



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BACHARELADO EM FÍSICA

Erick Sanches

Ondas Gravitacionais: Um Estudo Comparativo sob as Perspectivas Newtoniana e Relativística

Natal - RN

Dezembro de 2024

Erick Sanches

Ondas Gravitacionais: Um Estudo Comparativo sob as Perspectivas Newtoniana e Relativística

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Física Teórica e Experimental do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Léo Gouvêa Medeiros

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Departamento de Física - DF

Natal - RN

Dezembro de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATA E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA - BSc

ERICK SANCHES

ONDAS GRAVITACIONAIS: UM ESTUDO COMPARATIVO SOB AS PERSPECTIVAS NEWTONIANA E RELATIVÍSTICA

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Léo Gouvêa Medeiros (UFRN - Orientador)
Prof. Dr. Raimundo Silva Junior (UFRN - Membro interno)
Prof. Dr. Ronai Machado Lisboa (UFRN - Membro interno)

Natal - RN

Dezembro de 2024

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Sanches, Erick.

Ondas gravitacionais: um estudo comparativo sob as perspectivas newtoniana e relativística / Erick Sanches. - 2024. 114 f.: il.

Monografia (graduação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Curso de Bacharelado em Física. Natal, RN, 2024.

Orientação: Prof. Dr. Léo Gouvêa Medeiros.

1. Física - Monografia. 2. Ondas gravitacionais - Monografia. 3. Estudo comparativo - Monografia. 4. Radiação gravitacional - Monografia. 5. Sistema binário - Monografia. I. Medeiros, Léo Gouvêa. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 53

ERICK SANCHES

**ONDAS GRAVITACIONAIS: UM ESTUDO
COMPARATIVO SOB AS PERSPECTIVAS
NEWTONIANA E RELATIVÍSTICA**

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Física Teórica e Experimental do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Física.

Aprovado em: _____ de _____ de _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Léo Gouvêa Medeiros - Orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Ronai Machado Lisbôa - Membro Interno
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Raimundo Silva Junior - Membro Interno
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Vitória e Wellingtônia, por todo amor, carinho e suporte nos momentos em que mais precisei.

Agradeço também à minha família pelo apoio durante a minha trajetória.

Ao meu antigo professor Marcelo Nunes Coelho, por sempre me incentivar com seu amor pela Física e me inspirar a seguir em frente.

Ao meu tio Tayd, por suas incontáveis lições, incentivos e ajuda nos momentos mais delicados. Obrigado pelas pegadas em direção ao caminho certo.

À todos os meus amigos, que estiveram ao meu lado oferecendo carinho e motivação para terminar este curso. Em particular para José Arthur e Flávia Cortez, por sempre estarem presentes nos momentos mais importantes de estudo e descontração.

Ao incrível professor Léo Gouvêa, pelo excelente acompanhamento e orientação, indispensáveis neste trabalho. Obrigado pela dedicação de tempo e paciência.

Agradeço também aos professores Ronai Lisboa e Raimundo Silva, por aceitarem o convite de participação na banca e pela dedicação em analisar este trabalho.

Por fim, à UFRN, iniciativas de apoio acadêmico e todos seus funcionários, que tornaram possível a conclusão deste projeto.

*“And in the end
the love you take
is equal to the love
you make.”*

The End - The Beatles

Resumo

Este trabalho tem como objetivo explorar o conceito de ondas gravitacionais por meio de uma abordagem comparativa entre as perspectivas newtoniana e relativística. Inicialmente, apresenta-se uma introdução ao fenômeno das ondas gravitacionais, sua relevância no contexto da astrofísica moderna e sua detecção experimental, com destaque para observatórios como LIGO e Virgo.

Na abordagem newtoniana, considera-se uma descrição simplificada baseada em dois corpos pontuais em movimento circular emitindo radiação gravitacional. Neste cenário, encontramos as equações necessárias para compreender quantitativamente os resultados experimentais apontados no artigo de descoberta das ondas gravitacionais da colaboração LIGO. Embora limitada, essa perspectiva é útil para introduzir os conceitos básicos e desenvolver a intuição sobre o comportamento do sistema. A seguir, entramos no formalismo relativista, usando a teoria da Relatividade Geral de Einstein. Neste regime, a métrica do espaço-tempo é perturbada em torno de uma solução plana (métrica de Minkowski), e as equações de Einstein são linearizadas para derivar as equações que governam a propagação das ondas gravitacionais no espaço-tempo.

Ao final, iremos analisar as proximidades entre os dois regimes e comentar sobre as influências de nossas aproximações, enfatizando os principais limites da teoria clássica e sua necessidade para fins didáticos que facilitam a introdução ao tema.

Palavras-chave: Ondas gravitacionais, Estudo comparativo, Radiação gravitacional, Sistema binário.

Abstract

This work aims to explore the concept of gravitational waves through a comparative approach between Newtonian and relativistic perspectives. Initially, an introduction to the phenomenon of gravitational waves is presented, its relevance in the context of modern astrophysics and its experimental detection, with emphasis on observatories such as LIGO and Virgo.

In the Newtonian approach, a simplified description is considered based on two point bodies in circular motion emitting gravitational radiation. In this scenario, we found the necessary equations to quantitatively understand the experimental results pointed out in the article on the discovery of gravitational waves by the LIGO collaboration. Although limited, this perspective is useful for introducing basic concepts and developing intuition about system behavior. Next, we enter relativistic formalism, using Einstein's theory of General Relativity. In this regime the spacetime metric is perturbed around a flat solution (Minkowski metric), and Einstein's equations are linearized to derive the equations that govern the propagation of gravitational waves in spacetime.

At the end, we will analyze the proximity between the two regimes and comment on the influences of our approaches, emphasizing the main limits of classical theory and its need for didactic purposes that facilitate the introduction to the topic.

Keywords: Gravitational waves, Comparative study, Gravitational radiation, Binary system.

Lista de Figuras

- 1.1 Observatórios LIGO como interferômetros (centro da figura). Parte (a): localização geográfica dos observatórios LIGO-Hanford (em vermelho) e LIGO-Livingston (em azul). Parte (b): curva de sensibilidade dos detectores. Fonte: Ref. [17]. 5
- 1.2 A deformação dos braços perpendiculares do observatório LIGO pela passagem da onda gravitacional. No destaque de cada painel aparece o estiramento de um anel de partículas-teste que, de inicialmente circular, passa a elíptico à medida que o modo de polarização h_+ o atravessa; esse anel-teste ajuda a visualizar o efeito da onda gravitacional sobre o interferômetro. Fonte: Ref. [18]. 7
- 1.3 Parâmetros da primeira observação da Colaboração LIGO para o evento GW150914. Os painéis superiores mostram a amplitude (strain) das OG (H1 à esquerda e L1 à direita). A segunda linha de painéis contém as simulações do strain. A terceira linha de painéis mostra a diferença entre os sinais detectados (na primeira linha) e as formas de onda da relatividade numérica (na segunda linha). A linha inferior (quarta linha) contém a representação tempo versus frequência dos dados de strain, mostrando o aumento da frequência do sinal com o tempo. Fonte: Ref. [17]. 9
- 2.1 Representação do desvio de um vetor V sujeito a um transporte paralelo por um caminho curvo fechado ABCDA. Fonte: Ref. [9]. 33

- 3.1 (a) O vetor RCM parte da origem \mathcal{O} do sistema de coordenadas até o centro de massa (CM). O vetor \mathbf{r}_M localiza a massa M a partir da origem \mathcal{O} ; o vetor \mathbf{r}_m localiza a massa m a partir da origem \mathcal{O} . Por outro lado, o vetor R localiza M partindo do CM; o vetor r parte do CM até a massa m. (b) O vetor distância relativa \mathbf{r}_{rel} parte de M em direção à m. O vetor $\mathbf{F}_{M(m)}$ é a força que m realiza em M; o vetor $\mathbf{F}_{m(M)}$ é a força que M realiza em m. Os vetores $\mathbf{F}_{M(m)}$ e $\mathbf{F}_{m(M)}$ apontam em sentidos contrários pela terceira lei de Newton (2.2), pois a força gravitacional é atrativa. Fonte: Ref. [2]. 44
- 3.2 (a) Diminuição da distância relativa em função do tempo, obtido pela equação (3.97). (b) Aumento da velocidade orbital em função do tempo, obtido pela equação (3.98). Fonte: Ref. [2]. 67
- 4.1 Situação que nos permite separar a métrica em uma de baixa frequência de fundo e uma pequena perturbação de alta frequência. O fundo é definido pela parte com frequências $f \ll \bar{f}$ e as OG pela parte com $f \gg \bar{f}$. Esta definição é em grande parte independente do valor preciso de \bar{f} . Fonte: Ref. [3]. 80
- 5.1 Eventos de coalescências de sistemas binários detectados pela colaboração LIGO-Virgo entre 2015 e 2019. Em azul: eventos envolvendo buracos negros binários e em laranja: evento envolvendo um sistema com estrelas de nêutrons. Os números no lado esquerdo dão a estimativa das massas dos objetos estelares cuja coalescência foi a fonte das ondas gravitacionais. Fonte: Ref. [2]. 91

Lista de Tabelas

- 5.1 Tabela comparativa entre as estimativas da Seção 3 e os dados da colaboração LIGO-Virgo. A sigla “OGFB” significa “Ondas Gravitacionais a partir de Física Básica”. Já as colunas rotuladas por “LIGO” dizem respeito àqueles divulgados pela colaboração LIGO-Virgo. Fonte: Refs. [2], [17] e [22]. 92

Sumário

| | |
|---|-------------|
| Agradecimentos | iv |
| Foreword | v |
| Resumo | vi |
| Abstract | vii |
| Lista de Figuras | viii |
| Lista de Tabelas | x |
| 1 Introdução às Ondas Gravitacionais | 1 |
| 1.1 Ondas gravitacionais | 2 |
| 1.2 Colaborações | 3 |
| 1.3 Detectores | 4 |
| 2 Fundamentos Clássicos e Relativísticos | 10 |
| 2.1 Mecânica Clássica | 11 |
| 2.1.1 Sobre o movimento dos corpos | 11 |
| 2.1.2 Sobre o sistema do mundo | 13 |
| 2.1.3 Leis de conservação | 14 |
| 2.2 Relatividade Geral | 17 |
| 2.2.1 A teoria da relatividade geral | 17 |
| 2.2.2 Geometria diferencial | 22 |
| 2.2.3 Derivação e curvatura | 25 |
| 2.2.4 Tensor de Riemann | 33 |
| 2.2.5 Equação de campo de Einstein | 35 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.2.6 | Fenômenos explicados | 39 |
| 3 | Ondas Gravitacionais: Análise Newtoniana | 43 |
| 3.1 | Introdução | 43 |
| 3.2 | Dinâmica orbital dos buracos negros binários | 44 |
| 3.2.1 | Segunda lei de Newton para o sistema binário | 44 |
| 3.2.2 | Terceira lei de Kepler em função de ω | 46 |
| 3.2.3 | Energia emitida por radiação gravitacional | 48 |
| 3.3 | Energia irradiada em ondas gravitacionais | 50 |
| 3.4 | Massa de chirp | 54 |
| 3.5 | Raio de Schwarzschild e tamanho do sistema | 57 |
| 3.6 | Massas dos corpos e separação na coalescência | 58 |
| 3.6.1 | Massa total, massas individuais e massa irradiada | 58 |
| 3.6.2 | Separação do sistema no merge | 61 |
| 3.7 | Radiação e distância à Terra | 61 |
| 3.7.1 | Intensidade de radiação emitida | 61 |
| 3.7.2 | Distância do sistema | 63 |
| 3.8 | Diminuição de r_{rel} e frequência de Chirp | 64 |
| 3.8.1 | Separação dos buracos negros na fase espiral | 65 |
| 3.8.2 | Velocidade de coalescência e frequência de chirp | 66 |
| 3.9 | A forma funcional das OG e seus modos de polarização | 68 |
| 4 | Ondas Gravitacionais: Análise Relativística | 70 |
| 4.1 | Abordagem geométrica para as OG | 71 |
| 4.1.1 | Variação infinitesimal da perturbação | 71 |
| 4.1.2 | Expansão em torno do espaço-tempo de Minkowski | 72 |
| 4.2 | Os gauges como simplificações da métrica | 74 |
| 4.2.1 | Gauge de Lorentz | 74 |
| 4.2.2 | TT gauge | 75 |
| 4.3 | Energia das ondas gravitacionais | 79 |
| 4.3.1 | Separação entre perturbações e distorções de fundo | 79 |
| 4.3.2 | Como as OG curvam o espaço-tempo | 81 |
| 4.3.3 | Energia carregada pelas ondas gravitacionais | 83 |

| | |
|---|------------|
| 4.3.4 Fluxo de energia das ondas gravitacionais | 84 |
| 5 Resultados e Discussões | 90 |
| 5.1 Eventos e parâmetros físicos obtidos | 90 |
| 5.2 Um paralelo entre os regimes | 94 |
| Referências Bibliográficas | 96 |
| Apêndices | 98 |
| A Propriedades do tensor de curvatura | 99 |
| B Aproximação WKB para o strain | 102 |
| C Transformação em Primeira Ordem | 104 |

Capítulo 1

Introdução às Ondas Gravitacionais

Imagine o instante em que uma pedra toca a superfície tranquila de um lago. O impacto quebra a quietude e gera círculos concêntricos que se expandem, carregando consigo o eco do evento inicial e transmitindo a mensagem de que algo aconteceu. A teoria da relatividade de Einstein prediz algo semelhante, a existência de ondas gravitacionais que resultam em um fenômeno de flutuações sobre a curvatura do espaço-tempo, que se propaga livre ao longo do tecido do universo. De acordo com as equações de Einstein a curvatura é causada pela presença de qualquer fonte de matéria ou energia, como planetas, estrelas, ondas eletromagnéticas e gravitacionais. Quanto mais massivos forem os corpos mais eles deformam o espaço-tempo ao seu redor, e se formam um sistema binário, então eles geram mudanças temporais na curvatura do espaço-tempo, que geralmente são emitidas para fora do sistema, se propagando pelo espaço. Essas perturbações que se propagam são as ondas gravitacionais e esse processo de emissão de ondas é chamado de radiação gravitacional. Como veremos, a teoria da relatividade prevê que essas ondas possuam uma velocidade igual à da luz, c e uma amplitude de onda h , onde esta é caracterizada pela perturbação da onda sobre a métrica de Minkowski, $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$. Como as ondas viajam distâncias astronômicas antes de serem detectadas, é sabido que essas amplitudes são grandezas extremamente sensíveis e da ordem de 10^{-21} . Portanto a sensibilidade de detecção dessas ondas pelos interferômetros é um atual desafio para física e engenharia e um processo com grandes perspectivas.

1.1 Ondas gravitacionais

Uma das predições feitas pela relatividade geral é que qualquer corpo acelerado produz ondas gravitacionais (OG), porém este deve possuir grande quantidade de energia para que os eventos sejam tecnologicamente detectados, ou seja, precisamos de eventos astronômicos capazes de gerar energia suficiente para percebermos a mínima alteração possível aqui na Terra. Eventos dessa escala são geralmente caracterizados por explosões de supernova ou coalescência de grandes objetos, como binários de estrelas de nêutrons e buracos negros binários (BNB), portanto mesmo extremamente distantes a energia produzida por estes é tão grande que esperamos conseguir sentir suas perturbações. Digo perturbações, pois para Teoria da Relatividade Geral de Einstein (Ref.[1]), ondas gravitacionais são caracterizadas por flutuações na métrica do espaço-tempo, uma vez que corpos massivos transmitem energia na forma de perturbações no espaço-tempo que podem ser observadas por nossos observatórios.

O presente trabalho tem como principal objetivo a análise de emissões de ondas gravitacionais por um evento de coalescência de buracos negros binários, tanto no regime newtoniano quanto no relativístico. O contexto do primeiro terá como base o artigo "Ondas gravitacionais de buracos negros coalescentes: um estudo quantitativo a partir de física básica"(Ref.[2]), publicado em 2022 na Revista Brasileira de Ensino de Física (RBEF), onde neste estudaremos, em particular para o evento GW150914,¹ os parâmetros físicos do sistema, a dinâmica orbital dos buracos negros e sua transmissão de energia. Já o contexto do segundo terá como referência o livro de Michele Maggiore, intitulado "Gravitational Waves: theory and experiments"(Ref.[3]). Neste, nos limitaremos ao primeiro e terceiro capítulos, que introduzem uma aproximação geométrica para as ondas gravitacionais, expandem as equações em torno da métrica de Minkowski, aplicam determinados *gauges*² e introduzem os primeiros conceitos relacionados à energia.

¹O termo GW150914 refere-se ao nome do evento, onde os dois primeiros números dizem respeito ao ano da descoberta (2015); os dois números intermediários indicam o mês (setembro); e os números finais denotam o dia da detecção (14). Esse padrão é mantido para todos os eventos posteriores detectados pela Colaboração LIGO-Virgo.

²Gauges são escolhas específicas de coordenadas ou condições que ajudam a simplificar as equações.

O processo de coalescência de sistemas binários é caracterizada pela rotação simultânea de dois buracos negros³ orbitando um centro de massa comum. Pelas previsões da teoria da relatividade geral, o sistema transmite energia para as ondas gravitacionais, gerando uma diminuição do raio orbital e aumento de frequência de oscilação, um padrão de emissão bem característico e que pode ser observado nos detectores. Além disso, para detectarmos qualquer sinal proveniente desses eventos, seus sistemas emissores de OG devem possuir corpos extremamente massivos para que suas perturbações sejam suficientemente grandes e possam ser detectadas a grandes distâncias. Ao longo do presente trabalho usaremos termos como "fase espiral" ou "*merge*", que definem os regimes de separação gradativa dos buracos negros e rápida coalescência, respectivamente.

1.2 Colaborações

Desde o século passado, as observações de sistemas de pulsares já ofereciam evidências importantes para a teoria da relatividade geral (Ref.[4]). Uma das previsões dessa teoria é a emissão de radiação gravitacional por sistemas binários, um fenômeno que provoca a perda gradual de energia no sistema. Isso resulta em uma diminuição do raio orbital e no aumento da frequência, efeitos que foram estudados e confirmados por Weisberg e Taylor (Ref.[5]). No entanto, foi apenas com o avanço tecnológico nas últimas décadas que se tornou possível realizar a detecção direta das ondas gravitacionais, confirmando ainda mais a teoria de Einstein e possibilitando uma nova área de exploração. Atualmente essas detecções são fruto do esforço de diversas organizações ao redor do mundo, incluindo cientistas, engenheiros e instituições com o objetivo em comum de projetar, operar e analisar os dados obtidos do universo. Dentre as principais colaborações se destacam:

- LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), localizados em Hanford e Livingston, nos Estados Unidos. São constituídos por dois grandes detectores de interferometria a laser com braços de 4 Km de comprimento.

³Aqui refere-se a buracos negros, pois é o evento de estudo do trabalho. Porém, poderia ser quaisquer outros dois objetos em coalescência, como estrelas de nêutrons ou sistemas mistos.

Foi o primeiro a detectar diretamente, quase que por acaso, as ondas gravitacionais emitidas por um sistema binário de buracos negros, em setembro de 2015. Esse primeiro evento GW150914 será a base para nossas análises de dados com aproximação newtoniana (Sec. 3).

- Virgo, localizado na Itália. Colaboração europeia que opera com interferômetros de 3 Km de comprimento. Opera em conjunto com LIGO para formar uma rede de triangulação e facilitar a localização das fontes no céu.
- KAGRA, localizados no subterrâneo do Japão. É o primeiro grande detector subterrâneo e utiliza espelhos resfriados criogenicamente para reduzir a quantidade de ruídos térmicos. Se juntou à colaboração LIGO-Virgo em 2020 e opera preferencialmente em tempos complementares aos outros, de forma a manter observações constantes de possíveis eventos.
- Outros detectores auxiliares e em planejamento são GEO600 de 600m na Alemanha, que contribui com avanços tecnológicos de redução de ruído; LISA (Laser Interferometer Space Antenna) projetado para estar no espaço em 2030 e o IndiGO (Indian Initiative in Gravitational-Wave Observation) em desenvolvimento na Índia.

Essas colaborações em operação e desenvolvimento nos mostram a quantidade de investimento mundial na detecção de ondas gravitacionais, cujo principal objetivo é observar os diversos eventos astronômicos existentes no universo. A capacidade de se observar e estudar fenômenos como estes nos trazem grandes expectativas, tanto sobre a melhora de entendimento a cerca desses sistemas quanto ao favorecimento de nossas teorias, como a relatividade geral. Como já comentado, o escopo do presente trabalho é justamente estimar os parâmetros do evento GW150914 observado pela colaboração LIGO-Virgo, utilizando tanto física newtoniana quanto relativística. Vamos comparar e verificar suas precisões e ordens de grandeza, cada um dentro de seu contexto teórico e suas limitações.

1.3 Detectores

Os interferômetros responsáveis pela observação do evento GW150914 estão localizados em Hanford (Washington) e Livingston (Louisiana), nos Estados Unidos. A Figura

1.1 mostra os observatórios⁴ e suas localizações, distantes 3000 Km entre si. Ao centro da mesma figura podemos ver a geometria em "L" de braços perpendiculares, que relembra os experimentos de Michelson, Morley (Ref.[6]), cujo objetivo é encontrar algum tipo de movimento relativo entre as direções perpendiculares. As ondas gravitacionais são oscilações na superfície do espaço-tempo e transmitem energia ao plano perpendicular à sua direção de propagação. Assim, a ideia é identificar o padrão de movimento relativo entre as direções nesses dois braços durante a passagem da onda e ver seu comportamento ao longo de sua observação.

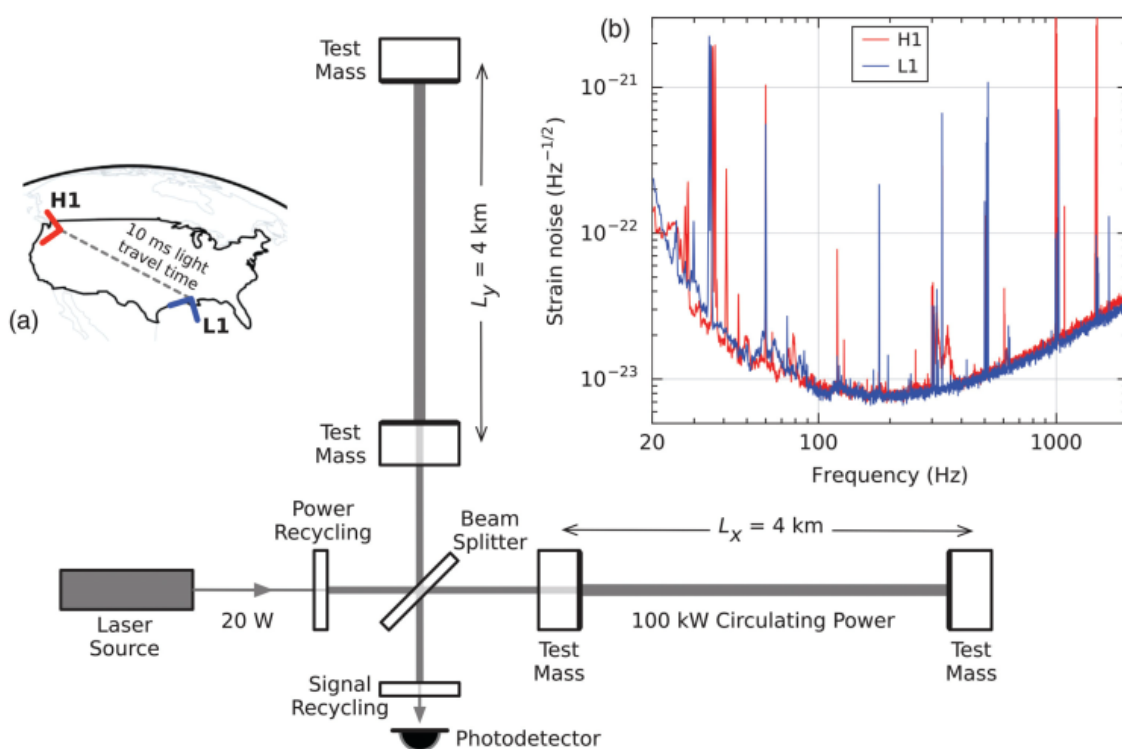


Figura 1.1: Observatórios LIGO como interferômetros (centro da figura). Parte (a): localização geográfica dos observatórios LIGO-Hanford (em vermelho) e LIGO-Livingston (em azul). Parte (b): curva de sensibilidade dos detectores. Fonte: Ref. [17].

Os eventos de ondas gravitacionais ocorrem à distâncias muito grandes (como veremos, bilhões de anos-luz)⁵. Além disso a natureza de interação gravitacional é extremamente baixa. Como resultado, a energia dessas ondas chega aos detectores de forma reduzida, quase imperceptível. Assim, se torna indispensável o uso de detectores de alta precisão, capazes de detectar as menores variações causadas pela passagem dessas ondas

⁴O termo "observatório" geralmente remete à grandes espelhos ou antenas parabólicas típicas dos radiotelescópios. Porém, a geometria dos observatórios de ondas gravitacionais é na forma de grandes braços perpendiculares entre si.

⁵Um ano-luz é a distância percorrida pela luz durante um ano e equivale cerca de $9,46 \times 10^{12}$ Km.

e medir suas amplitudes com uma precisão incrível. Além disso, essa amplitude é proporcional ao tamanho dos braços, por isso a necessidade dos detectores terem quilômetros de distância. Essa característica faz com que o projeto LISA seja muito bem recebido e esperado pela comunidade científica, pois seus três braços terão cerca de 2,5 milhões de quilômetros entre si.

A métrica que representa as deformações no espaço-tempo é descrita por uma matriz simétrica $M_{4 \times 4}$, portanto possui 10 graus de liberdade. Mostraremos que escolhas de determinados gauges restringem nossa análise para apenas 2 graus, que serão responsáveis pela interpretação física das ondas nas duas direções de oscilação, que chamaremos de "modos de polarização" h_+ e h_\times . Digamos que essas oscilações ocorrem em um plano $x - y$ perpendicular à direção de propagação \hat{z} , como é mostrado na Figura 1.2. Considerando por simplicidade uma distribuição circular de partículas teste nos interferômetros, esperamos que elas realizem movimentos periódicos nesse plano durante a passagem da onda, onde a figura mostra a sequência descrita pelo modo de polarização h_+ . De forma semelhante seria para o modo de polarização h_\times , porém com oscilações nas direções diagonais. Portanto, periodicamente teríamos oscilações alternadas entre os dois modos de polarizações físicos, cuja expressão matemática será melhor discutida posteriormente (Sec. 3.9).

Para se observar algum efeito devido à coalescência dos buracos negros binários, é necessária uma precisão da ordem de 10^{-21} , porque a amplitude de oscilação dos braços é proporcional à amplitude de oscilação das ondas gravitacionais e, como estas chegam na Terra após uma longa viagem perdendo energia, sua ordem de grandeza é extremamente pequena. A Figura 1.1.b mostra a relação entre a amplitude das ondas gravitacionais (*strain*) e sua frequência de oscilação, na qual podemos ver que a máxima sensibilidade está por volta de 100 a 400 Hz. Existem estudos que relacionam essa curva de sensibilidade dos detectores com o tipo de fonte geradora das ondas gravitacionais.⁶

A passagem da onda gravitacional provoca oscilações em função do tempo sobre os braços do interferômetro. Assim, há momentos em que temos oscilações verticais, horizontais e diagonais, descritas pelos seus respectivos modos de polarização. Portanto esperamos que em determinado momento durante a passagem da onda, os braços hori-

⁶Ondas gravitacionais emitidas pelo universo possuem frequências em diversas faixas, incluindo fora da sensibilidade dos observatórios. Por isso a necessidade de se construir detectores em outros lugares diferentes e cobrir mais faixas de valores (vide [7]).

