



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

KALINE ANDREZA DE FRANÇA CORREIA ANDRADE

UM ESTUDO SOBRE O TRATADO DA CIRCUNFERÊNCIA DE AL-KĀSHĪ (1424)

NATAL/RN

2022

KALINE ANDREZA DE FRANÇA CORREIA ANDRADE

UM ESTUDO SOBRE O TRATADO DA CIRCUNFERÊNCIA DE AL-KĀSHĪ (1424)

Tese apresentada ao PPGECEM/ UFRN, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Matemática, pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Orientadora: Prof(a). Dr(a). Bernadete Morey.

NATAL/RN

2022

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI

Catálogo de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Andrade, Kaline Andreza de França Correia.

Um estudo sobre o Tratado da Circunferência de al-Kashi (1424) / Kaline Andreza de França Correia Andrade. - 2022. 141f.: il.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Natal, RN, 2022. Orientação: Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey.

1. História da matemática - Tese. 2. Matemática islâmica medieval - Tese. 3. Tratado da circunferência - Tese. 4. al-Kashi - Tese. I. Morey, Bernadete Barbosa. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 51(091)

UM ESTUDO SOBRE O TRATADO DA CIRCUNFERÊNCIA DE AL-KĀSHĪ (1424)

Tese apresentada ao PPGECM/ UFRN,
como requisito para obtenção do título de
Doutora em Ensino de Ciências e
Matemática, pela Universidade Federal do
Rio Grande do Norte.

Aprovada em: 22 julho de 2022.

Banca examinadora

Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey
Orientadora
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

Prof. Dr. Francisco de Assis Bandeira
Membro interno
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira
Membro externo
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

Prof. Dr. John Andrew Fossa
Membro externo
UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

Prof. Dr. Severino Carlos Gomes
Membro externo
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
RIO GRANDE DO NORTE

A Matheus, Lucas (*in memoriam*) e Joás,
amores da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, em sua infinita misericórdia, por ter me dado graça e inteligência, a minha orientadora por acreditar que eu era capaz de ir até o fim, a minha rede familiar no suporte com as crianças, ao meu esposo pelo suporte emocional e compreensão, principalmente, nos momentos mais difíceis. Agradeço a todos os amigos que fiz ao longo desta jornada e todas as pessoas que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu concluísse este trabalho.

E oro para que Cristo se sinta mais e mais à vontade em seus corações, morando em vocês à medida que confiarem Nele. Que vocês aprofundem suas raízes no solo do amor maravilhoso de Deus; e que possam ser capazes de sentir e compreender, como devem todos os filhos de Deus, a largura, o comprimento, a altura e a profundidade do seu amor.

(EFÉSIOS 3.17-19).

RESUMO

Esta tese consiste em uma pesquisa documental e bibliográfica de caráter qualitativo que faz um estudo matemático, histórico e epistemológico do *Tratado da Circunferência (al-Risāla al-Muhītīyya)*, escrito pelo estudioso islâmico al-Kāshī no ano de 1424, em Samarkanda no Uzbequistão. Com este estudo, pretendemos destacar elementos do *Tratado da Circunferência* que apresentem potencialidades pedagógicas para uso em sala de aula. Compõem o nosso referencial teórico os conceitos da Teoria da Objetivação (TO), elaborada por Luis Radford e nas concepções desse autor sobre a articulação entre história da matemática e ensino de matemática e a metodologia de Análise de Textos Históricos de Matemática (ATHM), elaborada por Fumikazu Saito e colaboradores. O texto base para nossos estudos foi a tradução russa do *Tratado da Circunferência*, a partir da qual criamos uma versão de trabalho em português. Exploramos questões exteriores à referida obra tais como, seus manuscritos e traduções, aspectos historiográficos e contextuais. Também exploramos questões interiores ao tratado como aspectos matemáticos e epistemológicos por meio de uma série de estudos relacionados a cada uma das partes do tratado. Por meio de tais estudos, mostramos as potencialidades pedagógicas do *Tratado da Circunferência* que podem favorecer seu uso em sala de aula. Exemplificamos tal potencialidade por meio de duas atividades desenvolvidas conforme a Teoria da Objetivação e da simulação em um programa matemático da obtenção da aproximação de al-Kāshī para a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro.

Palavras-chave: História da Matemática; Matemática Islâmica Medieval; *Tratado da Circunferência*; al-Kāshī.

ABSTRACT

This thesis consists of a qualitative documentary and bibliographical research that makes a mathematical, historical and epistemological study of the Treatise on Circumference (*al-Risāla al-Muhītiyya*), written by the Islamic scholar al-Kāshī in the year 1424, in Samarkand, Uzbekistan . With this study, we intend to highlight elements of the Treatise on Circumference that present pedagogical potential for use in the classroom. Our theoretical framework comprises the concepts of the Theory of Objectification (TO), elaborated by Luis Radford and in this author's conceptions about the articulation between the history of mathematics and mathematics teaching and the methodology of Analysis of Historical Texts of Mathematics (ATHM), elaborated by Fumikazu Saito and collaborators. The base text for our studies was the Russian translation of the Treatise on Circumference, from which we created a working version in Portuguese. We explored issues outside the referred work, such as its manuscripts and translations, historiographical and contextual aspects. We also explore issues within the treatise such as mathematical and epistemological aspects through a series of studies related to each of the treatise's parts. Through such studies, we show the pedagogical potential of the Treatise on Circumference that can favor its use in the classroom. We exemplify this potential by means of two activities developed according to the Theory of Objectification and the simulation in a mathematical program of obtaining the al-Kāshī approximation for the relation between the length of the circumference and its diameter.

Keywords: History of Mathematics; Medieval Islamic Mathematics; Treaty of the Circumference; al-Kāshī.

RÉSUMÉ

Cette thèse consiste en une recherche documentaire et bibliographique qualitative qui fait une étude mathématique, historique et épistémologique du Traité sur la circonférence (al-Risāla al-Muhītīyya), écrit par l'érudit islamique al-Kāshī en l'an 1424, à Samarkand, Ouzbékistan . Avec cette étude, nous entendons mettre en évidence des éléments du Traité de la circonférence qui présentent un potentiel pédagogique pour une utilisation en classe. Notre cadre théorique comprend les concepts de la Théorie de l'Objectification (TO), élaborée par Luis Radford et dans les conceptions de cet auteur sur l'articulation entre l'histoire des mathématiques et l'enseignement des mathématiques et la méthodologie d'Analyse de Textes Historiques de Mathématiques (ATHM), élaborée par Fumikazu Saito et collaborateurs. Le texte de base de nos études était la traduction russe du Traité sur la circonférence, à partir de laquelle nous avons créé une version de travail en portugais. Nous avons exploré des questions extérieures à l'œuvre référencée, telles que ses manuscrits et ses traductions, ses aspects historiographiques et contextuels. Nous explorons également des questions au sein du traité telles que les aspects mathématiques et épistémologiques à travers une série d'études liées à chacune des parties du traité. A travers de telles études, nous montrons le potentiel pédagogique du Traité de la circonférence qui peut favoriser son utilisation en classe. Nous illustrons ce potentiel au moyen de deux activités développées selon la théorie de l'objectivation et la simulation dans un programme mathématique d'obtention de l'approximation d'al-Kāshī pour la relation entre la longueur de la circonférence et son diamètre.

Mots-clés: Histoire des Mathématiques; Mathématiques islamiques médiévales ; Traité de la Circonférence; al- Kashī.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esferas de análise da ATHM.	28
Figura 2 - Mapa conceitual das palavras-chave relacionadas ao Tratado da Circunferência de al-Kāshī.	30
Figura 3 - Análise de textos históricos de matemática (ATHM).....	32
Figura 4 - Estrutura Φ de uma atividade de ensino-aprendizagem na TO.	35
Figura 5 – Mapa do Califado abássida no século IX.	39
Figura 6 - Império Timúrida, regiões da Transoxiana e Khurāsān.....	43
Figura 7 - Selo em homenagem a al- Kāshī, emitido pela República do Irã em 1979.	48
Figura 8 – Mapa do Império de Timúrida.	49
Figura 9 - Selo postal da União Soviética (URSS) em homenagem a Ulugh Beg.	50
Figura 10 - Foto da Madraça de Ulugh Beg na praça Registan em Samarkanda.	53
Figura 11 – Praça Registan.....	53
Figura 12- Rota atual entre Kāshān (Irã) e Samarkanda (Uzbequistão).	54
Figura 13 - Na ordem, as imagens das páginas 1,2 e 3 do manuscrito de Mashhad.	56
Figura 14 - Início da primeira parte do Tratado da Circunferência no manuscrito de Mashhad e seu correspondente na tradução russa (conforme o manuscrito de Istambul).....	58
Figura 15 - Capa e contracapa da revista Investigação Histórica e Matemática.	60
Figura 16 – Imagem da primeira página do Tratado da Circunferência da tradução russa.	62
Figura 17 - Ilustração do raciocínio de al-Kāshī na construção do Tratado da Circunferência	73
Figura 18	75
Figura 19 - As sucessivas cordas c_n	80
Figura 20	81
Figura 21 - Lados do polígono inscrito BH e circunscrito KL.	82
Figura 22 – Equivalências entre dedo, grão médio de cevada e cabelo de cavalo. ...	86
Figura 23 - Semelhança dos triângulos HEB e LEK.....	90
Figura 24 - Sucessivas cordas c_n	93

Figura 25 - Aproximação de al-Kāshī em números sexagesimais em verso dístico.	104
Figura 26 - Aproximação de al-Kāshī em números decimais em verso dístico.	105
Figura 27 - Ilustração da demonstração do Teorema de al-Kāshī conforme Azarian (2010).	132
Figura 28 - Ilustração da demonstração do Teorema de al-Kāshī conforme Azarian (2010).	134
Figura 29 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 3 lados.	135
Figura 30 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 6 lados.	136
Figura 31 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 12 lados.	136
Figura 32 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 24 lados.	137
Figura 33 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 48 lados.	137
Figura 34 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 48 lados (detalhe).	138
Figura 35 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 96 lados.	138
Figura 36 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 96 lados (detalhe).	139
Figura 37 - Tabela do cálculo de um terço da circunferência. Fotocópia do manuscrito de Mashhad.	142
Figura 38 - Tabela de cálculo de um terço da circunferência. Tradução russa.	143

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Etapas da análise de textos históricos de matemática (ATHM) conforme Fumikazu Saito.....	29
Quadro 2 - Lista dos trabalhos de al-Kāshī.	52
Quadro 3 - Manuscritos do Tratado da Circunferencia (al-Risāla al-Muhītīyya) de al-Kāshī.	55
Quadro 4 - Traduções do Tratado da Circunferência (al-Risāla al-Muhītīyya) de al-Kāshī.	56
Quadro 5 - Títulos das partes do Tratado da Circunferência de al-Kāshī.	60
Quadro 6 - As partes e os títulos do Tratado da Circunferência de al-Kāshī.	72
Quadro 7 - Lista das proposições de Os Elementos de Euclides utilizadas por al-Kāshī no Tratado da Circunferência.	77
Quadro 8 - Relações entre as unidades de medida presentes no Tratado da Circunferência e seus equivalentes no S.I. (Sistema Internacional de Unidades).....	86
Quadro 9 - Frações sexagesimais da circunferência seiscentas mil vezes maior que a circunferência da Terra.	87
Quadro 10 - Cálculo da medida do arco α_n	93
Quadro 11 - As sucessivas cordas c_n ; $c_0 = 1$	94
Quadro 12	96
Quadro 13 – Tabela de cálculo do lado do polígono regular de 805 306 368 lados.	100
Quadro 14 – Tabela de cálculo do perímetro do polígono regular inscrito de 805 306 368 LADOS.	101
Quadro 15 – Perímetro do polígono regular circunscrito.....	103
Quadro 16 – Aproximação de al-Kāshī para a circunferência do círculo de raio 60	103
Quadro 17 - Tabela de múltiplos.	105
Quadro 18 – Texto da Atividade 1	110
Quadro 19 – Resumo do conteúdo de cada uma das partes do Tratado da Circunferência.	140

SUMÁRIO

1.	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	19
1	REFERENCIAIS TEÓRICOS	22
1.1	Análise de uma obra histórica de matemática segundo Luis Radford	23
1.2	Análise de textos históricos de matemática (ATHM) segundo Fumikazu Saito	27
1.3	A atividade conforme a Teoria da Objetivação	34
2	ANÁLISE DO TRATADO DA CIRCUNFERÊNCIA: QUESTÕES EXTERIORES AO TRATADO	36
2.1	Historiografia da matemática islâmica medieval em russo	36
2.2	Contexto de elaboração do tratado da circunferência.....	38
2.2.1	Contexto geral das ciências islâmicas.....	38
2.2.2	A Astronomia, o Islã e a Matemática.....	40
2.2.3	O Império Timúrida.....	42
2.2.4	A escola matemática-astronômica de Samarkanda	45
2.2.5	Sobre al-Kāshī, o autor do tratado	47
2.3	O nosso exemplar de trabalho	54
2.4	Anotações sobre a tradução russa.....	59
3	ANÁLISE DO TRATADO DA CIRCUNFERÊNCIA: QUESTÕES INTERIORES AO TRATADO	62
3.1	A introdução	63
3.1.1	Estudo do Excerto 1: Parte introdutória do Tratado da Circunferência	63
3.1.2	Estudo do Excerto 2: Comentário sobre a aproximação de Arquimedes	67
3.1.3	Estudo do Excerto 3: Comentário sobre a aproximação de Abu'l-Wafā al-Būzjānī	68
3.1.4	Estudo do Excerto 4: Comentário sobre a aproximação de Abu Rayhān al-Bīrūnī	68
3.1.5	Estudo do Excerto 5: Declaração do objetivo de al-Kāshī.....	69
3.1.6	Estudo do Excerto 6: Sobre a organização do Tratado da Circunferência.....	72
3.2	A primeira parte: sobre a determinação da corda de um arco, que é a soma de um arco de uma corda conhecida e do arco que é a metade de seu suplementar	74

3.2.1	Estudo do Excerto 6: Teorema de al-Kāshī.....	74
3.3	A Segunda Parte: sobre a determinação do perímetro de um polígono qualquer inscrito no círculo e do perímetro do semelhante circunscrito ao círculo	79
3.3.1	Estudo do Excerto 7: Perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito	79
3.4	A Terceira Parte: em quantas partes deve ser dividida a circunferência e até quantas casas sexagesimais são necessárias para efetuar as operações para que o perímetro obtido seja distinto do círculo dado numa grandeza menor do que um fio de cabelo	82
3.4.1	Estudo do Excerto 8: Quantidade de partes em que a circunferência deve ser dividida	82
3.4.2	Estudo do Excerto 9: Estimativa do comprimento do lado do polígono inscrito	88
3.4.3	Estudo do Excerto 10: Cálculo da medida do arco da circunferência menor que oito quartas.....	92
3.5	A Quarta Parte: sobre as operações.....	94
3.5.1	Estudo do Excerto 11: Como os cálculos foram feitos	94
3.6	A Quinta Parte: sobre a determinação de um lado do polígono de 1 2 8 16 42 48 lados inscrito na circunferência	100
3.6.1	Estudo do Excerto 13: Cálculo do comprimento do lado do regular polígono de 805 306 368 lados.....	100
3.7	A Sexta Parte: determinação do perímetro, um polígono [regular] inscrito um círculo e seu similar polígono [regular] circunscrito ao [mesmo] círculo, onde cada polígono tem 805 306 368 lados	101
3.7.1	Estudo do Excerto 14: Cálculo dos perímetros dos polígonos regulares inscrito e circunscrito	101
3.8	Da Sétima Parte até a Conclusão	104
3.8.1	Estudo 14: Arredondamento, múltiplos, versos e retomadas	104
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	108
	REFERÊNCIAS.....	113
	APÊNDICE A – EXCERTOS DO TRATADO DA CIRCUNFERÊNCIA DE AL-KĀSHĪ	119

APÊNDICE B – OUTRA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE AL-KĀSHĪ	132
APÊNDICE C - SIMULAÇÃO DA APROXIMAÇÃO DE AL-KĀSHĪ PARA A RELAÇÃO ENTRE O COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA E O SEU DIÂMETRO NO SOFTWARE MATEMÁTICO GEOGEBRA	135
APÊNDICE D – SINOPSE DO CONTÉUDO DO TRATADO DO CIRCUNFERÊNCIA DE AL-KĀSHĪ	140
ANEXO A – TABELAS DE CÁLCULO DO MANUSCRITO DE MASHHAD E DA TRADUÇÃO RUSSA	142

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Esta tese consiste em um estudo dos aspectos matemáticos, históricos e epistemológicos do Tratado da Circunferência (Em árabe: *al-Risāla al-Muhītīyya*) (1424), com vistas a apontar possíveis contribuições para o seu uso em sala de aula. O Tratado da Circunferência foi escrito pelo estudioso islâmico al-Kāshī (1380-1429) com o objetivo de obter uma melhor aproximação para a relação entre a circunferência do círculo e o seu diâmetro¹, comparada a de seus predecessores, (AL- KĀSHĪ, 1954).

Al-Kāshī obteve sua aproximação para a relação entre a circunferência do círculo e o seu diâmetro através da média aritmética entre os perímetros dos polígonos regulares de 3×2^{28} lados, inscrito e circunscrito à circunferência, usando um método de rápida convergência, com uma precisão de dezesseis casas decimais, que somente foi superada cerca de duzentos anos depois. Em tal processo, al-Kāshī apresenta uma série de procedimentos matemáticos que nos revelam a episteme vigente em seu contexto. (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999).

Embora não tenha sido direcionada especificamente a um determinado público, o Tratado da Circunferência foi elaborado em um contexto no qual surgiu a necessidade de aproximações cada vez mais precisas em relação às disponíveis na época, entre estas a de Arquimedes (287 A.C. - 212 A.C.), Abu'l-Wafā al-Būzjānī (940-998) e a aproximação de Abu Rayhān al-Bīrūnī (973-1048). As evidências indicam pelo menos dois motivos para o surgimento de tais necessidades: (1) os estudos matemáticos e astronômicos cada vez mais profícuos na madraça (tipo de universidade) e no observatório astronômico de Samarkanda, no atual Uzbequistão; (2) o cálculo cada vez mais preciso do salário correspondente à área trabalhada pelos artesãos, (DOLD-SAMPLONIUS, 1992). Para conduzir os mais diversos estudos, pesquisas e observações, tanto na madraça quanto no observatório, Ulugh Beg (1394-1449), governante de Samarkanda, reuniu cerca de sessenta dos homens mais sábios do Oriente Próximo e Oriente Médio, sob seu patrocínio, (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999).

As principais fontes que utilizamos para a elaboração da nossa tese são: (1) as traduções do Tratado da Circunferência do árabe para o russo, al-Kāshī (1954); e do árabe para o alemão, al-Kāshī (1953); (2) Berggren (2003) que nos forneceu um

¹ Cujos valor numérico é conhecido hoje pelo número irracional π (Pi).

contexto geral de elaboração do Tratado da Circunferência e nos apontou outras referências; (3) Azarian (2004, 2009, 2010) possibilitou-nos os primeiros estudos matemáticos; (4) Youschkevitch (1976) permitiu o aprofundamento dos estudos matemáticos; (5) Morey (2018) nos trouxe informações sobre o início da historiografia da matemática islâmica, em russo; (6) Matvievskaia (1993) forneceu informações sobre o papel do Uzbequistão na historiografia da matemática islâmica; Hogendijk (2009) disponibilizou informações sobre os manuscritos do tratado e (7) Ragep (2017) que nos fala sobre o dia a dia no observatório e madraça juntamente com as cartas de al-Kāshī, al-Kāshī (1960, 1997).

Os referenciais teóricos que orientaram nosso estudo são a análise de uma obra histórica de matemática conforme Radford² (2011), permeada por conceitos da Teoria da Objetivação (TO), Radford (2021); e as diretrizes de Análise de Textos Históricos de Matemática (ATHM) segundo Fumikazu Saito³ (2010, 2013A, 2013B, 2014, 2015, 2016, 2019A, 2019B).

O Tratado da Circunferência de al-Kāshī, al-Kāshī (1954), incorpora aspectos matemáticos que eram saberes amplamente difundidos na comunidade de estudiosos islâmicos, entre os quais, proposições de *Os Elementos* de Euclides, sistema de numeração decimal e sexagesimal e processos aritméticos e algébricos. Tais saberes são articulados de forma bastante engenhosa por al-Kāshī em um processo que culminou a um método próprio que está implícito ao longo do tratado. Assim, considerando que o Tratado da Circunferência possui aspectos epistemológicos, contextuais e matemáticos, nos quais enxergamos potencialidades para o seu uso em sala de aula que favoreçam aos professores uma formação mais ampla sobre a matemática, suscitamos a seguinte questão de pesquisa:

Quais conhecimentos matemáticos, contextuais e epistemológicos estão incorporados no tratado da Circunferência de al-Kāshī que podem ser alinhados a questões pedagógicas que favoreçam seu uso em sala de aula?

Tal questionamento nos levou ao seguinte objetivo geral: **Analisar o Tratado da Circunferência de al-Kāshī relacionando aspectos matemáticos, contextuais e epistemológicos, destacando suas potencialidades pedagógicas que favoreçam seu uso em sala de aula.**

² Para mais informações sobre os trabalhos de Luis Radford, acessar: <http://luisradford.ca/>.

³ Para mais informações sobre os trabalhos de Fumikazu Saito, consultar: <https://fumikazusaito.com/>.

Para alcançar nosso objetivo, estabelecemos os seguintes objetivos específicos: (1) identificar os aspectos contextuais, epistemológicos e matemáticos, do Tratado da Circunferência, potencialmente pedagógicos; (2) de acordo com os aspectos identificados, destacar as potencialidades pedagógicas da obra; por fim, (3) a partir das potencialidades pedagógicas do Tratado, apontar contribuições do estudo da obra para o uso em sala de aula.

No catálogo de Teses de Dissertações da Capes⁴ encontramos dois trabalhos relacionados à matemática islâmica, ambas dissertações do mestrado profissional, uma do ano de 2019 e outra de 2020, e nenhuma dissertação ou tese sobre o Tratado da Circunferência de al-Kāshī, assim, o nosso estudo contribui de forma inédita com a comunidade científica nacional em relação ao referido tema.

Organizamos nossa tese em seis capítulos, começando por esta Introdução, na qual apresentamos a estrutura de nosso estudo delimitando o tema, a questão norteadora, os objetivos e a fundamentação teórica que dá suporte a nossa pesquisa.

No segundo capítulo, tratamos sobre os referenciais teóricos que nortearam nossos estudos, a saber, a análise de uma obra histórica de matemática segundo Luis Radford (2011), permeada pela sua Teoria da Objetivação (TO), Radford (2021); e a Análise de Textos Históricos de Matemática (ATHM), conforme Saito (2010, 2013A, 2013B, 2014, 2015, 2016, 2019A, 2019B).

No terceiro capítulo, falamos sobre as questões exteriores ao Tratado, ou seja, sobre os aspectos historiográficos e contextuais do Tratado da Circunferência, de al-Kāshī (1954).

No quarto capítulo, procedemos ao estudo das questões interiores ao Tratado, ou seja, questões estritamente ligadas ao seu conteúdo. Organizamos essa sessão através de quinze estudos sobre excertos selecionados do tratado que chamamos de excertos. Em cada um desses estudos identificamos, explicamos e tecemos comentários sobre os aspectos matemáticos, contextuais, epistemológicos, e religiosos etc., presentes no excerto. E, para tornar esse processo ainda mais claro e acessível, quando necessário, subdividimos os excertos em partes menores que chamamos de trechos.

⁴ Fonte: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>. Acesso em: 28 maio 2022.

No quinto, capítulo apresentamos duas propostas de atividades com base no Tratado da Circunferência conforme a Teoria da Objetivação (TO). No sexto capítulo, fazemos nossas Considerações.

1 REFERENCIAIS TEÓRICOS

Neste capítulo, tratamos sobre os referenciais teóricos que adotamos para a análise do Tratado da Circunferência, entre os quais: (1) a perspectiva de análise de uma obra histórica de matemática segundo Radford (2011) e (2) a metodologia de análise de textos históricos de matemática (ATHM), segundo Saito (2010, 2013A, 2013B, 2014, 2015, 2016, 2019A, 2019B). Também tratamos sobre a elaboração de atividades conforme a Teoria da Objetivação (TO)⁵.

A perspectiva de análise de uma obra histórica de matemática, segundo Radford (2011), propõe a adoção de uma História Sociocultural da Matemática (HSM), que permite enxergar a História da Matemática (HM) como um laboratório epistemológico no qual se pode explorar a construção histórica do conhecimento matemático, também é permeada por conceitos da sua Teoria da Objetivação, Radford (2021).

A Metodologia de Análise de Textos Históricos de Matemática (ATHM), segundo Saito (2010, 2013A, 2013B, 2014, 2015, 2016, 2019A, 2019B), é guiada por uma historiografia atualizada em três esferas de análise: historiográfica, contextual e epistemológica.

Escolhemos tais referenciais por compreender que esses elementos teóricos dialogam no sentido de conceberem que o saber matemático é um produto da atividade humana e está consubstanciado a cultura que lhe serviu de berço, logo, um texto histórico matemático, não pode ser analisado fora de seu contexto. Enquanto a HSM⁶ permeada pela TO⁷ nos desperta para reflexões mais profundas nas questões

⁵ A Teoria da Objetivação (TO) é uma teoria sociocultural de ensino e aprendizagem cuja base filosófica repousa na filosofia de Hegel e no materialismo dialético subsequente desenvolvido por Karl Marx e Friedrich Engels, outras fontes igualmente importantes são Vygotsky, Leont'ev, Luria e outros psicólogos como Rubinstein. Essa base filosófica e dialética localiza a TO dentro de uma linha de pensamento na qual “[...] os seres humanos não podem ser concebidos apartados do mundo e de suas culturas.” (RADFORD, 2017, p. 229). Para mais detalhes consultar D'amore e Radford (2017) e Radford (2021).

⁶ HSM: História Sociocultural da Matemática.

⁷ TO: Teoria da Objetivação.

históricas e contextuais, a ATHM⁸ nos fornece uma metodologia de análise de textos históricos de matemática. Nas seções 2.1 e 2.2 trataremos sobre esses referenciais com mais detalhes.

1.1 Análise de uma obra histórica de matemática segundo Luis Radford

A análise de textos históricos de matemática proposta por Luis Radford, busca os aspectos históricos, sociais e epistemológicos do texto histórico, trazendo o elemento do 'ser' para esses cenários de transformações, nos quais o ser e os contextos interagem e se influenciam mutuamente, (RADFORD, 2011, 2017, 2021), em outras palavras, compreende a matemática como uma produção humana, consubstanciada à cultura onde ela está inserida.

Radford (2011) sugere um uso não ingênuo da História da Matemática com propósitos educacionais, deixando de lado uma perspectiva tradicional da História da Matemática, na qual está é concebida como uma fonte de episódios históricos, muitas vezes tratados como anedotas, ou como fonte de problemas matemáticos cronologicamente organizados que devem ser reproduzidos em sala de aula pelos estudantes. É importante frisar que, uma perspectiva histórica não é melhor nem mais importante que outras, cada uma tem o seu papel na Educação Matemática de acordo com a intencionalidade do docente.

Radford (2011) propõe a adoção de uma História Sociocultural da Matemática que permite enxergar a História da Matemática como um laboratório epistemológico, no qual podemos explorar a construção histórica do conhecimento matemático. Essa forma de abordagem pode nos auxiliar a: (1) compreender as dificuldades dos estudantes, através de uma melhor interpretação de seus erros e conceptualizações incorretas; (2) escolher novas formas de abordar e articular os conhecimentos matemáticos em sala de aula, ou seja, ressignificar as concepções dos professores em relação a determinado conteúdo matemático; (3) vislumbrar novos caminhos de pesquisa didática; (4) ter uma compreensão mais aprofundada sobre os conceitos contidos nos atuais currículos, (RADFORD, 2011).

Fazer uma pesquisa histórica em matemática, a partir de uma perspectiva sociocultural, exige que os textos antigos sejam lidos através de uma metodologia

⁸ ATHM: Análise de textos históricos de matemática.

diferente da adotada na perspectiva historiográfica tradicional. A natureza didática das perguntas a serem feitas devem trazer à tona elementos que ainda não foram tratados na historiografia da matemática, os quais não foram percebidos ou pouco valorizados. Logo, a pesquisa em História da Matemática numa perspectiva sociocultural

[...] concentra-se na investigação das raízes sociais nas quais a atividade matemática está embutida e na investigação da dimensão triádica funcional dos conceitos, problemas, e dos procedimentos da solução do problema. (RADFORD, 2011, p. 18).

Assim, para Radford, na abordagem histórico-epistemológica, a estrutura cognitiva do pensamento matemático em geral “[...] tem que ser esmiuçada, em seu ambiente social e intelectual e não pode ser verdadeiramente compreendida exceto através da fusão de fatores cognitivos e sociais.” (RADFORD, 2011, p. 19).

A abordagem sociocultural da História da Matemática adotada por Radford concebe que o ato da invenção de uma ideia matemática não provém de uma iluminação intelectual, mas sua origem deve ser pesquisada no “interior do quadro conceitual, no qual o novo objeto emerge e os elementos que permitiram pensá-lo, imaginá-lo, inventá-lo” (RADFORD, 2011, p. 49), ou seja, é necessário levar em consideração o estilo de pensamento da cultura em questão em que o texto histórico foi concebido aliado aos contextos histórico, cultural e social.

Considerando que cada época possui um contexto e estilo de pensamento próprios, não há como supor que os estudiosos do passado tivessem alguma suposição sobre os conceitos modernos, não havendo uma ligação direta entre eles como costuma afirmar a historiografia tradicional. Assim, numa perspectiva sociocultural da História da Matemática, não só as ideias que lembram as modernas são importantes, mas também aquilo que desejamos ver na história, em outras palavras, escolhemos os dados históricos de nosso interesse, sempre pautados pelo seu quadro conceitual, os quais nos fornecem uma explicação teórica desses dados, (RADFORD, 2011).

Ainda sobre a articulação entre História da Matemática e o Ensino de Matemática. Para D'enfert, Djebbar e Radford (2012) as razões que justificam lançar mão das dimensões históricas e culturais no Ensino de Matemática são: (1) como uma resposta contra a concepção que entende a matemática como uma linguagem, pois quando se considera a dimensão histórica e cultural da matemática, pode-se

apresentar a matemática como uma atividade intelectual resultante de um processo, e não como algo já concluído; (2) como uma resposta à tendência contemporânea de reduzir a matemática, no âmbito do ensino, exclusivamente ao seu aspecto utilitário, ou seja, uma concepção técnica e instrumentalista da matemática. E por fim, (3) para combater um elemento alienante na relação com a matemática demonstrado através da frequente pergunta: “Para que serve tudo isso? ”, uma espécie de “comercialização” da matemática; tais razões são em si mesmas históricas e sociais.

O recurso à História da Matemática no Ensino de Matemática também é uma importante perspectiva pela qual se pode aproximar pesquisadores em educação matemática e matemáticos. O distanciamento entre esses profissionais decorre do processo de especialização sofrida pela pesquisa em educação matemática. No entanto, o recurso à História da Matemática também faz surgir novos desafios e potencialidades, os quais podem se mostrar benéficos por poder provocar o diálogo e reflexões mais profundas entre professores de matemática, matemáticos, pesquisadores em educação matemática e matemáticos do que seja a matemática, sua história e seu ensino e aprendizagem, dentre os novos desafios e potencialidades que o recurso à História da Matemática pode trazer, temos: (1) leitura hermenêutica de fontes originais⁹; (2) pode fornecer uma oportunidade para a discussão filosófica e a compreensão histórica entre historiadores e matemáticos¹⁰; (3) as crenças dos professores sobre a matemática podem ser explicitadas e transformadas em possibilidades de crescimento e desenvolvimento conceitual¹¹; (4) mostrar uma concepção da matemática como atividade material e temporal, incorporando diversos modos de pensamento e formas de subjetividade, (RADFORD, 2014A).

Além de vislumbrar o passado através da dimensão escrita dos textos históricos, uma abordagem hermenêutica também poderia abranger a matemática como performance e desvendar a riqueza dos estilos narrativos matemáticos, (SINCLAIR, 2014). Ao levar em conta as dimensões histórica e cultural no Ensino de Matemática conhecemos a matemática de uma forma diferente da que sempre nos foi apresentada, passamos a conhecê-la como uma atividade humana em constante movimento, que possui particularidades conforme o tempo e o lugar, por isso, sempre se renova e provoca novos questionamentos. Assim, “O conhecimento é histórico no

⁹ Ver Bernard (2014).

¹⁰ Ver Fried (2014).

¹¹ Ver Furinghetti (2014).

sentido genético”, (D’ENFERT, DJEBBAR e RADFORD, 2012, p. 3), em outras palavras, está intimamente ligado às condições sociais e culturais do seu tempo, de tal forma que, não é possível separar completamente o seu antes e o seu depois, logo, não podemos nos limitar a colocar o conhecimento organizado como fatos encadeados, mas devemos

[...] integrar uma reflexão responsável pela realização da arqueologia antropológica das condições epistemológicas, sociais, culturais e políticas, que possibilitam o surgimento e a disseminação de um conceito em um dado momento. (D’ENFERT, DJEBBAR e RADFORD, 2012, p. 3).

Dessa forma, devemos nos aprofundar no contexto no qual o saber matemático foi gerado, pois o saber é consubstanciado à sociedade que lhe serviu de berço, tornando-se necessário compreender “[...] qual o papel do pensamento matemático em um dado momento na sociedade que o construiu” (D’ENFERT, DJEBBAR RADFORD, 2012, p. 3), ou seja, ao levar-se em conta a historicidade do saber, deve-se estar consciente de que todo texto histórico é produzido em um contexto social; é destinado implícita ou explicitamente a alguém e, ao abordar alguém, o texto se utiliza das normas discursivas da cultura; uma vez que ele próprio é baseado na ontologia da cultura (D’ENFERT, DJEBBAR e RADFORD, 2012). Por conseguinte, ao interpretar-se um texto histórico, especificamente, um texto histórico matemático, devemos nos preocupar em ambientá-lo no contexto histórico e social no qual foi produzido, para quem foi produzido, a linguagem utilizada, qual era a maneira de se propor um problema e o que era aceito como solução. Assim, entendemos que é necessário nos despirmos de quaisquer ideias pré-concebidas ou modernas sobre o conteúdo do texto histórico; o pesquisador deve fazer esse exercício de forma constante. Logo, o saber é em si mais histórico do que comumente imaginamos, tal entendimento configura uma

[...] concepção antropológica do conhecimento, uma concepção segundo a qual o conhecimento é mediado por sua historicidade, que se refere à cultura, porque estes estão em relação dialética: um é o modo de existência do outro. (D’ENFERT, DJEBBAR e RADFORD, 2012, p. 4, tradução nossa).¹²

¹² “[...] conception anthropologique du savoir, une conception selon laquelle le savoir se trouve médiatisé par son historicité, laquelle renvoie à la culture, car ces dernières sont en relation dialectique: l’une est le mode d’existence de l’autre.” (D’ENFERT, DJEBBAR e RADFORD, p. 4, 2012).

Desenvolvemos então, esta tese dentro dessas perspectivas, com o objetivo de disponibilizar para docentes; docentes em formação; em formação continuada; e pesquisadores, um estudo historicamente orientado de um dos textos mais importantes da matemática islâmica medieval, o Tratado da Circunferência de al-Kāshī (1954) e demonstrar que ele possui potencialidades pedagógicas para uso em sala de aula. Nesse sentido, não nos preocupamos apenas com a perspectiva do ensino e aprendizagem da matemática, mas também com a tomada de consciência de outras culturas, ressignificando o que é a matemática.

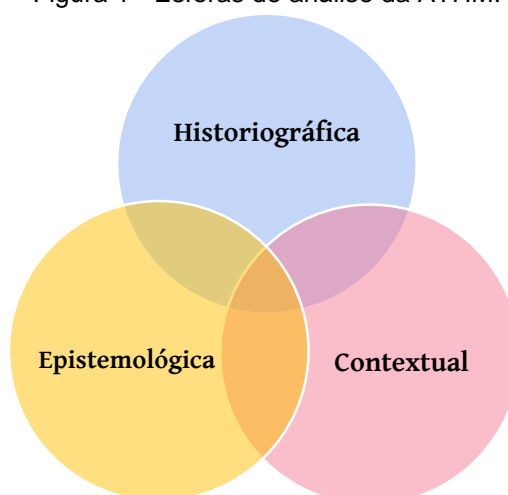
A partir do Capítulo 3, realizamos um estudo sobre o quadro conceitual e cultural no qual surgiu a ideia de al-Kāshī de obter uma melhor aproximação para a relação entre o comprimento da circunferência do círculo e o seu diâmetro, evidenciando os elementos que possibilitaram que tal ideia fosse pensada e inventada.

1.2 Análise de textos históricos de matemática (ATHM) segundo Fumikazu Saito

O processo de leitura e Análise de Textos Históricos de Matemática (ATHM) elaborada por Fumikazu Saito¹³, está de acordo com a historiografia atualizada proposta em Alfonso-Goldfarb (2006). Para esse autor, uma pesquisa em História da Ciência, em particular, uma pesquisa em História da Matemática, deve estar centrada na interface entre três esferas de análise: a historiográfica, a contextual e a epistemológica. Essa nova historiografia, de acordo com Bromberg e Saito (2010, p. 53), “busca reconstituir a história da matemática no seu contexto, levando-se em consideração não só aspectos internos, mas também externos ao desenvolvimento do conhecimento matemático.” Assim, a Análise de Textos Históricos de Matemática (ATHM) possui três esferas de análise conforme a Figura 1:

¹³ Ver: Saito (2010, 2013A, 2013B, 2014, 2015,2016, 2019A, 2019B).

Figura 1 - Esferas de análise da ATHM.



Fonte: Saito (2015).

Na esfera historiográfica analisa-se de forma crítica os trabalhos já existentes sobre o documento, o que nos auxiliou na seleção da literatura secundária. Na esfera contextual faz-se o estudo do contexto no qual o documento foi produzido; já na esfera epistemológica, observa-se os conhecimentos disponíveis na época e os seus limites de seu alcance, (SAITO, 2019B). A adoção de tal perspectiva permite-nos não recair em uma visão linear e continuísta do desenvolvimento do conhecimento e evitarmos interpretações presentistas de fatos históricos.

Orientada pelas três esferas de análise de uma pesquisa em História da Matemática, a Análise de Textos Históricos de Matemática (ATHM) possui basicamente quatro etapas esquematizadas no Quadro 1:

Quadro 1 - Etapas da análise de textos históricos de matemática (ATHM) conforme Fumikazu Saito.



Fonte: Elaborado pela autora conforme Saito (2010, 2013A, 2013B, 2014, 2015,2016, 2019A, 2019B).

Antes de prosseguir, é importante esclarecer que essas etapas orientam uma sistematização do estudo do texto, mas não são rígidas, conforme o trabalho se processa, elas naturalmente se sobrepõem.

Em todas as etapas do estudo Saito¹⁴ recomenda uma organização minuciosa com registros detalhados dos apontamentos, pode-se, portanto, fazer uso de fichas numeradas, organizadas conforme tema e assunto e, se possível, um sistema de cores para destaques/marcações. Todos os elementos a analisar devem ser observados de forma atenta e, julgando-se necessário, faz-se anotações. Assim, o pesquisador deve desenvolver seu próprio método de organização com vistas a facilitar a localização de quaisquer informações.

Conforme Saito¹⁵ na fase de “conhecendo o texto” devemos observar as características externas ao conteúdo do texto, em outras palavras, suas características físicas: o manuscrito (ou manuscritos) utilizados; material; autor; local; data; se é uma tradução ou transcrição; se possui frontispício; capa; contracapa; prefácio; introdução; carta ao leitor; dedicatória; sumário; índice; deve-se observar também se é dividido em livros ou capítulos, suas imagens, notas, entre outras características que se apresentarem, em nossa pesquisa. Tais características

¹⁴ Ver: Saito (2010, 2013A, 2013B, 2014, 2015,2016, 2019A, 2019B).

