



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**TEORIAS  $f(R)$  DE GRAVIDADE NA FORMULAÇÃO DE  
PALATINI**

**Thiago Bruno Rafael de Freitas Oliveira**

Orientador: **Prof. Dr. Janilo Santos**

Dissertação apresentada ao Departamento  
de Física Teórica e Experimental da Uni-  
versidade Federal do Rio Grande do Norte  
como requisito parcial à obtenção do grau de  
**MESTRE em FÍSICA.**

Natal, Julho de 2010

Dedico este trabalho a toda minha família em especial Creuza de Melo Freitas (in memoriam), minha eterna avó, e a Maria de Fátima Rafael de Freitas, minha brilhante mãe.

“..Cada pedaço, ou parte da natureza inteira é sempre meramente uma *aproximação* da verdade completa, ou a verdade completa até onde a conhecemos.

De fato, tudo que conhecemos é apenas algum tipo de aproximação, porque *sabemos que não conhecemos todas as leis* até o momento. Portanto, as coisas devem ser aprendidas só para serem desaprendidas ou, mais provavelmente, para serem corrigidas.”

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1

# Agradecimentos

- Agradeço especialmente ao meu eterno Deus pelo dom da vida, pelos momentos de admiração e reflexão de sua obra (universo) e por ter me dado condições física e mental de realização desse trabalho.
- Ao meu orientador Janilo Santos pela amizade, companherismo, paciência, respeito e, sobre tudo, pelo conhecimento me passado durante o período de graduação e pós-graduação.
- A minha mãe Maria de Fátima Rafael de Freitas por me fazer crescer e ensinar os verdadeiros e essenciais valores da vida, a meus primos Pablo Rafael, Michel Rafael, Martucha Rafael, Marina Rafael, Robson Rafael Filho, Vitória Alves Rafael, Vítor Alves Rafael, Hugo Rafel, Hudson Rafael e Jeferson Maçal pela paciência em momentos de exclusão familiar em prol de um sonho que agora se concretiza.
- Às pessoas de minha família, pricipalmente minha avó Creuza de Melo Freitas (in memorian) e meu avô Manoel Rafael de Freitas (in memorian) que foram e são meus exemplos de educação, respeito e verdade em todos os momentos de minha vida e base maior de meu equilíbrio pessoal, intelectual e emocional.
- Não poderia deixar de citar os meus queridos tios Pedro Rafael de Freitas, Ronaldo Rafael de Freitas e Robson Rafael de Freitas por todos os ensinamentos diários que me proporcionam ser uma pessoa cada vez melhor, além de

suas respectivas esposas Rosimar Maçal, Ducineide Alves e Edneide Barbosa pela maneira ímpar de me incentivar à conclusão desta dissertação.

- Aos meus professores das séries iniciais, em especial Nivaldo Marinho de Lima, Lena Aniceto e Raimundo Nonato de Moraes (1º incentivador para a área de Física) pelo apoio fundamental e decisivo na minha vida estudantil.
- A minha namorada Maria Samara Caetano pelo incondicional apoio para a finalização desse trabalho e pela compreensão nos momentos de ausência em busca desse objetivo maior.
- A todos os meus colegas do DFTE/UFRN, em particular os (atuais e não-atuais que convivi) representantes da sala Mário Schenberg: Bruno Ferreira Amorin (o Nobel), Caio Fábio Correia (astrofilho), Danilo Pedreira (My Boy), Eduardo Damasceno, Eliângela Paulino Bento (Liw), Flodoaldo de Lima, Johnson Rodrigues, Pedro da Cunha, Leonardo Dantas Machado, pelas boas discussões Físicas naquele ambiente e ao Jefferson Soares, Paulo Soares, Irenaldo Pessoa e Sânzia Alves pelo o apoio e amizade quando sempre se fez necessário, além dos colegas que passaram juntos esse período de sonhos e realizações na UFRN, desde já agradeço o companherismo e cumplicidade.
- A todos os professores do DFTE/UFRN, principalmente a Márcio Maia pela amizade construída, pelo saber fornecido e pelas conversas importantes e decisivas em minha estada acadêmica desde a graduação; a Eudenilson Lins de Albuquerque e Ananias Monteiro Mariz pelo conhecimento transmitido e pela forte admiração que tenho por suas condutas como profissionais na área de Física.
- Gostaria de agradecer, também, ao Professor/Pesquisador Doutor Marcelo José Rebouças do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF, pela importante contribuição na secção 3.3 desta dissertação, o que gerou meu primeiro artigo científico tornando-se, portanto, um marco em minha trajetória acadêmica.

- A CAPES pela bolsa concedida.

# Resumo

Nesta dissertação, após uma breve revisão sobre a Teoria da Relatividade Geral de Einstein e suas aplicações para os modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW), apresentamos e discutimos as teorias alternativas de gravidade denominadas de gravidade  $f(R)$ . Estas teorias surgem quando substituímos na ação de Einstein-Hilbert o escalar de curvatura de Ricci  $R$  por qualquer função  $f(R)$  não-linear bem comportada. Elas fornecem uma maneira alternativa para explicar a aceleração cósmica atual sem necessitar envolver qualquer componente de energia escura ou a existência de dimensões espaciais extras. Quando lidamos com gravidade  $f(R)$ , dois diferentes princípios variacionais podem ser seguidos, a saber, o formalismo métrico e o de Palatini, os quais levam a equações de movimento muito diferentes. Descrevemos brevemente o formalismo métrico e então nos concentramos no princípio variacional de Palatini para a ação da gravidade. Fazemos uma derivação sistemática e detalhada das equações de campo para a gravidade  $f(R)$  de Palatini, as quais generalizam as equações de Einstein da Relatividade Geral. Em seguida obtemos as equações de Friedmann generalizadas, que podem ser usadas para testes cosmológicos. Para exemplificar, usamos compilações recentes de observações de supernovas do tipo Ia e mostramos como a classe de teorias de gravidade  $f(R) = R - \beta/R^n$  explica a recente aceleração observada do universo quando colocamos vínculos razoáveis sobre os parâmetros livres  $\beta$  e  $n$ .

Examinamos também a questão de como teorias  $f(R)$  de gravidade em Palatini permitem espaços-tempos em que a causalidade, um resultado fundamental

em qualquer teoria física [22], é violada. Como é bem conhecido, na Relatividade Geral existem soluções para as equações de campo que possuem anomalias causais na forma de curvas tipo-tempo fechadas, sendo o modelo de Gödel o exemplo mais bem conhecido de tais soluções. Aqui mostramos que toda solução do tipo-Gödel de gravidade  $f(R)$  em Palatini com fluido perfeito, caracterizado por densidade  $\rho$  e pressão  $p$ , satisfazendo a condição de energia fraca  $\rho + p \geq 0$ , é necessariamente isométrica à geometria de Gödel, demonstrando, portanto, que essas teorias apresentam anomalias causais na forma de curvas tipo-tempo fechadas. Esses resultados ampliam um teorema sobre modelos tipo-Gödel para a estrutura das teorias de gravidade  $f(R)$  de Palatini. Derivamos uma expressão para o raio crítico  $r_c$  (além do qual a causalidade é violada) para uma teoria arbitrária de gravidade  $f(R)$  de Palatini. A expressão encontrada tornou claro que a violação da causalidade depende da forma de  $f(R)$  e dos componentes do conteúdo de matéria.

Examinamos objetivamente as soluções tipo-Gödel de um fluido perfeito na classe  $f(R) = R - \beta/R^n$  das teorias de gravidade de Palatini e mostramos que, para uma densidade de matéria positiva e para  $\beta$  e  $n$  em um intervalo permitido pelas observações, essas teorias não admitem como soluções de suas equações de campo a geometria de Gödel juntamente com um fluido perfeito. Nesse sentido, teorias de gravidade  $f(R)$  remediam a patologia causal na forma de curvas tipo-tempo fechadas que é permitido na Relatividade Geral. Examinamos também essa violação de causalidade ao considerar um campo escalar como conteúdo material. Para essa fonte, mostramos que a gravidade  $f(R)$  em Palatini dá origem a uma única solução do tipo-Gödel sem violação de causalidade. Finalmente, mostramos que a combinação de um fluido perfeito mais um campo escalar como fontes de geometrias tipo-Gödel, levam a soluções na forma de curvas tipo-tempo fechadas como a soluções sem violação de causalidade.

# Abstract

In this dissertation, after a brief review on the Einstein's General Relativity Theory and its application to the Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) cosmological models, we present and discuss the alternative theories of gravity dubbed  $f(R)$  gravity. These theories come about when one substitute in the Einstein-Hilbert action the Ricci curvature  $R$  by some well behaved nonlinear function  $f(R)$ . They provide an alternative way to explain the current cosmic acceleration with no need of invoking neither a dark energy component, nor the existence of extra spatial dimensions. In dealing with  $f(R)$  gravity, two different variational approaches may be followed, namely the metric and the Palatini formalisms, which lead to very different equations of motion. We briefly describe the metric formalism and then concentrate on the Palatini variational approach to the gravity action. We make a systematic and detailed derivation of the field equations for Palatini  $f(R)$  gravity, which generalize the Einstein's equations of General Relativity, and obtain also the generalized Friedmann equations, which can be used for cosmological tests. As an example, using recent compilations of type Ia Supernovae observations, we show how the  $f(R) = R - \beta/R^n$  class of gravity theories explain the recent observed acceleration of the universe by placing reasonable constraints on the free parameters  $\beta$  and  $n$ .

We also examine the question as to whether Palatini  $f(R)$  gravity theories permit space-times in which causality, a fundamental issue in any physical theory [22], is violated. As is well known, in General Relativity there are solutions to the

field equations that have causal anomalies in the form of closed time-like curves, the renowned Gödel model being the best known example of such a solution. Here we show that every perfect-fluid Gödel-type solution of Palatini  $f(R)$  gravity with density  $\rho$  and pressure  $p$  that satisfy the weak energy condition  $\rho + p \geq 0$  is necessarily isometric to the Gödel geometry, demonstrating, therefore, that these theories present causal anomalies in the form of closed time-like curves. This result extends a theorem on Gödel-type models to the framework of Palatini  $f(R)$  gravity theory. We derive an expression for a critical radius  $r_c$  (beyond which causality is violated) for an arbitrary Palatini  $f(R)$  theory. The expression makes apparent that the violation of causality depends on the form of  $f(R)$  and on the matter content components.

We concretely examine the Gödel-type perfect-fluid solutions in the  $f(R) = R - \beta/R^n$  class of Palatini gravity theories, and show that for positive matter density and for  $\beta$  and  $n$  in the range permitted by the observations, these theories do not admit the Gödel geometry as a perfect-fluid solution of its field equations. In this sense,  $f(R)$  gravity theory remedies the causal pathology in the form of closed time-like curves which is allowed in General Relativity. We also examine the violation of causality of Gödel-type by considering a single scalar field as the matter content. For this source, we show that Palatini  $f(R)$  gravity gives rise to a unique Gödel-type solution with no violation of causality. Finally, we show that by combining a perfect fluid plus a scalar field as sources of Gödel-type geometries, we obtain both solutions in the form of closed time-like curves, as well as solutions with no violation of causality.

# Notação e Convenções

- A assinatura da métrica ( - , +, +, +)
- Considere a velocidade da luz sempre com valor unitário ( $c = 1$ ) e a constante de acoplamento gravitacional  $\kappa = 8\pi G$ .
- Os índices gregos variam de 0 a 3 e os latinos de 1 a 3. Índices repetidos obedecem à convenção de Einstein.
- Métrica Conforme:  $h_{\mu\nu}$
- Determinante de  $h_{\mu\nu}$ :  $h$
- Conexões de Levi-Civita Generalizadas na Métrica  $h_{\mu\nu}$ :  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$
- Conexões Levi-Civita na Métrica  $g_{\mu\nu}$ :  $\{\}_{\mu\nu}^{\alpha}$
- Tensor de Curvatura Generalizado:  $\tilde{R}_{\mu\beta\nu}^{\alpha}$
- Escalar de Ricci Generalizado:  $\tilde{R}$
- Derivada Covariante na Base de Tetrada  $\theta^A$ :  $\Phi_{|A}$
- D'lambertiano de  $\Phi$  na Base de Tetrada:  $\square\Phi = \eta^{AB}\nabla_A\nabla_B\Phi$
- Derivada Covariante com Respeito a  $\{\}_{\mu\nu}^{\alpha}$ :  $\nabla_{\mu}$
- Derivada Covariante com Respeito a  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ :  $\tilde{\nabla}_{\mu}$

- Campo Escalar (genérico):  $\phi$
- Campos de Matéria (coletivamente):  $\psi$

# Índice

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Notação e Convenções</b>	<b>iv</b>
<b>Resumo</b>	<b>vi</b>
<b>Abstract</b>	<b>viii</b>
<b>1 A Teoria de Einstein para o Campo Gravitacional.</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 A Lagrangeana de Einstein-Hilbert. . . . .	6
1.2.1 O Modelo Cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). . . . .	9
1.2.2 Medidas de Distância-Luminosidade e as Supernovas do Tipo Ia (SNeIa). . . . .	12
1.2.3 Condições de Energia na Teoria da Relatividade Geral. . . . .	15
<b>2 Teorias <math>f(R)</math> de Gravidade.</b>	<b>19</b>
2.1 Introdução . . . . .	19
2.2 Teorias $f(R)$ na Formulação Métrica. . . . .	24

2.2.1	Equivalência da Formulação Métrica com as Teorias de Brans-Dicke. . . . .	27
2.3	Teorias $f(R)$ na Formulação de Palatini. . . . .	28
2.3.1	Equivalência da Formulação de Palatini com as Teorias de Brans-Dicke. . . . .	36
<b>3</b>	<b>Aplicações das Teorias <math>f(R)</math> de Gravidade na Formulação de Palatini.</b>	<b>38</b>
3.1	Equações de Friedmann Generalizadas na Formulação de Palatini. . .	39
3.2	Aplicações em Cosmologia. . . . .	46
3.2.1	A Expansão Acelerada do Universo na Formulação de Palatini.	49
3.3	Universos Tipo-Gödel Para a Gravidade $f(R)$ na Formulação de Palatini <sup>1</sup>	53
3.3.1	A Geometria Tipo-Gödel. . . . .	55
3.3.2	Causalidade em um Universo Tipo-Gödel. . . . .	58
3.3.3	Fluido Perfeito. . . . .	58
3.3.4	Campo Escalar. . . . .	61
3.3.5	Fluido Perfeito + Campo Escalar. . . . .	62
<b>4</b>	<b>Conclusões e Perspectiva</b>	<b>68</b>
4.1	Conclusões . . . . .	68
4.2	Perspectivas . . . . .	70
	<b>Apêndices</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>A Variação de <math>R_{\mu\nu}</math>.</b>	<b>71</b>

**B Equação de Einstein Generalizada. 73**

**Bibliografia x**

# Lista de Figuras

3.1	Diagrama de Hubble para os 307 eventos de SNe Ia da amostra Union [147]. . . . .	50
3.2	Equação de estado efetiva como função do red-shift, $1 + z$ , para a teoria $f(R) = R - \beta/R^n$ no formalismo de Palatini. . . . .	52
3.3	Algumas soluções da equação (3.86) para $\beta = 3.45$ . . . . .	64
3.4	Algumas soluções da equação (3.91) para $\beta = 3.45$ . . . . .	66

# Capítulo 1

## A Teoria de Einstein para o Campo Gravitacional.

### 1.1 Introdução

A curiosidade humana sobre o entendimento da natureza remete a muitos séculos passados. Nesse sentido, sempre foi de grande interesse dos pensadores da antiguidade a busca por leis que regessem o universo, em particular o interesse por leis que expressassem a relação de interação de corpos a distância. Após muitas especulações filosóficas e qualitativas desses pensadores, faltava-lhes um tratamento mais formal e quantitativo. Coube ao proeminente cientista inglês do século XVII, Sir Isaac Newton, propor e formalizar um processo de interação a distância de corpos materiais, dada por uma lei bem definida, a chamada Lei da Gravitação Universal [1]. Essa, por sua vez, estabelece que o módulo da força de interação gravitacional ocorre proporcionalmente ao produto das massas dos corpos interagentes e inversamente proporcional ao quadrado da distância de separação entre eles, isto é,

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (1.1)$$

Na equação (1.1),  $G$  é a constante de gravitação universal ( $G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-1}$ );  $m_1$  e  $m_2$  são as massas pontuais dos corpos interagentes e  $r$  é a distância de separação entre eles.

No entanto algo sutil caminhava junto a essa idéia. O fato era que essa interação gravitacional a distância se dava instantaneamente. Tal observação durou por muito tempo até surgirem as idéias de James C. Maxwell sobre o Eletromagnetismo. Maxwell observou que as interações de ímãs, por exemplo com pedaços de ferro, se apresentavam da forma como Michael Faraday sugerira, ou seja, primeiramente o pedaço de ímã geraria ao seu redor uma região de influência denominada de campo e que por meio deste haveria a atuação do ímã sobre os pedaços de ferro. A teoria de Newton para o campo gravitacional mostra-se análoga à Teoria Eletromagnética, sugerindo que a interação gravitacional entre corpos materiais deveria ser mediada por um campo gravitacional de tal modo que a interação instantânea de Newton não faria mais sentido.

No desenvolvimento da teoria Newtoniana para a gravitação, é verificado que a equação de campo que descreve a gravidade somente depende de um componente, o potencial gravitacional, sendo este dependente unicamente da distância da fonte ao corpo teste [2], não havendo qualquer referência ao tempo de retardamento, o que mais tarde seria necessário para o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Especial. Conforme veremos mais adiante, os campos da Teoria da Relatividade Geral dependerão do tensor métrico e este terá 16 componentes, das quais 10 serão independentes, sendo funções das coordenadas espaciais e do tempo, como desejava a Teoria da Relatividade Especial.

Com novas interpretações de conceitos fundamentais como espaço, tempo, matéria e energia, Albert Einstein em 1905 propôs uma versão inovadora e radical desses conceitos, bem como uma reformulação da Mecânica. Nessa época, foi introduzido, pelo físico alemão Hermann Minkowski, o conceito de espaço-tempo como uma única entidade, ao contrário do espaço e tempo separados da Física Newto-

niana. As idéias de Einstein ficaram conhecidas como a Teoria da Relatividade Especial. Os fundamentos que regem a Teoria da Relatividade Especial se baseiam em dois postulados, a saber: i) as leis da Física devem ser as mesmas para quaisquer observadores inerciais, isto é, que estejam em movimento uniforme uns em relação aos outros, e ii) a velocidade da luz tem o mesmo valor, independente do movimento relativo entre observador e a fonte, sendo esta a velocidade limite da natureza.

Após a construção da Teoria da Relatividade Especial em 1905, Einstein estava convencido de que ela estava incompleta pelo menos em dois aspectos [3]. Em primeiro lugar, afirmava que nenhuma interação física poderia se propagar mais rápido que a velocidade da luz; isso vinha a se contrapor com a teoria da gravidade de Newton, que concebia a gravidade como uma força que agia instantaneamente sobre objetos distantes. Em segundo lugar, aplicava-se somente a uma descrição do movimento do ponto de vista de referenciais inerciais. Uma transição para referenciais não-inerciais lhe tomaria mais 10 anos de esforço e dedicação.

A formulação quadridimensional desenvolvida por Minkowski para a Teoria da Relatividade Especial serviu como subsídio para uma teoria mais geral de relatividade, embora Einstein tenha refutado inicialmente tal formulação. Além disso, o conceito de espaço-tempo defendido na Teoria da Relatividade Especial não poderia ser simplesmente transferido para uma Teoria da Relatividade Geral.

Contudo, antes de chegarmos à formulação desenvolvida por Einstein para a Teoria da Relatividade Geral é necessário enfatizar que o objetivo a que Einstein se propunha era de generalizar a Teoria da Relatividade Especial, passando de referenciais apenas inerciais para os referenciais acelerados, ou seja, os referenciais não-inerciais [4]. Tentando essa generalização, ele foi acometido do “Pensamento mais feliz de sua vida” o chamado *Princípio da Equivalência*. Esse princípio coloca em pé de igualdade as massas inerciais e as massas gravitacionais, isto é, a *mesma qualidade* do corpo se manifesta ora como “inércia”, ora como “gravidade” (“peso”) [5]. Assim, em sua tentativa de generalizar a Teoria da Relatividade Especial, Einstein

inevitavelmente se via envolvido em uma nova teoria de gravitação!

Para exemplificar o Princípio da Equivalência podemos pensar da seguinte forma: suponha que uma pessoa esteja dentro de uma cabine fechada (de forma que garanta o não acesso a qualquer informação externa) e que este conjunto (cabine + pessoa) se encontra em movimento acelerado em relação a um referencial inercial externo a ela. Suponha também que a pessoa da cabine se sinta prensada em direção ao piso da mesma. Dessa forma, esse observador interno à cabine não saberia dizer, por qualquer experimento físico que realizasse, se estaria colada ao chão devido à presença de um campo gravitacional dentro da cabine, ou se seria devido a uma aceleração que o conjunto da cabine estaria sofrendo. De maneira similar imagine que essa pessoa agora esteja flutuando no interior dessa mesma cabine. Provavelmente, ela também não saberia dizer se estaria flutuando juntamente com a cabine no espaço sideral devido à ausência de interação gravitacional, ou se estaria em queda livre com aceleração igual ao campo gravitacional local externo à cabine. Essa experiência de pensamento constitui o Princípio da Equivalência que alicerça a Teoria da Relatividade Geral, ou seja, a não distinção localmente (o quanto será esse “localmente” dependerá da quantidade de encurvamento do seu espaço-tempo, isto é, de seu tensor métrico) entre campo gravitacional uniforme/estático e um sistema uniformemente acelerado. Para um entendimento mais técnico sobre a necessidade de o Princípio da Equivalência ser válido localmente, “imagine uma região  $R_1$  no espaço-tempo e um sistema de coordenadas cuja origem está em  $R_1$ . Podemos então marcar uma região  $R_\epsilon$ , encolhida pelo fator  $\epsilon$ , multiplicando os valores das coordenadas dos eventos de  $R_1$  por  $\epsilon$ . Com esses tipos de regiões, podemos formular o Princípio da Equivalência. Para um sistema cujas linhas de universo de todos os seus elementos passem por  $R_\epsilon$  e que não sofram força externa não-gravitacional, os efeitos gravitacionais observáveis dentro de  $R_1$  são pequenos, da ordem de  $R_\epsilon$ ” [6].