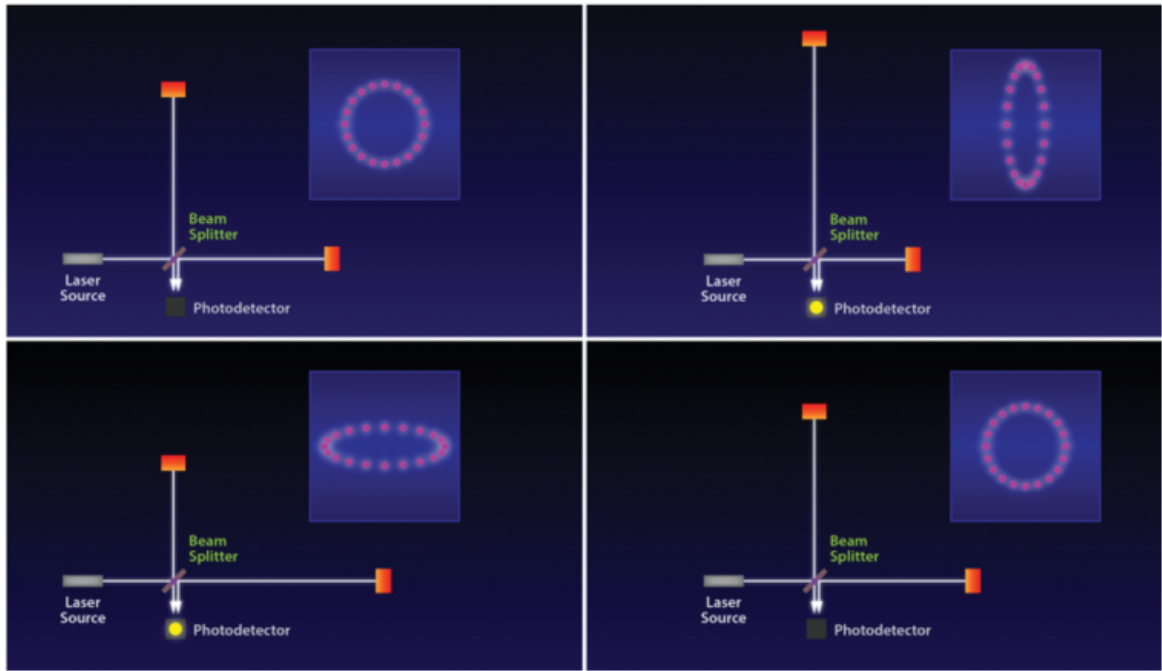


Figura 1.2: A deformação dos braços perpendiculares do observatório LIGO pela passagem da onda gravitacional. No destaque de cada painel aparece o estiramento de um anel de partículas-teste que, de inicialmente circular, passa a elíptico à medida que o modo de polarização h_+ o atravessa; esse anel-teste ajuda a visualizar o efeito da onda gravitacional sobre o interferômetro. Fonte: Ref. [18].

zontal e vertical tenham comprimentos $(L_x + \partial L_x)$ e $(L_y - \partial L_y)$, respectivamente (Figura 1.2). Os modos de polarização variam no tempo à medida que a onda atravessa o detector, caracterizando o comportamento ondulatório das ondas gravitacionais e gerando padrões sequenciais de elipses sobre as massas-teste.

O leitor pode se perguntar como sabemos que o padrão oscilatório detectado pelo observatório é relacionado a um evento de emissões de ondas gravitacionais e não à outro qualquer com um padrão semelhante. Primeiro: o padrão experimental é coerente com os padrões teóricos descritos, tanto pela física newtoniana (dentro de suas ordens de precisão) quanto pela relativística. Segundo: os dois interferômetros gêmeos em Hanford (H1) e Livingston (L1) foram construídos propositalmente com determinada diferença de fase angular entre si, a fim de que qualquer observação feita pelo primeiro concorde com as observações do segundo, a menos de uma diferença de fase conhecida. Outra observação interessante é que a distância dos observatórios é cerca de 3000 km e a diferença de tempo entre as observações do primeiro evento GW150914, foi de aproximadamente 10 ms. Portanto, a onda passou primeiro por L1 e depois por H1, com uma velocidade de

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \simeq \frac{3 \times 10^6 \text{m}}{10 \times 10^{-3} \text{s}} = 3 \times 10^8 \text{m/s}, \quad (1.1)$$

cujo valor é esperado pela teoria da relatividade geral para a velocidade das ondas gravitacionais, que é justamente a velocidade da luz c .

A Figura 1.3 mostra os resultados encontrados pela colaboração LIGO, para o evento GW150914 nos dois interferômetros. Podemos ver (nas partes superiores) o padrão oscilatório da onda caracterizado pela variação de sua amplitude no tempo, para os interferômetros de Hanford à esquerda, e Livingston à direita. No último, por trás da curva azul, há uma curva laranja que corresponde à observação de H1, posta no mesmo *plot* para comparação (considerando-se claro, a diferença de fase entre eles). Assim, podemos ver a concordância entre as duas observações, nos fazendo concluir que se tratam de dados sobre mesmo evento físico. Na segunda linha da Figura 1.3, temos as previsões numéricas da relatividade geral para o *strain* e seus intervalos de confiança em cinza e, como podemos perceber, o padrão é muito semelhante aos dados experimentais obtidos. O gráfico de densidade mais abaixo mostra uma característica típica dos eventos de coalescência: a diminuição do raio orbital e o aumento de frequência de oscilação do sistema, fazendo com que as ondas emitidas também tenham uma frequência com caráter crescente. Esse aumento ocorre até que os buracos negros se fundem e as emissões cessem em um amortecimento transiente (exponencial decrescente), que pode ser observado nas primeiras linhas da Figura 1.3.

Como comentado, o presente trabalho busca estudar do ponto de vista clássico e relativístico, o comportamento das ondas gravitacionais e sua transmissão de energia. Para isso, vamos utilizar algumas noções básicas de física newtoniana, geometria tensorial e relatividade geral. Começaremos revendo os conceitos básicos de conservação de energia, leis clássicas de movimento e suas limitações. Posteriormente, revisaremos de forma superficial os assuntos abordados em um curso introdutório de relatividade geral, como a noção de métrica, espaço-tempo e geometria diferencial. Portanto, leitores já familiarizados com esses conceitos podem prosseguir para Sec. 4, onde desenvolveremos a linearização das equações de Einstein, afim de se obter uma aproximação para campos gravitacionais fracos. Demonstraremos também que as perturbações podem ser descritas pela equação da onda clássica, estudando os chamados *gauges* e sua importância na simplificação da métrica e restrição aos graus de liberdade físicos, onde a necessidade deste,

está no fato de que queremos detectar as contribuições físicas das ondas gravitacionais ao identificar e medir sua transmissão de energia nos interferômetros.

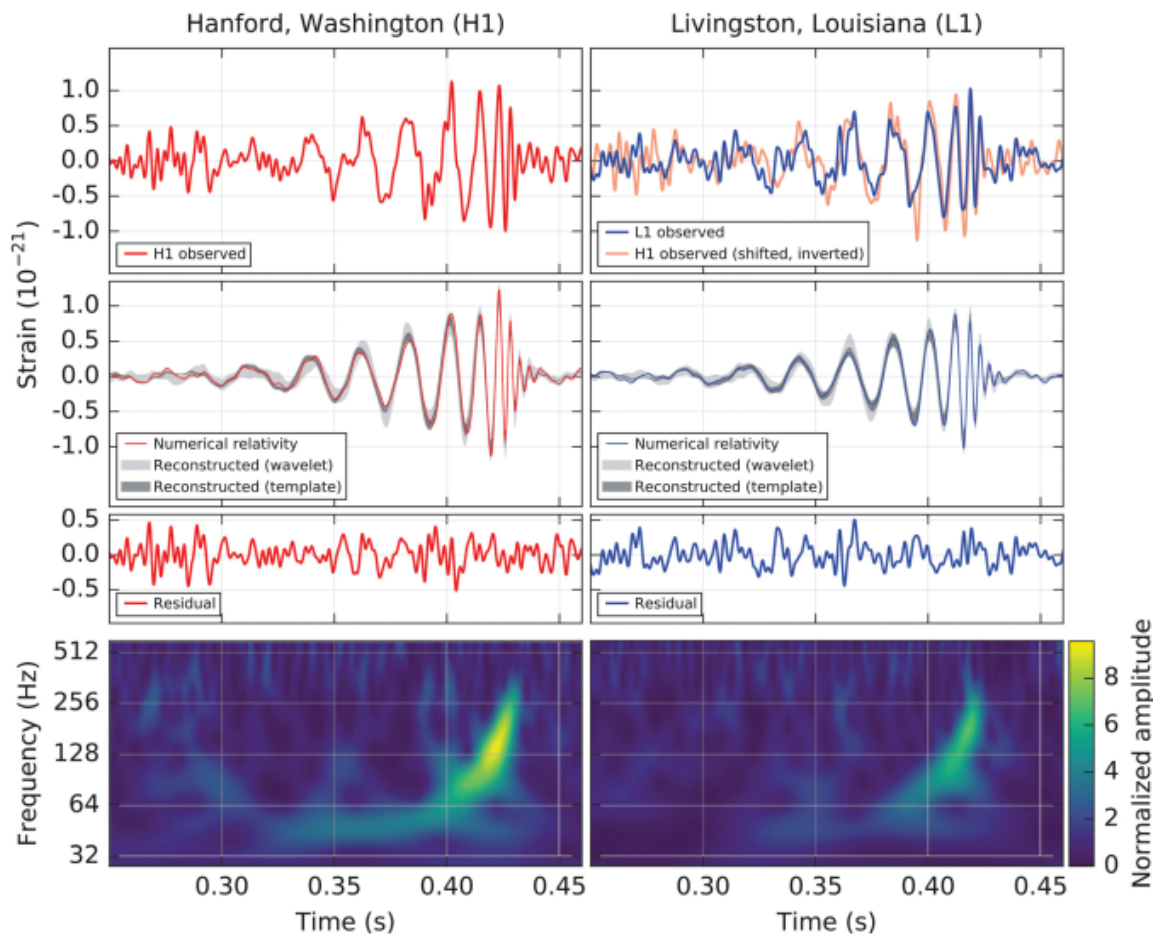


Figura 1.3: Parâmetros da primeira observação da Colaboração LIGO para o evento GW150914. Os painéis superiores mostram a amplitude (strain) das OG (H1 à esquerda e L1 à direita). A segunda linha de painéis contém as simulações do strain. A terceira linha de painéis mostra a diferença entre os sinais detectados (na primeira linha) e as formas de onda da relatividade numérica (na segunda linha). A linha inferior (quarta linha) contém a representação tempo versus frequência dos dados de strain, mostrando o aumento da frequência do sinal com o tempo. Fonte: Ref. [17].

Capítulo 2

Fundamentos Clássicos e Relativísticos

A evolução da mecânica clássica para relatividade geral é uma jornada notável que reflete mudanças profundas sobre o entendimento humano a respeito das leis fundamentais da natureza. A transição do modelo mecanicista para a compreensão relativística foi marcada por diversas descobertas e revoluções conceituais que transformaram a ciência e nossa forma de pensar sobre a gravidade. As ideias apresentadas por Newton estavam à frente de seu tempo, cujos estudos explicam os movimentos dos corpos e suas leis de interação, tanto de contato quanto à distância. A formulação das conhecidas três leis de Newton (Sec. 2.1.1) e a teoria da gravitação universal (Sec. 2.1.2) têm um papel crucial no estudo de mecânica clássica, cujos resultados possuem diversas aplicações até hoje. Porém, ainda haviam limitações a serem consideradas e fenômenos que não eram explicados precisamente naquela época. Dessa forma tornou-se necessário o desenvolvimento de uma nova teoria, considerando novas interpretações para a gravidade. Assim, foram desenvolvidas as ideias de Einstein, que interpretam o espaço-tempo como uma quantidade conjunta, invariante e moldável, cujas aplicações solucionam diversos fenômenos físicos não explicados pela teoria newtoniana e trouxeram uma revolução para o campo da física.

Apesar das diferenças conceituais, a relatividade geral recupera a mecânica clássica como um limite de baixas velocidades e campos gravitacionais fracos (Sec. 2.2.5) e isso é exemplificado pela métrica de Schwarzschild que reproduz a lei da gravitação universal no limite newtoniano. Além disso, a conservação de energia e momento, fundamentais na mecânica clássica, são reinterpretadas na relatividade geral em termos de simetrias no espaço-tempo, cujas ideias apresentaremos adiante com mais detalhes. Portanto, a tran-

sição da mecânica clássica para a relatividade geral não apenas expandiu a compreensão dos fenômenos gravitacionais, mas também abriu caminho para campos inteiramente novos, como astrofísica relativística (estudo de buracos negros, estrelas de nêutrons e ondas gravitacionais) e cosmologia moderna (que descreve a expansão do universo e o modelo do Big Bang). Essa evolução exemplifica como a física avança ao longo do tempo, construindo novas teorias que englobam e ampliam o entendimento a cerca das anteriores, mantendo sua validade dentro de seus contextos apropriados.

2.1 Mecânica Clássica

A formulação da teoria da gravitação universal foi proposta por Isaac Newton no século XVII e está descrita em sua obra "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" (Ref. [8]), cujos principais conceitos descrevem tanto as relações de forças entre corpos quanto aos seus movimentos. Àqueles se caracterizam por fundamentos matemáticos da mecânica clássica e por leis de interação entre os corpos; Já estes são descritos por leis de interação à distância que explicam a maioria dos fenômenos celestes e colaboram com estudos realizados por J. Kepler e suas leis. O *Principia* é separado em três grandes livros. O primeiro trata sobre o "movimento dos corpos" e é onde Newton apresenta suas três leis de movimento. O segundo é uma abordagem mais específica do primeiro cujas discussões se tratam em meios resistivos, introduzindo conceitos importantes para hidrodinâmica. Já o terceiro discute sobre o "sistema do mundo",¹ onde trata das interações gravitacionais à distância entre corpos massivos e é onde Newton formula sua lei da gravidade. Os tópicos interessantes para o presente trabalho são o primeiro e o terceiro.

2.1.1 Sobre o movimento dos corpos

A mecânica clássica de Newton é formulada inteiramente em referenciais inerciais, que são ausentes de aceleração relativa. Assim qualquer força externa sobre este referencial deve conter correções associadas. Newton utilizou amplamente essas ideias para desenvolver seus princípios e enunciados, extendendo-os em soluções de problemas reais

¹Em princípio, o "sistema do mundo" é um termo utilizado por Newton para se referir ao sistema solar, i.e., o conjunto de planetas, satélites e o Sol, com seus movimentos e as leis da gravitação que governam esses corpos. Esse título é mais uma referência ao "mundo" físico que é observado e estudado pelos físicos e astrônomos.

e geométricos. Portanto, viu-se necessário, para ele, formalizar conceitos agregados ao movimento dos corpos, suas forças de interação e suas correlações, formulando assim as suas leis de movimento. Como apresenta em *Principia* (Ref. [8], p.83):

I Lei

Todo corpo preserva seu estado de repouso ou movimento uniforme em linha reta, a menos que sobre este atue alguma força externa, cuja ação modifica seu estado. Esta lei estabelece uma conexão entre os corpos, seus estados de movimento e as forças externas atuantes sobre estes, sendo intimamente ligada ao conceito de inércia e a oposição natural dos corpos ao movimento, assunto que abordaremos mais adiante quando tratarmos de massas inerciais e gravitacionais (Sec. 2.2.1).

II Lei

A alteração de movimento de um corpo em determinada direção é proporcional à força atuante sobre ele, cuja direção é a mesma de alteração do movimento. Esta lei estabelece a relação entre a força resultante atuante sobre um corpo e sua taxa de mudança de movimento,².

$$\mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}, \quad (2.1)$$

onde \mathbf{p}_i representa a quantidade de movimento do corpo, dada por $\mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_i$. Newton define forças como a causa das mudanças de movimento dos corpos, ou seja, sem forças externas não há modificação para o estado do corpo, pois este possui inércia, razão pela qual seu estado tende a permanecer o mesmo.

²Todo desenvolvimento de Newton em *Principia* foi feito de maneira geométrica e em torno da análise de quantidades pequenas e tendências de limites. Porém, sem a descrição de cálculo diferencial e integral como conhecemos hoje, cuja elaboração só foi descrita de maneira formal posteriormente.

III Lei

Toda ação tem sua oposta e igual reação: a ação mútua de forças entre dois corpos são iguais e atuam em sentidos opostos. Assim, diz-se que se um corpo inflige alguma força sobre outro, aquele também sentirá igualmente esta força, porém em sentido contrário. Se pressionamos uma caneta com nossos dedos para atribuir nota dez em um trabalho de conclusão de curso, então estes também serão pressionados pela caneta.

$$\mathbf{F}_{1,2} = \mathbf{F}_{2,1}, \quad (2.2)$$

onde o subíndice "1,2" diz respeito à atuação do segundo sobre o primeiro (e vice-versa para "2,1").

2.1.2 Sobre o sistema do mundo

"O sol estaria fixo no centro do universo e a terra, assim como os outros planetas, descreveria um curso anual ao seu redor, sob estrelas fixas e imóveis nas partes mais altas do mundo". Neste trecho (Ref. [8], p.511), Newton cita a opinião antiga dos primeiros tempos da filosofia, quando Filoau, Aristarco de Samos, Platão e os Pitagóricos manifestavam suas ideias sobre os planetas e o universo. Também haviam os que acreditavam no modelo geocêntrico, como Anaxágoras, Demócrito e outros, que afirmavam sobre a terra ocupar o centro do universo e as estrelas e todos os outros corpos girar ao seu redor em esferas sólidas. Porém, como comenta Newton (Ref. [8], p.512), "os diversos fenômenos de cometas observados pelos Caldeus, antigos astrônomos com grande habilidade de registro de eventos astronômicos, inevitavelmente derrubaram conceitos do geocentrismo e impulsionaram modelos alternativos".

Tomando como base os diversos dados observacionais da época e as considerações propostas ao longo do tempo, Newton seguiu as ideias de Kepler e Descartes sobre a existência de algum tipo de ação constante entre os corpos, algum tipo de impulso atrativo. Assim, sua ideia principal seria apenas descrever matematicamente esse tipo de força, evitando qualquer questão sobre sua natureza, pois não queria inventar nenhuma hipótese. A natureza atrativa dessa ação entre os corpos era óbvia e foi o ponto de partida para as discussões de Newton sobre lançamentos de corpos e a atuação perpendicular da força sobre a direção horizontal de movimento, assim ele percebeu que o aumento de velocidade

de lançamento faria o objeto, em algum momento, completar uma volta completa ao redor da terra, retornando ao seu ponto inicial e sem perda de velocidade horizontal (ignorando o contato com o ar). Além disso, percebeu que o tempo de percurso era proporcional à área da órbita, que por sua vez era proporcional ao quadrado da distância, assim estabeleceu uma relação de proporção entre o tempo e a distância, ou similarmente uma relação de proporção inversa entre a velocidade de órbita e a distância, como era observado nos planetas mais distantes (Ref. [8], p.515).

Essas observações de velocidades orbitais, juntamente com suas leis, propostas no livro I sobre o movimento dos corpos, resultaram nas primeiras relações entre a intensidade dessa ação à distância, as quantidades de matéria dos corpos envolvidos e as distâncias entre eles. O que ficou posteriormente conhecido como a teoria da gravitação universal, descrita matematicamente por,

$$\mathbf{F}_g = G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}, \quad (2.3)$$

onde G é a constante gravitacional de proporcionalidade, M e m são as massas dos corpos e r a distância relativa entre estes. Esta equação nos diz que a força de interação cai com o inverso do quadrado da distância. Isso se dá pela natureza de geometria esférica de distribuição do campo gravitacional ao redor da fonte, a qual distribui sua intensidade através de uma superfície proporcional ao quadrado de seu raio.

2.1.3 Leis de conservação

Todo e qualquer evento natural que ocorre no universo tende ao menor gasto de energia. Essa característica é fundamental e diz respeito ao constante aumento ou, no mínimo, permanência constante de entropia, refletindo uma evolução para configurações mais prováveis e desordenadas. Quando um sistema evolui para estados de menor energia, isso frequentemente corresponde a estados de entropia máxima e estabilização de seu gasto energético, i.e., tendência de energia mínima constante. Assim, ele está obedecendo a uma simetria associada ao tempo, pois tende a não variação da energia após sua minimização. Essa é uma das consequências do interessante teorema de Noether, o qual diz que esses sistemas naturais, quando isolados, podem apresentar algum tipo de simetria física que nos permite encontrar quantidades que não mudam ao longo do tempo. A correlação é

tal que

Simetria no tempo \Rightarrow Conservação de energia

Simetria de translação \Rightarrow Conservação do momento linear

Simetria de rotação \Rightarrow Conservação do momento angular

Isso significa que a simetria regula como as interações fundamentais operam, enquanto a entropia direciona o comportamento estatístico dos sistemas.

Conservação da energia

A lei de conservação de energia é um dos princípios fundamentais da física clássica e moderna, a qual diz que a energia total de um sistema isolado permanece constante ao longo do tempo, independentemente de quaisquer transformações que ocorram nesse sistema. O teorema de Noether estabelece a correlação entre a conservação de energia total do sistema e sua simetria temporal, ou seja, o comportamento do sistema é independente do tempo. Portanto, se as equações de movimento ou as forças de um sistema não dependem explicitamente do tempo (simetria temporal), então a energia total será uma constante, $dE/dt = 0$.

Conservação do movimento

A segunda lei de Newton estabelece que em um sistema isolado não há mudanças na quantidade de movimento de um corpo, ou seja, a taxa de variação temporal deste é nula na ausência de forças externas: $d\mathbf{p}/dt = 0$. Isso implica na conservação de \mathbf{p} , onde o teorema de Noether relaciona ao fato de as leis físicas não dependerem da posição no espaço, que neste caso é dito como homogêneo (simetria de translação).

Conservação do momento angular

Similarmente ao caso anterior, porém para rotações, temos que a quantidade de momento angular total é conservada caso não haja atuação de torques externos sobre o sistema. O momento angular do sistema é dado por $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ e sua conservação $d\mathbf{L}/dt = 0$ implica que as leis físicas não dependem da direção no espaço, que neste caso é tratado como isotrópico (simetria de rotação).

Limitações da teoria newtoniana

A descrição entre conservações e tipos de simetria é interessante e elegante. Ela descreve o comportamento temporal de grandezas físicas em função de seus movimentos espaciais, encontrando formas de entender que a natureza tende a manter suas características caso estas mantenham seus movimentos naturais. Além disso, veremos que campos vetoriais podem ser escritos como gradientes de campos escalares (2.4) e isso implica que a força derivada de um potencial escalar não realiza trabalho em um percurso fechado ($\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$).³ Portanto, campos conservativos são associados a sistemas nos quais há conservação de energia, o que remete novamente na simetria temporal. Assim, podemos ter um amplo estudo sobre o comportamento de campos no regime de simetrias e leis de conservação. Apesar dos estudos newtonianos terem como base as leis de conservação, marcando o início da era moderna da ciência e ser um dos trabalhos mais importantes da história, essa forma de descrição das forças e movimentos desenvolvida em *Principia* ainda possui restrições físicas e limites que devem ser considerados em sua utilização.

- Velocidade instantânea para gravidade: Newton considerava que a gravidade possuía uma ação de força instantânea sobre os corpos, ou seja, uma ação em um dos corpos deveria, sobre atuação da força gravitacional, refletir-se em uma reação instantânea sobre o outro à determinada distância daquele. Isso mostra que suas ideias não possuíam um limite para velocidade dos corpos e nem para forças de atuação entre eles.
- Falta de mediação para gravidade: a lei da gravitação formulada no livro II explica como os corpos distantes interagem entre si, porém não há desenvolvimento sobre como a gravidade atua à distância. Newton reconheceu esse problema dizendo que não ousaria especular sobre o funcionamento desse mecanismo ("*hypotheses non fingo*", Ref. [8]).⁴

³Se um campo é conservativo então seu rotacional é nulo, i.e., $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Pelo teorema de Stokes a integral de superfície do rotacional é igual ao trabalho $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ em seu contorno, assim essa equação só é válida, nesse contexto, para superfícies regulares, i.e., sem singularidades em seu interior.

⁴Do Latim, "Não invento hipóteses".

- Fenômenos em altas energias: a teoria de Newton assume o espaço e tempo como absolutos por transformações Galileanas, onde os fenômenos estudados podem ser tratados sem levar em consideração os limites impostos pela velocidade da luz. Contudo, hoje sabemos que deve-se considerar um limite em regimes relativísticos, sistemas que possuem altas velocidades (ou energias) ou que estejam inseridos em campos gravitacionais consideravelmente intensos.
- Discrepâncias celestes: Embora a teoria da gravidade explique com grande abrangência a maior parte dos sistemas celestes e seus movimentos, ainda haviam resultados observacionais que não podiam ser explicados, como o avanço do periélio de mercúrio ou o desvio da luz (pois matematicamente a teoria clássica newtoniana só afeta objetos massivos (2.3).

Portanto com o desenvolvimento da ciência ao longo dos anos ficou evidente a necessidade da formulação de novas teorias que explicassem os extremos em que *Principia* não se adequava. Assim, em 1915, Albert Einstein desenvolveu a teoria da relatividade geral (vide Ref.[1]), que foi crucial para superar essas limitações e estabelecer uma visão extremamente inovadora sobre o espaço-tempo e as interações entre os corpos.

2.2 Relatividade Geral

2.2.1 A teoria da relatividade geral

Diversos experimentos confirmam que a construção Euclidiana (teoria clássica) não se adequa ao mundo físico observado. Por exemplo, mesmo a física clássica afirmando que o tempo de decaimento de determinada partícula é um em específico, independente da velocidade desta com relação ao laboratório, os valores experimentais mostram que há um acréscimo de tempo de vida para o decaimento, proporcional à velocidade da partícula. A necessidade de explicar este e outros fenômenos requer a construção de uma nova estrutura, cujas soluções se expandem para problemas de corpos em altas velocidades e outros ainda inexplicados pela teoria newtoniana. Assim, desenvolveu-se a TRG de Einstein, cuja base quadri-vetorial para o espaço-tempo permite relacionar dilatações no tempo com contrações no espaço. Agora, a gravidade não é mais interpretada como uma força, mas como uma curvatura do espaço-tempo.

As equações de Einstein são descritas por tensores de curvatura e energia, que descrevem o comportamento do espaço-tempo deformado e distribuição de matéria (energia), respectivamente. Assim, a matéria diz para o espaço como ele deve se curvar, e este diz à matéria como ela deve se mover. A descrição matemática dessas soluções envolvem diversos conhecimentos de cálculo tensorial e relatividade básica, fazendo-se necessário discutirmos sobre essas ferramentas antes de desenvolver nossos estudos com análise relativística no contexto de ondas gravitacionais.

Princípio da equivalência

A teoria da gravitação universal de Newton é descrita por um campo conservativo \mathbf{G} de forma que exista um potencial gravitacional ϕ , tal que

$$\mathbf{G} = -\nabla\phi. \quad (2.4)$$

Podemos relacionar o potencial gravitacional com determinada distribuição de matéria com auxílio da equação de Poisson,

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}), \quad (2.5)$$

onde $\rho(\mathbf{r})$ representa a densidade de matéria. A solução desta equação implica que o potencial gravitacional tenha a seguinte forma,

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (2.6)$$

Porém, utilizando essa abordagem temos um problema: o potencial gravitacional corresponde à uma ação instantânea, ou seja, uma determinada mudança (ação) na distribuição de massa M reflete em um efeito (reação) direto na partícula distante por r , instantaneamente. Isso nos faz pensar em um potencial retardado, cuja ação levaria em consideração o tempo de deslocamento da informação,

$$\phi(r, t) = -\frac{GM(t)}{r}. \quad (2.7)$$

Contudo, ainda não resolveríamos nosso problema, pois esta solução não satisfaz a equação de Poisson, pelo fato dela não poder ser colocada em uma forma covariante sobre as

transformações de Lorentz.⁵ Dessa forma é necessário que a gravidade seja descrita como uma propriedade do espaço-tempo e não como uma força que atua em um espaço absoluto. Isso exige uma descrição matemática que seja independente do sistema de coordenadas, em outras palavras, uma teoria covariante.

O princípio da equivalência fraco diz:

"Nenhum experimento mecânico pode distinguir entre um campo gravitacional local e um sistema de referência acelerado".

Isso significa que o corpo que sofre determinada aceleração não entende se está num sistema de referência acelerado ou na presença de um campo gravitacional local, com mesma aceleração em sentido contrário. Isso nos faz considerar algo interessante sobre sua massa: em um sistema acelerado sua massa tende a resistir à aceleração, logo à chamamos de massa inercial:

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}. \quad (2.8)$$

Porém, em um campo gravitacional uniforme sua massa vai ser responsável pela força gravitacional (2.3). Assim,

$$\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}. \quad (2.9)$$

Logo pela igualdade em módulo das acelerações nas duas situações, temos uma equivalência entre essas duas massas,

$$m_g = m_i. \quad (2.10)$$

Portanto, concluímos que duas quantidades, *a priori* diferentes, são na verdade as mesmas: a massa gravitacional geradora de campo gravitacional é igual a massa inercial como quantidade que resiste ao movimento. Generalizando esse pensamento podemos dizer que, da mesma forma que um sistema mecânico não diferencia localmente um referencial acelerado de um campo gravitacional local, então qualquer fenômeno físico não deve diferenciar.

