



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE ENSINO SUPERIOR DO SERIDÓ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ERICK CLAPTON DE LIMA SILVA

APLICAÇÕES REAIS DE OTIMIZAÇÃO UNIDIMENSIONAL
UTILIZANDO O MÉTODO DE NEWTON

CAICÓ - RN
2025

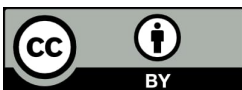
ERICK CLAPTON DE LIMA SILVA

APLICAÇÕES REAIS DE OTIMIZAÇÃO UNIDIMENSIONAL
UTILIZANDO O MÉTODO DE NEWTON:

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de graduação em Licenciatura em Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Orientador(a): Dr. Francisco Márcio Barboza.

CAICÓ - RN
2025



Esta obra está licenciada com uma licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional. Permite que outros distribuam, remixem, adaptem e desenvolvam seu trabalho, mesmo comercialmente, desde que creditem a você pela criação original. Link dessa licença: <<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>>

Erick Clapton de Lima Silva

Aplicações Reais de Otimização Unidimensional Utilizando o Método de Newton

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de graduação em Licenciatura em Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

CAICÓ - RN, 28 de novembro de 2025

Dr. Francisco Márcio Barboza
Orientador

MSc. Arthur Anthony da Cunha
Examinador 1
Facisa/UFRN

MSc. Jerberson de Melo Santana
Examinador 2
PETROBRAS

CAICÓ - RN
2025

Eu dedico este trabalho, primeiramente, a Deus, pela força e sabedoria concedidas ao longo desta caminhada.

À minha mãe e familiares, pelo apoio incondicional, incentivo e compreensão em todos os momentos.

Aos professores e colegas de curso, que contribuíram de forma significativa para a minha formação acadêmica e pessoal.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela vida, pela saúde e pela sabedoria concedidas ao longo desta jornada, que me permitiram chegar até aqui com perseverança e fé. À minha mãe, Auzileide, e à minha avó, Maria Aparecida, pelo apoio incondicional durante toda a graduação, sempre me incentivando e motivando nos momentos difíceis a persistir e concluir este curso. Estendo também meus agradecimentos aos demais familiares, pelo amor, paciência e constante apoio, que foram fundamentais em todos os momentos desta caminhada acadêmica e pessoal.

Manifesto minha sincera gratidão ao Dr. Professor Márcio pela orientação atenciosa, pelas valiosas contribuições e pelo comprometimento demonstrado em cada etapa deste trabalho. Sua dedicação, incentivo e confiança foram fundamentais para a concretização deste estudo, servindo de inspiração e exemplo de profissionalismo.

Agradeço também aos professores do curso de Licenciatura em Matemática Me. Anderson Felipe, Dr^a. Alissá Grymuza, Dr. Désio Ramirez, Dr^a. Gislana Pereira, Me. Luís Gonzaga (em memória), Dr^a. Maria Jucimeire, Dr^a. Maria Maroni, Dr. Robson Carlos e demais professores que tive durante toda graduação pelos valiosos ensinamentos e pelo constante aperfeiçoamento que proporcionaram ao longo da minha formação acadêmica.

Estendo meus agradecimentos a todos os colegas e amigos que estiveram comigo ao longo da graduação. Em especial, aos amigos Adson Ariel, Alvaro Rocha, Anna Ruth, Anthony William, Bruno Gabriel, Danielly Silva, David Devolin, Edson Gabriel, Emerson Fernando, Eugênio Xavier, Iaconny Saraiva, Jefferson Franklin, Jetson Carlos, João Romão, João Silva, João Vitor, João Victo, José Carlos, Kaedson Pereira, Paulo Vinícius, Rafael Garcia, Raul Breno, Rute Clementino, Samuel Figueiredo e Serafim Neto. pela amizade, companheirismo e apoio durante toda essa jornada acadêmica.

Agradeço aos projetos e programas que contribuíram significativamente para minha formação acadêmica e pessoal, em especial à Laboratório de Educação Matemática (LEM), também ao projeto de Monitoria e ao Programa de Educação Tutorial (PET), pelos valiosos aprendizados, oportunidades e experiências compartilhadas ao longo de toda graduação.

Estendo minha gratidão também a todos os eventos e atividades promovidos pela UFRN, que proporcionaram oportunidades de crescimento, troca de conhecimentos e fortalecimento da prática docente ao longo da graduação.

Por fim, agradeço à instituição de ensino por proporcionar um ambiente de aprendizado e crescimento, e a todos que, de alguma forma, contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho. A todos, o meu mais sincero reconhecimento e gratidão.

*“Entrega o teu caminho ao Senhor;
confia nele, e Ele tudo fará.”
(Bíblia Sagrada, Salmos 37, 5)*

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso apresenta um estudo sobre aplicações reais de otimização unidimensional, utilizando o Método de Newton como principal ferramenta para a determinação de máximos e mínimos de funções. A pesquisa destaca a relevância desse método na modelagem e na resolução de problemas presentes em diversos contextos práticos, evidenciando sua eficiência e rapidez de convergência. Além da fundamentação teórica, o trabalho incorpora o uso da linguagem Octave como recurso para validação numérica, simulação e visualização dos resultados obtidos. Por meio de exemplos concretos, demonstra-se que a aplicação combinada do método analítico com ferramentas computacionais contribui para o aprofundamento da compreensão da otimização unidimensional e para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas em situações reais.