Essas pequenas regiões são necessárias porque o Princípio da Equivalência tem validade localmente e nelas há a garantia de uniformidade dos campos gravi-

tacionais atuantes. Isso significa que, ao analisar fenômenos onde possam existir acelerações, isto é, onde os referenciais são não-inerciais, é possível ao menos localmente, estudar o mesmo fenômeno do ponto de vista de um referencial inercial onde existe um campo gravitacional uniforme e estático. Isso é garantido pelo Princípio da Equivalência.

Fazendo o mesmo exercício de pensamento, agora analisando um raio de luz que atravessasse de um lado a outro dentro da cabine, Einstein concluiu que o observador interno à cabine veria que o raio entraria por um ponto e sairia por outro, havendo um desnível entre eles. Dessa forma, para esse observador, o raio de luz sofreu um encurvamento. Por outro lado, pelo Princípio da Equivalência, o mesmo encurvamento deveria ser observado quando o raio de luz passasse por fortes fontes de campo gravitacional!

Einstein logo percebeu que a geometria envolvida nos processos de generalização da Teoria da Relatividade Especial deveria ser alterada deixando de ser plana para ser curva.

Na teoria relativística da gravitação, o espaço-tempo possui características não usuais. Por exemplo, ele é: i) **Curvo**: dizemos que o espaço-tempo da Relatividade Geral tem uma geometria não-euclidiana. Na Relatividade Especial, o espaço-tempo é plano; ii) **Lorentziano**: as métricas do espaço-tempo devem ter sinais mistos. Isto é herdado da Relatividade Especial. Em seu desenvolvimento, a Teoria da Relatividade Geral está baseada em um conjunto de princípios fundamentais. Esses princípios foram sendo criados ao longo do desenvolvimento da própria teoria. Para esclarecer melhor, os apresentaremos a seguir.

1. **Princípio Geral da Relatividade**: as leis da Física devem ser as mesmas para todos os observadores, estejam eles acelerados, ou não.
2. **Princípio da Covariância Geral**: as leis da Física devem ter a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas.

3. **O movimento inercial é o movimento geodésico:** as linhas de universo de partículas não afetadas por forças físicas são geodésicas tipo-tempo ou nulas do espaço-tempo.
4. **Princípio da invariância de Lorentz local:** as leis da Relatividade Especial se aplicam localmente para todos os observadores inerciais.
5. **O espaço-tempo é curvo:** isso permite que os efeitos gravitacionais, como por exemplo a queda livre, sejam descritos como uma forma de movimento inercial.
6. **A curvatura do espaço-tempo é criada pelo momento-energia contido no espaço-tempo:** isto é descrito na teoria relativística da gravitação pelas “equações de campo de Einstein”.

Para Einstein, suas equações de campos deveriam refletir como o campo gravitacional age sobre a matéria, dizendo a ela como se mover e, da mesma forma, como a matéria gera o campo gravitacional no espaço-tempo, dizendo a ele como se encurvar.

## 1.2 A Lagrangeana de Einstein-Hilbert.

A equação que rege o campo gravitacional newtoniano é descrito pelo potencial gravitacional que advém da equação de Poisson. Quando Einstein desenvolveu a Teoria da Relatividade Geral, ele utilizou para isso uma analogia com a equação de Poisson. A dedução feita por Einstein, com base nessa analogia, pode ser encontrada em alguns livros textos (por exemplo [7]). Diferentemente, faremos aqui uma exposição mais conveniente da teoria de Einstein. Representando a ação gravitacional e a ação da matéria do espaço-tempo, utilizaremos a formulação Lagrangeana e apresentaremos as equações que regem o campo gravitacional para Teoria da Rela-

tividade Geral. Para justificar essa preferência, daremos razões para que esta forma seja padrão.

A Relatividade Geral é uma teoria clássica e, portanto, nenhuma referência a uma ação é realmente fisicamente necessária; ela poderia apenas conter suas equações de campo sem necessitar de uma formulação Lagrangeana. Entretanto, uma formulação Lagrangeana dessa teoria tem seus méritos. Colocando de lado sua elegância, existem pelo menos duas razões para torná-la padrão:

- Em um nível quântico, a ação de fato adquire um significado físico e há a expectativa de se ter uma teoria física da gravidade mais fundamental, dando uma efetiva ação gravitacional de baixa energia em um limite apropriado.
- É mais fácil comparar teorias alternativas de gravidade por meio de uma ação, do que simplesmente por suas equações de campo, já que estas são mais complicadas. Além disso, parece que, em muitos casos, nós temos um alcance melhor do entendimento físico quando estas teorias são descritas por uma ação (termos cinéticos, dinâmicos e acoplados) [8].

A Relatividade Geral assume que a interação gravitacional é mediada pela métrica e nenhum outro campo faz esse papel. Qualquer outro campo estaria associado a ação da matéria. Portanto, a estrutura geral da ação incluiria a Lagrangeana para a gravidade, a qual depende exclusivamente da métrica, mais a Lagrangeana da matéria, que dependeria dos campos de matéria.

Nós necessitamos que a ação da matéria em sua variação com respeito à métrica forneça o tensor energia-momento da matéria. Assim, nós definimos

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.2)$$

onde  $\delta/\delta g^{\mu\nu}$  é a derivada funcional com respeito à métrica,

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} L_M(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (1.3)$$

é a ação da matéria,  $g$  é o determinante da métrica  $g_{\mu\nu}$ ,  $L_M$  é a densidade Lagrangeana da matéria e  $\psi$  refere-se coletivamente aos campos de matéria.

Para representar a forma da ação gravitacional, nos utilizaremos dos argumentos que Hilbert usou em sua formulação. Primeiramente, a densidade Lagrangeana seria um escalar covariante para que pudesse levar a equações covariantes (equações tensoriais). Essa representação é necessária porque necessitamos de equações de campo que sejam independentes do sistema de coordenadas (Princípio da Covariância Geral). Segundo, a densidade Lagrangeana dependeria apenas da métrica e de suas derivadas primeira e não de qualquer ordem maior de derivada, pois assim a variação métrica da ação nos levaria a equações diferenciais de segunda ordem. Isso é conveniente, já que não conhecemos nenhuma teoria de campo que nos dê equações diferenciais de ordem superior a dois. No entanto, essas necessidades apareceram como uma grande dificuldade para Hilbert, pois não havia escalar covariante geral que se pudesse construir apenas com a métrica e suas derivadas primeiras. As derivadas primeiras da métrica não são objetos covariantes e nenhuma combinação podia ser feita para torná-las objetos covariantes. O mais simples escalar covariante geral que se poderia construir seria o escalar de Ricci, que é obtido pela contração do tensor de Ricci com a métrica e que depende da derivada segunda desta. Essa foi a motivação de Hilbert para definir a ação gravitacional para a Relatividade Geral como

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (1.4)$$

Não entraremos nos detalhes técnicos da demonstração das equações de campo porque não é o motivo principal dessa dissertação. Ademais, os mesmos já são bastante conhecidos na literatura. (Para mais detalhes veja as referências [9, 10]).

Variando esta ação com respeito a métrica (campos dinâmicos e independentes), obtemos a expressão

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.5)$$

Estas são as equações de Einstein quando  $T_{\mu\nu} = 0$  (Tensor Energia-Momento). Porém, um caso mais geral pode ser obtido pela incorporação da ação da matéria tal que  $T_{\mu\nu} \neq 0$ , ou seja,

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

onde  $G$  é a constante de gravitação universal de Newton. Essas são as equações do movimento/campo da Relatividade Geral.

### 1.2.1 O Modelo Cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

O modelo FLRW tem como presupostos que o universo seja espacialmente homogêneo e isotrópico em cada instante de tempo. Embora existam inhomogeneidades locais como galáxias, aglomerados etc., essas “imperfeições” são desprezíveis numa escala da ordem de 100 Mpc [11].

Em coordenadas esféricas, a métrica de FLRW tem a forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right], \quad (1.7)$$

onde  $k$  é o parâmetro de curvatura espacial e pode assumir os valores -1, 0, 1, caso o universo seja hiper-esférico (fechado), espacialmente plano ou hiperbólico [11];  $a(t)$  é o fator de escala da parte espacial da geometria.

A métrica de FLRW admite como fonte de curvatura um fluido perfeito, cujo tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

tal que  $u_\mu$  denota a quadri-velocidade de um observador comóvel com o fluido,  $\rho$  e  $p$  são, respectivamente, a densidade de energia e a pressão do fluido. Com isso, as equações de movimento de Einstein são

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (1.9)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G(\rho + 3p)}{3}, \quad (1.10)$$

onde o ponto sobre  $a$ , representa a derivada temporal desta função. Assim, a equação (1.9) trata da velocidade de expansão, ou contração do universo enquanto que a equação (1.10) refere-se à aceleração da expansão, ou contração.

Einstein estava interessado em soluções para as quais o universo se revelasse estático ( $\dot{a} = 0$ ), pois os dados observacionais da época apontavam nessa direção. Além disso, ele pensava que sua teoria incorporava o princípio de Mach no qual a inércia dos corpos materiais é determinado pelo conteúdo material do universo (mais tarde as soluções encontradas por de Sitter [12] e Kurt Gödel [13] mostraram a não veracidade daquela afirmação). Um universo estático com a densidade de energia positiva é compatível com (1.9) caso a curvatura espacial seja positiva ( $k = 1$ ); entretanto, (1.10) mostra que  $\ddot{a}$  jamais desaparecerá neste espaço-tempo caso a pressão  $p$  seja não-negativa (o que é verdade para a maioria das formas de matéria ordinária existentes, tais como: estrelas e gás, por exemplo). Einstein, então, propõe uma modificação de suas equações para [14]

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

onde  $\Lambda$  é um novo parâmetro livre, a constante cosmológica. De fato, o lado esquerdo de (1.11) possui todos os pré-requisitos aferidos anteriormente, ou seja, é localmente mais geral, invariante sob mudanças de coordenadas, a divergência é nula, simétrico e podemos construir o tensor de dois índices somente da métrica e de sua primeira e segunda derivada. Com esta modificação as equações (1.9) e (1.10) tomam a forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho + \Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G(\rho + 3p)}{3} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.13)$$

Essas equações admitem a solução estática com curvatura espacial positiva e todos os parâmetros  $\rho$ ,  $p$  e  $\Lambda$  não negativos. Tal solução é chamada de “Universo Estático de Einstein”.

A descoberta de que o universo está em expansão [15] eliminou a necessidade empírica para um modelo de universo estático. Isso mostra que qualquer desvio entre os termos da equação (1.13) provocaria o desmoronamento de uma solução estática. Entretanto, o desaparecimento da motivação inicialmente introduzida por Einstein pela necessidade da introdução da constante cosmológica não mudou seu status como a de uma legítima adição para as equações de campo gravitacional, ou como um parâmetro a ser determinado pelos dados cosmológicos. A única maneira de discutirmos cosmológicamente a origem de  $\Lambda$  seria medir todos os termos, com grande precisão, da equação (1.12) e verificar o quão desprezível é o termo  $\Lambda/3$  em relação a eles. Existem razões para que a constante cosmológica seja diferente de zero e Einstein pode não ter cometido um erro após tudo isso.

A busca pelo entendimento da constante cosmológica se tornou alvo de muitas investidas físicas. Em particular, os físicos de partículas propuseram uma nova perspectiva dessa constante, denominando-a de densidade de energia do vácuo (o estado mais baixo de energia), onde naturalmente ela apareceria nas medidas dessa densidade de energia. Fazendo analogias com um campo escalar e associando ao vácuo flutuações quânticas devido ao princípio da incerteza de Heisenberg, os físicos de partículas conseguiram teoricamente calcular a densidade de energia do vácuo chegando ao valor de  $2 \times 10^{110} \text{erg/cm}^3$ . No entanto, as observações cosmológicas evidenciavam que o valor mais propício dessa constante deveria ser  $2 \times 10^{-10} \text{erg/cm}^3$  mostrando ser muito menor do que qualquer efeito individual que compunha o vácuo! A razão entre esses dois valores, o teórico e o experimental, provoca uma discrepância de 120 ordens de grandeza no valor da densidade de energia do vácuo. Isso ficou conhecido na comunidade científica como o “Problema da Constante Cosmológica”.

### 1.2.2 Medidas de Distância-Luminosidade e as Supernovas do Tipo Ia (SNeIa).

Uma maneira bem conhecida de analisar a distância de um objeto celeste é examinar o deslocamento para o vermelho de suas linhas espectrais, o chamado “red-shift”  $z$ , definido por  $z = (a_0/a) - 1$ , onde  $a$  é o fator de escala do universo, e relacionar com a distância-luminosidade,  $d_L(z)$  dada por [16, 17]

$$d_L(z) = a_0(1 + z)r(a), \tag{1.14}$$

onde  $a_0$  é o valor de  $a(t)$  hoje.

Da equação (1.7), podemos mostrar que a distância radial  $r(a)$  pode ser escrita como

$$r(a) = \frac{H_0^{-1}}{a_0 \sqrt{|\Omega_K|}} S_K \left[ \sqrt{|\Omega_K|} I(a) \right], \quad (1.15)$$

onde  $\Omega_K = -k/(a_0 H_0)^2$  é uma definição habitual do parâmetro de curvatura ligado diretamente à geometria espacial do universo,  $I(a)$  é dado por

$$I(a) = a_0 H_0 \int_a^{a_0} \frac{da}{\dot{a}}, \quad (1.16)$$

sendo que a função  $S_K(x)$  tem a seguinte forma:

$$S_K(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } \Omega_K < 0, \\ x & \text{se } \Omega_K = 0, \\ \sinh(x) & \text{se } \Omega_K > 0. \end{cases}$$

Um dos principais objetos de referência úteis na medida de distância cosmológicas são as chamadas Supernovas do Tipo Ia. Acredita-se que essas fontes são estrelas anãs brancas em um sistema binário que são acrescidas da matéria de sua companheira. Quando essas anãs brancas atingem a massa de aproximadamente 1,4 massas solares (limite de Chandrasekhar - massa máxima possível que pode ser suportada pela pressão de degenerescência dos elétrons-), elas sofrem uma explosão termonuclear, de tal forma que a estrela toda explode. Devido as supernovas do tipo Ia serem corpos celestes bastante brilhantes, elas podem ser observadas em altos red-shifts. Esses objetos são utilizados como velas padrão por causa de sua luminosidade incomum e terem curvas de luz bem calibradas.

Medindo-se a magnitude aparente  $m(z)$  de uma supernova localizada no red-shift  $z$  e conhecendo-se sua magnitude absoluta  $M$ , obtém-se facilmente a distância luminosidade a partir do módulo de distância, isto é,

$$\mu_z = m(z) - M = 5 \log \left( \frac{d_L(z)}{Mpc} \right) + 25 \quad (1.17)$$

onde  $\mu_z$  é denominada módulo de distância.

Como na distância-luminosidade aparecem elementos tanto da teoria de gravidade como do modelo FLRW em si [equações (1.14) e (1.15)], o diagrama de Hubble pode ser utilizados para estudar e testar os diferentes modelos de universo.

As observações de supernovas do tipo Ia [18, 19, 20, 21] mostraram que o universo se expande aceleradamente de um certo tempo para cá. Esse resultado foi posteriormente corroborado de forma indireta pelas observações da radiação cósmica de fundo e das estruturas de grande escala do universo. Isso se tornou um grande problema para a Cosmologia, pois um universo acelerado não condiz com o contexto da Relatividade Geral, se levarmos em consideração apenas a matéria ordinária existente atualmente.

Para a resolução desse dilema vários candidatos foram propostos. Na verdade, uma expansão acelerada já havia sido prevista por de Sitter [12] quando as equações de Einstein eram acrescida do termo  $\Lambda g_{\mu\nu}$ . Dessa forma, poderia se pensar que o candidato mais simples que forneceria a última fase acelerada do universo seria a constante cosmológica, pois ela se mostrava uma genuína adição matemática do lado esquerdo da equação (1.11). No entanto, uma motivação física era necessário. Deslocando o termo que contém  $\Lambda$  para o lado direito da equação de campo (1.11), vemos que ela passa a ser uma fonte de energia, podendo ser colocada na forma de um tensor energia-momento, tal que,  $T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\Lambda, -\Lambda, -\Lambda, -\Lambda)$ , ou seja, parecido com um fluido perfeito de equação de estado  $p = -\rho$ . Tal equação é um caso particular de uma equação de estado do tipo  $p = \omega\rho$  com  $\omega = \text{constante} = -1$ . A sua densidade de energia pode ser ajustados com os dados observacionais. A constante cosmológica, sendo considerada um termo de energia, pode representar a energia do vácuo associada aos campos de matéria. Considerado invariante de Lorentz local, o

valor esperado do tensor energia momento no vácuo será  $\langle T_{\mu\nu} \rangle = -\langle \rho \rangle g_{\mu\nu}$ , onde  $\rho$  é a densidade de energia referente a  $\Lambda$ . Entretanto, o modelo padrão da Física de partículas dá uma enorme divergência entre o valor teórico e o que é esperado observado experimentalmente, o já citado Problema da Constante Cosmológica. Além disso, verifica-se que, uma vez a constante cosmológica domine sobre a matéria não existe modo para a matéria dominar novamente! Nossa presença no universo é toda a evidência para que isso não ocorra. Outra alternativa para a expansão acelerada do universo, levando-se em conta que a gravidade é bem descrita pela Relatividade Geral, seria considerar campos escalares com propriedades não usuais, ou seja, sua efetiva equação de estado teria uma pressão negativa, o que teria consequências diretas nas condições de energia, como veremos na seção seguinte. Outros preferem acreditar que o problema de a Teoria da Relatividade Geral não prever um cenário de expansão acelerada para nosso universo, tem a ver com a própria teoria, isto é, a Relatividade Geral não funcionaria bem em escalas cosmológicas, necessitando, portanto, de outro formalismo, ou modificação, para que pudesse apresentar tal panorama.

Embora as teorias  $f(R)$  de gravidade inicialmente não tenham surgido para resolver os problemas subjacentes à Teoria da Relatividade Geral, elas parecem fornecer um cenário diferente e mais abrangente que a teoria de Einstein para a atual conjuntura cosmológica. Dessa forma, veremos no próximo capítulo, uma descrição mais detalhada dessa outra formulação da teoria gravitacional.

### 1.2.3 Condições de Energia na Teoria da Relatividade Geral.

Como é bem entendido em Relatividade Geral, a distribuição de energia-momento e qualquer tensão devido à matéria, ou a qualquer outro campo não-gravitacional, é descrito pelo tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . No entanto, as equações de campo de Einstein não especificam quais tensores energia-momento são fisicamente significativos. Isso pode ser visto como uma fraqueza da teoria, desde que soluções não-físicas

sejam admitidas, mas pode também ser visto como uma virtude mostrando que a Relatividade Geral é independente de qualquer suposição a respeito de Física não-gravitacional.

Por esta razão, é necessário observar as condições necessárias para que  $T_{\mu\nu}$  represente fontes de matéria realistas. Essas condições teriam que ser suficientemente gerais para poderem satisfazer todos os campos (pelo menos em um nível clássico).

Diante dos problemas expostos na seção anterior, caberia, então, uma análise de quais protagonistas poderiam fazer parte do cenário cosmológico como fontes de matéria-energia. Utilizaremos, mais uma vez, o universo em expansão de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker sem restrição de curvatura.

Manipulando as equações (1.9) e (1.10), podemos expressar a pressão e a densidade de matéria-energia como

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right], \quad (1.18)$$

$$p = -\frac{1}{8\pi G} \left[ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (1.19)$$

As condições de energia podem ser determinadas em relação a um sistema de coordenadas invariante em termos de  $T_{\mu\nu}$  e campos de vetores de característica fixa (tipo-tempo, nulo ou tipo-espaço). Essas condições são dadas por [22]

1. A condição de energia nula (Null Energy Conditions - NEC). NEC é a exigência que  $T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \geq 0$  para o vetor nulo  $n^\mu \in T_sM$ , onde  $M$  é uma variedade espaço-tempo quadridimensional e  $T_sM$  refere-se ao espaço tangente em  $M$  no ponto  $s \in M$ .
2. A condição de energia fraca (Weak Energy Conditions - WEC). WEC exige

que  $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$  para qualquer vetor tipo-tempo  $t^\mu \in T_s M$ . Esta condição também implica, por continuidade, a NEC.

3. A condição de energia forte (Strong Energy Conditions - SEC). SEC é a exigência que para qualquer vetor tipo-tempo  $(T_{\mu\nu} - T/2g_{\mu\nu})t^\mu t^\nu \geq 0$ , onde  $T$  é o traço de  $T_{\mu\nu}$ .
4. A condição de energia dominante (Dominant Energy Conditions - DEC). DEC exige que  $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$  para qualquer vetor tipo-tempo  $t^\mu \in T_s M$  e exige adicionalmente que  $T_{\mu\nu}t^\mu$  não seja um vetor tipo-espaço. Por continuidade a DEC também vale para qualquer vetor nulo  $n^\mu \in T_s M$ .

Na métrica de FLRW, apenas o tensor energia-momento de um fluido perfeito,  $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$ , será considerado e conseqüentemente as condições anteriores se reduzem a [22, 23, 24]

- NEC =:  $\rho + p \geq 0$ ,
- WEC =:  $\rho \geq 0$  e  $\rho + p \geq 0$ ,
- SEC =:  $\rho + 3p \geq 0$  e  $\rho + p \geq 0$ ,
- DEC =:  $\rho \geq 0$  e  $-\rho \leq p \leq \rho$ .