⁵Colocar algo em uma forma covariante significa fazê-lo não mudar sob transformação de coordenadas.

Isso nos faz enunciar o princípio da equivalência forte:

"Nenhum sistema físico pode distinguir entre um campo gravitacional local e um sistema de referência acelerado".

Agora, como qualquer lei física deve independe do sistema de coordenadas (ser covariante sobre qualquer transformação), usando o princípio de equivalência forte concluimos que a descrição de um fenômeno em um campo de aceleração local, é equivalente à sua descrição em um campo local de gravitação.

Espaço-tempo de Minkowski

Antes da relatividade especial o espaço e o tempo eram tratados como quantidades separadas. A unificação dos dois foi feita por Minkowski e resolve diversos problemas clássicos da época, possibilitando uma melhor visibilidade geométrica para relatividade especial e introduzindo conceitos importantes como o cone de luz.⁶ A conexão entre espaço e tempo é feita pelo "intervalo de evento", dado por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.11)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo. Nesta equação, dx^2 , dy^2 e dz^2 denotam as coordenadas espaciais convencionais e $c^2 dt^2$ um termo temporal, cuja combinação dos quatro forma o invariante de Lorentz ds^2 .⁷ Sua principal característica no contexto de relatividade geral é descrever a estrutura de espaços-tempo planos, sobre os quais desconsideramos a presença de massas ou energias significativas. Portanto ele é a principal ferramenta utilizada para se estudar as estruturas básicas da relatividade geral e os primeiros conceitos de distâncias e intervalos de tempo. Esse intervalo determina como medir distâncias no espaço-tempo plano, incluindo separações temporais e espaciais entre eventos. Em notação tensorial (vide Sec. 2.2.2) podemos escrevê-lo como

⁶Cone de luz se refere à um conceito geométrico que estabelece relações causais entre eventos, introduzido por Minkowski.

⁷Uma quantidade que é invariante permanece a mesma independente de sua transformação. Nesse caso, pelas transformações de Lorentz podemos mostrar que $ds'^2 = ds^2$, logo este é um invariante de Lorentz.

$$ds^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.12)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é chamada de métrica de Minkowski, utilizada ao tratarmos o espaço-tempo como plano. Matricialmente podemos escrevê-la como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde nesse caso, não temos termos "acoplados", $\eta_{\mu\nu} = 0$ p/ $\mu \neq \nu$, e $\eta_{00} = -1, \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$. Usando (2.12) e a troca de índices $\mu \leftrightarrow \nu$, vemos que essa métrica é simétrica,

$$ds^2 = \eta_{\nu\mu} dx^\nu dx^\mu = \eta_{\nu\mu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow \eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}. \quad (2.13)$$

Foi dito que essa quantidade é um invariante de Lorentz. De fato, dada a transformação $x^\mu \rightarrow x'^\alpha$, definida por

$$dx^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx'^\alpha, \quad (2.14)$$

temos

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx'^\alpha \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\beta \right),$$

que rearranjando fica,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = \eta'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = ds'^2. \quad (2.15)$$

Essa demonstração foi feita utilizando a métrica plana mas o raciocínio é análogo para qualquer sistema de coordenadas. Para entender os conceitos teóricos e matemáticos por trás de sua teoria, precisamos de uma base de cálculo diferencial e geométrico. Assim, nas seções seguintes vamos introduzir representações de algumas quantidades importantes na relatividade geral, como vetores e tensores no espaço-tempo, curvatura, conexões e equação de campo.

2.2.2 Geometria diferencial

A geometria diferencial, com suas propriedades tensoriais e estruturas matemáticas, fornece uma linguagem útil para compreender fenômenos gravitacionais complexos. Portanto, para trabalhar no regime relativístico torna-se necessário o desenvolvimento dessas estruturas a fim de explorar os eventos relativos às ondas gravitacionais. Precisamos formular o que são vetores, covetores e suas finalidades. Veremos que tensores são uma espécie de generalização de vetores e matrizes, os quais são importantes no contexto da relatividade, pois esta é uma teoria construída puramente à base de geometria.

Vetores e covetores

Vetores são artifícios geométricos (pertencentes ao espaço tangente, $\mathbf{V} \in T_p$) usados para designar orientações para quantidades físicas, como deslocamentos, velocidades ou forças. Genericamente um vetor em um espaço-curvo é escrito como,

$$\mathbf{V} = V^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad (2.16)$$

onde \hat{e}_μ representa a base escolhida e $\mu = 0, 1, 2, 3$ suas direções. Existe também uma correlação entre vetores e tangentes à curvas (derivadas),

$$\mathbf{V} = V^\mu \partial_\mu, \quad (2.17)$$

onde $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Essa nova representação vetorial é invariante sobre transformações gerais de coordenadas. De fato, usando a lei de transformação em (2.14):

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu, \quad (2.18)$$

e análogo à base,

$$\frac{\partial'}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Rightarrow \partial'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \partial_\alpha,$$

temos

$$\mathbf{V}' = V'^\mu \partial'_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \partial_\alpha = \delta_\nu^\alpha V^\nu \partial_\alpha = V^\nu \partial_\nu = \mathbf{V}.$$

Covetores (ou vetores duais) são funções lineares (pertencentes ao espaço cotangente, $\tilde{\omega} \in T_p^*$) que mapeiam vetores do espaço tangente em escalares. Matematicamente, se $\tilde{\omega}$

é um covetor,

$$\tilde{\omega} = \omega_\mu \theta^\mu, \quad (2.19)$$

e da mesma forma que (2.16), podemos escrevê-lo como,

$$\tilde{\omega} = \omega_\mu \mathbf{d}x^\mu, \quad (2.20)$$

onde $\mathbf{d}x^\mu \neq dx^\mu$, pois $\mathbf{d}x^\mu$ é uma estrutura do espaço cotangente e não um infinitesimal. Analogamente aos vetores, os covetores também são invariantes sobre transformações de coordenadas. Nas duas descrições, tanto de vetores como de covetores, utilizamos uma notação de índices que caracteriza como essas quantidades se comportam em relação a transformações de coordenadas em determinado espaço vetorial. Assim, a atribuição de índices "superiores" para vetores (2.16) e "inferiores" para covetores (2.19) nos ajudam a identificar a natureza da quantidade e como ela é manipulada matematicamente. Suas respectivas bases também seguem a mesma linha de raciocínio, porém de forma contrária (base vetorial com índice "inferior" e base covetorial com índice "superior").

Tensores

Uma generalização de vetores e covetores são os tensores. Assim como um covetor é um mapa linear de vetores para os reais \mathbb{R} , um tensor T de *rank* $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ é um mapa multilinear de uma coleção de vetores e covetores para \mathbb{R} , ou seja, é um objeto geométrico contido no espaço caracterizado pelo produto cartesiano de k bases vetoriais e l bases covetoriais,

$$T = T_p^{*(1)} \times \dots \times T_p^{*(k)} \times T_p^{(1)} \times \dots \times T_p^{(l)} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.21)$$

onde \times denota um produto cartesiano. O argumento de que um tensor é multilinear significa que este atua linearmente em cada um de seus argumentos e seu *rank* é dado pela soma $k + l$. Pelas leis de transformações de vetores e covetores mostradas anteriormente, os tensores devem obedecer a lei de transformação,

$$T_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}(x) \dots \frac{\partial x'^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}}(x) \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}}(x) \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\beta_l}}(x) T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k}. \quad (2.22)$$

Contração tensorial

Uma manipulação interessante que pode ser feita com tensores é contrair um tensor de *rank* $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ que possui índices contra e covariante, ou seja, diminuir seu *rank* para $\begin{pmatrix} k-1 \\ l-1 \end{pmatrix}$. Para isso precisamos trocar índices, de forma a resultar em alguma soma com índices repetidos. Para um tensor $T_{\sigma}^{\mu\nu}$,

$$T_{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\sigma}} T_{\gamma}^{\alpha\beta}, \quad (2.23)$$

e usando a contração $\mu \rightarrow \sigma$,

$$T_{\sigma}^{\prime\sigma\nu} = \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\sigma}} T_{\lambda}^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha}^{\lambda} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T_{\lambda}^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T_{\alpha}^{\alpha\beta}. \quad (2.24)$$

Obtendo então o tensor $T_{\sigma}^{\prime\sigma\nu}$ com *rank* reduzido. Usaremos esse tipo de artifício na Sec. 2.2.4 para reduzir a ordem de tensores relacionados à métrica, de forma a simplificar as equações de campo de Einstein.

Tensor métrico

Um importante objeto matemático presente nos estudos de geometria diferencial é o *tensor métrico*. Um tensor de segunda ordem utilizado para medir distâncias em um espaço-tempo curvo, manipular índices tensoriais e exaustivamente presente nos estudos de relatividade geral. No espaço-tempo plano de Minkowski a métrica satisfaz (2.12), porém sua estrutura geral depende do sistema de coordenadas em questão. De forma geral a determinação de distâncias em um espaço-tempo arbitrário se dá por,

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.25)$$

onde dx^{μ} e dx^{ν} são os elementos infinitesimais de distância e ds^2 o invariante de Lorentz em um espaço-tempo arbitrário. Dada a transformação dos elementos infinitesimais em (2.14), a métrica se transforma como,

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}. \quad (2.26)$$

Além disso, também podemos definir a sua inversa,

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_{\sigma}^{\mu}. \quad (2.27)$$

Uma das principais utilizações da métrica e sua inversa está na ideia de "subir" ou "descer" índices tensoriais. De fato, dado um tensor genérico $T^{\alpha\dots\beta}$,

$$T_{\gamma}^{\beta\dots\zeta} = g_{\alpha\gamma} T^{\alpha\beta\dots\zeta}, \quad (2.28)$$

onde a métrica covariante é utilizada para "descer" índices, enquanto que sua inversa é utilizada para "subir" índices. Esta propriedade pode ser usada repetidamente para manipular quantos índices se queira, e será exaustivamente utilizada no presente trabalho. Como comenta B. Schutz (Ref. [9]), há diversas utilidades para a métrica no contexto de relatividade geral:

"Sendo amplamente aplicada nas determinações de menor caminho entre dois pontos. Nos dá a noção de 'passado' ou 'futuro' em análises de eventos; Nos dá a noção de referencia inercial local quando estudamos determinado sistema; dentre outras".

2.2.3 Derivação e curvatura

Derivação covariante

Sabemos por definição, que a derivação de um campo vetorial envolve as diferenças entre vetores, no limite de tendência ao mesmo ponto. Da mesma forma, as derivadas direcionais desse campo resultam em uma tendência de aumento, ou diminuição, nesta direção. Porém as derivadas convencionais não obedecem a lei de transformação tensorial dada por (2.22),

$$\frac{\partial V'^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} V^{\mu} \right) = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\mu}} V^{\mu} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\beta}}. \quad (2.29)$$

Portanto, precisamos desenvolver uma estrutura diferencial que preserve a lei de transformação tensorial. Seguindo as ideias de S. Carroll (Ref.[10]), podemos escrever um vetor como combinação linear da sua base,

$$\mathbf{V} = V^{\alpha} e_{\alpha}, \quad (2.30)$$

e derivando com relação à coordenada generalizada β ,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \mathbf{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (2.31)$$

Essa equação nos mostra que a derivação de \mathbf{V} é mais do que as derivadas convencionais em suas componentes V^α . Se observarmos esta equação, vemos que o termo $\partial \mathbf{e}_\alpha / \partial x^\beta$ é um vetor, logo pode ser escrito como combinação linear da base,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad (2.32)$$

onde $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ são os chamados "símbolos de Christoffel" (ou conexões) e representam os coeficientes dessa combinação. Aqui α diz respeito à base a ser diferenciada, β é o índice relativo à coordenada a ser diferenciada e μ denota a componente resultante dessa diferenciação. Dessa forma, aplicando (2.32) em (2.31),

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \mathbf{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad (2.33)$$

onde no segundo termo após a igualdade, temos somas sobre μ e α . Assim, podemos trocar um pelo outro,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^\beta} &= \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \mathbf{e}_\alpha + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \mathbf{e}_\alpha \\ &= \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \right) \mathbf{e}_\alpha. \end{aligned}$$

Portanto, para encontrar a derivada covariante de um tensor, usamos

$$\nabla_\beta V^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \quad \text{ou} \quad \nabla_\beta V_\alpha = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} - V_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu, \quad (2.34)$$

onde o símbolo ∇ representa a derivada covariante (ou total) com relação à β . Veremos que em um espaço curvo as noções de derivadas e transportes paralelos necessitam de ajustes, dados pelas conexões.

Dependência da conexão com a métrica

Em geometria diferencial, a diferenciação de dois vetores em uma variedade deve ser feita quando estes se encontram no mesmo ponto. Se o espaço-tempo é plano não há problema, pois nós podemos escolher a base cartesiana que não muda por diferenciações. Porém, em espaço-tempo curvo não temos uma base com essas características, e para diferenciá-los, precisamos trazer um dos vetores para o ponto do outro. Esse transporte de vetores é o chamado "transporte paralelo" e define a possibilidade de diferenciações em qualquer espaço-tempo definido por uma métrica geral (2.25).

A derivada covariante pode ser aplicada a qualquer tensor. Aplicando à métrica, temos

$$\nabla_{\beta}g_{\mu\nu} = \partial_{\beta}g_{\mu\nu} - \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma}g_{\mu\sigma}, \quad (2.35)$$

e escrevendo outras duas expressões com índices alternados,

$$\nabla_{\mu}g_{\nu\beta} = \partial_{\mu}g_{\nu\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}g_{\sigma\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\sigma}g_{\nu\sigma},$$

$$\nabla_{\nu}g_{\beta\mu} = \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\sigma}g_{\sigma\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}g_{\beta\sigma}.$$

Multiplicando a primeira por $-1/2$, as outras duas por $1/2$ e somando as três, obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(-\nabla_{\beta}g_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}g_{\nu\beta} + \nabla_{\nu}g_{\beta\mu}) &= \frac{1}{2}(-\partial_{\beta}g_{\mu\nu} + \partial_{\mu}g_{\nu\beta} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu}) \\ &+ \frac{1}{2}(\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma}g_{\mu\sigma}) - \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}g_{\sigma\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\sigma}g_{\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\beta}^{\sigma}g_{\sigma\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}g_{\beta\sigma}). \end{aligned}$$

Dado que a métrica é simétrica (2.13), podemos simplificar para,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(-\nabla_{\beta}g_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}g_{\nu\beta} + \nabla_{\nu}g_{\beta\mu}) &= \frac{1}{2}(-\partial_{\beta}g_{\mu\nu} + \partial_{\mu}g_{\nu\beta} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu}) \\ &- \Gamma_{[\mu\beta]}^{\sigma}g_{\sigma\nu} - \Gamma_{[\nu\beta]}^{\sigma}g_{\mu\sigma} + \Gamma_{[\mu\nu]}^{\sigma}g_{\sigma\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}g_{\sigma\beta}, \end{aligned}$$

onde aqui somamos e subtraímos o lado direito por $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}g_{\sigma\beta}$, e tomamos a parte antisimétrica para um tensor genérico como,

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}). \quad (2.36)$$

Portanto isolando a última conexão do lado direito e rearranjando os termos, obtemos,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}g_{\sigma\beta} &= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}g_{\nu\beta} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(+\nabla_{\beta}g_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}g_{\nu\beta} - \nabla_{\nu}g_{\beta\mu}) \\ &\quad + \Gamma_{[\beta\mu]}^{\sigma}g_{\sigma\nu} + \Gamma_{[\beta\nu]}^{\sigma}g_{\mu\sigma} + \Gamma_{[\mu\nu]}^{\sigma}g_{\sigma\beta}, \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= g^{\rho\beta}\frac{1}{2}(\partial_{\mu}g_{\nu\beta} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(N_{\mu\nu}^{\rho} - N_{\nu\mu}^{\rho} - N_{\beta\mu\nu}) + Q_{\nu\mu}^{\rho} + Q_{\mu\nu}^{\rho} + Q_{\mu\nu}^{\rho}.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Onde nesta última passagem multiplicamos a equação por $g^{\rho\beta}$, e definimos,

$$\begin{aligned}N_{\mu\nu\beta} &\equiv \nabla_{\beta}g_{\mu\nu} && \text{Tensor de não metricidade,} \\ Q_{\mu\nu}^{\lambda} &\equiv \Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda} && \text{Tensor de torção.}\end{aligned}\quad (2.38)$$

Assim mostramos que a conexão pode ser escrita como função de três componentes: a primeira contendo derivadas da própria métrica; a segunda contendo tensores de não metricidade; e a terceira contendo tensores de torção. Por simplicidade, em relatividade geral, em grande parte das vezes consideramos como nulas estas duas últimas componentes, pois desconsideramos a existência de torções sobre o espaço-tempo e fazemos algumas imposições sobre a métrica ($\nabla_{\beta}g_{\mu\nu} = 0$). Portanto, o resultado encontrado para a conexão é,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}).\quad (2.39)$$

Equação da geodésica

Os processos físicos que ocorrem na natureza tendem sempre à minimização de algo, seja energia ou tempo de percurso. Isso se dá pela tendência constante da natureza de encontrar situações de equilíbrio. Nesse contexto, o princípio de Hamilton é fundamental e estabelece que o movimento real de um sistema entre dois estados é aquele que extremiza determinada ação S , definida como,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i; t) dt,\quad (2.40)$$

onde \mathcal{L} é a Lagrangiana do sistema. Considerando uma Lagrangiana não explicitamente dependente do tempo, usando (2.25) para escrever a ação em termos da métrica, o com-

primento de uma curva entre P e Q é,

$$S = \int_P^Q \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (2.41)$$

Parametrizando as coordenadas com relação à curva λ , temos

$$S = \int_P^Q \sqrt{\mathcal{L}(x, \dot{x})} d\lambda = 0 \Rightarrow \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\delta \mathcal{L}(x, \dot{x})}{2\sqrt{\mathcal{L}}} d\lambda = 0,$$

onde aqui usamos

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \equiv g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu.$$

Assim,

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{L}}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu \right] d\lambda = 0.$$

Utilizando os extremos fixos $\delta x^\mu(\lambda_1) = \delta x^\mu(\lambda_2) = 0$ e integrando por partes o segundo termo:

$$u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \Rightarrow du = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) d\lambda,$$

$$dv = \delta \dot{x}^\mu d\lambda \Rightarrow v = \delta x^\mu.$$

Assim, vemos que "uv" vai a 0, logo

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{L}}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \right] \delta x^\mu d\lambda = 0.$$

O comprimento calculado por essa integral será mínimo se seu argumento for nulo, i.e.,

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (2.42)$$

que é a equação de Euler-Lagrange. Calculando as derivadas acima,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = 2g_{\mu\sigma} \dot{x}^\sigma \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = (\partial_\mu g_{\alpha\beta}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta.$$

Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(2g_{\mu\sigma}\dot{x}^\sigma) - (\partial_\mu g_{\alpha\beta})\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta &= 0 \Rightarrow \\ \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\beta}(2g_{\mu\sigma})\dot{x}^\sigma + 2g_{\mu\sigma}\ddot{x}^\sigma - (\partial_\mu g_{\alpha\beta})\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta &= 0 \Rightarrow \\ 2g_{\mu\sigma}\ddot{x}^\sigma + 2(\partial_\beta g_{\mu\sigma})\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta - (\partial_\mu g_{\sigma\beta})\dot{x}^\sigma\dot{x}^\beta &= 0. \end{aligned}$$

Contraindo com $g^{\rho\mu}$ e usando a simetria da métrica, encontramos que

$$\begin{aligned} \ddot{x}^\rho + \frac{1}{2}g^{\rho\mu}(\partial_\sigma g_{\mu\beta})\dot{x}^\sigma\dot{x}^\beta + \frac{1}{2}g^{\rho\mu}(\partial_\beta g_{\sigma\mu})\dot{x}^\sigma\dot{x}^\beta - \frac{1}{2}g^{\rho\mu}(\partial_\mu g_{\sigma\beta})\dot{x}^\sigma\dot{x}^\beta &= 0 \Rightarrow \\ \ddot{x}^\rho + \frac{1}{2}g^{\rho\mu}(\partial_\sigma g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\mu} - \partial_\mu g_{\sigma\beta})\dot{x}^\sigma\dot{x}^\beta &= 0, \end{aligned}$$

e finalmente,

$$\frac{d^2x^\rho}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\beta}^\rho \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (2.43)$$

cuja solução tem como resultado a curva geodésica que extremiza a ação S , trajetória tal que o tempo de percurso seja mínimo.

Geodésica em campo fraco

A noção de geodésica na relatividade geral descreve o caminho mais curto (ou extremo) entre dois pontos no espaço-tempo, que pode ser entendido como uma "linha reta generalizada" em um espaço-tempo curvo. No contexto de um campo gravitacional fraco, a ideia de geodésica se torna particularmente intuitiva, pois podemos fazer aproximações que conectam a relatividade geral com a gravidade newtoniana. Assim, devemos levar três requerimentos em consideração. Primeiro: as partículas estão se movendo em velocidades pequenas, com relação à velocidade da luz. Segundo: o campo gravitacional local é fraco, portanto vamos considerar perturbações em um espaço-tempo plano. Terceiro: o campo também é estático, portanto não varia no tempo. Vamos ver as conclusões que conseguimos ter aplicando essas limitações na equação da geodésica. Assim, tomando um tempo próprio τ como parâmetro, e usando a primeira consideração, temos

$$\frac{dx^0}{d\tau} \ll c^2 \frac{dt}{d\tau}, \quad (2.44)$$

e a equação da geodésica se torna

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + c^2 \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (2.45)$$

Usando a terceira consideração de campo estático $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$, podemos simplificar a conexão acima,

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu k} (\partial_0 g_{k0} + \partial_0 g_{0k} - \partial_k g_{00}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Agora, considerando a métrica como uma soma entre um termo plano e um termo de perturbação (segunda consideração),

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.47)$$

onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Podemos escrever (2.46) como,⁸

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00}. \quad (2.48)$$

Logo, a equação da geodésica fica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \frac{c^2}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (2.49)$$

e dividindo por $(dt/d\tau)^2$ em ambos os lados podemos trocar as variáveis das derivadas. Além disso, h_{00} não depende do tempo, e tomando a parte espacial ($\eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00} = \eta^{\mu i} \partial_i h_{00} = \delta^{ji} \partial_i h_{00} = \partial_j h_{00}$), chegamos à

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \partial_i h_{00}. \quad (2.50)$$

Comparando esta expressão com a segunda lei de Newton, onde a força está associada ao potencial gravitacional,

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi, \quad (2.51)$$

⁸Aqui consideremos $h^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00} = 0$, pois estamos em aproximação de campo fraco; e $\partial_\lambda \eta_{00} = 0$ devido à propriedade da métrica de Minkowski, onde $\partial_\lambda \eta_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \mu, \nu, k$.

Concluimos finalmente que,

$$h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2}. \quad (2.52)$$

Essa equação será utilizada para demonstrar a equação de Einstein, que deve retomar a equação de Poisson no regime clássico.

2.2.4 Tensor de Riemann

Olhemos o exemplo do transporte paralelo de um vetor por um percurso fechado, dado pela Figura 2.1. Ao percorrer os caminhos AB, BC, CD e DA o vetor sofre um leve desvio devido às diferentes curvaturas experimentadas por ele durante esses quatro transportes. Assim, queremos encontrar uma expressão que mede justamente toda informação de curvatura nesse percurso.

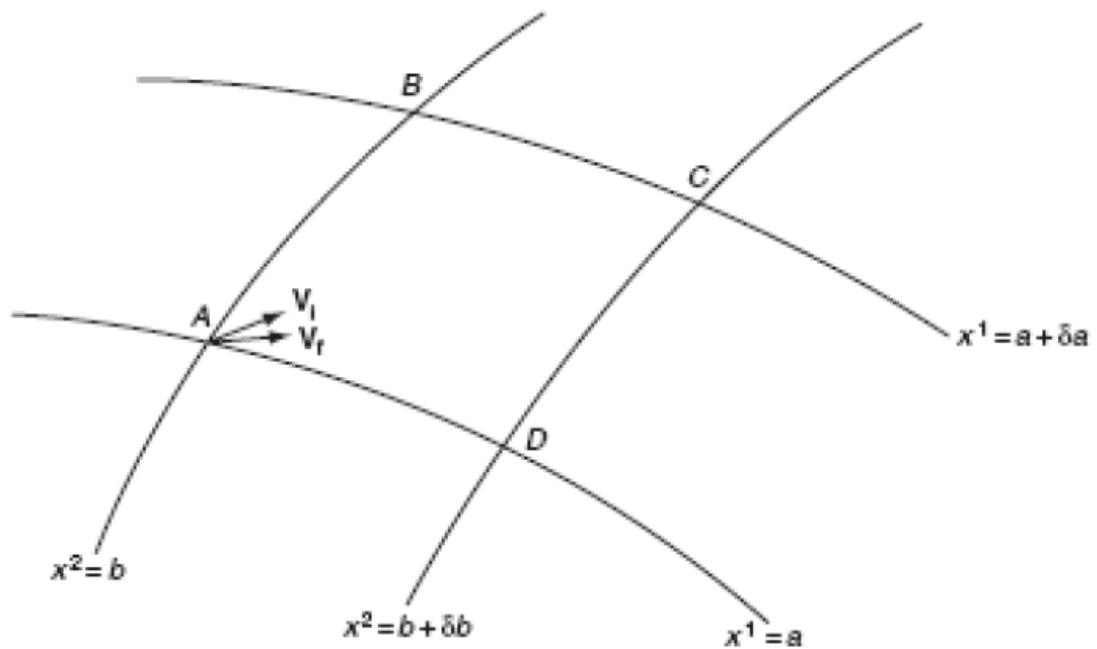


Figura 2.1: Representação do desvio de um vetor V sujeito a um transporte paralelo por um caminho curvo fechado ABCDA. Fonte: Ref. [9].

Sobre transportes paralelos a derivada covariante do vetor transportado é nula, i.e., $\nabla \mathbf{V} = 0$. Assim, a (2.34) resulta em

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} = -\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu. \quad (2.53)$$

Integrando de A para B temos

$$\begin{aligned} V^\alpha(B) &= V^\alpha(A_i) + \int_A^B \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} dx^1 \\ &= V^\alpha(A_i) + \int_{x^2=b}^{x^2=b+\delta b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1, \end{aligned}$$

onde $x^2 = b$ representa integral sobre o caminho AB. Fazendo integrais similares para os outros caminhos, temos

$$\begin{aligned} V^\alpha(C) &= V^\alpha(B) - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2, \\ V^\alpha(D) &= V^\alpha(C) + \int_{x^2=b+\delta b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1, \\ V^\alpha(A_f) &= V^\alpha(D) + \int_{x^1=a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2. \end{aligned}$$

E olhando a mudança no vetor durante o caminho,

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha &= V^\alpha(A_f) - V^\alpha(A_i) \\ &= \int_{x^1=a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 \\ &\quad + \int_{x^2=b+\delta b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_{x^2=b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1. \end{aligned}$$

Se combinarmos as integrais de mesmas variáveis de integração e usarmos a primeira ordem em separação de caminhos, encontramos que

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha &\simeq - \int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu) dx^2 + \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu) dx^1 \\ &\simeq \delta a \delta b \left(- \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu) \right). \end{aligned}$$

Assim, temos derivadas nos símbolos de Christoffel e nos vetores V^α , onde estas podem ser eliminadas se utilizarmos (2.53),

$$\delta V^\alpha = \delta a \delta b (\Gamma_{\mu 1, 2}^\alpha - \Gamma_{\mu 2, 1}^\alpha + \Gamma_{\nu 2}^\alpha \Gamma_{\mu 1}^\nu - \Gamma_{\nu 1}^\alpha \Gamma_{\mu 2}^\nu) V^\mu. \quad (2.54)$$

Aqui, vemos que o termo dentro dos parênteses é antisimétrico em $1 \leftrightarrow 2$. Portanto, precisamos definir

$$\Delta A^{\eta\lambda} \equiv \varepsilon^{\eta\lambda} \delta a \delta b.$$

Então, podemos reescrever (2.54) como

$$\delta V^\alpha = \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\eta, \lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda, \eta}^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\eta}^\nu - \Gamma_{\nu\eta}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\nu) \Delta A^{\eta\lambda} V^\mu. \quad (2.55)$$

Agora, δV^α depende de δa e δb , onde seu produto representa a área do *loop*. Qualquer área é proporção linear de seu perímetro, assim se dobrarmos a área do *loop* o vetor percorrerá o dobro da distância (de fato o desvio do vetor será maior por estar percorrendo uma distância curva maior). Isso significa que δV^α depende linearmente de $\delta a \mathbf{e}_\eta$ e $\delta b \mathbf{e}_\lambda$, que representam os desvios nas direções 1 e 2 postas anteriormente. Assim, definimos $R_{\mu\lambda\sigma}^\alpha$ como o termo entre parênteses na equação (2.55), que representa a curvatura da variedade,

$$R_{\mu\lambda\sigma}^\alpha = \Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\nu. \quad (2.56)$$

O tensor acima define toda curvatura do espaço-tempo e é chamado de tensor de Riemann. Utilizando (2.39) podemos escrever o tensor de Riemann unicamente por métricas. Portanto, como é mostrado no Apêndice A, temos

$$R_{\kappa\mu\lambda\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda \partial_\mu g_{\sigma\kappa} - \partial_\lambda \partial_\kappa g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \partial_\mu g_{\lambda\kappa} + \partial_\sigma \partial_\kappa g_{\mu\lambda}). \quad (2.57)$$

Essa equação nos diz que dada a métrica do espaço-tempo, o tensor de Riemann (e a curvatura da variedade) é completamente definido. Também podemos contrair o tensor de Riemann para encontrar outros dois tensores importantes,

$$R_{\mu\sigma} = g^{\alpha\lambda} R_{\mu\lambda\sigma}^\alpha \quad \text{e} \quad R = g^{\mu\sigma} R_{\mu\sigma}, \quad (2.58)$$

onde $R_{\mu\sigma}$ e R são o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente.

