

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO



Danilo Magno de Oliveira Teixeira

**COMPARAÇÃO DO MÉTODO DETERMINÍSTICO E
ESTOCÁSTICO APLICADO AO CÁLCULO DO FUNDO
GARANTIDOR DE BENEFÍCIOS DE RISCOS NOS REGIMES
PRÓPRIOS DE PREVIDÊNCIA SOCIAL**

Natal – RN

2022

Danilo Magno de Oliveira Teixeira

COMPARAÇÃO DO MÉTODO DETERMINÍSTICO E ESTOCÁSTICO
APLICADO AO CÁLCULO DO FUNDO GARANTIDOR DE
BENEFÍCIOS DE RISCOS NOS REGIMES PRÓPRIOS DE
PREVIDÊNCIA SOCIAL

Monografia apresentada ao curso de graduação
em Ciências Atuariais da Universidade Federal
do Rio Grande do Norte, como requisito parcial
à obtenção do título de Bacharel em Ciências
Atuariais.

Orientador: Prof. Dr. José Vilton Costa

Natal – RN

2022

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de
Arruda - CCET

Teixeira, Danilo Magno de Oliveira.

Comparação do método determinístico e estocástico aplicado ao cálculo do fundo garantidor de benefícios de riscos nos regimes próprios de previdência social / Danilo Magno de Oliveira Teixeira. - 2022.

64f.: il.

Monografia (Bacharelado em Ciências Atuariais) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Departamento de Demografia e Ciências Atuariais. Natal, 2022.

Orientador: Prof. Dr. José Vilton Costa.

1. Ciências atuariais - Monografia. 2. Método determinístico - Monografia. 3. Método estocástico - Monografia. 4. Fundo garantidor de benefícios de riscos - Monografia. 5. Regime financeiro de repartição de capitais de cobertura - Monografia. 6. Regime próprio de previdência social - Monografia. I. Costa, José Vilton. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 368.01

Danilo Magno de Oliveira Teixeira

COMPARAÇÃO DO MÉTODO DETERMINÍSTICO E ESTOCÁSTICO
APLICADO AO CÁLCULO DO FUNDO GARANTIDOR DE
BENEFÍCIOS DE RISCOS NOS REGIMES PRÓPRIOS DE
PREVIDÊNCIA SOCIAL

Monografia apresentada ao curso de graduação
em Ciências Atuariais da Universidade Federal
do Rio Grande do Norte, como requisito parcial
à obtenção do título de Bacharel em Ciências
Atuariais.

Orientador: Prof. Dr. José Vilton Costa

Apresentado e aprovado em 19/07/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Vilton Costa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Orientador

Prof^a. Dr^a. Luana Junqueira Dias Myrrha
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Membro da banca examinadora

RESUMO

No âmbito da Previdência Social, comumente são utilizadas metodologias determinísticas para os cálculos das reservas matemáticas, que se caracteriza por ser um método que se utiliza de expressões matemáticas para se alcançar o resultado pontual do valor esperado. Por outro lado, a metodologia estocástica, embora não amplamente utilizada, pode alcançar os mesmos resultados produzidos pela metodologia determinística. Para realizar as comparações entre esses métodos foi utilizado como objeto de estudo a Instrução Normativa nº 3 de 2018, que estabeleceu a obrigatoriedade da constituição de um Fundo Garantidor de Benefícios (FGB) para determinados tipos de benefícios, entre eles, a aposentadoria por invalidez (e a pensão por morte dela decorrente) e a pensão por morte de segurados ativos. Dessa forma, foi demonstrado o cálculo do FGB através dos dois métodos propostos, e em seguida foram apresentados os resultados dos cálculos. Ficou evidenciado que os dois métodos resultam no mesmo valor esperado. No entanto, o método estocástico se destacou por disponibilizar também a realização de estudos da variabilidade dos resultados, permitindo tomadas de decisões para gerenciamento dos riscos de déficit atuarial devido à aleatoriedade inerente aos cálculos.

Palavras-chave: Método determinístico. Método estocástico. Fundo garantidor de benefícios de riscos. Regime financeiro de repartição de capitais de cobertura. Regime Próprio de Previdência Social.

ABSTRACT

In the scope of Social Security, deterministic methodologies are commonly used for the calculation of mathematical reserves, which is characterized by being a method that uses mathematical expressions to achieve the punctual result of the expected value. On the other hand, the stochastic methodology, although not widely used, can achieve the same results produced by the deterministic methodology. In order to make comparisons between these methods, Normative Instruction No. 3 of 2018 was used as an object of study, which established the obligation to establish a Benefit Guarantee Fund (FGB) for certain types of benefits, including disability retirement (and the resulting death benefit) and the death benefit of active insured persons. Thus, the calculation of the FGB through the two proposed methods was demonstrated, and then the results of the calculations were presented. It was evident that both methods result in the same expected value. However, the stochastic method stood out for also making available studies of the variability of results, allowing decision-making to manage the risks of actuarial deficit due to the inherent randomness of the calculations.

Keywords: Deterministic method. Stochastic method. Risk benefit guarantee fund. Financial regime for the distribution of cover capital. Social Security.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Contribuições arrecadadas e pagamentos dos benefícios ao longo do tempo em um benefício sob regime de capitalização	19
Figura 2 –	Contribuições arrecadadas e pagamentos dos benefícios ao longo do tempo em um benefício sob regime de repartição de capitais de cobertura	21
Figura 3 –	Fluxo temporal para a simulação de um beneficiário inválido no tempo inicial	36
Figura 4 –	Fluxo temporal para a simulação de um cônjuge pensionista no tempo inicial	37
Figura 5 –	Fluxo temporal para a simulação de um filho pensionista no tempo inicial	38
Figura 6 –	Matriz de estados para um inválido após 20 anos e 10 repetições	40
Figura 7 –	Matriz dos valores dos benefícios pagos a cada ano para um inválido após 20 anos e 10 repetições	41
Figura 8 –	Matriz dos valores presentes dos benefícios pagos a cada ano para um inválido após 20 anos e 10 repetições	41

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Cálculo de anuidades vitalícias através das funções de comutações.....	32
Quadro 2 –	Comparações do FGB pelo método determinístico e estocástico para um benefício concedido a um filho pensionista	42
Quadro 3 –	Comparações do FGB pelo método determinístico e estocástico para um benefício concedido a um cônjuge pensionista	43
Quadro 4 –	Comparações do FGB pelo método determinístico e estocástico para um benefício concedido a um aposentado por invalidez	44
Quadro 5 –	Cálculo do FGB pelo método estocástico com 95% de confiabilidade	46

LISTA DE SIGLAS

RPPS	Regime Próprio de Previdência Social
FGB	Fundo garantidor de benefício
DRAA	Demonstrativo de Resultados da Avaliação Atuarial
FOR	Fundo de Oscilação de Risco
CF	Constituição Federal
AEPS	Anuário Estatístico de Previdência Social
BD	Benefício Definido
CD	Contribuição Definida
CV	Contribuição Variável
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

SUMÁRIO

1. Introdução	11
1.1 Problema	12
1.2 Hipótese	12
1.3 Objetivos.....	12
1.3.1 Objetivo Geral	12
1.3.2 Objetivos Específicos	12
2. A Previdência Social no Brasil	13
3. Regimes Financeiros.....	15
3.1. Regime Financeiro de Repartição Simples	16
3.2. Regime Financeiro de Capitalização	18
3.3. Regime Financeiro de Repartição de Capitais de Cobertura	20
4. Fundo Garantidor de Benefício de Risco.....	23
5. Método Determinístico e Estocástico	23
6. Simulação analítica, macrossimulação e microsimulação.....	25
7. Metodologia	27
7. 1. Premissas atuariais.....	28
7. 2. Cálculo do FGB pelo método determinístico.....	29
7. 2. 1. Anuidades	29
7. 2. 2. Anuidades para duas vidas.....	30
7. 2. 3. Funções de comutação.....	31
7. 2. 4. Cálculo do FGB para uma pensão por morte concedida a um filho	33
7. 2. 5. Cálculo do FGB para uma pensão por morte concedida a um cônjuge	33
7. 3. Cálculo do FGB pelo método estocástico.....	35
7. 3. 1. Testes aleatórios	36
7. 3. 2. Fluxo temporal para o estado inicial: beneficiário inválido.....	37
7. 3. 3. Fluxo temporal para o estado inicial: cônjuge pensionista	38
7. 3. 4. Fluxo temporal para o estado inicial: filho pensionista	39
7. 3. 4. Cálculo do FGB a partir da matriz de estados	39
8. Resultados.....	43
8. 1. Filho pensionista.....	43
8. 2. Cônjuge pensionista.....	44
8. 3. Inválido.....	45
8. 4. Análise da variabilidade do FGB pelo método estocástico.....	46
9. Considerações Finais	48
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFIAS	!
ANEXO I – Funções para cálculo do FGB pelo método determinístico	52
ANEXO II – Funções para cálculo do FGB pelo método estocástico	58

1. INTRODUÇÃO

No Brasil, a Previdência Social destinada aos ocupantes de cargo público efetivo é definida pelo Regime Próprio de Previdência Social (RPPS). Desde 27 de novembro de 1998, através da Lei Nº 9.717, os RPPS precisam obedecer às normas gerais de contabilidade e atuária, de forma a garantir o equilíbrio financeiro e atuarial do plano. Dentre essas normas, destaca-se o inciso II do artigo primeiro da referida lei, que estabelece como obrigatoriedade para os RPPS: “realização de avaliação atuarial inicial e em cada balanço utilizando-se parâmetros gerais, para a organização e revisão do plano de custeio e benefícios”.

Legislações posteriores definiram mais detalhadamente como se deviam ser realizadas estas avaliações atuariais, evidenciadas em relatório denominado de Demonstrativo de Resultados da Avaliação Atuarial (DRAA), em que são demonstrados de forma técnica as características gerais do plano e indicará os valores dos custos, dos compromissos futuros do plano de benefícios do RPPS, suas necessidades de custeio e o resultado atuarial (MPS, 2008).

Entre os benefícios, de acordo com o a Portaria MPS nº 403/2008, estão a aposentadoria programada, a aposentadoria por invalidez, a pensão por morte, além dos auxílios em geral (auxílio-doença, salário-maternidade, auxílio reclusão e salário-família).

Em 21 de dezembro de 2018, através da Instrução Normativa nº 3 de 2018, foi estabelecido a obrigatoriedade da constituição de um Fundo Garantidor de Benefícios (FGB) para determinados tipos de benefícios, entre eles, a aposentadoria por invalidez (e a pensão por morte dela decorrente) e a pensão por morte de segurados ativos. Além disso, a referida Instrução Normativa também abriu possibilidade para criação de um Fundo de Oscilação de Risco (FOR) para o respectivo FGB.

Na Ciência Atuarial, em geral, utiliza-se métodos determinísticos para os cálculos inerentes aos custeios e reservas matemáticas dos planos previdenciários. Por este método, adota-se que cada premissa (utilizada como base dos cálculos atuariais) são os valores médios esperados de cada uma dessas premissas, ou seja, considera-se que cada premissa é um valor constante. Dessa forma, o resultado obtido por este método retorna

um valor igualmente constante, e por consequência, assume-se uma baixa probabilidade de equilíbrio atuarial e uma alta probabilidade de desequilíbrio (CORREA, 2014).

Por outro lado, através do método probabilístico, também conhecido como estocástico, adota-se que as premissas podem ser variáveis aleatórias, resultando em não apenas um valor, mas sim, um conjunto de valores. Desta maneira, além de se obter o valor esperado para cada cálculo, também se possibilita o cálculo de intervalos de confiança através da distribuição resultante, o que se aplicaria, por exemplo, ao cálculo do FOR do FGB mencionado acima.

1.1 PROBLEMA

Quais são as vantagens e desvantagens, caso existam, entre a utilização de métodos determinísticos e estocásticos no cálculo do Fundo Garantidor de Benefícios de Risco?

1.2 HIPÓTESE

Embora a implementação do cálculo através do método estocástico possa ser mais complexa em um ambiente de relativamente poucas variáveis, este método pode proporcionar resultados mais amplos do que o mesmo cálculo através do método determinístico.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Comparar os resultados, as vantagens e desvantagens entre o método determinístico e estocástico no cálculo do FGB para um conjunto de pessoas com características diferentes, seguradas do RPPS.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Demonstrar o cálculo do FGB através do método determinístico.
- Demonstrar o cálculo do FGB através do método estocástico
- Comparar os resultados dos dois métodos.

2. A Previdência Social no Brasil

A Constituição Federal (CF) de 1988 instituiu o Sistema de Seguridade Social, constituído pelo conjunto tripartite: Saúde, Assistência Social e Previdência Social. O próprio caput do artigo 194 da CF/1988 define que “a seguridade social compreende um conjunto integrado de ações de iniciativa dos Poderes Públicos e da sociedade, destinadas a assegurar os direitos relativos à saúde, à previdência e à assistência social”.

Esta Lei Maior tornou a Previdência Social a única modalidade pública de proteção social que exige uma contribuição universal dos segurados, de modo a amparar a si mesmos e aos seus dependentes de futuros infortúnios que possa levar o segurado a perder sua capacidade laboral, seja por acidente, doença, morte, idade avançada, dentre outras causas.

A Previdência Social também é classificada como um sistema tríplice: O Regime Próprio de Previdência Social (RPPS) – que se destina exclusivamente aos servidores públicos, nas esferas municipais, estaduais e federais; O Regime Geral de Previdência Social – que se destina aos demais trabalhadores e contribuintes voluntários; e, por último, o Regime de Previdência Complementar – que se destina a complementar as rendas dos participantes dos dois regimes anteriores e daqueles não os integram.

Em relação ao RPPS, cada ente federativo tem autonomia para constituir a sua própria previdência, obedecendo os critérios legais. Em 2018, de acordo com o Anuário Estatístico de Previdência Social (AEPS), a União, todas as UF e 2.139 municípios (de um total de 5.595 municípios) possuíam seus próprios regimes de previdência social, totalizando 2.167 RPPS, que englobam 11,5 milhões de servidores públicos.

Em 2018, Santos-Júnior, Azevedo e Andrade analisaram uma amostra de 1.548 RPPS brasileiros, e constaram que aproximadamente 89,02% destes apresentavam algum déficit atuarial, 10,59% apresentavam algum superávit atuarial e apenas 0,39% alcançaram um equilíbrio atuarial. Somando o resultado atuarial de todos estes RPPS, apresentava um déficit atuarial de quase 10 bilhões de reais, demonstrando, dessa forma, que se faz necessário um aprimoramento dos cálculos atuariais, para que os RPPS se aproximem cada vez mais de um equilíbrio atuarial.

Os planos de previdência podem ser do tipo Benefício Definido (BD) e Contribuição Definida (CD) e Contribuição Variável (CV).

A resolução MPS/CGPC nº 16 de 22 de novembro de 2005, em seu artigo segundo diz que “entende-se por plano de benefício de caráter previdenciário na modalidade benefício definido aquele cujos benefícios programados têm seu valor ou nível previamente estabelecidos”.

Bhering (2005) afirma que

A especificação à priori do benefício dá ao participante a ideia concreta do que deverá ser concedido no futuro. Por outro lado, não se pode dizer o mesmo quanto a evolução das taxas contributivas necessárias ao custeio do benefício prometido (p. 30).

Dessa forma, os planos de BD são aqueles em que o segurado já conhece de antemão o valor do benefício a receber futuramente, no entanto as contribuições são calculadas atuarialmente, podendo ser alteradas com o passar do tempo, de forma a manter o equilíbrio atuarial.

Sobre os planos de CD, o artigo terceiro do MPS/CGPC nº 16 mostra que estes planos são aqueles cujos benefícios não são conhecidos pelo segurado, embora a contribuição seja conhecida ao decorrer do período contributivo. Ou seja, o benefício programado tem seu valor permanentemente ajustado período a período de acordo com o saldo mantido em favor do segurado. Ainda na mesma resolução, adentrando o artigo quarto, é afirmado que os planos de CV mesclam características dos planos BD e CD, pois por um lado os planos de CV se caracterizam por ter uma contribuição definida pelo segurado a cada momento do tempo, oferecendo um benefício a ser definido no momento em que o participante solicita a aposentadoria, de acordo com o montante acumulado e capitalizado no decorrer do tempo.

No Brasil, os RPPS, por definição legislativa, são todos obrigatoriamente estabelecidos em BD (BRASIL, 2008).

Planos de Previdência também podem ser classificados de acordo com seu regime de financiamento, podendo estes ser do tipo de Repartição Simples, Capitalização e Repartição de Capitais de Cobertura.

A Portaria MPS nº 403 de 10 dezembro de 2018 explica que o regime de financiamento por Repartição Simples é aquele em que as contribuições, estabelecidas no plano de custeio, de um determinado exercício, sejam suficientes para a constituição de

uma reserva matemática dos benefícios não programáveis ocorridos neste mesmo exercício.

Esta Portaria também define que o regime de financiamento por Capitalização é aquele em que as contribuições, definidas no plano de custeio, acrescida dos ativos já existentes e os rendimentos por eles gerados, sejam suficientes para a formação de uma reserva matemática que garanta o pagamento dos benefícios futuros, sejam os já concedidos, sejam os a conceder.

