



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EM ESTRUTURAS CONTÍNUAS BIDIMENSIONAIS

HIGO LEONARDO DA SILVA NASCIMENTO
NATAL - RN, 2019



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EM ESTRUTURAS CONTÍNUAS BIDIMENSIONAIS

HIGO LEONARDO DA SILVA NASCIMENTO

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao curso de Engenharia
Mecânica da Universidade Federal do
Rio Grande do Norte como parte dos
requisitos para a obtenção do título de
Engenheiro Mecânico, orientado pelo
Prof. Dr. João Carlos Arantes Costa
Júnior

NATAL - RN

2019

Aos meus pais (Clevany e Luiz) por compreenderem todos esses dias de ausência física e emocional. A Okabe por me ensinar o real sentido de El Psy Congroo!: “endureça a sua mente, porque o tempo devora todas as coisas”.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser concluído sem a ajuda de diversas pessoas as quais presto minha homenagem:

Agradeço ao meu orientador João Carlos Arantes Costa Júnior, por ter me apresentado o Método dos Elementos Finitos e a Otimização Topológica, áreas que à primeira vista ganharam meu interesse e definiram meus objetivos para o Mestrado e Doutorado. Agradeço também por sua paciência e ajuda nas explicações sobre a programação, a teoria do Método de Otimização Topológica e até mesmo em questões mais simples como na estruturação desse trabalho de conclusão de curso.

Aos meus amigos do curso (Rafael e Priscila) por me incentivarem a pesquisar e ampliar a minha visão sobre a Engenharia Mecânica em especial no desenvolvimento e simulação de projetos.

Aos meus amigos de residência (Henrique, Janderson e Rodrigo) por tornarem o processo de desenvolvimento desse trabalho mais leve e divertido. Agradeço pelo interesse em me ouvir falar sobre topologia, mesmo nem sendo área de estudos de vocês. Agradeço também por ouvir os meus “protótipos de explicação” sobre o tema, o que me ajudou muito na correção dos erros, na elaboração da apresentação final e até mesmo na análise dos resultados.

Aos meus amigos de infância (Tanatos e Hikan) por sempre me ouvirem, por me acompanharem nessa jornada na academia. Agradeço também por me ajudarem com sugestões, exemplos e artigos relacionados à Otimização Topológica, assim como a revisão final deste trabalho.

Aos meus pais (Clevany e Luiz) pelo apoio e incentivo a cursar a Engenharia Mecânica, por me ajudarem sobremaneira em toda a minha vida e entenderem todos esses dias de ausência emocional e física.

Por fim, um agradecimento especial a Okabe por me ensinar o real sentido de *El Psy Congroo!*: “endureça a sua mente, porque o tempo devora todas as coisas”.

Resumo

NASCIMENTO, H. L. S. **Método de Otimização Topológica em estruturas contínuas bidimensionais**. 2019. 80 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 2019.

Este trabalho apresenta o Método de Otimização Topológica com o objetivo de minimizar a flexibilidade sob restrições laterais e de volume, aplicado a estruturas simples das Engenharias Civil, Mecânica e da Aviação como vigas, ganchos, mísulas e nervuras do perfil bordo de ataque de asas, a qual é a principal aplicação. O Método de Otimização Topológica é formulado para determinar a melhor distribuição de material no domínio. O problema estático é resolvido com o Método dos Elementos Finitos em que a resposta estrutural é dada como deslocamentos nodais. Para a descrição do comportamento estrutural é utilizado um modelo de Material Isotrópico Sólido com Penalização, que usa uma densidade “fictícia” para representar a distribuição do material em cada elemento finito, que define as propriedades elásticas do material isotrópico. A solução é implementada com um algoritmo didático. A programação não linear é usada e o critério de ótimo é atualizado por um método heurístico. Além disso, filtros de sensibilidade e densidade são usados para minimizar a ocorrência de instabilidades numéricas: tabuleiros de xadrez, dependências de malha e mínimos locais. Os resultados são avaliados em três critérios: primeiro, a ocorrência destas instabilidades e desempenho do filtro, segundo o tempo de convergência e implementação e o último uma breve comparação com a literatura em uma análise geral sobre o resultado.

Palavras-chave: Otimização Topológica, Elementos Finitos, Perfil de asa, Nervura, Veículo Aéreo Não Tripulado

Abstract

NASCIMENTO, H. L. S. **Topology Optimization of continuum two-dimensional structures**. 2019. 80 p. Conclusion work project (Graduate in Mechanical Engineering) - Federal University of Rio Grande do Norte, Natal-RN, 2019.

This work presents the Topology Optimization Method where the objective is to minimize compliance with lateral and volume constraints of simple structures from Civil, Mechanical and Aviation Engineers like beams, hooks, corbels, and ribs from aircraft wings leading edge, the main application. The problems are solved by a Topology Optimization Method technique, formulated as finding the best material distribution into the domain. The static problem is solved with the Finite Element Method where the structural response is given as nodal displacements. The Optimality criteria are based in the power-law approach, also known as Solid Isotropic Material with Penalization that uses a “fictitious” density to represent the material distribution into each finite element that defines the elastic properties of isotropic porous material. The solution is implemented with a didactic algorithm. No linear programming is used and a heuristic updating scheme is used as standard optimality criteria. Besides, sensitivity and densities filters are used to minimize the occurrence of numerical instabilities: checkerboards, mesh-dependencies, and local minima. The results are evaluated in three criteria: first, the occurrence of these instabilities and filter performance, second the convergence and implementation time and the last one a brief comparison with the literature and a general analysis of the results.

Keywords: Topology Optimization, Finite Elements, Wing profile, Rib, Unmanned Aerial Vehicle

Lista de Ilustrações

Figura 2.1. Esquema simplificado de um algoritmo para otimização (SANT'ANNA, 2002).	9
Figura 2.2. Discretização do domínio Ω por elementos triangulares (GONÇALVES, 2016)	10
Figura 2.3 Principais elementos finitos utilizados (OLINQUEVICZ, 2015).	11
Figura 2.4. Domínio do modelo com 12 elementos retangulares (ANDREASSEN, CLAUSEN, <i>et al.</i> , 2010).	12
Figura 3.1. Modelos de otimização estrutural: (a) paramétrica, (b) de forma e (c) topológica	15
Figura 3.2. Gradiente de uma função com três variáveis (ARORA, 2012) adaptado.	18
Figura 3.3. (a) Conjunto convexo, (b) conjunto não convexo (ARORA, 2012).	24
Figura 3.4 Representação esquemática de uma função não linear com múltiplos pontos de mínimo (WINSTON, ALBRIGHT 2015, adaptado).	24
Figura 4.1. Microestrutura porosa (SANT'ANNA, 2002).	26
Figura 4.2 Representação do MOT na busca pela melhor distribuição de material no domínio Ω (SANT'ANNA, 2002).	27
Figura 4.3. Funções exponenciais utilizadas para aproximar a função densidade artificial. (SANT'ANNA, 2002)	28
Figura 4.4 Instabilidade de Tabuleiro (PORTO e PAVANELLO, 2007).	29
Figura 4.5 Dependência de malha (GUILHERME, 2006).	29
Figura 5.1. Domínio do modelo com 12 elementos (ANDREASSEN, CLAUSEN, <i>et al.</i> , 2010).	31
Figura 6.1. Condições de contorno e posição da carga para a viga engastada (ANDREASSEN, CLAUSEN, <i>et al.</i> , 2010).	37

Figura 6.2. Resultados com o filtro de sensibilidade (a) 80x50, $r_{min} = 3$ em, (b) 160x100, $r_{min} = 6$ e (c) 320 e 200 $r_{min} = 12$.	38
Figura 6.3. Resultados com o filtro de densidade (a) 80x50, $r_{min} = 3$ em, (b) 160x100,	39
Figura 6.4. (a) Domínio adotado para o gancho (NECHES e CISILINO, 2008). Resultado do MOT no Ansys (TAMTA e SAXENA, 2016).	43
Figura 6.5. Resultados para o exemplo 3 com o filtro de sensibilidade para fração de volume (a) 50%, (b) 40%, (c) 30% e (d) 20%.	44
Figura 6.6. Resultados para o exemplo 3 com o filtro de densidade para fração de volume igual a (a) 50%, (b) 40%, (c) 30% e (d) 20%.	45
Figura 6.7. (a) Domínio aplicado na OT da mísula (BRUGGI, 2009). (b) Resultados encontrados com a aplicação usado para a mísula (b) Resultado no método STM (BRUGGI, 2009) (c) resultados da OT no software Ansys (TAMTA e SAXENA 2016).	46
Figura 6.8. Resultados para o exemplo 4 com o filtro de sensibilidade para fração de volume (a) 50%, (b) 40%, (c) 30% e (d) 20%.	47
Figura 6.9. Resultados para o exemplo 3 com o filtro de densidade para fração de volume (a) 50%, (b) 40%, (c) 30% e (d) 20%.	48
Figura 6.10. Modelos típicos de nervuras. (RODRIGUES, 2009).	49
Figura 6.11 Distribuição de pressão a (a) 0° e (b) $9,5^\circ$	51
Figura 6.12. Perfil da borda da asa (XINXING, WENJIE, <i>et al.</i> , 2014) adaptado.	51
Figura 6.13 Coordenadas do perfil USA-35B (UIUC, 2019) adaptado.	52
Figura 6.14 Transformação das Coordenadas do perfil USA-35B.	53
Figura 6.15. Coordenadas do perfil a $\frac{1}{4}$ da corda, (a) aproximação por duas funções exponenciais e (b) distribuição do carregamento.	53
Figura 6.16. Resultados para o exemplo 5 com o filtro de sensibilidade para fração de volume (a) 60%, (b) 50%, (c) 40%, (d) 30%, (e) 20% e (f) 15%.	54

Figura 6.17 Resultados para o exemplo 5 com o filtro de densidade para fração de volume (a) 60%, (b) 50%, (c) 40%, (d) 30%, (e) 20% e (f) 15%. _____55

Figura 6.18.Comparação entre o perfil de nervura (a) literatura (RODRIGUES, 2009) adaptado e (b) resultado do algoritmo para 20% da fração de volume com o filtro de densidade. _____57

Lista de Tabelas

Tabela 6.1 Resultados do exemplo 1 com filtro de sensibilidade para diferentes números de elementos e raios mínimos.....	38
Tabela 6.2 Resultados do exemplo 1 com filtro de densidade para diferentes números de elementos e raios mínimos.....	39
Tabela 6.3. Resultado do exemplo 2 com filtro de densidade.....	41
Tabela 6.4. Resultado do exemplo 2 com filtro de sensibilidade.....	42
Tabela 6.5. Resultado do exemplo 3 com filtro de sensibilidade.....	44
Tabela 6.6. Resultado do exemplo 2 com filtro de sensibilidade.....	45
Tabela 6.7 Resultado do exemplo 4 com filtro de sensibilidade.....	47
Tabela 6.8. Resultados do exemplo 4 com o filtro de densidade.....	48
Tabela 6.9 Resultados do exemplo 4 com o filtro de densidade.....	55
Tabela 6.10 Resultados do exemplo 5 com o filtro de densidade.....	56

Lista de abreviaturas e siglas

<i>Sigla</i>	<i>Descrição</i>
CAD	<i>Computer Aided Desing</i>
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
MEF	Método dos Elementos Finitos
MOT	Método de Otimização Topológica
OT	Otimização topológica
PL	Programação Linear
PNL	Programação Não Linear
SIMP	Material Isotrópico Sólido com Penalização (<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>)
VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado

Lista de símbolos

<i>Símbolo</i>	<i>Descrição</i>
B_e	Fator multiplicador da atualização heurística
c	Flexibilidade
ch	Condição de parada
E	Módulo de Young
$fr(x)$	Fração de volume
F, f	Vetor de carregamento global e local
H	Fator de peso usado nos filtros
$H(x)$	Matriz hessiana
TI	Tempo por iteração
K	Matriz de rigidez global
k	Matriz de rigidez global
N	Número de elementos
N_k	Número de elementos na vizinhança do elemento k
$nelx$	Número de elementos da malha na direção horizontal
$nely$	Número de elementos da malha na direção vertical
ni	Número de iterações
t	Tempo de processamento
U, u	Vetor de deslocamentos global e local
$V(x), V_0$	Volume e volume inicial
x	Densidade
\tilde{x}	Densidade artificial
x, X	Coordenada na direção horizontal e coordenada x após transformação
y, Y	Coordenada na direção vertical e coordenada y após transformação
α	Passo
γ	Constante positiva
Δ	Distância usada para o raio de vizinhança
δ	Fator de amortecimento do fator B_e
η	Expoente de penalidade
λ	Multiplicador de Lagrange
v	coeficiente de Poisson

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Ilustrações	vi
Lista de Tabelas	ix
Lista de abreviaturas e siglas	x
Lista de símbolos	xi
Sumário	xii
1 Introdução	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Motivação e justificativa	3
1.3 Objetivo geral	4
1.4 Objetivos específicos	4
1.5 Problema de pesquisa	4
1.6 Aspectos metodológicos	5
1.7 Organização do documento	6
2 Conceitos básicos de otimização e elementos finitos	7
2.1 Algoritmo base para otimização	7
2.2 Método dos Elementos Finitos (MEF)	9
2.2.1 Discretização e modelo de malha	10
2.2.2 Deslocamentos, matriz de rigidez e condições de contorno	12
3 Otimização Estrutural	14
3.1 Conceitos básicos	14
3.1.1 Formulação geral do problema de otimização e variáveis de projeto ..	16
3.1.2 Função objetivo e restrições	16
3.1.3 Vetor gradiente e matriz hessiana	18

3.1.4 Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)	19
3.1.5 Teorema do ponto fixo	20
3.2 Problema de ótimo: minimização da flexibilidade com a restrição de volume	21
3.3 Programação matemática	22
3.3.1 Programação não linear (PNL)	23
4 Método de Otimização Topológica (MOT).....	25
4.1 Breve histórico	25
4.2 MOT em estruturas contínuas.....	26
4.3 Material Isotrópico Sólido com Penalização (SIMP)	27
4.4 Problemas numéricos da Otimização Topológica	28
4.4.1 Instabilidade de tabuleiro (<i>Checkboard</i>)	28
4.4.2 Dependência da malha	29
5 Formulação do algoritmo.....	30
5.1 Matlab	30
5.2 Análise dos Elementos finitos e condições de contorno	30
5.3 Atualização	33
5.4 Filtros: sensibilidade e densidade	33
5.5 Laço de otimização	35
6 Estudos de caso.....	36
6.1 Exemplo 1: Viga engastada	36
6.2 Exemplo 2: Estrutura de Michel	39
6.3 Exemplo 3: Gancho	42
6.4 Exemplo 4: Mísula	46
6.5 Exemplo 5: Nervura do bordo de ataque da asa.....	48
7 Conclusões.....	58
7.1 Gerais	58

7.2 Específicas.....	59
8 Sugestões para trabalhos futuros.....	62
9 Referências	63

1 Introdução

Neste capítulo é apresentado uma breve contextualização da Otimização Estrutural, o Método de Otimização Topológica (MOT) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) embasada na busca pelo “ótimo”. Assim como também é apresentado a motivação, justificativa do trabalho, os objetivos gerais e específicos, o escopo do projeto, aspectos metodológicos e organização do documento.

1.1 Contextualização

A humanidade passou grande parte do seu desenvolvimento criando novas ferramentas tanto teóricas quanto práticas para atender necessidades básicas. Para problemas relacionados ao transporte de pessoas, ferramentas para conformação de materiais, elementos estruturais para sustentação de cargas, entre tantos outros. A presença dessas necessidades levou ao ser humano a “experimentar soluções”, a arriscar e atender os objetivos por meio de tentativas e erros, o que formalmente é denominada de método “heurístico”. Essa forma de buscar soluções ainda é suficiente para atingir as necessidades, mas nem sempre garante o melhor resultado.

Com o tempo, “atender as necessidades” já não era suficiente. O homem passou a buscar pelo melhor, o mais barato, o mais eficaz, o “ótimo”. A busca pelo ótimo foi e ainda é um objetivo das muitas áreas de estudo da humanidade. Para a Engenharia não é diferente, após longos anos de estudos dos fenômenos físicos e a construção de modelos matemáticos deu-se origem a ferramentas e conceitos para que a busca por esse ótimo fosse um objetivo atingível e em tempo hábil.

Nessa vertente, para a Engenharia a otimização estrutural é uma dessas ferramentas criadas. A partir de modelos matemáticos e da teoria de elementos estruturais a otimização tem por objetivo obter um projeto ótimo, com as devidas restrições geométricas, de volume, de carregamento e até mesmo financeiras.

A busca por esse ótimo não é uma tarefa fácil e por isso uma forma de torná-la mais eficiente, confiável, física e matematicamente coerente em suas soluções é com o uso de algoritmos, a programação orientada a objeto, sistemas de Desenho

Assistido por Computador (do inglês *Computer Aided Design, CAD*) que caracterizam formas mais modernas de solucionar esses problemas.

Historicamente o estudo metódico sobre otimização estrutural foi introduzido por Maxwell em 1872 para barras, seguido pelo trabalho de Michel em 1904 sobre treliças. A forma inicial que esses trabalhos foram mostrados era muito complexa para o desenvolvimento analítico das equações diferenciais. Só na década de 60 o CAD e a análise matricial foram vistos como uma forma de solução. A partir disso, outra importante ferramenta foi desenvolvida: o Método dos Elementos Finitos (MEF) o qual particiona um elemento contínuo em finitos elementos a fim de encontrar uma solução para os problemas de equilíbrio (GUILHERME, 2006).

Nessa época começaram a se desenvolver as ferramentas matemáticas básicas para a otimização com computadores: simulação com o MEF, análise de sensibilidade numérica, algoritmos eficientes de programação matemática. As aplicações iniciais foram na engenharia aeronáutica, mas rapidamente também foi aplicada para as engenharias mecânica, civil, nuclear e química (GUILHERME, 2006).

A partir disso, a otimização estrutural foi dividida em três grandes grupos a otimização direta dos parâmetros (otimização paramétrica), a otimização de forma e por fim a otimização topológica, tema deste trabalho.

Segundo Guilherme (2006), a otimização topológica introduzida inicialmente por Bendsoe e Sigmund em 2003 é uma forma já bem empegada na engenharia e em softwares comerciais, nela sendo conhecido os carregamentos e fixações (apoios) dos elementos é possível minimizar (ou maximizar) uma variável, volume por exemplo, produzindo uma nova geometria a partir da introdução de furos dentro do domínio conhecido.

Essa forma de otimização muitas vezes gera geometrias complexas, peças e figuras que na análise computacional parecem mais obras de arte, com o seu visual sofisticado e que ao mesmo tempo atende aos requisitos da estabilidade e segurança.

Por outro lado, ainda que a aplicação desse método seja bem desenvolvida, soluções mais complexas exigem análises pontuais e muitas vezes a solução gerada por um software de mercado não satisfazem essas exigências. Dessa forma, neste trabalho é feito uma abordagem mais simplificada em estruturas bidimensionais e

contínuas com objetivo de minimizar a flexibilidade, para um determinado volume prescrito. Para isso, é usado um algoritmo didático com uso da programação não linear com base na literatura (SIGMUND, 2001) (ANDREASSEN, CLAUSEN, *et al.*, 2010).

