Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Aplicada e Estatística
Mestrado em Matemática Aplicada e Estatística

Existência de soluções para uma classe de equações de Kirchhoff-Schrödinger com crescimento crítico de Sobolev

Cristiano Victor Medeiros da Silva

Natal/RN

Fevereiro de 2025

Cristiano Victor Medeiros da Silva

Existência de soluções para uma classe de equações de Kirchhoff-Schrödinger com crescimento crítico de Sobolev

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.
Área de Concentração: Matemática Aplicada.
Linha de Pesquisa: Análise.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Centro de Ciências Exatas e da Terra

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística

Mestrado em Matemática Aplicada e Estatística

Orientador
Prof. Dr. Diego Ferraz de Souza

Natal/RN

Fevereiro de 2025

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Silva, Cristiano Victor Medeiros da.
Existência de soluções para uma classe de equações de Kirchhoff-Schrödinger com crescimento crítico de Sobolev / Cristiano Victor Medeiros da Silva. - 2025.
107 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística. Natal, RN, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Diego Ferraz de Souza.

1. Equações de Kirchhoff-Schrödinger - Dissertação. 2. Crescimento crítico de Sobolev - Dissertação. 3. Potencial que decai para zero no infinito - Dissertação. I. Souza, Diego Ferraz de. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 517.9(043.3)

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Dissertação de Mestrado sob o título *Existência de soluções para uma classe de equações de Kirchhoff-Schrödinger com crescimento crítico de Sobolev* apresentada por Cristiano Victor Medeiros da Silva e aceita pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof. Dr. Diego Ferraz de Souza
Orientador
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Esteban Pereira da Silva
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Ronaldo Cesar Duarte
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Juan Luis Miguel Arratia Parra
Departamento de Matemática
Universidad de Santiago de Chile

Prof. Dr. Pedro Eduardo Ubilla López
Departamento de Matemática
Universidad de Santiago de Chile

Prof. Dr. Rodrigo Genuíno Clemente
Departamento de Matemática
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Natal/RN
Fevereiro de 2025

A minha mãe: Geciane Rodrigues de Medeiros Silva.

Agradecimentos

Agradeço à toda minha família por todo o apoio emocional e incentivo, em especial, a minha mãe por trabalhar tanto para proporcionar as condições suficientes para meu desenvolvimento educacional quando criança.

Agradeço ao meu orientador Diego Ferraz, por enxergar em mim um potencial que eu não acreditava e por sua preocupação com minha formação acadêmica. Com sua ajuda tive a oportunidade de estudar uma nova matemática, uma matemática mais desafiadora e com um grau de rigorosidade e excelência ainda maior que na graduação.

Agradeço a todos os meus amigos, em especial, a meus amigos da Residência Universitária da UFRN, por me acolherem, me apoiarem e me alegrarem em todos os momentos.

Agradeço aos meus amigos colegas de mestrado, por todas as nossas conversas, saídas e planos futuro feitos durante esses dois anos. Espero está presente nas próximas concretizações suas.

Agradeço à Daniel Grilo, o secretário do PPGMAE, por sua presteza e agilidade na resolução de diversos problemas burocráticos. Agradeço à OBMEP por ser à responsável por meu desejo em estudar matemática e pelos programas de apoio financeiro TIM-OMBEP e PICME, responsáveis por minha permanência na graduação e mestrado de maneira financeiramente confortável.

Por fim, agradeço à UFRN pela excelente formação que tive durante minha graduação e mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Contrariwise, if it was so, it might be;
and if it were so, it would be;
but as it isn't, it ain't. That's logic."
(Lewis Carroll)

Resumo

Neste trabalho, estabelecemos a existência de soluções positivas para uma classe de equações estacionárias do tipo Kirchhoff-Schrödinger definida em todo o R^3 com não linearidade com crescimento crítico no sentido de Sobolev e potencial não negativo que pode decair para zero no infinito. Para tanto, usamos o método variacional da teoria dos pontos críticos, que consiste em associar as soluções da equação aos pontos críticos de um funcional adequado. Além disso, a não linearidade é geral e não satisfaz a conhecida condição de Ambrosetti-Rabinowitz, o que torna o estudo da compacidade associada ao problema e da limitação das sequências de Palais-Smale mais sofisticado. Nesse contexto, as principais ferramentas utilizadas para atingir os nossos principais resultados foram o uso do teorema do passo da montanha e o princípio de compacidade de Lions, além da base que comum que consiste em resultados básicos de teoria de medida e integração de Lebesgue, análise funcional e análise funcional não linear.

Palavras-chave: Equações de Kirchhoff-Schrödinger; Crescimento crítico de Sobolev; Potencial que decai para zero no infinito.

Abstract

In this work, we establish the existence of positive solutions for a class of stationary Kirchhoff-Schrödinger equations defined in the whole R^3 with nonlinearity with critical growth in the Sobolev sense and nonnegative potential that can decay to zero at infinity. For this purpose, we use the variational method of critical point theory, which consists of associating the solutions of the equation to the critical points of a suitable functional. Furthermore, the nonlinearity is general and does not satisfy the well-known Ambrosetti-Rabinowitz condition, which makes the study of the compactness associated with the problem and the boundedness of Palais-Smale sequences more sophisticated. In this context, the main tools used to achieve our main results were the use of the mountain pass theorem and the Lions' compactness principle, in addition to the common basis which consists of basic results of measure theory and Lebesgue integration, functional analysis and nonlinear functional analysis.

Keywords: Kirchhoff-Schrödinger equations; Critical Sobolev growth; Potential vanishing at infinity.

Lista de símbolos

$V \subset\subset U$	$V, U \subseteq \mathbb{R}^N$ abertos e $V \subset \overline{V} \subset U$ com $\overline{V}$ compacto. Dizemos que V está compactamente contido em U.
$B_r(a)$	Bola aberta de raio r e centro a.
B_r	Bola aberta de raio r e centro 0.
$\|\Omega\|$	Medida do conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lebesgue mensurável.
$supp(u)$	$= \overline{\{x \in U : \quad u(x) \neq 0\}}$, para $u : U \to V$.
$\chi_E(x)$	Função característica para o conjunto E.
∂U	Fronteira do conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^N$.
$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)$	É a i-ésima derivada parcial de u em x, de valor $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x + he_i) - u(x)}{h}$.
$\partial_i u$	Denota a derivada fraca da função $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Que se refere a função $\partial_i u = v$ tal que $$\int_U u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = -\int_U v \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U).$$
∂_{ij}	É a derivada fraca $\partial_j(\partial_i u)$.
$D^\alpha u$	$= \dfrac{\partial^{\|\alpha\|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, em que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ e $\|\alpha\| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.
$D^\alpha u$	Também denota a α^{th}-derivada parcial fraca de u $\in L^1_{loc}(U)$. Que se refere a função $D^\alpha u = v \in L^1_{loc}(U)$ tal que $$\int_U u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{\|\alpha\|} \int_U v \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U).$$
∇u	Denota o gradiente ou gradiente fraco da função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definido por $(\partial_1 u, \partial_2 u, ..., \partial_N u)$.
$\nabla u \nabla v$	Denota o produto interno canônico entre $\nabla u \in \mathbb{R}^N$ e $\nabla v \in \mathbb{R}^N$.
$\\|\nabla u\\|$	$= \\| \|\nabla u\| \\|$, com $\|\nabla u\|$ sendo a norma Euclidiana do $\mathbb{R}^N$ do ∇u.
$C(U)$	$= \{u : U \to \mathbb{R} : \quad u$ é contínua em $U\}$.
$C(\overline{U})$	$= \{u : U \to \mathbb{R} : \quad u$ é uniformemente contínua em subconjuntos de $U\}$.
$C^k(U)$	$= \{u : U \to \mathbb{R} : \quad u$ é k-vezes continuamente diferenciável$\}$.

$C^\infty(U)$ $= \{u : U \to \mathbb{R} : \quad u$ é infinitamente continuamente diferenciável$\}$.

$C_0^\infty(U)$ $= \{u \in C^\infty(U) : \quad u$ possui suporte $supp(u)$ compacto$\}$.

$C^{0,\gamma}(U)$ $= \{u \in C(U) : \quad \exists C > 0, |u(x) - u(y)| \leqslant C|x-y|^\gamma, \forall x, y \in U\}$. Em que $0 < \gamma \leqslant 1$.

$C^{k,\gamma}(U)$ Espaço de Hölder. Definido como o conjunto das funções $u \in C(\overline{U})$ com

$$\sum_{|\alpha|<k} \sup_{x\in U} |D^\alpha u(x)| < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty,$$

em que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

$\mathcal{L}(U)$ Conjunto das funções $u : U \to \mathbb{R}$ Lebesgue mensuráveis.

$\mathcal{L}^p(U)$ $= \{u \in \mathcal{L}(U) : \quad \int_U |u|^p \mathrm{d}x < \infty\}$, para $p < \infty$.

$\mathcal{L}^\infty(U)$ $= \{u \in \mathcal{L}(U) : \quad \exists C > 0$ tal que $|u(x)| \leqslant C$ q.t.p. em $U\}$.

$L^p(U)$ Conjunto cociente $\mathcal{L}^p(U)/\sim$, em que, $u \sim v \Leftrightarrow u = v$ q.t.p. em U.

$L^p_{loc}(U)$ $= \{u : U \to \mathbb{R} : \quad u \in L^p(V)$ para todo $V \subset\subset U\}$.

$W^{k,p}(U)$ $= \{u \in L^p(U) : \quad$ Existem $D^\alpha u$ e $D^\alpha u \in L^p(U)$ para todo $|\alpha| \leq k\}$.

$H^k(U)$ $= W^{k,2}(U)$.

$\mathcal{D}^{k,p}(U)$ $= \Big\{u \in L^{p^*}(U) : \quad$ Existem $D^\alpha u$ e $D^\alpha u \in L^p(U)$ para todo $|\alpha| \leq k\Big\}$.

p^* Expoente crítico de Sobolev, definido por $\dfrac{pN}{N-p}$, quando $N > p$.

$|\cdot|$ Denota a norma euclidiana do $\mathbb{R}^N$.

$\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ Denota a norma usual no conjunto dos números complexos.

$\|\cdot\|_{L^p(U)}$ Denota a norma usual do espaço $L^p(U)$ em que $\|u\|_p = \left(\int_U |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$.

$\|\cdot\|_{L^\infty(U)}$ Denota a norma usual do espaço $L^\infty(U)$ em que

$$\|u\|_{L^\infty(U)} = \inf\{M \geqslant 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

$\|\cdot\|_p$ $= \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.

$\|\cdot\|_\infty$ $= \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.

$\|\cdot\|_{W^{k,p}(U)}$ Denota a norma usual do espaço $W^{k,p}(U)$ em que

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k} \int_U |D^\alpha u(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\| \cdot \|_{D^{k,p}(U)}$ Denota a norma usual do espaço $D^{k,p}(U)$ em que

$$\|u\|_{D^{k,p}(U)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_U |D^\alpha u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\| \cdot \|_{C^{k,\gamma}(U)}$ Denota a norma no espaço $C^{k,\gamma}(U)$ em que

$$|u|_{C^{k,\gamma}(U)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in U} |D^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma}$$

E^* Dual topológico do espaço vetorial E.

$*$ Se $u : U \to \mathbb{R}^m$, escrevemos $u(x) = (u^1(x), u^2(x), ..., u^m(x))$ para $x \in U$. Dizemos que a função u^k é a $k-$ésima componente da função u.

$*$ Escrevemos $\lim\limits_{r\to R} \phi_k(r) = 0$ *uniformemente em* $k \geqslant k_0$ para indicar que dado $\varepsilon > 0$ existe $r_\varepsilon > 0$ tal que

$$r \geqslant r_\varepsilon \Rightarrow |\Phi_k(r)| < \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant k_0.$$

Sumário

1 Introdução

O estudo das Equações Diferenciais Parciais (EDP), datam do século $XVIII$ ganhando notoriedade nos trabalhos pioneiros dos matemáticos Leonhard Euler, Jean D'Alembert, Joseph-Louis Lagrange e Pierre-Simon de Laplace que foram instigados pelo estudo analítico de modelos da física, temática qual, atualmente, ainda é a principal fonte de excitação na busca por métodos de soluções de sistemas que envolvem EDP's específicas. Já no século XIX, os trabalhos de Augustin-Louis Cauchy, Bernhard Riemann e Johann Dirichlet norteiam o papel protagonista das EDP's como instrumento fundamental no progresso e criação de outros ramos da matemática, exaltando a significância desta área da matemática para além de sua aplicabilidade nas Ciências Naturais (BREZIS; BROWDER, 1998). Com respeito aos supracitados matemáticos, concerne ressaltar:

> [...] a construção dos conceitos envolvendo as Equações Diferenciais deu-se devido às contribuições de diversos matemáticos em diferentes períodos históricos. Cada matemático, ao seu tempo, desenvolveu novas ideias e aperfeiçoou métodos para o estudo e a aplicação das Equações Diferenciais nas mais diversas áreas do conhecimento. Assim, mesmo que o mérito e reconhecimento de algumas descobertas matemáticas recaiam, em muitos momentos, sobre alguns grandes nomes, faz-se necessário reconhecer que esta teoria é resultante de uma construção de ideias e resultados obtidos por muitos personagens [...] (PAULA, 2019).

Como exemplo do fomento que o avanço teórico nos estudos das EDP's durante o século XIX proporcionou a outros ramos da matemática, destacamos os estudos de Riemann no desenvolvimento da teoria das funções analíticas de uma variável complexa e a teoria de superfícies de Riemann. Conforme mencionado que os resultados matemáticos decorrem de uma acumulação de conhecimento que envolvem o esforço coletivo de diversos personagens, tem-se que a teoria de superfícies de Riemann é a extensão (começando com a Teoria de Hodge) de ferramentas comparáveis no estudo da Geometria Algébrica em várias variáveis, ainda, ocasionando a desenvolvimentos como o Teorema de Riemann-Roch e o Teorema do Índice de Atiyah-Singer (BREZIS; BROWDER, 1998). Igualmente, o avanço revolucionou o campo da geometria diferencial nas últimas décadas do século XX (BREZIS; BROWDER, 1998). Destacamos a interação entre a teoria dos sistemas que envolvem EDP's e Teoria de Lie. A interação entre as duas teorias, iniciada pelos trabalhos de de S. Lie na década de 1870 e posteriormente ampliada por E. Cartan na década de 1890, cominou, após a introdução da teoria dos feixes por Leray em 1945, na união de ideias e técnicas provenientes de várias áreas, tais como teoria de variedades, topologia algébrica, geometria diferencial, álgebra homológica e análise (BREZIS; BROWDER, 1998).

Por uma definição inicial, se entende que as soluções de EDP's possui classe de diferenciabilidade idêntica a ordem da EDP, isto é, suas derivadas parciais até a ordem em questão têm que ser contínuas, a essas soluções atribuímos o nome de soluções clássicas. Na busca por uma solução clássica, é comum, proferir funções candidatas que, por vezes, não possui a mesma classe de diferenciabilidade desejada. A essas candidatas, denominamos de soluções fracas, que é essencialmente um conceito que envolve identidades integrais. Para introduzirmos o conceito, considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = h(u), \\ \quad u > 0, \quad u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

Com $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que exista $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ solução para o problema acima de modo que dado $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ cada parcela da expressão abaixo é integrável sobre o $\mathbb{R}^N$,

$$(-\Delta u)\varphi = h(u)\varphi,$$

ou seja, em que faz sentido a equação

$$-\int_{\mathbb{R}^N} (\Delta u)\varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} h(u)\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Desse modo, ao considerar a bola $B_R \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_R$ de forma estrita, a igualdade acima se torna

$$-\int_{B_R} (\Delta u)\varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} h(u)\varphi \mathrm{d}x.$$

Pois $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_R$, daí fazendo uso da Primeira Identidade de Green (Teorema A.1.9), obtemos

$$-\int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi \mathrm{d}x + \int_{B_R} \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} h(u)\varphi \mathrm{d}x.$$

Novamente, por $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_R$ estritamente, então $\displaystyle\int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi \mathrm{d}x = 0$ e $\displaystyle\int_{B_R} \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x$. Da igualdade acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} h(u)\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.1}$$

Notemos que mesmo que tenhamos utilizado a hipótese de $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, a equação (1.1) faz sentido para $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, a hipótese do problema ($\mathcal{P}$). De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \nabla \varphi| \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \sum_{i=1}^N \partial_i u \partial_i \varphi \right| \mathrm{d}x = \int_{\operatorname{supp}(\varphi)} \left| \sum_{i=1}^N \partial_i u \partial_i \varphi \right| \mathrm{d}x \leqslant \int_{\operatorname{supp}(\varphi)} \sum_{i=1}^N |\partial_i u \partial_i \varphi| \, \mathrm{d}x,$$

como as funções $\partial_i \varphi$ são contínuas em $\mathbb{R}^N$ então, via Teorema de Weierstrass (Teorema A.1.5), $\partial_i \varphi$ são limitadas no compacto $\operatorname{supp}(\varphi)$ por uma constante $M > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \nabla \varphi| \mathrm{d}x \leqslant \int_{\operatorname{supp}(\varphi)} M \sum_{i=1}^N |\partial_i u| \, \mathrm{d}x = M \sum_{i=1}^N \int_{\operatorname{supp}(\varphi)} |\partial_i u| \, \mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Como $\partial_i u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ então $\partial_i u \in L^2(\text{supp}(\varphi)) \subseteq L^1(\text{supp}(\varphi))$, portanto, da equação (1.2), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \nabla \varphi| \mathrm{d}x < +\infty$$

Além disso, se $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, que implica em $u \in L^6(\text{supp}(\varphi))$ e, consequentemente, u limitada em $\text{supp}(\varphi)$ então, da continuidade da função h em todo $\mathbb{R}^N$, segue que $h(u)$ é limitada em $\text{supp}(\varphi)$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(u)\varphi \mathrm{d}x \leqslant C \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \mathrm{d}x < +\infty.$$

O que sugere a seguinte definição

Definição 1.0.1. ***(Solução Fraca)*** *Dizemos que $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca do problema ($\mathcal{P}$) se satisfaz a equação*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} h(u)\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, vamos considerar utilizar resultados provenientes da teoria dos pontos críticos.

Definição 1.0.2. ***(Funcional Energia)*** *Dizemos que $J : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é o funcional energia associado ao problema se sua derivada é tal que*

$$J'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} h(u)\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Isto implica que seus pontos críticos ser soluções fracas para o problema. Na Física, tal funcional pode vir a representar a energia total distribuída no campo físico ao qual a equação está associada. A título de exemplo, consideremos a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(x,t) + V(x)u(x,t) = i\hbar\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

em que $u : \mathbb{R}^N \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ é a equação da onda, com $x \in \mathbb{R}^N (N = 1,2,3)$ representando a posição da partícula no sistema de coordenadas e $t \geqslant 0$ o tempo. Além disso, m representa a massa, $\hbar$ é a constante de Planck e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ está relacionada ao comportamento da partícula com a interferência externa do meio. Enquanto que $u(x,t)$ não possui nenhum sentido físico direto, o valor $\|u(x,t)\|_{\mathbb{C}}^2$ representa a densidade de probabilidade de encontrar a partícula em uma posição x no momento t. Em chamados estados estacionários da partícula, que se estuda níveis de energias definidos invariantes no tempo obtemos a equação de Schrödinger independente do tempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(x) + V(x)u(x) = Eu(x), \tag{1.3}$$

em que E é um valor real relacionado a energia total do sistema. Desse modo, trabalhamos com a equação da onda como uma função real $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. E consideramos o funcional energia associado,

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2 + Eu^2(x) \right) \mathrm{d}x, \tag{1.4}$$

Em que a parcela $\dfrac{\hbar^2}{2m}|\nabla u(x,t)|^2$ representa a contribuição da energia cinética e $V(x)|u(x,t)|^2$ a contribuição da energia potencial. Ainda, em generalização a equação (1.3) nascem as equações do tipo Kirchhoff-Schrödinger. No modelo, ao incorporar o funcional de Kichhorff, originalmente da forma $M_0 \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right) = \left(1 + a\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \right)$, atribuímos um efeito não local na variação da energia cinética global, pois é um termo que não está aplicado a um ponto de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ tornando a equação estacionária de Schrödinger da forma

$$-M_0 \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \Delta u + V(x)u = h(u),$$

em que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma não linearidade e representa interações não lineares das partículas. É nesse contexto que nasce o problema a ser estudado neste trabalho

$$\begin{cases} -M \left(\|\nabla u\|_2^2 \right) \Delta u + V_\lambda(x)u = u^{2^*-1} + \gamma f(u), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u > 0, \quad u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Em que a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não satisfaz a conhecida condição de Ambrosetti-Rabinowitz com propriedades a serem detalhadas no capítulo seguinte. Tendo como principal objetivo provar o seguinte resultado,

Teorema 1.0.1. *Suponha que* $(V_1) - (V_3)$, $(M_1) - (M_3)$ *e* $(f_1) - (f_5)$ *são satisfeitos e* $p \in (4,6)$. *Então, existe* $\gamma^* > 0$ *tal que para todo* $\gamma \geqslant \gamma^*$ *existe* $\lambda^* = \lambda^*(\gamma) > 0$ *tal que* $\mathcal{P}_{\lambda,\gamma}$ *possui solução para todo* $\lambda \geqslant \lambda^*$.

Para tanto, no Capítulo 2, apresentamos com maiores detalhes o problema além de propriedades preliminares das funções envolvidas. No Capítulo 3, estabelecemos a estrutura variacional sob a qual definiremos e trabalharemos em busca das soluções fracas descritas no teorema, além de fornecermos as principais estimativas para o problema, sendo crucial o uso do Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.3.13). Já no Capítulo 4, com uso do APÊNDICE C - Princípio de Compacidade de Lions, determinamos a convergência da sequência de Cerami estabelecida no Capítulo 3 juntando com uma estimativa tipo $L^\infty - uniforme$ para o problema auxiliar, o qual é crucial no nosso argumento na prova do Teorema 1.0.1.

2 Preliminares

2.1 Descrição da classe de problemas elípticos não lineares

Motivados pelo recente trabalho de Ó, Souto e Ubilla (2020), o presente trabalho tem como principal objetivo apresentar resultados de existência de solução para uma classe de problemas do tipo Kirchhoff-Schröndinger,

$$\begin{cases} -M\left(\|\nabla u\|_2^2\right)\Delta u + V_\lambda(x)u = u^5 + \gamma f(u), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u > 0. \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_{\lambda,\gamma})$$

Onde $V_\lambda(x) = Z(x) + \lambda V(x)$, parâmetros $\lambda, \gamma \in (0,\infty)$ e $p \in (4, 2^*)$, satisfazendo

(V_1) Z e V são funções contínuas e não negativas;

(V_2) $V \equiv 0$ em alguma bola $B_{R_*}(x_*) \subseteq \mathbb{R}^3$;

(V_3) $\liminf_{|x|\to\infty} |x|^{p-2}V(x) > 0$;

(M_1) A função de Kirchhoff $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é contínua;

(M_2) M é não decrescen$t$e no intervalo $[0,+\infty)$ e $M(0) =: M_0 > 1/p$;

(M_3) A função $t \mapsto M(t)/t$ é não crescente no intervalo $(0,\infty)$.

A não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo

(f_1) $f(s) \geqslant 0, \forall s \in \mathbb{R}$;

(f_2) $s \mapsto \dfrac{s^{2^*-1} + f(s)}{s}$ é crescente em $(0,+\infty)$;

(f_3) Existe $C > 0$ tal que

$$|f(s)| \leqslant C\left(1 + |s|^{p-1}\right), \forall s \in \mathbb{R};$$

(f_4) $\lim_{s\to 0} \dfrac{f(s)}{s} = 0$;

(f_5) Existe $C > 0$ tal que $F(s) = \int_0^s f(\tau)\mathrm{d}\tau \geqslant C|s|^p$.

Nossa principal contribuição para trabalhos recentes é a possibilidade de que o potencial V_λ possa decair para zero no infinito, além da inserção da não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não satisfaz a célebre condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Destacamos que em Ó, Souto e Ubilla (2020) é provado o Teorema 1.0.1 no caso em que $f(s) = s^{p-2}|s|$. A função f

replica a função presente em Alves, Souto e Soares (2011), mas ao invés da hipótese f_5, no mencionado artigo, ela possui a hipótese $\lim \left(\frac{F(s)}{s^4}\right) = +\infty$, qual pode ser vista como consequência da hipótese

(f_5^*) Existe $\theta > 4$ e $C > 0$ tais que $F(s) > |s|^\theta$.

A nossa hipótese (f_5) seria o caso quando θ é o próprio p na hipótese (f_5^*).

Exemplo 2.1.1. *Considere $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$V(x) = \begin{cases} 0, & se\ |x| \leqslant |x_1|, \\ \frac{1}{|x|^{p-2}}\varphi\left(\frac{|x|-|x_*|}{R_1}\right), & se\ |x| > |x_*|. \end{cases}$$

Onde $\varphi : R \to [0,1]$ de classe $C^1(\mathbb{R})$ tal que

(i) $\varphi(s) = 0$ *para* $s \leqslant 1$;

(ii) $\varphi(s) = 1$ *para* $s \geqslant 2$;

(ii) φ *varia de* 0 *a* 1 *para* $1 < s < 2$.

Por exemplo, podemos considerar

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0, & se\ s \leq 1, \\ 3(s-1)^2 - 2(s-1)^3, & se\ 1 < s < 2, \\ 1, & se\ s \geq 2. \end{cases}$$

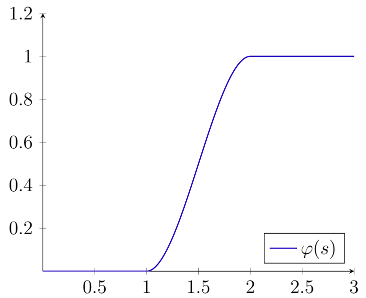

Figura 1 – Gráfico da função $\varphi(s)$.

Essa construção garante que $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ seja de classe $C^1(\mathbb{R})$. Desse modo, a função $V(x)$ se torna contínua por se tratar do produto e composição de funções contínuas, além de que $V(x) \geqslant 0$. Quando $x \in B_{R_*}(x_1)$ temos que $\frac{|x|-|x_1|}{R_1} \leqslant \frac{|x-x_1|}{R_1} \leqslant 1$ então $\varphi\left(\frac{|x|-|x_1|}{R_1}\right) = 0$, portanto, $V(x) = 0$ em $B_{R_1}(x_1)$. Ainda, para valores suficientemente grandes de $|x|$, temos que $\varphi\left(\frac{|x|-|x_1|}{R_1}\right) = 1$ e, portanto,

$$\liminf_{|x|\to\infty} |x|^{p-2}V(x) = \liminf_{|x|\to\infty} |x|^{p-2}\frac{1}{|x|^{p-2}} = 1 > 0.$$

A função $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ indicada satisfaz as propriedades (V_1), (V_2) e (V_3).

Exemplo 2.1.2. *Quanto a um exemplo para o funcional* $M : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *que satisfaça* (M_1)-(M_3), *podemos considerar* $M(t) = a + bt$ *com* $a > \frac{1}{p}$ *e* $b \geqslant 0$. *Quando* $a = 1$ *e* $b = 0$ *recaímos ao Laplaciano* $M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u = \Delta u$.

Lema 2.1.1. *As seguintes propriedades envolvendo* M *e sua primitiva* $\hat{M}(s) = \int_0^s M(\tau)d\tau$ *são válidas:*

a) $\hat{M}(s) \geqslant M_0 s$, *para todo* $s > 0$;

b) As condições (M_2)-(M_3) *implicam que* $s \mapsto 2\hat{M}(s) - sM(s)$ *é não decrescente para* $s > 0$;

c) Se $q > 4$, *as condições* (M_2)-(M_3) *implicam em*

$$q\hat{M}(s) - 2sM(s) \geqslant M_0(q-4)s, \text{ para todo } s > 0.$$

Demonstração. a) De fato, como M uma função não decrescente em $[0, \infty)$, segue de imediato que

$$\hat{M}(s) = \int_0^s M(\tau)\mathrm{d}\tau \geqslant \int_0^s M_0 \mathrm{d}x = M_0 s, \text{para todo } s > 0.$$

Logo, *a)* vale.

b) Ainda, defina $A(s) = 2\hat{M}(s) - sM(s)$. Para $0 \leqslant t \leqslant s$, segue

$$\begin{aligned}
A(s) - A(t) &= 2\int_0^s M(\tau)\mathrm{d}\tau - 2\int_0^s \frac{M(s)}{s}\tau\mathrm{d}\tau - \left[2\int_0^t M(\tau)\mathrm{d}\tau - 2\int_0^t \frac{M(t)}{t}\tau\mathrm{d}\tau\right] \\
&= 2\int_t^s M(\tau)\mathrm{d}\tau + 2\left[\int_0^t \frac{M(t)}{t}\tau\mathrm{d}\tau - \int_0^s \frac{M(s)}{s}\tau\mathrm{d}\tau\right] \\
&= 2\int_t^s \frac{M(\tau)}{\tau}\tau\mathrm{d}\tau + 2\left[\int_0^t \frac{M(t)}{t}\tau\mathrm{d}\tau - \int_0^t \frac{M(s)}{s}\tau\mathrm{d}\tau - \int_t^s \frac{M(s)}{s}\tau\mathrm{d}\tau\right] \\
&= 2\int_t^s \left(\frac{M(\tau)}{\tau} - \frac{M(s)}{s}\right)\tau\mathrm{d}\tau + 2\int_0^t \left(\frac{M(t)}{t} - \frac{M(s)}{s}\right)\tau\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

por (M_3), $\frac{M(\tau)}{\tau} \geqslant \frac{M(s)}{s} > 0$ para todo $0 < \tau \leqslant s$, incluindo $\tau = t$. Portanto, $A(s) - A(t) \geqslant 0$ e *b)* vale.

c) Desse modo, quando $q > 4$, para todo $s > 0$,

$$\begin{aligned}
q\hat{M}(s) - 2sM(s) &= (q-4)\hat{M}(s) + 2(2\hat{M}(s) - sM(s)) \\
&\geqslant (q-4)\hat{M}(s) \\
&\geqslant M_0(q-4)s.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.1.2. *Se f satisfaz (f_3) e (f_4), então, dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que $|f(s)| \leqslant \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{q-1}$ para todo $s \geqslant 0$ e $q \geqslant p$.*

Demonstração. De fato, dado $\varepsilon > 0$, por (f_4), existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right| < \varepsilon \Rightarrow |f(s)| \leqslant \varepsilon|s|, \ \forall|s| \in (0, \delta_\varepsilon). \tag{2.1}$$

Ainda, defina $h : [-1, -\delta_\varepsilon] \cup [\delta_\varepsilon, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(s) = \frac{f(s) - \varepsilon s}{s^{q-1}}.$$

Sendo h uma função contínua definida em um compacto, existe $\hat{C}_\varepsilon$ em que $|h(s)| \leqslant \hat{C}_\varepsilon$ para todo $s \in [\delta_\varepsilon, 1]$, o que implica em,

$$\frac{|f(s)| - \varepsilon|s|}{|s|^{q-1}} \leqslant \left|\frac{f(s) - \varepsilon s}{s^{q-1}}\right| = |h(s)| \leqslant \hat{C}_\varepsilon,$$

logo,

$$|f(s)| \leqslant \varepsilon|s| + \hat{C}_\varepsilon|s|^{q-1}, \quad \forall s \in [\delta_\varepsilon, 1]. \tag{2.2}$$

Por fim, para $|s| > 1$, por (f_3), existe $C > 0$ tal que

$$|f(s)| \leqslant C\left(1 + |s|^{p-1}\right) \leqslant C\left(|s|^{p-1} + |s|^{p-1}\right) = 2C|s|^{p-1} \leqslant 2C|s|^{q-1}, \ \forall|s| > 1. \tag{2.3}$$

Portanto, ao considerar $C_\varepsilon = \max\{1, 2C, \hat{C}_\varepsilon\}$, por (2.1), (2.2) e (2.3), temos

$$|f(s)| \leqslant \begin{cases} \varepsilon|s| \leqslant \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{q-1}, & \text{se } s \in [0, \delta_\varepsilon), \\ \varepsilon|s| + \hat{C}_\varepsilon|s|^{p-1} \leqslant \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{q-1}, & \text{se } s \in [\delta_\varepsilon, 1], \\ 2C|s|^{q-1} \leqslant \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{q-1}, & \text{se } s \in (1, \infty). \end{cases}$$

Ou seja,

$$|f(s)| \leqslant \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{q-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

□

Observação 2.1.1. *Note que $f(0) = 0$ e que, conforme estabelecido pelo resultado anterior, ao considerar $\varepsilon_0 = 1$ e $q = 2^* = 6$, existe uma constante C_{ε_0} tal que*

$$|f(s)| \leqslant |s| + C_{\varepsilon_0}|s|^5.$$

3 Estrutura variacional

3.1 O Problema Auxiliar

Como o funcional $V_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pode decair para zero, é dificultoso a busca de soluções para a equação $-M\left(\|\nabla u\|_2^2\right)\Delta u + V_\lambda(x)u = u^5 + \gamma f(u)$ no clássico Espaço de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, por não conseguirmos reproduzir um espaço normado adequado em que o funcional energia para o problema esteja bem definido. Por esse motivo, a investigação para soluções levará em conta o espaço

$$\mathcal{D}^{1,2} = \left\{u \in L^{2^*} : \quad \text{Existem } \partial_i u \text{ e } \partial_i u \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ para todo } i = \{1,2,3\}\right\}.$$

Assim, nosso problema passará a ser descrito como

$$\begin{cases} -M\left(\|\nabla u\|_2^2\right)\Delta u + V_\lambda(x)u = u^5 + \gamma f(u), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u > 0, \quad u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_{\lambda,\gamma}$}$$

Com finalidade de aplicarmos a teoria dos pontos críticos para o problema ($\mathcal{P}_{\lambda,\gamma}$), vamos considerar o espaço

$$E = \left\{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3); \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u^2 < +\infty\right\}, \tag{3.1}$$

o qual, munido da operação $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, de regra $\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla v + V_\lambda(x)uv\mathrm{d}x$, induz em E uma estrutura de Espaço de Hilbert. No próximo passo vamos mostrar que a função $\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$ é de fato uma norma em E. No que segue, vamos supor que as condições (V_1)-(V_3), (M_1)-(M_3) e (f_1)-(f_3) sejam válidas.