Por último, a mesma Portaria estabelece que o regime de financiamento por Repartição de Capitais de Cobertura é aquele em que as contribuições, determinadas no plano de custeio, de um mesmo determinado exercício supra com o valor necessário para o pagamento dos benefícios adquiridos dentro deste mesmo exercício, observando que estes valores não devem ter propósito de acumulação de recursos.

3. Regimes Financeiros

Os custos assumidos por um plano de previdência independem do regime financeiro para os benefícios. No entanto, a contribuição previdenciária poderá ser modificada para satisfazer as equivalências em cada regime financeiro. Destarte, um regime financeiro de um sistema previdenciário se relaciona com o método em que as contribuições são arrecadas, alocadas e administradas (RANGEL, 2013)

Segundo Santos (2004), os regimes financeiros são formas que os custos totais podem ser distribuídos ao longo do tempo, também definindo-os como métodos que se adotam para prover os recursos necessários para cumprir as obrigações previdenciárias assumidas pelo plano.

Como abordado anteriormente, existem três métodos de regimes financeiros: Repartição Simples, Capitalização e Repartição de Capitais de Cobertura. Um sistema previdenciário pode adotar um ou mais desses regimes, sendo que cada benefício previdenciário precisa adotar somente um regime de financiamento, seguindo a legislação vigente.

Santos (2004) justifica a existência de métodos de regimes financeiros diferentes por conta da necessidade de se encontrar alternativas mais viáveis de acordo com o que cada sociedade demande e suporte no seu atual momento do tempo, a partir do custo previdenciário necessário. E embora existam outros diferentes métodos de regimes

financeiros, por exemplo, financiando o custo total em uma única parcela ou através de pagamentos de diferentes valores aleatórios em momentos randômicos do tempo, na prática se tornaria inviável no mundo real estabelecer compromissos entre as partes do plano através de critérios pouco convencionais e inteligíveis. Ou seja, numa sociedade normal, demanda-se por métodos de regimes financeiros em que haja algum padrão, regularidade, previsibilidade, praticidade e segurança.

O objetivo dessa seção é apresentar de forma mais detalhada cada um dos três métodos de regimes financeiros empregados nos cálculos dos custos dos planos de previdência social no Brasil.

3.1. Regime Financeiro de Repartição Simples

O regime financeiro de repartição simples, também chamado de “regime orçamentário”, tem metodologia bastante simplificada. Santos explica que a lógica desse regime é dividir as despesas de cada mês com os benefícios pagos mensalmente pela quantidade de contribuintes atuais. Ou seja, trata-se apenas calcular o montante de contribuições necessários para custear tão somente aos pagamentos dos benefícios no mesmo instante do tempo. Dessa forma, através do regime financeiro de repartição simples não é formada uma reserva de capital.

Keyfitz (1998) denomina o regime financeiro de repartição simples como “*pay as you go*”, em tradução literal, “pague conforme for”. Ele se refere ao pagamento das contribuições conforme forem chegando as arrecadações a cada momento do tempo, baseando-se em equilíbrios orçamentários a cada período. Disto implica que a razão entre contribuintes e beneficiários no tempo t precisa ser equivalente a razão dos benefícios médios pagos e das contribuições médias arrecadas no tempo t .

$$\text{Contribuintes}(t) \times \text{contribuição média}(t) = \text{Beneficiários} \times \text{benefício médio}(t)$$

$$\frac{\text{Contribuintes}(t)}{\text{Beneficiários}(t)} = \frac{\text{benefício médio}(t)}{\text{contribuição média}(t)}$$

Ou seja, de acordo com Santos (2004), alterações na natalidade e do quantitativo de empregos formais (que fazem contribuições previdenciárias obrigatórias) podem influenciar diretamente no regime de repartições simples, pois a razão entre contribuintes e beneficiários pode aumentar ou diminuir de acordo com a quantidade de pessoas em idades ativas para contribuírem. Por outro lado, a mortalidade também pode influenciar

nesta razão, visto que uma população com longevidade avançada pode possuir uma quantidade maior de beneficiários por mais tempo.

Correa (2014) afirma que uma consequência prática disso é um pacto teórico entre as gerações, pois os ativos, que em geral são pessoas com idades mais novas, financiam o pagamento dos benefícios das pessoas aposentadas, geralmente pessoas com idades mais avançadas, que em outro momento já fizeram parte da geração ativa que financia sua respectiva geração mais velha.

Rangel (2013) acrescenta que este pacto geracional tem como intermediário o Estado, além de também patrocinador, que arrecada da geração ativa para pagar os inativos, esperando que os contribuintes de agora, quando futuramente inativos, sejam financiados pelos ativos de sua futura respectiva geração.

Para Pinheiro (2005), esse tipo de regime financeiro é adequado para financiar benefícios de pagamento único ou de curta duração, tais como auxílio-natalidade, auxílio-doença, pecúlio por morte ou por invalidez.

Via de regra, quando um plano de previdência inicia e é instituído em um regime de repartição simples, a razão entre beneficiários e contribuintes é muito baixa, permitindo a cobrança de alíquotas contributivas baixas e benefícios generosos (RANGEL, 2013). No entanto, o que costuma acontecer nos planos previdenciários novos instituídos pelos países no mundo é uma cobrança de alíquota acima da necessária, provocando um superávit, permitindo com que ocorra gastos desses superávits com demandas não previdenciárias, ocasionando um uso irresponsável desses excedentes (SANTOS, 2004).

A maioria dos planos previdenciários mais antigos que foram instituídos no regime de repartição simples, por conta do envelhecimento da população previdenciária, conseguem cobrir apenas parte dos compromissos. Por conta disso, em alguns países que adotaram esse tipo de regime, existem eventuais fundos de reservas, servindo tão somente como fundo para suavizar as flutuações provocadas pelos déficits recorrentes destes planos. No entanto, apesar destes fundos eventuais, estes regimes financeiros continuam sendo denominados como regime de repartição simples, por não haver regimes intermediários para estes métodos (RANGEL, 2013).

3.2. Regime Financeiro de Capitalização

Em contraste ao regime de repartição simples, o regime de capitalização se localiza no extremo oposto, pois, se por um lado o regime de repartição simples demanda um pacto intergeracional, resultando em um pagamento direto aos beneficiários atuais mediante as contribuições atuais, o regime de capitalização se caracteriza pela constituição de reserva individual de cada segurado ao longo de sua vida laboral para financiar seus futuros benefícios previdenciários (SANTOS, 2004).

Correa (2014) explica que as contribuições individuais são alocadas e investidas em fundos, tendo sua rentabilidade reinvestida continuamente no mesmo fundo. Esse processo gera uma capitalização dos rendimentos ao longo do tempo, aumentando os valores das reservas e, por consequência, diminuindo os valores necessários para os custeios do plano.

Santos (2014) detalha que existem dois momentos importante durante o percurso de um plano previdenciário instituído pelo regime de capitalização. O primeiro se dá na época contributiva, em que o segurado se encontra em idade laboral. Nesse primeiro tempo, o segurado realiza contribuições que são acumuladas e capitalizadas. O segundo se dá na época após a vida laboral, em que o segurado usufruirá dos seus benefícios previdenciários que lhe é direito. Nesse segundo tempo, o plano previdenciário tem a obrigação de assegurar o pagamento deste benefício.

No mesmo sentido, Rangel (2013) define que o regime de capitalização tem como base sistemas de poupanças, em que as contribuições realizadas pelos segurados são investidas em ativos financeiros, teoricamente compondo reservas que são sempre suficientes para o pagamento dos compromissos futuros.

Apesar de teoricamente este regime se caracterizar pela adoção de fundos individuais, dando a entender que não existe redistribuição entre diferentes gerações, na prática o regime de capitalismo possui propriedades do mutualismo e aspectos de solidariedade entre os participantes, não permitindo uma visão tão simplista, embora o regime de capitalização tenha origem nesses princípios anteriormente elencados (SANTOS, 2004).

Em um plano de previdência com benefício instituído sob o regime financeiro de capitalização observa-se que nos primeiros anos haverá um superávit financeiro, visto

que há previsão de acúmulo de capital para constituição da reserva matemática que futuramente servirá para o pagamento dos benefícios. No entanto, este superávit financeiro não deve ser confundido com o superávit atuarial. Ou seja, esse saldo positivo no fundo previdenciário não significará que há um excesso de arrecadação, pois este fundo é o que garantirá o equilíbrio atuarial entre a arrecadação atual e os benefícios a serem pagos futuramente. Desta forma, é necessário um certo cuidado para que o superávit financeiro não cause um otimismo e cause uma suposta sensação de que os benefícios possam ser melhorados (CORREA, 2014).

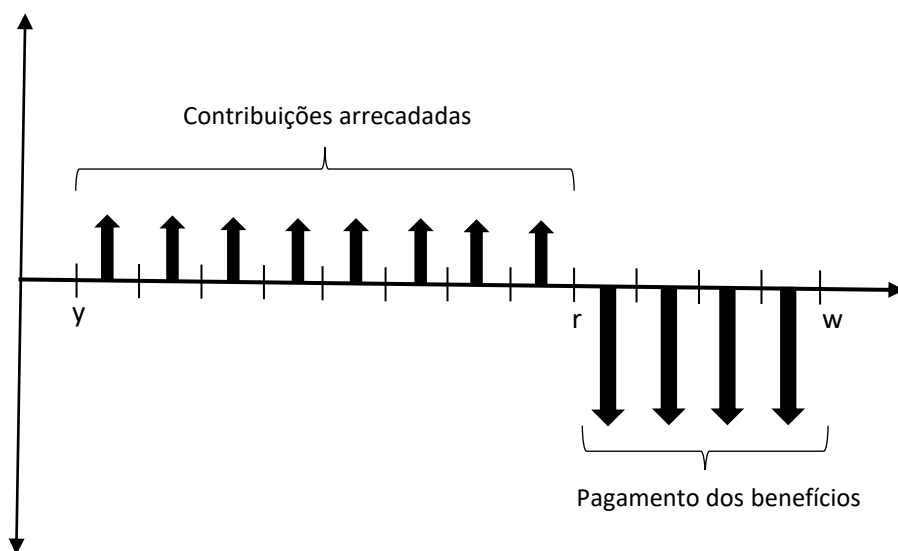
Para Santos (2004), uma diferença entre o regime de repartição simples e o regime de capitalização está na sensibilidade que alguns índices possam impactar no plano previdenciário. Enquanto no regime de repartição simples os índices demográficos de natalidade e longevidade impactavam diretamente nos planos, no regime de capitalização somente o índice de longevidade tem impacto mais expressivo no plano previdenciário. Isto ocorre dado que quanto mais tempo um beneficiário permanecer vivo, maior terá que ser o custeio em época contributiva para assegurar reserva suficiente que custeie uma anuidade vitalícia mais alongada.

Além da longevidade, o parâmetro das taxas de juros tem forte influência, visto que o regime de capitalização se trata de formação de fundos financeiros investidos no mercado de capitais. Quanto maior for a taxa de juros alcançada, mais rápido a reserva matemática crescerá, e por consequência mais rápido será constituído o custo total para arcar com os benefícios. Além disso, mais lentamente a reserva será esvaziada durante o pagamento dos benefícios, já que sob ela ainda continuará sendo capitalizados juros com taxas maiores. Sendo assim, quanto maior a premissa da taxa de juros, menor será a contribuição necessária a se efetuar pelo segurado para garantia do equilíbrio atuarial (SANTOS, 2004).

Um regime de capitalização pode ser identificado como tendo dois momentos principais, segundo Santos (2004): a primeira chamada de fase contributiva e segunda chamada de fase do benefício. Através da Figura 1, podemos identificar a fase contributiva através dos momentos entre o tempo y e o r , sendo y a idade em que um segurado começa a contribuir, em sua vida laboral, e sendo r a idade em que o segurado se aposenta e começa a receber o benefício previdenciário. Todas as contribuições feitas na fase contributiva constituirão a reserva garantidora do benefício capitalizado, que assim é chamada porque garante que será cumprida a série de pagamentos vitalícios na

fase do benefício. Já a fase do benefício, por sua vez, começa na idade r , conforme Figura 1, momento da aposentadoria do segurado, permanecendo até a idade w de sua morte.

FIGURA 1 – Contribuições arrecadadas e pagamentos dos benefícios ao longo do tempo em um benefício sob regime de capitalização



Fonte: elaboração própria

Santos (2014) salienta que a fase de contribuição costuma durar décadas, durante toda a vida laboral do segurado, e fase de benefício dura mais outras décadas. Portanto, há uma complexidade técnica nos cálculos das reservas garantidora sob o regime de capitalização, devendo sempre buscar garantir o equilíbrio decorrente das contribuições e o custo total para pagamento futuro dos benefícios.

3.3. Regime Financeiro de Repartição de Capitais de Cobertura

Um terceiro método de regime financeiro é o regime por repartição de capitais de cobertura, que de certa forma pode ser compreendido como uma combinação do regime de repartição simples e de capitalização. Neste regime, as contribuições realizadas em um determinado período (que geralmente é um período de um ano) se destinam a constituir um fundo que servirá para constituir reservas garantidoras de um determinado benefício (RANGEL, 2013).

Como detalhado por Santos (2014), neste regime financeiro existe o princípio da solidariedade, onde dentro de um período todos os segurados contribuem para custear a reserva garantidora de benefício total, assim não necessitando de mais contribuições nos períodos seguintes para estes benefícios que já foram conseguidos, visto que já foi

alcançada o valor atual do custo total daqueles benefícios concedidos naquele mesmo período.

Sendo assim, um ponto importante a se destacar que diferencia o regime de repartição simples do regime de repartição de capitais de cobertura é que o primeiro tem as contribuições arrecadas em um período utilizadas para os pagamentos de benefícios no mesmo período, enquanto o segundo tem as contribuições arrecadadas em um período utilizadas para a constituição de reservas garantidoras para os benefícios constituídos no mesmo período.

Na prática, no Brasil, as contribuições para o regime de repartição de capitais de cobertura são mensais, mas o período total para arrecadação de contribuições e formação das reservas garantidoras abarca o período de um ano. Em outras palavras, todas as 13 contribuições (nos 12 meses mais o décimo terceiro salário) realizadas dentro de 1 ano servirão para o custeio deste regime dos benefícios concedidos dentro deste mesmo ano. Como em outros regimes financeiros, normalmente as contribuições dos segurados são feitas através de um percentual de sua remuneração mensal.

De acordo com Póvoas (1985), a expressão “capital de cobertura” se refere à parte do total de contribuições cobradas no ano para financiamento por este regime, que servirá para cobrir o capital necessário à formação da reserva garantidora dos benefícios instituídos por este regime.

No Brasil, a Portaria N° 403, de 10 de dezembro de 2008, define o regime de repartição de capitais de cobertura como:

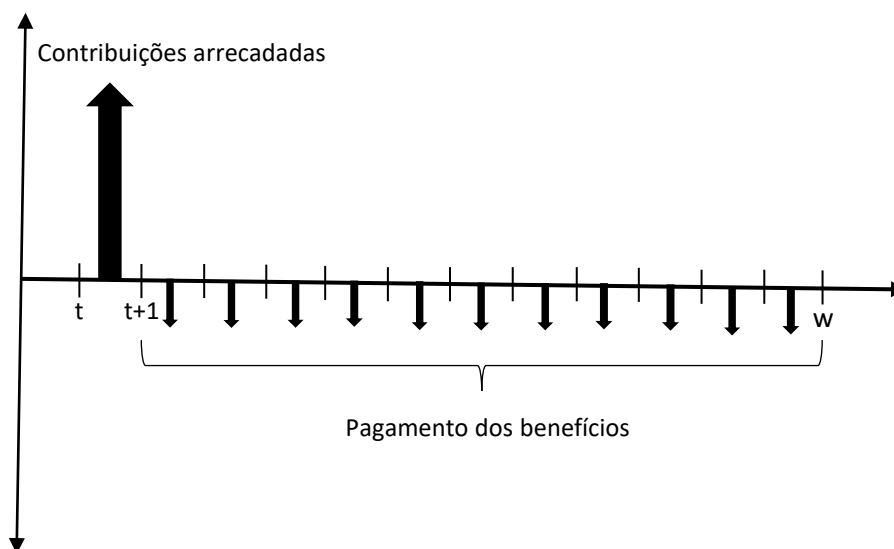
Regime em que as contribuições estabelecidas no plano de custeio, a serem pagas pelo ente federativo, pelos servidores ativos e inativos e pelos pensionistas, em um determinado exercício, sejam suficientes para a constituição das reservas matemáticas dos benefícios iniciados por eventos que ocorram nesse mesmo exercício, admitindo-se a constituição de fundo previdencial para oscilação de risco (p. 2).

Destarte, o aspecto da solidariedade fica evidenciado através das contribuições conjuntas entre os participantes para financiar a constituição das reservas matemáticas tão somente dos benefícios iniciados por eventos que ocorram naquele mesmo período.

Através da Figura 2, observa-se que toda a reserva matemática é formada somente em um único exercício, entre o ano t e o ano $t+1$, para os pagamentos dos benefícios

concedidos naquele exercício, mas pago nos exercícios seguintes, até o término do benefício na idade w , geralmente equivalendo à morte do beneficiário.

