



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PROCESSOS ALEATÓRIOS NÃO-MARKOVIANOS:
PERFIS DE MEMÓRIA

GISLENE MICARLA BORGES DE LIMA

Natal, 14 de Janeiro de 2013

GISLENE MICARLA BORGES DE LIMA

Processos aleatórios não-markovianos:
perfis de memória

*Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física Teórica e Experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de **Doutor** em Física.*

Orientador: Ananias Monteiro Mariz

Co-Orientador: Madras Viswanathan Gandhi Mohan

Natal, 14 de janeiro de 2013

Para Pessoas Especiais:

À minha filha, Helena Borges Marinho e minha mãe,
Terezinha Borges de Lima.

Agradecimentos

À Deus, pela fé, capacitação e força para alcançar meus objetivos.

À minha filha, Helena Borges Marinho, por todo seu amor que se transformou em motivação, sem a qual eu não teria conseguido concluir este trabalho.

À minha mãe, Terezinha Borges de Lima, por todo amparo, educação, incentivo e confiança. Sem esse alicerce não teria sido possível chegar até aqui.

À minha avó, Maria Borges da Silva, minha irmã, Vitória Gislainy Borges de Lima e demais membros da família por sempre apoiaram este sonho, com palavras de amor e incentivo.

Aos avós paternos da minha filha, Eriberto Luiz Marinho e Maria Inês da Silva Marinho pelos cuidados prestados a ela e suas palavras de incentivo.

Aos Professores, Ananias Monteiro Mariz e Madras Viswanathan Gandhi Mohan pela orientação recebida como também pelas ricas discussões as quais tornaram o processo de elaboração deste trabalho agradável.

Aos Professores, Ezequiel Silva de Sousa, Claudionor Gomes Bezerra e demais professores do DFTE por terem contribuído para minha formação acadêmica.

Aos funcionários do DFTE, em especial, a Celina.

Aos colegas Cyntia Vanessa, Tiago Crisóstomo Carlos Nunes, Aline Viol e Samurai Gomes de Aguiar por discussões e ideias que contribuíram para o resultado desta tese como também pelas palavras de ânimo e encorajamento que me sustentaram durante todo esse processo.

Finalmente, ao CNPq, pelo apoio financeiro concedido.

"A persistência é o caminho do êxito".

(Charles Chaplin)

Resumo

Um dos mecanismos responsáveis pela difusão anômala é a existência de correlações temporais de longo alcance como, por exemplo, no movimento browniano fracionário e nos modelos de caminhadas aleatórias segundo os perfis de memória do elefante e de alzheimer, sendo que nestes dois últimos casos o caminhante guarda a memória dos seus primeiros passos. Uma questão a ser elucidada, e que foi a principal motivação de nosso trabalho, é se a lembrança do histórico inicial constitui-se em condição necessária para a observação de difusão anômala (no caso, superdifusão).

Nós damos uma resposta conclusiva, ao estudarmos um modelo de caminhada não-markoviana em que a memória do passado do caminhante, no instante t , é dada por uma gaussiana centrada no tempo $t/2$ e com desvio padrão σt que cresce linearmente com a idade do caminhante. Para grandes valores de σ vemos que este modelo se comporta de forma similar ao modelo de elefante; No limite oposto ($\sigma \rightarrow 0$), embora o caminhante esqueça os tempos iniciais, observamos resultados semelhantes ao modelo de caminhada de alzheimer, em particular a presença de persistência induzida por amnésia, caracterizada por certas oscilações log-periódicas. Concluimos assim que a memória de tempos iniciais não é uma condição necessária para o surgimento da superdifusão nem da persistência induzida por amnésia, podendo aparecer mesmo em perfis de memória que esquecem os passos iniciais, como o perfil gaussiano aqui investigado.

Abstract

One of the mechanisms responsible for the anomalous diffusion is the existence of long-range temporal correlations, for example, Fractional Brownian Motion and walk models according to Elephant memory and Alzheimer profiles, whereas in the latter two cases the walker can always "remember" of his first steps. The question to be elucidated, and the was the main motivation of our work, is if memory of the historic initial is condition for observation anomalous diffusion (in this case, superdiffusion).

We give a conclusive answer, by studying a non-Markovian model in which the walker's memory of the past, at time t , is given by a Gaussian centered at time $t/2$ and standard deviation σt which grows linearly as the walker ages. For large widths of σ we find that the model behaves similarly to the Elephant model; In the opposite limit ($\sigma \rightarrow 0$), although the walker forget the early days, we observed similar results to the Alzheimer walk model, in particular the presence of amnestically induced persistence, characterized by certain log-periodic oscillations. We conclude that the memory of earlier times is not a necessary condition for the generating of superdiffusion nor the amnestically induced persistence and can appear even in profiles of memory that forgets the initial steps, like the Gausssian memory profile investigated here.

Índice

Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
1 Introdução às caminhadas aleatórias	2
1.1 Difusão	4
1.2 Teoria de Einstein-Smoluchowski	7
1.3 O passeio aleatório unidimensional	10
1.4 Distribuição gaussiana e distribuição de Lévy	16
1.5 Difusão normal e difusão anômala	20
1.6 Caminhadas aleatórias contínuas no tempo	25
1.7 Voos e caminhadas de Lévy	28
1.8 Movimento browniano fracionário	30
1.9 Aplicações de teoria de caminhadas aleatórias	33
2 Memória em caminhadas aleatórias	37
2.1 Processos estocásticos com memória	37
2.2 Função distribuição de probabilidade	39

2.3	O Teorema central do limite e o Teorema central do limite generalizado . . .	42
2.4	Processos markovianos e não-markovianos	43
2.5	Cadeias de Markov	46
2.6	Cadeias de Markov homogêneas contínuas no tempo	48
2.7	Memória de longo-alcance	49
2.8	A Equação Mestra	50
2.9	A Equação de Fokker-Planck	52
2.10	A Equação de Langevin	53
3	Perfis de memória	56
3.1	Modelo de Elefante	58
3.1.1	Modelo de Alzheimer	61
3.1.2	Modelo de Alzheimer com diluição	67
4	O perfil de memória gaussiano	72
4.1	Por que o perfil de memória gaussiano ?	72
4.2	O modelo de perfil de memória gaussiano	74
4.3	Métodos e resultados	76
4.3.1	O expoente de Hurst	76
4.3.2	O diagrama de fase	78
4.3.3	Oscilações log-periódicas na posição	82
4.3.4	A largura de persistência	84
5	Conclusões e perspectivas	86

Lista de Figuras

1.1	Gotas de corante diluídos em água; inicialmente o corante ocupa uma região pequena que se espalha formando uma mistura homogênea (Imagem retirada da referência: [12]).	5
1.2	À esquerda a bolinha em azul representa a partícula em suspensão no soluto, as bolinhas em vermelho representam as moléculas da solução. À direita temos a trajetória da partícula maior que descreve um movimento errático (Imagens retiradas da referência [15]).	7
1.3	Partícula parte da origem e efetua passos unitários, após 5 passos está localizada no ponto $x = -1$	10
1.4	Caminhada aleatória em 3 dimensões (Figura retirada da referência [19]).	15
1.5	Distribuições gaussianas para diferentes valores de σ - quanto maior o σ mais os valores das posições estão dispersos.	17
1.6	Distribuições de Lévy para diferentes parâmetros [22].	18
1.7	Distribuições de Cauchy ($\alpha = 1$) e gaussianas $\alpha = 2$, as três figuras forma obtidas em escala linear, semi-log e log-log, respectivamente. [22].	19
1.8	Rotação de um fluido em um anel (figura retirada da referência [27]).	20
1.9	Fotos das trajetórias do fluido tiradas pela câmera posicionada na parte de cima do anel (Imagens retirada da referência [27]).	21
1.10	À esquerda processos de difusão normal- os passos são sempre pequenos. À direita longos "voos" são dados pela partícula e seguidos por regiões de "aprisionamento", em contraste com a difusão normal (Figura retirada da referência [27]).	22

1.11	Caracterização da difusão através do expoente de Hurst [33].	23
1.12	À esquerda: um processo CATC numa rede em 2D. Os tempos de espera são simbolizados por um círculo de diâmetro proporcional ao tempo, os saltos são equidistantes. À direita o diagrama do processo em 2D com os saltos com comprimentos diferentes e tempos de espera iguais.	26
1.13	À esquerda: caminhada em 2D que apresenta regime subdifusivo. À direita o regime é superdifusivo, para um mesma quantidade de passos (Figura reproduzida da referência [41]).	28
1.14	A figura ilustra a dependência de $\lambda(l_i)$ com l_i , para diferentes valores de μ , observe que a medida que μ aumenta, a probabilidade diminui [40].	29
1.15	Movimentos brownianos fracionários para diferentes expoentes de Hurst (Figura retirada da referência [44]).	31
1.16	Uma estrutura DLA gerada por uma solução de sulfato de cobre em uma célula de eletrodeposição (Imagem reproduzida da referência [47]).	33
1.17	Eletrons fazem CATC ("CTRW") na rede nanocristalina [22].	34
1.18	Estimativa do expoente de Hurst a partir da variância [54].	36
2.1	Medida da assimetria da distribuição.	40
2.2	Curtose da distribuição.	41
2.3	Diagramas de transição dos estados com respectivas probabilidades.	47
3.1	Deslocamento médio em função de t para diferentes parâmetros de memória (reproduzida da referência [67]).	61
3.2	Deslocamento quadrático médio em função de t para diferentes parâmetros de memória (reproduzida da referência [67]).	62
3.3	Expoente de Hurst (aqui denotado por α) em função do parâmetro de memória p . A linha tracejada representa os resultados exatos (reproduzida da referência [67]).	63

3.4	O expoente de Hurst como função do parâmetro de correlação p e da fração f do tempo total lembrada pelo caminhante. A linha tracejada representa o resultado analítico para o caso em que $f = 1.0$. Os resultados foram obtidos para um tempo de realização de 10^3 . No detalhe temos $\langle x^2 \rangle$ para diferentes escolhas de p e f (Figura retirada da referência [68].)	64
3.5	Gráfico semi-log do deslocamento x_t como uma função de t para $p = 0.1$ e vários valores de f . No detalhe mostra $x_t/t^{1/2}$ versus t . (Imagem reproduzida da [68]).	65
3.6	Diagrama de fase completo para o modelo de Alzheimer. (Imagem retirada das referências [32])	66
3.7	Dependência de H versus p . "A adição da diluição para a memória total do caminhante não produz uma variação significativa no expoente de Hurst. Para a diluição de 95% e vários valores de f , o resultados são equivalentes ao caso de diluição zero" ([74])	67
3.8	A figura mostra o expoente de Hurst H para vários valores de f (a) $f = 0.1$, (b) $f = 0.4$, (c) $f = 1.0$, e várias diluições aleatórias. (Imagem reproduzida da referência [74])	68
3.9	(a) o caminhante segue a sequência de Thue-Morse o que equivale a uma diluição de 50%. Em (b) a diluição foi aplicada usando a sequência de Fibonacci (Imagens retiradas da referência [74]).	69
3.10	A distribuição da largura de persistência normalizada em gráfico semi-log. Em (a), $f = 1.0$, os dados colapsam em uma reta (comportamento exponencial). Para $f = 0.1$ um desvio significativo é observado da distribuição exponencial. Em (c) e (d) é mostrado a inclusão da diluição para o caso em que $d = 0.95$ (Imagens retiradas da referência [74]).	70
4.1	O desvio padrão da gaussiana cresce linearmente com t . Em um instante t' o caminhante tem uma maior probabilidade de retomar uma ação na metade da sua vida $t'/2$ a medida que o tempo evoluir até um instante de tempo t'' a probabilidade de retomar uma ação é mais provável em $t''/2$	75
4.2	Estimativa do expoente de Hurst através do gráfico do deslocamento quadrático médio versus t (no limite assintótico).	77
4.3	Gráfico da variância (linha preta) e deslocamento quadrático médio (linha vermelha). As duas curvas colapsam (no limite assintótico).	78

-
- 4.4 Exponente de Hurst H versus o parâmetro de *feedback* p para alguns valores do desvio padrão relativo σ do perfil de memória gaussiano. Para grandes valores de σ , o caminhante pode se lembrar de quase de toda a história, enquanto para valores pequenos o caminhante se lembra preferencialmente de eventos que aconteceram quando o caminhante tinha metade do tempo de vida presente. 79
- 4.5 O expoente de Hurst H como uma função do parâmetro de *feedback* p e do desvio padrão relativo σ do perfil de memória gaussiano. Para grandes larguras, o comportamento é qualitativamente semelhante ao modelo de elefante. À medida que a largura se estreita, a superdifusão surge, para os valores altos e baixos de p . Surpreendentemente, a superdifusão log-periódica surge para baixo p , de modo que o comportamento torna-se semelhante ao do modelo de passeio Alzheimer, mesmo sendo o perfil de memória gaussiano muito diferente do perfil de memória da caminhada de Alzheimer. 81
- 4.6 Primeiro momento para $p = 0.1$ e diferentes valores de σ , as oscilações diminuem à medida que o desvio padrão relativo aumenta. 82
- 4.7 Representamos na escala semi-log do deslocamento médio $\langle x \rangle$ em função de t para $p = 0.1$ e diversos valores de σ . O detalhe mostra o primeiro momento (reescalado por t^H) em função do logaritmo do tempo para uma maior clareza visual. Note como uma periodicidade é claramente evidente. Perda significativa da memória (ou seja, pequeno σ) leva a maiores amplitudes para as oscilações log-periódica. Este tipo de oscilação é um indicador de invariância de escala discreta, em vez de dimensões fractais reais, temos dimensões complexas. 83
- 4.8 A distribuição do comprimento de persistência $f(w)$ médio para 10^5 realizações, mostrando um comportamento exponencial para $p = 0.5$ e não exponencial para $p = 0.1$ e $p = 0.9$. A forma não exponencial pode estar associada a distribuição não-gaussianas. Este resultado está consistente com o regime difusivo (superdifusão) com ($H > 1/2$) encontrados para ($p = 0.1$ e $p = 0.9$) 85

Introdução às caminhadas aleatórias

A "dança" aleatória de pequenas partículas em suspensão num líquido, um fenômeno conhecido como movimento browniano, se constitui em um dos mais interessantes e profícuos problemas da ciência, servindo de paradigma para uma extensa quantidade de sistemas encontrados em diferentes áreas do conhecimento, tais como física, química, biologia, e economia, tendo em comum a ação de processos estocásticos em sua evolução temporal. As primeiras observações sobre este tipo de movimento foram feitas por Jan Ingenhousz quando o mesmo estudava o movimento de pequenas partículas de poeira de carvão em álcool [1] o qual ele descreveu como sendo um movimento irregular. Contudo, a descoberta deste fenômeno é, em geral, atribuída ao botânico escocês Robert Brown e por esta razão este movimento é hoje conhecido como movimento browniano. No ano de 1828, Brown publicou o trabalho "A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies"¹ [2], no qual ele relata a descoberta de que o movimento de grãos de pólen minúsculos suspensos em água e observados ao microscópio exibiam um movimento irregular e incessante. Posteriormente, ele observou que este mesmo fenômeno ocorria em partículas de pó; isto o levou a concluir que os movimentos não eram devidos a mecanismos biológicos associados ao pólen.

Nas décadas seguintes, inúmeras tentativas foram realizadas para desvendar a natureza do movimento browniano. Experimentos de laboratório indicavam uma dependência

¹Tradução em português: Uma breve descrição de observações microscópicas efetuadas nos meses de Junho, Julho e Agosto de 1827 sobre partículas contidas no pólen de plantas.

entre a intensidade do movimento das partículas, o tamanho destas, a viscosidade do meio, e também a temperatura da solução na qual a partícula estava imersa. A concepção moderna de que o "zigue-zague" das partículas brownianas seria devido às colisões com as moléculas do fluido foi introduzida somente a partir de 1860. Uma primeira descrição matemática sobre o movimento browniano foi feita em 1880 por Thorvald N. Thiele em um artigo sobre o método dos mínimos quadrados. De forma independente, Louis Bachelier, em 1900, defendeu sua tese de doutorado intitulada "Teorias das especulações" sob a orientação do matemático Henri Poincaré na qual usou pioneiramente o movimento browniano como modelo para explicar a performance de bolsas de valores [3].

Em 1905, além dos artigos sobre a teoria da relatividade e o efeito fotoelétrico, Einstein publicou um artigo sobre o movimento browniano [4]. Ele percebeu que o movimento errático das partículas brownianas em um meio composto por moléculas poderia ser melhor descrito por meio de uma interpretação probabilística. No desenvolvimento deste trabalho, ele propõe, a partir de uma interpretação microscópica, uma nova dedução da equação macroscópica de difusão, já conhecida anteriormente, mas obtida de forma empírica. Na época a grande importância da teoria do movimento browniano de Einstein residiu no fato desta ter fortalecido a ideia atômica, que era ainda controversa no início do século XX. Simultaneamente à publicação de Einstein, Smoluchowski [5] notou que o deslocamento das partículas brownianas podia ser interpretado como resultado da colisões com as moléculas do solvente, e, através de métodos estocásticos, calculou o deslocamento médio das partículas em suspensão após muitas colisões.

O movimento browniano pode ser descrito de diversas maneiras: o tratamento difusivo de Einstein, a variante estocástica ou de força flutuante proposta por Paul Langevin [6], a abordagem via equação de Fokker-Planck [7], e finalmente, as caminhadas aleatórias. As caminhadas aleatórias foram introduzidas em um artigo de Karl Pearson publicado na revista *Nature* de 1905 onde ele propõe o seguinte problema: “a man starts from a point O and walks l yards in a straight line; he then turns through any angle whatever and walks another l yards in a second straight line. He repeats this process n times. I require the probability that after these n stretches he is at a distance between r and $r + dr$ from his starting point, O .”² [8]. Pearson estava interessado em saber como os mosquitos da malária se espalhavam; ele observou que este processo poderia ser descrito através da equação de difusão e mostrou

²Tradução em português: um homem inicia a partir de um ponto O e caminha l metros numa linha reta, ele então gira através de um ângulo qualquer, e anda mais l metros numa segunda linha reta e repete este procedimento N vezes. Eu quero a probabilidade de depois de N desses trechos ele esteja numa distância entre r e $r + \delta r$ a partir do ponto inicial O , tradução nossa.

que o deslocamento dos mosquitos partindo de uma posição inicial era proporcional à raiz quadrada do tempo e a distribuição de muitos caminhantes aleatórios iniciando da mesma origem tinha uma forma gaussiana. As caminhadas aleatórias, desde então, passaram a ter uma conexão com os trabalhos de Einstein do movimento browniano e se tornaram uma das principais ferramentas para o entendimento de processos de difusão.

Os trabalhos de Einstein e Pearson só eram capazes de descrever caminhadas em que os passos não apresentavam correlações, caracterizadas por persistência nos passos (distância entre duas sucessivas posições). Contudo, uma série de pesquisas (iniciadas na segunda metade do século XX) mostraram que esta suposição de não correlação entre os passos era insuficiente para descrever completamente os processos difusivos anômalos, caracterizadas por uma dependência não linear do deslocamento quadrático médio das partículas. As difusões anômalas passaram a ser amplamente usadas na modelagem de sistemas físicos [9], biológicos [10], dentre outros. Para descrever estes fenômenos foi necessário a introdução de novas classes de caminhadas, tais como, as caminhadas aleatórias contínuas no tempo, caminhadas de Lévy e o movimento browniano fracionário. Faremos uma introdução a estas, e posteriormente, apresentaremos algumas aplicações.

1.1 Difusão

O fenômeno de difusão consiste em um mecanismo de transferência de massa, energia ou informação [11], como por exemplo na penetração de oxigênio numa célula do corpo humano: entre as células e o meio externo existe uma diferença de concentração, e as moléculas do oxigênio tendem a se mover do local de maior concentração (meio externo) para o local de menor concentração (citoplasma). Podemos observar outro caso difusivo quando colocamos algumas gotas de corante em água: vemos que inicialmente a água muda de cor apenas numa região pequena, mas como o passar do tempo, toda a água fica colorida e homogênea, como mostrado na figura 1.1.



Figura 1.1: Gotas de corante diluídos em água; inicialmente o corante ocupa uma região pequena que se espalha formando uma mistura homogênea (Imagem retirada da referência: [12]).

Os dois exemplos citados apresentam uma característica em comum: uma diferença de concentração de uma dada substância entre diferentes regiões do espaço ou diferentes meios. Similar ao calor que flui, naturalmente, de um corpo com maior temperatura para um com menor temperatura, há uma tendência para que a difusão ocorra em um certo sentido, de uma região de maior concentração para uma de menor concentração. Embora durante intervalos de tempo pequenos, possa ocorrer uma inversão no fluxo molecular em certos pontos, é possível mostrar que, numa escala macroscópica, este fenômeno é uma manifestação da irreversibilidade temporal associada à Segunda Lei da Termodinâmica.

Uma forma de quantificar a rapidez com que o processo de difusão ocorre é definindo a densidade de corrente de partículas, denotada por \vec{J} , da seguinte forma,

$$\vec{J} = \rho(\vec{r}, t)\vec{v}, \quad (1.1)$$

em que $\rho(\vec{r}, t)$ é o número de moléculas que se difunde por unidade de volume (concentração), e \vec{v} é a velocidade com a qual esta massa de substância se difunde. \vec{J} corresponde ao número líquido de partículas que cruzam por unidade de tempo, a unidade de área perpendicular à direção de difusão.

A Lei de Fick [13] expressa uma relação entre a densidade de corrente de difusão e

a variação da concentração através do espaço,

$$\vec{J} = -D\vec{\nabla}\rho, \quad (1.2)$$

em que D é um coeficiente característico da substância, designado por coeficiente de difusão e $\vec{\nabla}\rho$ é o gradiente de concentração. O sinal negativo indica que o fluxo resultante ocorre no sentido no qual ρ decresce. A Lei de Fick é uma lei de natureza estatística, através desta é possível descrever uma parte significativa de processos de difusão.

Fisicamente, podemos pensar o seguinte: se não há fonte ou sorvedouro (respectivamente, ponto no qual a substância difusiva é criada ou destruída), e se num certo volume infinitesimal a densidade aumenta com o tempo, é porque uma certa quantidade de substância entrou através da superfície que delimita esse volume. Este fato pode ser expresso, matematicamente, através de uma equação conhecida como equação de continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0. \quad (1.3)$$

Podemos reunir a Lei de Fick (1.2) e a equação da continuidade (1.3),

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot[-D\vec{\nabla}\rho] = 0, \quad (1.4)$$

que resulta em,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho, \quad (1.5)$$

em que consideramos $D = D(r)$. A equação (1.5) é conhecida como equação de difusão, obtida aqui através da Lei de Fick que é uma lei de origem empírica (observacional), mas na próxima seção mostraremos uma forma alternativa ("microscópica") de derivá-la.

1.2 Teoria de Einstein-Smoluchowski

O trabalho de Einstein evidenciou uma conexão profunda entre processos de difusão e o movimento browniano, através de sua percepção de que o movimento errático de uma partícula, imersa em um meio composto por moléculas, que experimenta múltiplas colisões (ver figura 1.2) é mais bem descrito em termos probabilísticos. Ele propôs uma nova dedução para a equação de difusão (1.5), antecipando a relação de Chapman-Kolmogorov e as teorias modernas de cadeias markovianas [14], que iremos discutir no capítulo seguinte. O modelo unidimensional abordado por Einstein será exposto a seguir, a idéia central consistiu em supor que as partículas executam colisões independentes e direcionalmente aleatórias, sem correlações temporais de longo alcance³.

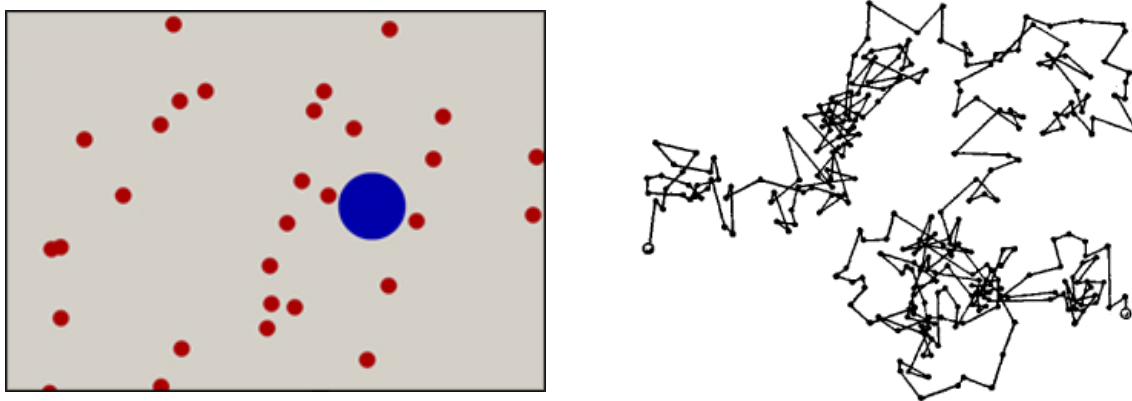


Figura 1.2: À esquerda a bolinha em azul representa a partícula em suspensão no soluto, as bolinhas em vermelho representam as moléculas da solução. À direita temos a trajetória da partícula maior que descreve um movimento errático (Imagens retiradas da referência [15]).

Seja $p(\Delta)d\Delta$ a probabilidade de uma partícula em suspensão sofrer um deslocamento entre Δ e $\Delta + d\Delta$ num intervalo de tempo τ . Essa densidade de probabilidade deve ser simétrica,

$$p(\Delta) = p(-\Delta), \quad (1.6)$$

uma vez que deve ser igualmente provável a partícula browniana efetuar um deslocamento

³Usaremos nesta seção a notação da referência [14].

(Δ) e $(-\Delta)$ e normalizada,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\Delta)d\Delta = 1, \quad (1.7)$$

visto que a partícula deve efetuar um deslocamento para algum lugar do espaço. Se $\rho(x, t)$ é o número de partículas por unidade de volume num instante t , devemos ter a seguinte relação probabilística,

$$\rho(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x + \Delta, t)p(\Delta)d\Delta. \quad (1.8)$$

Como τ e Δ devem ser macroscopicamente pequenos, podemos escrever as expansões em série de Taylor,

$$\rho(x, t + \tau) = \rho(x, t) + \frac{\partial\rho}{\partial t}\tau + \dots \quad (1.9)$$

como também,

$$\rho(x + \Delta, t) = \rho(x, t) + \frac{\partial\rho}{\partial x}\Delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\Delta^2 \dots \quad (1.10)$$

Substituindo (1.9) e (1.10) em (1.8), levando em conta as propriedades de $p(\Delta)$, e considerando apenas os termos de ordem dominantes,

$$\rho(x, t) + \frac{\partial\rho}{\partial t}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\rho(x, t) + \frac{\partial\rho}{\partial x}\Delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\Delta^2 \right] p(\Delta)d\Delta \quad (1.11)$$

obtemos a equação de difusão dada por,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}, \quad (1.12)$$

com o coeficiente de difusão,

$$D = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 p(\Delta)d\Delta. \quad (1.13)$$

Portanto, o desvio quadrático médio do deslocamento,

$$\langle \Delta^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 p(\Delta) d\Delta = 2D\tau, \quad (1.14)$$

é proporcional ao coeficiente de difusão, variando linearmente do tempo. Como o movimento das partículas são independentes, a origem das coordenadas não deve ter nenhum significado. Portanto, a função $\rho(x, t)$, devidamente normalizada,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) dx = \rho_0, \quad (1.15)$$

representa a densidade de partículas cujas posições sofreram um acréscimo x entre o instante inicial e o tempo t . A solução da equação (1.12), com a condição inicial de que todas as partículas brownianas estão inicialmente concentrada em um ponto, é uma função gaussiana,

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (1.16)$$

Com a interpretação de $\rho(x, t)$, o deslocamento quadrático médio das partículas brownianas, obtido por Einstein foi

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt. \quad (1.17)$$

Uma expressão independente para o coeficiente de difusão D pode ser obtida usando a lei de forças de Stokes e a equação dos gases ideais, e é dada por

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta a N_a}, \quad (1.18)$$

onde R é a constante dos gases, T é temperatura da solução, a o raio das partículas brownianas, η a viscosidade do meio, e N_a o número de Avogadro. Jean Baptiste Perrin, usando a teoria do movimento browniano, realizou várias experiências, a partir de 1908, com o intuito de determinar o valor do número de Avogadro, obtendo um valor de 6.82×10^{23} ⁴ moléculas em cada mol [16].

