitational waves in higher-order  $R^2$  gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 104, p. 084061, Oct 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.084061>>.

Wald, R. M. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984. ISBN 9780226870328. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ibSdQgAACAAJ>>.

WANDS, D. Multiple field inflation. *Lect. Notes Phys.*, v. 738, p. 275–304, 2008.

Weinberg, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of General Relativity*. First edition. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc., 1972. ISBN 0471925675,9780471925675.

WEINBERG, S. *Cosmology*. [S.l.]: Oxford University Press, 2008. 201-217 p.

YAMADA, K.; NARIKAWA, T.; TANAKA, T. Testing massive-field modifications of gravity via gravitational waves. *PTEP*, v. 2019, n. 10, p. 103E01, 2019.

ZINHAILO, A. F. Quasinormal modes of the four-dimensional black hole in Einstein–Weyl gravity. *Eur. Phys. J.*, C78, n. 12, p. 992, 2018. [*Eur. Phys. J.*78,992(2018)].