

**Método de Otimização  
Topológica em Estruturas  
Tridimensionais**

**Universidade Federal do Rio Grande do Norte**  
**Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica**

**Método de Otimização Topológica em**  
**Estruturas Tridimensionais**

Dissertação submetida à  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE**  
como parte dos requisitos para a obtenção do grau de  
**MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Karilany Dantas Coutinho**

**Natal, outubro de 2006.**

**Universidade Federal do Rio Grande do Norte**  
**Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica**

**Método de Otimização Topológica em Estruturas**  
**Tridimensionais**

**Karilany Dantas Coutinho**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

**Mestre em Engenharia Mecânica**

sendo aprovada em sua forma final.

---

**João Carlos Arantes Costa Júnior**

Orientador

**Banca Examinadora:**

---

**João Carlos Arantes Costa Júnior**

Presidente da Banca Examinadora

---

**Joel Araújo do Nascimento Neto**

Membro da Banca Examinadora

---

**Marcelo Krajnc Alves**

Membro da Banca Examinadora

---

**Selma Hissae Shimura da Nóbrega**

Membro da Banca Examinadora

Divisão de Serviços Técnicos

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Central Zila  
Mamede

Coutinho, Karilany Dantas.

Método de Otimização Topológica em Estruturas Tridimensionais /  
Karilany Dantas Coutinho – Natal, RN, 2006.  
95 f.

Orientador: João Carlos Arantes Costa Júnior.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do  
Norte. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

1. Engenharia mecânica – Dissertação. 2. Otimização topológica  
3D – Dissertação. 3. Topologia – Dissertação. 4. Otimização de  
leiaute - Dissertação. I. Costa Júnior, João Carlos Arantes. II.  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 621(043.3)

# Dedicatória

**Esta dissertação é dedicada:**  
**Aos meus pais, Romualdo Pereira Coutinho e**  
**Josete Toscano Dantas Coutinho pelo grande**  
**apoio e incentivo em minhas decisões;**  
**Às minhas duas irmãs, Karla Mônica**  
**Dantas Coutinho e Karoliny Dantas Coutinho;**  
**E ao meu sobrinho, Matheus André, pelos ótimos**  
**momentos de descontração e brincadeiras.**

# Agradecimentos

Ao professor João Carlos Arantes Costa Júnior, expresso com satisfação meus agradecimentos, pela sua excelente orientação, paciência e grande incentivo que foram fundamentais para a execução deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela concessão da bolsa de estudos durante dois anos.

Ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Norte pela oportunidade de estudos.

Aos professores Joel Araújo do Nascimento Neto, Marcelo Krajnc Alves e Selma Hissae Shimura da Nóbrega por terem gentilmente participado da banca examinadora.

Aos professores Cleiton Rubens Formiga Barbosa e Eve Maria Freire de Aquino pelas cartas de recomendação e pelo apoio que me deram para iniciar o curso de mestrado.

Aos meus pais (Romualdo e Josete), às minhas irmãs (Karla e Karol) e ao meu sobrinho (Matheus) pela paciência diária e grande apoio.

Aos meus avós Josaphat Dantas de Azevêdo e Maria de Lourdes Toscano de Azevêdo pelo acolhimento, carinho e estímulo.

Aos meus grandes amigos, Lidiany, João Paulo, Fábio e Sabrina pelos momentos de amizade, descontração, longas conversas e companheirismo.

Ao Gustavo de Araujo Barros, pelo amor e carinho. Seus conselhos, atenção e incentivo foram importantíssimos.

A Deus.

# Sumário

Dedicatória .....	iii
Agradecimentos .....	iv
Sumário .....	v
Lista de Figuras .....	vii
Lista de Símbolos .....	viii
Resumo .....	x
Abstract .....	xi
Capítulo 1 .....	1
Revisão Bibliográfica .....	1
1.1 Introdução .....	1
1.2 Otimização Estrutural .....	3
1.2.1 Otimização Topológica .....	6
1.3 Objetivos e Conteúdo do Trabalho .....	15
Capítulo 2 .....	17
Minimização da Flexibilidade em Estruturas 3D Utilizando Elementos Tetra4 .....	17
2.1 Introdução .....	17
2.2 Formulação do Problema .....	18
2.2.1 Definição do Problema .....	18
2.2.2 Condição Necessária de Otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker .....	20
2.2.3 Definição do Modelo Material .....	21
2.3 Processo de Aproximação do Problema .....	22
2.3.1 Definição dos Limites $c_x$ , $c_y$ e $c_z$ .....	23
2.3.2 Formulação Discreta do Problema de Otimização .....	25
2.3.3 Equação Constitutiva e Integração Seletiva .....	33
2.4 Resultados .....	35
2.5 Conclusões .....	42
Capítulo 3 .....	44
Otimização Topológica 3D sob Restrição de Tensão Utilizando Elementos Tetra4 .....	44
3.1 Introdução .....	44
3.2 Formulação do Problema .....	45

3.2.1 Definição do Modelo Material.....	47
3.2.2 Critério de Tensão de Falha .....	49
3.2.3 Critério de Tensão de Falha com Relaxação.....	49
3.3 Formulação do Problema com Relaxação .....	50
3.3.1 Restrição de Tensão com Relaxação Integrada.....	51
3.4 Definição dos Limites $c_x$ , $c_y$ e $c_z$ .....	52
3.5 Modelo de Aproximação .....	53
3.5.1 Formulação Discreta do Problema de Otimização .....	56
3.6 Resultados .....	59
3.7 Conclusões .....	68
Capítulo 4.....	70
Considerações Finais e Trabalhos Futuros.....	70
Apêndice A .....	84
A.1 Descrição do Procedimento.....	84
Apêndice B .....	86
B.1 Condições Necessárias e Suficientes de Karush-Kuhn-Tucker.....	86
Apêndice C .....	88
C.1 Método da Função de Penalidade Exterior.....	88
C.2 Método da Função de Penalidade Interior.....	89
Apêndice D .....	92
D.1 Método do Gradiente Projetado .....	92
D.2 Aproximação quase - Newton .....	95

## Lista de Figuras

Figura 1.1: Formas clássicas de otimização estrutural	4
Figura 1.2: Exemplos de topologias com malhas diferentes e mesmo domínio	7
Figura 1.3: Célula tipo <i>rank</i>	8
Figura 1.4: Célula com vazio interno	9
Figura 2.1: Caracterização do problema de otimização de leiaute	17
Figura 2.2: Elemento finito tetraédrico de quatro nós	22
Figura 2.3: Coordenadas do baricentro do elemento finito Tetra4	23
Figura 2.4: Condição de simetria no plano – $xy$	24
Figura 2.5: Condição de simetria no plano – $xz$	25
Figura 2.6: Condição de simetria no plano – $yz$	25
Figura 2.7: Coordenadas do elemento finito tetraédrico de quatro nós	30
Figura 2.8: Gradiente de distribuição de densidade (resultado do problema 2.4)	35
Figura 2.9: Resultado do problema 2.1	36
Figura 2.10: Resultado do problema 2.2	37
Figura 2.11: Resultado do problema 2.3	39
Figura 2.12: Resultado do problema 2.4	40
Figura 2.13: Resultado do problema 2.5	41
Figura 2.14: Resultado do problema 2.6	42
Figura 3.1: Resultado do Problema 3.1	61
Figura 3.2: Resultado do Problema 3.2	62
Figura 3.3: Resultado do Problema 3.3	63
Figura 3.4: Resultado do Problema 3.4	64
Figura 3.5: Resultado do Problema 3.5	66
Figura 3.6: Resultado do Problema 3.6	67
Figura 3.7: Resultado do Problema 3.7	68
Figura a.1: Fluxograma básico do processo de otimização	85
Figura b.1: Método da função de Penalidade Exterior	89
Figura b.2: Método da função de Penalidade Interior	90

## Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição
$\mathbf{b}$	vetor de força de corpo
$c_d$	limites das derivadas parciais da densidade relativa
$\mathbf{D}^H$	equação constitutiva homogeneizada
$\mathbf{D}_{vol}^H$	equação constitutiva homogeneizada dos termos volumétricos
$\mathbf{D}_{dist}^H$	equação constitutiva homogeneizada dos termos de distorção
$e$	número do elemento
$E$	módulo de Young do material relativo a densidade (porosidade)
$E_o$	módulo de Young do material completamente denso
$f$	função objetivo
$g_{ed}$	restrição de estabilidade
$\bar{g}$	restrição de tensão com relaxação integrada
$h$	restrição de igualdade
$H$	conjunto dos deslocamentos admissíveis
$H_o$	conjunto das variações admissíveis
$k$	número de iterações
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez
$\mathbf{K}_{dist}$	matriz de rigidez dos termos de distorção
$\mathbf{K}_{vol}$	matriz de rigidez dos termos volumétricos
$m$	grau de liberdade
$n$	número do nó do elemento
$n_e$	número de elementos da malha
$n_n$	número de nós da malha
$\mathbf{n}$	vetor normal
$N_n$	função interpolação clássica do elemento finito considerado
$\mathbf{P}$	vetor carga
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbf{t}$	vetor de tração
$\bar{\mathbf{t}}$	vetor de tração prescrita
$tol$	tolerância

$\mathbf{u}$	vetor de deslocamento admissível
$\bar{\mathbf{u}}$	vetor de deslocamento prescrito
$uc$	unidade de comprimento
$ucd$	unidade de carga distribuída
$uf$	unidade de força
$ut$	unidade de tensão
$i, j$	variáveis auxiliares
$\mathbf{v}$	vetor de deslocamento virtual
$V$	volume
$\mathbf{x}$	vetor posição
$X$	conjunto que define as variáveis de projeto
$\alpha$	fração de volume prescrito
$\eta$	parâmetro de penalidade microestrutural
$\epsilon$	parâmetro de relaxação de tensão
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tensor deformação linear elástico
$\lambda, \kappa, \mu$	multiplicadores de Lagrange
$\nu$	coeficiente de Poisson do material
$\bar{\rho}_e$	densidade média do elemento
$\rho$	densidade relativa
$\rho_{\text{inf}}$	limite inferior da densidade relativa
$\rho_{\text{sup}}$	limite superior da densidade relativa
$\boldsymbol{\rho}$	vetor de densidade relativa
$\Gamma_{\mathbf{u}}$	parte do contorno com deslocamento prescrito
$\Gamma_{\mathbf{t}}$	parte do contorno com tração prescrita
$\Omega$	domínio do corpo
$\partial\Omega$	contorno do domínio
$\boldsymbol{\sigma}$	tensor tensão
$\sigma_y$	tensão de escoamento
$L_2$	espaço de Hilbert equipado com norma, ver definição em Medeiros & Miranda (2000).
$W^{m,p}$	espaço de Sobolev equipado com norma, ver definição em Medeiros & Miranda (2000).
$\Psi, \Phi$	restrição de desigualdade
$\omega, \zeta, \varepsilon$	parâmetro de penalidade

## Resumo

O problema de otimização topológica consiste na definição do leiaute estrutural pela da distribuição ótima de material no espaço de projeto. Em outras palavras, após serem definidas as condições de contorno num domínio de projeto pré-estabelecido, o problema é como distribuir o material de modo a solucionar o problema de minimização.

O objetivo deste trabalho é propor uma formulação para a determinação de topologias estruturais ótimas, que seja competitiva para utilização em problemas 3D e capaz de proporcionar leiautes de alta definição.

O procedimento combina o Método de Elementos Finitos de Galerkin com o método de otimização, buscando a melhor distribuição de material ao longo do domínio fixo de projeto. O método de otimização de leiaute empregado é baseado na abordagem material, proposta por Bendsoe & Kikuchi (1988), que considera uma equação constitutiva homogeneizada dependente apenas da densidade relativa do material.

O elemento finito utilizado para a aproximação é o tetraédrico de quatro nós, com um esquema de integração seletiva, que interpola não só as componentes do campo de deslocamento como também o campo de densidade relativa.

O processo proposto consiste na solução de uma seqüência de problemas de otimização e é aplicado a problemas de minimização da flexibilidade (atendendo a um limite de volume material) e da massa (satisfazendo um critério de tensão) em estruturas tridimensionais. A microestrutura utilizada para a descrição das propriedades materiais é do tipo SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalty*).

A abordagem reduz consideravelmente o custo computacional, mostrando ser efetiva e promissora. Os resultados proporcionaram um leiaute estrutural definido, com nítida distribuição do material e definição do contorno, com qualidade proporcional ao tamanho médio do elemento da malha em questão, assim como uma considerável redução no total de variáveis de projeto, devido à utilização do elemento finito empregado.

# Abstract

The topology optimization problem characterize and determine the optimum distribution of material into the domain. In other words, after the definition of the boundary conditions in a pre-established domain, the problem is how to distribute the material to solve the minimization problem.

The objective of this work is to propose a competitive formulation for optimum structural topologies determination in 3D problems and able to provide high-resolution layouts.

The procedure combines the Galerkin Finite Elements Method with the optimization method, looking for the best material distribution along the fixed domain of project. The layout topology optimization method is based on the material approach, proposed by Bendsoe & Kikuchi (1988), and considers a homogenized constitutive equation that depends only on the relative density of the material.

The finite element used for the approach is a four nodes tetrahedron with a selective integration scheme, which interpolate not only the components of the displacement field but also the relative density field.

The proposed procedure consists in the solution of a sequence of layout optimization problems applied to compliance minimization problems and mass minimization problems under local stress constraint. The microstructure used in this procedure was the SIMP (Solid Isotropic Material with Penalty).

The approach reduces considerably the computational cost, showing to be efficient and robust. The results provided a well defined structural layout, with a sharpness distribution of the material and a boundary condition definition. The layout quality was proporcional to the medium size of the element and a considerable reduction of the project variables was observed due to the tetrahedrycal element.

# Capítulo 1

## Revisão Bibliográfica

### 1.1 Introdução

Os projetos de engenharia, até meados do século passado, eram idealizados como um tipo de “arte” no qual exigiam grande capacidade e experiência do projetista para a solução de um problema.

Atualmente, a forte competição tecnológica vem requerendo a redução do tempo de projeto, produtos com cada vez maior funcionalidade, qualidade, entre outros requisitos. Sendo assim, o sucesso de um projeto de engenharia depende muito da validade e da adequação dos modelos de engenharia utilizados para prever e analisar seu comportamento antes da manufatura do produto. A criação de um modelo útil para projetos de engenharia é provavelmente a parte mais difícil e desafiadora de todo o processo.

O projeto de engenharia, muitas vezes, envolve a criação de novos e sofisticados produtos. O desenvolvimento de tais produtos deve ser naturalmente assistido com a aplicação de ferramentas computacionais baseadas em métodos científicos bem estabelecidos, visando à análise da estrutura, à otimização e à sensibilidade de parâmetros.

A pesquisa científica na área de análise estrutural tem aumentado, de forma considerável, nestas últimas décadas. O crescimento do interesse nesta área tem sido fortemente impulsionado pelo advento da computação de alta performance e pelo desenvolvimento de métodos computacionais confiáveis, tais como: o Método dos Elementos Finitos; os métodos de análise de sensibilidade da estrutura, com relação às variáveis de projeto; os métodos de programação matemática; dentre outros. Isto se deve, sobretudo, ao aumento da velocidade e da capacidade de armazenamento dos computadores digitais.

Nesta era de grande concorrência, já não basta apenas projetar um sistema que desempenhe sua função corretamente; é essencial que se projete o *melhor* sistema. O significado de *melhor* é um sistema eficiente, versátil, distinto e com uma boa relação

custo-benefício. Para que esta tarefa seja possível, o engenheiro deve empregar ferramentas experimentais, analíticas e numéricas. Entre as ferramentas numéricas, destacam-se os conceitos e métodos de minimização, que permitem uma maneira sistemática de busca de soluções ótimas.

A otimização estrutural é uma ferramenta de projeto que permite não apenas diminuir custos de fabricação, mas também diminuir custos de operação, ao melhorar a performance dos componentes e sistemas criados. A otimização em geral é uma ferramenta bastante flexível, pois é possível melhorar o projeto em vários sentidos, dependendo do que se escolhe como objetivo, restrições, variáveis de projeto, entre outros.

O rápido desenvolvimento dos métodos de otimização estrutural também reflete uma mudança natural na área de análise e síntese do projeto. Conforme Vanderplats (1994), denota-se que: projeto é usado para especificar o processo atual utilizado na definição do sistema, por exemplo, o projeto da estrutura requer a definição das dimensões e do leiaute<sup>1</sup> ótimo dos membros necessários para suportar um determinado conjunto de cargas prescritas; análise é o processo de solução da resposta de um dado sistema, quando submetido a um conjunto de cargas, por exemplo, a determinação do campo de tensões e deformações atuando em uma estrutura como resultado de um conjunto de cargas aplicadas. Logo, a análise é um subproblema no processo de projeto que ajuda a avaliar a performance do projeto.

Para elevar a eficácia de um projeto pode ser utilizado algum método de otimização, o qual pode ser definido como o processo de determinação do mínimo ou do máximo de alguma função, denominada função objetivo. A adequação de um projeto requer também a satisfação de um conjunto de requisitos especificados, os quais são chamados de restrições de projeto. Tanto a função objetivo, quanto as restrições de projeto podem ter características de análise ou de síntese de projeto.

O desenvolvimento do método para a análise e a determinação da sensibilidade da resposta da estrutura, associado às técnicas de programação matemática, possibilitam a otimização de componentes estruturais. Com o intuito de melhorar a compreensão da evolução histórica nesta área, são apresentadas nas próximas seções

---

<sup>1</sup> Apesar de pouco utilizado na literatura, o termo leiaute é mais adequado para definir a disposição dos membros estruturais, do que o termo topologia. No contexto utilizam-se os dois termos como sinônimos.

uma revisão bibliográfica do desenvolvimento da teoria de otimização aplicada em estruturas e uma descrição dos objetivos propostos para este trabalho.

## 1.2 Otimização Estrutural

Assim como o cálculo estrutural, os primeiros passos da otimização estrutural também consistiram de métodos analíticos para solução. Esses métodos, entretanto, não eram muito eficientes, pois apenas uma classe bastante limitada de problemas podia ser resolvida.

Esses primeiros métodos foram introduzidos já no final do século XIX, com o pioneiro trabalho de Maxwell (1872), no qual buscava o menor volume para estruturas uniaxiais submetidas a carregamentos. Em 1904, Michell deu continuidade ao trabalho de Maxwell, suas famosas estruturas ainda hoje são referência na teoria moderna de Otimização Topológica. Michell projetou estruturas treliçadas nas quais buscava o menor peso observando as tensões nas barras para cada caso de carga. Inicialmente, o trabalho de Michell foi pouco apreciado por seus contemporâneos, sendo referenciado apenas no final dos anos 50, como no trabalho de Cox (1958). Sendo assim, a utilização das técnicas de otimização numérica, para projetos de engenharia, foi popularizada inicialmente com Schmit (1960) e posteriormente com Fox (1965). Eles aplicaram técnicas de otimização não linear para projetos de estruturas, mas na prática os projetos ainda utilizavam muita intuição e tinham pouca solidez matemática.

O objetivo da otimização estrutural consiste na busca dos melhores valores de certas variáveis que levem a projetos ótimos, ao mesmo tempo que todas as restrições impostas sejam satisfeitas, Cheng (1992). A determinação desses projetos ótimos é feita de acordo com os mais diversos critérios, utilizando leis matemáticas e mecânicas originando estruturas completas ou elementos estruturais. Dessa forma, a otimização estrutural se torna uma ferramenta poderosa durante a fase de projeto de um produto.

Problemas de otimização estrutural podem ser classificados de acordo com as seguintes categorias tradicionais, baseado nas variáveis de projeto, e que diferem em grau de complexidade: otimização dimensional, otimização de forma e otimização topológica, Fig. 1.1. Nos problemas de otimização dimensional, Fig. 1.1(a), a forma da estrutura não muda, e as variáveis de projeto são propriedades da rigidez do

elemento, como a área da seção transversal de barras, espessura de placas, momento de inércia ou propriedades do material. Não há modificação na topologia da estrutura ou na sua forma. Nos problemas de otimização de forma, Fig. 1.1(b), a forma do contorno dos segmentos e a posição de furos é modificada para extremar uma função objetivo. Este tipo de otimização exige maior sofisticação na implementação numérica do que a otimização dimensional, pois requer técnicas sofisticadas para geração de malha automatizada e derivadas bastante precisas para a determinação da sensibilidade. A otimização topológica, Fig. 1.1(c), introduz uma estrutura base de elementos estruturais possíveis, e escolhe a melhor distribuição possível dentro desse universo.

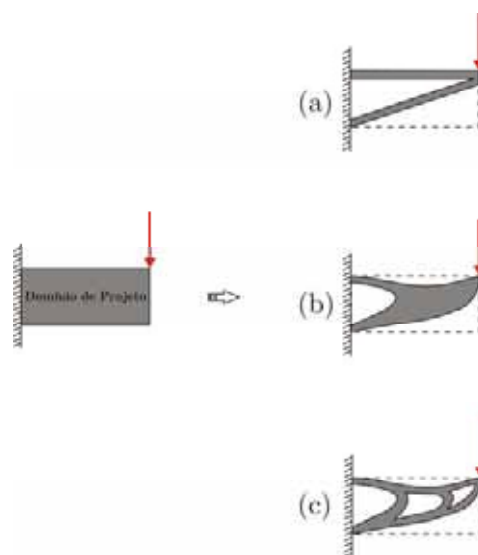


Figura 1.1: Formas clássicas de otimização estrutural

O progresso recente da otimização estrutural coincidiu com o surgimento dos computadores digitais, que também trouxe consigo técnicas emergentes para solução das complexas equações que regem os fenômenos da engenharia estrutural. No final dos anos 50 computadores mais velozes começaram a surgir. Isto teve profundos efeitos nos procedimentos de análise estrutural. Técnicas como o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos de Contorno, o Método dos Volumes Finitos, Método dos Mínimos Quadrados, entre outros, passaram a fazer parte do cotidiano do engenheiro estrutural.

Antes de existirem computadores rápidos o suficiente para se efetuarem cálculos complexos, a maioria das soluções de problemas de análise estrutural era baseada, unicamente, em soluções provenientes de equações diferenciais. Essas equações eram resolvidas analiticamente. As incógnitas do problema eram funções

(representando deslocamentos, deformações ou tensões) definidas sobre um domínio contínuo.

O MEF é sem dúvida o mais popular entre os métodos citados, existindo inúmeros programas já consolidados no mercado. Dessa forma, muitas de suas vantagens e limitações já são bem conhecidas. Basicamente, o método particiona a estrutura em subdomínios geometricamente mais simples. Sendo assim, as equações diferenciais, outrora resolvidas analiticamente, são substituídas por sistemas de equações lineares que descrevem o comportamento estrutural do sistema discretizado.

A otimização estrutural dos anos 60 era restrita à otimização dimensional de estruturas de treliças. Só nos anos 70, alguns problemas de leiaute foram também resolvidos, como os de Hemp (1973) e o de Prager (1974), ambos para uma classe muito restrita de estruturas, vistos como uma extensão do conceito de otimização de estruturas de treliças, desenvolvido por Michell (1904).

Em seguida, Prager & Rozvany (1977), Rozvany (1981), Rozvany & Wang (1983) e Zhou & Rozvany (1991) apresentaram um desenvolvimento mais geral da teoria de Michell (1904). Maiores detalhes sobre otimização do leiaute de estruturas de treliças podem ser encontrados nos trabalhos de revisão feitos por Kirsch (1989), Rozvany (1992) e, com uma abordagem mais recente, em Rozvany *et al.* (1994), nos quais muitas outras referências podem ser encontradas.

Entretanto, tanto a otimização do leiaute das estruturas de treliças como também as otimizações dimensionais e de forma em geral, não atraíram muito a atenção dos projetistas. Isto se deve às técnicas existentes que não eram suficientemente robustas para lidar com problemas complexos de projeto e, mais importante, a constatação de que algumas das classes de problemas de otimização não eram bem postas, como indicado por Kohn & Strang (1986). Para tornar o problema bem posto, eles sugeriram a relaxação do problema de projeto original, através da introdução de um material composto fictício, contendo uma microestrutura caracterizada pela presença de *vazios* (porosidade). Este procedimento deu origem à formulação de problemas de otimização de leiaute como problemas de distribuição ótima de materiais. Uma observação similar, referente à necessidade da abordagem por meio de materiais compostos, foi feita por Murat & Tartar (1985), quando da abordagem de problemas de otimização de forma em condução de calor. Porém, é justo salientar que a necessidade da utilização de microestruturas nervuradas, com

escalas muito finas, como forma de regularização do problema, já tinha sido apontada por Cheng & Olhoff (1981), em seus estudos de otimização da espessura de placas, o que acarretou em vários trabalhos de investigação nesta linha de problemas.

O primeiro grande trabalho de matemáticos da área aplicada, em resposta às observações de Cheng & Olhoff (1981), foi o de Lurie & Cherkaev (1984), os quais foram seguidos por muitos outros pesquisadores nas escolas francesas e americanas. Outros avanços na teoria matemática de materiais compostos foram reportados por Cherkaev & Kohn (1997), o qual relacionava-se diretamente com a área de otimização topológica. Nos anos 80, Bendsoe & Kikuchi (1988) estenderam esses conceitos através do uso das chamadas microestruturas artificiais e desde então a otimização topológica começou a tornar-se um problema mais acessível.

Até esse momento, a maioria dos trabalhos consistia na minimização do volume ou na maximização da rigidez de estrutura linear elástica. A partir daí, vários outros problemas puderam ser resolvidos, tais como projeto de reforços em placas, maximização ou minimização de frequências naturais e carga crítica de flambagem, criação de materiais avançados (com coeficiente de Poisson negativo, por exemplo), entre outros.

## **1.2.1 Otimização Topológica**

### **1.2.1.1 Caracterização**

O principal objetivo da otimização de leiaute, em geral, consiste em encontrar a melhor distribuição de material dentro de um especificado domínio de projeto. A distribuição do material é modificada levando em consideração alterações em algum comportamento mecânico da estrutura, tal como flexibilidade, frequências naturais ou tensão, entre outros. Em outras palavras, o problema é como distribuir o material no interior de um pré-definido espaço de projeto sob determinada condição de contorno, de modo a minimizar a função objetivo e atendendo às restrições. De acordo com Bendsoe (1995), essa distribuição ótima de material consiste em se verificar quais pontos do domínio conterão material isotrópico e quais pontos estarão vazios (problema binário, do tipo 0-1). Sendo assim, o problema de otimização de leiaute pode ser considerado como um problema pontual material/vazio. Entretanto, a implementação desta abordagem para um problema de otimização 0-1, requer o uso de algoritmos de otimização discreta, tornando a abordagem instável. Para contornar

o problema de instabilidade adota-se em geral, como forma de relaxação, a abordagem de material composto, como proposto por Kohn & Strang (1986). Além disso, conforme Bendsoe (1989), pode-se mostrar a existência de soluções para problemas formulados como sendo de distribuição ótima de materiais, usando uma abordagem de material composto.

O método de otimização topológica tem possibilitado diversos tipos de aplicações industriais, no entanto, há dificuldades relacionadas à aplicação do método relativas à instabilidade numérica. De uma forma geral, pode-se dividir estes problemas numéricos em três categorias: dependência da malha, instabilidade de tabuleiro e mínimos locais, Bendsoe & Sigmund (2003) e Peterson & Sigmund (1998).

O problema de dependência da malha surge justamente do fato de se discretizar o domínio, resultando assim diferentes soluções finais para diferentes discretizações. Intuitivamente, espera-se que quanto mais refinada a malha de elementos finitos, maior será a nitidez da topologia ótima da estrutura. Entretanto, em alguns problemas, malhas mais refinadas podem resultar em estruturas complexas, com topologias mais detalhadas e qualitativamente diferentes de um modelo resultante de uma malha mais grosseira, ver Fig.1.2(a,b) .

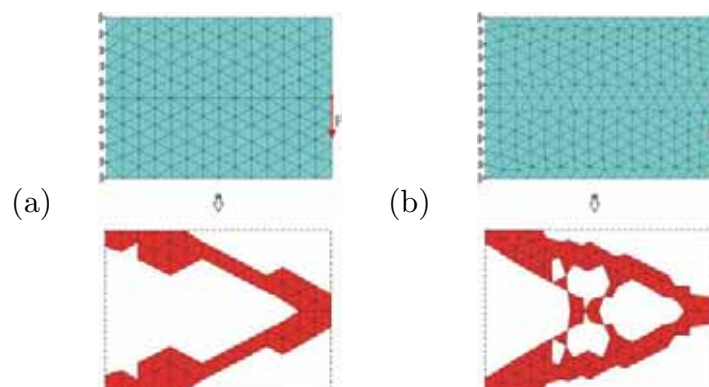


Figura 1.2: Exemplos de topologias com malhas diferentes e mesmo domínio

(a) Vista lateral de uma malha 3D contendo 890 elementos e (b) Vista lateral de uma malha 3D contendo 2.064 elementos

Nos problemas relacionados à instabilidade de tabuleiro, *checkerboard*, há uma formação de alternância de elementos vazios e elementos cheios, similar a um tabuleiro de xadrez. A instabilidade de tabuleiro é indesejável na solução de problemas, pois não se configura numa ótima distribuição de material e sim num

fenômeno que aparece devido à formulação do elemento finito utilizado no processo de otimização.

Nos problemas de mínimos locais, a maioria dos problemas de projeto topológico são não convexos, no que acarreta a existência de muitos mínimos locais. A não convexidade do problema leva a possibilidade de encontrarmos muitos mínimos locais e diferentes soluções para o mesmo problema discretizado quando são utilizadas diferentes estimativas iniciais para as variáveis e diferentes parâmetros de algoritmos de otimização. Isto ocorre porque as provas de convergência dos algoritmos funcionam para programação convexa, enquanto que para programação não convexa apenas garante-se a convergência para pontos estacionários, que não são necessariamente mínimos globais.