Palavras-chave: Otimização Unidimensional, Método de Newton, Aplicações Reais, Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This undergraduate thesis presents a study on real applications of one-dimensional optimization, employing Newton's Method as the main tool for determining function maxima and minima. The research highlights the relevance of this method in modeling and solving problems across various practical contexts, emphasizing its efficiency and fast convergence. In addition to the theoretical foundation, the work incorporates the use of the Octave programming language as a resource for numerical validation, simulation, and visualization of the obtained results. Through concrete examples, the study demonstrates that the combined application of analytical methods and computational tools contributes to a deeper understanding of one-dimensional optimization and the development of problem-solving skills in real-world situations.

Keywords: One-Dimensional Optimization, Newton's Method, Real Applications, Problem Solving.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Silva, Erick Clapton de Lima.

Aplicações reais de otimização unidimensional utilizando o método de Newton / Erick Clapton de Lima Silva. - 2025.
28 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC (graduação) -
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ensino Superior do Seridó, Licenciatura em Matemática, Caicó, RN, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Márcio Barboza.

1. Otimização unidimensional - TCC. 2. Método de Newton - TCC. 3. Aplicações reais - TCC. 4. Resolução de problemas - TCC.
I. Barboza, Francisco Márcio. II. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 51

Elaborado por Jackeline dos Santos Pinheiro da Silva Maia
Cavalcanti - CRB-15/317

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráfico de $f(x)$	18
Figura 2 – Modelagem geométrica do problema da tubulação	20
Figura 3 – Gráfico da equação $L(\alpha)$	21
Figura 4 – Modelagem geométrica do problema do cinema	23
Figura 5 – Triângulo de $\theta(x)$	23
Figura 6 – Gráfico da equação $\theta(x)$	24
Figura 7 – Gráfico da equação $L(t)$	26

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados do método de Newton para encontrar o ponto mínimo de $L(\alpha)$	22
Tabela 2 – Resultados do método de Newton para encontrar o ponto de máximo de $\theta(x)$	24
Tabela 3 – Resultados do método de Newton para encontrar o ponto crítico de $L(t)$	26

LISTA DE ALGORITMOS

- 1 Método de Newton para encontrar ponto crítico de uma função $f(x)$. . . 17

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos	14
1.1.1	Objetivo Geral	14
1.1.2	Objetivos Específicos	14
1.2	Organização do Trabalho	14
2	METODOLOGIA	15
2.1	Método de Newton para Otimização	16
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	20
3.1	Problema da Tubulação	20
3.2	Solução da Tubulação	21
3.3	Problema do Cinema	22
3.4	Solução do Problema do Cinema	23
3.5	Problema do Lucro na Pecuária	25
3.6	Resolução do Problema	25
4	CONCLUSÃO	28
	REFERÊNCIAS	29

1 INTRODUÇÃO

A otimização unidimensional desempenha um papel fundamental em diversas áreas do conhecimento, oferecendo uma abordagem eficaz para aprimorar processos, aperfeiçoar sistemas e subsidiar a tomada de decisões fundamentadas. Essa área da matemática concentra-se na maximização ou minimização de uma única função objetivo, sendo amplamente aplicada na resolução de problemas práticos que demandam soluções precisas e eficientes (Nocedal; Wright, 2006).

Uma de suas principais vantagens está na capacidade de reduzir problemas complexos a uma única dimensão, preservando a essência do desafio e, ao mesmo tempo, tornando sua resolução mais viável. Ao buscar os extremos de uma função, a otimização unidimensional permite identificar valores que maximizam benefícios ou minimizam custos, impactando positivamente desde operações industriais até aspectos do cotidiano (Luenberger; Ye *et al.*, 1984).

Neste trabalho, abordamos a resolução de três problemas reais por meio de técnicas de otimização unidimensional, com ênfase na aplicação do Método de Newton. O primeiro problema consiste na determinação do melhor posicionamento de um observador em uma sala de cinema, de modo a maximizar o ângulo de visão da tela. Em seguida, analisamos o problema do transporte de uma viga metálica através de um corredor em formato de L, no qual se busca determinar o maior comprimento possível que pode ser conduzido sem colisões. Por fim, estudamos um problema de maximização de lucro no contexto da pecuária, no qual a função de receita é investigada a fim de identificar o nível de produção economicamente ideal. Esses três estudos de caso evidenciam, de forma concreta, a aplicabilidade e a eficiência dos métodos de otimização unidimensional em diferentes cenários práticos.

A relevância dessas aplicações ultrapassa a simples resolução matemática, pois envolve benefícios diretos ao bem-estar, à eficiência e à redução de desperdícios. Além de fornecer soluções para casos pontuais, a otimização unidimensional também se insere em um contexto mais amplo, no qual técnicas unidimensionais podem servir como etapas intermediárias na resolução de problemas de maior dimensão. Muitos problemas gerais, envolvendo múltiplas variáveis, podem ser decompostos em uma sequência de otimizações unidimensionais, simplificando significativamente o processo de cálculo e análise (Strang, 1986).

A aplicabilidade dessa abordagem é notória em áreas como ciência da computação, engenharia, ciências naturais e economia (Martinez; Santos, 1995), onde a busca por soluções ótimas está diretamente ligada à eficiência operacional e à precisão das decisões tomadas. Neste estudo, concentramo-nos em problemas de minimização, reconhecendo que a maximização de uma função $f(x)$ é equivalente à minimização de $-f(x)$. Serão apresentados exemplos numéricos que evidenciam, de forma clara e didática, a utilidade da otimização unidimensional como ferramenta de análise e solução de problemas.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Explorar a modelagem matemática na otimização unidimensional, com ênfase no método de Newton, analisando sua aplicação prática na determinação de máximos e mínimos de funções e evidenciando sua relevância como ferramenta de apoio à tomada de decisões.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Apresentar os fundamentos teóricos da otimização unidimensional e do método de Newton;
- Implementar o método de Newton para resolução de problemas de otimização usando a linguagem octave;
- Aplicar e avaliar a eficácia do método em exemplos práticos, destacando suas vantagens e limitações.