A equação (1.18) antecipou o Teorema da flutuação-dissipação, poderosa ferramenta

⁴Adotaremos a notação de ponto como separador da parte decimal.

em Física Estatística para a predição do comportamento de sistemas termodinâmicos fora do equilíbrio. Uma discussão sobre este assunto é feita na referência [17]. Combinando as equações (1.17) e (1.18), obtemos

$$\langle x^2 \rangle = 2 \frac{RT}{6\pi\eta a N_a} t. \quad (1.19)$$

Podemos ver que o deslocamento característico $\langle \sqrt{x^2} \rangle$ cresce com \sqrt{t} . Neste raciocínio é possível estabelecer uma conexão com o problema conhecido como **passeio aleatório** que será apresentado a seguir.

1.3 O passeio aleatório unidimensional

O problema mais simples de caminhada aleatória consiste na caminhada aleatória numa rede em 1 dimensão como, por exemplo, apresentado em Mark Kac [18]. Neste modelo, podemos imaginar uma partícula como um caminhante que se move ao longo de uma reta, partindo da origem. A cada intervalo de tempo τ , ela salta uma distância l para a direita com probabilidade p ou uma distância l para esquerda com probabilidade $q = 1 - p$, conforme mostrado na figura 1.3.



Figura 1.3: Partícula parte da origem e efetua passos unitários, após 5 passos está localizada no ponto $x = -1$

A formulação deste problema conduz à seguinte questão: qual a probabilidade $P_N(m)$ de que o caminhante se encontre na posição $x = ml$ depois do mesmo ter dado N passos? Sejam N_1 o número de passos que o caminhante dá para a direita e N_2 o número de passos dados para a esquerda. Sua posição após N passos será $x = ml = (N_1 - N_2)l$ e a probabilidade de uma determinada sequência de N_1 passos para direita e N_2 passos para a esquerda, é dada

por

$$(p\dots p)(q\dots q) = p^{N_1}q^{N_2}. \quad (1.20)$$

Se observamos a figura 1.3, notamos que existem diferentes formas do caminhante atingir o ponto $x = -1$, uma forma possível é mostrada na figura, no entanto, o mesmo caminhante partindo da origem poderá dar 2 passos para direita até atingir o ponto $x = 2$, em seguida dar 3 passos para esquerda até atingir $x = -1$. Portanto, diferentes sequências de passos podem conduzir a um mesmo ponto. Se após N passos o caminhante deu N_1 passos para direita e N_2 para esquerda o número de sequências possíveis será

$$\frac{N!}{N_1!N_2!}. \quad (1.21)$$

Reunindo as equações (1.20) e (1.21), temos que a probabilidade dar N_1 passos para a direita e N_2 passos para a esquerda, de num total de N passos, é dada pela distribuição binomial,

$$P_N(N_1) = \frac{N!}{N_1!N_2!}p^{N_1}q^{N_2}. \quad (1.22)$$

Como o caminhante deverá efetuar um passo ou para direita ou para esquerda, $p + q = 1$ e $N = N_1 + N_2$, essa probabilidade deverá ser normalizada,

$$\sum_{N_1=0}^N P_N(N_1) = \sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1!N_2!}p^{N_1}q^{N_2} = (p + q)^N = 1. \quad (1.23)$$

Note que a probabilidade $P_N(N_1)$ varia entre 0 e 1. Como $m = N_1 - N_2$, a probabilidade $P_N(m)$ será

$$P_N(m) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} p^{\left(\frac{N+m}{2}\right)} q^{\left(\frac{N-m}{2}\right)}. \quad (1.24)$$

A conexão com o problema de difusão é feita considerando o fato que somente uma partícula que esteja numa posição $x = (m+1)l$ ou $x = (m-1)l$ poderá no tempo $t = (N+1)\tau$

atingir a posição $x = ml$ no passo seguinte. Podemos então escrever a relação de recorrência,

$$P_{N+1} = pP_N(m-1) + qP_N(m+1). \quad (1.25)$$

No caso em que $p = q = 1/2$, e tomando o limite em que τ e l são muito pequenos, podemos escrever as representações contínuas,

$$\frac{P_{N+1} - P_N}{\tau} \sim \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.26)$$

$$\frac{P(ml-l) + P(ml+l) - 2P(ml)}{l^2} \sim \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (1.27)$$

Neste limite, podemos obter a equação de difusão,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (1.28)$$

em que o coeficiente de difusão, $D = l^2/2\tau$.

A suposição que fizemos de $p = q = 1/2$ corresponde ao caso da caminhada aleatória simétrica e pode ser associada a um movimento browniano unidimensional.

Momentos

Vimos que após N passos o caminhante estará localizado em um ponto $x = (N_1 - N_2)l$, em que l é a largura do passo, podemos considerar o caso em que $l = 1$, ou seja, os passos são unitários e constantes. Então, o valor médio da posição será

$$\langle x \rangle = \langle N_1 - N_2 \rangle \quad (1.29)$$

o valor médio $\langle x \rangle$ é também chamado de primeiro momento da variável x .

Uma vez que $N = N_1 + N_2$, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\langle x \rangle = 2\langle N_1 \rangle - N. \quad (1.30)$$

O valor quadrático da posição $\langle x^2 \rangle$ designado como segundo momento será,

$$\langle x^2 \rangle = \langle (N_1 - N_2)^2 \rangle = 4\langle N_1^2 \rangle - 2\langle N_1 \rangle N + N^2. \quad (1.31)$$

Observe que para encontrar o primeiro e segundo momento basta conhecermos $\langle N_1 \rangle$ e $\langle N_1^2 \rangle$. Usando a equação (1.22), temos

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^N N_1 P_N(N_1) = \sum_{N_1=0}^N N_1 \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} p^{N_1} q^{(N-N_1)}. \quad (1.32)$$

É fácil mostrar que

$$p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{N_1=0}^N P_N(N_1) = \langle N_1 \rangle. \quad (1.33)$$

Com essa última relação podemos chegar à seguinte expressão para o valor médio de $\langle N_1 \rangle$,

$$\langle N_1 \rangle = p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N = Np(p+q)^{N-1} \Big|_{q=1-p} = Np \quad (1.34)$$

De forma análoga, podemos encontrar uma segunda relação útil,

$$p \frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{N_1=0}^N P_N(N_1) = \langle N_1^2 \rangle \quad (1.35)$$

Portanto,

$$\langle N_1^2 \rangle = p \frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N \quad (1.36)$$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} Np(p+q)^{N-1} \quad (1.37)$$

$$= Np + N(N-1)p^2 \quad (1.38)$$

O valor médio do deslocamento será dado por

$$\langle x \rangle = 4\langle N_1^2 \rangle - 2\langle N_1 \rangle N + N^2 \quad (1.39)$$

$$= 2pN - N \quad (1.40)$$

$$= N(2p - 1) \quad (1.41)$$

E o valor médio quadrático do deslocamento:

$$\langle x^2 \rangle = 4\langle N_1^2 \rangle - 2\langle N_1 \rangle N + N^2 \quad (1.42)$$

$$= 4(Np + N(N-1)p^2) - 2N(N-1) + N^2 \quad (1.43)$$

de p e o tempo t ,

$$\langle x \rangle = t(2p - 1) \quad (1.44)$$

$$\langle x^2 \rangle = t^2(2p - 1)^2 + t4p(1 - p) \quad (1.45)$$

em que consideramos que os passos são unitários e correspondem a um instante de tempo. Quando $p = 1/2$ temos um "random walk" simétrico, e as equações se reduzem a $\langle x \rangle = 0$ e $\langle x^2 \rangle \sim t$ (movimento browniano). No limite assintótico (grandes valores de t), o segundo momento apresenta uma descontinuidade quando $p = 1/2$, nesse limite,

$$\langle x^2 \rangle \sim \begin{cases} t^2 & \text{para } p \neq \frac{1}{2} \\ t & \text{para } p = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.46)$$

Podemos ainda calcular a variância definida por

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (1.47)$$

Para a caminhada aleatória a variância assume o valor

$$\sigma^2 = t4p(p - 1). \quad (1.48)$$

Os resultados que apresentamos para uma dimensão podem ser, facilmente, generalizados para dimensões superiores. A título de ilustração, mostramos na figura 1.4 uma caminhada aleatória em 3D.

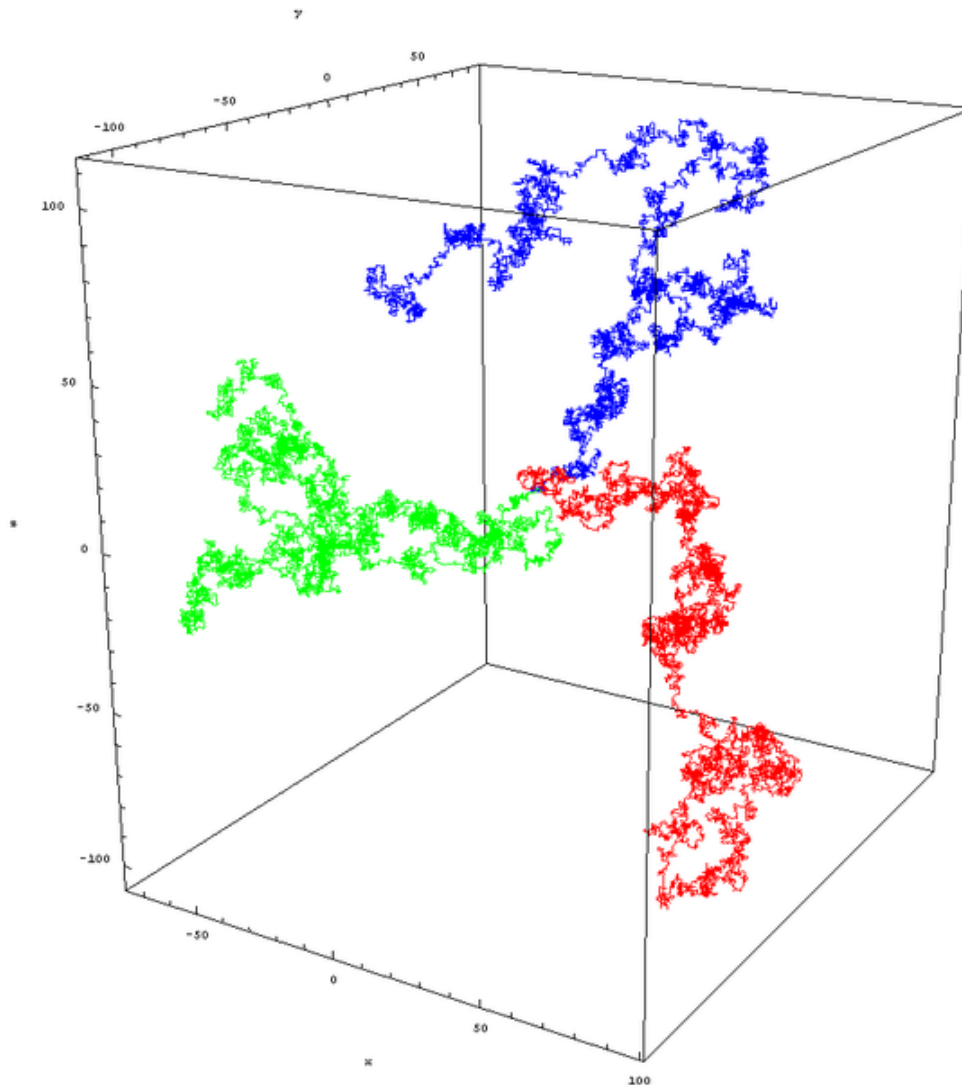


Figura 1.4: Caminhada aleatória em 3 dimensões (Figura retirada da referência [19]).

1.4 Distribuição gaussiana e distribuição de Lévy

No modelo de caminhadas aleatórias, descrito na seção anterior, é possível descrever o movimento da partícula introduzindo variáveis aleatórias, $S_1, S_2, ..$ que assumem valor $+1$ e -1 conforme o passo é dado para direita ou para esquerda. A posição do caminhante após N passos corresponde à soma destas variáveis. Pode-se mostrar que neste exemplo, no limite em que o número de passos tende a infinito, a probabilidade de encontrar a partícula em uma posição x após muitos passos, é dada pela distribuição gaussiana ⁵, já encontrada no caso da difusão anteriormente comentado,

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.49)$$

em que μ é o valor médio da variável aleatória (primeiro momento) e σ é a variância. As condições para que o deslocamento total x esteja distribuído de acordo com uma gaussiana para N suficientemente grande é que os primeiros momentos não diverjam e as variáveis sejam independentes. Este resultado é conhecido como o Teorema central do limite e é um dos mais importantes resultados no âmbito da Física Estatística [20], podendo ser interpretado, como o fato de que esta distribuição é uma espécie de atrator no espaço das distribuições, no limite em que o número de passos tende a infinito. No capítulo 2, estudaremos em mais detalhes processos estocásticos e faremos uma dedução deste teorema. A figura 1.5 ilustra algumas distribuições gaussianas para diferentes valores de μ e σ . Podemos observar que este tipo de distribuição possui características bem definida: ela é simétrica e suas caudas decaem rapidamente quando o número $N \rightarrow \infty$.

Durante muito tempo somente os processos difusivos que poderiam ser descritos usando o Teorema central do limite foram estudados (difusão normal), até a observação da necessidade de outras distribuições para a descrição de processos de difusão anômala (estudados na próxima seção), por exemplo, distribuições mais "espalhadas", que apresentam "caudas longas".

Do ponto de vista matemático, deve-se mencionar que em 1925, Paul Lévy [21]

⁵A distribuição gaussiana é também chamada como curva normal. O pioneiro no estudo desta distribuição foi o matemático francês Abraham de Moivre e outros grandes nomes também estão ligados a ela tais como, Laplace que em 1783 a utilizou para descrever a distribuição dos erros no lançamento de projéteis, e Gauss que em 1809 a empregou para analisar dados astronômicos.

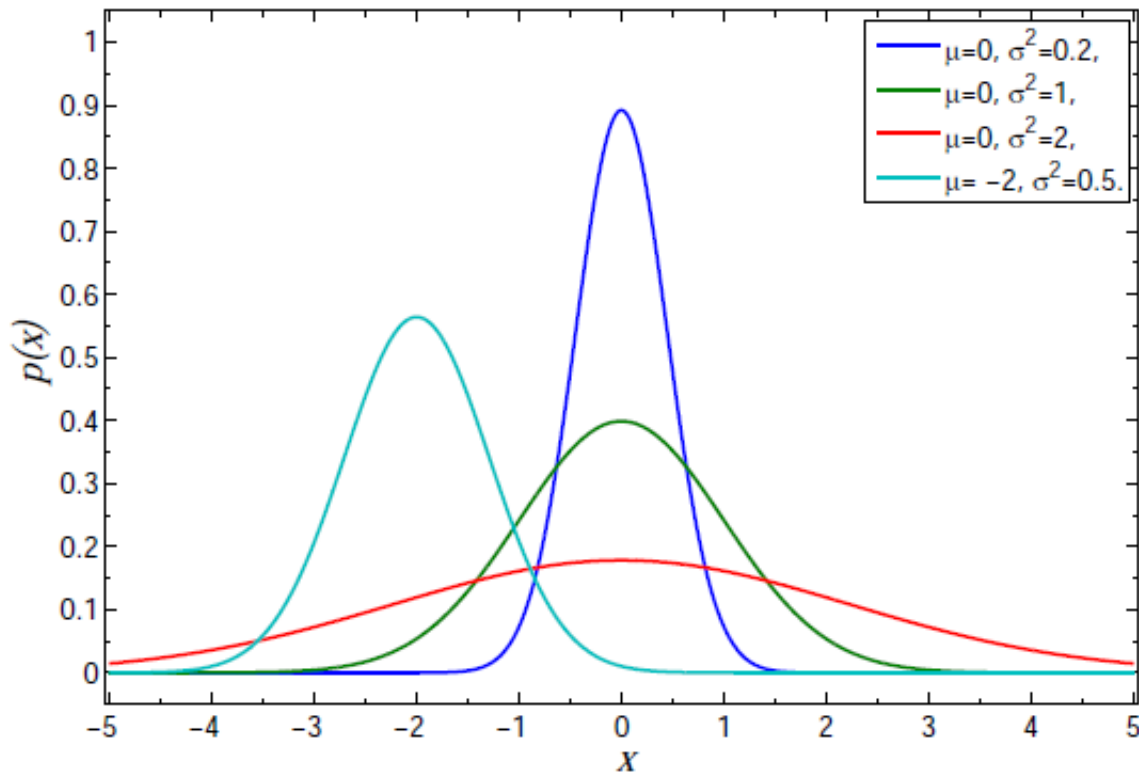


Figura 1.5: Distribuições gaussianas para diferentes valores de σ - quanto maior o σ mais os valores das posições estão dispersos.

generalizou o Teorema central do limite, desconsiderando a necessidade do segundo momento ser finito. Seus trabalhos mostraram que a distribuição gaussiana é um caso especial de uma distribuição mais geral, a distribuição estável de Lévy.

O caso mais geral, conhecido como distribuições assimétricas α -estáveis de Lévy, é dada por

$$\varphi(t) = \exp [itm - |ct|^\alpha(1 - \beta \text{sign}(t) \phi)], \quad (1.50)$$

$$\phi \sim \begin{cases} \tan[(\alpha\pi)/2], & \text{para } \alpha \neq 1 \\ -(2/\pi) \ln |t|, & \text{para } \alpha = 1. \end{cases} \quad (1.51)$$

$$P(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(itz) \varphi(t), \quad (1.52)$$

na qual $P(z)$ é a transformada de Fourier da função característica $\varphi(t)$, m representa um

"deslocamento", c a largura da distribuição e β é uma assimetria, que caracteriza o comportamento assintótico de "cauda grossa" fazendo com que eventos raros sejam mais prováveis. Na figura 1.6 temos distribuições de Lévy com diferentes parâmetros.

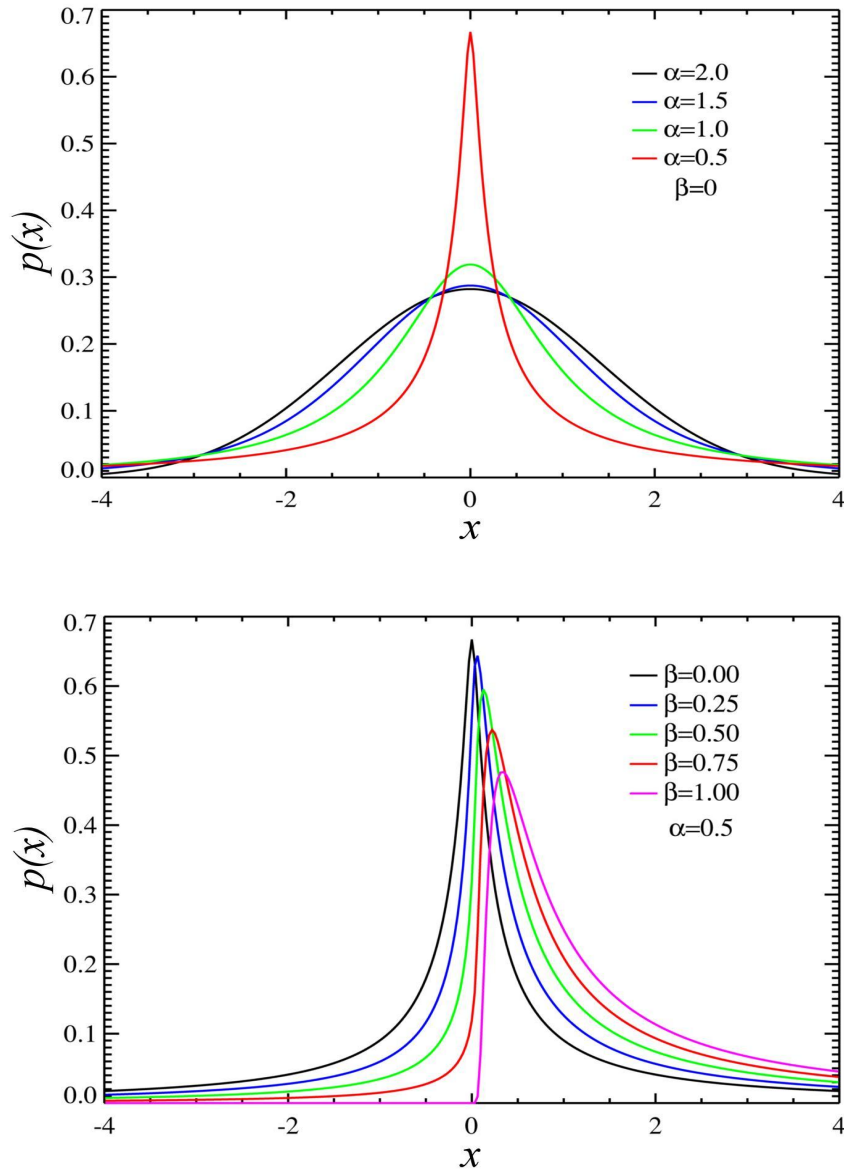


Figura 1.6: Distribuições de Lévy para diferentes parâmetros [22].

O parâmetro $\alpha \in (0, 2]$ é o mais importante no estudo de voos de Lévy e caminhadas de Lévy. Para $(0, 2)$ a função densidade de probabilidade no limite assintótico tem comportamento em lei de potência, com expoente $\mu = \alpha + 1$. Somente, em alguns casos especiais tem-se uma forma fechada para essas distribuições:

- Distribuição gaussiana ($\alpha = 2, \beta = 0$) com variância $\sigma^2 = 2c^2$.

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{4c}\right).$$

- Distribuição de Cauchy-Lorentz ($\alpha = 1, \beta = 0$)

$$f(x) = \frac{c}{\pi} \frac{1}{(x - \mu)^2 + c^2}.$$

Na figura 1.7 apresentamos os dois casos particulares das distribuições α estáveis citadas acima em diferentes escalas.

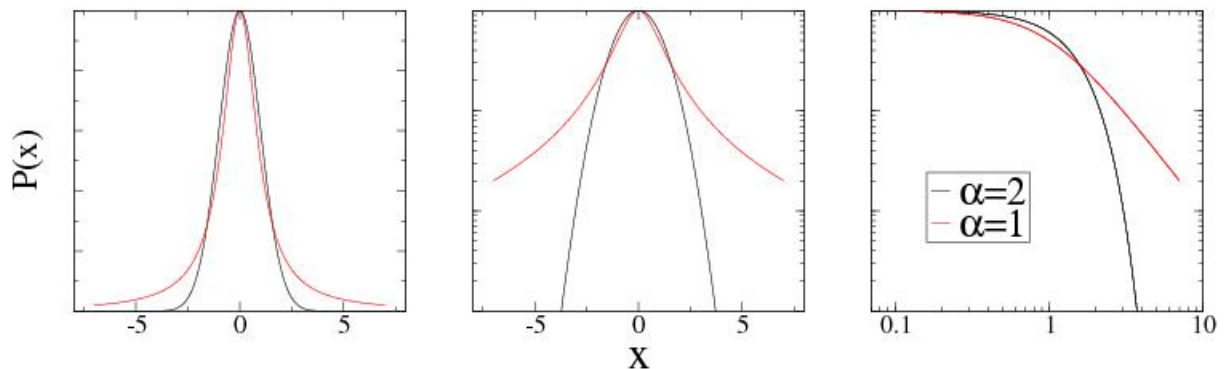


Figura 1.7: Distribuições de Cauchy ($\alpha = 1$) e gaussianas $\alpha = 2$, as três figuras forma obtidas em escala linear, semi-log e log-log, respectivamente. [22].

As distribuições α estáveis de Lévy têm sido empregadas em larga escala para descrever modelos em diversas áreas da Ciência nas quais a distribuição gaussiana falha. Estas foram usadas com sucesso para modelar eventos aleatórios como a inversão dos pólos magnéticos terrestre [23], a trajetória de um fóton em um meio turbulento [24]. Por exemplo, os batimentos do coração humano [10] satisfazem uma distribuição de Lévy, o trabalho de Peng et al. mostrou que o intervalo entre duas batidas do coração humano de pessoas saudáveis satisfaz essa distribuição, com valores de $\mu = \alpha + 1 = 2.7$. Em particular, a distribuição de Lévy tomou grande destaque na Econofísica [25], em 1987, e vem sendo cada vez mais usada para modelar séries temporais ligadas a bolsas de valores.

1.5 Difusão normal e difusão anômala

Um processo de difusão governado por uma função densidade de probabilidade gaussiana cuja variância cresce linearmente com o tempo é conhecido como difusão normal. Uma difusão que não apresenta o comportamento normal é usualmente chamada de difusão anômala, entretanto, esse fenômeno ainda é pouco compreendido. Tal fenômeno tem sido conhecido desde o tratamento de Richardson de difusão turbulenta em 1926 [26]. Um experimento simples de rotação de um fluido em um objeto circular, como mostrado na figura 1.8, ilustra a diferença entre os dois tipos de difusão.

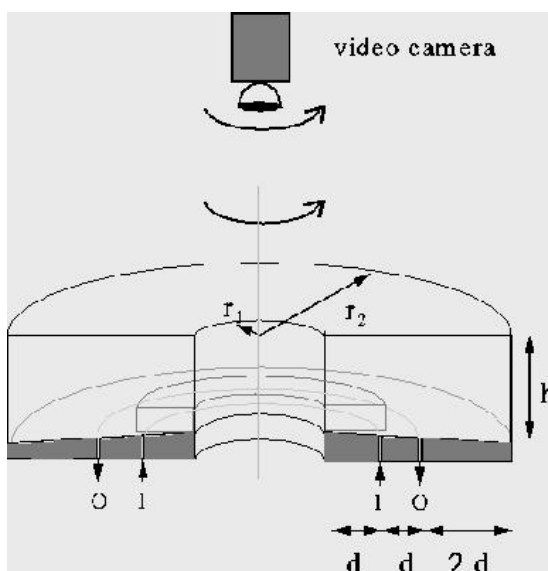


Figura 1.8: Rotação de um fluido em um anel (figura retirada da referência [27]).

Neste experimento, a água é bombeada para dentro do anel por meio do orifício I e bombeada para fora no ponto O . O anel cheio com água gira como um corpo rígido. O bombeamento do fluido gera um fluxo turbulento neste. Uma câmera posicionada em cima do anel registra a formação da turbulência e consegue monitorar as trajetórias das partículas do fluido injetado, essas trajetórias são mostradas na figura 1.9.

Vimos no movimento browniano que as partículas efetuam pequenos passos com o passar do tempo e descrevem trajetórias irregulares; entretanto tais trajetórias tornam-se estatisticamente homogêneas. Na figura 1.9 podemos observar duas características as quais não são presentes no movimento browniano: existem regiões de "armadilhas" em que as partículas ficam em uma área relativamente pequena durante intervalo de tempos longos, e há

"longos voos" de partículas que são transportadas no espaço ao longo de grandes distâncias.

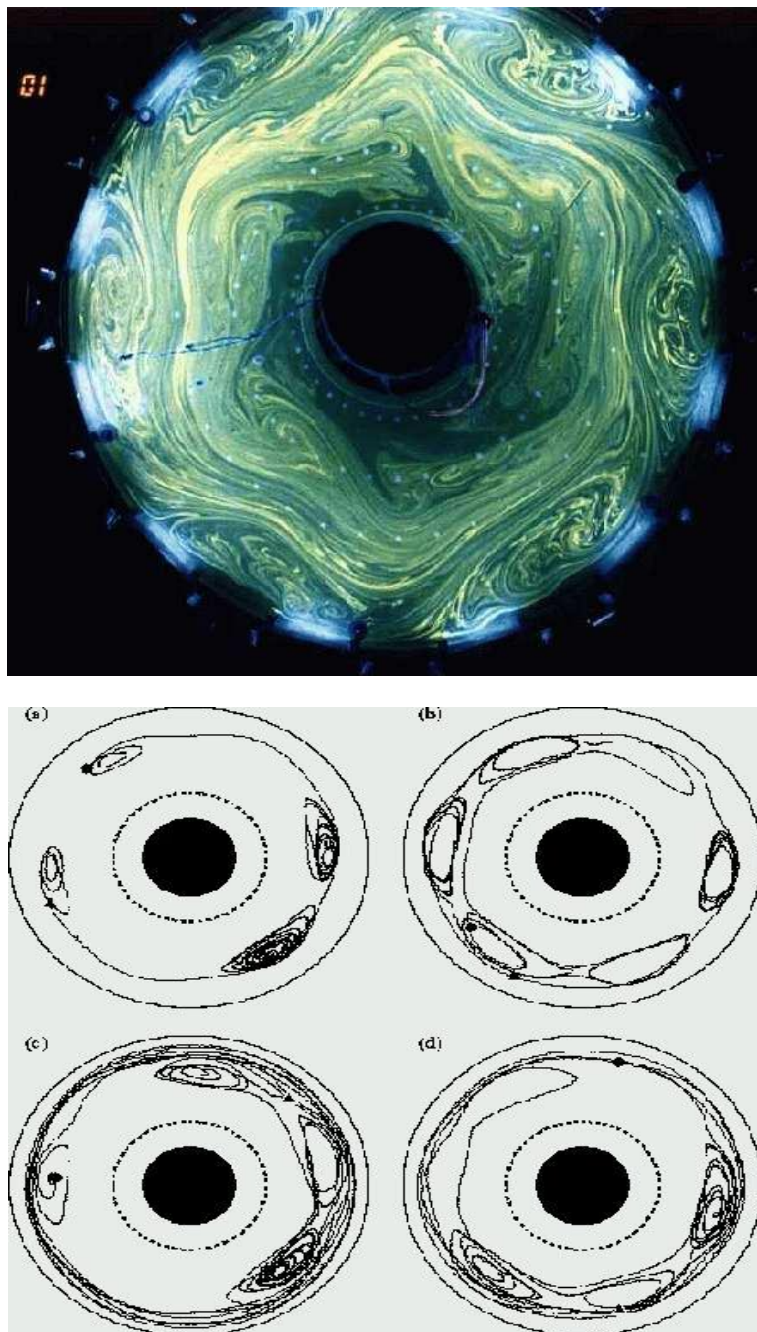


Figura 1.9: Fotos das trajetórias do fluido tiradas pela câmera posicionada na parte de cima do anel (Imagens retirada da referência [27]).

