



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

JÚLIA MARIA DE FRANÇA MOURA

**ESTADO-LIMITE DE SERVIÇO DE VIBRAÇÕES
EXCESSIVAS EM LAJES DE CONCRETO ARMADO
CONSIDERANDO A AÇÃO INDUZIDA POR PESSOAS**

**NATAL – RN
2022**

Júlia Maria de França Moura

Estado-limite de serviço de vibrações excessivas em lajes de concreto armado considerando a ação induzida por pessoas

Trabalho de Conclusão de Curso na modalidade Monografia, submetido ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Petrus Gorgônio B. da Nóbrega
Coorientadora: Prof.^a Dr.^a Selma H. Shimura da Nóbrega

Natal – RN
2022

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Moura, Júlia Maria de França.

Estado-limite de serviço de vibrações excessivas em lajes de concreto armado considerando a ação induzida por pessoas / Júlia Maria de França Moura. - Natal, 2022.

91 f.: il.

Monografia (graduação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia Civil. Natal, RN, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Petrus Gorgônio Bulhões da Nóbrega.

Coorientadora: Profa. Dra. Selma Hissae Shimura da Nóbrega.

1. Dinâmica de estruturas - Monografia. 2. Vibrações excessivas - Monografia. 3. Análise dinâmica - Monografia. 4. Conforto humano - Monografia. I. Nóbrega, Petrus Gorgônio Bulhões da. II. Nóbrega, Selma Hissae Shimura da. III. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 624.04

Júlia Maria de França Moura

Estado-limite de serviço de vibrações excessivas em lajes de concreto armado considerando a ação induzida por pessoas

Trabalho de Conclusão de Curso na modalidade Monografia, submetido ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovado em 08/12/2022

Prof. Dr. Petrus Gorgônio B. da Nóbrega – Orientador

Prof.^a Dr.^a Selma Hissae Shimura da Nóbrega – Coorientadora

Prof. Dr. Claudius de Sousa Barbosa – EPUSP

Prof. Dr. Ricardo Carrazedo – EESC/USP

Natal – RN
2022

DEDICATÓRIA

Ao meu bisavô, Bartolomeu.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais Fábio e Karla pelo incondicional incentivo, apoio e amor que sempre me deram. São meus grandes exemplos de profissionais e de caráter. A eles e à minha irmã Luísa eu dedico tudo o que faço.

A todos os professores que contribuíram para minha formação, desde a escola até os da graduação. O conhecimento que cada um deles me cedeu ao longo desses anos fez com que eu chegasse até aqui.

Ao meu orientador Petrus por toda a disponibilidade, suporte e dedicação. Por todos os horizontes abertos e todo o conhecimento transmitido. Pela paciência em responder todas as minhas dúvidas, e muito mais pelas vezes em que não me deu a resposta, mas sim como obtê-la.

À minha coorientadora Selma, pessoa e profissional a qual sempre tive profunda admiração.

Agradeço a TQS informática Ltda. pela disponibilização do sistema TQS v.23 o qual foi indispensável para a realização desse trabalho. Além disso, foram absolutamente atenciosos solucionando todas as dúvidas pertinentes acerca dos recursos de análise dinâmica.

Por fim, agradeço a todos os amigos com quem construí fortes laços desde o começo do curso, em especial a Maiara, Nesi, Rabelo, Letícia, Alichelle e Ísis, sem eles meu percurso na universidade teria muito menos brilho.

A obstinação acaba por triunfar sobre tudo.

Albert Camus

RESUMO

Estado-limite de serviço de vibrações excessivas em lajes de concreto armado considerando a ação induzida por pessoas

O projeto de estruturas tem como uma de suas etapas fundamentais a observação dos estados-limites últimos e dos estados-limites de serviço. Esses são de fundamental importância para garantir o atendimento da funcionalidade da estrutura e de suas condições de uso. Nesse contexto, nota-se que, concomitantemente ao desenvolvimento dos materiais e dos sistemas construtivos, assim como a adoção de estruturas cada vez mais esbeltas e flexíveis, está a tendência de elas serem também mais susceptíveis a vibrações excessivas de modo a gerar desconforto aos usuários e até danos estruturais. A norma brasileira que trata do projeto de estruturas de concreto, a ABNT NBR 6118:2014, prevê o atendimento do estado-limite de serviço de vibrações excessivas através de uma metodologia simplificada que consiste em estabelecer valores mínimos de frequência natural para evitar a ressonância na estrutura. Contudo, estudos recentes têm concluído que o requisito da NBR 6118:2014 não é suficiente para evitar vibrações incômodas. Dessa forma, o presente trabalho se propôs a estudar diferentes critérios de avaliação de vibrações em estruturas estabelecidos por normas e guias internacionais de projeto a fim de compará-los ao método proposto pela norma brasileira. Para isso, modelou-se computacionalmente uma laje para obtenção dos resultados de análise modal – frequências naturais e modos de vibração – e a simulação de ações dinâmicas provocadas pela movimentação de pessoas, tais como caminhar e dançar, com a finalidade de obter as respostas dinâmicas da laje. De posse dos resultados fornecidos com o auxílio do *software* TQS v.23, foi possível estabelecer relações de influência das propriedades da estrutura nos seus valores de frequências naturais e aplicar comparativamente os critérios de níveis de conforto recomendados.

Palavras-chave: Dinâmica de estruturas. Vibrações excessivas. Análise dinâmica. Conforto humano.

ABSTRACT

Serviceability limit state of excessive vibrations in reinforced concrete slabs considering the human-induced action

The structural design has as one of its fundamental steps the observation of the ultimate limit states and the serviceability limit states. The latter has fundamental importance to ensure the functionality of the structure and its conditions of use. In this context, it is noted that concomitantly with the development of materials and building systems, as well as the adoption of increasingly slender and flexible structures, there is a tendency for them to also be more susceptible to excessive vibrations to generate discomfort to users and even structural damages. The Brazilian code that deals with the design of concrete structures, ABNT NBR 6118:2014, provides for meeting the serviceability limit state of excessive vibrations through a simplified methodology that consists of setting minimum values of natural frequency for avoiding resonance in the structure. However, recent studies have concluded that the NBR 6118:2014 requirement is not sufficient to avoid annoying vibrations. Thus, this work proposed to study different criteria for evaluating vibrations in structures established by international codes and design guides to compare them with the method proposed by the Brazilian standard. For this purpose, a slab was computationally modeled to obtain the results of the modal analysis - natural frequencies and mode shapes - and the simulation of dynamic actions caused by the movements made by people, such as walking and dancing, to obtain the dynamic responses of the slab. Considering the results provided by TQS software, it was possible to establish relationships of influence of the structure's properties on its natural frequency values and comparatively apply the recommended comfort level criteria.

Keywords: Structural Dynamics. Excessive Vibrations. Dynamic analysis. Human comfort.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	PÁGINA
Figura 1 - Diferença entre carregamento estático e dinâmico	21
Figura 2 - Sistema de oscilação com um grau de liberdade	21
Figura 3 - Representação gráfica da resposta de um sistema de vibração livre não amortecido	23
Figura 4 - Vibração livre com amortecimento supercrítico, crítico e subcrítico	24
Figura 5 - Representação gráfica da resposta de um sistema de vibração livre com amortecimento subcrítico	25
Figura 6 - Efeitos do amortecimento na vibração livre	26
Figura 7 - Modos de vibração.....	27
Figura 8 - Frequência natural de vãos simples e contínuos.....	30
Figura 9 – Resposta em vibração livre para quatro níveis de amortecimento $\xi = 2, 5, 10$ e 20%	32
Figura 10 – Variação do fator de amplificação dinâmica para um sistema de vibração forçada harmônica	32
Figura 11 - Representação do carregamento periódico e do transiente.....	34
Figura 12 - Estágios durante o ciclo de um passo	35
Figura 13 - Valores limites de tolerância recomendados para conforto humano em diferentes ambientes.....	40
Figura 14 - Peso efetivo mínimo para lajes de concreto no caso de vibrações causadas pelo caminhar	46
Figura 15 - Peso efetivo mínimo para lajes de concreto no caso de vibrações causadas por atividades rítmicas	48
Figura 16 - Logotipo da TQS	51
Figura 17 - Aba de cargas na seção de edição do edifício.....	52
Figura 18 – Percurso para a análise dos modos de vibração de um pavimento	53
Figura 19 - Visualizador da grelha espacial dinâmica.....	53
Figura 20 - Indicação dos ícones de Modos de Vibração e Participação Modal no Menu Resultados.....	54
Figura 21 - Tabela com resultados de frequência e período naturais	54
Figura 22 - Tabela com resultados de participação modal	54
Figura 23 - Aba de análise dinâmica no TQS.....	55

Figura 24 - Abas de entrada de dados no time-history	55
Figura 25 - Entrada dos dados do carregamento	56
Figura 26 - Entrada de dados dos harmônicos.....	56
Figura 27 – Harmônico 1 do Carregamento 1	57
Figura 28 - Cálculo e resultados no TQS	58
Figura 29 - Planta de formas do pavimento.....	60
Figura 30 - Vista tridimensional do pavimento.....	60
Figura 31 - Deslocamentos da laje e verificação do limite para aceitabilidade visual	61
Figura 32 - Deslocamentos da laje e verificação do limite para aceitabilidade de vibrações ..	61
Figura 33 - Primeiro modo ($f_1 = 7,886$ Hz), 1ª flexão da laje.....	64
Figura 34 - Segundo modo ($f_2 = 17,38$ Hz), 2ª flexão da laje – direção maior.....	64
Figura 35 - Terceiro modo ($f_3 = 21,212$ Hz), 2ª flexão da laje – direção menor	64
Figura 36 - Quarto modo ($f_4 = 31,341$ Hz), flexões em direções simultâneas.....	64
Figura 37- Gráfico da variação da frequência fundamental pela porcentagem de carga variável	65
Figura 38 - Consideração da NLF pela NBR 6118:2014	66
Figura 39 - Diferença entre modelos IV e VI.....	67
Figura 40 – Matriz de rigidez para pórtico espacial	68
Figura 41 - Leitura de forças nodais no time-history	71
Figura 42 – Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($f_n = 7,562$ Hz) para 60%q.	72
Figura 43 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($f_n = 7,886$ Hz) para 40%q.	72
Figura 44 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($f_n = 8,064$ Hz) para 30%q.	73
Figura 45 - Gráfico de aceleração provocada na direção z no nó 146 ($f_n = 8,682$ Hz) sem ponderador de carga.....	73
Figura 46 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($f_n = 7,562$ Hz) para 60%q.	73
Figura 47 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($f_n = 7,886$ Hz) para 40%q.	74
Figura 48 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($f_n = 8,064$ Hz) para 30%q.	74
Figura 49 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($f_n = 8,682$ Hz) sem ponderador de carga.....	74
Figura 50 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($f_n = 7,562$ Hz) para 60%q.	76
Figura 51 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($f_n = 7,886$ Hz) para 40%q.	76
Figura 52 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($f_n = 8,064$ Hz) para 30%q.	77

Figura 53 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($fn = 8,682$ Hz) sem ponderador de carga.....	77
Figura 54 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($fn = 7,562$ Hz) para 60%q.	77
Figura 55 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($fn = 7,886$ Hz) para 40%q.	78
Figura 56 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($fn = 8,064$ Hz) para 30%q.	78
Figura 57 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($fn = 8,682$ Hz) sem ponderador de carga.....	78
Figura 58 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 para $\xi = 0,010$	79
Figura 59 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 para $\xi = 0,040$	80

LISTA DE TABELAS

TABELA	PÁGINA
Tabela 1 - Forças dinâmicas normalizadas.....	36
Tabela 2 - Valores de frequência crítica e mínima segundo a NBR 6118:2014	37
Tabela 3 - Valores de frequência crítica segundo o Model Code 1990.....	38
Tabela 4 - Valores de frequência crítica segundo o Model Code 2010.....	39
Tabela 5 - Valores recomendados na literatura para os parâmetros da $P0$, β e $a0g$	41
Tabela 6 - Limites de aceleração para atividades rítmicas	42
Tabela 7 - Parâmetros estimados durante eventos ritmados.....	43
Tabela 8 - Fator de amortecimento recomendado para lajes de concreto	45
Tabela 9 - Indicação do limiar de perceptividade para vibrações	49
Tabela 10 – Valores das frequências fundamentais (cálculo computacional) para diferentes porcentagens de carga variável.....	63
Tabela 11 - Valores das frequências fundamentais (cálculo analítico) para diferentes porcentagens de carga variável.....	64
Tabela 12 - Valores de frequências fundamentais pelo TQS para diferentes coeficientes de NLF	67
Tabela 13 - Valores de frequências fundamentais pelo cálculo analítico para diferentes coeficientes de NLF.....	67
Tabela 14 - Valores de frequências fundamentais alterando-se o módulo de elasticidade secante	69
Tabela 15 - Taxa de amortecimento para diferentes materiais.....	70
Tabela 16 - Dados do carregamento dinâmico (caminhada)	71
Tabela 17 – Acelerações verticais máximas no nó central produzidas por caminhada para cada caso de frequência	75
Tabela 18 - Dados do carregamento dinâmico (dança)	76
Tabela 19 - Acelerações verticais máximas no nó central produzida por atividades de dança para cada caso de frequência	79
Tabela 20 - Acelerações verticais máximas no nó central produzida por atividades de dança para diferentes taxas de amortecimento.....	80
Tabela 21 - Verificação do atendimento ao critério de vibrações excessivas (caminhada) - ABNT NBR 6118 e Model Code 2010	81

Tabela 22 - Verificação do atendimento ao critério de vibrações excessivas (atividades de dança) - ABNT NBR 6118 e Model Code 2010	82
Tabela 23 - Verificação do atendimento ao critério de vibrações excessivas (caminhada) - AISC	82
Tabela 24 - Verificação do atendimento ao critério de vibrações excessivas (atividades de dança) - AISC	83
Tabela 25 - Verificação do atendimento ao critério de vibrações excessivas (caminhada) - Critério do Peso Mínimo Efetivo.....	84
Tabela 26 - Verificação do atendimento ao critério de vibrações excessivas (atividades de dança) - Critério do Peso Mínimo Efetivo	84
Tabela 27 - Análise do critério de vibrações excessivas - ISO 2631-2	85

SUMÁRIO

CAPÍTULO	PÁGINA
1 INTRODUÇÃO	16
1.1 Tema e Motivações	16
1.2 Objetivos	18
1.2.1 Objetivo geral	18
1.2.2 Objetivos específicos	18
1.3 Organização da Monografia	18
2 CONCEITOS DA DINÂMICA DE ESTRUTURAS	20
2.1 Introdução	20
2.2 Sistemas com um grau de liberdade	21
2.3 Sistemas com múltiplos graus de liberdade	26
2.4 Frequência natural em pisos de concreto armado	29
2.5 Amortecimento	31
3 EFEITOS DINÂMICOS PROVOCADOS POR ATIVIDADES HUMANAS	34
4 CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO DE VIBRAÇÕES	37
4.1 ABNT NBR 6118:2014	37
4.2 Model Code 2010	38
4.3 AISC Design Guide	39
4.3.1 Vibrações causadas por caminhada	40
4.3.2 Vibrações causadas por atividade rítmica	42
4.4 Critério do Peso Efetivo Mínimo	44
4.4.1 Vibrações causadas por caminhada	44
4.4.2 Vibrações causadas por atividade rítmicas	46
4.5 ISO 2631-2	48
5 ANÁLISE DINÂMICA NO TQS	50
6 ANÁLISES E DISCUSSÕES	59

6.1	Descrição da estrutura.....	59
6.2	Frequências Naturais.....	62
6.2.1	Influência do percentual das cargas variáveis no cálculo das frequências naturais .	63
6.2.2	Influência do percentual de redução da rigidez no cálculo das frequências naturais	65
6.3	Amortecimento	69
6.4	Vibração provocada por caminhada.....	70
6.4.1	Obtenção da função da força de excitação	70
6.4.2	Gráfico da resposta da aceleração	72
6.5	Vibração provocada por atividades rítmicas.....	75
6.5.1	Obtenção da função da força de excitação	75
6.5.2	Gráficos de aceleração	76
6.5.3	Influência da taxa de amortecimento	79
6.6	Comparação com critérios de conforto	80
6.6.1	Verificação do critério da ABNT NBR 6118:2014 e do Model Code 2010.....	80
6.6.2	Verificação do critério do AISC Design Guide 11	82
6.6.3	Verificação do critério do Peso Mínimo Efetivo	83
6.6.4	Verificação do critério da ISO 2631-2	85
6.6.5	Comentários	85
7	CONCLUSÃO	87
8	REFERÊNCIAS	89

1 INTRODUÇÃO

1.1 Tema e Motivações

O projeto de estruturas de concreto armado de acordo com a ABNT NBR 6118:2014 “Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento” passa, impreterivelmente, pela análise dos estados-limites últimos (ELU) relacionados à ruína da estrutura, e dos estados-limites de serviço (ELS) relacionado às condições de conforto do usuário, durabilidade, aparência e utilização. Dentre as verificações do ELS está o estado-limite de vibrações excessivas (ELS-VE) em que as vibrações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal na construção (ABNT, 2014).

Segundo FRANCO (2018), as vibrações induzidas pela atividade de pessoas é motivo de grande atenção ultimamente. Na concepção do projeto de uma estrutura de concreto, a análise dinâmica se faz cada vez mais necessária com o avanço crescente dos usos e tecnologias do concreto estrutural. A difusão do concreto protendido, de lajes pré-moldadas e a prática de uma arquitetura mais ousada tem resultado em maiores vãos e estruturas mais esbeltas, consequentemente menos rígidas. Essas características derivam em uma não-linearidade geométrica mais pronunciada, no aumento da fissuração nas estruturas de concreto - e daí uma não linearidade física mais evidente -, e no aumento da sensibilidade às vibrações (ALMEIDA *et al.* 2005).

A consequência disso é o surgimento de vibrações excessivas nos pavimentos que, de acordo com ALLEN (1990), gera desconforto aos usuários e, em casos raros, inaceitáveis à segurança humana. FAÍSCA (2003) cita problemas ocorridos em estruturas com carregamentos humanos, entre eles o Estádio Maracanã/RJ, o desabamento de uma passarela na Carolina do Norte/EUA e o caso da Millennium Footbridge/Londres, a qual no dia de inauguração apresentou oscilações excessivas devido à ação de pessoas se movimentando sobre ela.

Para evitar o comportamento inadequado de uma estrutura quando submetida a ações dinâmicas é, ao menos conveniente, impedir que a frequência de excitação se aproxime da frequência natural do elemento em análise para, assim, afastar-se do fenômeno da ressonância. A NBR 6118:2014, na seção 23.3, estabelece diretrizes que regulamentam a verificação do estado-limite de serviço de vibrações excessivas usando o Método da Sintonização da Estrutura (“*tuning method*”). No entanto, a norma brasileira carece de informações caso a opção fosse por uma análise mais completa e detalhada, considerando as ações como realmente dinâmicas,

deixando aberta a possibilidade de consulta às normas internacionais para esta análise dinâmica mais acurada quando suas prescrições não forem atendidas.

Assim como em outras normas e/ou artigos para avaliação de vibrações em estruturas de concreto, a norma brasileira se utiliza de um método aproximado para análise e obtenção dos limites de vibração em pavimentos. Esse aspecto é explicado pelo fato de o cálculo da frequência mínima ser baseado no amortecimento e na percepção humana, ambos sujeitos à variação (MAST, 2001). A problemática, no entanto, está na omissão da ABNT NBR 6118:2014 quanto aos detalhes de critérios para obtenção dos parâmetros fundamentais relacionados à análise, sejam eles: a frequência natural - imprescindível para a avaliação - e critérios de massa, rigidez e amortecimento.

Nesse contexto, MARCOS (2015), ao estudar a sensibilidade a vibrações em lajes alveolares protendidas, pôde concluir que estruturas em que a norma era obedecida não garantiam, necessariamente, o conforto dos usuários. FRANCO (2018), no sentido oposto, mas também asseverando esse ponto, concluiu após efetuar análise dinâmica completa de um piso de escritório que, apesar da frequência natural do pavimento avaliado ser inferior e inadequada àquela recomendada pela norma brasileira, os resultados de aceleração máxima do pavimento devido a pessoas caminhando foram inferiores às acelerações máximas recomendadas pelo CEB - *Bulletin d'Information* nº 209, estando a estrutura, segundo esse critério, apta ao uso. Além desses, LOZOVEY *et al.* (2018) ao pesquisar sobre o ELS-VE também constatou a não adequabilidade da norma, inclusive sugerindo a adoção do Critério do Peso Mínimo Efetivo para lajes de concreto armado e protendido no estado-limite de vibrações excessivas.

Diferentemente do método utilizado na NBR 6118:2014, o Critério do Peso Mínimo Efetivo baseia-se não no Método de Sintonização da Estrutura, mas sim no cálculo da resposta à vibração. Essa metodologia usa como principal referência o AISC Design Guide 11 (MURRAY *et al.*, 2016), critério de avaliação do American Institute of Steel Construction (AISC), importante guia internacional para análise de vibração de pisos devida à atividade humana e que considera os valores recomendados pela ISO 2631-2 (1989) para os limites de aceleração. O Comité Euro-International du Béton (CEB), por sua vez, possui um boletim - o CEB nº 209 (1991) - no qual recomenda parâmetros e limites na análise de vibrações considerando cargas dinâmicas induzidas por pessoas e máquinas para diversos tipos de estruturas, entre elas estádios, passarelas, pontes e torres. Essas normas e critérios citados, comparados com a norma brasileira, oferecem de maneira mais sistemática e detalhada o procedimento de análise para a questão de vibrações excessivas.

Ante o exposto, a presente monografia propõe-se a investigar e analisar os métodos e limites quanto à aceitabilidade dinâmica na vibração de estruturas considerando as referências citadas e comparar as respostas obtidas com a avaliação, mais simples, proposta pela norma brasileira.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral do trabalho é quantificar a influência de certos parâmetros de massa e rigidez na determinação da frequência natural da estrutura, e analisar comparativamente diferentes critérios de avaliação de vibrações em lajes de concreto considerando a ação induzida por pessoas conforme prescrições estabelecidas pela NBR 6118:2014 e por normas e critérios internacionais.

1.2.2 Objetivos específicos

- Estudar conceitos pertinentes à dinâmica de estruturas;
- Comparar a metodologia simplificada adotada pela ABNT NBR 6118:2014 para o estado-limite de serviço de vibrações excessivas com normas internacionais e critérios de estudo;
- Avaliar a influência da porcentagem de carga variável e do coeficiente de não linearidade física no cálculo das frequências naturais de uma laje de concreto.
- Modelar, com o auxílio do *software* comercial de dimensionamento e análise estrutural TQS, uma laje para simulação da excitação dinâmica provocada por pessoas e análise considerando a resposta variável no tempo;
- Comparar e validar os resultados da análise dinâmica obtidos computacionalmente com os limites de conforto estabelecidos pela norma brasileira e por normas e critérios de projeto internacionais.

1.3 Organização da Monografia

O presente trabalho está dividido em sete capítulos, cujo conteúdo de cada um deles será abordado nessa seção. O primeiro capítulo é introdutório e busca apresentar o tema desenvolvido nesta monografia, apresentar seus objetivos, justificar sua escolha e importância assim como nortear o desenvolvimento do trabalho.

O segundo capítulo apresenta os conceitos de dinâmica das estruturas pertinentes à compreensão das vibrações – e de seus efeitos – provocadas por pessoas além de apresentar o cálculo das frequências naturais em lajes de concreto.

O terceiro capítulo complementa o anterior abordando a representação matemática das ações dinâmicas geradas pela movimentação de pessoas e como representá-las por meio de séries de Fourier.

O quarto capítulo reúne e apresenta alguns dos critérios mais comentados para avaliação de vibrações visando o atendimento do conforto em pavimentos, bem como descreve os parâmetros de cada um desses critérios e os valores-limites de aceitabilidade.

O quinto capítulo, por sua vez, desenvolve o conceito de análise dinâmica e expõe sua aplicação no sistema CAD/TQS versão 23, apresentando brevemente os recursos disponíveis nesse *software*.

Tendo a análise dinâmica de estruturas sido explanada, o capítulo seis apresenta um exemplo de aplicação de obtenção das frequências naturais, discutindo os parâmetros que influenciam na análise modal e, após isso, a simulação e análise de carregamentos dinâmicos no domínio do tempo. Em seguida, os resultados de frequências e acelerações calculadas são comparados com os critérios de avaliação de vibrações descritas no capítulo quatro.

Finalmente, o sétimo capítulo é destinado às conclusões e discussões finais sobre o tema e às sugestões de pesquisas futuras.

2 CONCEITOS DA DINÂMICA DE ESTRUTURAS

Nesse capítulo serão discutidos aspectos teóricos pertinentes à realização desse trabalho, tendo como objetivo abordar os conceitos principais de cada tema. Os tópicos serão basilares para o entendimento da análise dinâmica em termos de compreensão da realidade física do sistema estrutural e da aplicação das equações de movimento que caracterizam o comportamento do modelo.

De início, o problema de dinâmica de estruturas será caracterizado e diferenciado de um problema estático. Em seguida, será feita a análise de oscilações livres em sistemas com um grau de liberdade para que os conceitos sejam, posteriormente, estendidos para sistemas com múltiplos graus de liberdade. Por fim, será abordado o cálculo da frequência natural para pisos de concreto armado. Nos dois capítulos subsequentes a representação matemática da excitação provocada pela ação humana e os critérios de avaliação de vibrações serão abordados detalhadamente.