A partir dessa exposição é importante esclarecer alguns fatos. A condição de energia forte (SEC) e a condição de energia nula (NEC) são derivadas de princípios geométricos, advindos da equação de Raychaudhuri com a exigência adicional de uma gravidade atrativa. A condição de energia fraca (WEC) surge da crença de que a matéria ordinária tem densidade de energia não negativa. A condição de energia dominante (DEC) aparece da hipótese de que o fluxo de matéria e energia nunca serem mais rápidos que a luz. A partir das equações (1.18) e (1.19) mostra-se facilmente que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (1.20)$$

Portanto, a expansão acelerada do universo ( $\ddot{a}$  positivo) contraria frontalmente a SEC.

Atualmente as observações indicam que a composição do universo é de aproximadamente 74% de energia escura, 21,5% de matéria escura e apenas 4,5% de matéria bariônica [25]. Como se vê, em uma totalidade de quase 96%, o universo é feito de campos de matéria desconhecidos. Essa conclusão fez com que essa quantidade de energia escura na forma de constante cosmológica se tornasse a principal candidata responsável pelo cenário de expansão acelerada de nosso universo. Entretanto, no contexto da Teoria da Relatividade Geral, as condições de energia na forma que vimos não evidenciam essas componentes exóticas.

É possível encontrar soluções alternativas para um universo que se expande aceleradamente, sem incrementação de energia escura [26, 27]. Nesse sentido, partiremos do pressuposto de que a Teoria da Relatividade Geral não é a teoria definitiva de gravitação e, para tanto, faremos uso das teorias  $f(R)$  da gravidade na formulação de Palatini.

# Capítulo 2

## Teorias $f(R)$ de Gravidade.

### 2.1 Introdução

As teorias que envolvem gravidade modificada tem recebido ultimamente uma grande atenção principalmente no tocante à Física de altas energias, Cosmologia e Astrofísica. Como teorias alternativas para a Relatividade Geral de Einstein, aquelas que envolvem funções não lineares do escalar de curvatura  $R$ , conhecidas como teorias  $f(R)$ , tem uma longa história. Logo que a Teoria da Relatividade Geral foi finalizada, tentativas de sua generalização foram propostas. Existem historicamente motivações diversas para a sua generalização, seja puramente a busca por uma formulação mais geral da teoria ou uma motivação observacional. O início dessas modificações ocorreu em 1919 com Weyl [28] e continuou em 1923 com Eddington [29] ao considerar a inclusão de invariantes de curvatura de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert.

Essas tentativas iniciais foram motivadas pela curiosidade e o desejo científico de questionar e entender a teoria emergente. Entretanto uma motivação mais forte estava por vir.

No início da década de 60, evidências de uma ação mais complicada deveria

ter seus méritos. Devido a bem estabelecida Teoria Quântica, percebeu-se que a Relatividade Geral não era renormalizada e que, portanto, não poderia ser quantizada convencionalmente. Em 1962, foi mostrado que a renormalização em um ciclo necessitaria que a ação de Einstein-Hilbert fosse acrescida de um termo de curvatura de ordem superior [30]. Mais tarde, foi verificado que uma ação de ordem superior realmente renormalizaria a Teoria da Relatividade Geral [31]. Estudos mais recentes mostraram que quando correções quânticas ou teorias de cordas são levadas em conta, a ação efetiva de baixa energia gravitacional admite invariantes de curvatura de maior ordem [32, 33, 34, 35]. Essas considerações estimularam novamente a atenção da comunidade científica para teorias de gravidade de ordem superior, ou seja, para uma modificação na ação de Einstein-Hilbert pela inclusão de invariantes de curvatura de ordem maior que o escalar de Ricci (veja [36] para uma revisão histórica). Entretanto, a importância de tais termos na ação era considerada restrita a situações de forte interação gravitacional, esperando ser desprezível em baixas energias. Por essa razão, correções na Relatividade Geral foram consideradas importantes apenas em escalas confinadas à escala de Planck, e consequentemente ao universo primordial, ou próximo das singularidades de buracos negros. De fato, existem estudos relevantes tais como os bem conhecidos cenários de inflação estudados em um universo primordial [37, 38, 39], bem como tentativas de evitar singularidades cosmológicas e de buracos negros [40, 41, 42, 43, 44, 45, 46].

Recentemente, um cenário inesperado para o universo, tanto da análise astrofísica quanto cosmológica, tem sido evidenciado pelas mais diversas fontes. Nas últimas duas décadas, os astrônomos observaram que grande quantidade da massa do universo deve ser invisível, embora evidências tenham sido acumuladas ao longo do tempo. Há mais de 70 anos, Smith [47] e Zwicky [48] fizeram uma surpreendente observação: o movimento individual de galáxias em aglomerados é tão intenso que a atração gravitacional de todo o aglomerado de galáxias não é suficiente para segurá-lo. Nesse sentido, aglomerados de galáxias deveriam se dispersar, embora

aparentemente isso não ocorra. Isso sugere que uma componente desconhecida de matéria deve estar presente para manter o aglomerado coeso. Muitos trabalhos recentes tem direcionado para esta conclusão; a dinâmica de galáxias individuais, galáxias duplas, grupos e aglomerados, todos apontam para esta inobservável mas unipresente componente de matéria [49, 50] que ficou conhecida por matéria escura. Sua luminosidade por unidade de massa deve ser consideravelmente inferior do que ao valor habitual na matéria estelar. Astrônomos sugeriram que tal matéria fria poderia estar, por exemplo, na forma de planetas tipo Júpiter, cometas, mini buracos negros, ou estrelas em seus estágios finais. Atualmente, sua assinatura é conhecida apenas pela interação gravitacional, mas estudos contínuos em toda a região do espectro eletromagnético ajudaria a delinear suas propriedades. A presença de tal matéria em quantidade suficiente para segurar os aglomerados poderia ser insuficiente para fechar o universo (para mais detalhes veja [51]).

Não obstante as observações iniciais de que o universo poderia conter essa forma de matéria desconhecida, os levantamentos de dados de supernovas do tipo Ia indicam uma expansão acelerada do universo [18, 19, 52, 53, 54, 55, 146]. Medidas indiretas baseadas na combinação de resultados da radiação cósmica de fundo (CMBR), estrutura de grande escala e a constante de Hubble corroboram esses resultados [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62], o que veio a ser confirmado pelo COBE. Segundo os dados mais recentes do WMAP-7 [25], o universo é constituído aproximadamente por 4,5% de matéria bariônica (matéria que interage eletromagneticamente), 21,5% de matéria escura fria (Cold Dark Matter) e 74% de uma forma de energia desconhecida denominada de Energia Escura (Dark Energy). A matéria escura possui a propriedade de se aglomerar com a matéria ordinária. Informações obtidas pelo estudo de lentes gravitacionais também sugerem essa componente escura. Já o termo energia escura refere-se a uma desconhecida forma de energia que funciona como um fluido de pressão negativa permeando todo o Cosmos. A energia escura seria então responsável pelo recente cenário de expansão acelerada do universo. O fato principal

é que tanto a matéria escura quanto a energia escura ainda não foram detectados em laboratórios. A matéria ordinária e a matéria escura satisfazem a condição de energia forte (SEC), porém a energia escura não a obedece.

Talvez a forma mais simples de ajustar os dados observacionais seja o modelo cosmológico conhecido como  $\Lambda$ -Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM), o qual admite, como dito anteriormente, 21,5% de matéria escura e 74% de energia escura na forma de constante cosmológica. Esse modelo é, em essência, um ajuste empírico dos dados observacionais [62], não explicando a origem da matéria escura nem da energia escura e, conseqüentemente, deixando o problema da constante cosmológica insolúvel.

No entanto, outra visão para o entendimento de nosso universo poderia ser obtida se deixássemos de lado o preconceito quanto à possível modificação da teoria de gravitação de Einstein. Assim, em princípio, ficaríamos livres do ônus de incrementar o universo com componentes de natureza exótica, significando que tanto a matéria escura quanto a energia escura fossem uma marca de uma teoria de gravidade modificada. Observando que a interação gravitacional parece ser dominante em escalas cosmológicas e que essas componentes escuras são necessárias para explicar fenômenos quando a curvatura do universo é pequena (vê [63, 64, 65, 66] para outras propostas que envolvem modificações da teoria de Einstein), uma modificação na teoria de Einstein talvez fornecesse a resposta para esses problemas, pois em pequenas escalas a Teoria da Relatividade Geral funciona adequadamente. Na verdade, existem várias maneiras de modificar a teoria de Einstein. Provavelmente, a mais bem conhecida é a teoria escalar-tensorial (ST) da gravidade proposta por Brans e Dicke em 1961 [67]. Outros exemplos de teorias modificadas são as tensoriais-vetoriais-escalares (TeVeS) [68] e as , teorias de branas, sendo a mais conhecida a chamada teoria DGP [69]. Nesta dissertação, consideramos outra classe de modificação conhecida como teorias  $f(R)$ . Como enunciado anteriormente, essa teoria substitui o escalar  $R$  da ação de Einstein-Hilbert por uma função mais geral do escalar de curvatura. Embora algumas das formas propostas na literatura para esta

função tenham se mostrado não viáveis, existem ainda muitas outras que merecem atenção.

Quando lidamos com teorias  $f(R)$  de gravidade, duas abordagens distintas são possíveis: uma é conhecida como formulação métrica e a outra é a formulação de Palatini. Para a formulação métrica, a grande dificuldade prática é que as equações de campo resultantes são de quarta ordem na métrica. Além disso, um simples modelo gravitacional, que aqui utilizaremos, do tipo  $f(R) = R - \beta/R^n$ , tem mostrado dificuldades em passar nos testes do sistema solar [70, 71], apresentando também problemas para o correto limite Newtoniano [72, 73] e estabilidade gravitacional [74]. Estudos recentes, [75, 76], mostram que essas teorias não produzem a era padrão dominada pela matéria seguida de uma expansão acelerada.

Por outro lado, o princípio variacional de Palatini fornece equações diferenciais de segunda ordem na métrica e, usando a cosmologia de FLRW, explica a recente expansão acelerada do universo sem a necessidade de energia escura [26, 27]. Estudos recentes [77, 78] tem mostrado que as formas funcionais da lei de potência para as  $f(R)$  como a citada, são capazes de produzir as últimas três fases da evolução cosmológica, isto é, a fase dominada pela radiação, pela matéria e a fase da última aceleração. Alguns estudos, ainda em debate na literatura, questionam se teorias  $f(R)$  na formulação de Palatini satisfazem os testes do sistema solar, dando uma correta aproximação Newtoniana [79, 80, 81, 82, 83] e se estão livres de instabilidades gravitacionais [84, 85]. Revisões recentes sobre  $f(R)$  e outras teorias de gravidade modificada podem ser encontradas em [86, 87, 88].

Em teoria de campos, é uma prática comum redefinir os campos através de transformações conformes, ou mesmo a introdução de campos auxiliares. Duas teorias são consideradas dinamicamente equivalentes se, sob uma redefinição adequada de seus campos, suas equações de movimento coincidem. A vantagem de se explorar a equivalência dinâmica de teorias de campos é que podemos usar resultados bem estabelecidos de uma teoria para outra dinamicamente equivalente. Contudo, a dis-

tinção entre teorias verdadeiramente diferentes, porém dinamicamente equivalentes, é uma questão intrincada e levanta ainda grandes debates na literatura científica atual (por exemplo a equivalência entre os “frames” de Jordan e de Einstein em teorias escalares-tensoriais). Para um aprofundamento nesta questão veja [89] e referências aí contidas. Nas próximas seções, faremos uma revisão da equivalência da gravidade  $f(R)$ , na formulação métrica e de Palatini, com teorias específicas da classe de teorias de Brans-Dicke com potencial.

Apesar de essa dissertação focar seu estudo na formulação de Palatini para a gravidade  $f(R)$ , mostraremos na seção 2.2, por critério de completeza, como a teoria  $f(R)$  de gravidade se desenvolve no formalismo métrico, uma vez que esta foi a formulação utilizada por Einstein no desenvolvimento das equações de campo da Relatividade Geral. Na seção 2.2.1, mostramos a equivalência dessa formulação com uma classe específica de teorias de Brans-Dicke com potencial. Em seguida, na seção 2.3, focamos nosso estudo na formulação de Palatini e na seção 2.3.1 mostramos uma equivalência semelhante para as teorias  $f(R)$  nessa formulação.

## 2.2 Teorias $f(R)$ na Formulação Métrica.

Existem duas diferentes aproximações para obter as equações de campo a partir da ação de Einstein-Hilbert. Uma é obtida variando a ação com respeito a métrica, um procedimento conhecido como formalismo métrico. A outra aproximação considera que a métrica e as conexões são campos independentes e a variação da ação é feita com respeito a ambas, este método variacional é conhecido por formalismo de Palatini. Devido à forma linear da ação de Einstein-Hilbert, os dois formalismos fornecem as mesmas equações de campo.

Contrariamente, modificando a ação de Einstein-Hilbert por uma função geral bem comportada do escalar de curvatura, isto é, uma  $f(R)$ , os dois formalismos variacionais não proporcionam as mesmas equações de campo. Portanto, quando

trabalhamos em gravidade  $f(R)$ , é necessário especificar não apenas a ação, mas também qual formalismo variacional está sendo utilizado. Vamos considerar nesta seção o formalismo métrico.

A ação generalizada pela teoria  $f(R)$  é dada por

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[ \frac{1}{2\kappa} f(R) + \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \right], \quad (2.1)$$

onde  $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$  é a densidade Lagrangeana da matéria;  $R$  é o escalar de Ricci;  $\sqrt{-g} d^4x$  é o elemento invariante do quadri-volume.

Variando a ação (2.1) com respeito a métrica, obtemos

$$\delta S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[ \frac{1}{2\kappa\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}f(R))}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathcal{M}})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Considere as seguintes variações

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = -\Delta_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci. Definimos também  $\Delta_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - g_{\mu\nu}\square$  e  $\square = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}$ . Dessa forma a equação (2.2) torna-se

$$\delta S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[ \frac{1}{2\kappa} f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{4\kappa} g_{\mu\nu} f(R) - \frac{1}{2\kappa} \Delta_{\mu\nu} f'(R) + \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathcal{M}})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

onde  $f'$  refere-se à derivada de  $f$  com respeito a  $R$ . Portanto, já que  $\delta S = 0$  em (2.6) qualquer que seja a variação de  $\delta g^{\mu\nu}$ , a equação de campo obtida será

$$f' R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu} f' = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

onde o tensor energia-momento é definido de maneira usual,

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathcal{M}})}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.8)$$

Observe que, como se esperava, para o caso linear  $f(R) = R$ , nós recuperamos as equações de campo da Relatividade Geral

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

É fácil perceber que a diferença fundamental entre as equações de campo de Einstein e as dadas pela equação (2.7) é que as últimas constituem um conjunto de equações diferenciais parciais de quarta ordem na métrica, enquanto que as equações tradicionais de Einstein são de segunda ordem. Portanto, o formalismo métrico gera equações de campo que para serem resolvidas necessitam de várias condições iniciais, algo não obtido facilmente. Essa diferença tem implicação direta no traço da equação (2.7), ou seja,

$$f' R - 2f + 3\Box f' = \kappa T, \quad (2.10)$$

onde  $T$  é o traço do tensor energia-momento. Observe que, enquanto a equação (2.9) fornece uma equação algébrica para o traço, ou seja,  $R = -\kappa T$ , (2.10) leva a uma equação diferencial para  $R$ .

## 2.2.1 Equivalência da Formulação Métrica com as Teorias de Brans-Dicke.

Em 1961, motivado pelo princípio de Mach, Dicke [67] introduziu, juntamente com seu estudante Carl Brans, o que é atualmente denominado de teoria de Brans-Dicke. Esta teoria inclui um campo escalar independente da métrica para mediar a interação gravitacional. A ação da teoria de Brans-Dicke com um potencial  $V(\phi)$  é dado por

$$S_{BD} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega_0}{\phi} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) - V(\phi) \right] + S_M(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (2.11)$$

onde  $\phi$  é um campo escalar,  $V(\phi)$  é o potencial do campo escalar  $\phi$ ,  $S_M$  a ação da matéria,  $\psi$  os campos de matéria e  $\omega_0$  o parâmetro de Brans-Dicke. Observe que  $\phi$  não apresenta interação com a matéria, ou seja, ele não está acoplado à matéria, porém se encontra acoplado não-minimamente à gravidade.

A equivalência dinâmica entre a gravidade  $f(R)$  e a teoria de Brans-Dicke tem sido considerada por muitos autores [90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101]. Considere a seguinte ação métrica

$$S_{met} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (2.12)$$

Podemos introduzir, nessa ação, um novo campo  $\chi$  onde escrevemos a ação equivalente dinamicamente [90] como

$$S_{met} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (f(\chi) + f'(\chi)(R - \chi)) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (2.13)$$

Variando com respeito a  $\chi$  obtemos a equação  $f''(\chi)(R - \chi) = 0$ , de modo que  $\chi = R$  se  $f''(\chi) \neq 0$ . Redefinindo o campo  $\chi$  por  $\phi = f'(\chi)$  e definindo o potencial

$$V(\phi) = \chi(\phi)\phi - f(\chi(\phi)), \quad (2.14)$$

a ação (2.13) toma a forma

$$S_{met} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (\phi R - V(\phi)) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (2.15)$$

A comparação com a ação dada por (2.11), revela que (2.15) é a ação de Brans-Dicke com parâmetro de Brans-Dicke  $\omega_0 = 0$ . Portanto, teorias métrica de  $f(R)$  são dinamicamente equivalentes a uma classe de teorias de Brans-Dicke sem o termo cinético [90, 94].

É importante esclarecer um fato; teorias métricas não significam que estamos falando de formalismo métrico, onde a variação da ação somente se dá com respeito a métrica. Para uma teoria métrica [102], a matéria deve estar acoplada minimamente à métrica e não a qualquer outro campo, pois esse fato é determinante para a condição de ter uma representação de Brans-Dicke (as teorias métricas-afim desconsideram esse fato e por isso não possuem um representação nas teorias de Brans-Dicke). Como veremos a seguir, o formalismo de Palatini para teorias de gravidade  $f(R)$  também é considerada uma teoria métrica.

## 2.3 Teorias $f(R)$ na Fomulação de Palatini.

Foi mencionado que existem dois princípios variacionais para a obtenção das equações de campo na Relatividade Geral. Um diz respeito ao formalismo métrico estudado anteriormente. O segundo formalismo, denominado de formalismo de Palatini<sup>1</sup>, considera a métrica e as conexões como campos independentes e, conseqüentemente, faz-se a variação da ação com respeito aos dois campos. Esses métodos quando aplicados à Relatividade Geral fornecem as mesmas equações de campo, porém, em teorias

---

<sup>1</sup>O formalismo de Palatini é divulgado erroneamente na literatura como sendo introduzido por Palatini e por isso leva seu nome. No entanto, o primeiro a utilizar a idéia que consta da aproximação de Palatini foi Einstein, porém, historicamente, o erro permanece.

$f(R)$  de gravidade, as equações obtidas são completamente distintas, reduzindo-se à Relatividade Geral quando  $f(R) = R$ . Talvez uma das vantagens mais expressiva do formalismo de Palatini em relação ao formalismo métrico seja que as equações de campo fornecidas pelo primeiro sejam de segunda ordem na métrica, enquanto que o último fornece equações de quarta ordem. Outro problema encontrado na formulação métrica surgiu logo após a introdução de modelos com termos  $\frac{1}{R}$  [103] na ação gravitacional, quando se estudava o regime de campo fraco dessas teorias. Uma instabilidade nas equações que governam a dinâmica do escalar de curvatura  $R$  foi descoberto por Dolgov e Kawasaki [104] na presença de matéria para um modelo específico  $f(R) = R - \mu^4/R$ . Esse problema não é apenas uma característica dessa representação, mas ocorre em uma classe de modelos mais gerais [85]. No entanto, tal instabilidade não aparece no formalismo de Palatini [105], tornando ainda mais relevante o seu estudo.

A seguir, deduziremos as equações de movimento em teorias  $f(R)$  da gravidade na formulação de Palatini, bem como todas as outras variáveis necessárias para o estudo de uma teoria de gravitação (tensor de curvatura, tensor de Ricci, etc...).

Considere a ação dada por

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M] \quad (2.16)$$

onde,  $\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}f(\tilde{R})$ ,  $\tilde{R} = g^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu}$ ,  $\mathcal{L}_M$  representa a densidade Lagrangeana da matéria.

Fazendo a variação da ação (2.16) com respeito à métrica e às conexões, obtemos

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [\delta\mathcal{L}_G + \delta\mathcal{L}_M]. \quad (2.17)$$

Para esta variação observe que

$$\delta\mathcal{L}_G = f(\delta\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}f'\delta\tilde{R} = f(\delta\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}f'\tilde{R}_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g}f'g^{\mu\nu}(\delta\tilde{R}_{\mu\nu}).$$

Entretanto, simplificando um pouco mais e inserindo

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}), \quad (2.18)$$

em (2.17), concluiremos que a variação da ação torna-se

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (f'\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f' g^{\mu\nu} (\delta\tilde{R}_{\mu\nu}) \quad (2.19)$$

onde  $T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$ ;  $S_M = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \mathcal{L}_M$ .