Além do experimento que citamos, existe uma grande quantidade de casos, em que o crescimento linear do deslocamento médio da partícula com o tempo, $\langle x^2 \rangle \sim t$ não é observado e a difusão ocorre de forma mais rápida ou mais lenta. Uma forma usual de caracterizar o tipo de difusão é através do expoente de Hurst (H) [28, 29] que foi introduzido por Harold

Hurst quando o mesmo estudava o fluxo de água no rio Nilo. Hurst recolheu um conjunto de dados que representavam o nível de água e analisou estes através de uma estatística conhecida como análise R/S . Neste trabalho, correlações temporais foram observadas empiricamente, de forma que, o expoente de Hurst passou a ser usado para medir correlações de longo alcance em séries temporais.

No estudo de caminhadas aleatórias este parâmetro quantifica como o deslocamento quadrático médio varia com o tempo t

$$\langle x^2 \rangle \sim t^{2H}, \quad (1.53)$$

processos em que $H > 1/2$ são chamados de superdifusivos, neste caso ocorre um crescimento superlinear no tempo do deslocamento quadrático médio. Quando $H < 1/2$ a difusão é subdifusiva, caracterizada por um crescimento sublinear. Apesar da difusão anômala [30, 31], ser definida em geral quando $H \neq 1/2$, no senso de caminhadas, tal fenômeno pode excepcionalmente acontecer no caso em que $H = 1/2$ [32], mas com função densidade de probabilidade não-gaussiana. A figura 1.11 ilustra a diferença na trajetórias das partículas em processos de difusão normal e difusão anômala.

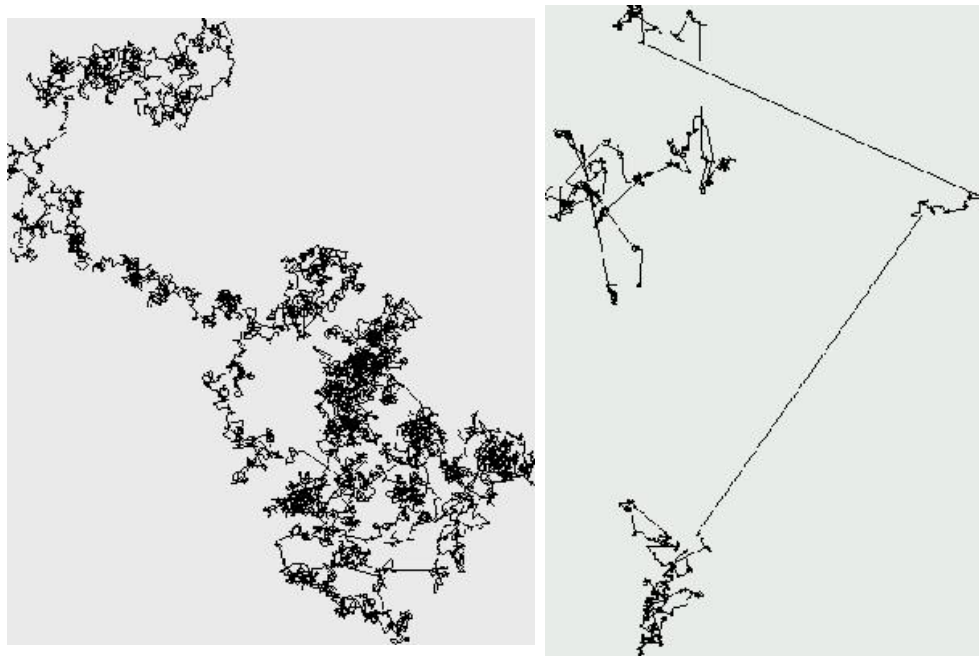


Figura 1.10: À esquerda processos de difusão normal- os passos são sempre pequenos. À direita longos "voos" são dados pela partícula e seguidos por regiões de "aprisionamento", em contraste com a difusão normal (Figura retirada da referência [27]).

Da equação (1.53), temos que se a trajetória de um número suficiente de partículas para um determinado sistema é conhecida, então construindo o gráfico $\log \langle x^2 \rangle$ versus $\log(t)$ é possível determinar o tipo de difusão que ocorre.

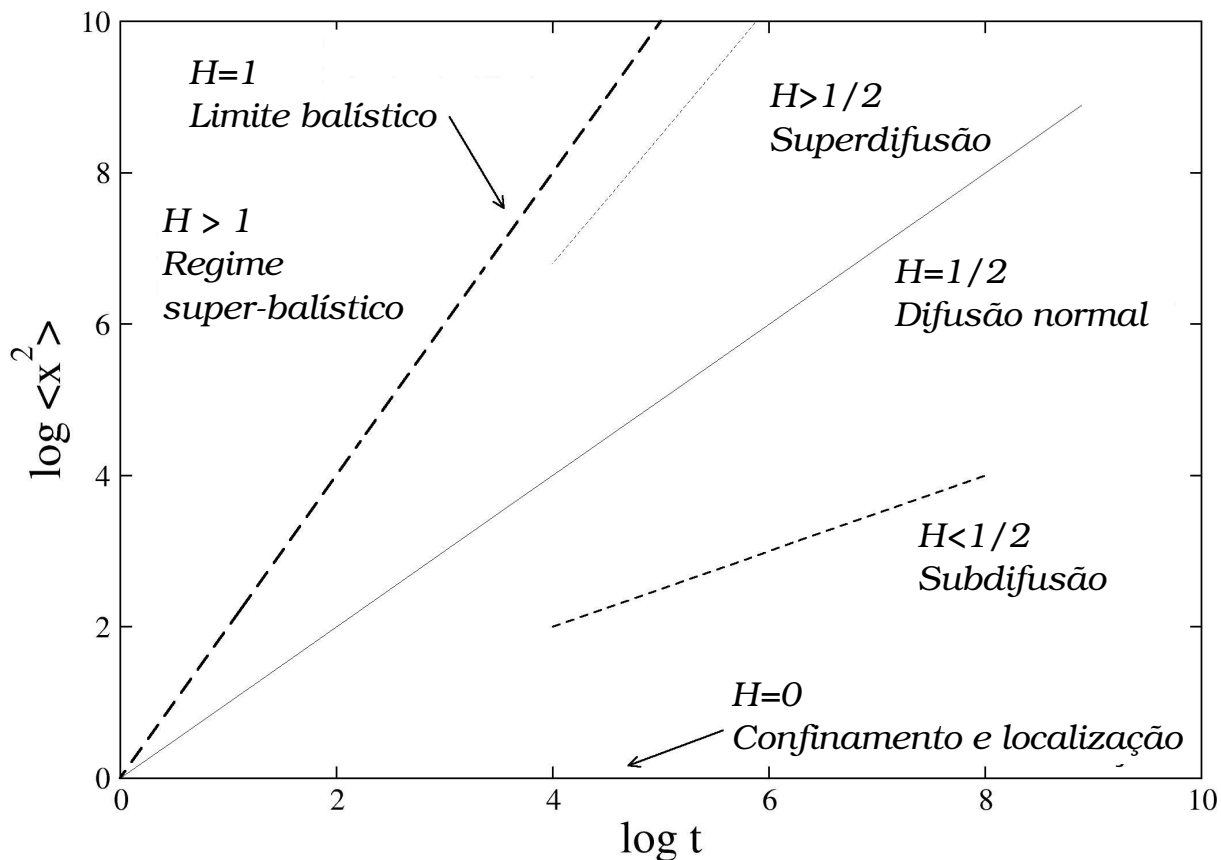


Figura 1.11: Caracterização da difusão através do expoente de Hurst [33].

Até agora apresentamos motivações experimentais para o estudo de processos anômalos, como também a sua caracterização. Contudo não discutimos o que poderá originar um processo de difusão anômala. São várias as possíveis causas: a presença de correlações espaço-temporais de longo alcance, uma distribuição de probabilidade de cada passo com variância divergente, a existência de tempos diferentes entre cada passo, ou ainda a presença de inhomogeneidades no meio difusor. Para exemplificar o segundo caso, focaremos nossa discussão na análise da soma X_N (que representa a posição de uma partícula) de N variáveis aleatórias l_i , se as distribuições dos passos $\lambda(l)$ tiverem a forma de uma lei de potência dada por

$$\lambda(l) \sim l^{-(1+\alpha)}, \quad \alpha > 0, \quad l \rightarrow \infty. \quad (1.54)$$

Assumindo um limite inferior l_0 ,

$$\langle l \rangle = \int_{l_0}^{\infty} l^{-\alpha} dl, \quad (1.55)$$

$$\langle l^2 \rangle = \int_{l_0}^{\infty} l^{(1-\alpha)} dl. \quad (1.56)$$

De forma que existe uma dependência da média e da variância com α para determinados intervalos,

- $0 < \alpha \leq 1$: $\langle l \rangle$ e $\langle l^2 \rangle$ são infinito.
- $1 < \alpha \leq 2$: $\langle l \rangle$ é finito, $\langle l^2 \rangle$ infinito.
- $\alpha > 2$: $\langle l \rangle, \langle l^2 \rangle$ são finitos.

O caso em que $\alpha > 2$ recai no Teorema central do limite. Nos outros casos, X_N converge para as distribuições α -estáveis de Lévy. Abordaremos a seguir duas situações que podem originar este fenômeno: caminhadas aleatórias com tamanhos de passos iguais, mas com um tempo de espera não constante, e caminhadas aleatórias com tamanho de passos que obedecem a uma lei de potência, mas com tempo de espera iguais.

Cada uma dessas duas situações ou sua combinação pode dar origem a caminhadas fisicamente interessantes, usualmente chamadas de caminhadas de Lévy.

1.6 Caminhadas aleatórias contínuas no tempo

No estudo de caminhadas aleatórias (random walks) nós tínhamos modelado que os passos na caminhada ocorriam em intervalos regulares no tempo, o qual denotamos por τ , após N passos o tempo total da caminhada será $t = N\tau$. Em outras palavras, o tempo era discreto. Iremos agora considerar que o tempo τ_i entre dois passos pode seguir uma distribuição contínua, como também a largura l_i dos passos. Este modelo é conhecido como modelo de caminhada aleatória com tempos contínuos (CATC), ou em inglês, (Continuous Time Random Walks - CTRW) foi proposto, em 1965, por Montroll e Weiss [34], e pode ser interpretado como uma generalização da caminhada aleatória. A difusão anômala pode surgir quando ocorre uma divergência nos momentos de τ ou l . Podemos sintetizar o modelo da seguinte forma:

- um número $n(x, t)$ de saltos é efetuado pela partícula num intervalo de tempo $(0, t)$;
- a partícula parte da origem em um tempo $t = 0$ até um tempo t_1 , e então realiza um salto de comprimento l_1 , a partícula espera nessa posição até um tempo $t_2 > t_1$;
- em um tempo t_2 ela salta até uma nova posição $l_1 + l_2$, e este processo é repetido.

Os tempos $\tau_1 = t_1 - 0, \tau_2 = t_2 - t_1, \dots$ são denominados tempo de espera. Uma esquematização do modelo é feito na figura 1.12.

Após n saltos, o deslocamento da partícula no tempo t será

$$x = \sum_{i=1}^n l_i. \quad (1.57)$$

Seja $\psi(l, \tau)$ a função densidade de probabilidade conjunta a qual representa a probabilidade de um passo de comprimento l ser dado em um tempo τ . A função distribuição de probabilidade da largura dos saltos $\lambda(l)$ será portanto,

$$\lambda(l) = \int_0^{\infty} d\tau \psi(l, \tau), \quad (1.58)$$

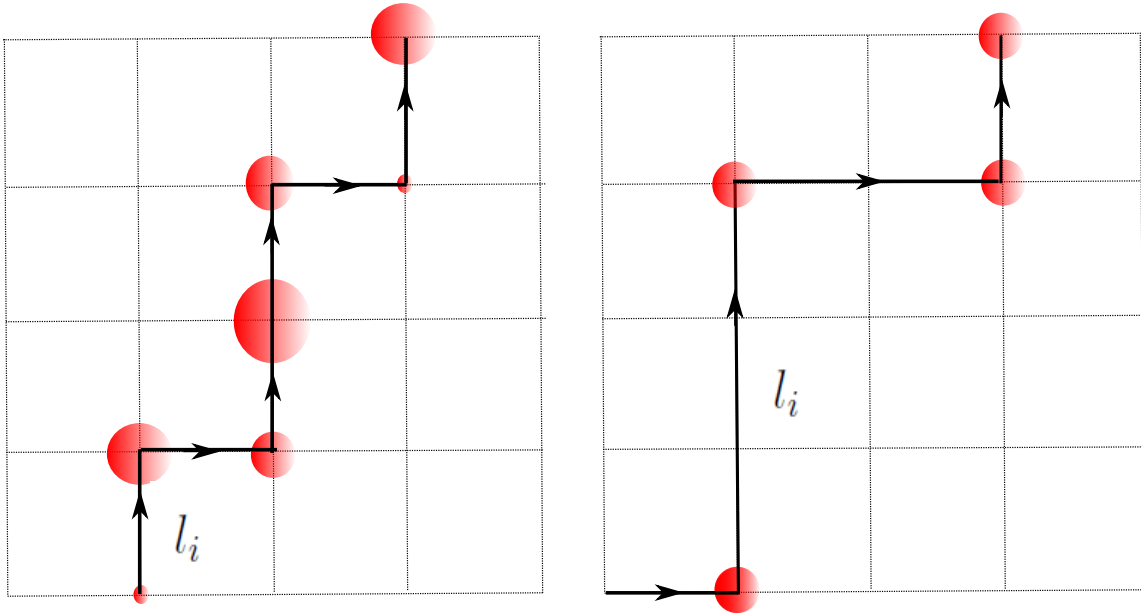


Figura 1.12: À esquerda: um processo CATC numa rede em 2D. Os tempos de espera são simbolizados por um círculo de diâmetro proporcional ao tempo, os saltos são equidistantes. À direita o diagrama do processo em 2D com os saltos com comprimentos diferentes e tempos de espera iguais.

e a função distribuição do tempo de espera,

$$\omega(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dl \psi(l, \tau) \quad (1.59)$$

no caso particular em que $\psi(l, \tau) = \lambda(x)\omega(t)$ o tempo e o espaço são desacoplados. Os tipos diferentes de CTRW podem ser categorizados através do tempo de espera característico, ou tempo de espera médio,

$$\langle T \rangle = \int_0^{\infty} dt \omega(\tau) \tau \quad (1.60)$$

e da variância da largura dos saltos,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dl \lambda(l) l^2 \quad (1.61)$$

É possível mostrar [35] que a função de distribuição de probabilidade $\Psi(x, t)$ de encontrar a partícula em um posição x em um tempo t , obedece a seguinte relação no espaço

Fourier-Laplace,

$$\Psi(k, s) = \frac{1 - \omega(\tilde{s})}{s} \left[\frac{1}{1 - \omega(\tilde{s})\hat{\lambda}(k)} \right] \quad (1.62)$$

onde $\omega(\tilde{s})$ é a transformada de Laplace de $\omega(\tau)$ e $\hat{\lambda}(k)$ é a transformada de Fourier de $\lambda(l)$. A equação (1.62) é conhecida como equação de Montroll-Weiss. Através desta equação é possível generalizar os transportes anômalos. Os seguintes casos podem ser distinguidos:

- Se a distribuição de probabilidade do tempo de espera for do tipo Poisson, $\omega(\tau) = \tau^{-1} \exp(-t/\tau)$ [36] com $T = \tau$, junto com a função distribuição da largura dos passos l como uma função gaussiana, no limite de tempos longos a função $\Psi(x, t)$ é uma gaussiana.
- Quando a probabilidade do tempo de espera τ se comporta como uma lei de potência [37, 38, 39],

$$\omega(\tau) = \tau^{-(1+\alpha)} \quad (1.63)$$

o tempo de espera médio, T é dado por:

$$\langle T \rangle = \int \omega(\tau) \tau d\tau \quad (1.64)$$

Quando ocorre uma divergência em T observamos um processo de subdifusão. Neste caso, é possível mostrar que a posição média

$$\langle x^2 \rangle \sim t^\alpha \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.65)$$

Este comportamento é sub-difusivo, uma vez que x^2 cresce sublinearmente para $0 < \alpha < 1$.

A CTRW é uma formulação mais geral dos processos anômalos e é possível através desta reproduzir a superdifusão ou a subdifusão. A figura 1.13 ilustra a diferença entre os dois tipo de regimes.

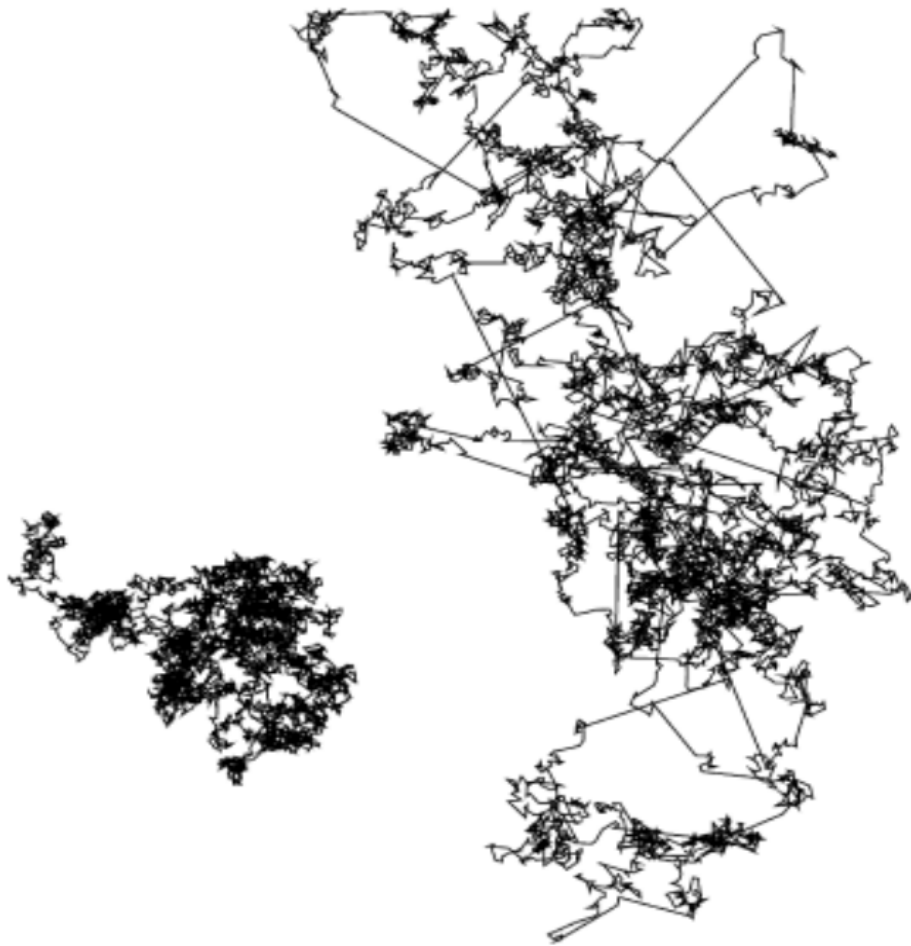


Figura 1.13: À esquerda: caminhada em 2D que apresenta regime subdifusivo. À direita o regime é superdifusivo, para um mesma quantidade de passos (Figura reproduzida da referência [41]).

1.7 Voos e caminhadas de Lévy

Uma divergência no primeiro momento da função distribuição de probabilidade do tempo de espera $\omega(\tau)$ pode ocasionar a subdifusão. Em contrapartida, quando o segundo momento da função distribuição $\lambda(l)$ dos passos apresenta divergência, correspondendo a saltos extremamente longos, um processo chamado de voo de Lévy é observado. Em um voo de Lévy os saltos possuem larguras que se distribuem com uma densidade de probabilidade

$\lambda(l)$ decaindo como uma lei de potência.

$$\lambda(l) \sim |l|^{-\mu} \tag{1.66}$$

onde o índice de Lévy $\alpha = \mu - 1$, com $0 < \alpha \leq 2$, de modo que μ varia no intervalo $1 < \mu \leq 3$. Nos casos em que $\mu = 1$ o movimento é dito balístico, $\mu > 3$, movimento browniano. Devido à divergência em sua variância de $\lambda(l)$ saltos longos podem ocorrer e trajetórias auto-similares são observadas. Este processo apresenta superdifusão para pequenos valores de μ isto é uma consequência dos saltos instantâneos. As trajetórias de um voo de Lévy possuem uma dimensão fractal $d_f = \alpha$. A figura 1.14 ilustra a função distribuição dos passos.

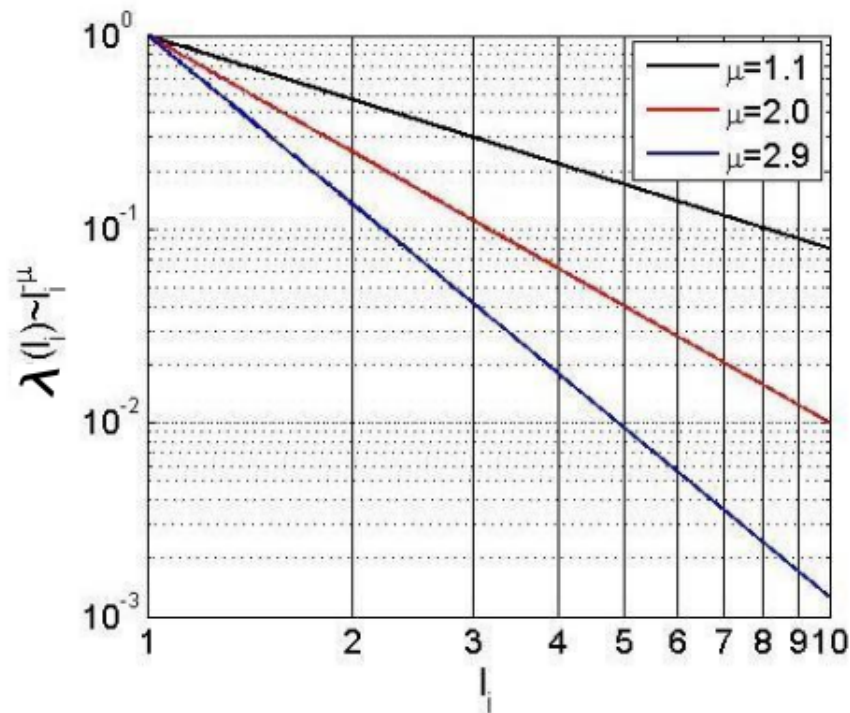


Figura 1.14: A figura ilustra a dependência de $\lambda(l_i)$ com l_i , para diferentes valores de μ , observe que a medida que μ aumenta, a probabilidade diminui [40].

Para voos de Lévy, consideramos a duração de cada passo constante. Então a velocidade e o tempo total de percurso são, respectivamente proporcionais ao comprimento do passo e ao número de passos. Assim, voos de Lévy podem ser definidos com passos instantâneos com duração nula. Conseqüentemente, o desvio quadrático médio não existe como função do tempo. Por esta razão não existem aplicações diretas dos voos de Lévy em fenômenos físicos. Todavia, em uma caminhada em que o caminhante viaja com velocidade

finita, independente do tamanho do passo, o tempo de percurso é proporcional à distância total percorrida, conduzindo uma dependência superlinear do desvio quadrático médio com o tempo, isto é, uma difusão do tipo anômala. Estas caminhadas são conhecidas como caminhadas de Lévy (CL). Em CL o tempo de cada salto é proporcional à sua largura. Isto conduz a comportamento significativamente diferentes entre Voos de Lévy e Caminhadas de Lévy: podemos caracterizar o primeiro como tendo saltos sem memória governados por caudas longas, enquanto o último apresentam correlações em cada passo. Na literatura existe uma vasta publicação sobre esse assunto [42, 43].

1.8 Movimento browniano fracionário

O movimento browniano fracionário é um processo que apresenta uma característica de auto-similaridade. Um processo estocástico é estatisticamente auto-similar com parâmetro H , $0.5 < H < 1$, se para qualquer real $a > 0$, o processo $a^H X$ tem as mesmas propriedades estatísticas de $X(t)$.

As relações para a média, variância e autocorrelação devem ser válidas:

$$\langle X(t) \rangle = \frac{\langle X(at) \rangle}{a^H} \quad (1.67)$$

$$\sigma_{X(t)}^2 = \frac{\sigma_{X(at)}^2}{a^{2H}} \quad (1.68)$$

$$R(t, s) = \frac{R_X(at, as)}{a^{2H}} \quad (1.69)$$

nas quais H é o expoente de Hurst conhecido também como parâmetro de similaridade, como estudado, ele é a medida de dependência de longos intervalos de um processo estocástico. $H = 0.5$ indica uma ausência de auto-similaridade, quanto maior H mais o processo é correlacionado.

O comportamento auto-similar em uma caminhada aleatória pode ser observado se consideramos apenas deslocamento de n passos; e mesmo assim a forma do processo é conservada.

O movimento browniano fracionário é um processo gaussiano que apresenta a auto-similaridade, e pode ser definido como:

$$B_H = Xt^H \quad (t > 0) \quad (0.5 < H < 1.0) \quad (1.70)$$

onde X é uma variável aleatória com distribuição normal de média zero e variância 1. Em particular, para esses processos nós temos:

$$\langle B(t) \rangle = \langle Xt^H \rangle = t^H \langle X \rangle = 0. \quad (1.71)$$

onde usamos o fato que $\langle X \rangle = 0$. A figura 1.15 mostra movimentos brownianos fracionários para diferentes valores de expoente de Hurst.

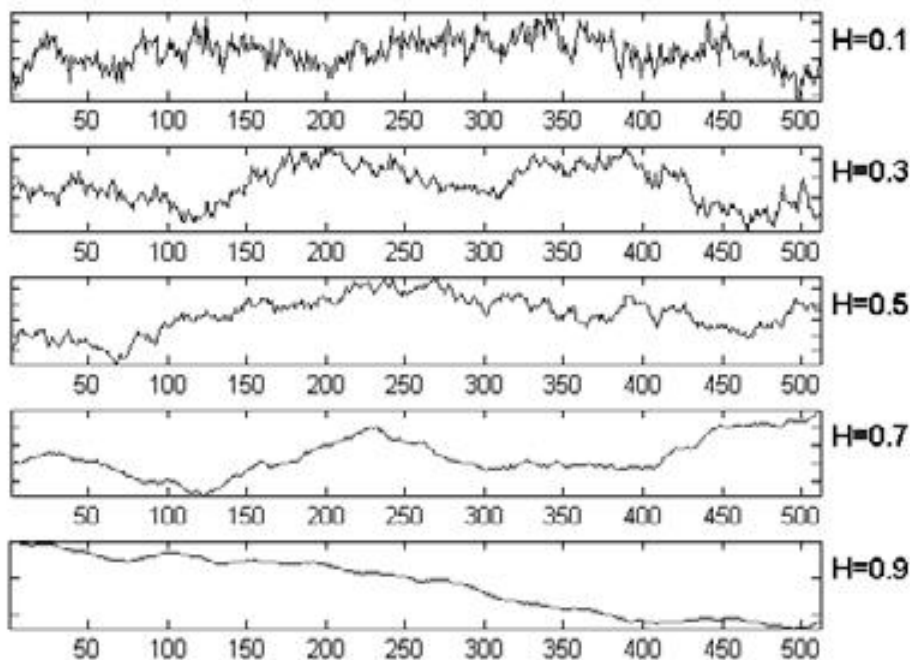


Figura 1.15: Movimentos brownianos fracionários para diferentes expoentes de Hurst (Figura retirada da referência [44]).