A abordagem material consiste em considerar o material como sendo um material composto constituído por uma microestrutura periódica, a qual é caracterizada por um conjunto de parâmetros. Mediante esta abordagem, a natureza complexa do problema de otimização de leiaute pode ser convertida em um problema de otimização de parâmetros. De fato, a idéia de se utilizar um corpo constituído por microestruturas periodicamente distribuídas, remove a natureza 0-1 do problema de escala macroscópica para a escala microscópica, ver Bendsoe (1989). Em termos matemáticos, a introdução de microestruturas corresponde à relaxação do problema variacional que pode ser estabelecida para o problema de otimização, ver Kohn & Strang (1986).

Existem na literatura muitos modelos de microestruturas, esses modelos podem ser classificados basicamente em três grupos, Costa Jr. (2003): modelos de compósitos laminados tipo *rank*, modelos de microcélulas com vazios internos e modelos artificiais.

Nos modelos de compósitos laminados tipo *rank*, a microestrutura é composta por camadas de material, onde as camadas de material são alternadas por material sólido e “vazios”. O parâmetro de otimização é a medida  $\varphi$ , conforme ilustrado na Fig. 1.3, ver trabalhos de Thomsen (1992) e Olhoff *et al.* (1993).



Figura 1.3: Célula tipo *rank*

Os modelos de microcélulas com vazios internos são constituídos de células com furos retangulares. Os parâmetros de otimização são as medidas  $a$  e  $b$  das laterais do retângulo e a orientação angular  $\theta$ , segundo mostra a Fig. 1.4. O trabalho de Bendsoe & Kikuchi (1988) inicia a utilização desta categoria de microestrutura na otimização topológica.

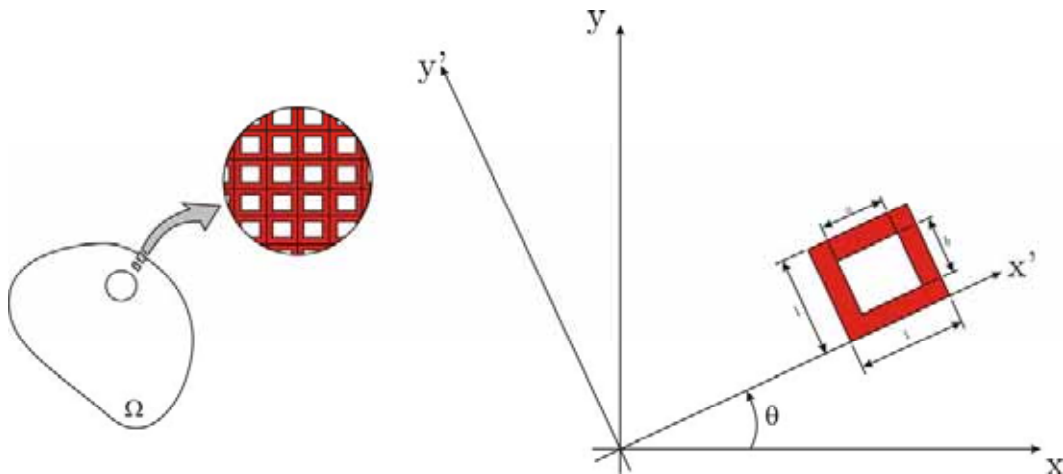


Figura 1.4: Célula com vazio interno

A determinação das propriedades mecânicas macroscópicas destes materiais é feita pela teoria da homogeneização. No caso de materiais do tipo *rank* a equação constitutiva homogeneizada pode ser determinada analiticamente; já no caso de modelos com microcélulas complexas as propriedades são determinadas por procedimentos numéricos.

A teoria da homogeneização é utilizada para descrever as propriedades efetivas do material composto, o qual é formado de um material isotrópico de base, sendo representado pelo tensor constitutivo do material. Esta parametrização relaxa o domínio da solução, garantindo um espaço de solução mais abrangente e fechado, além de tornar o problema mais tratável computacionalmente. Portanto, cada ponto do domínio discretizado por elementos finitos, é constituído por um material composto gerado pela repetição periódica de uma microestrutura. A variação dos parâmetros durante o processo de otimização permite a representação final de pontos com material sólido, pontos com vazios e pontos com materiais intermediários.

A utilização da teoria da homogeneização insere novas variáveis de projeto ao problema de otimização topológica, tornando a implementação numérica mais complexa e aumentando o custo computacional. Por este motivo, diversos pesquisadores têm optado por utilizar modelos artificiais, cuja única variável de

projeto é a densidade relativa<sup>2</sup> do material. A aplicação deste modelo pode ser verificada em Bendsoe & Kikuchi (1988), ainda que a sua descrição não seja fiel ao comportamento micromecânico.

### 1.2.1.2 Desenvolvimento Histórico

O processo de relaxação tem contribuído para o desenvolvimento de técnicas modernas para a otimização do leiaute estrutural. Uma das mais importantes e inovadoras técnicas de otimização de leiaute foi proposta por Bendsoe & Kikuchi (1988). O trabalho faz uso da abordagem material e objetiva à determinação do leiaute ótimo de estruturas, sujeitas a um conjunto de restrições de projeto. Para a regularização do problema, foram introduzidos *infinitos* furos retangulares de escala *infinitamente* pequena, e periodicamente distribuídos, em todo o domínio de projeto. De fato, a microestrutura obtida mostrou ter, de maneira intrínseca, as características básicas necessárias para a relaxação do problema.

A derivação do modelo mecânico equivalente homogeneizado da estrutura porosa, *i.e.*, da determinação das propriedades ortotrópicas equivalentes do material, foi obtida pela aplicação da teoria da homogeneização, ver Sanchez-Palencia (1980) para a teoria geral e Guedes & Kikuchi (1990) para a implementação computacional. No trabalho de Bendsoe & Kikuchi (1988), o critério de otimização visava maximizar a rigidez global estática de estruturas bidimensionais, de material elástico linear, sendo a estrutura submetida à aplicação de carregamentos mecânicos prescritos. Os resultados obtidos por Bendsoe & Kikuchi (1988) não eram muito nítidos, *i.e.*, nem a forma e nem a topologia da estrutura eram adequadamente definidas. Isso se deve, provavelmente, à inadequação do algoritmo utilizado no recálculo do ângulo ótimo (rotação) dos furos.

No ano de 1989, Pedersen com um trabalho direcionado à classe de problemas de otimização de microestruturas, representando materiais compostos reforçados por fibras, conseguiu derivar as condições corretas para a determinação do ângulo ótimo. Suzuki (1991) e Suzuki & Kikuchi (1991) estenderam o trabalho de Bendsoe & Kikuchi (1988), onde foram aplicadas as considerações propostas por Pedersen (1989)

---

<sup>2</sup> A denominação “densidade relativa” quantifica a não porosidade da amostra material, ou seja, fração de material denso contida na amostra.

e Gibiansky & Cherkaev (1987). Neste trabalho, o ângulo de rotação foi identificado pela direção das tensões principais, mas não foram obtidas soluções estáveis.

Cheng (1994) discutiu os resultados obtidos por Pedersen em relação ao uso das direções de deformação principal para atualizar a orientação, e comparou com métodos apresentados por Suzuki & Kikuchi (1991) e por Díaz & Bendsoe (1992), onde se utilizam as direções principais de tensão. Apresentando, então, um método melhorado baseado na tensão, utilizando uma formulação com a tensão generalizada, e não apenas com as tensões principais.

Em 1995, Mota Soares *et al.* e Conceição António *et al.* apresentaram um modelo para a otimização de estruturas do tipo casca fina de material composto laminado. No trabalho de Mota Soares *et al.* utiliza-se uma estratégia de dois níveis. No primeiro nível, procura-se minimizar o deslocamento máximo ou maximizar a frequência natural de determinado modo de vibração, tendo como variáveis de projeto os ângulos de orientação de cada camada, sujeita à restrições laterais. E no segundo nível, o volume de material é minimizado sendo ainda sujeito à restrições de deslocamento, tensões e/ou critério de falha de Tsai-Hill, frequências naturais de determinados modos de vibração e constantes laterais. Neste último caso, as variáveis de projeto eram as espessuras de cada camada. No trabalho de Conceição António *et al.* também é utilizada uma estratégia de dois níveis, mas com objetivo de obter uma estrutura com peso mínimo e que seja capaz de suportar um determinado conjunto de forças estáticas externas sem falha. Para isso, o domínio é separado em macro-elementos, dentro de cada um dos quais havia uma determinada seqüência de laminação, orientação, espessura das lâminas e propriedades dos materiais. No primeiro nível, se maximiza a eficiência da estrutura, utilizando como variável de projeto a orientação de cada lâmina. No segundo nível, se minimiza o peso da estrutura, tendo como variável de projeto as espessuras das lâminas dentro de cada elemento e critério de ótimo como método de otimização.

Em 1997, Maute & Ramm apresentaram um trabalho sobre otimização topológica adaptativa de estruturas de cascas, fazendo o uso da otimização de forma com modelos estruturais do tipo casca, aplicando otimização topológica para determinar a configuração básica. Ainda no trabalho de Maute & Ramm, problemas de otimização de cascas 3D são modelados como uma estrutura no espaço paramétrico 2D. Os problemas de máxima rigidez com restrições de massa são discutidos, utilizando critérios de ótimo. No cálculo da energia de deformação, as

contribuições de flexão, forças de membranas e forças de cisalhamento transversais são consideradas separadamente. Verifica-se que no caso de cascas finas, quando ocorre travamento por cisalhamento, a energia de deformação por cisalhamento transversal ocasiona a formação de *checkerboards*.

Kere & Koski (1999) resolveram um problema de otimização multicritério da seqüência de laminação para máxima margem de segurança em relação a falha. Em 2000, Ramm *et al.* compararam dois métodos de otimização de forma desenvolvidos para modelos de casca, um deles baseado em métodos experimentais e o outro utilizando conceitos de otimização estrutural, permitindo o uso de vários critérios de ótimo. Ainda em 2000, Borrvall & Petersson desenvolveram um método de otimização topológica baseado em uma penalidade regularizada, o método implementado foi utilizado para problemas 3D de grande escala.

A importância da técnica de relaxação, caracterizada pela utilização de uma microestrutura porosa, possibilita a determinação de leiautes ótimos que possui uma “grande quantidade” de material composto, *i.e.*, distribuição de material cuja microestrutura apresenta uma densidade intermediária. A presença de material composto é indesejável, já que dificulta a definição da forma e do leiaute ótimo da estrutura. Adicionando-se a isso, a dificuldade de se obter o produto e a elevação dos custos, ambos inviabilizados pelo aumento da tecnologia e etapas de fabricação a serem empregados no processo produtivo deste material. Visando contornar esta dificuldade, introduziu-se um tipo de penalidade obtida pela introdução de uma microestrutura artificial, modificando o tensor elasticidade homogeneizado ou acrescentando um funcional tendente (funcional penalidade) para uma célula vazia (porção de microestrutura com densidade nula) ou célula sólida (porção de microestrutura sem porosidade), ver Rozvany *et al.* (1992) e Haber *et al.* (1994).

A partir dos estudos iniciais de Bendsoe & Kikuchi (1988) e Susuki & Kikuchi (1991), o método de otimização topológica adquiriu um certo nível de maturidade o qual vem possibilitando diversas aplicações industriais. No entanto, apesar desta maturidade, há dificuldades na aplicação do método relacionadas à instabilidades numéricas, que ainda são alvo de pesquisas. O aparecimento de instabilidades na solução é caracterizado pela formação de uma configuração xadrez no leiaute ótimo, assemelhando-se a um tabuleiro de damas, do original em inglês *checkerboard solution problems*, isto é, a formação de regiões com presença de material e ausência de material. A solução para evitar a formação da “instabilidade xadrez”, nos resultados

da Otimização Topológica, é aumentar a ordem do elemento ou utilizar um filtro que controle a variação das densidades. Segundo Bendsoe (1995), a origem da formação de xadrez está relacionada às características de aproximação do elemento finito e é de mesma natureza que os padrões observados em algumas análises de elementos finitos, na distribuição espacial de pressão de escoamento de fluidos de Stokes. Essa hipótese é sustentada no fato de que as soluções encontradas para controlar os problemas de escoamento de fluidos de Stokes também funcionam nos problemas de homogeneização.

Em 1991, Bendsoe & Rodrigues e Olhoff, Bendsoe & Rasmussen estudaram a possibilidade de integração do Método de Otimização Topológica aos sistemas CAD, do inglês, *Computer Aided Design*. No ano seguinte, Díaz & Bendsoe (1992) apresentaram uma formulação para o problema de maximização de rigidez de estruturas elásticas submetidas a várias cargas não simultâneas. Thomsen (1992) e Olhoff, Kog & Thomsen (1993) trataram numericamente uma extensão do método aplicada à otimização de estruturas compostas por mais de um material. Uma outra extensão do método de otimização foi na aplicação em projetos de reforço de chapas de carrocerias de automóveis, em 1993 por Fukushima, Suzuki & Kikushi. Além das aplicações na área estrutural clássica, pode-se citar a aplicação de Ananthasuresh, Kota & Gianchandani (1994) em projetos de mecanismos flexíveis e problemas de maximização da condutividade térmica na transferência de calor, Park (1995).

No final da década de 90, Frecker *et al.* (1997) e Nishiwaki *et al.* (1998) apresentaram uma formulação multi-objetivo, no qual se maximizava a energia mútua e se minimizava a flexibilidade média (energia de deformação), obtendo-se mecanismos flexíveis com flexibilidade distribuída e mecanismos do tipo treliça. A mesma formulação foi utilizada no trabalho de Lima (2002) para o projeto de mecanismos flexíveis bidimensionais. Silva, Nishiwaki & Kikuchi (1999, 2000) expandiram os conceitos de energia mútua e flexibilidade média aplicada a mecanismos flexíveis para atuadores piezelétricos flexionais, desenvolvendo um método que permite projetar vários tipos de atuadores piezelétricos não convencionais.

Em 2000, Canfield & Frecker estudaram a formulação do problema de otimização topológica e o método de solução (Programação Linear Seqüencial e Critério de Otimalidade) num domínio discretizado com elementos de treliça. Na seqüência, Frecker & Canfield (2000) projetaram atuadores piezelétricos com

elementos de treliça e sólidos, verificando o desempenho destes atuadores piezelétricos através do MEF e experimentalmente. Em 2004, Li, Saitou & Kikuchi fizeram o uso da otimização topológica juntamente com projetos de mecanismos flexíveis, atuando termicamente; eles consideraram os efeitos transientes de transferência de calor para produzir uma carga térmica localizada, baseada na expansão térmica natural do material. Cho & Choi utilizam, no ano de 2005, otimização topológica combinado a termo-elasticidade, o método de otimização topológica foi formulado aplicando o método DSA, *Design Sensitivity Analysis*, os campos de temperatura e de deslocamentos encontravam-se em domínios idênticos.

A técnica mais utilizada nos Métodos de Otimização Topológica faz uso de uma discretização do tipo *pixel*, que ocasiona, após a discretização do problema, na introdução de um grande número de variáveis de projeto, necessárias para a definição do leiaute ótimo com uma resolução aceitável.

Dentre os métodos de otimização de leiaute que consideram malhas variáveis durante o processo estão os métodos de otimização estrutural evolutiva, conhecidos na literatura como (ESO), do original em inglês *Evolutionary Structural Optimization*. A idéia principal destes métodos consiste: na proposição de um critério eficiente, capaz de estimar a contribuição de cada elemento na resposta do sistema; e na estratégia de remoção dos elementos que possuem a menor sensibilidade, ver Christie *et al.* (1998), Chu *et al.* (1997), Hinton & Sienz (1995), Li *et al.* (1999), Querin *et al.* (2000a,b), Rong *et al.* (2000), Reynolds *et al.* (1999) e Xie & Steven (1996). O método é influenciado pela taxa de remoção de elementos e isto tem como desvantagens: a ocorrência de extremidades dentadas e de interconexões estruturais, dando origem a mecanismos e à concentração de tensão. Uma melhoria do método foi proposta, na qual a estrutura evolui de uma estrutura básica, que representa o leiaute estrutural mínimo necessário para resistir às cargas aplicadas, desconsiderando a magnitude da tensão efetiva. O material é então acrescentado nas regiões de alta concentração de tensão de modo a amenizar o seu efeito. Este procedimento conduz a um leiaute ótimo final e é conhecido como o ESO aditivo, *i.e.*, AESO do original em inglês *Additive Evolutionary Structural Optimization*, ver Querin *et al.* (2000a). Uma variação do método, que combina o básico método ESO com o AESO, denominado por bidirecional ESO ou BESO, do original em inglês *Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*, foi proposto por Querin *et al.* (2000b). Neste método o material pode ser acrescentado ou removido. A utilização de uma taxa evolucionária

de adição e outra de remoção de material, de maneira sucessiva, mostrou não ser simples, pois as seleções destas taxas influenciam na determinação do leiaute ótimo e não possuem uma forma efetiva, respaldada por modelos matemáticos, de serem determinadas.

Nos trabalhos de Christie *et al.* (1998) e Reynolds *et al.* (1999) é utilizado um método adaptativo reverso. O método considera, para cada iteração evolucionária, o seguinte processo: um contorno de tensão é obtido na estrutura atual. Esta curva de nível é então utilizada como um molde para a estrutura modificada. Uma nova malha é obtida no domínio definido pela curva de nível a qual é utilizada no novo processo iterativo. A dificuldade desta abordagem é na determinação de um modo automático para a identificação do contorno adequado, para gerar a nova malha no interior da região selecionada. Outra desvantagem do método é a sua não fundamentação matemática como sendo a solução de um problema de otimização.

Existem ainda alguns métodos que combinam as técnicas de refino de malha com processos de otimização de leiaute, ver Ramm *et al.* (1998), Alves & Alves (1999), Costa Jr. & Alves (2003). No trabalho de Ramm *et al.* (1998) é realizada uma seqüência de otimização de leiaute seguido por um processo de remalhamento. O remalhamento é realizado a cada vez que as regiões vazias são determinadas e seus contornos são aproximados por *splines*. Daí, na região do domínio que contém material, uma malha mais refinada é gerada.

### 1.3 Objetivos e Conteúdo do Trabalho

Este trabalho tem por objetivo, desenvolver formulações para o Método de Otimização Topológica (MOT), que sejam eficientes e competitivas na definição de estruturas tridimensionais. No capítulo 2 é proposta uma formulação com critério de minimização da flexibilidade atendendo a um pré-definido volume de material. No capítulo 3, propõe-se uma formulação para minimização da massa satisfazendo a um critério de tensão. A topologia é obtida determinando-se a distribuição ótima de material num espaço prescrito de projeto, satisfazendo os requisitos de projeto.

O espaço de projeto é aproximado por modelo de elementos finitos, o problema de otimização estrutural é resolvido utilizando um algoritmo de programação matemática aplicado às técnicas da otimização topológica em estruturas tridimensionais. Para tal, foram desenvolvidas rotinas que calculam as sensibilidades

das restrições tanto para o problema da flexibilidade quanto para o problema sob restrição de tensão, ver Apêndice A. Resultados são apresentados para comprovar a validade da formulação utilizada.

O presente trabalho é organizado de modo a apresentar capítulos independentes, isto é, cada capítulo apresenta uma introdução, desenvolvimento teórico, a formulação generalizada do problema e sua aproximação, a descrição dos algoritmos implementados, os resultados de algumas aplicações e as conclusões do processo proposto.

No capítulo 2 é proposto um método de otimização topológica sob formulação de flexibilidade mínima em estruturas tridimensionais. O método de otimização de leiaute empregado é baseado na abordagem material, que considera uma equação constitutiva homogeneizada dependente apenas da densidade relativa do material. Para a descrição das propriedades do material, utiliza-se uma formulação de microestruturas porosas, caracterizada pelo modelo material do tipo SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalty*). As equações de estado são aproximadas pelo Método dos Elementos Finitos de Galerkin, com a utilização de elementos tetraédricos de quatro nós que interpola o campo de densidades relativas além das componentes do campo de deslocamentos. Para contornar os problemas de instabilidade de solução (problemas de tabuleiro ou xadrez), adiciona-se um conjunto de restrições laterais do tipo “caixa”, às derivadas parciais do campo de densidade relativa. O procedimento proposto apresenta-se como uma ferramenta bastante promissora, quanto à intenção de se obter leiautes estruturais ótimos, bem definidos e com um número reduzido de membros estruturais.

O capítulo 3 também é aplicado a estruturas tridimensionais, mas sua formulação é voltada para a minimização da massa e sob restrição de tensão. O processo, do mesmo modo que o do capítulo antecedente, utiliza-se de elementos tetraédricos de quatro nós interpolando os campos de deslocamento e de densidade relativa. Para contornar os problemas de instabilidade de solução, considera-se a introdução das restrições laterais. Nesta formulação é proposta uma restrição de tensão efetiva, que utiliza um critério integral (critério médio global), relaxando a condição pontual (critério local) e assim possibilitando trabalhar com restrições paramétricas de modo eficiente. Esta formulação gera leiautes ótimos com qualidade na definição diretamente proporcional ao tamanho médio do elemento utilizado.

## Capítulo 2

# Minimização da Flexibilidade em Estruturas 3D Utilizando Elementos Tetra4

### 2.1 Introdução

Neste capítulo é proposto um processo de otimização que tem por objetivo proporcionar leiautes competitivos e com definição proporcional ao tamanho médio do elemento utilizado, de modo a minimizar a flexibilidade e atender a um pré-definido limite de volume material.

O processo consiste em uma seqüência de problemas de otimização. O método de otimização de leiaute faz uso de uma microestrutura intermediária artificial do tipo SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalty*), ver Bendsoe (1995) e Bendsoe & Sigmund (1999), onde a equação constitutiva homogeneizada é função somente da densidade relativa do material, definida por  $\rho$ . Para estabilizar a solução e assim evitar problemas de tabuleiro, impõem-se restrições de estabilidade, de modo a controlar as variações de densidade em cada direção. As equações de estado são aproximadas pelo Método dos Elementos Finitos de Galerkin, com a utilização de um clássico elemento finito tetraédrico de quatro nós, designado neste trabalho por Tetra4, o qual interpola linearmente o campo de densidades relativas além das componentes do campo de deslocamentos.

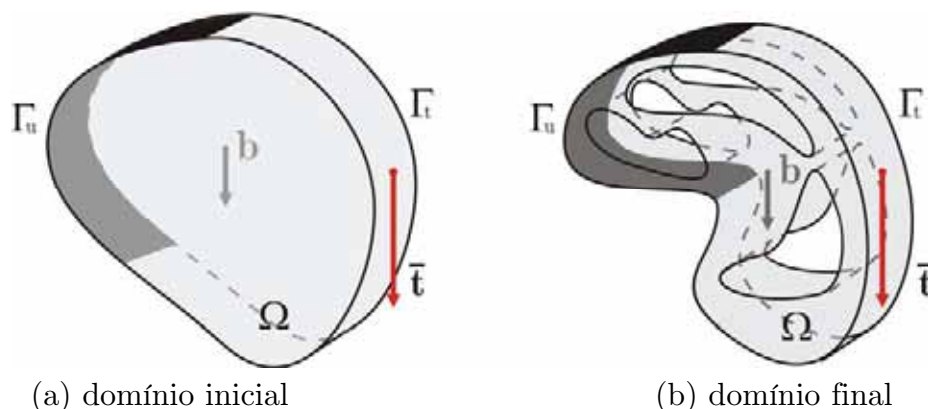


Figura 2.1: Caracterização do problema de otimização de leiaute

Um problema típico, que caracteriza um processo de otimização topológica, é ilustrado nas figuras Figs. 2.1(a,b). Aqui,  $\Omega$  é o domínio do corpo a ser considerado, o contorno é denotado por  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ , onde  $\Gamma_u$  é a parte do contorno com deslocamento prescrito, *i.e.*,  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  e  $\Gamma_t$  é a parte do contorno com tração prescrita, *i.e.*,  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$ . Denota-se  $\mathbf{b}$  como a força de corpo prescrita definida em  $\Omega$ .  $H_o(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\}$  e  $H = \{ \bar{\mathbf{u}} + H_o \}$  são os conjuntos das variações e deslocamentos admissíveis respectivamente.

Na solução do problema discreto de otimização, foi aplicado o Método do Lagrangiano Aumentado. Como consequência, o problema de otimização reduz-se à solução de uma seqüência de problemas de limites laterais do tipo caixa, o qual é resolvido por um método de projeção de segunda ordem que usa um método de *quasi*-Newton sem memória, ver Apêndice D.

## 2.2 Formulação do Problema

### 2.2.1 Definição do Problema

O problema de otimização de leiaute pode ser formulado da seguinte forma: Determinar a distribuição de densidade relativa  $\rho$  do material, tal que seja solução de:

$$\min_{\rho} l(\mathbf{u}), \quad (2.1)$$

sujeito as seguintes restrições:

(i) Restrição de Volume:

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega = \alpha \Omega, \quad (2.2)$$

sendo  $\Omega$  o volume do espaço de projeto,  $\rho$  a densidade relativa e  $\alpha$  fração de volume prescrita,  $\alpha \in (0,1)$ ;

(ii) Restrições Laterais

$$\rho_{\inf} - \rho(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{e} \quad \rho(\mathbf{x}) - \rho_{\sup} \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.3)$$

## (iii) Restrições de Estabilidade

Estas restrições são aplicadas visando assegurar a existência de solução para o problema de otimização de leiaute, evitar a instabilidade de tabuleiro e reduzir a dependência da malha inicial utilizada, ver Bendsoe (1995) e Sigmund & Petersson (1998). Para se obter um alto desempenho computacional, utiliza-se um elemento finito com baixa ordem de interpolação. Contudo, a utilização destes elementos pode ocasionar o aparecimento de instabilidade numérica, no caso da omissão da restrição de estabilidade.

$$\left( \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial d} \right)^2 - (c_d)^2 \leq 0, \quad \text{para } d = x, y \text{ e } z; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.4)$$

As constantes  $c_x$ ,  $c_y$  e  $c_z$  impõem um limite superior ao módulo das componentes do gradiente da densidade relativa, Petersson & Sigmund (1998) e Sigmund & Petersson (1998). A determinação destas constantes são explicadas na subseção 2.3.1.

O campo de deslocamento  $\mathbf{u}(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{x})$  é obtido da solução do problema de valor de contorno: Determinar  $\mathbf{u}(\rho)$  em  $\mathbf{x} \in \Gamma_u$ , qual que:

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\rho)) + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (2.5)$$

sendo

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\rho)) = \mathbf{D}^H(\rho) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\rho)) \quad (2.6)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\rho)) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t. \quad (2.7)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor deformação infinitesimal e  $\mathbf{D}^H(\rho)$  é a equação constitutiva homogeneizada do material com uma microestrutura porosa.

A formulação fraca, definida na equação (2.5), pode ser expressa como:

Encontrar  $\mathbf{u} \in H(\Omega)$ , tal que:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_0 \quad (2.8)$$

com:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{D}^H(\rho) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (2.9)$$

Sendo a integral definida na equação (2.9) aproximada por uma integração seletiva, explanada na subseção 2.3.3, de modo que:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (2.10)$$

no qual,  $a_{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  são os termos volumétricos e  $a_{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  são os termos de distorção. E,

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \quad (2.11)$$

## 2.2.2 Condição Necessária de Otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker

Na maior parte dos casos, os problemas de engenharia apresentam algum tipo de restrição. Sendo assim, a idéia chave para aplicar as condições necessárias e suficientes, ver Apêndice B, para um problema de otimização com restrições é transformá-lo em um problema de otimização sem restrições e aplicar as condições para este caso. Uma forma de fazer esta transformação é através do funcional Lagrangiano, o qual pode ser definido como:

$$\begin{aligned} L(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \kappa, \lambda_i, \lambda_s, \mu_d) &= l(\mathbf{u}) + \kappa \int_{\Omega} (\rho - \alpha) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \lambda_i (\rho_{\inf} - \rho) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_s (\rho - \rho_{\sup}) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \mu_d \left( \left( \frac{\partial \rho}{\partial d} \right)^2 - c_d^2 \right) d\Omega - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + l(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

para  $d = x, y$  e  $z$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ ;  $\mathbf{u} \in H$ ;  $\mathbf{v} \in H_0$ ;  $\rho \in W^{1,\infty}$ ;  $(\lambda_i, \lambda_s, \mu_d) \in (L_2)^5$  e  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

O problema associado de ponto de sela pode ser formulado como: Determinar  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \kappa, \lambda_i, \lambda_s, \mu_d)$ , com  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\lambda_s \geq 0$  e  $\mu_d \geq 0$ , tal que

$$L(\rho, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\kappa}, \hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_s, \hat{\mu}_d) \leq L(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \kappa, \lambda_i, \lambda_s, \mu_d) \leq L(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}, \kappa, \lambda_i, \lambda_s, \mu_d) \quad (2.13)$$

para todo  $(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}, \hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_s, \hat{\mu}_d)$  com  $\hat{\lambda}_i \geq 0$ ,  $\hat{\lambda}_s \geq 0$  e  $\hat{\mu}_d \geq 0$ . Daí, as condições necessárias de ótimo podem ser determinadas como:

Da restrição de desigualdade à esquerda na eq.(2.13), é derivado que:

$$\int_{\Omega} \rho \, d\Omega = \alpha \Omega ; \quad (2.14)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i (\rho_{\text{inf}} - \rho) = 0 \quad \text{e} \quad \rho_{\text{inf}} - \rho \leq 0; \quad (2.15)$$

$$\lambda_s \geq 0, \quad \lambda_s (\rho - \rho_{\text{sup}}) = 0 \quad \text{e} \quad \rho - \rho_{\text{sup}} \leq 0; \quad (2.16)$$

$$\mu_d \geq 0, \quad \mu_d \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial d} \right)^2 - c_d^2 \right] = 0 \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial d} \right)^2 - c_d^2 \leq 0, \quad (2.17)$$

para  $d = x, y$  e  $z$ ;

$$a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}) = l(\hat{\mathbf{v}}), \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in H_o(\Omega). \quad (2.18)$$

Além disso, da restrição de desigualdade à direita na eq.(2.13), é derivado que:

$$a(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}) = l(\hat{\mathbf{u}}), \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in H_o(\Omega), \quad (2.19)$$

$$\kappa - \lambda_i + \lambda_s - \left[ \frac{\partial \mathbf{D}^H(\rho)}{\partial \rho} \right] \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \text{div}([H] \nabla \rho) = 0, \quad \text{em } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.20)$$

e

$$[H] \nabla \rho \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{em } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2.21)$$

onde,  $[H]$  é definido como:

$$[H] = \begin{bmatrix} 2\mu_x & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_y & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_z \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

### 2.2.3 Definição do Modelo Material

Um modelo de material que defina a microestrutura do domínio fixo de projeto é caracterizado pela presença, ausência de material (sólido/vazio) ou ainda por estágios intermediários entre as condições sólido e porosidade, propiciando consistência física ao problema.