1.2 Organização do Trabalho

O Capítulo 2 apresenta a metodologia utilizada, iniciando com uma descrição do Método de Newton para otimização, seguida da formulação do pseudocódigo e da análise baseada no teste da segunda derivada. No Capítulo 3, são discutidos os resultados, a partir da aplicação do método em diferentes situações práticas. São apresentados e resolvidos problemas clássicos, como o da tubulação, o do cinema e o do porco, destacando os procedimentos computacionais realizados em Octave e a análise dos resultados obtidos. Por fim, o Capítulo 4 traz as conclusões do estudo.

2 METODOLOGIA

Nesta seção, apresentam-se os procedimentos e ferramentas empregados na análise de funções unidimensionais, com o objetivo de determinar seus extremos locais. Inicialmente, são revisados os conceitos fundamentais de funções crescentes e decrescentes, máximos e mínimos locais, valores críticos e os testes da primeira e da segunda derivada. Todas as definições e teoremas empregados nesta etapa foram extraídos das obras de (Luenberger; Ye *et al.*, 1984) e (Bartle; Sherbert, 2000), que serviram como principais referências teóricas para o desenvolvimento desta análise.

Definição 1. Função Crescente e Decrescente

Seja f uma função definida em um intervalo I , e sejam x_1 e x_2 quaisquer dois pontos em I .

1. f é crescente em I se $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$.
2. f é decrescente em I se $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$.

Teorema 1. Função Crescente e Decrescente

Seja f contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) .

1. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.
2. Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. Pelo Teorema do Valor Médio (Lagrange), existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

1. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então $f'(c) > 0$. Como $x_2 - x_1 > 0$, temos

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1),$$

mostrando que f é crescente em $[a, b]$.

2. Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então $f'(c) < 0$. Como $x_2 - x_1 > 0$, segue que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) < 0 \implies f(x_2) < f(x_1),$$

mostrando que f é decrescente em $[a, b]$.

□

Definição 2. Local Extremo

Seja c pertencente ao domínio de uma função f

1. $f(c)$ é um máximo local de f se existir um intervalo aberto (a, b) contendo c , tal que $f(x) \leq f(c)$ para qualquer x em (a, b) que pertença ao domínio de f .

2. $f(c)$ é um mínimo local de f se existir um intervalo aberto (a, b) contendo c , tal que $f(x) \geq f(c)$ para qualquer x em (a, b) que pertença ao domínio de f .

Definição 3. Valores Críticos

Se uma função f tem um valor de extremo local em um número c em um intervalo aberto, então, ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. Um número c com essa propriedade é chamado de valor crítico de f .

Definição 4. Teste da Primeira Derivada

Suponha que f é contínua em um intervalo aberto que contém um valor crítico c .

1. Se f muda de sinal de positivo para negativo em c , então f possui um valor máximo local em c .
2. Se f muda de sinal de negativo para positivo em c , então f possui um valor mínimo local em c .

Definição 5. Teste da Segunda Derivada

Suponha que f é duas vezes diferenciável em c .

1. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f possui um mínimo relativo em $x = c$.
2. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f possui um máximo relativo em $x = c$.
3. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, então o teste é inconclusivo.

Em muitas aplicações, há a necessidade de determinar o mínimo ou máximo local de uma função da forma $f(x)$. A definição 5, mostra que o valor de x pode corresponder a um mínimo ou máximo local onde pode ser determinado encontrando a raiz da derivada da função.

2.1 Método de Newton para Otimização

O método de Newton é uma das técnicas mais eficientes para determinar raízes de equações e, conseqüentemente, identificar pontos críticos em problemas de otimização unidimensional. A ideia central consiste em aproximar a função por meio de sua expansão em série de Taylor e, a partir dessa aproximação, construir uma fórmula iterativa capaz de atualizar sucessivamente a estimativa da solução.

No contexto da otimização, aplica-se o método à derivada da função, buscando resolver a equação $f'(x) = 0$, pois máximos e mínimos locais ocorrem em pontos onde a derivada se anula. A fórmula iterativa utilizada é dada por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}. \quad (1)$$

O processo é repetido até que a diferença entre aproximações consecutivas seja suficientemente pequena, indicando a convergência para um ponto crítico x^* . A classificação do extremo ocorre por meio do sinal da segunda derivada: se $f''(x^*) > 0$, obtém-se um mínimo local; se $f''(x^*) < 0$, um máximo local.

A seguir, apresenta-se o algoritmo implementado para localizar os pontos críticos de uma função unidimensional com base na aplicação do método de Newton à equação $f'(x) = 0$, servindo como fundamento para os resultados computacionais obtidos como na equação 1.

O algoritmo do Método de Newton serve para encontrar pontos onde a derivada de uma função é igual a zero, ou seja, os pontos críticos de $f(x)$. A partir desses pontos, é possível saber se a função tem um máximo, um mínimo ou um ponto de inflexão.

Algoritmo 1: Método de Newton para encontrar ponto crítico de uma função

$f(x)$

Entrada: Função $f(x)$; derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$; chute inicial x_0 ; tolerância ε ; máximo de iterações N_{\max} .

Saída: Aproximação x^* para o ponto crítico de $f(x)$.