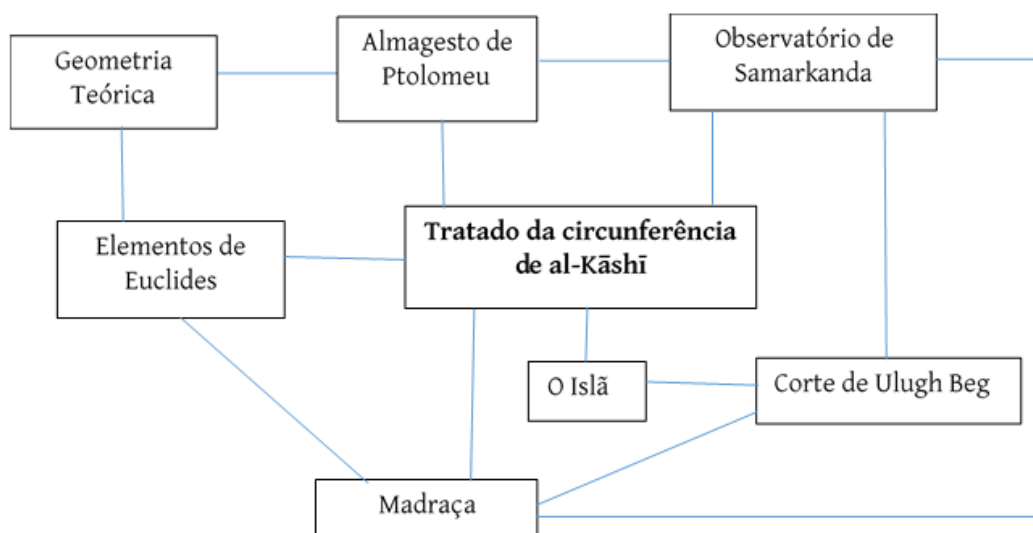
¹⁵ Ver: Saito (2010, 2013A, 2013B, 2014, 2015,2016, 2019A, 2019B).

relativas ao Tratado da Circunferência de al-Kāshī (1954) estão no Capítulo 3. Deve-se também fazer um “sobrevoo” rápido sobre as partes do texto; deve-se buscar captar a ideia principal do texto.

Um segundo ponto nessa etapa é fazer um levantamento bibliográfico de estudos que tratem de forma direta ou indireta tanto do texto em análise, como do assunto por ele abordado, inclusive do mesmo autor, deve-se fazer uma lista dos artigos, livros, capítulos de livros, dissertações, teses, anais, etc.; deve-se considerar fazer fichamentos e resumos sobre tais textos. Por fim, estabelecer palavras-chaves ligadas ao texto. Diante disso, consideramos particularmente interessante organizar essas palavras em forma de mapa conceitual, pois, percebemos que favorece a visualização da extensão e limites dos elementos relacionados ao assunto principal do texto em análise, evitando-se um demasiado afastamento de sua questão principal e o esquecimento de pontos fundamentais ao seu entendimento.

Na Figura 2, apresentamos o mapa conceitual das palavras-chaves relacionadas ao Tratado da Circunferência de al-Kāshī (1954) que delimitaram nossos estudos. O mapa conceitual nos permitiu estabelecer o arco de pesquisa ao qual deveríamos perseguir para a construção do nosso trabalho.

Figura 2 - Mapa conceitual das palavras-chave relacionadas ao Tratado da Circunferência de al-Kāshī.



Fonte: Elaborado pela autora.

Observando as ligações entre as palavras-chaves, percebemos que o Islã exerceu fundamental influência sobre a corte de Ulugh Beg que construiu o observatório de Samarkanda e a madraça, conseqüentemente, o islamismo marca presença no tratado que também é profundamente influenciado pelas proposições de *Os Elementos* de Euclides e o *Almagesto* de Ptolomeu que compõem a geometria teórica da época ditada pela matemática grega.

Último elemento importante na fase de conhecer o texto, segundo Saito¹⁶, é fazer um movimento de “ida e volta” entre o texto e o estudo da literatura secundária, mas sem perder de vista que as informações da literatura secundária não devem influenciar a leitura do texto em análise, pois, é este último o farol que guia a leitura, enquanto que a literatura secundária é um complemento.

Iniciando-se a fase de leitura do texto, temos a pré-leitura, Saito recomenda uma leitura rápida com vistas a compreender a estrutura do texto e ter uma ideia geral dos assuntos abordados, analisando, por exemplo, o índice ou sumário para obter informações sobre a organização. A introdução ou a apresentação pode indicar as intenções e o público alvo. A observação de títulos e subtítulos fornecem mais informações sobre o tema abordado e, nesta fase já é possível descobrir a ideia principal do texto. É importante fazer anotações e apontamentos.

Na leitura crítica deve-se buscar e sublinhar no texto definições, ideias e outros elementos técnicos (matemáticos e científicos) essenciais e fazer seu fichamento transcrevendo-o integralmente tal qual está no texto, acrescentando informações sobre este como: autor, título, ano, página etc., deve-se sintetizar e esquematizar as principais ideias.

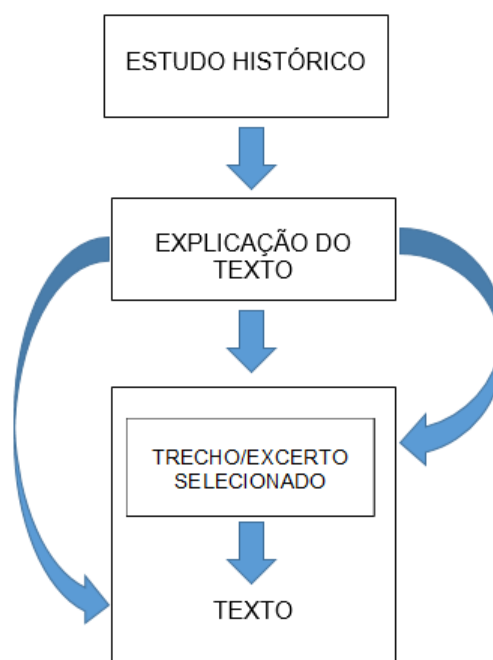
Posteriormente, busca-se estudos que tratem do texto ou do assunto abordado pelo texto (literatura secundária) ou biografia científica sobre o autor do texto em questão, ou ambos, mas, deve-se considerar que o ponto mais importante desta etapa é fichar somente o que está ligado ao texto diretamente, (SAITO, 2010, 2013A, 2013B, 2014, 2015, 2016, 2019A, 2019B).

Na última fase de leitura, a leitura crítica, consiste de uma leitura aprofundada, na qual deve-se esquadriñar as palavras, noções, esclarecer os objetos de discussão, etc., (SAITO, 2010, 2013A, 2013B, 2014, 2015, 2016, 2019A, 2019B).

¹⁶ Ver: Saito (2010, 2013A, 2013B, 2014, 2015, 2016, 2019A, 2019B).

A leitura analítica consiste de uma preparação para a explicação do texto objeto da Análise de Textos Históricos de Matemática (ATHM). Essa etapa tem por objetivo explicar o texto através da análise de uma passagem selecionada, Figura 3, pois, como não é possível analisar todo o texto de uma vez, deve-se selecionar um excerto do texto que se quer melhor investigar, este será abordado para subsidiar a construção da articulação entre História e Ensino de Matemática.

Figura 3 - Análise de textos históricos de matemática (ATHM).



Fonte: Elaborado pela autora conforme Saito (2010,2013A,02013B, 2014, 2015, 2016, 2019A, 2019B).

No Capítulo 4, implementamos este processo em quatorze estudos a partir de excertos do Tratado da Circunferência de al-Kāshī. No Capítulo 5, a partir de dois desses estudos, desenvolvemos duas atividades conforme a TO e uma simulação da aproximação de al-Kāshī (Apêndice C) no *software* matemático Geogebra, com o intuito de exemplificar as potencialidades pedagógicas do referido tratado.

Para o estudo de Al-Kāshī (1954), por compreender que essas duas perspectivas se complementam, associamos a análise de textos Históricos de Matemática segundo Radford (2011) e a Análise de Textos Históricos de Matemática (ATHM) conforme Saito¹⁷: enquanto a perspectiva de Radford nos leva a desenvolver um olhar mais apurado sobre questões socioculturais e a forma como estas atuam

¹⁷ Ver Saito (2010, 2013A, 2013B, 2014, 2015,2016, 2019A, 2019B).

sobre seus atores e vice-e-versa; a ATHM nos traz uma estrutura, um “passo-a-passo” para a análise desse texto histórico, guiada por uma nova historiografia; também nos traz uma especial preocupação com questões epistemológicas. Tal processo de atrelar essas duas perspectivas se evidencia nos capítulos 3 e 4.

O capítulo 3 trata dos aspectos exteriores ao conteúdo do tratado como: características físicas do texto, questões historiográficas e contextuais gerais. No capítulo 4, tratamos sobre aspectos interiores ao tratado, ou seja, ligadas diretamente ao seu conteúdo, entre elas, questões históricas, epistemológicas e matemáticas.

Seguindo a metodologia da ATHM com suas esferas de análise (historiográfica, epistemológica e contextual) e a perspectiva de análise sociocultural de textos históricos de Radford, realizamos os seguintes passos na elaboração de nossa análise do Tratado da Circunferência de al-Kāshī: a fase de “conhecendo o texto”; a “pré-leitura”, na qual algumas das perguntas feitas na fase anterior foram respondidas pelo próprio texto como, por exemplo, os valores das medidas do diâmetro e do comprimento da Terra. Outras perguntas que ficaram também sem resposta foram respondidas por meio de fontes secundárias (outros textos do próprio autor) e/ou literatura secundária (textos de outros autores relacionados ao tema), por exemplo: a circunferência do universo é a mesma coisa que cinturão do zodíaco a qual equivale a seiscentas mil vezes a circunferência da Terra.

Na segunda etapa de leitura, para poder “explicar o texto” de forma mais profunda, recorreremos a fontes secundárias como al-Kāshī (1427) (*A Chave para a Aritmética*, “*miftāh al-hisab*”) que nos ajudou na compreensão dos conhecimentos matemáticos mobilizados no Tratado da Circunferência de al-Kāshī, principalmente nos cálculos com sexagesimais que finalmente nos fizeram compreender os princípios envolvidos em várias tabelas de cálculos. Também consultamos al-Kāshī (1997) e al-Kāshī (1960) que são duas cartas que al-Kāshī escreveu de Samarkanda para seu pai que permaneceu em Kashān, essas fornecem importantes informações sobre o dia a dia do círculo científico de Samarkanda durante o governo do príncipe Ulugh Beg.

Na terceira etapa de leitura recorreremos a literatura secundária como: Aydin e Hammoud (2015), Berggren (2003), Djebbar (2013), Fazlioğlu (2008), Hogendijk (2009), Joseph (2011) e Yushkiévitch (1976) para elucidar as dúvidas que as fontes secundárias não conseguiram sanar tanto a respeito do conteúdo matemático da obra, como em relação a compreensão do contexto social, histórico, político, econômico e religioso.

1.3 A atividade conforme a Teoria da Objetivação

A atividade (labor conjunto – o labor conjunto de professores e alunos), conforme a TO, ocupa um papel mediador na transformação do saber em conhecimento pois as formas de pensamento e ação histórica e culturalmente estabelecidas não podem ser vistas de forma direta, o saber não mostra a si mesmo, não pode ser sentido, tocado e transmitido “Para que o saber seja algo que possa ser percebido ou sentido pela consciência humana, ou seja, para que seja inteligível, os indivíduos precisam *fazer* algo.” (RADFORD, 2022, p. 122). Sendo assim, através do labor conjunto, da atividade intelecto-material, o saber é materializado em forma de conhecimento, o saber então é materializado em “[...] algo que podemos perceber, sentir: algo que pode ser apreendido pela consciência humana. ” (RADFORD, 2021, p. 76).

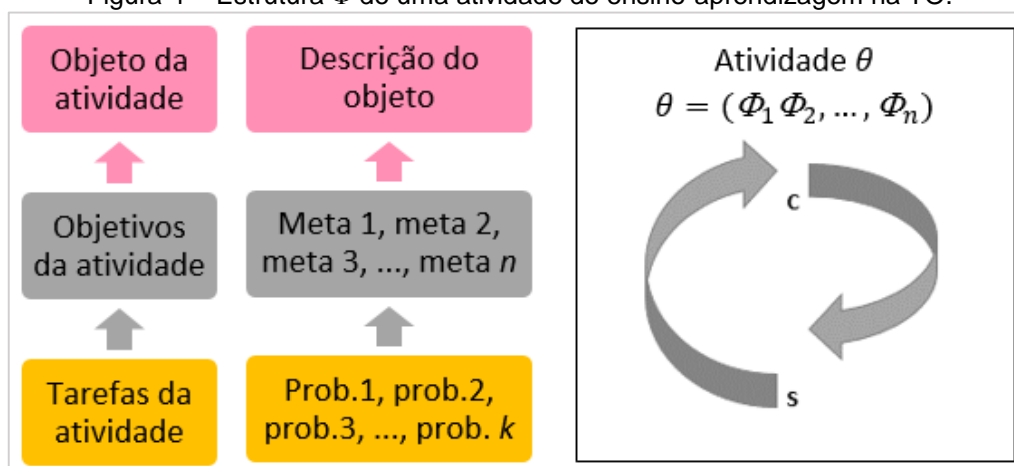
Esse papel mediador da atividade na transformação do saber em conhecimento a faz elemento central para a investigação dos processos de objetivação¹⁸, tal investigação se ocupa em como as formas de pensamento e ação estabelecidos cultural e historicamente se tornam objetos de consciência nos estudantes, (RADFORD, 2021). Averiguamos, então, que a análise dos processos de objetivação investiga a aprendizagem, pois aprender “É o complexo encontro com o saber e sua transformação subjetiva em um objeto da consciência. ” (RADFORD, 2021, p. 110).

Considerando a importância da atividade no ensino-aprendizagem, conforme a Teoria da Objetivação, a importância da atividade no ensino-aprendizagem... não pode ser concebida de forma aleatória, assim, a atividade de ensino-aprendizagem na Teoria da Objetivação possui dois componentes: o primeiro é a organização didática (seleção e estruturação dos problemas etc.); o segundo componente é relativo a própria atividade no sentido materialista dialético adotado pela TO, onde a atividade é concebida como muito mais que a simples interação entre pessoas e artefatos, mas como um modo de vida, algo criado para a busca de solução de um problema não individualmente, mas com o outro, (RADFORD, 2021).

¹⁸ “Nosso encontro com sistemas de pensamento histórico-culturais (matemático, científico, estético, legal, etc.) [...]” (RADFORD, 2021, p. 100).

O componente didático da atividade, também chamado de componente Φ (*phi*), possui três elementos, Figura 4: o objeto, o(s) objetivo(s) e a(s) tarefa(s); é baseado na estrutura objeto-objetivo-tarefa foi proposta por Leont'ev (1978) em um contexto mais amplo. A estrutura de Leont'ev permite perceber as diversas camadas da intenção pedagógica da atividade e do ensino-aprendizagem, além desses elementos a TO acrescenta a análise epistemológica do conteúdo matemático, (RADFORD, 2021).

Figura 4 - Estrutura Φ de uma atividade de ensino-aprendizagem na TO.



Fonte: Elaborado pela autora com base em Radford (2022).

O objeto da atividade é selecionado pelo professor e é parte do seu projeto didático (por exemplo, pode ser o encontro dos estudantes com formas histórico-culturais de calcular o comprimento de uma circunferência); para que a atividade se mova em direção ao objeto estabelecido é necessário traçar objetivos e, para alcançar tais objetivos, uma tarefa específica deve ser elaborada, a qual deve ser composta por uma série de problemas de nível de dificuldade crescente para preservar a unidade conceitual e contextual¹⁹ da atividade, tais problemas devem levar à elaboração de perguntas e/ou a formulação de ações. A intenção é que os problemas da tarefa levem os estudantes a realizarem determinadas ações-chave, (RADFORD, 2022). As setas na Figura 24 são para cima porque o foco da tarefa é o objeto da atividade.

¹⁹ "Unidade é conceitual e contextual, na medida em que oferece um contexto para dotar os problemas de sentido, e permite uma inter-relação da dimensão conceitual dos problemas. Uma de suas vantagens é trazer para o mesmo contexto, vários objetos matemáticos para que os estudantes possam estabelecer uma relação clara entre esses objetos e suas interconexões [...], evitando assim uma imagem fragmentada da matemática." (RADFORD, 2022, p. 176).

Quanto a execução da tarefa não necessariamente deve ser executada em um único dia, pode ser estendida por mais tempo e deve-se fomentar as formas de colaboração humana entre as quais incentivar o debate e a recepção de novas ideias por meio do “desenvolvimento do posicionamento crítico, senso de responsabilidade, solidariedade e cuidado com o outro.” (RADFORD, 2022, p. 180).

A atividade na TO é um processo fluido, passível a mudanças, é um processo que materializa o saber em algo inteligível. Na prática, a elaboração da atividade segue os seguintes passos: (1) destacar um trecho potencialmente didático; (2) eleger a intencionalidade; (3) elaborar problemas e ações; (4) repensar as tarefas (os enunciados) com vistas ao labor conjunto; (5) repensar a intencionalidade e os objetivos com vistas à coleta e análise de dados; e (6) a aplicação.

Nas Subseções 5.1 e 5.2 apresentamos duas propostas de atividade com vistas a demonstrar as potencialidades didáticas do Tratado da Circunferência de al-Kāshī.

2 ANÁLISE DO TRATADO DA CIRCUNFERÊNCIA: QUESTÕES EXTERIORES AO TRATADO

Neste capítulo, iniciamos a análise do texto pelos aspectos exteriores ao seu conteúdo, entre os quais: a historiografia da matemática islâmica medieval em russo, o papel do Uzbequistão e dos estudiosos soviéticos na historiografia da matemática islâmica medieval, o contexto da elaboração do Tratado da Circunferência, de al-Kāshī (envolvendo questões históricas, políticas, sociais e religiosas), questões historiográficas relativas ao tratado, os critérios de escolha sobre qual tradução do tratado utilizamos, algumas observações sobre a tradução russa e o processo de tradução do russo para o português na construção da versão de trabalho.

2.1 Historiografia da matemática islâmica medieval em russo

É consolidada a ideia de que estudiosos medievais do Oriente Próximo e Oriente Médio contribuíram substancialmente para o desenvolvimento das ciências matemáticas. De maneira semelhante, a Ásia Central, particularmente o Uzbequistão, ocupa um papel importante na história da matemática islâmica medieval, o conhecimento desse fato levou pesquisadores da outrora União Soviética a se dedicarem ao resgate de obras e a tradução destas para línguas então faladas no país

dos soviéticos, ou seja, muitas das obras podem ser atualmente encontradas em russo, mas não apenas em russo, (MATVIEVSKAYA, 1993).

Um número crescente de traduções de tratados matemáticos árabes e persas, biografias, estudos gerais etc., tem contribuído para a concepção geral sobre a evolução da matemática medieval no Oriente Médio, no Oriente Próximo e Ásia Central; dentre os mais ativos nesse processo estão os historiadores da matemática do Uzbequistão. Os estudos intensivos sobre esses aspectos se iniciaram antes da primeira guerra mundial. Em 1908-1909, o historiador, orientalista e arqueólogo Vasily Lavrentievich Vyatkin descobriu as ruínas do observatório astronômico do estudioso Ulugh Beg em Samarkanda.

Arqueólogos e astrônomos começaram a explorar as ruínas do Observatório de Ulugh Beg em Samarkanda e a buscar no Oriente Próximo e Oriente Médio documentos e trabalhos relacionados à equipe de Ulugh Beg; à medida que essas obras eram encontradas começavam a ser analisadas²⁰. De acordo com Morey (2018), Kari-Nyázov²¹ publicou uma monografia que se tornou referência sobre o tema “A escola astronômica de Ulugh Beg”, na qual além de analisar as tabelas astronômicas de Ulugh Beg, Kari-Nyázov caracteriza os membros do círculo científico de Ulugh Beg.

Outros nomes de destaque que se envolveram nas pesquisas sobre o Observatório de Samarkanda são o ucraniano Adolph Pavlovich Yushkiévitch (1906-1993) e o russo Boris Abramovitch Rozenfeld (1917-2008). Yushkiévitch e Rozenfeld traduziram e publicaram textos originais, escreveram e publicaram artigos, incentivaram e organizaram um grupo de pesquisadores soviéticos, assim, a partir dos anos 1950, houve uma série de publicações relativas a obras de matemáticos e astrônomos da Ásia Central e progressivamente a lacuna existente sobre a História da Matemática islâmica medieval vem sendo preenchida, (MOREY, 2018).

Nos referimos a pesquisadores soviéticos e não somente a uzbeques pois o Uzbequistão foi uma das quinze repúblicas que constituíram a URSS (União das Repúblicas Socialistas Soviéticas) que existiu entre 1922 e 1991.

Um dos primeiros artigos publicados em russo sobre o tema foi *O matemátike naródov Srédnej Ázii v IX-XV viéka* (sobre a matemática dos povos da Ásia Central

²⁰ Mais detalhes em Matvievskaya (1993).

²¹ Para mais detalhes, ver KARI-NIYÁZOV T. N. *Astronomícheskaya Shkola Ulugh Beka*. Moscou: Izdatelstvo Akademya Naúk URSS, 1950.

nos séculos IX-XV) (1951) de Yushkiévitch. Nesse artigo, o autor conclama a comunidade de pesquisadores a se dedicar aos estudos da matemática islâmica medieval sob o argumento de que embora a língua científica oficial da época fosse o árabe, na verdade pouco os árabes contribuíram para o progresso da ciência ou a matemática, mas quem sempre esteve na vanguarda do desenvolvimento das ciências foram os sábios das regiões da Ásia Central e transcaucásia: khorezmianos, tadjiques, uzbeques, azerbaijanos etc. Assim, por essas regiões fazerem parte da URSS, os alcances dos matemáticos da Ásia Central deveriam chamar a atenção dos historiadores soviéticos da ciência, (MOREY, 2018).

Boa parte dos trabalhos sobre a matemática islâmica medieval foram publicados na segunda metade do século XX, no periódico *Istóriko-Matematícheskie Issledovâniya* (Investigações Histórico-Matemáticas) que é o periódico de referência em russo sobre História da Matemática. Foi nele que encontramos a tradução russa do Tratado da Circunferência de al-Kāshī, feita por Rozenfeld e Yushkiévitch, objeto de estudo desta tese. Dentre os historiadores quem mais se destaca é Yushkiévitch, autor de diversas obras, entre elas o livro que até hoje é referência nos estudos sobre a matemática islâmica medieval, *Les mathématiques arabes (VIII-e XV-e siècles)*²², correspondente ao terceiro capítulo da obra *História da Matemática na Idade Média*²³ também de sua autoria, (MOREY, 2018).

2.2 Contexto de elaboração do tratado da circunferência

Nesta seção, tratamos sobre questões exteriores ao conteúdo do Tratado da Circunferência de al-Kāshī no sentido de explorar o contexto de sua elaboração. Para isso, vamos abordar os seguintes elementos: o contexto geral de nascimento das ciências islâmicas, o

papel do Islã no desenvolvimento da astronomia e da matemática; o império timúrida; a escola matemática-astronômica de Samarkanda e, finalmente, conhecer sobre a vida e obra de al-Kāshī.

2.2.1 Contexto geral das ciências islâmicas

²² YUSHKIÉVITCH, A. *Les mathématiques arabes (VIII-e XV-e siècles)*. Translated by M. Cazenave and K. Jaouiche, with preface by R. Tanton. Paris (Vrin). *Historia Mathematica*, v. 6, n. 3, 1979. p. 337.

²³ YUSHKIÉVITCH, A. *Istoriya Matematiki v srednie viéka*. Série *Matematika do epokhi vozrojdeniya*, 1961.

Entre o final do século VI e início do século VII surgiu na península arábica uma religião monoteísta chamada Islã gerada por um movimento social da classe média de comerciantes em protesto à aristocracia dominante de Meca, esta nova religião alcançou diferentes públicos, desde beduínos nômades a tribos de comerciantes das cidades. O Islã firmou-se como a base ideológica tanto para o Estado centralizado criado pelo seu fundador, Muḥammad ibn ‘Abd Allāh (570-632 EC) (ou Maomé), quanto para os territórios extensos que seriam conquistados por seus sucessores, (WUSSING, 1998). O império islâmico se estendeu do Oriente Próximo, grande parte da Ásia Central, todo o norte da África e Península Ibérica, Figura 5.

Sob a dinastia abássida (750 E.C. até meados do século XIII), o desenvolvimento das ciências teve seu período de maior prosperidade, com destaque para o período de 750 E.C. até o século X quando Bagdá foi estabelecida e consolidada como um renomado centro científico e administrativo.

Figura 5 – Mapa do Califado abássida no século IX.



Fonte: <https://www.britannica.com/place/Caliphate>. Acesso em: 01 ago. 2022.

No Mapa acima, temos o Império Islâmico em sua extensão máxima sob o auspício da dinastia abássida que assumiu o controle após retirarem do poder a dinastia omíada, a qual ficou restrita à Península Ibérica. Mas o que levou o período abássida a tanto desenvolvimento? Enxergamos, pelo menos, dois fatores que

contribuíram para tal: questões econômicas e a diversidade cultural. As questões econômicas referem-se ao alto nível das técnicas de irrigação das terras, o artesanato e o comércio nas cidades. Tais questões aliadas à diversidade de povos do Estado abássida (que era bem tolerante com as diferenças culturais e religiosas) e os seus conhecimentos especializados sobre artesanato e ciências, contribuíram para o desenvolvimento de uma nova cultura e ciências islâmicas. Devido a essa diversidade de povos, torna-se mais adequado chamar de cultura e ciência islâmica, e não cultura e ciência árabe, pois o termo árabe está ligado a uma única etnia, àquela da península arábica. (WUSSING, 1998).

A diversidade de povos e culturas entrelaçada à cultura árabe e ao Islã, que culminou numa nova cultura e ciência islâmica, garantiu, segundo Wussing (1998), o desenvolvimento das ciências em algumas dinastias locais mesmo após o fim da dinastia abássida, entre elas os buídas no Iraque, os fatímidas no Egito, os samânidas, várias dinastias turcas na Ásia Central e os califados omíadas na Espanha e no noroeste da África. No século XIII, esses reinos chegaram ao fim pelos ataques do exército mongol sob o comando de Gengis Khan à leste, e, na Espanha, a oeste, pela reconquista cristã.

No entanto, a leste, com a conversão dos mongóis à fé islâmica e sob influência chinesa, as ciências experimentaram um certo renascimento. Por fim, nos séculos XV e XVI, a maioria das regiões islâmicas caiu sob o domínio dos otomanos e, embora em algumas áreas a tradição existente tenha sido continuada e parcialmente revivida, no geral, não conseguiu acompanhar o desenvolvimento que estava ocorrendo na Europa, (WUSSING, 1998).

2.2.2 A Astronomia, o Islã e a Matemática

De acordo com Djebbar (2013), no período pré-islâmico, a astronomia árabe²⁴ fundamentava-se na observação e na experiência e por isso estava ao alcance de todos, podendo ser denominada de astronomia popular; envolvia o conhecimento das estações do ano, fenômenos meteorológicos, movimento das estrelas e planetas, contagem do tempo e o deslocamento aparente do sol e da lua. Mas, com o

²⁴ Wussing (1998) usa os termos ciência islâmica e astronomia islâmica, devido ao predomínio da religião islâmica. Por outro lado, Djebbar (2013) usa os termos ciência árabe e astronomia árabe pois para este autor, a denominação mais correta seria dada pela língua em que foram escritas as obras, o árabe.

surgimento do islã a sociedade islâmica desenvolveu uma relação profunda com a astronomia devido a três elementos fundamentais desta religião: (1) a determinação exata da visibilidade da lua crescente, a qual marca o início de cada mês²⁵, (2) a *Qibla* (encontrar a direção de Meca de onde quer que se esteja); (3) o horário das cinco orações diárias. Esses três preceitos geraram a necessidade de que os fiéis ao Islã buscassem soluções de problemas difíceis com os limitados recursos disponíveis; tais necessidades impulsionaram o desenvolvimento da astronomia. Assim, além dos astrônomos, a astronomia tornou-se uma preocupação de governantes, ricos patrocinadores e da população em geral; desta forma, do século VIII ao século XV a astronomia assumiu um lugar de destaque em relação as demais áreas de conhecimento que se desenvolveram na civilização islâmica.

Assim, a astronomia teve seu campo de atuação ampliado e não se limitava apenas a resolver problemas ligados ao islã, mas também ajudava a resolver problemas ligados ao futuro por meio da Astrologia (um bom astrólogo era, antes de tudo, um bom astrônomo), embora houvesse opositores esta prática; também respondia a problemas internos à astronomia e a outras áreas de conhecimento. A Astronomia também oferecia soluções a problemas de ordem prática, atendendo a solicitações do governo como a fabricação de instrumentos astronômicos, contagem do tempo e elaboração de calendários, (DJEKBAR, 2013).

Os astrônomos islâmicos viveram um período chamado de fase de assimilação na qual, por meio de recálculos, verificavam os parâmetros e modelos teóricos herdados dos persas, gregos e indianos. Este processo culminou no aperfeiçoamento de ferramentas matemáticas que iam sendo conhecidas e o desenvolvimento de novas. Outro resultado foi a escrita de novos textos, entre eles: detalhadas descrições das constelações e posições das estrelas, mapas celestes, modelos planetários e tabelas astronômicas. Desta forma, surgiu a necessidade da construção de observatórios astronômicos e de instrumentos astronômicos com o objetivo de obter medições cada vez mais precisas, (DJEKBAR, 2013).

Dentro do numeroso grupo de estudiosos islâmicos que merecem destaque podemos citar: dos séculos VIII e IX, Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, Ahmad ibn Muhammad al-Farghānī e Habash al-Hāsib al-Mazwī; do século X, o filósofo Abu Nasr Muhammad al-Fārābī (873-950), o enciclopedista Ibn Sīnā (980-1037), Abu

²⁵ Os muçulmanos adotam o calendário lunar e para eles a fase da lua crescente representa renovação sendo inclusive um de seus principais símbolos.

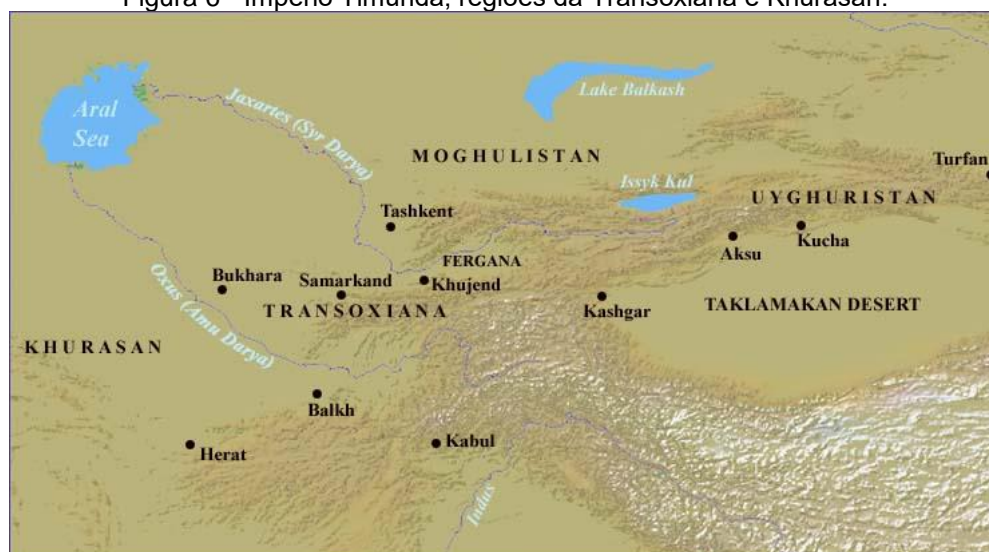
Rayhān al-Bīrūnī (973-1048), o matemático e astrônomo al-Khujandī; por último, e não menos importante, Ulugh Beg (1394-1449) (o fundador do famoso Observatório de Samarkanda) e os membros de sua escola, (MATVIEVSKAYA, 1993).

Muitos observatórios astronômicos, tanto privados quanto estatais foram construídos, mas duraram pouco. Os mais famosos que alcançaram reputação mundial foram os observatórios de Bagdá (Iraque), Cairo (Egito), Córdoba (Espanha), Toledo (Espanha), Maragha (Irã), Samarkanda (Uzbequistão) e Istambul (Turquia). Destacam-se o de Maragha (1259) e o de Samarkanda (1420) por serem os únicos que permaneceram ativos por muitos anos, não eram apenas centros de observação, mas de aprendizado e usaram grandes instrumentos de medição para obter maior precisão, (FERNINI, 2009).

2.2.3 O Império Timúrida

Segundo Fazlioğlu (2008), o Império Timúrida (1370 E.C.-1507 E.C.) foi instituído por Timur (d.1405 E.C.) nas regiões da Transoxiana e Khurāsān, com capital em Samarkanda, Figura 6. Timur se declarava herdeiro e restaurador do Império Mongol (1206-1368) fundado por Gengis Khan (1162-1227), estabeleceu seu governo fundamentado em raízes turcas, mongóis e persas e com base no Islã. Após a morte de Timur, seu filho mais novo Shah Rukh (d.1447 E.C.), que era governador de Khurāsān desde 1396 E.C., assumiu o império com a tomada de Samarkanda em 1409 E.C., pacificando em certa medida as turbulências políticas surgidas desde a morte de seu pai. Shah Rukh institui Herat como sua capital e colocou seu filho Ulugh Beg (1394-1449) como governante da Transoxiana e Kāshghar.

Figura 6 - Império Timúrida, regiões da Transoxiana e Khurāsān.



Fonte: Waugh (2002) ²⁶. Acesso em: 28 fev. 2022.

Shah Rukh não era ligado à tradição turco-mongol de seu pai, era inclinado aos conhecimentos religiosos e místicos, desta forma, ele fez de Herat e seus arredores um centro de estudos religiosos islâmicos de acordo com a doutrina sunita. Sob o domínio de Timur, através de Ulugh Beg, a doutrina sunita era dominante nas regiões de Transoxiana e Khurāsān mas havia intercâmbio contínuo com a doutrina xiita, assim, esse ambiente de ambiguidade religiosa promoveu o surgimento de novas interpretações religiosas.

Por causa do interesse de Bāysunghur (d. 1433), filho de Shah Rukh, em poesia, caligrafia, douramento, miniaturas, encadernação de livros e pintura, a cidade de Herat também se tornou conhecida pela sua literatura e arte, (FAZLIOĞLU, 2008).

No período timúrida as bases para uma tradição cultural em Herat foram estabelecidas, mas foi sob Shah Rukh e Bāysunghur que ela se desenvolveu e manifestou-se não apenas com a construção de madraças e bibliotecas, mas também no ensino de estudos religiosos, literatura e artes que nelas ocorreram. Assim, muitos estudiosos, poetas, músicos, calígrafos e artistas foram educados e tornaram-se influentes na civilização islâmica.

Ulugh Beg escolheu a cidade de Samarkanda, como o centro de suas atividades tornando-a um centro de estudos de ciências matemáticas. Diferente da orientação religiosa seguida por Herat, Ulugh Beg enfatizou o estudo das ciências

²⁶ WAUGH, Daniel. Walter Chapin Simpson Center for the humanities. Washington University, USA. Disponível em: <https://depts.washington.edu/silkroad/index.html>. Acesso em: 28 fev. 2022.

matemáticas, mas isto não significa que ele não patrocinava estudos religiosos, artísticos e de arquitetura, (FAZLIOĞLU, 2008).

Ao lermos as cartas de al-Kāshī, al-Kāshī (1960; 1997), temos a impressão que o motivo que levou Ulugh Beg a transformar Samarkanda em um centro de ciências matemáticas foi sua visita ao Observatório de Maragha quando era criança, mas as razões são mais complexas que o interesse e a disposição pessoal de Ulugh Beg. De acordo com Fazlioğlu (2008, p. 7), “[...] há razões políticas, econômicas, militares, sociais e até comerciais por trás de todo tipo de empreendimento civil. ” De fato, historicamente as regiões da Transoxiana e Khurāsān compartilhavam um passado como parte da civilização islâmica. A influência da escola astronômica de Maragha²⁷ ainda se fazia presente por causa de alunos de professores profícuos desta escola, dentre os quais: Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī e Quṭb al-Dīn al-Shīrāzī. Tais elementos forjaram um ambiente propício para o reavivamento das atividades científicas.

Transoxiana e Khurāsān são reconhecidas como as regiões onde as primeiras madraças foram fundadas, (BARTHOLD, 1963). As madraças eram centros de estudo e ensino principalmente do Islã e da jurisprudência islâmica, mas, com o passar do tempo também podiam incluir literatura, pintura, música, matemática e astronomia. Estas escolas de estudos superiores eram destinadas aqueles que possuíam um grau de estudo previamente adquirido nas mesquitas, (MIRBABAYEV, 2000).

De acordo com Fazlioğlu (2008), 165 anos antes da madraça de Niẓāmiyya em Bagdá (construída entre 1064-1066) já existiam várias madraças nas regiões da Transoxiana e Khurāsān. Estas começaram a ser construídas como instituições governamentais oficiais na virada do século X e até o século XII, antes das invasões mongóis. Segundo Barthold (1963), as primeiras madraças foram construídas no mundo islâmico oriental às margens do rio Āmū Daryā principalmente para combater outras religiões como o budismo e o maniqueísmo²⁸. Diante de tais elementos, concluímos que na história da civilização islâmica, as regiões da Transoxiana e Khurāsān foram ligadas a instituições educacionais desde muito tempo, chegando a haver nessas regiões cerca de quatrocentas madraças, (MIRBABAYEV, 2000); além

²⁷ Estabelecido em 1259 d.C. no atual Irã, sob o patrocínio do Ilkhānī Hulagu, neto de Gengis Khan, e a direção de Nasir al-Din al-Ṭūsī, um estudioso e astrônomo persa.

²⁸ Religião fundada por Mani, que considerava sua doutrina não como a religião de uma região, um estado ou um povo escolhido, mas como a conclusão das grandes religiões precedentes: cristianismo, zoroastrismo e budismo. Para mais informações ver: https://referenceworks.brillonline.com/entries/encyclopaedia-iranica-online/manicheism-COM_11491?lang=fr . Acesso em: 20 maio 2022.

disso, as madraças configuraram-se como uma forma estável de difusão de uma cultura e de saberes ao longo das gerações.

Os mesmos mongóis que outrora fizeram grandes destruições, iniciaram a reconstrução das cidades, reviveram a economia e passaram a incentivar o estudo das ciências, pois, viram nessas, a possibilidades de aplicação prática, (MIRBABAYEV, 2000). Desta forma, a madraça passou a ocupar na sociedade islâmica o lugar de promotora do pensamento científico, literário e artístico.

Outras dinastias deram continuidade à reconstrução das instituições destruídas pelas invasões mongóis, inclusive Timur (que capturou Herat em 1381) e seus sucessores no império timúrida, também criaram novas instituições como madraças, mesquitas e bibliotecas. Um triângulo acadêmico centralizado em Samarkanda, Herat e Bukhara se consolidou, estima-se que os timúridas construíram 69 madraças: 50 na Transoxania, 10 em Khurāsān e 9 em outras regiões, (RAGEP, 2017). Destacam-se as madraças: de Shah Rukh em Herat, concluída em 1417 E.C., onde debates que nela ocorreram ajudaram a consolidar e difundir o ramo sunita do Islã; a madraça de Ulugh Beg em Samarkanda e a madraça de Ulugh Beg em Bukhara, estas últimas concluídas em 1420, (FAZLIOGLU, 2008).

2.2.4 A escola matemática-astronômica de Samarkanda

Construída em Samarkanda, a madraça timúrida de Ulugh Beg ocupa um lugar importante não apenas na civilização islâmica, mas também na história geral da filosofia e da ciência. Ulugh Beg testava pessoalmente o corpo docente antes que seus membros fossem autorizados a ensinar na madraça de Samarkanda. Ulugh Beg tinha preferência por ouvir palestras sobre as ciências matemáticas e debatia os assuntos com professores e alunos, ele próprio também proferia palestras.

Em suas cartas para seu pai, al-Kāshī (1960;1997) cita o nome de três professores da madraça, entre eles Qāḍīzāde al-Rumī (foi tutor de Ulugh Beg e era o chefe dos professores da madraça de Samarkanda), Mawlānā Abū al-Faṭḥ e Mawlānā Muḥammad Khwāfī. Especificamente, segundo Fazlioglu (2008), ao menos cinco nomes do corpo docente de Samarkanda destacaram-se nas ciências matemáticas: Jamshīd Kāshī (o autor do Tratado da Circunferência), Qāḍīzāde al-Rumī, Alī al-Qushjī, Sayyid al-Munajjim e o próprio Ulugh Beg.

Ao longo do que foi descrito até agora, pudemos perceber a disposição pessoal de Ulugh Beg em transformar Samarkanda em um centro de estudos em ciências

matemáticas, tal fato aliado a questões contextuais, contribuíram para o estabelecimento do observatório astronômico de Samarkanda.

