UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

GEORGE LUIZ COELHO CORTÊS

Polinômios e equações polinomiais: propriedades e aplicações

Orientador:

Prof. Dr. Edgar Silva Pereira

Natal/RN - 2020

GEORGE LUIZ COELHO CORTÊS

Polinômios e equações polinomiais: propriedades e aplicações

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Edgar Silva Pereira

Natal/RN - 2020

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Cortes, George Luiz Coelho.
Polinômios e equações polinomiais: propriedades e aplicações / George Luiz Coelho Cortes. - 2020.
98f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Natal, 2020.
Orientador: Edgar Silva Pereira.
Coorientador: Fagner Lemos de Santana.
Coorientador: Otto Augusto de Morais Costa.

1. Matemática - Dissertação. 2. Polinômios - Dissertação. 3. Equações polinomiais - Dissertação. 4. Definições - Dissertação. 5. Propriedades - Dissertação. 6. Aplicações - Dissertação. I. Pereira, Edgar Silva. II. Santana, Fagner Lemos de. III. Costa, Otto Augusto de Morais. IV. Título.

RN/UF/CCET CDU 51

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GEORGE LUIZ COELHO CORTÊS

Polinômios e equações polinomiais: propriedades e aplicações

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Edgar Silva Pereira (UFRN - Orientador)
Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana (UFRN - Membro interno)
Prof. Dr. Otto Augusto de Morais Costa (IFRN - Membro externo)

Natal/RN - 2020

Agradecimentos

- A meus pais, belos exemplos que foram e deixaram para os filhos.
- Aos colegas e professores que cederam material de seus acervos para a realização deste trabalho.
- Ao Professor Edgar, paciente e excelente orientador, pelo apoio e pela confiança.
- Aos Professores, Fagner e Otto, que avaliaram este trabalho e contribuíram para sua melhoria.

Dedicatória

A Antônio e Denise, queridos pais, que me ensinaram a gostar de estudar: "TANTO NOMINI NULLUM PAR ELLOGIUM", epíteto de gratidão e de reconhecimento ao valor pessoal deles.

Resumo

Este trabalho trata de polinômios e equações polinomiais: definições, propriedades e aplicações. Destinado a professores e estudantes do ensino básico, contém demonstrações de teoremas e corolários, sendo algumas provas em dupla versão, complementadas por exercícios em que se aplicam os conhecimentos teóricos apresentados. Destaca a base conceitual oriunda de antigos autores de livros didáticos que marcaram gerações das décadas de 1950 a 1970, colocando-os ao lado de autores atuais. Na realidade, este trabalho é uma radiografia particular do assunto polinômios e equações polinomiais, existente em cerca de cinquenta obras destinadas ao ensino básico de Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Polinômio. Equações polinomiais. Definições. Propriedades. Aplicações.

Abstract

This work deals with polynomials and polynomial equations: definitions, properties and applications. Aimed at teachers and students of basic education, it contains demonstrations of theorems and corollaries, some of which are in double version, complemented by exercises in which the theoretical knowledge presented is applied. It highlights the conceptual basis from ancient textbook authors that marked generations from the 1950s to the 1970s, placing them alongside current authors. In fact, this work is a particular radiography of the subject polynomials and polynomial equations, existing in about fifty works destined to the basic teaching of Mathematics.

KEYWORDS : Polynomial; polynonial equations; demonstrations; definitions; properties; applications.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo contém considerações gerais que motivaram o trabalho, os objetivos e a metodologia utilizada para alcançar tais objetivos.

1.1 Considerações gerais

As últimas décadas têm-se caracterizado por avanços inimagináveis em quase todos os ramos do conhecimento, em particular, no campo das ciências e das tecnologias, que fizeram dispensar modelos resolutivos de problemas de épocas anteriores.

O ensino da Matemática não passou incólume à ampliação do saber científico e dos ganhos tecnológicos à disposição dos estudantes, dos professores e dos pesquisadores.

Parece evidente que, em muitas escolas, o quadro negro, o giz, a tabuada das quatro operações, as tábuas logarítmicas[1], compasso, régua e esquadros de madeira foram substituídos no processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Autores tradicionais perderam espaço, nas editoras e na bibliografia, agora ocupado por novos autores de obras ilustradas com recursos gráficos e computacionais antes indisponíveis. Formas e cores se destacam nas obras didáticas, para torná-las mais atraentes, às vezes, alterando ou omitindo o conteúdo que existia em obras antigas. Apesar da modernidade, há certos fundamentos básicos como os de Euclides na Geometria, por exemplo, que continuam sólidos.

Dierings, em [13], por exemplo, trata de nova abordagem do ensino-aprendizagem

[1] Vide, por exemplo, as tábuas do livro de Nielsen, [41], que eram tão úteis, mas caíram em desuso.

de polinômios no ensino médio e promete seguir uma linha metodológica investigativa e intuitiva. Para isso, propõe utilizar o aplicativo computacional Geogebra, [65], para construção de gráficos, e apela para antigos algoritmos[2] como o de Briot-Ruffini, a fim de obter o valor numérico do polinômio, comparando-o com o resultado obtido, quando efetuado o mesmo cálculo com recursos de informática.

Nesse cenário, certos assuntos e temas da Matemática também perderam importância nos cursos iniciais. Aprender a tabuada, por exemplo, antes essencial para aplicar o algoritmo de montagem das contas triviais, já não assume o mesmo papel que tinha no ensino básico no passado. A máquina calculadora ultrapassou a tabuada das quatro operações. Além disso substituiu, com maior precisão nos resultados, a régua de cálculo e as tábuas de logaritmos e trigonométricas.

Dois aspectos que afetaram a importância de certos assuntos na Matemática foram a extinção do exame de admissão ao ginásio (passagem do atual 5º. para o 6º. ano do ensino fundamental) e as modificações de concursos para ingresso no ensino superior, antes realizados autonomamente por cada universidade.

Atualmente, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), centralizado pelo Ministério da Educação (MEC) para acesso às universidades federais, praticamente alijou assuntos ou reduziu sua importância na grade curricular do ensino básico. Além disso, o exame foi tomado por modismos pedagógicos como "contextualização" e "interdisciplinaridade" em excesso, que, às vezes, convertem-se em evidente prolixidade e falta de objetividade no enunciado de questões, tornando-se um obstáculo à verificação do que se deseja avaliar no candidato.

Spinelli ([63], p. 31) observou que, "em nome da elaboração de contextos interdisciplinares no Ensino Médio, tantas vezes estimulados por documentos oficiais, são cometidos desvios que revelam a incompreensão do significado da contextualização".

Examinando-se provas do ENEM (de 2009 a 2018), em [66], questões sobre polinômios, por exemplo, raramente se apresentam. Quando surgem, são aplicações de casos simples de trinômio ou de equação do segundo grau. Em artigo, Eisenberg ([16], p. 17-34) suspeita que "parece ter havido, no currículo da escola média, uma nítida redução da ênfase nos tópicos relacionados com polinômios".

[2] Segundo Fachini ([17], p. 363 - 364), "algoritmo é uma sequência de operações que nos leva a determinado resultado".

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é descrever o assunto “polinômios e equações polinomiais”, abordando-o quanto aos conceitos, propriedades e aplicações[3], que constam em obras didáticas destinadas ao ensino básico de Matemática. Para alcançá-lo, são estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- apresentar os principais conceitos e demonstrações das propriedades dos polinômios e das equações polinomiais, conforme livros de Matemática de autores tradicionais cujas obras estão fora de catálogo editorial e também de atuais;

- aplicar, em exercícios selecionados dessas obras, a teoria algébrica demonstrada, complementando-os com gráficos construídos com o aplicativo Geogebra, nos casos pertinentes;

- expor o conteúdo mais significativo sobre o assunto em pauta, destacando-se a variedade de provas de teoremas.

A fim de cumprir os objetivos expostos, este trabalho é composto por quatro capítulos, incluindo o primeiro introdutório.

O segundo capítulo apresenta conceitos e resultados preliminares sobre polinômios. Aplicações sob a forma de exercícios complementam as ideias expostas, no sentido de consolidar o saber teórico explicitado.

O terceiro capítulo trata das equações polinomiais. Contém diversos teoremas, alguns deles com mais de uma versão de prova, enriquecendo o estudo. Exercícios, quase todos extraídos de obras das referências bibliográficas, reforçam as lições teóricas. Sua solução permite verificar a clareza da questão, o grau de dificuldade e a validade como indicador de resultado no processo ensino–aprendizagem.

O quarto capítulo apresenta comentários sobre aspectos gerais do trabalho, isto é, do estudo e dos aspectos metodológicos envolvidos. Pretendendo ser útil a alunos e professores do ensino básico de Matemática, não ampliou o horizonte de estudo a aspectos mais adequados ao ensino superior, como, por exemplo, interpolação polinomial[4], potências de polinômios, equações do terceiro grau, do quarto grau etc.

[3] Para os fins deste trabalho, aplicações significam exercícios que reforçam a teoria exposta.

[4] Para interpolação polinomial, vide Ruggiero & Lopes ([50], p. 211 - 267), livro de Método Numérico.

1.3 Metodologia

A escolha do assunto a investigar se deve à necessidade de valorizar o tema "polinômios" por sua importância no contexto da Matemática e de resgatar a teoria sobre o assunto, tão escassa nos livros didáticos atuais do ensino básico. Em razão disso, para suprir tal escassez, o trabalho se direcionou para livros de antigos autores como Quintella[5], dentre outros.

Esta investigação se iniciou com a pesquisa bibliográfica, na rede internet, dirigida para dissertações sobre "polinômios", ligadas ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática (Profmat) em Rede Nacional, e para teses de doutorado sobre temas correlatos[6].

Como a ênfase principal priorizava livros, foram consultados, durante o segundo semestre de 2019, acervos de bibliotecas em Natal[7]. Os livros de antigos autores não foram encontrados nas bibliotecas visitadas. Então, a solução se direcionou para acervos de sebos e de particulares.

O propósito subjacente a este trabalho é compor material com o conteúdo relevante das obras selecionadas. Daí, vem o aproveitamento de definições, demonstrações e exercícios extraídos dos compêndios estudados.

Para o estudante, o domínio do idioma e da lógica é fator de êxito. Por isso, é essencial expressar-se em linguagem objetiva, entender o discurso e compreender a lógica que se entrelaça em demonstrações e em algoritmos da Matemática.

Nesse contexto, o estudo dos polinômios se adequa ao desenvolvimento das habilidades acima pautadas como chaves do sucesso nas graduações cujos currículos contêm Matemática. Antigos autores têm suas obras visitadas como fontes de inspiração para o desafiador êxito do aluno na Matemática do ensino básico.

---

[5] Quintella, professor catedrático do Colégio Militar do Rio de Janeiro, teve, por exemplo, um de seus livros, [46], alcançando a 121ª. edição, com tiragem de 210 mil exemplares: um feito considerável à época.

[6] Para a maioria dessa bibliografia, vide: [67].

[7] Estabelecimentos: UFRN (a biblioteca geral e a setorial de Matemática); Serviço Social do Comércio (SESC), Colégios Atheneu, Marista, Instituto Federal do RN (IFRN), Anísio Teixeira, Winston Churchill, Centro Jessé Freire e Centro Felipe Guerra. Nas escolas visitadas, inexistiam obras de autores antigos do ensino básico. O acervo do Atheneu dispunha de seis livros de Matemática. Na do Marista, não havia um só exemplar de Matemática dos Irmãos Maristas dos anos 60.

Capítulo 2

Definições e propriedades dos polinômios

Este capítulo aborda os seguintes aspectos dos polinômios: definições, valor numérico, operações, propriedades e exercícios.

2.1 Polinômio e função polinomial

Definição 2.1.1. *Sejam* $a_0, a_1, a_2, .., a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$, *0* $\leq n \in \mathbb{Z}$ *e* x *uma variável complexa. Denomina-se função polinomial ou polinômio, na variável* x, *a função f:* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definida por:*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0. \tag{2.1}$$

Conforme essa definição adotada por Souza & Garcia ([61], p. 170), polinômio e função polinomial possuem o mesmo significado matemático, à semelhança de Iezzi ([24], p. 53), que, entretanto, associa a função à sequência $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, cujos componentes são chamados de coeficientes de $f(x)$.

As parcelas $a_n x^n$, $a_{n-1}x^{n-1}$,..., $a_1 x^1$, a_0, por sua vez, são chamadas de termos do polinômio. Caso exista um único termo, a função é dita monomial ou monômio. Já o coeficiente a_0 é conhecido como termo independente, conforme Raymundo ([48], p. 191).

Sangiorgi ([54], p. 94) e Muniz Neto ([37], p. 32) optam por definir polinômio, ou polinômio em uma indeterminada X, sem fazer qualquer ligação com a função conexa. Simplesmente apresentam-no como uma soma formal:

$$f = f(X) = a_0 + +a_1X^1 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n + \ldots := \sum_{k\geq 0} a_kX^k \tag{2.2}$$

onde a sequência $(a_0, a_1, \ldots)$ é quase toda nula, isto é, existe um inteiro $n \geq -1$, tal que $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = \cdots = 0$ e X representa um símbolo qualquer.

Para Bianchini ([5], p. 75), polinômio é "toda expressão algébrica que representa um monômio ou uma soma algébrica de monômios". Assim, se o somatório (2.2) tiver duas ou três parcelas, recebe, respectivamente, o nome de binômio ou de trinômio.

É fácil perceber que a expressão (2.2), se tratada isoladamente, é um simples somatório, mas também pode representar a lei de associação de uma função. Então há duas situações bem distintas, embora recebam a mesma denominação: polinômio. Daí, é preciso deixar bem claro, em cada ocasião, a que se refere.

Em geral, antigos autores não enfrentavam esse problema conceitual. Bezerra ([3], p. 264) e Serrão ([56], p. 9-12), por exemplo, focalizam o polinômio apenas no aspecto do somatório, isto é, não fazem menção à função[1].

Diversos autores se referem às funções da forma (2.1), com todos os seus coeficientes pertencentes ao conjunto dos reais, como funções polinomiais reais. Serrão (1969, p. 9), por outro lado, denomina polinômios inteiros em x a categoria de polinômios que, "dependendo apenas da letra x, somente a contém afetada de expoentes inteiros e positivos".

Os dois primeiros exemplos abaixo ilustram polinômios como somatórios, seguidos de dois exemplos relacionados com a lei de associação de funções polinomiais.

$2x^5 + 7x^4 - 5x^3 - 7x^2 + x - 6$ e $x^8 + x^7 - x^5 + 7x^4 + x^2 + 5x + 6$,

$f_1(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x + 1$ e $f_2(x) = x^3 + (a+b)x^2 + 3x - 27$.

2.2 Valor numérico

Smole & Diniz ([58], p. 205) sinalizam: "O valor que se obtém ao substituir a variável de um polinômio por um número qualquer chama-se valor numérico do polinômio". Essa ideia de cálculo do valor numérico de expressões é uma tarefa

[1]Para definição e propriedades da função, vide Souza & Garcia ([60], p. 40 - 62) para as séries do ensino fundamental e, para as do ensino médio, Domingues & Iezzi ([15], p. 63 - 106) e de Guelli ([23], p. 93 - 136).

que se inicia no ensino fundamental, conforme observado em Bianchini ([4], p. 36), Bonjorno ([7], p. 29-58) e Sangiorgi ([54], p. 41-42).

Assim, enquanto o valor numérico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$, para $x = 4$, é $f(4) = 4^2 - 5.4 + 6 = 2$, temos $f(2) = 0$ para $x = 2$.

Neto ([38], p. 438-439) destaca dois casos particulares que envolvem os valores numéricos de um polinômio qualquer, conforme a definição (2.1): $f(1)$ é a soma dos coeficientes de $f(x)$ e $f(0)$ é igual a a_0, termo independente do mesmo polinômio.

Os gráficos abaixo são de casos particulares de funções (monomial, binomial e trinomial) e visualizam o valor numérico que elas assumem no domínio dos reais.

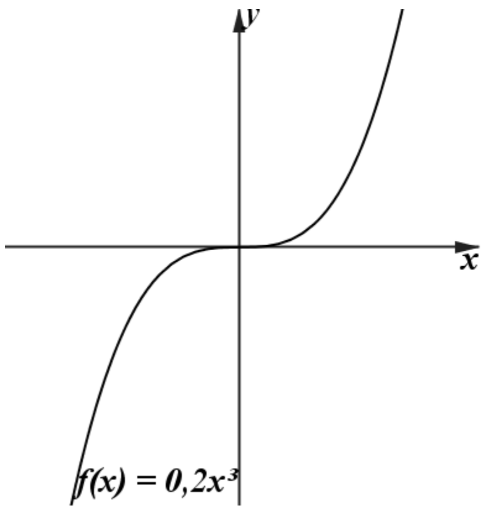

Figura 2.1: f(x): monômio

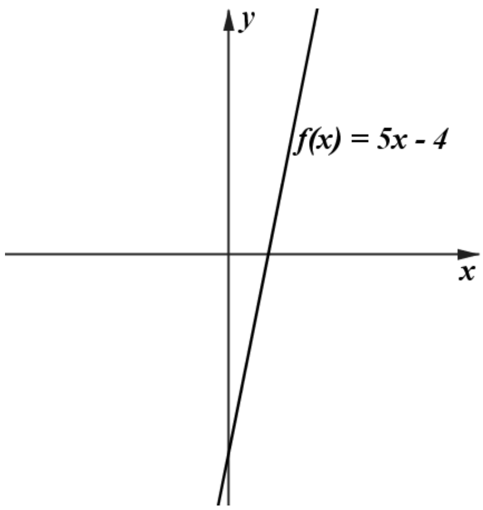

Figura 2.2: h(x): binômio.

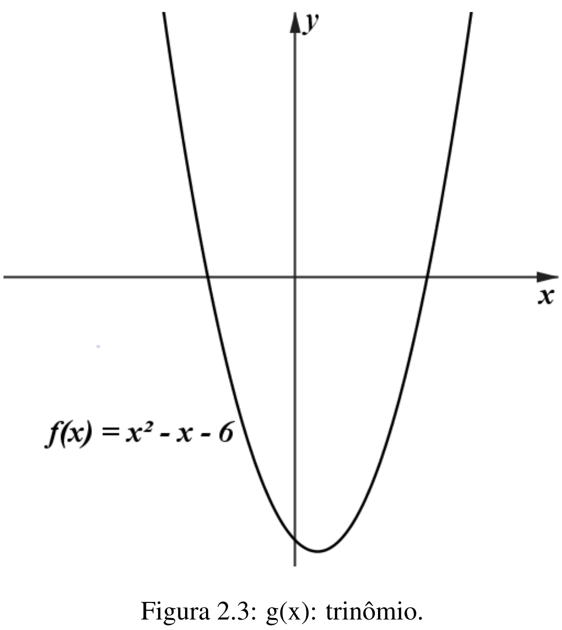

Figura 2.3: g(x): trinômio.

2.3 Polinômio nulo ou identicamente nulo

Definição 2.3.1. *Chama-se polinômio identicamente nulo (ou simplesmente nulo) a todo polinômio* $P(x)$ *da forma* $0x^m + 0x^{m-1} + \ldots + 0x + 0$*, cujo valor numérico é nulo, definição essa adotada por autores como Bezerra ([3], p. 264).*

O gráfico abaixo ilustra o caso da função polinomial nula, mostrando que são nulas as imagens de todos os valores de x.

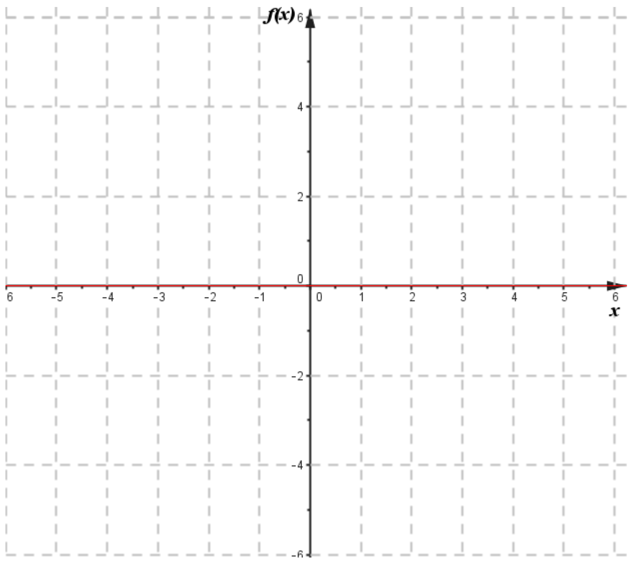

Figura 2.4: Polinômio nulo

A condição suficiente e necessária para que um polinômio seja nulo é o objeto do teorema a seguir. Sua demonstração é registro pouco comum nos livros didáticos do ensino médio e, neste caso, se guia pelas indicações de Iezzi ([24], p. 55).

Teorema 1. *Um polinômio* $f(x)$ *é nulo se, e somente se, todos os coeficientes de* $f(x)$ *forem nulos.*

Demonstração

Supondo $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$*, então temos:* $f(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^n = 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}$.

Reciprocamente, assumindo que $f(x)$ *se anula para qualquer complexo, então* *selecionemos* $n+1$ *números complexos* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, *distintos dois a dois, os quais tornam nulo o valor de f, ou seja:*

$$f(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = 0$$
$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = 0$$
$$f(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_2^n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = 0$$

Note que o sistema acima é linear e homogêneo de ordem $(n+1)$ *por* $(n+1)$, *cujas variáveis são* $a_0, a_1, \ldots, a_n$. *Assim, para resolvê-lo, pode-se recorrer ao método de escalonamento de Gauss-Jordan ou observar que a matriz de Vandermond abaixo corresponde àquele sistema*[2], *sendo o produto* $(x_1-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})$, *o valor do determinante desta matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Note que o determinante da matriz acima é diferente de zero, pois $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$. *Logo o sistema tem solução única, que é a trivial:* $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

$\square$

2.4 Polinômio constante

Definição 2.4.1. *Um polinômio é constante se os coeficientes* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$, *no contexto do somatório* (2.2), *são iguais a zero. Então, o polinômio nulo é um caso particular de polinômio constante, conforme Raymundo ([48], p. 191).*

A função polinomial constante possui gráfico semelhante ao exibido abaixo.

[2] Para resolução do sistema pelo método de Gauss-Jordan, vide Anton & Rorres ([1], p. 11-16). Para solução utilizando o determinante da matriz de Vandermond, vide Guelli ([22], p. 206-208).

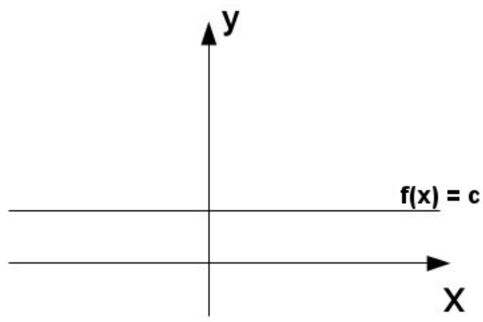

Figura 2.5: Polinômio constante

2.5 Polinômios iguais ou idênticos

Definição 2.5.1. *Dois polinômios, P e Q, na variável complexa x, são iguais (ou idênticos), quando assumem valores numéricos iguais para qualquer valor comum atribuído à variável. Essa definição já é consagrada em autores como, por exemplo, Raymundo ([48], p. 187) .*

Assim $P = Q \Leftrightarrow P(x) = Q(x), \forall x \in \mathbb{C}$, *cabendo destacar que os polinômios P e Q seguem a forma indicada em* (2.1)*, com os termos ordenados segundo a potência de* x.

Observação 2.5.1. *Serrão ([56], p. 10-11) utiliza a expressão "polinômios equivalentes" com o mesmo significado de polinômios idênticos. Salienta que "a noção de igualdade entre dois polinômios deverá ser entendida como equivalência" e generaliza sua explicação a outras situações, alertando que duas expressões algébricas "serão iguais, ou equivalentes, quando tomam valores sempre iguais quaisquer que sejam os valores atribuídos" às incógnitas, "excluindo-se naturalmente, aqueles valores para os quais as divisões que [por acaso] aparecem nas expressões, perdem o significado". Obviamente, tais exceções não ocorrem com os polinômios, na forma aqui definida, pois não há divisões na forma dos polinômios e o domínio das funções polinomiais pode ser o conjunto dos complexos.*

2.5.1 Grau de um polinômio

Dante ([12], p. 95) aborda este tópico a partir dos monômios. Sendo de uma só variável ($a_n x^n$), o valor inteiro do expoente da variável representa o grau dos monômios. Para os polinômios, o mesmo autor afirma que "o grau de um polinômio é dado pelo [expoente do] seu termo de maior grau, depois de reduzidos os termos semelhantes", definição essa que não esclarece cabalmente o grau do polinômio nulo: $f(x) = 0$. Em razão disso, adotemos a definição abaixo, seguida por outros autores.

Definição 2.5.2. *Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, com $a_n \neq 0$, isto é, um polinômio não nulo. Então se diz que o inteiro não negativo n é o grau de f. Sua representação é $\partial f = n$, lendo-se assim: o grau de f é igual a n.*

Note que o grau de um polinômio só é definido nos casos de polinômios não-nulos.

Neto ([38], p. 437) e Fachini ([17], p. 359), por exemplo, seguem a última definição, reproduzindo-a com terminologias diferentes. Para eles, $a_n \neq 0$ é dito coeficiente líder ou dominante de $f(x)$. Se $a_n = 1$, então é chamado de coeficiente mônico.

