

Eloan do Nascimento França

**Teoria da gravitação inspirada no modelo de
Born-Infeld para o eletromagnetismo**

Brasil

Julho 2022

Eloan do Nascimento França

Teoria da gravitação inspirada no modelo de Born-Infeld para o eletromagnetismo

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Física Teórica e Experimental do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Física.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Departamento de Física Teórica e Experimental – DFTE

Orientador: Prof. Dr. Leandro Ibiapina Beviláqua

Brasil
Julho 2022

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

França, Eloan do Nascimento.

Teoria da gravitação inspirada no modelo de Born-Infeld para o eletromagnetismo / Eloan do Nascimento França. - 2022.
86 f.: il.

Monografia (graduação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Curso de Física Bacharelado. Natal, RN, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Leandro Ibiapina Beviláqua.

1. Eletromagnetismo - Monografia. 2. Relatividade geral - Monografia. 3. Gravidade - Monografia. 4. Born-Infeld - Monografia. I. Beviláqua, Leandro Ibiapina. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 537.6/.8

Eloan do Nascimento França

Teoria da gravitação inspirada no modelo de Born-Infeld para o eletromagnetismo

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Física Teórica e Experimental do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasil, 21 de Julho de 2022:

Prof. Dr. Leandro Ibiapina Beviláqua
Orientador

Prof. Dr. Emanuele Orazi
Convidado 1

Prof. Dr. Léo Gouvêa Medeiros
Convidado 2

Brasil
Julho 2022

Aos meus sobrinhos Ariel Liz, Miguel Aslan e Heitor Filipe, às minhas enteadas Marina Sophie e Vânia Caroline, e a todas as crianças sonhadoras, pois nos sonhos delas reside o futuro.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a DEUS acima de tudo, depois ao meu orientador por sua paciência, dedicação e disposição para me guiar em meus primeiros passos na direção da teoria de campos e em especial nesse trabalho, à Julia que durante todo o período de curso foi mais que uma colega, se tornou uma amiga, uma irmã, a Leandro Matheus pelas conversas estimulantes na cantina do DFTE, à Déborah minha esposa, parceira, amiga e confidente e a minha mainha Marinete, que é mãe e pai ao mesmo tempo, por não me deixarem desistir quando as coisas ficaram difíceis.

A todos, o meu muito obrigado, sem vocês nada disso seria possível.

*Somos aquilo que fazemos consistentemente.
Assim, a excelência não é um ato, mas sim um hábito.
(Aristóteles)*

Resumo

Nesse trabalho fazemos uma abordagem breve e sucinta sobre a teoria da relatividade geral de Einstein e o eletromagnetismo clássico de Maxwell através do formalismo da teoria clássica de campos, o intuito é elencar propriedades que as caracterizem e permitam modificações em altas energias. Sabe-se que tanto o eletromagnetismo quanto a relatividade geral apresentam problemas de divergências em altas energias, portanto, apresentamos aqui as teorias de Born-Infeld e Eddington-inspired-Born-Infeld como alternativas com modificações em altas energias dessas teorias, mostrando como elas solucionam os problemas de divergência presentes nas teorias clássicas de Maxwell e Einstein.

Palavras-chave: eletromagnetismo, relatividade geral, gravidade, Born-Infeld.

Abstract

In this work we make a brief and succinct approach to Einstein's general theory of relativity and Maxwell's classical electromagnetism through the formalism of classical field theory, the aim is to list properties that characterize them and allow modifications at high energies. It is known that both electromagnetism and general relativity have divergence problems at high energies, therefore, we present here the Born-Infeld and Eddington-inspired-Born-Infeld theories as alternatives with modifications at high energies of these theories, showing how they solve the divergence problems present in the classical theories of Maxwell and Einstein.

Keywords: electromagnetism, general relativity, gravity, Born-Infeld.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
I	TEORIAS NÃO MODIFICADAS	21
2	ELETROMAGNETISMO DE MAXWELL	23
2.1	Ação da partícula relativística sujeita a um campo vetorial	23
2.2	Equações de movimento da partícula e equações de Maxwell	25
2.3	A ação de Maxwell	27
2.4	Energia armazenada no campo eletromagnético	28
2.5	Lei de Coulomb e a auto-energia de uma carga pontual	31
3	GRAVITAÇÃO DE EINSTEIN	33
3.1	Partícula sujeita a um campo gravitacional	33
3.2	Princípio da covariância geral	36
3.3	Curvatura	37
3.4	A ação de Einstein-Hilbert	40
3.5	Solução de buracos negros e suas singularidades	43
3.5.1	Solução de Schwarzschild	45
3.5.2	Solução de Reissner-Nordstrom	47
3.6	Formalismo de Palatini	51
II	TEORIAS MODIFICADAS	55
4	ELETRODINÂMICA DE BORN-INFELD	57
4.1	A ação de Born-Infeld	57
4.2	Equações de Campo e Lei de Conservação	61
4.2.1	Tensor Energia-Momento	61
4.2.2	Forma Vetorial das Equações de Campo	63
4.2.3	Solução Estática das Equações de Campo	63
4.3	Auto-energia de uma carga pontual	65
5	GRAVITAÇÃO DE EDDINGTON INSPIRADA EM BORN-INFELD (EIBI)	67
5.1	A ação de Einstein-Hilbert na forma de Eddington	67
5.2	A ação de Eddington com modificações	68