2.1 Introdução

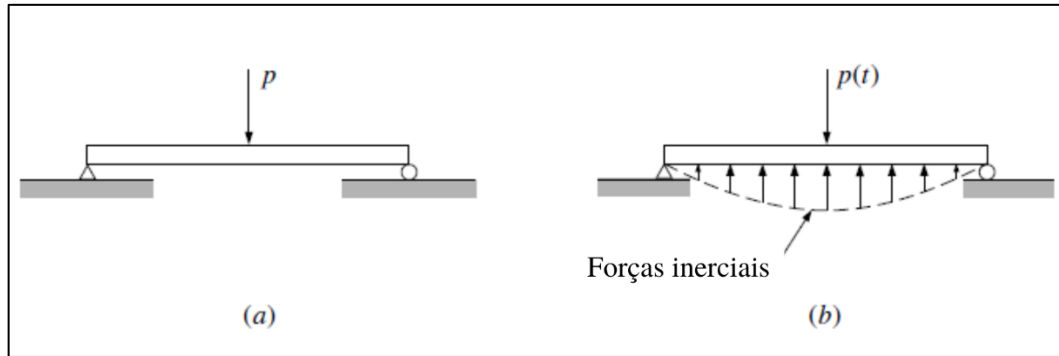
Um carregamento dinâmico é aquele que mobiliza as forças inerciais da estrutura e, por definição, é qualquer carregamento cuja magnitude, direção e/ou posição varia com o tempo. Similarmente, a resposta estrutural a esse carregamento dinâmico, por exemplo, as tensões e deflexões resultantes, são também variáveis com o tempo, ou dinâmicas (CLOUGH; PENZIEN, 2003). Os elementos básicos de análise da dinâmica de estruturas consistem no estudo da excitação - provocada por um agente de perturbação -, na transmissão para a estrutura, e na resposta à excitação que afetará o receptor - podendo ser, ou não, um elemento da estrutura.

De acordo com CLOUGH; PENZIEN (2003), dois importantes aspectos diferenciam os problemas estáticos dos dinâmicos:

- a) Em um problema de dinâmica de estruturas, o carregamento e a resposta variam com o tempo, dessa forma, fica evidente que não possuirá apenas uma única solução, como no caso estático;
- b) Se uma viga simples, ilustrada na Figura 1, for submetida a um carregamento estático, como mostrada em 1a, os momentos fletores, os esforços cortantes e a flecha resultante dependem apenas desse carregamento e podem ser calculadas pelo princípio do equilíbrio de forças. Por outro lado, se um carregamento $p(t)$ for aplicado dinamicamente, conforme está representado em 1b, os deslocamentos e

esforços resultantes dependem não apenas desse carregamento, mas também das forças inerciais que se opõem às acelerações que as produzem.

Figura 1 - Diferença entre carregamento estático e dinâmico



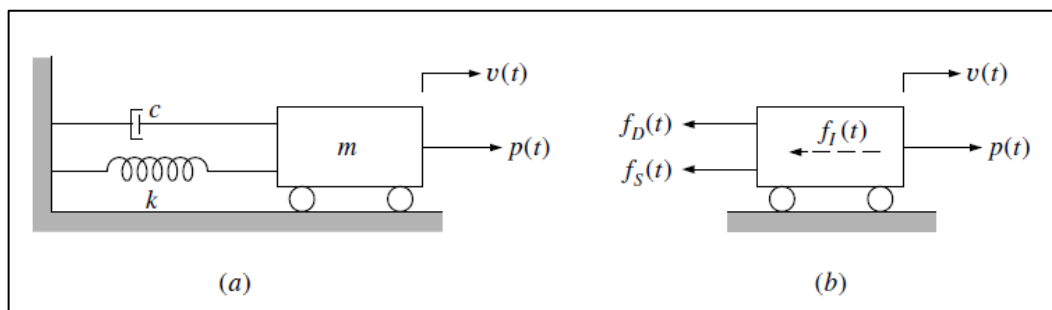
Fonte: Adaptado de CLOUGH e PENZIEN (2003)

Uma vez dada a caracterização de um problema de dinâmica de estruturas, a sua análise será introduzida, por didática, a partir de um sistema com apenas um grau de liberdade para abordar, em seguida, outro com múltiplos graus de liberdade.

2.2 Sistemas com um grau de liberdade

As propriedades físicas essenciais para um sistema estrutural linearmente elástico submetido a uma fonte externa de excitação ou carregamento dinâmico são: massa, rigidez e amortecimento. Em um modelo com apenas um grau de liberdade, cada uma dessas propriedades é assumida como concentrada em um único elemento (CLOUGH; PENZIEN, 2003). O exemplo clássico desse sistema está representado pela Figura 2.

Figura 2 - Sistema de oscilação com um grau de liberdade



Fonte: CLOUGH; PENZIEN (2003)

Na ilustração, a massa m está representada pelo bloco rígido que contém apoios que permitem apenas translação horizontal; a coordenada de deslocamento é completamente

definida pela variável $v(t)$; a rigidez está representada pela constante k da mola e o amortecimento pela constante c do amortecedor viscoso. A força externa e variável $p(t)$ é responsável pela excitação do sistema.

A equação de movimento para esse sistema pode ser expressa pelo equilíbrio de forças atuando sobre a massa usando o princípio de d'Alembert. Dessa forma, tem-se:

$$f_l(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (2.1)$$

Em que:

$f_l(t)$ = Força inercial;

$f_D(t)$ = Força de amortecimento;

$f_S(t)$ = Força elástica.

Cada uma das parcelas do lado esquerdo da equação são função do deslocamento $v(t)$ ou uma de suas derivadas, sendo $\dot{v}(t)$ a velocidade e, sua derivada $\ddot{v}(t)$, a aceleração do sistema. Os pontos acima da variável são representações da ordem de derivação no tempo.

As equações de movimento de qualquer sistema dinâmico representam expressões da segunda lei de Newton para o movimento segundo a qual a aceleração de qualquer partícula de massa m resulta em uma força atuando nela (CLOUGH; PENZIEN, 2003). Nesse sentido, o princípio de d'Alembert rege que a massa desenvolve uma força inercial proporcional e oposta à aceleração, e assim obtém-se a primeira parcela da equação (2.1).

$$f_l(t) = m\ddot{v}(t) \quad (2.2)$$

A força de amortecimento é produto da velocidade pela constante de amortecimento c :

$$f_D(t) = c \dot{v}(t) \quad (2.3)$$

E, por fim, a força elástica, pela lei de Hooke, é produto do deslocamento pelo coeficiente de rigidez.

$$f_S(t) = kv(t) \quad (2.4)$$

Fazendo-se as devidas substituições, a Eq. (2.1) resulta na equação principal de movimento para um sistema mola-massa com amortecimento:

$$m\ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + kv(t) = p(t) \quad (2.5)$$

A resposta de uma equação diferencial ordinária inicia-se com a consideração da solução da equação homogênea.

$$m\ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + kv(t) = 0 \quad (2.6)$$

Para oscilações livres não amortecidas essa equação pode ser reescrita como:

$$m\ddot{v}(t) + kv(t) = 0 \Rightarrow \ddot{v}(t) + \omega^2 v(t) = 0 \text{ em que } \omega^2 = k/m.$$

Que tem como solução homogênea a seguinte expressão:

$$v(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (2.7)$$

Em que A e B são constantes de integração determinadas por condições de contorno iniciais, sendo elas o deslocamento $v(t)$ e a velocidade $\dot{v}(t)$. A solução expressa na Eq. (2.7) representa um movimento harmônico simples (MHS). O fator ω é a frequência natural circular cuja unidade é rad/s, e que pode ser convertida em frequência natural quando dividida por 2π com unidade em Hz (Hertz).

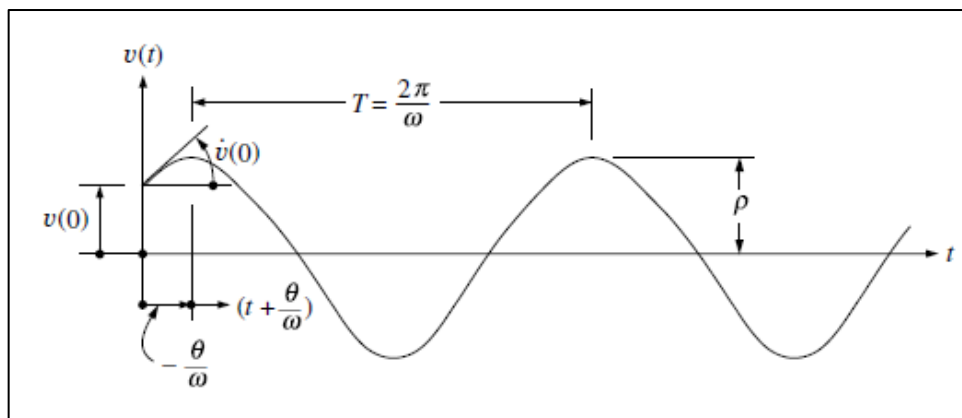
$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.8)$$

Em seguida, deduz-se o período natural de vibração da estrutura (T_n) como sendo:

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (2.9)$$

As vibrações livres não amortecidas podem ser representadas graficamente conforme a Figura 3 a seguir:

Figura 3 - Representação gráfica da resposta de um sistema de vibração livre não amortecido



Fonte: CLOUGH; PENZIEN (2003)

A consideração do amortecimento, como esperado, resulta em comportamento e equações diversas. Na verdade, o amortecimento está sempre presente em estruturas fazendo com que a vibração livre perca amplitude continuamente. Isso porque a energia é dissipada por meio de vários mecanismos quando a estrutura está vibrando (JOHANSSON, 2009).

O amortecimento é usualmente expresso como uma fração do amortecimento crítico c_{cr} ao invés de somente pela constante de amortecimento c . O coeficiente de amortecimento crítico é o menor valor de c que inibe a oscilação completamente quando o sistema passa novamente pela posição de partida.

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (2.10)$$

Os parâmetros que compõem a Eq. (2.10) são:

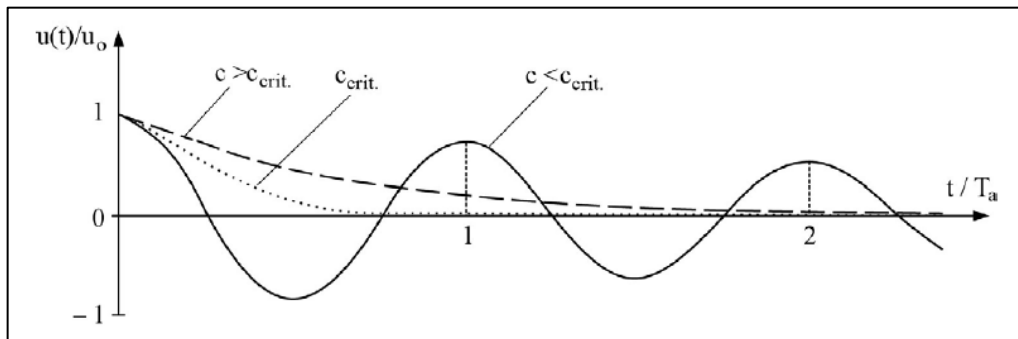
ξ = Fator de amortecimento;

c = Constante de amortecimento viscoso;

c_{cr} = Constante de amortecimento crítico;

Segundo CHOPRA (1995), as estruturas podem ser classificadas em: subcríticas ($c < c_{cr}$, $\xi < 1$), criticamente amortecidas ($c = c_{cr}$, $\xi = 1$) e superamortecidas ($c > c_{cr}$, $\xi > 1$). No sistema com amortecimento crítico o movimento é não oscilatório, com o deslocamento tendendo assintoticamente a zero. No sistema com amortecimento supercrítico não há oscilação e o sistema retorna à configuração neutra em mais tempo do que com o amortecimento crítico. Por último, em sistemas subcríticos a oscilação retorna gradualmente à posição neutra em movimento não periódico (SORIANO, 2014). Esses comportamentos podem ser visualizados na figura que segue.

Figura 4 - Vibração livre com amortecimento supercrítico, crítico e subcrítico



Fonte: SORIANO (2014)

Assim, tem-se que o parâmetro adimensional denominado coeficiente ou taxa de amortecimento $\xi = \frac{c}{2m\omega}$ passa agora, a integrar o problema, resultando na equação (2.11) a seguir:

$$\ddot{v}(t) + 2\xi\omega \dot{v}(t) + \omega^2 v(t) = 0 \quad (2.11)$$

Aqui, deve-se pontuar que será analisado o caso do amortecimento subcrítico no qual $\xi < 1$, por ter maior interesse prático nos problemas de engenharia. A solução para essa equação diferencial ordinária resulta em:

$$v(t) = [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)] \cdot e^{(-\xi\omega t)} \quad (2.12)$$

Em que $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ é denominada como frequência natural amortecida de vibração. De acordo com CLOUGH; PENZIEN (2003), em baixos valores de amortecimento - os quais são típicos na maior parte dos problemas em engenharia de estruturas -, $\xi < 20\%$, a razão entre as frequências ω_D/ω é, conseqüentemente, próxima a 1, ou seja $\omega_D \simeq \omega$.

Aplicando as condições de contorno adequadas, a Eq. (2.12) é conduzida à expressão que define a amplitude do movimento ao longo do tempo:

$$v(t) = \rho \cos(\omega_D t + \theta) \cdot e^{(-\xi\omega t)} \quad (2.13)$$

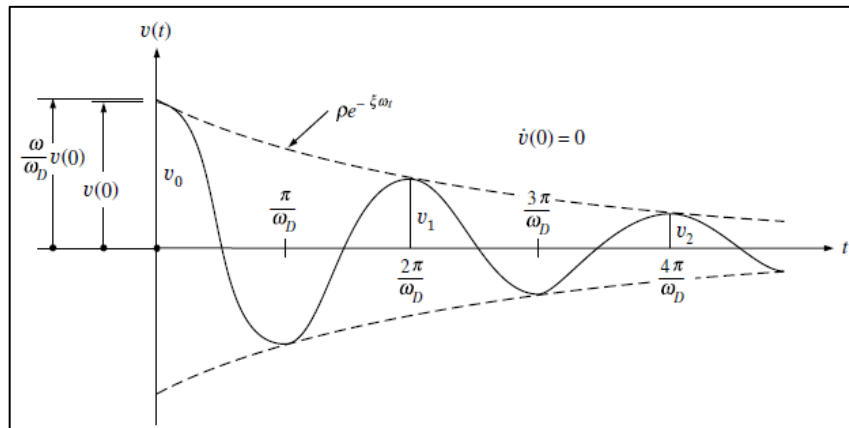
Na qual:

$$\rho = \left[v(0)^2 + \left(\frac{\dot{v}(0) + v(0)\xi\omega}{\omega_D} \right)^2 \right]^{1/2}, \text{ amplitude máxima de vibração no instante } t(0);$$

$$\theta = -tg^{-1} \left(\frac{\dot{v}(0) + v(0)\xi\omega}{\omega_D v(0)} \right), \text{ ângulo de fase obtido no instante } t(0).$$

A representação gráfica da resposta para vibração livre de um sistema com um grau de liberdade com amortecimento subcrítico é expressa pela Figura 5 abaixo. A partir dela, percebe-se que a amplitude decresce continuamente, uma vez que a curva de envoltória $\rho \cdot e^{(-\xi\omega t)}$ é afetada pela exponencial negativa.

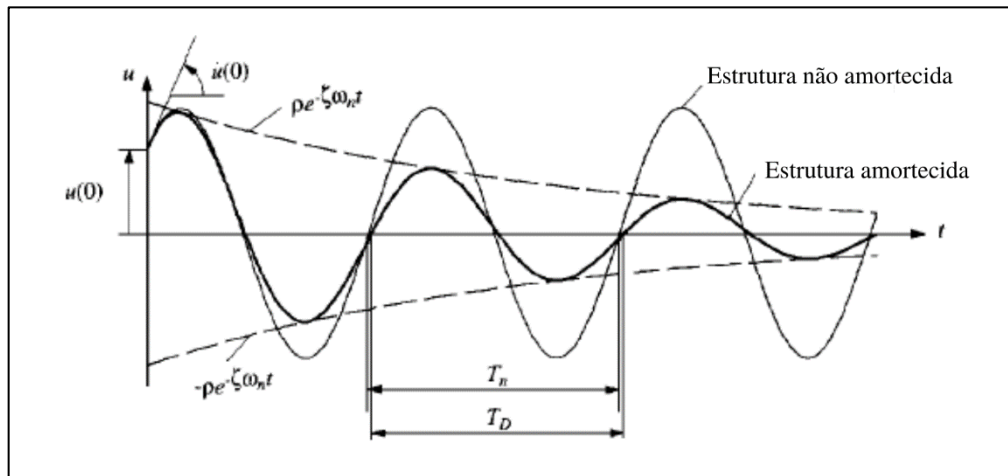
Figura 5 - Representação gráfica da resposta de um sistema de vibração livre com amortecimento subcrítico



Fonte: CLOUGH; PENZIEN (2003)

O efeito do amortecimento para os casos práticos em análise, como já citado anteriormente, não impacta na frequência natural de vibração, conforme apresentado na Figura 6 que compara os gráficos da situação amortecida e não amortecida em sistemas de vibração livre com um grau de liberdade.

Figura 6 - Efeitos do amortecimento na vibração livre



Fonte: Adaptado de CHOPRA (1995)

2.3 Sistemas com múltiplos graus de liberdade

Na representação de estruturas reais, a resposta dinâmica não pode ser adequadamente descrita por um modelo de sistema com apenas um grau de liberdade (CLOUGH; PENZIEN, 2003). Assim, para descrever estruturas complexas de maneira realista é necessário adotar um modelo de múltiplos graus de liberdade. Ainda segundo CLOUGH; PENZIEN (2003), graus de liberdade em um sistema discretizado podem ser tomados como as amplitudes de deslocamento parametrizados de certos pontos selecionados na estrutura, ou podem ser coordenadas generalizadas representando as amplitudes de um conjunto específico de padrões de deslocamento.

A equação de movimento para um sistema com múltiplos graus de liberdade pode ser escrita, agora, como sendo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{F}(t) \quad (2.14)$$

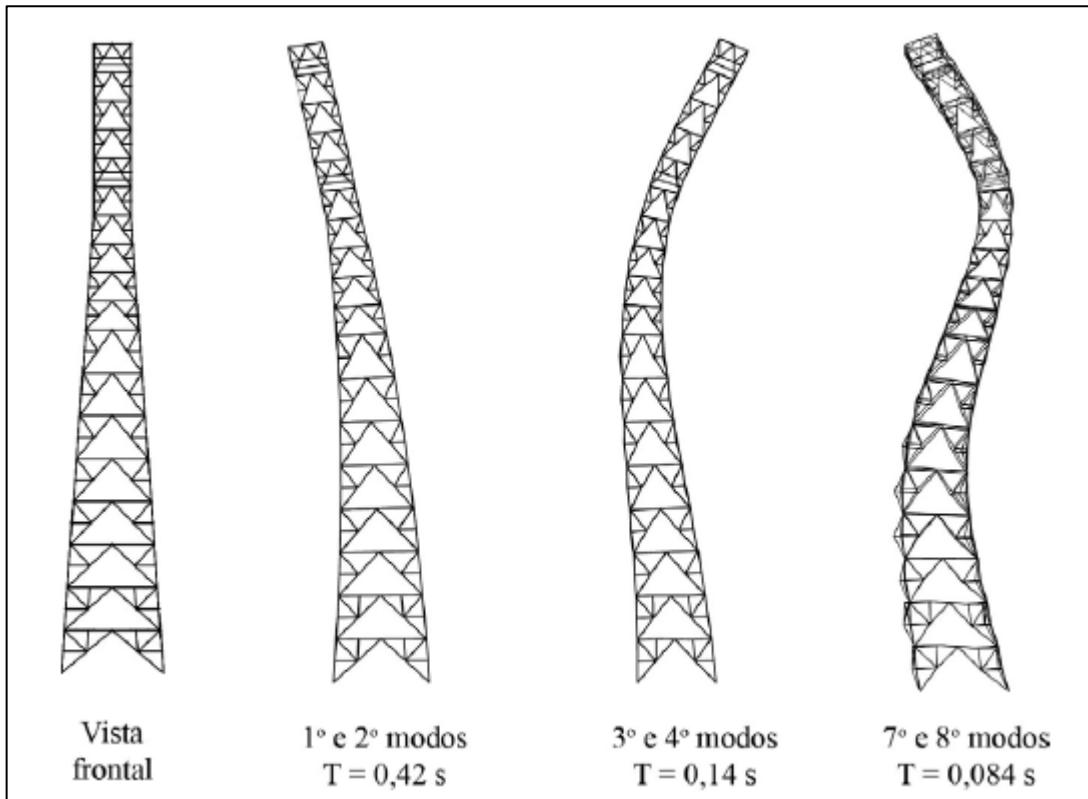
Na qual \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{C} a matriz de amortecimento e \mathbf{K} a matriz de rigidez. A ordem das matrizes corresponde à quantidade N de graus de liberdade da estrutura. \mathbf{v} e \mathbf{F} são, respectivamente, vetores de deslocamento e de forças nodais externas de dimensão $N \times 1$.

Esses sistemas podem representar convenientemente estruturas discretizadas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), as quais são divididas em partes menores e os múltiplos graus de liberdade estão associados ao comportamento da estrutura (JOHANSSON, 2009).

Quando uma estrutura é perturbada, retirando-a da sua posição de equilíbrio estático e lhe é permitido oscilar sem qualquer excitação dinâmica externa, ela vibrará com certas frequências: suas frequências naturais. Uma estrutura possui um número ilimitado de

frequências naturais e, para cada uma dessas frequências, está associada a um perfil de movimento dessa estrutura, chamada de modo de vibração (JOHANSSON, 2009). Segundo BACHMANN; AMMANN (1987) as frequências naturais dependem do vão, do sistema estático, da rigidez e da massa da estrutura, ou seja, não dependem das forças externas.

Figura 7 - Modos de vibração



Fonte: SORIANO (2014)

A seguir será apresentado o desenvolvimento analítico de um sistema com múltiplos graus de liberdade considerando vibração livre sem amortecimento. Para esse caso, a Eq. (2.14) é particularizada em:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = 0 \quad (2.15)$$

De maneira análoga ao sistema com um grau de liberdade, a resolução da equação do movimento pode ser descrita matematicamente por:

$$\mathbf{v}(t) = q_n(t)\boldsymbol{\phi}_n \quad (2.16)$$

Na qual $\boldsymbol{\phi}_n$ é um vetor que representa a deformada do sistema e não varia com o tempo. Sendo $q_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)$ tem-se:

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\phi}_n(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \quad (2.17)$$

Substituindo a Eq. (2.17) na Eq. (2.15), resulta em:

$$[-\omega_n^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n + \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n] q_n(t) = 0 \quad (2.18)$$

A solução dessa equação após manipulação algébrica é dada por:

$$[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] \boldsymbol{\phi}_n = 0 \quad (2.19)$$

Essa equação expressa um problema de autovalores, na qual a matriz de massa \mathbf{M} e de rigidez \mathbf{K} são conhecidas e o problema está em determinar o escalar ω_n^2 e o vetor $\boldsymbol{\phi}_n$ (CHOPRA, 1995). A solução não trivial está em:

$$\det[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (2.20)$$

A equação (2.20) é conhecida como equação característica ou equação de frequência. Ela tem como solução N frequências naturais ω_n ($n = 1, 2, \dots, N$) de vibração, normalmente apresentadas em ordem crescente da grandeza das frequências e associadas a N autovetores $\boldsymbol{\phi}_n$, conhecidos como modos de vibração. A primeira frequência é referida como fundamental e o primeiro modo natural de vibração, como modo fundamental (SORIANO, 2014).

A matriz quadrada que assimila os vetores-coluna dos valores de modos de vibração é chamada de matriz modal e é representada pela letra grega $\boldsymbol{\Phi}$. O modo de vibração $\boldsymbol{\phi}_n$ corresponde à frequência natural ω_n e tem elementos ϕ_{jn} , em que o índice j indica o grau de liberdade.

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1 \quad \boldsymbol{\phi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_N] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Os autovalores de frequências naturais ω_n^2 similarmente, podem ser agrupados em uma matriz diagonal $\boldsymbol{\Omega}^2$, a qual é conhecida como matriz espectral. Assimilando a matriz modal e espectral, tem-se uma nova forma para a Eq. 2.19 que resume todas as relações de autovalores e autovetores cuja resolução é denominada análise modal (SORIANO, 2014):

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \quad (2.22)$$

Cada modo de vibração define uma forma, isso porque a razão entre amplitudes de um mesmo modo é constante (SORIANO, 2014). As amplitudes, porém, são arbitrárias e há procedimentos que normalizam os modos de vibração segundo vários critérios. Em alguns casos, uma maneira conveniente é fazer com que seu maior componente seja a unidade e as demais definidas em função desse valor inicial. Os procedimentos de normalização, todavia, não serão objeto de detalhamento no presente trabalho.

2.4 Frequência natural em pisos de concreto armado

Quando se é necessário calcular a frequência natural de um pavimento, a análise modal só pode ser realizada por meio de códigos computacionais apropriados que realizem o cálculo numérico específico. MURRAY *et al.* (2016, p. 9) reforçam que a previsão da resposta vibratória por análise de elementos finitos é necessária quando o sistema estrutural ou o carregamento dinâmico ultrapassam as limitações dos métodos de cálculo manual.

Há, contudo, expressões simplificadas presentes em normas técnicas, critérios de projeto e artigos científicos que estimam o valor da frequência natural de elementos estruturais simples. Para o caso de uma viga simplesmente apoiada - em que é frequente e sabida a consideração de um piso como tal - de massa uniformemente distribuída, a equação para sua frequência fundamental é:

$$f_n = \frac{\pi}{2} \left(\frac{gEI}{pL^4} \right)^{1/2} \quad (2.23)$$

Em que:

f_n = Frequência natural de vibração fundamental (Hz);

E = Módulo de elasticidade (N/m²);

L = Comprimento do vão (m);

g = Aceleração da gravidade = 9,81 m²/s

p = Ação uniformemente distribuída (permanente e variável) suportada pelo elemento estrutural por unidade de comprimento (N/m);

I = Momento de inércia da seção bruta (m⁴).