Por outro lado, Smole & Diniz ([59], p. 164) afirmam "que um polinômio de grau n é completo, quando ele possui, em seus termos, monômios de todos os graus menores ou iguais a n". Para ordená-lo, o mais comum é escrevê-lo com seus monômios em ordem decrescente de grau, como, por exemplo:

$$6x^6 + 3x^5 - 8x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - x + 3.$$

Seguem-se duas maneiras de se enunciar e demonstrar o teorema que trata da equivalência entre dois polinômios. A primeira abordagem, exposta abaixo, baseia-se em Bezerra ([3], p. 265), semelhante à apresentada em Quintella ([47], p. 151-153). Já a segunda abordagem segue apontamentos de Iezzi ([24], p. 56).

Teorema 2. *A condição necessária e suficiente para que dois polinômios, de mesmo grau, de uma variável sejam idênticos é que os coeficientes de mesmo grau sejam iguais.*

Demonstração

A condição é necessária. Provemos inicialmente que, se dois polinômios são idênticos, então os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais.

Consideremos idênticos os seguintes polinômios:

$$f_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \quad e$$
$$f_2(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$$

Observe que, pela definição 2.5.1, temos assegurado que:

$$f_1(x) - f_2(x) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x^1 + (a_0 - b_0) = 0$$

Por outro lado, a definição de polinômio identicamente nulo, 2.3.1, garante que:

$$a_n - b_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = b_n$$
$$a_{n-1} - b_{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n-1} = b_{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1 - b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = b_1$$
$$a_0 - b_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = b_0$$

Portanto os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais.

A condição é suficiente. Demonstremos agora que, caso os coeficientes dos termos de mesmo grau nos dois polinômios sejam iguais, então os polinômios são idênticos. De fato, como os dois polinômios possuem os mesmos termos, então os valores numéricos de ambos, para qualquer valor atribuído a x, *também serão iguais.*

$\square$

Teorema 2(a). *Dois polinômios* $P_1(x)$ *e* $P_2(x)$ *são iguais se, e somente se, os coeficientes de* P_1 *e* P_2 *forem ordenadamente iguais.*

Demonstração

Consideremos:

$$P_1(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \ \text{ e } \ P_2(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x^1 + b_0.$$

Provemos que $P_1(x) = P_2(x) \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ *e* $\forall x \in \mathbb{C}$.

Considerando os termos $a_i x^i$ *e* $b_i x^i$, *note que, para todo* $x \in \mathbb{C}$, *são equivalentes as relações que se seguem.*

$$\forall x \in \mathbb{C},\ a_i = b_i \ \Leftrightarrow\ a_i - b_i = 0,\ \forall x \in \mathbb{C}$$
$$\Leftrightarrow\ (a_i - b_i)x^i = 0,\ \forall x \in \mathbb{C}$$

$$\Leftrightarrow \ \sum_{i=0}^{n}(a_i - b_i)x^i = 0, \ \forall x \in \mathbb{C}$$
$$\Leftrightarrow \ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ - \ \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0, \ \forall x \in \mathbb{C}$$
$$\Leftrightarrow P_1(x) = P_2(x), \ \forall x \in \mathbb{C}.$$

□

2.6 Operações

Em geral, os livros do ensino básico investigados são bastante concisos na teoria sobre as operações com polinômios. Smole & Diniz ([58], p. 210-221), por exemplo, dispensam aos conceitos das operações menos de uma página, na qual definem adição, subtração, multiplicação e divisão, destinando a maior parte do espaço gráfico para exemplos e algoritmos que mecanizam a divisão de um polinômio por outro.

Souza & Garcia ([61], p. 174 - 183) também não valorizam os aspectos conceituais sobre o assunto. Destacam somente exemplos de exercícios resolvidos e algoritmos que solucionam problemas, sem fundamentação teórica mais sólida sobre, por exemplo, as propriedades ligadas às operações com as funções polinomiais.

Essa carência conceitual na maioria dos livros estudados se repete também em outra obra de Smole & Diniz ([59], p. 168 - 175), que simplificam a teoria, circunscrevendo-a à definição da adição, da subtração e da multiplicação de dois polinômios. A partir daí, ingressam nos exemplos e nos algoritmos que solucionam problemas.

Verifica-se evidentemente que, no material didático de uso corrente no ensino básico, as propriedades das operações polinomiais não recebem maior enlevo. O embasamento teórico que fundamenta as "receitas" (os algoritmos) da execução da divisão, por exemplo, fica em plano secundário.

Interessante abordagem das propriedades envolvidas na adição e na multiplicação é realizada por Muniz Neto ([37], p. 31 - 44) no capítulo II de sua obra. Para executar provas relativas a tais operações, esse autor explora a definição de polinômio a partir do conceito de sequência dita quase toda nula, associando-a à sequência dos coeficientes do polinômio. Após isso, trata das propriedades básicas, enfatizando a comutatividade, a associatividade e a distributividade nas operações polinomiais[3].

Iezzi ([24], p. 59 - 97), mais uma vez, adota uma linha de provas das propriedades das operações com polinômios, bastante ajustada ao que se pode apresentar a alunos do ensino médio, portanto, mais adequada aos fins deste trabalho, razão pela qual sua orientação nas atividades a seguir foram observadas.

2.6.1 Adição

Definição 2.6.1. *Consideremos dois polinômios:*

$P_1(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *e*

$P_2(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x^1 + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$

Define-se a soma de $P_1(x)$ *com* $P_2(x)$ *como*

$$(P_1 + P_2)(x) = (a_n + b_n)x^n + \ldots + (a_1 + b_1)x^1 + (a_0 + b_0) \ = \ \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i.$$

No somatório que define a adição acima, sempre se toma como referência o inteiro n, *maior grau observado dentre os graus dos dois polinômios* P_1 *e* P_2. *Além disso, os termos da forma* $a_i x^i$ *ou* $b_i x^i$ *que não existirem são representados como* $0x^i$ *no somatório, conforme observado no exemplo a seguir.*

Exemplo 2.6.1. *Exemplo de aplicação da definição da soma de dois polinômios dados:* $P_1(x)$ *e* $P_2(x)$.

$$P_1(x) = -4x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 9 \ \Leftrightarrow$$
$$P_1(x) = -4x^5 + 0x^4 + 1x^3 + 3x^2 + 3x + 9$$
$$P_2(x) = 5x^5 + 2x^4 - 7 \Leftrightarrow$$
$$P_2(x) = 5x^5 + 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 7$$

Logo:

$$(P_1 + P_2)(x) =$$
$$= (-4 + 5)x^5 + (0 + 2)x^4 + (1 + 0)x^3 + (3 + 0)x^2 + (3 + 0)x + (9 - 7)$$
$$\Rightarrow \ (P_1 + P_2)(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x + 2.$$

[3] As demonstrações adotadas pelo mencionado autor se pautam pelo conhecimento prévio da estrutura algébrica denominada “anel de polinômios”, mesmo que não a mencione, assunto esse que foge aos interesses do presente trabalho.

Conforme observado acima, o primeiro passo para realizar a operação de adição é ordenar ambos os polinômios, segundo potências decrescentes de x. Em seguida, efetua-se a adição dos coeficientes dos termos semelhantes[4], isto é, dos termos que apresentam os mesmos expoentes em x.

Exemplo 2.6.2. *Outro exemplo de adição de dois polinômios dados se encontra logo abaixo, ilustrado com o gráfico correspondente à operação realizada.*

$$f(x) = x^2 - x - 6 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0x^3 + 1x^2 - 1x - 6$$
$$h(x) = 0,2x^3 \quad \Leftrightarrow \quad h(x) = 0,2x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

Logo:
$$(f+h)(x) = (0+0,2)x^3 + (1+0)x^2 + (-1+0)x + (-6+0) \Leftrightarrow$$
$$(f+h)(x) = 0,2x^3 + x^2 - x - 6.$$

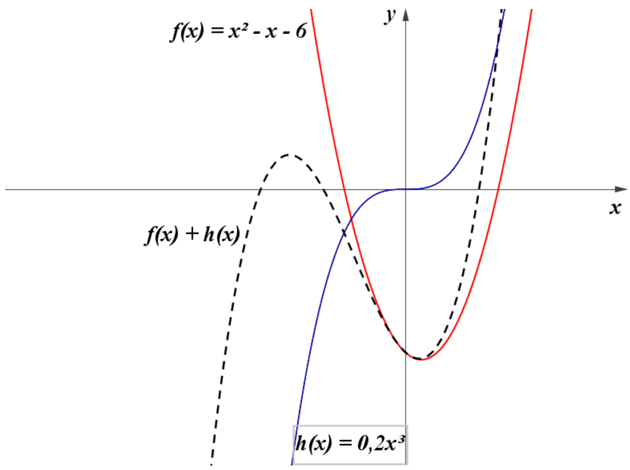

Figura 2.6: Adição de polinômios

Bianchini ([4], p.104) aponta que, "para reduzir termos semelhantes a um único termo, adicionamos algebricamente os coeficientes e conservamos a parte literal". Neste caso, a parte literal corresponde à variável x com seu expoente.

É evidente que, se somarmos dois monômios que "não forem semelhantes, como $7x^2$ e $3x$, [...] nesse caso, obtemos como resultado uma expressão algébrica chamada binômio. Nesse exemplo, $7x^2 + 3x$ é a soma": Dante ([12], p. 91).

Para Smole & Diniz (em [59], p. 168-169), "a soma de dois ou mais polinômios

[4] Segundo Raymundo ([48], p. 188), dados dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, obtemos a soma dos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, adicionando os coeficientes dos termos semelhantes de $P(x)$ e $Q(x)$.

é um polinômio cujos termos são a soma algébrica dos termos semelhantes dos polinômios que estão sendo somados”[5]. Essa definição é apresentada após um exemplo de adição entre dois polinômios. Assim se encerra a teoria sobre essa operação, em [59], livro com sugestivo título: “Matemática para compreender o mundo”.

Vários autores estudados não consideram que a operação de adição compõe, no conjunto dos polinômios cujos coeficientes pertencem a $\mathbb{C}$, um dos elementos definidores de um grupo comutativo[6], com quatro propriedades (associatividade, comutatividade, existência do elemento neutro aditivo e existência do inverso aditivo ou do simétrico aditivo), todas elas importantes para o estudo dos polinômios.

Muniz Neto ([37], p.34-38) e Iezzi ([24], p. 59-60) estão entre as exceções que exploram tais propriedades. Ainda que o estudo de “grupo” (como estrutura algébrica) de polinômios não seja objeto do ensino básico, é preciso enfatizar aquelas propriedades relacionadas com a adição, razão pela qual serão abordadas no contexto do teorema a seguir.

Teorema 3. *Se P é o conjunto dos polinômios de coeficientes complexos, então ele verifica, quanto à adição, as propriedades da associatividade, da comutatividade, da existência do elemento neutro aditivo e da existência do inverso aditivo (ou do simétrico aditivo).*

Demonstração:

Tomemos arbitrariamente $f_1, f_2, f_3 \in P$, *tais que*

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad f_2(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \quad e \quad f_3(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i.$$

i) Associatividade.

Considerando $(f_1+(f_2+f_3))(x) = \sum_{i=0}^{n} k_i x^i$ *e* $((f_1+f_2)+f_3)(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$,

tem-se $k_i = a_i + (b_i + c_i) = (a_i + b_i) + c_i = p_i, \ \forall i \ \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Portanto $f_1 + (f_2 + f_3) = (f_1 + f_2) + f_3$.

[5] Smole & Diniz ([59], p. 168), antes de definir adição de dois polinômios, sinalizam: “Como os polinômios são funções com expressões particulares, para eles podemos definir as mesmas operações que para as funções”.

[6] Na verdade, o conjunto dos polinômios é uma estrutura algébrica mais abrangente que se chama anel de polinômios, consideração essa que não faz parte do interesse do ensino básico.

ii) Comutatividade.
Fazendo $(f_1+f_2)(x) = \sum_{i=0}^{n} s_i x^i$ *e* $(f_2+f_1)(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i x^i$, *tem-se o seguinte:*
$s_i = a_i + b_i = b_i + a_i = t_i, \ \forall i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$.
Portanto $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$.

iii) Existência do elemento neutro aditivo.
Tomemos o polinômio g, *tal que* $g(x) = \sum_{i=0}^{n} h_i x^i$. *Então:*
$f_1 + g = g + f_1 = f_1 \Leftrightarrow a_i + h_i = h_i + a_i = a_i, \ \forall i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$.
Logo $h_i = 0, \ \forall i \ \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$. *Assim,* g *é o polinômio que contém todos os seus coeficientes nulos, também chamado polinômio nulo, sendo elemento neutro no contexto da operação de adição de polinômios:* $g(x) = 0$.

iv) Existência do inverso aditivo (ou simétrico aditivo)
Temos de provar que existe $f_1' \in P$, *tal que* $f_1 + f_1' = g, \forall f_1 \in P$.
Considere $f_1' = \sum_{i=0}^{n} j_i x^i$.
Note que $f_1 + f_1' = g = 0 \Leftrightarrow a_i + j_i = 0 \Leftrightarrow a_i = -j_i, \forall i \ \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$.
Então $f_1' = \sum_{i=0}^{n} (-a_i) x^i = -a_n x^n - \ldots - a_1 x^1 - a_0$.
Temos, portanto, que f_1' *é o inverso aditivo (ou simétrico aditivo) de* f_1, *elemento este tomado arbitrariamente no conjunto P.*

$\square$

Para alguns autores, os dois polinômios, f_1 e f_1', são ditos opostos[7], como Souza & Pataro ([62], p. 101) e Pataro & Balestri ([45], p. 85): "Quando adicionamos um polinômio a outro e obtemos como resultado o polinômio nulo, dizemos que esses polinômios são opostos".

2.6.2 Subtração

De posse do teorema anterior, pode-se estabelecer a definição de subtração de polinômios de maneira simples.

[7] Sangiorgi ([53], p. 56) já utiliza a ideia de oposto, quando trata do elemento neutro na adição entre inteiros.

Definição 2.6.2. *Dados os polinômios* $f_1(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x^1 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ *e* $f_2 = b_nx^n + \ldots + b_1x^1 + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$*, define-se como diferença entre* f_1 *e* f_2 *o polinômio* $(f_1 - f_2)(x) = f_1(x) + (-f_2)(x)$*. Em outras palavras,* $(f_1 - f_2)(x) = (a_n - b_n)x^n + \ldots + (a_1 - b_1)x^1 + (a_0 - b_0) = \sum_{i=0}^{n}(a_i - b_i)x^i$.

No somatório que define a subtração acima, sempre se toma como referência o inteiro n*, maior grau observado dentre os graus dos dois polinômios* f_1 *e* f_2*.*

Exemplo 2.6.3. *Dados os polinômios* $f_1(x)$ *e* $f_2(x)$ *abaixo, determinar* $(f_1 - f_2)(x)$*.*

$$f_1(x) = 8x^7 - 5x^5 + x^3 + 7x^2 + 5x + 11 \Leftrightarrow$$
$$f_1(x) = 8x^7 + 0x^6 - 5x^5 + 0x^4 + 1x^3 + 7x^2 + 5x + 11$$
$$f_2(x) = x^6 + 5x^5 + 2x^4 - 7 \Leftrightarrow$$
$$f_2(x) = 0x^7 + 1x^6 + 5x^5 + 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 7$$

Logo: $(f_1 - f_2)(x) =$

$$= (8-0)x^7 + (0-1)x^6 + (-5-5)x^5 + (0-2)x^4 + (1-0)x^3 +$$
$$+ (7-0)x^2 + (5-0)x + (11+7)$$
$$\Rightarrow (f_1 - f_2)(x) = 8x^7 - 1x^6 - 10x^5 - 2x^4 + 1x^3 + 7x^2 + 5x + 18.$$

Exemplo 2.6.4. *O gráfico abaixo ilustra a subtração entre duas funções polinomiais* $r(x)$ *e* $p(x)$*, tendo como resultado uma função polinomial.*

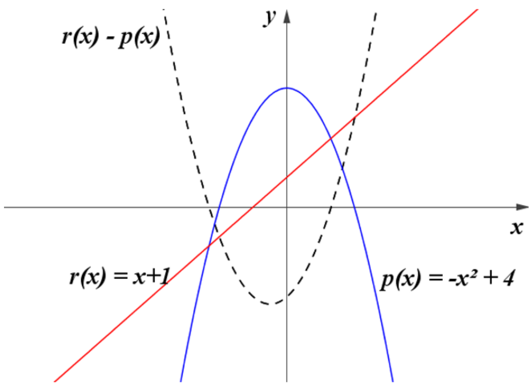

Figura 2.7: Subtração de polinômios

Longen ([31], p. 200) assim sintetiza as duas operações já expostas: “Adicionar ou subtrair dois polinômios é obter um terceiro polinômio, cujos termos são resultantes da adição ou subtração dos termos de mesmo grau dos polinômios dados (termos semelhantes)".

2.6.3 Multiplicação

Definição 2.6.3. *Tomemos dois polinômios:*

$f_1(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ *e*

$f_2(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0 = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j.$

Define-se como produto desses dois polinômios, isto é, produto $f_1 f_2$ *o polinômio:*

$(f_1 f_2)(x) = a_m b_n x^{m+n} + \ldots + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x^1 + (a_0 b_0).$

Em outras palavras, $(f_1 f_2)(x)$ *também pode ser representado como:*

$(f_1 f_2)(x) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \ldots + c_{m+n} x^{m+n}$, *em que o coeficiente* c_k *é igual a* $a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Outra maneira de se obter $(f_1 f_2)$ consiste em multiplicar cada termo do primeiro polinômio $f_1(x)$ por cada termo do segundo polinômio $f_2(x)$, isto é, $a_i x^i b_j x^j = a_i b_j x^{i+j}$ para em seguida somar os resultados obtidos, agrupando-se os termos em torno de cada potência de x.

O exemplo a seguir demonstra a aplicação desse método.

Exemplo 2.6.5. $f_1(x) = x^2 + 5x - 3$ *e* $f_2(x) = x^3 - 2x - 3$. *Então:* $(f_1 f_2)(x) =$
$= (x^2 + 5x - 3)(x^3 - 2x - 3) = x^2(x^3 - 2x - 3) + 5x(x^3 - 2x - 3) - 3(x^3 - 2x - 3) =$
$= (x^5 - 2x^3 - 3x^2) + (5x^4 - 10x^2 - 15x) + (-3x^3 + 6x + 9) =$
$= x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 13x^2 - 9x + 9.$

2.6.4 Propriedades da multiplicação

Conforme já mencionado na adição, os autores atuais também têm explorado pouco as propriedades da multiplicação dos polinômios.

Raymundo ([48], p. 194-195) resume assim a multiplicação: "O produto de dois polinômios, $P(x)$ e $Q(x)$, é obtido multiplicando cada termo de $P(x)$ por todos os termos de $Q(x)$ e reduzindo os termos semelhantes". Daí, com três exercícios resolvidos e a proposta de seis outros para solução, o autor encerra o conteúdo.

Iezzi ([24], p. 62) não se omite quanto às propriedades da multiplicação. Julgando ser, no contexto do ensino médio, "desnecessário conhecer a prova destas propriedades", limita-se a listá-las como sendo as seguintes:

- Associativa: $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h,\ \forall f, g, h \in P$;
- Comutativa: $f \cdot g = g \cdot f,\ \forall f, g \in P$;
- Distributiva: $f \cdot (g + h) = (f \cdot g) + (f \cdot h),\ \forall f, g, h \in P$.

Por definição, a multiplicação de dois polinômios resulta um polinômio. Já a propriedade da associatividade, acima indicada, atende aos propósitos deste trabalho, dispensando considerações adicionais sobre a multiplicação de mais de dois polinômios. Este trabalho, no entanto, apenas adicionará a lei de Stevin, para encerrar o conteúdo teórico sobre a operação multiplicação.

Serrão ([57], p. 44 - 45) indica a lei de Stévin referente à "formação do produto dos n binômios do primeiro grau da forma $(x + a_1), (x + a_2), \ldots, (x + a_n)$, que diferem entre si somente pelos segundos termos". Considerando-se, por exemplo, todos os a_i positivos, o polinômio resultante do produto em pauta pode ser assim definido:

- Todos os termos do polinômio são positivos.
- O produto é um polinômio inteiro em x, de grau n, completo e ordenado, segundo as potências decrescentes de x.
- O produto tem $n + 1$ termos.
- O coeficiente do primeiro termo do produto é um e o último é igual ao produto dos segundos termos dos binômios.
- O coeficiente do termo de ordem p é igual à soma das combinações $p - 1$ a $p - 1$ dos segundos termos dos binômios considerados.

Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_n$ a soma das combinações dos segundos termos dos binômios tomados um a um, dois a dois, $\ldots$, n a n, isto é,

$$S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$S_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = a_1a_2a_3 \ldots a_n$$

Então,

$$(x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdots (x + a_n) =$$
$$= x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \ldots + S_p x^{n-p} + \ldots + S_n$$

A seguir temos o teorema que trata do grau do polinômio resultante da soma e do produto de dois polinômios. A prova se baseia em Dolce ([14], p. 61-63), para a soma, e em Muniz Neto ([37], p. 38 - 39), para o produto.

Teorema 4. *Grau da soma e do produto.*

Se P_1 e P_2 são dois polinômios com graus pertencentes aos naturais, então temos:

(a) $\partial(P_1 + P_2) \leq max\{\partial P_1, \partial P_2\}$, *se* $P_1 + P_2 \neq 0$.

(b) $P_1 P_2 \neq 0$ *e* $\partial(P_1 P_2) = \partial P_1 + \partial P_2$.

Demonstração.

Considere $\partial P_1 = p$ *e* $\partial P_2 = q$, *tais que* $P_1(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ *e* $P_2(x) = b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$.

i) Para (a): grau da soma de dois polinômios.

Sem perda de generalidade, suponhamos inicialmente $p > q$. *Então temos:*

$$(P_1+P_2)(x) = a_p x^p + \ldots + (a_q + b_q)x^q + (a_{q-1} + b_{q-1})x^{q-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x^1 + (a_0 + b_0)$$

Note que $\partial(P_1 + P_2) = p = max\{\partial P_1, \partial P_2\}$.

Para o caso em que $p = q$, *sendo* $P_1 + P_2 \neq 0$, *observe o valor de:*

$$Se\ a_p + b_p \quad \begin{cases} = 0, & então \quad \partial(P_1 + P_2) < p = max\{\partial P_1, \partial P_2\},\ ou \\ \neq 0, & então \quad \partial(P_1 + P_2) = p = max\{\partial P_1, \partial P_2\} \end{cases}$$

Em qualquer situação, temos $\partial(P_1 + P_2) \leq max\{\partial P_1, \partial P_2\}$.

ii) Para (b): grau do produto de dois polinômios.

Considere

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i, \quad P_2(x) = \sum_{j=0}^{q} b_j x^j, \quad \partial P_1 = p \quad e \quad \partial P_2 = q.$$

Seja $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0$ *um coeficiente arbitrário de* $(P_1P_2)(x)$.
Observe o seguinte:

$$c_{p+q} = a_pb_q \neq 0$$
$$c_k = 0, \forall k > p + q$$

Daí se conclui que $\partial(P_1P_2) = p + q = \partial P_1 + \partial P_2$.

□

2.6.5 Divisão

Definição 2.6.4. *Dados dois polinômios* $f,\ g \neq 0$ *em* x, *sendo* f *de grau superior ao de* g, *a divisão algébrica é a operação que tem por fim determinar dois outros polinômios em* x, q *e* r, *este de grau inferior ao de* g, *tais que se tenha sempre* $f = g \cdot q + r, \quad \partial r < \partial g$ *ou* $r = 0$ *(2.6.4): Serrão ([56], p. 26).*

Denominam-se, tradicionalmente, na identidade (2.6.4), os polinômios f como dividendo (ou D), g como divisor (ou d), q como quociente e r como resto. Note que há situações em que a divisão poderá ser exata, implicando: $f = g \cdot q$.

Paiva ([44], p. 366) adota definição semelhante à de Santos ([55], p. 382): "Dados dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$ não identicamente nulos, dividir $A(x)$ *por* B(x) é obter os polinômios $Q(x)$ (quociente) e $R(x)$ (resto), tal que: $A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ e $R(x) \equiv 0$ *ou* $\partial(R) < \partial(B)''$.

Observação 2.6.1. *Sem qualquer menção aos graus dos polinômios envolvidos na operação ou à possibilidade de* $r(x)$ *ser nulo, Flores ([19], p. 150) aponta que a divisão de polinômios consiste em achar uma expressão chamada quociente, dadas outras denominadas dividendo e divisor, de tal modo que se cumpra o seguinte:*

$$D(x) = d(x)q(x) + r(x) \quad \text{ou} \quad \frac{D(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

Nesse contexto, temos:

$D(x)$*: dividendo;* $d(x)$*: divisor;* $q(x)$*: quociente inteiro;*
$r(x)$*: resto ou resíduo;* $\frac{D(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$*: quociente completo.*

Verifica-se facilmente que, nos casos em que o dividendo for nulo, isto é, $D(x) = 0$ ou o grau do dividendo for menor que o grau do divisor, ou seja, $\partial D(x) < \partial d(x)$, a divisão se opera de modo imediato. Assim, temos o seguinte:

$$D(x) = 0 \Rightarrow q(x) = 0 \quad \text{e} \quad r(x) = 0.$$

$$D(x) \neq 0 \quad e \quad \partial D(x) < \partial d(x) \Rightarrow q(x) = 0 \quad \text{e} \quad r(x) = D(x).$$

Ao dividir, por exemplo, $D(x) = 0$ por $d(x) = 3x^2 + 5$, resulta $q(x) = 0$ e $r(x) = 0$.

Quando se toma por dividendo $D(x) = 3x^3 - 5x + 3 \neq 0$ e por divisor $d(x) = 7x^5 - 1$, temos que o quociente $q(x) = 0$ e o resto $r(x) = 3x^3 - 5x + 3$, pois $3 = \partial D(x) < \partial d(x) = 7$.