5.3	A métrica auxiliar e as equações de Movimento	70
5.4	Solução para Buracos Negros carregados	74
III	CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
	REFERÊNCIAS	87

1 Introdução

A *Teoria da Relatividade Geral* (TRG), formulada por Einstein em 1915-1916 (EINSTEIN, 1916), é sem dúvidas uma das mais bem sucedidas teorias físicas. Entre seus sucessos, podemos citar a descrição precisa do periélio de Mercúrio e a previsão das lentes gravitacionais, ondas gravitacionais e buracos negros. A TRG explica satisfatoriamente a dinâmica de corpos celestes conhecidos. A teoria de Einstein tem pouco mais de um século, e tem sido um dos pilares fundamentais da física moderna.

No entanto, a TRG não é uma teoria definitiva da gravitação já que há razões teóricas e observacionais para a necessidade de uma modificação da teoria. Em largas escalas, a cosmologia observacional constatou que a velocidade do movimento de poeira e gás que compõem as galáxias é bem maior do que se espera teoricamente. Uma possível explicação é postular a existência de uma matéria que não interage com o eletromagnetismo mas sua interação gravitacional pode ser percebida, o excesso de matéria é chamado matéria escura (SALUCCI, 2019). Esse novo tipo de matéria seria responsável pela maior parte da matéria existente no universo. Além disso, enquanto a expansão do universo é parte fundamental da teoria de Einstein através da constante cosmológica (Λ), matéria e inflação demandam elementos adicionais à TRG, levando a extrapolações em domínios onde ela não foi devidamente testada. Modelos como as chamadas teorias $f(R)$ propõem modificar a teoria de Einstein adicionando novos termos na ação que respeitem as simetrias da TRG.

Já em pequenas escalas, a própria estrutura da TRG prevê a inevitável existência de singularidades no espaço-tempo. Tais singularidades costumam se apresentar como termos divergentes na métrica do espaço-tempo que persistem em qualquer sistema de coordenadas, por exemplo, nos interiores de buracos negros e uma singularidade primordial no início do universo (HAWKING; ELLIS, 1973).

Um problema semelhante ocorre também na teoria de Maxwell do eletromagnetismo onde, ao calcular a auto-energia de uma carga pontual, encontramos uma divergência. Wendell Furry e Robert Oppenheimer propuseram que nessa escala de energia efeitos quânticos polarizavam o vácuo e levando isso em conta calcularam a auto-energia de uma carga pontual encontrando um valor finito (FURRY; OPPENHEIMER, 1934). Entretanto, a divergência na auto-energia pode ser removida ainda no contexto clássico, conforme mostraram Max Born e Leopold Infeld, que apresentaram uma teoria alternativa do eletromagnetismo que coincide com a teoria de Maxwell para campos fracos mas sem singularidades (BORN; INFELD, 1934).

Esperamos que modelos de gravidade quântica possam regularizar singularidades essenciais. No entanto, dada a dificuldade de encontrar uma teoria quântica satisfatória

para a gravidade, seria interessante uma abordagem clássica para o problema.

Dado o sucesso que a teoria de Born-Infeld teve em regularizar divergências no eletromagnetismo, Stanley Deser e Gary Gibbons propuseram abordar modificações na TRG inspiradas no formalismo de Born-Infeld (DESER; GIBBONS, 1998). No entanto, instabilidades surgiram na teoria modificada e foi necessária a adição de um novo termo para corrigir o problema, mas a adição desse termo sem qualquer princípio físico que o justificasse tornava a ideia pouco atraente se comparada ao seu análogo eletromagnético.