2.2.5 Equação de campo de Einstein

Assim como as equações de Maxwell governam a forma como os campos elétricos e magnéticos respondem à cargas e correntes, as equações de campo de Einstein descrevem como a métrica responde à energia e momento do sistema. A equação de Poisson para a gravidade Newtoniana expressa a relação entre o potencial gravitacional Φ e a densidade de matéria $\tilde{\rho}$ (Ref. [9]),

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \tilde{\rho}, \quad (2.59)$$

onde G é a constante gravitacional. Do lado esquerdo temos o operador laplaciano de segunda ordem atuando no potencial campo, enquanto do lado direito a distribuição de massa. A relatividade geral diz que esta equação deve ter a forma de uma equação

tensorial.⁹ Assim, precisamos usar o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ para generalizar a densidade de matéria $\tilde{\rho}$; da mesma forma para o potencial gravitacional, o qual deve ser representado por um tensor métrico, pois são as perturbações na métrica devido ao potencial newtoniano que reproduzem nossa interpretação da gravidade. Logo esperamos que nossa equação tenha uma relação de proporcionalidade entre esses tensores,

$$[\nabla^2\Phi]_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \quad (2.60)$$

Ao lado esquerdo temos uma quantidade que não é um tensor, apenas uma notação sugestiva para indicar que precisamos de um tensor de *rank* $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que representa a atuação de derivadas segundas na métrica. Poderíamos citar o d'Alambertiano $\square = \nabla_{\mu}^{\mu}\nabla$, porém sua atuação na métrica é zero pela *compatibilidade*.¹⁰ Uma quantidade construída por derivadas segundas e métricas é o tensor de Riemann (2.57), pois este é escrito em termos das conexões e suas derivadas, que por sua vez podem ser construídas por derivadas de métricas (2.39).

Para equação ficar tensorialmente correta podemos contraí-lo (2.24) para o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. Assim,

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.61)$$

Aqui há um problema: a conservação de energia $\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = 0$ sugere que $\nabla^{\mu}R_{\mu\nu} = 0$, e pela identidade de Bianchi isso implica que $\nabla_{\nu}R = 0$, ou $\nabla_{\nu}\kappa T = \kappa\nabla_{\nu}T = 0$. Assim, estamos concluindo que T é constante em todo espaço. Porém, sabemos que isso só é verdade no vácuo, devendo ser diferente de zero em lugares com matéria (a presença de matéria implica num tensor energia-momento não nulo por motivos óbvios). Porém, nós mostramos que existe uma relação entre o gradiente do tensor de curvatura e o divergente

⁹Para garantir que ela seja consistente com os princípios fundamentais da relatividade geral e da física, sendo invariante sob transformações de coordenadas e satisfazendo a natureza geométrica do espaço-tempo, vide (2.22).

¹⁰A métrica deve ser preservada sob transporte paralelo para garantir a invariância de ângulos e medidas, $\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} = 0$. Assim, $\square g_{\mu\nu} = g_{\rho}^{\rho\sigma}\nabla(\nabla_{\sigma}g_{\mu\nu}) = g_{\rho}^{\rho\sigma}\nabla(0) = 0$.

do tensor de Ricci (Apêndice A),

$$\begin{aligned}\nabla^\mu R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\nabla_\nu R \Rightarrow \\ \nabla^\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu R &= 0 \Rightarrow \\ \nabla^\mu(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) &= 0.\end{aligned}$$

Logo, o tensor que se conserva covariantemente, ao mesmo tempo que não se anula na presença de matéria, não é $R_{\mu\nu}$, mas sim o tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.62)$$

Portanto, propomos que a equação de campo de Einstein seja

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.63)$$

que satisfaz todas as necessidades impostas anteriormente. Agora, precisamos apenas achar κ , e para isso usamos que na aproximação de campo fraco (limite newtoniano) está equação deve retornar à equação de Poisson (2.59). Contraindo (2.61), temos $R = -\kappa T$, assim,

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \quad (2.64)$$

Considerando uma fonte de fluido perfeito (vide Ref. [10], Cap.4),

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.65)$$

onde U^μ é a quadri-velocidade do fluido e ρ e p são a densidade de energia e a pressão isotrópica, respectivamente. Vamos simplificar nossa análise considerando que no limite newtoniano devemos ignorar a pressão, pois esta se torna mais importante quando as partículas do corpo estão viajando à velocidades relativísticas. Assim, dentro desse limite devemos ter,

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu, \quad (2.66)$$

onde $U^\mu = (U^0; 0; 0; 0)$. A componente temporal pode ser fixada por condição de normalização $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$. Assim, na aproximação de campo fraco, temos

$$g_{00} = -1 + h_{00} \quad \text{e} \quad g^{00} = -1 - h_{00}. \quad (2.67)$$

Logo, $U^0 = 1 + \frac{1}{2}h_{00}$. Porém, em nosso limite de aproximação estamos considerando ρ muito pequeno (espaço se torna plano quando ρ vai a zero), então devemos ter $U^0 = 1$, ou $U_0 = -1$ e

$$T_{00} = \rho, \quad (2.68)$$

onde todas as outras componentes vão a zero. Nesse limite, T_{00} será muito maior do que os termos espaciais. Vamos ver o que acontece para os índices $\mu = 0$ e $\nu = 0$,

$$T = g^{00}T_{00} = -T_{00} = -\rho. \quad (2.69)$$

Colocando esse resultado em (2.61), temos

$$R_{00} = \frac{c^2}{2}\kappa\rho. \quad (2.70)$$

Para encontrar uma expressão explícita em termos da métrica, fazemos $R_{00} = R_{0\lambda 0}^\lambda$. Como $R_{000}^0 = 0$, vamos analisar os termos espaciais,

$$R_{0j0}^i = \partial_j \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{j0}^i + \Gamma_{j\lambda}^i \Gamma_{00}^\lambda - \Gamma_{0\lambda}^i \Gamma_{j0}^\lambda. \quad (2.71)$$

Ao lado direito, o segundo termo é uma derivada temporal que é nula em campo estático. Os terceiro e quarto termos são quadráticos na conexão, enquanto que a perturbação na métrica é linear, dessa forma resta

$$R_{0j0}^i = \partial_j \Gamma_{00}^i, \quad (2.72)$$

ou, utilizando (2.39),

$$\begin{aligned} R_{0i0}^i &= \partial_i \Gamma_{00}^i = \partial_i \left[\frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \nabla_i^2 h_{00}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

onde novamente utilizamos que $g^{i\lambda} = \eta^{i\lambda} - h^{i\lambda} \simeq \delta^{i\lambda}$ espacialmente e em campo fraco.

Comparando com (2.70) vemos que,

$$-\frac{1}{c^2} \nabla_i^2 h_{00} = \kappa \rho, \quad (2.74)$$

e já sabemos o valor da parte temporal da perturbação, descrita por (2.52), portanto concluímos que,

$$\frac{2}{c^2} \nabla_i^2 \Phi = \kappa \tilde{\rho} c^2. \quad (2.75)$$

onde usamos a relação $\rho = \tilde{\rho} c^2$ entre densidade de energia e densidade de matéria.

Comparando com a equação de Poisson (2.59) encontramos o valor da constante $\kappa = 8\pi G/c^4$. Aplicando em (2.63) e usando (2.62), apresentamos finalmente a equação de campo de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.76)$$

Para entender os conceitos físicos precisamos de uma boa base antes de entrarmos na parte matemática vamos descrever os 3 testes clássicos não explicados pela gravitação newtoniana ou relatividade especial.

Para entender os conceitos teóricos e matemáticos, precisamos de uma base de cálculo diferencial e geométrico. Assim, primeiro apresentaremos a importância da TRG para explicar os fenômenos não antes explicados pela teoria clássica, ou seja, ou aqueles cuja natureza ocorre em determinados limites ou não é completamente calculável com base na visão newtoniana: são eles o redshift gravitacional (mudança de comprimento de onda da luz), a precessão de mercúrio (mudança angular em sua órbita) e a deflexão da luz. Posteriormente, veremos a descrição geométrica para espaços-curvos dada pela relatividade geral, que explica com clareza esses três fenômenos.

2.2.6 Fenômenos explicados

A física newtoniana apresentada por Newton, em 1687, descreve as interações à distância entre os corpos por meio de forças gravitacionais, descritas pela sua lei da gravitação universal (2.3), que trata a gravidade como uma força de ação instantânea e o espaço e tempo como absolutos. Porém, ela falha na descrição de sistemas em regimes mais extremos, como velocidades relativísticas ou órbitas em campos gravitacionais mais

intensos.

A relatividade especial surge por Einstein, em 1905, introduzindo conceitos como o valor constante para velocidade da luz e a equivalência entre referenciais inerciais (Sec. 2.2.1). Nessa teoria, o espaço e o tempo são unificados e as leis da física passam a ser consistentes para todos os referenciais ausentes de aceleração. Contudo, ainda haviam problemas a se resolver, como a consideração do espaço-tempo como plano e a utilização da física newtoniana em regimes de baixas velocidades e/ou fracos campos gravitacionais.

Assim, em 1915, Einstein reformula completamente o conceito de gravidade, descrevendo-a como uma curvatura e não como uma força, mostrando que o espaço-tempo é dinâmico e moldável na presença de matéria/energia (Sec. 2.2.5). A nova relatividade geral não apenas explicou fenômenos antes inexplicáveis, mas também tornou possível o estudo de eventos mais extremos, como buracos negros, expansão do universo e ondas gravitacionais, modificando profundamente nossa compreensão do universo. Os três testes clássicos da relatividade geral são experimentos ou observações que não podiam ser explicados pela gravitação newtoniana ou pela relatividade especial. Esses fenômenos foram satisfatoriamente explicados por Einstein com a teoria da relatividade geral e serviram como as primeiras evidências experimentais de sua validade.

Redshift gravitacional

O redshift gravitacional ocorre quando a radiação eletromagnética emitida por uma fonte em um campo gravitacional intenso sofre deslocamento para comprimentos de onda maiores,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\phi}{c^2}, \quad (2.77)$$

onde ϕ diz respeito ao potencial gravitacional. Esse efeito pode ser pensado como se a gravidade da fonte tentasse trazer a luz de volta, "esticando-a". A relatividade explica que o tempo é dilatado em regiões de campo gravitacional maior. Assim, a luz emitida por determinada fonte perde energia ao tentar escapar do campo gravitacional da mesma, resultando em um comprimento de onda maior. Como a teoria da gravitação é aplicada a corpos massivos, ela não prevê as mudanças de comprimento de onda da luz, pois esta não possui massa. Além disso, a descrição relativística estabelece uma relação mútua entre a deformação no espaço-tempo e a energia (ou matéria) que o deforma, portanto a análise

do comportamento da luz (que é uma forma de energia) em espaços curvos é prevista e calculada pela relatividade geral.

Precessão do periélio de mercúrio

A órbita de Mercúrio ao redor do Sol não é uma elipse perfeita e sofre um movimento chamado de precessão, quando a posição de seu periélio muda ao longo do tempo. As principais fontes causadoras dessa precessão são o Sol e os outros planetas, onde a mecânica clássica consegue explicar boa parte dos desvios, porém ainda haviam divergências observacionais de aproximadamente 43 segundos de arco. Utilizando conceitos relativísticos para descrever o espaço-tempo ao redor de um corpo massivo esféricamente simétrico, conseguimos mostrar que Mercúrio sofre desvios adicionais se considerarmos seu caminho como uma geodésica afetada pela curvatura da gravidade. Desenvolvendo essa geodésica e resolvendo algumas EDOs temos um resultado incrivelmente próximo do esperado de 43 segundos de arco, comprovando que a relatividade geral explica corretamente a precessão do periélio de Mercúrio.

O leitor pode se perguntar se os outros planetas também não sofrem precessão. Acontece que a relatividade prevê um desvio dado por,

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}, \quad (2.78)$$

onde G é a constante gravitacional, M a massa do Sol, c a velocidade da luz, a o semi-eixo maior da elipse e e sua excentricidade, assim percebemos que quanto maior a órbita (maior a), menor é o desvio. Além disso a velocidade orbital pode ser relacionada à sua distância do Sol pela Terceira Lei de Kepler, $v \propto \sqrt{GM/r}$, o que implica que corpos mais próximos possuem maior velocidade. Apesar de (2.78) não relacionar a precessão com a velocidade orbital, a teoria prevê que a curvatura do espaço-tempo afeta consideravelmente corpos que estão viajando em altas velocidade. Assim, a tendência é que haja uma contribuição relativística mais significativa para planetas mais rápidos (mais próximos do Sol). Dessa forma, as precessões dos outros planetas são extremamente menores do que de Mercúrio, pois este além de ser o mais próximo, possui grande excentricidade orbital.

Deflexão da luz

Newton descreve em *Principia* sobre o movimento dos corpos e como estes interagem entre si através de forças. O primeiro livro fala sobre suas leis do movimento enquanto que o terceiro sobre suas leis de interação à distância. Àquele, comenta a proporcionalidade entre a atração de dois corpos com as suas massas e seu decaimento com o inverso do quadrado da distância (Cor.IV, Prop.LXXVI, Ref.8), i.e., a teoria da gravidade se baseia na grandeza que Newton chama de "quantidade de matéria". Assim, em mecânica clássica, não há uma explicação clara para os desvios da luz em um campo gravitacional, pois esta não possui massa.¹¹ De fato a teoria clássica não possui uma forma de explicar o caminho percorrido por feixes de luz, cuja explicação matemática veio mais tarde com a relatividade. Quando a luz de uma estrela distante passa próxima a um corpo massivo, como o nosso Sol, ela é levemente desviada devido à distorção do espaço-tempo em suas proximidades, assim a luz segue uma trajetória curva (uma geodésica) e espera-se que hajam desvios observacionais.

A ideia é tentar observar os desvios de estrelas que estariam, *a priori*, atrás da linha de visada do Sol, porém como a luz solar ofusca e impede a visualização das estrelas de fundo, em 1919, expedições foram feitas para realizar observações durante um eclipse solar. A comissão de observação teve duas frentes, uma coordenada por Eddington e Dyson para Ilha do Príncipe e outra por Andrew Crommellin, à Sobral. As considerações feitas por Eddington (apesar de questionáveis para época (Ref. [12]), nos mostraram resultados extremamente favoráveis para a descrição relativística dos desvios de luz: $1'',98 \pm 0'',12$ para Sobral e $1'',61 \pm 0'',30$ para Ilha do Príncipe (Ref. [13]). A relatividade espera que o desvio seja,

$$\Delta = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} = 1'',75. \quad (2.79)$$

Como as flutuações de média foram próximas de $1'',75$ previstos pela TRG, a predição foi considerada como observacionalmente confirmada.

¹¹Naquela época, apesar de já haver discussões sobre possíveis desvios, estes não eram explicados pela teoria (Ref. [11]).

Capítulo 3

Ondas Gravitacionais: Análise

Newtoniana

3.1 Introdução

Na Sec. 2.1 são apresentados conceitos básicos de física clássica e descrições de movimentos. Vimos que nesse contexto, os corpos interagem por meio de forças e seus movimentos são descritos pelas leis de Newton, apresentadas nos livros I e III sobre os *movimentos dos corpos* e o *sistema do mundo*. O artigo da Ref. [2] desenvolve toda dinâmica de emissões de ondas gravitacionais utilizando apenas física básica. Tomando-o como principal referência, nosso objetivo nesta seção é: estudar, no contexto puramente clássico, o comportamento de um sistema binário e de suas emissões de ondas gravitacionais. Àquele se refere ao estudo das massas dos corpos e sua coalescência em torno do centro de massa do sistema, onde sua distância relativa diminui a medida que a frequência de rotação aumenta, movimento cujas características permitem inferir a energia irradiada; Já este diz respeito ao comportamento e descrição das ondas gravitacionais, onde utilizaremos sua intensidade de radiação para inferir a distância do sistema e a amplitude de oscilação, cuja característica ondulatória também se mostra evidente no regime relativístico e é prevista pela teoria da relatividade geral.

3.2 Dinâmica orbital dos buracos negros binários

3.2.1 Segunda lei de Newton para o sistema binário

Os buracos negros são resultado do colapso gravitacional de dezenas de massas solares, isso faz com que sejam objetos compactos e possam, a longas distâncias do referencial, serem modelados como partículas pontuais. Utilizando a lei da gravitação universal de Newton (Sec. 2.1.2), vamos modelar a estrutura do sistema de dois buracos negros orbitando um centro de massa (CM) em comum, cuja distância relativa, *a priori*, não varia.¹ Considerando a Figura 3.1 do artigo clássico (Ref. [2]), podemos escrever as distâncias de cada corpo ao centro de massa como função da distância relativa entre eles. Isso será importante posteriormente, pois faremos um mapeamento que fará uso dessa distância relativa.²

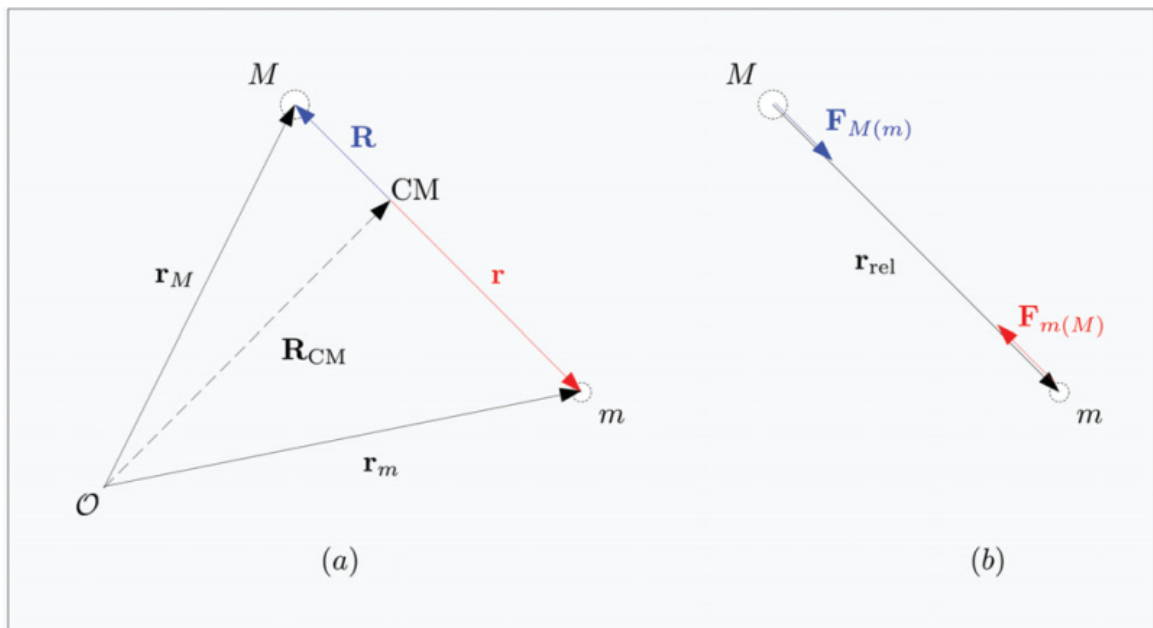


Figura 3.1: (a) O vetor \mathbf{R}_{CM} parte da origem \mathcal{O} do sistema de coordenadas até o centro de massa (CM). O vetor \mathbf{r}_M localiza a massa M a partir da origem \mathcal{O} ; o vetor \mathbf{r}_m localiza a massa m a partir da origem \mathcal{O} . Por outro lado, o vetor \mathbf{R} localiza M partindo do CM; o vetor \mathbf{r} parte do CM até a massa m . (b) O vetor distância relativa \mathbf{r}_{rel} parte de M em direção à m . O vetor $\mathbf{F}_{M(m)}$ é a força que m realiza em M ; o vetor $\mathbf{F}_{m(M)}$ é a força que M realiza em m . Os vetores $\mathbf{F}_{M(m)}$ e $\mathbf{F}_{m(M)}$ apontam em sentidos contrários pela terceira lei de Newton (2.2), pois a força gravitacional é atrativa. Fonte: Ref. [2].

¹Por enquanto vamos desconsiderar variações na distância relativa, pois não estamos interessados em estudar a evolução do sistema no tempo. Isso será feito posteriormente.

²Com "mapeamento", estamos nos referindo à mudança de parâmetros que faremos a seguir, simplificando nossa análise para apenas um corpo em rotação.

Pela figura vemos que,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_M - \mathbf{R}_{CM} \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{R}_{CM}, \quad (3.1)$$

onde r_m e r_M são as distâncias das massas m e M à origem do sistema de coordenadas, respectivamente. Além disso, sabemos que o R_{CM} é calculado por,

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{M\mathbf{r}_M + m\mathbf{r}_m}{M_{tot}}, \quad (3.2)$$

onde $M_{tot} = m + M$ é a massa total do sistema. Assim, podemos substituir a equação acima em (3.1) para obter,

$$\mathbf{R} = \frac{m(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m)}{M_{tot}} \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = \frac{M(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M)}{M_{tot}}. \quad (3.3)$$

Pela mesma figura, também vemos que a distância relativa entre os dois corpos é dada por,

$$\mathbf{r}_{rel} = \mathbf{r} - \mathbf{R} = (\mathbf{r}_m - \mathbf{R}_{CM} - \mathbf{r}_M + \mathbf{R}_{CM}) = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M. \quad (3.4)$$

Assim, podemos substituir esta equação em (3.3) e obter as distâncias individuais dos buracos negros em função da distância relativa entre eles,

$$\mathbf{R} = -\frac{m}{M_{tot}}\mathbf{r}_{rel} \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = \frac{M}{M_{tot}}\mathbf{r}_{rel}. \quad (3.5)$$

O estudo clássico do sistema composto pelos dois buracos negros se faz por análise newtoniana. Para isso faz-se necessário obter a Segunda Lei de Newton (2.1) em termos da massa reduzida e da distância relativa entre os BH , pois assim poderemos demonstrar a expressão para a terceira lei de Kepler em termos dessa distância relativa. Começemos por utilizar a segunda lei para os dois corpos individualmente, ou seja,

$$\mathbf{F}_M^m = M\ddot{\mathbf{R}}, \quad (3.6a)$$

onde a notação F_M^m diz respeito à força que m realiza sobre M (ou que M sofre de m). Analogamente,

$$\mathbf{F}_m^M = m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (3.6b)$$

Utilizando a forma funcional para a força gravitacional (Ref.[14]),

$$\mathbf{F}_m^M = G \frac{Mm}{r_{rel}^2} (-\hat{r}_{rel}) \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_M^m = G \frac{Mm}{r_{rel}^2} (\hat{r}_{rel}), \quad (3.7)$$

onde o sinal de $(-)$ indica a direção oposta entre as forças, necessária para coerência com a terceira lei de Newton (2.2). Utilizando esses valores de forças, aplicamos nas equações (3.6a) e (3.6b) para obter uma relação entre as distâncias,

$$\ddot{\mathbf{R}} = G \frac{m}{r_{rel}^2} (\hat{r}_{rel}) \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{M}{r_{rel}^2} (\hat{r}_{rel}). \quad (3.8)$$

Fazendo a segunda menos a primeira,

$$\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{R}} = -\frac{G}{r_{rel}^2} Mm \frac{(M+m)}{Mm} \hat{r}_{rel}, \quad (3.9)$$

onde multiplicamos e dividimos por Mm , justamente para aparecer o termo relacionado à massa reduzida. Assim, obtemos a segunda lei de Newton para um sistema binário,

$$\mathbf{F} = \mu(\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{R}}) = \mu\ddot{\mathbf{r}}_{rel}. \quad (3.10)$$

Aqui, derivamos duas vezes (3.4) e aplicamos a definição de massa reduzida

$$\mu \equiv \frac{Mm}{(M+m)}. \quad (3.11)$$

Portanto, encontramos a segunda lei de Newton para um sistema composto unicamente por uma massa reduzida orbitando o centro de massa. Essa demonstração é utilizada para mostrar que podemos substituir a análise de um sistema composto por duas massas M e m por um sistema definido por uma única massa reduzida μ . Dessa forma, realizamos um mapeamento de parâmetros onde agora estamos interessados em verificar o movimento circular de um único corpo.

3.2.2 Terceira lei de Kepler em função de ω

Agora queremos encontrar algo interessante: a terceira lei de Kepler em termos da velocidade angular do sistema. Sua expressão será útil no presente trabalho porque relaciona a frequência angular da onda gravitacional com a distância relativa entre os buracos

negros, dessa forma seremos capazes de usá-la de forma abrangente. Sua demonstração se segue pela igualdade entre a segunda lei de Newton para um único corpo de massa reduzida μ (3.10) e a lei da gravitação universal (2.3). Assim,

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}_{rel} = -G \frac{Mm}{r_{rel}^2} (\hat{r}_{rel}) \quad (3.12)$$

e aplicando a massa reduzida em (3.11), temos

$$\ddot{\mathbf{r}}_{rel} = -G \frac{(M + m)}{r_{rel}^2} (\hat{r}_{rel}). \quad (3.13)$$

Neste momento, precisamos considerar um movimento circular uniforme (MCU). Estamos tomando essa consideração porque não estamos, a priori, interessados na coalescência os buracos negros. Dessa forma, a aceleração centrípeta característica para esse tipo de movimento é

$$\mathbf{a}_{cp} = \frac{v_{rel}^2}{r_{rel}} (-\hat{r}_{rel}), \quad (3.14)$$

onde o módulo de sua velocidade tangencial é dado por

$$v_{rel} = \omega r_{rel}. \quad (3.15)$$

Além disso, nossa frequência angular do movimento harmônico simples (MHS) é dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.16)$$

onde T representa o período orbital, i.e., o tempo que o corpo demora para dar uma volta completa. O artigo Ref. [2] sugere fazer uso de (3.16) para obter a relação entre o quadrado do período e o cubo da distância. Porém, como queremos o resultado justamente em termos de ω , podemos simplesmente aplicar (3.15) em (3.14), veja:

$$\mathbf{a}_{cp} = -\omega^2 r_{rel} (\hat{r}_{rel}). \quad (3.17)$$

Considerando que $a_{cp} = \ddot{r}_{rel}$, podemos igualar essa equação à (3.13) e encontrar justamente a terceira lei de Kepler em termos da frequência angular:

$$\omega^2 = G \frac{(M + m)}{r_{rel}^3}. \quad (3.18)$$

Além disso, se usarmos que

$$\begin{aligned} r_{rel}^2 &= (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \\ &= r^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}) + R^2 \\ &= r^2 + R^2 - 2rR \cos(180) \\ &= r^2 + R^2 + 2rR = (r + R)^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

concluimos

$$r_{rel} = r + R. \quad (3.20)$$

E substituindo esse resultado em (3.18), temos

$$\omega^2 = G \frac{(M + m)}{(R + r)^3}. \quad (3.21)$$

Portanto, obtemos a terceira lei de Kepler em termos da frequência angular ω e da separação entre os buracos negros, dada por (3.20).