A variância, para esse processo, é dada por

$$\sigma^2 = \sigma(Xt^H) \sim t^{2H} \quad (1.72)$$

A densidade de probabilidade também tem uma forma gaussiana, mas com desvio

padrão t^{2H} ,

$$f_{B_H} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^{2H}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t^{2H}}\right) \quad (1.73)$$

O movimento browniano fracionário ganhou destaque na comunidade científica com os trabalhos de Mandelbrot [45], nas décadas de 1960 e 1970. Ele tinha como objetivo reproduzir correlações de longo alcance em séries temporais. Essas correlações podem ser verificadas em séries financeiras, hidrológicas, etc. O ingrediente básico do movimento browniano fracionário é que "extensões de interdependência" entre seus incrementos é infinita. Isto conduz a amostragens distantes entre si exibirem interdependência, diferente dos processos puramente aleatórios.

A função autocorrelação quantifica níveis diferentes de aleatoriedade nos passos da caminhada. A autocorrelação de B_H é dada por

$$R_H = \langle B_H(t)B_H(s) \rangle \quad (1.74)$$

Por outro lado,

$$\langle (B_H(t) - B_H(s))^2 \rangle = \langle (B_H^2(t) - B_H^2(s) - 2B_H(t)B_H(s)) \rangle = |t - s|^{2H} \quad (1.75)$$

Então,

$$\langle B_H(t)B_H(s) \rangle = \frac{1}{2}(\langle (B_H(t) - B_H(s))^2 \rangle - |t - s|^{2H}) \quad (1.76)$$

Com isso, obtemos a autocorrelação,

$$R_H(t, s) = \frac{1}{2}(t^{2H} - s^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (1.77)$$

1.9 Aplicações de teoria de caminhadas aleatórias

Agregação por difusão limitada

O movimento browniano pode ser usado para modelar regiões costeiras, montanhas, etc., que quando amplificadas apresentam a mesma impressão predominante (estrutura fractal). Os depósitos eletroquímicos constituem outro exemplo típico de movimento browniano: Uma solução de sulfato de cobre em uma célula de eletrodeposição pode dar origem a uma estrutura conhecida e com agregação por difusão limitada - DLA (ver figura 1.16), cujo modelo teórico foi proposto por Witten e Sander em 1981 [46]. A formação do DLA se dá num processo em que partículas submetidas a passeio aleatório devido ao movimento browniano aglomeram-se para formar agregados de tais partículas. Experimentos desta natureza são importantes em ciências de polímeros, ciência dos materiais, imunologia e várias outras áreas.



Figura 1.16: Uma estrutura DLA gerada por uma solução de sulfato de cobre em uma célula de eletrodeposição (Imagem reproduzida da referência [47]).

Caminhadas aleatórias com tempos contínuos

O modelo de caminhadas aleatórias com tempos contínuos foi usado por Weiss no final de 1990 para modelar um processo físico no qual uma molécula de DNA é transportada em um gel electroforese [48]. Durante este processo as moléculas de DNA são forçadas por um campo elétrico a passarem pelo gel poroso. A taxa com que as moléculas passam através do gel depende da sua mobilidade, tamanho e de sua carga. Moléculas muito grandes ficam presas no gel, levando um tempo muito longo de espera entre os deslocamentos. O trabalho de Weiss sugeriu que este processo é descrito com eficiência com CATC e neste caso o tempo médio de espera diverge $\psi \sim \tau^{-1-\gamma}$ para $1 < \gamma < 2$.

Uma outra aplicação usando CATC foi feita por Agnaldo e colaboradores [49]. No estudo de difusão anômala em células solares de TiO_2 em que eles mostraram que elétrons faziam CAT na rede cristalina.

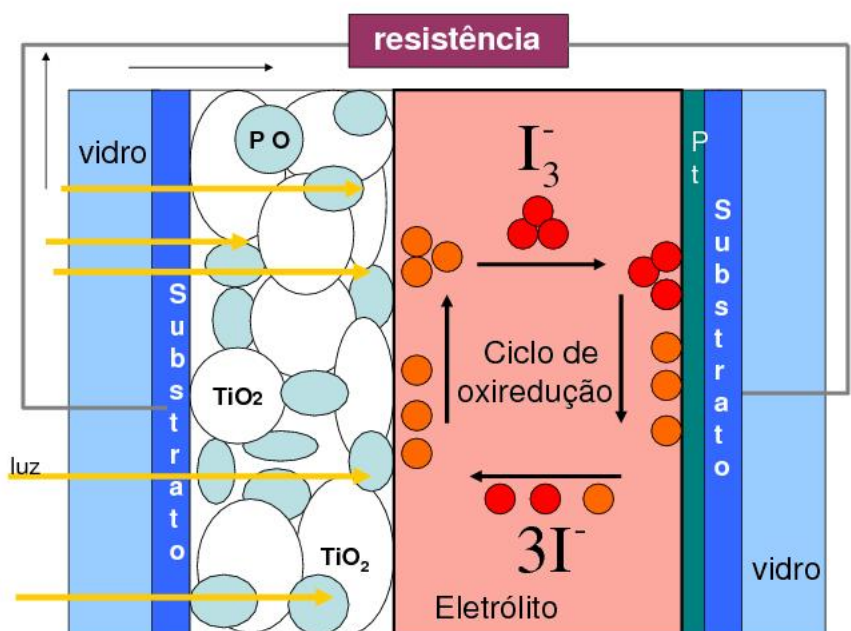


Figura 1.17: Elétrons fazem CATC ("CTRW") na rede nanocristalina [22].

Caminhadas e voos de Lévy

As caminhadas de Lévy e voo de Lévy são encontradas em inúmeras aplicações algumas aqui brevemente mencionadas:

Mecânica de fluidos: Em 1993, Henry Swinney considerou a rotação de um fluido em um recipiente na forma de uma máquina de lavar [50]. Ele mostrou que quando o recipiente girava as partículas traçavam trajetórias tipo voos de Lévy com $\alpha = 1.3$

Movimento de animais: O ramo da ecologia comportamental que estuda estratégias de busca de alimentos executada por animais em seus ambientes nativos é chamado de teoria de "foraging". Este estudo conduziu à seguinte questão: qual seria o comportamento de busca com relação ao custo-benefício obtido a partir de diferentes opções de busca? Neste caso, o custo corresponde a um gasto energético e benefício ao menor gasto energético. Resultados experimentais mostraram que uma grande classe de animais, sob condições de escassez, não se valem de distribuições gaussianas quando em busca de alimentos, mas sim de distribuições de Lévy. Uma vasta discussão sobre este assunto é feita na referência [33].

Os modelos de caminhadas de Lévy são amplamente usados para descrever processos em que existem estratégias de busca. Além dos exemplos que citamos, diversos problemas puderam ser modelados de forma análoga, como extração de petróleo em reservatórios [51], celulares procurando por antenas em campos [52]. A obtenção de qual distribuição maximiza a eficiência de busca pode trazer ganhos quando existe a necessidade de se fazer uma busca aleatória, por exemplo na quebra de um código criptografado [53]. Portanto, este modelos apresentam aplicações diretas no nosso cotidiano.

Modelo de tráfego

O movimento browniano fracionário em conjunto com o Ruído Gaussiano Fracionário (versão do Movimento Browniano Fracionário a tempo discreto) são processos mais utilizados na abordagem do tráfego auto-similar. Norros em 1997 propôs um modelo de tráfego auto-similar baseado no MBF e RGF [54]: de forma sucinta o modelo consiste em considerar um processo de chegada cumulativo $A(t)$ que representa o número de chegadas no intervalo de tempo $(0, t]$, onde $A(t) = mt + X(t)$, sendo $X(t)$ auto-similar.

O modelo acima descrito é uma boa escolha porque tem a vantagem de uma simples caracterização de uma distribuição complexa de tráfego, sendo descrito por apenas 3 parâmetros, m - taxa média de fluxo, a coeficiente de variância e H expoente de Hurst. A figura 1.18 permite uma estimativa para o expoente de Hurst, através de um gráfico da variância e do tempo t , para o modelo de tráfego.

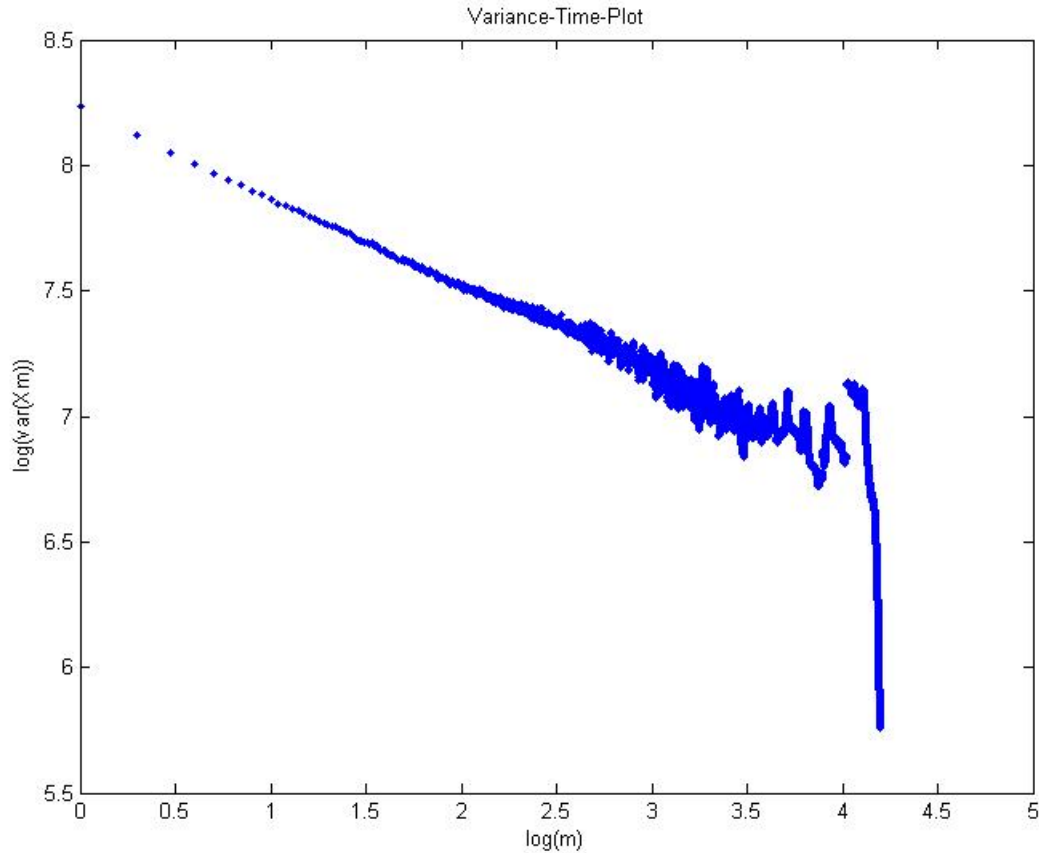


Figura 1.18: Estimativa do expoente de Hurst a partir da variância [54].

Memória em caminhadas aleatórias

2.1 Processos estocásticos com memória

Vimos no capítulo 1, que as caminhadas aleatórias são sistemas não-determinísticos, cuja descrição exige o uso de conceitos e métodos probabilísticos. Devemos usar então modelos estocásticos [55] que são representações matemáticas de processos aleatórios os quais tem como conceito chave a noção de probabilidade. Quando jogamos uma moeda, não viciada, dizemos que a probabilidade de dar cara ou coroa é igual a $1/2$. Esta noção é construída a partir da definição de probabilidade como uma frequência relativa do resultado de um experimento quando este é repetido um número infinito de vezes.

Uma variável cujo valor pode ser determinado através de um experimento é conhecida como variável aleatória. O máximo que podemos saber a respeito de uma variável aleatória é a probabilidade de que durante um experimento um resultado particular seja obtido; isto nos conduz a ideia de que a probabilidade reflete nossa parcial ignorância. Se a variável aleatória associada a um evento depender do tempo dizemos que esta é uma variável estocástica. A variável estocástica, $X(t)$, representa uma característica mensurável (estado do sistema) de interesse com um parâmetro, geralmente, o tempo t que pode assumir valores contínuos ou discretos. Quando a variável aleatória assume qualquer valor dentro de um intervalo $[a, b]$, esta variável é dita contínua. Em contrapartida, se a variável aleatória assume apenas alguns valores neste intervalo, a variável é dita discreta.

Durante um processo estocástico as variáveis usadas para descrever o sistema podem

apresentar correlações ou não entre diferentes escalas de tempo. Caminhadas não correlacionadas ou com correlações muito curtas são ditas markovianas, ou sem memória, estas são caracterizadas a partir da definição da probabilidade de transição de um estado do sistema para outro depender apenas dos estados atual e final. Apesar do sucesso das caminhadas markovianas na descrição de sistemas de interesse, a maioria dos processos estocásticos são não markovianos e apresentam memórias de longo alcance. A importância do estudo de processos estocásticos com memória pode ser observada pelo grande número de publicações sobre este assunto, em áreas como: econometria [56], modelagem de internet [57], estudos climáticos [58], linguística [59], ou sequenciação de DNA [60]. Neste capítulo fazemos um breve resumo dos temas acima mencionados.

2.2 Função distribuição de probabilidade

A uma variável estocástica discreta podemos associar um número $p_i \geq 0$, que representa a probabilidade de um determinado evento i , associado ao valor específico da variável, acontecer. Se a variável estocástica é contínua, podemos associar a um evento uma densidade de probabilidade $f(x)$, definida de modo que a probabilidade de um valor aleatório $X \in [-\infty, +\infty]$ ocorrer em um intervalo x e $x + dx$ é dada por $f(x)dx$. A normalização da probabilidade (soma total de valor unitário) impõe a validade da seguinte relação :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \quad (2.1)$$

Um conjunto de quantidades igualmente relevantes (e em sentido informacional equivalente à função densidade de probabilidades) é formado pelos chamados momentos, definidos de modo que o n -momento da variável aleatória X é dado por,

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx, \quad (2.2)$$

observe que para $n = 0$ retomamos a condição de normalização. Quando $n = 1$, temos o primeiro momento de x ou valor médio, $\langle x \rangle$, que denota o valor médio de X em uma grande (a rigor infinita) série de realizações. Quando $n = 2$, temos o segundo momento $\langle x^2 \rangle$, cuja obtenção nos permite caracterizar a largura da distribuição através da variância definida por

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \quad (2.3)$$

em que $(x - \langle x \rangle)$ representa um desvio da média. A variância é sempre positiva e permite estimar como os pontos estão dispersos em torno do valor médio. Também é usual definir o desvio padrão σ , como a raiz quadrada positiva da variância.

Uma forma de caracterizar a assimetria da distribuição em torno do valor médio é através da obtenção do terceiro momento $\langle x^3 \rangle$. Quando a assimetria ($\langle x^3 \rangle > 0$) é positiva a distribuição possui uma cauda mais longa à direita, quando ($\langle x^3 \rangle < 0$) a distribuição é mais estendida à esquerda, como mostrado na figura 2.1, e quando $\langle x^3 \rangle = 0$ a distribuição é

simétrica em relação ao valor médio.

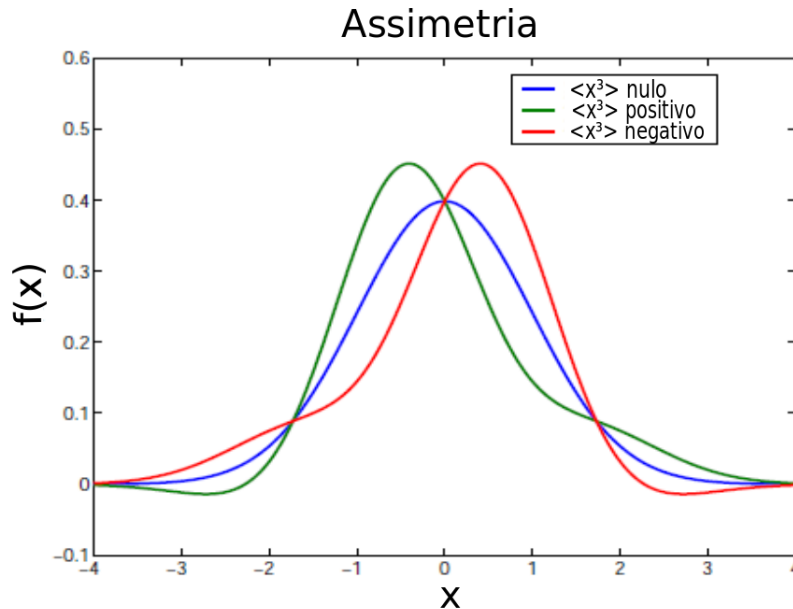


Figura 2.1: Medida da assimetria da distribuição.

E por fim, o quarto momento $\langle x^4 \rangle$ fornece uma medida de alongamento e achatamento da distribuição conhecida como curtose - $\langle x^4 \rangle > 0$ a distribuição é alongada, $\langle x^4 \rangle < 0$ a distribuição é achatada, como ilustrado na figura 2.2

Uma função útil para o estudo da função de distribuição, $f(x)$, é a sua transformada de Fourier

$$\phi(t) = \langle e^{itx} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx \quad (2.4)$$

e na teoria de probabilidade esta grandeza recebe o nome especial de função característica de $f(x)$. Uma expansão da função exponencial em série de Taylor, nos permite escrevê-la em termos dos momentos,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{(itx)}{1!} + \frac{(itx)^2}{2!} + \dots \right) f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n \langle x^n \rangle}{n!} \quad (2.5)$$

Podemos notar que uma vez conhecida a função característica (ou equivalentemente todos os

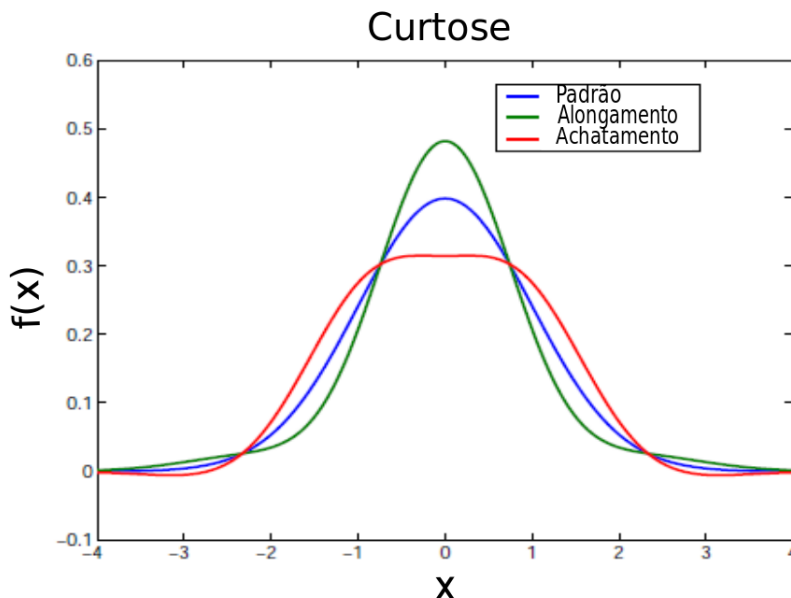


Figura 2.2: Curtose da distribuição.

momentos) é possível determinar a função densidade de probabilidade através da transformada inversa de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \phi(t) dt. \quad (2.6)$$

Uma propriedade importante é que a função característica da soma de variáveis independentes é o produto de funções características das variáveis aleatórias individuais,

$$\begin{aligned} \phi(t_1, \dots, t_n) &= \langle e^{it[x_1+x_2+\dots+x_n]} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n e^{i(t_1x_1+\dots+t_nx_n)} f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 f(x_1) e^{it_1x_1} \dots dx_n f(x_n) e^{it_nx_n} \\ &= \prod_{j=1}^n \phi_j(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Usaremos este resultado para provar na próxima seção o Teorema central do limite, já introduzido no capítulo 1.

2.3 O Teorema central do limite e o Teorema central do limite generalizado

No capítulo anterior enunciamos o Teorema central do limite o qual afirma que a soma de variáveis aleatórias idênticas e independentes tende a uma distribuição gaussiana quando os momentos das variáveis aleatórias são finitos. Uma demonstração, na sua forma mais simples, pode ser feita da seguinte forma: Seja $\{x_j\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, todas com uma mesma distribuição de probabilidade (mesmos momentos) e com segundo momento finito. Vamos definir uma segunda variável $y_j = \frac{(x_j - \langle x \rangle)}{\sigma}$ de forma que esta possua valor médio igual a zero e variância unitária. De acordo com a equação (2.5), a função característica da variável y é dada por

$$\phi(t) = \langle e^{iyt} \rangle = 1 + it \frac{\langle y \rangle}{1!} + (it)^2 \frac{\langle y^2 \rangle}{2!} + \dots \quad (2.8)$$

e no limite $t \rightarrow 0$,

$$\phi(t) \simeq 1 - \frac{t^2}{2!}, \quad (2.9)$$

onde levamos em consideração o fato do primeiro momento ser zero ($\langle y \rangle = 0$). A soma S_n normalizada das n variáveis y_j é dada por

$$S_n = \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{\sqrt{n}}, \quad (2.10)$$

e usando o resultado da equação (2.7) temos, portanto,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \prod_{j=1}^n \phi_j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \left[\phi \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right]^n \\ &\simeq \left[1 - \frac{t^2}{2n} \right]^n \rightarrow \exp \frac{-t^2}{2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde usamos a identidade $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \exp^x$.

Uma vez determinada a função característica $\phi(t)$, podemos substituí-la na equação (2.6)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt. \quad (2.12)$$

Resolvendo a integral da expressão acima obtemos,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.13)$$

onde σ é a variância que deve ser finita. Pode-se mostrar que este teorema ainda vale em condições menos restritivas, tais como momentos diferentes (desde que finitos) e correlações entre as variáveis (desde que suficientemente reduzidas). Uma questão correlata, está associada ao conceito de estabilidade de uma distribuição, isto é, quando é que a densidade de probabilidade $f_N(X)$ para a soma dos N passos possui a mesma distribuição de $f(x)$ dos passos iniciais a menos um fator de escala? Uma resposta imediata seria a função gaussiana, uma vez que o produto de várias funções características de densidades de probabilidade é outra gaussiana. Contudo, Augustin Cauchy, em 1853, percebeu que existia outra solução para o problema da adição de N variáveis aleatórias, a assim denominada distribuição de Cauchy. Conforme estudado na seção 1.4, um resultado ainda mais geral, foi obtido por Paul Lévy com a demonstração da existência de outras distribuições estáveis, que se comportam como atratores no espaço das distribuições, mesmo sem a restrição de momentos finitos. Tal generalização proposta por Lévy foi baseada no fato do produto de duas exponenciais alongadas ($\exp(-|t|^{-\alpha})$) também ser uma exponencial alongada com o mesmo α .

2.4 Processos markovianos e não-markovianos

Um processo estocástico pode ser classificado de inúmeras formas, como por exemplo, quanto à continuidade (a variável aleatória é discreta ou contínua), quanto à sua distribuição (a distribuição de probabilidade é gaussiana ou não-gaussiana). Uma outra forma de classificação que tem se tornado extremamente útil é baseada no conceito de memória, ou seja, correlação temporal. O conceito chave nesta abordagem é o de densidade de probabilidade condicional.

Imagine uma situação em que $P_1(x_1, t_1)$ seja a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula browniana em torno de x_1 no tempo t_1 e $P_2(x_2, t_2)$ seja a densidade de probabilidade de encontrar a partícula browniana em torno de x_2 em um tempo t_2 . Como a partícula parte de um determinado ponto do espaço, a função $P_1(x_1, t_1)$ deve obedecer a seguinte condição de normalização,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_1(x_1, t_1) dx_1 = 1. \quad (2.14)$$

Se estivermos interessados na densidade de probabilidade de que a partícula esteja localizada em torno x_1 no tempo t_1 e em um tempo t_2 esteja localizada em torno de x_2 precisamos conhecer a probabilidade conjunta $P_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ que representa esta possibilidade. Podemos generalizar esta definição,

$$P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n), \quad (2.15)$$

como sendo a probabilidade da variável aleatória assumir um valor x_1 em um tempo t_1 , x_2 em um tempo t_2 e x_n em um tempo t_n . Podemos definir também probabilidades marginais, somando sobre algumas variáveis, como por exemplo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x_1, t_1; x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_n = P_{n-1}(x_1, t_1; x_2, t_2, \dots, x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (2.16)$$

Poderíamos questionar qual a probabilidade de encontrar a partícula em torno do ponto x_2 em um tempo t_2 se sabemos que a mesma estava em um ponto x_1 no tempo t_1 ? A resposta a essa pergunta é dada através do conhecimento da probabilidade condicional. Uma definição formal desta é dada da seguinte forma

$$P_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = P_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2) P_1(x_1, t_1) \quad (2.17)$$

onde $P_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2)$ representa a probabilidade da variável aleatória assumir um valor x_2 em um tempo t_2 dado que esta assumiu um valor x_1 em um tempo t_1 . Podemos generalizar

a equação (2.17),

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = P_{n-1|1}(x_1, t_1; x_2, t_2, \dots, |x_n, t_n)P_{n-1}(x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (2.18)$$

Uma relação entre a densidade de probabilidade em diferentes tempos é obtida combinando as equações (2.16) e (2.18),

$$P_2(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(x_1, t_1)P_{1|1}(x_1, t_1|x_2, t_2)dx_1 \quad (2.19)$$

Em um modelo mais simples de processo aleatório, onde não existe nenhuma memória do passado, como o lançamento de uma moeda não viciada, por exemplo, a equação 2.18 toma uma forma bem simples.

$$P_{n-1|1}(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_{n-1}, t_{n-1}|x_n, t_n) = P_n(x_n, t_n) \quad (2.20)$$

Este tipo de processo definido em termos da probabilidade condicional, é completamente aleatório, no sentido em que não há memória. No exemplo citado, o lançamento da moeda, a variável aleatória é discreta. Entretanto, quando a variável aleatória é contínua dificilmente um processo físico possui essa característica de aleatoriedade, contudo, podemos pensar mesmo neste caso, em um processo estocástico que apresente um tipo de memória extremamente curta de forma que o valor da variável aleatória no futuro dependa apenas do valor desta no tempo presente e de sua vizinhança imediata. Estes tipos de processos são chamados de processos de Markov.

Os processos markovianos são definidos a partir da probabilidade para (x_n, t_n) dado $(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_{n-1}, t_{n-1})$, depender somente de $(x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n)$, onde t_n é o tempo futuro e t_{n-1} é o tempo passado, neste caso temos,

$$P_{n-1|1}(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_{n-1}, t_{n-1}|x_n, t_n) = P_{1|1}(x_{n-1}, t_{n-1}|x_n, t_n) \quad (2.21)$$

em que a densidade de probabilidade condicional $P_{1|1}(x_{n-1}, t_{n-1}|x_n, t_n)$ é chamada de probabilidade de transição. Os processos markovianos são aqueles que obedecem a equação (2.21), a partir desta é possível criar uma cadeia hierárquica, por exemplo, para $n = 3$, temos que a densidade de probabilidade é dada por

$$\begin{aligned}
 P_3(x_1, t_1, x_2, t_2, x_3, t_3) &= P_2(x_1, t_1, x_2, t_2)P_{2|1}(x_2, t_2|x_3, t_3) \\
 &= P_1(x_1, t_1)P_{1|1}(x_1, t_1|x_2, t_2)P_{1|1}(x_2, t_2|x_3, t_3) \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

$P_{n-1|n}$ são chamados de probabilidade de transição. Se integrarmos sobre x_2 , obtemos

$$P(x_1, t_1|x_3, t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{1|1}(x_1, t_1|x_2, t_2)P_{1|1}(x_2, t_2|x_3, t_3)dx_2 \quad (2.23)$$

onde $t_1 < t_2 < t_3$. A equação (2.23) conhecida como equação de Chapman-Kolmogorov relaciona a probabilidade de transição de dois passos consecutivos, observe que esta é um produto de passos individuais, de $t_1 \rightarrow t_2$ e $t_2 \rightarrow t_3$, mostrando que os passos são independentes. Em processos não-markovianos ou com memória de longo alcance, esta independência nos passos não é observada.

2.5 Cadeias de Markov

Uma cadeia de Markov é um tipo simples de processo markoviano, que gera, no caso discreto exemplificado aqui, uma sequência de possíveis estados conectados por probabilidades de transições entre eles. Neste caso, a integral da equação 2.19 se transforma em um somatório,

$$P(n, s + 1) = \sum_{m=1}^M P(m, s)P_{1|1}(m, s|n, s + 1), \quad (2.24)$$

onde $P(m, s)$ representa o estado m em um tempo s e $P(n, s + 1)$ representa um estado n em um tempo $s + 1$. A probabilidade do sistema está inicialmente em um estado m e ir para um estado n é dado por

$$P(n) = \sum_{k=1}^M P(m, k)P(k, n) \quad (2.25)$$

onde M é o número de estados possíveis. Para entender como este processo funciona iremos ilustrar a seguir um exemplo. Em sociologia é comum classificações de indivíduos a partir da sua renda. Se um indivíduo possui uma renda baixa este é dito estar em um estado 1, um indivíduo com renda média está em um estado 2, e um indivíduo numa classe alta está em um estado 3, etc.. (ver diagrama da figura 2.3).