Não há consenso sobre o período do estabelecimento do observatório de Samarkanda sendo o mais aceito entre 1420 E.C. e 1424 E.C. Sua construção foi supervisionada por al-Kāshī e concluída sob administração do próprio Ulugh Beg que se manteve como diretor geral até sua morte. Como administradores das atividades de observação temos os seguintes nomes: Jamshīd Kāshī, Qāḍīzāde al-Rumī e Alī al-Qushjī, cada um foi sendo substituído pelo outro após a morte de cada um deles. As atividades do observatório de Samarkanda se estenderam por trinta anos, (FAZLIOGLU, 2008).

Em suas cartas, al-Kāshī também comenta sobre a educação astronômica na madraça de Samarkanda, os debates sobre os textos estudados, principalmente os *Zīj*; a construção do observatório astronômico de Samarkanda (e quais intervenções ele empreendeu no processo); a construção de instrumentos observacionais e outros estudos que contribuíram para a consolidação do observatório de Samarkanda. Com base em seus relatos, chegamos a algumas conclusões: a madraça foi concluída, as atividades na madraça ocorreram de forma concomitante à construção do observatório (o que naturalmente implica que o observatório foi concluído depois da madraça), al-Kāshī interveio diretamente no processo de construção do observatório (corrigindo falhas na concepção do projeto) e na construção de instrumentos.

Segundo Djebbar (2013), a astronomia islâmica teórica abrange três aspectos: (1) a criação de tabelas astronômica, (2) o movimento dos objetos celestes e o (3) o desenvolvimento de modelos planetários que explicassem esses movimentos. Em relação à primeira atividade há dois tipos de tabelas astronômicas: as relativas a problemas práticos (construção de calendários, a *Qibla* e a data de visibilidade da lua crescente) e as úteis aos astrônomos (tabelas trigonométricas, tabelas de determinação da equação do tempo, dos movimentos dos planetas, dos parâmetros relativos aos eclipses, de multiplicação de sexagesimais e as que servem para construir instrumentos observacionais). Algumas dessas tabelas foram publicadas individualmente e outras foram agrupadas em obras chamadas *Zīj*. Sobre a segunda e terceira atividades, as ferramentas matemáticas eram fundamentais e se dividiam em duas categorias: as ferramentas gregas (geometria plana, esférica e geometria das cônicas) e as ferramentas de herança indo-babilônica (recursos aritméticos, algébricos e trigonométricos). Assim,

Com o desenvolvimento da astronomia, há um aumento significativo no número dessas tabelas respondendo a vários usos e, ao mesmo tempo, notamos que a precisão dos cálculos aumentou. Isso foi possível devido ao avanço da álgebra e ao refinamento dos algoritmos de aproximação. (DJEBBAR, 2013, p. 85).

Sob esse contexto em Samarkanda, Jamshīd al-Kāshī (1380-1429) decide obter uma melhor aproximação para a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, comparada às obtidas por predecessores. Certamente seu resultado contribui para uma das obras mais importantes da história da matemática, o *Zīj* de Ulugh Beg, completado em 1437 E.C., de acordo com Fazlioğlu (2008), está dividido em quatro partes com os seguintes títulos: Sobre calendários e datas, Os tempos, Sobre as posições das estrelas e Sobre astrologia. Pelos relatos de al-Kāshī em suas cartas, o *Zīj* de Ulugh Beg foi um trabalho coletivo dos membros da do círculo de estudiosos de Samarkanda forjado através das discussões que ocorriam na madraça e as observações realizadas no observatório astronômico.

2.2.5 Sobre al-Kāshī, o autor do tratado

Ghiyāth al-Dīn Jamshīd ibn Mas'ūd ibn Mahmūd Kāshānī, ou simplesmente al-Kāshī, Figura 7, era médico e um prolífico matemático e astrônomo. Nasceu no final do século XIV, por volta do ano de 1380 E.C., em Kashān, no Irã, e morreu em Samarkanda²⁹, na Transoxania³⁰. Segundo Suter (1900), a data da morte de al-Kāshī teria sido em 1436 E.C., mas, para Rozenfeld e Yushkiévitch (1973), a data correta seria 1429 E.C. com base numa anotação encontrada em uma cópia indiana do *Khaqānī Zīj*, uma das várias obras de al-Kāshī que consiste em tabelas astronômicas. Assim, a data mais comumente aceita é 1429 E.C.

²⁹ Samarkanda era uma cidade estratégica da Rota da Seda entre China e Europa.

³⁰ **Transoxania**, também soletrada **Transoxiana**, em árabe **Mā Warā' al-Nahr**, ("Aquilo que está além do rio"), região histórica do [Turquestão](#) na [Ásia Central](#) a leste de [Amu Darya](#) (rio Oxus) e a oeste do [Syr Darya](#) (rio Jaxartes), correspondendo aproximadamente ao atual [Uzbequistão](#) e partes o [Turcomenistão](#), [Tajiquistão](#) e [Cazaquistão](#). Fonte: <https://www.britannica.com/place/Transoxania>. Acesso em: 21 maio 2022.

Figura 7 - Selo em homenagem a al- Kāshī, emitido pela República do Irã em 1979.



Fonte: O'Connor; Robertson (1999)³¹.

Segundo Aydin e Hammoud (2019) outra forma de escrever o nome de al-Kāshī é *Ghiyāth al-Dīn Jamshīd ibn Mas'ūd ibn Mahmood al-Tabīb al-Kāshī*. Cada uma dessas palavras carrega um significado: *Ghiyāth* (Salvador da religião); *Jamshīd* (nome pelo qual é conhecido); *Ibn* (filho de), logo *ibn Mas'ūd ibn Mahmood* significa “filho de Mas'ūd, filho de Mahmood”, ou seja, o nome do pai de al-Kāshī é Mas'ūd e o seu avô é Mahmood; *al-Tabīb* (médico), *al-Kāshī* (natural de Kashān). Essa forma de organizar o nome de uma pessoa contendo a profissão, local de nascimento e da ascendência faz parte da cultura árabe-mulçumana, (BERGGREN, 2003).

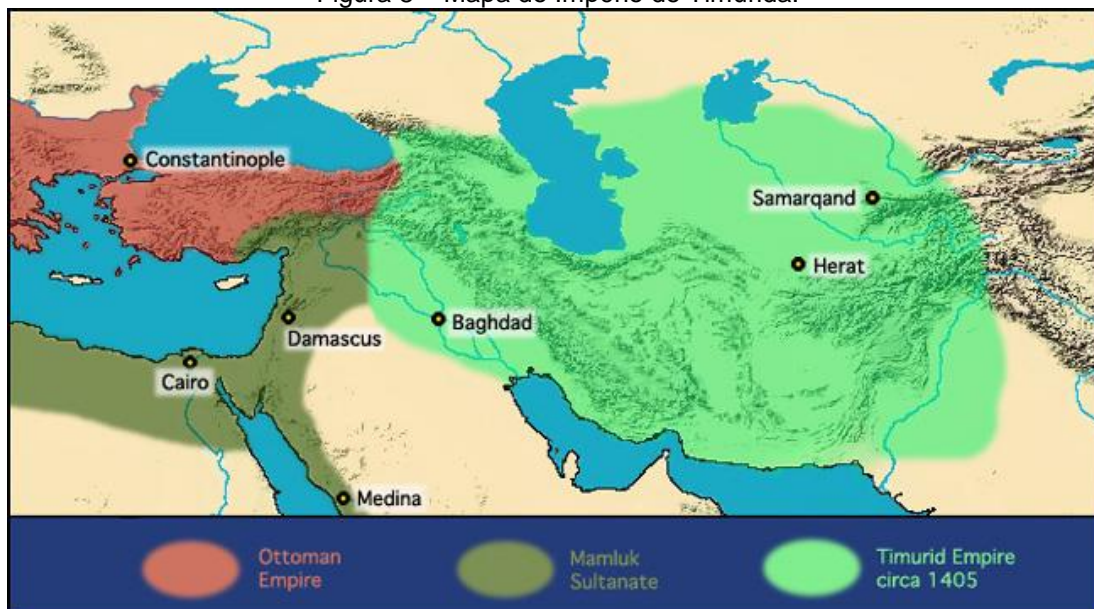
Al-Kāshī nasceu em meio ao império de Timur (ou Tamerlão, 1336-1405). A partir de 1370 E.C., Timur passou a conquistar vastas regiões entre as quais estavam as regiões atualmente ocupadas por Irã, Iraque, Turquia Oriental e Kāshān, a cidade natal de al-Kāshī. Timur fez de Samarkanda³², uma das cidades mais antigas da Ásia Central, a capital do seu império a qual conheceu um período muito próspero durante o seu governo. Timur morreu em 1405 E.C., enquanto marchava em direção à China. Houve disputa pelo domínio do império (Figura 8) que foi de antemão dividido entre

³¹ O'CONNOR, J; ROBERTSON, Al-Kāshī. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, 1999. Fonte: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Kashi/poster/lived/>. Acesso em: 21 maio 2022.

³² Uma das cidades mais antigas da Ásia Central. Por ser uma cidade estratégica da Rota da Seda, foi conquistada, destruída e reerguida várias vezes. Para mais detalhes, consultar <https://www.britannica.com/place/Samarkand-Uzbekistan>. Acesso em: 14 jul. 2021.

seus filhos, cabendo a Shah Rukh Mirza (1377 E.C.-1447 E.C.) (ou Shāhrukh) a maior parte, (O'CONNOR E ROBERTSON, 1999).

Figura 8 – Mapa do Império de Timúrida.



Fonte: Waugh (2002)³³. Acesso em: 28 fev. 2022.

Durante as diversas conquistas militares de Timur a pobreza era generalizada, assim, al-Kāshī viveu na pobreza como muitos de sua época, vivia de cidade em cidade no Irã Central em busca de melhores condições de sobrevivência, mas passava a maior parte do tempo em sua cidade natal e, apesar de ter-se formado médico, dedicou-se ao estudo da astronomia e da matemática, (O'CONNOR E ROBERTSON, 1999). A situação de al-Kāshī mudou favoravelmente quando assumiu o império após a morte de seu pai. Shah Rukh trouxe prosperidade econômica para a região e apoiou fortemente a vida artística e intelectual, mudanças que tiveram influência positiva na vida de al-Kāshī.

Shāhrukh colocou seu filho, de apenas dezesseis anos de idade, *Muhammad Taraghāy ibn Shāhrukh ibn Tīmūr*, ou simplesmente Ulugh Beg (“grande príncipe”) (1393-01449) como seu representante na região da Transoxania, e seu tutor era Qāḍīzāde al-Rūmī³⁴ (1364-1436). Na Figura 9, temos um selo postal soviético de 1987 E.C. com a efígie de Ulugh Beg à esquerda e, à direita, temos a alusão ao ano de

³³ WAUGH, Daniel. Walter Chapin Simpson Center for the humanities. Washington University, USA. Disponível em: <https://depts.washington.edu/silkroad/index.html>. Acesso em: 28 fev. 2022.

³⁴ De origem turca, fez parte da escola Fānārī na Anatólia. Foi tutor e professor de Ulugh Beg, era professor-chefe da madraça, (RAGEP, 2017). Para mais detalhes, consultar: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Qadi_Zada/. Acesso em: 14 jul. 2021.

1437 E.C., no qual Ulugh Beg publicou suas tabelas astronômicas, em detalhe, a vista interna do seu observatório onde se destaca o seu sextante.

Figura 9 - Selo postal da União Soviética (URSS) em homenagem a Ulugh Beg.



Fonte: O'Connor e Robertson (1999)³⁵.

Ulugh Beg não possuía interesse em conquistas territoriais, seu desejo era transformar Samarkanda, principal cidade da Transoxania, em um centro científico e cultural. Ele era astrônomo e matemático, gostava de arte, música, literatura, era um muçumano devoto e um aplicado estudioso do Alcorão, (BERGGREN, 2003). Ulugh Beg construiu uma madraça, espécie de escola, em Samarkanda e outra em Bukhara, também construiu um observatório astronômico. Ulugh Beg formou uma equipe de cerca de sessenta sábios para trabalhar em sua madraça em Samarkanda, entre eles estava al-Kāshī. Segundo Ragep (2017), os timúridas construíram cerca de sessenta e nove madraças.

O primeiro marco da vida científica de al-Kāshī que se pode datar com precisão foi no dia 02 de junho de 1406 E.C. quando ele observou em Kashān o primeiro de uma série de três eclipses lunares, tal fato está registrado na sua obra *Khaqānī Zīj*. (DOLD-SAMPLONIUS, 1992). Segundo Rozenfeld e Yushkiévitch (2018), No dia 1 de março de 1407 E.C., também em Kāshān, al-Kāshī concluiu seu primeiro livro *Sullam al-samā' fi ḥall ishkāl waqa'a li'l-muqaddimī fi'l-ab'ād waāl-ajrām* ("A

35 O'CONNOR, J; ROBERTSON, Ulugh Beg. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, 1999. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Miller/stamps/#Ulugh_Beg. In: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ulugh_Beg/. Acesso em: 27 jul. 2022.

Escada do Céu: a resolução de dificuldades alcançadas por predecessores na determinação de distâncias e tamanhos”) ou *Risāla kamāliyya*, é um trabalho astronômico sobre a dimensão do cosmos. Trata sobre a resolução de problemas encontrados por antecessores na determinação de distâncias e tamanhos dos corpos celestes. Outro trabalho de al-Kāshī foi *Mukhtaṣar dar ‘lim-i hay’ at* (“Compêndio da Ciência da Astronomia”) escrito entre 1410 E.C. e 1411 E.C., dedicado a um dos descendentes de Timur que tinha uma posição no governo.

Em 1414 E.C., al-Kāshī dedicou a Ulugh Beg seu segundo e importante livro, *Zij-i Khaqānī fī takmīl-i Zij-i Ilkhānī* ou *Khaqānī Zij*³⁶, que é um conjunto de tabelas astronômicas e tem como base as tabelas astronômicas de Nasir Al-Tūsī³⁷. O *Ilkhānī Zij*; segundo Berggren (2003), foi escrito cento e cinquenta anos antes do escrito por al-Kāshī. Na introdução do *Khaqānī Zij* al-Kāshī informa que sem o apoio do Ulugh Beg, não teria sido capaz de completá-lo. Segundo Brentjes (2008), o patrocínio das artes e das ciências por reis, príncipes, governantes e pessoas abastadas era comum nessa e em outras épocas, o que não foi diferente com al-Kāshī que soube muito bem usar isso a seu favor, dedicando muitos dos seus trabalhos a reis e governantes influentes.

Ressaltemos que Ulugh Beg também escreveu tabelas astronômicas e tabelas de senos, supõe-se que essas tabelas foram baseadas nas tabelas de al-Kāshī e muito provavelmente foram feitas com a sua ajuda, (ROZENFELD e YUSHKIÉVITCH, 2018).

No ano de 1416 E.C. al-Kāshī concluiu o *Risāla dar sharḥ-i ālāt-i raṣd*, um comentário sobre instrumentos astronômicos em geral (régua paralática para a medição das distâncias do zênite, uma esfera armilar, bem como uma equinocial e uma armilar solsticial), também descreve o sextante Fakhrī, usado para medir a altitude das estrelas. Também concluiu um longo tratado chamado *Nuzha al-ḥadāiq fī kayfiyya ṣan‘sa al-āla al-musammā bi ṭabaq al-manāṭiq* (“A excursão do jardim, Sobre o Método de Construção do Instrumento Chamado Placa dos Céus”) sobre um instrumento conhecido como *Equatorium* que é essencialmente um computador analógico inventado por ele, usado para encontrar a posição dos planetas de acordo

³⁶ Para mais informações, consultar Hamadanizadeh (1980).

³⁷ Estudioso persa que nasceu em 18 de fevereiro de 1201 em Tus, Khorasan (hoje Irã). Morreu dia 26 de junho de 1274 em Kadhimain, próximo a Bagdá, no Iraque. Mais detalhes em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Tusi_Nasir/. Acesso em: 30 dez. 2020.

com os modelos geométricos contidos no *Almagesto* de Ptolomeu evitando-se assim os cálculos, utilizando apenas a manipulação física do instrumento. No Quadro 2, temos a lista dos trabalhos de al-Kāshī, a maioria deles possui as datas em que foram concluídos. (ROZENFELD E YUSHKIÉVITCH, 2018).

Quadro 2 - Lista dos trabalhos de al-Kāshī.

	TÍTULO DA OBRA	TRADUÇÃO DO TÍTULO	ANO DE CONCLUSÃO
1	<i>Sullam al-samā' fi ḥall ishkal waqa'a li'l-muqaddimī fi'l-ab'ād waāl-ajrām</i>	A Escada do Céu: A Resolução de Dificuldades Alcançadas por Predecessores na Determinação de Distâncias e Tamanhos	1407
2	<i>Mukhtaṣar dar 'ilm-i hay' at</i>	Compêndio da Ciência da Astronomia	1411
3	<i>Zij-i Khaqāni fi takmil-i Zij-i Ilkhānī</i> ou <i>Khaqāni Zij</i>	Tabelas astronômicas	1414
4	<i>Risāla dar sharḥ-i ālāt-i raṣd</i>	Sobre instrumentos astronômicos em geral	1416
5	<i>Nuzha al-ḥadāiq fi kayfiyya ṣan'asa al-āla al-musammā bi ṭabaq al-manāṭiq</i>	A excursão do jardim; Sobre o Método de Construção do Instrumento Chamado Placa dos Céus (<i>Equatorium</i>)	1416
6	<i>Talkhiis al-Miftāh</i>	Compêndio da Chave	1421
7	<i>al-Risāla al-Muhitīyya</i>	Tratado da Circunferência	1424
8	<i>Miftāh al-ḥisāb</i>	A chave para a aritmética	1427
9	<i>Ilkahlāt an-Nuzha</i>	Suplemento à Excursão	1427
10	<i>Ta'rib al-zij</i>	Tradução da introdução do <i>zij</i> de Ulugh Beg do persa para o árabe	?
11	<i>Wujuuh al-'amal al-darb fi'l-takht wa'l-turab</i>	Formas de multiplicar por meio de tabuleiro e poeira	?
12	<i>Natā'ij al-ḥaqā'iq</i>	Resultados das Verdades	?
13	<i>Miftah al-a sbab fi'ilm al-zij</i>	A chave das causas na ciência das tabelas astronômicas	?
14	<i>Risala dar sakht-i asturlab</i>	Tratado de construção do astrolábio	?
15	<i>Risala fi ma'rifa samt al-qibla min daira hindiyya ma'rufa</i>	Tratado sobre a determinação do azimute da <i>Qibla</i> por meio de um círculo conhecido como indiano	?
16	<i>Risāla al-watar wa'l-jaib</i>	O tratado sobre corda e seno	?

Fonte: Rozenfeld e Yushkiévitch (2018).

Provavelmente o *Equatorium* marca o fim da vida de al-Kāshī como um sábio nômade, não se sabe ao certo a data da chegada de al-Kāshī em Samarkanda, quando se obtém novas informações sobre ele já é como membro de uma equipe com cerca de sessenta estudiosos convidados por Ulugh Beg para trabalhar na sua

madrça³⁸, Figura 10, e no seu observatório, (BERGGREN, 2003). Para Yazdi e Rezvani (2015) o ano da chegada de al-Kāshī em Samarkanda seria 1420.

Figura 10 - Foto da Madraça de Ulugh Beg na praça Registan em Samarkanda.



Fonte: Sánchez (2019).

Na Figura 11 temos à esquerda a Madraça de Ulugh Beg (1417-1420), à direita a Madraça de Shir-Dor (1619-1636) e ao fundo a Madraça de Tilla-Kari (1646-1666?). (Samarkanda, Uzbequistão).

Figura 11 – Praça Registan.



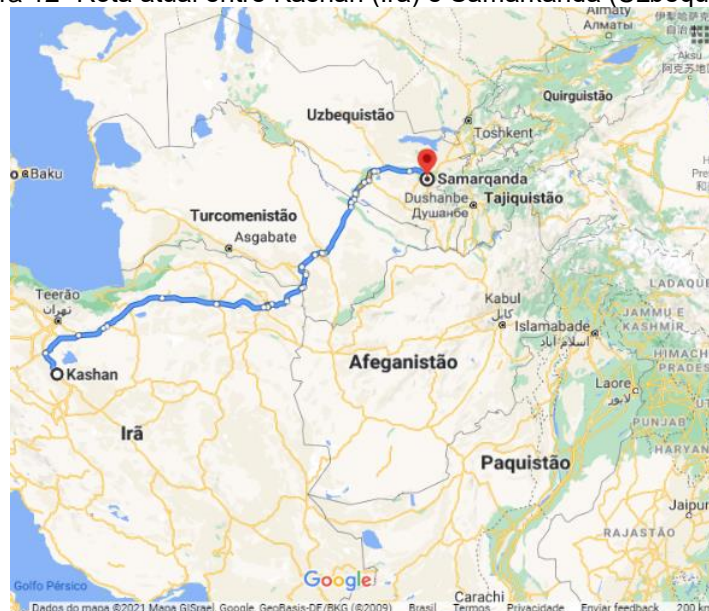
Fonte: Dalbera (2018).

Fato comum a al-Kāshī e a seus contemporâneos é a escassez de informações sobre sua vida pessoal, no entanto, em relação a ele temos duas vantagens: a primeira, como já pudemos perceber, é que ele datou com precisão o término da

³⁸Centro de estudos avançados em teologia e ciências em Samarkanda, um dos ainda mais belos edifícios da Ásia Central. Foi construído entre os anos de 1417 e 1420.

maioria de seus trabalhos e, a segunda, é que ele escreveu cartas em persa para seu pai que permaneceu em Kashân depois de sua partida para Samarkanda, Figura 12.

Figura 12- Rota atual entre Kāshān (Irã) e Samarkanda (Uzbequistão).



Fonte: Google³⁹.

As cartas de al-Kāshī encontradas até o presente momento, al-Kāshī (1960) e al-Kāshī (1997), como já pudemos perceber, fornecem muitas informações sobre o dia a dia e dinâmica do círculo científico na madraça e no observatório de Ulugh Beg em Samarkanda. Pela descrição detalhada de problemas e suas resoluções, supomos que o pai de al-Kāshī possuía conhecimentos sobre matemática e astronomia. As cartas também nos fornecem alguns poucos relatos sobre a vida pessoal de al-Kāshī, fizemos um estudo inicial sobre elas em Andrade e Silva (2021).

2.3 O nosso exemplar de trabalho

Segundo Hogendijk (2009) há pelo menos oito manuscritos do Tratado da Circunferência de al-Kāshī espalhados pelo mundo, verificamos esta informação e

³⁹ GOOGLE. google.com/maps. Google Maps. 2009. Disponível em: <https://www.google.com/maps/dir/kashan/samarkand/@36.0800189,53.5755183,5z/data=!4m13!4m12!1m5!1m1!1s0x3f9684849eadea239:0xaf87e360598c6612!2m2!1d51.4099625!2d33.9850358!1m5!1m1!1s0x3f4d191960077df7:0x487636d9d13f2f57!2m2!1d66.9749731!2d39.627012>. Acesso em: 28 mai. 2021.

encontramos os registros de nove manuscritos⁴⁰, Quadro 3: um em Istambul, três em Mashhad, quatro em Teerã e um em Toronto.

Quadro 3 - Manuscritos do Tratado da Circunferencia (al-Risāla al-Muhītīyya) de al-Kāshī.

MANUSCRITO	Nº DE CÓPIAS	LÍNGUA	LOCALIZAÇÃO	DATA
Al-Kāshī, Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd. al-Risāla al-Muhītīyya . Museu do Exército de Istambul, Biblioteca do Museu militar, n.756.	1	Árabe	Istambul, Turquia	Século XVI ou XVII ⁴¹ .
Al-Kāshī, Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd. al-Risāla al-Muhītīyya . Sha'bān 827 A.H.L. (Julho 1424); n.12145, n.12235, n.5389. Biblioteca Central de Āstan Quds Razawī, Mashhad, Irã.	3	Árabe	Mashhad, Irã	
Al-Kāshī, Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd. al-Risāla al-Muhītīyya . Kitābkhān-i Showrā-ye Mellī (Biblioteca Nacional do Parlamento), n.1146, n.1428, n.5499. Teerã, Irã.	3	Árabe	Teerã, no Irã	
Al-Kāshī, Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd. al-Risāla al-Muhītīyya . Majlis shūrā (Assembleia Consultiva), Teerã, Irã.	1	Árabe	Teerã, Irã	
Al-Kāshī, Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd. al-Risāla al-Muhītīyya . Andrews Engineering Collection	1	Árabe	Toronto, Canadá	

Fonte: Elaborado pela autora.

Observe que todos os manuscritos estão escritos em árabe e dentre eles tivemos acesso ao de Mashhad, Figura 13, através de Hogendijk (2009) que disponibiliza integralmente sua fotocópia.

⁴⁰Islamic Scientific Manuscripts Initiative –ISMI. Disponível em: <https://ismi.mpiwg-berlin.mpg.de/search-witnesses?identifier=&collection=&repository=&city=&title=AL-RIS%C4%80LAH%20AL-MU%E1%B8%A4%C4%AA%E1%B9%ACIYYAH&author=&items_per_page=20&page=0>. Acesso em: 22 mar. 2021.

⁴¹ Para mais detalhes ver Rozenfeld e Yushkiévitch (1954, p. 439).

Figura 13 - Na ordem, as imagens das páginas 1,2 e 3 do manuscrito de Mashhad.



Fonte: Hogendijk (2009).

Segundo Hogendijk, tal manuscrito foi doado pelo Shah Nader (rei Nader) em 1145 à Biblioteca Central de Āstan Quds Razawī, possui 58 páginas escritas em árabe, divido em dez partes, introdução e conclusão. Mas, por não dominamos a língua árabe, utilizamos os artigos e traduções elencados no Quadro 4 para a construção da nossa versão de trabalho do Tratado da Circunferência, por serem escritos em línguas ocidentais ou mais próximas às ocidentais.

Quadro 4 - Traduções do Tratado da Circunferência (*al-Risāla al-Muhītīyya*) de al-Kāshī.

TRADUÇÕES	
REFERÊNCIAS	LÍNGUA
AZARIAN, Mohammad. The introduction of al-Risāla al-Muhītīyya: An English translation. <i>International Journal of Pure and Applied Mathematics</i> . Vol. 57, n.6, p.903-914, 2009.	Inglês
AL-KASHI, JAMSHID. In: ROZENFELD, B.; YUSHKIÉVITCH, A. <i>Al-Kashani. Istorico-Matematicheskije Issledovaniya</i> . Moscow, 7, (1954), 327-379.	Russo
AL-KASHI, JAMSHID. In: LUCKEY P. <i>Der Lehrbrief über den Kreisumfang. Adhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrgang, Berlin, No. 6</i> (1953).	Alemão

Fonte: Elaborado pela autora da tese.

O primeiro texto referenciado no Quadro 4, Azarian (2009), consiste de um artigo que contém a tradução para o inglês da introdução do Tratado da Circunferência, a partir dele fizemos os primeiros estudos e obtivemos outras

referências. O segundo texto referenciado no Quadro 4, al-Kāshī (1954), trata-se da tradução russa do Tratado da Circunferência e o terceiro texto, al-Kāshī (1953), consiste da tradução alemã.

Fizemos um comparativo entre o manuscrito de Mashhad e as traduções russa e alemã, percebemos que a maior parte do manuscrito de Mashhad consiste de 28 tabelas extensas de cálculos, mas nem todas estão na tradução russa, al-Kāshī (1954), nem na tradução alemã, al-Kāshī (1953). Na tradução russa estão presentes a 1^a, 2^a, 27^a e 28^a tabelas e, na alemã, a 1^a, 5^a, 27^a e 28^a tabelas. O fato de essas traduções não apresentarem todas as tabelas, segundo Rozenfeld em al-Kāshī (1954), seria que as tabelas escolhidas são suficientes para compreender os cálculos de al-Kāshī.

Conforme Hogendijk (2009), até o presente momento, sabemos que a primeira pessoa que estudou e publicou algum trabalho sobre o Tratado da Circunferência de al-Kāshī foi o historiador da matemática iraniano Qurbānī no ano de 1949 E.C., tal obra, Qurbānī (1971)⁴² consiste da tradução para o persa da introdução do tratado, Qurbānī acreditava que o manuscrito de Mashhad era o manuscrito original devido ao conteúdo do colofão⁴³ do texto, que diz:

Este foi escrito pelo autor, o mais insignificante servo do Deus altíssimo, Jamshīd ibn Mas'ūd ibn Mahmud ibn Muhammad, o médico, al-Kāshānī, chamado Ghiyāth, que Deus o trate bem, no meio do grande mês Sha'bān do ano 827 da Hégira.⁴⁴ (QURBĀNĪ apud HOGENDIJK, 2009, p. 74. Tradução nossa.).

O meio do grande mês de Sha'bān do ano 827 da Hégira corresponde ao final do mês de julho de 1424. A autenticidade também é atestada por Bahā' al-Dīn al-Āmilī (1532-1610), que o teve em sua posse por algum tempo; Luckey em al-Kāshī (1953) também atesta que o manuscrito de Mashhad é o original, (HOGENDIJK, 2009). Entretanto, Hogendijk argumenta que o colofão do manuscrito de Mashhad não prova que ele é o original pois os escribas também os copiavam; em seu texto, ele identifica

⁴² QURBANI, Abu'l-Qasim. Kashani nameh, (A Monograph on Ghiyāth al-Din Jamshīd Mas'ūd al-Kāshī). Tehran University Press, Tehran, Iran (1971); Revised Edition (1989).

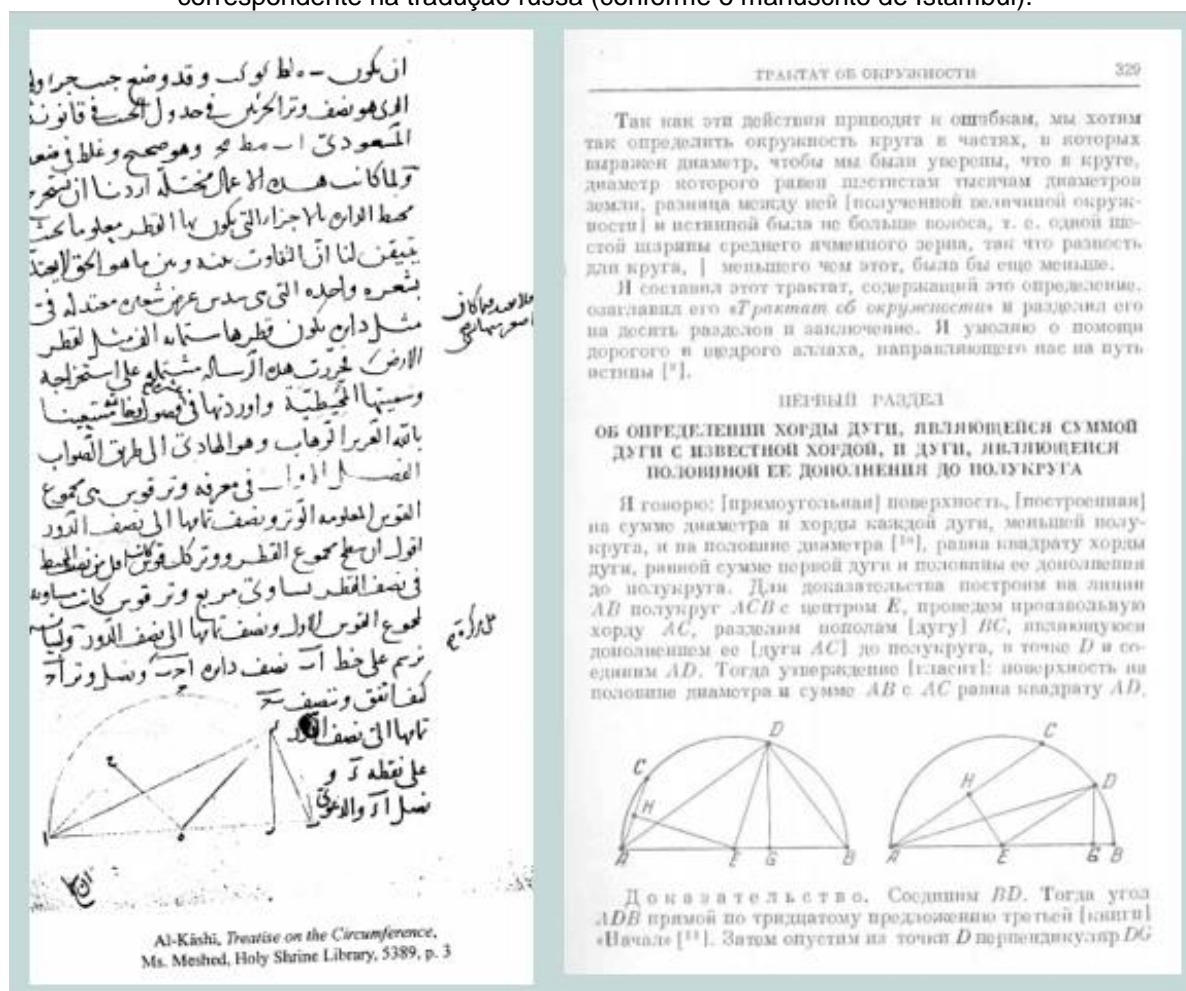
⁴³Nos manuscritos e nos incunábulo medievais, nota final que fornece referências sobre a obra e indicações relativas à sua autoria, transcrição, impressão, lugar e data de sua feitura.

⁴⁴ This has been written by its author, the most insignificant servant of God Most High, Jamshīd ibn Mas'ūd ibn Mahmud ibn Muhammad, the Physician, al-Kāshānī, called Ghiyāth, may God treat him well, in the middle of the great month Sha'ban of the year 827 of Hijra.

diversos erros que sustentam sua argumentação⁴⁵, mas também destaca a qualidade do manuscrito e o cuidado do escriba anônimo; avalia que possivelmente é o documento mais próximo possível do original conhecido até o momento.

Comparando o manuscrito de Mashhad com a página 329 da tradução russa, percebemos que esta última tem uma figura a mais, a Figura 14:

Figura 14 - Início da primeira parte do Tratado da Circunferência no manuscrito de Mashhad e seu correspondente na tradução russa (conforme o manuscrito de Istambul).



Fonte: Hogendijk (2009) e al-Kāshī (1954).

Levantamos duas hipóteses para a diferença de desenhos entre a primeira página da primeira parte do manuscrito de Mashhad e a tradução russa feita a partir do manuscrito de Istambul (até o momento não conseguimos obtê-lo): a primeira hipótese seria uma diferença entre o manuscrito de Mashhad e o manuscrito de Istambul; a segunda, seria que o tradutor de al-Kāshī (1954),

⁴⁵ Para mais informações consultar Hogendijk (2009).

Rozenfeld, colocou uma figura a mais para fornecer mais um exemplo. Examinamos também a tradução alemã, al-Kāshī (1953), na qual há uma transcrição do manuscrito de Istambul, mas, apesar de ela não apresentar nenhum desenho geométrico, não podemos tirar conclusões, visto que, Luckey, o tradutor de al-Kāshī (1953), na apresentação do texto admite ter suprimido algumas partes do manuscrito.

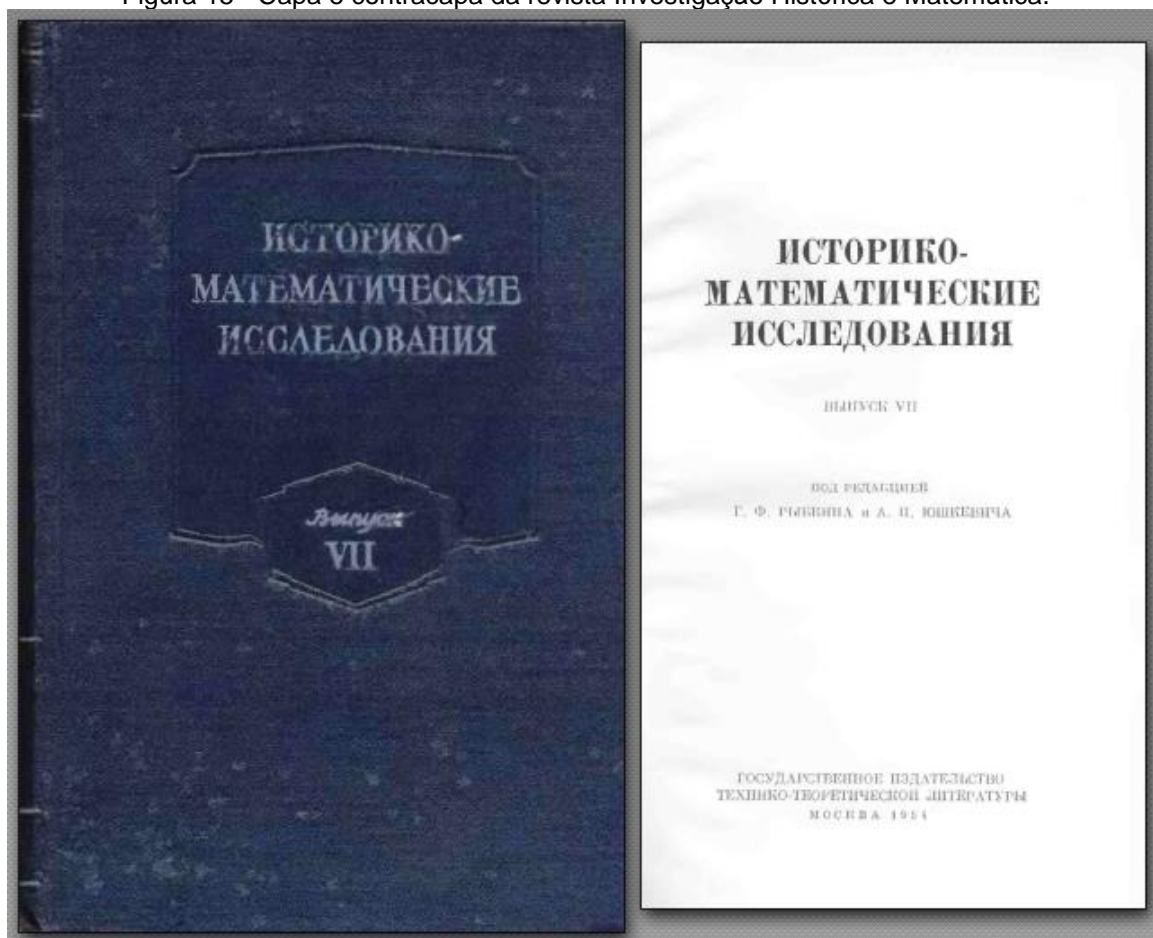
Diante desse quadro, justificamos nossa escolha pela tradução russa devido à importância das pesquisas russas sobre historiografia da matemática islâmica medieval, na qual os historiadores da ciência Rozenfeld e Yushkiévitch são figuras de grande destaque que trabalharam diretamente com as pesquisas relacionadas às escavações das ruínas do Observatório de Ulugh Beg em Samarkanda no atual Uzbequistão onde viveu al-Kāshī.

2.4 Anotações sobre a tradução russa

O exemplar de que dispomos do Tratado da Circunferência (*al-Risāla al-Muhītīyya*) é uma tradução russa, al-Kāshī (1954), que foi publicada no periódico **Investigações Histórico e Matemáticas**⁴⁶, em Moscou, no ano de 1954, n. 7, p. 327-379, Editores G.F. Rybkina e Adolf Yushkiévitch, conforme mostra a Figura 15. /o tradutor é Boris Rozenfeld. A revista possui um editorial e um prefácio do tradutor relativa a seção dedicada as traduções de duas obras de al-Kāshī: a Chave para a Aritmética (*Miftāh al-Hisab*) e o Tratado da Circunferência (*al-Risāla al-Muhītīyya*).

⁴⁶ ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ - Istorico-Matematicheskie Issledovaniya.

Figura 15 - Capa e contracapa da revista Investigação Histórica e Matemática.



Fonte: al-Kāshī (1954)

O texto russo do Tratado da Circunferência ocupa 52 páginas da revista, não possui dedicatória, prefácio, carta ao leitor e sumário, mas está dividido em uma parte introdutória, mais dez partes e conclusão; possui algumas figuras geométricas e várias tabelas numéricas. No Quadro 5 temos o número das partes e o título de cada uma delas. Não apresenta capa, frontispício ou contracapa do texto que serviu de base, no caso, o manuscrito de Istambul, escrito em árabe. A tradução russa apresenta também algumas imagens de algumas páginas do manuscrito de Istambul. Ao final da revista, para melhor compreensão do tratado, há 47 notas de comentário que estão em Rozenfeld e Yushkiévitch (1954).

Quadro 5 - Títulos das partes do Tratado da Circunferência de al-Kāshī.

PARTE	TÍTULO
	Parte introdutória
1	Determinação da corda de um arco que é a soma de um arco desconhecido e metade de seu suplemento na metade do círculo.