3.2.3 Energia emitida por radiação gravitacional

Um sistema real de buracos negros não rotaciona em torno do centro de massa a uma distância fixa, mas sim, diminui a distância relativa entre os buracos negros, transferindo energia para fora do sistema em forma de ondas gravitacionais. Assim, é interessante calcularmos a energia total do sistema e posteriormente ver sua taxa de mudança com o tempo. Vamos primeiro pensar na energia total do sistema como a soma entre sua energia cinética e a energia potencial,

$$E_{tot} = K + U, \quad (3.22)$$

onde U pode ser calculado por

$$U = -G \frac{Mm}{(R + r)}. \quad (3.23)$$

Aqui, utilizamos o fato de que um campo vetorial pode ser escrito como o gradiente de um campo escalar, caso ele seja conservativo em uma região simplesmente conexa. Dado o campo vetorial de forças \mathbf{F} , tem-se,

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad (3.24)$$

ou integrando,

$$U = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}. \quad (3.25)$$

Aplicando o mesmo raciocínio para força gravitacional, encontramos

$$\begin{aligned} U &= - \int_{\infty}^r -G \frac{Mm}{r_{rel}^2} dr \\ &= -G \frac{Mm}{r_{rel}}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

que é justamente a (3.23), se utilizarmos (3.20). O artigo utiliza a energia cinética em termos da massa reduzida para encontrar o valor da energia total. Porém, é mais fácil demonstrar esse resultado se utilizarmos o teorema do virial (Ref. [14]),³ o qual satisfaz

$$F \propto r^n \Rightarrow K = \frac{U}{n}. \quad (3.27)$$

Portanto, para nosso contexto, a força gravitacional tem caráter atrativo de força central ($n = -2$ pela lei da gravitação, *vide-se* 2.3). Temos então que

$$K = -\frac{1}{2}U \quad (3.28)$$

e nossa energia cinética fica

$$K = \frac{1}{2}G \frac{Mm}{(R+r)}. \quad (3.29)$$

Logo, a energia total é

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \frac{1}{2}G \frac{Mm}{(R+r)} - G \frac{Mm}{(R+r)} \\ &= -\frac{1}{2}G \frac{Mm}{(R+r)}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

³Teorema que relaciona a energia cinética com a energia potencial, caso o sistema esteja em equilíbrio dinâmico (não mude muito rápido) e ligado (corpos em uma região finita).

Isolando a distância relativa ($R+r$) na terceira lei de Kepler (3.21) e aplicando na equação acima, obtemos uma expressão para energia total em termos na frequência angular. De fato,

$$(R+r) = G^{1/3} \frac{(M+m)^{1/3}}{\omega^{2/3}}, \quad (3.31)$$

segue que,

$$E_{tot} = -\frac{1}{2} G^{2/3} \frac{Mm}{(M+m)^{1/3}} \omega^{2/3}. \quad (3.32)$$

Durante essa demonstração consideramos a frequência angular como fixa à todo momento. Porém, um processo real de coalescência é caracterizado pela diminuição da distância relativa entre os corpos do sistema, gerando um conseqüente aumento de frequência angular, de modo que agora devemos considerá-la como variável no tempo: $\omega \rightarrow \omega(t)$. Durante esse processo o sistema transfere energia para as ondas gravitacionais. Então agora devemos considerar uma dependência temporal não nula para energia total (3.32):

$$-\frac{dE_{tot}}{dt} = \frac{1}{3} G^{2/3} \frac{Mm}{(M+m)^{1/3}} \omega^{-1/3} \frac{d\omega}{dt}. \quad (3.33)$$

Nesta equação há uma relação direta entre a taxa de variação de energia e a frequência angular. Porém, é importante notar que não há transferência de energia porque o sistema coalesce, mas sim o contrário. A diminuição da distância relativa e variação na frequência angular acontece como uma consequência da emissão de ondas gravitacionais pelo sistema. No seguinte tópico calcularemos essa variação de energia na forma de potência irradiada, e veremos quanta energia um sistema de buracos negros emite em sua coalescência.

3.3 Energia irradiada em ondas gravitacionais

A forma mais adequada de se estudar a potência irradiada na forma de ondas gravitacionais é utilizando conceitos de relatividade geral. Como nossa abordagem se baseia na teoria newtoniana, o estudo da dinâmica do sistema deve ser feito por meio de física clássica. Assim, faremos uma abordagem utilizando uma analogia com ondas eletromagnéticas e análise dimensional.

Observando a estrutura básica de um sistema de dois buracos negros orbitando um centro de massa em comum, podemos notar a presença de dois parâmetros físicos de imediato: as massas individuais dos dois corpos e a distância que os separa. Dessa forma

faz sentido buscar uma grandeza física que relacione esses dois parâmetros. Sendo assim, definimos o momento de inercia para as duas partículas (aproximação de corpos pontuais) de massas m_i distantes d_i do centro de rotação (Ref. [29]), como

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^2 m_i d_i^2. \quad (3.34)$$

Até aqui, utilizamos o mapeamento $(m, M) \rightarrow \mu$ e $(r, R) \rightarrow r_{rel}$. Essa consideração diz que deixamos de usar a abordagem de dois corpos orbitando um centro de massa comum, para um único corpo orbitando a massa total, localizada no centro do sistema de referência. Podemos ver isso multiplicando a equação (3.9) pela massa reduzida:

$$\mu(\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{R}}) = -\frac{G}{r_{rel}^2} \mu(M + m) \hat{r}_{rel},$$

ou,

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}_{rel} = -\frac{G}{r_{rel}^2} \mu M_{tot} \hat{r}_{rel}.$$

Ou seja, esta equação mostra que podemos tratar o sistema como uma massa reduzida se movendo sob influência gravitacional da massa total $M_{tot} = M + m$. O mapeamento simplifica a análise dinâmica, já que reduz um problema de dois corpos a um problema efetivo de um corpo no campo gravitacional central. Essa consideração é necessária, pois agora podemos tratar nosso momento de inercia como

$$\mathcal{I} = \mu d^2 = \frac{Mm}{(M + m)} (R + r)^2, \quad (3.35)$$

onde o termo do somatório em (3.34) relativo ao momento de inercia da massa total é zero, pois esta se encontra no centro do sistema de referência ($d_2 = 0$).

Para encontrar uma expressão para a potência gravitacional irradiada P_{grav} , faremos uma abordagem em paralelo com a expressão da potência elétrica P_{elet} . Já sabemos que a definição de potência é a energia emitida durante um intervalo de tempo,

$$P_{elet} \propto \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (3.36)$$

Além disso, a densidade de energia é a energia de um campo elétrico (E) contida em

determinado volume, sendo também proporcional ao quadrado de E (Ref. [15]):

$$u = \frac{\Delta E}{\Delta V} \propto \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2. \quad (3.37)$$

Assim, podemos verificar uma relação direta entre a potência elétrica emitida e o campo elétrico associado à esse armazenamento de energia,

$$P_{elet} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \propto \frac{u \Delta V}{\Delta t} \propto \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad (3.38)$$

ou seja, a potência elétrica é proporcional ao quadrado do campo elétrico.

Para o caso do sistema binário, as ondas gravitacionais dependem tanto das massas dos buracos negros quanto da distância entre eles. Portanto, é plausível estabelecer uma relação de proporção entre a potência gravitacional emitida e o momento de inercia, dado por (3.35). São as oscilações do campo elétrico, E , que produzem as ondas eletromagnéticas que vão carregar a energia ao longo do tempo, assim como as variações do momento de inercia, \mathcal{I} , produzem as ondas gravitacionais que carregaram sua energia até os detectores. Sendo assim é plausível se pensar numa relação semelhante de proporcionalidade,

$$E \rightarrow \mathcal{I},$$

$$P_{elet} \propto E^2 \rightarrow P_{grav} \propto \mathcal{I}^2. \quad (3.39)$$

Dissemos que as variações de \mathcal{I} geram as ondas gravitacionais. Como não estamos considerando variações de massa dos buracos negros individuais durante as emissões das ondas, essa variação do momento de inercia está associada à variação da distância relativa entre eles, uma vez que a coalescência dos buracos negros é caracterizada pela variação do momento de inercia do sistema. Portanto, também faz sentido pensarmos numa relação de proporcionalidade entre a potência gravitacional e a frequência angular do sistema, pois quanto mais próximos os buracos negros estão entre si, maior é a frequência de emissão de ondas gravitacionais. Esse aumento de emissões está refletido no aumento de amplitude do *strain*, onde as ondas ganham amplitude logo antes do *merge*, durante a coalescência. Assim,

$$P_{grav} \propto \omega^\chi, \quad (3.40)$$

onde χ é uma constante que determinaremos a partir da análise dimensional.

Pelo fato das ondas gravitacionais ocorrerem devido à coalescência de corpos de grande escala e, em (3.37) existir a relação de proporção com a permissividade elétrica, faz sentido também agregarmos uma relação de proporção entre a potência das OG e a constante gravitacional G . Assim,

$$P_{grav} \propto G^\eta, \quad (3.41)$$

onde η é outra constante a ser determinada.

O artigo Ref. [2] também propõe que outra relação de proporção pode existir, se lembrarmos que as observações da colaboração LIGO concluíram que as OG viajam com a mesma velocidade que a luz (1.1). Além disso, há uma dependência da velocidade da luz com o tempo (posição por tempo), o mesmo ocorrendo com a potência irradiada (energia por tempo). Isso nos motiva a inserir a seguinte relação de proporção,

$$P_{grav} \propto c^\zeta, \quad (3.42)$$

onde ζ também é uma constante a ser determinada por análise dimensional. Assim combinando as relações de proporção estabelecidas até agora, temos

$$P_{grav} \propto \mathcal{I}^2 \omega^\chi G^\eta c^\zeta,$$

ou,

$$P_{grav} = \alpha \mathcal{I}^2 \omega^\chi G^\eta c^\zeta, \quad (3.43)$$

onde α é uma constante adimensional que faz a relação de proporcionalidade se tornar uma relação de igualdade. Assim, podemos realizar a análise dimensional dessa equação e encontrar os valores dos expoentes,

$$[P_{grav}] = [\mathcal{I}]^2 [\omega]^\chi [G]^\eta [c]^\zeta,$$

ou,

$$\frac{J}{s} = \frac{\text{Kgm}^2}{s^3} = (\text{Kgm}^2)^2 \left(\frac{\text{rad}}{s}\right)^\chi \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{Kg}}\right)^\eta \left(\frac{\text{m}}{s}\right)^\zeta. \quad (3.44)$$

Logo,

$$\begin{cases} \text{Kg :} & 1 = 2 - \eta \\ \text{m :} & 2 = 4 + 3\eta + \zeta \\ \text{s :} & -3 = -\chi - 2\eta - \zeta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta = 1 \\ \zeta = -5 \\ \chi = 6 \end{cases} .$$

Substituindo os valores dessas constantes em (3.43), encontramos

$$P_{grav} = \alpha \frac{G\mathcal{I}^2\omega^6}{c^5}, \quad (3.45)$$

e substituindo o momento de inercia dado por (3.35), temos

$$P_{grav} = \alpha \frac{G\omega^6}{c^5} \frac{(Mm)^2}{(M+m)^2} (R+r)^4. \quad (3.46)$$

Isolando a distância relativa ($R+r$) na terceira lei de Kepler (3.21) e aplicando na equação acima, encontramos uma relação entre a potência irradiada pelas ondas gravitacionais e as massas dos buracos negros,

$$P_{grav} = \alpha \frac{G^{7/3}\omega^{10/3}}{c^5} \frac{(Mm)^2}{(M+m)^{2/3}}. \quad (3.47)$$

Classicamente não conhecemos um método de encontrar o valor da constante α . Porém, com uma análise relativística para a potência irradiada (Sec. 4.3.4) encontramos o valor de,

$$\alpha = \frac{32}{5}. \quad (3.48)$$

É importante citar que nossas considerações de energia irradiada não levam em conta rotações dos buracos negros (*spin*). Portanto, parte da energia cinética de rotação está sendo ignorada e isso irá refletir em nossas comparações com os dados da colaboração LIGO-Virgo (Sec. 5).

3.4 Massa de chirp

Já sabemos que a energia perdida pelo sistema de buracos negros é transferida em potência irradiada na forma de ondas gravitacionais,

$$P_{grav} = -\frac{dE_{irrad}}{dt}. \quad (3.49)$$

Assim, podemos igualar as equações (3.47) e (3.33) e isolar os termos relacionados às massas,

$$\frac{(Mm)^{3/5}}{(M+m)^{1/5}} = c^3 \frac{1}{G} \left(\frac{1}{3\alpha} \omega^{-11/3} \frac{d\omega}{dt} \right)^{3/5}. \quad (3.50)$$

onde o termo da esquerda é chamado de massa de *chirp* \mathcal{M} ,⁴

$$\mathcal{M} = \frac{(Mm)^{3/5}}{(M+m)^{1/5}}. \quad (3.51)$$

A massa de *chirp* será uma das grandezas físicas que poderá ser calculada a partir de dados obtidos nos detectores, e posteriormente será usada para encontrar as massas individuais dos buracos negros.

Devido às considerações relativísticas, onde o termo dominante de emissão de onda gravitacional é um termo de quadrupolo (diferente do eletromagnético que é um dipolo), temos que a frequência angular dominante de emissão de um sistema binário é duas vezes a frequência angular do sistema orbital. Ou seja, fontes não-relativísticas realizando MHS com frequência angular ω_s emite radiação de quadrupolo com $\omega = 2\omega_s$ (Ref. [3], p.124). Isso só é verdade se a fonte realiza um movimento harmônico simples, que é uma de nossas considerações. Assim, temos

$$\omega = \pi f. \quad (3.52)$$

Derivando com relação ao tempo

$$\frac{d\omega}{dt} = \pi \frac{df}{dt} \quad (3.53)$$

e aplicando essas duas equações em (3.50), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{c^3}{G} \left(\frac{1}{3\alpha} (\pi f)^{-11/3} \pi \frac{df}{dt} \right)^{3/5} \\ &= \frac{c^3}{G} \left(\frac{1}{3\alpha} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \pi \frac{df}{dt} \right)^{3/5}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Para encontrar o valor da massa de *chirp* em termos da frequência f , integramos a equação acima entre um tempo arbitrário t na fase espiral e o tempo t_c no início da coalescência

⁴O termo "*chirp*" é usado para descrever um som que aumenta gradualmente em frequência e amplitude, semelhante ao canto de pássaros.

(*merge*),

$$\begin{aligned} t &\rightarrow f && \text{Tempo arbitrário na fase espiral,} \\ t_c &\rightarrow f_c && \text{Tempo na coalescência.} \end{aligned}$$

Isolando os termos em comum para integração na equação (3.54),

$$f^{-11/3} \frac{df}{dt} = 3\alpha\pi^{8/3} \left(\frac{\mathcal{M}G}{c^3} \right)^{5/3} \quad (3.55)$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \int_f^{f_c} f^{-11/3} df &= 3\alpha\pi^{8/3} \left(\frac{\mathcal{M}G}{c^3} \right)^{5/3} \int_t^{t_c} dt \Rightarrow \\ \left(\frac{1}{f^{8/3}} - \frac{1}{f_c^{8/3}} \right) &= 8\alpha\pi^{8/3} \left(\frac{\mathcal{M}G}{c^3} \right)^{5/3} \int_t^{t_c} dt. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Aqui, faremos algumas aproximações: f é a frequência na fase espiral e f_c é relativa à coalescência das massas do sistema binário e corresponde ao pico no gráfico na Figura 1.3, na quarta linha. Assim podemos considerar que o valor da frequência de coalescência é muito maior do que a da fase espiral,

$$f_c \gg f, \quad f_c \rightarrow \infty. \quad (3.57)$$

Finalmente, isolando a massa de *chirp*, fazendo as considerações acima e definindo $\tau \equiv t_c - t$, encontramos

$$\mathcal{M} = \frac{1}{G} \left[\frac{c^5}{8\alpha\tau} \frac{1}{(\pi f)^{8/3}} \right]^{3/5}. \quad (3.58)$$

Esta equação nos diz que somos capazes de encontrar a massa de *chirp* utilizando apenas dados obtidos pelos detectores, i.e., conhecendo o tempo τ e a frequência na fase espiral f . O interessante é que essas duas quantidades podem ser lidas através do gráfico de densidade, na Figura 1.3. Para nosso evento GW150914 dessa figura, vemos que o início da coalescência corresponde ao começo da curva luminosa. Assim, o valor de tempo associado à esse começo é cerca de $t \simeq 0,34$ s, e sua respectiva frequência é de $f \simeq 43$ Hz. Além disso, o pico desse arco corresponde ao início do merge, onde temos a máxima frequência de oscilação, que ocorre em $t_c \simeq 0,43$ s. Portanto, temos os parâmetros f ,

$\tau = t_c - t \simeq 0,09$ s, e o valor de α dado por (3.48). Substituindo esses resultados em (3.58), obtemos $\mathcal{M} \simeq 32M_\odot$, onde a massa do sol é dada por $M_\odot \simeq 1,9885 \times 10^{30}$ Kg.

O artigo Ref. [2] também destaca a importância desse resultado, mostrando que apesar das considerações clássicas, nós chegamos à um valor de cerca de 32 vezes a massa solar. Veremos que essa ordem de grandeza extremamente elevada esta de acordo com os resultados obtidos pelas colaborações LIGO-Virgo. Além disso, a massa de *chirp* reflete o tamanho das massas individuais dos buracos negros, nos dando justificativa para progredir nos estudos dessas massas em tópicos seguintes.

3.5 Raio de Schwarzschild e tamanho do sistema

Como vimos, na fase espiral o sistema binário se aproxima gradativamente à medida que o tempo evolui, até sua total coalescência e início da etapa de *ringdown*. Neste tópico, vamos encontrar uma forma de expressar o raio de Schwarzschild para o objeto resultante desse colapso. O raio de Schwarzschild é definido como a distância máxima que qualquer matéria pode estar de um corpo, tal que não consiga escapar da ação gravitacional deste. Portanto, precisamos apenas igualar a energia cinética do corpo m à potencial gravitacional do corpo M ,

$$E_c = E_g \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = G\frac{Mm}{r} \Rightarrow r = \frac{2GM}{v^2}.$$

Como queremos a máxima velocidade alcançável por qualquer corpo, fazemos $v \rightarrow c$,

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (3.59)$$

onde R_s é o raio de Schwarzschild para o corpo de massa M .

Essa região delimita o limite de distância tal que nenhum corpo escape para fora do sistema, independente de sua velocidade. Para nosso problema simplesmente trocamos a massa M pela massa total do sistema,

$$R_s = \frac{2G(M + m)}{c^2},$$

onde agora R_s representa o raio de Schwarzschild para o sistema binário, após sua co-

alescência. Também estimamos que essa seja a distância mínima de separação entre os buracos negros, logo no começo do *merge*. Portanto, temos

$$r_{rel}^{\min} = R_S. \quad (3.60)$$

e,

$$(R + r)^{\min} = \frac{2G(M + m)}{c^2}. \quad (3.61)$$

3.6 Massas dos corpos e separação na coalescência

3.6.1 Massa total, massas individuais e massa irradiada

Para encontrar a massa total, utilizamos a terceira lei de Kepler (3.21) e a distância de separação dos buracos negros na coalescência (3.61),

$$\omega_{\max}^2 = G \frac{(M + m)}{[\frac{2G}{c^2}(M + m)]^3} \Rightarrow M_{tot} = \frac{c^3}{\sqrt{8G\omega}}, \quad (3.62)$$

como $\omega = \pi f$, temos

$$M_{tot} = \frac{1}{\pi\sqrt{8}} \frac{c^3}{Gf_c}, \quad (3.63)$$

onde f_c representa o instante de máxima emissão de radiação, que corresponde à máxima frequência de *chirp*. Assim,

$$f_{\max} = f_c. \quad (3.64)$$

O cálculo das massas individuais envolve algumas manipulações algébricas com o intuito de resolução de um sistema de equações. Anteriormente, encontramos uma forma de calcular a massa de *chirp* \mathcal{M} em função da frequência f na fase espiral (3.58) e agora uma forma de calcular a massa total M_{tot} em função da frequência de *chirp* f_c no *merge* (3.63). Assim, com apenas dados experimentais dessas frequências e o tempo de observação τ que obtemos nos detectores, somos capazes de encontrar tanto a massa de *chirp* quanto a massa total. Temos então, duas equações que relacionam as massas individuais:

$$M_{tot} = M + m \quad (3.65)$$

$$\mathcal{M} = \frac{(Mm)^{3/5}}{(M + m)^{1/5}}. \quad (3.66)$$

O artigo Ref. [2] mostra que se isolarmos uma das massas individuais de (3.65) e aplicar em (3.66), teremos uma equação polinomial de sexta ordem que não possui solução analítica. Assim, pensando em outra alternativa, a Ref. [16] propoe uma forma interessante de resolver considerando que as massas individuais são uma fração da massa total,

$$m = \xi M_{tot} \quad (3.67)$$

e,

$$M = (1 - \xi)M_{tot}, \quad (3.68)$$

onde $0 < \xi < 1$. Se formos capazes de obter ξ , então poderemos encontrar os valores individuais para as massas. Assim, aplicando (3.67) e (3.68) em (3.66):

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{\{(1 - \xi)\xi M_{tot}^2\}^{3/5}}{M_{tot}^{1/5}} \\ &= (\xi - \xi^2)^{3/5} M_{tot}. \end{aligned}$$

i.e.,

$$\xi - \xi^2 + \left(\frac{\mathcal{M}}{M_{tot}}\right)^{5/3} = 0. \quad (3.69)$$

Que é uma equação polinomial do segundo grau para a variável ξ . Solucionando, temos

$$\xi = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{\mathcal{M}}{M_{tot}}\right)^{5/3}}. \quad (3.70)$$

Para encontrar valores reais para as massas M e m precisamos de valores reais para ξ . Portanto, esperamos que

$$\frac{1}{4} > \left(\frac{\mathcal{M}}{M_{tot}}\right)^{5/3},$$

o que sugere

$$\mathcal{M} < 0,44M_{tot}. \quad (3.71)$$

Esta equação nos diz uma relação necessária para os valores de ξ serem reais. Finalmente, a ideia é estimar os valores de f_1 , f_c e τ com base nos resultados experimentais (Figura 1.3), calcular a massa de *chirp* \mathcal{M} e a massa total M_{tot} (respectivamente pelas equações 3.58 e 3.63) e verificar a relação proposta em (3.71). Se essa relação for satisfeita significa que temos valores experimentais adequados para calcular as massas individuais

e portanto, utilizamos (3.58) e (3.63). Porém, se a relação não for satisfeita é proposto que se verifique melhor os valores observados experimentalmente pela Figura 1.3, afim de se obter uma aproximação mais adequada.

Utilizando (3.30) para energia total do sistema e (3.61) para distância mínima, podemos encontrar a máxima energia irradiada pelo sistema no *merge*,

$$E_{irrad} = -\frac{1}{4} \frac{Mm}{(M+m)} c^2. \quad (3.72)$$

Aplicando a conversão entre massa e energia proposta por Einstien (Ref.[30]),

$$E_{irrad} = M_{irrad} c^2. \quad (3.73)$$

Assim, utilizando as duas equações obtemos

$$M_{irrad} = -\frac{1}{4} \frac{Mm}{(M+m)}, \quad (3.74)$$

onde o sinal negativo indica que há a liberação de energia pelo sistema.

Uma questão interessante é nos perguntarmos a relação que se deve ter entre as massas individuais para que se obtenha o máximo de dissipação de energia gravitacional, pois quanto mais energia é liberada pelos eventos emissores de OG, mais fácil é de observar seus efeitos nos detectores. Para fazer isso, podemos escrever a energia irradiada em (3.72) como função de ξ , afim de encontrar os possíveis valores de ξ que à maximizem,

$$E_{irrad} = -\frac{1}{4} (\xi - \xi^2) (M_{tot} c^2). \quad (3.75)$$

Derivando com relação à ξ e igualando a 0 para encontrar a máxima energia irradiada, temos

$$\frac{dE_{irrad}}{d\xi} = -\frac{1}{4} (1 - 2\xi) (M_{tot} c^2), \quad (3.76)$$

i.e.,

$$\xi = \frac{1}{2}. \quad (3.77)$$

No evento da descoberta de GW150904 (Ref. [17]), as massas dos buracos negros calculadas pela colaboração LIGO foram de $M = 36_{-4}^{+5} M_{\odot}$ e $m = 29_{-4}^{+4} M_{\odot}$, i.e., aproximadamente iguais considerando as incertezas. Portanto, foi realmente muita sorte de detectarmos um

evento tão bom em um intervalo de tempo tão próximo ao início de operações pelos interferômetros.

3.6.2 Separação do sistema no merge

A teoria da relatividade geral prevê que as emissões de energia têm uma consequente coalescência dos corpos do sistema. Essa aproximação leva à um consequente aumento de velocidade orbital do sistema. Assim, é plausível pensar que podemos encontrar uma relação entre as distâncias dos buracos negros e a frequência de oscilação observada nos detectores.

Utilizando novamente a terceira lei de Kepler em (3.21) e (3.52), temos

$$\omega^2 = \frac{GM_{tot}}{r^3} \Rightarrow r = \frac{(GM_{tot})^{1/3}}{(\pi f)^{2/3}}. \quad (3.78)$$

Essa equação nos diz que podemos encontrar a distância de separação dos buracos negros em qualquer momento, tanto durante fase espiral r_0 quanto após a coalescência r_c (raio de Schwarchild).

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{ll} r_0 = \frac{(GM_{tot})^{1/3}}{(\pi f_1)^{2/3}} & r_0 : \text{raio na fase espiral,} \\ r_c = \frac{(GM_{tot})^{1/3}}{(\pi f_c)^{2/3}} & r_c : \text{raio de coalescência.} \end{array} \right. \quad (3.79)$$

onde também podemos encontrar o raio de coalescência pela equação do raio de Schwarchild,

$$r_c = \frac{2GM_{tot}}{c^2}. \quad (3.80)$$

3.7 Radiação e distância à Terra

3.7.1 Intensidade de radiação emitida

As ondas gravitacionais viajam milhares de anos-luz antes de chegar até nós, liberando muita energia ao longo do caminho. O reflexo disso é que quanto mais distante está o evento emissor de ondas gravitacionais, maior é a tendência de que sua amplitude de oscilação seja extremamente pequena, em ordens menores que 10^{-20} . A título de comparação, o núcleo atômico tem por volta de 10^{-15} m. Assim, é plausível pensarmos que

os dados de amplitudes obtidos pelos interferômetros podem nos dizer as características de distância da fonte, indiretamente.

Substituindo (3.52) em (3.47), obtemos a forma da potência irradiada em função da frequência da onda gravitacional:

$$P_{grav} = \alpha \frac{G^{7/3}(\pi f)^{10/3}}{c^5} \frac{(Mm)^2}{(M+m)^{2/3}}. \quad (3.81)$$

A intensidade de radiação é definida como a potência irradiada sobre uma superfície esférica. Com isso, encontramos uma relação entre a intensidade de radiação e a área superficial dessa superfície que, por sua vez, depende da distância entre a Terra e o sistema,

$$I_{irrad} \equiv \frac{P_{irrad}}{4\pi\rho^2}, \quad (3.82)$$

onde ρ é a distância. Assim, só nos resta encontrar uma expressão para intensidade de radiação I_{irrad} em função da amplitude h (*strain*). Para fazer isso, semelhante à subseção Sec. 3.3, faremos uma analogia entre o caso gravitacional e o eletromagnético. Olhando para expressão em (3.82), vemos que $I_{irrad} \propto P_{irrad}$. No caso eletromagnético, vimos que a potência é proporcional à densidade de energia e esta, proporcional à o quadrado do campo elétrico,

$$P_{elet} \propto \varepsilon_0 E^2. \quad (3.83)$$

Para ondas eletromagnéticas o campo elétrico oscila com um padrão cossenoidal, ou seja, para uma onda que se propaga na direção do eixo \hat{z} , temos

$$\mathbf{E} = \xi \cos(kz - kct)\hat{x}, \quad (3.84)$$

onde ξ determina a amplitude do campo elétrico que oscila na direção do eixo \hat{x} . Assim, fica perceptível a proporção $P_{elet} \propto \xi^2$. Analogamente para o caso gravitacional, em vez de amplitude do campo elétrico estamos interessados em observar a amplitude das ondas gravitacionais, dada por h . Assim, esperamos que

$$I_{irrad} \propto G^\psi c^\delta f^\varepsilon h^2,$$

onde temos a constante gravitacional G no lugar da constante elétrica ε_0 , a presença da

velocidade da luz, que também é a velocidade das ondas gravitacionais e, a proporção com a frequência f que possui unidade dimensional de inverso de segundo, assim como a potência irradiada. Portanto,

$$I_{irrad} = \beta G^{\psi} c^{\delta} f^{\varepsilon} h^2. \quad (3.85)$$

Esperamos determinar o caráter da intensidade da radiação por análise dimensional. Vale ressaltar que o *strain* h observado nos interferômetros é adimensional. Isso pode ser observado tomando como referência uma análise relativística, onde as distorções causadas pelas OG ocorrem sobre a métrica, que também tem caráter adimensional. Isso ocorre porque quem carrega as dimensões de comprimento na descrição geométrica do espaço-tempo são as coordenadas x , y e z . Assim,

$$[I_{irrad}] = \frac{\text{Kg}}{\text{s}^3} = [\text{G}]^{\psi} [c]^{\delta} [f]^{\varepsilon} = \left[\frac{\text{m}^3}{\text{Kg} \cdot \text{s}^2} \right]^{\psi} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]^{\delta} \left[\frac{1}{\text{s}} \right]^{\varepsilon}, \quad (3.86)$$

e,

$$\begin{cases} \text{Kg} : & 1 = -\psi \\ \text{m} : & 0 = 3\psi + \delta \\ \text{s} : & -3 = -2\psi - \delta - \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi = -1 \\ \delta = 3 \\ \varepsilon = 2 \end{cases} .$$

Inserindo os resultados obtidos em (3.85), encontramos

$$I_{irrad} = \beta \frac{c^3 f^2 h^2}{G}. \quad (3.87)$$

Essa é a intensidade da radiação gravitacional emitida pelas ondas gravitacionais em função da amplitude de oscilação e frequência das ondas gravitacionais.