1.2 Motivação e justificativa

No modelo industrial em que vivemos, a “era das indústrias 4.0” é de se esperar o máximo lucro, o máximo rendimento, o ótimo financeiro. A ideia de “desperdiçar” logo é relacionada ao prejuízo e a redução do rendimento. Por isso, a fabricação de peças leves e ainda assim resistentes é cada vez mais uma exigência de projeto seja na área estrutural e mecânica como na área aeroespacial, na qual esse conceito é largamente empregado e por isso é um dos focos desse trabalho.

A busca por esse material compacto e resistente em uma abordagem computacional de Otimização Topológica e Elementos Finitos já é um tema bastante difundido, mas ainda assim é um método relativamente novo para determinação de geometrias e análise estrutural. Por esse motivo, alguns engenheiros ainda desconhecem essa metodologia ou ainda preferem aplicar métodos mais clássicos. O que caracterizou uma motivação para a produção de trabalho, para difundir ainda mais essa área de pesquisa.

Além dessa motivação o que também foi determinante para o desenvolvimento desse trabalho foi a possibilidade de aplicar elementos finitos, programação não linear e otimização em uma área de pesquisa, o que é ao mesmo tempo promissor e motivante. A Otimização Topológica é uma área que metaforicamente une uma engenharia que contém os conhecimentos das estruturas, a computação para a formulação de algoritmos e também o design, a arquitetura, por apresentar resultados que muitas vezes é “futurista” e até mesmo “artístico”. Essa união da arquitetura e arte mais a preocupação de estabilidade, da segurança e com as questões financeiras (preocupações comuns na engenharia) leva a resultados visualmente interessantes que muitas vezes são inovadores.

1.3 Objetivo geral

O objetivo adotado no trabalho é maximizar a rigidez (o mesmo que reduzir a flexibilidade) de estruturas contínuas bidimensionais como vigas, estruturas de Michel, ganchos, mísulas, e a nervuras do bordo de ataque da asa de um Veículo Aéreo Não Tripulado (principal aplicação) submetidos à restrição de volume.

1.4 Objetivos específicos

Alguns objetivos específicos foram propostos para complementar e atingir o objetivo geral:

- Estudar o Método Otimização Topológica (MOT) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) para a aplicação em estruturas contínuas bidimensionais;
- Estudar a teoria por trás do problema de otimização, da programação não linear e dos problemas numéricos atrelados a esse tipo de otimização estrutural;
- Estudo e uso de um algoritmo sucinto de Otimização Topológica com base em métodos heurísticos
- Aplicação do algoritmo para elementos simples como vigas, estruturas de Michel, ganchos e nervuras do perfil do bordo de ataque de asas, a qual é escolhido a asa de um Veículo Aéreo Não Tripulado uma aplicação específica.
- Avaliar os resultados em três critérios distintos: primeiro, a ocorrência destas instabilidades e desempenho do filtro, segundo o tempo de convergência e implementação e o último uma breve comparação com a literatura em uma análise geral dos resultados.

1.5 Problema de pesquisa

Como apresentado no objetivo geral e nos específicos, neste trabalho está interessado pela avaliação do MOT em um viés computacional e estrutural, na qual é avaliado se os resultados são fisicamente coerentes, já que o método usado neste

trabalho, a lei da potência, utiliza uma abordagem matemática que só vai ganhar sentido físico no fim do processamento.

Por isso, o principal problema de pesquisa está atrelado a programação em conjunto com os objetivos, restrições e condições de contorno e carregamento propostos. Esses problemas muitas vezes é decorrência de uma série de fatores como a função objetivo (e ou restrições) são muito complexas e podem apresentar grandes dificuldades de convergência. Assim de forma simplificada, pode-se enumerar os seguintes problemas de pesquisa deste trabalho:

- Função objetivo não convexa;
- Não unicidade da solução;
- A função pode apresentar pouca sensibilidade à variação das variáveis de entrada;
- A função por não ser convexa pode apresentar múltiplos mínimos locais;
- Resultados não fisicamente coerentes;
- Não convergência;
- Instabilidades numéricas como tabuleiro de xadrez e dependência de malha oriunda do método da potência e do MEF;
- Topologia final não adequada com o problema proposto.

1.6 Aspectos metodológicos

O desenvolvimento desse projeto e simulação foi feito com base na literatura já existente do MOT em especial nos modelos usados por de Sigmund (2001), Andreassen e Clausen *et al.* (2010) que formularam um algoritmo simples e didático no Matlab. A partir disso, foram feitas modificações necessárias no modelo original para as aplicações escolhidas. As estruturas contínuas bidimensionais usadas foram escolhidas para mostrar a gama de versatilidade da OT tanto para sistemas simples como um gancho para elevação de carga, como para geometrias e carregamentos mais complexos como é o caso do design de uma nervura, os sistemas treliçados internos da asa de um Veículo Aéreo Não Tripulável.

A geometria e condições de contorno foram introduzidas no algoritmo e após isso foi analisado o efeito da variação dos resultados com base na mudança dos parâmetros de entrada.

1.7 Organização do documento

O capítulo 1 apresenta a introdução ao trabalho, buscando uma imersão no contexto ao qual o projeto está sendo desenvolvido. Além disso, é apresentado o objetivo geral e específicos, assim como a motivação, justificativa, os aspectos metodológicos e de organização do trabalho.

O capítulo 2 trata da revisão bibliográfica sobre os conceitos básicos de projetos otimizados e sobre o Método dos Elementos Finitos (MEF). Nesse capítulo é mostrado como o MEF é uma ferramenta necessária para a otimização e o seu funcionamento de forma simplificada.

No capítulo 3, é abordado a teoria sobre a otimização estrutural, os conceitos básicos como as variáveis de projeto, funções objetivo e restrições assim como a base matemática e de programação empregadas neste trabalho.

O capítulo 4 é sobre o Método de Otimização Topológica em que é apresentado um breve histórico e os conceitos fundamentais. Além disso é abordado a Teoria da Elasticidade Linear Infinitesimal Isotrópica, a lei da potência, assim como os problemas numéricos atrelados a esse critério de ótimo.

No capítulo 5, é mostrado a formulação do código usado neste projeto oriundo das pesquisas de Sigmund (2001), Andreassen e Clausen *et al.* (2010).

No capítulo 6, é analisado os domínios de interesse e os resultados da aplicação do MOT para os cinco exemplos empregados: viga, estrutura de Michel, gancho, mísula e a nervura do bordo de ataque da asa de um VANT. Essa análise é reiterada no capítulo 7 em que um apanhado geral é feito sobre o trabalho. No capítulo 8, é apresentado as sugestões para trabalhos futuros seguido pelas referências no capítulo 9.

2 Conceitos básicos de otimização e elementos finitos

Neste capítulo é apresentado a base de um algoritmo de otimização, assim como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e porque ele é empregado em problemas de otimização estrutural.

2.1 Algoritmo base para otimização

Antes de definir os conceitos de elementos finitos e o MOT é importante apresentar o modelo básico que um algoritmo genérico deve apresentar para a obtenção do “ótimo”.

A determinação de um ótimo para um projeto pressupõe, além da caracterização inicial, um objetivo. Esse objetivo pode ser tanto um máximo ou um mínimo de uma propriedade ou parâmetro os quais são modelados por meio de uma função, que é denominada “função objetivo”. A determinação desses máximos e mínimos é solucionada por um método oriundo da teoria do cálculo diferencial, largamente empregado nos métodos de otimização (SANT’ANNA, 2002).

Segundo Sant’Anna (2002), inicialmente, deseja-se determinar a aplicação (necessidade) a qual o projeto vai ser utilizado. Após isso é preciso determinar quais variáveis influenciam direta ou indiretamente no problema, assim como a definição das condições de contorno do problema, os carregamentos e os apoios. Além disso, as variáveis que determinam as propriedades dos elementos, as quais são chamadas de parâmetros de projeto, que são indispensáveis para caracterizá-lo.

Muitas vezes o projeto apresenta limitações físicas ou de caráter financeiro, e isso é imposto no método por meio das restrições, aplicadas nos parâmetros de projeto, sejam elas no volume, na densidade ou até mesmo nas tensões e deslocamentos do sistema. Fisicamente, o funcionamento do projeto é determinado por suas equações de estado, elas que determinam como o sistema irá funcionar. Essas variáveis dependentes direta ou indiretamente dos parâmetros devem ser determinadas para verificar se as restrições estão sendo respeitados. Essa etapa é dita como a análise do modelo (SANT’ANNA, 2002) (NOCEDAL e WRIGHT, 2006).

Após essa análise é feita a etapa de otimização, analiticamente, essa etapa é complexa e demanda muito tempo, mas para solucionar isso, é que a programação e os Métodos dos Elementos Finitos são utilizados, o processo iterativo e a discretização do problema possibilita a atualização dos valores e a verificação do resultado e se eles são “bons o suficiente” para serem “ótimos”.

A determinação do “ótimo” deve atender, obviamente, a necessidade como também atender as restrições e ser o melhor entre as iterações/valores determinados para os parâmetros do projeto. A avaliação inicial dessas variáveis é feita pelo projetista, os quais são os valores iniciais das variáveis determinadas experimentalmente ou com base na literatura. Segundo Sant’Anna (2002) o ótimo é avaliado por um critério também escolhido pelo projetista e avaliado em inúmeras iterações em um tempo limitado até a convergência, de forma esquemática isso pode ser visualizado na Figura 2.1.

- O início do algoritmo representa a caracterização do projeto e as simplificações utilizadas para avaliar variáveis/constantes de controle e de interesse para o problema, assim como o domínio, objetivo e restrições;
- Análise: é feita a análise inicial que dependendo do problema pode ser uma análise estática, dinâmica ou modal;
- Análise de Sensibilidade é a etapa da análise dos Elementos Finitos e gradientes
- A otimização é a etapa a qual as a variável de projeto é submetida aos algoritmos de minimização
- Por fim, é feito a atualizações dos resultados e teste convergência, se o resultado for o “ótimo” finaliza o algoritmo, caso contrário o laço volta a etapa de análise.

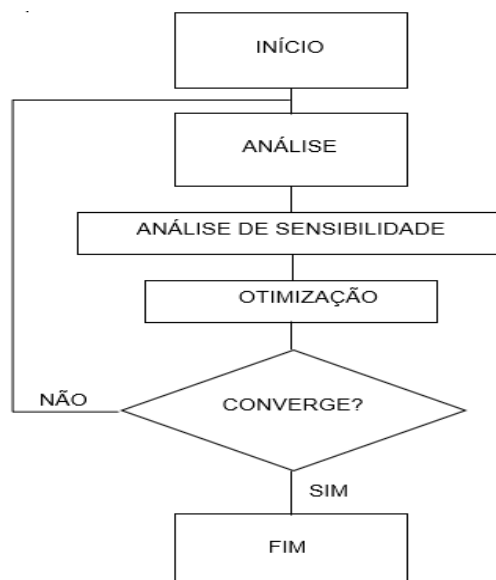


Figura 2.1. Esquema simplificado de um algoritmo para otimização (SANT'ANNA, 2002).

Nas iterações do algoritmo muitas ferramentas matemáticas e de programação são utilizadas. Como mencionado, os modelos iniciais de otimização eram muitos complicados para serem solucionados diretamente pelo cálculo diferencial. A análise de elementos contínuos torna impraticável, em tempo hábil, a obtenção do tão desejado “ótimo”. Assim, para solucionar esse problema é feita a divisão das estruturas para após isso ser aplicado critério de ótimo. Essa discretização é feita pelos MEF que é apresentado a seguir.

2.2 Método dos Elementos Finitos (MEF)

Segundo Teixeira-Dias (2009) o Método dos Elementos Finitos (MEF) é usado para a modelagem de um problema genérico que envolve meios contínuos, por meio da análise de partes discretizados, para os quais é possível conhecer ou obter uma descrição matemática do seu comportamento. O domínio do problema é dividido em subdomínios/elementos para facilitar ou até mesmo tornar possível a análise e solução do problema.

Essa divisão pressupõe que cada subdomínio apresente seu próprio sistema de variáveis e equações, isto é, variáveis locais. Essa forma de análise leva a uma aproximação polinomial do problema. A vantagem dos elementos finitos é discretizar

o domínio por meio de funções simples. A divisão do problema leva a pontos de fronteira os quais são denominados “nós” como pode ser observado na Figura 2.2 (GONÇALVES, 2016).

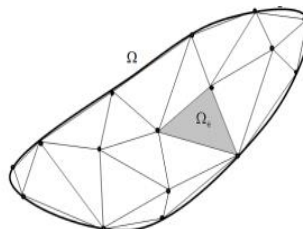


Figura 2.2. Discretização do domínio Ω por elementos triangulares (GONÇALVES, 2016)

O domínio Ω é subdividido em n subdomínios triangulares os quais devem apresentar continuidade e diferenciabilidade local para garantir a aplicação dos métodos de soluções que utilizem a modelagem por gradientes (o método mais comum na otimização).

Na análise de um problema estrutural, os elementos finitos são usados para resolver equações de equilíbrio, a aplicação do método é usada neste trabalho pressupondo a Teoria da Elasticidade Linear Infinitesimal Isotrópica, na qual caracteriza a propriedade mecânica dos materiais de sofrer deformações reversíveis.

Neste trabalho não será aprofundado a teoria dos elementos finitos, mas sim apenas na etapa de análise e caracterização do domínio. Segundo Olinquevicz (2015), há sete etapas básicas para aplicação do MEF, as quais serão apresentadas nas próximas seções.

2.2.1 Discretização e modelo de malha

Segundo Olinquevicz (2015) a discretização da geometria é etapa base do MEF, consiste na divisão um sistema equivalente de elementos finitos. Deve-se escolher o tipo de elemento que melhor representa o comportamento físico da estrutura. Os elementos devem ser pequenos o suficiente para representar variações devido a mudanças de geometria e grandes o suficiente para reduzir o tempo computacional. Essa discretização é chamada de “malha”. A escolha do elemento

finito adequado para um problema particular depende do problema a ser resolvido e da experiência do projetista. Na Figura 2.3, é apresentados os mais usados elementos utilizados.

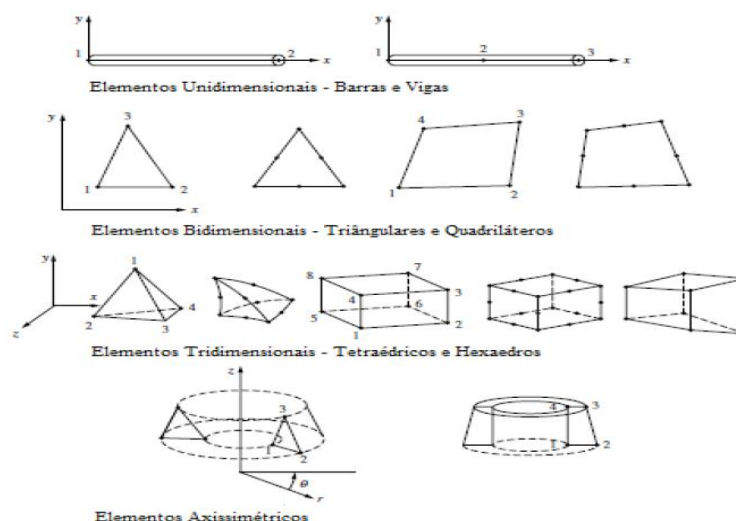


Figura 2.3 Principais elementos finitos utilizados (OLINQUEVICZ, 2015).

Neste trabalho foi utilizado apenas malhas quadrilaterais, que são formadas por elementos retangulares. Assim, mantendo todos os elementos da malha com as mesmas características, somente um elemento necessita ter sua matriz de rigidez local calculada para a construção da matriz de rigidez global, pois, segundo Guilherme (2006), as matrizes de rigidez locais são similares, diferindo apenas por uma constante multiplicativa. Outro motivo pelo qual são utilizadas malhas regulares, consiste na facilidade de implementação dos filtros.

Na Figura 2.4 é possível ver o modelo de malha usado neste trabalho, oriundo do estudo de Andreassen e Clausen *et al.* (2010), a qual mostra uma viga com dois apoios e a malha com 4 elementos na direção horizontal e 3 elementos na direção vertical. Cada elemento apresenta quatro nós e cada nó dois Graus de Liberdade (GL).

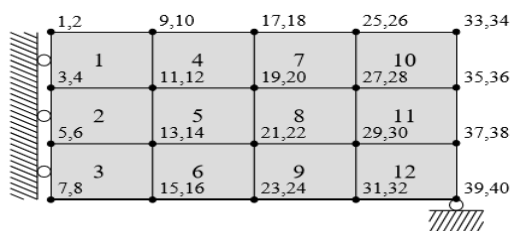


Figura 2.4. Domínio do modelo com 12 elementos retangulares (ANDREASSEN, CLAUSEN, *et al.*, 2010).

Além disso, a análise bidimensional feita no trabalho utiliza sistemas treliçados para otimização. A treliça é um elemento estrutural eficiente porque apenas suporta tração ou compressão em todo o seu comprimento.

A discretização gera a análise do problema total em vários problemas menores, com isso cada elemento vai apresentar seu próprio deslocamento nodal e matriz de rigidez, o que é apresentado na próxima etapa.

2.2.2 Deslocamentos, matriz de rigidez e condições de contorno

Na segunda etapa, é definida a função para calcular de forma aproximada os deslocamentos locais por meio dos deslocamentos nodal. Polinômios lineares, quadráticos e cúbicos são geralmente usados e esta escolha é determinada pelo número de nós e graus de liberdade do elemento (OLINQUEVICZ, 2015).

Na terceira etapa, é feito o desenvolvimento da matriz de rigidez e das equações dos elementos finitos, em que relaciona as forças aos deslocamentos nos nós. O sistema de equações é obtido usando condições de equilíbrio de forças em conjunto com a relação entre de força e deslocamento. Para elementos bi e tridimensionais outros métodos são necessários tais como os métodos de energia ou trabalho ou os métodos de resíduos ponderados. O resultado é o sistema de equações mostrado na Equação (2.1). (OLINQUEVICZ, 2015) (CHANDRUPATLA e BELEGUNDU, 2014).

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

A qual é equivalente a equação (2.2):

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u} \quad (2.2)$$

Em que \mathbf{f} é um vetor das forças nos nós do elemento, \mathbf{k} é a matriz de rigidez do elemento \mathbf{u} é o vetor dos deslocamentos do elemento.

A construção da matriz de rigidez global pode ser de forma direta com expansão seguida de uma superposição das matrizes de rigidez local ou ainda pelo método da rigidez direta, o qual posiciona os elementos nos graus de liberdade adequados (OLINQUEVICZ, 2015).

Após isso, na quinta etapa, é introduzido as condições de contorno e os deslocamentos prescritos. O sistema de equações resultante pode ser resolvido por métodos de eliminação ou ainda métodos numéricos.

Na sexta etapa, a partir dos deslocamentos resultantes das equações de equilíbrio pode-se determinar as reações nos apoios assim como as tenções desenvolvidas. Por fim, na sétima e última etapa os resultados obtidos devem ser analisados para ver se a estrutura está dentro dos objetivos definidos para o projeto.

Esse conjunto de etapas caracterizam a ferramenta usada para a otimização, pois no caso da Otimização Topológica, uma das formas de Otimização Estrutural, tema deste trabalho, a solução das equações de equilíbrio precisa ser solucionada constantemente, pois a geometria é alterada a cada iteração.

3 Otimização Estrutural

Neste capítulo é apresentada a teoria por trás da Otimização Estrutural. Os conceitos básicos: a formulação geral de um problema de otimização, as variáveis de projeto, função objetivo, as restrições, vetor gradiente, matriz hessiana, condições de Karush-Kuhn-Tucker(KKT) e o teorema do ponto fixo, como também o problema de ótimo deste trabalho que é a minimização da flexibilidade com a restrição do volume. Por fim, ainda é feita uma breve revisão sobre a programação não linear que é empregada para a solução desse problema de ótimo.