Observe que, como as conexões não são definidas a priori na formulação de Palatini, então não sabemos dizer se o tensor de Ricci, dado por

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma, \quad (2.20)$$

é simétrico, ou não. Entretanto, como qualquer tensor, ele pode ser escrito como uma parte simétrica mais outra anti-simétrica, ou seja,  $\tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{(\mu\nu)} + \tilde{R}_{[\mu\nu]}$ , sendo  $(\mu\nu)$  e  $[\mu\nu]$  a simetrização e anti-simetrização, respectivamente, do tensor de Ricci generalizado. Portanto, para o primeiro termo da primeira integral da equação (2.19), obtemos  $\tilde{R}_{[\mu\nu]}(\delta g^{\mu\nu}) = 0$ , pois  $g^{\mu\nu}$  é simétrico. Quanto à segunda integral, desenvolveremos um pouco mais e, por enquanto, não usaremos essa propriedade. No caso de as conexões serem simétricas, conforme estamos supondo, podemos mostrar que (veja apêndice A)

$$\delta\tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_\alpha(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \tilde{\nabla}_\nu(\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha), \quad (2.21)$$

onde  $\tilde{\nabla}$  diz respeito à derivada covariante com relação às conexões independentes  $\Gamma$  (gama), as quais não são as conexões de Levi-Civita para a métrica  $g_{\mu\nu}$ . Substituindo a equação (2.21) em (2.19), obtemos para a segunda das integrais em (2.19) a seguinte expressão

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} f' g^{\mu\nu} (\delta \tilde{R}_{\mu\nu}) = \int d^4x \sqrt{-g} f' g^{\mu\nu} [\tilde{\nabla}_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \tilde{\nabla}_\nu (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)]. \quad (2.22)$$

Agora vamos reescrever o integrando usando a definição de derivada covariante do produto, isto é,

$$\tilde{\nabla}_\alpha [\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha)] = \sqrt{-g} f' g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) + \tilde{\nabla}_\alpha [\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu}] (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha), \quad (2.23)$$

e

$$\tilde{\nabla}_\nu [\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)] = \sqrt{-g} f' g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\nu (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) + \tilde{\nabla}_\nu [\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu}] (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha). \quad (2.24)$$

Utilizando essas relações e substituindo na integral (2.22), ficamos com

$$I = \int d^4x [\tilde{\nabla}_\alpha (\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)] + \int d^4x [-\tilde{\nabla}_\alpha (\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu}) (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) + \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu}) (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)]. \quad (2.25)$$

Após uma reorganização dos termos e redefinição de índices chegamos a

$$I = \int d^4x \tilde{\nabla}_\alpha V^\alpha + \int d^4x [-\tilde{\nabla}_\alpha (\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu}) + \tilde{\nabla}_\sigma (\sqrt{-g} f' g^{\sigma\mu}) \delta_\alpha^\nu] \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha, \quad (2.26)$$

onde  $V^\alpha = \sqrt{-g}f'(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\mu\beta}^\beta)$ .

A primeira integral pode ser transformada em uma integral de superfície do tipo (Teor. de Gauss)

$$\int d^3x n_\alpha V^\alpha = \int d^3x \sqrt{-g} f' (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha} \delta\Gamma_{\mu\beta}^\beta) = 0, \quad (2.27)$$

já que  $\delta\Gamma$  se anula na superfície. Substituindo esse resultado na equação (2.19), obtemos

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (f' \tilde{R}_{(\mu\nu)} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [-\tilde{\nabla}_\alpha (\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu}) \\ + \tilde{\nabla}_\sigma (\sqrt{-g} f' g^{\sigma\mu}) \delta_\alpha^\nu] \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Podemos escrever a segunda integral da seguinte forma:

$$\int d^4x T_\alpha^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha, \quad (2.29)$$

onde  $T_\alpha^{\mu\nu} = -\tilde{\nabla}_\alpha (\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu}) + \tilde{\nabla}_\sigma (\sqrt{-g} f' g^{\sigma\mu}) \delta_\alpha^\nu$ . Observe que  $T_\alpha^{\mu\nu}$  não é simétrico nos índices  $\mu\nu$ , mas podemos escrevê-lo como  $T_\alpha^{\mu\nu} = T_\alpha^{(\mu\nu)} + T_\alpha^{[\mu\nu]}$ , tal que

$$T_\alpha^{(\mu\nu)} = -\tilde{\nabla}_\alpha (\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu}) + \tilde{\nabla}_\sigma (\sqrt{-g} f' g^{\sigma(\mu}) \delta_\alpha^{\nu)}, \quad (2.30)$$

e

$$T_\alpha^{[\mu\nu]} = \tilde{\nabla}_\sigma (\sqrt{-g} f' g^{\sigma[\mu}) \delta_\alpha^{\nu]}. \quad (2.31)$$

Como  $T_\alpha^{[\mu\nu]}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$ , então a segunda das integrais da equação (2.28) pode ser reescrita como

$$\int d^4x[-\tilde{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}f'g^{\mu\nu}) + \tilde{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g}f'g^{\sigma(\mu)}\delta_\alpha^{\nu)})]\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha. \quad (2.32)$$

Em resumo, temos que a extremização da ação (2.16) na formulação de Palatini leva a

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (f' \tilde{R}_{(\mu\nu)} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [-\tilde{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}f'g^{\mu\nu}) \\ + \tilde{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g}f'g^{\sigma(\mu)}\delta_\alpha^{\nu)})] \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Como  $\delta S = 0$ , em (2.33), a variação da ação (2.16) com relação à métrica  $g_{\mu\nu}$  fornece

$$f' \tilde{R}_{(\mu\nu)} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.34)$$

que proporciona a generalização das equações de campo de Einstein-Hilbert para esta formulação de gravidade.

Já a variação de (2.16) com relação as conexões nos dá

$$-\tilde{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}f'g^{\mu\nu}) + \tilde{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g}f'g^{\sigma(\mu)}\delta_\alpha^{\nu)}) = 0, \quad (2.35)$$

que é a equação responsável pela dinâmica dos campos  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , cuja solução deve fornecer esses campos. Observe que, para as equação (2.34) e (2.35), se  $f(\tilde{R}) = R$ , que é a Lagrangeana de Einstein-Hilbert, nós recuperamos as equações da Relatividade Geral como já era esperado. Contraíndo os índices  $\alpha$  e  $\nu$  da equação (2.35) obtemos

$$-\tilde{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}f'g^{\mu\alpha}) + \frac{1}{2}[\tilde{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g}f'g^{\sigma\mu})\delta_\alpha^\mu + \tilde{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g}f'g^{\sigma\alpha})\delta_\alpha^\mu] = 0, \quad (2.36)$$

ou, mais precisamente,  $\frac{3}{2}\tilde{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g}f'g^{\sigma\mu}) = 0$ . Usando esse resultado a equação (2.35) se reduz à

$$\tilde{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}f'g^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.37)$$

Esta equação pode ser resolvida para as conexões usando uma aproximação semelhante a que foi usada na Relatividade Geral. Alternativamente, podemos definir uma métrica  $h_{\mu\nu}$ , tal que,

$$h_{\mu\nu} = f'g_{\mu\nu}, \quad (2.38)$$

e é fácil ver, então, que a equação (2.37) implica que a conexão é o símbolo de Christoffel com relação à métrica  $h_{\mu\nu}$ . Observe que definindo  $h_{\mu\nu} = f'g_{\mu\nu}$ ,  $h = \det(h_{\mu\nu})$  e  $g = \det(g_{\mu\nu})$ , então  $g = \frac{h}{(f')^4}$ . A inversa de  $h_{\mu\nu}$  é  $h^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{f'}$  onde  $g^{\mu\nu}$  é a inversa de  $g_{\mu\nu}$ . Substituindo esses resultados na equação (2.37), obtemos

$$\tilde{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}f'g^{\mu\nu}) = \tilde{\nabla}_\alpha\left(\frac{\sqrt{-h}f'}{(f')^2}f'h^{\mu\nu}\right) = 0, \quad (2.39)$$

ou seja

$$\tilde{\nabla}_\alpha(\sqrt{-h}h^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.40)$$

Conforme dissemos, a equação (2.40) significa que as conexões  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  procuradas são as conexões de Levi-Civita para a métrica  $h_{\mu\nu}$ , isto é,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}h^{\alpha\sigma}(\partial_{\mu}h_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}h_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}h_{\mu\nu}). \quad (2.41)$$

Substituindo  $h_{\mu\nu} = f'g_{\mu\nu}$  em (2.41), podemos escrever essas conexões como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \{\alpha_{\mu\nu}\} + \frac{1}{2f'}(\delta_{\mu}^{\alpha}\partial_{\nu}f' + \delta_{\nu}^{\alpha}\partial_{\mu}f' - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}f'), \quad (2.42)$$

onde  $\{\alpha_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\partial_{\mu}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu})$  são as conexões de Levi-Civita para a métrica  $g_{\mu\nu}$ . É importante frisar que as equações (2.34),(2.38), (2.40), (2.42) são as equações que “completam” a solução no formalismo de Palatini. Em um primeiro momento, podia parecer que a equação (2.42) não definiria realmente as conexões, já que  $f'$  contém derivadas das conexões. Entretanto se contraírmos a equação de campo (2.34), obtemos

$$f'\tilde{R} - 2f = \kappa T. \quad (2.43)$$

Esta equação pode ser resolvida para  $\tilde{R} = \tilde{R}(T)$ , como pretenderíamos aqui. Então, os termos em (2.42) envolvendo  $f'$  podem ser expressos como derivadas de  $T$ . Uma vez que  $T$  contém apenas a métrica e não suas derivadas, a conexão envolverá somente as primeiras derivadas da métrica, de modo que a equação de campo será de segunda ordem na métrica  $g_{\mu\nu}$ .

A partir desse ponto, é possível demonstrar que o tensor de Ricci generalizado é dado por (veja apêndice B)

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3\nabla_{\mu}f'\nabla_{\nu}f'}{2f'^2} - \frac{1}{f'}[\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square]f'. \quad (2.44)$$

onde  $\tilde{R}_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci para as conexões  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  e as derivadas covariantes  $\nabla_{\mu}$  devem agora ser efetuadas com a conexão métrica de Levi-Civita. Ao calcular o traço desta equação obtemos o escalar de Ricci generalizado, isto é

$$\tilde{R} = R + \frac{3(\nabla_\mu f')(\nabla^\mu f')}{2f'^2} - \frac{3\Box f'}{f'}. \quad (2.45)$$

Cabem aqui algumas considerações. Se  $T = 0$ , então a solução para a equação (2.43) será constante e  $h_{\mu\nu}$  será proporcional a  $g_{\mu\nu}$ . Isso implica que  $\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$ ,  $\tilde{R} = R$ . Portanto, no vácuo, as equações de campo se reduzirão às equações de campo de Einstein com a constante cosmológica para uma  $f(R)$  genérica. (veja [106, 107] para o caso do vácuo). A equação de campo (2.34) pode ser escrita na forma das equações de Einstein como (veja apêndice B)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}, \quad (2.46)$$

onde o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  agora é dado por

$$G_{\mu\nu} = \frac{k}{f'}T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}\left(\tilde{R} - \frac{f}{f'}\right) + \frac{1}{f'}(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)f' - \frac{3}{2f'^2}[(\nabla_\mu f')(\nabla_\nu f') - \frac{g_{\mu\nu}}{2}(\nabla_\alpha f')^2]. \quad (2.47)$$

Note que  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein calculado com a métrica  $g_{\mu\nu}$ .

### 2.3.1 Equivalência da Formulação de Palatini com as Teorias de Brans-Dicke.

Vamos agora examinar a equivalência entre as teorias  $f(R)$  na formulação de Palatini com as teorias de Brans-Dicke, considerando que a ação da matéria seja independente das conexões, como naturalmente é feito na literatura [96, 100]. A ação de Palatini é dada por

$$S_{Pal} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\tilde{R}) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (2.48)$$

Observe que  $\tilde{R}$  não é o mesmo  $R$  da ação métrica dada pela equação (2.1), pois aqui não se trata da métrica  $g_{\mu\nu}$ . Sabemos que as conexões usadas no formalismo de Palatini são as conexões de Levi-Civita para a métrica  $h_{\mu\nu} = f'g_{\mu\nu}$ . Podemos expressar a relação entre as duas métricas conformes simplesmente como  $h_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}$ . Assim, podemos usar a expressão (2.45) para expressar  $\tilde{R}$  em termos de  $R$  e  $\phi$ , ou seja,

$$\tilde{R} = R + \frac{3}{2\phi^2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{3}{\phi} \square \phi. \quad (2.49)$$

Usando a expressão (2.15), estendida para a formulação de Palatini, ou seja, fazendo  $R = \tilde{R}$ , e inserindo (2.49), obtemos

$$S_{Pal} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \phi R + \frac{3}{2\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (2.50)$$

onde desprezamos a divergência total. A ação da matéria não tem dependência com as conexões  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  já que esse foi nosso desejo inicial. Portanto, essa ação é dinamicamente equivalente a uma ação da teoria de Brans-Dicke (2.11) com parâmetro  $\omega_0 = -\frac{3}{2}$ . Esse resultado pode ser confirmado em outras literaturas, por exemplo, [8].

## Capítulo 3

# Aplicações das Teorias $f(R)$ de Gravidade na Formulação de Palatini.

Neste capítulo, damos mais um passo no desenvolvimento das teorias  $f(R)$  na formulação de Palatini com a finalidade de aplicá-las em testes cosmológicos e também obter um maior discernimento da teoria em si. Na seção 3.1, resolvemos as equações de movimento e obtemos a equação de Friedmann generalizada para uma função  $f(R)$  qualquer. Na seção 3.2, verificamos como a classe de teorias dada por  $f(R) = R - \beta/R^n$  pode explicar a expansão acelerada do universo, conforme detectada nos testes de supernovas, sem necessitar de qualquer energia escura. Na seção 3.3, examinamos a questão da causalidade na gravidade  $f(R)$  de Palatini. Isto é feito estudando-se o comportamento dos raios de causalidade nas geometrias tipo-Gödel, e também impondo as condições de energia à classe de teorias  $f(R)$  da forma como apresentada na seção 1.2.3. Os resultados desta última seção são originais na literatura científica e foram publicados em [108].

### 3.1 Equações de Friedmann Generalizadas na Formulação de Palatini.

Usando a métrica de FLRW, nós necessitamos computar as componentes do tensor de Ricci generalizado,  $\tilde{R}_{\mu\nu}$ , o qual é construído com as conexões independentes  $\Gamma$  (Gama). Para a conveniência do leitor, reescreveremos a equação de Einstein generalizada e o tensor de Ricci generalizado obtidos no Capítulo 2, ou seja,

$$f' \tilde{R}_{(\mu\nu)} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

e

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2f'} (\nabla_\mu f') (\nabla_\nu f') - \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu f'}{f'} - \frac{g_{\mu\nu}}{2f'} \square f'. \quad (3.2)$$

Pela definição do operador  $\square f'$ , obtemos

$$\square f' = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta f' - g^{\alpha\beta} \{ \lambda_{\alpha\beta} \} \partial_\lambda f'. \quad (3.3)$$

Separando os termos da soma em  $\alpha$  e  $\beta$  nas componentes temporal e espacial ficamos com

$$\square f' = \partial_0 \partial_0 f' + g^{ij} \partial_i \partial_j f' - g^{00} \{ \lambda_{00} \} \partial_\lambda f' - g^{ij} \{ \lambda_{ij} \} \partial_\lambda f'. \quad (3.4)$$

Considerando um universo espacialmente plano, ou seja,  $k = 0$ , a equação (1.7) reduz-se à

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2], \quad (3.5)$$

tal que,  $g^{00} = -1$ ;  $g^{ij} = 0$  se  $i \neq j$ , pois a métrica é diagonal. Desta forma, obtemos para a equação (3.4)

$$\square f' = -\partial_0^2 f' + g^{ii} \partial_i^2 f' + \{\lambda_{00}\} \partial_\lambda f' - g^{ii} \{\lambda_{ii}\} \partial_\lambda f'. \quad (3.6)$$

Como  $f = f(R(t))$ , logo  $\partial_i^2 f' = 0$ . Outro ponto a ser observado é que na métrica de FLRW, os símbolos de Christoffel  $\{\lambda_{00}\}$  são nulos, portanto não há esse termo em (3.6). Assim, concluímos que (3.6) se torna

$$\square f' = -\partial_0^2 f' - [g^{11} \{0_{11}\} + g^{22} \{0_{22}\} + g^{33} \{0_{33}\}] \partial_0 f'. \quad (3.7)$$

Observando os termos diferentes de zero tanto na métrica de FLRW quanto nas conexões, obtemos  $g^{11} = \frac{1}{a^2}$ ,  $\{0_{11}\} = a\dot{a}$ ;  $g^{22} = \frac{1}{a^2 r^2}$ ,  $\{0_{22}\} = a\dot{a}r^2$  e  $g^{33} = \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2(\theta)}$ ,  $\{0_{33}\} = a\dot{a}r^2 \sin^2(\theta)$ . Portanto, substituindo esses valores na equação (3.7), chegamos a

$$\square f' = -\ddot{f}' - 3H\dot{f}' \quad (3.8)$$

onde foi definido  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  é a função de Hubble;  $\dot{f}' = \frac{df'}{dt}$  e  $\ddot{f}' = \frac{d^2 f'}{dt^2}$ . Dessa forma o tensor de Ricci generalizado se torna

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2f'^2} (\nabla_\mu f') (\nabla_\nu f') - \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu f'}{f'} + \frac{g_{\mu\nu}}{2f'} [\ddot{f}' + 3H\dot{f}']. \quad (3.9)$$

As componentes espaciais e temporal da equação (3.9) são dadas por

$$\tilde{R}_{00} = R_{00} + \frac{3}{2} \left( \frac{\dot{f}'}{f'} \right)^2 - \frac{3}{2f'} (\ddot{f}' + H\dot{f}'), \quad (3.10)$$

e

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{g_{ij}}{2f'} (\ddot{f}' + 3H\dot{f}') + \Gamma_{ij}^0 \left( \frac{\dot{f}'}{f'} \right). \quad (3.11)$$

Da métrica de FLRW, sabemos que  $R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}$ . Isso torna a expressão de (3.10) igual a

$$\tilde{R}_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{3}{2f'^2} (\dot{f}')^2 - \frac{3}{2f'} \ddot{f}' - \frac{3H}{2f'} \dot{f}'. \quad (3.12)$$

De maneira equivalente, as componentes espaciais diferentes de zero da métrica de FLRW são  $R_{11} = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2$ ,  $R_{22} = r^2a\ddot{a} + 2r^2\dot{a}^2$  e  $R_{33} = r^2a\ddot{a} \sin^2(\theta) + 2r^2\dot{a}^2 \sin^2(\theta)$ . Assim, a expressão para a equação (3.11) de cada uma de suas componentes é,

$$\tilde{R}_{11} = a\ddot{a}^2 + 2\dot{a}^2 + \frac{a\dot{a}}{f'} \dot{f}' + \frac{a^2}{2f'} \ddot{f}' + \frac{3a^2H}{2f'} \dot{f}', \quad (3.13)$$

$$\tilde{R}_{22} = r^2a\ddot{a}^2 + 2r^2\dot{a}^2 + \frac{r^2a\dot{a}}{f'} \dot{f}' + \frac{r^2a^2}{2f'} \ddot{f}' + \frac{3r^2a^2H}{2f'} \dot{f}', \quad (3.14)$$

$$\tilde{R}_{33} = (r^2a\ddot{a}^2 + 2r^2\dot{a}^2) \sin^2(\theta) + \frac{r^2a\dot{a} \sin^2(\theta)}{f'} \dot{f}' + \frac{r^2a^2 \sin^2(\theta)}{2f'} \ddot{f}' + \frac{3r^2a^2H \sin^2(\theta)}{2f'} \dot{f}'. \quad (3.15)$$

Nesse ponto, após a exposição dos termos diferentes de zero para (3.11), percebemos que  $\tilde{R}_{22} = r^2\tilde{R}_{11}$  e  $\tilde{R}_{33} = r^2 \sin^2(\theta)\tilde{R}_{11}$ . Porém, se tomarmos  $\tilde{R}_{11}$  e multiplicarmos por  $a^2\frac{1}{a^2}$ ,  $\tilde{R}_{22}$  por  $r^2a^2\frac{1}{r^2a^2}$  e  $\tilde{R}_{33}$  por  $r^2a^2 \sin^2(\theta)\frac{1}{r^2a^2 \sin^2(\theta)}$ , as expressões das componentes de (3.11) diferentes de zero tornam-se respectivamente iguais a

$$\tilde{R}_{11} = \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + \frac{5H}{2f'} \dot{f}' + \frac{\ddot{f}'}{2f'} \right] g_{11}, \quad (3.16)$$

$$\tilde{R}_{22} = \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + \frac{5H}{2f'} \dot{f}' + \frac{\ddot{f}'}{2f'} \right] g_{22}, \quad (3.17)$$

$$\tilde{R}_{33} = \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + \frac{5H}{2f'}\dot{f}' + \frac{\ddot{f}'}{2f'} \right] g_{33} \quad (3.18)$$

Dessa forma, se generalizarmos para qualquer componente  $(ij)$  diferente de zero, e reescrevendo a componente  $(00)$ , ficaremos com

$$\tilde{R}_{ij} = \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + \frac{5H}{2f'}\dot{f}' + \frac{\ddot{f}'}{2f'} \right] g_{ij} \quad (3.19)$$

e

$$\tilde{R}_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{3}{2f'^2}(\dot{f}')^2 - \frac{3}{2f'}\ddot{f}' - \frac{3H}{2f'}\dot{f}'. \quad (3.20)$$

Consideremos agora a equação (1.8), e a equação (2.34), bem como a quadrivelocidade de um referencial comóvel com o fluido dada por  $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$ . A componente  $(\mu\nu = 00)$  será dada, então, por  $f'\tilde{R}_{00} + \frac{f}{2} = k\rho$ .