FIGURA 2 – Contribuições arrecadadas e pagamentos dos benefícios ao longo do tempo em um benefício sob regime de repartição de capitais de cobertura



Fonte: elaboração própria

Observe que as contribuições realizadas no tempo t ao $t+1$ foram de todos os segurados, embora os benefícios concedidos naquele exercício, pagos nos exercícios seguintes, são somente para os segurados que tiveram direito ao benefício dentro deste mesmo exercício por ocorrência de algum evento.

Rangel (2013) explica que o regime de repartição de capitais de cobertura é comumente utilizado em planos que envolvem pensões e auxílio-reclusão, pois as contribuições arrecadadas dentro do exercício devem ser suficientes para custear a reserva garantidora para pagamento destes benefícios ao longo do tempo.

Por sua vez, Correa (2014) complementa dizendo que, pela legislação brasileira dos RPPS, o regime de repartição de capitais de cobertura deve ser o mínimo a ser utilizado para o financiamento dos benefícios de risco de aposentadoria por invalidez e pensão por morte.

Ou seja, existe uma diferença importante entre os benefícios comumente selecionados para serem instituídos pelo regime de capitalização e pelo regime de repartição de capitais de cobertura. O primeiro é mais utilizado para pagamento dos

benefícios programados, enquanto o segundo é mais utilizado para os benefícios não programados, ou seja, benefícios de riscos.

4. Fundo Garantidor de Benefício de Risco

A Portaria nº 464 de 19 de novembro de 2018 foi instituída com o propósito de aperfeiçoar as normas aplicáveis às avaliações atuariais do RPPS. Para este trabalho, destaca-se o artigo 44, que rege sobre os benefícios avaliados em Regime de Repartição de Capitais de Cobertura. Em seu caput, é estabelecido que os valores necessários para financiamento dos benefícios determinados neste regime deverão compor o custo normal do plano de benefício do plano previdenciário.

O inciso primeiro do art. 44 desta Portaria define que:

§ 1º Os saldos de recursos arrecadados para financiamento dos benefícios de que trata este artigo deverão compor o Fundo Garantidor de Benefícios Estruturados em Regime de Repartição de Capitais de Cobertura (p. 49).

Dessa forma, é instituído o Fundo Garantidor de Benefícios (FGB) sob o Regime de Repartição de Capitais de Cobertura. Os incisos seguintes acrescentam mais detalhes e informações sobre a constituição deste FGB:

- Possibilidade do Plano Previdenciário criar um Fundo de Oscilação de Risco (FOR);
- No caso da criação de um FOR, deverá constar no Demonstrativo Relatório da Avaliação Atuarial (DRAA) os critérios de sua constituição e reversão;
- Ao fim do exercício, se o FGB apresentar déficit, caso o plano tenha um FOR, este fundo deverá realizar a cobertura do FGB até o limite do seu saldo. Em caso de inexistência do FOR ou de insuficiência financeira, o ente deverá realizar aporte que cubra o déficit existente do FGB.

A Instrução Normativa Nº 3 de 21 de dezembro de 2018 definiu, em seu artigo oitavo, que o FGB mencionado acima deve ser instituído obrigatoriamente em todos os RPPS a partir da avaliação atuarial do exercício 2022.

5. Método Determinístico e Estocástico

No mundo da Previdência Social, por conta da aleatoriedade natural das premissas que a tange e por conta da incompleta compreensão delas, dificilmente podemos ter 100% de certeza acerca do futuro. Apesar disso, ainda é necessário tomar decisões para se ter

resiliência. Entretanto, apesar da incerteza, as decisões precisam ser tomadas, sendo que as ações devem ser baseadas em informações que contemplem um entendimento desta incerteza e suas implicações, que acarreta uma manifestação positiva da incerteza (PREVENTION WEB, 2017).

Esta incerteza pode ser modelada de forma determinística ou estocástica. Em modelos determinísticos, o resultado é totalmente determinado pelos parâmetros de entradas, enquanto no modelo estocástico há a incorporação da aleatoriedade em sua abordagem, implicando na possibilidade de resultados diferentes para o mesmo conjunto de parâmetros.

A abordagem determinística em geral modela um cenário onde o valor de entrada é conhecido e constante e o resultado é observado, existindo sobreposição entre a modelagem determinística e a modelagem estocástica. Por exemplo, na modelagem determinística podem ser usadas premissas diferentes para determinar o pior, o melhor e o caso “mais provável”, ou seja, a perda máxima, a perda mínima e a perda esperada. No entanto, pelo método determinístico, não é considerado toda a gama de resultados possíveis, e não quantifica a probabilidade de cada um desses resultados. A fim de sanar esse problema, recomenda-se a abordagem do método estocástico (PREVENTION WEB, 2017). No método estocástico é avaliado o a probabilidade de cada evento ocorrer, incorporando o conceito da aleatoriedade.

Ambas as abordagens podem ser modeladas através de simulações computacionais. Em uma simulação computacional se utiliza do poder de processamento de computadores para realizar uma simulação de algum sistema do mundo real, evitando a necessidade de um experimento real, seja por inviabilidade técnica, seja por ser algo nunca observado, ou seja, por demandar um período de tempo demasiadamente extenso para se esperar. Através das simulações computacionais, pode-se em poucos instantes observar os resultados de determinados eventos que no mundo real ocorrem em uma escala de tempo significativamente maior (BANKS, 1998).

Segundo VOS e PALLONI (1989), um modelo de simulação analisa a distribuição de uma população de indivíduos (ou de outras unidades), representadas por $D(j)$, cujo j é alguma característica da população, em que $D(j)$ muda seu estado ao decorrer um vetor $d(j)$, através de uma função G . O vetor $d(j)$ comumente é uma representação do tempo. Uma mesma simulação de uma mesma população $D(j)$ ao decorrer de um $d(j)$ pode ser

modelada de diferentes formas ao se determinar diferentes funções G para as mudanças dos estados j .

A definição dos estados inerentes aos elementos de $D(j)$ depende do tipo de fenômeno analisado e das decisões de quem está analisando. Já as taxas de transições dos estados, reproduzida pela função G , são taxas estimadas empiricamente, sendo que na maioria das vezes são difíceis de se obter, já que costuma demandar determinadas frequências de observações passadas. (VOS, PALLONI, 1989). As simulações computacionais subdividem-se em três categorias principais: analítica, macrossimulação e microsimulação.

6. Simulação analítica, macrossimulação e microsimulação

Pela simulação analítica, a modelagem ocorre utilizando a população completa como unidade de cálculo, ou seja, não há níveis de desdobramentos da população de interesse. A vantagem deste tipo de simulação é a sua simplicidade, por agregar toda a população de interesse em um só grupo. Por outro lado, a simulação sacrifica parte de seu realismo ao desconsiderar a heterogeneidade da população. Por exemplo, ao se realizar uma simulação analítica para estudar algum fenômeno de uma população ao longo de um tempo, suprime-se informações que podem estar impactando diretamente nesse fenômeno estudado, como os grupos etários dos indivíduos ou o sexo. Simulações analíticas podem abranger uma quantidade maior e mais complexa de estados, já que a unidade de interesse é analisada do ponto de vista agregado. No entanto, para isto ocorrer, faz-se necessária que a função G seja representada por expressões de forma fechada (VOS, PALLONI, 1989). Uma expressão é dita fechada, se, e somente se, ela pode ser expressa utilizando apenas funções elementares (CHOW, 1999).

Visando romper essa limitação das expressões da função G , e objetivando dispor um maior nível de detalhamento da análise de determinado fenômeno, pode-se aplicar uma modelagem por macro ou microsimulação. Enquanto na modelagem por macrossimulação as taxas de transição dos estados se aplicam a um indivíduo modelo representante da população (geralmente um indivíduo médio), na modelagem por microsimulação a unidade de interesse é cada indivíduo da população de forma desagregada, construindo histórias individuais de transições de j ao decorrer de $d(j)$, segundo uma distribuição de probabilidade que representa a função G (VOS, PALLONI, 1989).

Uma vez que as distribuições de probabilidades determinam as mudanças de estados j , poucos indivíduos terão como resultados as mesmas combinações de transições de estados ao decorrer do calendário de eventos numa modelagem por microsimulação. Isto não ocorre numa modelagem macro, já que todos os indivíduos são representados por um único indivíduo. Estas características tornam a macrossimulação uma boa abordagem para representar histórias agregadas, e a microsimulação uma boa abordagem para representar histórias individuais (VOS, PALLONI, 1989).

Do ponto de vista de representação fidedigna da realidade, os modelos de macro e microsimulação são mais adequados do que o modelo analítico, apesar de que os resultados destes também podem servir de boas referências. O modelo de microsimulação produz um resultado com maior nível de detalhamento do que aquele produzido pela macrossimulação. Por outro lado, para se realizar uma modelagem de microsimulação, demanda-se um maior nível de complexidade, o que acarreta um maior custo de processamento computacional. Um nível de complexidade muito elevado pode atingir o limite de processamento computacional, fazendo-se necessário restringir o tamanho populacional (ou seja, diminuir o número de indivíduos), implicando em erros de amostragem mais significantes (VOS, PALLONI, 1989).

Correa (2015) acrescenta que o modelo de microsimulação possibilita fazer uma análise da variabilidade e da distribuição de probabilidade dos eventos de interesse da população estudada, já que esta armazena os dados individuais ao decorrer do calendário de eventos probabilísticos. Embora as modelagens de macro e microsimulação possam demandar um alto custo, o melhor cenário é aquele em que ambos são aplicados em conjunto para fornecer verificações mútuas (REEVES, 1987).

Para a modelagem por microsimulação, é mais comumente utilizado o método de Montecarlo, que consiste em microsimulações repetidas em uma quantidade significativa de vezes, grande o bastante para se poder fazer inferências acerca da distribuição dos resultados, tomando-os como uma frequência real da distribuição de probabilidades do fenômeno estudado (CORREA, 2014). Mais detalhes sobre este método será apresentado na metodologia.

Neste trabalho, será utilizada a abordagem de modelo de microsimulação utilizando o método de Montecarlo para os cálculos pelo método estocástico, em que cada indivíduo da população analisada $D(j)$ terá um estado j , no qual incide um risco de

alteração de seu estado no decorrer de $d(j)$, sendo essa probabilidade de alteração de estado regida por distribuições de probabilidades pré-estabelecidas.

7. Metodologia

Nesta seção, serão apresentadas as metodologias para os cálculos do FGB para os RPPS, considerando a existência de três benefícios: a pensão por morte; a invalidez; e a pensão por morte de um inválido.

A invalidez é um benefício que paga uma anuidade vitalícia ao segurado invalidado. Além disso, na ocorrência da morte do segurado inválido, seu benefício pode ser revertido ao seu cônjuge, se houver, ou a algum dependente até a idade limite legal para recebimento de pensão por morte. Na ocorrência da morte do cônjuge, o benefício pode ser revertido para um dependente que ainda esteja em idade legal para recebimento do benefício.

A pensão por morte de um segurado ativo, por sua vez, fornece ao cônjuge uma anuidade vitalícia ou, na ausência do cônjuge, fornece uma anuidade a algum dependente até a idade limite legal para recebimento. No caso de o benefício ser fornecido ao cônjuge, este pode ser revertido a algum dependente que esteja em idade legal para recebimento em razão da morte do cônjuge pensionista.

Observe que a metodologia dos benefícios elencados acima não reflete fidedignamente a legislação brasileira para a cessão desses benefícios. Por exemplo, por ocasião da morte de um segurado da previdência social, o benefício da pensão por morte pode ser dividido entre o cônjuge e os dependentes. Na metodologia aqui empregada, será considerado que um dependente só receberá o benefício na ausência ou na morte do cônjuge do falecido, pois independentemente da quantidade de beneficiários pensionistas, o montante total da pensão permanecerá o mesmo. No entanto, legislações mais recentes estabelecem um percentual máximo que um cônjuge ou cada dependente pode receber. Além disso, modificações mais recentes em alguns RPPS determinaram que cônjuges só podem receber pensão vitalícia se já tiverem acima de determinada idade no momento do falecimento do segurado. Antes dessa idade, as pensões são temporárias, a depender da idade do cônjuge. Porém, como o objetivo principal deste trabalho é apresentar as diferenças entre as metodologias determinísticas e estocásticas, os cálculos terão algumas pequenas simplificações para um melhor entendimento e execução. Também será considerado que apenas o filho mais novo será o pensionista beneficiário, mesmo que

haja outros filhos, porque na prática o benefício irá durar somente até o filho mais novo ultrapassar a idade máxima legal para recebimento deste benefício de pensão.

Os cálculos realizados terão utilizadas comparativas entre os dois métodos propostos. Dessa forma, optou-se por calcular o FGB nos dois métodos para diferentes indivíduos em diferentes estados. Os benefícios de riscos aqui calculados para os FGB podem ser concedidos a indivíduos em três tipos de estados distintos: filho pensionista, cônjuge pensionista ou inválido, sendo os dois primeiros decorrente de um benefício de pensão por morte e o terceiro decorrente de uma aposentadoria por invalidez.

Sendo assim, será realizada comparações para indivíduos em cada um desses 3 estados, para cada sexo (masculino e feminino) em diferentes idades.

7. 1. Premissas atuariais

Para se realizar os cálculos dos FGB, como serão demonstrados mais adiante, é necessário primeiramente selecionar parâmetros iniciais que melhor se adequem à população previdenciária em questão. Para realizar uma comparação entre dois métodos, é preciso utilizar exatamente os mesmos parâmetros nos dois cálculos, para termos uma comparação justa, os quais exprimem os comportamentos futuros utilizados nos cálculos dos valores presentes atuariais. Estes parâmetros, nesse contexto, são chamados de premissas atuariais.

As premissas atuariais utilizadas nestes cálculos podem ser econômicas ou demográficas. A premissa econômica aqui utilizada será a premissa da taxa de juros. Será considerado que a taxa de juros será de 6% por ano, durante todo o período analisado. Optou-se por essa taxa por ela ser um valor razoável e amplamente utilizados como padrão em alguns cálculos atuariais.

As premissas demográficas estão relacionadas com a mortalidade e composição familiar da população segurada. Quanto a mortalidade, será utilizada a tabela de mortalidade fornecida pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para o Brasil no ano de 2010, separada por sexo. Sobre a composição familiar, será definido, por padrão, as seguintes premissas:

- Cônjuges pensionistas mulheres são 5 anos mais novas que o marido falecido.

- Cônjuges pensionistas homens são 5 anos mais velhos que a esposa falecida.
- Filhos pensionistas serão 30 anos mais novos que o pai e 25 anos mais novo que a mãe.

Por último, definiu-se que a idade limite legal para um filho receber o benefício da pensão é de até os 21 anos de idade. Considerou-se, também, que o valor da pensão será fixado em 1.000,00 u.m. ao mês, ou ainda 13.000 u.m. ao ano, considerando os 12 meses do ano e o pagamento do décimo terceiro.

7. 2. Cálculo do FGB pelo método determinístico

Para o cálculo dos fundos garantidores destes benefícios, é necessário, primeiro, ter um entendimento de alguns conceitos atuariais. Como o objetivo principal deste trabalho é a comparação dos métodos no cálculo do FGB, não serão aprofundadas as deduções das expressões matemáticas utilizadas. Ao invés disso, serão apresentados alguns conceitos, e os cálculos serão demonstrados de forma simplificada através do uso de funções de comutação. Primeiramente, necessita-se definir o conceito de anuidades.

7. 2. 1. Anuidades

Anuidades, dentro do campo atuarial, podem ser definidas como uma sequência de pagamentos durante algum período de tempo, temporário ou vitalício, a partir da idade x , até a idade $x+n$, tendo cada pagamento futuro sendo mitigado pela expectativa de realização. Essa expectativa de realização do pagamento, no âmbito de estudo previdenciário, é a probabilidade de o segurado permanecer vivo no momento do pagamento. Dessa forma, o valor presente de uma anuidade para um indivíduo na idade x que realiza pagamentos antecipados durante n anos no início de cada período, pode ser dado por:

$$\ddot{a}_{\overline{x:n}|} = 1 + v \cdot {}_1p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + \dots + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x \quad (1)$$

. Sendo v o fator de desconto, que traz um valor futuro para o presente, dado por:

$$v = \frac{1}{(1+i)} \quad (2)$$

Onde i é a taxa de juros estabelecida para os cálculos. Da expressão (1), é possível resumir tudo em um somatório dos produtos entre o fator de desconto elevado à t pela probabilidade de sobrevivência da idade atual x até a idade $x+t$, variando de zero até $n-1$.

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t * {}_t p_x \quad (3)$$

Para uma anuidade vitalícia, a anuidade pode ser escrita somente como $\ddot{a}_x$. A diferença é que o somatório ao invés de ir até $n-1$, varia $w-x$, sendo w a idade máxima considerada que alguém da população previdenciária poderá alcançar.