3.1 Conceitos básicos

Uma etapa fundamental na solução de um problema de otimização estrutural consiste na solução das equações de equilíbrio, seja analiticamente ou numericamente. Nesses problemas, é comum que as variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições dependam direta ou indiretamente da solução das equações de equilíbrio. Por esse motivo, a correta solução dessas equações é uma etapa fundamental na busca do ótimo (NOCEDAL e WRIGHT, 2006).

Neste trabalho utilizam-se as equações da Teoria da Elasticidade Linear Infinitesimal Isotrópica (do inglês, SIMP: *Solid Isotropic Material with Penalization*) para o cálculo da resposta estrutural do sistema e além disso admite-se regime elástico para todas as estruturas, logo sendo lei de Hooke é válida (SANT'ANNA, 2002).

A Otimização Estrutural, nessa abordagem infinitesimal, pode ser classificada em três grandes grupos otimização paramétrica, de forma e topológica.

Segundo Sant'Anna (2002) na otimização paramétrica é alterado diretamente as variáveis do projeto como diâmetro, espessura, abordada inicialmente por Vanderplaats em 1994. Nesse modelo uma vez escolhida uma geometria ela não é alterada no processo de otimização, isso pode ser observado no sistema treliçado da Figura 3.1, caso (a), no qual os diâmetros de algumas vigas é aumentado, o que é representado pelas linhas mais escuras.

A otimização de forma, por sua vez, permite a alteração da geometria dos componentes, mas não permite que a posição desses elementos seja alterada, assim como mostrado na Figura 3.1, caso (b), no qual os furos circulares ganham geometrias não convencionais, mas apresentam a mesma posição inicial, isto é, não há inserção de novos furos na peça para atingir o ótimo. É um modelo mais antigo do que a paramétrica apresentado inicialmente por Haftka e Grandhi em 1986 (OLINQUEVICZ, 2015).

Por fim, a Otimização Topológica (OT), foco deste trabalho, na qual o domínio é fixo, bem definido e não se modifica durante a solução, mas para atingir o ótimo realiza-se uma distribuição de material/massa no domínio, essa distribuição pode ser feita com a inserção de furos/vazios ou a adição de material. O resultado tanto pode gerar geometrias convencionais(como treliças, quadros, furos) como mostrado na Figura 3.1, caso (c), como também topologias não convencionais, como formas semelhantes a da Figura 3.1 (b). Os pioneiros nesse método foram os pesquisadores Bendsøe e Kikuchi em 1988 (OLINQUEVICZ, 2015).

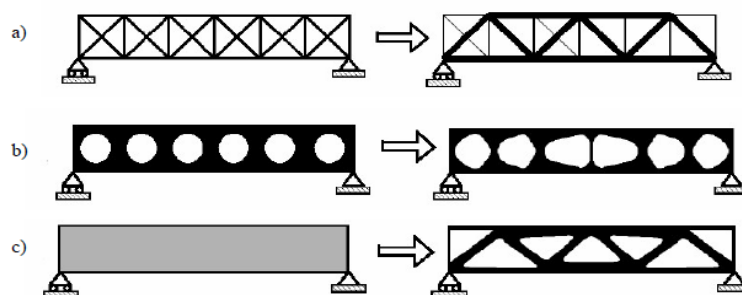


Figura 3.1. Modelos de otimização estrutural: (a) paramétrica, (b) de forma e (c) topológica BENDSØE e SIGMUND, (2003) *apud* OLINQUEVICZ, (2015)

A Otimização Estrutural envolve a obtenção de valores ótimos, isto é, máximos e mínimos de funções. Com a aplicação dos elementos finitos, esses valores ganham caráter vetorial, por isso é preciso definir, antes de tudo, um modelo geral de otimização, as variáveis de projeto, a função objetivo, restrições assim como as ferramentas matemáticas usadas para a determinação do ótimo, como é apresentado nas próximas subseções.

3.1.1 Formulação geral do problema de otimização e variáveis de projeto

A formulação geral de um problema de ótimo é definida na equação (3.1) baseado em Arora (2012):

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} & h_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, m \\ \text{sujeito a} & g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \quad (3.1)$$

Em que f é a função objetivo a qual deseja-se minimizar, sujeita, no caso as m -restrições de igualdade h_i , as n -restrições de desigualdade g_j com o domínio determinado pelo vetor \mathbf{x} que é a variável de projeto.

As variáveis de projeto são os parâmetros de interesse para a avaliação e otimização do sistema. Devido à discretização realizada MEF, é conveniente uso da notação vetorial na qual cada variável é independente uma da outra (ARORA, 2012), como mostrado na equação (3.2).

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (3.2)$$

Em que \mathbf{x} é um vetor geral de dimensão n , neste trabalho esse vetor caracteriza a densidade dos elementos.

Segundo Arora (2012), os valores dessas variáveis podem ser discretos, dentro de um conjunto permissível restrito ao projeto ou ainda contínuas com valores máximo e mínimos. Se os valores das variáveis não atendem as restrições impostas é dito que o projeto não é possível ou não viável. Por outro lado, se as restrições forem satisfeitas o projeto é considerado viável.

3.1.2 Função objetivo e restrições

Segundo Sant'Anna (2002) a busca pelo ótimo não apresenta uma única solução viável, o modelo interativo pode apresentar múltiplas soluções que atendem os objetivos e restrições. Algumas dessas soluções são melhores que outras, mas

nem sempre a melhor é viável devido a questões operacionais de programação. Assim deve ser estabelecido quais são as funções objetivo e as considerações e simplificações usadas para a sua determinação. Essa abordagem é denominada uma Otimização com Multiobjetivos.

Após isso definem-se restrições como todos os requerimentos impostos às variáveis de projeto. Exemplo disso são os limites superiores e inferiores para os valores admissíveis (restrições laterais), bem como restrição sobre a tensão e a flexibilidade (muitas vezes chamadas de restrições tecnológicas). Podem ser de desigualdade ou igualdade. Restrições de igualdade que estão sempre presentes em problemas de otimização estrutural são as equações de equilíbrio e as restrições de volume (SANT'ANNA, 2002).

A seleção de uma função objetivo é de extrema importância no processo assim como a seleção das variáveis do projeto, as funções objetivo e as restrições assim como o uso de hipóteses simplificadoras. Neste trabalho, por exemplo, a função a ser minimizada é a flexibilidade, o volume é considerado uma restrição. Uma abordagem com múltiplos objetivos com o volume como função objetivo é igual viável. Entretanto, o modelo com o volume sendo uma restrição é mais simples e é usualmente empregado nos problemas estruturais, como afirmado por Sant'Anna (2002), por isso essa abordagem foi usada para a solução do problema.

Além disso, segundo Sant'Anna (2002), a redução do volume e minimização da flexibilidade resulta em estruturas mais compactas e menos desperdícios de material o que é bem-visto financeiramente. Por outro lado, é importante ter-se em mente que essa afirmação nem sempre é verdadeira. Um dos fatores que reduzem o custo de um projeto é realmente um menor gasto de matéria-prima. A otimização topológica, no entanto, como já mencionado, pode aumentar a complexidade da geometria gerada devido a inclusão de furos e reforços. Este trabalho não considerou os custos de fabricação na função objetivo, mas sim o interesse da obtenção da topologia ótima.

3.1.3 Vetor gradiente e matriz hessiana

O vetor gradiente e a matriz hessiana são elementos do cálculo que auxiliam na percepção matemática e gráfica da solução de um problema de ótimo, por isso eles são aqui brevemente introduzidos.

O vetor gradiente é o vetor de derivadas da função objetivo em relação a variável de projeto, esse vetor determina a sensibilidade de busca pelo máximo ou mínimo em determinado ponto de extremo (\mathbf{x}^*).

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

O vetor gradiente é definido como sendo normal ao plano tangente no ponto \mathbf{x}^* em uma análise geométrica. Nesse ponto o vetor gradiente sempre aponta na direção do máximo aumento da função objetivo. Portanto, para a determinação da descida mínima basta utilizar a direção oposta ($-\nabla f(\mathbf{x}^*)$). A Figura 3.2 mostra esse conceito para uma função de três variáveis (ARORA, 2012) em uma plano conhecido/constante.

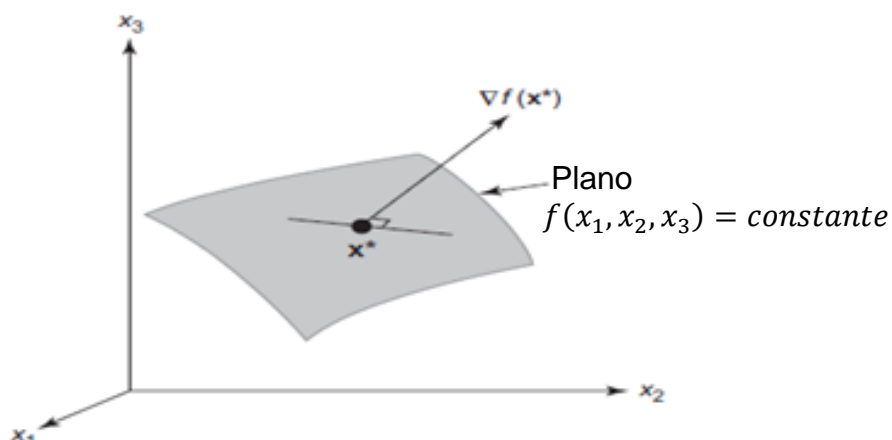


Figura 3.2. Gradiente de uma função com três variáveis (ARORA, 2012) adaptado.

Outro componente do cálculo que precisa ser determinado para a minimização de funções é a matriz hessiana que é a combinação de derivadas mistas de segunda ordem do vetor gradiente, assim como mostrado na equação (3.4).

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Definidos o vetor gradiente e a hessiana é necessário agora apresentar a teoria que valida se um valor de uma função é ou não um máximo ou mínimo.

3.1.4 Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Segundo Sant'Anna (2002), em 1951, Kuhn e Tucker propuseram as condições matemáticas para um dado ponto no espaço poder ser considerado um ponto ótimo. Como esses critérios matemáticos haviam sido anteriormente de forma independente propostos por Karush, esses teoremas e proposições passaram a ser conhecidos como condições de ótimo de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). As condições de KKT, se satisfeitas, garantem que um ponto \mathbf{x}^* é realmente um ponto extremo.

As condições necessárias e suficientes que definem um ponto extremo são definidas para um problema de otimização sem restrições. A solução dos problemas com restrições é feita com o uso de métodos como o Lagrangiano aumentado ou ainda outros métodos numéricos/métodos heurísticos, os quais “convertem” o problema para um modelo sem restrições.

Assim para um problema de ótimo sem restrições, seja $f(\mathbf{x})$ uma função objetivo tal que $f: S \subseteq \Re^n \rightarrow \Re$ e $\mathbf{x} \in S$ um vetor que define as variáveis de projeto e \mathbf{x}^* um ponto extremo, as seguintes condições de ótimo são propostas (SANT'ANNA, 2002) (ARORA, 2012):

Condição necessária: Para que x^* seja um extremo local da função $f(x)$, diferenciável em x^* , é necessário que equação (3.5) seja satisfeita.

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad (3.5)$$

Condição necessária de 2ª ordem: Para que x^* seja um extremo local da função $f(x)$, duas vezes diferenciável em x^* , $H(x^*)$ deve ser positiva (ou negativa) semi-definida.

A hessiana positiva (ou negativa) semi-definida pressupõe que todos os seus autovalores são maiores ou iguais a zero para que x^* seja um ponto de mínimo local.

Na teoria, é preciso uma condição necessária de ordem “n”, mas para o caso de funções suaves, comuns nos problemas estruturais, a condição segunda de 2ª ordem é empregada. Entretanto, essas condições não garantem o máximo ou mínimo pois devido a existência dos pontos de inflexão, torna-se necessário uma condição suficiente.

Condição suficiente: Sendo a equação seja $f(x)$ duas vezes diferenciável em x^* de forma que $H(x^*)$ é positiva (ou negativa) definida, é garantido que x^* é um ponto extremo, isto é, um mínimo (ou máximo) da função.

3.1.5 Teorema do ponto fixo

De forma geral, o algoritmo usado para minimizar (ou maximizar) uma função objetivo utiliza o Teorema do Ponto Fixo em conjunto com uma regra de descida. Segundo Arora (2012), o teorema de ponto fixo pode ser expresso conforme a equação (3.6).

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (3.6)$$

Em que x é uma variável de projeto (um vetor, aqui toma o papel da densidade), α_k o valor do passo de d_k que é a direção de descida desejada. Portanto, o problema de otimização se divide em duas partes, a busca pela direção de otimização e o “quanto” é preciso descer o que caracteriza o passo.

A direção e o passo, podem ser avaliados por muitos métodos analíticos ou heurísticos em uma abordagem por programação linear ou não linear. No caso desse trabalho, por um método heurístico oriundo do trabalho de Andreassen e Clausen, *et al.* (2010) em uma abordagem por programação não linear.

3.2 Problema de ótimo: minimização da flexibilidade com a restrição de volume

Neste trabalho, a função objetivo c é definida como a flexibilidade da estrutura, isto é, o inverso da rigidez. A flexibilidade é definida nas equações (3.7).

$$c(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \quad (3.7)$$

Em que \mathbf{F} e \mathbf{U} são os vetores globais de forças e de deslocamento respectivamente. Assim como feito para um elemento, as condições de equilíbrio em uma análise global são apresentadas na equação (3.8).

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.8)$$

Em que \mathbf{K} é a matriz de rigidez. Assim substituindo a equação (3.8) na equação (3.7) a flexibilidade pode ser definida em função apenas da matriz de rigidez e dos deslocamentos como apresentado na equação (3.9).

$$c(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^T \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (3.9)$$

Ademais, no modelo analisado, as restrições de igualdade (h , vide equação (3.1)) são compostas pela restrição do volume e as condições de equilíbrio, há também restrições laterais no domínio da densidade (valores entre 0 e 1), como pode ser observado na equação (3.10) que apresenta problema de otimização baseado em Andreassen e Clausen *et al.* (2010).

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}} & c(\mathbf{x}) &= \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{k=1}^N E_k(x_k) \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} \\
& \text{sujeito a} & fr(\mathbf{x}) &= V(\mathbf{x})/V_0 \\
& & & \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \\
& & & 0 \leq x \leq 1
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Em que, além das variáveis já apresentadas nesta seção, \mathbf{u} e \mathbf{k} são o vetor de deslocamento local e a matriz de rigidez, respectivamente, E_k o módulo de Young do elemento fr a restrição de volume, V o volume atual, V_0 o volume inicial, x a densidade e N o número de elementos.

A solução desse problema de ótimo é realizado por um método de Otimização Topológica, apresentado no capítulo 4, já o passo e a direção de descida com base no teorema do ponto fixo são realizados por um método heurístico o qual é apresentado na formulação do algoritmo no capítulo 5.

3.3 Programação matemática

A programação matemática é uma classe especial de método numérico iterativo. A partir de uma estimativa inicial usada como ponto de partida, uma busca sistemática iterativa é feita no domínio de projeto até que um ótimo seja gerado. A cada iteração as condições de equilíbrio devem ser satisfeitas. A busca termina quando um determinado critério é satisfeito, indicando que o atual projeto está suficientemente perto do ótimo (SANT'ANNA, 2002).

Segundo SANT'ANNA (2002) dependendo dos tipos de funções que constituem as restrições e a função objetivo, a programação matemática recebe diferentes denominações, destacando-se:

- Programação Linear (PL): função objetivo e restrições lineares;
- Programação Quadrática (QP): função objetivo quadrática e restrições lineares;
- Programação Não-Linear (PNL): função objetivo e/ou as restrições não lineares;

- Programação Inteira (PI): busca a solução ótima dentro de um conjunto de valores discretos.

3.3.1 Programação não linear (PNL)

A PNL é semelhante a PL em alguns aspectos, pois ambas possuem uma função objetivo, restrições e variáveis de projeto. A diferença como classificado na seção anterior está no tipo de funções analisadas em cada método. Na programação não linear, as funções em análise são não lineares, isto é, não apresentam proporcionalidades constantes (como é o caso da função x^2 , $\text{sen}(x)$, e^x etc). Assim se apenas uma função objetivo ou uma restrição é não linear todo o problema de otimização se torna não linear, caso não seja optado por algum método de linearização (MINEIRO, 2007).

A natureza em geral apresenta problemas não lineares, o que significa que o modelo real é melhor aproximado por um modelo não linear. O método de linearização é uma alternativa para a solução desses problemas, mas se o modelo idealizado apresentar muitas funções não lineares, até mesmo esses métodos não são suficientes.

Segundo Mineiro (2007) a solução de problemas de PNL é mais complexa do que os de PL, isso porque é possível garantir que um problema de PL apresenta apenas um ótimo, o que não ocorre normalmente para o PNL. Para a PNL é preciso antes disso a análise de todo o domínio ou parte dele no que se refere à concavidade ou à convexidade da função e também à presença de mínimo/máximo globais e locais.

Segundo Arora (2012), graficamente, uma função/conjunto é dita convexa(o) se traçado uma linha de um ponto qualquer outro ponto ambos contidos no domínio e essa reta está contida inteiramente no domínio então a função/conjunto é, é convexa(o). Assim como mostrado na Figura 3.3. caso (a) um conjunto convexo e (b) um conjunto não convexo.

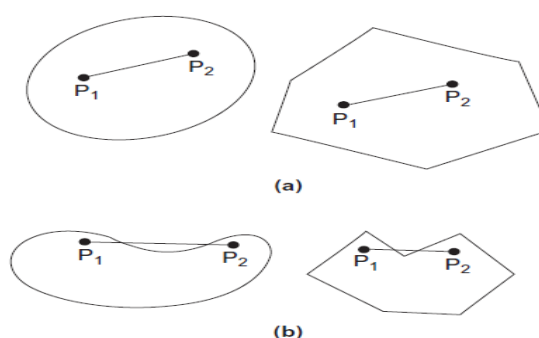


Figura 3.3. (a) Conjunto convexo, (b) conjunto não convexo (ARORA, 2012).

Além do problema da convexidade para garantir que há uma segunda derivada, outra dificuldade da programação não linear é a presença mais de um máximo ou mínimo local nas funções.

Segundo Winston e Albright (2015): métodos Numéricos para resolver programas não-lineares têm informações limitadas sobre o problema, como informações sobre o ponto atual e informações armazenadas sobre pontos passados (a informação da variável, a função e as derivadas, gradiente e hessiana). Esse conjunto de informações é suficiente para reconhecer quando se está no mínimo local (condições de KKT), mas não há como saber se existe um local diferente com um melhor mínimo ou até mesmo como chegar a ele. Essas ideias são ilustradas por um problema irrestrito de uma variável na Figura 3.4 que apresenta três mínimos locais sendo um o mínimo global. A não distinção entre mínimo global e local, no que diz respeito às condições de KKT, é um dos problemas que a PNL apresenta e que dificulta a convergência da solução.