3.7.2 Distância do sistema

Igualando (3.87) à (3.81) e utilizando (3.82), encontramos finalmente, a relação entre a distância do evento e a amplitude das ondas gravitacionais,

$$\beta \frac{c^3 f^2 h^2}{G} = \frac{\alpha}{4\pi\rho^2} \frac{G^{7/3}}{c^5} (\pi f)^{10/3} \frac{(Mm)^2}{(M+m)^{2/3}}. \quad (3.88)$$

Portanto,

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/2} \frac{G^{5/3}}{c^4} \pi^{7/6} f^{2/3} \frac{1}{h} \frac{(Mm)}{(M+m)^{1/3}}. \quad (3.89)$$

Percebemos que a amplitude observada é função da frequência das ondas (isso é evidente pelo painel superior esquerdo da Figura 1.3), ou seja, conforme ocorre a coalescência dos buracos negros, a frequência aumenta e conseqüentemente a amplitude das ondas também aumenta, alcançando seu máximo em $f = f_c$. Além disso, utilizando conceitos de física relativística podemos encontrar o valor de $\beta = \pi/2$. Logo, utilizando o valor de α dado por (3.48), temos

$$\rho = \frac{4}{\sqrt{5}} \frac{G^{5/3}}{c^4} (\pi f)^{2/3} \frac{1}{h} \frac{(Mm)}{(M+m)^{1/3}}. \quad (3.90)$$

Essa é a distância entre o sistema binário de buracos negros e os observatórios LIGO-Virgo na Terra, calculada por análise clássica. Como explicado, os valores das massas podem ser calculados utilizando dados indiretos, através dos gráficos obtidos pela observação (*vide-se* equações (3.58) e (3.63)). Como explica o artigo (Ref. [2]), para nosso evento atual GW150904, estimamos que $f_c = 300$ Hz, $m = 30M_\odot$ e $M = 44M_\odot$. Além disso, nosso painel superior esquerdo da Figura 1.3 nos dá o valor máximo de *strain*: $h \simeq 1,2 \times 10^{-21}$. Colocando esses valores na equação da distância (3.90) encontramos um resultado de $\rho \simeq 2$ bilhões de anos-luz, resultado consideravelmente próximo da colaboração LIGO-Virgo de 1,3 bilhões de anos-luz (Ref. [18]). Essa divergência se dá pelo fato de nossa abordagem desconsiderar quaisquer efeitos de redshift causados por campos gravitacionais intensos ou expansão do universo (*vide* Sec. 5).

3.8 Diminuição de r_{rel} e frequência de Chirp

Já discutimos que a energia irradiada na forma de ondas gravitacionais tem uma respectiva perda de energia do sistema. Ao perder energia ele coalesce, aproximando os buracos negros e aumentando a frequência de oscilação. Nesse contexto, parece viável que exista algum tipo de relação entre a perda de energia do sistema e a distância relativa dos buracos negros. Nesta subseção, além de encontrar essa relação, iremos também identificar o comportamento da frequência de oscilação do sistema durante sua coalescência, i.e., quando $f = f_c$.

3.8.1 Separação dos buracos negros na fase espiral

Para encontrar a separação dos buracos negros em um determinado tempo, vamos utilizar a terceira lei de Kepler na forma

$$(\pi f)^2 = \frac{GM_{tot}}{r_{rel}^3}, \quad (3.91)$$

onde agora temos dependências temporais, tanto para frequência $f \rightarrow f(t)$ quanto para distância relativa $r_{rel} \rightarrow r_{rel}(t)$. Através desta equação podemos observar que conforme a separação dos buracos negros diminui, a frequência de oscilação aumenta, pois $f^2 \propto 1/r_{rel}^3$. Derivando com relação ao tempo, temos

$$\pi^2(2f \dot{f}) = (GM_{tot})(-3r_{rel}^{-4}\dot{r}_{rel}),$$

ou,

$$(\pi f)^2 \left(2\frac{\dot{f}}{f}\right) = \left(\frac{GM_{tot}}{r_{rel}^3}\right) \left(-3\frac{\dot{r}_{rel}}{r_{rel}}\right). \quad (3.92)$$

Neste momento podemos utilizar (3.91) para simplificar a equação, encontrando

$$\frac{\dot{f}}{f} = -\frac{3\dot{r}_{rel}}{2r_{rel}}. \quad (3.93)$$

Esta equação estabelece uma relação entre as taxas de variações da distância e da frequência, a qual também é obtida pelo tratamento relativístico (Ref. [3], Eq.4.24).

Na Sec. 5 encontramos uma equação que relaciona a frequência orbital e a massa de *chirp*(3.55), que podemos escrever como

$$\frac{\dot{f}}{f} = f^{8/3} 3\alpha\pi^{8/3} \left(\frac{G}{c^3}\mathcal{M}\right)^{5/3}. \quad (3.94)$$

Além disso, a equação (3.58) nos diz que podemos encontrar a frequência orbital em termos da massa de *chirp*,

$$f^{8/3} = \frac{1}{8\alpha\pi^{8/3}\tau} \left(\frac{\mathcal{M}G}{c^3}\right)^{-5/3}. \quad (3.95)$$

Aqui, utilizamos que $f_1 = f$ porque seu respectivo tempo t_1 ocorre em qualquer momento

arbitrário t antes da coalescência, $t_1 = t$. Aplicando esta equação em (3.94), encontramos que

$$\frac{\dot{f}}{f} = \frac{3}{8\tau} \quad (3.96)$$

e substituindo em (3.93), temos

$$-\frac{1}{4\tau} = \frac{\dot{r}_{rel}}{r_{rel}}.$$

Como as variáveis desta equação diferencial já estão separadas, basta integrarmos,⁵

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{(t_c - t')} &= \int_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}} \frac{dr_{rel}}{r_{rel}} \Rightarrow \\ \frac{1}{4} \ln(t_c - t)|_{t_0}^t &= \ln(r_{rel})|_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}} \Rightarrow \\ \ln\left(\frac{t_c - t}{t_c - t_0}\right)^{1/4} &= \ln(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}_0 \left(\frac{t_c - t}{t_c - t_0} \right)^{1/4}, \quad (3.97)$$

onde $t_0 \leq t \leq t_c$. Esta equação nos mostra que no decorrer do tempo, $\mathcal{R}(t \rightarrow t_c) \rightarrow 0$, i.e., conforme o sistema tende ao *merge*, a distância relativa dos buracos negros tende a zero e eles se combinam, formando um grande buraco negro após a etapa de *ringdown*.

Utilizando a equação (3.97) para o evento GW150914, plotamos o gráfico de $\mathcal{R} \times t$, mostrado na Figura 3.2.a, vemos que ele possui uma curva extremamente semelhante àquela obtida pela colaboração LIGO (Ref. [17]), implicando a proximidade de nossas aproximações com os dados reais dos observatórios.

3.8.2 Velocidade de coalescência e frequência de chirp

A equação (3.97) nos diz a distância relativa dos dois corpos em função do tempo. Assim, como sugere Ref. [2], podemos derivá-la para encontrar a velocidade relativa de aproximação em função do tempo,

⁵Aqui, usamos que $\tau \equiv t_c - t$. Além disso, \mathcal{R} e \mathcal{R}_0 são as distâncias de separação dos buracos negros nos tempos t e t_0 , respectivamente.

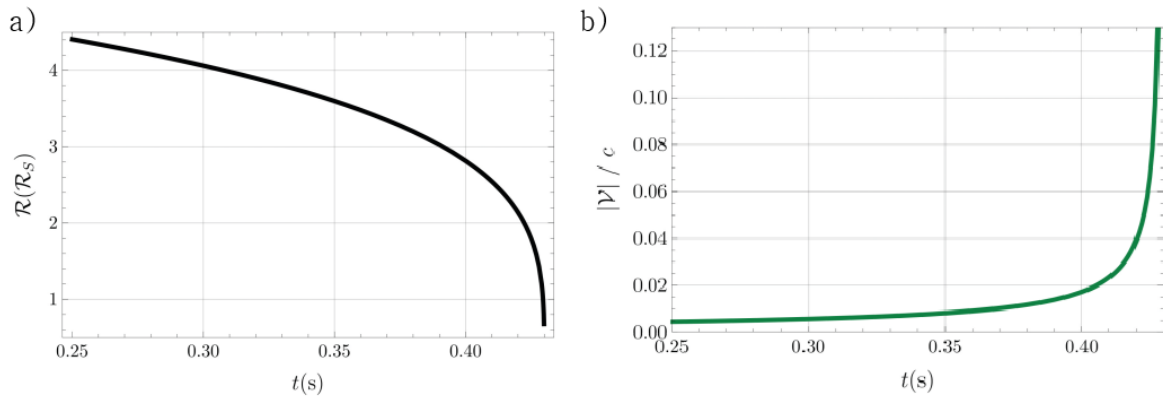


Figura 3.2: (a) Diminuição da distância relativa em função do tempo, obtido pela equação (3.97). (b) Aumento da velocidade orbital em função do tempo, obtido pela equação (3.98). Fonte: Ref. [2].

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{R}(t) &= \frac{d}{dt} \left[\mathcal{R}_0 \left(\frac{t_c - t}{t_c - t_0} \right)^{1/4} \right] \Rightarrow \\ \dot{\mathcal{R}}(t) &= -\frac{1}{4} \frac{\mathcal{R}_0}{(t_c - t_0)} \left(\frac{t_c - t}{t_c - t_0} \right)^{-3/4}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{V}(t) = -\frac{1}{4} \mathcal{V}_0 \left(\frac{t_c - t_0}{t_c - t} \right)^{3/4}, \quad (3.98)$$

onde $\mathcal{V}_0 = \mathcal{R}_0/(t_c - t_0)$. Por esta equação, vemos que $\mathcal{V}(t \rightarrow t_c) \rightarrow \infty$, i.e., à medida que o sistema tende à coalescência, sua velocidade orbital diverge. Como a frequência tem uma relação inversa com a distância relativa (3.91), neste caso ocorre justamente o contrário. Significa que no final da coalescência os dois buracos negros ficam com velocidades extremamente elevadas, i.e., velocidades relativísticas. Assim, para um resultado mais preciso, precisaríamos de um tratamento descrito pela relatividade geral. Porém, mesmo com nossas aproximações, conseguimos contruir um gráfico (Figura 3.2.b) muito semelhante aquele obtido pela colaboração LIGO-Virgo para o evento GW150914 (Ref. [17]).

Além disso, como faz o artigo, podemos criar também o gráfico da frequência em função do tempo, simplesmente isolando-a na equação (3.95), encontrando

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{[8\alpha(t_c - t)]^{3/8}} \left(\frac{c^3}{\mathcal{M}G} \right)^{5/8}. \quad (3.99)$$

O padrão formado por esta equação é semelhante ao da velocidade orbital (vide última linha de Figura 1.3), pois assim como esta, a frequência também aumenta até o final da coalescência.

3.9 A forma funcional das OG e seus modos de polarização

Na seção anterior mostramos os comportamentos da frequência, velocidade orbital e distância relativa entre os buracos negros (última linha de Figura 1.3 e Figura 3.2). Já nesta seção estamos interessados em descrever o padrão oscilatório das ondas gravitacionais (primeiras linhas de Figura 1.3), que mostra um gráfico do *strain* h em função do tempo t . Como discutiremos no regime relativístico (Sec. 4.2): as ondas gravitacionais possuem dois graus de liberdade físicos que podem ser observados pelos interferômetros, os quais são representados pelos modos de vibração h_+ e h_\times . O primeiro diz respeito às vibrações do espaço-tempo nas direções "cima-baixo" e "esquerda-direita", enquanto que o segundo se refere às vibrações nas direções diagonais. Pelo padrão oscilatório quase-periódico dos gráficos e pela estrutura em fase dos interferômetros, podemos tirar algumas conclusões:

- Os modos de polarização têm um padrão ondulatório, o que implica em uma descrição com base em senos e cossenos,

$$h_+ \approx \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad h_\times \approx \sin(\omega t). \quad (3.100)$$

- Os dois modos de polarização possuem uma diferença de fase de $\pi/2$ entre si, implicando que podemos escrever um como função do outro, apenas aplicando uma diferença de fase,

$$h_\times(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = h_+\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.101)$$

Queremos encontrar uma forma funcional para o modo de polarização h_+ . Pela equação acima, podemos estender o raciocínio para h_\times caso seja necessário. Isolando h em (3.90) e usando a relação (3.52) para frequência angular, temos

$$h = \frac{4}{\sqrt{5}} \frac{G^{5/3}}{c^4} (\omega)^{2/3} \frac{1}{\rho} \frac{(Mm)}{(M+m)^{1/3}}. \quad (3.102)$$

Atribuindo alguns expoentes e rearranjando os termos em comum, encontramos

$$h = \frac{4}{\sqrt{5}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2/3} \frac{1}{\rho} \left(\frac{GM}{c^2}\right)^{5/3}. \quad (3.103)$$

Essa equação nos diz que podemos encontrar a amplitude h em função da distância Terra-BNB. Porém, ela não nos diz o comportamento ondulatório da onda, apenas que a amplitude varia no tempo (pois ω em nosso mapeamento também varia). Assim, nos cabe encontrar alguma outra expressão que caracterize esse comportamento oscilatório. Com esse objetivo iremos novamente estabelecer um paralelo com o caso eletromagnético, onde agora consideraremos o sistema binário como um dipolo emissor de ondas gravitacionais. Já sabemos do eletromagnetismo (Ref. [14], Cap.12) que o módulo do vetor campo elétrico oscilante cai linearmente com o inverso da distância da fonte,

$$|E| \propto \frac{1}{r} \cos(\omega t).$$

Assim, faz sentido pensarmos que a amplitude das ondas gravitacionais também cai linearmente com a distância.⁶ Portanto, esperamos que nossa polarização tenha a forma,

$$h_+ \propto \frac{1}{\rho} \cos(\omega t).$$

Como nosso fator de proporcionalidade já foi obtido em (3.103), podemos escrever que

$$h_+(t) = h \cos(\omega t). \quad (3.104)$$

Logo,

$$h_+ = \frac{4}{\sqrt{5}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2/3} \frac{1}{\rho} \left(\frac{GM}{c^2}\right)^{5/3} \cos(\omega t). \quad (3.105)$$

Como é proposto no único apêndice do artigo Ref. [2], podemos encontrar uma melhor descrição para as amplitudes se utilizarmos uma aproximação WKB.⁷ Portanto, para fins de completeza, também colocaremos esta demonstração em nosso Apêndice B.

⁶Como é demonstrado com detalhes na referência citada, a descrição de emissões por dipolos possuem termos proporcionais à $1/r$ e $1/r^2$. Como estamos considerando distâncias muito elevadas do sistema, o termo dominante é o primeiro, justificando a queda linear da amplitude.

⁷WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) é um tipo de aproximação para função de onda (como uma exponencial) cujo argumento varia lentamente, permitindo analisar fenômenos como tunelamento e quantização em sistemas quase clássicos.

Capítulo 4

Ondas Gravitacionais: Análise Relativística

As ondas gravitacionais representam um dos mais fascinantes avanços da física moderna, revelando aspectos sobre a natureza do espaço-tempo e sua dinâmica. Como vimos no regime newtoniano, os fenômenos gravitacionais são tratados como uma força instantânea entre massas, descrita pela lei da gravitação universal de Newton. Embora essa abordagem seja útil em muitos contextos, ela não descreve os efeitos ondulatórios da gravidade, especialmente em situações envolvendo campos gravitacionais intensos ou velocidades próximas à da luz.

Para compreender as ondas gravitacionais de forma mais precisa, precisamos entrar no regime relativístico, onde a gravidade é interpretada como a curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia, conforme descrito pela teoria da relatividade geral de Einstein (Sec. 2.2.5). Nesse regime, perturbações no espaço-tempo podem propagar-se como ondas, transportando informação sobre eventos astrofísicos, como fusões de buracos negros ou estrelas de nêutrons.

Embora as previsões newtonianas e relativísticas sejam similares em situações de baixa intensidade gravitacional (a relatividade recupera a equação de Poisson nesse regime), as diferenças tornam-se evidentes em cenários mais extremos. A amplitude, a frequência e a forma das ondas gravitacionais possuem características que apenas o formalismo relativístico é capaz de descrever com precisão. Nesta seção, exploraremos essas diferenças, analisando como as ondas gravitacionais são descritas matematicamente e como podemos interpretá-las no regime relativístico.

4.1 Abordagem geométrica para as OG

4.1.1 Variação infinitesimal da perturbação

Nesta seção analisaremos o comportamento das ondas gravitacionais no regime relativístico. Em contrapartida à interpretação newtoniana, a relatividade geral interpreta a gravidade como uma curvatura do espaço-tempo, cuja descrição é feita através do tensor métrico (2.57). Porém, à grandes distâncias da fonte, podemos tratar a métrica do espaço-tempo como plana (espaço-tempo de Minkowski, (Sec. 2.2.1) e as ondas gravitacionais como perturbações sobre ela, i.e.,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (4.1)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica plana e $h_{\mu\nu}$ a perturbação causada pelas ondas gravitacionais.

Queremos reescever as equações de campo com base nessa nova interpretação para o espaço-tempo. Já sabemos que a relatividade geral é invariante sobre transformações de coordenadas, ou seja, dada a transformação,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x), \quad (4.2)$$

a métrica se transforma como,

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x). \quad (4.3)$$

A relatividade geral tem como grupo de simetria, transformações gerais de coordenadas. Assim, podemos estudar os graus físicos da teoria restringindo seus graus de liberdade. Considerere a transformação de coordenadas a seguir,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x) = x^\mu + \xi^\mu(x). \quad (4.4)$$

No Apêndice C demonstramos a variação infinitesimal para um tensor rank $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, utilizando a lei de transformação em (4.3). Portanto, na aproximação de campo fraco

$\nabla_\beta \rightarrow \partial_\beta$, encontramos a lei de transformação para a perturbação $h_{\mu\nu}$,

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu). \quad (4.5)$$

4.1.2 Expansão em torno do espaço-tempo de Minkowski

Dentro do contexto de relatividade geral, os calibres (ou *gauges*) desempenham um papel fundamental na linearização das equações de campo.¹ Esses calibres permitem reduzir os graus de liberdade da métrica perturbada, restringindo a análise para suas componentes físicas. A perturbação $h_{\mu\nu}$ é vista como uma matriz 4×4 simétrica, possuindo 10 componentes independentes. A liberdade de escolha de calibre, associada às transformações de coordenadas (4.4), permite restringir conjuntos redundantes dessas componentes.

Considerando um sistema de coordenadas localmente inercial, podemos tratar o tensor de curvatura de Riemann como:

$$R^\alpha_{\mu\lambda\sigma} = \partial_\lambda \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}. \quad (4.6)$$

Agora, escrevendo o tensor de Riemann em termos de métricas (Apêndice A) e utilizando (4.1), encontramos

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\mu\rho}), \quad (4.7)$$

que é o tensor de Riemann em termos de derivadas das perturbações. Além disso, a estrutura tensorial nos permite contrair o tensor de Riemann utilizando a métrica, obtendo o tensor de Ricci, i.e.,

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma} &= \eta^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho} \partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\sigma} + \eta^{\mu\rho} \partial_\mu \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} \partial_\mu \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \eta^{\mu\rho} \partial_\nu \partial_\sigma h_{\mu\rho}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\nu \partial^\mu h_{\mu\sigma} + \partial^\rho \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \square h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h). \end{aligned} \quad (4.8)$$

¹Neste contexto, linearização se refere às aproximações de primeira ordem para as perturbações, com objetivo de simplificar as equações de campo.

E contraindo novamente obtemos o escalar de Ricci,²

$$\begin{aligned}
R &= \eta^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} \\
&= \frac{1}{2}(\eta^{\nu\sigma} \partial_\nu \partial^\mu h_{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} \partial^\rho \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma} \square h_{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} \partial_\nu \partial_\sigma h) \\
&= \partial^\rho \partial^\nu h_{\nu\rho} - \square h.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Agora, podemos aplicar as equações (4.8) e (4.9) em (2.62) para encontrar o tensor de Einstein linearizado, i.e., em termos de perturbações,

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial^\sigma h_{\sigma\nu} + \partial^\sigma \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial^\rho \partial^\sigma h_{\rho\sigma} - \square h) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial^\sigma h_{\sigma\nu} + \partial^\sigma \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma h_{\rho\sigma} - \square \eta_{\mu\nu} h).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Como sugere Ref. [3], podemos escrever este tensor de forma mais compacta se utilizamos as transformações:

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h. \tag{4.11}$$

Observe que $\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = h - 2h = -h$. Assim, podemos substituir este h na segunda equação acima e obter,

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \bar{h}. \tag{4.12}$$

Aplicando em (4.10), podemos encontrar o tensor de Einstein em termos das novas variáveis definidas acima, veja:

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial^\sigma (\bar{h}_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\sigma\nu} \bar{h}) + \partial^\sigma \partial_\nu (\bar{h}_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma} \bar{h}) - \square (\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \bar{h}) \right. \\
&\quad \left. + \partial_\mu \partial_\nu \bar{h} - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma (\bar{h}_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\eta_{\rho\sigma} \bar{h}) - \square \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \bar{h}_{\rho\sigma} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial^\sigma \bar{h}_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\sigma\nu} \partial_\mu \partial^\sigma \bar{h} + \partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma} \partial^\sigma \partial_\nu \bar{h} - \square \bar{h}_{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \square \bar{h} + \partial_\mu \partial_\nu \bar{h} - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h} - \square \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \bar{h}_{\rho\sigma} \right).
\end{aligned}$$

Agora, aplicando a métrica nas derivadas parciais no segundo, quarto e nono termos,

²Aqui, após aplicar a métrica, modificamos os índices mudos $\sigma \rightarrow \rho$ e $\mu \rightarrow \nu$ no primeiro termo do lado direito.

encontramos

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\sigma \bar{h}_{\sigma\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \eta^{\rho\sigma} \bar{h}_{\rho\sigma} + \partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} - \square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial_\rho \eta^{\lambda\sigma} \bar{h}_{\lambda\sigma} + \partial_\mu \partial_\nu \eta^{\rho\sigma} \bar{h}_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\lambda \partial_\lambda \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \bar{h}_{\rho\sigma}). \quad (4.13)$$

Portanto,

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial_\mu \partial^\sigma \bar{h}_{\sigma\nu} - \partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma}). \quad (4.14)$$

Finalmente, utilizando em (2.76), temos a equação de Einstein linearizada:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial_\mu \partial^\sigma \bar{h}_{\sigma\nu} - \partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (4.15)$$

A liberdade de calibre é essencial para reduzir os graus de liberdade da métrica perturbada. Essas escolhas de coordenadas facilitam a análise teórica e prática, destacando os aspectos físicos relevantes das ondas gravitacionais, vantagem que se torna bastante evidente quando estamos interessados em observar os efeitos físicos das ondas gravitacionais sobre os detectores.

4.2 Os gauges como simplificações da métrica

4.2.1 Gauge de Lorentz

Nós podemos utilizar a liberdade de escolhas de coordenadas em (4.5) para escolher o calibre de Lorentz, dado por

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (4.16)$$

Ele é determinado por uma escolha específica que podemos fazer do sistema de coordenadas, i.e., nos diz que sempre podemos simplificar os graus de liberdade para métrica escolhendo uma transformação de coordenadas adequada. Vamos mostrar que esta equação é válida:

Primeiramente, temos a mudança de variáveis para simplificar as equações de campo de Einstein, (4.11). Assim, as novas coordenadas serão

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h'. \quad (4.17)$$

Sabendo que $h' = \eta^{\sigma\lambda} h'_{\sigma\lambda}$ e utilizando (4.5), encontramos

$$\begin{aligned}\bar{h}'_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - (\partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\lambda} h'_{\sigma\lambda} \\ &= h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\lambda} (h_{\sigma\lambda} - \partial_\lambda \xi_\sigma - \partial_\sigma \xi_\lambda) \\ &= h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu - \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda). \quad (4.18)$$

Derivando esta equação, obtemos

$$\begin{aligned}(\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})' &= \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \partial^\nu \partial_\mu \xi_\nu - \partial^\nu \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial^\nu \partial_\lambda \xi^\lambda \\ &= \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu \xi^\mu - \square \xi_\mu + \partial_\mu \partial_\lambda \xi^\lambda \\ &= \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu.\end{aligned} \quad (4.19)$$

Assim, para a validade de (4.16) precisamos satisfazer,

$$\square \xi_\mu = f_\mu(x), \quad (4.20)$$

onde $f_\mu(x) = \partial^\nu h_{\mu\nu}$. Porém, esta equação sempre admite solução, pois o operador d'Alembertiano é invertível (Ref. [19], Cap.3, p.352). Dessa forma, utilizamos o *gauge* de Lorentz (4.16) em (4.15), para obtermos a equação de Einstein linearizada,

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (4.21)$$

Assim, dentro do contexto de teoria linearizada, a equação acima agrupada ao *gauge* de Lorentz nos mostra a conservação do tensor energia-momento, i.e.,

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0. \quad (4.22)$$

4.2.2 TT gauge

Nesta seção queremos entender o comportamento das ondas gravitacionais e sua interação com massas teste (interferômetros). Assim, estamos interessados em descrever

a equação de onda fora da fonte emissora de ondas gravitacionais, i.e., $T_{\mu\nu} = 0$. Portanto, por (4.21) vemos que

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (4.23)$$

Vamos mostrar que esta escolha de coordenadas não fixa completamente o gauge. Realizando uma nova mudança de coordenadas infinitesimal:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \tilde{\xi}^{\mu}(x) \Rightarrow x^{\mu} = x'^{\mu} - \tilde{\xi}^{\mu}(x') \quad (4.24)$$

e considerando a transformação 4.18 temos

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\tilde{\xi}_{\nu} + \eta_{\mu\nu} \left(\partial^{\beta}\tilde{\xi}_{\beta} \right).$$

O próximo passo é tomar o divergente da equação acima,

$$\begin{aligned} \partial^{\mu}\bar{h}'_{\mu\nu} &= \partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\nu} - \partial^{\mu}\partial_{\mu}\tilde{\xi}_{\nu} - \partial^{\mu}\partial_{\nu}\tilde{\xi}_{\mu} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\mu} \left(\partial^{\beta}\tilde{\xi}_{\beta} \right) \Rightarrow \\ \partial^{\mu}\bar{h}'_{\mu\nu} &= \partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\nu} - \partial^{\mu}\partial_{\mu}\tilde{\xi}_{\nu} \Rightarrow \\ \partial^{\mu}\bar{h}'_{\mu\nu} &= \partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\nu} - \square\tilde{\xi}_{\nu} \end{aligned}$$

e pela utilização do gauge de Lorentz em 4.16, temos

$$\square\tilde{\xi}_{\nu} = 0. \quad (4.25)$$

Esta equação mostra que a escolha $\partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\nu} = 0$ não fixa completamente o sistema de coordenadas, pois qualquer nova mudança $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$ onde $\square\tilde{\xi}_{\nu} = 0$ mantém o gauge de Lorentz. Esta liberdade de gauge extra é conhecida como liberdade de gauge residual. Assim, podemos utilizar $\tilde{\xi}_{\nu}$ para restringir mais 4 graus de liberdade da métrica. Portanto, este segundo gauge reduz os graus de liberdade da métrica de 6 para apenas 2 graus físicos, descritos pelas polarizações h_{+} e h_{\times} .