Para formular o problema de otimização de leiaute, aplica-se uma técnica de relaxação do problema que consiste na utilização de um material composto caracterizado pela presença de microestruturas porosas, parametrizadas por sua densidade relativa. O modelo microestrutural utilizado é denominado SIMP, *Solid Isotropic Material with Penalty*, ver Bendsoe (1995) e Bendsoe & Sigmund (1999), que caracteriza o comportamento constitutivo de um material artificial, e é definido por uma função paramétrica associada com a densidade do material. Neste modelo, o módulo de Young efetivo é definido em termos da densidade relativa  $\rho$ , de modo que

$$E(\rho) = \rho^\eta E_0 \quad (2.23)$$

onde,  $E_0$  representa o módulo de Young do material sólido e  $\eta$  denota o parâmetro de penalização.

Esta aproximação significa que se um projeto final tem densidade zero ou um em todos os pontos, este projeto é um projeto sólido/vazio, coerente com o modelo físico correto. Neste modelo, sugere-se  $\eta > 1$ , de forma a penalizar o aparecimento de densidades intermediárias no domínio de projeto. Sob o ponto de vista matemático, o aparecimento de densidades intermediárias é importante para a relaxação do problema, mas não é conveniente para o projetista, que deverá interpretar os resultados para definir o leiaute da estrutura.

## 2.3 Processo de Aproximação do Problema

O problema é generalizado para estruturas tridimensionais e solucionado com a aplicação do Método dos Elementos Finitos de Galerkin. O elemento finito utilizado na aproximação do problema é o tetraédrico de quatro nós (Tetra4), que interpola tanto as variáveis do campo de deslocamentos  $(u_x, u_y, u_z)$ , como o campo de densidade relativa  $\rho$ , segundo mostra a ilustração da Fig. 2.2.

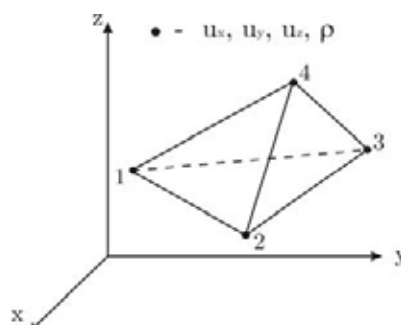


Figura 2.2: Elemento finito tetraédrico de quatro nós

Como resultado da discretização de  $\rho(\mathbf{x})$ , as variáveis de projeto são definidas como sendo os valores da densidade relativa nos nós da malha. Devido a particularidade da interpolação adotada, a derivada parcial  $\left\| \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial d} \right\|$  sendo  $d = x, y$  e  $z$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  e o tensor de deformação infinitesimal  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  é constante para cada direção no interior de cada elemento finito.

Neste ponto é importante enfatizar que, para obter um alto desempenho computacional, é imprescindível a utilização de um elemento finito com baixa ordem de interpolação. Porém, a utilização de elementos de ordem inferior pode ocasionar, no caso da omissão da restrição de estabilidade, o aparecimento de instabilidade numérica. Sendo assim, com o objetivo de contornar estas instabilidades, são impostas restrições laterais às componentes do gradiente da densidade relativa, como proposto por Petersson & Sigmund (1998). Agora, já que  $\nabla \rho$  é constante no interior de cada elemento, impõe-se apenas que:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial d} \right)_e^2 \leq (c_d^e)^2 \quad (2.24)$$

no qual  $e$  é o número do elemento e  $d$  as direções em  $x, y$  e  $z$ . A constante  $c_d$  define os limites laterais para as componentes do gradiente da densidade relativa.

### 2.3.1 Definição dos Limites $c_x$ , $c_y$ e $c_z$

Considere um elemento genérico como mostrado na Fig. 2.3, sendo  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $p/ i = 1, \dots, 4$  as coordenadas dos vértices e  $\mathbf{x}_m = (x_m, y_m, z_m)$  as coordenadas do baricentro do elemento finito tetraédrico de quatro nós.

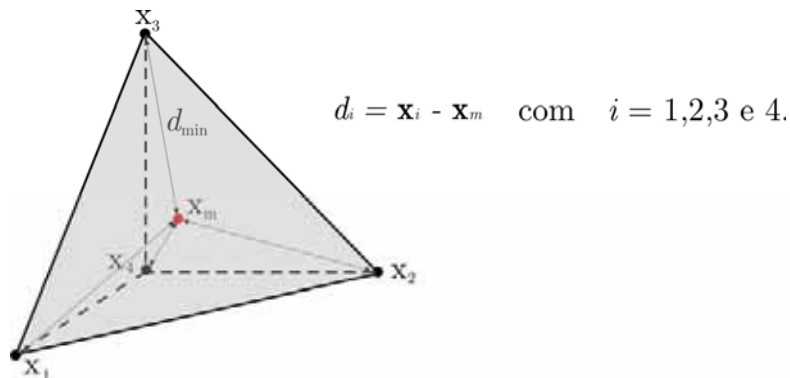


Figura 2.3: Coordenadas do baricentro do elemento finito Tetra4

Agora, denotando:

$$d_{\min} = \min_i \|d_i\| \quad p/ \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.25)$$

é definido que

$$c^e = c_x^e = c_y^e = c_z^e = \frac{1}{d_{\min}}. \quad (2.26)$$

Uma modificação dos limites  $c_x^e$ ,  $c_y^e$  e  $c_z^e$ , deve ser realizada se no mínimo uma das faces do elemento coincide com algum plano de simetria. Aqui, são considerados três casos possíveis:

**(i) Plano de simetria -  $xy$**

Aqui, considera-se que a face  $abc$  do elemento coincide com o plano  $-xy$  de simetria. Neste caso, como ilustrado na Fig. 2.4, deve-se ter:  $w = 0$  e  $(\partial \rho / \partial z) = 0$ . Sendo assim, a imposição da última condição é alcançada denotando  $c_z^e = 0$ .

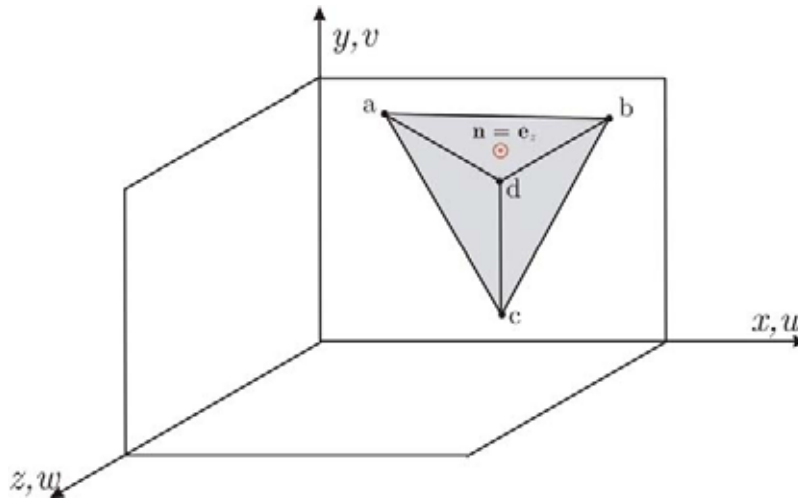


Figura 2.4: Condição de simetria no plano  $-xy$

**(ii) Plano de simetria -  $xz$**

Agora, considera-se que a face  $cbd$  do elemento coincidente com o plano  $-xz$  de simetria. Assim, de acordo com a ilustração na Fig. 2.5, deve-se ter:  $v = 0$  e  $(\partial \rho / \partial y) = 0$ . A imposição da última condição é alcançada denotando  $c_y^e = 0$ .

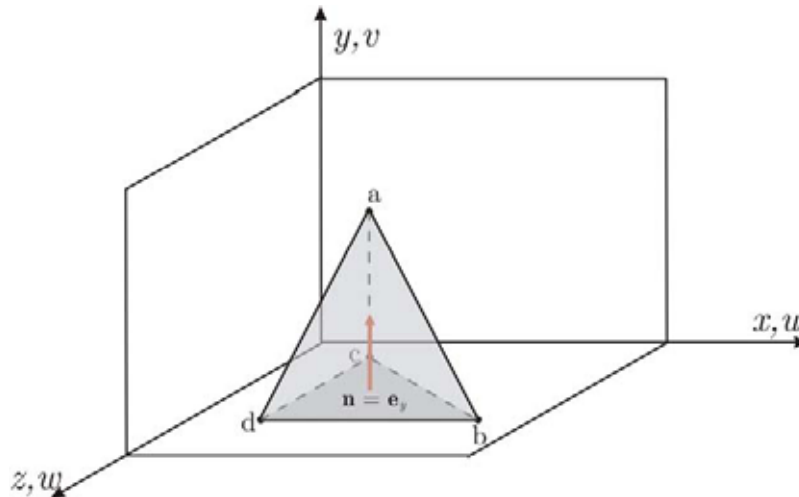


Figura 2.5: Condição de simetria no plano  $-xz$

**(iii) Plano de simetria -  $yz$**

Considerando que a face  $acd$  do elemento coincidente com o plano  $-yz$  de simetria, de acordo com a ilustração na Fig. 2.6, deve-se ter:  $u = 0$  e  $(\partial\rho / \partial x) = 0$ . A imposição da última condição é alcançada denotando  $c_x^e = 0$ .

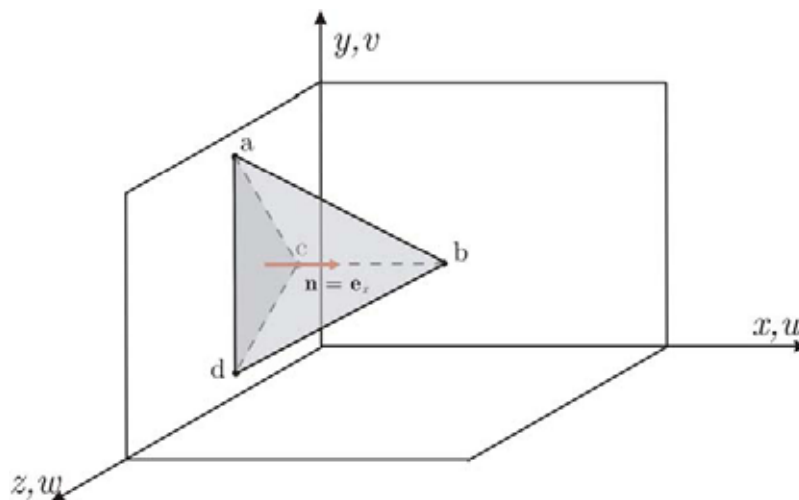


Figura 2.6: Condição de simetria no plano  $-yz$

**2.3.2 Formulação Discreta do Problema de Otimização**

O problema discretizado pode ser formulado como: Determinar  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n$  tal que seja solução de:

$$\min f(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})) \tag{2.27}$$

sujeito à restrição de volume

$$h(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\Omega} \sum_{e=1}^{n_e} \bar{\rho}_e \Omega_e - \alpha, \quad (2.28)$$

de modo que a densidade média do elemento seja:

$$\bar{\rho}_e = \frac{\sum_{i=1}^4 \rho_i}{4}, \quad \text{para } \rho_i \in e. \quad (2.29)$$

E as restrições de estabilidade:

$$g_{ed}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\beta} \left[ \left( \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial d} \right)_e^2 - (c_d^e)^2 \right] \leq 0, \quad (2.30)$$

para  $e = 1, \dots, n_e$ ;  $d = x, y$  e  $z$  e  $\boldsymbol{\rho} \in X$ , com  $X = \{ \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n \mid \rho_i^{\text{inf}} \leq \rho_i \leq \rho_i^{\text{sup}}, i = 1, \dots, n \}$ .

Aqui,  $n$  representa o número total de nós na malha de elementos finitos e é denotado que  $\beta = 1/d_{\text{max}}$ , sendo que  $d_{\text{max}}$  é definido como  $d_{\text{max}} = \max_{i=1,4} \|d_i\|$ . A função objetivo adimensional é dada por:  $f(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})) = \frac{1}{\beta_o} f_p(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}))$ , com  $\beta_o = f_p(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}_o))$ , para algum vetor de densidade relativa nodal  $\boldsymbol{\rho}_o$  adequado.

Para resolver o problema de otimização é aplicado o Método do Lagrangiano Aumentado de maneira a obter um problema de ótimo apenas com restrições laterais, ver Apêndice D. O processo de otimização agora consiste na solução de uma seqüência de problemas de mínimo com restrições do tipo caixa, o qual pode ser resumido como:

1. Definir valores iniciais:  $k = 0$ ,  $\lambda^k = 0$ ,  $\boldsymbol{\mu}^k = \mathbf{0}$ ,  $erro = 1,0$ ,  $\zeta^k$ ,  $\boldsymbol{\omega}^k$  e  $tol$ .
2. Enquanto  $erro > tol$ , efetuar *laço*:
  - (i) Solução do problema de minimização com restrições laterais

$$\min \Pi(\boldsymbol{\rho}, \lambda^k, \boldsymbol{\mu}^k; \zeta^k, \boldsymbol{\omega}^k), \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in X \quad (2.31)$$

no qual,

$$\Pi(\boldsymbol{\rho}, \lambda^k, \boldsymbol{\mu}^k; \zeta^k, \boldsymbol{\omega}^k) = f(\boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{\zeta^k} h(\boldsymbol{\rho}) [h(\boldsymbol{\rho}) + \zeta^k \lambda^k] + \sum_{j=1}^3 \left[ \frac{1}{\omega_j^k} \sum_{e=1}^{n_e} \Psi_{e_j}(g_{e_j}(\boldsymbol{\rho}), \omega_j^k, \boldsymbol{\mu}_{e_j}^k) \right] \quad (2.32)$$

Sendo definido que:  $f(\boldsymbol{\rho})$  é a função objetivo,  $h(\boldsymbol{\rho})$  é a restrição de volume e  $\Psi_{ej}(g_{ej}(\boldsymbol{\rho}), \omega_j^k, \mu_{ej}^k)$  são as restrições de estabilidade.

com

$$\Psi_{ej}(g_{ej}(\boldsymbol{\rho}), \omega_j^k, \mu_{ej}^k) = \begin{cases} g_{ej}(\boldsymbol{\rho}) [g_{ej}(\boldsymbol{\rho}) + \omega_j^k \mu_{ej}^k], & \text{se } g_{ej}(\boldsymbol{\rho}) \geq -\frac{\omega_j^k \mu_{ej}^k}{2} \\ -\left(\frac{\omega_j^k \mu_{ej}^k}{2}\right)^2, & \text{se } g_{ej}(\boldsymbol{\rho}) < -\frac{\omega_j^k \mu_{ej}^k}{2} \end{cases} \quad (2.33)$$

para  $e = 1, \dots, n_e$  e  $j = 1, \dots, 3$ .

Por conveniência, o índice  $d = x, y$  e  $z$  é também denotado por  $j = 1, 2$  e  $3$ .

Desta forma,

$$\frac{d\Pi}{d\rho_{n_n}} = \frac{df}{d\rho_{n_n}} + \left[ \left[ \frac{2h}{\zeta^k} + \lambda^k \right] + \sum_{j=1}^3 \left[ \frac{1}{\omega_j^k} \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial \Psi_{ej}}{\partial \rho_{n_n}} \right] \right] \quad (2.34)$$

com

$$\frac{df}{d\rho_{n_n}} = \frac{\partial f}{\partial \rho_{n_n}} + \sum_{r=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_r} \frac{\partial u_r}{\partial \rho_{n_n}} \quad (2.35)$$

sendo  $m$  o grau de liberdade e  $n$  o número de nós.

Reescrevendo a equação (2.35)

$$\frac{df}{d\rho_{n_n}} = \frac{\partial f}{\partial \rho_{n_n}} + \left\langle \nabla \mathbf{u} f, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_{n_n}} \right\rangle. \quad (2.36)$$

Tem-se que:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{P}, \quad (2.37)$$

derivando a equação (2.37) em relação a  $\rho_{n_n}$ :

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_{n_n}} \right] \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_{n_n}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_{n_n}}. \quad (2.38)$$

Como a carga  $\mathbf{P}$  não depende da densidade, denota-se que:

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_{n_n}} = - \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_{n_n}} \right] \mathbf{u} = \mathbf{R}_{n_n} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_{n_n}} = \mathbf{K}^{-1} \left\{ - \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_{n_n}} \right] \mathbf{u} \right\}. \quad (2.40)$$

Substituindo a equação (2.40) na equação (2.36), tem-se:

$$\frac{df}{d\rho_{n_n}} = \frac{\partial f}{\partial \rho_{n_n}} + \langle \nabla \mathbf{u} f, \mathbf{K}^{-1} \{ \mathbf{R}_{n_n} \} \rangle \quad (2.41)$$

$$\frac{df}{d\rho_{n_n}} = \frac{\partial f}{\partial \rho_{n_n}} + \langle \mathbf{K}^T \nabla \mathbf{u} f, \{ \mathbf{R}_{n_n} \} \rangle \quad (2.42)$$

desde que  $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}^T$ :

$$\frac{df}{d\rho_{n_n}} = \frac{\partial f}{\partial \rho_{n_n}} + \langle \mathbf{K}^{-1} \nabla \mathbf{u} f, \{ \mathbf{R}_{n_n} \} \rangle. \quad (2.43)$$

(ii) Atualização dos multiplicadores de Lagrange

$$\lambda^{k+1} = \max \left\{ 0, \lambda^k + \frac{2}{\zeta} h(\mathbf{x}^k) \right\} \quad (2.44)$$

e

$$\mu_{ej}^{k+1} = \max \left\{ 0, \mu_{ej}^k + \frac{2}{\omega_j} g_{ej}(\mathbf{x}^k) \right\} \quad \text{p/ } e = 1, \dots, n_e; \quad j = 1, \dots, 3. \quad (2.45)$$

(iii) Atualização dos parâmetros de penalidade

$$\zeta^{k+1} = \begin{cases} \gamma \zeta^k, & \text{se } \gamma \zeta^k > \zeta^{crit} \text{ sendo } \gamma_1 \in (0,1) \\ \zeta^{crit} & \end{cases} \quad (2.46)$$

e

$$\omega_j^{k+1} = \begin{cases} \beta_j \omega_j^k, & \text{se } \beta_j \omega_j^k > \omega_j^{crit} \text{ sendo } \beta_j \in (0,1) \\ \omega_j^{crit} & \end{cases} \quad \text{p/ } j = 1, \dots, 3 \quad (2.47)$$

(iv) Determinação do erro

$$\begin{aligned} a &= |\lambda^{k+1} - \lambda^k|, \quad b = \max_e |\mu_{e1}^{k+1} - \mu_{e1}^k|, \quad c = \max_e |\mu_{e2}^{k+1} - \mu_{e2}^k| \\ \text{e } d &= \max_e |\mu_{e3}^{k+1} - \mu_{e3}^k| \end{aligned} \quad (2.48)$$

então,  $k = k + 1$  e  $erro = \max\{a, b, c, d\}$ .

3. Fim do laço.

Desta forma, o problema pode ser formulado como: Dado  $\lambda, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3 \in \mathbb{R}^{n_e}$  e  $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3 \in \mathbb{R}$ . O problema consiste em encontrar um  $\boldsymbol{\rho}^* \in \mathbb{R}^n$ , tal que:

$$\boldsymbol{\rho}^* = \arg \min \Pi(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\omega}), \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in X. \quad (2.49)$$

Para a aproximação do problema é aplicado o Método dos Elementos Finitos de Galerkin, que utiliza elementos tetraédricos de quatro nós.

A interpolação do campo de densidade relativa é:

$$\rho(x, y, z) = \sum_{n=1}^4 N_n(x, y, z) \rho_{in} \quad (2.50)$$

no qual  $N_n$  são as funções de interpolação do elemento:

$$N_n = \frac{1}{6V} (\mathbf{C} \text{ Adj} \bar{\mathbf{A}}) \quad (2.51)$$

com  $n = 1, \dots, 4$  (número de nós do elemento),  $V$  o volume,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

e

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

O campo de deslocamento dentro de cada elemento é dado por:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}_e \quad (2.54)$$

com o vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$  e a matriz de interpolação  $\mathbf{N}$  igual a:

$$\mathbf{u}_e^T = \{u_x^1, u_y^1, u_z^1, u_x^2, u_y^2, u_z^2, u_x^3, u_y^3, u_z^3, u_x^4, u_y^4, u_z^4\} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

A construção das matrizes de rigidez dos elementos envolve a definição das funções de interpolação, cuja expressão depende das características polinomiais das mesmas e das coordenadas que definem o elemento. A identificação da equação, que define a função de interpolação de um elemento qualquer da malha, é uma tarefa custosa. Para superar esta dificuldade costuma-se utilizar uma operação de mapeamento das funções de interpolação definidas num domínio elementar padrão, ver Fig. 2.7.

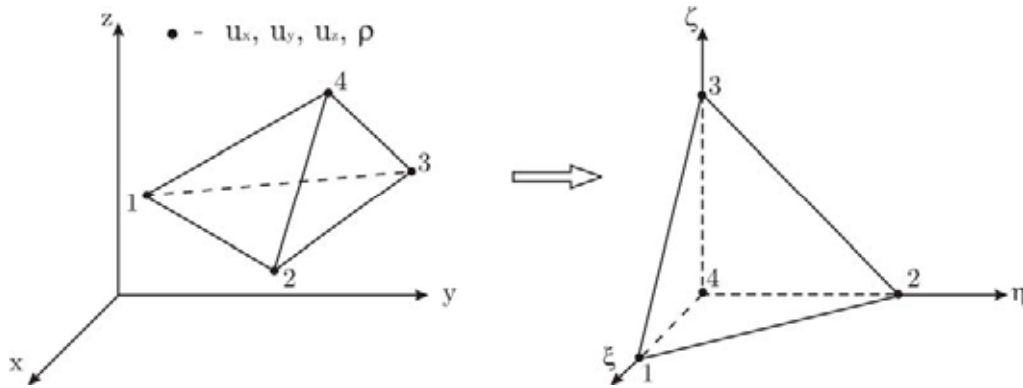


Figura 2.7: Coordenadas do elemento finito tetraédrico de quatro nós

Funções de interpolação para um tetraedro de quatro nós:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \xi \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \eta \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \zeta \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) &= 1 - \xi - \eta - \zeta \end{aligned} \quad (2.57)$$

No sistema de coordenadas locais, a densidade relativa será:

$$\rho(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_{n=1}^4 N_n(\xi, \eta, \zeta) \rho_{in} \quad (2.58)$$

Neste caso, as mesmas funções de interpolação para mapear o elemento foram utilizadas para interpolar as variáveis de interesse. Os elementos que possuem esta propriedade são chamados elementos isoparamétricos.

O objetivo deste tipo de mapeamento é estabelecer um único conjunto de funções de interpolação para cada tipo de elemento, efetuar a integração das matrizes de rigidez e termo de carga na configuração padrão do elemento através de uma simples mudança de variáveis de integração.

A interpolação da geometria é a derivada das funções de forma:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^4 N_n(\xi, \eta, \zeta) x_n \\ y &= \sum_{n=1}^4 N_n(\xi, \eta, \zeta) y_n \\ z &= \sum_{n=1}^4 N_n(\xi, \eta, \zeta) z_n \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial N_n}{\partial y_n} \\ \frac{\partial N_n}{\partial z_n} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

onde a Jacobiana do elemento é:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} x_{i1} - x_{i4} & y_{i1} - y_{i4} & z_{i1} - z_{i4} \\ x_{i2} - x_{i4} & y_{i2} - y_{i4} & z_{i2} - z_{i4} \\ x_{i3} - x_{i4} & y_{i3} - y_{i4} & z_{i3} - z_{i4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

E as expressões integrais são:

$$\int_V f(x, y, z) dV = 6V \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_1^{1-\xi-\eta} d\zeta d\eta d\xi \quad (2.62)$$

No caso de um tetraedro de quatro nós,  $\det \mathbf{J} = \text{constante}$ .

$$V = \det \mathbf{J} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_1^{1-\xi-\eta} d\zeta d\eta d\xi \quad (2.63)$$

Resolvendo a parte integral, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_1^{1-\xi-\eta} d\zeta d\eta d\xi &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (1 - \xi - \eta) d\eta d\xi \quad (2.64) \\ &= \int_0^1 \left[ \eta \Big|_0^{1-\xi} - \xi \eta \Big|_0^{1-\xi} - \frac{\eta^2}{2} \Big|_0^{1-\xi} \right] d\xi = \int_0^1 \left[ (1 - \xi) - \xi(1 - \xi) - \frac{(1 - \xi)^2}{2} \right] d\xi \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - \xi + \frac{\xi^2}{2} \right) d\xi = \frac{1}{6} \quad (2.65) \end{aligned}$$

então:

$$\det[\mathbf{J}] = 6V \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{J}] &= (x_{i1} - x_{i4})(y_{i2} - y_{i4})(z_{i3} - z_{i4}) + (x_{i2} - x_{i4})(y_{i3} - y_{i4})(z_{i1} - z_{i4}) \\ &\quad + (x_{i3} - x_{i4})(y_{i1} - y_{i4})(z_{i2} - z_{i4}) - (z_{i1} - z_{i4})(y_{i2} - y_{i4})(x_{i3} - x_{i4}) \quad (2.67) \\ &\quad - (z_{i2} - z_{i4})(y_{i3} - y_{i4})(x_{i1} - x_{i4}) - (z_{i3} - z_{i4})(y_{i1} - y_{i4})(x_{i2} - x_{i4}) \end{aligned}$$

V é o volume do elemento.

Para o processo de cálculo da matriz de rigidez, aplica-se um esquema de integração seletiva, ver subseção 2.3.3, visando contornar o efeito do travamento volumétrico. Denomina-se travamento volumétrico à ocorrência de uma rigidez excessiva em elementos finitos tridimensionais de baixo grau de aproximação em situações de quase incompressibilidade. Este travamento ocorre devido à combinação de uma restrição cinemática imposta pelo modelo constitutivo com a pouca capacidade de deformação dos elementos de baixa ordem. A situação mais freqüente de travamento volumétrico é, como por exemplo, em análises elásticas, quando o coeficiente de Poisson se aproxima de 0,5.

Considere a matriz de rigidez do elemento linear:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega, \quad (2.68)$$

a qual pode ser reescrita na forma:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{vol}] \\ [\mathbf{B}_{dist}] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [\mathbf{D}_{vol}] & 0 \\ 0 & [\mathbf{D}_{dist}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{vol}] \\ [\mathbf{B}_{dist}] \end{bmatrix} d\Omega \quad (2.69)$$

No qual  $[\mathbf{B}]$  é a matriz de derivação levando em consideração a parte volumétrica  $[\mathbf{B}_{vol}]$  e a parte referente a distorção  $[\mathbf{B}_{dist}]$ , que opera sobre o vetor de deslocamento nodal fornecendo as componentes de deformação.

### 2.3.3 Equação Constitutiva e Integração Seletiva

A descrição das propriedades materiais em elementos com densidades intermediárias é baseada no modelo SIMP, ver Bendsoe (1995) e Bendsoe & Sigmund (1999). Nesta abordagem, o módulo de Young efetivo para um dado elemento com densidade  $\rho$  é fornecido por:

$$E(\rho) = \rho^{\eta} E_0 \quad (2.70)$$

onde,  $E_0$  representa o módulo de Young do material sob densidade plena e  $\eta$  denota o parâmetro de penalidade.

Esta relação da equação (2.70) permite-nos escrever a equação constitutiva homogeneizada associada ao modelo microestrutural, como:

$$[\mathbf{D}^H(\rho)] = \rho^{\eta} [\mathbf{D}_0]. \quad (2.71)$$

sendo  $[\mathbf{D}_0]$  a matriz que contém os parâmetros de elasticidade do elemento denso.

Para contornar o efeito do travamento volumétrico, aplica-se um esquema de integração seletiva no qual calcula-se, separadamente, os termos volumétricos e os termos referentes a parte de distorção. Desta forma, obtém-se:

$$[\mathbf{D}^H(\rho)] = [\mathbf{D}_{vol}^H] + [\mathbf{D}_{dist}^H]. \quad (2.72)$$

Sendo definido que

$$[\mathbf{D}_{vol}^H] = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^H(\rho) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbf{D}_{dist}^H] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22}^H(\rho) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

e ainda

$$[\mathbf{D}_{11}^H(\rho)] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

e

$$[\mathbf{D}_{22}^H(\rho)] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Separando os termos de rigidez volumétrica e de distorção da eq.(2.69), obtém-se:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{vol} + \mathbf{K}_{dist} . \quad (2.76)$$

Fazendo uso da equação constitutiva homogeneizada, define-se:

$$\mathbf{K}_{vol} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{vol}^H \mathbf{B} \, d\Omega \quad (2.77)$$

e

$$\mathbf{K}_{dist} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{dist}^H \mathbf{B} \, d\Omega \quad (2.78)$$

Para o esquema de integração seletiva, subintegra-se os termos volumétricos da eq.(2.77), e integra-se de maneira completa os termos de distorção definidos na eq.(2.78). Existem variadas técnicas mais aprimoradas e desenvolvidas do que o clássico método de subintegração, ver Bonet, Marriott & Hassan (2001) e Taylor (2000), que poderiam ser futuramente implementados.