Inicializar $x \leftarrow x_0$;

for $k = 1$ **até** N_{\max} **do**

 Calcular $g \leftarrow f'(x)$;

 Calcular $h \leftarrow f''(x)$;

 Atualizar

$$x_{\text{novo}} \leftarrow x - \frac{g}{h}$$

 Calcular erro relativo

$$e \leftarrow \left| \frac{x_{\text{novo}} - x}{x_{\text{novo}}} \right|$$

 Registrar (k, x_{novo}, e) na tabela de resultados;

if $e < \varepsilon$ **then**

parar;

end

 Atualizar $x \leftarrow x_{\text{novo}}$;

end

Definir $x^* \leftarrow x_{\text{novo}}$;

return x^* ;

O procedimento consiste em utilizar a iteração até que a diferença entre duas iterações consecutivas seja inferior a uma tolerância previamente definida. Dessa forma, obtém-se o ponto x^* que satisfaz aproximadamente a condição $f'(x^*) = 0$, caracterizando um ponto crítico da função. No código implementado, considerou-se a função exemplo

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2,$$

cuja derivada primeira é $f'(x) = 4x^3 - 9x^2$ e a derivada segunda é $f''(x) = 12x^2 - 18x$. O método de Newton foi aplicado com um chute inicial $x_0 = 2$, tolerância de 10^{-6} e limite máximo de 50 iterações.

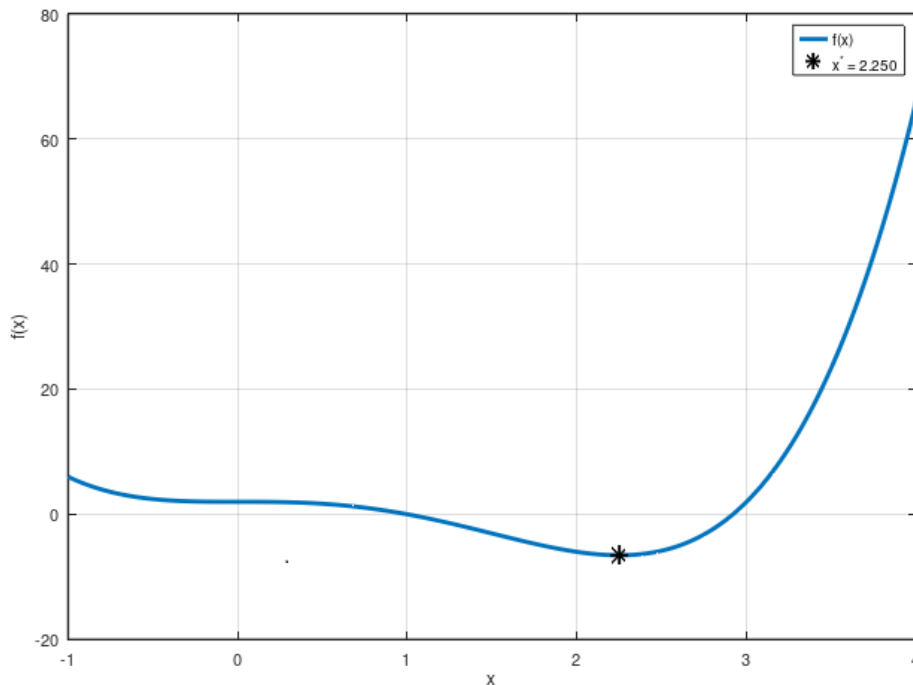
Após a convergência, a classificação do ponto crítico foi realizada verificando o

sinal da segunda derivada no ponto encontrado:

$$\begin{cases} f''(x^*) > 0 & \Rightarrow \text{mínimo local,} \\ f''(x^*) < 0 & \Rightarrow \text{máximo local,} \\ f''(x^*) = 0 & \Rightarrow \text{inconclusivo.} \end{cases}$$

Por fim, foi gerado um gráfico da função $f(x)$ com o ponto crítico indicado, conforme a Figura 1. O gráfico permite visualizar de forma clara a convergência do método e a natureza do ponto obtido.

Figura 1 – Gráfico de $f(x)$



Fonte: Próprio Autor (2025)

O pseudocódigo 1 apresenta a implementação do Método de Newton aplicado à busca de pontos críticos de uma função unidimensional $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. O algoritmo recebe como entrada a função $f(x)$, suas derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$, um valor inicial x_0 , as tolerâncias ε e δ , além do número máximo de iterações N . A partir de x_0 , inicia-se o processo iterativo, no qual são avaliados critérios de parada que garantem tanto a aproximação de um ponto crítico quanto a estabilidade numérica: o algoritmo é interrompido quando $|f'(x)| < \varepsilon$, indicando proximidade de uma raiz de $f'(x)$, ou quando $|f''(x)| < \delta$, evitando a divisão por valores muito pequenos.

Não havendo parada, aplica-se a atualização de Newton,

$$x \leftarrow x - \frac{f'(x)}{f''(x)}, \quad (2)$$

progredindo rumo à raiz de $f'(x)$. Ao final, o ponto obtido é classificado de acordo com o sinal da segunda derivada: $f''(x) > 0$ indica mínimo local; $f''(x) < 0$ indica máximo local; e $f''(x) = 0$ torna a classificação inconclusiva. Dessa forma, o pseudocódigo resume de maneira clara e estruturada as etapas fundamentais do método.