Este processo diz que estamos impondo 4 condições para $\tilde{\xi}_{\nu}$, com objetivo de restringir nossa métrica. Vamos analisar essas condições em particular.

- Primeira condição: podemos escolher arbitrariamente um valor de ξ^0 tal que o traço $\bar{h} = 0$. Note que de se isso for verdade, então de (4.12) temos que $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, restando as outras três componentes.
- Segunda condição temporal: vamos escolher três funções ξ^i de maneira que $h^{0i} = 0$. Neste caso, a condição de Lorentz

$$\partial^0 h_{00} + \partial^i h_{0i} = 0 \quad (4.26)$$

resultando em

$$\partial^0 h_{00} = 0. \quad (4.27)$$

O que conclui que h_{00} seja uma constante no tempo. Porém, se h_{00} é uma constante no tempo, ele não contribui para a dinâmica das ondas gravitacionais, pois estas são funções de onda que variam no tempo e no espaço. Assim, esse termo não deve carregar nenhuma informação sobre as flutuações dinâmicas que constituem as ondas gravitacionais. Neste caso, podemos fazer $h_{00} = 0$.

Então, nós definimos todas as componentes temporais, i.e., $h_{0\mu} = 0$, restando as componentes espaciais dadas por h_{ij} .

- Terceira condição: utilizando as condições anteriores, nosso gauge de Lorentz se reduz à $\partial^i h_{ij} = 0$. Essa condição diz que a onda gravitacional não possui componentes na direção de sua propagação, i.e., as perturbações h_{ij} só ocorrem em planos perpendiculares.

Sabendo que nosso traço é nulo pela primeira condição e que $h_{00} = 0$ pela segunda condição, concluímos que o traço da parte espacial deve ser obrigatoriamente nulo, i.e., $h_i^i = 0$. Portanto, definimos o *gauge* transversal e sem traço,³ ou TT *gauge*, descrito por h_{ij}^{TT} e definido pelo conjunto das condições anteriores, i.e.,

$$h^{0\mu} = 0, \quad h_i^i = 0, \quad \partial^j h_{ij} = 0. \quad (4.28)$$

³O nome se dá pelas condições impostas sobre a matriz da métrica $h_{\mu\nu}$: Ausência de traço $h_i^i = 0$ e transversalidade $\partial^i h_{ij} = 0$, i.e., perturbações perpendiculares à direção de propagação da onda.

Neste t3pico, mostramos que a aplica33o do *gauge* de Lorentz e do TT *gauge* como condi33es para a m3trica, restringe os graus de liberdade f3sicos para apenas duas componentes independentes, simplificando imensamente os estudos de ondas gravitacionais. Essas duas componentes restantes dizem as caracter3sticas f3sicas das ondas gravitacionais, como sua din3mica e depend3ncia temporal.

4.3 Energia das ondas gravitacionais

Nesta seção entenderemos como as ondas gravitacionais carregam energia e momento. Vimos que no sistema de coordenadas do detector, as OG colocam em movimento massas-teste que estavam anteriormente em repouso, transferindo energia para o detector. Isso ocorre porque a ação sobre as massas-teste pode ser descrita em termos de forças Newtonianas (Ref. [3]).

No contexto relativístico, veremos como as ondas gravitacionais afetam o espaço-tempo em seu entorno. Segundo a equação de campo de Einstein, qualquer forma de energia distorce o espaço-tempo próximo à ela. Assim, podemos nos questionar se as OG em si, são fontes de distorção, já que são uma forma de transmissão de energia.

4.3.1 Separação entre perturbações e distorções de fundo

Até agora, descrevemos as ondas gravitacionais como perturbações sobre o espaço-tempo plano (4.1). Porém a equação de campo de Einstein diz que qualquer forma de energia deve causar alguma curvatura na métrica. Assim, faz sentido pensarmos se a existência da OG também gera uma curvatura, além de sua perturbação usual estudada anteriormente. Chamaremos então de "distorção de fundo" $\bar{g}_{\mu\nu}$ a curvatura do espaço-tempo gerada pela existência das ondas gravitacionais. Logo, não podemos mais definir a métrica como plana, mas sim como um espaço-tempo curvo e dinâmico, descrito por

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x), \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (4.29)$$

Nesse contexto, surgem alguns problemas: Como conseguiremos distinguir que parte da métrica é devido à OG e qual é devido à distorção de fundo? A equação acima nos diz que, a princípio, nós podemos trocar termos dependentes de x entre $h_{\mu\nu}$ e $\bar{g}_{\mu\nu}$. Assim, precisamos estabelecer um mecanismo capaz de separar estas duas partes.

Podemos começar introduzindo uma análise de escala para entender as possíveis diferenças entre essas perturbações na métrica. Considere a métrica em (4.29) como uma soma entre variações espaciais L_B (de $\bar{g}_{\mu\nu}$) e, sobrepostas à estas, as perturbações tradicionais λ (de $h_{\mu\nu}$) devido à passagem das OG. Como os comprimentos de onda são

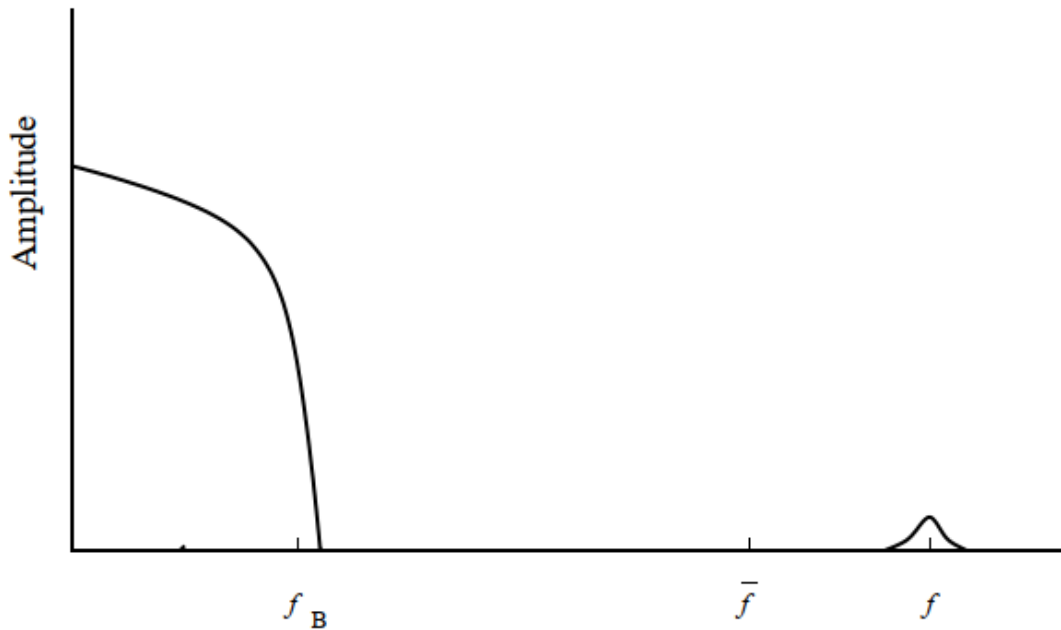


Figura 4.1: Situação que nos permite separar a métrica em uma de baixa frequência de fundo e uma pequena perturbação de alta frequência. O fundo é definido pela parte com frequências $f \ll \bar{f}$ e as OG pela parte com $f \gg \bar{f}$. Esta definição é em grande parte independente do valor preciso de \bar{f} . Fonte: Ref. [3].

muito inferiores à distorção espacial, temos

$$\lambda \ll L_B. \quad (4.30)$$

Assim, as perturbações $h_{\mu\nu}$ tem o significado físico de pequenas ondulações sobre as distorções suaves de fundo. Naturalmente podemos pensar no espaço de frequências, onde as distorções de fundo possuem uma frequência máxima f_B e as perturbações tradicionais têm maiores frequências f ,

$$f \gg f_B. \quad (4.31)$$

Nesse caso, a passagem das OG possuem altas frequências de perturbação sobre um estático e suave fundo à baixas frequências, como é mostrado na Figura 4.1. Com isso podemos nos perguntar duas coisas:

- Como essa perturbação de alta frequência f se propaga na métrica de fundo $\bar{g}_{\mu\nu}$? Essa justificativa está no fato de $h_{\mu\nu}$ ter o comportamento de uma onda.
- Como essa perturbação $h_{\mu\nu}$ afeta a métrica de fundo $\bar{g}_{\mu\nu}$? Essa resposta nos dará o tensor energia-momento.

4.3.2 Como as OG curvam o espaço-tempo

Considerando que as ondas gravitacionais possuem determinada perturbação $h_{\mu\nu}$, podemos separar a métrica com (4.29), pois há uma diferença razoável de escala entre a métrica de fundo e as perturbações (*vide* (4.30) e (4.31)). Além disso, queremos entender como essas perturbações afetam a métrica de fundo e como elas curvam o espaço-tempo. Para isso, precisamos encontrar o tensor energia-momento do campo gravitacional que represente justamente essas perturbações. Como mostra (Ref. [3]), podemos expandir as equações de Einstein em torno da métrica de fundo $\bar{g}_{\mu\nu}$. Assim, dada a equação de Einstein na forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T), \quad (4.32)$$

vamos expandir o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ para ordens maiores de h , i.e.,

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots, \quad (4.33)$$

onde $\bar{R}_{\mu\nu}$ é construído de $\bar{g}_{\mu\nu}$ e por isso contém apenas modos de frequência baixa; $R_{\mu\nu}^{(1)}$ é linear em $h_{\mu\nu}$ e por isso contém apenas modos de frequência alta e; $R_{\mu\nu}^{(2)}$ é quadrático em $h_{\mu\nu}$, contendo tanto modos de altas frequências quanto de baixas. Dessa forma podemos escrever as equações de Einstein em dois termos diferentes, um para altas frequências e outro para baixas, veja:

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{Low} + \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)^{Low} \quad (4.34)$$

e,

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{High} + \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)^{High}, \quad (4.35)$$

onde os índices sobrescritos "*Low*" e "*High*" representam as projeções nos valores baixos (longos L_B) e altos (curtos λ) de frequências, respectivamente.

Podemos mostrar (Ref. [3]) que a expressão explícita para $R_{\mu\nu}^{(1)}$ é

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(\bar{D}^\alpha \bar{D}_\mu h_{\nu\alpha} + \bar{D}^\alpha \bar{D}_\nu h_{\mu\alpha} - \bar{D}^\alpha \bar{D}^\alpha h_{\mu\nu} - \bar{D}_\nu \bar{D}_\mu h), \quad (4.36)$$

onde \bar{D}_μ representam derivadas covariantes com respeito à métrica de fundo. Para segunda ordem, temos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{g}^{\alpha\beta} & \left[\frac{1}{2} D_\mu h_{\rho\alpha} D_\nu h_{\sigma\beta} + (D_\rho h_{\nu\alpha})(D_\sigma h_{\mu\beta} - D_\beta h_{\mu\sigma}) \right. \\ & + h_{\rho\alpha}(D_\nu D_\mu h_{\sigma\beta} + D_\beta D_\sigma h_{\mu\nu} - D_\beta D_\nu h_{\mu\sigma} - D_\beta D_\mu h_{\nu\sigma}) \\ & \left. + \frac{1}{2}(D_\alpha h_{\rho\sigma} - D_\rho h_{\alpha\sigma})(D_\nu h_{\mu\beta} + D_\mu h_{\nu\beta} - D_\beta h_{\mu\nu}) \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Em breve veremos que a equação (4.34) nos permite definir o tensor energia-momento do campo gravitacional. Enquanto que (4.35) nos permite descrever a propagação de $h_{\mu\nu}$ por uma equação de onda no espaço-tempo de fundo.

Se $h_{\mu\nu}$ é uma perturbação em alta frequência de um fundo quasi-estático, nós podemos introduzir duas coisas. Uma escala de tempo \bar{t} tal que seja maior do que o período $1/f$ das OG e menor do que o período $1/f_B$ de fundo; e a média ao longo deste tempo, i.e., ao longo de vários períodos das OG.

Escrevemos então a equação (4.34) como

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle + \frac{8\pi G}{c^4} \left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right\rangle, \quad (4.38)$$

onde os símbolos $\langle \rangle$ denotam o valor médio da grandeza em questão. Neste caso, considera-se a média sobre muitos comprimentos de onda, uma vez que a energia transportada pela radiação gravitacional não pode ser localizada com precisão no tempo. Trabalhos de Kenneth. G. Wilson (Ref. [20]), que lhe renderam o prêmio Nobel de 1982, explicam sobre a importância dos valores médios para isolar os resultados à escalas preferíveis. No nosso contexto, esta separação de escala permite entender como a energia carregada pela onda gravitacional distorce o espaço de fundo gerando um sinal no detector.

Queremos encontrar uma expressão para a equação de Einstein em termos, tanto dos tensores energia-momento da métrica de fundo, quanto das perturbações causadas pelas ondas gravitacionais. Assim, definimos um efetivo tensor de energia-momento de

matéria $\bar{T}^{\mu\nu}$, tal que

$$\left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right\rangle \equiv \bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{T}, \quad (4.39)$$

onde $\bar{T} = \bar{g}_{\mu\nu}\bar{T}^{\mu\nu}$ é o traço.

Definimos também o tensor $t_{\mu\nu}$ dependente das ordens maiores em $h_{\mu\nu}$,

$$t_{\mu\nu} \equiv -\frac{c^4}{8\pi G} \left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^{(2)} \right\rangle, \quad (4.40)$$

onde $R^{(2)} = \bar{g}_{\mu\nu}R_{\mu\nu}^{(2)}$ e seu traço,

$$t = \bar{g}_{\mu\nu}t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} \langle R^{(2)} \rangle. \quad (4.41)$$

Inserindo (4.41) em (4.40), temos

$$t_{\mu\nu} = -\left\langle \frac{c^4}{8\pi G}R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}t \right\rangle. \quad (4.42)$$

Multiplicando por $8\pi G/c^4$ e isolando $R_{\mu\nu}^{(2)}$, encontramos

$$-\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = \frac{8\pi G}{c^4}(t_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}t). \quad (4.43)$$

Agora conseguimos reescrever a equação (4.38) de Einstein,

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}(t_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}t) + \frac{8\pi G}{c^4}(\bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{T}), \quad (4.44)$$

ou,

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = \frac{8\pi G}{c^4}(\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}), \quad (4.45)$$

onde utilizamos (4.39) e aplicamos a métrica $\bar{g}^{\mu\nu}$ em ambos os lados de (4.44).

4.3.3 Energia carregada pelas ondas gravitacionais

Como vimos, conseguimos uma expressão para equação de Einstein em termos de um tensor energia-momento, $t_{\mu\nu}$, relativo à perturbação das OG (4.45). Agora, estamos interessados em encontrar uma forma explícita para este tensor utilizando as equações (4.40). Para isto, consideremos que queremos observar essas perturbações a longas dis-

tâncias da fonte (i.e., na posição dos detectores), onde podemos fazer a aproximação de espaço-tempo plano $\overline{D}^\mu \rightarrow \partial^\mu$ na equação (4.37). Depois de algumas manipulações não triviais (Ref. [3]), obtemos

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} & \left[\frac{1}{2} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta h_{\alpha\mu} - h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\beta h_{\alpha\nu} \right. \\
& + h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu} + \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\alpha\mu} + \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_{\mu\nu} \\
& \left. - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\alpha h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\nu h_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\mu h_{\alpha\nu} \right]. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Neste momento, nossas métricas possuem dez graus de liberdade: oito de relativos à escolha de coordenadas e dois à parâmetros físicos. Assim, vemos que aplicando as condições de gauge $\partial^\nu h_{\mu\nu} = 0$, de traço nulo $h = 0$, e $\square h_{\alpha\beta} = 0$, podemos realizar integrações por partes em cada um dos termos em (4.46), encontrando

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle. \tag{4.47}$$

Aplicando (4.47) e (4.41) em (4.42), temos

$$\begin{aligned}
t_{\mu\nu} &= -\frac{c^4}{8\pi G} \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2} \overline{g}_{\mu\nu} t \\
&= \frac{1}{4} \frac{c^4}{8\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle.
\end{aligned}$$

ou,

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle, \tag{4.48}$$

onde $\langle R^{(2)} \rangle$ vai à zero.

4.3.4 Fluxo de energia das ondas gravitacionais

A equação (4.48) nos mostra o tensor energia-momento carregado pelas ondas gravitacionais. Com isso, podemos calcular seu respectivo fluxo de energia por tempo à longas distâncias da fonte. A conservação do tensor energia-momento nos diz que $\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0$. Portanto, sua integração sobre um volume V tridimensional fica

$$\int_V d^3x (\partial_0 t^{00} + \partial_i t^{i0}) = 0. \tag{4.49}$$

A energia das ondas gravitacionais dentro desse volume contido em uma superfície S é dada por,

$$E_V = \int_V d^3x t^{00}. \quad (4.50)$$

Separando (4.49) em duas integrais, podemos escrever a energia acima como

$$\frac{1}{c} \frac{dE_V}{dt} = - \int_V d^3x \partial_i t^{0i} = - \int_S dA n_i t^{0i}, \quad (4.51)$$

onde n_i é o vetor normal à superfície S e dA seu elemento de superfície.

Ao lado de fora da fonte emissora de OG, mais precisamente nos interferômetros, podemos utilizar o TT *gauge*, pois estamos considerando que a superfície esférica S esteja à grandes distâncias da fonte. Sendo assim, a integral à direita em (4.51) só deve possuir componentes radiais, i.e.,

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int dA t^{0r}, \quad (4.52)$$

onde,

$$t^{0r} = \frac{c^4}{32\pi G} \left\langle \partial^0 h_{ij}^{TT} \frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{TT} \right\rangle. \quad (4.53)$$

Além disso, as polarizações dessas ondas no TT *gauge* são descritas por ondas esféricas

$$h_{ij}^{TT}(t, r) = \frac{1}{r} f_{ij}(t - r/c), \quad (4.54)$$

onde $f_{ij}(t - r/c)$ representa alguma função em um tempo retardado (OG não viajam instantaneamente).

Agora, só precisamos calcular os valores dos termos dentro do produto escalar em (4.53) para encontrar o fluxo de energia das OG. Assim, derivando a equação acima, temos

$$\frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{TT}(t, r) = -\frac{1}{r^2} f_{ij}(t - r/c) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f_{ij}(t - r/c). \quad (4.55)$$

Como,

$$\frac{\partial}{\partial r} f_{ij}(t - r/c) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f_{ij}(t - r/c), \quad (4.56)$$

podemos substituir esse resultado em (4.55), obtendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}h_{ij}^{TT}(t, r) &= O(1/r^2) - \frac{1}{rc}r\partial_t h_{ij}^{TT}(t, r) \\ &= O(1/r^2) + \frac{1}{c}\partial^0 h_{ij}^{TT}(t, r).\end{aligned}\quad (4.57)$$

Onde aqui utilizamos que $\partial_t f_{ij}(t - r/c) = r\partial_t h_{ij}^{TT}(t, r)$ (4.54) e $\partial_t = c\partial_0 = -c\partial^0$. Por esta equação podemos ver que a derivada radial pode ser trocada pela temporal, a menos de alguns adicionais. Assim, de (4.53) temos $t^{0r} = t^{00}$. Sabendo disso e levando em conta que as frentes de onda à grandes distâncias se comportem como planas, usando (4.51) podemos escrever que

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int dA t^{00}, \quad (4.58)$$

onde o sinal negativo indica a dissipação da energia do sistema em forma de ondas gravitacionais. Utilizando novamente (4.53) e a equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dAdt} &= ct^{00} \\ &= \frac{c^3}{32\pi G} \left\langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \right\rangle,\end{aligned}\quad (4.59)$$

onde novamente consideramos $(1/c)\partial_t = -\partial^0$ para as duas derivadas temporais, resultando em um expoente c^3 para velocidade da luz.

Podemos escrever o fluxo de energia em termos do ângulo sólido,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \int d\Omega \left\langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \right\rangle. \quad (4.60)$$

Esta equação relaciona a taxa de variação de energia com as derivadas das componentes do gauge transversal de traço-nulo. No contexto de ondas gravitacionais existe o chamado "momento quadrupolar", uma grandeza fundamental que descreve a distribuição de massa e sua evolução temporal, sendo o análogo ao "momento dipolar" em eletromagnetismo. Porém, como a interação gravitacional não permite dipolos (massa não possui cargas positivas e negativas), o momento quadrupolar é o primeiro termo relevante para a emissão de radiação gravitacional.

Em contextos mais avançados de ondas gravitacionais, M. Maggiore (Ref. [3])

mostra que a potência irradiada pode ser escrita como

$$P_{irrad} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle. \quad (4.61)$$

Esta equação representa uma forma geral para emissão de energia, i.e., não depende do sistema que está emitindo ondas gravitacionais. Considerando a descrição não-relativística de duas massas pontuais em órbita circular (Ref. [3]), podemos mostrar que o momento quadrupolar é dado por

$$Q_{ij} = \mu \left(r_i r_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r_{rel}^2 \right). \quad (4.62)$$

Nesta equação, as coordenadas cartesianas da massa μ são dadas por

$$r_1 = r_{rel} \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad r_2 = r_{rel} \sin(\omega t), \quad (4.63)$$

e a distância r_{rel} em um plano $x - y$ é calculada por

$$r_{rel}^2 = r_j r^j. \quad (4.64)$$

Calculando as derivadas do momento quadrupolar, temos

$$\begin{cases} \dot{Q}_{ij} = \mu \left\{ \dot{r}_i r_j + r_i \dot{r}_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} (\mathbf{r}_{rel} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{rel}) \right\} \\ \ddot{Q}_{ij} = \mu \left\{ \ddot{r}_i r_j + 2 \dot{r}_i \dot{r}_j + r_i \ddot{r}_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} [(\dot{\mathbf{r}}_{rel} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{rel}) + (\mathbf{r}_{rel} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_{rel})] \right\} \\ \ddot{\ddot{Q}}_{ij} = \mu \left\{ \ddot{\ddot{r}}_i r_j + 3 \ddot{r}_i \dot{r}_j + 3 \dot{r}_i \ddot{r}_j + r_i \ddot{\ddot{r}}_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} [3(\ddot{\mathbf{r}}_{rel} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{rel}) + (\mathbf{r}_{rel} \cdot \ddot{\ddot{\mathbf{r}}}_{rel})] \right\} \end{cases}, \quad (4.65)$$

onde,

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = -\omega r_{rel} \sin(\omega t) & \text{e} & \dot{r}_2 = \omega r_{rel} \cos(\omega t) \\ \ddot{r}_1 = -\omega^2 r_{rel} \cos(\omega t) & \text{e} & \ddot{r}_2 = -\omega^2 r_{rel} \sin(\omega t) \\ \ddot{\ddot{r}}_1 = \omega^3 r_{rel} \sin(\omega t) & \text{e} & \ddot{\ddot{r}}_2 = -\omega^3 r_{rel} \cos(\omega t) \end{cases}. \quad (4.66)$$

Porém, a derivada de r_{rel} é nula,

$$\begin{aligned}
 r_{rel} &= (r_1^2 + r_2^2)^{1/2} \Rightarrow \\
 \dot{r}_{rel} &= \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)^{-1/2}(2r_1\dot{r}_1 + 2r_2\dot{r}_2) \\
 &= \frac{\omega r_{rel}^2}{r_{rel}} \{-\cos(\omega t)\sin(\omega t) + \sin(\omega t)\cos(\omega t)\} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Portanto, a terceira equação em (4.65) se reduz a

$$\ddot{Q}_{ij} = \mu(\ddot{r}_i r_j + 3\dot{r}_i \dot{r}_j + 3\dot{r}_i \ddot{r}_j + r_i \ddot{r}_j). \tag{4.68}$$

O tensor quadrupolar tem dois índices i, j , e precisamos somar todas as contribuições. Como estamos lidando com movimento circular em $x - y$, as combinações $i = j$ dão um fator multiplicativo de 2, enquanto $i \neq j$ se cancelam. Aplicando (4.66) na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 \ddot{Q}_{21} = \ddot{Q}_{12} &= \mu \{ \omega^3 r_{rel}^2 \sin^2(\omega t) - 3\omega^3 r_{rel}^2 \cos^2(\omega t) \\
 &+ 3\omega^3 r_{rel}^2 \sin^2(\omega t) - \omega^3 r_{rel}^2 \cos^2(\omega t) \} \\
 &= 4\mu\omega^3 r_{rel}^2 \cos(2\omega t);
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{Q}_{11} &= \mu \{ 2\ddot{r}_i r_j + 6\dot{r}_i \dot{r}_j \} \\
 &= \mu \{ 2\omega^3 r_{rel}^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) + 6\omega^3 r_{rel}^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \} \\
 &= 8\mu\omega^3 r_{rel}^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t);
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{Q}_{22} &= -\mu \{ 2\omega^3 r_{rel}^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) + 6\omega^3 r_{rel}^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \} \\
 &= -\mu 8\omega^3 r_{rel}^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t).
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Portanto, a soma fica

$$\sum_{ij} \ddot{Q}_{ij} = 8\mu\omega^3 r_{rel}^2 \cos(2\omega t). \tag{4.72}$$

Logo,

$$\langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle = 64\mu^2 \omega^6 r_{rel}^4 \langle \cos(2\omega t)^2 \rangle. \quad (4.73)$$

Como a média de cossenos ao quadrado é 1/2, encontramos

$$\langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle = 32\mu^2 \omega^6 r_{rel}^4. \quad (4.74)$$

Substituindo os valores das variáveis, i.e.,

$$\mu = \frac{Mm}{(M+m)} \quad \text{e} \quad \omega^2 = G \frac{(M+m)}{r_{rel}^3}, \quad (4.75)$$

encontramos:

$$P_{irrad} = \frac{G}{5c^5} 32\omega^6 \frac{(Mm)^2}{(M+m)^2} G^{4/3} \frac{(M+m)^{4/3}}{\omega^{8/3}}, \quad (4.76)$$

i.e.,

$$P_{irrad} = \frac{32}{5} \frac{G^{7/3}}{c^5} \omega^{10/3} \frac{(Mm)^2}{(M+m)^{2/3}}. \quad (4.77)$$

Resultado identido à (3.47), cuja estrutura foi desenvolvida completamente em regime clássico.

Capítulo 5

Resultados e Discussões

Neste trabalho, exploramos as emissões de ondas gravitacionais tanto no regime newtoniano quanto no relativístico, analisando suas principais características e expressões fundamentais. Em ambos estudos encontramos expressões para diversos parâmetros do sistema, dentre eles a potência irradiada na forma de ondas gravitacionais, a função de onda e a relação entre frequência angular e distância relativa dos corpos. Esses resultados fornecem uma base teórica sólida para entender as diferenças sutis entre os dois regimes e como nossas considerações influenciam os resultados obtidos das ondas gravitacionais.

Com os dados encontrados, organizaremos tabelas e gráficos comparativos para avaliar qualitativamente os valores dessas expressões nas diferentes situações. Essa análise nos permite identificar as discrepâncias entre os dois regimes e compreender as principais diferenças das duas abordagens. Por meio dessas comparações, esperamos destacar os cenários em que os efeitos relativísticos se tornam mais evidentes, mostrando as principais limitações das considerações clássicas.

5.1 Eventos e parâmetros físicos obtidos

Primeiramente apresentaremos nossas estimativas para os parâmetros físicos dos sistemas binários confirmados pela colaboração LIGO. Utilizaremos as equações demonstradas em Sec. 3, as quais serão comparadas à dez outros eventos (Refs. [17], [22]), que contém os dados oficiais publicados pela colaboração. O infográfico na Figura 5.1 mostra os valores de massas dos corpos antes e depois da coalescência.¹

¹Apesar de nossa aproximação clássica ser para um sistema binário de buracos negros, a figura também contém um sistema com estrelas de nêutrons.