## 2.4 Resultados

Com o objetivo de avaliar o procedimento proposto, serão apresentadas nesta seção algumas aplicações do MOT para minimização da flexibilidade em problemas 3D. Por simplicidade, é utilizado o mesmo módulo de Young para todos os casos,  $E_o = 215 \times 10^9 ut$ , exceto quando citado no texto.

Para melhor visualização tridimensional da topologia resultante foram descartados os elementos com densidade abaixo de 0,8. Na região em detalhe, Fig. 2.8, pode ser verificado que o contorno da topologia é formado por um gradiente de distribuição de densidade, devido ao campo de interpolação utilizado. Considerando a espessura do gradiente de densidade (camada de definição do contorno), definida apenas por um elemento, tem-se a condição ótima de nitidez do contorno da topologia. Conclui-se então que o tamanho médio dos elementos que formam a camada define a qualidade da topologia. Agora, analisando o elemento com maior densidade possível na camada de definição do contorno, tem-se  $\rho_e = 0,7505$  considerando  $\rho_{inf} = 0,002$ . Sendo assim, basta que o valor limite da densidade a ser desconsiderado seja  $\rho_{lim} = \rho_e + \Delta\rho_e$ .

$$\rho_e = \frac{1 + 1 + 1 + 0,002}{4} = 0,7505 \quad (2.79)$$

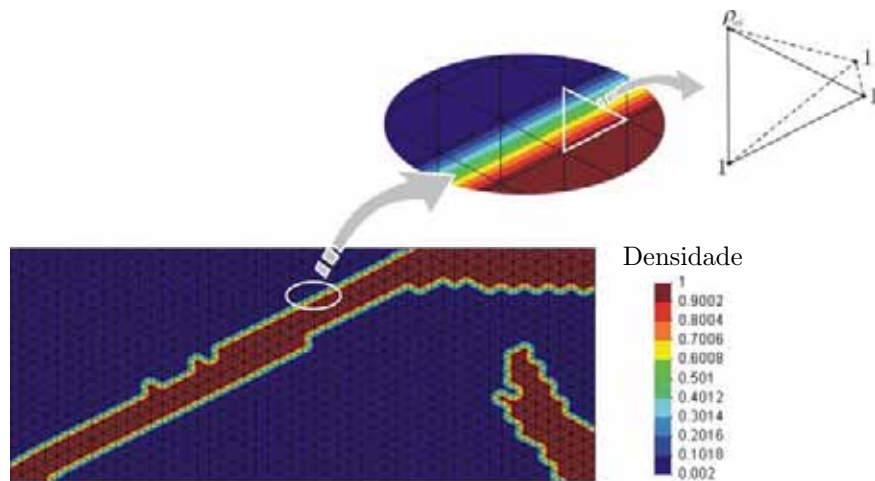


Figura 2.8: Gradiente de distribuição de densidade (resultado do problema 2.4)

### Problema 2.1:

Aqui é considerado o problema ilustrado na Fig. 2.9(a), cujas dimensões são  $a = 1 uc$ ,  $b = 1 uc$  e  $c = 1 uc$ . Para diminuir o tempo de processamento do problema,

é analisado  $\frac{1}{4}$  de simetria da estrutura com 16.205 elementos e 3.218 nós, Fig. 2.9(b). A estrutura analisada está sujeita a uma carga prescrita de  $\mathbf{P} = 5 \times 10^6 uf$  e a uma fração de volume de 0,20. O bloco está fixo em  $\bar{\Omega}$  nas três direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , ou seja,  $\bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}_3 = \bar{\Omega}_4$  com deslocamento prescrito  $[0,0,0]$ .

A Fig. 2.9(c) representa o resultado da topologia após o descarte de elementos com densidade inferior a 0,8 e a Fig. 2.9(d), com o descarte de elementos com densidade inferior a 0,5.

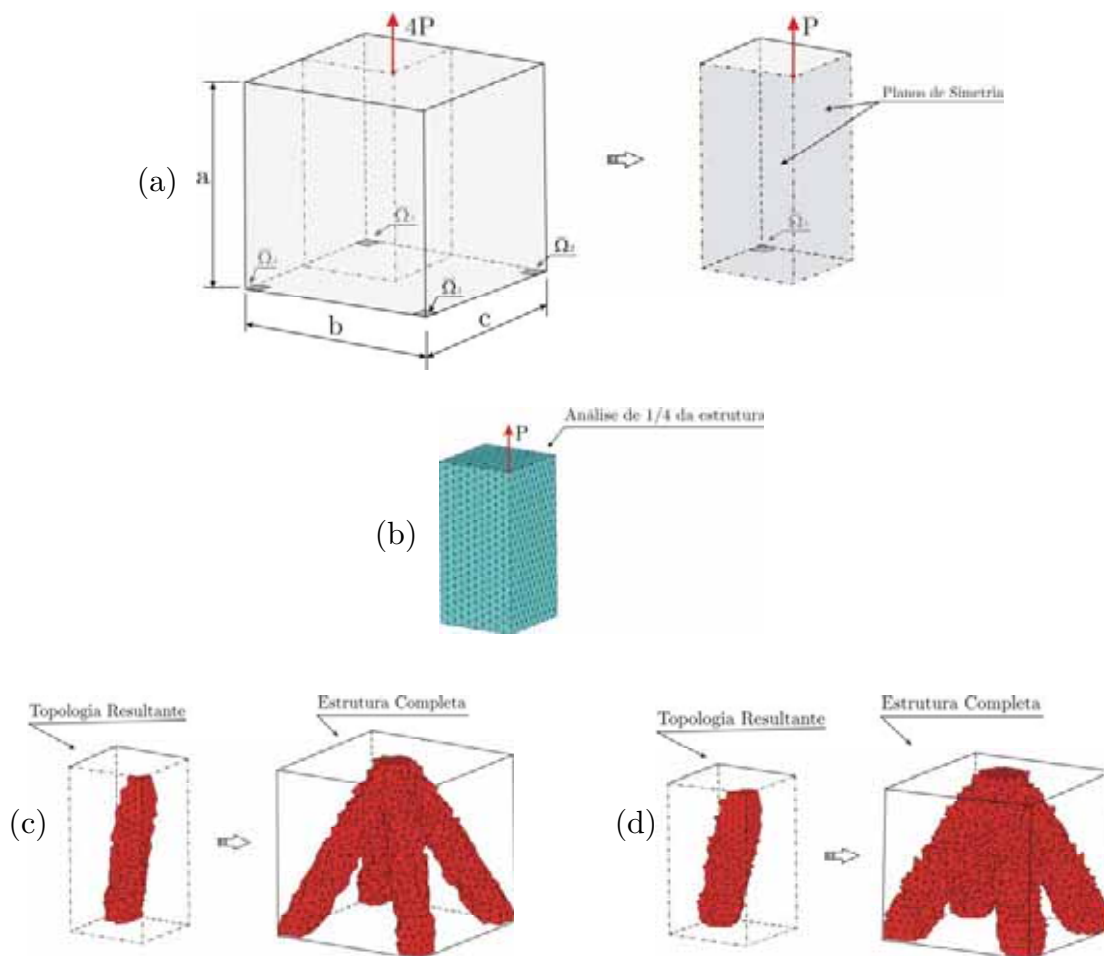


Figura 2.9: Resultado do problema 2.1

**Problema 2.2:**

Considere o problema ilustrado na Fig. 2.10(a), o qual consiste em um bloco fixado na face esquerda, cujas dimensões são  $a = 4 uc$ ,  $b = 7 uc$  e  $c = 5 uc$ . Para diminuir o tamanho do problema, é analisada metade simétrica da estrutura, onde aplica-se uma carga vertical prescrita na mesma de  $\mathbf{P} = 5 \times 10^6 uf$ , Fig. 2.10(b). Coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

O problema de leiaute ótimo é submetido a uma restrição de volume, sendo avaliada para dois casos:  $\alpha = 0,20$ , Fig. 2.10(c) e  $\alpha = 0,55$  Fig. 2.10(d).

A estrutura analisada apresenta 13.389 elementos e 3.130 nós.

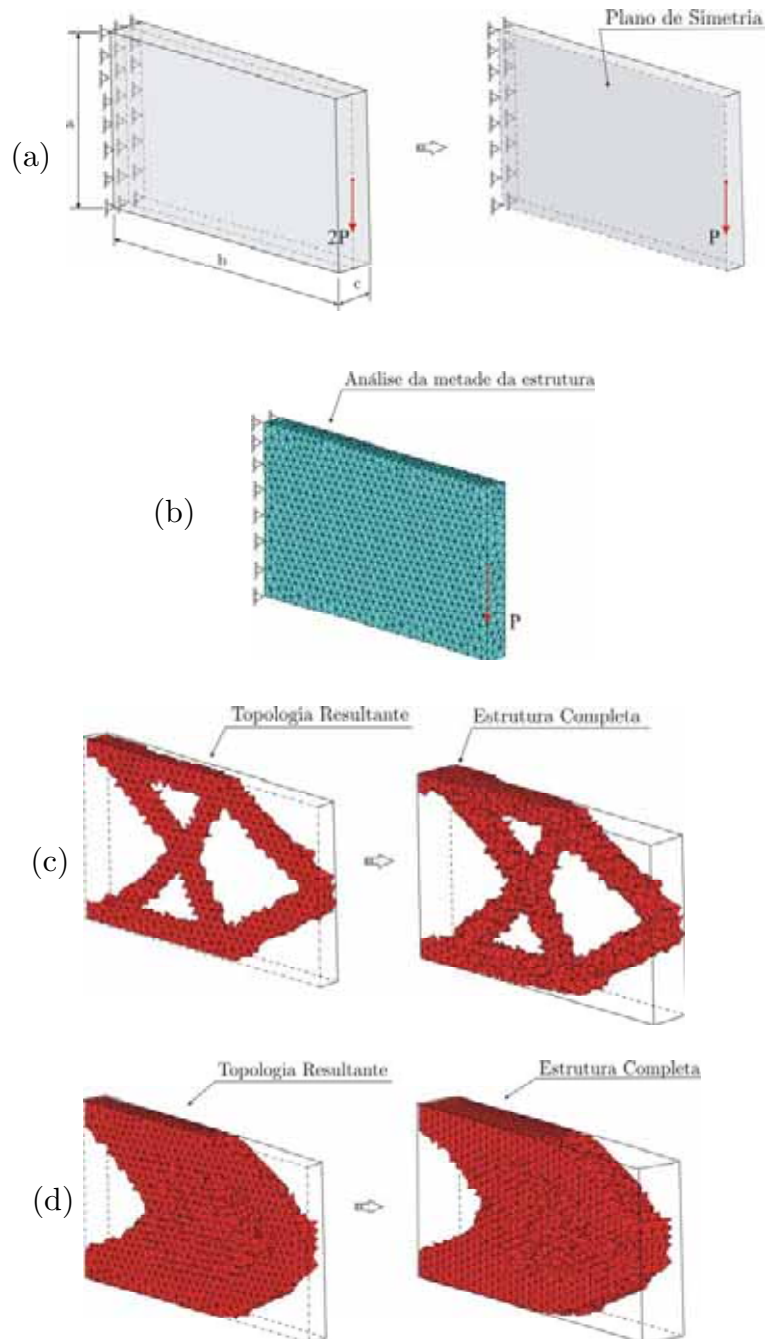


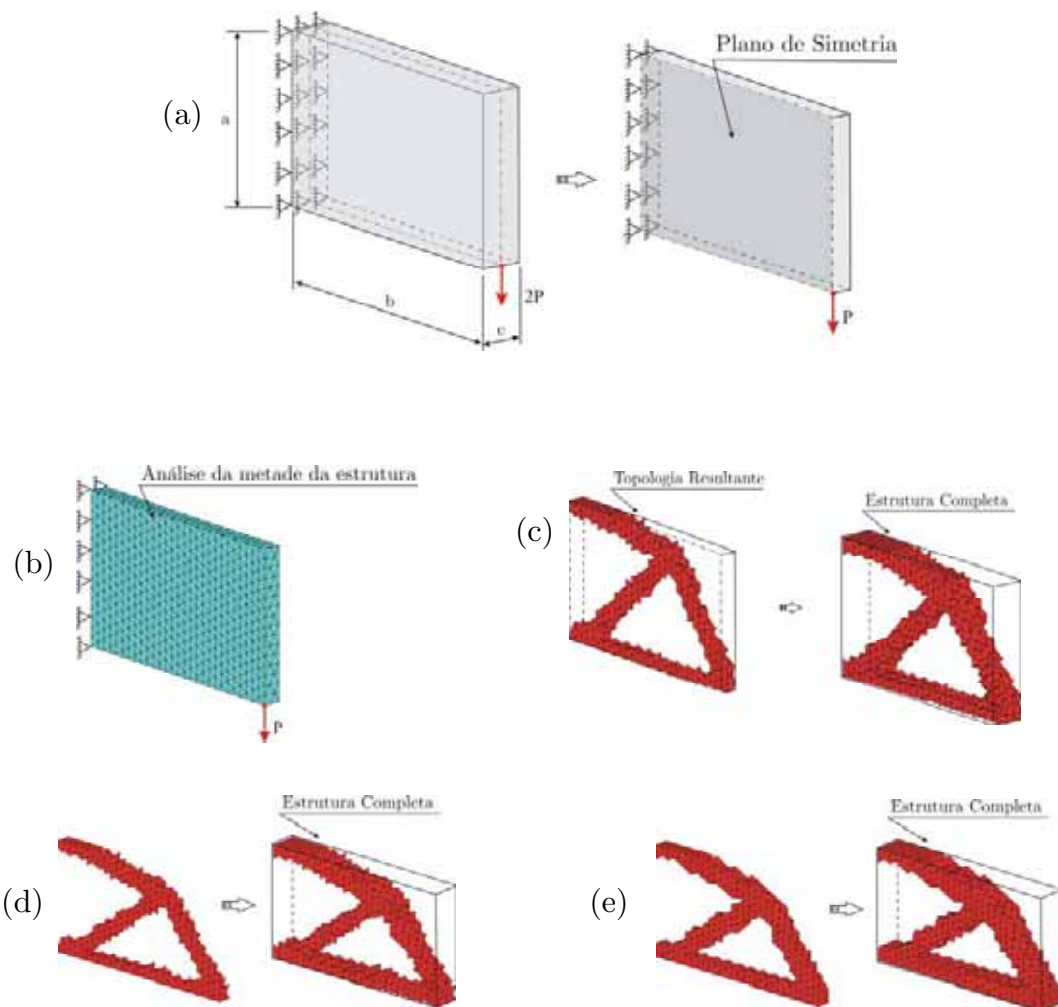
Figura 2.10: Resultado do problema 2.2

**Problema 2.3:**

Aqui é considerado o problema ilustrado na Fig. 2.11(a), o bloco está fixo em toda a face esquerda e suas dimensões são  $a = 4 uc$ ,  $b = 7 uc$  e  $c = 5 uc$ . Para diminuir o tempo de processamento, é analisada a metade simétrica da estrutura com 5.603 elementos e 1.523 nós e é aplicada uma carga na mesma de  $\mathbf{P} = 5 \times 10^6 uf$ , Fig. 2.11(b). O valor da fração de volume é de 20%.

Para verificar o efeito do travamento volumétrico, é analisada uma seqüência de casos com valores diferentes de coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,3$ , Fig. 2.11(c);  $\nu = 0,45$ , Fig. 2.11(d);  $\nu = 0,46$ , Fig. 2.11(e);  $\nu = 0,47$ , Fig. 2.11(f);  $\nu = 0,48$ , Fig. 2.11(g) e  $\nu = 0,49$ , Fig. 2.11(h).

A Fig. 2.11(i) mostra o resultado final na topologia utilizando módulo de Young  $E_o = 101 \times 10^9 ut$  e coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,35$ .



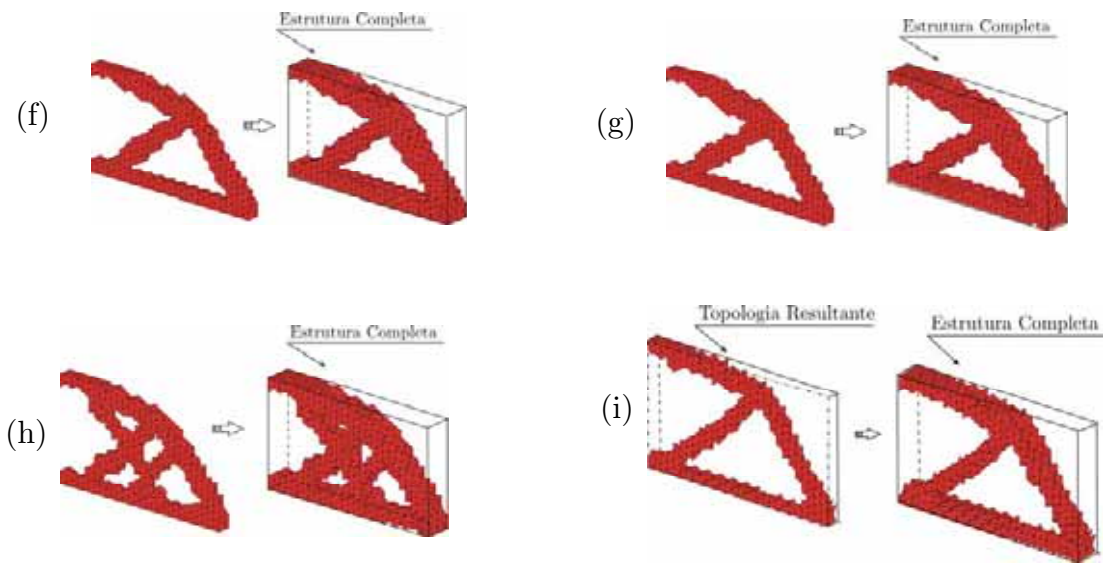
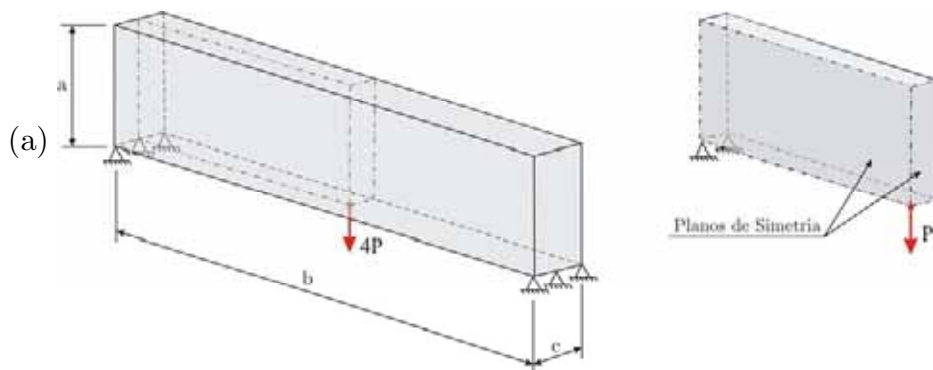


Figura 2.11: Resultado do problema 2.3

**Problema 2.4:**

Neste caso, considera-se o exemplo ilustrado na Fig. 2.12(a) com dimensões  $a = 2 uc$ ,  $b = 10 uc$  e  $c = 1 uc$ . Para diminuir o esforço computacional, é analisado  $\frac{1}{4}$  de simetria da estrutura com uma carga prescrita aplicada na mesma de  $\mathbf{P} = 5 \times 10^6 uf$  e restrita a uma fração de volume de 0,25, Figs. 2.12(b,d). Coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

Aqui, foram analisados dois casos: no primeiro, a malha apresenta 4.740 elementos com 1.176 nós, Fig. 2.12(b); no segundo, Fig. 2.12(d), 35.555 elementos com 7.289 nós.



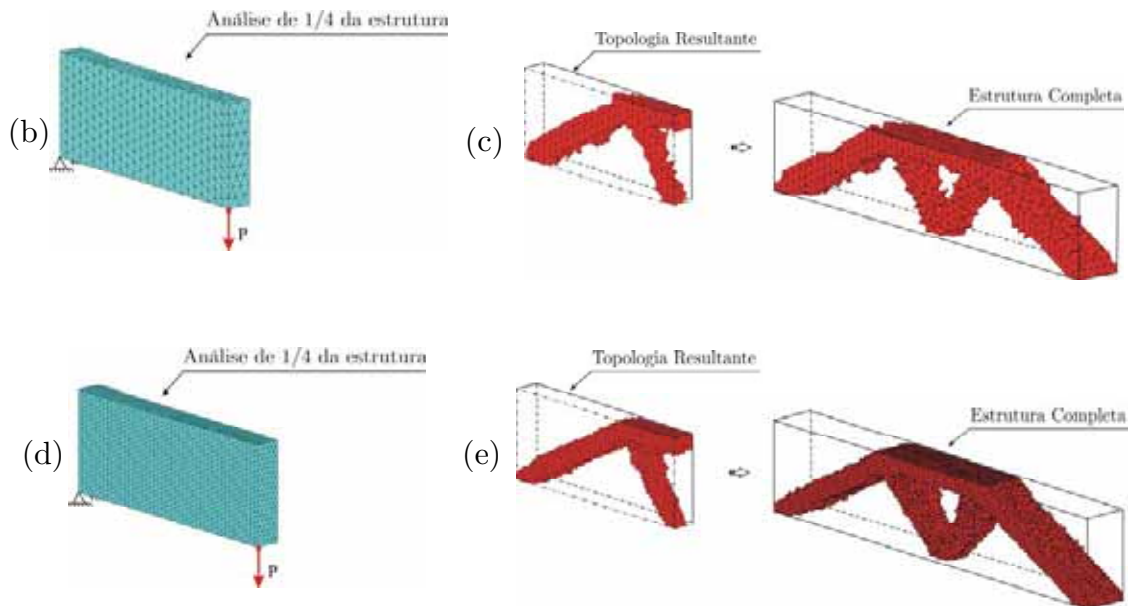
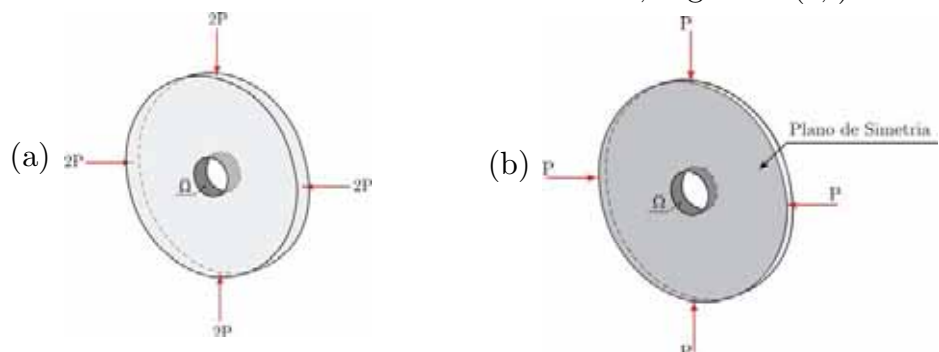


Figura 2.12: Resultado do problema 2.4

**Problema 2.5:**

Considere o problema ilustrado na Fig. 2.13(a), o qual consiste em um toróide fixado em seu diâmetro interno, ou seja,  $\bar{\Omega}$  apresenta deslocamento prescrito  $[0,0,0]$ . Suas dimensões são: diâmetro externo de  $2uc$ , diâmetro interno de  $0,4uc$  e espessura de  $0,2uc$ . Para diminuir o esforço computacional, é analisada a metade da simetria, Fig. 2.13(b), com uma carga prescrita aplicada na mesma, a cada  $90^\circ$ , de  $\mathbf{P} = 5 \times 10^6 uf$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

Neste caso, são analisadas dois tipos de malhas para três casos distintos. No primeiro caso, a malha contém 1.432 elementos com 524 nós e é restrita a uma fração de volume de 0,40, Fig. 2.13(c). No segundo, a malha também contém a mesma quantidade de elementos do caso anterior, porém utiliza-se uma fração de volume de 0,55, Fig. 2.13(d). E no último caso, o problema é restrito a uma fração de volume de 0,40 com uma malha de 23.288 elementos e 5.678 nós, Figs. 2.13(e,f).



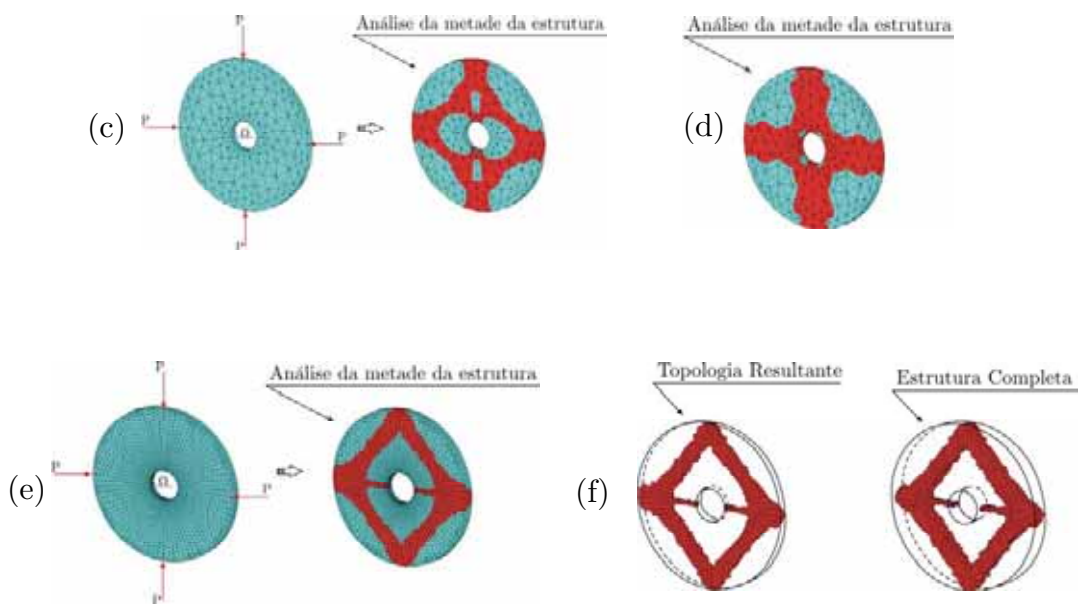


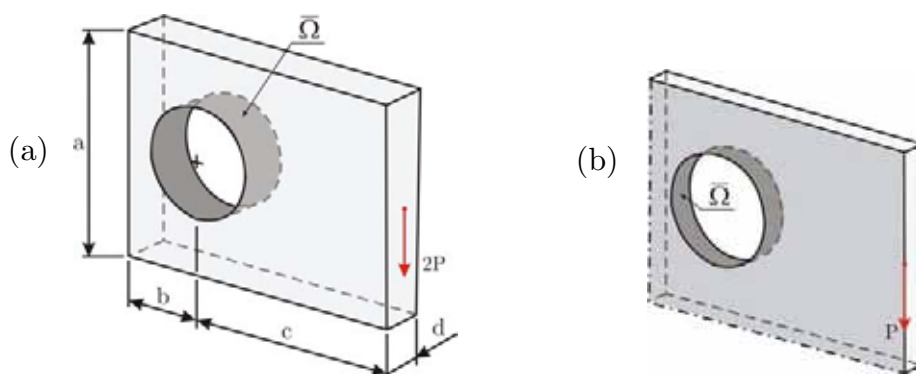
Figura 2.13: Resultado do problema 2.5

**Problema 2.6:**

Aqui, considera-se o problema representado na Fig. 2.14(a), o qual consiste em um bloco com um furo circular fixo, ou seja,  $\bar{\Omega}$  apresenta deslocamento prescrito  $[0,0,0]$ . Suas dimensões são: diâmetro do furo  $1,0 uc$ ,  $a = 4 uc$ ,  $b = 1,5 uc$ ,  $c = 4 uc$ , e  $d = 1 uc$ .

Para diminuir o tempo de processamento do problema, analisa-se metade da estrutura no qual é aplicado um carregamento de  $\mathbf{P} = 5 \times 10^6 uf$ , de acordo com a Fig. 2.14(b). Para uma fração de volume de 0,15 e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$

O problema é analisado em malhas com refinamentos diferentes. No primeiro caso, a malha contém 8.712 elementos com 2.151 nós, Fig. 2.14(c); e no segundo, 19.954 elementos e 4.436 nós, Fig. 2.14(e).



