



Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Aplicada e Estatística
Mestrado em Matemática Aplicada e Estatística



Sobre a Teoria de Regularidade Elíptica via Análise da Equação de Helmholtz em \mathbb{R}^N

Victor Rafael Santos Silva

Natal – RN

Dezembro de 2022

Victor Rafael Santos Silva

**Sobre a Teoria de Regularidade Elíptica via Análise
da Equação de Helmholtz em \mathbb{R}^N**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.
Área de Concentração: Matemática Aplicada.
Linha de Pesquisa: Análise.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Centro de Ciências Exatas e da Terra

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística

Mestrado em Matemática Aplicada e Estatística

Orientador

Prof. Dr. Diego Ferraz de Souza

Natal – RN

Dezembro de 2022

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Silva, Victor Rafael Santos.

Sobre a teoria de regularidade elíptica via análise da equação de Helmholtz em RN / Victor Rafael Santos Silva. - 2022. 153f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística. Natal, RN, 2022. Orientação: Prof. Dr. Diego Ferraz de Souza.

1. Equações diferenciais parciais elípticas - Dissertação. 2. Equação de Helmholtz - Dissertação. 3. Métodos variacionais - Dissertação. 4. Funções modificadas de Bessel - Dissertação. 5. Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg - Dissertação. I. Souza, Diego Ferraz de. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 517.956.2

Dissertação de Mestrado sob o título *Sobre a Teoria de Regularidade Elíptica via Análise da Equação de Helmholtz em \mathbb{R}^N* apresentada por **Victor Rafael Santos Silva** e aceita pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof. Dr. Diego Ferraz de Souza

Orientador

Departamento de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do
Norte

Prof. Dr. Ronaldo Freire de Lima

Departamento de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do
Norte

**Prof. Dr. José Carlos de Albuquerque
Melo Júnior**

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Pernambuco

Natal – RN
Dezembro de 2022

Aos meus pais: Jacqueline Andrade dos Santos e Reinaldo Orecic da Silva

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais, por não medirem esforços em me apoiar financeiramente e emocionalmente durante os dois anos de mestrado, tempo esse em que eu não tive bolsa de estudos.

Agradeço à Diego Ferraz, meu orientador, por ter me dado a oportunidade de estudar Análise mais a fundo. Sua paciência e forma de conduzir a orientação me fez aprender muita Matemática em um curto período de tempo.

Agradeço aos membros da banca de qualificação Esteban Pereira, Ronaldo César e Ailton Rodrigues pelas críticas construtivas, que muito melhoraram a dissertação.

Agradeço aos membros da banca de defesa José Carlos de Albuquerque e Ronaldo Freire, por se disponibilizarem a participar da minha defesa de dissertação.

Agradeço aos meus amigos de mestrado Clodomir Neto, Jefferson Rodrigues, Matheus Wingles e Tamara Tavares pelo companheirismo durante as disciplinas.

Agradeço aos meus professores de graduação, em especial, Athanasios Tsouanas por me incentivar a cursar Bacharelado em Matemática, Carlos Gomes e Ronaldo Freire pelas aulas inspiradoras e Ailton Rodrigues pelos conhecimentos passados em Análise.

Agradeço aos meus amigos de graduação Victor Medeiros, Djackson Alves, Joilson Batista, José Victor e Geilson Ferreira, por sempre acreditarem em mim e me inspirarem a estudar cada vez mais.

Agradeço à minha namorada Nayhara Ramos pelo constante apoio no decorrer do mestrado, por sempre estar ao meu lado e sempre me instigar a batalhar pelos meus sonhos.

Agradeço ao meu tio Jackson por ser uma inspiração de dedicação ao que se ama fazer e também pelas rodadas de Whisky e Irish Coffee.

Agradeço aos meus amigos do Discord, em especial Luan Carlos e Fábio Batista, por muitas vezes estarem disponíveis online durante a noite para desopilar e a Lucas Santos por me ajudar a desenhar um gráfico.

Agradeço ao meu tio Reinaldo e sua família e a família da minha namorada, por sempre me acolherem tão bem em suas casas.

Agradeço à Daniel Grilo, o secretário do PPGMAE, por sua presteza e agilidade na resolução de diversos problemas burocráticos.

Por fim, agradeço à UFRN pela excelente formação que tive durante minha graduação e mestrado.

*“In the broad light of day mathematicians
check their equations and their proofs,
leaving no stone unturned in their search for
rigour. But, at night, under the full moon,
they dream, they float among the stars and
wonder at the miracle of the heavens. They
are inspired. Without dreams there is no art,
no mathematics, no life.”*

(Michael Atiyah)

Resumo

Neste trabalho apresentamos um importante resultado de regularidade para a Equação de Helmholtz em domínios não limitados devido a C. A. Stuart e, além disso, mostramos que esse resultado pode ser usado também para regularizar soluções fracas de problemas elípticos não lineares em \mathbb{R}^N . Para alcançar nossos objetivos, será de vital importância o uso da Teoria das Funções Modificadas de Bessel, da Teoria de Calderón-Zygmund, o Teorema do Passo da Montanha e o Teorema de Schauder, assim como resultados básicos de Medida de Integração, Análise Complexa, Análise Funcional e a Teoria dos Espaços de Sobolev.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais Elípticas; Equação de Helmholtz; Métodos Variacionais; Funções Modificadas de Bessel; Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg.

Abstract

In this work we present an important regularity result for the Helmholtz Equation in unbounded domains due to C. A. Stuart and, furthermore, we show that this result can also be used to regularize weak solutions of nonlinear elliptic problems in \mathbb{R}^N . In order to achieve our goals, it will be of vital importance the use of Bessel's Modified Function Theory, Calderón-Zygmund Theory, the Mountain Pass Theorem and Schauder's Theorem, as well as basic results of Measure and Integration, Complex Analysis, Functional Analysis and the Theory of Sobolev Spaces.

Keywords: Elliptic Partial Differential Equations; Helmholtz Equation; Variational Methods; Modified Bessel Functions; Agmon-Douglis-Nirenberg Theorem.

Lista de Figuras

Figura 1 – Contorno de Hankel	45
Figura 2 – Contorno de Integração	47
Figura 3 – Função μ_R	105
Figura 4 – Função β_R	112
Figura 5 – Função η	125

Lista de símbolos

$B(a, r)$	Bola aberta de centro a e raio r .
$B[a, r]$	Bola fechada de centro a e raio r .
p^*	Expoente crítico de Sobolev, definido por $\frac{pN}{N-p}$, quando $N > p$.
$u_n \rightarrow u$	A sequência $(u_n)_{n=1}^\infty$ converge para u .
$x \cdot y$	Produto interno usual do espaço \mathbb{R}^N .
$ \cdot $	Norma usual do espaço \mathbb{R}^N .
$\bar{\Omega}$	Fecho do conjunto Ω .
$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto Ω .
$[x]$	Parte inteira de $x \in \mathbb{R}$.
$\text{Re}(z)$	Parte real do número complexo $z = a + bi$.
$\text{Im}(z)$	Parte imaginária do número complexo $z = a + bi$.
\bar{z}	Conjugado do número complexo $z = a + bi$, ou seja, $\bar{z} = a - bi$.
$ A $	Medida de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ Lebesgue mensurável.
$f = O(g)$	significa que existe uma constante $C > 0$ tal que $ f(x) \leq C g(x) $ para todo x suficientemente grande.
$f \approx g$	significa que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$.
$ f _p$	Norma usual do espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$, definida por $\left(\int_{\mathbb{R}^N} f ^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.
$\ u\ _{W^{m,p}}$	Norma usual do espaço $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, definida por $\left(\sum_{ \alpha \leq m} D^\alpha f _p^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
E^*	Dual topológico do espaço vetorial E .
$H^{-1}(\mathbb{R}^N)$	denota $(H^1(\mathbb{R}^N))^*$.
$\ F\ _{H^{-1}}$	denota $\sup_{\ F\ _{H^1}=1} F(v) $.
$X \hookrightarrow Y$	significa X está imerso em Y .
$\Gamma(z)$	Função Gama.

ω_N	denota o número $\frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$.
∇u	Gradiente da função $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $(\partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_N u)$.
Δu	Laplaciano da função $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $\sum_{i=1}^N \partial_i^2 u$.
D^α	denota o operador $\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_N^{\alpha_N}$ em que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$.
$\text{supp}(u)$	Suporte da função contínua $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.
$W(f, g)(x)$	Determinante Wronskiano.
$I_q(\rho)$	Função Modificada de Bessel de Primeira Espécie.
$(a)_m$	denota 1 se $m = 0$ e $a(a+1) \dots (a+m-1)$ se $m \in \mathbb{N}$.
${}_0F_1(\rho, a)$	Função Hipergeométrica, definida por $1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{(a)_m m!}$.
$K_q(\rho)$	Função Modificada de Bessel de Segunda Espécie.
$f \star g$	Convolução entre as funções f e g .
E_N^k	Solução fundamental da Equação de Helmholtz com parâmetro $-k^2$.
$T_k f$	denota $f \star E_N^k$.
$S_k^i f$	denota $f \star \partial_i E_N^k$.
$G_\lambda f$	Solução fraca da Equação de Helmholtz com não homogeneidade f e parâmetro λ .
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$	Espaço de Schwartz em \mathbb{R}^N .
\hat{f}	Transformada de Fourier da função f .
\check{f}	Transformada inversa de Fourier da função f .
$\ f\ _2$	Norma em $H^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$, definida por $\left(\int_{\mathbb{R}^N} (1 + \xi ^4) \hat{f}(\xi) ^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$.
$\langle u, v \rangle_V$	denota $\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv) dx$ e sob certas hipóteses define um produto interno em $H^1(\mathbb{R}^N)$.
$\ u\ _V$	Norma gerada pelo produto interno $\langle u, v \rangle_V$.
$[u]_{0,\alpha,\Omega}$	denota o $\sup \left\{ \frac{ u(x) - u(y) }{ x - y ^\alpha} : x, y \in \Omega, x \neq y \right\}$.
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	É o espaço das funções $f \in C^k(\Omega)$ tais que $D^\gamma f$ é Hölder contínua com expoente α , para todo multi-índice $ \gamma \leq k$.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Organização do Trabalho	16
2	A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ EM \mathbb{R}^N	18
2.1	Motivação, Definição e Existência de Solução Fraca	18
2.2	As Funções Modificadas de Bessel $I_q(\rho)$ e $K_q(\rho)$	23
2.3	A Solução Fundamental	53
3	TEORIA DE REGULARIDADE - L^p	66
3.1	Regularidade - $W^{1,p}$	66
3.2	Regularidade - H^2	75
3.3	Regularidade - $W^{2,p}$	100
4	REGULARIDADE PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS NÃO LINEARES	109
4.1	Descrição do Problema e Existência de Solução Fraca	109
4.2	Regularidade da Solução Fraca	117
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	133
	APÊNDICES	136
	APÊNDICE A – RESULTADOS BÁSICOS DE ANÁLISE	137
A.1	Análise no \mathbb{R}^N	137
A.2	Equações Diferenciais Ordinárias	139
	APÊNDICE B – RESULTADOS DE ANÁLISE COMPLEXA	140
B.1	Teoremas Clássicos	140
B.2	O Teorema de Hartogs e o Lema de Osgood	142
B.3	O Lema de Watson e o Método de Laplace	142
	APÊNDICE C – A FUNÇÃO GAMA	144
C.1	Definição da Função Gama	144
C.2	Propriedades Básicas da Função Gama	144
	APÊNDICE D – RESULTADOS DE MEDIDA E INTEGRA- ÇÃO	146

APÊNDICE E – RESULTADOS DE ANÁLISE FUNCIONAL	149
APÊNDICE F – ESPAÇOS DE SOBOLEV	151

1 Introdução

O estudo das Equações Diferenciais Parciais (EDPs) teve início no século XVIII a partir dos trabalhos de Euler, d'Alembert, Lagrange e Laplace como o principal modo de se estudar analiticamente os modelos das ciências físicas. A análise dos modelos físicos permanece, até os dias atuais, uma das principais motivações do constante desenvolvimento da teoria das EDPs, ver (BREZIS; BROWDER, 1998).

Apesar de seu início ter sido motivado pelas ciências naturais, o desenvolvimento dessa área não manteve suas aplicações restritas ao contexto físico e terminou se expandindo também como campo fundamental para o progresso de outros ramos da própria Matemática. Como pode ser visto em (BREZIS; BROWDER, 1998), Henri Poincaré afirmou profeticamente que diversas equações, germinadas da Física- Matemática, desempenhariam um papel fundamental na construção da própria Matemática, e essa característica foi, de fato, a mais marcante da teoria das EDPs no decorrer do século XX, ver (BREZIS; BROWDER, 1998).

Como um dos diversos exemplos do fenômeno descrito no parágrafo anterior, enfatizamos que a necessidade de um tratamento rigoroso de como estudar problemas envolvendo EDPs foi uma forte motivação para o desenvolvimento da Análise Matemática desde o início do século XX. Além disso, a partir dos anos 50 e 60, o estudo sistemático das EDPs lineares instigaram a extensão de diversas técnicas na Análise de Fourier, culminando na Teoria das Integrais Singulares (que surgiu na década de 30), a partir da Teoria de Calderón-Zygmund, como peça de grande importância no processo de regularização de soluções, como pode ser visto amplamente na literatura e também no Capítulo 3 da presente dissertação, ver (BREZIS; BROWDER, 1998).

Até 1920, quando se falava sobre soluções de EDPs, se entendia por isso soluções clássicas, ou seja, diferenciáveis à ordem da equação diferencial. Porém, muitas vezes uma candidata a solução clássica era dada a partir de um limite construído a partir de algum processo de aproximação e, portanto, diversas vezes, sua classe de diferenciabilidade não necessariamente se mantinha na passagem do limite. Ainda assim, geralmente era possível demonstrar que esse limite satisfazia algumas propriedades das soluções clássicas, como por exemplo, relações provadas a partir da multiplicação da equação por funções testes seguida por aplicação de integração por partes, ver (BREZIS; BROWDER, 1998).

Cria-se, assim, o conceito de solução fraca, que é essencialmente um conceito que envolve identidades integrais. De forma surpreendente, muitas vezes é possível demonstrar, para uma grande classe de EDPs, que na verdade soluções fracas são soluções clássicas. Essa etapa de transformação é conhecida como processo de aferição da regularidade e é o

tema central do presente trabalho.

Para confirmação dos fatos históricos aqui mencionados e para mais detalhes sobre o desenvolvimento da teoria das EDPs no decorrer século XX, recomendamos fortemente a leitura de (BREZIS; BROWDER, 1998). A seguir introduziremos o que será estudado no presente trabalho.

É em um contexto mais moderno do estudo das equações diferenciais parciais que nasce o tema desta dissertação. Precisamente, consideremos agora $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe C^2 com fronteira limitada, $f \in L^r(\Omega)$, e suponha que $u \in H_0^1(\Omega)$ seja uma solução fraca do problema (veja Definição 2.1.1)

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$. A equação acima se chama Equação de Helmholtz e foi estudada inicialmente em 1860 em conexão com fenômenos de acústica, ver (BREZIS; BROWDER, 1998). Uma importante etapa no estudo do problema acima, como já mencionado anteriormente, é a obtenção da regularidade clássica, que pode ser efetuada com a combinação do célebre Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg (ver (BREZIS, 2011) p. 316) e o Teorema de Schauder (ver (BREZIS, 2011) p. 317). Essa abordagem, porém, por consequência da aplicação do Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg de modo direto, nos restringe a trabalhar apenas em domínios limitados, sendo o caso não limitado de difícil abordagem por esse método. A partir daí, surge então o natural questionamento: Se agora considerarmos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

é possível demonstrar um resultado no espírito do Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg, que possa ser usado em conjunto com o Teorema de Schauder, para tornar o processo de obtenção da regularidade clássica semelhante ao caso onde estamos tratando com domínios limitados? Baseado em (STUART, 1997), a resposta para essa pergunta é afirmativa e como resposta enunciamos o principal resultado do presente trabalho:

Teorema 1.1. *Sejam $N \geq 2$, $p \in (2N/(N+2), 2]$ e $q \geq p$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ e se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ for uma solução fraca do problema*

$$-\Delta u + \lambda u = f,$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$, então $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$.

O objetivo principal da dissertação é, então, apresentar o resultado acima, elucidando a abordagem adotada por (STUART, 1997). Para atingirmos nosso objetivo, será necessário o uso de diversos resultados básicos de Análise Complexa, Medida e Integração

e outras teorias. Todos esses resultados, juntamente com as devidas referências, estão enunciados no apêndice da dissertação.

Um outro aspecto importante do [Teorema 1.1](#) é o seu uso para obter regularidade ótima das soluções fracas de equações não lineares. Para a exploração desse fato, reservamos o Capítulo 4 em sua totalidade ilustrando como o [Teorema 1.1](#) pode ser usado para obter resultados de regularidade das soluções fracas de problemas elípticos semilineares em \mathbb{R}^N .

Posto a motivação inicial do presente trabalho, passemos às informações mais detalhadas do que foi alcançado em cada capítulo.

1.1 Organização do Trabalho

1. No capítulo 2, definimos o conceito de solução fraca para a Equação de Helmholtz em \mathbb{R}^N , provamos a unicidade de solução fraca quando f está em uma classe bastante abrangente de funções e $\lambda < 0$. Em seguida, motivamos a introdução das Funções Modificadas de Bessel a partir de soluções radialmente simétricas da Equação Homogênea de Helmholtz e, em sequência, fazemos um estudo sistemático de tais funções especiais, culminando na definição de solução fundamental da Equação de Helmholtz e finalizando o capítulo demonstrando que é possível obter soluções clássicas para a Equação de Helmholtz (quando $f \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$), por meio de uma convolução da solução fundamental com a não homogeneidade f .
2. No capítulo 3 temos como principal objetivo obter resultados de regularidade que dizem respeito à solução fraca encontrada no segundo capítulo, mais detalhadamente:
 - Na seção Regularidade $W^{1,s}$, mostramos a relação entre a solução fraca e solução fundamental e, a partir disso, conseguimos obter, com o uso de um argumento do tipo “bootstrap”, condições para que a solução fraca da Equação de Helmholtz esteja em $W^{1,s}$ (ver [Teorema 3.1.2](#)).
 - Na seção Regularidade H^2 introduzimos noções da Teoria de Análise de Fourier a fim de demonstrar um resultado de regularidade H^2 (ver [Teorema 3.2.8](#)). Enfatizamos que, nessa seção, não foi necessário o uso da Teoria de Calderón-Zygmund.
 - Na seção Regularidade $W^{2,p}$, por meio da Teoria de Calderón-Zygmund e do [Teorema 3.1.2](#), apresentamos importantes resultados sobre a regularidade de soluções fracas da Equação de Helmholtz. (ver [Corolário 3.3.2](#) ou [Teorema 1.1](#)).
3. No capítulo 4, consideramos um problema elíptico como exemplo de aplicação dos resultados anteriormente obtidos. Baseado em ([O.ALVES; SOUTO; H.M.SOARES, 2011](#)) e ([BRAZ, 2022](#)), usamos o Método Variacional e a Teoria dos Pontos Críticos,

através da aplicação do Teorema do Passo da Montanha e do Princípio de Concentração de Compacidade, para provar a existência de solução fraca para um problema elíptico semilinear em \mathbb{R}^N . Feito isso, usando os resultados anteriores, em especial o [Teorema 1.1](#), e com auxílio da Teoria de Schauder, mostramos que a solução fraca obtida é de classe C^2 e que converge para zero, quando $|x| \rightarrow \infty$.

Por fim, advertimos que, em toda a dissertação, N será sempre um número natural maior que, ou igual a, 2. Para o estudo do caso $N = 1$, recomendamos a leitura da seção 8.4 do capítulo 8 do livro ([BREZIS, 2011](#)), em especial o exemplo 8 na página 227.

2 A Equação de Helmholtz em \mathbb{R}^N

Neste capítulo, estabeleceremos a existência e unicidade de soluções fracas para a Equação de Helmholtz (ver (1.1)), em que $\lambda < 0$ e f engloba uma classe de funções bastante abrangente. Em seguida, expomos como a solução radialmente simétrica da Equação de Helmholtz motiva o estudo das Funções Modificadas de Bessel. A partir desse estudo, definimos a solução fundamental da Equação de Helmholtz e finalizamos o capítulo demonstrando que, quando $f \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$, é possível obter solução clássica da Equação de Helmholtz ao considerar a convolução de f com a solução fundamental definida previamente.

2.1 Motivação, Definição e Existência de Solução Fraca

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (P)$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$. Suponhamos que exista $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (P), seja $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e consideremos agora a equação

$$(-\Delta u)v = \lambda uv + fv,$$

e notemos que faz sentido integrar sobre todo o \mathbb{R}^N a expressão acima. De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(\Delta u)v| dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \right) \right| dx = \int_{\text{supp}(v)} \left| \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \right) \right| dx.$$

Usando agora o fato de que o suporte da função v é compacto e cada derivada parcial de segunda ordem de u é contínua, podemos afirmar com exatidão via o Teorema de Weierstrass (ver Teorema A.1.1), que Δu é limitado no suporte de v por uma constante $M > 0$. Sabendo também que v é uma função limitada, digamos por $K > 0$, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(\Delta u)v| dx \leq MK \int_{\text{supp}(v)} 1 dx = MK |\text{supp}(v)| < +\infty,$$

pois a medida de Lebesgue de todo conjunto compacto é finita. De maneira semelhante se prova que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |uv| dx < +\infty,$$

já que toda função diferenciável é contínua e portanto podemos aplicar a mesma estratégia que acabamos de usar. O fato de que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |fv| dx < +\infty,$$

segue diretamente da limitação da função v e da hipótese de que f é localmente integrável. Das considerações acima, vemos então que a equação

$$-\int_{\mathbb{R}^N} (\Delta u)v dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda u + f)v dx$$

faz completo sentido.

Certamente, podemos escolher $R_v > 0$ tal que $\text{supp}(v) \subset B(0, R_v)$ de forma estrita, de modo que a identidade integral que estamos considerando se torna equivalente a

$$-\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, R_v)} (\Delta u)v dx - \int_{B(0, R_v)} (\Delta u)v dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda u + f)v dx.$$

Por ser v identicamente nula fora de $B(0, R_v)$, segue que a primeira integral do lado esquerdo da igualdade é zero. Em relação à segunda integral do lado esquerdo, notemos que, em particular, $\Delta u \in C^2(\overline{B(0, R_v)})$ e que, também em particular, $v \in C^1(\overline{B(0, R_v)})$ e que notando ademais que a bola $B(0, R_v)$ é um subconjunto aberto, limitado e suave do \mathbb{R}^N , estamos em posição de aplicar a Primeira Identidade de Green (ver [Teorema A.1.10](#)) para deduzir a seguinte equação

$$-\int_{\partial B(0, R_v)} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma + \int_{B(0, R_v)} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda u + f)v dx.$$

Relembrando a condição de que o suporte de v está estritamente contido em $B(0, R_v)$, segue que a primeira integral do lado esquerdo da identidade acima é zero. Notando também que $\nabla v(x) = 0$ quando $x \notin B(0, R_v)$, vemos que

$$\int_{B(0, R_v)} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda u + f)v dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (2.1)$$

É importante notarmos que, apesar de termos utilizado que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ para deduzirmos a igualdade (2.1), tal relação faz completo sentido com a hipótese mais abrangente de que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \cdot \nabla v| dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx = \int_{\text{supp}(v)} \left| \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx \leq \int_{\text{supp}(v)} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx$$

de onde decorre que como cada derivada parcial $\partial v / \partial x_i$ é contínua no conjunto compacto $\text{supp}(v)$, podemos limitar $\partial v / \partial x_i$, em que $i = 1, \dots, N$, por uma constante $M > 0$, e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \cdot \nabla v| dx \leq \int_{\text{supp}(v)} M \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx < +\infty,$$

onde a finitude da integral acima se verifica da seguinte forma: como $\text{supp}(v)$ é compacto e, portanto, possui medida de Lebesgue finita, e para cada $i = 1, \dots, N$, $\partial u/\partial x_i \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e em particular $\partial u/\partial x_i \in L^2(\text{supp}(v))$, então é verdade que $\partial u/\partial x_i \in L^1(\text{supp}(v))$ para cada $i = 1, \dots, N$ (ver [Teorema D.1](#)). De maneira semelhante, usando o fato de $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ser limitada e $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |uv| dx < +\infty.$$

O discutido até agora sugere a seguinte definição, a qual desempenhará um papel fundamental nesse trabalho.

Definição 2.1.1. (Solução Fraca) Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, dizemos que u é uma solução fraca do problema (P) quando $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda u + f)v dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Um resultado útil a respeito da existência de soluções fracas no sentido da [Definição 2.1.1](#) pode ser deduzido diretamente a partir das imersões de Sobolev (veja o [Apêndice F](#)) e de uma aplicação direta do Teorema da Representação de Riesz (ver [Teorema E.3](#)) para funcionais lineares limitados definidos em espaços de Hilbert, conforme o lema e o teorema seguintes:

Lema 2.1.1. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para algum $p \in [2N/(N+2), 2]$ ou $p > 1$ quando $N = 2$. Então, para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, tem-se $fv \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se definirmos*

$$F(v) = \int_{\mathbb{R}^N} f v dx \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

teremos que $F \in H^1(\mathbb{R}^N)^* = H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ e que existe uma constante $C(N, p)$, tal que

$$\|F\|_{H^{-1}} \leq C(N, p) \|f\|_p.$$

Demonstração. Pelas imersões de Sobolev (ver [Teorema F.2](#)), nós temos que

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \text{em que} \quad \begin{cases} 2 \leq q < \infty, & N = 2 \\ 2 \leq q \leq \frac{2N}{N-2}, & N \geq 3 \end{cases}$$

e portanto existe uma constante $K(N, q)$ tal que

$$\|v\|_q \leq K(N, q) \|v\|_{H^1} \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Pela [Desigualdade de Hölder](#), vemos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f v dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f v| dx \leq \|f\|_p \|v\|_{p'} \quad \text{em que} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Notemos agora que, se $N = 2$, então, por hipótese, $p > 1$ e como consequência é verdade que $p' < \infty$. Além disso, $p \leq 2$ implica $p' \geq 2$, mostrando que nesse caso a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ é válida. Já no caso em que $N \geq 3$, teremos que $2N/(N+2) \leq p$ implica que $p' \leq 2N/(N-2)$, nos revelando também que $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Logo, a partir do que acabamos de estabelecer, temos que F está bem definida. Além disso,

$$|F(v)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} f v dx \right| \leq |f|_p |v|_{p'} \leq K(N, p') \|v\|_{H^1} |f|_p,$$

em que $K(N, p')$ é uma constante que depende de N e p' e, como consequência, depende também de p . Basta agora notarmos que a cadeia de desigualdades acima nos fornece o resultado desejado. De fato, a linearidade do funcional F é clara e

$$\|F\|_{H^{-1}} = \sup_{\|v\|_{H^1}=1} |F(v)| \leq K(N, p') |f|_p,$$

finalizando a demonstração. □

Teorema 2.1.1. *Sejam $\lambda < 0$ e $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$, em que $p_i \in [2N/(N+2), 2]$, ou $p_i > 1$ se $N = 2$, para $i = 1, \dots, k$. Então, existe uma única solução fraca $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ de (P) para λ e $f = \sum_{i=1}^k f_i$. Além disso, escrevendo $u := G_\lambda f$, teremos que $u = \sum_{i=1}^k G_\lambda f_i$ e*

$$\|G_\lambda f\|_{H^1} \leq \frac{1}{\min\{1, |\lambda|\}} \sum_{i=1}^k C(N, p_i) |f_i|_{p_i}.$$

Demonstração. Para $\lambda < 0$ e $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, definimos

$$a_\lambda(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + |\lambda| uv) dx.$$

Em seguida, notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \cdot \nabla v| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| |\nabla v| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = |\nabla u|_2 |\nabla v|_2,$$

onde a primeira desigualdade decorre da [Desigualdade de Cauchy-Schwarz](#) sobre o produto interno de $L^2(\mathbb{R}^N)$ e a segunda desigualdade é consequência da [Desigualdade de Hölder](#). Notemos também que ao aplicarmos novamente a [Desigualdade de Hölder](#), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |uv| dx \leq |u|_2 |v|_2.$$

Logo

$$\begin{aligned} |a_\lambda(u, v)| &\leq |\nabla u|_2 |\nabla v|_2 + |\lambda| |u|_2 |v|_2 \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + |\lambda| \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ &= (1 + |\lambda|) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \end{aligned}$$

e portanto $a_\lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional bilinear, simétrico e limitado. Por ser verdade que

$$\begin{aligned} \min\{1, |\lambda|\} \|u\|_{H^1}^2 &= \min\{1, |\lambda|\} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \right) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + |\lambda| \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \\ &= a_\lambda(u, u) \\ &\leq \max\{1, |\lambda|\} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \right) \\ &= \max\{1, |\lambda|\} \|u\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

vemos que a_λ define um produto interno em $H^1(\mathbb{R}^N)$ cuja norma induzida $a_\lambda(u, u)^{\frac{1}{2}}$ é equivalente à norma usual $\|u\|_{H^1} = a_{-1}(u, u)^{\frac{1}{2}}$ de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, definindo

$$F_i(v) = \int_{\mathbb{R}^N} f_i v dx \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

segue pelo [Lema 2.1.1](#) que $F_i \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ para $i = 1, \dots, k$, de onde segue que $F = \sum_{i=1}^k F_i \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ com a norma usual de $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Usando agora o fato que provamos acima, de que a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$ é equivalente à norma induzida pelo produto interno a_λ , vemos que $(H^1(\mathbb{R}^N), a_\lambda(\cdot, \cdot))$ é um espaço de Hilbert e que $F \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ em relação à norma induzida por a_λ . Podemos então aplicar o Teorema da Representação de Riesz (ver [Teorema E.3](#)) ao espaço de Hilbert $(H^1(\mathbb{R}^N), a_\lambda(\cdot, \cdot))$ e ao funcional F para concluirmos que existe um único elemento $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$a_\lambda(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx + |\lambda| \int_{\mathbb{R}^N} u v dx = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} f_i v dx = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^k f_i v dx \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

ou de maneira equivalente, usando a hipótese de que $\lambda < 0$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\lambda u + \sum_{i=1}^k f_i \right) v dx \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

de onde sabendo que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, evidenciamos que $u := G_\lambda f$ é a única solução fraca do problema proposto. Como, evidentemente, podemos aplicar o Teorema da Representação de Riesz (ver [Teorema E.3](#)) da mesma maneira que fizemos acima, trocando apenas F por cada F_i , segue então que para cada $i = 1, \dots, k$, existe um único $G_\lambda f_i$, tal que

$$a_\lambda(G_\lambda f_i, v) = F_i(v) \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad i = 1, \dots, k.$$

Logo

$$\sum_{i=1}^k a_\lambda(G_\lambda f_i, v) = \sum_{i=1}^k F_i(v) = F(v) \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

e pela bilinearidade de a_λ concluímos que

$$a_\lambda \left(\sum_{i=1}^k G_\lambda f_i, v \right) = F(v) \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

nos revelando, ao usar a unicidade da solução encontrada previamente, que

$$\sum_{i=1}^k G_\lambda f_i = G_\lambda f,$$

nos restando notar, para finalizarmos a demonstração, que

$$\begin{aligned} \min\{1, |\lambda|\} \|u\|_{H^1}^2 &\leq a_\lambda(u, u) = F(u) = \sum_{i=1}^k F_i(u) \\ &\leq \sum_{i=1}^k C(N, p_i) |f_i|_{p_i} \|u\|_{H^1}, \end{aligned}$$

de onde a desigualdade desejada segue ao usarmos a notação $u := G_\lambda f$. \square

2.2 As Funções Modificadas de Bessel $I_q(\rho)$ e $K_q(\rho)$

Soluções não-triviais radialmente simétricas da Equação Homogênea de Helmholtz podem ser expressas em termos das conhecidas Funções Modificadas de Bessel. Considerando $\lambda = -k^2$ em que $k > 0$ e f como sendo identicamente nula, a Equação de Helmholtz se torna

$$\Delta u(x) - k^2 u(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (2.2)$$

Nosso objetivo com o que se segue, é demonstrar que soluções radialmente simétricas de (2.2) satisfazem uma Equação Diferencial Ordinária Modificada de Bessel (ver (2.5)) com um certo parâmetro $q \in \mathbb{Q}$.

Lema 2.2.1. *Seja $u(x) = z(r)$, em que $r = |x| > 0$, uma solução radialmente simétrica de (2.2). Nessa situação, a seguinte representação para o laplaciano é verdadeira*

$$\Delta z(r) = z''(r) + \frac{N-1}{r} z'(r).$$

Demonstração. De fato, notando que

$$r = |x| = (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{\frac{1}{2}},$$

temos, pela [Regra da Cadeia](#),

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{(x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_i}{r},$$

de onde, aplicando novamente a [Regra da Cadeia](#), temos

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} z'(r),$$

e portanto, utilizando uma terceira vez a [Regra da Cadeia](#) e também a [Regra do Quociente](#), concluímos que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = z''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + z'(r) \left(\frac{r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2} \right) = z''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + z'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right),$$

podendo assegurar a identidade desejada a partir da seguinte cadeia de igualdades

$$\begin{aligned} \Delta z(r) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} \\ &= z''(r) \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{r^2} + z'(r) \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right) \\ &= z''(r) + z'(r) \left(\frac{N}{r} - \frac{1}{r} \right) \\ &= z''(r) + \frac{N-1}{r} z'(r). \end{aligned}$$

□

O lema que acabamos de demonstrar nos diz que toda solução radialmente simétrica da equação (2.2) satisfaz a equação diferencial ordinária

$$z''(r) + \frac{N-1}{r} z'(r) - k^2 z(r) = 0 \text{ em que } r > 0. \quad (2.3)$$

Mostraremos agora que, escrevendo z de forma apropriada, a equação (2.3) assume a forma de uma Equação Modificada de Bessel, veja (2.5).

Lema 2.2.2. *Se escrevermos $z(r) = (kr)^{1-N/2} w(kr)$, a equação (2.3) assume a forma*

$$w''(\rho) + \frac{1}{\rho} w'(\rho) - \left(1 + \frac{q^2}{\rho^2} \right) w(\rho) = 0, \quad (2.4)$$

em que $\rho = kr > 0$ e $q = \frac{N}{2} - 1$.

Demonstração. Calculando a primeira e segunda derivada de z temos que

$$z'(r) = k^{1-\frac{N}{2}} \left(1 - \frac{N}{2} \right) r^{-\frac{N}{2}} w(kr) + k^{2-\frac{N}{2}} w'(kr) r^{1-\frac{N}{2}}$$

e

$$z''(r) = -k^{1-\frac{N}{2}} \left(1 - \frac{N}{2} \right) \frac{N}{2} r^{-\frac{N}{2}-1} w(kr) + 2k^{2-\frac{N}{2}} r^{-\frac{N}{2}} \left(1 - \frac{N}{2} \right) w'(kr) + k^{3-\frac{N}{2}} r^{1-\frac{N}{2}} w''(kr).$$

Logo,

$$-k^2 z(r) = -k^{3-\frac{N}{2}} r^{1-\frac{N}{2}} w(kr)$$

e também

$$\frac{N-1}{r} z'(r) = k^{1-\frac{N}{2}} \left(1 - \frac{N}{2} \right) (N-1) r^{-\frac{N}{2}-1} w(kr) + k^{2-\frac{N}{2}} w'(kr) (N-1) r^{-\frac{N}{2}},$$

e portanto, substituindo as expressões deduzidas acima na equação (2.3) e colocando em evidência w'' , w' e w respectivamente, provamos que

$$k^{3-\frac{N}{2}}r^{1-\frac{N}{2}}w''(kr) + \left[k^{2-\frac{N}{2}}(N-1)r^{-\frac{N}{2}} + 2k^{2-\frac{N}{2}}r^{-\frac{N}{2}} \left(1 - \frac{N}{2} \right) \right] w'(kr) \\ + \left[k^{1-\frac{N}{2}} \left(1 - \frac{N}{2} \right) (N-1)r^{-\frac{N}{2}-1} - k^{1-\frac{N}{2}} \left(1 - \frac{N}{2} \right) \frac{N}{2}r^{-\frac{N}{2}-1} - k^{3-\frac{N}{2}}r^{1-\frac{N}{2}} \right] w(kr) = 0.$$

Ou seja,

$$k^{3-\frac{N}{2}}r^{1-\frac{N}{2}}w''(kr) + \left[k^{2-\frac{N}{2}}(N-1)r^{-\frac{N}{2}} + 2k^{2-\frac{N}{2}}r^{-\frac{N}{2}} \left(1 - \frac{N}{2} \right) \right] w'(kr) \\ + \left\{ \left[k^{1-\frac{N}{2}} \left(1 - \frac{N}{2} \right) r^{-\frac{N}{2}-1} \right] \left(\frac{N}{2} - 1 \right) - k^{3-\frac{N}{2}}r^{1-\frac{N}{2}} \right\} w(kr) = 0.$$

De onde, ao dividir a expressão demonstrada acima por $k^{3-N/2}r^{1-N/2}$, vemos que

$$w''(kr) + \left(\frac{N-1}{kr} + \frac{2-N}{kr} \right) w'(kr) - \left[\frac{\left(\frac{N}{2} - 1 \right)^2}{(kr)^2} + 1 \right] w(kr) = 0,$$

demonstrando o resultado ao fazer $kr = \rho$ e $q = N/2 - 1$. \square

Reciprocamente

Lema 2.2.3. *Se w satisfaz a equação (2.4) então $z(r) = (kr)^{-q}w(kr)$, com $q = N/2 - 1$ satisfaz a equação (2.3).*

Demonstração. Seja $\rho = kr$. Então

$$z''(r) = k^2\rho^{-q} \left[w''(\rho) - 2q\rho^{-1}w'(\rho) + \rho^{-2}q(q+1)w(\rho) \right],$$

além disso, por ser

$$\frac{N-1}{r} = \frac{(2q+1)k}{\rho},$$

temos

$$\frac{N-1}{r}z'(r) = k^2\rho^{-q} \left[(2q+1)\rho^{-1}w'(\rho) - q(2q+1)\rho^{-2}w(\rho) \right]$$

e também

$$-k^2z(r) = k^2\rho^{-q}(-w(\rho)).$$

Somando as expressões obtidas

$$z''(r) + \frac{N-1}{r}z'(r) - k^2z(r) = k^2\rho^{-q} \left[w''(\rho) + \rho^{-1}w(\rho) - (1+q^2\rho^{-2})w(\rho) \right] = 0,$$

provando o resultado. \square

Com o objetivo de definirmos a solução fundamental para a Equação Homogênea de Helmholtz, é necessário solucionarmos a equação (2.4). Para esse fim, iremos considerar a equação (2.4) no contexto mais amplo dos números complexos e não iremos mais impor a restrição na variável q de ser da forma específica $N/2 - 1$, ou seja, no que segue q será um número complexo qualquer. Além disso, todas as operações com números complexos que consideraremos estarão levando em conta apenas o argumento principal dos números complexos envolvidos, então, por exemplo, expressões como $\rho^q = e^{q \log \rho}$ não gerarão ambiguidade pois a função \log estará sendo calculada tendo em mente apenas o seu argumento principal.

No que se segue, usaremos com frequência resultados de Análise Complexa, propriedades da Função Gama e importantes teoremas da Teoria da Medida e Integração. Para mais detalhes é recomendado a consulta dos Apêndices B, C e D respectivamente.

Começemos então multiplicando a equação (2.4) por ρ^2 para chegarmos à equação equivalente:

$$\rho^2 w''(\rho) + \rho w'(\rho) - (\rho^2 + q^2)w(\rho) = 0. \quad (2.5)$$

Desejamos agora construir uma solução de (2.5) em torno da origem da forma

$$w(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \rho^{\alpha+m},$$

onde devemos determinar α e c_m , com a condição de que $c_0 \neq 0$. Sabendo que toda série de potências convergente (no interior do seu disco de convergência) é diferenciável e que sua derivada é calculada termo a termo, vemos que

$$\begin{aligned} w'(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\alpha + m) \rho^{\alpha+m-1}, \\ w''(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\alpha + m)(\alpha + m - 1) \rho^{\alpha+m-2}, \end{aligned}$$

em que os raios de convergência de w' e w'' coincidem com o raio de convergência de w (ver Teorema B.1.4). Logo, substituindo as informações acima na equação (2.5), chegaremos na identidade

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m [(\alpha + m)^2 - q^2] \rho^{\alpha+m} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \rho^{\alpha+m+2}.$$

Igualando os respectivos coeficientes vemos que

$$\begin{aligned} c_0(\alpha^2 - q^2) &= 0, \\ c_1[(\alpha + 1)^2 - q^2] &= 0, \\ c_m[(\alpha + m)^2 - q^2] &= c_{m-2} \quad \forall m \geq 2. \end{aligned}$$

Usando a suposição que foi feita inicialmente, de que $c_0 \neq 0$, vemos claramente que $\alpha = \pm q$. Notemos agora que $(\alpha + m)^2 - q^2 = (\alpha + q + m)(\alpha - q + m)$ e, assim, se desejarmos obter

c_m a partir de c_{m-2} , devemos ter que $\alpha + q$ e $\alpha - q$ não devem ser inteiros negativos, ou seja, queremos que

$$\begin{cases} 2q \notin \mathbb{Z}_- & \text{se } \alpha = q, \\ -2q \notin \mathbb{Z}_- & \text{se } \alpha = -q. \end{cases} \quad (2.6)$$

Excluindo por agora esses casos excepcionais que q pode assumir e evidenciando que

$$(\alpha + m)^2 - q^2 = 2\alpha m + m^2 = m(2\alpha + m) \quad \forall m \geq 1,$$

vemos que $2\alpha + m \neq 0$ e portanto para $m = 1$ temos em particular que $c_1 = 0$ e pela relação de recorrência entre c_m e c_{m-2} para $m \geq 2$, concluímos que $c_m = 0$ para todo m ímpar. Provaremos agora que podemos escrever c_m a partir de c_0 sempre que $m \geq 2$ for par.