Afastados esses casos tidos como triviais, passemos às divisões polinomiais mais comuns de ocorrerem, quando $\partial D(x) > \partial d(x)$.

A questão que comumente se apresenta é a seguinte: dados os polinômios $D(x)$ e $d(x)$, qual é o quociente e o resto da divisão de $D(x)$ por $d(x)$?

Dois métodos podem ser utilizados para solucionar esse problema: o "dos coeficientes a determinar" (ou de Descartes) e o "da chave".

2.6.6 Método dos coeficientes a determinar

Método atribuído a Descartes, segundo Bezerra ([3], p. 266), possibilita que se determine "um ou mais coeficientes desconhecidos de um polinômio, dos quais são dadas as condições a que devem satisfazer".

Cabe observar que:

$$\begin{aligned} \cdot\ D(x) = d(x)q(x) + r(x) &\Rightarrow \partial D(x) = \partial(d(x)q(x) + r(x)) \\ &\Rightarrow \partial D(x) = \partial d(x) + \partial q(x) \\ &\Rightarrow \partial q(x) = \partial D(x) - \partial d(x) \end{aligned}$$

$$\cdot\ \partial r(x) < \partial d(x) \quad \text{ou} \quad r(x) = 0.$$

As etapas de execução deste método compreendem:

- cálculo dos graus dos polinômios $q(x)$ e $r(x)$, isto é, do quociente e do resto;

- construção dos polinômios $q(x)$ e $r(x)$, considerando como incógnitas os coeficientes desses dois polinômios;

- determinação desses coeficientes, a partir da seguinte igualdade impositiva: $d(x)q(x) + r(x) = D(x)$.

A título de ilustração, vejamos o exemplo abaixo, extraído de Bezerra ([3], p. 266-267), em que os fundamentos acima podem ser utilizados, no contexto da divisão entre dois polinômios.

Exemplo 2.6.6. *Dados os polinômios* $h(x) = x^4 - 5x^3 + 2x - 1$ *(dividendo) e* $s(x) = x^2 - 3x + 4$ *(divisor), determinemos o quociente* $q(x)$ *e o resto* $r(x)$ *da divisão, sem efetuá-la.*

Note que $\partial q(x) = \partial h(x) - \partial s(x) = 4 - 2 = 2$. *Logo, o quociente,* $q(x)$ *é de grau 2, com a seguinte forma geral:* $q(x) = ax^2 + bx + c$, *sendo desconhecidos os valores dos coeficientes "a", "b" e "c".*

Além disso, observe que o resto será no máximo um binômio de grau 1, na forma de $r(x) = mx + p$, *pois* $\partial r(x) < \partial s(x)$. *Os coeficientes "m"e "p", por sua vez, também são incógnitas. Assim, pelo princípio fundamental da divisão, definido na identidade* (2.6.4), *temos:*

$$h(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x) \Rightarrow$$
$$x^4 - 5x^3 + 2x - 1 = (x^2 - 3x + 4)(ax^2 + bx + c) + (mx + p) =$$
$$= ax^4 + (b - 3a)x^3 + (c + 4a - 3b)x^2 + (4b - 3c + m)x + (4c + p).$$

A igualdade acima é verificada se, e somente se:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} a & & & & & & & & & = & 1 \\ -3a & + & b & & & & & & & = & -5 \\ 4a & - & 3b & + & c & & & & & = & 0 \\ & + & 4b & - & 3c & + & m & & & = & 2 \\ & & & + & 4c & & & + & p & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} a & = & 1 \\ b & = & -2 \\ c & = & -10 \\ m & = & -20 \\ p & = & 39 \end{array}\right.$$

Temos então: $q(x) = x^2 - 2x - 10$ *e* $r(x) = -20x + 39$

Assim: $\underbrace{x^4 - 5x^3 + 2x - 1}_{h(x):\ dividendo} = \underbrace{(x^2 - 3x + 4)}_{s(x):\ divisor} . \underbrace{(x^2 - 2x - 10)}_{q(x):\ quociente} + \underbrace{(-20x + 39)}_{r(x):\ resto}.$

Diante do achado acima, surgem duas perguntas que precisam ser respondidas:

- Sempre existirão os polinômios $q(x)$ e $r(x)$?

- Caso confirmada a existência, esses polinômios são únicos?

Para responder a essas questões, segue-se o teorema abaixo, cuja demonstração se baseia em Dolce & Iezzi ([14], p. 75-77).

Teorema 5. (Teorema da existência e da unicidade do quociente e do resto).

Sejam $D(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ $(dividendo)$, com $a_m \neq 0$, e $d(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ $(divisor)$, com $b_n \neq 0$. Então existem um único polinômio $q(x)$ $(quociente)$ e um único polinômio $r(x)$ $(resto)$, tais que $D(x) = d(x).q(x) + r(x)$ e $\partial r < \partial g$ $(ou\ \ r = 0)$.

Demonstração

i) Da existência

Tomemos inicialmente o monômio $\frac{a_m}{b_n} x^{m-n} = q_0 x^{m-n}$, para, em seguida, definir o seguinte polinômio: $r_1(x) = D(x) - (q_0 x^{m-n}) \cdot d(x)$ (1), também conhecido como primeiro resto (ou resíduo) parcial. Então observe:

$r_1(x) = (a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0) - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} \cdot (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ \ldots + b_0)$.

É evidente que, pelo menos, o termo $a_m x^m$ obrigatoriamente será cancelado, isto é, $r_1(x)$ terá grau inferior a m.

Consideremos então o $\partial r_1(x) = k < m = \partial D(x)$ e adotemos por praticidade $r_1(x) = c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \ldots + c_1 x^1 + c_0$.

Prosseguindo, com procedimento análogo ao que ocorreu acima, tomemos o monômio $\frac{c_k}{b_n} x^{k-n} = q_1 x^{k-n}$, para, em seguida, definir o seguinte polinômio:

$r_2(x) = r_1(x) - (q_1 x^{k-n}) \cdot d(x)$ (2), denominado segundo resto parcial.

Note: $r_2(x) = (c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \ldots + c_0) - \frac{c_k}{b_n} x^{k-n} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0)$, implicando que o termo $c_k x^k$ é cancelado. Logo, $\partial r_2(x) = \beta < k = \partial r_1(x)$.

Então podemos representar $r_2(x) = d_\beta x^\beta + d_{\beta-1} x^{\beta-1} + \ldots + d_1 x^1 + d_0$.

Repitamos analogamente o processo das duas etapas anteriores, tomando o monômio $\frac{d_\beta}{b_n} x^{\beta-n} = q_2 x^{\beta-n}$ e definindo o polinômio $r_3(x) = r_2(x) - (q_2 x^{\beta-n}) \cdot d(x)$, (3), denominado terceiro resto parcial. Assim, temos:

$r_3(x) = (d_\beta x^\beta + d_{\beta-1} x^{\beta-1} + \ldots + d_0) - \frac{d_\beta}{b_n} x^{\beta-n} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0)$.

Com isso se pode comprovar que, pelo menos, o termo $d_\beta x^\beta$ é cancelado. Logo

$\partial r_3(x) = \alpha < \beta = \partial r_2(x)$.

Pode-se então representar assim: $r_3(x) = e_\alpha x^\alpha + e_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \ldots + e_1x^1 + e_0$.

Procedendo de forma semelhante sucessivamente ao que foi realizado nas três etapas acima, verifica-se que a cada etapa o grau do polinômio denominado resto parcial diminui em, pelo menos, uma unidade. Assim, após determinado número de vezes de operações, p vezes, por exemplo, o grau do resto parcial r_p se torna inferior ao grau do polinômio $d(x)$ ou $r_p(x) = 0$. Assim, pode-se escrever:

$$r_p(x) = r_{p-1}(x) - (q_{p-1}x^{\epsilon-n}) \cdot d(x) \quad (p).$$

A seguir, será procedida a soma, membro a membro, das igualdades de (1) a (p):

$$\begin{array}{ll}
(1) & r_1(x) = D(x) - (q_0x^{m-n})d(x) \\
(2) & r_2(x) = r_1(x) - (q_1x^{k-n})d(x) \\
(3) & r_3(x) = r_2(x) - (q_2x^{\beta-n})d(x) \\
\multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
(p) & r_p(x) = r_{p-1}(x) - (q_{p-1}x^{\epsilon-n})d(x) \\
\hline
 & \underbrace{r_p(x)}_{r(x)} = D(x) - \underbrace{(q_0x^{m-n} + q_1x^{k-n} + q_2x^{\ \beta-2} + \ldots + q_{p-1}x^{\epsilon-n})}_{q(x)} \cdot d(x)
\end{array}$$

Então temos: $D(x) = q(x)d(x) + r(x)$, onde $\partial r(x) < \partial d(x)$ ou $r(x) = 0$. Assim, existem os polinômios $q(x)$ e $r(x)$.

ii) Unicidade

Suponhamos que existam $q_1(x)$, $q_2(x)$, $r_1(x)$ e $r_2(x)$, tais que:

$D(x) = q_1(x)d(x) + r_1(x)$, $D(x) = q_2(x)d(x) + r_2(x)$, respeitadas as condições impostas pela definição da divisão[8].

Note que precisamos demonstrar as igualdades: $q_1(x) = q_2(x)$ e $r_1(x) = r_2(x)$.

Temos então:

$D(x) = q_1(x) \cdot d(x) + r_1(x)$ e $D(x) = q_2(x) \cdot d(x) + r_2(x) \Leftrightarrow$

$\mathrm{q}_1(x) \cdot d(x) + r_1(x) = q_2(x) \cdot d(x) + r_2(x) \Leftrightarrow$

$(\mathrm{q}_1 - q_2)(x) \cdot d(x) = (r_2 - r_1)(x)$.

Logo, $\partial[(q_1 - q_2)(x) \cdot d(x)] = \partial[(r_2 - r_1)(x)]$, pois os polinômios $(q_1 - q_2)(x) \cdot d(x)$ e $(r_2 - r_1)(x)$ são idênticos.

[8]Observe: Pela definição de divisão polinomial, $\partial r_1(x) < \partial d(x)$, ou $r_1(x) = 0$, quando a divisão for exata. Analogamente, pode-se afirmar que $\partial r_2(x) < \partial d(x)$, ou $r_2(x) = 0$, para o caso da divisão exata.

Suponhamos então que $q_1(x) \neq q_2(x)$ ou $r_1 \neq r_2$. Assim temos:
- para $q_1(x) \neq q_2(x)$:

$$\partial[(q_1 - q_2)(x) \cdot d(x)] = \partial(q_1 - q_2)(x) + \partial d(x) \geq \partial d(x).$$

- para $r_2(x) \neq r_1(x)$, com ambos polinômios não nulos

$$\partial(r_2 - r_1)(x) \leq max\, \{\partial r_1(x), \partial r_2(x)\} < \partial d(x).$$

- para os casos em que $r_1(x)$ ou $r_2(x) = 0$, consideremos, sem perda de generalidade, $r_1(x) = 0$. Assim temos: $\partial(r_2 - r_1)(x) = \partial r_2(x) < \partial d(x)$.

Os casos acima estudados implicam: $\partial[(q_1 - q_2)(x) \cdot d(x)] \neq \partial(r_2 - r_1)(x)$: contradição. Logo, $q_1(x) = q_2(x)$ e $r_1(x) = r_2(x)$.

Provamos, portanto, que a divisão de um polinômio (dividendo) por outro não-nulo (divisor) aponta para um único quociente (polinômio) e um único resto (polinômio).

□

2.6.7 Método da chave

O "método da chave" (ou algoritmo de Euclides)[9] é o processo prático para se determinar o quociente e o resto da divisão entre dois polinômios.

Os exercícios a seguir foram retirados de livros do ensino básico, servindo como auxiliares da aprendizagem do algoritmo.

- Divisão de $D(x) = 9x^5 + 6x^3 + 3x^2$ por $d(x) = 3x^2$, tarefa adaptada de exercício indicado por Dante ([12], p.105) para alunos do ensino fundamental.

$D(x) \rightarrow\ 9x^5 + 6x^3 + 3x^2$	$3x^2 \leftarrow d(x)$
$-9x^5$	$3x^3 + 2x + 1$
$r_1(x) \rightarrow\ +6x^3 + 3x^2$	
$-6x^3$	
$r_2(x) \rightarrow\ +3x^2$	
$-3x^2$	
$r_3(x) \rightarrow\ 0$	$\leftarrow r(x)$: resto .

[9] Fachini ([17], p. 363 - 364), em vez de apresentar os fundamentos teóricos que embasam o método, anuncia que ele será "relembrado por meio" de um exemplo o qual está exposto à página 363. Assim, fica, nas entrelinhas, a dúvida de que Fachini pressupõe o leitor já conhecer o método ou o citado algoritmo já ter sido descrito na mesma obra, o que não ocorre.

O mesmo algoritmo tabular pode ser apresentado assim de forma mais simplificada:

$9x^5 + 6x^3 + 3x^2$	$3x^2$
$-9x^5$	$3x^3 + 2x + 1$
$-6x^3$	
$-3x^2$	
0	$\leftarrow$ resto

Em virtude da particularidade do dividendo, o mesmo exercício poderia ainda ser solucionado assim, não mais utilizando, obviamente, o método da chave:

$$\frac{9x^5 + 6x^3 + 3x^2}{3x^2} = \frac{9x^5}{3x^2} + \frac{6x^3}{3x^2} + \frac{3x^2}{3x^2} = 3x^3 + 2x + 1 \text{ e resto} = 0.$$

Note que, na solução acima, cada termo do numerador da expressão algébrica fracionária é um monômio múltiplo de $3x^2$. Então a solução também pode ser encaminhada, iniciando-se pela colocação do fator comum, $3x^2$, em evidência. Em seguida, se processa a simplificação com o termo do denominador, o qual também é $3x^2$, conforme mostrado a seguir: $\frac{9x^5+6x^3+3x^2}{3x^2} = \frac{3x^2\cdot(3x^3+2x+1)}{3x^2} = 3x^3 + 2x + 1.$

Exemplo 2.6.7. *Exercícios indicados por Serrão ([56], p. 35).*

- Dividir $D(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x + 20$ *por* $d(x) = x^3 - 2x^2 + 5.$

$x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x + 20$	$x^3 - 2x^2 + 5$
$-x^5 + 2x^4 \qquad -5x^2$	$x^2 - x + 4$
$-x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 5x + 20$	
$x^4 - 2x^3 \qquad +5x$	
$4x^3 - 8x^2 \qquad +20$	
$-4x^3 + 8x^2 \qquad -20$	
0	$\leftarrow$ resto: divisão exata

- Dividir $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 5x - 6$ *por* $g(x) = 4x^2 - 3x + 2.$

$2x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 5x - 6$	$4\mathrm{x}^2 - 3x + 2$
$-2x^4 + \frac{3}{2}x^3 - x^2$	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{11}{32}$
$-\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 5x - 6$	
$+\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$	
$-\frac{11}{8}x^2 + \frac{21}{4}x - 6$	
$+\frac{11}{8}x^2 - \frac{33}{32}x + \frac{11}{16}$	
$+\frac{135}{8}x - \frac{85}{16}$	$\leftarrow$ resto $\neq 0$

As três aplicações, a seguir, fazem parte do repertório tradicional de exercícios nos compêndios sobre polinômios, quando direcionados ao ensino médio.

Exemplo 2.6.8. *Determinar alguns coeficientes de um polinômio para que seja divisível por outro.*

Bezerra ([3], 266 - 268) propõe que determinemos os coeficientes m e p, de modo que $D(x) = x^4 - 5x^2 + mx + p$ seja divisível por $d(x) = x^2 - x - 2$.

Observe que o grau do dividendo é 4 e o grau do divisor é 2. Logo, o grau do quociente é $4 - 2 = 2$. Assim, $q(x)$ é um polinômio do segundo grau.

Seja $q(x) = ax^2 + bx + c$ o quociente da divisão do polinômio $D(x)$ por $d(x)$.

Assim, aplicando o método dos coeficientes e considerando que $D(x) = d(x)q(x)$, temos:

$$x^4 - 5x^2 + mx + p = (x^2 - x - 2)(ax^2 + bx + c)$$
$$x^4 - 5x^2 + mx + p = ax^4 + (b-a)x^3 + (c - 2a - b)x^2 + (-c - 2b)x - 2c.$$

Então, pela equivalência entre polinômios, segue-se:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & & & & & = & 1 \\ -a & + & b & & & = & 0 \\ -2a & - & b & + & c & = & -5 \\ & & -2b & - & c & = & m \\ & & & & -2c & = & p \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & 1 \\ c & = & -2 \\ m & = & 0 \\ p & = & 4 \end{array}\right.$$

Assim, $D(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, pois $m = 0$ e $p = 4$.

Exemplo 2.6.9. *Decompor uma expressão polinomial em outra de um tipo dado.*

Bezerra ([3], p. 266) propõe que o polinômio $f(x) = 3x^2 - 9x + 7$ seja decomposto em uma diferença de dois cubos da forma $(x-a)^3 - (x-b)^3$. Para isso é preciso estabelecer a identidade:

$3x^2 - 9x + 7 = (x-a)^3 - (x-b)^3 \Leftrightarrow$
$3x^2 - 9x + 7 = (x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3) - (x^3 - 3bx^2 + 3b^2x - b^3) \Leftrightarrow$
$3x^2 - 9x + 7 = 3(b-a)x^2 + 3(a^2 - b^2)x - (a^3 - b^3)$

Então, pela equivalência entre dois polinômios, segue-se:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -3a & + & 3b & = & 3 \\ 3a^2 & - & 3b^2 & = & -9 \\ -a^3 & + & b^3 & = & 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} b & - & a & = & 1 \\ b^2 & - & a^2 & = & 3 \\ b^3 & - & a^3 & = & 7 \end{array}\right.$$

Note que $a = 1$ *e* $b = 2$ *é solução do sistema acima. Logo, temos:*

$$3x^2 - 9x + 7 = (x-1)^3 - (x-2)^3.$$

O gráfico abaixo ilustra os três polinômios envolvidos na decomposição proposta: $f(x) = 3x^2 - 9x + 7$, $h(x) = (x-1)^3$ *e* $g(x) = -(x-2)^3$.

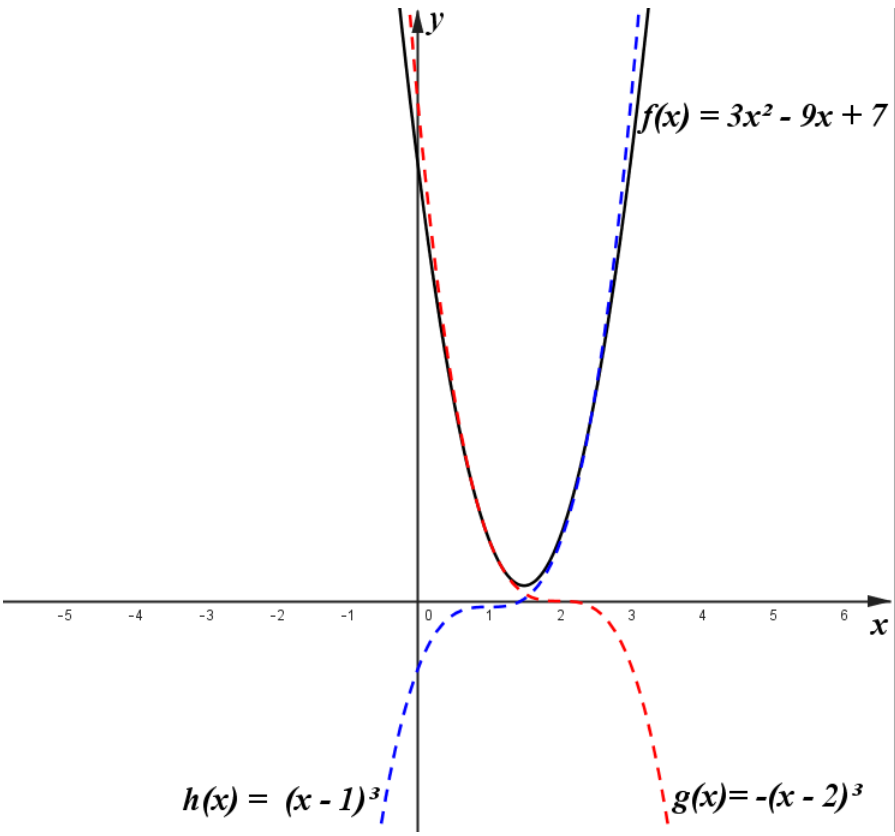

Figura 2.8: Decomposição de polinômio.

Exemplo 2.6.10. *Decompor uma fração polinomial*[10] *em frações polinomiais mais simples cujos denominadores são divisores do denominador da fração inicial*[11].

Desejamos decompor uma fração cujos termos (numerador e denominador) sejam polinômios de uma só variável, em uma soma de frações mais simples. Na fração polinomial inicial, o grau do polinômio do denominador é maior que o grau do numerador, podendo o numerador ser uma constante ou um monômio.

Thomas ([64], p. 532-533) propõe a seguinte tarefa: decompor a fração $\frac{5x-3}{x^2-2x-3}$.

Note: O denominador $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ *contém dois fatores de primeiro grau não repetidos, correspondendo a cada fator uma fração. Assim temos:*

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3} \Leftrightarrow$$
$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{a(x-3)+b(x+1)}{(x+1)(x-3)} \Leftrightarrow$$
$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{(a+b)x+(-3a+b)}{(x+1)(x-3)} \Leftrightarrow$$
$$a+b=5 \;\; e \;\; -3a+b=-3 \Leftrightarrow a=2 \quad e \quad b=3.$$

Logo:
$$\underbrace{\frac{5x-3}{x^2-2x-3}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{2}{x+1}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{3}{x-3}}_{h(x)}.$$

O gráfico abaixo mostra a fração polinomial inicial e as duas frações mais simples resultantes da decomposição da primeira.

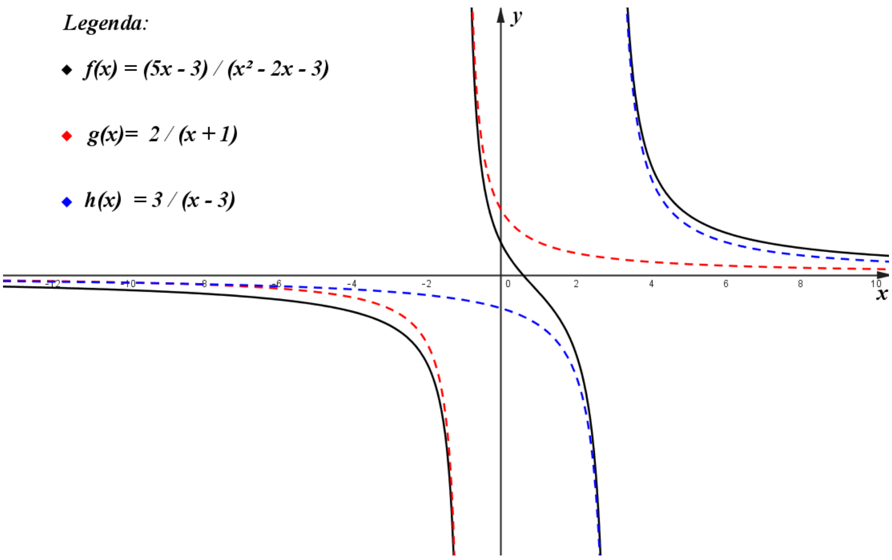

Figura 2.9: Decomposição de uma fração.

[10] Segundo Paiva ([44], p. 367 - 368), "chama-se fração polinomial toda expressão do tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$, em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios complexos de variável complexa, com $Q(x)\neq 0''$.

[11] Frações polinomiais mais simples: expressão utilizada por Bezerra ([3], p.268)

Passemos ao exercício proposto por Baccaro & Cyrino ([2], p. 74 - 75): "decompor a fração $\frac{5x+2}{x^2-4}$*, em duas parcelas".*

Note: $x^2-4=(x+2)(x-2)$. *Assim, podemos escrever:*

$$\frac{5x+2}{x^2-4}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-2} \Leftrightarrow \frac{5x+2}{x^2-4}=\frac{a(x-2)+b(x+2)}{x^2-4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{5x+2}{x^2-4}=\frac{(a+b)x+(2b-2a)}{x^2-4}$$

Logo, a igualdade entre as frações ocorrerá se:

$$a+b=5 \quad e \quad 2b-2a=2 \quad \Leftrightarrow \quad a+b=5 \quad e \quad b-a=1 \quad \Leftrightarrow \quad a=2 \quad e \quad b=3.$$

Então $\frac{5x+2}{x^2-4}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-2}$.

Divisão por binômios

Na divisão entre dois polinômios, o resto é nulo ou possui grau inferior ao grau do divisor. Assim, se o divisor tem a forma $d(x)=ax+b$, então o resto será nulo ou terá grau zero. Nesse caso, o resto independe da variável x, isto é, trata-se de uma constante. Vejamos então algumas particularidades interessantes dessa divisão e também o algoritmo de Briot-Ruffini, aplicado aos casos em que o binômio possui a forma $x-b$.

Seja $D(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x^1+a_0$ um polinômio de grau n e $d(x)=ax+b$ um binômio de primeiro grau. Logo temos: $D(x)=(ax+b)\cdot q(x)+r(x)$, sendo $r(x)=c$, uma constante, visto que o divisor $d(x)=ax+b$ é de primeiro grau.

Fazendo $x=\frac{-b}{a}$ na expressão anterior, obtemos: $D(\frac{-b}{a})=r(\frac{-b}{a})$.