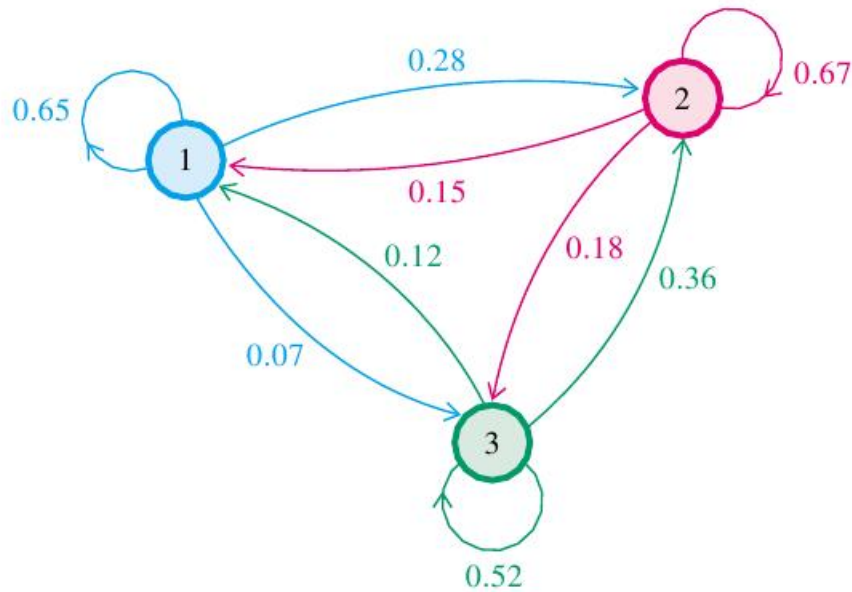


Figura 2.3: Diagramas de transição dos estados com respectivas probabilidades.

Vamos usar a equação (2.25) para obter a probabilidade de um indivíduo pertencer a uma classe baixa (estado 1) e seus netos tornarem-se de uma classe alta (estado 3), temos

$$P(n) = P(1, 1)P(1, 3) + P(1, 2)P(2, 3) + P(1, 3)P(3, 3) \simeq 0.13 \quad (2.26)$$

Observe que neste modelo as probabilidades de transições para um estado só dependem do seu estado antecessor. Podemos sofisticar esse modelo considerando o fato da probabilidade do filho transitar de uma classe para outra depender da classe do avó. Neste caso a memória passa a ser curta, mas maior que a situação anterior. Um processo com mais memória, caracterizado pelo fato da probabilidade de transição de um estado para outro dependa dos r estados imediatamente anteriores, gera uma cadeia de Markov de ordem r ,

definida matematicamente por,

$$P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1} | x_n) = P(x_{n-r} | x_n) \quad \text{para} \quad n > r. \quad (2.27)$$

Como aplicação relevante, vale mencionar um artigo de 1948, "Uma teoria matemática da comunicação"[61], onde Claude Shannon propôs o uso de cadeia de Markov para criar um modelo estatístico de sequência de letras em um trecho de um texto em inglês; este trabalho foi pioneiro no campo da teoria da informação e revolucionou a indústria de telecomunicações, lançando as bases para a era da informação. As cadeias de Markov são hoje amplamente usadas - no reconhecimento de fala, reconhecimento de escrita, recuperação de informação, compressão de dados e filtragem de spam, como também são muito usadas na Física Estatística Computacional através do uso do método de Monte Carlo.

2.6 Cadeias de Markov homogêneas contínuas no tempo

Seja τ_i uma variável estocástica que representa o tempo com que o sistema permanece em um estado E_i . Desde que a influência da trajetória do passado no processo em seu futuro seja completamente especificada através do seu estado atual (processo markoviano), nos conduz à conclusão de que o tempo de permanência depende apenas do estado. Podemos expressar este resultado matematicamente,

$$P(\tau_i > s | \tau_i > s + t) = h(t) \quad (2.28)$$

onde $P(\tau_i > s | \tau_i > s + t)$ representa a probabilidade do tempo de permanência no estado E_i seja maior que $s + t$ dado que no estado anterior o tempo de permanência tenha sido s e $h(t)$ é uma função apenas do tempo de espera t . A equação acima pode ser reescrita,

$$P(\tau_i > s | \tau_i > s + t) = \frac{P(\tau_i > s, \tau_i > s + t)}{P(\tau_i > s)} = \frac{P(\tau_i > s + t)}{P(\tau_i > s)} \quad (2.29)$$

usamos o fato que $\tau_i > s + t$ implica em $\tau_i > s$. Reunindo as equações (2.28) e (2.29), obtemos

a relação,

$$P(\tau_i > s + t) = P(\tau_i > s)h(t) \quad (2.30)$$

fixando $s = 0$ e notando que $P(\tau_i > 0) = 1$, obtemos,

$$h(t) = P(\tau_i > t) \quad (2.31)$$

Substituindo este resultado na equação (2.28), obtemos,

$$P(\tau_i > s + t) = P(\tau_i > s)P(\tau_i > t). \quad (2.32)$$

para $s, t \geq 0$. É possível mostrar que a única função que satisfaz esta condição é a função exponencial, de modo que a função distribuição de probabilidade deve ser,

$$f_{\tau_i}(t) = f_{\tau_i(0)} \exp^{-\tau_i(0)t} \quad \text{para} \quad t \geq 0, \quad (2.33)$$

esta distribuição não possui memória. Para entender essa propriedade, iremos imaginar que estamos em uma parada a espera de um ônibus. Assumir que o intervalo de tempo entre duas passagens de ônibus tem uma distribuição exponencial, com uma média de 20 minutos. Se esperamos 25 minutos, em média, vamos ter mais 20 minutos para a passagem de um novo ônibus, de forma que, o tempo que tínhamos esperado não tem qualquer efeito na estimativa.

2.7 Memória de longo-alcance

A extensão da teoria de caminhadas aleatórias é possível quando incorporamos as funções distribuições de probabilidade englobadas pelo Teorema central do limite generalizado e a Memória. Na seção 1.9, quando introduzimos o modelo do movimento browniano fracionário, estávamos diante de um processo que poderia apresentar persistência e antipersistência, ou seja, a tendência de repetirmos um procedimento ou agirmos contrariamente, respectivamente. Correlações de persistência e antipersistência podem ser coletivamente chamadas de memória de longo alcance. Uma forma de caracterizar as correlações é através do

conhecimento da função autocorrelação. Num processo estocástico, $X = \{X_t : t = 1, 2, \dots\}$, com média μ e variância σ^2 , esta grandeza é definida por

$$r(t) = \langle X(t)X(t+s) \rangle. \quad (2.34)$$

Tal função fornece uma medida da dependência linear entre os valores da variável $X(t)$ em diferentes escalas de tempo; a sua transformada de fourier, $r(k)$, no limite em que $k \rightarrow \infty$, escala com k da seguinte forma,

$$r(k) \sim k^{2H-1} \quad (2.35)$$

onde H é o expoente de Hurst. Na maioria dos sistemas correlacionados, podemos inferir que quando $H < 1/2$ o processo é dito antipersistente, quando $H > 1/2$ o processo é dito persistente e, desta forma este expoente pode ser interpretado como uma medida de persistência da correlação. Para $H = 1/2$ o processo é dito sem memória ou com memória de curto alcance. Um caso exemplar em que foram observadas correlações de persistência foi o experimento de Hurst (mencionado no capítulo 1), Hurst obteve o valor $H \simeq 0.74$. Para um rede de tráfego real, é frequentemente encontrado que $0.7 \leq H \leq 0.9$.

2.8 A Equação Mestra

A equação que governa a evolução temporal dos processos estocásticos markovianos é conhecida como equação mestra [62]. Para derivar esta equação iremos retornar à equação (2.19), e considerar que as probabilidades de que a variável aleatória em um determinado instante t deriva um valor x_I e após um tempo $t + \Delta t$ assumo um valor x_F .

$$P(x_F, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x_k, t_k) P(x_k, t_k | x_F, t + \Delta t) dx_k. \quad (2.36)$$

Expandindo $P(x_F, t + \Delta t)$ e $P(x_k, t | x_F, t + \Delta t)$ (considerando os termos de primeira

ordem) e substituindo na equação (2.36), obtemos a Equação Mestra,

$$\frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = \int [P(x_k, t_k)\omega_{t_k}(x_k \rightarrow x_F) - P(x_k, t_k)\omega_{t_k}(x_F \rightarrow x_k)] dx_k, \quad (2.37)$$

onde ω representa uma probabilidade de transição. Uma forma discreta desta equação pode ser obtida de forma intuitiva se consideramos $P(n, t)$ como probabilidade de encontrar um sistema no estado n , num determinado instante de tempo t . Assim, podemos escrever $P(n, t)$ como sendo,

$$\frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = T_{dentro} - T_{fora} \quad (2.38)$$

onde T_{dentro} representa uma taxa de variação de probabilidade com que o estado n está sendo introduzido, isto pode ser expresso da seguinte forma

$$T_{dentro} = \sum_m P(m, t)\omega(m \rightarrow n) \quad (2.39)$$

com $\omega(m \rightarrow n)$ interpretada como a probabilidade, na unidade de tempo, de que o sistema salte de um estado m para o estado n . De forma análoga,

$$T_{fora} = \sum_m P(n, t)\omega(n \rightarrow m) \quad (2.40)$$

Através da combinação das equações (2.39) e (2.40) podemos escrever a equação mestra da seguinte forma

$$\frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = \sum_m [P(m, t)\omega(m \rightarrow n) - P(n, t)\omega(n \rightarrow m)]. \quad (2.41)$$

A dificuldade, portanto, reside em obter a probabilidade de transição de um estado para outro. Em estados estacionários $P(n, t) = P(n)$, e uma condição suficiente para o equilíbrio é dada por

$$P(m)\omega(m \rightarrow n) = P(n)\omega(n \rightarrow m). \quad (2.42)$$

A interpretação deste resultado é que no equilíbrio devemos ter o mesmo número de transições de n para m ou na direção contrária. A equação (2.42) é conhecida como condição de balanceamento detalhado. Nesse caso, a probabilidade $P(n)$ além de ser uma probabilidade estacionária é também a probabilidade de equilíbrio termodinâmico. A condição de balanceamento detalhado é equivalente à reversibilidade microscópica. A probabilidade da transição de $m \rightarrow n$ durante um intervalo de tempo Δt deve ser igual à probabilidade de transição de $n \rightarrow m$ durante um intervalo de tempo Δt caso a equação (2.42) seja satisfeita.

Na literatura ocasionalmente encontramos uma equação conhecida como equação mestra com memória,

$$\frac{\partial P(i, t; i_1, t_1)}{\partial t} = \int_{t_1}^t dt' \sum_{i=1} [\omega_{i,i'}(t-t')P(i', t' | i_1 t_1) - \omega_{i',i}(t-t')P(i_1 t_1 | i', t')]. \quad (2.43)$$

Esta equação foi proposta com o objetivo de descrever a evolução da probabilidade quando os processos são não markovianos. Contudo, ela não garante que o processo é não-markoviano, como foi visto, se ω tiver uma dependência exponencial, o sistema não apresenta correlações de longo alcance.

2.9 A Equação de Fokker-Planck

A equação mestra obtida na seção anterior é uma equação bastante geral. É válida para todo processo markoviano. A partir dela, podemos obter uma equação no nível mesoscópico, particularmente apropriada para processos difusivos: a equação de Fokker-Planck (FP). Uma derivação da equação de Fokker-Planck (não feita aqui) pode ser obtida a partir da equação de Chapman-Kolmogorov e, de forma sucinta, através das suposições de que o processo é markoviano, homogêneo e que as probabilidades de transição entre estados são contínuas e diferenciáveis. A forma geral desta equação é dada por

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [D^1(x)P] + \frac{\partial^2}{\partial^2 x} [D^2(x)P] \quad (2.44)$$

onde D^1 é conhecido como coeficiente de arraste e $D^2(x)$ é o coeficiente de difusão que deve

ser sempre positivo. Quando $D^1 = 0$ retomamos a equação de difusão obtida através da Lei de Fick e portanto, podemos concluir que a equação de difusão é um caso particular da equação de Fokker-Planck. Interpretando a probabilidade como um fluido que escoar com a condição de normalização (conservação); isto pode ser expresso através de uma equação de continuidade:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} J = 0. \quad (2.45)$$

onde $J = D^1(x)P - \frac{\partial}{\partial x} D^2 P$, J seria uma espécie de corrente de probabilidade, com a condição de que $\int P dx = 1$. Existem diferentes formas para a equação de FP, equações de FP homogêneas e não homogêneas, equações de FP lineares e não lineares [63]. Uma forma particular para a equação de Fokker-Planck que leva em consideração os efeitos de memória é dada por,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \int_{-\infty}^t \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^1(x, t - \tau) + \frac{\partial^2}{\partial^2 x} D^2(x, t - \tau) \right] P(x, \tau) d\tau, \quad (2.46)$$

e quando a memória do processo decai rapidamente, esta equação assume a forma da equação de Fokker-Planck. Podemos escrever a equação (2.46) na forma,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \int_{-\infty}^t K(x, t - \tau) P(x, \tau) dt \quad (2.47)$$

onde $K(x, \tau) = -\frac{\partial}{\partial x} D^1(x, t - \tau) + \frac{\partial^2}{\partial^2 x} D^2(x, t - \tau)$ é conhecido como Kernel de Memória.

2.10 A Equação de Langevin

Uma abordagem alternativa para descrever certos processos estocásticos, particularmente o movimento browniano é a equação de Langevin, que combina aspectos determinísticos e estocásticos. Esta é uma equação de movimento para sistemas que experimentam um tipo particular de força aleatória, o de uma partícula browniana cuja equação é dada por:

$$m \frac{dv(t)}{dt} + \gamma v(t) = f(t), \quad (2.48)$$

onde $v(t)$ é a velocidade da partícula, γ é o coeficiente de fricção (atrito com o meio difusor), m é a massa da partícula e $f(t)$ é uma força aleatória, sobre a qual fazemos algumas suposições físicas:

- A força aleatória é igualmente susceptível de empurrar a partícula num sentido como no outro, de modo a média de todas as realizações da força é zero,

$$\langle f(t) \rangle = 0 \quad (2.49)$$

- As forças aleatórias não apresentam correlação temporais e deve obedecer a relação

$$\langle f(t_1)f(t_2) \rangle = g\delta(t_2 - t_1) \quad (2.50)$$

em que $\delta(t_2 - t_1)$ representa a função delta de Dirac.

As variáveis aleatórias que obedecem a estes pressupostos são conhecidas como ruído branco, ou mais precisamente, o ruído branco gaussiano.

Uma solução formal da equação (2.48) é

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{m}(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (2.51)$$

Usando a condição dada pela equação (2.49) obtemos o valor médio da velocidade,

$$\langle v \rangle = v_0 e^{-\frac{\gamma t}{m}}. \quad (2.52)$$

A função correlação de velocidade definida por $c(t) = \langle v(t_1)v(t_2) \rangle$, onde $t = t_2 - t_1$, pode ser calculada através do uso da equação (2.51) e da condição imposta pela equação (2.50) (condição de ruído-branco),

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle = \left(v_0^2 - \frac{g}{2m\gamma} \right) e^{-\frac{\gamma(t_1+t_2)}{m}} + \frac{g}{2m\gamma} e^{-\frac{\gamma(t_1+t_2)}{m}}. \quad (2.53)$$

e se queremos determinar a difusão, ou seja, quão longe uma partícula estaria com o decorrer do tempo após ela partir de uma posição inicial $x(0)$, devemos calcular o deslocamento médio

quadrático, que pode ser obtido através da equação (2.52),

$$\Delta x^2 = \frac{g}{\gamma^2} \left[t - \frac{2}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) \right] \quad (2.54)$$

em limites longos o termo dominante é o primeiro, e $\Delta x^2 \rightarrow Dt$, onde o coeficiente de difusão $D = \frac{g}{\gamma^2}$.

Para descrever sistemas complexos a equação de Langevin foi modificada. Em 1924, Mori propôs uma generalização para a equação de Langevin [64, 65], de modo a englobar interações não instantâneas de partículas. Esta equação se tornou uma nova ferramenta para os estudos de sistemas que apresentam memória. O ruído em um determinado instante passa a ter correlação com o ruído em outro momento. Podemos substituir o coeficiente de fricção por um Kernel, de forma que a equação para partícula se torna,

$$m \frac{dv}{dt} = - \int_0^t \Gamma(t - t') v(t') dt' + f(t) \quad (2.55)$$

onde $\Gamma(t)$ é a função memória. Em princípio a equação de Langevin generalizada permite estudar processos correlacionados. As funções $\Gamma(t)$ e $f(t)$ devem satisfazer as seguintes relações:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) = 0. \quad (2.56)$$

$$\langle f(t) \rangle = 0. \quad (2.57)$$

$$C(t - t') = \langle f(t') f(t) \rangle = g \Gamma(t - t'). \quad (2.58)$$

Nas expressões acima $C(t - t')$ corresponde às correlações das forças estocásticas e g é uma constante. A equação (2.58) afirma que as correlações do ruído se manifestam com um certo alcance temporal, o que difere do ruído branco onde a correlação existe somente de modo instantâneo. O formalismo de Langevin generalizado, junto com o modelo de caminhadas aleatórias contínua no tempo, incorporam a memória nos processos de difusão e com o conhecimento da função distribuição de probabilidade é possível, em tese, descrever por completo os processos anômalos.

Capítulo 3

Perfis de memória

Numa caminhada aleatória a difusão anômala pode surgir através de várias formas distintas, tais como quando ocorre em meios inhomogêneos (difusão em meios porosos) ou se é caracterizada por uma divergência nos momentos da distribuição dos passos (voos de Lévy) ou ainda se possui correlações espaço-temporais suficientes fortes entre os passos. Neste capítulo iremos expor alguns modelos de caminhadas não-markovianas, que geram difusão anômala, e que possuem como ingredientes principais as ideias de correlações e memória. A memória pode ser entendida como uma capacidade de aquisição, armazenamento e recuperação de informações. Nos seres humanos, devido à capacidade limitada de armazenamento, o esquecimento de informações passadas corresponde a um mecanismo essencial para que não ocorra uma sobrecarga na memória, de tal maneira que o esquecimento possibilita que novas informações sejam armazenadas pelo cérebro. As formas com que essas informações são armazenadas e como são recuperadas apresentam, certamente, um alto grau de complexidade, com relação aos seus mecanismos subjacentes químicos e biológicos, que não serão detalhados aqui, pois fogem ao escopo deste trabalho.

Podemos pensar que as informações armazenadas na memória do caminhante correspondem às ações tomadas por este no passado. Quando o mesmo tende a seguir uma determinada ação tomada no passado dizemos que existe um *feedback* positivo e, no caso contrário, se o caminhante tende a tomar uma atitude oposta àquela tomada em seu passado, o *feedback* é negativo. Podemos introduzir um parâmetro p que quantifica este *feedback*, interpretando-o como a probabilidade de repetir o passo dado no instante passado, de forma que quando $p > 1/2$ o *feedback* é positivo, ou seja, o caminhante tende a ter um comporta-

mento "conservador"; em contrapartida, quando $p < 1/2$, o caminhante tende a se comportar como "reformador".

A forma com que determinados instantes da memória do caminhante são recuperados define o que nós chamamos de perfis de memória. Abordaremos aqui modelos que apresentam as mesmas dinâmicas estocásticas, mas que diferem por seus perfis de memória. Estes modelos vem sendo estudados nos últimos anos e, apesar das simplificações adotadas, exibem comportamentos não triviais. A dificuldade de obtenção de soluções analíticas explícitas para estes modelos (pouquíssimos casos são conhecidos), torna necessária a formulação de métodos alternativos aproximativos de caráter numérico e/ou analíticos, entre os quais os mais usados (inclusive em nosso trabalho) são baseados em simulação computacional.

3.1 Modelo de Elefante

O primeiro perfil de memória que iremos abordar foi proposto por Trimper e Schütz [66] e nele as ações tomadas em um instante de tempo t por um caminhante aleatório são baseadas nas ações realizadas durante todo seu passado. Como os elefantes são animais conhecidos por apresentarem uma boa memória, este modelo foi batizado pelos autores de modelo de Elefante (ME). No ME cada ação efetuada no passado possui uma probabilidade $1/t$ de ser recuperada, onde t é o tempo presente, ou seja, todos os instantes da memória são igualmente prováveis. Assim, podemos interpretar a memória do caminhante como uniforme, já que todos os eventos passados são igualmente lembrados.

No ME o caminhante inicia num tempo t_0 em um ponto x_0 e, em cada instante de tempo t discreto, efetua um passo aleatório para direita ou para a esquerda. Os efeitos de memória são inseridos na definição da posição do caminhante em um tempo $t + 1$ pelo algoritmo,

$$x_{t+1} = x_t + v_{t+1} \quad (3.1)$$

onde v_{t+1} assume valor 1 quando o passo do caminhante é dado para direita e -1 no caso oposto. Portanto, esta variável representa o ruído estocástico já que o valor escolhido segue uma relação probabilística. A memória do caminhante é definida pelo conjunto de valores da variável estocástica $\{v_{t'}\}$ em que $t' < t$ e é recuperada por meio de uma regra estocástica descrita a seguir,

- No instante de tempo $t = 1$ o caminhante dá um passo para direita com probabilidade (q) ou para esquerda com probabilidade ($1 - q$) que correspondem respectivamente $v_1 = 1$ e $v_1 = -1$;
- Num tempo $t + 1$ um tempo prévio t' é escolhido de forma aleatória e uniforme no intervalo $[1, t]$, ou seja, todos os instantes passados possuem a mesma probabilidade $1/t$ de serem resgatados;
- A direção em um tempo atual $t + 1$ é determinada através da seguinte regra:

$$v_{t+1} = \begin{cases} v_{t'}, & \text{com probabilidade } p \\ -v_{t'}, & \text{com probabilidade } 1 - p. \end{cases} \quad (3.2)$$

O parâmetro p representa a probabilidade do caminhante repetir uma determinada ação executada no passado em um tempo t' . Num processo em que $p > 1/2$ dizemos que estamos em uma região de *feedback* positivo, o caminhante tem um comportamento persistente (conservador) que privilegia a repetição de ações passadas. Em contrapartida, quando $p < 1/2$ o caminhante tem um comportamento anti-persistente (reformador) e tende a executar uma ação contrária àquela tomada no instante selecionado e portanto de *feedback* negativo. Quando $p = 1/2$ este modelo reproduz o modelo de caminhada aleatória sem memória já que não há nenhuma tendência a ser seguida. Quando $p = 1$ estamos diante de um processo de natureza determinística e o movimento é balístico, já que a direção do primeiro passo é sempre seguida em todos os passos seguintes. Quando $p = 0$ sempre ocorre uma alternância em relação ao passo realizado no instante passado que foi selecionado, ou seja, este é o ponto de máximo *feedback* negativo. .

Em um tempo t , após N passos, a posição do caminhante é dada por

$$x_t = \sum_{t'=1}^N v_{t'}. \quad (3.3)$$

Os resultados analíticos para os primeiros momentos de $\langle x_t \rangle$ e $\langle x_t^2 \rangle$ foram obtidos na referência [66] e são reproduzidos a seguir, supondo que $x_0 = 0$. Além disso são válidos no limite assintótico correspondente a $t \sim \infty$. O primeiro momento da variável posição é dado por

$$\langle x_t \rangle \sim \frac{\beta}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha \quad (3.4)$$

onde $\beta = 2q - 1$ (característica do passo inicial) e $\alpha = 2p - 1$. Os parâmetros α e β estão definidos no intervalo $[-1, 1]$. Em termos do parâmetro α , podemos caracterizar a tendência anti-persistente por $\alpha < 0$ e a persistente por $\alpha > 0$. O segundo momento da posição é descrito pela equação

$$\langle x_t^2 \rangle \sim \begin{cases} \frac{t}{3-4p} & , \quad p < 3/4 \\ t \ln t & , \quad p = 3/4 \\ \frac{t^{4p-2}}{(4p-3)\Gamma(4p-2)}, & p > 3/4 \end{cases} \quad (3.5)$$

onde Γ é a função gama definida por,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (3.6)$$

As figuras 3.1 e 3.2 mostram o deslocamento médio e o deslocamento quadrático médio para diferentes valores dos parâmetros α e p obtidos por simulações computacionais [67].

Dois diferentes regimes difusivos estão presentes: ocorre difusão normal quando $p < 3/4$ ($\alpha < 1/2$) onde o deslocamento quadrático depende linearmente de t e a difusão anômala (superdifusiva) existe para $p > 3/4$ ($\alpha > 1/2$) caracterizada por um crescimento superlinear com o tempo do deslocamento quadrático $\langle x_t^2 \rangle \sim t^{4p-2}$, conforme exibido na figura 3.3 a qual mostra o expoente de Hurst H em função do tempo t . O caso limítrofe $p = 3/4$ tem uma correção logarítmica.

A solução analítica para a distribuição final assintótica de probabilidades da variável x tem a forma de uma gaussiana [66]

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t D(t, p)}} \exp \left[-\frac{(x - \bar{x}(t))^2}{4tD(t, p)} \right], \quad (3.7)$$

com o coeficiente de difusão $D(t, p)$ dependente dos parâmetros t e p na forma da equação abaixo,

$$D(t, p) = \frac{1}{8p-6} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{4p-3} - 1 \right]. \quad (3.8)$$

Vale ressaltar que mesmo sendo gaussiana a distribuição final de probabilidades, temos um regime de difusão anômala ($p > 3/4$) possibilitada pelo rápido crescimento tempo-

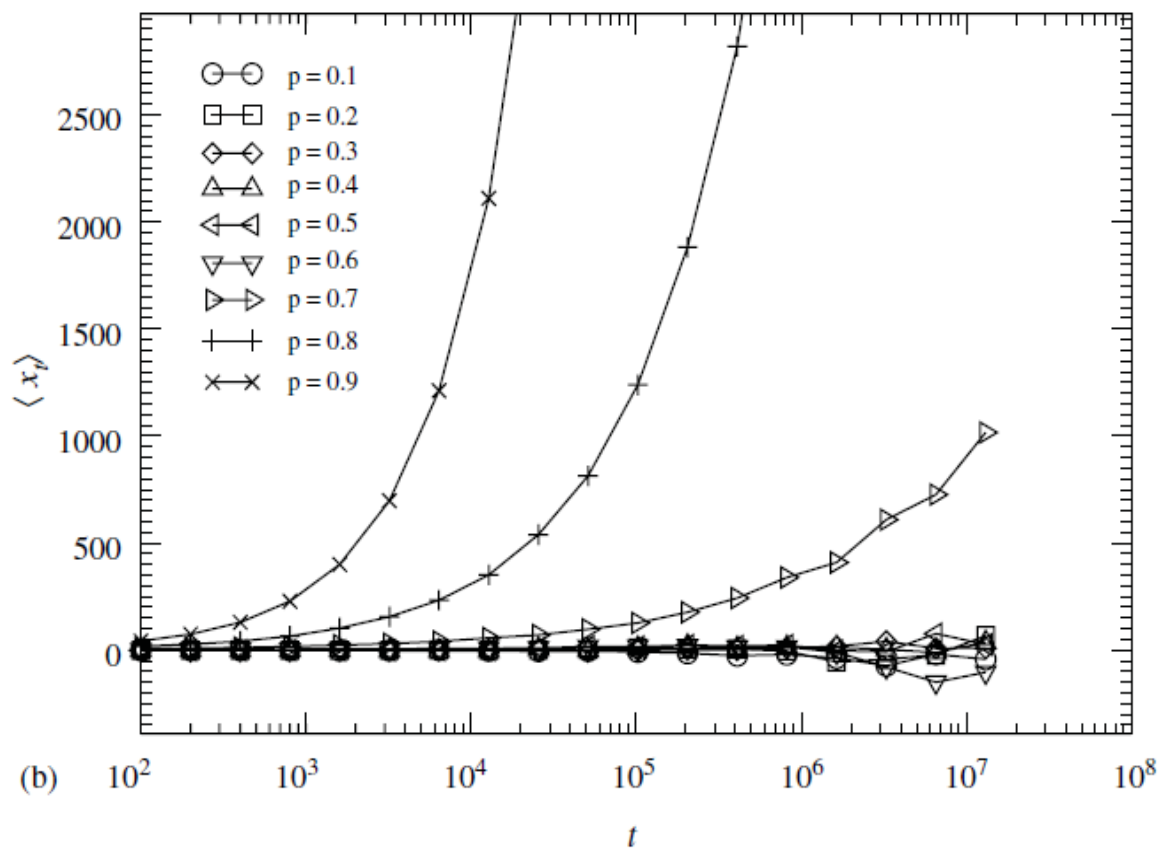


Figura 3.1: Deslocamento médio em função de t para diferentes parâmetros de memória (reproduzida da referência [67]).

ral do coeficiente de difusão $D(t, p)$. A convergência assintótica para a gaussiana, pode ser inferida na figura 3.3, que mostra resultados computacionais obtidos na referência [67].