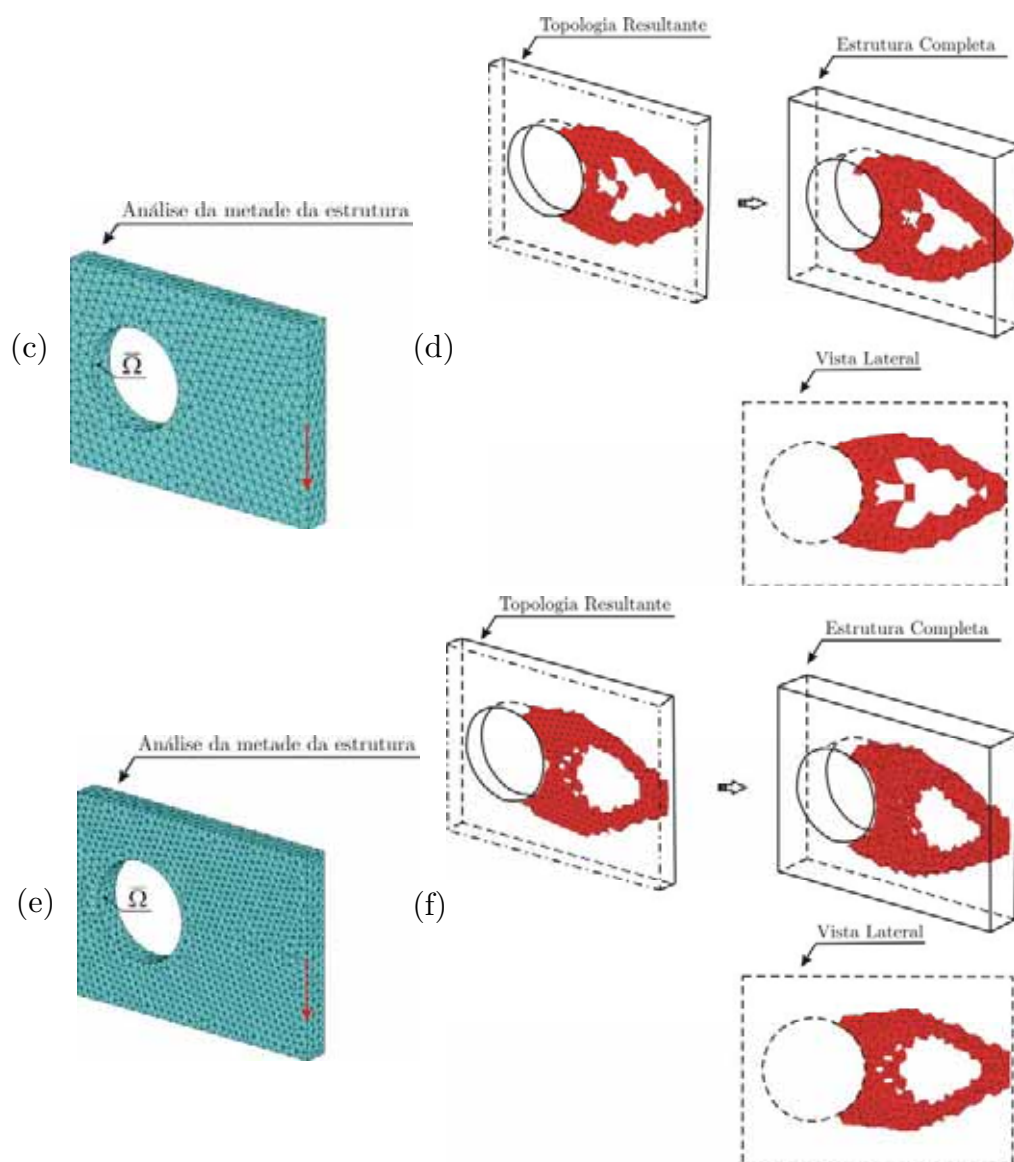


Figura 2.14: Resultado do problema 2.6

## 2.5 Conclusões

A formulação proposta neste capítulo, de acordo com os resultados obtidos pelo algoritmo proposto, mostra ser efetiva na geração de topologias estruturais ótimas para problemas 3D. A consideração de elementos com densidade superior a 0,8 possibilita uma melhor visualização da topologia ótima 3D, tendo em vista que tais elementos de baixa densidade não influenciam na determinação e até mesmo na modificação da topologia.

A resolução final do contorno material é diretamente dependente do tamanho médio do elemento finito empregado, representando a relação direta com o custo computacional, como pode ser verificado, o mesmo apresenta ótima nitidez com clara disposição de material.

A utilização de uma malha mais refinada pode modificar a topologia final da estrutura, tornando-a mais complexa e detalhada em relação a topologia resultante de uma malha mais grosseira.

A utilização de um elemento de interpolação de baixa ordem, Tetra4, em conjunto com a aplicação das restrições laterais nas componentes do gradiente da densidade relativa, possibilita o desenvolvimento de um algoritmo com alta performance computacional, robusto e estável, *i.e.*, sem problemas de instabilidade de tabuleiro e podendo ser aplicado a problemas com condições de contorno complexas, possibilitando uma proposta inicial de topologia estrutural.

A implementação de um esquema de integração seletiva, aplicada para o cálculo da matriz de rigidez, contornou o efeito de travamento volumétrico ocasionado pela utilização do elemento Tetra4. Para os casos avaliados, analisou-se a resposta da topologia da estrutura com diferentes valores do coeficiente de Poisson.

Em relação a uma formulação por *pixel*, este método tem a desvantagem do custo computacional para o cálculo da rigidez em cada elemento, mas esta desvantagem pode desaparecer com a implementação de um processo de adaptatividade. O processo de refino adaptativo é uma técnica inteligente de refinamento da malha com informações da topologia obtida na malha original. Entre outras melhorias da solução, serve para tornar mais nítida a definição do contorno da topologia, com menor custo computacional, maiores informações nos trabalhos de Costa Jr. (2003), Costa Jr. & Alves (2003).

## Capítulo 3

# Otimização Topológica 3D sob Restrição de Tensão Utilizando Elementos Tetra4

### 3.1 Introdução

Neste capítulo é proposto um processo de otimização de leiaute para minimização da massa sob critério de tensão, aplicados em domínios de projetos 3D. O processo metodológico visa produzir leiautes competitivos e de alta definição.

Desde a introdução das técnicas de distribuição material, por Bendsoe & Kikuchi (1988), a maioria dos trabalhos relativos a determinação de um leiaute ótimo têm sido relacionados a formulações de minimização de flexibilidade. Porém, para a obtenção de um leiaute ótimo para a manufatura, é imperativa a consideração de restrições locais de tensão nas perspectivas da engenharia. Mas, a consideração destas restrições locais de tensão envolve inúmeras dificuldades, conforme Yang & Chen (1996):

- A tensão é uma quantidade local, portanto, um grande número de restrições deve ser considerado para assegurar uma aproximação adequada. Estas restrições devem ser avaliadas em uma série de pontos discretos, cuja distribuição precisa ser densa o suficiente, de forma a minimizar a possibilidade de violação da restrição entre quaisquer dois pontos avaliados;
- A tensão é altamente não-linear com respeito às variáveis de projeto. Isto significa que devem ser utilizados algoritmos de programação matemática muito robustos.

Com o aumento da complexidade do algoritmo de otimização e da análise de sensibilidade, o custo computacional para a aplicação do método de otimização topológica, que já envolve um número elevado de variáveis de projeto, é aumentado significativamente.

A transformação de um critério de tensão local para um critério de medida global é um modo de evitar a utilização de um grande número de restrições. A

medida de tensão global é implementada como uma única restrição, visando reduzir o custo computacional necessário para resolver o problema de otimização.

O problema de otimização topológica sob restrições de tensão local está sujeito a problemas de singularidade, devido à degeneração do espaço de projeto. A região factível do espaço de projeto contém apêndices degenerados onde o algoritmo de otimização tem grande dificuldade de atingir o ótimo sem violar a restrição de tensão. Regiões de baixa densidade permanecem às vezes altamente deformadas, ou seja, quando a densidade tende para o limite inferior nestas regiões, o estado de tensão na microestrutura tende para um valor não nulo superior ao limite de tensão. Portanto, o procedimento de otimização não consegue remover o material nesta região sem violar a restrição de tensão. O paradoxo é que se o material fosse totalmente removido, a restrição de tensão obviamente não estaria ativa.

Para contornar o problema de singularidade considera-se uma relaxação  $\epsilon$  na restrição de tensão, como proposto por Cheng & Guo (1997). Esta técnica de perturbação das restrições resulta em uma relaxação dos limites de tensão em regiões de baixa densidade.

Neste trabalho, a otimização de leiaute é resolvida como um problema de distribuição do material, no qual faz-se o uso de um modelo microestrutural do tipo SIMP. Como esta abordagem é passível a problemas de instabilidade de tabuleiro, ver Bendsoe (1995), Sigmund & Petersson (1998) e Bendsoe & Sigmund (1999), para contornar o problema de instabilidade de solução, impõe-se uma restrição às componentes do gradiente da densidade relativa, como proposto por Peterson & Sigmund (1998).

Para a aproximação do problema é utilizado o Método de Elementos Finitos de Galerkin, que faz uso de elementos tetraédricos de quatro nós (Tetra4), interpolando linearmente o campo de densidades relativas além das componentes do campo de deslocamentos. Visando a redução do custo computacional para a determinação da topologia ótima, é considerada uma relaxação da restrição local de tensão, pela sua transformação em um critério de medida global.

## 3.2 Formulação do Problema

O objetivo deste trabalho é minimizar a massa de estruturas tridimensionais, submetidas à:

(i) Restrições de tensão

$$\left( \frac{\sigma_{eq}^*}{\sigma_y} - 1 \right) \leq 0; \quad (3.1)$$

(ii) Restrições de limites laterais

$$\rho_{\inf} - \rho(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{e} \quad \rho(\mathbf{x}) - \rho_{\sup} \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega; \quad (3.2)$$

(iii) Restrições laterais impostas às componentes do gradiente da densidade relativa, em cada ponto do domínio

$$\left( \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial d} \right)^2 \leq (c_d)^2, \quad \text{p/ } d = x, y \text{ e } z; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.3)$$

O campo de deslocamento é obtido através da solução do problema de valor de contorno:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_0 \quad (3.4)$$

no qual:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{D}^H(\rho) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (3.5)$$

e

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \quad (3.6)$$

Sendo,

- $\Omega$  é o domínio do corpo a ser considerado;
- $\partial\Omega$  é o contorno do domínio, tal que,  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ ;
- $\mathbf{x}$  é o vetor posição;
- $\rho$  é a densidade relativa;
- $\sigma_y$  é a tensão de escoamento;
- $\sigma_{eq}^*$  é a tensão efetiva de von Mises;

- $c_d$  são os limites das derivadas parciais da densidade relativa;
- $\Gamma_{\mathbf{u}}$  é a parte do contorno com deslocamento prescrito, *i.e.*,  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ ;
- $\Gamma_{\mathbf{t}}$  é a parte do contorno com tração prescrita, *i.e.*,  $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ ;
- $\mathbf{b}$  é a força de corpo;
- $H_o(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathbf{u}} \right\}$  e  $H = \{\bar{\mathbf{u}} + H_o\}$  são os conjuntos das variações e deslocamentos admissíveis respectivamente.

### 3.2.1 Definição do Modelo Material

Para a descrição das propriedades do material no problema de otimização topológica, utiliza-se uma formulação de microestruturas porosas, caracterizado pelo modelo material do tipo SIMP, Bendsoe (1995) e Bendsoe & Sigmund (1999), parametrizadas por sua densidade relativa.

Neste modelo microestrutural, o módulo de Young efetivo é definido em termos da densidade relativa  $\rho$ :

$$E(\rho) = \rho^\eta E_o. \quad (3.7)$$

$E_o$  representa o módulo de Young do material sólido e  $\eta$  denota o parâmetro de penalidade.

Como resultado do modelo apresentado na equação (3.7), a equação constitutiva poderá ser escrita como:

$$[\mathbf{D}^H(\rho)] = \rho^\eta [\mathbf{D}_o]. \quad (3.8)$$

sendo  $[\mathbf{D}_o]$  a matriz que contém os parâmetros de elasticidade do elemento sólido (porosidade nula).

Para contornar o efeito do travamento volumétrico, aplica-se um esquema de integração seletiva no qual calcula-se, separadamente, os termos volumétricos e os termos referentes a parte de distorção. Desta forma, tem-se que:

$$[\mathbf{D}^H(\rho)] = [\mathbf{D}_{vol}^H] + [\mathbf{D}_{dist}^H]. \quad (3.9)$$

Sendo definido que

$$[\mathbf{D}_{vol}^H] = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^H(\rho) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbf{D}_{dist}^H] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22}^H(\rho) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

e ainda

$$[\mathbf{D}_{11}^H(\rho)] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

e

$$[\mathbf{D}_{22}^H(\rho)] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Separando os termos de rigidez volumétrica e de distorção da eq.(2.69), obtém-se:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{vol} + \mathbf{K}_{dist}. \quad (3.13)$$

Fazendo uso da equação constitutiva homogeneizada, define-se:

$$\mathbf{K}_{vol} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{vol}^H \mathbf{B} \, d\Omega \quad (3.14)$$

e

$$\mathbf{K}_{dist} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{dist}^H \mathbf{B} \, d\Omega \quad (3.15)$$

No esquema de integração seletiva, os termos referentes a parte volumétrica eq.(3.14) são subintegrados, e os referentes a parte de distorção eq.(3.15) são integrados de modo completo. Existem técnicas mais aprimoradas e desenvolvidas do que o clássico método de subintegração, ver Bonet, Marriott & Hassan (2001) e Taylor (2000), que poderiam ser futuramente implementados.

### 3.2.2 Critério de Tensão de Falha

Como o objeto deste capítulo é minimizar a massa de um dado domínio de projeto 3D atendendo um critério de tensão, definiu-se uma medida para a tensão efetiva  $\sigma^*(\rho)$ , de acordo com os trabalhos de Duysinx & Sigmund (1998) e Duysinx & Bendsoe (1998):

$$\sigma^*(\rho) = \frac{\sigma(\rho)}{\rho^\eta} \quad (3.16)$$

Com a tensão efetiva definida pela eq.(3.16), introduz-se uma restrição de tensão local, que define um critério de falha do material em termos da tensão efetiva de von Mises, dada como:

$$\sigma_{eq}^*(\rho) = \frac{\sigma_{eq}(\rho)}{\rho^\eta} \leq \sigma_y \quad (3.17)$$

onde  $\sigma_y$  é a tensão admissível.

### 3.2.3 Critério de Tensão de Falha com Relaxação

Problemas de otimização topológica com restrição de tensão estão sujeitos ao fenômeno de singularidade, devido à degeneração do espaço de projeto. Uma abordagem para contornar esta dificuldade é reformular o problema como uma seqüência de problemas com características mais atraentes, cujas soluções ótimas possam ser alcançadas com menor esforço computacional.

A reformulação da restrição de tensão estabelece que esta será imposta de acordo com a densidade do material.

$$\rho \left( \frac{\sigma_{eq}^*}{\sigma_y} - 1 \right) \leq 0 \quad (3.18)$$

Não sendo suficiente esta modificação, uma outra possibilidade é utilizar uma técnica de perturbação das restrições, denominada relaxação  $\epsilon$ , Cheng & Guo (1997), que resulta em uma relaxação dos limites de tensão nas regiões de baixa densidade.

$$\rho \left( \frac{\sigma_{eq}^*}{\sigma_y} - 1 \right) \leq \rho\epsilon(1 - \rho) \quad (3.19)$$

Esta relaxação possibilita a criação e a remoção de furos sem violar a restrição de tensão, atuando sobre a parte degenerada do espaço de projeto. Isto é, para cada  $\epsilon > 0$ , o problema relaxado com as restrições é caracterizado por um espaço de projeto não tão degenerado, e o fator  $(1 - \rho)$  em  $\epsilon$  garante que a restrição de tensão real será imposta para  $\rho = 1$ . Desta forma, torna-se mais acessível atingir um ótimo local com algoritmos de otimização baseados nas condições de Karush-Kuhn-Tucker. Se for possível encontrar o ótimo global  $\rho_e^*$ , então para  $\epsilon \rightarrow 0$ , a seqüência de domínios viáveis e suas soluções ótimas  $\{\rho_e^*\}$  converge continuamente em direção ao problema degenerado original e sua solução ótima associada.

O procedimento de solução consiste agora em resolver uma seqüência de problemas de otimização, com valores decrescentes do parâmetro  $\epsilon$ , de forma similar ao que é feito com as funções penalidade e barreira, ver Apêndice C.

### 3.3 Formulação do Problema com Relaxação

A formulação do problema com relaxação  $\epsilon$  de um corpo tridimensional, consiste na determinação do campo de densidade relativa  $\rho \in \mathbb{R}^n$ , solução de:

$$\min f(\rho) = \min \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \rho d\Omega, \quad (3.20)$$

sujeito as restrições:

(i) Restrição de tensão com relaxação

$$\rho \left( \frac{\sigma_{eq}^*}{\sigma_y} - 1 \right) - \rho \epsilon (1 - \rho) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.21)$$

(ii) Restrições Laterais

O campo de densidade relativa  $\rho(\mathbf{x})$  é restrito ao intervalo  $[\rho_{\inf}, \rho_{\sup}]$ , com o limite superior  $\rho_{\sup} = 1$ .

$$\rho_{\inf} - \rho(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{e} \quad \rho(\mathbf{x}) - \rho_{\sup} \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.22)$$

(iii) Restrições de Estabilidade

$$\left(\frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial d}\right)^2 - (c_d)^2 \leq 0, \quad \text{para } d = x, y \text{ e } z \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.23)$$

As constantes  $c_x, c_y$  e  $c_z$  impõem um limite superior às componentes do gradiente da densidade relativa, Petersson & Sigmund (1998) e Sigmund & Petersson (1998). A determinação destas constantes será definida na seção 3.4.

### 3.3.1 Restrição de Tensão com Relaxação Integrada

Com o intuito de reduzir o custo computacional para a determinação da topologia ótima, considera-se uma relaxação da restrição local de tensão, pela sua transformação em um critério de medida global, sendo esta, tratada como uma única restrição no processo de otimização.

No problema de otimização descrito anteriormente, a restrição de tensão efetiva com relaxação, definida pela eq.(3.21), deve ser satisfeita para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ , o que representa uma restrição paramétrica. Um método efetivo de trabalhar com restrições paramétricas consiste na relaxação da condição pontual (critério local) através da consideração de uma restrição integrada, *i.e.* da utilização de um critério global. A proposta de Costa Jr. & Alves (2003) para o critério global é:

$$\left\{ \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left\langle \rho \left( \frac{\sigma_{eq}^*}{\sigma_y} - 1 \right) - \rho \epsilon (1 - \rho) \right\rangle^p d\Omega \right\}^{1/p} \leq 0, \quad (3.24)$$

o qual é definido que  $\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \max\{0, f(\mathbf{x})\}$ , representando a parte positiva de  $f(\mathbf{x})$ .

A medida global definida na eq.(3.24) é denominada média- $p$  integral. No caso de  $p \rightarrow \infty$ , a restrição média- $p$  aproxima, no limite, a restrição pontual

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \left| \left\langle \rho \left( \frac{\sigma_{eq}^*}{\sigma_y} - 1 \right) - \rho \epsilon (1 - \rho) \right\rangle \right| \leq 0. \quad (3.25)$$

No entanto, quando  $p \rightarrow \infty$  o problema torna-se mal condicionado, fazendo com que o critério de falha integral tenda a ser influenciado por apenas um valor de pico do campo de tensão, enquanto em outros pontos a tensão é ignorada. Isto pode ocasionar um comportamento oscilatório do algoritmo de otimização, possibilitando a falha da

convergência do processo de otimização. Daí, a escolha de  $p$  deve resultar de um compromisso de resultados numéricos.

### 3.4 Definição dos Limites $c_x$ , $c_y$ e $c_z$

Considere um elemento genérico como mostrado na Fig. 2.3, sendo  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $p/ i = 1, \dots, 4$  as coordenadas dos vértices e  $\mathbf{x}_m = (x_m, y_m, z_m)$  as coordenadas do baricentro do elemento tetraédrico de quatro nós. Agora, denotando:

$$d_{\min} = \min_i \|d_i\| \quad p/ i = 1, \dots, 4 \quad (3.26)$$

pode-se definir

$$c^e = c_x^e = c_y^e = c_z^e = \frac{1}{d_{\min}}. \quad (3.27)$$

Uma modificação dos limites  $c_x^e$ ,  $c_y^e$  e  $c_z^e$ , deve ser realizada se no mínimo uma das faces do elemento coincide com algum plano de simetria. Aqui, são considerados três casos possíveis, que são:

#### (i) Plano de simetria - $xy$

Aqui, considera-se que a face  $abc$  do elemento coincide com o plano  $-xy$  de simetria. Neste caso, como ilustrado na Fig. 2.4, deve-se ter:  $w = 0$  e  $(\partial \rho / \partial z) = 0$ . Sendo assim, a imposição da última condição é alcançada denotando  $c_z^e = 0$ .

#### (ii) Plano de simetria - $xz$

Agora, considera-se que a face  $cbd$  do elemento coincidente com o plano  $-xz$  de simetria. Assim, de acordo com a ilustração na Fig. 2.5, deve-se ter:  $v = 0$  e  $(\partial \rho / \partial y) = 0$ . A imposição da última condição é alcançada denotando  $c_y^e = 0$ .

#### (iii) Plano de simetria - $yz$

Considerando que a face  $acd$  do elemento coincidente com o plano  $-yz$  de simetria, de acordo com a ilustração na Fig. 2.6, deve-se ter:  $u = 0$  e  $(\partial \rho / \partial x) = 0$ . A imposição da última condição é alcançada denotando  $c_x^e = 0$ .

### 3.5 Modelo de Aproximação

O problema é particularizado para estruturas tridimensionais e o método numérico utilizado para aproximar o modelo estrutural é o Método dos Elementos Finitos de Galerkin. O elemento finito utilizado na aproximação é o tetraédrico de quatro nós, que interpola o campo de densidades relativas  $\rho$  além das componentes do campo de deslocamentos, como ilustrado na Fig. (2.2).

As variáveis de projeto são definidas pela densidade relativa dos nós da malha. É importante notar que vários problemas de instabilidade de tabuleiro têm sido observados com a utilização de elementos de baixa ordem de interpolação. Entretanto, a imposição de uma restrição de limite sobre as componentes de  $\nabla\rho$  tem mostrado ser muito eficiente, evitando o aparecimento destas instabilidades, Petersson & Sigmund (1998) e Sigmund & Petersson (1998).

A função objetivo é dada por:

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \sum_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\rho} d\Omega \quad (3.28)$$

Interpolação do campo de densidade relativa:

$$\rho(x, y, z) = \sum_{n=1}^4 N_n(x, y, z) \rho_{in} \quad (3.29)$$

no qual  $N_n$  são as funções de interpolação do elemento:

$$N_n = \frac{1}{6V} (\mathbf{C} \text{ Adj} \bar{\mathbf{A}}) \quad (3.30)$$

com  $n = 1, \dots, 4$  (número de nós do elemento),  $V$  o volume,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

e

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

O campo de deslocamento dentro de cada elemento é dado por:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}_e \quad (3.33)$$

com o vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$  e a matriz de interpolação  $[\mathbf{N}]$  igual a:

$$\mathbf{u}_e^T = \{u_x^1, u_y^1, u_z^1, u_x^2, u_y^2, u_z^2, u_x^3, u_y^3, u_z^3, u_x^4, u_y^4, u_z^4\} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Transferindo para o sistema de coordenadas locais, cujas funções de interpolação para um tetraedro de quatro nós são:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \xi \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \eta \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \zeta \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) &= 1 - \xi - \eta - \zeta \end{aligned} \quad (3.36)$$

o campo de densidade relativa será:

$$\rho(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_{n=1}^4 N_n(\xi, \eta, \zeta) \rho_{in} \quad (3.37)$$

A interpolação da geometria é a derivada das funções de forma:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^4 N_i(\xi, \eta, \zeta) x_n \\ y &= \sum_{n=1}^4 N_i(\xi, \eta, \zeta) y_n \\ z &= \sum_{n=1}^4 N_i(\xi, \eta, \zeta) z_n \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial N_n}{\partial y_n} \\ \frac{\partial N_n}{\partial z_n} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial N_n}{\partial \eta_n} \\ \frac{\partial N_n}{\partial \zeta_n} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

onde a Jacobiana do elemento é:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} x_{i1} - x_{i4} & y_{i1} - y_{i4} & z_{i1} - z_{i4} \\ x_{i2} - x_{i4} & y_{i2} - y_{i4} & z_{i2} - z_{i4} \\ x_{i3} - x_{i4} & y_{i3} - y_{i4} & z_{i3} - z_{i4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

E as expressões integrais são:

$$\int_V f(x, y, z) dV = 6V \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_1^{1-\xi-\eta} d\zeta d\eta d\xi \quad (3.41)$$

No caso de um tetraedro de quatro nós,  $\det \mathbf{J} = \text{constante}$ .

$$V = \det \mathbf{J} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_1^{1-\xi-\eta} d\zeta d\eta d\xi \quad (3.42)$$

Resolvendo a parte integral, tem-se:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_1^{1-\xi-\eta} d\zeta d\eta d\xi = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (1 - \xi - \eta) d\eta d\xi \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[ \eta_{|0}^{1-\xi} - \xi \eta_{|0}^{1-\xi} - \frac{\eta^2}{2} \Big|_0^{1-\xi} \right] d\xi = \int_0^1 \left[ (1-\xi) - \xi(1-\xi) - \frac{(1-\xi)^2}{2} \right] d\xi \\
&= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - \xi + \frac{\xi^2}{2} \right) d\xi = \frac{1}{6}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

então:

$$\det[\mathbf{J}] = 6V \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
\det[\mathbf{J}] &= (x_{i1} - x_{i4})(y_{i2} - y_{i4})(z_{i3} - z_{i4}) + (x_{i2} - x_{i4})(y_{i3} - y_{i4})(z_{i1} - z_{i4}) \\
&\quad + (x_{i3} - x_{i4})(y_{i1} - y_{i4})(z_{i2} - z_{i4}) - (z_{i1} - z_{i4})(y_{i2} - y_{i4})(x_{i3} - x_{i4}) \\
&\quad - (z_{i2} - z_{i4})(y_{i3} - y_{i4})(x_{i1} - x_{i4}) - (z_{i3} - z_{i4})(y_{i1} - y_{i4})(x_{i2} - x_{i4})
\end{aligned} \tag{3.46}$$

V é o volume do elemento.

Para o cálculo da matriz de rigidez, utiliza-se um esquema de integração seletiva, explicado na subseção 3.2.1.

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{vol}] \\ [\mathbf{B}_{dist}] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [\mathbf{D}_{vol}] & 0 \\ 0 & [\mathbf{D}_{dist}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{vol}] \\ [\mathbf{B}_{dist}] \end{bmatrix} d\Omega \tag{3.47}$$

No qual  $[\mathbf{B}]$  é a matriz de derivação levando em consideração a parte volumétrica e a parte referente à distorção, que opera sobre o vetor de deslocamento nodal fornecendo as componentes de deformação.

### 3.5.1 Formulação Discreta do Problema de Otimização

O problema de otimização topológica pode ser aproximado, de forma discreta, do seguinte modo:

$$\min \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega \tag{3.48}$$

sujeito às restrições:

$$\bar{g}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})) = \left\{ \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left\langle \rho \left( \frac{\sigma_{eq}^*}{\sigma_y} - 1 \right) + \rho \epsilon (\rho_{sup} - \rho) \right\rangle^p d\Omega \right\}^{1/p} \leq 0 \tag{3.49}$$

$$g_{ed}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\beta} \left[ \left( \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial d} \right)_e^2 - (c_d^e)^2 \right] \leq 0, \quad (3.50)$$

para  $e = 1, \dots, n_e$ ;  $d = x, y$  e  $z$ ;  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{X}$ , com  $\mathbf{X} = \left\{ \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n \mid \rho_i^{\text{inf}} \leq \rho_i \leq \rho_i^{\text{sup}}, i = 1, \dots, n \right\}$  e  $n$  denotado o número de nós da malha de elementos finitos. Aqui, define-se  $\beta = 1/d_{\text{max}}$ , sendo que  $d_{\text{max}}$  é definido como  $d_{\text{max}} = \max_{i=1,4} \|d_i\|$ .

Para resolver o problema de otimização é aplicado Método do Lagrangiano Aumentado, ver Apêndice D, que consiste na solução de uma seqüência de problemas de mínimo com restrições de caixa, podendo ser resumido como:

1. Definir valores iniciais:  $k = 0$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\mu}^k = \mathbf{0}$ ,  $erro = 1,0$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^k$ ,  $\boldsymbol{\omega}^k$  e  $tol$ .
2. Enquanto  $erro > tol$ , efetuar *laço*:
  - (i) Solução do problema de minimização com restrições laterais

$$\min \Pi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k; \boldsymbol{\varepsilon}^k, \boldsymbol{\omega}^k), \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in X \quad (3.51)$$

no qual,

$$\Pi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k; \boldsymbol{\varepsilon}^k, \boldsymbol{\omega}^k) = f(\boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}^k} \sum_{e=1}^{n_e} \Phi_e(\bar{g}_e(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\varepsilon}^k, \boldsymbol{\lambda}_e^k) + \sum_{j=1}^3 \left[ \frac{1}{\boldsymbol{\omega}_j^k} \sum_{e=1}^{n_e} \Psi_{ej}(g_{ej}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\omega}_j^k, \boldsymbol{\mu}_{ej}^k) \right] \quad (3.52)$$

Onde define-se que:  $f(\boldsymbol{\rho})$  é a função objetivo,  $\Phi_e(\bar{g}_e(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\varepsilon}^k, \boldsymbol{\lambda}_e^k)$  é a restrição de tensão com relaxação integrada e  $\Psi_{ej}(g_{ej}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\omega}_j^k, \boldsymbol{\mu}_{ej}^k)$  são as restrições de estabilidade.

com

$$\Phi_e(\bar{g}_e(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\varepsilon}^k, \boldsymbol{\lambda}_e^k) = \begin{cases} \bar{g}_e(\boldsymbol{\rho}) [\bar{g}_e(\boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\varepsilon}^k \boldsymbol{\lambda}_e^k], & \text{se } \bar{g}_e(\boldsymbol{\rho}) \geq -\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^k \boldsymbol{\lambda}_e^k}{2} \\ -\left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^k \boldsymbol{\lambda}_e^k}{2} \right)^2, & \text{se } \bar{g}_e(\boldsymbol{\rho}) < -\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^k \boldsymbol{\lambda}_e^k}{2} \end{cases} \quad (3.53)$$

e

$$\Psi_{ej}(g_{ej}(\boldsymbol{\rho}), \omega_j^k, \mu_{ej}^k) = \begin{cases} g_{ej}(\boldsymbol{\rho}) [g_{ej}(\boldsymbol{\rho}) + \omega_j^k \mu_{ej}^k], & \text{se } g_{ej}(\boldsymbol{\rho}) \geq -\frac{\omega_j^k \mu_{ej}^k}{2} \\ -\left(\frac{\omega_j^k \mu_{ej}^k}{2}\right)^2, & \text{se } g_{ej}(\boldsymbol{\rho}) < -\frac{\omega_j^k \mu_{ej}^k}{2} \end{cases} \quad (3.54)$$

para  $e = 1, \dots, n_e$  e  $j = 1, \dots, 3$ .

Por conveniência, o índice  $d = x, y$  e  $z$  é também denotado por  $j = 1, 2$  e  $3$ .