Alguns anos mais tarde, Dan Vollick reconsiderou as modificações propostas por Deser e Gibbons de uma outra perspectiva que não necessitava da adição de um termo extra. Diferente do que fizeram Deser e Gibbons, Vollick tratou a conexão e a métrica como entes independentes usando o formalismo de Palatini (VOLLICK, 2004), basicamente combinando as ideias de Born-Infeld com a teoria da gravidade puramente afim originalmente proposta por Eddington (EDDINGTON, 1930).

Dando continuidade a essas ideias, Máximo Bañados e Pedro Ferreira fizeram a inclusão da constante cosmológica na teoria de *Eddington inspirada em Born-Infeld* (EiBI), como é hoje conhecida, e mostraram a existência de soluções não singulares em situações nas quais havia singularidades de acordo com a teoria de Einstein (BAÑADOS; FERREIRA, 2010). Desnecessário dizer que essa qualidade em particular fez com que a teoria ganhasse mais destaque a partir de então e começasse a ser bem mais explorada em diferentes contextos com resultados promissores.

Levando em conta essa atenção que vem sendo dada ao formalismo de Born-Infeld, e tomando a teoria EiBI como base, pois é a teoria mais amplamente estudada, Jose Jiménez, Lavinia Heisenberg, Gonzalo Olmo e Diego Rubiera-Garcia propuseram uma classificação para as teorias de Born-Infeld baseadas em quão próximo estão da proposta original (JIMÉNEZ et al., 2017). Resumidamente, chamam de **Classe 0** todas as tentativas que não foram bem sucedidas, apresentando patologias, **Classe I** as teorias que se aproximam da teoria EiBI, ou seja, que não demandam objetos geométricos adicionais ou graus de liberdade adicionais, **Classe II** as teorias de EiBI com objetos geométricos adicionais mas sem adição de mais graus de liberdade, **Classe III** as teorias EiBI com mais graus de liberdade adicionados, e por fim **Classe IV** qualquer teoria mais geral que possa ser associada a teoria de Born-Infeld em algum aspecto.

Nesse trabalho, abordaremos a teoria de Born-Infeld para o eletromagnetismo, e estudaremos sua aplicação na gravitação de forma similar aos trabalhos de Vollick, Bañados e Ferreira.

Com o intuito de fixar a notação e abordar o método de construção de uma teoria física focada em suas simetrias, a primeira parte desse trabalho visa apresentar as teorias não modificadas. Começando pelo capítulo 2, no qual revisaremos o eletromagnetismo

de Maxwell, apontando o problema da singularidade no cálculo da auto-energia de uma carga pontual. No capítulo 3, faremos uma pequena revisão de relatividade geral visando mostrar a conexão entre a interação gravitacional e a geometria do espaço-tempo. Nesse capítulo, apresentaremos os principais pontos na teoria que nos permitem visualizar e caracterizar os problemas de singularidades. Ainda no capítulo 3, mostraremos as soluções de buracos negros com simetria esférica e a presença de singularidades neles.

Na segunda parte do trabalho, iniciando com o capítulo 4, reconstituiremos os passos adotados por Born e Infeld ao eletromagnetismo. Mostraremos como as modificações resolvem o problema da auto-energia mostrada no capítulo 2. Finalmente, no capítulo 5 estudaremos uma teoria de Classe I e uma solução de buraco negro com simetria esférica, discutindo em que sentido elas resolvem os problemas de singularidades.

Notação

Nesse trabalho, convencionamos a seguinte notação abordada no decorrer do texto: índices gregos μ, ν, \dots, ρ denotam as coordenadas espaço-temporais e variam de 0 a 3 enquanto índices latinos i, j, k , variando de 1 a 3, denotam as coordenadas espaciais, índices repetidos são somados conforme a convenção de Einstein, quando necessário explicitar uma componente específica de algum tensor usaremos a própria coordenada no lugar dos números (ex: $T_{r\theta}$ para as coordenadas r e θ), o tensor métrico plano em um sistema de coordenadas curvilíneas arbitrárias é dado por $\bar{\eta}_{\mu\nu}$ enquanto $\eta_{\mu\nu}$ é o mesmo tensor em coordenadas cartesianas, por sua vez, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico no espaço-tempo curvo, em qualquer sistema de coordenadas, em todo o texto a assinatura da métrica é -2 , ou seja, $(+, -, -, -)$, uma integral realizada sobre o elemento d^3x é uma integral sobre todas as coordenadas espaciais, enquanto que uma integral realizada sobre o elemento d^4x é realizada sobre todas as coordenadas espaciais mais o tempo, exceto quando as coordenadas forem explicitadas os limites de integração são omitidos, exceto quando o contrário for dito, não usaremos unidades naturais iguais a 1.