Lema 2.2.4. *Seja $m = 2k$ um inteiro par positivo. Sob as hipóteses da discussão acima, a seguinte fórmula é verdadeira*

$$c_{2k} = \frac{c_0}{4^k k! (\alpha + 1) \dots (\alpha + k)}.$$

Demonstração. Procederemos por indução finita na variável k . Para o caso base, notemos que

$$c_2 = \frac{c_0}{4\alpha + 4} = \frac{c_0}{4^1 1! (\alpha + 1)}.$$

Suponhamos agora que para $k \in \mathbb{N}$

$$c_{2k} = \frac{c_0}{4^k k! (\alpha + 1) \dots (\alpha + k)}.$$

Logo

$$\begin{aligned} c_{2k+2} &= \frac{c_{2k}}{2\alpha(2k+2) + (2k+2)^2} \\ &= \frac{c_{2k}}{4\alpha(k+1) + 4(k+1)^2} \\ &= \frac{c_{2k}}{4(k+1)(\alpha+k+1)} \\ &= \frac{c_0}{4 \cdot 4^k (k+1) k! (\alpha+1) \dots (\alpha+k) (\alpha+k+1)} \\ &= \frac{c_0}{4^{k+1} (k+1)! (\alpha+1) \dots (\alpha+k) (\alpha+k+1)}, \end{aligned}$$

onde a hipótese de indução foi usada da terceira para a quarta linha do raciocínio acima. \square

Como acabamos de determinar os possíveis valores de c_m , podemos escrever w da seguinte maneira

$$\begin{aligned} w(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \rho^{\alpha+m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} \rho^{\alpha+2m} \\ &= c_0 \rho^{\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} \rho^{\alpha} \rho^{2m} \\ &= c_0 \rho^{\alpha} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^{2m}}{4^m m! (\alpha+1) \dots (\alpha+m)} \right) \\ &= c_0 \rho^{\alpha} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{2m}}{m! (\alpha+1) \dots (\alpha+m)} \right). \end{aligned}$$

Sabendo também que $\alpha = \pm q$, vemos que w pode assumir as formas w_1 ou w_2 , onde

$$\begin{aligned} w_1(\rho) &= c_0 \rho^q \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{2m}}{m! (q+1) \dots (q+m)} \right), \\ w_2(\rho) &= c'_0 \rho^{-q} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{2m}}{m! (-q+1) \dots (-q+m)} \right), \end{aligned}$$

em que escrevemos c'_0 ao invés de c_0 na expressão de w_2 pelo fato de que o procedimento usado para obter w_2 poder ser construído sem referência alguma ao procedimento usado para obter w_1 , de modo que as constantes c_0 e c'_0 são independentes.

Quaisquer valores, que não dependam de ρ , podem ser escolhidos para assumir o lugar das variáveis c_0 e c'_0 , porém, para simplificar as expressões obtidas, definiremos estrategicamente essas constantes como sendo

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2^q \Gamma(q+1)}, \\ c'_0 &= \frac{1}{2^{-q} \Gamma(-q+1)}, \end{aligned}$$

de onde, tomando vantagem da famosa propriedade da Função Gama, a saber $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, concluímos que w_1 e w_2 podem assumir a forma mais compacta abaixo

$$\begin{aligned} w_1(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{2m+q}}{m! \Gamma(m+q+1)}, \\ w_2(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{2m-q}}{m! \Gamma(m-q+1)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Relembrando a restrição (2.6) imposta sobre a variável q , notemos que w_1 e w_2 fazem ambas sentido apenas quando $q \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

O seguinte lema determinará o raio de convergência da função w_1 .

Lema 2.2.5. *Seja q tal que $q \notin \mathbb{Z}_-$. Então w_1 é convergente para todo $\rho \neq 0$.*

Demonstração. De fato, pelo teste da razão (ver [Teorema B.1.3](#))

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{2m+2+q}}{(m+1)!\Gamma(m+2+q)} \frac{m!\Gamma(m+1+q)}{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{2m+q}} &= \left(\frac{1}{2}\rho\right)^2 \frac{m!}{(m+1)m!} \frac{\Gamma(m+1+q)}{\Gamma(m+1+q)(m+1+q)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\rho\right)^2 \frac{1}{(m+1)(m+1+q)}, \end{aligned}$$

de onde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\rho\right)^2 \frac{1}{(m+1)(m+1+q)} = 0,$$

provando que w_1 possui raio de convergência infinito, como desejado. \square

Com o intuito de nos desprendermos da condição restritiva que foi imposta na variável q , definimos a função w_1 quando $q = -n \in \mathbb{Z}_-$, em que $n \in \mathbb{N}$, como a série:

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{2m-n}}{m!\Gamma(m-n+1)}. \quad (2.8)$$

Procedendo-se como na demonstração do [Lema 2.2.5](#), pode-se mostrar que nesse novo caso o raio de convergência da série também é infinito qualquer que seja $\rho \neq 0$.

De todas essas considerações, temos a definição:

Definição 2.2.1. (*Função Modificada de Bessel de Primeira Espécie*) *Seja $q \in \mathbb{C}$, definimos a Função Modificada de Bessel de Primeira Espécie, denotada por I_q , como a função que se expressa como em (2.7), quando $q \notin \mathbb{Z}_-$, e se expressa como em (2.8), quando $q \in \mathbb{Z}_-$.*

A expressão (2.8) pode ser reescrita adotando a variável $j = m - n$. De fato, essa série indexada na variável j se torna

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{2j+n}}{(j+n)!\Gamma(j+1)}.$$

Sabendo agora que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a Função Gama generaliza o fatorial a partir da propriedade $\Gamma(n+1) = n!$, vemos, então, que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_n(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{2m+n}}{m!\Gamma(m+n+1)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{2m+n}}{m!(m+n)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{2m+n}}{\Gamma(m+1)(m+n)!} \\ &= I_{-n}(\rho), \end{aligned}$$

nos revelando que quando $q \in \mathbb{Z}$, as funções I_q e I_{-q} são linearmente dependentes. Esse fato é um obstáculo que nos impede de encontrar de imediato um sistema fundamental de soluções para a equação (2.5), entretanto, quando $q \notin \mathbb{Z}$, as funções I_q e I_{-q} são linearmente independentes, como mostraremos em breve, e portanto serão suficientes para construir um sistema fundamental de soluções da equação (2.5) nesse caso particular.

Antes de darmos o próximo passo, o seguinte teorema mostrará que, de fato, as funções I_q são soluções da equação (2.5).

Teorema 2.2.1. *Se $q \in \mathbb{C}$, então a função I_q é solução da Equação Diferencial Ordinária de Bessel Modificada para $\rho \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, qual seja,*

$$\rho^2 w''(\rho) + \rho w'(\rho) - (\rho^2 + q^2)w(\rho) = 0.$$

Demonstração. Já sabemos que I_q é uma função analítica e portanto admite derivação termo a termo. Logo

$$\begin{aligned} I_q'(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+q} \frac{(2m+q)\rho^{2m+q-1}}{m!\Gamma(m+q+1)}, \\ I_q''(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+q} \frac{(2m+q)(2m+q-1)\rho^{2m+q-2}}{m!\Gamma(m+q+1)}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \rho^2 I_q''(\rho) + \rho I_q'(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+q} \frac{\rho^{2m+q}(2m+q)^2}{m!\Gamma(m+q+1)} \\ &= q^2 I_q(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+q} \frac{4m(m+q)\rho^{2m+q}}{m!\Gamma(m+q+1)}. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\rho^2 I_q(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+q} \frac{\rho^{2(m+1)+q}}{m!\Gamma(m+q+1)},$$

e fazendo a mudança de variável $j = m + 1$, vemos que

$$\begin{aligned} \rho^2 I_q(\rho) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(j-1)+q} \frac{\rho^{2j+q}}{(j-1)!\Gamma(j+q)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j+q} 4 \frac{\rho^{2j+q}}{(j-1)!\Gamma(j+q)} \frac{j}{j} \left(\frac{j+q}{j+q}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j+q} \frac{4j(j+q)\rho^{2j+q}}{j!\Gamma(j+q+1)}. \end{aligned}$$

Assim, como não existe problema algum em trocar j por m na conclusão da cadeia de igualdades acima, segue que

$$\rho^2 I_q(\rho) + q^2 I_q(\rho) = \rho^2 I_q''(\rho) + \rho I_q'(\rho),$$

concluindo a demonstração do resultado. \square

Da teoria das equações diferenciais ordinárias é bem conhecido que se y_1 e y_2 forem duas soluções de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, então estas serão linearmente independentes se, e somente se, o determinante Wronskiano, definido por

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

nunca se anula (ver [Teorema A.2.1](#)).

Se o Wronskiano nunca se anula, então toda solução da equação diferencial pode ser expressa da forma $c_1 y_1 + c_2 y_2$ em que c_1 e c_2 são constantes dependendo da solução particular em questão (ver [Teorema A.2.2](#)). Dizemos então, que as soluções y_1 e y_2 formam um sistema fundamental de soluções.

Desejamos mostrar, que quando $q \notin \mathbb{Z}$, então $W(I_q, I_{-q})(\rho) = -2\text{sen}(\pi q)/\pi\rho$. Começemos notando que, de acordo com o [Teorema 2.2.1](#), segue

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho}(\rho I_q'(\rho)) - \left(\rho + \frac{q^2}{\rho}\right) I_q(\rho) &= 0, \\ \frac{d}{d\rho}(\rho I_{-q}'(\rho)) - \left(\rho + \frac{q^2}{\rho}\right) I_{-q}(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação acima por $I_{-q}(\rho)$, a segunda equação acima por $I_q(\rho)$ e subtraindo a primeira equação resultante da segunda equação resultante, teremos

$$\frac{d}{d\rho}(\rho I_{-q}'(\rho))I_q(\rho) - \frac{d}{d\rho}(\rho I_q'(\rho))I_{-q}(\rho) = 0,$$

que é equivalente a escrever

$$\frac{d}{d\rho}(\rho I_{-q}'(\rho))I_q(\rho) + \rho I_q'(\rho)I_{-q}'(\rho) - \rho I_q'(\rho)I_{-q}'(\rho) - \frac{d}{d\rho}(\rho I_q'(\rho))I_{-q}(\rho) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{d\rho}(\rho I_{-q}'(\rho)I_q(\rho) - \rho I_q'(\rho)I_{-q}(\rho)) = \frac{d}{d\rho}(\rho W(I_q, I_{-q}))(\rho) = 0,$$

De onde segue que existe uma constante C tal que para todo $\rho \neq 0$ (ver [Teorema B.1.1](#)),

$$W(I_q, I_{-q})(\rho) = \frac{C}{\rho}.$$

Se desejamos então calcular $W(I_q, I_{-q})(\rho)$, precisamos descobrir que valor a constante C assume. Uma das formas de concretizar essa tarefa é notar que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho W(I_q, I_{-q})(\rho) = C,$$

e investigar o limite acima.

Para facilitar o cálculo do limite exposto, definiremos uma nova classe de funções especiais e provaremos a continuidade de tais funções.

Definição 2.2.2. (Função Hipergeométrica) Definimos a função hipergeométrica ${}_0F_1(\rho, a)$ de parâmetros ρ e $a \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{0\})$ como:

$${}_0F_1(\rho, a) := 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(a)_m m!},$$

em que

$$(a)_m = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0, \\ a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1), & \text{se } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Lema 2.2.6. O raio de convergência da função ${}_0F_1(\rho, a)$ é infinito.

Demonstração. Pelo teste da razão (ver Teorema B.1.3)

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{m+1}}{(a)_{m+1}(m+1)!} \frac{(a)_m m!}{\rho^m} &= \frac{(a)_m m! \rho}{(a)_m (m+a)(m+1)m!} \\ &= \frac{\rho}{(m+a)(m+1)}, \end{aligned}$$

e como

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\rho}{(m+a)(m+1)} = 0,$$

o resultado segue. □

Podemos agora supor a fixo. Uma vez que ${}_0F_1(\rho, a)$ se expressa como uma série de potências, segue que ${}_0F_1(\rho, a)$ é diferenciável em relação a ρ e, em particular, contínua em relação a ρ , de onde, para cada a , vale a igualdade

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} {}_0F_1(\rho, a) = {}_0F_1(0, a) = 1.$$

No próximo teorema adotaremos a notação ${}_0F_1^q = {}_0F_1((\rho/2)^2, q+1)$ e ${}_0F_1^{-q} = {}_0F_1((\rho/2)^2, -q+1)$.

Teorema 2.2.2. Se $q \notin \mathbb{Z}$, então $I_q(\rho)$ e $I_{-q}(\rho)$ são linearmente independentes.

Demonstração. De acordo com o visto acima, basta mostrar que $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho W(I_q, I_{-q})(\rho) = C$, em que $C \neq 0$. Queremos a seguir tomar uso da propriedade de continuidade estabelecida sobre as funções hipergeométricas, e para isso ser feito é importante escrevermos $I_q(\rho)$ e $I_{-q}(\rho)$ a partir das funções ${}_0F_1^q$ e ${}_0F_1^{-q}$. Seja $\rho \neq 0$, segue que

$$\begin{aligned} I_q(\rho) &= \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^q}{\Gamma(q+1)} {}_0F_1^q, \\ I_{-q}(\rho) &= \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{-q}}{\Gamma(-q+1)} {}_0F_1^{-q}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} I'_q(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+q} (2m+q)\rho^{2m+q-1}}{m!(q+1)_m \Gamma(q+1)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^q \rho^{q-1}}{\Gamma(q+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} (2m+q)\rho^{2m}}{m!(q+1)_m}, \end{aligned}$$

de onde de acordo com a igualdade acima, vemos que

$$C_q(\rho) := 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m}}{(m-1)!(q+1)_m} = \frac{I'_q(\rho)\Gamma(q+1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^q \rho^{q-1}} - {}_0F_1^q q,$$

mostrando que $C_q(\rho)$ está bem definida para todo $\rho \neq 0$. Notando também que $C_q(0) = 0$, segue que para cada q , a função C_q é expressa como uma série de potências que converge para todo ρ e em particular é contínua em zero, de onde concluímos que $\lim_{\rho \rightarrow 0} C_q(\rho) = 0$.

Em suma

$$\begin{aligned} I'_q(\rho) &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^q \rho^{q-1}}{\Gamma(q+1)} (C_q(\rho) + {}_0F_1^q q), \\ I'_{-q}(\rho) &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-q} \rho^{-q-1}}{\Gamma(-q+1)} (C_{-q}(\rho) - {}_0F_1^{-q} q). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho I'_{-q}(\rho) I_q(\rho) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{{}_0F_1^q C_{-q}(\rho)}{\Gamma(q+1)\Gamma(-q+1)} - \frac{q({}_0F_1^q {}_0F_1^{-q})}{\Gamma(q+1)\Gamma(-q+1)} \right) \\ &= -\frac{q}{\Gamma(q+1)\Gamma(-q+1)}, \end{aligned}$$

e de modo semelhante

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho I'_q(\rho) I_{-q}(\rho) = \frac{q}{\Gamma(q+1)\Gamma(-q+1)}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho W(I_q, I_{-q})(\rho) &= -\frac{2q}{\Gamma(q+1)\Gamma(-q+1)} \\ &= -\frac{2q}{q\Gamma(q)\Gamma(1-q)} \\ &= -\frac{2\text{sen}(\pi q)}{\pi}, \end{aligned}$$

em que da segunda para a terceira linha usamos a conhecida fórmula da reflexão de Euler, a saber $\Gamma(q)\Gamma(1-q) = \pi/\text{sen}(\pi q)$, $q \notin \mathbb{Z}$. Concluímos o teorema evidenciando que

$$W(I_q, I_{-q})(\rho) = -\frac{2\text{sen}(\pi q)}{\pi\rho},$$

e que a expressão acima nunca se anula quando $q \notin \mathbb{Z}$. □

A seguir, trataremos o caso $q \in \mathbb{Z}$. Diferentemente do caso em que $q \notin \mathbb{Z}$, necessitamos aqui de boas propriedades, não somente em relação ρ , mas também em relação a q . Aqui será de particular importância demonstrar que, se fixarmos ρ e variarmos q , então I_q será uma função diferenciável em relação a q .

Usaremos a seguir um surpreendente resultado que diz respeito ao limite uniforme de sequências de funções complexas diferenciáveis (ver [Teorema B.1.9](#)).

Convém mencionar que esse resultado não é verdadeiro na teoria das funções de variáveis reais. De fato, pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass (ver [Teorema A.1.4](#)), toda função contínua no intervalo $[0, 1]$ pode ser aproximada uniformemente por polinômios, porém nem toda função contínua é diferenciável.

Em posse desse grande resultado, estamos prontos para demonstrar que as funções $I_q(\rho)$ são diferenciáveis em q para cada ρ fixo.

Corolário 2.2.1. *Para cada $\rho \neq 0$ fixo, a função $J_\rho(q) := I_q(\rho)$ é diferenciável.*

Demonstração. Aplicaremos o [Teorema B.1.9](#) na série de funções $J_\rho(q) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(q)$, em que $f_m(q) = (\rho/2)^{2m+q}/(m!\Gamma(m+1+q))$ para cada $m \in \mathbb{N}$. De início, notemos que cada f_m é diferenciável. Seja agora $K \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto e seja $M > 0$ tal que $|q| \leq M$ para todo $q \in K$. Provaremos que $(\sum_{m=0}^n f_m(q))_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente no subconjunto compacto K . De fato, quando $m > M - 1$, então

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_{m+1}(q)}{f_m(q)} \right| &= \frac{\left| \frac{\rho}{2} \right|^2}{|m+1||m+q+1|} \\ &\leq \frac{\left| \frac{\rho}{2} \right|^2}{|m+1||m+1-M|}, \end{aligned}$$

e portanto ao fixarmos $m_0 \in \mathbb{N}$ grande o suficiente satisfazendo $C := |\rho/2|^2/(|m_0+1||m_0+1-M|) < 1$, teremos que qualquer que seja $m > m_0$

$$|f_m(q)| \leq C^{m-m_0} |f_{m_0}(q)|,$$

de onde, a partir da diferenciabilidade da função f_{m_0} no subconjunto compacto K , vemos, em particular, que f_{m_0} é uma função contínua em um conjunto compacto e portanto limitada por alguma constante positiva. Logo, como a série geométrica $\sum_{m=m_0+1}^{\infty} C^{m-m_0}$ converge, a desejada convergência uniforme no subconjunto compacto K segue pelo teste M de Weierstrass (ver [Teorema de A.1.3](#)), e finalmente a diferenciabilidade de $J_\rho(q)$ é estabelecida ao aplicar o [Teorema B.1.9](#). \square

O resultado que acabamos de demonstrar nos dá todo o suporte necessário para definirmos com precisão o que são as Funções Modificadas de Bessel de Segunda Espécie.

Definição 2.2.3. (*Função Modificada de Bessel de Segunda Espécie*) A Função Modificada de Bessel de Segunda Espécie, denotada por $K_q(\rho)$, é definida para todo $\rho \neq 0$ e $q \in \mathbb{C}$ por

$$K_q(\rho) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-q}(\rho) - I_q(\rho)}{\operatorname{sen}(\pi q)}, & \text{se } q \notin \mathbb{Z}, \\ \lim_{q \rightarrow n} K_q(\rho), & \text{se } q = n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Uma observação detalhada é necessária para explicarmos por qual motivo o limite da definição acima está bem definido. Antes de tudo, o limite acima precisa ser considerado pois quando $q = n \in \mathbb{Z}$, o quociente $(I_{-n}(\rho) - I_n(\rho))/\operatorname{sen}(\pi q)$ é uma indeterminação do tipo $0/0$, já que provamos anteriormente que $I_{-n} = I_n$. Notemos agora os seguintes fatos:

- $\lim_{q \rightarrow n} (I_{-q}(\rho) - I_q(\rho)) = I_{-n}(\rho) - I_n(\rho) = 0$ pois I_q é diferenciável em relação a q e portanto contínua em relação a essa variável, e além disso, $\lim_{q \rightarrow n} \operatorname{sen}(\pi q) = \operatorname{sen}(\pi n) = 0$.
- Novamente, pela diferenciabilidade da função I_q temos que $\partial I_q / \partial q$ e $d(\operatorname{sen}(q\pi))/dq$ fazem ambas sentido.
- Como $d(\operatorname{sen}(q\pi))/dq = \pi \cos(q\pi)$ e $\cos(n\pi) \neq 0$ qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$, temos pela continuidade da função cosseno que em torno de cada inteiro n , existe uma vizinhança V_n contendo o ponto n tal que $\cos(\pi q) \neq 0$ sempre que $q \in V_n$.
- Como funções complexas diferenciáveis sempre são de classe C^∞ (ver Teorema B.1.6), segue que $\partial I_q / \partial q$ é em particular contínua e portanto

$$\lim_{q \rightarrow n} \frac{\frac{\partial I_{-q}(\rho)}{\partial q} - \frac{\partial I_q(\rho)}{\partial q}}{\cos(\pi q)} = \frac{\left. \frac{\partial I_{-q}(\rho)}{\partial q} \right|_{q=n} - \left. \frac{\partial I_q(\rho)}{\partial q} \right|_{q=n}}{\cos(\pi n)}.$$

Os quatro fatos descritos acima são suficientes para aplicarmos a regra de L'Hôpital (ver Teorema B.1.2) e assegurar que, quando $q = n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} K_n(\rho) &= \lim_{q \rightarrow n} K_q(\rho) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\left. \frac{\partial I_{-q}(\rho)}{\partial q} \right|_{q=n} - \left. \frac{\partial I_q(\rho)}{\partial q} \right|_{q=n}}{(-1)^n}. \end{aligned}$$

Para demonstrarmos que a Função Modificada de Bessel de Segunda Espécie $K_q(\rho)$ é de fato solução da Equação Modificada de Bessel, será necessário provar que a função $I_q(\rho)$, dessa vez interpretada como uma função de duas variáveis complexas (q, ρ) , é complexa diferenciável. Na situação que nos encontramos atualmente, sabemos que se fixarmos q ou ρ , a função resultante será complexa diferenciável. Porém o Teorema de Hartogs (ver Teorema B.2.1) e o Lema de Osgood (ver Teorema B.2.2), nos convencem que

diferenciabilidade complexa em cada variável é suficiente para concluir diferenciabilidade complexa em relação às duas variáveis (q, ρ) .

É instrutivo saber que a situação acima não é verdadeira no contexto das funções $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. O contraexemplo padrão no caso $N = 2$ é dado pela função $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, onde percebemos que f admite derivadas parciais em relação a x e a y na origem, porém f não é contínua na origem. Mesmo se supusermos que f é C^∞ , não existe resultado análogo para variáveis reais. Para mais detalhes sobre o tópico o leitor é convidado a consultar [(KRANTZ; PARKS, 1992), Section 3.3 - Separate Real Analyticity, p. 90].

A partir do discutido acima, vemos que $I_q(\rho)$, interpretada como uma função de duas variáveis complexas, é complexa diferenciável e portanto de classe C^∞ . Isso nos permite concluir que as derivadas parciais de quaisquer ordens consideradas em relação às duas variáveis q e ρ serão sempre contínuas e, portanto, podemos aplicar o Teorema de Clairaut-Schwarz (ver Teorema A.1.8) para assegurar que, independentemente da ordenação das derivadas parciais consideradas, o resultado será sempre o mesmo. Essas considerações, serão cruciais na demonstração do próximo teorema.

Teorema 2.2.3. *Se $q \in \mathbb{C}$, então a função K_q é solução da Equação Diferencial Ordinária de Bessel Modificada para $\rho \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$:*

$$\rho^2 w''(\rho) + \rho w'(\rho) - (\rho^2 + q^2)w(\rho) = 0.$$

Demonstração. Se $q \notin \mathbb{Z}$ temos de acordo com o Teorema 2.2.1 que K_q será solução da Equação Modificada de Bessel pelo fato de K_q ser combinação linear das funções I_q e I_{-q} . Considerando ainda $q \notin \mathbb{Z}$, sabemos que

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} I_q(\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} I_q(\rho) - (\rho^2 + q^2) I_q(\rho) = 0, \quad (2.9)$$

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} I_{-q}(\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} I_{-q}(\rho) - (\rho^2 + q^2) I_{-q}(\rho) = 0. \quad (2.10)$$

Relembrando que $I_q(\rho)$ e $I_{-q}(\rho)$ são de classe C^∞ em relação a (q, ρ) , vemos pelo Teorema de Clairaut-Schwarz (ver Teorema A.1.8) que as derivadas parciais de qualquer ordem em relação a q e a ρ geram o mesmo resultado independente da ordenação em que as derivações parciais são executadas, de onde segue que diferenciando (2.9) e (2.10) em relação a q

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\frac{\partial I_q(\rho)}{\partial q} \right) + \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\partial I_q(\rho)}{\partial q} \right) - (\rho^2 + q^2) \frac{\partial I_q(\rho)}{\partial q} - 2q I_q(\rho) &= 0, \\ \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\frac{\partial I_{-q}(\rho)}{\partial q} \right) + \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\partial I_{-q}(\rho)}{\partial q} \right) - (\rho^2 + q^2) \frac{\partial I_{-q}(\rho)}{\partial q} - 2q I_{-q}(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

Com o objetivo de simplificar as expressões que estão por vir, adotaremos a notação $\Psi_q(f) := \rho^2 f''(\rho) + \rho f'(\rho) - (\rho^2 + q^2)f(\rho)$. Tomando uso imediato da nova notação

estabelecida, segue que as duas expressões acima implicam para cada $n \in \mathbb{Z}$ que

$$\Psi_q \left[\frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{\partial I_{-q}(\rho)}{\partial q} - \frac{\partial I_q(\rho)}{\partial q} \right) \right] = 2q \left[\frac{(-1)^n}{2} (I_{-q}(\rho) - I_q(\rho)) \right].$$

Logo

$$\begin{aligned} \Psi_n \left[\frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{\partial I_{-q}(\rho)}{\partial q} - \frac{\partial I_q(\rho)}{\partial q} \right) \right] &= (q^2 - n^2) \left[\frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{\partial I_{-q}(\rho)}{\partial q} - \frac{\partial I_q(\rho)}{\partial q} \right) \right] \\ &\quad + 2q \left[\frac{(-1)^n}{2} (I_{-q}(\rho) - I_q(\rho)) \right], \end{aligned}$$

e portanto mais uma vez usando o fato de que $I_q(\rho)$ é uma função de classe C^∞ em relação a (q, ρ) , vemos que cada termo da igualdade acima é contínuo e portanto ao fazer $q \rightarrow n$, concluímos finalmente que

$$\begin{aligned} \Psi_n(K_n(\rho)) &= (n^2 - n^2)K_n(\rho) + 2q \left[\frac{(-1)^n}{2} (I_{-n}(\rho) - I_n(\rho)) \right] \\ &= 0K_n(\rho) + 2q \left[\frac{(-1)^n}{2} (I_n(\rho) - I_n(\rho)) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde igualamos $q = n$ imediatamente após a diferenciação em relação a q ter sido executada. \square

Finalmente estamos prontos para estudar o conjunto solução da Equação Diferencial Modificada de Bessel.

Teorema 2.2.4. *As funções I_q e K_q são linearmente independentes para todo $q \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Devemos provar que $W(I_q, K_q)(\rho)$ nunca se anula. Consideremos inicialmente o caso em que $q \notin \mathbb{Z}$. Nesse caso, segue pela multilinearidade da função determinante e do [Teorema 2.2.2](#) que

$$\begin{aligned} W(I_q, K_q)(\rho) &= \frac{\pi}{2\text{sen}(\pi q)} W(I_q, I_{-q} - I_q)(\rho) \\ &= \frac{\pi}{2\text{sen}(\pi q)} [W(I_q, I_{-q})(\rho) - W(I_q, I_q)(\rho)] \\ &= -\frac{\pi}{2\text{sen}(\pi q)} \frac{2\text{sen}(\pi q)}{\pi \rho} \\ &= -\frac{1}{\rho}, \end{aligned}$$

que é uma função que nunca se anula. Se agora $q = n \in \mathbb{Z}$, podemos usar o fato de que todas as funções que estão presentes no cálculo do Wronskiano são contínuas em relação a

q e que o próprio determinante é uma função contínua (pois o determinante é uma função multilinear) para concluirmos que para cada $\rho \neq 0$:

$$\begin{aligned} W(I_n, K_n)(\rho) &= W\left(\lim_{q \rightarrow n} I_q, \lim_{q \rightarrow n} K_q\right)(\rho) \\ &= \lim_{q \rightarrow n} W(I_q, K_q)(\rho) \\ &= -\lim_{q \rightarrow n} \frac{1}{\rho} \\ &= -\frac{1}{\rho}, \end{aligned}$$

finalizando a demonstração do resultado. \square

Nós temos uma representação em forma de série para I_q qualquer que seja $q \in \mathbb{C}$. Como consequência, temos uma representação em forma série também para K_q quando $q \notin \mathbb{Z}$. A seguir, deduziremos uma expressão em série para K_n quando $n \in \mathbb{Z}$.

De início, notemos que a partir igualdade $I_n(\rho) = I_{-n}(\rho)$, temos $K_n(\rho) = K_{-n}(\rho)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Isso nos diz que ao procurar uma representação para $K_n(\rho)$, é suficiente nos ater ao caso em que $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Notemos agora que o [Teorema B.1.10](#) nos garante a diferenciabilidade termo a termo de $I_q(\rho)$ em relação a q , de onde, pela [Regra do Quociente](#):

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_q(\rho)}{\partial q} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q} \log\left(\frac{\rho}{2}\right) m! \Gamma(m+q+1) - m! \Gamma(m+q+1) \psi(m+q+1) \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q}}{(m!)^2 (\Gamma(m+q+1))^2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q} [\log\left(\frac{\rho}{2}\right) - \psi(m+q+1)]}{m! \Gamma(m+q+1)}, \end{aligned}$$

em que ψ é a derivada logarítmica da função Gama, ou seja, $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$. Como consequência

$$\left. \frac{\partial I_q(\rho)}{\partial q} \right|_{q=n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+n}}{m!(m+n)!} [\log\left(\frac{\rho}{2}\right) - \psi(m+n+1)].$$

De modo semelhante

$$\frac{\partial I_{-q}(\rho)}{\partial q} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-q}}{m! \Gamma(m-q+1)} [-\log\left(\frac{\rho}{2}\right) + \psi(m-q+1)].$$

Notando que para $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$, temos $\lim_{q \rightarrow n} \Gamma(m-q+1) = \infty$ e $\lim_{q \rightarrow n} \psi(m-q+1) = \infty$, vemos que não podemos obter de forma tão direta $\partial I_{-q}(\rho)/\partial q|_{q=n}$ como anteriormente, porém a partir das relações $\Gamma(x)/\Gamma(1-x) = \pi/\text{sen}(\pi x)$ e $\psi(1-x) - \psi(x) = \pi \cot(\pi x)$, temos

$$\begin{aligned}
 \lim_{q \rightarrow n} \frac{\psi(m - q + 1)}{\Gamma(m - q + 1)} &= \lim_{q \rightarrow n} \frac{[\pi \cot(\pi(q - m)) + \psi(q - m)][\Gamma(q - m)\text{sen}(\pi(q - m))]}{\pi} \\
 &= \lim_{q \rightarrow n} \Gamma(q - m) \left[\cos(\pi(q - m)) + \frac{\psi(q - m)\text{sen}(\pi(q - m))}{\pi} \right] \\
 &= \Gamma(n - m)[\cos(\pi(n - m)) + 0] \\
 &= (n - m - 1)!(-1)^{n-m}, \text{ para } m = 0, 1, 2, \dots, n - 1.
 \end{aligned}$$

Escrevendo de modo conveniente

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{-q}(\rho)}{\partial q} &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-q}}{m!\Gamma(m - q + 1)} \left(-\log\left(\frac{\rho}{2}\right) + \psi(m - q + 1)\right) \\
 &\quad + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-q}}{m!\Gamma(m - q + 1)} \left(-\log\left(\frac{\rho}{2}\right) + \psi(m - q + 1)\right) \\
 &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-q}}{m!\Gamma(m - q + 1)} \left(-\log\left(\frac{\rho}{2}\right) + \psi(m - q + 1)\right) \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+2n-q}}{(k+n)!\Gamma(k+n - q + 1)} \left(-\log\left(\frac{\rho}{2}\right) + \psi(m - q + 1)\right)
 \end{aligned}$$

e calculando o limite da soma finita acima quando $q \rightarrow n$, segue que

$$\begin{aligned}
 \lim_{q \rightarrow n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-q}}{m!\Gamma(m - q + 1)} \left[-\log\left(\frac{\rho}{2}\right) + \psi(m - q + 1)\right] &= \\
 - \lim_{q \rightarrow n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-q}}{m!\Gamma(m - q + 1)} \log\left(\frac{\rho}{2}\right) + \lim_{q \rightarrow n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-q}}{m!\Gamma(m - q + 1)} \psi(m - q + 1) &= \\
 0 + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-m}(n - m - 1)!}{m!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-n} &.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial I_{-q}(\rho)}{\partial q} \right|_{q=n} &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-m}(n - m - 1)!}{m!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-n} \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+n}}{(m+n)!m!} \left[-\log\left(\frac{\rho}{2}\right) + \psi(m + 1)\right].
 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
 K_n(\rho) &= \frac{1}{2} \frac{\left. \frac{\partial I_{-q}(\rho)}{\partial q} \right|_{q=n} - \left. \frac{\partial I_q(\rho)}{\partial q} \right|_{q=n}}{(-1)^n} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{m!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-n} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+n}}{(n+m)!m!} [-\log\left(\frac{\rho}{2}\right) + \psi(m+1)] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+n}}{(m+n)!m!} [\log\left(\frac{\rho}{2}\right) - \psi(m+n+1)] \\
 &= \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+n}}{m!(m+n)!} [2\log\left(\frac{\rho}{2}\right) - \psi(m+1) - \psi(m+n+1)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{m!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-n}.
 \end{aligned}$$

Usando notação assintótica temos que, quando $\rho \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned}
 K_0(\rho) &= -\log\left(\frac{\rho}{2}\right) + O(1), \\
 K_n(\rho) &= \frac{1}{2}(n-1)! \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n} (1 + O(\rho^2)) \\
 &\quad + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \log\left(\frac{\rho}{2}\right) (1 + O(\rho^2)) + O(\rho^n), \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

De onde uma aplicação direta da regra L'Hôpital (ver [Teorema B.1.2](#)), nos revela que $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} (\rho/2) \log(\rho/2) = 0$ e portanto quando $\rho \rightarrow 0^+$:

$$K_0(\rho) \approx -\log\left(\frac{\rho}{2}\right) + O(1), \quad (2.11)$$

$$K_n(\rho) \approx \frac{1}{2}(n-1)! \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Uma forma alternativa de demonstrar o [Teorema 2.2.3](#), sem auxílio do Teorema de Hartogs (ver [Teorema B.2.1](#)) e o Lema de Osgood (ver [Teorema B.2.2](#)), é provar que a fórmula em série de K_n que acabamos de deduzir satisfaz a Equação Modificada de Bessel. Escolhemos não seguir esse caminho, pois os cálculos iriam se tornar exaustivos.

O próximo lema introduz várias relações de recorrência envolvendo as Funções Modificadas de Bessel.

Lema 2.2.7. *Para todo $q \geq 0$, temos que $K_q \in C^\infty((0, \infty))$, valendo as relações de recorrência:*

1. $\frac{d}{d\rho} I_q(\rho) = \frac{1}{2}(I_{q-1}(\rho) + I_{q+1}(\rho)),$

2. $\frac{d}{d\rho} K_q(\rho) = -\frac{1}{2}(K_{q-1}(\rho) + K_{q+1}(\rho)),$
3. $\frac{2q}{\rho} I_q(\rho) = I_{q-1}(\rho) - I_{q+1}(\rho),$
4. $\frac{2q}{\rho} K_q(\rho) = K_{q+1}(\rho) - K_{q-1}(\rho),$
5. $\frac{d}{d\rho} (\rho^{-q} K_q(\rho)) = -\rho^{-q} K_{q+1}(\rho),$

são válidas para $\rho > 0$.

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.2.3, temos que $K_q(\rho)$ é complexa diferenciável em relação a ρ para todo $q \in \mathbb{C}$, de onde K_q é de classe C^∞ em relação a ρ e em particular $K_q \in C^\infty((0, \infty))$, qualquer que seja $q \geq 0$. Passemos para as relações de recorrência

1. Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} I_q(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+q) \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q-1} \frac{1}{2}}{m! \Gamma(m+q+1)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q-1} \frac{1}{2}}{m! \Gamma(m+q+1)} + \frac{q}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q-1}}{m! \Gamma(m+q+1)}. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} I_{q-1}(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q-1}}{m! \Gamma(m+q)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q-1} (m+q)}{m! \Gamma(m+q+1)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q-1} m}{m! \Gamma(m+q+1)} + q \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q-1}}{m! \Gamma(m+q+1)}. \end{aligned}$$

Como também

$$\begin{aligned} I_{q+1}(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q+1}}{m! \Gamma(m+q+2)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q+1} (m+1)}{m! \Gamma(m+q+2) (m+1)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2j+q-1} j}{j! \Gamma(j+q+1)}, \end{aligned}$$

onde da segunda para a terceira linha foi usada a mudança de variável $j = m + 1$, concluímos que

$$I_{q-1}(\rho) + I_{q+1}(\rho) = 2 \frac{d}{d\rho} I_q(\rho)$$

como desejado.

2. Suponhamos inicialmente $q \notin \mathbb{Z}$. Nesse caso, podemos usar o item anterior para escrevermos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} K_q(\rho) &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\frac{d}{d\rho} I_{-q}(\rho)}{\text{sen}(q\pi)} - \frac{\frac{d}{d\rho} I_q(\rho)}{\text{sen}(q\pi)} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{I_{-(q+1)}(\rho) + I_{1-q}(\rho)}{\text{sen}(q\pi)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{I_{q-1}(\rho) + I_{q+1}(\rho)}{\text{sen}(q\pi)} \right) \right) \\ &= -\frac{\pi}{4} \left(\frac{I_{-(q+1)}(\rho)}{\text{sen}((q+1)\pi)} + \frac{I_{1-q}(\rho)}{\text{sen}((q-1)\pi)} \right) \\ &\quad + \frac{\pi}{4} \left(\frac{I_{q-1}(\rho)}{\text{sen}((q-1)\pi)} + \frac{I_{q+1}(\rho)}{\text{sen}((q+1)\pi)} \right) \\ &= -\frac{1}{2} (K_{q+1}(\rho) + K_{q-1}(\rho)). \end{aligned}$$

Caso agora $q = n \in \mathbb{Z}$, notemos que

$$\lim_{q \rightarrow n} \frac{d}{d\rho} K_q(\rho) = \lim_{q \rightarrow n} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\pi}{2} \frac{I_{-q}(\rho) - I_q(\rho)}{\text{sen}(q\pi)} \right),$$

e pela continuidade da expressão dentro do limite em relação a q , temos que esse limite assume uma indeterminação do tipo $0/0$ e portanto pela regra L'Hôpital (ver [Teorema B.1.2](#))

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow n} \frac{d}{d\rho} K_q(\rho) &= \lim_{q \rightarrow n} \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial q} \frac{d}{d\rho} I_{-q}(\rho) - \frac{\partial}{\partial q} \frac{d}{d\rho} I_q(\rho)}{\cos(q\pi)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial q} \frac{d}{d\rho} I_{-q}(\rho)|_{q=n} - \frac{\partial}{\partial q} \frac{d}{d\rho} I_q(\rho)|_{q=n}}{(-1)^n}. \end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Clairaut-Schwarz (ver [Teorema A.1.8](#))

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} K_n(\rho) &= \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{d\rho} \frac{\partial}{\partial q} I_{-q}(\rho)|_{q=n} - \frac{d}{d\rho} \frac{\partial}{\partial q} I_q(\rho)|_{q=n}}{(-1)^n} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial q} \frac{d}{d\rho} I_{-q}(\rho)|_{q=n} - \frac{\partial}{\partial q} \frac{d}{d\rho} I_q(\rho)|_{q=n}}{(-1)^n} \\ &= \lim_{q \rightarrow n} \frac{d}{d\rho} K_q(\rho). \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (K_{n-1}(\rho) + K_{n+1}(\rho)) &= \lim_{q \rightarrow n} -\frac{1}{2} (K_{q-1}(\rho) + K_{q+1}(\rho)) \\ &= \lim_{q \rightarrow n} \frac{d}{d\rho} K_q(\rho) \\ &= \frac{d}{d\rho} K_n(\rho). \end{aligned}$$

3. Notemos que

$$\frac{2q}{\rho} I_q(\rho) = q \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q-1}}{m! \Gamma(m+q+1)}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} I_{q-1}(\rho) - I_{q+1}(\rho) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q-1} m}{m! \Gamma(m+q+1)} + q \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q-1}}{m! \Gamma(m+q+1)} \\ &\quad - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q+1} (m+1)}{(m+1)! \Gamma(m+q+2)} \\ &= \frac{2q}{\rho} I_q(\rho). \end{aligned}$$

4. Quando $q \notin \mathbb{Z}$, segue pelo item anterior que

$$\begin{aligned} K_{q+1}(\rho) - K_{q-1}(\rho) &= \frac{\pi}{2\text{sen}(q\pi)} (I_{q+1}(\rho) - I_{-q-1}(\rho) + I_{1-q}(\rho) - I_{q-1}(\rho)) \\ &= \frac{\pi}{2\text{sen}(q\pi)} \left(\frac{2q}{\rho} I_{-q}(\rho) - \frac{2q}{\rho} I_q(\rho) \right) \\ &= \frac{2q}{\rho} K_q(\rho). \end{aligned}$$

Quando $q = n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{2n}{\rho} K_n(\rho) &= \frac{2n}{\rho} \lim_{q \rightarrow n} K_q(\rho) \\ &= \frac{2n}{\rho} \lim_{q \rightarrow n} \frac{\rho}{2q} (K_{q+1}(\rho) - K_{q-1}(\rho)) \\ &= \frac{2n}{\rho} \frac{\rho}{2n} (K_{n+1}(\rho) - K_{n-1}(\rho)) \\ &= K_{n+1}(\rho) - K_{n-1}(\rho). \end{aligned}$$

Se $n = 0$ a fórmula de recorrência é verdadeira pela propriedade já estabelecida de que $K_1(\rho) = K_{-1}(\rho)$.

5. Pela [Regra da Derivada do Produto](#), pelo item 2 e pelo item 4 respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} (\rho^{-q} K_q(\rho)) &= -q\rho^{-q-1} K_q(\rho) + \rho^{-q} \frac{d}{d\rho} K_q(\rho) \\ &= -q\rho^{-q-1} K_q(\rho) + \rho^{-q} \left(-\frac{1}{2} (K_{q-1}(\rho) + K_{q+1}(\rho)) \right) \\ &= -\rho^{-q} \left(\frac{q}{\rho} K_q(\rho) + \frac{1}{2} K_{q-1}(\rho) + \frac{1}{2} K_{q+1}(\rho) \right) \\ &= -\rho^{-q} K_{q+1}(\rho). \end{aligned}$$

□

No próximo lema provaremos algumas propriedades de $I_q(\rho)$ e $K_q(\rho)$ quando ρ se aproxima de zero.