Para a componente  $(\mu\nu = ij)$  o resultado é análogo. Assim obtemos para a expressão (3.20)

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{2f'^2}(\dot{f}')^2 - \frac{3}{2f'}\ddot{f}' - \frac{3H}{2f'}\dot{f}' + \frac{f}{2f'} = \frac{k\rho}{f'}, \quad (3.21)$$

enquanto que, para a equação (3.19), ficamos com

$$3\frac{\ddot{a}}{a} + 6H^2 + 15\frac{H}{2f'}\dot{f}' + \frac{3}{2f'}\ddot{f}' - \frac{3f}{2f'} = \frac{3kp}{f'}. \quad (3.22)$$

Somando-se a equação (3.21) com a equação (3.22), obtemos após simples manipulações algébricas a expressão

$$\left( H + \frac{\dot{f}'}{2f'} \right)^2 = \frac{k(\rho + 3p)}{6f'} + \frac{f}{6f'}, \quad (3.23)$$

que é a equação de Friedmann generalizada para a formulação de Palatini [109]. Note que quando  $f$  é linear,  $f' = 1$  e, portanto,  $\dot{f}' = 0$ . Tendo em conta a equação (2.43), podemos ver facilmente que, neste caso, a equação (3.23) reduz-se à equação de Friedmann padrão. Como estamos interessados em comparar nosso modelo de  $f(R)$  com os dados observacionais, vamos explicitar a função de Hubble em termos dos parâmetros cosmológicos normalmente utilizados no modelo padrão de FLRW. Para isto vamos considerar um universo dominado por radiação e matéria tal que  $\rho = \rho_{rad} + \rho_{mat}$  e  $p = p_{rad} + p_{mat}$ . A equação de estado para a matéria e radiação são respectivamente  $p_{mat} = 0$  e  $p_{rad} = \frac{1}{3}\rho_{rad} = p$ , então  $k(\rho + 3p) = k(\rho_{mat} + 2\rho_{rad})$ . Porém, em Cosmologia, o estudo é feito em função de outro parâmetro,  $\Omega$  (ômega), que possui ligação direta com a geometria espacial, sendo definido como  $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}$ , onde  $\rho$  é a densidade de matéria de uma dada componente e  $\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$ . A densidade crítica é assim definida porque existe sempre um valor crítico de densidade de energia para qualquer valor de  $H$ , tal que a geometria espacial seja plana ( $k = 0$ ). Dito isso, temos, então, que  $\rho_{rad} = \Omega_{rad}\rho_{crit}$  e  $\rho_{mat} = \Omega_{mat}\rho_{crit}$ , dando  $k(\rho + 3p) = k\rho_{crit}(\Omega_{mat} + 2\Omega_{rad})$ . Por outro lado, sabemos que existe uma lei de conservação que advém de  $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ . Nesse caso, a igualdade é verdadeira se consideramos que a derivada covariante seja definida em termos das conexões de Levi-Civita na métrica  $g_{\mu\nu}$ . Como  $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu}$  é um vetor, a componente ( $\mu\nu = \mu 0$ ) fornece a lei de conservação de energia

$$\dot{\rho} + 3H\rho(1 + \omega) = 0. \quad (3.24)$$

onde  $\omega$  é o parâmetro da equação de estado  $p = \omega\rho$ . Resolvendo a equação (3.24), obtemos facilmente a expressão

$$\rho = \rho_0(1 + z)^{3(1+\omega)}, \quad (3.25)$$

onde  $\rho_0$  é a densidade de algum componente físico (matéria e/ou radiação) hoje e,  $z$  é o red-shift dado por  $z = \frac{a_0}{a} - 1$ . Como  $\omega_{mat} = 0$ ,  $\omega_{rad} = \frac{1}{3}$ , e substituindo esses valores na equação (3.25) para cada componente, ficamos com

$$\rho_{mat} = \rho_{mat,0}(1+z)^3 \quad e \quad \rho_{rad} = \rho_{rad,0}(1+z)^4. \quad (3.26)$$

Em termos dos parâmetros de matéria e da radiação essas equações ficam

$$\rho_{mat} = \Omega_{mat,0}(1+z)^3 \rho_{crit,0} \quad e \quad \rho_{rad} = \Omega_{rad,0}(1+z)^4 \rho_{crit,0} \quad (3.27)$$

e como  $k(\rho + 3p) = k(\rho_{mat} + 2\rho_{rad})$ , obtemos

$$k(\rho + 3p) = 3\Omega_{mat,0}(1+z)^3 H_0^2 + 6\Omega_{rad,0}(1+z)^4 H_0^2. \quad (3.28)$$

Substituindo essa expressão na equação (3.23), chegamos finalmente a

$$\left( H + \frac{\dot{f}'}{2f'} \right)^2 = \frac{H_0^2}{6f'} [3\Omega_{mat,0}(1+z)^3 + 6\Omega_{rad,0}(1+z)^4 + f/H_0^2]. \quad (3.29)$$

Esta é a equação de Friedmann em função de parâmetros cosmológicos convenientes para a obtenção da função de Hubble  $H(z)$ .

A equação do traço dada por (2.34), fornece a relação

$$f'R - 2f = k(-\rho + 3p) = -k\rho_{mat}, \quad (3.30)$$

cuja derivada temporal é

$$(Rf'' - f')\dot{R} = -k\dot{\rho}_{mat} = 3Hk\rho_{mat}. \quad (3.31)$$

Usando novamente (3.30), chegamos a

$$\dot{R} = -3H \frac{Rf' - 2f}{f''R - f'}. \quad (3.32)$$

Finalmente, substituindo a expressão de (3.32) na relação  $\dot{f}' = f''\dot{R}$ , obtemos para (3.29) o resultado

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{3\Omega_{mat,0}(1+z)^3 + 6\Omega_{rad,0}(1+z)^4 + f/H_0^2}{6f'\xi^2}, \quad (3.33)$$

o que determina a função de Hubble generalizada em função do red-shift e dos parâmetros cosmológicos. Na expressão (3.33), definimos

$$\xi = 1 - \frac{3f''Rf' - 2f}{2f'Rf'' - f'}. \quad (3.34)$$

A relação para o traço, isto é, a equação (3.30) também pode ser escrita como

$$f'R - 2f = -3H_0^2\Omega_{mat,0}(1+z)^3. \quad (3.35)$$

Então, a expressão para  $\xi$  pode ser representada por

$$\xi = 1 + \frac{9f''H_0^2\Omega_{mat,0}(1+z)^3}{2f'Rf'' - f'}. \quad (3.36)$$

Verificamos facilmente que para  $f(R) = R$ , a equação (3.33), com  $\xi$  dado por (3.36), dá a equação básica do modelo cosmológico de FLRW com a gravidade padrão da teoria de Einstein da Relatividade Geral. Entretanto, para qualquer forma funcional não linear, ela descreve uma evolução cosmológica diferente para o universo, mesmo nos restringindo ao modelo FLRW.

## 3.2 Aplicações em Cosmologia.

Na maioria dos testes observacionais cosmológicos, a função  $H(z)$  precisa ser integrada em determinadas faixas de red-shift, incluindo o momento atual ( $z = 0$ ). Os vínculos para  $z = 0$  quando impostos às equações (3.33) e (3.35), dão

$$1 = \frac{3\Omega_0 + f_0/H_0^2}{6f_0'\xi_0^2}, \quad f_0'R_0 - 2f_0 = -3H_0^2\Omega_{mat,0}. \quad (3.37)$$

onde  $\xi_0 = 1 + \frac{9f_0''}{2f_0'} \frac{H_0^2\Omega_{mat,0}}{R_0f_0'' - f_0'}$ . A partir daqui e de posse das equações necessárias para o estudo cosmológico, faremos a aplicação das equações generalizadas de Friedmann para uma classe de funções  $f(R)$  dada por

$$f(R) = R - \beta/R^n. \quad (3.38)$$

Esse modelo de gravidade foi inicialmente proposto por Carroll [103] e tem se mostrado muito eficiente para representar as várias fases da história do universo na formulação de Palatini. Nesse modelo,  $\beta$  e  $n$  são parâmetros livres a serem vinculados pelos dados cosmológicos. Observe que para  $n = 0$  este tipo de gravidade reduz-se à Relatividade Geral de Einstein com constante cosmológica. Para esta classe de teorias, usando as equações (3.37), obtemos a seguinte relação entre os parâmetros  $n$ ,  $\beta$  e  $\Omega_{mat,0}$  :

$$\beta = \frac{(x_n H_0^2)^{n+1}}{n+2} \left( 1 - \frac{3\Omega_{mat,0}}{x_n} \right), \quad (3.39)$$

onde  $x_n \equiv \frac{R_0}{(H_0)^2}$  e  $R_0$  é o valor do escalar de Ricci hoje. Portanto, especificando os valores de dois desses parâmetros, o terceiro estará automaticamente determinado. Em outras palavras, no formalismo de Palatini, os dois parâmetros livres de  $f(R) =$

$R - \beta/R^n$  podem ser pensados como um par  $(n, \beta)$  ou  $(n, \Omega_{mat,0})$ . Dessa forma, eliminando  $\beta$  entre as equações (3.37), obtemos a seguinte equação algébrica

$$C_5 x_n^5 + C_4 x_n^4 + C_3 x_n^3 + C_2 x_n^2 + C_1 x_n + C_0 = 0, \quad (3.40)$$

onde os coeficientes  $C_i$  são dados por

$$C_5 = -4(n+1)^4,$$

$$C_4 = 48(n+1)^4 + 18(n+1)^3(n-2)\Omega_{mat,0},$$

$$C_3 = -216(n+1)^3\Omega_{mat,0} + 18n(n+1)^2(n+15)\Omega_{mat,0}^2,$$

$$C_2 = 27n(n+1)^2(n-24)\Omega_{mat,0}^2 - 162n^2(n+1)(n+4)\Omega_{mat,0}^3,$$

$$C_1 = 486n^2(n+1)(n+3)\Omega_{mat,0}^3 + 162n^3(n+3)\Omega_{mat,0}^4,$$

$$C_0 = 243n^2(n+3)^2\Omega_{mat,0}^4.$$

A equação de evolução da função de Hubble (3.33), tendo em conta a equação (3.38) para  $f(R)$ , fica

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{3\Omega_{mat,0}(1+z)^3 + 6\Omega_{rad,0}(1+z)^4 + x_n y - y^{-n}(x_n - 3\Omega_{mat,0})/(n+2)}{6[1 + y^{-n-1}nb_n/(n+2)]\xi^2(z)} \quad (3.41)$$

onde definimos

$$\xi(z) = 1 + \frac{9}{2x_n} \frac{n(n+1)b_n\Omega_{mat,0}(1+z)^3 y^n}{[(n+2)y^{n+1} + nb_n](y^{n+1} + nb_n)}. \quad (3.42)$$

Nesta equação,  $b_n = 1 - 3\Omega_{mat,0}/x_n$ , sendo  $x_n$  as raízes de (3.40) para cada valor de  $n$  testado, e  $y = y(z)$  são as soluções da equação algébrica

$$y^{n+1} - \frac{3\Omega_{mat,0}}{x_n}(1+z)^3 y^n - b_n = 0. \quad (3.43)$$

Esta última equação é obtida da equação de vínculo (3.35) onde fizemos  $y = R/R_0$ . Observe que, para um dado  $n$ , são possíveis, em princípio, cinco valores de  $x_n$  que são soluções do polinômio de quinto grau da equação (3.40), levando, portanto, a cinco valores de  $\beta$  conforme a equação (3.39). No entanto, existem dois vínculos que podemos colocar sobre as soluções de (3.40), isto é,

1. As soluções de  $x_n$  devem ser reais;
2. Devemos ter  $x_n \geq 0.837$ .

Esta última exigência vem de dados cosmológicos, os quais exigem que  $\beta \geq 0^1$  e levando em consideração o melhor valor observacional de  $\Omega_{mat,0} = 0.279$  (Esta é a média que foi obtida do WMAP-5 [110]). Para outro valor de  $\Omega_{mat,0}$ , o limite inferior de  $x_n$  deve ser recalculado de acordo com a equação (3.39). Todas as soluções de (3.40) que não atendam essas exigências devem ser descartadas. O melhor valor de  $H_0$  dado pelo WMAP-5 é  $H_0 = (70.1 \pm 1.3)km/s/Mpc$ .

Para os testes observacionais vamos precisar integrar a equação (3.41), isto é, vamos precisar de integrais do tipo

$$I(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (3.44)$$

para diferentes faixas de  $z$ . Dependendo da faixa de  $z$  devemos tomar  $\Omega_{rad,0} = 0$

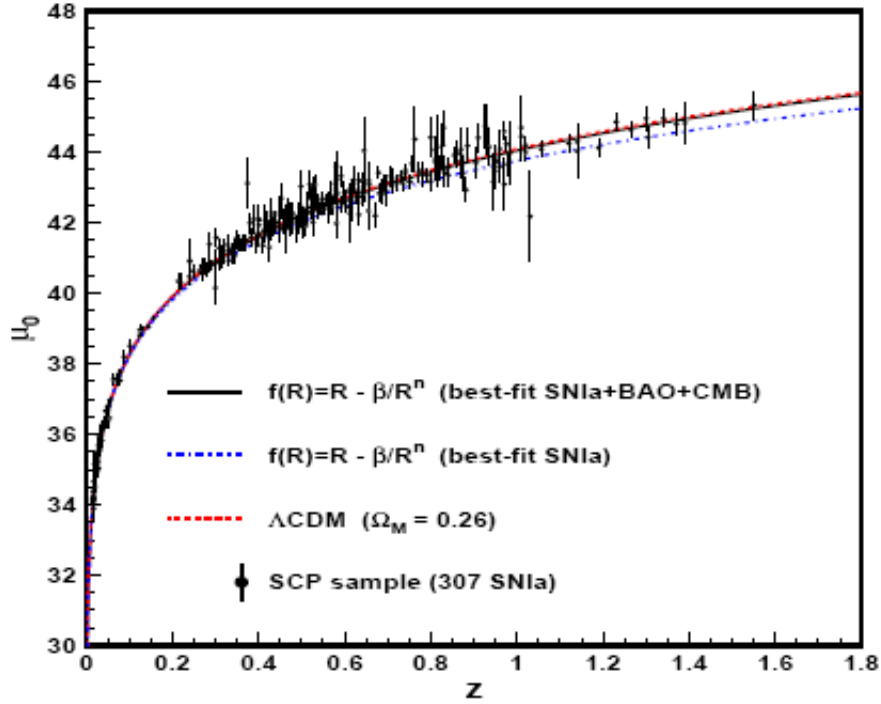
---

<sup>1</sup>Esta exigência é feita para recuperarmos o modelo  $\Lambda$ CDM quando  $n = 0$  em teorias dada por (3.38).

ou  $\Omega_{rad,0} = 5 \times 10^{-5}$  (para  $z \geq 1089$ ). Para  $n = 0$ , a equação (3.40) tem como solução  $x_0 = 12 - 9\Omega_{mat,0}$ . Neste caso, a equação (3.39) reduz-se a  $\beta = 6H_0^2\Omega_\Lambda$ , onde  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{mat,0}$ . Definindo o parâmetro cosmológico  $\Omega_\Lambda$  como  $\Omega_\Lambda \equiv \Lambda/(3H_0^2)$ , obtemos finalmente  $\beta = 2\Lambda$  para o caso  $n = 0$ , o que coincide com a teoria da Relatividade Geral de Einstein com constante cosmológica. Contudo, se trabalharmos com unidades em que  $H_0 = 1$  obtemos  $\beta = 4.326$ , o que fica mais fácil para compararmos com trabalhos anteriores para os testes dessa teoria.

### 3.2.1 A Expansão Acelerada do Universo na Formulação de Palatini.

Conforme mencionamos durante a dissertação, o interesse cosmológico, recentemente, em gravidade  $f(R)$  reside no fato de que essas teorias podem exibir naturalmente o modelo padrão na qual a evolução do universo foi dominado pela radiação, em seguida pela matéria e posteriormente por uma expansão acelerada, sem necessitar de componentes exóticas como a energia escura. No entanto, a liberdade de escolha da forma funcional de  $f(R)$  faz surgir o problema de como vincular essas teorias sob o ponto de vista teórico e/ou observacional. Embora muitos esforços teóricos tenham sido feitos para vincular essas teorias [111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136](para uma revisão histórica veja [137, 138, 139]), somente recentemente do ponto de vista observacional as teorias  $f(R)$  passaram a ter um conjunto de dados cosmológicos possíveis de serem analisados para testar a viabilidade destes modelos teóricos [77, 78, 140, 141, 142, 143]. Como exemplo, apresentaremos uma aplicação do modelo  $f(R) = R - \beta/R^n$  aos dados de supernovas do tipo Ia (SNeIa) [26] combinados com os vínculos advindos das oscilações acústicas de bárions (BAO) [144] mais o parâmetro de desvio de CMB (“Shift Parameter”) [145, 146], a fim de limitar os parâmetros livres da teoria. Conforme vimos na seção (1.2.2), o módulo de distância,  $\mu_z$ , dado um conjunto de parâmetros  $\mathbf{P} = (n, \Omega_{mat,0})$ , é expresso por



**Figura 3.1:** Diagrama de Hubble para os 307 eventos de SNe Ia da amostra Union [147]. As curvas correspondem ao melhor ajuste para o par  $n$  e  $\Omega_{mat,0}$  fornecidos pela análise estatística envolvendo SNeIa (apenas) e SNeIa + BAO + CMB “Shift Parameter”. Por motivos de comparação o modelo  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_{mat,0} = 0.26$  é também mostrado. (Figura reproduzida da referência [26].)

$$\mu_{z|\mathbf{P}} = m(z) - M = 5 \log \left( \frac{d_L(z)}{Mpc} \right) + 25, \quad (3.45)$$

onde  $m$  e  $M$  são, respectivamente, a magnitude aparente e absoluta da fonte, e  $d_L$  é a distância luminosidade expressa por

$$d_L(z; \mathbf{P}) = (1 + z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z'; \mathbf{P})}, \quad (3.46)$$

onde  $H(z'; \mathbf{P})$  é dado pela equação (3.41).

A figura (3.1), mostra o diagrama de Hubble para os 307 eventos de SNIa da amostra *Union* [147]. As curvas evidenciam os melhores ajustes de modelos de  $f(R)$  obtidos da análise de SNIa e SNIa + BAO + CMB. Por motivos de completeza e comparação, o modelo padrão  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_{mat,0} = 0.26$  é também mostrado. Observe que todos os modelos discutidos aqui parecem ser capazes de reproduzir bem as medidas de SNIa.

Para verificar o cenário de expansão acelerada de nosso universo, bem como as fases de dominação da radiação e da matéria, utilizaremos o gráfico da equação de estado efetiva em função de  $1 + z$  com a análise conjunta de SNIa + BAO + CMB obtidas dos melhores ajustes individuais dessas fontes. A equação de estado efetiva é dada por

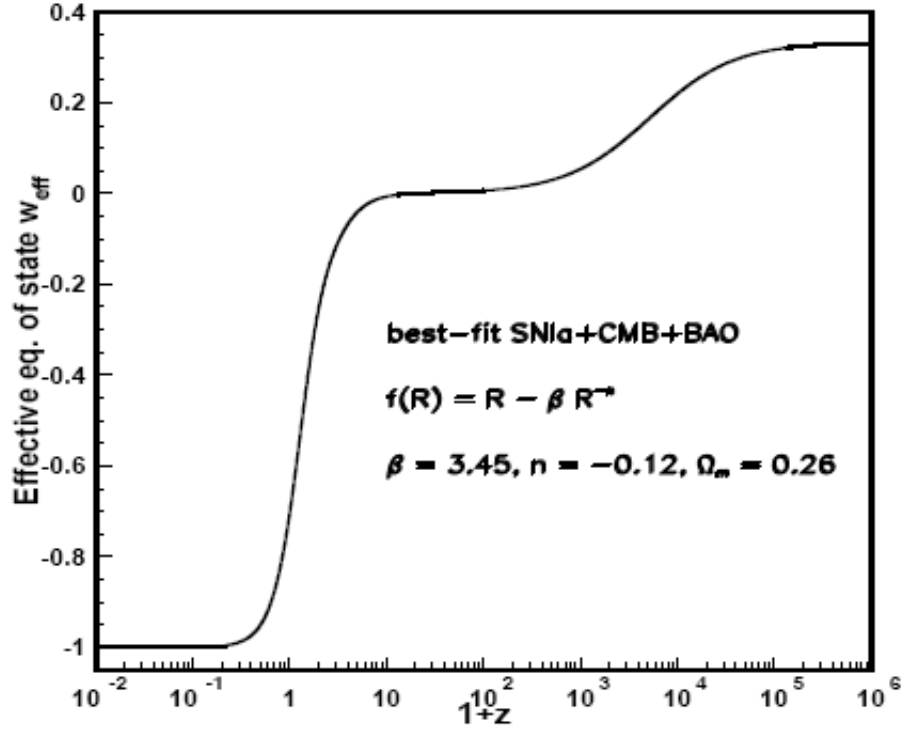
$$\omega_{eff} = -1 + \frac{2(1+z)}{3H} \frac{dH}{dz}, \quad (3.47)$$

ou seja, depende da teoria de gravidade através da função de Hubble  $H(z)$ , a qual é expressa por (3.41) na formulação de Palatini para a gravidade  $f(R)$  da forma (3.38).

O resultado da análise conjunta obtida em [26] dos dados individuais de SNeIa, BAO e CMB shift parameter, dão, para a teoria  $f(R)$  expressa por (3.38), os seguintes intervalos (para um nível de confiança de 99,7%):

$$n \in [-0.3, 0.1], \quad \Omega_{mat,0} \in [0.22, 0.32] \quad e \quad \beta \in [1.3, 5.5], \quad (3.48)$$

Os melhores ajustes obtidos são  $n = -0.12$ ,  $\beta = 3.45$  e conseqüentemente  $\Omega_{mat,0} = 0.26$ . Estes resultados são consistentes com os obtidos em [77, 78], usando o conjunto



**Figura 3.2:** Equação de estado efetiva como função do red-shift,  $1+z$ , para a teoria  $f(R) = R - \beta/R^n$  no formalismo de Palatini. Os valores dos parâmetros correspondem ao melhor ajuste da análise conjunta dos testes cosmológicos em [26]. (Figura reproduzida da referência [26]).

de dados de supernovas *Gold* e SNLS, respectivamente. Note que o modelo  $\Lambda$ CDM corresponde a  $n = 0$  e  $\beta = 4.38H_0^2$ .

A figura (3.2) mostra a equação de estado efetiva como função de  $1+z$  para os melhores ajustes da solução encontrada por [26] da junção entre SNIa + BAO + CMB. Note que, para esta combinação particular dos parâmetros, o universo passa pelas últimas três fases da evolução cosmológica, ou seja, dominado pela radiação ( $\omega = 1/3$ ), dominado pela matéria ( $\omega = 0$ ) e a última fase de aceleração (neste caso, com  $\omega \cong -1$ ). Conforme observado por [75], na formulação métrica dessa teoria, não é possível reproduzir este cenário; neste caso, o universo passa da era da radiação

diretamente para a expansão acelerada.