Assim, segundo Serrão ([56], p. 29), "o resto da divisão de um polinômio [...] em x por um binômio do primeiro grau da forma $ax+b$ se obtém substituindo, no polinômio x, por $\frac{-b}{a}''$. Logo, quando $D(\frac{-b}{a})=0$, então $D(x)$ é divisível por $ax+b$, valendo também a recíproca.

Note ainda que o resto da divisão de um polinômio em x pelo binômio $(x-a)$ é o valor numérico do polinômio dado para $x=a$. Vejamos:

Seja $D(x)=(x-a)\cdot q(x)+r(x)$. Assim, para $x=a$, temos:

$$D(a)=(a-a)\cdot q(a)+r(a) \Rightarrow D(a)=r(a).$$

Analogamente, verifica-se que o resto da divisão de um polinômio pelo binômio $x+a$ é obtido, determinando-se o valor numérico do polinômio para $x=-a$.

Assim, $D(-a) = r(-a)$, que é uma constante complexa.

Em geral, as considerações anteriores mantêm estreita relação com o conteúdo do teorema do resto, cuja demonstração se baseia em Raymundo ([48], p. 197).

Teorema 6. (Teorema do resto).

Dado um polinômio P(x), com $\partial P(x) \geq 1$, então o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-a)$ é igual a $P(a)$.

Demonstração.

Seja $P(x) = Q(x) \cdot (x-a) + r(x)$, com $r(x) = R$, constante, $\forall x \in \mathbb{C}$. Assim, substituindo x por a, segue-se:

$$P(a) = Q(a) \cdot (a-a) + r(x) \Rightarrow P(a) = 0 + R \Rightarrow P(x) = R.$$

□

Exemplo 2.6.11. *Serrão ([56], p. 37) propõe que determinemos o resto da divisão do polinômio* $f(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 - x - 13$ *por* $(x+2)$, *sem efetuar a divisão.*

Seja a constante R o resto a determinar. Assim temos:

$R = f(-2) = (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 - (-2) - 13 = 17.$ *Logo* $R = 17.$

Tratemos agora da condição de divisibilidade de um polinômio de uma variável $P(x)$ *por* $x-a$, *objeto do teorema abaixo, cuja demonstração se baseia em Dolce & Iezzi ([14], p. 83).*

Teorema 7. *Teorema de D'Alembert.*

Um polinômio P(x) é divisível por $x-a$ *se, e somente se,* a *é raiz de* $P(x)$.

Demonstração.

Considerando $P(x)$ *divisível por* $x-a$, *observam-se as seguintes relações de equivalência:*

$$\begin{aligned}(x-a)|P(x) \ (x-a \textit{ divide } P(x)) &\Leftrightarrow \exists Q(x); P(x) = Q(x)(x-a) \\ &\Leftrightarrow P(a) = Q(a)(a-a) = 0 \Leftrightarrow P(a) = 0.\end{aligned}$$

Logo a *é raiz de* $P(x)$.

□

2.6.8 Dispositivo de Briot-Ruffini

A regra ou o dispositivo de Briot-Ruffini[12] consiste de um algoritmo destinado a efetuar a divisão de um polinômio $\mathrm{P}(x)$ por um binômio da forma $(x-a)$, baseado no método dos coeficientes a determinar. Assim, o dispositivo de Briot-Ruffini particulariza, portanto, o modo de fazer tal divisão para os casos em que o divisor seja da forma $x-a$.

Em geral, os autores atuais pouco exploram as normas para construção desse algoritmo e optam pela aplicação direta, utilizando exemplos[13]. Em face disso, recorremos aos conhecimentos indicados pelo "método dos coeficientes a determinar", para efetuar a divisão de um polinômio completo e ordenado $P(x)$ (dividendo) pelo binômio $x-a$ (divisor).

Sejam $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x^1 + a_m$ (o polinômio dividendo), e $Q(x) = b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + b_2x^{m-3} \ldots + b_{m-1}$ (o polinômio quociente). Daí temos:

$$
\begin{aligned}
&b_0 = a_0 \\
&b_1 = a_1 + a_0 \cdot a \\
&b_2 = a_2 + b_1 \cdot a \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&b_p = a_p + b_{p-1} \cdot a \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&b_{m-1} = a_{m-1} + b_{m-2} \cdot a \\
&R = a_m + b_{m-1} \cdot a.
\end{aligned}
$$

Serrão ([56], p. 31-32) extrai a Regra de Briot-Ruffini a partir das observações acima, assim determinando o quociente e o resto:

- O coeficiente do primeiro termo do quociente é igual ao coeficiente do primeiro termo do dividendo (a_0).

- O coeficiente do segundo termo do quociente é igual ao coeficiente do segundo termo do dividendo (a_1) mais o produto do coeficiente do primeiro termo do quociente pelo segundo termo do binômio $(-a)$, tomado com o sinal trocado (a).

[12] Nomenclatura usada por autores mais antigos. Os autores com obras em edições mais recentes, como Smole & Diniz ([59], p. 171) e Dolce ([14], p. 83-84), utilizam a nomenclatura "divisão sintética" ou "algoritmo de Briot-Ruffini".

[13] Iezzi ([24], p. 82-83) é uma exceção. Realiza o embasamento teórico, para depois exemplificar.

Logo, podemos generalizar. O coeficiente do termo de ordem p do quociente é igual ao coeficiente do termo da mesma ordem do dividendo ($P(x)$), mais o produto do coeficiente do termo antecedente do quociente pelo segundo termo do binômio com o sinal trocado, ou seja: $b_p = a_p + b_{p-1}a$.

Por outro lado, para determinar o valor do resto, adota-se o procedimento a seguir:

- Multiplica-se o coeficiente do termo constante do quociente pelo segundo termo do binômio tomado com o sinal trocado e, em seguida, adiciona-se a esse produto o coeficiente do termo constante do dividendo. Assim $R = a_m + b_{m-1}a$.

Exemplo 2.6.12. *Souza & Garcia ([61], p. 182) propõem que determinemos o valor de* k *de modo que, ao dividir* $p(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^2 + kx - 6$ *por* $x - 2$*, o resto seja igual a* 92*.*

Utilizemos, pois, o dispositivo de Briot-Ruffini. Para isso, o primeiro procedimento é completar o polinômio: $p(x) = 3x^5 - 1x^4 + 0x^3 + 2x^2 + kx - 6$*. Em seguida, estrutura-se o dispositivo tabular especial abaixo, aplicando as normas anteriormente definidas para o algoritmo, para se determinar os coeficientes do quociente e do resto.*

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
2 & 3 & -1 & 0 & 2 & k & -6 \\
\hline
 & 3 & \underbrace{5}_{3\cdot 2-1)} & \underbrace{10}_{5\cdot 2+0} & \underbrace{22}_{10\cdot 2+2} & \underbrace{44+k}_{22\cdot 2+k} & \underbrace{82+2k}_{(44+k)\cdot 2-6} \leftarrow \text{resto}
\end{array}
$$

Assim, para que o resto seja igual a 92*, temos* $82 + 2k = 92$*. Logo* $k = 5$*.*

Diversos 2.6.1. *Evidentemente, diversos outros aspectos dos polinômios e aplicações ainda poderiam ser explorados neste capítulo, como, por exemplo, o binômio de Newton*[14]*, assunto inserido no contexto de potências de polinômios e tratado geralmente no âmbito da análise combinatória. Este trabalho, porém, não o incluirá.*

[14] Para maiores detalhes sobre o tema, vide, por exemplo, os capítulos 2 de Serrão ([57], p. 44-77) e 6 de Morgado & Carvalho ([36], p. 107 - 134)

Capítulo 3

Equações polinomiais

Este capítulo trata das equações[1] polinomiais de uma só variável, destacando, em particular, aspectos como definição, raiz, equivalência, resolução algébrica, relações entre coeficientes e raízes, número de raízes e aplicações.

3.1 Equação

Definição 3.1.1. *Seja* $F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ *um polinômio em uma variável, onde* $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, *com* $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\} \subset \mathbb{C}$ *e* $a_n \neq 0$.

A igualdade

$$F(x) = 0, \text{ isto é, } \quad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0, \tag{3.1}$$

é denominada equação polinomial ou equação algébrica, nomenclatura essa adotada por vários autores como Machado ([32], p.175) e Paiva ([43], p.188), a ser seguida neste trabalho.

Bezerra ([3], p. 281), por sua vez, denomina a expressão correspondente à igualdade (3.1) como equação racional inteira de grau n, sinalizando que "uma equação diz-se algébrica, quando as incógnitas que nela figuram estejam submetidas apenas a operações algébricas", isto é, às operações triviais de soma, subtração, multiplicação e divisão.

O mesmo autor ainda destaca que qualquer equação algébrica pode ser escrita

[1] Sangiorgi ([53], p.80): Equação é "uma sentença aberta que exprime uma igualdade entre duas expressões numéricas".

na forma acima (3.1), após determinado número de operações. Assume assim a tradicional forma canônica das equações algébricas de uma variável.

Dolce & Iezzi ([14], p. 114) definem a equação polinomial ou equação algébrica como a sentença aberta $f(x) = g(x)$, considerando-se duas funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$. Por exemplo, dadas as funções polinomiais $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^3 - x^2 + 5$, temos que a sentença aberta $x^2 - 1 = x^3 - x^2 + 5$ é uma equação polinomial.

Expressando-se a equação polinomial na forma canônica, (3.1), é comum se referir ao grau dessa equação como sendo o mesmo grau do polinômio $F(x)$ e a a_n como coeficiente dominante do mesmo polinômio. Assim, temos por exemplo:

$3x + 5 = 0$ (equação de grau 1 ou do primeiro grau; com coeficientes: 3 e 5).

$2x^4 - 8x^2 + 9 = 0$ (equação do quarto grau; com coeficientes: 2, 0, -8, 0 e 9), pois $2x^4 - 8x^2 + 9 = 0$, se, e somente se, $2x^4 + 0x^3 - 8x^2 + 0x + 9 = 0$.

3.2 Raiz

Todo valor de x, complexo ou real, que anular o polinômio definido em 3.1.1 é denominado raiz ou zero da equação 3.1, ou ainda solução ou valor-verdade, segundo Sangiorgi ([51], p. 182).

Para Iezzi ([27], p. 149), “um número α é raiz da equação polinomial $P(x) = 0$ se, e somente se, $P(\alpha) = 0$, ou seja, $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$”.

Tomemos, por exemplo, o polinômio $P(x) = 2x^3 + x^2 - x - 18$. É fácil verificar que, para $x = 2$, temos $P(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 - 18 = 0$. Assim, 2 é raiz da equação $2x^3 + x^2 - x - 18 = 0$. Além disso, $P(x)$ é divisível por $x - 2$. Já $P(0) = -18$. Logo, 0 não é raiz da equação. Daí, $x - 0 = x$ não divide o polinômio em foco.

O conjunto de todas as raízes de uma equação polinomial é denominado, segundo Netto ([39], p. 87), conjunto verdade ($\mathcal{V}$). Machado ([32], p. 176) e Paiva ([43], p. 188) atribuem ao mesmo conjunto também o nome de “conjunto solução” ($\mathcal{S}$) da equação, o qual está contido em certo conjunto universo, geralmente o dos complexos.

Note que a equação $x^2 - 7x + 12 = 0$ é de grau dois. Já seu conjunto solução é $\mathrm{S} = \{3, 4\}$, pois $P(3) = P(4) = 0$.

3.3 Equações equivalentes

Definição 3.3.1. *Duas equações polinomiais são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução (ou conjunto verdade), ou seja, quando a raiz de uma equação é também raiz da outra e vice versa, temos duas equações equivalentes*[2].

Observação 3.3.1. *Passemos, pois, a tratar de transformações algébricas que não modificam o conjunto solução de uma equação polinomial dada.*

A primeira dessas transformações consiste em somar o mesmo polinômio a ambos os membros da equação inicial.

Tomemos a equação $f_1(x) = f_2(x)$. *Adicionando-se a ambos os membros o polinômio* $f_3(x)$ *resulta:* $f_1(x)+f_3(x) = f_2(x)+f_3(x)$, *que é uma equação polinomial equivalente à inicial dada*[3].

Exemplo 3.3.1. *Exercício adaptado do problema proposto por Galante ([20], p. 16): determinar as raízes da equação* $\frac{2x^2+3x}{4} = \frac{4x^2}{3} - \frac{5x}{4}$.

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{2x^2+3x}{4} = \frac{4x^2}{3} - \frac{5x}{4}}_{\textit{equação inicial}} &\Leftrightarrow \frac{3\cdot(2x^2+3x)}{3\cdot 4} = \frac{4\cdot(4x^2)}{4\cdot 3} - \frac{3\cdot(5x)}{3\cdot 4} \\
&\Leftrightarrow \frac{6x^2+9x}{12} = \frac{16x^2}{12} - \frac{15x}{12} \\
&\Leftrightarrow 6x^2 + 9x = 16x^2 - 15x \\
&\Leftrightarrow 6x^2 + 9x + (-16x^2 + 15x) = 16x^2 - 15x + (-16x^2 + 15x) \\
&\Leftrightarrow \underbrace{-10x^2 + 24x = 0}_{\textit{equivalente à inicial}} \\
&\Leftrightarrow -2x(5x - 12) = 0 \\
&\Leftrightarrow -2x = 0 \ \textit{ou} \ 5x - 12 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \ \textit{ou} \ x = \tfrac{12}{5}.
\end{aligned}$$

A equação inicial possui o mesmo conjunto solução que $-10x^2 + 24x = 0$, *ou seja,* $x = 0$ *e* $x = \frac{12}{5}$ *são suas raízes.*

[2] "Equações que têm o mesmo Conjunto - Verdade são denominadas equações equivalentes": Sangiorgi ([51], p. 184).

[3] Sangiorgi ([53], p. 82 - 83) chama de princípio aditivo da igualdade e o aplica a equações do primeiro grau, em sua obra destinada à antiga sexta série do ensino fundamental.

Exemplo 3.3.2. *Determinemos agora as raízes da seguinte equação:*

$$\underbrace{\underbrace{0,5x^2 - 5x - 1}_{f_1(x)} = \underbrace{-0,5x^2 - 3x + 2}_{f_2(x)}}_{f(x):\ \textit{inicial}}$$

Note:

$$0,5x^2 - 5x - 1 = -0,5x^2 - 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{0,5x^2 - 5x - 1}_{f_1(x)} + \underbrace{(0,5x^2 + 3x - 2)}_{+f_3(x)} = \underbrace{-0,5x^2 - 3x + 2}_{f_2(x)} + \underbrace{(0,5x^2 + 3x - 2)}_{+f_3(x)}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2x - 3 = 0}_{g(x):\ \textit{equivalente à inicial}} \Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \ \textit{ou} \ x = 3 \Rightarrow S = \{-1, 3\}.$$

Observe também que graficamente as equações $f(x)$ *e* $g(x)$ *são equivalentes, isto é, possuem o mesmo conjunto solução,* S*: vide ilustração abaixo*[4].

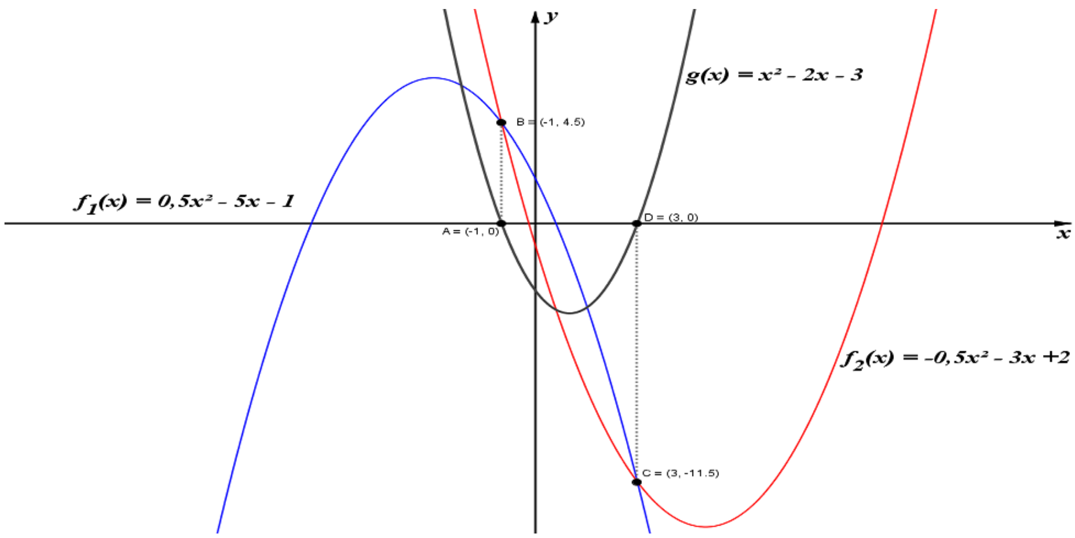

Figura 3.1: Equações equivalentes: transformação por adição

Note ainda na figura 3.1 que a interseção entre os gráficos que correspondem aos polinômios $f_1(x)$ *e* $f_2(x)$*, os quais compõem os membros da equação* $f(x)$*, ocorre em* $x = -1$ *e* $x = 3$*, valores esses que coincidem exatamente com as raízes da equação* $g(x)$*.*

[4] Solução gráfica obtida com o aplicativo Geogebra [65].

Observação 3.3.2. *Outra transformação algébrica que não altera o conjunto solução de uma equação polinomial consiste em multiplicar ambos os membros da equação por um número complexo distinto de zero*[5].

Assim, tomemos como equação inicial $f_1(x) = f_2(x)$, *tal que* a, *número complexo, seja raiz dessa equação. Assim,* $f_1(a) - f_2(a) = 0$. *Então, multiplicando-se ambos os membros da equação por* $k \neq 0$, *resulta:*

$$k \cdot f_1(x) = k \cdot f_2(x) \Leftrightarrow k \cdot (f_1(x) - f_2(x)) = 0 \Leftrightarrow k=0 \text{ ou } f_1(x) - f_2(x) = 0.$$

Como, por hipótese, $k \neq 0$ *e* $f_1(a) - f_2(a) = 0$, *então* a *é também raiz de* $k \cdot f_1(x) = k \cdot f_2(x)$.

Exemplo 3.3.3. *Consideremos a equação inicial* $2x^2 - 5x = 0$.

Note que $2x^2 - 5x = 0$ *equivale a* $x^2 - \frac{5x}{2} = 0$, *pois a segunda equação pode ser obtida a partir da primeira, após multiplicá-la por* $\frac{1}{2} \neq 0$. *No caso, ambas as equações têm como conjunto solução S =* $\{0, \frac{5}{2}\}$, *pois:*

$$2x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2}x = 0 \Leftrightarrow x(x - \frac{5}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{2}.$$

Essas duas raízes são facilmente identificáveis na solução gráfica abaixo.

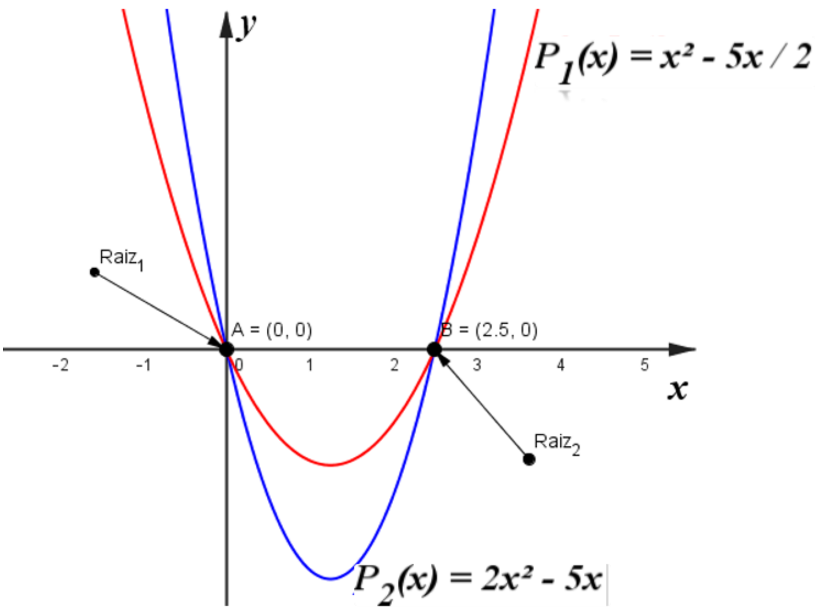

Figura 3.2: Equações equivalentes: transformação por multiplicação

[5] Sangiorgi ([53], p. 82) denomina princípio multiplicativo da igualdade e o aplica a equações do primeiro grau.

Verifica-se, portanto, que as transformações são realizadas a partir da equação inicial, visando chegar à equação equivalente sob forma mais simples, a fim de facilitar a determinação de suas raízes, isto é, do conjunto solução, atividade a ser detalhada em seguida.

3.4 Resolução algébrica das equações

Segundo Farias ([18], p. 2), "a resolução algébrica de uma equação consiste em estabelecer a fórmula geral que dá os valores das raízes em função dos coeficientes. A fórmula indica como as raízes se formam dos coeficientes e é deduzida para a equação geral de cada grau ou de cada espécie"[6].

Para Bezerra ([3], p. 283), 'resolver algebricamente uma equação polinomial é determinar as soluções algébricas dessa equação", processo esse bastante simples e imediato nos casos das equações de primeiro e de segundo grau.

3.4.1 Equação do primeiro grau

Resolver uma equação do primeiro grau, segundo Sangiorgi ([53], p. 82), é "transformá-la em uma série de equações equivalentes, cada vez mais simples, até chegar a uma equação elementar do tipo: $x = a$, cuja solução coincide com a da equação proposta: a, número complexo". Essa transformação, para Sangiorgi ([51], p. 185), se processa pelo "emprego das operações inversas das que figuram na equação, até chegar a uma equação na forma elementar, cuja raiz está, praticamente, determinada".

Exemplo 3.4.1. *"$4x - 8 = 0$ é uma equação do primeiro grau na incógnita x, cuja raiz é 2, ou seja, o conjunto solução dessa equação é $S = \{2\}$", assim sinaliza Paiva ([43], p. 188). Note:* $4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Vide o gráfico a seguir, que ilustra geometricamente uma maneira de perceber a solução deste problema.

[6] Farias ([18], p. 3) diferencia a resolução algébrica da resolução numérica de uma equação, que "consiste em calcular diretamente os valores numéricos das raízes sem o conhecimento da fórmula geral de resolução".

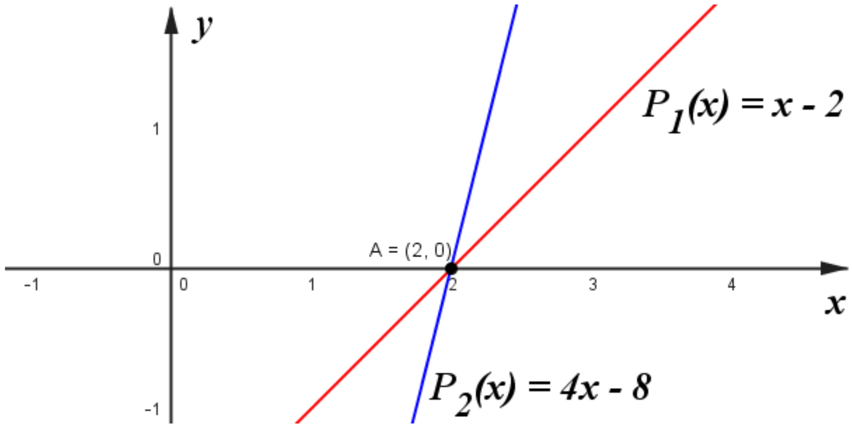

Figura 3.3: Equação do primeiro grau: resolução.

Observe que a interseção dos gráficos de $P_2(x) = 4x - 8,$ *e de* $P_1(x) = x - 2$ *ocorre em* $x = 2,$ *raiz da equação inicial.*

3.4.2 Equação do segundo grau

Agora tratemos da equação do segundo grau (ou quadrática), a qual, segundo Cattony ([11], p. 53), "pode, depois de feitas todas as reduções, tomar a forma geral $ax^2 + bx + c = 0,$ onde x é a incógnita"[7], com $a, b, c \in \mathbb{C},$ sendo $a \neq 0.$

A equação do segundo grau, na forma geral (ou normal) acima, pode ter seus coeficientes numéricos ou literais, conforme aponta Brandão ([9], p. 35 - 36), exemplificando-a com os dois casos abaixo.

$2x^2 + 3x - 8 = 0,$ com $a = 2,$ $b = 3,$ $c = -8.$

$(m-1)x^2 + (2m+3)x + m^2 - 6m + 8 = 0,$ com $a = m - 1 \neq 0,$ $b = 2m+3$ e $c = m^2 - 6m + 8.$

Observação 3.4.1. *Considerando-se a equação na sua forma geral, temos:*

- O coeficiente real de x^2 *pode ser escrito como número positivo. Se não o for, basta multiplicar toda a equação por* -1 *e todos os seus termos mudarão de sinal, conseguindo-se, portanto, que o coeficiente correspondente a "a" se torne positivo.*

- O termo c *é chamado de termo conhecido, independente ou constante. Além*

[7] Galante ([20], p. 11) realiza a mesma abordagem introdutória ao assunto.

disso, "quando os coeficientes são números, a equação se diz numérica. Se estes são letras, as equações se denominam literais", segundo Brandão ([9], p. 36).

Abaixo serão apresentados conceitos ligados à solução da equação do segundo grau, considerando o conjunto dos reais. Um desses conceitos é o seguinte teorema registrado por Cattony ([11], p. 53 - 55) .

Teorema 8. *As raízes da equação* $(ax+b)(a'x+b') = 0 \ \ (1),$ *sendo* a *e* a' *diferentes de zero, são as mesmas das duas equações do primeiro grau:* $ax+b=0$ *e* $a'x+b'=0 \ \ (2).$

Demonstração.