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{w-x} v^t * {}_t p_x \quad (4)$$

Também é importante entender a definição de anuidade diferida. Em uma anuidade vitalícia, por exemplo, diferida em m anos, há um prazo de carência de m anos. Ou seja, nos primeiros m anos não há pagamento de qualquer anuidade. Esse tipo de anuidade equivale à uma anuidade normal, trazida a valor presente (do tempo m ao tempo zero) e considerada a probabilidade de sobrevivência por m anos.

$${}_m|\ddot{a}_x = v^m * {}_m p_x \sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t * {}_t p_{x+m} \quad (5)$$

Por conseguinte, uma anuidade temporária da idade x até a idade $x+n$, diferida em m anos, pode ser expressa por:

$${}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = v^m * {}_m p_x \sum_{t=0}^{n+m} v^t * {}_t p_{x+m} \quad (6)$$

7. 2. 2. Anuidades para duas vidas

Quando lidamos com uma mesma anuidade vinculada a mais de um participante, estamos tratando de anuidade de múltiplas vidas. Existem dois tipos básicos de anuidade de duas vidas. A primeira é a com status de vida conjunta. Nela, os pagamentos da anuidade perduram somente até o momento que uma das duas vidas morre. A segunda é

a com status de vida de último sobrevivente. Nela, os pagamentos da anuidade continuam ocorrendo até que todas as duas vidas morrem, ou seja, os pagamentos perduram enquanto houver ao menos um sobrevivente.

A construção das expressões das anuidades para múltiplas vidas segue a mesma ideia das anuidades para uma única vida. O que difere é a probabilidade da ocorrência do pagamento.

No status de vida conjunta, ao invés de se multiplicar somente pela probabilidade de sobrevivência de um indivíduo na idade x até a idade $x+n$, multiplica-se pelo produto entre as probabilidades de sobrevivência do primeiro indivíduo na idade atual x até a idade $x+n$ e do segundo indivíduo na idade atual y até a idade $y+n$.

$${}_np_{xy} = {}_np_x \cdot {}_np_y \quad (7)$$

Já no status de vida do último sobrevivente, ao invés de se multiplicar somente pela probabilidade de um indivíduo na idade x até a idade $x+n$, utiliza-se o conceito de união de conjuntos, ou seja, soma-se a probabilidade de ocorrência dos dois eventos e remove-se a intersecção entre esses dois eventos. Dessa forma, o fator a ser utilizado é composto pela soma das seguintes parcelas: a probabilidade de sobrevivência do primeiro indivíduo na idade atual x até a idade $x+n$; a probabilidade de sobrevivência do segundo indivíduo na idade atual y até a idade $y+n$; e o valor negativo do produto entre as probabilidades de sobrevivência do primeiro indivíduo na idade atual x até a idade $x+n$ e do segundo indivíduo na idade atual y até a idade $y+n$, este último representando a intersecção entre os dois eventos das parcelas anteriores.

$${}_np_{\overline{xy}} = {}_np_x + {}_np_y - {}_np_x \cdot {}_np_y \quad (8)$$

7. 2. 3. Funções de comutação

Funções de comutações, dentro do campo atuarial, são relações matemáticas propositalmente elaboradas de forma a simplificar o cálculo de diversas operações atuariais relacionadas a anuidades e seguros. Abordando de forma etimológica, comutação é a troca de ordens dos elementos, todavia, sem a perda do significado original. Isto é, as mesmas expressões demonstradas na seção 7.2.1. podem ser comutadas em outras expressões, em um formato que facilite os cálculos.

É importante ressaltar que ao utilizar as funções de comutações nos cálculos atuariais, assume-se por padrão por uma taxa de juros constante ao longo do tempo. Além disso, ao invés da utilização das probabilidades de sobrevivência, como visto anteriormente, nas funções de comutações se utiliza a função sobreviventes l_x de uma determinada tábua de mortalidade selecionada como premissa para o cálculo, que representa o número de pessoas sobreviventes à idade exata x , a partir de um grupo de população inicial l_0 , a raiz da tábua de mortalidade.

As duas principais funções comutações utilizadas nos cálculos das anuidades são o D_x e o N_x d descritas a seguir:

$$D_x = l_x \cdot v^x \quad (9)$$

$$N_x = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t} \quad (10)$$

Onde w representa a idade máxima presente na tábua de mortalidade utilizada para os cálculos e v representa o fator de desconto, demonstrada na expressão (2).

De forma isolada, essas duas funções de comutação nada representam. Porém, elas podem ser relacionadas para representar as expressões dos cálculos das anuidades. Souza (2016) demonstra as deduções matemáticas para, através das funções das comutações, representar as mesmas expressões das anuidades (3), (4), (5) e (6), dadas, respectivamente, por:

$$\ddot{a}_{\overline{x:n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \quad (11)$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \quad (12)$$

$${}_m|\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x} \quad (13)$$

$${}_m|\ddot{a}_{\overline{x:n}|} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} \quad (14)$$

O Quadro 1 mostra um exemplo do cálculo de uma anuidade vitalícia para um homem e para uma mulher, utilizando a tábua de mortalidade do IBGE de 2010 e taxa de juros de 6%. Através do quadro, é demonstrada a anuidade vitalícia para as idades de 0

anos até os 18 anos, embora a tabela completa contemple todas as idades, até o limite máximo desta tábua de mortalidade extrapolada, que vai até os 111 anos.

QUADRO 1 – Cálculo de anuidades vitalícias através das funções de comutações

x	Masculino					Feminino				
	lx	Vx	Dx	Nx	äx	lx	Vx	Dx	Nx	äx
0	100000	1,000	100000	1689841	16,90	100000	1,000	100000	1715391	17,15
1	98565	0,943	92986	1589841	17,10	98782	0,943	93190	1615391	17,33
2	98470	0,890	87638	1496855	17,08	98703	0,890	87846	1522201	17,33
3	98408	0,840	82625	1409217	17,06	98655	0,840	82832	1434355	17,32
4	98360	0,792	77911	1326592	17,03	98618	0,792	78115	1351523	17,30
5	98321	0,747	73471	1248682	17,00	98588	0,747	73671	1273408	17,29
6	98287	0,705	69289	1175211	16,96	98563	0,705	69483	1199737	17,27
7	98257	0,665	65347	1105922	16,92	98541	0,665	65536	1130254	17,25
8	98230	0,627	61631	1040575	16,88	98521	0,627	61814	1064718	17,22
9	98204	0,592	58127	978945	16,84	98503	0,592	58304	1002905	17,20
10	98178	0,558	54822	920818	16,80	98485	0,558	54993	944601	17,18
11	98152	0,527	51705	865996	16,75	98467	0,527	51871	889608	17,15
12	98124	0,497	48765	814291	16,70	98448	0,497	48926	837737	17,12
13	98092	0,469	45989	765526	16,65	98425	0,469	46146	788811	17,09
14	98051	0,442	43368	719536	16,59	98398	0,442	43522	742666	17,06
15	97997	0,417	40891	676168	16,54	98367	0,417	41045	699144	17,03
16	97892	0,394	38535	635278	16,49	98331	0,394	38708	658099	17,00
17	97758	0,371	36304	596743	16,44	98291	0,371	36502	619391	16,97
18	97597	0,350	34193	560439	16,39	98246	0,350	34420	582890	16,93

Fonte: dados do IBGE (2010)

7. 2. 4. Cálculo do FGB para uma pensão por morte concedida a um filho

Um benefício de pensão por morte concedido a um filho em idade legal para recebimento, paga uma anuidade temporária ao filho mais novo, da idade atual z até a idade limite legal $z+n$ para o recebimento desse benefício.

Através da expressão (11), podemos escrever que o fundo garantidor deste benefício é dado por:

$$FGB = \ddot{a}_{z:n] = \frac{N_z - N_{z+n}}{D_z} \quad (15)$$

7. 2. 5. Cálculo do FGB para uma pensão por morte concedida a um cônjuge

Um benefício de pensão por morte concedido a um cônjuge paga uma anuidade vitalícia ao cônjuge na idade atual y , além de uma anuidade reversível ao filho mais novo da idade atual do cônjuge y , diferida em m anos (sendo m o tempo até o nascimento do

filho, caso ainda não tenha) até a idade limite legal do filho para recebimento desse benefício $z+n$. Uma anuidade reversível ($\ddot{a}_{x|y}$) pode ser descrita como uma anuidade paga a um indivíduo na idade x , paga enquanto ele permanecer vivo, ou revertida a um segundo indivíduo com a idade y , enquanto ele permanecer vivo após a morte do primeiro. Em linhas gerais, uma anuidade a um indivíduo na idade x revertida a um indivíduo na idade y , como demonstrado abaixo na expressão (16), pode ser expressa através de uma anuidade ao indivíduo y subtraído de uma anuidade de vida conjunta aos dois indivíduos, como definição vista na seção 7.2.2. (16)

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$$

Destarte, podemos escrever o fundo garantidor deste benefício através de:

$$FGB = \ddot{a}_y + {}_m|\ddot{a}_{\overline{yz:n}|} \quad (17)$$

Utilizando o mesmo conceito da expressão (16) para o cálculo de uma anuidade diferida temporária como na expressão (14), substituindo na segunda parcela da soma da expressão (17), e substituindo a primeira parcela pela expressão (12), temos que:

$$FGB = \frac{N_x}{D_x} + \frac{N_{z+m} - N_{z+m+n}}{D_z} - \frac{N_{yz+m} - N_{yz+m+n}}{D_{yz}} \quad (18)$$

5. 2. 6. Cálculo do FGB para uma aposentadoria por invalidez

Um benefício aposentadoria por invalidez concedido a segurado paga uma anuidade vitalícia ao inválido. ($\ddot{a}_x$). Além de uma anuidade reversível em forma de pensão por morte ao cônjuge, se vivo (que por sua vez é reversível ao filho mais novo), ou uma anuidade ao filho em forma de pensão por morte até a idade legal para recebimento do benefício (C_x). Essa anuidade reversível, denominada C_x , pode ser expressa por:

$$C_x = \sum_{n=0}^{w-x} v^{n+1} * {}_np_x * (1 - p_{x+n}) * H_{x+n+1} * p_{\overline{(y+n)(z+n)}} \quad (19)$$

Sendo $p_{\overline{(y+n)(z+n)}}$ a probabilidade de sobrevivência do status último sobrevivente, conforme visto na seção 7.2.2., para a idade y do cônjuge e z do filho mais novo. Já H_x representa uma pensão por morte ao cônjuge reversível ao filho mais novo da idade atual do cônjuge y , diferida em m anos (sendo m o tempo até o nascimento do filho, caso ainda não tenha) até a idade limite legal do filho para recebimento desse

7. 3. Cálculo do FGB pelo método estocástico

O método estocástico para o cálculo do FGB destes benefícios será modelado através de um algoritmo computacional escrito na linguagem R, que é uma linguagem de programação de código aberto, voltada para a computação estatística e gráfica (R CORE TEAM, 2016). Neste trabalho não será detalhada a implementação da programação. Todo o algoritmo pode ser consultado através do Anexo II. Ao invés disso, será demonstrado o fluxo temporal dos beneficiários.

O algoritmo se baseia numa simulação do beneficiário desde o momento da concessão do benefício até a encerramento do benefício, quando não restar mais nenhum inválido ou pensionista recebendo o benefício. Para cada momento do tempo, desde o momento zero até o último ano de pagamento a algum beneficiário, realiza-se testes aleatórios para saber se o atual beneficiário morre. Em caso positivo, testa-se se um novo beneficiário herda o benefício. Em seguida se realiza o mesmo teste para o próximo ano, e assim por diante.

A cada ano, armazena-se a informação do estado atual do vínculo do benefício. Esse estado representa qual tipo de beneficiário está recebendo o benefício naquele ano. Classificou-se os estados, conforme abaixo:

- O número 1 representa que o benefício pertence a um inválido;
- O número 2 representa que o benefício pertence a um cônjuge pensionista;
- O número 3 representa que o benefício pertence a um filho pensionista;
- O número 4 representa que não há mais beneficiários.

Essa simulação é repetida uma grande quantidade de vezes, e a cada repetição, as informações dos estados do vínculo do benefício é armazenado. Ao final de todas as simulações para todo o período de tempo analisado, obtém-se uma matriz de estados, onde cada linha representa uma simulação e cada coluna representa um ano, e as informações armazenadas representam os estados em cada simulação em cada momento do tempo.

As repetições das simulações ocorrem numa grande quantidade de vezes, para poder utilizar a Lei dos Grandes Números, lei esta elucidada por Jacob Bernoulli enquanto vivo, entre 1654 e 1705. Segundo a lei, quanto maior a quantidade de vezes que se repete um experimento aleatório, aumenta a certeza de que a frequência de eventos observados

no experimento seja igual a sua real probabilidade de ocorrência, supondo que, sob condições similares, a ocorrência ou não ocorrência do evento no futuro seguirá a mesma tendência observada no passado.

Destarte, se calcularmos os benefícios pagos ao longo do tempo em cada uma das simulações e trazermos a valor presente, e em seguida calcularmos a média de todas as simulações destes valores presentes, obteremos uma estimativa do valor médio do FGB, sendo que essa estimativa se aproximará cada vez mais do valor real à medida que se aumentar a quantidade de repetições de simulações.

O algoritmo recebe como parâmetros iniciais as mesmas informações utilizadas no cálculo do FGB pelo método determinístico. Além desses parâmetros (como tábua de mortalidade, premissa econômica, premissas demográficas, etc.), o algoritmo também recebe como parâmetro o valor da quantidade de repetições que a simulação se repetirá, e o código do estado inicial do vínculo do benefício (se concedido a um inválido, a um cônjuge pensionista ou a um filho pensionista).

7. 3. 1. Testes aleatórios

Como explicado na seção 5, o método estocástico se caracteriza por incorporar os efeitos da aleatoriedade, podendo gerar resultados diferentes para os mesmos parâmetros iniciais. Nos cálculos desse trabalho, a incorporação da aleatoriedade se dará através dos testes de sobrevivência ou morte do beneficiário a cada momento do tempo. Cada teste de morte pode ser entendido como uma variável aleatória de Bernoulli.

Seja X uma variável aleatória de Bernoulli de parâmetro p , que descreve um evento de morte ou não de um indivíduo em um determinado intervalo de tempo. Então, podemos expressar X como:

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

Sendo P a probabilidade de sucesso do evento X . O sucesso representa a morte do indivíduo, e o fracasso representa a sobrevivência.

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se ocorrer "sucesso"} \\ 0, & \text{se ocorrer "fracasso"} \end{cases}$$

Na linguagem R, existem funções que, dado a probabilidade de sucesso, computacionalmente é feito um teste estocástico para definir se houve sucesso ou fracasso para determinada probabilidade de ocorrência do evento. Dessa forma,

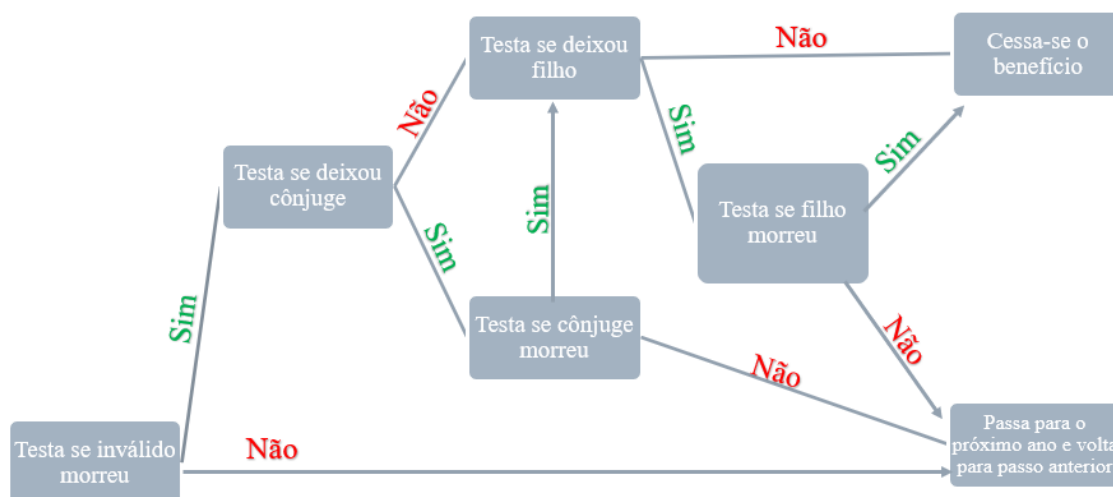
computacionalmente, para cada ano, realiza-se um teste para definir se o indivíduo beneficiário morreu ou sobreviveu. Como é um teste estocástico, se repetido uma grande quantidade de vezes, a frequência observada do sucesso tenderá a probabilidade de sucesso do evento, de acordo com a Lei dos Grandes Números.

As próximas seções demonstrarão o fluxo temporal do algoritmo de acordo com o estado inicial do vínculo do benefício, tendo a mudança de estados alteradas a partir dos testes aleatórios realizados computacionalmente.

7. 3. 2. Fluxo temporal para o estado inicial: beneficiário inválido

Para a modelagem da simulação do fluxo temporal para um beneficiário que inicialmente é um inválido é o maior fluxo entre todos, pois a partir dele pode-se percorrer todos os outros estados.