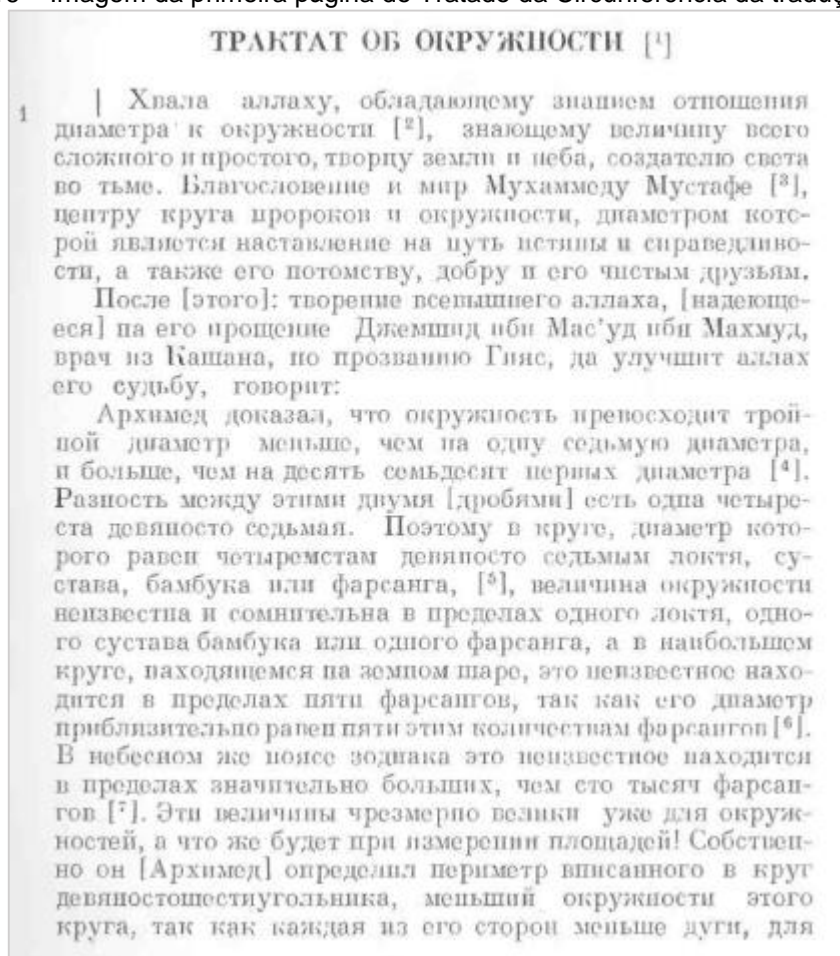
2	Determinação do perímetro de um polígono arbitrário inscrito em um círculo e o perímetro de um polígono similar circunscrito ao mesmo círculo.
3	Em quantos lados [arcos iguais] subdividimos a circunferência e até que dígito sexagesimal devemos calcular, de modo que, a circunferência de um dado círculo seja obtida com uma precisão não maior do que a largura de um cabelo [de cavalo].
4	Os Cálculos.
5	Determinação do tamanho do lado de um polígono regular inscrito em um círculo, onde o número de lados é 1, 2, 8, 16, 12, 48 [no sistema sexagesimal].
6	Determinação do perímetro, um polígono [regular] inscrito um círculo e seu similar polígono [regular] circunscrito ao [mesmo] círculo, onde cada polígono tem 805 306 368 lados.
7	Como ignorar os últimos dígitos dos cálculos anteriores em frações aditivas e subtrativas.
8	Conversão do tamanho da circunferência em algarismos [arábicos] indianos, assumindo que a metade do diâmetro é um.
9	Maneiras de cálculos com as duas tabelas.
10	Determinação da diferença entre o que é de uso comum e famoso entre as pessoas, e o que obtivemos.
	Conclusão.

Fonte: al-Kāshī (1954).

A tradução do texto russo para o português encontra-se em construção pela professora Bernadete Morey⁴⁷ com a nossa colaboração técnica e, futuramente, pretendemos publicá-la. Desta forma, para viabilizar nossa pesquisa, utilizamos uma versão de trabalho. Inicialmente, devido à baixa qualidade da fotocópia do texto russo, conforme consta na Figura 16, tivemos que redigitá-lo em russo para, posteriormente, procedermos à tradução para o português e prosseguirmos com nossos estudos.

⁴⁷ Docente aposentada em 2018. Colaborador voluntário na UFRN, docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática- PPGEEM

Figura 16 – Imagem da primeira página do Tratado da Circunferência da tradução russa.



Fonte: al-Kāshī (1954).

O tradutor Rozenfeld, ao longo de al-Kāshī (1954), colocou entre colchetes os números das notas explicativas, e também entre colchetes algumas palavras inseridas por ele para melhor compreensão do texto. Aparecem também palavras entre <<>> subtendidas pelo contexto. Em algumas de suas notas de final de página Rozenfeld e Yushkiévitch (1954) mencionam a tradução alemã feita por Luckey, al-Kāshī (1953).

3 ANÁLISE DO TRATADO DA CIRCUNFERÊNCIA: QUESTÕES INTERIORES AO TRATADO

No Capítulo 2, vimos que o saber matemático é fruto da atividade humana e está consubstanciado a cultura que lhe serviu de berço, logo, não se pode analisar um texto histórico matemático apartado de seu contexto, tendo essa perspectiva sociocultural em mente, buscamos no Tratado da Circunferência, de al-Kāshī, excertos nos quais identificássemos aspectos contextuais, epistemológicos e

matemáticos que apresentassem potencialidades pedagógicas para o seu uso em sala de aula que permitissem entrelaçar essas esferas de análise, fornecendo assim, no nosso caso, subsídios para a elaboração de atividades conforme a Teoria da Objetivação (como veremos no Capítulo 5) que promovam o labor conjunto e a ética comunitária.

As análises dos quatorze excertos selecionados do Tratado da Circunferência estão distribuídas em catorze estudos. Cada uma dessas análises percorreu os seguintes passos: conhecendo o texto, pré-leitura, leitura analítica e leitura crítica (conforme o Capítulo 2). São seis estudos relacionados a introdução do tratado, um estudo relacionado a primeira parte do tratado, um relacionado a segunda parte, três relacionados a terceira, um relacionado a quarta, um relacionado a quinta e um relacionado a sexta parte do Tratado da Circunferência.

No décimo quinto estudo não selecionamos um excerto específico, tecemos comentários sobre a sétima, oitava, nona, décima parte e a conclusão do tratado.

Para facilitar a compreensão da explicação dos excertos, os fragmentamos em trechos menores quando necessário. Os excertos estão na íntegra no Apêndice A. Iniciemos nossa análise.

3.1 A introdução

3.1.1 Estudo do Excerto 1: Parte introdutória do Tratado da Circunferência

Louvemos a Alá, possuidor do conhecimento sobre a relação do diâmetro com a circunferência, **sabedor da grandeza do simples e complexo**, criador da terra e do céu, criador da luz nas trevas. Graça e paz esteja com Muhammad Mustafá, **centro do círculo dos profetas** e circunferência cujo diâmetro é indicação do caminho da verdade e da justiça, assim como à sua descendência e seus amigos puros, desejamos o bem. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 327, tradução nossa, grifo nosso).

Al-Kāshī inicia o Tratado da Circunferência fazendo uma saudação a Alá, ele tinha convicção de que Ele era o único conhecedor da relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. A saudação a Alá era algo comum aos estudiosos islâmicos e está presente na maioria dos seus trabalhos. Al-Kāshī finaliza a saudação de forma poética fazendo um paralelo entre as qualidades de Muhammad Mustafá (Maomé) e elementos da circunferência. Refere-se a Maomé como o centro do círculo de profetas, cujo diâmetro dessa circunferência indica o caminho da verdade e da

justiça e também deseja o bem à descendência e aos amigos puros de Muhammad Mustafá. Muhammad significa “o profeta” e Mustafá significa “escolhido”, assim, Muhammad Mustafá significa “o profeta escolhido”, (ROZENFELD e YUSHKIÉVITCH 1954).

Al-Kāshī fala de si mesmo em terceira pessoa e cita seu nome completo: Jamshīd ibn Mas’ūd ibn Mahmūd Tabīb Kāshānī, médico de Kāshān, chamado de Ghiyāth. Jamshīd é o seu nome, filho de Mas’ūd, neto de Mahmūd, médico (Tabīb) e natural de Kāshān (Kāshānī).

Depois [disso]: **Jamshīd ibn Mas’ūd ibn Mahmūd Tabīb Kāshānī, médico de Kāshān**, chamado de **Ghiyāth**, criação de Alá o altíssimo, [esperançoso] em seu perdão e em que Alá melhore seu destino, diz: **Arquimedes demonstrou que a circunferência supera o diâmetro triplo em menos que um sétimo do diâmetro e mais do que dez, setenta e um avos do diâmetro. A diferença entre estas duas [frações] é um quatrocentos e noventa e sete avos.** Por isso, no **círculo de diâmetro quatrocentos e noventa e sete cúbitos, juntas de bambu ou farsang**, o comprimento da circunferência é desconhecido e dúbio nos limites de um cúbito, uma junta de bambu ou um farsang e **no maior círculo da esfera terrestre**, tal incógnita se encontra nos limites de cinco farsangs, uma vez que seu diâmetro é aproximadamente igual a cinco vezes tal quantidade de farsangs. Já no **cinturão do zodíaco**, a dita incógnita **situa-se nos limites consideravelmente maiores do que cem mil farsangs**. Tais grandezas já são grandes para a circunferência, maior ainda serão para a medição de áreas. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 327, tradução nossa, grifo nosso).

Após saudar Alá, exaltar Maomé e se apresentar, al-Kāshī cita a aproximação para o comprimento da circunferência feita por Arquimedes e a utiliza para calcular a margem de erro do comprimento da circunferência de três círculos distintos: o primeiro é o círculo de diâmetro quatrocentos e noventa e sete cúbitos, juntas de bambu ou farsang. O segundo, refere-se ao círculo da esfera terrestre e o terceiro, trata-se do cinturão do zodíaco⁴⁸.

Para o primeiro círculo, al-Kāshī afirma que o comprimento da circunferência é desconhecido e dúbio nos limites de um cúbito, ou uma junta de bambu ou um farsang. No segundo círculo, o comprimento da circunferência está nos limites de

⁴⁸ O zodíaco é um cinturão imaginário que fica no espaço, ao redor da Terra, marcando o trajeto que o Sol aparentemente percorre ao redor da Terra no período de um ano (eclíptica) — pois, na realidade, a Terra é que gira ao redor do Sol. Fonte:

<https://escola.britannica.com.br/artigo/zod%C3%ADaco/482922>.

Acesso em: 28 abril 2021.

aproximadamente cinco vezes tal quantidade de farsangs, ou seja, 2485 farsangs. No último círculo, o limite é ainda maior, superior a cem mil farsangs.

Por fim, al-Kāshī chega à seguinte conclusão: se para o cálculo do comprimento da circunferência essas grandezas já são grandes, imagine-se quão grandes não serão para o cálculo de áreas.

Todos os cálculos e relações matemáticas são escritos de forma retórica e traduzimos essas citações na linguagem matemática atual.

A aproximação feita por Arquimedes afirma que “a circunferência supera o diâmetro triplo em menos que um sétimo do diâmetro e mais do que dez setentas e um avos do diâmetro.” E que a diferença entre essas duas frações é um quatrocentos e noventa e sete avos, logo, dado C o comprimento da circunferência e d é o seu diâmetro, temos que, $3\frac{10}{71}d < C < 3\frac{1}{7}d$, tal que, a diferença entre estas duas frações é $\varepsilon = \frac{1}{7} - \frac{10}{71} = \frac{71-70}{497} = \frac{1}{497} \cong 0,0020120724$.

Para o círculo de diâmetro quatrocentos e noventa e sete cúbitos (juntas de bambu ou farsangs), o comprimento da circunferência é desconhecido e dúbio nos limites de 1 cúbito (uma junta de bambu ou um farsang):

$$3\frac{10}{71} \cdot d < C < 3\frac{1}{7} \cdot d$$

$$\frac{223}{71} \cdot d < C < \frac{22}{7} \cdot d$$

$$\frac{223}{71} \cdot 497 < C < \frac{22}{7} \cdot 497$$

$$1561 < C < 1562$$

$$\varepsilon = 1562 - 1561 = 1 \text{ farsangs}$$

Segundo Rozenfeld e Yushkiévitch (1954), para al-Kāshī o diâmetro da Terra era 2485 farsangs, e o seu comprimento se encontrava nos limites de 5 farsangs, uma vez que seu diâmetro é aproximadamente igual a cinco vezes tal quantidade de farsangs (5×497 farsangs = 2485 farsangs), ou seja, a margem de erro seria de aproximadamente 30 quilômetros, pois um farsang corresponde a aproximadamente seis quilômetros:

$$\frac{223}{71} \cdot d < C < \frac{22}{7} \cdot d$$

$$\frac{223}{71} \cdot (5.497) < C < \frac{22}{7} \cdot (5.497)$$

$$\frac{223}{71} \cdot (2485) < C < \frac{22}{7} \cdot (2485)$$

$$7805 < C < 7810$$

$$\varepsilon = 7810 - 7805 = 5 \text{ fangs}$$

Conforme Rozenfeld e Yushkiévitch (1954), assim como o astrônomo iraniano Quṭb al-Dīn al-Shīrāzī (1236-1311)⁴⁹, al-Kāshī considerava o diâmetro do cinturão do zodíaco (ou esfera das estrelas fixas) igual a $70073\frac{1}{2}$ do diâmetro da esfera terrestre, assim, a diferença entre os dois comprimentos é na verdade bem maior 100 mil fangs:

$$\frac{223}{71} \cdot d < C < \frac{22}{7} \cdot d$$

$$\frac{223}{71} \cdot (70073,5 \cdot 2485) < C < \frac{22}{7} \cdot (70073,5 \cdot 2485)$$

$$546\,923\,667,5 < C < 547\,274\,035$$

$$\varepsilon = 547\,274\,035 - 546\,923\,667,5 = 350\,367,5 \text{ fangs}$$

No trecho “Tais grandezas já são grandes para a circunferência, maior ainda serão para a medição de áreas. ” (AL-KASHI, 2022, p.327), vemos que al-Kāshī se preocupava tanto com a precisão do cálculo de comprimentos quanto de áreas, tanto que em sua obra *Chave para a Aritmética (Miftāh al-Hisab)* (1427), ele dedica o quarto tratado (de nove capítulos) ao cálculo de áreas, parte deste tratado está disponível em Aydin e Hammoud (2019). Al-Kāshī não menciona, mas, supomos que a preocupação com a precisão do cálculo de comprimentos e áreas circulares também provém da necessidade do cálculo correto do pagamento aos artesãos que trabalhavam nas construções que ganhavam de acordo com a área trabalhada, (DOLD-SAMPLONIUS, 1992).

⁴⁹ Foi aluno de [Nasir al-Din al-Tusi](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Farisi/) (1201-1274). Para mais detalhes, consultar: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Farisi/>>. Acesso em: 06 jul. 2021.

3.1.2 Estudo do Excerto 2: Comentário sobre a aproximação de Arquimedes

Na verdade, ele [Arquimedes] determinou o perímetro do polígono de noventa e seis lados inscrito na circunferência, menor que a circunferência, uma vez que cada um de seus lados é menor que o arco do qual ela é corda e, portanto, a soma de todos os lados [do polígono] é menor que a circunferência do círculo [no qual está inscrito o polígono], e ele [Arquimedes] determinou também o perímetro do polígono circunscrito de modo semelhante ao primeiro, e na primeira asserção do primeiro livro de sua composição ele demonstrou que tal perímetro é maior que a circunferência do círculo, sendo que a diferença entre eles [perímetro do polígono inscrito e circunscrito] é tal como dada acima. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 327-328, tradução nossa).

Nesse trecho do tratado al-Kāshī comenta a aproximação de Arquimedes para a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. Arquimedes calculou o perímetro do polígono de noventa e seis lados inscrito na circunferência, o qual é menor que o comprimento da circunferência, também calculou o perímetro do polígono circunscrito semelhante, cujo perímetro é maior que a circunferência do círculo, sendo que a diferença entre o maior e o menor perímetro é $\frac{1}{497}$.

Através da diferença entre os perímetros dos polígonos 96 lados inscrito e circunscrito à circunferência, os quais al-Kāshī não comenta serem regulares mas o subtendemos, $\frac{1}{497}$ é a margem de erro de Arquimedes para essa medição. Logo, como visto nos exemplos acima, para círculos cada vez maiores, a margem de erro aumenta cada vez mais. Al-Kāshī não mostra os cálculos de Arquimedes para o perímetro dos polígonos semelhantes inscrito e circunscrito à circunferência, apenas diz se tratar da “primeira asserção do primeiro livro de sua composição”, certamente porque era um conhecimento bastante difundido que não precisava de maiores referências; de acordo com Rozenfeld e Yushkiévitch (1954), tal asserção consiste da Proposição 1 do Primeiro Livro de Arquimedes, *Sobre a Esfera e o Cilindro*: “Se um polígono for circunscrito a um círculo, o perímetro do polígono circunscrito é maior que o perímetro do círculo.” (HEATH, 1897, p.5).

Ainda de acordo com Rozenfeld e Yushkiévitch (1954), esta proposição também está suposta em outra obra de Arquimedes, a *Medição do Círculo*; nos manuscritos árabes, a *Medição do Círculo* vinha como apêndice da obra *Sobre a Esfera e o Cilindro*.

Posteriormente al-Kāshī também tece comentários sobre as aproximações de outros dois estudiosos Abu'l-Wafā Būzjānī e Abu Rayhān al-Bīrūnī.

3.1.3 Estudo do Excerto 3: Comentário sobre a aproximação de Abu'l-Wafā al-Būzjānī

Abu'l-Wafā Būzjānī obteve, por meio de cálculo aproximado, a corda de metade de um trezentos e sessenta avos da circunferência em partes que o diâmetro é cento e vinte e, multiplicando isto por setecentos e vinte, e obteve o perímetro do polígono inscrito. Ele determinou também o perímetro do polígono circunscrito semelhante e afirmou que se o diâmetro for cento e vinte, então a circunferência será 376 mais uma fração maior que $0;59,10,59$ e menor que $0;59,23,54,12$ onde a diferença entre essas duas quantidades [frações] é $0;0,12,55,12$. Para o maior círculo da Terra isto seria mil cúbitos. Sendo que ele se enganou ao considerar o tamanho da corda de metade de um [360] partes igual a $0\ 31\ 23\ 55\ 54\ 55$. Está incorreto: o [valor] correto é $0\ 31\ 24\ 56\ 58\ 36$, como mostraremos mais à frente. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 328, tradução nossa)

Al-Kāshī também fez considerações sobre a aproximação para a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro feito por Abu'l-Wafā al-Būzjānī (940-998), na qual obteve uma aproximação para a corda da metade de um grau assumindo o diâmetro do círculo igual a 120 unidades, em seguida multiplicou este resultado por 720 para obter o perímetro do polígono regular inscrito na circunferência; de forma análoga, obteve o perímetro do polígono regular circunscrito. Logo, o perímetro da circunferência em números sexagesimais estaria entre $376;59,10,59$ e $376;59,23,54,12$, cuja diferença entre eles é $0;0,12,55,12$ (em sexagesimal). E a diferença entre eles para a maior circunferência da Terra seria maior que 1000 *adru'*. Al-Kāshī afirma que al-Būzjānī se equivocou, pois ao invés de utilizar o valor da corda de meio grau que seria $0;31,24,56,38,36$ ele utilizou o valor $0;31,24,55,54,55$.

Mas, segundo Woepcke (1822), o erro atribuído à al-Būzjānī foi cometido por Nasīr al-Dīn al-Tūsī (1201-1274) em seu *Taksīr al-Dā'irā* que é uma tradução árabe da Divisão do Círculo de Arquimedes. Al-Tūsī na verdade calculou o seno da metade de um grau. Segundo Azarian (2010), al-Būzjānī obteve o valor correto para a corda da metade de um grau em seu *Kitāb al-Kāmil* ("Livro Completo"), que é uma versão simplificada do Almagesto de Ptolomeu. Então, na verdade, al-Kāshī se equivocou ao atribuir o erro a al-Būzjānī ao invés de al-Tūsī.

3.1.4 Estudo do Excerto 4: Comentário sobre a aproximação de Abu Rayhān al-Bīrūnī

Abu Rayhān al-Bīrūnī obteve a corda de dois trezentos e sessenta avos da circunferência. Ele obteve o perímetro do polígono de cento e oitenta lados inscrito [regular] igual a $6;16,59,10,48,0$, enquanto que o perímetro do semelhante circunscrito [regular] era $6;17,1,58,19,6$. Supondo a circunferência do círculo igual à metade da soma desses dois perímetros, ele passou de frações com denominador [sexagesimal] para os números indianos, tomando o diâmetro como a unidade. Isto faz com que para o círculo igual ao maior círculo da Terra, seja aproximadamente igual a um farsang. Neste cálculo ele enganosamente tomou a corda de dois [trezentos e sessenta avos] partes como sendo $0;2,5,39,43,36$, enquanto que o correto seria $0;2,5,39,26,22$. No entanto, na tabela de senos [incluída] no *Cânone Mas'ūd*, ele tomou o seno de um [trezentos e sessenta avos], ou seja, metade da corda de duas partes, como sendo $0;1,2,49,43$, o que é correto, enquanto que no dobro se tem um erro. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 328, tradução nossa).

Sobre a aproximação de Abū Rayhān al-Bīrūnī (973-1048), al-Kāshī comenta que ele calculou a corda de um arco de dois graus sob um círculo unitário e calculou o perímetro dos polígonos regulares inscrito e circunscrito de 180 lados, cujos valores em sexagesimal são respectivamente, $6;16,59,10,48$ e $6;17,1,58,19,6$. Al-Bīrūnī tomou a média desses valores como sendo o comprimento da circunferência. Mas em um círculo que é igual ao maior círculo terrestre, essa aproximação apresentará uma diferença de 1 *farsang*. Al-Kāshī argumenta que al-Bīrūnī errou nos seus cálculos pois tomou o valor $0;2,5,39,43,36$ como o comprimento da corda de dois graus, ao invés de $0;2,5,39,26,22$. No entanto, tomou o valor correto para o seno de um grau, que de acordo com o *Cânone Mas'ūd* é igual a $0;1,2,49,43$, mas errou ao dobrá-lo com o objetivo de obter o seno de dois graus. A aproximação de al-Bīrūnī para metade da circunferência do círculo (entre $3,141742$ e $3,141744$) era maior que a conhecida por gregos e indianos ($3,14166$), mostrando que de fato a sua era mais precisa.

Na conclusão do tratado al-Kāshī volta a discutir as aproximações de al-Būzjānī e al-Bīrūnī e reafirma que sua aproximação para a circunferência do círculo é mais precisa do que as deles.

3.1.5 Estudo do Excerto 5: Declaração do objetivo de al-Kāshī

Uma vez que tais operações levam a erros, **queremos determinar a circunferência do círculo com a suposição de que seu diâmetro é conhecido em termos de uma determinada medição de tal maneira que estaríamos certos de que em um círculo que seu diâmetro é seiscentas mil vezes maior que o diâmetro da esfera terrestre, a diferença entre o resultado de nossos cálculos e o valor real não ultrapasse a largura de um fio de cabelo, ou seja, um sexto da largura de um grão de cevada, de modo que tal diferença para círculo menor que este seja ainda menor.** (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 329, tradução nossa, grifo nosso).

Após analisar as aproximações feitas por Arquimedes, Abu'l-Wafā Būzjānī e Abu Rayhān al-Bīrūnī, al-Kāshī concluiu que tais aproximações se mostravam confusas e com grandes margens de erro, assim, ele se propôs a calcular uma melhor aproximação para a relação entre a circunferência e o seu diâmetro estabelecendo um objetivo muito audacioso:

[...] queremos determinar a circunferência do círculo supondo que seu diâmetro é conhecido em termos de uma determinada medição, de tal maneira, que estaríamos certos de que em um círculo que seu diâmetro é seiscentas mil vezes maior que o diâmetro da esfera terrestre, a diferença entre o resultado de nossos cálculos e o valor real não ultrapasse a largura de um fio de cabelo, ou seja, um sexto da largura de um grão de cevada, de modo que tal diferença para um círculo menor que este seja ainda menor.⁵⁰ (ROZENFELD, 1954, p. 329, tradução nossa).

Ou seja, al-Kāshī deseja determinar uma aproximação para o comprimento da circunferência, de tal forma, que para a circunferência cujo diâmetro é seiscentas mil vezes o diâmetro da Terra, a diferença entre o valor real e o valor calculado seja menor que a largura de um cabelo de cavalo, ou seja, al-Kāshī estava em busca de uma margem de erro extremamente pequena para a estimativa do comprimento da circunferência. Além disso, para círculos menores esta aproximação para o comprimento da circunferência deveria ser um valor menor ainda.

Al-Kāshī considerava o diâmetro da Terra igual a 2485 *farsangs*, (ROZENFELD E YUSHKIÉVITCH, 1954). A circunferência seiscentas mil vezes maior que a circunferência terrestre é justamente a circunferência do universo, pois de acordo com Berggren,

[...] al-Kāshī enuncia sua exigência de precisão afirmando que deseja que o valor seja tão preciso que, quando usado para **calcular a circunferência do universo de acordo com as dimensões antigas, o resultado não difere do valor verdadeiro em mais de a largura do cabelo de um cavalo.** (BERGGREN, 2009, p. 21, tradução nossa, grifo nosso).

Para atingir seu objetivo, ele utiliza unidades de medida bastante diferentes das utilizadas em nossos dias, na verdade, são bastante antigas: o *farsang*, o cúbito,

⁵⁰ Так как эти действия приводят к ошибкам, мы хотим так определить окружность круга в частях, в которых выражен диаметр, чтобы мы были уверены, что в круге, диаметр которого равен шестистам тысячам диаметров земли, разница между ней [полученной величиной окружности] и истинной была не больше волоса, т.е. одной шестой ширины среднего ячменного зерна, так что разность для круга, меньшего чем этот, была бы меньше.

o dedo, a largura de um grão de cevada e a largura de um cabelo de cavalo. No entanto, ele não explica porque as utilizou nem fala de suas origens, muito provavelmente por serem amplamente difundidos no mundo islâmico.

De acordo com Houtum-Schindler (1888), o cúbito era a unidade de todas as medidas de comprimento na Ásia e passou a ser também da Pérsia; o cúbito persa era o mesmo que o cúbito babilônico, possivelmente adotado no período pré-histórico, havia diversas variações tanto do cúbito quanto do *farsang*. As primeiras menções ao cúbito remontam a 2600 a.E.C.; em escavações das ruínas da Antiga Babilônia observou-se que o cúbito na Pérsia era chamado de *gez* que significa “a régua de medição”; em árabe é *dharâ'* e representa “o braço, do cotovelo até a ponta do dedo médio”, também conhecido como cúbito real de Heródoto; o termo *dhar'* em árabe significava “medindo com um cúbito”. Havia dois tipos de cúbito, o real e o comum que era $\frac{7}{8}$ do cúbito real, (HOUTUM-SCHINDLER, 1888).

Conforme Doursther (1840), Houtum-Schindler (1888) e Yushkiévitch (1976), o *farsang* é *parasang* em árabe, uma antiga unidade de medida persa para rotas usada em todo o antigo Oriente Médio e Mediterrâneo, algumas de suas definições são a distância que um pedestre robusto pode percorrer em uma hora; outra, é o caminho percorrido por um cavalo em uma hora que equivale à metade percorrida por um homem. A menor medida persa de comprimento era o *mû* (cabelo), geralmente era tido como a largura de um cabelo de mula, provavelmente inspirados nessa medida, foi instituída pelos árabes a medida linear “cabelo de cavalo” que também poderia se referir a cabelo de camelo, (DOURSTHER, 1840) e (HOUTUM-SCHINDLER, 1888).

Estabeleceram-se relações entre todas essas unidades de medida: 1 *fasang* equivale a 12000 cúbitos, 1 cúbito (*dharâ'*) são 24 dedos, 1 dedo (*angusht*) equivale a largura de 6 grãos de cevada e 6 cabelos de cavalo (*mû*) correspondem a largura de 1 grão de cevada (*jô*).

Al-Kāshī não explica o porquê considera o diâmetro da Terra igual 2485 *farsangs* e o comprimento da circunferência terrestre igual a 8000 *farsangs*, mas em Houtum-Schindler (1888) temos que, para Ptolomeu, a relação de um grau terrestre em relação ao equador é igual a 25 *farsangs* e para outros estudiosos $22\frac{2}{9}$ *farsangs* ou $18\frac{8}{9}$. Certamente al-Kāshī adotou $22\frac{2}{9}$ *farsangs* para um grau terrestre pois,

$22\frac{2}{9} \cdot 360 = 8000 \text{ farsangs}$, que é a medida que al-Kāshī considera ser a medida da maior circunferência da Terra.

3.1.6 Estudo do Excerto 6: Sobre a organização do Tratado da Circunferência

Compus o presente tratado contendo tal determinação, dei-lhe o título de Tratado sobre a Circunferência e o dividi em dez partes e conclusão. Rogo ao amado e generoso Alá que nos conduza pelo caminho da verdade. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 329, tradução nossa).

Nesse trecho, al-Kāshī explica como dividiu o Tratado da Circunferência e também externa sua devoção a Alá. No Quadro 6, listamos cada uma das partes do referido tratado e os seus respectivos títulos.

Quadro 6 - As partes e os títulos do Tratado da Circunferência de al-Kāshī.

ESTRUTURA DA OBRA	PARTE	TÍTULO
Revisão de literatura	Parte introdutória	(não há título)
Preparação de um aparato matemático	1	Determinação da corda de um arco que é a soma de um arco conhecido e metade de seu suplemento na metade do círculo.
	2	Determinação do perímetro de um polígono arbitrário inscrito em um círculo e o perímetro de um polígono similar circunscrito ao mesmo círculo.
Realização da obra	3	Em quantos lados [arcos iguais] subdividimos a circunferência e até que dígito sexagesimal devemos calcular, de modo que, a circunferência de um dado círculo seja obtida com uma precisão não maior do que a largura de um cabelo [de cavalo].
	4	Os Cálculos.
	5	Determinação do tamanho do lado de um polígono regular inscrito em um círculo onde o número de lados é 1, 2, 8, 16, 12, 48 [no sistema sexagesimal].
	6	Determinação do perímetro, um polígono [regular] inscrito um círculo e seu similar polígono [regular] circunscrito ao [mesmo] círculo, onde cada polígono tem 805 306 368 lados.
Preocupação didática	7	Como ignorar os últimos dígitos dos cálculos anteriores em frações aditivas e subtrativas.
	8	Conversão do tamanho da circunferência em algarismos [arábicos] indianos, assumindo que a metade do diâmetro é um.
	9	Maneiras de cálculos com as duas tabelas.
	10	Determinação da diferença entre o que é de uso comum e famoso entre as pessoas, e o que obtivemos.
Retomada e fechamento		Conclusão

Fonte: al-Kāshī (1954).

Na parte introdutória, na qual al-Kāshī não coloca título, ele faz uma revisão de literatura sobre as aproximações para a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro e tece críticas. Nas Partes 1 e 2, al-Kāshī organiza um aparato

matemático o qual subsidiará a obtenção de sua aproximação. Nas partes 4,5 e 6, al-Kāshī realiza os cálculos para a obtenção da sua aproximação da relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. Nas partes 7,8,9 e 10, percebemos uma preocupação de al-Kāshī em tornar o seu tratado o mais compreensível possível para quem o lesse, logo, ele explica seu método de arredondamento, conversão de sexagesimal para decimal e vice-e-versa e disponibiliza uma tabela de múltiplos da sua aproximação. Finalmente, na conclusão, al-Kāshī retoma as aproximações dos seus predecessores reforçando suas críticas e mostrando como sua aproximação é mais precisa.

Na Figura 17 ilustramos a organização de al-Kāshī na construção do seu Tratado da Circunferência:

Figura 17 - Ilustração do raciocínio de al-Kāshī na construção do Tratado da Circunferência



Fonte: Desenvolvido pela autora.

Observamos que no Tratado da Circunferência os resultados de cada parte subsequente dependem diretamente da parte anterior, o que demonstra uma organização lógica e uma preocupação didática por parte do autor. De fato,

concordamos com Taani (2014) que na Chave para a aritmética (*Miftāḥ al-ḥisāb*)⁵¹ de 1427, al-Kāshī revela sua preocupação com o ensino e a aprendizagem da matemática pelas diferentes definições, de um mesmo conteúdo, e as diferentes formas de resolver um mesmo problema que ele apresenta, com o claro objetivo de fazer seus alunos compreenderem melhor, e sob diferentes ângulos, os assuntos que estivessem em questão.

3.2 A primeira parte: sobre a determinação da corda de um arco, que é a soma de um arco de uma corda conhecida e do arco que é a metade de seu suplementar

3.2.1 Estudo do Excerto 6: Teorema de al-Kāshī

Digo que: uma superfície [retangular] [construída] na soma do diâmetro e da corda de cada arco menor que o semicírculo e na metade do diâmetro é igual ao quadrado da corda do arco que é igual à soma do primeiro arco e a metade de seu suplemento ao semicírculo. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 329, tradução nossa).

Já no título da primeira parte do tratado entendemos que al-Kāshī tem por objetivo calcular o comprimento de uma corda com as seguintes características: esta corda é a corda de um arco que é a soma de outra corda (de um arco desconhecido) com a metade do seu suplemento.

Al-Kāshī afirma que uma superfície retangular composta pela soma do diâmetro com a corda (de um arco menor que o semicírculo) e metade do diâmetro, é igual ao quadrado da corda (do arco que é a soma desse arco menor que o semicírculo mais metade do seu suplemento).

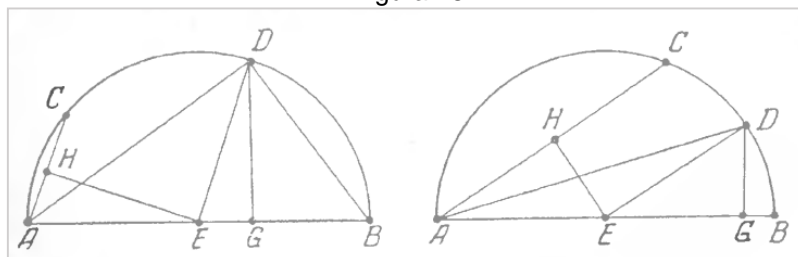
Em seguida, al-Kāshī indica os passos para a construção de um desenho geométrico:

A fim de demonstrar, construamos o semicírculo ACB de centro E na linha AB; traçamos uma corda arbitrária AC; [o arco] BC que é o suplemento de AC dividimos ao meio encontrando o ponto D; ligamos A e D. Então a asserção [diz]: a superfície na metade do diâmetro e a soma AB e AC é igual ao quadrado AD. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 329, tradução nossa).

⁵¹ AL-KĀSHĪ, Ghiyāth. Klyuch k arifmetike (Chave para aritmética). In: ROZENFELD, B. Al-Kashani. *Istorično-Matematicheskie Issledovaniya* (Pesquisa Histórica e Matemática). Moscow, v. 7, p. 13-3326, 1954.

Em outras palavras, seja o semicírculo ABC com centro E na linha AB; deve-se traçar uma corda qualquer AC e dividir ao meio o arco BC (que é suplemento do arco AC) encontrando o ponto D, Figura 18.

Figura 18



Fonte: al-Kāshī (1954, p.329).

Na sequência, al-Kāshī inicia a demonstração de sua afirmativa. Outra demonstração do Teorema de al-Kāshī está no Apêndice B:

Demonstração: Traçamos BD. Então o ângulo ADB é reto pela proposição trinta do terceiro [livro] <<d'Os Elementos>>. A seguir baixamos do ponto D a perpendicular DG à linha AB. Obtém-se os triângulos DBG e DAG, semelhantes aos triângulo ADB pela oitava proposição do [livro] seis <<d'Os Elementos>>. Por isso, o diâmetro AB está para AD assim como AD está para AG e pela proposição dezenove do [livro] sete <<dos Elementos>>, a superfície no diâmetro é igual ao quadrado de AD. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 330-331, tradução nossa).

Assim, al-Kāshī desenvolveu uma engenhosa relação entre elementos da circunferência, cujo resultado serviu de base para todos os seus cálculos, que poderíamos chamar de teorema.

Segundo Rozenfeld e Yushkiévitch (1954), na seguinte parte do Trecho 3 “Então o ângulo ADB é reto pela proposição trinta do terceiro [livro] <<d'Os Elementos>>. ”, o correto não seria a proposição 30 do terceiro livro que trata da divisão da circunferência, o correto seria a proposição 31 do terceiro livro que diz:

3º livro, proposição 31: Em um círculo, por um lado, o ângulo no semicírculo é reto, e, por outro lado, o no segmento maior é menor do que um reto, enquanto o no segmento menor é maior do que um reto; e, ainda, por um lado, o ângulo do segmento maior é maior do que um reto, e, por outro lado, o ângulo do segmento menor é menor do que um reto. (EUCLIDES, 2009, p. 177).

Esta proposição se refere a propriedade que todo triângulo cujos vértices são pontos da circunferência e cuja hipotenusa é o diâmetro, ser um triângulo retângulo.

Dando continuidade à demonstração, seja o semicírculo ACB de centro E na linha AB, primeira ou segunda figura do Trecho 3; traçamos uma corda arbitrária AC; dividimos ao meio o arco BC, que é o suplemento de AC, e encontrando o ponto D; ligamos A e D. Traçamos BD. No manuscrito de Mashhad disponível em Hogendijk (2009), consta apenas a segunda imagem da Figura 18, no entanto, tanto a primeira quanto a segunda imagem satisfazem os passos da construção.

Então o ângulo ADB é reto pela proposição trinta do terceiro livro de *Os Elementos* de Euclides (na verdade é a proposição 31). A seguir baixamos do ponto D a perpendicular DG à linha AB. Obtém-se os triângulos DBG e DAG, semelhantes aos triângulo ADB pela oitava proposição do livro oito d' *Os Elementos*, que na verdade deveria ser a proposição 6 do livro oito. Por isso, o diâmetro AB está para AD assim como AD está para AG e pela proposição dezenove do livro sete d' *Os Elementos*, a superfície no diâmetro é igual ao quadrado de AD. Assim, dado que $\triangle ADG \sim \triangle ABD$, $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AG}$, portanto $AB \cdot AG = AD^2$.

Pelo ponto H traçamos a perpendicular HE ao segmento AC. Então H será ponto médio de AC pela proposição três do terceiro livro de *Os Elementos*. Ligamos os pontos E a D. Uma vez que a medida do ângulo BAC é metade do arco CB, a mesma do ângulo BED, estes dois ângulos (BAC e DEG) são iguais. Por isto o triângulo AHE e EGD são iguais, uma vez que eles têm os ângulos retos H e G, ângulos iguais em E, A e lados iguais AE e ED. Portanto, o lado EG é igual ao lado EH, que é metade de AC e a superfície sobre AG, ou seja, a soma da metade do diâmetro e EG é igual à metade de AC e sobre o diâmetro é igual ao quadrado de AD. Logo, dado que $\triangle AHE \cong \triangle EGD$, temos:

$$AH = EG$$

$$AH = \frac{1}{2} AC = EG$$

$$AG = AE + EG = AE + \frac{1}{2} AC = R + \frac{1}{2} AC$$

Sendo assim, por relações métricas no triângulo retângulo, obtém-se:

$$AG \cdot AB = AD^2$$

$$\left(R + \frac{1}{2}AC\right).AB = AD^2$$

$$\left(R + \frac{1}{2}AC\right).2R = AD^2$$

$$2R^2 + AC.R = AD^2$$

$$R.(2R + AC) = AD^2$$

$$R.(AB + AC) = AD^2$$

Tomamos o cuidado de verificar em Euclides (2009) se as demais proposições citadas por al-Kāshī estavam corretamente referenciadas em sua demonstração. Além da proposição 30 do 3º livro que deveria ser a 3, ao invés de citar a proposição 8 do livro 8, al-Kāshī deveria ter citado a proposição do livro 8. No Quadro 7 temos listadas as proposições do *Elementos* de Euclides de fato utilizadas por al-Kāshī na primeira parte do tratado:

Quadro 7 - Lista das proposições de *Os Elementos* de Euclides utilizadas por al-Kāshī no Tratado da Circunferência.