Lema 2.2.8. *Suponha que $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $q \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Então quando $\rho \rightarrow 0$:*

1. $I_q(\rho)$ possui limite finito e $K_q(\rho)$ possui uma singularidade em $\rho = 0$,
2. $-K_0(\rho)/\log \rho \rightarrow 1$,
3. $\rho^q K_q(\rho) \rightarrow 2^{q-1}\Gamma(q)$ onde $2^{q-1}\Gamma(q) > 0$ quando $q > 0$,
4. $\rho^{q+1} \frac{d}{d\rho} K_q(\rho) \rightarrow -q2^{q-1}\Gamma(q)$ onde $q2^{q-1}\Gamma(q) > 0$ quando $q > 0$ e $\rho^{q+1} \frac{d}{d\rho} K_q(\rho) \rightarrow -1$ quando $q = 0$.

Demonstração. 1. Relembremos do [Teorema 2.2.2](#) que

$$I_q(\rho) = \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^q}{\Gamma(q+1)} {}_0F_1^q,$$

temos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} I_q(\rho) = \begin{cases} 1, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

Já o fato de que $K_n(\rho)$ possui uma singularidade em $\rho = 0$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, segue diretamente de [\(2.11\)](#) e [\(2.12\)](#). Nos demais casos que q pode assumir, a existência da singularidade em $\rho = 0$ segue pelo fato de $I_{-q}(\rho)$ possuir uma singularidade em $\rho = 0$ quando $q > 0$.

2. Em [\(2.11\)](#) temos que de forma explícita o termo $O(1)$ é $(-1/2)(-2\psi(1)) = \psi(1) = -\gamma$, em que γ é a constante de Euler - Mascheroni. Logo, quando $\rho \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} K_0(\rho) &\approx -\log\left(\frac{\rho}{2}\right) - \gamma \\ &= -\log(\rho) + \log(2) - \gamma, \end{aligned}$$

de onde

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} -\frac{K_0(\rho)}{\log(\rho)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\log(2)}{\log(\rho)} + \frac{\gamma}{\log(\rho)} \right] = 1.$$

3. Para $q = 1, 2, \dots$, o resultado segue diretamente de [\(2.12\)](#). Nos demais casos temos que

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^q K_q(\rho) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \left[\frac{2^q}{\Gamma(1-q)} {}_0F_1^{-q} - \frac{\rho^{2q}}{2^q \Gamma(q+1)} {}_0F_1^q \right] \frac{1}{\text{sen}(q\pi)} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{2^q}{\Gamma(1-q)\text{sen}(q\pi)} \\ &= \pi \frac{2^{q-1}}{\Gamma(q)} \\ &= 2^{q-1}\Gamma(q). \end{aligned}$$

4. Pelo [Lema 2.2.7](#) item 2 e pelo item anterior vemos que, quando $q > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{q+1} \frac{d}{d\rho} K_q(\rho) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2} \rho^2 \rho^{q-1} K_{q-1}(\rho) - \frac{1}{2} \rho^{q+1} K_{q+1}(\rho) \right] \\ &= -\frac{1}{2} 0^2 2^{q-2} \Gamma(q-1) - \frac{1}{2} 2^q \Gamma(q+1) \\ &= -2^{q-1} q \Gamma(q). \end{aligned}$$

Novamente pelo [Lema 2.2.7](#) item 2, pelo item anterior e agora usando também o fato de que $K_{-1} = K_1$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{d}{d\rho} K_0(\rho) &= -\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho K_1(\rho) \\ &= -2^{1-1} \Gamma(1) \\ &= -2^0 0! \\ &= -1. \end{aligned}$$

□

Para estudarmos o comportamento das Funções Modificadas de Bessel no infinito, será importante deduzirmos representações integrais para $I_q(\rho)$ e $K_q(\rho)$. Esse será o nosso próximo objetivo.

O Teorema abaixo será de fundamental importância para a obtenção das representações integrais das Funções Modificadas de Bessel.

Teorema 2.2.5. (Fórmula de Hankel para a Recíproca da Função Gama)
Qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$, a representação integral

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^t t^{-z} dt$$

é verdadeira, em que C é o contorno descrito pela figura abaixo:

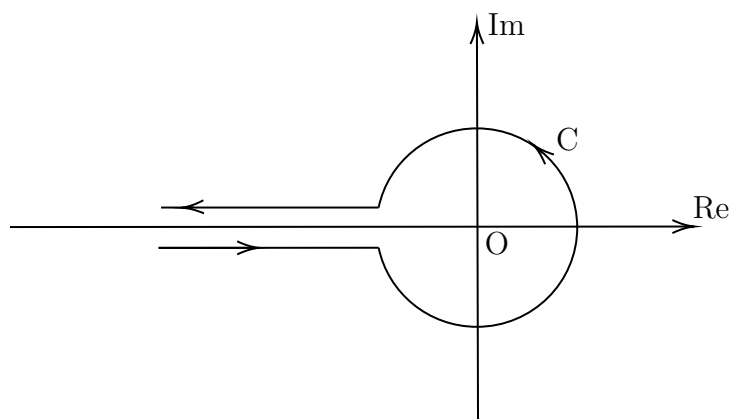


Figura 1 – Contorno de Hankel

Antes de provarmos a Fórmula de Hankel, alguns lemas técnicos são necessários.

Lema 2.2.9. *Se C é um contorno de Hankel (ver Figura 1) cuja parte circular é de raio 1, então a função*

$$I(z) = \int_C e^t t^{-z} dt,$$

é complexa diferenciável em todo o plano complexo \mathbb{C} .

Demonstração. A função $z \mapsto e^t t^{-z}$ é claramente complexa diferenciável em \mathbb{C} para cada $t \neq 0$ fixado. Se então T é um triângulo qualquer, sabemos pelo Teorema de Goursat (ver Teorema B.1.5) que, para cada $t \neq 0$ fixado,

$$\int_T e^t t^{-z} dz = 0.$$

Notemos agora que

$$\begin{aligned} |e^t t^{-z}| &= |e^t| |e^{-z \log(t)}| \\ &= |e^{-\operatorname{Re}(z) \log(t)}| |e^{-i \operatorname{Im}(z) \log(t)}| |e^{\operatorname{Re}(t)}| |\cos(\operatorname{Im}(t)) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im}(t))| \\ &= e^{\operatorname{Re}(t)} |e^{-\operatorname{Re}(z) \log |t|}| |e^{-i \operatorname{Re}(z) \arg(t)}| |e^{-i \operatorname{Im}(z) \log |t|}| |e^{\operatorname{Im}(z) \arg(t)}| \\ &\leq e^{\operatorname{Re}(t)} |t|^{-\operatorname{Re}(z)} e^{\pi |\operatorname{Im}(z)|}. \end{aligned}$$

Se K for um conjunto compacto qualquer tal que $T \subset K$, então $z \mapsto e^{\operatorname{Re}(t)} |t|^{-\operatorname{Re}(z)} e^{\pi |\operatorname{Im}(z)|}$ é uma função contínua em \mathbb{C} e, em particular, em K para cada $t \neq 0$ e portanto existem $L_t, M > 0$ tais que

$$\begin{aligned} |e^t t^{-z}| &\leq e^{\operatorname{Re}(t)} |t|^{-\operatorname{Re}(z)} e^{\pi |\operatorname{Im}(z)|} \\ &\leq e^{\operatorname{Re}(t)} |t|^{-L_t} e^{\pi M}, \end{aligned}$$

de onde, para cada $t \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_T |e^t t^{-z}| dz &\leq \int_T e^{\operatorname{Re}(t)} |t|^{-L_t} e^{\pi M} dz \\ &= e^{\operatorname{Re}(t)} |t|^{-L_t} e^{\pi M} \ell(T), \end{aligned}$$

em que $\ell(T)$ denota o comprimento do triângulo T . Consideremos agora a mudança de variável $t = \delta e^{i\theta}$. Nessas condições segue que

$$\begin{aligned} \int_C \int_T |e^t t^{-z}| dz dt &\leq \ell(T) e^{\pi M} \int_C e^{\operatorname{Re}(t)} |t|^{-L_t} dt \\ &= \ell(T) e^{\pi M} \left(i \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(\theta)} e^{i\theta} d\theta - \int_{\infty}^1 \delta^{-L-\delta} e^{-\delta} d\delta - \int_1^{\infty} \delta^{-L-\delta} e^{-\delta} d\delta \right) \\ &= \ell(T) e^{\pi M} i \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(\theta)} e^{i\theta} d\theta < +\infty, \end{aligned}$$

de onde a finitude da integral da última linha da cadeia acima se deve ao fato de que toda função contínua é integrável. Finalmente, podemos aplicar o Teorema de Fubini-Tonelli (ver Teorema D.10), para concluirmos que

$$\int_T \int_C e^t t^{-z} dt dz = \int_C \int_T e^t t^{-z} dz dt = \int_C 0 dt = 0.$$

Observe agora que $I(z)$ é contínua. De fato, considere sem perda de generalidade $z_0 \in K$. Por ser $\lim_{z \rightarrow z_0} e^t t^{-z} = e^t t^{-z_0}$ e, para qualquer $z \in K$, sabermos que $|e^t t^{-z}| \leq e^{\operatorname{Re}(t)} |t|^{-L_t} e^{\pi M}$ e, além disso, $\int_C e^{\operatorname{Re}(t)} |t|^{-L_t} e^{\pi M} dt < +\infty$, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema D.5), para provar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} I(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \int_C e^t t^{-z} dt = \int_C e^t t^{-z_0} dt = I(z_0).$$

A diferenciabilidade de $I(z)$ segue então pelo Teorema de Morera (ver Teorema B.1.7). \square

Lema 2.2.10. *O valor da integral presente na fórmula de Hankel (ver Teorema 2.2.5) independe do contorno de Hankel considerado, de forma mais precisa, se C_1 for o contorno de Hankel $(-\infty, -i] \cup A_1 \cup [i, -\infty)$, em que A_1 é o arco de raio 1 conectando $-i$ até i e se C_δ for o contorno de Hankel $(-\infty, -\varepsilon i] \cup A_\delta \cup [\varepsilon i, -\infty)$ em que A_δ é o arco de raio δ conectando $-\varepsilon i$ até εi e $0 < \varepsilon < 1$, então*

$$\int_{C_1} e^t t^{-z} dt = \int_{C_\delta} e^t t^{-z} dt.$$

Demonstração. No decorrer desta demonstração, z é um número complexo fixado. Se $f(t) := e^t t^{-z}$, é evidente que $f(t)$ é uma função complexa diferenciável em todo o plano complexo. Se $R > 0$ e denotarmos C_{1R} e $C_{\delta R}$ respectivamente os contornos C_1 e C_δ truncados na reta $\operatorname{Re}(t) = -R$, podemos considerar o contorno fechado suave por partes $C_{1R} \cup [i - R, \varepsilon i - R] \cup (-C_{\delta R}) \cup [-\varepsilon i - R, -i - R]$, como no diagrama abaixo:

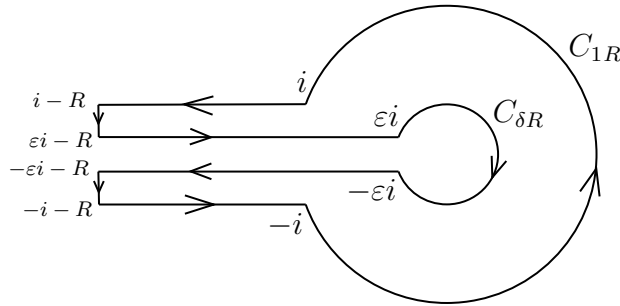


Figura 2 – Contorno de Integração

Pelo Teorema da Integral de Cauchy (ver Teorema B.1.8), podemos garantir que

$$\int_{C_{1R}} f(t) dt - \int_{C_{\delta R}} f(t) dt + \int_{i-R}^{\varepsilon i-R} f(t) dt + \int_{-\varepsilon i-R}^{-i-R} f(t) dt = 0. \quad (2.13)$$

Estudaremos as duas integrais ao longo dos segmentos verticais presentes na igualdade acima. Se considerarmos $t = (i - R) + s(\varepsilon - 1)i$, em que $0 \leq s \leq 1$, teremos

$$\int_{i-R}^{\varepsilon i-R} f(t) dt = \int_0^1 [(i - R) + s(\varepsilon - 1)i]^{-z} e^{(i-R)+s(\varepsilon-1)i} (\varepsilon - 1) i ds.$$

Se considerarmos $t = (-\varepsilon i - R) + s(\varepsilon - 1)i$, em que $0 \leq s \leq 1$, teremos

$$\int_{-\varepsilon i-R}^{-i-R} f(t) dt = \int_0^1 [(-\varepsilon i - R) + s(\varepsilon - 1)i]^{-z} e^{(-\varepsilon i-R)+s(\varepsilon-1)i} (\varepsilon - 1) i ds.$$

Como já sabemos que $|f(t)| \leq e^{\operatorname{Re}(t)}|t|^{-\operatorname{Re}(z)}e^{\pi|\operatorname{Im}(z)|}$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{i-R}^{\varepsilon i-R} f(t) dt \right| &\leq |\varepsilon - 1| e^{\pi|\operatorname{Im}(z)|} [R^2 + (s_z(\varepsilon - 1) + 1)^2]^{-\frac{\operatorname{Re}(z)}{2}} e^{-R}, \\ \left| \int_{-\varepsilon i-R}^{-i-R} f(t) dt \right| &\leq |\varepsilon - 1| e^{\pi|\operatorname{Im}(z)|} [R^2 + (c_z(\varepsilon - 1) - \varepsilon)^2]^{-\frac{\operatorname{Re}(z)}{2}} e^{-R}, \end{aligned}$$

em que s_z e c_z assumem apenas os valores 0 ou 1 a depender do valor de $\operatorname{Re}(z)$. Logo

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{i-R}^{\varepsilon i-R} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon i-R}^{-i-R} f(t) dt = 0,$$

de onde finalizamos a demonstração do lema ao fazer $R \rightarrow \infty$ em (2.13). \square

Demonstração. (Demonstração do Teorema 2.2.5) Escrevendo $t = \delta e^{i\theta}$ temos que

$$\begin{aligned} \int_C e^{t-t^z} dt &= \int_{\delta}^{\infty} e^{-t} (te^{(-\pi+\varepsilon_{\delta})i})^{-z} dt + \int_{\infty}^{\delta} e^{-t} (te^{(\pi-\varepsilon_{\delta})i})^{-z} dt \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} e^{\delta(\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta))} (\delta e^{i\theta})^{-z} \delta i e^{i\theta} d\theta \\ &= \int_{\delta}^{\infty} e^{-t} t^{-z} (e^{-(-\pi+\varepsilon_{\delta})iz} - e^{-(\pi-\varepsilon_{\delta})iz}) dt + i\delta^{-z+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\delta(\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta))+i\theta(-z+1)} d\theta, \end{aligned}$$

em que $\varepsilon_{\delta} > 0$ satisfaz $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon_{\delta} = 0$. Como o integrando da integral em relação a θ acima converge uniformemente para $e^{i\theta(-z+1)}$ quando $\delta \rightarrow 0$, vemos que se $\operatorname{Re}(z) < 1$, então $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-z+1} = 0$ e que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\delta(\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta))+i\theta(-z+1)} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(1-z)} d\theta = \frac{2\operatorname{sen}(\pi(1-z))}{1-z}.$$

Pelo Lema 2.2.10, mantendo $\operatorname{Re}(z) < 1$ e fazendo $\delta \rightarrow 0$, vemos que

$$\int_C e^{t-t^z} dt = 2i\operatorname{sen}(\pi z) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-z} dt = 2i\operatorname{sen}(\pi z)\Gamma(1-z).$$

Se supormos $z \notin \mathbb{Z}$, podemos aplicar a Fórmula da Reflexão de Euler e concluir que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{t-t^z} dt = \frac{1}{\Gamma(z)} \quad \text{em que } \operatorname{Re}(z) < 1.$$

Como $1/\Gamma(z)$ é uma função complexa diferenciável em todo o plano complexo, que coincide com a, também função complexa diferenciável em todo o plano complexo, $I(z) = \int_C e^{t-t^z} dt$ (Lema 2.2.9) no aberto $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) < 1\} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, concluímos a demonstração do resultado ao aplicar o Teorema da Identidade (ver Teorema B.1.11). \square

Teorema 2.2.6. Para todo $\rho > 0$ e todo $q \in \mathbb{R}$, as representações integrais a seguir são verdadeiras

$$\begin{aligned} I_q(\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\rho \cos(\theta)} \cos(q\theta) d\theta - \frac{\operatorname{sen}(q\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho \cosh(t)-qt} dt, \\ K_q(\rho) &= \int_0^{\infty} e^{-\rho \cosh(t)} \cosh(qt) dt. \end{aligned}$$

Demonstração. De acordo com o [Teorema 2.2.5](#) sabemos que

$$\frac{1}{\Gamma(m+q+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^s s^{-(m+q+1)} ds,$$

de onde

$$I_q(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q}}{m!} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^s s^{-(m+q+1)} ds < +\infty.$$

Logo, interpretando a série acima como sendo uma integral em relação à medida da contagem, desejamos aplicar o Teorema de Fubini-Tonelli (ver [Teorema D.10](#)), para concluirmos que

$$\begin{aligned} I_q(\rho) &= \left(\frac{\rho}{2}\right)^q \frac{1}{2\pi i} \int_C e^s s^{-q-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho^2}{4s}\right)^m}{m!} ds \\ &= \left(\frac{\rho}{2}\right)^q \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{s+\frac{\rho^2}{4s}} s^{-q-1} ds. \end{aligned}$$

Esse desejo pode ser concretizado pois, ao aplicar os mesmos métodos descritos no [Lema 2.2.9](#) teremos

$$\int_C \sum_{m=0}^{\infty} \left| e^s s^{-q-1} \frac{\left(\frac{\rho^2}{4s}\right)^m}{m!} \right| ds = \int_C |e^s s^{-(q+1)}| e^{\left|\frac{\rho^2}{4s}\right|} ds < +\infty.$$

Assumindo em seguida que ρ é um número real positivo e definindo $s = (\rho t)/2$, podemos escrever

$$\begin{aligned} I_q(\rho) &= \left(\frac{\rho}{2}\right)^q \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{\frac{\rho}{2}(t+t^{-1})} \left(\frac{\rho t}{2}\right)^{-q-1} \left(\frac{\rho}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{\frac{\rho}{2}(t+t^{-1})} t^{-q-1} dt, \end{aligned}$$

em que C' é um contorno com o mesmo formato do contorno C . Assumindo, sem perda de generalidade, que a parte circular de C' possui raio 1, segue pela mesma estratégia de integração usada no [Teorema 2.2.5](#) que

$$\begin{aligned} I_q(\rho) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_1^{\infty} e^{-\frac{\rho}{2}(t+t^{-1})} t^{-q-1} (e^{i(q+1)\pi} - e^{-i(q+1)\pi}) dt + i \int_0^{\pi} e^{\rho \cos(\theta)} (e^{qi\theta} + e^{-qi\theta}) d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[-2i \operatorname{sen}(q\pi) \int_1^{\infty} e^{-\frac{\rho}{2}(t+t^{-1})} t^{-q-1} dt + 2i \int_0^{\pi} e^{\rho \cos(\theta)} \cos(q\theta) d\theta \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\rho \cos(\theta)} \cos(q\theta) d\theta - \frac{\operatorname{sen}(q\pi)}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\rho}{2}(t+t^{-1})} t^{-q-1} dt. \end{aligned}$$

Se agora fizermos a substituição $t = e^\alpha$, teremos finalmente que

$$\begin{aligned} I_q(\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\rho \cos(\theta)} \cos(q\theta) d\theta - \frac{\operatorname{sen}(q\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho \cosh(\alpha)} e^{-\alpha(q+1)} e^\alpha d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\rho \cos(\theta)} \cos(q\theta) d\theta - \frac{\operatorname{sen}(q\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho \cosh(\alpha) - \alpha q} d\alpha. \end{aligned}$$

Para demonstrar a representação integral para K_q , suponhamos inicialmente que $q \notin \mathbb{Z}$. Assim

$$\begin{aligned} K_q(\rho) &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{I_{-q}(\rho) - I_q(\rho)}{\operatorname{sen}(q\pi)} \right) \\ &= \frac{\pi}{2\operatorname{sen}(q\pi)} \left(\frac{\operatorname{sen}(q\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-\rho \cosh(\alpha)} (e^{\alpha q} + e^{-\alpha q}) d\alpha \right) \\ &= \frac{\pi}{2\operatorname{sen}(q\pi)} \frac{2\operatorname{sen}(q\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-\rho \cosh(\alpha)} \cosh(\alpha q) d\alpha \\ &= \int_0^\infty e^{-\rho \cosh(\alpha)} \cosh(\alpha q) d\alpha. \end{aligned}$$

Caso $q = n \in \mathbb{Z}$, notemos que $\lim_{q \rightarrow n} e^{-\rho \cosh(\alpha)} \cosh(\alpha q) = e^{-\rho \cosh(\alpha)} \cosh(\alpha n)$ e que se $[-b, b] \subset \mathbb{R}$, $b > 0$ for um intervalo fechado, em que $n \in [-b, b]$, então para todo $\alpha \in [0, +\infty)$ temos $|e^{-\rho \cosh(\alpha)} \cosh(\alpha q)| \leq e^{-\rho \cosh(\alpha)} \cosh(\alpha b)$, de onde, como $\int_0^\infty e^{-\rho \cosh(\alpha)} \cosh(\alpha b) d\alpha < +\infty$, de fato, para $\alpha > 0$, segue que $e^\alpha/2 \leq \cosh(\alpha) \leq e^\alpha$ e assim

$$\int_0^\infty e^{-\rho \cosh(\alpha)} \cosh(\alpha b) d\alpha \leq \int_0^\infty e^{-\frac{\rho}{2} e^\alpha} e^{\alpha b} d\alpha = \int_1^\infty t^{b-1} e^{-\frac{\rho}{2} t} dt < +\infty,$$

podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.5](#)) e concluir que

$$\begin{aligned} K_n(\rho) &= \lim_{q \rightarrow n} K_q(\rho) \\ &= \lim_{q \rightarrow n} \int_0^\infty e^{-\rho \cosh(\alpha)} \cosh(\alpha q) d\alpha \\ &= \int_0^\infty e^{-\rho \cosh(\alpha)} \cosh(\alpha n) d\alpha, \end{aligned}$$

como desejado. □

Pelo processo de continuação analítica (ver [Definição B.1.1](#)) é possível demonstrar que as representações integrais que acabamos de obter são verdadeiras de forma mais geral para todo $q \in \mathbb{C}$ e $\rho \in \mathbb{C}$ tal que $|\arg(\rho)| < \pi/2$, porém, como aqui será necessário apenas o caso mais restrito que acabamos de estabelecer, optamos por particularizar a situação e, como consequência, simplificar a demonstração do resultado acima. Entretanto, para mais detalhes sobre as várias possíveis representações integrais das Funções de Bessel, remetemos o leitor a ([WATSON, 1944](#)).

A representação integral para $I_q(\rho)$ demonstrada no [Teorema 2.2.6](#) não é ideal para o estudo assintótico quando $\rho \rightarrow \infty$, pois tal representação é dada a partir da soma de duas funções integrais e, de modo geral, o comportamento assintótico da soma de duas funções integrais não é a soma do comportamento assintótico de cada função integral. Isso nos motiva a encontrar outra representação integral para $I_q(\rho)$.

De início, relembremos que a Função Beta (ver [Definição C.2.2](#)) se relaciona com a Função Gama a partir da relação $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x + y)$ (ver [Teorema C.2.3](#)). Essa propriedade nos revela que, se $\operatorname{Re}(q) > -1/2$ e se $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então

$$\frac{1}{\Gamma(m + q + 1)} = \frac{1}{\Gamma(m + \frac{1}{2})\Gamma(q + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 t^{2m}(1 - t^2)^{q-\frac{1}{2}} dt. \quad (2.14)$$

A relação acima nos permite encontrar uma nova representação integral para $I_q(\rho)$.

Teorema 2.2.7. *Se $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots\}$ e se $q \in \mathbb{C}$ é tal que $\operatorname{Re}(q) > -\frac{1}{2}$, então*

$$I_q(\rho) = \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^q}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(q + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{-\rho t}(1 - t^2)^{q-\frac{1}{2}} dt.$$

Demonstração. Por (2.14) vemos que, para $\operatorname{Re}(q) > -\frac{1}{2}$, temos

$$I_q(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q}}{m!} \frac{1}{\Gamma(m + \frac{1}{2})\Gamma(q + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 t^{2m}(1 - t^2)^{q-\frac{1}{2}} dt.$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \left| \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+q} t^{2m}(1 - t^2)^{q-\frac{1}{2}}}{m!\Gamma(m + \frac{1}{2})\Gamma(q + \frac{1}{2})} \right| dt &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left|\frac{\rho}{2}\right|^{2m+q}}{m!\Gamma(m + q + 1)} \\ &= I_q(|\rho|) < +\infty, \end{aligned}$$

podemos aplicar o Teorema de Fubini-Tonelli (ver [Teorema D.10](#)) para chegarmos em

$$I_q(\rho) = \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^q}{\Gamma(q + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{q-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m} t^{2m}}{m!\Gamma(m + \frac{1}{2})} dt,$$

e ao assumir que $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots\}$, podemos aplicar a Fórmula de Duplicação de Legendre $2^{2m}\Gamma(m + 1)\Gamma(m + 1/2) = \Gamma(1/2)(2m)!$ para concluirmos que

$$\begin{aligned} I_q(\rho) &= \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^q}{\Gamma(q + \frac{1}{2})\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{q-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\rho t)^{2m}}{(2m)!} dt \\ &= \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^q}{\Gamma(q + \frac{1}{2})\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{q-\frac{1}{2}} \cosh(\rho t) dt. \end{aligned}$$

Logo, ao notar que $(1 - t^2)^{q-\frac{1}{2}}$ é uma função par e as integrais aqui consideradas possuem limites de integração simétricos em relação a origem (-1 até 1), temos

$$\int_{-1}^1 (1 - t^2)^{q-\frac{1}{2}} e^{-\rho t} dt = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{q-\frac{1}{2}} e^{\rho t} dt,$$

de onde o resultado segue, pois, por definição temos $\cosh(x) = (e^{-x} + e^x)/2$. \square

No que se segue, usaremos o Lema de Watson (ver [Teorema B.3.1](#)) e o Método de Laplace (ver [Teorema B.3.2](#)), que são dois resultados que nos auxiliarão no estudo do comportamento assintótico no infinito das Funções Modificadas de Bessel.

Com efeito, de acordo com o [Teorema 2.2.7](#) temos que, para todo $q > -1/2$ e $\rho > 0$,

$$\begin{aligned} I_q(\rho) &= \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^q}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(q + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{-\rho t} (1 - t^2)^{q-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^q}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(q + \frac{1}{2})} e^\rho \int_{-1}^1 e^{-\rho(t+1)} (1 - t^2)^{q-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^q}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(q + \frac{1}{2})} e^\rho \int_0^2 e^{-\rho u} u^{q-\frac{1}{2}} (2 - u)^{q-\frac{1}{2}} du. \end{aligned}$$

Se agora definirmos $\phi(u) := u^{q-\frac{1}{2}}(2 - u)^{q-\frac{1}{2}}$, $g(u) := (2 - u)^{q-\frac{1}{2}}$ e $\sigma := q - \frac{1}{2}$, podemos aplicar o Lema de Watson (ver [Lema de B.3.1](#)) para obtermos o comportamento assintótico quando $\rho \rightarrow \infty$:

$$\int_0^2 e^{-\rho u} u^{q-\frac{1}{2}} (2 - u)^{q-\frac{1}{2}} du \approx \frac{2^{q-\frac{1}{2}} \Gamma(q + \frac{1}{2})}{\rho^{q+\frac{1}{2}}} + O(\rho^{-\frac{3}{2}-q}).$$

Logo quando $\rho \rightarrow \infty$ obtemos o comportamento assintótico de $I_q(\rho)$, para $q > -1/2$ como sendo

$$I_q(\rho) \approx \frac{e^\rho}{\sqrt{2\pi\rho}} (1 + O(\rho^{-\frac{3}{2}})), \quad (2.15)$$

onde acima foi usado que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Sendo agora $\rho > 0$ e $q \in \mathbb{R}$ e considerando representação integral estabelecida no [Teorema 2.2.6](#):

$$K_q(\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho \cosh(t)} \cosh(qt) dt,$$

definindo $\phi(t) := \cosh(t)$, $f(t) := \cosh(qt)$ e $c := 0$ e aplicando o Método de Laplace (ver [Teorema B.3.2](#)), segue que o comportamento assintótico de $K_q(\rho)$ quando $\rho \rightarrow \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ é:

$$K_q(\rho) \approx e^{-\rho} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} + O(\rho^{-1}) \right). \quad (2.16)$$

A conclusão das aplicações do Lema de Watson e o Método de Laplace nos permite demonstrar o seguinte lema:

Lema 2.2.11. *A respeito das Funções Modificadas de Bessel, temos*

1. Se $q > -1/2$ então $\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^{-\rho} I_q(\rho) = 0$,
2. Se $q \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$ então $K_q(\rho) > 0$,

3. Se $q \in \mathbb{R}$ então $\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^\rho K_q(\rho) = 0$ e $\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^\rho \frac{d}{d\rho} K_q(\rho) = 0$.

Demonstração. 1. Diretamente de (2.15) segue

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^{-\rho} I_q(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} (1 + O(\rho^{-\frac{3}{2}})) \right] = 0.$$

2. Se $q \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$ então a função contínua não negativa $t \mapsto e^{-\rho \cosh(t)} \cosh(qt)$ assume valores positivos, como consequência do Teorema 2.2.6 vemos então que

$$K_q(\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho \cosh(t)} \cosh(qt) dt > 0.$$

3. Por (2.16) segue

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^\rho K_q(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} + \lim_{\rho \rightarrow \infty} O(\rho^{-1}) = 0. \quad (2.17)$$

Pelo Lema 2.2.7 item 2 é verdade que

$$e^\rho \frac{d}{d\rho} K_q(\rho) = -\frac{1}{2} (e^\rho K_{q-1}(\rho) + e^\rho K_{q+1}(\rho)),$$

de onde $\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^\rho \frac{d}{d\rho} K_q(\rho) = 0$ ao fazer $\rho \rightarrow \infty$ na expressão acima e ao usar (2.17) com ordens $q-1$ e $q+1$.

□

2.3 A Solução Fundamental

Podemos agora definir a solução fundamental da Equação de Helmholtz em \mathbb{R}^N . No que se segue, $l_q := 2^{q-1} \Gamma(q)$, $\omega_N := 2\pi^{N/2} / \Gamma(N/2)$ e $\gamma_N := 1/(\omega_N l_{N/2})$, de onde, sabendo que $l_{N/2} = 2^{(N/2)-1} \Gamma(N/2)$, vemos que $\gamma_N = (2\pi)^{-N/2}$. Além disso, a norma adotada em \mathbb{R}^N será a usual, ou seja, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$ para $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

Relembrando, desejamos encontrar soluções radialmente simétricas da Equação Homogênea de Helmholtz

$$\Delta u(x) - k^2 u(x) = 0,$$

em que $\lambda = -k^2$, $k > 0$. Foi provado no Lema 2.2.1 que solucionar a equação acima é equivalente a solucionar a equação diferencial ordinária

$$z''(r) + \frac{N-1}{r} z'(r) - k^2 z(r) = 0 \text{ em que } r > 0,$$

onde, por sua vez, pelo Lema 2.2.2 e pelo Lema 2.2.3, z é uma solução da equação diferencial ordinária acima se, e somente se, $z(r) = (kr)^{1-N/2} w(kr)$, onde w é solução da Equação Modificada de Bessel

$$w''(\rho) + \frac{1}{\rho}w'(\rho) - \left(1 + \frac{q^2}{\rho^2}\right)w(\rho) = 0,$$

com $\rho = kr > 0$ e $q = (N/2) - 1$. Como já provamos que $w(\rho) = K_{(N/2)-1}(\rho)$ é solução da Equação Modificada de Bessel, todas essas considerações nos conduzem ao seguinte conceito:

Definição 2.3.1. (Solução Fundamental da Equação de Helmholtz em \mathbb{R}^N) Se $k = 1$, a solução fundamental da Equação de Helmholtz em \mathbb{R}^N é a função $E_N : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E_N(x) = \gamma_N |x|^{1-\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}-1}(|x|).$$

Se $\lambda = -k^2$, em que $k > 0$, a solução fundamental $E_N^k : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como

$$E_N^k(x) = k^{N-2} E_N(kx).$$

De acordo com as propriedades que estabelecemos anteriormente sobre as Funções Modificadas de Bessel de Segunda Espécie, podemos deduzir as seguintes propriedades da solução fundamental E_N^k para $k > 0$.

Corolário 2.3.1. *As seguintes afirmações são válidas:*

1. $E_N^k \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ e $\Delta E_N^k(x) - k^2 E_N^k(x) = 0$,
2. $E_N^k(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Demonstração. Para a demonstração, basta notarmos que:

1. De forma explícita $E_N^k = \gamma_N k^{(N/2)-1} |x|^{1-N/2} K_{(N/2)-1}(k|x|)$. De acordo com o [Lema 2.2.7](#) sabemos que $K_{(N/2)-1} \in C^\infty((0, \infty))$. Como $|x| \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, as composições $K_{(N/2)-1}(k|x|)$, $|x|^{1-N/2} \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Sendo E_N^k produto de constantes com duas funções em $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, podemos concluir com segurança que $E_N^k \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Para concluir que E_N^k satisfaz a equação $\Delta u(x) - k^2 u(x) = 0$, basta usarmos que $E_N(kx)/\gamma_N$ é solução dessa equação e que $E_N^k(x) = (\gamma_N k^{N-2})(E_N(kx)/\gamma_N)$, onde obviamente $\gamma_N k^{N-2}$ é uma constante.
2. Pelo [Lema 2.2.11](#) item 2 sabemos que $K_{(N/2)-1}(k|x|) > 0$ pois $k > 0$, como também a constante $\gamma_N = (2\pi)^{-N/2} > 0$, o resultado segue.

□

Corolário 2.3.2. *Quando $|x| \rightarrow 0$:*

1. $\frac{E_2^k(x)}{-\log(k|x|)} \rightarrow \frac{1}{2\pi l_1}$,

2. $|x|^{N-2}E_N^k(x) \rightarrow \gamma_N l_{\frac{N}{2}-1} > 0$ para $N \geq 3$,
3. $|x|^{N-1} |\nabla E_N^k(x)| \rightarrow \gamma_N l_{\frac{N}{2}} > 0$ para $N \geq 2$.

Demonstração. De fato

1. Pelo [Lema 2.2.8](#) item 2 e notando que $l_1 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{E_2^k(x)}{-\log(k|x|)} &= \frac{\gamma_2 K_0(k|x|)}{-\log(k|x|)} \\ &\rightarrow (2\pi)^{-1} \\ &= \frac{1}{2\pi l_1}. \end{aligned}$$

2. Se $N \geq 3$ então $(N/2) - 1 > 0$ e, portanto, pelo [Lema 2.2.8](#) item 3,

$$\begin{aligned} |x|^{N-2}E_N^k(x) &= \gamma_N k^{\frac{N}{2}-1} |x|^{\frac{N}{2}-1} K_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) \\ &= \gamma_N (k|x|)^{\frac{N}{2}-1} K_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) \\ &\rightarrow \gamma_N l_{\frac{N}{2}-1} > 0. \end{aligned}$$

3. Pela [Regra da Cadeia](#) e pela [Regra do Produto](#)

$$\partial_i E_N^k(x) = \gamma_N k^{\frac{N}{2}-1} \left(\left(1 - \frac{N}{2}\right) |x|^{-\frac{N}{2}-1} x_i K_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) + |x|^{-\frac{N}{2}} k x_i K'_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) \right).$$

Logo

$$|x|^{N-1} \partial_i E_N^k(x) = \gamma_N \frac{x_i}{|x|} \left(\left(1 - \frac{N}{2}\right) (|x|k)^{\frac{N}{2}-1} K_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) + (|x|k)^{\frac{N}{2}} K'_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) \right),$$

ou seja,

$$|x|^{N-1} |\nabla E_N^k(x)| = \gamma_N \left| \left(1 - \frac{N}{2}\right) (|x|k)^{\frac{N}{2}-1} K_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) + (|x|k)^{\frac{N}{2}} K'_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) \right|.$$

Se $N = 2$, então

$$|x| |\nabla E_2^k(x)| = \gamma_2 |(|x|k) K'_0(k|x|)|,$$

de onde, pelo [Lema 2.2.8](#) item 4, segue que, ao fazer $|x| \rightarrow 0$,

$$|x| |\nabla E_2^k(x)| \rightarrow \gamma_2 | -1 | = \gamma_2 l_1 = \gamma_2 l_{\frac{2}{2}} > 0.$$

Caso agora $N > 2$ segue pelo [Lema 2.2.8](#) itens 3 e 4 que quando $|x| \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} |x|^{N-1} |\nabla E_N^k(x)| &\rightarrow \gamma_N \left| \left(1 - \frac{N}{2}\right) l_{\frac{N}{2}-1} - \left(\frac{N}{2} - 1\right) l_{\frac{N}{2}-1} \right| \\ &= \gamma_N \left| 1 - \frac{N}{2} \right| 2l_{\frac{N}{2}-1} \\ &= \gamma_N \left(\frac{N}{2} - 1\right) 2^{\frac{N}{2}-1} \Gamma\left(\frac{N}{2} - 1\right) \\ &= \gamma_N 2^{\frac{N}{2}-1} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \\ &= \gamma_N l_{\frac{N}{2}} > 0. \end{aligned}$$

□

Corolário 2.3.3. Quando $|x| \rightarrow \infty$:

1. $e^{k|x|} E_N^k(x) \rightarrow 0$,
2. $e^{k|x|} |\nabla E_N^k(x)| \rightarrow 0$.

Demonstração. De fato

1. Como $N \geq 2$, então $1 - N/2 \leq 0$. Logo, pelo [Lema 2.2.11](#) item 3 temos, quando $|x| \rightarrow \infty$:

$$e^{k|x|} E_N^k(x) = \gamma_N k^{\frac{N}{2}-1} |x|^{1-\frac{N}{2}} \left(e^{k|x|} K_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) \right) \rightarrow 0.$$

2. Tomando uso das identidades já demonstradas no [Corolário 2.3.2](#) item 3:

$$|\nabla E_N^k(x)| = \gamma_N k^{\frac{N}{2}-1} \left| \left(1 - \frac{N}{2} \right) |x|^{-\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) + |x|^{1-\frac{N}{2}} k K'_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) \right|.$$

Logo $e^{k|x|} |\nabla E_N^k(x)|$ assume a forma

$$\gamma_N k^{\frac{N}{2}-1} \left| \left(1 - \frac{N}{2} \right) |x|^{-\frac{N}{2}} \left(e^{k|x|} K_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) \right) + |x|^{1-\frac{N}{2}} k \left(e^{k|x|} K'_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) \right) \right|,$$

e como $-N/2 \leq -1$ e $1 - N/2 \leq 0$, já que $N \geq 2$, o resultado segue ao fazer $|x| \rightarrow \infty$ e ao usar novamente o [Lema 2.2.11](#) item 3.

□

Provaremos agora que a solução fundamental E_N^k , a depender dos parâmetros N e k , estão nos espaços de Lebesgue. Tal propriedade é essencial para o uso dos Teoremas de Regularidade aqui abordados.

Teorema 2.3.1. A respeito da solução fundamental, temos

1. $E_2^k \in L^p(\mathbb{R}^2)$ para $1 \leq p < \infty$,
2. $E_N^k \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p < N/(N-2)$ quando $N \geq 3$,
3. $\partial_i E_N^k \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p < N/(N-1)$ quando $N \geq 2$ e $i = 1, 2, \dots, N$.

Demonstração. De fato,

1. Defina $L := 1/(2\pi l_1) > 0$. Pelo [Corolário 2.3.2](#) item 1, sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\left| \frac{E_2^k(x)}{-\log(k|x|)} - L \right| < \varepsilon \text{ sempre que } |x| < R,$$

ou seja,

$$|E_2^k(x)| < (\varepsilon + L) \log(k|x|) \text{ sempre que } |x| < R.$$

Logo, elevando a expressão acima a p e integrando a expressão resultante na bola $B(0, R)$, segue que

$$\int_{B(0,R)} |E_2^k(x)|^p dx \leq |\varepsilon + L|^p \int_{B(0,R)} |\log(k|x|)|^p dx.$$

Como $x \mapsto |\log(k|x|)|^p$ é uma função radial não negativa, podemos aplicar a Fórmula de Integração de Funções Radiais (ver [Teorema D.11](#)) para chegarmos em

$$\int_{B(0,R)} |\log(k|x|)|^p dx = \omega_2 \int_0^R |\log(kr)|^p r dr.$$

Notando agora que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \log(kr)r = - \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r}{\frac{1}{r^2}} = - \lim_{r \rightarrow 0^+} r = 0,$$

evidenciamos que

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} |E_2^k(x)|^p dx &\leq |\varepsilon + L|^p \int_{B(0,R)} |\log(k|x|)|^p dx \\ &= \omega_2 |\varepsilon + L|^p \int_0^R |\log(kr)|^p r dr < +\infty. \end{aligned}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, temos pelo [Corolário 2.3.3](#) item 1 que existe $L > 0$ tal que para todo $|x| > L$,

$$|e^{k|x|} E_2^k(x)| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$|E_2^k(x)| < \frac{\varepsilon}{e^{k|x|}} \text{ sempre que } |x| > L.$$

Logo, elevando a expressão acima a p e integrando em $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, L)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,L)} |E_2^k(x)|^p dx \leq \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,L)} e^{-pk|x|} dx.$$

Novamente pela Fórmula de Integração de Funções Radiais (ver [Teorema D.11](#)), temos

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,L)} e^{-pk|x|} dx = \omega_2 \int_L^\infty \frac{r}{e^{rkp}} dr < +\infty,$$

provando que

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,L)} |E_2^k(x)|^p dx < +\infty.$$

Como podemos supor que $R < L$ e de acordo com o [Corolário 2.3.1](#) item 1 sabemos que $E_2^k \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, então é também verdade que

$$\int_{B(0,L) \setminus B(0,R)} |E_2^k(x)|^p dx < +\infty.$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^2} |E_2^k(x)|^p dx = \int_{B(0,R)} |E_2^k(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,L)} |E_2^k(x)|^p dx + \int_{B(0,L) \setminus B(0,R)} |E_2^k(x)|^p dx,$$

evidenciando que $E_2^k \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e provando o afirmado.