### 3.3 Universos Tipo Gödel Para a Gravidade $f(R)$ na Formulação de Palatini.<sup>2</sup>

Nas duas versões da teoria de gravidade  $f(R)$ , a estrutura causal do espaço-tempo em quatro dimensões tem localmente a mesma natureza qualitativa que aquela do espaço-tempo plano da Relatividade Especial - localmente a causalidade é mantida. A análise não-local, entretanto, é deixada em aberto e a violação da causalidade pode ocorrer. No entanto, se a gravidade é governada por uma teoria  $f(R)$  ao invés da Relatividade Geral, vários resultados, tanto de natureza teórica quanto observacional devem ser reexaminados na estrutura de gravidade  $f(R)$ . Uma questão em aberto, a qual examinamos aqui, é se essas teorias permitem soluções nas quais a causalidade é violada. Na Relatividade Geral, sabemos que existem soluções para as equações de campo que tem anomalias causais na forma de curvas do tipo-tempo fechadas (*Closed Timelike Curves*) - CTC's. O famoso modelo de Kurt Gödel em 1949 [13] é o mais bem conhecido exemplo de tais soluções, tornando evidente que a Relatividade Geral não exclui a existência de soluções com linhas de universo do tipo-tempo fechadas, apesar do seu caráter lorentziano que leva à validade local do princípio da causalidade. Esses resultados também foram denominadas de soluções rotatórias de Gödel. A motivação de Gödel em achar soluções rotatórias das equações da Relatividade Geral está fortemente calcada na sua tentativa de mostrar que a mesma admite um conceito de tempo ligado à filosofia idealista, mais exatamente ao conceito kantiano de tempo [148]. A idéia de Gödel é assim negar a existência de um tempo real (no sentido de objetivamente definido independentemente do observador). Para Gödel, a Teoria da Relatividade assevera a visão kantiana na medida em que ela nega a existência de um tempo objetivo newtoniano, pois todos nós conhecemos

---

<sup>2</sup>Nesta secção, e somente nela, usaremos a assinatura da métrica como sendo (+ - - -)

o resultado da relatividade da simultaneidade. No entanto, para ele o resultado da relatividade da simultaneidade não é um argumento forte para a negação da objetividade do tempo, pois quando relativizamos o tempo nós o fazemos em relação a observadores específicos assumindo que estes se movem com velocidades relativas  $\mathbf{v}$  (para mais detalhes veja [149]).

Tecnicamente, o modelo de Gödel é uma solução das equações de Einstein com constante cosmológica  $\Lambda$  para matéria de densidade  $\rho$ , mas também pode ser interpretado como uma solução de um fluido perfeito (com pressão  $p = \rho$ ) sem constante cosmológica. Neste contexto, foi mostrado por Bampi e Zordan [150] (para generalização veja [151]) que toda solução do tipo Gödel das equações de Einstein com tensor energia momento de um fluido perfeito é necessariamente isométrica ao espaço-tempo de Gödel. Para um melhor entendimento dessa solução perceba que todos os modelos cosmológicos que descrevem tanto a geometria do espaço-tempo quanto a matéria responsável pela modificação desta estrutura, constituem configurações idealizadas. O projeto de Gödel para a construção de sua geometria não difere das demais, que em geral são detentoras de alguma forma de simetria, para facilitar os cálculos, e governadas por algum fluido perfeito, ideal e livre de qualquer forma de ação externa. Além disso, é acrescentado a essas geometrias a energia do vácuo que representa todos os campos de matéria existentes em seus estados fundamentais. Assim, a geometria de Gödel, que se estabelece a partir de uma teoria de gravitação, possui como fontes principais os seguintes componentes:

- um fluido perfeito, sem nenhuma interação entre suas partes;
- a energia do vácuo, representada por  $\Lambda$ .

Apesar de não encontrarmos nada de novo nesta geometria, ao analisarmos as características cinemáticas dos observadores que se locomovem com a matéria, observamos que o fluido cósmico que gera a geometria de Gödel possui uma rotação

intrínseca, ou seja, existe uma vorticidade local. Isso tem como consequência a existência de CTC. De forma geral, a linha de universo de um observador é caracterizada por uma curva do tipo-tempo aberta e contínua no espaço-tempo, de modo que encontrar curvas do tipo-tempo fechadas - CTC's - se evidencia como algo incomum. A existência dessa CTC representa uma violação explícita das idéias que caracterizam o tempo e conseqüentemente a relação causa e efeito. No entanto, se mostrava em consonância com a motivação de Gödel. De uma perspectiva minkowskiana, em curvas do tipo-tempo se aproximar do futuro significa se afastar do passado. Porém, na geometria de Gödel, embora todos os corpos materiais viagem sempre dentro do limite do cone de luz, é percebido que estes podem passar infinitas vezes por um mesmo ponto do espaço-tempo permitindo aos observadores voltarem ao passado [152]!

Uma vez que estamos tratando de teorias alternativas de gravitação, uma pergunta é pertinente: será que em outra formulação da gravidade é possível encontrar CTC's e conseqüentemente estas gerarem situações acausais? Se positivo, em que condições podemos evitar a violação da causalidade, se é que podemos? Com a nova proposta de generalização das equações de campo de Einstein verificaremos sob que condições a noção de causalidade é recuperada quando utilizamos as teorias  $f(R)$  de gravidade no formalismo de Palatini (essa análise já foi realizada para gravidade  $f(R)$  na formulação métrica [153, 154]) visto que em qualquer teoria física o conceito de causalidade é de fundamental importância.

### 3.3.1 A Geometria Tipo-Gödel.

A métrica tipo-Gödel do espaço-tempo que focamos atenção é dada em coordenadas cilíndricas [coordenadas  $(r, \phi, z)$ ] por [155]

$$ds^2 = [dt^2 + H(r)d\phi]^2 - D^2(r)d\phi^2 - dr^2 - dz^2, \quad (3.49)$$

onde

$$H(r) = \frac{4\omega}{m^2} \sinh^2\left(\frac{mr}{2}\right), \quad D(r) = \frac{1}{m} \sinh(mr). \quad (3.50)$$

com  $\omega$  e  $m$  sendo parâmetros constantantes tais que  $\omega^2 > 0$  e  $-\infty \leq m^2 \leq +\infty$ .<sup>3</sup> Todas as métricas tipo-Gödel são caracterizadas por dois parâmetros  $m$  e  $\omega$ : pares idênticos de  $(m^2, \omega^2)$  descrevem espaços-tempos isométricos [155, 156, 157]. Soluções de Gödel são um caso particular de  $m^2 > 0$  das classes de espaço-tempo na qual  $m^2 = 2\omega^2$ .

O elemento de linha da métrica (3.49) pode também ser escrita como

$$ds^2 = dt^2 + 2H(r)dtd\phi - dr^2 - G(r)d\phi^2 - dz^2 \quad (3.51)$$

onde  $G(r) = D^2 - H^2$ . Dessa forma fica claro a existência de CTC do tipo-Gödel, isto é, círculos definidos por  $t, z, r = \text{const}$  dependente do comportamento da função  $G(r)$ . Se  $G(r) < 0$  para um certo intervalo de  $r$  ( $r_1 < r < r_2$ , por exemplo), círculos de Gödel definidos por  $t, z, r = \text{const}$  são CTC's. É fácil mostrar que as características causais de espaços-tempos do tipo-Gödel dependem dos dois parâmetros independentes  $m$  e  $\omega$ . Para  $m = 0$  existe um raio crítico, definido por  $\omega r_c = 1$ , tal que para todo  $r > r_c$  existem círculos de Gödel não-causais. Para  $m^2 = -\mu^2 < 0$ , existe uma sequência infinita alternando entre regiões causais e não-causais para  $t, z, r = \text{const}$  com e sem círculos de Gödel. Para  $0 < m^2 < 4\omega^2$ , círculos de Gödel não-causais ocorrem para  $r > r_c$  tal que

---

<sup>3</sup>Para  $m^2 = -\mu^2$  as funções métricas  $H(r)$  e  $D(r)$  tornam-se funções circulares, isto é,  $H(r) = (4\omega/\mu^2) \sin^2(\mu r/2)$  e  $D(r) = \mu^{-1} \sin \mu r$ , enquanto que no caso limite  $m = 0$  elas tornam-se  $H(r) = \omega r^2$  e  $D(r) = r$ .

$$\sinh^2\left(\frac{mr_c}{2}\right) = \left[\frac{4\omega^2}{m^2} - 1\right]^{-1}. \quad (3.52)$$

Quando  $m^2 = 4\omega^2$ , o raio crítico  $r_c \rightarrow \infty$ . Então para  $m^2 \geq 4\omega^2$  não existem CTC, e, portanto, a quebra de causalidade do tipo-Gödel é evitada.

Usando as equações (3.49) e (3.50) é fácil mostrar que o escalar de Ricci para a métrica tipo-Gödel tem um valor constante  $R = 2(m^2 - \omega^2)$ . Os cálculos podem ser simplificados se fizermos a seguinte escolha de base:

$$\theta^0 = dt + H(r)d\phi, \quad \theta^1 = dr, \quad (3.53)$$

$$\theta^2 = D(r)d\phi, \quad \theta^3 = dz, \quad (3.54)$$

relativamente a qual o elemento de linha (3.49) tem a forma

$$ds^2 = \eta_{AB}\theta^A\theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2. \quad (3.55)$$

Nesta base, as equações de campo (2.47) são escritas como

$$f'G_{AB} = \kappa T_{AB} - \frac{1}{2}(\kappa T + f)\eta_{AB}, \quad (3.56)$$

onde levamos em conta que para universos tipo-Gödel o escalar de Ricci tem valor constante. Um cálculo direto das componentes diferentes de zero do tensor de Einstein fornece

$$G_{00} = 3\omega^2 - m^2, \quad G_{11} = G_{22} = \omega^2, \quad G_{33} = m^2 - \omega^2. \quad (3.57)$$

Tendo estabelecido os ingredientes base do problema da causalidade em gravidade  $f(R)$  de Palatini, examinaremos a seguir se estas teorias permitem soluções causais ou não causais.

### 3.3.2 Causalidade em um Universo Tipo-Gödel.

Conforme mostrado em [153], um importante elemento relacionado ao problema da causalidade em universos tipo-Gödel é a fonte de matéria. Nesta seção examinaremos a questão de como fontes de matéria poderiam gerar soluções causais do tipo-Gödel em gravidade  $f(R)$  de Palatini. Consideraremos três fontes distintas de matéria, a saber, um fluido perfeito, um campo escalar e a combinação de um fluido perfeito com um campo escalar.

### 3.3.3 Fluido Perfeito.

Primeiramente consideraremos como fonte de matéria um fluido perfeito de densidade  $\rho$  e pressão  $p$  cujo tensor energia-momento (escrito na base de tetradas) é

$$T_{AB}^{(M)} = (\rho + p)u_A u_B - p\eta_{AB}. \quad (3.58)$$

Substituindo em (3.56) e usando (3.57) as equações de campo reduzem-se à

$$2(3\omega^2 - m^2)f' + f = \kappa(\rho + 3p), \quad (3.59)$$

$$2\omega^2 f' - f = \kappa(\rho - p), \quad (3.60)$$

$$2(m^2 - \omega^2)f' - f = \kappa(\rho - p). \quad (3.61)$$

Combinando as equações (3.60) e (3.61), obtemos a expressão  $(m^2 - 2\omega^2)f' = 0$ . Geralmente se exige das teorias  $f(R)$  que  $f' \neq 0$  e positivo. Esta é a condição para manter inalterado o sinal da constante de gravitação de Newton efetiva (veja por exemplo [158, 159, 160]). Portanto, devemos ter  $m^2 = 2\omega^2$  o que define a métrica de Gödel. Então as equações de campo são reescritas como

$$m^2 = 2\omega^2, \quad (3.62)$$

$$\kappa p = \frac{f}{2}, \quad (3.63)$$

$$\kappa \rho = m^2 f' - \frac{f}{2}, \quad (3.64)$$

onde  $f$  e  $f'$  são avaliados em  $R = m^2$ . Este resultado pode ser visto como um extensão dos resultados da Relatividade Geral de Bampi e Zordan [150] para o contexto da gravidade  $f(R)$  no formalismo de Palatini, no sentido de que, para arbitrários  $\rho$  e  $p$  (com  $p \neq -\rho$ ), toda solução de fluido perfeito da gravidade  $f(R)$  de Palatini, que satisfaz a condição  $f' > 0$ , é necessariamente isométrico à geometria de Gödel.

A respeito das característica causais dessas soluções primeiro notaremos que, desde que sejam isométricas à geometria de Gödel, elas exibem CTC's, isto é, círculos não-causais na qual o raio crítico  $r_c$  é dado pela equação (3.52). Entretanto, levando-se em conta as equações (3.63) e (3.64), nós temos que, em uma teoria de gravidade  $f(R)$ ,  $r_c$  é dado por

$$r_c = 2 \sinh^{-1}(1) \sqrt{\frac{2f'}{2\kappa\rho + f}}, \quad (3.65)$$

mostrando-se evidente que o raio crítico, acima do qual existe um círculo não-causal, depende tanto da teoria de gravidade como do conteúdo material.

Investigando a causalidade para uma específica teoria de gravidade  $f(R)$  na formulação de Palatini, notamos que, na Relatividade Geral, as equações (3.63) e (3.64) reduzem-se à  $\kappa p = \kappa \rho = m^2/2$ , implicando que tanto a densidade quanto a pressão serão positivas. Entretanto, para uma teoria descrita por uma dada  $f(R)$  e um valor fixo de  $m^2$  as equações (3.63) e (3.64) definem a pressão e a densidade de energia, não necessariamente positivas. Desde que para um fluido perfeito essas quantidades estejam relacionadas, nós gostaríamos que elas obedecessem à condição de energia fraca (WEC), ou seja, impomos que

$$m^2 f'(m^2) - \frac{f(m^2)}{2} \geq 0. \quad (3.66)$$

Uma vez que todas as quantidades da desigualdade (3.66) são avaliadas em  $R = m^2$ , elas podem naturalmente limitar, para uma dada  $f(R)$ , os valores possíveis de  $m^2$ . Este limite se revela dentro do limite do raio crítico, dado por

$$r_c = \frac{2}{m} \sinh^{-1}(1), \quad (3.67)$$

e também dentro do limite da “rotação”  $\omega$ .

Para exemplificar, investigaremos a existência de CTC no modelo  $f(R) = R - \frac{\beta}{R^n}$ . Na aproximação de Palatini, a análise da evolução cosmológica pelo estudo dos pontos fixos e estabilidade contra perturbações, mostraram que, com  $n > -1$  e  $\beta > 0$  essas teorias admitem os três cenários de fase inflacionária do modelo cosmológico padrão [78]. De fato, a compatibilidade com os dados observacionais, tais como as de supernovas do tipo Ia (SNeIa) + os picos da oscilação acústica de bárions (BAO) + radiação cósmica de fundo (CMBR) examinados nas referências [26, 27, 77, 78, 161], vincula os parâmetros  $n$  e  $\beta$  para esta teoria no intervalo  $n \in [-0.3, 0.3]$  e  $\beta \in [1.3, 7.1]$  em um nível de confiança de 99.7%. Impondo a condição de energia fraca (WEC), equação (3.66), encontramos que os valores de  $m$  estão vinculados pela desigualdade

$$m^{2n+2} + (2n + 1)\beta \geq 0. \quad (3.68)$$

Levando-se em conta a análise de estabilidade, a qual exige  $\beta > 0$  e  $n > -1$  [78], raízes reais de  $m$  para a equação (3.68) podem ocorrer somente no intervalo  $-1 < n < -0.5$ . No entanto, como vimos acima,  $n = -0.3$  é o limite inferior encontrado por esses parâmetros. Então concluímos que não existe  $m$  real que satisfaça a equação (3.67), isto é, de acordo com os dados observacionais e análise de esta-

bilidade, a gravidade  $f(R)$  de Palatini dada por (3.38) juntamente com um fluido perfeito como fonte da geometria de Gödel, não pode obedecer à condição de energia positiva (3.66). Neste sentido, estas teorias remediaram a patologia causal na forma de curvas do tipo-tempo fechadas as quais são permitidas na Relatividade Geral.

### 3.3.4 Campo Escalar.

Consideremos agora como fonte da geometria um campo escalar  $\Phi(z)$  com um tensor energia-momento dado por

$$T_{AB}^{(S)} = \Phi_{|A}\Phi_{|B} - \frac{1}{2}\eta_{AB}\Phi_{|M}\Phi_{|N}\eta^{MN}, \quad (3.69)$$

onde a barra vertical denota componentes da derivada covariante relativamente a base local  $\theta^A = e_\alpha^{(A)} dx^\alpha$  [veja equação (3.53)]. É fácil mostrar que o campo escalar da forma  $\Phi(z) = ez + \text{const}$  satisfaz a equação do campo escalar  $\square\Phi = \eta^{AB}\nabla_A\nabla_B\Phi = 0$  para uma amplitude constante  $e$  de  $\Phi(z)$  [155]. Então as componentes diferentes de zero do tensor energia-momento para este campo são

$$T_{00}^{(S)} = -T_{11}^{(S)} = -T_{22}^{(S)} = T_{33}^{(S)} = \frac{e^2}{2}, \quad (3.70)$$

e as equações de campo (3.56) para esta fonte de matéria são

$$(3\omega^2 - m^2)f' + \frac{f}{2}, \quad (3.71)$$

$$\omega^2 f' - \frac{f}{2} = 0, \quad (3.72)$$

$$(m^2 - \omega^2)f' - \frac{f}{2} = \kappa e^2. \quad (3.73)$$

Combinando a equação (3.71) com a equação (3.72), obtemos a relação  $(4\omega^2 - m^2)f' = 0$ . Consideramos teorias  $f(R)$  que satisfazem a condição  $f' > 0$ , então

devemos ter  $m^2 = 4\omega^2$ . Estas condições fazem surgir uma classe única de soluções tipo-Gödel dada por

$$m^2 = 4\omega^2, \quad (3.74)$$

$$f' = \frac{\kappa e^2}{2\omega^2}, \quad (3.75)$$

$$f = \kappa e^2, \quad (3.76)$$

onde  $f$  e  $f'$  são avaliados em  $R = 3m^2/2$ . Claramente, temos uma classe de soluções sem violação da causalidade do tipo-Gödel ( $r_c \rightarrow \infty$ ). Observe que para este tipo de fonte, a teoria  $f(R)$  descrita por (3.38) dá a seguinte equação para  $m^2$

$$m^2 = \frac{2}{3} \left[ \frac{\beta}{2}(n+3) \right]^{1/(n+1)}, \quad (3.77)$$

independente do valor da intensidade do campo escalar. Para o intervalo de  $n \in [-0.3, 0.3]$  e o valor particular de  $\beta = 3.45$ , obtemos  $m \in [2.5, 1.6]$ , fornecendo, portanto, várias “rotações”  $\omega$ , sem violação de causalidade. Para valores diferentes de  $\beta$  teremos outros intervalos de  $m$  sem violação da causalidade no universo de Gödel.

### 3.3.5 Fluido Perfeito + Campo Escalar.

Agora consideraremos para a fonte de matéria na geometria de Gödel a combinação de um tensor-energia momento dado por

$$T_{AB} = T_{AB}^{(M)} + T_{AB}^{(S)}, \quad (3.78)$$

onde  $T_{AB}^{(M)}$ , corresponde a um fluido perfeito expresso por (3.58) e  $T_{AB}^{(S)}$  é dado por (3.69). As equações de campo (3.56) para esta combinação dão

$$\kappa e^2 = (m^2 - 2\omega^2)f', \quad (3.79)$$

$$\kappa p = \frac{1}{2}(2\omega^2 - m^2)f' + \frac{1}{2}, \quad (3.80)$$

$$\kappa \rho = \frac{1}{2}(6\omega^2 - m^2)f' - \frac{f}{2}, \quad (3.81)$$

onde  $f$  e  $f'$  são avaliados em  $R = 2(m^2 - \omega^2)$ . Uma classe de soluções causais tipo-Gödel para estas equações que satisfaz a condição  $f' > 0$  é dado por

$$m^2 = 4\omega^2, \quad (3.82)$$

$$\kappa \rho = -\kappa p = \omega^2 f' - \frac{f}{2}, \quad (3.83)$$

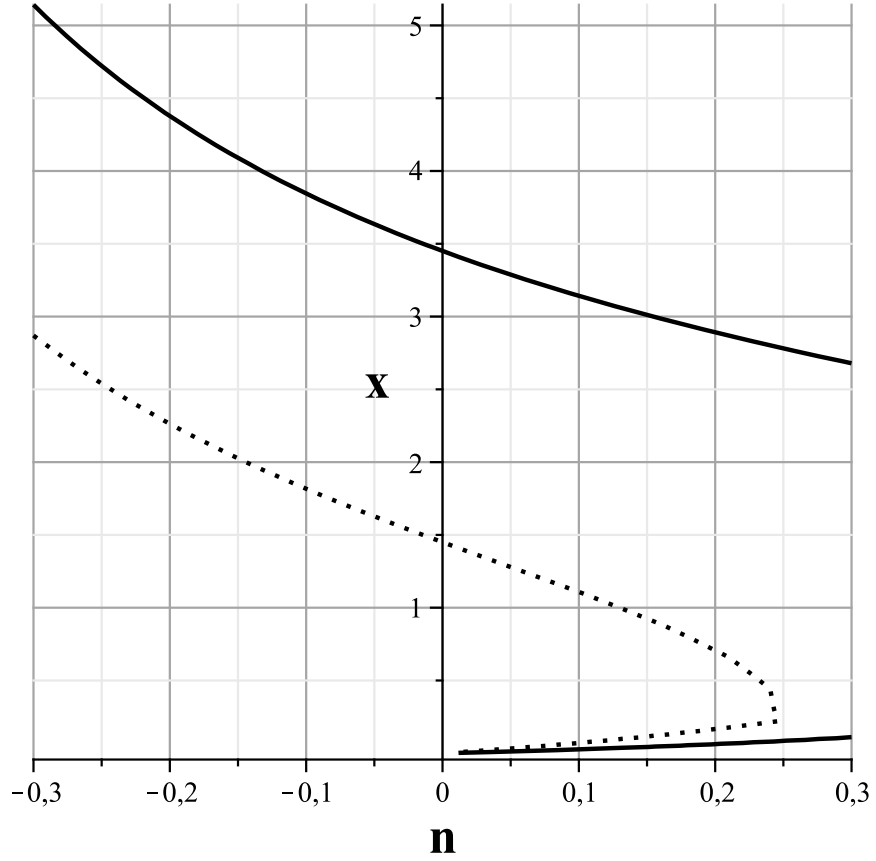
$$\kappa e^2 = 2\omega^2 f', \quad (3.84)$$

tal que das equações (3.52) e (3.82), claramente observamos que  $r_c \rightarrow \infty$ . Portanto para esta combinação de campos materiais podemos encontrar soluções sem violação da causalidade do tipo-Gödel (círculos de Gödel).