FIGURA 3 – Fluxo temporal para a simulação de um beneficiário inválido no tempo inicial



Fonte: elaboração própria

A Figura 3 demonstra o fluxo temporal para um beneficiário que no tempo inicial é um beneficiário aposentado por invalidez. Enquanto o estado atual do beneficiário for inválido, para cada ano simulado será realizado um teste aleatório para, com base nas probabilidades de morte consultadas na tábua de mortalidade pré-determinada, definir se o inválido morreu ou não. No ano em que ele morrer, é realizado um teste para saber se existe algum cônjuge que receberá a pensão por morte do inválido. Note que, para os cálculos realizados nesse trabalho, por padrão, todo inválido falecido sempre deixará um cônjuge pensionista. Na prática, a existência de um cônjuge poderia ser modelada através de uma tábua de nupcialidade, que determina as probabilidades do estado civil de cada

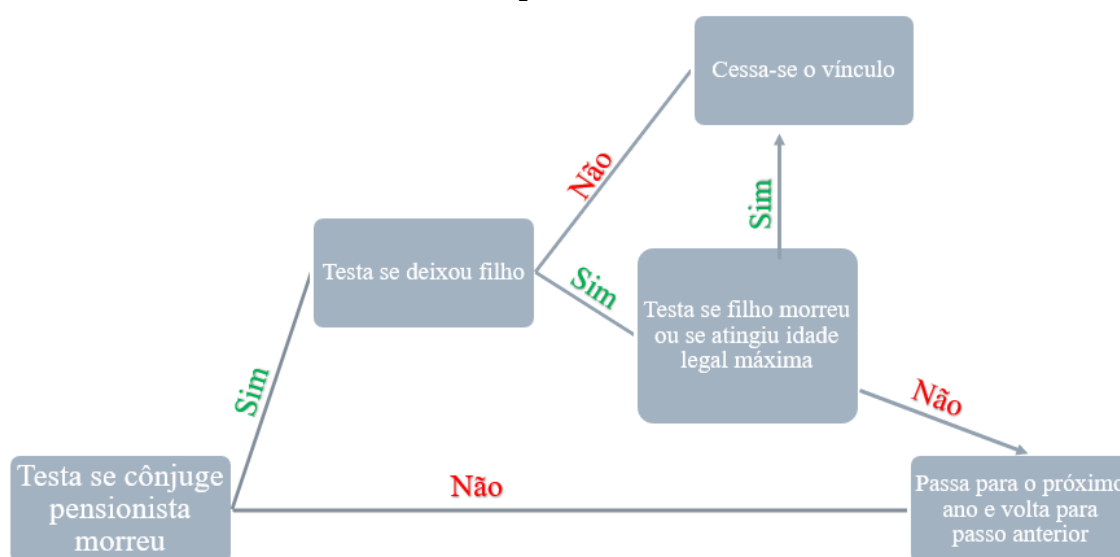
indivíduo a cada idade. Em seguida, é testado, ano a ano, se o cônjuge morreu. Na ocorrência do sucesso do evento, passa-se a testar anualmente a morte do filho pensionista, paralelamente ao teste anual se o filho atingiu a idade máxima para o recebimento do benefício.

Uma vez que não houver mais inválido, cônjuge pensionista ou filho pensionista recebendo benefício, o benefício é considerado encerrado, e a simulação atual é terminada, passando-se para a próxima simulação desde o tempo zero como os parâmetros reiniciados.

7. 3. 3. Fluxo temporal para o estado inicial: cônjuge pensionista

Para a modelagem da simulação do fluxo temporal para um beneficiário que inicialmente é um cônjuge pensionista, a estrutura do fluxo é menor que o da seção anterior, pois a partir dele pode-se somente mudar para o estado de filho pensionista (além do encerramento do benefício).

FIGURA 4 – Fluxo temporal para a simulação de um cônjuge pensionista no tempo inicial



Fonte: elaboração própria

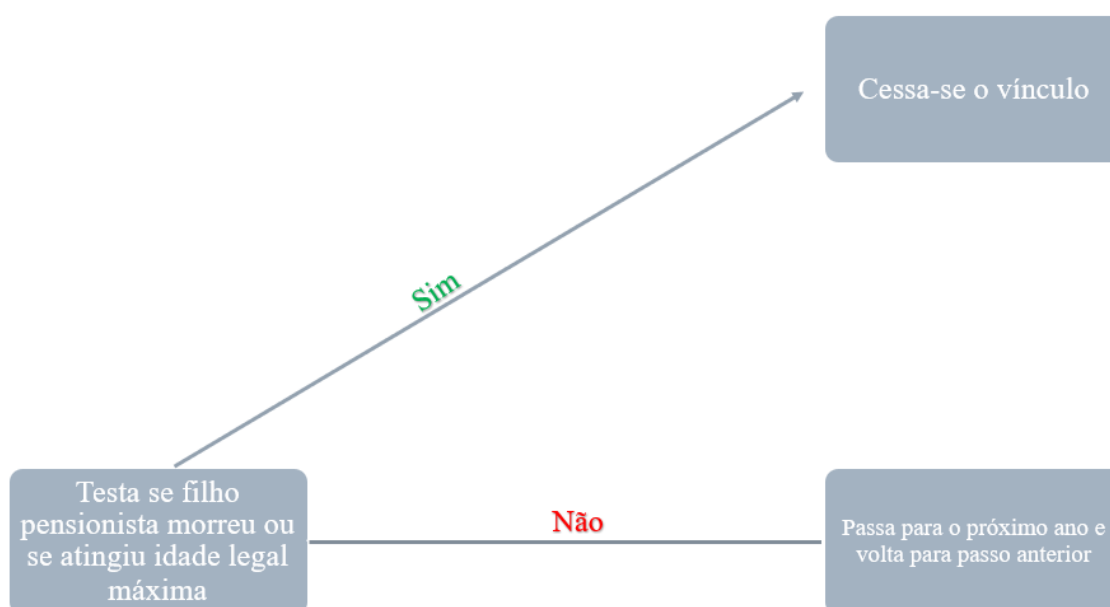
A Figura 4 demonstra o fluxo temporal para um beneficiário que no tempo inicial é um cônjuge pensionista. Enquanto o estado atual do beneficiário for de cônjuge pensionista, para cada ano simulado será realizado um teste aleatório para, com base nas probabilidades de morte consultadas na tábua de mortalidade pré-determinada, definir se o cônjuge pensionista morreu ou não. No ano em que ele morrer, é realizado um teste para saber se ficou um filho pensionista para que receberá a pensão por morte. Em

seguida, é testado, ano a ano, se o filho pensionista morreu ou se atingiu a idade legal máximo para recebimento do benefício. Na ocorrência de um dos dois eventos, o vínculo do benefício é encerrado e a simulação atual é terminada, passando-se para a próxima simulação desde o tempo zero como os parâmetros reiniciados.

7. 3. 4. Fluxo temporal para o estado inicial: filho pensionista

Para a modelagem da simulação do fluxo temporal para um beneficiário que inicialmente é um filho pensionista, a estrutura do fluxo é a mais simples de todas, pois a partir dele não é gerado benefício para nenhum outro indivíduo.

FIGURA 5 – Fluxo temporal para a simulação de um filho pensionista no tempo inicial



Fonte: elaboração própria

Na morte ou na hipótese de o filho pensionista atingir a idade máxima legal para recebimento do benefício, o vínculo do benefício já é encerrado e a simulação atual é terminada, passando-se para a próxima simulação desde o tempo zero como os parâmetros reiniciados, conforme demonstrado na Figura 5.

7. 3. 4. Cálculo do FGB a partir da matriz de estados

Após a realização de todas as repetições de uma simulação para um indivíduo beneficiário com os mesmos parâmetros iniciais, será obtida uma matriz de estados, contendo todos os estados do benefício, na qual cada linha representa uma simulação realizada e cada coluna representa um momento do tempo, dado em anos.

Para fins explicativos, será demonstrado um exemplo de simulação para o cálculo do FGB para um benefício de invalidez concedido para um indivíduo homem com 40 anos, para um período calculado de 20 anos, com a simulação sendo repetida 10 vezes. As demais premissas serão idênticas às enfatizadas durante a explicação do cálculo do FGB pela metodologia determinística.

É importante realizar observações sobre o parâmetro do período calculado e sobre o número de repetições da simulação. Sobre o primeiro, destaque-se que o tempo total de anos da simulação precisa ser suficiente para que, em todas as simulações, alcance-se o tempo em que não haja mais beneficiário para aquele benefício. Isso ocorrerá, no máximo, em até $w - x + 5 + 21$ anos, onde w é a idade máxima da tábua de mortalidade (em que, por padrão, considera-se que o beneficiário morre ao atingir essa idade), x é a idade atual do beneficiário, 5 representa a diferença de idade máxima entre um cônjuge feminino em relação ao marido falecido, e 21 representa a quantidade máxima de anos que um recém-nascido pensionista poderá receber o benefício. Sabendo que a tábua de mortalidade utilizada vai até a idade máxima de 111 anos, e supondo que um segurado só comece a ser um segurado da previdência social com no mínimo 18 anos, então o período máximo de anos em que o vínculo de um benefício por invalidez pode durar é de $111 - 18 + 5 + 21 = 119$ anos. De qualquer forma, apenas para fins de simplificar a explicação do exemplo dessa seção, será considerado um período de tempo de somente 20 anos.

Quanto ao parâmetro do número de repetições, deve ser observado que para se obter um valor do FGB estimado muito próximo do valor do FGB real, necessita-se de um número suficientemente grande de repetições. Esse número de quantidade de repetições sugeridas pode ser objeto de um futuro estudo, mas nesse trabalho será realizado 100.000 repetições, número em que, após testes realizados, observou-se já ter pouca variação no resultado se adicionadas mais repetições à simulação total. Para este exemplo explicativo dessa seção, serão realizados somente 10 repetições.

A Figura 6 exibe uma matriz de estados para um aposentado por invalidez durante um período de 20 anos, com 10 repetições dessa simulação. Relembrando que:

FIGURA 6 – Matriz de estados para um inválido após 20 anos e 10 repetições

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Fonte: elaboração própria

- O número 1 representa que o benefício pertence a um inválido;
- O número 2 representa que o benefício pertence a um cônjuge pensionista;
- O número 3 representa que o benefício pertence a um filho pensionista;
- O número 4 representa que não há mais beneficiários.

Sendo assim, percebe-se que em todas as simulações, exceto a simulação número 2 e a número 7, durante todo o período simulado o beneficiário inválido permaneceu vivo e recebendo benefício. Na simulação número 2, o beneficiário inválido após 7 anos faleceu, e deixou um cônjuge recebendo o benefício de pensão por morte. O cônjuge pensionista, por sua vez, permaneceu vivo até o fim do período analisado, nesta simulação.

Na simulação número 7, após 7 anos o beneficiário inválido faleceu, e deixou um cônjuge pensionista recebendo o benefício. Por sua vez, o cônjuge pensionista faleceu após passar 8 anos recebendo a pensão, e não tinha nenhum filho com idade legal para recebimento do benefício no momento da sua morte, encerrando o benefício. O motivo de, nessa simulação, não haver filho herdando o benefício por morte, deve-se ao fato de a cônjuge pensionista ter tido o filho aos 25 anos, e no momento de sua morte ela já possuir mais do que 25+21 anos e, dessa forma, não havia mais filho com menos de 21 anos, para receber o benefício.

Sabendo os anos em que havia algum beneficiário vivo, e sabendo o valor do benefício, é possível criar uma matriz com os valores pagos de benefícios a cada ano.

FIGURA 7 – Matriz dos valores dos benefícios pagos a cada ano para um inválido após 20 anos e 10 repetições

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000
2	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000
3	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000
4	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000
5	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000
6	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000
7	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	0	0	0	0	0	0
8	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000
9	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000
10	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000	13000

Fonte: elaboração própria

Considerando que o valor do benefício é de 13.000 u.m. ao ano, e sabendo que nos últimos 6 anos da simulação 7 não havia beneficiário, monta-se a matriz demonstrada na Figura 7. No entanto, todos esses valores ainda não estão considerando o valor do dinheiro no tempo.

FIGURA 8 – Matriz dos valores presentes dos benefícios pagos a cada ano para um inválido após 20 anos e 10 repetições

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	13000	12264.15	11569.95	10915.05	10297.22	9714.356	9164.487	8645.742	8156.361	7694.68	7259.132	6848.238	6460.602	6094.907	5749.913	5424.446	5117.402	4827.737	4554.469	4296.669
2	13000	12264.15	11569.95	10915.05	10297.22	9714.356	9164.487	8645.742	8156.361	7694.68	7259.132	6848.238	6460.602	6094.907	5749.913	5424.446	5117.402	4827.737	4554.469	4296.669
3	13000	12264.15	11569.95	10915.05	10297.22	9714.356	9164.487	8645.742	8156.361	7694.68	7259.132	6848.238	6460.602	6094.907	5749.913	5424.446	5117.402	4827.737	4554.469	4296.669
4	13000	12264.15	11569.95	10915.05	10297.22	9714.356	9164.487	8645.742	8156.361	7694.68	7259.132	6848.238	6460.602	6094.907	5749.913	5424.446	5117.402	4827.737	4554.469	4296.669
5	13000	12264.15	11569.95	10915.05	10297.22	9714.356	9164.487	8645.742	8156.361	7694.68	7259.132	6848.238	6460.602	6094.907	5749.913	5424.446	5117.402	4827.737	4554.469	4296.669
6	13000	12264.15	11569.95	10915.05	10297.22	9714.356	9164.487	8645.742	8156.361	7694.68	7259.132	6848.238	6460.602	6094.907	5749.913	5424.446	5117.402	4827.737	4554.469	4296.669
7	13000	12264.15	11569.95	10915.05	10297.22	9714.356	9164.487	8645.742	8156.361	7694.68	7259.132	6848.238	6460.602	6094.907	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	13000	12264.15	11569.95	10915.05	10297.22	9714.356	9164.487	8645.742	8156.361	7694.68	7259.132	6848.238	6460.602	6094.907	5749.913	5424.446	5117.402	4827.737	4554.469	4296.669
9	13000	12264.15	11569.95	10915.05	10297.22	9714.356	9164.487	8645.742	8156.361	7694.68	7259.132	6848.238	6460.602	6094.907	5749.913	5424.446	5117.402	4827.737	4554.469	4296.669
10	13000	12264.15	11569.95	10915.05	10297.22	9714.356	9164.487	8645.742	8156.361	7694.68	7259.132	6848.238	6460.602	6094.907	5749.913	5424.446	5117.402	4827.737	4554.469	4296.669

Fonte: elaboração própria

Já a Figura 8 atualiza os valores da matriz da Figura 6 a valor presente, considerando uma taxa de juros anual de 6%. Então, se calcularmos o somatório de cada linha, obtemos o FGB que teria sido necessário para o pagamento dos benefícios de cada simulação, obtendo, assim, um vetor de FGB, contendo um resultado para cada simulação. Sendo assim, finalmente, ao tomarmos a média de todos os FGB, obtemos o valor do FGB médio estimado, que para uma grande quantidade de repetições de simulações tenderá ao valor real do FGB.

8. Resultados

Ao todo foram realizados 32 cálculos do FGB, para cada um dos dois métodos, para 32 tipos de indivíduos diferentes, alterando o estado inicial, o sexo e a idade. Para cada FGB calculado será apresentado os resultados para cada um dos dois métodos, e a diferença absoluta e percentual entre os dois métodos.

8. 1. Filho pensionista

Para um benefício de pensão por morte concedido a um filho dependente foi calculado o FGB de 6 maneiras distintas. Para um filho recém-nascido, para um filho aos 15 anos e para um filho aos 21 anos, repetindo essas idades para o sexo masculino e para o sexo feminino.

QUADRO 2 – Comparações do FGB pelo método determinístico e estocástico para um benefício concedido a um filho pensionista

Estado	Sexo	Idade	Método Determinístico	Método Estocástico	Diferença	Diferença %
Filho	Feminino	0	163.648,97	163.601,77	47,20	0,029%
Filho	Feminino	15	76.834,75	76.824,13	10,61	0,014%
Filho	Feminino	21	13.000,00	13.000,00	-	0,000%
Filho	Masculino	0	163.648,97	163.569,01	79,96	0,049%
Filho	Masculino	15	76.834,75	76.831,27	3,47	0,005%
Filho	Masculino	21	13.000,00	13.000,00	-	0,000%

Fonte: elaboração própria

No Quadro 2 é exibido os resultados para as simulações destes 6 beneficiários distintos. A diferença percentual do FGB entre os dois métodos para todas as 6 simulações diferentes é irrisória. Nota-se que quanto maior é a idade do filho no momento da concessão do benefício, menor é a diferença percentual observada entre os dois métodos. Isso ocorre devido a menor quantidade de influência da aleatoriedade quanto menor é o período de anos que o benefício dura, já que o efeito da aleatoriedade se repete ano a ano.

Para a idade 21 os dois métodos não apresentam qualquer diferença, visto que não há aleatoriedade no método estocástico no benefício concedido a um filho pensionista no último ano legal que ele receberá o benefício, pois o pagamento do benefício é antecipado, ou seja, obrigatoriamente no início do período, sendo que o teste aleatório é realizado somente em seguida.

8. 2. Cônjuge pensionista

Para um benefício de pensão por morte concedido a um cônjuge foi calculado o FGB de 14 maneiras distintas. Considerou-se as idades de 18, 21, 40, 60, 80, 100 e 111, repetindo essas idades para o sexo masculino e para o sexo feminino.

QUADRO 3 – Comparações do FGB pelo método determinístico e estocástico para um benefício concedido a um cônjuge pensionista

Estado	Sexo	Idade	Método Determinístico	Método Estocástico	Diferença	Diferença %
Cônjuge	Feminino	18	222.109,23	222.094,46	14,77	0,007%
Cônjuge	Feminino	21	219.632,33	219.600,68	31,65	0,014%
Cônjuge	Feminino	40	202.388,77	202.375,15	13,62	0,007%
Cônjuge	Feminino	60	163.097,22	163.018,88	78,34	0,048%
Cônjuge	Feminino	80	98.234,18	98.351,42	117,24	0,119%
Cônjuge	Feminino	100	34.576,92	34.585,01	8,09	0,023%
Cônjuge	Feminino	111	13.000,00	13.000,00	-	0,000%
Cônjuge	Masculino	18	216.639,49	216.657,23	17,74	0,008%
Cônjuge	Masculino	21	213.680,12	213.642,62	37,50	0,018%
Cônjuge	Masculino	40	194.449,10	194.385,54	63,56	0,033%
Cônjuge	Masculino	60	148.809,43	148.836,21	26,78	0,018%
Cônjuge	Masculino	80	86.536,34	86.578,61	42,27	0,049%
Cônjuge	Masculino	100	25.376,31	25.347,81	28,50	0,112%
Cônjuge	Masculino	111	13.000,00	13.000,00	-	0,000%

Fonte: elaboração própria

No Quadro 3 é exibido os resultados para as simulações destes 14 beneficiários distintos. A diferença percentual do FGB entre os dois métodos para todas as 14 simulações diferentes é muito baixa, chegando na diferença máxima de 0,119% para um benefício de pensão por morte a uma mulher cônjuge aos 80 anos. Embora por um lado há um efeito menor de variabilidade numa mulher cônjuge aos 80 anos em comparação a uma cônjuge aos 18 anos, já que a segunda poderá continuar sofrendo o efeito da aleatoriedade por mais tempo e também a um possível filho pensionista, após sua morte, ao ponto que uma mulher aos 80 anos viverá por menos tempo e não deixará filho dependente pensionista, o que explica a maior variabilidade da diferença entre os métodos é que pelo método estocástico haverá um efeito maior da aleatoriedade devido a maior taxa de probabilidade de morte numa idade assim mais avançada, ocorrendo uma distribuição mais equilibrada entre ocorrências de sucesso e fracasso no teste aleatório do evento de morte do beneficiário.

Para a idade 111 os dois métodos não apresentam qualquer diferença, visto que não há aleatoriedade no método estocástico no benefício concedido a um cônjuge pensionista no último da tábua de mortalidade, pois o pagamento do benefício é antecipado, ou seja, obrigatoriamente no início do período, e na idade 111 considera-se que o beneficiário morre logo em seguida, por não haver probabilidades de morte para as idades seguintes.

8. 3. Inválido

Para um benefício de aposentadoria por invalidez concedido a um segurado inválido foi calculado o FGB de 12 maneiras distintas. Considerou-se as idades de 21, 40, 60, 80, 100 e 111, repetindo essas idades para o sexo masculino e para o sexo feminino.

QUADRO 4 – Comparações do FGB pelo método determinístico e estocástico para um benefício concedido a um aposentado por invalidez

Estado	Sexo	Idade	Método Determinístico	Método Estocástico	Diferença	Diferença %
Inválido	Feminino	21	224.238,20	224.256,08	17,88	0,008%
Inválido	Feminino	40	213.804,97	213.768,16	36,81	0,017%
Inválido	Feminino	60	184.000,65	184.023,04	22,38	0,012%
Inválido	Feminino	80	120.250,76	120.245,50	5,26	0,004%
Inválido	Feminino	100	34.640,02	34.614,00	26,01	0,075%
Inválido	Feminino	111	13.000,00	13.000,00	-	0,000%
Inválido	Masculino	21	225.494,03	225.470,16	23,87	0,011%
Inválido	Masculino	40	217.513,52	217.464,04	49,47	0,023%
Inválido	Masculino	60	193.956,48	194.013,62	57,14	0,029%
Inválido	Masculino	80	140.296,60	140.133,36	163,24	0,116%
Inválido	Masculino	100	57.958,76	57.950,63	8,13	0,014%
Inválido	Masculino	111	16.179,29	16.155,31	23,98	0,148%

Fonte: elaboração própria

No Quadro 4 mostra os resultados para as simulações destes 14 beneficiários distintos. A diferença percentual do FGB entre os dois métodos para todas as 14 simulações diferentes é consideravelmente baixa, chegando na diferença máxima de 0,148% para um benefício de pensão por morte a um homem inválido aos 111 anos. O que pode explicar a maior variabilidade da diferença entre os métodos para um homem aos 111 anos é que pelo método estocástico haverá um efeito maior da aleatoriedade para a cônjuge mulher pensionista que herdará o benefício aos 106 anos, que por sua vez possui uma maior taxa de probabilidade de morte numa idade assim mais avançada, ocorrendo

uma distribuição mais equilibrada entre ocorrências de sucesso e fracasso no teste aleatório do evento de morte do beneficiário.

Para a idade 111 os dois métodos não apresentam qualquer diferença para uma inválida feminina, visto que não há aleatoriedade no método estocástico no benefício concedido a uma inválida no último da tábua de mortalidade, pois o pagamento do benefício é antecipado. Ou seja, obrigatoriamente no início do período, e na idade 111 considera-se que o beneficiário morre logo em seguida, por não haver probabilidades de morte para as idades seguintes. Além disso não terá dependente recebendo o benefício em seguida, pois foi considerado que o cônjuge tem 5 anos a mais do que uma inválida mulher, e como não há a idade de 116 anos na tábua de mortalidade, considera-se não haver concessão de pensão por morte a cônjuge.

8. 4. Análise da variabilidade do FGB pelo método estocástico

No cálculo do FGB através do método estocástico, como mencionado na seção 7.3.4., forma-se um vetor de resultados de FGB para cada repetição realizada das simulações. Ao tomarmos a média desse vetor, obtemos o valor do FGB esperado. Porém, outros resultados podem ser obtidos através desse vetor. É possível dividirmos este vetor em percentis.

Percentis, na estatística descritiva, são medidas que dividem uma distribuição, após ordená-lo em ordem crescente, em 100 partes, contendo uma percentagem igual dos dados em cada uma das 100 partes. O k -ésimo percentil P_k é o valor $x(x_k)$ correspondente à frequência acumulada de $N \cdot \frac{k}{100}$, sendo N o tamanho do vetor.

Sendo assim, o percentil 1º separa os 1% menores valores do vetor dos 99% maiores valores. Da mesma forma, O 80º percentil separa os 80% menores valores do vetor dos 20% maiores valores.

Seguindo essa lógica, é possível estabelecermos qual o valor máximo que o FGB pode assumir com nível k de confiabilidade. Esse nível k de confiabilidade será arbitrado em 95%. Dessa forma, obteremos uma confiança de 95% de que o FGB calculado será suficiente para cumprir as obrigações dos benefícios pagos ao longo do tempo para o referido benefício concedido.

QUADRO 5 – Cálculo do FGB pelo método estocástico com 95% de confiabilidade

Estado	Sexo	Idade	FGB	FGB Percentil 95	Reserva de Risco com 95% de Confiança
Cônjuge	Feminino	21	219.600,68	227.365,57	7.764,89
Cônjuge	Feminino	40	202.375,15	223.098,56	20.723,41
Cônjuge	Feminino	60	163.018,88	208.601,86	45.582,98
Cônjuge	Feminino	80	98.351,42	165.933,00	67.581,57
Cônjuge	Feminino	100	34.585,01	67.760,73	33.175,72
Cônjuge	Feminino	111	13.000,00	13.000,00	-
Cônjuge	Masculino	21	213.642,62	226.926,03	13.283,40
Cônjuge	Masculino	40	194.385,54	221.374,58	26.989,04
Cônjuge	Masculino	60	148.836,21	203.072,83	54.236,62
Cônjuge	Masculino	80	86.578,61	153.758,85	67.180,24
Cônjuge	Masculino	100	25.347,81	47.749,16	22.401,34
Cônjuge	Masculino	111	13.000,00	13.000,00	-

Fonte: elaboração própria

No Quadro 5, além do cálculo do FGB pelo método estocástico para todos os benefícios concedidos para os indivíduos analisados anteriormente, acrescentou-se uma coluna com o valor do percentil 95 para cada vetor de FGB calculado. Também foi acrescentada a coluna “Reserva de Risco”. Esta coluna é a subtração do percentil 95 do FGB pelo FGB médio, e representa o valor adicional que é preciso reservar para que, com 95% de confiança, a soma da reserva com o FGB sejam suficientes para custear todos os pagamentos a serem pagos ao longo do tempo para este benefício concedido.

Nota-se, por exemplo, que um benefício de pensão por morte concedido à um cônjuge homem aos 80 anos possui uma alta variabilidade dos resultados do vetor do FGB, pois possui um percentil 95, no valor de 153.758,85 enquanto o FGB médio resultou em um valor de 86.578,61. Ou seja, a reserva de risco com 95% de confiabilidade para a concessão desse benefício é de 67.180,24, representando cerca de 77,5% do valor total do FGB. Isto implica em um alto risco de insuficiência financeira durante o pagamento desse benefício ao longo do tempo, já que os valores resultantes do FGB para todas as simulações desse benefício concedido tendem a valores mais distantes do valor médio.

9. Considerações Finais

Neste trabalho foi demonstrada a metodologia para o cálculo dos fundos garantidores de benefícios de riscos para o regime de financiamento de repartição de capital de cobertura para os RPPS brasileiros, para em seguida realizar um comparativo entre os resultados dos dois métodos. Para isso, calculou-se o FGB utilizando expressões matemáticas demonstradas, para o cálculo pelo método determinístico, e desenvolveu-se um algoritmo computacional para o cálculo pelo método estocástico.

Os resultados evidenciaram que, se utilizados os mesmos parâmetros, as duas metodologias tendem a produzir resultados idênticos. É notável que se a intenção é unicamente cálculo do FGB esperado, para os casos estudados nesse trabalho, é recomendável utilizar a metodologia determinística, pois ela reproduz pontualmente o valor esperado, enquanto no método estocástico existe uma pequena variabilidade em torno da média, que, embora seja irrisória, existe. Além disso, o método estocástico do FGB analisado possui uma complexidade maior na implementação em relação ao método determinístico. Entretanto, em situações mais complexas, com existência de mais variáveis aleatórias, as expressões do FGB esperado podem produzir uma complexidade que supere a implementação do método estocástico. O método estocástico por repetições de simulações se destaca por facilitar o estudo da variabilidade dos resultados, conforme CORREA (2014) realizou, ao criar um algoritmo que simula todo o fluxo previdenciário para uma população de segurados, resultando no cálculo das reservas matemáticas e, por conseguinte, nas análises de variabilidade, tanto das reservas como da população de segurados ao longo do tempo.

Uma das contribuições desse trabalho foi a de demonstrar de forma simplificada o desenvolvimento dos cálculos para um mesmo objetivo utilizando metodologias distintas, tornando mais visível as diferenças entre as metodologias estocástica e determinística, podendo vir a facilitar nos cálculos de outros objetos de interesse semelhantes ao FGB. Através do Anexo I e Anexo II, apresenta-se os algoritmos para os cálculos dos dois métodos analisados nesse trabalho.

Outra contribuição desse trabalho foi a de mostrar as limitações dos cálculos que consideram somente o valor médio. Ao ignorar a variabilidade dos resultados, assume-se um risco de se obter perdas financeiras por desconsiderar as probabilidades do valor calculado se tornar maior do que esperado, pelos efeitos da aleatoriedade.

Sobre a metodologia estocástica através de repetições de simulação, também existe a limitação de processamento computacional. A depender da quantidade de variáveis aleatórias presentes na simulação, e dependendo da quantidade de repetições a se realizar, pode-se obter processamentos que durem um período de tempo impraticável de se aguardar a cada vez que se rodar o algoritmo.

Os estudos realizados nesse trabalho despertam a necessidade de análises mais aprofundadas sobre os cálculos para o mesmo intuito com metodologias distintas. Por exemplo, o desenvolvimento de estudos contemplando mais benefícios previdenciários, ou mesmo calculando o Fundo de Oscilação de Risco citado na seção 4. Note que o FOR serve para calcular uma reserva de risco que é exposta ao risco da quantidade de benefícios concedidos e seus respectivos valores do FGB no ato da concessão do benefício, não medindo o risco do FGB não ser suficiente para o pagamento do benefício ao decorrer dos anos em que ele é pago. Dessa forma, a reserva de risco demonstrada no Quadro 5 não se relaciona com o FOR, que por sua vez pode ser objeto de futuros estudos.

Após todas essas considerações, espera-se que este trabalho sirva para elucidar questionamentos no tocante às metodologias aqui empregadas, bem como nas suas elaborações. Espera-se, também, que esse estudo sirva como discussão inicial acerca da necessidade de uma análise mais aprofundada da variabilidade dos resultados dentro do âmbito previdenciário.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFIAS

BRASIL. Lei Nº 9.717 de 27 de novembro de 1998. Dispõe sobre regras gerais para a organização e o funcionamento dos regimes próprios de previdência social dos servidores públicos da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, dos militares dos Estados e do Distrito Federal e dá outras providências. **Lex**, Brasília, 1998.

CORREA, C. S. **Tamanho populacional e aleatoriedade de eventos demográficos na solvência de RPPS municipais capitalizados**. Tese (Tese de Doutorado em Demografia) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.

BRASIL. Portaria no 403, de 10 de dezembro de 2008. dispõe sobre as normas aplicáveis às avaliações e reavaliações atuariais dos regimes próprios de previdência social - RPPS da união, dos estados, do distrito federal e dos municípios, define parâmetros para a segregação da massa e dá outras providências. **Lex**, Brasília, 2008.

BRASIL. Constituição da república federativa do brasil. **Lex**, Senado Federal, Brasília, 1988.

DATAPREV. **Anuário Estatístico da Previdência Social**. 2017. Brasília: Ministério da Fazenda, 2018.

SANTOS-JUNIOR, L. C.; AZEVEDO, F. I. X. de; ANDRADE, L. de M. B. **Resultado atuarial e seus determinantes**. In: **BRASIL Ministério da Fazenda. Regimes Previdenciários e Situação Atuarial**. Brasília: Secretaria da Previdência, 2018.

BRASIL. Instrução Normativa Nº 3 de 21 dezembro de 2018. Dispõe sobre a estrutura e os elementos mínimos dos fluxos atuariais elaborados nas avaliações atuariais anuais dos regimes próprios de previdência social (RPPS). **Lex**, Brasília, 2018.

BRASIL. Portaria Nº 464 de 19 de novembro de 2018. Dispõe sobre as normas aplicáveis às avaliações atuariais dos regimes próprios de previdência social - RPPS da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e estabelece parâmetros para a definição do plano de custeio e o equacionamento do déficit atuarial. **Lex**, Brasília, 2018.

SANTOS, N. M. G. DOS. **Um estudo prospectivo sobre a previdência social brasileira**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004. Tese de Doutorado.

PREVENTIONWEB, **Deterministic & probabilistic risk**. Deterministic risk considers the impact of a single risk scenario, whereas probabilistic risk considers all possible

scenarios, their likelihood and associated impacts, [S. l.], p. 1, 17 maio 2012. Disponível em: <https://www.preventionweb.net/understanding-disaster-risk/key-concepts/deterministic-probabilistic-risk>. Acesso em: 12 abr. 2022.

BANKS, Jerry. **Handbook of simulation: principles, methodology, advances, applications, and practice**. USA: Wiley-IEEE, 1998. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=dMZ1Zj3TBgAC>. Acesso em: 04 mar. 2022.

VOS, Susan De; PALLONI, Alberto. **Formal Models and Methods for the Analysis of Kinship and Household Organization**. Population Index. Office of Population Research, 2. v. 55, Summer, 1989.

CHOW, Timothy Y, **What is a Closed-Form Number?**, American Mathematical Monthly, 106, 1996. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2589148> . Acesso em 04 mar. 2022.

REEVES, J.H. **Projection of Number of Kin**. Family demography: Methods and their application. Oxford; Clarendon Press, 1987

RANGEL, Leonardo Alves. **A CRIAÇÃO DA PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR DOS SERVIDORES PÚBLICOS E A INSTITUIÇÃO DE UM TETO PARA OS VALORES DOS BENEFÍCIOS**. Implicações na Distribuição de Renda e na Taxa de Reposição das Aposentadorias. Orientador: Prof. Dr. João Luiz Maurity Saboia. 2013. Tese (Políticas Públicas, Estratégias e Desenvolvimento) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <https://www.ie.ufrj.br/images/IE/PPED/Teses/2013/Leonardo%20Rangel.pdf>. Acesso em: 4 jun. 2022.