A equação (2.23) pode ainda ser reescrita:

$$f_n = 0,18 \left(\frac{g}{\delta_j} \right)^{1/2} \quad (2.24)$$

Na qual δ é a flecha no meio do vão causada pelo carregamento total distribuído:

$$\delta_j = \frac{5pL^4}{384EI} \quad (2.25)$$

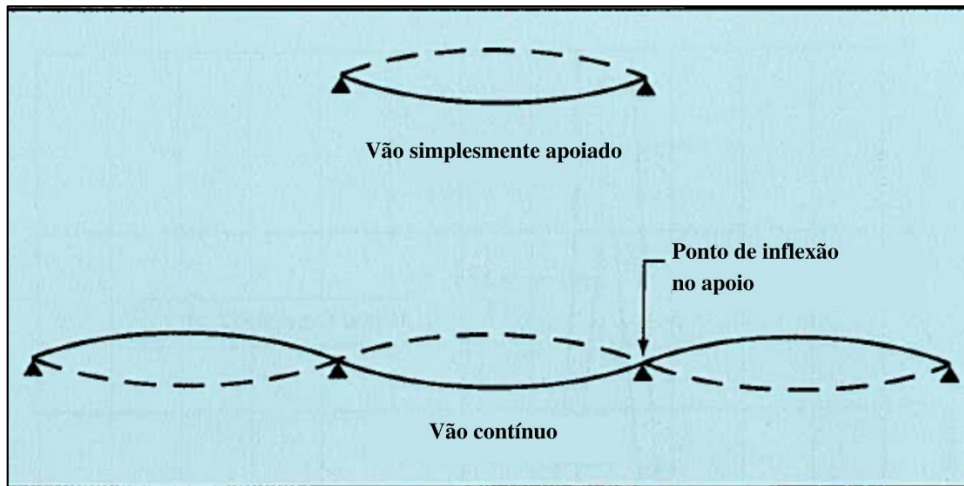
Aqui, MAST (2001) aponta observações acerca das equações anteriores:

- Muitos problemas de vibração são mais críticos quando a massa (ou peso) é pequena. Por isso, ao calcular δ_j , recomenda-se adotar os menores valores realistas de carga variável, não o máximo;
- Quanto ao módulo de elasticidade é recomendado o uso do módulo de elasticidade dinâmico E_d . Recomenda que o módulo de elasticidade estático seja multiplicado

por 1,2 para cálculo do δ_j na determinação da frequência natural. ALMEIDA *et al.* (2005), todavia, alertam que este procedimento não é conservador, pois com um valor de E superior, a estrutura resulta mais rígida e, portanto, com maior frequência natural;

- c) Em vãos contínuos de igual comprimento, a frequência natural é a mesma que para vãos simples. Para cargas estáticas, todos os vãos se deformam para baixo simultaneamente, e a continuidade reduz significativamente a deflexão. Por outro lado, durante a vibração, um vão oscila para baixo enquanto os vãos adjacentes oscilam para cima, como mostra a Figura 8.

Figura 8 - Frequência natural de vãos simples e contínuos



Fonte: Adaptado de MAST (2001)

Para o caso de vínculos que não sejam os articulados, a Eq. (2.23) pode assumir uma forma mais geral:

$$f_n = R \left(\frac{gEI}{pL^4} \right)^{1/2} \quad (2.26)$$

Onde R é uma constante que varia conforme o tipo de vinculação: 1,57 para articulado-articulado, 3,56 para engaste-engaste, 0,56 para engaste-livre e 2,45 para engaste-articulado.

Há, ainda, a consideração da influência da deflexão das vigas que apoiam o pavimento e que também afeta a frequência natural do sistema. As flechas δ_g destas vigas podem ser calculadas da mesma maneira que δ_j . Assim, a frequência natural do piso pode ser estimada a partir da seguinte fórmula, de maneira a substituir a Eq. (2.24):

$$f_n = 0,18 \left(\frac{g}{\delta_j + \delta_g} \right)^{1/2} \quad (2.27)$$

Para pisos de concreto apoiados em paredes, δ_g pode ser considerado nulo; para pisos de concreto apoiados em vigas principais, δ_g é normalmente pequeno e frequentemente desprezado - a menos que estas vigas sejam excepcionalmente longas ou relativamente flexíveis. Para pisos de concreto apoiados em vigas secundárias ou metálicas, a flecha da viga pode ter um efeito significativo no comportamento global e deve ser incluída para a determinação de f_n .

MURRAY *et al.* (2016) acrescenta a consideração que para prédios altos é necessário incluir na Eq. (2.26) o efeito dos pilares, uma vez que esses edifícios podem ter nesses elementos frequências baixas o suficiente para criar sérios problemas de ressonância com atividades rítmicas, especialmente a aeróbica, resultando, assim, na equação 2.28.

$$f_n = 0,18 \left(\frac{g}{\delta_j + \delta_g + \delta_c} \right)^{1/2} \quad (2.28)$$

Em que:

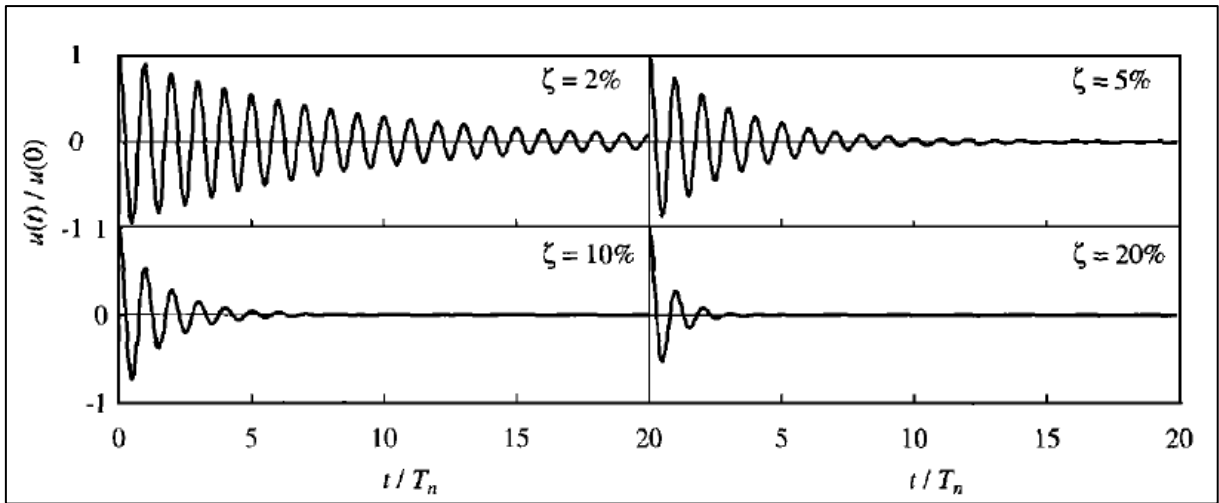
δ_c = Encurtamento axial do pilar ou parede devido ao peso suportado.

Os valores de frequência natural mínimos para pavimentos de concreto armado serão discutidos no capítulo 4. De maneira geral, pisos com frequência natural abaixo de 3 Hz não são recomendados, pois estão sujeitos a “*rogue jumping*” que ocorre quando pessoas descobrem que intencionalmente podem excitar a estrutura ao pular na frequência natural do piso (MAST, 2001).

2.5 Amortecimento

O amortecimento na vibração de uma estrutura está associado à dissipação de energia mecânica, normalmente convertendo-a em energia térmica. Em vibrações livres a presença do amortecimento resulta num contínuo decaimento da amplitude (BACHMANN *et al.*, 1995). Isso é observado na Figura 9. Nela é fácil ver que a vibração causada por um deslocamento inicial $v(0)$ tem visível decaimento à medida que o fator de amortecimento (ξ) aumenta - apesar de terem o mesmo período natural T_n .

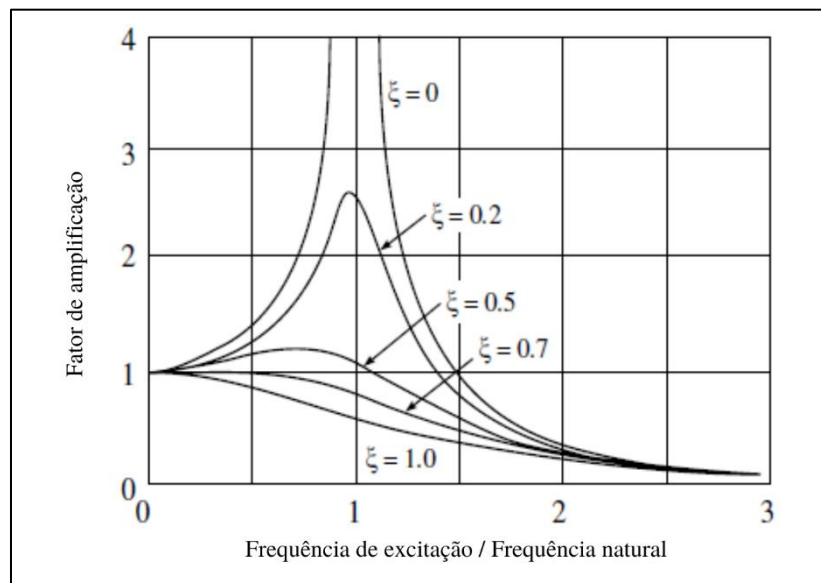
Figura 9 – Resposta em vibração livre para quatro níveis de amortecimento $\zeta = 2, 5, 10$ e 20%



Fonte: CHOPRA (1995)

Em vibrações forçadas, o fator de amortecimento tem grande impacto na amplificação dos deslocamentos na ressonância (MARCOS, 2015). A Figura 10 mostra o conceito do fator de amplificação da resposta dinâmica que é função da relação entre a frequência excitadora, a frequência natural da estrutura e o fator de amortecimento. Percebe-se que, sem o amortecimento, a amplitude de deformação tende a crescer cada vez mais (JOHANSSON, 2009).

Figura 10 – Variação do fator de amplificação dinâmica para um sistema de vibração forçada harmônica



Fonte: Adaptado de CLOUGH; PENZIEN (2003)

Tem-se, portanto, que o amortecimento é um fator importante de ser estudado na análise do ELS-VE uma vez que, segundo MAST (2001), a percepção e tolerância humana à vibração ou movimento depende de quanto tempo ela dura. No entanto, hoje ainda há uma falta de conhecimento dos fenômenos físicos reais e mecanismos que causam amortecimento (JOHANSSON, 2009). Por essa propriedade ser resultado de vários mecanismos combinados de dissipação de energia dentro da estrutura, as contribuições individuais são extremamente difíceis de avaliar (PAVIC; REYNOLDS, 2002). Experiências com estruturas similares e, quando possível, medições nas estruturas também podem fornecer valores de amortecimento (MARCOS, 2015).

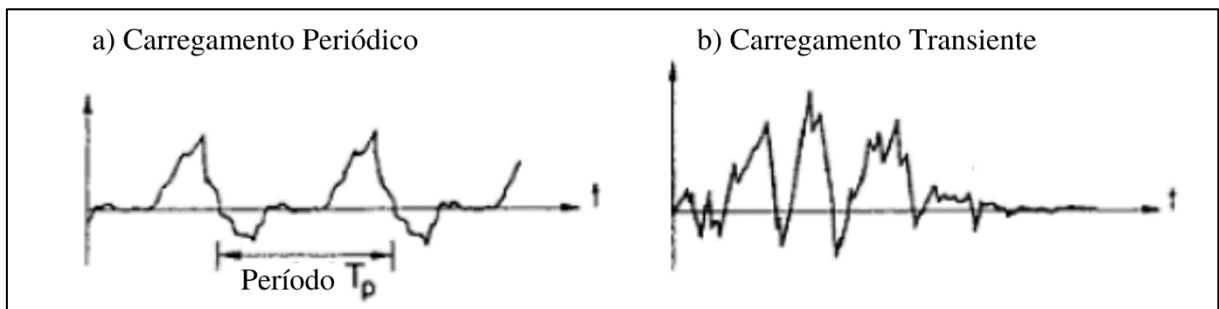
Outro aspecto pertinente acerca dessa variável foi escrito por PAVIC; REYNOLDS (2002): no caso de pisos de baixa frequência natural, o amortecimento tem o potencial de reduzir significativamente a resposta ressonante ou quase ressonante devido à excitação pela caminhada. Em pavimentos de alta frequência natural, aumenta a taxa de decaimento, no caso da resposta na vibração livre, entre passos subsequentes. Nesses dois casos o fator de amortecimento possui influência direta na amplificação dos deslocamentos na ressonância de maneira benéfica. O que implica na importância de se estimar de maneira acurada o amortecimento nas estruturas.

3 EFEITOS DINÂMICOS PROVOCADOS POR ATIVIDADES HUMANAS

As vibrações em edifícios podem ser geradas por diversas fontes. BACHMANN *et al.* (1995) lista as ações dinâmicas que são fontes de vibração, entre elas: atividades humanas, rotação, oscilação e impacto de máquinas, fluxo de vento, tráfego rodoviário, tráfego ferroviário, construções circunvizinhas, além de sismos, impactos diretos e problemas relacionados à fadiga. Este trabalho limitar-se-á a discutir as vibrações causadas pela ação de pessoas.

Evidentemente que o movimento do corpo humano pode gerar uma série de possíveis tipos de carregamentos dinâmicos relacionados ao tipo de atividade executada, tais como andar, correr, pular, dançar, entre outras. De acordo com BACHMANN; AMMANN (1987) esses carregamentos podem ser de natureza periódica ou transiente. Carregamentos periódicos são aqueles em que, apesar da função que os descreve ser arbitrária, repetem-se em intervalos regulares de tempo e são provocados, por exemplo, por pessoas andando, correndo ou dançando. Os carregamentos transientes, por sua vez, não possuem essa periodicidade e a sua duração, da mesma forma, é arbitrária. Estes resultam de impactos pontuais em um elemento da estrutura como quando alguém pula sobre o pavimento ou quando se choca contra uma parede com o cotovelo, por exemplo. A Figura 11 a seguir apresenta a representação gráfica das funções típicas desses carregamentos no tempo.

Figura 11 - Representação do carregamento periódico e do transiente

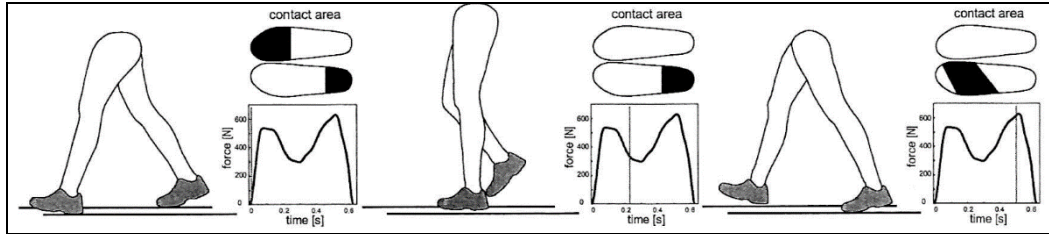


Fonte: Adaptado de BACHMANN; AMMANN (1987)

Ao estudar-se a distribuição das forças de contato ao longo do tempo provocada por uma pessoa caminhando, vê-se que é afetada por diversos parâmetros tais como: o ritmo e características dos passos, o peso do indivíduo, o sexo, o tipo de calçado (ou a ausência de um) e as condições da superfície (BACHMANN; AMMANN, 1987). A frequência dominante no caso de pessoas em caminhada normal fica entre 1,5 Hz a 2,5 Hz, crescendo com a velocidade da caminhada (MARCOS, 2015). O ciclo da marcha e de sua correspondente força vertical está

mostrada na Figura 12. Nela, pode-se observar a forma típica de dois picos no gráfico da força vertical causada pela caminhada ao longo tempo.

Figura 12 - Estágios durante o ciclo de um passo



Fonte: LIEVENS e BRUNSKOG (*apud* JOHANSSON, 2009).

Todavia, apesar do padrão de carregamento variar entre os indivíduos é possível representar as solicitações dinâmicas causadas por cada atividade decompondo-as em séries de carregamentos harmônicos por intermédio da Análise de Fourier. Segundo STOLOVAS (2009) qualquer excitação relevante poderá ser expressa (mediante análise de Fourier) como soma de excitações harmônicas. Nesse sentido, BACHMANN *et al.* (1995) propõe a seguinte expressão para representar matematicamente a função da força para uma atividade humana:

$$F_p(t) = G + \sum_{i=1}^n G \cdot \alpha_i \cdot \text{sen}(2\pi i f_p t - \phi_i) \quad (3.1)$$

Em que:

G = Peso de uma pessoa (geralmente assumido como $G = 800$ N);

α_i = Coeficiente de Fourier do i -ésimo termo;

$G \cdot \alpha_i$ = Amplitude do carregamento correspondente ao i -ésimo harmônico;

f_p = Frequência da atividade (Hz);

ϕ_i = Ângulo de fase do i -ésimo harmônico relativo ao primeiro harmônico;

i = Número do i -ésimo harmônico;

n = Número total de harmônicos.

Aqui é interessante recorrer a uma breve explicação sobre harmônicos. Os harmônicos de uma função possuem frequência igual ou superior à fundamental (sendo a fundamental aquela da própria função periódica), e as superiores correspondem à fundamental multiplicada por um número inteiro. Exemplificando, se a frequência de excitação for de 2,5 Hz, os harmônicos serão $2,5 \times 2 = 5$ Hz, $2,5 \times 3 = 7,5$ Hz, e assim por diante (MAST, 2001). Trazendo para o contexto matemático do estudo de funções periódicas tem-se, por definição, que para toda função $f(t)$ periódica existe um valor de período (T) associado tal que para qualquer t se cumpre que $f(t + T) = f(t)$, deduzindo-se, então, que se T é período de $f(t)$, então $2T$, $3T$,

nT , serão períodos da mesma função (STOLOVAS, 2009). Uma vez que uma Série de Fourier consiste na combinação linear de infinitas funções harmônicas, é esperado que quanto mais termos forem adicionados à série, mais precisa será a expressão simplificada. Apesar disso, na análise prática, as séries devem ser truncadas em n termos (BACHMANN *et al.*, 1995).

Para a equação (3.1), os coeficientes de Fourier α_i e os ângulos de fase ϕ_i foram obtidos através de estudos experimentais para algumas atividades humanas. Os valores podem ser encontrados na Tabela 1.

Tabela 1 - Forças dinâmicas normalizadas

Atividade	Frequência de excitação (Hz)		Coeficiente de Fourier e ângulo de fase					Densidade de projeto [pessoas/m ²]
			α_1	α_2	ϕ_2	α_3	ϕ_3	
Andar	Vertical	2	0,4	0,1	$\pi/2$	0,1	$\pi/2$	~ 1
		2,4	0,5					
	Frente	2	0,2	0,1				
			$\alpha_{1/2} = 0,1$					
Lateral	2	$\alpha_{1/2} = 0,1$	$\alpha_{3/2} = 0,1$					
Correr		2,0 a 3,0	1,6	0,7		0,2		-
Pular	Normal	2	1,8	1,3	*)	0,7	*)	Treinamento físico 0,25 (em casos extremos sobe para 0,5) *) $\phi_2 = \phi_3 = \pi(1 - f_p t_p)$
		3	1,7	1,1	*)	0,5	*)	
	Alto	2	1,9	1,6	*)	1,1	*)	
		3	1,8	1,3	*)	0,8	*)	
Dançar		2,0 a 3,0	0,5	0,15		0,1		~ 4 (em casos extremos sobe para 6)

Fonte: Adaptada de BACHMANN *et al.* (1995)

Percebe-se, portanto, o ser humano como gerador de significativas ações dinâmicas. Estas excitações possuem níveis de vibração que normalmente ficam em faixas de frequência e amplitude para as quais o ser humano é sensível (STOLOVAS, 2009). As vibrações geradas por tais solicitações dinâmicas podem, por conseguinte, ser incômodas aos usuários e, em casos extremos, inaceitáveis à segurança humana. Em geral, são os indivíduos que não fazem parte das atividades os receptores mais afetados (ALLEN, 1990; STOLOVAS, 2009). No capítulo seguinte serão discutidos os critérios de aceitabilidade e de avaliação de vibrações excessivas que norteiam a análise e a concepção do projeto de estruturas.

4 CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO DE VIBRAÇÕES

A avaliação das vibrações em lajes em relação ao atendimento aos níveis de conforto pode ser feita através de critérios recomendados de limite de vibrações. Não há, no entanto, unanimidade entre esses critérios em razão da diferença de percepção entre diferentes pessoas às mesmas vibrações e da complexidade da resposta humana a elas (JOHANSSON, 2009). Alguns dos critérios mais citados serão apresentados nos próximos itens.

4.1 ABNT NBR 6118:2014

A NBR 6118:2014, que trata do projeto de estruturas de concreto, propõe em seu texto as seções 23.1 a 23.4 que regulamentam a verificação para o estado limite de serviço de vibrações excessivas usando o Método da Sintonização da Estrutura (“*tuning method*”) definido por BACHMANN *et al.* (1995). O método consiste em evitar a possibilidade de ressonância, ou seja, evitar que a frequência de excitação provocada por uma determinada atividade se aproxime da frequência natural da estrutura. Nesse sentido, a norma brasileira recomenda a condição de que a frequência natural da estrutura seja superior a 20% da frequência crítica que, por sua vez, tem seu valor tabelado e varia com a atividade a que se destina.

$$f_n > 1,2f_{crit} \quad (4.1)$$

A tabela 23.1 da NBR 6118:2014 apresenta frequências críticas para alguns casos de estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas (ABNT, 2014).

Tabela 2 - Valores de frequência crítica e mínima segundo a NBR 6118:2014

Caso	f_{crit} (Hz)	f_{min} (Hz)
Ginásio de esportes e academias de ginástica	8,0	9,6
Salas de dança ou de concreto sem cadeiras fixas	7,0	8,4
Passarelas de pedestres ou ciclistas	4,5	5,4
Escritórios	4,0	4,8
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,5	4,2

Fonte: Adaptado de ABNT (2014)

Para casos especiais e também naqueles em que o critério não for atendido, a NBR 6118:2014 recomenda uma análise dinâmica mais acurada baseada em normas internacionais, enquanto não existir norma brasileira específica.

O método simplificado adotado pela NBR 6118:2014 apesar de ser um processo de cálculo elementar e coerente com os fundamentos da análise de vibração em estruturas, pode não ser suficiente para garantir o conforto dos usuários, como mostram diferentes estudos,

exemplificativamente o de MARCOS (2015) e FRANCO (2018). Outrossim, apesar de sugerir uma expressão que rege o problema de avaliação de vibração excessivas, não é completa quanto aos procedimentos de obtenção dos valores de frequência natural e critérios de rigidez e amortecimento. Apesar disso, a NBR 6118:2014 está em sintonia com o Model Code 2010 (FIB, 2013), como será visto a seguir.

4.2 Model Code 2010

O Model Code 2010 (FIB, 2013) é um código modelo produzido pela *Fédération Internationale du Béton* (FIB) que tem como objetivo servir de base para outros códigos de estruturas de concreto. O Eurocode para estruturas de concreto, tendo como exemplo, é baseado na edição anterior, o CEB/FIP Model Code 1990. Esse documento, portanto, sintetiza regras operacionais, recomendações e critérios de projeto como também apresenta antecedentes e tendências, além de indicar quais temas e pontos necessitam de mais pesquisas.

Para assegurar o comportamento adequado de uma estrutura sujeita a vibrações, a versão anterior – O Model Code 1990 (CEB, 1991) – desse código estabelecia o critério de manter a frequência natural suficientemente afastada de valores críticos em função da utilização da edificação de acordo com a expressão que segue:

$$f_n > k f_{crít} \quad (4.2)$$

Em que k é um valor inteiro. Não havia, contudo, sugestão clara para o valor de k como multiplicador das frequências críticas.

A Tabela 3 a seguir apresenta as frequências críticas segundo o Model Code 1990 para estruturas sujeitas a vibrações causadas pela movimentação de pessoas.

Tabela 3 - Valores de frequência crítica segundo o Model Code 1990

Estruturas	$f_{crít}$ (Hz)
Ginásio de esportes e academias de ginástica	8,0
Salas de dança ou de concreto sem cadeiras fixas	7,0
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,4
Estruturas para pedestres e ciclistas	*

* Frequências naturais entre 1,6 e 2,4 Hz e entre 3,5 e 4,5 Hz são evitadas em estruturas para pedestres e ciclistas. O ato de correr também podem causar vibrações em estruturas com frequências naturais entre 2,4 e 3,5 Hz.

Fonte: Adaptado de CEB (1991)

O *fib* Model Code 2010 abandonou a Eq. 4.2, contudo, permanece indicando o afastamento da frequência natural da frequência crítica e apresenta uma tabela com mais casos de estruturas submetidas a vibrações provocadas por atividades humanas. As frequências críticas estabelecidas pelo MC 2010 estão dispostas na Tabela 4.

Tabela 4 - Valores de frequência crítica segundo o Model Code 2010

Estruturas	$f_{crít}$ (Hz)
Ginásio de esportes e academias de ginástica	8,0
Salas de dança ou de concreto sem cadeiras fixas	7,0
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,4
Áreas de trabalho críticas	1,0
Residências	1,4 – 4,0
Escritórios	4,0
Oficinas	8,0
Estruturas para pedestres e ciclistas	*

* Frequências naturais entre 1,6 e 2,4 Hz e entre 3,5 e 4,5 Hz são evitadas em estruturas para pedestres e ciclistas. O ato de correr também podem causar vibrações em estruturas com frequências naturais entre 2,4 e 3,5 Hz.

Fonte: Adaptado de FIB (2013)

4.3 AISC Design Guide

O AISC Design Guide 11 (MURRAY *et al.*, 2016) estabelece parâmetros e critérios para a avaliação da vibração em pórticos de concreto ou de aço sujeitos à atividade humana. Muito embora não seja uma norma de utilização obrigatória, esse guia de projeto apresenta recomendações para prevenção de vibrações incômodas em pisos de vigas metálicas e lajes de concreto, incluindo também passarelas, escadarias e varandas e é referenciado em diversos trabalhos e análises de prestígio internacionais.