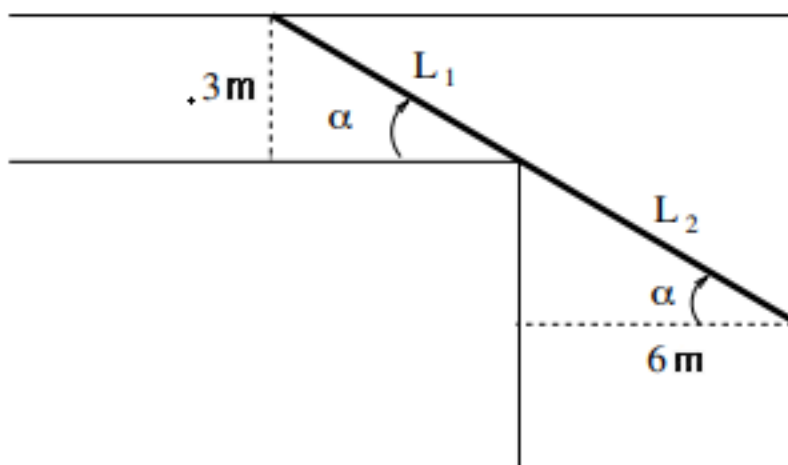
3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir da resolução dos problemas propostos, utilizando modelagem matemática e o método de Newton como ferramenta principal. Cada situação foi formulada matematicamente e analisada com base em técnicas de cálculo e otimização, buscando não apenas determinar soluções numéricas, mas também interpretar seus significados práticos. Serão discutidos três exemplos: o problema da tubulação, o problema do cinema e o problema do lucro na pecuária.

3.1 Problema da Tubulação

Este problema adaptado de Kharab e Guenther (2018) nos diz que uma tubulação de comprimento L e diâmetro desprezível deve ser transportada horizontalmente ao redor de um canto de um corredor com 3 metros de largura para um corredor com 6 metros de largura (veja a Figura 2). O problema consiste em determinar qual é o comprimento máximo que a tubulação pode ter.

Figura 2 – Modelagem geométrica do problema da tubulação



Fonte: Kharab e Guenther (2018)

Portanto, L depende do ângulo α , de forma que:

$$L(\alpha) = L_1 + L_2 = \frac{3}{\sin(\alpha)} + \frac{6}{\cos(\alpha)}$$

Concluimos que o comprimento da tubulação mais longa é dado pelo mínimo absoluto de $L(\alpha)$ no intervalo $(0, \pi/2)$.

O gráfico da função $L(\alpha)$ mostra que ela possui apenas um mínimo relativo; portanto, o mínimo absoluto de $L(\alpha)$ em $(0, \pi/2)$ coincide com esse mínimo relativo. Esse

valor mínimo pode ser obtido por meio de métodos numéricos, como os apresentados nesta seção.

3.2 Solução da Tubulação

Esta questão está relacionada à determinação do comprimento máximo de uma tubulação que pode ser transportada horizontalmente ao redor de um canto de um corredor. O corredor inicial tem 3 pés de largura, enquanto o corredor para onde a tubulação deve ser transportada tem 6 pés de largura.

Reescrevemos a fórmula em alguns passos:

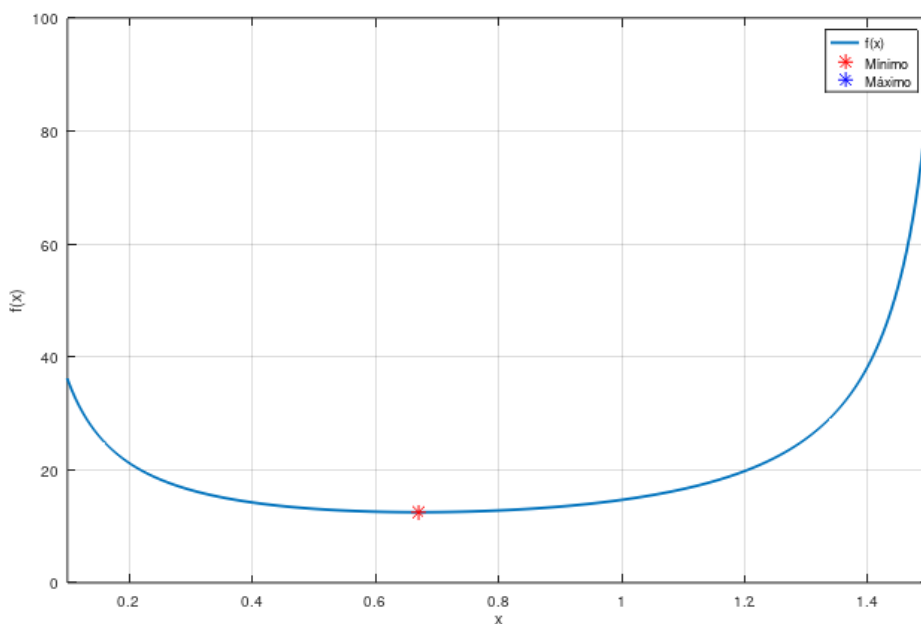
$$L(\alpha) = L_1 + L_2 = \frac{3}{\sin(\alpha)} + \frac{6}{\cos(\alpha)}$$
$$L(\alpha) = L_1 + L_2 = 3 \csc(\alpha) + 6 \sec(\alpha) \quad (3)$$

A execução do código iniciou o processo com o chute inicial $\alpha_0 = 0,8$ rad, considerando o intervalo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. A partir das iterações do Método de Newton, o algoritmo convergiu para o ângulo ótimo

$$\alpha^* = a_1 \text{ (rad)} .$$

Com esse valor, determinou-se o comprimento mínimo da tubulação na equação 3. A avaliação da segunda derivada confirmou que o ponto encontrado corresponde a um mínimo local.