Como ilustração, agora examinaremos se teorias descritas por (3.38) admitem estes tipos de soluções causais. Tomando a equação (3.83) e considerando válida a WEC, facilmente obtemos que a densidade de energia deve obedecer

$$(n + 3)\beta - 2x^{n+1} \geq 0, \quad (3.85)$$

onde  $x = 3m^2/2$ . Considerando que  $\beta > 0$ , estas equações admitem soluções reais se



**Figura 3.3:** Algumas soluções da equação (3.86) para  $\beta = 3.45$  e diferentes intensidades do campo escalar:  $x_0 = 1.45$  (linha pontilhada) e  $x_0 = 3.45$  (linha contínua).

$n \geq -3$ . Então, de acordo com os dados observacionais, o intervalo encontrado para  $n$  satisfaz o vínculo (3.85). Além da restrição (3.85), os valores de  $n$  e  $\beta$  também satisfazem a equação

$$x^{n+1} - x_0 x^n + n\beta = 0, \quad (3.86)$$

que resulta de (3.84) e (3.38). Aqui  $x_0 = 3\kappa e^2$  é o valor de  $x$  para  $n = 0$ . No intervalo de  $n \in [-0.3, 0.3]$  determinado das observação [26, 27, 77, 78, 161], a equação (3.86) apresenta uma ou mais soluções para cada  $n$  dependendo da intensidade do campo

escalar (vinculado por  $x_0$ ) e o parâmetro  $\beta$  da teoria. Na figura (3.3), mostramos algumas dessas soluções para o valor particular de  $\beta = 3.45$  (melhor ajuste encontrado para  $\beta$  em [26]) e duas diferentes amplitudes do campo escalar:  $x_0 = 1.45$  linha pontilhada e  $x_0 = 3.45$  linha contínua. Como pode ser visto, para cada intensidade do campo escalar existe uma única solução para  $n \leq 0$  enquanto existem dois diferentes valores de  $x$ , ou seja, dois valores possíveis de  $m^2$  para cada valor de  $n > 0$ . Isto significa que neste último limite obtemos causalidade para duas diferentes “rotações”  $\omega$ .

Soluções não-causais do tipo-Gödel são dadas pelo parâmetro  $m$  e  $\omega$  tal que  $0 < m^2 < 4\omega^2$ . A seguir examinaremos uma classe de soluções não-causais do tipo-Gödel das equações (3.79)-(3.81) dadas por

$$m^2 = 3\omega^2, \quad (3.87)$$

$$\kappa p = -\frac{\omega^2}{2} f' + \frac{f}{2}, \quad (3.88)$$

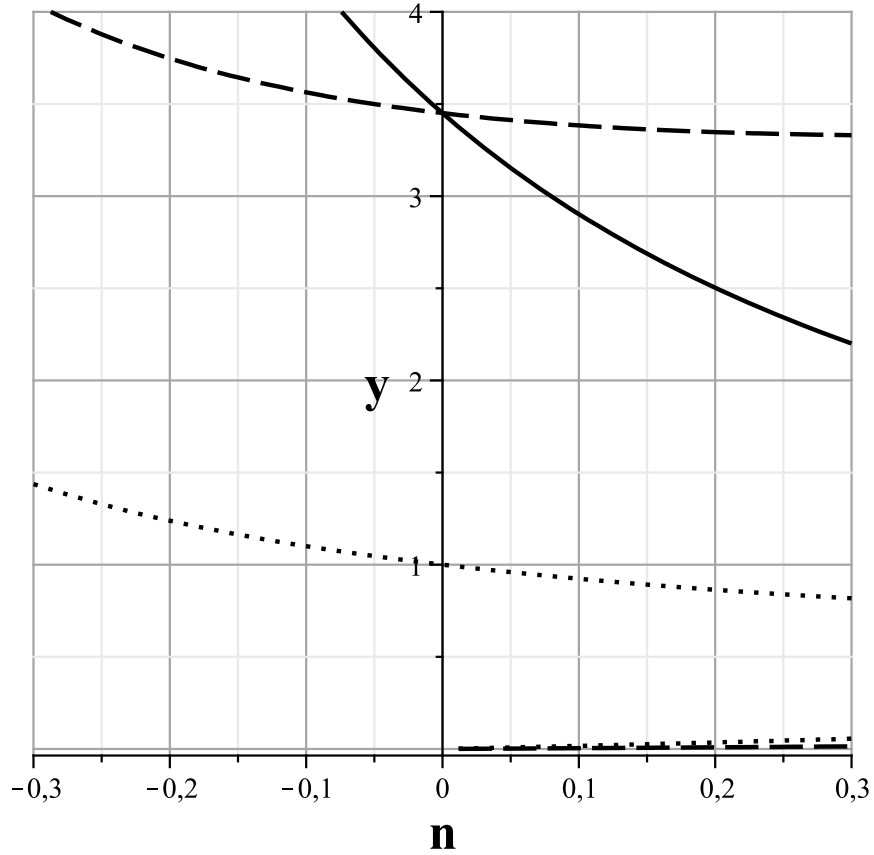
$$\kappa \rho = \frac{3\omega^2}{2} f' - \frac{f}{2}, \quad (3.89)$$

$$\kappa e^2 = \omega^2 f', \quad (3.90)$$

onde aqui  $f$  e  $f'$  são calculadas em  $R = 4\omega^2$ . Combinando as equações (3.90) e (3.88), encontramos que os valores de  $n$  e  $\beta$  devem satisfazer a equação

$$y^{n+1} - y_0 y^n + \frac{n\beta}{4^{n+1}} = 0, \quad (3.91)$$

onde definimos  $y = \omega^2$  e  $y_0 = \kappa e^2$  o valor de  $y$  para  $n = 0$ . No intervalo de  $n \in [-0.3, 0.3]$ , obtidos das observações, a equação (3.91) apresenta também uma ou mais soluções para cada valor de  $n$ , dependente do valor de  $y_0$  e  $\beta$ . Na figura (3.4), mostramos algumas dessas soluções para  $\beta = 3.45$  (o melhor ajuste encontrado por



**Figura 3.4:** Algumas soluções da equação (3.91) para  $\beta = 3.45$  e diferentes intensidades do campo escalar:  $y_0 = 1.0$  (linha pontilhada) e  $y_0 = 3.45$  (linha tracejada). A linha contínua representa o valor superior da solução da desigualdade (3.92) para  $\beta = 3.45$ .

[26]), e duas distintas intensidades do campo escalar:  $y_0 = 1.0$  (linha pontilhada) e  $y_0 = 3.45$  (linha tracejada). Como podemos inferir dos gráficos, a equação (3.91) tem uma única solução para cada  $n \leq 0$  enquanto que para  $n > 0$  existem duas soluções no intervalo considerado. No entanto, se considerarmos a positividade da densidade de energia (WEC), estas soluções ficam restritas pela desigualdade

$$y^{n+1} - \frac{\beta}{4^n} \left( 1 + \frac{3n}{4} \right) \leq 0, \quad (3.92)$$

que resulta da primeira equação de (3.88) e a teoria dada por (3.38). Na figura (3.4),

as soluções  $\omega^2$  que obedecem à desigualdade (3.92) estão todas situadas abaixo da linha contínua. Vemos que as soluções da equação (3.91) para  $n \leq 0$  ainda obedecem à condição de densidade de energia positiva do fluido perfeito para o campo escalar, mas apenas para certas faixas de valores (por exemplo, na figura (3.4), para  $y_0 \in [1.0, 3.45]$ ). Para  $n \geq 0$  temos soluções duplas apenas no intervalo  $y_0 \in [1.0, 2.2]$ . Portanto concluímos que para esta combinação de campos de matéria para a teoria de gravidade dada por (3.38) que obedece à condição de energia positiva, só pode haver violação de causalidade do tipo-Gödel (círculos de Gödel) em duas situações: (i)  $n \leq 0$  e  $1.0 \leq y_0 \leq 3.45$  e (ii)  $n > 0$  e  $1.0 \leq y_0 \leq 2.2$ .

Como esperado, os resultados dessas combinações de fontes de matéria refletem os efeitos obtidos nas seções (3.3.3) e (3.3.4), isto é, com apenas um fluido perfeito como conteúdo material, no contexto de teorias  $f(R)$  de gravidade do tipo (3.38) na formulação de Palatini, verificamos que a solução encontrada por Gödel na Relatividade Geral, não é obtida nessa nova proposta de gravidade, evitando, portanto, a violação da causalidade na forma de curvas do tipo-tempo fechadas. Da mesma forma, quando se tem apenas um campo escalar como fonte de matéria, as teorias  $f(R)$  no formalismo de Palatini do tipo (3.38), fornece uma única solução onde o princípio da causalidade é recuperado, mesmo tendo a geometria de Gödel como solução. O que esta seção nos mostrou é que combinando um fluido perfeito mais um campo escalar como fontes materiais, obtemos intervalos dos parâmetros  $m$  e  $\omega$  da geometria de Gödel, que podem satisfazer a causalidade ou não, mostrando ser uma resposta razoável ao que se esperaria.

# Capítulo 4

## Conclusões e Perspectiva

### 4.1 Conclusões

No Capítulo 1 desta dissertação, fizemos uma breve revisão da Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein. Expressamos as equações que regem o universo na estrutura de FLRW, além da alteração feita nessas equações de campo quando foi inserida a constante cosmológica, na medida em que se esperava um universo estático. Mostramos também que existe uma ligação importante entre as medidas de distância de supernovas do tipo Ia e a teoria de gravidade, mostrando ser bastante útil para vincular os possíveis parâmetros livres da teoria de gravidade do tipo  $f(R)$ . Além disso, observamos que as condições de energia na Relatividade Geral nos mostram certos vínculos sobre o conteúdo de matéria-energia do universo que não condiz com o que é observado atualmente, corroborando com nossa motivação de modificação da Relatividade Geral.

No Capítulo 2, fizemos uma breve revisão histórica da motivação que houve pela alteração da Relatividade Geral e da necessidade atual dessa modificação. Em seguida, adotamos a postura de que a Teoria da Relatividade Geral não é a teoria definitiva de gravitação e mostramos as teorias alternativas de gravidade denomi-

nadas de gravidade  $f(R)$ . Desenvolvemos seus dois formalismos, tanto o métrico quanto o de Palatini sendo dada maior ênfase a este último. No formalismo de Palatini, fizemos o desenvolvimento sistemático e detalhado das equações de campo da gravidade  $f(R)$ , obtendo posteriormente as equações de FLRW generalizadas nessa formulação. Como exemplo, utilizamos uma classe de teorias descrita por  $f(R) = R - \beta/R^n$  e vinculamos os parâmetros livres da teoria com os dados recentes de supernovas do tipo Ia. Para complementar, verificamos a equivalência entre os formalismos métrico e Palatini com as teorias de Brans-Dicke. Em seguida, obtivemos as equações generalizadas do tensor curvatura, do tensor de Einstein, e do escalar de Ricci. Em resumo, o capítulo 2 revê como se desencadeou o interesse pela modificação da Relatividade Geral além de nos fornecer as ferramentas matemáticas necessárias para o estudo de uma teoria de gravidade modificada por  $f(R)$ , tanto no formalismo métrico quanto no formalismo de Palatini.

No Capítulo 3, desenvolvemos as equações de Friedmann para uma parametrização particular da forma funcional  $f(R)$ , a saber,  $f(R) = R - \beta/R^n$ . Ao analisar como teorias  $f(R)$  de gravidade na formulação de Palatini, permitem espaços-tempos onde a causalidade pode ser violada, percebemos que as soluções do tipo-Gödel para um fluido perfeito, considerando os parâmetros livres da teoria vinculados pelas fontes observacionais recentes de supernovas do tipo Ia, e, também, a densidade de matéria desse fluido positiva, concluímos que essas teorias não admitem, como soluções de suas equações de campo, a geometria de Gödel juntamente com este conteúdo material. No entanto, a mesma análise feita agora com um campo escalar mostrou que existe uma única solução da geometria de Gödel, evitando a violação de causalidade. Finalizando, fizemos também esse mesmo estudo considerando a combinação tanto de um campo escalar como de um fluido perfeito como fontes dessa geometria. Nesse cenário, vimos que existem tanto soluções na forma de curvas tipo-tempo fechadas, como soluções sem violação de causalidade.

## 4.2 Perspectivas

No futuro, pretendemos estudar outras formas funcionais existentes na literatura que forneçam uma abrangência maior de resultados para a gravidade  $f(R)$  na formulação de Palatini, tais como os modelo teóricos de Wayne Hu [162], Eric V. Linder [163], Ioav Waga [164] e Alexei A. Starobinsky [165], respectivamente expresso por

1.  $f(R) = R - m^2 \frac{c_1(R/m^2)^n}{c_2(R/m^2)^n + 1}$ ,
2.  $f(R) = R - cr(1 - e^{-R/r})$ ,
3.  $f(R) = R - R_s \beta \left\{ 1 - \left[ 1 + \left( \frac{R}{R_*} \right)^n \right]^{-1/\beta} \right\}$ ,
4.  $f(R) = R + \lambda R_0 \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-n} - 1 \right]$ .

Após esse estudo preliminar, tentaremos ajustar os parâmetros livres dessas teorias com testes comológicos de medidas de distância luminosidade de supernovas do tipo Ia,  $d_L(z, \mathbf{P})$ , bem como os testes referentes a função de Hubble,  $H(z)$  e os de lookback time,  $t_L(z, \mathbf{P})$  (definido como a diferença entre a idade do universo hoje e sua idade em um red-shift  $z$ ), matematicamente expresso por

$$t_L(z, \mathbf{P}) = t_H \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')E(z', \mathbf{P})}, \quad (4.1)$$

onde  $t_H = 1/H_0 = 9.8h^{-1}$  Gyr é o tempo de Hubble,  $E(z', \mathbf{P})$  é a função de Hubble sem dimensão e  $\{\mathbf{P}\}$  é o conjunto de parâmetros caracterizando o modelo cosmológico.

# Apêndice A

## A Variação de $R_{\mu\nu}$ .

O tensor de curvatura é dado por

$$R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} = \partial_{\beta}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\lambda}. \quad (\text{A.1})$$

Fazendo a seguinte transformação em todas as conexões

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \longrightarrow \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}, \quad (\text{A.2})$$

teremos,

$$R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} \longrightarrow R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} + \delta R_{\mu\beta\nu}^{\alpha}, \quad (\text{A.3})$$

onde  $\delta R_{\mu\beta\nu}^{\alpha}$  é a expressão procurada para que possamos contrair o 1º e o 3º índices e obtermos a variação de  $R_{\mu\nu}$ .

Defenimos um novo tensor de curvatura como

$$\tilde{R}_{\mu\beta\nu}^{\alpha} = \partial_{\beta}(\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}) - \partial_{\nu}(\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}) + (\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha})(\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) \quad (\text{A.4})$$

$$-(\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha})(\Gamma_{\beta\mu}^{\lambda} + \delta\Gamma_{\beta\mu}^{\lambda}).$$

Portanto, desenvolvendo os produtos e desprezando os termos de segunda ordem das variações das conexões, chegamos a

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\beta\nu}^{\alpha} &= R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} + \partial_{\beta}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}) - \partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}) + \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) + (\delta\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha})\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \\ &\quad - \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}(\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\lambda}) - (\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha})\Gamma_{\beta\mu}^{\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo a expressão da derivada covariante em  $\partial_{\beta}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha})$  e  $\partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha})$ , obtemos após algumas manipulações algébricas

$$\tilde{R}_{\mu\beta\nu}^{\alpha} = R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} + \tilde{\nabla}_{\beta}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}) - \tilde{\nabla}_{\nu}(\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}) + (\Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda})\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha}, \quad (\text{A.6})$$

onde  $\tilde{\nabla}$  significa a derivada covariante com respeito as novas conexões  $\Gamma$ (gama) e que portanto

$$\delta\tilde{R}_{\mu\beta\nu}^{\alpha} = \tilde{\nabla}_{\beta}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}) - \tilde{\nabla}_{\nu}(\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}) + (\Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda})\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha}. \quad (\text{A.7})$$

Contraindo o 1° e o 3° índice temos o tensor de Ricci, então

$$\delta\tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_{\alpha}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}) - \tilde{\nabla}_{\nu}(\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}) + (\Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda})\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha}. \quad (\text{A.8})$$

Observe que estamos desconsiderando qualquer simetria nos índices  $\alpha\nu$  das conexões. Caso a simetria exista (Conexões de Levi-Civita), então a expressão anterior se reduz à

$$\delta\tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_{\alpha}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}) - \tilde{\nabla}_{\nu}(\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}). \quad (\text{A.9})$$

# Apêndice B

## Equação de Einstein Generalizada.

Para o cálculo do tensor de Ricci generalizado necessitamos do tensor de curvatura generalizado a partir do qual calculamos o traço desse tensor. Então

$$\tilde{R}^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \partial_{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\beta}, \quad (\text{B.1})$$

assim, contraindo o 1° com o 3° índices, temos

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}, \quad (\text{B.2})$$

que é o tensor de Ricci generalizado. As conexões que aparecem nesse tensor são conexões também generalizados, de tal forma que

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \{\mu\nu\}^{\alpha} + \frac{T^{\alpha}_{\mu\nu}}{2f'} \quad (\text{B.3})$$

onde definimos  $T^{\alpha}_{\mu\nu} = (\delta^{\alpha}_{\mu}\partial_{\nu}f' + \delta^{\alpha}_{\nu}\partial_{\mu}f' - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}f')$ .

Nesse caso, ficamos com as seguintes associações

$$\tilde{R}_{\mu\nu} \longrightarrow \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}, \quad (\text{B.4})$$

e

$$R_{\mu\nu} \longrightarrow \{\alpha_{\mu\nu}\}. \quad (\text{B.5})$$

Portanto, deve existir alguma relação entre  $\tilde{R}_{\mu\nu}$  e  $R_{\mu\nu}$ , tal que

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \mathfrak{S}(f'), \quad (\text{B.6})$$

e quando  $f' = R$ ,  $\mathfrak{S}(f') = 0$  e portanto  $\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$ .

Buscando essa relação, iremos pelo seguinte caminho:

Substituímos a equação (B.3) em (B.2), obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} = & \partial_{\alpha}[\{\alpha_{\mu\nu}\} + \frac{T_{\mu\nu}^{\alpha}}{2f'}] - \partial_{\nu}[\{\alpha_{\mu\alpha}\} + \frac{T_{\mu\alpha}^{\alpha}}{2f'}] + [\{\alpha_{\alpha\rho}\} + \frac{T_{\alpha\rho}^{\alpha}]{\{\rho_{\mu\nu}\} + \frac{T_{\mu\nu}^{\rho}}{2f'}} \\ & - [\{\alpha_{\nu\rho}\} + \frac{T_{\nu\rho}^{\alpha}]{\{\rho_{\mu\alpha}\} + \frac{T_{\mu\alpha}^{\rho}}{2f'}} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

.

Desenvolvendo chegamos a

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} = & R_{\mu\nu} + \partial_{\alpha}[\frac{T_{\mu\nu}^{\alpha}}{2f'}] - \partial_{\nu}[\frac{T_{\mu\alpha}^{\alpha}}{2f'}] + [\{\alpha_{\alpha\rho}\}(\frac{T_{\mu\nu}^{\rho}}{2f'})] + [(\frac{T_{\alpha\rho}^{\alpha}}{2f'})\{\rho_{\mu\nu}\}] + (\frac{T_{\alpha\rho}^{\alpha}}{2f'}) (\frac{T_{\mu\nu}^{\rho}}{2f'}) \\ & - [\{\alpha_{\nu\rho}\}(\frac{T_{\mu\alpha}^{\rho}}{2f'})] - [(\frac{T_{\nu\rho}^{\alpha}}{2f'})\{\rho_{\mu\alpha}\}] - (\frac{T_{\nu\rho}^{\alpha}}{2f'}) (\frac{T_{\mu\alpha}^{\rho}}{2f'}), \end{aligned}$$

onde  $R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha} \{\alpha_{\mu\nu}\} - \partial_{\nu} \{\alpha_{\mu\alpha}\} + \{\alpha_{\alpha\rho}\} \{\rho_{\mu\nu}\} - \{\alpha_{\nu\rho}\} \{\rho_{\mu\alpha}\}$ .