Parte I

TEORIAS NÃO MODIFICADAS

2 Eletromagnetismo de Maxwell

Nesse capítulo, descreveremos o eletromagnetismo como uma teoria de campo que pode ser desenvolvida a partir de duas simetrias fundamentais: invariância por transformações de Lorentz, o que a torna uma teoria relativística e implica nas conservações de momento e energia, e invariância de calibre¹ que, como veremos adiante, implica na conservação de carga e corrente. Em seguida verificaremos que a energia para uma carga pontual diverge, problema que será discutido aqui, mas cuja solução (clássica) para resolvê-lo só será abordada nos capítulos subsequentes.

2.1 Ação da partícula relativística sujeita a um campo vetorial

Com a finalidade de estudar o eletromagnetismo clássico a partir de suas propriedades como teoria de campo, tratemos da dinâmica de uma partícula relativística sujeita a um quadripotencial que chamaremos de A e que interage com a partícula. Começaremos com a ação de uma partícula livre no espaço-tempo e em seguida adicionaremos o termo de interação com campo vetorial A_μ .

Sabemos que, em relatividade especial, o intervalo $ds^2 = \bar{\eta}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ mantém o mesmo valor em qualquer referencial inercial e também que o menor intervalo de tempo entre dois eventos dados é o intervalo de tempo próprio, que é medido no referencial de repouso da partícula, de modo que nesse referencial, temos $ds^2 = c^2 d\tau^2$. Uma vez que a ação clássica é a integral da lagrangiana no tempo, de tal modo que sua extremização minimiza a trajetória, postulamos que a ação da partícula livre relativística no referencial de repouso deve ser proporcional à integral no tempo próprio. Temos no referencial de repouso $|d\tau| = c^{-1}|ds|$, o que significa que a ação proposta é proporcional ao comprimento de arco. Recordemos que a menor distância entre dois pontos é dada pela extremização do comprimento de arco, logo a ação relativística que propomos é condizente com as noções físicas pré-relativística já conhecidas. Assim a partícula não estando sujeita a nenhuma interação, em um referencial inercial, tem seu movimento dado pela extremização do comprimento de arco, no espaço-tempo de Minkowski de um certo ponto (evento) s_1 até outro s_2 . Dessa forma, temos para a partícula livre a ação

$$S_{livre} = \lambda \int_{s_1}^{s_2} ds = \lambda \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\bar{\eta}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \quad (2.1)$$

No limite de baixas velocidades devemos recuperar a lagrangiana não relativística, ou seja: $L = \frac{1}{2}mv^2$. Para $v \ll c$ temos:

¹ Em alguns textos em português, utiliza-se o termo em inglês *gauge*.

$$\lambda\sqrt{\bar{\eta}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = \lambda c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \lambda c\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = \lambda c - \frac{\lambda v^2}{2c} \quad (2.2)$$

de onde tiramos que devemos escolher $\lambda = -mc$. Para obter a equação de movimento da partícula relativística, extremizamos S_{livre} . A variação de (2.1) nos dá:

$$\delta S_{livre} = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \delta\dot{x}^\mu = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \delta x^\mu \quad (2.3)$$

para δx^μ arbitrário $\delta S_{livre} = 0$ nos dá o análogo relativístico da segunda lei de Newton:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = 0 \quad \text{ou ainda:} \quad \dot{p}_\mu = 0 \quad \text{onde:} \quad p_\mu = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.4)$$

Para a interação, considere um quadripotencial $A_\mu(x)$ que depende das coordenadas espaço-temporais (e não da velocidade nem explicitamente do tempo próprio). De modo análogo à definição de trabalho, com A_μ fazendo o papel da força, podemos construir um escalar contraindo A_μ com o elemento infinitesimal dx^μ e integrando para formar uma integral de linha ao longo da trajetória entre os pontos (eventos) s_1 e s_2 :

$$S_{int} = \lambda' \int_{s_1}^{s_2} dx^\mu A_\mu(x) \quad (2.5)$$

onde λ' é uma constante a ser determinada.