Figura 3 – Gráfico da equação $L(\alpha)$



Fonte: Próprio Autor (2025)

Com base na execução do código desenvolvido, foi possível aplicar o método de Newton para determinar o valor de α que minimiza a função $L(\alpha)$. A partir das iterações realizadas, obtiveram-se os resultados apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Resultados do método de Newton para encontrar o ponto mínimo de $L(\alpha)$

Iteração	α (rad)	Erro relativo	Taxa de erro	Resultado (valor limite)
0	0.800000000	—	—	—
1	0.675197148	0.18483913	—	—
2	0.670519133	0.00697671	0.0377241	—
3	0.670919646	0.00059696	0.0855631	—
4	0.670885260	0.00005125	0.0858450	—
5	0.670888212	0.00000440	0.0858624	—
6	0.670887959	0.00000038	—	0.670887959 (rad)

Fonte: Próprio Autor (2025).

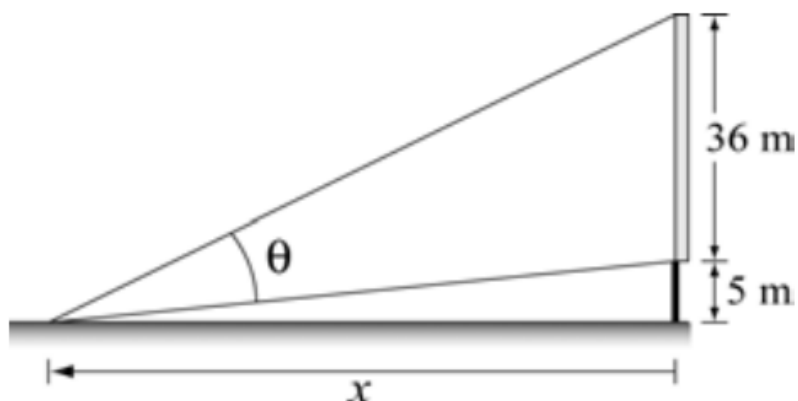
A aplicação do método de Newton ao problema resultou em cinco iterações até que o critério de convergência fosse satisfeito. Observa-se que, ao longo das iterações, os valores de α se aproximaram rapidamente do resultado final, com o erro relativo diminuindo de maneira expressiva a cada passo. Esse comportamento evidencia a eficiência do método na determinação do ponto mínimo da função. O valor limite obtido, $\alpha^* = 0,670887979$ rad, coincide com o resultado identificado por meio da análise gráfica, confirmando a consistência entre os procedimentos numérico e visual utilizados.

3.3 Problema do Cinema

Para obter a melhor experiência ao assistir a um filme, é necessário que uma pessoa se posicione a uma distância x da tela de modo que o ângulo de visualização θ seja maximizado.

O problema em questão, retirado de Gilat (2004), visa determinar a distância x para a qual θ é máxima, conforme ilustrado na configuração da Figura 4.

Figura 4 – Modelagem geométrica do problema do cinema

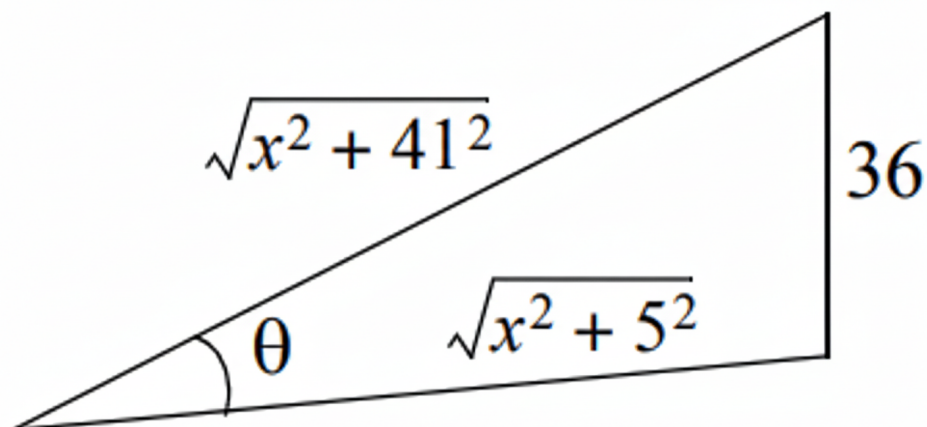


Fonte: Gilat (2004)

3.4 Solução do Problema do Cinema

O problema é resolvido escrevendo uma função para o ângulo θ em termos de x , e então encontrando o valor de x para o qual o ângulo é máximo. No triângulo que inclui θ , um dos lados é dado, e os outros dois lados podem ser escritos em termos de x , como mostrado na figura 5.

Figura 5 – Triângulo de $\theta(x)$



Fonte: Gilat (2004)

Uma forma de escrever θ em termos de x é usando a Lei dos Cossenos:

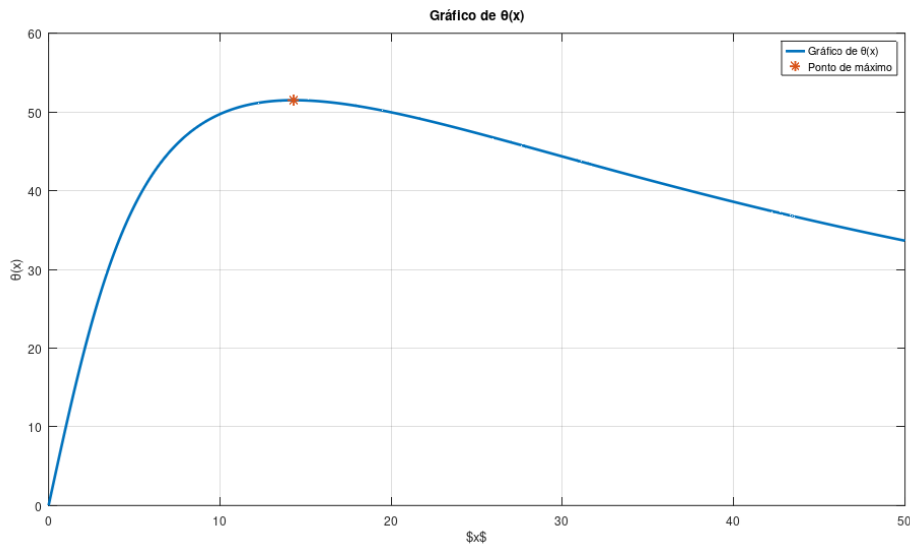
$$\cos(\theta) = \frac{(x^2 + 5^2) + (x^2 + 41^2) - 36^2}{2\sqrt{x^2 + 5^2}\sqrt{x^2 + 41^2}}.$$