O critério de avaliação do American Institute of Steel Construction (AISC) traz análises separadas para atividades de caminhada e atividades rítmicas. Em ambos os casos o procedimento consiste, basicamente, em duas partes:

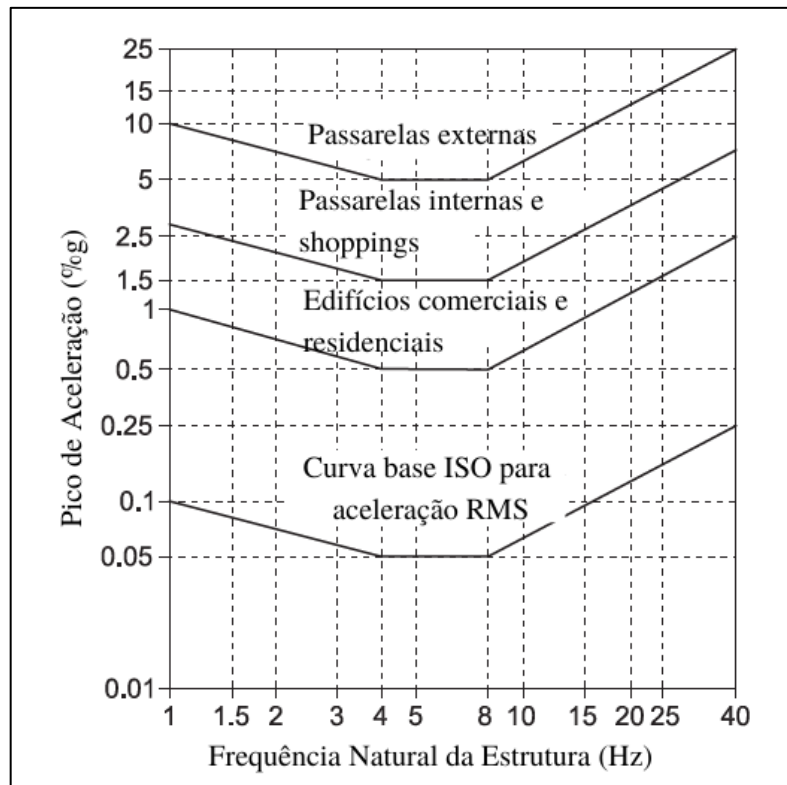
- Na previsão da resposta dinâmica do pavimento em expressões que relacionam a frequência natural do piso, a massa efetiva, o amortecimento e a força de excitação;
- Na comparação com os limites de tolerância baseados nos picos de aceleração dinâmica recomendados pela norma ISO 2631-2 (1998).

Segundo MURRAY *et al.* (2018) o critério é obedecido quando:

$$\text{Resposta dinâmica prevista} \leq \text{Limite de tolerância} \quad (4.3)$$

Os limites estabelecidos pelo AISC Design Guide são expressos como frações da aceleração da gravidade e dependem fortemente da atividade exercida. Por exemplo, em escritórios ou residências a tolerância é de 0,005g ou 0,5%g, como mostra a Figura 13.

Figura 13 - Valores limites de tolerância recomendados para conforto humano em diferentes ambientes



Fonte: Adaptado de MURRAY *et al.* (2016)

A leitura do gráfico é baseada no fato de que o corpo humano é mais sensível a frequências no intervalo de 4 a 8 Hz, que são frequências comumente encontradas em sistemas de piso (MAST, 2001). Portanto, para a frequência natural determinada para o pavimento objeto de análise - cujo modo de obtenção é também descrito no Design Guide -, o pico de aceleração não poderá ultrapassar os limites recomendados no gráfico.

4.3.1 Vibrações causadas por caminhada

O capítulo 4 do Design Guide 11 fornece a seguinte inequação destinada à análise da excitação devido ao caminhar em lugares quietos como escritórios, residências, áreas de assembleia, escolas e igrejas (MURRAY *et al.*, 2018), relacionando frequência natural, força de excitação e amortecimento:

$$\frac{a_p}{g} = \frac{P_0 e^{-0,35f_n}}{\beta W} \leq \frac{a_0}{g} \quad (4.4)$$

Em que:

$\frac{a_0}{g}$ = Limite de tolerância de vibração expressa como uma razão da aceleração da gravidade;

$\frac{a_p}{g}$ = Razão da aceleração de pico pela aceleração da gravidade;

P_0 = Força constante de excitação;

W = Peso efetivo do pavimento;

e = Base do logaritmo natural = 2,718;

f_n = Frequência natural fundamental do pavimento, em Hz;

β = Taxa de amortecimento modal.

A Tabela 5 a seguir mostra os valores recomendados para os parâmetros P_0 , β e $\frac{a_0}{g}$.

Tabela 5 - Valores recomendados na literatura para os parâmetros da P_0 , β e $\frac{a_0}{g}$.

	Força Constante P_0 (kN)	Taxa de amortecimento β	Aceleração máxima permitida - $\frac{a_0}{g}$ (%)
Escritórios, residências, igrejas	0,29	0,02 ^a	0,5
		0,03 ^b	
		0,05 ^c	
Shoppings centers	0,29	0,02	1,5
Passarelas internas	0,41	0,01	1,5
Passarelas externas	0,41	0,01	5,0

a Pavimentos com poucos elementos não estruturais com área destinada a trabalho e igrejas
b Pavimentos com elementos não estruturais e poucas partições desmontáveis
c Pavimentos com partições de altura completa entre pavimentos

Fonte: MURRAY *et al.* (2016) e MAST (2001)

Outro parâmetro presente na inequação é o peso efetivo. Segundo MAST (2001), o efeito do impacto de passos de uma pessoa em caminhada é fortemente influenciado pela massa da estrutura afetada por esse impacto. Esse fator é calculado através da expressão a seguir:

$$W = wBL \quad (4.5)$$

Na qual:

B = Largura efetiva do painel;

L = Comprimento do vão;

w = Carga por unidade de área.

Embora esse critério não apresente indicação clara quanto a consideração da parcela de carga variável a ser considerada na variável “ w ”, exemplos contidos no próprio AISC Design Guide 11 (MURRAY *et al.*, 2016, p. 30-55) incluem no cálculo da carga por unidade de área além da carga permanente (“*dead load*”) a carga variável (“*live load*”) indicada nos enunciados desses exemplos.

4.3.2 Vibrações causadas por atividade rítmica

Atividades rítmicas possuem maior potencial de causar problemas de vibração significativos em estruturas (MURRAY *et al.*, 2016). São exemplos desse tipo de solicitação: dança, eventos esportivos e atividade aeróbica. Nesses casos, as forças de excitação são muito mais evidentes do que as produzidas por caminhada (ALMEIDA *et al.*, 2005). Sendo assim, o Design Guide 11 em seu capítulo 5, fornece a seguinte expressão como critério de avaliação de vibração:

$$\frac{a_p}{g} = \frac{(\sum a_{p,i}^{1,5})^{1/1,5}}{g} \leq \frac{a_0}{g} \quad (4.6)$$

No qual $\frac{a_0}{g}$ é o limite de tolerância expresso como a razão do pico de aceleração pela aceleração da gravidade e varia em função da finalidade da edificação (Tabela 6).

Tabela 6 - Limites de aceleração para atividades rítmicas

Ocupação afetada pela vibração	Aceleração máxima permitida - $\frac{a_0}{g}$ (%)
Escritórios ou residencial	0,5
Dança e levantamento de peso	1,5 - 2,5
Atividades rítmicas	4 - 7

Fonte: MURRAY *et al.* (2016)

A avaliação da razão do pico de aceleração $\frac{a_{p,i}}{g}$ é expresso pela Eq. (4.7) que segue e deve ser verificado para os harmônicos básicos da frequência de excitação de modo a prever a situação mais desfavorável e evitar a ressonância.

$$\frac{a_{p,i}}{g} = \frac{1,3\alpha_i w_p/w_t}{\sqrt{\left[\left(\frac{f_n}{if_{excit.}}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(\frac{2\beta f_n}{if_{excit.}}\right)^2}} \quad (4.7)$$

Em que:

f_n = Frequência natural fundamental do pavimento, em Hz;

$f_{excit.}$ = Frequência básica da força de excitação, em Hz;

i = Número do harmônico, 1, 2, 3;

β = Taxa de amortecimento modal, normalmente tomada como 0,06 para atividades rítmicas;

w_p = Peso dos participantes, por unidade de área, distribuído sobre o piso;

w_t = Peso total, por unidade de área, distribuído sobre o piso, incluindo peso próprio do pavimento e o peso dos participantes;

α_i = Coeficiente de ação dinâmica para o i -ésimo harmônico.

Os parâmetros para essa equação de carga rítmica podem ser estimados de acordo com a tabela do AISC Design Guide 11 a seguir:

Tabela 7 - Parâmetros estimados durante eventos ritmados

Atividade	Frequência de excitação $f_{excit.}$ (Hz)	Peso dos participantes w_p (kN/m²)	Coeficiente dinâmico α_i
Dançar			
1º Harmônico	1,5 - 2,7	0,6	0,50
2º Harmônico	3,0 - 5,4	0,6	0,05
Concertos (assentos fixos)			
1º Harmônico	1,5 - 2,7	1,5	0,25
2º Harmônico	3,0 - 5,4	1,5	0,05
Atividades aeróbicas			
1º Harmônico	2,0 - 2,75	0,2	1,50
2º Harmônico	4,0 - 5,50	0,2	0,60
3º Harmônico	6,0 - 8,25	0,2	0,10

Fonte: MURRAY *et al.* (2016)

Para ALMEIDA *et al.* (2005), em atividades de dança é necessária apenas a análise para o 1º harmônico; em concertos e eventos musicais é necessária a análise também do segundo harmônico; e para pavimentos com exercícios de impacto deve-se analisar até o 3º harmônico.

Consoante MURRAY *et al.* (2018), parâmetro mais importante a ser considerado para a prevenção de problemas de vibração em estruturas devido a atividades rítmicas é a frequência natural fundamental da vibração vertical da estrutura, logo, o que mais se deve ter atenção ao estimar. Os mesmos autores também ponderam sobre a importância da transmissibilidade da vibração para ocupações sensíveis do edifício. Com relação ao último ponto, para atividades adjacentes localizadas próximo a locais com atividade rítmica, MAST (2001) recomenda o estabelecimento de uma parede rígida entre esses dois espaços e, se isso não for possível, o limite de aceleração para caminhada deve ser combinado com o carregamento rítmico para atividades rítmicas.

4.4 Critério do Peso Efetivo Mínimo

A proposta do Peso Efetivo Mínimo como critério de aceitabilidade de lajes de concreto no ELS-VE é discutida por LOZOVEY *et al.* (2018), sendo resultado da percepção de que a análise estabelecida pela NBR 6118:2014 no tópico de vibrações excessivas não é suficiente para a garantia de conforto aos usuários.

Fortemente baseado no AISC Design Guide 11, LOZOVEY *et al.* (2018) parte da premissa de que quanto maior o peso efetivo da laje (W), menor sua aceleração vertical (a_v). Portanto, deve-se obter um valor de peso efetivo mínimo (W_{min}), a partir do qual as acelerações são inferiores às limites. O ELS-VE é atendido, então, quando:

$$W \geq W_{min} \quad (4.8)$$

Os autores consideram $W = pA$, em que:

p = Peso efetivo da laje por unidade área (kN/m²);

A = Área da laje (entre apoios) sujeita a carregamento dinâmico (m²);

4.4.1 Vibrações causadas por caminhada

Referenciando os parâmetros do critério do AISC Design Guide, o peso efetivo mínimo para atendimento ao estado limite de vibrações excessivas é dado pela Eq. 4.9 abaixo:

$$W_{min} = \frac{P_0 e^{-0,35f_n}}{\beta a_0} \quad (4.9)$$

A equação é adaptada para lajes de concreto com $f_n < 4$ Hz, $4 \text{ Hz} \leq f_n \leq 8 \text{ Hz}$ e $f_n > 8 \text{ Hz}$, resultando nas expressões a seguir:

$$W_{min} = \frac{35f_n}{R_g \beta e^{0,35f_n}} \text{ (kN) para } f_n < 4 \text{ Hz} \quad (4.10)$$

$$W_{\min} = \frac{70}{R_g \beta e^{0,35 f_n}} \text{ (kN) para } 4 \text{ Hz} \leq f_n \leq 8 \quad (4.11)$$

$$W_{\min} = \frac{560}{R_g f_n \beta e^{0,35 f_n}} \text{ (kN) para } f_n > 8 \text{ Hz} \quad (4.12)$$

Os valores do fator de amortecimento β são descritos por AALAMI (2013) e FELDMANN *et al.* (*apud* LOZOVEY *et al.* 2018) e postos na Tabela 8:

Tabela 8 - Fator de amortecimento recomendado para lajes de concreto

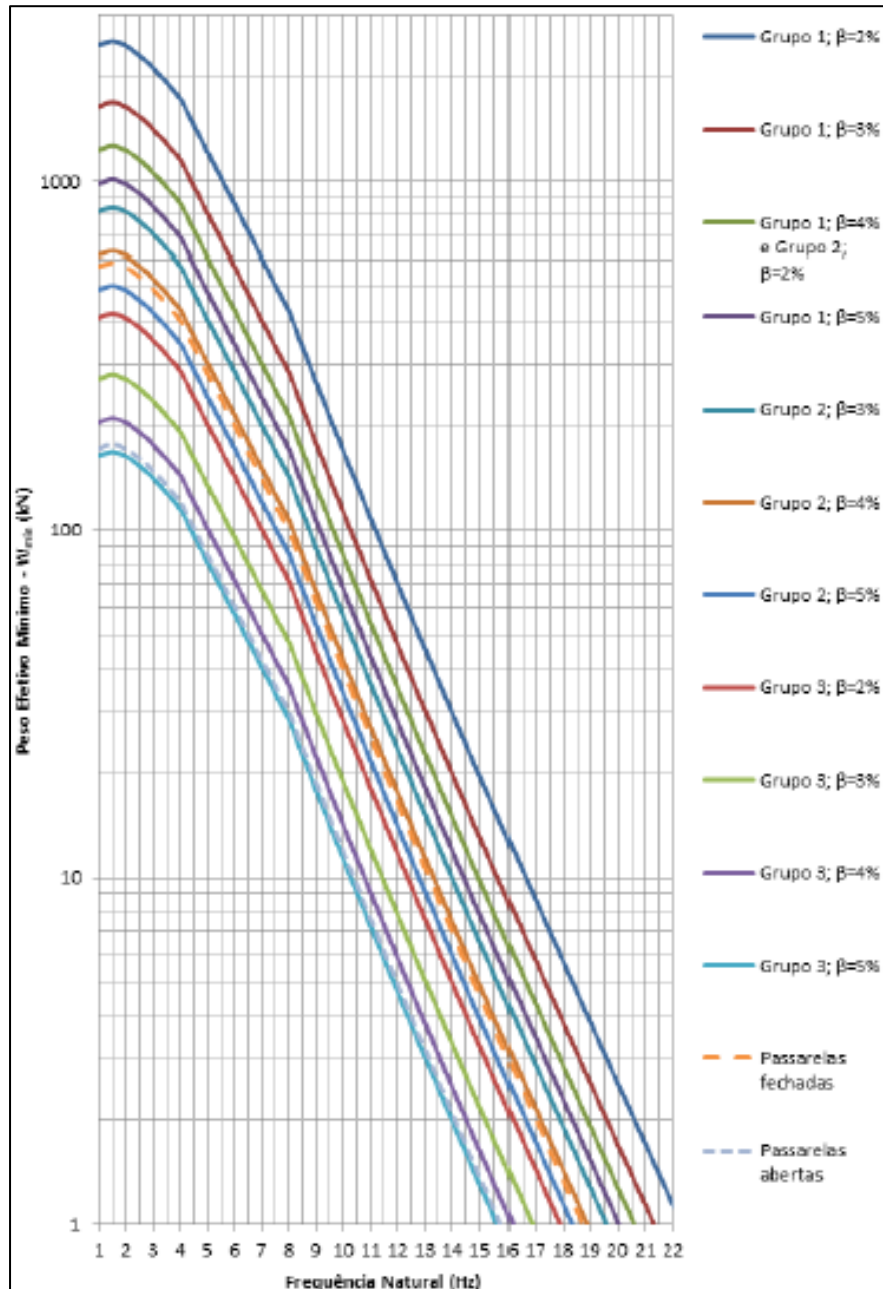
Utilização/Acabamento	Fator de amortecimento (β)
Lajes sem acabamento, escolas, igrejas, escritórios sem divisórias, shoppings centers (malls) e passarelas	2%
Residências, bibliotecas e escritórios com divisórias leves sobre a laje	3%
Escritórios com divisórias, possuindo forro sob a laje	4%
Escritórios com paredes de alvenaria sobre a laje	5%

Fonte: LOZOVEY *et al.* (2018)

O parâmetro R_g é um coeficiente que depende do tipo de utilização da estrutura, sendo $R_g = 0,5$ para centros cirúrgicos (grupo 1); $R_g = 1$ para escritórios, residências e igrejas (grupo 2); $R_g = 3$ para passarelas fechadas, shoppings centers e restaurantes (grupo 3) e $R_g = 10$ para passarelas abertas (grupo 4).

Os valores de peso efetivo mínimo para diferentes situações de amortecimento e de frequência natural foram representados por LOZOVEY *et al.* (2018) na Figura 14.

Figura 14 - Peso efetivo mínimo para lajes de concreto no caso de vibrações causadas pelo caminhar



Fonte: LOZOVEY *et al.* (2018)

4.4.2 Vibrações causadas por atividade rítmicas

Para o caso de atividades rítmicas é feita a consideração que $P_0 = \alpha w_p A$, resultando, a partir da Eq. (4.9), na expressão a seguir para p_{min} :

$$p_{min} = \frac{\alpha w_p e^{-0,35f_n}}{\beta a_0} \quad (4.13)$$

De maneira análoga, são apresentadas diferentes equações para o peso efetivo mínimo considerando os intervalos $f_n < 4$ Hz, $4 \text{ Hz} \leq f_n \leq 8$ Hz e $f_n > 8$ Hz de frequência natural do pavimento.

$$p_{\min} = \frac{R_g \sqrt{f_n}}{\beta e^{0,35 f_n}} \text{ (kN/m}^2\text{) para } f_n < 4 \text{ Hz} \quad (4.14)$$

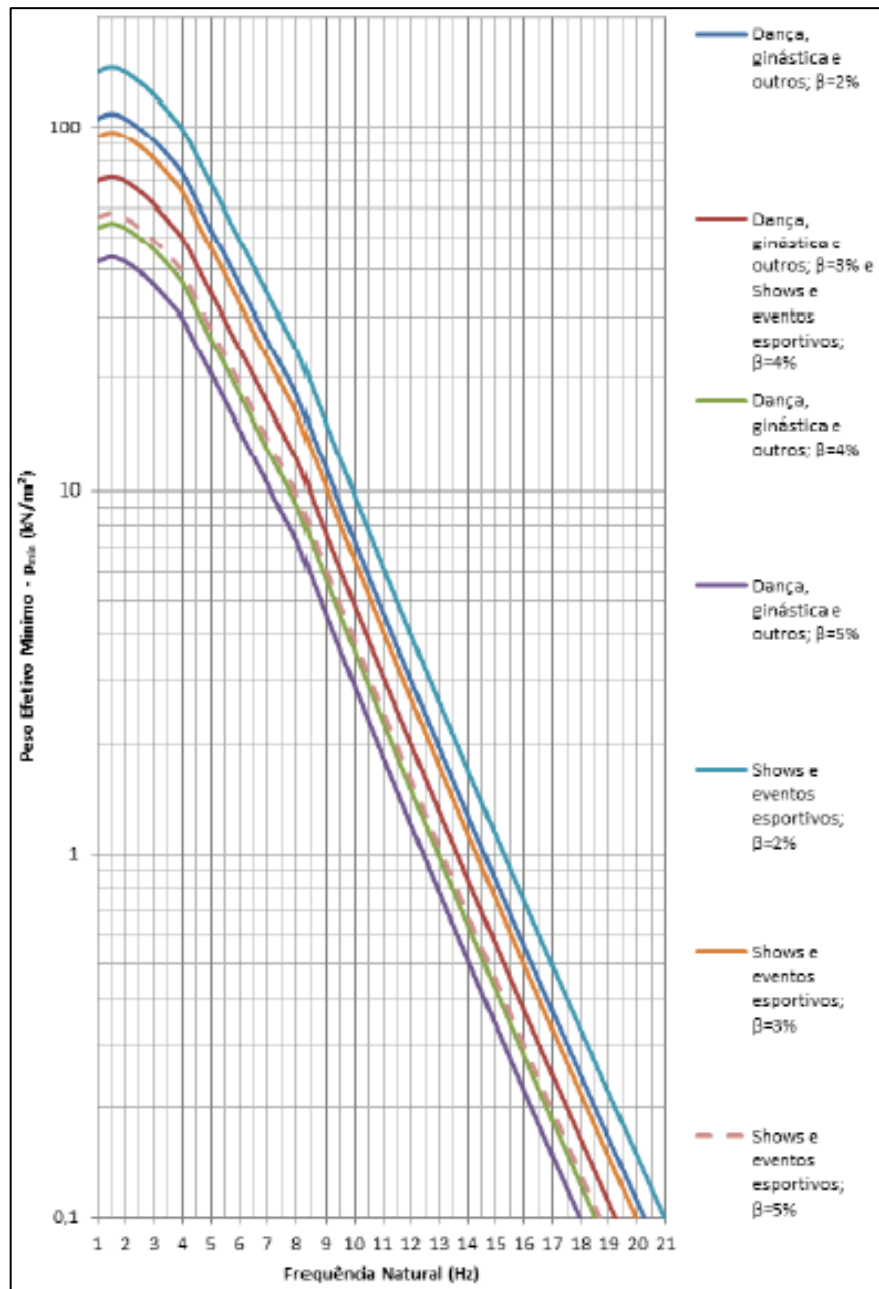
$$p_{\min} = \frac{2R_g}{\beta e^{0,35 f_n}} \text{ (kN/m}^2\text{) para } 4 \text{ Hz} \leq f_n \leq 8 \quad (4.15)$$

$$p_{\min} = \frac{16R_g}{f_n \beta e^{0,35 f_n}} \text{ (kN/m}^2\text{) para } f_n > 8 \text{ Hz} \quad (4.16)$$

R_g é um coeficiente que depende do tipo de utilização na estrutura. Para dança, ginástica e exercícios que envolvem pulos/saltos $R_g = 3$, e para shows e eventos esportivos $R_g = 4$.

Os valores de peso efetivo mínimo p_{\min} (kN/m²) para atividades rítmicas em diferentes situações de amortecimento e de frequência natural foram representados por LOZOVEY *et al.* (2018) na Figura 15 a seguir.

Figura 15 - Peso efetivo mínimo para lajes de concreto no caso de vibrações causadas por atividades rítmicas



Fonte: LOZOVEY *et al.* (2018)

4.5 ISO 2631-2

O critério da norma internacional ISO 2631-2 (2003), um documento específico para vibrações em vibrações, aponta que, com relação à vibração em edifícios residenciais, a experiência mostrou que a sensação de desconforto é sentida quando as magnitudes de vibração são apenas ligeiramente superiores aos níveis de percepção encontrados no Anexo C da ISO

2631-1 (1997). Os valores apresentados nessa norma fornecem indicações aproximadas das reações prováveis em termos de conforto a variadas amplitudes. A Tabela 9 apresenta os valores globais de vibração para esse critério.

Tabela 9 - Indicação do limiar de perceptividade para vibrações

Aceleração de pico	Descrição
Inferior a 0,315 m/s ²	Não é desconfortável
Entre 0,315 m/s ² a 0,63 m/s ²	Um pouco desconfortável
Entre 0,5 m/s ² a 1 m/s ²	Razoavelmente desconfortável
Entre 0,8 m/s ² a 1,6 m/s ²	Desconfortável
Entre 1,25 m/s ² a 2,5 m/s ²	Muito desconfortável
Superior a 2 m/s ²	Extremamente desconfortável

Fonte: Adaptado de ISO 2631-1 (1997)

5 ANÁLISE DINÂMICA NO TQS

Dentre as premissas necessárias à análise estrutural pontuadas pela NBR 6118:2014 em sua seção 14.2.2, está a de que: “O modelo deve representar a geometria dos elementos estruturais, os carregamentos atuantes, as condições de contorno, as características e respostas dos materiais, sempre em função do objetivo específico da análise.” (ABNT, 2014). Ainda segundo a norma, são possibilidades de análise estrutural: linear, com redistribuição, plástica, não-linear física e através de modelos físicos. Os diferentes tipos de análises estruturais definem, principalmente, o tipo de comportamento dos materiais (IBRACON/ABECE, 2022). Nesse contexto, a análise dinâmica é aquela que tem como objetivo verificar o comportamento das estruturas de concreto armado sob solicitações dinâmicas e, por consequência, sua adequabilidade aos critérios de vibração relacionados ao ELS-VE.

Esse tipo de análise é composto, basicamente, de duas etapas:

1. Análise Modal: Método analítico ou experimental para determinação das frequências naturais e modos de vibração de uma estrutura (MURRAY *et al.*, 2016);
2. Aplicação de forças variáveis no tempo e avaliação da resposta dinâmica no domínio do tempo.

Apesar da crescente demanda por esse tipo de análise para verificação de conforto nos edifícios modernos, critérios já citados como o da NBR 6118:2014 e do Model Code 2010, por exemplo, dispensam a análise dinâmica completa de um pavimento a partir do atendimento de uma relação elementar entre a frequência natural do sistema com uma frequência mínima necessária e tabelada. Nesses casos, a tolerância do critério pode ser obtida através do Método do Ajuste da Frequência que, consoante ALMEIDA *et al.* (2005), consiste em evitar a situação de ressonância pela majoração das frequências naturais da estrutura alterando as duas únicas propriedades que interferem nessa característica: a massa e a rigidez.

Muito embora seja possível realizar a análise dinâmica analiticamente - em termos de análise modal e cálculo do pico de aceleração - através de expressões difundidas na literatura, resultados em estruturas reais necessitam de programas computacionais apropriados que permitam modelar a estrutura e que façam o cálculo numérico específico com discretização do pavimento em grelhas ou placas, como o Método dos Elementos Finitos. Neste trabalho, o procedimento completo foi feito de forma automatizada pelo *software* comercial de análise estrutural TQS (Figura 16), na sua versão 23, o qual possui um módulo de análise dinâmica composto pelos recursos de análise modal e *time-history*, além de análise de vento dinâmico e análise sísmica.