2. Seja $N \geq 3$ e defina $L := \gamma_N l_{(N/2)-1} > 0$. Ao usar o [Corolário 2.3.1](#) item 1, [Corolário 2.3.2](#) item 2, [Corolário 2.3.3](#) item 1 e o [Teorema D.11](#), podemos proceder como no item anterior e concluir que

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} |E_N^k(x)|^p dx &\leq |\varepsilon + L|^p \omega_N \int_0^R \frac{1}{r^{p(N-2)}} r^{N-1} dr, \\ \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,L)} |E_N^k(x)|^p dx &\leq \varepsilon^p \omega_N \int_L^\infty \frac{r^{N-1}}{e^{rkp}} dr < +\infty, \\ \int_{B(0,L) \setminus B(0,R)} |E_N^k(x)|^p dx &< +\infty. \end{aligned}$$

Como por hipótese $1 \leq p < N/(N-2)$, segue que $-1 < N-1-p(N-2) \leq 1$ e portanto

$$\int_0^R r^{N-1-p(N-2)} dr < +\infty,$$

de onde o resultado segue.

3. Sejam $N \geq 2$ e $L := \gamma_N l_{N/2} > 0$. Usando agora o [Corolário 2.3.2](#) item 3, [Corolário 2.3.3](#) item 2 e procedendo como no item anterior, teremos as desigualdades

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} |\partial_i E_N^k(x)|^p dx &\leq \int_{B(0,R)} |\nabla E_N^k(x)|^p dx \leq |\varepsilon + L|^p \omega_N \int_0^R \frac{1}{r^{p(N-1)}} r^{N-1} dr, \\ \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,L)} |\partial_i E_N^k(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,L)} |\nabla E_N^k(x)|^p dx \leq \varepsilon^p \omega_N \int_L^\infty \frac{r^{N-1}}{e^{rkp}} dr < +\infty, \\ \int_{B(0,L) \setminus B(0,R)} |\partial_i E_N^k(x)|^p dx &\leq \int_{B(0,L) \setminus B(0,R)} |\nabla E_N^k(x)|^p dx < +\infty. \end{aligned}$$

Como por hipótese $1 \leq p < N/(N-1)$, então $-1 < N-1-p(N-1) \leq 0$ e assim

$$\int_0^R r^{N-1-p(N-1)} dr < +\infty,$$

concluindo a demonstração do item 3 e finalizando a prova do teorema.

□

Usando todas as informações até agora demonstradas sobre E_N^k , podemos expressar as soluções da Equação de Helmholtz não homogênea como a convolução da solução fundamental e o termo não homogêneo f (ver [\(P\)](#)). Antes de provar esse fato, recordemos o seguinte resultado sobre convolução que nos será útil.

Lema 2.3.1. *Seja $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ e seja $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Então para todo $x \in \mathbb{R}^N$, a aplicação*

$$y \mapsto f(x - y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

e definindo para cada $x \in \mathbb{R}^N$

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)dy,$$

teremos que $f \star g \in C(\mathbb{R}^N)$ com

1. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (f \star g)(x) = 0$,
2. $|f \star g|_\infty \leq |f|_\infty |g|_1$,
3. $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x - y)dy$.

Demonstração. Como por hipótese $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$, temos que f é contínua no conjunto compacto $\text{supp}(f)$ e portanto limitada em $\text{supp}(f)$ pelo Teorema de Weierstrass (ver Teorema A.1.1), de onde, vemos que f é limitada em \mathbb{R}^N . Relembrando que

$$|f|_\infty = \inf\{C \geq 0; |f(w)| \leq C \text{ a menos de um conjunto de medida nula em } \mathbb{R}^N\},$$

podemos então considerar uma sequência $(C_n)_{n=1}^\infty$ de números reais e uma sequência $(A_n)_{n=1}^\infty$ de conjuntos Lebesgue mensuráveis, todos de medida nula, tais que $C_n \rightarrow |f|_\infty$ e $|f(w)| \leq C_n$ sempre que $w \notin A_n$ para cada n natural. Logo, ao considerar $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, temos que A ainda possui medida de Lebesgue nula e, ao fixar $x \in \mathbb{R}^N$ e notar que cada w pode ser escrito da forma $w = x - y$, onde $y \in \mathbb{R}^N$, evidenciamos que $|f(x - y)| \leq C_n$ para todo n natural, a menos de um conjunto de medida nula, e portanto, ao fazer $n \rightarrow \infty$, concluímos que $|f(x - y)| \leq |f|_\infty$ para quase todo $y \in \mathbb{R}^N$ e como consequência imediata, temos $|f(x - y)g(y)| \leq |f|_\infty |g(y)|$ para quase todo $y \in \mathbb{R}^N$ e assim, ao usar a hipótese de que $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, podemos integrar e concluir que

$$|(f \star g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)g(y)|dy \leq |f|_\infty |g|_1,$$

ou ainda, $|f \star g|_\infty \leq |f|_\infty |g|_1$. Notando agora que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x - y)g(y) = 0$ (pois f é de suporte compacto), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema D.5) para provar que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (f \star g)(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)dy = 0.$$

Provaremos que $f \star g$ é contínua em $z \in \mathbb{R}^N$ arbitrário. De fato, quaisquer que sejam $x, z \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} |(f \star g)(x) - (f \star g)(z)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y) - f(z - y)||g(y)|dy \\ &\leq \max_{y \in \mathbb{R}^N} |f(x - y) - f(z - y)||g|_1. \end{aligned}$$

Se $|g|_1 = 0$, a desejada continuidade segue diretamente, caso contrário, basta notar que f é contínua no conjunto compacto $\text{supp}(f)$ e portanto uniformemente contínua em $\text{supp}(f)$ (ver Teorema A.1.2) e assim f é uniformemente contínua em \mathbb{R}^N . Logo, dado $\varepsilon > 0$, é possível achar $\delta > 0$ tal que quaisquer que sejam $v, w \in \mathbb{R}^N$:

$$|v - w| < \delta \text{ implica que } |f(v) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{|g|_1}.$$

Considerando então $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $|x - z| < \delta$, temos que para qualquer $y \in \mathbb{R}^N$ $|x - z| = |(x - y) - (z - y)| < \delta$ e assim

$$|f(x - y) - f(z - y)| < \frac{\varepsilon}{|g|_1} \quad \forall y \in \mathbb{R}^N,$$

de onde se prova a continuidade de $f \star g$.

Para finalizar consideremos a transformação $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ definida por $\varphi(y) = x - y$. Note que φ é invertível com inversa $\varphi^{-1}(y) = \varphi(y)$, que φ é diferenciável com derivada definida para cada $h \in \mathbb{R}^N$ por $\varphi'(y)h = -h$, que por sua vez é contínua, de onde φ é um difeomorfismo de classe C^1 . Como $|\det(\varphi'(y))| = |-\det I_{N \times N}| = 1$, em que $I_{N \times N}$ é a matriz identidade de ordem N e $\varphi(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$, podemos usar o fato já provado de que $y \mapsto f(x - y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ para aplicarmos o Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema D.12) e concluir que $y \mapsto f(y)g(x - y) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e além disso

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x - y)dy,$$

como desejado. □

O resultado seguinte nos mostrará que podemos usar a solução fundamental E_N^k para obter soluções clássicas da Equação de Helmholtz não homogênea.

Teorema 2.3.2. *Dado $k > 0$ e $f \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$, definimos*

$$T_k f(x) := f \star E_N^k(x) \text{ para } x \in \mathbb{R}^N. \quad (2.18)$$

Então $T_k f \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} T_k f(x) = 0$ e $u = T_k f$ satisfaz a Equação de Helmholtz

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x) + f(x) \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad (2.19)$$

em que $\lambda = -k^2$. Além disso, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, as seguintes fórmulas são válidas para $i, j = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} T_k f(x) &= k^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)E_N(ky)dy = k^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} E_N(k(x - y))f(y)dy, \\ \partial_i T_k f(x) &= k^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i f(x - y)E_N(ky)dy = k^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i E_N(k(x - y))f(y)dy, \\ \partial_j \partial_i T_k f(x) &= k^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j f(x - y)\partial_i E_N(ky)dy. \end{aligned}$$

Demonstração. Como por hipótese $f, \partial_i f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ e $E_N^k, \partial_i E_N^k \in L^1(\mathbb{R}^N)$ de acordo com o [Teorema 2.3.1](#), segue pelo [Lema 2.3.1](#) que as convoluções

$$T_k f = f \star E_N^k, \quad \partial_i f \star E_N^k, \quad f \star \partial_i E_N^k, \quad \partial_i f \star \partial_j E_N^k,$$

estão todas bem definidas, são contínuas e todas convergem para zero quando $|x| \rightarrow \infty$. Então, para provar o resultado é suficiente estabelecer as seguintes afirmações

1. $\partial_i T_k f$ existe e $\partial_i T_k f = \partial_i f \star E_N^k$,
2. $\partial_i f \star E_N^k = \partial_i E_N^k \star f$,
3. $\partial_j \partial_i T_k f$ existe e $\partial_j \partial_i T_k f = \partial_j f \star \partial_i E_N^k$,
4. $-\Delta T_k f + k^2 T_k f = f$ em \mathbb{R}^N .

1. Seja e_i um elemento da base canônica do espaço \mathbb{R}^N e h um número real não nulo. Então

$$\begin{aligned} \frac{T_k f(x + he_i) - T_k f(x)}{h} &= \frac{f \star E_N^k(x + he_i) - f \star E_N^k(x)}{h} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} E_N^k(y) dy \end{aligned}$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} = \partial_i f(x - y).$$

Como também

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + the_i - y) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_0^1 f'(x + the_i - y)(he_i) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 f'(x + the_i - y)(e_i) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \partial_i f(x + the_i - y) dt \right| \\ &\leq \max_{z \in \mathbb{R}^N} |\partial_i f(z)| \\ &= |\partial_i f|_\infty, \end{aligned}$$

podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.5](#)) e concluir que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_k f(x + he_i) - T_k f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} E_N^k(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i f(x - y) E_N^k(y) dy \\ &= \partial_i f \star E_N^k(x). \end{aligned}$$

2. Para $i = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}
 \partial_i f \star E_N^k(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \partial_i f(x-y) E_N^k(y) dy \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{|y| \geq \varepsilon} f'(x-y) (-e_i) E_N^k(y) dy \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} f(x-y) E_N^k(y) dy \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{|y|=\varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x-y) E_N^k(y) dy + \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y) \frac{\partial}{\partial y_i} E_N^k(y) dy \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{|y|=\varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x-y) E_N^k(y) dy + k^{N-2} \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y) \frac{\partial}{\partial y_i} E_N(ky) dy \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{|y|=\varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x-y) E_N^k(y) dy + k^{N-2} \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y) E_N'(ky) (ke_i) dy \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{|y|=\varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x-y) E_N^k(y) dy + k^{N-1} \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y) E_N'(ky) (e_i) dy \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{|y|=\varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x-y) E_N^k(y) dy + k^{N-1} \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y) \partial_i E_N(ky) dy \right].
 \end{aligned}$$

onde acima foi usada a Fórmula de Integração por Partes (ver [Teorema A.1.9](#)) e o fato de que o vetor normal unitário exterior ν ao conjunto $\{y \in \mathbb{R}^N; |y| \geq \varepsilon\}$ é definido por $\nu(y) = -y/|y|$. Em seguida notemos que

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{|y|=\varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x-y) E_N^k(y) dy \right| &= k^{N-2} \left| \int_{|y|=\varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x-y) E_N(ky) dy \right| \\
 &\leq k^{N-2} |f|_\infty \int_{|y|=\varepsilon} |E_N(ky)| dy \\
 &= k^{N-2} |f|_\infty \left[\gamma_N (k\varepsilon)^{1-\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}-1}(k\varepsilon) \int_{|y|=\varepsilon} dy \right] \\
 &= k^{N-2} |f|_\infty \left[\gamma_N (k\varepsilon)^{1-\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}-1}(k\varepsilon) \right] \omega_N \varepsilon^{N-1} \\
 &= |f|_\infty \gamma_N \omega_N \varepsilon (k\varepsilon)^{\frac{N}{2}-1} K_{\frac{N}{2}-1}(k\varepsilon),
 \end{aligned}$$

e portanto pelo [Lema 2.2.8](#) item 3 evidenciamos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y|=\varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x-y) E_N^k(y) dy = 0,$$

de onde, sabendo que, de acordo com o item 1 do presente teorema, vale $\partial_i f \star E_N^k(x) = \partial_i T_k f(x)$, vemos finalmente que

$$\begin{aligned}
 k^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i f(x-y) E_N(ky) dy &= \partial_i f \star E_N^k(x) \\
 &= k^{N-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y) \partial_i E_N(ky) dy \\
 &= k^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) \partial_i E_N(ky) dy \\
 &= k^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \partial_i E_N(k(x-y)) dy,
 \end{aligned}$$

provando que $\partial_i f \star E_N^k(x) = \partial_i E_N^k \star f(x)$.

3. De fato, de acordo com o item anterior

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i T_k f(x + he_j) - \partial_i T_k f(x)}{h} &= \frac{\partial_i E_N^k \star f(x + he_j) - \partial_i E_N^k \star f(x)}{h} \\ &= \frac{f \star \partial_i E_N^k(x + he_j) - f \star \partial_i E_N^k(x)}{h} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x + he_j - y) - f(x - y)}{h} \partial_i E_N^k(y) dy \\ &= k^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x + he_j - y) - f(x - y)}{h} \partial_i E_N(ky) dy. \end{aligned}$$

Assim como no item 1, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.5](#)) e concluir que

$$\begin{aligned} \partial_j \partial_i T_k f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_i T_k f(x + he_j) - \partial_i T_k f(x)}{h} \\ &= k^{N-1} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x + he_j - y) - f(x - y)}{h} \partial_i E_N(ky) dy \\ &= k^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j f(x - y) \partial_i E_N(ky) dy \\ &= \partial_j f \star \partial_i E_N^k(x). \end{aligned}$$

4. Para $x \in \mathbb{R}^N$, temos ao usar o item 3

$$\begin{aligned} \Delta T_k f(x) &= \sum_{i=1}^N \partial_i \partial_i T_k f(x) \\ &= k^{N-1} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i f(x - y) \partial_i E_N(ky) dy \\ &= k^{N-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \sum_{i=1}^N \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} f(x - y) \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial y_i} E_N(ky) dy \right) \\ &= k^{N-2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \int_{|y| = \varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x - y) \frac{\partial}{\partial y_i} E_N(ky) dy \\ &\quad + k^{N-2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x - y) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} E_N(ky) dy \\ &= k^{N-2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \int_{|y| = \varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x - y) \frac{\partial}{\partial y_i} E_N(ky) dy \\ &\quad + k^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) \Delta E_N(ky) dy. \end{aligned}$$

Como de acordo com o [Corolário 2.3.1](#) item 1 sabemos que

$$\Delta E_N(ky) = k^2 E_N(ky)$$

segue que

$$\begin{aligned} \Delta T_k f(x) &= k^{N-2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \int_{|y| = \varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x - y) \frac{\partial}{\partial y_i} E_N(ky) dy \\ &\quad + k^N \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) E_N(ky) dy. \end{aligned}$$

Avaliaremos agora o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ acima. De início, notemos que de acordo com [Lema 2.2.7](#) item 5

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y_i} E_N(ky) &= \gamma_N \left(|ky|^{1-\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}-1}(|ky|) \right)' k \frac{y_i}{|y|} \\
 &= -\gamma_N \left(|ky|^{1-\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}}(|ky|) \right) k \frac{y_i}{|y|}.
 \end{aligned}$$

Notemos também que a partir do Teorema do Valor Médio para Funções (ver [Teorema A.1.7](#)) existe $t \in (0, 1)$ tal que quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}
 |f(x-y) - f(x)| &= |f'(x-ty)(y)| \\
 &= |\langle \nabla f(x-ty), y \rangle| \\
 &\leq |\nabla f(x-ty)| |y| \\
 &\leq \|\nabla f\|_{\infty} |y|,
 \end{aligned}$$

onde acima foi usada a famosa Desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver [Teorema E.1](#)).

Logo

$$k^{N-2} \sum_{i=1}^N \int_{|y|=\varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x-y) \frac{\partial}{\partial y_i} E_N(ky) dy = -\gamma_N k^{\frac{N}{2}} \varepsilon^{1-\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}}(k\varepsilon) \int_{|y|=\varepsilon} f(x-y) dy,$$

de onde ao somar e subtrair $\int_{|y|=\varepsilon} f(x) dy$ no lado direito da igualdade acima teremos

$$\begin{aligned}
 k^{N-2} \sum_{i=1}^N \int_{|y|=\varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x-y) \frac{\partial}{\partial y_i} E_N(ky) dy &= -C(N, k, \varepsilon) \int_{|y|=\varepsilon} (f(x-y) - f(x)) dy \\
 &\quad - C(N, k, \varepsilon) \omega_N \varepsilon^{N-1} f(x),
 \end{aligned}$$

em que $C(N, k, \varepsilon) = \gamma_N k^{\frac{N}{2}} \varepsilon^{1-\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}}(k\varepsilon)$. Por ser

$$\begin{aligned}
 \left| C(N, k, \varepsilon) \int_{|y|=\varepsilon} (f(x-y) - f(x)) dy \right| &\leq C(N, k, \varepsilon) \|\nabla f\|_{\infty} \varepsilon \omega_N \varepsilon^{N-1} \\
 &= \gamma_N \omega_N \|\nabla f\|_{\infty} (k\varepsilon)^{\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}}(k\varepsilon) \varepsilon,
 \end{aligned}$$

podemos aplicar o [Lema 2.2.8](#) item 3 para concluir que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_N \omega_N \|\nabla f\|_{\infty} (k\varepsilon)^{\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}}(k\varepsilon) \varepsilon = 0$$

e

$$\begin{aligned}
 -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(N, k, \varepsilon) \omega_N \varepsilon^{N-1} f(x) &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_N \omega_N (k\varepsilon)^{\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}}(k\varepsilon) f(x) \\
 &= -f(x) \omega_N \gamma_N l_{\frac{N}{2}} \\
 &= -f(x),
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$k^{N-2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \int_{|y|=\varepsilon} \frac{y_i}{|y|} f(x-y) \frac{\partial}{\partial y_i} E_N(ky) dy = -f(x)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 \Delta T_k f(x) &= -f(x) + k^2 k^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) E_N(ky) dy \\
 &= -f(x) + k^2 \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) E_N^k(y) dy \\
 &= -f(x) + k^2 f \star E_N^k(x) \\
 &= -f(x) + k^2 T_k f(x),
 \end{aligned}$$

Como desejado.

□

Observação 2.3.1. *Definindo*

$$\Theta_N^k(x) = (k|x|)^{1-\frac{N}{2}} I_{\frac{N}{2}-1}(k|x|) \text{ para } x \neq 0,$$

é também possível demonstrar que $c\Theta_N^k \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz (2.2) para $\lambda = -k^2$ e para todo $c \in \mathbb{R}$. Como consequência $T_k f + c\Theta_N^k$ satisfaz (2.19) para todas as constantes $c \in \mathbb{R}$. Porém $\Theta_N^k(x)$ cresce exponencialmente quando $|x| \rightarrow \infty$.

Por fim, propriedades adicionais de $T_k f$ serão estabelecidas no próximo capítulo. Aqui notamos apenas que, de acordo com o Teorema, que acabamos de provar, é verdade que $\partial_i T_k f(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$ para $i = 1, \dots, N$. Resultados a respeito da integrabilidade de $T_k f$ serão também estabelecidos no próximo capítulo onde também será demonstrado que $T_k f$ coincide com a única solução fraca de (P) estabelecida no Teorema 2.1.1.

3 Teoria de Regularidade - L^p

3.1 Regularidade - $W^{1,p}$

O objetivo desta seção é obter um relacionamento mais estreito entre a regularidade da solução fraca da Equação de Helmholtz e as propriedades do termo não homogêneo f em (P). Na abordagem aqui adotada, o primeiro passo consiste em obter estimativas para a representação $T_k f$ que foi introduzida no capítulo anterior. Essas estimativas podem ser provadas a partir da Desigualdade de Young para Convoluções, que demonstraremos agora:

Lema 3.1.1. *Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ com $1/p + 1/q \geq 1$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy \text{ converge quase sempre em } x \in \mathbb{R}^N$$

e define um elemento de $L^s(\mathbb{R}^N)$ em que $1/s = 1/p + 1/q - 1$ (com $s = \infty$ se $1/p + 1/q = 1$). Denotando esse elemento por $f \star g$, temos, além disso, $f \star g = g \star f$ e

$$|f \star g|_s \leq |f|_p |g|_q.$$

Note que essa definição coincide com a definição de convolução introduzida no [Lema 2.3.1](#), em que, $p = \infty$ e $q = 1$. Além disso, como $p, q \geq 1$, então $1/p + 1/q \leq 2$ e, portanto, $s \geq 1$.

Demonstração. Consideremos primeiro o caso em que $1/p + 1/q > 1$. Nesse caso, definimos s a partir da igualdade $1/s = 1/p + 1/q - 1$ e observamos que

$$1 - \frac{p}{s} = p \left(1 - \frac{1}{q}\right) \geq 0$$

$$1 - \frac{q}{s} = q \left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq 0.$$

Também temos

$$|f(x-y)||g(y)| = [|f(x-y)|^p |g(y)|^q]^{\frac{1}{s}} |f(x-y)|^{1-\frac{p}{s}} |g(y)|^{1-\frac{q}{s}},$$

e definindo

$$\alpha = \frac{p}{1-\frac{p}{s}} \text{ e } \beta = \frac{q}{1-\frac{q}{s}} \text{ com } \alpha = \infty \text{ se } p = s \text{ e } \beta = \infty \text{ se } q = s,$$

segue que

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Notemos agora que, ao considerar qualquer $x \in \mathbb{R}^N$, é verdade, de acordo com o Teorema de Tonelli (ver Teorema D.8), que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|g(y)|^q \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p dx \right) dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|^q dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p dx \right) \\ &= |g|_q^q |f|_p^p < +\infty. \end{aligned}$$

Isso nos diz que $\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \in \mathbb{R}$ quase sempre em $x \in \mathbb{R}^N$. A partir daí vemos que $[|f(x-y)|^p |g(y)|^q]^{\frac{1}{s}} \in L^s(\mathbb{R}^N)$ quase sempre em $x \in \mathbb{R}^N$, $|f(x-y)|^{1-\frac{p}{s}} \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e $|g(y)|^{1-\frac{q}{s}} \in L^\beta(\mathbb{R}^N)$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$. Logo, podemos aplicar a Desigualdade de Hölder para três fatores (ver Teorema D.4) para chegarmos que, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)| dy &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right]^{\frac{1}{s}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p dy \right]^{\frac{1}{\alpha}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|^q dy \right]^{\frac{1}{\beta}} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right]^{\frac{1}{s}} |f|_p^{\frac{p}{\alpha}} |g|_q^{\frac{q}{\beta}}. \end{aligned}$$

Assim, novamente pelo Teorema de Tonelli (ver Teorema D.8)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)| dy \right)^s dx &\leq |f|_p^{\frac{sp}{\alpha}} |g|_q^{\frac{sq}{\beta}} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right) dx \\ &= |f|_p^{\frac{sp}{\alpha}} |g|_q^{\frac{sq}{\beta}} |f|_p^p |g|_q^q \\ &= |f|_p^s |g|_q^s. \end{aligned}$$

De onde segue que

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy \in L^s(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad |f \star g|_s \leq |f|_p |g|_q.$$

Caso agora $1/p + 1/q = 1$ podemos aplicar a Desigualdade de Hölder convencional para chegarmos em

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)| dy &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |f|_p |g|_q. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$|f \star g|_\infty \leq |f|_p |g|_q,$$

finalizando a demonstração do resultado. \square

Lema 3.1.2. *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, então $f \star E_N^k \in L^s(\mathbb{R}^N)$, $k > 0$, desde que p e s se relacionem da seguinte forma:*

$$\begin{cases} p \leq s \leq \infty & \text{se } p > \frac{N}{2}, \\ p \leq s < \infty & \text{se } p = \frac{N}{2}, \\ p \leq s < \frac{Np}{N-2p} & \text{se } 1 \leq p < \frac{N}{2} \text{ e } N \geq 3. \end{cases} \quad (3.1)$$

Além disso, definindo $T_k f = f \star E_N^k$, vemos que

$$T_k : L^p(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^s(\mathbb{R}^N) \text{ é um operador linear contínuo} \quad (3.2)$$

sob as restrições expostas em (3.1).

De modo semelhante, para $i = 1, \dots, N$, a convolução $f \star \partial_i E_N^k \in L^s(\mathbb{R}^N)$ sempre que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, em que p e s se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{cases} p \leq s \leq \infty & \text{se } p > N, \\ p \leq s < \infty & \text{se } p = N, \\ p \leq s < \frac{Np}{N-p} & \text{se } 1 \leq p < N. \end{cases} \quad (3.3)$$

Além disso, definindo $S_k^i f = f \star \partial_i E_N^k$, onde $i = 1, \dots, N$, vemos também que

$$S_k^i : L^p(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^s(\mathbb{R}^N) \text{ é um operador linear contínuo} \quad (3.4)$$

sob as restrições expostas em (3.3).

Demonstração. Basta combinar o Teorema 2.3.1 e a Desigualdade de Young para Convoluções (ver Lema 3.1.1). \square

Note que o operador T_k introduzido no lema acima estende aquele introduzido no Teorema 2.3.2 .

Estabeleceremos agora a relação entre $T_k f$ e a solução fraca de (P).

Teorema 3.1.1. *Seja $\lambda = -k^2$ onde $k > 0$ e seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ onde $p \in (2N/(N+2), 2]$. Então $T_k f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\partial_i T_k f = S_k^i f$. Além disso, $T_k f$ é uma solução fraca de (P) e, pelo Teorema 2.1.1, $T_k f = G_\lambda f$.*

Demonstração. Sabendo que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^N)$ (ver Teorema D.13), temos que existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Como, por hipótese, $p > 2N/(N+2)$, então $2N/(N-2) < Np/(N-2p)$ quando $N > 2$ e $p < N/2$. Logo, a partir de (3.1) e (3.2), segue que

$$T_k f_n \text{ e } T_k f \in L^s(\mathbb{R}^N) \text{ e que } \|T_k f_n - T_k f\|_s \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

desde que $p \leq s < 2N/(N-2)$ para $N \geq 3$ e $p \leq s < \infty$ para $N = 2$. De modo semelhante $p > 2N/(N+2)$ implica que $2 < Np/(N-p)$ quando $p < N$, de onde a partir de (3.3) e (3.4) segue que

$$S_k^i f_n \text{ e } S_k^i f \in L^s(\mathbb{R}^N) \text{ e que } \|S_k^i f_n - S_k^i f\|_s \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

desde que $p \leq s \leq 2$. De acordo com o Teorema 2.3.2, sabemos que $T_k f_n \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e que $\partial_i T_k f_n = \partial_i E_N^k \star f_n = S_k^i f_n$. Podemos claramente considerar $s = 2$ nas afirmações anteriores

e portanto, ao aplicar a Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.6](#)), temos que existe uma subsequência $(T_k f_{n_j})_{j=1}^\infty$ e $h_1 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tais que $T_k f_{n_j}(x) \rightarrow T_k f(x)$ quando $j \rightarrow \infty$ quase sempre em $x \in \mathbb{R}^N$ e $|T_k f_{n_j}(x)| \leq h_1(x)$ para todo j natural quase sempre em $x \in \mathbb{R}^N$. Dado agora $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} T_k f(x) \partial_i v(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{j \rightarrow \infty} T_k f_{n_j}(x) \partial_i v(x) dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} T_k f_{n_j}(x) \partial_i v(x) dx \\ &= - \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} S_k^i f_{n_j}(x) v(x) dx, \end{aligned}$$

onde, acima, notamos que, como estamos essencialmente integrando em $\text{supp}(\partial_i v)$, que por sua vez possui medida de Lebesgue finita, podemos supor que $h_1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, de onde a igualdade da primeira para a segunda linha, se justifica por uma aplicação do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.5](#)). Já o passo da segunda para a terceira linha é justificado ao usarmos o fato de que funções fortemente diferenciáveis são, em particular, fracamente diferenciáveis. Podemos agora aplicar mais uma vez a Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.6](#)) para encontrarmos uma outra subsequência $(S_k^i f_{n_{j_l}})_{l=1}^\infty$ e $h_2 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $S_k^i f_{n_{j_l}}(x) \rightarrow S_k^i f(x)$ quando $l \rightarrow \infty$ quase sempre em $x \in \mathbb{R}^N$ e $|S_k^i f_{n_{j_l}}(x)| \leq h_2(x)$ para todo l natural quase sempre em $x \in \mathbb{R}^N$. Logo, argumentando via o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.5](#)) da mesma maneira que fizemos acima, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} T_k f(x) \partial_i v(x) dx &= - \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} S_k^i f_{n_j}(x) v(x) dx \\ &= - \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} S_k^i f_{n_{j_l}}(x) v(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{l \rightarrow \infty} S_k^i f_{n_{j_l}}(x) v(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} S_k^i f(x) v(x) dx, \end{aligned}$$

provando que $T_k f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\partial_i T_k f = S_k^i f$ para $i = 1, \dots, N$. Seja agora $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Por ser $T_k f_n \in C^2(\mathbb{R}^N)$ para cada n natural, vemos, em particular, que cada $T_k f_n$ é fracamente diferenciável até ordem 2 e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} T_k f_n \Delta v dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(T_k f_n) v dx.$$

Como provamos que $T_k f \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos também

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla T_k f \cdot \nabla v dx = - \int_{\mathbb{R}^N} T_k f \Delta v dx.$$

A partir dessas considerações, podemos provar que $T_k f$ é solução fraca de (P). De fato

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla T_k f \cdot \nabla v - (\lambda T_k f + f)v] dx &= - \int_{\mathbb{R}^N} [T_k f \Delta v + (\lambda T_k f + f)v] dx \\
 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} [T_k f_n \Delta v + (\lambda T_k f_n + f_n)v] dx \\
 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} [\Delta(T_k f_n)v + (-k^2 T_k f_n + f_n)v] dx \\
 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} [\Delta(T_k f_n) - k^2 T_k f_n + f_n]v dx \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

de acordo com o fato (2.19) do Teorema 2.3.2. \square

Estabelecida a relação entre a solução fraca e a convolução com a solução fundamental, podemos ter um melhor entendimento sobre a regularidade da solução fraca.

Lema 3.1.3. *A aplicação T_k pode ser interpretada como uma aplicação com domínio $L^\theta(\mathbb{R}^N)$ e contradomínio $W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $T_k : L^\theta(\mathbb{R}^N) \rightarrow W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ desde que θ e s se relacionem da maneira exposta abaixo:*

$$\begin{cases} \theta \leq s \leq \infty & \text{se } \theta > N, \\ \theta \leq s < \infty & \text{se } \theta = N, \\ \theta \leq s < \frac{N\theta}{N-\theta} & \text{se } \theta < N. \end{cases} \quad (3.5)$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 3.1.1 sabemos que $\partial_i T_k f = S_k^i f$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Procederemos pela análise das diferentes situações possíveis onde θ pode se adequar:

Caso 1. ($\theta > N$) Nesse caso, de acordo com (3.3), temos que $S_k^i f \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para $\theta \leq s \leq \infty$. Como também $\theta > N > N/2$, segue por (3.1) que $T_k f \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para $\theta \leq s \leq \infty$, de onde

$$T_k f \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N) \text{ para } \theta \leq s \leq \infty \text{ quando } \theta > N.$$

Caso 2. ($\theta = N$) Nesse caso, de acordo com (3.3), temos que $S_k^i f \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para $\theta \leq s < \infty$. Como também $\theta = N > N/2$, segue por (3.1) que $T_k f \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para $\theta \leq s < \infty$, de onde

$$T_k f \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N) \text{ para } \theta \leq s < \infty \text{ quando } \theta = N.$$

Caso 3. ($\theta < N$) De acordo com (3.3), $S_k^i \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para $\theta \leq s < N\theta/(N - \theta)$. Temos agora as subpossibilidades:

- Se $N/2 \leq \theta < N$ então por (3.1) $T_k f \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para $\theta \leq s < \infty$ e portanto em particular $T_k f \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para $\theta \leq s < N\theta/(N - \theta)$.
- Se $1 \leq \theta < N/2$ então por (3.1) $T_k f \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para $\theta \leq s < N\theta/(N - 2\theta)$.

Por ser $N\theta/(N - 2\theta) > N\theta/(N - \theta)$, concluímos que em todo caso

$$T_k f \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N) \text{ para } \theta \leq s < \frac{N\theta}{N - \theta} \text{ quando } \theta < N.$$

Finalizando a prova do resultado. □

No decorrer da demonstração do próximo resultado, usaremos com frequência que para cada $N \in \mathbb{N}$ a aplicação $g : x \mapsto Nx/(N - x)$ é crescente quando $x \in (0, N)$ e que, quando $k \in \mathbb{N}$ então $g^k(2) = 2N/(N - 2k)$. Além disso, usaremos o [Teorema D.4](#) e o [Lema 3.1.3](#) que acabamos de demonstrar.

Teorema 3.1.2. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ em que $p \in (2N/(N + 2), 2]$, $q \geq p$ e seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma solução fraca de (P) para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

$$u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N) \text{ onde}$$

$$\begin{cases} 2 \leq s \leq \infty & \text{se } q > N, \\ 2 \leq s < \infty & \text{se } q = N, \\ 2 \leq s < \frac{Nq}{N-q} & \text{se } q < N. \end{cases} \quad (3.6)$$

Demonstração. Para todo $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda u + f)v dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-u + g)v dx,$$

em que $g = (\lambda + 1)u + f$. Como $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, segue pelas imersões de Sobolev (ver [Teorema F.2](#)) que $(\lambda + 1)u \in L^r(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq r < \infty$ se $N = 2$ e $2 \leq r < 2N/(N - 2)$ se $N \geq 3$. Assim, u é uma solução fraca de $-\Delta u = -u + g$ e portanto, na notação do [Teorema 2.1.1](#), $u = G_{-1}(\lambda + 1)u + G_{-1}f$, de onde em vista do [Teorema 3.1.1](#) temos que $u = T_1(\lambda + 1)u + T_1f$. Estudaremos agora o termo T_1f e o termo $T_1(\lambda + 1)u$ separadamente.

Estudo de T_1f :

Suponha que $q > N$. De acordo com o [Lema 3.1.3](#), vemos que $f \in L^q(\mathbb{R}^N)$ implica que $T_1f \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $q \leq s \leq \infty$ assim como $T_1f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Esses dois fatos nos dizem que $T_1f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $L^s(\mathbb{R}^N)$ com $q \leq s \leq \infty$ e também que, para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, temos $\partial_i T_1f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $L^s(\mathbb{R}^N)$ com $q \leq s \leq \infty$. Assim, pelo [Teorema D.4](#), segue que, considerando $s = q$, então $T_1f, \partial_i T_1f \in L^s(\mathbb{R}^N)$ com $p \leq s \leq q$, ou seja,

$$T_1f \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N) \text{ para } p \leq s \leq \infty \text{ quando } q > N.$$

Os casos em que $q = N$ e $q < N$ são demonstrados usando o mesmo raciocínio acima trocando $\leq \infty$ por $< \infty$ e $< Nq/(N - q)$ respectivamente.

Estudo de $T_1(\lambda + 1)u$:

Se $N = 2$, então pelas imersões de Sobolev (ver [Teorema F.2](#)), temos que $(\lambda + 1)u \in L^\theta(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq \theta < \infty$. Logo, a partir do [Lema 3.1.3](#), segue que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s < \infty$ e que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $3 \leq s \leq \infty$, ou seja, $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s \leq \infty$. O resultado então segue ao usar que $u = T_1(\lambda + 1)u + T_1f$, considerar os diferentes casos $q > N$, $q = N$ e $q < N$ e intersectar o intervalo de definição do parâmetro s onde $T_1f \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $[2, \infty]$. A seguir trataremos o caso $N \geq 3$:

Caso 1. ($q \geq N$) Pelas imersões de Sobolev (ver [Teorema F.2](#)), sabemos que $(\lambda + 1)u \in L^\theta(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq \theta < 2N/(N - 2)$. Logo, de acordo com o [Lema 3.1.3](#), temos que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s < 2N/(N - 2)$. Por estarmos supondo $q \geq N$, sabemos que $T_1f \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $p \leq s < \infty$ e em particular $T_1f \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s < 2N/(N - 2)$. Como $u = T_1(\lambda + 1)u + T_1f$, concluímos que $(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N) \subset L^s(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s < 2N/(N - 2)$ e a partir daqui, podemos tirar duas conclusões:

1. Existe $r > 2N/(N - 2)$ tal que $(\lambda + 1)u \in L^r(\mathbb{R}^N)$,
2. $(\lambda + 1)u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$.

De fato, definindo θ como sendo o ponto médio do intervalo $[2, 2N/(N - 2)]$ e lembrando que a aplicação $x \mapsto Nx/(N - x)$ é crescente em $(0, N)$, vemos, de acordo com o [Lema 3.1.3](#), que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $\theta \leq s < N\theta/(N - \theta)$, em que $N\theta/(N - \theta) > 2N/(N - 2)$. Assim, sendo r o ponto médio do intervalo $[2N/(N - 2), N\theta/(N - \theta)]$, segue que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$ com $r > 2N/(N - 2)$ e, além disso, $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$, já que $2N/(N - 2) \in (\theta, N\theta/(N - \theta))$. Logo, como já sabemos que $T_1f \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$ e $W^{1,\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$, temos, novamente pelo fato de $u = T_1(\lambda + 1)u + T_1f$, que $(\lambda + 1)u \in L^r(\mathbb{R}^N)$ e $L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$ como desejado.

Suponhamos agora que $2N/(N - 2) \geq N$. Nesse caso, vemos que $(\lambda + 1)u \in L^r(\mathbb{R}^N)$ com $r > N$ e portanto, de acordo com o [Lema 3.1.3](#), temos $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $r \leq s \leq \infty$, ou seja, $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s \leq \infty$. Caso contrário, temos que $2N/(N - 2) < N$ e, por ser $(\lambda + 1)u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$, podemos aplicar mais uma vez o [Lema 3.1.3](#), para mostrar que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $2N/(N - 2) \leq s < 2N/(N - 4)$, ou ainda, com $2 \leq s < 2N/(N - 4)$. De modo análogo ao que fizemos acima, podemos provar que

1. Existe $r > 2N/(N - 4)$ tal que $(\lambda + 1)u \in L^r(\mathbb{R}^N)$,
2. $(\lambda + 1)u \in L^{\frac{2N}{N-4}}(\mathbb{R}^N)$.

Se $2N/(N - 4) \geq N$, então $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s \leq \infty$. Caso contrário repetimos o procedimento. Ao notar que o procedimento acima possui um número finito

de passos, ou seja, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2N/(N - 2k) \geq N$ (de fato, se N for par considere $k = N/2 - 1$ e se N for ímpar considere $k = (N - 1)/2$) temos garantido que

$$T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N) \text{ para } 2 \leq s \leq \infty \text{ quando } q \geq N.$$

Caso 2. ($q < N$) Devemos considerar alguns subcasos:

- Considere q tal que $p \leq q \leq 2$. Já sabemos que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ onde $2 \leq s < 2N/(N - 2)$. Note que não pode acontecer $Nq/(N - q) \leq 2$, pois se fosse esse o caso, iríamos ter $q \leq 2N/(N + 2)$ e, por hipótese, $2N/(N + 2) < p \leq q$. Logo, como a aplicação $x \mapsto Nx/(N - x)$ é crescente em $(0, N)$, vemos que $2 < Nq/(N - q) \leq 2N/(N - 2)$ e portanto $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ onde $2 \leq s < Nq/(N - q)$.
- Considere q tal que $2 < q \leq 2N/(N - 2)$. Já sabemos que $(\lambda + 1)u \in L^\theta(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq \theta \leq 2N/(N - 2)$. Pelo fato da aplicação $x \mapsto Nx/(N - x)$ ser crescente, concluímos, independente da posição de N em relação a q , ao aplicar o [Lema 3.1.3](#), que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $q \leq s < Nq/(N - q)$ onde $2N/(N - 2) < Nq/(N - q)$. Como também $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s < 2N/(N - 2)$, podemos afirmar com exatidão que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s < Nq/(N - q)$.
- Considere q tal que $2N/(N - 2) < q < N$. Já sabemos que $(\lambda + 1)u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$. Como $2N/(N - 2) < q < N$ e a aplicação $x \mapsto Nx/(N - x)$ é crescente em $(0, N)$, segue, pelo [Lema 3.1.3](#), que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $2N/(N - 2) \leq s < 2N/(N - 4)$ e $2N/(N - 4) < Nq/(N - q)$. Existem agora duas possibilidades:
 1. $q < 2N/(N - 4) < Nq/(N - q)$ ou
 2. $2N/(N - 2) < 2N/(N - 4) \leq q$.

Na primeira possibilidade, vemos, em particular, que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ e como nessa situação $q < Nq/(N - q)$, então $T_1f \in W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$. Logo, a partir da igualdade $u = T_1(\lambda + 1)u + T_1f$, concluímos que $(\lambda + 1)u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$, de onde, a partir de mais uma aplicação do [Lema 3.1.3](#), vemos que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $q \leq s < Nq/(N - q)$. Isso, somado ao fato de que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s < 2N/(N - 2)$, nos diz que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s < Nq/(N - q)$. Se ocorrer a segunda possibilidade, considere $r \in (2N/(N - 2), 2N/(N - 4))$. Por ser $2N/(N - 2) < r < q$ e a aplicação $x \mapsto Nx/(N - x)$ crescente em $(0, N)$, uma aplicação do [Lema 3.1.3](#) nos revela que, $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $r \leq s < Nr/(N - r)$, onde $2N/(N - 4) < Nr/(N - r) < Nq/(N - q)$ e, em particular, $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1, \frac{2N}{N-4}}(\mathbb{R}^N)$. Assim, ao notarmos que também $T_1f \in W^{1, \frac{2N}{N-4}}(\mathbb{R}^N)$, podemos usar a igualdade $u = T_1(\lambda + 1)u + T_1f$ para concluir que $(\lambda + 1)u \in W^{1, \frac{2N}{N-4}}(\mathbb{R}^N) \subset L^{\frac{2N}{N-4}}(\mathbb{R}^N)$. Logo, ao aplicar o [Lema 3.1.3](#) para mostrar que $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ com $2N/(N - 4) \leq s < 2N/(N - 6)$, podemos repetir o procedimento executado acima.

Finalmente, notando que esse processo é finito, ou seja, em algum momento a primeira possibilidade vai se verificar, podemos concluir que

$$T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N) \text{ para } 2 \leq s < Nq/(N - q) \text{ quando } q < N.$$

□

Como $Nq/(N - q) > 2$ sempre que $2N/(N + 2) < q < N$, o resultado que acabamos de demonstrar nos diz que $u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ para algum $s > 2$.