3.1.1 Modelo de Alzheimer

Um tratamento mais realista (incluindo esquecimento), foi proposto por Cressoni e colaboradores [68] que construíram um modelo de memória parcial no qual uma fração f da

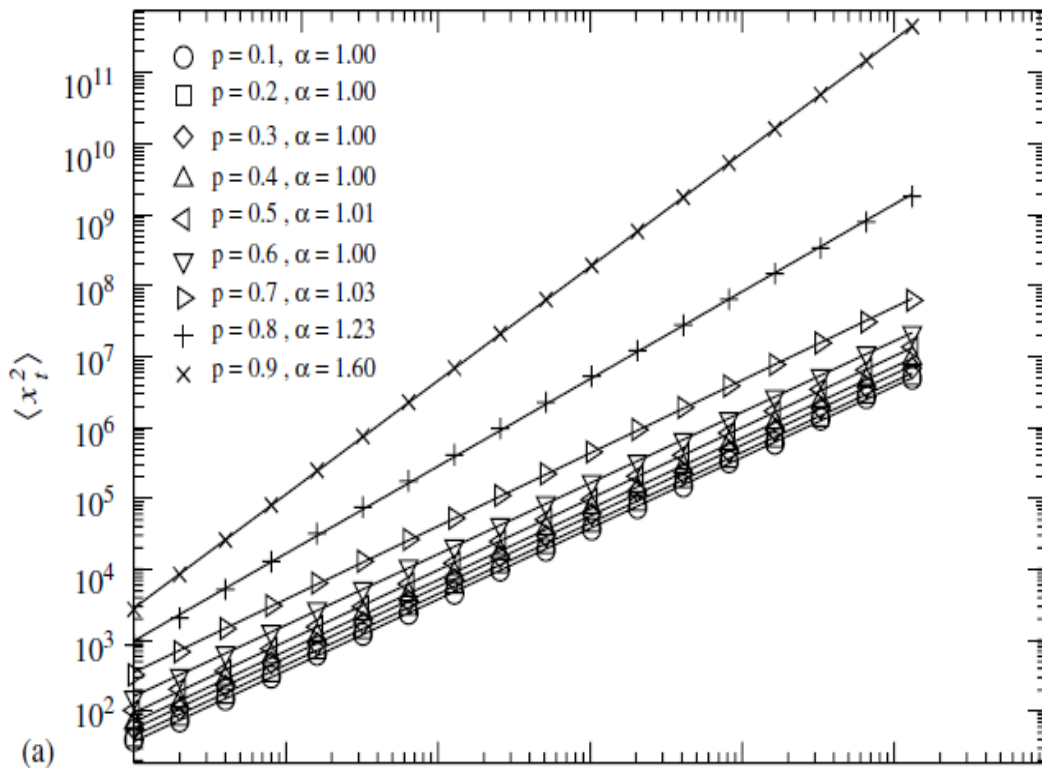


Figura 3.2: Deslocamento quadrático médio em função de t para diferentes parâmetros de memória (reproduzida da referência [67]).

memória do caminhante é lembrada e uma fração $(1 - f)$ da sua memória é esquecida, sendo que os eventos lembrados (esquecidos) se situam no passado remoto (recente). O parâmetro f é definido no intervalo $[0, 1]$ e reproduz 2 casos limites: Quando $f = 0$ o caminhante preserva a memória apenas do seu passo inicial; No outro extremo, que corresponde a $f = 1$, todos os pontos da memória do caminhante são lembrados e recuperamos o ME. Para casos intermediários de f a caminhada pode ser não-markoviana (para valores específicos dos parâmetros), mas o caminhante lembra apenas uma fração da sua memória.

A dinâmica estocástica proposta para o modelo de memória parcial é semelhante ao ME, descrito na seção anterior. Entretanto, agora um instante de tempo do passado distante é escolhido dentro do intervalo $[1, ft]$ e a probabilidade de sortear um determinado tempo do passado memorizado é igual a $1/ft$. Na figura 3.4 reproduzimos o gráfico obtido para o expoente de Hurst (aqui denotado α) para diferentes valores dos parâmetros f e p . Além das fases usuais (porque presentes no modelo do Elefante) da difusão anômala (em grandes valores de p) e da difusão normal (em valores intermediários de p), uma nova fase foi observada, na região de anti-persistência (para pequenos valores de p). Esta nova fase

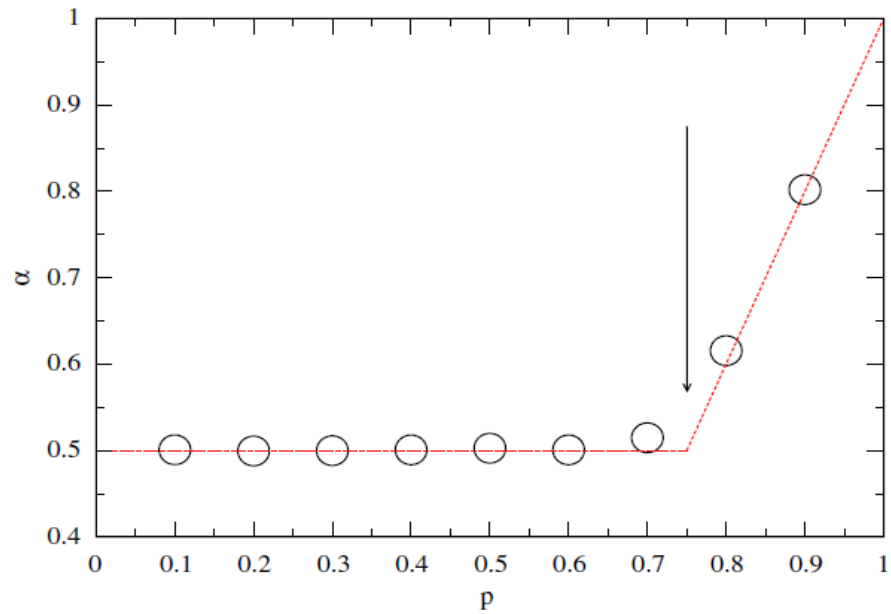


Figura 3.3: Expoente de Hurst (aqui denotado por α) em função do parâmetro de memória p . A linha tracejada representa os resultados exatos (reproduzida da referência [67]).

(também de difusão anômala) foi denominada de "persistência induzida por amnésia (PIA)" e é até certo ponto surpreendente pois revela a existência de persistência (caracterizada por superdifusão $H > 1/2$) em uma região de probabilidades que favorecem a anti-persistência ($p < 1/2$). Ambas as fases de difusão anômala crescem quando f diminui, às expensas da fase de diluição normal.

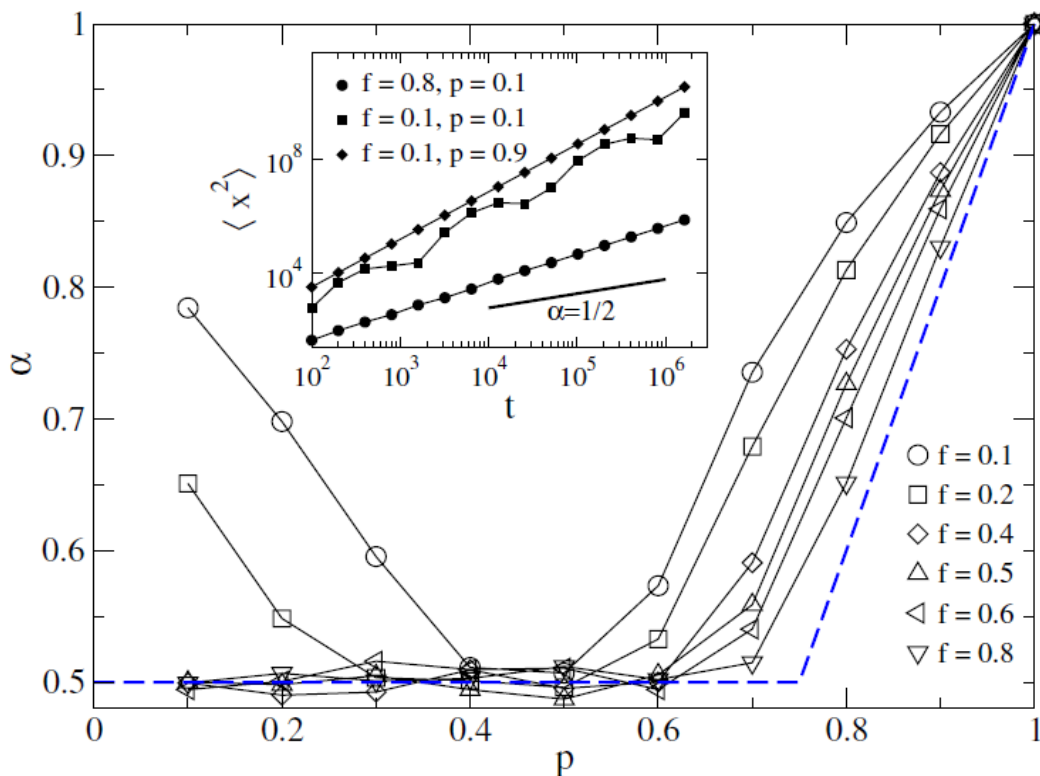


Figura 3.4: O expoente de Hurst como função do parâmetro de correlação p e da fração f do tempo total lembrada pelo caminhante. A linha tracejada representa o resultado analítico para o caso em que $f = 1.0$. Os resultados foram obtidos para um tempo de realização de 10^3 . No detalhe temos $\langle x^2 \rangle$ para diferentes escolhas de p e f (Figura retirada da referência [68].)

A combinação de pequenos valores de f (esquecimento) e p (anti-persistência) produz oscilações na variável posição (e em seu segundo momento) que são do tipo log-periódicas (ver figura 3.5, reproduzida da referência [68]), encontradas em outros fenômenos ([70, 69]) e que estão intimamente relacionadas com invariâncias de escalas discretas as quais evidenciam expoentes complexos.

Estudos posteriores ([73, 74, 32]) permitiram a obtenção (através de equações implícitas) do diagrama de fases completo deste modelo. Na referência [71] Cressoni e colaboradores identificaram a existência de seis fases distintas, essas fases são ilustradas na figura 3.6: Nas regiões I e VI a superdifusão foi identificada; Nas regiões V e II o regime de escape, caracterizado por uma divergência no primeiro momento, foi observado; Nas regiões III e IV o valor do expoente de Hurst é 0.5, contudo, em III o primeiro momento apresenta comportamento log-periódico.

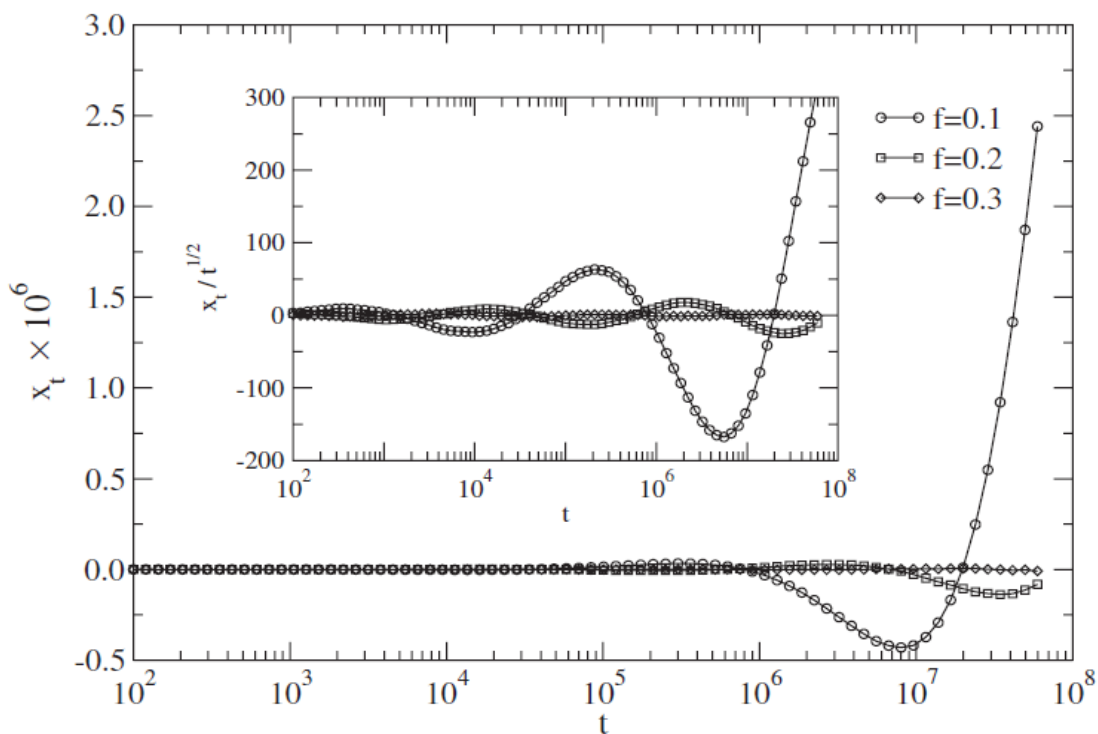


Figura 3.5: Gráfico semi-log do deslocamento x_t como uma função de t para $p = 0.1$ e vários valores de f . No detalhe mostra $x_t/t^{1/2}$ versus t . (Imagem reproduzida da [68]).

Um doente com mal de Alzheimer tem comportamentos de persistência e repetição. Em estágios mais avançados da doença, o doente lembra apenas de fatos que ocorreram em sua infância e, no tempo presente, repete ações baseadas nestes fatos. Por essa razão, o modelo de memória parcial foi apropriadamente denominado de modelo de Alzheimer.

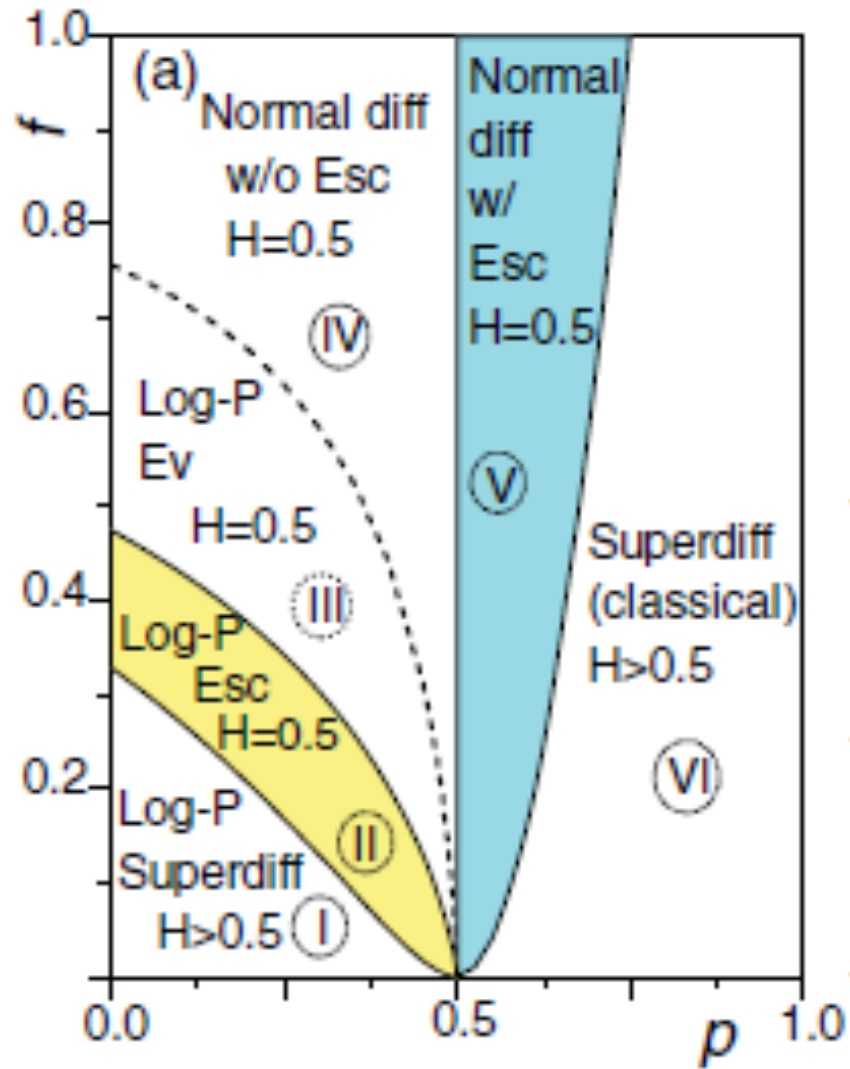


Figura 3.6: Diagrama de fase completo para o modelo de Alzheimer. (Imagem retirada das referências [32])

3.1.2 Modelo de Alzheimer com diluição

Uma forma de generalização do modelo de memória parcial foi introduzida por Ferreira e colaboradores ([74]), introduzindo diferentes formas de diluição no intervalo de tempo $[0, ft]$, ou seja, eliminando a memória de alguns instantes deste intervalo, quer por meio de uma escolha aleatória, quer através de regras determinísticas. Vamos mencioná-los brevemente.

Diluição aleatória

Uma fração d , dos pontos memorizados do intervalo $[0, ft]$, são escolhidos aleatoriamente e esquecidos, de forma que os casos $d = 0$ e $d = 1$ correspondem ao modelo de Alzheimer e ao caso totalmente sem memória respectivamente. Na figura 3.7 podemos ver que a diluição não afeta qualitativamente os resultados quando comparados com o modelo de memória de Alzheimer sem a diluição, mostrado na figura 3.4.

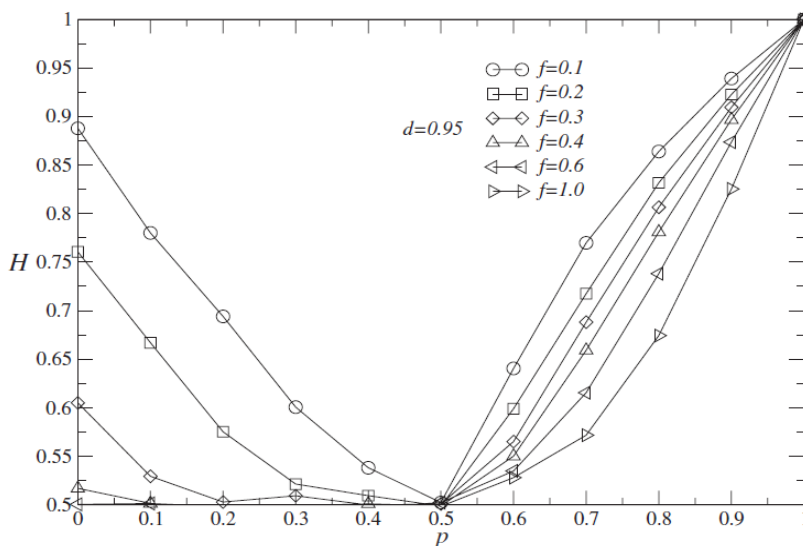


Figura 3.7: Dependência de H versus p . "A adição da diluição para a memória total do caminhante não produz uma variação significativa no expoente de Hurst. Para a diluição de 95% e vários valores de f , o resultados são equivalentes ao caso de diluição zero"([74])

Na figura 3.8 temos o diagrama de fase para valores específicos de f e diferentes valores de diluição. Como pode ser visto, praticamente nenhum efeito significativo é observado

devido à diluição.

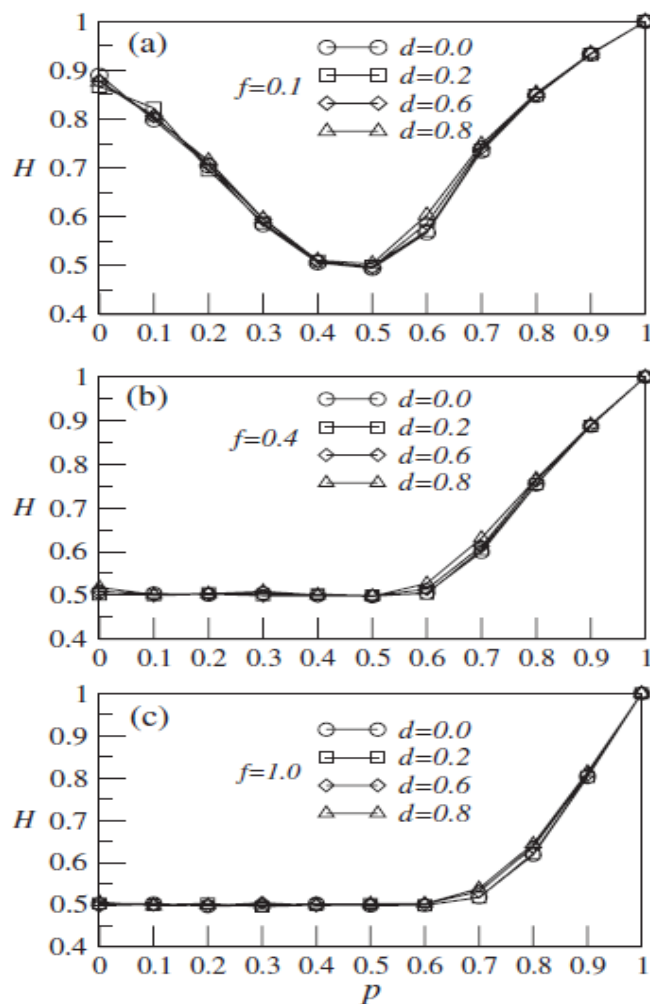


Figura 3.8: A figura mostra o expoente de Hurst H para vários valores de f (a) $f = 0.1$, (b) $f = 0.4$, (c) $f = 1.0$, e várias diluições aleatórias. (Imagem reproduzida da referência [74])

Diluição usando a série de Thue-Morse

Uma sequência de Thue-Morse (determinística e aperiódica) pode ser gerada através da seguinte regra, $0 \rightarrow 01$ e $1 \rightarrow 10$. Fazendo o primeiro termo da sequência como sendo 1, podemos construir a sequência temporal $\{1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, \dots\}$. Apagando os instantes da memória com dígito nulo, pode-se notar que, quando $t \rightarrow \infty$, 50% dos pontos da memória são apagados.

Diluição usando a sequência de Fibonacci

Uma sequência de Fibonacci (também determinística e aperiódica) pode ser gerada através da seguinte regra, $T(n + 1) = T(n) + T(n - 1)$. Para se gerar a sequência, é preciso conhecer os dois primeiros termos desta, que são dados por $T(1) = 0$ e $T(2) = 1$. A sequência temporal resultante $T : \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$ define os instantes que serão lembrados. Apresentamos na Figura abaixo, os resultados obtidos nestes duas sequências determinísticas, que são também qualitativamente equivalentes ao caso não diluído.

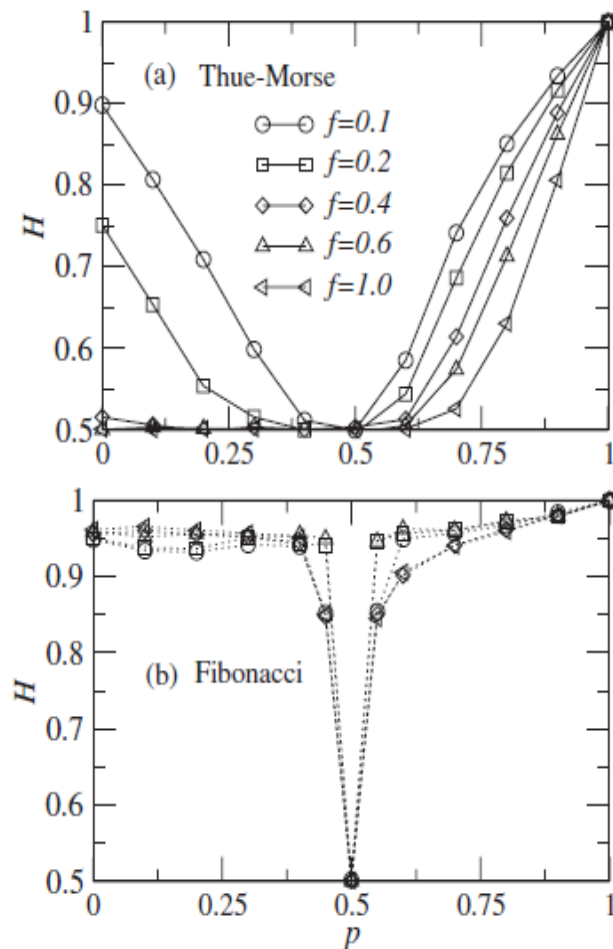


Figura 3.9: (a) o caminhante segue a sequência de Thue-Morse o que equivale a uma diluição de 50%. Em (b) a diluição foi aplicada usando a sequência de Fibonacci (Imagens retiradas da referência [74]).

A largura de persistência

Uma quantidade importante no estudo de caminhadas aleatórias é a largura de persistência w , definida como o número de passos dados pelo caminhante em uma determinada direção até este modificar a sua direção. A distribuição da largura da persistência serve para identificar dois regimes, gaussiano e não-gaussiano. Numa difusão gaussiana a distribuição tem um comportamento exponencial, ou seja, a probabilidade de persistir na mesma direção por N passos, decai exponencialmente com N , enquanto na difusão não gaussiana, o decaimento é mais lento e caracterizado por uma lei de potência. A figura 3.10 ilustra estes dois casos, com parâmetros de diluição $d = 0.0$ e $d = 0.95$ para os mesmos valores de p com $f = 0.1$ e $f = 1.0$.

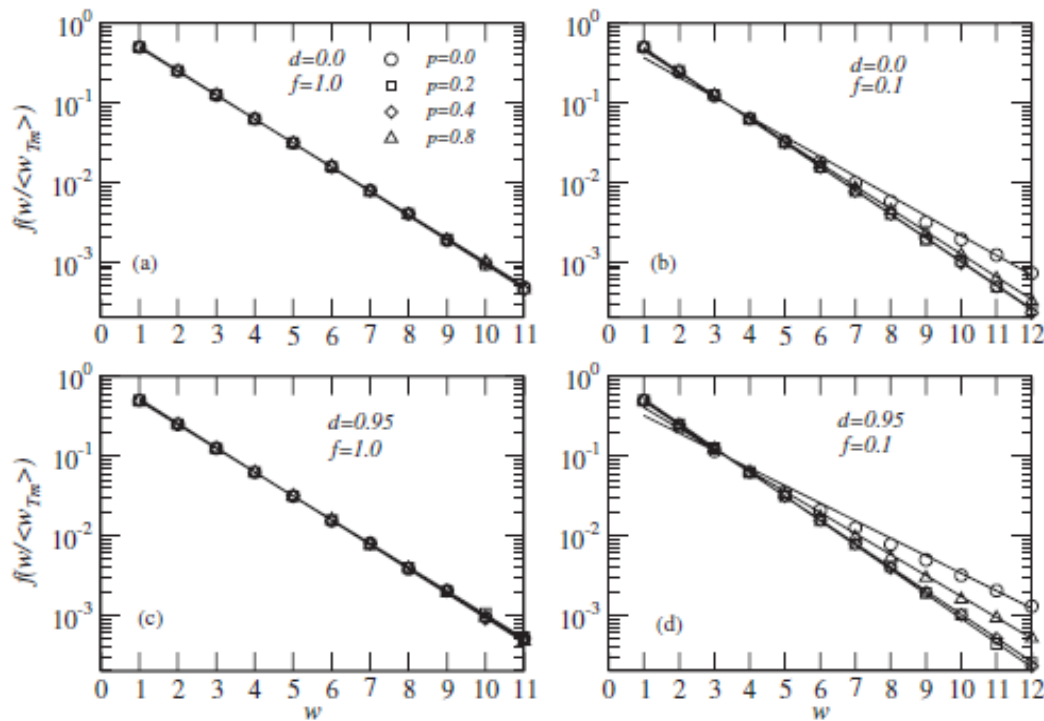


Figura 3.10: A distribuição da largura de persistência normalizada em gráfico semi-log. Em (a), $f = 1.0$, os dados colapsam em uma reta (comportamento exponencial). Para $f = 0.1$ um desvio significativo é observado da distribuição exponencial. Em (c) e (d) é mostrado a inclusão da diluição para o caso em que $d = 0.95$ (Imagens retiradas da referência [74]).

Todos os modelos aqui apresentados possuem a memória dos instantes iniciais e não

privilegiam os instantes lembrados, ou seja, todos são acessados com iguais probabilidades. Sabemos que nem sempre nossa memória possui estas características; esquecemos os fatos da nossa infância e privilegiamos fatos carregados de emoção como o nascimento de um filho, ou um evento traumático. Estas emoções, positivas ou negativas, podem influenciar significativamente nossa ação presente e por isso, fomos conduzidos à imaginar uma modificação dos modelos apresentados, de modo a incluir estes aspectos na memória do caminhante e mensurar os efeitos produzidos. Este é o tema de nosso trabalho, a ser apresentado no Capítulo seguinte.