Proposição 3.1.1. *A estrutura $(E, \|\cdot\|)$ acima definida, é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. De fato, dados $u, v \in E \subseteq \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, escrevendo $V_\lambda = V_\lambda^{1/2}V_\lambda^{1/2}$, pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.1) temos

$$|\langle u, v\rangle| = |\langle u, v\rangle_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}| + \left|\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)uv\mathrm{d}x\right|.$$

O que garante a boa definição de $\langle\ ,\ \rangle$. Quanto a bilinearidade e simetria de $\langle\ ,\ \rangle$ segue da linearidade de ∇ e da bilinearidade e simetria do produto interno canônico do $\mathbb{R}^3$. Além disso, dados $u, v \in E$ observe que

$$\langle u, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

pois $V_\lambda(x) \geqslant 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle = 0 &\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V_\lambda(x)u^2 \mathrm{d}x = \|u\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)} + \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = 0 \ \text{ e } \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x = 0 \\ &\Leftrightarrow u = 0.\end{aligned}$$

Logo, $\langle\ ,\ \rangle$ é um produto interno. Consequentemente, $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\| = (\langle u,u\rangle)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

é uma norma em E. Isto mostra que $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço normado cuja a norma provém de um produto interno. Em posse deste fato, seja $(u_n) \subseteq E$ uma subsequência Cauchy em E, ou seja, uma sequência tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geqslant n_0 \Rightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon \tag{3.2}$$

Como $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \|\nabla u\|_2 \leqslant \|u\|$, para todo $u \in E$, então (u_n) é uma sequência de Cauchy no espaço de Hilbert $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, donde segue

$$u_n \to u \text{ em } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \text{ para algum } u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3), \tag{3.3}$$

da imersão contínua $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$, então $u_n \to u$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$. Pela Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.5), dado uma subsequência $(u_{n_k}) \subseteq (u_n)$ qualquer, existe $(u_{n_{k,1}}) \subseteq (u_{n_k})$ subsequência, em que

$$u_{n_{k,1}}(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3. \tag{3.4}$$

Como $\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)v^2\mathrm{d}x \leqslant \|v\|$, para $v \in E$, de (3.2) segue que para todo ε, existe $n_{k_0,1}$ tal que

$$n_{k,1}, n_{h,1} \geqslant n_{k_0,1} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)(u_{n_{k,1}} - u_{n_{h,1}})^2\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} (V_\lambda(x)^{1/2}u_{n_{k,1}} - V_\lambda(x)^{1/2}u_{n_{h,1}})^2 < \varepsilon.$$

Portanto, $(V_\lambda^{1/2}(x)u_{n_{k,1}})$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^3)$, consequentemente,

$$V_\lambda^{1/2}(x)u_{n_{k,1}} \to \hat{u} \quad \text{ em } L^2(\mathbb{R}^3),$$

para algum $\hat{u}$ em $L^2(\mathbb{R}^3)$. Em particular, novamente pela Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.5), $V_\lambda^{1/2}(x)u_{n_{k,2}}(x) \to \hat{u}(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$ para alguma subsequência $(u_{n_{k,2}}) \subseteq (u_{n_{k,1}}) \subseteq (u_{n_k})$, ainda, por (3.4),

$$V_\lambda^{1/2}(x)u_{n_{k,2}} \to V_\lambda^{1/2}(x)u \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3.$$

Portanto, pela unicidade do limite q.t.p., segue $\hat{u}(x) = V_\lambda^{1/2}(x)u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$, donde

$$V_\lambda^{1/2}(x)u_{n_{k,2}} \to V_\lambda^{1/2}(x)u \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^3). \tag{3.5}$$

Segue que existe $M > 0$ tal que

$$\|V_\lambda^{1/2}(x)u_{n_{k,2}}\|_2 = \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda^{1/2}(x)u_{n_{k,2}}^2 \leqslant M, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $V_\lambda(x)u_{n_{k,2}}^2 \to V_\lambda u^2$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$ e $V_\lambda(x)u_{n_{k,2}}^2 \geqslant 0$, pelo Lema de Fatou (Teorema A.2.3),

$$\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \liminf V_\lambda u_{n_{k,2}}^2 \leqslant \liminf \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u_{n_{k,2}}^2 \leqslant M,$$

logo, $u \in E$ e por (3.3) e (3.5),

$$\begin{aligned}\|u_{n_{k,2}} - u\|^2 &= \|u_{n_{k,2}} - u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)(u_{n_{k,2}} - u)^2 \mathrm{d}x \\ &= \|u_{n_{k,2}} - u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}^2 + \|V_\lambda^{1/2}(x)u_{n_{k,2}} - V_\lambda^{1/2}(x)u\|_2^2 \to 0.\end{aligned}$$

Por fim, pelo Princípio da subsequência (Lema A.1.1),

$$u_n \to u \text{ em } E.$$

Portanto, toda sequência de Cauchy em $(E, \|\cdot\|)$ é convergente. Portanto, $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço de Hilbert. $\square$

Motivados pela Definição 1.0.1, diremos que $u \in E$ é solução fraca do problema $(\mathcal{P}_{\lambda,\gamma})$, com as hipóteses (M_1)-(M_3), (V_1)-(V_3), (f_1)-(f_5) anteriormente estabelecidas, se satisfaz

$$M(\|\nabla u\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)uv\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} u^5 v + \lambda f(u)v\mathrm{d}x, \quad \forall v \in E.$$

Observação 3.1.1. *Suponha que $u_0 \in E$, com $u_0 \geqslant 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$, (V_1)-(V_3) satisfaz a seguinte identidade variacional*

$$M(\|\nabla u\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \overline{V}(x)uv\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} u^5 v + \alpha f(u)v\mathrm{d}x, \quad \forall v \in E, \tag{3.6}$$

onde $\overline{V}_\lambda(x)$ é dado por $\overline{V}_\lambda(x) = V_\lambda(x + x_1)$, ou seja, verifica

- *(V_2'): $V \equiv 0$ em $B_{R_1}(0) \subseteq \mathbb{R}^3$,*

que ocorre se, e somente se, a hipótese (V_2) vale para V_λ. Para toda função $v \in E$, escolhendo $\overline{v}(x) = v(x + x_1) \in E$, como função teste em (3.6), obtemos

$$M(\|\nabla u_0\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_0 \nabla \overline{v} \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \overline{V}_\lambda(x)u_0\overline{v}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} u^5 \overline{v} + \alpha f(u_0)\overline{v}\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

Por outro lado, definindo $u(x) = u_0(x + x_1)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_0 \partial_i \varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_i u_0)\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),$$

Em particular, para $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x + x_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_0 \partial_i \overline{\varphi} \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_i u_0) \overline{\varphi} \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),$$

pelo Teorema da Mudança de Variável (Teorema A.1.2),

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x - x_1) \partial_i \overline{\varphi}(x - x_1) \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_i u_0(x - x_1)) \overline{\varphi}(x - x_1) \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^3} u(x) \partial_i \varphi(x) \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_i u_0(x - x_1)) \varphi(x) \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Ou seja, $\partial_i u(x) = \partial_i u_0(x - x_1)$, *analogamente,* $\partial_{ii} u(x) = \partial_{ii} u_0(x - x_1)$. *Que implica em* $\nabla u(x) = \nabla u_0(x - x_1)$, *ainda, como a integral de Lebesgue é invariante por translação, concluímos* $\|\nabla u\|_2^2 = \|\nabla u_0\|_2^2$. *Então, pela equação (3.7) segue que*

$$M(\|\nabla u\|_2^2) \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_0 \nabla \overline{v} \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \overline{V}(x) u_0 \overline{v} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} u_0^5 \overline{v} + \alpha f(u_0) \overline{v} \mathrm{d}x. \tag{3.8}$$

com $\overline{v}(x) = v(x + x_1)$ *para toda* $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. *Novamente, pelo Teorema da Mudança de Variável (Teorema A.1.2), concluímos*

$$M(\|\nabla u\|_2^2) \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \overline{V}_\lambda(x - x_1) u \overline{v} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} u^5 v + \alpha f(u) v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Como $\overline{V}_\lambda(x) = V_\lambda(x + x_1)$, *vemos que* $u(x) = u_0(x - x_1)$ *a identidade (3.6). Em resumo, obtemos soluções, no sentido fraco, para o problema sob a hipótese* (V_2'), *garantimos a existência de soluções para* $B_{R_1}(x_1)$ *qualquer na hipótese* (V_2).

Por causa da Observação 3.1.1, sem perda de generalidade, vamos considerar $B_{R_1}(x_1) = B_{R_1}$ na hipótese (V_2). No intuito de obtermos propriedades suficientes para a convergência de solução, iremos reformular o problema ($\mathcal{P}_{\lambda,\gamma}$) para um problema auxiliar, como segue. Seja $h_\gamma(s) = s^5 + \gamma f(s)$, considere $R \geqslant R_1$ e defina

$$g(x, s) = \begin{cases} h_\gamma(s), & \text{se } x \in B_R \text{ ou } h_\gamma(s) \leqslant \dfrac{V_\lambda(x)s}{p} \text{ para } s > 0, \\ \dfrac{V_\lambda(x)s}{p}, & \text{se } x \in B_R^c \text{ e } h_\gamma(s) > \dfrac{V_\lambda(x)s}{p} \text{ para } s > 0, \\ 0, & \text{se } s \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Considere o problema auxiliar

$$-M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u + V_\lambda(x) u = g(x, u). \tag{$\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma}$}$$

Definição 3.1.1. *A função* $u \in E$ *é solução fraca do problema auxiliar se satisfaz*

$$M(\|\nabla u\|_2^2) \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) u v \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} g(x, u) v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in E.$$

No próximo passo listaremos as principais propriedades que a não linearidade $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz dentro do espaço do nossos métodos.

Proposição 3.1.2. *A função $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz:*

(g_1) A função g é Carathéodory;

(g_2) $sg(x,s) \leqslant sh_\gamma(s) = s^6 + sf_\gamma(s), \quad \forall (x,s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

(g_3) $sg(x,s) \leqslant \dfrac{V_\lambda(x)}{p} s^2, \ \forall (x,s) \in B_R^c \times \mathbb{R}$

(g_4) $g(x,s) \leqslant |h_\gamma(s)| \leqslant |s|^5 + |f_\gamma(s)|, \quad \forall (x,s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

(g_5) $g(x,s) \leqslant \dfrac{V_\lambda(x)}{p}|s|, \ \forall (x,s) \in B_R^c \times \mathbb{R}$

(g_6) $sg(x,s) - pG(x,s) \geqslant \left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}\right] V_\lambda(x)s^2, \forall s \in \mathbb{R}$

Demonstração. De fato, dado $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, considere

$$\omega_s = \left\{ x \in \mathbb{R}^3; h_\alpha(s) \leqslant \frac{V_\lambda(x)s}{p} \right\}.$$

Este é um conjunto mensurável, pois $V_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável. Note que

$$g(\cdot,s) = h_\gamma(s)\chi_{B_R}\chi_{\omega_s} + h_\gamma(s)\chi_{B_R}\chi_{\omega_s^c} + h_\gamma(s)\chi_{B_R^c}\chi_{\omega_s} + \frac{V_\lambda}{p}\chi_{B_R^c}\chi_{\omega_s^c} \tag{3.10}$$

em que χ_A denota a função característica. Observe que a equação (3.10) expressa a função $g(\cdot,s) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como uma combinação de funções mensuráveis, portanto, $g(\cdot,s)$ é uma função mensurável. por outro lado, a partir de (f_5), temos

$$\begin{aligned} F(s) \geqslant C|s|^p \Rightarrow \frac{F(s)}{s^2} &\geqslant C|s|^{p-2} \\ \Rightarrow \lim_{|s|\to\infty} \frac{F(s)}{s^2} &= +\infty. \end{aligned}$$

Daí, pela regra de L'Hopital, $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s} = +\infty$. Disso, combinado com ($f_4$), segue que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{h_\gamma(s)}{s} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{s\to 0} \frac{h_\gamma(s)}{s} = 0$$

Agora, fixado $x \in \mathbb{R}^3$, como $\dfrac{V_\lambda(x)}{p} \geqslant 0$ e, por (f_2), a função $q(s) = \dfrac{h_\gamma(s)}{s}$ é uma função contínua crescente em $s > 0$, supondo $\dfrac{V_\lambda(x)}{p} > 0$, pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema A.1.6), existe $s_x > 0$ tal que

$$\frac{h_\gamma(s_x)}{s_x} = \frac{V_\lambda(x)}{p},$$

O que implica, por $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ser crescente, em

$$\begin{cases} q(s) = \dfrac{h_\gamma(s)}{s} \leqslant \dfrac{V_\lambda(x)}{p}, & \text{se } s \in (0, s_x]\,, \\ q(s) = \dfrac{h_\gamma(s)}{s} > \dfrac{V_\lambda(x)}{p}, & \text{se } s \in (s_x, \infty)\,. \end{cases} \tag{3.11}$$

Com essas observações vamos considerar que a função $g(x, \cdot)$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Se $x \in B_R$, então

$$g(x, s) = \begin{cases} h_\gamma(s), & \text{se } s \in [0, \infty], \\ 0, & \text{se } s \in [-\infty, 0]. \end{cases}$$

é uma função contínua pois h_γ o é, e $h_\gamma(0) = 0$. Para o caso em que $x \in B_r^c$, por (3.11), segue que

$$g(x, s) = \begin{cases} h_\gamma(s), & \text{se } s \in (0, s_x]\,, \\ \dfrac{V_\lambda(x)}{p} s, & \text{se } s \in (s_x, \infty)\,, \\ 0, & \text{se } s \in (-\infty, 0]. \end{cases} \tag{3.12}$$

Desse modo, a continuidade de $g(x, \cdot)$ em $\mathbb{R}$, com $x \in B_R^c$, depende da interação das funções contínuas h_γ e $s \mapsto \dfrac{V_\lambda(x)}{p} s$ em 0 e s_x. Como,

$$\lim_{s \to s_x^+} g(x, s) = \lim_{s \to s_x^+} \frac{V_\lambda(x)}{p} s = \frac{V_\lambda(x)}{p} s_x = h(s_x) = \lim_{s \to s_x^-} h(s) = \lim_{s \to s_k^-} g(x, s),$$

$$\lim_{s \to 0^+} g(x, s) = \lim_{s \to 0} h(s) = h(0) = 0$$

A continuidade de $g(x, \cdot)$ é garantida para $x \in B_R^c$ e $\dfrac{V_\lambda(x)}{p} > 0$. Caso $\dfrac{V_\lambda(x)}{p} = 0$, segue da definição, $g(x, \cdot) = 0$. Logo, a função $g(x, \cdot) \colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}^3$ fixado. Consequentemente a função $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory. Isto prova (g_1). Pelo o que foi discutido, por (3.12), podemos reescrever a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira,

$$g(x, s) = \begin{cases} h_\gamma(s), & \text{se } (x, s) \in B_R \times \mathbb{R}, \\ h_\gamma(s), & \text{se } (x, s) \in B_R^c \times (0, s_x]\,, \\ \dfrac{V_\lambda(x)}{p} s, & \text{se } (x, s) \in B_R^c \times (s_x, \infty)\,, \\ 0, & \text{se } (x, s) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0]. \end{cases} \tag{3.13}$$

Mas por (3.11), observe que

$$\begin{aligned} \frac{h_\gamma(s)}{s} \leqslant \frac{V_\lambda(x)}{p} &\Rightarrow \frac{h_\gamma(s)}{s} s^2 \leqslant \frac{V_\lambda(x)}{p} s^2 \\ &\Rightarrow s h_\gamma(s) \leqslant \frac{V_\lambda(x)}{p} s^2, \quad \forall (x, s) \in \mathbb{R}^3 \times (0, s_x] \end{aligned} \tag{3.14}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{h_\gamma(s)}{s} > \frac{V_\lambda(x)}{p} &\Rightarrow \frac{h_\gamma(s)}{s}s^2 > \frac{V_\lambda(x)}{p}s^2 \\ &\Rightarrow sh_\gamma(s) > \frac{V(x)}{p}s^2,\ \forall (x,s) \in \mathbb{R}^3 \times (s_x, \infty)\end{aligned} \tag{3.15}$$

Observando a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, como redefinida em (3.13), juntamente com o exposto em (3.14) e (3.15), concluímos que (g_2) e (g_3) valem. Como $g(x,s) = 0$ para $s \in (-\infty, 0]$, segue que (g_2) e (g_3) implica em (g_4) e (g_5). Seja $(x,s) \in \mathbb{R}^3 \times (0, s_x]$, então

$$\begin{aligned} sg(x,s) - pG(x,s) - \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) V_\lambda(x)s^2\right] &= sh(s) - p\int_0^s h(\tau)d\tau - \frac{1}{p}V_\lambda(x)s^2 + \frac{V_\lambda(x)s^2}{2} \\ &= 2\int_0^s \frac{h(s)}{s}\tau d\tau - p\int_0^s \frac{h(\tau)}{\tau}\tau d\tau \\ &\quad - 2\int_0^s \frac{V_\lambda(x)}{p}\tau d\tau + p\int_0^s \frac{V_\lambda(x)}{p}\tau d\tau, \end{aligned}$$

disso, já que $\tau \mapsto \dfrac{h(\tau)}{\tau}$ é crescente em $(0, s]$, segue

$$\begin{aligned} sg(x,s) - pG(x,s) - \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) V_\lambda(x)s^2\right] &\geqslant 2\int_0^s \frac{h(s)}{s}\tau d\tau - p\int_0^s \frac{h(s)}{s}\tau d\tau \\ &\quad - 2\int_0^s \frac{V_\lambda(x)}{p}\tau d\tau + p\int_0^s \frac{V_\lambda(x)}{p}\tau d\tau \\ &= (p-2)\int_0^s \left(\frac{V_\lambda(x)}{p} - \frac{h(s)}{s}\right)\tau d\tau, \end{aligned}$$

como $p - 2 > 0$ e $\dfrac{V_\lambda(x)}{p} - \dfrac{h(s)}{s} \geqslant 0$ para $(x,s) \in \mathbb{R}^3 \times (0, s_x]$, a diferença é não negativa, então:

$$sg(x,s) - pG(x,s) \geqslant \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) V_\lambda(x)s^2, \quad \forall (x,s) \in \mathbb{R}^3 \times (0, s_x] \tag{3.16}$$

Agora vamos supor que $(x,s) \in B_R \times (s_x, \infty)$, como $\tau \mapsto \dfrac{h(\tau)}{\tau}$ crescente em $\tau > 0$, segue

$$\begin{aligned} sg(x,s) - pG(x,s) &= sh(s) - p\int_0^s h(\tau)d\tau \\ &= 2\int_0^s \frac{h(s)}{s}\tau d\tau - p\int_0^s \frac{h(\tau)}{\tau}\tau d\tau \\ &\geqslant 2\int_0^s \frac{h(s)}{s}\tau d\tau - p\int_0^s \frac{h(s)}{s}\tau d\tau \\ &= (2-p)\frac{h(s)}{s}\frac{s^2}{2} \end{aligned}$$

Mas $\dfrac{h(s)}{s} \geqslant \dfrac{h(s_x)}{s_x} = \dfrac{V_\lambda(x)}{p}$ e já que $s \in (s_x, \infty)$ com $\tau \mapsto \dfrac{h(\tau)}{\tau}$ crescente em $\tau \geqslant 0$, temos

$$\begin{aligned} sg(x,s) - pG(x,s) &\geqslant (2-p)\frac{V_\lambda(x)}{p}\frac{s^2}{2} \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) V_\lambda(x)s^2. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Agora, suponha $(x,s) \in B_r^c \times (s_x, \infty)$,

$$\begin{aligned} sg(x,s) - pG(x,s) &= \frac{V_\lambda(x)}{p}s^2 - p\int_0^s g(x,\tau)d\tau \\ &= \frac{V_\lambda(x)}{p}s^2 - p\left[\int_0^{s_x} g(x,\tau)d\tau + \int_{s_x}^s g(x,\tau)d\tau\right], \end{aligned}$$

como $g(x,\tau) = h_\gamma(\tau) \leqslant \dfrac{V_\lambda(x)}{p}\tau$ em $\tau \in (0, s_x)$ e $g(x,\tau) = \dfrac{V_\lambda(x)}{p}\tau$ em $\tau \in [s_x, \infty)$ para $x \in B_R^c$,

$$\begin{aligned} sg(x,s) - pG(x,s) &\geqslant \frac{V_\lambda(x)}{p}s^2 - p\left[\int_0^{s_x} \frac{V_\lambda(x)}{p}\tau d\tau + \int_{s_x}^s \frac{V_\lambda(x)}{p}\tau d\tau\right] \\ &= \frac{V_\lambda(x)}{p}s^2 - p\int_0^s \frac{V_\lambda(x)}{p}\tau d\tau \\ &= \frac{V_\lambda(x)}{p}s^2 - \frac{V_\lambda(x)}{2}s^2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Logo, por (3.16), (3.17) e (3.18), concluímos

$$sg(x,s) - pG(x,s) \geqslant \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) V_\lambda(x)s^2, \quad \forall (x,s) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty). \tag{3.19}$$

O que prova (g_6) e finaliza a demonstração da Proposição 3.1.2. □

3.2 Regularidade do funcional Energia associado

Nesta seção vamos estudar o problema auxiliar ($\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma}$), provando algumas estruturas básicas que o funcional energia associado deve satisfazer.

$$J(u) = \frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda u^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)\mathrm{d}x, \forall u \in E,$$

De fato, vamos verificar que J é de classe $C^1(E,\mathbb{R})$ com derivada

$$J'(u)v = M(\|\nabla u\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda uv\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)v\mathrm{d}x, \forall u,v \in E,$$

e os pontos críticos são soluções fracas para o problema auxiliar. Para tanto, definimos os funcionais auxiliares, $J_1 : E \to \mathbb{R}$, $J_2 : E \to \mathbb{R}$ e $J_3 : E \to \mathbb{R}$, dados por $J_1(u) = \|\nabla u\|_2^2$, $J_2(u) = \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x$ e $J_3(u) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)\mathrm{d}x$. A seguir, demonstraremos que estes são de classe $C^1(E)$ e apresentaremos suas respectivas derivadas.

Lema 3.2.1. *O funcional $J_1 : E \to \mathbb{R}$, em que $J_1(u) = \|\nabla u\|_2^2 = \|u\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}$, é de classe $C^1(E)$ com sua derivada dada por*

$$J_1'(u)v = 2\langle u, v\rangle_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x.$$

Demonstração. De fato, J_1 está bem definido uma vez que $E \subseteq \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Desse modo, sejam $u, v \in E$, então segue,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{J_1(u+tv)-J_1(u)}{t} &= \frac{\|u+tv\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}-\|u\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}}{t}\\ &= \frac{\|u\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}+2\langle u,tv\rangle_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}+\|tv\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}-\|u\|^2}{t}\\ &= \frac{2t\langle u,v\rangle_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}+t^2\|v\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}}{t}\\ &= 2\langle u,v\rangle_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}+t\|v\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \to 2\langle u,v\rangle_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Desse modo, J_1 é diferenciável no sentido de Gâteaux, com sua derivada dada por

$$d_G J_1(u)v = 2\langle u,v\rangle_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = 2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\cdot\nabla v \mathrm{d}x.$$

Para concluir que esta função também representa a derivada de Fréchet, conforme o Teorema A.1.1, resta demonstrarmos a continuidade da função derivada de Gâteaux $J_1 : E \to E^*$. Para tanto, considere $(u_n) \subseteq E$ e $u \in E$ tais que $u_n \to u$ em E. Como $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico, para garantirmos a continuidade da função derivada de Gâteaux, é suficiente demonstrarmos $d_G J_1(u_n) \to d_G J_1(u)$ em E^*. Para tanto, observe,

$$\begin{aligned}\|d_G J_1(u_n)-d_G J_1(u)\|_* &= \sup_{\|v\|=1}|d_G J_1(u_n)v - d_G J_1(u)v|\\ &= \sup_{\|v\|=1}|2\langle u_n,v\rangle_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}-2\langle u_n,v\rangle_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}|\\ &= \sup_{\|v\|=1}|2\langle u_n-u,v\rangle_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}|.\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwartz (Teorema A.3.1), e como $\|w\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|w\|$ para todo $w \in E$, obtemos,

$$\begin{aligned}\|d_G J_1(u_n)-d_G J_1(u)\|_* &\leqslant \sup_{\|v\|=1} 2\|u_n-u\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}\|v\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}\\ &\leqslant \sup_{\|v\|=1} 2\|u_n-u\|\|v\|\\ &= 2\|u_n-u\| \to 0.\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema A.1.1, J_1 é Fréchet diferenciável, sendo sua derivada dada por

$$J_1'(u)v = 2\langle u,v\rangle_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = 2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla v \mathrm{d}x.$$

□

Lema 3.2.2. *O funcional $J_2 : E \to \mathbb{R}$, dado por $J_2(u) = \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u^2 \mathrm{d}x$, é de classe $C^1(E)$, com derivada $J_2'(u)v = 2\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)uv\mathrm{d}x$.*

Demonstração. De fato, observa-se que, pela definição de E, o funcional J_2 está bem definido. Além disso, de modo análogo como no resultado anterior, substituindo o produto interno e norma de $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ pelos respectivos do espaço $(E, \|\cdot\|)$, podemos provar que a função $f(u) = \|u\|^2$ é derivável, com derivada dada por $f'(u)v = 2\langle u, v\rangle$. Assim, para $u, v \in E$, segue que J_2 é diferenciável com derivada dada por

$$\begin{aligned} J_2(u) = \|u\|^2 - J_1(u) \Rightarrow J_2'(u)v &= 2\langle u, v\rangle - 2\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) uv \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2.3. *O funcional $J_3 : E \to \mathbb{R}$, dado por $J_3(u) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)\mathrm{d}x$, é de classe $C^1(E)$, com derivada $J_3'(u)v = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)v\mathrm{d}x$.*

Demonstração. De fato, por (g_4) e (g_5),

$$|g(x,s)| \leqslant |h_\gamma(s)|\chi_{B_R}(x) + \frac{V_\lambda(x)}{p}|s|\chi_{B_R^c}(x). \tag{3.20}$$

Assim, desde que

$$\begin{aligned} |G(x,s)| = \left|\int_0^s g(x,\tau)d\tau\right| &\leqslant \int_0^s |g(x,\tau)|d\tau \\ &\leqslant \int_0^s |h_\gamma(\tau)|\chi_{B_R}(x) + \frac{V_\lambda(x)}{p}|\tau|\chi_{B_R^c}(x)d\tau, \end{aligned}$$

em combinação ao Lema 2.1.2, resulta

$$|G(x,s)| \leqslant \left[|s|^6 + \varepsilon\gamma|s| + C_\varepsilon\gamma|s|^p\right]\chi_{B_R}(x) + \frac{V_\lambda(x)}{2p}|s|^2\chi_{B_R^c}(x).$$

Daí, dado $u \in E$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |G(x,u)|\mathrm{d}x \leqslant \int_{B_R} |u|^6 + \varepsilon\gamma|u| + C_\varepsilon\gamma|u|^p\mathrm{d}x + \int_{B_R^c} \frac{V_\lambda(x)}{2p}|u|^2\mathrm{d}x.$$

Desse modo,

$$u \in E \subseteq \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \Rightarrow u|_{B_r} \in L^6(B_R) \subseteq L^q(B_R),\ \forall q \leqslant 6,$$

pois $|B_R| < \infty$, e, além disso, se $u \in E$ então

$$\int_{B_R^c} \frac{V_\lambda(x)}{2p}u^2\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} \frac{V_\lambda(x)}{p}u^2\mathrm{d}x < \infty.$$

Consequentemente, dessas considerações, conclui-se que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |G(x,u)|\mathrm{d}x < \infty,$$

que implica na boa definição de J_3. Desse modo, sejam $u, v \in E$,

$$\frac{J_3(u+tv)-J_3(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{G(x,u+tv)-G(x,u)}{t} \mathrm{d}x,$$

fixado $x \in \mathbb{R}^3$, defina

$$\begin{aligned} \xi_x : [-1,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \xi_x(t) = G(x, u(x)+tv(x)). \end{aligned}$$

Dado que $G(x,\cdot)$ é diferenciável, pois $g(x,\cdot)$ é contínua para $x \in \mathbb{R}^3$ (já que g é Caratheodory), ainda, que $\xi_x^* : [-1,1] \to \mathbb{R}$, definida por $\xi_x^*(t) = u(x)+tv(x)$, é diferenciável, segue que ξ_x também o é. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio (Teorema A.1.7), para todo $t \in [0,1]$ existe $t_0 \in (-t,t)$ tal que

$$\xi_x'(t_0) = \frac{\xi_x(t)-\xi_x(0)}{t-0} = \frac{G(x,u+tv)-G(x,u)}{t},$$

dessa forma, pela Regra da Cadeia (Teorema A.1.3),

$$g(x,u+t_0v)v = \frac{G(x,u+tv)-G(x,u)}{t}.$$

Assim, para cada $t \in [0,1]$, considere α_t tal que $\alpha_t t = t_0$ dado pelo Teorema do Valor Médio (Teorema A.1.7), com isso,

$$\frac{G(x,u+tv)-G(x,u)}{t} = g(x,u+\alpha_t tv)v,$$

note que $t \to 0 \Rightarrow \alpha_t \to 0$ em certo sentido pois $t_0 \in (-t,t)$. Com essas colocações, observe que

- $\dfrac{G(\cdot,u+tv)-G(\cdot,u)}{t} = g(\cdot,u+\alpha_t tv)v$ é mensurável, pois $g(x,\cdot)$ é contínua em $\mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

Ainda, por (g_4) e (g_5), considerando o conjunto de funções mensuráveis $\{g(\cdot,u+\alpha_t tv)\}_{t\in\mathbb{R}}$, obtemos,

$$|g(\cdot,u+\alpha_t tv)v| \leqslant |h_\lambda(u+\alpha_t tv)v|\chi_{B_R} + \frac{V_\lambda}{p}|(u+\alpha_t tv)v|\chi_{B_R^c}. \tag{3.21}$$

Trabalharemos isoladamente em cada parcela do lado direito da desigualdade acima, para demonstrarmos que as funções $\{g(\cdot,u+\alpha_t tv)\}_{t\in R}$ são dominadas por uma função $w \in L^1(R^3)$, assim, satisfazendo as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4). Note que pelo Teorema A.2.2 e, considerando $q = p$ e $C = \max\{\varepsilon, C_\varepsilon\}$ no Lema 2.1.2,

$$\begin{aligned} |h_\lambda(u+\alpha_t tv)v|\chi_{B_R} &= \left[|u+\alpha_t tv|^5 + \gamma|f(u+\alpha_t tv)|\right]|v|\chi_{B_R} \\ &\leqslant \left[2^4(|u|^5+|\alpha_t tv|^5) + \gamma C(|u|+\alpha_t t|v| + 2^{p-2}(|u|^{p-1}+|\alpha_t tv|^{p-1}))\right]|v|\chi_{B_R} \end{aligned}$$

Como $|\alpha_t t| = |t_0| \leqslant 1$, segue

$$|h_\lambda(u+\alpha_t tv)v|\chi_{B_R} \leqslant C^* \left[|u|^5 + |v|^5 + |u| + |v| + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right] |v|\chi_{B_R}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

com $C^* = \max\{\gamma C, 2^{p-2}\}$. Observe que, na desigualdade acima, o lado direito é uma função que pertence a $L^1(\mathbb{R}^3)$, uma vez que, a integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[|u|^5 + |v|^5 + |u| + |v| + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right] |v|\chi_{B_R} \mathrm{d}x,$$

equivalente à

$$\int_{B_R} \left[|u|^5 + |v|^5 + |u| + |v| + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right] |v| \mathrm{d}x,$$

que pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.1), denotando $6' = \frac{6}{6-1}$, é menor ou igual à

$$\left(\int_{B_r} \left(|u|^5 + |v|^5 + |u| + |v| + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right)^{6'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6'}} \|v\|_{L^6(B_R)},$$

um valor finito, visto que $(p-1)6' \leqslant 5 \cdot 6' = 5 \cdot \dfrac{6}{6-1} = 6 = 2^*$ e

$$u, v \in E \hookrightarrow \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)(\mathbb{R}^3) \subseteq L^{2^*}(\mathbb{R}^3) \Rightarrow u|_{B_R}, v|_{B_R} \in L^{2^*}(B_R) \subseteq L^q(B_R),$$

para todo $q \leqslant 2^*$, pois $|B_R| < \infty$. Ou seja, concluímos que existe uma função $w_1 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$|h_\lambda(u+\alpha_t tv)v|\chi_{B_R} \leqslant w_1, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

Agora, considerando $\frac{V_\lambda(x)}{p}|(u+\alpha_t tv)v|\chi_{B_R^c}$, presente na desigualdade (3.21), uma vez que $|\alpha_t t| \leqslant 1$, obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{V_\lambda}{p}|(u+\alpha_t tv)v|\chi_{B_R^c} &\leqslant \frac{1}{p}(|V_\lambda uv| + |\alpha_t t||V_\lambda v^2|)\chi_{B_R^c} \\
&\leqslant \frac{1}{p}(|V_\lambda uv| + |V_\lambda v^2|)\chi_{B_R^c}.
\end{aligned}$$

Para todo $t \in \mathbb{R}^3$. Observe que lado direito da desigualdade é uma função pertencente a $L^1(R^3)$, uma vez que,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |V_\lambda(x)uv|\chi_{B_R^c}\mathrm{d}x &= \left(\int_{[u\leqslant v]\cap B_r^c} |V_\lambda uv|\mathrm{d}x + \int_{[v<u]\cap B_r^c} |V_\lambda(x)uv|\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_{[u\leqslant v]\cap B_r^c} V_\lambda(x)v^2\mathrm{d}x + \int_{[v<u]\cap B_r^c} V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)v^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

e, conforme a definição de E,

$$\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x < \infty, \ \forall u \in E.$$

Ou seja, existe uma função $w_2 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\left|\frac{V_\lambda}{p}(u+\alpha_t tv)v\right|\chi_{B_R^c} \leqslant w_2, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

Portanto, por (3.22) e (3.23), combinados a desigualdade (3.21),

$$\left|\frac{G(x,u+tv)-G(x,u)}{t}\right| = |g(\cdot,u+\alpha_t tv)v| \leqslant w_1 + w_2, \forall t > 0. \tag{3.24}$$

Donde $w_1 + w_2 =: w \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Além disso, para todo $u, v \in E$ fixados,

$$g(x,u(x)+\alpha_t tv(x)) \to g(x,u(x)) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3. \tag{3.25}$$

quando $t \to 0$, pois $\alpha_t \to 0$ se $t \to 0$, que implica em $u(x)+\alpha_t tv(x) \to u(x)$, além de $g(x,\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ser contínua. Consequentemente, por (3.24) e (3.25), através do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4),

$$\begin{aligned} d_G J_3(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{J_3(u+tv)-J_3(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{G(x,u+tv)-G(x,u)}{t}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} g(x,u+\alpha_t tv)v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}\lim_{t\to 0} g(x,u+\alpha_t tv)v\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)v\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Demonstrando que J_3 é diferenciável no sentido de Gateaux. Para utilizarmos o Teorema A.1.1 e obtermos o resultado desejado, resta demonstrarmos a continuidade da função derivada de Gateaux $u \mapsto d_G J_3(u)$. Para tanto, considere $(u_n) \subseteq E$ e $u \in E$ tais que $u_n \to u$ em E. Como $E \hookrightarrow \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$ continuamente, então $u_n \to u$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$. Considere (u_{n_k}) uma subsequência qualquer de (u_n), nela, ainda vale a propriedade $u_{n_k} \to u$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$, assim, pela Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.5), existe $u_{n_{k,1}} \subseteq (u_{n_k})$ subsequência tal que

- $u_{n_{k,1}} \to u$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$;
- $u_{n_{k,1}}(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$;
- Existe $w \in L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$ tal que $|u_{n_k}| \leqslant w$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$, para todo $\forall k \in \mathbb{N}$.

Como

$$\begin{aligned} \|d_G(J_3(u_{n_{k,1}})) - d_G(J_3(u))\|_* &= \sup_{\|v\|=1} |(d_G(J_3(u_{n_{k,1}})) - d_G(J_3(u)))v| \\ &= \sup_{\|v\|=1}\int_{\mathbb{R}^3} |(g(x,u_{n_{k,1}}) - g(x,u))v|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \sup_{\|v\|=1}\int_{\mathbb{R}^3} |(g(x,u_{n_{k,1}}) - g(x,u))v|\chi_{B_R}\mathrm{d}x \\ &\quad + \sup_{\|v\|=1}\int_{\mathbb{R}^3} |(g(x,u_{n_{k,1}}) - g(x,u))v|\chi_{B_R^c}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Demonstraremos a continuidade de d_G pela convergência dos termos

- $\sup_{\|v\|=1}\int_{\mathbb{R}^3}|(g(x,u_{n_{k,1}})-g(x,u))v|\chi_{B_R}\mathrm{d}x$;
- $\sup_{\|v\|=1}\int_{\mathbb{R}^3}|(g(x,u_{n_{k,1}})-g(x,u))v|\chi_{B_R^c}\mathrm{d}x$.

Para o termo $\sup_{\|v\|=1}\int_{\mathbb{R}^3}|(g(x,u_{n_{k,1}})-g(x,u))v|\chi_{B_R}\mathrm{d}x$, considerando $q=p$ e $C=\max\{\varepsilon,C_\varepsilon\}$ no Lema 2.1.2, observe

$$\begin{aligned}|g(\cdot,u_{n_{k,1}})|\chi_{B_R}&=|u_{n_k}^5+\gamma f(u_{n_k})|\chi_{B_R}\\&\leqslant\left[|u_{n_{k,1}}|^5+\gamma C(|u_{n_{k,1}}|+|u_{n_k}|^{p-1})\right]\chi_{B_R}\\&\leqslant\left[|w|^5+\gamma C(|w|+|w|^{p-1})\right]\chi_{B_R}.\end{aligned}$$

As funções do lado direito da desigualdade pertence a $L^{6'}(\mathbb{R}^3)$, uma vez que, pelo Lema A.2.2,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left[|w|^5+\gamma C(|w|+|w|^{p-1})\right]^{6'}\chi_{B_R}\mathrm{d}x\leqslant C^*\int_{B_R}\left[|w|^{5\cdot 6'}+|w|^{6'}+|w|^{(p-1)6'}\right]\mathrm{d}x,$$

para alguma constante $C^*>0$, devido a $(p-1)6'\leqslant 5\cdot 6'=5\cdot\dfrac{6}{6-1}=6=2^*$ e

$$w\in L^{2^*}(\mathbb{R}^3)\Rightarrow w|_{B_R}\in L^{2^*}(B_r)\subseteq L^q(B_r),\quad\forall q\in[1,2^*],$$

pois $|B_R|<\infty$. Ou seja, existe $w^*=(|w|^5+\lambda c(|w|+|w|^{p-1}))\in L^{6'}(B_r)$ tal que

$$|g(\cdot,u_{n_k})|\leqslant w^*\ \text{q.t.p. em }\mathbb{R}^3,\quad\forall k\in\mathbb{N}.\tag{3.27}$$

Além disso, dado que $u_{n_k}(x)\to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$ e $g(x,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função contínua para todo $x\in\mathbb{R}^3$, segue que

$$g(x,u_{n_k})\to g(x,u)\qquad\text{q.t.p. em }\mathbb{R}^3.\tag{3.28}$$

Logo, a partir de (3.27) e (3.28), segue do Teorema da convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4),

$$\|g(x,u_{n_k})-g(x,u)\|_{L^{6'}(B_R)}\to 0.$$

Ainda, note que pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.1)

$$\begin{aligned}\sup_{\|v\|=1}\int_{\mathbb{R}^3}|(g(x,u_{n_k})-g(x,u))v|\chi_{B_R}\mathrm{d}x&=\sup_{\|v\|=1}\int_{B_R}|(g(x,u_{n_k})-g(x,u))v|\mathrm{d}x\\&\leqslant\sup_{\|v\|=1}\|g(x,u_{n_k})-g(x,u)\|_{L^{6'}(B_R)}\|v\|_{L^{2^*}(B_R)}.\end{aligned}$$

Assim, como $E\hookrightarrow L^{2^*}$, existe $C>0$, que não depende de n_k e R, tal que

$$\begin{aligned}\sup_{\|v\|=1}\int_{\mathbb{R}^3}|(g(x,u_{n_k})-g(x,u))v|\chi_{B_R}\mathrm{d}x&\leqslant\sup_{\|v\|=1}\|g(x,u_{n_k})-g(x,u)\|_{L^6(B_r)}C\|v\|\\&=C\|g(x,u_{n_k})-g(x,u)\|_{L^{6'}(B_R)}.\end{aligned}$$

Consequentemente, do exposto acima,

$$\sup_{\|v\|=1} \int_{\mathbb{R}^3} |(g(x,u_{n_k}) - g(x,u))v|\chi_{B_R} \mathrm{d}x \to 0. \tag{3.29}$$

Agora, vamos analisar o termo $\sup_{\|v\|=1} \int_{\mathbb{R}^3} |(g(x,u_{n_k}) - g(x,u))v|\chi_{B_R^c} \mathrm{d}x$, como $u_{n_k} \to u$ em E, segue

$$\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)(u_{n_k} - u)^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \left(V_\lambda^{1/2}(x)u_{n_k} - V_\lambda^{1/2}(x)u\right)^2 \mathrm{d}x \to 0,$$

ou seja,

$$V_\lambda^{1/2}(x)u_{n_k} \to V_\lambda^{1/2}(x)u \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^3).$$

Logo, pela Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada (Teorema A.2.5), existe $(V_\lambda u_{n'_k}) \subseteq (V_\lambda u_{n_k})$ subsequência com a seguinte propriedade,

- $V_\lambda u_{n'_k}(x) \to V_\lambda^{1/2} u$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^3$,
- Existe $w \in L^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $|u_{n'_k}| \leqslant w$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $u_{n_k}(x) \to u(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^3$ então $u_{n'_k}(x) \to u(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^3$. Assim, já que $g(x,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua para todo $x \in \mathbb{R}^3$, podemos inferir

$$g(x,u_{n_k}) \to g(x,u) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^3. \tag{3.30}$$

Ainda, considerando

$$\Omega_\lambda = \left\{x \in \mathbb{R}^3; V_\lambda(x) \neq 0\right\}, \tag{3.31}$$

um conjunto mensurável, pois $V_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável. Note que, devido a hipótese (V_3), temos $\Omega_\lambda \neq \emptyset$. Segue por ($g_2$), para $x \in \Omega_\lambda$,

$$\begin{aligned}
\frac{|g(x,u_{n'_k}) - g(x,u)|^2}{V_\lambda(x)}\chi_{B_R^c} &\leqslant \left[\frac{|g(x,u_{n'_k})|^2}{V_\lambda(x)} + \frac{|g(x,u)|^2}{V_\lambda(x)}\right]\chi_{B_R^c} \\
&\leqslant \frac{|V_\lambda(x)u_{n'_k}|^2}{V_\lambda(x)} + \frac{|V_\lambda(x)u|^2}{V_\lambda} \\
&= (V_\lambda^{1/2}(x)u_{n'_k})^2 + (V_\lambda(x)u^2) \\
&\leqslant w^2 + V_\lambda(x)u^2.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Como $w \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $u \in E$,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\lambda} w^2 + V_\lambda(x)u^2 \mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathbb{R}^3} w^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u^2 \mathrm{d}x < \infty \\
&\Rightarrow \left(w^2 + V_\lambda(x)u^2\right) \in L^1(\Omega_\lambda).
\end{aligned}$$

Daí, por (3.30) e (3.32), pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4),

$$\int_{\Omega_\lambda} \frac{|g(x,u_{n'_k}) - g(x,u)|^2}{V_\lambda(x)} \chi_{B_R^c} \mathrm{d}x \to 0. \tag{3.33}$$

Ou seja,

$$\left\| \frac{|g(x,u_{n'_k}) - g(x,u)|}{V_\lambda^{1/2}(x)} \chi_{B_R^c} \right\|_{L^2(\Omega_\lambda)} \to 0. \tag{3.34}$$

Assim, pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.1),

$$\begin{aligned}
\sup_{\|v\|=1} \int_{\mathbb{R}^3} |(g(x,u_{n'_k}) - g(x,u))v| \chi_{B_R^c} \mathrm{d}x &= \sup_{\|v\|=1} \int_{\Omega_\lambda} |(g(x,u_{n'_k}) - g(x,u))v| \chi_{B_R^c} \mathrm{d}x \\
&= \sup_{\|v\|=1} \int_{\Omega_\lambda} \frac{|(g(x,u_{n'_k}) - g(x,u))|}{V_\lambda^{1/2}} \chi_{B_R^c} V_\lambda^{1/2} |v| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \left\| \frac{|g(x,u_{n'_k}) - g(x,u)|^2}{V_\lambda^1/2(x)} \chi_{B_R^c} \right\|_{L^2(\Omega_\lambda)} \|V_\lambda^{1/2} v\|_{L^2(\Omega_\lambda)}.
\end{aligned}$$

Como

$$\|V_\lambda^{1/2}(x)v\|_{L^2(\Omega_\lambda)}^2 = \int_{\Omega_\lambda} (V_\lambda^{1/2}(x)v)^2 \mathrm{d}x = \int_{\Omega_\lambda} V_\lambda(x) v^2 \mathrm{d}x \leqslant \|v\|,$$

então,

$$\begin{aligned}
\sup_{\|v\|=1} \int_{\mathbb{R}^3} |(g(x,u_{n'_k}) - g(x,u))v| \chi_{B_R^c} \mathrm{d}x &\leqslant \sup_{\|v\|=1} \left\| \frac{|g(x,u_{n'_k}) - g(x,u)|}{V_\lambda^{1/2}(x)} \chi_{B_R^c} \right\|_{L^2(\Omega_\lambda)} \|v\| \\
&\leqslant \left\| \frac{|g(x,u_{n'_k}) - g(x,u)|}{V_\lambda^{1/2}(x)} \chi_{B_R^c} \right\|_{L^2(\Omega_\lambda)},
\end{aligned}$$

disso, por (3.34), segue que

$$\sup_{\|v\|=1} \int_{\mathbb{R}^3} |(g(x,u_{n'_k}) - g(x,u))v| \chi_{B_R^c} \mathrm{d}x \to 0. \tag{3.35}$$

Portanto, combinando (3.29) e (3.35) com a desigualdade (3.26), concluísse que existe $(u_{n'_k})$ subsequência da subsequência $(u_{m_k}) \subseteq (u_n)$ tal que

$$\|d_G J_3(u_{n'_k}) - d_G J_3(u)\|_* \to 0.$$

Consequentemente, pelo Princípio da Subsequência (Lema A.1.1),

$$\|d_G J_3(u_n) - d_G J_3(u)\|_* \to 0.$$

Portanto, como E é um Espaço de Banach, a função derivada de Gateuax $d_G J_3 : E \to E^*$ é contínua. A luz do Teorema A.1.1, concluímos que J_3 é diferenciável de derivada dada por $J_3'(u)v = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)v \mathrm{d}x$. □

Pelo Lema 3.2.1, juntamente com a Regra da Cadeia (Teorema A.1.3), o funcional $(\hat{M} \circ J_1)(u) = \hat{M}(\|\nabla u\|_2^2)$ é diferenciável em E com derivada dada por

$$(\hat{M} \circ J_1)(u)'v = 2M(\|\nabla u\|_2^2) \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x$$

Portanto, do que vimos acima, dos Lema 3.2.2 e Lema 3.2.3, segue que o funcional energia associado ao problema auxiliar ($\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma}$),

$$J(u) = \frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2) + \frac{1}{2}\int_{R^3} V_\lambda(x) u^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)\mathrm{d}x, \forall u \in E,$$

está bem definido e de classe $C^1(E)$ com derivada

$$J'(u)v = M(\|\nabla u\|_2^2) \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) u^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u) v \mathrm{d}x, \forall u, v \in E.$$

3.3 Geometria do Passo da Montanha

No intuito de obtermos um ponto crítico do funcional energia associado ao problema auxiliar ($\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma}$), o qual pode fornecer soluções fracas do problema inicial ($\mathcal{P}_{\lambda,\gamma}$), nesta seção, demonstraremos que o funcional energia cumpre a geometria do passo da montanha.

Lema 3.3.1. *O funcional $J : E \to \mathbb{R}$ satisfaz*

a) Existem $r, \beta > 0 = J(0)$ tais que para todo $u \in E$ com $\|u\| = r$ vale

$$J(u) \geqslant \beta > 0 = J(0),$$

b) Existe $u_0 \in E$ com $\|u_0\| > r$ tal que $J(u_0) \leqslant 0$.

Demonstração. De fato, pelo item a) do Lema 2.1.1,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) u^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{1}{2} M_0 \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) u^2 \mathrm{d}x - \int_{B_R} G(x,u)\mathrm{d}x - \int_{B_R^c} G(x,u)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Observe, que pela propriedade (g_5),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) u^2 \mathrm{d}x - \int_{B_R^c} G(x,u)\mathrm{d}x &\geqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) u^2 \mathrm{d}x - \int_{B_R^c} \frac{V_\lambda(x)|u|^2}{2p}\mathrm{d}x \\ &\geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right)\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) u^2 \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

daí, ao considerar $k_1 = \min\left\{\frac{M_0}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right\} > 0$, de (3.36) juntamente com a definição da função g, obtemos

$$J(u) \geqslant k_1 \|u\|^2 - \int_{B_R} G(x,u)\mathrm{d}x = k_1\|u\| - \int_{B_R} \frac{1}{6}|u|^6 + \gamma F(u)\mathrm{d}x.$$

Desse modo, pela Lema 2.1.2,

$$J(u) \geqslant k_1\|u\|^2 - \int_{B_R} \frac{1}{6}|u|^6 + C\gamma(\varepsilon|u|^2 + C_\varepsilon|u|^p)\mathrm{d}x,$$

Como $u \in E \hookrightarrow \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$, da imersão $L^{2^*}(B_R) \hookrightarrow L^q(B_R)$, para todo $1 \leqslant q \leqslant 2^*$, pois $|B_R| < +\infty$ (ver Corolário A.2.1), segue que para algum $k_2 > 0$ e $\gamma > 1$,

$$J(u) \geqslant k_1\|u\|^2 - k_2\gamma\left[\|u\|^6 + \varepsilon\|u\|^2 + C_\varepsilon\|u\|^p\right]$$

Daí, supondo $\|u\| < 1$, obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &\geqslant k_1\|u\|^2 - k_2\gamma\left[\|u\|^4 + \varepsilon\|u\|^2 + C_\varepsilon\|u\|^4\right] \\ &\geqslant \left[(k_1 - k_2\gamma\varepsilon) - k_2\gamma(1 + C_\varepsilon)\|u\|^2\right]\|u\|^2. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Logo, considerando $\varepsilon > 0$ tal que $(k_1 - k_2\gamma\varepsilon) > 0$ e considerando $r > 0$ tal que

$$r < \min\left\{1, \left(\frac{k_1 - k_2\gamma\varepsilon}{k_2\gamma(1 + C_\varepsilon)}\right)^{1/2}\right\}, \tag{3.38}$$

segue que se $\|u\| = r$, então

$$J(u) \geqslant \left[(k_1 - k_2\gamma\varepsilon) - k_2\gamma(1 + C_\varepsilon)r^2\right]r^2 > 0.$$

Portanto, a primeira afirmação fica estabelecida ao definirmos

$$\beta = \left[(k_1 - k_2\gamma\varepsilon) - k_2\gamma(1 + C_\varepsilon)r^2\right]r^2.$$

Ainda, seja $v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ com $0 < v_0 \leqslant 1$, defina

$$\begin{aligned} a_0 &:= \|\nabla v_0\|_2^2; & c_0 &:= \int_{B_R} v_0^6\mathrm{d}x; \\ b_0 &:= \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)v_0^2\mathrm{d}x; & d_0 &:= \int_{B_R} v_0^p\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Considere $h_0(t) = J(tv_0)$, desse modo, como $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente,

$$\hat{M}(s) = \int_0^s M(\tau)d\tau \leqslant \int_0^s M(s)\mathrm{d}x = M(s)s. \tag{3.39}$$

Ainda, pela definição da função $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$G(x, s) = \int_0^s g(x, \tau)d\tau = \int_0^s h_\gamma(\tau)d\tau = \frac{1}{6}s^6 + \gamma F(s),\ \forall (x, s) \in B_R \times \mathbb{R} \tag{3.40}$$

Assim, devido (f_5), $G(x, s) \geqslant 0$ para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, e pelo o que foi visto acima, obtemos

$$\begin{aligned} h(t) = J(tv_0) &= \frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla(tv_0)\|_2^2) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)(tv_0)^2\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} G(x, tv_0)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{2}M(a_0t^2)a_0t^2 + \frac{b_0t^2}{2} - \int_{B_R} G(x, tv_0)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}M(a_0t^2)a_0t^2 + \frac{b_0t^2}{2} - \int_{B_R} \frac{1}{6}(tv_0)^6 + \gamma F(tv_0)\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.41}$$

daí, pela propriedade (f_5),

$$\begin{aligned} h(t) &\leqslant \frac{1}{2}M(a_0t^2)a_0t^2 + \frac{b_0t^2}{2} - \frac{1}{6}t^6c_0 - \gamma Ct^pd_0 \\ &= \frac{1}{2}\frac{M(a_0t^2)}{at^2}a_0^2t^4 + \frac{b_0t^2}{2} - \frac{1}{6}t^6c_0 - \gamma Ct^pd_0 \\ &= a_0^2t^4\left[\frac{1}{2}\frac{M(a_0t^2)}{a_0t^2} + \frac{b_0}{2a_0^2}t^{-2} - \frac{1}{6a_0^2}t^2 - \frac{\gamma C}{a_0^2}t^{p-4}\right]. \end{aligned}$$

Portanto, como por (M_3), temos que $\dfrac{M(at^2)}{at^2}$ é não crescente, segue que $h(t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Consequentemente, obtemos o descrito em b) ao considerar $u_0 = tv_0$ para t suficientemente grande. □

Munidos do Lema 3.3.1, concluímos que o funcional $J : E \to \mathbb{R}$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.3.13). Portanto, fica bem definido o nível do passo da montanha

$$c_{\lambda,\gamma} = \inf_{\varphi\in\Gamma_J}\max_{0\leqslant t\leqslant 1} J(\varphi(t)).$$

Em que

$$\Gamma_J = \{\varphi \in C([0,1], E); \quad \varphi(0) = 0, \quad \|\varphi(1)\| > r \text{ e } J(\varphi(1)) < 0\},$$

sendo $r > 0$ dado pela Geometria do Passo da Montanha. O teorema nos garante a existência de uma sequência, dita *Sequência de Cerami*, $(u_n) \subseteq E$ caracterizada por

$$J(u_n) \to c_{\lambda,\gamma} \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|)J'(u_n) \to 0.$$

Ainda, uma vez que, dado $v \neq 0$ em E, ao considerar $\varphi(t) = tv$, segue que $\lim_{t\to\infty} J(\varphi(t)) = -\infty$. Logo, existe $t_v > 0$ tal que $h(t) = J(\varphi(t)) < 0$ para todo $t \geqslant t_v$ e $\|\varphi(t_v)\| > r$. Além disso, $\|t_\rho v\| = \rho > 0$ para $t_\rho = \frac{\rho}{\|v\|}$, logo, pelo item a), segue que $J(\varphi(t_\rho)) > 0$ e, portanto,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_v} J(\varphi(t)) = \max_{t\geqslant 0} J(tv) > 0.$$

Então, definindo $\hat{\varphi}$ em $t \in [0,1]$ por $\hat{\varphi}(t) = \varphi(tt_v)$, segue que $\hat{\varphi} \in \Gamma_J$. Daí,

$$c_{\lambda,\gamma} \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} J(\hat{\varphi}(t)) = \max_{0\leqslant t\leqslant t_v} J(\varphi(t)) = \max_{t\geqslant 0} J(tv), \quad \forall v \in E\backslash\{0\}.$$

Consequentemente,

$$c_{\lambda,\gamma} \leqslant \inf_{v\in E\backslash\{0\}}\max_{t\geqslant 0} J(tv). \tag{3.42}$$

3.4 Estimativa nível minimax

O objetivo desta seção é obter uma estimativa adequado de nível minimax $c_{\lambda,\gamma}$, o qual é crucial na prova do resultado principal desta dissertação. A estimativa é feita por meio do estudo do seguinte problema,

$$-M\left(||\nabla u||_2^2\right)\Delta u + Z(x)u = \gamma f(u), \quad u \in H_0^1(B_{R_1}), \qquad (\mathcal{Q}_{\lambda,\gamma})$$

Observando que $V_\lambda(x) = Z(x)$ para $x \in B_{R_1}$ (ver (V_2)). O funcional energia associado, $I_0 : H_0^1(B_{R_1}) \to \mathbb{R}$, é dado por

$$I_0(u) = \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|\nabla u\|^2_{L^2(B_{R_1})}\right) + \frac{1}{2}\int_{B_{R_1}} Z(x)u^2 \mathrm{d}x - \gamma\int_{B_1} F(u)\mathrm{d}x,$$

o qual está bem definido, pois, sendo Z contínua em todo $\mathbb{R}^3$,

$$\int_{B_{R_1}} Z(x)u^2\mathrm{d}x \leqslant \left(\max_{x\in\overline{B}_{R_1}} Z(x)\right)\int_{B_{R_1}} u^2\mathrm{d}x < \infty, \quad \forall u \in H_0^1(B_{R_1}),$$

além de que, pelo Lema 2.1.2,

$$\int_{B_{R_1}} F(u)\mathrm{d}x \leqslant \int_{B_1} \varepsilon|u|^2 + C_\varepsilon|u|^p\mathrm{d}x,$$

e, pela imersão $H_0^1(B_{R_1}) \hookrightarrow L^p(B_{R_1})$,

$$\int_{B_{R_1}} |u|^p\mathrm{d}x \leqslant C\left(\int_{B_{R_1}} |\nabla u|^2 dx\right)^{p/2} < +\infty,$$

assim, concluímos a boa definição do funcional $I_0 : H_0^1(B_{R_1}) \to \mathbb{R}$. Além disso, consideremos $H_0^1(B_{R_1})$ espaço de Hilbert munido do produto interno $\langle u, v\rangle_{H_0^1(B_{R_1})} = \int_{B_{R_1}} \nabla u\nabla v\mathrm{d}x$ de norma $\|u\|_{H_0^1(B_{R_1})} = \|\nabla u\|_{L^2(B_{R_1})}$ equivalente a norma usual $u \mapsto \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$ de $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$, em vista da Desigualdade de Poincaré (Teorema A.3.14). Em diante, demonstramos que I_0 é de classe $C^1(H_0^1(B_{R_1}), \mathbb{R})$ com derivada dada por

$$I_0'(u)v = M\left(\|\nabla u\|^2_{L^2(B_{R_1})}\right)\int_{B_{R_1}} \nabla u\nabla v\mathrm{d}x + \int_{B_{R_1}} Z(x)uv\mathrm{d}x - \gamma\int_{B_{R_1}} f(u)v\mathrm{d}x.$$

Para tanto, definimos os operadores auxiliares, $I_1 : H_0^1(B_{R_1}) \to \mathbb{R}$, $I_2 : H_0^1(B_{R_1}) \to \mathbb{R}$ e $I_3 : H_0^1(B_{R_1}) \to \mathbb{R}$, de regras $I_1(u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(B_{R_1})}$, $I_2(u) = \int_{B_{R_1}} Z(x)u^2\mathrm{d}x$ e $I_3(u) = \int_{B_{R_1}} F(u)\mathrm{d}x$. A seguir, demonstraremos que estes são de classe $C^1(H_0^1(B_{R_1}))$ e apresentaremos suas respectivas derivadas.

Lema 3.4.1. *O funcional $I_1 : H_0^1(B_{R_1}) \to \mathbb{R}$, de regra $I_1(u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(B_{R_1})}$, é de classe $C^1(H_0^1(B_{R_1}))$ com derivada $I_1'(u)v = 2\langle u, v\rangle_{H_0^1(B_{R_1})} = 2\int_{B_{R_1}} \nabla u\nabla v\mathrm{d}x$.*

Demonstração. De fato, conforme destacado na demonstração do Lema 3.2.2, ao definir o funcional $f(x) = \|x\|_H^2$, no espaço de Hilbert $(H; \langle\ ,\ \rangle_H)$, este é de classe $C^1(H)$ com derivada $f'(u)v = 2\langle u, v\rangle_H$. □

Lema 3.4.2. *O funcional $I_2 : H_0^1(B_{R_1}) \to \mathbb{R}$, de regra $I_2(u) = \int_{B_{R_1}} Z(x)u^2 \mathrm{d}x$, é de classe $C^1(H_0^1(B_{R_1}))$ com derivada $I_2'(u)v = 2\int_{B_{R_1}} Z(x)uv\mathrm{d}x$.*

Demonstração. De fato, sejam $u, v \in H_0^1(B_{R_1})$, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{I_2(u+tv) - I_2(u)}{t} &= \frac{1}{t}\int_{B_{R_1}} Z(x)\left[(u+tv)^2 - u^2\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{t}\int_{B_{R_1}} Z(x)\left[2tuv + (tv)^2\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_{B_{R_1}} Z(x)\left[2uv + tv^2\right]\mathrm{d}x \to 2\int_{B_{R_1}} Z(x)uv\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Desse modo, I_2 é derivável no sentido de Gâteaux, com derivada dada por

$$d_G I_2(u)v = 2\int_{B_{R_1}} Z(x)uv\mathrm{d}x.$$

Para concluir que esta função também representa a derivada de Fréchet, conforme o Teorema A.1.1, resta demonstrarmos a continuidade da função derivada de Gâteaux $d_G I_2 : \ H_0^1(B_{R_1}) \to (H_0^1(B_{R_1}))^*$. Para tanto, considere $(u_n) \subseteq H_0^1(B_{R_1})$ e $u \in H_0^1(B_{R_1})$ tais que $u_n \to u$ em $H_0^1(B_{R_1})$, ou seja, $\|\nabla(u_n - u)\|_{L^2(B_{R_1})} \to 0$. Como $(H_0^1(B_{R_1}), \|\cdot\|_{H_0^1(B_{R_1})})$ é um Espaço de Banach, para garantirmos a continuidade da função derivada de Gâteaux, é suficiente demonstrarmos $d_G I_1(u_n) \to d_G I_1(u)$ em $(H_0^1(B_{R_1}))^*$. Para tanto, considerando $M = 2\max_{x\in \overline{B}_{R_1}} Z(x)$, observe,

$$\begin{aligned}
\|d_G I_2(u_n) - d_G I_2(u)\|_* &= \sup_{\|\nabla v\|_{L^2(B_{R_1})}=1} |d_G I_2(u_n)v - d_G I_2(u)v| \\
&= \sup_{\|\nabla v\|_{L^2(B_{R_1})}=1} \left|2\int_{B_{R_1}} Z(x)(u_n - u)v\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sup_{\|\nabla v\|_{L^2(B_{R_1})}=1} M\int_{B_{R_1}} |(u_n - u)v|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.1) e Desigualdade de Poincaré (Teorema A.3.14), respectivamente,

$$\begin{aligned}
\|d_G I_2(u_n) - d_G I_2(u)\|_* &\leqslant \sup_{\|\nabla v\|_{L^2(B_{R_1})}=1} M\|u_n - u\|_{L^2(B_{R_1})}\|v\|_{L^2(B_{R_1})} \\
&\leqslant \sup_{\|\nabla v\|_{L^2(B_{R_1})}=1} M\|\nabla(u_n - u)\|_{L^2(B_{R_1})}\|\nabla v\|_{L^2(B_{R_1})} \\
&\leqslant M\|\nabla(u_n - u)\|_{L^2(B_{R_1})} \to 0.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema A.1.1, I_2 é Fréchet diferenciável, sendo sua derivada dada por $I_2'(u)v = 2\int_{B_{R_1}} Z(x)uv\mathrm{d}x$. □

Lema 3.4.3. *O funcional $I_3 : H_0^1(B_{R_1}) \to \mathbb{R}$, de regra $I_3(u) = \int_{B_{R_1}} F(u)\mathrm{d}x$, é de classe $C^1(H_0^1(B_{R_1}))$ com derivada $I_3'(u)v = \int_{B_{R_1}} f(u)v\mathrm{d}x$.*

Demonstração. De fato, sejam $u, v \in H_0^1(B_{R_1})$, Desse modo, sejam $u, v \in E$,

$$\frac{I_3(u+tv) - I_3(u)}{t} = \int_{B_{R_1}} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t}\mathrm{d}x,$$

fixado $x \in \mathbb{R}^3$, defina $\xi_x : [-1,1] \to \mathbb{R}$ por $\xi_x(t) = \xi_x(t) = F(u(x) + tv(x))$. Dado que $F(\cdot)$ é diferenciável, pois f é contínua em $\mathbb{R}$, ainda, que $\xi_x^* : [-1,1] \to \mathbb{R}$, definida por $\xi_x^*(t) = u(x) + tv(x)$, é diferenciável, segue que ξ_x também o é. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio (Teorema A.1.7), para todo $t \in [0,1]$ existe $t_0 \in (-t,t)$ tal que

$$\xi_x'(t_0) = \frac{\xi_x(t) - \xi_x(0)}{t - 0} = \frac{F(u+tv) - F(u)}{t},$$

dessa forma, pela Regra da Cadeia (Teorema A.1.3),

$$f(u + t_0 v)v = \frac{F(u+tv) - F(u)}{t}.$$

Assim, para cada $t \in [0,1]$, considere α_t tal que $\alpha_t t = t_0$ dado pelo Teorema do Valor Médio (Teorema A.1.7), com isso,

$$\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = f(u + \alpha_t tv)v,$$

note que $t \to 0 \Rightarrow \alpha_t \to 0$, em certo sentido, pois $t_0 \in (-t,t)$. Com essas colocações, observe que

$$\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = f(u + \alpha_t tv)v,$$

é mensurável, pois f é contínua enquanto que u e v são mensuráveis. Ainda, pelo Lema 2.1.2 e Lema A.2.2, obtemos,

$$\begin{aligned}|f(u+\alpha_t tv)v| &\leqslant C\left(|u+\alpha_t tv| + |u+\alpha_t tv|^{p-1}\right)|v| \\ &\leqslant C_1\left(|u| + |\alpha_t tv| + 2^{p-1}\left(|u|^{p-1} + |\alpha_t t|^{p-1}|v|^{p-1}\right)\right)|v|\end{aligned}$$

Como $|\alpha_t t| = |t_0| \leqslant 1$, segue

$$|f(u+\alpha_t tv)v| \leqslant C_2\left(|u| + |v| + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right)|v|, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

com $C_2 = \max\{C_1, 2^{p-1}\}$. Observe que, na desigualdade acima, o lado direito é uma função que pertence a $L^1(\mathbb{R}^3)$, uma vez que, a integral

$$\int_{B_{R_1}} \left[|u| + |v| + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right]|v|\mathrm{d}x,$$

pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.1), denotando $6' = \frac{6}{6-1}$, é menor ou igual à

$$\left(\int_{B_r}\left(|u|+|v|+|u|^{p-1}+|v|^{p-1}\right)^{6'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6'}}\|v\|_{L^6(B_R)},$$

um valor finito, visto que $(p-1)6' \leqslant 5\cdot 6' = 5\cdot\dfrac{6}{6-1} = 6 = 2^*$ e, pelo Teorema A.3.5 e Corolário A.2.1,

$$u, v \in H_0^1(B_{R_1}) \hookrightarrow L^{2^*}(B_R) \subseteq L^q(B_R), \tag{3.43}$$

para todo $q \in [1, 2^*]$, pois $|B_R| < \infty$. Ou seja, concluímos que existe uma função $w_1 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$|f(u(x)+\alpha_t tv(x))| \leqslant w_1, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.44}$$

Além disso, para todo $u, v \in H_0^1(B_{R_1})$ fixados,

$$f(u(x)+\alpha_t tv(x)) \to f(u(x)) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^3. \tag{3.45}$$

quando $t \to 0$, pois $\alpha_t \to 0$ se $t \to 0$, que implica em $u(x)+\alpha_t tv(x) \to u(x)$, além de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ser contínua. Consequentemente, através do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4),