Desta forma,

$$\frac{d\Pi}{d\rho_{n_n}} = \frac{df}{d\rho_{n_n}} + \left\{ \frac{1}{\varepsilon^k} \frac{d\Phi_e}{d\rho_{n_n}} + \sum_{j=1}^3 \left[ \frac{1}{\omega_j^k} \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial \Psi_{ej}}{\partial \rho_{n_n}} \right] \right\}. \quad (3.55)$$

Como

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{e=1}^{n_e} \rho_e \Omega_e \quad (3.56)$$

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{e=1}^{n_e} \left[ \frac{\sum_{n=1}^4 \rho_n}{4} \right] \Omega_e. \quad (3.57)$$

A sensibilidade de cada nó para cada elemento é definida por:

$$\frac{\partial f_e}{\partial \rho_n} = \frac{\Omega_e}{4}. \quad (3.58)$$

E para cada nó da malha será:

$$\frac{df}{d\rho_{n_n}} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial f_e}{\partial \rho_{n_n}}. \quad (3.59)$$

(ii) Atualização dos multiplicadores de Lagrange

$$\lambda^{k+1} = \max \left\{ 0, \lambda^k + \frac{2}{\zeta} h(\mathbf{x}^k) \right\} \quad (3.60)$$

e

$$\mu_{ej}^{k+1} = \max \left\{ 0, \mu_{ej}^k + \frac{2}{\omega_j} g_{ej}(\mathbf{x}^k) \right\} \quad \text{p/ } e = 1, \dots, n_e; \quad j = 1, \dots, 3. \quad (3.61)$$

(iii) Atualização dos parâmetros de penalidade

$$\varepsilon^{k+1} = \begin{cases} \gamma \varepsilon^k, & \text{se } \gamma \varepsilon^k > \varepsilon^{crit} \text{ sendo } \gamma_1 \in (0,1) \\ \varepsilon^{crit} & \end{cases} \quad (3.62)$$

e

$$\omega_j^{k+1} = \begin{cases} \beta_j \omega_j^k, & \text{se } \beta_j \omega_j^k > \omega_j^{crit} \text{ sendo } \beta_j \in (0,1) \\ \omega_j^{crit} & \end{cases} \quad \text{p/ } j = 1, \dots, 3 \quad (3.63)$$

(iv) Determinação do erro

$$\begin{aligned} a &= |\lambda^{k+1} - \lambda^k|, \quad b = \max_e |\mu_{e1}^{k+1} - \mu_{e1}^k|, \quad c = \max_e |\mu_{e2}^{k+1} - \mu_{e2}^k| \\ \text{e } d &= \max_e |\mu_{e3}^{k+1} - \mu_{e3}^k| \end{aligned} \quad (3.64)$$

então,  $k = k + 1$  e  $erro = \max \{a, b, c, d\}$ .

3. Fim do laço.

Desta forma, o problema pode ser formulado como: Dado  $\lambda, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3 \in \mathbb{R}^{n_e}$  e  $\varepsilon, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}$ . O problema consiste em encontrar um  $\boldsymbol{\rho}^* \in \mathbb{R}^n$ , tal que:

$$\boldsymbol{\rho}^* = \arg \min \Pi(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \boldsymbol{\mu}; \varepsilon, \boldsymbol{\omega}), \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in X. \quad (3.65)$$

## 3.6 Resultados

A seguir, são apresentadas algumas aplicações com a finalidade de avaliar o desempenho do procedimento proposto. Por simplicidade, é utilizado para todos os casos o mesmo módulo de Young,  $E_o = 215 \times 10^9 \text{ ut}$  e a mesma tensão de escoamento,  $\sigma_y = 260 \times 10^6 \text{ ut}$ .

Os elementos cuja densidade é inferior a 0,8 foram descartados para que haja uma melhor visualização da topologia estrutural ótima. Devido ao campo de interpolação utilizado, pode ser verificado que o contorno da topologia é formado por

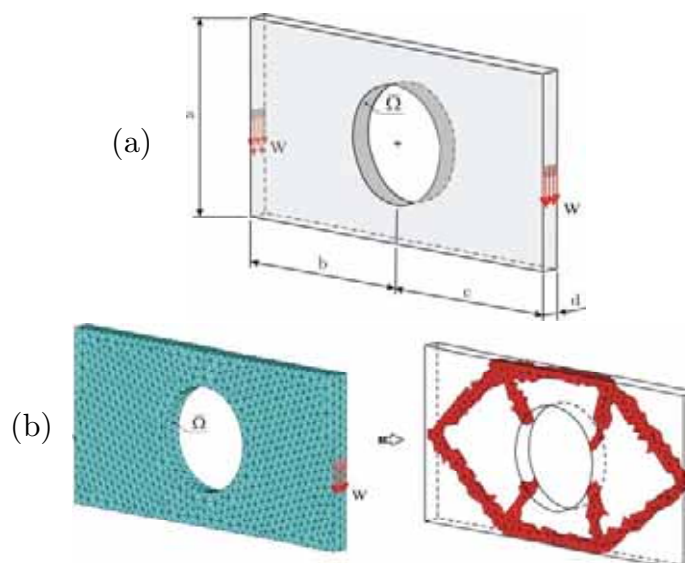
um gradiente de distribuição de densidade, ver Fig. 2.8. Considerando a espessura do gradiente de densidade definida apenas por um elemento, tem-se a condição ótima de nitidez do contorno da topologia. Conclui-se então que o tamanho médio dos elementos que formam a camada define a qualidade da topologia. Agora, analisando o elemento com maior densidade possível na camada de definição do contorno, tem-se  $\rho_e = 0,7505$  considerando  $\rho_{\text{inf}} = 0,002$ . Sendo assim, bastaria que o valor limite da densidade a ser desconsiderado seja  $\rho_{\text{lim}} = \rho_e + \Delta\rho_e$ .

### Problema 3.1

Neste caso, o problema consiste em um bloco com um furo circular centrado e fixado em  $\bar{\Omega}$  nas três direções, portanto com deslocamento prescrito  $[0,0,0]$ . Ao bloco são aplicadas duas cargas de  $\mathbf{W}=259 \times 10^6 \text{ ucd}$ , de acordo com a Fig. 3.1(a). As dimensões do bloco são: diâmetro do furo de  $6 \text{ uc}$ ,  $a = 10 \text{ uc}$ ,  $b = 10 \text{ uc}$ ,  $c = 10 \text{ uc}$ , e  $d = 0,5 \text{ uc}$ . O coeficiente de Poisson utilizado é de  $\nu = 0,3$ .

O caso é avaliado em duas malhas com refinamentos diferentes, onde a primeira contém 9.664 elementos e 2.526 nós, Fig. 3.1(b) e a segunda, Fig. 3.1(d), 16.076 elementos e 3.854 nós.

As Figs. 3.1(b,d) representam os resultados das topologias após o descarte de elementos com densidade inferior a 0,8 e a Fig. 3.1(e), com o descarte de elementos com densidade inferior a 0,5. A Fig. 3.1(c) mostra o gráfico da função de falha para a malha que contém 9.664 elementos e a Fig. 3.1(f), o gráfico da função de falha para a que contém 16.076 elementos.



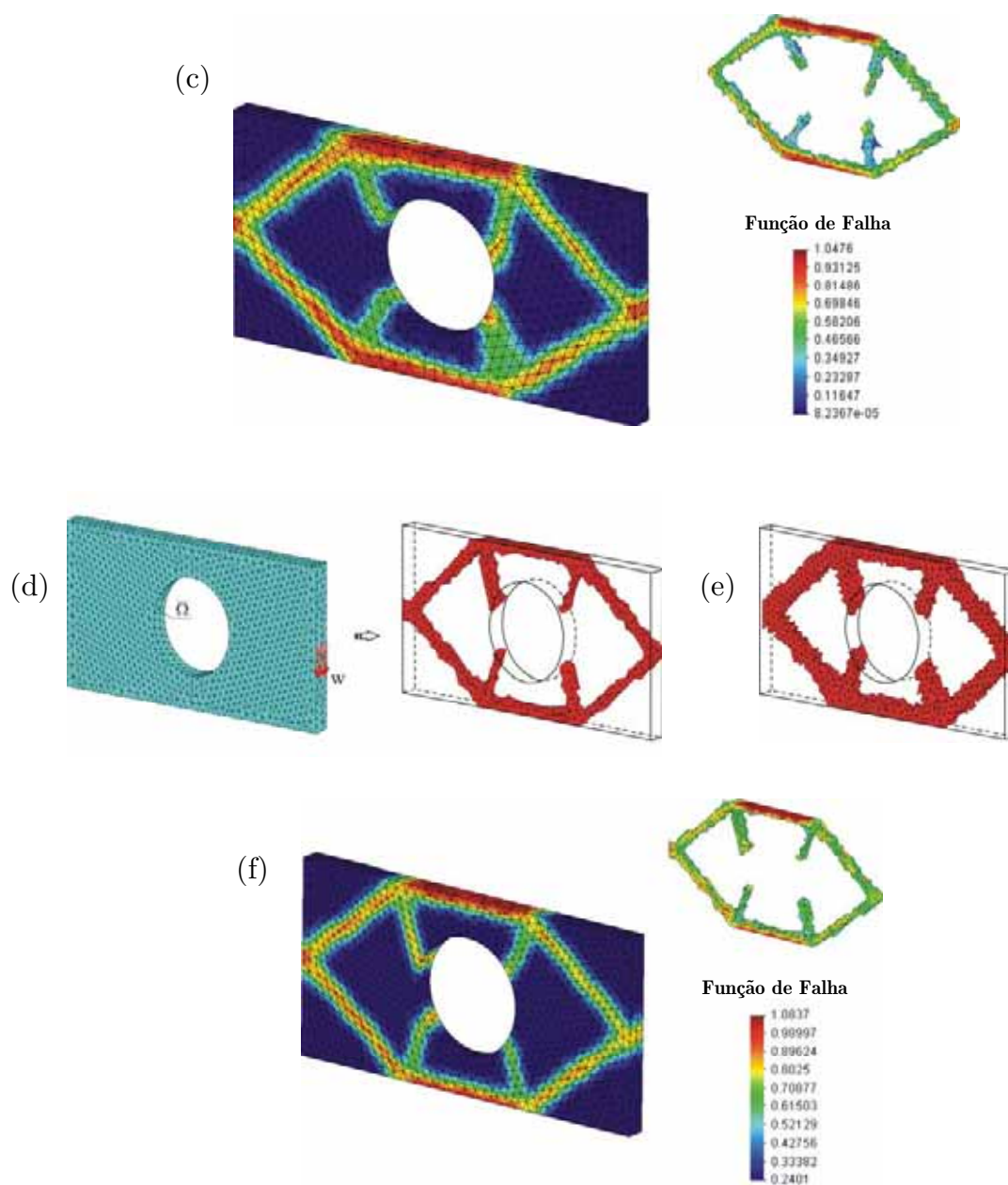


Figura 3.1: Resultado do Problema 3.1

**Problema 3.2:**

Aqui é considerado o problema ilustrado na Fig. 3.2(a), cujas dimensões são:  $a = 5 uc$ ,  $b = 20 uc$  e  $c = 4 uc$ . Para diminuir o custo computacional do problema, analisa-se  $\frac{1}{4}$  de simetria da estrutura contendo 11.133 elementos e 2.337 nós. Dois carregamentos verticais são aplicados na estrutura analisada, Fig. 3.2(b), no valor de  $W = 150 \times 10^6 ucd$ . O valor do coeficiente de Poisson utilizado é de  $\nu = 0,3$ .

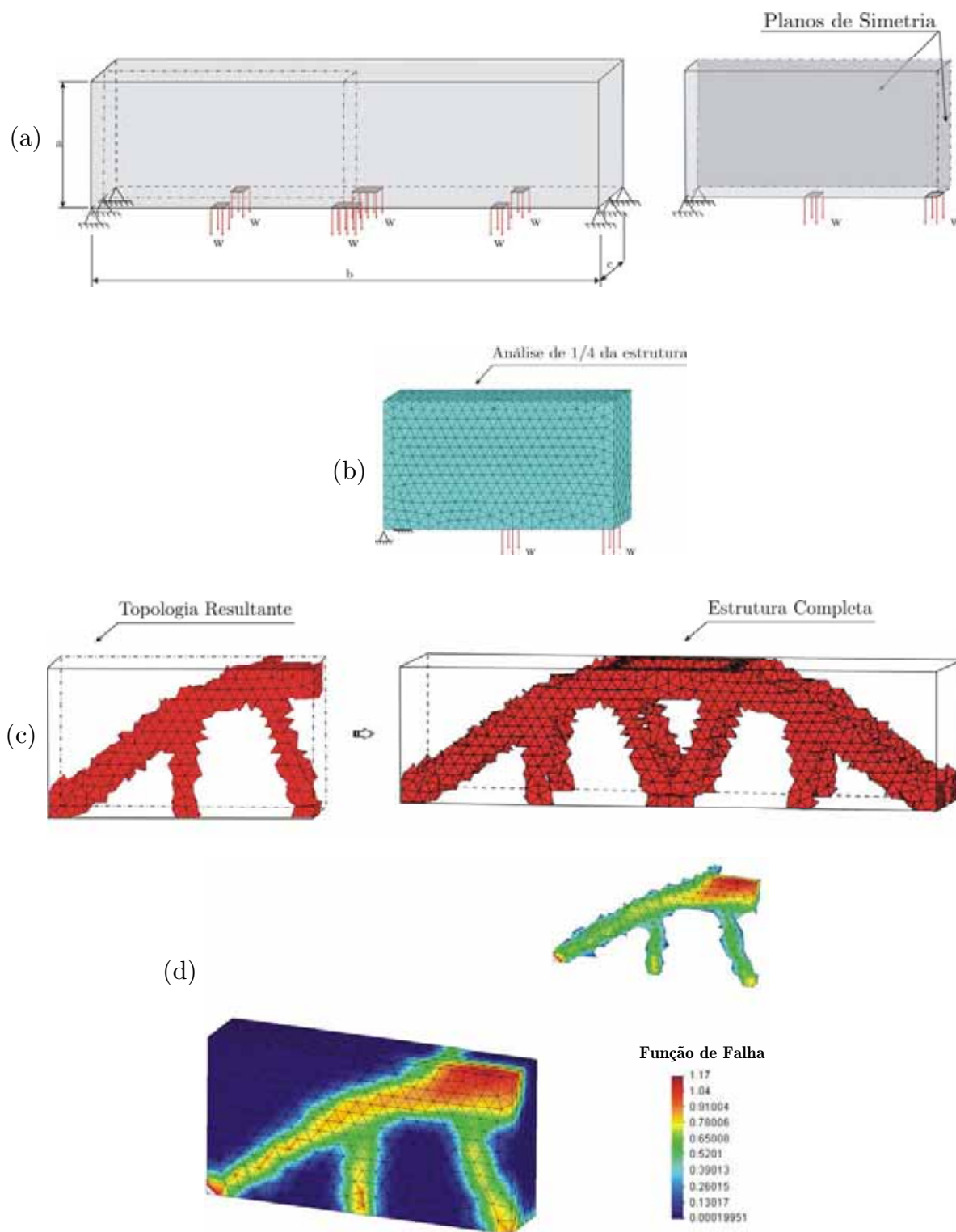


Figura 3.2: Resultado do Problema 3.2

### Problema 3.3

Considere o problema ilustrado na Fig. 3.3(a), o qual consiste em um bloco de dimensões  $a = 0,5 uc$ ,  $b = 10 uc$  e  $c = 2 uc$ . A estrutura com 2.294 nós e 9.400 elementos é submetida a três carregamentos no valor  $\mathbf{W} = 259 \times 10^6 ucd$ . Coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

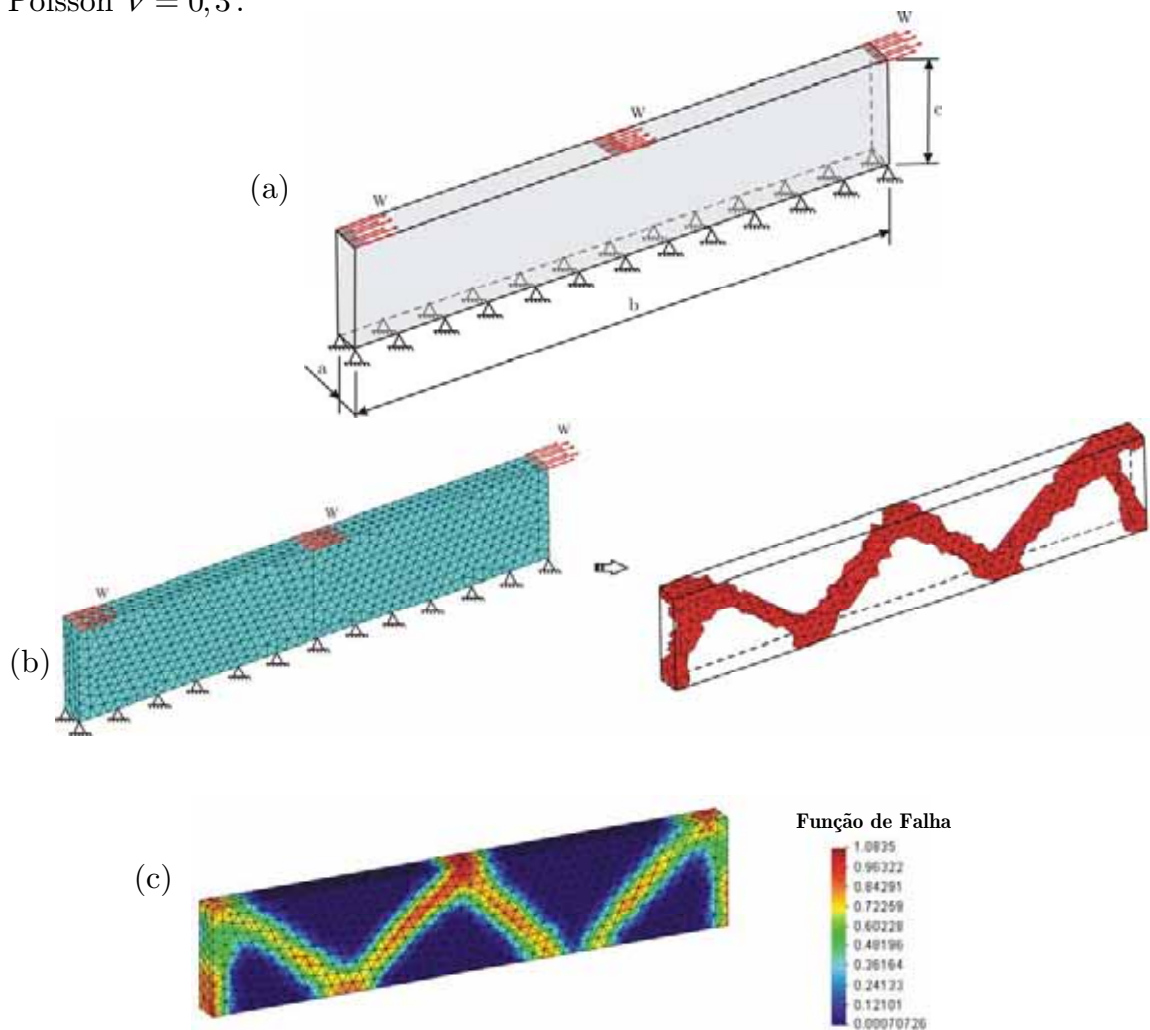


Figura 3.3: Resultado do Problema 3.3

### Problema 3.4

Neste caso, considera-se o exemplo ilustrado na Fig. 3.4(a) com dimensões  $a = 1 uc$ ,  $b = 7 uc$  e  $c = 4 uc$ . Para diminuir o esforço computacional do problema, analisa-se metade da estrutura na qual são submetidas duas cargas, em cada extremidade, de  $\mathbf{W} = 259 \times 10^6 ucd$ , Fig. 3.4(b). A estrutura analisada apresenta 2.376 nós e 10.016 elementos. O coeficiente de Poisson utilizado é  $\nu = 0,3$ .

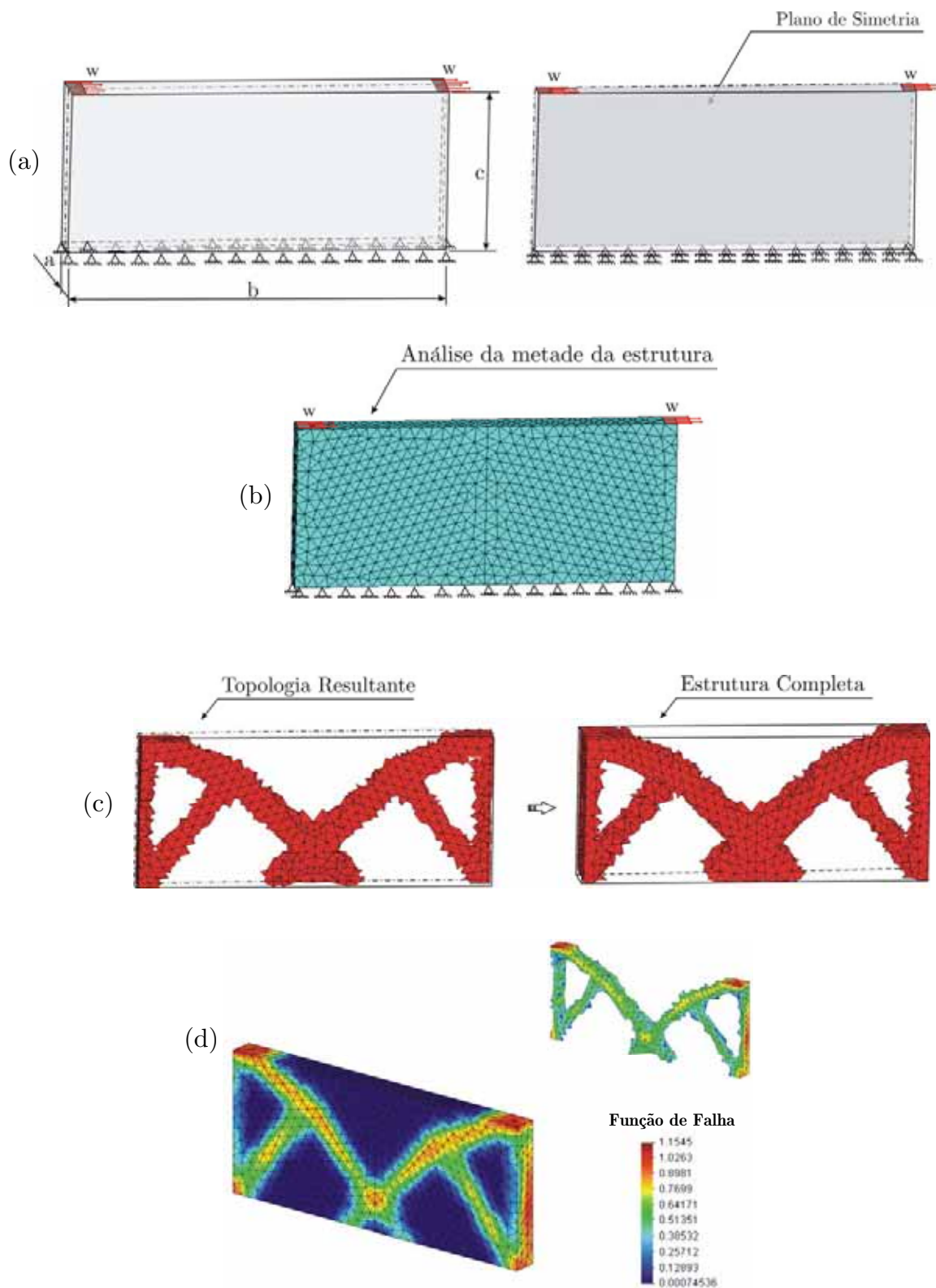
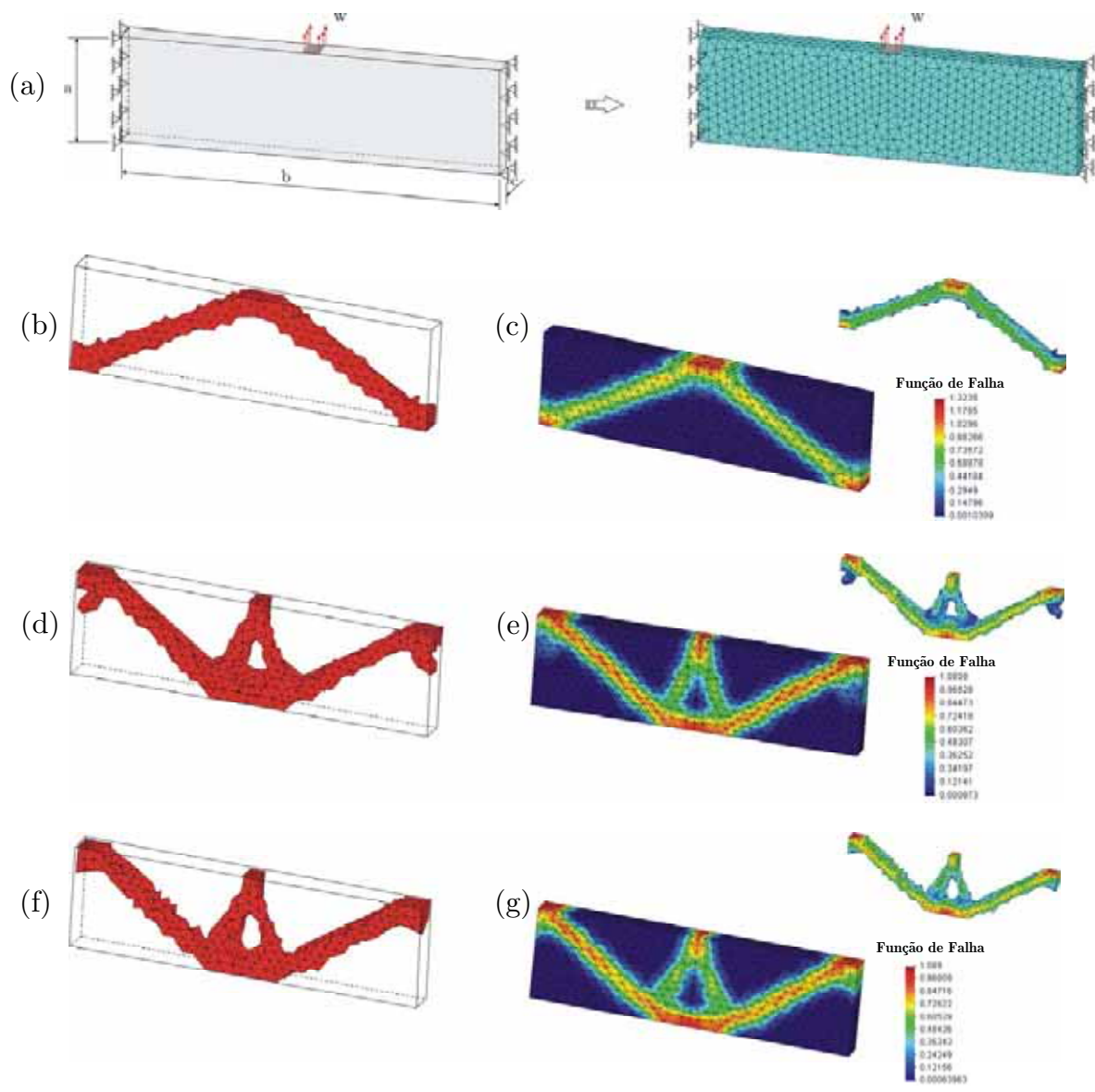


Figura 3.4: Resultado do Problema 3.4

### Problema 3.5

O problema consiste em um bloco totalmente fixado em suas faces laterais, cujas dimensões são  $a = 2 uc$ ,  $b = 7 uc$  e  $c = 0,5 uc$ . A estrutura com 2.026 nós e 8.428 elementos é submetida a um carregamento distribuído de  $\mathbf{W} = 259 \times 10^6 ucd$ , segundo mostrado na Fig. 3.5(a).

Para verificar o efeito do travamento volumétrico, analisa-se uma seqüência de casos com valores diferentes de coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,3$ , Fig. 3.5(b);  $\nu = 0,45$ , Fig. 2.10(d);  $\nu = 0,46$ , Fig. 3.5(f);  $\nu = 0,47$ , Fig. 2.10(h);  $\nu = 0,48$ , Fig. 2.10(j) e  $\nu = 0,49$ , Fig. 2.10(l).