Corolário 3.1.1. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 3.1.2,*

1. Se $q > N/2$, então $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

2. Se $N \geq 3$, então $u \in L^s(\mathbb{R}^N)$ onde

$$\begin{cases} 2 \leq s < \infty & \text{se } q = \frac{N}{2}, \\ 2 \leq s < \frac{Nq}{N-q} & \text{se } q < \frac{N}{2}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Demonstração. Com efeito

1. Se $q > N > N/2$ vemos pelo Teorema 3.1.2 que $u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N)$ para algum $s > N$. Caso $N/2 < q < N$, o mesmo acontece, pois essa situação implica $N < Nq/(N - q)$. O resultado segue então ao aplicarmos o Teorema de Morrey (ver Teorema F.3).
2. O caso $q < N/2$ é consequência imediata de (3.6). Se $q = N/2$, então $f \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$, de onde, por (3.1), $T_1 f \in L^s(\mathbb{R}^N)$ com $q = N/2 \leq s < \infty$. Por outro lado, por ser $q = N/2 < N$, então, de acordo com o estudo de $T_1 f$ no Teorema 3.1.2, segue que $T_1 f \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N) \subset L^s(\mathbb{R}^N)$ com $p \leq s < N$, ou seja, $T_1 f \in L^s(\mathbb{R}^N)$ com $p \leq s < \infty$. Se $N = 3$, então, pelo fato de $(\lambda + 1)u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, segue por (3.1) que $T_1(\lambda + 1)u \in L^s(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s \leq \infty$ ao notar que $2 > N/2 = 3/2$, de onde o resultado segue para $N = 3$ ao usar a igualdade $u = T_1(\lambda + 1)u + T_1 f$. Suponha agora que $N \geq 4$, ou seja, $N/2 \geq 2$. Por (3.6) temos $T_1(\lambda + 1)u \in W^{1,s}(\mathbb{R}^N) \subset L^s(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s < N$. Como também $T_1 f \in L^s(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s < N$, então a partir da expressão $u = T_1(\lambda + 1)u + T_1 f$, concluímos que $(\lambda + 1)u \in L^s(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s < N$ e em particular $(\lambda + 1)u \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$, de onde por (3.1), vemos que $T_1(\lambda + 1)u \in L^s(\mathbb{R}^N)$ com $q = N/2 \leq s < \infty$, ou seja, $T_1(\lambda + 1)u \in L^s(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq s < \infty$. O resultado finalmente segue ao usarmos mais uma vez que $u = T_1(\lambda + 1)u + T_1 f$.

□

Teorema 3.1.3. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ onde $p \in (2N/(N+2), 2]$, $q \geq p$ e $q > N/2$. Suponha que $f \geq 0$ em \mathbb{R}^N e não nula quase sempre. Então para todo $\lambda < 0$, a única solução fraca $u = G_\lambda f$, de (P), possui as seguintes propriedades*

$$u \in C(\mathbb{R}^N), \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \text{ e } u(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Pelo [Corolário 3.1.1](#) item 1, $u \in C(\mathbb{R}^N)$ e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$. Além disso, pelo Teorema [Teorema 3.1.1](#)

$$u(x) = T_k f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) E_N^k(y) dy,$$

onde $\lambda = -k^2$ com $k > 0$. Relembrando de acordo com o [Corolário 2.3.1](#) que $E_N^k(y) > 0$ para todo $y \neq 0$ e que por hipótese $f \geq 0$ em \mathbb{R}^N e não nula quase sempre, concluímos que se fosse $u(x) = 0$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) E_N^k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \{x\}} f(y) E_N^k(x-y) dy = 0,$$

de onde pelo [Teorema D.2](#) seguiria que $f(y) E_N^k(x-y) = 0$ quase sempre em $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{x\}$, ou seja, $f(y) = 0$ quase sempre em $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{x\}$, mostrando que f seria nula quase sempre em \mathbb{R}^N e concluindo a demonstração do resultado. \square

3.2 Regularidade - H^2

O principal resultado dessa seção mostra que a solução fraca de (P) pertence a $H^2(\mathbb{R}^N)$ sempre que $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Esse fato pode ser demonstrado a partir de algumas propriedades básicas da Transformada de Fourier que provaremos a seguir.

Ao lidar com a Transformada de Fourier, devemos novamente usar funções complexas. Os espaços de funções correspondentes serão distinguidos de suas versões reais a partir do uso de letras itálicas, então por exemplo $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) = L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ e $L^p(\mathbb{R}^N) = L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$.

Sejam $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ o conjunto dos inteiros não-negativos e \mathbb{N}_0^N o produto cartesiano de N cópias de \mathbb{N}_0 . Chamaremos de multi-índice todo elemento $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$. Se α é um multi-índice e $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ escreveremos

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \sum_{j=1}^N \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N, \\ \alpha! &= \prod_{j=1}^N \alpha_j! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_N! \\ x^\alpha &= \prod_{j=1}^N x_j^{\alpha_j} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}, \\ D^\alpha &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_N^{\alpha_N}, \end{aligned}$$

onde no caso do multi-índice $0 = (0, 0, \dots, 0)$, o símbolo D^0 representa o operador identidade. Além disso, se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ são dois multi-índices, dizemos que $\alpha \leq \beta$ quando $\alpha_i \leq \beta_i$ para cada $1 \leq i \leq N$.

A seguir provaremos alguns resultados que dizem respeito a notação multi-índice que acabamos de introduzir.

Lema 3.2.1. *Se $x \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ então*

$$|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|}$$

Demonstração. De fato, sejam $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$. Assim

$$\begin{aligned} |x^\alpha| &= |x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}| \\ &= (x_1^2)^{\frac{\alpha_1}{2}} \dots (x_N^2)^{\frac{\alpha_N}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{\alpha_1}{2}} \dots \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{\alpha_N}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_N}{2}} \\ &= |x|^{|\alpha|}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2.2. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Demonstração. Provaremos o resultado por indução na variável n . No caso $n = 1$ temos pela [Regra do Produto](#) que

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = \binom{1}{0} f^{(0)}(x)g^{(1)}(x) + \binom{1}{1} f^{(1)}(x)g^{(0)}(x).$$

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para n , ou seja,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Desejamos provar que

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x).$$

Notemos pela hipótese de indução que

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)}(x) &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)'(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})'(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x).
 \end{aligned}$$

Retirando do primeiro somatório acima o caso $k = n$ e do segundo somatório acima o caso $k = 0$ temos que, ao reescalar o índice do primeiro somatório de modo que comece a partir de 1,

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\
 &\quad + \binom{n}{0} f(x)g^{(n+1)}(x) + \binom{n}{n} f^{(n+1)}(x)g(x).
 \end{aligned}$$

Podemos agora aplicar a Regra de Pascal, a saber,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

para concluirmos finalmente que

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) + \binom{n}{0} f(x)g^{(n+1)}(x) + \binom{n}{n} f^{(n+1)}(x)g(x) \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) + \binom{n+1}{0} f(x)g^{(n+1)}(x) \\
 &\quad + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}(x)g(x) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x),
 \end{aligned}$$

finalizando o processo de indução finita. \square

Teorema 3.2.1. (Fórmula de Leibniz) *Sejam $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções k vezes diferenciáveis e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ um multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$. Então vale a fórmula*

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} (D^\beta f)(D^{\alpha - \beta} g).$$

Demonstração. Procederemos aqui por indução finita na dimensão N . Desejamos provar, escrevendo de forma mais explícita, que

$$\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} (fg) = \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n} (\partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n} f) (\partial_1^{\alpha_1 - \beta_1} \dots \partial_n^{\alpha_n - \beta_n} g).$$

O caso $N = 1$ é a afirmação demonstrada no [Lema 3.2.2](#). Suponha agora que o resultado seja válido para funções de $N - 1$ variáveis. Em particular, suponhamos que

$$\partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} (fg) = \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_2}{\beta_2} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n} (\partial_2^{\beta_2} \dots \partial_n^{\beta_n} f) (\partial_2^{\alpha_2-\beta_2} \dots \partial_n^{\alpha_n-\beta_n} g),$$

Assim

$$\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} (fg) = \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_2}{\beta_2} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n} \partial_1^{\alpha_1} ((\partial_2^{\beta_2} \dots \partial_n^{\beta_n} f) (\partial_2^{\alpha_2-\beta_2} \dots \partial_n^{\alpha_n-\beta_n} g)),$$

e portanto pelo [Lema 3.2.2](#), $D^\alpha(fg)$ admite a seguinte representação

$$\sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_2}{\beta_2} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n} \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} (\partial_1^{\beta_1} \partial_2^{\beta_2} \dots \partial_n^{\beta_n} f) (\partial_1^{\alpha_1-\beta_1} \partial_2^{\alpha_2-\beta_2} \dots \partial_n^{\alpha_n-\beta_n} g).$$

Como estamos lidando como uma soma finita, o resultado segue. \square

É importante notar que a Fórmula de Leibniz também é verdadeira para funções $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, para evidenciar esse fato basta escrevermos $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$, $g = \operatorname{Re}(g) + i\operatorname{Im}(g)$ e aplicar a versão do Teorema que acabamos de demonstrar.

Tendo ganhado um pouco de habilidade em trabalhar com multi-índices, estamos prontos para definir o:

Definição 3.2.1. (Espaço de Schwartz) O Espaço de Schwartz das funções suaves rapidamente decrescentes é o espaço definido como

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) : |x|^j D^\alpha f(x) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ para todo } j \in \mathbb{N}_0 \text{ e para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^N \right\}.$$

Vemos a partir da [Fórmula de Leibniz](#) que o produto de duas funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ está em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e também que

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (3.8)$$

Lema 3.2.3. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, então $x^q f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $q \in \mathbb{N}_0^N$.

Demonstração. Sejam $k \in \mathbb{N}_0$ e $p \in \mathbb{N}_0^N$. Então, pela [Fórmula de Leibniz](#)

$$|x|^k D^p(x^q f(x)) = |x|^k \sum_{\alpha \leq p} \binom{p}{\alpha} D^\alpha(x^q) D^{p-\alpha}(f(x)).$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} D^\alpha(x^q) &= \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_N^{\alpha_N} (x_1^{q_1} \dots x_N^{q_N}) \\ &= [q_1 \dots (q_1 - \alpha_1 + 1)] \dots [q_N \dots (q_N - \alpha_N + 1)] x_1^{q_1 - \alpha_1} \dots x_N^{q_N - \alpha_N}. \end{aligned}$$

Definindo agora

$$C_\alpha := \binom{p}{\alpha} [q_1 \dots (q_1 - \alpha_1 + 1)] \dots [q_n \dots (q_n - \alpha_n + 1)],$$

segue pelo [Lema 3.2.1](#) que

$$\begin{aligned} \left| |x|^k D^p(x^q f(x)) \right| &= |x|^k \left| \sum_{\alpha \leq p} \binom{p}{\alpha} D^\alpha(x^q) D^{p-\alpha}(f(x)) \right| \\ &\leq \sum_{\substack{\alpha \leq p, \\ q \geq \alpha}} C_\alpha |x|^k \left| x^{q-\alpha} D^{p-\alpha}(f(x)) \right| \\ &\leq \sum_{\substack{\alpha \leq p, \\ q \geq \alpha}} C_\alpha |x|^{k+|q-\alpha|} \left| D^{p-\alpha}(f(x)) \right|, \end{aligned}$$

o resultado segue então pela hipótese de que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. □

Lema 3.2.4. *É verdade que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$, em que $p \in [1, \infty]$.*

Demonstração. De fato, dado $1 \leq p < \infty$ e considerando $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, temos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $M_k > 0$ tal que

$$|x|^k |f(x)| \leq M_k \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N,$$

de onde tomando uso da Fórmula de Integração de Funções Radiais (ver [Teorema D.11](#))

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx &= \int_{B(0,1)} |f(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} |f(x)|^p dx \\ &\leq \int_{B(0,1)} |f(x)|^p dx + M_k^p \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} \frac{1}{|x|^{pk}} dx \\ &= \int_{B(0,1)} |f(x)|^p dx + M_k^p \omega_N \int_1^\infty r^{N-1-pk} dr, \end{aligned}$$

e portanto a afirmação segue ao notar que a primeira integral é finita pois $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ e a segunda integral é finita ao escolhermos k de modo que $N - 1 - pk < -1$, ou seja, $k > N/p$. O caso $p = \infty$ segue diretamente da definição do espaço de Schwartz. □

Definição 3.2.2. (Transformada de Fourier) *Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ então a Transformada de Fourier de f é a aplicação $\hat{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \text{ para cada } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

em que $\xi \cdot x$ denota o produto interno usual de dois vetores em \mathbb{R}^N .

Notemos que $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-N/2} \|f\|_1$ e que, de acordo com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.5](#)), $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, a aplicação

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) : g \text{ é limitada}\} \text{ em que } \mathcal{F}f := \hat{f} \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$$

está bem definida e é contínua, mostrando, em particular, que a definição da Transformada de Fourier está bem definida. Decorre do [Lema 3.2.4](#) que também faz sentido calcular a Transformada de Fourier de qualquer função pertencente ao espaço de Schwartz.

Teorema 3.2.2. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, então, para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, temos que $D^\alpha(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e, além disso,*

$$\widehat{D^\alpha(f)}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

Demonstração. É claro a partir da definição de espaço de Schwartz que $D^\alpha(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ para todo multi-índice α sempre que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Considerando $R > 0$ arbitrário, podemos aplicar a Fórmula de Integração por Partes (ver [Teorema A.1.9](#)) para provar que qualquer que seja $j \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$\int_{B(0,R)} (\partial_j f)(x) e^{-i\xi \cdot x} dx = - \int_{B(0,R)} f(x) \partial_j (e^{-i\xi \cdot x}) dx + \int_{|x|=R} f(x) e^{-i\xi \cdot x} \frac{x_j}{|x|} dx.$$

Notando que

$$\left| \int_{|x|=R} f(x) e^{-i\xi \cdot x} \frac{x_j}{|x|} dx \right| \leq \int_{|x|=R} |f(x)| dx$$

e sabendo que para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe $M_k > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq \frac{M_k}{|x|^k} \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

vemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|=R} f(x) e^{-i\xi \cdot x} \frac{x_j}{|x|} dx \right| &\leq \frac{M_k}{R^k} \int_{|x|=R} dx \\ &= M_k \omega_N R^{N-1-k}, \end{aligned}$$

e portanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{|x|=R} f(x) e^{-i\xi \cdot x} \frac{x_j}{|x|} dx \right| = 0$$

ao escolher k tal que $N - 1 - k \leq -1$, ou seja, $k \geq N$. Como consequência

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_j f)(x) e^{-i\xi \cdot x} dx &= - \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \partial_j (e^{-i\xi \cdot x}) dx \\ &= i\xi_j \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx, \end{aligned}$$

de onde podemos concluir ao pensarmos indutivamente que

$$\int_{\mathbb{R}^N} D^\alpha(f) e^{-i\xi \cdot x} dx = (i\xi)^\alpha \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx.$$

O resultado é concluído ao multiplicar a igualdade acima por $(2\pi)^{-N/2}$. □

Teorema 3.2.3. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, então $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Provaremos primeiramente que $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. De fato, para cada $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ temos

$$\begin{aligned} \partial_j \hat{f}(\xi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\xi + he_j) - \hat{f}(\xi)}{h} \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{e^{-ix \cdot (\xi + he_j)} - e^{-ix \cdot \xi}}{h} \right) f(x) dx. \end{aligned}$$

Note que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-ix \cdot (\xi + he_j)} - e^{-ix \cdot \xi}}{h} \right) f(x) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-ix \cdot \xi} f(x),$$

e por ser

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-ix \cdot (\xi + he_j)} - e^{-ix \cdot \xi}}{h} \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{dt} e^{-ix \cdot (\xi + the_j)} dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_0^1 e^{-ix \cdot (\xi + the_j)} (-ix_j h) dt \right| \\ &\leq |x_j|, \end{aligned}$$

segue, que para todo h não-nulo,

$$\left| \left(\frac{e^{-ix \cdot (\xi + he_j)} - e^{-ix \cdot \xi}}{h} \right) f(x) \right| \leq |x_j f(x)| = |x^{e_j} f(x)|.$$

Usando a hipótese de que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, concluímos, a partir do [Lema 3.2.3](#), que $x^{e_j} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e portanto, pelo [Lema 3.2.4](#), $x^{e_j} f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.5](#))

$$\begin{aligned} \partial_j \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{e^{-ix \cdot (\xi + he_j)} - e^{-ix \cdot \xi}}{h} \right) f(x) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \\ &= (-i)(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix \cdot \xi} (x_j f(x)) dx \\ &= (-i)(\widehat{x_j f(x)})(\xi) \\ &= (-i)^1 (\widehat{x^{e_j} f(x)})(\xi). \end{aligned}$$

Acabamos de provar que para todo multi-índice α tal que $|\alpha| = 1$ a fórmula

$$\partial_j \hat{f}(\xi) = (-i)^1 (\widehat{x^{e_j} f(x)})(\xi)$$

é verdadeira. Suponhamos agora que se $|\alpha| = k$ então

$$D^\alpha(\hat{f})(\xi) = (-i)^{|\alpha|} (\widehat{x^\alpha f(x)})(\xi). \quad (3.9)$$

Notando que, de acordo com o [Lema 3.2.3](#) e o [Lema 3.2.4](#), a expressão descrita em (3.9) faz sentido, daremos agora o passo indutivo e provaremos que (3.9) é verdadeira para

$|\alpha| = k + 1$. De fato, sendo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ tal que $|\alpha| = k + 1$, temos que existe algum $\alpha_j \geq 1$ e portanto podemos considerar o multi-índice $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_j - 1, \dots, \alpha_N)$. Assim, tomando uso da hipótese de indução, o [Lema 3.2.3](#) e o passo base, segue que

$$\begin{aligned} D^\alpha(\hat{f})(\xi) &= \partial_j D^\beta(\hat{f})(\xi) \\ &= \partial_j \left[(-i)^{|\beta|} \widehat{(x^\beta f(x))}(\xi) \right] \\ &= (-i)^{|\beta|} \partial_j \left[\widehat{(x^\beta f(x))}(\xi) \right] \\ &= (-i)^{|\beta|+1} \widehat{(x_j x^\beta f(x))}(\xi) \\ &= (-i)^{|\alpha|} \widehat{(x^\alpha f(x))}(\xi). \end{aligned}$$

A expressão que acabamos de provar nos mostra que $D^\alpha(\hat{f})(\xi)$ é contínua para todo multi-índice α , pois sabemos que a Transformada de Fourier é contínua. Isso prova que $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sejam agora α, β dois multi-índices quaisquer, novamente pela fórmula que acabamos de provar e também pelo [Teorema 3.2.2](#), segue que

$$D^\alpha(\hat{f})(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{(x^\alpha f(x))}(\xi) = \frac{(-i)^{|\alpha|}}{i^{|\beta|} \xi^\beta} \widehat{D^\beta(x^\alpha f(x))}(\xi),$$

e portanto

$$\left| \xi^\beta D^\alpha(\hat{f})(\xi) \right| = \left| \frac{(-i)^{|\alpha|}}{i^{|\beta|}} \widehat{D^\beta(x^\alpha f(x))}(\xi) \right| \leq \left| \widehat{D^\beta(x^\alpha f(x))}(\xi) \right| \leq (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |D^\beta(x^\alpha f(x))|_1.$$

Finalmente, como a partir da fórmula do Binômio de Newton e o princípio da indução finita temos para $x = (x_1, \dots, x_m)$ que

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{|\gamma|=n} \binom{n}{\gamma} x^\gamma \quad \text{em que} \quad \binom{n}{\gamma} = \frac{n!}{\gamma_1! \dots \gamma_m!},$$

vemos então que, para todo $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} |\xi|^k |D^\alpha(\hat{f})(\xi)| &\leq (|\xi_1| + \dots + |\xi_N|)^k |D^\alpha(\hat{f})(\xi)| \\ &= \sum_{|\gamma|=k} \binom{k}{\gamma} |\xi^\gamma| |D^\alpha(\hat{f})(\xi)|, \end{aligned}$$

provando que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. □

Na sequência dos dois resultados a seguir, provaremos que a Transformada de Fourier admite pelo menos um ponto fixo não trivial.

Lema 3.2.5. *Seja $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $\eta(x) = e^{-x^2/2}$. Então*

1. $\int_{\mathbb{R}} \eta(x) dx = \sqrt{2\pi}$,
2. $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$3. \hat{\eta}(\xi) = \eta(\xi).$$

Demonstração. De fato

1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(y) = e^{-|y|^2/2} = e^{-(y_1^2+y_2^2)/2}$. Pelo Teorema de Tonelli (ver [Teorema D.8](#))

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|y|^2/2} dy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} e^{-\frac{y_2^2}{2}} dy_1 \right) dy_2 \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} dy_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y_2^2}{2}} dy_2 \right). \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \eta(x) dx \right)^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela Fórmula de Integração de Funções Radiais (ver [Teorema D.11](#))

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|y|^2/2} dy &= \omega_2 \int_0^\infty e^{-r^2/2} r dr \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^0 e^u du, \\ &= 2\pi, \end{aligned}$$

concluindo que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(x) dx = \sqrt{2\pi}.$$

2. Note que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ é verdade que

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} Q(x),$$

em que $Q(x)$ é um polinômio na variável x . Como consequência, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ segue que

$$|x|^j \left| \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| = |x^j Q(x)| e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} |P(x)|,$$

onde $P(x) = x^j Q(x)$ é, obviamente, também um polinômio. Sabendo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = 0,$$

temos que existe $R > 0$ tal que $|x| > R$ implica $e^{-x^2/2} |P(x)| < 1$. Como também a função $P(x) e^{-x^2/2}$ é contínua no conjunto compacto $[-R, R]$, vemos pelo Teorema de Weierstrass (ver [Teorema A.1.1](#)), que existe $M > 0$ tal que $e^{-x^2/2} |P(x)| < M$ para todo $x \in [-R, R]$. Logo

$$|x|^j \left| \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| = e^{-\frac{x^2}{2}} |P(x)| < \max\{M, 1\} \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

demonstrando que $\eta(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3. De acordo com o item anterior, com (3.9) e por integração por partes

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\xi} \hat{\eta}(\xi) &= (-i) \widehat{(x\eta(x))}(\xi) \\
 &= -i(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\xi x} dx \\
 &= i(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} (e^{-\frac{x^2}{2}}) e^{-i\xi x} dx \\
 &= i(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\xi x} \right) \Big|_{x=-r}^{x=r} + \xi i \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\xi x} dx \right] \\
 &= -\xi \hat{\eta}(\xi).
 \end{aligned}$$

Levando em consideração o item 1, devemos então solucionar a equação diferencial ordinária de primeira ordem com condição inicial:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \hat{\eta}(\xi) = -\xi \hat{\eta}(\xi) & \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}, \\ \hat{\eta}(0) = 1. \end{cases}$$

Multiplicando a equação acima por $e^{\xi^2/2}$, segue pela regra do produto de derivação que

$$\frac{d}{d\xi} e^{\frac{\xi^2}{2}} \hat{\eta}(\xi) = 0 \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

Logo, existe uma constante C , tal que a função $h(\xi) := e^{\xi^2/2} \hat{\eta}(\xi) = C$ em \mathbb{R} e portanto, pela condição inicial $\hat{\eta}(0) = 1$, a constante C se revela como sendo 1, ou seja, para todo $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\hat{\eta}(\xi) = \eta(\xi).$$

□

Corolário 3.2.1. *Seja $\kappa : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $\kappa(x) = e^{-|x|^2/2}$. Então*

1. $\int_{\mathbb{R}^N} \kappa(x) dx = (2\pi)^{N/2}$,
2. $\hat{\kappa}(\xi) = \kappa(\xi)$,
3. $\kappa \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. De fato,

1. Pelo Teorema de Tonelli (ver Teorema D.8) e pelo Lema 3.2.5 item 1

$$\int_{\mathbb{R}^N} \kappa(x) dx = \prod_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}} \eta(x_j) dx_j = \prod_{j=1}^N (2\pi)^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{N}{2}}.$$

2. Pelo Teorema de Tonelli (ver Teorema D.8) e pelo Lema 3.2.5 item 3

$$\hat{\kappa}(\xi) = \prod_{j=1}^N \hat{\eta}(\xi_j) = \prod_{j=1}^N \eta(\xi_j) = \kappa(\xi).$$

3. Procederemos por indução finita na variável N . O caso $N = 1$ já foi demonstrado no Lema 3.2.5 item 2. Suponhamos que, em dimensão N , tenhamos que, para todo multi-índice α e todo $j \in \mathbb{N}_0$, existe uma constante $M_{j,\alpha} > 0$, tal que

$$|x|^j |D^\alpha \kappa(x)| \leq M_{j,\alpha} \text{ quase sempre em } x \in \mathbb{R}^N.$$

Provaremos que o mesmo é válido em dimensão $N+1$. De fato, para todo multi-índice $\beta = (\alpha, \alpha_{N+1}) \in \mathbb{N}_0^{N+1}$ e todo $j \in \mathbb{N}_0$ temos

$$\begin{aligned} |(x, x_{N+1})|^j \left| D^\beta e^{-|(x, x_{N+1})|^2/2} \right| &= |(x, x_{N+1})|^j \left| D^\alpha \kappa(x) \frac{d^{\alpha_{N+1}}}{dx_{N+1}^{\alpha_{N+1}}} \eta(x_{N+1}) \right| \\ &\leq (|x| + |x_{N+1}|)^j \left| D^\alpha \kappa(x) \frac{d^{\alpha_{N+1}}}{dx_{N+1}^{\alpha_{N+1}}} \eta(x_{N+1}) \right| \\ &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} |x|^k |D^\alpha \kappa(x)| |x_{N+1}|^{j-k} \left| \frac{d^{\alpha_{N+1}}}{dx_{N+1}^{\alpha_{N+1}}} \eta(x_{N+1}) \right|, \end{aligned}$$

de onde o resultado segue da hipótese indutiva e do passo base. □

Como consequência imediata do que acabamos de provar, note que κ é uma função em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ que não está em $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Como claramente a função $x \mapsto e^{|x|^2/2}$ está em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, porém não está em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, concluímos que as relações de inclusão descritas em (3.8) são todas estritas.

Corolário 3.2.2. (Relação fraca de Parseval) sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \hat{g}(x) dx.$$

Demonstração. Antes de tudo, note que as integrais aqui discutidas são finitas. De fato, de acordo com o Teorema 3.2.3, temos que $\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, isso somado com uma aplicação do Lema 3.2.4, nos revela que $\hat{g}, f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, de onde a integrabilidade de $\hat{g}(x)f(x)$ segue a partir da Desigualdade de Hölder. A seguir, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\xi \cdot x} g(\xi) dx \right) d\xi.$$

Para cada $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x) e^{-i\xi \cdot x} g(\xi)| dx \leq |g(\xi)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx,$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)e^{-i\xi \cdot x}g(\xi)| dx \right) d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(\xi)| d\xi \right) < \infty.$$

Assim, podemos aplicar o Teorema de Fubini-Tonelli (ver [Teorema D.10](#)) para concluir o desejado:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-i\xi \cdot x}g(\xi)dx \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-i\xi \cdot x}g(\xi)d\xi \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi \cdot x}g(\xi)d\xi \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\hat{g}(x)dx. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.4. (Fórmula de Inversão de Fourier) *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Então vale a fórmula de inversão,*

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi)e^{i\xi \cdot x}d\xi \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N. \quad (3.10)$$

Demonstração. Em primeiro lugar, notemos que basta provarmos o afirmado no caso $x = 0$, isto é, basta provarmos que

$$f(0) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi)d\xi \text{ para toda } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \quad (3.11)$$

De fato, suponha que (3.11) seja verdadeiro e observe que para quaisquer ξ , $x \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi)e^{i\xi \cdot x} &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{i\xi \cdot x} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)e^{-i\xi \cdot y}dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)e^{i\xi \cdot (x-y)}dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x-t)e^{i\xi \cdot t}dt \\ &= \widehat{g_x(t)}(-\xi), \end{aligned}$$

onde acima foi usada a mudança de variável $t = x - y$ e para cada $x \in \mathbb{R}^N$ fixado e a função $g_x(t)$ é definida por $g_x(t) = f(x - t)$, $t \in \mathbb{R}^N$. Multiplicando a igualdade $\hat{f}(\xi)e^{i\xi \cdot x} = \hat{g}_x(-\xi)$ por $(2\pi)^{-N/2}$ e integrando em \mathbb{R}^N em relação a ξ , segue que

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi)e^{i\xi \cdot x}d\xi &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}_x(-\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}_x(t)dt, \end{aligned}$$

onde acima usamos a mudança de variável $t = -\xi$. Como, por hipótese, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, segue que também $g_x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, de onde, por (3.11),

$$(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi)e^{i\xi \cdot x}d\xi = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}_x(t)dt = g_x(0) = f(x - 0) = f(x),$$

verificando (3.10). Nos resta então demonstrar (3.11). Para esse fim, consideremos $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ arbitrária, $r > 0$ e definamos

$$g(x) = \varphi(x/r).$$

Então $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e, considerando a mudança de variável $x \mapsto rx$, pelo Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema D.12), temos

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x/r) e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= r^N (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) e^{-i(r\xi) \cdot x} dx \\ &= r^N \hat{\varphi}(r\xi). \end{aligned}$$

Logo, pela Relação Fraca de Parseval (ver Corolário 3.2.2)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) r^N \hat{\varphi}(r\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(x) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(x) \varphi(x/r) dx. \end{aligned}$$

Assim, considerando a mudança de variável $\xi \mapsto \xi/r$, temos, novamente, pelo Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema D.12), que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(x) \varphi(x/r) dx &= r^N \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) \hat{\varphi}(r\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi/r) \hat{\varphi}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Contudo, como $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e, em particular, são contínuas, então

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(\xi/r) \hat{\varphi}(\xi) = f(0) \hat{\varphi}(\xi) \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \hat{f}(x) \varphi(x/r) = \hat{f}(x) \varphi(0).$$

Além disso, como existe $M > 0$ que limita f, φ quase sempre em \mathbb{R}^N e sabemos que $\hat{f}, \hat{\varphi} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, então

$$|f(\xi/r) \hat{\varphi}(\xi)| \leq M |\hat{\varphi}(\xi)| \quad \text{e} \quad |\hat{f}(x) \varphi(x/r)| \leq M |\hat{f}(x)| \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

De onde, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema D.5)

$$f(0) \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(x) dx.$$

Logo, ao considerar, em particular, $\varphi = \kappa$, em que κ é a função definida no Corolário 3.2.1, segue pelo mesmo corolário que $\kappa(0) = 1$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\kappa}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \kappa(\xi) d\xi = (2\pi)^{N/2}.$$

Ou seja,

$$f(0) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(x) dx,$$

como desejado. □

Corolário 3.2.3. Para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ define

$$\check{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{i\xi \cdot x} dx.$$

Então

1. A aplicação de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ definida para cada f por $f \mapsto \hat{f}$ é uma bijeção, cuja inversa é a aplicação $f \mapsto \check{f}$.
2. Para cada $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é verdade que $(\widehat{\hat{g}})(x) = g(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. De fato, pela Fórmula de Inversão de Fourier (ver Teorema 3.2.4):

1. Para cada $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\check{\hat{f}}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(x) e^{i\xi \cdot x} dx = f(\xi)$$

e também

$$\begin{aligned} \widehat{\check{f}}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \check{f}(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(-x) e^{i\xi \cdot (-x)} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(y) e^{i\xi \cdot y} dy \\ &= f(\xi), \end{aligned}$$

provando que $\check{\hat{f}} = f$ e $\widehat{\check{f}} = f$, como desejado.

2. para cada $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} (\widehat{\widehat{\hat{g}}})(x) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(\xi) e^{-i\xi \cdot x} d\xi \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(\xi) e^{i\xi \cdot (-x)} d\xi \\ &= g(-x). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.5. (Relação Forte de Parseval) Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f} \widehat{\bar{g}}.$$

Demonstração. Como $\bar{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (pois por hipótese $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$), temos, pelo Corolário 3.2.3 que existe $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\hat{h} = \bar{g}$. Então, pela Relação Fraca de Parseval (ver Corolário 3.2.2), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^N} f \hat{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f} h.$$

Agora, pela Fórmula de Inversão de Fourier (ver [Teorema 3.2.4](#)):

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{g}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi = \overline{\int_{\mathbb{R}^N} g(\xi) e^{-i\xi \cdot x} d\xi} = \bar{\hat{g}}(x),$$

concluindo a demonstração do resultado. \square

Corolário 3.2.4. *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$|f|_2 = |\hat{f}|_2.$$

Demonstração. Basta aplicar a Relação Forte de Parseval (ver [Teorema 3.2.5](#)) com $f = g$. \square

Teorema 3.2.6. (Teorema de Plancherel) *Existe um único isomorfismo isométrico*

$$\mathcal{P} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$$

tal que

$$\mathcal{P}(f) = \hat{f} \text{ para toda } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Seja $\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^N), |\cdot|_2) \rightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}^N), |\cdot|_2)$ definida por $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$. Claramente \mathcal{F} é linear e devido ao [Corolário 3.2.4](#), vemos que \mathcal{F} é também uma isometria e consequentemente contínua. Provaremos que existe uma única extensão $\mathcal{P} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ de \mathcal{F} , tal que \mathcal{P} é um isomorfismo isométrico. De fato:

- **(Definição de \mathcal{P}):** Devido a densidade de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ (ver [Teorema D.13](#)) e (3.8), vemos claramente que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é denso em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Seja então $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ e considere uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tal que $f_n \rightarrow f$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Segue que $(f_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, devido ao [Corolário 3.2.4](#), evidenciamos que $(\hat{f}_n)_{n=1}^\infty$ é também uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, de onde, por ser $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ um espaço completo sob a norma $|\cdot|_2$ (ver [Teorema D.7](#)), temos que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ e assim, a expressão

$$\mathcal{P}(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n$$

é boa, contanto que independa da sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ considerada. Mostrar essa independência será o nosso próximo passo.

- **(\mathcal{P} está bem definida):** Sejam $(f_n)_{n=1}^\infty$ e $(g_n)_{n=1}^\infty$ duas sequências em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tais $f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow f$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Temos pelo [Corolário 3.2.4](#), que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{f}_n - \hat{g}_n|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - g_n|_2 = 0,$$

ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{f}_n - \hat{g}_n) = 0$, de onde segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{g}_n,$$

pois já sabemos que ambas as sequências $(\hat{f}_n)_{n=1}^\infty$ e $(\hat{g}_n)_{n=1}^\infty$ convergem.

- (**\mathcal{P} é uma transformação linear**): Sejam $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Sejam $(f_n)_{n=1}^\infty$ e $(g_n)_{n=1}^\infty$ duas seqüências em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tais $f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow g$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{f}_n + \lambda \hat{g}_n) = f + \lambda g$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ e assim

$$\mathcal{P}(f + \lambda g) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{f}_n + \lambda \hat{g}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{g}_n = \mathcal{P}(f) + \lambda \mathcal{P}(g).$$

- (**$\mathcal{P}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} = \mathcal{F}$ se verifica**): Para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ considere a seqüência $(f_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ definida por $f_n = f$ para todo n natural. Claramente $f_n \rightarrow f$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ e portanto

$$\mathcal{P}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f} = \hat{f} = \mathcal{F}(f).$$

- (**\mathcal{P} é uma isometria**): Seja $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ e considere $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ uma seqüência tal que $f_n \rightarrow f$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Logo, pelo [Corolário 3.2.4](#)

$$|\mathcal{P}(f)|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{f}_n|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|_2 = |f|_2.$$

Como consequência \mathcal{P} é injetiva (pois \mathcal{P} é também linear) e contínua. Se formos capazes de provar que \mathcal{P} é sobrejetiva, teremos, também por causa da isometria, que \mathcal{P}^{-1} será contínua, de onde \mathcal{P} será um isomorfismo isométrico, nos restando apenas provar a sua unicidade.

- (**\mathcal{P} é sobrejetiva**): Sejam $h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ e $(h_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ uma seqüência tais que $h_n \rightarrow h$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Pelo [Corolário 3.2.3](#), existe um único $\psi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, para cada n natural, tal que $\hat{\psi}_n = h_n$. Como $(h_n)_{n=1}^\infty$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, segue que $(\hat{\psi}_n)_{n=1}^\infty$ também é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, pelo [Corolário 3.2.4](#), vemos que $(\psi_n)_{n=1}^\infty$ é também uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, de onde segue pela completude do espaço $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ (ver [Teorema D.7](#)), que existe $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi_n \rightarrow g$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\psi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\psi}_n = \mathcal{P}(g),$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \mathcal{P}(g),$$

de onde, a partir da unicidade do limite, resulta que $\mathcal{P}(g) = h$, provando que \mathcal{P} é sobrejetiva.

- (**Unicidade**): Seja $P : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ um isomorfismo isométrico tal que $P(f) = \hat{f}$ para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Provaremos que $P = \mathcal{P}$. De fato, considere $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ e seja $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ uma seqüência tal que $f_n \rightarrow f$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. A partir da continuidade da função P , temos que $P(f_n) \rightarrow P(f)$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$\mathcal{P}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P(f_n) = P(f),$$

concluindo a demonstração.

□

O Teorema de Plancherel motiva a seguinte definição:

Definição 3.2.3. (Transforma de Fourier em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$): Seja $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Definimos a Transformada de Fourier de f , que ainda denotaremos por \hat{f} , por:

$$\hat{f} := \mathcal{P}(f),$$

em que \mathcal{P} é o isomorfismo isométrico definido no Teorema de Plancherel (ver Teorema 3.2.6).

Corolário 3.2.5. Sejam $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f} \overline{\hat{g}}.$$

Ou seja, a Relação Forte de Parseval continua sendo verdadeira em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Relembre que

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2} := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \bar{g}(x) dx$$

define um produto interno em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Desejamos então provar que

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\mathcal{L}^2}.$$

Para esse fim, considere duas seqüências $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tais que $f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow g$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Notemos que a partir da **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**:

$$|\langle f_n - f, g_n - g \rangle_{\mathcal{L}^2}| \leq \|f_n - f\|_2 \|g_n - g\|_2 \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

$$|\langle f, g_n \rangle_{\mathcal{L}^2} - \langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2}| = |\langle f, g_n - g \rangle_{\mathcal{L}^2}| \leq \|f\|_2 \|g_n - g\|_2 \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

$$|\langle f_n, g \rangle_{\mathcal{L}^2} - \langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2}| = |\langle f_n - f, g \rangle_{\mathcal{L}^2}| \leq \|g\|_2 \|f_n - f\|_2 \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

de onde, por ser

$$\langle f_n - f, g_n - g \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle f_n, g_n \rangle_{\mathcal{L}^2} - \langle f, g_n \rangle_{\mathcal{L}^2} - \langle f_n, g \rangle_{\mathcal{L}^2} + \langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2}$$

vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g_n \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2},$$

e, de modo semelhante,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \hat{f}_n, \hat{g}_n \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\mathcal{L}^2}.$$

Logo, pela Relação Forte de Parseval em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (ver Teorema 3.2.5):

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g_n \rangle_{\mathcal{L}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \hat{f}_n, \hat{g}_n \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\mathcal{L}^2},$$

demonstrando o resultado. □

O próximo resultado desempenha um papel fundamental na discussão da regularidade H^2 .

