

# Ondas, Som e Luz

Gilvan Luiz Borba  
Nilza Pires  
Rui Tertuliano de Medeiros



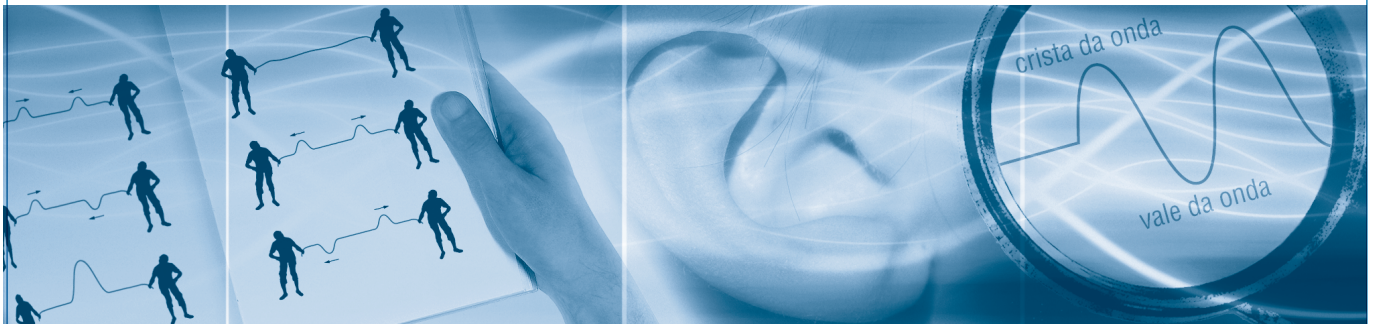
# Ondas, Som e Luz

Gilvan Luiz Borba  
Nilza Pires  
Rui Tertuliano de Medeiros

Física

# Ondas, Som e Luz

2ª Edição



  
edufnrn

Natal – RN, 2014

## Governo Federal

### Presidenta da República

Dilma Vana Rousseff

### Vice-Presidente da República

Michel Miguel Elias Temer Lulia

### Ministro da Educação

Henrique Paim

## Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

### Reitora

Ângela Maria Paiva Cruz

### Vice-Reitora

Maria de Fátima Freire Melo Ximenes

## Secretaria de Educação a Distância (SEDIS)

### Secretária de Educação a Distância

Maria Carmem Freire Diógenes Rêgo

### Secretária Adjunta de Educação a Distância

Ione Rodrigues Diniz Morais

## FICHA TÉCNICA

### COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO DE MATERIAIS DIDÁTICOS

Marcos Aurélio Felipe

### COORDENAÇÃO DE REVISÃO

Maria da Penha Casado Alves

### COORDENAÇÃO DE DESIGN GRÁFICO

Ivana Lima

### GESTÃO DO PROCESSO DE REVISÃO

Rosilene Alves de Paiva

### GESTÃO DO PROCESSO DE DESIGN GRÁFICO

Dickson de Oliveira Tavares

### PROJETO GRÁFICO

Ivana Lima

### REVISÃO DE MATERIAIS

Ailson Alexandre Câmara de Medeiros

Andreia Maria Braz da Silva

Camila Maria Gomes

Cristiane Severo da Silva

Cristinara Ferreira dos Santos

Edneide da Silva Marques

Emanuelle Pereira de Lima Diniz

Eugenio Tavares Borges

Fabiola Barreto Gonçalves

Julianny de Lima Dantas Simião

Margareth Pereira Dias

Orlando Brandão Meza Ucella

Priscilla Xavier de Macedo

Rosilene Alves de Paiva

Verônica Pinheiro da Silva

### EDITORAÇÃO DE MATERIAIS

Alessandro de Oliveira Paula

Amanda de Lima Cabral

Amanda Duarte

Anderson Gomes do Nascimento

Carolina Aires Mayer

Carolina Costa de Oliveira

Dickson de Oliveira Tavares

Heloisa Fernandes Ferreira Nunes

José Agripino de Oliveira Neto

Leticia Torres

Luciana Melo de Lacerda

Mauricio da Silva Oliveira Junior

### Revisão de estrutura e linguagem

Eugenio Tavares Borges

Jânio Gustavo Barbosa

Thalyta Mabel Nobre Barbosa

### Revisão de língua portuguesa

Janaina Tomaz Capistrano

Sandra Cristinne Xavier da Câmara

### Revisão de normas da ABNT

Verônica Pinheiro da Silva

### Diagramação

Bruno de Souza Melo

Dimetrius de Carvalho Ferreira

Ivana Lima

Johann Jean Evangelista de Melo

### Criação e edição de imagens

Adauto Harley

Carolina Costa de Oliveira

### Módulo matemático

André Quintiliano Bezerra da Silva

Kalinne Rayana Cavalcanti Pereira

Thaís Maria Simplicio Lemos

### Revisão tipográfica

Leticia Torres

Nouraide Queiroz

### IMAGENS UTILIZADAS

Banco de Imagens Sedis - UFRN

Fotografias - Adauto Harley

Free Images- [www.freeimages.com](http://www.freeimages.com)

Flickr.com - [www.flickr.com](http://www.flickr.com)

PixaBay - [www.pixabay.com](http://www.pixabay.com)

Catalogação da publicação na fonte. Elaborada por Edineide da Silva Marques CRB-15/488.

Borba, Gilvan Luiz.

Ondas, som e luz [recurso eletrônico] / Gilvan Luiz Borba, Nilza Pires e Rui Tertuliano de Medeiros. – 1. ed. – Natal: SEDIS-UFRN, 2024.

57580 KB; 1 PDF

ISBN 978-65-5569-423-9

1. Física. 2. Física - Ondas. 3. Física - Som. 4. Física – Luz. I. Pires, Nilza. II. Medeiros, Rui Tertuliano. III. Título.

CDU 53  
B726o

# Sumário

Apresentação Institucional	6
<b>Aula 1</b> Oscilações e movimento harmônico	<b>7</b>
<b>Aula 2</b> Pêndulos e oscilações	<b>34</b>
<b>Aula 3</b> O fenômeno ondulatório	<b>60</b>
<b>Aula 4</b> Equação da onda e energia no movimento oscilatório	<b>81</b>
<b>Aula 5</b> O efeito <i>Doppler</i> sonoro e o eletromagnético	<b>102</b>
<b>Aula 6</b> Reflexão	<b>124</b>
<b>Aula 7</b> Refração	<b>147</b>
<b>Aula 8</b> Interferência	<b>172</b>
<b>Aula 9</b> Difração	<b>189</b>
<b>Aula 10</b> Polarização	<b>213</b>
<b>Aula 11</b> Audição e visão	<b>233</b>
<b>Aula 12</b> Equações de Maxwell e a radiação eletromagnética	<b>257</b>
<b>Aula 13</b> Equações de Maxwell e o transporte de energia	<b>274</b>
<b>Aula 14</b> Fenômenos ondulatórios	<b>290</b>

# Apresentação Institucional

**A** Secretaria de Educação a Distância – SEDIS da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, desde 2005, vem atuando como fomentadora, no âmbito local, das Políticas Nacionais de Educação a Distância em parceria com a Secretaria de Educação a Distância – SEED, o Ministério da Educação – MEC e a Universidade Aberta do Brasil – UAB/CAPES. Duas linhas de atuação têm caracterizado o esforço em EaD desta instituição: a primeira está voltada para a Formação Continuada de Professores do Ensino Básico, sendo implementados cursos de licenciatura e pós-graduação lato e stricto sensu; a segunda volta-se para a Formação de Gestores Públicos, através da oferta de bacharelados e especializações em Administração Pública e Administração Pública Municipal.

Para dar suporte à oferta dos cursos de EaD, a SEDIS tem disponibilizado um conjunto de meios didáticos e pedagógicos, dentre os quais se destacam os materiais impressos que são elaborados por disciplinas, utilizando linguagem e projeto gráfico para atender às necessidades de um aluno que aprende a distância. O conteúdo é elaborado por profissionais qualificados e que têm experiência relevante na área, com o apoio de uma equipe multidisciplinar. O material impresso é a referência primária para o aluno, sendo indicadas outras mídias, como videoaulas, livros, textos, filmes, videoconferências, materiais digitais e interativos e webconferências, que possibilitam ampliar os conteúdos e a interação entre os sujeitos do processo de aprendizagem.

Assim, a UFRN através da SEDIS se integra ao grupo de instituições que assumiram o desafio de contribuir com a formação desse “capital” humano e incorporou a EaD como modalidade capaz de superar as barreiras espaciais e políticas que tornaram cada vez mais seletivo o acesso à graduação e à pós-graduação no Brasil. No Rio Grande do Norte, a UFRN está presente em polos presenciais de apoio localizados nas mais diferentes regiões, ofertando cursos de graduação, aperfeiçoamento, especialização e mestrado, interiorizando e tornando o Ensino Superior uma realidade que contribui para diminuir as diferenças regionais e transformar o conhecimento em uma possibilidade concreta para o desenvolvimento local.

Nesse sentido, este material que você recebe é resultado de um investimento intelectual e econômico assumido por diversas instituições que se comprometeram com a Educação e com a reversão da seletividade do espaço quanto ao acesso e ao consumo do saber. REFLETE O COMPROMISSO DA SEDIS/UFRN COM A EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA como modalidade estratégica para a melhoria dos indicadores educacionais no RN e no Brasil.

Secretaria de Educação a Distância  
SEDIS/UFRN

# Oscilações e movimento harmônico

**Aula**

**1**



# Apresentação

**N**esta nova disciplina, **Ondas, Som e Luz**, estudaremos os chamados movimentos periódicos, em especial o movimento harmônico simples (MHS), a propagação de ondas em meios materiais, as leis que regem a interação de ondas com a matéria, os chamados fenômenos óticos e ondas acústicas. Estudaremos também sobre o olho e os ouvidos humanos, as características que fazem desses órgãos ferramentas importantes para percebermos o mundo das ondas que nos cercam. Veremos também alguns distúrbios importantes como os provocados por ondas sísmicas e até tsunamis. E, por fim, veremos algumas aplicações tecnológicas e médicas das ondas.

A partir de agora, com esta primeira aula, você aprenderá também a usar uma poderosa ferramenta da Física e da Matemática, a periodicidade, e as equações diferenciais a derivadas parciais que permitem melhor compreender o mundo físico a nossa volta.

## Objetivos

- 1 Discutir os conceitos de movimento e de função periódica.
- 2 Analisar as características do movimento periódico.
- 3 Apresentar as características de uma onda e seus modos de propagação.
- 4 Analisar e descrever a ação de forças restauradoras no movimento harmônico simples.
- 5 Discutir o comportamento do sistema massa-mola.
- 6 Obter as equações da Energia no movimento harmônico simples.
- 7 Formalizar a solução da equação de uma onda mecânica.

# Movimento e oscilações: considerações iniciais

**O** nosso cotidiano é fortemente influenciado pela existência de movimentos que se repetem a um intervalo regular de tempo, os chamados movimentos periódicos. Assim, é o movimento da Terra em torno de seu próprio eixo que determina a duração e a repetição dos dias e das noites e que determina nosso ciclo diário. O movimento da Terra em torno do Sol determina o ano e as estações.

Também podemos perceber a periodicidade no movimento em situações do cotidiano como nos ônibus que passam nas paradas e influenciam o momento de irmos ao trabalho e o movimento periódico dos ponteiros dos relógios (hoje já existem relógios digitais, mas o princípio de repetição é o mesmo!) que rege o nosso tempo.

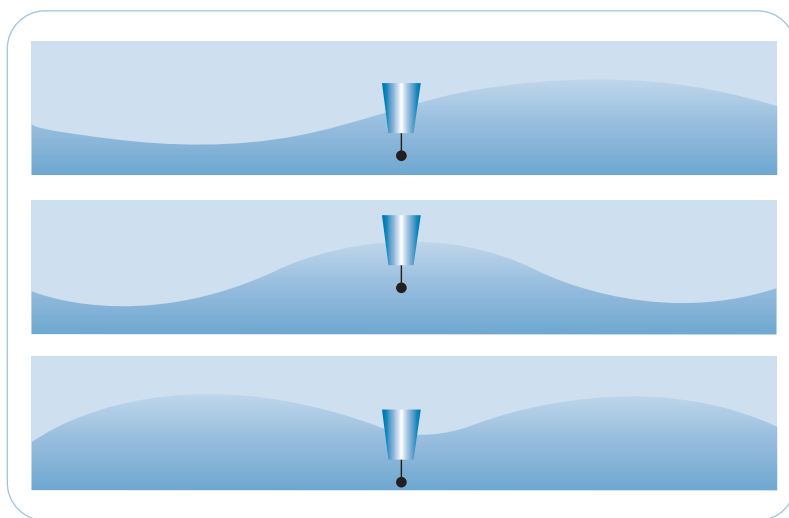
O movimento do pêndulo do relógio de parede é um movimento periódico. Porém, é um movimento de vai-e-vem, então é uma oscilação, que neste caso é periódica. Por outro lado, devemos lembrar que as oscilações podem ser periódicas, como a do pêndulo já mencionado, ou não periódicas, como no caso de uma bóia no mar ou a vibração de um automóvel quando passa numa irregularidade na estrada.

Mudando de escala, podemos lembrar ainda dos átomos de um sólido ou das moléculas em um gás que estão em constante vibração. Até as estrelas têm movimentos de oscilação! Os fenômenos luminosos nada mais são que campos elétricos e magnéticos oscilantes que se propagam na forma de ondas eletromagnéticas.

Apesar de termos descrito nos parágrafos anteriores uma gama muito vasta de fenômenos relativos a movimentos oscilatórios e, portanto, de fenômenos diferentes, eles apresentam pelo menos uma característica fundamental comum e que é muito importante do ponto de vista da Física. Todos eles podem ser descritos pelo mesmo tipo de formalismo matemático, já que as mesmas funções matemáticas são usadas para descrevê-los, mudando apenas os parâmetros relacionados com as condições iniciais e de contorno. Essas funções são as funções trigonométricas senos e co-senos e funções tipo exponenciais.

# Movimento e oscilações: características básicas dos movimentos periódicos

**O** movimento que se repete com as mesmas características (da mesma forma) em intervalos de tempos iguais e sucessivos é denominado movimento periódico. Por exemplo, imagine uma rolha flutuando na água em um lago que apresenta pequenas oscilações (ondas), como mostra a Figura 1. Quando uma onda passar, a rolha oscilará para cima e para baixo sem sofrer deslocamento horizontal, enquanto a onda continua sua propagação. Ou seja, uma onda não carrega a rolha de um local para outro, mas a onda transporta energia enquanto se propaga.



**Figura 1** – A rolha e a água oscilam para cima e para baixo, conforme a onda passa.

As ondas transportam a energia a partir de um transmissor central!

As ondas mecânicas, como no caso das ondas sonoras, necessitam de um meio para a transmissão. As ondas eletromagnéticas, como no caso das ondas de rádio, não precisam de um meio e podem ser transmitidas inclusive no vácuo.



# Atividade 1

Pense bem e depois responda:

Você deve estar acostumado a assistir na TV, os astronautas que foram à Lua falando com o pessoal da NASA aqui na Terra. Como isso é possível se o som é uma onda mecânica e não se propaga no vácuo?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Se uma onda está viajando através de um meio, as partículas do meio não se movem com ela. Elas apenas oscilam ao redor da posição de equilíbrio e a energia é transmitida através da interação com as partículas vizinhas. Nos movimentos periódicos, duas grandezas são de extrema importância:

- o **período**  $T$  que representa o menor intervalo de tempo de repetição do movimento. No SI a unidade de medida é o segundo ( $s$ ).
- a **frequência**  $\nu$  que representa o número de vezes que o movimento ocorre na unidade de tempo.

Quando ocorrem  $n$  repetições de um fenômeno em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a frequência será dada por  $\nu = n / \Delta t$ . Para  $n = 1$  (uma repetição),  $\Delta t = T$ , e, portanto:

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \text{Eq. 1}$$

Observe que a unidade de frequência é o inverso da unidade de tempo, ou seja, 1/segundo. Essa unidade é também chamada “Hertz” ( $Hz$ ).

$$1 s^{-1} = 1 Hz$$

O tipo mais básico de movimento oscilatório é o Movimento Harmônico Simples (MHS). Você já o estudou brevemente na disciplina “Movimento e Mecânica Clássica”. Mas, agora vamos voltar a estudá-lo com mais detalhes como um primeiro passo para o estudo das ondas.



## Atividade 2

Marque a(s) alternativa(s) correta(s) e justifique sua resposta. A propagação de uma onda envolve necessariamente?

- a) transporte de matéria
- b) transporte de matéria e energia
- c) transformação de energia
- d) perturbação do meio
- e) produção de energia

---

---

---

---

---

---

---

---

Agora que já sabemos o que vem a ser um movimento periódico, vamos nos concentrar naquele tipo especial de movimento periódico que acabamos de mencionar, que é o MHS.

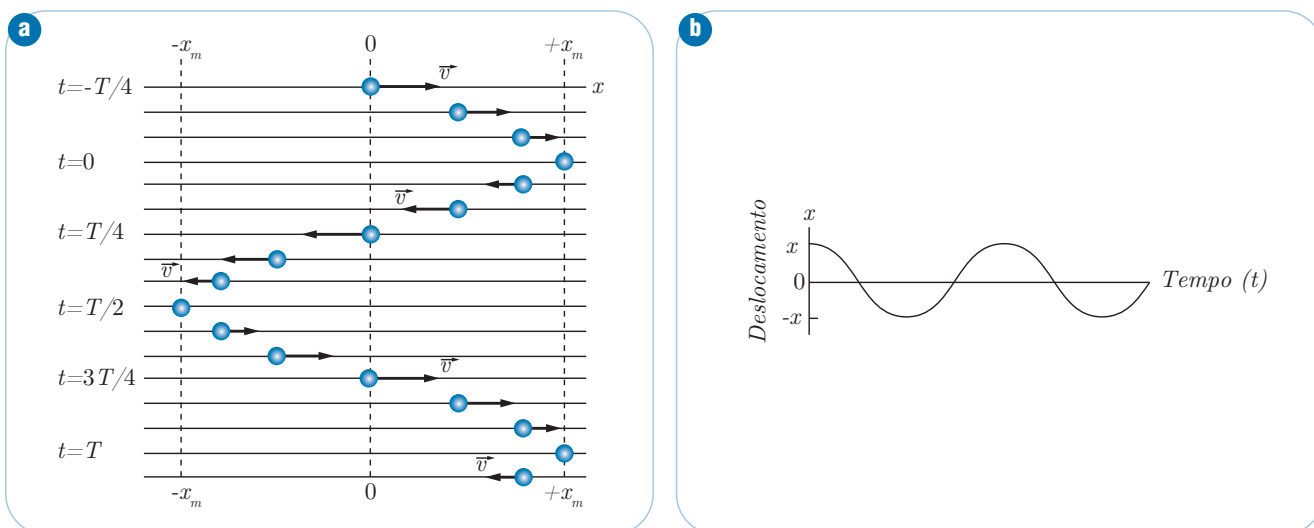
# Descrição do movimento harmônico simples

Inicialmente, vamos descrever o movimento harmônico simples sem nos preocuparmos como ele é produzido (mais adiante estudaremos sua produção!).

A Figura 2 mostra uma sequência de “fotos” de uma partícula positivamente carregada que se move entre duas placas também positivamente carregadas. Inicialmente, ela irá se aproximar de uma das placas até que a força de repulsão elétrica entre ela e a placa faça com que ela pare e volte a se mover em direção à outra placa. Novamente, vai se repetir o mesmo processo, ela irá se aproximar até que a repulsão a obrigue a voltar. Ficando assim, no caso “ideal” indefinidamente. Um sistema que fica continuamente oscilando entre dois pontos é chamado de MHS, ou seja, uma partícula que se move repetidamente em vai-e-vem em torno de um ponto.

Ainda na Figura 2, a partícula se movimenta sobre o eixo  $x$  (eixo horizontal) ao redor da origem  $O$ .

Qualquer movimento que se repete a intervalos regulares é chamado movimento harmônico simples ou movimento harmônico.



**Figura 2** – (a) Uma sequência de “instantâneos” (tomados em intervalos de tempos iguais) mostrando a posição de uma partícula enquanto ele oscila em movimento de vai-e-vem em torno da origem de um eixo  $x$  entre os limites  $+x_m$  e  $-x_m$ ; (b) movimento da partícula.

Observando o movimento da partícula representado na Figura 2 (b): note que a Figura 2(b) fica igual à figura 2(a) se a girarmos de  $90^\circ$  no sentido anti-horário. Assim, veremos que ela representa as posições sucessivas da partícula ao longo do eixo horizontal.

Os deslocamentos sucessivos  $x$  da partícula a partir da origem em função do tempo  $t$  podem ser descritos pela equação:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{Eq. 2}$$

Na Equação 2,  $x_m$ ,  $\omega$  e  $\varphi$  são constantes.  $x_m$  é a amplitude do movimento.

Note que a amplitude sempre é positiva. Seu valor depende de como o movimento foi iniciado, representando o deslocamento máximo da partícula em ambos os sentidos. Como a função co-seno varia de +1 a -1, então o valor de  $x_m$  varia de  $+x_m$  a  $-x_m$ .



## Atividade 3

Verifique a afirmativa “Como a função co-seno varia de +1 a -1, então o valor de  $x_m$  varia de  $+x_m$  a  $-x_m$ ”. Para tanto, use o fato de que o valor máximo de  $x(t)$  corresponde ao máximo da função co-seno e o mínimo de  $x(t)$  corresponde ao mínimo da função co-seno, na Equação 2.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

O argumento da função co-seno,  $(\omega t + \varphi)$ , é chamado de fase do movimento. A constante  $\varphi$  é chamada constante de fase (ou ângulo de fase). O valor de  $\varphi$  depende do deslocamento e da velocidade da partícula no tempo inicial  $t=0$ . Em particular, no gráfico de  $x(t)$  da Figura 2, a constante de fase  $\varphi$  é zero.

Observe também que  $\cos(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$ . Então, se a equação é expressa como uma função co-seno ou seno é porque ela depende simplesmente da fase no tempo inicial.



## Atividade 4

Utilizando as relações trigonométricas

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$  e  $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ , mostre que  $\cos(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

Ainda em relação à Equação 2, para interpretarmos o significado físico de  $\omega$ , a chamada velocidade angular, inicialmente, devemos lembrar que o movimento se repete a cada intervalo de tempo igual ao período  $T$ . Temos então,

$x(t) = x(t + T)$ , ou seja:

$$x_m \cos \omega t = x_m \cos \omega (t + T). \quad \text{Eq. 3}$$

A função co-seno se repete pela primeira vez quando o argumento da fase aumenta de  $2\pi$  rad. Assim, a Equação 3 nos fornece:

$$\omega (t + T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi.$$

Então, usando também a Equação 1, obtemos a relação entre a velocidade angular, o período e a frequência angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi v . \quad \text{Eq. 4}$$

A frequência angular no SI é medida em  $rad/s$  ou  $s^{-1}$  e  $\varphi$  é medida em rad.

## Exemplo 1

Um M.H.S. (movimento harmônico simples) é descrito pela função horária

$x = 5\cos\left(\frac{\pi t}{2} + 3\frac{\pi}{2}\right)$  com  $x$  em metros e  $t$  em segundos. Determine:

- a)** a amplitude do movimento.
- b)** a velocidade angular.
- c)** a frequência do movimento.
- d)** o período do movimento.
- e)** a fase inicial do movimento.

## Solução

- a)** Com a amplitude do movimento encontramos quando o co-seno é máximo, ou seja, igual à unidade. Portanto, a amplitude do movimento é de 5 metros.
- b)** Da Equação 2, podemos dizer que a velocidade angular é  $\omega = \left(\frac{\pi}{2}\right) rad/s$ .
- c)** A frequência do movimento  $v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{4} = 0,25 s^{-1}$ .
- d)** O período do movimento é o inverso da frequência  $T = \frac{1}{v} = 4s$ .
- e)** A fase inicial é  $3\frac{\pi}{2}$ .

Vejamos se você consegue agora resolver uma questão semelhante a que acabamos de discutir no Exemplo 1. Se você tiver dificuldade em executar esta atividade, retome o exemplo e refaça-o passo a passo.



## Atividade 5

Um barco ancorado na praia oscila para cima e para baixo. O deslocamento vertical do barco é dado por:

$$y = (1,2m)\cos\left(\frac{1}{2s}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

- a)** Calcule a amplitude, a frequência angular, a constante de fase, a frequência e o período do movimento.
- b)** A que altura em relação ao nível da água está o barco quando  $t=1s$ ?
- c)** Calcule a velocidade ( $dy/dt$ ) e a aceleração ( $d^2y/dt^2$ ) do barco como funções do tempo  $t$ .
- d)** Calcule o valor inicial da posição, da velocidade inicial e da aceleração inicial do barco.

Na atividade que você acabou de realizar, aparecem dois parâmetros que ainda não havíamos abordado, que é a velocidade e a aceleração no MHS. Se você resolveu os itens *c* e *d*, deve ter verificado que se trata da mesma abordagem que viemos tratando desde o início do curso de Movimento e Mecânica Clássica. A velocidade é entendida como a taxa de variação da posição em relação ao tempo, e a aceleração como a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo.

## Velocidade no movimento harmônico simples

A expressão para a velocidade da partícula no MHS é encontrada derivando-se a Equação 2 com relação ao tempo,

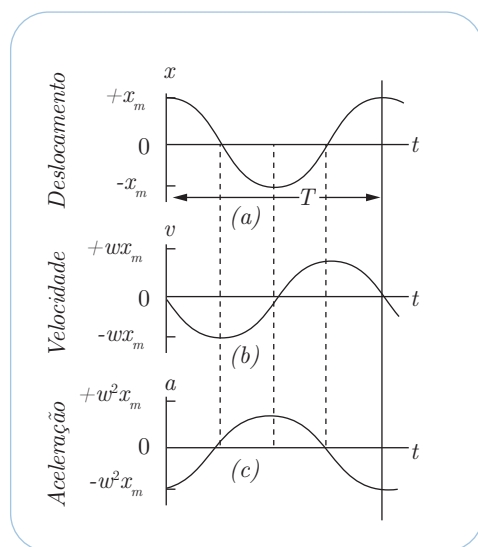
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[x_m \cos(\omega t + \phi)].$$

Ou seja,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \text{sen}(\omega t + \phi). \quad \text{Eq. 5}$$

O termo  $\omega x_m$  na Equação 5 corresponde à “amplitude”, ou seja, define o intervalo no qual a velocidade pode variar. Chamando então  $v_m = \omega x_m$  a amplitude da velocidade, temos que a velocidade da partícula varia entre  $\pm v_m = \pm \omega x_m$ .

A Figura 3 mostra o gráfico de  $v(t)$  no caso em que  $\phi = 0$ .



Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2006, p. 90).

**Figura 3** – (a) O deslocamento  $x(t)$  de uma partícula oscilando em MHS com ângulo de fase  $\phi$  igual a zero. O período  $T$  marca uma oscilação completa; (b) a velocidade  $v(t)$  da partícula; e (c) a aceleração  $a(t)$  da partícula.

Do mesmo modo que tratamos da velocidade, podemos tratar a aceleração no MHS, isso será tratado no tópico a seguir.

# Aceleração no movimento harmônico simples

Derivando mais uma vez a Equação 3, encontramos a aceleração da partícula:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega x_m \text{sen}(\omega t + \phi)]$$
$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{Eq. 6}$$

Note que, conforme podemos ver na Figura 3 (c), para o caso em que  $\phi = 0$ , a aceleração varia entre os limites  $\pm a_m = \pm \omega^2 x_m$ .

Usando a Equação 2, podemos também escrever a aceleração como:

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \quad \text{Eq. 7}$$



## Atividade 6

Utilizando as ferramentas da análise dimensional, verifique que as grandezas físicas do lado direito da igualdade na Equação 7 têm dimensões de  $m/s^2$ . Como seria de se esperar.

O exemplo que passaremos a discutir ajudará você a compreender os passos envolvidos na resolução de problemas. Portanto, lápis e papel à mão e vamos acompanhar passo a passo a resolução do Exemplo 2.

## Exemplo 2

### Trabalhando com as diferentes grandezas físicas

Um objeto oscila com frequência angular  $\omega = 8,0 \text{ rad/s}$ . No instante inicial,  $t = 0$ , o objeto está na posição  $x = 4 \text{ cm}$  movendo-se com uma velocidade inicial de  $v = -25 \text{ cm/s}$ .

- Calcule a amplitude e a constante de fase para o movimento.
- Escreva  $x$  em função do tempo.

## Solução

A posição inicial e a velocidade inicial fornecem duas equações das quais se podem determinar a amplitude  $x_m$  e a constante de fase  $\phi$ .

**a)** A posição inicial e a velocidade estão relacionadas à amplitude e à constante de fase. A posição é dada pela Equação 2:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi).$$

A velocidade é encontrada derivando-se a equação anterior em relação ao tempo,

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

Para  $t=0$ , a posição e a velocidade são:  $x_0 = x_m \cos \phi$  e  $v_0 = -\omega x_m \sin \phi$ .

Dividindo uma equação pela outra, eliminamos  $x_m$ :  $\frac{v_0}{x_0} = \frac{-\omega x_m \sin \phi}{x_m \cos \phi} = -\omega \tan \phi$ ,

ou seja,  $\tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$ . Donde, finalmente tiramos a constante de fase:

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) = \arctan\left[-\frac{25\text{cm/s}}{(8,0\text{rad/s})(4\text{cm})}\right] = 0,663\text{rad}.$$

A amplitude pode ser encontrada usando-se a equação de  $x_0$  ou de  $v_0$ . Vamos usar, por exemplo,  $x_0$ :

$$x_m = \frac{x_0}{\cos \phi} = \frac{4\text{cm}}{\cos 0,663} = 5,08\text{cm}$$

**b)** Comparando com a Equação 3:  $x(t) = (5,08\text{cm}) \cos [(8,0\text{ s}^{-1}) t + 0,663]$ .

Agora, tente fazer você mesmo.



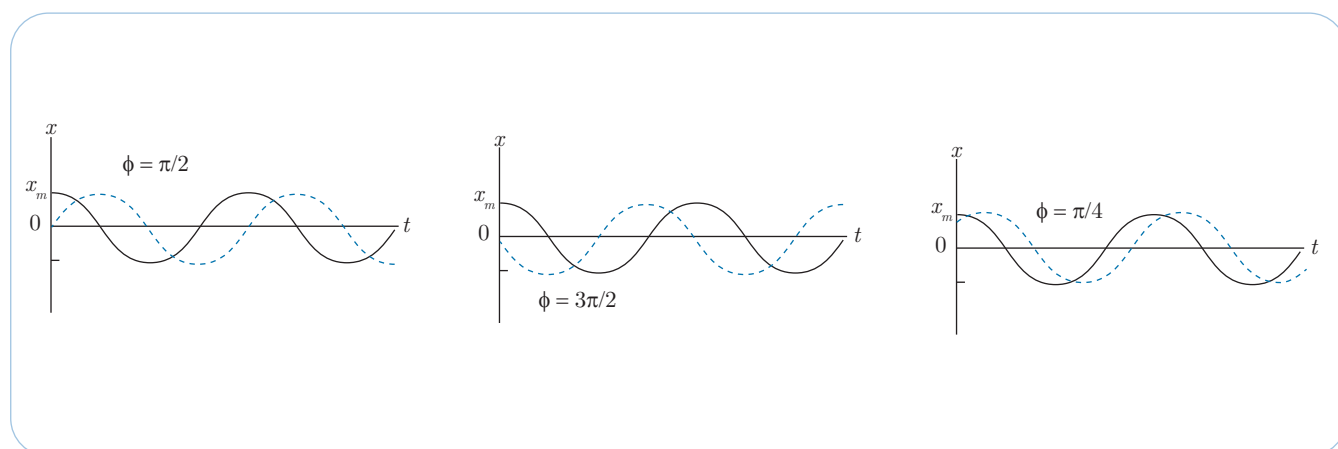
## Atividade 7

Um corpo oscila com movimento harmônico simples de acordo com a equação  $x(t) = (6,12\text{m}) \cos [(8,38\text{ rad/s})t + 1,92\text{ rad}]$ . Determine no instante  $t = 1,90\text{ s}$ :

- a) o deslocamento
- b) a velocidade
- c) a aceleração
- d) a frequência
- e) o período do movimento

# O argumento da função co-seno ou seno: uma nota adicional sobre fase e período

Vamos analisar o efeito do ângulo de fase sobre o gráfico de  $x(t)$ . Por exemplo, no caso da Figura 3 (a), o ângulo de fase é zero e o gráfico é aquele típico da função co-seno. Uma fase positiva faz com que a curva de  $x(t)$  seja deslocada para a esquerda (veja a Figura 4 (a)). Uma fase negativa faz com que a curva seja deslocada para a direita com relação à curva típica do co-seno (veja a Figura 4 (b)).



**Figura 4** – (a) A curva tracejada difere da cheia por uma fase  $\phi = +\pi/2$ ; (b) a curva tracejada difere da cheia por uma fase  $\phi = +3\pi/2$ ; e (c) a curva tracejada difere da cheia por uma fase  $\phi = +\pi/4$ .

Quando duas curvas de MHS têm ângulos de fase diferentes, dizemos que eles têm diferença de fase, ou seja, que um movimento está defasado com relação ao outro.

A Figura 4 (c) mostra outro exemplo de duas curvas MHS defasadas de  $\pi/4$  (isto é, possuem um ângulo de fase  $\phi = \pi/4$ ).

Como o MHS se repete a cada período  $T$  e a função se repete a cada  $2\pi \text{ rad}$ , então um período  $T$  representa uma diferença de fase de  $2\pi \text{ rad}$ .

Na verdade, um deslocamento de fase de  $2\pi$  faz com que a curva do MHS coincida com ela mesma, ou seja, ela parece inalterada.



## Atividade 8

1

Na Figura 3, supondo que as três curvas representassem a função co-seno, qual o deslocamento da fase das curvas  $b$  e  $c$  com relação à curva  $a$ ?

2

Um corpo descreve um movimento harmônico simples segundo o eixo dos  $x$ . O deslocamento é dado pela equação  $x(t) = (4,0m)\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ , onde o tempo  $t$  é medido em segundos e os ângulos em radianos.

- a) Determine a amplitude, a frequência e o período do movimento.
- b) Calcule a velocidade e aceleração em qualquer instante.
- c) Determine a posição, a velocidade e aceleração para  $t=1,0$  s.
- d) Calcule a velocidade e a aceleração máximas do corpo.
- e) Calcule o deslocamento do corpo entre  $t=0$  e  $t=1,0$  s.

# Força restauradora

Nesta seção, vamos começar a estudar as leis de força que levam ao MHS. Sabendo que da Segunda Lei de Newton:

$$F = ma$$

Substituindo o valor encontrado para a aceleração na Equação 7, então encontramos para o MHS:

$$F = ma = -m\omega^2 x(t) \quad \text{Eq. 8}$$

Considerando que no MHS, o produto  $m\omega^2$  é uma constante no movimento, então podemos expressar a Equação 8 da seguinte forma:

$$F = -kx \quad \text{Eq. 9}$$

Observe que essa força é proporcional ao deslocamento, mas com sinal oposto. Ou seja, o sinal negativo significa que a força atua no sentido contrário ao do deslocamento, que indica que ela sempre restaura a posição anterior (se  $x$  aumenta, ela atua no sentido de diminuir  $x$ ; se  $x$  diminui, ela atua no sentido de aumentar  $x$ ). Esta força é chamada força restauradora. Com esse resultado, podemos fazer uma **definição alternativa para o MHS**:

O MHS é o movimento executado por uma partícula sujeita a uma força proporcional ao deslocamento, mas com sinal oposto.

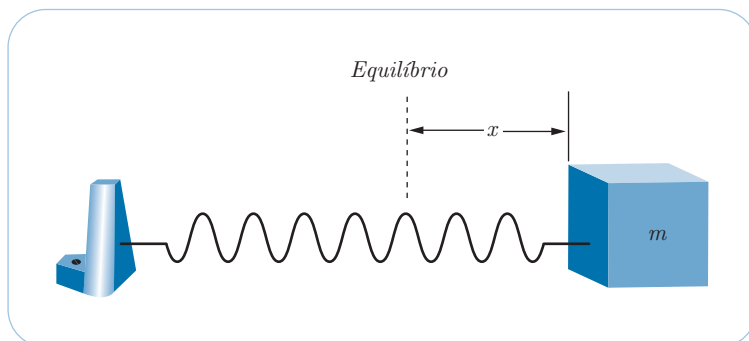
## A mola ideal e o movimento harmônico simples

A Equação 9 fornece a lei que rege uma mola, a chamada Lei de Hooke, e nesse caso, a constante  $k$  é a constante de rigidez da mola.

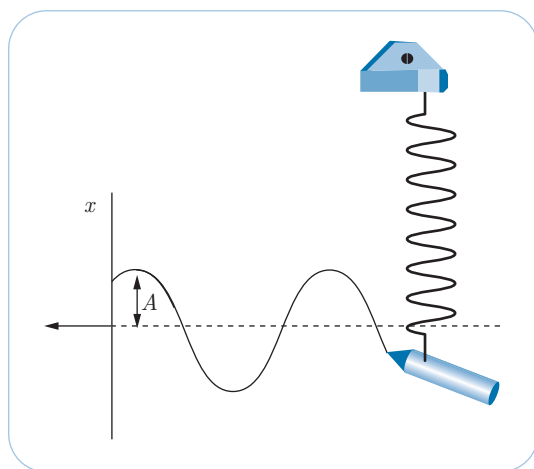
O sistema bloco-mola da Figura 5 forma um oscilador harmônico simples. Usando uma pequena mola na sua casa, você perceberá, quando a mola for comprimida ou tracionada de uma pequena quantidade  $x$ , uma força agindo no sentido oposto à sua deformação. A mola reage a uma força externa (de compressão ou distensão) no sentido de restaurar sua forma original. No Sistema Internacional de Medidas (SI), a unidade medida de  $k$  é  $N / m$ .

Usando as Equações 8 e 9, obtemos a expressão para a frequência angular de um bloco com massa  $m$  preso a uma mola de constante elástica  $k$ , como sendo:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Eq. 10}$$



**Figura 5** – Um objeto e uma mola em uma superfície sem atrito. O deslocamento  $x$  medido a partir de uma posição de equilíbrio é positivo se a mola for distendida e negativo, se a mola for comprimida.



**Figura 6** – Uma caneta é ligada com uma massa a uma mola e o papel é puxado para a esquerda. Como o papel se move com velocidade constante, a caneta traça o deslocamento  $x$  como uma função do tempo  $t$ .

E usando a Equação 4, o período do movimento do oscilador harmônico do sistema massa-mola é:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{Eq. 11}$$

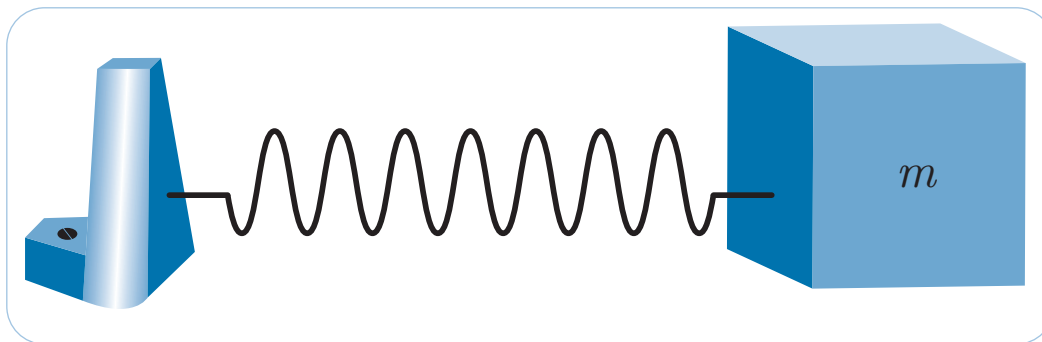
e a frequência é :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Eq. 12}$$

## Exemplo 3

### Sistema bloco-massa

Um sistema massa-mola típico está representado na figura a seguir. Nela, um bloco cuja massa  $m$  é igual a  $680 \text{ g}$  está preso a uma mola cuja constante elástica  $k$  é  $65 \text{ N/m}$ . O bloco é puxado sobre uma superfície sem atrito por uma distância  $x=11 \text{ cm}$  a partir de sua posição de equilíbrio em  $x = 0$  e solto do repouso em  $t = 0$ .



- Quais são a frequência angular, a frequência e o período do movimento resultante?
- Qual é a amplitude da oscilação?
- Qual é a velocidade máxima  $v_m$  do bloco oscilante e onde se encontra o bloco quando ele tiver essa velocidade?
- Qual é o módulo  $a_m$  da aceleração máxima do bloco?
- Qual é a constante de fase do movimento?
- Qual é a função deslocamento  $x(t)$  para o sistema bloco-mola?

### Solução

- a)** O sistema bloco-mola forma um oscilador harmônico simples linear com o bloco executando MHS. Então, da Equação 10, obtemos a frequência angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6,5 \text{ N/m}}{0,68 \text{ kg}}} = 9,78 \text{ rad/s.}$$

A frequência pode ser obtida a partir da Equação 12:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9,78 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}} = 1,56 \text{ Hz}.$$

Usando agora a Equação 11, temos o período:  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,56 \text{ Hz}} = 0,64 \text{ s} = 640 \text{ ms}$   
( $\text{ms} = \text{milissegundos} = 10^{-3} \text{ s}$ )

**b)** Na ausência de atrito, a energia mecânica do sistema bloco-mola é conservada. O bloco é solto do repouso a  $11 \text{ cm}$  de sua posição de equilíbrio com energia cinética nula e com a energia potencial elástica do sistema no máximo. Assim, o bloco terá energia cinética nula sempre que estiver novamente a  $11 \text{ cm}$  de sua posição de equilíbrio, o que significa que ele nunca se afastará mais do que  $11 \text{ cm}$  de sua posição de equilíbrio. Seu deslocamento máximo é  $11 \text{ cm}$ :  $x_m = 11 \text{ cm}$ .

**c)** A velocidade máxima  $v_m$  é a amplitude da velocidade do MHS, dada pela Equação 6:

$$v_m = \omega x_m = (9,78 \text{ rad/s}) (0,11 \text{ m}) = 1,1 \text{ m/s}.$$

Essa velocidade máxima ocorre quando o bloco oscilante estiver passando pela origem.

**d)** O módulo  $a_m$  da aceleração máxima é a amplitude da aceleração do MHS, dada pela Equação 7:

$$a_m = \omega^2 x_m = (9,78 \text{ rad/s})^2 (0,11 \text{ m}) = 11 \text{ m/s}^2.$$

Essa aceleração máxima ocorre quando o bloco está nas extremidades de sua trajetória. Nesses pontos, a força que atua sobre o bloco possui intensidade máxima.

**e)** A Equação 3 fornece o deslocamento do bloco em função do tempo. Sabemos que no tempo  $t = 0$ , o bloco está localizado em  $x = x_m$ . Substituindo essas *condições iniciais*, como elas são chamadas, na Equação 3 e cancelando  $x_m$ , obtemos:

$$1 = \cos \varphi, \text{ ou seja, } \varphi = 0 \text{ rad}.$$

Observe que qualquer ângulo que seja um múltiplo inteiro de  $2\pi \text{ rad}$  também satisfaz a equação anterior. Escolhemos então o menor ângulo.

**f)** A Equação 3 dá a forma geral de  $x(t)$ . Então, a partir dela, temos:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) = (0,11 \text{ m}) \cos[(9,8 \text{ rad/s}) t + 0] = 0,11 \cos(9,8 t).$$



## Atividade 9

Um corpo de  $0,12 \text{ kg}$  executa movimento harmônico simples de amplitude  $8,5 \text{ cm}$  e período  $0,20 \text{ s}$ .

- Qual é o módulo da força máxima que atua sobre ele?
- Se as oscilações são produzidas por uma mola, qual é a constante elástica da mola?

## Energia no movimento harmônico simples

Vamos estudar o caso onde a força que age sobre o corpo é uma força conservativa. Por exemplo, como no caso de um objeto preso a uma mola, descrevendo um **movimento harmônico simples**. Nesse caso, o trabalho é feito por uma força conservativa. Mas, a energia relacionada com as forças conservativas é a energia potencial, que surge pelo fato de o trabalho feito por esse tipo de força ser conservativo (isto é, independente da trajetória). Se a única força atuando no sistema for a força conservativa (no caso da mola, a força elástica), então temos que a energia potencial se transforma continuamente em potencial e vice-versa, e a energia mecânica total:



### Movimento harmônico simples

Na verdade, você já estudou esse movimento, exaustivamente, tanto na disciplina Energia (aula 6 – Energia Potencial I, p. 9), como na disciplina Movimento e Mecânica Clássica (aula 14 – Energia: um olhar diferente para os fenômenos mecânicos, p. 15).

$$U_a + K_a = U_b + K_b = E_{MEC} = \text{constante},$$

Eq. 13

Ou seja, a energia mecânica num ponto a da trajetória é igual à energia mecânica num ponto b, que é igual à energia mecânica em qualquer ponto da trajetória.

**Observação** – Se além das forças conservativas, outras forças externas e internas não-conservativas agirem no corpo, a energia mecânica ( $E_{MEC} = U + K$ ) é conservada, desde que o trabalho realizado por essas forças seja nulo (caso contrário, além da energia potencial, aparecerá, por exemplo, energia térmica).



### Por quê?

Voltando ao caso do objeto (um bloco, por exemplo) de massa  $m$  preso a uma mola de massa desprezível executando um MHS. Sua energia mecânica total é  $E = U + K$ .

Consideremos o **bloco** a uma distância  $x_1 = x$  da posição de equilíbrio, sofrendo uma força restauradora dada por  $-kx$  (note que agora estaremos chamando genericamente  $x_1$  de  $x$ , reveja a Figura 2, onde ainda aparece  $x_1$ ).

### Bloco

Note que ao nos referir ao exemplo massa-bloco, na verdade, é só para facilitar a visualização. Pois realmente quando, na análise, o bloco está sendo tratado como uma partícula.

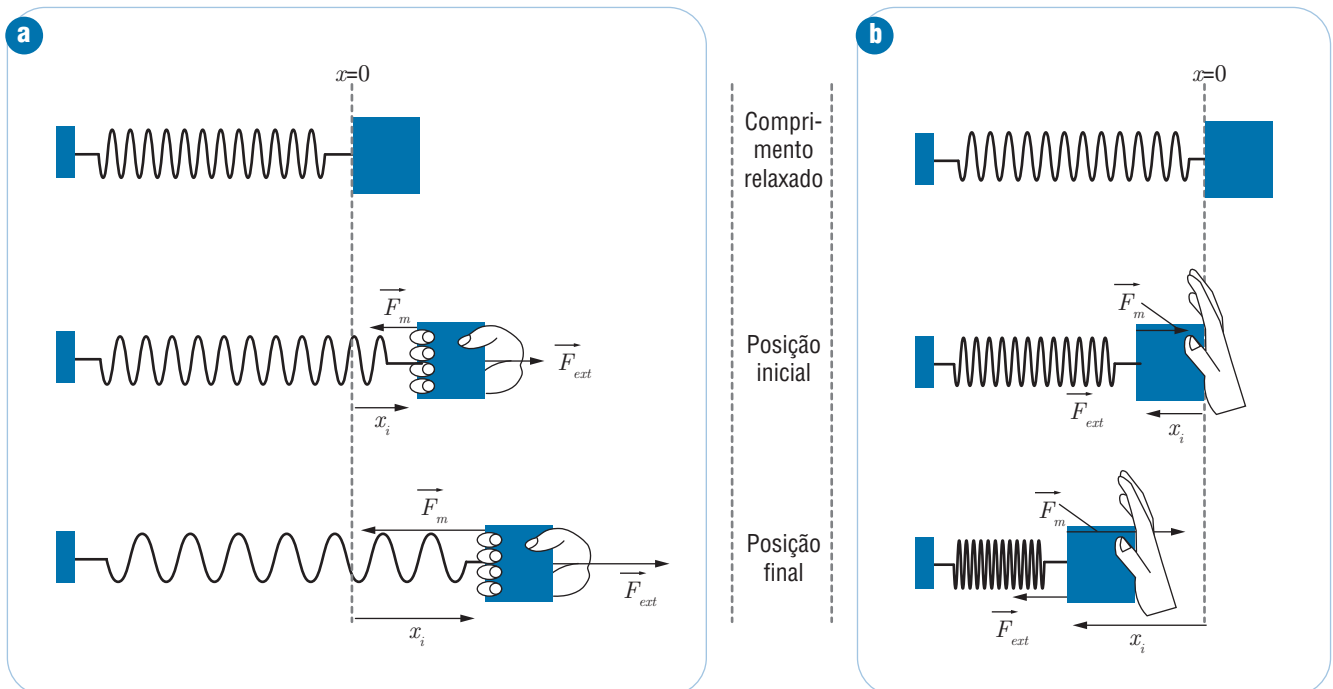


Figura 7 – O sistema mola-bloco em diferentes instantes de tempo.

# A energia no movimento harmônico simples

Como você já sabe, as considerações energéticas são fundamentais no estudo dos sistemas físicos. Aqui, também, ao estudarmos movimentos periódicos e ondas, precisamos fazer esse tipo de consideração.

Inicialmente, note que a energia potencial do sistema (energia potencial elástica), como você já sabe, é dada por:

$$U = -\frac{1}{2}kx^2 \quad \text{Eq. 14}$$

onde  $k$  é a constante elástica da mola e  $x$  é a distensão ou compressão da mola.

Como no MHS, a posição em cada instante é dada por:

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

E a velocidade por:

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_m \omega \sin(\omega t + \phi)$$

Fazendo a troca  $x_m = A$ , onde  $A$  é a amplitude do movimento e substituindo na Equação 14, teremos:

$$U = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad \text{Eq. 15}$$

A Equação 15 representa a expressão para a Energia Potencial no Movimento Harmônico Simples.

Por outro lado, já sabemos que a energia cinética de um corpo de massa  $m$  que se move com velocidade  $v$  é:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{Eq. 16}$$

substituindo o valor de  $v$  obtido anteriormente, teremos:

$$K = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad \text{Eq. 17}$$

A Equação 17 representa a expressão para a Energia Cinética no Movimento Harmônico Simples.

Nela,  $m$  é a massa do bloco e  $v$  a sua velocidade. Como, no MHS, vimos que  $v_x = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$ .

Substituindo na Equação 7, a energia total é a soma das energias potencial e cinética:

$$E_{\text{TOTAL}} = U + K = U = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$E_{\text{TOTAL}} = \frac{1}{2}kA^2 (\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi))$$

Lembrando que  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ , temos então que:

$$E_{\text{TOTAL}} = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{Eq. 18}$$

A Equação 18 representa a expressão para a Energia Mecânica Total no Movimento Harmônico Simples.

Note ainda, que a Equação 18 mostra que a energia total no Movimento Harmônico Simples é proporcional ao quadrado da amplitude, ou seja, é constante. Para um objeto em seu deslocamento máximo, a energia total é integralmente composta pela energia potencial. Quando o objeto se move em direção à sua posição de equilíbrio, a energia cinética do sistema aumenta e a energia potencial diminui. Quando o objeto passa pela posição de equilíbrio, a energia cinética é máxima e a energia potencial é nula, sendo neste ponto a energia cinética representativa da energia total.

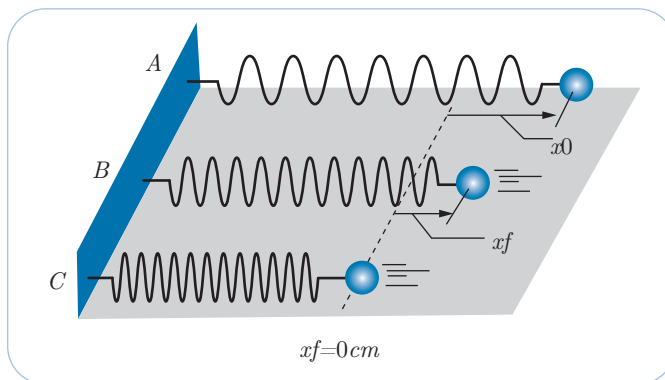
Em todo o tempo, a soma das energias potencial e cinética representa um valor constante. Ou seja, **na situação real em que a mola tem massa, há energia cinética adicional associada ao movimento da mola.**

## Exemplo 4

### Um objeto preso a uma mola horizontal

A Figura 10 mostra um objeto de massa  $m = 0,200 \text{ kg}$  que está vibrando sobre uma mesa horizontal sem atrito. A mola possui uma constante de mola  $k = 545 \text{ N/m}$ . Ela é esticada, inicialmente, até  $x_o = 4,50 \text{ cm}$  e depois, é solta partindo do repouso (veja a parte (a) da Figura 10).

Determine a velocidade escalar  $v_f$  do objeto quando o deslocamento final da mola for (a)  $x_f = 2,25 \text{ cm}$  e (b)  $x_f = 0 \text{ cm}$ .



**Figura 8** – (a) A energia mecânica total do sistema corresponde à soma da energia cinética com a potencial elástica; (b) parcialmente energia potencial elástica e parcialmente energia cinética; e (c) totalmente energia cinética.

## Solução

Observe que  $x_0$  é a amplitude do movimento e para resolver as duas questões perguntadas, basta usar a conservação da energia:  $E_f = E_0$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}kx_f^2 = \frac{1}{2}kx_0^2,$$

ou seja,

$$v_f = \sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x_f^2)}$$

**a)** Como  $x_0 = 0,0450 \text{ m}$  e  $x_f = 0,0225 \text{ m}$ , a velocidade escalar final é:

$$v_f = \sqrt{\frac{545 \text{ N/m}}{0,200 \text{ kg}} [(0,0450 \text{ m})^2 - (0,0225 \text{ m})^2]} = 2,03 \text{ m/s}$$

A energia mecânica total nesse ponto é parcialmente energia cinética de translação ( $\frac{1}{2}mv_f^2 = 0,138 \text{ J}$ ) e parcialmente energia elástica ( $\frac{1}{2}kx_f^2 = 0,414 \text{ J}$ ). A energia mecânica total  $E$  é a soma dessas duas energias:  $E = 0,138 \text{ J} + 0,414 \text{ J} = 0,552 \text{ J}$ . Como a energia mecânica total permanece constante durante o movimento, esse valor é igual à energia mecânica total inicial quando o objeto está parado e a energia é totalmente energia potencial elástica ( $E_0 = \frac{1}{2}kx_0^2 = 0,522 \text{ J}$ ).

**b)** Quando  $x_0 = 0,0450 \text{ m}$  e  $x_f = 0 \text{ m}$ , temos:

$$v_f = \sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x_f^2)} = \sqrt{\frac{545 \text{ N/m}}{0,200 \text{ kg}} [(0,0450 \text{ m})^2 - (0 \text{ m})^2]} = 2,35 \text{ m/s}$$

Agora a energia mecânica total se deve inteiramente à energia cinética de translação ( $\frac{1}{2}mv_f^2 = 0,552 \text{ J}$ ), já que a energia potencial elástica é igual a zero. É claro que a energia mecânica total é igual a aquela encontrada na parte (a) (a energia se conserva). Na ausência de atrito, o Movimento Harmônico Simples de uma mola converte os diferentes tipos de energia entre uma e outra forma com o total sempre permanecendo o mesmo.



## Atividade 10

Com base no que você estudou nesta aula, responda:

- O que é uma onda?
- Cite diferenças entre uma onda eletromagnética e uma onda acústica.
- Cite semelhanças entre uma onda eletromagnética e uma onda mecânica.
- Dê exemplos de funções exponenciais.

# Resumo

Nesta aula, você aprendeu a conceituar movimento harmônico simples e a representar tal movimento, tanto matematicamente quanto geometricamente, descobrindo ainda quais os elementos principais nessas representações, ou seja, o período, a frequência, a amplitude e o comprimento de onda. Aprendeu ainda que os fenômenos ondulatórios podem ser representados por funções periódicas como seno e co-seno. Esses temas serão retomados em quase todas as nossas aulas e serão recorrentes em nosso curso. Logo, esta primeira aula precisa ser bem trabalhada e estar sempre à mão quando você for estudar as seguintes.

## Autoavaliação

1

Ao pendurar na extremidade livre de uma mola um corpo de massa  $4.0 \text{ kg}$ , verifica-se que a elongação sofrida pela mola é de  $16 \text{ cm}$ . Determine a constante elástica da mola. Suponha que o corpo de  $4.0 \text{ kg}$  é removido e no seu lugar é colocado uma massa de  $0.5 \text{ kg}$ . Se essa nova massa for puxada para baixo e largada em seguida, qual o período das oscilações?

2

Quando a massa  $m_1$  é suspensa de uma determinada mola  $A$  e a massa menor  $m_2$  é suspensa da mola  $B$ , as molas são distendidas da mesma distância. Se os sistemas forem colocados em movimento harmônico simples vertical com a mesma amplitude, qual deles terá mais energia?

3

Quais alterações você pode fazer num oscilador harmônico para dobrar a velocidade máxima da massa oscilante?

4

Um objeto de  $5,00 \text{ kg}$  numa superfície horizontal sem atrito é ligado a uma mola com constante  $1000 \text{ N/m}$ . O Objeto é deslocado  $50,0 \text{ cm}$  horizontalmente e empurrado a uma velocidade inicial de  $10,0 \text{ m/s}$  na direção do ponto de equilíbrio.

a) Qual é a frequência do movimento?

b) Qual é a energia potencial inicial do sistema bloco-mola?

**c)** Qual é a energia cinética inicial?

**d)** Qual é a amplitude da oscilação?

**5**

Um bloco de  $2,99 \text{ kg}$  está suspenso de uma certa mola. Se suspendermos um corpo de  $300 \text{ g}$  embaixo do bloco, a mola esticará mais  $2,00 \text{ cm}$ .

**a)** Qual a constante da mola?

**b)** Se removermos o corpo de  $300 \text{ g}$  e o bloco for colocado em oscilação, ache o período do movimento.

**6**

Uma massa de  $50,0 \text{ g}$  é presa à extremidade inferior de uma mola vertical e colocada em vibração. Se a velocidade máxima da massa é  $15,0 \text{ cm/s}$  e o período  $0,500 \text{ s}$ , ache:

**a)** a constante de elasticidade da mola

**b)** a amplitude do movimento

**c)** a frequência de oscilação

## Referências

CUTNELL, J. D.; JOHNSON, K. W. **Física**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. v 1.

FERREIRA NETO, José; JAFELICE, Luiz Carlos. **Energia**. Natal: EDUFRRN, 2007.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da física**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. v 2.

OLIVEROS, Marcílio Colombo; MAIA, Márcio Roberto de Garcia. **Movimento e mecânica clássica**. Natal: EDUFRRN, 2008.

SERWAY, R. A.; JEWETT JÚNIOR, J. W. **Princípios de física**. São Paulo: Ed. Thomson, 2003. v 2.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Física: para cientistas e engenheiros: mecânica, oscilações e ondas – termodinâmica**. Tradução de Fernando Ribeiro Silva. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006a. v 1.

\_\_\_\_\_. **Física: para cientistas e engenheiros: eletricidade, magnetismo e ótica**. Tradução de Fernando Ribeiro Silva. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006b. v 2.

# Pêndulos e oscilações

Aula

2



# Apresentação

**A**gora, após você ter estudado os movimentos periódicos, em geral, apresentados na aula 1 (Oscilações e movimento harmônico), consideraremos, nesta aula, a situação particularmente interessante e historicamente relevante que é o pêndulo, um tipo clássico de movimento periódico onde um objeto oscila, continuamente, entre duas posições, sob a ação de forças como da gravidade ou elástica. Aqui, você terá a oportunidade de construir um pêndulo simples e utilizá-lo para determinar o valor numérico da aceleração da gravidade em sua localidade.

## Objetivos

- 1** Descrever o movimento e as características dos diversos tipos de pêndulos.
- 2** Entender e aplicar o conceito de pêndulo simples para determinar o valor local da aceleração do campo gravitacional  $g$ .
- 3** Descrever o pêndulo de torção e aplicá-lo ao problema da determinação de  $G$  (balança de Cavendish).



# O pêndulo simples

Consideremos, inicialmente, um objeto esférico de massa  $m$ , preso a uma extremidade de um fio que tem sua outra extremidade fixa em um ponto em torno do qual ele pode oscilar. Tal artefato, que se parece com um fio de prumo tão utilizado pelos pedreiros, mostrado na Figura 1, é chamado de pêndulo simples.

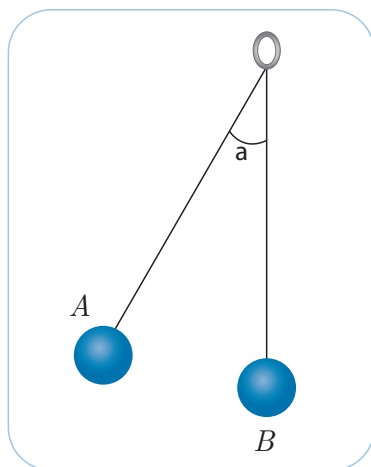


Figura 1 – Um pêndulo simples.

Contam as lendas que foi a partir da observação do movimento pendular dos lustres, que estão pendurados na Catedral de Pisa, que Galileu descobriu o movimento da Terra. Atualmente, usa-se um tipo de pêndulo simples e com uma bola de ferro bastante pesada em sua extremidade, chamado pêndulo do Foucault (Jean Bernard Léon Foucault) para descrever, em experimentos comuns usados em sala de aula, o movimento da Terra. No final desta aula, propomos uma atividade baseada no pêndulo de Foucault.

Na região equatorial, ele não vai mostrar esse fato, mas à medida que nos afastamos do equador em direção aos pólos ele vai dando cada vez melhor resultado.

Voltemos agora para a Figura 1, se nós, agora, pretendemos analisar o movimento do pêndulo desta, temos que fazer, inicialmente, considerações sobre as forças que atuam sobre ele e escrever a Segunda Lei de Newton para a força resultante, como você aprendeu em Mecânica.

Mas, antes disso, seria interessante você construir um pêndulo simples e realizar algumas observações. Isso é sugerido na atividade 1.



# Atividade 1

Utilizando uma pequena bola de chumbo (ou outro material que você disponha) e uma linha (tipo linha zero) de comprimento  $1,0\text{ m}$ , construa um pêndulo simples, como mostrado na Figura 1. Depois, tente determinar, utilizando um relógio que disponha de cronômetro, o período do pêndulo que você construiu. Faça experimentos variando o ângulo inicial, depois, o comprimento do fio e se possível o tipo de objeto que forma o pêndulo.

Com base nesta experiência, responda:

**a)** De que depende o período?

---

---

**b)** Você percebeu que ele sempre pára de oscilar? Por que ele pára?

---

---

---

**c)** Desenhe o pêndulo na posição em que ele pára de oscilar e nas posições iniciais que você usou para determinar o período.

**d)** Lembrando dos conceitos de Energia, em quais pontos da trajetória da bola de seu pêndulo, a energia potencial é máxima? E onde a energia potencial é mínima?

---

---

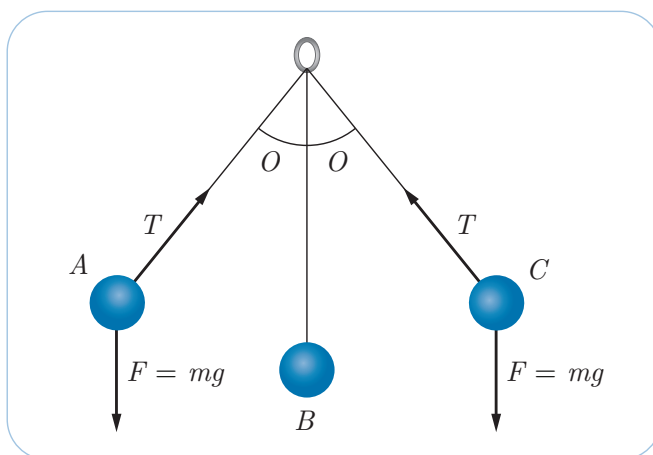
**e)** Ainda de acordo com o item anterior, em que ponto da trajetória a energia cinética da bola é máxima? E onde ela é mínima?

---

---

Como você percebeu na atividade 1, se queremos uma situação ideal em que o pêndulo fique o tempo todo oscilando com o mesmo período, devemos fazer algumas aproximações. A primeira delas é que não existe atrito, ou seja, desprezamos a existência do ar e o contato do fio com a presilha. Além disso, vamos supor que o ângulo  $\alpha$  entre a posição inicial do pêndulo e a vertical é pequeno (depois veremos em que isso ajuda!).

Obedecida às condições impostas no parágrafo anterior, temos que as forças que agem sobre o pêndulo são a força gravitacional entre a terra e o pêndulo (força peso) e a tensão no fio. Tais forças são esquematicamente representadas na Figura 2.



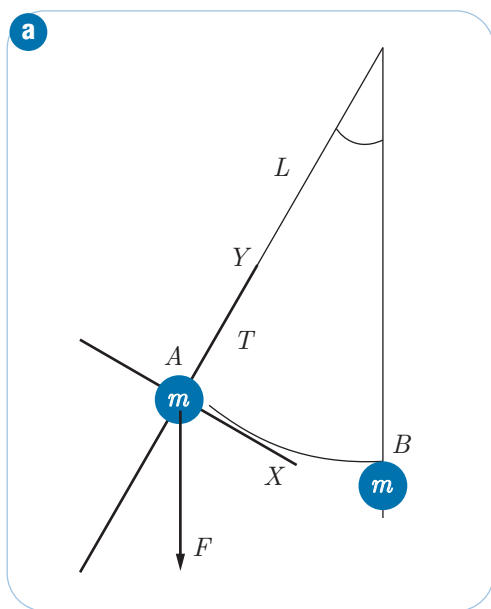
**Figura 2** – Representação esquemática das forças que agem sobre o pêndulo simples:  $T$  (tensão no fio) e  $F$  (a força peso).

O que ocorre então com o vetor velocidade do pêndulo a partir do instante em que este é solto a partir do ponto  $A$ , e passa a oscilar? Para responder a esta questão vamos acompanhar, quadro a quadro, o movimento do pêndulo enquanto ele executa uma oscilação completa.

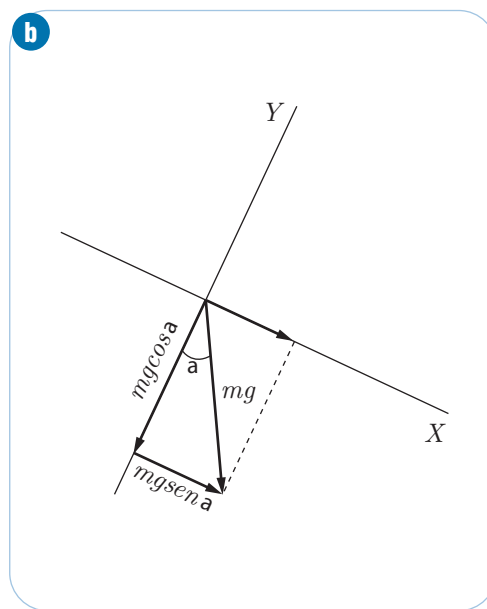
Note que a esfera do pêndulo tem, no ponto  $A$ , velocidade inicial nula, no ponto  $B$ , terá velocidade máxima, e no ponto  $C$ , irá ter novamente velocidade nula. Note que ao longo da trajetória o vetor velocidade será sempre tangente a esta. Assim, ela será positivamente acelerada no percurso  $AB$  e será negativamente acelerada (freada) no percurso  $BC$ . E a força que irá acelerar o pêndulo e depois frear será a mesma. Ou seja, a componente do peso na direção do movimento, como mostra a Figura 3.

Para obter a componente da força “na direção do movimento” temos que definir um sistema de eixos cartesianos, que por comodidade vamos centrar sobre a esfera, como mostrado a seguir. Note que fizemos coincidir o eixo- $y$  com o fio do pêndulo.

Podemos, agora, aplicar a Segunda Lei de Newton para as forças que agem na direção- $x$  e na direção- $y$ . A Figura 3 mostra uma parte do pêndulo e essas forças.



**Figura 3 – (a)** Eixo cartesiano centrado na esfera do pêndulo simples.



**Figura 3 – (b)** Componentes horizontais e verticais das forças que agem sobre o pêndulo simples.

Note que não existe aceleração na direção  $y$ , mas existe na direção  $x$ , devido à ação da gravidade.

Portanto, podemos então escrever para cada um dos eixos:

**Eixo-x**

$$mgsen\alpha = ma = F \quad \text{Eq. 1}$$

### Eixo-y

$$T - mg \cos\alpha = 0$$

$$T = mg \cos\alpha \quad \text{Eq. 2}$$

Ou seja, a força restauradora que mantém o pêndulo oscilando é:

$$F = mg \sin\alpha \quad \text{Eq. 3}$$

Mas, na Figura 3 (b), temos que:

$$\sin\alpha = \frac{x}{L} \quad \text{Eq. 4}$$

Precisamos agora usar o fato de que o ângulo  $\alpha$  é muito pequeno, nesse caso da trigonometria, podemos escrever:

$$\sin\alpha = \alpha \quad \text{Eq. 5}$$

E, portanto, das Equações 4 e 5, teremos:

$$\alpha = \frac{x}{L}$$

Usando agora as Equações 3, 4 e 5, teremos que:

$$F = mg \sin\alpha = mg\alpha = mg \frac{x}{L}$$

Ou seja,

$$F = mg \frac{x}{L} \quad \text{Eq. 6}$$

Como  $F$  é uma força restauradora, nós podemos imaginar que  $F$  obedece para pequenos deslocamentos (o ângulo  $\alpha$  muito pequeno) a lei de Hook, que como você deve estar lembrado é dada por:

$$F = kx \quad \text{Eq. 7}$$

Comparando então as equações 6 e 7, verifica-se facilmente que:

$$k = \frac{mg}{L} \quad \text{Eq. 8}$$

Precisamos agora relembrar algumas informações da aula 1. Lá você aprendeu que a frequência angular  $\omega$  de um oscilador harmônico simples é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Eq. 9}$$

Sabemos também que a frequência  $f$  se relaciona com a frequência angular através da relação:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{Eq. 10}$$

O nosso pêndulo simples tem o mesmo tipo de movimento que um oscilador harmônico simples e, portanto, podemos usá-lo para resolver o problema do pêndulo simples das Equações 9 e 10 que foram usadas para o caso do oscilador harmônico simples. Assim, podemos escrever:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg}{Lm}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Da aula 1, sabemos que o período é o inverso da frequência. Logo, usando a relação anterior, temos:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg}{Lm}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{Eq. 11}$$

A Equação 11 que acabamos de obter e que você a conhece do ensino médio é chamada de equação do pêndulo simples. Ela mostra que o período de um pêndulo simples depende apenas do comprimento do fio e da aceleração local da gravidade.

## Exemplo 1

Astronautas que foram à Lua poderiam ter utilizado um pêndulo simples para determinar o valor da aceleração da gravidade na superfície do nosso satélite natural.

Suponha que eles utilizariam um fio com 70 cm de comprimento e que após medir dez vezes o tempo necessário para que o pêndulo executasse um percurso de ida e volta à posição inicial, eles verificaram que a média desse tempo (o período) era de 9,75 segundos.

Com essas informações, qual seria o valor da aceleração da gravidade,  $g_L$ , da Lua?

## Solução

O problema nos dá os seguintes dados:

Comprimento do fio  $L = 70 \text{ cm} = 0,70 \text{ m}$  (**Atenção! Devemos trabalhar no sistema MKS**)

Período  $T_L = 9,75 \text{ s}$ . E pede para determinarmos o valor de  $g_L$  na Lua. Podemos usar a fórmula do período, escrevendo-a para a Lua e para a Terra:

$$(T_L)^2 = (2\pi)^2 \left( \sqrt{\frac{g_L}{L}} \right)^2 = 4\pi^2 \frac{g_L}{L}$$

ou seja,

$$g_L = \frac{T_L^2 \times L}{4\pi^2} = \frac{(9,75)^2 \times 0,7}{4 \times (3,14)^2} = 1,68 \text{ m/s}^2$$

Assim, se você consultar uma tabela que tenha os valores da aceleração da gravidade na Lua, você irá encontrar  $1,67 \text{ m/s}^2$ . Portanto, o resultado que encontramos é muito bom!



## Atividade 2

1

Sabendo que a aceleração da gravidade na superfície da Terra é da ordem de  $9,81m/s^2$ , qual seria o período do pêndulo descrito no exemplo 1, aqui na Terra?

2

Se dois relógios de pêndulos simples iguais, como os descritos no exemplo fossem usados para medir o tempo, um na Terra e outro na Lua, qual dos dois teria maior período? Após um dia de operação, qual dos dois teria atrasado e de quanto seria o atraso?

1. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

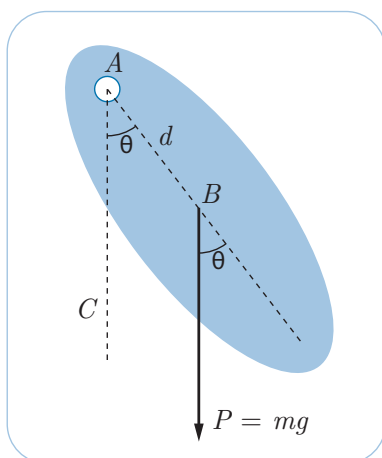
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

# O pêndulo físico

Uma coisa interessante é que sempre que prendemos um corpo rígido por uma de suas extremidades, podemos fazer com que ele oscile em torno desse ponto. Uma régua, por exemplo, pode ser presa por uma das suas extremidades e posta a oscilar. Assim, podemos dizer que qualquer corpo rígido que possa oscilar livremente em torno de um eixo é um pêndulo físico.

A figura 4 representa um pêndulo físico.



**Figura 4** – Exemplo de um pêndulo físico. O ponto *A* representa o ponto em torno do qual o corpo está girando, o ponto *B* representa o centro de massa e *d* a distância entre o ponto *A* e o centro de massa.

Lembrando um pouco da aula 5 (Leis de conservação da Mecânica I) de Física e Ambiente, podemos atribuir ao pêndulo físico um momento de inércia *I* e assumir que o ponto *B* representa o centro de massa. Assim, teremos um torque que tende a puxar o pêndulo para a posição vertical ( $\theta = 0$ ).

$$\tau = I\alpha \quad \text{Eq. 12}$$

Lembrando que o torque é dado pelo produto vetorial entre a força (no caso, o peso) e a distância *d*, ao eixo de rotação, e levando em conta que o torque que estamos tratando é o torque em relação ao ponto *A* (Figura 4), temos:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{Eq. 13}$$

Onde  $\vec{F} = m\vec{g}$  e  $\vec{r} = \vec{d}$

Assim,

$$\vec{\tau} = \vec{d} \times m\vec{g}$$

Lembrando do conceito de produto vetorial que você aprendeu em álgebra, temos:

$$\tau = mgd \operatorname{sen}\theta = mgd\theta \quad \text{Eq. 14}$$

Das Equações 12 e 14, e fazendo  $\operatorname{sen}\theta = \theta$ , podemos escrever:

$$I\alpha = dm g\theta \quad \text{Eq. 15}$$

Agora, como  $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ , podemos escrever a Equação 14 como:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = dm g\theta \quad \text{Eq. 16}$$

A Equação 16 pode ser reescrita em uma forma com a qual você deve estar familiarizado com as disciplinas de Cálculo, isto é, de uma equação diferencial linear homogênea e de grau 2.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{dm g}{I}\theta = 0$$

Vamos analisar um pouco esta equação. A primeira coisa seria analisar o termo

$$\frac{dm g}{I}$$

Para tanto, podemos fazer uma análise dimensional dele.

$d$  (distância)  $\rightarrow m$

$m$  (massa)  $\rightarrow kg$

$g$  (aceleração da gravidade)  $\rightarrow \frac{m}{s^2}$

$I$  (momento de inércia)  $\rightarrow kg \cdot m^2$

Assim, vemos que a unidade de medida desse termo é  $\frac{1}{s^2}$ , ou seja, frequência ao quadrado, de modo que podemos escrever:

$$w^2 = \frac{dm g}{I} \rightarrow w = \sqrt{\frac{dm g}{I}} \quad \text{Eq. 17}$$



## Atividade 3

1

Que argumentos físicos podem ser usados para permitir que possamos escrever a relação  $w^2 = \frac{dm g}{I}$ ?

2

Qual é a relação entre as grandezas físicas  $w$  (frequência angular),  $T$  (período) e  $f$  (frequência)?

1. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Voltando agora para as nossas equações, substituindo a Equação 17 em 16, teremos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - w^2\theta = 0 \qquad \text{Eq. 18}$$

A segunda coisa é que a Equação 18 exige que a solução seja uma equação que tenha a segunda derivada igual a ela própria a menos de uma constante. Você entendeu esta afirmativa? Ela é muito importante! Vamos ver melhor, a seguir.

Algumas funções trigonométricas satisfazem essa condição. Por exemplo, a função  $A\text{sen}\theta$  satisfaz, pois sua segunda derivada é ela própria a menos de uma constante (o sinal negativo que corresponde a -1). Note que,

$$\theta(t) = \frac{d}{dt}(\text{sent}) = \text{cost} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt}(\text{sen}\theta) \right] = \frac{d^2}{dt^2}(\text{sent}) = \frac{d}{dt}(\text{cost}) = -\text{sent}$$



## Atividade 4

Mostre que a função  $\cos\theta$  satisfaz também a condição de segunda derivada igual à própria função com o sinal trocado.

---

---

---

---

---

---

---

---

Assim, podemos partir de uma função seno, co-seno ou de uma combinação linear das duas para construir a solução do problema do pêndulo físico.

Começando do mais simples, vejamos o que ocorre quando escolhemos como solução da Equação 18 uma função do tipo co-seno, ou seja,

$$\theta(t) = A\cos(at) \quad \text{Eq. 19}$$

Para tanto, vamos substituir a Equação 19 e sua derivada segunda na Equação 18. Lembrando que na Equação 19,  $A$  e  $a$  são constantes e a variável é o tempo ( $t$ ).

$$\frac{d\theta}{dt} = -Aa\sin(at)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Aa^2\cos(at) \quad \text{Eq. 20}$$

Precisamos agora substituir as Equações 19 e 20 na Equação 18.

$$-Aa^2\cos(at) - w^2A\cos(at) = 0$$

$$Aa^2\cos(at) = w^2A\cos(at)$$

$$a = w \quad \text{Eq. 21}$$

Com a Equação 21, obtemos a informação sobre o parâmetro  $a$  da solução do pêndulo que oscila com frequência  $w$ . Ou seja,

$$\theta(t) = A \cos (wt)$$

## Exemplo 2

De que depende o período de um pêndulo físico?