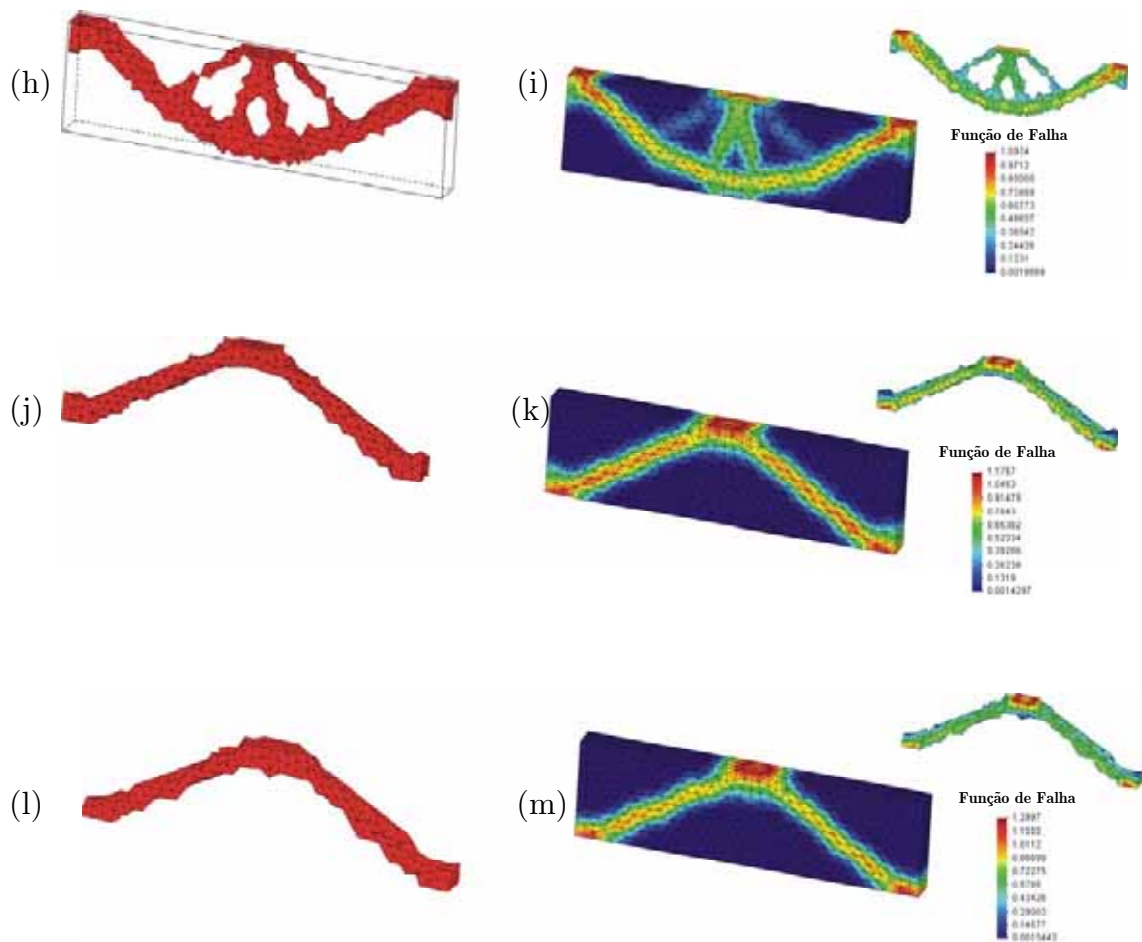
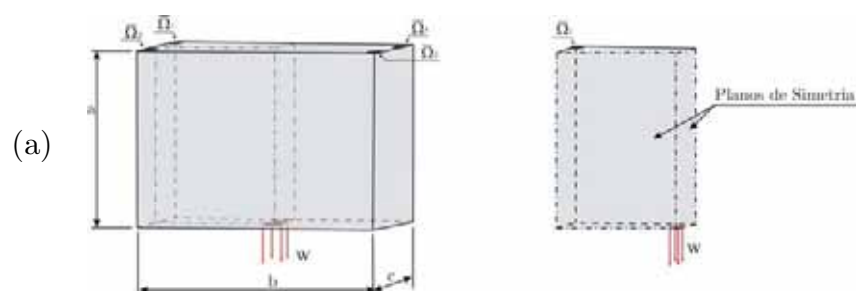


Figura 3.5: Resultado do Problema 3.5

### Problema 3.6

Aqui, o problema consiste em um bloco cujas dimensões são  $a = 4 uc$ ,  $b = 6 uc$  e  $c = 2 uc$ , conforme mostrado na Fig. 3.6(a).

Para simplificar o problema, analisa-se  $\frac{1}{4}$  de simetria da estrutura modelada com 10.651 elementos e 2.261 nós. O bloco está fixo em  $\bar{\Omega}$  nas três direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , ou seja, com deslocamento prescrito  $[0,0,0]$ , no qual é submetido um carregamento de  $\mathbf{W}=150 \times 10^6 ucd$ , Fig. 3.6(b). Coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .



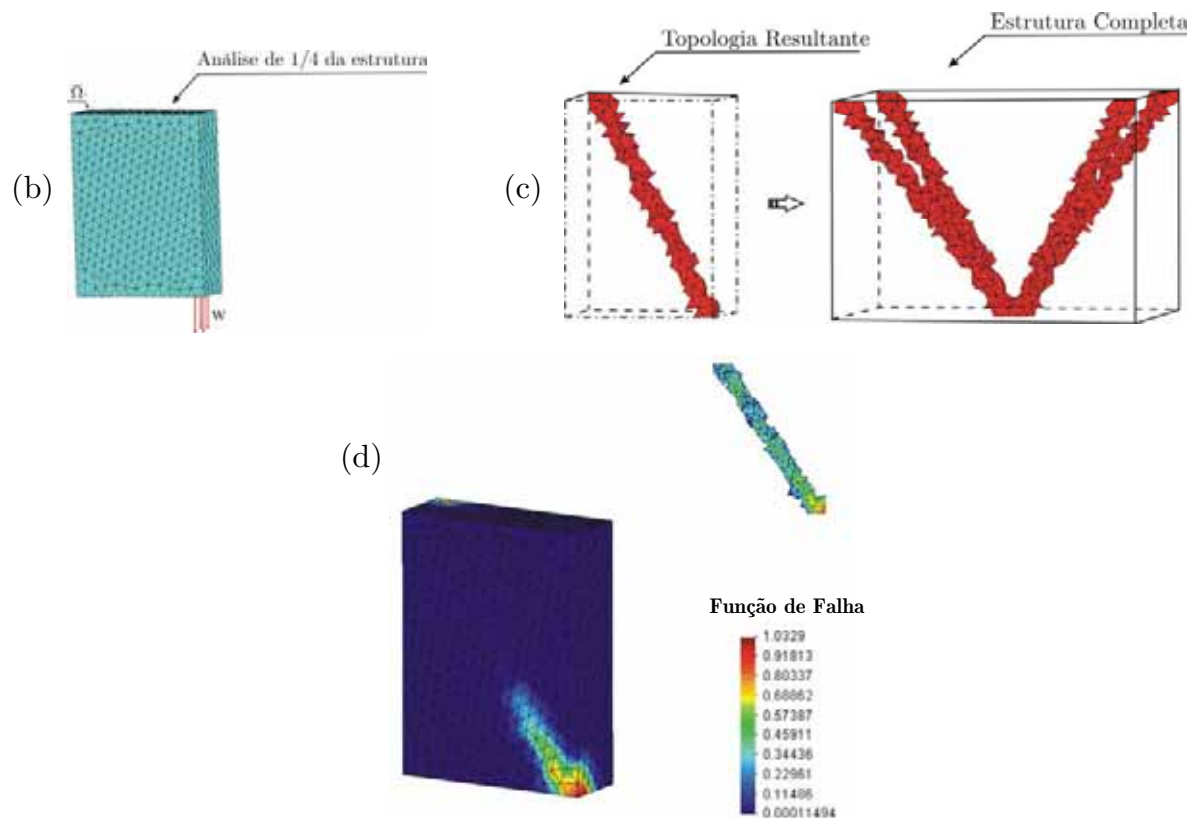
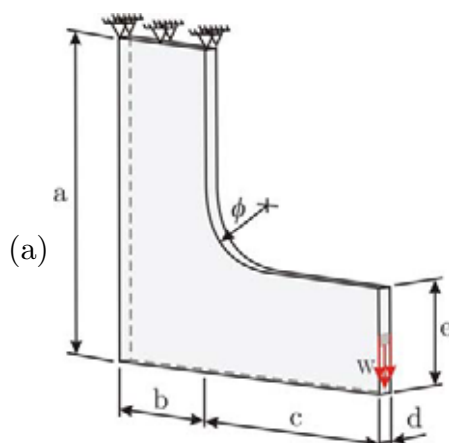


Figura 3.6: Resultado do Problema 3.6

### Problema 3.7

Aqui o problema consiste em uma viga em L fixada na face superior, submetida a um carregamento distribuído na face lateral direita de  $\mathbf{W}=150 \times 10^6 \text{ ucd}$ . As dimensões são:  $a = 9 \text{ uc}$ ,  $b = 3 \text{ uc}$ ,  $c = 6 \text{ uc}$ ,  $d = 0,5 \text{ uc}$ ,  $e = 3 \text{ uc}$  e  $\phi = 2 \text{ uc}$ , como mostra a Fig. 3.7(a). O coeficiente de Poisson utilizado é de  $\nu = 0,3$ .

O problema é analisado em malhas com refinamentos diferentes, a primeira contendo 2.862 elementos com 842 nós, Fig. 3.7(b), e a segunda com 9.849 elementos e 2.567 nós, Fig. 3.7(d).



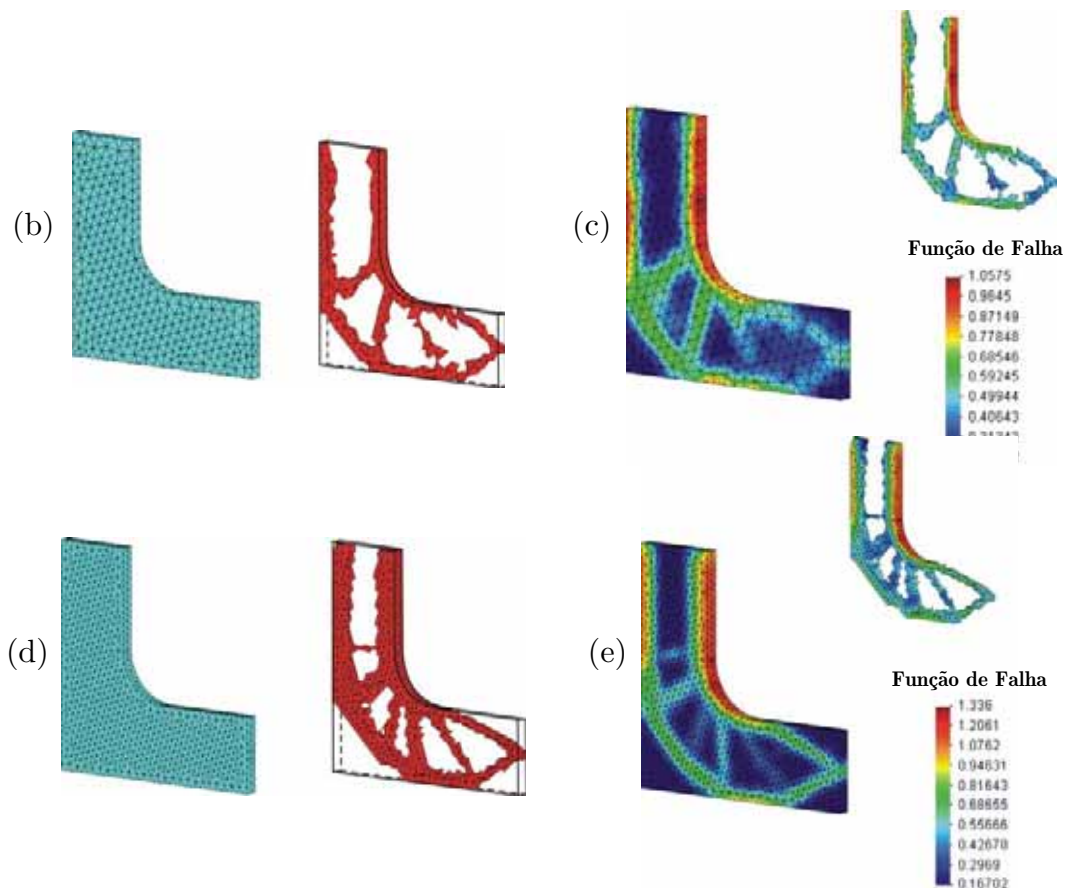


Figura 3.7: Resultado do Problema 3.7

### 3.7 Conclusões

O processo proposto, minimizar a massa atendendo a um critério de tensão, possibilitou a geração de leiautes estruturais ótimos consistentes para problemas tridimensionais. A resposta final do contorno material e a qualidade da definição da topologia, apresenta relação direta com o custo computacional, ou seja, está diretamente relacionada ao tamanho médio do elemento finito empregado.

A consideração de um critério de falha global é uma estratégia mais eficiente e robusta do que os critérios locais comumente descritos na literatura, para se trabalhar com restrições paramétricas de tensão. Para contornar o problema de singularidade, considera-se uma relaxação  $\epsilon$  na restrição de tensão, como proposto por Cheng & Guo (1997). Esta técnica de perturbação das restrições resulta em uma relaxação dos limites de tensão em regiões de baixa densidade. A imposição das restrições de caixa às componentes do gradiente da densidade relativa evitou problemas de instabilidade de tabuleiro.

A aplicação de um esquema de integração seletiva contornou o efeito do travamento volumétrico. Alguns casos foram analisados com diferentes valores de coeficientes de Poisson, os resultados obtidos até o valor  $\nu = 0,49$  são compatíveis com a condição de contorno do problema, proporcionando topologias nítidas e definidas.

O descarte de elementos com densidade inferior a 0,8 possibilita uma melhor visualização da topologia ótima 3D, tendo em vista que tais elementos de densidade inferior não influenciam na determinação e até mesmo na modificação da topologia.

A violação das funções de falha ocorre em apenas alguns elementos da malha, o que indica a necessidade de refiná-la nestas regiões para melhor caracterizar o estado de tensões. Vale salientar que o problema utiliza o Método do Lagrangiano Aumentado e este contém o Método de Penalidade Exterior como parte de sua formulação. Sendo assim, a solução ótima será aproximada violando o espaço de solução original.

A formulação mostra-se promissora para a implementação de recursos de adaptatividade, ou seja, a implementação de um processo inteligente de refinamento da malha com informações da topologia obtida na malha original, para que seja melhorada a definição do contorno da topologia com menor custo computacional e reduzir a violação das restrições locais de tensão, mediante a utilização da estratégia de refino, Costa Jr. (2003), Costa Jr. & Alves (2003).

Para solucionar o problema de otimização não linear, já formulado como um Funcional Lagrangiano Aumentado com restrições de caixa, utiliza-se o código computacional da plataforma TANGO, Andreani *et al.* (2004), Andreani *et al.* (2005) e Birgin & Martinez (2002).

## Capítulo 4

### Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, o Método de Otimização Topológica é aplicado a estruturas tridimensionais submetidas à restrições de volume, minimizando a flexibilidade; e à restrições de tensão, minimizando a massa.

Apesar das limitações computacionais, devido à utilização de problemas tridimensionais e ao emprego de algoritmos de programação matemática robustos, as formulações propostas mostraram-se eficazes e competitivas na definição de estruturas 3D e os exemplos analisados apresentaram-se similares aos encontrados na literatura, o que pode validar as formulações.

Em ambos os capítulos, os resultados mostraram-se promissores, com boa nitidez e clara disposição de material. A resolução final do contorno do material e a melhor caracterização do estado de tensão (capítulo 3), estão diretamente ligadas ao tamanho médio do elemento finito empregado.

A implementação de um esquema de integração seletiva serviu para verificar a proposta do processo de otimização, aplicados em problemas tridimensionais, fazendo o uso de elementos lineares.

A microestrutura artificial do tipo SIMP, na qual a única variável do projeto é a densidade relativa do material, permite penalizar a formação de regiões com densidades intermediárias, o que é desejável para uma melhor interpretação do projeto.

A consideração da tensão é um fator fundamental para o projeto de otimização estrutural. No entanto, a implementação das restrições de tensão é um tema delicado devido aos fenômenos de singularidade causados nas tensões e ao grande número de restrições que são adicionadas ao problema, aumentando de forma considerável o custo computacional. A utilização de uma técnica de relaxação sobre a tensão, juntamente com consideração de um critério de falha global, possibilitou a redução de tais problemas, contornando os fenômenos de singularidade e diminuindo o número de restrições de projeto.

A opção da utilização de dois diferentes algoritmos de otimização, um para a formulação de flexibilidade e outro para a minimização de massa sob critério de

tensão, deu-se ao fato da maior performance da heurística de cada algoritmo se adequar ao perfil da formulação do problema.

Algumas possibilidades para trabalhos futuros incluem:

- A implementação de recursos de adaptatividade para tornar mais nítida a qualidade do contorno da topologia tridimensional e conseqüentemente, melhor caracterizar o estado de tensão quando aplicado;
- Incorporar efeitos de temperatura (termo-elasticidade), o que é importante quando se lida com materiais cujo comportamento depende da variação deste fator;
- Estender o trabalho adaptando o Método de Otimização de Forma após a definição da estrutura pelo Método de Otimização Topológica;
- A utilização de elementos lineares com considerações de formulações mais estáveis ao efeito de travamento para aplicação em problemas não lineares, ver Taylor (2000) e Bonet, Marriott & Hassan (2001).
- Estudo aplicado às estruturas laminares com ou sem curvatura.

## Referências Bibliográficas

1. ALVES, M. K.; ALVES, B. K. Topology optimization of elastic structures, IV Congresso Iberoamericano de Engenharia Mecânica, **CIDIM 99**, Vol. 2 - Mecânica dos Sólidos, Santiago, Chile, Electronic Publication-CD, 1999.
2. ANANTHASURESH, G. K.; KOTA, S.; GIANCHANDANI, Y. A methodical approach to the design of compliant micromechanisms, **Solid-State Sensor and Actuator Workshop**, 189-192, 1994.
3. ANDREANI, R. *et al.* **Augmented Lagrangian Methods under the Constant Positive Linear Dependence Constraint Qualification**, Mathematical Programming, 2004.
4. ANDREANI, R. *et al.* **On Augmented Lagrangian Methods with General Lower-Level Constraints**, Technical Report MCDO-050304, Department of Applied Mathematics, UNICAMP, Brazil, 2005.
5. BELBLIDIA, F.; HINTON, E. **Fully Integrated Design Optimization of Plate Structures**, Finite Element Analysis and Design, v. 38, p. 227-44, 2002.
6. BELBLIDIA, F. *et al.* **Topology Optimization of Plate Structures Using a Single or Three-Layered Artificial Material Model**, Advances in Engineering Software, v. 32, p. 159-68, 2001.
7. BENDSOE, M. P. **Optimization of Structural Topology, Shape, and Material**, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1995, 271 p.
8. BENDSOE, M. P. **Optimization Shape Design as a Material Distribution Problem**, Structural Optimization, v. 1, p. 193-202, 1989.
9. BENDSOE, M. P.; DÍAZ, A. R. **Optimization of Material Properties for Mindlin Plate Design**, Structural Optimization, v. 6, p. 268-70, 1993.
10. BENDSOE, M. P.; DÍAZ, A. R.; KIKUCHI, N. Topology and Generalized Layout Optimization of Elastic Structures, **Proceedings of the NATO Advanced**

- Research Workshop on Topology Design of Structures**, Sesimbra, p. 159-206, Portugal, 1992.
11. BENDSOE, M. P.; DÍAZ, A. R.; KIKUCHI, N. Topology and Generalized Layout Optimization of Elastic Structures, in: Bendsoe, M. P. and Soares, C. A. M. ed., **Topology Design of Structures, NATO ASI Series 227**, (Kluwer Academic Publishers), p. 159-206, 1993.
  12. BENDSOE, M. P. *et al.* **Optimal Design of Material Properties and Material Distribution for Multiple Loading Conditions**, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, v. 35, p. 1449-70, 1995.
  13. BENDSOE, M. P.; KIKUCHI, N. **Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method**, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, v. 71(2), p. 197-224, 1988.
  14. BENDSOE, M. P.; RODRIGUES, H. C. **Integrated Topology and Boundary Shape Optimization of 2-D Solids**, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, v. 87(1), p. 15-34, 1991.
  15. BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. **Material Interpolation Schemes in Topology Optimization**, *Archive of Applied Mechanics*, v. 69, p. 635-54, 1999.
  16. BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O., **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**, Springer, Alemanha, 2003.
  17. BONET, J.; MARRIOTT, H.; HASSAN, O. Stability and Comparison of Different Linear Tetrahedral Formulations for Incompressible Explicit Dynamic Applications, **Int. Journal for Num. Meth. in Eng.**, John Wiley & Sons, 50, 119-133, 2001.
  18. BORRVALL, T.; PETERSSON, J. **Large-Scale Topology Optimization in 3D Using Parallel Computing**, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000.
  19. BUGEDA, G. Estimación y Corrección del Error en el Análisis Estructural por el MEF. **Centro Internacional de Metodos Numericos en Ingenieria**, Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, Espanha, 1991.

20. BURGER, M.; STAINKO, R. **Phase-Field Relaxation of Topology Optimization with Local Stress Constraints**, 2005.
21. CANFIELD, S.; FRECKER, M. **Topology Optimization of Compliant Mechanical Amplifiers for Piezoelectric Actuators**, Struct Multidisc Optim, p. 269-279, 2000.
22. CARBONARI, R. C. **Projeto de Atuadores Piezelétricos Flexensionais usando o Método de Otimização Topológica**, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
23. CAREY, G. F. **Computational Grids: Generation, Adaptation and Solution Strategies**, Washington: Taylor & Francis, 1997, 496 p.
24. CHENG, G. D.; GUO X.  **$\epsilon$ -Relaxed Approach in Structural Topology Optimization**, Structural Optimization, v. 13, p. 258-66, 1997.
25. CHENG, G. D. **Introduction to Structural Optimization: Theory, Methods and Solution**, Lecture Notes, Dalian University of Technology, 1992.
26. CHENG, K. T.; OLHOFF, N. **An investigation Concerning Optimal Design of Solid Elastic Plates**, Int. J. Solids Structures, v. 17, p. 305-23, 1981.
27. CHENG, H. C. **The Optimal Shape/Topology Design of Structures for Dynamic Problems Using a Homogenization Method**, The University of Michigan, 1994.
28. CHICKERMANE, H.; GEA, H. C. **Design of Multi-Component Structural Systems for Optimal Layout Topology and Joint Locations**, Engineering with Computers, v. 13, p. 235-43, 1997.
29. CHO, S.; CHOI, J. **Efficient Topology Optimization of Thermo-Elasticity Problems Using Coupled Field Adjoint Sensitivity Analysis Method**, Finite Element in Analysis and Design, 2005.
30. CHRISTIE, W. C.; BETTESS, P; BULL, J. W. **Self-Designing Structures: A Practical Approach**, Engineering Computations, v. 15, n. 1, p. 35-48, 1998.

31. CHU D. N. *et al.* **On Various Aspects of Evolutionary Structural Optimization for Problems with Stiffness Constraints**, Finite Elements in Analysis and Design, v. 24, p. 197-212, 1997.
32. CONCEIÇÃO ANTÓNIO, C. A.; TORRES MARQUES, A.; SOEIRO, A.V. **Optimization of Laminated Composite Structures Using a Bilevel Strategy**, Composite Structures, 33, 193-200, 1995.
33. COSTA JR., J. C. A. **Otimização Topológica com Refinos H-adaptativos**, Tese de Doutorado, UFSC, Santa Catarina, Brasil, 2003.
34. COSTA JR., J. C. A.; ALVES, M. K. Layout Optimization with *H*-Adaptivity of Structures, **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 58(1), p. 83-102, 2003.
35. COSTA JR., J. C. A.; ALVES, M. K. Topology Optimization with *H*-Adaptivity of Thick Plates. In: **GIMC-Third Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering**, Italy, CD Rom media, 2002.
36. COX, H. L. **The Theory of Design**, Aeronaut. Res. Council Rep. No. 19791, 1958.
37. DÍAZ, A. R.; BENDSOE, M. P. **Shape Optimization of Structures for Multiple Loading Condition Using a Homogenization Method**, Structural Optimization, v. 4, p. 17-22, 1992.
38. DÍAZ, A. R.; KIKUCHI, N. Solution to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method, **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 35, p. 1487-502, 1992.
39. DÍAZ, A. R.; LIPTON, R.; SOTO C. A. **A New Formulation of the Problem of Optimum Reinforcement of Reissner-Mindlin Plates**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., v. 123, p. 121-39, 1995.
40. DUYSINX, P.; BENDSOE, M. P. Topology Optimization of Continuum Structures with Local Stress Constraints, **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 43(8), p. 1453-78, 1998.

41. DUYSINX, P.; SIGMUND O. New Development in Handling Stress Constraints in Optimal Material Distribution, In **7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Design Optimization**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Saint Louis, Missouri, EUA, paper 98/4906/1–9, 1998.
42. FOX, R. L. **Constraint Surface Normals for Structural Synthesis Techniques**, AIAA J. v. 3, n.8, p. 1517-18, 1965.
43. FRECKER, M. I. *et al.* Topology Synthesis of Compliant Mechanisms Using Multi-Criteria Optimization, **Journal of Mechanical Design**, Transaction of the ASME, 119, p. 238-245, 1997.
44. FRECKER, M.; CANFIELD, S. Optimal Design and Experimental Validation of Compliant Mechanical Amplifiers For Piezoceramic Stack, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, vol. 11, p. 360-369, 2000.
45. FUKUSHIMA, J.; SUZUKI, K.; KIKUCHI, N. **Application to Car Bodies: Generalized Layout Design of Three-Dimensional Shells**, Optimization Of Large Structural Systems, ed Rozvany, G.I.N, Doedrecht: Kluwer, p.177-191, 1993.
46. GEA, H. C. **Topology Optimization: A New Microstructure-Based Design Domain Method**, Computers & Structures, v. 61, n. 5, p. 781-88, 1996.
47. GEORGE, P. L.; BOROUCAKI, H. **Triangulation de Delaunay et Maillage: Application aux Éléments Finis**. Paris: Hermes, 1997, 432 p.
48. GEORGES, M. K.; SHEPHARD, M. S. Automated Adaptive Two-Dimensional System for the *Hp*-Version Of The Finite Element Method, **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 32, p. 867-93, 1991.
49. GIBIANSKY, L. V.; CHERKAEV, A. V. **Microstructures of Composites of External and Exact Estimates of Provided Energy Density**, Technical Report, Ioffe Science and Technology Institute, Leningrad (in Russian), (1987); Also in Kohn RV (ed.), Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials, Birkhauser, New York, USA, 1994.

50. GUEDES, J. M.; KIKUCHI, N. **Preprocessing and Postprocessing for Materials Based on The Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods**, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, v. 83, p. 143-98, 1990.
51. HABER, R. B.; JOG, C. S.; BENDSOE, M. P. **Variable Topology Shape Optimization with a Control on Perimeter**, In *Advances In Design Automation*, DE-Vol. 69-2, eds. Gilmore, B. J., Hoetzel, D. A., Dutta, D., Eschenauer, H. A., ASME, New York, p. 261-72, 1994.
52. HEMP, W. S. **Optimum Structures**, Oxford: Claredon , 1973, 123 p.
53. HINTON, E.; SIENZ, J. **Fully Stressed Topological Design of Structures Using an Evolutionary Procedure**. *Engineering Computations*, v. 12, p. 229-44, 1995.
54. KANT, T. **Numerical Analysis of Thick Plates**, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, v. 31, p. 1-18, 1982.
55. KERE, P.; KOSKI, J. Multicriterion Stacking Sequence Optimization of Composite Laminates for Maximum Failure Margins, **The 3rd World Congress of Structure and Multidisciplinary Optimization (WCSMO/3)**, Buffalo/Niagara Falls, 1999.
56. KIKUCHI, N.; CHENG, H. C.; MA, Z. D. **Optimal Shape and Topology Design of Vibrating Structures**, *Advances in Structural Optimization*, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 189-222, 1995.
57. KIKUCHI, N.; SUZUKI, K. **Structural Optimization of a Linearly Elastic Structure Using the Homogenization Method**, in: Rozvany G. editor, *Shape and Layout Optimization in Structural Design*, CISM Lecture Notes No. 325, (Springer-Verlag), p. 199-242, 1992.
58. KIRSCH, U. **Optimal Topologies of Structures**. *Appl. Mech. Rev.*, v. 42, n. 8, p. 223-39, aug. 1989.
59. KOHN, R. V.; STRANG, G. **Optimal Design and Relaxation of Variational Problem**, *Comm. Pure. Appl. Math.*, 39, p. 1-25, 139-82, 353-77, 1986.

60. KROG, L. A.; OLHOFF, N. **Optimum Topology and Reinforcement Design of Disk and Plate Structures with Multiple Stiffness and Eigenfrequency Objectives**, *Computers & Structures*, v. 72, p. 535-63, 1999.
61. LI, Q. *et al.* Shape and Topology Design for Heat Conduction by Evolutionary Structural Optimization. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 42, 3361-71, 1999.
62. LI, Y.; SAITOU, K. K.; KIKUCHI, N. **Topology Optimization of Thermally Actuated Compliant Mechanisms Considering Time-Transient Effect**, *Finite Element in Analysis and Design*, 2004.
63. LIMA, C. R., **Projeto de Mecanismos Flexíveis usando o Método de Otimização Topológica**, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
64. LUIRE, K. A.; CHERKAEV, A. V. **G-Closure of Some Particular Sets Of Admissible Material Characteristics of the Problem of Bending of Thin Plates**, *J. Optim. Theory Appl.*, v. 42, p. 305-15, 1984.
65. MA, Z. D.; KIKUCHI, N.; CHENG, H. C. **Topological Design for Vibrating Structures**, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, v. 121, 259-80, 1995.
66. MAUTE, K.; RAMM, E. **Adaptative Topology Optimization of Shell Structures**, *AIAA J.*, 35, 11, 1767-1773, 1997.
67. MAXWELL, J. C. **On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Force**, *Trans. Royal Soc. Edinb.*, vol. 26/1, 1872.
68. MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elícticos não Homogêneos)**, Instituto de Matemática – UFRJ, ISBN: 85-87674-03-X, 2000
69. MICHELL, A. G. M. **The Limits of Economy of Material in Framed Structures**, *Philosophical Magazine, Series 6*, v. 8, p. 589-97, 1904.
70. MIN, S.; KIKUCHI, N. **Optimal Reinforcement Design of Structures Under the Buckling Load Using the Homogenization Design Method**, *Struct. Engrg. Mech.*, v. 5(5), 565-76, 1997.