Seja m *raiz da equação* $(1).$ *Então obrigatoriamente será raiz de uma das equações* $(2).$ *Do contrário, ambos os valores* $am+b$ *e* $a'm+b'$ *não seriam nulos e seu produto também.*

Reciprocamente, afirmemos que a raiz de uma das equações (2) *é raiz da equação* $(1).$ *De fato, suponha, sem perda de generalidade,* m *raiz de* $ax+b=0.$ *Como* $a \neq 0,$ *então essa equação não é indeterminada*[8]*. Observe que o valor* $a'm+b'$ *é determinado. Assim, o produto* $(am+b)(a'm+b'),$ *contendo um fator nulo e outro determinado, é necessariamente nulo. Logo* m *é raiz da equação* $(1).$

$\square$

Tratemos agora sobre como resolver a equação do segundo grau, dada na sua forma geral. Para isso, conforme Griffiths ([21], p. 333), temos de "fatorar o polinômio ax^2+bx+c como produto de fatores lineares", isto é, fatores na forma $mx+p$ e $m'x+p'$. Assim, para obter a fatoração desejada, serão seguidas as sugestões de Lima ([30], p. 110 - 112)[9].

Consideremos o trinômio $ax^2+bx+c = a[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}]$. Note que "as duas primeiras parcelas dentro dos colchetes são as mesmas do desenvolvimento do quadrado

[8] Cattony ([11], p. 53-55) utiliza a denominação de equação indeterminada quando ela possui infinitas soluções. As equações do primeiro grau indeterminadas são as da forma $0x=0,$ as quais admitem qualquer real como raiz.

[9] Lima ([30]) registra na contracapa que o livro "contém a matéria de Matemática do primeiro ano do Ensino Médio, apresentada de modo que o professor [...] tenha um sólido conhecimento da mesma e saiba aplicá-la em situações concretas".

$(x+\frac{b}{2a})^2{''}$. Então procede-se o completamento do quadrado, observando-se que o valor do trinômio original não pode ser alterado. Segue-se portanto:

$$\begin{array}{l} ax^2+bx+c = a[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}] \Leftrightarrow \\ ax^2+bx+c = a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}] \Leftrightarrow \\ ax^2+bx+c = a[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}]. \end{array}$$

Quando escrito do modo exposto na última linha acima, diz-se que o trinômio do segundo grau está apresentado na forma canônica. Assim temos:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0 \\ &\Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Sendo $a \neq 0$, note que existem duas raízes complexas na equação inicial: $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Elas não serão reais, caso a expressão, chamada discriminante, $\triangle = b^2-4ac$ seja menor que zero. Nesse caso, as raízes tomarão a forma: $-\frac{b}{2a}+m\cdot i$ e $-\frac{b}{2a}-m\cdot i$. A parte real das duas raízes complexas é $-\frac{b}{2a}$. A parte imaginária dos mesmos números complexos é $\pm\, m\cdot i = \pm\,\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; tal que $m \in R$ e $i=\sqrt{-1}$, a representação simbólica que caracteriza a parte imaginária propriamente dita. Nesse caso, temos raízes que são dois números complexos conjugados[10].

Por outro lado, as duas raízes serão reais, caso o discriminante $\triangle = b^2-4ac \geq 0$. Além disso, se $\triangle = b^2-4ac=0$, então as duas raízes reais serão iguais a $-\frac{b}{2a}$.

É imediata a verificação de que as recíprocas são válidas, quando se relacionam os tipos de raízes e o valor do discriminante.

Assim, resumindo o visto a respeito do valor do discriminante, temos o seguinte para as equações da forma $ax^2+bx+c=0$, com os coeficientes $a, b, c \in R$ e $a \neq 0$:

[10] Uma raiz é o conjugado da outra, assumindo a forma $p+qi$ e $p-qi$, tal que p é a parte real e qi, a parte imaginária.

$\triangle = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow$ duas raízes complexas propriamente ditas;

$\triangle = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow$ duas raízes reais iguais a $-\frac{b}{2a}$. Daí surge a denominação de "raiz dupla", por haver duas raízes com o mesmo valor.

$\triangle = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$ duas raízes reais distintas.

Os gráficos[11] abaixo, obtidos usando o Geogebra, ilustram as três situações acima, com suas variantes, referentes aos valores que o discriminante pode assumir (positivo, negativo ou nulo).

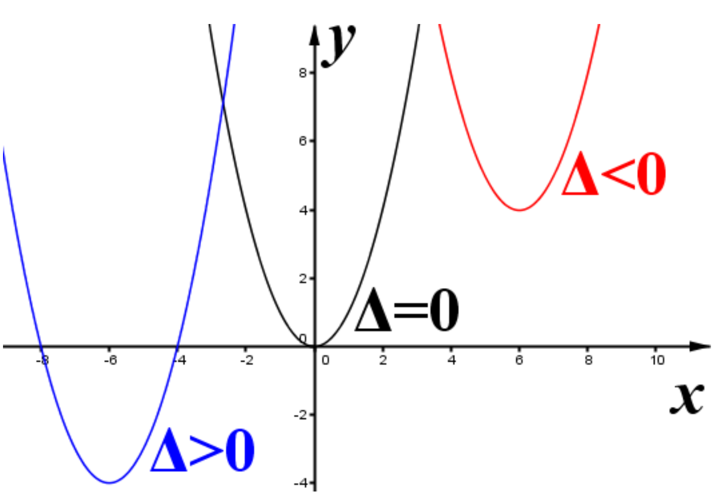

Figura 3.4: Discriminante e raízes reais (I)

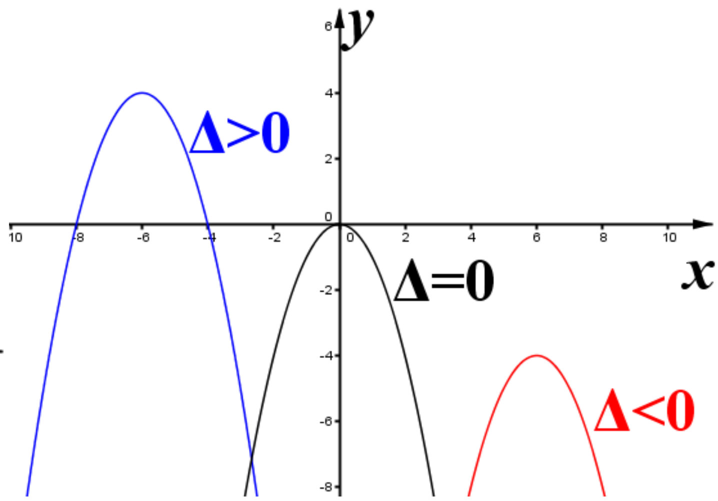

Figura 3.5: Discriminante e raízes reais (II)

Observe que as interseções de cada gráfico com o eixo dos x, quando existem $(\triangle = b^2 - 4ac \geq 0)$, correspondem às raízes do trinômio de segundo grau que define a equação: raízes reais distintas ou iguais (raiz dupla).

Retomando a forma canônica do trinômio, consideremos o polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}]$.

Veja que a expressão entre colchetes é a soma de uma parcela sempre maior ou igual a zero e de outra parcela constante: $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$.

Assim, para $a > 0$, temos que o menor valor dessa soma se opera, quando $(x + \frac{b}{2a}) = 0$, isto é, quando $x = -\frac{b}{2a}$, ponto em que $P(x)$ atinge seu mínimo. Não assume valor máximo e é ilimitada superiormente, aspecto esse que não será explorado neste trabalho.

[11] Para obtenção dos gráficos de uma função quadrática, vide Neto ([38], p. 72-76), Lima ([30], p. 112 - 120) e Morandi ([35], p. 157 - 182)

Raciocinando analogamente para o caso em que $a < 0$, temos que, para $x = -\frac{b}{2a}$, aquela soma atinge seu maior valor. Assim, nesse ponto, $P(x)$ tem seu valor máximo. Não tem valor mínimo e é ilimitada inferiormente, conforme Lima ([30], p.111).

Exemplo 3.4.2. *Bucchi ([45], p. 475) propõe resolver a equação* $f(x) = x^2 - x = 0$.

Note: $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow 1x^2 - 1x + 0 = 0$, *sendo* $a = 1 > 0$, $b = -1$ *e* $c = 0$.

Assim, $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot0}}{2\cdot1} = 1$ *ou* $x = \frac{1-\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot0}}{2\cdot1} = 0$.

Então as raízes são 0 *e* 1. *Possuindo raízes reais e desiguais, é previsível que o discriminante da equação correspondente seja positivo, o que é facilmente verificado:* $\triangle = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1 > 0$.

O gráfico abaixo, construído com auxílio do Geogebra, ilustra a solução.

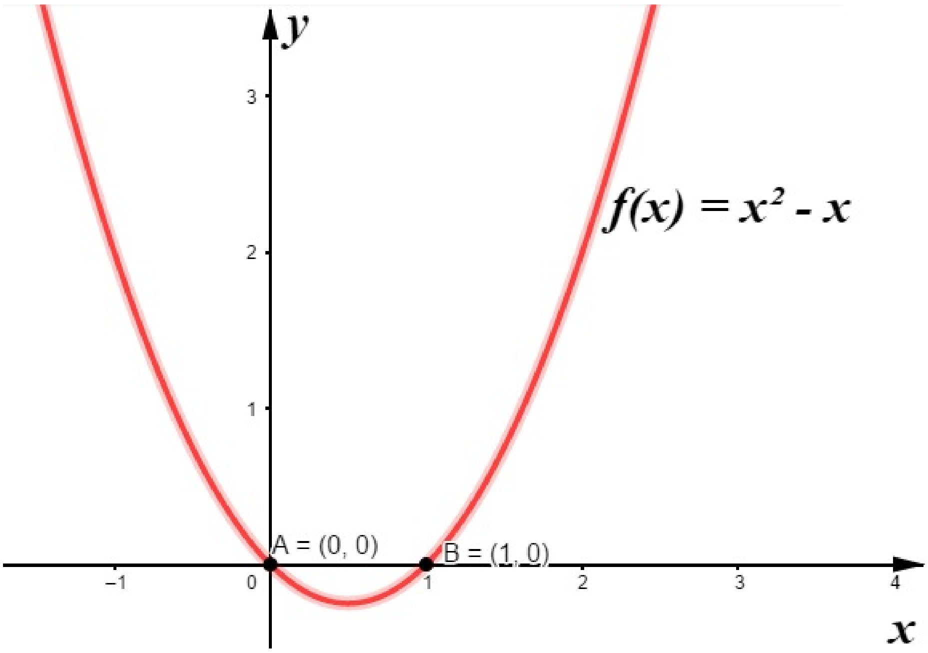

Figura 3.6: Equação quadrática: raízes reais e desiguais

Note a forma de parábola do gráfico, sua concavidade voltada para cima e as raízes reais de $f(x)$ *como os dois pontos de interseção do referido gráfico com o eixo dos* x.

Exemplo 3.4.3. *Bonjorno & Giovanni ([6], p. 102) propõem que sejam determinadas as raízes da equação* $P(x) = -x^2 + 2x - 1 = 0$.

Observe que $a = -1 < 0$, $b = 2$ *e* $c = -1$. *Logo* $\triangle = (2)^2 - 4 \cdot -1 \cdot -1 = 0$. *Assim a equação tem raiz dupla igual a* $-\frac{b}{2a}$, *ou seja,* $-\frac{2}{2 \cdot -1} = 1$.

O gráfico abaixo da função $P(x)$ *apresenta algumas particularidades a destacar: a concavidade da parábola voltada para baixo, em virtude do sinal negativo do coeficiente do termo* $-x^2$ *e a ocorrência da raiz dupla,* $x = 1$, *o único ponto de interseção da parábola com o eixo dos* x.

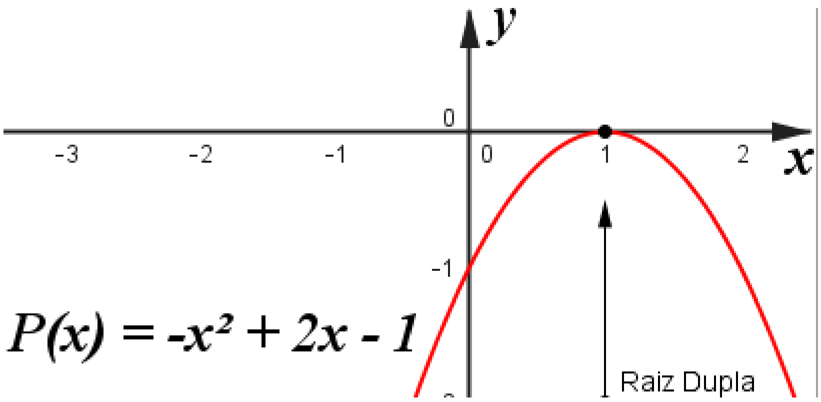

Figura 3.7: Equação quadrática com raiz dupla.

Conforme visto, a forma geral da equação do segundo grau é $ax^2 + bx + c = 0$, *com* $a \neq 0$. *Quando* $b = 0$ *ou* $c = 0$, *a equação se diz incompleta. Nos casos em que tiver a forma* $ax^2 + bx = 0$, *existem uma raiz nula e outra igual a* $-\frac{b}{a}$, *pois* $ax^2 + b = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = -\frac{b}{a}$.

Exemplo 3.4.4. *Resolver a equação* $(2x + 1) \cdot (3x - 2) = (5x - 4) \cdot (x - 3) - 14$.

Note: $(2x + 1) \cdot (3x - 2) = (5x - 4) \cdot (x - 3) - 14 \Leftrightarrow$

$$6x^2 - x - 2 = 5x^2 - 19x + 12 - 14 \Leftrightarrow x^2 + 18x = 0 \Leftrightarrow$$

$x(x+18) = 0 \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ *ou* $\quad x = -18$, *que são as raízes procuradas.*

Exemplo 3.4.5. *Brandão ([8], p. 40) propõe resolver a seguinte equação literal*[12] *incompleta:*

$ax^2 - a^2x = 0,$ *onde* $a \neq 0 \Leftrightarrow ax(x-a) = 0 \Leftrightarrow ax = 0$ *ou* $x - a = 0 \Leftrightarrow$ $x = \frac{0}{a} = 0$ *ou* $x = a.$ *Logo as raízes são* 0 *e* a.

Relações entre os coeficientes e as raízes

Sangiorgi ([52], p. 39-41) expressa que, "das relações existentes entre os coeficientes $a,$ b e c e as raízes x' e x'' da equação $ax^2 + bx + c = 0$ $(\triangle \geq 0),$ as mais importantes são as relativas à soma e ao produto das raízes".

i) Primeira relação: A soma das raízes da equação do segundo grau $ax^2+bx+c = 0$ é igual a $-\frac{b}{a},$ isto é: $x' + x'' = -\frac{b}{a}.$

De fato, sejam as raízes $x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$

Somando, membro a membro, as duas igualdades acima, obtemos:

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x' + x'' = \frac{-b}{a}.$$

ii) Segunda relação: O produto das raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é igual a $\frac{c}{a},$ isto é: $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}.$

De fato, multiplicando-se, membro a membro, as duas igualdades, obtemos:

$$x' \cdot x'' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x' \cdot x'' = \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}.$$

$$\Leftrightarrow x' \cdot x'' = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x' \cdot x'' = \frac{c}{a}.$$

Assim, na equação $3x^2 - 10x + 3 = 0,$ temos: $a = 3,$ $b = -10,$ $c = 3,$ $x' = 3$ e $x'' = \frac{1}{3}.$ Então: $x' + x'' = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} = -\frac{b}{a}$ e $x' \cdot x'' = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 = \frac{c}{a}.$

Note que as relações entre os coeficientes e as raízes se verificaram.

Observação 3.4.2. *Outro aspecto a considerar diz respeito às equações em que* $a = 1.$ *Elas assumem a forma:* $x^2 + px + q = 0$ *(equação na forma p, q), onde*

$$\begin{cases} x' + x'' = -\frac{p}{1} = -p \\ x' \cdot x'' = \frac{q}{1} = q \end{cases}$$

[12] Segundo Brandão ([8], p. 36), "quando os coeficientes são números, a equação se diz numérica. Se estes são letras, as equações se denominam literais". No caso, as letras representam constantes.

Logo toda equação do segundo grau com coeficiente $a = 1$ *satisfaz o seguinte:*

- A soma das raízes é igual ao coeficiente de x *com o sinal trocado* $(-p)$.

– O produto das raízes é igual ao termo da constante q.

Quando se representa p *por* S *(soma) e* q *por* P *(produto), segundo Sangiorgi ([52], p. 40 - 41), "podemos, para melhor memorizar estes resultados, escrever a equação em estudo da seguinte maneira:* $x^2 - Sx + P = 0$*"*[13].

Tratemos a seguir de duas abordagens importantes no estudo das equações do segundo grau, realizadas por Morandi ([35], p. 90-99): compor uma equação quadrática, conhecidas suas raízes, e discutir os sinais das raízes reais da equação do segundo grau, sem conhecê-las. A base conceitual e os exemplos foram extraídos da obra do mesmo autor.

Observação 3.4.3. *Compor uma equação quadrática, dadas as raízes.*

Tomando-se a equação $ax^2 + bx + c = 0$, *com* $a \neq 0$, *e dividindo-se seus termos por* a, *temos:* $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$. *Como* $\frac{b}{a} = -(x' + x'')$ *e* $\frac{c}{a} = x'x''$, *então* $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0$, *fórmula que "permite compor uma equação de raízes* x' *e* x''.

Exemplo 3.4.6. *Os dois exercícios seguintes exemplificam como compor uma equação do segundo grau, quando conhecidas suas raízes.*

Assim, para escrever uma equação quadrática de raízes $x' = 2$ *e* $x'' = \frac{3}{4}$, *basta aplicar a fórmula da composição:* $x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0$ *ou* $x^2 - (2 + \frac{3}{4})x + 2(\frac{3}{4}) = 0$, *ou ainda* $x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{6}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{2} = 0$, *conforme se esperava encontrar.*

Para o caso de raízes complexas, por exemplo, $x' = 2 + 3i$ *e* $x'' = 2 - 3i$, *temos* $x' + x'' = 2 + 3i + 2 - 3i = 4$ *e* $x'x'' = (2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13$. *Então a equação* $x^2 - 4x + 13 = 0$ *é uma solução.*

Observe que, em cada um dos dois exercícios realizados, foi determinada uma solução, uma equação. Existem outras equações quadráticas equivalentes às encontradas que também possuem as raízes dadas.

[13] Exemplo e observações baseadas na mencionada obra do mesmo autor.

Observação 3.4.4. *Discutir os sinais das raízes da equação quadrática dada.*

Mesmo sem conhecer as raízes x' *e* x'' *da equação* $ax^2 + bx + c = 0$, *podemos determinar os sinais das raízes. Supondo-se a existência de raízes reais*[14]*, o simples estudo dos sinais dos coeficientes dados* $(a, b$ *e* $c)$ *fornecerá os indicativos dos sinais das raízes.*

De fato, como $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$ *e "*a*" positivo (se não for positivo, basta multiplicar todos os termos da equação inicial por* -1*), então:*

1º) Para c *positivo, temos* $\frac{c}{a} = x' \cdot x'' > 0$. *Logo as raízes possuem o mesmo sinal. Lembrando-se que* $x' + x'' = -\frac{b}{a}$, *verifica-se que, caso* b *seja negativo, ambas raízes são positivas, pois a soma das raízes tem sinal simétrico ao de* b. *Caso* b *seja positivo, então as duas raízes são negativas.*

2º) Para c *negativo, temos* $\frac{c}{a} = x' \cdot x'' < 0$. *Logo as raízes possuem sinais diferentes, pois o produto de dois reais só será negativo se possuírem sinais distintos. Além disso, como* $x' + x'' = -\frac{b}{a}$, *então a raiz de maior valor absoluto possui sinal contrário ao de* b.

3º) Para $c = 0$, *temos:* $x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{0}{a} = 0$. *Assim, necessariamente uma das raízes é nula. Observe, no entanto, que* $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ *e que, para* $b \neq 0$, $-\frac{b}{a} \neq 0$. *Então a outra raiz tem o sinal oposto ao sinal de* b, *visto que* $x' + x'' = 0 + x'' = x'' = -\frac{b}{a}$.

Exemplo 3.4.7. *Exemplifiquemos a discussão dos sinais das raízes de uma equação quadrática, conforme três casos gerais:*

i) Para $c > 0$.

Tomemos a equação: $\underbrace{x^2}_{a=1>0} + \underbrace{12x}_{b=12>0} + \underbrace{32}_{c=32>0} = 0$.

Como $x' \cdot x'' = 32 = \frac{32}{1} = \frac{c}{a} > 0$, *então as raízes terão sinais iguais. Além disso, como a soma delas é* $-12 = -\frac{12}{1} = -\frac{b}{a} < 0$, *que possui sinal contrário ao de* b, *então o sinal de ambas as raízes é negativo.*

A título de verificação, determinemos as raízes: $x^2+12x+32 = (x+4)(x+8) = 0$

[14] As raízes complexas da forma $m + pi$, com $p \neq 0$, são números que não possuem sinal: negativo ou positivo.

$\Leftrightarrow\ x+4=0$ *ou* $x+8=0\ \Leftrightarrow\ x=-4$ *ou* $x=-8,$ *ambas negativas, confirmando o esperado.*

Consideremos agora o estudo dos sinais das raízes de $9x^2-12x+4=0.$ *Note que* $a=9>0$ *e* $c=4>0,$ *o que implica as raízes terem o mesmo sinal. Como* $x'+x''=\frac{12}{9}>0,$ *então as duas raízes são positivas. Calculando-se as duas raízes, encontramos* $\triangle=0,$ *o que implica haver duas raízes iguais e positivas, caso conhecido de raiz dupla. Logo para* $\triangle=0,$ *a discussão de sinais das raízes também é válida.*

ii) Para $c<0.$

Consideremos a equação $-2x^2+5x+3=0.$ *Sendo* $a=-2<0,$ *multipliquemos os termos da equação por* $-1,$ *obtendo a equação equivalente* $2x^2-5x-3=0,$ *com* $a=2$ *e* $c=-3,$ *portanto com* $c<0,$ *conforme desejado.*

Como $x'x''=\frac{c}{a}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}<0,$ *então as raízes possuem sinais contrários.*

Note que $x'+x''=-\frac{b}{a}=-\frac{-5}{2}=\frac{5}{2}>0.$ *Logo a soma das duas raízes é positiva. Assim, a raiz de maior valor absoluto é positiva e possui sinal contrário ao de* $b=-5<0.$ *Então as raízes são de sinais contrários e a de maior valor absoluto é positiva, dados esses confirmados a seguir.*

De fato,

$$-2x^2+5x+3=0\ \Leftrightarrow\ -2(x^2-\tfrac{5x}{2}-\tfrac{3}{2})=0\ \Leftrightarrow\ x^2-\tfrac{5x}{2}-\tfrac{3}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow\ (x-3)(x+\tfrac{1}{2})=0\ \Leftrightarrow\ x=3 \text{ ou } x=-\tfrac{1}{2}.$$

iii) Para $c=0.$

Tomemos a equação $9x^2+3x=0\ \Leftrightarrow 9x^2+3x+0=0.$ *Observe:* $x'x''=\frac{c}{a}=\frac{0}{9}=0.$ *Assim, pelo menos, uma das raízes é nula.*

Observe ainda que $x'+x''=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3}$ *e* $x'=0,$ *então* $x''=-\frac{1}{3}.$ *Assim, o sinal de* $x''<0$ *(negativo) é contrário ao sinal de* $b=3,$ *que é positivo.*

Observação 3.4.5. *Ainda merece destaque o caso em que as raízes não são reais.*

De Morandi ([35], p. 93), retiramos o exemplo da equação $x^2-4x+13=0,$ *cujas raízes são as conjugadas*[15] $x'=2+3i$ *e* $x''=2-3i.$

[15] Para determinação dos valores dessas raízes basta utilizar a fórmula resolutiva da equação quadrática, segundo Morandi ([35], p. 74 - 75).

Note que, apesar de $x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{13}{1} = 13 > 0$ *e* $x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4 > 0$*, ou seja, o produto e a soma de ambas serem reais positivos, não podemos afirmar que as duas raízes sejam positivas, visto que "não é possível ordenar os números complexos (imaginários)", nem "podemos dizer que* $a \pm bi > 0$ *ou* $a \pm bi < 0$*".*

O mesmo autor, em seguida, afirma que "não é válida a discussão dos sinais das raízes no conjunto dos complexos. Para ter certeza na discussão, precisamos antes calcular o $\triangle$*, para determinar a natureza das raízes".*

Ainda merece ser assinalado que os gráficos dos polinômios do segundo grau sempre apresentam a forma de parábola, conforme já mencionado em seção anterior. A prova dessa afirmação não será demonstrada neste trabalho, pois foge ao interesse desta investigação.

3.4.3 Equação biquadrada

Estudadas as equações de primeiro e segundo graus, cuja resolução já era conhecida pelos babilônios na Antiguidade[16], passemos às demais.

As equações de terceiro e quarto grau exigem processos mais complexos para determinação de suas raízes. As de grau superior ao quinto grau, segundo demonstrado pelo matemático norueguês Abel[17], não possuem soluções algébricas, a menos de alguns casos especiais[18].

Assim como nas equações de primeiro e de segundo graus, o problema, nos demais casos, se resume a se determinar como encontrar as raízes sem deixar excluída qualquer uma delas do conjunto solução, fazendo-o por processos simples e diretos[19].