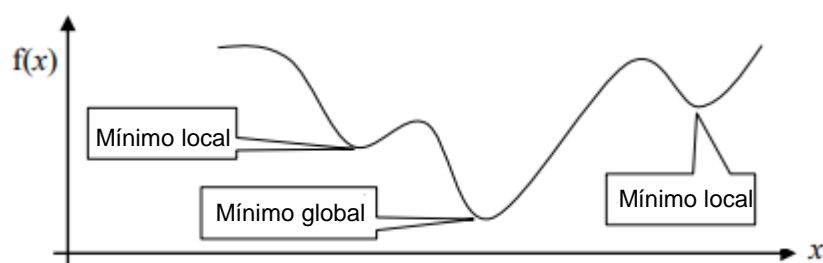


Figura 3.4 Representação esquemática de uma função não linear com múltiplos pontos de mínimo (WINSTON, ALBRIGHT 2015, adaptado).

4 Método de Otimização Topológica (MOT)

Neste capítulo é apresentado o Método de Otimização Topológica, um breve histórico, o modelo e conceitos fundamentais assim como a Material Isotrópico Sólido com Penalização (SIMP) e os problemas numéricos atrelados a esse método.

4.1 Breve histórico

Segundo Simonetti (2009) a otimização estrutural tem origem com a otimização de leiaute, evoluindo para as otimizações paramétricas e de forma, respectivamente, que por sua vez contribuíram para o surgimento do método de Otimização Topológica (MOT). Os primeiros passos da otimização estrutural foram introduzidos no final do século XIX, com o trabalho de Maxwell em 1872 no qual buscava o menor volume para estruturas uniaxiais submetidas a carregamentos. Em 1904, Michel deu continuidade ao trabalho de Maxwell, com suas famosas estruturas que ainda hoje são citadas na teoria moderna de Otimização Topológica. Michel projetou estruturas treliçadas, nas quais buscava a menor massa, observando as tensões nas barras para cada caso de carga.

Em meados dos anos 80, os resultados das otimizações de forma e paramétricas começam a ser questionados, pois estas apresentavam grandes problemas quando se desejava alterar a topologia. Com a necessidade de se aprimorar a otimização de forma, surge no final da década, a Otimização Topológica (OT), Bendsøe e Kikuchi em 1988. A vantagem da OT de atualizar a topologia torna o problema mais complexo, já que a constante redistribuição de material representa, a cada iteração, a solução das equações de equilíbrio (SIMONETTI, 2009).

Por isso, segundo Porto e Pavanello (2007) a ideia é que a otimização topológica seja utilizada inicialmente e em seguida empregado um dos métodos clássicos de otimização de forma. Esta segunda etapa passa a ser realizada de forma mais rápida e eficiente, uma vez que já se parte de uma topologia ótima e de uma forma já bem próxima da exata. Ou como abordado por Simonetti (2009): Olhoff em 1991 utilizou a topologia como um “pré-processador” das otimizações de forma e paramétrica conferindo a estes resultados finais bem melhores.

A Otimização topológica já é bem difundida na atualidade e é empregada em diversos softwares comerciais. Dentre os modelos presentes, segundo Simonetti (2009) a (OT) pode ser classificada em: a OT a partir de um meio discreto e a OT a partir de um meio contínuo, o qual é empregada neste trabalho.

4.2 MOT em estruturas contínuas

O MOT, no que diz respeito a estruturas contínuas, é dividido em duas grandes classes de abordagens: a abordagem micro, ou baseado no material, e abordagem macroestrutural, ou baseada na geometria (SANT'ANNA, 2002).

Segundo Sant'Anna (2002), abordagem microestrutural é baseada na existência de uma micro estrutura porosa, que define as características do material em função da sua geometria e da densidade volumétrica de uma célula unitária representativa do material, como ilustrado na Figura 4.1.

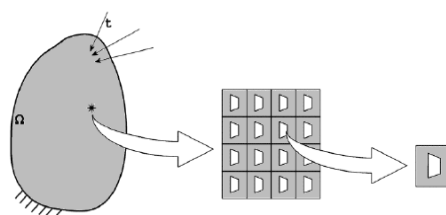


Figura 4.1. Microestrutura porosa (SANT'ANNA, 2002).

A abordagem macroestrutural apresenta o domínio fixo que é discretizado pelo MEF. A malha não se altera ao longo do processo para a determinação das reações. A otimização consiste em determinar quais pontos da estrutura devem possuir ou não material. A distribuição das densidades é parametrizada de modo que cada ponto do domínio fixo possa variar entre a ausência de material, ou vazio, que apresenta densidade igual a 0 e a presença de material com densidade igual a 1. Os algoritmos baseados nesta técnica buscam a melhor forma de distribuir o material minimizando (ou maximizando) a função objetivo assim como ilustrado na Figura 4.2. Um dos métodos que utiliza essa abordagem é o método SIMP (*Simple Isotropic Material with Penalization*) usado neste trabalho (SANT'ANNA, 2002).

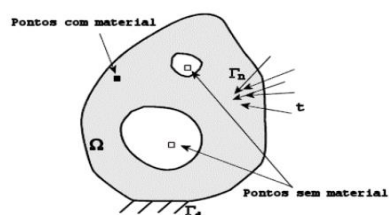


Figura 4.2 Representação do MOT na busca pela melhor distribuição de material no domínio Ω (SANT'ANNA, 2002).

4.3 Material Isotrópico Sólido com Penalização (SIMP)

O Material Isotrópico Sólido com Penalização (SIMP) propõe a distribuição de material com microestruturas artificiais para a solução do problema de ótimo. A densidade artificial perde suas propriedades físicas durante as iterações e torna-se uma variável matemática usada puramente para se obter a solução.

O modelo da SIMP mostrado na equação (4.1) é baseado nos trabalhos de Sigmund (2001), Andreassen e Clausen *et al.* (2010).

$$E_k(x_k) = E_{min} + x_k^\eta (E_0 - E_{min}), x_k \in [0,1] \quad (4.1)$$

Em que E_k e E_0 são os módulos de Young do elemento e do material respectivamente. E_{min} é um valor mínimo para o módulo de Young usado para evitar singularidades na matriz de rigidez, x é a densidade do elemento e η o expoente de penalidade.

A densidade está definida matematicamente entre 0 e 1, mas deseja-se um resultado final inteiro: a presença ou ausência de material. Os elementos com densidade próximo a zero são penalizados pela potência e assim são reavaliados como vazios. Na Figura 4.3, é apresentada a função o modulo de Young para diferentes expoentes de penalidade.

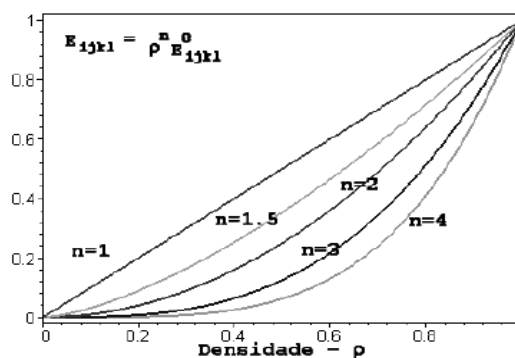


Figura 4.3. Funções exponenciais utilizadas para aproximar a função densidade artificial.
(SANT'ANNA, 2002)

Segundo Sant'Anna (2002) é nessa formulação da densidade artificial que está o maior problema associado ao SIMP, pois como pode ser observado na Figura 4.3 para qualquer expoente maior que 1 a função se torna não convexa.

A formulação adotada neste trabalho evita grande parte desse problema atrelados a topologia final. A penalização escolhida foi $\eta = 3$ para garantir soluções 0-1, como analisado por Sigmund (1994 *apud* Simonetti 2009) esses valores de penalizações próximos a 3 proporciona resultados “realizáveis”, isto é, a porosidade do material é possível de ser fabricada.

4.4 Problemas numéricos da Otimização Topológica

Além dos problemas atrelados ao modelo SIMP, existe também problemas de instabilidade numérica. Esses problemas numéricos foi uma das linhas de pesquisa no início do século e a partir de estudos de Sigmund, Haber, Person, Cardoso entre outros foi que surgiram as soluções para esses problemas. (SIMONETTI, 2009).

4.4.1 Instabilidade de tabuleiro (*Checkboard*)

A denominação da instabilidade de tabuleiro ou tabuleiro de Xadrez é caracterizada pela presença de regiões que alternam rapidamente entre vazios e sólidos, o que se assemelha a um tabuleiro de Xadrez como mostrado na Figura 4.4.

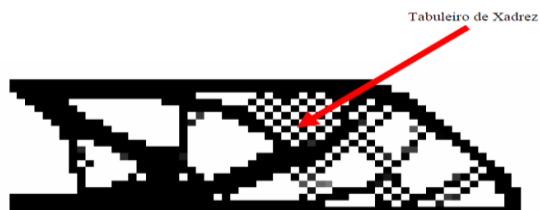


Figura 4.4 Instabilidade de Tabuleiro (PORTO e PAVANELLO, 2007).

Segundo Sigmund e Diaz (1995 apud Simonetti, 2009) defendem que o tabuleiro de Xadrez é resultado da discretização feita pelo MEF. O tabuleiro apresenta uma rigidez maior que a regiões totalmente sólidas por isso essa configuração permanece no resultado final por ser um possível “ótimo”. Entretanto, esse resultado não é coerente com a realidade, a rigidez é resultado de uma instabilidade numérica (SIMMONETE 2009, SANT’ANNA 2002). Uma das formas de evitar esse fenômeno é justamente com a utilização de filtros os quais evitam a mudança brusca de densidade nos resultados por meio de uma avaliação da vizinhança dos elementos, normalmente, neste trabalho representado pelo r_{min} .

4.4.2 Dependência da malha

Segundo Guilherme (2006) a dependência de malha é o problema de não se obter qualitativamente o mesmo resultado para diferentes tamanhos de malha ou discretização do domínio. A Figura 4.5 ilustra a dependência de malha. É possível ver que o aumento do número de elementos para um problema simples de uma viga que sofre o efeito de uma carga pontual fez com que o resultado ficasse cada vez mais complexo: inicialmente a presença de instabilidade de tabuleiro, após isso contornos não suaves nos vazios e por fim uma geometria complexa.

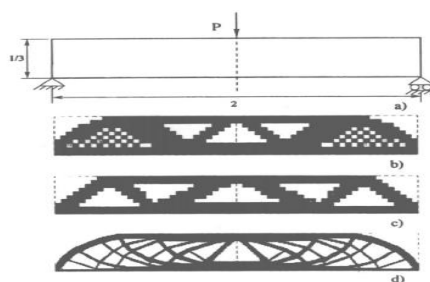


Figura 4.5 Dependência de malha (GUILHERME, 2006).

5 Formulação do algoritmo

Neste capítulo é descrito de forma sucinta o algoritmo usado neste trabalho. Inicialmente os motivos do uso do Matlab e da formulação empregada por Sigmund (2001) e posteriormente refeita por Andreassen, Clausen *et al.* (2010). Após isso, é apresentado análise dos elementos finitos e condições de contorno, os filtros de sensibilidade e densidade e por fim o laço de otimização.

5.1 Matlab

O algoritmo foi implementado no software Matlab, o mesmo usado pelos modelos desenvolvido por Sigmund (2001), Andreassen e Clausen *et al.* (2010). O programa segue o modelo base de um algoritmo de otimização como mostrado na figura 3.1.

O Matlab foi utilizado por ser a plataforma do código desenvolvido por Sigmund (2001) e também no modelo de Andreassen e Clausen *et al.* (2010). Segundo Andreassen e Clausen *et al.* (2010), o Matlab é uma linguagem de programação avançada capaz de solucionar inúmeros problemas com códigos simples. Entretanto, se comparada com outras linguagens como C++ e Fortran, apresenta uma capacidade computacional inferior principalmente devido a alocação inadequada e a tolerância do software em relação às práticas ruins de programação como a má alocação das variáveis e vetores. Por isso, é usado a alocação prévia de memória, o que é caracterizado pela função *sparce*.

5.2 Análise dos Elementos finitos e condições de contorno

O algoritmo empregado é o do trabalho de Andreassen e Clausen *et al.* (2010) um código de cunho didático que é baseado no algoritmo de 99 linhas do Sigmund (2001). Os dois modelos apresentam a mesma base de implementação, mas o modelo mais atual possibilita o uso de novos filtros, outros métodos de solução e apresenta uma melhor performance geral.

A função de chamada para o código é: $\text{top88}(\text{nelx}, \text{nely}, \text{volfrac}, \text{penal}, r_{\text{min}}, \text{ft})$.

Em que nelx e nely são os números de elementos na horizontal e vertical, respectivamente, volfrac é a fração de volume, penal é o expoente de penalização, r_{min} é o filtro para o raio mínimo de avaliação de vizinhança do filtro e ft especifica qual filtro: sensibilidade ($\text{ft} = 1$) ou densidade ($\text{ft} = 2$).

O modelo utilizado para o domínio são elementos quadrilaterais como é reapresentado na Figura 5.1. Os nós são numerados em relação à coluna da esquerda para direita dos graus de liberdade na ordem de $2n - 1$ em que $2n$ representa o deslocamento horizontal e vertical do nó n , respectivamente. Essa alta regularidade na malha pode ser aproveitada de diversas formas para reduzir o esforço computacional na execução dos laços.

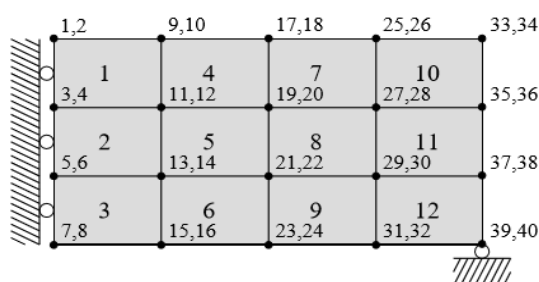


Figura 5.1. Domínio do modelo com 12 elementos (ANDREASSEN, CLAUSEN, *et al.*, 2010).

O pré-processamento do elemento finito começa com a definição das propriedades do material a determinação de E e ν . A matriz de rigidez para o elemento é replicada para toda a malha, já que os elementos eles são idênticos.

Para garantir uma construção eficiente da matriz de rigidez a função edofMat é usada. Nessa matriz as linhas apresentam a sequência de oito graus de liberdade de cada elemento. O armazenamento dos graus de liberdade se inicia região inferior esquerda e segue a direção horária. Um exemplo dessa matriz é mostrado na equação (5.1), que representa a malha da Figura 5.1. Nesse exemplo, é possível ver que o elemento 1 apresenta a sequência 3,4,11,12...2.

$$\text{edofMat} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 11 & 12 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 13 & 14 & 11 & 12 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 15 & 16 & 13 & 14 & 5 & 6 \\ 11 & 12 & 19 & 20 & 17 & 18 & 9 & 10 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ 31 & 32 & 39 & 40 & 37 & 38 & 29 & 30 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Elemento 1} \\ \leftarrow \text{Elemento 2} \\ \leftarrow \text{Elemento 3} \\ \leftarrow \text{Elemento 4} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{Elemento 12} \end{array} \quad (5.1)$$

A cada iteração do laço de otimização, a construção da matriz global de rigidez K é trabalhada pela função *sparce* que evita novos laços. A equação (5.3) é usada na tentativa de tornar a matriz de rigidez simétrica.

$$\mathbf{K}' = \frac{(\mathbf{K}^T + \mathbf{K})}{2} \quad (5.2)$$

Se o resultado é uma matriz simétrica é aplicado a fatoração de Cholesky utilizada para a solução das equações de equilíbrio. Caso contrário, o método LU é usado (ANDREASSEN, CLAUSEN, *et al.*, 2010).

As condições de contorno são introduzidas no código pontualmente, é necessário identificar o grau de liberdade de interesse, para o correto posicionamento dos carregamentos e também dos apoios. Andreassen, Clausen *et al.* (2010), apresenta uma metodologia básica para a alteração das condições de contorno como a adição de forças pontuais, a mudança dos apoios e também a inserção de furos pré-estabelecidos.

A união dessas alterações e a introdução de algumas mudanças na base do código em conjunto com considerações simplificadores é suficiente para introduzir os domínios de interesse deste trabalho.

5.3 Atualização

A atualização feita nesse trabalho segue o modelo de Andreassen e Clausen *et al.* (2010), segundo da equação (5.3).

$$x_{k+1} = \begin{cases} \max(0, x_k - \alpha) & \text{if } x_k B_k^\delta \leq \max(0, x_k - \alpha) \\ \min(1, x_k + \alpha) & \text{if } x_k B_k^\delta \geq \min(1, x_k - \alpha) \\ x_k B_k^\delta & \text{outras casos} \end{cases} \quad (5.3)$$

O novo elemento x_{k+1} depende do passo $\alpha (= 0,2)$ e da constante $\delta (= 1/2)$ que é o número correspondente ao coeficiente de amortecimento e o fator multiplicador B_k determinado pela equação (5.4).

$$B_k = \frac{-\frac{\partial c}{\partial x_k}}{\lambda \frac{\partial V}{\partial x_k}} \quad (5.4)$$

Em que $\partial c / \partial x_k$ é a derivada local da flexibilidade e $\partial V / \partial x_k$ do volume. O multiplicador de Lagrange λ deve ser escolhido para que a restrição de volume seja satisfeita.

As sensibilidades da função c do volume V com respeito ao elemento k é determinado pelas equações (5.5) e (5.6).

$$\frac{\partial c}{\partial x_k} = -\eta x_k^{\eta-1} (E_0 - E_{min}) u^T k u \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = 1 \quad (5.6)$$

5.4 Filtros: sensibilidade e densidade

Os filtros são métodos heurísticos para solucionar problemas de instabilidade numérica, são usados para garantir a existência da solução e evitar a formações de tabuleiro de xadrez e dependência de malha (BOURDIN, 2001).

Os dois filtros usados neste trabalho são o de sensibilidade e o de densidade. O primeiro atua na derivada da flexibilidade e o segundo diretamente na densidade. O filtro de sensibilidade transforma a derivada da densidade conforme a equação (5.7) (ANDREASSEN, CLAUSEN, *et al.*, 2010).

$$\frac{\widehat{\partial c}}{\partial x_k} = \frac{1}{\max(\gamma, x_k) \sum_{i \in N_k} H_{ki}} \sum_{i \in N_k} H_{ki} x_i \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (5.7)$$

Em que $\gamma (= 10^{-3})$ é uma constante positiva usada para evitar possíveis divisões por zero, N_k é o número de elementos na vizinhança dos elementos k . H_{ki} é o fator de peso que é determinado pela equação (5.8).

$$H_{ki} = \max(0, r_{min} - \Delta(k, i)) \quad (5.8)$$

Em que r_{min} é o raio de atuação do filtro, $\Delta(k, i)$ é a distância entre os elementos k e o elemento i da vizinhança. Essa varredura da vizinhança com a pesagem dos elementos dentro de um raio mínimo é feita para evitar a mudanças bruscas de densidade, como foi apresentado na seção sobre problemas de instabilidade numéricas.

O filtro de densidade transforma a densidade original x_k conforme a equação (5.9).

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{\sum_{i \in N_k} H_{ki}} \sum_{i \in N_k} H_{ki} x_i \quad (5.9)$$

Em que \tilde{x}_k é denominada de densidade artificial ou ainda pseudo densidade. No caso em que é aplicado o filtro de densidade as derivadas da flexibilidade e do volume são determinadas pela regra da cadeia, como mostrado na equação (5.10), para o caso da flexibilidade.

$$\frac{\partial c}{\partial x_j} = \sum_{k \in N_j} \frac{\partial c}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial x_j} = \sum_{k \in N_j} \frac{1}{\sum_{i \in N_k} H_{ei}} H_{jk} \frac{\partial c}{\partial \tilde{x}_k} \quad (5.10)$$

5.5 Laço de otimização

No início do laço de otimização as variáveis do modelo são igualadas a fração do volume prescrita. Nesse caso, $x_k = \tilde{x}_k$ é verdadeiro caso o filtro de sensibilidade seja usado e também quando o filtro de densidade é usado e as variáveis representam campos homogêneos.