Colocando-se em evidência na equação (B.7) os termos com o fator  $\frac{1}{f'^2}$ , temos após algumas manipulações algébricas

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4f'^2} [-2(\partial_\alpha f')(\delta_\mu^\alpha \partial_\nu f' + \delta_\nu^\alpha \partial_\mu f' - g_{\mu\nu} g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda f') + 2(\partial_\nu f')(\delta_\mu^\alpha \partial_\alpha f' + \delta_\alpha^\nu \partial_\mu f' - g_{\mu\alpha} g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda f') + \\ & (\delta_\alpha^\nu \partial_\rho f' + \delta_\rho^\alpha \partial_\nu f' - g_{\alpha\rho} g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda f')(\delta_\mu^\rho \partial_\nu f' + \delta_\nu^\rho \partial_\mu f' - g_{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \partial_\lambda f') - (\delta_\nu^\alpha \partial_\rho f' + \\ & \delta_\rho^\alpha \partial_\nu f' - g_{\nu\rho} g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda f')(\delta_\mu^\rho \partial_\alpha f' + \delta_\alpha^\rho \partial_\mu f' - g_{\mu\alpha} g^{\rho\lambda} \partial_\lambda f')] \end{aligned}$$

que pode ser resumida em

$$\frac{3\nabla_\mu f' \nabla_\nu f'}{2f'^2}, \quad (\text{B.8})$$

onde agora a derivada covariante  $\nabla_\mu$  deve ser calculada com as conexões de Levi-Civita da métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Cosiderando agora na equação (B.7) os termos de  $\frac{1}{f'}$ , teremos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4f'} [4 \{ \rho_{\mu\nu} \} \partial_\rho f' - 2g_{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \{ \alpha_{\rho} \} \partial_\lambda f' + 2g_{\mu\alpha} g^{\rho\lambda} \{ \nu_{\rho} \} \partial_\lambda f' + 2g_{\nu\rho} g^{\alpha\lambda} \{ \rho_{\mu\alpha} \} \partial_\lambda f' \\ & - 4\partial_\mu \partial_\nu f' - 2\partial_\alpha (g_{\mu\nu} g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda f')]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Para simplificar a expressão (B.9) devemos observar que

1. Como  $f$  é uma função escalar de  $R$ , então  $\partial_\mu f' = \nabla_\mu f'$ . Assim, podemos ter:

$$\nabla_\nu (\nabla_\mu f') = \nabla_\nu (\partial_\mu f') = \partial_\nu \partial_\mu f' - \{ \rho_{\nu\mu} \} \partial_\rho f' \quad (\text{B.10})$$

ou seja,

$$\nabla_\nu \nabla_\mu f' = \partial_\nu \partial_\mu f' - \{\nu\mu^\rho\} \partial_\rho f'. \quad (\text{B.11})$$

2. Para a conexão de Levi-Civita temos que

$$\nabla_\alpha (g_{\mu\nu} g^{\alpha\lambda}) = 0, \quad (\text{B.12})$$

ou seja,

$$(\nabla_\alpha g_{\mu\nu}) g^{\alpha\lambda} + g_{\mu\nu} (\nabla_\alpha g^{\alpha\lambda}) = 0. \quad (\text{B.13})$$

Assim, podemos concluir que

$$\partial_\alpha (g_{\mu\nu} g^{\alpha\lambda}) = g_{\nu\rho} g^{\alpha\lambda} \{\mu\alpha^\rho\} - g_{\mu\nu} \{\alpha\rho\} g^{\rho\lambda} + g_{\mu\alpha} g^{\rho\lambda} \{\nu\rho\} - g_{\mu\nu} \{\alpha\rho\} g^{\rho\lambda}. \quad (\text{B.14})$$

3. Além disso, a definição do D'lambertiano nos fornece

$$g_{\mu\nu} g^{\alpha\lambda} \partial_\alpha \partial_\lambda f' = g_{\mu\nu} \square f' + g_{\mu\nu} g^{\alpha\rho} \{\lambda\rho\} \partial_\lambda f'. \quad (\text{B.15})$$

Substituindo todas essas relações em (B.9), obtemos para o termo de  $\frac{1}{f'}$  a expressão final

$$-\frac{1}{f'} [\nabla_\mu \nabla_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square] f'. \quad (\text{B.16})$$

Desta maneira o tensor de Ricci generalizado (B.2) assume a forma

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3\nabla_\mu f' \nabla_\nu f'}{2f'^2} - \frac{1}{f'} [\nabla_\mu \nabla_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square] f'. \quad (\text{B.17})$$

Para o cálculo do tensor de Einstein, definido por  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}$ , necessitamos do escalar de curvatura generalizado dado pelo traço de  $\tilde{R}_{\mu\nu}$ . Portanto, tendo em conta o traço de (B.17) teremos a relação

$$\tilde{R} = R + \frac{3(\nabla_\mu f')(\nabla^\mu f')}{2f'^2} - \frac{3\Box f'}{f'}. \quad (\text{B.18})$$

No formalismo de Palatini, as equações de movimento são

$$\tilde{R}_{(\mu\nu)} - \frac{f}{2f'}g_{\mu\nu} = \frac{k}{f'}T_{\mu\nu}, \quad (\text{B.19})$$

onde  $k = 8\pi G$  é a constante de acoplamento e  $G$  é a constante de gravitação universal Newtoniana.

Substituindo a equação (B.17) na equação (B.19) e somando em ambos os lados a expressão  $\frac{-g_{\mu\nu}\tilde{R}}{2}$ , obtemos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} &= \frac{k}{f'}T_{\mu\nu} + \frac{f}{2f'}g_{\mu\nu} - \frac{3\nabla_\mu f'\nabla_\nu f'}{2f'^2} + \frac{1}{f'}[\nabla_\mu\nabla_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box]f' \\ &\quad - \frac{g_{\mu\nu}}{2}\left[\tilde{R} - \frac{3(\nabla_\mu f')(\nabla^\mu f')}{2f'^2} + \frac{3\Box f'}{f'}\right]. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Assim, agrupando os termos com fatores semelhantes chegamos à expressão

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{k}{f'}T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}\left(\tilde{R} - \frac{f}{f'}\right) + \frac{1}{f'}(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)f' - \frac{3}{2f'^2}[(\nabla_\mu f')(\nabla_\nu f') \\ &\quad - \frac{g_{\mu\nu}}{2}(\nabla_\alpha f')^2], \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

que é a equação de Einstein generalizada.

# Referências Bibliográficas

- [1] I. Newton, *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* (Nova Cultura, São Paulo, 2000).
- [2] L. Ryder, *Introduction to General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
- [3] W. Isaacson, *Einstein: Sua vida, seu destino* (Companhia das letras, São paulo, 2007).
- [4] A. Pais, “*Sutil é o Senhor...*”: *a ciência e a vida de Albert Einstein* (Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1995).
- [5] A. Einstein, *A teoria da Relatividade Especial e Geral* (Contraponto, Rio de janeiro, 1999).
- [6] B. Lesche, *Teoria da Relatividade* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2005).
- [7] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [8] T. P. Sotiriou, *Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology*, tese de doutorado, 2007.
- [9] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, United States of America, 1972).

- [10] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley e Sons, United States of America, 1972).
- [11] T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe* (Cambridge University Press, 1993).
- [12] W. de Sitter, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **78**, 3 (1917).
- [13] K. Gödel, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 447 (1949).
- [14] A. Einstein *Sitz. Preuss. Akad. d. Wiss. Phys.-Math* **142** (1917).
- [15] E. P. Hubble, *Proc. Natl. Acad. Sci* **15**, 168 (1929).
- [16] A. R. Liddle e D. H. Lyth, “*Cosmological Inflation and the Large Scale Structure*” (Cambridge University Press, 2000).
- [17] E. J. Copeland, M. Sami e S. Tsujikawa, *Dynamics of Dark Energy, Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006).
- [18] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1998).
- [19] A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998); *Astron. J.* **117**, 707 (1999).
- [20] J. L. Tonry *et al.*, *Astrophys. J.* **594**, 1 (2003).
- [21] R. A. Knop *et al.*, *Astrophys. J.* **598**, 102 (2003).
- [22] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime* (Cambridge University Press, England, 1973).
- [23] M. Visser, *Lorentzian Wormholes* (AIP Press, New York, 1996).
- [24] S. Carroll, *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity* (Addison Wesley, New York, 2004).
- [25] E. Komatsu, *et al.*, arXiv: 1001.4538 [astro-ph.CO].

- [26] J. Santos, J. S. Alcaniz, F. C. Carvalho e N. Pires, *Phys. Letter. B* **669**, 14 (2008).
- [27] F.C. Carvalho, E. M. Santos, J. S. Alcaniz e J. Santos, *J. Cosmology Astroparticle Phys.:* JCAP **09**, 08 (2008).
- [28] H. Weyl, *Ann. Phys.* **59**, 101 (1919).
- [29] A. S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge) (1923).
- [30] R. Utiyama e B. S. DeWitt, *J. Math. Phys.* **3**, 608 (1962).
- [31] K. S. Stelle, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
- [32] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Spacetime* (Cambridge University Press, Cambridge) (1982).
- [33] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, e I. L. Shapiro, *Effective Actions in Quantum Gravity* (IOP Publishing, Bristol) (1992).
- [34] G. A. Vilkovisky *Class. Quant. Grav.*, **9**, 895 (1992).
- [35] M. Gasperini e G. Veneziano, *Phys. Lett. B.* **277**, 256 (1992).
- [36] H.-J. Schmidt, *Int. J. Geom. Meth. Phys.* **4**, 209 (2007).
- [37] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980).
- [38] J. D. Barrow e S. Cotsakis, *Phys. Lett. B* **214**, 515 (1988).
- [39] D. La e P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 376 (1989).
- [40] R. H. Brandenbergue, eprint gr-qc/9210014 (1992).
- [41] R. H. Brandenbergue, eprint gr-qc/9302014 (1993).
- [42] R. H. Brandenbergue, eprint gr-qc/9509059 (1995).

- [43] R. H. Brandenbergue, V. F. Mukhanov, e A. Sornborger, *Phys. Rev. D.* **48**, 1629 (1993).
- [44] V. F. Mukhanov e R. H. Brandenbergue, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1969 (1992).
- [45] B. Shahid-Salles, *J. Math. Phys.* **31**, 2429 (1990).
- [46] M. Trodden, V. F. Mukhanov, e R. H. Brandenbergue, *Phys. Lett. B.* **316**, 483 (1993).
- [47] S. Smith, *Astrophys. J.* **83**, 23 (1936).
- [48] F. Zwicky, *ibid.* **86**, 217 (1937).
- [49] S. M. Faber e A. H. Rots, *Astron. Astrophys.* **26**, 483 (1973).
- [50] V. C. Rubin, W. K. Ford, Jr. e N. Thonnard, *Astrophys. J. Lett.* **225**, L107 (1978).
- [51] V. Rubin, *Bright Galaxies Dark Matters* (Springer - AIP PRESS, 1996).
- [52] J. L. Tonry *et al.*, *Astrophys. J.* **594**, 24 (2003).
- [53] S. Perlmutter *et al.*, *Bull. Am. Astron. Soc.* **29**, 1351 (1997) astro-ph/9812473.
- [54] P. Astier *et al.* (The SNLS), *Astron. Astrophys.* **447**, 31 (2006).
- [55] D. J. Eisenstein *et al.* (SDSS), *Astrophys. J.* **633**, 560 (2005).
- [56] C. L. Bennett, *et al.*, *Astrophys. J. Suppl* **148**, 1 (2003).
- [57] C. B. Netterfield, *et al.*, *Astrophys. J.* **571**, 604 (2002).
- [58] N. W. Halverson *et al.*, *Ap.J.* **568**, 38 (2002) astro-ph/0104489.
- [59] A. H. Jaffe *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3475 (2001) astro-ph/0007333.
- [60] A. E. Lange *et al.*, *Phys. Rev. D* **63**, 042001 (2001).

- [61] A. Melchiorri *et al.*, *Ap.J.* **563**, L63 (2000) astro-ph/9911445.
- [62] D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J.* **148**, 175 (2003).
- [63] C. Deffayet, G. Dvali e G. Gabadadze, *Phys. Rev. D* **65**, 044023 (2002) astro-ph/0105068.
- [64] G. Dvali, G. Gabadadze e M. Shifman, *Phys. Rev. D* **67**, 044020 (2003), hep-ph/0202174 e hep-ph/0208096.
- [65] G. Dvali, A. Gruzinov e M. Zaldarriaga, *Phys. Rev. D* **68**, 024012 (2003).
- [66] G. Dvali e M. Turner, astro-ph/0301510.
- [67] C. Brans e R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124**, 925 (1961).
- [68] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **70**, 083509 (2004).
- [69] G. R. Dvali, G. Gabadadze e M. Porrati, *Phys. Lett. B* **485**, 208 (2000).
- [70] T. Chiba, *Phys. Lett. B* **575**, 1 (2003).
- [71] L. Amendola e S. Tsujikawa, *Phys. Lett. B* **660**, 125 (2008).
- [72] T. P. Sotiriou, *Phys. Rev. D* **73**, 063515 (2006).
- [73] T. P. Sotiriou, *Gen. Rel. Grav.* **38**, 1407 (2006).
- [74] A. D. Dolgov e M. Kawasaki, *Phys. Lett. B* **573**, 1 (2003).
- [75] L. Amendola, D. Polarski e S. Tsujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 131302 (2007).
- [76] L. Amendola *et al.*, *Phys. Rev. D* **75**, 083504 (2007).
- [77] M. Amarzguioui, Ø. Elgarøy, D. F. Mota e T. Multamäki, *Astron. Astrophys.* **454**, 707 (2006).
- [78] S. Fay, R. Tavakol e S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **75**, 063509 (2007).

- [79] V. Faraoni, *Phys. Rev. D* **74**, 023559 (2006).
- [80] S. Nojiri e S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **68**, 123512 (2003).
- [81] G. J. Olmo, *Phys. Rev. Lett* **98**, 061101 (2007).
- [82] E. Barausse *et al.*, *Class. Quantum Grav.* **25**, 062001 (2008).
- [83] E. Barausse *et al.*, *Class. Quantum Grav.* **25**, 105008 (2008).
- [84] X. H. Meng e P. Wang, *Class. Quantum Grav.* **21**, 951 (2004).
- [85] V. Faraoni, *Phys. Rev. D* **74**, 104017 (2006).
- [86] S. Nojiri e S. D. Odintsov, *Int. J. Geom. Metho. Mod. Phys* **4**, 115 (2007)  
[arXiv:hep-th/0601213].
- [87] S. Capozziello e M. Francaviglia, *Gen. Rev. Grav.* **40**, 357 (2008).
- [88] T. P. Sotiriou e V. Faraoni, arXiv:0805.1726 [gr-qc] (2008).
- [89] T. P. Sotiriou, V. Faraoni e S. Liberati, *Int. J. Mod. Phys. D* **17**, 399 (2008).
- [90] P. Teyssandier e P. Tourenco, *J. Math. Phys.* **24**, 2793 (1983).
- [91] B. Whitt, *Phys. Lett. B* **575**, 176 (1984).
- [92] K. Maeda, *Phys. Rev. D* **39**, 3159 (1989).
- [93] J. D. Barrow e S. Cotsakis, *Phys. Lett. B* **214**, 515 (1994).
- [94] D. Wands, *Class. Quant. Grav.* **11**, 269 (1994).
- [95] G. Magnano e L. M. Sokolowski, *Phys. Rev. D* **50**, 5039 (1994).
- [96] E. E. Flanagan, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 071101 (2004).
- [97] E. E. Flanagan, *Class. Quant. Grav.* **21**, 3817 (2004).

- [98] G. J. Olmo e W. Komp, *preprint* arXiv: gr-qc/0403092.
- [99] G. Allemandi, M. Capone, S. Capozziello e M. Francaviglia, *Gen. Rel. Grav.* **38**, 33 (2006).
- [100] G. J. Olmo, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 083505.
- [101] T. P. Sotiriou, *Class. Quant. Grav.* **23**, 5117 (2006).
- [102] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge University Press, New York) (1981).
- [103] S. M. Carrol, V. Duvvuri, M. Trodden e M. Turner, *Phys. Rev. D* **70**, 043528 (2004).
- [104] A. D. Dolgov e M. Kawasaki, *Phys. Lett. B* **573**, 1 (2003).
- [105] T. P. Sotiriou, *Phys. Lett. B* **645**, 389 (2007).
- [106] M. Ferraris, M. Francaviglia e I. Volovich, *Nouvo Cim. B108*, **1313**, (1993) grqc/9303007.
- [107] M. Ferraris, M. Francaviglia e I. Volovich, *Class. Quant. Grav.* **11**, 1505 (1994).
- [108] J. Santos, M. J. Rebouças e T. B. R. F. Oliveira, *Phys. Rev. D* **81**, 123017 (2010).
- [109] X. H. Meng e P. Wang, *preprint* arXiv: astro-ph/0308284.
- [110] E. Komatsul *et al.*, *ApjS* **180**, 330 (2009).
- [111] M. Ferraris, M. Francaviglia e I. Volovich, *Class. Quantum Grav.* **11**, 1505 (1994).
- [112] T. Multamäki e I. Vilja, *Phys. Rev. D* **73**, 024018 (2006).
- [113] A. de la Cruz-Dombriz e A. Dobado, *Phys. Rev. D* **74**, 087501 (2006).

- [114] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski e S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **75**, 083504 (2007).
- [115] W. Hu e I. Sawicki, *Phys. Rev. D* **76**, 064004 (2007).
- [116] O. Bertolami, C. G. Böhmer, T. Harko e F. S. N. Lobo, *Phys. Rev. D* **75**, 104016 (2007).
- [117] B. Li, J. D. Barrow e D. F. Mota, *Phys. Rev. D* **76**, 104047 (2007).
- [118] S. Baghran, M. Farhang e S. Rahvar, *Phys. Rev. D* **75**, 044024 (2007).
- [119] T. P. Sotiriou, *Phys. Lett. B* **645**, 389 (2007).
- [120] C. G. Böhmer, T. Harko e F. S. N. Lobo, *JCAP* **0803**, 024 (2008).
- [121] S. A. Appleby e R. A. Battye, *JCAP* **0805**, 019 (2008).
- [122] E. Barausse, T. P. Sotiriou e J. C. Miller, *Class. Quantum Grav.* **25**, 105008 (2008).
- [123] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, L. Sebastiani e S. Zerbini, *Phys. Rev. D* **77**, 046009 (2008).
- [124] T. P. Sotiriou, S. Liberati e V. Faraoni, *Int. J. Mod. Phys. D* **17**, 399 (2008).
- [125] S. Nojiri e S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **78**, 046006 (2008).
- [126] T. P. Sotiriou, *Phys. Lett. B* **664**, 225-228 (2008).
- [127] V. Faraoni, *Phys. Lett. B* **665**, 135-138 (2008).
- [128] S. DeDeo e D. Psaltis, *Phys. Rev. D* **78**, 064013 (2008).
- [129] S. H. Pereira, C. H. Bessa e J. A. S. Lima, arXiv:0911.0622 [astro-ph.CO].
- [130] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S.D. Odintsov, P. Tretyakov e S.Zerbini, *Phys. Rev. D* **79**, 044001 (2009).

- [131] V. Faraoni, *Phys. Rev. D* **81**, 044002 (2010).
- [132] T. Harko, *Phys. Rev. D* **81**, 044021 (2010).
- [133] T. Narikawa e K. Yamamoto, *Phys. Rev. D* **81**, 043528 (2010).
- [134] T. Multamäki, J. Vainio e I. Vilja, *Phys. Rev. D* **81**, 064025 (2010).
- [135] J. Klusoň, *Phys. Rev. D* **81**, 064028 (2010).
- [136] E. Santos, *Phys. Rev. D* **81**, 064030 (2010).
- [137] S. Capozziello e M. Francaviglia, *Gen. Relativ. Gravit.* **40**, 357 (2008).
- [138] T. P. Sotiriou e V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010).
- [139] A. De Felice e S. Tsujikawa, arXiv:1002.4928 [gr-qc].
- [140] M. Fairbairn e S. Rydbeck, *JCAP* **0712**, 005 (2007).
- [141] M. S. Movahed, S. Baghram e S. Rahvar, *Phys. Rev. D* **76**, 044008 (2007).
- [142] F. C. Carvalho, E. M. Santos, J. S. Alcaniz e J. Santos, *JCAP*, 0809 (2008).
- [143] T. Koivisto, *Phys. Rev. D* **76**, 043527 (2007).
- [144] D. J. Eisenstein *et al.*, *Astrophys. J.* **633**, 560 (2005).
- [145] D. N. Spergel *et al.*, *Astrop. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [146] D. N. Spergel *et al.*, *Astrop. J. Suppl.* **170**, 377 (2007).
- [147] M. Kowalski *et al.*, *Astrophys. J.* **686**, 749 (2008).
- [148] I. Kant, *Crítica da Razão Pura*(Ed. Calouste Golbenkian, Lisboa, 1989).
- [149] S. R. Dahmen, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **28**, 4 (2006).
- [150] F. Bampi e C. Zordan, *Gen. Rel. Grav.* **9**, 393 (1978).

- [151] M. J. Rebouças, J. E. Aman e A. F. F. Teixeira, *J. Math. Phys.* **27**, 1370 (1986).
- [152] M. Novello, *Máquina do tempo: um olhar científico* (Jorge Zahar Ed., Rio de Janeiro-RJ, 2005).
- [153] M. J. Rebouças e J. Santos, *Phys. Rev. D* **80**, 063009 (2009).
- [154] T. Clifton e J. D. Barrow, *Phys. Rev. D* **72**, 123003 (2005).
- [155] M. J. Rebouças e J. Tiomno, *Phys. Rev. D* **28**, 1251 (1983).
- [156] A. F. F. Teixeira, M. J. Rebouças e J. E. Aman, *Phys. Rev. D* **32**, 3309 (1985).
- [157] M. J. Rebouças e J. E. Aman, *J. Math. Phys.* **28**, 888 (1987).
- [158] L. Pogosian e A. Silvestri, *Phys. Rev. D* **77**, 023503 (2008).
- [159] A. A. Starobinsky, *JETP Letters* **86**, 157 (2007).
- [160] A. Nunez e S. Solganik arXiv:hep-th/0403159.
- [161] B. Li, K. C. Chan e M. C. Chu, *Phys. Rev. D* **76**, 024002 (2007).
- [162] W. Hu e I. Sawicki, *Phys. Rev. D* **76**, 064004 (2007) [astro-ph].
- [163] E. V. Linder *Phys. Rev. D* **80**, 123528 (2009) [astro-ph.CO].
- [164] V. Miranda, S. E. Jorás e I. Waga, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 221101 (2009).
- [165] A. A Starobinsky, *JETP Lett.* **86**, 157 (2007).