### Solução

A pergunta se refere diretamente à questão do período do pêndulo físico. Assim, sabemos que existe uma relação simples entre o período e a frequência angular  $w$ , esta relação é dada por:

$$w = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{w}$$

Como da equação Equação 17, temos:

$$w = \sqrt{\frac{dmg}{I}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{dmg}}$$

E como, por outro lado, podemos escrever:  $I = md^2$ , onde  $d$  é a distância do eixo de rotação do pêndulo (ponto  $A$  na Figura 5) ao centro de massa do corpo. Segue que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{d}} \quad \text{Eq. 22}$$

Portanto, o período de um pêndulo físico depende da aceleração local da gravidade  $g$  e da distância  $d$  do ponto de oscilação ao centro de massa do sistema.



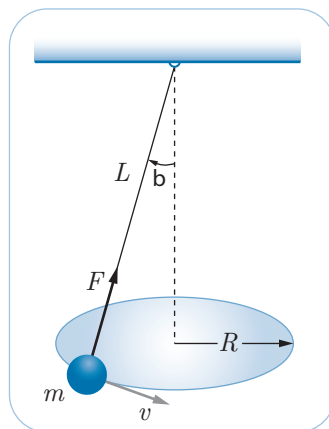
## Atividade 5

Mostre que o período definido pela Equação 22 tem, no SI, unidade de segundos.

Você deve ter concluído da atividade 5 que o período do pêndulo simples depende apenas da distância entre o eixo de rotação e o centro de massa do sistema e da aceleração local da gravidade.

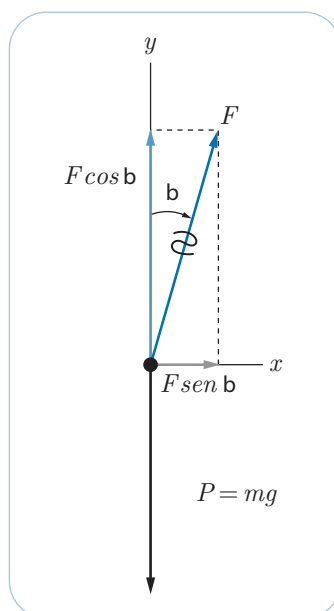
# O pêndulo cônico

O pêndulo cônico é um caso particular do pêndulo simples, onde o pêndulo em vez de oscilar para frente e para trás, tem a massa se movendo em círculo horizontal com velocidade escalar constante  $v$  e o fio faz um ângulo  $\beta$  constante com a direção vertical, como mostra a Figura 5.



**Figura 5** – Um pêndulo cônico se configura como um peso preso na extremidade inferior do fio se movendo com movimento circular uniforme.

Como sempre, queremos determinar o período do pêndulo. Para tanto, vamos construir o diagrama de forças para o sistema. Tal diagrama está representado na Figura 6.



**Figura 6** – Diagrama de forças do pêndulo cônico. O sentido do eixo  $+Ox$  é orientado para o centro do círculo.

# Análise do diagrama de forças

O sistema não possui aceleração vertical, então a soma das componentes verticais das forças é igual a zero, ou seja:

$$\sum F_y = F \cos \beta + (-mg) = 0 \quad \text{Eq. 23}$$

Na horizontal, temos apenas uma força e que está orientada para o centro do círculo. Portanto, de acordo com a Segunda Lei de Newton, ela deve ser igual à massa  $m$  vezes a aceleração  $a$ , que no caso presente será a aceleração radial:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \quad \text{Eq. 24}$$

Então, a Segunda Lei de Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a},$$

fornece:

$$\sum F_x = F \sin \beta = m \frac{v^2}{R} \quad \text{Eq. 24}$$

Obtemos assim, com as Equações 23 e 24, o seguinte sistema de equações:

$$\sum F_x = F \sin \beta = m \frac{v^2}{R}, \quad \sum F_y = F \cos \beta + (-mg) = 0$$

Esse é um sistema de duas equações com duas incógnitas.

A equação para  $\sum F_y$ , fornece:

$$F = \frac{mg}{\cos \beta} \quad \text{Eq. 25}$$

Esse resultado combinado com a Equação 24, nos leva a:

$$\tan \beta = \frac{v^2}{gR} \quad \text{Eq. 26}$$

Podemos reescrever a Equação 26 para relacionar  $\beta$  com o período  $T$ .

Da Figura 5, podemos verificar que o raio do círculo é dado por:

$$R = L \sin \beta \quad \text{Eq. 27}$$

E, como a velocidade escalar é a razão entre o espaço total percorrido e o tempo gasto, ou seja, é o comprimento da circunferência  $2\pi L \sin \beta$  dividido pelo período  $T$ , temos:

$$v = \frac{2\pi L \sin \beta}{T} \quad \text{Eq. 28}$$

Substituindo a Equação 28 na 26, obtemos:

$$\cos\beta = \frac{gT^2}{4\pi^2L}$$

ou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\beta}{g}} \quad \text{Eq. 29}$$

Essa é a equação procurada. Note que, na Equação 29, que para um dado comprimento  $L$ , à medida que  $\cos\beta$  diminui, o período  $T$  se torna menor, e que quando o ângulo  $\beta$  aumenta, a tensão  $F=mg / \cos\beta$  também aumenta. Contudo, o ângulo  $\beta$  nunca pode ser igual a  $90^\circ$ !



## Atividade 6

Mostre que a condição  $\beta = 90^\circ$ , para o caso do pêndulo cônico seria fisicamente impossível, pois isso exigiria  $T = 0$ ,  $F = \infty$  e  $v = \infty$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

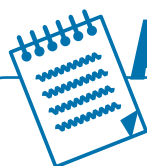
Você deve ter percebido que esse sistema denomina-se pêndulo cônico porque o fio de suspensão descreve um cone. Ele não poderia ser usado como um relógio muito bom porque o período dependeria diretamente de  $\beta$ , não?

# Determinação da massa da Terra

Como dissemos no início desta aula, o problema do pêndulo tem grande importância histórica para a ciência, em geral, e para a Física, em particular. Ele serviu para mostrar que a Terra gira e também para determinar a força de atração entre cargas elétricas e entre objetos massivos. Seu uso nesses dois casos está relacionado a um tipo de pêndulo chamado “pêndulo de torção”. Que é o que passaremos a analisar a seguir.

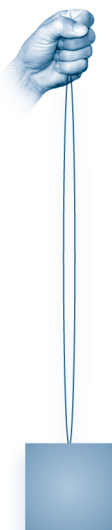
## O pêndulo de torção

Quando torcemos uma corda elástica aplicamos sobre ela um torque. A ação de torcer alguma coisa é muito comum no nosso dia-a-dia. As pessoas torcem panos molhados quando querem tirar a água deles e sabem também que quando param de torcer, a tendência natural é o movimento de distorção, que fará o corpo voltar à condição inicial.



## Atividade 7

Tente, usando um elástico tipo “liga de dinheiro”, construir um pêndulo de torção. Para isso, basta prender em uma das extremidades do elástico, um objeto massivo e segurá-lo na outra, como mostra a figura a seguir. Torça o elástico na parte próxima ao objeto e depois solte-o, mantendo a outra extremidade do elástico presa à sua mão. O que irá acontecer?



Você deve ter percebido que o pêndulo de torção gira em torno de um eixo vertical que coincide com o fio. Assim, é possível construir um pêndulo de torção utilizando, não um elástico, mas, por exemplo, um fio de nylon ou mesmo uma corda de violão. Além disso, temos uma constante de elasticidade associada ao movimento devido à torção

A equação da força (torque) para esse caso será:

$$\tau = I\alpha \quad \text{Eq. 30}$$

Note que a Equação 30 nada mais é que a Segunda Lei de Newton para o movimento circular, onde  $\tau$ , o torque, é o equivalente à força  $F$ ;  $I$ , o momento de inércia, é o equivalente à massa; e  $\alpha$ , a aceleração angular, é o equivalente à aceleração linear. Assim, podemos escrever a aceleração angular em termos do ângulo de giro  $\theta$  como:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{Eq. 31}$$

Mas, podemos escrever o torque como sendo:

$$\tau = -k\theta \quad \text{Eq. 32}$$

que é a Lei de Hook para essa situação, não é?

Das Equações 31 e 32, chegamos a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0 \quad \text{Eq. 33}$$

onde  $k$  é a constante elástica do fio. Ora, a Equação 33 já é bem conhecida nossa, ela já apareceu nesta aula de várias formas, não é? E sabemos que o período será dado por:

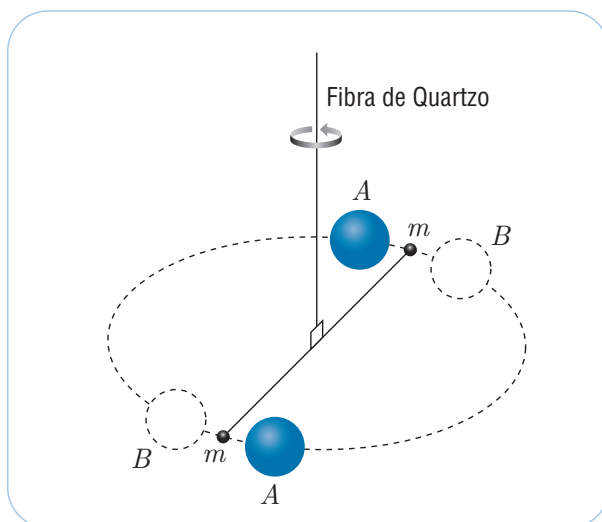
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad \text{Eq. 34}$$

Note que esse pêndulo tem a característica de depender apenas de parâmetros relacionados com sua construção e não depender de elementos externos.



# Determinando $G$

Muito bem, consideremos agora a situação de um pêndulo de torção que tem em uma das suas extremidades um halter, conforme mostra a Figura 8.



**Figura 7** – Esquema simplificado do experimento de Cavendish.

Inicialmente, temos duas esferas de massas iguais ( $m$ ) presas ao fio (atualmente, usa-se um fio de quartzo) que estão em equilíbrio e o fio está apenas distendido, como mostrado na Figura 7.

Aproximam-se então das duas massas ( $m$ ) outras duas esferas, que estão presas a um pedestal e quando elas estão suficientemente próximas (distância  $d$ ) observa-se uma torção do fio.

Essa torção é provocada pela interação gravitacional entre as esferas!

Lembre que a Lei da gravitação universal de Newton diz que,

Matéria atrai matéria na razão direta das massas e no inverso do quadrado da distância:

$$F_g \propto \frac{M_1 M_2}{d^2} \Rightarrow F_g = G \frac{M_1 M_2}{d^2} \quad \text{Eq. 35}$$

As massas das duas esferas que compõem o halter são conhecidas (poderiam ter sido pesadas em uma balança). Se, agora, aproximarmos de uma das esferas do halter uma outra esfera (de massa também conhecida) pode ser que elas interajam devido à Lei da gravitação universal de Newton, provocando assim uma torção no fio. Se conseguirmos medir essa torção provocada pela força de atração gravitacional entre as esferas, poderemos determinar a constante  $G$  da Lei da gravitação de Newton. Ora, conhecendo o valor de  $G$  podemos determinar a massa da Terra!

Isso foi feito por Cavendish (cientista Francês Henry Cavendish, 1731 – 1810), o primeiro cientista a determinar a massa da Terra e sua experiência conhecida como experimento de Cavendish é um dos seis experimentos mais importantes da história da ciência. Vejamos então como se faz.

Retomando a Figura 7, temos:

$$\tau = F_g \quad \text{Eq. 35}$$

Onde o torque devido à força elástica do fio é dado por:

$$\tau = F_e R \quad \text{Eq. 36}$$

Onde  $R$  é a distância entre o fio e a massa  $m$ , ou seja, metade da distância entre as duas massas  $m$ .

Note que ao aproximarmos as duas esferas  $M$  das outras duas esferas  $m$  temos de cada lado da barra uma força  $F_g$  (formando um binário, não é?), de modo que podemos escrever a seguinte relação:

$$2F_g = \tau \quad \text{Eq. 37}$$

Em 36  $F_e = k'\theta$



## Atividade 8

Na expressão  $F_e = k'\theta$ , quem é, fisicamente,  $F_e$ ,  $k'$ , e  $\theta$ ?

Claro que, agora, podemos escrever a expressão:

$$2F_c R - k'\theta = 0$$

De modo que:

$$F_g = \frac{k'\theta}{2R} \Rightarrow G \frac{Mm}{d^2} = \frac{k'\theta}{2R} \quad \text{Eq. 38}$$

Note que, exceto  $G$ , todos os outros parâmetros da Equação 38 podem ser determinados experimentalmente, ou seja,

$$G = \frac{k'\theta d^2}{2RMm} \quad \text{Eq. 39}$$

Esse procedimento, devido a Cavendish permitiu que ele obtivesse um valor para a constante  $G$  com um erro da ordem de 1% do valor que é obtido atualmente.



## Atividade 9

Em um experimento realizado no laboratório, um estudante repetiu a experiência de Cavendish e obteve os seguintes resultados experimentais:

$$K' = 8,263 \times 10^{-9} \text{ kgm}^2/\text{s}^2$$

$$d = 49,24 \text{ cm}$$

$$\theta = 8,4267 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$$

$$M = 3,5 \times 10^{-2} \text{ kg}$$

$$m = 0,567 \times 10^{-6} \text{ kg}$$

- a)** De posse desses valores, obtenha o valor de  $G$ . Em seguida, compare-o com o valor que conhecemos atualmente.
- b)** Como você já sabe o valor de  $G$  que utilizamos atualmente em nossas aulas é  $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ . Explique como aparece a unidade  $\text{Nm}^2/\text{kg}^2$  usada para definir  $G$ .

Agora que obtivemos o valor de  $G$ , podemos determinar a massa de nosso planeta e com isso, partir para a determinação da massa de outros corpos celestes. Para determinar a massa da Terra podemos fazer uso do conceito de peso.

Você deve estar lembrado que peso corresponde à força com que a Terra atrai os corpos para o seu centro. Acontece que “a força com que a Terra atrai um objeto para seu centro é a força gravitacional. Assim, o peso é uma medida da força de interação gravitacional entre a Terra e um corpo. Desse modo,

$$P = F_g \quad \text{Eq. 40}$$

Vamos então considerar uma maçã sob a ação do campo gravitacional terrestre. Da Equação 40, temos:

$$mg = G \frac{M_t m}{d^2} \quad \text{Eq. 41}$$

Na Equação 41,  $m$  é a massa da maçã,  $M_t$  é a massa da Terra, e  $d$  é a distância da maçã ao centro da Terra (você sabe o motivo pelo qual afirmamos isso? Tente lembrar e/ou pesquise!). ou seja,  $d$  é o raio da Terra cujo valor você já conhece de suas aulas de Ciências da Natureza e Realidade de Física e Meio Ambiente. Assim, podemos reescrever a Equação 40, como:

$$g = G \frac{M_t}{R^2} \quad \text{Eq. 42}$$

Você determinou o valor de  $g$ , no início de nossa aula, utilizando um pêndulo simples. Agora, chegou a hora de usar seu resultado para ajudar a determinar a massa da Terra. Como

$$M_t = \frac{gR^2}{G} \quad \text{Eq. 43}$$

Você deve ter obtido o valor  $g = 9,82 \text{ m/s}^2$  para a aceleração da gravidade. Por outro lado, já sabe que o raio da Terra é da ordem de  $6400 \text{ km}$  ( $6,37 \times 10^6 \text{ m}$ ) e portanto, pode, agora, determinar a massa da Terra.



## Atividade 10

Usando a Equação 43, determine a Massa da Terra.

Terminamos, assim, nossa aula com um ponto a favor do gênio humano, a partir de pêndulos e medidas “simples” de ângulos, massa e distâncias obtivemos a massa da Terra. Agora sabendo o período de rotação da Terra em torno do sol, podemos determinar a massa do Sol.

# Resumo

Nesta aula, você aprendeu sobre os diversos tipos de pêndulos e como determinar seus períodos. Aprendeu também como determinar o valor da aceleração local da gravidade utilizando um pêndulo simples. Finalmente, aprendeu como o pêndulo de torção leva ao experimento de Cavendish e como a partir deste é possível determinar a massa de nosso planeta.

## Autoavaliação

1

Explique o que se entende por um pêndulo simples.

2

O que vem a ser um pêndulo físico ?

3

Demonstre a Equação 26.

4

Você deve estar lembrado do lançamento do primeiro astronauta brasileiro ao espaço e deve ter percebido que dentro da nave havia um pêndulo que funcionava como acelerômetro, ou seja, o astronauta podia verificar olhando para ele em quais momentos a nave estava sendo acelerada ou não. Tais situações são importantes, por exemplo, na separação dos estágios dos foguetes.

Qual o comportamento do pêndulo deveria ser observado pelo astronauta sempre que a aceleração de foguete variasse?

5

O que é um pêndulo cônico? O que impede que ele seja utilizado como um relógio de pêndulo?

6

Explique cuidadosamente o experimento de Cavendish. Seria importante nessa hora você consultar também os livros de Física disponíveis no seu pólo e fazer pesquisas na Internet.

**7**

Sabendo que a Terra gira em torno do Sol em movimento periódico de período 365 dias e que a distância da Terra ao Sol é da ordem de 8 minutos luz, determine a massa do Sol.

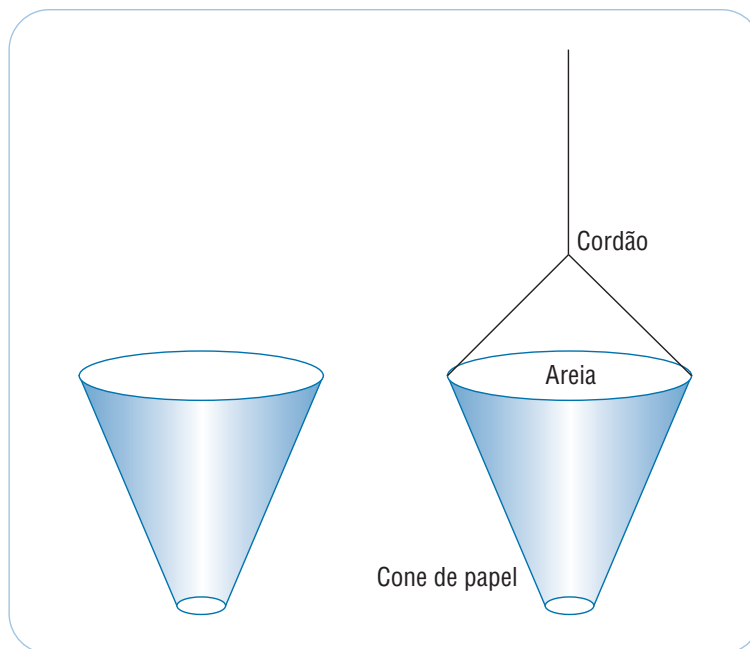
**8**

Construindo um pêndulo de Foucault: com essa atividade, pretendemos que você perceba que o movimento de um pêndulo pode não se dar sobre a mesma reta, mesmo que no começo ele oscile segundo uma reta. As oscilações que aparecem são vistas no chão como trajetória que se aproximam de movimentos “quase circulares”.

Material: Folha de papel, fita adesiva, linha ou cordão e areia.

Procedimento:

Com a folha de papel, construa um cone, como mostrado abaixo e deixe uma pequena abertura na parte inferior (por onde irá fluir lentamente a areia).



Em seguida, prenda o cordão ao cone e segurando a sua base, coloque a areia. Depois, ponha o pêndulo assim formado para oscilar, verificando o rastro que a areia deixa no chão. Você verificará que tal rastro não corresponde a uma linha reta. Isso ocorre devido ao movimento da Terra. Mas, realize o experimento, verifique quais as melhores condições para que ele funcione, encontre o tamanho ideal para o cordão, a quantidade de areia suficiente, e assim por diante. Ao término da experiência, faça um relatório. Lembre-se de que atividades desse tipo podem ser levadas para a sala de aula, mas antes, devemos testá-las exaustivamente.

# Referências

HALLIDAY; RESNICK, R.; KRANE, K. G. **Física 1**: mecânica. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

\_\_\_\_\_. **Física 2**: gravitação, ondas e termodinâmica. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

HEWITT, Paul G. **Física conceitual**. São Paulo: Bookman, 2002.

MCKELVEY, John P.; GROTCHE, Howard. **Física**. São Paulo: Ed. Harbra, 1979. v 2.

PAULI, Ronald Ulysses; MAUAD; Farid Carvalho; HEILMANN, Hans Peter. **Física 3**: ondas, acústica, óptica. São Paulo: E.P.U, 1980.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física**: mecânica: Sears e Zemansky. 10. ed. São Paulo: Addison- Wesley, 2003. v 1.

\_\_\_\_\_. **Física**: termodinâmica e ondas: Sears e Zemansky. 10. ed. São Paulo: Addison- Wesley, 2003. v 2.

# O fenômeno ondulatório

**Aula**

**3**



# Apresentação

**N**esta aula, você vai estudar o movimento geral de ondas e de suas características; vai ver uma abordagem sobre os conceitos de pulso e trem de ondas, de propagação, de superposição; e, por fim, vai estudar uma breve formulação matemática das ondas que serve de embasamento para todo o nosso curso. Boa aula!!

## Objetivos

- 1** Entender o conceito de ondas enquanto propagação de perturbações em um meio.
- 2** Compreender as características gerais dos fenômenos ondulatórios.
- 3** Entender a geração e a superposição de ondas.
- 4** Saber a formulação matemática da equação das ondas no caso unidimensional.



# Ondas

**A** definição mais simples de onda é aquela que diz **que uma onda é uma perturbação que se propaga** com o tempo no espaço. As ondas se caracterizam por um conjunto simples de parâmetros ao qual está relacionado às propriedades físicas mais importantes a elas associada.

Como você deve estar lembrado, essas propriedades são comprimento de onda, frequência e amplitude. Mudanças em algum ou alguns desses parâmetros alteram fundamentalmente a natureza do que estaremos observando. Assim, mudar a frequência significa poder tornar visível ou invisível uma onda. Alterar seu comprimento significa produzir ou não efeitos de difração em um dado obstáculo, e assim por diante. Mas o importante é que enquanto ondas é possível tratar matematicamente esse fenômeno com as mesmas ferramentas.

E, como já mencionamos, as ondas quanto à sua natureza, classificam-se em:

## a) Ondas mecânicas

## b) Ondas eletromagnéticas

E quanto aos modos de propagação, podem ser:

## a) Transversais

## b) Longitudinais

As ondas mecânicas necessitam de um meio material para se propagar. Sua propagação se dá através de **deformações elásticas** desse meio. No caso das ondas eletromagnéticas, é importante que você saiba que não há necessidade de um meio de propagação.

Quando falamos que um meio é elástico, estamos nos referindo à capacidade de quando deformado voltar às condições iniciais. Nesse sentido, um bom exemplo é a nossa atmosfera que tem entre suas importantes características a capacidade de propagar ondas e entre elas as ondas sonoras. Isso ocorre porque ela tem uma elasticidade muito grande, o que permite a propagação de ondas de diversos comprimentos de onda e amplitudes.

A velocidade de propagação das ondas mecânicas depende da natureza do meio. Assim, uma mesma onda terá velocidade de propagação diferente se o meio for um sólido, um líquido ou um gás.

A velocidade de propagação de uma onda depende:

## a) da densidade do meio

## b) da elasticidade do meio

Retomaremos esses conceitos quando formos determinar uma expressão para a velocidade de propagação de ondas.

# Pulsos e trens de ondas

Imagine a seguinte situação, um pingo de água caindo e gerando perturbação no meio onde esta se propaga, como mostra a Figura 1.



**Figura 1** – Pingo de água caindo e gerando ondas.

Se o intervalo de tempo entre os pingos for suficientemente longo, então antes que cada pingo atinja a água esta já terá voltado à situação de equilíbrio. Mas, o que acontece quando o pingo atinge a água?

Ele irá produzir uma perturbação no meio e esta irá se deslocar radialmente em todas as direções. Essa perturbação, isolada, é o que chamamos de pulso e o meio onde ela está se propagando é um meio elástico. Pois se deforma e ao final volta ao normal, e bi-dimensional, pois a perturbação irá se deslocar no plano. Note-se, ainda, que a perturbação se propaga formando na água círculos concêntricos e a fonte da perturbação está no centro.

De acordo com as características da fonte e do meio é possível gerar ondas que são esféricas, planas e até cilíndricas. As ondas planas são de especial interesse em física por ter uma representação matemática bastante simples.



## Atividade 1

- a)** Usando uma bacia com água, tente reproduzir o fenômeno descrito no texto, tanto em relação ao pulso quanto em relação ao trem de ondas.
- b)** Usando a situação onde você gera um trem de ondas, coloque na bacia algum objeto que pode flutuar como, por exemplo, uma cortiça ou um pedaço de isopor. Será que ele ficará no mesmo lugar enquanto a onda passa por ele? Que tipo de movimento o executa? Justifique sua resposta.

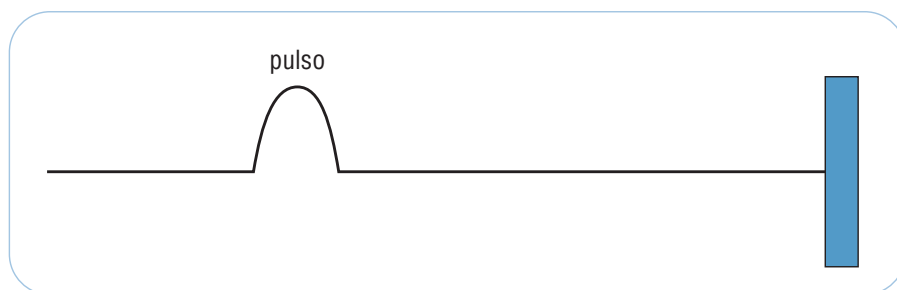
De seu experimento realizado na atividade 1, você pode ter verificado que a cortiça, o pedaço de isopor ou outro objeto qualquer que flutue praticamente não se move horizontalmente quando passa a perturbação, apenas se desloca na vertical, ou seja, uma onda não transporta matéria. No entanto, como você já viu nas aulas anteriores, a onda transporta energia.

## Pulsos e propagação de ondas

Passemos agora para uma situação um pouco mais simples, pois o movimento se dá a uma dimensão, que é o movimento de ondas em uma corda.

Quando fixamos uma das extremidades de uma corda e provocamos vibrações na outra, observamos que tais vibrações se propagam ao longo da corda e podem até voltar em nossa direção após ser refletida no ponto onde foi fixada.

Ao provocamos uma perturbação com apenas um movimento vertical na extremidade da corda, geramos o que se chama de um pulso. Um pulso tem a forma mostrada na Figura 2.



**Figura 2** – Um pulso como resultado de uma perturbação provocada em uma extremidade de uma corda esticada que tem a outra extremidade fixa.

Note que, se olharmos a Figura 2, tomando como referencial a nossa mão que segura a extremidade livre da corda, como uma foto da corda, esse pulso corresponderia a uma imagem instantânea, obtida em um tempo  $t$ . Desse modo, a posição  $r$  do pulso e, portanto, a propagação da perturbação poderia ser matematicamente representada por uma função da posição em um tempo  $t$  fixo, ou seja, algo do tipo:

$$Y = f(r, t)$$

Essa representa uma função de duas variáveis, o espaço e o tempo, por isso foi dito que uma onda é uma perturbação que se propaga no espaço (representado aqui pela variável  $r$ ) e no tempo (representado aqui por  $t$ ).

Para gerarmos um pulso como o mostrado na Figura 2, precisaremos fazer a corda vibrar na vertical.

Ou seja, temos uma fonte (nossa mão oscilando) de perturbação que irá emitir pulsos que irão se propagar através do meio (corda).

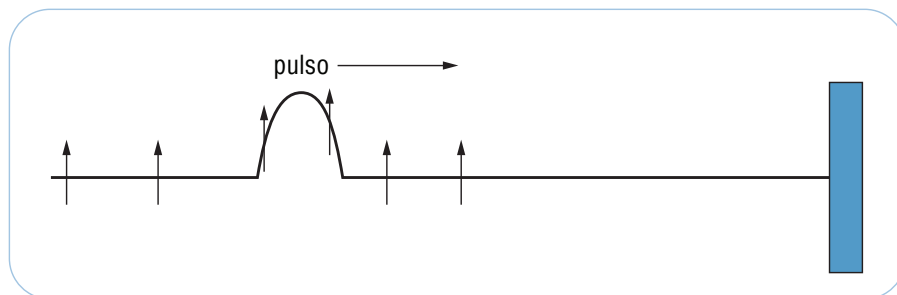


Figura 3 – Um pulso transversal se propagando para a direita.

A situação aqui apresentada será recorrente em nosso curso e será tratada sob diversas perspectivas. Nessa figura, vemos o pulso se propagando para a direita, na horizontal, enquanto a corda oscila verticalmente para a direção de propagação, isso corresponde à definição de um pulso ou onda transversal.

A questão da fonte é muito importante no estudo dos fenômenos ondulatórios, como você irá perceber ao logo de nossa disciplina, pois de sua natureza depende os efeitos que ela irá gerar.

Voltando ao pulso mostrado na Figura 3, a corda irá oscilar na direção vertical enquanto que o pulso irá se propagar na horizontal. Essa situação onde a oscilação é perpendicular à direção de propagação, tem um nome especial, chama-se **pulso (onda) transversal**.

Para exemplificar melhor essa situação, imagine vários instantâneos, tirados desse pulso. O resultado seria o conjunto de imagens mostrado na Figura 4:

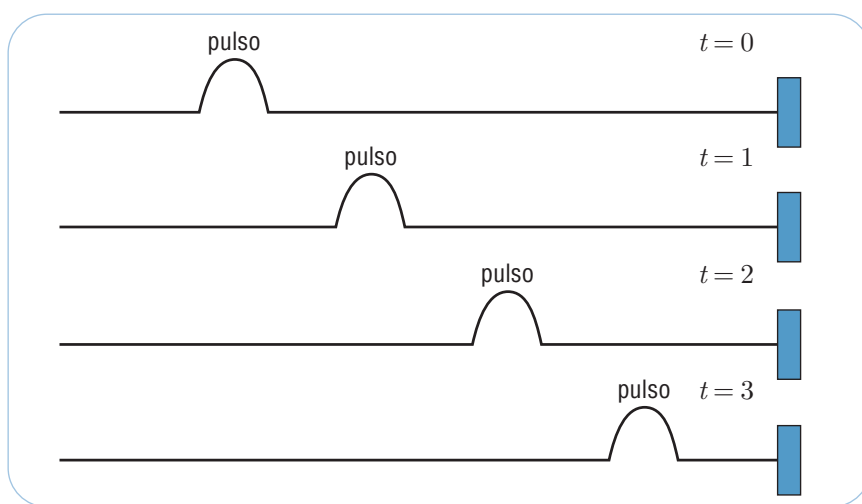


Figura 4 – Propagação de um pulso, da esquerda para a direita, em uma corda.

Note que, pela Figura 4, agora podemos afirmar que o pulso se desloca, sem se deformar, para a direita. E com isso, temos a informação sobre cada posição (a posição em uma dimensão, como é o caso do movimento sobre uma corda pode ser representada por “ $x$ ”) ocupada pelo pulso e o respectivo instante em que ele passa por cada uma dessas posições. Além disso, a diferença entre duas posições consecutivas e o tempo gasto para o pulso se deslocar entre elas nos dá a velocidade de propagação do pulso.

Se uma das extremidades está fixa, como é o caso da Figura 4, podemos perguntar o que acontece quando a onda ou o pulso atinge o ponto fixo da parede. Nesse caso, ela será refletida (reflexão e refração de ondas são temas que trataremos na aula 6 – Reflexão) e o pulso voltará, conforme a configuração da Figura 5.

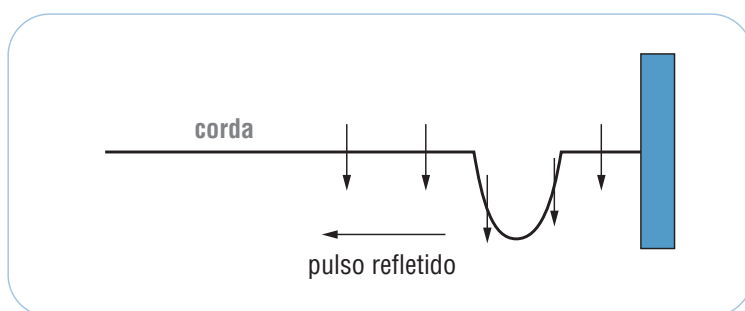


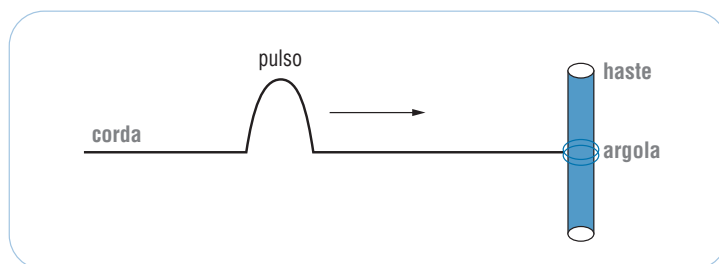
Figura 5 – Pulso refletido no caso de uma extremidade fixa.

Uma situação diferente acontece quando a “extremidade que seria fixa” pode se mover verticalmente. Por exemplo, se no lugar da parede fosse uma haste e a corda estivesse presa à haste por uma argola. Você seria capaz de dizer o que aconteceria com o pulso no instante em que ele atingisse a haste?

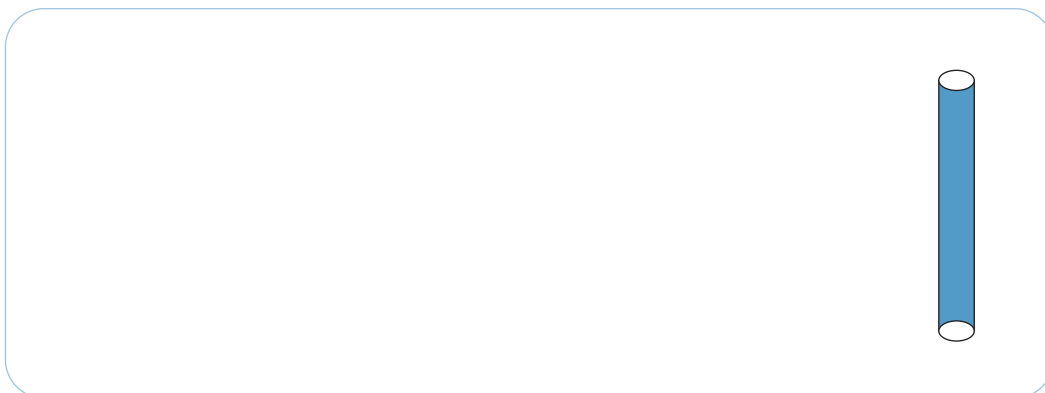


## Atividade 2

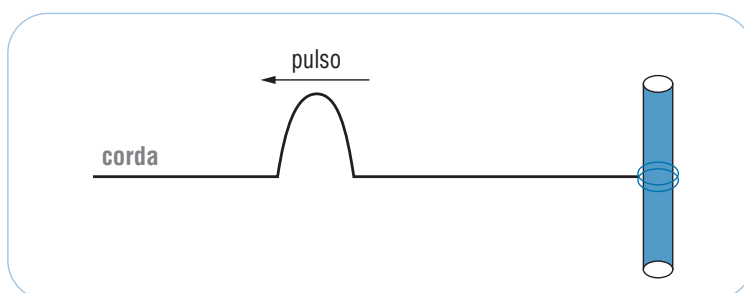
- a) A figura, a seguir, representa um pulso se propagando em uma corda, da esquerda para a direita. Na extremidade direita, temos a corda fixa a uma argola que pode se mover ao longo da haste que é fixa. Faça um desenho representando o movimento do pulso em dois instantes. Primeiro, assim que ele atingir a argola e, segundo, após ele ser refletido.



**b)** Desenhe, neste espaço, sua resposta utilizando o desenho da haste. Depois, justifique sua resposta. (Seria interessante você não passar para a página seguinte sem antes ter concluído esta atividade).



Você deve ter respondido na atividade que acabou de realizar que a argola irá se mover verticalmente sob a ação do pulso, ou seja, ela irá subir e descer sob a ação da perturbação. Esta, não tendo mais para onde ir, será refletida, retornando na mesma orientação que chegou. Isto é:



Pois a corda não está fixa na haste e a argola se moverá livremente sob a ação da perturbação.

Agora você deve estar percebendo a importância da natureza e a característica das fontes na produção dos fenômenos ondulatórios. Com a fonte adequada se produz um pulso, uma onda isolada ou mesmo um trem de ondas. Se a fonte gera a perturbação de modo aleatório, então ela irá gerar pulsos ou ondas isoladas. Enquanto que se ela gerar a perturbação em um processo periódico, ela irá gerar um trem de ondas.

A função que descreve a propagação de um pulso ou de uma onda que se desloca da esquerda, como mostrado no final da aula, para a direita será:

$$y = f(x - vt)$$

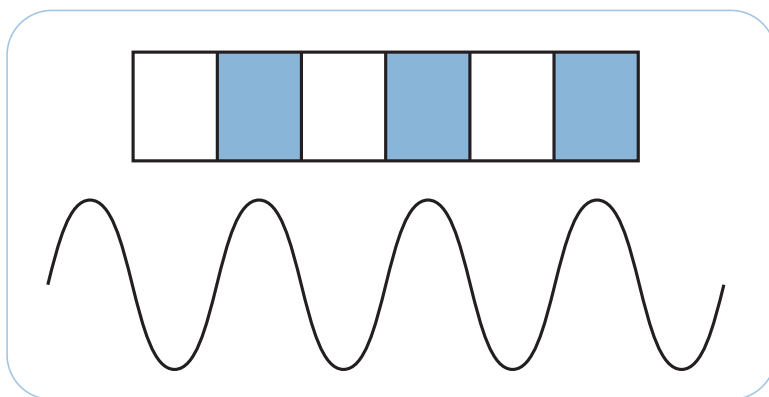
Onde  $v$  é a velocidade de propagação do pulso ou da onda, como veremos a seguir.

Essa equação significa dizer que se viajamos a mesma velocidade  $v$  da onda, observaremos sempre a mesma perturbação.

**Observação** – Se o pulso estiver se deslocando para a esquerda, ou seja, na direção contrária a da apresentada na Figura 4, a equação do movimento será dada por:

$$y = f(x - vt)$$

O fato de existir uma denominação especial para um pulso que tem sua propagação perpendicular à sua vibração (oscilação), significa que deve existir um outro modo de propagação. De fato há. Podemos ter uma propagação na mesma direção da oscilação. Nesse caso, temos uma onda ou um pulso longitudinal. Um bom exemplo desse tipo de onda é a onda sonora. Esta, como você já sabe, se propaga por contração e expansão do meio, de modo que em um dado instante “veremos” o meio como uma série de regiões de alta e de baixa densidades. Uma representação dessa situação é mostrada na Figura 6.

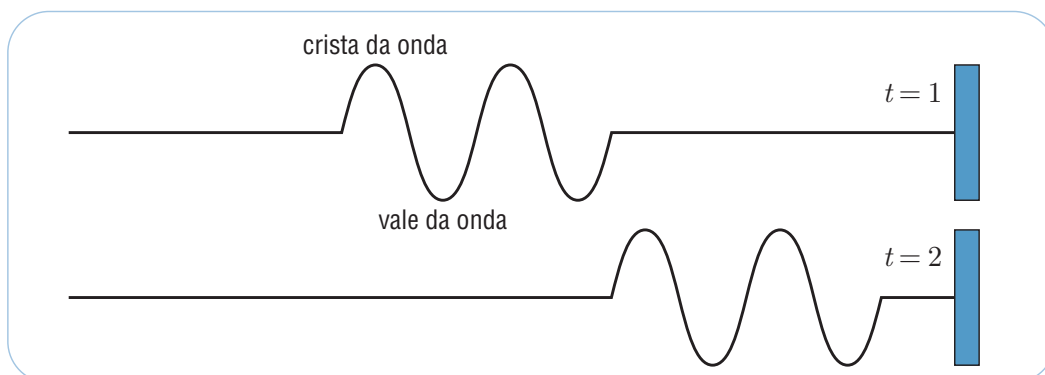


**Figura 6** – Regiões de máximo e de mínimo da onda representam regiões de condensação e de rarefação do ar em uma onda sonora.

Nessa figura (Figura 6), estamos representando a região que foi comprimida, e, portanto, tem maior quantidade de partículas por unidade de volume, pela região de máximo da onda e a zona de rarefação pela região de mínimo da onda. Se a onda está se propagando da esquerda para a direita, ela estará comprimindo e distendendo o ar nessa mesma direção, por isso é chamada de onda longitudinal. Você agora pode ter percebido o poder da representação ondulatória. Lá na frente, quando tratarmos de difração, voltaremos a representar regiões com maior e menor densidades “de alguma coisa”, como a onda e as cristas serão as zonas de maior densidade.

Do que discutimos até agora você deve ter compreendido, entre outras coisas, que o pulso é apenas uma parte da onda. Uma onda ou um trem de ondas é formado por pulsos.

A Figura 7 mostra uma onda se propagando, observada em dois instantes distintos pelo mesmo observador, mostrando que após sua passagem o meio volta a condição inicial.

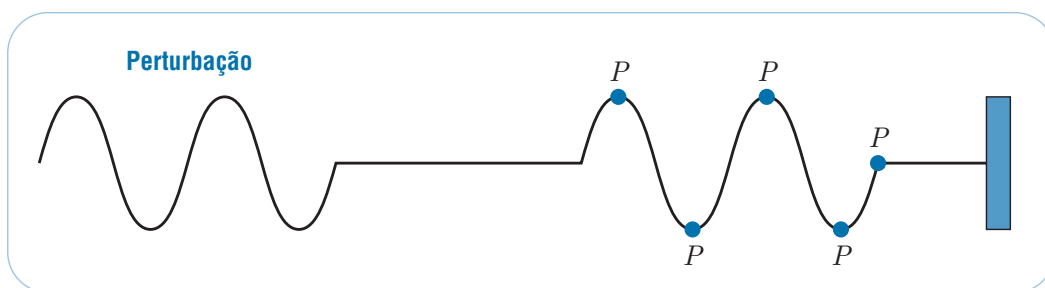


**Figura 7** – Onda em uma corda se propagando da esquerda para a direita.

Na Figura 7, nota-se que o que é observado em  $t = 2$  é exatamente igual ao que é mostrado em  $t = 1$ . Apenas deslocado na direção de propagação da onda ( $x$ ), ou seja, é que vemos o trem de ondas em duas posições distintas, o que permite calcularmos a velocidade de propagação da onda. Por outro lado, podemos também observar a evolução temporal da onda, isto é, fixamos o espaço e acompanhamos no tempo o que acontece. É como se tivéssemos em uma janela e ficássemos observando as ondas passarem. Como a janela é fixa, o que teremos é o comportamento da onda com o passar do tempo.

Existe uma íntima relação entre o que ocorre em um ponto  $P$  no espaço e o que ocorre na fonte que gera a perturbação que irá atingir o ponto  $P$ . Para compreendermos melhor essa afirmação, vamos retomar a Figura 7.

Tomemos, inicialmente, uma corda esticada e marquemos, digamos com uma fita amarrada, um ponto  $P$  situado a uma distância  $x$  da origem onde será gerada a perturbação. Isso está ilustrado na Figura 8.



**Figura 8** – Ponto fixo em uma corda, oscilando devido à passagem de uma perturbação.

Note que nessa figura, o eixo horizontal corresponde ao tempo, pois espacialmente o ponto será deslocado apenas verticalmente.

Você pode retomar a Figura 1 da aula 1 (Oscilações e movimento periódico) e observar que enquanto a onda passa, a rolha sobe e desce na água, apresentando apenas movimento vertical. Ou seja, o movimento real de  $P$  ou da rolha será subindo e descendo durante a passagem da onda.

Provocada a perturbação, esta atingirá o ponto  $P$  após se propagar durante um intervalo de tempo  $\tau$  (letra grega, lê-se tau). Com isso, a velocidade de propagação da onda na corda será dada por:

$$v = \frac{x}{\tau}$$

Isso significa que após um intervalo de tempo  $\tau$ , a fita que está amarrada em  $P$  repetirá o mesmo movimento da fonte. Ou seja, existe um certo atraso entre a geração da perturbação e ela atingir o ponto  $P$ , dado por:

$$\Delta T = t - \tau$$

E o movimento vertical do ponto  $P$  irá obedecer à equação:

$$Y = A \cos(\omega \Delta t)$$

Que pode ser reescrita como:

$$Y = A \cos \omega t$$



## Atividade 3

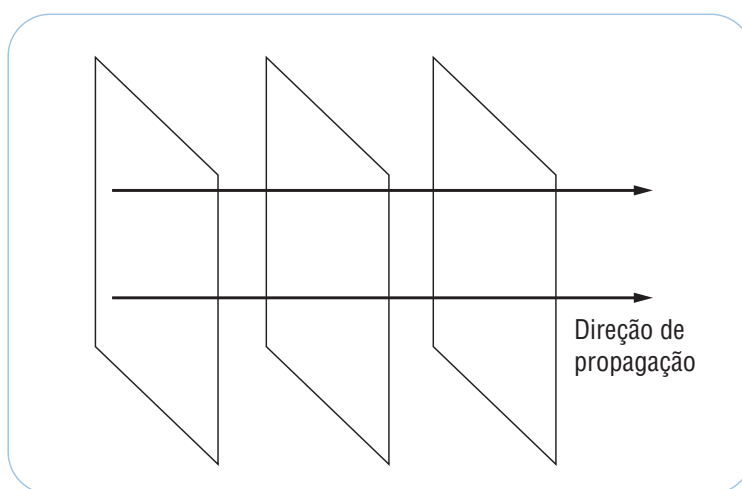
Complete as sentenças a seguir, a partir dos conceitos que discutimos até aqui.

As ondas transportam \_\_\_\_\_, mas não transportam \_\_\_\_\_ e elas se propagam tanto no \_\_\_\_\_, como é o caso das ondas eletromagnéticas \_\_\_\_\_, quanto em diversos \_\_\_\_\_, como é o caso das ondas sonoras. Aliás, as ondas sonoras são ondas tipicamente \_\_\_\_\_ enquanto que as eletromagnéticas são \_\_\_\_\_. Finalmente, são elementos de uma onda, quer seja mecânica, quer seja eletromagnética, o \_\_\_\_\_, a \_\_\_\_\_ e o \_\_\_\_\_.

# Ondas harmônicas monocromáticas

Ondas que podem ser expressas por funções trigonométricas tipo seno e/ou co-seno são chamadas de ondas harmônicas. Além disso, se a onda se propaga de tal modo que seu comprimento de onda não muda com o tempo, então dizemos que esta onda é monocromática (mono = uma + cromática = cor, literalmente, seria onda de uma única cor, mas como a cor está associada ao comprimento de onda, ter uma só cor ou ter fixo um comprimento de onda são coisas equivalentes).

Um caso interessante que passaremos a abordar agora é o caso das ondas planas monocromáticas, cuja representação geométrica pode ser dada pela Figura 9:



**Figura 9** – Uma onda plana tem todos os pontos de vibração situados sobre um mesmo plano.

Em uma onda plana todas as vibrações ocorrem sobre um mesmo plano. Esse tipo de onda também é chamada de **plano-polarizada** (linearmente polarizada). O conceito de ondas planas é muito utilizado em física, aparecendo em ótica e em eletromagnetismo (os campos elétricos e magnéticos são representados por ondas planas). Matematicamente, podemos escrever a onda plana como:

$$Y(x,t) = A \cos(kx - vt)$$

E, portanto, para  $t = 0$ ,

$$Y(x,t) = A \cos(kx - vt)$$

Onde  $A$  é a amplitude da onda e  $k$  é um número inteiro chamado número de propagação. Podemos ainda utilizar as seguintes relações: a frequência angular e o número de onda e o número de propagação  $K$ .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\text{frequência angular } \omega)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{número de propagação})$$

Além disso, como a velocidade de propagação da onda  $v$  é dada por:

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \lambda f$$

$$K = \frac{1}{\lambda}$$

Note que do mesmo modo que **a frequência é o inverso do período, o número de onda é o inverso do comprimento de onda.**

Usando agora o formalismo, bastante comum de se trabalhar com exponenciais, para representar ondas planas, temos que:

$$P(x, t) = A \exp i(kx - \omega t), \text{ onde}$$

$$i = \sqrt{-1}, \text{ e que se pode obter a partir de}$$

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x$$

Esse formalismo, você aprendeu a usar na disciplina de Cálculo III, se necessário retome seu material dessa disciplina e faça uma breve revisão sobre este tema.

## Propagação de pulsos numa corda e superposição de ondas

A propagação de pulsos numa corda, como você verá em mais detalhes na aula 8 (Interferência), pode gerar algumas situações bastante interessantes que redundam em um fenômeno chamado de superposição.

Vamos encerrar esta nossa aula tratando de um tema mais ameno, ou seja, dos fenômenos relacionados às combinações de ondas.

Todos nós estamos bem acostumados com o que acontece em um ambiente fechado, por exemplo, uma sala de aula, quando todo mundo começa a falar “ao mesmo tempo”. Nessa situação, dizemos que não estamos entendendo nada e pedimos para que cada um fale de uma vez, não é? Mas, por que acontece isso? A Física consegue explicar bem esse fenômeno. Temos aí uma superposição de ondas sonoras, e como a soma é aleatória, acaba por gerar novas ondas que não possuem significado para nosso cérebro, ou seja, ruído.

Quando ondas ou trem de ondas interagem, ou seja, passam umas pelas outras, temos um fenômeno chamado interferência (esta palavra você já ouviu bastante, não é?). No nosso dia-a-dia, as interferências aparecem para “prejudicar” o som que estamos escutando ou a imagem que estamos vendo, isso corresponde à interferência destrutiva, mas existem também interferências construtivas, onde o resultado final é uma amplificação da situação inicial, por exemplo.

Vamos olhar um pouco esses fenômenos que nada mais são que casos particulares de uma situação mais geral que é o da superposição. Imagine duas ondas se propagando em sentidos contrários ao longo de uma corda. Quando elas se encontrarem irão se sobrepor e o resultado será, durante o tempo em que estão passando uma sobre a outra, uma onda resultante cuja amplitude será dada pela soma em cada ponto das amplitudes de cada onda.

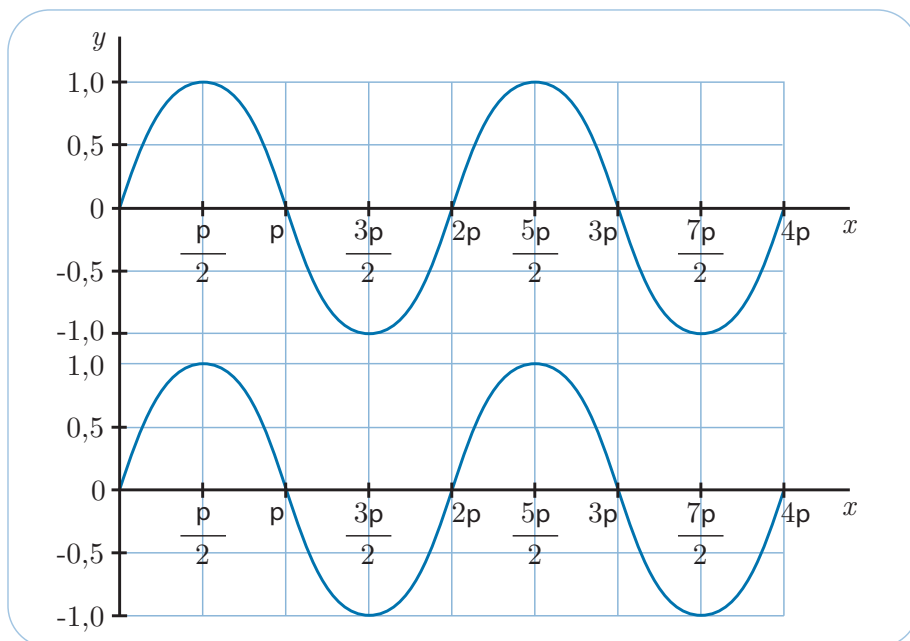
Como exemplo, veja a situação a seguir:

## Exemplo 1

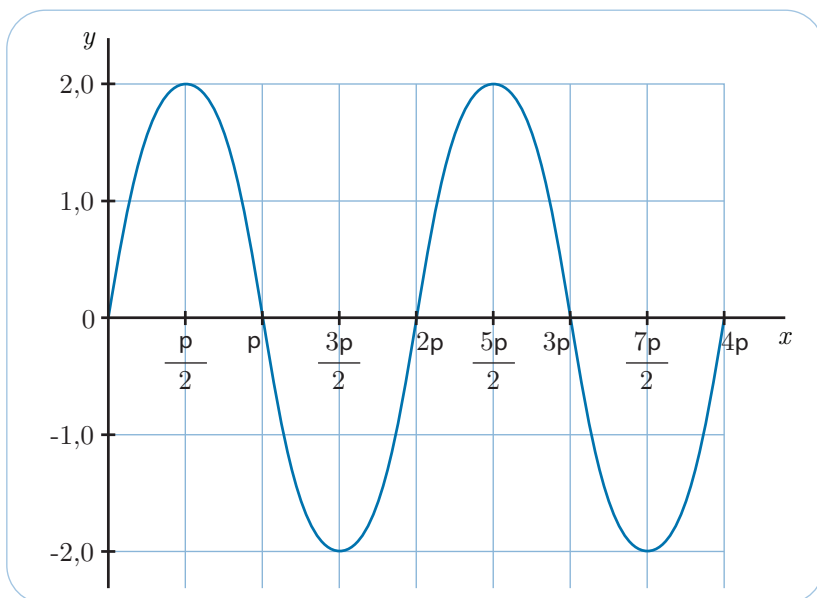
Duas ondas de mesma amplitude se propagam em direção contrária. Quando estiverem uma sobre a outra, qual será a forma da perturbação resultante nesse instante?

### Solução

Vamos colocar, em uma mesma grade, as duas ondas no instante em que se sobrepõem.



Somando-se as duas ondas, temos:

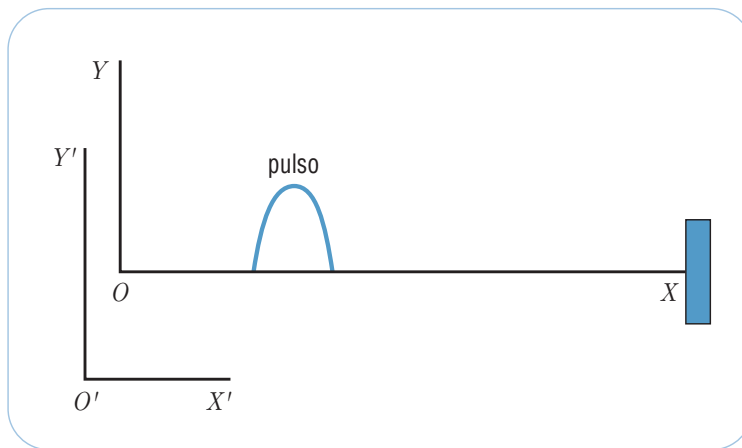


Com isso, chegamos a um resultado geral muito importante que é o fato de que a perturbação que chega em um ponto corresponde à soma das perturbações que atingiriam o mesmo ponto se cada perturbação viesse de uma fonte distinta. Note que a amplitude da onda resultante é duas vezes maior que a das ondas iniciais. Você esperava esse resultado? Acho que sim, pois estamos somando ponto a ponto as duas ondas e como elas são exatamente iguais e estão com a mesma forma em cada ponto, o efeito final será a soma delas. Tal situação corresponde ao que chamamos de **ondas em fase**. Quando isso não ocorre, dizemos que as ondas estão fora de fase ou defasadas.

**Atenção!** Sugerimos que antes de continuar com o estudo desta aula, você faça o exercício 4 da autoavaliação.

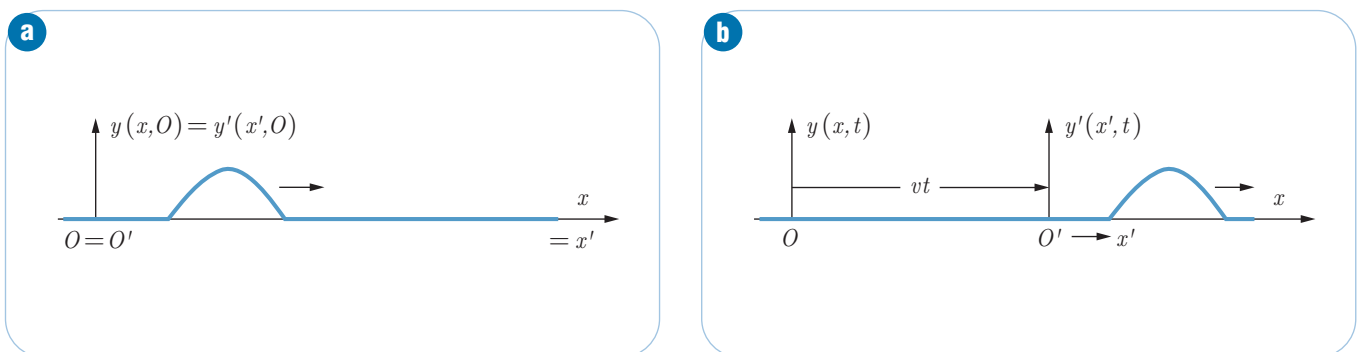
Trataremos agora mais detalhadamente da formulação matemática das ondas em uma dimensão, formalizando os conceitos que apresentamos até aqui.

Inicialmente, vamos rever a Figura 2 utilizando dois referenciais inerciais a partir do qual estudaremos a evolução espacial e temporal do pulso. Ou seja, um sistema  $XOY$  fixo e um outro  $X'O''Y'$  que se move acompanhando o movimento do pulso, como mostra a Figura 10.



**Figura 10** – Dois sistemas de coordenadas  $X0Y$  e  $X'0'Y'$ .

Vamos imaginar que no instante inicial, quando começamos nosso experimento com o pulso, ou seja, em  $t = 0$ , os dois sistemas de coordenadas coincidem, portanto as posições  $O$  e  $O'$  estão superpostas. Mostramos isso na situação (a) da Figura 11.



**Figura 11** – Um pulso de onda observado de dois referenciais: um fixo e outro que se move acompanhando o movimento do pulso.

Assim, acompanhando a onda em  $O'x'y'$ , que coincide com  $Oxy$  para  $t = 0$ , mas se desloca com a mesma velocidade  $v$  da onda ao longo de  $Ox$ , verificamos que o perfil da onda não muda com o tempo, pois se estará vendo sempre a mesma configuração. Logo, nesse referencial:

$$y'(x', t) = y'(x', 0) = f(x') \quad \text{Eq. 1}$$

e portanto,  $Y'(x', t)$  é uma função somente de  $x'$ . Observe que no instante  $t$ , o referencial  $X'0'Y'$  terá se deslocado em relação a  $X0Y$ . Ou seja, a origem  $O'$  com relação ao referencial  $Oxy$  está na posição  $x$ , dada por  $x = vt$ .

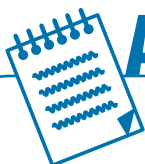
Então, um ponto cuja coordenada é  $x$ , no referencial  $O'x'y'$ , terá coordenada  $x' = x - vt$ , enquanto que  $y' = y$  (isto é, a transformação de Galileu). Então, no referencial original:

$$y(x, t) = f(x - vt) \quad \text{Eq. 2}$$

Como já havíamos comentado no início da aula, lembra? A Equação 2 descreve uma onda progressiva que se propaga para a direita com velocidade  $v$ .

Note que  $y$  é uma função qualquer que depende de  $x$  e de  $t$ . Por exemplo,

$$y(x, t) = \cos[k(x - vt)].$$



## Atividade 4

Considere um pulso que se propaga para a esquerda, como mostrado na figura a seguir.



Mostre, usando o procedimento anteriormente exposto, que podemos igualmente descrever uma onda progressiva que se propaga para a esquerda:

$$y(x, t) = g(x + vt) \quad \text{Eq. 3}$$

(Dica: troque  $v$  por  $-v$ . Você é capaz de justificar esta dica?)

# A equação de ondas unidimensionais

Agora estamos prontos para deduzir a expressão matemática da equação da onda. Então, lápis e papel à mão e vamos em frente!

Consideremos a Equação 2 de uma onda progressiva que se propaga para a direita:

$$y(x, t) = f(x'), \quad x' = x - vt \quad \text{Eq. 4}$$

Para encontrar a equação de movimento associada com a propagação da onda, vamos calcular a aceleração num dado ponto  $x$ . A velocidade e a aceleração são calculadas derivando  $y(x, t)$  em função do tempo. Como  $y$  é função de duas variáveis, fixa-se  $x$  e deriva-se  $y$  com relação ao tempo, ou seja, a derivada com relação a  $t$  é uma **derivada parcial**.

No caso da corda que estamos tratando aqui, a velocidade com que o ponto  $x$  se desloca verticalmente na direção  $y$  no instante  $t$  é:

$$\text{velocidade} = \frac{\partial}{\partial t} y(x, t), \quad \text{Eq. 5}$$

e a aceleração:

$$\text{aceleração} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t). \quad \text{Eq. 6}$$

Pela Equação 4,  $y$  só depende de  $t$  através da variável  $x' = x - vt$  (função de função). Assim, as derivadas são calculadas pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dt} = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \frac{df}{dx'}, \quad \text{Eq. 7}$$

onde

$$\partial x' / \partial t = \frac{\partial}{\partial t} (x - vt) = -v.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{df}{dx'} \right) = -v \frac{d}{dx'} \left( \frac{df}{dx'} \right) \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{=-v}, \quad \text{Eq. 8}$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dx'^2}. \quad \text{Eq. 9}$$

Mas, como

$$\partial x' / \partial x = \frac{\partial}{\partial x} (x - vt) = 1,$$

temos:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{df}{dx'}$$

que implica

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx'^2} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dx'^2}. \quad \text{Eq. 10}$$

Comparando a Equação 9 com a Equação 10, vemos que  $y(x, t)$  satisfaz a equação:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \text{Eq. 11}$$

que se chama **equação de onda unidimensional** e é uma das equações fundamentais da Física.

A equação de ondas unidimensional é uma equação a derivadas parciais linear de 2ª ordem.



## Atividade 5

- a)** Nas equações acima, vocês viram aparecer em várias delas, símbolos de derivadas totais, como por exemplo,  $\frac{df}{dt}$ , e símbolos de derivadas parciais, como por exemplo,  $\frac{\partial f}{\partial x'}$  ou  $\frac{\partial x'}{\partial t}$ . Lembrando-se das aulas de cálculo, por que nas equações anteriores apareceram derivadas parciais e totais numa mesma expressão?
- b)** Deduza, novamente, a equação de onda para o caso de uma onda se propagando para a esquerda (veja Equação 3). Isto é, mostre que  $y(x,t) = g(x'')$  com  $x'' = x + vt$  também é solução da equação de onda unidimensional.

Agora que chegamos à expressão matemática da equação da onda, vamos então ver diferentes situações onde a descrição do fenômeno ondulatório obedece a uma equação do mesmo tipo que a Equação 11.

Apesar de termos obtido a Equação 11 para um pulso em uma corda, ela é uma ferramenta muito poderosa e se aplica a diversas situações. Um caso interessante de aplicação de uma equação semelhante a 11, é, por exemplo, a propagação de calor em uma barra metálica.



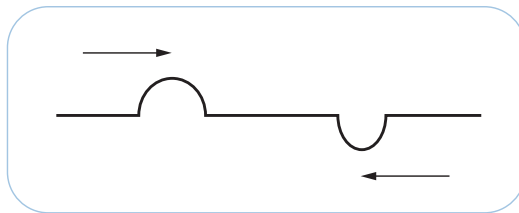
# Resumo

Nesta aula, você estudou os fundamentos da propagação de ondas em um meio físico. É importante você perceber que embora tenhamos nos concentrado em um único meio e em uma dimensão, todo o nosso trabalho pode ser entendido para outros meios de propagação e outras dimensões. Você estudou ainda a propagação e a superposição de ondas e viu, por fim, a formulação da equação de ondas.

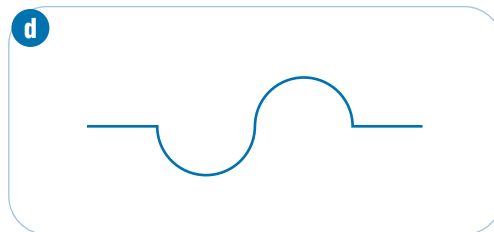
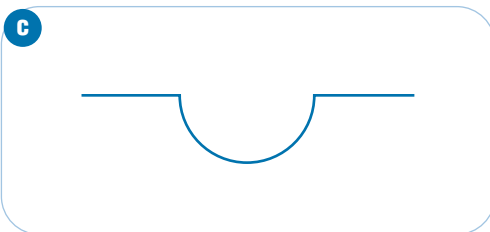
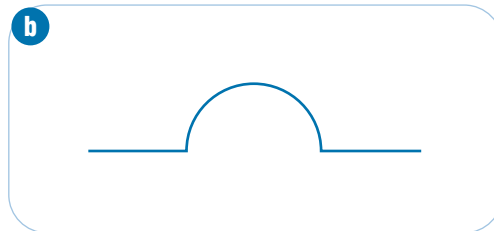
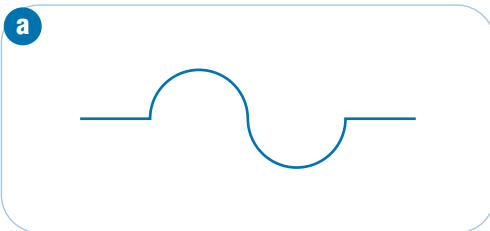
## Autoavaliação

1

Considere, na figura a seguir, dois pulsos de amplitudes distintas se movendo um em direção ao outro.



Qual das opções mostradas a seguir melhor representa a forma do pulso resultante no momento em que eles se encontrarem?



2

Suponha que os dois pulsos mostrados na questão 1 se movam um em direção ao outro com velocidades de 8,0 m/s e -12 m/s, respectivamente. Nessa situação, após eles terem passado um pelo outro, qual deve ser a velocidade de cada um deles? Justifique sua resposta.

3

Mostre que a equação

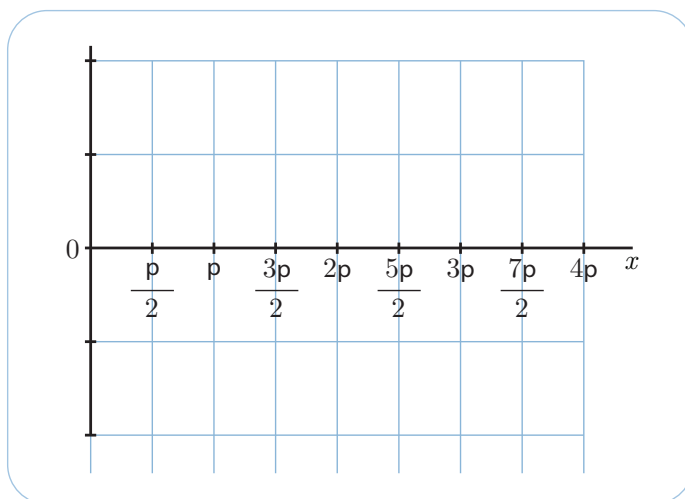
$$Y(x, t) = A \cos(2\pi w - wt)$$

é solução da equação de onda (Equação 11), se:

$$v = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$$

4

Considere duas ondas como as mostradas na figura a seguir. Obtenha a onda resultante devido à superposição dessas ondas. Use a escala adequada e a grade fornecida.



## Referências

ENSINO DE FÍSICA ONLINE. Ótica: básico. 2007. Disponível em: <efisica.if.usp.br/optica/basico/prisma/exemplos/>. Acesso em: 12 nov. 2008.

HEWITT, Paul G. **Física conceitual**. São Paulo: Bookman, 2002.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica: fluidos, oscilações, ondas e calor**. 4. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2002. v 2.

SERWAY, R. A.; JEWETT JÚNIOR, J. W. **Princípios de física**. São Paulo: Ed. Thomson, 2003. v 4.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física: ótica e física moderna: Sears e Zemansky**. 10. ed. São Paulo: Addison- Wesley, 2003. v 4.

# Equação da onda e energia no movimento oscilatório

Aula

4

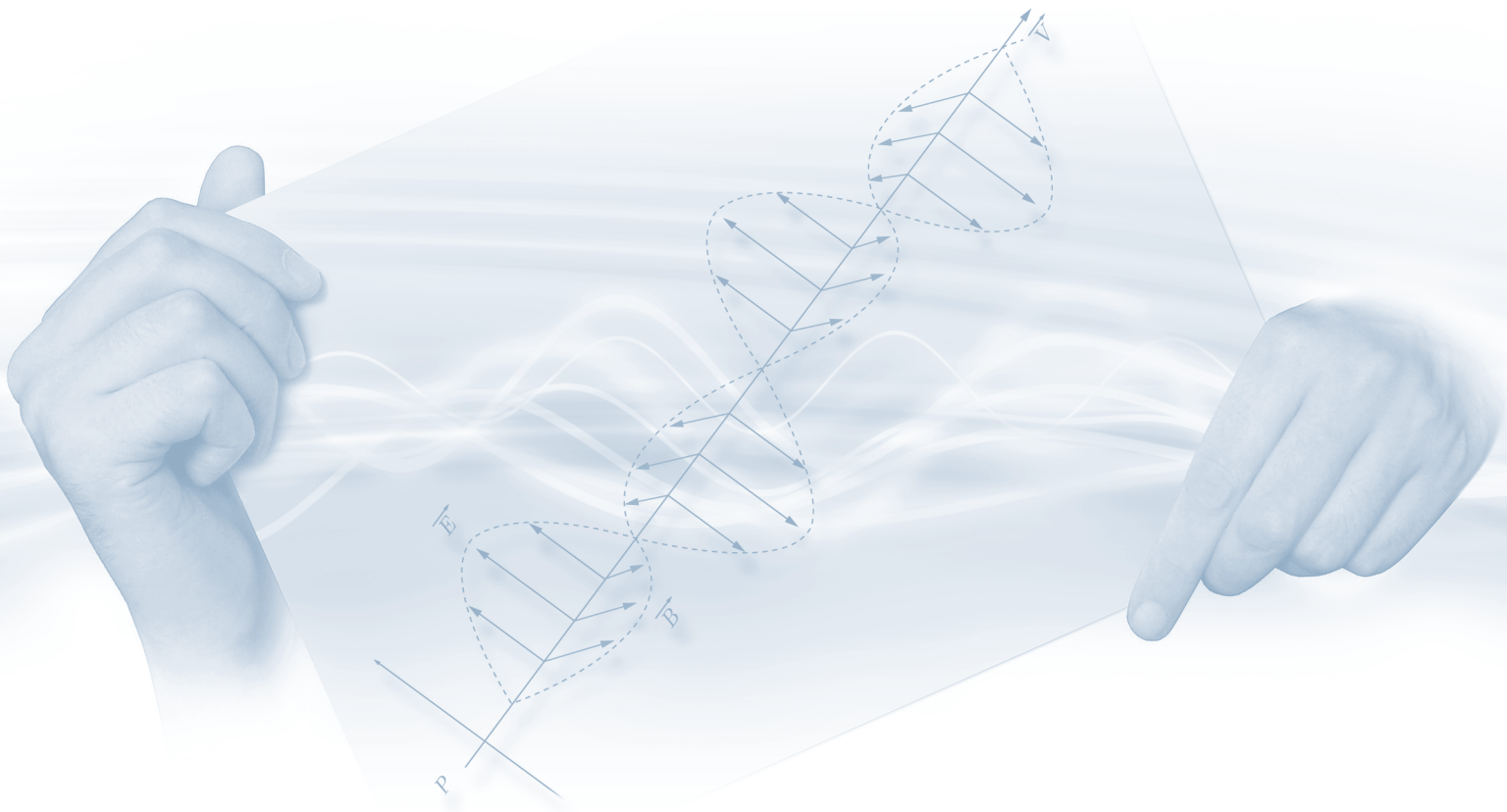


# Apresentação

Nesta aula, você vai ver que, do ponto de vista quantitativo, as ondas de natureza e propriedades diferentes seguem o mesmo tipo de equação matemática com soluções parecidas, que são funções que descrevem o seu comportamento ondulatório.

## Objetivos

- 1** Entender o formalismo envolvido na descrição do movimento de ondas numa corda.
- 2** Explicar a propagação e o transporte de energia em ondas sonoras.
- 3** Identificar a formulação matemática de ondas luminosas, o significado físico de seus termos e os mecanismos de propagação de energia a elas associado.



# Questões iniciais

**V**ivemos num mundo de sons e cores, que chegam até nós como energia que se propaga na forma de ondas sonoras e luminosas, as quais em alguns aspectos são parecidas. A energia da luz do Sol chega até a Terra aquecendo-a e dando vida. A energia do estrondo de um jato, ao quebrar a barreira do som, pode fazer tremer as paredes e até quebrar as vidraças.

Em outros aspectos, som e luz são diferentes. O som só pode se propagar através da matéria: gases, como o ar; líquidos e sólidos. A luz, além de se propagar em todos esses meios (desde que sejam transparentes!), também pode se propagar no vácuo. A luz das estrelas que vemos a noite viajou muito, algumas até por milhares de anos antes de chegar aos nossos olhos.

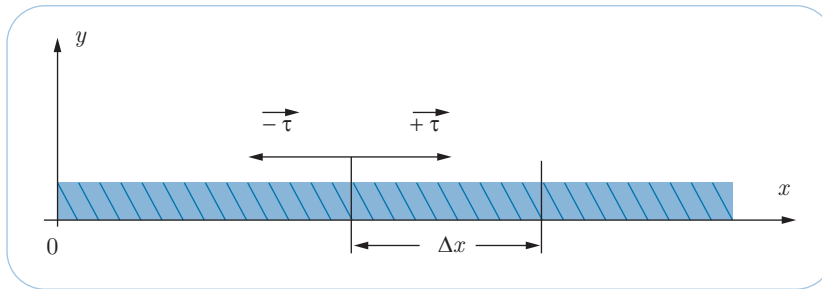
O trovão e o relâmpago podem ser percebidos a distância, mas vemos primeiro o raio porque a velocidade da luz é muito maior que a velocidade do som.

Apesar de toda essa diversidade, do fato das ondas possuírem naturezas ou propriedades diferentes, vamos ver agora o princípio dessa diversidade de ondas, sua equação e sua energia no movimento oscilatório.

## A equação das cordas vibrantes – caso uni-dimensional

**N**a aula passada, (**O Fenômeno Ondulatório**) chegamos à expressão matemática da equação da onda. Agora vamos então estudar diferentes situações onde a descrição do fenômeno ondulatório obedece a uma equação de onda (equação 11 da referida aula). Durante esta aula, diversas vezes vamos nos referir à aula 3, assim seria importante você tê-la em mãos enquanto estuda esse novo material.

Vamos iniciar esta aula considerando vibrações transversais de uma corda de comprimento  $L$ , distendida, fixa em ambas as extremidades. Esta é uma situação semelhante a das cordas de um violão e está representada pela Figura 1.



**Figura 1** – Corda na posição de equilíbrio horizontal, tomado como sendo a direção  $Ox$ .

Para descrever o comportamento de nosso sistema (corda esticada), precisamos, como sempre, encontrar o conjunto de forças que estão envolvidas na questão.

Estamos considerando que a posição de equilíbrio horizontal da corda corresponde à direção  $Ox$  (Figura 1). O fato da corda estar em equilíbrio significa que cada ponto da corda está submetida a mesma tensão  $\bar{\tau}$ .

Assim, uma porção da corda à esquerda de um ponto qualquer dado exerce sobre a porção direita uma força  $-\bar{\tau}$  dirigida para a esquerda, que é equilibrada pela força  $\bar{\tau}$ , com a qual a porção da direita atua sobre a da esquerda. Isso define a tensão  $\bar{\tau}$  de equilíbrio, constante ao longo da corda, que é suposta uniforme, ou seja, de densidade linear constante.

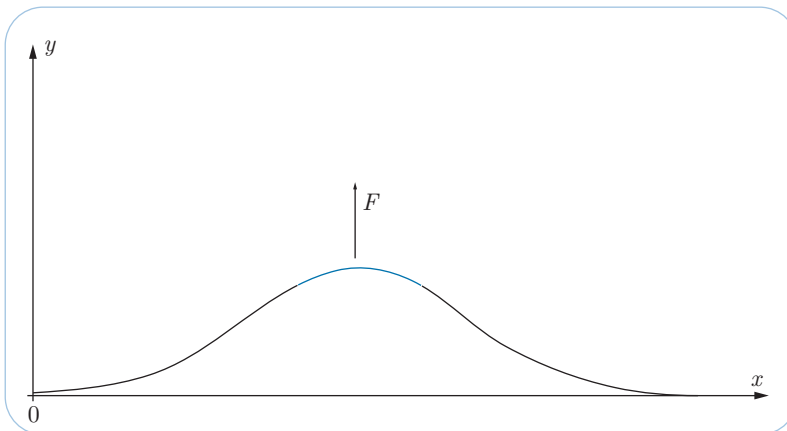
Dizer que a corda possui densidade linear constante é afirmar que cada pedaço  $\Delta x$  da corda tem a mesma densidade que a corda total. Denotando então a densidade linear por  $\mu$ , temos um elemento de comprimento infinitésimo  $\Delta x$  da corda possui então a massa

$$\Delta m = \mu \Delta x \quad \text{Eq. 1}$$

Note que, do mesmo modo que definimos densidade, podemos definir uma grandeza semelhante, a densidade linear, como

$$\mu = \frac{m}{L} \quad \text{Eq. 1a}$$

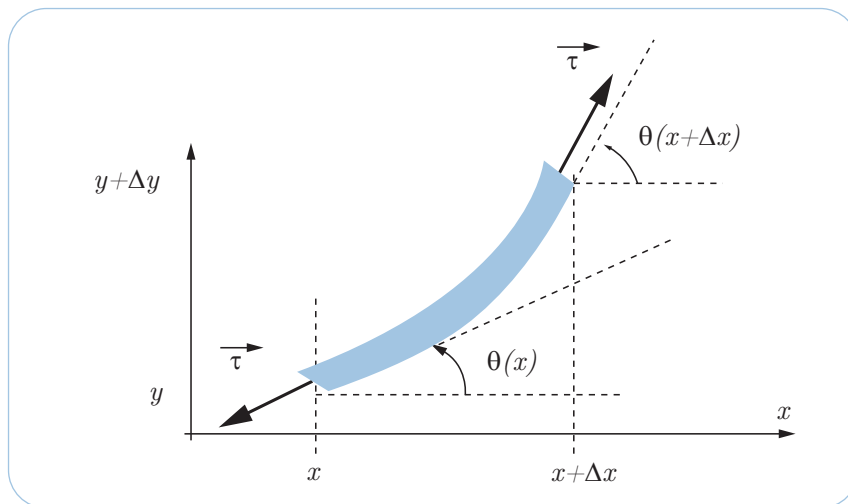
Agora, imagine que puxamos a corda para cima, provocando assim um deslocamento transversal de um ponto  $x$  da corda de sua posição de equilíbrio. Nessa situação, sua nova posição será  $y(x, t)$ , como mostrado na Figura 2.