Teorema 3.2.7. *Para toda $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N)$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$*

$$\widehat{\partial_j \partial_k f}(\xi) = -\xi_j \xi_k \widehat{f}(\xi) \text{ para todos } j, k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.12)$$

Além disso

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) : |\xi|^2 \widehat{f}(\xi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

e

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^4) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

define uma norma em $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N)$ que é equivalente à norma usual

$$\|f\|_{\mathcal{H}^2} = \left(|f|_2^2 + \sum_{j=1}^N |\partial_j f|_2^2 + \sum_{j,k=1}^N |\partial_j \partial_k f|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. A partir da densidade de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N)$ (ver Teorema F.4), temos que existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|f_n - f\|_{\mathcal{H}^2} \rightarrow 0$. Em particular

$$\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$$

$$\|\partial_j f_n - \partial_j f\|_2 \rightarrow 0 \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, N$$

$$\|\partial_j \partial_k f_n - \partial_j \partial_k f\|_2 \rightarrow 0 \text{ para todos } j, k = 1, 2, \dots, N.$$

Logo, pela definição da Transformada de Fourier em \mathcal{L}^2 e pelo Teorema 3.2.2, segue para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^N$ e todos $j, k = 1, 2, \dots, N$ que

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_j f}(\xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\partial_j f_n}(\xi) = i \xi_j \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f_n}(\xi) = i \xi_j \widehat{f}(\xi), \\ \widehat{\partial_j \partial_k f}(\xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\partial_j \partial_k f_n}(\xi) = -\xi_j \xi_k \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f_n}(\xi) = -\xi_j \xi_k \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Notemos agora que de acordo com (3.12) temos para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta(f_n - f_m)}(\xi) &= \sum_{j=1}^N \widehat{\partial_j \partial_j (f_n - f_m)}(\xi) \\ &= -\widehat{(f_n - f_m)}(\xi) \sum_{j=1}^N |\xi_j|^2 \\ &= -|\xi|^2 \widehat{(f_n - f_m)}(\xi) \\ &= -|\xi|^2 (\widehat{f_n} - \widehat{f_m})(\xi). \end{aligned}$$

De onde segue que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^4 |\widehat{f_n} - \widehat{f_m}|(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[-|\xi|^2 (\widehat{f_n} - \widehat{f_m})(\xi) \right] \overline{\left[-|\xi|^2 (\widehat{f_n} - \widehat{f_m})(\xi) \right]} d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\Delta(f_n - f_m)(\xi)} \Delta(f_n - f_m)(\xi) d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \Delta(f_n - f_m)(\xi) \right|^2 d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta(f_n - f_m)(\xi)|^2 d\xi,
 \end{aligned}$$

onde a última igualdade é consequência do [Corolário 3.2.5](#). Logo, pela Desigualdade Triangular

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^4 |\widehat{f_n} - \widehat{f_m}|(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} &= |\Delta(f_n - f_m)|_2 \\
 &= \left| \sum_{j=1}^N \partial_j \partial_j (f_n - f_m) \right|_2 \\
 &\leq \sum_{j=1}^N |\partial_j \partial_j (f_n - f_m)|_2 \\
 &= \sum_{j=1}^N \left(|\partial_j \partial_j (f_n - f_m)|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \sum_{j=1}^N \left(\|f_n - f_m\|_{\mathcal{H}^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= N \|f_n - f_m\|_{\mathcal{H}^2},
 \end{aligned}$$

nos mostrando que a sequência de funções $(|\xi|^2 \widehat{f_n}(\xi))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Assim, pelo fato de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ ser completo (ver [Teorema D.7](#)), vemos que existe $z \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $|\xi|^2 \widehat{f_n}(\xi) \rightarrow z$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Além disso, aplicando o [Corolário 3.2.5](#), temos

$$|\widehat{f_n} - \widehat{f}|_2 = \|f_n - f\|_2 \rightarrow 0,$$

e, portanto, pela Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.6](#)), existe uma subsequência $(\widehat{f_{n_k}})_{k=1}^{\infty}$ e $h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $\widehat{f_{n_k}}(\xi) \rightarrow \widehat{f}(\xi)$ quase sempre em \mathbb{R}^N e $|\widehat{f_{n_k}}(\xi)| \leq h(\xi)$ para todo k quase sempre em \mathbb{R}^N . Considerando agora $R > 0$ arbitrário, evidenciamos que se $|\xi| \leq R$, então $|\xi|^4 |\widehat{f_{n_k}}(\xi)|^2 \leq R^4 h^2(\xi) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ quase sempre em $B(0, R)$ e $|\xi|^4 (\widehat{f_{n_k}}(\xi))^2 \rightarrow |\xi|^4 (\widehat{f}(\xi))^2$ quase sempre em $B(0, R)$. Como consequência, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.5](#)), temos

$$\begin{aligned}
 \int_{|\xi| \leq R} |\xi|^4 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{|\xi| \leq R} \lim_{k \rightarrow \infty} |\xi|^4 |\widehat{f_{n_k}}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{|\xi| \leq R} |\xi|^4 |\widehat{f_{n_k}}(\xi)|^2 d\xi \\
 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^4 |\widehat{f_{n_k}}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \|z\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^4 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\xi| \leq R} |\xi|^4 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq |z|_2^2,$$

demonstrando que

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N) \subset \left\{ f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) : |\xi|^2 \hat{f}(\xi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Reciprocamente, seja $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $|\xi|^2 \hat{f}(\xi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Provaremos que $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N)$. De fato, notemos que $(1 + |\xi|^2) \hat{f}(\xi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, de onde existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tal que $f_n \rightarrow (1 + |\xi|^2) \hat{f}(\xi)$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Definindo para cada n natural

$$g_n(\xi) = \frac{f_n(\xi)}{1 + |\xi|^2},$$

vemos que $g_n(\xi) \neq 0$ precisamente quando $f_n(\xi) \neq 0$ e portanto $(g_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, de onde, aplicando o [Lema 3.2.3](#), evidenciamos que para quaisquer $j, k = 1, 2, \dots, N$, as sequências $(\xi_j \xi_k g_n(\xi))_{n=1}^\infty$ e $(\xi_j \xi_k g_n(\xi))_{n=1}^\infty$ estão contidas ambas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, temos por exemplo

$$\begin{aligned} |\xi_j \xi_k g_n(\xi) - \xi_j \xi_k g_m(\xi)|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\xi_j \xi_k|^2 \frac{|f_n(\xi) - f_m(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^2} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\xi_j \xi_k|^2 \frac{|f_n(\xi) - f_m(\xi)|^2}{1 + 2|\xi|^2 + |\xi|^4} d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^4 \frac{|f_n(\xi) - f_m(\xi)|^2}{1 + 2|\xi|^2 + |\xi|^4} d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^4 \frac{|f_n(\xi) - f_m(\xi)|^2}{|\xi|^4} d\xi \\ &= |f_n - f_m|_2^2, \end{aligned}$$

mostrando que $(\xi_j \xi_k g_n(\xi))_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Assim, de modo semelhante, podemos provar que as sequências $(g_n)_{n=1}^\infty$ e $(\xi_j g_n(\xi))_{n=1}^\infty$ são também sequências de Cauchy em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Segue agora que, ao considerar o espaço vetorial $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ com a topologia gerada pela norma $|\cdot|_2$, o [Corolário 3.2.3](#) e o [Corolário 3.2.4](#) nos revelam que a aplicação de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ definida por $f \mapsto \hat{f}$ é um isomorfismo isométrico cuja inversa é a aplicação $f \mapsto \check{f}$. A partir desse fato, fica evidente que as sequências $(\check{g}_n)_{n=1}^\infty$, $(\widehat{\xi_j g_n(\xi)})_{n=1}^\infty$ e $(\widehat{\xi_j \xi_k g_n(\xi)})_{n=1}^\infty$ são todas sequências de Cauchy em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Notando agora, a partir do [Teorema 3.2.2](#), que

$$\widehat{\xi_j \xi_k g_n} = -(\widehat{-\xi_j \xi_k g_n}) = -(\widehat{-\xi_j \xi_k \check{g}_n}) = -(\widehat{\partial_j \partial_k \check{g}_n}) = -\partial_j \partial_k \check{g}_n$$

e que, de modo semelhante, $\widehat{\xi_j g_n} = -i \partial_j \check{g}_n$, vemos que as sequências $(\check{g}_n)_{n=1}^\infty$, $(\partial_j \check{g}_n)_{n=1}^\infty$ e $(\partial_j \partial_k \check{g}_n)_{n=1}^\infty$ são todas sequências de Cauchy em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ quaisquer que sejam $j, k = 1, 2, \dots, N$, ou seja, $(\check{g}_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N)$ e portanto existe $h \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $\check{g}_n \rightarrow h$ em $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N)$ (ver [Teorema F.1](#)). Como, em particular, temos

$$\check{g}_n - \Delta \check{g}_n \rightarrow h - \Delta h \text{ em } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$$

e também, a partir de (3.12), temos para h e cada n natural

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta h} &= -|\xi|^2 \hat{h}, \\ \widehat{\Delta \widetilde{g}_n} &= -|\xi|^2 g_n,\end{aligned}$$

Segue, a partir do [Corolário 3.2.5](#), que

$$\begin{aligned}|(\widetilde{g}_n - \Delta \widetilde{g}_n) - (h - \Delta h)|_2 &= |(g_n + |\xi|^2 g_n) - (\hat{h} + |\xi|^2 \hat{h})|_2 \\ &= |(1 + |\xi|^2)g_n - (1 + |\xi|^2)\hat{h}|_2,\end{aligned}$$

de onde concluímos que $(1 + |\xi|^2)g_n \rightarrow (1 + |\xi|^2)\hat{h}$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Relembrando que $(1 + |\xi|^2)g_n = f_n \rightarrow (1 + |\xi|^2)\hat{f}$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, temos, a partir da unicidade do limite, que $\hat{f} = \hat{h}$ e portanto, $f = h \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N)$, como desejado. Sejam agora $f, g \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N)$ e considere a expressão

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^2} = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^4) \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

Provaremos que a igualdade acima define um produto interno em $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N)$. De fato,

- Notemos que $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^2}$ está bem definida, pois de acordo com a [Desigualdade de Hölder](#), $f \hat{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, já que $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ e $|\xi|^4 \hat{f} \hat{g} = |\xi|^2 \hat{f} |\xi|^2 \hat{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, já que $|\xi|^2 \hat{f}, |\xi|^2 \hat{g} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$.
- Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $h \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N)$, então a igualdade $\langle f + \lambda g, h \rangle_{\mathcal{H}^2} = \langle f, h \rangle_{\mathcal{H}^2} + \lambda \langle g, h \rangle_{\mathcal{H}^2}$ é consequência imediata do fato da Transformada de Fourier ser uma aplicação linear.
- A simetria conjugada é verdadeira, pois

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^2} &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^4) \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \overline{(1 + |\xi|^4) \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^4) \overline{\hat{f}(\xi)} \hat{g}(\xi) d\xi \\ &= \overline{\langle g, f \rangle_{\mathcal{H}^2}}\end{aligned}$$

- Por último, temos que

$$\langle f, f \rangle_{\mathcal{H}^2} = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^4) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq 0.$$

Além disso, se $\langle f, f \rangle_{\mathcal{H}^2} = 0$ então, pelo [Teorema D.2](#), temos $\hat{f} = 0$, ou seja, $f = 0$.

Como consequência, $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathcal{H}^2}}$ define uma norma em $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N)$ (ver [Teorema E.2](#)). Para provar a equivalência entre as normas, note inicialmente que a partir do [Corolário](#)

3.2.5 e (3.12):

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{\mathcal{H}^2}^2 &= |f|_2^2 + \sum_{j=1}^N |\partial_j f|_2^2 + \sum_{j,k=1}^N |\partial_j \partial_k f|_2^2 \\
 &= |\hat{f}|_2^2 + \sum_{j=1}^N |\widehat{\partial_j f}|_2^2 + \sum_{j,k=1}^N |\widehat{\partial_j \partial_k f}|_2^2 \\
 &= |\hat{f}|_2^2 + \sum_{j=1}^N |i\xi_j \hat{f}|_2^2 + \sum_{j,k=1}^N |-\xi_j \xi_k \hat{f}|_2^2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} |\xi_j|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{j,k=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} |\xi_j \xi_k|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2 + |\xi|^4) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \|f\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi,
 \end{aligned}$$

nos mostrando que

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_{\mathcal{H}^2}.$$

Por fim, temos pela [Desigualdade de Hölder](#) e pelas identidades envolvendo o Laplaciano estabelecidas no início da prova desse teorema, que:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\Delta f}(\xi)| |\hat{f}(\xi)| d\xi \\
 &\leq |\widehat{\Delta f}|_2 |\hat{f}|_2 \\
 &= |\Delta f|_2 |\hat{f}|_2 \\
 &\leq \|f\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Nos mostrando que

$$\|f\|_{\mathcal{H}^2} \leq \sqrt{2} \|f\|_2,$$

finalizando finalmente a demonstração do resultado. □

Usando as propriedades da Transformada de Fourier, obtemos o seguinte resultado sobre derivadas fracas.

Lema 3.2.6. *Sejam $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tais que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \Delta v dx = \int_{\mathbb{R}^N} g v dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Então $f \in H^2(\mathbb{R}^N)$, além disso

$$-|\xi|^2 \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi) \quad \text{quase sempre em } \xi \in \mathbb{R}^N$$

e $\Delta f = g$.

Demonstração. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^2(\mathbb{R}^N)$ (ver Teorema F.4), temos que, para cada $z \in H^2(\mathbb{R}^N)$, podemos considerar uma sequência $(z_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $z_n \rightarrow z$ em $H^2(\mathbb{R}^N)$, de onde, em particular, temos que $\Delta z_n \rightarrow \Delta z$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $z_n \rightarrow z$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Notando agora, que, pela Desigualdade de Hölder, segue

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f \Delta z_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} f \Delta z dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} f (\Delta z_n - \Delta z) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f| |\Delta z_n - \Delta z| dx \\ &\leq \|f\|_2 \|\Delta z_n - \Delta z\|_2 \end{aligned}$$

e, de modo semelhante,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} g z_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} g z dx \right| \leq \|g\|_2 \|z_n - z\|_2,$$

vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f \Delta z_n dx &= \int_{\mathbb{R}^N} f \Delta z dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} g z_n dx &= \int_{\mathbb{R}^N} g z dx. \end{aligned}$$

Lembrando que por hipótese

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \Delta z_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} g z_n dx \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

concluimos, ao tomar o limite $n \rightarrow \infty$, que, para todo $z \in H^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \Delta z dx = \int_{\mathbb{R}^N} g z dx. \quad (3.13)$$

Ao considerar $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, temos, em particular, $\operatorname{Re}(\varphi), \operatorname{Im}(\varphi) \in H^2(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, ambas as funções satisfazem (3.13). Logo, por ser $\overline{\Delta \varphi} = \Delta \operatorname{Re}(\varphi) - \Delta \operatorname{Im}(\varphi)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \overline{\Delta \varphi} dx = \int_{\mathbb{R}^N} g \overline{\varphi} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Assim, pela Relação Forte de Parseval em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ (ver Corolário 3.2.5) e pelo fato já verificado anteriormente de que $\widehat{\Delta \varphi} = -|\xi|^2 \widehat{\varphi}$, segue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f \overline{\Delta \varphi} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f} \overline{\widehat{\Delta \varphi}} dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f} |\xi|^2 \overline{\widehat{\varphi}} d\xi, \\ \int_{\mathbb{R}^N} g \overline{\varphi} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{g} \overline{\widehat{\varphi}} d\xi, \end{aligned}$$

ou seja,

$$- \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f} |\xi|^2 \overline{\widehat{\varphi}} d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{g} \overline{\widehat{\varphi}} d\xi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \quad (3.14)$$

Provaremos agora que $\widehat{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. De fato, pelo Teorema de Plancherel (ver Teorema 3.2.6) temos $\widehat{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, de onde, pela estrutura vetorial do espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, concluimos

que $\overline{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^N) = \overline{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Como consequência, esse fato nos revela que (3.14) significa equivalentemente que:

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}|\xi|^2 \eta d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}\eta d\xi \quad \forall \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

de onde, em particular,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\hat{f}|\xi|^2 - \hat{g})\eta d\xi = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

e, portanto, pelo Teorema de Du Bois Raymond (ver Teorema D.14), temos

$$-|\xi|^2 \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{quase sempre em } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

mostrando que $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N)$ (ver Teorema 3.2.7) e, portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \Delta v dx = \int_{\mathbb{R}^N} v(\Delta f) dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Logo, por hipótese

$$\int_{\mathbb{R}^N} v(\Delta f) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f \Delta v dx = \int_{\mathbb{R}^N} g v dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\Delta f - g)v dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

mostrando que $\Delta f = g$ a partir de mais uma aplicação do Teorema de Du Bois Raymond e finalizando a demonstração do lema. \square

Teorema 3.2.8. *Sejam u uma solução fraca de (P) para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Então $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$,*

$$-\Delta u = \lambda u + f \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\min \left\{ \frac{1}{N^2}, \lambda^2 \right\} \|u\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2\lambda \|\nabla u\|_2^2.$$

Em particular, para $\lambda < 0$,

$$G_\lambda : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{é um operador linear contínuo}$$

com

$$\|G_\lambda f\|_2 \leq \max \left\{ N, \frac{1}{|\lambda|} \right\} \|f\|_2 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Pela definição de solução fraca de (P) sabemos que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda u + f)v dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (3.15)$$

Por outro lado, pela definição de derivada fraca, temos, para cada $i = 1, 2, \dots, N$ e para cada $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial_i u \partial_i v dx = - \int_{\mathbb{R}^N} u \partial_i \partial_i v dx.$$

De onde

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_{\mathbb{R}^N} u \Delta v dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

nos mostrando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \Delta v dx = \int_{\mathbb{R}^N} w v dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

onde $w = -(\lambda u + f) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$. Podemos agora aplicar o [Lema 3.2.6](#) para concluir que $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ com $-\Delta u = \lambda u + f$ e $|\xi|^2 \hat{u}(\xi) = \lambda \hat{u}(\xi) + \hat{f}(\xi)$ quase sempre em $\xi \in \mathbb{R}^N$. Além disso, qualquer que seja $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, segue

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_j \partial_k u) \bar{v} dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} u \overline{(\partial_j \partial_k v)} dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u \overline{(\partial_j \partial_k v)}} d\xi \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u} \xi_j \xi_k \bar{\hat{v}} d\xi \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u} \xi_j \xi_k \bar{\hat{v}}| d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^2 |\hat{u}| |\hat{v}| d\xi \leq \left\| |\xi|^2 \hat{u} \right\|_2 \|\hat{v}\|_2 \\ &= \left\| \lambda \hat{u} + \hat{f} \right\|_2 \|\hat{v}\|_2 = \|\lambda u + f\|_2 \|v\|_2, \end{aligned}$$

onde a primeira linha é justificada pela definição de derivada fraca e pela Identidade de Parseval (ver [Corolário 3.2.5](#)), a segunda linha se justifica por (3.12), a terceira linha se justifica pela [Desigualdade de Hölder](#) e a última linha também se justifica pela Identidade de Parseval.

Agora, lembrando que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é denso em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ (ver [Teorema D.13](#)), podemos considerar uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $f_n \rightarrow \partial_j \partial_k u$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Logo, pela Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.6](#)), existe uma subsequência $(f_{n_l})_{l=1}^\infty$ e existe $h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ tais que $f_{n_l} \rightarrow \partial_j \partial_k u$ e $|f_{n_l}| \leq h$ quase sempre. Assim, $(\partial_j \partial_k u) \overline{f_{n_l}} \rightarrow |\partial_j \partial_k u|^2$ quase sempre e pela [Desigualdade de Hölder](#) $|(\partial_j \partial_k u) \overline{f_{n_l}}| \leq |\partial_j \partial_k u| h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Finalmente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.5](#)):

$$\begin{aligned} |\partial_j \partial_k u|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{l \rightarrow \infty} \partial_j \partial_k u \overline{f_{n_l}} dx \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_j \partial_k u) \overline{f_{n_l}} dx \\ &\leq \lim_{l \rightarrow \infty} \|\lambda u + f\|_2 \|f_{n_l}\|_2 \\ &= \|\lambda u + f\|_2 \|\partial_j \partial_k u\|_2, \end{aligned}$$

provando que

$$\|\partial_j \partial_k u\|_2 \leq \|\lambda u + f\|_2.$$

Como consequência imediata da desigualdade acima temos

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^N |\partial_j \partial_k u|_2^2 &\leq N^2 (\|\lambda u + f\|_2^2) \\ &= N^2 \left(\lambda^2 \|u\|_2^2 + \|f\|_2^2 + 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u f dx \right). \end{aligned}$$

Notando agora, a partir do início da demonstração do [Lema 3.2.6](#), que podemos fazer $v = u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ em (3.15), vemos que a identidade

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda u + f) u dx$$

é verdadeira. Isso nos diz que

$$2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u f dx = 2\lambda |\nabla u|_2^2 - 2\lambda^2 |u|_2^2$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^N |\partial_j \partial_k u|_2^2 &\leq N^2 \left(\lambda^2 |u|_2^2 + |f|_2^2 + 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u f dx \right) \\ &= N^2 \left(\lambda^2 |u|_2^2 + |f|_2^2 + 2\lambda |\nabla u|_2^2 - 2\lambda^2 |u|_2^2 \right) \\ &= N^2 \left(|f|_2^2 + 2\lambda |\nabla u|_2^2 - \lambda^2 |u|_2^2 \right). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |f|_2^2 + 2\lambda |\nabla u|_2^2 &\geq \lambda^2 |u|_2^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{j,k=1}^N |\partial_j \partial_k u|_2^2 \\ &\geq \min \left\{ \frac{1}{N^2}, \lambda^2 \right\} \left(|u|_2^2 + \sum_{j,k=1}^N |\partial_j \partial_k u|_2^2 \right) \\ &= \min \left\{ \frac{1}{N^2}, \lambda^2 \right\} \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Se $\lambda < 0$, então denotamos como anteriormente $u = G_\lambda f$ e assim

$$\min \left\{ \frac{1}{N^2}, \lambda^2 \right\} \|G_\lambda f\|_2^2 \leq |f|_2^2 + 2\lambda |\nabla u|_2^2 \leq |f|_2^2,$$

ou seja,

$$\|G_\lambda f\|_2 \leq \frac{1}{\min \left\{ \frac{1}{N}, |\lambda| \right\}} |f|_2 = \max \left\{ N, \frac{1}{|\lambda|} \right\} |f|_2,$$

provando que

$$G_\lambda : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^N)$$

é um operador linear contínuo. □

3.3 Regularidade - $W^{2,p}$

Nesta seção provaremos o [Teorema 1.1](#). Tal resultado é baseado na Desigualdade de Calderón-Zygmund, que, por sua vez, é fruto da teoria de Calderón-Zygmund das integrais singulares, área de intensa investigação no campo da Análise Harmônica, como pode ser visto em ([STEIN, 1970](#)).

Teorema 3.3.1. *Seja $1 < p < \infty$. Então para todos $i, j = 1, 2, \dots, N$ e $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante $C(N, p)$ tal que*

$$|\partial_i \partial_j u|_p \leq C(N, p) |\Delta u|_p.$$

Demonstração. A demonstração do teorema segue a partir das mesmas ideias dos argumentos contidos na página 58, da dissertação (PRADO, 2009), que é bastante detalhada, e por isso, será omitida. \square

Para uma breve introdução à teoria das integrais singulares, referenciamos o capítulo 7 do livro (MUSCALU; SCHLAG, 2013), em que o teorema acima também pode ser encontrado na página 175. Para uma exposição mais completa e rica, referenciamos o clássico (STEIN, 1970). Feito os devidos créditos, temos como consequência do Teorema 3.3.1, o seguinte resultado que nos será de fundamental importância:

Corolário 3.3.1. (Estimativa de Calderón-Zygmund) *Seja $1 < p < \infty$. Então para todos $i, j = 1, 2, \dots, N$ e $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante $C(N, p)$, tal que*

$$|\partial_i \partial_j u|_p \leq C(N, p) |\Delta u|_p.$$

Demonstração. Seja $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Pela densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ (ver Teorema F.4), temos que existe uma sequência $(u_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Em particular, quaisquer que sejam $i, j = 1, 2, \dots, N$ vemos que $|\partial_i \partial_j u_n|_p \rightarrow |\partial_i \partial_j u|_p$ e $|\Delta u_n|_p \rightarrow |\Delta u|_p$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Logo, pelo Teorema 3.3.1, segue para cada n natural que

$$|\partial_i \partial_j u_n|_p \leq C(N, p) |\Delta u_n|_p,$$

de onde o resultado segue ao fazer $n \rightarrow \infty$. \square

Observamos que a estimativa de Calderón-Zygmund também é verdadeira em domínios limitados. Para uma demonstração da estimativa nesse caso, referenciamos o livro (GILBARG; S.TRUDINGER, 1998), páginas 230 a 235. Citamos também (ZAHN, 2005) para uma prova mais completa. O caso limitado está fora do escopo desta dissertação.

Estamos prontos para enunciar e provar o próximo resultado.

Teorema 3.3.2. *Sejam $\lambda < 0$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para algum $p \in (1, \infty)$. Então existe um único elemento $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, tal que*

$$-\Delta u = \lambda u + f \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Considere uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $|f_n - f|_p \rightarrow 0$ (ver Teorema D.13). Sabemos, de acordo com o Teorema 2.3.2, que $u_n = T_k f_n = f_n \star E_N^k$ é tal que

$$-\Delta u_n = \lambda u_n + f_n \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

onde $\lambda = -k^2$, com $k > 0$. De acordo com [Lema 3.1.3](#) sabemos também que $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para cada n natural. Além disso, por ser cada f_n pertencente a $L^\theta(\mathbb{R}^N)$ qualquer que seja $\theta \geq 1$, vemos que em particular que $f_n \in L^r(\mathbb{R}^N)$ com $r \in (2N/(N+2), 2]$ e, portanto, pelo [Teorema 3.1.1](#), temos, para cada $i = 1, 2, \dots, N$, que $\partial_i u_n = S_k^i f_n$, de onde, por [\(3.2\)](#) e [\(3.4\)](#), segue que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{W^{1,p}}^p &= |u_n|_p^p + \sum_{j=1}^N |\partial_j u_n|_p^p \\ &= |T_k f_n|_p^p + \sum_{j=1}^N |S_k^j f_n|_p^p \\ &\leq C_1 |f_n|_p^p + C_2 |f_n|_p^p \\ &= (C_1 + C_2) |f_n|_p^p, \end{aligned}$$

mostrando que $(u_n)_{n=1}^\infty$ é uma seqüência de Cauchy em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Como temos também $\Delta u_n = -(\lambda u_n + f_n)$, vemos que a seqüência $(\Delta u_n)_{n=1}^\infty$ é uma seqüência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Mostraremos agora que $u_n \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ para cada n . De fato, pelo [Teorema 2.3.2](#), sabemos que

$$\partial_i \partial_j u_n = \partial_i \partial_j T_k f_n = \partial_i f_n \star \partial_j E_N^k,$$

de onde, por ser $\partial_j E_N^k \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\partial_i f_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$, vemos pela Desigualdade de Young para Convoluções (ver [Lema 3.1.1](#)) que $\partial_i \partial_j u_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pois $1/p = 1/p + 1/1 - 1$. Assim, pela Estimativa de Calderón-Zygmund (ver [Corolário 3.3.1](#)), concluímos que, para todos $i, j = 1, 2, \dots, N$, a seqüência $(\partial_i \partial_j u_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^N)$, provando que $(u_n)_{n=1}^\infty$ é uma seqüência de Cauchy em $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Logo, pela completude do espaço $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ (ver [Teorema F.1](#)), existe $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Em particular $-(\Delta u_n - \lambda u_n - f_n) \rightarrow -(\Delta u - \lambda u - f)$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, de onde, a menos de subsequência, temos que $0 = -(\Delta u_n - \lambda u_n - f_n) \rightarrow -(\Delta u - \lambda u - f)$ quase sempre em \mathbb{R}^N , provando que

$$-\Delta u = \lambda u + f \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N. \quad (3.16)$$

Se $w_1, w_2 \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ satisfizerem [\(3.16\)](#), então $w = w_1 - w_2$ satisfaz $-\Delta w = \lambda w$. Devemos demonstrar que $w = 0$. Para esse fim, seja $(w_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma seqüência tal que $w_n \rightarrow w$ em $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Assim, ao definir $r_n = \Delta w_n + \lambda w_n$, vemos que $r_n \rightarrow 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, $|r_n|_p \rightarrow 0$. Em seguida, considere $g(t) = |t|^{p-2}t$ e seja $(g_m)_{m=1}^\infty$ a seqüência de funções definida para cada m natural por

$$g_m(t) = t \left(t^2 + \frac{1}{m} \right)^{\frac{p-2}{2}}$$

Temos que cada g_m é ímpar, de classe C^1 , crescente, pois

$$g'_m(t) = \left(t^2 + \frac{1}{m} \right)^{\frac{p-2}{2}} + (p-2)t^2 \left(t^2 + \frac{1}{m} \right)^{\frac{p-4}{2}} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e além disso, $g_m \rightarrow g$ uniformemente em \mathbb{R} . Logo, por meio de um argumento empregado diversas vezes na dissertação, a Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, em conjunto com o próprio Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |w|^p dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n \rightarrow \infty} |w_n|^p dx = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^p dx = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} w_n g(w_n) dx, \quad (3.17)$$

pois $tg(t) = |t|^p$. Fixemos agora n natural. Em seguida, note que as funções $w_n g_m(w_n)$ e $w_n g(w_n)$ são integráveis, pois são contínuas e o suporte de w_n é compacto. Logo

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} w_n g_m(w_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} w_n g(w_n) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} w_n (g_m(w_n) - g(w_n)) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |w_n| |g_m(w_n) - g(w_n)| dx, \end{aligned}$$

de onde segue a partir da convergência uniforme $g_m \rightarrow g$ em \mathbb{R} e da integrabilidade da função w_n , que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} w_n g_m(w_n) dx = \int_{\mathbb{R}^N} w_n g(w_n) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que $r_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, de maneira semelhante, para cada n natural fixado, temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} r_n g_m(w_n) dx = \int_{\mathbb{R}^N} r_n g(w_n) dx.$$

Note também que, a partir da continuidade das funções g'_m , da regra da cadeia e do Teorema A.1.9, temos para cada $i = 1, 2, \dots, N$ que

$$- \int_{\mathbb{R}^N} g_m(w_n) \partial_i \partial_i w_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} g'_m(w_n) \partial_i w_n \partial_i w_n dx.$$

Assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} -g_m(w_n) \Delta w_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 g'_m(w_n) dx.$$

Logo, a partir de tais considerações, temos, para cada n natural fixado,

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\mathbb{R}^N} w_n g(w_n) dx &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{m \rightarrow \infty} w_n g_m(w_n) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda w_n g_m(w_n) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (r_n - \Delta w_n) g_m(w_n) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} -g_m(w_n) \Delta w_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} r_n g(w_n) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 g'_m(w_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} r_n g(w_n) dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} r_n g(w_n) dx, \end{aligned}$$

de onde, a desigualdade acima segue do fato de cada g_m ser crescente. Juntando os fatos, e usando (3.17), tudo isso nos revela que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |w|^p dx \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} r_n g(w_n) dx.$$

Estudaremos agora o limite da desigualdade acima. Para isso, seja $q = p/(p - 1)$ e note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(w_n)|^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^q |w_n|^{q(p-2)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{q(p-1)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^p dx < +\infty,$$

ou seja, $|g(w_n)|^q = |w_n|^p$. Logo, como $1/p + 1/q = 1$, pela [Desigualdade de Hölder](#) temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} r_n g(w_n) dx \right| \leq |r_n|_p |g(w_n)|_q = |r_n|_p |w_n|_p^{p-1},$$

e usando as convergências $|r_n|_p \rightarrow 0$ e $|w_n|_p^{p-1} \rightarrow |w|_p^{p-1}$, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} r_n g(w_n) dx = 0,$$

nos mostrando que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |w|^p dx \geq 0, \text{ onde } \lambda < 0,$$

e provando que $\int_{\mathbb{R}^N} |w|^p dx = 0$ e como consequência do [Teorema D.2](#) que $w = 0$, finalizando a demonstração. \square

Corolário 3.3.2. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ em que $p \in (2N/(N + 2), 2]$ e $q \geq p$. Se u é uma solução fraca de (P) onde $\lambda \in \mathbb{R}$, então $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Provaremos o resultado primeiro para o caso $p = 2$. Pela definição de solução fraca do problema (P), temos para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda u + f) \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-u + (\lambda + 1)u + f) \varphi dx,$$

ou seja, u é solução fraca do problema $-\Delta u + u = \Phi$ onde $\Phi = (\lambda + 1)u + f$. Como por hipótese $f \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$, $q \geq 2$, podemos aplicar o [Teorema 3.1.2](#) para concluirmos que $u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ e portanto $\Phi \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Assim, aplicando o [Teorema 3.3.2](#), existe $v \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ tal que v é a única solução forte da equação $-\Delta v + v = \Phi$. Provaremos que $u = v$. De fato, por ser $v \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ e $-\Delta v + v = \Phi$, temos para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \cdot \nabla \varphi + v \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi \varphi dx,$$

de onde, ao usar que u é solução fraca do mesmo problema, teremos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \cdot \nabla \varphi + v \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) dx,$$

mostrando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w \cdot \nabla \varphi + w \varphi) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

onde $w = v - u$. Considere agora $\xi \in W^{1,q'}(\mathbb{R}^N)$ e seja $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que $\varphi_n \rightarrow \xi$ em $W^{1,q'}(\mathbb{R}^N)$ (ver [Teorema F.4](#)) onde $q' = q/(q - 1)$. Com base na

Desigualdade de Hölder, note que as funções $\nabla w \cdot \nabla \varphi_n$ e $\nabla w \cdot \nabla \xi$ são integráveis e também

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \cdot \nabla \varphi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \cdot \nabla \xi dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \cdot \nabla (\varphi_n - \xi) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w \cdot \nabla (\varphi_n - \xi)| dx \\ &\leq \sum_{j=1}^N |\partial_j w|_q |\partial_j (\varphi_n - \xi)|_{q'} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

provando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \cdot \nabla \varphi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \cdot \nabla \xi dx.$$

Como de modo análogo temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} w \varphi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} w \xi dx,$$

vemos que

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w \cdot \nabla \varphi_n + w \varphi_n) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w \cdot \nabla \xi + w \xi) dx,$$

demonstrando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w \cdot \nabla \xi + w \xi) dx = 0 \quad \forall \xi \in W^{1,q'}(\mathbb{R}^N) \quad \text{com} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

No que se segue, para cada $R > 0$ seja $\xi_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $\xi_R(t) = |t|^{q-2} \mu_R(t)$, onde $\mu_R \in C^\infty(\mathbb{R})$ é tal que

$$\mu_R(t) = \begin{cases} t, & |t| \leq R \\ 0, & |t| > R+1 \end{cases}$$

e $|\mu_R(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

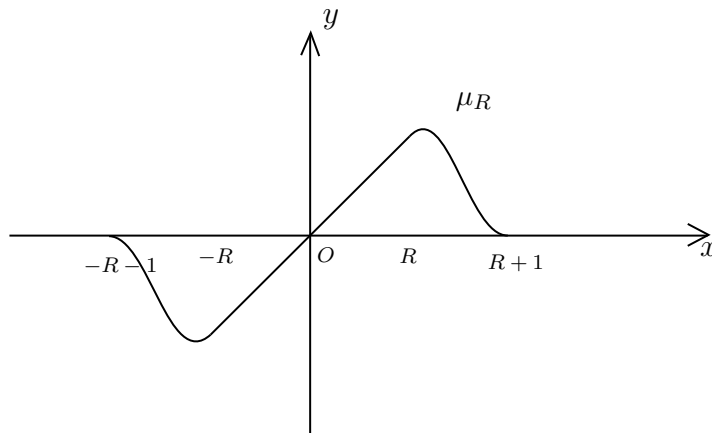


Figura 3 – Função μ_R

Provaremos agora que $\xi_R(w) \in W^{1,q'}(\mathbb{R}^N)$. Para isso, note que

$$\xi'_R(t) = (q-2)t|t|^{q-4}\mu_R(t) + |t|^{q-2}\mu'_R(t)$$

e portanto

$$\begin{aligned} |\xi'_R(t)| &\leq (q-2)|t|^{q-4}|t|^2 + |t|^{q-2} \cdot 1 \\ &= (q-1)|t|^{q-2}. \end{aligned}$$

Ao notar também que $\xi_R(0) = 0$, $\xi_R \in C^1(\mathbb{R})$ e que ξ'_R é limitada em \mathbb{R}^N , vemos que uma aplicação do [Teorema F.5](#) nos diz que

$$\partial_j \xi_R(w) = \xi'_R(w) \partial_j w \text{ e } \nabla \xi_R(w) = \xi'_R(w) \nabla w.$$

Logo, para cada $j = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_j \xi_R(w)|^{q'} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_j \xi_R(w)|^{\frac{q}{q-1}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\xi'_R(w) \partial_j w|^{\frac{q}{q-1}} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} ((q-1)|w|^{q-2} |\partial_j w|)^{\frac{q}{q-1}} dx \\ &= (q-1)^{\frac{q}{q-1}} \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{\frac{q(q-2)}{q-1}} |\partial_j w|^{\frac{q}{q-1}} dx \end{aligned}$$

e ao notar que $|\partial_j w|^{q/(q-1)} \in L^{q-1}(\mathbb{R}^N)$, $(q-1)' = (q-1)/(q-2)$ e $|w|^{q(q-2)/(q-1)} \in L^{(q-1)'}(\mathbb{R}^N)$, uma aplicação da [Desigualdade de Hölder](#) nos revela que $\partial_j \xi_R(w) \in L^{q'}(\mathbb{R}^N)$.

De maneira semelhante

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi_R(w)|^{\frac{q}{q-1}} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| |w|^{q-2} \mu_R(w) \right|^{\frac{q}{q-1}} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| |w|^{q-2} |w| \right|^{\frac{q}{q-1}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |w|^q dx < +\infty, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração de que $\xi_R(w) \in W^{1,q'}(\mathbb{R}^N)$. Segue agora que, ao considerar $\varphi = \xi_R(w)$, temos, para cada $R > 0$,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w \cdot \nabla \varphi + w \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\xi'_R(w) |\nabla w|^2 + \xi_R(w) w) dx.$$

Demonstraremos agora que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (\xi'_R(w) |\nabla w|^2 + \xi_R(w) w) dx = \int_{\mathbb{R}^N} ((q-1)|w|^{q-2} |\nabla w|^2 + |w|^q) dx. \quad (3.18)$$

Para esse fim, veja que quase sempre em \mathbb{R}^N

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \xi'_R(w) &= (q-2)|w|^{q-4}|w|^2 + |w|^{q-2} \cdot 1 \\ &= (q-1)|w|^{q-2} \end{aligned}$$

e, além disso,

$$|\xi'_R(w)| |\nabla w|^2 \leq (q-1) |w|^{q-2} |\nabla w|^2.$$

Assim, seremos capazes de aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.5](#)) para provar que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \xi'_R(w) |\nabla w|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} (q-1) |w|^{q-2} |\nabla w|^2 dx$$

contanto que a função $|w|^{q-2} |\nabla w|^2$ seja integrável. Com efeito, para $q = 2$ esse fato é imediato, já para $q > 2$, notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{q-2} |\nabla w|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} (|w|^q)^{\frac{q-2}{q}} (|\nabla w|^q)^{\frac{2}{q}} dx,$$

de onde, ao ver que $|w|^{q-2} \in L^{q/(q-2)}(\mathbb{R}^N)$, $(q/(q-2))' = q/2 > 1$ e $|\nabla w|^2 \in L^{(q/(q-2))'}(\mathbb{R}^N)$, temos que a [Desigualdade de Hölder](#) nos assegura a integrabilidade de $|w|^{q-2} |\nabla w|^2$. De modo semelhante temos quase sempre em \mathbb{R}^N que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \xi_R(w)w = |w|^{q-2} |w|^2 = |w|^q$$

e

$$|\xi_R(w)w| = \left| |w|^{q-2} \mu_R(w)w \right| \leq |w|^{q-2} |w|^2 = |w|^q \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Logo, ao aplicar novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [Teorema D.5](#)), concluímos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \xi_R(w)w dx = \int_{\mathbb{R}^N} |w|^q dx,$$

finalizando a demonstração de [\(3.18\)](#). Finalmente

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} (\xi'_R(w) |\nabla w|^2 + \xi_R(w)w) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} ((q-1) |w|^{q-2} |\nabla w|^2 + |w|^q) dx,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} ((q-1) |w|^{q-2} |\nabla w|^2 + |w|^q) dx = 0$$

e assim pelo [Teorema D.2](#) temos $(q-1) |w|^{q-2} |\nabla w|^2 + |w|^q = 0$ quase sempre em \mathbb{R}^N , provando que $w = v - u = 0$ quase sempre em \mathbb{R}^N , ou ainda, $u = v \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$, como desejado.

Suponhamos agora que $p \in (2N/(N+2), 2)$ e $q \geq p$. Se $q \geq 2$, então a propriedade de interpolação dos espaços L^p (ver [Teorema D.4](#)), nos diz que $f \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ e portanto $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ de acordo com o caso $p = 2$. Podemos então supor que $p \leq q < 2$. Nesse caso, seja v assim como no caso $p = 2$, a única solução forte em $W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ do problema

$$-\Delta v + v = \Phi \text{ em que } \Phi = (\lambda + 1)u + f \in L^q(\mathbb{R}^N).$$

Logo, pelas imersões de Sobolev (ver [Teorema F.7](#)), temos $W^{2,q}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\theta(\mathbb{R}^N)$, com

1. $\theta \in [q, \infty]$ se $\frac{1}{2} - \frac{q}{N} < 0$,
2. $\theta \in [q, \infty)$ se $\frac{1}{2} - \frac{q}{N} = 0$,
3. $\theta \in [q, \frac{qN}{N-2q}]$ se $\frac{1}{2} - \frac{q}{N} > 0$.

Se 1 ou 2 é satisfeito, então vemos que $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ pois estamos supondo $q < 2$. Se agora 3 é satisfeito, note que, como

$$q > \frac{2N}{N+2} > \frac{2N}{N+4},$$

então

$$2 < \frac{qN}{N-2q},$$

de onde, também nesse caso, temos $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Note agora que $v \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ implica $\partial_j v \in W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ para todo $j = 1, 2, 3, \dots, N$. Logo, novamente pelas imersões de Sobolev $W^{1,q}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\theta(\mathbb{R}^N)$, com

1. $\theta \in [q, \infty]$ se $1 - \frac{q}{N} < 0$,
2. $\theta \in [q, \infty)$ se $1 - \frac{q}{N} = 0$,
3. $\theta \in [q, \frac{qN}{N-q}]$ se $1 - \frac{q}{N} > 0$,

como anteriormente, caso ocorra 1 ou 2, temos $\partial_j v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, pois estamos supondo $q < 2$. Caso ocorra 3 temos que por hipótese

$$q > \frac{2N}{N+2},$$

e então

$$2 < \frac{qN}{N-q},$$

nos garantindo também que $\partial_j v \in L^2(\mathbb{R}^N)$. O escrito acima nos mostra que $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e portanto u e v são soluções fracas do problema

$$-\Delta z + z = \Phi \text{ em que } \Phi \in L^q(\mathbb{R}^N) \text{ com } q \in \left(\frac{2N}{N+2}, 2 \right).$$

Finalmente, a unicidade de solução fraca do problema acima (ver [Teorema 2.1.1](#)), nos prova que

$$u = v \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N),$$

como desejado. □

4 Regularidade para uma classe de Problemas Elípticos não lineares

O objetivo deste capítulo é mostrar que a teoria até agora desenvolvida também pode ser usada para verificar a regularidade de soluções fracas de problemas elípticos não lineares. O presente capítulo será então dividido em duas partes: a primeira parte consiste em demonstrar que existe solução fraca para o problema que iremos propor e a segunda parte consiste em regularizar a solução fraca encontrada. Enfatizamos também que no presente capítulo vamos supor $N \geq 3$.

4.1 Descrição do Problema e Existência de Solução Fraca

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (Q)$$

em que $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente Hölder contínua satisfazendo

(V₁) Existe $\alpha > 0$ tal que $V(x) \geq \alpha > 0$,

(V₂) $V(x + y) = V(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e para todo $y \in \mathbb{Z}^N$,

e $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função satisfazendo

(f₁) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} = 0$,

(f₂) Existem $C > 0$ e $p \in (2, 2^*)$, com $2^* = 2N/(N - 2)$, tais que

$$|f(s)| \leq C(|s| + |s|^{p-1}) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

(f₃) Existe $\mu > 2$ tal que

$$\mu F(t) \leq t f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ e além disso existe $t_0 > 0$ tal que $F(t_0) > 0$.

Exemplo 4.1.1. Se $\lambda > 0$, então a função V definida por $V(x) = \lambda$ é localmente Hölder contínua e satisfaz (V₁) e (V₂). Para um exemplo de uma função $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ que satisfaz

(f_1) , (f_2) e (f_3) , considere $p \in (2, 2^*)$ e defina:

$$f(s) = \begin{cases} s^{p-1} & \text{se } s \geq 0, \\ 0 & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

A função f assim definida, é de classe C^1 , pois $p > 2$ e, portanto

$$f'(s) = \begin{cases} (p-1)s^{p-2} & \text{se } s \geq 0, \\ 0 & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Como

$$0 = f'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(0+s) - f(0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s},$$

vemos que a propriedade (f_1) é satisfeita. Por ser também

$$|f(s)| \leq |s|^{p-1} \leq |s| + |s|^{p-1} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

temos que a propriedade (f_2) é satisfeita. Por fim, para $t > 0$ segue que $F(t) = \int_0^t s^{p-1} ds = t^p/p$ e então

$$pF(t) = tt^{p-1} = tf(t).$$

Se $t < 0$ então $F(t) = 0$, e portanto, também $0 = pF(t) = tf(t) = 0$, de onde, podemos considerar $\mu = p$ (pois $p > 2$). Além disso, se $t_0 = 2$ então $F(t_0) = 2^p/p > 0$.

Provaremos agora algumas consequências das propriedades das funções V e f listadas em $(V_1) - (V_2)$ e $(f_1) - (f_3)$ respectivamente.