71. MLEJNEK, H. P.; SCHIRMACHER, R. **An Engineer's Approach to Optimal Material Distribution and Shape Finding**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 106, p. 1-26, 1993.
72. MOTA SOARES, C. M. *et al.* **A Discrete Model for the Optimal Design of Thin Composite Plate-Shell Type Structures Using a Two-Level Approach**, Composite Structures, 30, 147-157, 1995.
73. MURAT, F.; TARTAR, L. **Optimality Condition and Homogenization. In: Nonlinear Variational Problems**, Marino A. *et al.* (eds.), Boston: Pitman Advanced Publishing Program, p. 1-8, 1985.
74. NISHIWAKI, S. *et al.* **Topology Optimization of Compliant Mechanisms Using the Homogenization Method**, **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, vol 42, p. 535-559, 1998.
75. NISHIWAKI, S. *et al.* **Topology Design Considering Flexibility Under Periodic Loads**, Struct Multidisc Optim, Springer-Verlag, 19, p. 4-16, 2000.
76. OLHOFF, N.; KOG, L.; THOMSEN, J. **Bi-material Topology Optimization**, Kerskovites J., editor, Structural Optimization, 93, COPPE/UFRJ, RJ, Brasil, p. 327-334, 1993.
77. PARK, Y. K. **Extensions of Optimal Layout Design Homogenization Method**, University of Michigan, 1995.
78. PEDERSEN, P. **On Optimal Orientation of Orthotropic Materials**. Structural Optimization, v. 1, p. 101-06, 1989.
79. PETERSSON, J.; SIGMUND, O. **Slope Constrained Topology Optimization**, Int. J. Numer. Meth. Engng., v. 41(8), 1417-34, 1998.
80. PRAGER, W. A. **Note on Discretized Michell Structures**, Comput. Mech. Appl. Mech. Engrg., v. 3, n. 3, p. 349-55, 1974.
81. PRAGER, W.; ROZVANY, G. I. N. **Optimal Layout of Grillages**, Journal of Structural Mechanics, v. 5, n.1, p. 1-18, 1977.

82. QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. **Evolutionary Structural Optimization using Additive Algorithm**, Finite Element Analysis and Design, v. 34, p. 291-308, 2000a.
83. QUERIN O. M. *et al.* **Computational Efficiency and Validation of Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., v. 189, p. 559-73, 2000b.
84. RAMM, E.; KEMMLER, R.; SCHWARZ, S. Formfinding and Optimization of Shell Structures, Proc. of 'IASS-IACM 2000', **Fourth International Colloquium on Computation of Shell and Spatial Structures**, Chania, Crete, Greece, 4-7 June 2000.
85. RAMM, E.; MAUTE, K.; SCHWARZ, S. Adaptive Topology and Shape Optimization, **Fourth World Congress in Computational Mechanics-IACM, Buenos Aires**, Argentina, electronic publication-CD, 1998.
86. RONG, J. H. *et al.* Topology Optimization of Structures under Dynamic Response Constraints, **Journal of Sound and Vibration**, v. 234, n. 2: p. 177-89, 2000.
87. ROZVANY, G. I. N. **Layout Theory for Grid-Type Structures**. In: Bendsoe M. P. and Soares C. A. M. (ed): Topology design of structures, NATO ASI Series (Kluwer Academic Publishers), p. 251-72, 1992.
88. ROZVANY, G. I. N. Optimality Criteria for Grids, Shells and Arches, In Optimization Of Distributed Parameter Structures (eds E.J. Haug & J. Cea), **Proceedings of NATO ASI**, Iowa City, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan der Rijn, p. 112-51, 1981.
89. ROZVANY, G. I. N.; WANG, C. M. **Extensions of Prager's Layout Theory**, in: Eschenauer H. and Olhoff N., ed., Optimization in Structural Design (Wissenschaftsverlay, Mannheim), p. 103-10, 1983.
90. ROZVANY, G. I. N. *et al.* **Topology Optimization Using Iterative Continuum-Type Optimality Criteria Methods for Discretized Systems**, In: Bendsoe M. P.

- & Soares C. A. M. (ed): *Topology Design of Structures*, NATO ASI Series (Kluwer Academic Publishers), p. 273-86, 1992.
91. ROZVANY, G. I. N.; ZHOU, M.; SIGMUND, O. **Optimization of Topology**, In: *Advances in Design Optimization*, ed. H. Adeli, London: Chapman & Hall, p. 340-99, 1994.
  92. SANCHEZ-PALENCIA, E. **Non-homogeneous Media and Vibration Theory**, Lecture Notes in Physics, document#127, Berlin: Springer-Verlag, 1980.
  93. SANT'ANNA, H. M. **Otimização Topológica de Estruturas Bidimensionais Contínuas Submetidas a Restrições de Flexibilidade e Tensão**, Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.
  94. SCHMIT, L. A. *Structural Design by Systematic Synthesis*, Proceedings, **2<sup>nd</sup> Conference on Electronic Computation**, ASCE, New York, p. 105-22, 1960.
  95. SCHWARZ, S.; MAUTE, K.; RAMM, E. **Topology and Shape Optimization for Elastoplastic Structural Response**, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, v. 190, p. 2135-55, 2001.
  96. SIGMUND, O.; PETERSSON, J. **Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey On Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh Dependencies and Local Minima**, *Structural Optimization*, v. 16, p. 68-75, 1998.
  97. SILVA, E.C.N.; NISHIWAKI, S.; KIKUCHI, N. **Design of Piezocomposite Materials and Piezoelectric Transducers Using Topology Optimization Part II**, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol 6, N. 3, pp. 191-222.
  98. SILVA, E.C.N.; NISHIWAKI, S.; KIKUCHI, N. **Topology Optimization Design of Flexensional Actuators**, *IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control*, 47, pp. 657-671.
  99. SOTO, C. A.; DÍAZ, A. R. *Optimum Layout and Shape of Plate Structures Using Homogenization*, **Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Topology Design of Structures**, Sesimbra, Portugal, 1992.

100. SOTO, C.; DÍAZ, A. R. **On Modeling of Ribbed Plates for Shape Optimization**, Structural Optimization, v. 6, p. 175-88, 1993.
101. SOUZA, C. E. **Otimização em Dois Níveis da Orientação e da Topologia de Cascas Laminadas**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.
102. SUZUKI, K. **Shape and Layout Optimization Using Homogenization Method**, PhD Thesis, University of Michigan, 1991.
103. SUZUKI, K.; KIKUCHI N. **A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 93, p. 291-318, 1991.
104. SVANBERG, K. The Method of Moving Asymptotes – A New Method for Structural Optimization, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 359-73, 1987.
105. TAYLOR, R. L. A mixed – Enhanced Formulation for Tetrahedral Finite Elements, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 205-227, 2000.
106. TENEK, L. H.; HAGIWARA, I. **Static and Vibrational Shape and Topology Optimization Using Homogenization and Mathematical Programming**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 109, p. 143-54, 1993.
107. THOMSEN, J., **Topology Optimization of Structures Composed of One or Two Material**, Structural Optimization, p. 108-115, 1992.
108. VANDERPLATS, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications**, Boston: McGraw-Hill Book Company, 1994.
109. WILBERG, N. E.; ABDULWAHAB. **Error Estimation with Postprocessed Finite Element Solutions**. Computers & Structures. v. 64(1-4), p. 113-37, 1997.
110. XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. **Evolutionary Structural Optimization for Dynamic Problems**, Computer & Structures, v. 58, n. 6, p. 1067-73, 1996.

- 
111. YANG, R. J.; CHEN, C. J. **Stress-Based Topology Optimization**, Structural Optimization, v. 12, p. 98-105, 1996.
  112. YANG, R. J.; CHUANG, C. H. **Optimal Topology Design Using Linear Programming**, Comp. Struct., v. 52(2), 265-75, 1994.
  113. ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. **The COC algorithm, Part II: Topology, Geometrical and Generalized Shape and Optimization**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v. 89, p. 309-36, 1991.

# Apêndice A

## A.1 Descrição do Procedimento

O desenvolvimento de um projeto de otimização estrutural, de modo generalizado, pode ser dividido em três etapas: pré-processamento, processamento e pós-processamento.

Analisando o fluxograma da Fig. a.1, a fase de pré-processamento envolve duas etapas. Na etapa número 1 são definidas: o espaço de projeto, as condições de contorno, informações sobre as propriedades do material e a aproximação do domínio por uma malha de elementos finitos. Todas estas informações podem ser geradas através da interface gráfica de um pré-processador padrão. Na etapa número 2, o pré-processador utilizado gera um arquivo de entrada de dados (*input.dat*) para a próxima fase de projeto, o processamento. O arquivo de entrada de dados (*input.dat*) contém todas as informações referente as propriedades do material e a malha de elementos finitos, tais como: número de elementos, número de nós, coordenadas dos nós, conectividades, graus de liberdade dos nós e as condições de contorno.

Um código computacional foi desenvolvido e programado para a realização das etapas de número 3, 4, 5, 6, 7 e 9, ver Fig. a.1. O código programado em linguagem Fortran 90/95 teve como ponto de partida uma estrutura de programação para casos bidimensionais, desenvolvida de forma a emular uma linguagem orientada à objetos que permite a utilização de muitas classes de funções já implementadas e amplamente testadas em trabalhos anteriores, ver Costa Jr. & Alves (2003).

Para a etapa de número 8 da fase de processamento, foram utilizados dois algoritmos de programação matemática de otimização, desenvolvidos por outros grupos de pesquisa, selecionados de acordo com a performance.

Na fase de pós-processamento, número 11, assim como na fase de pré-processamento, também pode ser utilizado um pós-processador padrão para visualizar e analisar os resultados do arquivo de saída de dados (*result.dat*) gerado pelo processador.

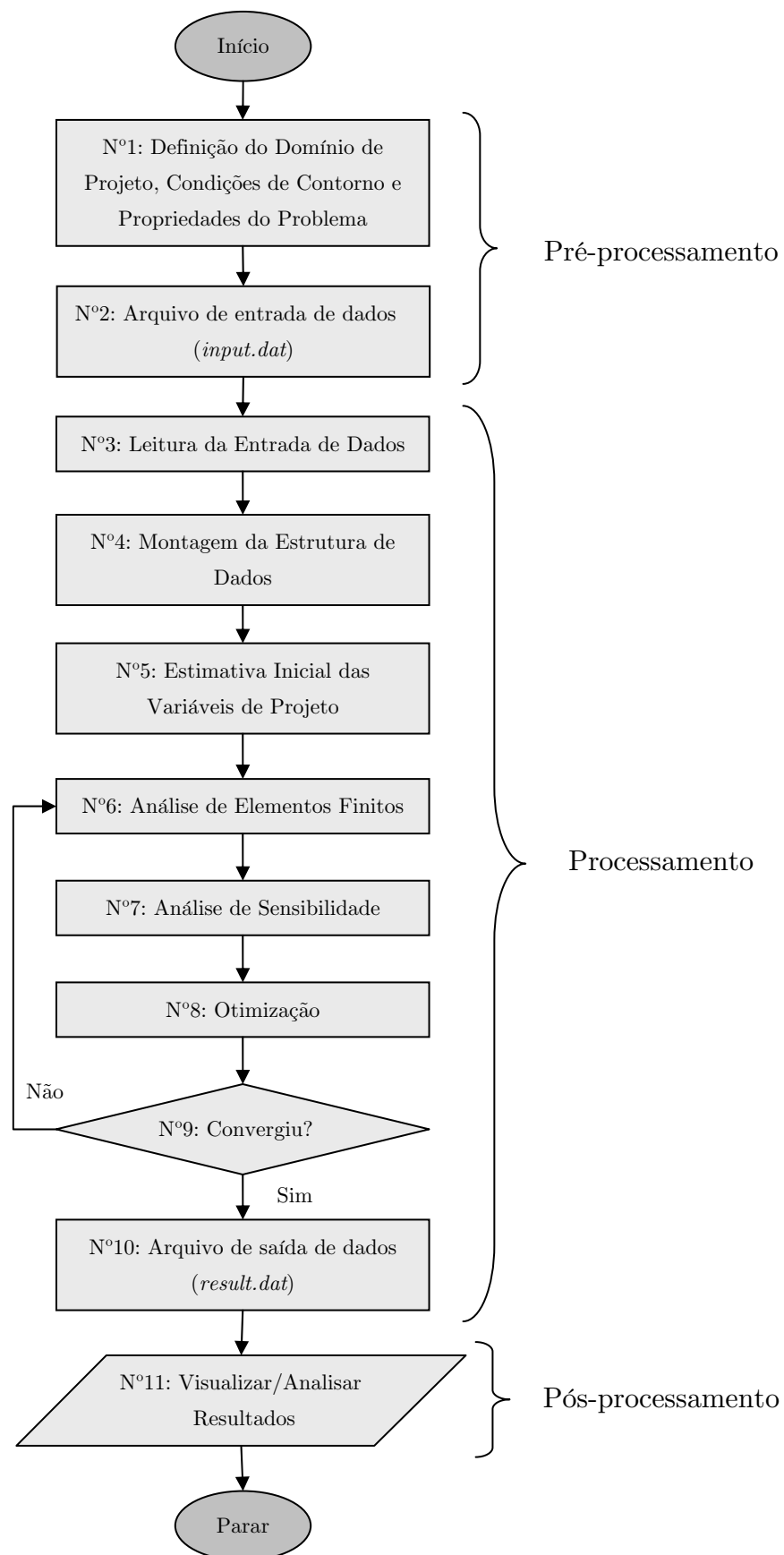


Figura a.1: Fluxograma básico do processo de otimização

## Apêndice B

### B.1 Condições Necessárias e Suficientes de Karush-Kuhn-Tucker

Em 1951, Kuhn e Tucker propuseram as condições matemáticas para um dado ponto no espaço ser considerado um ponto ótimo. Como esses critérios matemáticos haviam sido anteriormente e independentemente propostos por Karush, essas proposições passaram a ser conhecidas como condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker.

As condições necessárias e suficientes de Karush-Kuhn-Tucker, se satisfeitas, garantem que um ponto  $\mathbf{x}^*$  é realmente um ponto extremo. Em seguida, as condições que determinam um ponto como sendo de mínimo (ou máximo) são definidas para um problema de otimização sem restrições.

Para o caso que  $f(\mathbf{x})$  é um funcional tal que  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , o qual define a função objetivo,  $\mathbf{x} \in X$  um vetor que define as variáveis de projeto e considerando que  $\mathbf{x}^*$  é um ponto extremo do funcional  $f(\mathbf{x})$ . A expressão para  $f(\mathbf{x})$  pode ser aproximada no ponto  $\mathbf{x}^*$  pela expansão em série de Taylor na forma multidimensional:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} + R, \quad (\text{b.1})$$

sendo  $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ .

Reescrevendo:

$$\nabla f = \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} + R. \quad (\text{b.2})$$

Sendo assim,  $\nabla f$  deve ser não negativo, *i.e.*,  $\nabla f \geq 0$  para que  $\mathbf{x}^*$  seja um ponto de mínimo local. Dessa forma, têm-se as seguintes condições de otimalidade:

- Condição necessária de primeira ordem:

Para que  $\mathbf{x}^*$  seja um mínimo (ou máximo) local da função  $f(\mathbf{x})$ , diferenciável em  $\mathbf{x}^*$ , é necessário que:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{b.3})$$

- Condição necessária de segunda ordem:

Para que  $\mathbf{x}^*$  seja um mínimo (ou máximo) local da função  $f(\mathbf{x})$ , duas vezes diferenciável em  $\mathbf{x}^*$ , é necessário que a equação (b.3) seja satisfeita e que:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \equiv \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \quad (\text{b.4})$$

seja positiva (ou negativa) semi-definida, sendo  $\mathbf{H}$  a matriz Hessiana.

Observa-se que estas condições são apenas necessárias porque os termos de primeira e segunda ordem podem ser nulos, deixando ainda dúvida sobre a natureza de  $\mathbf{x}^*$ .

- Condição suficiente:

Seja  $f(\mathbf{x})$  duas vezes diferenciável em  $\mathbf{x}^*$  tal que a equação (b.3) esteja satisfeita e que  $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$  seja positiva ou negativa definida.

Dessa forma,  $\mathbf{x}^*$  é mínimo (ou máximo) local de  $f(\mathbf{x})$ .

## Apêndice C

Os métodos de penalidade são procedimentos que visam aproximar problemas de otimização com restrições, por problemas com formulação alternativa, tal que a solução numérica é encontrada por resolver uma seqüência de problemas de minimização sem restrições. Essa aproximação é obtida, adicionando-se à função objetivo uma parcela que estabelece uma penalidade pela violação das restrições. Esta parcela está associada a um parâmetro  $\eta_k$  que determina a severidade da penalidade.

Para descrever o processo, considera-se o seguinte problema de otimização com as seguintes restrições:

$$\min f(\mathbf{x}) \quad (\text{c.1})$$

sujeito a

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{x}) &\leq 0 & j = 1, \dots, m \\ h_i(\mathbf{x}) &= 0 & i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{c.2})$$

Transformando o problema, teremos:

$$\min \phi(\mathbf{x}, \eta_k) = f(\mathbf{x}) + \eta_k P(\mathbf{x}) \quad (\text{c.3})$$

onde  $\phi$  é a função construída pelo aumento da penalidade;  $f(\mathbf{x})$  é a função objetivo original;  $\eta_k$  é o parâmetro de penalidade, sendo  $k$  o indicador de iteração e  $P(\mathbf{x})$  a função de penalidade definida conforme o método empregado.

### C.1 Método da Função de Penalidade Exterior

No Método da Função de Penalidade Exterior a função objetivo é penalizada fora da região factível. Tipicamente, a função  $P(\mathbf{x})$  é definida por:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \left\{ \max[0, g_j(\mathbf{x})] \right\}^2 + \sum_{i=1}^n [h_i(\mathbf{x})]^2 \quad (\text{c.4})$$

Se todas as restrições são satisfeitas  $P(\mathbf{x}) = 0$ . A função construída, neste caso, pelo aumento da penalidade equivale à função objetivo original. Se uma ou mais

restrições são violadas, o quadrado dessas funções é adicionado a função  $\phi$ . As restrições são elevadas ao quadrado para assegurar que a tangente (inclinação) à função de penalidade seja nula sobre a fronteira da região factível. Com isso pode-se assegurar a continuidade da derivada da função  $\phi$ .

Nesta formulação da função penalidade, a derivada segunda da função  $\phi$  não é contínua sobre a fronteira que limita a região factível. Isto é uma possível causa de mal-condicionamento numérico para o método de minimização de segunda ordem.

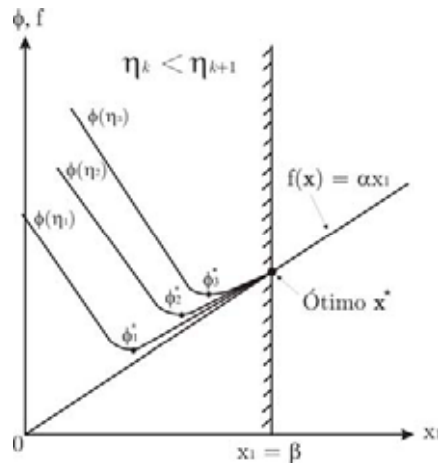


Figura b.1: Método da função de Penalidade Exterior

- **Algoritmo do Método da Função de Penalidade Exterior**

1. Entrar com o valor inicial de  $x_1$  e  $\eta_1$ . Fazer  $k = 1$ .
2. Determinar o vetor  $x_k^*$  que minimiza a função:  $\phi(x, \eta_k)$
3. Testar o ponto  $x_k^*$  se satisfaz todas as restrições. Se  $x_k^*$  é factível, ele é o ponto ótimo. Senão, seguir para o passo 4.
4. Encontrar o próximo valor do parâmetro de penalidade que satisfaz a relação:  $\eta_{k+1} > \eta_k$ . Incrementar o valor de  $k$ , com uma unidade, e seguir para o passo 2. Geralmente o valor de  $\eta_{k+1}$  é determinado de acordo com a relação  $\eta_{k+1} = c\eta_k$ , onde  $c$  é uma constante maior que 1.

## C.2 Método da Função de Penalidade Interior

No Método da Função de Penalidade Interior a função objetivo é penalizada na região factível quando o ponto  $x$  se aproxima da fronteira que limita esta região.

Tipicamente, a função  $P(\mathbf{x})$  é definida por:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{-1}{g_j(\mathbf{x})} \quad (\text{c.5})$$

mas, para se obter um melhor condicionamento matemático, a função  $P(\mathbf{x})$  pode ser determinada por:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \log[-g_j(\mathbf{x})] \quad (\text{c.6})$$

A função de penalidade interior é utilizada apenas para as restrições de desigualdade. Desta forma, a função construída pelo aumento da penalidade é definida por:

$$\phi(\mathbf{x}, \eta_k) = f(\mathbf{x}) + \eta_k \sum_{j=1}^m \frac{-1}{g_j(\mathbf{x})} \quad (\text{c.7})$$

a função de penalidade interior tende ao infinito quando  $\mathbf{x}$  tende a zero.

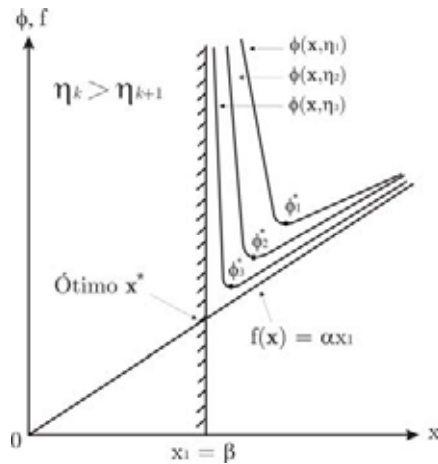


Figura b.2: Método da função de Penalidade Interior

- **Algoritmo do Método da Função de Penalidade Interior**

1. Entrar com o valor inicial factível de  $x_1$  satisfazendo todas as restrições, tal que,  $g_j(\mathbf{x}_1) < 0$  para  $j = 1, 2, \dots, m$ , e um valor inicial para  $\eta_1 > 0$ . Fazer  $k = 1$ .
2. Minimizar  $\phi(\mathbf{x}, \eta_k)$  utilizando qualquer método de minimização sem restrição e obter a solução de  $\mathbf{x}_k^*$ .

3. Testar se  $\mathbf{x}_k^*$  é a solução ótimo do problema. Se  $\mathbf{x}_k^*$  for a solução ótima, terminar o processo, Senão, seguir para o passo 4.
4. Determinar o valor do próximo parâmetro de penalidade,  $r_{k+1} = cr_k$ , com  $c < 1$ .
5. Incrementar um novo valor de  $i = i + 1$ , determinar o novo ponto  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_k^*$ , e seguir para o passo 2.

## Apêndice D

Com a aplicação do Método do Lagrangiano Aumentado, o problema de otimização de leiaute reduz-se a solução de uma seqüência de problemas de otimização com restrições de caixa, a qual é resolvida por um método de projeção de segunda ordem que usa um método de quase-Newton sem memória. Sendo assim, aqui se faz uma descrição da direção de descida adotada no algoritmo de minimização.

### D.1 Método do Gradiente Projetado

O método de projeção a ser considerado é caracterizado por iterações cujos movimentos são nas direções de descida, os quais são restringidos a residirem em domínios poliédricos. Conseqüentemente os pontos obtidos ao longo do processo iterativo são factíveis e o valor da função objetivo decresce constantemente.

Para descrever o processo, considera-se o seguinte problema de otimização com restrições do tipo caixa:

$$\min f(\mathbf{x}) \quad (\text{d.1})$$

sujeito à

$$x_i^{\text{inf}} \leq x_i \leq x_i^{\text{sup}}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{d.2})$$

Seja  $\mathbf{x}^k$  um ponto factível, da  $k$ -ésima iteração do problema de otimização, o qual tem associado  $q$  restrições de desigualdade ativas. Definem-se por restrições ativas, as restrições de desigualdade lateral que satisfazem:

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_i - x_i^{\text{inf}}| < \text{tol}g \\ \text{ou} \\ |x_i - x_i^{\text{sup}}| < \text{tol}g, \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (\text{d.3})$$

As restrições laterais podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} g_{2i-1}(\mathbf{x}) &= x_i^{\text{inf}} - x_i \leq 0; \\ g_{2i}(\mathbf{x}) &= x_i - x_i^{\text{sup}} \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{d.4})$$

daí

$$\frac{\partial g_{2i-1}}{\partial x_j} = -\delta_{ij} \quad \therefore \quad \nabla \mathbf{g}_{2i-1} = -\mathbf{e}_i ; \quad (\text{d.5})$$

$$\frac{\partial g_{2i}}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \therefore \quad \nabla \mathbf{g}_{2i} = \mathbf{e}_i . \quad (\text{d.6})$$

Define-se também a matriz  $[\mathbf{N}_q]$  composta pelos gradientes das restrições ativas, *i.e.*,

$$[\mathbf{N}_q] = [\pm \mathbf{e}_{i1} \vdots \cdots \vdots \pm \mathbf{e}_{iq}] = [\pm \nabla \mathbf{g}_{i1} \vdots \cdots \vdots \pm \nabla \mathbf{g}_{iq}]. \quad (\text{d.7})$$

O método do gradiente projetado consiste basicamente em partir de  $\mathbf{x}^k$  e determinar  $\mathbf{x}^{k+1}$  através de uma iteração do tipo direção de descida:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{s}^k \quad (\text{d.8})$$

onde  $\alpha^k$  é o comprimento do passo ao longo da direção de descida  $\mathbf{s}^k$ , associada à  $k$ -ésima iteração. Desta forma, o problema consiste principalmente na determinação de uma direção de descida  $\mathbf{s}$  que produz a máxima diminuição em  $f(\mathbf{x})$  para um passo unitário, ( $\|\mathbf{s}\|_{\mathbf{M}} = \sqrt{\langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}] \mathbf{s} \rangle} = 1$  - dependente da métrica utilizada), no subespaço das restrições ativas, *i.e.*

$$\min_{\mathbf{s}} \{ \langle \mathbf{s}, \nabla f \rangle + \mu (\langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}] \mathbf{s} \rangle - 1) \} \quad (\text{d.9})$$

sendo que  $[\mathbf{M}]$  é simétrica e positiva definida. Em adição, como o problema contém restrições, impõe-se que  $\mathbf{s}^k$  pertença à interseção dos hiperplanos associados às restrições ativas. Logo,

$$[\mathbf{N}_q]^T \mathbf{s} = \mathbf{0}. \quad (\text{d.10})$$

Como resultado, o conjunto de restrições ativas permanece ativo em  $\mathbf{x}^{k+1}$ . A direção de descida a que faremos uso será dada por

$$\mathbf{s}^k = -\frac{1}{2\mu} [\mathbf{P}_q] [\mathbf{M}]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (\text{d.11})$$

onde  $[\mathbf{P}_q]$  é o operador projeção oblíquo.

• **Determinação do operador projeção oblíquo -  $[\mathbf{P}_q]$**

A função Lagrangiana associada ao problema de minimização com restrição, definido em (d.9) e (d.10), é dada por:

$$L(\mathbf{s}, \mu, \boldsymbol{\lambda}) = \langle \mathbf{s}, \nabla f \rangle + \mu (\langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}] \mathbf{s} \rangle - 1) + \langle \boldsymbol{\lambda}, [\mathbf{N}_q]^T \mathbf{s} \rangle. \quad (\text{d.12})$$

Aplicando as condições necessárias de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker associadas ao problema obtêm-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{s} = -\frac{1}{2\mu} [\mathbf{M}]^{-1} \{ \nabla f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \}; \quad (\text{d.13})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \quad \therefore \quad \langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}] \mathbf{s} \rangle = 1; \quad (\text{d.14})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0 \quad \therefore \quad [\mathbf{N}_q]^T \mathbf{s} = \mathbf{0}. \quad (\text{d.15})$$

Agora, de acordo com as eqs. (d.15) e (d.13) deriva-se:

$$\boldsymbol{\lambda} = \left\{ [\mathbf{N}_q]^T [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{N}_q] \right\}^{-1} \left\{ [\mathbf{N}_q]^T [\mathbf{M}]^{-1} \right\} \nabla f. \quad (\text{d.16})$$

Além disso,  $[\mathbf{M}] \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1$ , substituindo o valor de  $\mathbf{s}$  dado pela eq. (d.13), tem-se que:

$$\mu = \frac{1}{2} \left\langle [\mathbf{M}]^{-1} \{ \nabla f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \}, \{ \nabla f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \} \right\rangle^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{d.17})$$

ou ainda,

$$\mu = \frac{1}{2} \left\| \nabla f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \right\|_{[\mathbf{M}]^{-1}}, \quad (\text{d.18})$$

onde

$$\| \bullet \|_{[\mathbf{M}]^{-1}} = \sqrt{\langle \bullet, \bullet \rangle_{[\mathbf{M}]^{-1}}} \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{M}]^{-1}} = [\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \quad (\text{d.19})$$

Substituindo as eqs. (d.16) e (d.18) na definição do vetor  $\mathbf{s}$  dado na eq. (d.13), obtêm-se:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2\mu} [\mathbf{P}_q] [\mathbf{M}]^{-1} \nabla f, \quad (\text{d.20})$$

onde o operador projeção oblíquo  $[\mathbf{P}_q]$ , ponderado por  $[\mathbf{M}]^{-1}$ , é dado por:

$$[\mathbf{P}_q] = [\mathbf{I}] - [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{N}_q] \left\{ [\mathbf{N}_q]^T [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{N}_q] \right\}^{-1} [\mathbf{N}_q]^T. \quad (\text{d.21})$$

sendo  $[\mathbf{I}]$  a matriz identidade.

## D.2 Aproximação quase - Newton

Aqui é considerado que a aproximação da matriz Hessiana é denotada por  $[\mathbf{M}]$ . A sua respectiva inversa  $[\mathbf{S}] = [\mathbf{M}]^{-1}$  pode ser aproximada por:

$$[\mathbf{S}_{k+1}^{\text{BFGS}}] = [\mathbf{S}_k^{\text{BFGS}}] + \left( 1 + \frac{\langle \mathbf{y}_k, [\mathbf{S}_k^{\text{BFGS}}] \mathbf{y}_k \rangle}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} \right) \frac{[\mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k]}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} - \frac{[\mathbf{d}_k \otimes \mathbf{y}_k] [\mathbf{S}_k^{\text{BFGS}}]}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} - \frac{[\mathbf{S}_k^{\text{BFGS}}] [\mathbf{y}_k \otimes \mathbf{d}_k]}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} \quad (\text{d.22})$$

se  $\langle \mathbf{d}^k, \nabla f^k \rangle \leq -(\textit{epsilon})^{1/2} \|\mathbf{d}^k\|_2 \|\nabla f^k\|_2$ , caso contrário  $[\mathbf{S}_{k+1}^{\text{BFGS}}] = [\mathbf{I}]$ . Aqui, define-se  $\mathbf{y}_k = \nabla f_{k+1} - \nabla f_k$  e  $\mathbf{d}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ .