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{I_3(u+tv)-I_3(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\int_{B_{R_1}}\frac{F(u+tv)-F(u)}{t}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{t\to 0}\int_{B_{R_1}} f(u+\alpha_t tv)v\mathrm{d}x = \int_{B_{R_1}}\lim_{t\to 0} f(u+\alpha_t tv)v\mathrm{d}x\\ &= \int_{B_{R_1}} f(u)v\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Demonstrando que I_3 é diferenciável no sentido de Gateaux. Para utilizarmos o Teorema A.1.1 e obtermos o resultado desejado, resta demonstrarmos a continuidade da função derivada de Gateaux $u \mapsto d_G I_3(u)$. Para tanto, considere $(u_n) \subseteq H_0^1(B_{R_1})$ e $u \in H_0^1(B_{R_1})$ tais que $u_n \to u$ em $H_0^1(B_{R_1})$. Como $H_0^1(B_{R_1}) \hookrightarrow L^{2^*}(B_{R_1})$ continuamente, então $u_n \to u$ em $L^{2^*}(B_{R_1})$. Considere (u_{n_k}) uma subsequência qualquer de (u_n), nela, ainda vale a propriedade $u_{n_k} \to u$ em $L^{2^*}(B_{R_1})$, assim, pela Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.5), existe $u_{n_{k,1}} \subseteq (u_{n_k})$ subsequência tal que

- $u_{n_{k,1}} \to u$ em $L^{2^*}(B_{R_1})$;
- $u_{n_{k,1}}(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$;
- $\exists w_2 \in L^{2^*}(B_{R_1})$ tal que $|u_{n_{k,1}}| \leqslant w$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$, $\quad \forall k \in \mathbb{N}$.

considerando $q = p$ no Lema 2.1.2, observe

$$
\begin{aligned}
|f(u_{n_{k,1}})| &\leqslant \varepsilon|u_{n_{k,1}}| + C_\varepsilon|u_{n_{k,1}}|^{p-1} \\
&\leqslant \varepsilon|w_2| + C_\varepsilon|w_2|^{p-1}.
\end{aligned}
$$

O lado direito da desigualdade pertence a $L^{6'}(B_{R_1})$, já que, pelo Lema A.2.2

$$
\int_{B_{R_1}} \left[\varepsilon|w_2| + C_\varepsilon|w_2|^{p-1}\right]^{6'} \mathrm{d}x \leqslant C_3 \int_{B_{R_1}} |w_2|^{6'} + |w_2|^{(p-1)6'} \mathrm{d}x,
$$

para $C_3 = \max\{\varepsilon, C_\varepsilon, 2^{6'}\}$. Integral finita, pois vale 3.43. Ou seja, existe

$$
w^* = \left(\varepsilon|w_2| + C_\varepsilon|w_2|^{p-1}\right) \in L^{6'}(B_{R_1})
$$

tal que

$$
|f(u_{n_{k,1}})| \leqslant w^*, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^3.
$$

Além disso, dado que $u_{n_{k,1}}(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, segue que

$$
f(u_{n_{k,1}}) \to f(u) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^3.
$$

Logo, segue do Teorema da convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4),

$$
\|f(u_{n_{k,1}}) - f(u)\|_{L^{6'}(B_{R_1})} \to 0.
$$

Ainda, note que pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.1)

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{R_1}} |(f(u_{n_{k,1}}) - f(u))v|\mathrm{d}x &= \int_{B_r} |(f(u_{n_{k,1}}) - f(u))v|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \|f(u_{n_{k,1}}) - f(u)\|_{L^{6'}(B_{R_1})}\|v\|_{L^{2^*}(B_{R_1})}.
\end{aligned}
$$

Assim, como $H_0^1(B_{R_1}) \hookrightarrow L^{2^*}(B_{(R_1)})$ continuamente (Teorema A.3.5), existe $C > 0$ tal que

$$
\int_{B_{R_1}} |(f(u_{n_{k,1}}) - f(u))v|\mathrm{d}x \leqslant C\|f(u_{n_{k,1}}) - f(u)\|_{L^{6'}(B_{R_1})}\|\nabla v\|_{L^2(B_{R_1})}.
$$

Consequentemente, do exposto acima,

$$
\sup_{\|\nabla v\|_{L^2(B_{R_1})}=1} \int_{\mathbb{R}^3} |(f(u_{n_k}) - f(u))v|\mathrm{d}x \leqslant C\|f(u_{n_{k,1}}) - f(u)\|_{L^{6'}(B_{R_1})} \to 0.
$$

Portanto, a função derivada de Gateaux $d_G I_3 : H_0^1(B_{R_1}) \to (H_0^1(B_{R_1}))^*$ é contínua. A luz do Teorema A.1.1, concluímos que I_3 é diferenciável de derivada dada por $I_3'(u)v = \int_{B_{R_1}} f(u)v\mathrm{d}x$. □

Pelo Lema 3.4.1, fundamentado na Regra da Cadeia (Teorema A.1.3), o funcional $(\hat{M} \circ I_1)(u) = \hat{M}(\|\nabla u\|_2^2)$ é diferenciável em $H_0^1(B_{R_1})$ com derivada dada por

$$(\hat{M} \circ I_1)(u)'v = 2M(\|\nabla u\|_2^2) \int_{B_{R_1}} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x$$

Portanto, do que foi visto, dos Lema 3.4.2 e Lema 3.4.3, segue que o funcional energia associado ao problema ($\mathcal{Q}_{\lambda,\gamma}$),

$$I_0(u) = \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|\nabla u\|_{L^2(B_{R_1})}^2\right) + \frac{1}{2}\int_{B_{R_1}} Z(x)u^2 \mathrm{d}x - \gamma \int_{B_{R_1}} F(u)\mathrm{d}x,$$

está bem definido e de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ com derivada

$$I_0'(u)v = M\left(\|\nabla u\|_{L^2(B_{R_1})}^2\right)\int_{B_{R_1}} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \int_{B_{R_1}} Z(x)uv\mathrm{d}x - \gamma \int_{B_{R_1}} f(u)v\mathrm{d}x.$$

O lema a seguir nos fornece as hipóteses para o uso do Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.3.13) para o funcional I_0. Disso, iremos relacionar os níveis da montanha referentes aos funcionais I_0 e J, donde estabeleceremos importantes estimativas para o nosso objetivo.

Lema 3.4.4. *O funcional I_0 satisfaz*

a) Existem $r, \beta > 0 = I_0(0)$ tais que para todo $u \in H_0^1(B_{R_1})$ com $\|u\| = r$ vale

$$I_0(u) \geqslant \beta > 0 = I_0(0),$$

b) Existe $u_0 \in H_0^1(B_{R_1})$ com $\|u_0\|_{H_0^1(B_{R_1})} > r$ tal que $I(u_0) \leqslant 0$.

Demonstração. De fato, pelo Lema 2.1.1 e Lema 2.1.2,

$$\begin{aligned} I_0(u) &= \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|\nabla u\|_{L^2(B_{R_1})}^2\right) + \frac{1}{2}\int_{B_{R_1}} Z(x)u^2\mathrm{d}x - \gamma\int_{B_{R_1}} F(x)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{1}{2}M_0\|\nabla u\|_{L^2(B_{R_1})}^2 - \gamma\int_{B_{R_1}} \varepsilon|u|^2 + C_\varepsilon|u|^p \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Como, pelo Teorema A.3.5, $H_0^1(B_{R_1}) \hookrightarrow L^{2^*}(B_{R_1})$ continuamente e $|B_{R_1}| < \infty$, então $H_0^1(B_{R_1}) \hookrightarrow L^q(B_{R_1})$ continuamente para $q \in [1, 2^*]$, segue

$$\begin{aligned} I_0(u) &\geqslant \frac{1}{2}M_0\|\nabla u\|_{L^2(B_{R_1})}^2 - \gamma\int_{B_{R_1}} \varepsilon k_1\|\nabla u\|_{L^2(B_{R_1})}^2 + C_\varepsilon k_2\|\nabla u\|_{L^2(B_{R_1})}^p \\ &\geqslant \left(\left(\frac{M_0}{2} - \varepsilon k_1\right) - C_\varepsilon k_2\|\nabla u\|_{L^2(B_{R_1})}^{p-2}\right)\|\nabla u\|_{L^2(B_{R_1})}^2. \end{aligned}$$

Logo, considerando $\varepsilon > 0$ de modo que $\left(\frac{M_0}{2} - \varepsilon k_1\right) > 0$, para

$$0 < r < \left(\frac{\frac{M_0}{2}}{ck_2}\right)^{\frac{1}{p-2}}$$

segue que se $\|\nabla u\|_{L^2(B_{R_1})} = r$, então,

$$I_0(u) \geqslant \left(\left(\frac{M_0}{2} - \varepsilon k_1 \right) - C_\varepsilon k_2 r^{p-2} \right) r^2 > 0.$$

Fazendo valer o item $a)$ ao considerar

$$\beta = \left(\left(\frac{M_0}{2} - \varepsilon k_1 \right) - C_\varepsilon k_2 r^{p-2} \right) r^2 > 0.$$

Agora considere $v \in H_0^1(B_{R_1})$, defina $a_0 := \|\nabla v\|_{L^2(B_{R_1})}$, $b_0 := \int_{B_{R_1}} Z(x) v^2 \mathrm{d}x$ e $c_0 := C\|v\|^p_{L^p(B_{R_1})}$, em que C é dado pela propriedade (f_5). Observe que, como $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é não decrescente,

$$\hat{M}(at^2) = \int_0^{at^2} M(\tau) d\tau \leqslant \int_0^{at^2} M(at^2) d\tau = M(at^2) at^2.$$

Então, por (f_5), para $t > 0$,

$$\begin{aligned}
I_0(tv) &= \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|\nabla(tv)\|^2_{L^2(B_{R_1})}\right) + \frac{1}{2}\int_{B_{R_1}} Z(x)(tv)^2 \mathrm{d}x - \gamma \int_{B_{R_1}} F(tv)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{2}\hat{M}\left(t^2 a_0\right) t^2 a_0 + \frac{t^2}{2} b_0 - \gamma \int_{B_{R_1}} F(tv)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{2}\frac{M(t^2 a_0)}{t^2 a_0} t^4 a_0^2 + \frac{t^2}{2} b_0 - \gamma t^p c_0 \\
&= t^4 \left[\frac{1}{2}\frac{M(t^2 a_0)}{t^2 a_0} a_0^2 + \frac{t^{-2}}{2} b_0 - \gamma t^{p-4} c_0 \right].
\end{aligned}$$

Daí, como, pela propriedade (M_3), $t \mapsto \frac{M(t^2 a_0)}{t^2 a_0}$ é não crescente, segue,

$$I_0(tv) \to -\infty.$$

Consequentemente, obtemos o descrito em $b)$ ao considerar $u_0 = tv$ para t suficientemente grande. □

Portanto, $I_0 : H_0^1(B_{R_1}) \to \mathbb{R}$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.3.13). Assim, fica bem definido o chamado nível da montanha para I_0,

$$c_\gamma = \inf_{\varphi \in \Gamma_{I_0}} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} I_0(\varphi(t)) > 0,$$

com

$$\Gamma_{I_0} = \left\{ \varphi \in C([0,1], H_0^1(B_{R_1})); \varphi(0) = 0, \|\varphi(1)\|_{H_0^1(B_{R_1})} > r \text{ e } I_0(\varphi(1)) < 0 \right\}.$$

Sendo r dado pelo Lema 3.4.4. Ainda, prosseguindo da mesma maneira que em (3.42),

$$c_\gamma \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} I_0(\hat{\varphi}(t)) = \max_{t \geqslant 0} I(tv), \quad \forall v \in H_0^1(B_{R_1}) \backslash \{0\}.$$

Assim, defina

$$d_\gamma := \inf_{v \in H_0^1(B_{R_1}) \backslash \{0\}} \max_{t > 0} I_0(tv) \geqslant c_\gamma > 0.$$

Proposição 3.4.1. *Existe $C_p > 0$ e $\gamma_0 > 0$ tais que para todo $\gamma \geqslant \gamma_0$,*

$$0 < d_\gamma \leqslant \frac{C_p}{\gamma^{\frac{2}{p-2}}},$$

Em particular $d_\gamma \to 0$, quando $\gamma \to +\infty$.

Demonstração. De fato, seja $v_0 \in C_0^\infty(B_{R_1}) \subseteq H_0^1(B_{R_1})\backslash\{0\}$ com $v_0 \geqslant 0$ e considere $a_0 = \|\nabla v_0\|_{L^2(B_{R_1})}$, $b_0 = \int_{B_{R_1}} Z(x)v_0^2 \mathrm{d}x$ e $c_0 = C\|v_0\|^p_{L^p(B_{R_1})}$, em C é dado em (f_5). Considere a função $h_0(t) = I_0(tv_0)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
h(t) = I_0(tv_0) &= \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|\nabla(tv_0)\|^2_{L^2(B_{R_1})}\right) + \frac{1}{2}\int_{B_{R_1}} Z(x)(tv)^2\mathrm{d}x - \gamma\int_{B_{R_1}} F(tv_0)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\hat{M}(a_0t^2) + \frac{t^2}{2}b_0 - \gamma\int_{B_{R_1}} F(tv_0)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Assim, por (f_5),

$$h(t) \leqslant \frac{1}{2}\hat{M}(a_0t^2) + \frac{t^2}{2}b_0 - \gamma c_0 t^p.$$

Dessa forma, considerando t_0 ponto de máximo da função h, em particular, $h(t_0) \geqslant d_\gamma > 0$, das condições de continuidade e crescimento em (M_1) e (M_2), concluímos

$$\hat{M}(a_0t_0^2) = \int_0^{a_0t_0^2} M(\tau)d\tau \leqslant \int_0^{a_0t_0^2} M(a_0t_0^2)d\tau = M(a_0t_0^2)a_0t_0^2,$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\max_{t>0} h(t) = h(t_0) &\leqslant \frac{1}{2}\hat{M}(a_0t_0^2) + \frac{t_0^2}{2}b_0 - \gamma c_0 t_0^p \\
&\leqslant \frac{1}{2}M(a_0t_0^2)a_0t_0^2 + \frac{t_0^2}{2}b_0 - \gamma c_0 t_0^p \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left[M(a_0t_0^2)a_0 + b_0\right]t_0^2 - \gamma c_0 t_0^p \\
&\leqslant \max_{t>0} H_0(t),
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Em que

$$H_0(t) = \frac{A}{2}t^2 - \gamma c_0 t^p,$$

com $A = M(a_0t_0^2)a_0 + b_0$. Observe que para $t > 0$,

$$\begin{aligned}
H_0'(t) = 0 &\Leftrightarrow \left(A - \gamma p c_0 t^{p-2}\right)t = 0 \\
&\Leftrightarrow t = t_M := \left(\frac{A}{\gamma p c_0}\right)^{\frac{1}{p-2}},
\end{aligned}$$

além disso, como $H_0'(t) > 0$ se $t \in (0, t_M)$ e $H_0'(t) < 0$ se $t < t_M$, segue que t_M é o ponto de máximo de H_0 em $(0, \infty)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \max_{t>0} H_0(t) = H_0(t_M) &= \frac{A}{2}\left(\frac{A}{\gamma p c_0}\right)^{\frac{2}{p-2}} - \gamma c_0 \left(\frac{A}{\gamma p c_0}\right)^{\frac{p}{p-2}} \\ &= \gamma^{-\frac{2}{p-2}} \frac{1}{2}\left(\frac{A^{\frac{p}{p-2}}}{(pc_0)^{\frac{2}{p-2}}}\right) - \gamma^{-\frac{2}{p-2}}\left(\frac{A^{\frac{p}{p-2}}}{p(pc_0)^{\frac{2}{p-2}}}\right) \\ &= \gamma^{-\frac{2}{p-2}} A^{\frac{p}{p-2}} (pc_0)^{-\frac{2}{p-2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right]. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Consequentemente, ao definirmos

$$C_p := A^{\frac{p}{p-2}} (pc_0)^{-\frac{2}{p-2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right] > 0,$$

a proposição fica estabelecida ao verificar, por (3.46) e (3.47), que

$$d_\gamma = \inf_{v \in H_0^1(B_{R_1})} \max_{t>0} I_0(tv) \leqslant \max_{t>0} I_0(tv_0) \leqslant \max_{t>0} H_0(t) = H_0(t_M) = \frac{C_p}{\gamma^{\frac{2}{p-2}}}$$

□

Em posse da Proposição 3.4.1, podemos considerar $\gamma^* > 0$ de modo que para todo $\gamma \geqslant \gamma^*$ seja válido

$$\frac{2p}{M_0(p-4)} d_\gamma < \min\left\{1, \frac{(M_0 \mathcal{S})^{3/2}}{M(1)}, M_0^{1/2} \mathcal{S}^{3/2}\right\}, \tag{3.48}$$

em que $\mathcal{S} = \inf\{\|\nabla v\|_2^2; v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3), \|v\|_6 = 1\}$ e C_{ε_0} é estabelecido na Observação 2.1.1. Mais ainda, requisitaremos que $\gamma \geqslant \gamma^*$ é tal que

$$\left(\frac{2p}{M_0(p-4)}\right)^2 d_\gamma^{\frac{6-p}{2}} < \frac{M_0 \mathcal{S}^3}{C_p^{\frac{p-2}{2}}(1 + C_{\varepsilon_0})}.$$

Consequentemente, pela proposição anterior,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2p}{M_0(p-4)} d_\gamma\right)^2 &= \left(\frac{2p}{M_0(p-4)}\right)^2 d_\gamma^{\frac{6-p}{2}} d_\gamma^{\frac{p-2}{2}} < \frac{M_0 \mathcal{S}^3}{C_p^{\frac{p-2}{2}}(1 + C_{\varepsilon_0})} C^{\frac{p-2}{2}} \gamma^{-1} \\ &= \frac{M_0 \mathcal{S}^3}{1 + C_{\varepsilon_0}} \gamma^{-1}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

estimativa de extrema significância, e a usaremos na prova da Proposição 4.2.1. Relembremos que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2) + \frac{1}{2}\int_{R^3} V_\lambda(x) u^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} G(x, u) \mathrm{d}x, \\ I_0(u) &= \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|\nabla u\|_{L^2(B_{R_1})}^2\right) + \frac{1}{2}\int_{B_{R_1}} Z(x) u^2 \mathrm{d}x - \gamma \int_{B_{R_1}} F(u) \mathrm{d}x, \\ c_{\lambda,\gamma} &\leqslant \inf_{v \in E \setminus \{0\}} \max_{t>0} J(tv) \\ d_\gamma &= \inf_{v \in H_0^1(B_{R_1}) \setminus \{0\}} \max_{t>0} I_0(tv) > 0. \end{aligned}$$

Agora, para todo $v \in H_0^1(B_{R_1})\backslash\{0\}$, considere

$$\overline{v}(x) = \begin{cases} v(x), & \text{se } x \in B_{R_1} \\ 0, & \text{se } x \in B_{R_1}^c. \end{cases}$$

Desse modo, pela Proposição A.3.4, e da imersão em Corolário A.3.1, $\overline{v} \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$, portanto, $\overline{v} \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Além disso, pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.1)

$$\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)\overline{v}^2 \mathrm{d}x = \int_{B_{R_1}} V_\lambda(x) v \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{B_{R_1}} V_\lambda^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_{B_{R_1}} v^4(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2} < \infty.$$

Pois $V_\lambda(x)$ é contínua em todo $\mathbb{R}^3$ e $v \in L^2(B_{R_1}) \hookrightarrow L^4(B_{R_1})$ (ver Corolário A.2.1). Portanto, $\overline{v} \in E\backslash\{0\}$. Além disso, Note que por (V_2), ao considerar $x \in B_{R_1}$, segue que $V_\lambda(x) = Z(x)$, e, pela definição da função $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$G(x,s) = \int_0^s \tau^5 + \gamma f(\tau) d\tau = s^6 + \gamma F(s) \geqslant \gamma F(s), \quad \forall (x,s) \in B_{R_1} \times \mathbb{R}.$$

Consequentemente, $J(t\overline{v}) \leqslant I_0(tv)$ para todo $v \in H_0^1(B_{R_1})\backslash\{0\}$. Seja $W_0 := \{\overline{v}\}_{v \in H_0^1(B_{R_1})\backslash\{0\}}$ formando um subconjunto de $E\backslash\{0\}$, que implica em

$$c_{\lambda,\gamma} \leqslant \inf_{v \in E\backslash\{0\}} \max_{t>0} J(tv) \leqslant \inf_{v \in W_0} \max_{t>0} J(tv) \leqslant \inf_{v \in H_0^1(B_{R_1})\backslash\{0\}} \max_{t>0} I_0(tv) = d_\gamma, \tag{3.50}$$

nos fornecendo uma importante estimativa em relação ao nível $c_{\lambda,\gamma}$, tendo em vista a Proposição 3.4.1.

4 Existência de solução para a classe de problemas considerado

4.1 Compacidade do funcional energia auxiliar

Nesta seção, consideraremos a sequência de Cerami $(u_n) \subseteq E$, anteriormente apresentada, que possui a característica

$$J(u_n) \to c_{\lambda,\gamma} \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|)J'(u_n) \to 0.$$

E desta, buscamos extrair uma subsequência convergente em E, com propriedades adequadas a produzir pontos críticos do funcional energia $J : E \to \mathbb{R}$ associado ao problema auxiliar $(\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma})$. Sendo o uso do 2º Lema de Compacidade de Lions (Teorema C.0.3) e resultados relacionados, de grande valia para o objetivo, resultados quais, são discutidos no APÊNDICE C - Princípio de Compacidade de Lions. Para tanto, estabelecemos

Lema 4.1.1. *A sequência (u_n) é limitada em E e $\|\nabla u_n\|_2 \leqslant 1$ para n grande.*

Demonstração. Observe que

$$\frac{1}{p}J'(u_n)u_n \leqslant \|J'(u_n)\|_*\|u_n\| \leqslant \|J'(u_n)\|_*(\|u_n\| + 1) \to 0,$$

portanto,

$$J(u_n) - \frac{1}{p}J'(u_n)u_n \to c_{\lambda,\gamma}. \tag{4.1}$$

Note ainda que, pelo item $c)$ do Lema 2.1.1 e (g_6), temos

$$\begin{aligned} J(u_n) - \frac{1}{p}J'(u_n)u_n &= \left[\frac{\hat{M}(\|\nabla u_n\|_2^2)}{2} - \frac{\|\nabla u_n\|_2^2 M(\|\nabla u_n\|_2^2)}{p}\right] \\ &+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u_n^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{1}{p}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n)\right]\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{M_0(p-4)}{2p}\|\nabla u_n\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u_n^2 \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.2}$$

Considerando $\tilde{M} = \min\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right), \frac{M_0(p-4)}{2p}\right\}$, obtemos

$$J(u_n) - \frac{1}{p}J'(u_n)u_n \geqslant \tilde{M}\|u_n\|,$$

garantido a limitação de (u_n) em E devido a convergência (4.1) e do fato que toda sequência convergente é limitada. Ainda, de (4.2),

$$\frac{M_0(p-4)}{2p}\|\nabla u_n\|_2^2 \leqslant J(u_n) - \frac{1}{p}J'(u_n)u_n,$$

que implica em

$$\|\nabla u_n\|_2^2 \leqslant \frac{2p}{M_0(p-4)}\left(J(u_n) - \frac{1}{p}J'(u_n)u_n\right) \to \frac{2p}{M_0(p-4)}c_{\lambda,\gamma}, \tag{4.3}$$

como, por (3.48) e (3.50),

$$\frac{2p}{M_0(p-4)}c_{\lambda,\gamma} \leqslant \frac{2p}{M_0(p-4)}d_\lambda < 1,$$

segue que para n suficientemente grande,

$$\|\nabla u_n\|_2^2 \leqslant 1.$$

Concluindo a demonstração do lema. □

Lema 4.1.2. *Existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e $u \in L^6(\mathbb{R}^3)$ tais que $u_{n_k} \to u$ em $L^6(\mathbb{R}^3)$.*

$$\|\nabla u_{n_k}\|_2^2 \leqslant 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. De fato, como, pelo Lema 4.1.1, (u_n) é uma sequência limitada no espaço de Hilbert $E \hookrightarrow \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ para n grande, pelo Teorema A.3.4 podemos supor a existência de (u_{n_k}) subsequência de (u_n) tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ e, além disso, do lema anterior, a vista do Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema A.1.4), podemos ainda considerar a subsequência (u_{n_k}) de modo que

$$\lim_k \|\nabla u_{n_k}\|_2^2 = a \leqslant 1 \tag{4.4}$$

além de

$$\|\nabla u_{n_k}\|_2^2 \leqslant 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Portanto, pela continuidade da função $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, exigida em (M_2), $M(\|\nabla u_{n_k}\|_2^2)$ converge para algum $m_0 \in [M_0, M(1)]$. Nesses termos, conforme Proposição A.3.7 e Proposição A.3.8, podemos considerar $u_{n_k} \to u$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$, para todo $q \in [1,6)$ e $u_{n_k}(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$. Ainda, do discutido em APÊNDICE C - Princípio de Compacidade de Lions, podemos supor que $\mu_n(E) = \int_E |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x$ e $\nu_n(E) = \int_E |u_n|^6 \mathrm{d}x$ converge no sentido de medida para medidas mensuráveis limitadas e não negativas μ e ν, respectivamente. Pelo 2º Lema de Concentração de Compacidade de Lions (Teorema C.0.3), segue

i) existem sequências $(\nu_j) \subseteq \mathbb{R}_+$ e $(\xi_j) \subseteq \mathbb{R}^3$ tais que

$$\nu = u^6 + \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu_j \delta_{\xi_j};$$

ii) ainda,

$$\mu \geqslant |\nabla u|^2 + \mathcal{S} \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu_j^{\frac{1}{3}} \delta_{\xi_j}.$$

Para darmos prosseguimento, considere $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, [0,1])$ tal que $\phi(x) = 1$, se $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ e $\phi(x) = 0$ se $|x| \geqslant 1$. Ainda, para cada $\varepsilon \in (0,1)$ consideraremos

$$\phi_{\varepsilon,j}(x) = \phi\left(\frac{x - \xi_j}{\varepsilon}\right),$$

Como ϕ é de suporte compacto e $u_{n_k} \to u$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$, para todo $q \in [2,6)$, temos que

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\varepsilon,j}|u_{n_k}|^r \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\varepsilon,j}|u|^r \mathrm{d}x := B_{\varepsilon,j,r}, \tag{4.6}$$

onde $2 \leqslant r \leqslant 6$. Também $|\phi_{\varepsilon,j}|u|^r| \leqslant |u|^r \in L^1(\mathbb{R}^3)$, além disso, por ϕ ser de suporte compacto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\phi_{\varepsilon,j}(x)|u(x)|^r) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4),

$$\lim_{\varepsilon\to 0} B_{\varepsilon,j,r} = 0. \tag{4.7}$$

Igualmente, como $|V_\lambda(x)u^2\phi_{\varepsilon,j}| \leqslant |V_\lambda(x)u^2|$, por (g_2) e Lema 2.1.2,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^3} (u_{n_k}\phi_{\varepsilon,j})(g(x,u_{n_k}))\mathrm{d}x\right| &\leqslant \gamma \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\varepsilon,j}|u_{n_k}|f(u_{n_k})\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\varepsilon,j} u_{n_k}^6 \mathrm{d}x \\ &\leqslant \varepsilon\gamma \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\varepsilon,j}|u_{n_k}|^2 \mathrm{d}x + C_\varepsilon \gamma \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\varepsilon,j}|u_{n_k}|^p \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\varepsilon,j} u_{n_k}^6 \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Logo, por (4.6),

$$\limsup_n \left|\int_{\mathbb{R}^3} (u_{n_k}\phi_{\varepsilon,j})(g(x,u_{n_k}))\mathrm{d}x\right| \leqslant \gamma\varepsilon B_{\varepsilon,j,2} + \gamma C_\varepsilon B_{\varepsilon,j,p} + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\varepsilon,j}\mathrm{d}\nu.$$

Denote,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x-\xi_j}{\varepsilon} = \left(\frac{x_1 - \xi_j^1}{\varepsilon}, \frac{x_2 - \xi_j^2}{\varepsilon}, \frac{x_3 - \xi_j^3}{\varepsilon}\right) = (h_1(x_1), h_2(x_2), h_3(x_3)) \\ &\Rightarrow \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\varepsilon}\delta_{ij}, \end{aligned}$$

Logo, pela Regra da Cadeia (Teorema A.1.3),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{\varepsilon,j}}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\phi\circ h)(x) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(h(x))\frac{\partial h_k}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(h(x))\frac{1}{\varepsilon} \\ \Rightarrow |\nabla \phi_{\varepsilon,j}(x)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla\phi\|_\infty. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como $supp(\phi) \subseteq B_1(0)$ segue que $supp(\phi_{\varepsilon,j}) \subseteq B_\varepsilon(\xi_j)$, portanto

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3} u_{n_k}\nabla\phi_{\varepsilon,j}\nabla u_{n_k}\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} |u_{n_k}\nabla\phi_{\varepsilon,j}\nabla u_{n_k}|\mathrm{d}x = \int_{B_\varepsilon(\xi_j)} |u_{n_k}\nabla\phi_{\varepsilon,j}\nabla u_{n_k}|\mathrm{d}x,$$

pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema A.3.1), por (4.8) e Desigualdade de Holder (Teorema A.2.1),

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^3} u_{n_k}\nabla\phi_{\varepsilon,j}\nabla u_{n_k}\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_{B_\varepsilon(\xi_j)} |u_{n_k}||\nabla\phi_{\varepsilon,j}||\nabla u_{n_k}|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla\phi\|_\infty \int_{B_\varepsilon(\xi_j)} |u_{n_k}||\nabla u_n|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla\phi\|_\infty \left(\int_{B_\varepsilon(\xi_j)} |u_{n_k}|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{B_\varepsilon(\xi_j)} |\nabla u_{n_k}|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1.1, (u_n) é uma sequência limitada em $E \hookrightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, e para algum $C > 0$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3} u_{n_k}\nabla\phi_{\varepsilon,j}\nabla u_{n_k}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}C\left(\int_{B_\varepsilon(\xi_j)} |u_{n_k}|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \frac{1}{\varepsilon}C\|u_{n_k}\|_{L^2(B_\varepsilon(\xi_j))},$$

de modo que

$$\limsup_n \left|\int_{\mathbb{R}^3} u_{n_k}\nabla\phi_{\varepsilon,j}\nabla u_{n_k}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}C\|u\|_{L^2(B_\varepsilon(\xi_j))}.$$

Ainda, pelo Corolário A.2.1, sabendo que $|B_\varepsilon(\xi_j))| = \omega_N\varepsilon^N$, com $\omega_N = |B_1(0)|$, observe

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(B_\varepsilon(\xi_j))} &\leqslant |B_\varepsilon(\xi_j))|^{\frac{2^*-2}{2^*2}}\|u\|_{L^{2^*}(B_\varepsilon(\xi_j))}\\ &= \left(\omega_N\varepsilon^N\right)^{\frac{1}{N}}\|u\|_{L^{2^*}(B_\varepsilon(\xi_j))}\\ &= (\omega_N)^{\frac{1}{N}}\varepsilon\|u\|_{L^{2^*}(B_\varepsilon(\xi_j))}.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\limsup_n \left|\int_{\mathbb{R}^3} u_{n_k}\nabla\phi_{\varepsilon,j}\nabla u_{n_k}\mathrm{d}x\right| \leqslant \tilde{C}\|u\|_{L^{2^*}(B_\varepsilon(\xi_j))},$$

em que $\tilde{C} = C(\omega_N)^{\frac{1}{N}}$. Portanto, podemos concluir que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\limsup_n \left|\int_{\mathbb{R}^3} u_{n_k}\nabla\phi_{\varepsilon,j}\nabla u_{n_k}\mathrm{d}x\right|\right) = 0. \tag{4.9}$$

Por outro lado,

$$0 \leqslant \|J'(u_n)\|_* \leqslant \|J'(u_n)\|_*(1 + \|u_n\|) \to 0, \tag{4.10}$$

ou seja, a sequência de Cerami é uma sequência Palais-Smale. Como $\phi_{\varepsilon,j} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; [0,1])$, segue que $\phi_{\varepsilon,j}u_n, u_n\partial_i\phi_{\varepsilon,j} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Além de, para K compacto, pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.1)

$$\int_K \phi_{\varepsilon,j}\partial_i u_n \mathrm{d}x \leqslant \|\phi_{\varepsilon,j}\|_{L^2(K)}\|\partial_i u_n\|_{L^2(K)} < \infty,$$

pelo Teorema A.2.8, existem as derivadas fracas $\partial_i(\phi_{\varepsilon,j}u_n)$, além de que

$$|\partial_i(\phi_{\varepsilon,j}u_n)| = |u_n\partial_i\phi_{\varepsilon,j} + \phi_{\varepsilon,j}\partial_i u_n| \leqslant |\partial_i(\phi_{\varepsilon,j})u_n| + |\partial_i(u_n)|.$$

Como $\partial_i \phi_{\varepsilon,j}$ possui suporte compacto e $u_n \in E \hookrightarrow \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, que implica em $u_n \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para todo $1 \leqslant q \leqslant 6$ (ver Corolário A.2.1) e concluímos que $\partial_i(\phi_{\varepsilon,j}u_n) \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Segue que $|\nabla(\phi_{\varepsilon,j}u_n)| \in L^2(\mathbb{R}^3)$, além de que $\phi_{\varepsilon,j}u_n \in L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$, pois $|\phi_{\varepsilon,j}u_n|^{2^*} \leqslant |u_n|^{2^*}$. Também,

$$\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)(\phi_{\varepsilon,j}u_n)^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) u_n^2 \mathrm{d}x < +\infty.$$