PINHEIRO, Ricardo Pena. **RISCOS DEMOGRÁFICOS E ATUARIAIS NOS PLANOS DE BENEFÍCIO DEFINIDO E DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA NUM FUNDO DE PENSÃO**. 2005. Tese (Demografia) - Universidade Federal de Minas Gerais, [S. l.], 2005. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/MCCR-6W9PQK/1/ricardo_pena_pinheiro.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

PÓVOAS, Manuel Sebastião Soares. **Previdência privada: filosofia, fundamentos técnicos e conceituação jurídica**. Fundação Escola Nacional de Seguros, 1985

ANEXO I – Funções para cálculo do FGB pelo método determinístico

```
#Funcoes
{
  #Considera-se que, na morte do invalido, o conjuge recebe a pensao i
  ntegral enquanto estiver vivo.
  #Isso porque o valor a ser pago sera o mesmo, independente de haver
  filho dependente
  #Em caso de morte do conjuge, a pensao eh revertida para o filho mai
  s novo que seja menor do que a idade limite legal
  #Em caso de filho pensionista (ou seja, o servidor falecido nao poss
  uia conjuge), considera-se que o filho mais novo eh o pensionista
  #Em caso da morte deste filho pensionista, cessa-se o beneficio
  calculaFGInvalidez = function (ValorBenefAnual,Idade,Sexo,TabuaInval
  ido,TabuaConjuge,TabuaFilho,TaxaJuros,IdadeLimite,DiferencaIdadeConjug
  e,DiferencaIdadePaisFilhos) {
    IdadeConjuge = Idade - DiferencaIdadeConjuge
    if(Sexo=="Masculino") {
      SexoConjuge = "Feminino"
    } else {
      SexoConjuge = "Masculino"
    }

    Cx = 0
    for(n in 0:(max(TabuaInvalido$x)-Idade)) {
      Hx1 = calculaFGPensaoMorte(ValorBenefAnual,(IdadeConjuge+n+1),Se
      xoConjuge,2,TabuaConjuge,TabuaFilho,TaxaJuros,IdadeLimite,DiferencaIda
      dePaisFilhos)/ValorBenefAnual
      pyz = calculaProbUltimoSobrev(TabuaConjuge,TabuaFilho,IdadeConju
      ge+n,Idade-DiferencaIdadePaisFilhos+n,IdadeLimite)
      Vn1 = TabuaInvalido$v[TabuaInvalido$x==(n+1)]
      npx = TabuaInvalido$lx[TabuaInvalido$x==Idade+n]/TabuaInvalido$lx
      x[TabuaInvalido$x==Idade]
      qxn = TabuaInvalido$qx[TabuaInvalido$x==Idade+n]
      Cxn = Vn1*npx*qxn*Hx1*pyz
      if(length(Cxn)>0) Cx = Cx + Cxn
    }

    FGAposentadorias = ValorBenefAnual*TabuaInvalido$ax[TabuaInvalido$x
    ==Idade]
    FGPensoes = ValorBenefAnual*Cx
    FGTtotal = FGAposentadorias +FGPensoes
    TabelaResultados = data.frame(FGAposentadorias=FGAposentadorias,FG
    Pensoes=FGPensoes,FGTotal=FGTotal)
    return(TabelaResultados)
  }

  geraTabuaComutUmaVida = function(Tabua,TaxaJuros) {
    Tabua$dx = Tabua$lx*Tabua$qx
    Tabua$v = 1/((1+TaxaJuros)^Tabua$x)
    Tabua$Dx = Tabua$lx*Tabua$v
    Tabua$Nx[Tabua$sexo=="Masculino"] = rev(cumsum(rev(Tabua$Dx[Tabua$
    sexo=="Masculino"])))
    Tabua$Nx[Tabua$sexo=="Feminino"] = rev(cumsum(rev(Tabua$Dx[Tabua$
```

```

exo=="Feminino"]]))
  Tabua$ax = Tabua$Nx/Tabua$Dx
  return(Tabua)
}

#Caso geral: considera-se que o conjuge recebe a pensao integral enq
uanto estiver vivo.
#Isso porque o valor a ser pago sera o mesmo, independente de haver
filho dependente
#Em caso de morte do conjuge, a pensao eh revertida para o filho mai
s novo que seja menor do que a idade limite legal
#Em caso de filho pensionista (ou seja, o servidor falecido nao poss
uia conjuge), considera-se que o filho mais novo eh o pensionista
#Em caso da morte deste filho pensionista, cessa-se o beneficio
calculaFGPensaoMorte = function (ValorBenefAnual,Idade,Sexo,Estado,T
abuaConjuge,TabuaFilho,TaxaJuros,IdadeLimite,DiferencaIdadePaisFilhos)
{
  #Se o dependente for o filho, o FG sera uma anuidade temporaria at
e a idade limite de recebimento do beneficio para o filho
  if(Estado==3) {
    DuracaoBeneficio = IdadeLimite-Idade+1
    if(DuracaoBeneficio<=0) {
      return(print("Erro: dependente filho superou a idade limite pa
ra recebimento do beneficio."))
    }
    TabuaFilho$axn = (TabuaFilho$Nx-TabuaFilho$Nx[(DuracaoBeneficio+
1):(nrow(TabuaFilho)+DuracaoBeneficio)])/TabuaFilho$Dx
    FundoGarantidor = TabuaFilho$axn[TabuaFilho$x==Idade]*ValorBenef
Anual
    return(FundoGarantidor)

  } else if (Estado==2) {
    #Se o dependente for o conjuge, o FG sera uma anuidade vitalicia
para o conjuge mais uma anuidade temporaria reversivel para o filho at
e o limite legal da idade
    axConj = TabuaConjuge$ax[TabuaConjuge$x==Idade]

    #Se hoje a idade do filho eh superior a idade limite legal para
recebimento do beneficio, o FG sera somente a anuidade vitalicia para
o conjuge
    if((Idade-DiferencaIdadePaisFilhos)>IdadeLimite) {
      FundoGarantidor = axConj*ValorBenefAnual
      return(FundoGarantidor)
    }

    #Juntando duas tabuas lado a lado para facilitar o calculo das f
uncoes de comutacao para multiplas vidas
    TabuaM = cbind(TabuaConjuge,TabuaConjuge)
    TabuaM = rbind(TabuaM,TabuaM)
    TabuaM[,9:16] = NA #Apagando a tabua duplicada da direita, para
incluir os dados da tabua do filho
    TabuaM[(nrow(TabuaConjuge)+1):nrow(TabuaM),] = NA #Apagando a ta
bua duplicada de baixo
    #Enfileirando a direita a tabua do filho

```

```

TabuaM[(DiferencaIdadePaisFilhos+1):nrow(TabuaM),9:16] =
  TabuaFilho[1:(nrow(TabuaM)-DiferencaIdadePaisFilhos),]

#Nomeando as colunas
names(TabuaM) = c("xconj","lxconj","qxconj","dxconj","vconj","Dx
conj","Nxconj","axconj","xfil","lxfil","qxfil","dxfil","vfil","Dxfil",
"Nxfil","axfil")

#Removendo as linhas do final da tabela que estão vazias
TabuaM = TabuaM[1:which(TabuaM$xfil==max(TabuaM$xfil,na.rm = TRU
E)),]

#IdadeFilho pode ser negativo, caso o pensionista ainda nao tenh
a filho
IdadeFilho = Idade-DiferencaIdadePaisFilhos

#Calculando o tempo restante para o nascimento do filho (m) e o
tempo maximo de duracao do beneficio para o filho (n)
if(IdadeFilho>=0) {
  m = 0
  n = IdadeLimite-(Idade-DiferencaIdadePaisFilhos)+1
} else {
  m = DiferencaIdadePaisFilhos-Idade
  n = IdadeLimite+1
}

#Calculando anuidade temporaria para o filho da idade x ate a id
ade limite para recebimento do beneficio diferida do tempo restante pa
ra nascimento do filho
axnfill = (TabuaM$Nxfil[which(TabuaM$xfil==(IdadeFilho+m))]-Tabu
aM$Nxfil[which(TabuaM$xfil==(IdadeFilho+m+n))])/TabuaM$Dxfil[which(Tab
uaM$xfil==(IdadeFilho+m))]
#Calculando seguro dotal puro da idade x ate a idade limite para
recebimento do beneficio
Axmfill = TabuaM$Dxconj[which(TabuaM$xconj==(Idade+m))]/TabuaM$D
xconj[which(TabuaM$xconj==Idade)]
#Calculando anuidade temporaria para o filho da idade x ate a id
ade limite para recebimento do beneficio diferida do tempo restante pa
ra nascimento do filho
maxnfill = axnfill*Axmfill

#Calculando as funcoes de comutacao de multiplas vidas
TabuaM$Dxy = TabuaM$vconj*TabuaM$lxconj*TabuaM$lxfil
TabuaM$Dxy[!is.na(TabuaM$axnfil)&is.na(TabuaM$Dxy)] = 0
TabuaM$Nxy = NA
TabuaM$Nxy[which(!is.na(TabuaM$Dxy))] = rev(cumsum(rev(TabuaM$Dx
y[which(!is.na(TabuaM$Dxy))])))
TabuaM$axy = TabuaM$Nxy/TabuaM$Dxy

#Calculando anuidade temporaria para o status de vida conjunta d
a idade x do filho ate a idade limite para recebimento do beneficio di
ferida do tempo restante para nascimento do filho
axyn = (TabuaM$Nxy[which(TabuaM$xfil==(IdadeFilho+m))]-TabuaM$Nxy
y[which(TabuaM$xfil==(IdadeFilho+m+n))])/TabuaM$Dxy[which(TabuaM$xfil=

```

```

=(IdadeFilho+m))]
```

*#Calculando anuidade temporaria para o status de vida conjunta d
a idade x do filho ate a idade limite para recebimento do beneficio di
ferida do tempo restante para nascimento do filho*

```

    maxynfill = axyn*Axmfill

    #Anuidade reversivel: o filho recebe uma anuidade somente depois  
da morte do pai/mae (conjuge pensionista)
    aconj_filn = maxnfill - maxynfill
    FundoGarantidor = (axConj + aconj_filn)*ValorBenefAnual
    return(FundoGarantidor)
  }
}
```

calculaProbUltimoSobrev = function (TabuaConjuge,TabuaFilho,IdadeCon
juge,IdadeFilho,IdadeLimite) {

```

  py = 1 - TabuaConjuge$qx[TabuaConjuge$x==IdadeConjuge]
  pz = 1 - TabuaFilho$qx[TabuaFilho$x==IdadeFilho]
  if(IdadeFilho<0 | IdadeFilho>IdadeLimite | IdadeFilho>max(TabuaFil  
ho$x)) {
    if(IdadeConjuge>max(TabuaConjuge$x)) {
      pyz = 0
    } else {
      pyz = py
    }
  } else if (IdadeConjuge>max(TabuaConjuge$x)){
    pyz = pz
  } else {
    pyz = py + pz - py*pz
  }
  return(pyz)
}
```

calculaFG = function(Estado,ValorBenefAnual,Idade,Sexo,TabuaInvalido
,TabuaConjuge,TabuaFilho,TaxaJuros,IdadeLimite,DiferencaIdadeConjuge,D
iferencaIdadePaisFilhos) {

```

  if(Estado==2|Estado==3) {
    FGApontadorias = 0
    FGPensoes = calculaFGPensaoMorte(ValorBenefAnual,Idade,Sexo,Esta  
do,TabuaConjuge,TabuaFilho,TaxaJuros,IdadeLimite,DiferencaIdadePaisFil  
hos)
    FGTotal = FGPensoes
    TabelaResultados = data.frame(FGApontadorias=FGApontadorias,  
FGPensoes=FGPensoes,FGTotal=FGTotal)
    return(TabelaResultados)
  } else if (Estado==1) {
    return(calculaFGInvalidoz(ValorBenefAnual,Idade,Sexo,TabuaInvali  
do,TabuaConjuge,TabuaFilho,TaxaJuros,IdadeLimite,DiferencaIdadeConjuge  
,DiferencaIdadePaisFilhos))
  }
}
```

```

#Carregando as tabuas de mortalidade
{
  Tabua = read.csv("TabuaMorteIBGE2010.csv",sep = ";",dec=',')

  #Definindo taxa de juros
  TaxaJuros = 0.06
  Tabua = geraTabuaComutUmaVida(Tabua,TaxaJuros)
}

#Definindo parametros e premissas para rodar uma execucao da funcao
{
  Estado = 2 #1=Invalido, 2=Conjuge dependente, 3=Filho dependente
  Idade = 21
  Sexo = "Masculino" #Pode ser Masculino ou Feminino
  DiferencaIdadeMaridoEsposa = 5
  DiferencaIdadePaiFilho = 30
  DiferencaIdadeMaeFilho = 25
  #Definindo as tabuas e premissas demograficas de composicao familiar
  {
    TabuaInvalido = Tabua[Tabua$sexo==Sexo,-2]
    if(Sexo=="Masculino"&Estado==1) {
      TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
    } else if(Sexo=="Feminino"&Estado==1) {
      TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Masculino",-2]
    } else if(Sexo=="Masculino"&Estado==2) {
      TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Masculino",-2]
    } else if(Sexo=="Feminino"&Estado==2) {
      TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
    } else {
      TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
      TabuaConjuge[,] = NA
    }
    TabuaFilho = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]

    if(Sexo=="Masculino") {
      DiferencaIdadeConjuge = DiferencaIdadeMaridoEsposa
      DiferencaIdadePaisFilhos = DiferencaIdadePaiFilho
    } else {
      DiferencaIdadeConjuge = -DiferencaIdadeMaridoEsposa
      DiferencaIdadePaisFilhos = DiferencaIdadeMaeFilho
    }
    TabuaFilho = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
  }
  IdadeLimite = 21
  ValorBenefAnual = 13000
}

#Executando funcao com os parametros acima selecionados
calculaFG(Estado,ValorBenefAnual,Idade,Sexo,TabuaInvalido,TabuaConjuge
,TabuaFilho,TaxaJuros,IdadeLimite,DiferencaIdadeConjuge,DiferencaIdade
PaisFilhos)

##   FGAposentadorias FGPensoes  FGTotal
## 1                0  213680.1 213680.1

```

```

estados = c("Invalido","Conjuge","Filho")
Resultados = data.frame(Estado=NULL,Sexo=NULL,Idade=NULL,FGAposentador
ias=NULL,FGPensoes=NULL,FGTotal=NULL)
for(estado in 3:1){
  for(sexo in c("Feminino","Masculino")) {
    for(idade in c(0,15,21,40,60,80,100,111)) {
      if(estado==3&idade>21) break
      if(estado==1&idade<=18) next
      #Definindo as tabuas e premissas demograficas de composicao fami
liar
      {
        TabuaInvalido = Tabua[Tabua$sexo==sexo,-2]
        if(sexo=="Masculino"&estado==1) {
          TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
        } else if(sexo=="Feminino"&estado==1) {
          TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Masculino",-2]
        } else if(sexo=="Masculino"&estado==2) {
          TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Masculino",-2]
        } else if(sexo=="Feminino"&estado==2) {
          TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
        } else {
          TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
          TabuaConjuge[,] = NA
        }
        TabuaFilho = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]

        if(sexo=="Masculino") {
          DiferencaIdadeConjuge = DiferencaIdadeMaridoEsposa
          DiferencaIdadePaisFilhos = DiferencaIdadePaiFilho
        } else {
          DiferencaIdadeConjuge = -DiferencaIdadeMaridoEsposa
          DiferencaIdadePaisFilhos = DiferencaIdadeMaeFilho
        }
      }
      Resultado = calculaFG(estado,ValorBenefAnual,idade,sexo,TabuaInv
alido,TabuaConjuge,TabuaFilho,TaxaJuros,IdadeLimite,DiferencaIdadeConj
uge,DiferencaIdadePaisFilhos)
      Resultados = rbind(Resultados,cbind(estados[estado],sexo,idade,R
esultado))
    }
  }
}