**Figura 2** – Corda sendo puxada verticalmente para a cima sob a ação de uma força  $F$ .

Vamos supor que a ação da força provoca apenas pequenos deslocamentos da posição de equilíbrio (isso é muito comum acontecer quando se toca violão), tal que a variação de comprimento da corda é desprezível, e a magnitude (módulo) da tensão permanece igual a  $\tau$  com muito boa aproximação.

Nas condições definidas no parágrafo anterior, podemos afirmar que as forças que atuam sobre um elemento  $\Delta x$  da corda ocorrem em função da variação de direção da tensão, que introduz uma componente transversal de força restauradora na direção  $y$ , como mostrado na Figura 3.



**Figura 3** – Um pedaço da corda em movimento com as forças de tensão mostradas na figura.

A partir da Figura 3, a componente  $y$  da tensão no ponto  $x + \Delta x$ , é dada por

$$\tau \text{ sen } \theta \approx \tau \text{ tan } \theta = \tau \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \text{Eq. 2}$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre a reta tangente à corda e o eixo  $Ox$ .

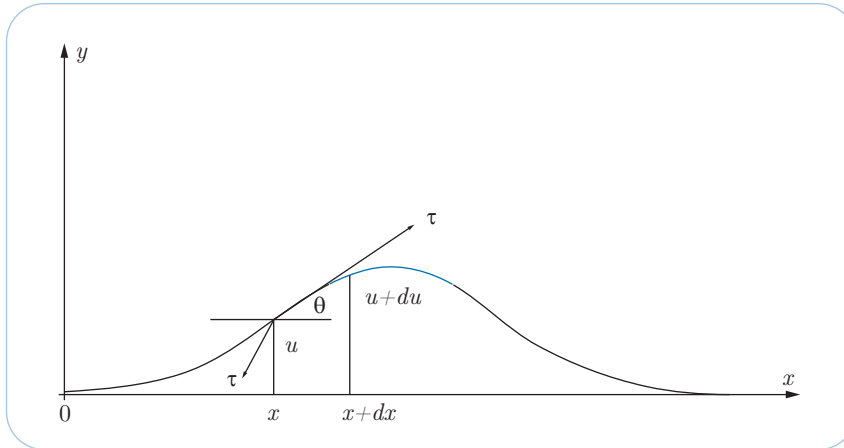
Como estamos considerando pequenos deslocamentos,  $\theta \ll 1$ , então  $\text{sen } \theta \sim \text{tan } \theta \sim \theta$  (dado em radianos), que é o coeficiente angular do perfil da corda, é dado por  $\partial y / \partial x$ .

Lembrem-se de que estamos usando o símbolo de derivada parcial porque  $y$  depende não só de  $x$ , mas também de  $t$ .



# Atividade 1

Dado a configuração a seguir, que representa uma corda distendida sujeita a uma tensão  $\tau$ ,



verifique que  $\tau_u = \tau \text{sen}\theta$ . E que  $\text{sen}\theta = \text{tan}\theta$  para  $\theta$  é muito pequeno.

Voltando à equação 2, todas as grandezas são calculadas no ponto  $x + \Delta x$  da corda. Enquanto no ponto  $x$ , conforme podemos ver na Figura 2, temos uma força análoga, mas de sinal contrário, que é devida à poção da corda que fica à esquerda de  $x$ . Logo, a força vertical resultante sobre o elemento  $\Delta x$  da corda é dada por

$$\underbrace{\tau \frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t)}_a - \underbrace{\tau \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)}_b = \tau \Delta x \left[ \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} \right] = \tau \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{Eq.3}$$

onde o termo 'a' é a força dada pela equação 2 no ponto  $x + \Delta x$  e o termo 'b' é a força no ponto  $x$ . Sendo  $\Delta x$  um infinitésimo e, lembrando da definição de derivada, vemos que a expressão entre colchetes é a derivada segunda.

Mas, pela 2ª lei de Newton, essa força é o produto da massa (dado pela equação 1) pela aceleração desse elemento de corda (dada pela equação 6 da aula 3 – O fenômeno ondulatório). Então, a equação de movimento da corda é

$$\underbrace{\mu \Delta x}_{\Delta m} \underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t)}_{\text{Aceleração vertical}} = \underbrace{\tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Delta x}_{\text{Força vertical sobre } \Delta x} \quad \text{Eq. 4}$$

ou seja,

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{Eq. 5}$$

A equação 5 é a famosa equação das cordas vibrantes, obtida por Euler e D'Alembert, por volta de 1750.

Note ainda que a equação 5 é equivalente à equação de uma onda unidimensional (isto é, veja a equação 11 discutida na referida aula 3), com uma velocidade de propagação:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad \text{Eq. 6}$$



## Atividade 2

Verifique que a equação 6 está dimensionalmente correta, isto é, que o termo à direita da igualdade tem dimensão de comprimento por unidade de tempo.

Voltando à equação 6, notamos que quanto maior for a tensão e menor a densidade do meio (massa por unidade de comprimento) maior é a velocidade da onda. Esse fato explica o motivo pelo qual o som se propaga mais rápido em dias quentes que em dias frios, pois a densidade do ar é maior nos dias frios que nos dias quentes devido a sua umidade ser maior. Para você ter uma idéia, em um dia muito frio, quando a temperatura do ar atinge  $0^\circ \text{C}$ , a velocidade do som é de  $331,4 \text{ m/s}$ , enquanto em um dia mais “quente”, com a temperatura por volta de  $15^\circ \text{C}$ , a velocidade do som atinge os  $340,9 \text{ m/s}$ .



## Atividade 3

Sabendo que a cada aumento de  $1^\circ \text{C}$  na temperatura do ar temos um aumento da ordem de  $60 \text{ cm/s}$  na velocidade do som, estime a velocidade do som no ar em sua região (atribua um valor médio para a temperatura local).

## Exemplo 1

Um guitarrista, também estudante de Física, resolve aprofundar seus conhecimentos sobre seu instrumento musical. Ele dedilha as cordas de sua guitarra elétrica e gera ondas transversais (veja Figura 5). Após breves medições, ele conclui que o comprimento de cada corda é de  $0,628\text{ m}$ , e que a massa é de  $0,208\text{ g}$  para a corda *mi* mais aguda e  $3,32\text{ g}$  a corda *mi* mais grave. Ele percebe que é capaz de provocar nas cordas uma tração de  $226\text{ N}$ .

Sabendo disso, ele se questiona sobre a velocidade de propagação do som em cada uma das cordas. Ou seja, ele deseja determinar as velocidades de propagação das ondas sobre as duas cordas. Será que é a mesma?



Figura 4 – Ao se dedilhar uma corda de uma guitarra são geradas ondas transversais.

### Solução

É dado que:

$$L_1 = L_2 = 0,628\text{ m}$$

$$m_1 = 0,208\text{ g}$$

$$m_2 = 3,32\text{ g}$$

$$\tau = 226\text{ N}$$

**Atenção** – cuidado com as unidades!

Da equação 6, temos:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

Portanto, precisamos inicialmente determinar a densidade de cada corda. Como  $\mu = m / L$  e como a tração é a mesma para as duas cordas, e densidades lineares de massa menores dão origem a velocidades de propagação maiores, espera-se que a velocidade de propagação da onda seja maior na corda com maior densidade linear. Então, usando a equação 6,

*mi* mais agudo (tom maior), corda menos densa:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{m/L}} = \sqrt{\frac{226 \text{ N}}{(0,208 \times 10^{-3} \text{ kg})/(0,628 \text{ m})}} = 826 \text{ m/s}$$

*mi* mais grave (tom menor), corda mais densa:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{m/L}} = \sqrt{\frac{226 \text{ N}}{(3,32 \times 10^{-3} \text{ kg})/(0,628 \text{ m})}} = 207 \text{ m/s}$$

Observe como as ondas se propagam rapidamente no meio menos denso!

Se você conseguiu acompanhar o exemplo 1, tente realizar agora a atividade 4, que é uma aplicação do que vimos até aqui. Bom trabalho!



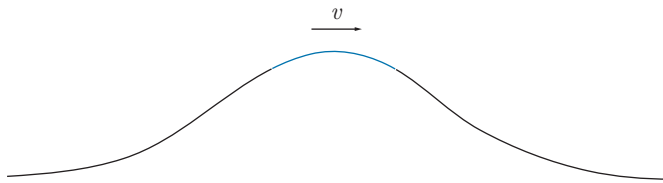
## Atividade 4

Urna corda de piano, em aço, tem  $0,7 \text{ m}$  de comprimento e a massa de  $5 \text{ g}$ . A corda está tensionada por uma força de  $500 \text{ N}$ .

- a) Qual a velocidade das ondas transversais na corda?
- b) A fim de reduzir a velocidade por um fator 2, sem alterar a tensão, qual a massa de um fio de cobre que deveria ser enrolado em torno do fio de aço?

Podemos também obter a expressão da velocidade da onda por outro método, tal procedimento será mostrado a seguir e é um bom exercício para vermos outras formas de construir o mesmo tipo de conhecimento.

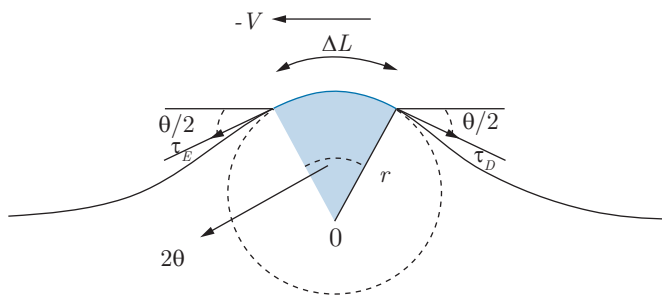
Suponhamos um pulso, que desloca para a direita com velocidade  $v$ , ao longo de uma corda (Figura 4). Se sua amplitude for pequena quando comparada ao comprimento da corda, então a tração  $\tau$  será aproximadamente constante na corda. Em um sistema de referência que se move com a velocidade  $v$  para a direita, o pulso é estacionário e a corda se move com a velocidade  $v$  para a esquerda.



**Figura 5** – Pulso de onda se movendo com velocidade  $v$  ao longo de uma corda.

A Figura 5 mostra um pequeno segmento da corda com comprimento  $\Delta L$  no topo do pulso, cuja forma foi aproximada por um pequeno arco de círculo de raio  $r$  e abertura angular  $2\Delta\theta \ll 1$ . Instantaneamente, o segmento se move com uma velocidade  $v$  numa trajetória circular, apresentando, portanto, uma aceleração centrípeta  $v^2/r$ . As forças que agem no segmento correspondem à tração  $\tau_E$  e  $\tau_D$  em cada extremidade. As componentes horizontais dessas forças são iguais e opostas, e, portanto se cancelam. As componentes verticais dessas forças apontam radialmente para o interior, em direção ao centro do arco circular. Essas forças radiais produzem a aceleração centrípeta. Ou seja, a força resultante sobre o elemento  $\Delta L = 2\pi r \Delta\theta$  da corda vertical apontada para o centro  $O$  do arco de círculo é dada por

$$\tau \operatorname{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) + \tau \operatorname{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) = 2\tau \frac{\Delta L}{2r} = \tau \frac{\Delta L}{r} \quad \text{Eq. 7}$$



**Figura 6** – Um pequeno segmento da corda de comprimento  $\Delta L$  que está se movendo em um arco de círculo de raio  $r$ .

Num referencial no qual o pulso de onda da Figura 6 está em repouso, a corda se move para a esquerda com uma velocidade  $v$ . Um pequeno segmento da corda de comprimento  $\Delta L$  está se movendo em um arco de círculo de raio  $r$ . A aceleração centrípeta do segmento é gerada pelas componentes radiais da tração.

Note que na Equação 7, usamos a aproximação  $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \left(\frac{\theta}{2}\right)$ , válida para ângulos pequenos, e lembrando que o ângulo  $\theta$  é relacionado com  $\Delta L$  por  $\theta = \frac{\Delta L}{r}$ . Se  $\mu$  for a massa por unidade de comprimento da corda, a massa do segmento de comprimento  $\Delta L$  é  $m = \mu \Delta L = \mu r \theta$ . Usando a segunda lei de Newton:

$$\tau \frac{\Delta L}{r} = ma_c = \mu r \theta \frac{v^2}{r} = \mu \theta v^2 = \mu \frac{\Delta L}{r} v^2 \quad \text{Eq. 8}$$

ou  $v = \sqrt{\tau/\mu}$ . No sistema original, a corda está fixa e o pulso se move com velocidade  $v = \sqrt{\tau/\mu}$ , correspondente à equação 6.

Antes de passarmos para o próximo assunto de nossa aula, **Transporte de energia por meio de ondas e intensidade de uma onda**, vamos fazer mais um exemplo aplicando a equação 6. Esta é uma equação muito importante, como você já deve ter percebido.

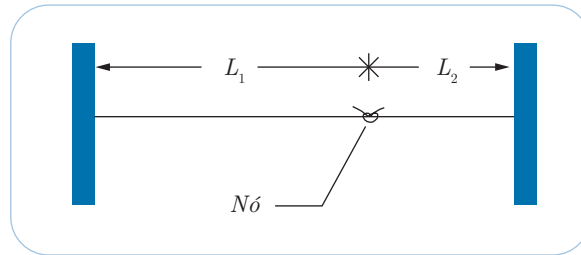
## Exemplo 2

Considere duas cordas de comprimentos  $L_1 = 3,0 \text{ m}$  e  $L_2 = 2,0 \text{ m}$ , densidades lineares  $\mu_1 = 1,4 \times 10^{-4} \text{ Kg/m}$  e  $\mu_2 = 2,8 \times 10^{-4} \text{ Kg/m}$ , respectivamente. Suponha agora que as duas cordas foram amarradas uma na outra com um nó e depois esticadas e presas entre dois suportes rígidos. Nessa situação, a corda de comprimento fica submetida a uma tensão de  $400 \text{ N}$ .

Dois pulsos são enviados, simultaneamente, a partir da extremidade dos suportes rígidos da corda em direção ao nó. Nessas condições, deseja-se saber qual o pulso alcança o nó primeiro?

## Solução

A figura a seguir é uma representação esquemática da situação descrita no problema.



**Figura 7** – Duas cordas, de comprimento  $L_1$  e  $L_2$ , emendadas com um nó e esticadas entre dois suportes rígidos.

Sabemos ainda que são dados os seguintes parâmetros:

$$L_1 = 3,0 \text{ m}$$

$$L_2 = 2,0 \text{ m}$$

$$\mu_1 = 1,4 \times 10^{-4} \text{ Kg/m}$$

$$\mu_2 = 2,8 \times 10^{-4} \text{ Kg/m}$$

$$\tau = 400 \text{ N}$$

Inicialmente, devemos perceber que, como as duas cordas estão esticadas juntas, significa que elas devem estar sujeitas à mesma tensão  $\tau$ . Além disso, sabemos que o tempo  $t$  que um pulso leva para propagar um comprimento  $L$  é  $t = L/v$ ,

onde,  $v$  é a velocidade constante do pulso. Por outro lado, a velocidade de um pulso em uma corda esticada depende da tensão na corda,  $\tau$ , e da densidade *linear*,  $\mu$ , isto é.

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

Então, podemos determinar que o tempo  $t_1$  para o pulso na corda 1 atingir o nó é

$$t_1 = \frac{L_1}{v_1} = L_1 \sqrt{\frac{\mu_1}{\tau}} = 3,0 \text{ m} \sqrt{\frac{1,4 \times 10^{-4} \text{ kg}}{900 \text{ kg}}} = 1,77 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Analogamente, para o pulso na corda 2 obtemos:

$$t_2 = \frac{L_2}{v_2} = L_2 \sqrt{\frac{\mu_2}{\tau}} = 1,67 \times 10^{-3} \text{ s}.$$

Então, o pulso na corda 2 alcança o nó primeiro.

O que teria acontecido se as duas cordas tivessem o mesmo tamanho? Tente responder a essa questão fazendo a atividade 5.



## Atividade 5

Considere os mesmos dados do exemplo 2 e suponha que as cordas  $L_1$  e  $L_2$  possuem o mesmo comprimento. Qual é a relação entre  $v_1$  e  $v_2$ ? Que pulso chega primeiro ao nó?

# Transporte de energia por meio de ondas e intensidade de uma onda

Já sabemos que uma onda transporta energia. Vamos agora obter uma relação quantitativa para esse transporte de energia, para tanto vamos considerar o caso de ondas harmônicas (assim chamadas porque a perturbação, num dado ponto  $x$ , corresponde a uma oscilação harmônica simples).

**Observação** – Fala-se de onda quando a transmissão do sinal entre dois pontos distantes ocorre sem que haja transporte direto de matéria de um desses pontos ao outro. Uma onda transporta energia e momento: Uma onda provocada por uma lancha deslocando-se sobre a superfície tranqüila de um lago sacode um barco distante ao atingi-lo. Entretanto, não existe transporte direto de uma dada massa de água da lancha até o barco.

O perfil da onda é uma função senoidal, ou seja, do tipo harmônica, dado por:

$$f(x) = A \cos(kx + \delta),$$

onde  $x$  é dado pela equação 4 para uma onda progressiva que se propaga para direita:  
 $y(x,t) = A \cos [k(x - vt) + \delta]$ .

Sabendo que  $\omega = kv = 2\pi\nu = 2\pi/T$  (lembrando que  $\omega$  é a freqüência angular,  $\nu$  a freqüência e  $T$  o período), a função de onda progressiva harmônica que se propaga para a direita é

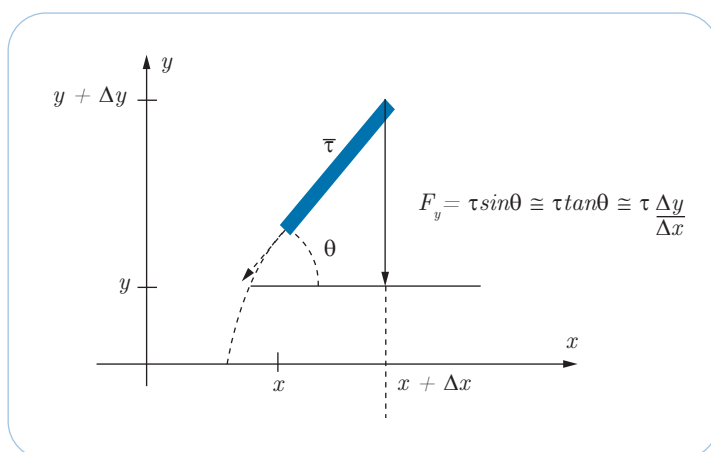
$$y(x,t) = y_m \cos(kx - \omega t + \delta) \quad \text{Eq. 9}$$



## Atividade 6

Mostre por cálculos explícitos das derivadas que a função de onda harmônica satisfaz a equação de onda unidimensional (equação 11).

Para gerar uma onda progressiva numa corda, por exemplo, é preciso realizar trabalho, que fará oscilar a corda. Essa energia que é transmitida à corda se propaga com a onda, podendo ser comunicada a outra partícula num outro ponto da corda. Vamos calcular a energia transmitida por uma onda por unidade de tempo através de um ponto  $x$  qualquer da corda.



**Figura 8** – Força que atua num pedaço da corda num instante  $t$ . Note que  $\Delta y$  e  $\Delta x$  são infinitesimais.

Num dado instante  $t$ , a porção da corda à esquerda de  $x$  atua sobre um elemento da corda no ponto  $x$  (Figura 7) com uma força perpendicular à direção de propagação (direção  $y$ ) dada por  $F_y = -\tau \operatorname{sen} \theta$  (**lembre-se da atividade 1**) e usando a equação 13:

$$F_y = -\tau \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \quad \text{Eq. 10}$$

O trabalho realizado sobre esse elemento por unidade de tempo, ou seja, a potência instantânea, é a energia transmitida através de  $x$  por unidade de tempo. Ela é calculada fazendo o produto da força pela velocidade, isto é:

$$P(x, t) = F_y \frac{\partial y}{\partial t} = -\tau \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{Eq. 11}$$

Mas, para uma onda harmônica progressiva, temos  $\partial y / \partial x = -k y_m \text{sen}(kx - \omega t + \delta)$ , então:

$$P(x, t) = F_y \frac{\partial y}{\partial t} = -\tau \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{Eq. 12}$$

que oscila com o tempo (e também com  $x$ ).

Para uma análise global da propagação da onda na corda, é interessante que saibamos qual o valor médio da potência comunicada por um elemento ao seu vizinho, o qual é chamado de **intensidade**  $I$  da onda. Ou seja, a intensidade é o valor médio da potência instantânea durante um período, **T**:

$$\begin{aligned} I = \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \omega k \tau y_m^2 \text{sen}^2(kx - \omega t + \delta) dt = \\ &= \frac{\omega k \tau y_m^2}{T} \int_t^{t+T} \text{sen}^2(kx - \omega t + \delta) dt = \\ &= \frac{\omega k \tau y_m^2}{2} \end{aligned}$$

Da equação 17, temos que  $t = \mu v^2$  e  $k v = \omega$ , da equação 20, resulta:

$$I = \bar{P} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 \quad \text{Eq. 13}$$

Então, a intensidade da onda é proporcional ao quadrado da amplitude, à velocidade da onda e ao quadrado da frequência. Esse resultado se aplica a uma onda harmônica progressiva.



**T**

Valor médio é a integral definida durante o período dividida pelo período, ou seja, é a "soma" de todos os valores dividido pelo número total de valores.

## Fluxo médio de energia

Um elemento infinitesimal  $dx$  da corda, no ponto  $x$ , tem uma massa

$dm = \mu dx$  e **uma energia cinética instantânea**:

$$dK = \frac{1}{2} dm \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad \text{Eq. 14}$$

que corresponde a uma **densidade de energia cinética** (energia cinética por unidade de comprimento) **instantânea**:

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \quad \text{Eq. 15}$$

Novamente, estamos interessados no valor médio. A densidade de energia cinética média  $\bar{K}$  é:

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{1}{4}\mu \omega^2 y_m^2 \quad \text{Eq. 16}$$

onde usamos que  $(\partial y/\partial t)^2 = \omega^2 y_m^2 \text{sen}^2(kx - \omega t + \delta)$  cuja média em  $T$  é  $1/2$ . Como o elemento  $dx$  executa um MHS na direção  $y$ , a energia potencial média é igual à energia cinética média. Logo, a **densidade média de energia potencial**,  $\bar{U}$ , é:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{4}\mu \omega^2 y_m^2 \quad \text{Eq. 17}$$

E a densidade média de energia total  $\bar{E}$  da onda é

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2}\mu \omega^2 y_m^2 \quad \text{Eq. 18}$$

Tiramos, então, que o valor médio da energia da onda contida num elemento  $\Delta x$  da corda é  $\overline{\Delta E} = \frac{d\bar{E}}{dx} \Delta x$ . Como a onda percorre  $\Delta x = v \Delta t$  durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , a potência média transportada é

$$\bar{P} = \frac{\overline{\Delta E}}{\Delta t} = \left(\frac{d\bar{E}}{dx}\right) \frac{\Delta x}{\Delta t} = v \left(\frac{d\bar{E}}{dx}\right) \quad \text{Eq. 19}$$

que deve ser igual à equação 13. Ou seja, vemos que a intensidade é igual ao produto da velocidade da onda pela densidade média de energia, ou também, o fluxo médio de energia através de um ponto qualquer da corda.

## Exemplo 3

Considere uma corda esticada submetida a uma tensão de 45 N. Envia-se uma onda senoidal com frequência  $\nu = 120 \text{ Hz}$  e amplitude  $y_m = 8,5 \text{ mm}$  ao longo da corda. Se a densidade linear é de  $\mu = 525 \text{ g/m}$ , com que taxa média a onda transporta energia?

## Solução

Vamos inicialmente calcular a frequência angular  $\omega$  e a velocidade da onda:

$$\omega = 2\pi\nu = (2\pi)(120 \text{ Hz}) = 754 \text{ rad/s}$$

e a velocidade

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{45 \text{ N}}{0,525 \text{ kg/m}}} = 9,26 \text{ m/s}.$$

A taxa média de transporte de energia é a potência média dada pela equação 13.

Então, a potência média:

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 = \left(\frac{1}{2}\right) (0,524 \text{ kg/m})(9,26 \text{ m/s})(754 \text{ rad/s})(0,0085 \text{ m})^2 = 100 \text{ W}$$

Note que a frequência com que fizemos oscilar a onda é muito grande, 120 Hz é duas vezes maior que a frequência de oscilação do sinal luminoso em onda lâmpada comum, de 60 Hz. Isso levou a uma potencia tão alta.



## Atividade 7

Marque com um “x” e depois justifique sua resposta. Independentemente da natureza de uma onda, sua propagação envolve, necessariamente:

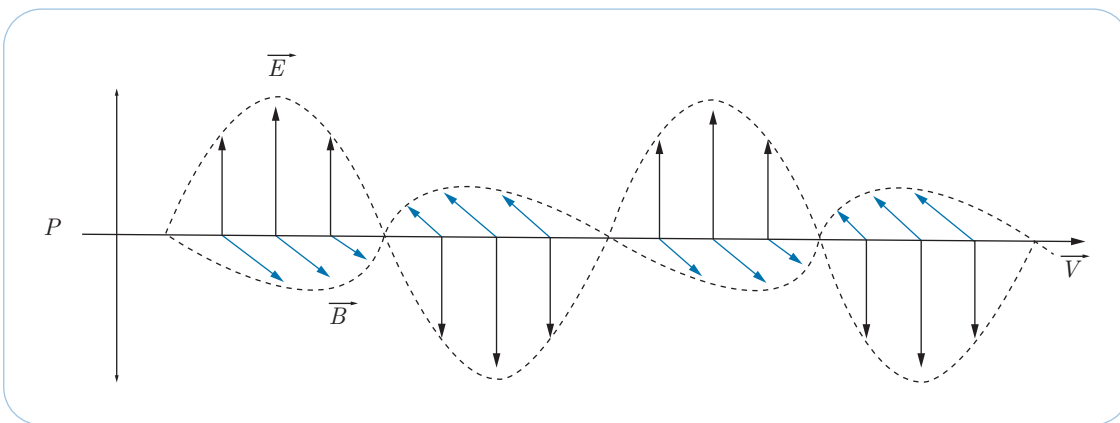
- a) transporte de energia;
- b) transporte de energia e de matéria;
- c) produção de energia;
- d) movimento de matéria;
- e) transformação de energia.

# Ondas eletromagnéticas

As ondas eletromagnéticas (OEM) incluem a luz, as ondas de rádio, os raios X ou raios gama, as microondas etc. Os vários tipos de OEM diferem entre si somente pelo comprimento de onda e frequência.

Diferentemente das ondas mecânicas (na corda ou ondas sonoras), as ondas eletromagnéticas não precisam de meio para se propagarem. No vácuo, elas se propagam com a velocidade da luz  $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

Na aula 13 (Equações de Maxwell e a radiação eletromagnética), deduziremos a equação da OEM. Mas, adiantando, lá veremos que tanto o campo elétrico quanto o magnético obedecem a uma equação de onda parecida com a da corda, sendo que o campo elétrico e magnético oscilam perpendicularmente entre si e perpendicularmente à direção de propagação. Ou seja, as OEM são ondas transversais, como mostra a Figura 9 a seguir.



**Figura 9** – Os campos eletromagnéticos se propagam no vácuo como ondas transversais nas quais os vetores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , e  $\mathbf{k}$  formam triedro ortogonal dextrógiro.

Note que, pela Figura 9, os campos eletromagnéticos, ou as ondas eletromagnéticas, o que é equivalente, se propagam no vácuo como ondas transversais, nas quais os vetores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , e  $\mathbf{k}$  formam triedro ortogonal dextrógiro. Neste, o vetor  $\mathbf{k}$  aponta na direção da propagação dessas ondas.

Quanto as suas origens, podemos dizer que as ondas eletromagnéticas são produzidas quando cargas elétricas livres são aceleradas ou quando elétrons ligados a átomos ou a moléculas fazem transições para estados de menor energia.

As ondas de rádio, que têm frequência de cerca 1 MHz para AM e de 100 MHz para FM, são geradas pelas correntes elétricas oscilantes das antenas de rádios.



## Atividade 8

A relação de Einstein para o efeito fotoelétrico,  $E = h \nu$ , onde  $E$  é a energia do fóton,  $h$  a constante de Planck e  $\nu$  a frequência, determine a energia dos fótons emitidos por uma antena  $AM$  e por uma  $FM$ . Qual das duas emite fótons mais energéticos? Dado  $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{J.s}$ .

A frequência das ondas emitidas é igual à frequência da oscilação das cargas. Ondas na faixa do visível (de luz), têm frequência da ordem de  $10^{14} \text{ Hz}$  e são produzidas geralmente por transições de átomos ou moléculas envolvendo elétrons associados.

Relembrando a aula 12 (Onda, luz e visão) da disciplina Física e Meio Ambiente, retomemos aqui a equação 5 mostrada nessa aula. Você viu que a intensidade da onda eletromagnética era dada por:

$$I = \frac{1}{2} \frac{E_m B_m}{\mu_0},$$

onde  $E_m$  e  $B_m$  representam a amplitude das oscilações dos campos elétrico e magnético, que podem ser representados pelas equações

$$E_y(x, t) = E_m \cos(kx - \omega t) \text{ e}$$

$$B_z(x, t) = B_m \cos(kx - \omega t)$$

para uma onda que se propaga na direção  $x$ .

## Resumo

Nesta aula, você estudou a construção da equação de onda para uma corda e o transporte de energia, aprendeu a aplicar essas equações a situações simples e também a manipulação de ferramentas mais sofisticadas, como as equações diferenciais e derivadas parciais. Aprendeu ainda um pouco sobre ondas luminosas, sua propagação e como expressar os campos elétricos e magnéticos a elas associados.

# Autoavaliação

1

A equação de uma onda transversal se propagando em uma corda é dada por:  
 $y(x,t) = (2,0 \text{ mm}) \text{ sen}[(20\text{m}^{-1})x - (600\text{s}^{-1})t]$ .

- a) Ache a amplitude, frequência, velocidade e comprimento de onda.
- b) Ache a velocidade escalar máxima de uma partícula da corda.

2

A tensão num fio preso em ambos os extremos é duplicada sem que haja qualquer mudança considerável em seu comprimento. Qual é a razão entre as velocidades das ondas transversais nesse fio, antes e depois do aumento de tensão?

3

Nas últimas décadas, o cinema tem produzido inúmeros filmes de ficção científica com cenas de guerras espaciais, como *Guerra nas Estrelas*. Com exceção de *2001, Uma Odisséia no Espaço*, essas cenas apresentam explosões com estrondos impressionantes, além de efeitos luminosos espetaculares, tudo isso no espaço interplanetário.

- a) Comparando *Guerra nas Estrelas*, que apresenta efeitos sonoros de explosão, com *2001, Uma Odisséia no Espaço*, que não os apresenta, qual deles está de acordo com as leis da Física? Explique sua resposta.
- b) E quanto aos efeitos luminosos apresentados por ambos, estão de acordo com as leis Físicas? Justifique.

4

Quando uma onda sonora se propaga no ar, numa certa direção:

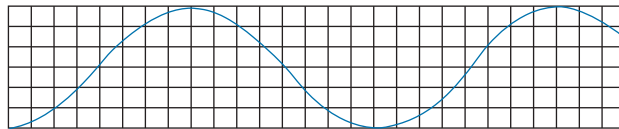
- a) o ar como um todo se desloca na direção normal à direção de propagação da onda;
- b) o ar não se movimenta, apenas sua pressão aumenta e diminui sucessivamente;
- c) as partículas do ar se movimentam para frente e para trás na direção da propagação da onda;
- d) o ar como um todo se desloca na direção da propagação da onda;
- e) as partículas do ar se movimentam de um lado para outro, numa direção normal à direção da propagação da onda.

Quais afirmativas são verdadeiras e quais são falsas. Justifiquem suas repostas.

5

Uma onda transversal periódica, cujo comprimento de onda é  $40,0\text{ cm}$ , propaga-se com velocidade de  $1,60\text{ m/s}$  ao longo de uma corda. O gráfico em papel quadriculado representa a forma dessa corda em um dado instante. Quais são a amplitude e o período da onda, respectivamente?

- a)  $7,5\text{ cm}$  e  $0,25\text{ s}$ ;                      b)  $15,0\text{ cm}$  e  $0,25\text{ s}$ ;  
c)  $7,5\text{ cm}$  e  $4,00\text{ s}^{-1}$ ;                      d)  $6,0\text{ cm}$  e  $0,25\text{ s}$ ;  
e)  $3,0\text{ cm}$  e  $4,00\text{ s}$ ;



6

Para pesquisar a profundidade do oceano numa certa região, usa-se um **sonar** instalado num barco em repouso. O intervalo de tempo decorrido entre a emissão do sinal ultra-som de frequência  $75\ 000\text{ Hz}$  e a resposta ao barco (eco) é de  $1$  segundo. Supondo que o módulo da velocidade de propagação do som na água é igual a  $1.500\text{ m/s}$ , a profundidade do oceano na região considerada é de:

- a)  $750\text{ m}$ ;                                      b)  $100\text{ m}$ ;  
c)  $1.500\text{ m}$ ;                                  d)  $50\text{ m}$ ;  
e)  $25\text{ m}$ .

## Referências

MCKELVEY, John P.; GROUCH, Howard. **Física 2**. Tradução de Evia Dorta Dias Nunes. São Paulo: Harbra, 1979.

SYMOM, Keith R. **Mecânica**. Tradução de Gilson Brand Batista. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1996.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física**: termodinâmica e ondas: Sears e Zemansky. 10. ed. São Paulo: Addison- Wesley, 2003. v 2.

# O efeito *Doppler* sonoro e o eletromagnético

Aula

**5**



# Apresentação

**N**esta aula, discutiremos o que acontece com as ondas quando existe algum movimento relativo entre elas e o observador, mas ao contrário da aula 4 (Equação da onda e energia no movimento oscilatório), esta será mais fenomenológica e o formalismo matemático será bem mais simples. No entanto, como sempre, é importante para o entendimento completo dos fenômenos que abordaremos.

## Objetivos

- 1** Entender os fenômenos que ocorrem com o som e quando sua fonte e o observador estão em movimento relativo: efeito *Doppler* acústico.
- 2** Entender os fenômenos que ocorrem com a luz quando sua fonte e o observador estão em movimento relativo: efeito *Doppler* luminoso.
- 3** Compreender como ocorrem e como se propagam as ondas de choque e usar tais informações na explicação de fenômenos que ocorrem no cotidiano.



# O efeito *Doppler*

**S**e você já ficou parado ao lado de uma estrada enquanto um carro está passando, você deve ter percebido que quando o carro está se movendo na sua direção, o motor parece emitir um som mais agudo do que o motor de um carro estacionado. Por outro lado, quando o carro se move distanciando-se de você, o som do motor parece mais grave do que o de um carro estacionado. A razão para essa mudança é o efeito *Doppler*, cujo nome vem do físico austríaco Christian Doppler, que descobriu o efeito.

Esse fenômeno ocorre porque quando o carro se move na sua direção, as ondas sonoras que carregam o som do motor são comprimidas. E quando o carro se afasta, essas ondas sonoras são esticadas.

## Um pouco de história da ciência: o professor Doppler

Em 1840, o físico austríaco **Christian Johann Doppler** (1803-1853) tornou-se um Membro Associado da *Königliche Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften*, em Praga. Ainda nessa capital austríaca, em 1841, foi escolhido professor de matemática elementar e geometria prática da Academia Técnica Estatal. Foi por ocasião dos exames que o estabilizaram nessa instituição de ensino, que apresentou sua famosa descoberta, isto é, que o tom do som emitido por uma fonte sonora que se desloca na direção do observador parece mais agudo que o emitido por uma fonte que se desloca com o observador; e o tom do som de uma fonte que se afasta do observador parece mais grave. Somente em 25 de maio de 1842, Doppler apresentou publicamente essa sua descoberta, também aplicada a uma onda luminosa, em uma reunião da *Königliche* e publicada em seus anais, ainda em 1842 (*Abhandlungen der Königliche Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften* 2, p. 465).

A primeira versão do efeito descoberto por Doppler relacionava-se apenas com o movimento da fonte sonora (ou luminosa) ou do observador ao longo da linha que os une. A extensão aos movimentos de ambos e ao mesmo tempo só foi completada por Doppler em 1846 (*Annalen der Physik und Chemie* 68, p. 1). Foi também por essa ocasião que ele mencionou que sua descoberta poderia explicar, por exemplo, a cor aparente das estrelas duplas, as flutuações das estrelas variáveis e das estrelas novas. Desse modo, ele acreditava que todas as estrelas eram intrinsecamente brancas e que sua coloração decorria tão-somente de sua velocidade em relação à Terra, segundo nos conta A. E. Woodruff, *IV: Dictionary of Scientific Biography* (Charles Scribner's, 1981).



## Christian Johann Doppler

Nasceu em 29 de novembro de 1803 em Salburg, na Áustria, e faleceu em 17 de março de 1853 em Veneza, na Itália.



**Figura 1** – Christian Johann Doppler.

Muito embora, Doppler tivesse considerado que o mesmo efeito ocorreria com as ondas luminosas, conforme referimos anteriormente, foi o físico francês *Armand-Hippolyte-Louis Fizeau* (1819-1896) quem, em 1848 (segundo registra o físico e historiador da ciência, o inglês Sir Edmund Whittaker, no livro *A History of the Theories of Aether and Electricity*, Thomas Nelson and Sons, Ltd. (1951)), sugeriu que o efeito *Doppler* acústico poderia ser aplicado às ondas luminosas e, com isso, ele serviria para determinar as velocidades relativas das estrelas que estão na mesma linha do sinal luminoso recebido. A partir daí, esse feito também passou a ser conhecido como efeito *Doppler-Fizeau*.

(BASSALO, 2008, extraído da Internet).

## Efeito *Doppler* acústico

Vamos agora formalizar a informação inicial de que a percepção do barulho que ouvimos de um carro quando ele se aproxima ou se afasta de nós é diferente daquele que ouvimos quando ele está em repouso.

O som é um tipo de onda que necessita de um meio para se propagar. Quando estamos analisando a produção e a captação de uma onda sonora, estamos diante de três elementos fundamentais: a fonte sonora, o meio onde ela se propaga e o observador que está captando as ondas. Temos então três referenciais bem definidos. O tipo de onda captada pelo observador dependerá de como a fonte e ele próprio, o observador, se movem em relação ao meio de propagação da onda. Vamos considerar o meio parado em relação ao solo. Nesse caso, temos ainda três situações diferentes:

**a)** a fonte se movimenta e o observador está parado;

**b)** a fonte está parada e o observador está em movimento;

**c)** a fonte e o observador estão em movimento.

Nos três casos podemos ter uma aproximação ou um afastamento. Para analisar o efeito *Doppler* do som, vamos estabelecer uma relação entre a frequência das ondas observadas,  $f_O$ , com a frequência das ondas emitidas pela fonte,  $f_F$ , a velocidade de propagação das ondas,  $v_s$ , a velocidade da fonte emissora,  $v_F$  e a velocidade do observador,  $v_O$ .

Consideraremos uma fonte sonora que produz ondas de forma contínua. Vamos representar essas ondas como sucessivas frentes de ondas, isto é, vamos representá-las como circunferências (na verdade, as frentes de ondas são esféricas, porém para representá-las no papel – que é um plano – só conseguimos desenhar a sua intersecção, isto é, circunferências) centradas na fonte.

Como você deve estar lembrado, a distância de uma frente de onda para outra é de um comprimento de onda  $\lambda$ ,

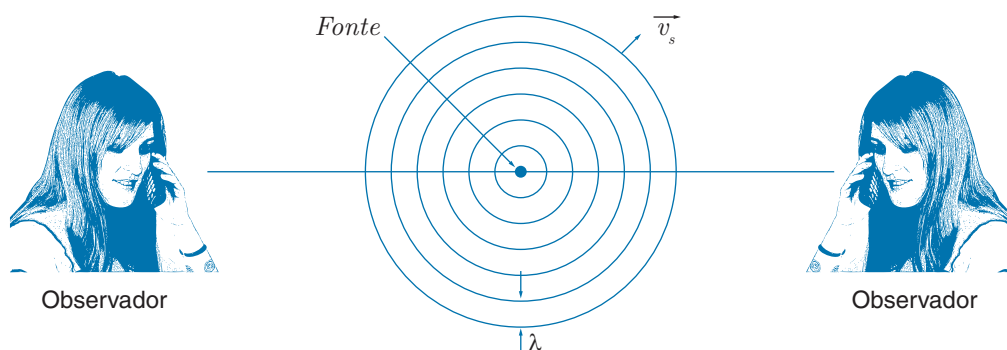
$$\lambda = v_s T,$$

onde  $v_s$  é a velocidade do som e  $T$  é o período.

Vejamus então o que ocorre para o caso em que tanto o observador quanto a fonte sonora estão em repouso, um em relação ao outro.

## A fonte emissora e o observador estão em repouso ( $v_F = 0$ )

Considere a Figura 2. Nela, as sucessivas frentes de ondas estão representadas por círculos em volta da fonte emissora. O raio de cada circunferência é igual ao produto da velocidade de propagação pelo tempo transcorrido desde que foi emitido.



**Figura 2** – A fonte e o observador estão em repouso. As frentes de ondas estão separadas por um comprimento de onda. As ondas sonoras viajam com  $v_s$ .

A separação entre duas frentes de ondas é um comprimento de onda,  $\lambda = v_s T$ , sendo  $T$  o período ou o tempo que gasta para passar duas frentes de ondas consecutivas pela posição do observador.

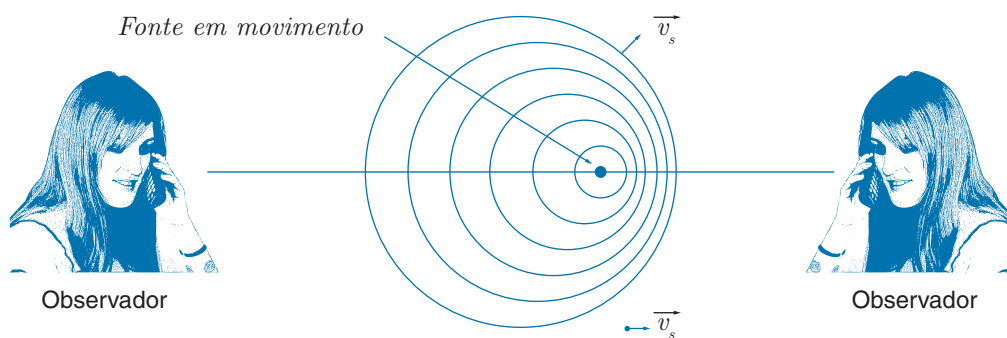
Como todos os participantes (fonte, observador e meio) estão em repouso, o observador de ambos, observados na Figura 2 vai perceber uma onda exatamente do mesmo tipo que foi emitida pela fonte, isto é,  $\lambda_F = \lambda_O$ .

É por isso que pessoas assistindo a um concerto em um teatro escutam todas o mesmo som. Mas, algo muito diferente ocorre quando a fonte ou o observador, ou mesmo ambos estão em movimento, um em relação ao outro.

## Quando a fonte emissora está em movimento ( $v_E < v_s$ )

Vamos considerar agora a situação onde a fonte está em movimento. Nesse caso, ao contrário da situação representada na Figura 2, as frentes de ondas não são mais esferas concêntricas.

Quando a fonte emitir a segunda frente ela já não estará mais na mesma posição de quando emitiu uma primeira frente de onda (veja a Figura 3).

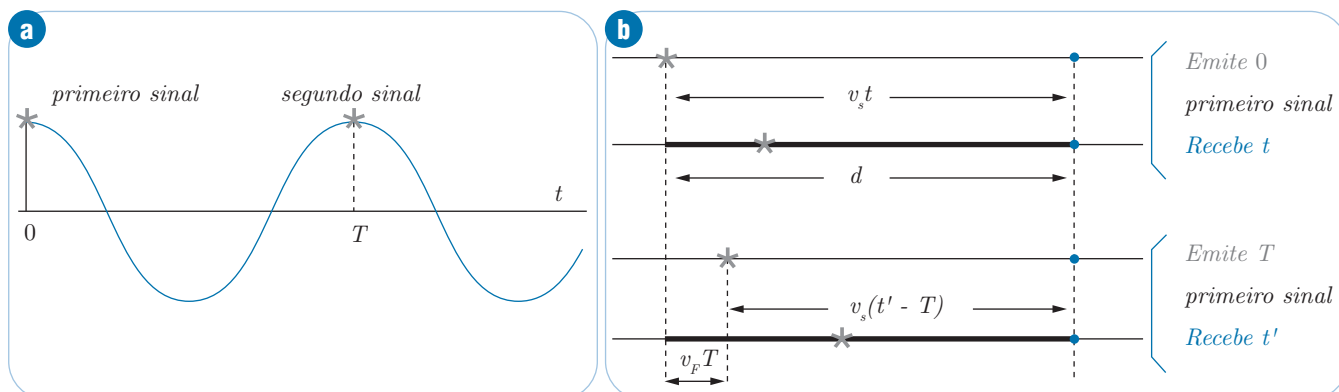


**Figura 3** – A fonte emissora se move para a direita com velocidade  $v_E$ . A velocidade do som é  $v_s$ .

No caso anterior, os dois observadores percebiam o mesmo comprimento de onda e, portanto, a mesma frequência. E agora? Agora é de se esperar que um observador situado à direita do emissor observe  $\lambda_O < \lambda_E$  e  $f_O > f_E$ , ou seja, um som mais agudo. Por outro lado, um observador situado à esquerda do emissor observa  $\lambda_O > \lambda_E$  e  $f_O < f_E$ , ou seja, um som mais grave.

Para verificarmos essas hipóteses, vamos calcular a frequência que observada pelo observador, considerando dois sinais consecutivos, emitidos pela fonte, separados por um intervalo de tempo correspondente ao período  $T$ .

Na Figura 4, o (\*) representa a posição da fonte emissora e a bolinha (●) a posição do observador. No instante inicial  $t = 0$ , no qual é emitido o primeiro sinal, o emissor e o observador estão separados por uma distância  $d$ .



**Figura 4** – (a) representa dois sinais que correspondem a dois picos consecutivos de uma onda harmônica, separadas de um período  $T$ ; (b) o asterisco representa a posição da fonte emissora e a bolinha a posição do observador.

O primeiro sinal (ou frente de onda) é recebido pelo observador no instante  $t$ . O sinal se desloca no caminho marcado pelo traço grosso, negro na parte superior da Figura 4 b, desde que é emitido até ser recebido. Podemos, portanto, escrever a equação:

$$v_s t = d \quad \text{Eq. 1}$$

O segundo sinal é emitido no instante  $T$  e é recebido no instante  $t'$ . No intervalo de tempo entre o primeiro e o segundo sinal, o emissor se desloca  $v_F T$ . O segundo sinal percorre, desde que é emitido até ser recebido, o caminho mostrado em traço grosso, negro na parte inferior da Figura 4 b. Portanto, podemos escrever a equação:

$$v_s(t' - T) + v_F T = d \quad \text{Eq. 2}$$

Eliminando a quantidade desconhecida  $d$  entre as Equações 1 e 2, relacionamos o período  $T_o = t' - t$ , das ondas recebidas pelo observador, com o período  $T$  das ondas emitidas pela fonte emissora como:

$$T_o = t' - t = \frac{v_s - v_F}{v_s} T \quad \text{mas} \quad T_o = \frac{1}{f_o} \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{f_F} \quad \text{Eq. 3}$$

ou

$$f_o = \frac{v_s}{v_s - v_F} f_F \quad \text{Eq. 4}$$

A Equação 4 mostra que a frequência percebida pelo observador  $f_o$  é diferente daquela gerada na fonte  $f_F$ . Note, ainda, que as frentes de ondas (sinais) consideradas foram emitidas com um intervalo de tempo igual ao período das ondas,  $T$ . Então, do mesmo modo, o intervalo de tempo entre as duas frentes de ondas recebidas pelo observador é igual ao período,  $T_o$ , observado pelo observador. A Equação 4 é uma das representações matemáticas do efeito *Doppler* acústico.



# Atividade 1

A partir da Equação 4, obtenha uma relação entre os comprimentos de ondas da onda quando ela foi gerada e quando for observada.

Quando a fonte estiver se afastando do observador em repouso, teremos uma situação semelhante à descrita e perceberemos que a Equação 2 pode ser reescrita como  $v_s(t' - T) - v_F T = d$ , substituindo pela Equação 1, encontramos:

$$T_0 = t' - t = \frac{v_s + v_F}{v_s} T \quad \text{ou} \quad f_0 = \frac{v_s}{v_s + v_F} f_F \quad \text{Eq. 5}$$

## Exemplo 1

Uma ambulância está equipada com uma sirene que emite o som de frequência  $f = 10^3 \text{ Hz}$ . Sabendo que o som se propaga com velocidade de  $340 \text{ m/s}$ . Se ela se deslocando a  $80 \text{ km/h}$  se aproxima de um observador em repouso. Qual a frequência da sirene que ele irá escutar?

## Solução

Essa é uma situação de aplicação direta da Equação 5, onde podemos substituir diretamente os seguintes valores:

$$f_F = 10^3 \text{ Hz}$$

$$V_F = 80 \text{ km/h} = 22,3 \text{ m/s}$$

$$V_S = 340 \text{ m/s}$$

$$f_0 = \frac{v_s}{v_s + v_F} f_F = \frac{340}{340 + 22,3} \times 10^3 = 940 \text{ Hz}$$

E, se no Exemplo 1, a ambulância estivesse se afastando do observador, qual seria a frequência que ele perceberia? (Responda essa questão na atividade a seguir).

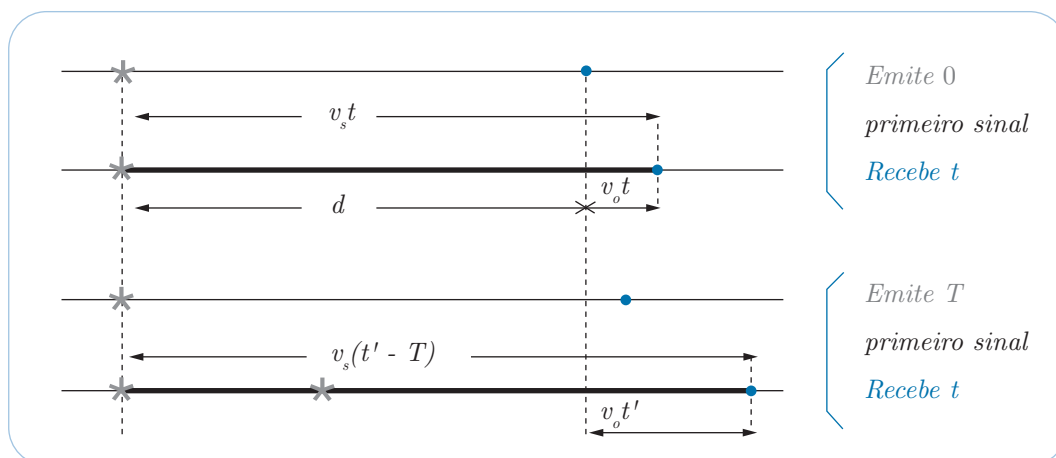


## Atividade 2

Uma ambulância está equipada com uma sirene que emite o som de frequência  $f = 10^3 \text{ Hz}$ . Sabendo que o som se propaga com velocidade de  $340 \text{ m/s}$ . Se ela se deslocando a  $80 \text{ km/h}$  se afasta de um observador em repouso. Qual a frequência da sirene que ele irá escutar?

### Fonte em repouso - observador em movimento

Quando a fonte está em repouso em relação ao meio, a propagação se dará de modo a formar frentes de ondas esféricas concêntricas. Vamos, novamente, imaginar dois sinais consecutivos de uma onda, separados pelo período  $T$ , como visto na Figura 5, onde, agora, a fonte está parada e o observador está se afastando da fonte.



**Figura 5** – O (\*) representa a posição da fonte emissora e a bolinha a posição do observador. A fonte está parada e o observador se movimenta com a velocidade  $v_o$ .

O primeiro sinal é recebido pelo observador no instante  $t$ . O sinal se desloca no caminho marcado pelo traço grosso, negro na parte superior da Figura 5, desde que é emitido até ser recebido. Temos então:

$$v_s t = v_o + d \quad \text{Eq. 6}$$

O segundo sinal é emitido no instante  $T$  e é recebido no instante  $t'$ . O segundo sinal percorre, desde que é emitido até ser recebido, o caminho mostrado em traço grosso, negro na parte inferior da Figura 5, ou seja,

$$v(t' - T) = v_o + d \quad \text{Eq. 7}$$

Resolvendo as Equações 6 e 7, encontramos,

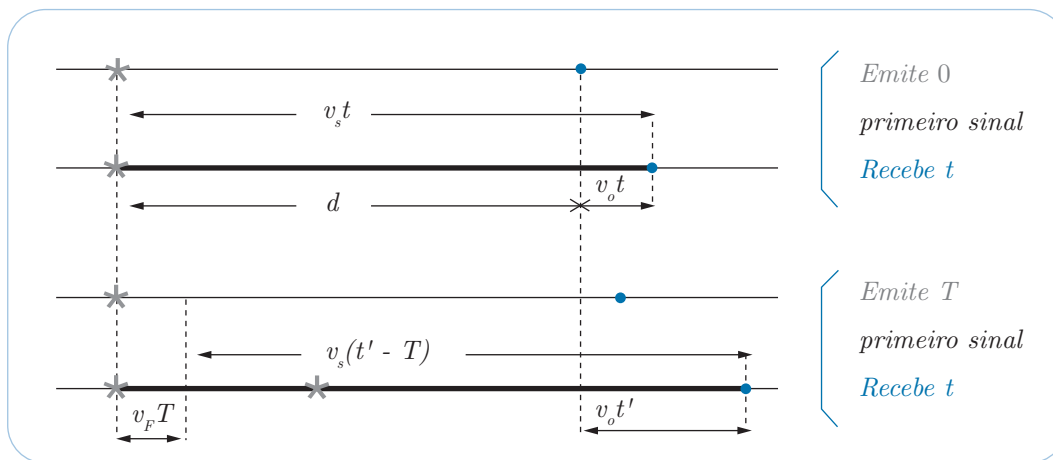
$$T_0 = t' - t = \frac{v_S}{v_S - v_0} T \quad \text{ou} \quad f_0 = \frac{v_S - v_0}{v_S} f_F \quad \text{Eq. 8}$$

Se o observador estiver se aproximando, encontramos uma situação semelhante, com  $v_0$  com o sinal trocado:

$$T_0 = t' - t = \frac{v_S}{v_S + v_0} T \quad \text{ou} \quad f_0 = \frac{v_S + v_0}{v_S} f_F \quad \text{Eq. 9}$$

## Fonte e observador em movimento

Vamos calcular do mesmo modo que anteriormente, supondo que o observador e o emissor se movem com a mesma velocidade e na mesma direção.



**Figura 6** – O asterisco representa a posição da fonte emissora e a bolinha a posição do observador. A fonte e o observador se movem para a direita (sentido positivo).

No instante inicial  $t = 0$ , no qual é emitido o primeiro sinal, o emissor e o observador estão separados por uma distância  $d$  desconhecida. O primeiro sinal é recebido pelo observador no instante  $t$ . O sinal se desloca no caminho marcado pelo traço grosso, negro na parte superior da Figura 6, desde que é emitido até ser recebido, de onde temos:

$$v_s t = v_o t + d \quad \text{Eq. 10}$$

O segundo sinal é emitido no instante  $T$  e é recebido no instante  $t'$ . No intervalo de tempo entre o primeiro e o segundo sinal, o emissor se desloca  $v_E T$ . O segundo sinal percorre, desde que é emitido até ser recebido, o caminho mostrado em traço grosso, negro na parte inferior da Figura 6, logo:

$$v_s (t' - T) = v_o t' - v_F T + d \quad \text{Eq. 11}$$

Usando as Equações 10 e 11, encontramos:

$$T_0 = t' - t = \frac{v_S - v_F}{v_S - v_0} T \quad \text{ou} \quad f_0 = \frac{v_S - v_0}{v_S - v_F} f_F \quad \text{Eq. 12}$$

De um modo geral, a Equação 12 vale para qualquer situação. Se a fonte, o observador ou o som se movem em sentido contrário, basta trocar o sinal na equação.

## Exemplo 2

O vigilante rodoviário **B** está perseguindo o motorista **A** por uma estrada estreita. Ambos se movem à velocidade de  $160\text{ km/h}$ . O vigilante rodoviário, não conseguindo alcançar o infrator faz soar a sua sirene. Considerando a velocidade do som no ar como sendo  $343\text{ m/s}$  e a frequência da sirene como sendo  $500\text{ Hz}$ . Qual a mudança *Doppler* na frequência ouvida pelo motorista **A**?

## Solução

Temos que:

$$v_F = v_O = 160\text{ km/h} = 44,45\text{ m/s},$$

$$v_s = 343\text{ m/s e}$$

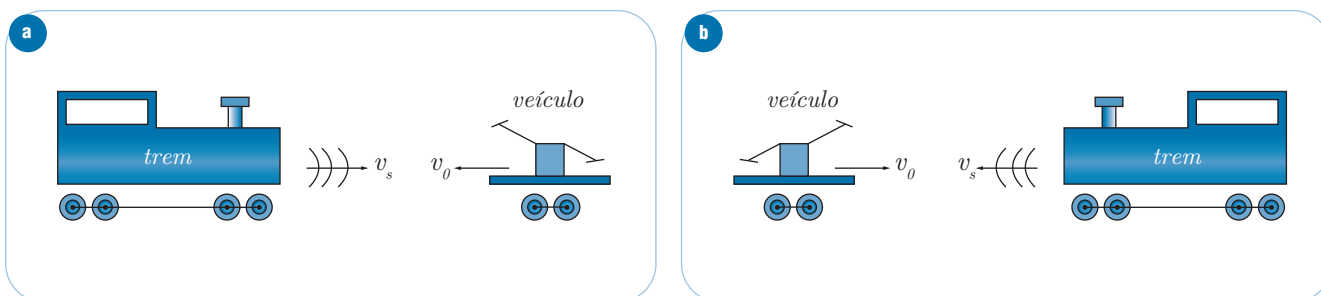
$$f_F = 500\text{ Hz}.$$

Nesse problema, a fonte se aproxima do observador e este se afasta da fonte. Sabendo-se que as duas velocidades são iguais e usando a Equação 12, temos:

$$f_0 = \frac{v_s - v_0}{v_s - v_F} f_F \quad \therefore \quad f_0 = f_F$$

## Exemplo 3

O apito de um trem que se move a  $90\text{ km/h}$  emite som de frequência  $500\text{ Hz}$ . Um condutor de um pequeno veículo de vistoria de linhas férreas move-se na mesma direção, porém em sentido contrário, com uma velocidade de  $144\text{ km/h}$ , aproximando-se do trem. Calcular a frequência do som escutado pelo condutor, como mostrado na figura a seguir.



## Solução

**Situação da esquerda (a)** – Para resolver esse problema, temos que escrever todos os dados na mesma unidade. Além disso, como o observador está no sentido contrário à direção, sua velocidade entra com o sinal menos, ou seja,  $v_s = 340 \text{ m/s}$ ,  $v_F = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$  e  $v_O = -144 \text{ km/h} = 40 \text{ m/s}$ . Então,

$$f_0 = \frac{v_s - v_O}{v_s - v_F} f_F = \frac{340 + 40}{340 - 25} 500 = 603,17 \text{ Hz}$$

**Situação da direita (b)** – Novamente, temos que escrever todos os dados na mesma unidade, porém, agora, tanto a fonte quanto o som estão no sentido contrário. Então, devem entrar na Equação 12 com sinal trocado, ou seja,  $v_s = -340 \text{ m/s}$ ,  $v_F = -90 \text{ km/h} = -25 \text{ m/s}$  e  $v_O = 144 \text{ km/h} = 40 \text{ m/s}$ . Logo,

$$f_0 = \frac{v_s - v_O}{v_s - v_F} f_F = \frac{-340 - 40}{-340 + 25} 500 = 603,17 \text{ Hz}$$

## Exemplo 4

Um automóvel, deslocando-se à velocidade de  $108 \text{ km/h}$ , toca sua buzina, cujo som é uma senóide pura de frequência igual a  $1\,200 \text{ Hz}$ . Um homem parado ao lado da estrada percebe uma variação brusca no som, no instante em que o automóvel passa pelo ponto onde se encontra. Qual a variação de frequência percebida pelo observador? (POTIERJ, 2008, extraído da Internet).

## Solução

### a) Antes do cruzamento

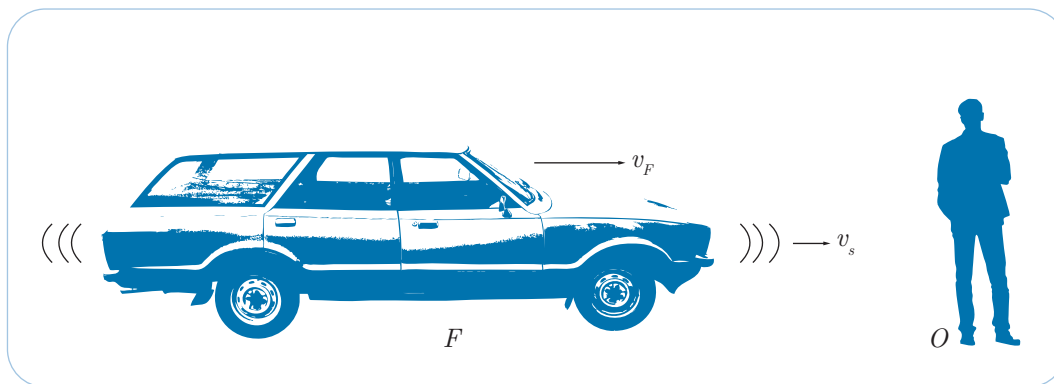


Figura 7 – Fonte se aproximando do observador.

Temos que:

$$v_s = 340 \text{ m/s},$$

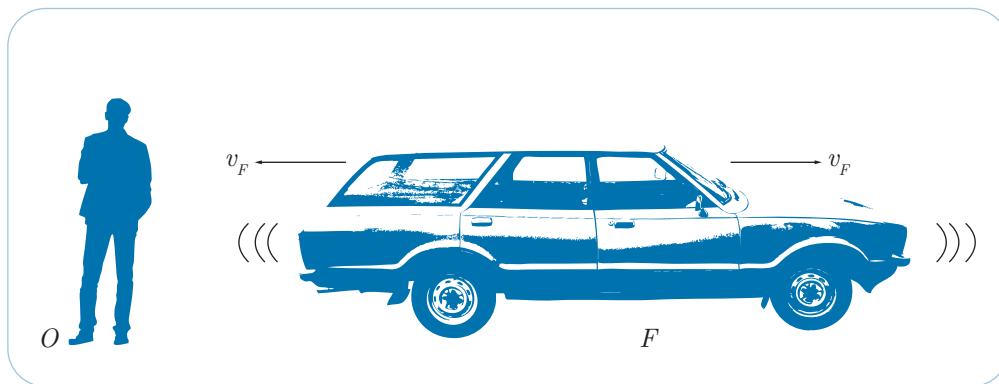
$$v_F = 108 \text{ km/s} = 30 \text{ m/s e}$$

$$v_O = 0.$$

Então, da Equação 12, temos:

$$f_0^A = \frac{v_S - v_0}{v_S - v_F} f_F = \frac{340}{340 - 30} 1200 = 1316,13 \text{ Hz}$$

**b)** Depois do cruzamento



**Figura 8** – Fonte se afastando do observador.

Agora, temos que:

$$v_S = -340 \text{ m/s},$$

$$v_F = 108 \text{ km/s} = 30 \text{ m/s e}$$

$$v_O = 0.$$

Assim, da Equação 12, temos:

$$f_0^D = \frac{v_S - v_0}{v_S - v_F} f_F = \frac{-340}{-340 - 30} 1200 = 1102,70 \text{ Hz}$$

$$f_0^A = 1316,13 \text{ Hz e } f_0^D = 1102,70 \text{ Hz}$$

$$\Delta f = f_0^A - f_0^D = 1316,13 - 1102,70$$

$$\Delta f = 213,43 \text{ Hz}$$

# Ondas de choque e ultrapassagem da barreira do som

Você já deve ter ouvido o estrondo quando a onda de choque oriunda de um avião que ultrapassou a velocidade do som atinge você. Isso acontece porque o avião provoca uma enorme compressão do ar, compressão esta que será percebida como um estrondo. Como nessas condições o ar irá produzir uma forte resistência ao movimento do avião, dizemos que ele enfrenta a “barreira do som”, ou seja, a perturbação do ar provocada por ele mesmo. Vejamos a seguir, em maiores detalhes, como isso ocorre.

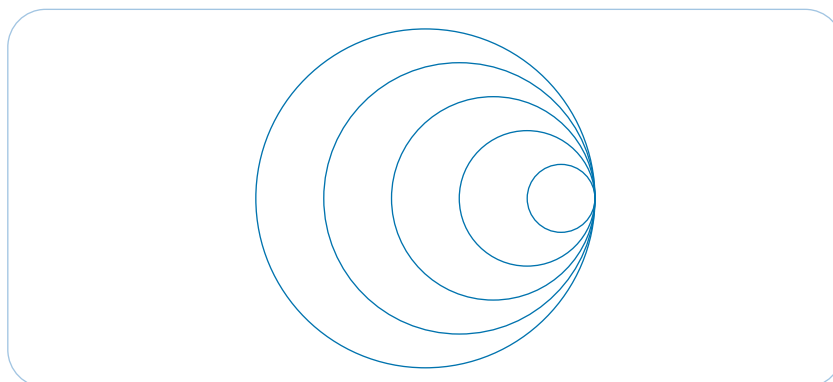
## Quando o emissor está em movimento: $v_F = v_s$

Um caso muito interessante é aquele representado pelo emissor em movimento, movendo-se com a velocidade do som, enquanto o observador permanece em repouso.



### Atividade 3

Suponha que você está viajando em um carro que tem um sistema de auto-falantes no porta-malas traseiro. Esse carro consegue viajar à velocidade do som. Você seria capaz de ouvir música nesse carro enquanto ele viaja à velocidade do som? Em que caso essa situação está classificada: fonte e observador em repouso, fonte em movimento e observador em repouso, ou fonte em repouso e observador em movimento?



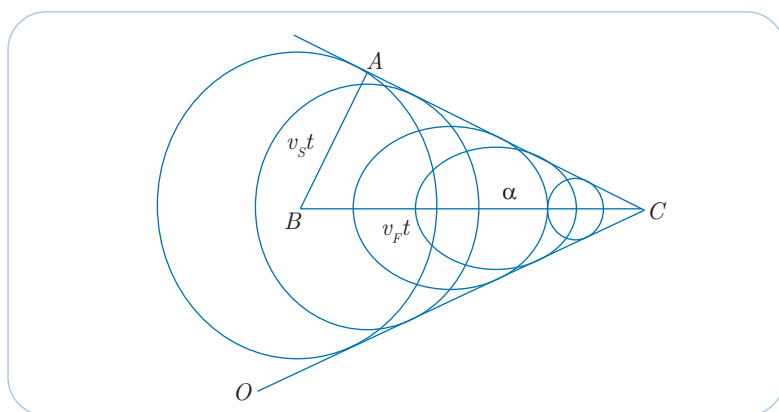
Fonte: Efecto...(2008, extraído da Internet).

**Figura 9** – O sinal + indica a fonte emissora e os círculos representam as frentes de ondas esféricas. Nesta situação, a velocidade da fonte emissora é igual à velocidade das ondas.

Quando a velocidade da fonte  $v_F$  é igual à velocidade de propagação das ondas no meio  $v_S$ , o comprimento de onda medido pelo observador situado à direita do emissor é zero. Se o emissor é um avião que vai à velocidade do som, as sucessivas frentes das ondas emitidas se agrupam na ponta do avião.

## Quando o emissor está em movimento: $v_F > v_S$

Quando a velocidade da fonte  $v_F$  é maior que a velocidade de propagação das ondas no meio  $v_S$ , o movimento ondulatório resultante é então uma onda cônica (a envolvente das sucessivas frentes de ondas é um cone com o vértice no emissor). Esta onda chama-se onda de *Mach*, que é uma onda de choque, e não é mais que o som repentino e violento que escutamos quando um avião supersônico passa próximo de nós. Essas ondas são observadas também quando os botes que se movem com maior velocidade que as ondas superficiais sobre a água. Na verdade, as ondas de choque ocorrem em três dimensões, as frentes de ondas de uma onda de choque são esferas e a envolvente toma a forma de um cone em torno da direção do movimento da fonte



Fonte: Efecto... (2008, extraído da Internet).

**Figura 10** – O ponto assinalado com  $C$  é a posição da fonte emissora. Nesse caso, a velocidade da fonte é maior do que a velocidade da onda e aparecem as ondas de choque. Na figura,  $v_S$  é a velocidade do som,  $v_F$  é a velocidade da fonte e  $O$  é a posição do ouvinte.

Você ouve o estrondo quando a onda de choque atinge você no ponto  $O$  (e não no momento em que o avião quebra a barreira do som). Um ouvinte situado à direita do ponto  $O$  ainda não ouviu o estrondo sônico, porém o ouvirá logo a seguir; um ouvinte à esquerda já ouviu o estrondo sônico e escutará o desvio de frequência produzido pelo efeito *Doppler* do som do avião.

No instante  $t = 0$ , o emissor se encontra em  $B$ , emite uma onda que se propaga pelo espaço com velocidade  $v_S$ . No instante  $t$ , a fonte emissora se encontra em  $C$  e deslocou-se  $v_F t$ . Nesse instante, a frente de onda centrada em  $B$  tem um raio  $v_S t$ . No triângulo retângulo  $OAC$  o ângulo do vértice é:

$$\text{sen } \alpha = \frac{v_S}{v_F} \quad \text{Eq. 13}$$

A razão inversa, isto é,  $v_F/v_S$  é denominado **número de Mach**. Ele é maior que um para todas as velocidades supersônicas. Na verdade, as ondas de choque ocorrem em três dimensões; uma onda de choque forma um cone em torno da direção do movimento da fonte (veja a Figura 11).



Fonte: <<http://pistonczar.files.wordpress.com/2007/11/67.jpg>>. Acesso em: 29 dez. 2008.

**Figura 11** – Ondas de choque devido à quebra da barreira do som.

Se a fonte se move com velocidade constante, o ângulo  $\alpha$  é constante e a onda de choque se move acompanhando a fonte.

É a chegada ao solo dessa onda de choque quem produz o estrondo sônico que você ouve depois que um avião supersônico passa acima do ponto onde você se encontra (o observador  $O$  na Figura 10).

Note que as ondas sonoras que se superpõem para formar a onda de choque, como na Figura 11, são criadas pelo movimento do próprio objeto, não por qualquer fonte sonora que o objeto possa transportar. Os estampidos provocados por uma bala e pelo chicote em um circo decorrem do movimento supersônico desses objetos. Os motores de um avião a jato podem produzir sons muito intensos, porém esses sons não produzem ondas de choque.

As ondas de choque são usadas na medicina para quebrar cálculos renais e na vesícula, sem a necessidade de cirurgias invasivas, mediante a técnica que recebeu o nome de **litotripsia extracorpórea** por ondas de choque, que será discutida numa das últimas aulas desta disciplina.

# Efeito *Doppler* em ondas eletromagnéticas

Como você bem já sabe, as ondas eletromagnéticas não precisam de um meio físico para sua propagação. Sua velocidade (designada por “ $c$ ”) é a mesma em todos os sistemas de referência e em todas as direções. No vácuo, a luz se propaga com a velocidade  $c = 299.792,458 \text{ km/s}$  e nós costumamos aproximar esse valor para  $c = 300.000 \text{ km/s}$ .

O efeito *Doppler* também ocorre em ondas eletromagnéticas. Nesse caso, como não há um meio que possamos usar como referência para medirmos as velocidades, o único fator relevante é a velocidade relativa entre a fonte e o observador.

Para deduzirmos a expressão do efeito *Doppler* do desvio da frequência para a luz é necessário usar a teoria da relatividade especial. Esse resultado será demonstrado na disciplina Relatividade, quando for tratado de Relatividade Especial.

A velocidade de propagação da onda é  $c$ , que é a mesma para a fonte emissora tanto para o receptor quanto para o observador. No sistema de referência no qual o receptor está em repouso, a fonte se afasta com velocidade  $v_F$  (quando a fonte se aproxima do receptor a velocidade  $v_F$  é negativa). A frequência da fonte é novamente  $f_F$ . A frequência  $f_O$  é a medida pelo receptor ou observador (vamos manter a mesma nomenclatura que no caso acústico para comparação), que é a frequência com a qual as ondas chegam ao receptor. Ela é dada por:

$$f_R = \sqrt{\frac{c - v_F}{c + v_F}} f_F \quad \text{Efeito Doppler para a luz} \quad \text{Eq. 14}$$

Quando  $v_F$  é positiva, a fonte se afasta diretamente do receptor e  $f_O$  é sempre **menor** do que  $f_F$ ; quando  $v_F$  é negativa, a fonte se aproxima diretamente do receptor e  $f_O$  é **maior** do que  $f_F$ . O efeito qualitativo é semelhante ao que ocorre com as ondas sonoras, porém a relação quantitativa é diferente.



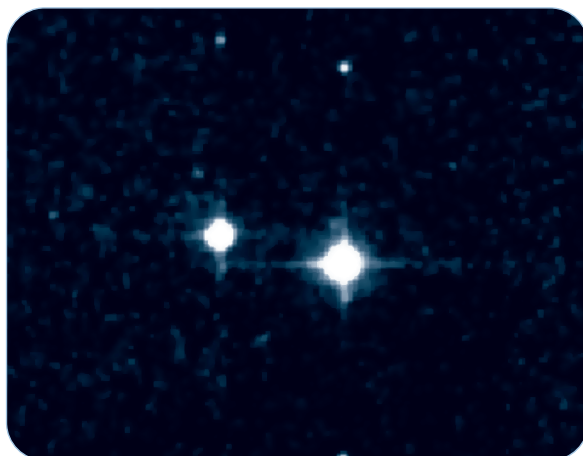
# Aplicações do efeito *Doppler*

Uma aplicação conhecida do efeito *Doppler* em ondas de rádio é o equipamento de radar, montado para medir a velocidade dos carros nas avenidas e estradas. Há dois tipos de radares que usam o efeito *Doppler*: o **radar comum** que determina basicamente a velocidade instantânea do veículo observado, indicando por sinal audível se ela é maior que certo limite preestabelecido e registrando seu valor no *display* luminoso; e o **radar fotográfico** que é associado ao radar com uma câmera fotográfica a fim de registrar os dados do veículo que ultrapassa o limite de velocidade previamente estabelecido. É um equipamento que pode dispensar o operador, se for instalado de maneira fixa ao lado da via. (GONÇALVES; PULLIN, 1982).

Técnicas semelhantes são utilizadas para medir a velocidade do vento na atmosfera. O efeito *Doppler* também é usado para rastrear satélites e outros veículos espaciais.

## O efeito *Doppler* e a astronomia

O efeito *Doppler* nos permite medir velocidades em astronomia. É graças a esse efeito que sabemos hoje muita coisa sobre o comportamento de estrelas e galáxias. Por exemplo, descobrimos a existência de sistemas estelares formados por duas ou mais estrelas. Para que você tenha uma idéia de como se faz essas descobertas, apresentamos a seguir a situação de um sistema formado por duas estrelas, chamado estrela dupla.



Fonte: <[www.portaldoastronomo.org.br/images/npod/nuclio](http://www.portaldoastronomo.org.br/images/npod/nuclio)>. Acesso em: 29 dez. 2008.

**Figura 12** – M 40 é uma estrela dupla situada na constelação da Ursa Maior. Foi descoberta por Charles Messier em 1764. M 40 situa-se a cerca de 500 anos-luz de distância da Terra.

Em uma estrela dupla, como a mostrada na Figura 12, por exemplo, na qual as duas estrelas giram em torno do centro de massa comum (você já sabe o que é centro de massa. Esse conceito foi discutido na disciplina de Movimento e Mecânica Clássica), a luz sofre um

efeito *Doppler* e sua frequência se desloca para valores mais altos. Quando as estrelas se aproximam de um observador na Terra a radiação emitida por elas se desloca para frequências mais baixas e quando as estrelas se afastam da Terra a radiação emitida por elas se desloca para frequências mais altas. Medidas dos desvios das frequências revelam informações sobre as órbitas e sobre as massas das estrelas que compõem as estrelas duplas.

Também é um efeito semelhante ao *Doppler* que nos permite saber que o Universo está em expansão: quanto mais distante uma galáxia, maior é o desvio de sua luz para o vermelho (usualmente chamado “*redshift*”).

Quando se observa o espectro da luz proveniente de uma galáxia distante, onde é possível identificar linhas espectrais características e comparar com as mesmas linhas em um espectro terrestre, em geral, vê-se que a frequência se torna menor e se diz que houve um desvio para o vermelho. Isto é, interpretado como uma evidência da expansão do Universo (as galáxias se afastam uma das outras) e foi descoberto pelo astrônomo americano Hubble em 1929. Voltaremos a esse assunto na disciplina Introdução à Astrofísica e Cosmologia.

Para que você tenha uma idéia de como se procede nesse tipo de pesquisa, consideremos o caso seguinte.

## Exemplo 5

Sabe-se que o maior comprimento de onda emitido pelo átomo de hidrogênio (na série de Balmer) é  $\lambda_0 = 656nm$ .

Na luz emitida por uma galáxia distante, observa-se que o comprimento de onda desta mesma linha espectral é  $\lambda = 1458nm$ . A partir dessa informação, os cientistas pretendem determinar a velocidade dessa galáxia e saber se ela está se afastando ou se aproximando da Terra.

## Solução

Como  $\lambda > \lambda_0$ , então,  $f < f_0$ . Portanto, deveremos ter um afastamento da galáxia. Com isso, parte do mistério está resolvida.

Lembrando, agora, que frequência e comprimento de onda são relacionados por  $\lambda f = c$  (no vácuo).

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \rightarrow \frac{f}{f_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

Portanto,

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - (\lambda_0/\lambda)^2}{1 + (\lambda_0/\lambda)^2} = 0,664$$

Ou seja, a velocidade com que a galáxia se afasta de nós é de  $0,664c$ , isto é, com uma velocidade da ordem de  $1,99 \times 10^5 \text{ km/s}$ .

**Observação** – Uma interpretação correta do *redshift* da luz de fontes distantes deve incluir a gravitação, isto é, temos que usar a relatividade geral.