Essa descoberta envolve propriedades das equações polinomiais, portanto, dos polinômios, além de algumas delas já estudadas no capítulo anterior. Antes, porém, de tratar de casos mais gerais e complexos, cuidaremos da equação biquadrada, caso

[16] Segundo Mol ([34], p. 19), as equações quadráticas conhecidas eram as da forma $x^2 - ax = b$ e $x^2 + ax = b$. Em ambas as situações, as soluções apresentadas equivalem a usar as fórmulas que hoje conhecemos: $\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}$, para o primeiro caso, e $-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}$, para o segundo.

[17] Niels Henrik Abel, nascido no início do século XIX.

[18] Bezerra ([3], p. 283) cita como equações especiais aquelas denominadas binômias, trinômias e recíprocas, sem explicitar com exemplos numéricos.

[19] A resolução das equações polinomiais de primeiro a quarto grau já era conhecida antes de Galois.

específico do quarto grau.

Definição 3.4.1. *Para Brandão ([8], p. 79)*[20]*, "uma equação do quarto grau a uma incógnita chama-se biquadrada, quando ela é expressa ou pode ser colocada sob a forma* $ax^4 + bx^2 + c = 0,$ *sendo* $a \neq 0$ *e* a, b, c *números pertencentes a um corpo real". Tal equação, portanto, não possui as potências ímpares da incógnita.*

Como toda equação biquadrada é redutível a outra do segundo grau, então para resolvê-la basta que se faça $x^2 = y,$ na fórmula da definição, o que resulta: $ay^2 + by + c = 0.$ Em seguida se procede como normalmente se executa com qualquer equação do segundo grau.

Assim, temos: $x^2 = y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Logo, $x = \pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$.

A expressão acima, segundo Sangiorgi ([52], p. 76), "toma o nome de fórmula resolutiva da equação biquadrada". Esse autor sinaliza que, realizando-se de todas as maneiras as combinações possíveis com os sinais $+$ $-$ da fórmula acima, teremos, para os casos em que os quatro valores de x sejam reais, dois a dois iguais em valor absoluto e de sinais contrários, os quais são as quatro raízes x_1, x_2, x_3 e x_4 da equação biquadrada. As quatro raízes são indicadas a seguir:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad x_3 = +\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

.

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

.

Brandão ([8], p. 80 - 81) ainda faz observações correlatas às seguintes:

- A expressão $ay^2 + by + c = 0$ é chamada de equação resolvente.

- Cada raiz positiva da resolvente implica duas raízes reais e simétricas para a

[20] Irmãos Maristas ([33], p. 68), por sua vez, definem: "Equação biquadrada é a que contém somente a quarta e a segunda potência da incógnita mais um termo conhecido. Tem a forma $ax^4 + bx^2 + c = 0''$.

biquadrada e uma raiz negativa da resolvente não implica duas raízes reais para a biquadrada, mas duas complexas, não reais.

Exemplo 3.4.8. *Os Irmãos Maristas ([33], p. 69) propõem resolver a equação* $x^4 - 106x^2 + 2025 = 0$.

Aplicando a fórmula resolutiva, temos:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{106 + \sqrt{106^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2025}}{2 \cdot 1}} = 9 \quad x_2 = -\sqrt{\frac{106 + \sqrt{106^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2025}}{2 \cdot 1}} = -9$$

.

$$x_3 = +\sqrt{\frac{106 - \sqrt{106^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2025}}{2 \cdot 1}} = 5 \quad x_4 = -\sqrt{\frac{106 - \sqrt{106^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2025}}{2 \cdot 1}} = -5$$

.

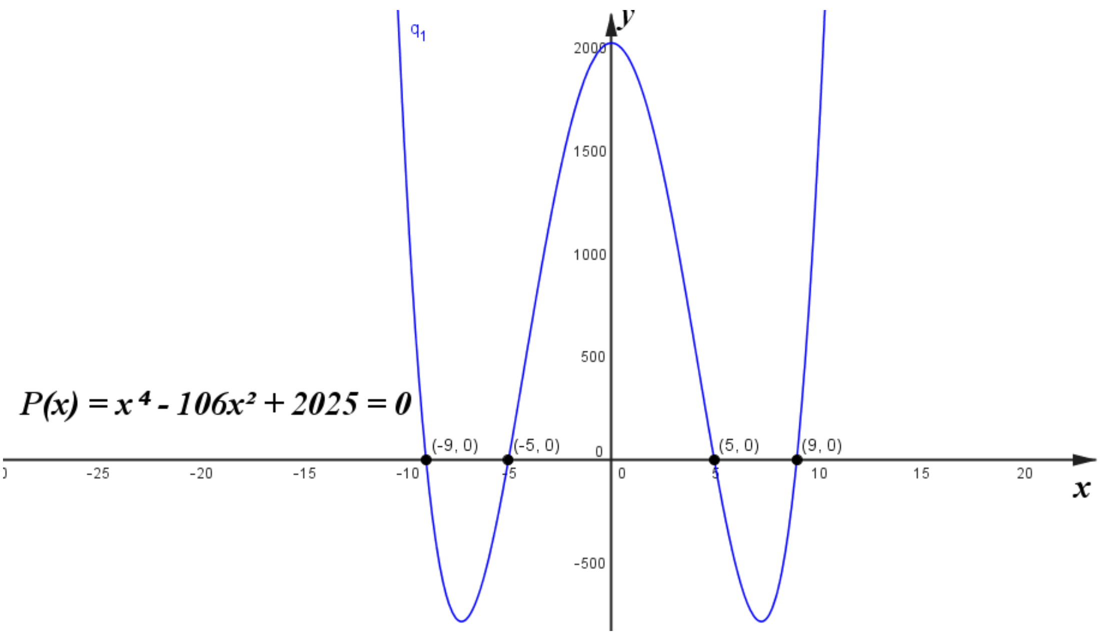

Figura 3.8: Equação biquadrada com quatro raízes reais

O gráfico ilustrativo da solução se encontra acima, indicando as quatro raízes reais da equação quadrática original.

Observe que a equação resolvente apresenta duas raízes positivas, fato constatado *ao resolvê-la. Assim, temos:* $y^2 - 106y + 2025 = 0 \Leftrightarrow (y-81)(y-25) = 0 \Leftrightarrow$ $y = 81$ *ou* $y = 25$. *Logo,* $x = \pm 9$ *ou* $x = \pm 5$.

Exemplo 3.4.9. *Consideremos agora o seguinte exercício extraído de Brandão ([8], p. 82), destinado a determinar as raízes da equação* $5x^4 + 7x^2 + 2 = 0$.

Aplicando a fórmula resolutiva vem:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{10}} = \pm\sqrt{\frac{-7 \pm 3}{10}}$$

.

Logo a resolvente não possui raízes reais. A equação biquadrada, portanto, também não terá. Suas quatro raízes são elementos do conjunto dos complexos: $+i, -i, +\sqrt{0,4}i$ *e* $-\sqrt{0,4}i$, *todas elas da forma* $a + bi$ $(b \neq 0)$, *com* a *e* b *reais.*

Discussão das raízes da equação biquadrada

Ficou evidente que a equação biquadrada possui sempre quatro raízes no conjunto dos complexos. Nesse contexto, Sangiorgi ([52], p.76), aponta que a equação resolvente pode admitir duas raízes reais positivas, uma ou nenhuma. Isso implica que "a equação biquadrada admitirá quatro raízes [reais] (duas a duas iguais em valor absoluto e de sinais contrários) ou duas [raízes reais] (iguais em valor absoluto e de sinais contrários) ou nenhuma" [raiz real][21].

Netto ([40], p. 100 – 101) resume, em oito esboços semelhantes aos abaixo apresentados, os modelos genéricos de gráficos que as funções correlatas às equações biquadradas podem apresentar, em termos de concavidades e de raízes reais.

Observe, em particular, a correspondência entre os dados constantes na discussão acima e o número de raízes reais em cada um dos esboços a seguir.

[21] Sangiorgi ([52], p. 78) ainda sinaliza que o mesmo método anteriormente adotado para a resolução das equações biquadradas "permite resolver, também, todas as outras equações trinômias elementares, isto é, as equações do tipo: $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, onde n significa um número inteiro absoluto. Se $n = 2$, obtém-se a equação biquadrada".

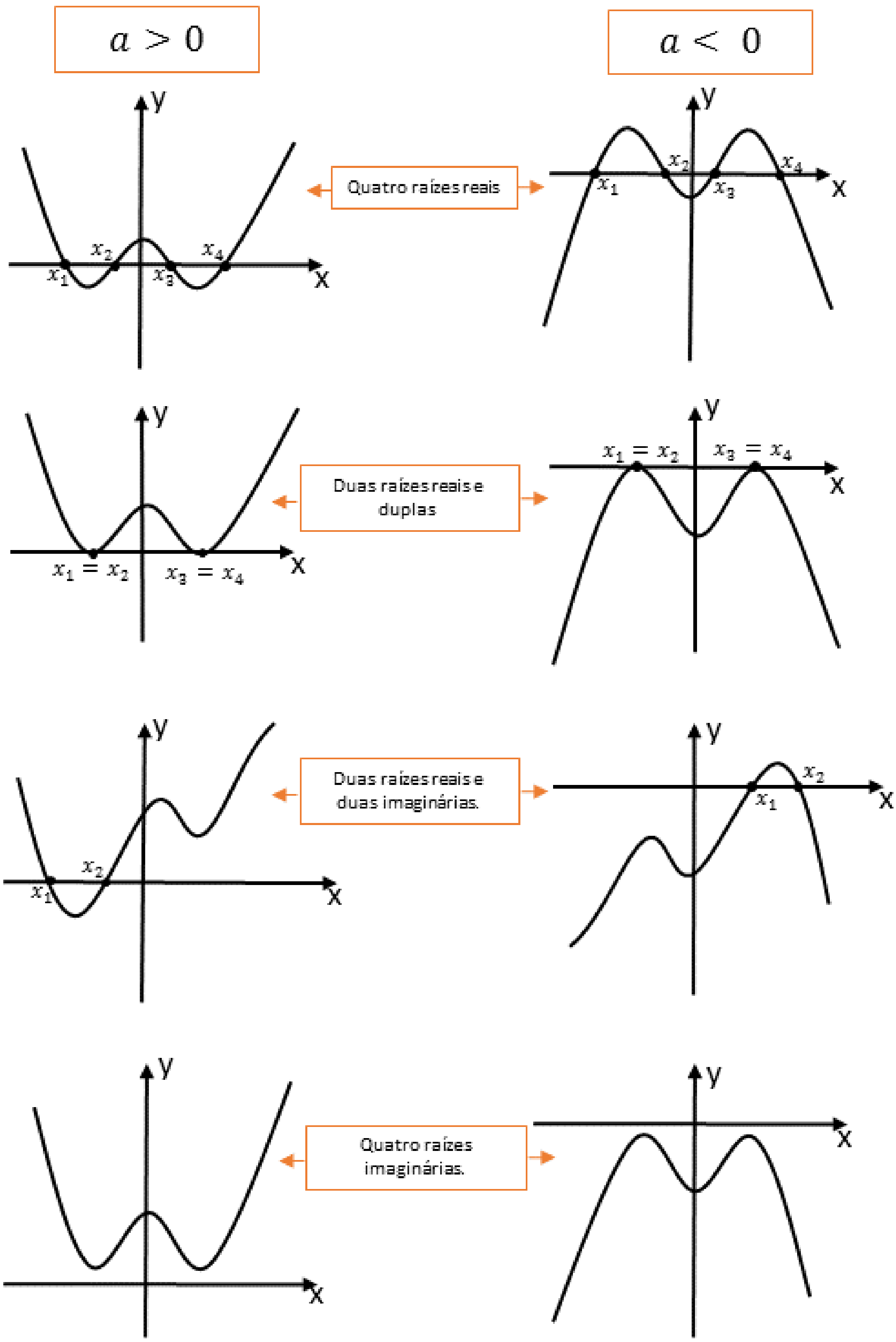

Figura 3.9: Equação biquadrada: discussão das raízes.

3.5 Raízes estranhas

Ao se reduzir uma equação composta por frações polinomiais (equação algébrica fracionária) ou por expressões em que a incógnita esteja sob radical (equação irracional)[22] à equação polinomial na forma canônica, pode-se obter "raízes estranhas" à equação inicial, cuja constatação só é conferida após se obter as raízes da equação já na forma canônica.

Lima ([28], p. 10-11) alerta que cada etapa realizada na resolução representa uma implicação lógica que, "às vezes [...] não pode ser revertida", isto é, sua recíproca pode não ser verdadeira. Assim, podem surgir as ditas raízes estranhas, pois "o conjunto obtido no final apenas contém (mas não é igual a) o conjunto das raízes [o conjunto verdade ou solução], este último podendo até mesmo ser vazio".

Exemplo 3.5.1. *Bezerra ([3], p. 282) propõe que sejam determinadas as raízes de* $3x + \frac{1}{x-1} = 3 + \frac{1}{x-1}$*. Assim temos:*

$$3x + \frac{1}{x-1} = 3 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow 3x = 3 \text{ (após eliminar os termos fracionários)}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Assim, x=1 é raiz da equação final, mas não pode ser da equação inicial, tendo em vista que a fração polinomial $\frac{1}{x-1}$ *não é definida, quando o denominador for nulo, isto é, para* $x = 1$*. Logo a equação inicial não tem solução.*

Note que a eliminação das frações polinomiais foi resultado da multiplicação da equação inicial pelo fator $x - 1$*, que não é uma constante diferente de zero. Esse procedimento, pelo visto, não garante a equivalência entre a equação inicial e a equação* $3x = 3$*.*

Exemplo 3.5.2. *Lima ([29], p.8) propõe que determinemos as raízes de* $\sqrt{x} + 3 = x$*.*

Assim temos: $\sqrt{x} + 3 = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 3 \Rightarrow x = (x-3)^2 \Leftrightarrow x = x^2 - 6x + 9$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \text{ ou } x = \frac{7-\sqrt{13}}{2}.$$

Note que todas as implicações apresentadas na solução do problema são inversíveis, à exceção da segunda. De fato, a igualdade $x = (x-3)^2$ *satisfaz simultaneamente a dois casos:* $\sqrt{x} = x - 3$ *e* $\sqrt{x} = -(x-3) = 3 - x$*. Como* $\sqrt{x} \geq 0$ *e* $x = \sqrt{x} + 3$*,*

[22] Para o conceito de fração polinomial, vide o Exemplo 2.6.10.

condição inicial, então $x > 3$. *Logo apenas* $x = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$ *é raiz da equação inicial. Assim, a equação inicial e a final não possuem o mesmo conjunto solução.*

3.6 Número de raízes

Esta seção aborda aspectos, dentre outros, como o Teorema Fundamental da Álgebra, o da decomposição do polinômio, o corolário das raízes complexas, além da multiplicidade das raízes.

Conforme Bezerra ([3], p. 284), a teoria das equações algébricas baseia-se no Teorema de D'Alembert, também conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.), tido como o princípio fundamental da teoria das equações algébricas, "cuja demonstração, longa e difícil, não faz parte do programa" contido em sua obra destinada ao curso colegial (atual ensino médio), cujo enunciado se segue.

Teorema 9. *Teorema Fundamental da Álgebra.*

Toda equação algébrica racional e inteira admite pelo menos uma raiz, real ou complexa.

Iezzi ([24], p. 104-105), dentre outros autores, enuncia o mesmo teorema assim:

"Todo polinômio P *de grau* $n \geq 1$ *admite ao menos uma raiz complexa".*

Tal afirmação é complementada pela admissão da validade do T.F.A. sem demonstração, e pelas proposições abaixo, referentes a toda equação polinomial em geral, expressa na forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0$.

Iezzi ([24], p.104) considera evidente a equivalência entre tais proposições, as quais poderiam ser resumidas na afirmação: $P(r) = 0$.

- r *é raiz da equação* $P(x) = 0$.
- r *é raiz da função polinomial* $P(x)$.
- r *é raiz do polinômio* P.

De certa forma essas proposições tomadas duas a duas serão demonstradas ao longo desta seção.

O teorema a seguir tem seu enunciado e demonstração com base em Bezerra ([3], p. 284).

Teorema 10. *x_0 é uma raiz da equação $P(x) = 0$, se, e somente se, $x - x_0$ é um fator de $P(x)$.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponhamos $P(x) = 0$ uma equação algébrica escrita sob a forma canônica. Tendo em vista que ela possui, pelo menos, uma raiz, conforme nos garante o T.F.A., então tomemos essa raiz como sendo x_0.

A definição de raiz indica que $P(x_0) = 0$. Porém, se $P(x_0) = 0$, então a condição de divisibilidade dos polinômios nos permite admitir que $P(x)$ é divisível por $x - x_0$.

($\Leftarrow$) Observe que, caso $P(x)$ seja divisível por $x - x_0$, então o resto da divisão de $P(x)$ por $x - x_0$ é zero.

O resto, porém, dessa divisão é $P(x_0)$, conforme já visto no capítulo anterior. Assim, $P(x_0) = 0$ e, pela definição de raiz, x_0 é uma raiz de $P(x) = 0$. Está provada a tese almejada.

□

A seguir temos o teorema que trata da decomposição de um polinômio em fatores, apresentado segundo duas versões: a de [14] e a de [3].

A versão baseada em Dolce & Iezzi ([14], p. 118-120) será exposta inicialmente, pois tal versão segue as formalidades habituais com maior rigor que a de Bezerra, que, por sua vez, será apresentada sob a forma de observação complementar.

Teorema 11. *(Teorema da decomposição).*

Todo polinômio $P(x)$ de grau n $(n \geq 1)$, onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, $(a_n \neq 0)$, pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é, $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$, em que $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são raízes de $P(x)$.

Com exceção da ordem dos fatores tal decomposição é única.

Demonstração.

i) Existência da decomposição.

Considerando $P(x)$ *um polinômio de grau* $n \geq 1$, *pode-se aplicar o T.F.A. Assim* $P(x)$ *tem, pelo menos, uma raiz* r_1. *Desta forma,* $P(r_1) = 0$ *e, conforme o Teorema de D'Alembert,* $P(x)$ *é divisível por* $x - r_1$, *ou seja,* $P(x) = (x - r_1)Q_1(x)$ *(A), em que* $Q_1(x)$ *é polinômio de grau* $n - 1$ *e coeficiente dominante* a_n.

Caso $n = 1$, *então* $n - 1 = 0$ *e* $Q_1(x)$ *é polinômio constante. Logo* $Q_1(x) = a_n$ *e* $P(x) = a_n(x - r_1)$. *Dessa forma o teorema fica demonstrado.*

Caso $n \geq 2$, *então* $n - 1 \geq 1$ *e o T. F. A. é aplicável ao polinômio* $Q_1(x)$, *ou seja,* $Q_1(x)$ *tem, pelo menos, uma raiz* r_2. *Daí,* $Q_1(r_2) = 0$ *e* $Q_1(x)$ *é divisível por* $x - r_2$, *isto é,* $Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x)$. *(A').*

Substituindo (A') em (A) resulta: $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x)$ *(B), em que* $Q_2(x)$ *é polinômio de grau* $n - 2$ *e coeficiente dominante* a_n.

Observe que, se $n = 2$, *ou seja,* $n - 2 = 0$, *então* $Q_2(x) = a_n$ *e* $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)$, *o que resultaria a demonstração do teorema.*

Procedendo-se de forma semelhante ao que foi realizado anteriormente, aplicando-se sucessivamente o T. F. A. por n *vezes, chega-se à seguinte igualdade:*

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)Q_n(x).$$

Na igualdade acima, observe que o grau de $Q_n(x)$ *é* $n - n = 0$ *e possui coeficiente dominante* a_n. *Logo* $Q_n(x) = a_n$. *Daí:*

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n).$$

ii) Unicidade da decomposição.

Suponhamos que existam as duas decomposições seguintes para $P(x)$.

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n).$$

$$P(x) = a'_m(x - r'_1)(x - r'_2)(x - r'_3)\ldots(x - r'_m).$$

Em seguida, procedamos a redução e a ordenação dos termos das expressões algébricas dos segundos membros. Após isso, estabelecemos a relação de igualdade entre elas, visto que são equivalentes ao polinômio $P(x)$. *Dessa forma temos a* *igualdade:* $\underbrace{a_nx^n - a_nS_1x^{n-1} + \ldots a_0}_{=P(x)} = \underbrace{a'_mx^m - a'_mS'_1x^{m-1} + \ldots a'_0}_{=P(x)}.$

Observe que, pela definição de igualdade de polinômio, obrigatoriamente temos: $n = m$ *e* $a_n = a'_m$.

Assim ficamos com a igualdade:

$$\begin{aligned}&(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n) = \\ &= (x-r'_1)(x-r'_2)(x-r'_3)\ldots(x-r'_n) \quad \textit{(I)}.\end{aligned}$$

Atribuamos a x *o valor de* r_1 *e, em seguida, substituamos esse valor na igualdade anterior.*

Note que resulta $0 = (r_1 - r'_1)(r_1 - r'_2)(r_1 - r'_3)\ldots(r_1 - r'_m)$*. Isso implica que pelo menos um dos fatores do segundo membro, (certo* $r_1 - r'_j$*), necessariamente será nulo. Assim, sem perda de generalidade, consideremos uma adequada mudança na ordem dos fatores, de modo que tal fator seja* $r_1 - r'_1$*, isto é,* $r_1 = r'_1$*.*

Assim, a igualdade (I) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}&(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n) = \\ &= (x-r_1)(x-r'_2)(x-r'_3)\ldots(x-r'_n) \Leftrightarrow \\ &(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n) = (x-r'_2)(x-r'_3)\ldots(x-r'_n).\end{aligned}$$

Agora, atribuamos a x *o valor de* r_2*. Logo temos:*

$$0 = (r_2 - r'_2)(r_2 - r'_3)\ldots(r_2 - r'_n).$$

Observe que, analogamente ao ocorrido no passo anterior, um dos fatores do segundo membro é nulo, $r_2 - r_k = 0$*, para um certo* k*. Assim, sem perda de generalidade, com adequada troca na ordem dos fatores, coloquemos* $r_2 = r'_2$*.*

Caso procedamos assim seguidas vezes, daí por diante, chegaremos à conclusão de que $r_i = r'_i,\ \forall\, i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$*.*

As igualdades $m = n,\ a'_m = a_n,\ r'_1 = r_1,\ r'_2 = r_2,\ r'_3 = r_3, \ldots, r'_m = r_n$*, verificadas acima, garantem que a unicidade foi provada.*

□

Observação 3.6.1. *Bezerra ([3], p. 285) não apresenta formalmente o Teorema da decomposição, com hipótese e tese bem identificadas. Inicia a argumentação de prova, a partir do enunciado semelhante ao que se segue:*

Seja uma equação algébrica racional inteira de grau n*:* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0,\ (a_n \neq 0)$ *(I).*

Em conformidade com o princípio fundamental (T.F.A.), existe ao menos uma raiz x_1 *de* $P(x) = 0$*.*

Assim, $P(x) = (x - x_1)P_1(x)$ *(II), sendo pela regra de Briot- Ruffini* $P_1(x)$ *um polinômio de grau* $n-1$*, cujo coeficiente do termo de maior grau é* a_n*.*

Analogamente, existe uma raiz x_2 *de* $P_1(x) = 0$*, e* $P_1(x) \equiv (x - x_2)P_2(x)$ *(III).*

Nessa equação acima, $P_2(x)$ *é um polinômio de grau* $n-2$*, cujo coeficiente do termo de maior grau é* a_n*.*

Caso prossigamos com esse raciocínio, obteremos sucessivamente:

$P_2(x) = (x - x_3)P_3(x)$.
$P_3(x) = (x - x_4)P_4(x)$.
.... *(IV).*
$P_{n-2}(x) = (x - x_{n-1})P_{n-1}(x)$.
$P_{n-1}(x) = a_n(x - x_n)$.

Multiplicando, membro a membro, as igualdades (II), (III) e (IV), seguindo-se das simplificações cabíveis, obtemos: $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ *(V).*

Logo todo polinômio racional inteiro de grau n *pode ser decomposto no produto do coeficiente do seu termo de maior grau, por* n *binômios da forma* $x - x_i$*, sendo* x_i*, um número real ou complexo.*

Apesar da correção e da simplicidade de sua argumentação, quanto ao aspectos da decomposição, Bezerra ([3], p. 285) sinaliza que "demonstra-se que essa decomposição só pode ser feita de um único modo", sem que prove a unicidade.

Observação 3.6.2. *Farias ([18], p. 6) destaca o seguinte sobre a decomposição do polinômio* $P(x)$*: "Os fatores podem ser distintos ou não, isto é, pode haver um ou mais grupos de fatores iguais. De fato, nada obriga a serem diferentes as raízes das equações sucessivas obtidas na demonstração do teorema fundamental"*[23].

Em seguida, o mesmo autor acrescenta: "Supondo que haja α *fatores iguais a* $x - x_1$ *e* β *fatores iguais a* $x - x_2$ *etc., temos":*

[23] Teorema fundamental para Farias é sinônimo de Teorema da decomposição neste trabalho.

$P(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha}(x - x_2)^{\beta} \ldots (x - x_k)^{\gamma}$, *onde* $k \leq n$ *e* $\alpha + \beta + \ldots + \gamma = n$.

Tratando dessa decomposição, Dolce & Iezzi ([14], p. 121) sinalizam que, sendo $x_1, x_2, \ldots x_k$ *dois a dois distintos, o polinômio* $P(x)$ *é divisível separadamente pelos polinômios* $(x - x_1)^{\alpha}$, $(x - x_2)^{\beta}, \ldots, (x - x_k)^{\gamma}$.

Corolário 1. *Toda equação polinomial de grau* n $(n \geq 1)$ *admite* n, *e somente* n, *raízes complexas.*

Demonstração.

Considere a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0$.