Lema 4.1.1. *Para V localmente Hölder contínua e $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ temos que*

1. *Se V satisfaz (V_2) , então V é limitada,*
2. *Se f satisfaz (f_1) e (f_2) , então para todo $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{p-1} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

3. *Se f satisfaz (f_1) e (f_2) , então para todo $\varepsilon > 0$ existe uma constante D_ε tal que*

$$|F(s)| \leq \varepsilon|s|^2 + D_\varepsilon|s|^p \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

4. *Se f satisfaz (f_3) , então existe $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ não negativa tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(v) dx > 0.$$

Demonstração. De fato,

1. Considere o conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R}^N : |x|_{\max} \leq 1\},$$

em que $|\cdot|_{\max}$ denota a norma do máximo. Ao notar que B é um conjunto compacto e que toda função localmente Hölder contínua é contínua, podemos aplicar o Teorema de Weierstrass (ver [Teorema A.1.1](#)) para concluir que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|V(x)| \leq M \quad \forall x \in B.$$

Seja agora $z = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^N$ e considere $x_z = (\lfloor z_1 \rfloor, \lfloor z_2 \rfloor, \lfloor z_3 \rfloor, \dots, \lfloor z_N \rfloor) \in \mathbb{Z}^N$ e note que $z + x_z \in B$. Assim, pela propriedade (V_2) , temos

$$|V(z)| = |V(z + x_z)| \leq M,$$

provando a limitação da função V .

2. Seja $\varepsilon > 0$. A partir de (f_1) temos que existe $0 < \delta < 1$ tal que se $s \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ então $|f(s)| < \varepsilon|s|$. Pela propriedade (f_2) existem $C > 0$ e $p \in (2, 2^*)$ tais que

$$|f(s)| \leq C(|s| + |s|^{p-1}) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

de onde, ao considerar $|s| > 1$ e notar que $p - 1 > 1$, segue que

$$\begin{aligned} |f(s)| &\leq C(|s| + |s|^{p-1}) \\ &\leq 2C|s|^{p-1}. \end{aligned}$$

Seja agora $h : [-1, -\delta] \cup [\delta, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(s) = \frac{|f(s)| - \varepsilon|s|}{|s|^{p-1}}.$$

Como h é uma função contínua no conjunto compacto $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$, o Teorema de Weierstrass (ver [Teorema A.1.1](#)) nos revela que existe uma constante C'_ε tal que

$$|f(s)| \leq C'_\varepsilon |s|^{p-1} + \varepsilon|s| \quad \forall s \in [-1, -\delta] \cup [\delta, 1].$$

Em resumo, o resultado então segue ao notar que, também por (f_2) , é verdade que $f(0) = 0$ e ao definir $C_\varepsilon = \max\{2C, C'_\varepsilon\}$.

3. Seja $\varepsilon' > 0$. Diretamente pelo item anterior temos que

$$|f(s)| \leq \varepsilon'|s| + C_{\varepsilon'}|s|^{p-1} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

e portanto

$$|F(s)| \leq \frac{\varepsilon'}{2}|s|^2 + \frac{C_{\varepsilon'}}{p}|s|^p \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

de onde o resultado segue ao considerar $\varepsilon' = 2\varepsilon$ e $D_\varepsilon = C_{2\varepsilon}/p$.

4. Seja $R > 0$ e considere $\beta_R \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ uma função tal que $0 \leq \beta_R(t) \leq t_0$ onde

$$\beta_R(t) = \begin{cases} t_0, & |t| \leq R, \\ 0, & |t| > R + 1. \end{cases}$$

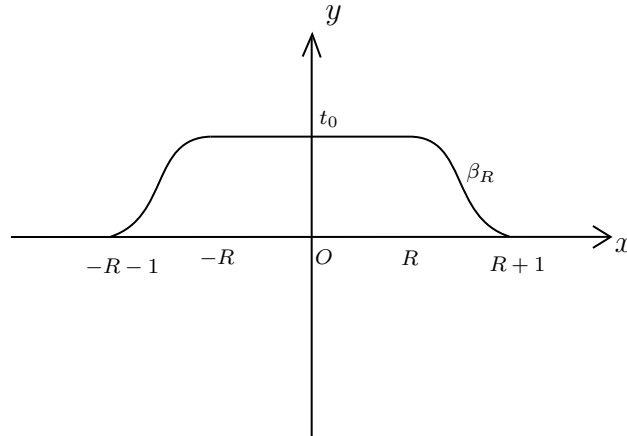


Figura 4 – Função β_R

Defina agora a função $v_R : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ por $v_R(x) = \beta_R(|x|)$ e note que $v_R \in W^1(\mathbb{R}^N)$ de acordo com o Teorema F.6. Como $v_R \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e para cada $j = 1, 2, 3, \dots, N$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_j v_R(x)|^2 dx &= \int_{B(0, R+1)} [\beta'_R(|x|)]^2 \frac{|x_j|^2}{|x|^2} dx \\ &\leq C |B(0, R+1)| < +\infty, \end{aligned}$$

em que a constante $C > 0$ é construída a partir da limitação da função $\beta'_R(|x|)$ e pelo fato de ser $|x_j|^2/|x|^2 \leq 1$, concluímos que $v_R \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, por ser f contínua, então $F|_{[0, t_0]}$ é uma função contínua e pelo Teorema de Weierstrass (ver Teorema A.1.1), existe $B > 0$ tal que $|F(t)| \leq B$ para todo $0 \leq t \leq t_0$. Como consequência temos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |F(v_R)| = \sup_{t \in [0, t_0]} |F(t)| \leq B,$$

e assim

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} F(v_R) dx &= \int_{B(0, R)} F(t_0) dx + \int_{B(0, R+1) \setminus B(0, R)} F(v_R) dx \\ &\geq A |B(0, R)| - B |B(0, R+1) \setminus B(0, R)|, \end{aligned}$$

em que por hipótese $A := F(t_0) > 0$. Finalmente, ao aplicar a Fórmula de Integração de Funções Radiais (ver Teorema D.11), temos que

$$|B(0, R)| = \omega_N \int_0^R r^{N-1} dr = \frac{\omega_N}{N} R^N$$

e portanto

$$|B(0, R + 1) \setminus B(0, R)| = \omega_N \int_R^{R+1} r^{N-1} dr = \frac{\omega_N}{N} ((R + 1)^N - R^N),$$

de onde

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(v_R) dx \geq A \frac{\omega_N}{N} R^N - B \frac{\omega_N}{N} (R + 1)^N + B \frac{\omega_N}{N} R^N \rightarrow \infty \text{ quando } R \rightarrow \infty,$$

provando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(v_R) dx > 0,$$

para R suficientemente grande, em que $v_R \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é não negativa. \square

Notemos agora que se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então a limitação da função V , a propriedade (f_2) e o Teorema D.1 nos garante que $f(u) - V(x)u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e portanto, nos inspirando no que foi feito ao início do Capítulo 2, podemos definir:

Definição 4.1.1. (Solução Fraca do Problema não linear) Uma função u é dita solução fraca do problema (Q) se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Nosso próximo objetivo é demonstrar a existência de uma solução fraca não trivial do problema (Q). Para tanto, o primeiro passo a ser dado é definir o funcional energia associado ao problema em questão:

Definição 4.1.2. (Funcional Energia) O funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (Q) é definido como sendo

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|_V^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx,$$

em que

$$\|u\|_V^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx.$$

Lema 4.1.2. Se V satisfaz (V_2) e f satisfaz (f_1) e (f_2) , então o funcional energia I está bem definido.

Demonstração. De fato, pelo Lema 4.1.1 temos que V é limitada e também que para $\varepsilon = 1$, existe uma constante $C > 0$, satisfazendo,

$$F(u) \leq |u|^2 + C|u|^p, \text{ em que } p \in (2, 2^*).$$

Logo, a limitação da função V nos garante que

$$\|u\|_V^2 := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx < +\infty.$$

Além disso, a imersão de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q \in (2, 2^*)$ (ver [Teorema F.2](#)) nos diz que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx < +\infty,$$

provando que o funcional energia I está bem definido. \square

Lema 4.1.3. *Se V satisfaz (V_1) e (V_2) então $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\langle u, v \rangle_V := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv) dx$$

define um produto interno em $H^1(\mathbb{R}^N)$ cuja norma associada

$$\langle u, u \rangle_V^{\frac{1}{2}} = \|u\|_V$$

é equivalente à norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. De fato, note que, pela limitação da função V e a [Desigualdade de Hölder](#), a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ está bem definida. Além disso, ela é bilinear devido ao fato do gradiente ser linear e simétrica por definição. Considerando agora $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ não nulo, teremos, de acordo com (V_1) , que

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle_V &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \alpha u^2) dx \\ &\geq \min\{\alpha, 1\} \|u\|_{H^1}^2 > 0, \end{aligned}$$

provando que $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ é um produto interno e além disso mostrando que

$$\|u\|_V \geq \sqrt{\min\{\alpha, 1\}} \|u\|_{H^1}.$$

Notemos agora que por (V_2) , existe $M > 0$ tal que $|V(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Assim, de modo semelhante

$$\|u\|_V \leq \sqrt{\max\{M, 1\}} \|u\|_{H^1},$$

estabelecendo a desejada equivalência entre normas. \square

Teorema 4.1.1. *Se f satisfaz (f_1) e (f_2) e V satisfaz (V_1) e (V_2) então o funcional energia I está bem definido, é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N); \mathbb{R})$ e, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,*

$$I'(u)v = \langle u, v \rangle_V - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v dx \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Uma demonstração bastante detalhada pode ser encontrada nos Lemas 2.9 e 2.11 em ([BRAZ, 2022](#)). \square

O Teorema acima nos diz que, se formos capazes de encontrar $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ não trivial tal que $I'(u) = 0$, ou seja, encontrarmos um ponto crítico não nulo de I , então teremos encontrado uma solução fraca não trivial do problema (Q). Para começar a caminhar nessa direção, primeiramente vamos verificar que I satisfaz a geometria do passo da montanha, mais precisamente:

Lema 4.1.4. *Sejam f satisfazendo (f_1) , (f_2) e (f_3) e V satisfazendo (V_1) e (V_2) . Então o funcional energia I é tal que $I(0) = 0$ e além disso:*

1. *Existem $r, \beta > 0$ tais que todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|u\|_V = r$ satisfaz*

$$I(u) \geq \beta > 0,$$

2. *Existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|u_0\|_V > r$ tal que $I(u_0) \leq 0$.*

Demonstração. De fato,

1. Pelo [Lema 4.1.1](#) item 3 temos para todo $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_V^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_V^2 - \varepsilon|u|_2^2 - C_\varepsilon|u|_p^p, \end{aligned}$$

de onde a imersão de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q \in (2, 2^*)$ (ver [Teorema F.2](#)) e a equivalência entre normas estabelecida no [Lema 4.1.3](#), nos garante a existência de constantes $A, B > 0$, tais que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_V^2 - \varepsilon|u|_2^2 - C_\varepsilon|u|_p^p \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_V^2 - \varepsilon A\|u\|_V^2 - C_\varepsilon B\|u\|_V^p \\ &= \left[\left(\frac{1}{2} - \varepsilon A \right) - C_\varepsilon B\|u\|_V^{p-2} \right] \|u\|_V^2. \end{aligned}$$

Note que, pela definição do funcional energia I , temos $I(0) = 0$. Logo, considerando $\varepsilon > 0$ tal que $1/2 > A\varepsilon$ e considerando $r > 0$ tal que

$$r < \left(\frac{\frac{1}{2} - \varepsilon A}{BC_\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p-2}} := C,$$

segue que se $0 < \|u\|_V < C$, então

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon A \right) - BC_\varepsilon\|u\|_V^{p-2} > 0,$$

ou seja,

$$0 < \left[\left(\frac{1}{2} - \varepsilon A \right) - C_\varepsilon B\|u\|_V^{p-2} \right] \|u\|_V^2 \leq I(u).$$

A primeira afirmação segue então ao definir

$$\beta := \left[\left(\frac{1}{2} - \varepsilon A \right) - C_\varepsilon B r^{p-2} \right] r^2.$$

2. Defina a função $\Phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\Phi(t) = F(t)/t^\mu$. Segue que

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \frac{f(t)t^\mu - \mu t^{\mu-1}F(t)}{t^{2\mu}} \\ &= \frac{1}{t^{\mu+1}}(f(t)t - \mu F(t)),\end{aligned}$$

provando, de acordo com (f_3) , que $\Phi'(t) \geq 0$ para todo $t \neq 0$, ou seja, que Φ é uma função não-decrescente. Pelo [Lema 4.1.1](#) item 4, existe uma função não negativa $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_0)dx > 0.$$

Logo, para todo $t > 1$ temos $\Phi(u_0) \leq \Phi(tu_0)$, nos revelando que

$$t^\mu F(u_0) \leq F(tu_0) \quad \forall t > 1,$$

de onde, pela hipótese de que $\mu > 2$, segue que

$$\begin{aligned}I(tu_0) &= \frac{1}{2}\|tu_0\|_V^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(tu_0)dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|u\|_V^2 - t^\mu \int_{\mathbb{R}^N} F(u_0)dx \rightarrow -\infty,\end{aligned}$$

quando $t \rightarrow \infty$, nos garantindo que existe $t_0 > 1$ tal que $\|t_0u_0\|_V > r$ e $I(t_0u_0) \leq 0$. □

Estabelecido o [Lema 4.1.4](#), evidenciamos ao consultar os trabalhos ([O.ALVES; SOUTO; H.M.SOARES, 2011](#)) e ([MARCHI, 2015](#)) que o provado acima se enquadra nas condições abstratas do Teorema do Passo da Montanha Generalizado (ver [Teorema E.4](#)) e portanto existe uma sequência $(u_n)_{n=1}^\infty$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ e } (1 + \|u_n\|_V)\|I'(u_n)\| \rightarrow 0,$$

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) > 0,$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1]; H^1(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = u_0\}.$$

Sequências com as características acima são chamadas sequências de Cerami e desempenham um papel muito importante na teoria dos pontos críticos, como pode ser visto em ([SCHECHTER, 2007](#)).

No restante dessa seção iremos supor que as funções f e V satisfazem todas as hipóteses expostas na primeira página deste capítulo.

Lema 4.1.5. *Toda sequência de Cerami $(u_n)_{n=1}^\infty$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ associada ao funcional energia I é limitada.*

Demonstração. De fato, de acordo com a propriedade (f_3) :

$$\begin{aligned}\mu I(u_n) - I'(u_n)u_n &= \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \|u_n\|_V^2 + \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n)u_n - \mu F(u_n)) dx \\ &\geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \|u_n\|_V^2.\end{aligned}$$

Por ser $\mu > 2$, temos $\mu/2 - 1 > 0$, e portanto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \|u_n\|_V^2 &\leq |\mu I(u_n) - I'(u_n)u_n| \\ &\leq \mu |I(u_n)| + \|I'(u_n)\| \|u_n\|_V \\ &\leq \mu |I(u_n)| + \|I'(u_n)\| (\|u_n\|_V + 1),\end{aligned}$$

de onde, a limitação da sequência $(u_n)_{n=1}^\infty$ segue das convergências garantidas pela definição de sequência de Cerami e pelo fato de toda sequência convergente ser limitada. \square

O próximo resultado nos mostra que existe solução fraca para o problema (Q) . A prova da existência de solução fraca, devido à perda de simetria no espaço \mathbb{R}^N , requer uso do famoso Lema de Lions, que pode ser encontrado em (LIONS, 1984) no Lema I.1 na página 231.

Teorema 4.1.2. *Existe um ponto crítico não nulo do funcional energia I .*

Demonstração. Uma demonstração bastante detalhada pode ser encontrada no Teorema 1.1 da página 56, até início da página 62, de (BRAZ, 2022), ignorando as partes da prova que tratam do termo ϕ_u , que no nosso caso específico pode ser considerado identicamente nulo. Para uma exposição mais concisa da prova, referenciamos o artigo (O.ALVES; SOUTO; H.M.SOARES, 2011). \square

4.2 Regularidade da Solução Fraca

Nesta seção ilustraremos como o Corolário 3.3.2 pode ser usado para obter regularidade ótima de soluções fracas de problemas particulares ao problema (Q) , assim como de soluções fracas do problema (Q) em sua generalidade. Nos problemas que consideraremos, as duas propriedades seguintes exercerão um papel importante:

(f'_2) Existem $C > 0$ e $p \in (2, 2^*)$, tais que

$$|f(s)| \leq C|s|^{p-1} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

(f''_2) Existe $C > 0$, tal que

$$|f(s)| \leq C|s| \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Observe que tanto (f'_2) , quanto (f''_2) , implicam (f_2) .

Expondo de forma mais explícita, iremos inicialmente particularizar o problema (Q) ao supor que $V(x) = \lambda > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e, além disso, ao supor que f satisfaz a propriedade (f'_2) . Feitas tais considerações, teremos então o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (Q')$$

Portanto, ao notar que $V(x) = \lambda > 0$ satisfaz (V_1) e (V_2) e reforçando que se f satisfaz (f'_2) , então f satisfaz (f_2) , vemos que a seção anterior nos garante que existe uma solução fraca não nula para o problema (Q') , contanto que $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ satisfaça também (f_1) e (f_3) .

No que estamos propostos a fazer, o seguinte resultado nos será de grande valia:

Teorema 4.2.1. (Teorema de Schauder) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. Se φ é uma função contínua em $\partial\Omega$, então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Demonstração. Ver [(GILBARG; S.TRUDINGER, 1998), Theorem 6.13 p. 106]. □

O Teorema 4.2.1, em conjunto com o Corolário 3.3.2, nos permite obter a regularidade das soluções fracas do problema (Q') :

Teorema 4.2.2. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Hölder contínua satisfazendo (f'_2) e seja $\lambda > 0$. Se existe solução fraca $u \neq 0$ para o problema (Q') , então $u \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\kappa(\mathbb{R}^N)$, para todo $\kappa \in [2, \infty]$, satisfaz a equação*

$$-\Delta u + \lambda u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \quad (4.1)$$

e, além disso,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Demonstração. Provaremos inicialmente que $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) \cap L^\kappa(\mathbb{R}^N)$, para $\kappa \in [2, \infty]$, para algum $0 < \alpha < 1$ e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$. De fato, seja $q \geq 1$ e note que

$$|f(u)|^q \leq C^q |u|^{(p-1)q},$$

de onde, a partir da imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\beta(\mathbb{R}^N)$ para $\beta \in [2, 2^*]$ (ver Teorema F.2), concluímos que

$$f(u) \in L^q(\mathbb{R}^N) \text{ onde } \sup \left\{ \frac{2}{p-1}, 1 \right\} \leq q \leq \frac{2^*}{p-1}.$$

Assim, tendo provado que $f(u) \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para os valores de q explicitados acima, observe agora que

$$\frac{2}{p-1} < 2 \quad \text{e} \quad \frac{2^*}{p-1} > \frac{2N}{N+2},$$

ou seja,

$$\left[\frac{2}{p-1}, \frac{2^*}{p-1} \right] \cap \left(\frac{2N}{N+2}, 2 \right] \neq \emptyset.$$

Portanto $u \neq 0$ é uma solução fraca da equação

$$-\Delta u + \lambda u = f(u),$$

onde $f(u) \in L^r(\mathbb{R}^N)$ para algum $r \in (2N/(N+2), 2]$. Logo, pelo [Corolário 3.3.2](#) (aplicado com $p = q = r$), segue que $u \in W^{2,r}(\mathbb{R}^N)$. Dividamos por casos:

- Se $1/r - 2/N \leq 0$, então, pelas imersões de Sobolev (ver [Teorema F.7](#)), temos

$$W^{2,r}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo } s \in [r, +\infty).$$

Logo, como $r \leq 2$, vemos que $u \in L^\kappa(\mathbb{R}^N)$, para todo $\kappa \geq 2$. Ao fixarmos $s_1 > \sup\{(p-1)N, (p-1)r\}$, temos

$$W^{2,r}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{s_1}(\mathbb{R}^N).$$

Segue que $u \in L^{s_1}(\mathbb{R}^N)$ e $f(u) \in L^{s_1/(p-1)}(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)$, onde $s_1/(p-1) \geq r$. Podemos então aplicar mais uma vez o [Corolário 3.3.2](#) (com $p = r$ e $q = s_1/(p-1)$), para concluirmos que

$$u \in W^{2, \frac{s_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N) \subset W^{1, \frac{s_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N).$$

Logo, por ser $s_1/(p-1) > N$, uma aplicação do Teorema de Morrey (ver [Teorema F.3](#)) nos garante que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \quad \text{e} \quad u \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Notando também que $s_1/(p-1) > N$ implica

$$2 \left(\frac{s_1}{p-1} \right) > N \quad \text{e} \quad 1 < 2 - \frac{N(p-1)}{s_1} < 2,$$

vemos que, ao aplicar o [Teorema F.8](#), temos

$$W^{2, \frac{s_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) \quad \text{com} \quad 0 < \alpha \leq 1 - \frac{(p-1)N}{s_1},$$

demonstrando que $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$.

- Se $1/r - 2/N > 0$, então existe $t_1 > 0$ tal que $1/t_1 = 1/r - 2/N$. Assim, pelo [Teorema F.7](#), temos

$$W^{2,r}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{t_1}(\mathbb{R}^N),$$

mostrando que $u \in L^{t_1}(\mathbb{R}^N)$ e $f(u) \in L^{t_1/(p-1)}(\mathbb{R}^N)$. Por ser

$$r \in \left(\frac{2N}{N+2}, 2 \right] \quad \text{e} \quad p-1 \in \left(1, \frac{N+2}{N-2} \right),$$

segue que

$$\frac{t_1}{p-1} > \frac{2^*}{\frac{N+2}{N-2}} = \frac{2N}{N-2} \frac{N-2}{N+2} = \frac{2N}{N+2},$$

de onde,

$$\frac{2N}{N+2} < \frac{t_1}{p-1} < \infty,$$

e portanto temos duas possibilidades de aplicação do [Corolário 3.3.2](#):

1. Se $t_1/(p-1) \leq r$, então $t_1/(p-1) \in (2N/(N+2), 2]$ e, portanto, aplicamos o Corolário com $p = q = t_1/(p-1)$,
2. Se $t_1/(p-1) > r$, então aplicamos o Corolário com $p = r$ e $q = t_1/(p-1)$.

Ou seja, de qualquer modo, o [Corolário 3.3.2](#) nos garante que:

$$u \in W^{2, \frac{t_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N).$$

Se $(p-1)/t_1 - 2/N \leq 0$, podemos proceder como no primeiro caso (dessa vez considerando $s_2 > \sup\{(p-1)N, (p-1)r, t_1/(p-1)\}$) para concluirmos que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \quad \text{e} \quad u \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\kappa(\mathbb{R}^N), \quad \kappa \in [2, \infty]$$

e, além disso,

$$u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) \quad \text{com} \quad 0 < \alpha \leq 1 - \frac{(p-1)N}{s_2},$$

onde o fato de que $u \in L^\kappa(\mathbb{R}^N)$, para $\kappa \geq 2$, segue a partir da propriedade de interpolação dos Espaços de Lebesgue (ver [Teorema D.4](#)), com $p = 2$, pois por hipótese $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, em conjunto com a imersão

$$W^{2, \frac{t_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo} \quad s \in \left[\frac{t_1}{p-1}, +\infty \right).$$

De modo geral, se $(p-1)/t_j - 2/N \leq 0$, consideramos

$$s_j > \sup\{(p-1)N, (p-1)r, t_j/(p-1)\}$$

e usamos a propriedade de interpolação dos Espaços de Lebesgue para $p = 2$, em conjunto com a imersão

$$W^{2, \frac{t_j}{p-1}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo} \quad s \in \left[\frac{t_j}{p-1}, +\infty \right).$$

Se $(p-1)/t_1 - 2/N > 0$, então existe $t_2 > 0$ tal que $1/t_2 = (p-1)/t_1 - 2/N$, de onde, ao proceder como no início do presente caso, dessa vez usando que

$$\frac{t_1}{p-1} \in \left(\frac{2N}{N+2}, +\infty \right) \text{ e } p-1 \in \left(1, \frac{N+2}{N-2} \right),$$

podemos provar que

$$u \in W^{2, \frac{t_2}{p-1}}(\mathbb{R}^N),$$

reiniciando o ciclo. Continuando esse processo, podemos provar pelo Princípio da Indução Finita, que

$$\frac{1}{t_j} = (p-1)^{j-1} \left(\frac{1}{t_1} - \frac{2}{N(p-2)} \right) + \frac{2}{N(p-2)} \text{ para } j \geq 2. \quad (4.2)$$

De fato, de modo geral

$$\frac{1}{t_j} = \frac{p-1}{t_{j-1}} - \frac{2}{N} \text{ para } j \geq 2.$$

Logo, ao considerar a função $x \mapsto (p-1)x - 2/N$, vemos que o seu único ponto fixo é o número $c := \frac{2}{N(p-2)}$. Como consequência

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_2} &= \frac{p-1}{t_1} - \frac{2}{N} \\ &= \frac{p-1}{t_1} - (p-1)c + (p-1)c - \frac{2}{N} \\ &= (p-1) \left(\frac{1}{t_1} - c \right) + c. \end{aligned}$$

Portanto, ao supor a hipótese de indução

$$\frac{1}{t_{j-1}} = (p-1)^{j-2} \left(\frac{1}{t_1} - c \right) + c,$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_j} &= \frac{p-1}{t_{j-1}} - \frac{2}{N} \\ &= (p-1) \left[(p-1)^{j-2} \left(\frac{1}{t_1} - c \right) + c \right] - \frac{2}{N} \\ &= (p-1)^{j-1} \left(\frac{1}{t_1} - c \right) + (p-1)c - \frac{2}{N} \\ &= (p-1)^{j-1} \left(\frac{1}{t_1} - c \right) + c, \end{aligned}$$

estabelecendo (4.2).

Por fim, como $t_1 > 2N/(N-2)$, então

$$\frac{1}{t_1} - \frac{2}{N(p-2)} < 0,$$

provando que, em um número finito de passos, com j suficientemente grande, teremos

$$\frac{p-1}{t_j} - \frac{2}{N} < 0,$$

finalizando essa etapa da prova.

Provaremos agora que $u \in C_{\text{loc}}^{2,\theta}(\mathbb{R}^N)$. Para isso, sejam $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$ e defina $\Omega := B[x_0, r]$. Sabemos, por hipótese, que $f \in C_{\text{loc}}^{0,\beta}(\mathbb{R})$ e, pelo já provado acima, que $u \in L^\infty(\Omega)$. Como consequência, temos $f \in C^{0,\beta}(I)$, onde $I := [-|u|_{L^\infty(\Omega)}, |u|_{L^\infty(\Omega)}]$. Portanto, ao considerarmos $0 < \gamma \leq \alpha\beta$, temos, para todos $x, y \in \Omega$ com $x \neq y$, que

$$\begin{aligned} \frac{|f(u(x)) - f(u(y))|}{|x - y|^\gamma} &\leq [f]_{0,\beta,I} \frac{|u(x) - u(y)|^\beta}{|x - y|^\gamma} \\ &\leq [f]_{0,\beta,I} [u]_{0,\alpha,\Omega}^\beta |x - y|^{\alpha\beta - \gamma} \\ &\leq [f]_{0,\beta,I} [u]_{0,\alpha,\Omega}^\beta (\text{diam}(\Omega))^{\alpha\beta - \gamma}, \end{aligned}$$

demonstrando que $f(u) \in C^{0,\gamma}(\Omega)$. Podemos agora definir $\theta = \min\{\alpha, \gamma\}$ e pelo mesmo raciocínio acima, concluir que $u, f(u) \in C^{0,\theta}(\Omega)$, de onde, pela estrutura vetorial dos espaços de Hölder, temos

$$g(x) := f(u(x)) - \lambda u(x) \in C^{0,\theta}(\Omega).$$

Por outro lado, pelo Teorema de Schauder (ver Teorema 4.2.1), o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = g & \text{em } \Omega \setminus \partial\Omega \\ w = u & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma única solução $w \in C^{2,\theta}(\Omega)$. Portanto, pela Primeira Identidade de Green (ver Teorema A.1.10), temos, para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, que

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi dx = - \int_{\Omega} \Delta w \varphi dx = \int_{\Omega} g \varphi dx. \quad (4.3)$$

Provaremos agora que $u = w$. De fato, como $u \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

temos, para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} g \varphi dx. \quad (4.4)$$

Como consequência de (4.3) e (4.4), concluímos que

$$\int_{\Omega} \nabla(u - w) \cdot \nabla \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (4.5)$$

Como $u - w = 0$ em $\partial\Omega$ e $u - w \in C^{1,\theta}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, temos, pelo Teorema F.9, que $u - w \in H_0^1(\Omega)$. Assim, existe uma sequência $(\varphi_k)_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_k \rightarrow u - w$ em $H_0^1(\Omega)$. Todavia, em vista da Desigualdade de Poincaré (ver Teorema F.10), a expressão

$$\langle \xi, \eta \rangle_{H_0^1(\Omega)} := \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \eta dx,$$

define um produto interno em $H_0^1(\Omega)$ cuja norma gerada é equivalente à normal usual de $H^1(\Omega)$. Dessas considerações, temos por (4.5) e pela continuidade do produto interno que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(u-w) \cdot \nabla(u-w) dx &= \langle u-w, u-w \rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u-w, \varphi_k \rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla(u-w) \cdot \nabla \varphi_k dx = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\|u-w\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$, mostrando que $u = w \in C^{2,\theta}(\Omega)$ e concluindo que $u \in C_{\text{loc}}^{2,\theta}(\mathbb{R}^N)$. Para finalizarmos a demonstração, nos resta provar que u satisfaz (4.1) no sentido clássico. Isso realmente acontece, pois, pelo Teorema de Du Bois Raymond (ver Teorema D.14), temos

$$E(x) := -\Delta u + \lambda u - f(u) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus A,$$

em que $A \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto de medida de Lebesgue nula. Assim, como todo conjunto de medida nula possui interior vazio, concluímos que $B := \mathbb{R}^N \setminus A$ é denso em A . Portanto, para todo $a \in A$, existe uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset B$ tal que $a_n \rightarrow a$. Como consequência da continuidade da função $E(x)$ em \mathbb{R}^N , evidenciamos que

$$0 = E(a_n) \rightarrow E(a),$$

demonstrando que $E(a) = 0$, ou seja, que (4.1) é satisfeita em todo o espaço \mathbb{R}^N . \square

A mesma estratégia adotada na prova do Teorema 4.2.2, pode ser usada para obter a regularidade $C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ da solução fraca do problema (Q') , onde, dessa vez, estaremos supondo que f satisfaz (f_2'') .

Corolário 4.2.1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Hölder contínua satisfazendo (f_2'') e seja $\lambda > 0$. Se existe solução fraca $u \neq 0$ para o problema (Q') , então $u \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{\kappa}(\mathbb{R}^N)$, para todo $\kappa \in [2, \infty]$, satisfaz a equação*

$$-\Delta u + \lambda u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \tag{4.6}$$

e, além disso,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Demonstração. De fato, temos que

$$|f(u)|^2 \leq C^2 |u|^2,$$

de onde por ser $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, vemos que $f(u) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Logo, o Corolário 3.3.2 (aplicado com $p = q = 2$), nos revela que $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Dividamos agora por casos:

- Se $1/2 - 2/N \leq 0$, então podemos proceder como no Teorema 4.2.2 (substituindo $p = 2$ no argumento), para concluirmos que $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\kappa}(\mathbb{R}^N)$, $\kappa \in [2, \infty]$, com $0 < \alpha < 1$ e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$.

- Se $1/2 - 2/N > 0$, novamente procedendo como no Teorema 4.2.2, teremos de modo geral

$$\frac{1}{t_j} = \frac{1}{t_{j-1}} - \frac{2}{N} \text{ em que } \frac{1}{t_1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{N},$$

de onde, pela fórmula do termo geral da progressão aritmética com razão $-2/N$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_j} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{N} \right) - (j-1) \frac{2}{N} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{N} j \\ &= \frac{N - 4j}{2N}, \end{aligned}$$

o que mostra que $1/t_j < 0$, para j suficientemente grande.

A passagem de $C^{1,\alpha}$ para $C_{\text{loc}}^{2,\theta}$ é completamente análoga ao feito no Teorema 4.2.2. \square

Em seguida mostraremos que podemos obter a regularidade $C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ da solução fraca $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ do problema (Q) se supormos que u pertence a um espaço de Lebesgue adequado.

Lema 4.2.1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Hölder contínua satisfazendo (f_2) e seja $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Hölder contínua limitada. Se $u \neq 0$ é uma solução fraca do problema (Q) tal que $u \in L^{(p-1)q}(\mathbb{R}^N)$ em que $q > N$, então $u \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^k(\mathbb{R}^N)$, $k \in [2, \infty]$, satisfaz a equação*

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ e } \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Demonstração. Seja $g(x, t) := f(t) - V(x)t$ e seja $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ uma função satisfazendo $\eta(t) \leq 1/|t|^{p-2}$ se $1 < |t| < 2$, tal que

$$\eta(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |t| \geq 2. \end{cases}$$

Em seguida, defina as funções

$$\begin{aligned} g_1(x, t) &:= \eta(t)(t + g(x, t)), \\ g_2(x, t) &:= (1 - \eta(t))(t + g(x, t)). \end{aligned}$$

Provaremos a partir da propriedade (f_2) e da limitação da função V , que existe uma constante $C' > 0$ tal que

$$|g_1(x, t)| \leq C'|t|, \tag{4.7}$$

$$|g_2(x, t)| \leq C'|t|^{p-1}. \tag{4.8}$$

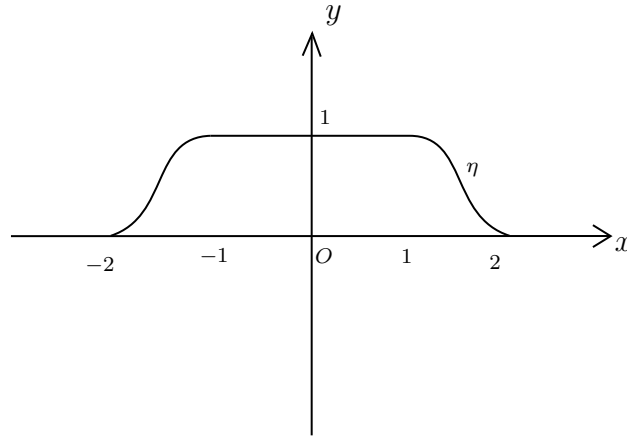


Figura 5 – Função η

De fato, sendo $C > 0$ a constante que aparece na propriedade (f_2) e $M' > 0$ tal que $|V(x)| \leq M'$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned} |g(x, t) + t| &= |f(t) - V(x)t + t| \\ &\leq |f(t)| + |V(x)||t| + |t| \\ &\leq C(|t| + |t|^{p-1}) + M'|t| + |t| \\ &\leq \sup\{C, M', 1\}(3|t| + |t|^{p-1}) \\ &\leq 3 \sup\{C, M', 1\}(|t| + |t|^{p-1}), \end{aligned}$$

demonstrando que

$$|g(x, t) + t| \leq M(|t| + |t|^{p-1}) \text{ onde } M = 3 \sup\{C, M', 1\}.$$

A partir de agora analisaremos as duas funções $g_1(x, t)$ e $g_2(x, t)$.

1. Análise da função $g_1(x, t)$:

- Caso $|t| \leq 1$, temos $\eta(t) = 1$ e por ser $p - 1 > 1$, segue que $|t|^{p-1} \leq |t|$ e portanto

$$\begin{aligned} |g_1(x, t)| &= |t + g(x, t)| \\ &\leq M(|t| + |t|^{p-1}) \\ &\leq 2M|t|. \end{aligned}$$

- Caso $1 < |t| < 2$, temos $|\eta(t)| \leq 1/|t|^{p-2}$ e $|t| \leq |t|^{p-1}$, pois $p - 1 > 1$. Logo

$$\begin{aligned} |g_1(x, t)| &\leq M \frac{1}{|t|^{p-2}}(|t| + |t|^{p-1}) \\ &\leq 2M \frac{|t|^{p-1}}{|t|^{p-2}} \\ &= 2M|t|. \end{aligned}$$

- Caso $|t| \geq 2$, então $\eta(t) = 0$ e portanto $g_1(x, t) = 0$, de onde a desejada desigualdade segue trivialmente.

2. Análise da função $g_2(x, t)$:

- Caso $|t| \leq 1$, então $\eta(t) = 1$ e portanto $g_2(x, t) = 0$, de onde a desejada desigualdade segue trivialmente.
- Caso $1 < |t| < 2$, então $0 < 1 - \eta(t) < 1$ e $|t| \leq |t|^{p-1}$, pois $p - 1 > 1$. Logo

$$\begin{aligned} |g_2(x, t)| &\leq M(|t| + |t|^{p-1}) \\ &\leq 2M|t|^{p-1}. \end{aligned}$$

- Caso $|t| \geq 2$, então $\eta(t) = 0$ e $|t| \leq |t|^{p-1}$, pois $p - 1 > 1$. Logo

$$|g_2(x, t)| \leq 2M|t|^{p-1}.$$

De onde, estabelecemos (4.7) e (4.8) com $C' = 2M$. Se agora $u_1 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é a única solução fraca do problema (ver Teorema 2.1.1)

$$-\Delta u_1 + u_1 = g_1(x, u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad (4.9)$$

então a propriedade de interpolação dos espaços L^p (ver Teorema D.4) nos revela que $g_1(x, u) \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ com $q > N$ e, portanto, pelo Corolário 3.3.2, temos $u_1 \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ com $q > N$, de onde o Teorema de Morrey (ver Teorema F.3) e a imersão nos espaços de Hölder (ver Teorema F.8) nos prova que

$$u_1 \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) \cap L^k(\mathbb{R}^N), \quad k \in [2, \infty] \text{ e } \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_1(x) = 0.$$

Logo, como $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca do problema

$$-\Delta u = g(x, u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad (4.10)$$

temos, por (4.9) e (4.10), que $u_2 = u - u_1$ é solução fraca do problema

$$-\Delta u_2 + u_2 = g_2(x, u) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

em que $g_2(x, u) \in L^r(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ com $r \in (2N/(N+2), 2]$ e $q > N$, nos revelando, pelo Corolário 3.3.2, que $u_2 \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$, onde $q > N$. Logo, procedendo como anteriormente, temos

$$u_2 \in C^{1,\beta}(\mathbb{R}^N) \cap L^k(\mathbb{R}^N), \quad k \in [2, \infty] \text{ e } \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_2(x) = 0.$$

Definindo então $\theta = \min\{\alpha, \beta\}$, temos que $u_1, u_2 \in C_{\text{loc}}^{1,\theta}(\mathbb{R}^N)$ e como consequência $u = u_1 + u_2 \in C_{\text{loc}}^{1,\theta}(\mathbb{R}^N) \cap L^k(\mathbb{R}^N)$, $k \in [2, \infty]$ e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_1(x) + \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_2(x) = 0$.

Sejam agora $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $r_0 > 0$, $\Omega := B[x_0, r_0]$ e seja γ o coeficiente de Hölder da função V , vamos definir $\kappa = \min\{\theta, \gamma\}$. Segue que $u, V \in C^{0,\kappa}(\Omega)$ e portanto para todos $x, y \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |u(x)V(x) - u(y)V(y)| &= |u(x)V(x) + u(x)V(y) - u(x)V(y) - u(y)V(y)| \\ &\leq |u(x)||V(x) - V(y)| + |V(y)||u(x) - u(y)| \\ &\leq \left(\sup_{x \in \Omega} |u(x)|[V]_{0,\kappa,\Omega} + \sup_{y \in \Omega} |V(y)|[u]_{0,\kappa,\Omega} \right) |x - y|^\kappa, \end{aligned}$$

onde os supremos acima existem, pois ambas as funções u e V são contínuas no conjunto compacto Ω . Assim, a função $V(x)u$ é localmente Hölder contínua. Portanto, como por hipótese f é localmente Hölder contínua, podemos prosseguir como na prova do [Teorema 4.2.2](#) para demonstrar que $f(u)$ é localmente Hölder contínua e concluir que $g(x, u)$ é localmente Hölder contínua. Seguindo os passos da demonstração desse mesmo teorema concluímos pelo Teorema de Schauder que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Finalmente, para demonstrar que a equação

$$-\Delta u + V(x)u = f(u)$$

é satisfeita no sentido clássico, basta prosseguir como no final do [Teorema 4.2.2](#), definindo $E(x) := -\Delta u + V(x)u - f(u)$. \square

Provaremos agora que a hipótese de u pertencer a um espaço de Lebesgue adequado pode ser removida.

Teorema 4.2.3. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Hölder contínua satisfazendo (f_2) e seja $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Hölder contínua limitada. Nessa situação, se $u \neq 0$ é uma solução fraca do problema (Q) então, $u \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^k(\mathbb{R}^N)$, $k \in [2, \infty]$, satisfaz a equação*

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ e } \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Demonstração. Seguindo a prova do [Lema 4.2.1](#) sabemos que $u_1 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca do problema

$$-\Delta u_1 + u_1 = g_1(x, u),$$

e que $u_2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca do problema

$$-\Delta u_2 + u_2 = g_2(x, u),$$

onde $u = u_1 + u_2$ e g_1 e g_2 são funções, tais que, existe uma constante $C' > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} |g_1(x, t)| &\leq C'|t|, \\ |g_2(x, t)| &\leq C'|t|^{p-1}. \end{aligned}$$

Pelas imersões de Sobolev (ver [Teorema F.2](#)) temos $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\theta(\mathbb{R}^N)$, em que $\theta \in [2, 2^*]$, de onde, o [Corolário 3.3.2](#) nos diz que $u_1 \in W^{2,\theta}(\mathbb{R}^N)$ com $\theta \in [2, 2^*]$. Por termos também $g_2(x, u) \in L^r(\mathbb{R}^N)$ em que $r \in (2N/(N+2), 2]$ (veja prova do [Teorema 4.2.2](#)), o [Corolário 3.3.2](#) nos revela que $u_2 \in W^{2,r}(\mathbb{R}^N)$. A partir daqui, temos então as possibilidades:

1. (Caso 1) Se $1/2^* - 2/N \leq 0$ e $1/r - 2/N \leq 0$, então de acordo com o [Teorema F.7](#), temos

$$W^{2,2^*}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\theta(\mathbb{R}^N) \text{ com } \theta \in [2^*, \infty) \text{ e } W^{2,r}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\theta(\mathbb{R}^N) \text{ com } \theta \in [r, \infty),$$

nos mostrando que $u_1, u_2 \in L^\theta(\mathbb{R}^N)$ para todo $\theta \geq \sup\{2^*, r\}$, ou seja, que $u \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para todo α suficientemente grande, provando o resultado pelo [Lema 4.2.1](#).