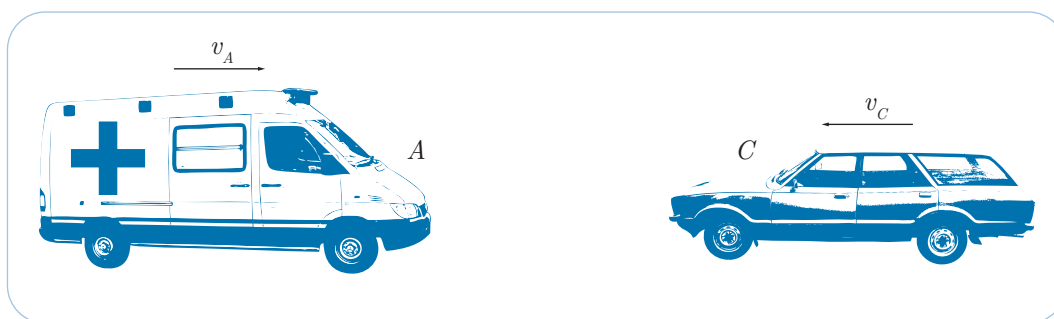
## Resumo

Nesta aula, você estudou os fenômenos que ocorrem com o som e com a luz quando eles estão em movimento, e como eles são percebidos por observadores em diversas situações, isso corresponde ao Efeito *Doppler* acústico e ao luminoso. Aprendeu também sobre a barreira do som e velocidades supersônicas, tendo visto, ao final da aula, aplicações do Efeito *Doppler* em Astronomia e em Cosmologia.

## Autoavaliação

1

No esquema a seguir, *A* é uma ambulância que se move a  $108 \text{ km/h}$  e *C* é um carro que se move opostamente à ambulância a uma velocidade de  $36 \text{ km/h}$ .



A ambulância, tocando a sirene, emite um som de frequência  $900 \text{ Hz}$ . Se a velocidade do som no ar (supostamente parado) é de  $330 \text{ m/s}$ , calcule a frequência aparente do som ouvido pelo motorista de  $C$ :

- a)** antes do cruzamento de seu carro com a ambulância;
- b)** depois do cruzamento de seu carro com a ambulância (baseado em <http://www.fisica-potierj.pro.br/poligrafos/doppler.htm>).

2

Uma fonte sonora e um ouvinte estão em repouso sobre a Terra, porém um vento forte sopra o sentido da fonte para o ouvinte. Existe efeito *Doppler*? Justifique sua resposta.

3

Um apito para chamar cães tem uma frequência de  $30 \text{ kHz}$ . O cão, entretanto, o ignora. O dono do cão, que não pode escutar frequências acima de  $20 \text{ kHz}$ , decide usar o efeito *Doppler* para descobrir se o apito funciona de maneira adequada e pede a um amigo que sobre o apito no interior de um carro em movimento, enquanto ele permanece parado ouvindo:

- a)** qual precisa ser a velocidade do carro e qual a direção para que o dono execute o apito a  $20 \text{ kHz}$  (se ele estiver funcionando)? O experimento é prático?
- b)** refaça para uma frequência do apito igual a  $22 \text{ kHz}$ , em vez de  $30 \text{ kHz}$ .

4

Uma ambulância tocando sua sirene a  $1600 \text{ Hz}$  ultrapassa um ciclista, que estava pedalando a  $2,4 \text{ m/s}$ . Depois de a ambulância ultrapassá-lo, o ciclista escuta a sirene a  $1590 \text{ Hz}$ , qual a velocidade da ambulância?

5

Uma sirene de  $2000 \text{ Hz}$  e um oficial da defesa civil estão em repouso em relação a Terra. Que frequência o oficial irá ouvir, se o vento estiver soprando a  $12 \text{ m/s}$ ? (a) da fonte para o oficial e (b) do oficial para a fonte? (Dica: a fórmula do deslocamento *Doppler* é válida apenas usando as velocidades da sirene e do oficial se forem medidas em relação a um meio estacionário, isto é, sem vento. Para modificar a fórmula de modo a levar o vento em consideração, basta mudar para um novo referencial no qual não exista vento).

6

Uma menina está sentada próxima a uma janela aberta de um trem, que está se movendo a uma velocidade de  $10,0 \text{ m/s}$  para o leste. Ao emitir um som a uma frequência de  $500,0 \text{ Hz}$  não há ventos:

- a) que frequência a tia da menina irá ouvir?
- b) que frequência a menina irá ouvir?
- c) com um vento soprando para o oeste a  $10,0\text{ m/s}$ , que frequência a tia da menina irá ouvir?
- d) com um vento soprando para o oeste a  $10,0\text{ m/s}$ , que frequência a menina irá ouvir?

7

O cone das ondas de choque criado pelo ônibus espacial em um instante durante a sua reentrada na atmosfera forma um ângulo de  $58^\circ$  com a direção de seu movimento. A velocidade do som nessa altitude é  $331\text{ m/s}$ :

- a) qual é o número de *Mach* do ônibus espacial nesse instante?
- b) com que velocidade, em  $\text{m/s}$ , ele está se deslocando com relação à atmosfera?
- c) qual seria seu número de *Mach* e o ângulo do cone das ondas de choque, se ela viajasse na mesma velocidade, mas em altitudes mais baixas, onde a velocidade do som é  $344\text{ m/s}$ ?

## Referências

BASSALO, José Maria . O Efeito Doppler-Fizeau. **Seara da Ciência**: curiosidades da física. Disponível em: <<http://www.seara.ufc.br/folclore/folclore107.htm>>. Acesso em: 29 dez. 2008.

EFFECTO Doppler acústico. Disponível em: <<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ondas/doppler/doppler.html>>. Acesso em: 29 dez. 2008.

GOLÇALVES, José Ernesto Lima; PULLIN, Humberto Moreira. **Métodos para avaliação de velocidade**. São Paulo: Companhia de Engenharia de Tráfego, 1982. (Notas Técnicas, 079). Disponível em: <<http://cetsp1.cetsp.com.br/pdfs/nt/NT079.pdf>>. Acesso em: 29 dez. 2008.

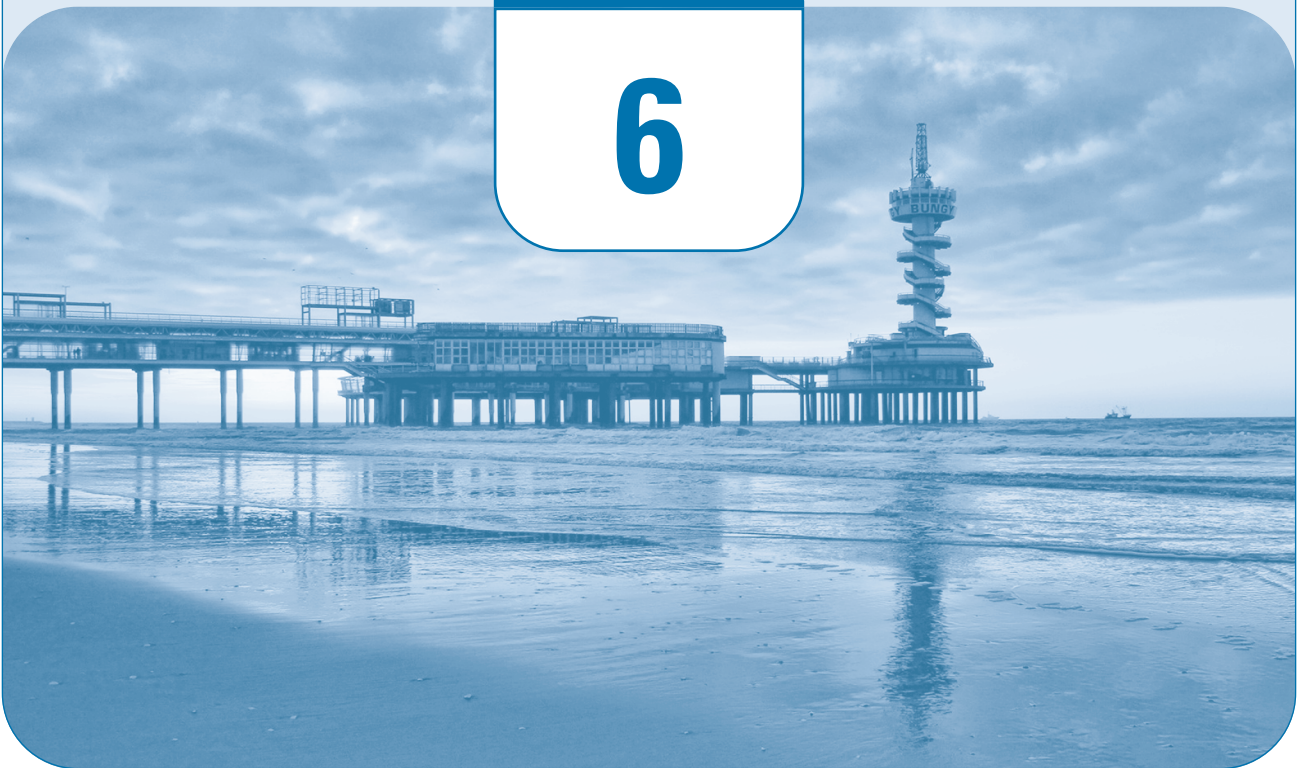
POTIERJ, Guido. **Efeito Doppler**. 2003. Disponível em: <<http://www.fisica-potierj.pro.br/poligrafos/doppler.htm>>. Acesso em: 29 dez. 2008.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física**: Termodinâmica e ondas: Sears e Zemansky. 10. ed. São Paulo: Addison- Wesley, 2008. v 2.

# Reflexão

Aula

6



# Apresentação

**N**esta aula, vamos discutir os fenômenos de reflexão de ondas mecânicas e eletromagnéticas com ênfase nos fenômenos luminosos. A discussão de tais fenômenos será baseada nos princípios e conceito de frente de onda, onda plana, raios luminosos, e feixes de luz. Discutiremos também o fenômeno de reflexão interna total e a aplicação do processo na utilização em fibras óticas.

## Objetivos

- 1** Entender o processo de reflexão das ondas numa superfície.
- 2** Distinguir reflexão especular de difusa.
- 3** Compreender o processo de reflexão das ondas quando se propaga de um meio para outro.
- 4** Resolver problemas envolvendo a Lei da Refração ou a Lei de Snell.



# O eco ou a reflexão de ondas sonoras

**V**amos iniciar nossa aula com um fato curioso e bem conhecido de todos nós. Quando se emite um som (grito) nas proximidades de um obstáculo como, por exemplo, num vale entre serras, as ondas sonoras sofrem reflexão nas encostas da serra e voltam na direção oposta, e quando elas chegam até nós ouvimos a reprodução do nosso grito (o eco). Portanto, a existência do eco se deve unicamente à propriedade de reflexão das ondas sonoras.

Só ouvimos os ecos como sons isolados quando eles nos atingem  $1/10$  de segundo ou mais depois do som original. Esse é o tempo necessário para o ouvido humano separar um som do outro. Se você quiser ouvir o seu eco deverá ficar pelo menos a 17 metros de distância da parede refletora. Se você gritar diante de um penhasco a 17 metros, o som caminhará 17 metros até o penhasco e mais 17 de volta para você, numa distância total de 34 metros. Como o som tem a velocidade de 340 metros por segundo, deverá percorrer essa distância em  $1/10$  segundo. O eco chegará a seu ouvido  $1/10$  de segundo depois de você ouvir sua voz original. Você poderá, portanto, distinguir o eco.

Uma das aplicações práticas do eco é o sonar dos navios. Tal sistema funciona assim: um vibrador, preso na parte imersa do casco do navio, emite ondas sonoras que se propagam pela água e que vão ao fundo e retornam gastando determinado tempo. Conhecendo-se as características das ondas, como velocidade, frequência e o tempo gasto para a onda ir e voltar, pode-se calcular a profundidade do oceano na região onde se encontra o navio. Esse método também é utilizado por navios pesqueiros na localização de cardumes. Se, por exemplo, o tempo for de um segundo, o som percorreu 1500 metros (A velocidade do som na água é cerca de quatro vezes maior do que no ar). A profundidade do local é, portanto, de 750 metros.



## Atividade 1

Um navio pesqueiro, em repouso, está com seu sonar ativado e de repente ele recebe um sinal que foi refletido após ter sido lançado há 3,0 segundos. Determine a distância do navio que se encontra o obstáculo responsável por esta reflexão.

# Exemplo 1

Descobrir a profundidade de um cacimbão (poço amazonas) onde a água esteja a uma profundidade maior que os 17 metros com a ajuda de um cronômetro.

## Procedimento

Deve-se, por exemplo, com um cronômetro medir o tempo entre o soltar de uma pedra no poço e o ouvir o barulho da colisão entre a pedra e a água.

Ao chegar à boca do cacimbão, solta-se (velocidade inicial nula) uma pedra dentro do poço e se espera até escutar o barulho da pedra na água. Como a velocidade de descida da pedra está relacionada com a aceleração da gravidade, o resultado é que o tempo total será bem grande, o que tornará mais fácil de diminuir erros na hora de apertar o cronômetro. Solta-se a pedra a partir do repouso e se aperta, simultaneamente, o cronômetro. No instante em que você escutar o barulho da pedra na água, trave o cronômetro. Esse tempo medido é a soma do tempo de queda da pedra até a superfície da água mais o tempo que o som do barulho da água na pedra leva para chegar ao seu ouvido.

Cálculo da profundidade do poço:

Tempo total  $t = t_q + t_s$ , onde  $t_q$  refere-se ao tempo de queda da pedra e  $t_s$  ao tempo que o som leva para chegar ao seu ouvido.

A profundidade poderá ser obtida pelas Equações 1 e 2, respectivamente.

$$\text{Quando a pedra está caindo } h = \frac{1}{2}gt_q^2 \quad \text{Eq. 1}$$

E quando o som percorre de volta a mesma distância, ou seja,

$$h = v_s t_s \quad \text{Eq. 2}$$

Como o  $h$  é o mesmo nas Equações 1 e 2, então,

$$\frac{1}{2}gt_q^2 = v_s t_s \quad \text{ou} \quad t_s = \frac{1}{2v_s}gt_q^2 \quad \text{e, ainda, como o tempo total medido pelo}$$

cronômetro é  $t = t_q + t_s$ , então  $t_s = t - t_q$

$$t - t_q = \frac{1}{2v_s}gt_q^2 \quad \text{e reescrevendo, } t_q^2 + \frac{2v_s}{g}t_q - \frac{2v_s}{g}t = 0 \quad \text{Eq. 3}$$

A Equação 3 é uma equação do segundo grau. Se o tempo medido foi de 5,0 segundos, então, considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , e que  $V_s = 340 \text{ m/s}$ , temos:

$$t_q^2 + \frac{2 \times 340}{10}t_q - \frac{2 \times 340}{10} \times 5 = 0$$
$$t_q^2 + 68t_q - 340 = 0$$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$t_{q1} = -4,7s$$

$$t_{q2} = 4,7s$$

Note que o valor negativo para o tempo não tem significado físico, portanto fisicamente a solução aceitável é  $t_{q2} = 4,7s$ .

Resolvemos a equação para  $t_q$  e usaremos agora o resultado para encontrar  $h$ , ou seja:

$$t = t_q + t_s \rightarrow t_s = t - t_q = 5 - 4,7 = 0,3s$$

$$h = v_q t_s = 340 \times 0,3 = 102,0m$$

**Essa é a profundidade do nosso cacimbão hipotético.**



## Atividade 2

Determine qual é o intervalo de tempo abaixo do qual não seria possível escutar o barulho da pedra batendo na água.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Com o que vimos até agora, você deve ter percebido a utilidade prática da reflexão das ondas acústicas, vejamos agora o que acontece com as ondas eletromagnéticas, em especial com a luz.

# Ondas planas e superfícies refletoras

Como você sabe, as cores dos objetos que se encontram a temperaturas da ordem da temperatura ambiente (por volta de 300 K) são devido às reflexões de alguns comprimentos de ondas pela luz incidente sobre eles. Assim, quando olhamos para um objeto opaco, vemos somente a parcela não absorvida da luz que chegou até ele.

A cor de um objeto representa a parte do espectro luminoso (na faixa do visível) que ele reflete. Ou seja, se um objeto é verde é porque ele absorve radiação em todos os comprimentos de onda, mas não no verde, que é então refletido.

A reflexão de ondas é o fenômeno que ocorre quando uma onda atinge um obstáculo e muda a direção de propagação, podendo inclusive retornar ao ponto original. Seus principais parâmetros como o comprimento de onda, velocidade e frequência não são alterados pela reflexão, já que o sinal não muda de meio de propagação.

Por outro lado, as superfícies sobre as quais fazemos incidir a onda definem o que irá acontecer com a reflexão. As superfícies são classificadas como polidas ou rugosas. No caso da superfície polida, espelhos, por exemplo, verifica-se que após a reflexão do feixe de luz, os raios continuam paralelos entre si. Já a superfície rugosa irá espalhar a onda em diversas direções e isso ocorre pelo fato de que cada reentrância da superfície irá refletir a onda incidente em uma direção, enquanto que em uma superfície polida todos os pontos da superfície irão refletir a onda na mesma direção.



## Atividade 3

As paredes de nossas casas são superfícies polidas ou rugosas? Do ponto de vista da luz, cite uma vantagem disso.

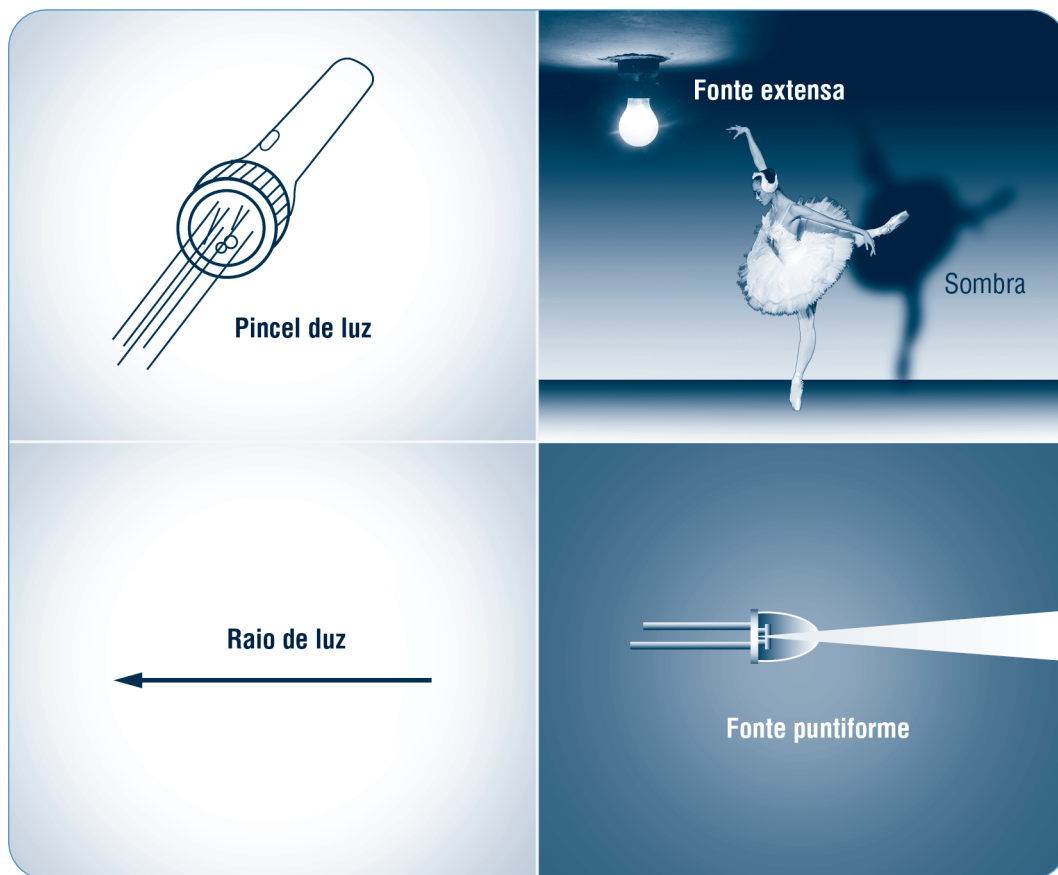
---

---

---

---

Para compreender melhor os fenômenos ondulatórios como reflexão, refração, difração e interferência precisamos desenvolver ferramentas geométricas tais como raio de luz, feixes e pincéis de luz. Para tanto, precisamos inicialmente definir algumas características das fontes luminosas que possibilitam essa geometrização. Podemos de imediato definir dois tipos de fontes: as “grandes” que chamaremos de **extensas** e as “pequenas” que chamaremos de **puntiformes**. Você deve ter percebido que as palavras “grandes” e “pequenas” precisam ser melhor definidas. Assim, dizemos que uma fonte é puntiforme quando suas dimensões são desprezíveis em relação ao tamanho do objeto a ser iluminado. Caso contrário, dizemos que é uma fonte extensa.



**Figura 1** – As fontes luminosas podem ser classificadas em extensas e puntiformes e a propagação da luz pode ser tratada como pincel de luz e ou raio de luz.



## Atividade 4

- a) Para gerar sombras precisamos de uma fonte extensa ou de uma fonte puntiforme?
- b) O sol é uma fonte extensa ou puntiforme?
- c) Como suas respostas podem ajudá-lo a compreender o fenômeno do eclipse?

a) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

b) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

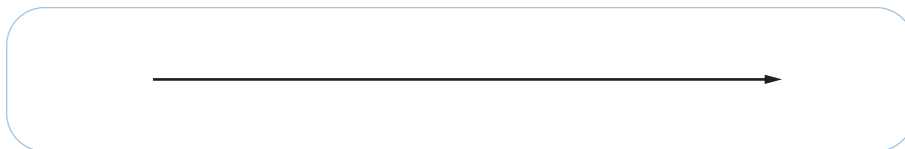
c) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

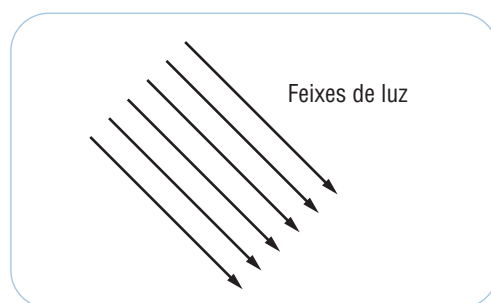
\_\_\_\_\_

De posse de uma fonte puntiforme, seria possível imaginar que se conseguisse isolar um raio de luz, ou seja, torná-lo tão fino quanto possível. Nesse caso, seria possível representar esquematicamente a propagação da luz por um segmento de reta orientada indicando a direção e o sentido do deslocamento do raio da luz, conforme a Figura 2.



**Figura 2** – Representação esquemática de um raio e luz.

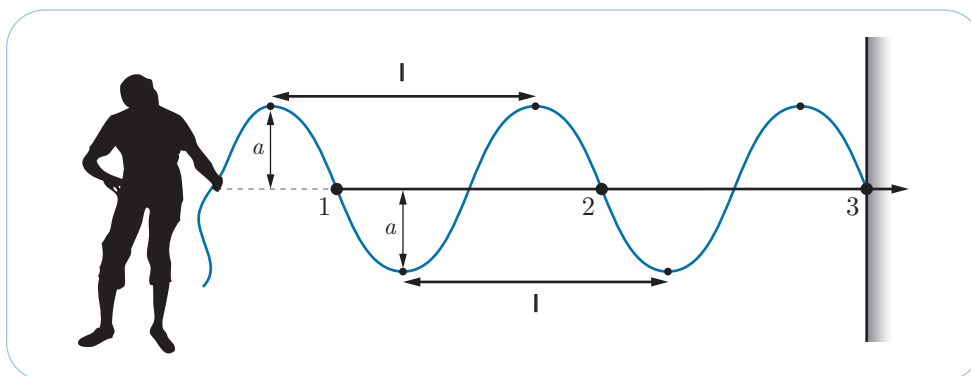
Poderíamos também representar um feixe de luz por um conjunto de segmentos de retas orientadas paralelas, como indica a Figura 3.



**Figura 3** – Representação esquemática de um feixe de luz.

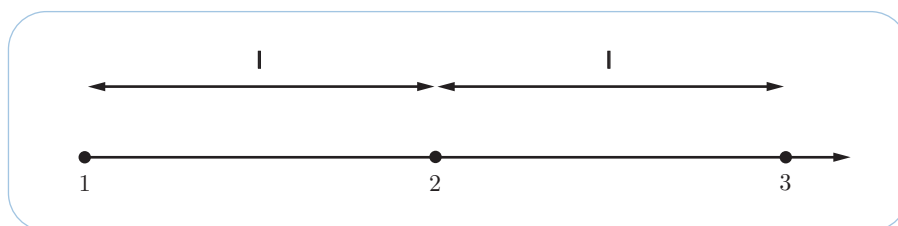
As ondas, não importando sua natureza, apresentam alguns comportamentos típicos. Assim, muito do que foi comentado até agora para as ondas mecânicas também se aplica às ondas eletromagnéticas (a luz, por exemplo). A Figura 4 mostra uma onda numa corda. Essa onda foi formada pelo vaivém da mão do garoto num movimento periódico.

Você pode verificar ainda na Figura 4 que os pontos 1, 2 e 3 marcados sobre a corda por círculos pretos têm as mesmas características. A distância entre os pontos 1 e 2 e entre os pontos 2 e 3 é a medida do comprimento da onda  $\lambda$  nessa corda, que é a mesma medida entre as cristas da onda. Como visto nas aulas anteriores, a onda se propaga ao longo da corda transportando energia entre os pontos 1, 2 e 3.



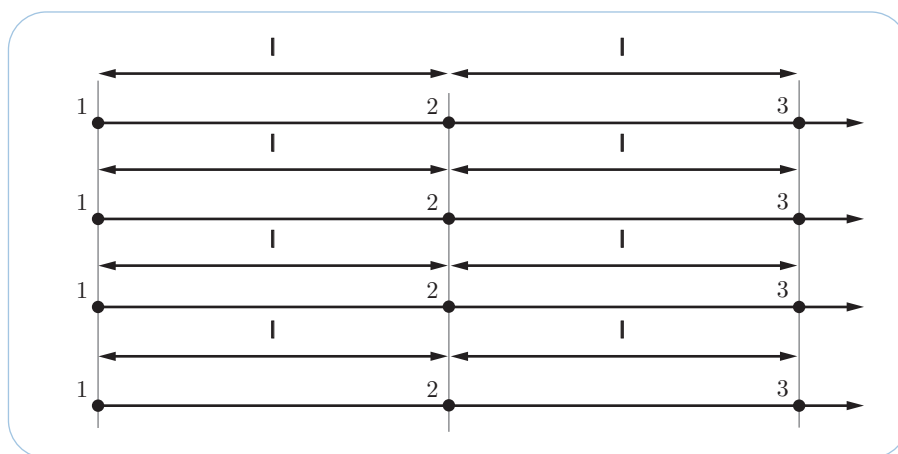
**Figura 4** – Representação esquemática de uma onda produzida em uma corda.

Unindo-se os pontos 1, 2 e 3 também através de um segmento de reta seria reproduzida a mesma configuração da Figura 2, com as marcações dos pontos 1, 2 e 3, de acordo com a Figura 5.



**Figura 5** – Esquemática dos pontos 1, 2 e 3 da Figura 4, exemplificando a propagação da onda do ponto 1 para o ponto 3.

Marcando-se os pontos 1, 2, 3 etc. sobre um raio de luz, reproduzindo-se os pontos para o feixe de luz e unindo-se os pontos de cada raio, obteremos retas perpendiculares à direção de propagação do feixe, que serão denominadas de frentes de onda. A distância entre duas frentes de onda sucessivas é o comprimento de onda da luz. Veja esquematização na Figura 6.

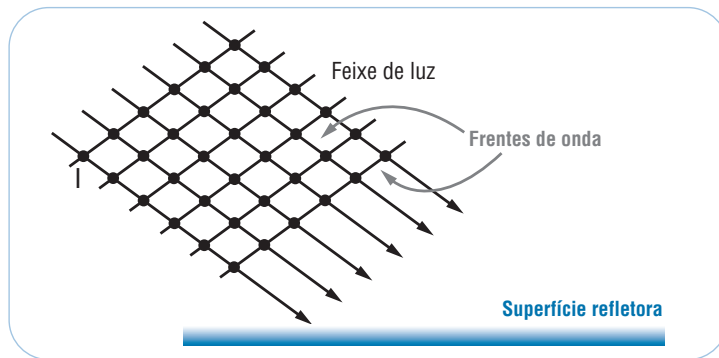


**Figura 6** – Uma onda plana.

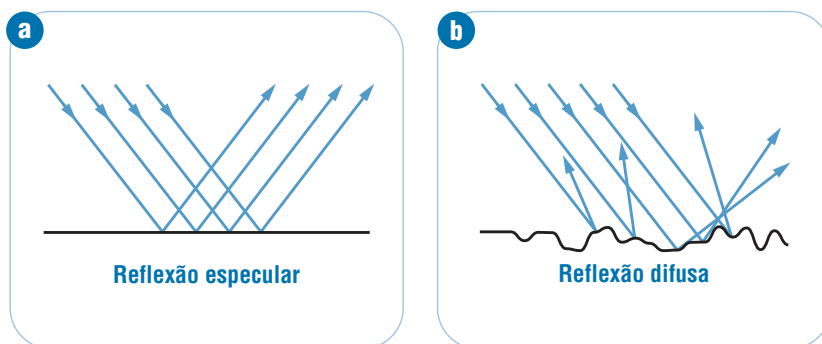
## Ondas planas

Como você está lembrado, na aula 3 (O fenômeno ondulatório), definimos onda plana. Lembrando novamente, uma onda plana é uma onda onde todos os pontos da frente de onda são paralelos entre si, como foi mostrado na Figura 6.

Se uma onda plana incide sobre uma superfície plana refletora, como indica a Figura 7, podemos verificar duas possibilidades. Se a superfície é bastante polida dizemos que a reflexão é especular (reflexão da luz num espelho plano polido), conforme a Figura 8 (a). Se a superfície for áspera ou rugosa dizemos que a reflexão é difusa (reflexão da luz numa tampa de ferro ou alumínio mal polido etc), conforme a Figura 8 (b). Significa dizer que os raios de luz após a reflexão não são paralelos entre si. Isso acontece quando as saliências na superfície refletora têm dimensões maiores que o comprimento de onda da luz.



**Figura 7** – Aproximação de um feixe de luz de uma superfície plana refletora.



**Figura 8** – Reflexão da luz por um espelho e por uma superfície áspera.

Você deve ter percebido nas Figuras 7 e 8 da aula 3 desta disciplina a incidência e reflexão de um pulso numa corda fixa em uma extremidade. É importante você compreender que a reflexão da luz na Figura 8 (a) obedece as mesmas propriedades do pulso refletido na Figura 5 da aula 3.



## Atividade 5

Agora, lápis e papel à mão para realizar a atividade.

- a)** Você é capaz de explicar brevemente como vemos os objetos (não precisa discutir a física do olho, pois este é um assunto de aula futura), discutindo a relação entre fontes, objetos e nossa visão? Tente.
- b)** O que faz com que possamos ver nossa imagem tão nítida em um espelho? Explique.

a) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

b) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



## Atividade 6

Quando olhamos nossa imagem em um lago de águas claras ou mesmo em uma bacia de água, a imagem sempre é embaçada. Por que isso acontece?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

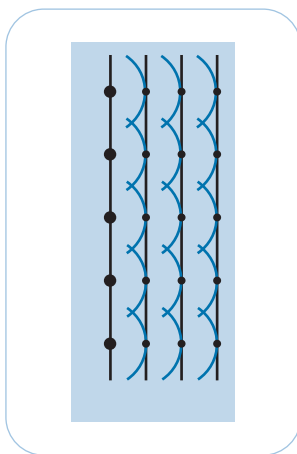
# Princípio de Huygens

Precisamos agora formalizar a interação das ondas com as superfícies de modo a podermos encontrar relações gerais que nos permitam prever o comportamento das ondas em todas as situações.

Apesar de os vidros e espelhos serem conhecidos e utilizados desde a antiguidade, somente nos séculos XVI e XVII é que se conseguiu formular uma teoria consistente para a luz. Fizeram parte desse esforço, personagens como os franceses, René Descartes e Pierre Fermat, os holandeses, Willebrord Van Roijen Snell e Christian Huygens, bem como o inglês Isaac Newton. Christian Huygens foi o primeiro a encontrar uma lei geral para a propagação de onda. Essa lei geral, conhecida como Princípio de Huygens, descoberta em 1678 afirma que “cada ponto de uma frente de ondas primárias é uma fonte de ondas esféricas secundárias que se propagam com velocidade e frequência semelhantes à onda primária”.

Em outras palavras, todos os pontos em uma frente de onda podem ser considerados como fontes puntiformes para a produção de ondas esféricas secundárias. Após um certo intervalo de tempo  $t$ , a nova posição da frente de onda será uma superfície plana que é tangente às ondas secundárias.

Para obtermos as frentes de onda descritas no parágrafo anterior precisaremos de um compasso e de uma régua. Na Figura 9, temos as fontes puntiformes primárias A, B, C, D e E. Cada uma delas gera uma frente de onda que é uma superfície esférica (na figura, mostramos apenas uma pequena fração de cada superfície). O raio do semicírculo mostrado na figura é igual ao comprimento de onda da onda, ou seja, a distância entre as duas frentes de onda sucessivas é justamente o comprimento de onda.



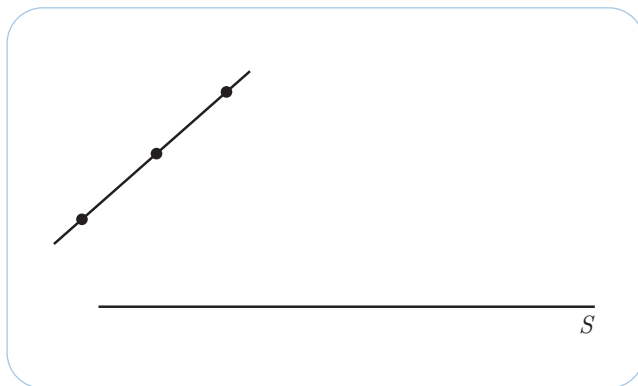
**Figura 9** – Construção geométrica de uma frente de onda. Os pontos A, B, C, D e E são fontes puntiformes e as retas 1, 2, e 3 são frentes de onda.

Assim, quando a perturbação se deslocar de um comprimento de onda, como denotado na figura pelas retas 1, 2, 3, as frentes de onda serão perpendiculares ao raio (Isso sempre acontece!). Desse modo, cada nova frente de onda se comporta como se contivesse em cada ponto um nova fonte puntiforme que irá gerar uma onda, e assim, sucessivamente até atingir a superfície.



## Atividade 7

- a)** De posse de um compasso e de uma régua, supondo que o comprimento de onda da radiação gerada por cada fonte puntiforme primária seja de 2,0 cm, obtenha a figura das frentes de onda até que estas atinjam a superfície  $S$ .



- b)** Você verificou que as frentes de onda são sempre perpendiculares ao raio?

Você deve ter percebido, na atividade que acabou de realizar, que as ondas referentes a cada frente de onda não chegam simultaneamente à superfície  $S$ . Os detalhes sobre o que ocorre a partir daí serão dados no assunto que apresentamos a seguir.

# O Princípio de Huygens e a Lei da Reflexão

Retomando então nossa conversa, considere uma onda plana incidente sobre uma superfície refletora, se propagando com velocidade  $v$ , como mostrado na Figura 8. Note que a incidência não é perpendicular à superfície. Vamos focalizar nossa atenção na relação entre os ângulos de incidência  $\theta_i$  medido em relação à reta perpendicular à superfície refletora (Normal) e o raio incidente, como também entre o ângulo de reflexão  $\theta_r$  medido em relação à reta perpendicular à superfície refletora (Normal) e o raio refletido.

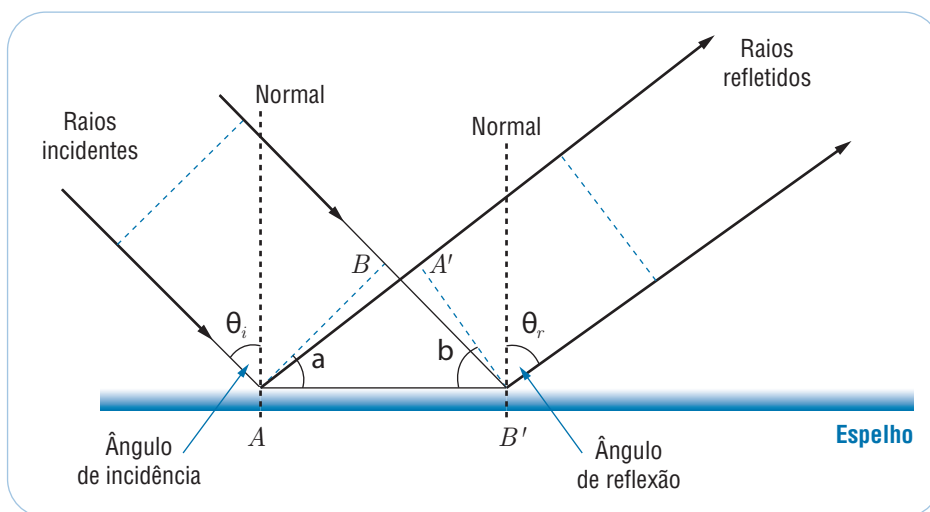


Figura 10 – Esquemática de uma frente de onda refletida numa superfície espelha, representada pela propagação de dois raios de luz.

Considere a Figura 10. As retas  $AB$  e  $A'B'$  correspondem, respectivamente, a posição da frente da onda em dois instantes, no instante  $t = t_0$ , quando os raios atingem a superfície, e o outro, logo em seguida, quando os raios são também refletidos.

Olhando a geometria da Figura 10 podemos descobrir dois triângulos. O primeiro de vértices  $ABB'$  e o segundo de vértices  $AA'B'$  (triângulos  $ABB'$  e  $AA'B'$ ). Comparando-se os dois pode-se perceber que:

- Ambos são triângulos retângulos (a frente da onda é sempre perpendicular aos raios).
- O seguimento  $AB'$  é a hipotenusa dos dois triângulos, ou seja, eles possuem um lado comum.
- Os seguimentos de reta  $AA'$  e  $BB'$  são iguais, pois fisicamente correspondem a:  $AA' = c\Delta t$  e  $BB' = c\Delta t$ , onde  $c$  é a velocidade da luz. Portanto, são iguais.
- Finalmente, como se trata de triângulos retângulos, podemos aplicar o teorema de Pitágoras e concluir que os outros dois catetos são iguais, o que nos leva a concluir que esses triângulos são idênticos.

O triângulo  $ABB'$  = ao triângulo  $AA'B$ .

Com isso, verificamos que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são iguais. Da Figura 10, vemos que:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta_i$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \theta_r$$

Portanto,

$$\frac{\pi}{2} - \theta_i = \frac{\pi}{2} - \theta_r \Rightarrow \theta_i = \theta_r$$

Chegamos assim a uma consequência muito importante.

Para superfícies polidas, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

## Pincípio de Fermat e a Lei da Reflexão

**T**emos visto que uma onda mecânica ou eletromagnética se propaga em linha reta enquanto estiver no mesmo meio de propagação. Assim, ao ir de um ponto a outro, a onda “escolherá” o percurso mais eficiente de modo a gastar o menor tempo possível. Isso é verdade se não existe nada que obstrua a sua passagem. Podemos fazer a mesma analogia com o raio de luz. Imaginemos se a luz é refletida por um espelho plano. Então, o desvio dessa trajetória retilínea é descrito por uma forma muito simples. Antes de considerar a fórmula, vamos considerar primeiro a idéia que está ligada a todas as equações que descrevem as trajetórias seguidas pelo raio de luz.

O chamado Princípio de **Fermat** expressa uma das leis fundamentais da natureza que é o princípio da mínima ação, que diz que de todos os caminhos possíveis, os sistemas físicos sempre vão evoluir de tal modo que a ação (energia) seja a mínima.

O Princípio de Fermat formulado pelo cientista Francês Pierre Fermat, em torno de 1650, trata de minimizar o tempo de percurso de um sinal luminoso entre dois pontos.

Diz o Princípio de Fermat:

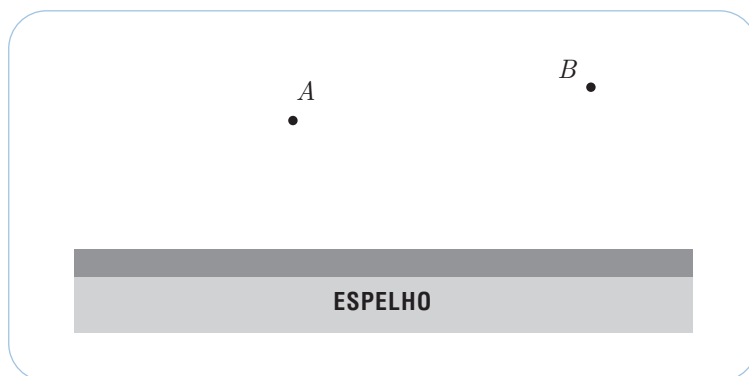
**Entre todas as possíveis trajetórias que vão de um ponto a outro qualquer, a luz escolhe uma trajetória que requer o menor tempo possível.**



**Fermat**

Lê-se Fermá

Vamos explicar mais detalhadamente o Princípio de Fermat. Para tanto, vamos considerar a situação representada na Figura 11, na qual um raio luminoso partindo de um ponto A deverá chegar a um ponto B após ser refletido pelo espelho. Podemos facilmente dizer que o menor tempo possível que a luz gasta para ir de A até B seria caminhando em linha reta.



**Figura 11** – Representação de um espelho plano, ilustrando dois pontos: o ponto A como emissor e o ponto B como refletido.

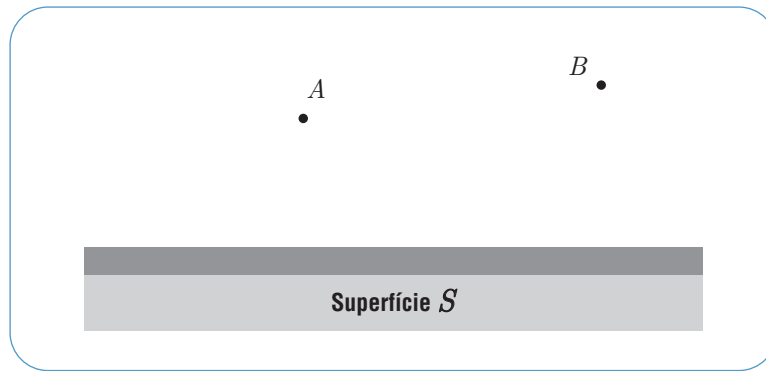
Por outro lado, se a luz vai sofrer uma reflexão num espelho plano, a resposta para o problema de qual caminho ela deve seguir ao ir de A até B num tempo mínimo seja uma trajetória reta já não fica tão clara.



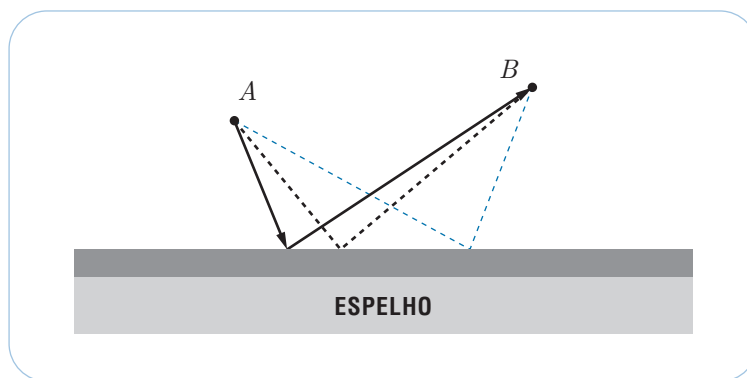
## Atividade 8

Imagine que você se encontra no ponto A da Figura, a seguir, e que deve chegar ao ponto B tendo antes que tocar em algum ponto da superfície S. Supondo que você irá fazer o percurso com velocidade constante, desenhe os vários caminhos que você poderia seguir e tente descobrir para qual o tempo de viagem seria o mínimo possível.

Um retângulo grande com cantos arredondados, destinado ao aluno desenhar diferentes caminhos possíveis para ir do ponto A ao ponto B refletido no espelho.



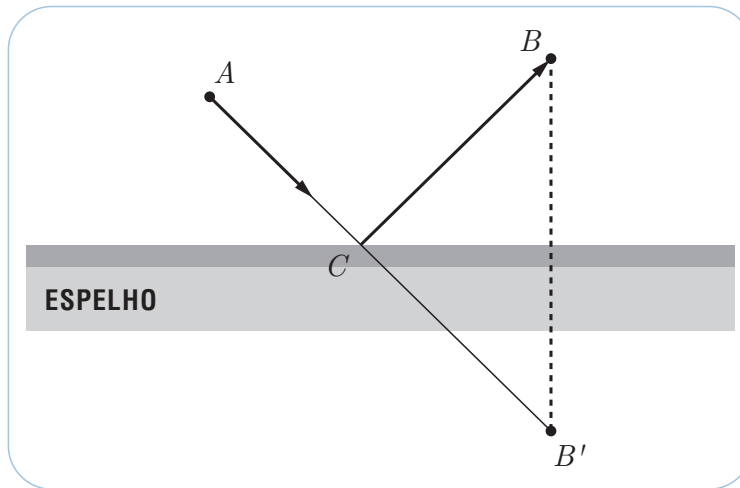
Você deve ter percebido na atividade 7 que não é trivial o problema de Fermat. Vamos agora resolver esse interessante problema. Para tanto, você pode verificar na Figura 12 que temos várias trajetórias (retas) unindo os pontos A e B, mas não necessariamente estariam sendo percorridas num tempo mínimo.



**Figura 12** – Representação esquemática da trajetória de um raio luminoso entre os pontos A e B com reflexão em um espelho plano.

Para encontrar a trajetória que a luz percorre no menor tempo possível retomamos a Figura 12. Nela, agora, marcaremos mais um ponto, um ponto “artificial”  $B'$ , situado do outro lado do espelho, a uma distância abaixo do mesmo, igual à distância do ponto B até o espelho, de modo que o ângulo formado entre a reta  $BB'$  e a superfície plana do espelho é de  $90^\circ$ . Isso é o que está representado na Figura 13.

Portanto, a menor distância entre o ponto A e o ponto  $B'$  é uma reta que intercepta o espelho num ponto C. Esse é o ponto exato onde ocorre a reflexão no mínimo caminho para a propagação da luz entre A e B.



**Figura 13** – Representação esquemática da propagação da luz entre dois pontos  $A$  e  $B$  com reflexão num espelho plano.



## Atividade 9

Refaça a Figura 13 com o máximo de rigor e determine que o ângulo de incidência é igual ao de reflexão. Você deve verificar então que a distância  $CB$  é igual à distância  $CB'$ . E, portanto, que o caminho  $ACB'$  tem o mesmo comprimento  $ACB$ .

Com a atividade 8, você acabou de verificar que nos espelhos planos a distância do objeto ao espelho é igual à distância do espelho até à imagem do objeto. Você acabou de descobrir o motivo pelo qual a sua imagem, quando você se olha no espelho de sua casa, fica atrás do espelho!

A Equação 4 pode, agora, ser retomada em um novo contexto. Observe a Figura 14. Ela ilustra a **Lei da Reflexão** que podemos resumir na seguinte frase:

Quando um raio luminoso incide sobre uma superfície refletora, o ângulo formado entre uma reta perpendicular a superfície (Normal) e o raio (ângulo de incidência,  $\theta_i$ ) é igual ao ângulo formado entre a mesma reta e o raio refletido na superfície (ângulo de reflexão,  $\theta_r$ ).

Expressamos, matematicamente, da seguinte forma:

$$\theta_i = \theta_r \quad \text{Eq. 5}$$

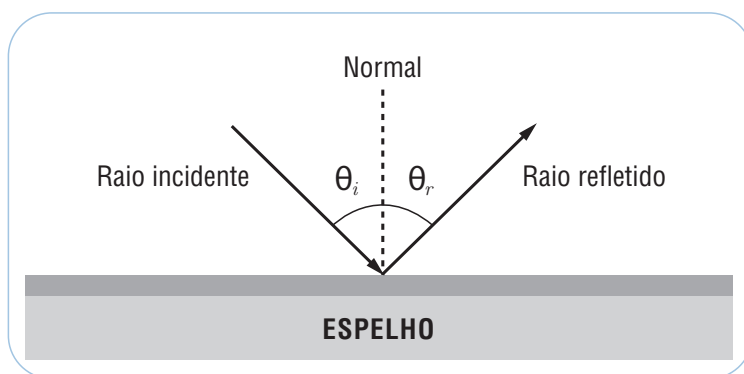
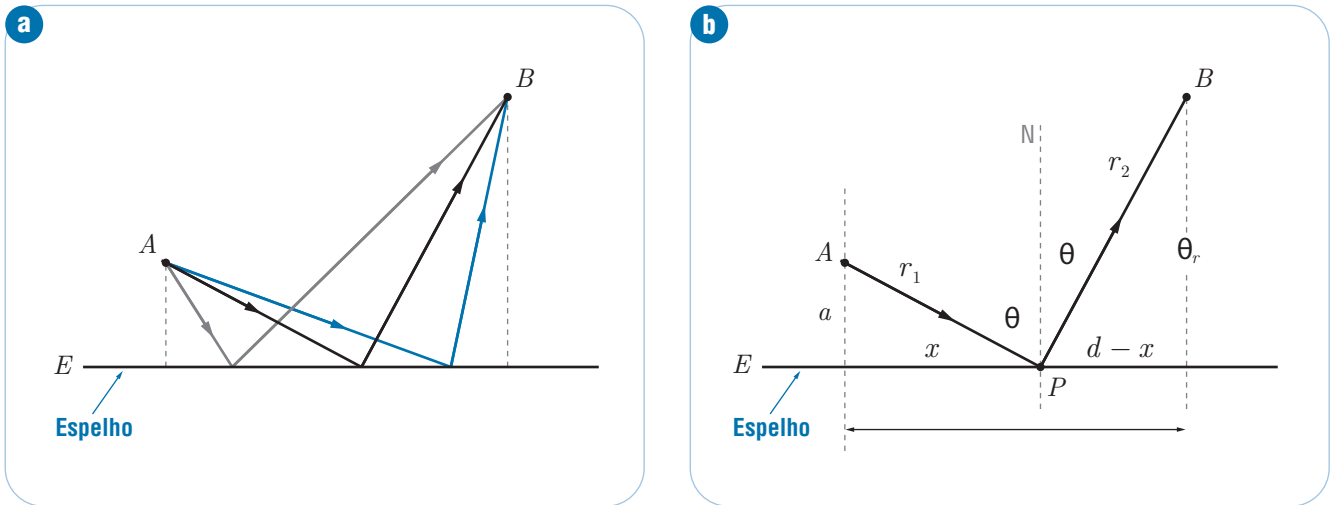


Figura 14 – Representação da Lei de Reflexão.

## Demonstrando o Princípio de Fermat

Estamos chegando ao final de nossa aula, mas falta apresentar uma demonstração mais rigorosa do Princípio de Fermat.

Iniciamos, então, observando a Figura 15 (a) e notamos que existem várias trajetórias quaisquer, para um raio de luz ir do ponto *A* ao *B* por reflexão na superfície do espelho plano. Vamos mostrar que o caminho real percorrido pela luz é o que aparece na Figura 15 (b)



**Figura 15** – (a) Representação esquemática de várias trajetórias de propagação da luz entre dois pontos com reflexão no espelho e (b) representação da trajetória correta.

Como você agora já está sabendo, o Princípio de Fermat nos garante que um raio de luz percorre um trajeto entre dois pontos levando sempre o menor tempo possível. A partir da Figura 15 (b), aplicando o teorema de Pitágoras, podemos verificar que o comprimento do trajeto de A até o ponto C de reflexão no espelho é

$$r_1 = \sqrt{a^2 + x^2}. \quad \text{Eq. 6}$$

E que o comprimento da trajetória do ponto C até o ponto B é

$$r_2 = \sqrt{(d - x)^2 + b^2}. \quad \text{Eq. 7}$$

O tempo de trânsito para ir de A até B é a soma dos tempos gastos pelos raios incidentes e refletidos:

$$t = t_{AC} + t_{CB}. \quad \text{Eq. 8}$$

Para o caso da luz se propagando com velocidade  $c$  ao longo do trajeto de A até B, o tempo gasto necessário é o comprimento total do trajeto dividido por  $v$ . Desse modo, teremos:

$$t = \frac{r_1}{v} + \frac{r_2}{v} = \frac{r}{v} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(d - x)^2 + b^2}}{v}. \quad \text{Eq. 9}$$

Matematicamente, dizemos que uma função tem valor mínimo quando sua derivada em relação à variável de mudança é nula. Da Equação 9, diremos que a derivada do tempo em relação a  $x$  é nula, ou seja,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v} \frac{dr}{dx} = 0. \quad \text{Eq. 10}$$

Calculando-se então a derivada em relação a  $x$ , encontraremos a seguinte expressão:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{d - x}{\sqrt{(d - x)^2 + b^2}} \quad \text{Eq. 11}$$

Observe na Equação 11 que o lado esquerdo da igualdade é exatamente o  $\text{sen}(\theta_i)$  e o lado direito é o  $\text{sen}(\theta_r)$ , e, portanto,

$$\text{sen}(\theta_i) = \text{sen}(\theta_r) \quad \text{Eq. 12}$$

$$\theta_i = \theta_r \quad \text{Eq. 13}$$

Ou seja, a Lei da Reflexão nada mais é que uma consequência do Princípio de Fermat.

## Resumo

Nesta aula, você estudou os fundamentos da reflexão de ondas por superfícies planas ou rugosas, obtendo assim a Lei da Reflexão (Lei de Snell e Descartes) para depois verificarmos que esse comportamento das ondas é consequência de um princípio mais fundamental ainda, que é o Princípio de Fermat, que expressa o modo como a luz se propaga ao se deslocar entre dois pontos e que está relacionado com o princípio da mínima ação, que diz que os sistemas físicos evoluem de modo a sempre minimizar a energia.

## Autoavaliação

1

Observando as duas figuras seguintes, explique que tipo de reflexão está acontecendo em cada uma delas em função da superfície refletora.



2

Enuncie o Princípio de Huygens.

3

Enuncie o Princípio de Fermat.

**4**

(UFRN, 2002) Ana Maria, modelo profissional, costuma fazer ensaios fotográficos e participa de desfiles de moda. Em trabalho recente, ela utilizou um vestido que apresentava cor vermelha quando iluminado pela luz do sol. Ana Maria irá desfilarm com o mesmo vestido. Sabendo-se que a passarela onde Ana Maria vai desfilarm será iluminada por luz monocromática verde, podemos afirmar que o público perceberá seu vestido como sendo

- a) Verde, pois é a cor que incidiu sobre o vestido.
- b) Preto, porque o vestido só reflete a cor vermelha.
- c) De cor entre o vermelho e o verde devido a mistura das cores.
- d) Vermelho, pois a cor do vestido independe da radiação incidente.

Justifique sua resposta utilizando conceitos físicos aprendidos nesta aula.

**5**

Sabendo que a distância de um objeto a um espelho plano é igual a distância do espelho à imagem, determine qual o menor tamanho que deve ter um espelho de parede para que uma pessoa se possa ver de corpo inteiro.

## Referências

ENSINO DE FÍSICA ONLINE. Ótica: básico. 2007. Disponível em: <efisica.if.usp.br/optica/basico/prisma/exemplos/>. Acesso em: 12 nov. 2008.

HEWITT, Paul G. **Física conceitual**. São Paulo: Bookman, 2002.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica**: fluidos, oscilações, ondas e calor. 4. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2002. v 2.

SERWAY, R. A.; JEWETT JÚNIOR, J. W. **Princípios de física**. São Paulo: Ed. Thomson, 2003. v 4.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física**: ótica e física moderna: Sears e Zemansky. 10. ed. São Paulo: Addison- Wesley, 2003. v 4.

# Refração

Aula

7

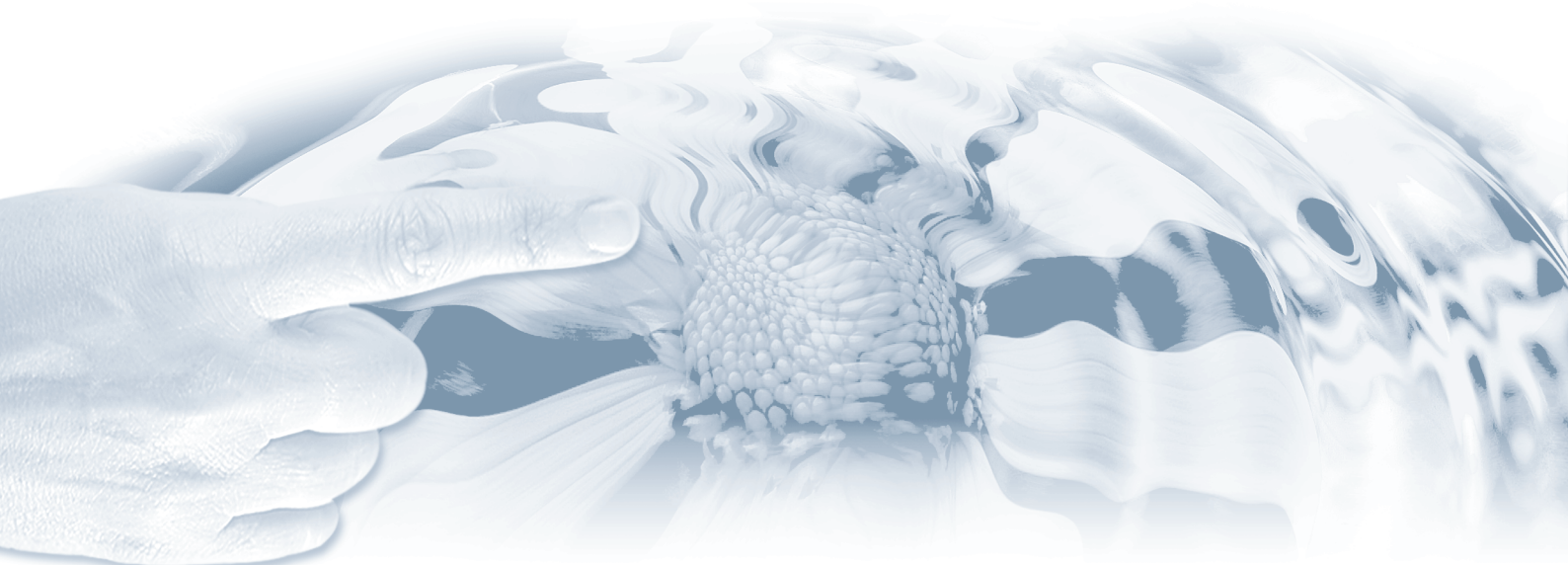


# Apresentação

**C**omo você se lembra, na aula 6 (Reflexão), discutimos basicamente os fenômenos que ocorrem com as ondas enquanto elas não mudam de meio de propagação e obtivemos alguns princípios gerais, como o de Fermat e a Lei de Snell e Descartes. Nesta aula, você vai ampliar esses conhecimentos tratando agora de fenômenos que ocorrem quando as ondas mudam de meio de propagação, deslocando-se através de dois meios que apresentam densidade e índices de refração distintos como, por exemplo, da água para o ar. Finalmente, para estudar esta aula, você deverá ter à mão alguns instrumentos utilizados comumente em Geometria, tais como transferidor e esquadro.

## Objetivos

- 1** Aprender sobre a lei da refração.
- 2** Utilizar as Leis da Refração para explicar fenômenos óticos a ela relacionados.
- 3** Verificar como as Leis da Refração explicam as miragens e as reflexões internas totais.
- 4** Compreender a lei da Refração da luz no contexto do princípio de Fermat.



# Princípio de Huygens e lei da refração

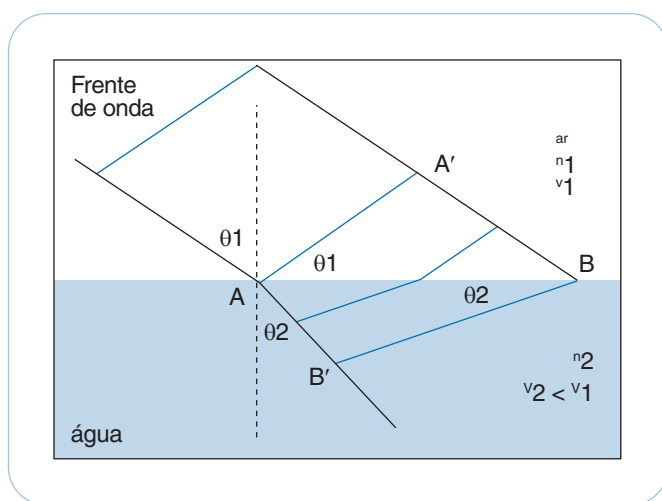
Quem não conhece o curioso fenômeno da colher em um copo d'água que quando observada parece estar quebrada! Ou já observou, viajando de carro em horários de muito calor, a existência de poças d'água no asfalto e logo que percebe que é uma ilusão! Pois é, estes e muito mais são conseqüências do fenômeno da **refração da luz**.



**Figura 1** – Devido ao fenômeno da refração, um lápis colocado em um copo d'água parece quebrado.

Vamos então discutir a situação em que a luz desloca-se de um meio para outro. Consideremos então dois meios, ar e água, e a luz se deslocando do ar para a água, de um meio (ar) para outro (água), certamente com velocidades diferentes. Pois a velocidade da luz depende do meio onde ela está se propagando, apenas no vácuo ela atinge seu maior valor, que é de aproximadamente  $300\ 000\ km/s$ .

Observe na Figura 2 que, devido ao fato da velocidade das ondas depender do meio de propagação, a frente de onda apresenta comportamento diferentes nos dois meios.

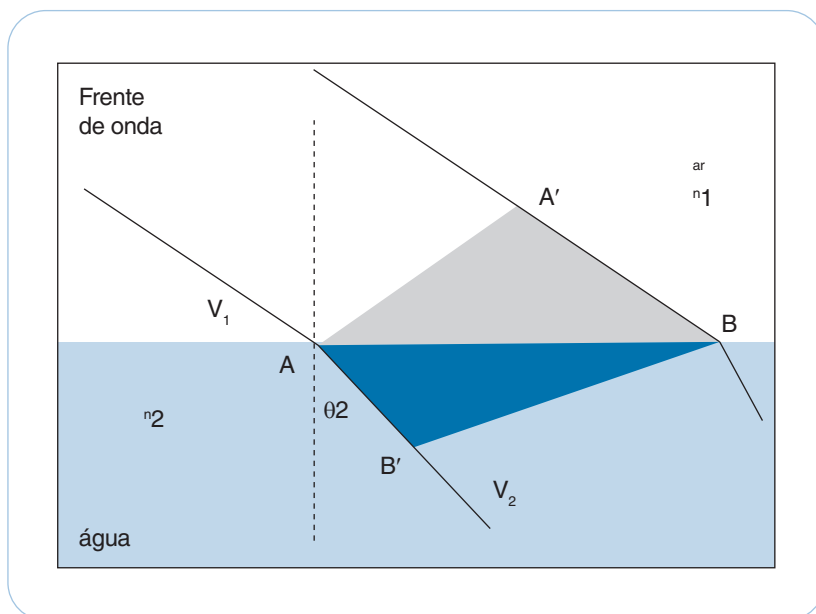


**Figura 2** – Propagação de uma frente de onda através de dois meios diferentes.

Na Figura 2, você pode observar que na medida em que a frente de onda vai penetrando na água, sua direção vai mudando e ela se inclina, aproximando-se da normal.

Geometricamente, podemos analisar esse fenômeno olhando o que acontece com a parte da frente de onda que atinge a superfície da água e aquela que não chegou lá ainda, ou seja, a reta  $AA'$ ; depois, observando o que acontece quando essa última parte da frente de onda atinge a superfície da água, ou seja, a situação representada na Figura 2 pela reta  $B'B$ .

Isso significa que, como podemos verificar na Figura 3, o triângulo  $AA'B$  é diferente de  $BB'A$ .



**Figura 3** – O triângulo  $AA'B$  (ar e superfície) é diferente do triângulo  $BB'A$ , (água e superfície).

É justamente isso que acontece na refração das ondas quando as velocidades nos dois meios não são iguais. As frentes de ondas estão mais próximas uma das outras naquele meio onde a velocidade da onda é menor.



## Atividade 1

Refaça, com cuidado, a situação mostrada na Figura 3 e verifique que, de fato, os triângulos  $AA'B$  (ar e superfície) e  $BB'A$ , são diferentes. Que argumentos você pode apresentar para justificar tal diferença?

Voltemos à Figura 3. Você deve ter verificado na atividade 1 que os triângulos retângulos  $ABB'$  e o triângulo  $AA'B$  não são congruentes porque o comprimento  $\overline{A'B} = v_1 \Delta t$  é diferente do comprimento  $\overline{AB'} = v_2 \Delta t$ , visto que  $v_1$  é maior que  $v_2$ .

Por outro lado, já sabemos da aula 6 que a distância entre duas frentes de ondas sucessivas é a medida do **comprimento de onda da luz, assim podemos concluir que o comprimento de onda de uma onda depende do meio em que esta se propaga.**

Para determinarmos qual o efeito do meio sobre a propagação, voltemos a observar a Figura 2 e a partir dela consideremos que:

$$\text{sen}\theta_1 = \frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}} = \frac{v_1 \Delta t}{\overline{AB}} \quad \text{Eq. 1}$$

e

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{v_2 \Delta t}{\overline{AB}} \quad \text{Eq. 2}$$

Dividindo-se a equação 2 pela 1, obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{\text{sen}\theta_2}{\text{sen}\theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{Eq. 3}$$

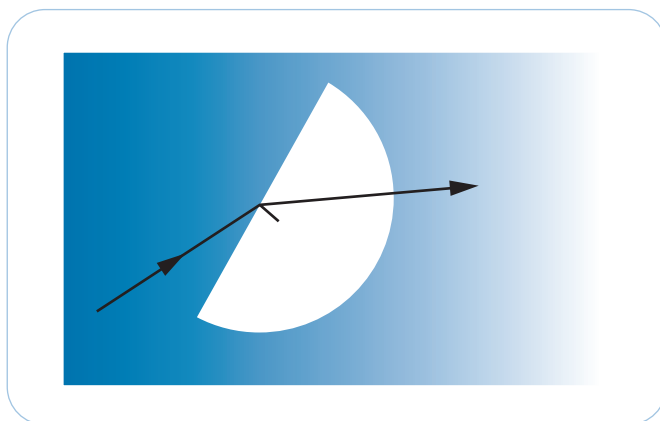
A equação 3 que acabamos de obter é a expressão matemática para a Lei de Refração.

Podemos interpretá-la fisicamente como o ângulo formado pelos raios da onda incidente com a normal à superfície de separação dos dois meios, sendo esse ângulo alterado quando a onda atravessa a superfície. Além disso, essa alteração é tanto maior quanto maior for a diferença entre as velocidades de propagação da onda nesses meios. No meio com velocidade menor, a onda aproxima-se da normal.



## Atividade 2

No laboratório de Física de sua instituição, um estudante realizou um experimento para obter a velocidade da luz em um pedaço de acrílico.



A figura anterior representa o resultado do experimento do aluno. Utilizando um transferidor, determine o que se pede.

**a)** O ângulo de incidência da luz.

**b)** O ângulo de refração.

**Observação** – suponha que a velocidade da luz no ar é praticamente igual à velocidade da luz no vácuo (o que não é bem verdade, mas pode ser uma boa aproximação nesse caso).

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Note que tanto a lei da reflexão que obtivemos na aula 6 quanto a lei da refração que acabamos de obter aplicam-se às ondas de qualquer natureza.

No entanto, vale a pena lembramos mais uma vez que as ondas luminosas (ondas eletromagnéticas) têm uma característica peculiar que as distingue dos outros tipos de ondas.

**As ondas eletromagnéticas não precisam de nenhum meio físico para se propagarem.** A luz, mesmo no vácuo, chega a uma velocidade finita dada por  $c = 300\,000\text{ km/s} = 3 \times 10^8\text{ m/s}$ . Por outro lado, em um meio qualquer, por exemplo, ar, água, óleo, vidro etc. a velocidade da luz é menor que  $c = 300\,000\text{ km/s} = 3 \times 10^8\text{ m/s}$ .

Então, o que ocorre com a luz quando ela muda de meio de propagação? Denominamos a razão da velocidade da luz no vácuo sobre a velocidade da luz num meio de *índice de refração* ( $n$ ) do meio.

$$n = \frac{c}{v} \qquad \text{Eq. 4}$$

Na equação 4,  $n$  é o índice de refração do meio,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $v$  é a velocidade da luz no meio que estamos analisando. Note na equação 4 que o índice de refração é uma grandeza adimensional, ou seja, um número, e que ele é obtido tomando como referência o vácuo.

**Tabela 1**– Índice de refração de algumas substâncias.

Substância	Índice de refração absoluto
Ar	1
Água	1,33
Álcool etílico	1,36
Glicerina	1,47
Vidro comum	1,52
Vidro crown	1,51
Vidro flint	1,62
Quartzo	1,46
Diamante	2,42
Acrílico	1,49
Querosene	1,45
Acetona	1,36
Poliestireno	1,59
Parafina líquida	1,44
Benzeno	1,50

O índice de refração do vácuo é igual a 1. Apesar de ser apenas uma aproximação, muitas vezes se considera o índice de refração do ar como também sendo igual a 1.

Aplicando-se então essa definição à luz, na situação descrita pela Figura 2, teremos:

$$\text{Para o meio 1} \quad n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{Eq. 5}$$

$$\text{Para o meio 2} \quad n_2 = \frac{c}{v_2} \quad \text{Eq. 6}$$

Substituindo-se então as equações 5 e 6 na equação 15,

$$\frac{\text{sen}\theta_2}{\text{sen}\theta_1} = \frac{c/n_2}{c/n_1}, \text{ rearranjando teremos:} \quad \text{Eq. 7}$$
$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$$

Com isso, chegamos a mais uma relação importante. A equação 7 é também conhecida como lei de Snell para a refração.

## Exemplo 1

Em um experimento de laboratório, mediu-se a velocidade da luz amarela propagando-se em um determinado sólido e obteve-se o valor de  $2,0 \times 10^8 \text{ m/s}$  para essa velocidade. Sabendo-se que a velocidade da luz no vácuo é  $3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$ , qual é o índice de refração desse sólido?



# Efeitos da refração da luz

Como dissemos no início da aula, a refração da luz é responsável por ilusões aparentes: uma delas foi mostrado na Figura 1, a aparência dupla que um lápis apresenta quando imerso parcialmente dentro de um copo d'água. A parte do lápis que se encontra a água parece está mais próxima da normal que a parte que está fora d'água. Isso ocorre porque a luz está chegando aos nossos olhos vindo de dois meios distintos, refletida diretamente pela parte do lápis que se encontra no ar e a outra refletida pela parte do lápis que está submersa e, portanto, da luz que veio da água. Lembre sempre que vemos um objeto a partir de luz que ele emite ou reflete. Não é verdade?

Outro exemplo interessante e análogo ao anterior, pois também trata do comportamento da luz ao atravessar meios de índices de refração distintos, é o da posição aparente de corpos submersos.

Observe a Figura 4 a seguir. Ela reproduz uma situação que nos é familiar, um objeto submerso parece estar mais próximo da superfície do que de fato ele está. Tal situação está representada na Figura 4. Nela, o objeto parece está mais próximo da superfície e de você (imagem). Podemos entender isso verificando que a direção do raio luminoso muda quando ele muda de meio de propagação. Assim, podemos dizer que as ondas luminosas refletidas pelo objeto que está submerso, ao se dirigirem para cima, segundo um certo ângulo com a superfície da água, são desviadas ao emergir no ar. Nesse instante, elas aumentam a sua velocidade.

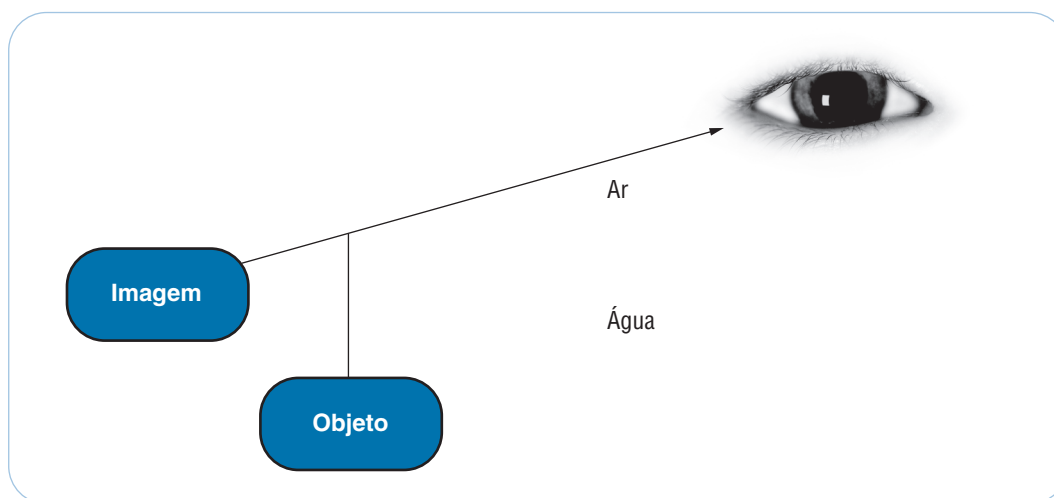


Figura 4 – Posição aparente de uma imagem de um objeto dentro visto por um observador no ar.

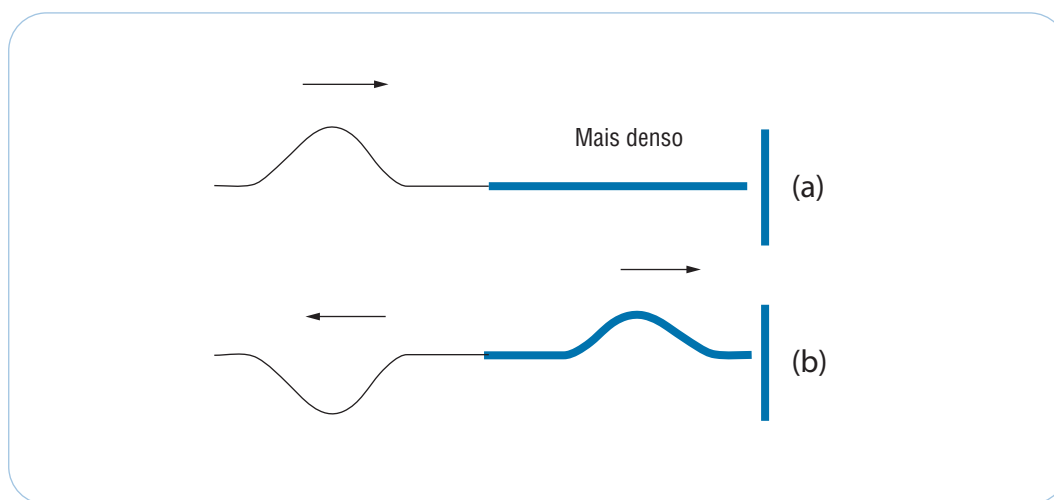
## Exemplo 2

Quando se propaga de um meio 1 para um meio 2, incidindo sob o ângulo de  $45^\circ$  com a normal, um raio luminoso se refrata formando com a normal um ângulo de  $60^\circ$ . Sendo 1,4 o índice de refração do meio 2, determine o índice de refração do meio 1.



O fenômeno da refração é muito geral, podemos observar o fenômeno da refração, por exemplo, nas ondas mecânicas, quando elas se propagam em uma corda composta por materiais de densidades diferentes, como representada na Figura 5.

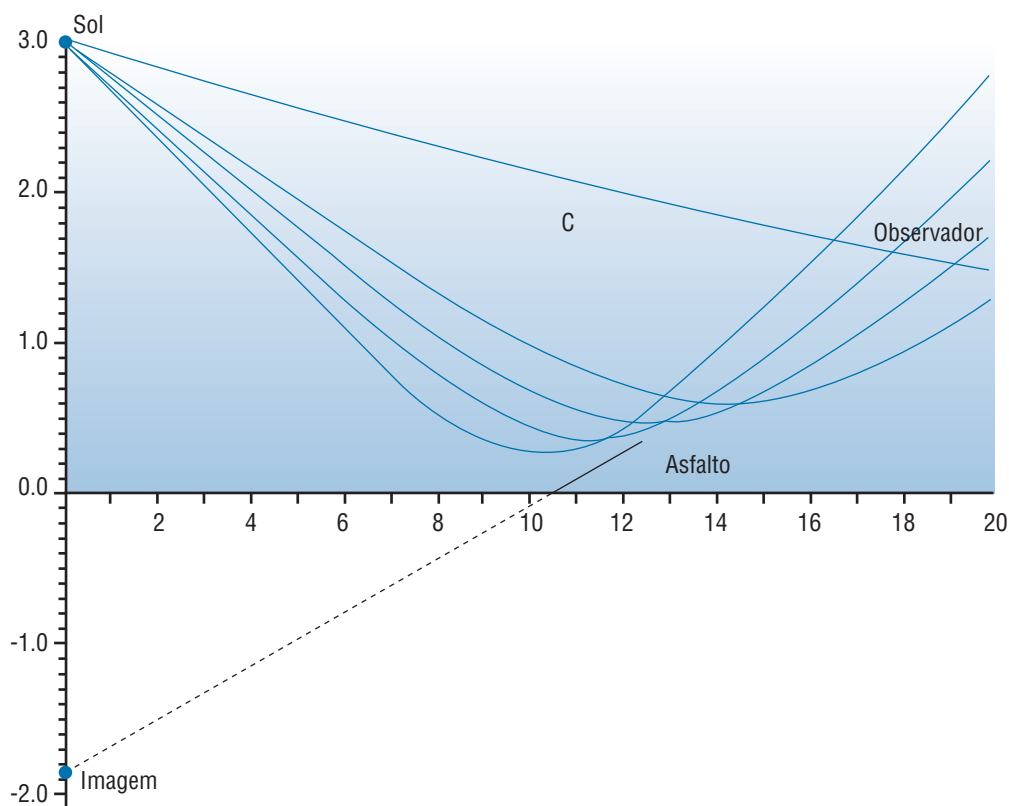
A Figura 5 mostra na parte (a) o pulso gerado na corda mais fina se propagando da esquerda para a direita. Na parte (b), o pulso já tem atingido o ponto de separação entre as duas cordas e continua a se propagar para a direita na região mais densa da corda (pulso refratado).e o que se propaga para a esquerda na corda mais fina(pulso refletido). Note que a amplitude do pulso diminui ao passar de um meio menos denso para o mais denso.