O TQS é um *software* nacional para a elaboração de projetos de estruturas e fundações de edifícios. Além de ser amplamente utilizado e apresentar resultados de análise fortemente confiáveis, outra grande vantagem do TQS é o controle e a transparência fornecida através dos relatórios fornecidos pelo próprio programa e pelo suporte técnico.

A seguir será apresentada uma breve explicação do módulo dinâmico e sua utilização para a análise de vibração em lajes provocada pela movimentação de pessoas.

Figura 16 - Logotipo da TQS



Fonte: tqsdocs¹

Para efetuar a análise dinâmica através desse programa é necessário, de início, ativar a função correspondente na edição do edifício, tanto para o modelo quanto para o pavimento que se deseja avaliar. Ainda nos dados do edifício, na aba correspondente às cargas (Figura 17), define-se a quantidade de modos de vibração da estrutura, a taxa de amortecimento e os ponderadores que definem a massa da estrutura. Esses últimos são valores que ponderam o peso próprio, as cargas permanentes e as sobrecargas a serem consideradas na matriz de massa da estrutura.

¹ Disponível em: <https://www.tqs.com.br/systems/professional>

Figura 17 - Aba de cargas na seção de edição do edifício

The screenshot displays the 'Cargas' (Loads) tab within a software application. The interface is organized into several sections:

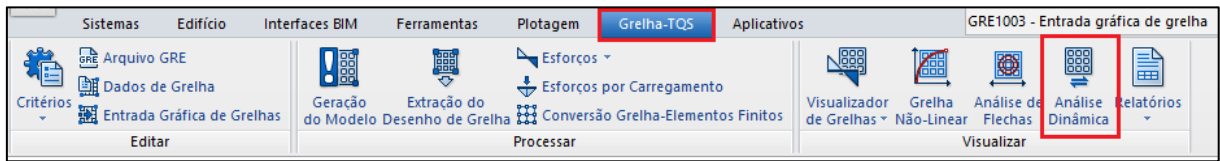
- Top Navigation:** Includes tabs for 'Gerais', 'Modelo', 'Pavimentos', 'Materiais', 'Cobrimentos', 'Cargas', 'Critérios', and 'Gerenciamento'.
- Sub-Category Selection:** A row of tabs includes 'Verticais', 'Vento', 'Adicionais', 'Adicionais-2', and 'Combinações'. Below this, another row of tabs lists 'Empuxo', 'Temperatura', 'Retração', 'Desaprumo', 'Hiperestático', 'Vibrações', 'Incêndio', 'Sismo', 'Impacto', and 'Outras'.
- Vibrações Section:**
 - 'Modos de vibração para pórtico e grelha':
 - 'Grelhas de lajes e pórticos de vigas e pilares': 10
 - 'Pórticos com pilares, vigas e lajes': 10
- Casos que definem a massa da estrutura:**
 - 'Peso próprio': 1
 - 'Cargas permanentes': 1
 - 'Sobrecargas': 0
- Análise dinâmica de vento:**
 - 'Taxa de amortecimento': 0.02
- Textual Note:** 'Defina quantos modos de vibração serão analisados pelo programa. Em geral, somente os primeiros modos são os mais importantes.'

Fonte: Autora (2022)

Não há definição fixa estabelecida quanto ao número de modos de vibração necessário para essa análise, mas sabe-se que, em geral, os primeiros modos - e, conseqüentemente, as primeiras frequências naturais - são mais relevantes na previsão do comportamento do modelo estrutural sob determinada ação externa (SORIANO, 2014). Na prática, e o que está indicado em diversas normas, é que deve ser considerado um número de modos suficiente para mobilizar, ao menos, 90% da massa total da estrutura. Isto normalmente é indicado pelos programas em uma listagem dos “fatores de participação modal”. Quanto à consideração dos valores dos ponderadores de massa, que alteram a composição da matriz de massa \mathbf{M} , será feita uma avaliação detalhada mais adiante, analisando a influência destas variáveis (especialmente da parcela da carga variável).

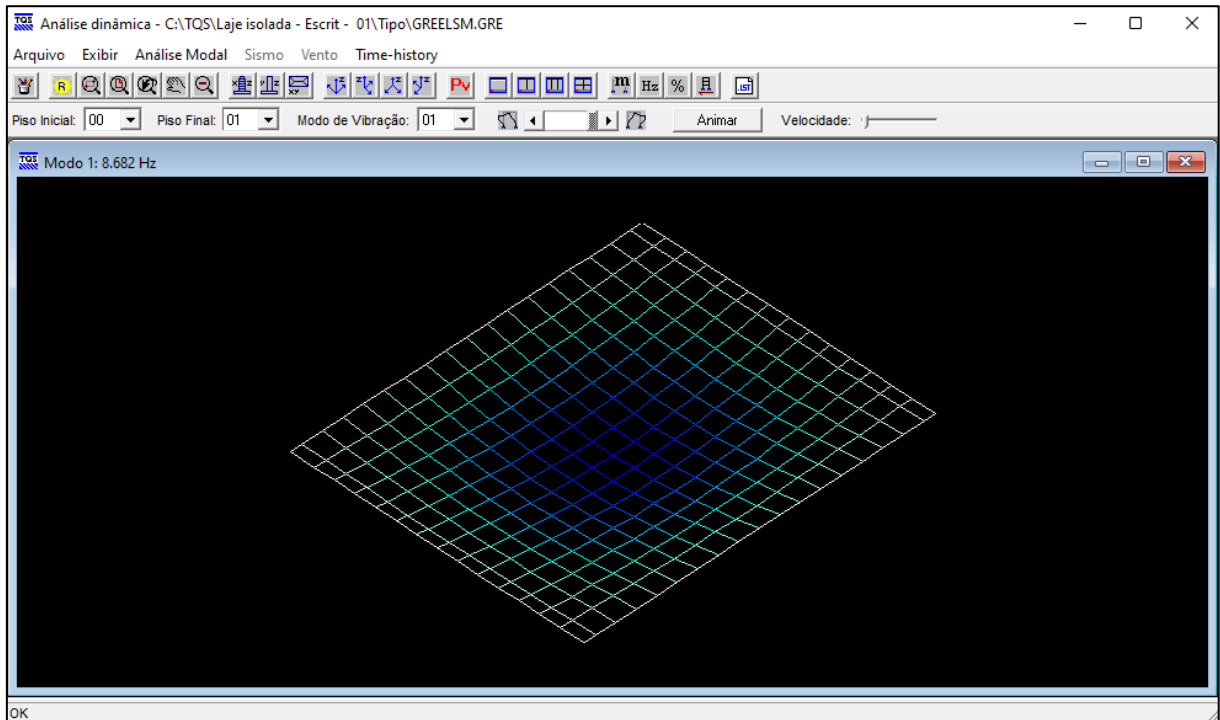
Para obtenção das frequências naturais e correspondentes modos de vibração, o edifício deverá ter sido previamente processado. Só então é possível visualizar os resultados de análise modal do pavimento através do item de nome “Análise Dinâmica” no módulo “Grelha-TQS”, o qual abrirá uma nova janela, como mostram as Figuras 18 e 19.

Figura 18 – Percurso para a análise dos modos de vibração de um pavimento



Fonte: Autora (2022)

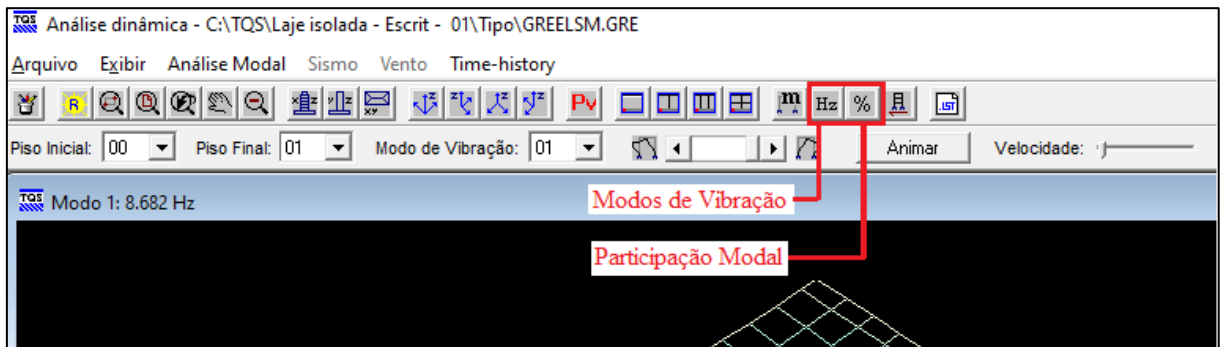
Figura 19 - Visualizador da grelha espacial dinâmica



Fonte: Autora (2022)

No “Menu Resultados” é possível verificar as tabelas de resultados de frequências e períodos naturais (Figura 21) e de fatores de participação modal (Figura 22) acessando os itens “Modos de Vibração” e “Participação Modal”, respectivamente, conforme indicado na Figura 20.

Figura 20 - Indicação dos ícones de Modos de Vibração e Participação Modal no Menu Resultados



Fonte: Autora (2022)

Figura 21 - Tabela com resultados de frequência e período naturais

Modo de Vibração	Período (s)	Frequência (Hz)	Frequência (rad/s)	Autovalor
01	0.115	8.682	54.55	2975.667
02	0.052	19.134	120.223	14453.645
03	0.043	23.353	146.73	21529.832
04	0.029	34.505	216.798	47001.445
05	0.028	36.011	226.263	51195.012
06	0.021	47.081	295.82	87509.227
07	0.019	52.061	327.11	107000.641
08	0.017	60.154	377.96	142853.75
09	0.013	76.637	481.526	231867.078
10	0.011	88.507	556.108	309255.813

Fonte: Autora (2022)

Figura 22 - Tabela com resultados de participação modal

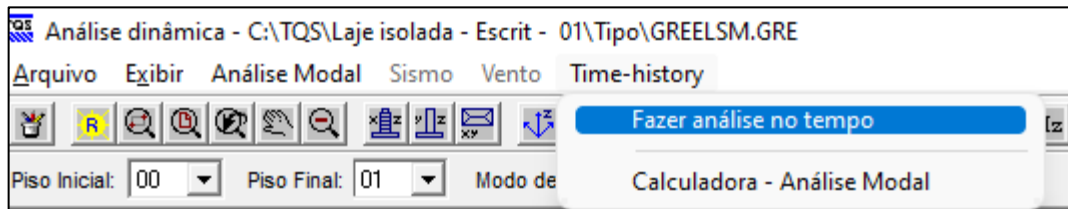
Modo de Vibração	Fatores de Participação			Participação Modal (%)		
	Direção X	Direção Y	Direção Z	Direção X	Direção Y	Direção Z
01	0	0	-0.98	0	0	62.57
02	0	0	-0	0	0	0
03	0	0	-0	0	0	0
04	0	0	0	0	0	0
05	0	0	0.34	0	0	7.52
06	0	0	-0.327	0	0	6.95
07	0	0	-0	0	0	0
08	0	0	-0.001	0	0	0
09	0	0	0.109	0	0	0.78
10	0	0	-0.232	0	0	3.5

Fonte: Autora (2022)

Adicionalmente, no visualizador de análise dinâmica é possível, além de obter os resultados da análise modal, acessar a aba de análise no domínio do tempo (Figura 23), recurso que permite a aplicação de carregamentos dinâmicos para obtenção das respostas de aceleração,

velocidade e deslocamento de um nó escolhido na grelha. É importante ressaltar que para fazer a análise no tempo é preciso que tanto a massa quanto os modos de vibração, e demais parâmetros obtidos na análise modal tenham sido previamente calculados.

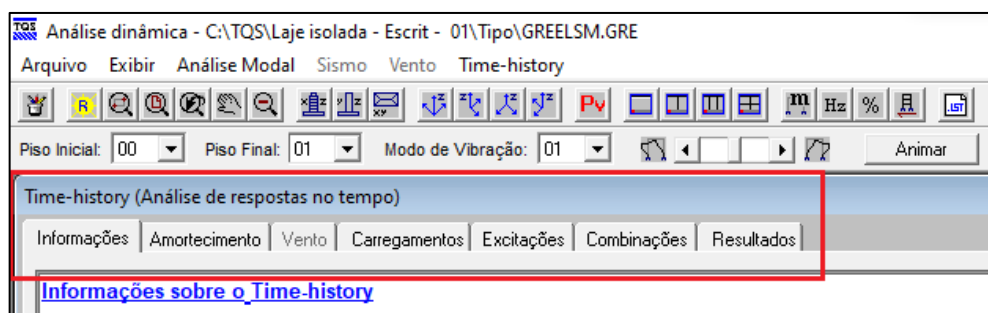
Figura 23 - Aba de análise dinâmica no TQS



Fonte: Autora (2022)

Ao selecionar a opção “Fazer análise no tempo”, uma nova janela de nome “Time-history” será aberta com várias abas em que a primeira será de caráter informativo. Para continuar, será necessário definir, nessa ordem: a taxa de amortecimento global, os carregamentos aplicados, as excitações e as combinações, como apresenta a Figura 24. Uma vez que as excitações externas são aplicadas mediante Análise de Fourier, entende-se que os carregamentos dinâmicos serão combinações de funções harmônicas das quais são conhecidos os respectivos coeficientes e ângulos de fase. A seguir serão fornecidas definições para os dados requeridos que necessitam de maior explicação.

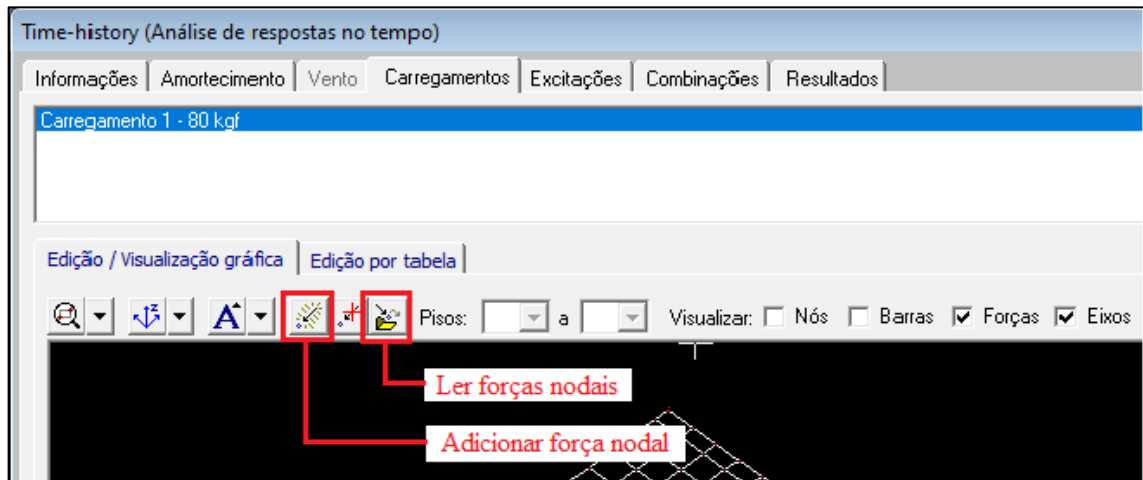
Figura 24 - Abas de entrada de dados no *time-history*



Fonte: Autora (2022)

Os carregamentos dinâmicos são normalmente definidos por uma carga estática multiplicada por uma combinação de excitações harmônicas em função do tempo. Na aba “Carregamentos” (Figura 25) deve-se adicionar os carregamentos nodais que podem ser lançados manualmente nos nós ou importados de um carregamento previamente definido no modelador estrutural.

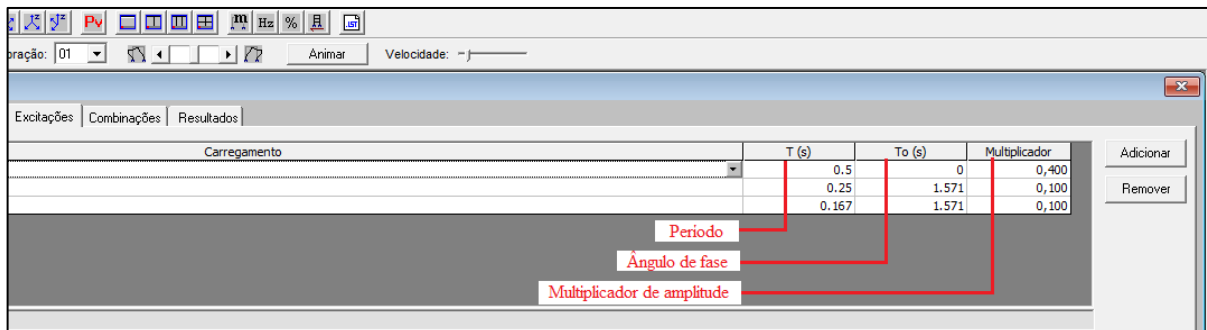
Figura 25 - Entrada dos dados do carregamento



Fonte: Autora (2022)

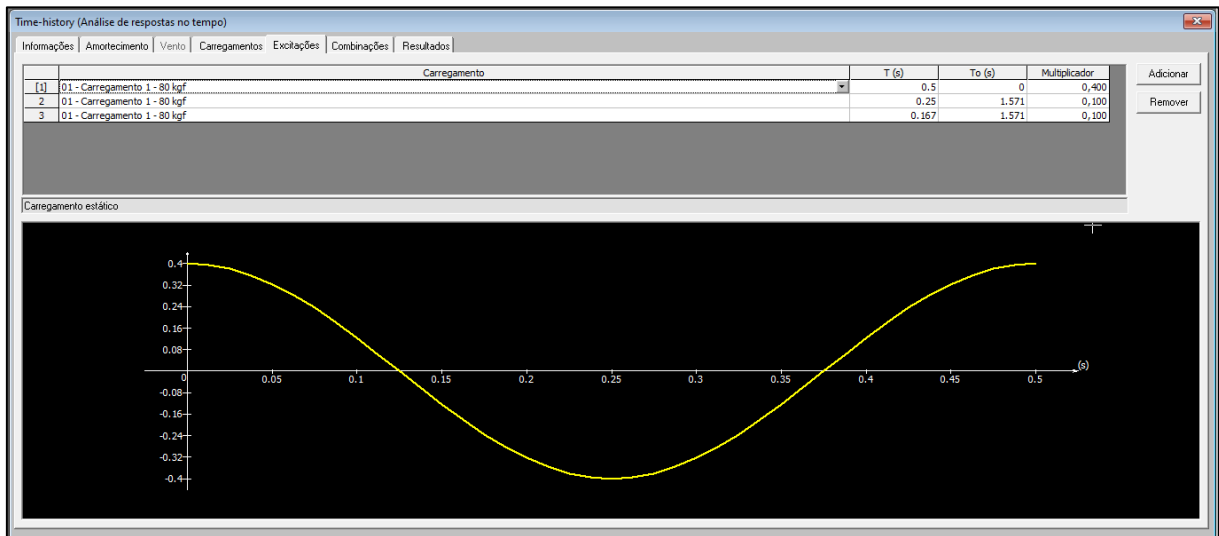
A seguir, na aba “Excitações”, inserem-se os parâmetros de período, ângulo de fase e multiplicador (coeficiente de Fourier) para cada harmônico referente a um dado carregamento aplicado na seção anterior (Figura 26). O gráfico de cada um dos harmônicos é gerado e apresentado nessa aba, como mostra a Figura 27.

Figura 26 - Entrada de dados dos harmônicos



Fonte: Autora (2022)

Figura 27 – Harmônico 1 do Carregamento 1

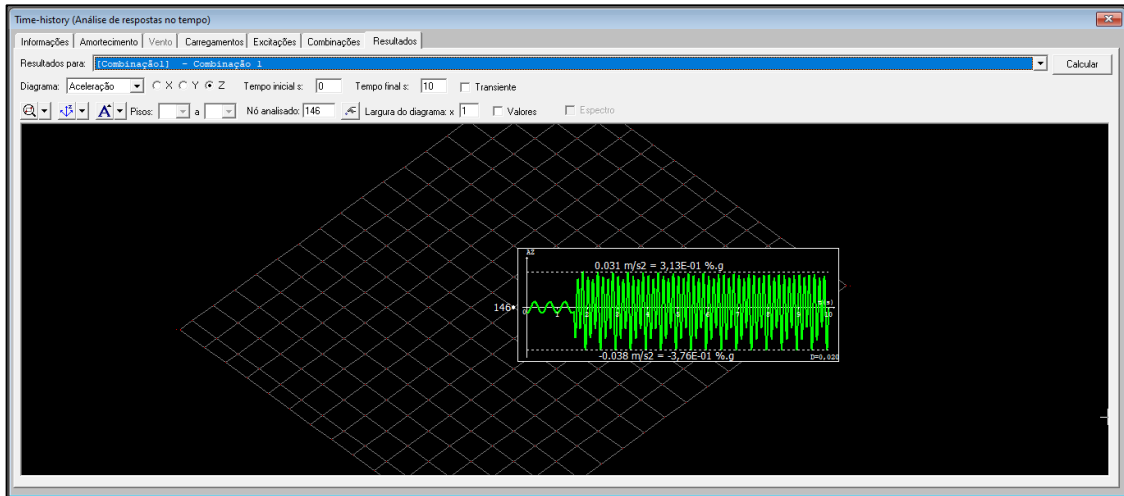


Fonte: Autora (2022)

A aba seguinte, denominada “Combinações”, ocorre a soma das excitações do carregamento dinâmico em uma combinação. Cada combinação é composta pela associação das excitações e seus respectivos multiplicadores.

Estando todos os dados definidos, pode-se partir para a aba “Resultados”, que fornece as respostas no tempo dos deslocamentos, velocidades e acelerações nas direções X, Y e Z para um determinado nó selecionado do pavimento. É possível escolher entre analisar um dos harmônicos ou a combinação deles, como é o caso da Figura 28. Para obter os diagramas é necessário definir a excitação ou combinação de análise, o tipo de diagrama, o intervalo de tempo dos valores e, em seguida, clicar no botão “Calcular”. Os resultados serão apresentados de forma gráfica na tela ao lado do nó previamente selecionado. Ainda, o programa fornece a opção de se aferir a aceleração transiente máxima através do gráfico obtido com a seleção “Transiente” acionada. Os espectros de amplitude de Fourier para cada excitação também podem ser obtidos e, nesse caso, ao invés do intervalo de tempo define-se um intervalo de frequência. Esses resultados podem ser exportados como imagem ou como desenho no formato DWG-TQS.

Figura 28 - Cálculo e resultados no TQS



Fonte: Autora (2022)

Esse processo foi apresentado detalhadamente para, além de descrever didaticamente o método utilizado no TQS, pontuar as etapas que foram realizadas neste trabalho para a análise dinâmica completa.

6 ANÁLISES E DISCUSSÕES

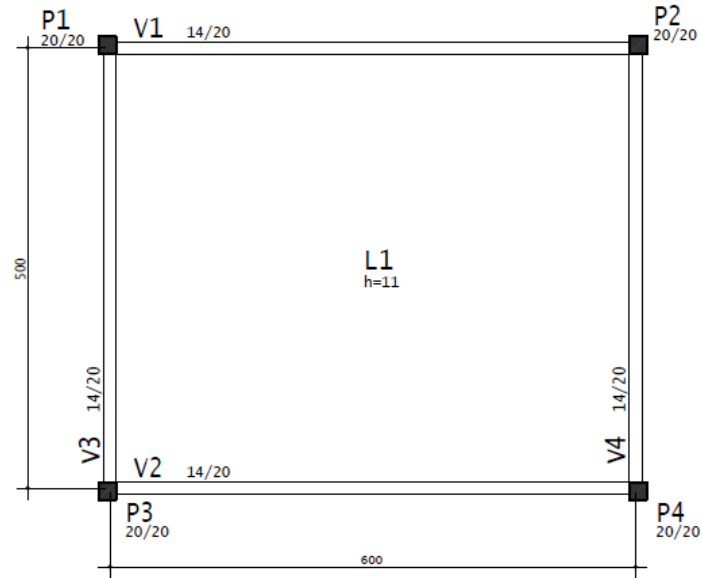
Neste capítulo, o processo de análise dinâmica completa de uma laje será apresentado e descrito para que, em seguida, os resultados de frequências naturais e níveis de vibração obtidos utilizando o *software* TQS sejam comparados aos critérios de conforto para verificação do ELS-VE em lajes de concreto.

O objeto de análise é uma laje isolada de escritório a qual, por sua simplicidade, foi importante para validar os resultados de análise modal obtidos através de métodos analíticos sugeridos pela literatura além de permitir maior controle da influência dos parâmetros inerentes à análise dinâmica, sendo eles: a massa, o amortecimento, a não linearidade física (NLF), e a ação dinâmica. O caso foi dividido segundo o tipo de excitação - por caminhada ou por atividade rítmica - e, para as duas análises, foram adotadas as seguintes hipóteses: (i) Todos os vínculos são do tipo articulado, ou seja, a laje é admitida como simplesmente apoiada em todos os bordos; (ii) Consoante a NBR 6118:2014 em sua seção 14.5.2, uma vez que a análise é de ELS, foi considerada a seção bruta do concreto, ou seja, foi descartada a fissuração dos elementos estruturais, embora alguns testes tenham sido realizados a fim de considerar uma fissuração aproximada.

6.1 Descrição da estrutura

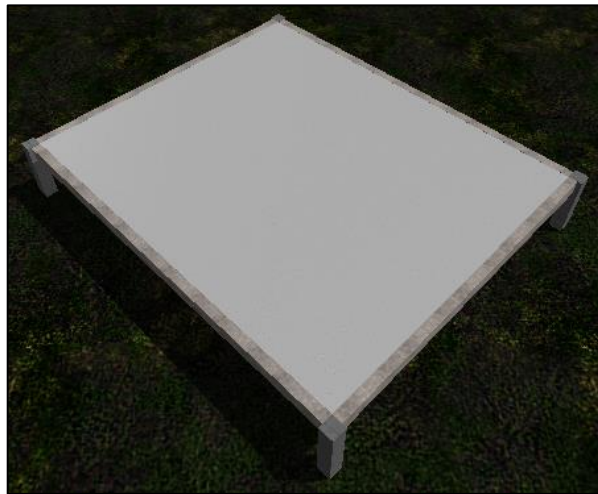
A laje foi modelada no *software* TQS versão 23.4, sendo do tipo laje maciça e cujas dimensões correspondem a 6 m x 5 m. O concreto é do tipo C30, possui módulo de elasticidade longitudinal secante (E_{cs}) de 26840 MPa, coeficiente de Poisson (ν) igual a 0,2 e densidade (γ_c) de 25 kN/m³. Seguindo as recomendações da NBR 6120:2019, foi aplicada uma carga permanente de 2,0 kN/m² e uma carga variável de 2,5 kN/m². Como simplificação e para que o modelo computacional apresentasse comportamento o mais próximo possível do cálculo analítico, as vigas foram admitidas com altura de apenas 20 cm (a fim de não ser introduzida uma massa adicional inexistente), além de terem sido modificadas diminuindo-se a inércia a torção e aumentando-se significativamente a sua inércia a flexão, para que não ocorram deslocamentos verticais dos apoios. A planta de formas e o modelo tridimensional da estrutura estão mostrados nas Figuras 29 e 30 que seguem.