```

ANEXO II – Funções para cálculo do FGB pelo método estocástico

```
#Funcoes
{
  calculaFG = function(Idade,Sexo,Estado,Beneficio,TabuaMorte,ProbFamili
lia,Repeticoes,Periodo,TaxaJuros,DiferencaIdadeConjuge,DiferencaIdadeP
aiFilho,DiferencaIdadeMaeFilho,CrescimentoSalarial,IdadeLimite) {
  Dados = data.frame(Idade=Idade,Sexo=Sexo,Estado=Estado,Beneficio=B
eneficio,ProbMorte=NA,ProbConj=NA,ProbFilho=NA,IdadeAtual=Idade,
SexoAtual=Sexo,EstadoAtual=Estado,stringsAsFact
ors = FALSE)
  Dados[1:Repeticoes,] = Dados[1,]

  #Defindindo as probabilidades de morte e de composicao familiar pa
ra cada idade, sexo e estado
  Dados$ProbMorte[Dados$EstadoAtual==1] = TabuaMorte$qx[Dados$IdadeA
tual[Dados$EstadoAtual==1]+1]
  Dados$ProbMorte[Dados$EstadoAtual==2] = TabuaMorte$qx[Dados$IdadeA
tual[Dados$EstadoAtual==2]+NTabuaMorte+1]
  Dados$ProbMorte[Dados$EstadoAtual==3] = TabuaMorte$qx[Dados$IdadeA
tual[Dados$EstadoAtual==3]+NTabuaMorte*2+1]
  Dados$ProbConj[Dados$SexoAtual=="Feminino"] = ProbFamilia$ProbConj
[Dados$IdadeAtual[Dados$SexoAtual=="Feminino"]+1]
  Dados$ProbConj[Dados$SexoAtual=="Masculino"] = ProbFamilia$ProbCon
j[Dados$IdadeAtual[Dados$SexoAtual=="Masculino"]+NProbFamilia+1]
  Dados$ProbFilho[Dados$SexoAtual=="Feminino"] = ProbFamilia$ProbFil
ho[Dados$IdadeAtual[Dados$SexoAtual=="Feminino"]+1]
  Dados$ProbFilho[Dados$SexoAtual=="Masculino"] = ProbFamilia$ProbFi
lho[Dados$IdadeAtual[Dados$SexoAtual=="Masculino"]+NProbFamilia+1]

  if(Sexo=="Masculino") {
    DiferencaIdadeConjuge = DiferencaIdadeMaridoEsposa
  } else {
    DiferencaIdadeConjuge = -DiferencaIdadeMaridoEsposa
  }

  Estados = matrix(0,nrow = nrow(Dados),Periodo)
  Estados[,1] = Dados$Estado
  colnames(Estados) = 1:Periodo

  for (t in 1:(Periodo-1)) {
    #print(paste(Dados$IdadeAtual[1],Dados$EstadoAtual[1],Dados$Prob
Morte[1]))
    #Testando se o individuo morreu
    Indices = which(Estados[,t]!=4) #Todos os vivos no tempo t
    if(length(Indices)>0) {
      TesteMorreu = rbinom(length(Indices),1,Dados$ProbMorte[Indices
])
      #Se morreu invalido ou conjuge pensionista torna-se 9
      TesteMorreu = replace(TesteMorreu,TesteMorreu==1&(Estados[Indi
ces,t]==1|Estados[Indices,t]==2),9)
      #Se filho dependente morreu, entao acabam-se os beneficios par
a este vinculo, tornando-se 4
      TesteMorreu = replace(TesteMorreu,TesteMorreu==1&(Estados[Indi
```

```

ces,t]==3),4)
  TesteMorreu[TesteMorreu==FALSE] = Estados[Indices[TesteMorreu=
=FALSE],t]
  Estados[Indices,t+1] = TesteMorreu
}
#Se o individuo ja alcançou a idade limite da tabua de morte, en
tao morreu
  Estados[Dados$IdadeAtual>max(TabuaMorte$x),t+1] = 4

  #Testando se invalido que morreu deixou conjuge dependente
  Indices = which(Estados[,t+1]==9&Estados[,t]==1) #Todos os inval
idos que morreram
  if(length(Indices)>0) {
    TesteConjuge = rbinom(length(Indices),1,Dados$ProbConj[Indices
])
    TesteConjuge = replace(TesteConjuge,TesteConjuge==1,2)
    TesteConjuge = replace(TesteConjuge,TesteConjuge==0,9)
    #IndicesMulherFalecida = intersect(Indices[TesteConjuge==4],whi
ich(Dados$Sexo=="Mulher"))
    #IndicesHomemFalecido = intersect(Indices[TesteConjuge==4],whi
ch(Dados$Sexo=="Homem"))
    #Dados$IdadeAtual[IndicesMulherFalecida] = calculaIdadeConjuge
(Dados$IdadeAtual[IndicesMulherFalecida],1)
    #Dados$IdadeAtual[IndicesHomemFalecido] = calculaIdadeConjuge(
Dados$IdadeAtual[IndicesHomemFalecido],0)
    Dados$IdadeAtual[Indices] = Dados$IdadeAtual[Indices] - Diferen
ncaIdadeConjuge
    Dados$SexoAtual[Dados$Sexo=="Masculino"][Indices] = "Feminino"
    Dados$SexoAtual[Dados$Sexo=="Feminino"][Indices] = "Masculino"
    Estados[Indices,t+1] = TesteConjuge

    #Testando se o novo conjuge dependente morreu
    Dados$ProbMorte[Estados[,t+1]==2] = TabuaMorte$qx[Dados$IdadeA
tual[Estados[,t+1]==2]+NTabuaMorte+1]
    if(length(Indices)>0) {
      TesteMorreu = rbinom(length(Indices),1,Dados$ProbMorte[Indic
es])
      TesteMorreu = replace(TesteMorreu,TesteMorreu==1,9)
      TesteMorreu = replace(TesteMorreu,TesteMorreu==0,2)
      Estados[Indices,t+1] = TesteMorreu
    }
    #Se o conjuge ja alcançou a idade limite da tabua de morte, en
tao morreu
    Estados[Dados$IdadeAtual>max(TabuaMorte$x),t+1] = 4
  }

  #Testando se invalido/conjuge que morreu deixou filho dependente
  #Indices = which(Estados[,t+1]==9)
  #Todos os o que morreram no tempo atual e nao deixaram conjuge d
ependente e tem idade para ter filho dependente segundo as premissas d
emograficas e Legal
  Indices = which(Estados[,t+1]==9&(((Dados$SexoAtual=="Masculino"
)&(Dados$IdadeAtual>=DiferencaIdadePaiFilho)&(IdadeLimite>(Dados$Idade
Atual-DiferencaIdadePaiFilho))))|

```

```

((Dados$SexoAtual=="Feminino")&(Dados$IdadeAtual>=DiferencaIdadeMaeFilho)&(IdadeLimite>(Dados$IdadeAtual-DiferencaIdadeMaeFilho))))
  if(length(Indices)>0) {
    TesteFilho = rbinom(length(Indices),1,Dados$ProbFilho[Indices])
  )
  TesteFilho = replace(TesteFilho,TesteFilho==1,3)
  TesteFilho = replace(TesteFilho,TesteFilho==0,9)
  #IndicesMaeFalecida = intersect(Indices[TesteFilho==5],which(Dados$Sexo=="Mulher"))
  #IndicesPaiFalecido = intersect(Indices[TesteFilho==5],which(Dados$Sexo=="Homem"))
  #Dados$IdadeAtual[IndicesMaeFalecida] = calculaIdadeFilho(Dados$IdadeAtual[IndicesMaeFalecida],1)
  #Dados$IdadeAtual[IndicesPaiFalecido] = calculaIdadeFilho(Dados$IdadeAtual[IndicesPaiFalecido],0)
  x = Dados$IdadeAtual[Dados$SexoAtual=="Masculino"][Indices]
  y = Dados$IdadeAtual[Dados$SexoAtual=="Feminino"][Indices]
  Dados$IdadeAtual[intersect(which(Dados$SexoAtual=="Masculino"),Indices)] = Dados$IdadeAtual[intersect(which(Dados$SexoAtual=="Masculino"),Indices)] - DiferencaIdadePaiFilho
  Dados$IdadeAtual[intersect(which(Dados$SexoAtual=="Feminino"),Indices)] = Dados$IdadeAtual[intersect(which(Dados$SexoAtual=="Feminino"),Indices)] - DiferencaIdadeMaeFilho
  Dados$SexoAtual[Indices] = sample(c("Masculino","Feminino"),length(Indices),replace = TRUE)
  #Dados$IdadeAtual[Dados$IdadeAtual<0] = 0
  Estados[Indices,t+1] = TesteFilho

  #Testando se o novo filho dependente morreu
  Dados$ProbMorte[Estados[,t+1]==3] = TabuaMorte$qx[Dados$IdadeAtual[Estados[,t+1]==3]+NTabuaMorte*2+1]
  if(length(Indices)>0) {
    TesteMorreu = rbinom(length(Indices),1,Dados$ProbMorte[Indices])
  )
  TesteMorreu = replace(TesteMorreu,TesteMorreu==1,9)
  TesteMorreu = replace(TesteMorreu,TesteMorreu==0,3)
  Estados[Indices,t+1] = TesteMorreu
}

#Se o filho ja alcançou a idade limite da tabua de morte, então morreu
Estados[Dados$IdadeAtual>max(TabuaMorte$x),t+1] = 4
}

#Testando se filho dependente atingiu a idade limite legal para receber pensao
Indices = which(Estados[,t]==3&Estados[,t+1]!=4) #Todos os filhos dependentes vivos no tempo t que nao morreram no tempo t
if(length(Indices)>0) {
  TesteFilhoSuperou = Dados$IdadeAtual[Indices]>=IdadeLimite
  TesteFilhoSuperou[TesteFilhoSuperou==TRUE] = 4
  TesteFilhoSuperou[TesteFilhoSuperou==FALSE] = 3
  Estados[Indices,t+1] = TesteFilhoSuperou
}

```

```

}

#Atribuindo 4 aos mortos que nao deixaram dependentes
Estados[Estados[,t+1]==9,t+1] = 4

#Aumentando um ano de idade para cada invalido/pensionista
Dados$IdadeAtual = Dados$IdadeAtual + 1

#Vinculo terminado, continua terminado para sempre
Estados[Estados[,t]==4,t+1] = 4

#Atualizando o novo estado atual para o proximo periodo
Dados$EstadoAtual = Estados[,t+1]

#Atualizando probablidades de morte e familiar para a nova idade
atual
  Dados$ProbMorte[Dados$EstadoAtual==1] = TabuaMorte$qx[Dados$IdadeAtual[Dados$EstadoAtual==1]+1]
  Dados$ProbMorte[Dados$EstadoAtual==2] = TabuaMorte$qx[Dados$IdadeAtual[Dados$EstadoAtual==2]+NTabuaMorte+1]
  Dados$ProbMorte[Dados$EstadoAtual==3] = TabuaMorte$qx[Dados$IdadeAtual[Dados$EstadoAtual==3]+NTabuaMorte*2+1]
  Dados$ProbConj[Dados$SexoAtual=="Feminino"] = ProbFamilia$ProbConj[Dados$IdadeAtual[Dados$SexoAtual=="Feminino"]+1]
  Dados$ProbConj[Dados$SexoAtual=="Masculino"] = ProbFamilia$ProbConj[Dados$IdadeAtual[Dados$SexoAtual=="Masculino"]+NProbFamilia+1]
  Dados$ProbFilho[Dados$SexoAtual=="Feminino"] = ProbFamilia$ProbFilho[Dados$IdadeAtual[Dados$SexoAtual=="Feminino"]+1]
  Dados$ProbFilho[Dados$SexoAtual=="Masculino"] = ProbFamilia$ProbFilho[Dados$IdadeAtual[Dados$SexoAtual=="Masculino"]+NProbFamilia+1]

  if(sum(Estados[,t]==4)==nrow(Estados)) {
    Estados[, (t+1):ncol(Estados)] = 4
    break
  }
}

BenefProj = matrix(NA,nrow(Estados),ncol(Estados))
BenefProj[,1] = Dados$Beneficio
for(i in 2:ncol(BenefProj)) {
  BenefProj[,i] = BenefProj[,i-1]*(1+CrescimentoSalarial)
}

AposentadoriaInvPagas = ifelse(Estados==1,1,0)*BenefProj
PensoesConjugePagas = ifelse(Estados==2,1,0)*BenefProj
PensoesFilhoPagas = ifelse(Estados==3,1,0)*BenefProj
PensoesPagas = ifelse(Estados==2|Estados==3,1,0)*BenefProj

VPAposentadorias = (t(t(AposentadoriaInvPagas)*((1+TaxaJuros)^(-(0:(ncol(AposentadoriaInvPagas)-1))))))
VPPensoes = (t(t(PensoesPagas)*((1+TaxaJuros)^(-(0:(ncol(PensoesPagas)-1))))))
VPPensoesConjuge = mean(rowSums(t(t(PensoesConjugePagas)*((1+TaxaJuros)^(-(0:(ncol(PensoesConjugePagas)-1)))))))

```

```

VPPensoesFilhoPagas = mean(rowSums(t(t(PensoesFilhoPagas)*((1+Taxa
Juros)^(-(0:(ncol(PensoesFilhoPagas)-1)))))))

FGAposentadorias = rowSums(VPAposentadorias)
FGPensoes = rowSums(VPPensoes)
FGTotal = FGAposentadorias + FGPensoes
MediaFGTotal = mean(FGTotal)
FGTotal95Confianca = c(quantile(FGTotal,0.05),quantile(FGTotal,0.9
5))
FundoOscilacaoRisco = FGTotal95Confianca[2] - MediaFGTotal
TabelaResultados = data.frame(MediaFGAposentadorias=mean(FGAposent
adorias),MediaFGPensoes=mean(FGPensoes),MediaFGTotal=MediaFGTotal,
                                FGTotalPercentil5=FGTotal95Confianca
[1],FGTotalPercentil95=FGTotal95Confianca[2],
                                FundoOscilacaoRisco95=FundoOscilacao
Risco)
rownames(TabelaResultados) = ""
return(TabelaResultados)
}
}

#Definindo pasta padrao que contem a tabua de vida
setwd("C:/Users/danil/Dropbox/Projeto Fundos Garantidores RCC/Funções
no R")
Tabua = read.csv("TabuaMorteIBGE2010.csv",sep = ";",dec=',')

#Definindo hipoteses e informacoes do beneficiario
{
  Repeticoes = 1
  Periodo = 100
  TaxaJuros = 0.06
  Idade = 21
  Estado = 2 #1=Invalido, 2=Conjuge pensionista, 3=Filho pensionista
  Sexo = "Masculino" #Masculino ou Feminino
  DiferencaIdadeMaridoEsposa = 5
  Beneficio = 13000 #Valor total do beneficio anualmente
  DiferencaIdadePaiFilho = 30
  DiferencaIdadeMaeFilho = 25
  CrescimentoSalarial = 0
  IdadeLimite = 21
  #Carregando as tabuas de mortalidade (IBGE2010)
  {
    TabuaInvalido = Tabua[Tabua$sexo==Sexo,-2]
    if(Sexo=="Masculino"&Estado==1) {
      TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
    } else if(Sexo=="Feminino"&Estado==1) {
      TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Masculino",-2]
    } else if(Sexo=="Masculino"&Estado==2) {
      TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Masculino",-2]
    } else if(Sexo=="Feminino"&Estado==2) {
      TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
    } else {
      TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
    }
  }
}

```

```

    TabuaConjuge[, ] = NA
  }
  TabuaFilho = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
  TabuaMorte = rbind(TabuaInvalido,TabuaConjuge,TabuaFilho)
  NTabuaMorte = nrow(TabuaInvalido)
  #Criando uma tabua de prob de composicao familiar com prob de 100%
  em todas as idades para testes
  ProbFamilia = data.frame(Idade=rep(0:((nrow(Tabua)-1)/2),2),
                           Sexo=c(rep("Feminino",nrow(Tabua)/2),rep(
"Masculino",nrow(Tabua)/2))),ProbConj=1,ProbFilho=1,stringsAsFactors =
FALSE)
  NProbFamilia = nrow(ProbFamilia)/2
}
}

calculaFG(Idade,Sexo,Estado,Beneficio,TabuaMorte,ProbFamilia,Repeticoe
s,Periodo,TaxaJuros,DiferencaIdadeMaridoEsposa,DiferencaIdadePaiFilho,
DiferencaIdadeMaeFilho,CrescimentoSalarial,IdadeLimite)

## MediaFGAposentadorias MediaFGPensoes MediaFGTotal FGTTotalPercentil
5
##              0          226761.6          226761.6          226761.
6
## FGTTotalPercentil95 FundoOscilacaoRisco95
##              226761.6              0

estados = c("Invalido","Conjuge","Filho")
Resultados = data.frame(Estado=NULL,Sexo=NULL,Idade=NULL,FGAposentador
ias=NULL,FGPensoes=NULL,FGTotal=NULL,FGTotalPercentil5=NULL,FGTotalPer
centil95=NULL,FundoOscilacaoRisco95=NULL)
for(estado in 3:1){
  for(sexo in c("Feminino","Masculino")) {
    for(idade in c(0,15,21,40,60,80,100,111)) {
      if(estado==3&idade>21) break
      if(estado==1&idade<=18) next
      #Carregando as tabuas de mortalidade (IBGE2010)
      {
        Tabua = read.csv("TabuaMorteIBGE2010.csv",sep = ";",dec=',')
        TabuaInvalido = Tabua[Tabua$sexo==sexo,-2]
        if(sexo=="Masculino"&estado==1) {
          TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
        } else if(sexo=="Feminino"&estado==1) {
          TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Masculino",-2]
        } else if(sexo=="Masculino"&estado==2) {
          TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Masculino",-2]
        } else if(sexo=="Feminino"&estado==2) {
          TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
        } else {
          TabuaConjuge = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
          TabuaConjuge[, ] = NA
        }
        TabuaFilho = Tabua[Tabua$sexo=="Feminino",-2]
        TabuaMorte = rbind(TabuaInvalido,TabuaConjuge,TabuaFilho)
        NTabuaMorte = nrow(TabuaInvalido)

```

```

    #Criando uma tabua de prob de composicao familiar com prob de
100% em todas as idades para testes
    ProbFamilia = data.frame(Idade=rep(0:((nrow(Tabua)-1)/2),2),
                             Sexo=c(rep("Feminino",nrow(Tabua)/2),
rep("Masculino",nrow(Tabua)/2)),ProbConj=1,ProbFilho=1,stringsAsFactor
s = FALSE)
    NProbFamilia = nrow(ProbFamilia)/2
  }
  Resultado = calculaFG(idade,sexo,estado,Beneficio,TabuaMorte,Pro
bFamilia,Repeticoes,Periodo,TaxaJuros,DiferencaIdadeMaridoEsposa,Difer
encaIdadePaiFilho,DiferencaIdadeMaeFilho,CrescimentoSalarial,IdadeLimi
te)
  Resultados = rbind(Resultados,cbind(estados[estado],sexo,idade,R
esultado))
}
}
}

```