Agora basta calcular o arco cosseno de θ , logo obtemos:

$$\theta(x) = \arccos\left(\frac{(x^2 + 5^2) + (x^2 + 41^2) - 36^2}{2\sqrt{x^2 + 5^2}\sqrt{x^2 + 41^2}}\right)$$

Para a construção do gráfico da função $\theta(x)$, foram utilizados valores de x que asseguram a coerência matemática e a correta representação geométrica do problema. Considerou-se o intervalo $x \in [0, 50]$, de modo que todos os termos sob os radicais permanecessem reais e a expressão da função estivesse bem definida. O gráfico permite visualizar o comportamento de θ em função de x , destacando o ponto de máximo, que indica o ângulo de maior abertura visual no sistema analisado.

Figura 6 – Gráfico da equação $\theta(x)$



Fonte: Próprio Autor (2025)

Com base na execução do código desenvolvido, foi possível aplicar o método de Newton para determinar o valor de x que maximiza a função $\theta(x)$. A partir das iterações realizadas, obtiveram-se os resultados apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados do método de Newton para encontrar o ponto de máximo de $\theta(x)$.

Iteração	x (m)	Erro relativo	Taxa de erro	Resultado (valor limite)
1	6.000000	—	—	—
2	9.652449	0.37839612	—	—
3	12.511320	0.22850270	—	—
4	13.939005	0.10242372	—	—
5	14.283496	0.02411814	—	—
6	14.318610	0.00245236	—	—
7	14.317825	0.00005488	—	14.318

Fonte: Próprio Autor (2025).

Com a execução do método de Newton, foram realizadas sete iterações até que o critério de convergência fosse satisfeito. Ao longo do processo iterativo, observou-se uma aproximação rápida e consistente em direção ao ponto de máximo da função,

evidenciando a eficiência do método na identificação do extremante. O valor final obtido ao término das iterações corresponde ao máximo numérico determinado previamente no gráfico, confirmando a coerência entre a abordagem computacional e a análise gráfica realizada.

3.5 Problema do Lucro na Pecuária

Este problema, adaptado de Meerschaert (2013), descreve a seguinte situação: um animal destinado ao abate possui peso inicial P_0 e ganha r quilogramas por dia. O custo de manutenção é de c reais por dia. O preço de mercado inicial é de p_0 reais por quilograma, mas sofre depreciação de α reais por dia. Deseja-se determinar o instante ótimo t (em dias) em que o animal deve ser vendido, de modo a maximizar o lucro obtido com a venda.

3.6 Resolução do Problema

O peso do animal após t dias é dado por:

$$P(t) = P_0 + rt,$$

onde P_0 representa o peso inicial (em quilogramas) e r o ganho de peso diário.

O preço de venda por quilograma após t dias é:

$$p(t) = p_0 - \alpha t,$$

em que p_0 é o preço inicial de mercado e α a taxa de depreciação diária.

A receita total obtida com a venda do animal é:

$$R(t) = P(t) \cdot p(t) = (P_0 + rt)(p_0 - \alpha t).$$

Supondo um custo total composto por uma parcela fixa C_0 (em reais) e um custo variável proporcional ao tempo, define-se:

$$C(t) = C_0 + ct,$$

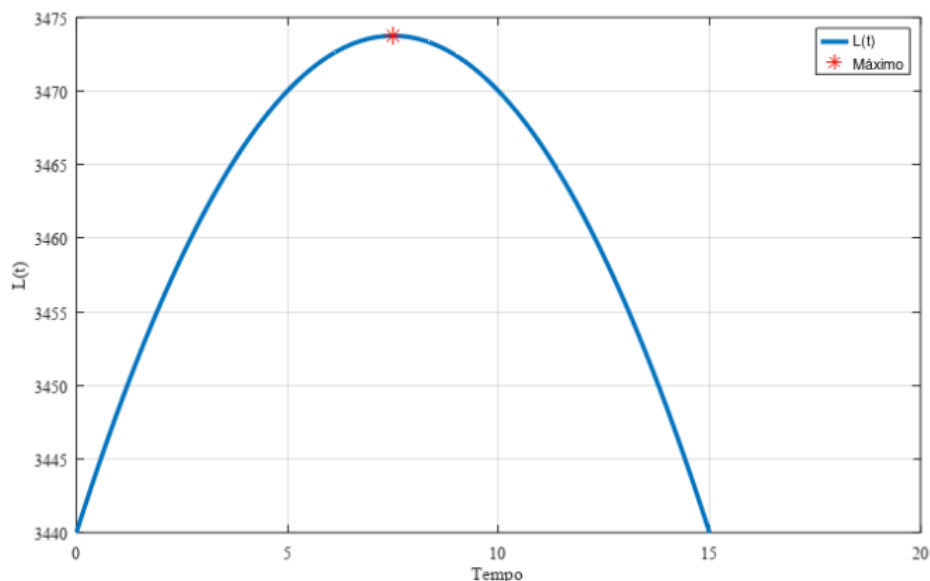
onde c representa o custo diário de manutenção.