2. (Caso 2) Se $1/2^* - 2/N \leq 0$ e $1/r - 2/N > 0$, então novamente pelo [Teorema F.7](#), temos

$$W^{2,2^*}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\theta(\mathbb{R}^N) \text{ com } \theta \in [2^*, \infty) \text{ e } W^{2,r}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q_1}(\mathbb{R}^N) \text{ com } \frac{1}{q_1} = \frac{1}{r} - \frac{2}{N}.$$

Logo, lembrando que $r > 2N/(N+2)$, vemos que $2^* < q_1$ e, portanto, $u \in L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$, nos mostrando que $g_2(x, u) \in L^{\frac{q_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. Por ser

$$2^* < q_1 \text{ e } p-1 < \frac{N+2}{N-2},$$

temos $2N/(N+2) < q_1/(p-1)$, motivo pelo qual podemos aplicar o [Corolário 3.3.2](#) para garantirmos que $u_2 \in W^{2, \frac{q_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. A partir daqui, temos as possibilidades:

- Se $(p-1)/q_1 - 2/N \leq 0$ então, pelo [Teorema F.7](#), temos

$$W^{2, \frac{q_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\theta(\mathbb{R}^N) \text{ com } \theta \in \left[\frac{q_1}{p-1}, \infty \right),$$

nos mostrando que $u_2 \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para todo α suficientemente grande. Como u_1 também satisfaz essa propriedade, concluímos que u também a satisfaz e portanto o resultado segue ao aplicarmos o [Lema 4.2.1](#).

- Se $(p-1)/q_1 - 2/N > 0$ então, pelo [Teorema F.7](#), temos

$$W^{2, \frac{q_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q_2}(\mathbb{R}^N) \text{ com } \frac{1}{q_2} = \frac{p-1}{q_1} - \frac{2}{N}.$$

Como $p-2 < 4/(N-2)$, então podemos provar que $q_1 < q_2$ e assim, por um argumento análogo ao empregado no início do Caso 2, concluímos que $u_2 \in W^{2, \frac{q_2}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. Notando que de modo geral

$$2^* < q_1 < \dots < q_j \text{ em que } \frac{1}{q_j} = \frac{p-1}{q_{j-1}} - \frac{2}{N} \text{ com } \frac{1}{q_1} = \frac{1}{r} - \frac{2}{N},$$

podemos proceder como anteriormente e garantir, por meio da fórmula (4.2) (substituindo t_j por q_j), que em um número finito de passos, com k suficientemente grande, teremos

$$\frac{p-1}{q_k} - \frac{2}{N} < 0,$$

estabelecendo o resultado desejado.

3. (Caso 3) Se $1/2^* - 2/N > 0$ e $1/r - 2/N \leq 0$, podemos proceder como no Caso 2, onde dessa vez

$$W^{2,r}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\theta(\mathbb{R}^N) \text{ com } \theta \in [r, \infty) \text{ e } W^{2,2^*}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{t_1}(\mathbb{R}^N) \text{ com } \frac{1}{t_1} = \frac{1}{2^*} - \frac{2}{N},$$

com

$$r < t_1 < \dots < t_j, \text{ pois } r \leq 2,$$

em que

$$\frac{1}{t_j} = \frac{1}{t_{j-1}} - \frac{2}{N} \text{ onde } \frac{1}{t_1} = \frac{1}{2^*} - \frac{2}{N}$$

e, além disso,

$$\frac{1}{t_j} = \frac{(N-2) - 4j}{2N}.$$

4. (Caso 4) Se $1/2^* - 2/N > 0$ e $1/r - 2/N > 0$, então, pelo Teorema F.7, temos

$$u_1 \in W^{2,2^*}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{t_1}(\mathbb{R}^N) \text{ e } u_2 \in W^{2,r}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q_1}(\mathbb{R}^N).$$

Observe que como $r > 2N/(N+2)$ e $r \leq 2 < 2N/(N-2)$, então $q_1 \in (2N/(N-2), t_1)$ e, portanto, pela propriedade de interpolação dos espaços L^p , concluímos que $u_1 \in L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $u \in L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$. Logo, $g_1(x, u) \in L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$ e $g_2(x, u) \in L^{\frac{q_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$ e assim, pelo Corolário 3.3.2, vemos que $u_1 \in W^{2,q_1}(\mathbb{R}^N)$ e $u_2 \in W^{2,\frac{q_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$, nos gerando as seguintes possibilidades:

- Se $1/q_1 - 2/N \leq 0$ e $(p-1)/q_1 - 2/N \leq 0$, então o resultado segue da mesma maneira que se foi observado no Caso 1, o mesmo também ocorrendo se $1/q_j - 2/N \leq 0$ e $(p-1)/q_j - 2/N \leq 0$.
- Se $1/q_1 - 2/N \leq 0$ e $(p-1)/q_1 - 2/N > 0$, então

$$W^{2,q_1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\theta(\mathbb{R}^N) \text{ com } \theta \in [q_1, \infty),$$

$$W^{2,\frac{q_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q_2}(\mathbb{R}^N) \text{ com } \frac{1}{q_2} = \frac{p-1}{q_1} - \frac{2}{N}.$$

Como $u_1 \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, $u_2 \in L^r(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_2}(\mathbb{R}^N)$ e $r < q_1 < q_2$, então, a propriedade de interpolação dos espaços L^p nos revela que

$$u_1 \in L^\theta(\mathbb{R}^N) \text{ com } \theta \in [2^*, \infty) \text{ e } u_2 \in L^{q_1}(\mathbb{R}^N),$$

reduzindo a presente situação ao Caso 2. Observe que, de modo geral, se $1/q_j - 2/N \leq 0$ e $(p-1)/q_j - 2/N > 0$, então tal redução é sempre possível, pois

$$r < q_1 < \cdots < q_j.$$

- Se $1/q_1 - 2/N > 0$ e $(p-1)/q_1 - 2/N \leq 0$, então

$$\begin{aligned} W^{2,q_1}(\mathbb{R}^N) &\hookrightarrow L^{s_2}(\mathbb{R}^N) \text{ com } \frac{1}{s_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{2}{N}, \\ W^{2,\frac{q_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N) &\hookrightarrow L^\theta(\mathbb{R}^N) \text{ com } \theta \in \left[\frac{q_1}{p-1}, \infty \right). \end{aligned}$$

Como $u_2 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, $u_1 \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \cap L^{s_2}(\mathbb{R}^N)$ e $2^* < t_1 < s_2$, então, pela propriedade de interpolação dos espaços L^p , temos

$$u_2 \in L^\theta(\mathbb{R}^N) \text{ com } \theta \in [r, \infty) \text{ e } u_1 \in L^{t_1}(\mathbb{R}^N),$$

reduzindo a presente situação ao Caso 3. Observe que, de modo geral, se $1/q_j - 2/N > 0$ e $(p-1)/q_j - 2/N \leq 0$, então tal redução é sempre possível, pois

$$2^* < t_1 < s_2 < \cdots < s_j \text{ em que } \frac{1}{s_j} = \frac{1}{q_{j-1}} - \frac{2}{N} \text{ com } \frac{1}{q_1} = \frac{1}{r} - \frac{2}{N}.$$

Os subcasos acima nos revelam que devemos ater a nossa atenção apenas aos casos em que

$$\frac{1}{q_j} - \frac{2}{N} > 0 \text{ e } \frac{p-1}{q_j} - \frac{2}{N} > 0.$$

- Se $1/q_1 - 2/N > 0$ e $(p-1)/q_1 - 2/N > 0$, então

$$W^{2,q_1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{s_2}(\mathbb{R}^N) \text{ e } W^{2,\frac{q_1}{p-1}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q_2}(\mathbb{R}^N).$$

Observe que $q_2 \in (q_1, s_2)$ e portanto $u_1 \in L^{q_2}(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $u \in L^{q_2}(\mathbb{R}^N)$. De modo geral, se

$$\frac{1}{q_j} - \frac{2}{N} > 0 \text{ e } \frac{p-1}{q_j} - \frac{2}{N} > 0,$$

teremos

$$q_j \in (q_{j-1}, s_j) \text{ em que } \frac{1}{q_j} = \frac{p-1}{q_{j-1}} - \frac{2}{N} \text{ onde } \frac{1}{q_1} = \frac{1}{r} - \frac{2}{N},$$

provando, de acordo com (4.2), que o processo é finalizado em um número finito de passos.

□

Observação 4.2.1. Observe que se tivéssemos usado a função $g(x, u)$ de forma direta no processo de regularização, teríamos para todo $q \geq 1$ e para alguma constante $M > 0$, que

$$|g(x, u)|^q \leq M(|u|^q + |u|^{q(p-1)}),$$

tornando inconclusivo se $g(x, u) \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (2N/(N+2), 2]$ e inviabilizando o emprego do [Corolário 3.3.2](#). Por esse motivo, nos [Lema 4.2.1](#) e [Teorema 4.2.3](#) foi adotada a estratégia utilizando as funções $g_1(x, t)$ e $g_2(x, t)$.

Corolário 4.2.2. Sob as mesmas hipóteses do [Teorema 4.2.3](#) temos que se $u \geq 0$ em \mathbb{R}^N , então $u(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Pelo [Teorema 4.2.3](#) sabemos que u é limitada. Defina

$$h_0(x) = \begin{cases} V(x) - \frac{f(u)}{u}, & \text{se } u(x) \neq 0, \\ 0, & \text{se } u(x) = 0. \end{cases}$$

Então, pela propriedade (f_2) e pela limitação da função V , segue que existe $K > 0$ tal que $h_0 \leq K^2$ em \mathbb{R}^N , em particular

$$V(x) - \frac{f(u)}{u} < K^2 \text{ se } u(x) \neq 0.$$

Agora defina

$$h(x, u) = \begin{cases} K^2 u + g(x, u), & \text{se } u(x) \neq 0 \\ 0, & \text{se } u(x) = 0 \end{cases}$$

em que $g(x, u) = f(u) - V(x)u$. Então

$$\begin{aligned} h(x, u) &= K^2 u + g(x, u) \\ &= u \left[K^2 - V(x) + \frac{f(u)}{u} \right] > 0 \text{ quando } u(x) \neq 0, \end{aligned}$$

e $h(x, u) = 0$, se $u(x) = 0$, demonstrando que h é não nula quase sempre, pois sabemos que $u \neq 0$ no sentido de Lebesgue. Dessas considerações, vemos que u é solução fraca do problema

$$-\Delta u = -K^2 u + h(x, u).$$

Ao notar, de acordo com o [Teorema 4.2.3](#), que $u \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para todo $\alpha \geq 2$, vemos que, para todo $\alpha \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |h(x, u)|^\alpha dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |K^2 u - V(x)u + f(u)|^\alpha dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(3 \sup\{K^2|u|, |V(x)||u|, |f(u)|\} \right)^\alpha dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} 3^\alpha (K^{2\alpha}|u|^\alpha + |V(x)|^\alpha|u|^\alpha + |f(u)|^\alpha) dx \\ &= 3^\alpha \left[K^{2\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\alpha dx + \int_{\mathbb{R}^N} |V(x)|^\alpha |u|^\alpha dx + \int_{\mathbb{R}^N} |f(u)|^\alpha dx \right], \end{aligned}$$

pois $u = 0$ em apenas um conjunto de medida nula. Note que $|u|^\alpha, |V(x)||u|^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^N)$, para todo $\alpha \geq 2$, pois $u \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$, para todo $\alpha \geq 2$ e V é uma função limitada. Quanto à função $|f(u)|^\alpha$, temos pela propriedade (f_2) que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f(u)|^\alpha dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |C|u| + C|u|^{p-1}|^\alpha dx \\ &\leq (2C)^\alpha \left[\int_{\mathbb{R}^N} |u|^\alpha dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(p-1)\alpha} dx \right], \end{aligned}$$

de onde segue que $|f(u)|^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^N)$ para todo $\alpha \geq 2$, pois $(p-1) > 1$ e portanto $(p-1)\alpha > \alpha \geq 2$ e novamente pelo fato de que $u \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$, para todo $\alpha \geq 2$. Das considerações acima, concluímos que $h(x, u) \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$, para todo $\alpha \geq 2$, de onde o resultado desejado segue ao aplicar o [Teorema 3.1.3](#) com $p = 2$, $q = \alpha > N/2$, $f = h$ e $\lambda = -K^2$. \square

Referências Bibliográficas

- ABLOWITZ, M. J.; FOKAS, A. S. *Complex Variables - Introduction and Applications*. New York: Cambridge University Press, 2003. Citado na página 143.
- ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. *Sobolev Spaces*. Jordan Hill, Oxford: Elsevier Science, 2003. Citado na página 152.
- BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Third Avenue, New York: John Wiley and Sons, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 146 e 147.
- BIEZUNER, R. J. *Notas de Aula - Equações Diferenciais Parciais I/II*. [S.l.]: Universidade Federal de Minas Gerais, 2010. Citado na página 153.
- BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. Citado na página 149.
- BRAZ, J. A. de B. *Existência de soluções para uma classe de sistemas do tipo Schrödinger-Poisson sem a condição de Ambrosetti-Rabinowitz*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 16, 114 e 117.
- BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Universitext. Springer, 2011. Citado 8 vezes nas páginas 15, 17, 146, 147, 148, 151, 152 e 153.
- BREZIS, H.; BROWDER, F. Partial differential equations in the 20th century. *Advances in Mathematics*, v. 135, n. 1, p. 76–144, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- CODDINGTON, E. A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. New York: Dover Publications, 1989. Citado na página 139.
- EKELAND, I. *Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1990. Citado na página 150.
- EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 138 e 139.
- FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Citado na página 137.
- FREITAG, E.; BUSAM, R. *Complex Analysis*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. Citado na página 144.
- GILBARG, D.; TRUDINGER, N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 101, 118 e 152.
- GUNNING, R. C.; ROSSI, H. *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Providence, Rhode Island: AMS Chelsea Publishing, 2009. Citado na página 142.

- ISNARD, C. *Introdução à Medida e Integração*. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. Citado na página 148.
- KRANTZ, S. G. *Function Theory of Several Complex Variables*. Providence, Rhode Island: AMS Chelsea Publishing, 1992. Citado na página 142.
- KRANTZ, S. G.; PARKS, H. R. *A Primer of Real Analytic Functions*. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1992. Citado na página 36.
- LEBEDEV, N. *Special Functions and Their Applications*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 144 e 145.
- LIMA, R. F. *Topologia e Análise no Espaço R^n* . Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 137 e 138.
- LIONS, P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 2. *Annales de l'institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, v. 1, n. 4, p. 223–283, 1984. Citado na página 117.
- MARCHI, R. de. Schödinger equations with asymptotically periodic terms. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, Cambridge University Press, v. 145, n. 4, p. 745–757, 2015. Citado na página 116.
- MILLER, P. D. *Applied Asymptotic Analysis*. Providence, Rhode Island: AMS Chelsea Publishing, 2006. Citado na página 143.
- M.STEIN, E.; SHAKARCHI, R. *Princeton Lectures in Analysis 2 - Complex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 140, 141 e 142.
- MUSCALU, C.; SCHLAG, W. *Classical and Multilinear Harmonic Analysis Volume 1*. New York: Cambridge University Press, 2013. Citado na página 101.
- O.ALVES, C.; SOUTO, M. A. S.; H.M.SOARES, S. Schödinger–poisson equations without ambrosetti–rabinowitz condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 337, n. 2, p. 584–592, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 16, 116 e 117.
- PRADO, R. B. *Operadores de Calderón-Zygmund e o Teorema T1*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, 2009. Citado na página 101.
- SASANE, S. M.; SASANE, A. *A Friendly Approach to Complex Analysis*. Hackensack, New Jersey: World Scientific, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 140 e 141.
- SCHECHTER, M. The use of cerami sequences in critical point theory. *Abstract and Applied Analysis*, v. 2007, 2007. Citado na página 116.
- S.FERNANDEZ, C.; C.BERNARDES, N. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado na página 140.
- STEIN, E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1970. Citado 2 vezes nas páginas 100 e 101.
- STROMBERG, K. R. *Introduction to Classical Real Analysis*. Belmont, California: Wadsworth International Group and Prindle, Weber and Schmidt, 1981. Citado na página 148.

STUART, C. An introduction to elliptic equations on \mathbb{R}^N . *Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations*, p. 237–289, 1997. Citado na página 15.

WATSON, G. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. New York: Cambridge University Press, 1944. Citado na página 50.

WHITTAKER, E.; WATSON, G. *A Course of Modern Analysis*. New York: Cambridge University Press, 1927. Citado na página 137.

ZAHN, M. *Decomposição de Calderon e suas Aplicações na Teoria da Regularidade em Equações Elípticas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005. Citado na página 101.

Apêndices

APÊNDICE A – Resultados Básicos de Análise

A.1 Análise no \mathbb{R}^N

Teorema A.1.1. (Teorema de Weierstrass) *Toda função contínua definida em um conjunto compacto é limitada e atinge seus supremo e ínfimo, isto é, se $K \subset \mathbb{R}^N$ é compacto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então existem $a, b \in K$, tais que*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in K.$$

Demonstração. Ver [(LIMA, 2015), Teorema de Weierstrass p.139]. □

Teorema A.1.2. *Toda aplicação contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}^M$ definida em um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Ver [(LIMA, 2015), Proposição 4.9 p. 140]. □

Teorema A.1.3. (Teste M de Weierstrass) *Suponha que $(f_n)_{n=1}^\infty$ seja uma sequência de funções complexas definidas em um conjunto A e que exista uma sequência numérica $(M_n)_{n=1}^\infty$ de números não negativos tal que*

1. $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in A$,
2. $\sum_{n=0}^\infty M_n$ converge.

Então a série de funções $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ converge absolutamente e uniformemente em A .

Demonstração. Ver [(WHITTAKER; WATSON, 1927), Section 3.34 p.49]. □

Teorema A.1.4. (Teorema da Aproximação de Weierstrass) *Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua, definida no intervalo $[0, 1]$. Então existe uma sequência de polinômios $(P_n)_{n=1}^\infty$ que converge uniformemente para f em $[0, 1]$.*

Demonstração. Ver [(FIGUEIREDO, 2014), Teorema 3.6 p. 77]. □

Teorema A.1.5. (Regras Operacionais da Derivada) *Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^M$ aplicações diferenciáveis em $x \in U$ e $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em x . Então as aplicações $(f + g)$, $(\xi f) : U \rightarrow \mathbb{R}^M$ e a função $(1/\xi) : U \rightarrow \mathbb{R}$ (quando definida) são diferenciáveis em x . Além disso:*

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(\xi f)'(x) = \xi'(x)f(x) + \xi(x)f'(x)$,
3. $\left(\frac{1}{\xi}\right)' = -\frac{\xi'(x)}{(\xi(x))^2}$.

A igualdade no item 2 deve ser interpretada como $(\xi f)'(x)v = (\xi'(x)v)f(x) + \xi(x)(f'(x)v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Ver [(LIMA, 2015), Proposição 5.1 p.175]. □

Teorema A.1.6. (Regra da Cadeia) *Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ e $V \subset \mathbb{R}^M$ conjuntos abertos. Dadas aplicações $f : U \rightarrow V$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^P$, se f é diferenciável em $x \in U$ e g é diferenciável em $f(x) \in V$, então $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^P$ é diferenciável em x e*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Demonstração. Ver [(LIMA, 2015), Regra da Cadeia p. 193]. □

Teorema A.1.7. (Teorema do Valor Médio para Funções) *Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no segmento fechado $[a, a + h] \subset U$ e diferenciável no segmento aberto $(a, a + h)$. Então, existe $t \in (0, 1)$, tal que*

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + th)h.$$

Demonstração. Ver [(LIMA, 2015), Teorema do Valor Médio (para Funções) p. 220]. □

Teorema A.1.8. (Teorema de Clairaut-Schwarz) *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ uma aplicação diferenciável no aberto U e duas vezes diferenciável em $x \in U$. Então $f''(x)$ é uma forma bilinear simétrica, isto é,*

$$f''(x)(h, k) = f''(x)(k, h) \quad \forall h, k \in \mathbb{R}^N$$

Demonstração. Ver [(LIMA, 2015), Teorema de Schwarz p. 230]. □

Teorema A.1.9. (Integração por Partes) *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado com fronteira de classe C^1 . Se $u, v \in C^1(\bar{U})$, então para $i = 1, \dots, N$*

$$\int_U v \partial_i u dx = - \int_U u \partial_i v dx + \int_{\partial U} uv \nu^i dS,$$

em que ν^i é a i -ésima componente do vetor normal unitário exterior ν ao elemento de superfície dS .

Demonstração. Ver [(EVANS, 2010), Theorem 2 p. 712]. □

Teorema A.1.10. (Primeira Identidade de Green) *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado com fronteira de classe C^1 . Se $u, v \in C^2(\bar{U})$, então*

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_U v \Delta u dx + \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS,$$

em que ν é o vetor normal unitário exterior ao elemento de superfície dS e $\partial u / \partial \nu = \nu \cdot \nabla u$.

Demonstração. Ver [(EVANS, 2010), Theorem 3 (ii), p. 712].

□

A.2 Equações Diferenciais Ordinárias

Definição A.2.1. *Uma equação diferencial ordinária linear homogênea de segunda ordem com coeficientes variáveis é uma equação da forma*

$$L(y) := a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

em que $a_0 \neq 0$ e a_0, a_1 e a_2 são funções complexas contínuas definidas em algum intervalo I .

Teorema A.2.1. *Se ϕ_1 e ϕ_2 são duas soluções de $L(y) = 0$ em um intervalo I , elas são linearmente independentes se, e somente se*

$$W(\phi_1, \phi_2)(x) \neq 0 \quad \forall x \in I.$$

Demonstração. Ver [(CODDINGTON, 1989), Theorem 6 p. 111].

□

Teorema A.2.2. *Sejam ϕ_1 e ϕ_2 duas soluções linearmente independentes de $L(y) = 0$ em algum intervalo I . Se ϕ for qualquer outra solução de $L(y) = 0$ em I , então*

$$\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2,$$

em que c_1 e c_2 são constantes.

Demonstração. Ver [(CODDINGTON, 1989), Theorem 7 p. 112].

□

APÊNDICE B – Resultados de Análise Complexa

B.1 Teoremas Clássicos

Por região entenderemos todo subconjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e conexo.

Teorema B.1.1. *Se f é complexa diferenciável em uma região Ω e $f' = 0$, então f é constante.*

Demonstração. Ver [(M.STEIN; SHAKARCHI, 2003), Corollary 3.4 p. 23]. □

Teorema B.1.2. (Regra L'Hôpital para Funções Complexas) *Sejam f e g funções diferenciáveis em z_0 com $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Se $g'(z_0) \neq 0$, então*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Demonstração. Ver [(S.FERNANDEZ; C.BERNARDES, 2016), Solução 4.5 p. 259]. □

Teorema B.1.3. (Teste do Quociente) *Considere a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

$$\text{Se } L := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ existe, então}$$

1. *O seu raio de convergência é $1/L$ se $L \neq 0$.*
2. *O seu raio de convergência é infinito se $L = 0$*

Demonstração. Ver [(SASANE; SASANE, 2014), Theorem 4.2 p. 111]. □

Teorema B.1.4. *A série de potências $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ define uma função complexa diferenciável em seu disco de convergência. A derivada de f é também uma série de potências obtida diferenciando termo a termo a série para f . Mais precisamente*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Além disso, f' possui o mesmo raio de convergência que f .

Demonstração. Ver [(M.STEIN; SHAKARCHI, 2003), Theorem 2.6 p. 16]. □

Teorema B.1.5. (Teorema de Goursat) *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e T é um triângulo cujo interior está contido em Ω , então*

$$\int_T f(z)dz = 0$$

sempre que f é complexa diferenciável em Ω .

Demonstração. Ver [(M.STEIN; SHAKARCHI, 2003), Theorem 1.1 p.34]. □

Teorema B.1.6. *Se f é complexa diferenciável em um conjunto aberto Ω , então $f \in C^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [(M.STEIN; SHAKARCHI, 2003), Corollary 4.2 p.47]. □

Teorema B.1.7. (Teorema de Morera) *Se f for uma função contínua no disco aberto D tal que para todo triângulo $T \subset D$*

$$\int_T f(z)dz = 0,$$

então f é complexa diferenciável.

Demonstração. Ver [(M.STEIN; SHAKARCHI, 2003), Theorem 5.1 p.53]. □

Teorema B.1.8. (Teorema Integral de Cauchy) *Sejam Ω uma região simplesmente conexa e γ um contorno fechado suave por partes em Ω . Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é complexa diferenciável em Ω , então*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Demonstração. Ver [(SASANE; SASANE, 2014), Corollary 3.2 p. 84]. □

Teorema B.1.9. *Se $(f_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de funções complexas diferenciáveis definidas em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ que converge uniformemente para uma função f em todo subconjunto compacto de Ω , então f é complexa diferenciável em Ω .*

Demonstração. Ver [(M.STEIN; SHAKARCHI, 2003), Theorem 5.2 p. 53]. □

Teorema B.1.10. *Seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de funções complexas diferenciáveis definidas em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ que converge uniformemente para uma função f em todo subconjunto compacto de Ω , então a sequência das derivadas $(f'_n)_{n=1}^\infty$ converge uniformemente para f' em todo subconjunto compacto de Ω .*

Demonstração. Ver [(M.STEIN; SHAKARCHI, 2003), Theorem 5.3 p.54]. □

Teorema B.1.11. (O Teorema da Identidade) *Sejam f e g funções complexas diferenciáveis em uma região Ω que satisfazem $f(z) = g(z)$ para todo z em algum subconjunto aberto não vazio de Ω . Então $f(z) = g(z)$ em toda a região Ω .*

Demonstração. Ver [(M.STEIN; SHAKARCHI, 2003), Corollary 4.9 p.52]. □

Definição B.1.1. (Continuação Analítica) *Suponha que f seja uma função complexa diferenciável definida em um conjunto aberto não vazio $U \subset \mathbb{C}$. Se $V \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto tal que $U \subset V$ e F é uma função complexa diferenciável definida em V tal que*

$$F(z) = f(z) \quad \forall z \in U,$$

então F é chamada de continuação analítica de f . Notemos então que se em adição V for conexo, teremos pelo Teorema da Identidade que a extensão F é única.

B.2 O Teorema de Hartogs e o Lema de Osgood

Teorema B.2.1. (Teorema de Hartogs) *Sejam $U \subseteq \mathbb{C}^n$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Suponha que para cada $j = 1, \dots, n$ e para cada $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$ fixos, a função*

$$\zeta \mapsto f(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots, z_n)$$

seja complexa diferenciável no conjunto

$$U(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) := \{\zeta \in \mathbb{C} : (z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots, z_n) \in U\}.$$

Então f é contínua em U .

Demonstração. Ver [(KRANTZ, 1992), Theorem 1.2.5 p.32]. □

Teorema B.2.2. (Lema de Osgood) *Sejam $U \subseteq \mathbb{C}^n$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Se f for contínua em U e complexa diferenciável em cada variável separadamente no sentido do Teorema de Hartogs, então f é complexa diferenciável em U .*

Demonstração. Ver [(GUNNING; ROSSI, 2009), Theorem 2 p.2]. □

B.3 O Lema de Watson e o Método de Laplace

Teorema B.3.1. (Lema de Watson) *Sejam $T > 0$ e $\phi(t)$ uma função complexa, absolutamente integrável em $[0, T]$:*

$$\int_0^T |\phi(t)| dt < +\infty.$$

Suponha além disso que $\phi(t)$ é da forma $\phi(t) = t^\sigma g(t)$ em que $\sigma > -1$ e $g(t)$ possui uma quantidade infinita de derivadas contínuas em alguma vizinhança de $t = 0$. Nessas condições, a integral exponencial

$$F(\lambda) := \int_0^T e^{-\lambda t} \phi(t) dt$$

é finita para todo $\lambda > 0$ e admite expansão assintótica quando $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda > 0$ dada por

$$F(\lambda) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0) \Gamma(\sigma + n + 1)}{n! \lambda^{\sigma+n+1}}.$$

Demonstração. Ver [(MILLER, 2006), Proposition 2.1 p.53]. □

Teorema B.3.2. (Método de Laplace) Considere a equação integral

$$I(k) = \int_a^\infty f(t) e^{-k\phi(t)} dt.$$

Assuma que $\phi'(c) = 0$, $\phi''(c) > 0$ para algum ponto $c \in [a, \infty)$. Além disso, assuma que $\phi'(t) \neq 0$ em $[a, \infty)$ exceto em $t = c$, $\phi \in C^4([a, \infty))$ e $f \in C^2([a, \infty))$. Então se c é um ponto interior de $[a, \infty)$, a expressão

$$e^{-k\phi(c)} f(c) \sqrt{\frac{2\pi}{k\phi''(c)}}$$

representa o primeiro termo da expansão assintótica de $I(k)$ quando $k \rightarrow \infty$, com erro $O(e^{-k\phi(c)}/k^{3/2})$. Se $c = a$, então o primeiro termo da expansão assintótica é metade do daquele obtido quando c é um ponto interior e o erro é $O(e^{-k\phi(c)}/k)$.

Demonstração. Ver [(ABLOWITZ; FOKAS, 2003), Lemma 6.2.3 p.431]. □

APÊNDICE C – A Função Gama

C.1 Definição da Função Gama

Consideremos a aplicação definida em $\operatorname{Re}(z) > 0$ dada por

$$z \mapsto \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

É bem conhecido que a aplicação acima é absolutamente convergente e complexa diferenciável em $\operatorname{Re}(z) > 0$ (ver [(FREITAG; BUSAM, 2009), Proposition IV.1.1 p. 193]), de onde a definição abaixo faz sentido:

Definição C.1.1. (*Função Gama*) A Função Gama definida em $\operatorname{Re}(z) > 0$, denotada por $\Gamma(z)$ é a função que possui a lei de formação

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Pelo processo de continuação analítica (ver Definição B.1.1), a Função Gama pode ser unicamente estendida para uma função complexa diferenciável em $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{0\})$ (ver [(FREITAG; BUSAM, 2009), Proposition IV.1.2, p. 195]) e a partir desse fato, a Função Gama nesse domínio estendido é então dada por (ver [(LEBEDEV, 1965), (1.1.4) p. 3]):

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad z \neq 0, -1, -2, \dots,$$

Por causa dessa unicidade da extensão, nesse trabalho chamaremos de Função Gama aquela definida não apenas em $\operatorname{Re}(z) > 0$ e sim aquela definida no conjunto maior $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{0\})$.

C.2 Propriedades Básicas da Função Gama

O resultado que se segue enunciará diversas propriedades da Função Gama que serão importantes.

Teorema C.2.1. *A respeito da Função Gama, temos que*

1. $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{0\})$,
2. A Função Gama generaliza a função fatorial, ou seja, $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
3. Vale a fórmula de reflexão de Euler, a saber, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\operatorname{sen}(\pi z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

4. Vale a fórmula de duplicação de Legendre, a saber,

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z + 1/2) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n/2 : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Demonstração. Ver [(LEBEDEV, 1965), Section 1.2, p. 3, 4, 5]. □

Definição C.2.1. (Derivada Logarítmica da Função Gama) A derivada logarítmica da Função Gama é a função ψ definida como

$$\psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

A respeito da função ψ , duas propriedades serão úteis nesse trabalho:

Teorema C.2.2. Em relação a função ψ , temos que

1. A fórmula de reflexão $\psi(1 - z) - \psi(z) = \pi \cot(\pi z)$ é verdadeira para todo $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,
2. $\psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma$, em que γ é a constante de Euler-Mascheroni.

Demonstração. Ver [(LEBEDEV, 1965), Section 1.3, p. 5, 6]. □

Para finalizar, enunciaremos a relação entre a Função Beta e a Função Gama.

Definição C.2.2. (Função Beta) A Função Beta é a função definida por

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Teorema C.2.3. Para todos $x, y \in \mathbb{C}$ tais que $\operatorname{Re}(x) > 0$ e $\operatorname{Re}(y) > 0$, é verdade que

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Demonstração. Ver [(LEBEDEV, 1965), Section 1.5, p. 13, 14]. □

APÊNDICE D – Resultados de Medida e Integração

Teorema D.1. *Se (X, \mathcal{A}, μ) é um espaço de medida tal que $\mu(X) < +\infty$ e $f \in L^p$, então $f \in L^r$ para $1 \leq r \leq p$.*

Demonstração. Ver [(BARTLE, 1995), Exercise 6.K. p. 62]. □

Teorema D.2. *Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida. Se f é uma função não-negativa \mathcal{A} -mensurável de X em $\overline{\mathbb{R}}$, então $f(x) = 0$ μ -quase sempre em X se, e somente se,*

$$\int f d\mu = 0.$$

Demonstração. Ver [(BARTLE, 1995), 4.10 Corollary p. 34]. □

Teorema D.3. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ em que $p > 1$ e $(1/p) + (1/q) = 1$. Então $fg \in L^1$ e*

$$|fg|_1 \leq |f|_p |g|_q.$$

Demonstração. Ver [(BARTLE, 1995), 6.9 Hölder Inequality p.56]. □

Teorema D.4. (Desigualdade de Hölder com k fatores) *Sejam f_1, f_2, \dots, f_k funções tais que $f_i \in L^{p_i}$, $1 \leq i \leq k$ com*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então o produto $f_1 f_2 \dots f_k \in L^p$ e

$$|f|_p \leq |f_1|_{p_1} |f_2|_{p_2} \dots |f_k|_{p_k}.$$

Além disso, se $f \in L^p \cap L^q$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, então $f \in L^r$ para todo r entre p e q .

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Exercise 4.4 p.118]. □

Teorema D.5. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de funções integráveis que converge em quase todo ponto para uma função real mensurável f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n natural, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [(BARTLE, 1995), 5.6 Lebesgue Dominated Convergence Theorem p. 44]. □

Teorema D.6. (Recíproca Parcial do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_n - f|_p \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre em Ω quando $k \rightarrow \infty$ e $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para todo k quase sempre em Ω .*

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Theorem 4.9. p. 94]. □

Teorema D.7. *Se $1 \leq p < \infty$, então o espaço L^p é um espaço vetorial completo sob a norma*

$$|f|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Ver [(BARTLE, 1995), 6.14 Completeness Theorem p.59]. □

Teorema D.8. (Teorema de Tonelli) *Sejam (X, \mathcal{A}_X, μ) e (Y, \mathcal{A}_Y, ν) dois espaços de medida σ -finitos e seja $F : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável não negativa. Então as funções definidas em X e Y respectivamente por*

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_Y F(x, y) d\nu, \\ g(y) &= \int_X F(x, y) d\mu, \end{aligned}$$

são mensuráveis e

$$\int_X \left(\int_Y F d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} F d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X F d\mu \right) d\nu.$$

Demonstração. Ver [(BARTLE, 1995), 10.9 Tonelli's Theorem p.118]. □

Teorema D.9. (Teorema de Fubini) *Sejam (X, \mathcal{A}_X, μ) e (Y, \mathcal{A}_Y, ν) dois espaços de medida σ -finitos e $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ integrável com respeito à medida produto $\mu \times \nu$, então as funções reais estendidas definidas em quase todo ponto por*

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_Y F(x, y) d\nu, \\ g(y) &= \int_X F(x, y) d\mu, \end{aligned}$$

possuem integrais finitas e

$$\int_X \left(\int_Y F d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} F d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X F d\mu \right) d\nu.$$

Demonstração. Ver [(BARTLE, 1995), 10.10 Fubini's Theorem p.119]. □

Teorema D.10. (Teorema de Fubini-Tonelli) Sejam (X, \mathcal{A}_X, μ) e (Y, \mathcal{A}_Y, ν) dois espaços de medida σ -finitos e seja $F : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável, então

$$\int_X \left(\int_Y |F| d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} |F| d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X |F| d\mu \right) d\nu,$$

e se alguma das integrais acima for finita então

$$\int_X \left(\int_Y F d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} F d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X F d\mu \right) d\nu.$$

Demonstração. Consequência imediata do Teorema de Tonelli e do Teorema de Fubini que acabamos de referenciar. \square

Teorema D.11. (Integração de Funções Radiais) Uma função $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma função radial se existe uma função $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \phi(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Se $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é qualquer função real estendida não negativa Lebesgue mensurável, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x|) dx = \omega_N \int_0^\infty \phi(r) r^{N-1} dr$$

Demonstração. Ver [(STROMBERG, 1981), Exercise 4 p. 393]. \square

Teorema D.12. (Mudança de Variável na Integração) Sejam $\Omega, A, B \subset \mathbb{R}^N$ conjuntos abertos e $\varphi : A \rightarrow B$ um difeomorfismo de classe C^1 tal que $\varphi(A) \subset \Omega$. Então

$$f \in L^1(\Omega) \text{ se, e somente se } x \mapsto |\det(\varphi'(x))| f(\varphi(x)) \in L^1(A).$$

Neste caso:

$$\int_{\varphi(A)} f(y) dy = \int_A f(\varphi(x)) |\det(\varphi'(x))| dx$$

Demonstração. Ver [(ISNARD, 2018), Teorema 11.14 p.193]. \square

Teorema D.13. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para qualquer $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Corollary 4.23. p.109]. \square

Teorema D.14. (Teorema de Du Bois Raymond) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega f v = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então $f = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Corollary 4.24. p.110]. \square

APÊNDICE E – Resultados de Análise Funcional

Teorema E.1. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Seja E um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

para quaisquer $x, y \in E$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, os vetores x e y são linearmente dependentes.

Demonstração. Ver [(BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2015), Proposição 5.12 p. 105]. □

Teorema E.2. *Seja E um espaço vetorial com produto interno. Então a função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ é uma norma em E .*

Demonstração. Ver [(BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2015), Corolário 5.1.3 p. 106]. □

Teorema E.3. (Teorema da Representação de Riesz-Fréchet) *Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \rightarrow \mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) um funcional linear contínuo. Então existe um único $y_0 \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle \quad \text{para todo } x \in H.$$

Além disso $\|\varphi\| = \|y_0\|$.

Demonstração. Ver [(BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2015), Teorema 5.5.2 p. 126]. □

Teorema E.4. (Teorema do Passo da Montanha Generalizado) *Sejam E um espaço de Banach e $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua Fréchet-diferenciável tal que $I' : E \rightarrow E^*$ é contínua, em que, em E , consideramos a topologia da norma, e em E^* , a topologia fraca*. Considere dois pontos $(z_0, z_1) \in E$ e seja Γ o conjunto de todos os caminhos contínuos de z_0 até z_1*

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0, 1]; E) : \gamma(0) = z_0 \text{ e } \gamma(1) = z_1\}.$$

Defina o número c por:

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)).$$

Se existir um subconjunto fechado F de E tal que z_0 e z_1 estão em componentes conexas do conjunto $E \setminus (F \cap \{x \in E : I(x) \geq c\})$ disjuntas então, existe uma sequência $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ em E tal que

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ e } (1 + |u_n|)\|I'(u_n)\| \rightarrow 0.$$

Demonstração. Ver [(EKELAND, 1990), Theorem 6 p. 140].

□

APÊNDICE F – Espaços de Sobolev

Definição F.0.1. *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Definimos o Espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como sendo o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que, para todo multi-índice α (veja a seção 3.2), com $|\alpha| \leq m$, existe $g_\alpha \in L^p(\Omega)$, satisfazendo*

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Devido à unicidade do elemento g_α , o denotamos por $D^\alpha u$. Além disso, quando $p = 2$, denotamos $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

Na presente dissertação, usaremos os seguintes resultados que dizem respeito aos Espaços de Sobolev:

Teorema F.1. *O espaço $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha f|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), p. 271]. □

Teorema F.2. *Sejam $p \geq 1$ e $N \in \mathbb{N}$. Então*

1. $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [p, Np/(N-p)]$, se $1 \leq p < N$,
2. $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [N, +\infty)$, se $p = N$,

em que, quando $1 \leq p < N$, a imersão contínua é injetiva.

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Corollary 9.10, Corollary 9.11 p. 281]. □

Teorema F.3. (Teorema de Morrey) *Para $p > N$ é verdade que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante K tal que $|u|_\infty \leq K \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$ e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ para $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Além disso $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ continuamente para $p \leq q \leq \infty$ quando $p > N$.*

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Theorem 9.12 (Morrey) p. 282]. □

Teorema F.4. *Se $1 \leq p < \infty$ então $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ na norma*

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Ver [(ADAMS; FOURNIER, 2003), Corollary 3.23 p.70]. □

Teorema F.5. *Seja $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ e $|G'(s)| \leq M$ para todo número real s para alguma constante $M > 0$. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } \partial_i(G \circ u) = G'(u)\partial_i u, \quad i = 1, \dots, N.$$

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Proposition 9.5 p. 270]. □

Teorema F.6. *Seja f uma função suave por partes em \mathbb{R} tal que $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Então, se $u \in W^1(\Omega)$, é verdade que $f \circ u \in W^1(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [(GILBARG; S.TRUDINGER, 1998), Theorem 7.8 p. 153]. □

Teorema F.7. *Seja $m \geq 1$ um inteiro e seja $p \in [1, +\infty)$. Então*

1. $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ onde $q \in [p, Np/(N - mp)]$ se $1/p - m/N > 0$,
2. $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ onde $q \in [p, +\infty)$ se $1/p - m/N = 0$,
3. $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ onde $q \in [p, +\infty]$ se $1/p - m/N < 0$.

Além disso, o mesmo resultado continua sendo verdadeiro se trocarmos \mathbb{R}^N por um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de classe C^1 com fronteira limitada.

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Corollary 9.13. p. 283 ou (ADAMS; FOURNIER, 2003), Theorem 4.12 p. 85]. □

Teorema F.8. *Sejam $m \geq 1$ um inteiro tal que $mp > N$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < m - N/p \leq k + 1$. Então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^N)$$

em que

1. $0 < \lambda \leq m - k - N/p$ se $m - k - N/p < 1$,
2. $0 < \lambda < 1$ se $m - k - N/p = 1$.

Além disso, o mesmo resultado continua sendo verdadeiro se trocarmos \mathbb{R}^N por um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de classe C^1 com fronteira limitada.

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), p. 284]. □

Teorema F.9. *Seja Ω um aberto de classe C^1 . Se $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, $u = 0$ em $\partial\Omega$.*

Demonstração. Ver [(BIEZUNER, 2010), Teorema 11.24. p. 228]. □

Teorema F.10. (*Desigualdade de Poincaré*) *Suponha que $1 \leq p < \infty$ e seja Ω um conjunto aberto limitado. Então existe uma constante $C > 0$ (dependendo de Ω e p) tal que*

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq C|\nabla u|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, a expressão $|\nabla u|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente à norma usual de $W^{1,p}(\Omega)$. Em $H_0^1(\Omega)$, a expressão

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} := \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \partial_i u \partial_i v dx$$

define um produto interno que induz a norma $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$, que é equivalente à norma usual de $H^1(\Omega)$.

Demonstração. Ver [(BREZIS, 2011), Corollary 9.19. p. 290]. □