Portanto, $(\phi_{\varepsilon,j}u_n) \subseteq E$. Além disso, pelo Lema A.2.2

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\phi_{\varepsilon,j}u_n)|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi_{\varepsilon,j}u_n + \phi_{\varepsilon,j}\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x &\leqslant 2\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi_{\varepsilon,j}|^2|u_n|^2 + |\phi_{\varepsilon,j}|^2|\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi_{\varepsilon,j}|^2|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Sendo $K_{\varepsilon,j} \subseteq B_\varepsilon(\xi_j)$ o suporte da função $\phi_{\varepsilon,j}$, obtemos,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\phi_{\varepsilon,j}u_n)|^2 \mathrm{d}x \leqslant 2\left[\|\nabla\phi_{\varepsilon,j}\|_\infty^2 \int_{K_{\varepsilon,j}} |u_n|^2 \mathrm{d}x + \|\nabla u_n\|_2^2\right]. \tag{4.11}$$

Além de

$$\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)|\phi_{\varepsilon,j}u_n|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_{K_{\varepsilon,j}} V_\lambda(x)|u_n|^2 \mathrm{d}x. \tag{4.12}$$

Daí, ao considerar a bola $K_{\varepsilon,j} \subseteq B_{R_j}$, $(\varepsilon < 1)$ da imersão $H^1(B_{R_j}) \hookrightarrow L^2(B_{R_j})$,

$$\|u_n\|_{L^2(K_{\varepsilon,j})} \leqslant \|u_n\|_{L^2(B_{R_j})} \leqslant C_{j,1}\|u_n\|_{H^1(B_{R_j})} = C_{j,1}\left(\|\nabla u_n\|^2_{L^2(B_{R_j})} + \|u_n\|^2_{L^2(B_{R_j})}\right)^{\frac{1}{2}},$$

pelo Corolário A.2.1 e imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned}\|u_n\|_{L^2(K_{\varepsilon,j})} &\leqslant C_{j,1}\left(\|\nabla u_n\|^2_{L^2(B_{R_j})} + C_{j,2}\|u_n\|^2_{L^{2^*}(B_{R_j})}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_{j,1}\left(\|\nabla u_n\|_2^2 + C_{j,2}\|u_n\|_{2^*}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C_{j,1}\left(\|\nabla u_n\|_2^2 + C_{j,3}\|\nabla u_n\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_{j,4}\|\nabla u_n\|_2\end{aligned}$$

Logo, como (u_n) é uma sequência limitada em $E \hookrightarrow \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ e V_λ contínua em todo $\mathbb{R}^3$, consequentemente, limitada no compacto $K_{\varepsilon,j}$, segue por (4.11) e (4.12) que

$$(\phi_{\varepsilon,j}u_n) \text{ é uma sequência limitada em } E. \tag{4.13}$$

Mas $|J'(u_n)(\phi_{\varepsilon,j}u_n)| \leqslant \|J'(u_n)\|_*\|\phi_{\varepsilon,j}u_n\|$, então, por (4.10), $o_n(1) = J'(u_n)(\phi_{\varepsilon,j}u_n)$, ou seja,

$$\begin{aligned}o_n(1) = J'(u_n)(\phi_{\varepsilon,j}u_n) =& M(\|\nabla u_n\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n \nabla(\phi_{\varepsilon,j}u_n)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u_n(\phi_{\varepsilon,j}u_n)\mathrm{d}x \\ &- \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_n)(u_n\phi_{\varepsilon,j})\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.14}$$

que implica, por $V_\lambda(x)u_n^2\phi_{\varepsilon,j} \geqslant 0$, em

$$M(\|\nabla u_n\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n \nabla(\phi_{\varepsilon,j}u_n)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_n)(u_n\phi_{\varepsilon,j})\mathrm{d}x \leqslant o_n(1).$$

Uma vez que $\nabla u_n \nabla(\phi_{\varepsilon,j} u_n) = |\nabla u_n|^2 \phi_{\varepsilon,j} + u_n \nabla u_n \nabla \phi_{\varepsilon,j}$, por ($g_2$)

$$M(\|\nabla u_n\|_2^2) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \phi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}x \leqslant o_n(1) - M(\|\nabla u_n\|_2^2) \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \phi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \left[u_n^6 + \gamma u_n f(u_n) \right] \phi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}x.$$

A esse fato, acrescido do Lema 2.1.2, obtemos

$$M(\|\nabla u_n\|_2^2) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \phi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} u_n^6 \phi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}x \leqslant o_n(1) - M(\|\nabla u_n\|_2^2) \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \phi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}x + \gamma \left(\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 \phi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}x + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^p \phi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}x \right).$$

Por (M_2) e do Lema 4.1.1, a vista do Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema A.1.4), podemos supor que $M(\|\nabla u_{n_k}\|_2^2)$ converge para algum $m_0 \in [M_0, M(1)]$. Portanto, de (4.6), passando o $\limsup_k$, obtemos

$$m_0 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\varepsilon,j} d\mu - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\varepsilon,j} d\nu \leqslant - m_0 \left(\limsup_k \int_{\mathbb{R}^3} u_{n_k} \nabla u_{n_k} \nabla \phi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}x \right) + \gamma \left(\varepsilon B_{\varepsilon,u,2} + C_\varepsilon B_{\varepsilon,u,p} \right). \tag{4.15}$$

Observe que, para $x \neq \xi_j$, como ϕ é uma função de suporte compacto

$$\frac{|x - \xi_j|}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} +\infty \Rightarrow \phi_{\varepsilon,j}(x) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$

para $x = \xi_j$,

$$\frac{|x - \xi_j|}{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \phi_{\varepsilon,j} = 1 \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 1,$$

logo,

$$\phi_{\varepsilon,j}(x) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \chi_{\{\xi_j\}}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Todavia, pelo Teorema C.0.4,

$$\mu(\mathbb{R}^N) \leqslant \liminf \mu_n(\mathbb{R}^N) = \liminf \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \mathrm{d}x < +\infty.$$

Logo, $\mu(\mathbb{R}^N)$ é uma medida finita, então

$$|\phi_{\varepsilon,j}(x)| \leqslant 1 \in L^1(\mathbb{R}^3, \mu).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4),

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^3} \lim_{\varepsilon \to 0} \phi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{\{\xi_j\}} \mathrm{d}\mu = \mu(\{\xi_j\})$$

Analogamente,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}\nu = \nu(\{\xi_j\}).$$

Consequentemente, fazendo $\varepsilon \to 0$ em (4.15), e usando (4.7) e (4.9),

$$m_0\mu(\{\xi_j\}) - \nu(\{\xi_j\}) \leqslant 0 \Rightarrow m_0\mu(\{\xi_j\}) \leqslant \nu(\{\xi_j\}) = \nu_j.$$

Desse modo, observe que por $ii)$,

$$\mu(\{\xi_j\}) \geqslant \int_{\{\xi_j\}} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \mathcal{S}\sum_{i\in\mathbb{N}} \nu_j^{1/3}\delta_{\xi_i}(\xi_j) = \mathcal{S}\nu_j^{1/3},$$

logo,

$$\nu_j \geqslant m_0\mu(\{\xi_j\}) \geqslant m_0\mathcal{S}\nu_j^{1/3} \geqslant M_0\mathcal{S}\nu_j^{1/3}.$$

Note que se considerarmos a existência de algum $\nu_j > 0$, segue

$$\nu_j^{2/3} \geqslant M_0\mathcal{S} \Rightarrow \nu_j^{1/3} \geqslant (M_0\mathcal{S})^{1/2}.$$

Disso, novamente por $ii)$,

$$\mu \geqslant \mathcal{S}\sum_{i\in\mathbb{N}} \nu_i^{1/3}\delta_{\xi_i} \Rightarrow \mu(\mathbb{R}^3) \geqslant \mathcal{S}\nu_j^{1/3} \geqslant M_0^{1/2}\mathcal{S}^{3/2}.$$

Mas, então, pelo Teorema C.0.4,

$$\liminf_n \|\nabla u_n\|_2^2 \geqslant \mu(\mathbb{R}^3) \geqslant M_0^{1/2}\mathcal{S}^{3/2}.$$

Ainda, pela desigualdade (4.2),

$$J(u_n) - \frac{1}{p}J'(u_n)u_n \geqslant \frac{M_0(p-4)}{2p}\|\nabla u_n\|_2^2.$$

Portanto, ao considerar $\nu_j > 0$ para algum $j \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned}\liminf_n \left[J(u_n) - \frac{1}{p}J'(u_n)u_n\right] &\geqslant \liminf_n \left[\frac{M_0(p-4)}{2p}\|\nabla u_n\|_2^2\right] \\ &\geqslant \frac{M_0(p-4)}{2p}M_0^{1/2}\mathcal{S}^{3/2},\end{aligned}$$

isto é,

$$c_{\lambda,\gamma} \geqslant \frac{M_0(p-4)}{2p}M_0^{1/2}\mathcal{S}^{3/2},$$

como $d_\lambda \geqslant c_{\lambda,\gamma}$, então

$$\frac{2p}{M_0(p-4)}d_\lambda \geqslant M_0^{1/2}\mathcal{S}^{3/2},$$

contradizendo a desigualdade (3.48) estabelecida inicialmente. Portanto, $\nu_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, por $i)$,

$$\nu(\mathbb{R}^3) = \int_{\mathbb{R}^3} u^6 \mathrm{d}x,$$

portanto,

$$u_{n_k} \to u \quad \text{em} \quad L^6(\mathbb{R}^3).$$

Como queríamos demonstrar. $\square$

O lema seguinte servirá para demonstrarmos uma lista de limites importantes válidos para a subsequência dada pelo Lema 4.1.2,

Lema 4.1.3. *Considere* (u_{n_k}) *a subsequência dada pelo lema anterior, então*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{|x|\geqslant r}\left[|\nabla u_{n_k}|^2+V_\lambda(x)u_{n_k}^2\right]\mathrm{d}x=0,\quad \textit{uniformemente em } k.$$

Demonstração. De fato, para tanto, considere uma função $\alpha\in C_0^\infty(\mathbb{R};[0,1])$ em que

$$\alpha(s)=\begin{cases}0, & \text{se } |s|\leqslant 1,\\ 1, & \text{se } |s|\geqslant 2.\end{cases}$$

A partir disso, para r>0, podemos definir $\eta(x)=\alpha\left(|x|^2/r^2\right)$. Assim, temos $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R};[0,1])$ e

$$\eta(x)=\begin{cases}0 & \text{se } |x|\leqslant r,\\ 1 & \text{se } |x|\geqslant 2r.\end{cases}$$

Consequentemente,

$$\nabla\eta(x)=2x\alpha'\left(\frac{|x|^2}{r^2}\right)\Rightarrow|\nabla\eta|\leqslant 2\|\alpha'\|_\infty\frac{|x|}{r^2},$$

portanto, se $r\leqslant|x|\leqslant 2r$,

$$|\nabla\eta|\leqslant 4\|\alpha'\|_\infty\frac{1}{r}.$$

Sendo $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R};[0,1])$, conforme (4.13), segue que (ηu_n) é uma sequência limitada em E. Como $J'(u_n)(\eta u_n)\leqslant\|J'(u_n)\|_*\|\eta u_n\|$, então, $o_n(1)=J'(u_n)(\eta u_n)$, ou seja,

$$M(\|\nabla u_n\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_n\nabla(\eta u_n)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}V_\lambda(x)u_n(\eta u_n)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}g(x,u_n)(\eta u_n)\mathrm{d}x+o_n(1).$$

Como,

$$\nabla u_n\nabla(\eta u_n)=\nabla u_n(\eta\nabla u_n+u_n\nabla\eta)=\eta|\nabla u|^2+u_n\nabla u_n\nabla\eta,$$

e $\eta(x)=0$ para $|x|<r$, podemos reescrever a igualdade anterior como

$$\begin{aligned}M(\|\nabla u_n\|_2^2)\int_{|x|\geqslant r}\eta|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\int_{|x|\geqslant r}\eta V_\lambda(x)u_n^2\mathrm{d}x=\\ -M(\|\nabla u_n\|_2^2)\int_{|x|\geqslant r}u_n\nabla u_n\nabla\eta\mathrm{d}x+\int_{|x|\geqslant r}g(x,u_n)(\eta u_n)\mathrm{d}x+o_n(1),\end{aligned}$$

Desse modo, ao considerar $r>R$, em que R é dado na definição da função $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ em (3.9), por (g_3), obtemos

$$\begin{aligned}M(\|\nabla u_n\|_2^2)\int_{|x|\geqslant r}\eta|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\int_{|x|\geqslant r}\eta V_\lambda(x)u_n^2\mathrm{d}x\leqslant\\ -M(\|\nabla u_n\|_2^2)\int_{|x|\geqslant r}u_n\nabla u_n\nabla\eta\mathrm{d}x+\frac{1}{p}\int_{|x|\geqslant r}\eta V_\lambda(x)u_n^2\mathrm{d}x+o_n(1),\end{aligned}$$

ou seja,

$$M(\|\nabla u_n\|_2^2)\int_{|x|\geqslant r}\eta|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\left(\frac{p-1}{p}\right)\int_{|x|\geqslant r}\eta V_\lambda(x)u_n^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$-M(\|\nabla u_n\|_2^2)\int_{|x|\geqslant r}u_n\nabla u_n\nabla\eta\mathrm{d}x+o_n(1).$$

Observando que $\frac{1}{p}\leqslant\frac{p-1}{p}$ e, por (M_2), $\frac{1}{p}\leqslant M(\|\nabla u_n\|)$, temos

$$\frac{1}{p}\int_{|x|\geqslant r}\eta\left[|\nabla u_n|^2+V_\lambda(x)u_n^2\mathrm{d}x\right]\leqslant -M(\|\nabla u_n\|_2^2)\int_{|x|\geqslant r}u_n\nabla u_n\nabla\eta\mathrm{d}x+o_n(1),$$

com isso,

$$\frac{1}{p}\int_{|x|\geqslant r}\eta\left[|\nabla u_n|^2+V_\lambda(x)u_n^2\mathrm{d}x\right]\leqslant\left|-M(\|\nabla u_n\|_2^2)\int_{|x|\geqslant r}u_n\nabla u_n\nabla\eta\mathrm{d}x\right|+o_n(1)$$
$$\leqslant M(\|\nabla u_n\|_2^2)\int_{|x|\geqslant r}|u_n\nabla u_n\nabla\eta|\,\mathrm{d}x+o_n(1).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, supondo que $\|\nabla u_{n_k}\|_2\leqslant 1$ e observando a hipótese (M_2),

$$\frac{1}{p}\int_{|x|\geqslant r}\eta\left[|\nabla u_n|^2+V_\lambda(x)u_n^2\mathrm{d}x\right]\leqslant M_1\int_{|x|\geqslant r}|u_n||\nabla u_n||\nabla\eta|\,\mathrm{d}x+o_n(1),$$

em que $M_1=M(1)$, ainda, como $|\nabla\eta|=0$ em B_{2r}^c, pois $\eta(x)=1$ para $|x|>2r$, e $|\nabla\eta|\leqslant 4\|\alpha'\|_\infty/r$ para $r\leqslant|x|\leqslant 2r$, obtemos

$$\frac{1}{p}\int_{|x|\geqslant r}\eta\left[|\nabla u_n|^2+V_\lambda(x)u_n^2\mathrm{d}x\right]\leqslant\frac{4\|\alpha'\|_\infty M_1}{r}\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r}|u_n||\nabla u_n|\mathrm{d}x+o_n(1).\tag{4.16}$$

Usando a Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.1),

$$\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r}|u_n||\nabla u_n|\mathrm{d}x\leqslant\|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r}|u_n|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

como $u_n\to u$ em $L^2(B_{2r}\backslash B_r)$, pois (u_n) converge em $L^6(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^6_{loc}(\mathbb{R}^3)$ (ver Corolário A.2.1) e, a partir de certo $n_0\in\mathbb{N}$, temos $\|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leqslant 1$, então

$$\limsup_n\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r}|u_n||\nabla u_n|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r}|u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.\tag{4.17}$$

Novamente, pelo Corolário A.2.1,

$$\limsup_n\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r}|u_n||\nabla u_n|\mathrm{d}x\leqslant r\left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r}|u|^6\mathrm{d}x\right)^{1/6}\left(\frac{28}{3}\pi\right)^{1/3}.\tag{4.18}$$

Portanto, por (4.16) e (4.18),

$$\int_{|x|\geqslant r}\eta\left[|\nabla u_{n_k}|^2+V_\lambda(x)u_{n_k}^2\right]\mathrm{d}x\leqslant 4p\|\alpha'\|_\infty M_1\left(\frac{28}{3}\pi\right)^{1/3}\left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r}|u|^6\mathrm{d}x\right)^{1/6}$$
$$\leqslant C\|u\chi_{B_r^c\cap B_{2r}}\|_6.$$

para algum $C > 0$ que independe de k. O suficiente para concluir a afirmação

$$\lim_{r\to\infty}\int_{B_r^c}\eta\left[|\nabla u_{n_k}|^2 + V_\lambda(x)u_{n_k}^2\right]\mathrm{d}x = 0, \quad \text{uniformemente em } k.$$

Pois, em razão do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4), segue que

$$\|u\chi_{B_r^c\cap B_{2r}}\|_6 \to 0, \text{ quando } r\to\infty,$$

já que,

$$u(x)\chi_{B_r^c\cap B_{2r}}(x) \xrightarrow{r\to\infty} 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3,$$
$$\left|u\chi_{B_r^c\cap B_{2r}}\right| \leqslant |u| \in L^6(\mathbb{R}^3).$$

Ainda, fazendo $\hat{r} = 2r$, como $\eta(x) = 1$ para $|x| \geqslant 2r$, obtemos

$$\int_{B_{\hat{r}}^c}\left[|\nabla u_{n_k}|^2 + V_\lambda(x)u_{n_k}^2\right]\mathrm{d}x = \int_{B_{2r}^c}\eta\left[|\nabla u_{n_k}|^2 + V_\lambda(x)u_{n_k}^2\right]\mathrm{d}x$$

Consequentemente,

$$\int_{B_{\hat{r}}^c}\left[|\nabla u_{n_k}|^2 + V_\lambda(x)u_{n_k}^2\right]\mathrm{d}x \xrightarrow{\hat{r}\to\infty} 0, \quad \text{uniformemente em } k.$$

□

Proposição 4.1.1. *Os seguintes limites são válidos ao considerar a subsequência* (u_{n_k}) *dada pelo Lema 4.1.2,*

(L_1) $\lim_k \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u_{n_k}^2\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x;$

(L_2) $\lim_k \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_{n_k})u_{n_k}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)u\mathrm{d}x;$

(L_3) $\lim_k \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_{n_k})v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)v\mathrm{d}x, \ \forall v\in E$

(L_4) $\lim_k \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u_{n_k})\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)\mathrm{d}x.$

Demonstração. De fato, seja $(u_{n_k}) \subseteq (u_n)$ a subsequência dada pelo Lema 4.1.2, então $u_{n_k} \to u$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$, para todo $q \in [1,6]$, além de $u_{n_k} \to u$ em $L^6(\mathbb{R}^3)$ e $u_{n_k} \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$. Nesses termos, afim de utilizarmos o Princípio da Subsequência (Lema A.1.1), considere $(u_{n_{k,0}}) \subseteq (u_{n_k})$ uma subsequência qualquer. Pretendemos extrair de $(u_{n_{k,0}})$ subsequências em que valem os limites (L_1)-(L_4) e concluir o resultado utilizando o Princípio da Subsequência (Lema A.1.1) para cada limite.

Demonstração de L_1

Como, $u_{n_{k,0}} \to u$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$, para todo $q \in [1,6]$, então, de $(u_{n_{k,0}})$, pela Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.5), podemos extrair uma subsequência $(u_{n_{k,1}})$ tal que

$$\begin{cases} u_{n_{k,1}}(x) \to u(x) & \text{q.t.p. em } B_r, \\ |u_{n_{k,1}}| \leqslant h_r, & \text{para algum } h_r \in L^q(B_r) \text{ com } q \in [1, 2^*] \text{ e } r > 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Nas condições de (4.19), uma vez que

$$\begin{cases} V_\lambda(x)u^2_{n_{k,1}}(x) \to V_\lambda(x)u^2(x) \text{ q.t.p. em } B_r, \\ |V_\lambda(x)u^2_{n_{k,1}}| \leqslant \left(\sup\limits_{x\in B_r} V_\lambda(x)\right) u^2_{n_{k,1}} \leqslant \left(\sup\limits_{x\in B_r} V_\lambda(x)\right) h_r^2 \in L^1(B_r), \end{cases}$$

Segue, fundamentado no Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.5),

$$\lim_k \int_{B_r} V_\lambda(x)u^2_{n_{k,1}}\mathrm{d}x = \int_{B_r} V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x, \ \forall r > 0. \tag{4.20}$$

Além disso, para $x \in \mathbb{R}^3$,

$$V_\lambda(x)u^2_{n_{k,1}}\chi_{B_r^c}(x) \xrightarrow{r\to\infty} 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

além de $|V_\lambda(x)u^2_{n_{k,1}}\chi_{B_r^c}| \leqslant V_\lambda(x)u^2_{n_{k,1}} \in L^1(\mathbb{R}^3)$, que implica pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4),

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)u^2_{n_{k,1}}\chi_{B_r^c}\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{B_r^c} V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x = 0. \tag{4.21}$$

Assim, pelo Lema 4.1.3 e (4.21), dado $\varepsilon > 0$, existe $r_0 > 0$ tal que

$$\int_{B_{r_0}^c} V_\lambda(x)u^2_{n_{k,1}}\mathrm{d}x + \int_{B_{r_0}^c} V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Em adição a esse fato, por (4.20), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow \left|\int_{B_{r_0}} V_\lambda(x)(u^2 - u^2_{n_{k,1}})\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.22}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} k \geqslant k_0 \Rightarrow & \left|\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda u^2\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda u^2_{n_{k,1}}\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_{B_r} V_\lambda u^2\mathrm{d}x - \int_{B_r} V_\lambda u^2_{n_{k,1}}\mathrm{d}x + \int_{B_r^c} V_\lambda u^2\mathrm{d}x - \int_{B_r^c} V_\lambda u^2_{n_{k,1}}\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \left|\int_{B_r} V_\lambda(u^2 - u^2_{n_{k,1}})\mathrm{d}x\right| + \int_{B_r^c} V_\lambda u^2\mathrm{d}x + \int_{B_r^c} V_\lambda u^2_{n_{k,1}}\mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Demonstrando, através do Princípio da Subsequência (Lema A.1.1), que (L_1) vale.

Demonstração de L_2

Além disso, para $R > 0$ da definição da função g, prosseguindo como acima, existe $(u_{n_{k,2}}) \subseteq (u_{n_{k,0}}) \subseteq (u_{n_k})$ subsequência tal que

$$\begin{cases} u_{n_{k,2}}(x) \to u(x) & \text{q.t.p. em } B_R, \\ |u_{n_{k,2}}| \leqslant h_q, & \text{para algum } h_q \in L^q(B_R) \text{ com } q \in [1, 2^*]. \end{cases} \tag{4.23}$$

como $g(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua para todo $x \in \mathbb{R}^3$ fixado, observando (g_4), segue que

$$\begin{cases} g(x, u_{n_{k,2}}(x))u_{n_{k,2}} \to g(x, u(x))u(x) \text{ q.t.p. em } B_R \\ |g(x, u_{n_{k,2}})u_{n_{k,2}}| \leqslant |u^6_{n_{k,2}}| + \gamma |f(u_{n_{k,2}})u_n|, \end{cases}$$

logo, pelo Lema 2.1.2,

$$\begin{cases} g(x, u_{n_{k,2}})u_{n_{k,2}} \to g(x, u)u \quad \text{q.t.p. em } B_R, \\ |g(x, u_{n_{k,2}})u_{n_{k,2}}| \leqslant |u_{n_{k,2}}|^6 + \gamma c(|u_{n_{k,2}}|^2 + |u_{n_{k,2}}|^p) \leqslant h_6^6 + \lambda c(h_2 + h_p^p) \in L^1_{B_R}. \end{cases}$$

Daí, fazendo uso do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4),

$$\int_{B_R} g(x, u_{n_{k,2}})u_n \mathrm{d}x \to \int_{B_R} g(x, u)u \mathrm{d}x, \forall v \in E,$$

donde, pelo Princípio da Subsequência (Lema A.1.1),

$$\int_{B_R} g(x, u_n)u_n \mathrm{d}x \to \int_{B_R} g(x, u)u \mathrm{d}x. \tag{4.24}$$

Ainda, em vista de (L_1), pela Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.5), existe $(u_{n_{k,3}})$ subsequência da subsequência $(u_{n_{k,1}}) \subseteq (u_{n_k})$ tal que para alguma $h \in L^1(B_R^c)$

$$\begin{cases} V_\lambda(x)u^2_{n_{k,3}} \to V_\lambda(x)u^2 \Rightarrow u_{n_{k,3}} \to u \quad \text{q.t.p. em } B_R^c, \\ V_\lambda(x)u^2_{n_{k,3}} \leqslant h \in L^1(B_R^c). \end{cases}$$

Mas então, por (g_3)

$$\begin{cases} g(x, u_{n_{k,3}}) \to g(x, u) \quad \text{q.t.p. em } B_R^c, \\ g(x, u_{n_{k,3}})u_{n_{k,3}} \leqslant V_\lambda(x)u^2_{n_{k,3}} \leqslant h \in L^1(B_R^c) \end{cases}$$

Portanto, podemos concluir pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4) seguido do Princípio da Subsequência (Lema A.1.1),

$$\int_{B_R^c} g(x, u_n)u_n \mathrm{d}x \to \int_{B_R^c} g(x, u)u \mathrm{d}x. \tag{4.25}$$

Por (4.24) e (4.25), temos que (L_2) vale.

Demonstração de L_3

Agora, para $(u_{n_{k,3}}) \subseteq (u_{n_{k,0}}) \subseteq (u_{n_k})$ nas mesmas condições de (4.23),

$$\begin{cases} g(x, u_{n_{k,3}}(x))v \to g(x, u(x))v \quad \text{q.t.p. em } B_R, \quad \forall v \in E, \\ |g(x, u_{n_{k,3}})v| \leqslant |u_{n_{k,3}}^5 v| + \gamma f(u_{n_{k,3}})|v|. \end{cases}$$

em que $u_{n_{k,3}} \leqslant h_1 \in L^6(B_R)$. Ainda, pelo Lema 2.1.2

$$\begin{cases} g(x, u_{n_{k,3}}(x))v \to g(x, u(x))v \quad \text{q.t.p. em } B_R, \forall v \in E \\ |g(x, u_{n_{k,3}})v| \leqslant |u_{n_{k,3}}^5 v| + \lambda c(|v| + |u_{n_{k,3}}^{p-1} v|) \leqslant h^5|v| + \lambda c(|v| + h^{p-1}|v|) \in L^1(B_R). \end{cases}$$

Pois, para $h, v \in L^6(B_R)$ e $q \in [1, 5)$,

$$\int_{B_R} h^q v \mathrm{d}x \leqslant \int_{B_R \cap [h \geqslant v]} h^6 \mathrm{d}x + \int_{B_R \cap [v > h]} v^6 \mathrm{d}x < \infty, \forall q \in [1, 5).$$

Que implica, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4),

$$\int_{B_R} g(x, u_{n_{k,3}})v \mathrm{d}x \to \int_{B_R} g(x, u)v \mathrm{d}x, \forall v \in E,$$

donde, pelo Princípio da Subsequência (Lema A.1.1),

$$\int_{B_R} g(x, u_{n_k})v \mathrm{d}x \to \int_{B_R} g(x, u)v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in E. \tag{4.26}$$

Agora, em vista de (L_1), existe uma subsequência $(u_{n_{k,4}}) \subseteq (u_{n_{k,0}}) \subseteq (u_{n_k})$ tal que

$$\begin{cases} V_\lambda(x) u_{n_{k,4}}^2 \to V_\lambda(x) u^2 \Rightarrow u_{n_{k,4}} \to u \quad \text{q.t.p. em } B_R^c, \\ V_\lambda(x) u_{n_{k,4}}^2 \leqslant h_2 \Rightarrow V_\lambda(x)|u_{n_{k,4}}| \leqslant (h_2 V_\lambda(x))^{1/2}. \end{cases}$$

Com $h_2 \in L^1(B_R^c)$. Mas então, por g_5,

$$\begin{cases} g(x, u_{n_{k,4}})v \to g(x, u)v \quad \text{q.t.p. em } B_R^c, \\ |g(x, u_{n_{k,4}})v| \leqslant V_\lambda(x)|u_{n_{k,4}} v| \leqslant (h V_\lambda(x))^{1/2}|v|, \quad \forall x \in B_R^c \text{ e } \forall v \in E. \end{cases}$$

observando que $(h_2 V_\lambda(x))^{1/2}|v| \in L^1(B_R^c)$, pois, tendo em vista a Desigualdade de Holder (Teorema A.2.1),

$$\int_{B_R^c} (h_2 V_\lambda(x))^{1/2}|v| \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{B_R^c} h_2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_{B_R^c} V_\lambda(x) v^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} < \infty, \quad \forall v \in E,$$

podemos concluir pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4)

$$\int_{B_R^c} g(x, u_{n_{k,4}})v \mathrm{d}x \to \int_{B_R^c} g(x, u)v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in E. \tag{4.27}$$

Portanto, pelo Princípio da Subsequência (Lema A.1.1),

$$\int_{B_R^c} g(x, u_{n_k})v \mathrm{d}x \to \int_{B_R^c} g(x, u)v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in E. \tag{4.28}$$

Por (4.26) e (4.28), temos que (L_3) vale.

Demonstração de L_4

Dos limites (L_1) e (L_2), pela Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.5), existem $(u_{n_{k,5}})$ e $(u_{n_{k,6}})$ subsequências da subsequência $(u_{n_{k,0}}) \subseteq (u_{n_k})$ tais que

$$\begin{cases} V_\lambda(x)u_{n_{k,5}}^2 \to V_\lambda(x)u^2 \Rightarrow u_{n_{k,5}} \to u \quad \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3, \\ V_\lambda(x)u_{n_{k,5}}^2 \leqslant h_1 \in L^1(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x, u_{n_{k,6}})u_{n_{k,6}} \to g(x,u)u \Rightarrow u_{n_{k,6}} \to u \quad \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3, \\ g(x, u_{n_{k,6}})u_{n_{k,6}} \leqslant h_2 \in L^1(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Ao considerar a sequência $(u_{n_{k,7}}) = (min\{u_{n_{k,5}}, u_{n_{k,6}}\})$, como $G(x,s) = \displaystyle\int_0^s g(x,\tau)d\tau$ Carathéodory, uma vez que $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o é, segue

$$u_{n_{k,7}}(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3 \Rightarrow G(x, u_{n_{k,7}}) \to G(x,u) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3$$

Além disso, por (g_6),

$$\begin{aligned} G(x, u_{n_{k,7}}) &\leqslant \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^2}\right) V_\lambda(x)u_{n_{k,7}}^2 + \frac{1}{p} g(x, u_{n_{k,7}})u_{n_{k,7}} \\ &\leqslant \left[\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^2}\right) h_1 + \frac{1}{p} h_2\right] \in L^1(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Consequentemente, em vista do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4) e do Princípio da Subsequência (Lema A.1.1),

$$G(x, u_{n_k}) \to G(x,u).$$

Finalizando a demonstração do lema. □

Com isso, estamos aptos a afirmar o que segue

Teorema 4.1.1. *A função u, determinada anteriormente, é uma solução fraca não nula do problema auxiliar*

$$-M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u + V_\lambda(x)u = g(x,u), \ \ em\ \mathbb{R}^3 \qquad (\mathcal{AP})$$

Demonstração. De fato, considere $(u_{n_k}) \subseteq E$ a sequência em que vale os limites da Proposição 4.1.1 e resultados anteriores associados. Como (u_{n_k}) converge fraco para u no espaço de Hilbert E, segue que

$$\lim_k \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_{n_k} \nabla u + V_\lambda(x) u_{n_k} u dx = \lim_k \langle u_{n_k}, u \rangle = \langle u, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V_\lambda(x)u^2 dx.$$

Portanto, da Proposição 4.1.1,

$$\begin{aligned}\lim_k J'(u_{n_k})u &= \lim_k M(\|\nabla u_{n_k}\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_{n_k}\nabla u \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}V_\lambda(x)u_{n_k}u\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}g(x,u_{n_k})u\mathrm{d}x\\ &= m_0\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}V_\lambda(x)u^2 - g(x,u)u\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Em que $\lim_k M(\|\nabla u\|_2^2) = m_0$. Como,

$$0 \leqslant |J'(u_{n_k})u| \leqslant \|J'(u_{n_k})\|_*\|u\| \to 0,$$

então

$$m_0\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}V_\lambda(x)u^2 - g(x,u)u\mathrm{d}x = 0. \tag{4.29}$$

Além disso, como $\|J(u_n)\|_* \to 0$ e (u_{n_k}) uma sequência limitada em E, então

$$\lim_k J'(u_{n_k})u_{n_k} = 0.$$

Ainda, pela Proposição 4.1.1 e garantida a existência de $\lim_k \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_{n_k}|^2\mathrm{d}x$, conforme decorre da demonstração do Lema 4.1.2 com destaque em (4.4),

$$\lim_k J'(u_{n_k})u_{n_k} = \lim_k\left[M(\|\nabla u_{n_k}\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_{n_k}|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}V_\lambda(x)u_{n_k}^2\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}g(x,u_{n_k})u_{n_k}\mathrm{d}x\right],$$

que implica,

$$0 = m_0\left(\lim_k\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_{n_k}|^2\mathrm{d}x\right) + \int_{\mathbb{R}^3}V_\lambda(x)u^2\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}g(x,u)u\mathrm{d}x. \tag{4.30}$$

Comparando as equações (4.29) e (4.30), concluímos

$$\lim_k \|\nabla u_{n_k}\|_2^2 = \|\nabla u\|_2^2.$$

Daí, $u_{n_k} \to u$ em E. Sendo $J : E \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $J(u_{n_k}) \to c_{\lambda,\gamma}$, concluímos $J(u) = c_{\lambda,\gamma} > 0$. Portanto, $u \neq 0$. Além disso, uma vez que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, segue

$$m_0 = \lim_k M(\|\nabla u_{n_k}\|_2^2) = \|\nabla u\|_2^2$$

e, portanto, para toda função $v \in E$, da Proposição 4.1.1,

$$\begin{aligned}\lim_k J'(u_{n_k})v &= \lim_k M(\|\nabla u_{n_k}\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_{n_k}\nabla v\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}V_\lambda(x)u_{n_k}v\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}g(x,u_{n_k})v\mathrm{d}x\\ &= M(\|\nabla u\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla v\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}V_\lambda(x)uv\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}g(x,u)v\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Mas $|J'(u_{n_k})v| \leqslant \|J'(u_{n_k})\|_*\|v\| \to 0$, então u é solução fraca do problema $(\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma})$. $\square$

4.2 Prova do Teorema Principal

Antes da prova do Teorema principal, vamos dedicar esta seção para trabalharmos estimativas que envolvem a solução fraca do problema auxiliar, de modo a termos propriedades suficientes para que u seja solução fraca também do problema principal $(\mathcal{P}_{\lambda,\gamma})$. Para $(u_{n_k}) \subseteq E$ considerada na demonstração do Teorema 4.1.1, em que vale os limites da Proposição 4.1.1,

$$\|\nabla u_{n_k}\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) u_{n_k}^2 \mathrm{d}x \to \|\nabla u\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) u^2 \mathrm{d}x.$$

Ou seja, $\|u_{n_k}\| \to \|u\|$. Sendo $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ um espaço de Hilbert, ao definir $f : E \to \mathbb{R}$ por $f(v) = \langle v, u\rangle$ segue, da bilinearidade do produto interno que $f \in E^*$ e

$$\langle u_{n_k}, u\rangle \to \langle u, u\rangle = \|u\|^2,$$

Pois $u_{n_k} \rightharpoonup u$. Logo,

$$\|u - u_{n_k}\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u_{n_k}, u\rangle + \|u\|^2 \to \|u\|^2 - 2\|u\|^2 + \|u\|^2 = 0.$$

Portanto, (u_{n_k}) converge para u em E. Daí, visto que da formulação da sequência de Cerami,

$$J(u_{n_k}) \to c_{\lambda,\gamma},$$

consequentemente, como o funcional $J : E \to \mathbb{R}$ é contínuo, $J(u) = c_{\lambda,\gamma}$. Pela desigualdade (4.3) e pelo Lema 4.1.1, satisfaz

$$\|\nabla u\|_2^2 \leqslant \frac{2p}{M_0(p-4)} d_\gamma, \text{ para todo } R > R_1,$$

Por outro lado, da definição de $\mathcal{S} = \inf\left\{\|\nabla v\|_2^2 : v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3), \|v\|_6 = 1\right\}$, ao fazer $v = \frac{u}{\|u\|_6}$, obtemos

$$\mathcal{S}\|u\|_6^2 \leqslant \|\nabla u\|_2^2.$$

Consequentemente,

$$\|u\|_6^2 < \mathcal{S}^{-1}\|\nabla u\|_2^2 \leqslant \mathcal{S}^{-1}\frac{2p}{M_0(p-4)} d_\gamma \tag{4.31}$$

Com isso, devido a desigualdade (3.49) estabelecida na seção 3.4, chegamos à seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|u\|_6^4 &< \mathcal{S}^{-2}\left(\frac{2p}{M_0(p-4)} d_\gamma\right)^2 \\ &= \frac{M_0}{(1+C_{\varepsilon_0})}\mathcal{S}\gamma^{-1}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

A estimativa (4.32) será útil para provarmos o próximo resultado, o qual é uma versão adequada para o nosso problema do conhecido resultado de regularidade elíptica dado em [*Theorem 8.17*, (GILBARG; TRUDINGER, 1998)].