Figura 29 - Planta de formas do pavimento



Fonte: Autora (2022)

Figura 30 - Vista tridimensional do pavimento

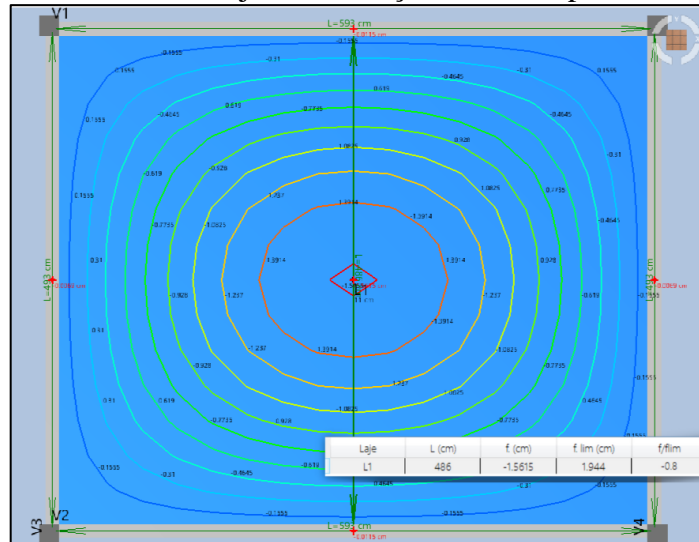


Fonte: Autora (2022)

A NBR 6118:2014 em sua tabela 13.3 estabelece valores-limites de deslocamentos com a finalidade de proporcionar o comportamento adequado da estrutura em serviço. Para efeitos de aceitabilidade sensorial por limitação visual, o deslocamento limite é de $l/250$; e para vibrações sentidas no piso é necessário considerar o deslocamento apenas devido a cargas acidentais sendo o seu limite $l/350$, em que l é o comprimento do menor vão em centímetros. O recurso “Análise de Flechas” do módulo de grelhas do TQS permite a verificação desses limites com a aplicação de diferentes combinações. Para o caso de deslocamentos visíveis, foi

utilizada a combinação quase permanente de serviço, que resultou na flecha máxima de 1,5615 cm, abaixo da flecha limite para essa laje, que é de 1,944 cm.

Figura 31 - Deslocamentos da laje e verificação do limite para aceitabilidade visual

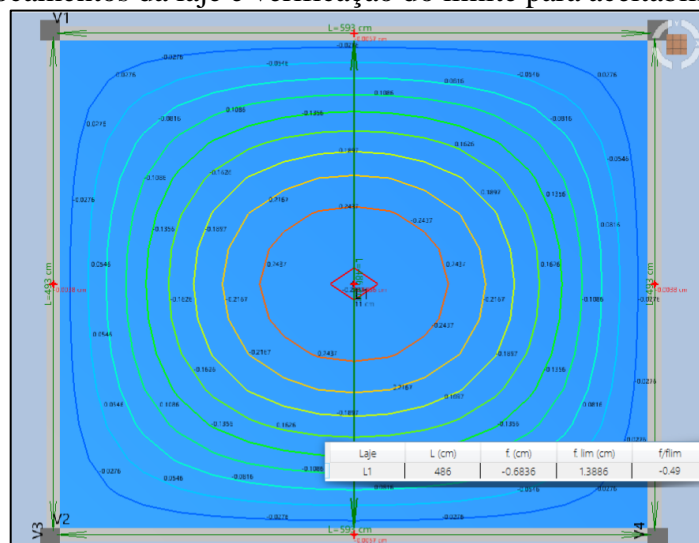


Fonte: Autora (2022)

Ao se estabelecer a flecha máxima correspondente para a verificação de vibrações excessivas e utilizar as cargas acidentais, a flecha máxima foi de 0,683 cm também inferior à flecha limite de 1,389 cm. Desse modo, conclui-se que a laje está adequada segundo a verificação do estado-limite de serviço de deformação excessiva (ELS-DEF).

Por último, destaca-se que as armaduras resultantes em função dos esforços solicitantes são viáveis e razoáveis, o que garante o atendimento aos ELU.

Figura 32 - Deslocamentos da laje e verificação do limite para aceitabilidade de vibrações



Fonte: Autora (2022)

6.2 Frequências Naturais

No capítulo 2 o cálculo das frequências naturais foi discutido. Dele, inferiu-se que as frequências naturais e modos de vibração são função da rigidez, da massa e sua distribuição, e das condições de contorno da estrutura. A expressão geral que expressa a frequência fundamental de um sistema com um grau de liberdade relaciona massa (m) e rigidez (k) da seguinte forma:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.1)$$

Depreende-se dessa equação que a frequência será inversamente proporcional a massa e diretamente proporcional a rigidez. Assim, se alguma propriedade que defina a rigidez - como o módulo de elasticidade do material, por exemplo - da estrutura muda, as frequências mudarão. Caso a distribuição de massa ou de rigidez se alterem, é esperado então que tanto as frequências quanto os modos se alterem também (MACEDO, 2020).

Para o cálculo das frequências naturais estruturas simples existem expressões e tabelas que fornecem os parâmetros necessários à determinação analítica dessa característica. BACHMANN; AMMANN (1987) apresentam uma compilação de parâmetros para diversos sistemas estruturais, permitindo avaliar as frequências naturais de vigas, pórticos, arcos e placas. De acordo com os autores, a expressão para cálculo da frequência fundamental de uma laje retangular com todos os bordos apoiados é:

$$f_n = \frac{[1,57 (1 + \gamma^2)]}{a^2} \sqrt{\frac{Et^3}{\mu 12(1 - \nu^2)}} \quad (6.2)$$

Em que:

f_n = Frequência fundamental (Hz);

a = Maior dimensão da laje (m);

γ = Razão entre a maior e a menor dimensão da laje [a/b];

E = Módulo de elasticidade longitudinal (N/m²);

t = Espessura da laje (m);

μ = Massa por área (kg/m²);

ν = Coeficiente de Poisson.

Nos tópicos seguintes será avaliada a influência da variação de massa e da rigidez nos resultados de frequências naturais da laje isolada, além disso os resultados obtidos pelo TQS serão comparados com os encontrados a partir da equação (6.2).

6.2.1 Influência do percentual das cargas variáveis no cálculo das frequências naturais

Uma vez que a massa está intrinsecamente relacionada às frequências naturais, a consideração da parcela de carga variável a ser utilizada para compor a massa a ser computada na matriz correspondente da estrutura é um tópico que requer especial atenção.

A norma brasileira NBR 6118:2014 não contém indicações claras acerca de valores ou percentuais de cargas variáveis que devem ser levadas em conta na análise dinâmica. No entanto, o seu Projeto de Revisão, versão setembro/2022, destaca que as massas a serem consideradas na avaliação das frequências naturais correspondem aos pesos definidos nas combinações de serviço frequente, ou seja, multiplicadas pelo coeficiente ψ_1 de acordo com a seção 11.8.3.1 da norma vigente.

MURRAY *et al.* (2016) recomenda para cargas variáveis valores de 11 psf (aproximadamente 527 N/m²) para pisos de escritório e chega a sugerir o valor zero para pisos de shoppings centers ou passarelas. Perceba-se, assim, que o valor indicado pelo autor para escritórios corresponde a cerca de 20% desta ação variável total (2,5 kN/m²). A adoção de valores mais baixos de carga implica em resultados menos conservadores, dado que resulta em frequências naturais mais altas, afastando o pavimento da situação indesejada de ressonância.

Para essa avaliação, o edifício foi processado utilizando como ponderador das sobrecargas os valores de 0; 0,3; 0,4; e 0,6 - correspondendo respectivamente a 0, 30, 40 e 60% de carga variável de utilização - e o ponderador de valor 1 para peso próprio e carga permanente. Nessa análise não foi considerado o efeito da não linearidade física.

A tabela 10 a seguir reúne as frequências fundamentais da laje obtidas na análise modal realizada pelo *software* TQS considerando diferentes porcentagens para a carga variável de utilização representada pela letra “q”.

Tabela 10 – Valores das frequências fundamentais (cálculo computacional) para diferentes porcentagens de carga variável

Frequência Fundamental (Hz)			
0%q	30%q	40%q	60%q
8,682	8,064	7,886	7,562

Fonte: Autora (2022)

As mesmas considerações de massa e rigidez foram aplicadas ao cálculo analítico. Os resultados de frequências fundamentais fornecidos pelo programa foram comparados com os calculados analiticamente e percebeu-se um erro percentual de menos de 1%, conforme observado na Tabela 11, validando o procedimento.

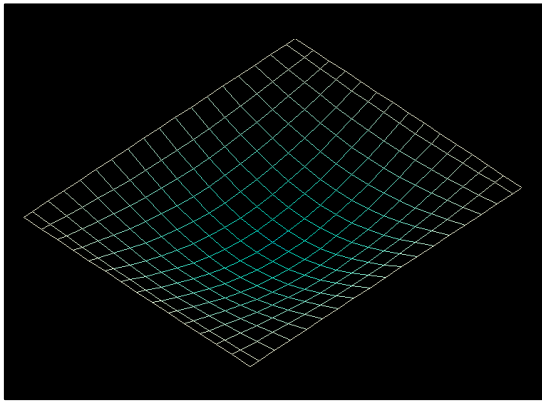
Tabela 11 - Valores das frequências fundamentais (cálculo analítico) para diferentes porcentagens de carga variável

Frequência Fundamental (Hz)			
0%q	30%q	40%q	60%q
8,598	7,990	7,814	7,495
(erro: 0,968%)	(erro: 0,918%)	(erro: 0,913%)	(erro: 0,886%)

Fonte: Autora (2022)

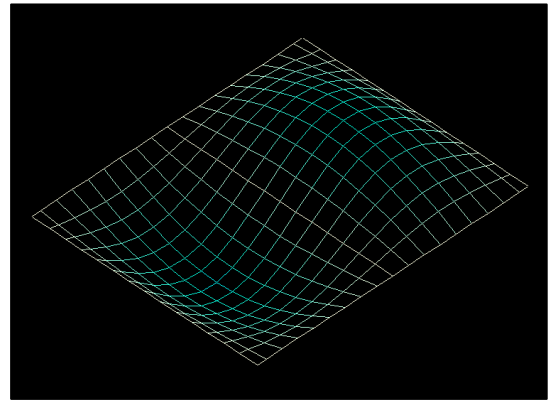
As Figuras 33 a 36 abaixo exemplificam os modos de vibração da laje gerados pelo TQS para as quatro primeiras frequências naturais com a ponderação de 40% da carga variável incorporada à massa da estrutura.

Figura 33 - Primeiro modo ($f_1 = 7,886$ Hz),
1ª flexão da laje



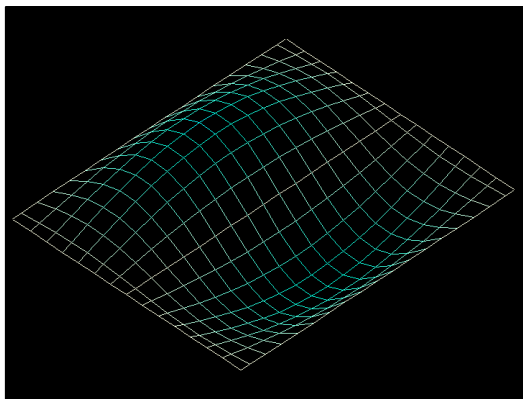
Fonte: Autora (2022)

Figura 34 - Segundo modo ($f_2 = 17,38$ Hz),
2ª flexão da laje – direção maior



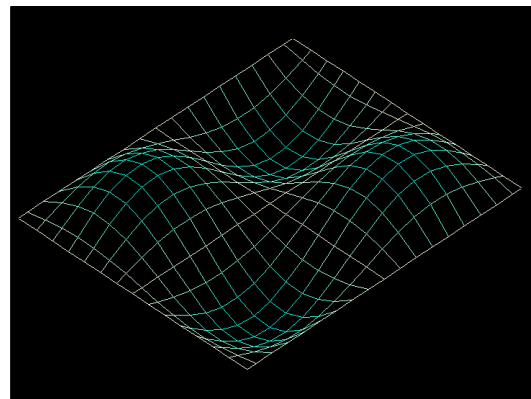
Fonte: Autora (2022)

Figura 35 - Terceiro modo ($f_3 = 21,212$ Hz),
2ª flexão da laje – direção menor



Fonte: Autora (2022)

Figura 36 - Quarto modo ($f_4 = 31,341$ Hz),
flexões em direções simultâneas

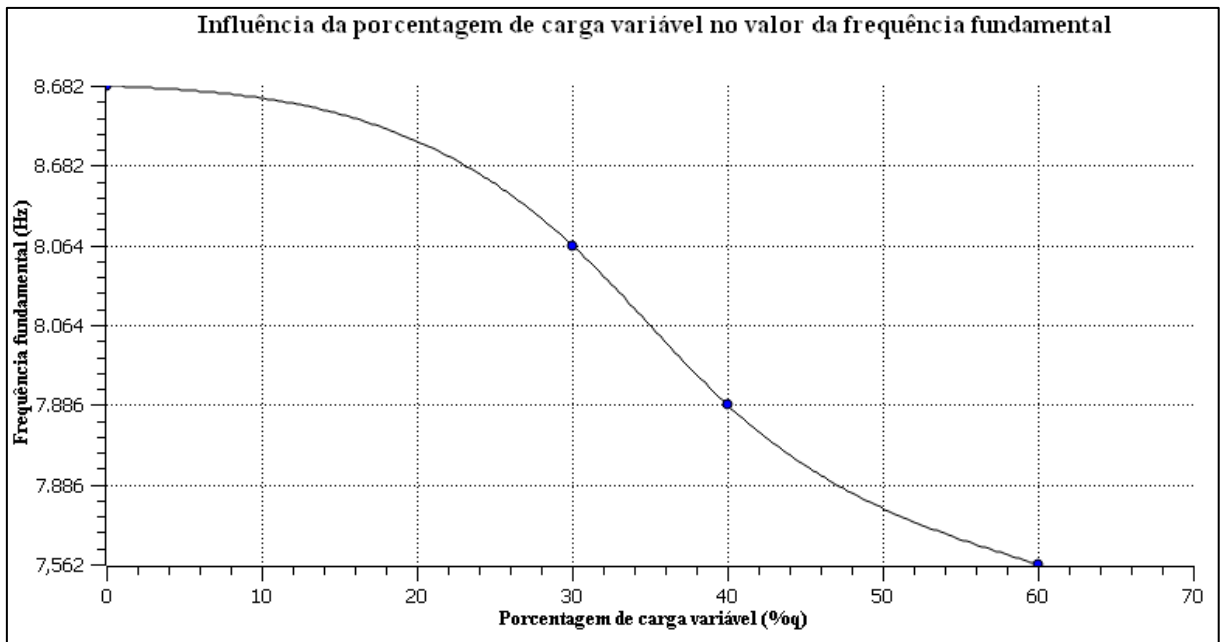


Fonte: Autora (2022)

Conforme previsto, os resultados de frequências naturais obtidas demonstram que, com o acréscimo do percentual de cargas variáveis de utilização, a massa da estrutura aumenta e, conseqüentemente, a frequência diminui. Ao passar da não consideração de carga variável a ponderação de 30% da mesma, tem-se uma variação negativa de 7,12% entre os valores de frequência fundamental; entre 0%q e 40%q, variação negativa de 9,17%; e, entre 0%q e 60%q, uma variação negativa de 12,9%. Ainda, o acréscimo de 10% de carga variável mostrou uma taxa de variação negativa de 2,21% entre os valores de frequência.

Os resultados de frequência fundamental obtidos no TQS em função de consideração de diferentes porcentagens de carga variável de utilização estão representados graficamente pela Figura 37 a seguir.

Figura 37- Gráfico da variação da frequência fundamental pela porcentagem de carga variável



Autora (2022)

6.2.2 Influência do percentual de redução da rigidez no cálculo das frequências naturais

Como visto, frequências naturais mais altas podem ser obtidas através do acréscimo da rigidez da estrutura. Para isso, pode-se optar por enrijecer a estrutura aumentando as dimensões das seções transversais dos elementos estruturais, adicionando apoios ou ainda alterando o módulo de elasticidade do material (ALMEIDA *et al.*, 2005). Nesse trabalho a avaliação da influência da rigidez foi feita alterando-se o coeficiente de não linearidade física (NLF). A análise não linear é, inclusive, muito importante no projeto estrutural de edifícios de concreto

armado na medida em que, segundo KIMURA (2018), os elementos estruturais estão cada vez mais esbeltos e as não linearidades (física e geométrica), em muitos casos, passam a ser preponderantes.

A NBR 6118:2014, na seção 15.3, é clara ao afirmar que a não linearidade física deve ser obrigatoriamente considerada nas estruturas de concreto armado. Para a análise dos esforços globais de 2ª ordem, a norma, em sua seção 15.7.3, faz a consideração aproximada da NLF alterando o módulo de rigidez à flexão dos elementos da seguinte forma:

Figura 38 - Consideração da NLF pela NBR 6118:2014

— lajes:	$(EI)_{sec} = 0,3 E_{ci}/c$
— vigas:	$(EI)_{sec} = 0,4 E_{ci}/c$ para $A_s' \neq A_s$ e $(EI)_{sec} = 0,5 E_{ci}/c$ para $A_s' = A_s$
— pilares:	$(EI)_{sec} = 0,8 E_{ci}/c$

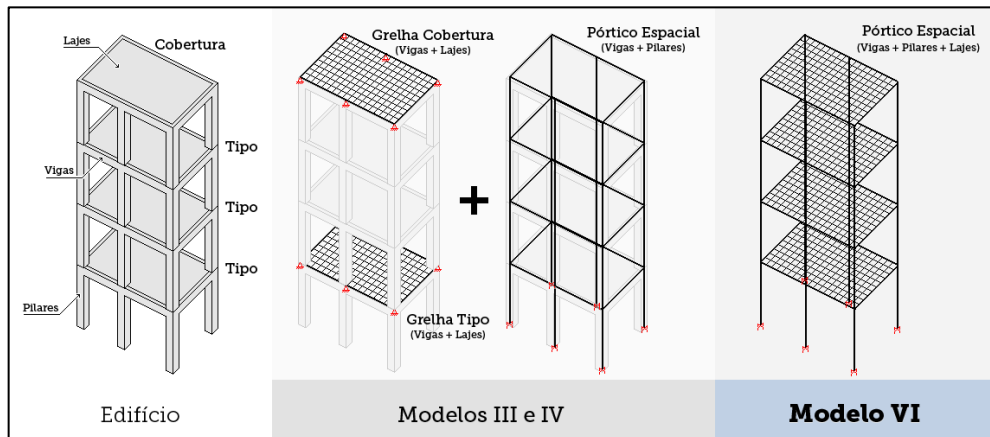
Fonte: ABNT (2014)

No entanto, para a verificação dos Estados Limites de Serviço, não é feita a consideração da redução de rigidez por fissuração dos elementos, ou seja, indica-se a análise linear com a seção bruta do concreto e uso do módulo de elasticidade secante E_{cs} , conforme explicitado no item 14.5.2. Nesse sentido, apesar de não estar prevista em norma a redução da rigidez para o ELS, esse tópico propõe-se a estudar a influência possível caso esse aspecto fosse considerado.

Assim, a análise computacional no TQS desse parâmetro foi feita através da modificação do coeficiente de NLF para lajes. Esse critério define o multiplicador de $(EI)_{sec}$ para a consideração da não linearidade física em lajes no pórtico espacial específico de estado-limite de serviço. Para acessar esse critério deve-se seguir o seguinte caminho no *software*: Pórtico TQS → Critérios → Critérios Gerais → NLF → ELS → Coeficiente de NFL p/ lajes.

É importante pontuar que, no TQS, esse recurso só está disponível caso o edifício esteja no modelo VI, isto é, o edifício é modelado como um pórtico espacial integrado composto por elementos que simulam vigas, pilares e lajes. Diferentemente do modelo IV, em que a grelha espacial das lajes é analisada separadamente e somente efeitos gerados pelas ações verticais são considerados nelas, no modelo VI as lajes passam a resistir também a ações horizontais e a estrutura é analisada como por um único pórtico espacial.

Figura 39 - Diferença entre modelos IV e VI



Fonte: tq^{s2}

Utilizando o mesmo procedimento do item anterior, para a análise de rigidez fixou-se como porcentagem de carga variável 40% q e, em seguida os resultados de análise modal foram obtidos aplicando-se os coeficientes 1, 0,9 e 0,8 no valor do módulo de rigidez à flexão da laje. Em outras palavras, considerando 0, 10 e 20% de fissuração. Os resultados obtidos no programa estão reunidos na Tabela 12.

Tabela 12 - Valores de frequências fundamentais pelo TQS para diferentes coeficientes de NLF

Frequência Fundamental (Hz) - TQS		
NLF = 1	NLF = 0,9	NLF = 0,8
7,886	7,697	7,503

Fonte: Autora (2022)

Todavia, esses resultados quando comparados com o cálculo efetuado pela equação analítica (6.2) apresenta erros percentuais consideráveis à medida que o coeficiente de não linearidade geométrica é reduzido, como pode ser percebido na Tabela 13.

Tabela 13 - Valores de frequências fundamentais pelo cálculo analítico para diferentes coeficientes de NLF

Frequência Fundamental (Hz)		
NLF = 1	NLF = 0,9	NLF = 0,8
7,814	7,413	6,989
(erro: 0,913%)	(erro: 3,689%)	(erro: 6,851%)

Fonte: Autora (2022)

² Disponível em: <https://www.tqs.com.br/v16/destaques/modelo-vi-projeto-estrutural.html>

Percebe-se, então, que a frequência natural obtida pela análise do sistema TQS decresce, mas não da forma prevista pelo cálculo analítico. Após uma investigação sobre os motivos que levaram a resultados razoavelmente divergentes, descobriu-se que a explicação está na matriz de rigidez global do pórtico espacial utilizada pelo *software*.

A matriz de rigidez de uma estrutura é composta por coeficientes de rigidez k_{ij} os quais podem ser diretamente obtidos, segundo SORIANO (2014):

(...) por imposição sucessiva de valor unitário para cada um dos seus deslocamentos nodais, mantidos nulos os demais, com os correspondentes esforços de extremidade obtidos pelo Método das Forças de análise de estruturas hiperestáticas.

Os elementos da matriz, portanto, correspondem à rigidez axial, torcional, rigidez à flexão e rigidez relativa ao cisalhamento.

Figura 40 – Matriz de rigidez para pórtico espacial

$$\mathbf{K}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2} \\ \cdot & \cdot & \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{4EI_y}{\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI_y}{\ell} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{4EI_z}{\ell} & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{\ell} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{4EI_y}{\ell} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{4EI_z}{\ell} \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Fonte: SORIANO (2014)

Todos os elementos da matriz de rigidez (Figura 40) são multiplicados pelo módulo de elasticidade longitudinal (E) ou pelo módulo de elasticidade transversal (G) que, por sua vez, é proporcional ao módulo de elasticidade longitudinal. A diferença entre o cálculo analítico e o realizado pelo *software* está no fato de que, nesse último, o coeficiente de não linearidade física é aplicado apenas para os termos de rigidez à flexão que compõem a matriz, atuando sobre as inércias à flexão e não diretamente ao módulo de elasticidade. Isso se justifica pelo fato de que, como as placas e lajes são consideradas como tal – são solicitadas essencialmente por momentos fletores e forças cortantes (PINHEIRO, 2007), o efeito de flexão é preponderante. Contudo, conforme se diminui o coeficiente de não linearidade física e comparam-se os

resultados analíticos com os fornecidos pelo programa, as diferenças se tornam cada vez mais relevantes até findarem em inaceitáveis.

Importa destacar que o procedimento adotado pelo programa, de alterar apenas as rigidezes à flexão (via inércia) não se constitui em conduta inapropriada, mas condicionada à recomendação da NBR 6118:2014 que prevê a NLF apenas para a flexão. Outras normas internacionais, contudo, são mais detalhadas e contemplam as outras rigidezes.

Nessa perspectiva, para uma análise comparativa mais adequada, é necessário impor no TQS o valor do módulo de elasticidade secante nos critérios do material. Executando a alteração dessa forma, os resultados fornecidos convergirão com os obtidos pelo cálculo analítico. Isso pode ser atestado pela Tabela 14, na qual esse procedimento foi realizado.

Tabela 14 - Valores de frequências fundamentais alterando-se o módulo de elasticidade secante

Frequência Fundamental (Hz) - TQS		
1(EIsec)	0,9(EIsec)	0,8(EIsec)
7,886	7,480	7,054
(erro: 0,913%)	(erro: 0,896%)	(erro: 0,921%)

Fonte: Autora (2022)

De maneira análoga ao item anterior, infere-se que com a redução de rigidez provocada pelo coeficiente de não linearidade física, ocorre a redução da frequência. A redução de 10% na rigidez provocou uma variação negativa de 5,15% entre os valores de frequência fundamental. O fato de consideração de 20% de fissuração equivalente já resultar em uma variação negativa de 10,55% mostra que, comparada aos testes com diferentes porcentagens de carga variável, a ponderação dos valores de rigidez tem maior influência no cálculo das frequências naturais.