Naturalmente, podemos parametrizar as coordenadas x^μ pelo tempo próprio τ e escrever: $dx^\mu = \dot{x}^\mu d\tau$, assim a dinâmica da partícula será dada pela soma desses termos: $S = S_{livre} + S_{int}$ como segue:

$$S = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(mc\sqrt{\bar{\eta}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} - \lambda' \dot{x}^\mu A_\mu \right). \quad (2.6)$$

É fato conhecido que, no cálculo de variações para uma lagrangiana L a transformação: $L + \alpha\dot{\Phi}$ (onde α é uma constante arbitrária e $\dot{\Phi}$ é a derivada total de uma função Φ qualquer das coordenadas em relação ao tempo próprio) mantém invariante as equações de movimento. A razão é bem simples: uma vez que a ação é uma integral definida no tempo próprio, a adição dessa derivada total, integrada, resulta numa constante, que é identicamente nula quando variamos a ação, portanto, L e $L + \alpha\dot{\Phi}$ são fisicamente equivalentes resultando nas mesmas equações de movimento. Sabendo disso é que podemos escrever usando a regra da cadeia para derivada

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \dot{x}^\mu \partial_\mu \Phi \quad (2.7)$$

podemos escolher $\alpha = \lambda'$ e construir a seguinte ação equivalente:

$$S = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} - \lambda' \dot{x}^\mu (A_\mu + \partial_\mu \Phi) \right] \quad (2.8)$$

ou seja, as equações de movimento serão as mesmas quer usemos o potencial $A_\mu(x)$ ou $A_\mu(x) + \partial_\mu \Phi(x)$, a essa liberdade na escolha do potencial denominamos: *invariância de calibre* e adiante discutiremos implicações físicas dessa simetria.

2.2 Equações de movimento da partícula e equações de Maxwell

Até o presente momento, nada na ação (2.6) identifica nossa dinâmica como sendo aquela de uma partícula sujeita a um campo eletromagnético. Porém, sabemos que a equação que governa a dinâmica de uma partícula sujeita à atuação do campo eletromagnético é dada pela *força de Lorentz*:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.9)$$

Assim, ao obtermos a equação de movimento advinda de (2.6), podemos comparar termo a termo com (2.9) e identificar a relação entre o quadrivetor A_μ e as componentes dos campos \vec{E} e \vec{B} . Igualando a variação da ação (2.6) a zero, obtemos:

$$\delta S = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\left(\frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \lambda' A_\mu \right) \delta \dot{x}^\mu - \lambda' \dot{x}^\nu \partial_\mu A_\nu \delta x^\mu \right] \quad (2.10)$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) + \lambda' \dot{x}^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right] \delta x^\mu = 0, \quad (2.11)$$

que deve valer para um $\delta x^\mu \neq 0$ arbitrário, e assim encontramos a equação de movimento:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{m\dot{x}_\nu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \lambda' \dot{x}^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \lambda' \dot{x}^\mu F_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

em que observamos que o argumento da derivada no lado esquerdo da equação (2.12) é o quadrimomento da partícula e no lado direito introduzimos o tensor antissimétrico de rank 2

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.13)$$

que possui no máximo 6 componentes independentes.

Uma vez que estamos tratando da dinâmica da partícula sujeita à ação do campo eletromagnético, e sabendo que a força eletromagnética é dada por (2.9) podemos identificar essas 6 componentes independentes de $F_{\mu\nu}$ às componentes dos vetores \vec{E} e \vec{B} da teoria

de Maxwell. Primeiro levemos em conta apenas os índices espaciais em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} F_{yz} &= \partial_y A_z - \partial_z A_y = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x \\ F_{zx} &= \partial_z A_x - \partial_x A_z = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y \\ F_{xy} &= \partial_x A_y - \partial_y A_x = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z \end{aligned} \quad (2.14)$$

de onde vemos que as componentes espaciais F_{ij} formam o vetor $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ e o produto $\dot{x}^i F_{ij}$ formam as componentes de $\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$. Assim, comparando com (2.9) vemos que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$. As três componentes independentes restantes de $F_{\mu\nu}$ formam as componentes do vetor $\dot{x}^t F_{ti} = cF_{ti}$ que devem ser associadas ao vetor \vec{E} e $\lambda' = q$ é a carga da partícula. Assim, as componentes $F_{\mu\nu}$ são:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

$F_{\mu\nu}$ é denominado *tensor de Faraday* e ele convenientemente relaciona os campos \vec{E} e \vec{B} em um único objeto relativístico.

Para que a dinâmica da partícula possa ser determinada, basta que \vec{E} e \vec{B} sejam conhecidos. Do teorema de Helmholtz sabemos que qualquer campo vetorial fica completamente definido se conhecemos o seu divergente e o seu rotacional. Usando a definição de $F_{\mu\nu}$ em (2.13) juntamente com (2.15) podemos explicitar os campos em termos de A_μ :

$$\vec{E} = c\vec{\nabla}A_0 - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.16)$$

Usando as propriedades do cálculo vetorial,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}A_0 = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (2.17)$$

obtemos as seguintes equações para \vec{E} e para \vec{B} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.18)$$

que são duas das quatro equações de Maxwell. Essas duas equações justificam o nome tensor de Faraday definido anteriormente, e emergem exclusivamente da propriedade de antissimetria do tensor $F_{\mu\nu}$. Com o auxílio de (2.15) podemos escrever a expressão covariante dessas duas equações:

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.19)$$

essa identidade é conhecida como *Identidade de Bianchi* para $F_{\mu\nu}$.