LIVRO	PROPOSIÇÃO	ENUNCIADO
3	3	Caso, em um círculo, alguma reta pelo centro corte alguma reta, não pelo centro, em duas, também a corta em ângulos retos; e, caso corte-a em ângulos retos, também a corta em duas.
3	31	Em um círculo, por um lado, o ângulo no semicírculo é reto, e, por outro lado, o no segmento maior é menor do que um reto, enquanto o no segmento menor é maior do que um reto; e, ainda, por um lado, o ângulo do segmento maior é maior do que um reto, e, por outro lado, o ângulo do segmento menor é menor do que um reto
8	6	Caso em um triângulo retângulo seja traçada uma perpendicular do ângulo reto até a base, os triângulos junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo quanto entre si.
7	19	Caso quatro números estejam em proporção, o número produzido do primeiro e quarto será igual ao número produzido do segundo e terceiro; e caso o número produzido do primeiro e quarto seja igual ao do segundo e terceiro, os quatro números estarão em proporção.

Fonte: al-Kāshī (1954) e Euclides (2009).

De acordo com Djebbar (2013) certas obras matemáticas foram traduzidas várias vezes para o árabe a partir da mesma fonte, sendo justamente *Os Elementos* de Euclides o exemplo mais conhecido, este consiste de 115 proposições divididas em 13 capítulos.

Segundo Brentjes (2016) além da tradução siríaca disponível, *Os Elementos* foi traduzido pela primeira vez para o árabe no século VIII pelo mulçumano al-Hajjâj

Ibn Yūsuf Ibn Maṭar (786-833) e essa tradução foi dedicado ao califa Hārūn al-Rashīd (786-809) ou ao seu vizir Barmekide Yaḥyā Ibn Khālid. No início do século IX o mesmo autor produziu uma nova versão dedicando-a ao então califa al-Ma'mūn (813-833). Ainda de acordo com Brentjes (2016), possivelmente antes de 872 Ishāq ibn Hunayn faz uma terceira versão revisada por Thābit ibn Qurra, tal revisão também influenciou as traduções hebraicas e latina de Gerard de Cremona. Logo,

Essa assim chamada tradição Ishāq / Thābit exerceu a maior influência sobre a pesquisa matemática e o ensino no mundo muçulmano medieval até o final do século XIII. É caracterizada por uma tradução muito literal de um texto conectado com a edição grega feita por Theon de Alexandria (século IV). (BRENTJES, 2016, p. 1600).

Conforme Brentjes (2016), outras versões árabes de *Os Elementos* de Euclides foram editas até o final do século XIII, entre as mais influentes estão duas de Nasīr al-Dīn al-Tūsī (1201-1274), uma das quais lhe foi atribuída e concluída em 1298 após a sua morte. Dentre as principais evidencias que estas versões substituíram as tradições anteriores estão a quantidade de cópias preservadas e as referências a eles em trabalhos matemáticos ou não matemáticos.

Assim, não sabemos qual versão foi a utilizada por al-Kāshī, mas, possivelmente, foi uma dessas ou alguma nelas fundamentada. Lembremos que al-Kāshī não cita diretamente *Os Elementos* de Euclides, por ser um texto amplamente difundido no mundo islâmico, não necessitando referenciá-lo todo tempo. O tradutor Rozenfeld, em al-Kāshī (1954), coloca as referências aos *Elementos* entre os símbolos <<>> e, entre colchetes, as palavras presentes no texto, mas, que não eram completamente legíveis.

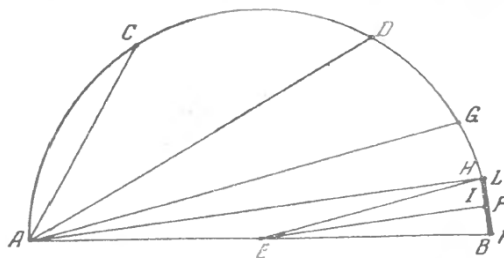
Para Berggren (2013) os *Elementos* de Euclides influenciaram por séculos os estudos em geometria e astronomia, levando a produção de inúmeros comentários, críticas e melhorias, sendo de fundamental importância para a geometria medieval.

Observemos que as demonstrações e aplicação do Teorema Fundamental de al-Kāshī utilizam proposições da geometria plana presentes nos conteúdos de matemática da educação básica, no entanto, o que nos surpreende é a engenhosidade de suas ideias numa época que não havia os recursos tecnológicos e a notação moderna.

3.3 A Segunda Parte: sobre a determinação do perímetro de um polígono qualquer inscrito no círculo e do perímetro do semelhante circunscrito ao círculo

3.3.1 Estudo do Excerto 7: Perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito

Construamos no segmento AB o semicírculo ACB de centro E suponhamos que [o arco] AC seja um sexto da circunferência. Então a corda AC será a metade do diâmetro pela proposição quinze do quarto [livro] <<d'Os Elementos>>.



Em seguida dividamos ao meio [o arco] CB, que é o suplemento [do arco] AC obtendo assim o ponto D. Dividamos [o arco] DB ao meio, obtendo o ponto G. Depois, dividamos [o arco] GB ao meio obtendo H, e assim por diante o quanto se queira. Como já dissemos na sessão anterior, como conhecemos a corda AC, também conheceremos a corda AD, de onde também será conhecida a corda AG, AH, e assim por diante. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 331, tradução nossa, adaptado).

A palavra [livro] entre colchetes indica que era uma palavra quase ilegível a qual foi inferida pelo tradutor. A referência aos *Elementos* de Euclides entre << >>, foi acrescentada também por Rozenfeld pois al-Kāshī não faz referência direta a esse à referida obra.

Na Segunda Parte do *al-Risāla al-Muhītīyya*, o objetivo de al-Kāshī é determinar o perímetro de um polígono inscrito e do semelhante circunscrito a circunferência. Para isso, ele constrói um semicírculo de diâmetro \overline{AB} e o arco AC igual a um sexto da circunferência, ou seja, a medida do arco AC é 60° , logo, a corda AC é igual ao raio da circunferência de acordo com a proposição quinze do quarto livro de *Os Elementos* de Euclides. Prosseguindo com a demonstração, al-Kāshī divide ao meio sucessivos arcos: D divide ao meio o arco CB (que é suplementar a AC), G é divide ao meio o arco DB , H divide ao meio o arco DB , J divide ao meio o arco GB , I divide ao meio o arco HB e assim por diante através do resultado obtido na primeira parte do tratado que diz: “[...] a superfície na metade do diâmetro e a soma AB e AC é igual ao quadrado AD .”, em outras palavras, através da equação $R.(AB + AC) = AD^2$, assim, temos as cordas AD, AG, AH, \dots . Generalizando, Figura 19, temos:

$$R.(AB + AC) = AD^2$$

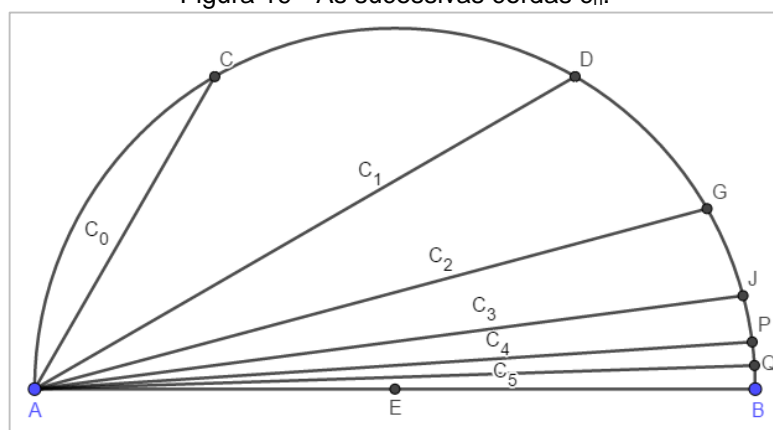
$$R.(AB + AD) = AG^2$$

$$R.(AB + AG) = AJ^2$$

$$\vdots$$

$$R.(2R + c_{n-1}) = c_n^2$$

Figura 19 - As sucessivas cordas c_n .

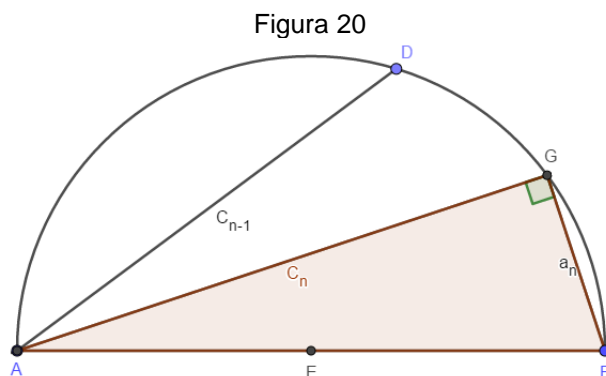


Fonte: Elaborado pela autora.

Observemos que na determinação das metades dos sucessivos arcos de circunferência, em nenhum momento al-Kāshī fala em “ponto médio” ou “bissetriz”, apenas fala em “dividir o arco ao meio”.

Agora, se temos a corda AH e queremos determinar a corda BH subtraímos o quadrado de AH do quadrado do diâmetro e o que resta é o quadrado da corda BH, pois, o ângulo AHB é reto pela proposição trinta do terceiro [livro] <<d’Os *Elementos*>> e, conseqüentemente, o quadrado de AB é igual aos quadrados AH e HB pelo “teorema da noiva”. (AL-KĀSHĪ, 1954, p.331, tradução nossa).

Assim como na primeira parte do tratado, aqui al-Kāshī também faz referência à proposição 30 do 3º livro de os *Elementos* de Euclides. Comparando a intencionalidade do texto de al-Kāshī com Euclides (2009) e de acordo com Rozenfeld (1954), também concluímos que o correto seria a proposição 31. Em outras palavras, quer dizer: “todos os ângulos que subtendem um semicírculo são retos.” (BARBOSA, 1995, p.91). Assim, o ângulo $A\hat{G}B$ é reto, Figura 20:



Fonte: Elaborado pela autora.

Aplicando o “Teorema da Noiva” que, pelo contexto, entendemos ser o Teorema de Pitágoras, obtém-se o comprimento do lado do polígono regular inscrito à circunferência, fazendo $a_n^2 + c_n^2 = 4r^2$, logo, $a_n = \sqrt{4r^2 - c_n^2}$, $n \geq 0$.

A seguir dividimos ao meio o arco BH no ponto F e ligamos EF. Esta linha divide ao meio a corda BH em I. Traçamos a tangente FLK ao círculo no ponto F levantando, por ambos os lados [do ponto F] duas perpendiculares FK e FL, ligamos EH e continuamos até L, assim como [continuamos] EB até K. Então KL será paralela a BH, uma vez que BEH é um polígono inscrito no círculo, KEL será o seu semelhante circunscrito. (AL-KĀSHĪ, 1954, p.331, tradução nossa).

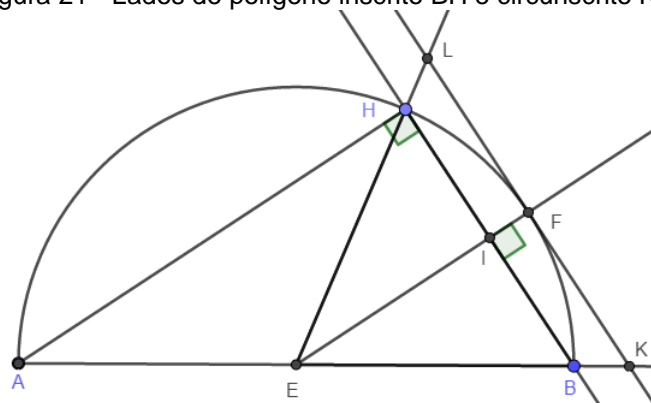
Al-Kāshī também elaborou uma forma de calcular o comprimento do lado do polígono regular semelhante circunscrito:

Sendo assim, os triângulos EKF e ELF são iguais entre si, e os triângulos EBI e EHI, por sua vez, são iguais entre si. Por isto, EI está para EF (que é metade do diâmetro) do mesmo modo que BH está para KL. Portanto, EI está para IF, que à sobra do último membro desta proporção em relação ao anterior, assim como, a corda BH está para a sobra de KL sobre BH, sendo esta relação a mesma relação da soma de todos os lados do polígono inscrito no círculo, cujo lado é BH, com todas as sobras dos lados do polígono circunscrito, cujo lado é KL sobre os primeiros lados. Logo, EI é a metade da linha AH, uma vez que os triângulos AHB e EIB são semelhantes em virtude de que, os ângulos H e I são retos e o ângulo \hat{A} , na circunferência que acompanha o arco BH, é igual ao ângulo central \hat{E} , que acompanha o arco BF, que é metade do arco BH, e EB que é metade de AB. Desse modo EI é metade de AH. Por isso, uma vez que EI e BH ficarão conhecidos, as relações apontadas também serão conhecidas e, do mesmo modo, o polígono inscrito no círculo e o polígono circunscrito no círculo, também serão conhecidos. Era aí que queríamos chegar. (AL-KĀSHĪ, 1954, p.331-332, tradução nossa).

Na Figura 21, seja \overline{BH} o comprimento de cada lado do polígono regular inscrito e F o ponto médio do arco BH, em seguida, tracemos o segmento de reta EF, cuja interseção com o segmento BH é o ponto I, tracemos o segmento KL tangente

ao semicírculo no ponto F, que intersecta a continuação do segmento de reta EH e do segmento de reta EB, respectivamente, nos pontos L e K.

Figura 21 - Lados do polígono inscrito BH e circunscrito KL.



Fonte: Elaborado pela autora.

Temos que \overline{LK} é o comprimento do lado do polígono regular circunscrito, semelhante ao polígono regular inscrito. De fato, os triângulos AHB e EIB são semelhantes, logo, $\frac{\overline{AH}}{\overline{EI}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{IB}}$ e $\overline{EI} = \frac{1}{2}\overline{AH}$ (conhecido hoje como teorema do Ponto Médio), além disso, $\overline{EF} = r$ (raio) e se os valores de \overline{AH} e \overline{HB} são conhecidos, assim podemos calcular o comprimento \overline{KL} do lado do polígono regular circunscrito, conforme descrito abaixo:

$$\frac{\overline{EI}}{\overline{EF} - \overline{EI}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{KL} - \overline{HB}}$$

3.4 A Terceira Parte: em quantas partes deve ser dividida a circunferência e até quantas casas sexagesimais são necessárias para efetuar as operações para que o perímetro obtido seja distinto do círculo dado numa grandeza menor do que um fio de cabelo

3.4.1 Estudo do Excerto 8: Quantidade de partes em que a circunferência deve ser dividida

Saiba que no círculo de diâmetro 600 000 vezes maior que o diâmetro da Terra, a circunferência também é 600 000 vezes maior que a circunferência da Terra. Neste círculo se verifica:

GRAU	Mil, seiscentos e sessenta e seis e dois terços da circunferência da Terra, ou seja, $1666\frac{2}{3}C$.
MINUTO	Aproximadamente vinte e sete e três quartos do mesmo diâmetro, ou seja, $27\frac{3}{4}C$.

SEGUNDA	Aproximadamente três mil setecentos e quatro farsangs, se a circunferência da Terra for tomada como oito mil farsangs.
TERÇA	Aproximadamente 62 farsangs
QUARTA	Aproximadamente 1 farsang e três décimos
QUINTA	Aproximadamente duzentos e seis cúbitos
SEXTA	Aproximadamente 3 e 1/3 de um cúbitos
SÉTIMA	Um e um terço de um dedo, isto é, 48 fios de cabelo
OITAVA	Quatro quintos da grossura de um cabelo de cavalo, ou ainda, menos. [20]

(AL-KĀSHĪ, 1954, p. 332, tradução nossa, grifo nosso).

Os objetivos de al-Kāshī na terceira parte do Tratado da Circunferência já veem explicitados no enunciado: (1) descobrir em quantas partes a circunferência deve ser dividida, para que a diferença entre o valor real e o perímetro calculado seja inferior a largura de um cabelo de cavalo e (2) determinar a quantidade necessária de casas sexagesimais dos números envolvidos nos cálculos para satisfazer o limite acima citado. Especificamente neste excerto, vamos tratar sobre as unidades de medida utilizadas por al-Kāshī.

Al-Kāshī explica que no círculo de diâmetro seiscentas mil vezes maior que o diâmetro da Terra, sua circunferência será também seiscentas mil vezes maior que a circunferência da Terra, onde a circunferência da Terra é o comprimento da maior circunferência da Terra e na terceira linha da tabela, ele deixa claro que considera a circunferência da Terra igual a 8000 *farsangs* e na primeira parte do tratado, o diâmetro da Terra igual a 2485 *farsangs*, mas não explica o porquê. Em seguida no quadro, al-Kāshī calcula as medidas do grau, minuto, segundo, até a oitava fração sexagesimal desta circunferência seiscentas mil vezes maior que a circunferência da Terra.

Al-Kāshī utiliza as seguintes unidades de medida: *farsang*, cúbito, dedo e a largura de cabelo de cavalo, relacionando-as entre si, até chegar em um oitavo da circunferência seiscentas mil vezes maior que a circunferência da Terra e chegar à conclusão que seu valor é menor que a espessura de um fio de cabelo de cavalo, ou ainda menos.

Consideremos o objetivo de al-Kāshī com o Tratado da Circunferência:

[...] queremos determinar a circunferência do círculo com a suposição de que seu diâmetro é conhecido, em termos de uma determinada medição, de tal maneira que estaríamos certos de que em um círculo cujo diâmetro é seiscentas mil vezes maior que o diâmetro da esfera terrestre, a diferença entre o resultado de nossos cálculos e o valor real não ultrapasse a **largura**

de um fio de cabelo, ou seja, **um sexto da largura de um grão de cevada**, de modo que tal diferença para um círculo menor, que este seja ainda menor.⁵² (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 329, tradução nossa, grifo nosso).

Notemos que al-Kāshī cita em seu objetivo uma outra unidade de medida que não está presente na tabela do excerto 9, o ‘grão médio de cevada’ que equivale a seis “cabelos de cavalo’. Em Berggren temos uma pista sobre a origem dessas unidades de medida:

[...] Al-Kāshī enuncia sua exigência de precisão afirmando que deseja que o valor seja tão preciso que, quando usado para **calcular a circunferência do universo de acordo com as dimensões antigas, o resultado não difere do valor verdadeiro em mais de a largura do cabelo de um cavalo**.⁵³ (BERGGREN, 2009, p. 21, tradução nossa, grifo nosso).

Concluimos que o farsang, o cúbito, o dedo, o grão de cevada e o cabelo de cavalo são unidades de medida antigas e, no contexto de al-Kāshī, uma circunferência 600 mil vezes maior que a circunferência terrestre é a medida da circunferência do universo, que é a mesma coisa que cinturão do zodíaco, onde estão localizados os astros. Logo, al-Kāshī tinha por objetivo calcular a circunferência do universo com uma precisão da largura de um fio de cabelo de cavalo.

As unidades de medida mencionadas foram herdadas da antiga Babilônia (Pérsia) e do mundo árabe pré-islâmico. Al-Kāshī não explica sua origem nem porque as utilizou, mas, de acordo com Doursther (1840, p. 395):

PARASANGE, PHARSANGE, PHARSAC, FARSANG, FIRSENG, em inglês parasang, em espanhol, em português e em italiano parasanga, farsanga. Medição de rota. ARABIA E PERSIA, antiguidade. O parasange árabe ou persa, 8ª do marhala ou dia, valia 3 milhas árabes = 150 cadeias topográficas = 1500 cassaba = 3000 kathouah = 9000 côvados haquêmicos = 12000 côvados deraga cabda = 18000 pés. Quilômetros: 5.760.⁵⁴

⁵² мы хотим так определить окружность круга в частях, в которых выражен диаметр, чтобы мы были уверены, что в круге, диаметр которого равен шестистам тысячам диаметров земли, разница между ней [полученной величиной окружности] и истинной была не больше волоса, т.е. одной шестой ширины среднего ячменного зерна, так что разность для круга, меньшего чем этот, была бы меньше.

⁵³ Al-Kāshī phrases his requirement for accuracy by stating that he wants the value to be so accurate that, when it is used to calculate the circumference of the universe according to the ancient dimensions, the result would not differ from the true value by more than the width of a horse's hair.

⁵⁴ PARASANGE, PHARSANGE, PHARSAC, FARSANG, FIRSENG, en anglais parasang, en espagnol, en portugais et en italien parasanga, farsanga. Mesure itinéraire.

Como podemos perceber, *farsang* é uma unidade de medida persa difundida no mundo árabe, portanto, não necessitava de maiores explicações. Do mesmo modo, para o curioso *fio de cabelo de cavalo*, temos:

CABELO DE CAVALO, Cabelo de camelo. Antiga medida linear dos árabes. Crina ou pelo de camelo, 36ª parte do dedo ou assbaa, = 0,556 mm.⁵⁵ (DOURSTHER, 1840, p. 134).

Segundo Houtum-Schindler (1888), o cúbito era a unidade de todas as medidas de comprimento na Ásia e passou a ser também da Pérsia; o cúbito persa era o mesmo que o cúbito babilônico, possivelmente adotado no período pré-histórico, possuía diversas variações assim como o *farsang*. As primeiras menções ao cúbito remontam a 2600 A.C., em escavações das ruínas da Antiga Babilônia, o cúbito na Pérsia era chamado de *gez* que significa “a régua de medição”; em árabe é *dharâ'* e representa “o braço, do cotovelo até a ponta do dedo médio”, também conhecido como cúbito real de Heródoto; o termo *dhar'* em árabe significava “medindo com um cúbito”. Havia dois tipos de cúbito, o real e o comum que era $\frac{7}{8}$ do cúbito real.

O *farsang* é *parasang* em árabe, uma antiga unidade de medida persa para rotas usada em todo o antigo Oriente Médio e Mediterrâneo, algumas de suas definições são a distância que um pedestre robusto pode percorrer em uma hora; outra, é o caminho percorrido por um cavalo em uma hora que equivale à metade percorrida por um homem. A menor medida persa de comprimento era o *mû* (cabelo), geralmente era compreendido como cabelo de mula, provavelmente inspirados nessa medida, foi instituída pelos árabes a medida linear “cabelo de cavalo” que também poderia se referir a cabelo de camelo, Doursther (1840) e Houtum-Schindler (1888). Segundo Rozenfeld (1976), 1 *farsang* é aproximadamente igual a seis quilômetros, e relacionando as unidades de medida utilizadas por al-Kāshī, Quadro 8, temos:

ARABIE ET PERSE, antiquité. La parasange arabe ou persane, 8^o du marhala ou journée, valait 3 milless arabes = 150 chaines d'arpentage = 1500 cassaba = 3000 kathouah = 9000 coudées hachémiques = 12 000 coudées deraga cabda = 18000 pieds. Kilomètres: 5760.

⁵⁵ CRIN DE CHEVAL, Poil de chameau. Ancienne mesure linéaire des Arabes. Le crin de cheval ou lo poil de chameau, 36^o parte du doigt ou assbaa, = 0,556 millimètre.

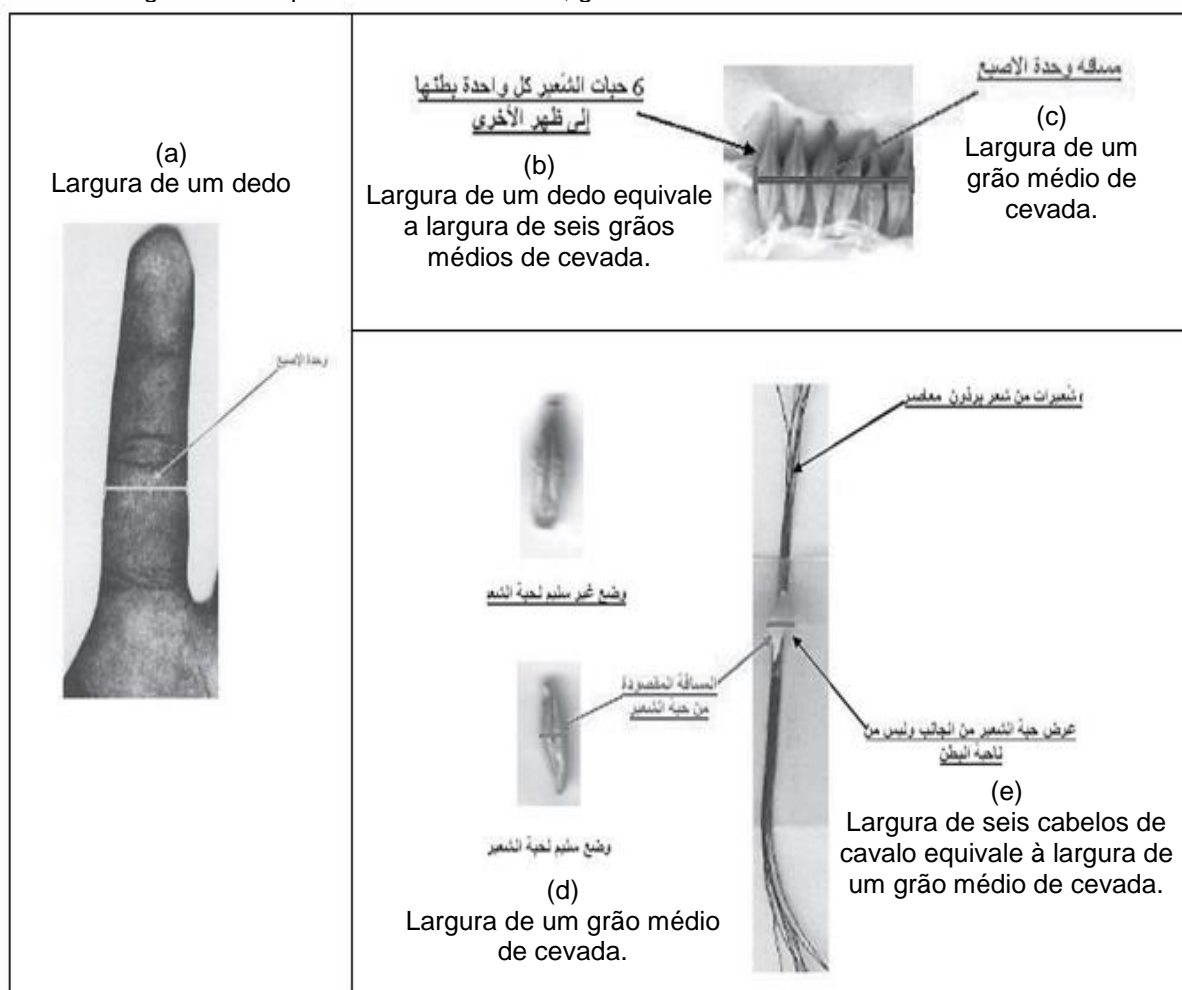
Quadro 8 - Relações entre as unidades de medida presentes no Tratado da Circunferência e seus equivalentes no S.I. (Sistema Internacional de Unidades).

1 fasang	12000 cúbitos	≈6 km
1 cúbito (<i>dharâ</i>)	24 dedos	≈5 cm
1 dedo (<i>angusht</i>)	6 grãos de cevada	≈2,083 cm
de 1 grão de cevada (<i>jô</i>)	6 cabelos de cavalo (<i>mû</i>)	≈0,6mm

Fonte: Yushkiévitch (1976, p. 151, tradução nossa).

Na Figura 22 temos a ilustração da relação entre a largura de um dedo, a largura de seis grãos médios de cevada e a largura de seis cabelos de cavalo. Eles tomavam como base de medida grãos de cevada que tivessem suas medidas próximas, por isso a expressão ‘grão médio de cevada’, nem muito pequenos nem muito grandes.

Figura 22 – Equivalências entre dedo, grão médio de cevada e cabelo de cavalo.



Fonte: Zerrif (2016, p. 110-111, adaptado).

Observemos que tanto o dedo, quanto os grãos de cevada e os cabelos são perfilados no sentido do comprimento menor.

Em Houtum-Schindler (1888) temos que para Ptolomeu, um grau terrestre em relação ao equador era igual a 25 farsangs; a maioria dos geógrafos árabes, baseando seus cálculos nas medições de um grau terrestre feitas sob o califa al-Ma'mūn⁵⁶ aceitava $22\frac{2}{9}$ farsangs como medida de um grau terrestre e, outros estudiosos, consideravam o valor correto igual a $18\frac{8}{9}$. Certamente al-Kāshī adotou $22\frac{2}{9}$ farsangs para um grau terrestre, pois $22\frac{2}{9} \times 360 = 8000$ farsangs, que ele considera ser a medida da maior circunferência da Terra⁵⁷.

Especificamente sobre os cálculos das frações sexagesimais relativas à circunferência seiscentas mil vezes maior que a circunferência da Terra, primeiro al-Kāshī obtém o comprimento do arco equivalente a um grau dessa circunferência dividindo 600 mil vezes a circunferência da Terra por 360, que é igual a $1666\frac{2}{3}$ da circunferência da Terra. Para um minuto, ele divide esse resultado por 60, obtendo o valor de $27\frac{3}{4}$ da circunferência da Terra, e assim, ele obtém os comprimentos de arco equivalentes às frações sexagesimais dividindo sucessivamente por 60. Organizamos esses resultados no Quadro 9 da seguinte forma:

Quadro 9 - Frações sexagesimais da circunferência seiscentas mil vezes maior que a circunferência da Terra.

MEDIDA	FRAÇÃO SEXAGESIMAL	FRAÇÃO SEXAGESIMAL
GRAU	(a unidade)	$1^\circ = \left(\frac{600000}{360}\right)C = 1666\frac{2}{3}C$
MINUTO	$\left(\frac{1}{60}\right)$	$1' = \frac{1}{60}\left(\frac{600000}{360}\right)C = 27\frac{3}{4}C$
SEGUNDO	$\left(\frac{1}{60^2}\right)$	$1'' = \frac{1}{60^2}\left(\frac{600000}{360}\right) \cdot 8000 \cong 3704$ farsangs
TERÇA	$\left(\frac{1}{60^3}\right)$	$1''' = \frac{1}{60^3}\left(\frac{600000}{360}\right) \cdot 8000 \cong 62$ farsangs
QUARTA	$\left(\frac{1}{60^4}\right)$	$1^{iv} = \frac{1}{60^4}\left(\frac{600000}{360}\right) \cdot 8000 \cong 1,03$ farsangs

⁵⁶ Para mais detalhes consultar: <https://www.britannica.com/biography/al-Mamun> . Acesso em: 02 jun. 2022.

⁵⁷ Ver tabela de al-Kāshī (1954, p. 332).

		(Verificamos que não é 1 farsang e três décimos como afirma al-Kāshī, mas, 1 farsang e três centésimos)
QUINTA	$\left(\frac{1}{60^5}\right)$	$1^v = \frac{1}{60^5} \left(\frac{600000}{360}\right) \cdot 8000 \cdot 12000 \cong 206$ cúbitos
SEXTA	$\left(\frac{1}{60^6}\right)$	$1^{vi} = \frac{1}{60^6} \left(\frac{600000}{6}\right) \cdot 8000 \cdot 12000 \cong 3$ e 1/3 de cúbito
SÉTIMA	$\left(\frac{1}{60^7}\right)$	$1^{vii} = \frac{1}{60^7} \left(\frac{600000}{360}\right) \cdot 8000 \cdot 12000 \cdot 24 \cong 1$ e 1/3 de dedo ou $1^{vii} = \frac{1}{60^7} \left(\frac{600000}{360}\right) \cdot 8000 \cdot 12000 \cdot 24 \cdot 6 \cong 8,23$ grãos médios de cevada. ou $1^{vii} = \frac{1}{60^7} \left(\frac{600000}{360}\right) \cdot 8000 \cdot 12000 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 6 \cong 49,38272$ Cabelos de crina de cavalo (ao invés de 48)
OITAVA	$\left(\frac{1}{60^8}\right)$	$1^{viii} = \frac{1}{60^8} \left(\frac{600000}{360}\right) \cdot 8000 \cdot 12000 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 6 =$ $(100000 \cdot 8000 \cdot 12000 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 6) \cdot \frac{1}{60^9} \cong 0,0823045 \cong$ $\frac{4}{5}$ de cabelo de crina de cavalo

Fonte: Elaborado pela autora.

Observemos que, um oitavo $\left(\frac{1}{60^8}\right)$ da circunferência seiscentas mil vezes a circunferência da Terra, é igual a 0,0823045267489712 de cabelo de cavalo. Al-Kāshī afirma que equivale a $\frac{4}{5}$ de cabelo de crina de cavalo ou “menos”, mas refizemos os cálculos e, na verdade, é $\frac{4}{5}$ de cabelo de crina de cavalo ou “mais”.

Em relação à segunda pergunta do título: “Até quantas casas sexagesimais são necessárias para efetuar as operações para que o perímetro obtido seja distinto do círculo dado numa grandeza menor do que um fio de cabelo”, o objetivo é descobrir quantas casas sexagesimais seus cálculos devem ter para obter a precisão desejada, al-Kāshī afirma que os seus cálculos serão precisos o suficiente prosseguindo seus cálculos até a ordem $\frac{1}{60^{18}}$ no sistema sexagesimal, no entanto, na prática, ele segue até a ordem $\frac{1}{60^{19}}$ após a parte inteira no sistema sexagesimal, como pode-se observar nas 28 tabelas dedicadas aos cálculos das sucessivas cordas c_n .

3.4.2 Estudo do Excerto 9: Estimativa do comprimento do lado do polígono inscrito

Esse é o caso se a circunferência for trezentos e sessenta. Se ela tiver trezentos e sessenta. Se ela tem trezentos e setenta e sete com uma fração, então sua oitava é muito menor que quatro quintos da espessura de um cabelo. (AL-KĀSHĪ. 1954, p. 333, tradução nossa).

No Trecho 1, al-Kāshī expõe seu raciocínio para a circunferência de raio unitário e também fornece um exemplo para circunferência de raio 60, assim, o comprimento desta é de aproximadamente $2 \times 60 \times 3 \frac{1}{7} = 377 \frac{1}{7}$, e seu oitavo será menor que na circunferência anterior, pois $\frac{1}{377 \frac{1}{7}} < \frac{1}{360}$, segundo Rozenfeld (1954), por engano, no manuscrito ao invés de 377 tem 366.

Após explicitar o seu objetivo (calcular a circunferência do círculo 600 mil vezes maior que a circunferência da Terra com precisão de largura de um cabelo de cavalo), al-Kāshī chega a um primeiro resultado:

Portanto, se definirmos os perímetros de dois polígonos de forma que a diferença entre eles não atinja uma oitava, então, a diferença entre eles não atingirá um fio, além disso, essa é a diferença entre cada um deles e a circunferência real do círculo.⁵⁸ (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 333, tradução nossa).

Em outros termos, a diferença entre os perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos à circunferência dada, não pode ser maior que um oitavo, pois um oitavo da circunferência equivale a aproximadamente quatro quintos da largura do cabelo de cavalo. Assim, tomando o perímetro do polígono inscrito (p) e o perímetro do polígono circunscrito (P), a diferença entre os seus perímetros não deve ser superior à uma oitava ($\frac{1}{60^8}$) da circunferência, ou seja:

$$P - p < \frac{1}{60^9} \quad (1)$$

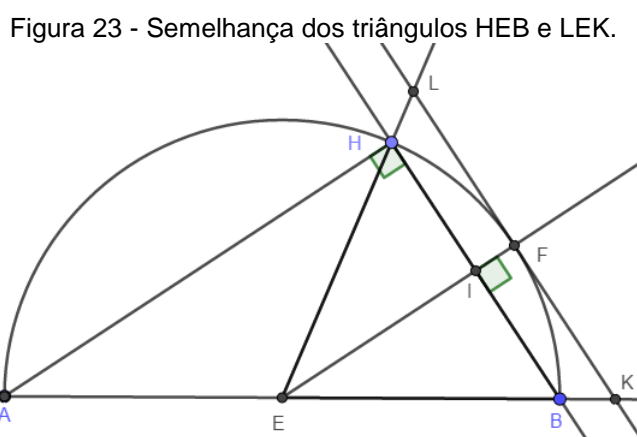
De acordo com Youschkevitch (1984, p.154, tradução nossa), “Depois de avaliar a diferença dos perímetros, al-Kāshī dá uma estimativa do comprimento das

⁵⁸ Поэтому, если мы определим периметры двух многоугольников таким образом, чтобы разность между ними не достигает одной октавы, то, следовательно, разность между ними подалю не достигнет одного волоса и тем более, такова разность между каждым из них и действительной окружностью круга.

dimensões do polígono inscrito e mostra um sentido muito apurado da precisão necessária, desprezando as diferenças muito pequenas.”⁵⁹

Como sabemos, o perímetro do polígono interno está para o perímetro do polígono externo, assim como a distância do centro do círculo até o ponto médio do lado [do polígono interno] está para o seu complemento até a metade do diâmetro, isto é, para a distância do ponto médio do arco, cuja corda é o lado. Tal complemento é a flecha deste arco. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 333, tradução nossa).

Na Figura 23, temos que os triângulos $\triangle HEB$ e $\triangle LEK$ são semelhantes,



logo, $\frac{\overline{EI}}{\overline{EF} - \overline{EI}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{LK} - \overline{HB}}$. Assim, pode-se estabelecer as seguintes proporções entre as medidas dos triângulos, onde P é o perímetro do polígono circunscrito, p é o perímetro do polígono inscrito, $h = \overline{EI}$ (apótema do polígono inscrito ou altura do triângulo que tem como base um dos lados do polígono), $r = \overline{EF}$ (raio do círculo) e $s = \overline{IF} = r - h$ (flecha do segmento circular correspondente):

$$\frac{P}{p} = \frac{r}{h} \Rightarrow \frac{P-p}{p} = \frac{r-h}{h} = \frac{s}{r-s} \quad (2)$$

Sabe-se também que a relação da metade do diâmetro para com a circunferência é menor do que um sexto em menos que um terço de um sétimo de um sexto. Portanto, precisamos tomar no círculo um polígono com um número tão grande de lados que a relação da flecha do arco de cada lado para com o complemento da flecha até metade do diâmetro seja menor do que a relação de um sexto de oitavo para com a unidade em um terço de um sétimo deste sexto ou [ainda] maior, ou seja, para que tal relação seja igual a oito nonas ou menos. Então a corda do complemento do arco de cada lado

⁵⁹ Après avoir évalué la différence des périmètres, al-Kāsi donne une estimation de la longueur des côtés du polygone inscrit dans laquelle il fait preuve d'un sens très aigu de la précision nécessaire en négligeant les très petites différences.

será menor que o diâmetro por dezesseis nonas uma vez que dita corda é igual a duas vezes a distância especificada. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 333, tradução nossa).

Considerando a aproximação de Arquimedes (287 a.E.C. - 212 a.E.C.) vista na parte introdutória do tratado, onde C é o comprimento da circunferência e r o seu raio, $6 < \frac{C}{r} < 6\frac{2}{7}$, “Sabe-se também que a relação da metade do diâmetro para com a circunferência é menor do que um sexto em menos que um terço de um sétimo de um sexto”, ou seja, em notação moderna, temos que

$$\frac{r}{C} < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{126}$$

Pois,

$$6 < \frac{C}{r} < 6\frac{2}{7} \Rightarrow \frac{1}{6} > \frac{r}{C} > \frac{7}{44} \Rightarrow \frac{7}{44} < \frac{r}{C} < \frac{1}{6} \Rightarrow$$

Assim,

$$\frac{r}{c} < \frac{1}{6} - \frac{7}{44} = \frac{1}{132} < \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{126} \quad (3)$$

Assim, conforme (1), (2) e (3), al-Kāshī entende que o número desejado de lados do polígono inscrito pode ser determinado quando tal número é suficientemente grande, p é pouco diferente de C (p se aproxima de C) e s se torna pequeno, logo (2) pode ser escrito assim:

$$\frac{P - p}{C} \approx \frac{s}{r}$$

De acordo com (1) e (3):

$$\frac{P - p}{C} < \frac{1}{60^9} \frac{r}{C} \approx \frac{1}{60^9} \left(\frac{1}{6} - \varepsilon \right)$$

Com $\varepsilon < \frac{1}{132}$ e $\frac{1}{6} - \varepsilon \approx \frac{8}{60}$, de forma que:

$$\frac{P - p}{C} \approx \frac{s}{r} \approx \frac{1}{60^9} \cdot \frac{8}{60} = \frac{8}{60^{10}}$$

E para $r = 60$:

$$s \approx \frac{8}{60^9} \quad (4)$$

Al-Kāshī fornece então uma estimativa da corda c , considera que a corda c é igual a duas vezes a altura do triângulo que tem por base o lado do polígono inscrito:

$$\begin{aligned} c \approx 2h \approx 2(r - s) = 2r - 2s \approx 2r - \frac{16}{60^9} \Rightarrow \\ 2s \approx \frac{16}{60^9} \end{aligned} \quad (5)$$

Portanto, a diferença do quadrado do diâmetro e seu quadrado é inferior a aproximadamente quádruplo de dezesseis nonas elevado a uma casa, isto é, menos de um sétimo e quatro oitavas. Portanto, a raiz deste, isto é, a corda, ou seja, cada um dos lados, não excede oito quartas. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 333, tradução nossa).