Assim, pode-se afirmar que análises modais que não consideram a incorporação da carga variável e/ou a fissuração dos elementos de concreto – à semelhança do texto atual da NBR 6118:2014 – findam em valores mais altos de frequência natural e, por conseguinte, menos conservadores.

6.3 Amortecimento

Segundo BACHMANN *et al.* (1995) a energia dissipada em estruturas ocorre, predominantemente, pelo amortecimento provocado pelo material. O mesmo autor sugere faixas da taxa de amortecimento para alguns materiais usados na construção civil.

Tabela 15 - Taxa de amortecimento para diferentes materiais

Material	ξ
Concreto armado	
▪ Baixa intensidade de tensão (não fissurado)	0,007 - 0,010
▪ Média intensidade de tensão (fissurado)	0,010 - 0,040
▪ Alta intensidade de tensão (fissurado)	0,005 - 0,008
Concreto protendido (não fissurado)	0,004 - 0,007
Concreto com protensão parcial (pouco fissurado)	0,008 - 0,012
Estrutura mista	0,002 - 0,003
Aço	0,001 - 0,002

Fonte: Adaptado de BACHMANN *et al.* (1995)

Para a análise realizada neste trabalho, optou-se por escolher o valor intermediário de $\xi = 0,020$ como taxa de amortecimento.

6.4 Vibração provocada por caminhada

A primeira análise do comportamento deste pavimento mediante carregamento dinâmico será feita com a aplicação da carga dinâmica correspondente à caminhada. Essa análise é indispensável pois segundo Heyden *et al.* em 2005 e Ohlsson em 1984, *apud* JOHANSSON (2009), a fonte mais importante de vibrações incômodas em residências e escritórios é o caminhar humano.

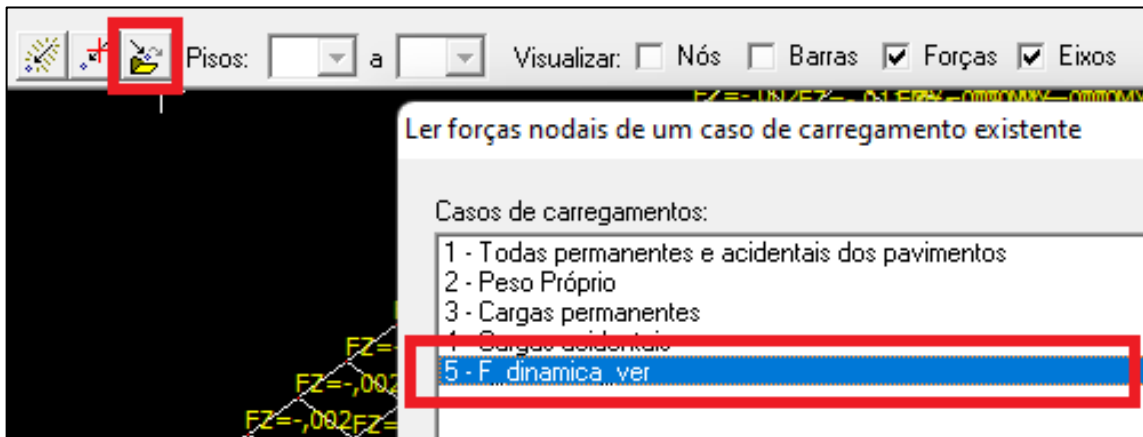
Os coeficientes de Fourier recomendados pelo CEB levam em conta apenas um único indivíduo, deixando em aberto para o carregamento de multidão (FAÍSCA, 2003). Além disso, apesar do caminhar ser uma atividade que varia no tempo e no espaço, a série de Fourier para representar essa excitação não contempla a variação no espaço (MARCOS, 2015). Nesse contexto e levando em consideração esses apontamentos, a modelagem da carga aplicada no *software* seguiu os parâmetros recomendados no apêndice G do livro de BACHMANN *et al.* (1995) em termos de componentes de Fourier para a função da força de excitação.

6.4.1 Obtenção da função da força de excitação

BACHMANN *et al.* (1995) representa a força de excitação resultante de uma pessoa caminhando com frequência de 2 Hz e recomenda o peso de 0,8 kN (80 kgf). Ainda, tem-se que a densidade sugerida é de um indivíduo por metro quadrado. A fim de analisar a situação mais

desfavorável, a análise feita considerou a carga adicional de 0,8 kN/m² aplicada em toda a laje. Para isso, antes foi necessário criar um novo caso de carregamento intitulado “F_dinamica_ver”. Esse carregamento foi aplicado no modelador estrutural do pavimento e lançado no recurso de análise no tempo através da opção de leitura de forças nodais indicado na Figura 41.

Figura 41 - Leitura de forças nodais no *time-history*



Fonte: Autora (2022)

É válido ressaltar que para utilizar o comando de leitura de forças nodais foi necessário alterar o modelo estrutural do pavimento para o Modelo IV. Por esse motivo, a avaliação da resposta dinâmica no domínio do tempo limitar-se-á a alterar somente o ponderador de cargas variáveis.

O carregamento pode ser então expresso pela combinação de três harmônicos da frequência de excitação cujos coeficientes de Fourier e ângulos de fase são encontrados na Tabela 1. A entrada de dados no *time-history* foi feita em função dos períodos (T) de cada um dos harmônicos considerados, dos valores numéricos dos coeficientes - chamados de multiplicadores de amplitude - e dos ângulos de fase - chamados de $T_0(s)$. A Tabela 16 resume os dados de entrada.

Tabela 16 - Dados do carregamento dinâmico (caminhada)

<i>Time-history</i> - Carga dinâmica: Caminhada					
$f_{excit.} = 2 \text{ Hz}$			$G = 800 \text{ N/m}^2$		
$T_1(s)$	0,5	α_1	0,4	ϕ_1	0
$T_2(s)$	0,25	α_2	0,1	ϕ_2	1,570796
$T_3(s)$	0,1667	α_3	0,1	ϕ_3	1,570796

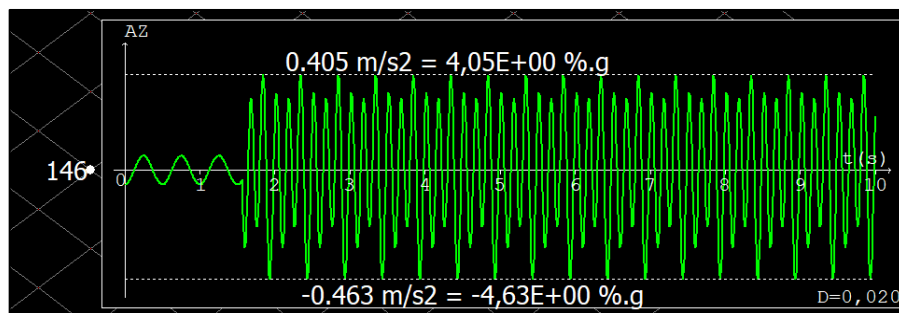
Fonte: Autora (2022)

6.4.2 Gráfico da resposta da aceleração

De posse dos dados necessários à aplicação da carga dinâmica, foi possível obter os gráficos de aceleração na direção Z. Dois nós da grelha foram definidos para a extração dos resultados: um nó central e um mais próximo ao vértice da laje. Nos gráficos é possível visualizar o pico de aceleração do nó e seu valor em função da aceleração da gravidade.

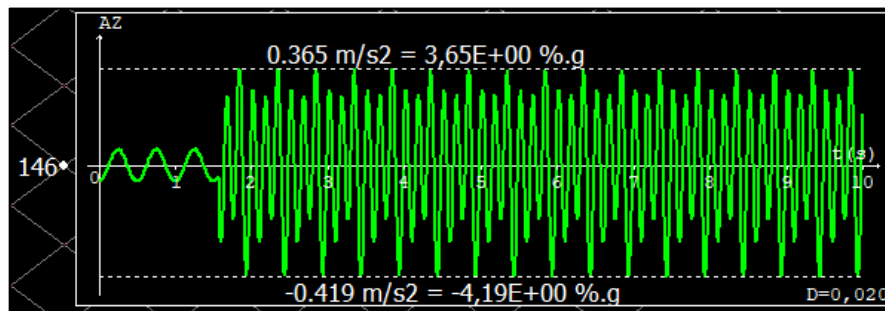
As Figuras 42 a 45 representam os gráficos de acelerações induzidas por pessoas caminhando e considerando diferentes ponderadores de carga variável para o nó central.

Figura 42 – Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($f_n = 7,562$ Hz) para 60%q.



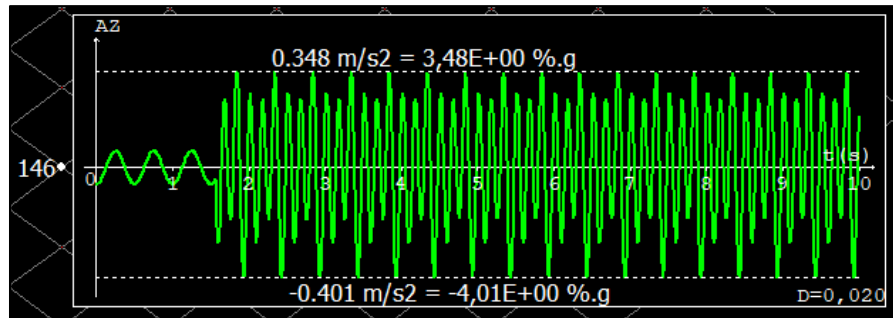
Fonte: Autora (2022)

Figura 43 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($f_n = 7,886$ Hz) para 40%q.



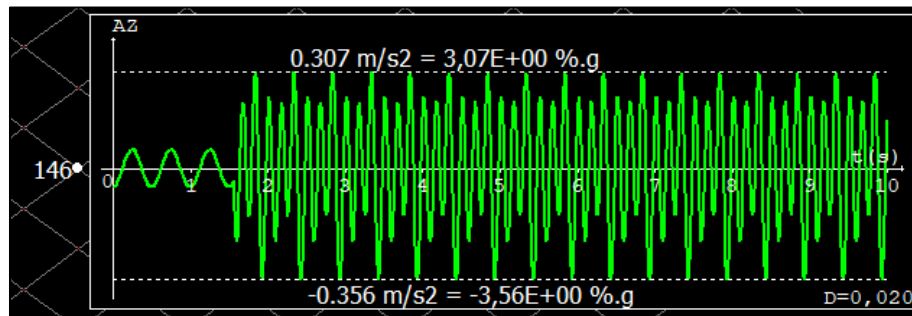
Fonte: Autora (2022)

Figura 44 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($f_n = 8,064$ Hz) para 30%q.



Fonte: Autora (2022)

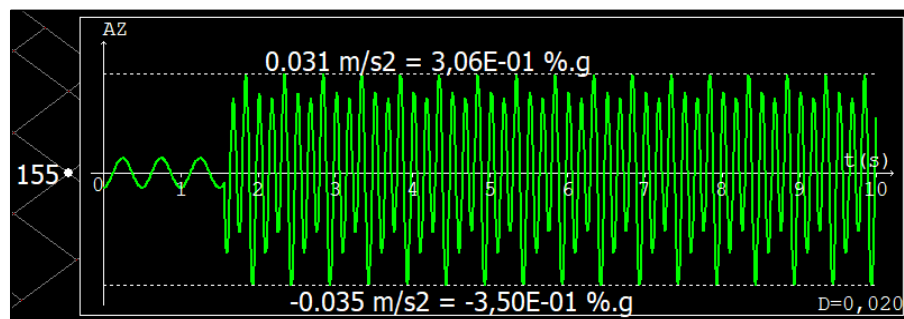
Figura 45 - Gráfico de aceleração provocada na direção z no nó 146 ($f_n = 8,682$ Hz) sem ponderador de carga.



Fonte: Autora (2022)

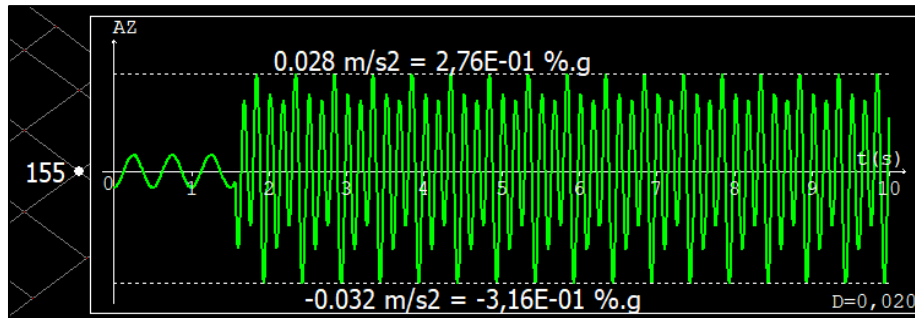
O mesmo é válido para o nó localizado próximo ao vértice da laje, como mostram as Figuras 46 a 49 abaixo.

Figura 46 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($f_n = 7,562$ Hz) para 60%q.



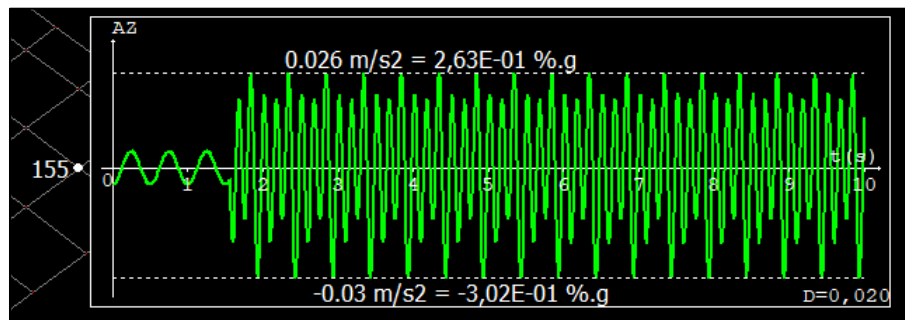
Fonte: Autora (2022)

Figura 47 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($f_n = 7,886$ Hz) para 40%q.



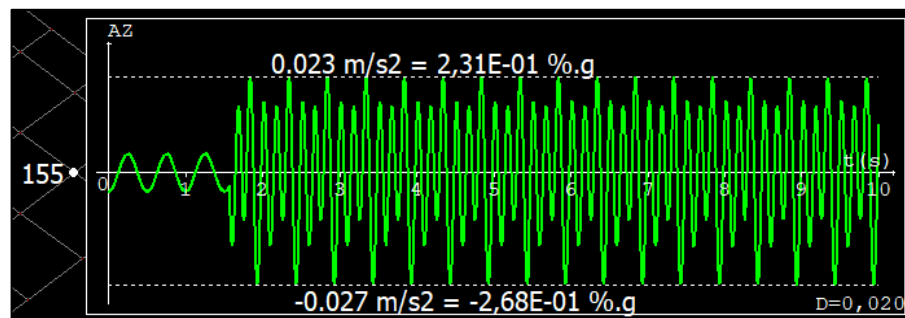
Fonte: Autora (2022)

Figura 48 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($f_n = 8,064$ Hz) para 30%q.



Fonte: Autora (2022)

Figura 49 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($f_n = 8,682$ Hz) sem ponderador de carga



Fonte: Autora (2022)

A Tabela 17 reúne os valores de pico de aceleração vertical para cada um dos casos de frequência natural. Esses valores serão indispensáveis para a avaliação dos critérios de vibração excessiva.

Tabela 17 – Acelerações verticais máximas no nó central produzidas por caminhada para cada caso de frequência

$\%q$	60	40	30	0
f_n (Hz)	7,562	7,886	8,064	8,682
$a_{m\acute{a}x}$ (m/s^2)	0,463	0,419	0,401	0,356
$\frac{a_{m\acute{a}x}}{g}$ (%)	4,63	4,19	4,01	3,56

Fonte: Autora (2022)

6.5 Vibração provocada por atividades rítmicas

Segundo MAST (2001), a excitação rítmica ocorre quando um grupo de pessoas se movimenta em uníssono de maneira cadenciada. De acordo com MURRAY *et al.* (2016), se enquadram nesse grupo de atividades dança, multidão em movimento e aeróbica. De forma análoga, a modelagem da carga dinâmica seguiu os valores recomendados pelo apêndice G do livro de BACHMANN *et al.* (1995). Para essa análise, optou-se pela força dinâmica causada por atividades de dança.

É importante destacar que foi considerada a mesma laje estudada no exemplo anterior, submetida às mesmas ações permanente e variável (que seria de escritório) para o cálculo de sua frequência fundamental, mesmo a ela sendo aplicada a força de excitação por atividade rítmica (de dança).

6.5.1 Obtenção da função da força de excitação

De forma análoga à avaliação por vibrações causadas por caminhada, os parâmetros da função excitadora são obtidos da Tabela 1 e realizado o mesmo procedimento de análise. A diferença estará, evidentemente, na faixa de valores da frequência da força de excitação, que para o caso de dança está entre 1,5 e 3 Hz, na aplicação dos coeficientes de Fourier e ângulos de fase adequados a essa atividade e, crucialmente, na densidade de pessoas, que passa a ser de 4 por metro quadrado. A situação mais desfavorável, nesse contexto, considera a aplicação da carga adicional de 3,2 kN/m² (ou seja, 4 x 0,8 kN/m²) em toda a laje. Os dados de entrada para esse carregamento dinâmico podem ser consultados na Tabela 18.

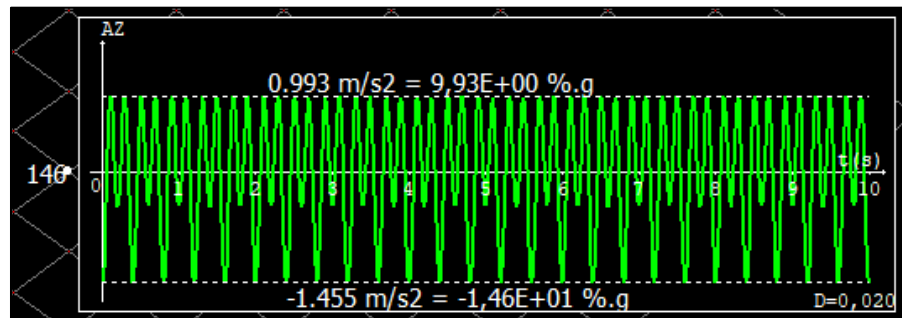
Tabela 18 - Dados do carregamento dinâmico (dança)

<i>Time-history</i> - Carga dinâmica: Dança					
$f_{excit.} = 2,5 \text{ Hz}$		$G = 3200 \text{ N/m}^2$			
$T_1(s)$	0,4	α_1	0,5	ϕ_1	0
$T_2(s)$	0,2	α_2	0,15	ϕ_2	0
$T_3(s)$	0,1333	α_3	0,1	ϕ_3	0

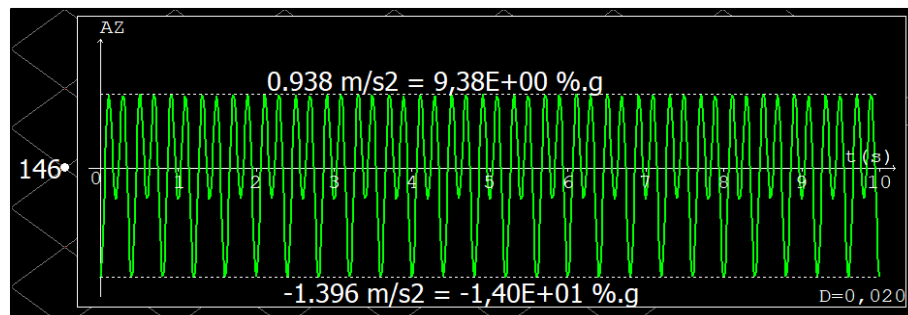
Fonte: Autora (2022)

6.5.2 Gráficos de aceleração

Os gráficos de aceleração induzidas por atividades de dança para dois nós da grelha, sendo um central (nó 146) e um próximo ao vértice (nó 155), e para diferentes valores de frequência natural decorrentes da variação da porcentagem de carga variável estão listados nas Figuras 50 a 57.

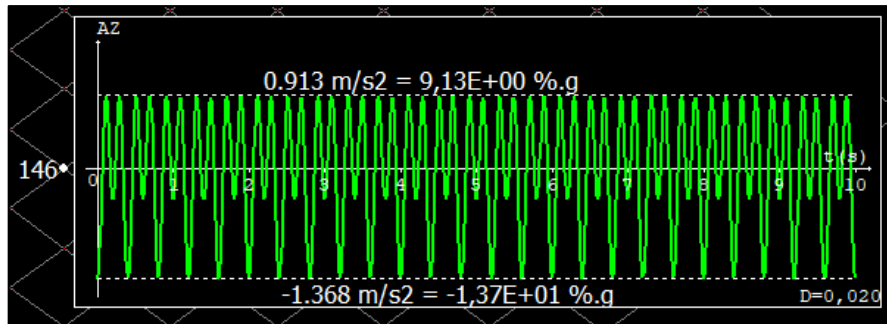
Figura 50 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($f_n = 7,562 \text{ Hz}$) para 60%q.

Fonte: Autora (2022)

Figura 51 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($f_n = 7,886 \text{ Hz}$) para 40%q.

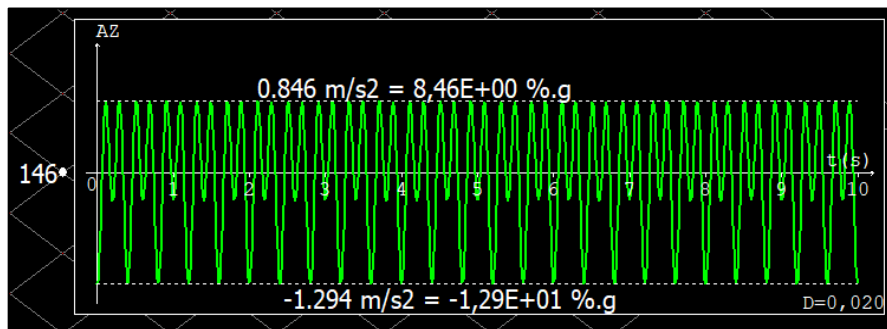
Fonte: Autora (2022)

Figura 52 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($f_n = 8,064$ Hz) para 30%q.



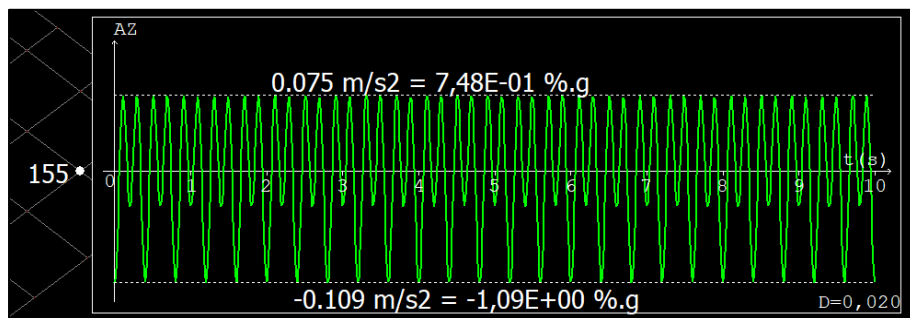
Fonte: Autora (2022)

Figura 53 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 ($f_n = 8,682$ Hz) sem ponderador de carga.



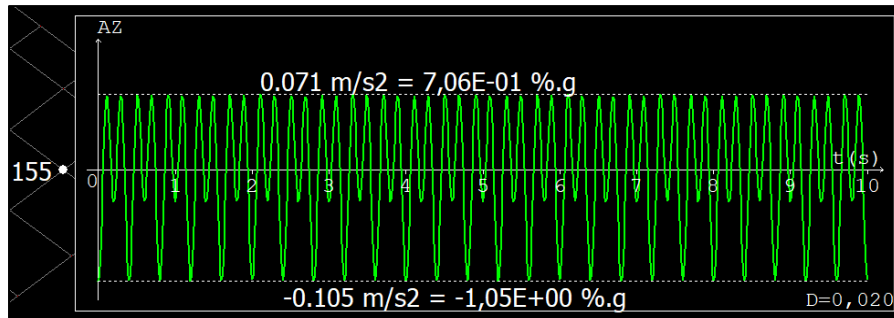
Fonte: Autora (2022)

Figura 54 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($f_n = 7,562$ Hz) para 60%q.



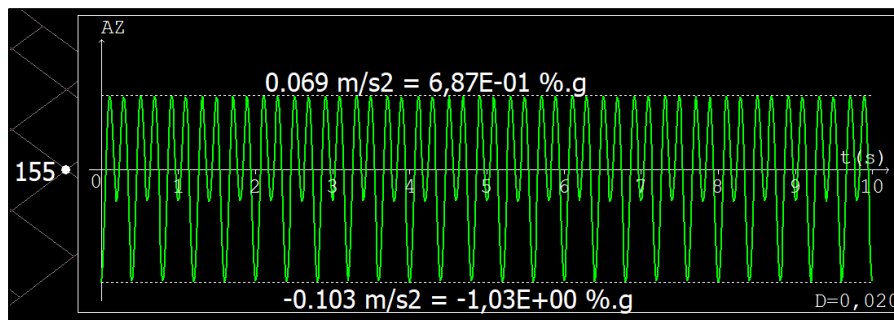
Fonte: Autora (2022)

Figura 55 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($f_n = 7,886$ Hz) para 40%q.



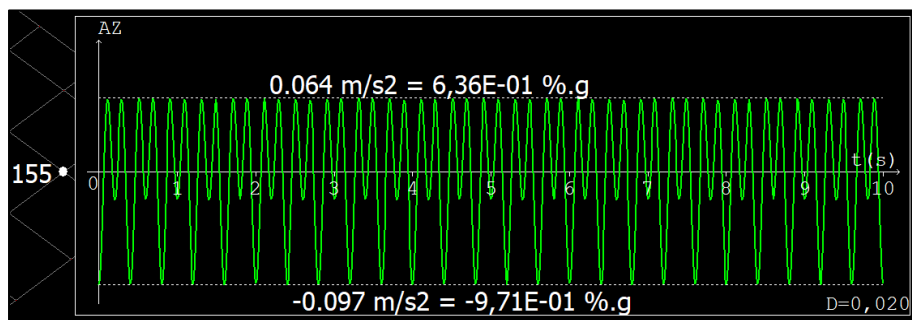
Fonte: Autora (2022)

Figura 56 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($f_n = 8,064$ Hz) para 30%q.