**Figura 5** – (a) Pulso se propagando em uma corda em direção a uma região de maior densidade. (b) Pulso se propagando na região de maior densidade apresentando uma parte refletida e uma refratada.

## As miragens no deserto e nas estradas

**T**emos nesta aula estudado o comportamento da luz ao atravessar meios que apresentam índices de refração distintos. Vejamos agora o que acontece com a luz que um objeto reflete estando ele em um ambiente onde o índice de refração varia continuamente. Isso acontece na atmosfera, próximo à superfície terrestre, em desertos ou lugares muito quentes que fazem com que o ar próximo à superfície fique menos denso que o ar um pouco mais acima (uma inversão da condição normal, não é?).



Fonte: <[http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/\\_ondas/movimiento/espejismo/espejismo9.jpg](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/_ondas/movimiento/espejismo/espejismo9.jpg)>. Acesso em: 27 nov. 2008.

**Figura 6** – A formação de uma miragem depende do índice refração do meio.

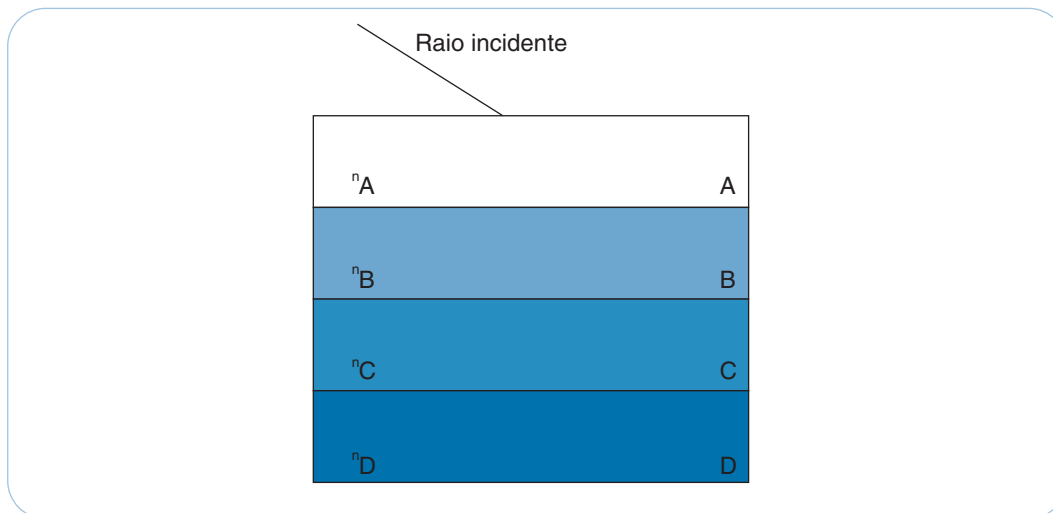
A Figura 6 mostra raios solares incidindo na atmosfera e sendo continuamente refratados à medida que se aproxima da superfície. Nesse caso, a luz seguirá em uma trajetória muito curva até chegar aos nossos olhos. Se entre o trajeto da luz e a superfície existe um objeto, ele aparecerá, por exemplo, no ponto imagem, e será visto de forma invertida, ou seja, a miragem de um coqueiro seria o mesmo coqueiro visto de ponta cabeça.



## Atividade 5

Considere na figura a seguir que os meios A, B, C e D apresentam índices de refração crescentes. A partir do raio incidente (mostrado na figura), trace o caminho que ele seguirá, as normais para cada superfície e o ângulo de refração em cada caso.

Se o sinal que chega for de uma estrela e o percurso que você traçou for o caminho que a luz seguir ao penetrar na atmosfera terrestre, o que você poderia dizer sobre a posição em que ela, a estrela, é vista no céu?



Considere  $n_A < n_B < n_C < n_D$

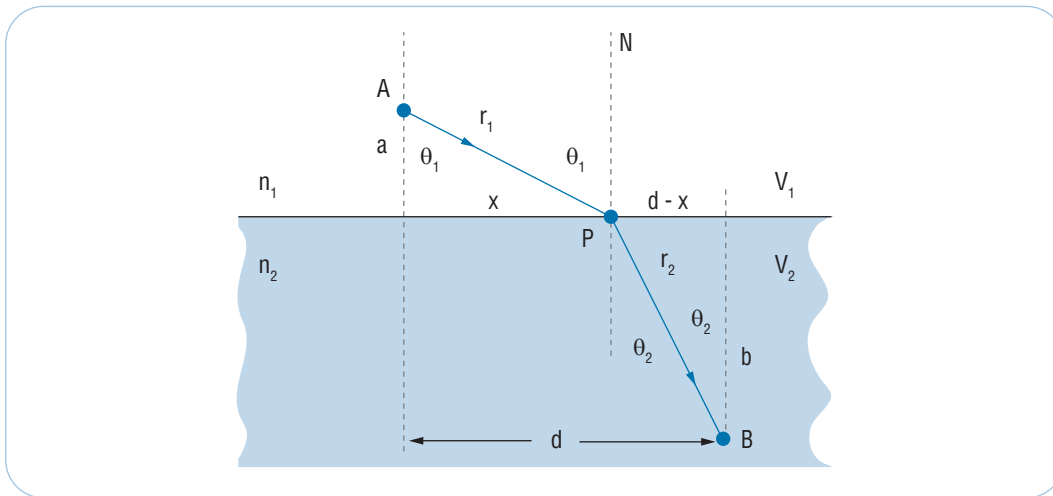
Agora que você já sabe como se formam as miragens, procure pesquisar mais sobre o assunto na Internet e converse com seus colegas sobre isso, você verá que as miragens são mais comuns do que parecem, e o que é mais interessante, temos uma explicação física para elas.

## O princípio de Fermat e a lei da refração

Já havíamos falado na aula 6 que o princípio de Fermat é muito amplo e expressa um tipo de comportamento geral. Vejamos então como podemos aplicá-lo ao caso da refração. Será que ele nos levará aos mesmos resultados já obtidos no início de nossa aula?

Vejamos. Para deduzir a lei da refração usando o princípio de Fermat, vamos nos basear na Figura 7, mostrada a seguir. Nela, vemos que o plano contendo a trajetória da luz é perpendicular ao plano que separa as regiões de índices de refração  $n_1$  e  $n_2$ . A luz propaga-se do ponto A na primeira região para um ponto P a uma distância desconhecida  $x$  da base da perpendicular ao plano de separação entre os dois meios materiais. O comprimento da perpendicular é a reta  $a$ . A luz continua o seu caminho na segunda região até B, que está a um ponto B, situado a uma distância  $b$  do plano de separação.

De forma similar ao caso da reflexão, existem várias trajetórias possíveis para o raio de luz ser refratado ao percorrer por dois meios materiais distintos, como você pode inferir da Figura 7.



**Figura 7** – Refração da luz ao atravessar dois meios materiais transparentes e distintos.

O tempo que a luz leva para percorrer do ponto  $A$  até  $B$ , é igual à soma dos tempos para percorrer de  $A$  até a superfície no ponto  $P$  e de  $P$  a  $B$ . Como os meios têm índices de refração distintos, a luz terá conseqüentemente velocidades diferentes. Seja essas velocidades no meio 1 e 2 iguais a  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente. Assim,

$$t = t_{AP} + t_{PB} = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2} \quad \text{Eq. 8}$$

Usando a definição de índice de refração para um meio material em relação ao vácuo, temos que

$$t = \frac{r_1}{c/n_1} + \frac{r_2}{c/n_2} = \frac{1}{c}(n_1 r_1 + n_2 r_2) \quad \text{Eq. 9}$$

Vemos da Figura 7 por considerações geométricas que

$$r_1 = \sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \quad \text{Eq. 10}$$

E substituindo os resultados da equação 10 na 9, obtemos que o tempo necessário para a luz se propagar ao longo do trajeto  $A$  e  $B$  é

$$t = \frac{1}{c} \left( n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \right) \quad \text{Eq. 11}$$

Com base no raciocínio empregado na Equação 9 da aula 06, obtemos novamente a derivada  $dt/dx$ , ou seja,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \left[ \frac{n_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{n_2 (d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \right] \quad \text{Eq. 12}$$

De acordo como princípio de Fermat, a trajetória real a ser percorrida pelo raio de luz será aquela que satisfaz a relação  $dt/dx = 0$ . Isso significa que

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{n_2 (d - x)}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} \quad \text{Eq. 13}$$

Usando relações geométricas tiradas da Figura 7, podemos reescrever a equação acima em termos dos ângulos de incidência  $\theta_1$  e refração  $\theta_2$ , da seguinte forma

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2 \quad \text{Eq. 14}$$

Essa equação é a própria lei de Snell, obtida usando-se o princípio de Huygens e as considerações geométricas.

Apresentamos como resumo da lei da refração o seguinte texto.

Quando um feixe de luz atravessa uma superfície passando para uma região de índice de refração maior, ele se curva aproximando-se da normal à superfície. Quando um feixe de luz atravessa uma superfície passando para uma região de índice menor, ele é encurvado, afastando-se da normal à superfície. Esse fenômeno é uma consequência da reversibilidade dos raios luminosos em um processo de refração ou reversibilidade da lei de Snell.



## Atividade 6

1

Responda a seguinte questão.

Quando um feixe de luz penetra um meio material, qual (is) grandeza(s) física(s) se altera(m):

- a) seu comprimento de onda
- b) sua velocidade
- c) sua frequência

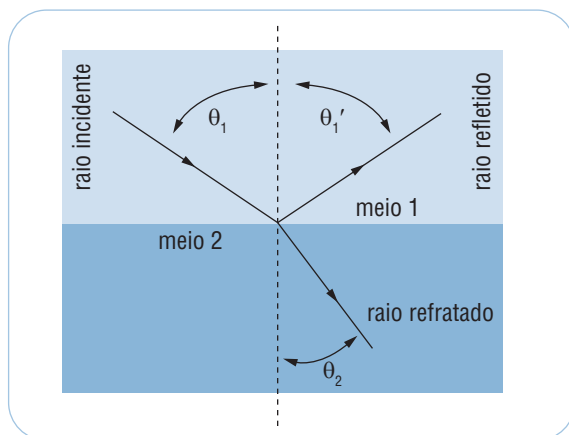
2

Justifique sua resposta.



conseguem ouvir o que estamos falando. Quando o som bate na parede, parte dele é refletido de volta ao nosso ambiente e parte é refratado, propagando-se através da parede, eventualmente chegando a outra sala.

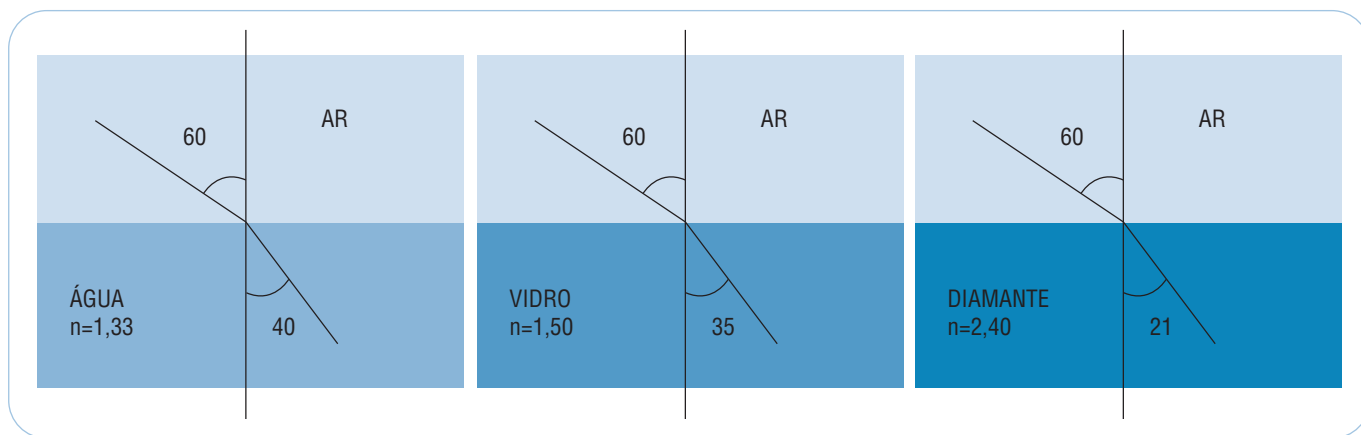
Nesse caso, tanto a reflexão quanto a refração continuam obedecendo às leis encontradas anteriormente. A Figura 8 ilustra o digrama de um raio incidente sobre a superfície de separação entres dois meio com a parte da luz refletida e a parte refratada.



**Figura 8** – Representação esquemática da reflexão e refração da luz na interface entre dois meios.

Como você lembra, a Tabela 1 apresenta alguns materiais com seus respectivos índices de refração em relação ao vácuo, mas também podem-se tomar os índices de refração em relação ao ar.

Quanto maior o índice de refração de um material em relação ao ar, maior será o desvio da luz quando passa do ar para esse material. Veja, na Figura 9, o desvio da luz quando passa do ar para os três meios relacionados na Tabela 1. Em todos os casos, a luz incide na interface que separa os meios com um ângulo de  $60^\circ$ ; para podermos comparar, o desvio é maior para o diamante, que tem o maior índice de refração.

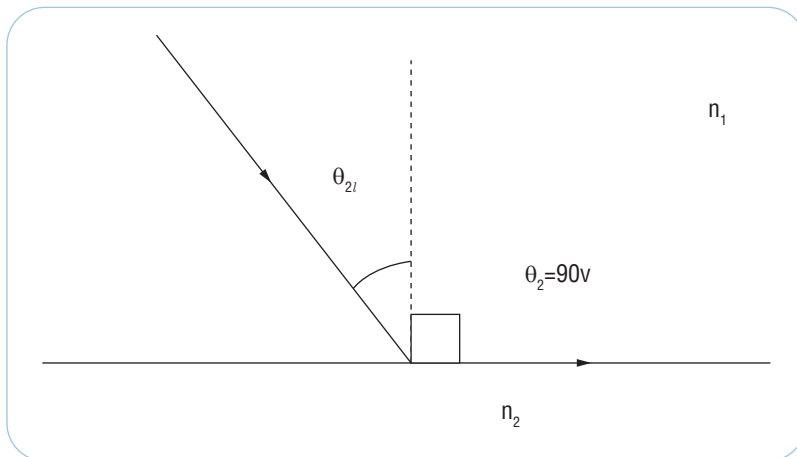


**Figura 9** – Representação da trajetória de um raio luminoso entre dois meios diferentes.



# Reflexão interna total

Quando um raio de luz passa de um meio para outro de modo que o primeiro tem maior índice de refração, ou seja,  $n_1 > n_2$ , o raio se afasta da normal, podendo-se produzir o fenômeno conhecido como reflexão interna total. Isso acontece quando:  $\theta_2 = 90^\circ$  e  $\theta_1 = \theta_A$  a partir desse ângulo conhecido como ângulo limite, a luz sofrerá reflexão total. Veja a Figura 10.



**Figura 10** – Esquemática da refração da luz no ângulo limite de  $90^\circ$ , representada pela seta na superfície de separação dos dois meios.

O ângulo limite para cada material será então obtido com o auxílio da Eq. 14:

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}90^\circ$$

assim

$$\text{sen}\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

**Atenção** – Note que a expressão acima não é uma nova fórmula, mas apenas o resultado da aplicação de lei da refração a um caso particular.

## Exemplo 3

Suponha que um raio luminoso se propaga do vidro para o ar e em outra situação do diamante para o ar. Determine os ângulos limites.

### Solução

Para o caso do vidro,  $\text{sen}\theta_1 = \frac{1}{1,5} = 0,666$ , então,  $\theta_l = 42^\circ$ .

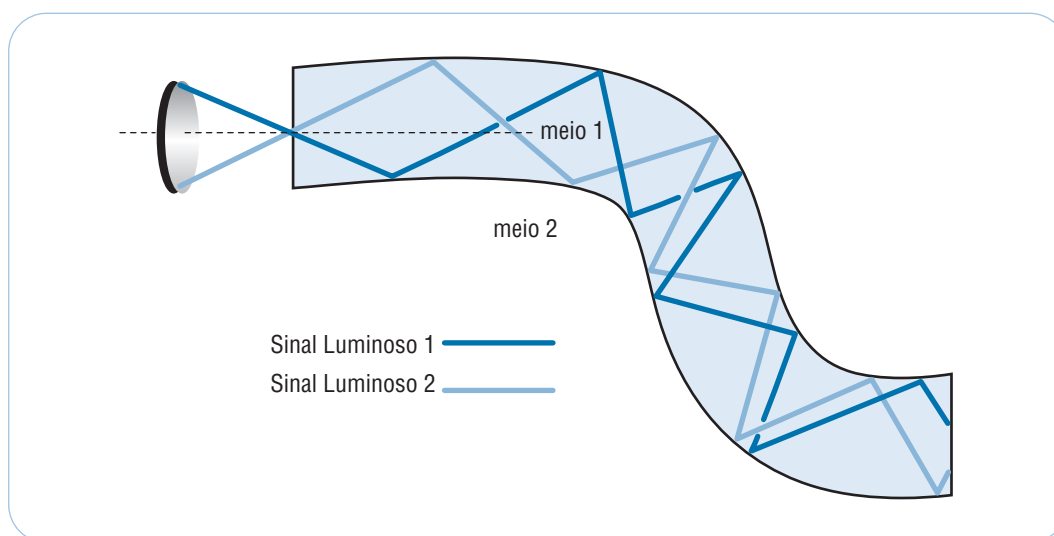
Para o caso do diamante,  $\text{sen}\theta_1 = \frac{1}{2,4} = 0,42$  então,  $\theta_l = 25^\circ$ ,



# Uma aplicação tecnológica da reflexão interna total

As fibras óticas são utilizadas intensamente em telecomunicação e até em adornos residenciais. Sua existência data dos anos 70 quando procurava-se um substituto para os grossos cabos elétricos usados na telefonia.

Em uma fibra ótica, a luz viaja através do núcleo (meio 1 de alto índice de refração), refletindo-se constantemente na interface (meio 2, de menor índice de refração), porque o ângulo da luz é sempre maior do que o ângulo limite. A luz se refletirá na interface, não importando o ângulo em que a fibra seja curvada, mesmo que seja um círculo completo, conforme mostra a Figura 11.



**Figura 11** – Representação esquemática da propagação da luz numa fibra ótica.

Como a interface não absorve nenhuma luz do núcleo, a onda luminosa pode viajar grandes distâncias.

Mesmo assim, uma parte do sinal luminoso se degrada dentro da fibra, principalmente em razão das impurezas contidas no vidro e ele vai perdendo intensidade à medida que avança no interior da fibra. A intensidade dessa degradação do sinal também depende do comprimento de onda da luz transmitida. As fibras óticas possuem uma capacidade de transmissão milhares de vezes maior que a dos cabos metálicos.



Vamos terminar nossa aula lembrando que na próxima aula trataremos de mais um fenômeno relacionado ao comportamento das ondas, particularmente da Luz. Falaremos da **dispersão** e da **interferência**. Você sabe o motivo pelo qual o céu é azul? Se não sabe, aguarde até lá, pois nessa oportunidade trataremos também dessa questão.

## Resumo

Nesta aula, você estudou as leis da reflexão e refração a partir do princípio de Huygens e Fermat. Você compreendeu que quando a luz sofre uma reflexão o ângulo de incidência feito na superfície refletora é igual ao ângulo de reflexão. Compreendeu que quando a luz encontra um meio cujo índice de refração é maior que o anterior a luz sofre um desvio, aproximando-se da normal, que é a reta perpendicular à superfície de separação dos meios. Por outro lado, quando ela se propaga no sentido inverso, a luz se desvia, afastando-se da normal. Compreendeu que a luz pode ser refletida internamente, desde que ela se propague de um meio com maior índice de refração, ocorrendo o fenômeno de reflexão interna total. Por fim, você entendeu o funcionamento de uma fibra ótica, o qual se dá por meio do fenômeno da reflexão interna total.

## Autoavaliação

1

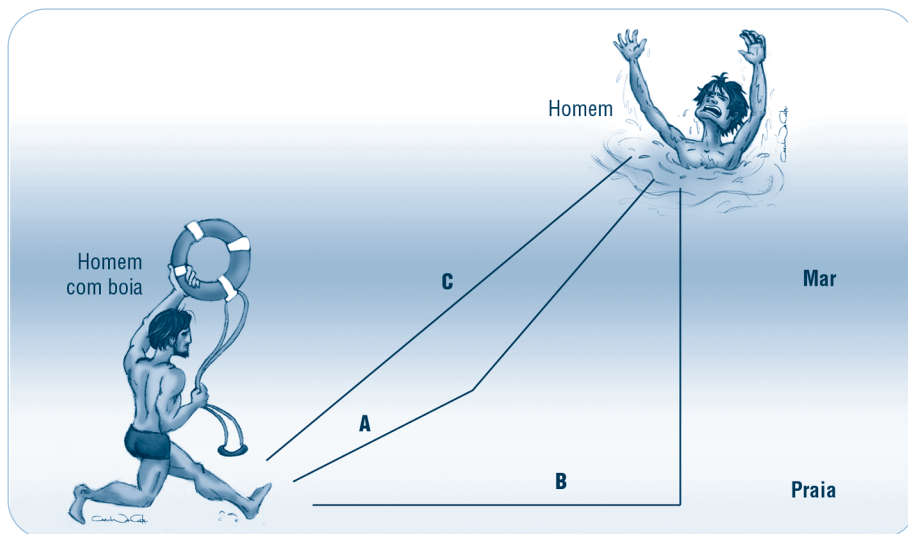
Considere um sinal acústico se propagando do ar para a água. O sinal é lançado segundo um ângulo de  $45^\circ$  com a vertical. Com que ângulo em relação a mesma vertical passa a se propagar na água? Se a velocidade do som no ar era de 330m/s, qual seria a velocidade do som na água?

2

Uma pessoa observa uma moeda no fundo de uma piscina. Ela percebe que a moeda parece estar mais próxima da superfície de que deveria. Como você explicaria esse fato?

3

Suponha que você é um salva-vidas e que está na praia olhando os banhistas. De repente, um deles parece estar se afogando. Sabendo que sua velocidade na água é menor que na areia, qual dos caminhos, A, B ou C, abaixo representados, permitiria você chegar mais rápido ao banhista?

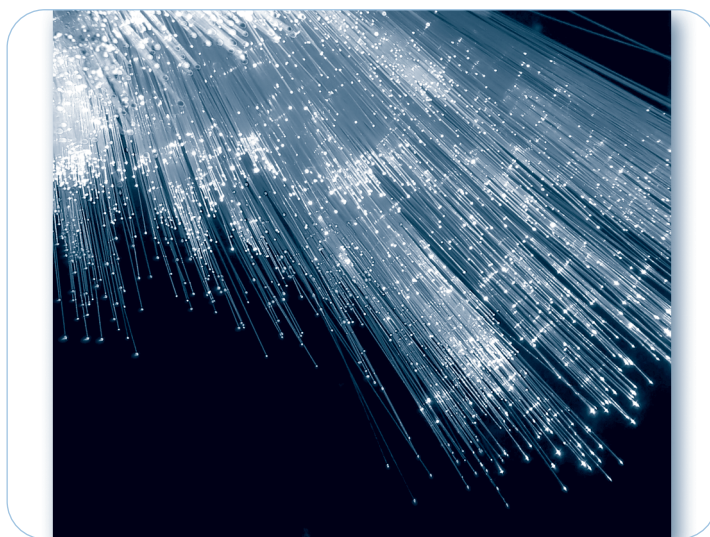


4

Deseja-se obter a reflexão interna total em um sistema formado por vidro e ar. Qual deve ser o ângulo de incidência da luz para se obter esse efeito?

5

O que vem a ser uma fibra ótica?



Como mostrado na figura anterior, ela é muito utilizada atualmente como enfeite tipo abajur. Como pode a fibra ótica, que é “transparente”, deixar sair a luz apenas pela sua extremidade?

# Referências

HEWITT, Paul G. **Física conceitual**. São Paulo: Bookman, 2002.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica**: fluidos, oscilações, ondas e calor. 4. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2002. v 2.

SERWAY, R. A.; JEWETT JÚNIOR, J. W. **Princípios de física**. São Paulo: Ed. Thomson, 2003. v 4.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física**: ótica e física moderna: Sears e Zemansky. 10. ed. São Paulo: Addison- Wesley, 2003. v 4.

# Interferência

**Aula**

**8**

# Apresentação

**N**as aulas 6 (Reflexão) e 7 (Refração) usamos aproximação de raios luminosos para examinar o que ocorre quando a luz é refletida em uma superfície ou então é refratada em um novo meio. Nesta aula, vamos discutir os fenômenos ondulatórios para examinar quando a luz encontra um obstáculo na sua trajetória. Esses fenômenos não poderão, agora, ser explicados com a aproximação de raios luminosos, e para compreendê-los temos que trabalhar com a natureza ondulatória da luz.

## Objetivos

- 1 Entender a natureza ondulatória da luz.
- 2 Caracterizar o fenômeno de interferência de ondas.
- 3 Descrever os processos físicos relacionados com a interferência.
- 4 Definir interferência construtiva e destrutiva.
- 5 Calcular máximos e mínimos de interferência.



# Conceituando interferência

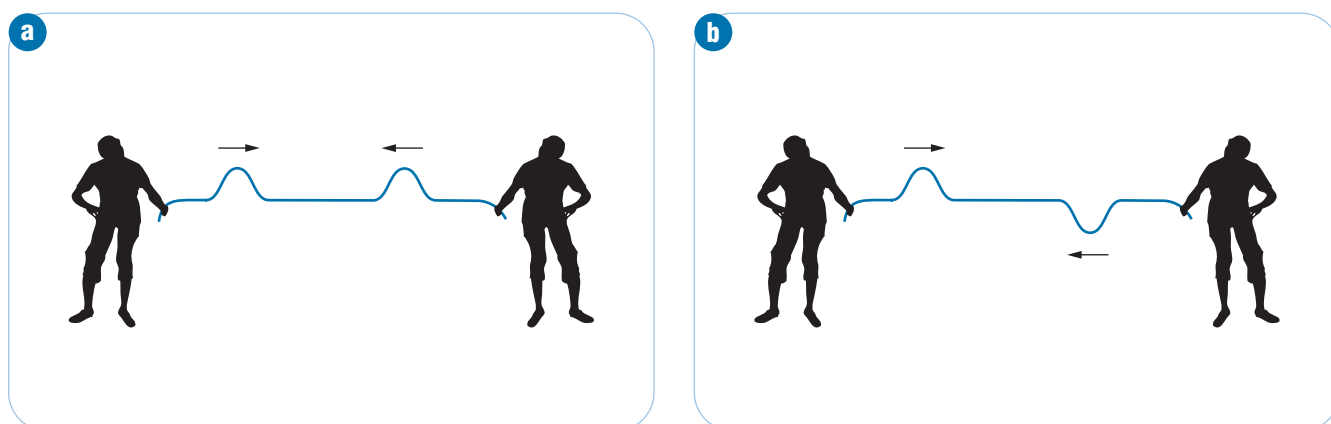
Vamos iniciar nossa aula discutindo um exemplo simples do fenômeno da interferência a partir do qual podemos conceituar esse fenômeno.

Suponha que você e um colega seguram uma corda, cada um em uma extremidade. Você levanta e baixa a mão rapidamente, gerando um pulso de onda que se propaga em direção ao seu amigo e ele faz o mesmo, gerando um pulso que se propaga em sua direção.

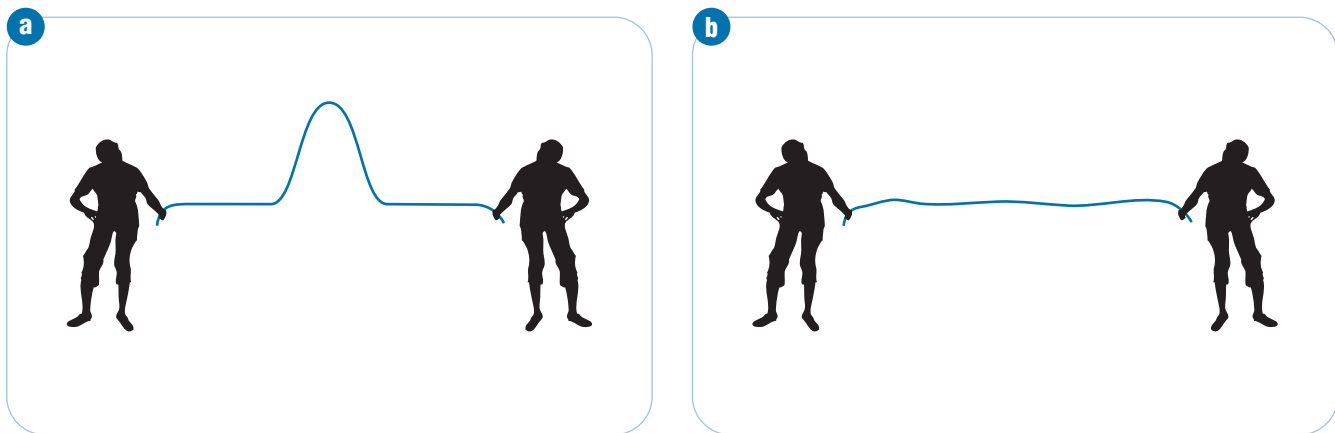
Essas situações estão representadas nas Figuras 1(a) e 1(b). Observando-as, podemos ver que temos duas situações distintas. Na Figura 1(a), você é representado pela caricatura da esquerda e o seu amigo pela da direita, e fazem o pulso se propagar por cima da corda. Na Figura 1(b), você faz o pulso se propagar por cima da corda e seu amigo por baixo.

O que irá acontecer quando os dois pulsos se encontrarem no meio da corda?

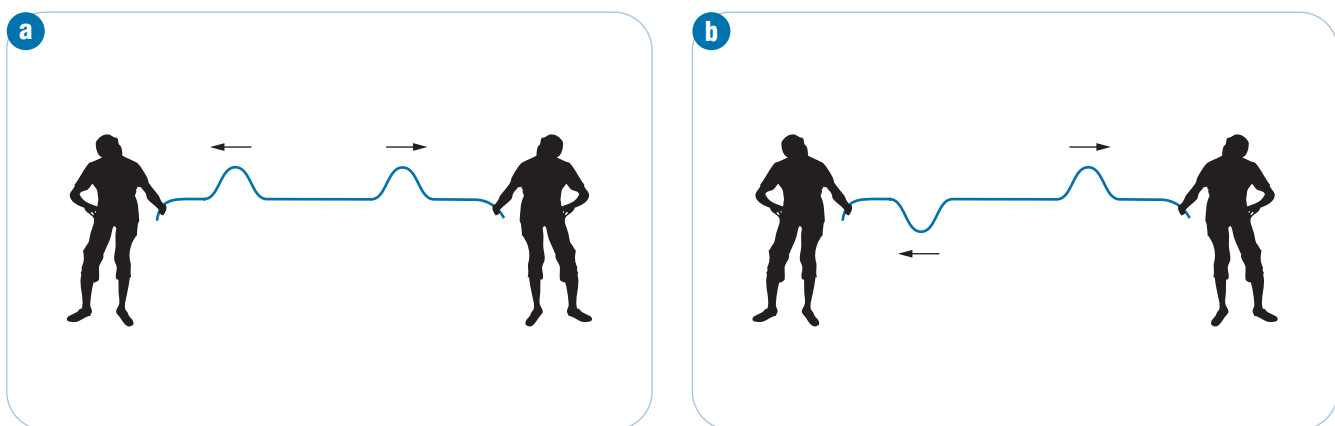
Nas duas situações irá ocorrer, na verdade, a superposição dos pulsos, denominada de interferência. No caso 1(a) ocorre uma interferência construtiva. Os pulsos são superpostos produzindo um pulso de amplitude maior, como mostra a Figura 2(a). E no caso 1(b) ocorre uma interferência destrutiva. Os pulsos são superpostos aniquilando-se um ao outro, conforme mostra a Figura 2(b). Após a superposição, os pulsos gerados continuam a se propagar novamente na corda, de acordo com o indicado na Figura 1. Veja a esquematização na Figura 3. Você pode perceber que o pulso gerado pela pessoa da esquerda está mais próximo da pessoa da esquerda e vice-versa.



**Figura 1** – Propagação de pulsos numa corda: (a) ambos para cima; (b) um para cima e outro para baixo antes da superposição.



**Figura 2** – Propagação de pulsos numa corda durante a superposição dos mesmos: (a) da Figura 1(a) (interferência construtiva); (b) da Figura 1(b) (interferência destrutiva).



**Figura 3** – Propagação de pulsos numa corda, representada na Figura 1, após a superposição.



## Atividade 1

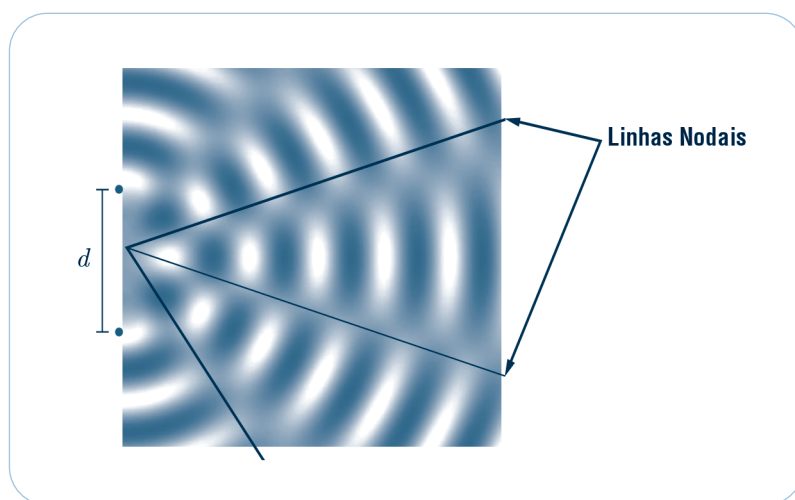
Responda brevemente:

**a)** interferência é:

**b)** o que ocorre com o movimento de um ponto  $p$ , situado em uma corda vibrante, se ele é atingido simultaneamente por duas ondas de mesmo período e mesma amplitude, sofrendo aí interferência destrutiva?

# A figura da interferência

A interferência é um fenômeno típico das ondas. Podemos observá-la, por exemplo, num tanque de água, em que se produzem ondas por meio de duas pontas que tocam periodicamente e sincronizadas a superfície da água. Como resultado, forma-se na superfície um padrão característico, que denominamos **figura de interferência**. Ao longo de certas linhas, as duas perturbações se reforçam, ou seja, interferem de modo construtivo. Ao longo de outras linhas, as duas perturbações se anulam, ou seja, interferem de modo destrutivo. Veja na Figura 4 esse comportamento. As partes claras e escuras, intercaladas, representam a soma das cristas e dos vales das ondas, respectivamente. As linhas nodais representam a soma da crista de uma onda com o vale da outra.



**Figura 4** – Interferência das ondas emitidas por duas fontes síncronas separadas por uma distância  $d$ , tal como se veria em uma cuba de ondas quando nos situamos próximos das fontes.

Também podemos obter figuras de interferência com a luz. Para isso, fazemos um feixe de luz passar através de duas fendas vizinhas muito estreitas. Quando falamos em experimentos com a luz, falamos em obstáculos ou fendas da ordem de comprimento da luz, ou seja, da ordem de  $10^{-7} m$ .

Como você pode imaginar, os fenômenos de interferência com a luz se tornam mais difíceis de serem observados devido ao comprimento de onda típico da luz. Por outro lado, podemos também observar o fenômeno de interferência com ondas sonoras. Essa possibilidade já foi citada na aula 3 (O fenômeno ondulatório) desta disciplina.

Quem primeiro comprovou o fenômeno de interferência na luz foi o médico Thomas Young (1773 - 1829) em 1801. A Figura 5 é uma vista superior do aparato usado por ele para realizar seu famoso experimento da fenda dupla com a luz.  $F_0$  é uma pequena fenda simples

em um anteparo, e  $F_1$  e  $F_2$  constituem uma fenda dupla, sobre um segundo anteparo, situado entre o primeiro e a tela.

Na experiência, hoje conhecida como experiência de Young, ele fez um feixe de luz atravessar a fenda  $F_0$ , de modo a garantir que a luz se comportasse como oriunda de uma única fonte. Em seguida, a luz atravessou as outras duas fendas,  $F_1$  e  $F_2$ . Nessa situação, a luz proveniente das duas fendas é gerada de uma mesma fonte, ou seja, cada fenda se comporta como uma fonte e cada fonte é dita coerente, pois as duas fontes possuem as mesmas características. A luz proveniente das duas fendas foi então projetada na tela. Young observou que quando a luz era projetada apareciam, alternadamente, sombra esquematizada pelos quadrados cinzas e luz esquematizada pelas partes brancas entre os quadrados.

Podemos garantir que ao deixar as duas fendas, as ondas estão em fase. Ele então chegou a conclusão que, devido à sua natureza ondulatória, quando as cristas das ondas luminosas se cruzavam, a luz era mantida, mas quando a crista de uma das ondas se cruzava com o vale da outra, aí permanecia uma sombra. Essa alternância de luz e de sombra é **chamada padrão de interferência** e decorre do reforço e da anulação de ondas que chegam em tempos diferentes ou percorrem caminhos diferentes.

Note que, na Figura 5, a distância entre as linhas circulares é na verdade a representação fictícia do comprimento de onda em questão.

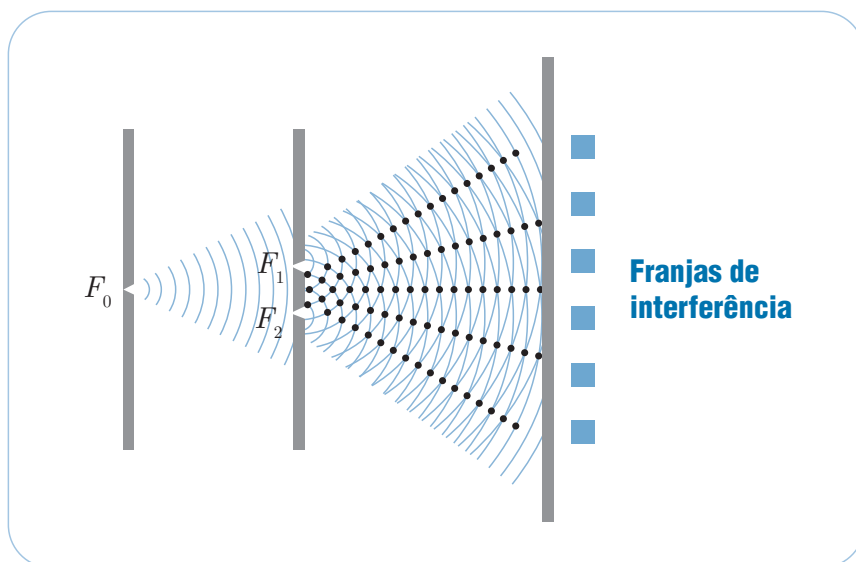


Figura 5 – Aparato utilizado na experiência de Young.



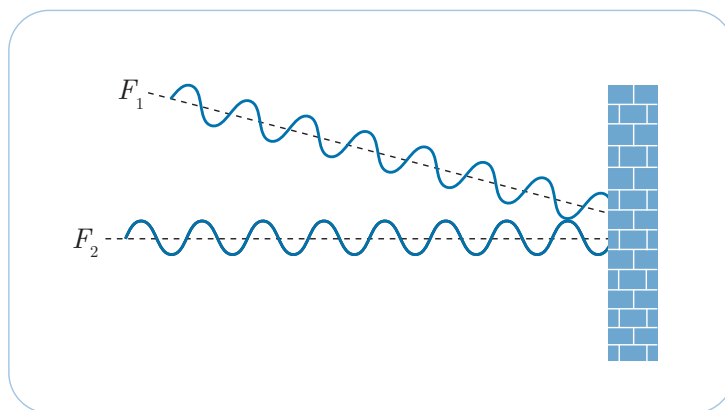
## Atividade 2

Assinale com **V** (verdadeira) ou **F** (falsa) cada uma das sentenças, a seguir, justificando cada resposta:

- ( ) o fenômeno de interferência é típico das ondas sonoras, e, portanto, só ocorre com ondas mecânicas.
- ( ) duas fontes são ditas coerentes se geram ondas de mesma amplitude.
- ( ) na experiência de Young, a primeira fenda serve para gerar ondas coerentes.
- ( ) duas fontes são coerentes se operarem na mesma frequência.

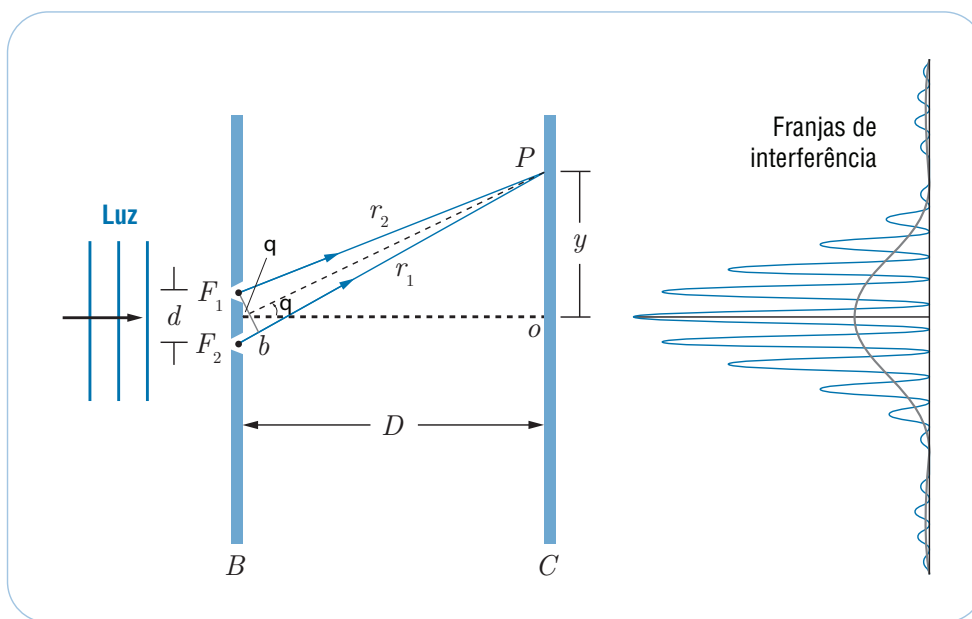
Vejam, agora, a Figura 6, ela representa esquematicamente duas ondas se propagando de dois pontos diferentes (duas fontes  $F_1$  e  $F_2$ ), que se comportam como as duas fendas da experiência de Young.

Você pode verificar, olhando atentamente a Figura 6, que ao se aproximar do anteparo, as duas ondas mostram uma defasagem completa, ou seja, a crista de uma das ondas coincide com o vale da outra. Portanto, a superposição dessas duas ondas, nesse ponto, resultaria numa amplitude nula, o que significa que nesse ponto as ondas estariam interferindo destrutivamente.



**Figura 6** – Representação esquemática da propagação da luz de dois pontos diferentes.

Sendo o feixe de luz vindo de uma única fonte, formam-se sobre a tela regiões claras e escuras, alternadas. As regiões claras são aquelas atingidas pelas duplas cristas, como a soma representada na Figura 2 (a), e pelos duplos vales, que seria a soma de duas cristas inversas, ou seja, regiões onde as ondas luminosas interferem construtivamente. As regiões escuras correspondem a regiões atingidas por uma crista e um vale, como a aniquilação representada na Figura 2(b), ou seja, regiões onde as ondas luminosas se interferem destrutivamente. O padrão de feixes de luz projetado na tela é chamado **franjas de interferência**.



Fonte: <<http://www.unb.br/iq/kleber/EaD/Fisica-4/Aulas/Aula-15/fig15-2.gif>>. Acesso em: 20 jan. 2009.

**Figura 7** – Interferência por fendas duplas, mostrando ainda as franjas de interferência que aparecem no anteparo.

É interessante lembrar que a idéia da teoria corpuscular da luz prevaleceu (a despeito da oposição de muitos cientistas) durante o século XVII. Ela sofreu, no entanto, um grande abalo com os trabalhos de Young a respeito do fenômeno da interferência da luz. A teoria corpuscular da luz de Newton, discutida por ele no seu famoso livro, “Optica”, não é compatível com esse fenômeno, visto que não seria de se esperar figuras de interferência em fluxos de partículas. Mais recentemente, a partir de 1905, com o modelo quântico de Einstein, a luz passa a ser tratada como tendo comportamento dual, isto é, hora ela se comporta como onda, hora como partícula, ou seja, tanto Young quanto Newton estavam corretos. Se bem que o modelo corpuscular de Newton é muito diferente (errado!) do modelo corpuscular de Einstein.

# Interferência por fendas duplas

**P**ara tratar analiticamente a interferência do ponto de vista da superposição construtiva ou destrutiva, lembremos que as distâncias  $r_1$  e  $r_2$  das fendas  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente, ao ponto  $P$ , representadas na Figura 8, contêm um número grande de comprimentos de ondas. Portanto, se fizermos a diferença entre  $r_1$  e  $r_2$ , obteremos um número que estará relacionado com a diferença de números de comprimentos de ondas contidos nas duas distâncias.

Consideremos a situação seguinte: suponhamos que a distância entre as duas fendas e o anteparo da Figura 4 seja da ordem de  $1\text{ m}$ , então, teriam, nessa distância,  $10^7$  comprimentos de onda.

Vamos definir:

$$r_2 - r_1 = \Delta \quad \text{Eq. 1}$$

Então,

$\Delta = n\lambda$ , se a interferência é construtiva (máximo de intensidade).

$\Delta = (n + 1/2)\lambda$ , se a interferência é destrutiva (mínimo de intensidade).

Assim, dizemos que se  $\Delta = n\lambda$ , existe um número inteiro  $n$  de comprimentos de onda dentro de  $\Delta$  e, então, a interferência é construtiva (máximo de intensidade).

Mas, se  $\Delta = (n + 1/2)\lambda$ , então existe um número ímpar de meios comprimentos de onda dentro de  $\Delta$ , e, então a interferência é destrutiva (mínimo de intensidade).

Uma boa aproximação teórica é considerarmos que os raios  $r_1$  e  $r_2$ , na verdade, são paralelos entre si, de modo que na Figura 6 o valor de  $\Delta$  seria dado por:

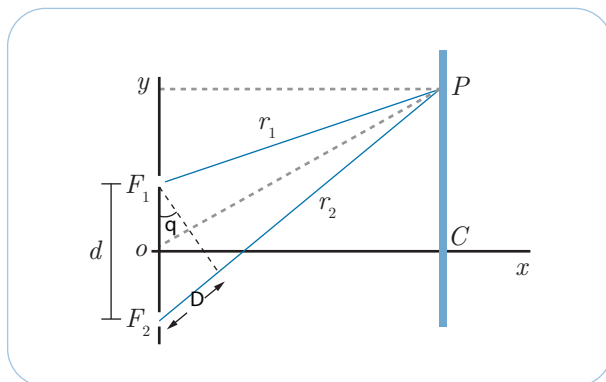
$$\Delta = d \operatorname{sen}\theta \quad \text{Eq. 2}$$

Portanto, para que ocorra uma interferência construtiva ou máximos de interferência é preciso observar que:

$$d \operatorname{sen}\theta = n\lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Eq. 3}$$

E para que ocorra uma interferência destrutiva ou mínimos de interferência é preciso observar que:

$$d \operatorname{sen}\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Eq. 4}$$



**Figura 8** – Aparato de fenda dupla com anteparo.

Observe a Figura 8. Quando os raios  $r_1$  e  $r_2$  são paralelos, o ângulo formado pela reta  $x$  e a reta que une o ponto  $O$  e o ponto  $P$  é também  $\theta$ . Portanto, a distância do centro  $C$  do anteparo ao ponto  $P$  é a posição que cada máximo ou mínimo de interferência vai ser formado.

Podemos, a partir da Figura 8, escrever, então, para o triângulo  $POC$ :

$$\tan \theta = \frac{y}{x}.$$

E como o ângulo  $\theta$  é muito pequeno, podemos considerar que:

$$\tan \theta \cong \text{sen} \theta.$$

Usando, agora, as Equações 3 e 4, chegamos às seguintes expressões:

$$d \frac{y}{x} = n\lambda \text{ ou } y = \frac{nx\lambda}{d}. \text{ (interferência construtiva)} \quad \text{Eq. 5}$$

E

$$d \frac{y}{x} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda \text{ ou } y = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{x\lambda}{d}. \text{ (interferência destrutiva)} \quad \text{Eq. 6}$$

As Equações 5 e 6 podem ser usadas para determinarmos as regiões onde temos interferências construtiva e destrutiva, respectivamente.

## Exemplo 1

Dois fendas muito estreitas estão separadas por uma distância de  $0,1 \text{ cm}$ . Ondas planas de  $\lambda = 500 \text{ nm}$  incidem no sistema de fenda dupla e um padrão de interferência é observado em uma tela a  $1,0 \text{ m}$  de distância. Ache a distância  $y$  na tela entre o máximo central e o primeiro mínimo.

## Solução

Para calcular o primeiro mínimo usaremos a Equação 6 com  $n=0$ . Essa distância  $y$  encontrada é a distância do centro do anteparo (posição do primeiro máximo) ao primeiro mínimo.

$$\text{Então, } y = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{x\lambda}{d} = \frac{1 \text{ m} \times 5 \times 10^{-7} \text{ m}}{2 \times 10^{-3} \text{ m}} = 2,5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,25 \text{ mm}.$$

Quando fazemos essa análise da tangente do ângulo, como discutido anteriormente, sabemos pela resposta da separação linear entre o máximo central e o primeiro mínimo que a abertura angular entre o máximo e um mínimo adjacente ou entre dois máximos é também muito pequena. Isso nos leva a aproximar o valor da tangente do ângulo pelo próprio seno do ângulo e igualar esse resultado ao próprio ângulo expresso em radiano.

$$\text{Ou seja, } \tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{\text{sen } \theta}{1} = \text{sen } \theta = \theta, \text{ expresso em radianos.}$$



## Atividade 3

Numa experiência de Young, a distância entre as fendas é 100 vezes o valor do comprimento de onda da luz que é usada para iluminá-las.

- a) Qual é a separação angular, em radianos, entre o máximo de interferência central e o máximo mais próximo?
- b) Qual é a distância entre esses máximos se a tela de observação estiver a 50,0 cm de distância das fendas?

Retornando a aula 3, poderemos ver a relação que existe entre o número de ondas e a diferença de fase entre as ondas. Representamos a função ondulatória da luz que sai das fendas  $F_1$  e  $F_2$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_1(x, t) &= A \cos(kx - \omega t + \varphi) = A \cos(\delta + \varphi) \\ f_2(x, t) &= A \cos(kx - \omega t) = A \cos(\varphi) \end{aligned} \quad \text{Eq. 7}$$

Onde  $\delta$  é a fase constante e  $\varphi$  é a diferença de fase entre as duas representações. Para que no ponto  $P$  da Figura 8 ocorra uma interferência construtiva seria necessário que a soma das funções ondulatórias fosse:

$$f_1(x, t) + f_2(x, t) = 2A.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} A \cos(\delta + \varphi) + A \cos \delta &= \pm 2A \\ \cos(\delta + \varphi) + \cos \delta &= \pm 2 \end{aligned}$$

Por essa expressão, o valor máximo para a soma dos cossenos é 2. Dessa forma, se  $\cos\delta = \pm 1$ , assim, para que essa expressão seja verdadeira é necessário que  $\cos(\delta + \varphi) = 1$  ou  $\cos\delta\cos\varphi - \text{sen}\delta\text{sen}\varphi = \pm 1$ , tendo  $\cos\delta = \pm 1 \Rightarrow \text{sen}\delta = 0$ .  $\cos\delta = 1$  para que isso seja verdadeiro, então,  $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi$ , etc. A Diferença de fase deverá corresponder a um número inteiro par de  $\pi$ .

Por exemplo, para  $\varphi = 2\pi$ :

$$f_1(x,t) = A\cos(\delta + 2\pi) = A[\cos\delta\cos2\pi - \text{sen}\delta\text{sen}2\pi]$$

$$f_2(x,t) = A\cos(\delta)$$

Como  $\text{sen}2\pi = 0$  e  $\cos2\pi = 1$ , temos:

$$f_1(x,t) = A\cos(\delta)$$

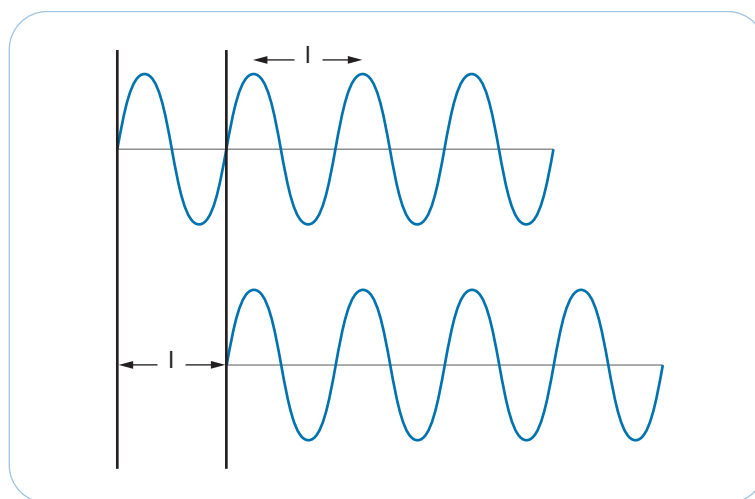
$$f_2(x,t) = A\cos(\delta)$$

E a soma dará  $f_1(x,t) + f_2(x,t) = 2A$ .

Isso significa que quando a diferença de fase é  $2\pi$ , temos as duas ondas representadas pela mesma função de onda, cuja soma dará a amplitude máxima.

Lembrando, agora, que da leitura da Equação 3 vimos que quando a diferença de caminho entre os dois raios é de um número inteiro de comprimentos de onda, temos a interferência construtiva. E que vimos no exemplo anterior que quando a diferença de fase é  $2\pi$ , temos as duas ondas representadas pela mesma função de onda, cuja soma dará a máxima amplitude. Isso mostra que uma delas está atrasada ou adiantada em relação à outra de exatamente um comprimento de onda.

A Figura 9 ilustra o comportamento de dois trens de ondas, exemplificando a situação quando ocorre um atraso de uma onda em relação à outra de um comprimento de onda ( $\lambda$ ) ou com diferença de fase de  $2\pi$ .



**Figura 9** – Ondas com atraso de um comprimento de onda ou defasadas de  $2\pi$ .

Podemos verificar a diferença de fase quando ocorre uma interferência destrutiva. Nesse caso, a soma das funções ondulatórias da Equação 7 é nula, ou seja,  $A\cos(\delta+\varphi) + A\cos\delta = 0$ . Logo,  $\cos(\delta+\varphi) + \cos\delta = 0$ . Então,  $\cos\delta\cos\varphi - \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta = 0$ .

Tomando o valor máximo  $\cos\delta = \pm 1$   $\sin\delta = 0$ , a expressão anterior se reduz a  $\pm\cos\varphi \pm 1 = 0$  ou ainda  $\cos\varphi + 1 = 0$ , resultando em  $\cos\varphi = -1$ . Logo, temos  $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi$ . A Diferença de fase deverá corresponder a um número inteiro ímpar de  $\pi$ .

Por exemplo, quando substituirmos  $\varphi = \pi$  na expressão da Equação 7:

$$f_1(x,t) = A\cos(\delta + \pi) = A\cos\delta\cos\pi - A\sin\delta\sin\pi = -A\cos\delta$$

$$f_1(x,t) = A\cos(\delta)$$

Somando-se as duas funções teremos:

$$f_1(x,t) + f_2(x,t) = 0.$$

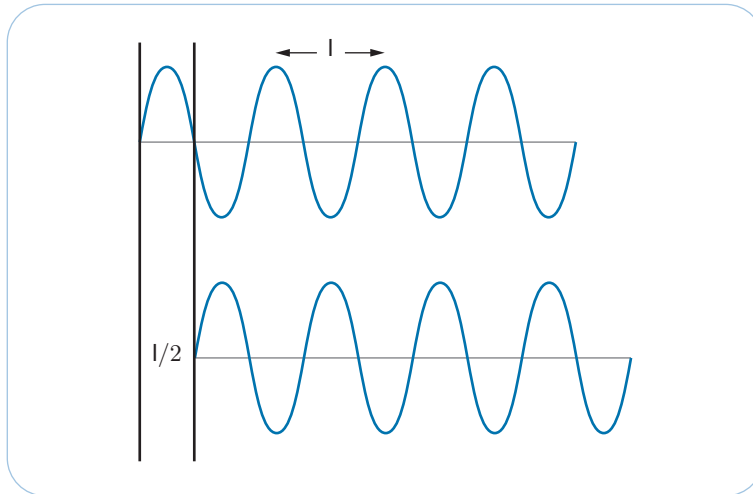


## Atividade 4

Substitua  $\varphi = \pi$  na expressão da Equação 7 e verifique que  $f_1(x,t) + f_2(x,t) = 0$ .

Da leitura da Equação 4 sobre interferência destrutiva, vimos que quando a diferença de caminho entre os dois raios é de um número ímpar de meios comprimentos de onda, temos a interferência destrutiva.

Vimos no exemplo anterior que quando a diferença de fase é  $\pi$ , temos as duas ondas representadas por uma mesma função de onda, mas com sinal contrário, o que mostra que a soma é sempre nula, justificando o fato de que uma delas está atrasada ou adiantada em relação à outra de exato meio comprimento de onda. A Figura 10 ilustra o comportamento de dois trens de ondas exemplificando a situação quando ocorre um atraso de uma onda em relação à outra de meio comprimento de onda ( $\lambda/2$ ) ou com diferença de fase de  $\pi$ .



**Figura 10** – Ondas com atraso de meio comprimento de onda ou defasadas de  $\pi$ .

Para concluirmos o tema desta aula, vamos lembrar que alguns dos conceitos abordados aqui você já tinha visto em aulas anteriores e foi formalizado nesta. Por isso, a seguir apresentamos um breve glossário com termos importantes que aprendemos até aqui.

### Para saber mais...

#### Glossário

**Ondas simples:** ondas que possuem uma única frequência.

**Dispersão:** fenômeno que permite que uma onda seja decomposta em ondas simples. Por exemplo, com a dispersão da luz branca, ela é decomposta em ondas simples correspondentes a cada uma das “cores básicas”.

**Nós:** pontos de uma onda que satisfazem a relação:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = 0.$$

Ventres de uma onda: pontos da onda que satisfazem a relação:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \pm 1.$$

# Resumo

Nesta aula, você aprendeu a calcular regiões de máximos e de mínimos de interferência; viu também como ocorrem as interferências e suas aplicações tecnológicas. Aprendeu sobre defasagens e como esse fato se relaciona com interferências construtivas e destrutivas.

## Autoavaliação

1

Explique cuidadosamente o experimento de Young de fenda dupla.

2

Conceitue:

- a) interferência;
- b) máximos e mínimos de interferência;
- c) defasagem, ondas em fase e fora de fase;
- d) superposição construtiva e destrutiva.

3

Por que o experimento de Young evidencia a natureza ondulatória da luz?

4

O fenômeno de reflexão pode ser explicado pelo modelo corpuscular da luz? Pode ser explicado pelo modelo ondulatório? Justifique sua resposta.



### Desafio

#### Refazendo o experimento de Young

Essa é uma atividade complementar, mas seria muito bom se você conseguisse fazê-la com mais outros colegas.

Procure, na sua localidade ou no seu laboratório, um daqueles apontadores a LASER ou adquira um em uma loja de variedades. Esses dispositivos não devem ser apontados para os olhos nem incidir sobre a pele, pois podem provocar danos a saúde.

Se você iluminar com a luz dele um pedaço de cartolina com um pequeno orifício (furo de um alfinete, por exemplo), a luz sofrerá difração e aquele pequeno furo será como uma pequena fonte de luz. Agora, coloque um outro pedaço de cartolina com dois pequenos furos no caminho da luz que emana do primeiro furo. Finalmente, coloque um terceiro pedaço de cartolina branco sem furos, para servir de tela. Faça tudo isso em uma sala escurecida e você perceberá que na tela se formará um típico padrão de interferência, como o que aparece na Figura 11(a). Nessa figura, aparece o máximo central com dois secundários de cada lado.

É importante você perceber que o máximo central é o mais brilhante e que a luminosidade vai decaindo tanto para a esquerda como para a direita. Isolando um pedaço da franja, representado pelo máximo central na Figura 11(b), você notará outro fato importante. Esse máximo tem no seu centro a maior luminosidade, representando uma interferência completamente construtiva e decaindo para a direita e para a esquerda até atingir uma faixa completamente escura, representando uma interferência totalmente destrutiva.



**Figura 11** – (a) Padrão de interferência de fenda dupla; (b) máximo central.

Se você realizou a experiência, tente desenhar a figura que você viu no anteparo e compare com a Figura 11.

# Referências

HEWITT, Paul G. **Física conceitual**. São Paulo: Bookman, 2002.

SERWAY, R. A.; JEWETT JÚNIOR, J. W. **Princípios de física**. São Paulo: Ed. Thomson, 2003. v 4.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física**: ótica e física moderna: Sears e Zemansky. 10. ed. São Paulo: Addison- Wesley, 2003. v 4.

# Difração

Aula

9



# Apresentação

**N**esta aula, você estudará um fenômeno muito interessante que ocorre com as ondas quando interagem com o meio, o fenômeno da difração. Como você verificará ao longo dela, é graças a esse fenômeno que as ondas contornam obstáculos e assim podemos, por exemplo, escutar o que se passa lá fora, na rua, se estamos com a porta ou a janela da sala aberta. A difração ocorre tanto com ondas mecânicas quanto com eletromagnéticas. Esperamos que você aprecie esta aula e que consiga compreender bem esse fenômeno.

## Objetivos

- 1** Explicar o fenômeno da difração e em que condições ele ocorre.
- 2** Explicar o fenômeno da difração em fendas simples e duplas.
- 3** Entender o conceito de franjas de interferência e sua relação com a difração.



# A história de seu Amador e como ele conheceu a difração

Para entendermos melhor a importância desse tema, vamos iniciar contando uma historinha.

Seu Amador ficou indignado quando a emissora de rádio que operava na sua cidade deixou de transmitir em ondas médias na frequência de  $900\text{ kHz}$ , conhecidas como AM (ondas médias) para transmitir em FM na frequência de  $90\text{ MHz}$ . Segundo ele, após a mudança, ele não mais conseguia sintonizar o seu rádio. Indignado foi à emissora reclamar do acontecido.

Então, o técnico da emissora perguntou para ele:

– Seu rádio tem faixa em FM?

Ele respondeu que não. E, por isso, teve que comprar outro rádio. Mesmo assim, esse novo rádio não conseguia captar o sinal da rádio local que ele tanto gostava de ouvir.

Então, o técnico resolveu ir até a casa do seu Amador para verificar o que estava ocorrendo. Chegando lá, constatou que seu Amador morava por trás de um morro que ficava entre a antena transmissora da rádio e a casa dele.

Nesse momento, o técnico percebeu que o problema de seu Amador era com a natureza e não com seu aparelho de rádio, explicando-o que as ondas FM não conseguiam chegar até a sua antena devido à presença daquele morro.

Então, seu Amador, já “invocado” com a história, exclamou:

– Mas quando era em  $900\text{ kHz}$ , o morro estava lá e mesmo assim eu sintonizava bem direitinho! Essa sua história é muito esquisita – complementou mais “invocado” ainda.

O técnico, percebendo o drama de seu Amador, respondeu que era por causa da difração.

– E “quem é” essa tal de difração para atrapalhar o funcionamento de meu rádio? Diga logo onde ela mora para que eu vá lá tirar satisfações com ela!

– Calma, seu Amador, a difração é um fenômeno natural que ocorre com as ondas. Como as ondas médias tinham comprimento de  $333,3\text{ m}$  e as ondas FM têm apenas  $3,3\text{ m}$ , estas não conseguiam contornar o obstáculo do morro.

O técnico ainda explicou para seu Amador que difração é o fenômeno que ocorre quando uma onda incide em um obstáculo e consegue ultrapassá-lo, contornando-o ou penetrando-o em alguma abertura e recompondo-se mais à frente.

Por isso, graças à difração das ondas eletromagnéticas é que é possível a recepção dos sinais de rádio e de televisão nas grandes cidades, apesar dos prédios e das construções – explica o técnico, deixando o seu Amador mais calmo.

O técnico complementa, com ar de professor:

– O caso do senhor, seu Amador, é que o obstáculo, o morro, tem dimensões muito maiores que o comprimento de onda da FM e não permite que a onda faça o contorno.

Então, seu Amador já com ar de quem é entendido do assunto falou:

– Foi por isso que quando eu fui comparar minha TV, me aconselharam a comprar uma antena parabólica para pegar os canais de televisão diretamente do satélite, pois com a antena local era muito difícil receber o sinal.

Finalmente, o técnico falou:

– Vou propor que a rádio instale aqui no topo do morro uma antena retransmissora para que o senhor e seus vizinhos possam receber o nosso sinal FM.

E foi assim que o seu Amador conheceu a difração e até gostou muito de tê-la conhecido.

Esperamos que você tenha gostado dessa história e que venha a gostar desse tema tão importante para o mundo das ondas.



## Atividade 1

- a) A partir do texto, tente responder o que é a difração.
- b) Verifique que ondas de frequência de  $900 \text{ kHz}$  (conhecidas como AM), de  $90 \text{ MHz}$  (conhecidas como FM), possuem, respectivamente, comprimentos de onda de  $333,3 \text{ m}$  e de  $3,3 \text{ m}$ .

# O fenômeno da difração

A historinha do seu Amador indica que podemos dizer que **difração é o encurvamento sofrido por uma onda quando esta encontra obstáculos à sua propagação**. Lembra que aprendemos que a luz só se propaga em linha reta? Pois é, o entendimento do fenômeno da difração, esta importante propriedade das ondas, foi de fundamental importância para provar que os raios de uma onda não são retilíneos.

Mas, note que o efeito de difração é observado para todos os tipos de ondas, e não só nas eletromagnéticas da historinha de seu Amador.

Nas condições rotineiras, raramente observamos a difração da luz. Entretanto, a difração das ondas sonoras é difícil de ser evitada. Por exemplo, se estamos numa sala de paredes espessas com a porta fechada, dificilmente escutaremos o que passa lá fora. Mas, basta abrir uma brecha da porta para que possamos escutar o som que vem de fora em qualquer parte da sala. Por outro lado, se através da porta entra a luz, ela iluminará apenas a largura que for a brecha da porta. De fato, o som contorna obstáculos de tamanhos razoáveis, tais como as mobílias de uma sala, e preenche todo o ambiente de maneira mais ou menos uniforme. Essa diferença observada entre a difração das ondas sonoras e as ondas luminosas é devido à diferença entre os respectivos comprimentos de onda. O comprimento de onda do som é da ordem de  $1\text{ m}$ , enquanto que o da luz visível é da ordem de  $5 \times 10^{-7}\text{ m}$ .



## Atividade 2

Faça os cálculos e verifique que o comprimento de onda do som é da ordem de  $1\text{ m}$ , enquanto que o da luz visível é da ordem de  $5 \times 10^{-7}\text{ m}$ .

Os efeitos de difração são notados quando os obstáculos ou aberturas são de dimensões comparáveis ao comprimento de onda.



## Atividade 3

- a) Responda à seguinte questão: uma estação típica de rádio AM transmite na frequência de 900 kHz, como já falado anteriormente; e uma estação de rádio FM transmite em 90 MHz. Por que será então que as estações de rádio FM frequentemente saem de sintonia quando você dirige o seu carro dentro de um pequeno túnel, mas as estações AM não saem?
- b) Pense um pouco e responda: por que as transmissões de TV na faixa de VHF (frequência muito alta) são mais facilmente sintonizadas em áreas com fraca recepção do que na faixa UHF (frequência ultra alta)?

## Observando a difração da luz

Apesar de termos dito, inicialmente, que era bastante difícil se observar a difração da luz, podemos elaborar experimentos simples para fazer tal observação. Um desses experimentos está descrito a seguir.

Se você quer fazer uma experiência simples relacionada com o fenômeno da difração da luz, faça o seguinte: em uma sala escura, de paredes bancas, com um apontador LASER, ilumine a parede. Caso a parede não seja branca, utilize como tela uma folha de cartolina branca fixada na parede. Esse experimento está esquematizado na Figura 1.

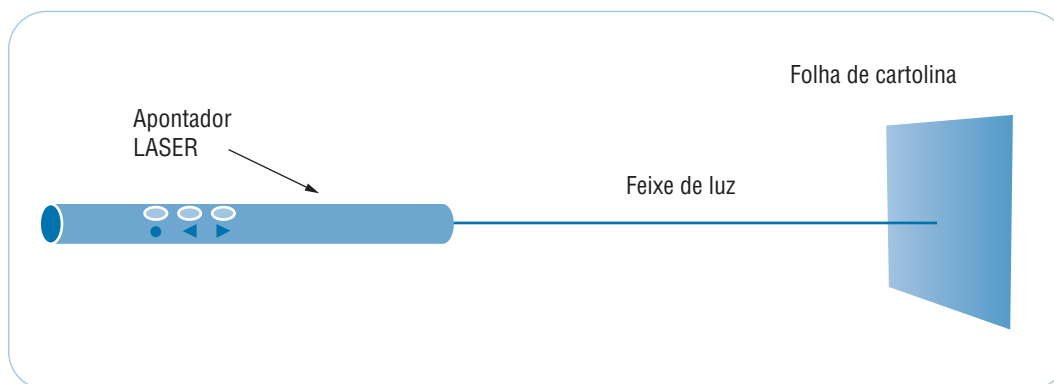


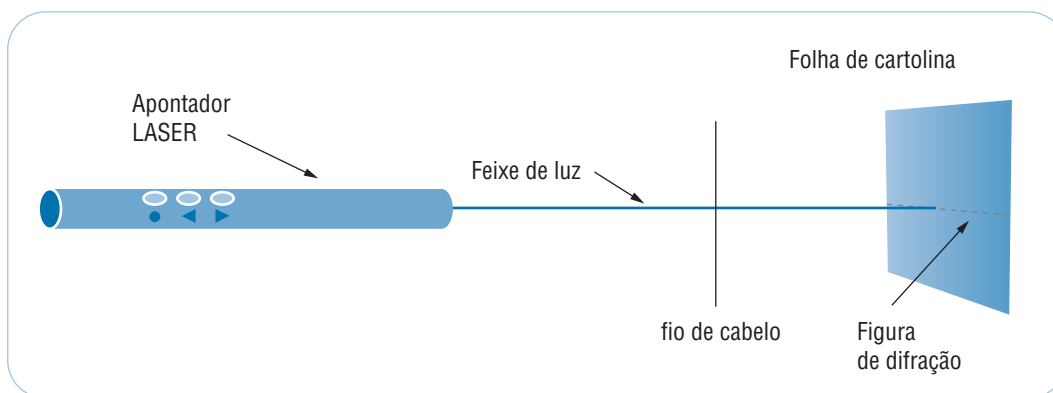
Figura 1 – Imagem de luz LASER em uma tela.

Você observará que o feixe de luz iluminará um ponto na tela como aparece na Figura.

Agora, pegue um fio de seu cabelo e coloque diante do feixe de luz. Certamente, você se surpreenderá com o resultado!

Aparecerá na parede uma imagem completamente diferente da anterior. Acontecerá o fenômeno da difração da luz ao contornar o obstáculo, seu fio de cabelo. Como é possível?

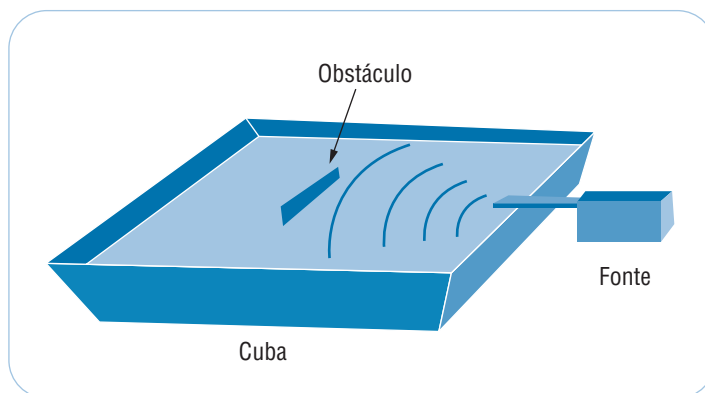
Muito simples, veja como o fio de cabelo tem dimensões da ordem do comprimento de onda da luz. A luz contornará o obstáculo (o fio do cabelo) e se recompõe na tela, distribuída em faixas vermelhas e brancas, representando a ausência de luz, como indica a Figura 2.



**Figura 2** – O mesmo da Figura 1, mas tendo um fio de cabelo como obstáculo ao feixe de luz.

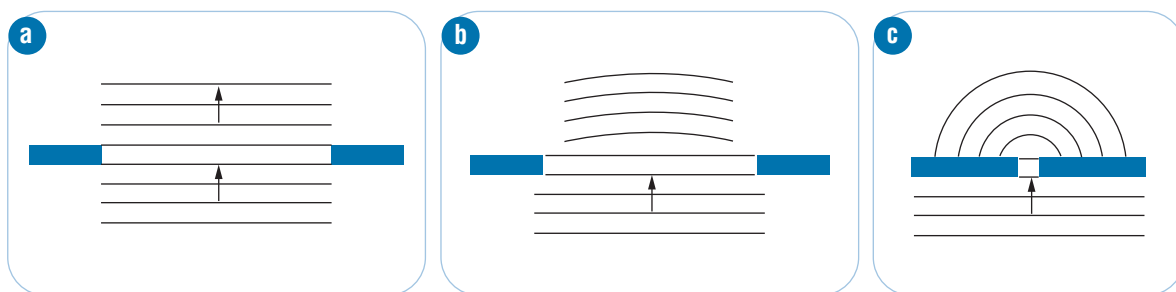
Podemos comparar as figuras de difração com fios de diferentes diâmetros. Se você pretende realizar esse experimento, seria bom ter a ajuda de um colega e assim montar, inicialmente, o fio cuja espessura você deseja medir, em uma janelinha feita de cartolina e fixar como mostrado na auto-avaliação.

O fenômeno da difração pode também ser observado num tanque ou numa cuba de ondas. Uma cuba de ondas, como a mostrada na Figura 3, é formada por um recipiente com água acoplado a um vibrador que gera ondas. Obstáculos são colocados na cuba e observam-se as figuras de difração geradas pela presença desses obstáculos.



**Figura 3** – Uma cuba de ondas.

Lembre o caso da historinha do seu Amador: para que ocorra a difração devemos ter um obstáculo. É provável que você não disponha de uma cuba de ondas. Assim, imagine que com uma palheta comprida conseguimos produzir ondas na água, como mostra a Figura 4. Fazendo um obstáculo com, por exemplo, duas lâminas metálicas ou pedaços de madeira. Quando a abertura, ou seja, a distância entre os dois obstáculos tiver dimensão muito maior que o comprimento de onda das ondas que se propagam na água da cuba, as ondas quase não se propagam atrás dos obstáculos, como visto na Figura 4(a), ou seja, as ondas continuarão a se propagarem em linha reta como se o obstáculo não existisse. Quando a abertura tem dimensão menor, como na Figura 4(b), as ondas rodeiam as bordas dos obstáculos e, finalmente, quando a abertura tem dimensão comparável ao comprimento de onda das ondas, como na Figura 4(c), as ondas arrodeiam as bordas dos obstáculos de tal modo que, atrás deles, a superfície da água fica quase completamente perturbada pelas ondas.



**Figura 4** – Representação da propagação de uma onda plana na água, na direção de um obstáculo: (a) comprimento de onda muito menor que a abertura da fenda; (b) da ordem da abertura da fenda; e (c) muito menor que a abertura da fenda.



## Atividade 4

Compare os fenômenos descritos no parágrafo anterior com o problema apresentado na historinha do seu Amador.

---

---

---

---

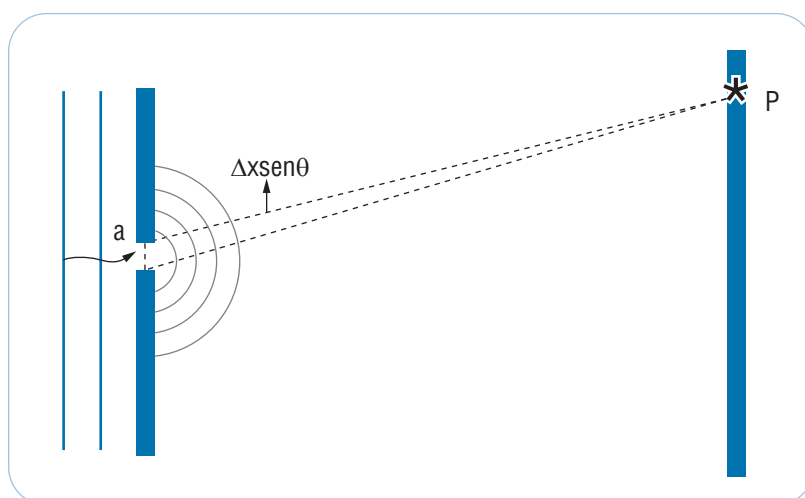
---

# Explicando a difração

O fenômeno da difração pode ser entendido com base no princípio de Huygens, como discutido na Aula 6 (Reflexão). Naquela aula, você aprendeu que tal princípio considera cada ponto de uma dada frente de onda como se fosse uma fonte puntiforme de ondas.

Assim, cada nova frente de onda (num instante posterior) é determinada pela superfície envoltória de todas as pequenas ondas esféricas emitidas por estas fontes puntiformes. Quando bloqueamos parte de uma frente de onda com um obstáculo ou deixamos a onda se propagar através de uma abertura cuja dimensão é da ordem de grandeza do comprimento de onda, cada ponto da frente de onda se comporta como uma fonte puntiforme e ela pode então se recompor mais a frente.

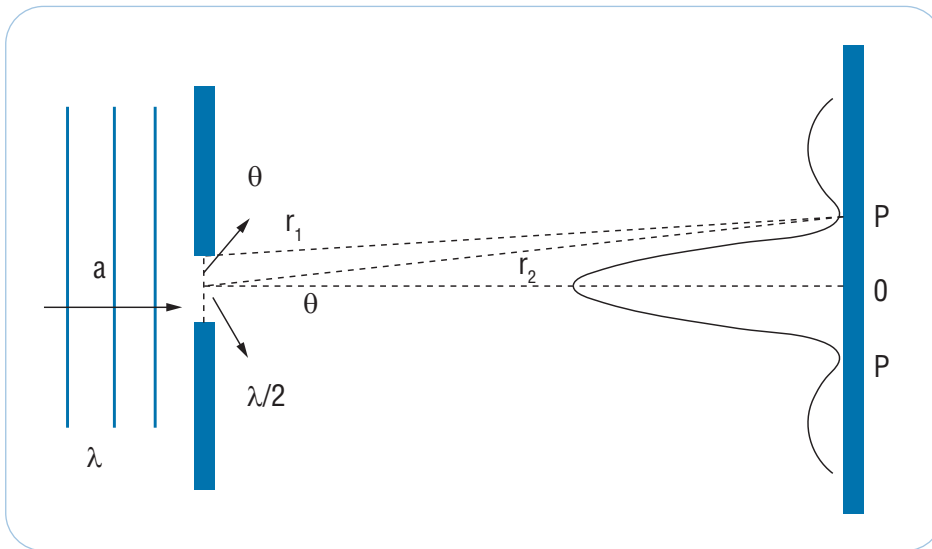
Observe, agora, a Figura 5. Nela, representamos apenas os raios que saem das partes superior e inferior da fenda de largura  $a$ . Tais raios são originários de duas fontes puntiformes no modelo de Huygens.