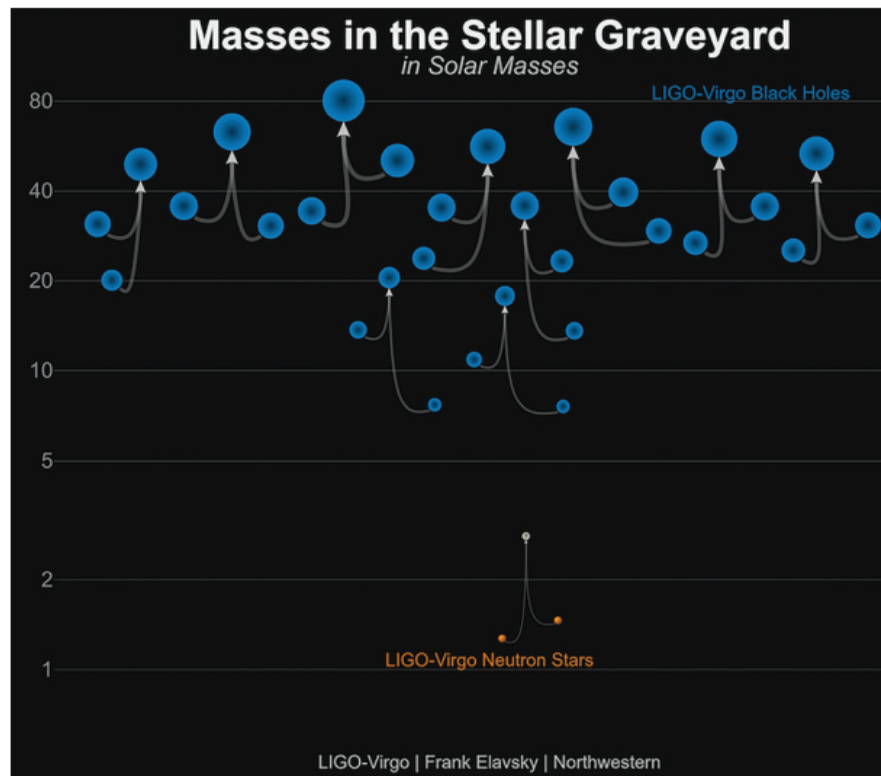


Figura 5.1: Eventos de coalescências de sistemas binários detectados pela colaboração LIGO-Virgo entre 2015 e 2019. Em azul: eventos envolvendo buracos negros binários e em laranja: evento envolvendo um sistema com estrelas de nêutrons. Os números no lado esquerdo dão a estimativa das massas dos objetos estelares cuja coalescência foi a fonte das ondas gravitacionais. Fonte: Ref. [2].

Como explicamos, a nomenclatura segue um padrão para todos eventos, sendo os dois primeiros números o ano da descoberta, os dois intermediários o mês e os dois últimos o dia de detecção. Dentre os dez eventos, temos:

- O nosso principal evento de estudo durante o regime newtoniano foi o GW150914, que representa a primeira detecção catalogada;
- O evento GW170817 é identificado como a primeira detecção de um par de estrelas de nêutrons, GW190425 é um provável sistema misto e GW190814 possui um par de BH bastante assimétricos;
- Os outros, são GW151226, GW170104, GW170814, GW170608, GW190412 e GW190521.

No decorrer de Sec. 3, mostramos que diversos parâmetros dos eventos de ondas gravitacionais podem ser estimados por análise clássica. Nas seções Sec. 3.2, Sec. 3.3 e Sec. 3.4 encontramos uma forma de calcular a massa de *chirp* com base em parâmetros

observacionais, como frequência espiral e tempo de observação, por (3.58). Já na Sec. 3.6 usamos (3.63) para calcular a massa total pela frequência de *chirp*. As massas individuais devem ser resolvidas por (3.67, 3.68), utilizando (3.70) para as frações de massa. A distância dos eventos (3.89) foi encontrada utilizando a potência irradiada. Esses são os principais parâmetros que podemos determinar por dados observacionais e que vamos comparar com os obtidos pela colaboração LIGO, assim como fez o artigo principal de referência clássica (Ref. [2]).

| Evento | $\mathcal{M}(M_{\odot})$ | | $M_{tot}(M_{\odot})$ | | $\xi(m/M_{tot})$ | | $M_{irr}(M_{\odot})$ | | $\rho(\text{Mpc})$ | |
|-----------------|--------------------------|------------|----------------------|------------|------------------|-------------|----------------------|-------------|--------------------|------------|
| | OGFB | LIGO | OGFB | LIGO | OGFB | LIGO | OGFB | LIGO | OGFB | LIGO |
| GW150914 | 32 | 29 | 74 | 66 | 0,40 | 0,44 | 4 | 3 | 639 | 410 |
| GW151226 | 15 | 9 | 51 | 22 | 0,15 | 0,36 | 2 | 1 | 820 | 440 |
| GW170104 | 31 | 21 | 89 | 51 | 0,21 | 0,37 | 4 | 2 | 1085 | 880 |
| GW170608 | 10 | 8 | 57 | 19 | 0,070 | 0,36 | 1 | 1 | 68 | 340 |
| GW170814 | 23 | 24 | 95 | 56 | 0,10 | 0,45 | 2 | 3 | 560 | 540 |
| GW190412 | 13 | 13 | 114 | 38 | 0,026 | 0,21 | 1 | 1 | 63 | 740 |
| GW190521 | 63 | 65 | 152 | 150 | 0,35 | 0,44 | 9 | 8 | 593 | 5300 |
| GW170817 | 1,8 | 1,2 | 65,3 | 2,7 | 0,003 | 0,52 | 0,04 | 0,03 | 0,9 | 40 |
| GW190425 | 1,3 | 1,4 | 28,6 | 3,4 | 0,007 | 0,32 | 0,04 | 0,11 | 4 | 159 |
| GW190814 | 7 | 6 | 57 | 26 | 0,035 | 0,11 | 0,4 | 0,2 | 352 | 241 |

Tabela 5.1: Tabela comparativa entre as estimativas da Seção 3 e os dados da colaboração LIGO-Virgo. A sigla “OGFB” significa “Ondas Gravitacionais a partir de Física Básica”. Já as colunas rotuladas por “LIGO” dizem respeito àqueles divulgados pela colaboração LIGO-Virgo. Fonte: Refs. [2], [17] e [22].

A Tabela 1 mostra os valores de massas e distâncias calculados com base nas equações citadas anteriormente. A nomenclatura das colunas diz respeito aos dados obtidos com física básica (OGFB) e pela colaboração LIGO-Virgo (LIGO). Além disso, para melhor visualização, deixamos em **negrito** as linhas correspondentes aos eventos atípicos. Segue algumas considerações:

1. Observando a tabela, vemos que a grande maioria dos valores de massa total M_{tot} estão acima dos resultados esperados pela colaboração. Isso provavelmente se deve ao fato de subestimarmos os valores de frequência de *chirp* (3.63) observados na quarta linha da Figura 1.3. Este problema se reflete nos valores das massas individuais M e m , caracterizadas pelo parâmetro ξ .
2. Os valores de distâncias ρ encontrados por nossas equações clássicas (3.90) diferem em algumas centenas de Mpc em muitos resultados.² Porém, como cita o artigo, a

²Lembrando que 1 Mpc equivale a aproximadamente $3,086 \times 10^{19}$ Km, ou $3,262 \times 10^6$ anos-luz.

própria colaboração LIGO-Virgo encontra uma larga faixa de erros para essas distâncias (Refs. [17], [22], [23], [24] e [25]). Nossas diferenças se devem principalmente ao fato de não considerarmos correções de *redshift* cosmológico.³

- Podemos observar que nossos valores de massa de *chirp* \mathcal{M} são bem coerentes com os obtidos pela colaboração, mesmo que nossos valores de massas individuais estejam diferentes. Isso ocorreu porque calculamos a massa de *chirp* diretamente através da frequência espiral (3.63) obtida pela Figura 1.3, e não através das massas dos corpos por (3.66). Até porque, precisamos da massa de *chirp* para calcular ξ (3.70) e posteriormente as massas individuais (3.67, 3.68). Como o cálculo de ξ depende de \mathcal{M} e M_{tot} , isso nos dá uma boa suspeita de que as divergências estejam sobre a frequência de *chirp*, que determina a massa total (3.63).

Essas diferenças de resultados são, principalmente, pelas diversas aproximações clássicas feitas durante o desenvolvimento da Sec. 3. Já é sabido que velocidade orbital do sistema aumenta à medida que este coalesce, principalmente próximo ao *merge*. Assim, análises relativísticas consideram abordagens diferentes em cada fase de evolução do sistema, coisa que não fazemos em nosso estudo clássico, pois consideramos apenas velocidades não-relativísticas.

Além disso, o desenvolvimento da equação (3.33) utiliza energia cinética de translação e potencial gravitacional em seu desenvolvimento, mas não citamos nada sobre energia cinética de rotação, i.e., sobre os *spins* dos corpos. Também não consideramos que as massas dos corpos variem durante o período de coalescência, o que não é verdade. Essas descon siderações refletem sutilmente em nossos dados de massa irradiada M_{irrad} da Tabela 1, onde temos valores clássicos levemente acima dos esperados pela colaboração, para maioria dos eventos. Com relação à distância do evento, não foram considerados nenhum efeito de redshift. Como a velocidade da luz é constante independente das velocidades dos referenciais, esses efeitos são devido à ação gravitacional ou a própria expansão do universo (Ref. [26]).

³Redshift é o efeito de aumento de comprimento de onda observado. Uma consequência de campos gravitacionais intensos ou expansão do universo.

5.2 Um paralelo entre os regimes

O regime newtoniano de ondas gravitacionais nos proporciona uma ótima base para entender as principais características de sistemas binários. Assim, o trabalho realizado pelo artigo (Ref. [2]) e outros, nos enfatiza a importância e o cuidado que devemos ter durante nossas abordagens clássicas de estudo. Porém, a relatividade geral nos mostra que essas aproximações possuem diversos limites a serem considerados, como foi discutido no tópico anterior. De fato, teorias mais elaboradas podem ser usadas em contextos mais amplos e possuem resultados mais precisos, i.e., normalmente essas teorias são generalizações de teorias anteriores.

Podemos mostrar que, no contexto de ondas gravitacionais, alguns resultados obtidos pela relatividade convergem para os resultados clássicos obtidos em Sec. 3. Na Sec. 4.3.4 mostramos que a potência irradiada no contexto da TRG é escrita como (4.61), i.e., em termos de quadrupolos, que são quantidades que dependem das componentes da perturbação no TT *gauge* (Ref. [3]):

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{ij}^{TT}.$$

Ao expandir a equação (4.60) e manipular as grandezas do momento de quadrupolo (4.74), convergimos o resultado para equação clássica de potência irradiada, em (4.77). Além disso, a equação (4.24) da Ref. [3], nos mostra a relação entre distância relativa e frequência orbital, semelhante àquela obtida pelo limite clássico em (3.93). Obtemos também um resultado similar à (3.97) para a distância relativa em função do tempo, na equação (4.25) da Ref. [3].

Na descrição da amplitude da onda gravitacional, também podemos notar que a equação (4.184) da Ref. [3] considera fatores de escala do universo ($a(t)$),

$$h_c = \frac{4}{a(t_0)\rho} \left(\frac{GM}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f t_s}{c} \right)^{2/3},$$

enquanto que essa abordagem foge do nosso escopo de trabalho com física básica (vide (3.103)), feitos da Sec. 3.

Neste estudo, abordamos o fenômeno das ondas gravitacionais a partir de duas perspectivas: a análise clássica, baseada em conceitos da gravitação newtoniana, e a

abordagem relativística, fundamentada na teoria da relatividade geral de Einstein. A análise clássica forneceu uma base intuitiva para compreender a interação gravitacional e os mecanismos de emissão de radiação gravitacional em sistemas binários, enquanto a abordagem relativística permitiu descrever com maior detalhes os fenômenos estudados.

Para validar e comparar nossas análises, utilizamos dados observacionais provenientes da colaboração LIGO-Virgo, de eventos coalescentes de sistemas binários. Demonstramos como as previsões relativísticas diferem das descrições clássicas, apresentando discrepâncias significativas. As comparações entre as duas teorias e os dados experimentais reforçam o papel da relatividade geral como a base teórica para a exploração do universo, ao mesmo tempo que destacam as principais diferenças entre as abordagens.

Referências Bibliográficas

- [1] EINSTEIN, A. uber die formale Beziehung des Riemannschen Krümmungstensors zu den Feldgleichungen der Gravitation. *Mathematische Annalen*, v. 97, n. 1, p. 99–103, Dez 1927. Acesso em: 16 jun 2022.
- [2] NASCIMENTO, Nicolas L.N.S. e CUZINATTO, Rodrigo R. Ondas gravitacionais de buracos negros coalescentes: um estudo quantitativo a partir de física básica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 44, 2022. Acesso em: 28 out 2022.
- [3] MAGGIORE, Michele. *Gravitational waves*. Oxford: Oxford University Press, 2008.
- [4] HULSE, R. A. e TAYLOR, J. H. Discovery of a pulsar in a binary system. *The Astrophysical Journal*, v. 195, p. L51, Jan 1975. Acesso em: 8 jul 2020.
- [5] WEISBERG, Joel M e TAYLOR, Joseph H. Relativistic binary pulsar B1913+16: Thirty years of observations and analysis. To appear in the proceedings of, v. 328, p. 25, 1 Jan 2004.
- [6] Arabatzis T, Gavroglu K. Myth 18: That the Michelson-Morley Experiment Paved the Way for the Special Theory of Relativity. In: R. L. Numbers, K. Kampourakis (eds.), *Newton's Apple and Other Myths about Science*. Cambridge, MA: Harvard University Press; 2015. pp. 149-156, 254-255.
- [7] P. Amaro-Seoane, S. Aoudia, S. Babak, P. Binétruy, E. Berti, A. Bohé, C. Caprini, M. Colpi, N.J. Cornish, K. Danzmann, et al., *Class. Quantum Grav.* 29, 124016 (2012).
- [8] NEWTON, Isaac. *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. [S.l.: s.n.], 1687.
- [9] SCHUTZ, Bernard. *A First Course in General Relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2022.

- [10] CARROLL, Sean M. Spacetime and geometry : an introduction to general relativity. [S.l.]: Cambridge Cambridge University Press, 2019.
- [11] LENZI, C H e POMPEIA, Pedro J e STUDART, Nelson. A deflexão gravitacional da luz: De Newton a Einstein. Revista Brasileira de Ensino de Física, 13 Dez 2019. Acesso em: 27 abr 2023.
- [12] NUNES, Ricardo Capiberibe e WELLINGTON. O ECLIPSE DE 1919: UM SÉCULO DE MITOS HISTÓRICOS SOBRE A RELATIVIDADE GERAL. Caderno de Física da UEFS, v. 20, n. 02, 22 Out 2022.
- [13] CRISPINO, Luis Carlos Bassalo. Expedição do Observatório Real de Greenwich para Sobral em 1919 - Anotações Tomadas pela Comissão Britânica. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 41, 13 Dez 2019.
- [14] H.M. Nussenzveig, Curso de Física Básica 1: Mecânica (Edgard Blücher, São Paulo, 2002), v. 1, 4 ed.
- [15] DAVID JEFFREY GRIFFITHS. Introduction to Electrodynamics. 4. ed. Cambridge I Pozostałe: Cambridge University Press, 2018.
- [16] H. Mathur, K. Jones-Smith e A. Lowenstein, Am. J. Phys. 85, 676 (2017).
- [17] The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration, Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016).
- [18] <https://www.ligo.caltech.edu/>
- [19] SERGEI KOPEIKIN e EFROIMSKY, Michael e KAPLAN, George. Relativistic Celestial Mechanics of the Solar System. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- [20] WILSON, Kenneth G. The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem. Reviews of Modern Physics, v. 47, n. 4, p. 773–840,
- [21] Out 1975.G.G. Simmons, Cálculo com geometria analítica (Pearson Universidades, São Paulo, 1996), v. 1.
- [22] The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration, Phys. Rev. Lett. 116, 241103 (2016).

- [23] The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* 118, 221101 (2017).
- [24] The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration, *ApJL* 892, L3 (2020).
- [25] The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* 125, 101102 (2020).
- [26] LIDDLE, Andrew. *An Introduction to Modern Cosmology*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- [27] VENZO DE SABBATA e GASPERINI, Maurizio. *Introduction To Gravitation*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 1986.
- [28] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, 1980), 2 ed.
- [29] THORNTON, Stephen T e MARION, Jerry B. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. [S.l.]: Cengage Learning, 2007.
- [30] EINSTEIN, A. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? *Annalen der Physik*, v. 323, n. 13, p. 639–641, 1905.

Apêndice A

Propriedades do tensor de curvatura

O tensor de curvatura de Riemann é uma das quantidades fundamentais na relatividade geral, responsável por descrever completamente a curvatura do espaço-tempo. Ele possui 4 índices, onde cada um varia entre 4 valores, portanto em sua totalidade há 256 componentes. Porém, podemos utilizar diversas simetrias para encontrar o número de componentes independentes. Na Sec. 2.2.4 demonstramos a dependência do tensor de Riemann com as conexões,

$$R_{\mu\lambda\sigma}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}. \quad (\text{A.1})$$

Considerando um sistema de coordenadas localmente inercial, os dois últimos termos de conexões se anulam. Além disso, o tensor de Riemann depende de conexões e estas por sua vez, dependem de métricas (2.39). Isso nos permite escrevê-lo também em termos de métricas, veja:

$$\begin{aligned} R_{\mu\lambda\sigma}^{\alpha} &= \Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^{\alpha} \\ &= \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\partial_{\lambda}\partial_{\mu}g_{\sigma\rho} + \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\partial_{\lambda}\partial_{\sigma}g_{\rho\mu} - \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\partial_{\lambda}\partial_{\rho}g_{\mu\sigma} \\ &\quad - \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\partial_{\sigma}\partial_{\mu}g_{\lambda\rho} - \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\partial_{\sigma}\partial_{\lambda}g_{\rho\mu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\partial_{\sigma}\partial_{\rho}g_{\mu\lambda} \\ &= \frac{1}{2}(g^{\alpha\rho}\partial_{\lambda}\partial_{\mu}g_{\sigma\rho} - g^{\alpha\rho}\partial_{\lambda}\partial_{\rho}g_{\mu\sigma} - g^{\alpha\rho}\partial_{\sigma}\partial_{\mu}g_{\lambda\rho} + g^{\alpha\rho}\partial_{\sigma}\partial_{\rho}g_{\mu\lambda}). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Contraindo em sua forma totalmente covariante, temos

$$R_{\kappa\mu\lambda\sigma} = g_{\alpha\kappa}R_{\mu\lambda\sigma}^{\alpha}, \quad (\text{A.3})$$

ou,

$$R_{\kappa\mu\lambda\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda\partial_\mu g_{\sigma\kappa} - \partial_\lambda\partial_\kappa g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\partial_\mu g_{\lambda\kappa} + \partial_\sigma\partial_\kappa g_{\mu\lambda}). \quad (\text{A.4})$$

Observando esta equação, vemos que existem simetrias e antissimetrias em determinados índices, veja:

- $R_{\kappa\mu\lambda\sigma} = -R_{\mu\kappa\lambda\sigma} \Rightarrow$ Antissimetria nos dois primeiros índices
- $R_{\kappa\mu\lambda\sigma} = -R_{\kappa\mu\sigma\lambda} \Rightarrow$ Antissimetria nos dois últimos índices
- $R_{\kappa\mu\lambda\sigma} = R_{\lambda\sigma\kappa\mu} \Rightarrow$ Simetria de pares conjuntos
- $R_{\kappa\mu\lambda\sigma} + R_{\kappa\sigma\mu\lambda} + R_{\kappa\lambda\sigma\mu} = 0 \Rightarrow$ Ciclicidade

Além dessas, o tensor de Riemann também satisfaz a identidade de Bianchi. Aplicando a derivada covariante em (A.4):

$$\nabla_\rho R_{\kappa\mu\lambda\sigma} = \frac{1}{2}\partial_\rho(\partial_\lambda\partial_\mu g_{\sigma\kappa} - \partial_\lambda\partial_\kappa g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\partial_\mu g_{\lambda\kappa} + \partial_\sigma\partial_\kappa g_{\mu\lambda}), \quad (\text{A.5})$$

onde aqui utilizamos o fato de que em um sistema de coordenadas localmente inercial as conexões se anulam, mas não suas derivadas ($\nabla_\rho \rightarrow \partial_\rho$). Fazendo permutações cíclicas nos índices ρ , λ e σ , escrevemos mais duas equações, i.e.,

$$\nabla_\sigma R_{\kappa\mu\rho\lambda} = \frac{1}{2}\partial_\sigma\partial_\rho\partial_\mu g_{\lambda\kappa} - \partial_\sigma\partial_\rho\partial_\kappa g_{\mu\lambda} - \partial_\sigma\partial_\lambda\partial_\mu g_{\rho\kappa} + \partial_\sigma\partial_\lambda\partial_\kappa g_{\mu\rho},$$

$$\nabla_\lambda R_{\kappa\mu\sigma\rho} = \frac{1}{2}\partial_\lambda\partial_\sigma\partial_\mu g_{\rho\kappa} - \partial_\lambda\partial_\sigma\partial_\kappa g_{\mu\rho} - \partial_\lambda\partial_\rho\partial_\mu g_{\sigma\kappa} + \partial_\lambda\partial_\rho\partial_\kappa g_{\mu\sigma}.$$

E somando as três equações, temos a identidade de Bianchi:

$$\bullet \nabla_\rho R_{\kappa\mu\lambda\sigma} + \nabla_\sigma R_{\kappa\mu\rho\lambda} + \nabla_\lambda R_{\kappa\mu\sigma\rho} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Podemos usar esta equação para encontrar uma relação entre os tensores $R_{\mu\nu}$ e R ,

$$g^{\kappa\lambda}(\nabla_\rho R_{\kappa\mu\lambda\sigma} + \nabla_\sigma R_{\kappa\mu\rho\lambda} + \nabla_\lambda R_{\kappa\mu\sigma\rho}) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla_\rho R_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma R_{\mu\rho} + \nabla_\lambda R_{\mu\sigma\rho}^\lambda = 0.$$

Agora, aplicando $g^{\mu\sigma}$ e contraindo novamente,

$$\begin{aligned} g^{\mu\sigma}(\nabla_\rho R_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma R_{\mu\rho} + \nabla^\lambda R_{\lambda\mu\sigma\rho}) &= 0 \Rightarrow \\ \nabla_\rho R - \nabla_\sigma R_\rho^\sigma - \nabla^\lambda R_{\lambda\rho} &= 0 \Rightarrow \\ \nabla_\rho R - 2\nabla^\sigma R_{\sigma\rho} &= 0. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\nabla^\sigma R_{\sigma\rho} = \frac{1}{2}\nabla_\rho R. \quad (\text{A.7})$$

Esta equação nos dá uma relação entre o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, que utilizamos em (Sec. 2.2.5) para encontrar o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$.

Apêndice B

Aproximação WKB para o strain

A descrição da aproximação WKB se baseia em considerar a função como exponencial,

$$h(t) \simeq A(t)e^{i\phi(t)}, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\phi(t) = \int \omega(t) dt. \quad (\text{B.2})$$

Porém, podemos escrever a exponencial utilizando a fórmula de Euler (Ref. [21]),

$$e^{i\phi(t)} = \cos(\phi(t)) + i \sin(\phi(t)). \quad (\text{B.3})$$

Assim, escrevemos a amplitude em (B.1) como

$$h(t) = A(t) [\cos(\phi(t)) + i \sin(\phi(t))]. \quad (\text{B.4})$$

Tomando a parte real, encontramos seus modos de polarizações físicos (vide Sec. 1.3 e Sec. 4.2),

$$h_+(t) = h \cos(\phi(t)). \quad (\text{B.5})$$

Para encontrar h utilizamos a equação já demonstrada em (3.103),

$$h = \frac{4}{\sqrt{5}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\omega}{c} \right)^{2/3} \frac{1}{\rho} \left(\frac{GM}{c^2} \right)^{5/3}. \quad (\text{B.6})$$

Já para calcular $\phi(t)$, utilizamos (B.2) e (3.99),

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int \omega(t)dt = \pi \int f(t)dt \\ &= \pi \frac{1}{(8\alpha)^{3/8}\pi} \left(\frac{c^3}{\mathcal{M}G}\right)^{5/8} \int (t_c - t)^{-3/8} dt \\ &= -\frac{1}{(8\alpha)^{3/8}} \left(\frac{c^3}{\mathcal{M}G}\right)^{5/8} \frac{8}{5} (t_c - t)^{5/8} + \phi_0.\end{aligned}$$

Como $\alpha = 32/5$ (vide equação (3.48)), encontramos

$$\phi(t) = -\left(\frac{5\mathcal{M}G}{c^3}\right)^{-5/8} (t_c - t)^{5/8} + \phi_0. \quad (\text{B.7})$$

Essa é a mesma expressão obtida em (Ref. [3]), diferenciando-se apenas pelo fator meio, pois em nosso mapeamento a frequência angular é metade da convencional (sistema de um corpo com massa reduzida μ). Esta equação descreve a natureza ondulatória das ondas gravitacionais, prevista pela teoria da relatividade. O gráfico de (B.5), juntamente com os resultados de amplitude h e $\phi(t)$, possui uma aproximação ainda melhor do que o de (3.105), comparando com o gráfico da colaboração LIGO-Virgo em Figura 1.3.

Apêndice C

Transformação em primeira ordem

Considere a seguinte transformação de coordenada,

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} \Rightarrow \delta x^{\mu} = x'^{\mu} - x^{\mu} = \xi^{\mu}, \quad |\xi| \ll 1, \quad (\text{C.1})$$

onde notemos que,

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}(x'^{\nu} - \xi^{\nu}) = \delta_{\mu}^{\nu} - \partial_{\mu}\xi^{\nu}. \quad (\text{C.2})$$

Vamos encontrar uma expressão geral para as transformações infinitesimais de coordenadas sobre tensores. Para isso aplicamos a transformação em (C.2) sobre um tensor covariante de rank 1, A_{μ} :

$$A'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_{\nu}(x) = (\delta_{\mu}^{\nu} - \partial_{\mu}\xi^{\nu}) A_{\nu}(x' - \xi). \quad (\text{C.3})$$

Expandindo o termo à direita em primeira ordem em séries de Taylor,

$$\begin{aligned} &\simeq (\delta_{\mu}^{\nu} - \partial_{\mu}\xi^{\nu})(A_{\nu} - \xi^{\alpha}\partial_{\alpha}A_{\nu}) \\ &\simeq A_{\mu}(x') - \xi^{\alpha}\partial_{\alpha}A_{\mu} - A_{\nu}\partial_{\mu}\xi^{\nu}, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

onde desconsideramos os termos $\mathcal{O}(\xi^2)$ pela aproximação em primeira ordem. Portanto,

$$\delta A_{\mu} = A'_{\mu}(x') - A_{\mu}(x') = -\xi^{\alpha}\partial_{\alpha}A_{\mu} - A_{\alpha}\partial_{\mu}\xi^{\alpha}, \quad (\text{C.5})$$

onde trocamos os índices mudos $\nu \rightarrow \alpha$.

Seguindo a mesma linha de raciocínio para um tensor $A_{\mu\nu}$ de rank 2, teríamos,

$$\delta A_{\mu\nu} = A'_{\mu\nu}(x') - A_{\mu\nu}(x) = -\xi^\alpha \partial_\alpha h_{\mu\nu} - h_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha - h_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha. \quad (\text{C.6})$$

E caso fosse um tensor contravariante,

$$\delta A^{\mu\nu} = A'^{\mu\nu}(x') - A^{\mu\nu}(x) = -\xi^\alpha \partial_\alpha A^{\mu\nu} + A^{\mu\alpha} \partial_\alpha \xi^\nu + A^{\alpha\nu} \partial_\alpha \xi^\mu. \quad (\text{C.7})$$

Agora note que, por outro lado,

$$\begin{aligned} \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} &= g^{\alpha\nu} \xi_{;\alpha}^\mu + g^{\mu\alpha} \xi_{;\alpha}^\nu \Rightarrow \\ &= g^{\alpha\nu} \partial_\alpha \xi^\mu + g^{\alpha\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\beta + g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \xi^\nu + g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \xi^\beta, \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

e utilizando a condição de metricidade,

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha g^{\mu\nu} &= 0 \Rightarrow \\ \partial_\alpha g^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu g^{\beta\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu g^{\beta\mu} &= 0 \Rightarrow \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\mu g^{\beta\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu g^{\beta\mu} &= -\partial_\alpha g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Aplicando em (C.8) temos,

$$\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} = -\xi^\beta \partial_\beta g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} \partial_\alpha \xi^\mu + g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \xi^\nu. \quad (\text{C.10})$$

Comparando esta expressão com (C.7), concluímos que,

$$\delta A^{\mu\nu} = \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} \quad \text{ou} \quad \delta A_{\mu\nu} = -\xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu}. \quad (\text{C.11})$$

Essas equações são amplamente utilizadas para investigar as transformações das perturbações $h_{\mu\nu}$ sobre a métrica plana de Minkowski (Sec. 4.1). Desenvolvimento em "Introduction to Gravitation", de V.Sabbata e M. Gasperini (Ref. [27], Cap.VIII e Apc.A).