Proposição 4.2.1. *Seja $V_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função mensurável não negativa e a não linearidade $H(x,s)$ uma função Caratheodory tal que para algum $\alpha, \beta > 0$,*

$$|H(x,s)| \leqslant \left(\alpha|s|^5 + \beta|s|\right)\gamma \quad \text{para todo } (x,s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}.$$

Supondo que $u \in E$ é uma solução fraca do problema

$$-\Delta u + V_0(x)u = H(x,u) \quad \text{em } \mathbb{R}^3, \tag{$\mathcal{C}$}$$

Satisfazendo

$$4\alpha\|u\|_6^4 \leqslant \mathcal{S}\gamma^{-1}.$$

Então existe Λ tal que

$$\|u\|_\infty \leqslant \Lambda\gamma\|u\|_6^2$$

em que Λ não depende de V_0 ou u, dependendo apenas de β.

Demonstração. De fato, para tanto, seja u solução fraca de ($\mathcal{C}$), considere os conjuntos

$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in \mathbb{R}^3; u^4 \leqslant n^2\}, \\ B_n &= \mathbb{R}^3 \backslash A_n. \end{aligned}$$

De então, defina $v_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por

$$v_n = \begin{cases} u^5, & \text{em } A_n \\ n^2 u, & \text{em } B_n. \end{cases}$$

Desse modo, $v_n u \leqslant u^6$. Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^3} v_n^6 \mathrm{d}x = \int_{A_n} (u^5)^6 \mathrm{d}x + \int_{B_n} (n^2 u)^6 \mathrm{d}x \leqslant n^{12} \int_{A_n} u^6 \mathrm{d}x + n^{12} \int_{B_n} u^6 \mathrm{d}x < \infty.$$

Por outro lado, ao definirmos $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h_n(t) = t \min\{t^4, n^2\}$, vemos que $h_n \circ u = v_n$, com

$$h_n'(t) = \begin{cases} 5t^4 & \text{se } t^4 \leqslant n^2, \\ n^2 & \text{se } n^2 < t^4. \end{cases} \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}.$$

Logo $h_n' \in L^\infty(\mathbb{R})$, pelo Lema A.3.2, $v_n = h \circ u \in W(\mathbb{R}^3)$ e

$$\nabla v_n = h'(u)\nabla u = \begin{cases} 5u^4 \nabla u & \text{em } A_n, \\ n^2 \nabla u & \text{em } B_n. \end{cases} \tag{4.33}$$

Em particular, pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.1),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_i v_n|^2 \mathrm{d}x &= \int_{A_n} |5u^4 \partial_i u|^2 \mathrm{d}x + \int_{B_n} |n^2 \partial_i u|^2 \mathrm{d}x \\ &\leqslant 25n^4 \int_{A_n} |\partial_i u|^2 \mathrm{d}x + n^4 \int_{B_n} |\partial_i u|^2 d < \infty,\end{aligned}$$

e,

$$\int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) v_n^2 \mathrm{d}x = \int_{A_n} V_\lambda(x)(u^5)^2 \mathrm{d}x + \int_{B_n} V_\lambda(x)(n^2 u)^2 \mathrm{d}x \leqslant n^4 \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) u^2 \mathrm{d}x < \infty.$$

Segue que $v_n \in E$. Então, ao usar v_n como função teste em ($\mathcal{C}$),

$$\int_{\mathbb{R}^3} [\nabla u \nabla v_n + V_0(x) u v_n] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} H(x,u) v_n \mathrm{d}x,$$

obtemos, de (4.33),

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v_n \mathrm{d}x = 5 \int_{A_n} u^4 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + n^2 \int_{B_n} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x. \tag{4.34}$$

Em diante, consideraremos

$$\omega_n = \begin{cases} u^3 & \text{em } A_n, \\ nu & \text{em } B_n. \end{cases}$$

Novamente pelo Lema A.3.2,

$$\nabla \omega_n = \begin{cases} 3u^2 \nabla u & \text{em } A_n, \\ n \nabla u & \text{em } B_n. \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \omega_n|^2 \mathrm{d}x = 9 \int_{A_n} u^4 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + n^2 \int_{B_n} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x. \tag{4.35}$$

Observando que $\omega_n^2 = u v_n$ em $\mathbb{R}^3$, por (4.34) e (4.35), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[|\nabla \omega_n|^2 + V_0(x) \omega_n^2 \right] \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} [\nabla u \nabla v_n + V_0(x) u v_n] \mathrm{d}x = 4 \int_{A_n} u^4 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x. \tag{4.36}$$

Mas por (4.34), vale

$$5 \int_{A_n} u^4 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v_n \mathrm{d}x,$$

que relacionando a (4.36), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} [|\nabla \omega_n|^2 + V_0(x) \omega_n^2] \mathrm{d}x \leqslant \frac{9}{5} \int_{\mathbb{R}^3} [\nabla u \nabla v_n + V_0(x) u v_n] \mathrm{d}x. \tag{4.37}$$

mas, desde que u é solução fraca de ($\mathcal{C}$), então

$$\int_{\mathbb{R}^3} [|\nabla \omega_n|^2 + V_0(x) \omega_n^2] \mathrm{d}x \leqslant \frac{9}{5} \int_{\mathbb{R}^3} H(x,u) v_n \mathrm{d}x \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^3} H(x,u) v_n \mathrm{d}x.$$

Observe que pelas hipóteses estabelecidas

$$H(x,u)v_n \leqslant \left(\alpha|u|^5|v_n| + \beta|u||v_n|\right)\gamma = \left(\alpha u^4\omega_n^2 + \beta\omega_n^2\right)\gamma.$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^3}[|\nabla\omega_n|^2 + V_0(x)\omega_n^2]\mathrm{d}x \leqslant 2\alpha\gamma\int_{\mathbb{R}^3}u^4\omega_n^2\mathrm{d}x + 2\beta\gamma\int_{\mathbb{R}^3}\omega_n^2\mathrm{d}x$$

como $\left(\frac{6}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{6}{2}\right)^{-1} = 1$, pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.1),

$$\int_{\mathbb{R}^3}[|\nabla\omega_n|^2 + V_0(x)\omega_n^2]\mathrm{d}x \leqslant 2\alpha\gamma\|u\|_6^4\|\omega_n\|_6^2 + 2\beta\gamma\int_{\mathbb{R}^3}\omega_n^2x.$$

Agora, na definição de $\mathcal{S} = \inf\{\|\nabla v\|_2^2; v\in\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)(\mathbb{R}^3), \|v\|_6 = 1\}$, ao fazer $v = \frac{\omega_n}{\|\omega_n\|_6}$ obtemos

$$\mathcal{S}\|\omega_n\|_6^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\omega_n|^2\mathrm{d}x,$$

donde,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\|\omega_n\|_6^2 &\leqslant \int_{\mathbb{R}^3}[|\nabla\omega_n|^2 + V_0(x)\omega_n^2]\mathrm{d}x\\ &\leqslant 2\alpha\gamma\|u\|_6^4\|\omega_n\|_6^2 + 2\beta\gamma\int_{\mathbb{R}^3}\omega_n^2x,\end{aligned}$$

como, por hipótese do teorema, $2\alpha\|u\|_6^4 \leqslant \frac{\mathcal{S}\gamma^{-1}}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\|\omega_n\|_6^2 &\leqslant \frac{\mathcal{S}}{2}\|\omega_n\|_6^2 + 2\beta\gamma\int_{\mathbb{R}^3}\omega_n^2x\\ &\Rightarrow \|\omega_n\|_6^2 \leqslant 2\beta\mathcal{S}^{-1}\gamma\int_{\mathbb{R}^3}\omega_n^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Disso segue

$$\left(\int_{A_n}|\omega_n|^6\right)^{\frac{2}{6}} \leqslant \|\omega_n\|_6^2 \leqslant 2\beta\mathcal{S}^{-1}\gamma\int_{\mathbb{R}^3}\omega_n^2\mathrm{d}x,$$

qual combinado ao fato que $|\omega_n| = |u|^3$ em A_n e observando que $\omega_n^2 = uv_n \leqslant |u|^6$ em $\mathbb{R}^3$, nos permite afirmar

$$\left(\int_{A_n}|u|^{18}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{6}} \leqslant 2\beta\mathcal{S}^{-1}\gamma\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x,$$

equivalentemente,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{18}\chi_{A_n}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{18}} \leqslant (2\beta\mathcal{S}^{-1}\gamma)^{\frac{1}{6}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}. \tag{4.38}$$

Pela definição de A_n, temos

$$\liminf_n |u(x)|^{18}\chi_{A_n}(x) = |u(x)|^{18},$$

como $|u(x)|^{18}\chi_{A_n}(x) \geqslant 0$, amparado pelo Teorema de Fatou (Teorema A.2.3), segue de (4.38)

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{18}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{18}} \leqslant (2\beta\mathcal{S}^{-1}\gamma)^{\frac{1}{6}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{6}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}} < \infty. \tag{4.39}$$

Portanto $u \in L^{18}(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)$, que implica em $h = \alpha|u|^5 + \beta|u| \in L^{\frac{18}{5}}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Logo, dado $z \in \mathbb{R}^3$, considerando $\gamma \geqslant 1$, observe que pelo Teorema A.2.2

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_2(z)} |h|^{\frac{18}{5}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{18}} &= \left(\int_{B_2(z)} (\alpha|u|^5 + \beta|u|)^{\frac{18}{5}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{18}} \\ &\leqslant \gamma\left(2^{\frac{18}{5}}\int_{B_2(z)} (\alpha|u|^5)^{\frac{18}{5}} + (\beta|u|)^{\frac{18}{5}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{18}}\end{aligned}$$

novamente, à vista do Teorema A.2.2, podemos melhorar a estimativa para

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_2(z)} |h|^{\frac{18}{5}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{18}} &\leqslant 2^{\frac{23}{18}}\gamma\left[\left(\int_{B_2(z)} (\alpha|u|^5)^{\frac{18}{5}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{18}} + \left(\int_{B_2(z)} (\beta|u|)^{\frac{18}{5}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{18}}\right] \\ &= 2^{\frac{23}{18}}\gamma\left[\alpha\left(\int_{B_2(z)} |u|^{18}\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{18}} + \beta\left(\int_{B_2(z)} |u|^{\frac{18}{5}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{18}}\right]\end{aligned}$$

Ainda, como $|B_2(z)| < \infty$ e $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-1} + \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-1} = 1$, segue do Teorema de Hölder (Teorema A.2.1)

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_2(z)} |u|^{\frac{18}{5}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{18}} &\leqslant \left[\left(\int_{B_2(z)} |u|^{6}\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{5}} |B_2(z)|^{\frac{2}{5}}\right]^{\frac{5}{18}} \\ &= |B_2(z)|^{\frac{1}{9}}\left(\int_{B_2(z)} |u|^{6}\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

em que $|B_2(z)|^{\frac{1}{9}}$ é uma constante que independe de z. Portanto,

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_2(z)} |h|^{\frac{18}{5}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{18}} &\leqslant C\gamma\left[\alpha\left(\int_{B_2(z)} |u|^{18}\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{18}} + \beta\left(\int_{B_2(z)} |u|^{6}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\right] \\ &\leqslant C\gamma\left[\alpha\|u\|_{18}^5 + \beta\|u\|_6\right],\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$ que não depende de $z \in \mathbb{R}^3$. Logo, utilizando da mesma notação descrita no Lema A.3.1,

$$[h]_{\frac{18}{5}} = \sup_{z\in\mathbb{R}^3}\left(\int_{B_2(z)} |h|^{\frac{18}{5}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{18}} \leqslant C\gamma\left[\alpha\|u\|_{18}^5 + \beta\|u\|_6\right]$$

disso, fazendo uso de (4.39) e da hipótese $4\alpha\|u\|_6^4 \leqslant \mathcal{S}\gamma^{-1}$, segue

$$
\begin{aligned}
[h]_{\frac{18}{5}} &\leqslant C\gamma\left[\alpha(2\beta\mathcal{S}^{-1}\gamma)^{\frac{5}{6}}\|u\|_6^5 + \beta\|u\|_6\right]\\
&= C\gamma\left[\alpha(2\beta\mathcal{S}^{-1}\gamma)^{\frac{5}{6}}\|u\|_6^4 + \beta\right]\|u\|_6\\
&\leqslant C\gamma\left(\frac{\mathcal{S}\gamma^{-1}}{2}(\beta\mathcal{S}^{-1}\gamma)^{\frac{5}{6}} + \beta\right)\|u\|_6\\
&= C\gamma\left(\frac{\mathcal{S}^{\frac{1}{6}}\beta^{\frac{5}{6}}\gamma^{-\frac{1}{6}}}{2} + \beta\right)\|u\|_6
\end{aligned}
$$

Desse modo, ao considerar $\gamma > 1$,

$$
[h]_{\frac{18}{5}} \leqslant C\gamma\left(\frac{\mathcal{S}^{\frac{1}{6}}\beta^{\frac{5}{6}}}{2} + \beta\right)\|u\|_6 \leqslant C_*\gamma(\beta^{\frac{5}{6}} + \beta)\|u\|_6 < \infty
$$

para alguma constante $C_* > 0$ que não depende de β e nem de γ. Consequentemente, pelo Lema A.3.1 existe $C > 0$, relacionado apenas a $q = \frac{18}{5}$ tal que

$$
\|u\|_\infty \leqslant C[h]_{\frac{18}{5}}\|u\|_6 \leqslant C\left(C_*\gamma(\beta^{\frac{5}{6}} + \beta)\|u\|_6\right)\|u\|_6.
$$

Portanto, existe uma constante Λ que depende apenas de β tal que

$$
\|u\|_\infty \leqslant \Lambda\gamma\|u\|_6^2.
$$

□

Teorema 4.2.1. *Seja u a solução fraca do problema auxiliar ($\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma}$) então*

$$
\|u\|_\infty \leqslant C\gamma^{\frac{p-4}{p-2}},
$$

para alguma constante $C > 0$ que não depende de R da definição da função $g(x,s)$.

Demonstração. De fato, seja $u = u_R$ a solução fraca de ($\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma}$) discutida acima para $R > R_1$ da definição da função $g(x,u)$, com R_1 da hipótese (V_2). Observando que

$$
\frac{1}{M(\|\nabla u\|_2^2)}J'(u)u = \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{M(\|\nabla u\|_2^2)}\left(\int_{\mathbb{R}^3}V_\lambda u^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}g(x,u)u\mathrm{d}x\right) = 0,
$$

isto é, u satisfaz

$$
-\Delta u + \frac{V_\lambda(x)}{M(\|\nabla u\|_2^2)}u = \frac{1}{M(\|\nabla u\|_2^2)}g(x,u), \tag{$\mathcal{C}^*$}
$$

no sentido fraco. Denotando

$$
H(x,s) = \frac{1}{M(\|\nabla u\|_2^2)}g(x,s),
$$

então H é uma função Carathéodory. Além disso, por considerar $\gamma > 1$, pela hipótese (g_4), Observação 2.1.1 e pelo fato de M ser não decrescente em $[0, \infty)$, temos que

$$\begin{aligned}|H(x,s)| &\leqslant \frac{1}{M(\|\nabla u\|_2^2)}\Big(|s|^5 + \gamma|f(s)|\Big) \leqslant \frac{1}{M(\|\nabla u\|_2^2)}\Big(|s|^5 + (|s| + C_{\varepsilon_0}|s|^5)\gamma\Big)\\ &\leqslant M_0^{-1}(1 + C_{\varepsilon_0})\gamma|s|^5 + M_0^{-1}|s|\gamma.\end{aligned}$$

Considere $\alpha = M_0^{-1}(1 + C_{\varepsilon_0})$ e $\beta = M_0^{-1}$, então, conforme evidenciado em (4.32),

$$4\alpha\|u\|_6^4 \leqslant \mathcal{S}\gamma^{-1}.$$

Portanto, as hipóteses da Proposição 4.2.1 são satisfeitas para a equação $(\mathcal{C}^*)$. Consequentemente, existe $\Lambda > 0$ que não depende de R da definição da função $g(x, s)$, e está relacionada apenas a $\beta = M_o^{-1}$ tal que

$$\|u\|_\infty \leqslant \Lambda\gamma\|u\|_6^2.$$

Ainda, em vista da Proposição 3.4.1 e a estimativa (4.31), podemos reformular a estimativa acima como

$$\|u\|_\infty \leqslant C\gamma^{\frac{p-4}{p-2}},$$

para alguma constante C relacionada a p mas que não depende de R da definição da função $g(x, s)$. Finalizando a demonstração do teorema. $\square$

Nos resta demonstrarmos que a solução $u \in E$ do problema auxiliar $(\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma})$, a partir de certos valores γ e λ, satisfaz

$$f(u) \leqslant \frac{V_\lambda(x)}{p}u \text{ em } |x| \geqslant R. \tag{4.40}$$

Para que assim ocorra a equivalência entre as funções $g(x, u)$ e $f(u)$, tornando u solução fraca do problema principal $(\mathcal{P}_{\lambda,\gamma})$. Para tanto, afirmamos

Lema 4.2.1. *Seja u solução fraca do problema $(\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma})$ associado a R, então, $u \in C^{1,\alpha_u}_{loc}(\mathbb{R}^3)$, para algum $\alpha_u \in (0, 1)$.*

Demonstração. De fato, seja $u \in E$ solução fraca do problema $(\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma})$, associado a R, segue

$$M(\|\nabla u\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla\phi \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}V_\lambda(x)u\phi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}h_\gamma\phi \mathrm{d}x, \quad \forall\phi \in E.$$

em que $h_\gamma = u^{2^*-1} + \gamma f(u)$. Sendo $u \in E$ solução não trivial,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla\phi \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^3}\frac{V_\lambda(x)}{M(\|\nabla u\|_2^2)}u\phi \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}\frac{g(x,u)}{M(\|\nabla u\|_2^2)}\phi \mathrm{d}x, \quad \forall\phi \in E.$$

Então, u é solução fraca do problema

$$-\Delta v = H_u, \tag{$\mathcal{P}_u$}$$

em que $H_u = \dfrac{1}{M(\|\nabla u\|_2^2)}(g(\cdot, u) - V_\lambda(x)u)$. Ainda, pelo Lema 2.1.2 e do fato da função M ser não decrescente,

$$|H_u(x)| \leqslant M_0^{-1}\left[|u|^5 + \gamma\left(\varepsilon|u| + C_\varepsilon|u|^{p-1}\right) - V_\lambda(x)u\right],$$

segue que $H_u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^3)$, pois, além de $V_\lambda \in C(\mathbb{R}^3)$, temos que, pelo Teorema 4.2.1, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Logo,

$$H_u^q \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3), \forall q \geqslant 1.$$

Então, pelo Teorema de Calderon-Zygmund (Teorema A.3.7), $u \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para todo $q > 1$. Em particular, ao considerar q grande o suficiente para que $\frac{3}{q} < 1 < 2$, segue do Teorema A.3.12,

$$u \in W^{2,q}(B_r) \hookrightarrow C^{2-\left[\frac{3}{q}\right]-1,\alpha}(\overline{B_r})$$

em que $\left[\frac{3}{q}\right] = 0$ parte inteira de $\frac{3}{q}$, portanto,

$$u \in C^{1,\alpha_u}_{loc}(\mathbb{R}^3) \text{ para algum } \alpha_u \in (0,1).$$

□

Lema 4.2.2. *Seja u solução fraca do problema ($\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma}$) associado a R, então, $u > 0$.*

Demonstração. De fato, seja $u \in E$ solução fraca do problema auxiliar e $v \in E$

$$M(\|\nabla u\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v + V_\lambda(x)uv\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)v\mathrm{d}x.$$

Considere como função teste $v = u^-$, logo

$$uu^- = \begin{cases} -(u)^2, & \text{em } [u<0], \\ 0, & \text{em } [u \geqslant 0]. \end{cases} = \begin{cases} -(u^-)^2, & \text{em } [u<0], \\ 0, & \text{em } [u \geqslant 0]. \end{cases}$$

Além de que pelo Lema A.3.3

$$\nabla u \nabla u^- = \begin{cases} -|\nabla u|^2, & \text{em } [u<0], \\ 0, & \text{em } [u \geqslant 0]. \end{cases} = \begin{cases} -|\nabla u^-|^2, & \text{em } [u<0], \\ 0, & \text{em } [u \geqslant 0]. \end{cases}$$

Que implica em

$$\begin{aligned} M(\|\nabla u\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla u^- \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)uu^-\mathrm{d}x &= M(\|\nabla u\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3} -|\nabla u^-|^2\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x)(u^-)^2\mathrm{d}x \\ &= g(x,u)u^-\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$M(\|\nabla u\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^-|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}V_\lambda(x)(u^-)^2\mathrm{d}x=0$$

como $M(s)\geqslant M_0>0$, obtemos

$$\begin{aligned}0&\geqslant\min\{M_0,1\}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^+|^2-V_\lambda(x)(u^-)^2\mathrm{d}x\right)=\min\{M_0,1\}\|u^-\|\\&\Rightarrow\|u^-\|=0.\end{aligned}$$

Portanto, $u^-=0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$. Consequentemente, sendo u uma função contínua, $u=u^+\geqslant 0$, resta demonstrarmos que $u(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}^3$. Ainda, vemos que $u\in E\cap C(\mathbb{R}^3)$ é solução fraca, no mesmo sentido do apresentado na Definição 1.0.1, para a equação

$$-\Delta w+W_\lambda(x)w=\eta_u(x)\geqslant 0$$

em que $W_\lambda(x)=\dfrac{V_\lambda(x)}{M(\|u\|_2^2)}$ e $\eta_u=\dfrac{g(\cdot,u)}{M(\|\nabla u\|_2^2)}\geqslant 0$. Defina o operador $L(w)=\Delta w+(-W_\lambda(x))w$, então

$$L(-u)=-\Delta u+W_\lambda u=\eta_u(x)\geqslant 0.$$

Suponha que exista $x_0\in\mathbb{R}^3$ tal que $u(x_0)=0$, assim, ao considerar $R>\varepsilon>0$ e $\Omega=B_R(x_0)$,

$$\inf_{x\in B_\varepsilon(x_0)}u(x)=\inf_{x\in\Omega}u(x)=0,$$

equivalentemente $\sup\limits_{x\in B_\varepsilon(x_0)}-u(x)=\sup\limits_{x\in\Omega}-u(x)=0$. Pelo Teorema A.3.15, a função u é uma constante em Ω, isto é, existe certo $c\in\mathbb{R}$ tal que $u\equiv c$ em Ω. Mas $u(x_0)=0$, assim $c=0$. Seja $\Omega_0=\{x\in\mathbb{R}^3:\ u(x)=0\}$. Então Ω_0 é fechado e dado $\xi\in\Omega_0$, pelo o que foi visto acima, existe $r_0>0$ tal que $B_{r_0}\subseteq\Omega_0$. Portanto, Ω_0 é aberto. Como $\mathbb{R}^3$ é conexo, concluímos que $\Omega_0=\mathbb{R}^3$ e consequentemente, $u=0$ em $\mathbb{R}^3$. isto implica numa contradição com o fato de que $u\neq 0$. Sendo assim, $u>0$ em $\mathbb{R}^3$. □

Lema 4.2.3. *Para qualquer $u\in E$ solução fraca do problema ($\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma}$), associado a R, segue que*

$$u(x)\leqslant\frac{R\|u\|_\infty}{|x|},\ \textit{para todo}\ |x|\geqslant R. \tag{4.41}$$

Demonstração. De fato, considere a função

$$v(x):=\frac{R\|u\|_\infty}{|x|}\ \text{para}\ x\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\},$$

uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial x_i\partial x_j}v(x)=R\|u\|_\infty\left(-\delta_{ij}|x|^{-3}+3x_ix_j|x|^{-5}\right),$$

é contínua em $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, segue que v é de classe C^2 em $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ e

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i^2} = -3|x|^{-3} + 3|x|^{-5}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0. \tag{4.42}$$

Adicionalmente, considere

$$\psi(x) = \begin{cases} (u-v)^+(x), & \text{em } |x| \geqslant R, \\ 0, & \text{em } |x| \leqslant R. \end{cases}$$

como $\partial_i v(x) = -x_i|x|^{-3}$, a existência da derivada clássica de $v(x)$ é garantida em B_ε^c, para todo $\varepsilon > 0$. Ainda, por definição, $u(x) \leqslant \|u\|_\infty$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$, ou seja, $u(x) \leqslant \|u\|_\infty$ em $\mathbb{R}^3\backslash Z = Z^c$ para algum conjunto Z de medida nula. No entanto, ao considerar $x_0 \in Z$, como $|Z| = 0$, em particular, $\text{int}(Z) = \emptyset$, equivalentemente $\overline{Z^c} = \mathbb{R}^3$, existe $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $x_n \to x_0$, mas vale $u(x_n) \leqslant \|u\|_\infty$ e sendo u uma função contínua (devido ao Lema 4.2.1), podemos assegurar que $u(x_0) \leqslant \|u\|_\infty$. Concluindo que para todo $0 < |x| \leqslant R$ temos $u(x) \leqslant v(x)$, logo, $(u-v)^+(x) = 0$ em B_R. Desse modo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \psi \partial_i \varphi \mathrm{d}x &= \int_{B_R^c} (u-v)^+ \partial_i \varphi \mathrm{d}x = \int_{B_R^c} (u-v)^+ \partial_i \varphi \mathrm{d}x + \int_{B_R} (u-v)^+ \partial_i \varphi \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (u-v)^+ \partial_i \varphi \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.43}$$

Mas como,

$$\int_{B_\varepsilon} |\partial_i v| \mathrm{d}x = \int_{B_\varepsilon} |-x_i|x|^{-3}| \mathrm{d}x \leqslant \int_{B_\varepsilon} |x|^{-2} \mathrm{d}x,$$

pela Fórmula da Coárea (Corolário A.1.1),

$$\int_{B_\varepsilon} |\partial_i v| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r} |x|^{-2} \mathrm{d}S \right) \mathrm{d}r = \int_0^\varepsilon r^{-2} \left(\int_{\partial B_r} \mathrm{d}S \right) \mathrm{d}r$$

Como a medida da superfície da esfera de raio r no $\mathbb{R}^3$ é $|\partial B_r| = \omega_3 r^2$ em que $\omega_3 = 4\pi$ é a medida da superfície da esfera unitária, segue que

$$\int_{B_\varepsilon} |\partial_i v|^2 \mathrm{d}x \leqslant 4\pi \int_0^\varepsilon r^{-2} r^2 \mathrm{d}r = 4\pi\varepsilon < \infty.$$

Logo, $\partial_i v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ e sua expressão representa a derivada fraca da função v. Com isso, $u - v \in W^1(\mathbb{R}^3)$ e pelo Lema A.3.3,

$$\partial(u-v)^+ = \partial_i(u-v)\chi_{[u-v]>0}.$$

Portanto, por 4.43,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi \partial_i \varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} (u-v)^+ \partial_i \varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i(u-v)\chi_{[u-v]>0} \varphi \mathrm{d}x, \tag{4.44}$$

consequentemente, a função

$$\partial_i \psi = \partial_i(u-v)\chi_{[u-v>0]}$$

expressa a derivada fraca da função ψ. Mas ainda, como para todo $0 < |x| \leqslant R$ vale $u(x) \leqslant v(x)$, ou seja, $\overline{B}_R \subseteq [\psi \leqslant 0]$, podemos reescrever a derivada fraca como

$$\partial_i \psi = \partial_i (u-v)\chi_{[u-v>0]}\chi_{\overline{B}_R^c} = \begin{cases} \partial_i(u-v), & \text{se } x \in [u>v] \cap \overline{B}_R^c, \\ 0, & \text{se } x \in [u \leqslant v] \cap \overline{B}_R^c, \\ 0, & \text{se } |x| \leqslant R. \end{cases}$$

Ainda, observe que pela Fórmula da Coárea (Corolário A.1.1),

$$\int_{\overline{B}_R^c} |\partial_i v|^2 \mathrm{d}x = \int_{\overline{B}_r^c} \left(x_i|x|^{-3}\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_{\overline{B}_r^c} |x|^{-4}\mathrm{d}x = \int_R^\infty \left(\int_{\partial B_r} r^{-4}\mathrm{d}S\right) \mathrm{d}r.$$

Como a medida da superfície da esfera de raio r no $\mathbb{R}^3$ é $|\partial B_r| = \omega_3 r^2$ em que $\omega_3 = 4\pi$ é a medida da superfície da esfera unitária, segue que

$$\int_{\overline{B}_R^c} |\partial_i v|^2 \mathrm{d}x \leqslant 4\pi \int_R^\infty r^{-4} r^2 \mathrm{d}r = \frac{4\pi}{R}.$$

Que implica em $\partial_i \psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ além de $\psi \in L^6(\mathbb{R}^3)$. Desse modo, $\psi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ e $\psi|_{\overline{B}_R^c} \in \mathcal{D}^{1,2}(\overline{B}_R^c)$. Assim, existe $(\varphi_k) \subseteq C_0^\infty(\overline{B}_R^c)$ tal que $\varphi_k \to \psi$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\overline{B}_R^c)$. Observe que por $v \in C^2(B_R^c)$ e $\Delta v = 0$, pela Primeira Identidade de Green (Teorema A.1.9)

$$0 = \int_{\overline{B}_R^c} \varphi_k \Delta v \mathrm{d}x = -\int_{\overline{B}_R^c} \nabla\varphi_k \nabla v \mathrm{d}x.$$

Ainda, como $\nabla\varphi_k \to \nabla\psi$ em $L^2(\overline{B}_R^c)$, segue

$$\lim_k \int_{\overline{B}_R^c} \nabla\varphi_k \nabla v \mathrm{d}x = \int_{\overline{B}_R^c} \nabla\psi\nabla v \mathrm{d}x, \tag{4.45}$$

pois, em uso da Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema A.3.1) e Desigualdade Hölder (Teorema A.2.1),

$$\begin{aligned} \left| \int_{\overline{B}_R^c} \nabla\psi\nabla v - \nabla\varphi_k \nabla v \mathrm{d}x \right| &\leqslant \int_{\overline{B}_R^c} |\nabla\psi - \varphi_k| \, |\nabla v| \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \|\nabla\psi - \nabla\varphi_k\|_{L^2(\overline{B}_R^c)} \|\nabla v\|_{L^2(\overline{B}_R^c)} \to 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 = \int_{\overline{B}_R^c} \varphi_k \Delta v \mathrm{d}x = -\int_{\overline{B}_R^c} \nabla\varphi_k \nabla v \mathrm{d}x \to -\int_{\overline{B}_R^c} \nabla\psi\nabla v \mathrm{d}x,$$

ou seja,

$$\int_{\overline{B}_R^c} \nabla\psi\nabla v \mathrm{d}x = 0. \tag{4.46}$$

Agora, observe que

$$\nabla\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{em } B_R \cup [u \leqslant v] \\ \nabla(u-v), & \text{em } [u>v] \end{cases},$$

segue,

$$|\nabla\psi(x)|^2 = \begin{cases} 0 = \langle\nabla(u-v), 0\rangle = \nabla(u-v)\nabla\psi(x), & \text{em } B_R \cap [u \leqslant v] \\ |\nabla(u-v)|^2 = \nabla(u-v)\nabla\psi(x), & \text{em } [u > v] \end{cases}$$

ou seja,

$$|\nabla\psi|^2 = \nabla(u-v)\nabla\psi \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

Desde que u é solução fraca do problema ($\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma}$) e $\nabla\psi = 0$ em $|x| \leqslant R$, por (4.46),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(u-v)\nabla\psi(x)\mathrm{d}x = \int_{B_R^c} \nabla u\nabla\psi - \nabla v\nabla\psi \mathrm{d}x = \int_{B_R^c} \nabla u\nabla\psi \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{M(\|\nabla u\|_2^2)} \int_{B_R^c} \left(g(x,u)\psi - V_\lambda(x)u\psi\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Então, como $\psi \geqslant 0$, por definição da função g

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{1}{M(\|\nabla u\|_2^2)} \int_{B_R^c} V_\lambda(x)u\psi \mathrm{d}x,$$

ainda, pela definição da ψ, temos que $u\psi \geqslant 0$ e, portanto, do acima

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant 0,$$

que implica em $\psi \equiv 0$. Consequentemente,

$$u(x) \leqslant v(x) = \frac{R\|u\|_\infty}{|x|}, \text{ para todo } |x| \geqslant R.$$

□

Lema 4.2.4. *Seja $u \in E$ solução obtida acima, então existe $C_0 > 0$ tal que*

$$\frac{h_\gamma(u)}{u} \leqslant C_0 \left(\frac{R}{|x|}\right)^{p-2} \gamma^{2p}$$

Demonstração. De fato, combinando Lema 2.1.2 e Lema 4.2.3

$$\begin{aligned} \frac{h_\gamma(u)}{u} &= u^4 + \gamma\frac{f(u)}{u} \leqslant u^4 + \gamma\varepsilon + \gamma C_\varepsilon |u|^{p-2} \\ &\leqslant \frac{R^4\|u\|_\infty^4}{|x|^4} + \gamma\varepsilon + \gamma C_\varepsilon \frac{R^{p-2}\|u\|_\infty^{p-2}}{|x|^{p-2}} \end{aligned}$$

De então, pelo Teorema 4.2.1, para $|x| \geqslant R$,

$$\begin{aligned} \frac{h_\gamma(u)}{u} &\leqslant \frac{R^4 C^4 \gamma^{\frac{4(p-4)}{p-2}}}{|x|^4} + \gamma\varepsilon + \gamma C_\varepsilon \frac{R^{p-2}C^{p-2}\gamma^{p-4}}{|x|^{p-2}} \\ &\leqslant \frac{R^4 C^4 \gamma^{\frac{4(p-4)}{p-2}}}{|x|^4} + \gamma\varepsilon + C_\varepsilon \frac{R^{p-2}C^{p-2}\gamma^{p-3}}{|x|^{p-2}} \end{aligned}$$

Como $\frac{4(p-4)}{p-2}, p+1 \leqslant 2p$, ao considerar $\gamma > 1$,

$$\begin{aligned}\frac{h_\gamma(u)}{u} &\leqslant \left[\frac{R^4C^4}{|x|^4} + \varepsilon + C_\varepsilon \frac{R^{p-2}C^{p-2}}{|x|^{p-2}}\right]\gamma^{2p}\\ &= \left(\frac{R}{|x|}\right)^{p-2}\left[C^4\left(\frac{R}{|x|}\right)^{6-p} + \varepsilon + C_\varepsilon C^{p-2}\right]\gamma^{2p}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{h_\gamma(u)}{u} \leqslant \left(\frac{R}{|x|}\right)^{p-2}\left[C^4 + \varepsilon + C_\varepsilon C^{p-2}\right]\gamma^{2p}, \quad \forall |x| \geqslant R.$$

Obtendo o resultado ao definir $C_0 = C^4 + \varepsilon + C_\varepsilon C^{p-2}$, tendo considerado $\gamma > 1$. □

Em posse do resultado acima, estamos aptos a demonstrar o principal resultado da dissertação.