Considerando $a_n = \sqrt{4r^2 - c_n^2}$, $n \geq 0$ e a equação (5), al-Kāshī obtém a medida do lado do polígono inscrito (a):

$$\begin{aligned} a &\approx \sqrt{4r^2 - (2r - 2s)^2} \\ a &\approx \sqrt{8rs} = \sqrt{2 \cdot 2r \cdot 2s} \end{aligned}$$

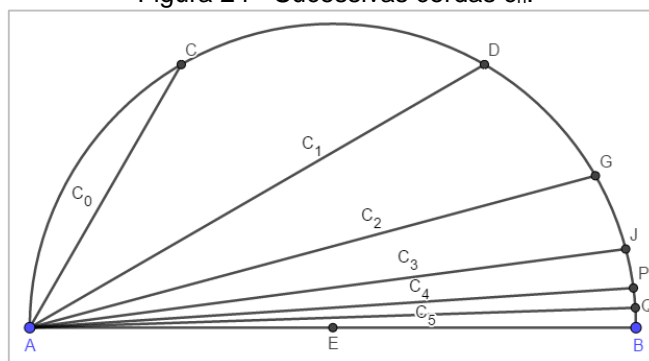
E no caso de um círculo de $r = 60$:

$$a < \sqrt{2 \cdot 2r \cdot 2s} = \sqrt{4 \cdot 60 \cdot \frac{16}{60^9}} = \sqrt{\frac{64}{60^8}} = \frac{8}{60^4} \Rightarrow \mathbf{a < \frac{8}{60^4}} \quad (6)$$

Assim, a precisão desejada na medida do círculo será obtida quando se inscreve em um círculo de raio 60 um polígono regular cujo lado a não exceda oito quartas.

3.4.3 Estudo do Excerto 10: Cálculo da medida do arco da circunferência menor que oito quartas

Conforme a Figura 24, podemos estabelecer a seguinte relação, Quadro 10, para o cálculo da medida de cada arco α_n , $n \geq 0$:

Figura 24 - Sucessivas cordas c_n .

Fonte: Acervo da autora.

Quadro 10 - Cálculo da medida do arco α_n .

MEDIDA DE CADA ARCO	
$\alpha_0 = \text{arc}(AC) = 60^\circ$	
$\alpha_1 = \text{arc}(AD) = \text{arc}(AC) + \frac{\text{arc}(CB)}{2} = 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$	
$\alpha_2 = \text{arc}(AG) = 60^\circ + 60^\circ + 30^\circ = 180^\circ - \frac{60^\circ}{2} = 150^\circ$	
$\alpha_3 = \text{arc}(AJ) = 60^\circ + 60^\circ + 30^\circ + 15^\circ = 180^\circ - \frac{60^\circ}{4} = 180^\circ - \frac{60^\circ}{2^2} = 165^\circ$	
$\alpha_4 = \text{arc}(AP) = 60^\circ + 60^\circ + 30^\circ + 15^\circ + 7,5^\circ = 180^\circ - \frac{60^\circ}{8} = 180^\circ - \frac{60^\circ}{2^3} = 172,5^\circ$	
$\alpha_5 = \text{arc}(AQ) = 60^\circ + 60^\circ + 30^\circ + 15^\circ + 7,5^\circ + 3,75^\circ = 180^\circ - \frac{60^\circ}{16} =$ $180^\circ - \frac{60^\circ}{2^4} = 176,25^\circ$	
⋮	
$\alpha_n = 180^\circ - \frac{60^\circ}{2^{n-1}} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6 \cdot 2^{n-1}} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{3 \cdot 2^n}$	

Fonte: Elaborado pela autora.

Portanto, o arco BH corresponde a $\frac{1}{3 \cdot 2^n}$ da circunferência. Assim, desta proposição decorre que a circunferência deve ser dividida em $3 \cdot 2^n$ partes. Quando n aumenta, o comprimento do lado do polígono inscrito diminui rapidamente por que o n está no expoente do denominador, o que nos dá um processo iterativo de convergência rápida.

Se dividirmos o terço do círculo vinte e oito vezes, obtém-se um arco de cinco quartas, quarenta e sete quintas, com fração naquelas partes onde todo o círculo é igual a trezentos e sessenta, como fica claro na tabela: Sem dúvida, a corda deste arco é menor que oito quartas uma vez que a cada corda de qualquer arco, dado que a circunferência é trezentos e sessenta e o diâmetro é cento e vinte, não excede o arco em um terço de um sétimo dele. Por isso, nós inscreveremos no círculo um tal polígono cujo número de lados é igual a oitocentos e cinco milhões e trezentos e sessenta e oito, e seu expoente [i.e., sua representação na base 60 é 1 2 8 16 12 48. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 335-336, tradução nossa).

Assim, al-Kāshī calcula a medida do arco da circunferência e a quantidade de lados do polígono regular inscrito, tomando as metades sucessivas de um terço da circunferência, obtemos arcos de tamanho 60; 30; 15; 7,5; etc., cujos polígonos regulares inscritos tem, respectivamente 3 lados; 6 lados; 12 lados; 24 lados; 48 lados; e assim sucessivamente. No vigésimo oitavo passo, al-Kāshī chega ao arco de medida $0; 0,0,0,5, 47, 36, 51, 26, 16, 45, 28 7, 30$, que é menor que oito quartas, isso implica que sua corda também é menor que oito quartas, logo, para alcançar seu objetivo, al-Kāshī precisa executar apenas 28 iterações que corresponde ao polígono de $(1\ 2\ 8\ 16\ 12\ 48)_{(60)}$ lados = $805\ 306\ 368 = 3x2^{28}$ lados em números decimais. No Anexo A temos as imagens da tabela de cálculo de al-Kāshī relativa ao manuscrito de Mashhad e a tabela de cálculos da tradução russa.

3.5 A Quarta Parte: sobre as operações

3.5.1 Estudo do Excerto 11: Como os cálculos foram feitos

Nós somamos o diâmetro 2 0 ao lado 1 0 do hexágono, obtendo 3 0, aumentamos este valor em uma ordem, obtendo 3 0 0. Extraímos a raiz, adicionamos a ela [a raiz] 2 0 e escrevemos [o resultado] na ordem e depois tomamos a raiz deste mesmo valor; vamos fazer isso vinte e oito vezes. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 335-336, tradução nossa).

Sabendo que para vinte e oito iterações o comprimento do lado do polígono inscrito será menor que oito quartas, no Trecho A, al-Kāshī explica como fez os cálculos dos comprimentos das sucessivas cordas até a vigésima oitava iteração, dedicando uma tabela de cálculo de página inteira para cada corda. A quarta parte é a maior do *al-Risāla al-Muhītīyya* e contém mais cálculos do que as demais.

Entendemos que al-Kāshī desenvolveu o que chamamos hoje de algoritmo que pode ser representado pela fórmula recursiva $c_n = \sqrt{r(2r + c_{n-1})}$, para $n = 1, 2, \dots, 28$. No Quadro 11 temos o comprimento de cada uma das vinte e oito cordas em números decimais.

Quadro 11 - As sucessivas cordas c_n ; $c_0 = 1$.

n	c_n
1	$\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463415059$
2	$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1,9318516525781365734994863994578$

3	$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 1,9828897227476208222891150538571$
4	$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 1,9957178464772070134761395825456$
5	1,9957178464772070134761395825456
6	1,9997322758191235657254942981202
7	1,9999330678348022069152076211583
8	1,9999832668887012982951172411377
9	1,9999958167178003620833274486537
10	1,9999989541791766552221964749280
11	1,9999997385447770740971503103432
12	1,9999999346361932004174777442982
13	1,9999999836590482333476932760603
14	1,9999999959147620541646310504918
15	1,9999999989786905132803894957071
16	1,9999999997446726283037993572424
17	1,9999999999361681570749312132678
18	1,9999999999840420392686691391893
19	1,999999999960105098171633057893
20	1,999999999990026274542905777593
21	1,999999999997506568635726288968
22	1,999999999999376642158931562528
23	1,999999999999844160539732890025
24	1,999999999999961040134933222468
25	1,999999999999990260033733305615
26	1,999999999999997565008433326404
27	1,999999999999999391252108331601
28	1,999999999999999847813027082900

Fonte: Elaborado pela autora.

Percebemos que é difícil trabalhar com as partes fracionárias quando se tornam cada vez menores, provavelmente esse foi o motivo que levou al-Kāshī a optar por trabalhar com as frações sexagesimais. No Quadro 12, apresentamos os títulos das 28 tabelas dedicadas aos cálculos de cada uma das 28 cordas, o valor de cada corda e o respectivo resto, todos em números sexagesimais. Segundo o próprio al-Kāshī, ele disponibiliza suas tabelas de cálculos para que sirvam de modelo e um meio pelo qual os interessados possam conferir seus cálculos. Em al-Kāshī (1954) estão as 1ª, 5ª, 27ª e 28ª tabelas, que são suficientes para compreender o raciocínio empregado por al-Kāshī para o cálculo das sucessivas cordas c_n . Em Hogendijk (2009) estão disponíveis as 28 tabelas de cálculos.

Quadro 12

Polígono de 6 lados	
Título	Cálculo da corda de um sexto da circunferência
Comprimento da corda c_1	1 43 55 22 58 27 57 56 0 44 25 31 42 1 56 22 42 48 58 27
Resto	3 16 27
Polígono de 12 lados	
Título	Metade da sexta parte da circunferência
Comprimento da corda c_2	1 55 54 39 57 25 2 41 6 56 38 3 9 14 51 43 4 22 44 46
Resto	2 56 5 44
Polígono de 24 lados	
Título	Um quarto de um sexto da circunferência
Comprimento da corda c_3	1 58 58 24 10 48 24 30 46 47 22 13 4 44 26 38 36 37 48 27
Resto	1 47 13 41
Polígono de 48 lados	
Título	Corda do arco que é o quadragésimo oitavo da circunferência
Comprimento da corda c_4	1 59 44 35 31 72 51 42 63 12 39 10 10 28 33 45 47 32 16
Resto	1 4 48 21
Polígono de 96 lados	
Título	Corda do arco que é o nonagésimo sexto da circunferência
Comprimento da corda c_5	1 59 56 8 42 6 26 35 40 40 17 55 44 14 58 19 34 54 29 34
Resto	2 13 51 38
Polígono de 192 lados	
Título	Corda do arco que é o cento e noventa e dois da circunferência
Comprimento da corda c_6	1 59 59 2 10 17 40 37 118 16 54 32 35 27 38 48 41 50 24
Resto	1 35 28 39
Polígono de 384 lados	
Título	Corda do arco que é um trezentos e oitenta e quatro da circunferência
Comprimento da corda c_7	1 59 59 45 32 33 32 54 15 45 140 16 50 27 35 53 38 54 49
Resto	3 17 43 12
Polígono de 768 lados	
Título	Corda do arco que é um setecentos e sessenta e oito da circunferência
Comprimento da corda c_8	1 59 59 56 23 8 19 57 33 17 31 8 29 6 41 15 7 13 12 11
Resto	43 14 37
Polígono de 1536 lados	
Título	Corda do arco que é um, mil e quinhentos e trinta e seis da circunferência
Comprimento da corda c_9	1 59 59 59 5 47 4 47 8 29 50 15 57 23 28 51 40 19 11 12
Resto	2 6 29 32
Polígono de 3072 lados	
Título	Corda do arco que é um, três mil e setenta e dois da circunferência
Comprimento da corda c_{10}	1 59 59 59 46 26 46 11 1 11 51 41 5114 21 59 25 0 45 19

Resto	1 17 35 36
Polígono de 6144 lados	
Título	Corda do arco que é um, seis mil cento e quarenta e quatro da circunferência
Comprimento da corda c_{11}	1 59 59 59 56 36 41 32 42 25 44 25 52 26 23 47 47 39 26 5
Resto	19 26 38
Polígono de 12288 lados	
Título	Corda do arco que é um, doze mil duzentos e oitenta e oito da circunferência.
Comprimento da corda c_{12}	1 59 59 59 59 9 10 23 10 25 40 15 52 4 24 9 57 49 14 52
Resto	3 28 54 22
Polígono de 24576 lados	
Título	Corda do arco que é um, vinte e quatro mil, quinhentos e setenta e seis da circunferência.
Comprimento da corda c_{13}	1 59 59 59 59 47 17 35 47 35 44 42 3 15 53 31 50 28 28 25
Resto	1 39 26 43
Polígono de 49152 lados	
Título	Corda do arco que é um, quarenta e nove mil, cento e cinquenta e dois da circunferência.
Comprimento da corda c_{14}	1 59 59 59 59 56 49 23 56 53 53 39 8 38 38 47 2 24 44 3
Resto	11 1 49
Polígono de 98304 lados	
Título	Corda do arco que é um, noventa e oito mil, trezentos e quatro da circunferência.
Comprimento da corda c_{15}	1 59 59 59 59 59 12 20 59 13 28 15 19 31 30 58 12 8 17 28
Resto	1 51 11 42
Polígono de 196608 lados	
Título	Corda do arco que é um, cento e noventa e seis mil, seiscentos e oito da circunferência.
Comprimento da corda c_{16}	1 59 59 59 59 59 48 5 14 48 22 3 14 24 14 41 49 38 3 27
Resto	1 49 49 34
Polígono de 393216 lados	
Título	Corda do arco que é um, tezentos e noventa e três, duzentos e dezesseis da circunferência.
Comprimento da corda c_{17}	1 59 59 59 59 59 57 118 42 5 30 46 23 117 47 11 42 30
Resto	2 0 56 36
Polígono de 768432 lados	
Título	Corda do arco que é um, setecentos e sessenta e oito mil, quatrocentos e trinta e dois da circunferência.
Comprimento da corda c_{18}	1 59 59 59 59 59 15 19 40 31 22 41 27 26 25 31 47 7 33
Resto	2 12 14 24
Polígono de 1572864 lados	
Título	Corda do arco que é um, um milhão quinhentos e setenta e dois mil, oitocentos e sessenta e quatro da circunferência.

Polígono de 805306368 lados	
Título	Corda do arco que é um, oitocentos e cinco milhões, trezentos e seis mil, trezentos e sessenta e oito da circunferência.
Comprimento da corda c_{28}	1 59 59 59 59 59 59 59 59 59 59 50 47 52 12 30 48 37 49 54 40
Resto	2 41 35 19

Fonte: al-Kāshī (1953).

Portanto, o comprimento da corda c_n de polígono de 805 306 368 lados, inscrito em uma circunferência unitária é:

$$c_{28} = (1; 59,59,59,59,59,59,59,59,59,59,59,50,47,52,12,30,48,37,49,54,40)_{(60)}$$

Este último resultado auxiliará no cálculo do comprimento do lado a_{28} do polígono inscrito:

Subtrair este quadrado do quadrado do diâmetro, o seguinte permanece como o quadrado do lado 0,0,0;0,0,0,0,0,0,0,0,36,48,31,9,56,45,28,40,21,17. (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 345, tradução nossa).

Ou seja, em $(2R)^2 = c_{28}^2 + a_{28}^2$, temos que, $(2R)^2 - c_{28}^2 = a_{28}^2$, assim, $a_{28}^2 = 0,0,0; 0,0,0,0,0,0,0,0,36,48,31,9,56,45,28,40,21,17$ é o quadrado do lado do polígono de 805 306 368 lados.

Passamos de um cálculo para o seguinte depois de o refazermos duas ou três vezes. Além disso, nós nos asseguramos pela [verificação da conta], multiplicando a raiz por si mesma, repetindo duas ou três vezes e acrescentando o resto da operação à segunda multiplicação. [Então] se o cálculo estiver correto, a soma torna-se igual ao número. Nós verificamos e nos asseguramos da correção [dos cálculos] porque, caso se cometa um erro, ele iria aumentar mais e mais. Como existe uma grande quantidade de cifras, nós não usamos cifras desnecessárias. O método de extração de raízes e elevação da raiz ao quadrado – de nossa própria invenção é o método mais fácil neste assunto. Nesta seção, incluímos as tabelas dos cálculos para que sirva de modelo para os calculistas e um caminho indicativo para aqueles que querem verificar a sua exatidão de cálculos. Estas são as tabelas [ver. p. 338-345]: (AL-KĀSHĪ, 1954, p. 337, tradução nossa).

Al-Kāshī era extremamente meticuloso e não prosseguia para a etapa seguinte se não tivesse a certeza que aquele cálculo estava correto, conferindo-o diversas vezes. Faz questão de explica o método de verificação utilizado em seus cálculos que é a multiplicação da raiz por ela mesma (feita duas ou três vezes) e em seguida soma o resto da extração à multiplicação, o cálculo está correto se o resultado for igual ao número original. Ele afirma que caso não tomasse o cuidado com a

exatidão dos cálculos o erro se tornaria cada vez maior, ou seja, ele tinha consciência sobre a possibilidade do acúmulo de erro. Al-Kāshī diz que trabalha com uma grande quantidade de cifras, mas afirma não fazer a multiplicação da raiz pela raiz utilizando todas as casas, apenas as necessárias para obter o quadrado. Segundo al-Kāshī o método de extração de raízes e elevação ao quadrado é de sua invenção e o mais fácil neste quesito.

3.6 A Quinta Parte: sobre a determinação de um lado do polígono de 1 2 8 16 42 48 lados inscrito na circunferência

3.6.1 Estudo do Excerto 13: Cálculo do comprimento do lado do regular polígono de 805 306 368 lados.

Como o trecho do referido excerto é em sua maior parte uma tabela, o ilustramos por meio do Quadro 13:

Quadro 13 – Tabela de cálculo do lado do polígono regular de 805 306 368 lados.

O quadrado obtido no vigésimo oitavo cálculo foi:

Quartos	Quintos		Sextos		Sétimos		Oitavos		Nonos		Décimos		
6	4		1		14		59		36		14		
	Oitavo	Nono	Décimo	Décimo primeiro	Décimo segundo	Décimo terceiro	Décimo quarto	Décimo quinto	Décimo sexto	Décimo sétimo	Décimo oitavo		
	36 36	48	31	9	56	45	28	40	21	17			
	0	48	16										
			15 12	8	1								
			3 2	1 49	55 52	31	16						
				12 11	3 55	14 54	12 26	30	1				
					7 7	19 16	46 49	10 29	20 59	9	36		
						2 2	56 49	40 32	21 34	7 59	24 48	51 16	
							6 6	47 40	46 25	7 22	35 29	8 33	44 51
								7 7	20 16	45 49	5 29	34 59	53 31

33 décimo primeiro
36 décimo segundo
19 décimo terceiro
25 décimo quarto

Multiplicamos a raiz obtida na quinta seção, que é o tamanho de um lado, pelo número de lados do polígono especificado, isto é 1 2 8 16 12 48. Obtemos o perímetro do polígono inscrito em um círculo nas partes em que o diâmetro é cento e vinte.

Multiplicando		6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25	
	Multiplicador	Quartos	Quintos	Sextos	Sétimos	Oitavos	Nonos	Décimos	Décimo primeiro	Décimo segundo	Décimo terceiro	Décimo quarto	
Elevado cinco vezes	1	6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25	
Elevado quatro vezes	2		12	8	2	29	59	12	29	7	12	38	50
Elevado três vezes	8		0	48	0	8	7	52	1	52	4	48	3
				0	32	1	52	4	48	4	24	2	32
Elevado duas vezes	16			1	36	0	16	15	44	3	44	0	36
					1	4	3	44	9	36	8	48	5
Elevado uma vez	12				1	12	0	12	11	48	2	48	7
						0	48	2	48	7	12	6	36
Grau	48					4	48	0	48	47	12	11	12
							3	12	11	12	28	48	26
Produto		6	16	59	28	1	34	51	46	14	49	46	
	Elevado uma vez												
	Grau												
	Minutos												
	Segundos												
	Terços												
	Quartos												
	Quintos												
	Sextos												
	Sétimos												
	Oitavos												
	Nonos												

Fonte: al-Kāshī (1954, p.348, tradução nossa, grifo nosso).

No Trecho A do Excerto 14, al-Kāshī calcula o perímetro do polígono regular inscrito p_{28} multiplicando o comprimento do lado do polígono inscrito, $a_{28} = 0;0,0,0,6,4,1,14,59,36,14,33,36,19,25$, pela quantidade de lados, $3.2^{28} = 805\,306\,368_{(10)} = 1\,2\,8\,16\,12\,48_{(60)}$:

$$p_{28} = 3.2^{28}.a_{28}$$

$$p_{28} = (1\,2\,8\,16\,12\,48; 0).(0;0,0,0,6,4,1,14,59,36,14,33,36,19,25)$$

Obtendo:

$$p_{28} = 6,16; 59,28,1,34,51,46,14,49,46$$

Também no Excerto 13, considerando o que foi desenvolvido na terceira parte do tratado (Excerto 9 no Trecho B), temos que $\frac{p}{P-p} = \frac{h}{r-h}$, onde h pode ser considerado igual a $\frac{c_{28}}{2}$, assim,

$$\frac{p_{28}}{P_{28} - p_{28}} = \frac{\frac{c_{28}}{2}}{r - \frac{c_{28}}{2}}$$

Substituindo p_{28} e c_{28} , obtém-se $P_{28} = 6,16; 59,28,1,34,51,46,14,50,15$ o perímetro do polígono circunscrito, Quadro 15:

Quadro 15 – Perímetro do polígono regular circunscrito.

Elevado uma vez	Graus	Minutos	Segundos	Terços	Quartos	Quintos	Sextos	Sétimos	Oitavos	Nonos
6	16	59	28	1	34	51	46	14	50	15

Fonte: al-Kāshī (1954, p.349, tradução nossa).

Al-Kāshī calcula a aproximação para a circunferência do círculo de raio 60 pela média aritmética entre p_{28} e P_{28} , Quadro 16:

Quadro 16 – Aproximação de al-Kāshī para a circunferência do círculo de raio 60

Tamanho da circunferência, quando o diâmetro é cento e vinte										
Elevado uma vez	Grau	Minutos	Segundos	Terços	Quartos	Quintos	Sextos	Sétimos	Oitavos	
6	16	59	28	1	34	51	46	14	50	

Fonte: al-Kāshī (1954, p.350, tradução nossa).

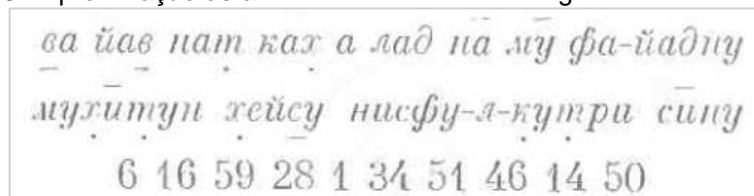
Ou seja, $\frac{p_{28}+P_{28}}{2} = 6,16; 59,28,1,34,51,46,14,50$. Al-Kāshī ressalta que se for tomado o raio igual a 1, os algarismos não se modificarão, somente as ordens, ficando a aproximação igual a:

6;16, 59, 28, 1, 34, 51, 46, 14, 50

Para garantir ainda mais o registro correto do seu feito, al-Kāshī escreveu este resultado em forma de um tipo de poema, o verso dístico (aquele que possui dois versos), Figura 25, segundo Rozenfeld e Youschkevitch (1954), a escolha de al-Kāshī

em registrar os dígitos de sua aproximação em verso dístico, vem do fato de os símbolos que indicam os números serem representados por letras do alfabeto árabe, o que resguardaria ainda mais o registro de sua aproximação.

Figura 25 - Aproximação de al-Kāshī em números sexagesimais em verso dístico.



Fonte: al-Kāshī (1954, p.350).

Ao final da Sexta Parte do Tratado da Circunferência, al-Kāshī disponibiliza em uma tabela os múltiplos de sua aproximação, de 1 a 59, e novamente garante a correção dos cálculos, provavelmente ele fez isso para facilitar o acesso a esses números para quem precisasse.

3.8 Da Sétima Parte até a Conclusão

Nesta seção não utilizamos excertos específicos do Tratado da Circunferência de al-Kāshī, fizemos um estudo único para as partes 7,8,9,10 e conclusão.

3.8.1 Estudo 14: Arredondamento, múltiplos, versos e retomadas

Na Parte Sete do tratado, al-Kāshī argumenta e mostra detalhadamente que o seu método de arredondamento não afetará o resultado final da aproximação, não alcançando $\frac{1}{60^9}$ da circunferência. Na Parte Oito, Ele faz a conversão de sua aproximação do sistema sexagesimal 6;16,59,28,1,34,51,46,14,50 para o sistema decimal, 6,2831853071795865, tomou este resultado e o multiplicou por 1 a 10 e registrou seus resultados numa tabela, Quadro 17, pois, caso alguém precisasse, poderia obter qualquer um desses valores com facilidade.

Quadro 17 - Tabela de múltiplos.

Tabela de múltiplos da relação entre a circunferência e o diâmetro																		
Suas dezenas	muitas vezes o diâmetro do diâmetro	uma das cinco vezes (repetidas) milhares													Cem	Dez	Um	
			Cem	Dez	Um	Cem	Dez	Um	Cem	Dez	Um	Cem	Dez	Um				
Zero	Seis	Dois	Oito	Três	Um	Oito	Cinco	Três	Zero	Sete	Um	Sete	Novo	Cinco	Oito	Seis	Cinco	
0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8	6	5	1
1	2	5	6	6	3	7	0	6	1	4	3	5	9	1	7	3	0	2
1	8	8	4	9	5	5	5	9	2	1	5	3	8	7	5	9	5	3
2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	8	3	4	6	0	4
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	5	5
3	7	6	9	9	1	1	1	8	4	3	0	7	7	5	1	9	0	6
4	3	9	8	2	2	9	7	1	5	0	2	5	7	1	0	5	5	7
5	0	2	6	5	4	8	2	4	5	7	4	3	6	6	9	2	0	8
5	6	5	4	8	6	6	7	7	6	4	6	1	6	2	7	8	5	9
6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8	6	5	0	10

Fonte: al-Kāshī (1954, p.358-359, tradução nossa).

Na Figura 26 temos o registro do seu resultado em números decimais em forma de verso dístico:

Figura 26 - Aproximação de al-Kāshī em números decimais em verso dístico.

<i>ва-бахдэка хадэки саз а за тах хавазу</i>
<i>мухитун ми-кунтин хува' снани минху</i>
6 2 8 3 1 8 5 3 0 7 1 7 9 5 8 6 5

Fonte: al-Kāshī (1954, p. 360).

Na Parte Nove, al-Kāshī ensina como obter os múltiplos do comprimento da circunferência, seja em sexagesimal ou em decimal, utilizando as tabelas desenvolvidas na Parte Sete e na Parte Oito do tratado. Explicou como calcular o comprimento de uma circunferência, conhecido o seu diâmetro, e como calcular o diâmetro de uma circunferência conhecido seu comprimento. Reforçou mais ainda sua explicação através de dois exemplos, no primeiro, calcula o comprimento da circunferência de diâmetro $650844\frac{1}{8}$ cúbitos ou *farsangs*; e no segundo, calcula o diâmetro da circunferência cujo comprimento é $650844\frac{1}{8}$ cúbitos ou *farsangs*.

Na Parte Dez, al-Kāshī compara seu resultado em sexagesimal $6;16,59,28,1,34,51,46,14,50$, com o mais comumente utilizado em seu contexto $6;17,8,34,12,8,34,17,8,34$, calculado a diferença entre eles $0;0,9,6,10,33,42,30,53,44$ e mostra que, para uma circunferência de raio 3600 cúbitos, a diferença é de $9\frac{1}{10}$ cúbitos. Fornece ainda outro exemplo, mostrando que para o círculo das estrelas fixas (cinturão do zodíaco) cujo raio é $7073\frac{1}{8}$ do diâmetro da Terra, a diferença entre as duas circunferências obtidas usando as duas aproximações, é de mais de 177 vezes o diâmetro da Terra. Através desses exemplos, al-Kāshī mostra que sua aproximação para a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro é muito mais próximo do valor real do que o mais comumente utilizado.

Por último, na conclusão do tratado, al-Kāshī continua suas considerações sobre as aproximações de Abu'l-Wafā al-Būzjānī e Abū Rayhān al-Bīrūnī que ele havia iniciado na parte inicial do tratado. Al-Kāshī calcula o comprimento da corda de um arco de um grau e de meio grau através de teoremas do Almagesto de Ptolomeu e proposições de os Elementos de Euclides. Ele compara seu resultado para a corda de meio grau e compara com o que ele atribuiu a al-Būzjānī mostrando que o seu é mais preciso. Em seguida, al-Kāshī calcula a corda do arco de dois graus e o compara com o valor obtido por al-Bīrūnī e, novamente, mostra que o seu era mais preciso e encerra o tratado.

Vemos que al-Kāshī segue uma lógica muito bem estabelecida no desenvolvimento de seu texto. Primeiro, ele faz um levantamento do que já existia sobre a aproximação da relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro e aponta os possíveis erros, os exemplifica, explicita seu objetivo e estabelece antecipadamente uma margem de erro (parte introdutória). No segundo passo (partes um e dois), começa a construir um aparato matemático, reunindo as condições para chegar ao seu objetivo, inclusive criando um teorema. No terceiro passo (parte três, quatro, cinco e seis), são realizados os cálculos necessários e o objetivo é atingido. No quarto passo (partes 7, 8, 9 e 10), al-Kāshī tem uma preocupação didática, ele explica o método de arredondamento, a conversão de sexagesimal para decimal, dá exemplos de utilização da aproximação obtida e a compara com o que era antes utilizado, mostrando que o seu resultado era mais preciso. Ao final do tratado, al-Kāshī retoma o que ele falou na parte introdutória,

consolidando sua demonstração de que sua aproximação era a mais próxima do valor real do que as aproximações obtidas por seus predecessores.

No Apêndice D disponibilizamos um quadro resumo do conteúdo de cada uma das partes do Tratado da Circunferência de al-Kāshī.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando a questão de pesquisa: **Quais conhecimentos matemáticos, contextuais e epistemológicos estão incorporados no tratado da Circunferência de al-Kāshī que podem ser alinhados a questões pedagógicas que favoreçam seu uso em sala de aula?** E o objetivo geral: **Analisar o Tratado da Circunferência de al-Kāshī relacionando aspectos matemáticos, contextuais e epistemológicos, destacando suas potencialidades pedagógicas**, iniciamos nossa pesquisa com a preparação da versão de trabalho em português do tratado, que consistiu em auxiliar a nossa orientadora nos trabalhos de tradução (digitação, normas, etc.). Obtida a versão de trabalho, começamos pela análise matemática e em seguida fizemos a análise histórica e epistemológica.

Na análise matemática obtivemos os seguintes resultados: al-Kāshī trabalhava facilmente com aproximações e margens de erro; em sua busca pela sua aproximação da relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, al-Kāshī utilizou uma variedade grande recursos matemáticos, demonstrando não apenas conhecimento de saberes matemáticos, mas também originalidade de pensamento.

Como matemático, al-Kāshī era minucioso e cuidadoso na obtenção de seus resultados. Elevava ao quadrado os valores obtidos das raízes quadradas para ter certeza de que foram aproximados de maneira satisfatória para que não houvesse um acúmulo de erro. O tratado possui uma tabela de múltiplos da aproximação de al-Kāshī e dois exemplos de como utilizá-la, fato que demonstra uma preocupação didática de seu autor com aqueles que consultassem a sua obra. Tudo isso revela o lado minucioso de al-Kāshī, preocupado em não somente chegar ao resultado, mas mostrar como utilizá-lo.

Na análise histórica e epistemológica, orientada pelos trabalhos de Luis Radford e Fumikazu Saito, os resultados obtidos foram: O Tratado da Circunferência foi organizado meticulosamente de forma encadeada, de maneira que o resultado de uma parte leva quase que naturalmente a parte seguinte. O fato de trabalhar com uma fonte histórica, nos ajudou a mapear como as traduções viajaram pelo mundo, nisto, obtivemos a localização de algumas delas em bibliotecas. Além disso, diferente de simplesmente ler um capítulo de um livro de história da matemática, o estudo de uma

obra histórica de matemática nos permitiu, mergulhar em seu contexto e, com isso, vir a conhecer os diversos aspectos da cultura em que a obra estava inserida.

O estudo do tratado e de outros textos relacionados a ele, nos fazem acreditar que os motivos que levaram al-Kāshī a obter uma melhor aproximação para a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro foi a necessidade de tabelas astronômicas mais precisas, algo que não poderia ser alcançado com as aproximações disponíveis na época.

No estudo do contexto da elaboração do tratado, pudemos compreender a dinâmica diária de funcionamento da madraça e do observatório: como os professores eram selecionados; quais livros eram estudados, por quem eram estudados e quem ministrava as aulas sobre eles; e o grau de exigência em relação aos alunos. Também percebemos que para receber essa educação ou fazer parte do corpo docente, era necessário possuir um patrono.

Nesse processo, nos deparamos com as cartas de al-Kāshī endereçada ao seu pai, fontes preciosas de informações sobre o círculo de estudiosos da madraça, o processo de construção do Observatório de Samarkanda e um pouco da vida pessoal do autor. Outro elemento que merece ser destacado é a importância dos pesquisadores soviéticos para a historiografia da matemática islâmica medieval.

Assim, alcançamos nosso objetivo geral de analisar matemática, histórica e epistemologicamente o Tratado da Circunferência de al-Kāshī destacando suas potencialidades pedagógicas, logo, afirmamos que o referido tratado possui sim potencialidades pedagógicas que favoreçam seu uso em sala de aula, exemplificamos tal fato nas seções 5.1 e 5.2 nas quais apresentamos a estrutura de duas propostas de atividades conforme a TO. No Apêndice C apresentamos também uma simulação da obtenção da aproximação de al-Kāshī para a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, feita no programa matemático Geogebra, tal aplicação pode também ser útil como ponto de apoio para a elaboração de atividades ou, a construção dela própria, pode ser a atividade.

Obviamente encontramos algumas dificuldades ao longo o desenvolvimento do nosso trabalho entre as quais: o reduzido número de literatura nacional relacionado ao tema; a nossa não proficiência em russo; a baixa qualidade da fotocópia do texto russo. Também tivemos dificuldade em entender todas as tabelas de cálculo de al-Kāshī, algumas das quais compreendemos apenas o princípio do seu funcionamento.

O estudo de um tema do tipo que focalizamos aqui tem muitas camadas e muitos aspectos e, portanto, as nossas pesquisas sobre al-Kāshī e sobre a matemática islâmica medieval não acabam por aqui, e vislumbramos possíveis continuações para o futuro: obter proficiência em russo; continuar nos estudos das tabelas de al-Kāshī; estudar outras obras de al-Kāshī; a aplicação das atividades apresentadas nesta tese e sua análise conforme a TO, bem como o desenvolvimento de outras atividades sobre o tratado aqui estudado.

Não poderíamos terminar nosso texto sem dizer algumas palavras sobre o ensino de matemática. Nossas pesquisas se situam dentro da área de ensino de ciências e matemática e quando iniciamos nossa tese, foi com a intenção esclarecer relações entre a história da matemática com a educação matemática que redundasse em contribuições para o ensino de matemática.

No entanto, o trabalho com o *Tratado da Circunferência* de al-Kashi revelou-se de tal envergadura que tivemos de restringir a tese ao trabalho com a citada obra. Mesmo assim, pudemos apontar algumas sugestões de atividades para sala com base nos autores Fumikazu Saito e Antonio Miguel. E assim, destacamos o Excerto1 que corresponde aos parágrafos iniciais do Tratado da Circunferência que aqui consta como Quadro 18.

Quadro 18 – Texto da Atividade 1

Texto 1: TRATADO SOBRE A CIRCUNFERÊNCIA

Louvemos a Alá, possuidor do conhecimento sobre a relação do diâmetro com a circunferência, sabedor da grandeza do simples e complexo, criador da terra e do céu, criador da luz nas trevas. Graça e paz esteja com Muhammad Mustafá, centro do círculo dos profetas e circunferência cujo diâmetro é indicação do caminho da verdade e da justiça, assim como à sua descendência e seus amigos puros, desejamos o bem. (1) Depois [disso]: Jamshīd ibn Mas'ūd ibn Mahmūd Tabīb Kāshānī, médico de Kāshān, chamado de Ghiyāth, criação de Alá o altíssimo, [esperançoso] em seu perdão e em que Alá melhore seu destino, diz:

Arquimedes demonstrou que a circunferência supera o diâmetro triplo em menos que um sétimo do diâmetro e mais do que dez, setenta e um avos do diâmetro. (2) (3) Referência ao conhecimento matemático antigo A diferença entre estas duas [frações] é um quatrocentos e noventa e sete avos. (4) **(Conferir os cálculos)** Por isso, no círculo de diâmetro quatrocentos e noventa e sete cúbitos, juntas de bambu ou farsang, o comprimento da circunferência é desconhecido e dúbio nos limites de um cúbito, uma junta de bambu ou um farsang (5) (6) e no maior círculo da esfera terrestre, tal incógnita se encontra nos limites de cinco farsangs, uma vez que seu diâmetro é aproximadamente igual a cinco vezes tal quantidade de farsangs. (7) Já no cinturão do zodíaco, a dita incógnita situa-se nos limites consideravelmente maiores do que cem mil farsangs. Tais grandezas já são grandes para a circunferência, maior ainda serão para a medição de áreas.[...] Uma vez que tais operações levam a erros, queremos determinar a circunferência do círculo com a suposição de que seu diâmetro é conhecido em termos de uma determinada medição de tal maneira que estaríamos certos de que em um círculo que seu diâmetro é seiscentas mil vezes maior que o diâmetro da esfera terrestre, a diferença entre o resultado de nossos cálculos e o valor real não ultrapasse a largura de um fio de cabelo, ou seja, um sexto da largura de um grão de cevada, de modo que tal diferença para um círculo menor que este seja ainda menor.

Fonte: al-Kāshī (1954, p.327, tradução grifo nosso).

A escolha do texto (excerto) e as etapas de sua preparação para seu uso em sala de aula foram assim definidas. 1) Escolhemos o Excerto1 (Apêndice A) da tradução russa do Tratado da Circunferência de al-Kāshī devido às referências de aspectos religiosos, contextuais, matemáticos e epistemológicos presentes no texto. 2) Definimos a intencionalidade com a qual queríamos trabalhar o texto determinando o público-alvo, que seriam os professores de matemática em formação ou em formação continuada; 3) com isso em mente, fizemos um tratamento didático no texto, traduzindo-o e colocando partes em negrito, como se pode ver no Quadro 18. Na etapa seguinte, elaboramos problemas e ações sempre pensando e repensando as tarefas com vistas ao labor conjunto e incluímos na atividade um texto de apoio da literatura secundária com o objetivo de ampliar o entendimento do excerto selecionado.

Vale lembrar que as atividades para sala elaboradas neste trabalho não foram aplicadas e constam aqui apenas como indicação e até certo ponto, como justificativa de nossa posição quando dizemos que a obra Tratado da Circunferência tem potencialidades pedagógica, o que equivale a dizer que dela podem ser destacados excertos potencialmente pedagógicos para o trabalho na aula de matemática.

Por exemplo, o Excerto 1 possuem potencialidades pedagógicas que podem ser exploradas. Os números da lista abaixo descrevem os números destacados no excerto.

- (1) Oportunidade de observar uma forma culturalmente distinta de iniciar a escrita de um livro;
- (2) Referência ao conhecimento matemático antigo;
- (3) Fazer o esboço correspondente para compreender a fala do autor;
- (4) Conferir os cálculos;
- (5) Atentar para outro sistema de unidades de medida;
- (6) Calcular as medidas da Terra conforme estimadas por al-Kashi;
- (7) Explicar o raciocínio do autor do Tratado da Circunferência.

Desta forma, o conteúdo das unidades temáticas a serem trabalhadas nesta seção e são: (1) elementos da cultura árabe/islâmica: saudação a Alá e composição do nome próprio; (2) aproximação de Arquimedes para a circunferência do círculo e

sua aplicação; (3) unidades de medida antigas; e (4) elementos de Astronomia: circunferência terrestre e cinturão do zodíaco.

Outros excertos foram destacados da obra com a mesma intencionalidade pedagógica e se encontram no Apêndice A de nossa tese.

A título de conclusão de nosso trabalho podemos tecer as seguintes reflexões:

Primeiro: é melhor (mais gratificante) estudar um livro de história da matemática ou estudar uma obra histórica? Porque?

O que pode gerar mais ideias de inserção da HM na sala de aula, estudar um livro de História ou estudar uma obra? Por que?

E estudar um instrumento matemático antigo? Daria os mesmos resultados?

Como a pessoa que escreveu a tese, o que de novo e interessante lhe surpreendeu durante seu trabalho?