Conforme já demonstrado no teorema acima, existe a decomposição do polinômio $P(x)$, *o qual admite as raízes (distintas ou não)* $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$. *Além disso, ficou também demonstrado que são somente essas as raízes de* $P(x)$, *por ocasião da prova da unicidade da decomposição.*

$\square$.

Exemplo 3.6.1. *Farias ([18], p. 18) propõe o seguinte exercício: - Formar uma equação que tem* $2, -2$ *e* 3, *como raízes.*

A solução mais simples e imediata é resultado da aplicação do Teorema da composição e de seu corolário. A equação pode ser: $P(x) = (x-2)(x+2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.

O gráfico abaixo mostra a função $P(x)$, *cujos zeros correspondem às raízes da equação formada.*

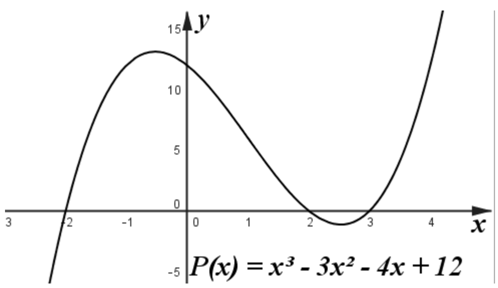

Figura 3.10: Composição do polinômio: raízes reais.

Exemplo 3.6.2. *Dolce & Iezzi ([14], p. 120) propõem fatorar o polinômio* $5x^5 - 5x^4 - 80x + 80$*, sabendo que suas raízes são* $1, -2, 2, -2i$ *e* $2i$*.*

A solução é imediata: $P(x) = 5(x-1)(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)$*.*

Observe o gráfico abaixo, construído com o Geogebra, da função polinomial $P(x) = 5x^5 - 5x^4 - 80x + 80$*, cuja imagem indica claramente as três raízes reais iniciais dadas, dentre as cinco raízes complexas de* $P(x)$*, polinômio de grau* 5*.*

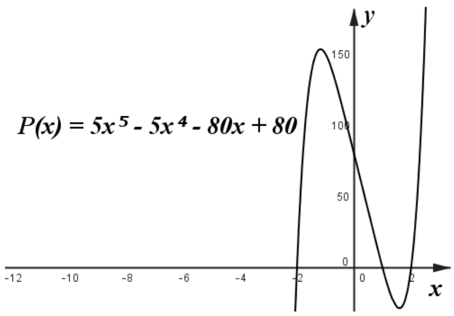

Figura 3.11: Raízes complexas de uma equação.

3.6.1 Raízes múltiplas

Conforme já sinalizado, pode ocorrer que as raízes de uma equação $P(x) = 0$, de grau n, não sejam todas diferentes. Admitamos, por exemplo, que há α raízes iguais a r_1, β raízes iguais a $r_2, \ldots,$ γ raízes iguais a r_k, sendo $\alpha + \beta + \ldots + \gamma = n$.

Logo r_1 é dita uma raiz múltipla de ordem α; r_2, uma raiz múltipla de ordem $\beta; \ldots;$ r_k, uma raiz múltipla de ordem γ.

Assim, podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$P(x) = a_n(x - r_1)^{\alpha}(x - r_2)^{\beta} \ldots (x - x_k)^{\gamma} = 0.$$

Definição 3.6.1. *Diz-se que* r *é raiz de multiplicidade* m*, natural, tal que* $m \geq 1$*, da equação* $P(x) = 0$*, se, e somente se,* $P(x) = (x - r)^m Q(x)$ *e* $Q(x) \neq 0$*.*

Para Dolce & Iezzi ([14], p. 121), "r *é raiz de multiplicidade* m *de* $P(x) = 0$*, quando o polinômio* P *é divisível por* $(x - r)^m$ *e não é divisível por* $(x - r)^{m+1}$*, ou melhor, a decomposição de* P *apresenta exatamente* m *fatores iguais a* $x - r$*".*

Segundo Bezerra ([3], p. 286), "as raízes múltiplas de ordem dois chamam-se raízes duplas. As de ordem três dizem-se raízes triplas. E por extensão, as raízes *simples são as raízes múltiplas de ordem um", nomenclatura já consagrada por muitos autores.*

3.6.2 Raízes nulas

Tomemos a equação $P(x) = a_n \cdot (x - x_1)^\alpha \cdot (x - x_2)^\beta \ldots (x - x_k)^\gamma = 0$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que uma de suas raízes, por exemplo, x_1 seja nula. Assim sendo, podemos escrever: $P(x) = a_n x^\alpha \cdot (x - x_2)^\beta \ldots (x - x_k)^\gamma = 0$, portanto uma raiz nula de multiplicidade α.

Reciprocamente, caso haja o fator x^α, existem α raízes nulas.

Logo, dada uma equação $P(x) = 0$, tal que haja um fator x^α, de modo que se possa apresentar a mesma equação na forma $x^\alpha P_1(x) = 0$, onde $P_1(x)$ seja um polinômio racional inteiro completo, dizemos que $P(x) = 0$ possui α raízes nulas.

Daí, podemos afirmar:

- Equações com termos independentes diferentes de zero não possuem raízes nulas.

- Equações sem termo independente possuem um número de raízes nulas, igual ao menor expoente da incógnita.

Exemplo 3.6.3. *Determinar as raízes da equação* $x^5 - 6x^4 + 9x^3 = 0$.

Note: $x^5 - 6x^4 + 9x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow x^3(x - 3)(x - 3) = 0$.

Então a equação possui três raízes nulas e uma raiz dupla igual a 3.

O gráfico abaixo da função $P(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3$ *indica as raízes já determinadas.*

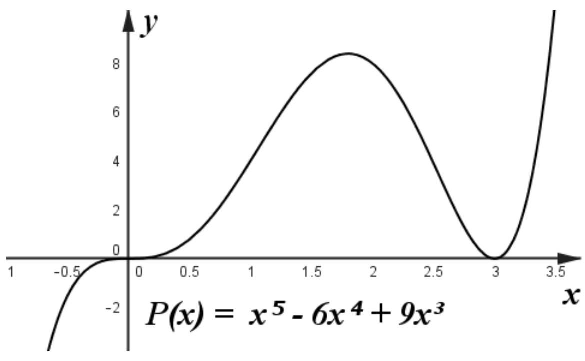

Figura 3.12: Equação com raízes nulas e dupla.

Exemplo 3.6.4. *Bezerra ([3], p. 287) propõe que determinemos os valores de* a *e* b*, tal que a equação* $x^5 - 2x^4 + x^3 + (3a - 4b)x^2 + (a - 2b - 1)x + (ab - 3) = 0$ *admita somente duas raízes nulas.*

Como a equação possui somente duas raízes nulas, então necessariamente o menor expoente da incógnita é 2*, conforme visto anteriormente. Logo devemos ter:*

$$\begin{cases} ab - 3 = 0 \\ a - 2b - 1 = 0 \\ 3a - 4b \neq 0 \end{cases}$$

Quando se resolve esse sistema, trabalhando inicialmente as duas primeiras relações, obtemos: $b_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 3,$ *ou* $b_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow a_2 = -2.$

Note que os valores a_2 *e* b_2 *não atendem à terceira relação, mas* a_1 *e* b_1 *satisfazem. Assim,* $a = 3$ *e* $b = 1$ *são os valores procurados, fato esse facilmente verificável.*

Substituindo tais valores na equação original, temos: $x^5 + 2x^4 + x^3 + 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 + 2x^2 + 5) = 0,$ *que de fato possui somente duas raízes nulas.*

3.7 Relações entre coeficientes e raízes

Seja a equação $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x^1 + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0,\ n \geq 1)$, cujas raízes sejam $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ (I).

Segundo Bezerra ([3], p. 291) e Iezzi ([24], p. 116), podemos escrever $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n) = 0$ (II), e, efetuando o produto dos n binômios de (II), temos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n) = \\ &= a_nx^n - a_n\underbrace{(r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n)}_{S_1}x^{n-1} + \\ &+ a_n\underbrace{(r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_{n-1}r_n)}_{S_2}x^{n-2} - \\ &- a_n\underbrace{(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n)}_{S_3}x^{n-3} + \ldots + \\ &+ (-1)^h a_nS_hx^{n-h} + \ldots + (-1)^n a_n\underbrace{(r_1r_2r_3\ldots r_n)}_{S_n},\ \forall x \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Ao aplicar a condição de igualdade, temos:
$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
$S_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$.
$S_3 = r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$
....
$S_h =$ (soma de todos os Cn, h produtos de h raízes da equação $= (-1)^h\frac{a_{n-h}}{a_n}$.
....
$S_n = r_1r_2r_3r_4 \ldots r_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$.
As relações acima entre raízes e coeficientes da equação $P(x) = 0$, também são conhecidas como relações de Girard.

Segundo Bezerra ([3], p. 293), as relações acima "não servem como solução do problema geral da resolução das equações", mas o autor admite que, "se as raízes estiverem previamente ligadas por determinadas condições", tais relações auxiliarão na solução das equações, ou, pelo menos, para baixar o grau delas.

Para $n = 2$, consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, cujas raízes sejam r_1 e r_2. Já vimos que podemos escrevê-la na forma $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$. Daí, temos: $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Então $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ e $r_1r_2 = \frac{c}{a}$, dados já obtidos sem as relações de Girard. Assim se confirma a validade da relação entre as raízes e os coeficientes da equação quadrática.

Consideremos agora a equação do terceiro grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$, cujas raízes sejam r_1, r_2 e r_3. Note que o Teorema da decomposição permite que escrevamos a mesma equação sob a forma $a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$.

Assim, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \Rightarrow$$
$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv x^3 + (r_1 + r_2 + r + 3)x^2 - (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)x - r_1r_2r_3.$$

Então da identidade dos dois polinômios acima concluímos:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}, \quad r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a}.$$

Exemplo 3.7.1. *Bezerra ([3], p. 291) propõe resolver a equação* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, *considerando-se que uma das raízes é a soma das outras duas.*

Sejam r_1, r_2, r_3 *as raízes dessa equação. Logo, sem perda de generalidade,* *podemos afirmar:* $r_1 = r_2 + r_3$ *(1). Assim, pelas relações de Girard, temos:*

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = 6 & (2) \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 11 & (3) \\ r_1r_2r_3 = 6 & (4) \end{cases}$$

Note: De (1) *e* (2)*, temos:*

$r_1 + \underbrace{(r_2 + r_3)}_{=r_1} = r_1 + r_1 = 2r_1 = 6 \Leftrightarrow r_1 = 3\ (5).$

Daí, substituindo, em (2) e (3) o valor de $r_1 = 3,$ *temos:*

$3\underbrace{(r_2 + r_3)}_{=r_1=3} + r_2r_3 = 9 + r_2r_3 = 11 \Leftrightarrow r_2r_3 = 2.$

É imediato determinar a solução da equação do segundo grau:

$x^2 - \underbrace{(r_2 + r_3)}_{=3}x + \underbrace{(r_2r_3)}_{=2} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \Leftrightarrow$

$x = 1$ *ou* $x = 2$*. Logo as três raízes são* $1, 2$ *e* 3*.*

O gráfico abaixo mostra as imagens da função polinomial correlata à equação dada, com suas três raízes reais.

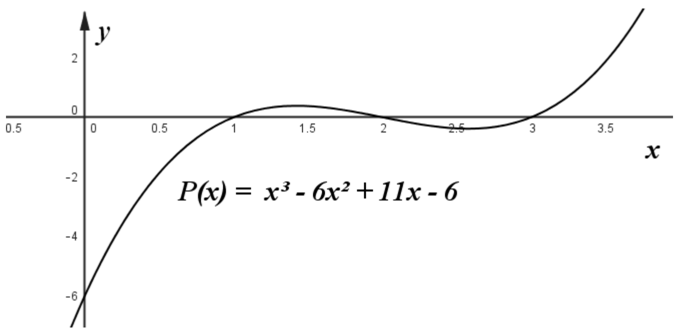

Figura 3.13: Relação entre coeficientes e raízes.

Exemplo 3.7.2. *Domingues & Iezzi ([15], p. 316) propõem resolver a equação* $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0,$ *sabendo que duas de suas raízes são simétricas em relação à adição.*

Consideremos inicialmente como raízes da equação os seguintes valores: r_1, r_2, r_3 *e* r_4*, sendo, sem perda de generalidade,* $r_1 + r_2 = 0,$ *isto é,* $r_1 = -r_2$*.*

Para utilizar as relações de Girard, consideremos $a_4 = 1, a_3 = -4, a_2 =$

$-1, a_1 = 16$ *e* $a_0 = -12$. *Assim, obtemos:*

$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{a_3}{a_4} = -\frac{-4}{1} = 4$ *(I).*

$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \frac{a_2}{a_4} = \frac{-1}{1} = -1$ *(II).*

$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\frac{a_1}{a_4} = -\frac{16}{1} = -16$ *(III).*

$r_1r_2r_3r_4 = \frac{a_0}{a_4} = \frac{-12}{1} = -12$ *(IV).*

Note:

Em (I): $\underbrace{r_1 + r_2}_{=0} + r_3 + r_4 = 4 \Rightarrow r_3 + r_4 = 4$ *(V).*

Em (III): $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 =$

$= r_1r_2\underbrace{(r_3 + r_4)}_{=4} + r_3r_4\underbrace{(r_1 + r_2)}_{=0} = -16 \Rightarrow r_1r_2 = -4$ *(VI).*

Em (IV): $r_1r_2r_3r_4 = \frac{a_0}{a_4} = \frac{-12}{1} = \underbrace{(r_1r_2)}_{-4}r_3r_4 = -12 \Rightarrow r_3r_4 = 3$ *(VII).*

De (VI) e da condição de simetria na adição, $r_1 + r_2 = 0$, *temos que* r_1 *e* r_2 *são raízes da equação* $y^2 \underbrace{-4}_{r_1r_2} = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y+2) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 2$ *ou* $r_2 = -2$.

De (V) e (VII), temos que r_3 *e* r_4 *são raízes da equação* $y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow r_3 = 1$ *e* $r_4 = 3$.

Assim as raízes da equação são $2, -2, 1$ *e* 3, *e o gráfico correspondente à função polinomial correlata segue-se abaixo, destacando as raízes procuradas.*

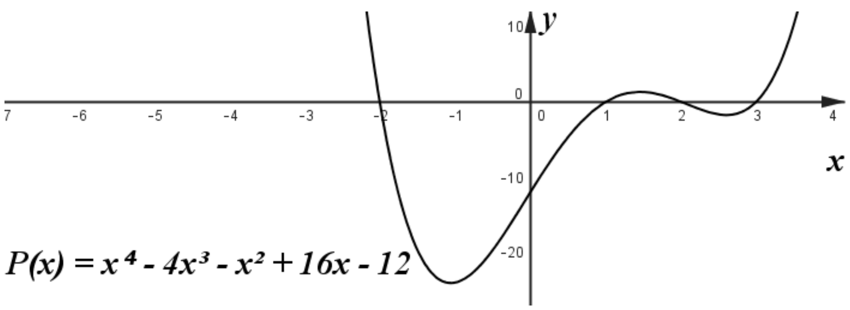

Figura 3.14: Relações de Girard: determinação das raízes.

Segundo Farias ([18], p. 14-15), quando o exercício proposto parte de uma equação dada e se busca determinar a relação existente entre os coeficientes, para que as suas raízes satisfaçam a uma condição imposta, o algoritmo que o soluciona "consiste em formar o sistema constituído pelas relações entre os coeficientes e as raízes e o que traduz a condição dada, e eliminar as m raízes entre as $m+1$ equações do sistema.

O resultado da eliminação é a relação pedida".

O mesmo autor ainda destaca os casos em que os coeficientes da equação proposta são funções de um só parâmetro. Nesses casos, "a relação obtida permite calcular o valor deste parâmetro", ao qual as raízes se adequam. Assim, além de determinar a relação ou o valor do parâmetro, pode-se obter as fórmulas de resolução ou os valores das raízes.

3.8 Raízes complexas

No estudo da decomposição dos polinômios com coeficientes reais, podem ocorrer raízes da forma $a + bi$, isto é, raízes complexas que não sejam reais, objeto desta seção.

A seguir apresentaremos, em duas versões, o teorema que trata das raízes conjugadas nas equações polinomiais. A primeira versão se baseia em Bezerra ([3], p. 228) e a segunda em Iezzi ([24], p. 128).

Teorema 12. *Teorema das raízes conjugadas.*

i) "Toda equação algébrica racional inteira de coeficientes reais, que admite a raiz $a + bi$, admite também a raiz $a - bi$, conjugada da primeira".

Demonstração.

Considere $a + bi$ raiz da equação $P(x) = 0$.

Em conformidade com as operações dos números complexos, temos:

$$P(a + bi) = A + Bi \text{ e } P(a - bi) = A - Bi.$$

Então, se $a + bi$ é raiz de $P(x) = 0$, temos: $A + Bi = 0 \Leftrightarrow A = 0$ e $B = 0$.

Logo $A - Bi = 0$. Assim, $a - bi$ é também raiz de $P(x) = 0$.

□

ii) Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $z = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$, então essa equação também admite como raiz o número $\overline{z} = \alpha - \beta i$, conjugado de z.

Demonstração.

Considere a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0$, *com coeficientes reais, que admite a raiz* z, *ou seja,* $P(z) = 0$. *Note:*

$$P(\overline{z}) = a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + a_{n-2}(\overline{z})^{n-2} + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 =$$
$$= a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + a_{n-2}\overline{z}^{n-2} + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 =$$
$$\overline{a_n}\overline{z}^n + \overline{a_{n-1}}\overline{z}^{n-1} + \overline{a_{n-2}}\overline{z}^{n-2} + \ldots + \overline{a_1}\overline{z} + \overline{a_0} =.$$
$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} =.$$
$$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0.$$

Logo $P(\overline{z}) = 0$, *isto é,* $\alpha - \beta i$ *é também raiz da equação dada.*

□

A seguir apresentamos o teorema que trata da multiplicidade da raiz complexa conjugada, conforme Dolce & Iezzi ([14], p. 126 - 127).

Teorema 13. *Teorema da multiplicidade da raiz conjugada: Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite a raiz* $z = \alpha + \beta i\ (\beta \neq 0)$ *com multiplicidade* k, *então essa equação admite a raiz* $\overline{z} = \alpha - \beta i$ *com multiplicidade* k.

Demonstração.

Consideremos a equação $P(x) = 0$ *com coeficientes reais, a qual admita a raiz* $z = \alpha + \beta i\ (\beta \neq 0)$, *com multiplicidade* k, *e a raiz* $\overline{z} = \alpha - \beta i\ (\beta \neq 0)$, *com multiplicidade* $k'\ (k' \neq k)$.

Seja $m = min\ \{k, k'\}$. *Note que o polinômio* $P(x)$ *é divisível por* $(x - z)^k$ *e* $(x - \overline{z})^{k'}$. *Logo* $P(x)$ *é também divisível por* $(x - z)^m$ *e por* $(x - \overline{z})^m$.

Como $z \neq \overline{z}$, *então* $P(x)$ *é divisível por* $(x - z)^m(x - \overline{z})^m$. *Daí, temos:*

$$P(x) = [(x - z)^m(x - \overline{z})^m]Q(x) = [(x - z)(x - \overline{z})]^m Q(x) =$$
$$= [x^2 - (z + \overline{z})x + z\overline{z}]^m Q(x) = [x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)]^m Q(x).$$

Observe que os polinômios $P(x)$ *e* $[x^2 - 2ax + (\alpha^2 + \beta^2)]^m$ *possuem coeficientes reais. Assim* $Q(x)$ *também tem todos os coeficientes reais. Daí, devem ser estudados dois casos:*

Primeiro caso: $m = k < k'$.

$P(x) = (x-z)^m(x-\overline{z})^m Q(x) = (x-z)^k(x-\overline{z})^k Q(x)$. *Assim, como* k *é a multiplicidade da raiz* z, *logo* $Q(x)$ *não é divisível por* $x-z$. *Observe, no entanto, que o polinômio* $Q(x)$ *deve ter ainda* $k'-k$ *fatores* $x-\overline{z}$, *pois* $k' > k$.

Logo $Q(x)$ *não é divisível por* $(x-z)$ *e é divisível por* $(x-\overline{z})$. *Em outras palavras,* $Q(z) \neq 0$ *e* $Q(\overline{z}) = 0$. *É absurda essa afirmação, pois contraria o teorema das raízes conjugadas, anteriormente demonstrado.*

Segundo caso: $m = k' < k$.

$P(x) = (x-z)^m \cdot (x-\overline{z})^m \cdot Q(x) = (x-z)^{k\prime} \cdot (x-\overline{z})^{k\prime} \cdot Q(x)$. *Como* k' *é a multiplicidade da raiz* $\overline{z}$, *temos que* $Q(x)$ *não é divisível por* $(x-z)$. *Além disso,* $Q(x)$ *deve possuir* $k-k'$ *fatores* $x-z$, *visto que* $k > k'$.

Logo $Q(x)$ *não é divisível por* $x-\overline{z}$ *e é divisível por* $x-z$, *o que significa* $Q(\overline{z}) \neq 0$ *e* $Q(z) = 0$: *afirmação absurda, pois novamente contraria o teorema das raízes conjugadas. Então a única alternativa que evita a contradição é obrigatoriamente* $k = k'$, *ficando provado o presente teorema.* $\square$.

Observação 3.8.1. *Os dois teoremas anteriores (Teoremas 13 e 14) são cabíveis apenas às equações com coeficientes reais. Por exemplo, a equação* $x^2 - 5ix = 0$, *que não possui todos os coeficientes reais, tem duas raízes:* 0 *e* $5i$. *Ela não admite como raiz* $-5i$, *conjugada de* $5i$.

O número de raízes complexas de uma equação polinomial com coeficientes reais é necessariamente par, tendo em vista que a cada raiz complexa da forma $a+bi$ $(b \neq 0)$ *corresponde outra raiz, a sua conjugada* $a-bi$, *com igual multiplicidade.*

Observação 3.8.2. *Caso a equação polinomial de coeficientes reais possua grau ímpar, então ela admite um número ímpar de raízes reais. Por exemplo, uma equação de grau* 5, *com todos os coeficientes reais, possuirá* 1 *ou* 3, *ou* 5 *raízes reais, visto que o número de raízes complexas, não reais, só pode ser* 0 *ou* 2, *ou ainda* 4, *ou seja, é par.*

Farias ([18], p. 8) acrescenta o seguinte: "A cada par de raízes complexas conjugadas corresponde um produto real do 2º grau em $\underline{x}$, *pois* $(x-a-bi)(x-a+bi) = (x-a)^2 + b^2$, *de modo que, na composição do 1º membro da equação, a cada par* *de raízes complexas corresponde um fator do 2º grau de coeficientes reais".*

Exemplo 3.8.1. *Iezzi ([24], p. 131) propõe que determinemos as raízes da equação* $x^4 - 4x^2 + 8x + 35 = 0$, *sabendo-se que uma delas raízes é* $2 + 3i$.

Como a equação possui todos os coeficientes reais, então $2 - 3i$ *é raiz, por ser conjugada da raiz* $2 + 3i$. *Além disso, podemos afirmar:* $x^4 - 4x^2 + 8x + 35$ *é divisível por* $(x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = x^2 - 4x + 7$.

Aplicando o Método da chave na divisão de $x^4 - 4x^2 + 8x + 35$ *por* $x^2 - 4x + 7$, *obtemos* $x^2 + 4x + 5$, *com resto nulo. Logo* $x^4 - 4x^2 + 8x + 35 = (x^2 - 4x + 7)(x^2 + 4x + 5) = 0$.

Utilizando a expressão $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, *conhecida como fórmula de Bhaskara*[24], *para resolver* $x^2 + 4x + 5 = 0$, *obtemos as duas outras raízes:* $-2 + i$ *e* $-2 - i$. *Então a equação inicial do quarto grau possui apenas raízes complexas, não reais.*

O gráfico abaixo ilustra as imagens da função polinomial $P(x) = x^4 - 4x^2 + 8x + 35$, *mostrando não haver raízes reais na equação original.*

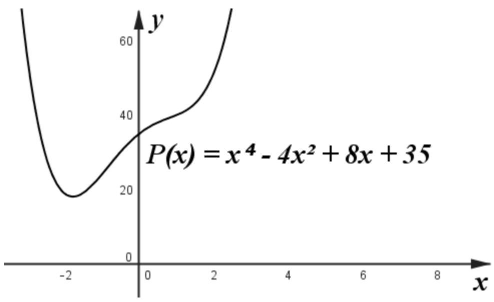

Figura 3.15: Equação com apenas raízes complexas, não reais.

3.9 Raízes reais

Consideremos a equação polinomial $P(x) = 0$ com todos os coeficientes reais e raízes reais $r_1, r_2, \ldots, r_k$ e raízes complexas não reais $z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, \ldots, z_j, \overline{z_j}$.

[24] Segundo Cattony ([11], p. 59), atribui-se a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ a Bhaskara, matemático indu, séc. XII.

Conforme visto, o Teorema da decomposição garante que podemos escrever:

$P(x) = a_n(x-r_1)\dots(x-r_k)(x-z_1)(x-\overline{z_1})(x-z_2)(x-z_2)\dots(x-z_j)(x-\overline{z_j})$.

Observando particularmente cada par de raízes complexas conjugadas da forma $z_s = a + bi$ e $\overline{z_s} = a - bi$, podemos efetuar o produto correlato a cada um desses pares. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(x - z_s)(x - \overline{z_s}) &= x^2 - (z_s + \overline{z_s})x + z_s\overline{z_s} \\ &= \underbrace{x^2 - 2ax + a^2}_{=(x-a)^2} + b^2 = (x - a)^2 + b^2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Note que o produto $(x - z_s)(x - \overline{z_s}) = x^2 - (z_s + \overline{z_s})x + z_s\overline{z_s}$ é sempre positivo para todo valor real atribuído a x.