Cada iteração da função objetivo começa com a análise dos elementos finitos e depois disso a flexibilidade, é computada, assim como as sensibilidades dc e dv da função e do volume. A função *edofMat* é usada para avaliar a flexibilidade de todos os elementos simultaneamente e a matriz resultante é usada como índice na matriz de deslocamento global, \mathbf{U} , o resultado é uma matriz do mesmo tamanho que contém os deslocamentos correspondentes aos graus de liberdade listados na *edofMat*.

Após isso, é aplicado os filtros e por fim a atualização pelo método heurístico. A condição de parada do código é feita pela variável *ch*. O valor inicial dessa variável é determinado como 1 e o seus valores seguintes são determinados pela máxima diferença encontrada entre as densidades x_{k+1} e antiga x_k . A condição de parada é determinada como sendo de 0,01.

6 Estudos de caso

Neste capítulo é feita a análise dos resultados para cada estudo de caso escolhido. Os cinco exemplos analisados são em ordem: uma viga engastada, uma estrutura de Michel, um gancho, uma mísula e uma nervura do bordo de ataque da asa de um Veículo Aéreo Não Tripulado.

Os problemas analisados foram selecionados com base nos trabalhos de Simonetti (2009), Tamta e Saxena (2016) e Xinxing e Wenjie, *et al.*, (2014). Esses exemplos são também usados para validar o código de Sigmund (2001), Andreassen e Clausen *et al.* (2010) com as devidas modificações. Para cada caso, é feita uma avaliação dos resultados em três critérios: primeiro, a ocorrência destas instabilidades e desempenho do filtro, segundo o tempo de convergência e implementação e o último uma breve comparação com a literatura em uma análise geral sobre o resultado.

Por fim, vale ressaltar que os resultados das tabelas não apresentam unidades, pois no modelo empregado os valores são parametrizados para valores unitários ou contidos no intervalo $[0, 1]$.

6.1 Exemplo 1: Viga engastada

O primeiro exemplo para aplicação do código é a viga engastada encontrada no trabalho de Sigmund (2001). A viga apresenta uma condição de contorno e geometria simples, por isso é um bom exemplo para a validação do código, pois o resultado é relativamente previsível, considerando regime elástico em conjunto com a análise de otimização estrutural, malha e topologia final formado por treliças.

As condições de contorno usada por Sigmund (2001) e replicadas por Andreassen e Clausen *et al.* (2010) é apresentada na Figura 6.1. A viga é engastada e apresenta um carregamento pontual na extremidade livre. A fração de volume usada foi de 40%, o expoente de penalidade igual 3, como recomendado, e o raio de atuação do filtro de 4% de $nelx$.

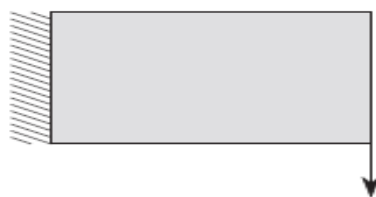


Figura 6.1. Condições de contorno e posição da carga para a viga engastada (ANDREASSEN, CLAUSEN, *et al.*, 2010).

No software Matlab o código foi executado com a função “*run and time*” para a medição do tempo de processamento. Foi realizado esse procedimento para cada caso três vezes, os quais apresentaram resultados iguais para todos os casos, que são mostrados nas tabelas 6.1 a 6.10 no desenvolvimento deste trabalho.

Por se tratar de um código de cunho didático, as malhas usadas para a análise do MEF apresentam um baixo número de elementos para garantir a convergência.

Os resultados para a viga são mostrados na Figura 6.2 e Figura 6.3 com os filtros de sensibilidade e densidade, respectivamente.

Vale ressaltar que o termo “região cinza” utilizado neste trabalho é de uso comum nos trabalhos de otimização e caracteriza regiões que ainda não estão bem definidas a topologia final, isto é, se é uma região sem material (vazios) ou sólida (regiões escuras), vide Figura 6.2, por exemplo.

Na Figura 6.2, com o filtro de sensibilidade, o caso (a) por apresentar um número baixo de elementos mostra regiões não definidas, “cinzas”. O resultado não é satisfatório e demonstra que o algoritmo/filtro não conseguiu atingir completamente uma topologia ótima com essas informações de entrada. O caso (b) apresenta o mesmo resultado encontrado no trabalho de Sigmund (2001), Andreassen e Clausen *et al.* (2010) e o caso (c) com o aumento do número de n_{elx} e n_{ely} por um fator 2 resultou em um problema numérico de dependência de malha.

A dependência de malha, Figura 6.2 (c), é caracterizada pelas treliças com formato não comum na região central e também como na pequena variação na região inferior direita causada pelo aumento do número de elementos da malha do MEF.

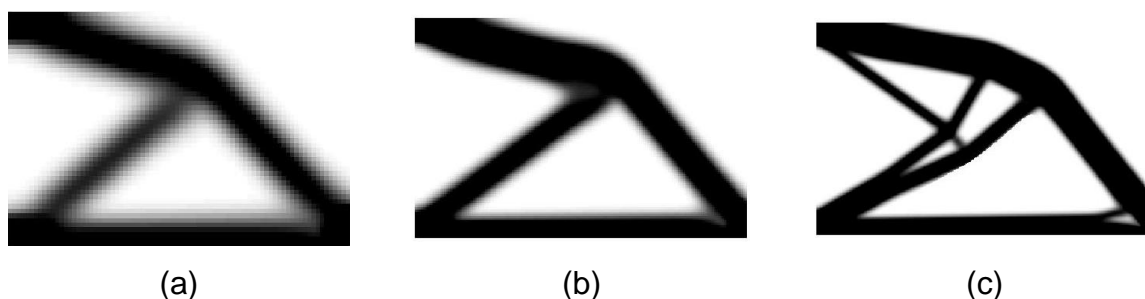


Figura 6.2. Resultados com o filtro de sensibilidade (a) 80×50 , $r_{min} = 3$ em, (b) 160×100 , $r_{min} = 6$ e (c) 320×200 $r_{min} = 12$.

Na Tabela 6.1 é apresentado as variáveis de interesse na entrada e saída dos resultados. Como já mencionado, O $nelx \times nely$ são os números de elementos na horizontal e vertical da malha, respectivamente, r_{min} é o raio de varredura da vizinhança utilizado nos filtros, ni é o numero de iterações, c é a flexibilidade, ch a condição de parada, t o tempo de convergência e TI o tempo de convergência por iteração.

Nas tabelas a seguir (6.1 a 6.10 deste capítulo) as variáveis como a flexibilidade , c , e o raio mínimo (r_{min}) não apresentam unidades já que o modelo adotado da literatura (ANDREASSEN, CLAUSEN, *et al.*, 2010) aplica uma normalização dependente da média e dos do número de elementos da malha. O mesmo ocorre para a densidade a qual é tratada como pixel nas figuras dos resultados e os carregamentos e propriedades do material (E) normalizados para valores unitários. Esse método de normalizar os parâmetros é usado para diminuir a sensibilidade das funções às variações dos parâmetros de entrada.

Tabela 6.1 Resultados do exemplo 1 com filtro de sensibilidade para diferentes números de elementos e raios mínimos.

Resultado	$nelx \times nely$	r_{min}	fr	ni	c	ch	t (s)	TI (s)
(a)	80x50	3	40%	58	71,3178	0,010	10,470	0,181
(b)	160x100	6	40%	57	61,4283	0,010	34,030	0,597
(c)	320x200	12	40%	270	59,1744	0,113	136,120	0,504

Para o filtro de densidade, Figura 6.3, a alteração do número de elementos não resultou na mudança da topologia. A flexibilidade mínima apresentou resultados

semelhantes aos encontrados com o filtro de sensibilidade. O tempo de convergência, no entanto, foi consideravelmente maior devido às limitações do programa, por outro lado o filtro de densidade evitou a ocorrência da dependência de malha resultante na Figura 6.2, caso (c).

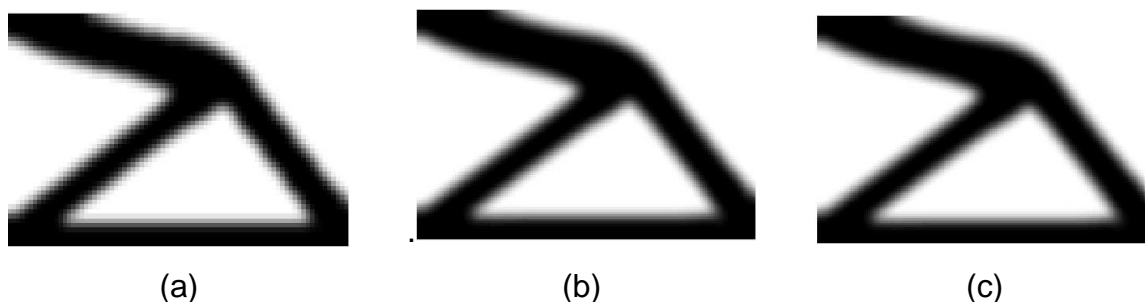


Figura 6.3. Resultados com o filtro de densidade (a) 80x50, $r_{min} = 3$ em, (b) 160x100, $r_{min} = 6$ e (c) 320 e 200 $r_{min} = 12$.

Tabela 6.2 Resultados do exemplo 1 com filtro de densidade para diferentes números de elementos e raios mínimos.

Resultado	$nelx \times nely$	r_{min}	fr	ni	c	ch	t (s)	TI (s)
(a)	80x50	3	40%	202	63,0734	0,010	41,463	0,205
(b)	160x100	6	40%	590	64,7631	0,010	433,841	0,735
(c)	320x200	12	40%	601	66,3497	0,113	501,068	1,198

Vale ressaltar que a variação do r_{min} não afeta o resultado da topologia final, mas por resultar em uma área de varredura maior na vizinhança dos elementos afeta consideravelmente a convergência do algoritmo, por isso que a partir dessa seção o valor do raio mínimo é predefinido como 4% de $nelx$ como recomendado por Andreassen e Clausen, *et al.*, (2010).

6.2 Exemplo 2: Estrutura de Michel

O segundo exemplo escolhido é uma estrutura de Michel, baseado no estudo realizado por Michel em 1904. Esse tipo de problema também é uma referência comum para algoritmos de OT. O domínio consiste em um retângulo com dimensões 200x100 m submetidas a uma distribuição de carga na parte inferior. O resultado

encontrada na literatura, o qual utiliza um modelo evolucionário, é mostrado na Figura 6.1 (NECHES; CISILINO, 2007).

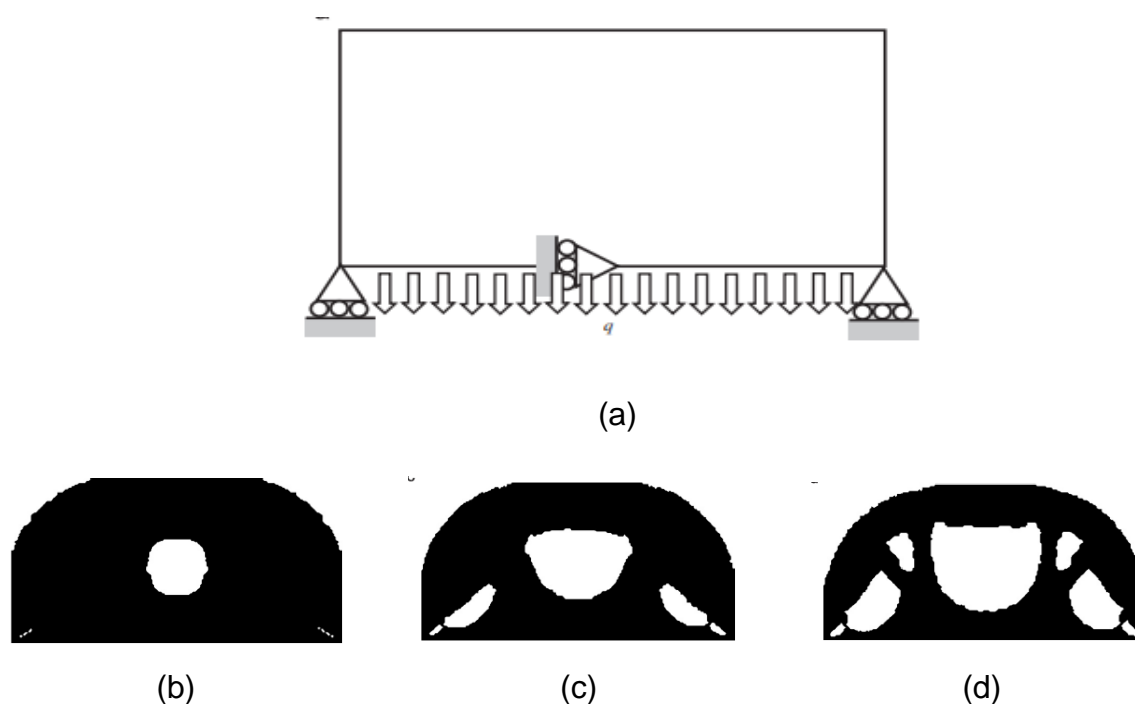


Figure 6.1 (a) Domínio de uma estrutura de Michel e resultados para (b) redução do volume para 85%, (c) 75% e (d) 60% (NECHES; CISILINO, 2007).

Para construir o domínio foi usado as recomendações encontradas no modelo usado por Sigmund (2001), Andreassen e Clausen, *et al.*, (2010), semelhante ao exemplo 1 com as devidas modificações do carregamento e dos apoios.

Os resultados são mostrados na Figura 6.2. A entrada usada para o programa foi de 200 x 100 elementos de forma semelhante as dimensões propostas por Neches e Cisilino (2007), considerando que cada elemento quadrilateral representa uma largura de 2 m e altura de 1 m. As outras entradas seguem o padrão utilizado nesse trabalho: penalidade igual a 3, raio mínimo igual a 4% $nelx$ (logo igual a 8) e o filtro usado inicialmente foi a densidade igual 2 ($ft = 2$).

A comparação entre a Figura 6.1 (b) e a Figura 6.2 (a), mostra que os resultados são semelhantes ainda que os modelos usados sejam diferentes, o que é explicado pela simplicidade da estrutura analisada. Nesse exemplo, a título de validação do código, a análise com o filtro de densidade é realizada primeiro já que para os

resultados iniciais, caso (a) da Figura 6.2, é mais próximo do resultado encontrado por Neches e Cisilino (2007).

Na Figura 6.1, para o caso (a), é possível observar a formação de apenas um vazio central na figura. Espera-se que os resultados para o algoritmo em análise apresentem estruturas treliçadas, essa divergência é causada pelo alto valor para a fração de volume, igual a 85%. O caso (b) e (c) validam essa afirmação, pois com 75% e 60%, respectivamente, já é possível observar a formação das treliças

Os resultados da tabela mostram uma maior rigidez para o primeiro caso (menor flexibilidade) como é esperado com a redução do volume. Semelhante ao exemplo 1, o tempo de convergência também foi superior ao resultado com o filtro de sensibilidade.

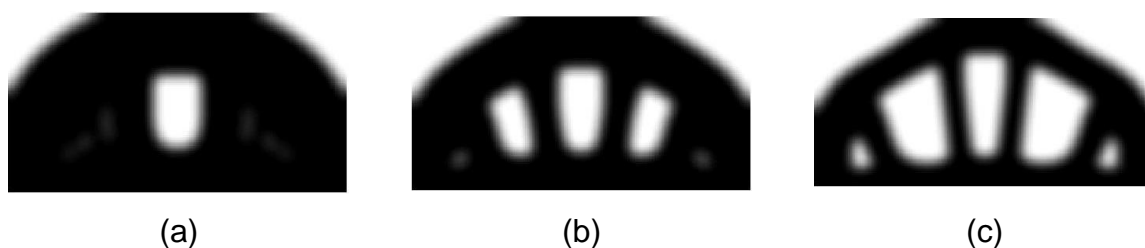


Figure 6.2. Resultados exemplo 2 com fração de volume e filtro de densidade para (a) 85% (b) 75% e (c) 65%.

Tabela 6.3. Resultado do exemplo 2 com filtro de densidade.

Resultado	$n_{elx} \times n_{ely}$	r_{min}	fr	ni	c	ch	t (s)	TI (s)
(a)	200x100	8	85%	437	375,9279	0,009	522,077	1,195
(b)	200x100	8	75%	337	501,7489	0,005	399,645	1,186
(c)	200x100	8	60%	338	844,7416	0,010	404,876	1,198

O filtro de sensibilidade mostra um resultado semelhante ao de densidade no caso (b) e (c) assim como pode ser visto na Figura 6.3, mas difere do caso (a) por já apresentar a formação do sistema de treliças. O processamento foi consideravelmente melhor tanto de forma geral quanto por iteração e a flexibilidade mínima encontrada para cada caso é inferior. Por outro lado, a presença de regiões cinzas é mais perceptível para o caso (a) e (b) do que o resultado da Figura 6.2.

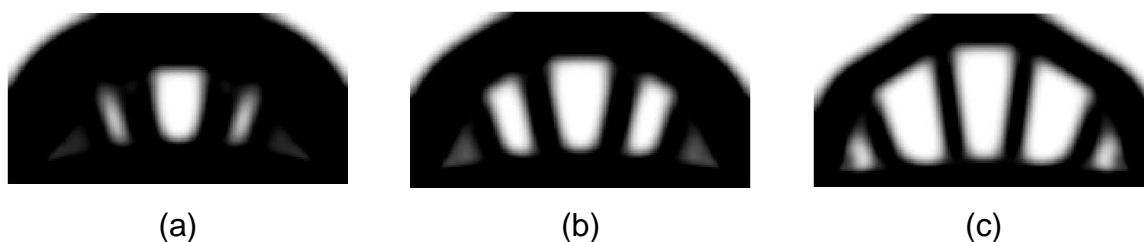


Figure 6.3. Resultados para o exemplo 2 com o filtro de sensibilidade para fração de volume (a) 85%, (b) 75% e (c) 60%.

Tabela 6.4. Resultado do exemplo 2 com filtro de sensibilidade.

Resultado	$nelx \times nely$	r_{min}	fr	ni	c	ch	t (s)	TI (s)
(a)	200x100	8	85%	42	372,8314	0,010	47,638	1,134
(b)	200x100	8	75%	30	487,6171	0,009	29,570	1,045
(c)	200x100	8	60%	51	792,8604	0,010	50,074	1,020

Por se tratar de um caso simples e a variação foi realizada apenas na restrição do volume é possível ver que os problemas numéricos como tabuleiro de xadrez e dependência de malha foram totalmente evitados com o uso dos filtros como era esperado.

6.3 Exemplo 3: Gancho

O domínio usado para o gancho é um modelo retangular com um apoio fixo com posição determinada e carregamento totalmente vertical. O gancho, apesar de ser um elemento simples de elevação de carga, apresenta um domínio interessante para a aplicação do MOT, pois o seu apoio e carregamento são localizados em vazios (elementos passivos) como apresentado na Figura 6.4 (a).