Teorema 4.2.2. *Suponha que $V_1 - V_4$, $M_1 - M_3$ e $f_1 - f_5$ são satisfeitos e $p \in (4,6)$. Então, existe $\gamma^* > 0$ tal que para todo $\gamma \geqslant \gamma^*$ existe $\lambda^* = \lambda^*(\gamma) > 0$ tal que $\mathcal{P}_{\lambda,\gamma}$ possui solução para todo $\lambda \geqslant \lambda^*$.*

Demonstração. De fato, considere λ^* suficientemente grande ao ponto que seja válido o Lema 4.2.3 e os resultados associados. Pela hipótese (V_3),

$$\liminf_{|x|\to\infty} |x|^{p-2}V(x) = a > 0.$$

Da definição de lim inf, para $a/2 > 0$ existe $R_* > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|x| > R_* &\Rightarrow \left|a - |x|^{p-2}V(x)\right| < \frac{a}{2}\\ &\Rightarrow |x|^{p-2}V(x) > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0\\ &\Rightarrow V(x) > \frac{a}{2|x|^{p-2}}\end{aligned} \tag{4.47}$$

Daí, para u solução fraca do problema auxiliar ($\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma}$) associado à $R \geqslant R_*$ e

$$\begin{cases}\gamma \geqslant \gamma^*,\\ \lambda \geqslant \frac{2C_0}{a}R^{p-2}\gamma^{2p} \geqslant \lambda^*.\end{cases}, \tag{4.48}$$

com C_0 dado no Lema 4.2.4 e γ^* o suficientemente grande que faça valer os resultados apresentados. Assim, como $V_\lambda(x) = Z(x) + \lambda V(x) \geqslant \lambda V(x)$, segue de (4.47) que

$$\frac{V_\lambda(x)}{p} \geqslant \lambda\frac{V(x)}{p} \geqslant \frac{2C_0}{a}R^{p-2}\gamma^{2p}V(x) \geqslant C_0\left(\frac{R}{|x|}\right)^{p-2}\gamma^{2p} \geqslant \frac{h_\gamma(u)}{u}, \text{ para todo } |x| \geqslant R.$$

Portanto, sob essas considerações, pela definição da função g vinculada a R, segue que

$$g(x,u) = h_\gamma(u) = u^{2^*-1} + \gamma f(u). \tag{4.49}$$

Consequentemente, sob as condições de consideradas, a solução $u \in E$ obtida é solução do problema principal

$$-M\left(||u||_2^2\right)\Delta u + V_\lambda u = u^{2^*-1} + \gamma f(u).$$

Finalizando a demonstração do teorema. $\square$

Referências Bibliográficas

ALVES, C. O.; SOUTO, M. A. S.; SOARES, S. H. M. Schrödinger-poisson equations without ambrosetti-rabinowitz condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011. Citado na página 18.

AMBROSETTI, A.; PRODI, G. *A primer of nonlinear analysis*. New York: Cambridge University Press, 1993. Citado na página 82.

BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: Wiley Intersciencel, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 85, 86 e 102.

BIEZUNER, R. J. *Notas de Aula: Análise Funcional*. [S.l.]: Universidade Federal de Minas Gerais, 2009. Citado na página 92.

BIEZUNER, R. J. *Notas de Aula: Equações Diferenciais Parciais I/II*. [S.l.]: Universidade Federal de Minas Gerais, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 88, 89 e 90.

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA., E. *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 88.

BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Universitext, 2011. Citado 8 vezes nas páginas 86, 87, 88, 89, 90, 91, 94 e 102.

BREZIS, H.; BROWDER, F. Partial differential equations in the 20th century. *Advances in Mathematics*, v. 135, n. 1, p. 76–144, 1998. ISSN 0001-8708. Citado na página 13.

EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. 2. ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 91.

EVANS, L. C. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. New York: CRC Press, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 86 e 107.

FOLLAND, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. New York: Wiley Intersciencel, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 100 e 101.

GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. New York: Springer, 1998. Citado 5 vezes nas páginas 65, 87, 90, 94 e 95.

ISNARD, C. *Introdução à Medida e Integração*. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. Citado na página 82.

JOST, J. *Partial Differential Equations*. [S.l.]: Springer, 2012. Citado na página 89.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014. Citado na página 83.

LIMA, R. F. *Topologia e Análise no Espaço* $\mathbb{R}^N$. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 83.

LIONS, P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I. *Rev. Mat. Iberoam.*, v. 1, n. 1, p. 145–201, 1985. ISSN 0213-2230. Citado na página 107.

MARCHI, R. Schrödinger equations with asymptotically periodic terms. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 145, n. 4, p. 745–757, 2015. Citado na página 91.

PAULA, E. W. de. Uma introdução às equações diferenciais parciais: As séries de fourier e a equação de ondas. 2019. Citado na página 13.

SILVA, P. C. d. *As desigualdades elementares e suas aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Brasil, 2019. Citado na página 86.

STROMBERG, K. R. *Introduction to Classical Real Analysis*. Belmont, Califórnia: Wadsworth International Group and Prindle, 1981. Citado na página 84.

Ó, J. M.; SOUTO, M.; UBILLA, P. Stationary kirchhoff equations involving critical growth and vanishing potential. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, EDP Sciences, v. 26, 2020. Citado na página 17.

Apêndices

APÊNDICE A – Principais resultados usados

A.1 Cálculo Diferencial em Espaços de Banach

Definição A.1.1. *Sejam $\Omega \subseteq X$ aberto e $F : \Omega \longrightarrow Y$. Dizemos que F é Gâteaux diferenciável em $a \in \Omega$ se existe $A \in L(X, Y)$ tal que para todo $h \in X$*

$$\frac{F(a + \varepsilon h) - F(a)}{\varepsilon} \to Ah$$

quando $\varepsilon \to 0$. [(AMBROSETTI; PRODI, 1993), Definition 1.7 p. 12.]

A função A é unicamente determinada e denotada por $d_G F(a)$

Teorema A.1.1. *Suponha que $F : \Omega \longrightarrow Y$ é Gâteaux diferenciável no aberto Ω. Se se a função $F_G : \Omega \to \mathcal{L}(X; Y)$ dada por $u \to d_G F(u)$ é contínua, então, F é Fréchet diferenciável e as derivadas coincidem, ou seja, $dF(u) = d_G F(u)$.*

Demonstração. Ver [(AMBROSETTI; PRODI, 1993), Theorem 1.9, p. 14]. □

Teorema A.1.2. ***(Teorema da Mudança de Variável na Integração)*** *Seja $\Omega, A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ conjuntos abertos e $\varphi : A \to B$ um difeomorfismo de classe C^1 tal que $\varphi(A) \subseteq \Omega$. Então*

$$f \in L^1(\Omega) \text{ se, e somente se, } x \mapsto |det(\varphi'(x))| f(\varphi(x)) \in L^1(A).$$

Neste caso,

$$\int_{\varphi(A)} f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(\varphi(x))|det(\varphi'(x))|\mathrm{d}x.$$

Demonstração. Ver [(ISNARD, 2018), Teorema 11.14, p.193]. □

Teorema A.1.3. ***(Regra da Cadeia)*** *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^N$ e $V \subseteq \mathbb{R}^M$ conjuntos abertos. Dadas aplicações $f : U \to V$ e $g : V \to \mathbb{R}^P$, se f é diferenciável em $x \in U$ e g é diferenciável em $f(x) \in V$, então $g \circ f : U \to \mathbb{R}^P$ é diferenciável em x e*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Demonstração. Ver [(LIMA, 2015), Regra da Cadeia, p. 193]. □

Teorema A.1.4. ***(Teorema de Bolsano-Weierstrass)*** *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^N$ possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Ver [(LIMA, 2014), Teorema 2, p.217]. □

Teorema A.1.5. ***(Teorema de Weierstrass)*** *Toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ definida em um compacto $K \subseteq \mathbb{R}^N$ atinge seu máximo e mínimo em K.*

Demonstração. Ver [(LIMA, 2015), Teorema de Weierstrass, p.139]. □

Teorema A.1.6. ***(Teorema do Valor Intermediário)*** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num conjunto conexo $X \subseteq \mathbb{R}^N$. Se existem $a, b \in X$ e $d \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) \leqslant d \leqslant f(b)$ então, existe $c \in X$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Ver [(LIMA, 2015), Teorema do Valor Intermediário p.95]. □

Teorema A.1.7. ***(Teorema do Valor Médio)*** *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no segmento fechado $[a, a+h] \subseteq U$ e diferenciável em $(a, a+h)$. Então, existe $t \in (0, 1)$, tal que*

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+th)h.$$

Demonstração. Ver [(LIMA, 2015), Teorema do Valor Médio 7 p. 146]. □

Teorema A.1.8. ***(Fórmula da Integração por Partes)*** *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado com fronteira de classe C^1. Se $u, v \in C^1(\overline{U})$, então*

$$\int_U \partial_i uv dx = -\int_U u\partial_i v dx + \int_{\partial U} uv\eta_i dS,$$

em que v é o vetor normal unitário exterior ao elemento de superfície dS e $\frac{\partial u}{\partial v} = v \cdot \nabla u$.

Demonstração. Ver [(EVANS, 2010), Theorem 2, p. 712]. □

Teorema A.1.9. ***(Primeira Identidade de Green)*** *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado com fronteira de classe C^1. Se $u, v \in C^2(\overline{U})$, então*

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_U v\Delta u dx + \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial v} v dS,$$

em que v é o vetor normal unitário exterior ao elemento de superfície dS e $\frac{\partial u}{\partial v} = v \cdot \nabla u$.

Demonstração. Ver [(EVANS, 2010), Theorem 3 (ii), p. 712]. □

Corolário A.1.1. ***(Fórmula da Coárea: Integração de Funções Radiais)*** *Uma função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é dita ser uma função radial se existe uma função $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \phi(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Se $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é qualquer função estendida não negativa Lebesgue mensurável, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \omega_N \int_0^\infty \phi(r)r^{N-1}dr,$$

em que ω_N representa o volume da bola unitária no $\mathbb{R}^N$,

$$\omega_N = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{(\frac{N}{2})!}, & \text{se } n > 0 \text{ é par,} \\ \frac{2(2\pi)^{\frac{(n-1)}{2}}}{n!!}, & \text{se } n > 0 \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. Ver [(STROMBERG, 1981), Exercise 4, p. 393]. □

Lema A.1.1. ***(Princípio da subsequência)*** *Seja (M, d) um espaço métrico e $(x_n) \subseteq M$. Então $x_n \to x$ se, e somente se, para toda $(x_{n_{k,1}}) \subseteq (x_n)$ subsequência existe uma subsequência $(x_{n_{k,2}}) \subseteq (x_{n_{k,1}})$ tal que $x_{n_{k,2}} \to x$ em M.*

Demonstração. De fato, sejam $(x_n) \subseteq M$ e $x \in M$ tais que $x_n \to x$. Para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ ocorre $x_n \in B_\varepsilon(x)$. Assim, dado $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ subsequência qualquer, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geqslant k_0$ ocorre $n_{n_k} \geqslant n_{k_0} \geqslant n_0$ e $x_{n_k} \in B_\varepsilon(x)$, portanto $x_n \to x$. Demonstraremos a recíproca por contrapositiva. Considere $(x_n) \subseteq M$ tal que $x_n \nrightarrow x$. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $n_k \geqslant n$ tal que $x_{n_k} \notin B_\varepsilon(x)$. Daí,

para $n = 1$, existe $n_1 \geqslant 1$ tal que $x_{n_1} \notin B_\varepsilon(x)$,

para $n = 2$, existe $n_2 \geqslant 2$ tal que $x_{n_2} \notin B_\varepsilon(x)$,

para $n = k$, existe $n_k \geqslant k$ tal que $x_{n_k} \notin B_\varepsilon(x)$,

e, assim, da sequência $x_n \nrightarrow x$ extraímos uma subsequência (x_{n_k}) de modo que $x_{n_k} \notin B_\varepsilon(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, não existe uma subsequência $(x_{n_{k_j}}) \subseteq (x_{n_k})$ tal que $x_{n_{k_j}} \to x$. Portanto, por contrapositiva, a recíproca fica provada, finalizando a demonstração do lema. □

A.2 Teoria da Medida e Integração

Definição A.2.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma sigma álgebra em X. Dizemos que $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função simples quando existem $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e $E_1, E_2..., E_n \in \mathcal{A}$, com $E_i \neq E_j$, para*

$i \neq j$, e $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X$ tais que

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x).$$

Lema A.2.1. *Se f é uma função não negativa de $M(X, \mathcal{A})$, então existe uma sequência de funções $(\varphi_n) \subseteq M(X, \mathcal{A})$ tais que*

a) $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \quad x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$;

b) $f(x) = \lim \varphi_n(x), \quad \forall x \in X$;

c) Onde φ_n são funções simples.

Demonstração. Ver [(BARTLE, 1995), lemma 2.11 p.13]. □

Teorema A.2.1. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$ com $p > 1$, $q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(X)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(X)} \leqslant \|f\|_{L^p(X)} \|g\|_{L^q(X)}.$$

Demonstração. Ver [(BARTLE, 1995), 6.9 Hölder Inequality p.56]. □

Corolário A.2.1. *Suponha $|\Omega| < +\infty$ e $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Então $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$, além de*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{\frac{q-p}{pq}} \|u\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall f \in L^q(\Omega).$$

Ou seja, $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ continuamente.

Demonstração. De fato, como $\frac{q}{p} \geqslant 1$ e

$$\frac{1}{\frac{q}{p}} + \frac{1}{\frac{q}{q-p}} = 1$$

Pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.1),

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega u^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \left[\left(\int_\Omega u^{p\frac{q}{p}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{q}{q-p}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{q-p}{q}}\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_\Omega u^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega 1 \mathrm{d}x\right)^{\frac{q-p}{pq}} = |\Omega|^{\frac{q-p}{pq}} \|u\|_{L^q(\Omega)} < \infty. \end{aligned}$$

□

Teorema A.2.2. ***(Teorema da Convergência Monótona)*** *Se (f_n) é uma sequência de funções não negativas em $M(X, \mathcal{A})$ que converge para f pontualmente com $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, então,*

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Demonstração. Ver [(BARTLE, 1995), lemma 4.6, p.31]. □

Teorema A.2.3. ***(Lema de Fatou)*** *Sejam $f_n : X \to [0, \infty]$ funções $\mu -$ mensuráveis para cada $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\int \liminf f_n d\mu \leqslant \int \liminf f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [(EVANS, 2015), Theorem 1.17, p.26]. □

Teorema A.2.4. ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Sejam $1 \leqslant p < \infty$, (f_n) uma sequência de funções mensuráveis e f uma função mensurável. Suponha que $f_n \to f$ μ-q.t.p. em X, além disso, que existe $g \in L^p(X)$ tal que*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \quad \mu\text{-q.t.p. em } X,$$

Então $(f_n) \subseteq L^p(X), f \in L^p(X)$ e $f_n \to f$ em L^p.

Demonstração. Ver [(BARTLE, 1995), Theorem 5.6, p. 44] □

Teorema A.2.5. ***(Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$. Então existe $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ subsequência e $h \in L^p(\Omega)$ tais que $f_{n_k} \to f$ μ-q.t.p. em Ω e $|f_{n_k}| \leqslant h$ μ-q.t.p. em Ω.*

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Theorem 4.9. p. 94]. □

Teorema A.2.6. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então $C_o^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leqslant p < \infty$.*

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Corollary 4.23. p.109]. □

Lema A.2.2. *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$,*

i) $|a+b|^p \leqslant 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p), \quad \forall p \geqslant 1,$

ii) $|a+b|^p \leqslant 2^p(|a|^p + |b|^p), \quad \forall p \geqslant 0.$

Demonstração. De fato, se $a = 0$ ou $b = 0$, ambos resultados valem. Para o caso i), considere a função $f(x) = x^p$ para $p \geqslant 1$ em $x > 0$. Neste caso, f é uma função convexa, pois $f''(x) \geqslant 0$ e pela desigualdade de Jensen (Ver (SILVA, 2019)),

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}|a| + \frac{1}{2}|b|\right) &\leqslant \frac{1}{2}f(|a|) + \frac{1}{2}f(|b|) \\ &\Rightarrow \frac{|a+b|^p}{2^p} \leqslant \frac{|a|^p + |b|^p}{2} \\ &\Rightarrow |a+b|^p \leqslant 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p). \end{aligned}$$

O caso $ii)$ segue da desigualdade triangular,

$$|a+b| \leqslant |a|+|b| \Rightarrow |a+b|^p \leqslant (|a|+|b|)^p \leqslant 2^p(|a|+|b|)^p.$$

□

Teorema A.2.7. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega f v d\mu = 0 \quad \forall v \in C_o^\infty(\Omega).$$

Então $f = 0$ μ-q.t.p. em Ω.

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Corollary 4.24. p.110]. □

Teorema A.2.8. *Sejam $u, v \in D^{1,p}(\Omega)$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto. Se $u, v \in W^1(\Omega)$ são tais que $uv, u\partial_i v + v\partial_i u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então*

$$\partial_i(uv) = u\partial_i v + v\partial_i u.$$

Demonstração. Ver [(GILBARG; TRUDINGER, 1998), theorem 7.4 e identidade 7.18, p. 150.] □

A.3 Análise Funcional

Teorema A.3.1. ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*** *Seja E um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, x e y são linearmente dependentes.

Demonstração. Ver [(BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA., 2015), Proposição 5.12 p.105]. □

Teorema A.3.2. *Se E é um espaço vetorial munido do produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ então a função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ dada por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ é uma norma em E.*

Demonstração. Ver [(BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA., 2015), Corolário 5.1.3 p. 106]. □

Teorema A.3.3. ***(Teorema da Representação de Riesz-Fréchet)*** *Sejam $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ um espaço de Hilbert e $\varphi \in H^*$, então, existe um único $y_0 \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, y_0\rangle, \quad \forall x \in H.$$

Além disso, $\|\varphi\|_* = \|y_0\|$.

Demonstração. Ver [(BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA., 2015), Teorema 5.5.2 p. 126]. □

Teorema A.3.4. *Suponha que E é um espaço de Banach reflexivo e (x_n) é uma sequência limitada. Então existe $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ subsequência tal que $x_n \rightharpoonup x$ em E.*

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Theorem 3.18 p. 69]. □

Proposição A.3.1. *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $(f_n) \subseteq E^*$. Então*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E^*, E) \Leftrightarrow f(x) \to f(x), \quad \forall x \in E.$

ii) *Se* $f_n \to f$ *em* E^**, então,* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E^*, E^{**})$.

iii) *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E^*, E^{**})$*, então,* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup}$ *em* $\sigma(E^*, E)$.

iv) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E^*, E)$*, então,* $(\|f_n\|_*)$ *é limitada e* $\|f\|_* \leqslant \liminf \|f_n\|_*$.

v) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E^*, E)$ *e se* x_nßx *em* E*, então,* $f_n(x_n) \to f(x)$.

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Theorem 3.13 p. 63]. □

Corolário A.3.1. *Seja $1 \leqslant p < N$. Então,*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in [p, p^*],$$

é uma imersão contínua.

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Corollary 9.10 p. 281]. □

Proposição A.3.2. ***(Regra de Leibnitz)*** *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$. Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $\varphi u \in W^{k,p}(\Omega)$ e*

$$D^\alpha(\varphi u)(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi(x) D^{\alpha - \beta} u(x).$$

Demonstração. Ver [(BIEZUNER, 2010), Proposição 11.16 p. 224]. □

Teorema A.3.5. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto. Se $p \geqslant 1$ e $k < \frac{n}{p}$, então*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega),$$

é uma imersão contínua.

Demonstração. Ver [(BIEZUNER, 2010), Teorema 11.28. p. 235]. □

Proposição A.3.3. *Se $k < \frac{N}{p}$ e $p > 1$, então*

$$\mathcal{D}^{k,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

é uma imersão contínua.

Demonstração. Ver [(BIEZUNER, 2010), Proposição 11.68 p. 261]. □

Teorema A.3.6. ***(Teorema de Rellich-Kondrachov)*** *Suponha que Ω é limitado e de classe C^1. Então temos as seguintes imersões são compactas,*

$$\begin{aligned} &W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad q \in [1, p^*), \ \text{com } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, && \text{se } p < N;\\ &W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad q \in [p, \infty), && \text{se } p = N;\\ &W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}), && \text{se } p > N. \end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ é uma imersão compacta para todo p e para todo N.

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Theorem 9.16 p. 285]. □

Teorema A.3.7. ***(Teorema de Calderon-Zygmund)*** *Seja $u \in W^{1,1}(\Omega)$ uma solução fraca de $\Delta u = f$, com $f \in L^p(\Omega)$ e $1 < p < \infty$, isto é,*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \mathrm{d}x = -\int_\Omega f\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_o^\infty(\Omega).$$

Então $u \in W^{2,p}(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$, e,

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leqslant C\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\right),$$

com a constante C depedendo apenas de p, d, Ω' e Ω. Além disso,

$$\Delta u = f, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Demonstração. Ver [(JOST, 2012), Theorem 10.2.2, p. 276]. □

Teorema A.3.8. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$ valem as seguintes imersões*

$$\begin{aligned} C^{k+1}(\overline{\Omega}) &\hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),\\ C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) &\hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),\\ C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) &\hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Se Ω é limitado, então as duas últimas imersões são compactas e se Ω é convexo e limitado, todas as três imersões são compactas. Caso se Ω também seja convexo, valem duas imersões adicionais

$$\begin{aligned} C^{k+1}(\overline{\Omega}) &\hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}),\\ C^{k+1}(\overline{\Omega}) &\hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Além disso, se Ω for também limitado, então a última é uma imersão compacta.

Demonstração. Ver [(BIEZUNER, 2010), Teorema 9.6 p. 175]. □

Teorema A.3.9. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto. Se $f, g \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, então, $fg \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ e*

$$\|fg\|_{C^\alpha(\Omega)} \leqslant \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}\|g\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|g\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\|f\|_{C^\alpha(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [(BIEZUNER, 2010), Teorema 9.7 p. 177]. □

Teorema A.3.10. *Seja L um operador estritamente elíptico em um domínio limitado Ω, com $c \leqslant 0$, e seja f e os coeficientes de L limitado e pertencentes a $C^\alpha(\Omega)$. Suponha que Ω satisfaz a condição de esfera exterior em todo ponto de fronteira. Então, se φ é contínua em $\partial\Omega$, o problema de Dirichlet,*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases},$$

possui uma única solução $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [(GILBARG; TRUDINGER, 1998), Theorem 6.13 p. 106]. □

Teorema A.3.11. *Suponha Ω de classe C^1. Seja*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \text{ com } 1 \leqslant p < \infty.$$

Então as seguintes propriedades são equivalentes,

i) $u = 0$ *sobre* $\partial\Omega$,

ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Theorem 9.17 p. 288]. □

Proposição A.3.4. *Suponha que Ω é de classe C^1. Seja $u \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < +\infty$. Então, as seguintes propriedades são equivalentes*

i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$;

ii) *Existe uma constante C tal que*

$$\left|\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathrm{d}x\right| \leqslant C\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}, \quad \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N),$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$;

iii) *A função,*

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in \Omega, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases}$$

pertence a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, e, neste caso, $\partial_i \overline{u} = \overline{\partial_i u}$.

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Theorem 9.18 p. 289]. □

Teorema A.3.12. *Seja U um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$, com fronteira de classe C^1. Suponha que $u \in W^{k,p}(U)$. Então,*

i) se $k < \frac{n}{p}$, então $u \in L^q(U)$, com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Ainda,

$$\|u\|_{L^q(U)} \leqslant C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

em que a constante C depende apenas de k, p, n e U.

ii) Se $k > \frac{n}{p}$, então $u \in C^{k-\left[\frac{N}{p}\right]-1,\gamma}(\overline{U})$, e

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{N}{p}\right] + 1 - \frac{N}{p}, & \text{se } \frac{N}{p} \text{ não é inteiro,} \\ \text{Qualquer número positivo} < 1, & \text{se } \frac{N}{p} \text{ é inteiro.} \end{cases}$$

Ainda,

$$\|u\|_{C^{k-\left[\frac{N}{p}-1,\gamma\right]}(\overline{U})} \leqslant C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

em que a constante C depende apenas de k, p, N, γ e U.

Demonstração. Ver [(EVANS, 2010), Theorem 6 p.284]. □

Teorema A.3.13. ***(Teorema do Passo da Montanha)*** *Sejam E um espaço de Banach real e $I : E \to \mathbb{R}$ função contínua Fréchet-diferenciável tal que $I' : E \to E^*$ é uma função contínua ao considerar, em E, a topologia da norma e, em E^*, a topologia fraca*. Se $I : E \to \mathbb{R}$ satisfaz $I(0) = 0$ e*

i) Existem $\rho, \alpha > 0$ tais que para todo $u \in E$ com $\|u\|_E = \rho$, vale $I(u) \geqslant \rho > 0$;

ii) Existe $u_0 \in E$ com $\|u\|_E > \rho$ tal que $I(u) \leqslant 0$.

Então I admite uma sequência de Cerami no nível

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

em que

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0,1], E) : \quad \gamma(0) = 0, \|\gamma(1)\| > \rho \text{ e } I(\gamma(1)) \leqslant 0\}.$$

Ou seja, existe uma sequência (u_n) em E tal que

$$I(u_n) \to c \quad e \quad (1 + |u|)\|I'(u)\| \to 0.$$

Demonstração. Ver [(MARCHI, 2015), Theorem 2.2 p. 748]. □

Proposição A.3.5. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *então* $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{B_r^c} f \mathrm{d}x = 0$

Demonstração. De fato, dado $x \in \mathbb{R}^N$,

$$f\chi_{B_r^c}(x) \to 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \tag{A.1}$$

também $|f\chi_{B_r^c}| \leqslant |f| \in L^1(\mathbb{R}^N)$, o que implica pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.4),

$$\lim_{r\to\infty}\int_{B_r^c} f \mathrm{d}x = 0.$$

□

Definição A.3.1. *Sejam* E, F *espaços vetoriais. Dizemos que um operador linear* $T : E \to F$ *é* ***completamente contínuo*** *se* T *leva sequências fracamente convergentes em* E *em sequências convergentes em* F*. [(BIEZUNER, 2009), Definição 7.1 p. 81].*

Proposição A.3.6. *Sejam* E *um espaço reflexivo e* F *um espaço vetorial normado. Então* $T : E \to F$ *é um operador compacto se e somente se* T *é completamente contínuo.*

Demonstração. Ver [(BIEZUNER, 2009), Proposição 7.3 p. 81]. □

Proposição A.3.7. *Sejam* $(u_n) \subseteq \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ *e* $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ *tais que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$*. Então* $u_{n_k} \to u$ *em* $L^q(K)$*, para* $q \in [1, 2^*)$*.*

Demonstração. De fato, considere $(u_n) \subseteq \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \tag{A.2}$$

e $K \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto compacto, em particular, por K ser limitado, $(u_n) \subseteq L^{2^*}(K)$, que implica $(u_n) \subseteq H^1(K)$. Além disso, da convergência fraca, segue que $(\|\nabla u\|_2)$ é uma sequência limitada e, pela imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$, estabelecida na Proposição A.3.3, a sequência $(\|u_n\|_{2^*})$ é também limitada. Consequentemente, como K possui medida finita, a sequência $\left(\|u_n\|_{L^2(K)}\right)$ é também limitada, que implica na limitação da sequência $(\|u_n\|_{H^1(K)})$. Como $H^1(K)$ é reflexivo, pela Proposição A.3.4, existe $v \in H^1(K)$ e $(u_{n_k}) \subseteq (u_n)$ subsequência tal que

$$u_n \rightharpoonup v \text{ em } H^1(K) \tag{A.3}$$

Com essas considerações, dado $w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, note que $\hat{w} = w|_K \in H^1(K)$, além disso, se $\phi \in (H^1(K))^*$, temos que

$$\begin{aligned}
|\phi(\hat{w})| &\leqslant \|\phi\|_* \|\hat{w}\|_{H^1(K)} = \|\phi\|_* \left(\|\nabla\hat{w}\|_{L^2(K)} + \|\hat{w}\|_{L^2(K)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \|\phi\|_* \left(\|\nabla\hat{w}\|_{L^2(K)} + |K|^{\frac{2^*-2}{2^*2}} \|\hat{w}\|_{L^{2^*}(K)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \|\phi\|_* \left(\|\nabla\hat{w}\|_{L^2(K)} + |K|^{\frac{2^*-2}{2^*2}} \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \|\nabla\hat{w}\|_{L^2(K)}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

em que $\mathcal{S} = \inf\{\|\nabla v\|^2_{L^2(K)}; v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \text{ e } \|v\|_{L^{2^*}(K)} = 1\}$. Então,

$$|\phi(\hat{w})| \leqslant C\|w\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)},$$

em que $C = \|\phi\|_* \left(\max\{1, K|^{\frac{2^*-2}{2^*2}} \mathcal{S}^{\frac{-1}{2}}\}\right)$. Ou seja, a função

$$\begin{aligned} \hat{\phi} : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) &\to \mathbb{R} \\ w &\mapsto \hat{\phi}(w) = \phi(\hat{w}) = \phi(w|_K) \end{aligned}$$

é uma função linear e contínua, isto é, $\hat{\phi} \in \left(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)\right)^*$. Por A.2, $\overline{u} = \hat{\phi}(u_n) \to \hat{\phi}(u)$. Por outro lado, o funcional $\psi : H^1(K) \to \mathbb{R}$, dado por $\psi(u) = \phi(u|_K)$ é linear e contínuo, por A.3, vemos que $\Psi(u_n) \to \Psi(v)$, isto é, $\Phi(u_n|_K) \to \Phi(v)$. Isso implica em $\phi(v) = \phi(u|_K)$ para todo $\phi \in H^1(K)$. Logo, por definição,

$$u_{n_k}|_K \rightharpoonup u|_K \text{ em } H^1(K).$$

Portanto, pelo Teorema de Rellich-Kondrakchov,

$$u_n \to u \text{ em } L^q(K),$$

a menos de subsequência para $q \in [1, 2^*)$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. □

Proposição A.3.8. *Se $(u_n) \subseteq \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência limitada, então existe $(u_{n_k}) \subseteq (u_n)$ subsequência e $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_{n_k} \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.*

Demonstração. De fato, considere $(u_n) \subseteq \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada. Como $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço reflexivo, pelo Teorema A.3.4, existe $(u_{n_k}) \subseteq (u_n)$ subsequência e $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$, em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, em particular, pela Proposição A.3.7, $u_{n_k} \to u$ em $L^q(B_r)$ para $q \in [1, p^*)$ e $r > 0$. Daí, fixando $r = 1$, pela Recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.2.5), existe $(u_{n_{k,1}}) \subseteq u_{n_k}$ subsequência tal que $u_{n_{k,1}} \to u$ q.t.p. em B_1. Fixando $r = 2$, existe $(u_{n_{k,2}}) \subseteq (u_{n_{k,1}})$ subsequência tal que $u_{n_{k,2}} \to u$ em B_2. Repetindo o raciocínio, fixado $r = i \in \mathbb{N}$ existe $(u_{n_{k,i}})$ subsequência de $(u_{n_{k,(i-1)}})$ tal que $u_{n_{k,i}} \to u$ q.t.p. em B_i. Considerando a sequência $(a_j) = (u_{n_{j,j}})$ cujo $j-$ésimo elemento a_j é o $j-$ésimo elemento da $j-$ésima subsequência $(u_{n_{k,j}})$ formada, que possui a propriedade de $u_{n_{k,j}} \to u$ q.t.p. em B_j. Desse modo, considere $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ em que

$$S_i = \{x \in B_i : \ u_{n_{k,i}}(x) \nrightarrow u(x)\}.$$

Assim, $|S| = 0$ pois $u_{n_{k,i}} \to u$ q.t.p. em B_i e, como S_k é mensurável,

$$|S| = \left|\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i\right| \leqslant \sum_{i \in \mathbb{N}} |S_i| = 0.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^n \backslash S$ então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_i$, além disso, $u_{n_{k,i}}(x) \to u(x)$ em B_i, pois do contrário, $x \in S_i \subseteq S$ mas $x \in S^c$. Como $(a_j)_{j \geqslant k} = (u_{n_{j,j}})_{j \geqslant i}$ é uma subsequência de $(u_{n_{k,i}})$, concluímos que $u_{n_{j,j}}(x) \to u(x)$ e, portanto, como $|S| = 0$, segue que $u_{n_{j,j}} \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. □

Lema A.3.1. *Seja $b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função não mensurável e $h \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$[h]_q = \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{B_2(z)} |h|^q \mathrm{d}x \right)^{1/q} < +\infty,$$

onde $3 \leqslant N < 2q$. Suponha que $v \in E$ é uma solução fraca do problema

$$-\Delta v + b(x)v = h(x) \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Então,

$$\sup_{x \in B_1(z)} |v(x)| \leqslant C[h]_q \left(\int_{B_2(z)} |v|^{2^*} \mathrm{d}x \right)^{1/2^*}, \text{ para todo } z \in \mathbb{R}^N,$$

em que C depende apenas de q.