Quais os caminhos de continuidade de exploração do seu tema doutoral

Quais as perspectivas foram abertas para seu trabalho como professor?

REFERÊNCIAS

- ALFONSO-GOLDFARB, A.M.; BELTRAN, M.H.; FERRAZ, M. A historiografia contemporânea e as ciências da matéria: uma longa rota cheia de percalços. In: PEREIRA, A.L.; PITA, J.R. (org.). **Rotas da natureza: cientistas, viagens, expedições, instituições**. Imprensa da Universidade de Coimbra, p.107-111, 2006.
- AL-KĀSHĪ, Ghiyāth. Der Lehrbrief über den Kreisumfang. In: LUCKEY, P. Der Lehrbrief über den Kreisumfang. **Adhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin** (A lição sobre a circunferência. Tratados da Academia Alemã de Ciências em Berlim), Jahrgang, Berlin, n. 6, 1953.
- AL-KĀSHĪ, Ghiyāth. **Traktat ob Okruzhnosti** (Tratado da Circunferência). In: ROZENFELD, B. Al-Kashani. Istorico-Matematicheskije Issledovaniya (Pesquisa Histórica e Matemática). Moscow, v.7, p. 327-379, 1954.
- AL-KĀSHĪ, Ghiyāth. Lether of al-Kāshī. In: KENNEDY, E.S. **A Letter of Jamshid al-Kashi to His Father: Scientific Research and Personalities at a Fifteenth Century Court**. **Orientalia**. v. 29, n. 2, p. 191-213, 1960.
- AL-KĀSHĪ, Ghiyāth. Lether of al-Kāshī. In: BAGHERI, Mohammad. **A Newly Found Letter of al-Kāshī on Scientific Life in Samarkand**. *Historia Mathematica*. n. 24, p. 241-256, 1997.
- AL-KĀSHĪ, Ghiyāth. Miftāh al-Hisab. IN: AYDIN, N.; HAMMOUD, L. **Al-Kāshī Miftāh al-Hisab, Volume I: Arithmetic Translation and Commentary**. Published under the imprint Birkhauser, by the registered company Springer Nature Switzerland AG, 2019.
- ANDRADE, Kaline; SILVA, Ana Paula. AL-KASHI e KAZI-ZADE AR-RUMI: desvendando a relação entre eles através de duas cartas. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 7, n. 20, p. 211–220, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v7i21.2867.
Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2867> .
Acesso em: 28 fev. 2022.
- AYDIN, N.; HAMMOUD, L. Root extraction by Al-Kashi and Stevin. **Arch. Hist. Exact Sci**. n.69, p. 291-310, 2015.
- AZARIAN, Mohammad. **Al-Kāshī's Fundamental Theorem**. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. v. 14, n. 4, p.493-503, 2004.
- AZARIAN, Mohammad. The introduction of al-Risāla al-Muhītīyya: An English translation. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**. v. 57, n. 6, p. 903-914, 2009.
- AZARIAN, Mohammad. Al-Risāla al-Muhītīyya: A Summary. **Missouri Journal of Mathematical Sciences**. v. 22, n. 2, p. 64-85, 2010.

BARBOSA, J. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

BARTHOLD, Vasilii. Four Studies on the History of Central Asia. In: **Ulugh Beg**, v. 2, Translated from the Russian by V. and T. Minorsky. Leiden, E. J. Brill, 1963.

BELTRAN, M. H. R., F. Saito e L. S. P. Trindade. **História da Ciência para formação de professores**. São Paulo: Ed. Livraria da Física/CAPES/OBEDUC/PUCSP, 2014.

BERGGREN, J.L. **Episodes in the mathematics of medieval islam**. Springer-Verlag Inc. New York, 2003.

BERGGREN, J. Mathematics in Medieval Islam. In: IMHAUSEN, A.; ROBSON E.; DAUBEN, J.; PLOFKER, K.; KATZ, V. (org.). **The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: a sourcebook**. Princeton University Press. p. 515-675, 2009.

BERGGREN, J. Islamic Mathematics. In: LINDBERG, D.; SHANK, M. **The Cambridge History of Science**. Cambridge: Cambridge University Press, p. 62-83, 2013. doi:10.1017/CHO9780511974007.004.

BERNARD, Alain. **History Within Math and Science Teaching: A Historical Issue**. In: RADFORD, L. Reflections on History of Mathematics: History of Mathematics and Mathematics Education. In: FRIED, M., DREYFUS, T. (eds.). **Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground**. Advances in Mathematics Education. DOI 10.1007/978-94-007-7473-5_7. Springer Science+Business Media Dordrecht, 2014.

BRENTJES, Sonja. Patronage of the mathematical sciences in Islamic societies: structure and rhetoric, identities, and outcomes. In: ROBSON, E.; STEDALL, J. (eds.) **The Oxford Handbook of the History of Mathematics**. Oxford: Oxford University Press, p. 301-328, 2008.

BRENTJES, S. **Elements: Reception of Euclid's Elements in the Islamic World**. Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures. Springer Science+Business Media Dordrecht. Third Edition, 2016.

BROMBERG, Carla.; SAITO, Fumikazu. **A História da Matemática e a História da Ciência**. IN: BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. (Orgs.). **História da Ciência: Tópicos atuais**. São Paulo: Ed. Livraria da Física. p. 47-71, 2010.

D'ENFERT, R.; DJEBBAR, A; RADFORD, L. **Dimensions historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques**. Compte-rendu du Groupe de Travail. n. 4, GT4, 2012.

DJEBBAR, A. **L'âge d'or des sciences arabes**. Éditions Le Pommier/ EPPDSCI, Paris, 2013.

DOLD-SAMPLONIUS, Yvonne. **Practical Arabic Mathematics**: measurement the muqarnas by al-Kashi. *Centaurus* 35 (3-4), 193-242, 1992.

DOURSTHER, Horace. **Dictionnaire universel des poids et mesures anciens et modernes**. M Hayez, Imprimeur de l'Académie Royale. Bruxelles, 1840.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FAZLIOĞLU, İhsan. **The Samarqand mathematical-astronomical school**: a basis for Ottoman philosophy and science. *Journal for the History of Arabic Science / Majallat Tāriḫ al-'Ulūm al-'Arabīyah*, n. 14, p. 3-68, University of Aleppo, Syria, 2008.

FERNINI, Ilias. **Astronomy at the service of the Islamic society**. The Role of Astronomy in Society and Culture Proceedings IAU Symposium, n. 260, D. Valls-Gabaud e A. Boksenberg, 2009.

FRIED, Michael. **Mathematicians, Historians of Mathematics, Mathematics Teachers, and Mathematics Education Researchers**: The Tense but Ineluctable Relations of Four Communities. In: RADFORD, L. Reflections on History of Mathematics: History of Mathematics and Mathematics Education. In: FRIED, M., DREYFUS, T. (eds.). *Mathematics e Mathematics Education: Searching for Common Ground*. Advances in Mathematics Education. Springer Science Business Media Dordrecht, 2014.

FURINGHETTI, Fulvia. History in the Mathematics Classroom. In: RADFORD, Luis. Reflections on History of Mathematics: History of Mathematics and Mathematics Education. In: FRIED, Michael., DREYFUS, Tommy. (eds.). *Mathematics e Mathematics Education: Searching for Common Ground*. Advances in Mathematics Education. Springer Science Business Media Dordrecht, 2014.

HAMADANIZADEH, J. The trigonometric tables of al-Kashi in his 'Zij-I Khaqani'. **Historia Math.**7(1) p. 38-45, 1980.

HEATH, T.L. **The Works of Archimedes**: on the sphere and cylinder. Book 1. p. 1-90. Cambridge University Press.1897.

HOGENDIJK, J.P. **Al-Kashi's determination of π to 16 decimals in an old manuscript**. *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften (Jornal da História das Ciências Árabes-Islâmicas)*. p. 73–152, 2009.

HOUTUM-SCHINDLER, Albert. **On the Length of the Persian Farsakh**. Proceedings of the Royal Geographical Society and Monthly Record of Geography, New Monthly Series, 10 (9): 584–588, 1888. Published by: Wiley on behalf of The Royal Geographical Society (with the Institute of British Geographers).

JOSEPH, George. **The crest of the peacock: non-European roots of mathematics**. 3 ed. Princeton e Oxford, 2011.

LEONT'EV, Alexei. **Activity, consciousness, and personality**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1978.

MATVIEVSKAYA, Galina. History of Medieval Islamic Mathematics: Research in Uzbekistan. **HISTORIA MATHEMATICA**, n. 20, p. 239-246, 1993.

MIRBABAYEV, Abdullojon. **The Islamic Lands and Their Culture**: History of Civilization of Central Asia. v. 4. p. 31-43, UNESCO, 2000.

MOREY, Bernadete. O início da historiografia em russo sobre a matemática islâmica. **Anais do XII SNHM-2017/SBHM**, ISSN 2236-4102, 2018.

MOREY, B.; RADFORD, Luis. **Curso de Teoria da Objetivação**. (Notas de aula). Natal-RN, 2020.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. **Ghiyāth al-din Jamshīd Mas'ūd al- Kāshī**. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Kashi/>. Acesso em: 27 maio 2022.

RADFORD, Luis. **Le raisonnement algébrique**. Une réflexion épistémologique. Actes du Colloque Élève, école, société: pour une approche interdisciplinaire de l'apprentissage. CIRADE, Université du Québec à Montréal, p. 33-45, 1993a.

RADFORD, Luis. **L'évolution des idées algébriques**. Une étude historico-didactique. École des sciences de l'éducation. Université Laurentienne, 1993b.

RADFORD, Luis. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. **Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa**. Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. p. 103-129, 2006.

RADFORD, Luis. **Cognição matemática**: história, antropologia e epistemologia. Organização e revisão técnica da tradução, Bernadete Morey, Iran Abreu Mendes. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

RADFORD, Luis. Reflections on History of Mathematics: History of Mathematics and Mathematics Education. In: **FRIED M., DREYFUS T.** (eds.). Mathematics e Mathematics Education: Searching for Common Ground. Advances in Mathematics Education. Springer Science Business Media Dordrecht, 2014A.

RADFORD, Luis. De la teoría de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, n. 7(2), p. 132-150, 2014B.

RADFORD, Luis. A teoria da objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em educação matemática. In V. Dias Moretti e W. Lima Cedro, **Educação Matemática e a teoria histórico-cultural**. p. 229-261. Campinas, São Paulo: Mercado de Letras, 2017.

RADFORD, Luis. **Teoria da Objetivação**: uma perspectiva vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática. Tradução, Shirley Gobara, Bernadete Morey. 1. ed. Livraria da Física, 2021.

RAGEP, Sally. Fifteenth-Century Astronomy in the Islamic World. In: **Before Copernicus**: The Cultures and Contexts of Scientific Learning in the Fifteenth Century. FELDHAY, R.; RAGEP, F. (org.). McGill-Queen's University Press. Montreal; Kingston; London; Chicago. p. 143-160, 2017.

ROZENFELD, Boris; YUSHKIÉVITCH, P. II. ПРИМЕЧАНИЯ К <<ТРАКТАТ ОБ ОКРУЖНОСТИ>> (Notas do Tratado da Circunferência). **Istórico-Matematicheskíe Issledovaniya** (Investigação Histórica e Matemática). Moscow, v. 7, p. 439-449, 1954.

ROZENFELD, B; YOUSCHEVITCH, P. Al- Kāshī. **Online Encyclopedia**, 2018. Disponível em: <https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/mathematics-biographies/al-kashi> . Acesso em: 21/05/2021.

SAITO, F. “História da Ciência e Ensino: em busca de diálogo entre historiadores e educadores”. **História da Ciência e Ensino: Construindo interfaces**, v.1, p. 1-6, 2010.

SAITO, F. História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas (resenha crítica). **Revista brasileira de história da matemática**, v.13, n.26 p. 85-94, 2013A.

SAITO, F. & M. da S. Dias. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI”. **Ciência & Educação**, v.19, n.1, p.89-111, 2013B.

SAITO, F. “Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática”. **Rematec**, n.16, p.25-47, 2014.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Ed. Livraria da Física/SBHMat, 2015.

SAITO, F. Construindo interfaces entre história e ensino da matemática. **Ensino da Matemática em Debate**, n.3, v.1, p. 3-19, 2016.

SAITO, F. & A. C. C. Pereira. **A elaboração de atividades com um antigo instrumento matemático na interface entre história e ensino**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2019A.

SAITO, Fumikazu; PEREIRA, Ana. A reconstrução do báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Revista Cocar**, v. 13, n. 25, p. 342-372, 2019B.

SHAMUKARAMOVA, F.Sh. **Vasily Vyatkin e a antiga Samarkanda**. Проблемы истории, филологии, культуры (Problemas de História, Filologia e Cultura). Институт Истории Академии Наук Республики Узбекистан, Ташкент (Instituto de

História da Academia de Ciências da República do Uzbequistão, Tashkent), v.1, p. 408-422, 2016.

SINCLAIR, Nathalie. **Aesthetic Considerations**. In: RADFORD, L. Reflections on History of Mathematics: History of Mathematics and Mathematics Education. In: FRIED, M., DREYFUS, T. (eds.). Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. Advances in Mathematics Education. Springer Science+Business Media Dordrecht, 2014.

SUTER, H. **Die Mathematiker und Astronomen und ihre Werke**. Abhandl. zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Heft 10, p. 173-174, 1900.

TAANI, Osama. **Multiple Paths to Mathematics Practice in Al-Kashi's Key to Arithmetic**. Science e Education, n. 23, p. 125-141, 2014. Disponível em: <https://philpapers.org/rec/TAAMPT>. Acesso em: 27 maio 2021.

WOEPCKE, F. Sur une mesure de la circonférence du cercle, du aux astronomes arabes, et fondée sur un calcul d'Abou'ul Waf'a. **Journal Asiatique**, 5^m serie, tome 15, p. 281-320. A l'Imprimerie Impériale, Paris, 1822.

WUSSING, H. **Lecciones de Historia de las Matemáticas**. Traducción: AUSEJO, E.; ESCORIHUELA, J.; HORMIGÉN, M. (director); KARA-MURZA, D; MILLAN, A. Siglo XXI de España Editores. Madrid, 1998.

YAZDI, H.; REZVANI, P. Chronology of the Events of the Samarqand Observatory and School Based on some Old Persian Texts: Revision. **Suhayl** (International Journal for the History of Exact and Natural Sciences in Islamic Civilisation), v. 43, Barcelona, 2015, p. 119-147.

YUSHKIÉVITCH, A.P., ROZENFELD, B. A.: al-Kāshī, in **Dictionary of Scientific Biography**, v. 7, p. 255-262. Charles Scribner's Sons, New York, 1973.

YUSHKIÉVITCH, A.P. **Les Mathématiques Arabes (VIII XV siècles)** traduction par M. Cazenaze et K. Jaouiche. Librairie Philosophique J. VRIN. Paris, 1976.

ZERRIF, Mohammed. Units of Measurement in Islamic Societies: The Finger, the Fist, and Large and Small Spans. **Ostour – Bi-annual Peer-reviewed Journal for Historical Studies**. Published by the Arab Center for Research and Policy Studies. International standard number. Issue 3, jan, 2016.

APÊNDICE A – EXCERTOS DO TRATADO DA CIRCUNFERÊNCIA DE AL- KĀSHĪ

Excerto 1 - Parte introdutória do Tratado da Circunferência de al-Kāshī.

TRATADO SOBRE A CIRCUNFERÊNCIA [1]

Louvemos a Alá, possuidor do conhecimento sobre a relação do diâmetro com a circunferência, sabedor da grandeza do simples e complexo, criador da terra e do céu, criador da luz nas trevas. Graça e paz esteja com Muhammad Mustafá, centro do círculo dos profetas e circunferência cujo diâmetro é indicação do caminho da verdade e da justiça, assim como à sua descendência e seus amigos puros, desejamos o bem.

Depois [disso]: Jamshīd ibn Mas'ūd ibn Mahmūd Tabīb Kāshānī, médico de Kāshān, chamado de Ghiyāth, criação de Alá o altíssimo, [esperançoso] em seu perdão e em que Alá melhore seu destino, diz:

Arquimedes demonstrou que a circunferência supera o diâmetro triplo em menos que um sétimo do diâmetro e mais do que dez, setenta e um avos do diâmetro. A diferença entre estas duas [frações] é um quatrocentos e noventa e sete avos. Por isso, no círculo de diâmetro quatrocentos e noventa e sete cúbitos, juntas de bambu ou farsang, o comprimento da circunferência é desconhecido e dúbio nos limites de um cúbito, uma junta de bambu ou um farsang e no maior círculo da esfera terrestre, tal incógnita se encontra nos limites de cinco farsangs, uma vez que seu diâmetro é aproximadamente igual a cinco vezes tal quantidade de farsangs. Já no cinturão do zodíaco, a dita incógnita situa-se nos limites consideravelmente maiores do que cem mil farsangs. Tais grandezas já são grandes para a circunferência, maior ainda serão para a medição de áreas.

Fonte: al-Kāshī (1954, p.327, tradução nossa).

Excerto 2 - Comentário sobre a aproximação de Arquimedes.

Na verdade, ele [Arquimedes] determinou o perímetro do polígono de noventa e seis lados inscrito na circunferência, menor que a circunferência, uma vez que cada um de seus lados é menor que o arco do qual ela é corda e, portanto, a soma de todos os lados [do polígono] é menor que a circunferência do círculo [no qual está inscrito o polígono], e ele [Arquimedes] determinou também o perímetro do polígono circunscrito de modo semelhante ao primeiro, e na primeira asserção do primeiro livro de sua composição ele demonstrou que tal perímetro é maior que a circunferência do círculo, sendo que a diferença entre eles [perímetro do polígono inscrito e circunscrito] é tal como dada acima.

Fonte: al-Kāshī (1954, p.327-328, tradução nossa).

Excerto 3 - Comentário sobre a aproximação de Abu'l-Wafā Būzjānī.

Abu'l-Wafā Būzjānī obteve, por meio de cálculo aproximado, a corda de metade de um trezentos e sessenta avos da circunferência em partes que o diâmetro é cento e vinte e, multiplicando isto

por setecentos e vinte, obteve o perímetro do polígono inscrito. Ele determinou também o perímetro do polígono circunscrito semelhante e afirmou que se o diâmetro for cento e vinte, então a circunferência será 376 mais uma fração maior que $0;59,10,59$ e menor que $0;59,23,54,12$ onde a diferença entre essas duas quantidades [frações] é $0;0,12,55,12$. Para o maior círculo da Terra isto seria mil cúbitos. Sendo que ele se enganou ao considerar o tamanho da corda de metade de um [360] partes igual a $0\ 31\ 23\ 55\ 54\ 55$. Está incorreto: o [valor] correto é $0\ 31\ 24\ 56\ 58\ 36$, como mostraremos mais à frente.

Fonte: al-Kāshī (1954, p.328).

Excerto 4 - Comentário sobre a aproximação de Abu Rayhān al-Bīrūnī

Abu Rayhān al-Bīrūnī obteve a corda de dois trezentos e sessenta avos da circunferência. Ele obteve o perímetro do polígono de cento e oitenta lados inscrito [regular] igual a $6;16,59,10,48,0$, enquanto que o perímetro do semelhante circunscrito [regular] era $6;17,1,58,19,6$. Supondo a circunferência do círculo igual à metade da soma desses dois perímetros, ele passou de frações com denominador [sexagesimal] para os números indianos, tomando o diâmetro como a unidade. Isto faz com que para o círculo igual ao maior círculo da Terra, seja aproximadamente igual a um farsang. Neste cálculo ele enganosamente tomou a corda de dois [trezentos e sessenta avos] partes como sendo $0;2,5,39,43,36$, enquanto que o correto seria $0;2,5,39,26,22$. No entanto, na tabela de senos [incluída] no *Cānone Mas'ūd*, ele tomou o seno de um [trezentos e sessenta avos], ou seja, metade da corda de duas partes, como sendo $0;1,2,49,43$, o que é correto, enquanto que no dobro se tem um erro.

Fonte: al-Kāshī (1954, p.338).

Excerto 5 - Declaração do objetivo de al-Kāshī.

Uma vez que tais operações levam a erros, queremos determinar a circunferência do círculo com a suposição de que seu diâmetro é conhecido em termos de uma determinada medição de tal maneira que estaríamos certos de que em um círculo que seu diâmetro é seiscentas mil vezes maior que o diâmetro da esfera terrestre, a diferença entre o resultado de nossos cálculos e o valor real não ultrapasse a largura de um fio de cabelo, ou seja, um sexto da largura de um grão de cevada, de modo que tal diferença para um círculo menor que este seja ainda menor.

Fonte: al-Kāshī (1954, p.329, tradução nossa, grifo nosso).

Excerto 6 - A organização do Tratado da Circunferência.

Compus o presente tratado contendo tal determinação, dei-lhe o título de *Tratado sobre a Circunferência* e o dividi em dez partes e conclusão. Rogo ao amado e generoso Alá que nos conduza pelo caminho da verdade.

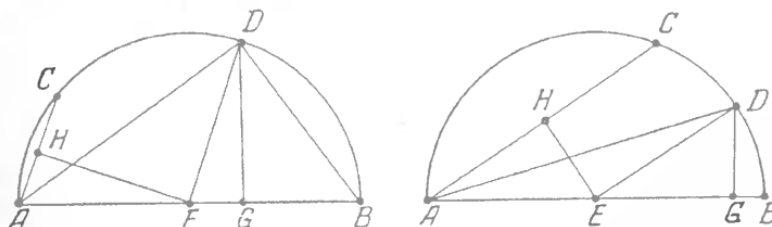
Fonte: Al-Kāshī (1954, p.329, tradução nossa).

Excerto 7 - Teorema de al-Kāshī.

PRIMEIRA PARTE

SOBRE A DETERMINAÇÃO DA CORDA DE UM ARCO, QUE É A SOMA DE UM ARCO DE UMA CORDA CONHECIDA E DO ARCO QUE É A METADE DE SEU SUPLEMENTAR

Digo que: uma superfície [retangular] [construída] na soma do diâmetro e da corda de cada arco menor que o semicírculo e na metade do diâmetro é igual ao quadrado da corda do arco que é igual à soma do primeiro arco e a metade de seu suplemento ao semicírculo. A fim de demonstrar, construamos o semicírculo ACB de centro E na linha AB; traçamos uma corda arbitrária AC; [o arco] BC que é o suplemento de AC dividimos ao meio encontrando o ponto D; ligamos A e D. Então a asserção [diz]: a superfície na metade do diâmetro e a soma AB e AC é igual ao quadrado AD.



Demonstração: Traçamos BD. Então o ângulo ADB é reto pela proposição trinta do terceiro [livro] <<d'Os Elementos>>.

A seguir baixamos do ponto D a perpendicular DG à linha AB. Obtém-se os triângulos DBG e DAG, semelhantes aos triângulo ADB pela oitava proposição do [livro] seis <<d'Os Elementos>>. Por isso, o diâmetro AB está para AD assim como AD está para AG e pela proposição dezanove do [livro] sete <<dos Elementos>>, a superfície no diâmetro é igual ao quadrado de AD.

A seguir, pelo ponto H traçamos a perpendicular HE ao segmento AC. Então H será ponto médio de AC pela proposição três do terceiro [livro] de <<Os Elementos>>. Ligamos os pontos ED. Uma vez que a medida do ângulo BAC é metade do arco CB, a mesma do ângulo BED,

estes dois ângulos [BAC e DEG] são iguais. Por isto o triângulo AHE e EGD são iguais, uma vez que eles têm os ângulos retos H e G, ângulos iguais em E, A e lados iguais AE e ED. Portanto, o lado EG é igual ao lado AH, que é metade de AC e a superfície sobre AG, ou seja, a soma da metade do diâmetro e EG é igual à metade de AC e sobre o diâmetro é igual ao quadrado de AD. Uma vez que a superfície sobre uma linha e sobre a metade de outra é igual superfície sobre a metade da primeira e sobre a outra inteira, então a superfície sobre a soma do diâmetro e o dobre de EG, i.e., sobre a soma do diâmetro e AC e sobre a metade do diâmetro é igual ao quadrado de AD. Isto é o que queríamos [demonstrar].

Se AC é expresso nas partes em que a metade do diâmetro é sessenta, some o diâmetro a ele e adicione um novo dígito [sessenta]. Então o resultado será o quadrado de AD.

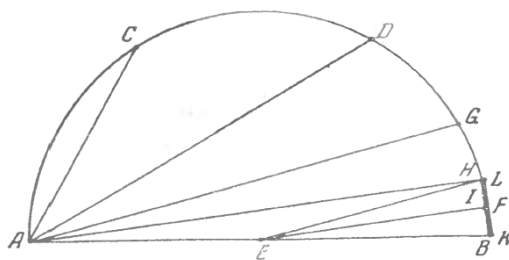
Fonte: Al-Kāshī (1954, p.329-330, tradução nossa).

Excerto 8 – Cálculo do perímetro de polígonos inscrito e circunscrito à circunferência.

SEGUNDA PARTE

SOBRE A DETERMINAÇÃO DO PERÍMETRO DE UM POLÍGONO QUALQUER, INSCRITO NO CÍRCULO E DO PERÍMETRO DO SEMELHANTE CIRCUNSCRITO AO CÍRCULO

Construamos no segmento AB o semicírculo ACB de centro E suponhamos que [o arco] AC seja um sexto da circunferência. Então a corda AC será a metade do diâmetro pela proposição quinze do quarto [livro] <<d' Os *Elementos*>>. Em seguida dividamos ao meio [o arco] CB, que é o suplemento [do arco] AC obtendo assim o ponto D. Dividamos [o arco] DB ao meio, obtendo o ponto G. Depois, dividamos [o arco] GB ao meio obtendo H, e assim por diante o quanto se queira. Como já dissemos na sessão anterior, como conhecemos a corda AC, também conheceremos a corda AD, de onde também será conhecida a corda AG, AH, e assim por diante.



Agora, se temos a corda AH e queremos determinar a corda BH subtraímos o quadrado de AH do quadrado do diâmetro e o que resta é o quadrado da corda BH, pois, o ângulo AHB é reto pela proposição trinta do terceiro [livro] <<d' Os *Elementos*>> e, conseqüentemente, o quadrado de AB é igual aos quadrados AH e HB pelo “teorema da noiva”. A seguir dividimos ao meio o arco BH no ponto F e ligamos EF. Esta linha divide ao meio a corda BH em I. Traçamos a tangente FLK ao círculo no ponto F levantando, por ambos os lados [do ponto F] duas perpendiculares FK e FL, ligamos EH e continuamos até L, assim como [continuamos] EB até

K. Então KL será paralela a BH, uma vez que BEH é um polígono inscrito no círculo, KEL será o seu semelhante circunscrito. Sendo assim, os triângulos EKF e ELF são iguais entre si, e os triângulos EBI e EHI, por sua vez, são iguais entre si. Por isto, EI está para EF (que é metade do diâmetro) do mesmo modo que BH está para KL. Portanto, EI está para IF, que é a sobra do último membro desta proporção em relação ao anterior, assim como, a corda BH está para a sobra de KL sobre BH, sendo esta relação a mesma relação da soma de todos os lados do polígono inscrito no círculo, cujo lado é BH, com todas as sobras dos lados do polígono circunscrito, cujo lado é KL sobre os primeiros lados. Logo, EI é a metade da linha AH, uma vez que os triângulos AHB e EIB são semelhantes em virtude de que, os ângulos H e I são retos e o ângulo \hat{A} , na circunferência que acompanha o arco BH, é igual ao ângulo central \hat{E} , que acompanha o arco BF, que é metade do arco BH, e EB que é metade de AB. Desse modo EI é metade de AH. Por isso, uma vez que EI e BH ficarão conhecidos, as relações apontadas também serão conhecidas e, do mesmo modo, o polígono inscrito no círculo e o polígono circunscrito no círculo, também serão conhecidos. Era aí que queríamos chegar.

Fonte: Al-Kāshī (1954, p.330-332, tradução nossa).

Excerto 9 – Quantidade de partes em que a circunferência deve ser dividida e a quantidade de casas sexagesimais para que o objetivo estabelecido por al-Kāshī seja atingido.

TERCEIRA PARTE	
EM QUANTAS PARTES DEVE SER DIVIDIDA A CIRCUNFERENCIA E ATE QUANTAS CASAS SEXAGESIMAS SÃO NECESSARIAS PARA EFETUAR AS OPERAÇÕES PARA QUE O PERÍMETRO OBTIDO SEJA DISTINTO DO CÍRCULO DADO NUMA GRANDEZA MENOR DO QUE UM FIO DE CABELO.	
	Saiba que no círculo de diâmetro 600 000 vezes maior que o diâmetro da Terra, a circunferência também é 600 000 vezes também é maior que a circunferência da Terra. Neste círculo se verifica:
GRAU	Mil, seiscentos e sessenta e seis e dois terços da circunferência da Terra, ou seja, $1666\frac{2}{3}C$.
MINUTO	Aproximadamente vinte e sete e três quartos do mesmo diâmetro, ou seja, $27\frac{3}{4}C$.
SEGUNDA	Aproximadamente três mil setecentos e quatro farsangs, se a circunferência da Terra for tomada como oito mil farsangs.
TERÇA	Aproximadamente 62 farsangs
QUARTA	Aproximadamente 1 farsang e três décimos
QUINTA	Aproximadamente duzentos e seis cúbitos
SEXTA	Aproximadamente 3 e 1/3 de um cúbitos

SÉTIMA	Um e um terço de um dedo, isto é, 48 fios de cabelo
OITAVA	Quatro quintos da grossura de um cabelo de cavalo, ou ainda, menos. [20]

Fonte: Al-Kāshī (1954, p.332, tradução nossa).

Excerto 10 - Estimativa do comprimento do lado do polígono inscrito.

Esse é o caso se a circunferência for trezentos e sessenta. Se ela tiver trezentos e sessenta. Se ela tem trezentos e setenta e sete com uma fração, então sua oitava é muito menor que quatro quintos da espessura de um cabelo.

Portanto, se definirmos os perímetros de dois polígonos de forma que a diferença entre eles não atinja uma oitava, então a diferença entre eles não atingirá a largura de um cabelo, além disso, essa é a diferença entre cada um deles e a circunferência real do círculo.

Como sabemos, o perímetro do polígono interno está para o perímetro do polígono externo, assim como a distância do centro do círculo até o ponto médio do lado [do polígono interno] está para o seu complemento até a metade do diâmetro, isto é, para a distância do ponto médio do arco, cuja corda é o lado. Tal complemento é a flecha deste arco.

Sabe-se também que a relação da metade do diâmetro para com a circunferência é menor do que um sexto em menos que um terço de um sétimo de um sexto. Portanto, precisamos tomar no círculo um polígono com um número tão grande de lados que a relação da flecha do arco de cada lado para com o complemento da flecha até metade do diâmetro seja menor do que a relação de um sexto de oitavo para com a unidade em um terço de um sétimo deste sexto ou [ainda] maior, ou seja, para que tal relação seja igual a oito nonas ou menos. Então a corda do complemento do arco de cada lado será menor que o diâmetro por dezesseis nonas uma vez que dita corda é igual a duas vezes a distância especificada.

Portanto, a diferença do quadrado do diâmetro e seu quadrado é inferior a aproximadamente quádruplo de dezesseis nonas elevado a uma casa, isto é, menos de um sétimo e quatro oitavas. Portanto, a raiz deste, isto é, a corda, ou seja, cada um dos lados, não excede oito quartas.

Fonte: Al-Kāshī (1954, p.333, tradução nossa).

Excerto 11 - Cálculo da medida do arco da circunferência menor que oito quartas e a determinação da quantidade de lados correspondente.

Se dividirmos o terço do círculo vinte e oito vezes, obtém-se um arco de cinco quartas, quarenta e sete quintas, com fração naquelas partes onde todo o círculo é igual a trezentos e sessenta, como fica claro na tabela [27]:

Sem dúvida, a corda deste arco é menor que oito quartas uma vez que a cada corda de qualquer arco, dado que a circunferência é trezentos e sessenta e o diâmetro é cento e vinte, não excede o arco em um terço de um sétimo dele. Por isso, nós inscreveremos no círculo um tal polígono cujo número de lados é igual a oitocentos e cinco milhões e trezentos e sessenta e oito [28], e seu expoente [i.e., sua representação na base 60] é 1 2 8 16 12 48.

Duplicação repetida do número de lados do polígono regular inscrito (começando com o triângulo)						Divisão sucessiva da metade do terço da circunferência															
Número	Elevado cinco vezes (60 ⁵)	Elevado quatro vezes (60 ⁴)	Elevado três vezes (60 ³)	Elevado duas vezes (60 ²)	Elevado uma vez (60 ¹)	Lados	Graus	Minutos	Segundas	Terças	Quartas	Quintas	Sextas	Séptimas	Oitavas	Nonas	Décimas	Décima primeira	Décima segunda	Décima terceira	
0						3	120														
1						6	60														
2						12	30														
3						24	15														
4					1	48	7	30													
5					36	3	3	45													
6					12	6	1	52	30												
7					24	24	0	56	15												
8					48	12		28	7	30											
9					36	25		14	3	45											
10					12	51		7	1	52	30										
11				1	42	24		3	30	56	15										
12					48	3		1	45	28	7	30									
13				3	24	6		0	52	44	3	45									
14					48	13			26	22	1	52	30								
15				18	24	39			13	11	0	56	15								
16					48	54			6	35	30	28	7	30							
17			1	49	13	36			3	17	45	14	3	45							
18				38	27	12			1	38	52	37	1	52	30						
19			3	16	54	24			0	49	26	18	30	56	15						
20				33	48	48				24	43	9	15	28	7	30					
21			14	7	37	36				12	21	34	37	44	3	45					
22				15	15	12				6	10	47	18	52	1	52	30				
23		1	58	30	30	24				3	5	23	39	26	0	56	15				
24				1	0	48															
25		3	53	2	1	36				1	32	41	49	43	0	28	7	30			
26			4	8	3	12															
27		15	32	4	6	24					23	10	27	25	45	7	1	52	30		
28	1	2	8	16	12	48					11	35	13	42	52	33	30	56	15		
												5	47	36	51	26	16	45	28	7	30

Fonte: al-Kāshī (1954, p.333, tradução nossa).

Excerto 12 - Explicação sobre como os cálculos das tabelas foram feitos.

QUARTA PARTE
SOBRE AS OPERAÇÕES

Nós somamos o diâmetro 2 0 ao lado 1 0 do hexágono, obtendo 3 0, aumentamos este valor em uma ordem, obtendo 3 0 0. Extraímos a raiz, adicionamos a ela [a raiz] 2 0 e escrevemos [o resultado] na ordem e depois tomamos a raiz deste mesmo valor; vamos fazer isso vinte e oito vezes.

Passamos de um cálculo para o seguinte depois de o refazermos duas ou três vezes. Além disso, nós nos asseguramos pela [verificação da conta], multiplicando a raiz por si mesma, repetindo duas ou três vezes e acrescentando o resto da operação à segunda multiplicação. [Então] se o cálculo estiver correto, a soma torna-se igual ao número.

Nós verificamos e nos asseguramos da correção [dos cálculos] porque, caso se cometa um erro, ele iria aumentar mais e mais.

Como existe uma grande quantidade de cifras, nós não usamos cifras desnecessárias. O método de extração de raízes e elevação da raiz ao quadrado – de nossa própria invenção é o método mais fácil neste assunto. Nesta seção, incluímos as tabelas dos cálculos para que sirva de modelo para os calculistas e um caminho indicativo para aqueles que querem verificar a sua exatidão de cálculos. Estas são as tabelas [ver. pp. 338-345]:

Fonte: Al-Kāshī (1954, p.336-337, tradução nossa).

					3	36	0	56	0	33	8	24	19
			1	5	54	2	24	0	14	7	42	35	24
				24	3	56	0	36	3	16	32	27	21
	0	0	6	0	56	0	59	8	24	13	46	19	48
		24	7	34	57	51	5	51	9	55	10	34	26
		24	7	34	57	51	5	51	9	55	10	34	26
0	36	0	16	0	1	3	16	58	1	21	36	3	16
										5	2	47	52
0	36	48	31	9	56	45	28	40	21	17	0	0	0

Fonte: al-Kāshī (1954, p.346, tradução nossa).

Excerto 14 – Cálculo do perímetro de polígonos inscrito e circunscrito de 3×2^{28} lados.

SEXTA PARTE

DETERMINAÇÃO DO PERÍMETRO, UM POLÍGONO [REGULAR] INSCRITO UM CÍRCULO E SEU SIMILAR POLÍGONO [REGULAR] CIRCUNSCRITO AO [MESMO] CÍRCULO, ONDE CADA POLÍGONO TEM 805 306 368 LADOS

Multipicamos a raiz obtida na quinta seção, que é o tamanho de um lado, pelo número de lados do polígono especificado, isto é $1\ 2\ 8\ 16\ 12\ 48$. Obtemos o perímetro do polígono inscrito em um círculo nas partes em que o diâmetro é cento e vinte.

Multiplicando	6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25		
	Multiplicador	Quartos	Quintos	Sextos	Sétimos	Oitavos	Nonos	Décimos	Décimo primeiro	Décimo segundo	Décimo terceiro	Décimo quarto	
Cinco vezes levantadas	1	6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25	
Quatro vezes aumentou	2		12	8	2	29	59	12	29	7	12	38	50
Três vezes aumentou	8		0	48	0	8	7	52	1	52	4	48	3
				0	32	1	52	4	48	4	24	2	32
Duas vezes levantadas	16			1	36	0	16	15	44	3	44	0	36
					1	4	3	44	9	36	8	48	5
Uma vez levantada	12				1	12	0	12	11	48	2	48	7
						0	48	2	48	7	12	6	36
Grau	48					4	48	0	48	47	12	11	12
							3	12	11	12	28	48	26
produto		6	16	59	28	1	34	51	46	14	49	46	

de um grão médio de cevada. Então, algo menor que vinte e nove nonas é menor que dois quintos da largura de um fio de cabelo. Portanto, a diferença entre os dois perímetros mencionados, um dos quais é menor que a circunferência e o outro é maior que esta, não perfaz dois quintos da largura de um fio de cabelo. Portanto, se somarmos metade da diferença entre os perímetros dos dois polígonos ao menor e subtraí-lo do maior, ou ainda melhor, se arredondarmos o que estiver na ordem nona no menor [perímetro], ou seja, [adicionarmos] 14 nonas, e retirarmos nesta mesma ordem do maior, a saber, 15 nonas, então obtém-se [33]:

Tamanho da circunferência, quando o diâmetro é cento e vinte									
Elevado a um	Grau	Minutos	Segundos	Terços	Quartos	Quintos	Sextos	Sétimos	Oitavos
6	16	59	28	1	34	51	46	14	50

Portanto, a diferença entre este e o valor real [da circunferência] não supera um quinto da largura de um fio de cabelo da crina de cavalo de trabalho, ou seja, um sexto da largura de um grão médio de cevada, e é isso que queríamos provar.

Eu exprimi isto em versos numa estrofe dística (dois versos) abaixo:

ва йав иат ках а лад иа му фа-йадиу
мухитуи хейсу нисфу-л-кутри сйиу

6 16 59 28 1 34 51 46 14 50

- é a circunferência, contanto que metade do diâmetro seja 60. Assumindo metade do diâmetro igual a um, a circunferência será expressa por este mesmo número, mas rebaixado em uma ordem, ou seja, o que é elevado a um se torna partes, o que é parte se torna minutos, e assim por diante, até as oitavas que serão nonas. Nesse caso a diferença do verdadeiro [valor] não ultrapassa uma nona, ou melhor, será menor que um quarto de nona.