O perfil de memória gaussiano

4.1 Por que o perfil de memória gaussiano ?

Os modelos de caminhadas aleatórias não-markovianas, discutidos até o momento, pressupõem que o caminhante guarda a memória do tempo inicial em todos os tempos subsequentes. Em outras palavras, nos diferentes perfis de memória propostos para estes modelos os caminhantes possuíam lembranças dos seus primeiros passos em todas as escalas de tempo. Por exemplo, no modelo de Elefante [66], o caminhante tinha total lembrança de seu histórico com toda sua história acessada uniformemente. No modelo de modelo de Alzheimer [68] uma fração f da memória (a mais remota) era lembrada e uma fração $(1 - f)$ (mais recente) era esquecida, sendo assim também uniforme o acesso a estas lembranças. Em particular, no modelo discutido na referência [67], em que os efeitos de redução de memória são estudados, os resultados pareciam indicar que a memorização da parte inicial da caminhada, desempenhava um papel de longo alcance que são essenciais, neste modelo de passos de variância finita, para que ocorra este tipo de difusão (no caso presente, difusão anômala).

De fato em nenhum dos sistemas até então discutidos a memória inicial do caminhante foi apagada. De forma que, uma questão natural surgiu: o que aconteceria se isto ocorresse? Será que a perda de memória do histórico inicial impossibilitaria a existência de regimes superdifusivos? Tais questões nos motivaram a propor um perfil de memória que se diferencia dos demais perfis já discutidos, por permitir uma flexibilidade sobre a localização e acessibilidade dos passos armazenados pelo caminhante. Para entender a dependência da

história inicial podemos pensar em uma função memória que depende de um parâmetro, tal que, em certos intervalos, a memória inicial do caminhante é conservada, enquanto que para outros isto não ocorre. Escolhemos esta função como sendo uma distribuição gaussiana a qual é caracterizada por dois parâmetros, a média e o desvio-padrão ou largura. Quando a largura da gaussiana é pequena os valores extremos da função memória são muito pouco prováveis. Os valores mais prováveis correspondem ao centro da gaussiana, ou seja, à média da função memória. Quando a largura da gaussiana é estreita o histórico inicial do caminhante é destruído. Por essa razão, escolhemos este perfil de memória para estudar a dependência da história inicial da caminhada. Usaremos este perfil de memória gaussiano para construir um modelo não markoviano em que para larguras pequenas da gaussiana o caminhante tem apenas uma lembrança da metade da sua vida, ou seja, de um momento único que não corresponde a sua história inicial. Em contrapartida, quando a largura da gaussiana é grande o caminhante lembra além do seu histórico inicial boa parte de toda a sua história, e o comportamento é semelhante ao observado no modelo de Elefante.

Outro aspecto que o perfil gaussiano permite investigar, é a existência de eventos mais especiais (lembrados) do que outros, o que não é possível nos modelos anteriormente descritos. Estes foram as duas principais motivações de nosso trabalho: Investigar a influência do esquecimento dos tempos iniciais, assim como a possibilidade de que "eventos especiais", isto é, mais lembrados que outros, possam alterar o comportamento do sistema, no caso em questão, um caminhante aleatório. Nas próximas seções apresentaremos o modelo, discutiremos o método adotado para estimativa do expoente de Hurst e apresentaremos os principais resultados obtidos via simulação computacional (pelo método de Monte Carlo).

4.2 O modelo de perfil de memória gaussiano

Estudaremos agora um modelo de caminhada aleatória não-markoviana unidimensional com tamanho dos passos uniforme. Em um dado instante, o caminhante pode lembrar de um evento de seu passado com uma probabilidade dada por uma função densidade de probabilidades gaussiana [72], cujos parâmetros (valor médio e desvio quadrático) evoluem proporcionalmente ao tempo. O valor médio da função memória gaussiana é localizado sempre em $t/2$, onde t é o tempo presente. Em outras palavras, o valor médio da função memória sempre será metade da vida do caminhante e o desvio padrão σ' é dado por σt , onde σ será definido como o desvio padrão relativo e é estabelecido a priori. Focaremos nossa atenção no estudo de diferentes valores de σ uma vez que, à medida que σ diminui a história do tempo inicial do caminhante vai sendo apagada. Na figura 4.1 podemos visualizar que a função memória gaussiana se desloca à medida que o tempo evolui. A probabilidade de um instante de tempo t' do passado do caminhante ser retomado é dada por

$$P(t') \propto \exp\left(\frac{-(t' - t/2)^2}{2\sigma^2 t^2}\right), \quad (4.1)$$

onde σ é o desvio padrão relativo da gaussiana. Como a função $P(t')$ tem seu valor máximo em $t/2$ o valor mais provável para ser lembrado pelo caminhante é metade de sua vida. Utilizamos uma forma truncada da gaussiana, eliminando os sorteios que correspondem aos intervalos de tempo $t' < 0$ e $t' > t$, fisicamente irrealizáveis. Isto corresponde a uma truncagem das caudas da gaussiana, que para manter a normalização fica amplificada por um fator numérico $A(\sigma t)$. Esta aproximação é razoável (exceto para valores muito altos de *sigma* e tempos pequenos), porque o valor médio sempre se localiza na metade do tempo presente e as probabilidades correspondentes a $t' < 0$ e $t' > t$ são aprecialvemente pequenas. Isto pode ser visto na figura 4.1 em que pontos das extremidades da função são extremamente improváveis.

Para valores pequenos de σ s a lembrança do caminhante está centrada na metade da gaussiana e portanto, nosso modelo difere da caminhada de Alzheimer. Em contraste, para valores largos de σ os pontos estão mais dispersos e podemos pensar que todo o histórico do caminhante é considerado, diferente do modelo de caminhada de Alzheimer o qual é uniforme dentro do intervalo de tempo ft e zero para outros tempos. O carácter não-markoviano para o modelo poderia ser questionado quando a largura da gaussiana é pequena porque neste caso o caminhante tem uma boa lembrança apenas dos instantes localizados na metade da

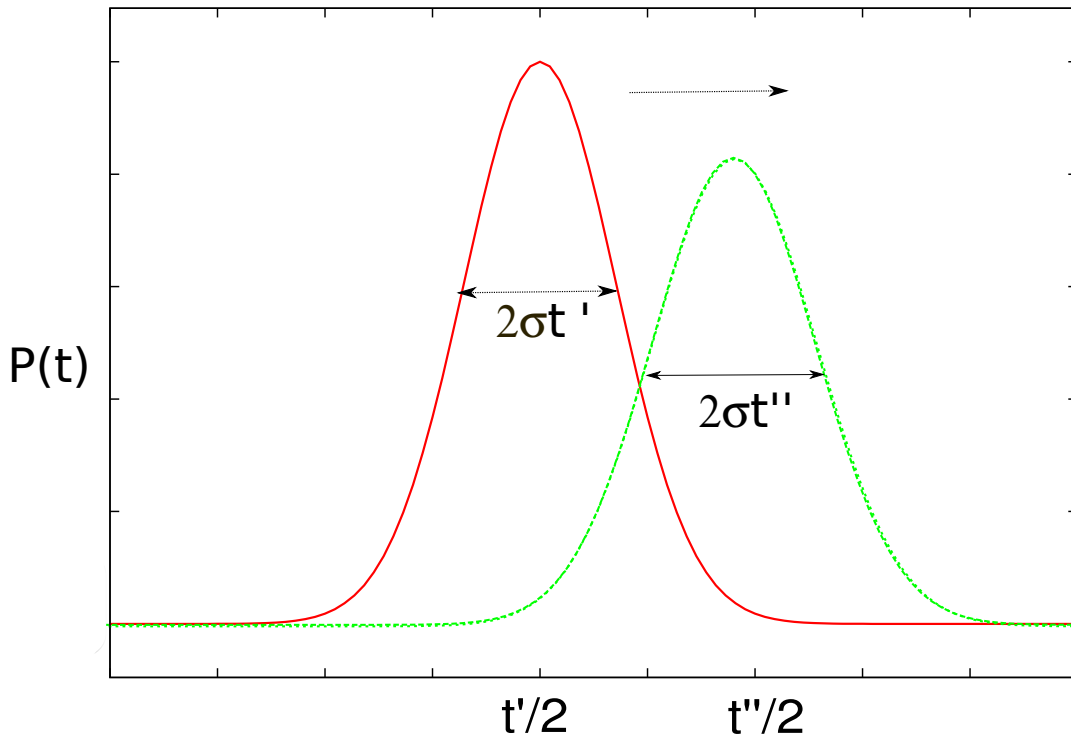


Figura 4.1: O desvio padrão da gaussiana cresce linearmente com t . Em um instante t' o caminhante tem uma maior probabilidade de retomar uma ação na metade da sua vida $t'/2$ a medida que o tempo evoluir até um instante de tempo t'' a probabilidade de retomar uma ação é mais provável em $t''/2$.

sua vida o que poderia não ser suficiente para manter correlações de longo alcance. Mas, como nossos resultados mostrarão, mesmo neste caso o caráter não-markoviano existe, pois o fato da gaussiana se mover com o tempo faz com que o alcance da lembrança (que é $t/2$) divirja no limite assintótico.

A dinâmica estocástica para o modelo com perfil de memória gaussiano é semelhante aos modelos abordados anteriormente, como esquematizado a seguir:

- No instante de tempo $t = 1$ o caminhante executa um passo para a direita com probabilidade q ou para a esquerda com probabilidade $1 - q$ que correspondem respectivamente a $v_1 = 1$ e $v_1 = -1$;
- Num instante $t + 1$ um tempo prévio t' definido no intervalo $(1 < t' < t)$ é escolhido com probabilidade dada pela equação (4.1)

- A direção em um tempo atual $t + 1$ é determinada através da seguinte regra:

$$v_{t+1} = \begin{cases} v_t, & \text{com probabilidade } p \\ -v_t, & \text{com probabilidade } 1 - p. \end{cases} \quad (4.2)$$

Note que a diferença em relação aos tratamentos anteriores, ocorre apenas no perfil de memória.

4.3 Métodos e resultados

4.3.1 O expoente de Hurst

Como vimos anteriormente, através do conhecimento do expoente de Hurst é possível determinar se o sistema encontra-se numa fase de difusão normal ou anômala, ou seja, se as correlações induzidas pela memória, são ou não relevantes.

Em princípio, a persistência é associada a correlações positivas entre o passado e o futuro e a anti-persistência decorre de correlações negativas. Entretanto, conforme a referência [68] é possível que correlações negativas originem a persistência quando ocorrem perdas de memória do caminhante. O parâmetro de *feedback* p que quantifica as correlações, assume valores de $p > 1/2$ em regiões de *feedback* positivo e valores $p < 1/2$, quando predomina o *feedback* negativo. A persistência observada na referência [68], foi atribuída a existência de competição entre a estocasticidade e *feedback*. A estocasticidade é associada ao ato de sortear determinadas ações contida no intervalo de memória permitido, enquanto *feedback* representa a atitude de aceitar ou rejeitar uma determinada ação sorteada no passado.

A estimativa do parâmetro de Hurst tem sido um tema muito estudado em vários campos. Na referência [29] o leitor pode visualizar alguns métodos conhecidos para estimativa do expoente de Hurst, tais como métodos baseados em wavelets, densidade espectral, entre outros. Neste trabalho escolhemos como procedimento para sua estimativa, a análise do comportamento temporal do valor médio quadrático já que no limite assintótico (número grande de passos) sabemos que $\langle x^2 \rangle \sim t^{2H}$ e obtivemos estimativas para esta grandeza, via simulação computacional realizadas para diferentes valores dos parâmetro de feedback p e da larguras σ do perfil de memória gaussiano.

Na figura 4.2 mostramos o gráfico de $\langle x^2 \rangle$ versus t na escala logarítmica para o valor de parâmetro de feedback $p = 0.1$ e diferentes larguras relativas da gaussiana σs . O valor médio de $\langle x^2 \rangle$ foi obtido para um número de realizações da ordem de 10^5 . Podemos ver que o coeficiente angular da reta corresponde a $2H$. Este mesmo coeficiente poderia ser obtido através da análise da variância, contudo, observamos que os resultados eram bastante similares. Na figura 4.3 exibimos o gráfico da variância e o deslocamento quadrático médio para os mesmos parâmetros, observe que o coeficiente angular é o mesmo uma vez que as retas colapsam.

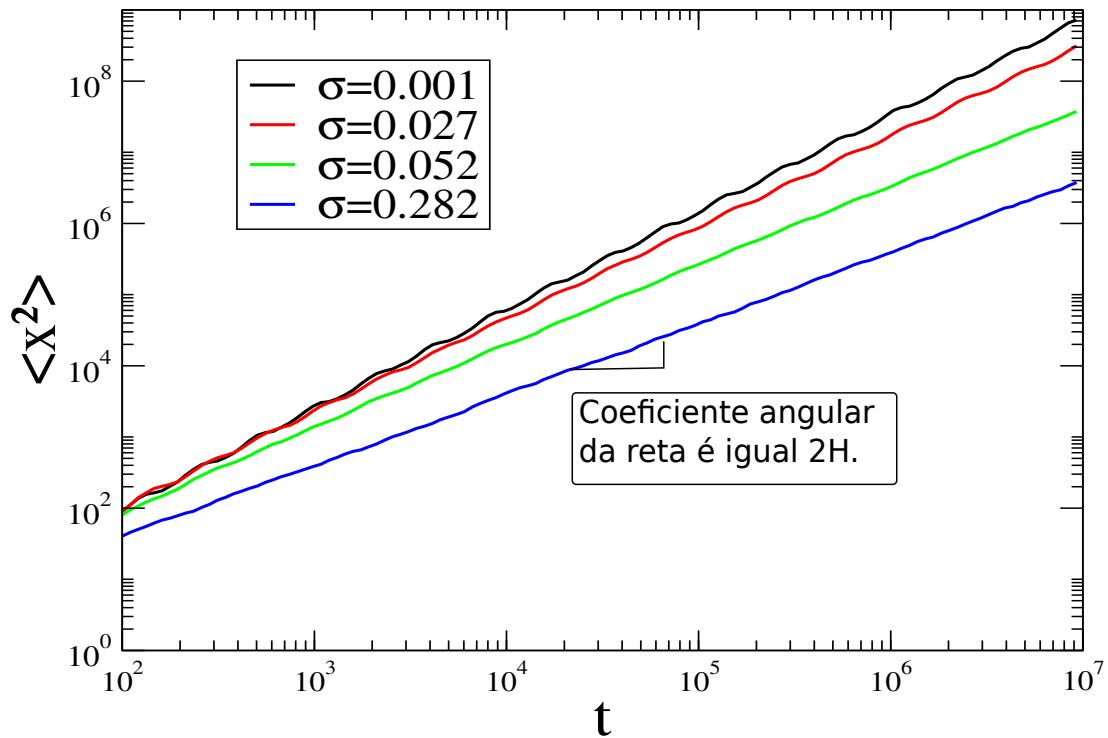


Figura 4.2: Estimativa do expoente de Hurst através do gráfico do deslocamento quadrático médio versus t (no limite assintótico).

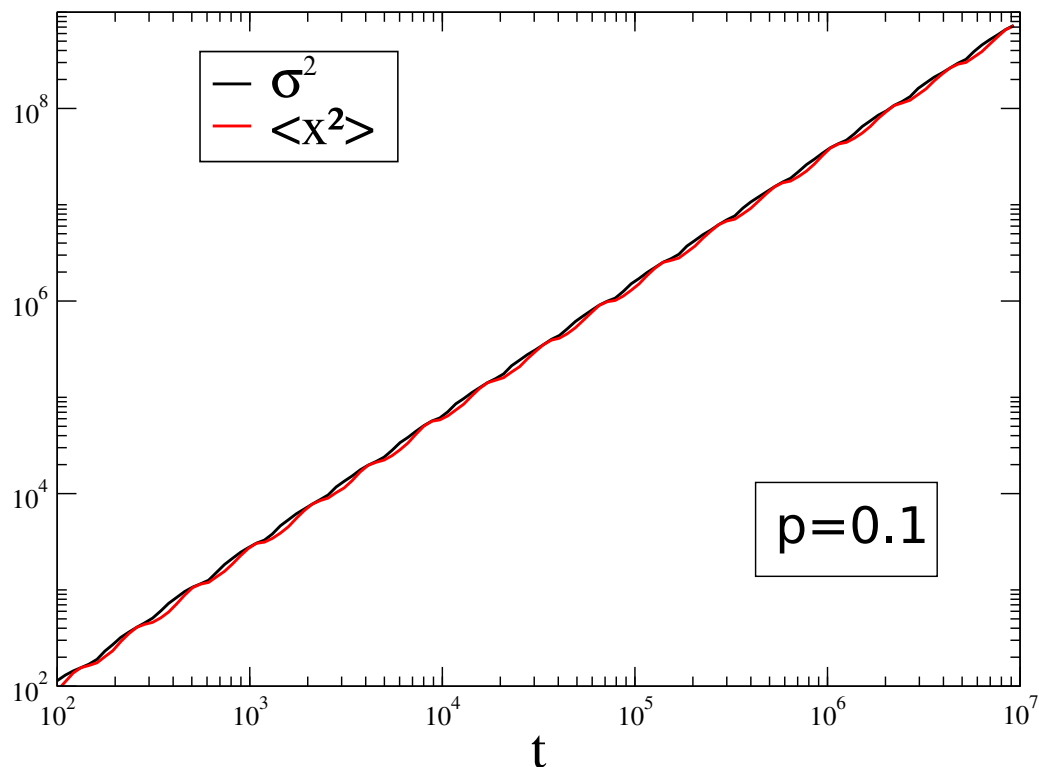


Figura 4.3: Gráfico da variância (linha preta) e deslocamento quadrático médio (linha vermelha). As duas curvas colapsam (no limite assintótico).

4.3.2 O diagrama de fase

A partir do método discutido aqui é possível traçar o diagrama de fase para nosso modelo. Estamos interessados em identificar para quais valores específicos de largura relativa da gaussiana o sistema exibe persistência. Na figura 4.4 mostramos a estimativa numérica para o expoente de Hurst para vários valores das larguras relativas da gaussiana σ . Observe que para valores grandes de σ o comportamento é similar ao modelo de caminhada de elefante, mas para pequenos valores de σ o comportamento é semelhante ao modelo de caminhada de Alzheimer, apesar do perfil de memória gaussiano ser bem diferente do perfil de memória ali considerado.

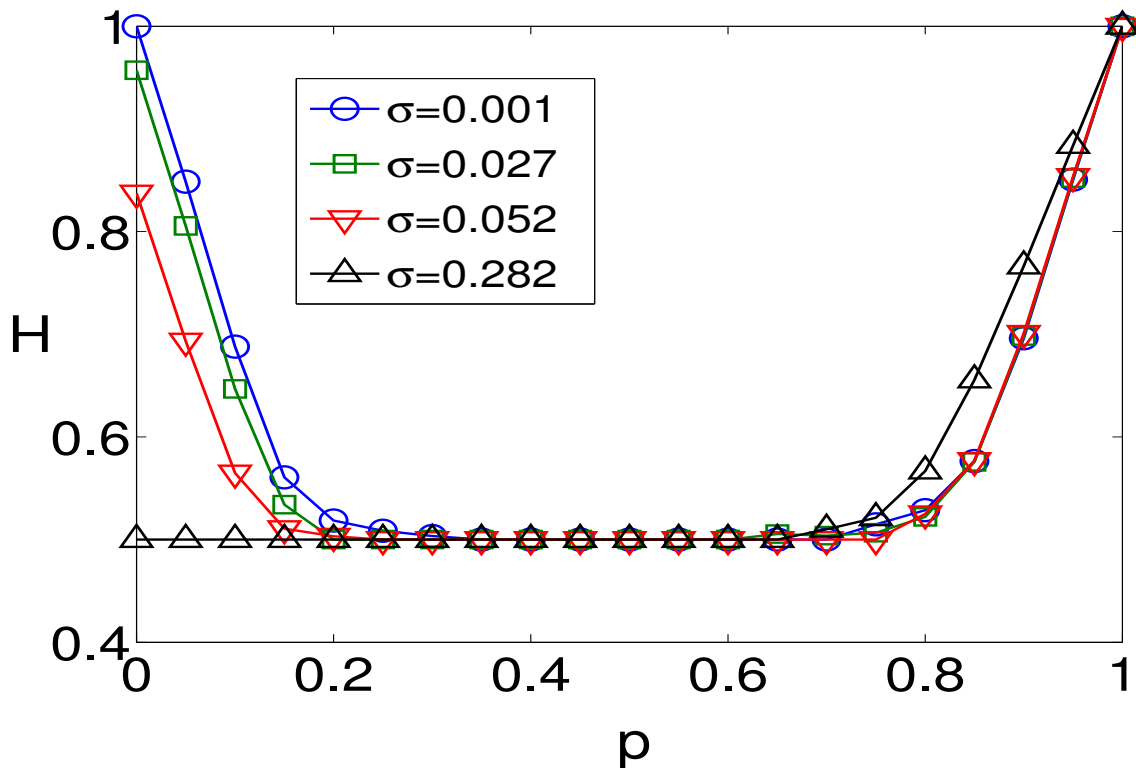


Figura 4.4: Expoente de Hurst H versus o parâmetro de *feedback* p para alguns valores do desvio padrão relativo σ do perfil de memória gaussiano. Para grandes valores de σ , o caminhante pode se lembrar de quase de toda a história, enquanto para valores pequenos o caminhante se lembra preferencialmente de eventos que aconteceram quando o caminhante tinha metade do tempo de vida presente.

Podemos também visualizar na figura 4.4 que para alguns valores específicos de σ e de p surgem a persistência mesmo em regiões de *feedback* negativo ($p < 1/2$). Isto constitui um forte indício de que o importante para que a persistência ocorra é a perda de memória e não o intervalo de tempo em que esta ocorre. Os resultados numéricos indicam que quanto menor é a largura da gaussiana maior é a persistência para $p < 1/2$. À medida que σ aumenta, a persistência vai desaparecendo. Podemos ver que em $\sigma = 0.282$ já não existe mais persistência para $p < 1/2$. Para $p > 1/2$ ao qual corresponde a regiões de persistências clássicas, a persistência, como se espera, cresce lentamente em relação à σ .

No limite de um perfil de memória infinitamente estreito, o caminhante se lembra de apenas um único evento ($\lfloor t/2 \rfloor$) do passado, de modo que efeitos de *feedback* tornam-se particularmente fortes e superdifusão ocorre não só para o *feedback* positivo ($p > 1/2$), mas

também para *feedback* negativo ($p < 1/2$), indicando ser este um processo não-markoviano (devido a divergência nas correlações temporais para $p \neq 1/2$). Mesmo assim, o resultado é ainda um pouco inesperado os passos são de tamanho finito e a superdifusão não é usualmente associado à anti-persistência. Acreditamos que a solução para esta aparente inconsistência reside no fato de que a média e largura da gaussiana cresce linearmente com o tempo como a idade, logo o modelo é realmente não-markoviano para todo σ .

Uma visualização mais completa do comportamento do sistema pode ser observada no diagrama de fase completo, apresentado na figura 4.5, onde usamos como parâmetro de ordem (entre os regimes difusivos normal e anômalo) a grandeza $H - 1/2$, que se anula na difusão normal. A fase de difusão normal ocorre para valores intermediários de p , e cresce com σ , de um único ponto $p = 1/2$ quando σ tende a zero, até uma região extensa, $p < 3/4$ quando σ tende a infinito. A fase difusiva na região persistente ocorre para $p > 1/2$ cresce lentamente com o aumento do parâmetro σ até o limite máximo, quando existe para $p > 3/4$. A fase difusiva na região anti-persistente $p < 1/2$, que corresponde a fase de persistência induzida por amnésia, somente ocorre para pequenos valores de σ e p , aumentando até sua extensão máxima quando σ tende a zero. No limite que σt tendendo a zero, a gaussiana evolui para uma função delta; embora não tenhamos simulado muito próximo a este limite, conforme observado na referência [?], a fase de persistência induzida por amnésia se prolonga por toda a região $p < 1/2$, atingindo sua maior extensão possível.

Na próxima seção, vamos analisar mais detalhadamente esta fase de difusão da região anti-persistente, caracterizada por oscilações log-periódicas, já observadas em [73] e que não aparecem na fase difusiva persistente, conduzindo à conclusão que a lembrança dos momentos iniciais não é uma condição necessária para a ocorrência destas oscilações.

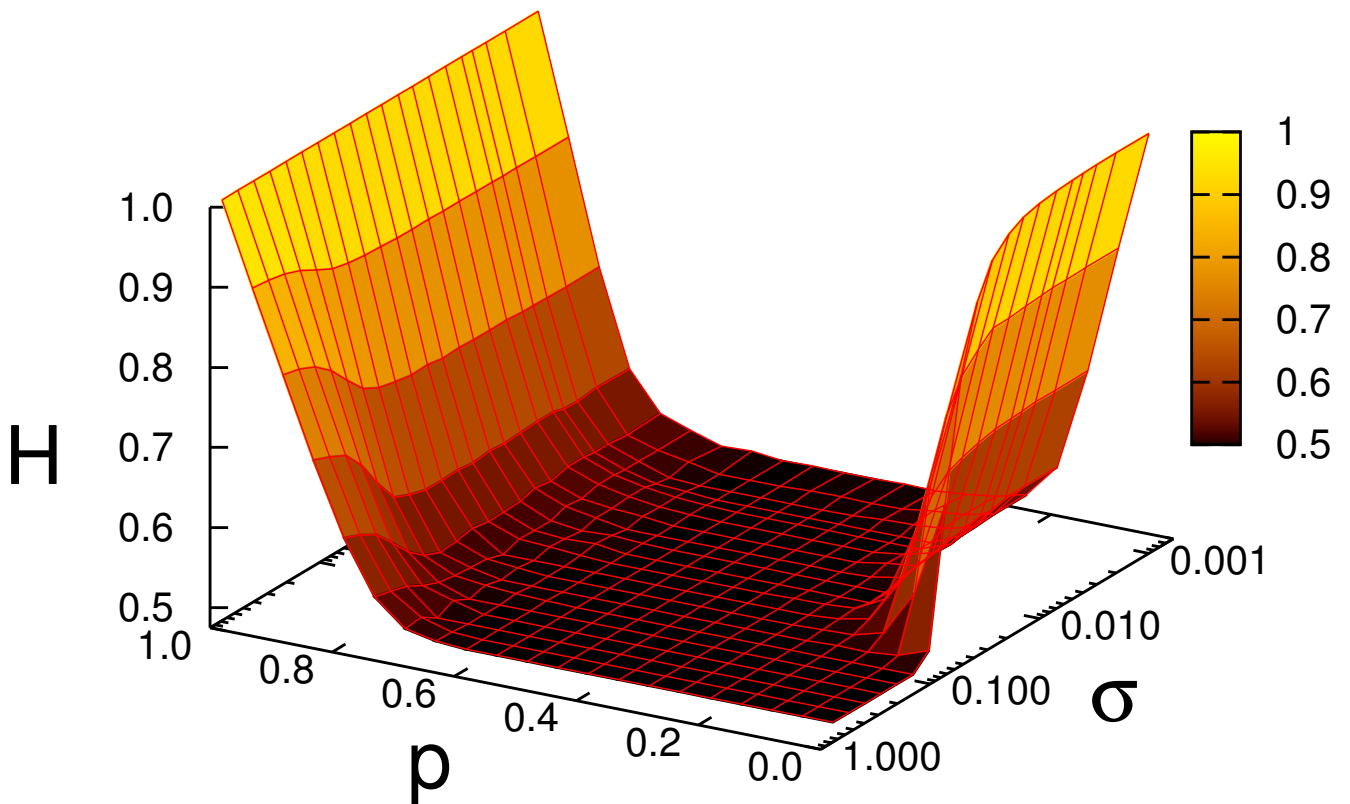


Figura 4.5: O expoente de Hurst H como uma função do parâmetro de *feedback* p e do desvio padrão relativo σ do perfil de memória gaussiano. Para grandes larguras, o comportamento é qualitativamente semelhante ao modelo de elefante. À medida que a largura se estreita, a superdifusão surge, para os valores altos e baixos de p . Surpreendentemente, a superdifusão log-periódica surge para baixo p , de modo que o comportamento torna-se semelhante ao do modelo de passeio Alzheimer, mesmo sendo o perfil de memória gaussiano muito diferente do perfil de memória da caminhada de Alzheimer.