Para que \vec{B} e \vec{E} sejam completamente conhecidos ainda precisamos determinar $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Observe que:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{B})^i &= (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A})^i \\ &= [\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}]^i \\ &= \partial^i \partial_j A^j - \partial^j \partial_j A^i \\ &= \partial_j (\partial^i A^j - \partial^j A^i) \\ &= \partial_j F^{ij} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \partial_i E^i \\ &= c \partial_i F^{it} \\ &= -c \partial_i F^{ti} \end{aligned} \quad (2.21)$$

de onde podemos generalizar: $\partial_\nu F^{\nu\mu}$ e dessa forma expressar as equações de Maxwell no vácuo em formulação covariante:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.22a)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.22b)$$

as equações em (2.22) são equivalentes as equações:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.23a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \quad (2.23b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.23c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}. \quad (2.23d)$$

2.3 A ação de Maxwell

As equações (2.22), além de mais compactas que as equações (2.23), evidenciam a natureza relativística do eletromagnetismo, uma vez que são expressas em termos de tensores. Outra característica que fica clara nas equações de Maxwell escritas em termos

do tensor $F_{\mu\nu}$ em (2.22) que não é tão explícita nas equações (2.23) é a sua invariância de calibre, uma vez que o tensor $F_{\mu\nu}$ é invariante quando substituimos A_μ por $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Phi$, onde Φ é qualquer função escalar contínua, sendo essas duas características a motivação para esse capítulo.

Focaremos nossa atenção agora na ação cuja variação reproduza a equação (2.22a), e que tenha as propriedades de invariância de Lorentz e seja invariante por transformações de calibre. Nossos objetivos em determinar a ação do campo, ou mais sucintamente, a ação de Maxwell são, primeiramente, demonstrar a relação entre a invariância de calibre e a conservação da quadricorrente, bem como encontrar uma expressão que será usada para modificação da teoria futuramente.

A ação mais simples seguindo esses requerimentos é:

$$S(A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = \int d^4x \left(\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J_\mu A^\mu \right) \quad (2.24)$$

onde $J^\nu = (c\rho, -\vec{J})$ é a quadricorrente que descreve a fonte do campo eletromagnético.

A ação (2.24) é invariante de Lorentz já que é um escalar e, uma vez que $F_{\mu\nu}$ é invariante por transformações de calibre, o primeiro termo da ação também é invariante. No entanto, ao aplicarmos a transformação $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\Phi$, o último termo provoca uma transformação na ação:

$$S \rightarrow S + \int d^4x J_\mu \partial^\mu \Phi. \quad (2.25)$$

Assim, para que a ação seja invariante sob transformações de calibre, a integral na última expressão precisa ser nula. Integrando por partes e observando que J_μ se anula na fronteira (ou seja, no infinito não deve existir cargas ou correntes), temos para uma função arbitrária Φ :

$$\partial^\mu J_\mu = 0, \quad \text{ou de forma explícita,} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.26)$$

observamos que a equação (2.26) é claramente a equação de continuidade da carga/corrente elétrica, ou seja, a invariância de calibre implica na conservação da carga/corrente.

2.4 Energia armazenada no campo eletromagnético

Conforme mencionado no início deste capítulo, pretendemos mostrar que a teoria de Maxwell possui uma divergência na auto-energia de uma carga pontual. Nessa seção nos propomos a demonstrar isso. Para tanto, devemos deduzir as expressões para a energia armazenada no campo eletromagnético. Usando duas das equações de Maxwell, (2.23b) e (2.23d), temos:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) = 0 \quad (2.27a)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \right) = 0 \quad (2.27b)$$

subtraindo a segunda equação (2.27b) da primeira (2.27a) encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} [\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})] = 0 \quad (2.28)$$

por fim, levando em consideração que $\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$ e fazendo as definições

$$\vec{S} := \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad \text{e} \quad \rho_E := \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \quad (2.29)$$

podemos reescrever a equação (2.28) em uma forma mais compacta:

$$\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0. \quad (2.30)$$

Observe que temos aqui uma equação de continuidade similar a (2.26) com ρ_E fazendo o papel da densidade de carga e \vec{S} fazendo o papel de densidade de corrente, ρ_E é a densidade volumétrica de energia armazenada no campo, enquanto \vec{S} é a densidade superficial, ou fluxo, de energia por unidade de tempo, o vetor \vec{S} é chamado *vetor de Poynting*.