Nas operações anteriores nós tomamos a metade do diâmetro valendo sessenta apenas para que as cordas não se diferenciem do que é usual e consta nas tabelas. Se, no entanto, adotarmos a metade do diâmetro valendo um, então as cifras (os valores para as cordas) não sofrerão alterações, mas mudarão apenas as suas ordens. Colocamos as multiplicações deste [valores das cordas] em todas as cifras de base sessenta na tabela, para facilitar determinações da circunferência pelo diâmetro e vice-versa. A tabela é a seguinte:

QUADRO DE MÚLTIPLOS DA PROPORÇÃO DE AMPLITUDE NA METADE DO DIÂMETRO, SUPONDO QUE SEJA UM																							
coluna do número	uma vez elevada	multas vezes metade do diâmetro	seus minutos	Seus segundos	Seus terceiros	Seus quartos	Seus quintos	Seus sextos	Seus sétimos	Seus oitavos	Seus nonos	coluna do número	uma vez elevada	multas vezes metade do diâmetro	seus minutos	Seus segundos	Seus terceiros	Seus quartos	Seus quintos	Seus sextos	Seus sétimos	Seus oitavos	Seus nonos
1	0	6	16	59	28	1	34	51	46	14	50	31	3	14	46	43	28	49	0	44	53	39	50
2		12	33	58	56	3	9	43	32	29	40	32		21	3	42	56	50	35	36	39	54	40
3		18	50	58	24	4	44	35	18	44	30	33		27	20	42	24	52	10	28	26	9	30
4		25	7	57	52	6	19	27	4	59	20	34		33	37	41	52	53	45	20	12	24	20
5		31	24	57	20	7	54	18	51	14	10	35		39	54	41	20	55	20	11	58	39	10
6		37	41	56	48	9	29	10	37	29	0	36		46	11	40	48	56	55	3	44	54	0
7		43	58	56	16	11	4	2	23	43	50	37		52	28	40	16	58	29	55	31	8	50
8		50	15	55	44	12	38	54	9	58	40	38	3	58	45	39	45	0	4	47	17	23	40
9	0	56	32	55	12	14	13	45	56	13	30	39	4	5	2	39	13	1	39	39	3	38	30
10	1	2	49	54	40	15	48	37	42	28	20	40		11	19	38	41	3	14	30	49	53	20
11		9	6	54	8	17	23	29	28	43	10	41		17	36	38	9	4	49	22	36	8	10
12		15	23	53	36	18	58	21	14	58	0	42		23	53	37	37	6	24	14	22	23	0
13		21	40	53	4	20	33	13	1	12	50	43		30	10	37	5	7	59	6	8	37	50
14		27	57	52	32	22	8	4	47	27	40	44		36	27	36	33	9	53	57	54	52	40
15		34	14	52	0	23	42	56	33	42	30	45		42	44	36	1	11	8	49	41	7	30
16		40	31	51	28	25	17	48	19	57	20	46		49	1	35	29	12	43	41	27	22	20
17		46	48	50	56	26	52	40	6	12	10	47	4	55	18	34	57	14	18	33	13	37	10
18		53	5	50	24	28	27	31	52	27	0	48	5	1	35	34	25	15	53	24	59	52	0
19	1	59	22	49	52	30	2	23	38	41	50	49		7	52	33	53	17	28	16	46	6	50
20	2	5	39	49	20	31	37	15	24	56	40	50		14	9	33	21	19	3	8	32	21	40
21		11	56	48	48	33	12	7	11	11	30	51		20	26	32	49	20	38	0	18	36	30
22		18	13	48	16	34	46	58	57	26	20	52		26	43	32	17	22	12	52	4	51	20
23		24	30	47	44	36	21	50	43	41	10	53		33	0	31	45	23	47	43	51	6	10
24		30	47	47	12	37	56	42	29	56	0	54		39	17	31	13	25	22	35	37	21	0
25		37	4	46	40	39	31	34	16	10	50	55		45	34	30	41	26	57	27	23	35	50
26		43	21	46	8	41	6	36	2	25	40	56		51	51	30	9	28	32	19	9	50	40
27		49	38	45	36	42	41	17	48	40	30	57	5	58	8	29	37	30	7	10	56	5	30
28	2	55	55	45	4	44	16	9	34	55	20	58	6	4	25	29	5	31	42	2	42	20	20
29	3	2	12	44	32	45	51	1	21	10	10	59		10	42	28	33	33	16	54	28	35	10
30	3	8	29	44	0	47	25	53	7	25	0	60	6	16	59	28	1	34	51	46	14	50	0

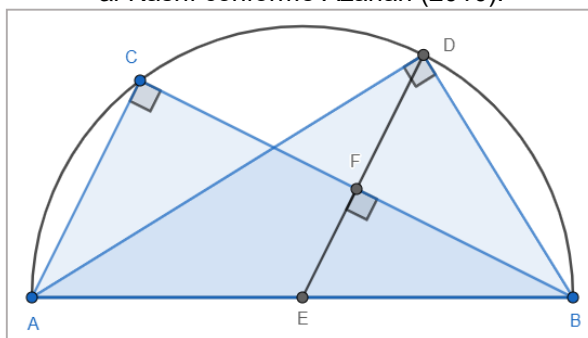
Fonte: al-Kāshī (1954, p.P.347-353, tradução nossa, grifo nosso).

APÊNDICE B – OUTRA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE AL-KĀSHĪ

Não há uma única demonstração para esta relação descrita por al-Kāshī, Azarian (2010) propõe uma outra demonstração para o que ele chama de “Teorema Fundamental de al-Kāshī”, Figura 27:

Teorema (Teorema Fundamental de al-Kāshī): Se em um semicírculo com diâmetro $\overline{AB} = 2r$ e centro E considerarmos um arco arbitrário \widehat{AC} , e se denominarmos o ponto médio do arco \widehat{CB} de ponto D , e traçarmos a corda \overline{AD} , então, $r(2r + \overline{AC}) = \overline{AD}^2$.

Figura 27 - Ilustração da demonstração do Teorema de al-Kāshī conforme Azarian (2010).



Fonte: Elaborado pela autora.

Para essa demonstração, tracemos os segmentos BC e DE, logo F é o ponto de interseção entre eles, e BC e DE são perpendiculares. Do triângulo retângulo BFD obtemos:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BF}^2 + (r - \overline{EF})^2 \quad (1)$$

De maneira semelhante, a partir do triângulo ADB, obtemos:

$$(2r)^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$$

Assim,

$$\overline{BD}^2 = 4r^2 - \overline{AD}^2 \quad (2)$$

De (1) e (2), temos que:

$$\overline{BF}^2 + (r - \overline{EF})^2 = 4r^2 - \overline{AD}^2 \quad (3)$$

Como os triângulos ACB e EFB são semelhantes e E é ponto médio de AB, temos que:

$$\overline{BF} = \frac{\overline{BC}}{2} \text{ e } \overline{EF} = \frac{\overline{AC}}{2}$$

Logo, a partir de (III), temos:

$$\left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 = 4r^2 - \overline{AD}^2 \quad (4)$$

Além disso,

$$\overline{BC}^2 = 4r^2 - \overline{AC}^2 \quad (5)$$

Substituindo (2) em (4), finalmente, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BC}^2}{4} + r^2 - r \cdot \overline{AC} + \frac{\overline{AC}^2}{4} &= 4r^2 - \overline{AD}^2 \\ \overline{BC}^2 + 4r^2 - 4r \cdot \overline{AC} + \overline{AC}^2 &= 16r^2 - 4\overline{AD}^2 \\ 4r^2 - \overline{AC}^2 + 4r^2 - 4r \cdot \overline{AC} + \overline{AC}^2 &= 16r^2 - 4\overline{AD}^2 \\ 8r^2 - 4r \cdot \overline{AC} &= 16r^2 - 4\overline{AD}^2 \\ 8r^2 + 4r \cdot \overline{AC} &= 4\overline{AD}^2 \\ r(2r + \overline{AC}) &= \overline{AD}^2 \end{aligned}$$

Em Azarian (2010), vemos uma aplicação imediata deste teorema hoje conhecido como Identidade de Lambert⁶⁰, no entanto, al-Kāshī a havia demonstrado 346 anos antes.

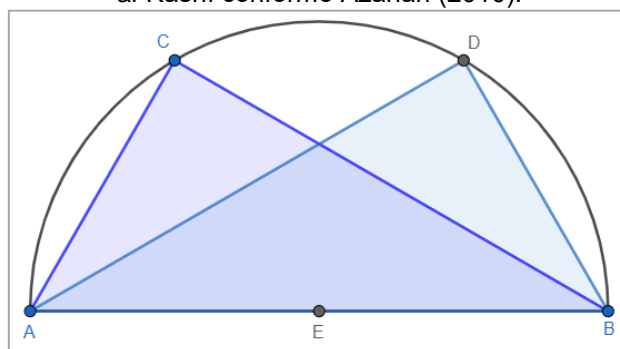
⁶⁰ Para mais informações: Acessar: < <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lambert/> >. Acesso em 16 jul.2022.

A partir de seu teorema, escrevendo na linguagem matemática atual, al-Kāshī deduziu que em um semicírculo unitário se o arco AC é igual a 2Ψ radianos, então $\overline{AD} = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Psi}{2}\right)$, e substituindo esses valores em seu teorema, obtém-se:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Psi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\text{sen}\Psi}{2}} \quad (\text{onde } \Psi < \frac{\pi}{2}) \quad (6)$$

Na Figura 28 temos um círculo unitário de diâmetro AB , se o arco $\widehat{AC} = 2\theta \text{ rad}$, então no triângulo retângulo ΔACB , temos que $\widehat{ABC} = \theta \text{ rad}$ e $\overline{AC} = 2\text{sen}\theta$. Por outro lado, temos que o arco $\widehat{AD} = \left(2\theta + \frac{\pi-2\theta}{2}\right) \text{ rad}$, logo, no triângulo retângulo ΔADB , $\widehat{BAD} = \frac{1}{2}\left(2\theta + \frac{\pi-2\theta}{2}\right) \text{ rad} = \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ rad}$. Assim, $\overline{AD} = 2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Figura 28 - Ilustração da demonstração do Teorema de al-Kāshī conforme Azarian (2010).



Fonte: Elaborado pela autora.

Substituindo os valores de \overline{AC} , \overline{AD} e raio um no Teorema Fundamental de al-Kāshī, obtemos sua forma trigonométrica hoje conhecida como Identidade de Lambert, logo:

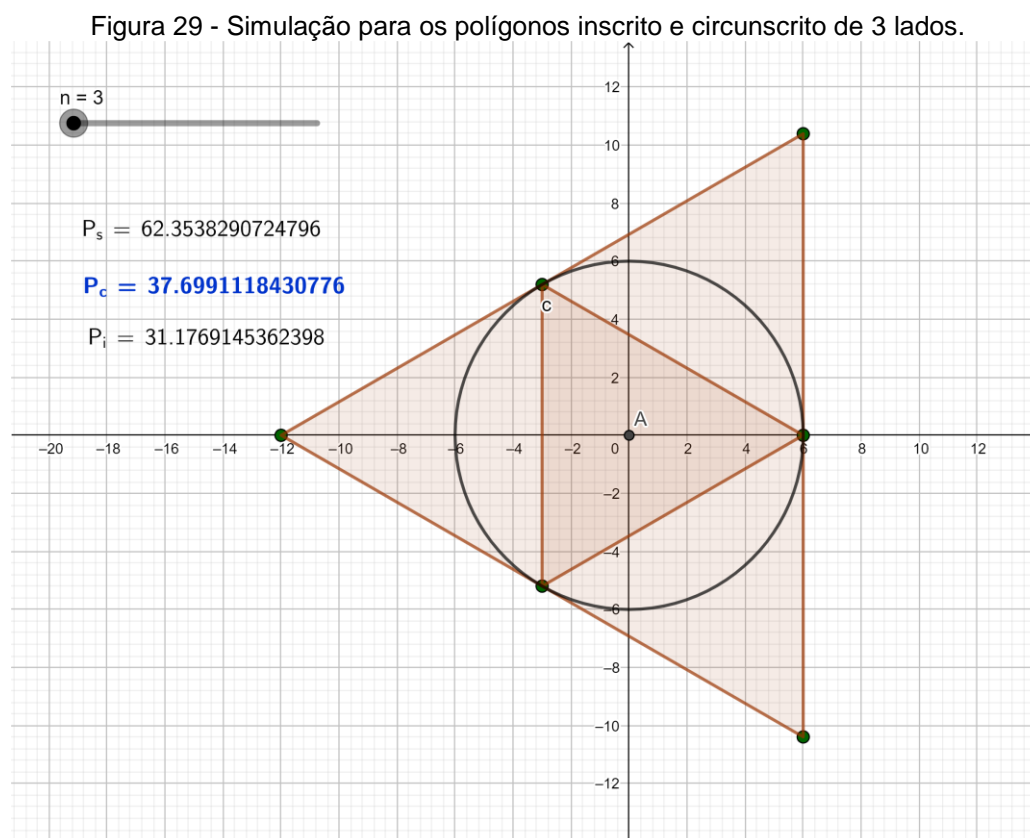
$$2 + 2\text{sen}\theta = 4\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Assim,

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1+\text{sen}\theta}{2}}, \text{ com } \theta < \frac{\theta}{2}$$

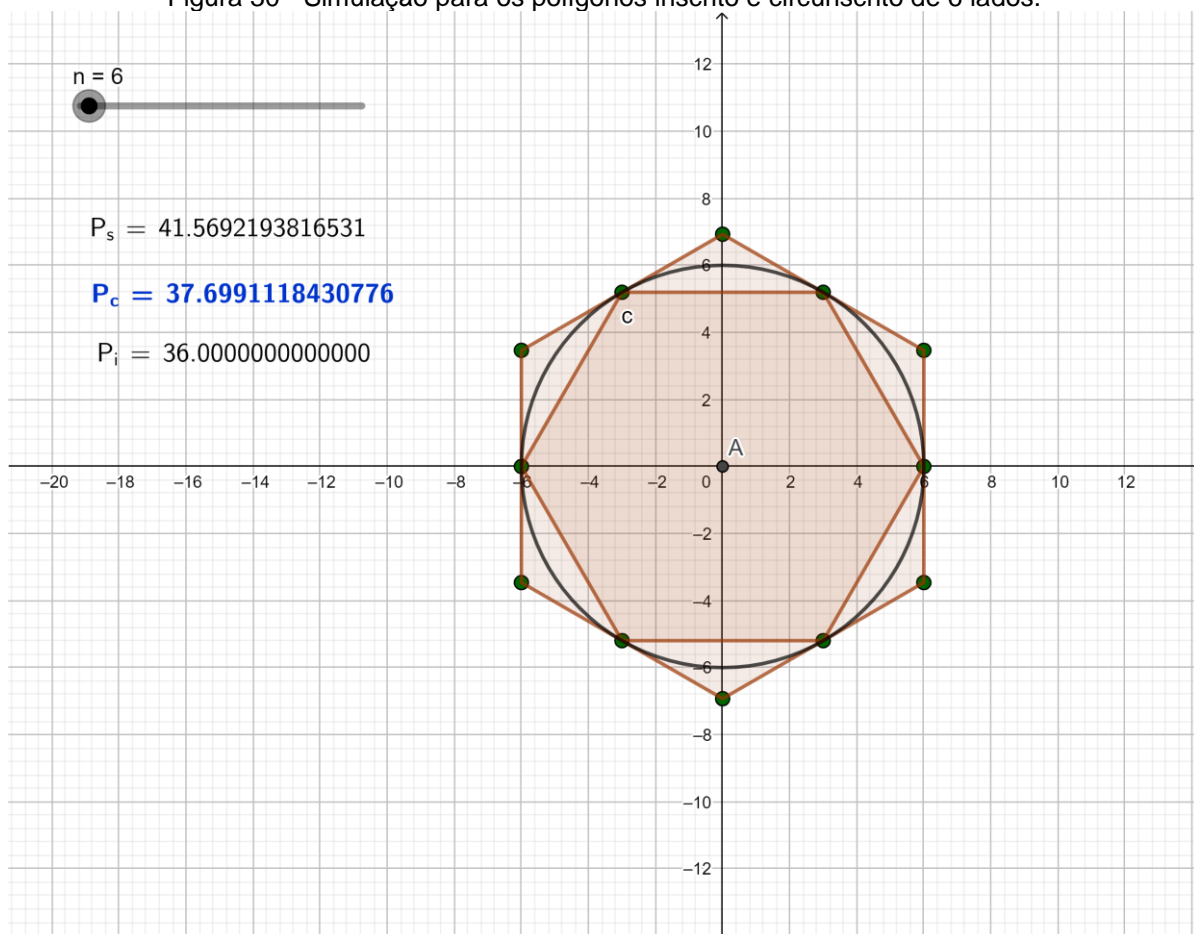
APÊNDICE C - SIMULAÇÃO DA APROXIMAÇÃO DE AL-KĀSHĪ PARA A RELAÇÃO ENTRE O COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA E O SEU DIÂMETRO NO SOFTWARE MATEMÁTICO GEOGEBRA

Considerando as várias possibilidades relativas às potencialidades pedagógicas do Tratado da Circunferência de al-Kāshī e a nossa preocupação durante a pesquisa em trazer um elemento visual mais rico e dinâmico que pudesse ilustrar de forma concreta o trabalho de al-Kāshī, encontramos como alternativa, construir no software matemático Geogebra, uma simulação da aproximação da relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. Esta simulação tanto pode ser desenvolvida pelos estudantes dentro de uma proposta de atividade ou pode ser utilizada como ferramenta para a realização de uma outra atividade. Abaixo, temos imagens de alguns resultados para os polígonos regulares inscritos e circunscritos de 3, 6, 12, 24, 48 e 96 lados. Considere nas figuras seguintes P_s o perímetro do polígono circunscrito à circunferência, P_i o perímetro do polígono inscrito e P_c o perímetro da circunferência.



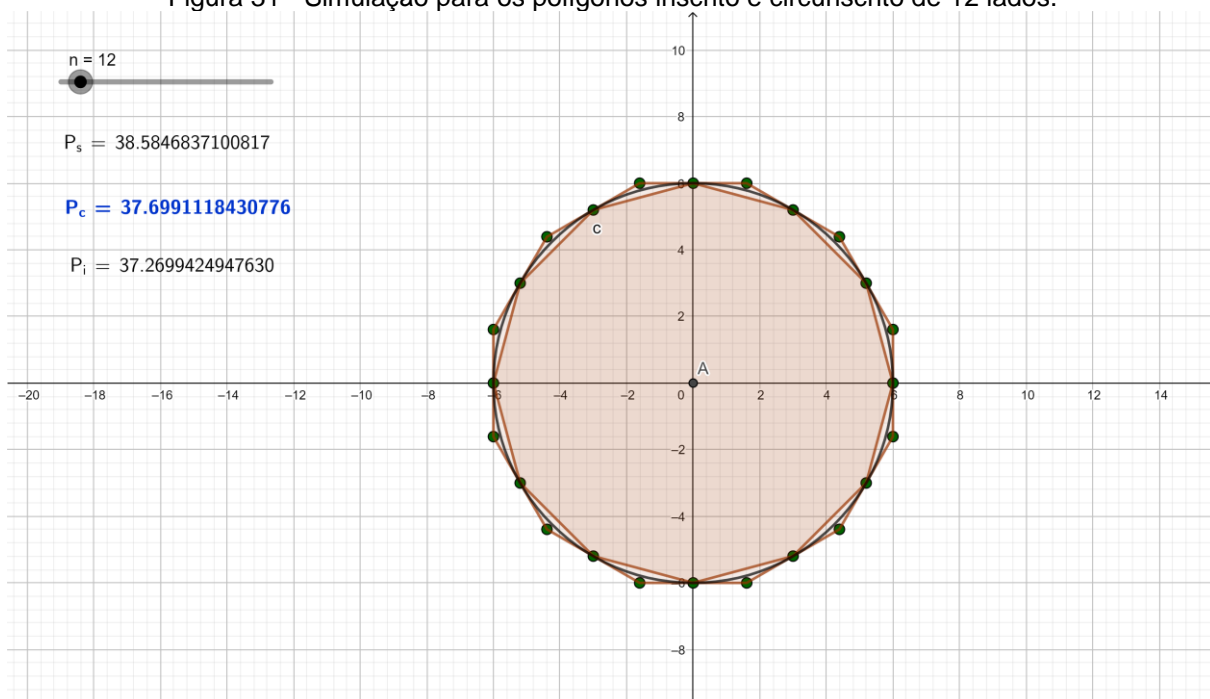
Fonte: Elaborado pela autora via software Geogebra.

Figura 30 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 6 lados.



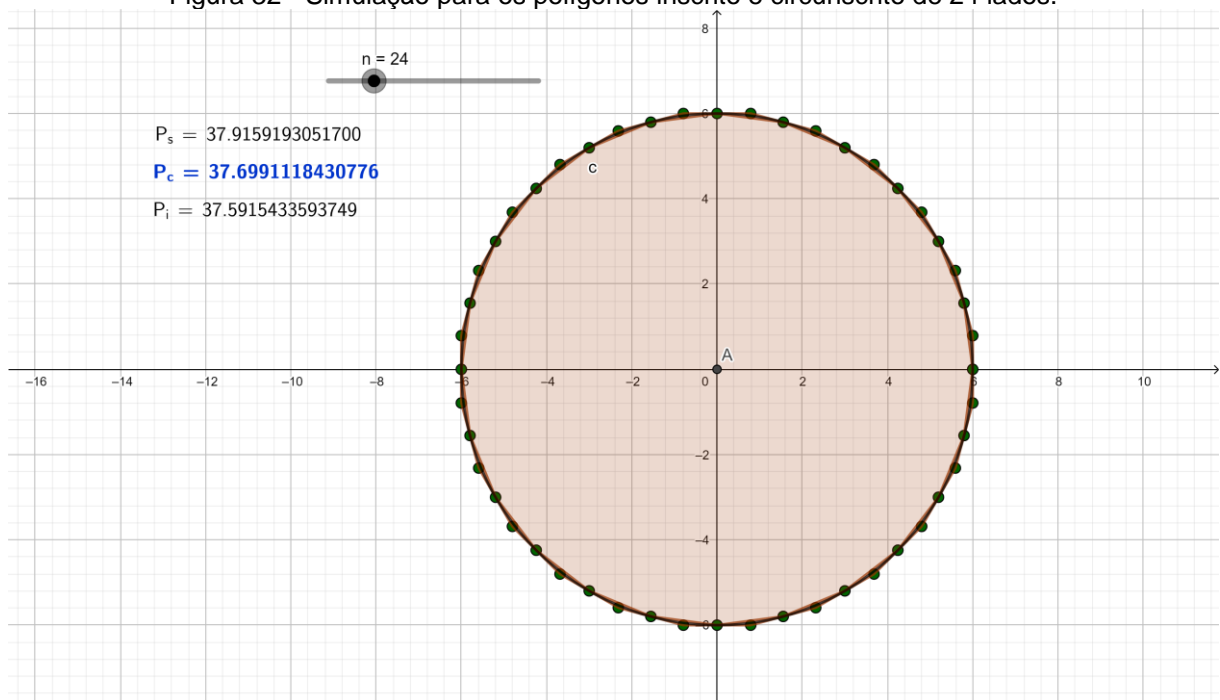
Fonte: Elaborado pela autora via software Geogebra.

Figura 31 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 12 lados.



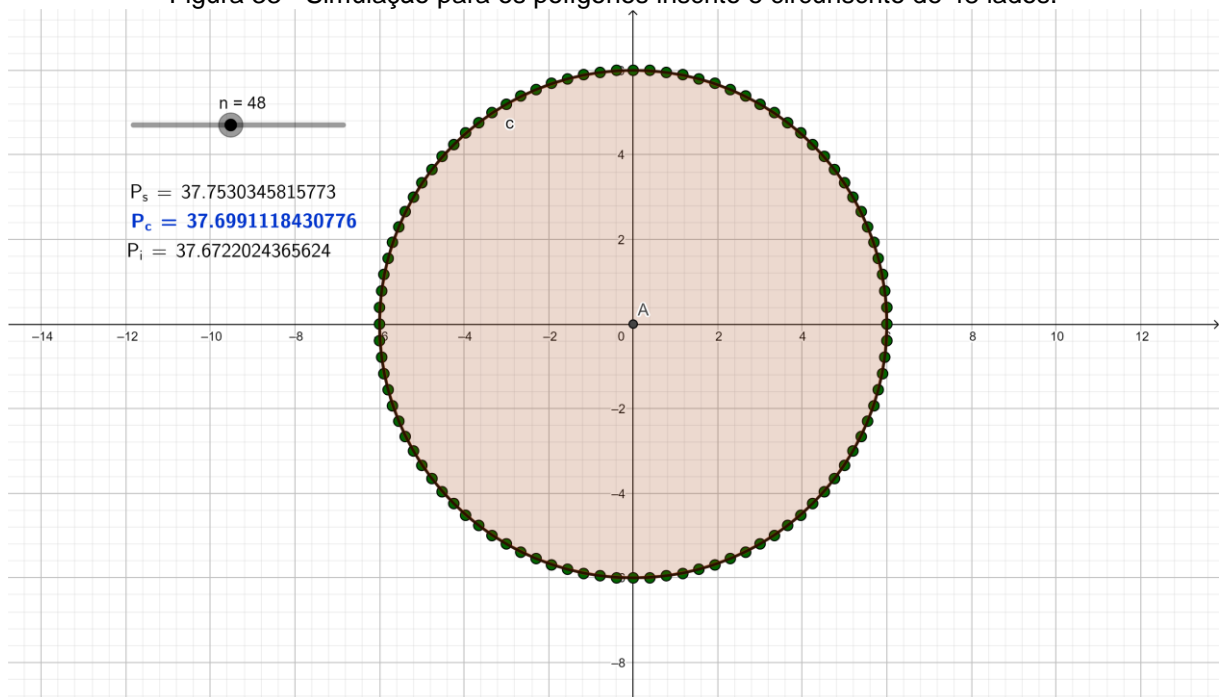
Fonte: Elaborado pela autora via software Geogebra.

Figura 32 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 24 lados.



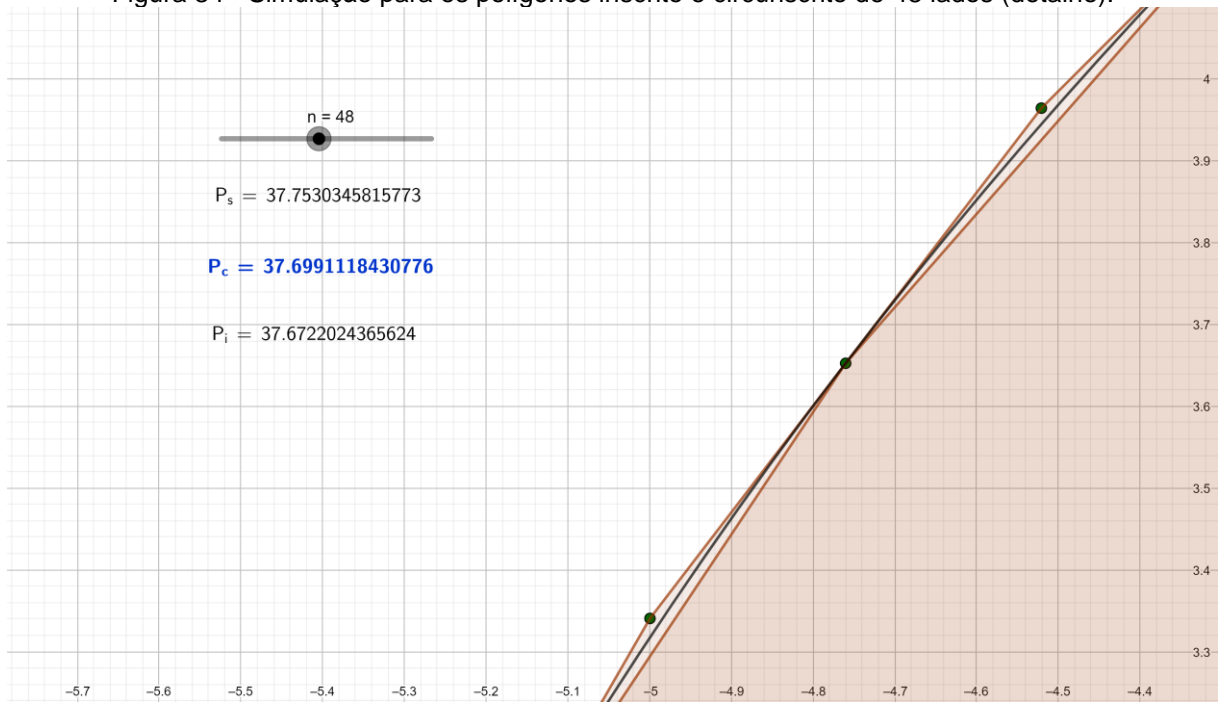
Fonte: Elaborado pela autora via software Geogebra.

Figura 33 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 48 lados.



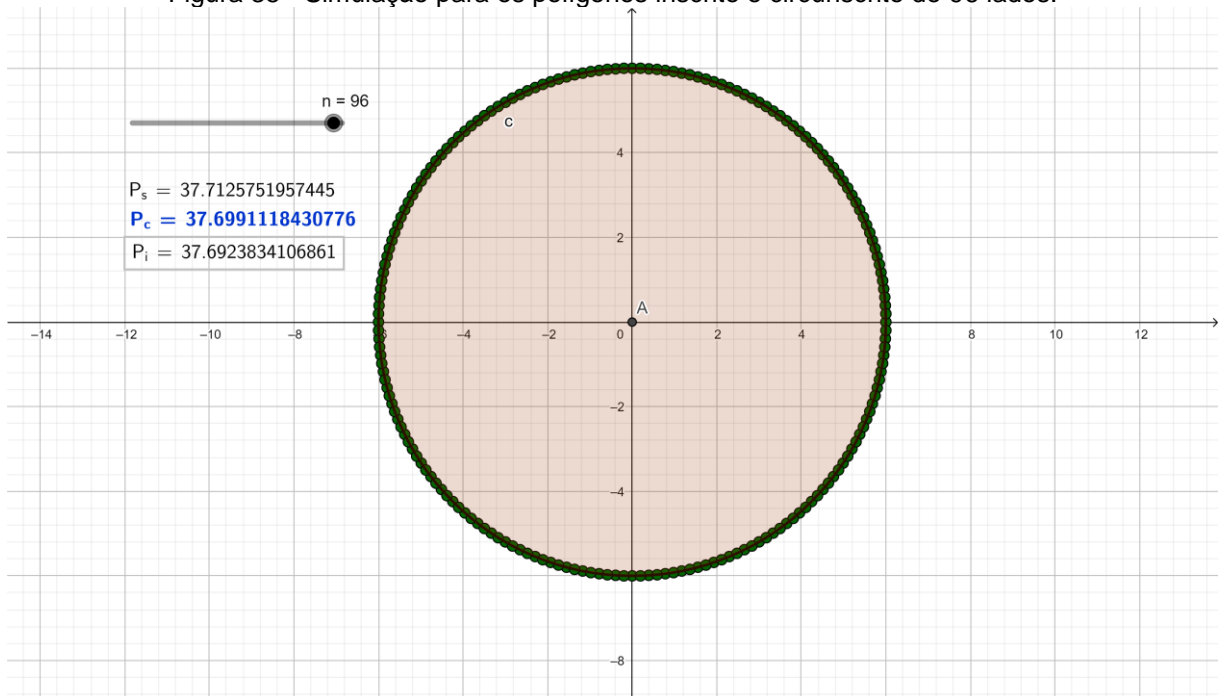
Fonte: Elaborado pela autora via software Geogebra.

Figura 34 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 48 lados (detalhe).



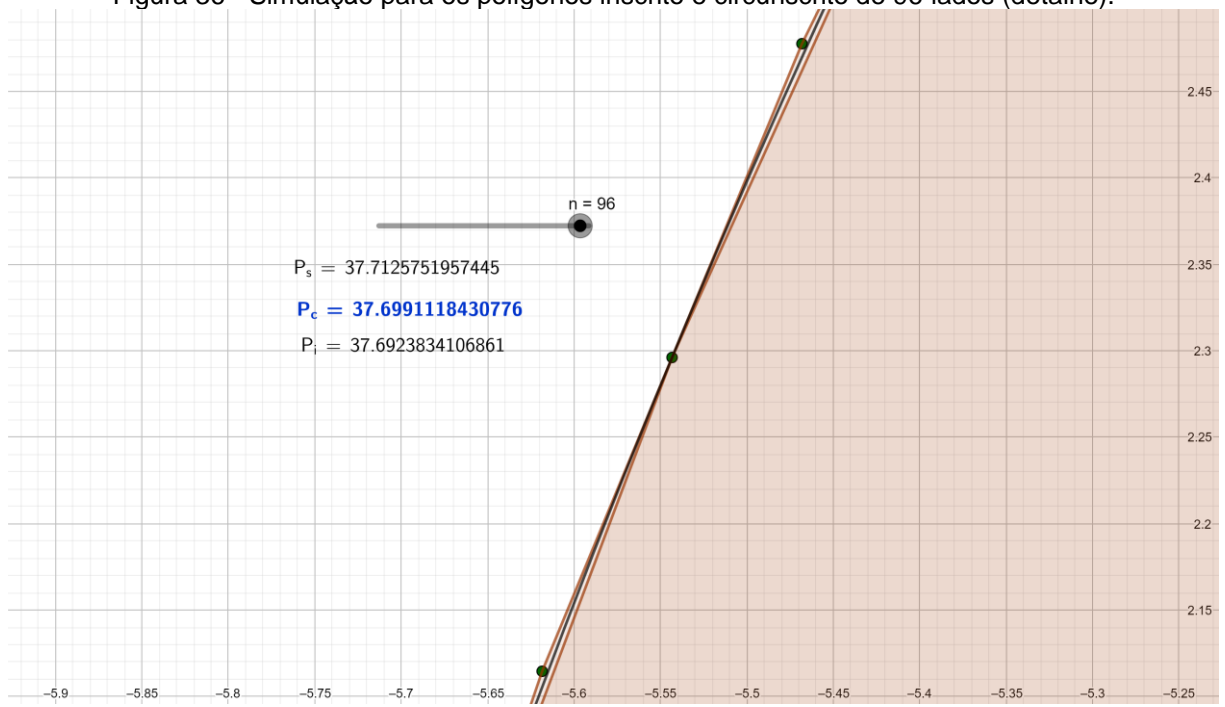
Fonte: Elaborado pela autora via software Geogebra.

Figura 35 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 96 lados.



Fonte: Elaborado pela autora via software Geogebra.

Figura 36 - Simulação para os polígonos inscrito e circunscrito de 96 lados (detalhe).



Fonte: Elaborado pela autora via software Geogebra.

APÊNDICE D – SINOPSE DO CONTEÚDO DO TRATADO DO CIRCUNFERÊNCIA DE AL-KĀSHĪ

Abaixo, disponibilizamos um quadro com o resumo dos conteúdos de cada uma das partes do Tratado da Circunferência de al-Kāshī com vistas a facilitar consultas rápidas.

Quadro 19 – Resumo do conteúdo de cada uma das partes do Tratado da Circunferência.

Partes do Tratado	CONTEÚDO
Parte Introdutória	<ul style="list-style-type: none"> • Começa com uma saudação a Alá (Único conhecedor da relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro); • Não possui dedicatória; • Expõe as aproximações de predecessores e faz críticas (revisão de literatura): Arquimedes (287 a.E.C. - 212 a.E.C.), Abu'l-Wafā al-Būzjānī (940-998), Abu Rayhān al-Bīrūnī (973-1048); • Exposição do objetivo do tratado; • Explica como está dividida a obra.
Primeira Parte	<ul style="list-style-type: none"> • Teorema de al-Kāshī $r(2r + \overline{AC}) = \overline{AD}^2$ (articulação de diversas proposições dos Elementos de Euclides); • Proposição 30 do 3º livro; • Proposição 8 do 6º livro; • Proposição 19 do 7º livro; • Proposição 3 do 3º livro;
Segunda Parte	<ul style="list-style-type: none"> • Desenvolvimento de um método iterativo com base no teorema desenvolvido na Primeira Parte, para o cálculo de sucessivas cordas: $c_n = \sqrt{R \cdot (2R + c_{n-1})}$; • Obtenção do comprimento do lado do polígono circunscrito por semelhança de triângulos;
Terceira Parte	<ul style="list-style-type: none"> • Chega à conclusão que o comprimento do lado deve ser $a < \frac{8}{60^4}$;
Quarta Parte	<ul style="list-style-type: none"> • Mais da metade do tratado; • Cálculo de sucessivas cordas c_1, \dots, c_{28} (método iterativo); • 28 tabelas: extração das sucessivas raízes; • Sistema de numeração sexagesimal (sistema de numeração dos astrônomos).
Quinta Parte	<ul style="list-style-type: none"> • Com o comprimento da corda da vigésima oitava iteração c_{28}, através do Teorema de Pitágoras (Teorema da Noiva), calcula o lado a_{28} do polígono inscrito.
Sexta Parte	<ul style="list-style-type: none"> • Al-Kāshī multiplica a_{28} por 805.306.368 para obter o perímetro do polígono inscrito; • Por semelhança de triângulos obtida no capítulo 2, calcula o lado do polígono circunscrito e também multiplicando por 805.306.368 e obtém o seu perímetro; • O perímetro da circunferência é a média aritmética desses dois valores; • 6, 16; 59, 28, 1, 34, 51, 46, 14, 50 (9 casas sexagesimais de precisão).
Sétima Parte	<ul style="list-style-type: none"> • Aqui al-Kāshī explica que ignorar os últimos dígitos das frações sexagesimais não vai alterar o valor final do cálculo; • Afirma que seu erro não ultrapassa $\frac{1}{60^9}$ da circunferência.
Oitava Parte	<ul style="list-style-type: none"> • Para que não astrônomos possam compreender a obra e possivelmente, aplicar seus resultados; • Usa com habilidade frações decimais;

	<ul style="list-style-type: none"> • Comprimento da circunferência: 6.2831853071795865 (16 casas decimais de precisão); • Fez uma tabela de multiplicação desse valor por 1 até 10, para auxiliar que fosse usar seu resultado e não perder precisão; • Também registrou esse resultado em forma de dístico (estrofe que contém apenas dois versos); • Consciência de al-Kāshī da importância do seu trabalho, tentando de toda forma preservá-lo.
Nona Parte	<ul style="list-style-type: none"> • Como utilizar as tabelas das partes 7 e 8; • Ele mostrou como calcular a circunferência de um círculo se seu diâmetro for conhecido, e como calcular o diâmetro desde que a circunferência seja fornecida; • Para esclarecer, deu dois exemplos.
Décima Parte	<ul style="list-style-type: none"> • Al-Kāshī compara o resultado para a aproximação da circunferência do círculo que ele obteve com os dos seus predecessores; • Mostra com exemplos que a sua aproximação está muito mais próxima do valor real da circunferência do círculo.
Conclusão	<ul style="list-style-type: none"> • Al-Kāshī retoma sua discussão sobre os erros de Abu'l-Wafā al-Būzjānī e Abu Rayhān al-Bīrūnī; • No início da conclusão aplicou o teorema do Livro I do Almagesto de Ptolomeu para calcular a corda de um arco de um grau e a corda de um arco de trinta minutos; • Em seguida, ele comparou o valor que ele mesmo obteve para a corda do arco de trinta minutos ao valor que ele atribuiu a al-Būzjānī para a corda de um arco de trinta minutos, e ele mostrou que o resultado de seu cálculo foi mais preciso; • Segundo Woepcke (1822, p.284), o erro atribuído à al-Būzjānī foi cometido por Nasīr al-Dīn al-Tūsī (1201-1274) em seu Taksīr al-Dā'irā que é uma tradução árabe da Divisão do Círculo de Arquimedes. Al-Tūsī na verdade calculou o seno da metade de um grau; • Al-Būzjānī obteve o valor correto para a corda da metade de um grau em seu Kitab al-Kamil ("Livro Completo"), que é uma versão simplificada do Almagesto de Ptolomeu; • Então o erro seria de al-Tūsī, não de al-Būzjānī; • Na segunda parte da conclusão al-Kāshī calculou a corda de um arco de dois graus e comparou seu resultado com o valor obtido por al-Bīrūnī; • Mostrou que seu cálculo da corda de um arco de dois graus era muito mais preciso do que o valor incorreto de al-Bīrūnī, cuja aproximação para a metade da circunferência do círculo (entre 3,141742 e 3,141744) era maior que a conhecida por gregos e indianos (3,14166).

Fonte: al-Kāshī (1954).

Figura 38 - Tabela de cálculo de um terço da circunferência. Tradução russa.

334								ТРАКТАТ ОБ ОБРАЗОВАНИИ КВАДРАТОВ			335										
Первое удвоение числа сторон, начиная с треугольника								Потерное			разделение трети окружности										
число	пять раз подбитые	четырежды подбитые	тремя подбитые	дважды подбитые	подбитые	сторона	часть	минуты	секунды	горизонт	вертика	кварты	сестры	сестры	отцы	попы	децаны	указатели	руководные	третью	
0						3	120														
1						6	60														
2						12	30														
3						24	15														
4						48	7	30													
5					1	36	3	45													
6						12	1	52	30												
7					6	24	0	56	15												
8						12		28	7												
9						25		14	3												
10						51		7	1												
11				1		42		3	30												
12				3		24		1	45												
13				6		49		0	52												
14					13	39			26												
15					27	18			13												
16					54	36			6												
17			1		49	13			3												
18			3		38	27															
19			7		16	54			1												
20				14		33	48														
21				29		7	37														
22					58	15	12														
23		1			50	30	24														
24		3				55	1	0	48												
25		7				46	2	1	36												
26			15			32	4	3	12												
27			31			4	8	6	24												
28	1		2			8	16	12	48												

Fonte: al-Kāshī (1954).