4.3.3 Oscilações log-periódicas na posição

Uma função do tipo lei de potência descreve bem uma invariância de escala contínua. Quando uma lei de potencia é modulada por uma função periódica, dizemos que existe uma invariância de escala discreta a qual resulta em expoentes de escala complexos e oscilações log-periódicas. Na seção anterior, quando utilizamos o expoente de Hurst para identificar as regiões de difusão normal e anômala, mencionamos que na região de superdifusão não clássica ($p < 1/2$) ocorrem oscilações log-periódicas também observadas no modelo de Alzheimer. Uma forma de detectar regiões de superdifusão log-periódicas é através da análise do primeiro momento. Na figura 4.6 podemos ver que para $p = 0.1$, quando a largura relativa da gaussiana é pequena oscilações log-periódicas são observadas no deslocamento médio.

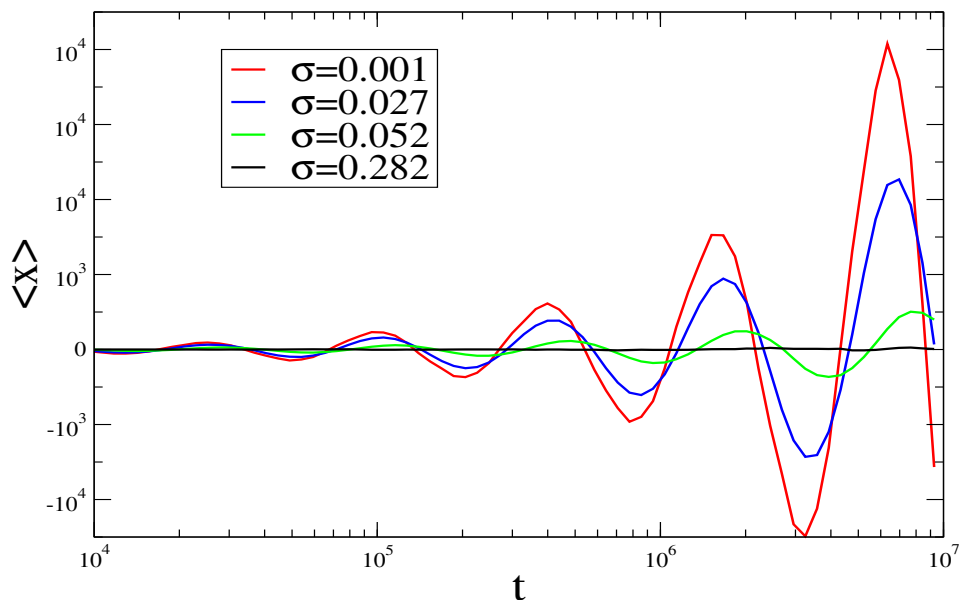


Figura 4.6: Primeiro momento para $p = 0.1$ e diferentes valores de σ s, as oscilações diminuem à medida que o desvio padrão relativo aumenta.

À medida que a largura relativa da gaussiana aumenta essas oscilações vão sendo atenuadas e em $\sigma = 0.282$ não são mais detectadas. Isto indica que σ delimita regiões onde existe log-periodicidade de outra onde não existe log-periodicidade e que as oscilações também são atenuadas à medida que o parâmetro de *feedback* p aumenta. Em resumo, as

oscilações só existem na fase difusiva anti-persistente.

Para uma melhor observação do desaparecimento das oscilações log-periódicas nós mostramos na figura 4.7 o primeiro momento reescalonado por t^H para valores particulares do parâmetro do modelo $\sigma = 0.001$, e $p = 0.1$. Notamos que a log-periodicidade não somente aparece no modelo de persistência induzida por amnésia como também para pequenos valores de σ para o modelo com perfil de memória gaussiano. Reforçando a ideia de que a difusão log-periódica ocorre devido à perda de memória, mas independe dos momentos iniciais.

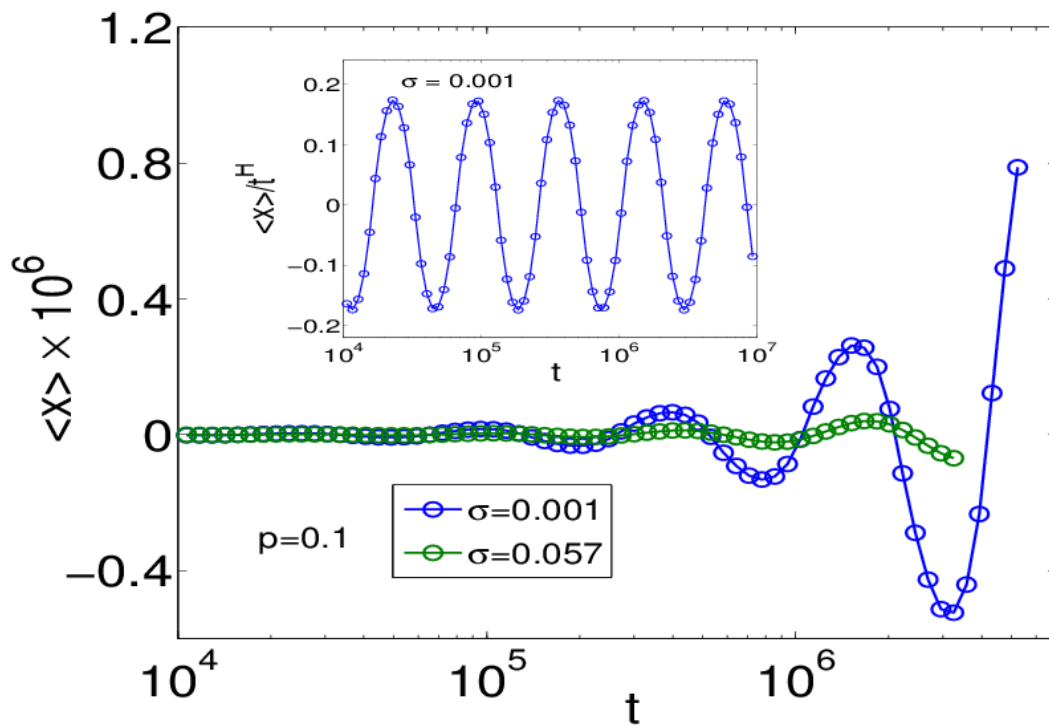


Figura 4.7: Representamos na escala semi-log do deslocamento médio $\langle x \rangle$ em função de t para $p = 0.1$ e diversos valores de σ . O detalhe mostra o primeiro momento (reescalonado por t^H) em função do logaritmo do tempo para uma maior clareza visual. Note como uma periodicidade é claramente evidente. Perda significativa da memória (ou seja, pequeno σ) leva a maiores amplitudes para as oscilações log-periódica. Este tipo de oscilação é um indicador de invariância de escala discreta, em vez de dimensões fractais reais, temos dimensões complexas.

4.3.4 A largura de persistência

Definimos a largura de persistência (w) como a largura compreendida numa sequência de passos na mesma direção. No formalismo CTRW (ver seção 1.7) podemos pensar como sendo equivalente ao tamanho dos saltos. Se as larguras de persistência são distribuídas exponencialmente, a largura dos passos tem um decaimento exponencial e com tempo de espera é fixo. Neste caso, a teoria CTRW garante que a distribuição para a posição de um caminhante ao longo do tempo é gaussiana. Entretanto, se a distribuição para a posição for gaussiana isto não garante que as larguras de persistência tem um decaimento exponencial (ou tamanho dos saltos na terminologia CTRW). Contudo, um decaimento não exponencial pode ser um indício de que estatística é não gaussiana.

Na figura 4.8 a distribuição da largura de persistência é mostrada para alguns valores de p e $\sigma = 0.001$ onde o comportamento gaussiano é claramente observado para $p = 0.5$, uma vez que, para o nosso modelo o tempo de espera é fixo e a largura de persistência tem o comportamento exponencial. Em contrapartida, para $p = 0.1$ e $p = 0.9$ observamos um comportamento não exponencial para a distribuição da largura de persistência sendo um forte indício que a estatística da posição é não-gaussiana. Como foi visto, $p = 0.1$ e $p = 0.9$ com $\sigma = 0.001$ o regime é superdifusivo (ver figura 4.4).

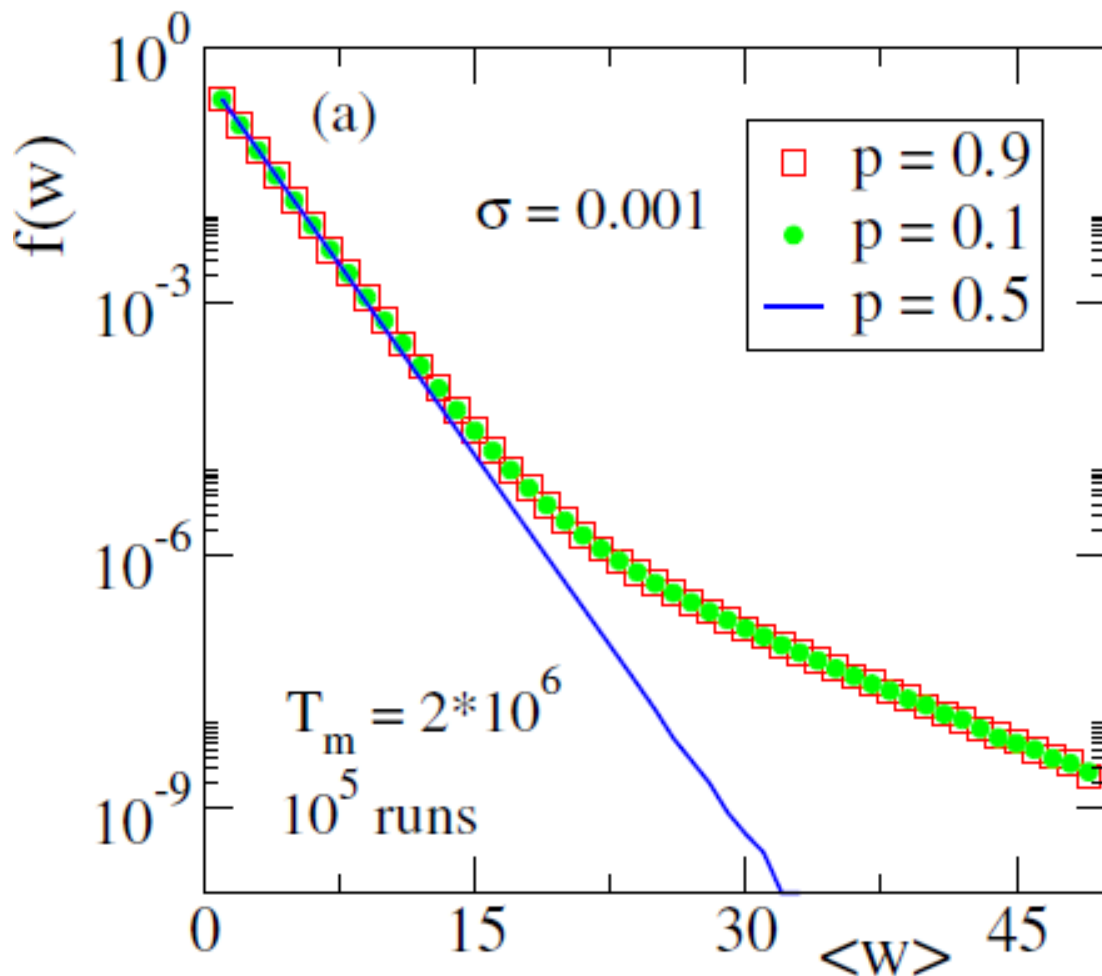


Figura 4.8: A distribuição do comprimento de persistência $f(w)$ médio para 10^5 realizações, mostrando um comportamento exponencial para $p = 0.5$ e não exponencial para $p = 0.1$ e $p = 0.9$. A forma não exponencial pode estar associada a distribuição não-gaussianas. Este resultado está consistente com o regime difusivo (superdifusão) com ($H > 1/2$) encontrados para ($p = 0.1$ e $p = 0.9$)

Podemos ver através dos principais resultados aqui expostos para o perfil de memória gaussiano que a história inicial do caminhante não é condição necessária para que ocorra o regime de superdifusão log-periódica. Apesar dos perfis de memória Alzheimer e gaussianos serem distintos a superdifusão para $p < 1/2$ é também observada para intervalos específicos de σ . Isto nos conduz a ideia de que similarmente ao modelo de Alzheimer é a perda de memória da história do caminhante em determinados estágio da vida (não necessariamente nos instantes iniciais) que conduz a difusão anômala.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, estudamos caminhadas aleatórias unidimensionais com memória, isto é, o caminhante define sua ação no tempo presente a partir de informações sobre os passos realizados em tempos anteriores. Utilizamos métodos de simulação computacional para investigar o tipo de difusão resultante (normal ou anômala), caracterizada por meio do expoente de Hurst, que mede o comportamento assintótico temporal do segundo momento da variável posição. O problema de caminhadas aleatórias, sendo um dos mais tradicionais e interdisciplinares da ciência, com aplicações em diferentes áreas tais como física, química, biologia, e ciências sócio-econômicas, permite múltiplas abordagens todas já extensamente exploradas por variadas técnicas da área denominada "processos estocásticos". Inicialmente, apresentamos um brevíssimo resumo dos conceitos e métodos fundamentais, como probabilidades, processos markovianos e não-markovianos, as equações de Langevin, de Fokker-Planck e as equações mestras de evolução probabilística, de modo a situar minimamente o leitor na vasta literatura da área. A seguir, apresentamos algumas abordagens já feitas sobre a influência da memória na difusão, particularmente aquelas que serviram de antecedentes e inspiração para nosso trabalho: (i) O modelo de Elefante (ME) onde o caminhante se recorda de todos os passos dados anteriormente; (ii) O modelo de Alzheimer (MA) caracterizado por uma lembrança parcial (de uma fração f dos primeiros passos); (iii) Modelos de Alzheimer diluídos, onde a fração dos tempos lembrados é distribuída entre todos os passos já realizados, mantendo-se a lembrança do início da caminhada. Em todos os casos examinados, os passos lembrados satisfazem duas características em comum: incluem os tempos iniciais e são equiprováveis. Em todos os trabalhos acima citados foi notada a presença de regimes difusivos normais e

anômalos, sendo que nos casos (ii) e (iii) duas fases de difusão anômala foram observadas, uma delas caracterizada por oscilações log-periódicas no primeiro (ou segundo) momento da variável posição. Este comportamento só apareceu na região de *feedback* negativo em que a lembrança do passo dado anteriormente influencia o passo seguinte preferencialmente para induzir o caminhante a realizar um novo passo na direção oposta à direção seguida no passado. O nosso trabalho, teve como motivação principal modificar o modelo de Alzheimer para incluir dois efeitos, que nos parecem mais realistas, ou seja, a possibilidade de esquecimento dos passos iniciais e a diferenciação dos eventos lembrados, de modo a permitir que alguns sejam mais influentes do que outros na ação futura. Nossa abordagem usou um perfil de memória em forma de uma distribuição gaussiana truncada (o tempo lembrado pode variar do valor inicial até o instante presente) que evolui temporalmente pois se move com a localização de seu centro e o valor de sua variância crescendo proporcionalmente ao tempo t . No limite em que a largura da gaussiana (em tempo fixo) tende a um valor infinito recuperamos o modelo do Elefante e no limite em que tende a zero, há uma evolução para um perfil em que o caminhante só se recorda dos eventos ocorridos na vizinhança de sua meia-vida $t/2$. Obtivemos numericamente o expoente de Hurst H em função dos parâmetros do modelo, que são a variância e a probabilidade p que mede a persistência, ou seja, a tendência à repetir a ação realizada no passado. As três fases observadas (difusão normal e duas regiões de difusão anômala) apresentam as seguintes características: A fase de difusão normal ocorre para valores intermediários de p , e cresce com, até uma região extensa, $p < 3/4$ quando tende a infinito. A fase difusiva na região de *feedback* positivo ocorre para $p > 1/2$ e cresce muito suavemente com o aumento de σ , um comportamento oposto ao modelo de Alzheimer. A fase difusiva na região de *feedback* negativo, ou a persistência induzida por amnésia, somente ocorre para pequenos valores de p , aumentando até sua extensão máxima quando t tende a zero, e neste caso, conjecturamos que ela existe para todos os valores de $p < 1/2$. Obtivemos um diagrama de fase qualitativamente semelhante ao do modelo de Alzheimer, indicando que a lembrança dos instantes iniciais não é fator necessário para a presença das fases com difusão anômala, em particular a região com oscilações log-periódicas, enquanto a diferenciação dos instantes lembrados (eventos especiais) muda apenas quantitativamente o comportamento observado, não induzindo nenhuma nova fase. Várias perspectivas futuras (algumas em andamento) foram sugeridas por nosso trabalho, como por exemplo: (i) O desenvolvimento de métodos analíticos, assim como a realização de simulações adicionais, que nos permitam obter informações ainda mais precisas sobre o diagrama de fases, bem como investigar as dimensões fractais envolvidas no passeio do caminhante; (ii) O uso de outros

perfis de memória, em particular um que nos parece promissor é a distribuição de Poisson que, por ser não simétrica, será uma candidata natural a privilegiar certos intervalos de tempo;

(iii) A investigação de caminhadas semelhantes em dimensões superiores pois, a exemplo da caminhada markoviana (sem correlações) que perde sua "recorrência" (aqui entendida como a volta ao ponto de partida) em dimensões superiores ($D > 2$), não descartamos a possibilidade de mudanças substanciais no comportamento do caminhante em situações similares;

(iv) Correlação entre caminhantes, tanto no caso de dois deles com memória comum até um instante do passado e que, a partir de um dado tempo, sofrem estímulos diversos, como no caso oposto, isto é, caminhantes de passados diversos, que passam a apresentar o mesmo estímulo no presente.

Referências Bibliográficas

- [1] J Ingenhousz, Nouvelles expériences et observations sur divers objets de physique, T. Barrois le jeune, (1785)
- [2] Robert Brown, A brief account of microscopical observations made in the months of June, July e August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, Phil. Mag., **4**, 161, (1828)
- [3] Louis Bachelier, Théorie de la spéculation, L. Ann. Sci., **17**, 21,(1900)
- [4] Albert Einstein, On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular kinetic theory of heat, Ann. Phys., **17**, 549, (1905)
- [5] Marian Smoluchowski, Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen, Phys. Zeits, **17**, 557,(1916)
- [6] Paul Langevin, Sur la théorie du mouvement brownien, Comptes Rendues Acad. Sci, **146**, 530, (1908)
- [7] H Risken, The Fokker-Planck Equations, (Springer, 1996)
- [8] Karl Pearson, The problem of the random walk, Nature, **72**, 294, (1905)
- [9] M. F. Shlesinger, B. J. West e J Klafter, Lévy dynamics of enhanced diffusion: Application to turbulence , Phys. Rev. Lett., **58**, 1100, (1987)
- [10] C. K. Peng, J. Mietus, J. M. Hausdorff, S. Havlin, H. E. Stanley e A. L. Goldberger, Long-Range Anticorrelations and Non-Gaussian Behavior of the Heartbeat, Phys. Rev. Lett., **70**, 1343, (1993)

- [11] L Cussler, Mass Transfer in Fluid Systems, (Cambridge University Press, 1997)
- [12] <http://html.rincondelvago.com/practicasdelaLaboratorio2.html>. acesso em 10 de dezembro de 2012
- [13] A. Fick, Ann. Phys., **50**, 170, (1855)
- [14] Silvio Salinas, Einstein e a teoria do movimento Browniano, Revista Brasileira de Ensino de Física, **27**, 263, (2005)
- [15] <http://chaoticutopia.com/friday-fractal-iv>. acesso em 10 de dezembro de 2012.
- [16] J. Perrin, Mouvement brownien et réalité moléculaire, Ann. Chem. Phys., **18**, 1, (1909)
- [17] R. K. Pathria, Statistical Mechanics, (Butterworth-Heinemann, 1996)
- [18] M. Kac, Random walk and the theory of the Brownian motion, **54**, 369, (1947)
- [19] <http://en.wikipedia.org/wiki/random/walk> acesso em 12 de dezembro de 2012.
- [20] B. V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov, Limit Distributions for Sums of Random Variables, (Cambridge University Press, 1954)
- [21] P Levy, Calcul des Probabilites, (Gauthier-Villars, 1925)
- [22] G. M. Viswanathan, (Notas de aula - Curso Tópicos em Física, UFRN, 2012)
- [23] V. Carbone, L. Sorriso-Valvo, A. Vecchio, F. Lepreti, P. Veltri, P. Harabaglia, I. Guerra, Clustering of Polarity Reversals of the Geomagnetic Field, Phys. Rev. Lett, **96**, 128501, (2006)
- [24] ROGERS G. L., Multiple path analysis of reflectance from turbid media, J. Opt. Soc. Am. A, **25**, 2879, (2008)
- [25] Donald A. MacKenzie, Fabian Muniesa e Lucia Siu, Do Economists Make Markets? On The Performativity of Economics, (Princeton University Press, 2007)
- [26] Lewis F. Richardson, Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph, Proc. Roy. Soc., **110**, 709, (1926)
- [27] <http://www.astro.auth.gr/vlahos/invitedtalks1/patras/diffusion.pdf>.

- [28] H. E. Hurst, R. P. Black e Y. M. Simaika, Long-Term Storage: An Experimental Study, (Constable, London, 1965)
- [29] J. Gao, Y. Cao, W. Tung e J. Hu, Multiscale Analysis of Complex Time Series Integration of Chaos and Random Fractal Theory, and Beyond, (Wiley, 2007)
- [30] D. BEN-AVRAHAM e S. HAVLIN, Diffusion and reactions in fractals and disordered systems, (Cambridge University Press, 2007)
- [31] R. METZLER e J. KLAFTER, Random walks on lattices. II. J. Phys. A, **6**, 161, (2004)
- [32] J. C. CRESSONI, G. M. VISWANATHAN, A. S. FERREIRA e M. A. A. D. S, Weakly anomalous diffusion with non-gaussian propagators, Phys. Rev. E, **86**, 022103, (2012)
- [33] G. M. Viswanathan, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo e H.E. Stanley, The Physics of Foraging, (Cambridge University Press, 2011)
- [34] E. W. Montroll e G. H. Weiss, Random Walks on Lattices. II, J. Math. Phys., **6**, 167, (1965)
- [35] C. H. RYCROFT, (Notas de aula - continuous time random walks. Department of Mathematics, MIT, 2005)
- [36] J. Klafter, A. Blumen e M. F. Shlesinger, Stochastic pathway to anomalous diffusion, Phys. Rev. A, **35**, 3081, (1987)
- [37] E. W. Montroll, Random Walks in Multidimensional Spaces, Especially on Periodic Lattices, J. SIAM, **4**, 241,(1956)
- [38] E. W. Montroll, Random Walks on Lattices. III. Calculation of First Passage Times with Application to Exciton Trapping on Photosynthetic Units, J. Math. Phys, **10**, 753, (1969)
- [39] V. M. Kenkre, E.W. Montroll e M.F. Shlesinger, Generalized Master Equations for Continuous-Time Random Walks, J. Stat. Phys., **9**, 45, (1973)
- [40] Arlan da Silva Ferreira, Expoente de Hurst e Diagrama de Fase para Persistência Induzida Amnesticamente em Processos não-Markovianos, Tese de Doutorado (Instituto de Física de Alagoas - UFAL, 2009)

- [41] R. Metzler e Joseph Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Physics Reports*, **339**, 1, (2000)
- [42] Hughes Barry, *Random Walks and Random Environments Vol. 1*, (Oxford, 1996)
- [43] Hughes Barry, *Random Walks and Random Environments Vol. 2*, (Oxford, 1996)
- [44] Marcos Vinicius Candido Henriques, *Ondaletas e Movimento Browniano Fracionário: Aplicações à Caracterização de Poços de Petróleo*, Dissertação de Mestrado (Departamento de Física Teórica e Experimental UFRN, 2008)
- [45] B. B. Mandelbrot e V. J. W. Ness, Fractional Brownian Motion, Fractional noise and applications, *SIAM Rev*, **10**, 422, (1968)
- [46] T. A. Witten Jr e L. M. Sander, Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon, *Phys. Rev. Lett.*, **47**, 1400, (1981)
- [47] http://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion-limited_aggregation. Acesso em 10 de Dezembro de 2012
- [48] Elena Yarmola, Peter P. Calabrese, Andreas Chrambach e George H. Weiss, Interaction with the matrix: The dominant factor in macromolecular band spreading in gel electrophoresis, *J. Phys. Chem. B*, **101**, 2381, (1997)
- [49] J. S. Agnaldo, J. C. Cressoni e G. M. Viswanathan, Universal aspects of photocurrent-voltage characteristics in dye-sensitized nanocrystalline TiO₂ photoelectrochemical cells, *Phys. Rev. B*, **79**, 035308, (2009)
- [50] T. H. Solomon, Eric R. Weeks e Harry L. Swinney, Observations of anomalous diffusion and Lévy flights in a 2 dimensional rotating flow, *Phys. Rev. Lett*, **71**, 3975.
- [51] M. Sahimi, *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock*, (VCH, 1995)
- [52] D. Brockmann e L. Hufnagel, and T. Geisel, The scaling laws of human travel, *Nature*, **439**, 462, (2006)
- [53] P. Pirolli e S. Card, *Information Foraging in Information Access Environments*, ACM Press, **51**, (1995)
- [54] Firmiano Ramos Perlingeiro, *Estudo de Tráfego e Alocação de Banda para Redes Multiserviço*, Tese de Doutorado (Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - UEC, 2011)

- [55] N. C. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, (North-Holland, 1981)
- [56] P. Robinson, *Time Series with Long Memory. Advanced Texts in Econometric*, (Oxford University Press, 2003)
- [57] T. Karagiannis, M. Molle e M. Faloutsos, Long-range dependence ? Ten years of Internet traffic modeling, *IEEE Internet Computing*, **8**, 57, (2004)
- [58] C. Varotsos e D. Kirk-Davidoff, Long-memory processes in global ozone and temperature variations at the region 60° S 60° N, *Atmospheric Chemistry and Physics*, **6**,4093, (2006)
- [59] E. Alvarez-Lacalle, B. Dorow, J. P. Eckmann e E. Moses, Hierarchical structures induce long-range dynamical correlations in written texts, *PNAS*, **103**, 7957, (2006)
- [60] D. Karmeshu e A. Krishnamachari, *Lecture Notes in Computer Science*,(Springer, 2004)
- [61] Claude Shannon, A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, **27**, 375, (1948)
- [62] Tânia Tomé e M. J. de Oliveira, *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*, (Edusp, 2001)
- [63] T D Frank, *Non linear Fokker-Planck equations: Fundamentals and Applications*, (Springer, 2005)
- [64] R. Kubo, M. Toda e N. Hashitsume, *Statistical Physics II*, (Springer-Verlag, 1998)
- [65] H. Mori, A Continued-Fraction Representation of the Time-Correlation Functions, *Prog. Theor. Phys.*, **34**, 339, (1965)
- [66] G.M. Schütz e S. Trimper, Elephants can always remember: longrange memory effects in a non-Markovian random walk, *Phys. Rev. E*, **70**, 045101, (2004)
- [67] M. A. A. da Silva, J. C. Cressoni e G. M. Viswanathan, Discrete-time non-Markovian random walks: The effect of memory limitations on scaling, *Physica A*, **364**, 70, (2006)
- [68] J. C. Cressoni, M. A. A. da Silva, G. M. Viswanathan, Amnestically induced persistence in random walks, *Phys Rev Lett.*, **98**, 070603, (2007)

- [69] J. C. Anifrani, Le Floch, D. Sornette e B. Souillard, Universal Log-periodic correction to renormalization group scaling for rupture stress prediction from acoustic emissions, *J.Phys.I*, **6**, 631, (1995)
- [70] D. Sornette e C.G. Sammis, Complex critical exponents from renormalization group theory of earthquakes : Implications for earthquake predictions, *J. Phys. I*, **5**, 607, (2006)
- [71] J. C. Cressoni, G. M. Viswanathan, A. S. Ferreira e M. A. A. da Silva, Alzheimer random walk model: Two previously overlooked diffusion regimes, *Phys. Rev. E*, **86**, 042101 (2012)
- [72] G. M. Borges, A. S. Ferreira , M. A. A. da Silva, J. C. Cressoni, G. M. Viswanathan e A. M. Mariz, Superdiffusion in a non-Markovian random walk model with a Gaussian memory profile, *Eur. Phys. J. B*, **85**, 310, (2012)
- [73] Marco Antonio Alves da Silva, G. M. Viswanathan, A. S. Ferreir e J. C. Cressoni, Spontaneous symmetry breaking in amnestically induced persistence, *Phys. Rev. E, Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics*, **77**, 040101,(2008)
- [74] A. S. Ferreira, J. C. Cressoni, G. M. Viswanathan e Marco Antônio Alves da Silva, Anomalous diffusion in non-Markovian walks having amnestically induced persistence, *Phys. Rev. E*, **81**, 011125, (2010)