Fonte: <<http://www.infoescola.com/fisica/difracao/>>. Acesso em: 30 dez. 2008.

**Figura 5** – Difração em uma fenda simples.

A figura que irá aparecer no anteparo, indicado na Figura 5, está mostrada na Figura 6. Nela, mostra-se que a parte da frente de onda que atravessa a fenda pode ser dividida em um número grande de fontes puntiformes para emissão de novas ondas. O efeito é idêntico ao discutido na Figura 2 quando introduzimos um obstáculo da dimensão de um cabelo na frente do feixe de luz do LASER. A superposição das ondas num anteparo pode produzir uma figura semelhante ao da tela da Figura 2.



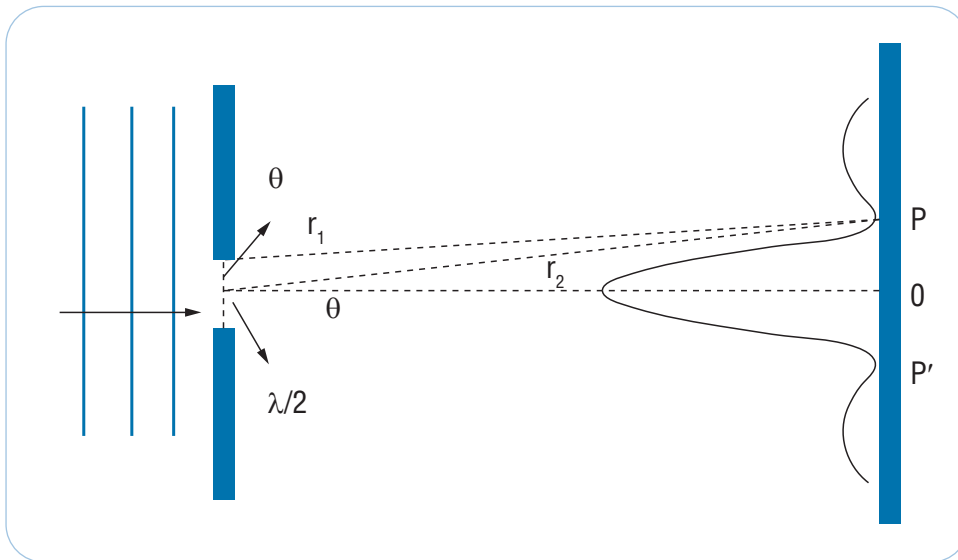
**Figura 6** – Representação esquemática de uma fenda de largura  $a$ , iluminada por luz de comprimento de onda  $\lambda$ .

Observe, ainda, que da Figura 6 podemos dividir a frente de onda em  $n$  pontos e cada um sendo uma fonte puntiforme para geração de ondas esféricas secundárias. Agora, precisamos discutir o que ocorre no anteparo, ou seja, as características da projeção da fenda no anteparo. Para tanto, vamos necessitar dos conceitos de máximos e de mínimos de difração. Esse é o assunto que passaremos a tratar a seguir.

## Máximos e mínimos de difração

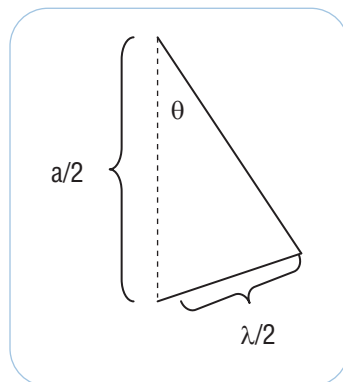
Vamos considerar que uma onda plana incida perpendicularmente em uma fenda de abertura “ $a$ ” (ou um fio de diâmetro “ $a$ ”, uma vez que são complementares), cuja largura é da mesma ordem de grandeza do comprimento de onda da onda incidente, como mostra o esquema da Figura 7, a seguir.

Ao ponto central do anteparo, vamos denominá-lo de  $O$ . Os raios que saem da fenda, paralelos ao eixo horizontal central em direção a  $O$ , estão em fase no plano da fenda e chegam em fase no ponto  $O$ , interferindo de uma forma construtiva e produzindo um máximo de intensidade. Vamos considerar, agora, a primeira franja escura, localizada no ponto  $P$  e no ponto simétrico  $P'$ . Os raios saem da fenda com um ângulo  $\theta$  em relação à horizontal e chegam a  $P$ . O raio  $r_1$  sai da parte superior da fenda e o raio  $r_2$  da parte central. Se a distância entre a fenda e o anteparo for significativamente maior que a abertura da fenda, então,  $r_1$  e  $r_2$  podem ser considerados paralelos. Traçamos uma reta paralela que tem origem na parte superior da fenda e corta o raio  $r_2$  perpendicularmente formando um triângulo onde a base correspondente à diferença de fase ( $\lambda/2$ ) e o ângulo oposto a base é  $\theta$ .



**Figura 7** – Figuras de difrações geradas no anteparo, por ondas que atravessam o obstáculo.

Ampliando o triângulo mostrado na Figura 7, temos como resultado o triângulo da Figura 8.



**Figura 8** – Ampliação da Figura 7, mostrando a metade superior da fenda e a saída dos raios.

Percebemos a seguinte relação:

$$\text{sen } \theta = \frac{\lambda/2}{a/2} \Rightarrow \frac{a}{2} \text{sen } \theta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow a \text{sen } \theta = \lambda \quad \text{Eq. 1}$$

Por outro lado, se a largura da fenda for dividida em quatro partes ao invés da metade, teremos a seguinte relação:

$$\text{sen } \theta = \frac{\lambda/2}{a/4} \Rightarrow a \text{sen } \theta = 2\lambda \quad \text{Eq. 2}$$

Se a fenda fosse dividida em seis partes iguais, teríamos:

$$a \text{sen } \theta = 3\lambda$$

Com isso, chegamos a uma situação interessante: você pode notar que há sempre um número inteiro multiplicando o comprimento de onda. Esse número representa o mínimo em relação ao máximo principal (ponto mais brilhante).

Representaremos o número inteiro por “ $m$ ” e teremos a relação geral:

$$a \cdot \sin \theta = m \lambda \quad \text{Eq. 3}$$

Deve ficar bem claro que o fenômeno da difração ocorrido pela passagem da luz numa abertura de dimensão  $a$  seria idêntico ao fenômeno da difração se a luz encontrasse um obstáculo de mesma dimensão. Você pode observar o experimento descrito na Referência 1.

Para interpretarmos graficamente a intensidade luminosa no anteparo a uma distância  $D$  da fenda de largura  $a$ , veja, na Figura 9, as curvas mostradas no anteparo. Elas representam as regiões de máximos e de mínimos de intensidade. Nela, observa-se, no centro do anteparo, o máximo de difração seguido dos primeiros mínimos de difração; e, em seguida, os primeiros máximos secundários de difração. Note que nos pontos distantes,  $\pm y_1$  e  $\pm y_2$ , a intensidade luminosa é nula (esses são pontos de mínimos!). Também é importante notar que os máximos secundários têm intensidades menores que o máximo central. Essa característica está associada ao afastamento da luz da fonte originária.

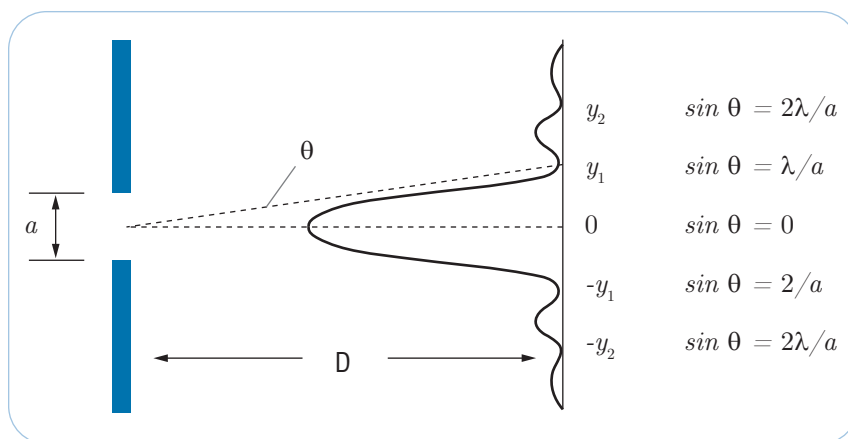


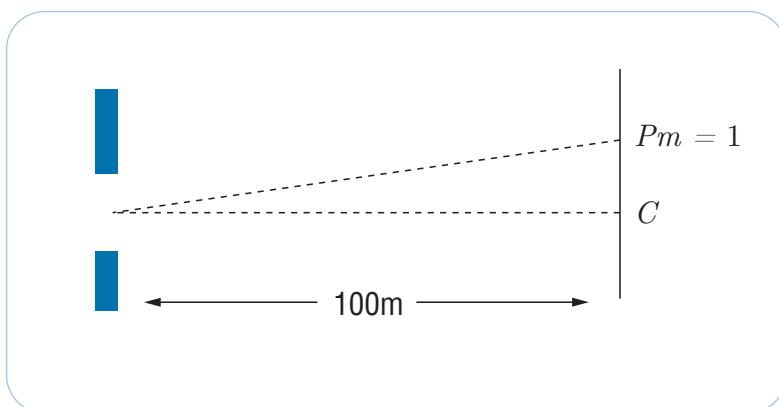
Figura 9 – Máximos e mínimos de difração.

## Exemplo 1

Ondas sonoras, com frequência de  $3000 \text{ Hz}$  e velocidade escalar de  $343 \text{ m/s}$ , difratam-se pela abertura retangular de uma caixa de alto-falante para o interior de um grande auditório. A abertura, que tem uma largura horizontal de  $30,0 \text{ cm}$ , está a  $100 \text{ m}$  de distância de uma parede. Em que ponto dessa parede um ouvinte estará no primeiro mínimo de difração e terá, por isso, dificuldade em ouvir o som?

## Solução

Para se obter o primeiro mínimo de difração podemos então utilizar a Equação 1 tal que  $a \text{sen} \theta = \lambda$ . Como  $\lambda = \frac{v}{f}$ , onde  $v$  é a velocidade e  $f$  a frequência da onda sonora, então,  $a \text{sen} \theta = \frac{v}{f}$ , tomando-se  $a = 0,3 \text{ m}$ . Portanto, a abertura angular dará  $\text{sen} \theta = \frac{v}{af} = \frac{343}{0,3 \times 3000} = \frac{343}{900} = 0,39$  ou  $\theta = 22^\circ$ .



Entendendo que o ponto  $C$  é o centro da parede, a distância  $CP$  é dada por  $\text{sen} \theta = \frac{\overline{CP}}{100}$  ou então  $\overline{CP} = \text{sen} 22^\circ \times 100 = 0,39 \times 100 = 39 \text{ m}$ .

Portanto, se ele estiver afastado  $39 \text{ m}$  do centro da parede do fundo terá dificuldade de escutar o som.

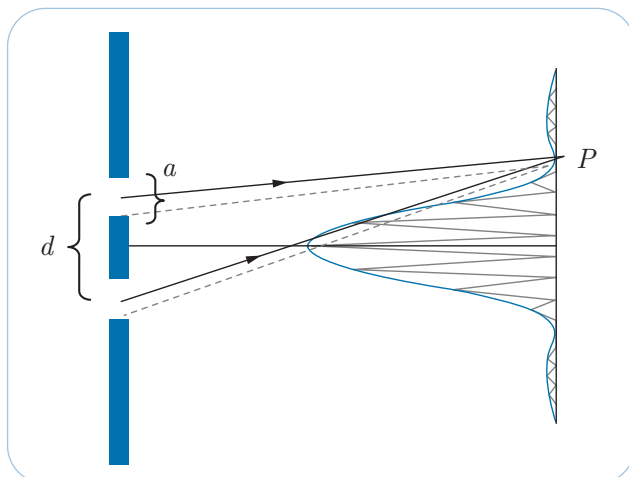
Analisando a Equação 3 podemos perceber o seguinte: se fixarmos o valor da abertura da fenda ( $a$ ) o que se verifica é que quanto maior for o comprimento de onda da luz, maior será a abertura angular entre o máximo central e o primeiro mínimo. Portanto, quanto maior for o comprimento de onda, maior a probabilidade de se observar a difração das ondas luminosas.



## Atividade 5

Baseado na discussão anterior, como você classificaria, dentro do espectro visível, o comprimento de onda da luz que sofre maior difração e o que sofre menor difração. Por quê?





Fonte: <www.unb.br/ia/kleber/EaD/Fisica-4/Aulas/Aula-17/aula-17.html>. Acesso em: 30 dez. 2008.

**Figura 10** – Interferência por fendas duplas.

Vimos na aula 8 que os máximos de interferência ou interferência construtiva de duas fontes coerentes ou fendas estreitas separadas por uma distância  $d$  produzidos num anteparo a uma distância das fendas  $D \gg d$  é dado por:

$$d \cdot \sin \theta = n \lambda \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{Eq. 4}$$

Aqui, vemos que os mínimos de difração de uma fenda única de largura  $a$ , produzidos a uma distância  $D \gg a$  é dado pela Equação 3:

$$a \cdot \sin \theta' = m \lambda \text{ para } m = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Eq. 5}$$

introduzimos o  $\theta'$  para diferenciar do termo da Equação 4.

A linha mais escura (azul) na Figura 10 que representa a figura de difração (ou envoltória), produzida no anteparo quando a luz atravessa uma fenda, modula a intensidade dos máximos de interferência produzidos no anteparo pela superposição das duas fontes (fendas) coerentes.

Por uma análise simples podemos perceber que a posição do máximo central de interferência coincide com o máximo de difração.

## Exemplo 2

Suponha que da experiência de interferência de fenda dupla a distância entre as fendas seja cinco vezes maior que a largura da fenda. Quantos máximos de difração (quantas franjas de interferência) teriam na envoltória central da difração?

## Solução

Para o primeiro mínimo de difração, teremos:

$$a \operatorname{sen} \theta' = \lambda$$

Se algum máximo de interferência coincidir com esse mínimo de difração, teremos que  $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta'$ , de modo que, usando as Equações 4 e 5, obtemos:

$$a \operatorname{sen} \theta' = \lambda \quad d \operatorname{sen} \theta' = n \lambda \quad \text{e com } d = 5a$$

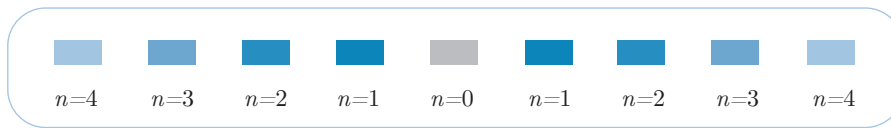
$$a \operatorname{sen} \theta' = \lambda$$

$5a \operatorname{sen} \theta' = n \lambda$  e dividindo pela anterior, temos:

$$\frac{5a \operatorname{sen} \theta'}{a \operatorname{sen} \theta'} = \frac{n \lambda}{\lambda} \Rightarrow n = 5.$$

Portanto, como a figura é simétrica, o máximo de ordem  $n = 5$  estaria modulado pelo mínimo de difração e não apareceria. Portanto, teríamos quatro franjas de cada lado e o máximo principal correspondendo a um total de nove franjas de interferência.

Se nós fossemos representar, por exemplo, essas franjas de interferência para a luz vermelha, teríamos, como na Figura 11, o máximo central com  $n = 0$  e os adjacentes para  $n = 1$  e assim sucessivamente. A cor de vermelho forte para o rosa indica que a intensidade luminosa dos máximos está caindo.



**Figura 11** – Franjas de interferência de fenda dupla quando iluminadas pela luz vermelha. Onde  $n = 0$  corresponde ao máximo central (marrom),  $n = 1$  primeiro máximo (marrom claro),  $n = 2$  segundo máximo (rosa escuro),  $n = 3$  terceiro máximo,  $n = 4$  quarto máximo (lilás).



## Atividade 6

Qual deve ser a razão ( $d/a$ ) entre a distância das duas fendas e a largura da fenda, numa experiência de fenda dupla, se o quinto mínimo de interferência coincidir com o primeiro mínimo da envoltória de difração?

---



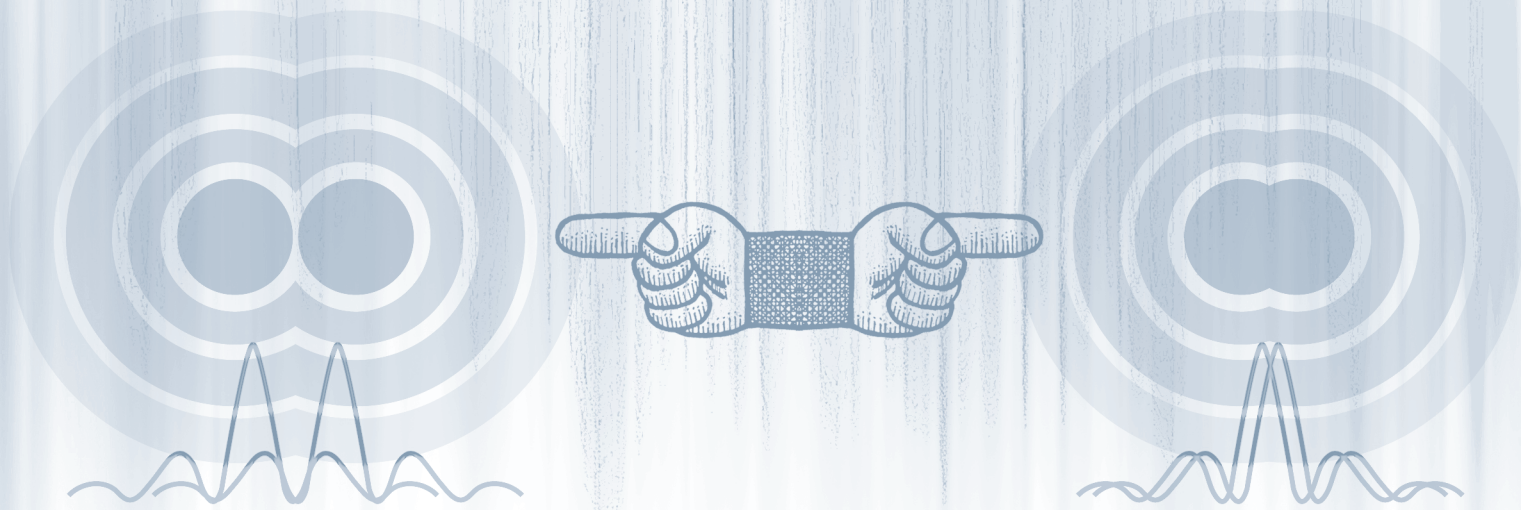
---



---



---



## Difração em orifícios circulares

**Q**uando um orifício, como, por exemplo, um buraco feito em um papelão com um alfinete é muito pequeno e quando a distância onde colocamos um anteparo distante do orifício é muito grande comparado com o diâmetro do orifício, verifica-se que quando iluminamos com a luz o orifício, a mesma penetra na região de sombra geométrica, com aparecimento de franjas claras e escuras na vizinhança do limite da sombra. Isso já havia sido observado em 1665 por Francesco Grimaldi (1618-1680).

Quando, por exemplo, a abertura circular é a lente objetiva de um telescópio, temos também essa formação de um padrão de difração circular com zonas claras e escuras, como representado na Figura 12. No centro deste padrão, gerado pela difração, temos um círculo brilhante. Esse círculo é denominado *máximo central* e é, em uma primeira aproximação, a representação das estrelas vistas em um telescópio.



Figura 12 – Padrão de difração de um orifício circular.

Vamos, então, considerar um pequeno orifício circular de abertura “ $d$ ” sendo iluminado por um feixe paralelo de ondas planas. O feixe, ao passar pelo orifício, se difrata e a figura

de difração corresponde a máximos e mínimos, resultados das interferências construtivas e destrutivas (padrão de difração análogo ao de uma fenda). A Figura 12 tem a forma geométrica do orifício com um máximo luminoso bem definido, seguido de anéis concêntricos com luminosidade gradualmente mais fraca quanto maior for à ordem, como já representado na Figura 12. Quando é feita uma análise quantitativa da difração em orifícios, obtêm-se da abertura angular do primeiro mínimo na figura de difração gerada uma equação que obedece à expressão seguinte:

$$\text{sen } \theta = 1,22 \frac{\lambda}{d}, \quad \text{Eq. 6}$$

onde “ $d$ ” é o diâmetro de abertura e  $\lambda$  é o comprimento de onda da fonte.

Essa expressão difere pelo fator 1,22, da expressão representada de uma fenda estreita de largura  $a$ , como representando no primeiro mínimo de difração pela Equação 1. Esse valor surge quando dividimos a abertura circular em fontes de Huygens elementares e integramos para a abertura circular.

Num instrumento ótico, a luz proveniente de um ponto do objeto atravessa, em geral, uma série de aberturas circulares: diafragmas, lentes, etc. Mesmo as aberrações esféricas sendo corrigidas da melhor forma possível, a imagem de um ponto não será exatamente puntiforme. Essa limitação se dá pela difração quando a luz atravessa as aberturas circulares.

Como você já pode ter percebido, as objetivas fotográficas possuem, além das lentes, um mecanismo chamado diafragma, composto por diversas lâminas que juntas formam um orifício quase circular.

Evidentemente, que quanto mais aberto o diafragma, mais luz passa por sua abertura, mas quanto mais fechado, e, por conseqüência, quanto menor o orifício para a passagem da luz, maior será o efeito da difração.

Em termos práticos, quando usamos diafragmas muito fechados teremos uma degradação da qualidade da imagem, especialmente nas bordas.

A verdade é que quanto mais fechamos o diafragma, temos mais profundidade de campo. E por profundidade de campo entendemos a área da cena que apresenta um foco aceitável e aparentemente correto. Mas paralelamente a esse aumento da profundidade, podemos ter uma degradação da qualidade da imagem. Portanto, o ideal em muitos casos é uma média, ou seja, nem tão fechado que degrade a imagem nem tão aberto que não tenha profundidade suficiente. Usamos para fotografia valores medianos.

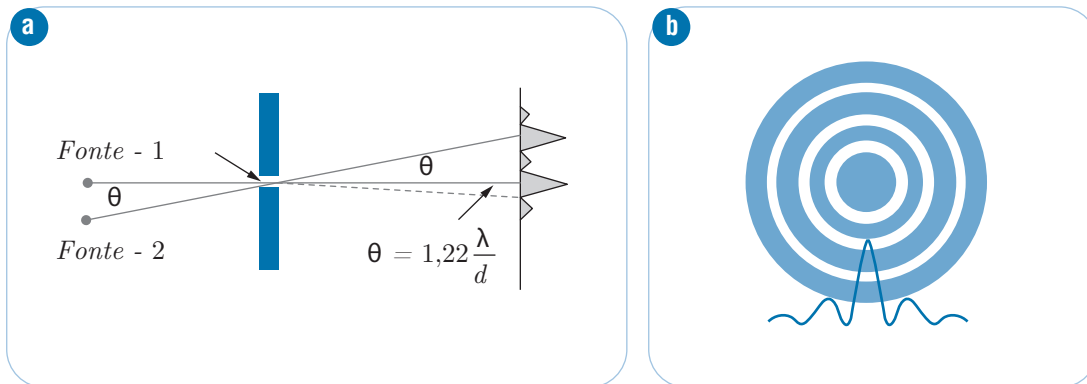
Vamos tomar como imagem de uma fonte puntiforme o disco central da de difração dado pela Equação 6.

Se dois pontos do objeto estiverem muito próximos, os discos centrais de difração nas imagens dos dois pontos vão se superpor. Desse modo, vemos só uma mancha luminosa, não conseguindo distinguir os dois pontos. Aí, nessa circunstância, não adianta querer ampliar a imagem que não vai separar um ponto do outro.

# Poder de resolução

**A** Figura 13(a) mostra a esquematização de duas fontes puntiformes, Fonte-1 e Fonte-2, distantes de um orifício circular de diâmetro  $d$  cujo espectro de difração é projetado graficamente no anteparo por uma abertura circular. Essa figura tem aplicações importantes na resolução de muitos instrumentos óticos, como, por exemplo, microscópios e telescópios. O ângulo  $\theta$  que subtende a posição do primeiro mínimo de difração está relacionado ao comprimento de onda e ao diâmetro da abertura,  $d$ , pela Equação 6. A Figura 13(b) representa o espectro de difração de uma fonte isolada, observando que o círculo central tem maior brilho. Como as aberturas angulares são muito pequenas, podemos fazer a aproximação do  $\text{sen } \theta$  pelo próprio valor de  $\theta$  expresso em radianos, ou seja,

$$\text{sen } \theta = \theta = 1,22 \frac{\lambda}{d}$$



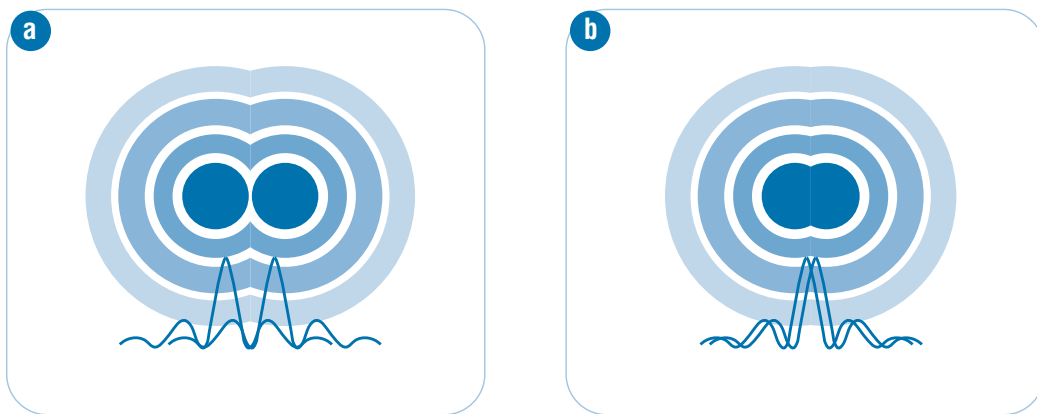
Fonte: <[www.unb.br/iq/kleber/EaD/Fisica-4/Aulas/Aula-17/aula-17.html](http://www.unb.br/iq/kleber/EaD/Fisica-4/Aulas/Aula-17/aula-17.html)>. Acesso em: 30 dez. 2008.

**Figura 13** – (a) Franjas de difração, projetadas em um anteparo, geradas por fenda circular; (b) uma visão frontal do anteparo, onde aparecem os máximos e os mínimos, e sua representação em franjas.

Voltando a Figura 13(a), podemos perceber que quando  $\theta \gg 1,22 \frac{\lambda}{d}$ , as fontes serão vistas como duas fontes distintas. A figura 13(a) mostra exatamente essa situação. As duas fontes aparecem distintamente pela presença dos dois máximos de difração. Na separação angular crítica, mostrada na Figura 13(a), pela linha tracejada, e a outra linha passando pelo centro do orifício, temos, então, que :

$$\theta_R \cong 1,22 \frac{\lambda}{d}$$

Essa situação está representada na Figura 14(a), onde o poder de resolução denominado de critério de Rayleigh é tal que o primeiro mínimo da figura de difração de uma fonte coincide com o máximo central da outra fonte e  $\theta_R$  é o ângulo de resolução do critério de Rayleigh.



Fonte: <www.unb.br/iq/kleber/EaD>. Acesso em: 30 dez. 2008.

**Figura 14** – Franjas de interferência dividida a duas fontes distintas: (a) acima do limite de Rayleigh e (b) a partir do limite de Rayleigh.



## Atividade 7

Uma lente convergente de  $3,0\text{ cm}$  de diâmetro tem uma distância focal de  $20,0\text{ cm}$ . Que separação angular deve ter os dois objetos puntiformes distantes, de forma a satisfazerem a relação de Rayleigh? Suponha  $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ .  $1 \text{ \AA} = 10^{-10}\text{ m}$ .

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

## Exemplo 3

Suponha que os faróis dos automóveis estejam, em média,  $1,5\text{ m}$  afastados um do outro e que o comprimento de onda médio da luz emitido por eles é de  $5500 \text{ \AA}$ . Nota-se que quando um carro está muito longe, parece ter apenas um farol.

Explique esse fenômeno e determine quão longe um carro deve estar quando um farol parece magicamente mudar para dois. A pupila dos olhos tem cerca de  $5,0 \text{ mm}$  de diâmetro.

## Solução

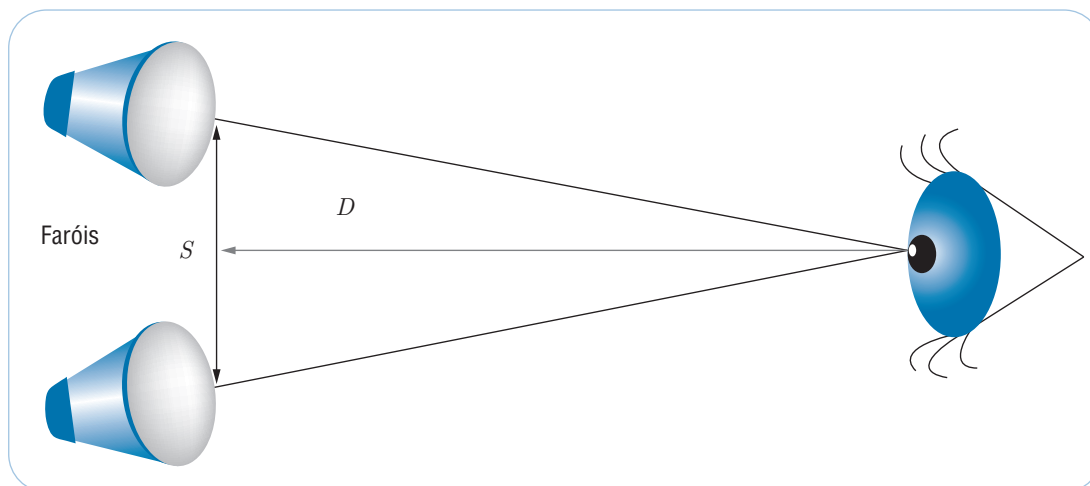
Quando o carro está muito longe da pupila do olho, então, o ângulo  $\theta < \theta_R$  e, portanto, os dois faróis não estão resolvidos.

Quando o carro chega a uma distância da pupila, de modo que o ângulo  $\theta \cong \theta_R$ , você começa a enxergar magicamente os dois faróis.

$$\text{Encontrando: } \theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d} = \frac{1,22 \times (5,5 \times 10^{-7} \text{ m})}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 1,342 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

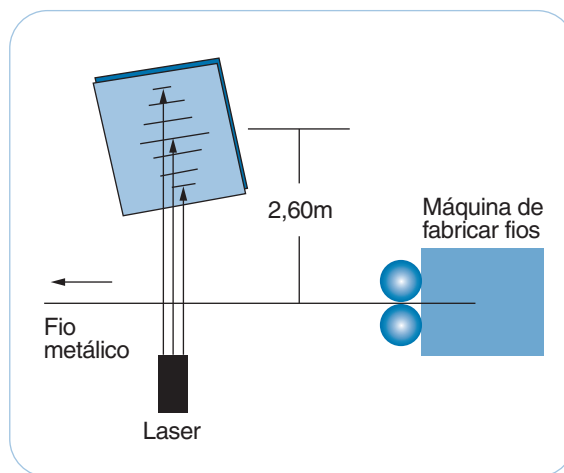
Como  $D \gg S$ , podemos entender como  $S$  sendo o arco para um ângulo  $\theta_R$ , de modo que, podemos escrever:

$$D = \frac{S}{\theta_R} = \frac{1,5 \text{ m}}{1,34 \times 10^{-4}} = 1,12 \times 10^4 \text{ m ou } D = 11,2 \text{ km}$$



# Uma aplicação tecnológica da difração

Os fabricantes de fios metálicos (e de outros objetos de pequenas dimensões) usam, às vezes, raios laser para controlar continuamente a espessura do produto. O fio intercepta um feixe de laser, produzindo uma figura de difração semelhante àquela de uma fenda única com largura igual ao diâmetro do fio, conforme a Figura 15. Vamos, então, supor que um laser de He-Ne, de comprimento de onda de  $632,8 \text{ nm}$ , ilumine um fio e que a figura de difração seja observada sobre um anteparo a  $2,60 \text{ m}$  de distância. Se o diâmetro desejado para o fio é de  $1,37 \text{ mm}$ , qual é a distância, no anteparo, entre os dois mínimos de quinta ordem (de um lado e do outro lado do máximo central)?



**Figura 15** – Sistema de medição de espessura de fios com LASER, mostrando na parte superior um anteparo onde são geradas figuras de difração.

## Resumo

Nesta aula, você aprendeu que quando as ondas encontram um obstáculo, elas, de acordo com seu comprimento de onda e com as dimensões do obstáculo, podem sofrer um fenômeno chamado difração. Aprendeu também que a difração leva a situações de “claro e escuro” que podem ser representadas por máximos e mínimos de interferência. Formalmente, aprendeu a calcular os pontos de máximos e de mínimos nas figuras produzidas por fendas simples e duplas.

# Autoavaliação

1

Quem gosta de assistir a corridas de fórmula 1 já deve ter percebido que quando a transmissão esta sendo feita pela câmera dentro do carro de fórmula 1, em certas ocasiões que o carro passa por baixo de algum obstáculo, a imagem treme e o som fica com muito ruído. Como você poderia explicar esse fenômeno?

2

Explicar o motivo pelo qual, nas condições rotineiras, raramente, observamos a difração da luz.

3

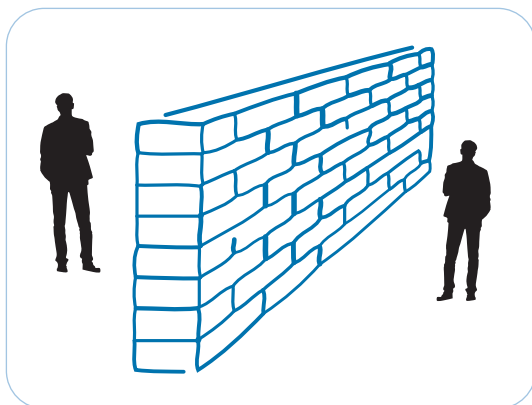
Você poderia apontar uma razão por que os canais de TV, com numeração mais baixa, podem apresentar imagens melhores em regiões onde a recepção é ruim? Lembre-se que quanto mais baixo é o número do canal, menor é a frequência da onda portadora do sinal.

4

Um muro muito espesso separa duas pessoas em uma região plana, sem outros obstáculos, como mostra a figura seguinte. As pessoas não se vêem, mas, apesar do muro, se ouvem claramente:

a) **explique** por que elas podem se ouvir;

b) **explique** por que elas não podem se ver.



5

Produzimos uma figura de difração em uma tela iluminando uma fenda longa e estreita com luz azul. A figura se dilata (os máximos e os mínimos se afastam do centro) ou se contrai (os máximos e os mínimos se aproximam do centro) quando:

a) substituímos a luz azul por uma luz amarela?

b) diminuímos a largura da fenda?

Tente escrever uma historinha, como a do seu Amador, envolvendo conceitos que já estudamos como reflexão, refração, interferência, etc. Elabore também atividades e questões, como se você fosse professor, que devem ser realizadas por seus alunos, a partir de sua historinha.

## Referências

CRUZ, Gerson Kniphoff da; ROSSI, Carlos Henrique. Utilizando o fenômeno da difração para medir pequenas dimensões. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA, 16., 2005, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro, 2005. Disponível em: <<http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvi/cd/resumos/T0710-3.pdf>>. Acesso em: 30 dez. 2008.

HEWITT, Paul G. **Física conceitual**. São Paulo: Bookman, 2002.

SERWAY, R. A.; JEWETT JÚNIOR, J. W. **Princípios de física**. São Paulo: Ed. Thomson, 2003. v 4.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA. **Laboratório de modelagem de sistemas complexos**. Disponível em: <<http://www.unb.br/iq/kleber/>>. Acesso em: 30 dez. 2008.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física: ótica e física moderna**: Sears e Zemansky. 10. ed. São Paulo: Addison- Wesley, 2003. v 4.

# Polarização

Aula

**10**



# Apresentação

**N**esta aula, estudaremos o fenômeno de polarização em ondas mecânicas e eletromagnéticas. Verificaremos que o fenômeno de polarização ocorre apenas em ondas transversais, ou seja, onde a direção de propagação da onda é perpendicular ao plano de vibração da mesma. Você vai perceber o fenômeno de polarização da luz através dos processos de absorção, reflexão, transmissão e espalhamento da luz. Sugerimos que você tenha em mãos a Aula 6 desta disciplina, chamada Reflexão.

## Objetivos

- 1** Entender o fenômeno de polarização em ondas mecânicas transversais e eletromagnéticas.
- 2** Distinguir um feixe de luz aleatoriamente polarizado de um feixe de luz polarizado.
- 3** Compreender as diversas formas de polarização da luz através dos processos de absorção, reflexão, transmissão e espalhamento da luz.
- 4** Relacionar alguns fenômenos na natureza com a polarização da luz.





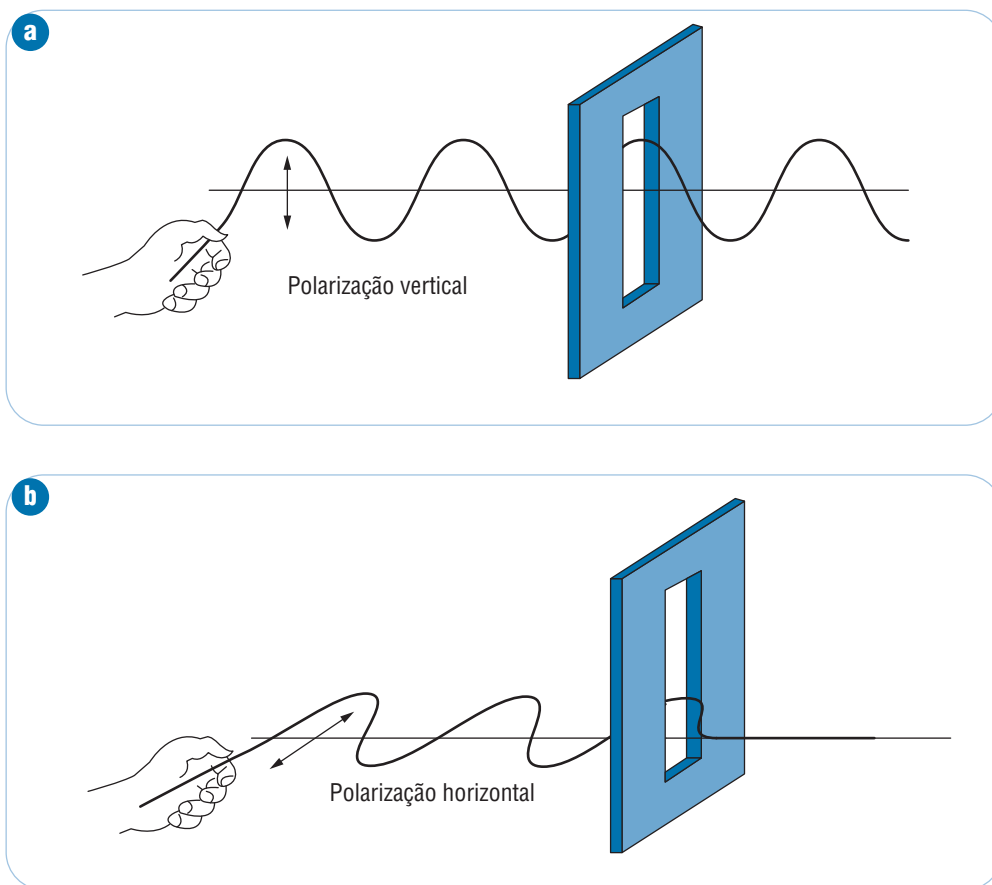
## Polarização das ondas

**U**ma propriedade da luz que tem grande utilidade e que vale para todo espectro eletromagnético é que ela pode ser polarizada. Para compreender o significado dessa propriedade, consideremos inicialmente uma onda mecânica se propagando numa corda. Tal tipo de onda apresenta propagação transversal (uma característica fundamental para o fenômeno que estamos abordando), ou seja, o sentido de vibração do pulso da onda é perpendicular a sua direção de propagação.

Existe uma situação bastante simples que pode ser usada para facilitar a compreensão do conceito de polarização. Para isso, vamos fazer as seguintes experiências mentais:

Imagine uma cadeira daquelas usadas em sala de aula. Suponha, então, que no encosto da cadeira existe uma fenda como a mostrada na Figura 1(a). Uma corda atravessa a fenda que está fixa em uma das extremidades (a fenda deve ter aproximadamente a largura da corda). Agora, vamos fazer com que a corda vibre na direção paralela à largura da fenda. Fazendo a corda vibrar, observa-se uma situação semelhante à descrita pela Figura 1(a).

Em seguida, vamos fazer com que a corda vibre de maneira perpendicular ao plano formado pela fenda – veja Figura 1(b). Nesse caso, a onda não atravessará a fenda. Observe no caso da Figura 1(a) que a onda verticalmente polarizada passará normalmente, enquanto no caso da Figura 1(b), onde ela está horizontalmente polarizada, não passará. Se agora você inverter e usar uma fenda horizontal, a onda polarizada verticalmente não passará. E a polarizada horizontalmente passará. É importante dizer que em ambos os casos a onda é dita planopolarizada, isto é, as oscilações ocorrem em um plano único formado pela direção de vibração e a de propagação.



**Figura 1** – Propagação da onda numa corda com (a) polarização vertical em uma fenda paralela à sua vibração; e (b) polarização horizontal com uma fenda perpendicular à sua vibração.



## Atividade 1

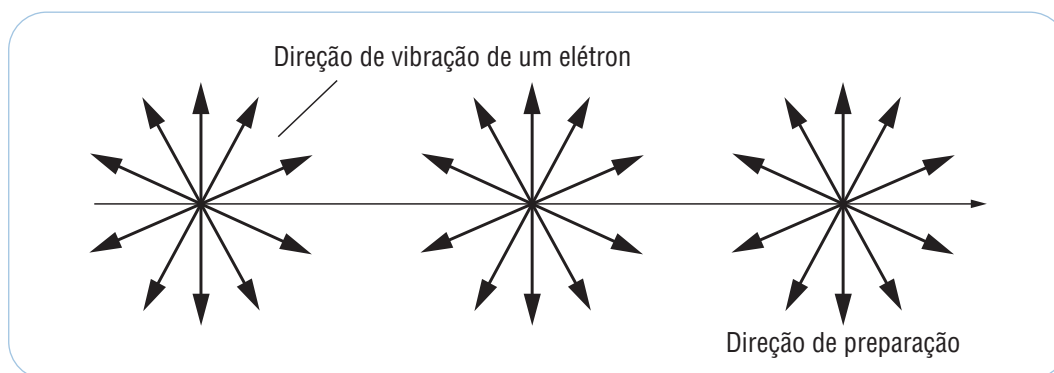
Agora você pode, por exemplo, variar a direção da fenda com a onda polarizada verticalmente, desde paralela até perpendicular à direção de vibração da onda.

- a)** Como você representaria a amplitude da corda com o ângulo formado entre a direção de vibração da corda e a direção da fenda?
- b)** Qual seria a amplitude da onda que atravessa a fenda quando o ângulo entre a direção de vibração e a fenda e a direção da fenda for  $45^\circ$ ?

Como sabemos, a propagação da onda eletromagnética (as ondas luminosas também são ondas eletromagnéticas) faz-se através da vibração do campo elétrico e magnético perpendiculares entre si, formando um plano perpendicular à direção de propagação das ondas. Um único elétron oscilante pode emitir uma onda eletromagnética planopolarizada, cujo plano de polarização deverá conter a direção de vibração do elétron.

Portanto, se um elétron é acelerado na direção vertical, como a comparação com a corda da Figura 1(a), ele irá emitir radiação com polarização vertical, enquanto um elétron acelerado na direção horizontal, como observado com a corda da Figura 1(b), irá emitir radiação polarizada horizontalmente.

O que acontece com as lâmpadas comuns, ou mesmo com a luz do Sol? Essas fontes luminosas comuns emitem luz não-polarizada. Isso quer dizer que, como são vários elétrons emitindo luz simultaneamente, não existe direção preferencial de vibração desses elétrons. Os planos de vibração das ondas eletromagnéticas emitidas podem ser tão numerosos quanto são os elétrons que os produzem. A Figura 2 é uma representação esquemática de uma onda luminosa se propagando numa determinada direção, com vários planos de vibração dos elétrons. Dizemos, nessa situação, que a luz está não-polarizada ou aleatoriamente polarizada.



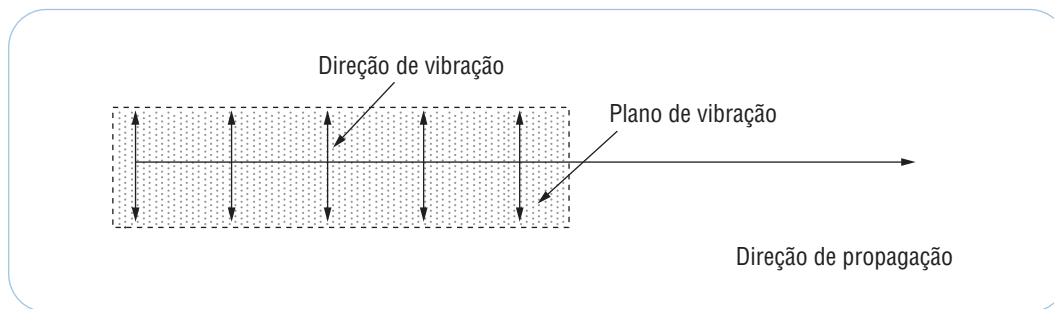
**Figura 2** – Feixe de luz não-polarizado ou aleatoriamente polarizado.



## Atividade 2

Para iluminar um quarto, você escolheria uma luz polarizada ou uma não-polarizada? Justifique sua resposta.

O plano de vibração é determinado pela direção de vibração dos elétrons e a direção de propagação da onda eletromagnética. A Figura 3 ilustra um desses planos:

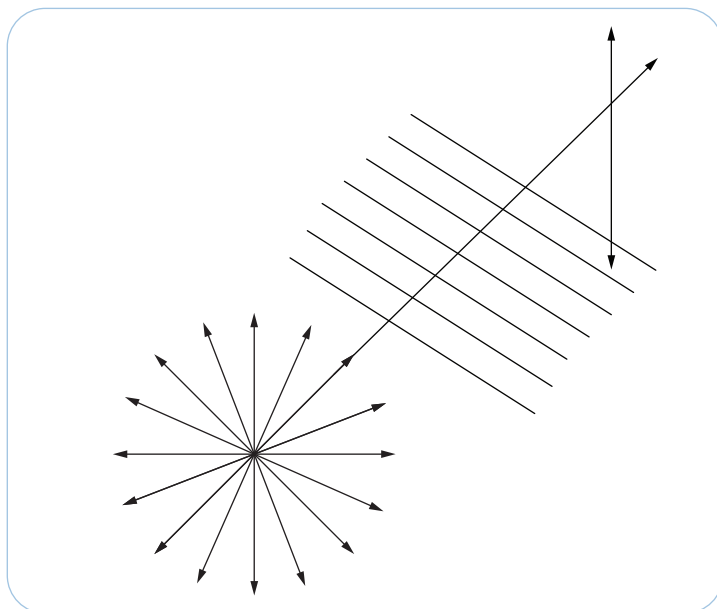


**Figura 3** – Representação esquemática do plano de vibração ou de polarização da onda luminosa.

## Polarização da luz

Como foi visto na Figura 2, a luz de uma lâmpada comum, como a luz do monitor do seu computador, não é polarizada. Em ambos os casos, os átomos emitem ondas luminosas independentemente uns dos outros, cada uma com uma polarização diferente. O resultado geral é uma onda eletromagnética com campos elétricos apontando em todas as direções. Vamos, então, entender como é possível “polarizar” uma luz não-polarizada.

Para entender como isso pode ser feito, vamos descrever a propagação do sinal de uma estação transmissora de televisão, por exemplo, e entender como esse sinal chega à antena receptora. Digamos que a estação emite ondas não-polarizadas ou, como vimos anteriormente, polarizadas em todas as direções (polarizadas aleatoriamente). Vamos supor que essa onda eletromagnética não-polarizada incide sobre um conjunto de antenas receptoras, que estão colocadas horizontalmente (veja a Figura 4). Essas antenas horizontais captam todas as componentes da onda incidente na direção horizontal, mas não captam as componentes verticais. A energia das componentes horizontais seria absorvida pelas antenas, mas as componentes verticais passariam praticamente intactas. Desse modo, depois do conjunto de antenas receptoras horizontais sobraria uma onda eletromagnética polarizada na direção vertical com cerca de metade da energia da onda não-polarizada incidente. Nesse exemplo simplificado, o conjunto de antenas atuou como um “filtro polarizador”, transformando uma onda elétrica não-polarizada em uma onda elétrica polarizada.

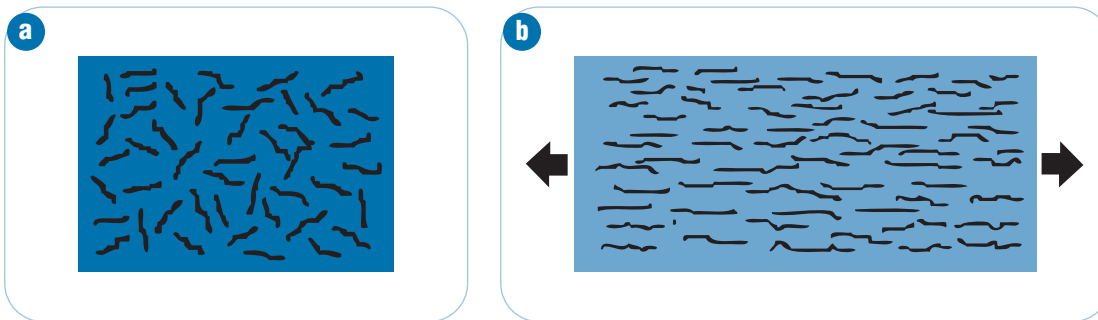


**Figura 4** – Onda não-polarizada propagando-se na direção de arames paralelos horizontalmente.

## O Polaróide: exemplo de polarizador

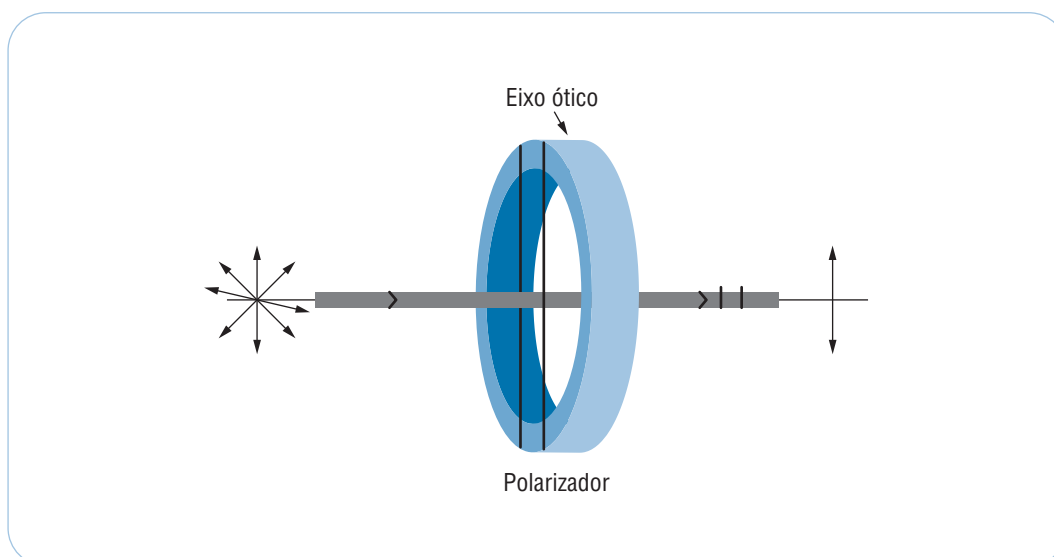
Na década de 30, o físico americano Edwin Land (1909-1991) conseguiu reproduzir o efeito descrito acima com a luz visível. Land foi um dos raros exemplos de cientistas que fizeram fortuna com suas pesquisas. Em 1938, criou um filtro polarizador para luz visível, o “Polaróide”, barato e eficiente, e inventou uma câmera fotográfica de revelação instantânea que teve enorme sucesso. Ainda hoje, a *Polaroid Corporation* é uma grande indústria.

O comportamento do Polaróide para a luz visível tem semelhança com a grade de antenas do caso das ondas de rádio. De forma simplificada, o processo de fabricação consiste no seguinte: uma folha de plástico contém longas moléculas de um certo hidrocarboneto, inicialmente sem nenhuma orientação preferencial, conforme a Figura 5(a). O plástico é fortemente esticado em uma direção, alinhando as moléculas parcialmente, sendo então mergulhado em uma solução que contém iodo. Os átomos de iodo se ligam às moléculas orientadas, tornando-as eletricamente condutoras. O conjunto é posto para secar e a folha plástica pode ser relaxada, pois as moléculas continuarão alinhadas – veja a Figura 5(b). Desse modo, as moléculas longas serão as “antenas” que captarão e absorverão a onda elétrica que tenha polarização na direção preferencial de estiramento, mas deixarão passar as ondas polarizadas na direção perpendicular.



**Figura 5** – Representação esquemática da folha de plástico: (a) com moléculas não alinhadas; e (b) com moléculas alinhadas.

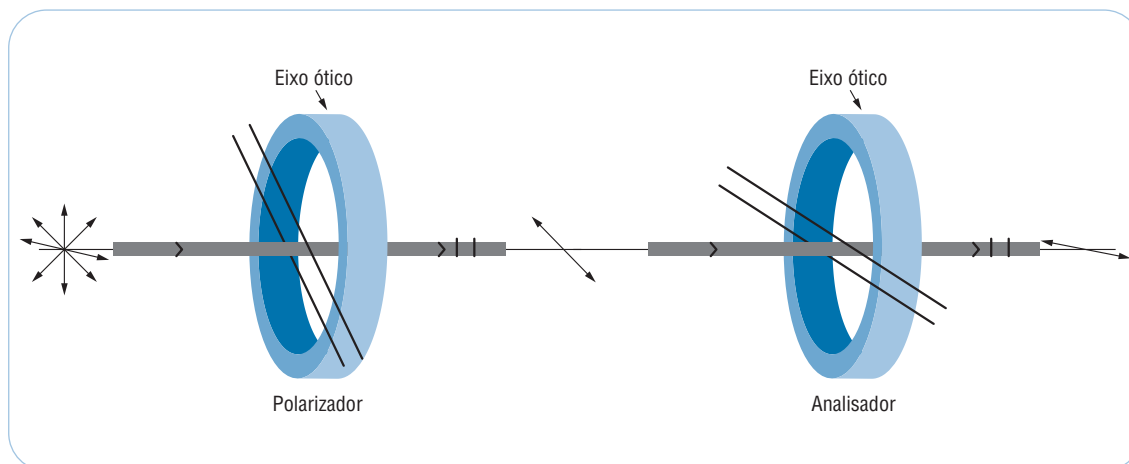
Assim sendo, a luz não-polarizada incide sobre o filtro Polaróide e “excita” os elétrons nas longas moléculas condutoras, que servirão de antenas receptoras. As componentes do campo elétrico paralelas à orientação das moléculas serão absorvidas pelo Polaróide, restando apenas as componentes perpendiculares que atravessam o filtro. Depois de atravessar o filtro, a luz está polarizada na direção perpendicular à direção preferencial das moléculas longas no polaróide. A direção em que a luz fica polarizada é paralela à direção do eixo ótico do polarizador, como esquematizado na Figura 6.



**Figura 6** – Representação esquemática de uma onda plano-polarizada após emergir de um polarizador.

Observa-se que para a onda que emergir do polarizador só existirão as componentes paralelas ao seu eixo ótico, sendo eliminadas as componentes perpendiculares. Assim, geralmente se usa um segundo polarizador, que é colocado após o primeiro, com o objetivo de garantir que a onda emergente esteja realmente polarizada. Esse segundo polarizador, que muitas vezes é análogo ao primeiro, é denominado de **analisador**.

Para compreender melhor o conceito descrito acima, observe na Figura 7 que apenas a componente paralela ao eixo ótico emerge quando a luz não-polarizada (aleatoriamente polarizada) atravessa o **polarizador**. Quando a luz emergente atravessa o **analisador**, vemos que ela também é paralela ao seu eixo ótico.



**Figura 7** – Polarizador e analisador diante de um feixe luminoso.

## A intensidade da luz e o fenômeno da polarização

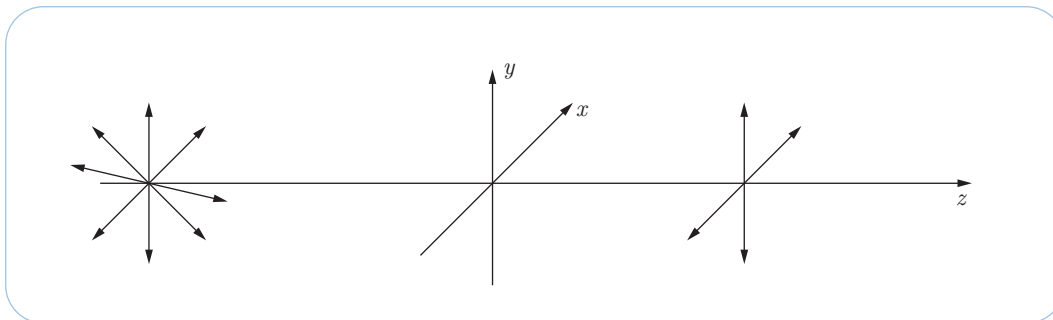
Vamos agora discutir o que ocorre com a intensidade luminosa da luz aleatoriamente polarizada. Para tanto, escolhamos três eixos ortogonais, como mostrado na Figura 8. No sistema escolhido por nós, o eixo  $z$  está orientado no sentido de propagação da onda e os eixos  $x$  e  $y$  estão perpendiculares à direção de propagação.

Se projetarmos todas as vibrações da luz aleatoriamente polarizada, teremos como resultado apenas as duas direções de vibração mostradas na Figura 8. Assim, temos apenas dois planos de polarização: o plano  $yz$  como paralelo ao plano da página e o plano  $xz$  indicando que está perpendicular ao plano da página.

Portanto, como a vibração é aleatória, ela se distribuirá igualmente em todas as direções. Assim, podemos raciocinar que se a luz tem uma intensidade luminosa  $I_o$ , cada direção característica de vibração teria a metade da intensidade luminosa, ou seja,

$$I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{I_o}{2} . \quad \text{Eq. 1}$$

Por analogia ao esquema da Figura 7, podemos então dizer que qualquer que seja a direção do eixo óptico do polarizador, somente as vibrações paralelas a ele emergirão do outro lado. Assim, sempre que a luz não-polarizada atravessar um polarizador, a sua intensidade se reduzirá à metade, já que podemos projetar as direções aleatórias em duas – uma paralela e outra perpendicular ao eixo óptico.



**Figura 8** – Representação esquemática da projeção do feixe de luz aleatoriamente polarizado nas direções  $y$  e  $z$ .

## Lei de Malus

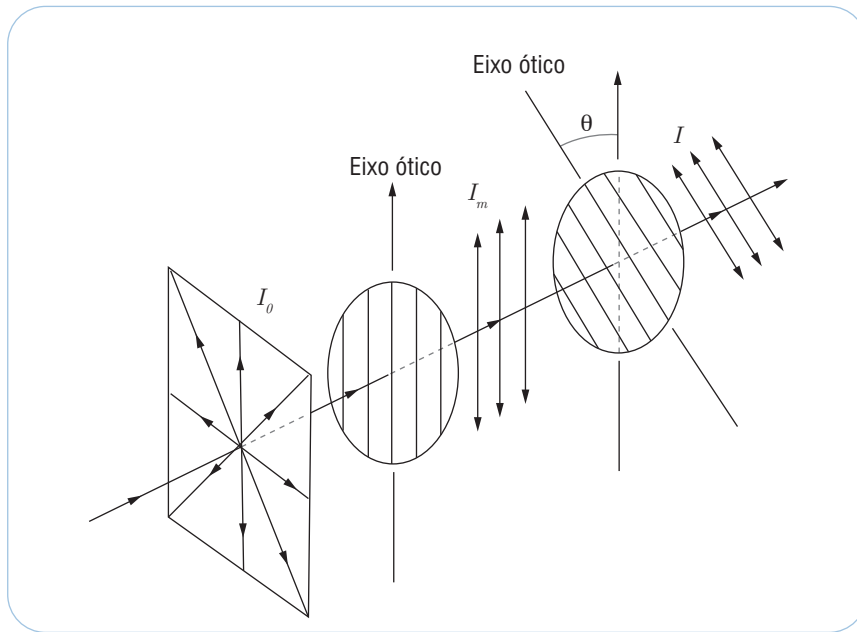
Consideremos agora a situação na qual uma luz não-polarizada incide sobre um primeiro polarizador, emergindo então como luz polarizada, como mostra a Figura 9. Em seguida, essa luz polarizada incide sobre outro polarizador, de modo que o eixo óptico desse polarizador forma um ângulo  $\theta$  com a direção de vibração da luz polarizada. Se a intensidade da luz não-polarizada é  $I_o$ , então a intensidade da luz que emerge do primeiro polarizador é  $I_o/2$  (que vamos denominar de  $I_m$ ). Você pode em tão perceber que a luz que emerge do segundo polarizador terá uma intensidade  $I$ , que pode variar desde 0 até o  $I_m$ . Assim, podemos escrever

$$0 \leq I \leq I_m. \quad \text{Eq. 2}$$

Isso nos leva a compreender que a intensidade luminosa deve estar relacionada como o ângulo. Por experiência, concluiu-se que

$$I = I_m \cos^2 \theta. \quad \text{Eq. 3}$$

A Equação 3 é conhecida como a lei de Malus e foi publicada pela primeira vez por Etienne Malus (1775 -1812), engenheiro militar e capitão do exército de Napoleão, em 1809.



**Figura 9** – Esquemática do aparato onde os eixos óticos dos polarizadores da figura formam um ângulo entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .



## Atividade 3

1

Com base na Figura 9, determine a intensidade da luz polarizada transmitida  $I$  em função da luz incidente  $I_0$  se o ângulo  $\theta$  for  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$ .

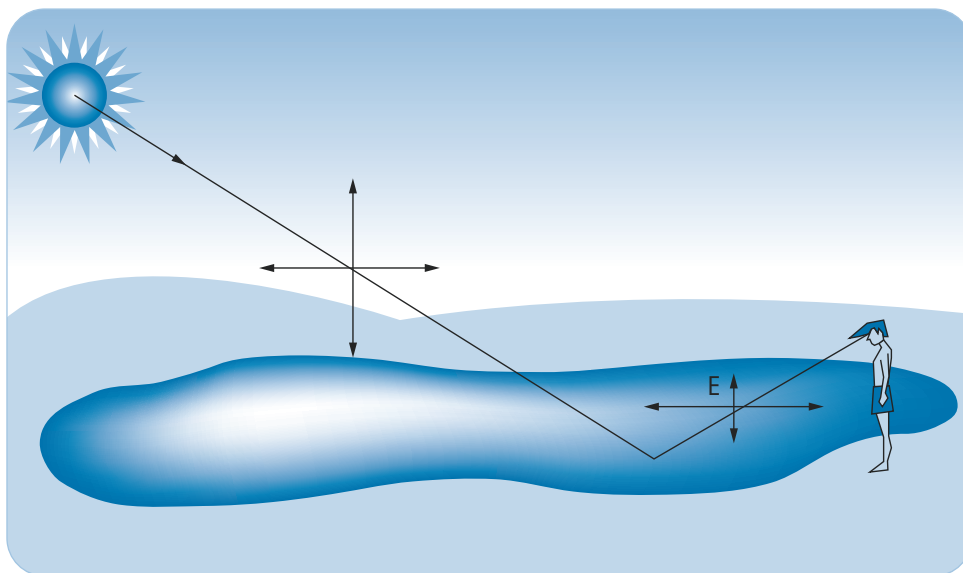
2

Qual deve ser o ângulo  $\theta$  para que a intensidade luminosa  $I$  que emerge do segundo polarizador seja  $1/8 I_0$ ?

# Polarização por reflexão

Quando um feixe de luz não-polarizado sofre reflexão em uma superfície plana entre dois meios transparentes, a luz refletida é parcialmente polarizada. O grau de polarização depende do ângulo de incidência e dos índices de refração dos dois meios materiais.

A Figura 10 reproduz um raio de sol com polarização aleatória sendo refletido em um lago e tornando-se parcialmente polarizado. Verifica-se que o módulo de vibração do campo elétrico em uma das direções é praticamente nulo.

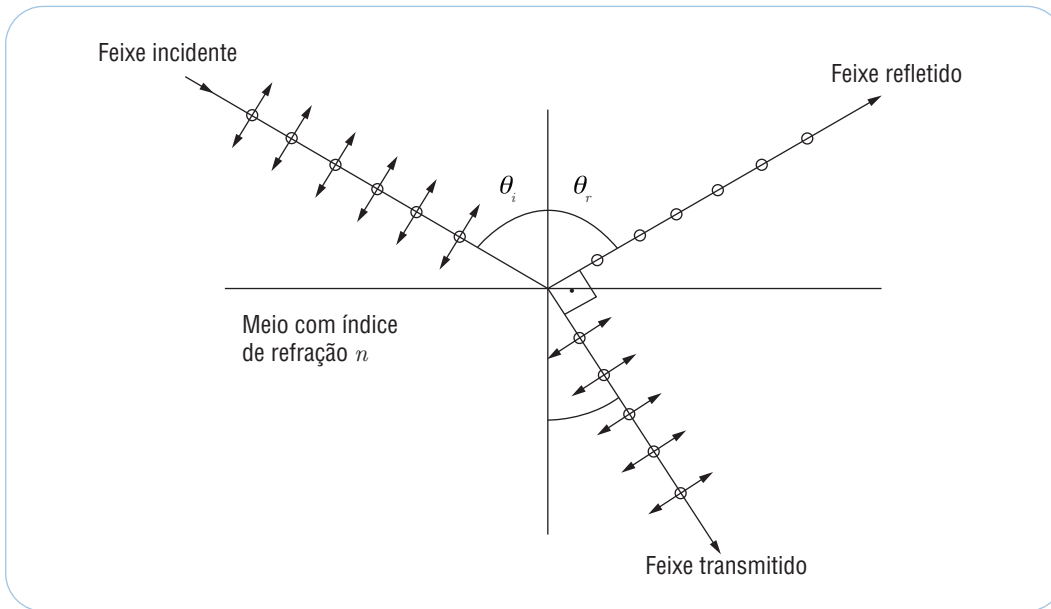


**Figura 10** – Polarização da luz solar por reflexão em um lago.

Vamos considerar que um feixe de luz não-polarizada é refletido por uma superfície plana entre dois meios materiais transparentes, como, por exemplo, o ar, com um índice de refração igual a 1,0 e outro meio de índice de refração  $n$ . O feixe incidente vai ser representado por dois eixos de polarização (vibração do campo elétrico da luz): um paralelo ao plano da página, representado pela flecha de ponta dupla e outro perpendicular ao plano da página, representado pelos círculos (o). Essa esquematização está representada na Figura 11.

Como você pode perceber na figura, a luz refletida parece estar parcialmente polarizada, uma vez que só está aparecendo o eixo de polarização perpendicular à página. Experimentalmente, verifica-se que o grau de polarização depende do ângulo de incidência e do índice de refração dos dois meios materiais.

Quando o feixe de luz incide formando um ângulo específico, o feixe de luz refletido e o refratado ficam perpendiculares entre si, de modo que a luz refletida fica totalmente polarizada. Esse efeito foi descoberto em 1812 por Sir David Brewster (1781-1868). Essa situação está representada na Figura 11. Nela, você pode perceber a direção do campo elétrico da luz: do feixe incidente, do refletido e do refratado (ou transmitido).



**Figura 11** – Polarização por reflexão.

Quando o ângulo de incidência for o chamado ângulo de Brewster, ou seja, quando

$$\theta_i = \theta_{B'} \quad \text{Eq. 4}$$

o feixe refletido é plano polarizado, ou seja, o campo elétrico só vibra perpendicularmente à página. Além disso, ao se determinar experimentalmente quando a luz incide em ângulo de Brewster  $\theta_{B'}$ , os feixes refletido e refratado são perpendiculares entre si, ou seja,

$$\theta_B + \theta_t = 90^\circ, \quad \text{Eq. 5}$$

sendo  $\theta_t$  o ângulo de refração ou transmissão.

Como já foi dito anteriormente, supondo que a luz provém do ar com índice de refração igual a 1,0 e incide sobre a interface com um meio de índice de refração  $n$  e ângulo de incidência  $\theta_{B'}$ , tem-se que

$$\text{sen}\theta_B = n\text{sen}\theta_t \quad \text{Eq. 6}$$

Temos então que  $\text{sen}\theta_t = \text{sen}(90 - \theta_{B'})$ . Dessa forma, podemos escrever a seguinte expressão matemática:

$$\text{sen}(90 - \theta_{B'}) = \text{sen}90\cos\theta_B - \cos90\text{sen}\theta_B \quad \text{Eq.7}$$

Como  $\cos90 = 0$  e  $\text{sen}90 = 1$ , substituindo o resultado da Equação 7 na Equação 6 obtemos  $\text{sen}\theta_B = n\cos\theta_B$ , ou ainda  $\frac{\text{sen}\theta_B}{\cos\theta_B} = n$ . Usando a expressão da tangente, temos:

$$\tan\theta_B = n. \quad \text{Eq. 8}$$

Da Equação 8, podemos concluir que cada material tem o seu próprio ângulo de Brewster. Podemos dizer, também, que a Lei de Brewster sugere que a determinação do ângulo de Brewster é um método de se determinar o índice de refração do material.



## Atividade 4

1

Tomando-se a Tabela da Aula 6 (Reflexão), que contém os valores de índice de refração de alguns materiais, determine o ângulo de Brewster para a água e o diamante.

2

Considere uma situação na qual a luz vermelha, propagando-se no vácuo e incidindo sobre um bloco de vidro com o ângulo de Brewster, tem ângulo de refração  $32^\circ$ . Nessa situação, determine:

a) Qual é o índice de refração desse vidro.

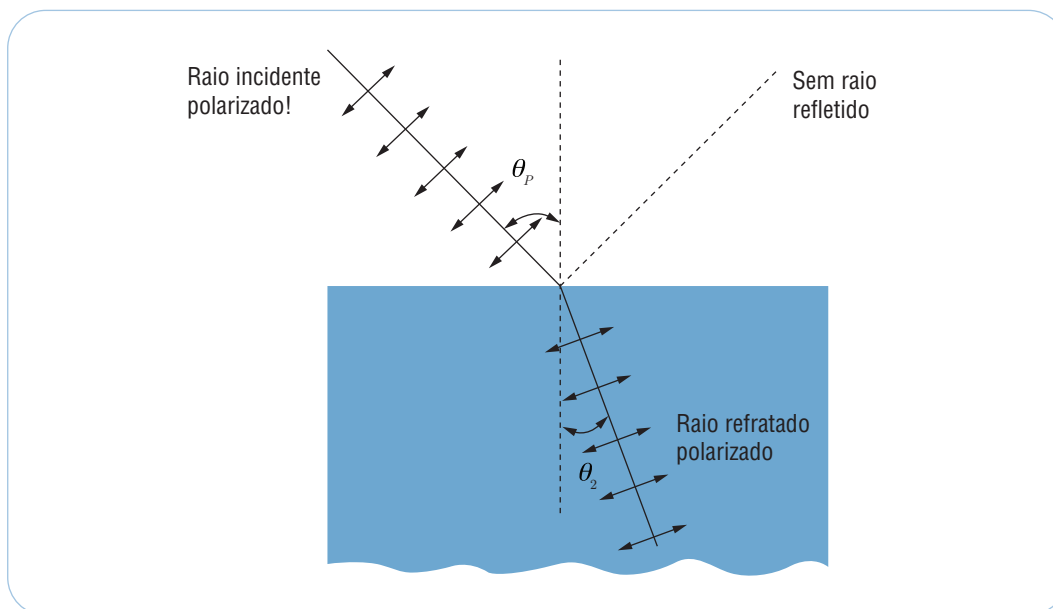
b) O ângulo de Brewster.

3

Um feixe de luz de índice de refração 1,33 que se propaga na água incide sobre uma placa de vidro de índice de refração 1,53. Para qual ângulo de incidência a luz refletida ficará totalmente polarizada?

Veja que situação interessante:

Suponha que a luz que incide já é polarizada, com a vibração do campo elétrico paralela à página. Nesse caso, para o ângulo de incidência  $\theta_p$  (veja a Figura 12) não haverá luz refletida. Você poderá entender agora o que acontece se usarmos óculos cuja lente é um polaróide. Um motorista que viajasse a noite usando tais óculos seria menos incomodado pela luz refletida por um carro que se desloca em sentido contrário ao seu, pois, devido aos óculos, os efeitos da luz ofuscante ficariam reduzidos.



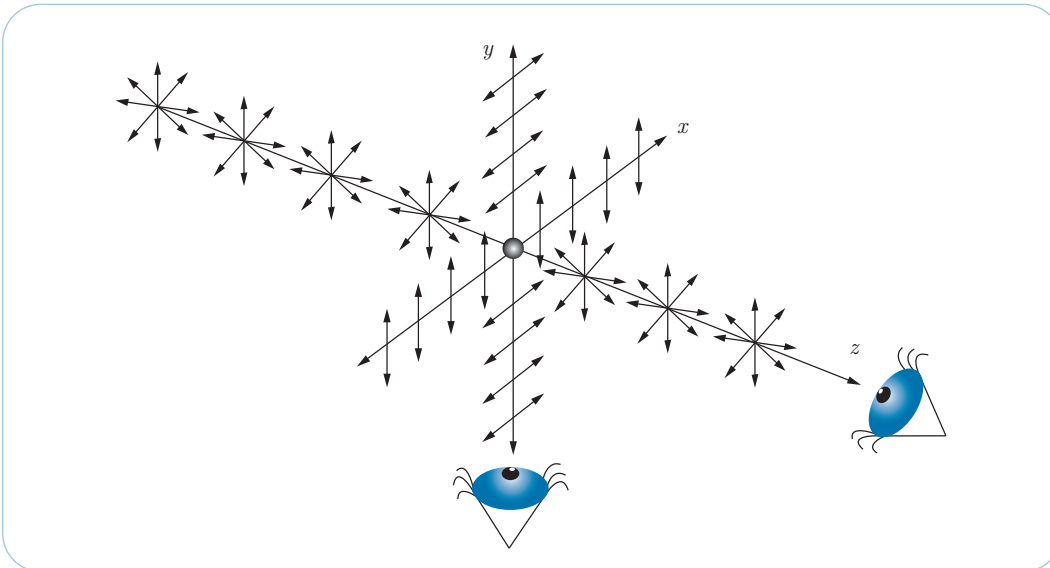
**Figura 12** – Luz polarizada incidindo sob o ângulo de polarização.

## Polarização por espalhamento

O espalhamento da luz é o fenômeno no qual a luz sofre absorção e depois sofre irradiação. O espalhamento pode ser demonstrado fazendo com que um feixe de luz atravesse um vaso com água, a qual se tenha juntado uma pequena quantidade de leite em pó. As partículas do leite absorvem a luz e a re-irradiam, fazendo com que o feixe fique visível ao atravessar a água. Analogamente, os feixes de laser podem ficar visíveis no ar pela introdução de pó de giz ou de partículas de fumaça no ar para espalhar a luz.

Um exemplo familiar do espalhamento da luz é o de aglomerados de moléculas de água, que se formam em virtude de flutuações aleatórias da densidade do ar atmosférico. Esses aglomerados de moléculas têm maior tendência a espalhar os comprimentos de onda menores que os maiores, o que contribui para que a cor aparente do céu seja o azul.

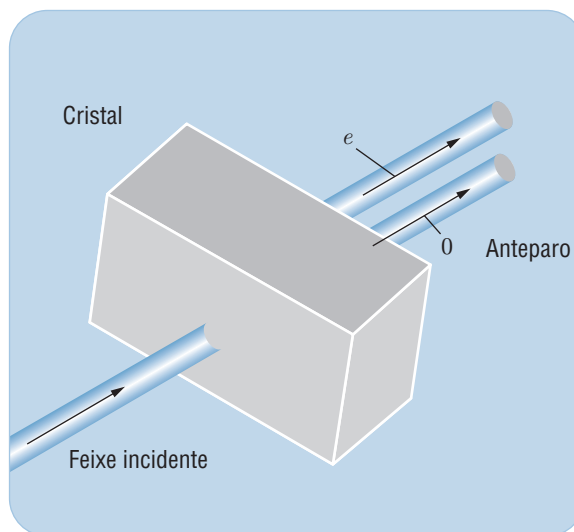
A Figura 13 ilustra o processo de polarização por espalhamento da luz. A radiação é absorvida e em seguida é irradiada novamente. A radiação incide sobre um centro espalhador (como foi dito anteriormente), que podem ser as moléculas de um gás, partículas de poeira, ar atmosférico etc. A radiação que não interage com esse centro espalhador é totalmente transmitida, como você pode observar no feixe que se propaga na direção  $z$ ; por outro lado, a radiação que é absorvida e irradiada novamente por ele é polarizada nas direções  $x$  e  $y$ , conforme a Figura 13.



**Figura 13** – Luz polarizada por espalhamento perpendicular à sua direção de propagação original.

## Polarização da luz por dupla refração

Muitos cristais como a calcita, a turmalina, o quartzo e até o gelo possuem dois índices de refração. Essa propriedade significa que quando um raio de luz incide sobre um desses materiais, a luz será refratada em duas direções distintas. A dupla refração foi descoberta em 1669 por Erasmus Bartolinus (1625-1698), quando observava um raio de luz atravessando um cristal chamado cristal-da-islândia (ou calcita). Os raios refratados são de luz polarizada em planos ortogonais entre si, como mostra a Figura 14. Consequentemente, podemos obter luz polarizada pela dupla refração da luz natural.