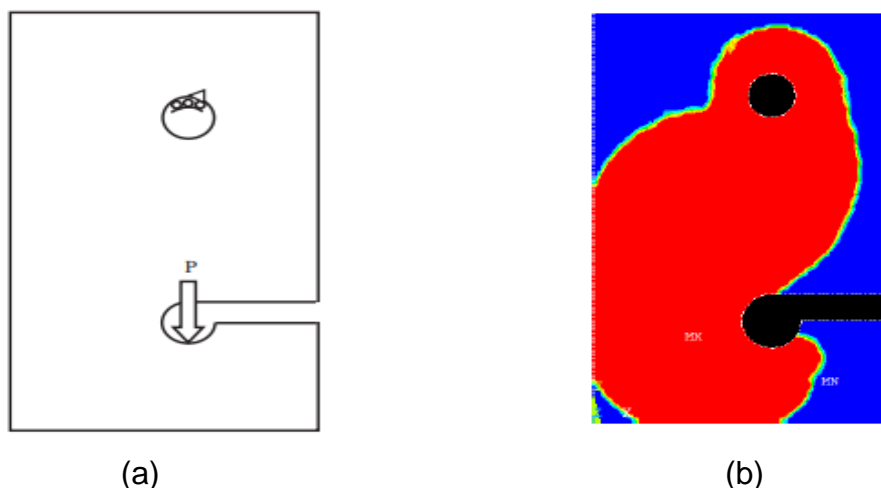


Figura 6.4. (a) Domínio adotado para o gancho (NECHES e CISILINO, 2008). Resultado do MOT no Ansys (TAMTA e SAXENA, 2016).

O domínio adotado é oriundo de Neches e Cisilino (2007), o qual também foi utilizado por Tamta e Saxena (2016) para aplicação do MOT no software Ansys. Diferente do domínio da viga, que é facilmente caracterizado, o do gancho precisa de alguns cuidados principalmente na posição da carga em relação à fixação. Ademais, é considerado que o gancho apenas sofre um carregamento pontual P .

Os vazios introduzidos no domínio, denominados de elementos passivos, são áreas que o algoritmo ignora, pois o processo de OT é feito com a “remoção” de material. Portanto, esses elementos atuam também como regiões que não devem ser modificadas tanto em posição quanto em forma.

O número de elementos escolhido para o gancho foi determinado com base no modelo usado por Tamta e Saxena (2016) com uma malha de 180×60 elementos. O raio de atuação usada foi para os filtros de 4% do número de elementos em x que resulta em um r_{min} igual a 7 e penalidade igual a 3. Para esse, caso a fração do volume e número de elementos foi modificada para valores entre 50% a 20% com o intuito, a priori, do resultado inicial já apresentar um resultado com um sistema de treliças, diferente do exemplo 2.

A Figura 6.4 mostra o resultado com filtro de sensibilidade para o gancho. Como pode ser observado, a topologia final não apresenta um sistema de treliças como era esperado. Os casos (a), (b) e (c) apresentaram elementos cinzas na região próxima a curvatura do gancho e no caso (a) também próximo ao apoio fixo. Com a fração de

volume a 40% a fronteira da geometria se torna cada vez menos visível. Além disso, em relação a atuação dos filtros, nenhuma instabilidade numérica é apresentada, a não ser o caso das regiões em cinza como já mencionado.

A convergência foi rápida para todos os casos e a flexibilidade atingiu resultados satisfatórios se comparado diretamente com o resultado médio encontrado por Tamta e Saxena (2016) de 21,57. Por outro lado, a topologia, a partir do caso (c), não é convencional para o gancho.

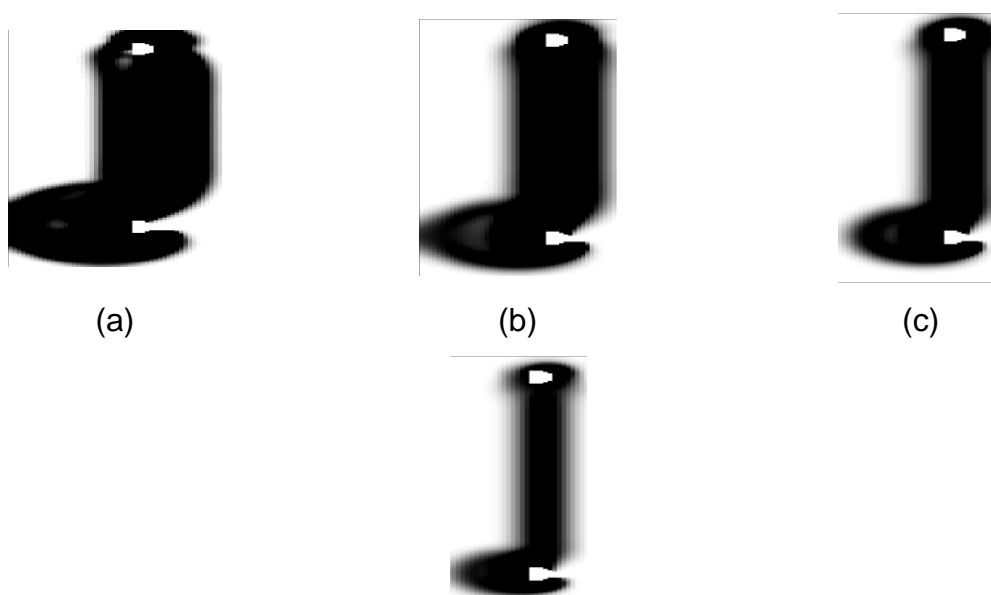


Figura 6.5. Resultados para o exemplo 3 com o filtro de sensibilidade para fração de volume (a) 50%, (b) 40%, (c) 30% e (d) 20%.

Tabela 6.5. Resultado do exemplo 3 com filtro de sensibilidade.

Resultado	$nelx \times nely$	r_{min}	fr	ni	c	ch	t (s)	TI (s)
(a)	180x60	7	50%	11	12,4992	0,008	18,102	1,645
(b)	180x60	7	40%	21	15,3992	0,009	10,842	0,516
(c)	180x60	7	30%	15	19,4218	0,008	6,941	0,462
(d)	180x60	7	20%	16	29,1249	0,009	8,462	0,529

O filtro de densidade, Figura 6.6, mostra um resultado semelhante ao de sensibilidade. As regiões cinzas do caso anterior foram eliminadas. Entretanto, o resultado apresentou um aumento no custo operacional de mais de dez vezes no tempo total e as fronteiras da geometria estão menos acentuadas, assim como a flexibilidade é maior em cada resultado. Por outro lado, a topologia final se aproxima mais do resultado encontrado por Tamta e Saxena (2016), Figura 6.4 (b).

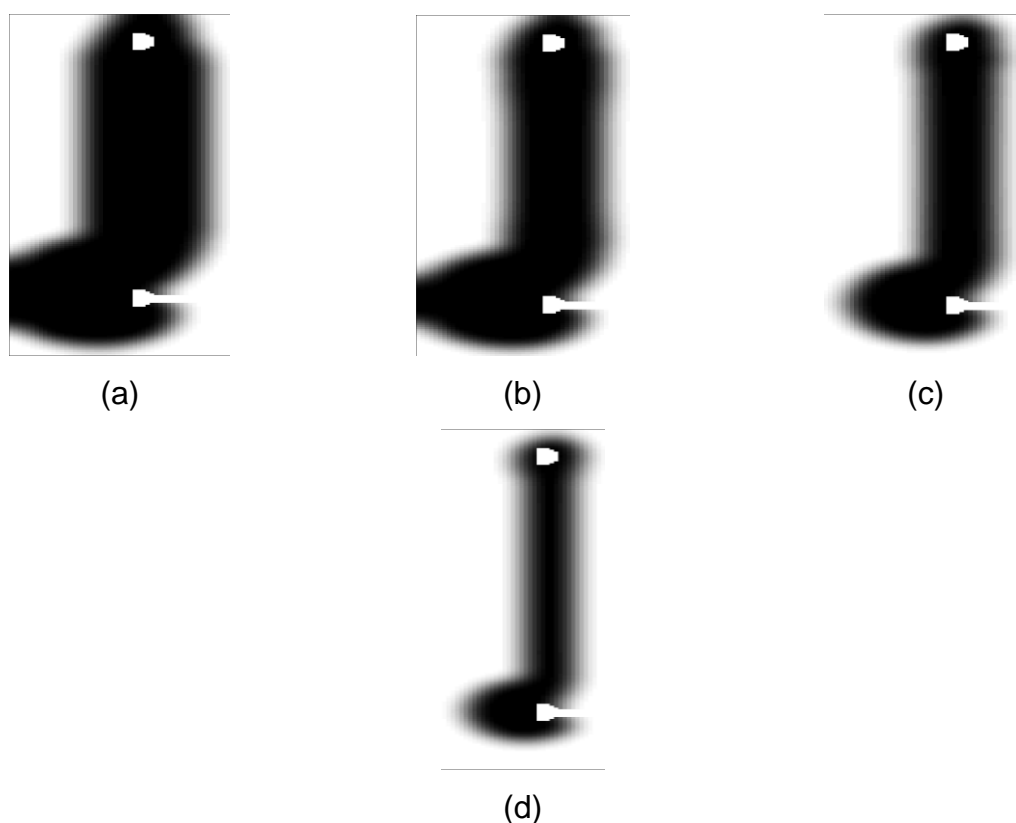


Figura 6.6. Resultados para o exemplo 3 com o filtro de densidade para fração de volume igual a (a) 50%, (b) 40%, (c) 30% e (d) 20%.

Tabela 6.6. Resultado do exemplo 2 com filtro de sensibilidade.

Resultado	$nelx \times nely$	r_{min}	fr	ni	c	ch	t (s)	TI (s)
(a)	180x60	7	50%	94	13,5774	0,010	63,886	0,679
(b)	180x60	7	40%	152	16,0437	0,010	109,499	0,720
(c)	180x60	7	30%	83	20,8152	0,010	54,573	0,660
(d)	180x60	7	20%	61	32,8671	0,008	46,352	0,760

6.4 Exemplo 4: Mísula

A mísula é uma estrutura comum na arquitetura medieval. É uma peça estrutural de pedra, madeira ou metal projetando-se de uma parede para suportar grandes cargas. Esses elementos estruturais foram escolhidos por apresentar carregamentos simples para ser avaliado pelo MOT e ao mesmo tempo apresentarem regiões de descontinuidade clássicas, causadas pela alteração brusca da geometria (BRUGGI, 2009).

O modelo idealizado no domínio é oriundo de Bruggi (2009) que também foi utilizado por Tamta e Saxena (2016). O domínio encontrado na Figura 6.7 caso (a) foi implementado com a adição de elementos passivos.

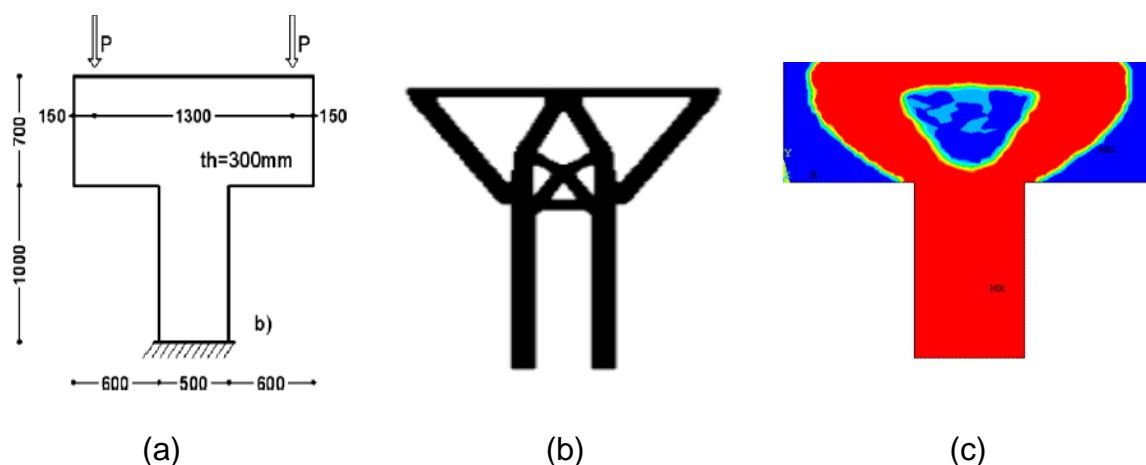


Figura 6.7. (a) Domínio aplicado na OT da mísula (BRUGGI, 2009). (b) Resultados encontrados com a aplicação usado para a mísula (b) Resultado no método STM (BRUGGI, 2009) (c) resultados da OT no software Ansys (TAMTA e SAXENA 2016).

A entrada no algoritmo foi com 120×60 elementos, os vazios foram introduzidos na mesma proporção encontrada na Figura 6.7 (a). A variação da restrição foi de 50% a 20%, penalidade igual a 3 e raio foi de 4% de $nelx$, logo igual a 5.

Os resultados até 30% do volume apresentaram rápida convergência. Nos casos (c) e (d), Figura 6.8, é possível ver regiões em cinza. A topologia final como pode ser observado em (d) é uma estrutura com um sistema de treliças, semelhante ao obtido por Bruggi (2009) e o que era esperado pelo algoritmo com uma alta redução do volume.

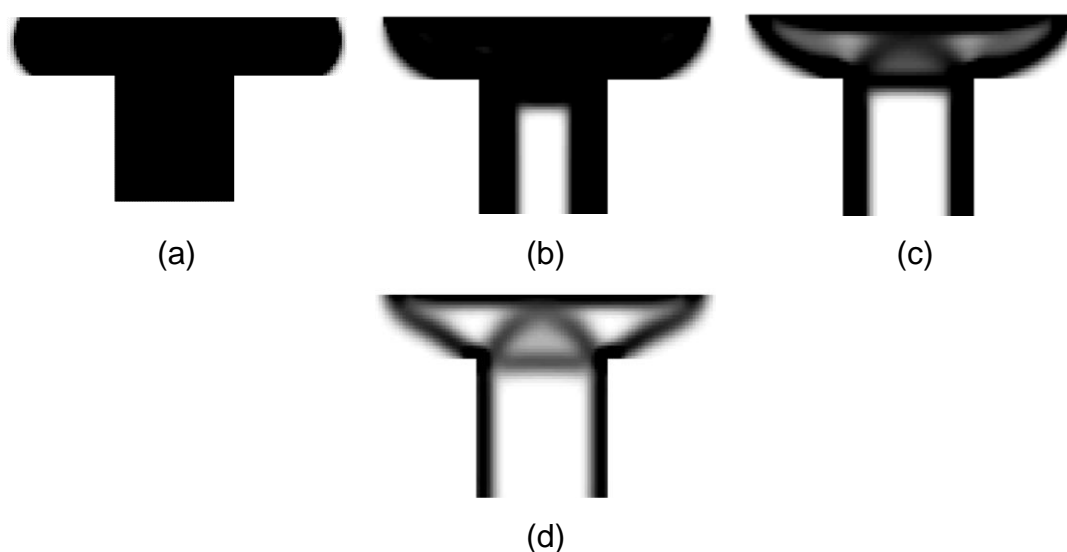


Figura 6.8. Resultados para o exemplo 4 com o filtro de sensibilidade para fração de volume (a) 50%, (b) 40%, (c) 30% e (d) 20%.

Tabela 6.7 Resultado do exemplo 4 com filtro de sensibilidade.

Resultado	$nelx \times nely$	r_{min}	fr	ni	c	ch	t (s)	TI (s)
(a)	200x60	5	50%	12	80,9309	0,009	6,456 s	0,538
(b)	200x60	5	40%	13	91,8358	0,005	4,469 s	0,344
(c)	200x60	5	30%	16	210,5912	0,010	2,330 s	0,145
(d)	200x60	5	20%	37	367,4166	0,010	381,723	10,317

O filtro de densidade para esse caso apresentou resultados melhores para topologia ótima. Primeiro pela convergência mais rápida no caso (d), como pode ser constatado na Tabela 6.8, segundo para valores menores de flexibilidade e por fim uma melhor definição da topologia do caso (d) na qual a região triangular da parte central superior formado por treliças é melhor definida, Figura 6.9.

Nesse exemplo, a melhor convergência com filtro de densidade para o caso (d) é explicada por que as regiões de descontinuidade, causadas pela mudança brusca de geometria, não apresentam uma derivada definida, o que causa uma maior dificuldade de convergência para uma alta redução do volume para o filtro de sensibilidade o qual atua diretamente na ponderação da primeira derivada.

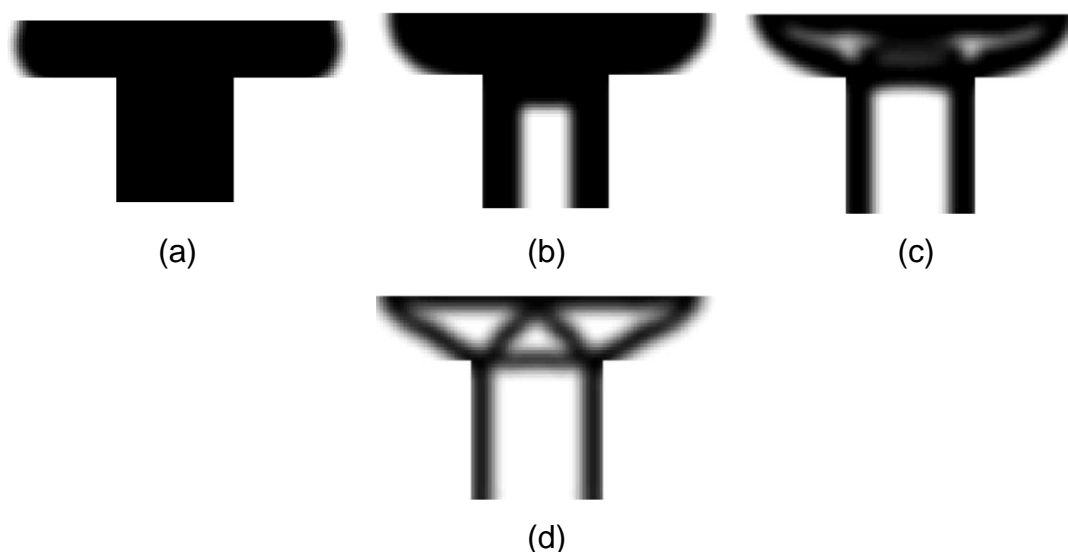


Figura 6.9. Resultados para o exemplo 3 com o filtro de densidade para fração de volume (a) 50%, (b) 40%, (c) 30% e (d) 20%.

Tabela 6.8. Resultados do exemplo 4 com o filtro de densidade.

Resultado	$nelx \times nely$	r_{min}	fr	ni	c	ch	t (s)	TI (s)
(a)	200x60	5	50%	61	103,0899	0,010	31,175	0,538
(b)	200x60	5	40%	113	113,0871	0,008	50,479	0,344
(c)	200x60	5	30%	97	163,1638	0,010	37,782	0,145
(d)	200x60	5	20%	105	340,7556	0,009	52,800	10,317

6.5 Exemplo 5: Nervura do bordo de ataque da asa

Diferente dos exemplos anteriores em que o domínio apresentava carregamentos e geometrias simples a nervura do bordo de ataque do perfil asa de um avião apresenta uma geometria não convencional que é determinada pelo perfil da asa, peso total do modelo e as condições aerodinâmicas o qual o avião é submetido.

Segundo Rodrigues (2009) as nervuras são membros estruturais que compõem a armação da asa. Elas geralmente estendem-se do bordo de ataque até a longarina traseira ou até o bordo de fuga. As nervuras dão à asa sua curvatura e transmitem os esforços do revestimento e fixações para as longarinas. As nervuras são utilizadas também em ailerons, profundos, lemes e estabilizadores. Os tipos

mais comuns de nervuras são confeccionados em madeira ou alumínio, com perfil formado por armações de compensado leve ou ainda formado por um sistema de treliças. Entre esses modelos típicos, último é o mais eficiente, mas não apresenta a mesma simplicidade dos outros modelos como mostrado na Figura 6.10.