Demonstração. Ver [(GILBARG; TRUDINGER, 1998), Theorem 8.17 p.194]. □

A.3.1 Espaços de Sobolev e análise não linear

Teorema A.3.14. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Suponha que $1 \leqslant p < \infty$ e seja Ω um conjunto aberto e limitado. Então existe uma constante $C > 0$, que depende de Ω e p, tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular,

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} := \sum_{i=1}^N \int_\Omega \partial_i u \partial_i v \mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Define um produto interno que induz a norma $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ equivalente a norma usual de $H^1(\Omega)$.

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Corollary 9.19. p. 290]. □

Lema A.3.2. *Seja $f \in C^1(\Omega)$ tal que $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $u \in W^p(\Omega)$. Então $f \circ u \in W^1(\Omega)$ e $\nabla(f \circ u) = f'(u) \nabla u$.*

Demonstração. Ver [(GILBARG; TRUDINGER, 1998), lemma 7.5 p.151]. □

Lema A.3.3. *Seja* $u \in W^1(\Omega)$*, então* $u^+, u^-, |u| \in W^1(\Omega)$ *e*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & se\ u > 0, \\ 0, & se\ u \leqslant 0. \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0, & se\ u \geqslant 0, \\ \nabla u, & se\ u < 0. \end{cases}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u, & se\ u > 0, \\ 0, & se\ u = 0, \\ \nabla u, & se\ u < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [(GILBARG; TRUDINGER, 1998), lemma 7.6 p.152]. □

Teorema A.3.15. *Considere o operador da forma* $L_u = \partial_i(a_{ij}\partial ju + b_i(x)u) + c_i(x)\partial_i u + d(x)u$ *definido em um domínio* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$*, que satisfaz*

i) $\exists \gamma > 0, a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \gamma|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$

ii) Para alguma constante $\Lambda > 0$ *e* $v \geqslant 0$ $\sum |a_{ij}(x)|^2 \leqslant \Lambda.$

Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *satisfazendo* $L(u) \geqslant 0$ *em* Ω*. Então, se para alguma bola* $B_r \subset\subset \Omega$ *ocorre*

$$\sup_{B_r} u = \sup_{\Omega} u \geqslant 0,$$

então a função u *é uma constante em* Ω*.*

Demonstração. Ver [(GILBARG; TRUDINGER, 1998), Theorem 8.19 p.198]. □

APÊNDICE B – Regularidade das soluções

Teorema B.0.1. *Suponha* (f_1)*-*(f_5) *e* (V_1)*-*(V_3)*. Se* $u \gneq 0$ *é uma solução fracado problema auxiliar* ($\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma}$) *então* $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$*. Se além disso,* f *e* V_λ *são funções localmente Hölder contínua e* $g(x,u) = \alpha f(u) + u^{2^*-1}$*, então* $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^3)$*.*

Demonstração. De fato, seja $u \in E$ solução fraca do problema ($\mathcal{AP}_{\lambda,\gamma}$), associado a R, então

$$M(\|\nabla u\|_2^2)\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla \phi \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} V_\lambda(x) u\phi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} h_\gamma \phi \mathrm{d}x, \quad \forall \phi \in E.$$

onde $h_\gamma = u^{2^*-1} + \gamma f(u)$. Sendo $u \in E$ solução não trivial,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla \phi \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{V_\lambda(x)}{M(\|\nabla u\|_2^2)} u\phi \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(x,u)}{M(\|\nabla u\|_2^2)} \phi \mathrm{d}x, \quad \forall \phi \in E.$$

Então, u é solução fraca do problema

$$-\Delta v = H_u, \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{$\mathcal{P}_u$}$$

em que $H_u = \frac{1}{M(\|\nabla u\|_2^2)}\left(g(\cdot,u) - V_\lambda(x)u\right)$. Ainda, pelo Lema 2.1.2 e do fato da função M ser crescente,

$$|H_u(x)| \leqslant M_0^{-1}\left[|u|^5 + \gamma\left(\varepsilon|u| + C_\varepsilon|u|^{p-1}\right) + V_\lambda(x)|u|\right].$$

Pelo Teorema 4.2.1 temos que $H_u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^3)$, pois $V_\lambda \in C(\mathbb{R}^3)$. Logo,

$$H_u^q \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3), \quad \forall q \geqslant 1.$$

Então, pelo Teorema de Calderon-Zygmund (Teorema A.3.7), $u \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para todo $q > 1$. Em particular, ao considerar q grande o suficiente para que $\frac{3}{q} < 1 < 2$, segue do Teorema A.3.12,

$$u \in W^{2,q}(B_r) \hookrightarrow C^{2-\left[\frac{3}{q}\right]-1,\alpha}(\overline{B_r}),$$

onde $\left[\frac{3}{q}\right] = 0$ é a parte inteira de $\frac{3}{q}$. Portanto,

$$u \in C^{1,\alpha_u}_{loc}(\mathbb{R}^3) \text{ para algum } \alpha_u \in (0,1).$$

Com isto, vamos verificar que $u^5 \in C^{0,\alpha_u}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. De fato, usando a conhecida identidade $a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=1}^n a^{n-k}b^{k-1}\right), n \in \mathbb{N}$, com $n = 5$,

$$\begin{aligned}|u^5(x) - u^5(x)| &\leqslant |u(x) - u(y)|\left(|u^4(x)| + |u^3(x)u(y)| + |u^2(x)u^2(y)| + |u(x)u^3(y)| + |u^4(y)|\right)\\ &\leqslant 5\|u\|_\infty^4|u(x) - u(y)| \leqslant 5\|u\|_\infty^4[u]_{0,\alpha_u,K}|x-y|^{\alpha_u}.\end{aligned}$$

Apontaremos que $f \in C^{0,\beta}(I)$, onde $I = [-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$, para algum $0 < \beta < 1$, pois f é localmente Hölder contínua. Com isso, dados $x, y \in \Omega = B_r(x_0)$, para $\beta_u < \alpha_u\beta < 1$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{|f(u(x)) - f(u(y))|}{|x-y|^{\beta_u}} &\leqslant [f]_{0,\beta,I}\frac{|u(x)-u(y)|^\beta}{|x-y|^{\beta_u}} \\ &\leqslant [f]_{0,\beta,I}[u]^\beta_{0,\alpha_u,\Omega}|x-y|^{\alpha_u\beta-\beta_u} \\ &\leqslant [f]_{0,\beta,I}[u]^\beta_{0,\alpha_u,\Omega}(\mathrm{diam}(\Omega))^{\alpha_u\beta-\beta_u}\end{aligned}$$

Isto demonstra que $f(u) \in C^{0,\beta_u}(\Omega)$. também sabemos que $V_\lambda \in C^{0,\alpha_V}(\Omega)$, para algum $0 < \alpha_V < 1$. Daí, pelo Teorema A.3.8, temos que

$$f(u), V_\lambda, u^5, u \in C^{0,\alpha}(\Omega),$$

com $\alpha = \min\{\alpha_u, \alpha_V, \beta_u, \beta\}$. Desse modo, u é solução fraca de $(\mathcal{P}_u)$ com

$$H_u = \frac{1}{M(\|\nabla u\|_2^2)}\Big(u^5 + \gamma f(u) - V_\lambda(x)u\Big) \in C^{0,\alpha}(\Omega).$$

Podemos então considerar o seguinte problema

$$\begin{cases}-\Delta w = H(x) & \text{em } \Omega,\\ w = \psi & \text{sobre } \partial\Omega,\end{cases} \tag{$\mathcal{P}_w$}$$

que pelo Teorema A.3.10, possui uma única solução $w \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Por outro lado, dado $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, como u solução fraca de $(\mathcal{P}_u)$, temos que

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\phi \mathrm{d}x = \int_\Omega H(x)\phi \mathrm{d}x = \int_\Omega(-\Delta w)\phi \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla w\nabla\phi \mathrm{d}x,$$

pois $\phi = 0$ sobre $\partial\Omega$. Daí,

$$\int_\Omega \nabla(u-w)\nabla\phi \mathrm{d}x = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{B.1}$$

Mas sendo $w = u$ sobre $\partial\Omega$, então $u - w = 0$ sobre $\partial\Omega$ e, também, $u - w \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Portanto, pelo Teorema A.3.11, $u - w \in H_0^1(\Omega)$ que implica na existência de uma sequência $(\phi_k) \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|\nabla(u-w) - \nabla\phi_k\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Então, por B.1,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(u-w)\nabla(u-w)\mathrm{d}x &= \langle u-w, u-w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \lim_k \langle u-w, \phi_k\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \lim_k \int_\Omega \nabla(u-w)\nabla\phi_k = 0,\end{aligned}$$

isto é, $\|u-w\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$ que implica em $u = w \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e portanto, $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. $\square$

Teorema B.0.2. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $q > 1$. Suponha que $u \in L^p(\Omega)$ para todo $p \geqslant q$. Se existe $M > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant M, \quad \forall p \geqslant q,$$

então $u \in L^\infty(\Omega)$ e

$$\lim_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M. \tag{B.2}$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, considere

$$E = \{x \in \Omega : \quad |u(x)| \geqslant M + \varepsilon\}$$

Como,

$$(M+\varepsilon)^p \chi_E(x) \leqslant |u(x)|^p \chi_E(x), \quad \forall x \in E,$$

segue,

$$(M+\varepsilon)^p \mu(E) = (M+\varepsilon)^p \int_{\mathbb{R}^N} \chi_E d\mu \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \chi_E d\mu \leqslant \|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant M^p,$$

que implica em $|E| < +\infty$, além disso,

$$(M+\varepsilon)|E|^{\frac{1}{p}} \leqslant M, \quad \forall p \geqslant q.$$

Consequentemente $|E| = 0$, pois, do contrário, caso $0 < |E| < +\infty$, fazemos $p \to \infty$ na desigualdade acima e obtemos a contradição $M + \varepsilon \leqslant M$ para todo $\varepsilon > 0$. Consequentemente, vemos que

$$|u(x)| \leqslant M + \varepsilon, \quad \text{q.t.p. em } x \in \Omega \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Portanto $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M$. Agora, dado $\delta > 0$, considere,

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; |u(x)| \geqslant \|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \delta\}.$$

Como

$$\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \delta\right)^p \chi_{\Omega_\alpha}(x) \leqslant |u(x)|^p \chi_{\Omega_\alpha}(x), \quad \forall x \in E,$$

segue que

$$\begin{aligned} \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \delta\right)^p |\Omega_\alpha| &= \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \delta\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\Omega_\delta} d\mu \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \chi_{\Omega_\delta} d\mu \leqslant \|u\|^p_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

o que implica em $|\Omega_\delta| < \infty$,

$$\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \delta\right) (|\Omega_\alpha|)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall p \geqslant q.$$

Uma vez que $\lim_{p\to\infty} |\Omega_\alpha|^{1/p} = 1$, obtemos

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \delta \leqslant \liminf_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Como $\delta > 0$ foi arbitrário, podemos concluir

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \liminf_{p} \|u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{B.3}$$

Além disso, para $p > q$, temos

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^{p-q}|u|^q d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega \|u\|^{p-q}_{L^\infty(\Omega)}|u|^q d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|^{\frac{p-q}{p}}_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^{\frac{q}{p}}_{L^q(\Omega)}.$$

Daí,

$$\limsup_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{B.4}$$

Portanto, por (B.3) e (B.4), concluímos que

$$\lim_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M.$$

$\square$

APÊNDICE C – Princípio de Concentração de Lions

Considere X um espaço topológico, definimos

- $C_c(X) = \{f \in C(X) : Supp(f) \text{ é compacto}\}$;
- $C_o(X) = \{f \in C(X) : \forall \varepsilon > 0, [|f| \geqslant \varepsilon] \text{ é compacto}\}$,

onde $Supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$. Se $f \in C_oX()$, dizemos que f é uma função que se anula no infinito. Por [(FOLLAND, 1999), Proposition 4.35 p. 132], se X é um espaço de Housdorff localmente compacto, então

$$C_o(X) = \overline{C_c(X)}^{\|\cdot\|_\infty}.$$

Além disso $(C_o(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Por outro lado, seja $\mu : \mathcal{B}_\tau \to [0, \infty]$ uma medida de Borel em $X \subseteq \mathbb{R}^N$ e $E \subseteq X$ um subconjunto de Borel. A medida μ é dita outer regular em E se [(FOLLAND, 1999), cap. 7 p. 212]

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supseteq E, U \text{ aberto}\}, \tag{C.1}$$

e inner regular se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ compacto}\}. \tag{C.2}$$

Dizemos que μ é regular se esta for outer e inner regular. A medida de Borel μ é chamada medida de Radon em X se é finita em todo conjunto $K \in \mathcal{B}_\tau$ compacto, outer regular em $E \in \mathcal{B}_\tau$ e inner regular em todo $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto. E dita medida de Radon com sinal se é uma medida com sinal tal que suas variações positiva e negativa são medidas de Radon. Denotamos,

$$M(X) = \left\{\mu : \mathcal{B}_\tau \to \overline{\mathbb{R}}; \quad \mu \text{ é uma medida de Radon com sinal}\right\}.$$

Além disso, seja $\|\cdot\| : M(X) \to \mathbb{R}$ dado por $\|\mu\| = |\mu|(X)$, em que $|\mu|$ representa a variação total de μ, então, $(M(X), \|\cdot\|)$ é um espaço normado. Com isso, enunciamos,

Proposição C.0.1. *Seja X um espaço de Housdorff localmente compacto, tal que todo aberto é $\sigma -$ compacto. Então toda medida de Borel $(\mu : \mathcal{B}_\tau \to [0, \infty])$ finita em conjunto compacto é regular, e, portanto, uma medida de Radon.*

Demonstração. Ver [(FOLLAND, 1999), Theorem 7.8 p. 217]. □

Teorema C.0.1. *Seja X um espaço de Housdorff localmente compacto. Seja $\mu \in M$ e considere o funcional $I_\mu : C_o(X) \to \mathbb{R}$ dado por $I_\mu(f) = \int_X f d\mu$. Seja $\Phi : M(X) \to (C_o(X))^*$, dada por $\Phi(\mu)(f) = I_\mu(f)$ para $f \in C_o(X)$. Então Φ é um isomorfismo isométrico.*

Demonstração. Ver [(FOLLAND, 1999), Theorem 7.17 p. 223]. □

Teorema C.0.2. *Seja $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ não negativa e $\Psi : C_o(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\Psi(f) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi f \mathrm{d}x.$$

Se $\mu \in M(\mathbb{R}^N)$ é a medida associada a função Ψ através do isomorfismo estabelecido em Teorema C.0.1, ou seja, $\Phi(\mu) = \Psi$, então, $\mu(E) = \displaystyle\int_E \varphi \mathrm{d}x$ para todo $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^N}$.

Demonstração. De fato, inicialmente observe que as funções de $C_o(\mathbb{R}^N)$ são funções limitadas, pois, para $\varepsilon > 0$ qualquer, sendo f contínua e $A_\varepsilon = [|f| \geqslant \varepsilon]$ compacto, segue que f é limitada em A_ε, além de, naturalmente, $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A_\varepsilon^c$. Desse modo, $C_o \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e, portanto,

$$\Psi(f) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi f \mathrm{d}x \leqslant \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \mathrm{d}x < +\infty,$$

garantindo a boa definição da função Ψ. Considere $\mu_0 : \mathcal{L}_{\mathbb{R}^N} \to \mathbb{R}$ dada por $\mu_0(E) = \int_E \varphi \mathrm{d}x$. Então $\mu_0 \in M(\mathbb{R}^N)$. Como $\Phi : M(\mathbb{R}^N) \to \left(C_o(\mathbb{R}^N)\right)^*$ é um isomorfismo, basta provarmos

$$\Phi(\mu)(f) = \Psi(f), \quad \forall\ f \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

Ou seja, que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi f \mathrm{d}x$, para tanto, seja $h = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ uma função simples, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi h \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n a_i \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \chi_{E_i} \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n a_i \int_{E_i} \varphi \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n a_i \mu_0(E_i),$$

que implica, por definição de integral em relação a medida μ para funções simples,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi h \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n a_i \mu_0(E_i) = \int_{\mathbb{R}^N} h d\mu_0. \tag{C.3}$$

Logo, ao considerar $f \in M(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^N})$ não negativa, do Lema A.2.1, existe (f_n) uma sequência de funções simples e não negativas que convergem pontualmente para f, além de $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $n \in \mathbb{N}$. Daí, observando que $0 \leqslant (\varphi f_n)(x) \leqslant (\varphi f_{n+1})(x)$, pelo Teorema da Convergência Monótona (Teorema A.2.2), em conjunto a $C.3$, segue,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi f_n \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu_0 &\Rightarrow \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} \varphi f_n \mathrm{d}x = \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu_0 x \\ &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \varphi f \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_0, \quad \forall f \in M^+(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^N}). \end{aligned} \tag{C.4}$$

Com isso, considere $f \in C_o(\mathbb{R}^N) \subseteq M(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^N})$ qualquer. Sendo φf uma função integrável, podemos a decompor como soma de sua parte positiva e negativa. Então, já que $\varphi \geqslant 0$, segue $\varphi f = \varphi f^+ - \varphi f^-$, como por [(BARTLE, 1995)], $f^+, f^- \in M^+(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^N})$, daí, por C.4,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi f \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi f^+ - \varphi f^- \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f^+ d\mu_0 - \int_{\mathbb{R}^N} f^- d\mu_0 = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_0,$$

Portanto,

$$\Psi(f) = \Phi(\mu_0)(f), \quad \forall f \in C_o(\mathbb{R}^N).$$

Ou seja, $\Phi(\mu_0) = \Psi$, com $\mu_0(E) = \displaystyle\int_E \varphi \mathrm{d}x$. Finalizando a demonstração do teorema. □

Proposição C.0.2. *Seja E um espaço de Bannach separável e $(f_n) \subseteq E^*$ limitada. Então, existe $(f_{n_k}) \subseteq (f_n) \subseteq E^*$ subsequência que converge em $\sigma(E^*, E)$, isto é, existe $f \in E^*$ tal que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \textit{em } E^*. \tag{C.5}$$

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Corollary 3.30]. □

Proposição C.0.3. *Se X é um espaço métrico localmente compacto, $\sigma -$ compacto, então $C_o(X)$ é separável. Em particular, $C_o(\mathbb{R}^N)$ é separável.*

Observe que se $(\mu_n) \subseteq M(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência limitada, então do isomorfismo isométrico estabelecido pelo Teorema C.0.1, segue que $(\Phi(\mu_n)) \subseteq \left(C_o(\mathbb{R}^N)\right)^*$ é também uma sequência limitada. Assim, levando em conta a Proposição C.0.3 e aplicando a Proposição C.0.2, existe $\Phi(\mu) \in \left(C_o(\mathbb{R}^N)\right)^* \cong M(\mathbb{R}^N)$, com $\mu \in M(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\Phi(\mu_{n_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} \Phi(\mu),$$

para alguma subsequência $(\Phi(\mu_{n_k})) \subseteq (\Phi(\mu_n))$, ou seja,

$$\Phi(\mu_{n_k})(f) \to \Phi(\mu)(f), \quad \forall f \in C_o(\mathbb{R}^N),$$

equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_{n_k} \to \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu, \quad \forall f \in C_o(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, dados $(\mu_n) \subseteq M(\mathbb{R}^N)$ e $\mu \in M(\mathbb{R}^N)$, escrevemos $\mu_n \rightharpoonup \mu$, e indicar a convergência em medida, identificando $\Phi(\mu_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \Phi(\mu)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mu_n \rightharpoonup \mu \equiv \Phi(\mu_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \Phi(u) \text{ em } \left(C_o(\mathbb{R}^N)\right)^* \\ \equiv \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu, \quad \forall f \in C_o(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Observação C.0.1. *Em resumo, dado $(\mu_n) \subseteq M(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada, existe $\mu \in M(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\mu_{n_k} \rightharpoonup \mu \quad \textit{em medida},$$

para alguma $(\mu_{n_k}) \subseteq (\mu_n)$ subsequência.

Também chamamos atenção do fato que

$$\|\mu\|_{M(\mathbb{R}^N)} = \|\Phi(\mu)\|_* = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |\Phi(\mu)(f)| \Leftrightarrow \|\mu\| = \sup_{\substack{f \in C_o(\mathbb{R}^N) \\ \|f\|_\infty = 1}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \right|.$$

Por outro lado, considerado $(u_n) \subseteq W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada, como $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Bannach reflexivo, por Proposição A.3.4, temos que existe $(u_{n_{k,1}})$ subsequência tal que $u_{n_{k,1}} \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para algum $u_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Em particular, $(u_{n_{k,1}})$ é também uma sequência limitada. Defina $\Psi_n : C_o(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\Psi_n(f) = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p f \mathrm{d}x.$$

Conforme, discutido em Teorema C.0.2, $C_o(\mathbb{R}^N) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^N)$, e,

$$\Psi_n(f) \leqslant \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p \mathrm{d}x < \infty,$$

garantindo a boa definição das funções Ψ_n. Desta forma, como $(\Psi_n(f)) \subseteq \left(C_o(\mathbb{R}^N)\right)^*$, do isomorfismo estabelecido no Teorema C.0.1, existe $(\mu_n) \subseteq M(\mathbb{R}^N)$ em que

$$\Phi(\mu_n) = \Psi_n \Leftrightarrow \Phi(\mu_n)(f) = \Psi_n(f) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p f \mathrm{d}x.$$

Sendo,

$$\begin{aligned}
\|\mu_{n_{k,1}}\|_M = \|\Phi(\mu_{n_{k,1}})\|_* &= \sup_{\substack{f \in C_o(\mathbb{R}^N) \\ \|f\|_\infty = 1}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_{k,1}}|^p f \mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \sup_{\substack{f \in C_o(\mathbb{R}^N) \\ \|f\|_\infty = 1}} \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_{k,1}}|^p \mathrm{d}x \\
&\leqslant \|u_{n_{k,1}}\|_p^p,
\end{aligned}$$

segue que $\left(\mu_{n_{k,1}}\right)$ é uma sequência limitada em $M(\mathbb{R}^N)$, pois (u_n) o é e $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ continuamente. Daí, pela Observação C.0.1,

$$\mu_{n_{k,2}} \rightharpoonup \mu \quad \text{em medida},$$

para alguma subsequência $(\mu_{n_{k,2}}) \subseteq (\mu_{n_{k,1}}) \subseteq (\mu_n)$ e $\mu = \Phi(f_\mu)$, para alguma função $f_\mu \in \left(C_o(\mathbb{R}^N)\right)$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_{n_{k,2}} \to \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_{k,2}}|^p f \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_{n_{k,2}} \to \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \\
\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_{k,2}}|^p f \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu, \quad \forall f \in C_o(\mathbb{R}^N). \qquad \text{(C.6)}
\end{aligned}$$

Assim, seja $g \in C_c(\mathbb{R}^N) \subseteq C_o(\mathbb{R}^N)$ e K_g o suporte compacto da função g. Como $u_{n_{k,2}} \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e, pelo Teorema de Rellich-Kondrakchov (Teorema A.3.6), $W^{1,p}(B_r) \hookrightarrow L^p(B_r)$ compactamente, onde $K_g \subseteq B_r$, então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_{k,2}}|^p g \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p g \mathrm{d}x. \tag{C.7}$$

Mais ainda, por (C.6), temos que $\int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_{k,2}}|^p g \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu$, o que implica em,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p g \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu = \Phi(\mu)(g), \quad \forall g \in C_c(\mathbb{R}^N).$$

Mais geralmente, considere $f \in C_o(\mathbb{R}^N)$, como $C_o(\mathbb{R}^N) = \overline{C_c(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_\infty}$, existe $(g_n) \subseteq C_c(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|g_n - f\|_\infty \to 0.$$

Ou seja, $g_n \to f$ em $C_o(\mathbb{R}^N)$. Já que $\Phi(\mu) \in \left(C_o(\mathbb{R}^N)\right)^*$, então,

$$\Phi(\mu)(g_n) \to \Phi(\mu)(f) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p g_n \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu,$$

além de $\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p g_n \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p f \mathrm{d}x$, pois,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p g_n \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p f \mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p |g_n - f| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \|g_n - f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p \mathrm{d}x \to 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p f \mathrm{d}x, \quad \forall f \in C_o(\mathbb{R}^N).$$

Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_{n_{k,2}} = \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_{k,2}}|^p f \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p f \mathrm{d}x, \quad \forall f \in C_o(\mathbb{R}^N).$$

Em resumo, dada uma sequência (u_n) limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então a sequência de medidas (μ_n) associadas pelo isomorfismo isométrico, estabelecido no Teorema C.0.1, aos operadores $\Phi(u_n) = \Psi_n \in \left(C_o(\mathbb{R}^N)\right)^*$, dados por

$$\Psi_n(f) = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p f \mathrm{d}x,$$

a menos de subsequência, satisfazem

a) $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$;

b) $\mu_n \rightharpoonup \mu$ em medida em $M(\mathbb{R}^N)$, em que $\mu \in M(\mathbb{R}^N)$ é a medida associada pelo isomorfismo ao operador $\Psi \in \left(C_o(\mathbb{R}^N)\right)^*$ dado por

$$\Psi(f) = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p f \mathrm{d}x.$$

Observação C.0.2. *Observe que pelo Teorema C.0.2, temos que as medidas acima são dadas por $\mu_n(E) = \displaystyle\int_E |u_n|^p \mathrm{d}x$ e $\mu(E) = \displaystyle\int_E |u_0|^p \mathrm{d}x$ para todo n e todo $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^N}$. Nesse contexto e em outros semelhantes, é comum denotarmos as medidas do tipo $\mu(E) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \mathrm{d}x$ simplesmente por φ. O que nos confere uma conveniente simbologia para resumir o discutido acima da seguinte forma:*

Seja $(u_n) \subseteq W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada. Então, a menos de subsequência,

a) $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$;

b) $|u_n|^p \rightharpoonup |u_0|^p$ em medida em $M(\mathbb{R}^N)$, no sentido que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p f \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p f \mathrm{d}x$ para toda função $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$.

Note que não poderíamos concluir que $|u_n|^{p^*} \rightharpoonup |u_0|^{p^*}$ em medida em $M(\mathbb{R}^N)$, pois, na argumentação, utilizamos o fato de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ compactamente para concluir a convergência (C.7). Muito embora, ao considerar $(u_n) \subseteq \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada. Então, pelo Teorema A.3.4, existe $(u_{n_{k,1}}) \subseteq (u_n)$ subsequência e $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Assim, ao identificarmos as medidas (ν_n) e (μ_n), por

$$\Phi(\nu_n)(f) = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} f \mathrm{d}x, \quad \forall f \in C_o(\mathbb{R}^N),$$
$$\Phi(\mu_n)(f) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p f \mathrm{d}x, \quad \forall f \in C_o(\mathbb{R}^N),$$

segue que,

$$\|\nu_{n_{k,1}}\|_M = \|\Phi(\nu_{n_{k,1}})\|_* = \sup_{\substack{f \in C_o(\mathbb{R}^N) \\ \|f\|_\infty = 1}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_{k,1}}|^{p^*} f \mathrm{d}x \right|,$$
$$\|\mu_{n_{k,1}}\|_M = \|\Phi(\mu_{n_{k,1}})\|_* = \sup_{\substack{f \in C_o(\mathbb{R}^N) \\ \|f\|_\infty = 1}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{n_{k,1}}|^p f \mathrm{d}x \right|.$$

Então $(\nu_{n_{k,1}})$ e $(\mu_{n_{k,1}})$ são sequências limitadas pois, da convergência fraca, $(u_{n_{k,1}})$ é limitada em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Do exposto em Observação C.0.1, existem subsequências $(\nu_{n_{k,2}}) \subseteq (\nu_{n_{k,1}})$ e $(\mu_{n_{k,3}}) \subseteq (\mu_{n_{k,1}})$ que convergem em medida,

$$\nu_{n_{k,2}} \rightharpoonup \nu \quad \text{e} \quad \mu_{n_{k,3}} \rightharpoonup \mu,$$

Ou seja, a menos de subsequência,

a) $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$;

b) $|u_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu$ em medida em $M(\mathbb{R}^N)$;

c) $|\nabla u_n|^p \rightharpoonup \mu$ em medida em $M(\mathbb{R}^N)$.

Note que pelo Teorema C.0.2, $\mu_n(E) = \int_E |\nabla u_n|^p \mathrm{d}x$ e $\nu_n(E) = \int_E |u_n|^{p^*} \mathrm{d}x$ Com essa introdução, apresentamos a seguir o Segundo Lema de Concentração de Compacidade de Lions (Teorema C.0.3), que nos fornece a caracterização das funções ν e μ nos casos descritos acima.

Observação C.0.3. *A medida de Dirac $\delta_{x_0} : \mathcal{L}_{\mathbb{R}^N} \to [0, \infty], x_0 \in \mathbb{R}^N$ é dada por*

$$\delta_{x_0}(E) = \chi_E(x_0) = \begin{cases} 1, & se\ x_0 \in E, \\ 0, & se\ x_0 \notin E \end{cases}.$$

Teorema C.0.3. ***(Segundo Lema de Concentração de Compacidade de Lions)*** *Seja $(u_n) \subseteq \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ uma sequência limitada. Suponha que existem μ e ν não negativas em $M(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência,*

a) $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$;

b) $|\nabla u_n|^p \rightharpoonup \mu$ em medida em $M(\mathbb{R}^N)$;

c) $|u_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu$ em medida em $M(\mathbb{R}^N)$.

Então,

I) Existem $J \subseteq \mathbb{N}$ enumerável, $(x_j)_{j\in J} \subseteq \mathbb{R}^N$ e $(\nu_j)_{j\in J} \subseteq (0, \infty)$ tais que

$$\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j};$$

II) Além disso, existem $\mu \in (0, \infty)$ tais que

$$\mu \geqslant |\nabla u|^p + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j},$$

em que (μ_j) satisfazem $\mathcal{S}\nu_j^{\frac{p}{p^*}} \leqslant \mu_j$ para todo $j \in J$, em que

$$\mathcal{S} = \inf\left\{\|\nabla u\|_p^p : u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3), \|u\|_{p^*} = 1\right\}.$$

Em particular, $\sum_J \nu_j^{\frac{p}{p^*}} < \infty$.

III) Se $u = 0$ e $\mu(\mathbb{R}^N) \leqslant \mathcal{S}\left(\nu(\mathbb{R}^N)\right)^{\frac{p}{p^*}}$, então J é um conjunto unitário e

$$\nu = \gamma\delta_{x_0} = (\mathcal{S}\gamma^{\frac{p}{p^*}})^{-1}\mu,$$

para algum $\gamma > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. A hipótese da existência das medidas μ e ν não negativas em $M(\mathbb{R}^N)$ é garantida nas condições discutidas acima. A demonstração completa pode ser encontrada em (LIONS, 1985). □

Teorema C.0.4. *Sejam* $(\mu_n) \subseteq M(\mathbb{R}^N)$ *e* $\mu \in M(\mathbb{R}^N)$. *São equivalentes,*

i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^3} f d\mu, \quad \forall\ f \in C_c(\mathbb{R}^N),$

ii) $\mu_n(E) \to \mu(E), \quad \forall\ E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}, \quad \mu(\partial E) = 0,$

iii) $\limsup_n \mu_n(K) \leqslant \mu(K), \quad \forall\ K \subseteq \mathbb{R}^3$ *compacto,*

iv) $\mu(\Omega) \leqslant \liminf\limits_n \mu_n(\Omega), \quad \forall\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ *aberto.*

Demonstração. Ver [(EVANS, 2015), Theorem 1.40, p. 65]. □