**Figura 14** – Esquema para a ilustração sobre o efeito da dupla refração. O raio O é o raio “ordinário”, e o raio e é o raio “extraordinário”.

Esse efeito ocasiona a formação de duas imagens. Disso, podemos concluir que se um pedaço dessa pedra cristalina (calcita) for colocado sobre um livro, cada letra do livro vista através dele aparecerá em dobro, devido à dupla refração. E se qualquer feixe de luz incidir perpendicularmente ou em qualquer ângulo oblíquo, sobre qualquer superfície desse cristal, ele se dividirá em dois feixes, em consequência da mesma dupla refração. Os feixes são basicamente da mesma cor ou têm o mesmo comprimento de onda da cor do feixe de luz incidente; são também muito parecidos um com o outro em suas quantidades de luz. Essa conclusão foi escrita por Sir Isaac *Newton* (1643-1727) na publicação *Óptica*, p. 261 – 262. Veja na Figura 15 um pedaço desse cristal colocado sobre uma página escrita.

Como já foi dito anteriormente, isso ocorre em certos cristais que são chamados de anisotrópicos. A Figura 14 mostra um feixe de luz incidindo perpendicularmente à superfície da calcita. Após a refração, o feixe é dividido em dois raios: um obedecendo a Lei de Snell da refração ( $\mathbf{o}$ , chamado **ordinário**) e o outro não ( $\mathbf{e}$ , chamado **extraordinário**). Veja que, na Figura 14, o ângulo de incidência do feixe luminoso é nulo, mas o ângulo de refração do raio extraordinário é diferente de zero, ao contrário do previsto pela lei de Snell.



**Figura 15** – Tubo de acrílico com água.

A Tabela 1 indica os valores dos índices de refração ordinário ( $n_o$ ) e extraordinário ( $n_e$ ) para seis cristais birrefringentes. Observe que em três deles, o raio extraordinário é mais lento, e em outros três deles é mais rápido que o raio ordinário.

**Tabela 1**– Índices de refração de alguns cristais birrefringentes relativos à luz de sódio, com comprimento de onda igual a 5890 Å.

Cristal	Fórmula	$n_o$	$n_e$	$n_e - n_o$
Gelo	$H_2O$	1,309	1,313	+0,004
Quartzo	$SiO_2$	1,544	1,553	+0,009
Sulfeto de zinco	$ZnS$	2,356	2,378	+0,022
Calcita	$CaCO_3$	1,658	1,486	-0,172
Dolomita	$CaO MgO.2CO_2$	1,681	1,500	-0,181
Siderita	$FeO Co_2$	1,875	1,635	-0,240



## Atividade 5

Observando a Tabela 1, indique quais os cristais nos quais o raio extraordinário é mais lento e em quais o raio ordinário é mais rápido.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Resumo

Nesta aula, tivemos a oportunidade de discutir o fenômeno de polarização em ondas mecânicas eletromagnéticas. Assim, apresentamos situações nas quais era possível distinguir entre um feixe de luz aleatoriamente polarizado e um feixe de luz polarizado. Aprendemos, também, sobre as diversas formas de polarização da luz através dos processos de absorção, reflexão, transmissão e espalhamento da luz. Depois, vimos alguns fenômenos da natureza que retratam a polarização da luz.

# Autoavaliação

1

Um feixe de luz não-polarizado incide sobre dois polarizadores orientados de tal maneira que nenhuma luz emerge deles. Colocando-se uma terceira lâmina polarizadora entre eles, a luz poderá emergir do conjunto?

2

Explique por que os óculos para proteção contra a claridade solar feitos de materiais polarizadores levam uma grande vantagem em relação àqueles que contam simplesmente com os efeitos de absorção.

3

Quando o ângulo entre duas direções polarizadoras é girado de  $0^\circ$  a  $45^\circ$ , a intensidade do feixe transmitido cai para a metade de seu valor inicial. O que acontece com a energia que não é transmitida?

4

Um feixe de luz não-polarizada incide sobre duas placas polarizadoras superpostas. Qual deverá ser o ângulo entre as direções de polarização (eixo ótico) das placas para que a intensidade do feixe transmitido seja um terço da intensidade do feixe incidente?

5

De modo geral, numa praia a luz é parcialmente polarizada, devido às reflexões na areia e na água.

Numa praia particular, em determinado dia, próximo ao pôr-do-sol, a componente horizontal do vetor campo elétrico é 2,3 vezes a componente vertical. Um banhista em pé coloca óculos de sol polarizadores. Os óculos eliminam o componente horizontal do campo.

**a)** Que fração da intensidade luminosa recebida antes da colocação dos óculos atinge os olhos do banhista agora?

**b)** Ainda usando os óculos, o banhista se deita de lado. Que fração da intensidade luminosa recebida antes da colocação dos óculos atinge seus olhos agora?

6

Uma folha de vidro crown, com índice de refração 1,52, está sendo usada para polarizar completamente um feixe de luz de comprimento de onda igual a  $5500 \text{ \AA}$  por reflexão. Determine o ângulo de incidência necessário para isso.

# Referências

HEWITT, Paul G. **Física conceitual**. São Paulo: Bookman, 2002.

SERWAY, R. A.; JEWETT JÚNIOR, J. W. **Princípios de física**. São Paulo: Ed. Thomson, 2003. v 4.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física**: ótica e física moderna: Sears e Zemansky. 10. ed. São Paulo: Addison- Wesley, 2003. v 4.

# Audição e visão

**Aula**

**11**



# Apresentação

**N**esta aula vamos discutir basicamente como interagimos com o meio que nos rodeia. Essa interação se dá porque temos alguns fantásticos órgãos capazes de realizar essa tarefa. O primeiro deles é a pele que nos reveste e que é capaz de transmitir sensações para o sistema nervoso e daí para o cérebro. Entre as diversas sensações que a pele transmite está a de quente e frio, as quais, como você já sabe, estão relacionadas com a emissão de radiação no infravermelho. Depois temos um outro sofisticado sistema de decodificação de sinais que são os ouvidos, estes você estudou brevemente em Física e Meio Ambiente, que opera ondas sonoras, principalmente na faixa de 20 até 20.000  $Hz$ . E finalmente o mais delicado, nossos olhos, que são capazes de perceber sutis nuances de cores as quais, mais uma vez, correspondem a uma estreita faixa de frequências. Assim tomamos contato com o meio através de sons e radiações. É sobre esses mecanismos que trataremos agora. Lembramos que seria útil você ter em mãos a Aula 12 de Física e Meio Ambiente (Ondas, luz e visão), pois ela trata também dos temas que estaremos abordando aqui.

## Objetivos

- 1** Descrever brevemente como o som se propaga no ouvido humano.
- 2** Analisar um espectro sonoro e discutir seus limiares.
- 3** Descrever brevemente como funciona o olho humano.
- 4** Analisar o espectro eletromagnético e discutir suas principais faixas.



# Som

Uma das propriedades importantes de nossa atmosfera é a de propagar ondas - isso você já sabia das outras aulas. Por outro lado essa propriedade está relacionada com a quantidade de partículas por unidade de volume de nossa atmosfera, pois é o deslocamento dessas partículas em torno de seu ponto de equilíbrio que permite a propagação de ondas nesse meio.

Podemos dizer que as propriedades macroscópicas da atmosfera, tais como pressão e densidade afetam a capacidade auditiva dos seres vivos que estão imersos nela. Na verdade, os seres vivos evoluíram se adaptando ao meio, assim não é de admirar que esses seres tenham sistemas sofisticados de detecção de sons, indo inclusive a desenvolver propriedades semelhantes às de um RADAR.

Mas nenhuma das propriedades elásticas e de densidade da atmosfera seria útil se não fôssemos dotados de um sofisticado sistema de captação de sons. Nossos ouvidos conseguem perceber pequenas vibrações do meio. Ele é capaz de perceber as pequenas variações de pressão do meio, podendo detectar variações da ordem de  $2 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$ . Como a pressão atmosférica ao nível do mar é de aproximadamente  $10^5 \text{ N/m}^2$ , nosso ouvido é capaz de detectar flutuações de pressão correspondentes a  $1/10^{10}$  da pressão atmosférica, ou seja, um bilionésimo dela.

O modo como percebemos o som está definido dentro de certos limites conhecidos como **limites de audibilidade** os quais são determinados em termos de intensidade sonora, para um tom puro, sem harmônicos, de frequência fixa de  $1000 \text{ Hz}$ .

Nossa audição também varia em função da idade. A Figura 01 mostra a curva de resposta auditiva para um adulto jovem. A partir da figura mostrada na atividade a seguir, você pode perceber que a faixa de frequências que somos capazes de perceber é muito larga. Seus extremos são conhecidos como

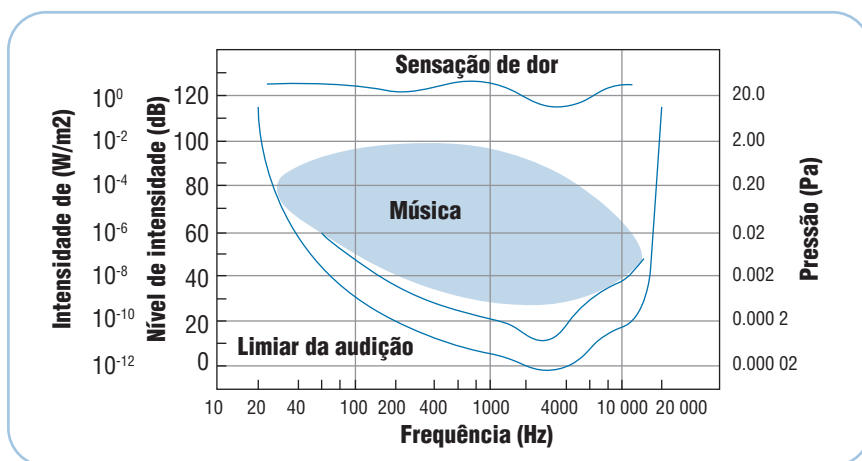
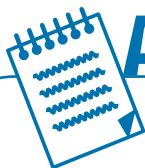


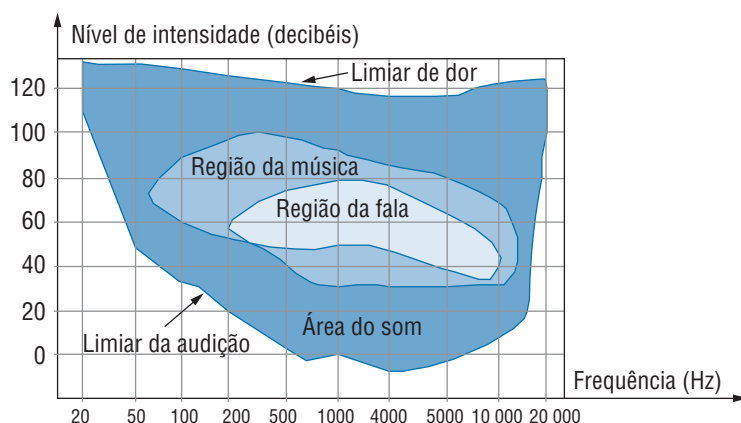
Figura 1 – Gráfico da intensidade do som em função da frequência.

**Gama Limiar de Audibilidade** (mínima intensidade audível) e **Limite de Dor** (nível máximo de intensidade audível sem danos fisiológicos ou dor), frequências situadas no intervalo entre  $100 \text{ Hz}$  e  $5.000 \text{ Hz}$ . Ou, em termos de energia, na faixa de  $10^{-12} \text{ W/m}^2$  a até aproximadamente  $1 \text{ W/m}^2$ , como mostrado na Figura 1.



## Atividade 1

(UFRN, 2009) De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), sons acima de 85 decibéis aumentam os riscos de comprometimento do ouvido humano. Preocupado em prevenir uma futura perda auditiva e em garantir o direito ao sossego público, um jovem deseja regular o sistema de som do seu carro, obedecendo às orientações da OMS. Para isso, ele consultou o gráfico da figura abaixo, que mostra, a partir de medições estatísticas, a audibilidade média do ouvido humano, expressa em termos do Nível de Intensidade do som,  $NI$ , em decibéis, em função da Frequência,  $f$ , em Hertz.



Fonte: <<http://www.comperve.ufrn.br/conteudo/provas/2009/QuimicaBiologiaFisicaMatematicaIngles.pdf>>. Acesso em: 19 mar. 2009.

**Figura 2** – Curva da resposta auditiva de um adulto jovem saudável

Com base na figura acima e na orientação da OMS, pode-se afirmar que o jovem, para obter máxima eficácia na região da música, regulou o som do seu carro para os níveis de intensidade,  $NI$ , e de frequência,  $f$ , respectivamente, em quais dos intervalos a seguir:

- a)**  $20 \leq NI \leq 80$  e  $50 \leq f \leq 5000$ .      **c)**  $60 \leq NI \leq 80$  e  $100 \leq f \leq 5000$ .  
**b)**  $60 \leq NI \leq 120$  e  $100 \leq f \leq 5000$ .      **d)**  $60 \leq NI \leq 120$  e  $50 \leq f \leq 5000$ .

Atenção: Justifique sua resposta.

Para entendermos melhor o que estamos falando vamos voltar a Figura 1 e verificar que no eixo vertical representamos a intensidade do som. Por intensidade do som entendemos fluxo de energia por unidade de área. Ou seja, ao produto da pressão pela velocidade das partículas do meio fluido, o que é equivalente à potência recebida por unidade de área. Em termos acústicos, a intensidade é o valor médio do fluxo de energia por unidade de área perpendicular à direção de propagação, medida em Watt por metro quadrado ( $W/m^2$ ).



## Atividade 2

Mostre que o produto da pressão pela velocidade das partículas de um dado meio é igual a potência recebida por unidade de área.

Antes de discutirmos mais sobre as unidades de medida de intensidade do sinal sonoro vamos tratar um pouco sobre decibéis ( $dB$ ) a unidade de medida usada para medir o nível de intensidade do som.

Como você já sabe, o som tem um espectro muito amplo, indo desde  $20\text{ Hz}$  até  $20.000\text{ Hz}$ , por isso, devido à esta larga faixa de intensidade do som, precisamos usar escalas logarítmicas para melhor expressar essa grandeza, a escala assim obtida é a escala de Decibéis ( $dB$ ).

**Decibel** é a razão logarítmica entre duas potências ou intensidades e é dado pela expressão:

$$dB = 10 \log_{10} \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \quad \text{Eq. 1}$$

O **Nível de Intensidade Sonora** é expresso em decibéis tomando-se como referência  $I_0 = 10^{-12}\text{ W}/m^2$ . Ou seja, podemos escrever a Eq.01 como

$$dB = 10 \log_{10} \left( \frac{I_1}{10^{-12}} \right) \quad \text{Eq. 2}$$

A equação 02 é bastante utilizada em situações nas quais se pretende obter medidas de intensidade do som, inclusive em experimentos de análise de poluição sonora. O exemplo a seguir ilustra o manuseio dessa fórmula.

## Exemplo 1

Obtenha o valor em  $dB$  do limiar de audibilidade.

## Solução:

Teremos que usar a Equação 02 para obter  $I(dB)$ . Para o caso do limite de audibilidade,  $I_1 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ . Portanto;

$$I(dB) = 10 \log_{10} \left( \frac{I_1}{10^{-12}} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{10^{-12}}{10^{-12}} \right) = 0.$$



## Atividade 3

Obtenha o valor em dB do limiar de dor.

## Nosso ouvido

Enquanto uma disciplina de Física, não é nosso objetivo discutir os detalhes do ouvido humano. Para isso seria necessário um curso específico na área médica, mas podemos em linhas gerais abordar o tema do ponto de vista da física.

Assim, vejamos, o ouvido pode ser dividido em três partes: ouvido externo, ouvido médio e ouvido interno. O ouvido externo recebe o som (sinal de entrada) e o guia para o ouvido médio, nessa região a energia do ar (lembre que as ondas transportam energia!) é transferida para o líquido existente nessa região, que irá conduzir o sinal de entrada para o sistema nervoso transformando as variações de pressão em sinais elétricos e os envia, através de nervos, para o cérebro, onde são decodificados.

Desse modo, do ponto de vista da Física, podemos dizer que o som chega aos ouvidos através das vibrações do ar e que a energia sonora que se propaga através do ar precisa atingir o ouvido interno para ser convertida em sinais elétricos (sinais nervosos) para ser transportada do ouvido para o cérebro. E isso se dá com o uso de um meio líquido que funciona como amplificador do sinal de entrada. Isso ocorre porque a impedância acústica desse líquido é 3.500 vezes maior que a impedância do ar.



## Atividade 4

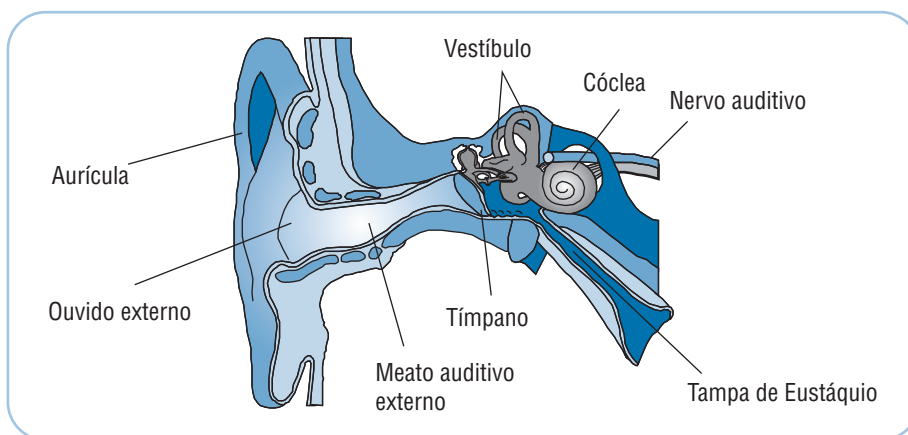
Pesquise e tente explicar em que contexto a palavra impedância (que você conhece de eletricidade e magnetismo) se aplica na frase:

“... Isso ocorre porque a impedância acústica desse líquido é 3.500 vezes maior que a impedância do ar”.

Ao contrário do que ocorre com sentidos como visão, paladar e olfato, que em seu processo de comunicação com o cérebro envolve reação química, com a audição temos um fenômeno eminentemente mecânico. Os nossos ouvidos são órgãos que captam todos os sons ao nosso redor e ao mesmo tempo traduzem essa informação para o cérebro. Como vimos na Aula 4 (Equação da onda e energia no movimento ondulatório I) esse processo ocorre de uma maneira completamente **mecânica**.

Vamos aqui discutir os sistemas mecânicos que possibilitam a audição e para tanto traçaremos o percurso do som, desde sua fonte original até o cérebro; durante essa trajetória veremos ainda como atuam as partes que compõem o ouvido. Você se surpreenderá com o funcionamento de um dos órgãos mais incríveis do seu corpo!

Você certamente já entende o que é um som, uma vez que isso já foi discutido na Aula 04. Portanto, já sabe que um objeto produz som quando faz vibrar o meio no qual se encontra imerso. Tal meio pode ser sólido, como terra; líquido, como água; ou gasoso, como ar. Pelo fato de estarmos imersos em ambientes que são gasosos ou líquidos, ouvimos sons ao nosso redor quase todo o tempo.



Fonte: <<http://static.hsw.com.br/gif/humans-hear-in-space-2.jpg>>. Acesso em: 19 mar. 2009.

Figura 3 – Ouvido humano.

Quando algo vibra no ar, move as partículas de ar. Estas, por sua vez, movem outras ao redor delas, carregando a vibração pelo ar.

### Um pouco de revisão

Só para relembrar um pouco, sabemos que o som é uma onda longitudinal e a sua propagação ocorre em virtude da compressão e rarefação do ar.

Quando emitimos o som através, por exemplo, de um grito, o objeto vibrante (nossas cordas vocais) envia uma onda que provoca flutuação na pressão do ar à medida que se propaga na atmosfera. Nós ouvimos sons diferentes por causa das variações na **frequência de onda sonora**.

Uma frequência de onda mais alta significa, simplesmente, que a flutuação da pressão do ar muda para frente e para trás mais rapidamente. Nós ouvimos isso como um **tom mais alto**. Quando há poucas flutuações em um período de tempo, o tom é mais baixo. O nível de pressão do ar em cada flutuação, a **amplitude das ondas**, determina a altura do som.

## Captando sons

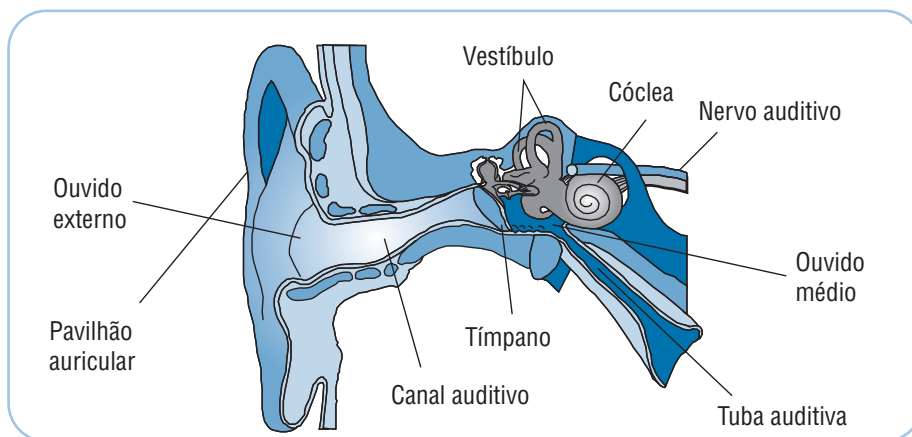
Vimos na seção anterior que o som viaja pelo ar na forma de vibrações na pressão do ar. Para ouvir sons, o nosso ouvido precisa ser capaz de fazer três coisas básicas:

1. Direcionar as ondas sonoras para dentro da parte auditiva do ouvido.
2. Sentir as flutuações na pressão do ar.
3. Traduzir essas flutuações para um sinal elétrico que seu cérebro possa entender.

Para cumprir tal tarefa o ouvido se tornou um órgão muito sofisticado, como você deve ter percebido na Figura 3 e cujos detalhes são mostrados na Figura 4 a seguir.

O primeiro contato com o som se dá através da orelha. A **orelha**, parte externa do ouvido, serve para “captar” as ondas sonoras.

O som assim captado é conduzido através do ouvido externo, que, como mostrado na Figura 3, é virado para frente e tem várias curvas. Essa estrutura ajuda a determinar a direção do som. Um som que vem de cima ou de trás de você vai ricochetear (atingir indiretamente) na orelha de uma maneira diferente que um som vindo de baixo ou de frente. Essa reflexão do som altera o padrão da onda sonora. Seu cérebro reconhece padrões distintos e determina se o som está na frente, atrás, acima ou abaixo de você.



Fonte: <<http://static.hsw.com.br/gif/hearing-2.jpg>>. Acesso em: 19 mar. 2009.

**Figura 4** – Diagrama do ouvido (NASA).

Nosso cérebro é capaz de determinar a posição horizontal de um som pela comparação das informações que vêm dos dois ouvidos. Se o som vem da esquerda, vai chegar ao seu ouvido esquerdo um pouquinho antes de chegar ao ouvido direito. Também será um pouco mais alto no ouvido esquerdo do que no direito, com isso ele detecta a origem do som. Note que costumamos inclinar a cabeça em uma dada direção quando queremos perceber melhor o som, com isso tentamos separar mais o som que chega de um lado do som que chega de outro.

Além do mais, no caso do ouvido humano, a orelha é virada para frente, o que faz com que sejamos capazes de ouvir melhor sons que vêm da frente do que os que surgem atrás. Por outro lado, na natureza encontramos muitos mamíferos, como os cães que têm orelhas grandes e móveis, o que permite que eles se concentrem em sons vindos de uma direção específica. As orelhas humanas não são especializadas o suficiente para fazer o mesmo.



# O tímpano

Assim que as ondas sonoras entram no ouvido externo elas começam a se propagar ao longo do **canal auditivo** (veja a Figura 3). No final deste, elas encontram uma membrana e a fazem vibrar. Tal membrana é chamada de **membrana timpânica**, comumente chamada de **tímpano**.

O tímpano é uma pele fina, rígida e muito sensível, tem a forma de cone, com aproximadamente 10 milímetros de largura. Graças a essa sensibilidade, mesmo a menor flutuação da pressão do ar, como já falamos no início da aula, será capaz de movê-lo para frente e para trás como se ele fosse um tambor. O tímpano está conectado ao **músculo tensor timpânico**, que constantemente o puxa para dentro. Isso mantém a membrana tensa por inteiro, vibrando quando qualquer parte de sua superfície é tocada pela onda sonora. Tudo muito parecido com o que ocorre em um tambor, não é?

Essa pequena camada de pele funciona como o diafragma em um microfone. As compressões e rarefações da onda sonora empurram a membrana para frente e para trás. Ondas sonoras mais altas movem a membrana mais rapidamente e sons mais baixos movem a membrana por uma distância maior.

O tímpano pode servir também para proteger o ouvido interno de exposições prolongadas a ruídos altos e graves. Quando o cérebro recebe um sinal que indica esse tipo de ruído, ocorre um reflexo no tímpano. O músculo tensor timpânico e o **músculo estapédio** se contraem de repente. Isso puxa o tímpano e os ossos conectados a ele em duas direções diferentes, deixando a membrana mais rígida. Quando isso acontece, o ouvido não capta tanto som na parte mais baixa do espectro auditivo, de maneira que o som é abafado.

Além de proteger seus ouvidos, esse reflexo ajuda você a concentrar sua audição. Ele mascara ruídos de fundos altos e graves para que você possa concentrar-se em sons mais agudos. Entre outras coisas, esse reflexo ajuda você a conversar em um local muito barulhento, como um *show* de *rock*. O reflexo também ocorre quando você começa a falar; caso contrário, o som da sua própria voz abafaria os outros sons a sua volta.

O tímpano é o único elemento sensitivo no ouvido. Como veremos a seguir, o resto do ouvido serve apenas para passar adiante a informação coletada pelo tímpano. Finalmente, da Figura 3 podemos ver que o tímpano se situa entre o canal auditivo e o **ouvido médio**.



## Atividade 5

Coloque suas mãos em abas impedindo que o som chegue diretamente em seus ouvidos e tente escutar um som que venha de sua frente.

- a)** Que ocorre com esse som?
- b)** Sua intensidade muda?
- c)** Você percebe agora o que significa a frase “[...] ouvidos voltados para frente [...]” que você leu no texto? Justifique sua resposta.

**a)** \_\_\_\_\_

---

---

---

---

**b)** \_\_\_\_\_

---

---

---

---

**c)** \_\_\_\_\_

---

---

---

---

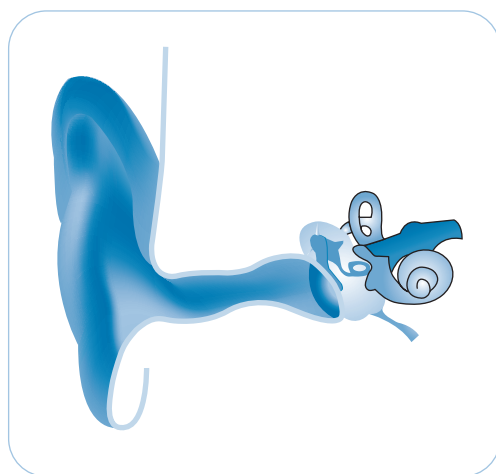
---

---

# Ouvido médio

O ouvido médio é uma cavidade com ar localizada entre o tímpano e o ouvido interno e se conecta com a garganta pela **tuba auditiva** (trompa de Eustáquio).

O fato de existir ar nessa região é muito importante, pois como o ar atmosférico entra em nosso corpo tanto pelo ouvido externo como pela boca, a pressão do ar nos dois lados do tímpano continua igual. Esse equilíbrio de pressão permite que o tímpano se mova livremente para frente e para trás. Isso explica porque podemos controlar a “pressão nos ouvidos” forçando o ar em nossa boca, aumentando a pressão. Esse comportamento é muito utilizado quando estamos viajando de ônibus em regiões montanhosas, de repente começa a aparecer um “zumbido nos ouvidos” e alteramos a pressão no ouvido médio fechando a boca e fazendo força. Muitas vezes também mascamos chiclete visando todo o tempo manter a pressão constante no ouvido interno. Não é?



Fonte: <<http://static.hsw.com.br/gif/hearing-1.jpg>>. Acesso em: 19 mar. 2009.

**Figura 5** – Ilustração do ouvido (NIDCD).

Note ainda que, quando a compressão provocada pela pressão do ar empurra o tímpano, alguns ossículos se movem, de maneira que a placa do estribo empurra o fluido da cóclea (observe a Figura 3 para saber onde se situa a cóclea também chamada de caracol). Essa frase nos indica que precisamos aprofundar um pouco mais nossa discussão dizendo que ossículos são esses e de que fluido estamos tratando.

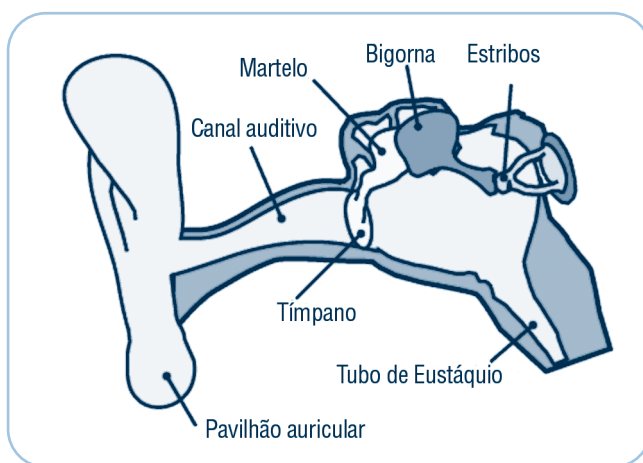
## Amplificador ósseo

Em resumo, a compressão e rarefação das ondas sonoras movem o tímpano para frente e para trás e apesar de que, na maioria das vezes, essas mudanças na pressão do ar são extremamente pequenas, não são capazes de exercer muita força sobre o tímpano. Este é tão sensível que, mesmo sob a ação de forças muito pequenas, ele pode se mover consideravelmente permitindo que sejamos capazes de ouvir sons muito baixos.

Ao continuar seu caminho, o som agora irá se defrontar com outro meio, o meio aquoso no qual se encontra o ouvido interno, estamos então saindo do ouvido médio para o ouvido interno. Nessa região encontramos a **cóclea**, que irá conduzir o som por um fluido e não mais pelo ar. Esse fluido tem uma inércia muito mais alta (no início da aula nos referimos a isso na forma de impedância, lembra?) que o ar, isto é, é mais difícil mover (compare empurrar ar e empurrar água). A pequena força sentida no tímpano não é suficiente para mover esse fluido. Antes de o som passar para o ouvido interno, a **pressão total** (força por unidade de área) deve ser amplificada.

Essa é a função daqueles **ossículos**, que citamos ainda há pouco. Vamos analisá-los um pouco mais. Esse grupo de pequenos ossos está situado no **ouvido médio**:

- o **malleus**, comumente chamado **martelo**
- o **incus**, comumente chamado **bigorna**
- o **estapédio**, comumente chamado **estribo**



**Figura 6** – As ondas sonoras vibram o tímpano, que move o martelo, a bigorna e o estribo.

Esses pequenos ossos são, na verdade, os menores ossos existentes no corpo humano. Vejamos como funciona cada um deles. O martelo é conectado ao centro do tímpano, no lado interno, como mostrado na Figura 6. Quando o tímpano vibra, move o martelo de um lado para o outro, como uma alavanca.

A parte superior do martelo é conectada à bigorna que, por sua vez, na extremidade inferior se liga ao estribo. A outra ponta do estribo, sua **placa de apoio**, fica encostada na cóclea, na **janela oval**.

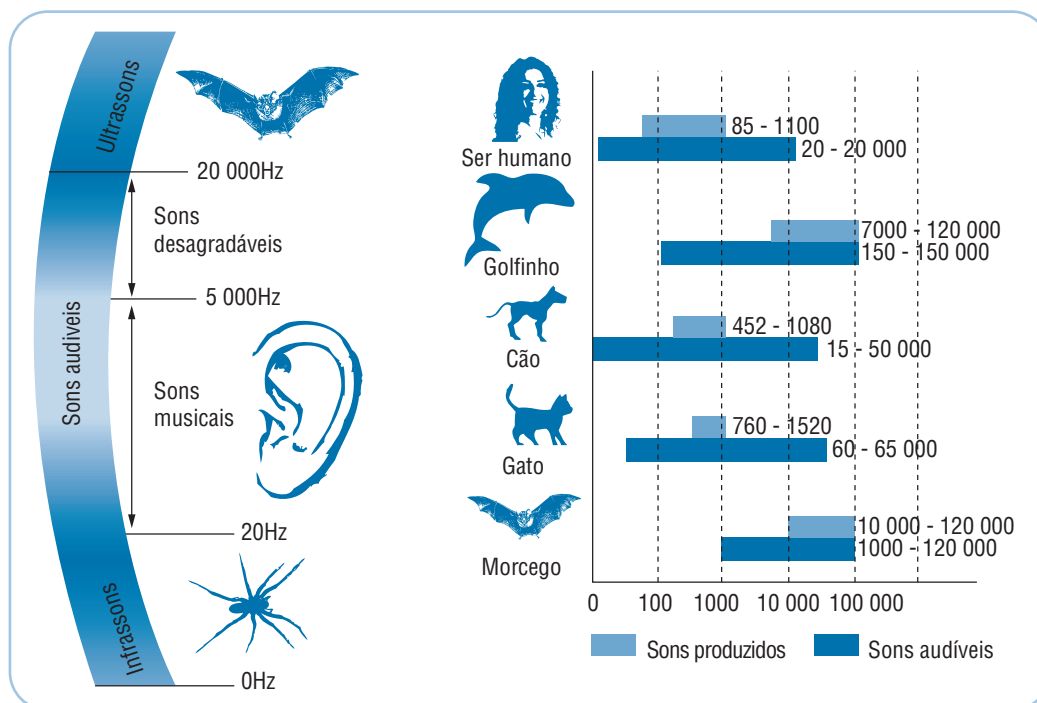
Quando a compressão pela pressão do ar empurra o tímpano, os ossículos se movem, de maneira que a placa do estribo empurra o fluido da cóclea. Quando a rarefação puxa o tímpano, os ossículos se movem de maneira que a placa puxa o fluido. Essencialmente, o estribo age como um pistão, criando ondas no fluido do ouvido interno para representar as flutuações da pressão do ar da onda sonora.

Os ossículos amplificam a força do tímpano de duas maneiras. A amplificação principal vem da diferença de tamanho entre o tímpano e o estribo. O tímpano tem uma área de superfície de aproximadamente 55 milímetros quadrados, enquanto a placa do estribo tem uma área de superfície de 3,2 milímetros quadrados. As ondas sonoras aplicam força em cada milímetro do tímpano e o tímpano transfere toda essa energia para o estribo. Ao concentrar essa energia em uma área menor, a pressão (força por unidade de volume) é muito maior. A configuração dos ossículos fornece amplificação extra. O martelo é mais longo que a bigorna, formando uma ponte entre o tímpano e o estribo. O martelo se move numa distância maior e a bigorna se move com força maior (energia = força × distância).

Esse sistema de amplificação é extremamente efetivo. A pressão aplicada sobre o fluido da cóclea é aproximadamente 22 vezes a pressão sentida no tímpano. Essa amplificação da pressão é suficiente para passar as informações do som para o ouvido interno, onde elas são traduzidas em impulsos elétricos para que o cérebro as possa entender.

## Espectro sonoro

O espectro sonoro é a representação de todos os **sons audíveis** e **não audíveis** pelo ser humano.



Fonte: <<http://www.prof2000.pt/users/mrtd/8ano/Audicao.htm>>. Acesso em: 19 mar. 2009.

**Figura 7** – À esquerda, o espectro sonoro e à direita o intervalo de frequência sonoro produzido e audível por vários seres vivos.

Já sabemos muito sobre o sistema auditivo, vamos agora tratar de um tema que foi abordado rapidamente no início da aula através da Figura 1. Estamos agora tentando verificar toda a faixa de frequência correspondente ao som. Analisaremos essa faixa, chamada de espectro, dando ênfase às características de cada uma. Elas podem ser divididas nos seguintes grupos: ultrassom, audível e infrassom.

## Ultrassons, sons audíveis e infrassons

A faixa do som, como podemos verificar na Figura 7, corresponde a frequências muito elevadas, superiores a 20 000  $Hz$ , acima, portanto, da faixa que o ouvido humano consegue ouvir.

O ultrassom é utilizado pela natureza, que dotou certos animais com a capacidade de emitir ondas ultrassônicas. Por exemplo, os morcegos, golfinhos e mariposas se locomovem, encontram alimentos e fogem do perigo através de ondas ultrassônicas que eles próprios emitem e cujos ecos recebem e utilizam para se direcionarem. Com a observação do procedimento desses animais desenvolveu-se a ideia do sonar, durante a Segunda Guerra Mundial.

O sonar serve para detectar objetos sob a água, como submarinos, e também para avaliar a profundidade dos mares. Após a Segunda Guerra houve um aumento muito grande de aplicações do ultrassom nos mais diversos campos, inclusive na medicina. No espectro de frequências abaixo do ultrassom encontramos os sons audíveis ao ouvido humano, conforme você pode ver a seguir.



### Atividade 6

Faça uma pesquisa na internet sobre sons que animais conseguem ouvir e que nós, os humanos não conseguimos. Você seria capaz de dizer o motivo pelo qual isso ocorre?

---

---

---

---

---

**Sons audíveis** Como você já sabe, para os seres humanos, são os sons de frequência compreendida entre aproximadamente os 20  $Hz$  e os 20000  $Hz$ .

**Infrassons** - são ondas sonoras extremamente graves, com frequências abaixo dos 16  $Hz$ , portanto abaixo da faixa audível do ouvido humano que é de 20  $Hz$  a 20.000  $Hz$ . Esses sons provocam náuseas e perturbações intestinais. Ondas infrassônicas podem se propagar por longas distâncias, pois são menos sujeitas a perturbações ou interferências que as de frequências mais altas. Infrassons podem ser produzidos pelo vento e por alguns tipos de terremotos.

Os elefantes são capazes de emitir infrassons que podem ser detectados a uma distância de 2  $km$ . Tigres siberianos, por sua vez, emitem juntamente com seus altos rugidos um infrassom que, segundo inúmeros testemunhos, paralisa os seres humanos, deixando-nos sem ação e mais susceptíveis de virarmos o almoço dessas bestas carnívoras. Nesse sentido, há mais de 50 anos estão pesquisando sobre uma arma de guerra utilizando apenas o infrassom, pois acredita-se que ele tem o poder de derrubar prédios e provocar a morte dos órgãos humanos. Hoje em dia já estão usando equipamentos sonoros com aproximadamente uma faixa de 120 decibéis na guerra do Iraque, pois o barulho é tão forte que provoca dor e assim os povos saem de tocas ou esconderijos.

Após termos tratado do som e do ouvido, vamos agora tratar da luz e da visão. Note os ouvidos e os olhos são órgãos que operam em faixa de frequência distintas e por isso precisam ter características físicas e químicas também distintas para que possam perceber as ondas que chegam a eles e as detectarem corretamente. Não é possível lançar ondas sonoras em direção aos olhos e tornar apenas com isso visível o objeto que enviou o som. Como não é possível apontar uma lanterna em direção aos ouvidos e esperar que com isso a pessoa escute alguma coisa. Esses órgãos operam faixas de frequências muito distintas. Não é?



## Atividade 7

Pesquise em que faixa do espectro se encontra o som audível e em que parte se encontra a luz visível.

# Vejo!

**U**ma das perguntas mais antigas da humanidade é sobre como vemos os objetos que nos rodeiam. A primeira observação que podemos fazer é que para ver precisamos estar de olhos abertos e com os órgãos da visão funcionando adequadamente. Mas só isso não é suficiente. Devemos também direcionar nossa visão para o objeto que queremos ver. Muito bem, mas isso ainda não é suficiente, pois, como bem sabemos, quando queremos andar dentro de casa no escuro por mais que tentamos ver os objetos que nele se encontram não os conseguimos enxergar. O que, nessa situação, está faltando? – Ora esse objeto precisa, de alguma forma, estar iluminado.

O que acabamos de discutir parece óbvio, mas não é. Por muito tempo, filósofos como Platão imaginavam que para vermos um objeto deveriam sair “raios” ou pequenas partículas de nossos olhos que iriam interagir com o objeto, tornando-o visível.

Hoje sabemos que a luz tanto pode se comportar como uma onda quanto como partícula, mas não apresenta esses comportamentos simultaneamente, ou seja, ora se comporta como onda ora irá se comportar como partícula. Tais comportamentos dependem da natureza da interação dela com a matéria, ou seja, do experimento que se está realizando.

Do ponto de vista da partícula podemos afirmar que a luz é constituída por partículas chamadas fótons que transportam um quantum de energia. Os fótons não possuem massa de repouso e se deslocam no vácuo com velocidade da ordem de  $300\ 000\ km/s$  (a velocidade da luz). Esse comportamento da luz pode ser observado em experimentos como o do efeito fotoelétrico em que a partir da interação da luz com uma placa metálica se consegue arrancar elétrons dela e assim gerar uma corrente elétrica. Em outros experimentos tais como refração, reflexão e interferência, podemos tratar a luz como uma onda; nesse caso a luz é uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo com velocidade de  $300\ 000\ km/s$ .

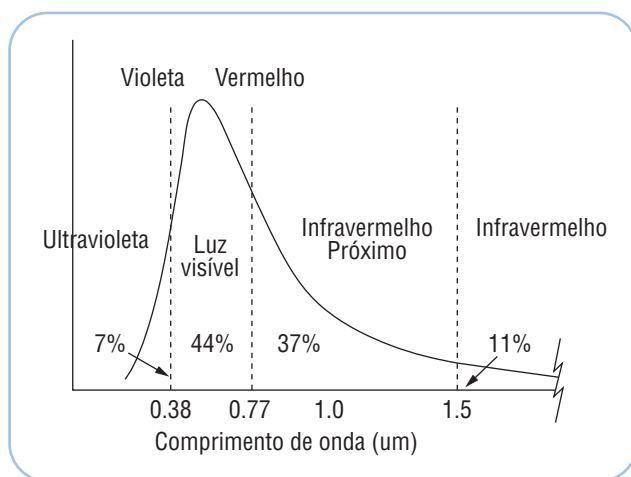


## Atividade 8

Retome seu material de Física e Meio ambiente e leia novamente a descrição do olho humano que está na Aula 12. Com suas palavras descreva rapidamente como é o funcionamento do olho humano.

# Espectro eletromagnético

**T**alvez você tenha alguma vez se perguntado o motivo pelo que não vemos na faixa de raio-x (como o super homem das histórias em quadrinhos) ou não enxergamos no infravermelho e precisamos de aparelhos para tornar essas frequências visíveis. Uma boa resposta a essa questão pode ser obtida olhando o conjunto das radiações emitidas pelo Sol, ou seja, seu espectro eletromagnético. Olhemos então a figura a seguir;



**Figura 8** – Espectro de emissão da radiação do solar.

Olhando a figura percebemos que o máximo de intensidade da radiação emitida pelo sol está na faixa de frequência que chamamos de visível, ou seja, nossos olhos durante o processo de evolução se adaptou de modo a operar na faixa de maior emissão de radiação pelo Sol. Isso significa que se o Sol emitisse mais não no visível mas em outra frequência, seria nessa outra que enxergaríamos os objetos. Dependendo de suas frequências, as radiações do espectro são portadoras de quantidades diferentes de energia. Quanto mais curto o comprimento de onda, mais alta é a energia da radiação.

## O olho humano

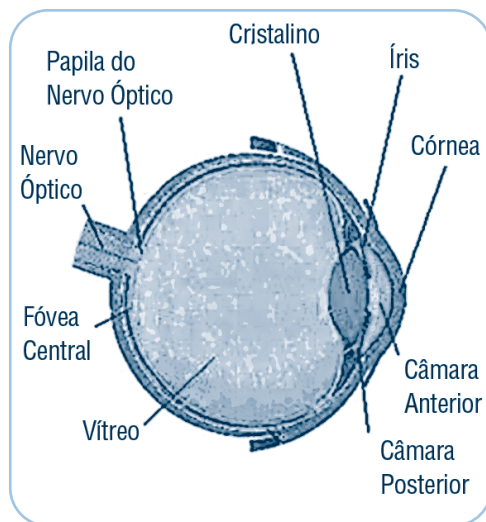
**F**ruto de nossa evolução biológica, o olho se comporta como um instrumento ótico adaptado a operar na faixa visível do espectro eletromagnético. Ele pode ser definido como o órgão responsável pela visão. O olho funciona de modo que uma imagem óptica do mundo externo é produzida em seu interior e transformada em impulsos nervosos e conduzida ao cérebro que o interpreta.

Note da figura novamente, da figura 8 que do espectro solar que a maior quantidade de radiação solar emitida está na faixa do visível e é por isso que a evolução nos levou a atual configuração de nossos olhos.

Ele é formado pelo globo ocular (uma esfera com cerca de 2,5 centímetros de diâmetro) e seus diversos componentes.

### Os componentes do olho são:

Córnea; Íris; Cristalino; Papila do nervo ótico; Nervo ótico; Fóvea Central; Vítreo, Câmara anterior e Câmara Posterior, como mostrado na figura a seguir:



Fonte: <<http://www.laboratoriorigor.com.br/anatomia.html>>. Acesso em: 26 mar. 2009.

**Figura 9** – Representação esquemática do olho humano.

Antes de começarmos a descrever cada parte do olho, gostaríamos de lembrar que, semelhante ao que ocorre com uma câmara escura, vemos os objetos invertidos, ou seja, o mundo é visto de ponta cabeça e trazido a “posição normal” pelo nosso cérebro.

Vamos começar pela Iris, ela é a região que define a cor de nossos olhos, assim, como sabemos, a cor da Iris varia de pessoa para pessoa. Lá também encontramos a pupila que funciona como um diafragma controlando a quantidade de luz que penetra no olho.

Depois temos o cristalino que, do ponto de vista da física, pode-se dizer que é uma lente biconvexa com índice de refração da ordem de 1,45. É o cristalino que é responsável por direcionar a imagem que será projetada sobre a retina. Esta, por sua vez é sensível a luz e dotada de células que nos habilitam a perceber as cores.

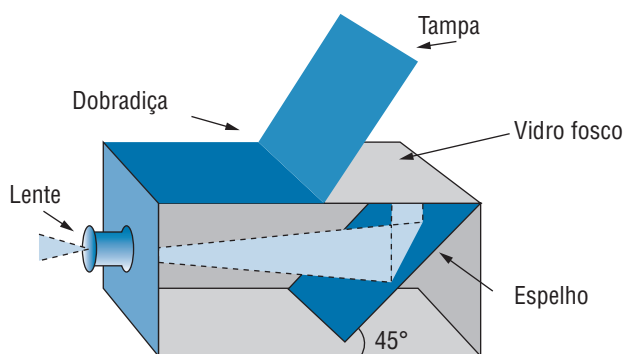
Finalmente, temos o nervo ótico que transmite a sensação visual para nosso cérebro; nesse sentido podemos até imaginar a retina como uma expansão do nervo ótico. A retina funciona então como um anteparo sobre o qual as imagens são formadas para a partir daí serem encaminhadas para o cérebro.

Uma ideia de como a imagem é formada na retina pode ser dada por um experimento bastante conhecido chamado “câmara escura”. Nele, a imagem de um objeto é projetada através de um orifício, em um anteparo situado no interior da câmara. Você pode pesquisar mais sobre isso na internet, ou tentar realizar a atividade que estamos propondo a seguir.

## Atividade 9

Vamos construir uma câmara escura?

Podemos construir uma câmara escura furando a base de uma caixa de papelão e substituindo a tampa por uma folha de papel vegetal ou por uma chapa de vidro fosco como indicado a seguir. Com ela podem ser feitas observações bem interessantes como a de que com um orifício pequeno obtêm-se reproduções claras e nítidas dos objetos, ao passo que com orifícios maiores, reproduções cada vez menos nítidas. É a figura invertida de uma vela.



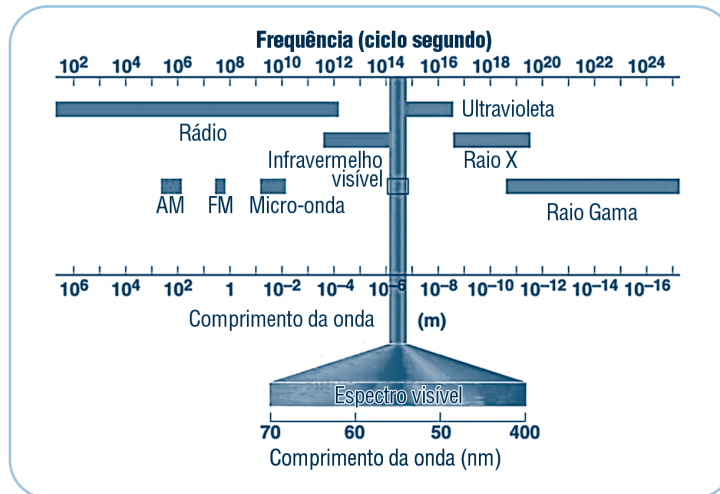
1. lente convergente de distancia focal  $15\text{ cm}$  e caixa de madeira com dimensões  $(9 \times 11 \times 15)\text{ cm}$ .

No centro de uma das faces menores deve ser feito um orifício de diâmetro  $3,5\text{ cm}$ , por onde passa o tubo que suporta a lente.

A tampa de papelão cobre  $2/3$  da superfície da face superior, onde se localiza o vidro fosco ou papel manteiga. Um espelho plano é disposto a  $45^\circ$ . Observe as três primeiras fotos de minha câmara ‘oficial’.

**Com base no exposto acima e a partir da figura dentro desta atividade, tente construir sua própria câmara escura.**

A partir do espectro eletromagnético escolhemos algumas frequências específicas para apresentá-las mais detalhadamente.



Fonte: <<http://omnis.if.ufrj.br/~boschi/ensino/basico/Fisica4/imagens/memspec.JPG>>. Acesso em: 19 mar. 2009.

Figura 10 – O espectro eletromagnético.

Assim vejamos:

**Raios Gama** - Os raios Gama são liberados em explosões atômicas e têm comprimentos de onda ainda menores do que o tamanho dos átomos. São mais energéticos que os raios-X, e são conseqüentemente mais mortais. Atualmente, ainda não se sabe o limite de energia que os raios Gama podem conter. Eles são, até hoje, o comprimento de onda limite do espectro eletromagnético conhecido.

**Raios X** - Os Raios X foram descobertos pelo físico alemão Wilhelm Röntgen em 1901 que, por desconhecer a sua natureza, denominou-os “raios X”. Têm a propriedade de atravessar materiais de baixa densidade, como por exemplo, os nossos músculos, e de serem absorvidos por materiais de densidade mais elevada, como os ossos do nosso corpo. Essa propriedade permite que os raios-X sejam amplamente utilizados para se obter as radiografias. No mundo atual, os raios-X encontram uma série de outras aplicações como na pesquisa sobre a estrutura da matéria. Embora também possa ser utilizado para o tratamento de câncer, o excesso de exposição aos raios-X pode também danificar as células, causando essa doença.

**Ultravioleta** - Os raios Ultravioleta são ondas eletromagnéticas de frequências superiores à da luz violeta, podendo chegar até  $10^8$  Hz, porém são menos energéticas que os raios-X. Grande parte da radiação ultravioleta emitida pelo sol em direção ao nosso planeta é absorvida pela camada de ozônio, protegendo-nos, assim, dessa perigosa radiação eletromagnética. Esse tipo de radiação é emitido por átomos excitados, como nas lâmpadas de vapor de Hg (mercúrio),

acompanhando a luz por elas emitida. Dependendo da quantidade da radiação ultravioleta, podem ocorrer sérios danos à saúde como o câncer de pele.

**Luz visível** – A radiação visível é capaz de excitar as células fotossensíveis da retina do nosso olho, causando-nos a sensação da visão. Os seres vivos têm sensibilidade diferente para cada faixa do espectro. As abelhas e os beija-flores, por exemplo, conseguem enxergar frequências dentro da faixa do ultravioleta, o que os ajuda a localizar o néctar das flores. A “luz”, como comumente chamamos a parte visível do espectro eletromagnético constitui uma estreita faixa do espectro eletromagnético dividida em intervalos arbitrários e aproximados, pois não há limites nítidos entre as cores. A transição entre cores vizinhas se dá de maneira gradual, como se pode verificar em um arco-íris. A frequência da luz cresce do vermelho para o violeta nos seguintes intervalos de frequência:

Comprimento de Onda	Cor	Comprimento de Onda	Cor
0,65 m a 0,74 m	Vermelho	0,49 m a 0,54 m	Verde
0,59 m a 0,65 m	Laranja	0,42 m a 0,49 m	Azul
0,54 m a 0,59 m	Amarelo	0,36 m a 0,42 m	Violeta

**Infravermelho** - A radiação na faixa do infravermelho é emitida pelos átomos em vibração de um corpo aquecido. O calor abrasante que sentimos quando tomamos um banho de sol ou quando estamos próximos a uma lareira, é, em grande parte, devido à radiação infravermelha.

**Radar e Micro-ondas** - As frequências na faixa do radar e micro-ondas são utilizadas amplamente em telecomunicações, transportando sinais de dados. Como não são refletidas pela ionosfera, para serem captadas à longa distância, as micro-ondas são transmitidas por estações repetidoras ou via satélites. Também são utilizadas nos lares para aquecer alimentos nos chamados “fornos de micro-ondas”.

**Televisão e FM** - Nessa faixa de frequência operam os canais de televisão e as rádios FM.

**Ondas curtas e rádio** - As faixas de frequência das ondas curtas e rádio são utilizadas por diversos serviços tais como rádio-amadorismo, aeronáutica, bombeiros, polícia e rádio - táxis.

**Rádio AM** - 540 *kHz* a 1710 *kHz*. A faixa de rádio AM é reservada para a transmissão das rádios que operam com Amplitude Modulada. As ondas de rádio são facilmente refletidas pela camada ionizada da atmosfera (ionosfera) e por isso podem ser emitidas e captadas a grandes distâncias. Quando produzidas pelo homem, são provenientes de oscilações de elétrons em antenas metálicas. Essas ondas são habitualmente produzidas em circuitos eletrônicos e utilizadas para emissões de rádio e televisão.

# Leituras complementares

BARRETO, Ciclamio Leite; BORBA, Gilvan Luiz; MEDEIROS, Rui Tertuliano de. **Física e meio ambiente**. Natal: EDUFRN, 2006.

## Resumo

Nesta aula discutimos sobre como o som se propaga dentro do ouvido humano e das etapas que ele passa até ser interpretado pelo cérebro. Vimos também a unidade de medida de intensidade e discutimos como a intensidade do som nos afeta indo desde sensações agradáveis até a dor. Além disso, discutimos um pouco sobre a luz e o espectro eletromagnético

## Autoavaliação

1

Responda brevemente.

- a)** O que é e como funciona o tímpano?
- b)** O que caracteriza o ouvido interno?
- c)** O que é o labirinto? – Pesquise sobre a importância dele e o que significa o termo labirintite.

2

O que é um espectro? – Faça um espectro eletromagnético indicando a região do visível, do ultravioleta e do infravermelho.

3

O que é espectro eletromagnético? Quais suas principais faixas?

# Referências

HEWITT, Paul G. **Física conceitual**. São Paulo: Bookman, 2002.

SERWAY, R. A.; JEWETT JÚNIOR, J. W. **Princípios de física**. São Paulo: Ed. Thomson, 2003. v 4.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física**: ótica e física moderna: Sears e Zemansky. 10. ed. São Paulo: Addison- Wesley, 2003. v 4.

# Equações de Maxwell e a radiação eletromagnética

Aula

12



# Apresentação

**N**esta aula, você vai estudar as equações de Maxwell num contexto mais de ondas que de eletromagnetismo, mas sem esquecer as origens dessas equações que vêm de formalismos como de Gauss e Faraday. Vamos usar as equações de Maxwell para obter a equação da onda eletromagnética. Calcularemos a energia e o momento transportado pelas ondas eletromagnéticas.

Como as ondas eletromagnéticas transportam momento, elas exercem uma pressão sobre as superfícies materiais com as quais interagem, exercendo uma pressão de radiação. Tal fenômeno tem sido explorado por cientistas e engenheiros espaciais os quais têm desenvolvido naves que são impulsionadas por esse tipo de radiação. Nesse caso, temos veículos espaciais que se deslocam com acelerações muito baixas, mas por intervalos de tempo muito grande, o que permite uma velocidade final extremamente alta.

Você verá ainda que a velocidade da luz é independente do meio, só dependendo das constantes de permissividade elétrica e permeabilidade elétrica, e diferentemente das ondas numa corda ou num som, as ondas eletromagnéticas não precisam de um meio material para se propagarem.

Entretanto, apesar de diferentes, as ondas mecânicas e as ondas eletromagnéticas possuem muitas características comuns e veremos que são descritas com base na mesma linguagem.

## Objetivos



- 1 Reconhecer os termos das equações de Maxwell.
- 2 Deduzir a equação de uma onda eletromagnética simples se propagando no vácuo.
- 3 Construir soluções tipo ondas senoidais para as equações de Maxwell.
- 4 Analisar o comportamento do fluxo de energia (vetor de Poynting) e fluxo de momento de uma onda eletromagnética.

# A teoria eletromagnética e a luz

Desde a Grécia Antiga, filósofos e cientistas já se perguntavam sobre a natureza da luz. Uma das primeiras pessoas a questionar sobre a natureza da luz foi o filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.), que imaginava a luz como uma espécie de fluido imaterial que chegava aos nossos olhos, vindo dos objetos visíveis, através de ondas. Porém, foi somente em meados da Época Renascentista, no Século XVII – o século do florescimento da ciência – que surgiram vários trabalhos sobre os fenômenos relacionados com a luz e a sua própria natureza.

Isaac Newton (Figura 1), como você deve estar lembrado, acreditava que a luz consistia de um feixe de partículas, capaz de agir a distância, de maneira análoga à força gravitacional entre os corpos celestes. Porém, nem todos concordavam com o modelo corpuscular adotado por Newton. O holandês Christian Huygens (Figura 1) defendia ardorosamente um modelo ondulatório da luz. Segundo ele, a luz seria formada por ondas, cada cor correspondendo a um comprimento de onda próprio e com velocidade diferente, quando dentro de um prisma.

A disputa sobre a natureza e comportamento da luz foi aparentemente resolvida pelos trabalhos do físico James Clerk Maxwell (Figura 1), usando o conceito do éter, um fluido imponderável que permearia todo o Universo (**atenção** – não confunda o éter de Física com o éter, substância química, muito vendido em farmácias).

Maxwell mostrou que todas as propriedades conhecidas da luz poderiam ser explicadas através de quatro equações, hoje conhecidas como as equações de Maxwell. A validade da proposta da onda eletromagnética foi demonstrada mais tarde por Heinrich Rudolf Hertz (Figura 1), que foi fundamental para a invenção do rádio.



**Figura 1** – Principais figuras que contribuíram para o desenvolvimento da teoria da radiação eletromagnética.

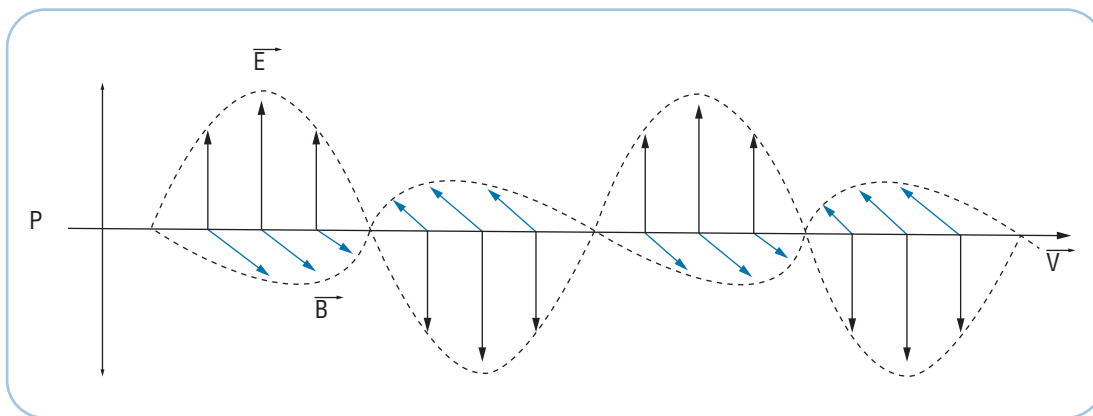


# Atividade 1

Pense um pouco e responda: qual o motivo das divergências entre os modelos de Newton e Huygens para a luz?

## A velocidade da luz e as equações de Maxwell

Uma onda eletromagnética é a coexistência de dois campos, o elétrico e o magnético, em movimento, um gerando o outro, enquanto viajam à velocidade da luz.



**Figura 2** – Os campos eletromagnéticos se propagam no vácuo como ondas transversais nas quais os vetores  $E$ ,  $B$ , e  $k$  formam um triedro ortogonal dextrógiro.

Esses campos, mostrados na Figura 2, oscilam em direções perpendiculares um em relação ao outro e na direção perpendicular à de propagação. Por isso, essas ondas são chamadas transversais. No vácuo, a velocidade da luz prevista pelas equações de Maxwell é:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad \text{Eq. 1}$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética e  $\epsilon_0$  é permissividade elétrica do vácuo.

**Atenção** – Note que o valor da velocidade da luz obtido na Equação 1 é o mesmo valor com o qual você já está acostumado desde o começo do curso, isto é, da ordem de 300.000 Km/s.



## Atividade 2

Sabendo que  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N m}^2)$  e que  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ . Determine a velocidade da luz no vácuo. Essas constantes foram vistas na disciplina de Eletromagnetismo. Elas dependem do referencial? Justifique a sua resposta.

# As equações de Maxwell

As equações de Maxwell são formadas por um conjunto de quatro equações que podem ser escritas na forma integral (isto é, equações que possuem integrais) ou na forma diferencial (equações que contêm derivadas parciais ou totais), mas seja qual for a formulação, elas descrevem os fenômenos eletromagnéticos. As equações de Maxwell são generalizações das equações anteriormente obtidas por Gauss (Lei de Gauss do eletromagnetismo), Faraday (Lei de Faraday) e Ampère (Lei de Ampère).

Note que desde sua formulação, essas equações passaram pelos mais severos testes experimentais e constituem-se num dos pilares da Física. As equações de Maxwell são representadas em duas formas: na forma diferencial, onde as equações são descritas por derivadas parciais de grandezas, como campos elétricos e magnéticos; e na forma integral, nessa formulação, os campos estão inseridos em integrais, ou seja, as equações envolvem integrais desses campos. Nessa disciplina, trabalharemos com a formulação integral. Nela, as quatro equações são as que se seguem.

## Lei de Gauss (eletricidade)

O fluxo do campo elétrico através de qualquer superfície fechada  $S$  é proporcional à quantidade de carga líquida interna ao volume limitado por essa superfície fechada. A constante de proporcionalidade é o inverso da permissividade elétrica  $\epsilon_0$ :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{Eq. 2}$$

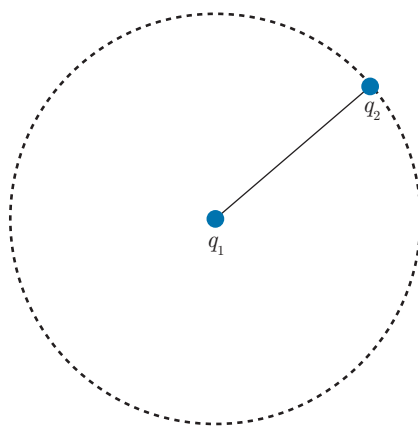
Em outras palavras, essa equação descreve o fato de que o número líquido de linhas de força que entram ou saem do volume limitado pela superfície  $S$  é proporcional à carga líquida envolta pela superfície (esta superfície imaginária é chamada de superfície gaussiana). Dentro da lei de Gauss está embutida a lei de Coulomb.

## Exemplo 1

Utilizando a lei de Gauss, determine o campo elétrico produzido por uma carga  $q_1$  a uma distância  $r$ , onde está situada outra carga puntiforme  $q_2$ .

### Solução

Considere a figura a seguir, onde a linha pontilhada representa uma esfera gaussiana de raio  $r$ , ou seja, chega tão perto quanto possível da carga  $q_2$ .



A lei de Gauss nos dá que:

$$\oint E \cdot ds = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Como a carga interna, a esfera gaussiana é  $q_1$  e como o campo elétrico é constante ao longo de toda a superfície gaussiana, podemos escrever:

$$E \oint ds = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

A integral de  $ds$  nos dá o volume da esfera de raio  $r$ , ou seja:

$$\oint ds = 4\pi r^2$$

E, portanto:

$$E4\pi r^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

Ou seja, o campo elétrico gerado por uma carga  $q_1$  a uma distancia  $r$  dela é dado por:

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{Eq. 3}$$



## Atividade 3

Utilizando os resultados do Exemplo 1, calcule a força que  $q_1$  exerce sobre  $q_2$  (**Dica** – como  $q_2$  é puntiforme, a força elétrica sobre ela é o valor da carga vezes o campo onde se encontra a carga).

Com o Exemplo 1 e a atividade 3, juntos conseguimos mostrar que a lei de Coulomb está embutida na lei de Gauss! A seguir você verá um pouco mais sobre a lei de Gauss e a de Faraday.

### Lei de Gauss do magnetismo

O fluxo do campo magnético através de qualquer superfície fechada  $S$  é nulo.

Ou seja, a lei de Gauss quando aplicada ao magnetismo descreve a observação experimental de que as linhas de campo magnético não divergem de qualquer ponto do espaço nem convergem para qualquer ponto do espaço. Ou seja, descreve a não observação do monopolo magnético (que seria equivalente à carga magnética).

## Lei de Faraday

O negativo da taxa de variação do fluxo do campo elétrico através de qualquer superfície aberta  $S$  limitada por uma curva  $C$ , é igual à integral de linha sobre essa curva, ou seja, é a força eletromotriz sobre esta curva:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{Eq. 4}$$

Observe que a superfície aberta  $S$ , limitada pela curva  $C$ , tanto pode ser plana quanto curva, e  $d\vec{l}$  é um pedacinho infinitesimal da curva  $C$ .

Observe que a parte esquerda da Equação 4 é a força eletromotriz,  $\varepsilon$ , e a parte direita é o negativo da taxa de variação do fluxo do campo magnético,  $\Phi_B$ , ou seja,

$$\varepsilon = -d\Phi_B / dt.$$



## Atividade 4



Suponha um anel de cobre submerso num campo que varia com o tempo. Use a lei de Lenz para dizer o sentido da corrente (ou da **fem**) quando:

- a)** o campo está aumentando com o tempo;
- b)** o campo está diminuindo com o tempo. Nos dois casos, o sentido do campo é o mesmo.

### FEM

Força Eletromotriz Induzida

a)

---

---

---

---

---

b)

---

---

---

---

---

## Lei de Ampère

Uma corrente elétrica e/ou a variação do fluxo do campo elétrico com o tempo através de uma superfície aberta  $S$  limitada pela curva  $C$  é igual à integral de linha do campo magnético sobre a curva  $C$ :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{Eq. 5}$$

Com esse breve resumo, estamos agora preparados para discutir a radiação eletromagnética no contexto da lei de Gauss.

# Como se produz uma onda eletromagnética

De acordo com as equações de Maxwell, uma carga puntiforme em repouso produz um campo elétrico estático e não gera um campo magnético. Entretanto, uma carga em movimento, que é uma corrente elétrica, produz um campo magnético.

Porém, as equações de Maxwell, também podem ser usadas para mostrar que, para uma carga puntiforme produzir ondas eletromagnéticas, é necessário que a carga esteja acelerada.

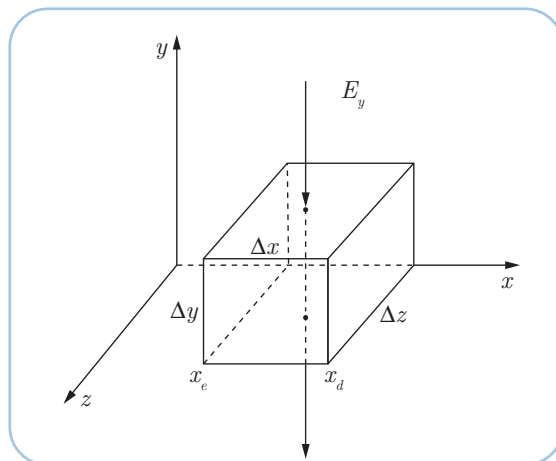
Um dos modos para fazer uma carga puntiforme emitir ondas eletromagnéticas consiste em fazê-la oscilar com **movimento harmônico simples** de maneira que ela possua uma aceleração em quase todos os pontos de sua trajetória (a exceção ocorre quando a partícula passa por sua posição de equilíbrio). Quando fazemos a carga oscilar, o campo também oscila, produzindo ondas que se propagam a partir da carga através do campo. Mesmo que a carga pare de oscilar, a oscilação do campo eletromagnético continua se propagando com a velocidade  $c$ .

Numa estação de rádio ou de televisão existem os transmissores e uma antena. A antena é um condutor de corrente elétrica, cujos elétrons executam um movimento vibratório, com determinada frequência. Esse movimento é produzido pelos circuitos dos transmissores. O movimento vibratório dos elétrons cria as ondas eletromagnéticas, características daquela estação, que se propagam em todas as direções do espaço. No aparelho de rádio ou de televisão também existem circuitos e uma antena. Na antena receptora, os elétrons também têm movimento vibratório, de mesma frequência que os elétrons da antena transmissora. Esse movimento é produzido pelas ondas eletromagnéticas captadas pela antena. Os elétrons da antena transmissora produzem a onda e esta faz os elétrons da antena receptora vibrarem com a mesma frequência.

## As equações de Maxwell e as ondas eletromagnéticas

**A**gora, mostraremos como as equações de Maxwell levam a uma equação de onda. Para nossos cálculos, consideraremos um campo eletromagnético no vácuo (sem correntes e sem cargas elétricas). Também vamos considerar que os campos elétrico,  $E$ , e magnético,  $B$ , são funções do tempo e da coordenada  $x$  (ondas planas).

Considere um elemento de volume no vácuo, como o indicado na Figura 3.



Fonte: <<http://www.rioss.com/downloads/eletmagn/fisica31.pdf>>. Acesso em: 3 abr. 2009.

**Figura 3** – Um elemento de volume no vácuo

Observando a Figura 3, calculemos o fluxo elétrico  $\Phi$  e através dos elementos de área:

área  $\Delta x \Delta y$ : campo  $E_z$  não depende de  $z$ . Então,  $\Phi_e = 0$

área  $\Delta x \Delta z$ : campo  $E_y$  não depende de  $y$ . Então,  $\Phi_e = 0$

área  $\Delta y \Delta z$ :  $\Phi_e = (E_{x_d} - E_{x_e}) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

Vamos calcular o fluxo do campo elétrico através da superfície fechada que envolve o volume da Figura 3 usando a lei de Gauss da eletricidade, ou seja:

$$\Phi_{total} = \Phi_{\Delta x \Delta y} + \Phi_{\Delta x \Delta z} + \Phi_{\Delta y \Delta z} = 0 + 0 + (E_{x_d} - E_{x_e}) \cdot \Delta y \cdot \Delta z = q_{int} / \epsilon_0, \quad \text{Eq. 6}$$

mas como não existem cargas internas à superfície, então,  $q_{int} = 0$ . Logo,

$$(E_{x_d} - E_{x_e}) = 0, \text{ ou seja,}$$

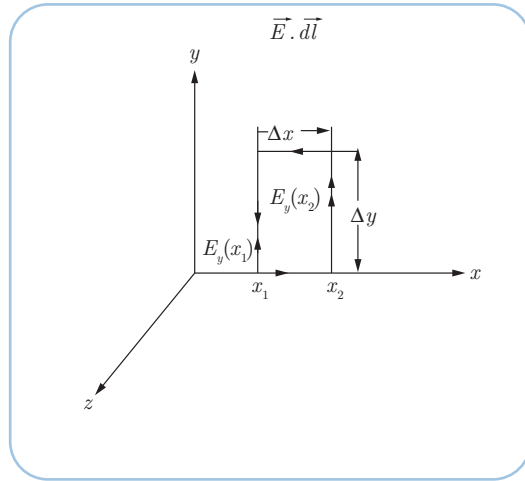
$$E_{x_d} = E_{x_e},$$

Assim, a componente  $E_x$  do campo elétrico não depende de  $x$ . Isso significa que a parte variável do campo elétrico (isto que depende de  $x$ ) é perpendicular à direção  $x$ .

Essa mesma análise pode ser feita para o campo magnético, onde chegaremos à conclusão de que a parte variável do campo magnético também é perpendicular à direção  $x$ .

A fim de analisarmos de uma maneira mais simples, vamos assumir que o campo elétrico está na direção  $y$ , isto é, a componente  $E_y$  varia com  $x$ .

Consideremos o retângulo de largura  $\Delta x$  e altura  $\Delta y$ , localizado no plano  $xy$ , como na Figura 4. Para aplicar a Lei de Faraday, vamos inicialmente calcular a integral de linha  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  ao redor do retângulo (este caminho faz o papel dos circuitos no quais aparecia a fem induzida).



**Figura 4** – Caminho retangular no plano  $xy$  sobre o qual é realizado o cálculo da integral de linha  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ .

$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= E_y(x_2)\Delta y - E_y(x_1)\Delta y \\
 &= [E_y(x_2) - E_y(x_1)]\Delta y = \Delta E_y \Delta y \\
 &= \frac{\Delta E_y}{\Delta x} \Delta y \Delta x \approx \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta y \Delta x
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 7}$$

As contribuições  $E_x(x_1) = E_{x1}$  e  $E_x(x_2) = E_{x2}$  se cancelam, pois elas são iguais, como visto acima, quando usamos a lei de Gauss.

Por outro lado, o fluxo do campo magnético através da área retangular  $\Delta x \Delta y$  é

$$\int_{\Delta x \Delta y} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_z \Delta x \Delta y,
 \tag{Eq. 8}$$

e a sua taxa de variação temporal é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\Delta x \Delta y} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = \frac{\partial (B_z \Delta x \Delta y)}{\partial t}.
 \tag{Eq. 9}$$

Então, substituindo as Equações 7 e 9 na lei de Faraday, teremos:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

onde  $C$  é o perímetro da área retangular e  $S$  é a área  $\Delta x \Delta y$ , resultando em:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta y \Delta x = -\frac{\partial (B_z \Delta x \Delta y)}{\partial t} \text{ ou } \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}
 \tag{Eq. 10}$$

Agora, supondo que exista a componente  $B_z$ , utilizamos a lei de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

E usando o mesmo procedimento que o anterior para cada lado da equação acima, encontramos que:

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \text{Eq. 11}$$

Derivando a Equação 10 com relação a  $x$  e a Equação 11 com relação a  $t$ , temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) \text{ e } \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right)$$

mas como  $B = B(x, t)$ , temos que questionar:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)$$

Então,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{Eq. 12}$$



## Atividade 5

Do mesmo modo que fizemos para o campo elétrico, sugerimos que você, derivando a Equação 10 com relação a  $t$  e a Equação 11 com relação a  $x$ , mostre que:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \quad \text{Eq. 13}$$

Observe a semelhança entre as Equações 12 e 13.

Voltemos, agora, a lembrar da aula 4 (Equação da onda e energia no movimento oscilatório). Nela, estudamos ondas mecânicas e sonoras e obtivemos a equação de uma onda que se propaga em uma corda. Para efeito de comparação, lá vimos que a equação da onda numa corda era:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

cuja solução é:

$$y = y_0 \text{ sen}(kx - \omega t) \quad \text{Eq. 14}$$

Assim, notamos que as Equações 12 e 13 são a representação matemática da equação de uma onda progressiva para o campo elétrico e para o campo magnético. Ou seja, essas equações representam ondas eletromagnéticas progressivas que se deslocam com uma velocidade:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \text{Eq. 15}$$

Como você já sabe, substituindo  $\epsilon_0 = 8,85418 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$  e  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}$  na Equação 15, encontramos que  $c = 2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , que é o valor da velocidade da luz no vácuo.



## Atividade 6

Compare as equações:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

E verifique que:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

onde  $v = c$ .

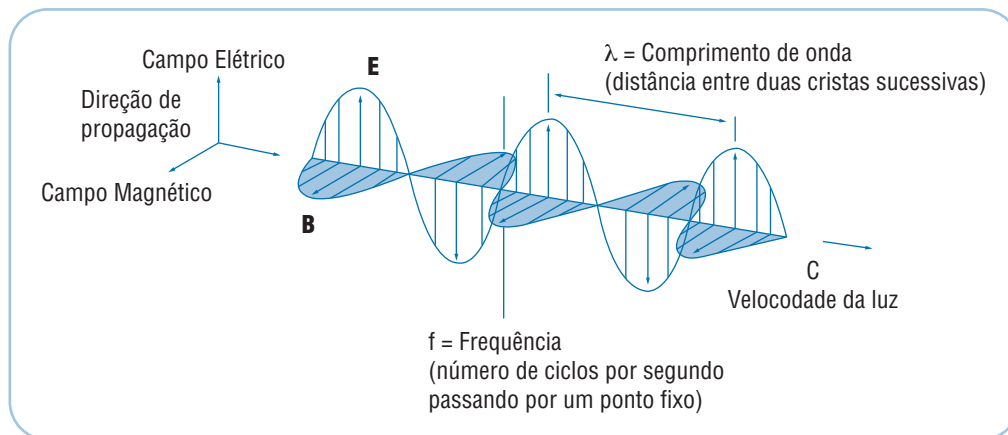
**(Dica –** As duas equações descrevem ondas semelhantes, e, portanto, a constante que aparece nas duas devem ser iguais para que elas descrevam a mesma onda).

As soluções das Equações 12 e 13 são do mesmo tipo que a da Equação 14, ou seja:

$$E_y = E_{y0} \text{sen}(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad B_z = B_{z0} \text{sen}(kx - \omega t) \quad \text{Eq. (16)}$$

Nessas expressões,  $E_{y0}$  e  $B_{z0}$  são os valores máximos dos campos; o número de onda é  $k = 2\pi/l$ , onde  $l$  é o comprimento de onda; e a frequência angular  $\omega = 2\pi f$ , onde  $f$  é a frequência.

A Figura 5 representa um instante de uma onda eletromagnética senoidal, linearmente polarizada, deslocando-se na direção  $x$  positiva. Os campos elétrico e magnético de onda plana são perpendiculares entre si e à direção de propagação.