Por fim, para determinar o lucro máximo, calcula-se a função $L(t)$, que expressa o lucro em função do tempo:

$$L(t) = R(t) - C(t).$$

Com isso podemos gerar um gráfico de $L(t)$ onde vai nos retornar o ponto onde vai ser o máximo para vender o porco, ou seja, o ponto onde vai maximizar o lucro obtido.

Figura 7 – Gráfico da equação $L(t)$



Fonte: Próprio Autor (2025)

Com base na Figura 7, foram adotados valores hipotéticos que asseguram a coerência matemática e a plausibilidade econômica do problema. Considerou-se um peso inicial de $P_0 = 100$ kg, com ganho diário de $r = 2$ kg/dia, preço inicial de mercado $p_0 = 34,5$ R\$/kg e taxa de depreciação de $\alpha = 0,3$ R\$/dia. Os custos foram representados por um valor fixo $C_0 = 10$ R\$ e custo variável diário de $c = 30$ R\$/dia. O intervalo de análise foi definido como $t \in [0, 15]$, permitindo observar a evolução do lucro total ao longo do tempo. Verifica-se que a função alcança um ponto de máximo que representa o instante mais lucrativo para a venda do animal antes que o lucro comece a decrescer devido à depreciação do preço de mercado e ao aumento dos custos diários.

A partir da execução do código desenvolvido, empregou-se o método de Newton para determinar o instante ótimo t que maximiza a função de lucro $\pi(t)$. Os resultados obtidos por meio das iterações estão apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Resultados do método de Newton para encontrar o ponto crítico de $L(t)$

Iteração	t	Erro relativo	Taxa de erro	Resultado (valor limite)
1	6.000000	0.33333333	0.2548712	—
2	7.200000	0.16666667	0.0734821	—
3	7.470000	0.03600000	0.0125124	—
4	7.499000	0.00386500	0.0000000*	—
5	7.500000	0.00000000	—	7.5

Fonte: Próprio Autor (2025)

A aplicação do método de Newton ao problema envolvendo a variável t resultou

em um total de cinco iterações até que o critério de convergência fosse alcançado. Ao longo das iterações, observou-se que os valores calculados se aproximaram rapidamente do resultado final, evidenciando a eficiência do método na determinação do ponto de interesse. O valor limite obtido ao final do processo é o mesmo identificado na análise gráfica correspondente, demonstrando a coerência entre os métodos numérico e visual empregados.

4 CONCLUSÃO

O estudo da otimização de funções, especialmente na análise de máximos e mínimos, possui papel essencial no desenvolvimento do pensamento matemático e na compreensão de fenômenos práticos. A busca por pontos críticos é uma das bases da modelagem matemática, permitindo que problemas do cotidiano sejam traduzidos em expressões analíticas capazes de representar situações reais, como a maximização de lucros, a minimização de custos ou a otimização de recursos. Nesse contexto, a Matemática assume caráter não apenas teórico, mas também instrumental, viabilizando a interpretação e a solução de desafios presentes em diversas áreas do conhecimento, tais como a economia, a engenharia, a biologia e a física.

O Método de Newton, objeto de estudo deste trabalho, destaca-se como uma das técnicas mais eficientes para a determinação de raízes de funções e, por consequência, para a localização de pontos críticos. Sua aplicação, tanto manual quanto computacional, evidencia a importância da articulação entre o raciocínio analítico e o uso de ferramentas tecnológicas, reforçando o papel da Matemática como disciplina dinâmica e aplicada.

Além disso, a realização dos cálculos de forma manual contribui para o fortalecimento da intuição matemática, permitindo a visualização das etapas envolvidas no processo iterativo e o entendimento das condições necessárias para a convergência do método. Essa abordagem promove um aprendizado mais significativo, pois o aluno passa a reconhecer o sentido dos procedimentos adotados e sua relevância para a construção do conhecimento científico.

Dessa forma, este trabalho buscou não apenas apresentar o Método de Newton como ferramenta de otimização, mas também demonstrar sua aplicabilidade em problemas concretos, evidenciando o valor pedagógico e prático da Matemática. A análise realizada reafirma a importância da otimização como instrumento de investigação e tomada de decisão, mostrando que, por meio de métodos numéricos e conceituais bem estruturados, é possível compreender e resolver questões que transcendem o ambiente acadêmico e se estendem à realidade cotidiana.

REFERÊNCIAS

- BARTLE, R. G.; SHERBERT, D. R. *Introduction to real analysis*. [S.l.]: Wiley New York, 2000. v. 2.
- GILAT, A. *MATLAB: An introduction with Applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.
- KHARAB, A.; GUENTHER, R. *An introduction to numerical methods: a MATLAB® approach*. [S.l.]: CRC press, 2018.
- LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *et al. Linear and nonlinear programming*. [S.l.]: Springer, 1984. v. 2.
- MARTINEZ, J. M.; SANTOS, S. A. Métodos computacionais de otimização. *Colóquio Brasileiro de Matemática, Apostilas, Citeseer*, v. 20, 1995.
- MEERSCHAERT, M. M. *Mathematical Modeling*. 4. ed. [S.l.]: Academic Press, 2013. ISBN 9780123869124.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. [S.l.]: Springer, 2006.
- STRANG, G. *Introduction to applied mathematics*. [S.l.]: SIAM, 1986.