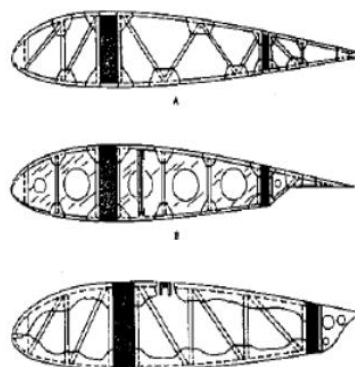


Figura 6.10. Modelos típicos de nervuras. (RODRIGUES, 2009).

O interesse da otimização desse componente estrutural da asa é justificável, pois é nessa região que o carregamento é predominante (RODRIGUES, 2009). A nervura deve ser então um elemento estrutural resistente e ao mesmo tempo compacto, por isso esse elemento é adequado como a principal aplicação deste trabalho, o qual está interessado na redução da flexibilidade com a restrição do volume.

Nesse aspecto, é questionável o uso do MOT para a redução de volume em elementos que já são delgados e que como apresentado por Rodrigues (2009) são confeccionados em madeira ou alumínio, logo são elementos leves e naturalmente compactos. Para justificar o uso do MOT nesses elementos, é importante lembrar que esses elementos são usados em toda a extensão da asa, a redução percentual aplicada ao conjunto de todas as nervuras é vital para o peso total do VANT. O peso do VANT é um parâmetro crítico que afeta a sustentação, o tempo de voo, altura de planeio, escolha do motor e preço final do componente, por isso, a redução da massa sem prejuízo na sustentação é um objetivo “ótimo” na aviação.

Para realçar essa discussão, a asa analisada neste trabalho foi tomada com base nos modelos produzidos pela equipe de AeroDesign (CAR-CARÁ) da UFRN. A

equipe dimensiona os modelos de pequeno porte para competições nacionais de aeromodelos regulamentadas pela SAE Brasil (Sociedade dos Engenheiros Automotivos). Além da competição de caráter esportivo, que serve para validar os conhecimentos aplicados em termos da qualidade da fabricação e eficiência dos protótipos desenvolvidos, são avaliadas as contribuições de cada equipe de estudantes de graduação em quesitos como aplicação de conceitos de engenharia, inovação tecnológica, projeto computacional e simulação por meio de modelos matemáticos (SAE BRASIL, 2018).

Para essa modalidade de competição é prezado a eficiência máxima do componente, logo torna-se ainda mais crítica a redução do peso final do VANT para se adequar as normas regulamentadas pela SAE.

Assim, com base em toda essa discussão, o perfil escolhido foi o USA-35B, que é comum em aeronaves de asa alta com montantes, usado em modelos como CAP-4, PA-18, Piper Cub e Aeroncas. Essas aeronaves são dotadas de uma área de asa bastante generosas, e se utilizam de perfis de fluxo turbulento de alta sustentação (HILTON, 2016). A presença de uma grande área asa resultando em um maior número de nervuras e por isso a escolha por esse perfil.

Neste trabalho não é aprofundado a análise aerodinâmica desse perfil, mas sim o interesse é nas condições de contorno e carregamentos. As condições de carregamento foram determinadas pelo software Profili 2.22a. O parâmetro de entrada, além do perfil, foi o número de Reynolds a 383000 valor padrão para uma aeronave destinada a participar da competição da SAE. O programa forneceu os dados que foram usados para determinar a distribuição de pressão na asa assim como as angulações de menor e maior sustentação.

Na Figura 6.11, é apresentado a distribuição de pressão a 0° , caso (a), configuração de menor sustentação e a $9,5^\circ$, caso (b), de maior sustentação. Para os dois casos é considerado uma rajada de vento a 0° .

Como pode ser observado a região de maior carregamento é justamente na borda da asa. Portanto, essa é a região de interesse para a OT. A região no bordo de ataque do perfil da asa que apresenta maior carregamento é delimitada como sendo $1/4$ da corda (comprimento total do perfil), pois é nessa região que se considera que

o centro aerodinâmico esteja localizado. O centro aerodinâmico é um ponto idealizado no qual a resultante das forças e momentos atuantes na asa se localizam (RODRIGUES, 2009).

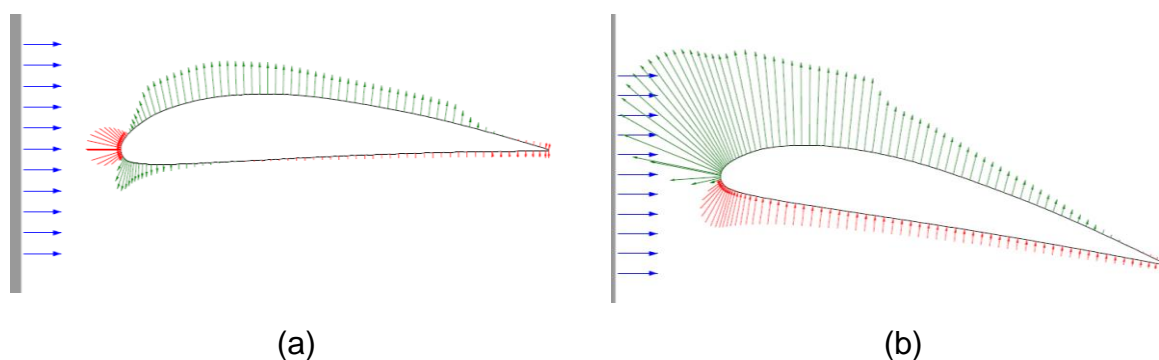


Figura 6.11 Distribuição de pressão a (a) 0° e (b) $9,5^\circ$

Determinado os carregamentos restam a posição dos apoios, a qual foi determinada segundo o estudo de Xinxing, Wenjie *et al.* (2014), Figura 6.12.

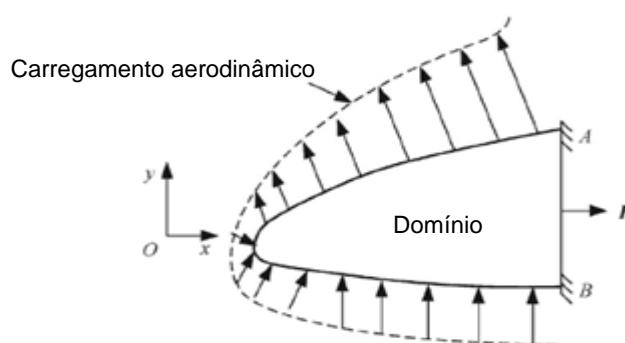


Figura 6.12. Perfil da borda da asa (XINXING, WENJIE, *et al.*, 2014) adaptado.

O perfil USA-35B foi introduzido no algoritmo por meio de suas coordenadas em um domínio de 121×90 elementos com a inserção de vazios assim como feitos no exemplo 4. As coordenadas usadas foram oriundas da base de dados do departamento de Engenharia Aeroespacial da Universidade de Illinois (UIUC, 2019).

Na Figura 6.13, é mostrado o perfil da asa e a região de interesse para a determinação da geometria das nervuras que é até um quarto da corda. O software Excel foi utilizado para a plotagem dos gráficos.

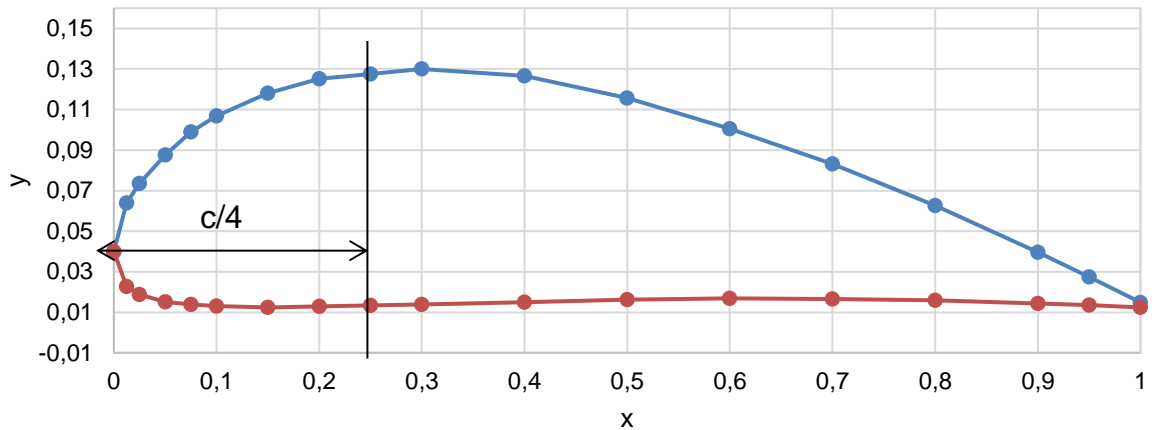


Figura 6.13 Coordenadas do perfil USA-35B (UIUC, 2019) adaptado.

É possível observar que as coordenadas na vertical apresentam valores reais negativos, no entanto a numeração da malha é feita por números inteiros positivos. Logo é preciso realizar uma transformação no domínio das coordenadas.

A transformação das coordenadas fornecidas pela UIUC (2019) foi realizada para que a malha final apresentasse 121 elementos em x e 90 elementos em y , valores escolhidos para manter a proporcionalidade do perfil. Portanto, os valores do eixos da Figura 6.13 foram transformados pelas relações mostradas nas equações (6.1) e (6.2), as quais foram obtidas por proporcionalidade, direta para o eixo horizontal, já que os valores originais estão em uma escala unitária, e uma escala aumentada em 10 vezes para o eixo vertical.

$$X = \left(\frac{nelx}{\left(\frac{nely}{3}\right)} \right) (x * nelx + 1) \quad (6.1)$$

$$Y = (y * 10)(nely + 1) \quad (6.2)$$

Em que X e Y são as coordenada horizontal e vertical após a transformação, respectivamente, x e y as coordenadas antigas e $nelx$, $nely$ o número de elementos na horizontal e vertical respectivamente.

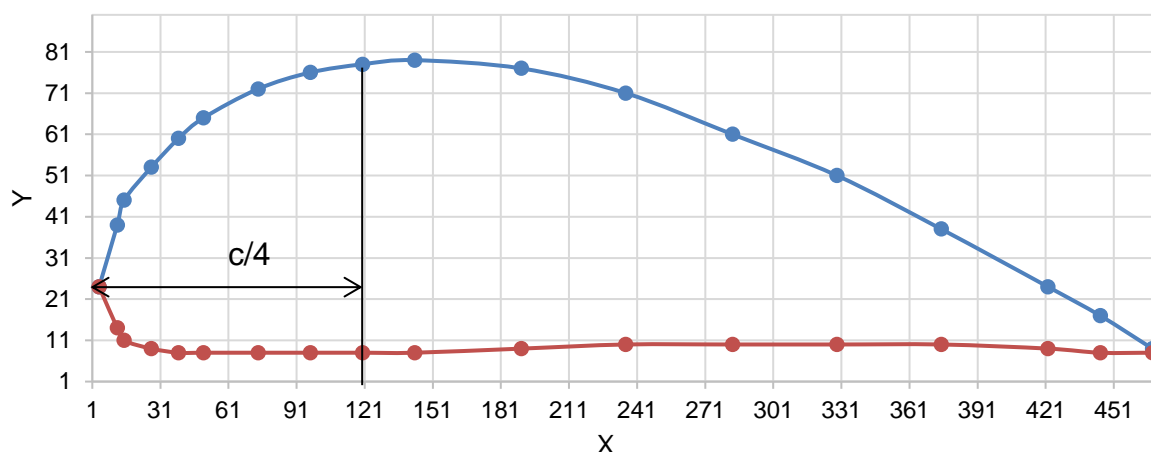


Figura 6.14 Transformação das Coordenadas do perfil USA-35B.

Assim, com essa transformação é possível determinar as condições de contorno para a aplicação no algoritmo. O carregamento distribuído, por questões de simplicidade, é inserido com base nas funções de aproximação, vide Figura 6.15 caso (a). O início e fim de cada região de carregamento distribuído é determinado pelos pontos mostrados na Figura 6.15 caso (b). Os valores das forças foram normalizados como sendo o maior carregamento sendo a unidade, os outros valores foram reduzidos baseado na função de aproximação.

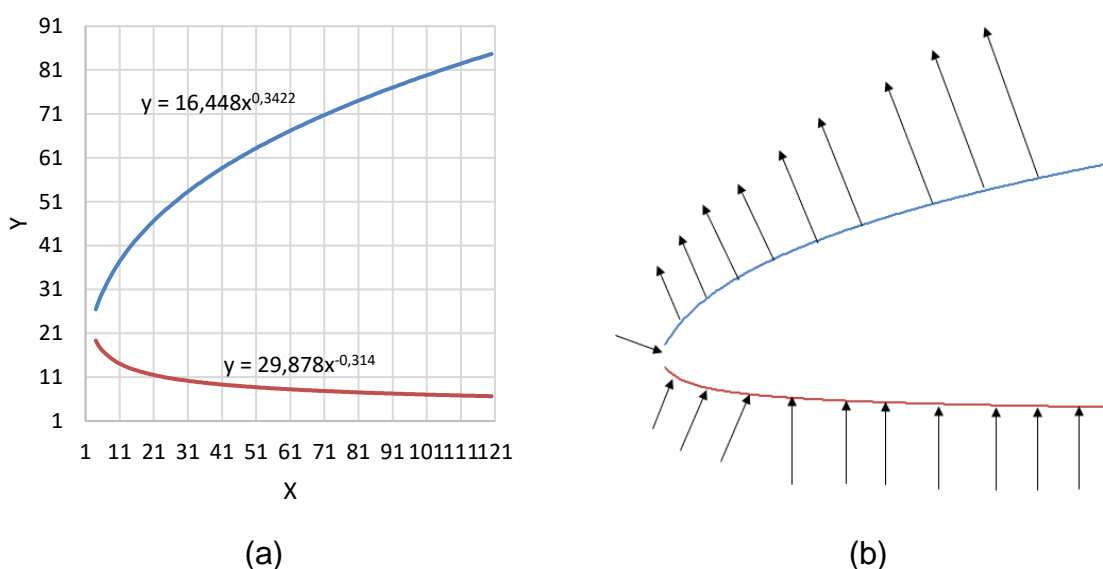


Figura 6.15. Coordenadas do perfil a $\frac{1}{4}$ da corda, (a) aproximação por duas funções exponenciais e (b) distribuição do carregamento.

Portanto, como entrada no código foi usado: 121x90 elementos, variação da restrição foi de 60 a 15% para a caracterização do perfil treliçado, penalidade igual a 3 e raio foi de 4% de *nelx*, logo igual a 5.

Os resultados mostrados nas Figura 6.16 e Figura 6.17 representam apenas o elemento de sustentação da asa, sem o contorno externo em que é realizado a fixação das nervuras (apoios).

Os resultados mostrados na Figura 6.16 apresentam seis resultados com o filtro de densidade. O resultado (a) e (b) apresentam dependência de malha oriunda da restrição e quantidade de elementos usados. Esse efeito é eliminado a partir do caso (c) com 40% de redução.

A convergência foi relativamente rápida se comparado com os outros exemplos. Apenas o caso (f) que apresenta uma quantidade de iterações destoantes, que foi causada porque a restrição atingiu um limite a 15% e é possível ver que a treliça inclinada não foi totalmente definida.

A região dos apoios (lateral direita) no qual há uma carga horizontal como mostrado nas condições de contorno Figura 6.12 foi removida da geometria e a carga foi distribuída em duas, nas treliças superior e inferior, para garantir a estabilidade.

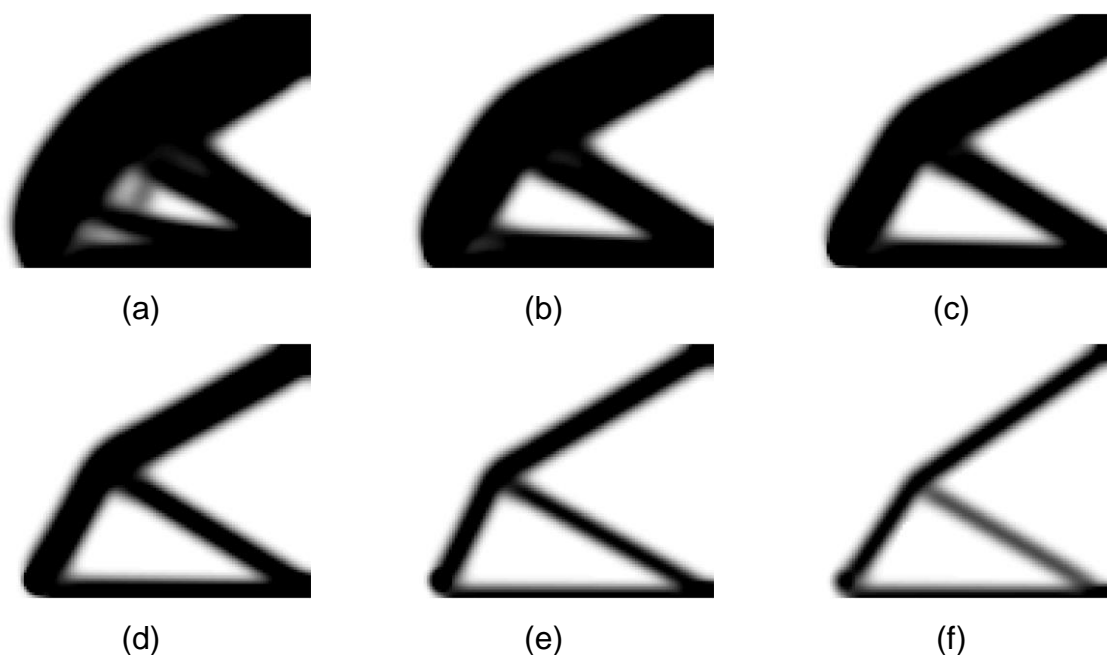


Figura 6.16. Resultados para o exemplo 5 com o filtro de sensibilidade para fração de volume (a) 60%, (b) 50%, (c) 40%, (d) 30%, (e) 20% e (f) 15%.

Tabela 6.9 Resultados do exemplo 4 com o filtro de densidade.

Resultado	$nelx \times nely$	r_{min}	fr	ni	c	ch	t (s)	TI (s)
(a)	121x90	5	60%	36	45,2563	0,010	19,693	0,547
(b)	121x90	5	50%	24	45,4878	0,009	13,087	0,545
(c)	121x90	5	40%	20	45,8674	0,009	12,716	0,636
(d)	121x90	5	30%	23	47,5662	0,009	13,129	0,571
(e)	121x90	5	20%	31	50,3360	0,009	16,383	0,528
(f)	121x90	5	15%	169	57,0130	0,010	82,382	0,487

O filtro de densidade apresentou resultados semelhantes como já foi observado nos exemplos anteriores. Para a nervura, o filtro foi mais estável sem a dependência de malha para os casos (a) e (b) e menor ocorrência de regiões em cinza. O resultado com fração de volume a 15%, caso (f), também é melhor definido.