Além disso, $Q(x) = \underbrace{(x - z_1)(x - \overline{z_1})}_{>0}\underbrace{(x - z_2)(x - \overline{z_2})}_{>0}\dots\underbrace{(x - z_j)(x - \overline{z_j})}_{>0} > 0$, pois todos os seus fatores da forma $(x - z_i)(x - \overline{z_i})$ são positivos.

Do exposto anteriormente, temos: $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_k)Q(x)$, tal que $Q(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Note que o sinal de $P(x)$ não depende dos fatores de $Q(x)$, ou seja, dos fatores relacionados com as raízes complexas, não reais. Com esse resultado, podemos desenvolver o teorema a seguir, segundo orientação de Dolce & Iezzi ([14], p. 128 - 130).

Teorema 14. *(Teorema de Bolzano).*

Considere $P(x) = 0$ uma equação polinomial com coeficientes reais e o intervalo aberto (a, b).

1) Se $P(a)$ e $P(b)$ possuem o mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existem raízes reais da equação em (a, b).

2) Se $P(a)$ e $P(b)$ possuem sinais diferentes, então existe um número ímpar de raízes reais da equação em (a, b).

Demonstração.

1) Se a raiz r_i pertence ao intervalo (a, b), então $a < r_i < b$. Logo $a - r_i < 0$ e $b - r_i > 0$. Então $(a - r_i)(b - r_i) < 0$.

2) Se a raiz r_e não pertence ao intervalo (a, b), isto é, é externa a esse intervalo, por exemplo, $a < b < r_e$, então $a - r_e < 0$ e $b - r_e < 0$. Logo $(a - r_e)(b - r_e) > 0$.

Assim, temos: $P(a)P(b) =$

$$= \underbrace{[a_n Q(a)(a-r_1)(a-r_2)\dots(a-r_k)]}_{=P(a)} \underbrace{[a_n Q(b)(b-r_1)(b-r_2)\dots(b-r_k)]}_{=P(b)} =$$

$$= \underbrace{a_n{}^2}_{>0} \cdot \underbrace{[Q(a)Q(b)]}_{>0} \cdot \underbrace{[(a-r_1)(b-r_1)][(a-r_2)(b-r_2)]\dots(a-r_k)(b-r_k)]}_{k \text{ fatores da forma } (a-r_s)(b-r_s), \text{ onde } r_s \text{ é raiz real da equação}}.$$

Observe que o sinal de $P(a)P(b)$ *será definido pelo número de fatores* $\underbrace{(a-r_i)(b-r_i)}_{<0}$, *correspondentes às raízes internas ao intervalo, visto que os valores correspondentes ao produto* $\underbrace{(a-r_e)(b-r_e)}_{>0}$, *conforme já visto, são sempre positivos.*

Logo, sendo $P(a)$ *e* $P(b)$ *de mesmo sinal, ou seja,* $P(a)P(b) > 0$, *então existe um número par de raízes reais da equação* $P(x) = 0$, *internas ao intervalo aberto dado:* (a, b).

Analogamente, sendo $P(a)$ *e* $P(b)$ *de sinais contrários, ou seja,* $P(a)P(b) < 0$, *então existe um número ímpar de raízes reais da equação* $P(x) = 0$, *internas ao intervalo aberto dado:* (a, b).

$\square$.

Exemplo 3.9.1. *Dolce & Iezzi ([14], p. 130) apontam o seguinte exercício de aplicação do Teorema de Bolzano: Determinar o valor de* m, *de modo que a equação* $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x + (m-3) = 0$ *possua, no mínimo, uma raiz real no intervalo* $]0;\ 2[$.

Note que, para assegurar a existência de pelo menos uma raiz real nesse intervalo, é suficiente que $P(0)$ *e* $P(2)$ *tenham sinais contrários, ou seja,* $P(0)P(2) < 0$. *Assim, temos:* $P(0) = m-3$ *e* $P(2) = 2^5 - 2\cdot 2^4 + 3\cdot 2^3 - 5\cdot 2^2 + 2 + (m-3) = m+3$.

Logo, $P(0)P(2) = (m-3)(m+3) < 0 \Rightarrow -3 < m < 3$: *valor procurado.*

3.10 Raízes racionais

Esta seção trata da relação entre as raízes racionais e os coeficientes dos termos dominante e independente da equação polinomial na forma canônica.

Bezerra ([3], p.297-298) desenvolve o presente tópico como propriedades das raízes racionais e das fracionárias, expondo um teorema semelhante ao seguinte, exposto por Iezzi ([24], p. 140 - 142).

Teorema 15. *Dada a equação* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0,\ (a_n \neq 0)$, *de coeficientes inteiros, que admite uma raiz racional da forma* $\frac{m}{q}$, *tal que* $m, q \in \mathbb{Z}$, *com* m *e* q *primos entre si,* $q \neq 0$, *então* m *divide* a_0 *e* q *divide* a_n.

Demonstração.

Supondo $\frac{m}{q}$ *uma raiz de* $P(x) = 0$, *o que implica* $P(\frac{m}{q}) = 0$, *ou seja, temos:*

$a_n \frac{m^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{m^{n-1}}{q^{n-1}} \ldots + a_1 \frac{m}{q} + a_0 = 0 \Rightarrow$ *(Multiplicando a equação por* $q^n \neq 0$*)*

$a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1}q + \ldots + a_1 m q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \Leftrightarrow$ *(Isolando* $a_n m^n$ *e* $a_0 q^n$*)*

$$\underbrace{a_n m^n}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{-q}_{\in \mathbb{Z}}[a_{n-1}m^{n-1} \ldots + a_1 m q^{n-2} + a_0 q^{n-1}] \in \mathbb{Z} \quad e$$

$$\underbrace{a_0 q^n}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{-m}_{\in \mathbb{Z}}[a_n m^{n-1} + a_{n-1}m^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}] \in \mathbb{Z}.$$

Como todos os coeficientes de $P(x), m$ *e* $q \in \mathbb{Z}$, *por hipótese, então temos:*

- a_n *é divisível por* q, *pois* $m.d.c.\ (m, q) = 1 \Leftrightarrow m.d.c.\ (m^n, q) = 1$, *isto é,* m^n *e* q *são primos entre si; e*

- a_0 *é divisível por* m, *pois* $m.d.c.\ (m, q) = 1 \Leftrightarrow m.d.c.\ (m, q^n) = 1$, *isto é,* m *e* q^n *são primos entre si.*

□.

Observação 3.10.1. *Admitidas as mesmas condicionantes da hipótese do teorema acima, note o seguinte:*

- Caso $a_n = 1$ *e* $P(x) = 0$ *possua raízes racionais, então essa equação não pode ter raízes racionais fracionárias.*

- Este teorema é aplicável às equações com todos os coeficientes inteiros, isto é, ser inteiro não é condição exclusiva apenas para a_n *e* a_0, *mas para todos os coeficientes. Por exemplo, a equação* $x^2 - \frac{26}{5}x + 1 = 0$ *possui duas raízes racionais:* 5 *e* $\frac{1}{5}$, *em vez de* 1 *ou* -1. *Note, portanto, que o teorema acima não é aplicável ao caso, a fim de determinar as raízes, visto que um dos coeficientes,* $\frac{26}{5}$, *não é inteiro.*

- Caso $a_0 \neq 0$ *e a equação admita a raiz inteira* t, *então* t *divide* a_0, *termo*

independente de $P(x) = 0$.

Exemplo 3.10.1. *Bezerra ([3], p. 298 - 299) propõe determinar as raízes de* $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$, *sabendo-se que são racionais, inteiras, consecutivas e negativas.*

Note que os divisores de $a_0 = 6$ *são:* $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. *Como as raízes são negativas, então elas estão entre as seguintes:* $-1,\ -2,\ -3,\ -6$. *A condição de consecutivas exclui o valor* -9.

Assim, as raízes são: $-1,\ -2 \quad e \ -3$.

Exemplo 3.10.2. *Dolce & Iezzi ([14], p. 136) propõem que determinemos as raízes inteiras de* $x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$.

Como $a_n = a_3 = 1$, *então a raiz racional* m/q *apresenta as seguintes relações: q =1 e* $m \in \{-1, 1, -3, 3, -9, 9\}$.

Logo $\frac{m}{q} \in \{-1, 1, -3, 3, -9, 9\}$.

Efetuando as verificações, temos: $P(-1) = 4,\ P(1) = -8,\ P(-3) = 0,\ P(3) = 36,\ P(-9) = -468$ *e* $P(9) = -522$.

Então a raiz inteira é -3.

Desejando determinar as outras duas raízes, basta aplicar o dispositivo de Briot - Rufinni, dividindo $x^3 + 3x^2 - 3x - 9$ *por* $x + 3$. *Com isso, obtemos* $x^2 - 3$.

Então podemos afirmar: $x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ *ou* $x = \sqrt{3}$ *ou ainda* $x = -\sqrt{3}$.

Note que, além da raiz inteira $x = -3$, *há duas raízes que não são inteiras:* $x = \sqrt{3} \quad e \quad x = -\sqrt{3}$.

Capítulo 4

Conclusão

Este trabalho trata dos polinômios e das equações polinomiais, com abordagem destinada a alunos e professores do ensino básico. Explorando preponderantemente fontes impressas de consagrados autores que formaram várias gerações de alunos de Matemática, este estudo também utiliza livros atuais indicados pelo MEC para o mencionado ciclo de ensino.

O propósito deste estudo não se vincula à produção de novidades conceituais sobre polinômios e equações polinomiais: definições, propriedades e aplicações. Na realidade, pretende ser útil, visto que reune praticamente todos os tópicos exigidos ao nível escolar em consideração, sem simplificação da argumentação teórica. Ao contrário, há farta disponibilidade de demonstrações.

Conforme já salientado, busca-se resgatar a rica produção de renomados professores ausentes na bibliografia da Matemática[1], na atualidade, colocando-os em destaque ao lado de autores cujas obras estão em catálogo editorial e nas listas indicadas pelo MEC[2], no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD).

Vale evidenciar que definições e teoremas, em diversas passagens deste trabalho, são apresentados em versões distintas, conforme registrado pelos autores estudados. Essa variedade de abordagens expõe a riqueza com que o mesmo aspecto pode ser

[1] Todos eles docentes, em escolas prestigiadas, de gerações que estudaram polinômios com eles e com seus livros. Dentre tais professores, podem ser citados Bezerra (Colégio Naval), Farias (Academia Militar das Agulhas Negras), Galante (Instituto Américo Brasiliense de Santo André - SP), Guelli (Curso Anglo Latino em São Paulo), Irmãos Maristas (Colégio Marista), Pierro Netto (Colégio de Aplicação da USP - SP), Quintella (Colégio Militar do Rio de Janeiro), Sangiorgi (Ginásio Estadual de SP e Instituto Padre Anchieta) e Serrão (Colégio Pedro II).

[2] Dentre os autores com obras recentemente editadas, podem ser mencionados nomes de prestígio editorial e acadêmico como Dolce, Elon Lages (já falecido), Iezzi, Manoel Paiva e Muniz Neto.

explicado.

Outro aspecto interessante é que cada conceito teórico é reforçado por exercícios de aplicação (problemas). Estes se destinam originalmente a sedimentar (ou testar) o conteúdo abstrato apresentado antes. Em geral, tais exercícios são questões extraídas ou adaptadas das existentes nos próprios livros dos autores investigados. Afinal, é importante, no contexto deste trabalho, marcar a presença de cada autor no desenvolvimento do estudo.

A esse respeito, merece especial consideração o conteúdo teórico das obras de Bezerra, em [3], Iezzi, em [24], e Dolce & Iezzi, em [14], direcionadas ao ensino médio.

Esses livros, na verdade, se constituem, verdadeiras exceções em relação aos demais editados no presente, em virtude de aqueles autores abordarem a teoria com densidade e simplicidade, isto é, com significativo número de demonstrações (teoremas, corolários e propriedades). A isso somam-se listas de exercícios neles existentes que facilitam a consolidação da aprendizagem nos alunos interessados. Assim, não é por acaso, que os autores citados nominalmente acima pontuam praticamente todo este trabalho, nos aspectos teóricos ou nos exercícios de aplicação[3].

Voltando-se especificamente ao conteúdo deste trabalho, cabe destacar resumidamente alguns aspectos. O primeiro deles se refere à definição de polinômio, a qual, para os autores antigos, se restringia à expressão algébrica do somatório apenas, enquanto os ditos modernos a expandem à função polinomial também, isto é, à aplicação cuja imagem é determinada pela expressão já citada. Assim, para os modernos, polinômio e função polinomial assumem o mesmo significado.

Outro aspecto observado aponta que a teoria sobre as operações com polinômios é bastante sintetizada e limitada, na maioria dos livros investigados e indicados pelo MEC. Essas obras, em geral, só reproduzem algoritmos da execução das operações.

Quando se trata da divisão, por exemplo, o teorema da existência e da unicidade do quociente e do resto, importante para o desenvolvimento de lições posteriores, é praticamente ignorado pelos autores ditos modernos. Em suma, sua validade é aceita sem o mínimo esforço para prová-lo. Em contrapartida, o método da chave

[3] Serrão, por exemplo, realiza restritos resumos teóricos, enfatizando seu esforço em excelentes questões que exigem domínio perfeito da teoria. Vide: [56] e [57]. Além desses dois livros de exercícios, merece também destaque [25].

(correspondente ao algoritmo de Euclides para a divisão de inteiros) e o dispositivo de Briot-Ruffini merecem atenção de todos os autores por seu caráter prático.

Ao tratar das equações polinomiais, o esforço teórico se concentrou nos fundamentos relacionados com as raízes das equações. Com esse direcionamento, não foram esquecidos os casos mais elementares que envolvem as equações de primeiro e segundo graus, além das biquadradas, objeto de estudo ainda no ensino fundamental.

Ainda que a confecção de gráficos não fosse de interesse específico deste trabalho, eles todos foram construídos com auxílio do aplicativo Geogebra e se fazem presentes como elementos ilustrativos às aplicações e à teoria apresentadas.

Aspectos referentes a equações no que diz respeito à equivalência, à resolução e às relações entre coeficientes e as raízes (as conhecidas relações de Girard), ao número de raízes, à multiplicidade e à natureza destas (complexas, reais, racionais ou inteiras), por exemplo, foram abordados conjuntamente com importantes teoremas como o fundamental da Álgebra (T.F.A.), o da decomposição, o das raízes conjugadas, o da multiplicidade da raiz conjugada e o de Bolzano (sobre número de raízes reais em intervalo aberto), dentre outros.

Tais conhecimentos se acompanharam de provas, de ilustrações gráficas e de exercícios resolvidos, tudo isso visando tornar os tópicos mais familiares aos leitores aos quais se destinam.

Encerrado o discurso acerca do conteúdo, finalmente, ainda merece ressaltar que este trabalho teve como base principal a busca e o estudos de livros impressos[4], pois era intuito investigar as obras didáticas marcantes que chegaram aos bancos escolares, em particular, às mãos dos professores e dos estudantes do ensino básico, desde os anos 60 aos dias atuais.

Não podendo alcançar todos os compêndios, foram selecionados cerca de cinquenta livros didáticos representativos da Matemática no ensino básico, os quais foram estudados e deixaram vestígios da presença de seus autores nas páginas deste documento.

Recentes resultados dos alunos no ensino básico na Matemática no âmbito nacional

[4] Dentre as raridades bibliográficas alcançadas e estudadas, tratando do assunto, podem ser apontadas a obra [18], de Sinésio Farias, em estilo manuscrito, editada em 1957, a [33] dos Irmãos Maristas e a [47] de Ary Quintella, ambas editadas em 1960.

têm sido apontados como sofríveis, quando comparados com os de estudantes dos demais países do mundo. Isso representa enorme desafio a ser ultrapassado.

É nessa engrenagem escolar desafiadora que se posiciona o professor de Matemática. Dentre as demandas que lhes chegam, estão: dominar o conhecimento, ter gosto pela disciplina, torná-la inteligível e acessível a todos os alunos em sala e explicitar entusiasmo ao conduzi-la, mostrando a enorme importância e a presença da Matemática na vida moderna.

Ross ([49], p. 36-37) ensinava que "nacionalizar uma população numerosa requer instituições que difundam ideias e ideais"[5]. Assim, entranhar a Matemática na nação requer a superação de grande desafio que não é momentâneo nem novo. Já nas primeiras páginas de [11], Cattonny sinalizava:

"O professor tem que escolher entre a popularidade de hoje e a justiça do futuro. A primeira tem a gratidão efêmera de alguns de seus ex-alunos, a segunda a gratidão perene de sua Pátria e de seus ex-alunos."

A esse respeito é saudável destacar que o docente de Matemática pode obter êxito no processo ensino-aprendizagem, sendo um entusiasta arregimentador de adeptos da disciplina entre seus alunos.

[5] O mesmo autor apontava como exemplos a russificação operada pela presença da Igreja Ortodoxa em cada pequeno lugarejo e a americanização dos Estados Unidos operada pela escolinha de tijolos vermelhos em cada pequeno povoado.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações.** Trad. Claus Ivo Doering. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. Cap.1. p. 11 - 16.

[2] BACCARO, Nelson; CYRINO, Hélio. **Matemática: segundo grau, volume 3.** São Paulo: Ática, 1979. Coleção Série Compacta.

[3] BEZERRA, Manoel Jairo. **Curso de Matemática para o primeiro, o segundo e o terceiro anos dos cursos clássico e científico.** 22. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1968.

[4] BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática: 7º. ano.** 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

[5] BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática: 8º. ano.** 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

[6] BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy. **Matemática: conjuntos, funções e progressões - 2 grau, volume 1.** São Paulo: FTD, s./d.

[7] BONJORNO; José Roberto; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVARES; Ayrton. **Matemática: fazendo a diferença, 7º. ano.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2006. Coleção fazendo a diferença. v. 1.

[8] BRANDÃO, Marcius. **Matemática: conceituação moderna, ensino de primeiro grau, 8ª série.** São Paulo: Editora do Brasil, 1975.

[9] BRANDÃO, Marcius. **Matemática: conceituação moderna, quarto volume.** São Paulo: Editora do Brasil, s/d. 4ª série ginasial.

[10] BUCCHI, Paulo. **Matemática: volume único.** 1. ed. São Paulo: Moderna, 1992.

[11] CATTONY, Carlos. **Matemática: Álgebra e Geometria: 8ª série, 1º grau.** 8. ed. São Paulo: IBRASA, 1979. Biblioteca didática - 6.

[12] DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática: ensino fundamental (7ª. série) – manual do professor.** São Paulo: Ática, 2005.

[13] DIERINGS, André Ricardo. **Ensino de polinômios no ensino médio: nova abordagem.** Disponível em: https: //sca.profmat-sbm.org.br/sca$_v2/get_tcc3.php?id = 132$. Acesso em : 06 ago. 2019.

[14] DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson. **Álgebra III: números complexos, polinômios, equações algébricas.** São Paulo: Moderna, 1973. Coleção Matemática Moderna, v. 7.

[15] DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna.** 4. ed. São Paulo: Atual, 2003. Cap. III e VI.

[16] EISENBERG, T.; Dreyfus, T. **Os polinômios no currículo da escola média.** In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org.). As ideias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1994. p. 17 – 134.

[17] FACHINI, Walter. **Matemática para a escola de hoje: livro único.** São Paulo: FTD, 2006.

[18] FARIAS, Sinésio de. **Estudo sucinto da resolução numérica das equações.** Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico Ltda, 1957.

[19] FLORES, Mikhaild P. **Álgebra: teoría y práctica.** Lima: San Marcos, 2015.

[20] GALANTE, Carlos. **Matemática: quarta série, curso ginasial.** 24. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 1966.

[21] GRIFFITHS, Humbert Brian; HILTON, P. J. **Matemática clássica: uma interpretação contemporânea.** São Paulo: Edgard Blücher, USP, 1975.

[22] GUELLI, Cid. A.; IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. **Álgebra II: matrizes, determinantes, sistemas lineares, análise combinatória.** São Paulo: Moderna, 1970. Coleção Matemática Moderna. Cap. II p. 62-66 e VI, p. 206 - 208.

[23] GUELLI, Cid. A.; IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. **Conjuntos, funções, inequações.** São Paulo: Moderna, 1970. Cap. III, p. 93 - 101.

[24] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar 6: complexos, polinômios, equações.** 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v.6. Livro do professor.

[25] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar 6: complexos, polinômios, equações.** 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v.6. Complemento para o professor.

[26] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze. **Matemática: ciência e aplicações.** 1. ed. São Paulo: Atual, 2001. v.3.

[27] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Nilson J.; CASTRO, L. R. S. O.; GOULART, M.; MACHADO, A. S. **Tópicos de Matemática - volume 3.** 2. ed. São Paulo: Atual, 1981. Coleção Tópicos de Matemática.

[28] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio - volume 1.** 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Coleção do Professor de Matemática.

[29] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do ensino médio - volume 4: enunciados e soluções de exercícios.** 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[30] LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais.** 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Coleção do Professor de Matemática.

[31] LONGEN, Adilson. **Matemática - ensino médio: uma atividade humana, vol. 3.** Curitiba: Base Editora, 2003.

[32] MACHADO, Antônio dos Santos. **Matemática na escola do segundo grau.** São Paulo: Atual, 1994. v.3.

[33] MARISTAS, Irmãos. **Matemática: quarta série, curso ginasial.** 4. ed. São Paulo: Editora do Brasil S/A, 1960.

[34] MOL, Rogério Santos. **Introdução à História da Matemática.** 1. ed. Belo Horizonte: CAED –UFMG, 2013.

[35] MORANDI, Henrique. **Matemática: método moderno, curso médio - ciclo ginasial.** Rio de Janeiro: Editora Paulo de Azevedo, Livraria Francisco Alves, 1971.

[36] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. Coleção PROFMAT.

[37] MUNIZ NETO, Antônio Caminha.**Tópicos de Matemática Elementar: polinômios**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Coleção do Professor, v.6.

[38] NETO, Antar. **Matemática básica.** São Paulo: Atual, 1984.

[39] NETTO, Scipione de Pierro; et. al. **O trabalho dirigido no ensino da Matemática: curso moderno - 8a. série.** São Paulo: Saraiva, 1973.

[40] NETTO, Scipione de Pierro. **Matemática na Escola Renovada: volume 4, curso ginasial.** São Paulo: Saraiva, 1970.

[41] NIELSEN, Kaj L. **Tábuas logarítmicas trigonométricas, cinco decimais.** 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1968.

[42] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDÉZ, Adán José Corcho. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[43] PAIVA, Manoel. **Matemática.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v.3.

[44] PAIVA, Manoel. **Matemática: volume único.** 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2003. Coleção Base.

[45] PATARO, Patrícia Moreno; BALESTRI, Rodrigo. **Matemática essencial, 8 ano: ensino fundamental, anos finais.** 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

[46] QUINTELLA, Ary. **Matemática para a primeira série ginasial.** 121. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1966.

[47] QUINTELLA, Ary. **Matemática para o terceiro ano colegial.** 7. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1960.

[48] RAYMUNDO, Alexandre; et al. **Conexões com a Matemática, 3º. ano, ensino médio: manual do professor.** 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. Fábio Martins de Leonardo (editor). Obra coletiva: Editora Moderna (Org.). v.3.

[49] ROSS, Edward A. **Principles of Sociology.** New York: Century, 1920. p. 36-37.

[50] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera L. da Rocha. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.** 2.ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996. cap. 5.

[51] SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática 2: curso moderno para cursos ginasiais.** 2. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1965.

[52] SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática para a quarta série ginasial.** 46. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1962.

[53] SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática para cursos do primeiro grau: 6.** São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1972.

[54] SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática: curso moderno para os ginásios, 3º volume.** 8. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970. Programa para a terceira série dos cursos ginásios.

[55] SANTOS, Carlos A. M. dos; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio E. **Matemática: vol. único.** 7ª ed. São Paulo: Ática, 2003. Série Novo Ensino Médio.]

[56] SERRÃO, Alberto Nunes. **Exercícios e problemas de Álgebra para o ciclo colegial e exames vestibulares às escolas superiores.** 5. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1969. v. 1 – Parte A.

[57] SERRÃO, Alberto Nunes. **Exercícios e problemas de Álgebra para o ciclo colegial e exames vestibulares às escolas superiores.** 5. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1969. v. 1 – Parte B.

[58] SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática Ensino Médio: manual do professor.** 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013. v.3.

[59] SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática para compreender o mundo 3: manual do professor.** 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

[60] SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jaqueline da Silva Ribeiro. **Contato Matemática, 1º. ano.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2016. Manual do professor. Coleção: Contato Matemática.

[61] SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jaqueline da Silva Ribeiro. **Contato Matemática, 3º. ano.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2016. Manual do professor. Coleção: Contato Matemática.

[62] SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno de. **Vontade de saber Matemática, 8º. ano.** 3. ed. São Paulo: FTD, 2015. Manual do professor.

[63] SPINELLI, Walter. **A construção do conhecimento entre o abstrair e o contextualizar: o caso do ensino da Matemática.** Disponível em: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-10062011-134105/publico Acesso em: 06 ago. 2019. Tese de doutorado, USP, 2011.

[64] THOMAS Jr., George B.;et. al. **Cálculo, volume 1.** Trad. Paulo Boschcov. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

Sítios eletrônicos:

[65] **GeoGebra: aplicativos matemáticos.** Disponível em: https://www.geogebra.org/?lang=pt Acesso em: 04 ago. 2019.

[66] **ENEM: provas e gabaritos**Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos Acesso em: 04 ago. 2019.

[67] **Dissertações do Profmat.** Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=titulo=polinomiosaluno= Acesso em: 26 ago. 2019.