Fonte: Autora (2022)

Figura 57 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 155 ($f_n = 8,682$ Hz) sem ponderador de carga.



Fonte: Autora (2022)

A Tabela 19 resume os valores de pico de aceleração vertical na consideração de atividades rítmicas para cada um dos casos de frequência natural.

Tabela 19 - Acelerações verticais máximas no nó central produzida por atividades de dança para cada caso de frequência

%q	60	40	30	0
f_n (Hz)	7,562	7,886	8,064	8,682
$a_{m\acute{a}x}$ (m/s ²)	1,455	1,396	1,368	1,294
$\frac{a_{m\acute{a}x}}{g}$ (%)	14,6	14	13,7	12,9

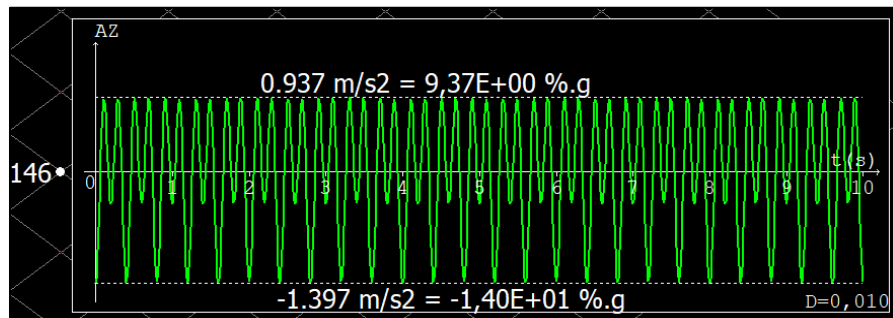
Fonte: Autora (2022)

6.5.3 Influência da taxa de amortecimento

Em todas as análises anteriores a taxa de amortecimento para todos os modos foi mantida constante e igual a 0,02. Com o objetivo de avaliar a influência do amortecimento na resposta dinâmica da laje, mais testes foram realizados.

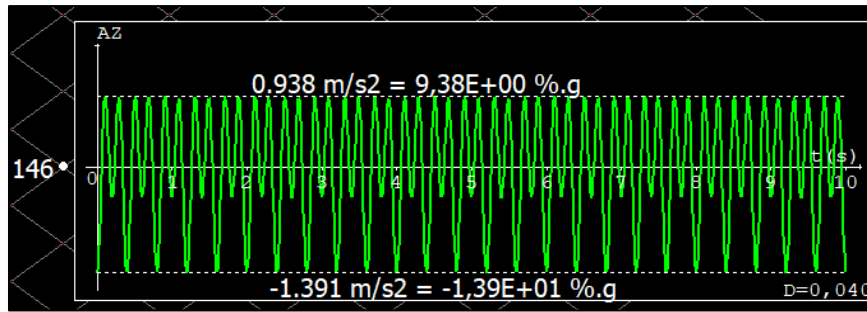
Fixou-se como força de excitação a atividade de dança bem como a porcentagem de carga variável em 40%, o que implica na frequência fundamental de 7,886 Hz. Considerando-se a faixa de valores de taxa de amortecimento da Tabela 15, novos gráficos de aceleração vertical máxima para o nó central foram gerados (Figuras 58 e 59), aplicando-se os valores de 0,010; 0,020 e 0,040 em todos os 10 modos de vibração previamente estabelecidos.

Figura 58 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 para $\xi = 0,010$



Fonte: Autora (2022)

Figura 59 - Gráfico de aceleração na direção z no nó 146 para $\xi = 0,040$



Fonte: Autora (2022)

A fim de reunir os valores de pico de aceleração vertical na consideração de atividades rítmicas para cada uma das considerações de taxa de amortecimento, tem-se a Tabela 20 a seguir.

Tabela 20 - Acelerações verticais máximas no nó central produzida por atividades de dança para diferentes taxas de amortecimento

ξ	0,010	0,020	0,040
$a_{m\acute{a}x} (m/s^2)$	1,397	1,396	1,391
$\frac{a_{m\acute{a}x}}{g} (\%)$	14	14	13,9

Fonte: Autora (2022)

Percebe-se, então, que com a redução da taxa de amortecimento, os valores de pico de aceleração diminuem discretamente. Mesmo entre os extremos da faixa considerada essa variação pouco influenciou na resposta dinâmica estacionária.

6.6 Comparação com critérios de conforto

Sendo obtidas as frequências naturais e gráficos de aceleração vertical no domínio do tempo para cada uma das possibilidades avaliadas, é possível analisar a adequabilidade dos critérios de conforto para a verificação do ELS-VE. A comparação se dará utilizando os resultados obtidos com a variação de carga variável, pois, além de estabelecer um parâmetro fixo, a norma brasileira não prevê a redução da rigidez das estruturas no ELS.

6.6.1 Verificação do critério da ABNT NBR 6118:2014 e do Model Code 2010

Os critérios da NBR 6118:2014 e do Model Code 2010 apenas limitam a frequência natural mínima da estrutura, conforme mostrado nos itens 4.1 e 4.2. Para a excitação provocada

por caminhada, os valores de frequência fundamental obtidos na seção 6.2.1 são comparados com os valores de frequência mínimas recomendadas. Considerando-se “escritórios”, a NBR 6118:2014 apresenta como frequência mínima 4,8 Hz e, para o Model Code 2010, essa frequência é de 4 Hz.

Tabela 21 - Verificação do atendimento ao critério de vibrações excessivas (caminhada) - ABNT NBR 6118 e Model Code 2010

Utilização	%q	NLF	f_n (Hz)	Verificação do ELS-VE	
				ABNT NBR 6118:2014	Model Code 2010
Caminhada - Painel Isolado (Escritório)	0	1	8,682	OK! $f_n > f_{mín}$	OK! $f_n > f_{mín}$
Caminhada - Painel Isolado (Escritório)	0,3	1	8,064	OK! $f_n > f_{mín}$	OK! $f_n > f_{mín}$
Caminhada - Painel Isolado (Escritório)	0,4	1	7,886	OK! $f_n > f_{mín}$	OK! $f_n > f_{mín}$
Caminhada - Painel Isolado (Escritório)	0,6	1	7,562	OK! $f_n > f_{mín}$	OK! $f_n > f_{mín}$

Fonte: Autora (2022)

Conclui-se, então, que segundo esses critérios a laje estaria adequada para sua utilização prevista. O mesmo não ocorre para o caso da avaliação da adequabilidade da laje considerando sua utilização para atividades rítmicas na qual, em atividades de dança, a frequência mínima sobe para 8,4 Hz na NBR 6118:2014 e 7 Hz segundo o Model Code 2010.

A partir dos dados da Tabela 22, infere-se que, apenas se nenhuma carga variável fosse considerada no cálculo das frequências naturais, o piso estaria adequado. Para as demais porcentagens a laje não atende ao critério da norma brasileira, apesar de atender à limitação do Model Code 2010.

Tabela 22 - Verificação do atendimento ao critério de vibrações excessivas (atividades de dança) - ABNT NBR 6118 e Model Code 2010

Utilização	%q	NLF	f_n (Hz)	Verificação do ELS-VE	
				ABNT NBR 6118:2014	Model Code 2010
Dança - Painel Isolado	0	1	8,682	OK! $f_n > f_{mín}$	OK! $f_n > f_{mín}$
Dança - Painel Isolado	0,3	1	8,064	Não OK! $f_n < f_{mín}$	OK! $f_n > f_{mín}$
Dança - Painel Isolado	0,4	1	7,886	Não OK! $f_n < f_{mín}$	OK! $f_n > f_{mín}$
Dança - Painel Isolado	0,6	1	7,562	Não OK! $f_n < f_{mín}$	OK! $f_n > f_{mín}$

Fonte: Autora (2022)

6.6.2 Verificação do critério do AISC Design Guide 11

A aplicação dos critérios do AISC Design Guide 11 descritos no item 4.3 são válidos para pisos com frequência natural inferior a 9 Hz. Portanto, podem ser aplicados para a laje avaliada. Esse guia de projeto pondera que, se a frequência natural for maior que 9-10 Hz, não ocorrerá ressonância significativa devido ao caminhar, mas a vibração causada pode mesmo assim ser incômoda. Nesse sentido, os limites de tolerância para pisos de baixa frequência (< 9 Hz) recomendados baseiam-se na aceleração de pico do pavimento como porcentagem do valor da gravidade mediante solicitação dinâmica. Esse valor para caminhada e ocupação correspondente a escritórios é de 0,5% g. As acelerações obtidas para a solicitação de caminhada no item 6.4 foram comparadas com a aceleração limite recomendada por esse critério.

Tabela 23 - Verificação do atendimento ao critério de vibrações excessivas (caminhada) - AISC

Utilização	%q	NLF	ξ	$\frac{a_{máx}}{g}$ (%)	Verificação do ELS-VE
					AISC Design Guide
Caminhada - Painel Isolado (Escritório)	0	1	0,02	3,56	Não OK!
Caminhada - Painel Isolado (Escritório)	0,3	1	0,02	4,01	Não OK!
Caminhada - Painel Isolado (Escritório)	0,4	1	0,02	4,19	Não OK!
Caminhada - Painel Isolado (Escritório)	0,6	1	0,02	4,63	Não OK!

Fonte: Autora (2022)

Para a análise de atividades rítmicas os limites de tolerância se baseiam na ocupação afetada pela vibração na laje analisada ou nas adjacentes. Como a laje discutida é isolada, considera-se a ocupação como destinada apenas a atividades rítmicas, na qual o pico de aceleração limite está na faixa de 4 – 7%g. A opção por considerar a ocupação afetada como sendo comercial ou residencial seria mais conservadora, limitando a aceleração a 0,5%g. Da mesma forma, comparou-se os resultados de aceleração máxima do item 6.5 com o valor máximo permitido para atividades rítmicas.

Tabela 24 - Verificação do atendimento ao critério de vibrações excessivas (atividades de dança) - AISC

Utilização	%q	NLF	ξ	$\frac{a_{m\acute{a}x}}{g}(\%)$	Verificação do ELS-VE AISC Design Guide
Dança - Painel Isolado	0	1	0,02	12,9	Não OK!
Dança - Painel Isolado	0,3	1	0,02	13,7	Não OK!
Dança - Painel Isolado	0,4	1	0,02	14	Não OK!
Dança - Painel Isolado	0,6	1	0,02	14,6	Não OK!

Fonte: Autora (2022)

Nas duas análises o pavimento não atendeu aos critérios de vibração excessiva segundo o AISC. Deve-se reforçar que, tanto na análise de caminhada quanto na de atividades de dança, o carregamento dinâmico foi o mais desfavorável possível, prevendo a ocupação de toda a área de laje com a densidade recomendada pela literatura.

6.6.3 Verificação do critério do Peso Mínimo Efetivo

Na aplicação do critério do Peso Mínimo Efetivo proposto por LOVOZEY *et al.* (2018) foi necessário previamente:

- 1) O cálculo do peso efetivo W (kN) e do peso efetivo por área p (kN/m²) da laje dada pela Eq. (4.5); e
- 2) O cálculo o peso efetivo mínimo $W_{mín}$ (kN) e peso efetivo mínimo por área $p_{mín}$ (kN/m²) segundo as equações (4.10) a (4.12) e (4.14) a (4.16).

Esse critério não faz apontamentos sobre a consideração da carga acidental para cálculo do peso efetivo, apesar desse valor interferir nas frequências naturais. Por esse motivo e consoante aos exemplos apresentados pelos autores, para estimar o valor de peso efetivo foram usadas apenas as cargas permanentes. Dessa forma, tem-se:

$$p = g_p + (t \times \gamma_c) = 2 + (0,11 \times 25) = 4,75 \text{ kN/m}^2$$

$$W = p \times A_{laje} = 4,75 \times 6 \times 5 = 142,5 \text{ kN}$$

As tabelas 25 e 26 a seguir apresentam os parâmetros utilizados e a adequabilidade da laje segundo esse critério.

Tabela 25 - Verificação do atendimento ao critério de vibrações excessivas (caminhada) - Critério do Peso Mínimo Efetivo

Utilização	%q	NLF	f_n (Hz)	R_g	W (kN)	W_{min} (kN)	ξ	Verificação do ELS-VE PESO EFETIVO MÍNIMO
Caminhada - Painel Isolado (Escritório)	0	1	8,682	1	142,5	154,471	0,02	Não OK!
Caminhada - Painel Isolado (Escritório)	0,3	1	8,064	1	142,5	206,469	0,02	Não OK!
Caminhada - Painel Isolado (Escritório)	0,4	1	7,886	1	142,5	221,499	0,02	Não OK!
Caminhada - Painel Isolado (Escritório)	0,6	1	7,562	1	142,5	248,097	0,02	Não OK!

Fonte: Autora (2022)

Tabela 26 - Verificação do atendimento ao critério de vibrações excessivas (atividades de dança) - Critério do Peso Mínimo Efetivo

Utilização	%q	NLF	f_n (Hz)	R_g	p (kN/m ²)	p_{min} (kN/m ²)	ξ	Verificação do ELS-VE PESO EFETIVO MÍNIMO
Dança - Painel Isolado	0	1	8,682	3	4,75	13,24	0,02	Não OK!
Dança - Painel Isolado	0,3	1	8,064	3	4,75	17,697	0,02	Não OK!
Dança - Painel Isolado	0,4	1	7,886	3	4,75	18,986	0,02	Não OK!
Dança - Painel Isolado	0,6	1	7,562	3	4,75	21,265	0,02	Não OK!

Fonte: Autora (2022)

Assim como na avaliação do critério do AISC Design Guide 11, para o critério do Peso Mínimo Efetivo também não foi atendido para nenhuma das combinações consideradas, estando, pois, a laje inadequada.

6.6.4 Verificação do critério da ISO 2631-2

Finalmente, a avaliação de conforto segundo a ISO 2631-2 (2003) é necessária e relevante já que é critério base para outras normas e exprime uma percepção mais qualitativa a respeito dos níveis de conforto dos usuários a vibrações. Para as acelerações máximas obtidas após a análise dinâmica dos oito casos, tem-se:

Tabela 27 - Análise do critério de vibrações excessivas - ISO 2631-2

Utilização	%q	NLF	ξ	$a_{m\acute{a}x}$ (m/s ²)	Verificação do ELS-VE ISO 2631-2
Caminhada - Paine Isolado (Escritório)	0	1	0,02	0,356	Um pouco desconfortável
Caminhada - Paine Isolado (Escritório)	0,3	1	0,02	0,401	Um pouco desconfortável
Caminhada - Paine Isolado (Escritório)	0,4	1	0,02	0,419	Um pouco desconfortável
Caminhada - Paine Isolado (Escritório)	0,6	1	0,02	0,463	Um pouco desconfortável
Dança - Paine Isolado	0	1	0,02	1,294	Desconfortável
Dança - Paine Isolado	0,3	1	0,02	1,368	Desconfortável
Dança - Paine Isolado	0,4	1	0,02	1,396	Desconfortável
Dança - Paine Isolado	0,6	1	0,02	1,455	Desconfortável

Fonte: Autora (2022)

A partir dessa avaliação, pode-se mensurar a dimensão do desconforto gerado pela excitação dinâmica provocada por atividades humanas neste pavimento.

6.6.5 Comentários

A análise dinâmica completa – análise modal e cálculo da resposta pela ação dinâmica – permitiu perceber que a mudança no critério de cargas variáveis de utilização fez com que, para a solicitação de atividade rítmica, a norma brasileira tenha sido atendida apenas para o caso de 0%q, isto é, sem consideração de carga variável, mas com o acréscimo de 30% dessa carga o pavimento já é inadequado em termos de vibrações excessivas. Percebe-se também que,

mesmo para excitações mais brandas, como na análise do caminhar, apenas os critérios do Model Code 2010 e da NBR 6118:2014 foram atendidos, apesar da análise pela ISO 2631-2 ter considerado a vibração como um pouco desconfortável.

Em um panorama global, é possível concluir que a norma brasileira, entre os critérios analisados, foi a menos restritiva. Também é possível inferir que ela pode não ser conclusiva para análise do conforto humano. Apesar disso, faz-se necessário ponderar as proposições dos critérios do AISC e do Peso Mínimo Efetivo – que, por sua vez, é baseado no AISC – pelo fato do primeiro estar voltado à avaliação principalmente de estruturas de aço e mistas, ao passo que se deseja avaliar, na verdade, estruturas apenas de concreto.

Ainda, é salutar reforçar que a aplicação de cargas dinâmicas resultou em valores de aceleração vertical razoavelmente altos pois se desejava analisar a situação mais desfavorável e pessimista para aquele piso – aplicou-se uma carga distribuída adicional de caráter variável considerando a densidade máxima recomendada por BACHMANN *et al.* (1995) para que todos as cargas nodais correspondentes a ela fossem representadas em uma função harmônica por meio de séries de Fourier. O estudo de FRANCO (2018), por exemplo, considerou em sua análise um processo dinâmico aleatório onde se supôs pessoas em posições de cerca de 80 cm afastadas uma das outras no centro do painel vibrante, configurando-se, de maneira análoga, um teste bastante severo para o pavimento. Outrossim, a análise experimental realizada por FERREIRA *et al.* (2021) que analisou cerca de 180 ensaios de vibração provocadas pelo caminhar em estruturas mistas, concluiu que o aumento de quantidade de pessoas caminhando sobre o piso acarreta o aumento da aceleração de pico, fato que reforça a adoção de análises com situações reais de serviço da estrutura.

7 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo apresentar e discutir o ELS-VE através de dois principais aspectos: obtenção de resultados relativos às vibrações por meio da análise dinâmica e comparação do comportamento dinâmico do pavimento em vibração livre e forçada com os limites de conforto nacional e internacionais. Os pontos levantados permitiram concluir que pavimentos que atendem aos estados-limites últimos e até outros estados-limites de serviço, como o de deformações excessivas, podem apresentar um comportamento inadequado ao se tratar das vibrações.

Para mitigar transtornos relacionados a vibrações e evitar a indesejada ressonância é possível realizar, basicamente, duas formas de intervenção: uma aumentando a frequência através de ajustes na rigidez e/ou na massa da estrutura, ou outra que consiste na introdução de amortecedores. Essas modificações podem ser onerosas e também desafiadoras ao projetista, que deve estar atento à necessidade da realização de análise dinâmica na fase de projeto de uma estrutura.

Nesse contexto, a primeira parte do trabalho foi desenvolvida com o objetivo de avaliar parâmetros modais da estrutura, principalmente as frequências naturais. Percebeu-se que o uso de *softwares* capazes de modelar o comportamento é indispensável para aferir os resultados de análise modal.

Permanecendo nesse tópico, foram realizados testes visando analisar a influência das características primordiais que interferem no cálculo das frequências naturais: a massa e a rigidez. Com relação à massa, a NBR 6118:2014 ainda é omissa quanto à consideração da porcentagem de carga variável que deve ser incorporada ao peso da estrutura. Testes com diferentes porcentagens de carga variável solidária mostraram que, entre a não consideração destas e a aplicação de 60%, os valores de frequências fundamentais variaram diminuindo progressivamente seu valor até -12,9%. A redução da rigidez por modificação do coeficiente de não linearidade física, por sua vez, apresentou uma diferença percentual de -10,55% entre a não consideração da fissuração e a consideração de 20% de fissuração. Esse comportamento é absolutamente esperado já que a frequência natural é proporcional à rigidez e inversamente proporcional à massa do sistema. A problemática, no entanto, está na indefinição dos ponderadores desses parâmetros pela norma, que pode gerar dúvidas, resultados pouco conservadores e ser também decisiva para o atendimento ou não dos limites de frequência fundamental estabelecidos pela própria NBR 6118:2014.

É importante, ainda, destacar que a aplicação do coeficiente de não linearidade física para lajes pelo TQS altera apenas os coeficientes de rigidez à flexão, podendo levar a resultados divergentes aos encontrados através de cálculos analíticos. Por esse motivo, o procedimento mais correto seria alterar diretamente o módulo de elasticidade secante nos critérios do material.

Dando continuidade à análise dinâmica, a segunda parte da pesquisa focou na aplicação de cargas dinâmicas como funções que definem a força vertical exercida por atividades humanas na estrutura. Aqui, dois pontos foram pertinentes: o uso de séries de Fourier para transformar solicitações de atividades humanas – definidas como periódicas ou transientes – em funções harmônicas se mostrou como uma aproximação possível e satisfatória para calcular os picos de aceleração de um nó do pavimento; o recurso de análise no tempo disponibilizado pelo TQS, além de ser simples de operar, foi bastante eficaz no estudo das vibrações forçadas. Além disso, percebeu-se que a alteração do amortecimento para o caso analisado teve pouca influência nos resultados de pico de aceleração.

A terceira e última parte do trabalho encerra o ciclo da análise de vibrações em pavimentos. Com os resultados de frequências naturais e acelerações de pico para as solicitações dinâmicas pôde-se avaliar o atendimento ao ELS-VE. A análise comparativa entre os critérios normativos, nacional e internacionais, para a avaliação do conforto gerado pelas vibrações induzidas por pessoas permitiu concluir que, em primeiro lugar, não há unanimidade entre eles, isso porque dependem da percepção humana que, por si só, é subjetiva. A norma brasileira, assim como o Model Code 2010, limita-se a estabelecer apenas o atendimento de uma frequência mínima, e pode não ser suficiente para o atendimento do conforto dos usuários.

Portanto, no sentido de melhorar as recomendações de projeto para lajes de concreto a fim de evitar vibrações excessivas sugere-se, como pesquisas futuras:

- A aplicação da análise em pavimentos “reais”, que contenham mais de uma laje e, possivelmente, diferentes tipologias e ocupações;
- A relação entre os valores de frequências naturais com a esbeltez das lajes no contexto da avaliação do conforto acústico.

8 REFERÊNCIAS

- ALLEN, D.E. **Building vibrations from human activities**. Concrete International, v.12, n.6, p.66-73. 1990
- ALMEIDA, S.; NOBREGA, P. G. B. HANAI, J. B. **Critérios de Vibração para Estruturas de Piso de Concreto Pré-moldado**. 1º Encontro nacional de pesquisa- projeto-produção em concreto pré-moldado. Anais. São Carlos: 2005
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações**. Rio de Janeiro, 2019.
- BACHMANN, H. et al. **Vibration problems in structures. Practical guidelines**. Birkhauser. 1995
- BACHMANN, H; AMMANN, W. J. **Vibrations in structures induced by man and machines**. 3. ed. International Association for Bridge and Structural Engineering, 1987.
- CEB – Comité Euro-International du Béton, **Vibration Problems in Structures – Practical Guidelines**, Bulletin d’information, n. 209, 1991.
- COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP model code 1990: final draft**. CEB Bulletin D’Information, n.203/204/205. Paris, June, 1991.
- CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. 5th ed. New York: Pearson, 1995.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. 3ª ed. Computers & Structures, New York. Inc., 2003.
- FAÍSCA, R. G. **Caracterização das cargas dinâmicas geradas por atividades humanas**. [s.1] Universidade do Rio de Janeiro, 2003.
- FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. fib (CEB-FIP) **Model Code for Concrete Structures 2010**. Lausanne: Ernst & Sohn, 2013.
- FERREIRA, B. E.; CARVALHO, H.; SILVA, J. G. S.; CALDAS, R. B. and AGUIAR, J. V. **Experimental evaluation of induced human walking vibrations on steel-concrete composite floors**. Rev. IBRACON Estrut. Mater., vol. 14, no. 4, e14406, 2021, <https://doi.org/10.1590/S1983-41952021000400006>

FRANCO, M. **Análise aleatória da vibração de pisos de escritórios e residências submetidos a pessoas caminhando.** Revista TQS News 32, 2018.

IBRACON/ABECE. **Estruturas de Concreto Armado.** Volume 1. 1 ed. São Paulo. Ed. IBRACON, 2022.

International Standard Organization. **ISO 2631-1.** Mechanical vibration and shock - Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 1: General requirements. 1997.

International Standard Organization. **ISO 2631-2.** Mechanical vibration and shock - Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 2: Vibration in buildings (1 Hz to 80 Hz). 1989.

International Standard Organization. **ISO 2631-2.** Mechanical vibration and shock - Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 2: Vibration in buildings (1 Hz to 80 Hz). 2003.

JOHANSSON, P. 2009. **Vibration of hollow core concrete elements induced by walking.** Lund, Sweden: Lund Institute of Technology, 2009.

KIMURA, A. **Informática aplicada a estruturas de concreto armado.** 2ed. São Paulo. Oficina de Textos, 2018.

LOZOVEY, A. R.; KOERICH, R. B.; SOUZA, F. A. **Critério do Peso Efetivo Mínimo para Lajes de Concreto Armado e Protendido no Estado-Limite de Vibrações Excessivas.** 60º Congresso Brasileiro de Concreto. Anais. Setembro, 2018.

MACEDO, L. V. S. **Análise modal e método da superposição modal.** Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Set. 2020.

MARCOS, L. K. **Sensibilidade a vibrações de pavimentos com lajes alveolares.** Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos, 2015

MAST, R.F. **Vibration of precast prestressed concrete floors.** PCI Journal, nov-dec/2001. p. 76-86.

MURRAY, T. M., ALLEN, D. E., UNGAR, E. E., DAVIS, B. D., 2016. **Steel Design Guide Series 11 - Floor vibrations due to human activity.** Chicago: American Institute of Steel Construction, 2016.

MURRAY T. M.; UNGAR E. E.; DAVIS D. B. **Facts for Steel Buildings - Vibration.** American Institute of Steel Construction. Chicago, 2018.

PAVIC, A.; REYNOLDS, P. Vibration serviceability of long-span concrete building floors. Part 2: Review of mathematical modelling approaches. **Shock and Vibration Digest**, v. 34, p. 279-297, 2002.

PINHEIRO, Libânio M. **Fundamentos do concreto e projeto de edifícios**. São Carlos, 2007.

SORIANO, H. L. **Introdução à Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

STOLOVAS, S. **Dinâmica aplicada em estruturas de concreto armado**. São Paulo: Curso TQS Informática, 2009.