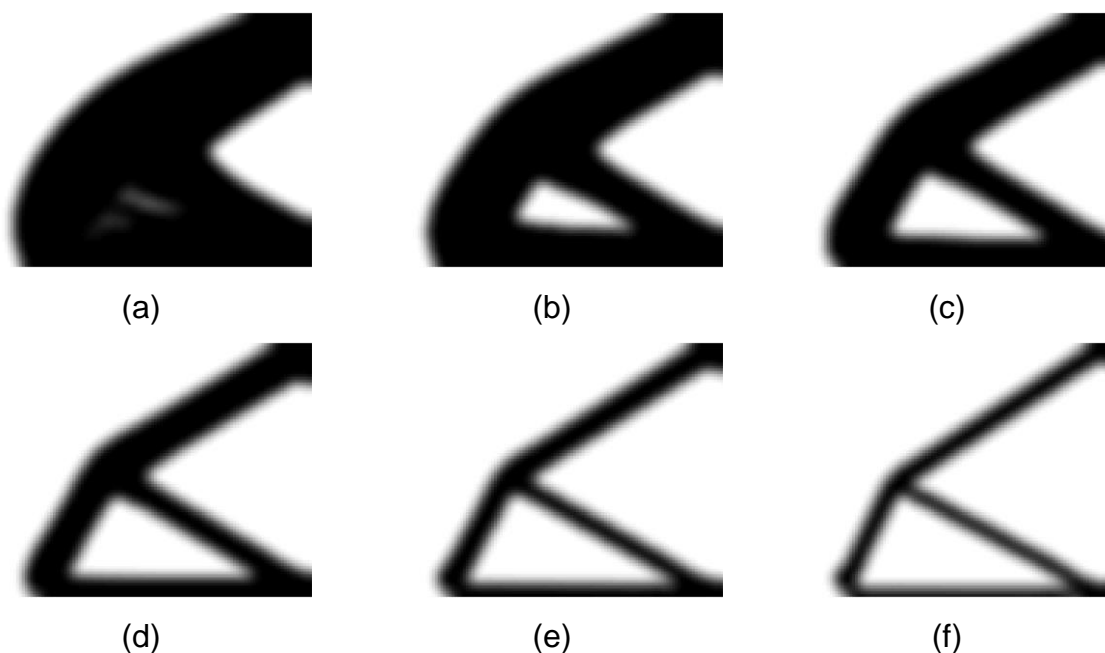


Figura 6.17 Resultados para o exemplo 5 com o filtro de densidade para fração de volume (a) 60%, (b) 50%, (c) 40%, (d) 30%, (e) 20% e (f) 15%.

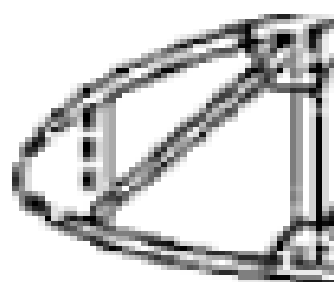
Tabela 6.10 Resultados do exemplo 5 com o filtro de densidade.

Resultado	$nelx \times nely$	r_{min}	fr	ni	c	ch	t (s)	TI (s)
(a)	121x90	5	60%	187	51,2636	0,010	121,870	0,651
(b)	121x90	5	50%	171	51,5240	0,008	115,969	0,678
(c)	121x90	5	40%	213	51,9413	0,008	142,822	0,671
(d)	121x90	5	30%	256	52,7409	0,006	235,948	0,922
(e)	121x90	5	20%	509	54,9361	0,009	388,069	0,762
(f)	121x90	5	15%	474	58,3318	0,006	340,007	0,717

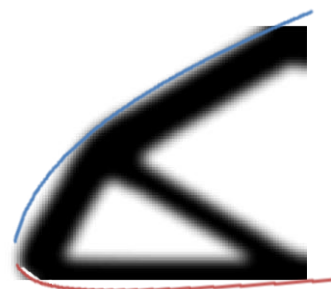
Como mencionado, a redução do volume da nervura representa uma otimização significativa no VANT, pois o peso total é uma variável de extrema importância no seu desenvolvimento. Ainda que a redução de volume de um elemento naturalmente leve pareça desnecessária, uma redução percentual próxima de 85% em uma estrutura, que é distribuída em toda a asa, resulta em uma redução de massa interessante para o projeto de um VANT, ainda mais para modelos sujeitos a competições de aerodesign como é o caso analisado neste trabalho.

Ademais, como já avaliado, essa redução de massa melhora parâmetros importantes como a sustentação, o consumo de combustível, a escolha do motor, o equilíbrio aerodinâmico. Por fim, a geometria final da nervura interna em conjunto com a a casca da asa a $\frac{1}{4}$ da corda satisfaz difere muito do modelo mostrado na literatura como visto na Figura 6.10, o que valida o resultado final apresentado, em especial para o filtro de densidade como pode ser visto na Figura 6.18.

Na Figura 6.18 é comparado especificamente a região de análise deste trabalho o perfil da asa no bordo de ataque. No caso (a) mostrado um destaque da Figura 6.10 e no caso (b) o resultado da Figura 6.17 caso (d) como fração de volume a de 40%. O contorno da Figura 6.15 (a) é utilizado para representar o perfil completo, isto é, a casca e a nervura interna, vide Figura 6.18 (b), não é avaliado as fixações, por isso é apenas uma representação esquemática.



(a)



(b)

Figura 6.18. Comparação entre o perfil de nervura (a) literatura (RODRIGUES, 2009) adaptado e (b) resultado do algoritmo para 20% da fração de volume com o filtro de densidade.

7 Conclusões

A título de organização, neste capítulo, foram feitas conclusões gerais e específicas. Na primeira, é apresentado uma análise sobre a Otimização Topológica com base no que foi mencionado na contextualização. Na segunda, é reiterado os resultados dos cinco estudos de caso.

7.1 Gerais

O Método de Otimização Topológica (MOT) é um método de otimização versátil e sofisticado no qual o domínio é fixo, bem estabelecido e não se altera durante o processo iterativo. O ótimo é determinado pela distribuição de material no domínio. Essa distribuição pode ser tanto com a inserção ou com a remoção de material. Neste trabalho foi adotado o modelo macrométrico com remoção de material.

A função do MOT é determinar uma topologia ótima para um problema em que é necessário a predeterminação de objetivos, restrições, condições de contorno e carregamento. A não especificação da geometria inicial justifica a sua gama de utilização que é extensa e vai desde a Engenharia Civil, Engenharia Mecânica até a Engenharia Aeroespacial.

A busca pelo ótimo tem se tornado cada vez mais uma exigência do modelo industrial vigente, no qual deseja-se produzir estruturas resistentes e compactas, isto é, com a menor massa possível. O que na linguagem empregada neste trabalho representa a minimização da função objetivo que é a flexibilidade (o mesmo que maximizar a rigidez), já as restrições são o volume total, as condições de equilíbrio e as restrições laterais da densidade para as condições de contorno e carregamento apresentadas nos cinco estudos de caso.

Em relação aos estudos de caso, a análise dos resultados de estruturas 2D, ainda que simples, foram suficientes para avaliar a versatilidade do MOT, observar os problemas computacionais, como também a convergência e a comparação com os exemplos encontrados na literatura.

Portanto, como já mencionado na motivação deste trabalho, a possibilidade de aplicar, simultaneamente, elementos finitos, programação não linear e otimização em

uma área de pesquisa que é ao mesmo tempo promissor e motivante. A união metafórica entre a arquitetura, a arte mais a preocupação de estabilidade, de segurança e das questões financeiras (preocupações comuns na engenharia) leva a resultados visualmente interessantes e que mesmo assim capazes de atingir o tão desejado “ótimo”.

7.2 Específicas

Neste trabalho constatou-se que o MOT pode ser utilizado para diferentes tipos de estruturas e carregamentos, os quais foram sujeitos à restrição de volume com o objetivo de minimizar a flexibilidade, o que é equivalente a maximizar a rigidez.

Em relação aos exemplos empregados:

- Para o caso da viga engastada, que foi usado puramente para validar o código, se concluiu que os resultados estão dentro do esperado pela teoria da mecânica dos sólidos, uma viga compacta é substituída por um sistema equivalente com quatro treliças. A treliça é um elemento estrutural eficiente porque apenas suporta tração ou compressão em todo o seu comprimento.
- Para o caso da estrutura de Michel, foi possível observar como a carga distribuída influencia a topologia ótima. O resultado apresenta maior simetria que o exemplo 1 e a topologia final tende a ovalização da estrutura. Nesse exemplo (2), foi possível comparar o modelo SIMP, usado neste trabalho, com o modelo evolucionário oriundo da literatura.
- O resultado para o gancho apresentou uma topologia diferente da convencional, o que se tornou, exemplo 3, mais evidente à medida que a redução do volume foi incrementada. Esse efeito foi gerado tanto pelas condições de contorno impostas como também a forma que o código atua nos elementos, removendo material e formando, usualmente, sistemas com treliças. Concluiu-se que para o caso do gancho esse modelo não foi eficiente por não apresentar um sistema treliçado e não definição da topologia final para ambos os filtros.

- No exemplo 4, a mística, o sistema com treliças só foi atingido com a fração de volume a 20% e foi nesse valor que o resultado ficou mais próximo com o encontrado na literatura. Para esse mesmo caso, foi perceptível que o filtro de densidade foi mais eficiente tanto na convergência quanto na determinação da topologia ótima, devido à presença de regiões com descontinuidade geométrica que dificultaram a convergência do filtro de sensibilidade.
- Por fim, o exemplo 5, a nervura do bordo de ataque da asa de um VANT uniu as considerações feitas nos outros exemplos como a inserção de elementos passivos, visto no gancho, a carga distribuída como feito na estrutura de Michel e a aplicação de uma redução acentuada de volume para atingir o sistema treliçado na mística. A geometria analisada foi a região do bordo de ataque asa, região de maior carregamento. O perfil USA-35B foi empregado por ser típico de aviões de pequeno porte e que apresentam uma grande área de asa para justifica o uso do MOT para a redução de volume das nervuras. O resultado da otimização apresentou uma topologia semelhante a do modelo encontrado na literatura. A flexibilidade obtida foi uma das menores em todo o projeto quase próxima a do gancho. Ademais, foi discutido a validade da aplicação do MOT para estruturas leves e chegou à conclusão que a massa de um VANT, em especial os sujeitos as competições de AeroDesign, é um parâmetro de extrema importância, então a redução do volume da nervuras é um ótimo desejado, pois o peso total da estrutura é determinante na eficiência de voo, altura de planeio, na sustentação, especificação do motor, no consumo de combustível e conseqüentemente no preço total do VANT.

Após realizado todos os testes com os exemplos, em especial após a inserção do perfil da nervura, foi possível concluir que apesar do modelo empregado nesse trabalho seja conveniente para uma análise didática e simplificada do MOT, ele não é suficiente para uma aplicação mais sofisticada. A inserção do carregamento só foi possível com o auxílio do Excel e de uma aproximação da posição do carregamento/perfil da asa. Para solucionar isso, seria mais intuitivo a aplicação dos

carregamentos por um sistema de coordenadas assim como é feito nos elementos passivos.

Em relação à convergência, foi usado malhas com poucos elementos em todos os exemplos, o aumento do número de elementos resultou na não convergência dos resultados ou ainda em instabilidade numéricas como a dependências de malha e a presença de regiões cinzas, não definidas. A alteração do raio mínimo não foi analisada já que apenas altera o tempo total de convergência. A redução do volume foi a principal variável de análise em conjunto com a variação dos filtros.

Os filtros utilizados para a determinação da topologia ótima alteraram significativamente os resultados. Conclui-se que o filtro atuante diretamente na densidade apresentou um tempo de convergência maior, mas não apresentou dependências de malha ou tabuleiros de xadrez para nenhum caso. Já o filtro atuante na derivada (sensibilidade) foi mais rápido na convergência na maioria dos casos e apresentou valores menores para a flexibilidade, por outro lado apresentou instabilidades numéricas como dependências de malha e regiões não definidas, cinzas.

8 Sugestões para trabalhos futuros

O uso de um modelo didático dos trabalhos de Sigmund (2001), Andreassen e Clausen *et al.* (2010) facilitou a análise inicial e até mesmo visual do MOT, assim como os problemas numéricos atrelados a esse método como o tabuleiro de xadrez e a dependência de malha. As modificações no algoritmo em relação as condições de contorno foram relativamente simples, mas para a modificação da posição dos carregamentos assim como para a aplicação de carregamentos distribuídos (exemplo 2 e 5) a inserção foi não intuitiva. Por isso, para trabalhos futuros com esse modelo didático com elementos bidimensionais contínuos é sugerido a aplicação de ferramentas nos quais seja possível ampliar essa gama de aplicações, sendo sugerido:

1. Mudança da linguagem usada para Fortran por apresentar melhor desempenho computacional que o Matlab;
2. Introduzir novas restrições ou objetivos ao problema de ótimo como uma restrição para tensão desenvolvida nos elementos para garantir a segurança da estrutura;
3. Utilizar a OT em conjunto com outro método de otimização como a otimização de forma ou paramétrica. A ideia é utilizar a OT para determinar uma topologia inicial e após isso aperfeiçoar o resultado com o segundo método;
4. Novas aplicações e uma abordagem 3D para nervuras de lemes e profundares, como também aplicações de outras áreas como bocais, pés de apoio de tanques, passarelas e tampas de tanque.
5. Comparação do mesmo modelo com os softwares do mercado;
6. Desenvolvimento de software didático do MOT no qual seja mais prático e conveniente a entrada da condição de contorno;
7. Analisar as questões envolvidas na fabricação como a dificuldade de fabricação de geometrias mais complexa
8. Analise de formar analisar a redução do custo de matéria prima em conjunto com a dificuldade de fabricação
9. Criação de protótipos por prototipagem rápida e realização ensaios mecânicos para validação dos resultados computacionais.

9 Referências

ANDREASSEN, E.; CLAUSEN, A.; SCHEVENELS, M.; LAZAROV, B. S.; SIGMUND O. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 43, p. 1-16, 2010. ISSN 1.

ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design**. 3. ed. Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2012.

BOURDIN, B. Filters in topology optimization. International journal for numerical methods in engineering. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 50, n. 9, p. 2143-2158, 2001.

BRUGGI, M. Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization. **Computers and Structures**, v. 87, p. 1483-1495, 2009.

CHANDRUPATLA, T. R.; BELEGUNDU, A. D. . **Elementos Finitos**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

GONÇALVES, J. C. L. Otimização estrutural topológica com refino de malha adaptativo isotrópico, Curitiba, 2016.

GUILHERME, C. E. M. Otimização topológica e cálculo do gradiente de forma para estruturas submetidas à restrição de fadiga, Porto Alegre, v. Tese, 2006.

HILTON, E. AEROFÓLIOS PARA AERONAVES LEVES. **Aviação Experimental**, 2016. Disponível em: <<http://www.aviacaoexperimental.pro.br/aero/perfis/perfisavileve1.html>>. Acesso em: 30 mai 2019.

KUHN, H. W.; TUCKER, A. W. **Nonlinear Programming**. Basel: Springer, 2014.

MINEIRO, A. A. C. **Aplicação de programação não-linear como ferramenta de auxílio à tomada de decisão na gestão de um clube de investimento**. Itajubá, MG, 2007.

NECHES, L. C.; CISILINO, A. P. Topology optimization of 2D elastic structures using boundary elements. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 32, p. 533-544, 2008.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. **Numerical Optimization**. 2. ed. New York: Springer, 2006.

OLINQUEVICZ, D. F. Otimização Topológica de estruturas contínuas de polipropileno com restrições de tensão baseadas em critérios de escoamento, Belo Horizonte, 2015.

PORTO, E. C. B.; PAVANELLO, R. Influência dos parâmetros de homogeneização sobre a solução estrutural topológica ótima. In **8º Congresso Iberoamericano de Ingenieria Mecanica**, Cusco - Peru, v. 1, p. 1-9, 2007.

RODRIGUES, L. E. M. J. **Fundamentos da engenharia aeronáutica**. São Paulo: IFSP, 2009.

SAE BRASIL. AeroDesign, 2018. Disponível em: <<http://portal.saebrasil.org.br/programas-estudantis/sae-brasil-aerodesign>>. Acesso em: 30 mai 2019.

SANT'ANNA, H. M. **Otimização Topológica de Estruturas Bidimensionais Contínuas submetidas a restrições de flexibilidade e tensão**. Dissertação de Mestrado - UFRGS. Porto Alegre. 2002.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, n. 2, p. 120–127, 2001.

SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 33, n. 4-5, p. 401–424, 2007.

SIMONETTI, H. L. **Otimização topológica de estruturas bidimensionais**. Dissertação Mestrado – Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil. Ouro Preto. 2009.

TAMTA, S.; SAXENA, R. Topological Optimization of Continuum Structures Using Optimality Criterion in ANSYS. **International Research Journal of Engineering and Technology**, v. 3, n. 7, p. 1483-1488, 2016.

TEIXEIRA-DIAS, F. et al. **Método dos Elementos Finitos: Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia**. Lisboa: ETEP, 2009.

UIUC. **The UIUC Airfoil Data Site**, 2019. Disponível em: <https://m-selig.ae.illinois.edu/ads/coord_database.html#U>. Acesso em: 30 mai 2019.

XINXING,T.; WENJIE,G.; CHAO, S.; XIAOYON, Liu. Topology optimization of compliant adaptive wingleading edge with composite materials. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 27, n. 6, p. 1488-1494, 2014.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Natal, 26 de junho de 2019.

Ao(s) **vinte e seis** dia(s) do mês de **junho** do ano de **dois mil e dezenove**, às **oito horas e trinta minutos**, na **sala 414 - CTEC**, neste Campus Universitário, instalou-se a banca examinadora do Trabalho de Conclusão de Curso do(a) aluno(a) **HIGO LEONARDO DA SILVA NASCIMENTO**, matrícula **20170155917**, do curso de Engenharia Mecânica. A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros: **JOÃO CARLOS ARANTES COSTA JÚNIOR**, orientador; **EVANS PAIVA DA COSTA FERREIRA**, examinador interno; **RAIMUNDO CARLOS SILVERIO FREIRE JUNIOR**, examinador interno. Deu-se início à abertura dos trabalhos pelo **JOÃO CARLOS ARANTES COSTA JÚNIOR**, que após apresentar os membros da banca examinadora, solicitou a (o) candidato (a) que iniciasse a apresentação do trabalho de conclusão de curso, intitulado "**MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EM ESTRUTURAS CONTÍNUAS BIDIMENSIONAIS**", marcando um tempo de trinta minutos para a apresentação. Concluída a exposição, **JOÃO CARLOS ARANTES COSTA JÚNIOR**, orientador, passou a palavra aos examinadores para arguirem o(a) candidato(a); após o que fez suas considerações sobre o trabalho em julgamento; tendo sido APROVADO, o(a) candidato(a), conforme as normas vigentes na Universidade Federal do Rio Grande do Norte. A versão final do trabalho deverá ser entregue à Coordenação do Curso de Engenharia Mecânica, no prazo de 15 dias; contendo as modificações sugeridas pela banca examinadora e constante na folha de correção anexa. Conforme o que rege o Projeto Político Pedagógico do Curso de Engenharia Mecânica da UFRN, o(a) candidato(a) não será o aprovado(a) se não cumprir as exigências acima.

João Carlos Arantes Costa Júnior
JOÃO CARLOS ARANTES COSTA JÚNIOR

Orientador

Evans Paiva da Costa Ferreira
EVANS PAIVA DA COSTA FERREIRA

Examinador interno

Raimundo Carlos Silverio Freire Junior
RAIMUNDO CARLOS SILVERIO FREIRE JUNIOR

Examinador interno