Com isso, podemos calcular a energia total W armazenada nos campos \vec{E} e \vec{B} integrando ρ_E em todo o espaço:

$$W = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) \quad (2.31)$$

dessa forma, conhecendo os campos \vec{E} e \vec{B} podemos calcular a energia armazenada no campo eletromagnético.

É interessante escrever (2.31) em uma linguagem covariante, em termos do tensor energia-momento, já que este desempenha um papel importante no contexto relativístico. Começemos multiplicando a identidade (2.19) por $F^{\nu\rho}$ para obter

$$F^{\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} + 2F^{\rho\nu} \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.32)$$

e, notando que

$$F^{\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} = \partial_\mu \left(\frac{1}{2} F^{\nu\rho} F_{\nu\rho} \right), \quad (2.33)$$

e que

$$F^{\rho\nu}\partial_\rho F_{\mu\nu} = \partial_\rho (F^{\rho\nu} F_{\mu\nu}) - F_{\mu\nu}\partial_\rho F^{\rho\nu} \quad (2.34)$$

$$= \partial_\rho (F^{\rho\nu} F_{\mu\nu}) - \mu_0 F_{\mu\nu} J^\nu, \quad (2.35)$$

podemos reescrever a equação (2.32) na forma:

$$\partial_\rho \left(\frac{1}{\mu_0} F^{\rho\nu} F_{\nu\mu} - \frac{1}{4\mu_0} \delta_\mu^\rho F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) + F_{\mu\nu} J^\nu = 0 \quad (2.36)$$

ou ainda:

$$\partial^\rho T_{\rho\mu} + F_{\mu\nu} J^\nu = 0 \quad \text{com} \quad T_{\rho\mu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_\rho^\nu F_{\nu\mu} - \frac{1}{4} \bar{\eta}_{\rho\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right). \quad (2.37)$$

Finalmente, escolhendo $\mu = t$ e usando as equações (2.15), (2.29) e (2.30) encontramos para $T_{\mu\nu}$:

$$T_{tt} = \rho_E \quad \text{e} \quad T_{it} = \frac{S_i}{c}. \quad (2.38)$$

Para as demais componentes podemos usar (2.37), juntamente com (2.15), para concluir que

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} |\vec{E}|^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} |\vec{B}|^2 \right) \quad (2.39)$$

conhecido como tensor de tensões de Maxwell ².

Note que com isso podemos reproduzir as equações acima usando o vetor de Poynting \vec{S} e a densidade de energia ρ_E em uma única equação tensorial para $T_{\mu\nu}$. A equação (2.38) nos permite escrever (2.31) como:

$$W = \int d^3x T_{tt} \quad (2.40)$$

A importância dessa equação para nós se deve ao fato de que em teorias modificadas, quando encontrarmos uma expressão válida para o tensor energia-momento, poderemos conhecer o valor da energia W armazenada nos campos eletromagnéticos apenas integrando a componente T_{tt} do tensor energia-momento em todo o espaço.

² Maxwell Stress Tensor.

2.5 Lei de Coulomb e a auto-energia de uma carga pontual

Analisemos agora o caso de uma carga pontual em repouso ($\vec{B} = \vec{0}$), no vácuo ($\rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$), de modo que as equações de Maxwell (2.23) se reduzem a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}. \quad (2.41)$$

Uma vez que a partícula não possui energia cinética, sua energia total é a energia armazenada no campo. Por outro lado, a energia total de uma partícula em repouso livre da atuação de forças é igual a sua energia de repouso. Assim, a energia de repouso da partícula é igual a energia armazenada no campo \vec{E} .

Por se tratar de uma partícula pontual, a configuração do campo \vec{E} tem simetria esférica, então, em coordenadas esféricas, temos que $E_\theta = E_\phi = 0$ e

$$\frac{d}{dr}(r^2 E_r) = 0 \quad (2.42)$$

cujas soluções são naturalmente constantes que adotaremos como sendo proporcionais a carga elementar e da partícula:

$$E_r = \frac{\kappa}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \quad (2.43)$$

usando a equação (2.31) a energia W para o campo de Coulomb E_r é dado por:

$$W = \int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^\infty dr \frac{r^2}{2} \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \right)^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} \rightarrow \infty \quad (2.44)$$

essa expressão descreve a energia armazenada no campo elétrico \vec{E} , produzido por uma carga pontual e , que por hipótese é igual à energia de repouso da partícula, uma vez que a mesma encontra-se em seu referencial de repouso e não está sujeita a forças externas, mas não é o que se verifica.