**Figura 5** – Representação de uma onda eletromagnética senoidal plana, deslocando-se na direção  $x$  positiva com a velocidade  $c$ .

Ainda na Figura 5, podemos observar que o campo elétrico (variável) oscila na direção  $y$  enquanto o campo magnético (variável) oscila na direção  $z$ , conforme a onda se propaga, constituindo assim um campo eletromagnético. Note que o sentido de propagação da onda é o mesmo do produto vetorial  $E \times B$ .



## Atividade 7

Fazendo derivadas parciais da Equação 16, a do campo elétrico com relação a  $x$  e do campo magnético com relação a  $t$ , e substituindo na Equação 10, mostre que:

$$\frac{E_{y0}}{B_{z0}} = c$$

Da atividade 7, você deve ter concluído que:

$$\frac{E}{B} = c.$$

Eq. (17)

Ou seja, em todo instante, a razão entre o campo elétrico e o campo magnético de uma onda eletromagnética é igual à velocidade da luz.

Com isso, obtivemos as equações da onda eletromagnética a partir das equações de Maxwell e verificamos que esta onda se propaga no vácuo com a velocidade da luz.

Por fim, devemos nos lembrar que as ondas eletromagnéticas obedecem ao **princípio da superposição** porque as equações diferenciais envolvendo  $E$  e  $B$  são equações lineares.

## Exemplo 2

Considere um laser de dióxido de carbono que emite ondas eletromagnéticas senoidais, de comprimento de onda igual a  $10,6 \text{ mm}$ . Considere, ainda, esta radiação se propagando no vácuo, no sentido negativo do eixo  $Ox$ . O. Nessas condições, o campo  $E$  é paralelo ao eixo  $Oz$  e seu módulo máximo é igual a  $1,5 \text{ MV/m}$ .

Escreva as equações vetoriais para  $E$  e  $B$  em função do tempo e da posição.

## Solução

Como o sentido de propagação da onda é dado por  $E \times B$ , então, os sentidos de  $E$  e  $B$  devem ser tais que este produto vetorial esteja na direção  $Oz$  negativa. Um par de soluções para  $E$  e  $B$  que satisfazem essa exigência é:

$$\vec{E}(x, t) = E_{max} \hat{z} \text{ sen}(\omega t + kx) \quad \vec{B}(x, t) = B_{max} \hat{y} \text{ sen}(\omega t + kx)$$

Da Equação 17, temos que:

$$E_{max} = c B_{max}$$

Logo,

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \frac{1,3 \times 10^6 \text{ V/m}}{3,0 \times 10^8 \text{ m/s}} = 5,0 \times 10^{-3} \text{ T}$$

(Note que  $1 \text{ V} = 1 \text{ Wb/s}$  e  $1 \text{ Wb/m}^2 = 1 \text{ T}$ )

Do enunciado, temos que  $\lambda = 10,6 \times 10^{-6} \text{ m}$ . Portanto, o número de onda e a frequência angular são dados por:

$$k = 2\pi/\lambda = (2\pi \text{ rad}) (10,6 \times 10^{-6} \text{ rad/m})$$

$$\omega = (3,0 \times 10^8 \text{ m/s}) (5,93 \times 10^5 \text{ rad/m})$$

$$= 1,78 \times 10^{14} \text{ rad/s.}$$

Substituindo esses valores nas funções de onda vetoriais, obtemos:

$$\vec{E}(x, t) = (1,5 \times 10^6 \text{ V/m}) \hat{z} \text{ sen} [(1,78 \times 10^{14} \text{ rad/s})t + (5,93 \times 10^5 \text{ rad/m})x],$$

$$\vec{B}(x, t) = (5,0 \times 10^{-3} \text{ T}) \hat{y} \text{ sen} [(1,78 \times 10^{14} \text{ rad/s})t + (5,93 \times 10^5 \text{ rad/m})x].$$

# Leituras complementares

JAMES Clerk Maxwell. Disponível em: <[http://www.knowledgerush.com/kr/encyclopedia/James\\_Clerk\\_Maxwell/](http://www.knowledgerush.com/kr/encyclopedia/James_Clerk_Maxwell/)>. Acesso em: 13 abr. 2009.

Encontre neste link, a biografia resumida de J. C. Maxwell.

WIKIPÉDIA. **Heinrich Rudolf Hertz**. Disponível em: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Heinrich\\_Rudolf\\_Hertz](http://pt.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Rudolf_Hertz)>. Acesso em: 13 abr. 2009.

Acessando este link, você encontrará a biografia resumida de H. Hertz.

## Resumo

Nesta aula, estudamos as equações de Maxwell do eletromagnetismo e obtivemos equações do tipo “equação de ondas” para a radiação eletromagnética. Também aprendemos a obter as expressões para o transporte de energia, o momentum da radiação eletromagnética e fizemos algumas aplicações desse formalismo.

## Autoavaliação

1

Uma onda eletromagnética tem seus vetores  $E$  e  $B$  dados por:

$E = 3i + j + k$  e  $B = i - j + 5k$ . Determine a direção de propagação dessa onda.

2

A radiação eletromagnética emitida no vácuo por uma fonte tem comprimento de onda de  $6300 \text{ \AA}$ .

**a)** Determine o número de ondas e a frequência dessa radiação.

**b)** Em que faixa do espectro eletromagnético ela se encontra?

3

Considere a Equação 12 e suponha um campo elétrico  $E_y$ , representado pela Equação 14. Determine uma expressão para  $K$  a partir da substituição de  $E_y$  na equação diferencial.

# Referências

AS EQUAÇÕES de Maxwell e as ondas eletromagnéticas. Disponível em: <<http://www.rioss.com/downloads/eletmagn/fisica31.pdf>>. Acesso em: 3 abr. 2009.

ENERGIA e momento linear do campo eletromagnético: módulo 1: aula 14. Disponível em: <<http://profs.if.uff.br/moriconi/cederj/aula14.pdf>>. Acesso em: 3 abr. 2009.

MUNDIM, Kleber C. Aula 2: a luz como um fenômeno eletromagnético. In: MUNDIM, Kleber C. **Curso de física virtual**. Brasília: UNB, 2006a. Disponível em: <<http://www.unb.br/iq/kleber/CursosVirtuais/qq/aula-2/aula-2.htm>>. Acesso em: 3 abr. 2009.

MUNDIM, Kleber C. Física 4: eletromagnetismo (Maxwell), ótica e física moderna: aula 8. In: MUNDIM, Kleber C. **Curso de física virtual**. Brasília: UNB, 2006b. Disponível em: <<http://www.unb.br/iq/kleber/EaD/Fisica-4/Aulas/Aula-8/aula-8.html>>. Acesso em: 3 abr. 2009.

MUNDIM, Kleber C. Física 4: eletromagnetismo (Maxwell), ótica e física moderna: aula 9. In: MUNDIM, Kleber C. **Curso de física virtual**. Brasília: UNB, 2006c. Disponível em: <<http://www.unb.br/iq/kleber/EaD/Fisica-4/Aulas/Aula-9/aula-9.html>>. Acesso em: 3 abr. 2009.

SANTANA, Everton G. de. **O espectro eletromagnético**. Disponível em: <<http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/cuantica/negro/espectro/espectro.htm>>. Acesso em: 3 abr. 2009.

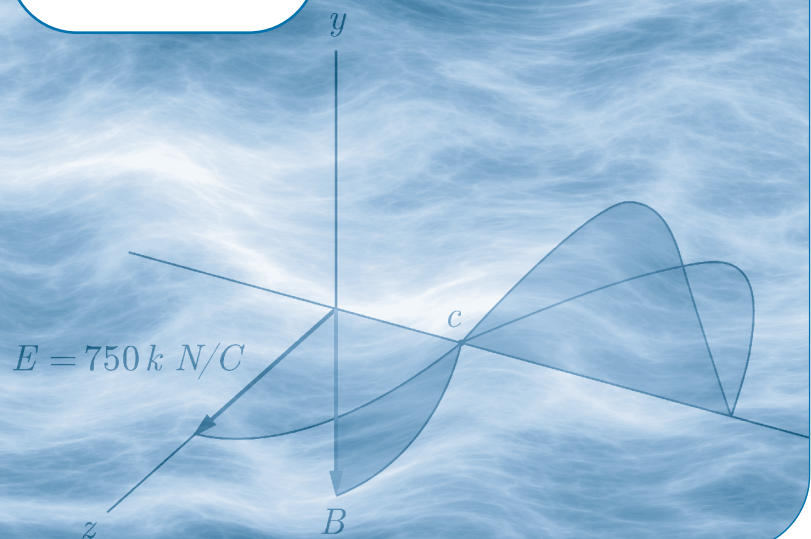
SERWAY, R. A.; JEWETT JÚNIOR, J. W. **Princípios de física**. São Paulo: Ed. Thomson, 2003. v 4.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física**: eletromagnetismo: Sears e Zemansky. 10. ed. São Paulo: Addison- Wesley, 2003. v 4.

# Equações de Maxwell e o transporte de energia

Aula

13



# Apresentação

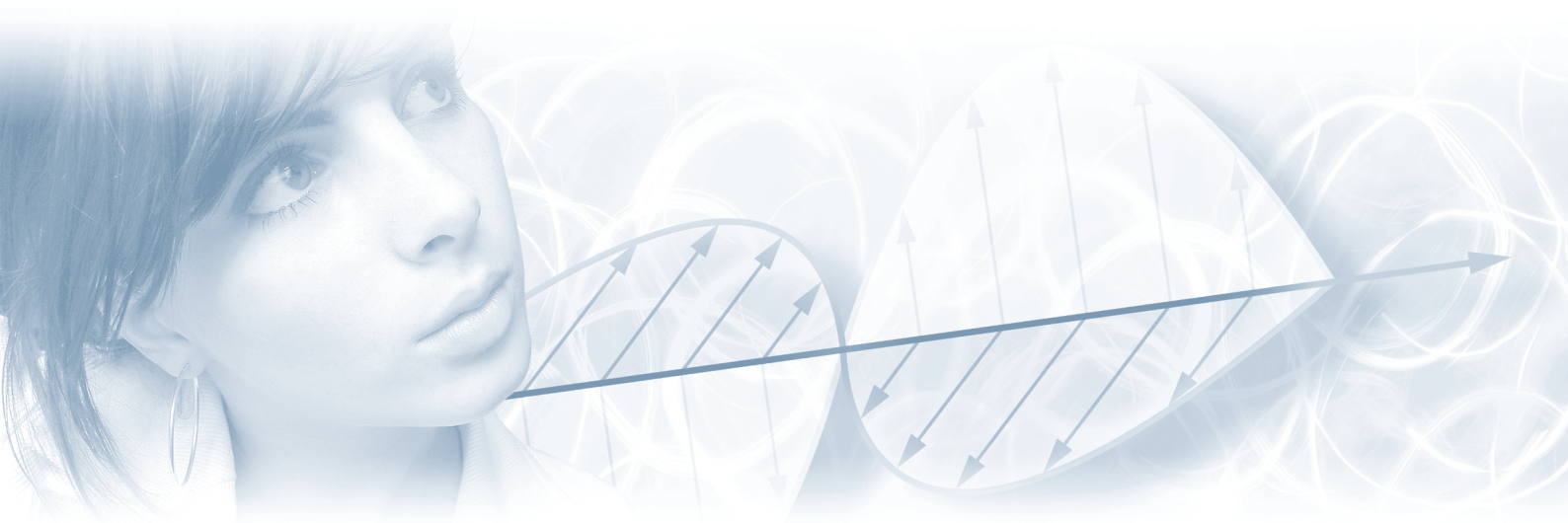
Na aula 12 (Equações de Maxwell e a radiação eletromagnética), você estudou o formalismo matemático relacionado às ondas eletromagnéticas que, como você deve estar lembrado, são ondas progressivas que transportam energia de uma região para outra.

Nesta aula, você vai estudar a descrição de como se dá esse transporte de energia, o qual está relacionado com os campos **E** e **B** que avançam se deslocando para uma região onde não existia nenhum campo, à medida que eles avançam, transportam uma densidade de energia **u**. Podemos descrever esse transporte de energia em termos da energia transferida **por unidade de tempo e por unidade de área da seção reta**, perpendicular à direção da propagação da onda, ou seja, em termos da **potência por unidade de área** perpendicular à direção de propagação.

Gostaríamos de lembrar que, como esta aula está muito ligada a aula anterior (aula 12), seria pertinente você manter o material da referida aula sempre por perto principalmente no momento da autoavaliação. Boa aula!

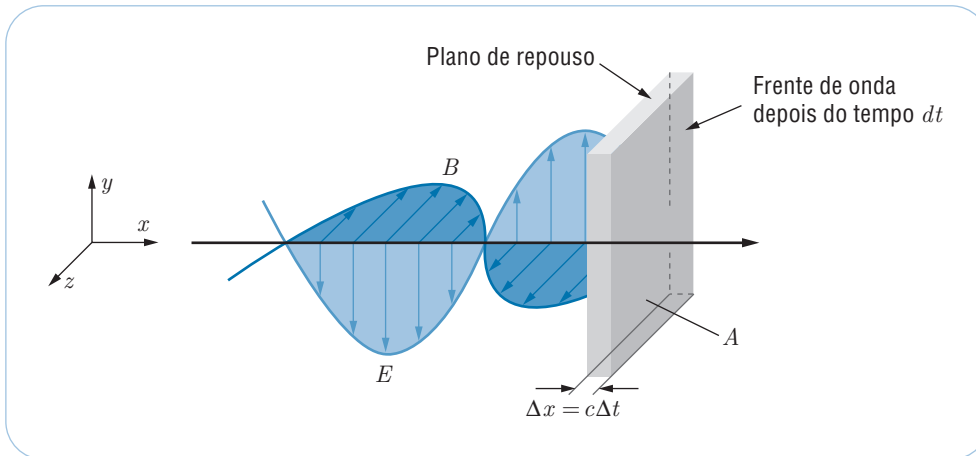
## Objetivos

- 1 Descrever os mecanismos de transporte de energia por ondas eletromagnéticas que se propagam no vácuo.
- 2 Calcular o momento linear associado à radiação eletromagnética.



# Fluxo de energia e vetor de Poynting

Considere um plano em repouso perpendicular ao eixo  $Ox$ , coincidente com a frente de onda em um dado instante, conforme mostrado na Figura 1.



**Figura 1** – Propagação de uma frente de onda eletromagnética, depois de se deslocar durante um intervalo de tempo  $dt$  atravessa um plano de área  $A$  em repouso. O volume entre o plano e a frente de onda contém uma energia eletromagnética igual a  $uAc dt$ .

Ao se propagar, a frente de onda eletromagnética ilustrada na Figura 1, depois de se deslocar durante um intervalo de tempo  $dt$  atravessará um plano de área  $A$  em repouso. O volume formado pelo plano de área  $A$  e o espaço percorrido pela onda durante o intervalo de tempo  $dt$  é dado por  $dV = Acdt$  e contém uma quantidade de energia eletromagnética igual a  $uAc dt$ .

Quando, em um tempo  $dt$ , depois de atingir o plano, a frente de onda terá se movido para a direita por uma distância  $dx = c dt$ . A energia transportada para esse elemento de volume será dada por:

$$dU = u dV = (\epsilon_0 E^2)(A c dt) \quad \text{Eq. 1}$$

Essa energia passou através da área  $A$  em um tempo  $dt$ . Assim, o fluxo de energia por unidade de tempo e por unidade de área, o qual designaremos pela letra  $S$ , é dado por:

$$S = \frac{1}{A} \frac{dU}{dt} = \epsilon_0 c E^2 \quad \text{Eq. 2}$$

Você deve ter percebido que essa equação depende apenas do campo elétrico. Na atividade 1, você terá a oportunidade de verificar que podemos obter uma equação semelhante a esta envolvendo apenas o campo magnético. Ou seja, podemos dizer que essa energia está armazenada tanto no campo elétrico quanto no magnético ou, usando uma linguagem mais atual, a energia está armazenada no campo eletromagnético.



# Atividade 1

Mostre que a equação 2 também pode ser escrita como

$$S = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{cB^2}{\mu_0}$$

Usando as equações 15 e 21, da aula 12, podemos obter alternativamente também as seguintes expressões para o fluxo de energia eletromagnética:

$$S = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{E B}{\mu_0} \quad \text{Eq. 3}$$

No sistema internacional de medidas a grandeza,  $S$  tem unidade  $J/s \cdot m^2$  ou  $W/m^2$  (watt por metro quadrado).

Como as grandezas campo elétrico  $E$  e campo magnético  $B$  são vetoriais, podemos reescrever o produto vetorial de  $E$  por  $B$  como:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad \text{vetor de Poynting no vácuo} \quad \text{Eq. 4}$$

Este vetor, descrito pela equação 4, é conhecido como o **vetor de Poynting**, e apresenta as seguintes propriedades:

- a direção de  $S$  é a direção de propagação da onda eletromagnética;
- o módulo de  $S$  é proporcional à energia transportada pela onda.

O valor médio de  $S$  em um dado ponto é a chamada *intensidade*,  $I = S_{med}$ , da radiação no ponto considerado. A unidade de  $I$  no SI é a mesma de  $S$ :  $W/m^2$ . Para o caso da onda senoidal,

$$E_y = E_0 \text{sen}(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad B_z = B_0 \text{sen}(kx - \omega t) \quad \text{Eq. (5)}$$

obtemos uma expressão que envolve a média temporal de  $\text{sen}^2(kx - \omega t)$ , que é igual a  $1/2$ . Desse modo, o valor médio de  $S$ , ou seja, a intensidade da onda é:

$$I = S_{med} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \quad \text{Eq. (6)}$$

que é a intensidade de uma senoidal no vácuo.



## Atividade 2

Mostre que as equações 6 são todas equivalentes. Responda ainda, em relação aos vetores  $E$  e  $B$ , em que direção sempre aponta o vetor de Poynting?

Uma propriedade importante do vetor de Poynting surge do fato dele ser dado pelo produto vetorial dos vetores  $E$  e  $B$ , ou seja, ele sempre será perpendicular ao plano gerado por esses vetores, assim uma onda eletromagnética que eventualmente transfere energia ao longo do eixo  $z$  positivo e que em um instante de tempo tenha seu vetor campo elétrico apontando na direção  $x$  positiva terá obrigatoriamente seu vetor  $B$  apontando na direção  $y$  (positivo).

## Exemplo 1

Consideremos uma onda senoidal como a descrita pela equação 5, suponhamos que  $E_o = 100 \text{ V/m} = 100 \text{ N/C}$  (esse é o valor típico do campo elétrico na superfície do nosso planeta). Calculemos o valor de  $B$ , a densidade de energia e a taxa do fluxo de energia  $S$  por unidade de área

### Solução

Já sabemos qual a relação entre as intensidades dos vetores  $E$  e  $B$ , ou seja,

$$E = cB$$

Assim, podemos encontrar facilmente o valor da amplitude de  $B$

$$B = \frac{E}{c} = \frac{100 \text{ V/m}}{3,00 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3,33 \times 10^{-7} \text{ T}$$

Usando a equação 1 ou a 15 da aula anterior podemos obter a densidade de energia, ou seja,

$$\begin{aligned} u &= \epsilon_0 E^2 = (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(100 \text{ N/C})^2 \\ &= 8,85 \times 10^{-8} \text{ N/m}^2 = 8,85 \times 10^{-8} \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

Por fim, a taxa do fluxo de energia, ou seja, o módulo do vetor de Poynting, é calculada através da equação 3.

$$\begin{aligned} S &= \frac{E B}{\mu_0} = \frac{(100 \text{ V/m})(3,33 \times 10^{-7} \text{ T})}{4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}} \\ &= 26,5 \text{ V} \cdot \text{A/m}^2 = 26,5 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

Ou, de modo alternativo,

$$\begin{aligned} S &= (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})(100 \text{ N/V})^2 \\ &= 26,5 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

Agora que você acompanhou um exemplo de aplicação do conceito de fluxo de energia, tente realizar a seguinte atividade.



## Atividade 3

Consideremos uma onda senoidal como a descrita pela seguinte equação:

$$E_y = E_0 \cos(kx + \omega t)$$

$$B_z = B_0 \cos(kx + \omega t)$$

Suponha que  $E_0 = 300 \text{ V/m} = 100 \text{ N/C}$ .

- a) Calcule o valor de B.
- b) A densidade de energia e a taxa do fluxo de energia S por unidade de área.

## Exemplo 2

Uma estação de rádio na superfície terrestre irradia ondas senoidais com uma potência média total igual a  $580 \text{ kW}$ . Supondo que a emissora irradie uniformemente em todas as direções acima do solo, determine as amplitudes  $E_{msx}$  e  $B_{max}$  detectadas por um satélite a uma distância de  $100 \text{ km}$  da antena.

### Solução

Imaginemos uma superfície hemisférica centralizada na antena emissora com um raio de  $100 \text{ km} = 1,00 \times 10^5 \text{ m}$  e área

$$A = 2\pi R^2 = 2\pi (1,00 \times 10^5 \text{ m})^2 = 6,28 \times 10^{10} \text{ m}^2.$$

Toda potência irradiada passa através dessa superfície, de modo que a potência média por unidade de área, ou seja, a intensidade é:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{2\pi R^2} = \frac{5,00 \times 10^4 \text{ W}}{6,28 \times 10^{10} \text{ m}^2} = 7,96 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2$$

De acordo com a equação 06,  $I = S_{med} = E_{max}^2/2 \mu_0 c$ ; logo

$$\begin{aligned} E_{max} &= \sqrt{2\mu_0 c I} \\ &= \sqrt{2(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})(7,96 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2)} \\ &= 2,45 \times 10^{-2} \text{ V/m} \end{aligned}$$

Como

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = 8,17 \times 10^{-11} \text{ T}$$

Agora que você acabou de estudar o exemplo de aplicação das equações de onda para discutir a propagação de um sinal eletromagnético, tente resolver a atividade a seguir, seguindo os mesmos passos do exemplo.



## Atividade 4

Um radioamador opera uma estação de rádio que irradia ondas senoidais com uma potência média total igual a  $690 \text{ kW}$ .

Supondo que a emissora irradie uniformemente em todas as direções acima do solo, determine as amplitudes  $E_{msx}$  e  $B_{max}$  detectadas por outro colega radioamador, situado em uma cidade distante  $300 \text{ km}$  da antena do radioamador. Que hipótese simplificadora devemos usar nesse caso?



# Fluxo do momento linear eletromagnético e pressão de radiação

Além de transportarem energia, as ondas eletromagnéticas transportam **momento linear**  $p$ . A densidade de momento linear (momento linear  $dp$  por unidade de volume  $dV$ ) é dada por:

$$\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2} \quad \text{Eq. 7}$$

Existe uma correspondente taxa de fluxo do momento linear. O volume  $d$  ocupado por uma onda eletromagnética que passou através de uma área  $A$  no tempo  $dt$  é dado por  $dV = A C dt$ . Usando a equação anterior, temos então que o fluxo de momento linear por unidade de área é dado por:

$$\frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c} \quad \text{Eq. 8}$$

O momento linear é uma propriedade do campo. Ele não está associado a algum tipo de partícula, mas quando a onda eletromagnética interage com alguma superfície (sendo absorvida ou refletida), o momento linear é transferido para essa superfície, através da interação (força) dos campos elétrico e magnético com os elétrons da superfície. A onda eletromagnética atua sobre uma superfície (e não sobre um ponto específico), então, a interação é sobre uma área (ou seja, a força é sobre uma área). Isso corresponde a uma pressão (força sobre uma área): **a pressão de radiação**.

A força média produzida pela onda, ou pressão de radiação  $P_{rad}$ , é igual ao valor médio de  $dp/dt$  dividido pela área  $A$  da superfície absorvedora, que de acordo com a equação 8 é dada por:

$$p_{rad} = \frac{S_{med}}{c} = \frac{I}{c} \quad \text{pressão de radiação, onda totalmente absorvida} \quad \text{Eq. 9}$$

Quando a onda é totalmente refletida, a variação do momento linear é duas vezes maior e a pressão de radiação é dada por:

$$p_{rad} = \frac{2S_{med}}{c} = \frac{2I}{c} \quad \text{pressão de radiação, onda totalmente refletida} \quad \text{Eq. 10}$$

No caso da luz solar direta, antes dela atravessar a atmosfera, o valor de  $I$  (ou  $S_{med}$ ) é aproximadamente igual a  $1,4 \text{ k W/m}^2$ . O valor médio da pressão de radiação sobre uma superfície totalmente absorvedora é obtido a partir da equação 9, ou seja,

$$p_{rad} = \frac{I}{c} = \frac{1,4 \times 10^3 \text{ W/m}^2}{3,0 \times 10^8 \text{ /s}} = 4,7 \times 10^{-6} \text{ Pa}$$

No caso de uma superfície totalmente refletora, o valor da pressão seria o dobro (equação 9), isto é,  $2 I/c = 9,4 \times 10^{-6} \text{ Pa}$ .

## Exemplo 3

Um satélite em órbita em torno da Terra possui um painel coletor de energia solar com área igual a  $4,0 \text{ m}^2$ . Sabendo que a luz solar é perpendicular à superfície do painel e é totalmente absorvida, calcule a potência solar média absorvida e a força média exercida pela pressão da radiação.

### Solução

Vimos, anteriormente, que a intensidade  $I$  do Sol é  $1,4 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ . Embora a luz solar não seja uma onda senoidal simples, podemos ainda usar o fato de que a potência média  $P$  é dada pela intensidade vezes a área:

$$P = Ia = (1,4 \times 10^3 \text{ W/m}^2)(4,0 \text{ m}^2) = 5,6 \times 10^3 \text{ W} = 5,6 \text{ kW}.$$

Observe que essa potência é grande e uma parte dela pode ser usada para fornecer energia para os equipamentos no interior do satélite.

Para resolver a segunda parte do problema, vamos utilizar o resultado que também encontramos anteriormente de que a pressão de radiação solar é  $p_{rad} = 4,7 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$ . Então, a força média  $F$  é:

$$F = p_{rad} A = (4,7 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2)(4,0 \text{ m}^2) = 1,9 \times 10^{-5} \text{ N}.$$

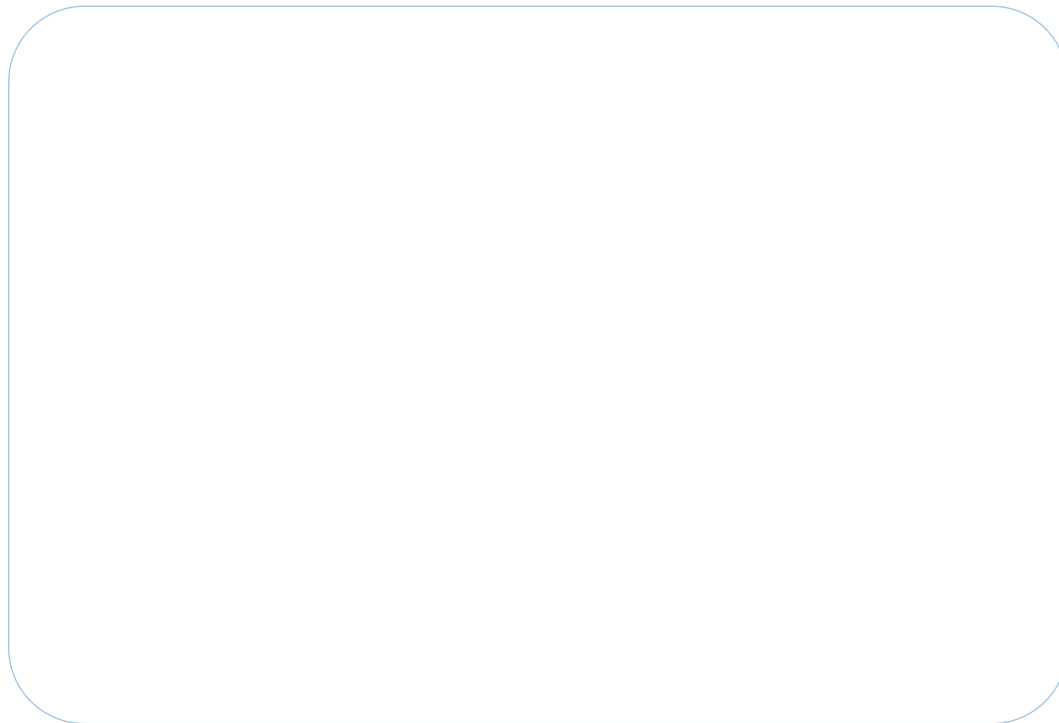
Apesar da força ser pequena, ela tem um efeito sensível sobre a órbita de um satélite artificial, devendo, portanto, ser considerada nos projetos desses satélites.



## Atividade 5

Uma fonte pontual de radiação eletromagnética fornece uma potência média de  $800 \text{ W}$ . Calcule os valores máximos dos campos elétrico e magnético em um ponto a  $3,50 \text{ m}$  da fonte.

**Dica** – Para ondas propagando-se uniformemente a partir de uma fonte pontual, a energia da onda a uma distância  $r$  da fonte é distribuída sobre a área da superfície de uma esfera imaginária de raio  $r$ . Então, a intensidade é a potência média dividida por  $4\pi r^2$ .



## Leituras complementares

JAMES Clerk Maxwell. Disponível em: <[http://www.knowledgerush.com/kr/encyclopedia/James\\_Clerk\\_Maxwell/](http://www.knowledgerush.com/kr/encyclopedia/James_Clerk_Maxwell/)>. Acesso em: 13 abr. 2009.

Encontre neste *link*, a biografia resumida de J. C. Maxwell.

WIKIPÉDIA. **Heinrich Rudolf Hertz**. Disponível em: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Heinrich\\_Rudolf\\_Hertz](http://pt.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Rudolf_Hertz)>. Acesso em: 13 abr. 2009.

Acessando este *link*, você encontrará a biografia resumida de H. Hertz

## Resumo

Nesta aula, você estudou como, a partir das equações de Maxwell, chegamos à equação de transporte de energia por ondas eletromagnéticas, vetor de Poynting, depois verificamos que podemos associar a radiação eletromagnética à pressão magnética e quantidade de movimento.

# Autoavaliação

1

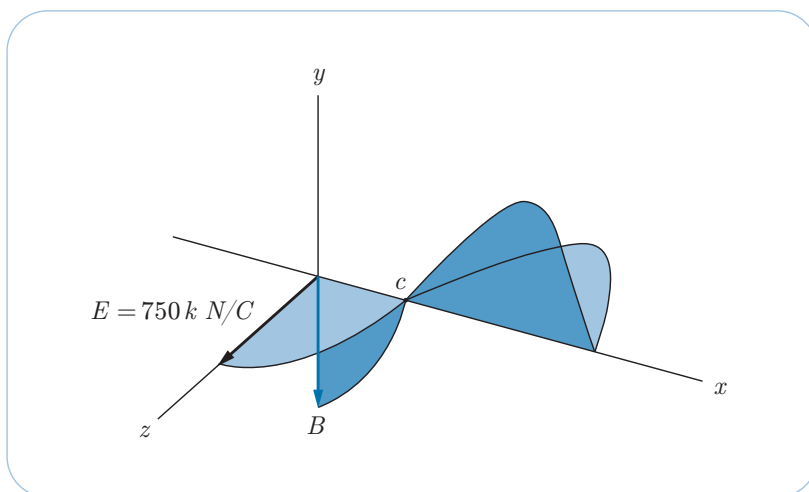
Responda as questões a seguir.

- a) O que é uma onda eletromagnética?
- b) Como é produzida, de modo geral?
- c) Por que a radiação eletromagnética é chamada “onda”?
- d) Existem partículas materiais oscilando nessa onda como acontece com as ondas sonoras?

2

Uma onda eletromagnética senoidal com frequência de  $40,0 \text{ MHz}$  propaga-se no vácuo na direção  $x$ , como mostrado na Figura 2. Em um certo ponto e um certo instante, o campo elétrico tem o seu valor máximo de  $750 \text{ N/C}$  e está ao longo do eixo  $z$ .

- a) Determine o comprimento de onda e o período dessa onda.
- b) Calcule a magnitude e a direção do campo magnético quando  $E = 750 \text{ kN/C}$ .
- c) Escreva as funções de onda do campo elétrico e do campo magnético para essa onda.



**Figura 2** – Deslocamento de uma onda eletromagnética plana em um instante qualquer, quando o campo elétrico esta apontando para a direção  $z$  e o campo magnético aponta para a direção  $y$  negativa e a onda se propaga na direção  $x$  positiva.

**3**

O Sol fornece cerca de  $1000 \text{ W/m}^2$  de energia para a superfície da Terra.

- a)** Calcule a potência incidente total sobre um telhado de  $8,00 \text{ m} \times 20,0 \text{ m}$ .
- b)** Determine a pressão de radiação e a força de radiação sobre o telhado supondo que sua cobertura é um absorvedor perfeito.

**4**

O campo elétrico de uma onda eletromagnética plana se propagando no vácuo é descrito, em unidades *SI*, pela equação:

$$E = 100 \text{ sen}(1,00 \times 10^7 x - \omega t) \hat{y}$$

- a)** Determine o comprimento de onda,  $\lambda$ , e a frequência,  $f$ , da onda.
- b)** Determine o campo magnético da onda.
- c)** Ache as amplitudes dos campos elétrico e magnético da onda.
- d)** Determine o vetor de Poynting,  $S$ .

**5**

Um transmissor de rádio emite energia isotropicamente com uma potência média de  $250 \text{ kW}$ . Calcule o valor médio do vetor de Poynting (intensidade da onda) a uma distância de  $8 \text{ km}$  do transmissor.

**6**

Num certo ponto da Terra, o valor médio quadrático do campo magnético da radiação solar é de  $1,8 \mu \text{ T}$ . A partir dessa informação, calcule:

- a)** o valor médio quadrático do campo elétrico;
- b)** a densidade média de energia;
- c)** o valor médio do vetor de Poynting da radiação solar.

**7**

Um laser de hélio-neônio opera com uma potência de  $5 \text{ mW}$ .

- a)** Determine a amplitude do campo elétrico numa região onde a seção reta do feixe de luz é de  $4 \text{ mm}^2$ .
- b)** Calcule a energia eletromagnética contida em  $1 \text{ m}$  de comprimento do feixe.

**8**

Numa certa região, a intensidade de uma onda de rádio é de  $25 \text{ Wm}^2$ . Uma superfície plana de área  $A$ , perfeitamente absorvedora, se encontra perpendicular à direção de propagação da onda. Calcule a pressão de radiação sobre a superfície.

**9**

Considere que a Terra absorve toda a radiação solar incidente sobre ela.

- a)** Calcule a força sobre a Terra a qual se deve à pressão de radiação.
- b)** Compare o resultado com a força de atração gravitacional do Sol sobre a Terra.

**Dados** – Constante solar  $I_s = 1340 \text{ W/m}^2$ , raio da Terra  $R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ ,  
Massa da Terra  $M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ , raio da órbita terrestre  $R = 1,4896 \times 10^{11} \text{ m}$ ,  
Massa do Sol  $M_s = 1,991 \times 10^{30} \text{ kg}$ , Constante Gravitacional  $G = 6,6726 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .

**10**

Certa comunidade pretende construir uma instalação para converter radiação solar em energia elétrica. A potência necessária é  $1 \text{ MW}$  e o sistema a ser montado tem uma eficiência de 30%. Qual deve ser a área efetiva da instalação, com uma superfície perfeitamente absorvedora, supondo-se que o fluxo de energia solar seja constante e igual a  $1 \text{ kW/m}^2$ ?

**11**

Um grupo de astronautas planeja impulsionar uma nave espacial mediante uma “vela” que reflita a radiação solar. A vela é perfeitamente refletora e está orientada com o plano perpendicular em direção ao sol e tem as dimensões  $1 \text{ km} \times 1,5 \text{ km}$ .

- a)** Qual a aceleração máxima que pode ser imprimida a uma nave espacial de 4 toneladas?

Considere a intensidade da radiação solar incidente como  $1340 \text{ W/m}^2$ .

## Referências

AS EQUAÇÕES de Maxwell e as ondas eletromagnéticas. Disponível em: <<http://www.rioss.com/downloads/eletmagn/fisica31.pdf>>. Acesso em: 3 abr. 2009.

ENERGIA e momento linear do campo eletromagnético: módulo 1: aula 14. Disponível em: <<http://profs.if.uff.br/moriconi/cederj/aula14.pdf>>. Acesso em: 3 abr. 2009.

MUNDIM, Kleber C. Aula 2: a luz como um fenômeno eletromagnético. In: MUNDIM, Kleber C. **Curso de física virtual**. Brasília: UNB, 2006a. Disponível em: <<http://www.unb.br/iq/kleber/CursosVirtuais/qq/aula-2/aula-2.htm>>. Acesso em: 3 abr. 2009.

MUNDIM, Kleber C. Física 4: eletromagnetismo (Maxwell), ótica e física moderna: aula 8. In: MUNDIM, Kleber C. **Curso de física virtual**. Brasília: UNB, 2006b. Disponível em: <<http://www.unb.br/iq/kleber/EaD/Fisica-4/Aulas/Aula-8/aula-8.html>>. Acesso em: 3 abr. 2009.

MUNDIM, Kleber C. Física 4: eletromagnetismo (Maxwell), ótica e física moderna: aula 9. In: MUNDIM, Kleber C. **Curso de física virtual**. Brasília: UNB, 2006c. Disponível em: <<http://www.unb.br/iq/kleber/EaD/Fisica-4/Aulas/Aula-9/aula-9.html>>. Acesso em: 3 abr. 2009.

SANTANA, Everton G. de. **O espectro eletromagnético**. Disponível em: <<http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/cuantica/negro/espectro/espectro.htm>>. Acesso em: 3 abr. 2009.

SERWAY, R. A.; JEWETT JÚNIOR, J. W. **Princípios de física**. São Paulo: Ed. Thomson, 2003. v 4.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física: eletromagnetismo**: Sears e Zemansky. 10. ed. São Paulo: Addison- Wesley, 2003. v 4.

# Fenômenos ondulatórios

Aula

14



# Apresentação

**F**ruto da interação gravitacional entre a Terra e a Lua, bem como da dinâmica de nosso planeta, encontramos tanto no seio da parte sólida quanto nos mares e na atmosfera uma profusão de fenômenos ondulatórios que vão desde os vagalhões que ocorrem em alto-mar às ondas que lentamente quebram na praia ou os gigantescos tsunamis, ondas mecânicas que têm nos fascinado ao longo dos tempos, que são frutos de perturbações que ocorrem na crosta terrestre. A existência de ondas na atmosfera, a explicação do fenômeno das marés (que devemos a Newton e Euler), a explicação das ondas sísmicas e o grande esforço em prever a ocorrência desses fenômenos representam uma das grandes realizações do espírito humano. Nesta aula, você vai estudar alguns desses fenômenos ondulatórios, principalmente os relacionados com as ondas e marés oceânicas e as ondas sísmicas.

## Objetivos

- 1** Entender a razão da ocorrência de ondas de marés e a relação com o dinamismo do planeta.
- 2** Explicar como se formam as ondas no mar e como elas quebram.
- 3** Compreender as características básicas das ondas sísmicas.



# Ondas de marés

Um dos mais antigos e intrigantes fenômenos da natureza é o do movimento do mar. Esse movimento é caracterizado por uma grande oscilação diária (com período da ordem de 6 horas, as marés) e por oscilações de curto período, bastante aleatórias, chamadas genericamente de ondas. O motivo da existência das marés, bem como o modo como as ondas se formam, quebram e variam local e temporamente foram motivo de muita controvérsia até o advento dos “*Principia*” de Newton.



Fonte: www.sxc.hu. Acesso em: 4 maio 2009.

**Figura 1** – Ondas no mar, um dos grandes mistérios da natureza.

Hoje sabemos bastante sobre as ondas de marés e as ondas comuns, e somos capazes de explicar e prever muito de seus comportamentos. No entanto, fenômenos intrincados, como a ocorrência dos tsunamis, embora sejam muito entendidos, ainda são difíceis de serem previstos.

Mas, antes de discutirmos a Física das marés, vamos fazer um breve levantamento histórico sobre as ondas do mar e como isso influenciou a evolução da Física.



# A teoria das marés de Galileu

Uma das primeiras explicações do fenômeno das marés foi dada por Galileu, que tentou relacionar esse movimento com o movimento da Terra, defendido tão ardorosamente por ele.

Para apresentar essas ideias, Galileu escreveu um texto intitulado “*Discorso sul flusso e reflusso del aqua*” (“Discurso sobre o fluxo e o refluxo das águas”), e o **publicou na forma de uma carta privada para o Cardeal Orsini**. Nessa carta, Galileu examina os modos como a água contida num vaso pode se mover.

No “Discurso sobre o fluxo e o refluxo das águas”, Galileu faz uma série de observações e conclui que:

- a)** Um primeiro modo da água se mover surge quando se inclina o vaso; nessa situação, o movimento se assemelha ao da água que escoar no leito de um rio.
- b)** Um segundo modo surge de movimentos provocados por agentes externos, como o bater com as mãos na superfície da água ou o fluir do vento sobre esta mesma superfície; nesses casos, o agente externo poderá produzir ondas na água.
- c)** Um terceiro modo aconteceria devido ao movimento do próprio vaso. Essa situação nos é bem familiar. Quando se transporta água em carroças, verificamos o movimento da água do vaso, movimento este que provoca oscilações que chegam a provocar o derramamento de água. Claro que isso ocorre porque a carroça se desloca com movimentos irregulares, sofrendo continuamente variações em sua aceleração.



## Carta privada para o Cardeal Orsini

Note que essa não era a primeira vez que Galileu agia assim. Já no “Diálogo sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo” ele dedica o texto ao papa Urbano VIII; nesse mesmo livro, ele iria usar parte das ideias da carta para voltar à sua argumentação sobre o modelo heliocêntrico de Copérnico.



## Atividade 1

Pense e responda rapidamente:

Na situação **c** das propostas de Galileu, o que ocorreria com o movimento da água se a carroça se movimentasse em linha reta com velocidade constante?

---

---

---

A partir dessas três observações, Galileu parte para a comparação entre o movimento da água no vaso e o movimento das águas no mar. Nessa analogia ele compara a Terra com o vaso e a água do vaso com a água do mar. Assim, do mesmo modo que o movimento irregular do vaso gera oscilações (situação **c**), o movimento irregular de rotação da Terra faz uma comparação entre a água e as marés e entre o vaso e a Terra, o que provocaria as ondas no mar.

Com esse trabalho, Galileu tentou encontrar uma evidência experimental para sua hipótese de que a Terra se movia. E, apesar da Terra se mover, como imaginava Galileu, o movimento das marés não pode ser atribuído ao movimento da Terra, como veremos ainda nesta aula. Por hora, seria interessante você ler nossas notas históricas sobre as explicações do fenômeno das marés e depois reler o que você estudou na disciplina Astronomia, comparando o que você aprendeu com o que se pensava antigamente.

### Notas históricas

Ao que se pode inferir dos documentos históricos relativos às primeiras navegações no Oriente Próximo e Médio, os primeiros contatos dos navegantes antigos com o fenômeno das marés se deu fora do ambiente do Mediterrâneo. De fato, Quintus Curtius (historiador romano que escreveu sobre Alexandre no período de 41-54 d.C.), em *De rebus gestis Alexandri Magni (Dos feitos guerreiros de Alexandre Magno)*, relata as dificuldades dramáticas da armada de Alexandre, surpreendida pelo fluxo e refluxo de grande amplitude na foz do rio Indo.

O fenômeno das marés não passou, portanto, despercebido aos antigos e é, na verdade, surpreendente que uma das primeiras tentativas razoavelmente elaboradas de explicação tenha sido a explicação mecânica de Seleuco (c. 150 a.C.), um seguidor de Aristarco que, como este, sustentava a mobilidade terrestre.

A teoria de Seleuco consistia basicamente em considerar que, devido à rotação da Terra, o ar é posto em movimento e perturba as águas com uma agitação à qual se associa para a produção das marés, uma ação perturbadora sobre o ar e deste sobre a água causada pela Lua em seu movimento em torno da Terra.

Além do caráter mecânico da explicação, é notável nessa teoria o reconhecimento de um vínculo entre o fenômeno das marés e o movimento da Lua.

Ao que tudo indica, todas as teorias de marés desenvolvidas na Antiguidade reconhecem e popularizam uma conexão de algum tipo entre as marés e a Lua, embora se afastem da explicação mecânica de Seleuco, para adotar explicações de tipo qualitativas.

Por exemplo, Posidônio (c. 135-51 a.C.), que parece ter sido o primeiro a distinguir os três períodos diário, mensal e anual das marés, atribui a causa das marés à influência dos astros e particularmente da Lua.

Plínio, o Velho (23-79 d.C.), em sua *História natural*, desenvolve uma teoria na qual a causa das marés consiste em uma certa simpatia entre o elemento da água e a Lua.

E, finalmente, Ptolomeu (séc. II d.C.), no *Tetrabiblos*, dá um tratamento claramente astrológico ao vínculo revelado pelas observações de correlações entre o movimento da Lua e as marés.

Apesar de sua vasta obra, Aristóteles (384 - 322 a.C) praticamente não trata do tema das marés em sua obra; no entanto, no seu livro **Meteorologia**, ele alega que as oscilações de marés são observadas por familiares próximos a ele, e ocorrem devido ao fluxo do mar que ele imagina se comportar como uma bacia, onde a parte mais apertada seria a litorânea e o fluxo do mar aberto para uma bacia mais apertada provocaria o aumento e recuo periódico, fato relatado por aqueles familiares. Pessoalmente, ele parece nunca ter se preocupado em fazer uma cuidadosa observação do fenômeno.

Finalmente, no século XIII vamos encontrar uma explicação muito original elaborada pelo filósofo Inglês **Greathead Robert** (1175-1253). Esse filósofo se opõe ao modelo aristotélico e afirma que o fluxo e refluxo do mar ocorrem devido ao fato de que a Lua atrai a “névoa” do fundo do mar, o que desloca a água quando a Lua nasce. Variando a força da Lua com o tempo, quando ela atinge sua altura máxima em um dado meridiano, a “névoa” é expulsa da água e a maré diminui.

Fonte: <<http://www.scientiaestudia.org.br/associac/pablo/2001b.pdf>>. Acesso em: 28 abr. 2009.



## Atividade 2

Como você explica o fenômeno das marés? Do texto **Notas históricas**, o que coincide com a sua explicação?

---

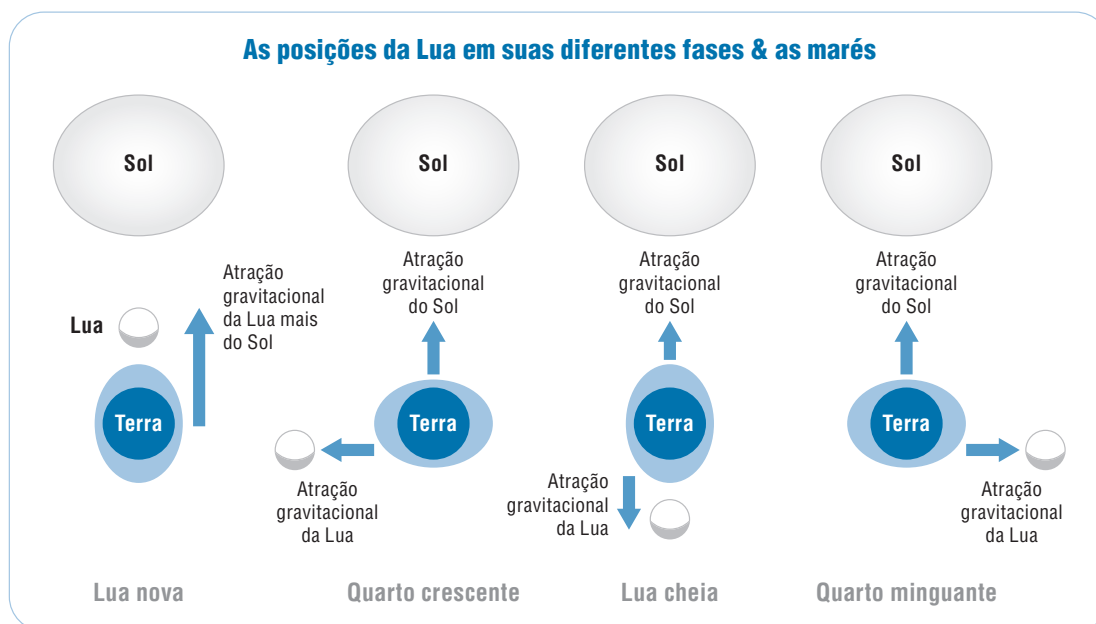
---

---

# A explicação newtoniana das marés

A genialidade de Newton aparece mais uma vez na sua explicação do fenômeno das marés. Elas, as marés, ocorrem devido à atração gravitacional entre a Lua e a Terra. A intensidade da força de atração gravitacional da Terra sobre a Lua é a mesma da Lua sobre a Terra; assim a Terra tende a provocar distorções na superfície da Lua, do mesmo modo que a Lua as provoca sobre a superfície da Terra. Devido à plasticidade da água, os oceanos serão mais afetados pela força gravitacional, e assim teremos o fenômeno das marés.

Note que o fato de termos um ciclo nas marés se deve ao fato da Lua estar girando em torno da Terra em um plano quase equatorial. Portanto, as marés tendem a seguir o movimento da Lua; assim, teremos um abaulamento do mar, que segue a Lua em um movimento periódico, como ilustrado na Figura 2 a seguir.



**Figura 2** – As posições da Lua em suas diferentes fases e marés.

Na Figura 2, temos a Terra vista de um dos pólos. Portanto, as protuberâncias correspondentes às marés estão representadas em relação ao equador.

Um fato importante que pode ser ainda observado na Figura 2 é que as marés são simétricas em relação ao eixo de rotação da Terra. Assim, quando temos maré alta em um ponto, no lado oposto também temos maré alta, e o mesmo se dá com a maré baixa. Apesar de você já ter estudado esse assunto em outras disciplinas, vamos retomar alguns cálculos interessantes que podem lhe ajudar a compreender melhor o fato de termos marés simétricas.

Apesar da grande distância que nos encontramos do Sol, como sua massa é muito grande temos que a intensidade da atração gravitacional entre o Sol e a Terra é maior que a exercida entre a Lua e a Terra. No entanto, a proximidade da Lua permite que a variação da intensidade dessa atração seja muito maior do que a produzida pelo Sol, como você mesmo pode concluir realizando cálculos simples como os sugeridos na atividade seguinte.



## Atividade 3

Considerando a massa da Terra, a massa da Lua e a massa do Sol, bem como a distância média Terra-Lua e Sol-Terra, verifique que a atração gravitacional entre o Sol e a Terra é maior que a atração gravitacional entre a Lua e a Terra. Faça o que se pede:

**a)** Calcule a razão entre a força de atração gravitacional Sol-Terra/Terra-Lua.

---

---

---

---

---

---

---

---

**b)** Explique, então, o motivo pelo qual associamos as marés à atração gravitacional Terra-Lua e não Sol-Terra. Você deve procurar em livros de Física, nos textos que você já possui ou na internet os dados numéricos necessários para fazer os cálculos propostos nesta atividade.

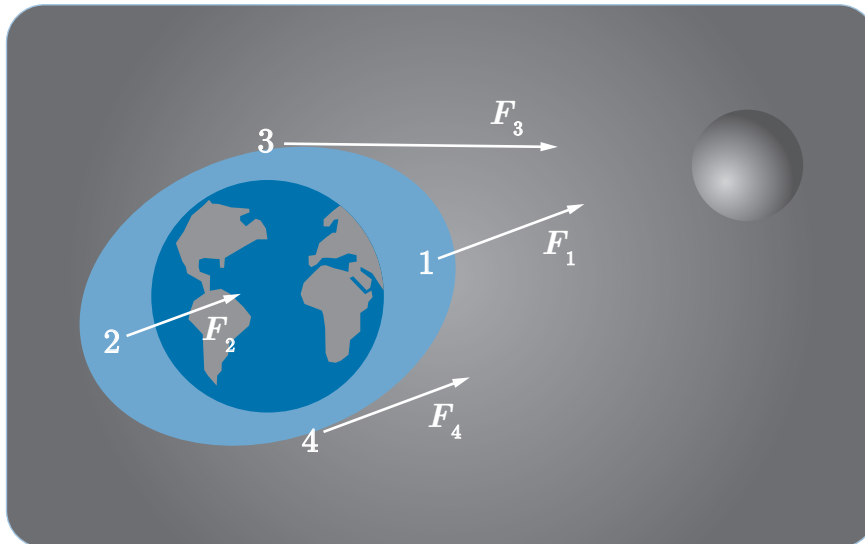
---

---

---

---

Vejam agora como as forças gravitacionais entre a Terra e a Lua produzem as marés em nosso planeta. Para simplificar o problema, vamos supor que a Terra é envolta por uma camada líquida uniforme (Oceano) que se apoia sobre uma camada interna maciça e sólida. Agora consideremos quatro pontos escolhidos de modo a exemplificar o efeito da atração gravitacional sobre esse Oceano, como mostrado na Figura 3 a seguir.



**Figura 3** – Efeito de maré devido à atração gravitacional Terra-Lua.

Os pontos como o ponto (1) e (2) estão sobre a região equatorial, e os pontos (3) e (4) nas regiões polares. Note que os pontos (1) e (2) representam as regiões da Terra mais próximas e mais distantes da Lua em um dado instante.

Assim,  $F_1$  será a mais intensa das forças das quatro forças representadas na Figura 4. Por outro lado, as forças  $F_3$  e  $F_4$  contribuem para o deslocamento de água em direção ao ponto 1. Desse modo, temos explicado a maré alta em (1). Mas e o que ocorre com (2)? Em (2), certamente a atração gravitacional da Lua é menor, o que permite que o efeito da rotação da Terra – representado para um observador situado no centro de massa do sistema Terra-Lua – seja importante, fazendo com que surja o bojo (maré alta) em (2).

Note que aqui nós consideramos apenas os efeitos da interação gravitacional entre a Terra e a Lua. O Sol também influencia os movimentos das águas do Oceano, mas com metade da intensidade da Lua. E seus efeitos estão representados na Figura 2.



## Atividade 4

Verifique, na Figura 2, que quando nós temos Lua Cheia ou Lua Nova, o Sol, a Terra e a Lua estão “alinhados” e, portanto, o efeito do Sol soma-se ao da Lua, produzindo maré mais altas. Que ocorre no Quarto Crescente e no Quarto Minguante?

---

---

---

---

---

## As ondas no mar

Sempre que ficamos algum tempo à beira da praia olhando e escutando o quebrar das ondas nos perguntamos por que elas se formam, por que se quebram e o motivo de tanta diversidade na forma ou no modo de quebrar das ondas.

Bem, as ondas são geradas pelo vento. É o fluir do vento sobre a superfície das águas que provoca as corrugações (ondulações) nessa superfície, que se propagam sob a forma de ondas; ou seja, não é a água do mar que está caminhando de um ponto para outro, mas a perturbação provocada pelo vento na superfície da água que faz com que surjam cristas que se propagam em alto-mar.

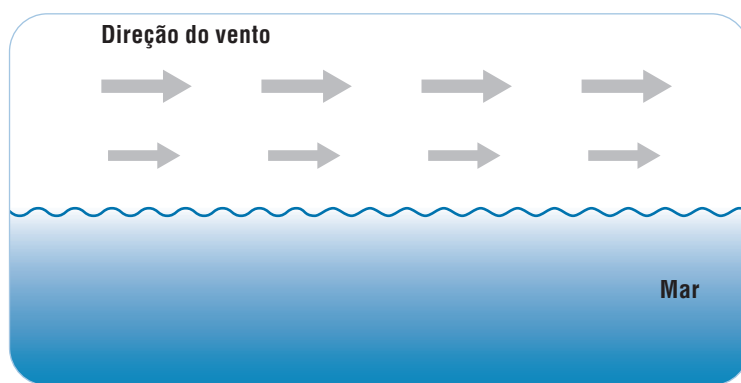
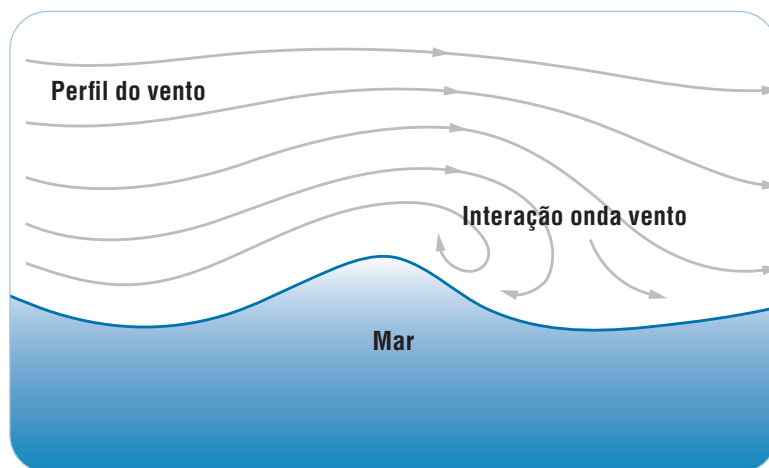


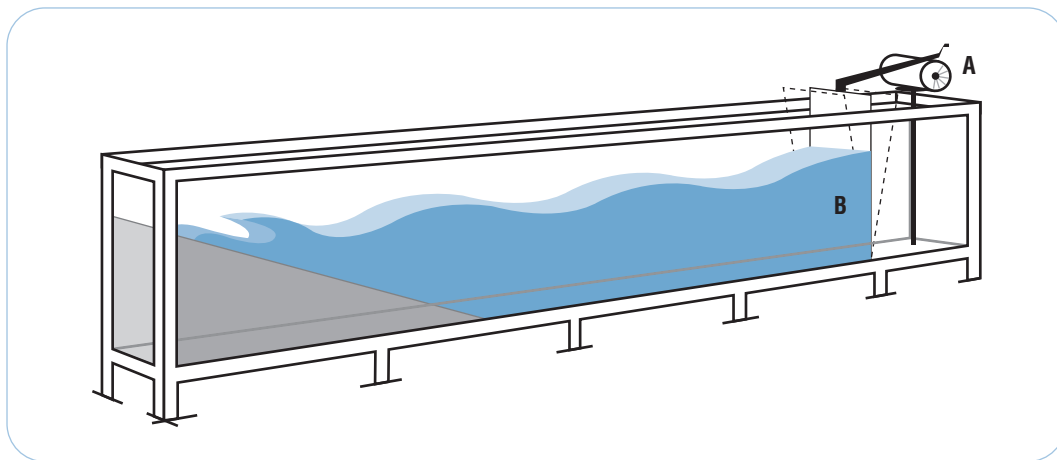
Figura 4 – O vento gera corrugações na água do mar.

O fluir do vento sobre a superfície da água provoca corrugações que ao aumentarem de amplitude começam, por sua vez, a alterar o modo como o vento está fluindo, como mostrado na Figura 5 a seguir, em um processo que fica se realimentando e que não cresce indefinidamente pelo fato de que a velocidade e a direção do vento não são constantes.



**Figura 5** – O vento interage com a superfície, gerando corrugações que crescem e acabam distorcendo e alterando o perfil do próprio vento.

Assim, verificamos que existe uma inter-relação entre o vento e o mar na geração das ondas que, por sua vez, acabam tendo sua velocidade afetada pelo vento, que modela e é modelado pela superfície. Veja o esquema da Figura 6.



**Figura 6** – Batedor perturba o equilíbrio das águas e gera um “trem” de ondas idênticas.

É claro que a amplitude e o período das ondas assim formadas estão relacionados com as propriedades do meio, com a área disponível para a propagação da onda (chamada pista), com a velocidade do vento e com a profundidade do mar. O modo como a profundidade afeta as ondas será discutido a seguir.

Quando a profundidade é grande face ao comprimento de onda, as ondas do mar sofrem dispersão, o que faz com que a sua forma se altere durante a propagação. Veja o esquema da Figura 7.

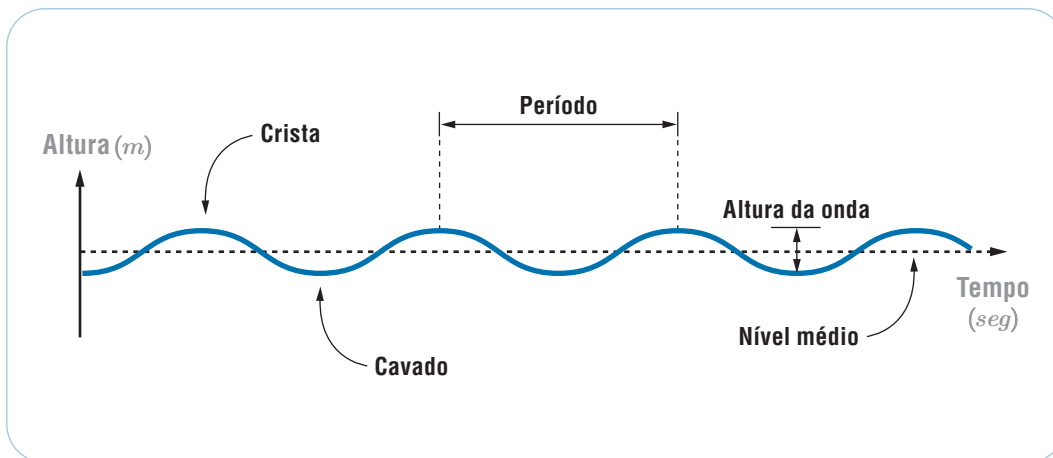


Figura 7 – Esquema das características das ondas.

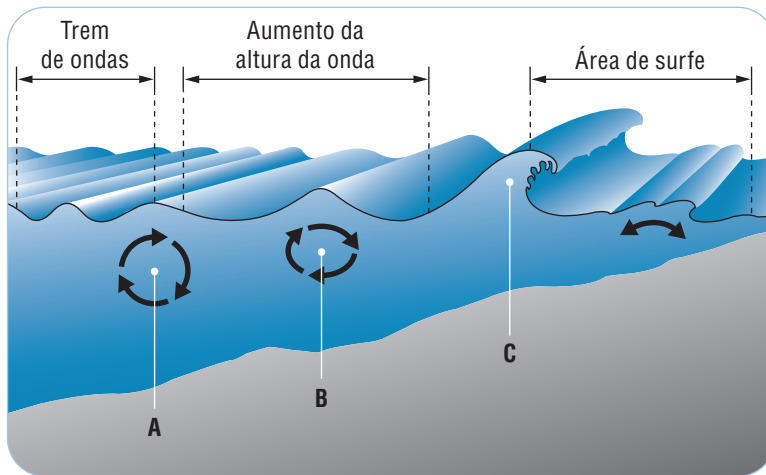
Nesse caso, não existe interação com o fundo do mar para ondas em que o efeito da tensão superficial é desprezível; portanto, a velocidade pode ser escrita de forma simples pela relação,

$$v = A\sqrt{g\lambda} \quad \text{Eq. 1}$$

onde  $A$  é uma constante de proporcionalidade e  $\lambda$  o comprimento de onda.

Pode ser que você já tenha tomado banho de mar; nesse caso, deve ter percebido que quando uma onda passa por uma pessoa ela executa não apenas aquele movimento de subir e descer, já discutido na Aula 1 – Oscilações e movimento harmônico, mas também um movimento na horizontal, que leva a pessoa para frente e para trás. Dessa forma, executamos um movimento quase circular em torno do ponto em que nos encontramos quando a onda do mar nos atinge.

A própria água também executa esse movimento, e o raio desse deslocamento tende a diminuir à medida que aumenta a profundidade. Assim, enquanto que na superfície do mar o raio do movimento circular da água é da ordem da metade da altura da onda, quando se desce a uma profundidade equivalente ao comprimento de onda da perturbação que se move na superfície o diâmetro desse movimento cai em 25 vezes.



**Figura 8** – Sequência de ondas se aproximando da praia.



## Atividade 5

A partir do que foi discutido nos parágrafos anteriores, explique o motivo pelo qual quando mergulhamos através da base da crista de onda não sentimos a perturbação da onda.

---



---



---



---



---



---

Conseguimos explicar a propagação das ondas no mar. Resta explicarmos o motivo pelo qual elas quebram.

Olhando a Figura 8, vemos que à medida que a água se aproxima de regiões mais rasas, o atrito entre o fundo do mar e a água começa a ser mais relevante e eficiente em reduzir o movimento da água, enquanto que a superfície continua a avançar sob a ação do vento. Isso gera uma configuração instável que leva a onda a se quebrar.

# Quando a Terra treme

Os tremores de terra são conhecidos pelo homem desde a Antiguidade, e mesmo assim ainda hoje provocam assombro e desassossego às comunidades que são atingidas por esse fenômeno.

Mesmo o Brasil, país conhecido por não apresentar significativa atividade sísmica e não possuir em seu território nenhum vulcão ativo, sofre ocasionalmente com esse tipo de fenômeno.

## Terremotos e ondas sísmicas

**Terremoto, abalo sísmico ou simplesmente sismo é um movimento brusco e repentino de um terreno que ocorre devido a uma falha.** Portanto, a ruptura de uma rocha é o mecanismo pelo qual o terremoto é produzido. Essa ruptura causa a liberação de uma grande quantidade de energia, a qual gera ondas elásticas que se propagam pela Terra em todas as direções.

As rochas comportam-se como corpos elásticos, e podem acumular deformações quando submetidas a esforços de compressão ou de tração. Quando esse esforço excede o limite de resistência da rocha, ela se rompe ao longo de um plano novo ou preexistente de fratura chamado **falha**.

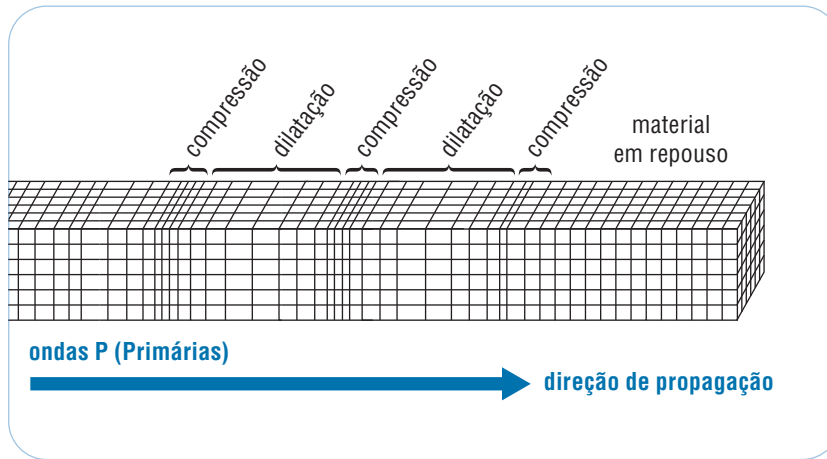
Normalmente não é o deslocamento na fratura que causa maior estrago, e sim as vibrações (ondas elásticas) que se propagam a partir da fratura. Na maior parte das vezes a fratura nem atinge a superfície, mas as vibrações podem ser fortes o suficiente para causar danos consideráveis.

As forças tectônicas que causam os sismos são devidas aos processos dinâmicos que ocorrem no interior da Terra, principalmente os lentos movimentos de convecção no manto, responsáveis pela deriva dos continentes.

Quando ocorre um sismo, a energia é liberada através da propagação de ondas. Essas ondas são registradas por sismógrafos, equipamentos sensíveis que detectam e registram o movimento das partículas do solo em uma determinada direção.

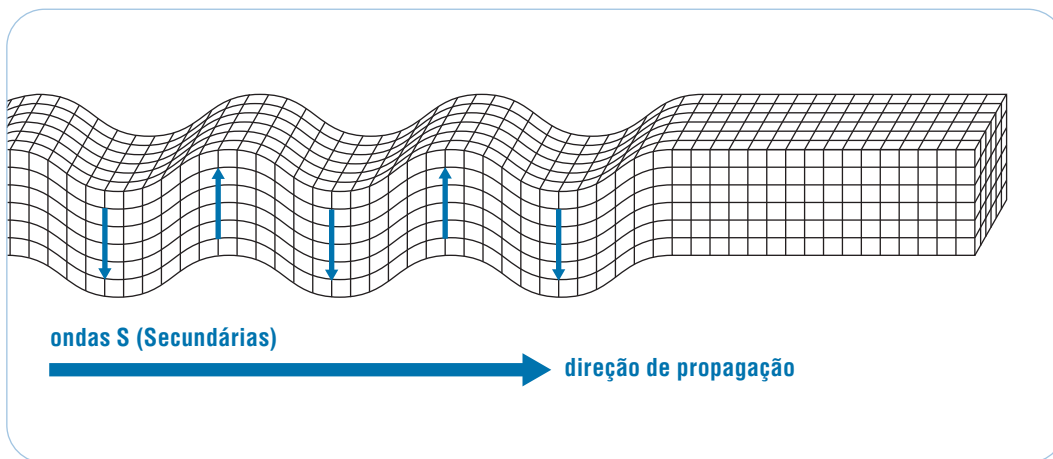
Existem diversos tipos de ondas elásticas que são liberadas quando ocorre um terremoto. Os tipos mais importantes são:

Ondas *P* (ou primárias) - movimentam as partículas do solo, comprimindo-as e dilatando-as. A direção do movimento das partículas é paralela à direção de propagação da onda.



**Figura 9** – Propagação de ondas *P*, que são ondas elásticas longitudinais.

Ondas *S* (ou secundárias) – movimentam as partículas do solo perpendicularmente à direção da propagação da onda.



**Figura 10** – Propagação de ondas *S*, que são ondas transversais.

As ondas *P* propagam-se pela crosta terrestre com velocidade típica de 6 a 8  $km/s$  em rochas consolidadas. A velocidade das ondas *S* é tipicamente 60% a 70% da velocidade da onda *P* no material. Apesar da velocidade das ondas variar com as propriedades das rochas (tais como densidade, rigidez, compressibilidade), a razão entre a velocidade das ondas *P* e *S* é praticamente constante. Isso permite que, observando o tempo de chegada dessas ondas, possamos estimar a distância do local onde ocorreu o sismo (basta multiplicar o tempo *S-P*, em segundos, pela velocidade de 8  $km/s$  para uma estimativa grosseira da distância entre o foco e a estação).

Vejam muito mais na página:

<http://www.iag.usp.br/siae98/geofisica/geofenomenos.htm>

# Tsunamis

Os tsunamis entraram no nosso cotidiano a partir de um grande evento que não só devastou uma grande área como ceifou um número muito grande de vidas. A palavra “tsunami” quer dizer, em japonês, “onda do porto” (“tsu” — porto, ancoradouro, e “nami” — onda, mar). Trata-se não de uma única onda, mas de uma série de um tipo especial de ondas oceânicas de proporções gigantescas geradas por distúrbios sísmicos, em geral terremotos submarinos, e que possui alto poder destrutivo quando chega à região costeira.

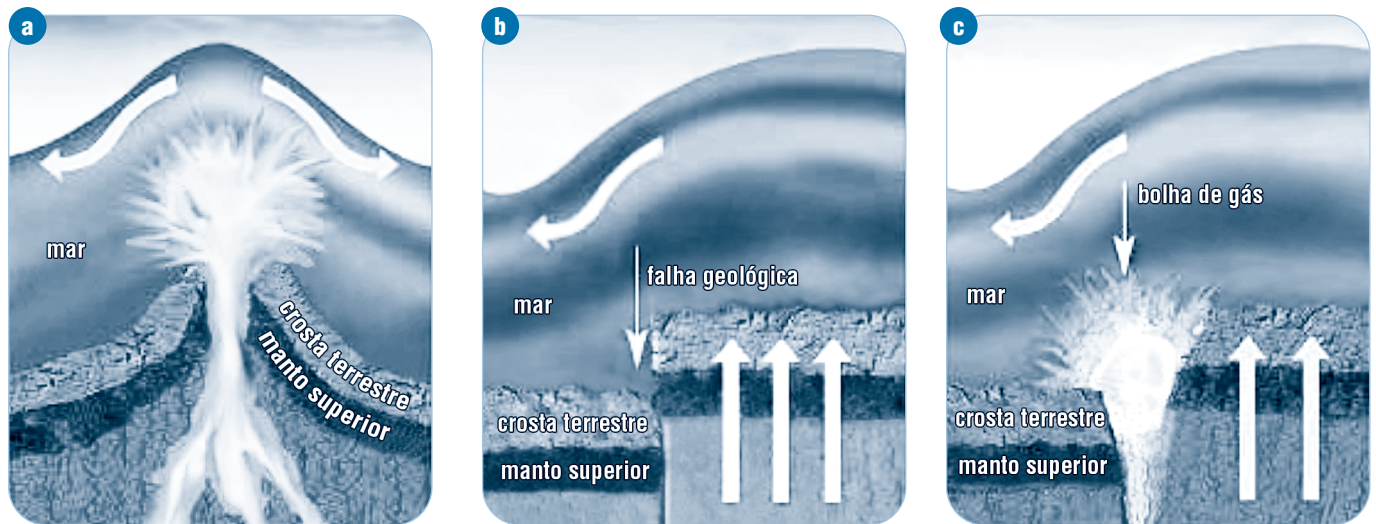


Figura 11 – Atividades sísmicas no fundo do mar podem provocar ondas do tipo tsunami.

Os tsunamis são ondas de grande comprimento de onda que se propagam no mar e são gerados por atividades sísmicas no fundo do mar. Essas atividades sísmicas vão desde vulcões que entram em erupção no fundo do mar, como mostra a Figura 11(a), a movimentos das placas tectônicas, como mostrado em 11(b), ou até grandes bolhas de gás que são ejetadas dos vulcões, como mostrado em 11(c).

Nos casos 11(a) e 11(c), temos ejeção de matéria com liberação direta de energia no mar, provocando as ondas. Já na situação 11(b), esse movimento das placas cria perturbações na interface entre o fundo do mar e as águas profundas. Como estamos tratando com dois meios de características físicas distintas (um formado pela parte sólida – o fundo do oceano – e o outro formado pela parte aquosa – a água sobre a região perturbada), então quando surge uma perturbação na interface oriunda do meio mais denso ela irá se propagar em direção à superfície com uma amplitude maior que a da perturbação inicial.





## Atividade 7

Calcule a velocidade aproximada de uma onda e o tempo que ela gasta para chegar à praia, sabendo que esta fica a cerca 6,0 km do ponto onde foi observada sua crista e que a profundidade média do mar nessa região é de 30m.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Assim, ao se aproximar de uma região mais rasa, a base da onda irá se mover de forma mais lenta que o topo. Assim, um grande volume de água irá se comprimir na superfície, provocando uma grande onda que irá quebrar jogando no continente um volume muito grande de água.

Outra consequência interessante relacionada com a conservação da energia para ondas que se propagam entre dois meios: alguns cientistas acreditam que podem detectar perturbações de grandes amplitudes na alta atmosfera terrestre (na ionosfera) provocadas por tremores que ocorrem na superfície de nosso planeta. Se isso for comprovado, poder-se-ia prever a ocorrência de grandes tremores observando a propagação de ondas na ionosfera, relacionadas com os pequenos tremores que sempre antecedem os grandes sismos. Mas enquanto isso não se verifica devemos contar com a ajuda dos grandes observatórios de sismologia espalhados pelo planeta. Aqui no Nordeste brasileiro temos um grande laboratório de sismologia instalado na UFRN (Universidade Federal do Rio Grande do Norte), sob a responsabilidade do Departamento de Geofísica.

## Para saber mais...

Mesmo que não existisse a Lua, devido ao fato da Terra girar em torno de seu eixo, existiria um abaulamento da água do mar devido à força centrífuga. Podemos, inclusive, fazer uma estimativa de quanto seria a diferença entre o nível do mar no Equador e nos polos em relação ao raio da Terra unicamente devido à rotação da Terra. Para tanto, devemos fazer algumas hipóteses simplificantes, como por exemplo que a Terra é uma esfera uniforme coberta totalmente por água. Nesse caso, se a Terra não girasse, a força de atração gravitacional entre o centro da Terra e o mar seria o mesmo em todos os pontos, ou seja,

$$F_{eq} = F_{pl} \quad \text{Eq. 4}$$

onde  $F_{eq}$  é a Força de atração gravitacional entre o centro da Terra e o mar no Equador e  $F_{pl}$  é a força nos polos.

Devido à existência da rotação da Terra, existe uma componente centrífuga no Equador que não aparece nos polos. Desse modo, podemos escrever

$$F_{eg} = F_{pl} + \omega^2 r \quad \text{Eq. 5}$$

E, portanto, a energia potencial por unidade de massa pode ser escrita como

$$U_{eq}(r) = U_{pl}(r) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \quad \text{Eq. 6}$$

Seja então  $D_{eq}$  a deformação do mar no Equador e  $D_{pl}$  a deformação do mar nos polos. Queremos calcular a relação  $(D_{eq}-D_{pl})/R_e$ , onde  $R_e$  é o raio da Terra. Ora, podemos escrever a Eq. 03 como

$$gD_{eq} = gD_{pl} + \frac{1}{2}\omega^2 R_e^2 \quad \text{Eq. 7}$$

onde  $D_{eq} = R_e + D_{eq}$  e  $D_{pl} = R_e + D_{pl}$ .

Assim, da Eq. 04 podemos ter

$$\frac{D_{eq} - D_{pl}}{R_e} = \frac{\omega^2 R_e}{2g} \quad \text{Eq. 8}$$

Substituindo  $D_{eq}$  e  $D_{pl}$ , temos:

$$\frac{d_{eq} - d_{pl}}{R_e} = \frac{\omega^2 R_e}{2g} \quad \text{Eq. 9}$$

Ou seja,

$$\frac{d_{eq} - d_{pl}}{R_e} = \frac{1}{575}$$

Note que a principal força a ser considerada no fenômeno das marés é a diferença entre a atração gravitacional da Lua sobre as águas superficiais e a da Terra sobre essas mesmas águas.



# Autoavaliação

1

Explique com suas próprias palavras como se formam as ondas no mar e como elas quebram. Por que não temos ondas grandes nos açudes?

---

---

---

---

---

---

---

2

Calcule a energia de uma onda de comprimento de onda da ordem de  $10\text{km}$  e amplitude  $2,0\text{m}$ . Uma onda desse tipo, ocorrendo em alto-mar, passaria despercebida por um navio? Justifique sua resposta.

---

---

---

---

---

---

---

3

Explique com suas próprias palavras a razão da ocorrência de ondas de marés e a relação com o dinamismo do planeta.

---

---

---

---

---

---

---



Esta edição foi produzida em setembro de 2014 no Rio Grande do Norte, pela Secretaria de Educação a Distância da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (SEDIS/UFRN), sobre papel offset 90 g/m<sup>2</sup>.

SEDIS Secretaria de Educação a Distância – UFRN | CampusUniversitário  
Praça Cívica | Natal/RN | CEP 59.078-970 | [sedis@sedis.ufrn.br](mailto:sedis@sedis.ufrn.br) | [www.sedis.ufrn.br](http://www.sedis.ufrn.br)



Ministério da  
**Educação**