Em 1934, Max Born e Leopold Infeld usaram esse problema como motivação para modificar as equações de Maxwell para campos fortes (BORN; INFELD, 1934), prevalecendo as conhecidas equações do eletromagnetismo para campos fracos, que são os que experimentamos no cotidiano e para os quais as leis de Maxwell se mostram satisfatórias. Embora o problema da divergência da auto-energia possa ser resolvido por uma descrição quântica, mantendo as equações de Maxwell intactas, o formalismo desenvolvido por eles se mostra útil e aplicável em outros casos como a gravitação, que permanece em aberto. No próximo capítulo discutiremos essa teoria e suas consequências no problema da carga pontual e, em seguida, abordaremos sua aplicação para a gravitação.

3 Gravitação de Einstein

A teoria geral da relatividade (TRG) é construída a partir do princípio da Equivalência, que afirma que não há experimento capaz de distinguir um referencial uniformemente acelerado de um referencial sob a atuação de um campo gravitacional uniforme, ou ainda, se o referencial for acelerado em direção oposta à atuação do campo, com uma aceleração de mesmo módulo do campo, um observador estaria efetivamente em um referencial inercial.

Esse princípio nos permite dizer que a interação gravitacional se distingue da eletromagnética por não depender das propriedades físicas da partícula que sofre a ação do campo, passando a ser compreendida como uma propriedade do espaço-tempo. Tal resultado é consistente com as observações de que dois corpos de massas diferentes caem com a mesma aceleração quando sujeitas a gravidade terrestre. Isso confere à gravitação um caráter universal.

Assim como vimos no eletromagnetismo de Maxwell, temos na teoria newtoniana dois conjuntos de equações para a descrição do fenômeno gravitacional: as equações que descrevem a trajetória de uma partícula sujeita a um campo gravitacional e outras equações que descrevem a dinâmica do próprio campo em termos da fonte (equação de Poisson). Nesse capítulo, veremos como essas equações devem ser modificadas para estarem de acordo com o princípio da equivalência.

3.1 Partícula sujeita a um campo gravitacional

No intuito de construir a trajetória de uma partícula pontual, tomemos como ponto de partida a definição matemática da lei da gravitação universal de Newton:

$$\vec{F}(r, \theta, \phi) = -\frac{G_N M m}{r^2} \hat{r} \quad (3.1)$$

onde G_N é a constante gravitacional de Newton, e estamos considerando por questões de simplicidade que o corpo de massa M está posicionado na origem do sistema de coordenadas e a partícula de massa¹ m posicionada a uma distância r dele, além disso $M \gg m$. Sendo \vec{F} uma força central e conservativa podemos encontrar o potencial gravitacional:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\hat{r} \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{G_N M m}{r^2} \hat{r} \quad \Rightarrow \quad U(r) = -\frac{G_N M m}{r} \quad (3.2)$$

e definir:

¹ Não distinguiremos massa inercial de massa gravitacional, portanto, nenhum índice será adicionado à massa m da partícula sujeita ao campo gerado pela massa M .

$$U(r) := m\varphi(r) \quad \text{com:} \quad \varphi(r) = -\frac{G_N M}{r}. \quad (3.3)$$

De posse de uma expressão para a energia potencial gravitacional $U(r)$ podemos escrever a lagrangiana: $L = \frac{1}{2}mv^2 - m\varphi(r)$ e por fim a ação de uma partícula sujeita a um campo gravitacional em coordenadas esféricas:

$$S = m \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{2}v^2 - \varphi \right), \quad \text{com:} \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2. \quad (3.4)$$

Queremos agora generalizar a gravidade para uma dinâmica relativística. Assim como fizemos na seção 2.1, iniciamos substituindo a lagrangiana da partícula livre: ($L = \frac{1}{2}mv^2$) por sua versão relativística: ($L = -mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$) e em seguida discutiremos sua dinâmica sujeita a um campo gravitacional seguindo as ideias discutidas no livro do Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1971).

A versão relativística de (3.4) é:

$$S = -mc \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} + \frac{\varphi}{c} \right). \quad (3.5)$$

No limite de baixas velocidades, utilizamos a expansão: $(1+x)^n \approx 1+nx$ para escrever:

$$\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx c \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right), \quad (3.6)$$

de modo que a ação em (3.5) fica escrita na forma:

$$S \approx -mc \int_{t_1}^{t_2} c dt \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{\varphi}{c^2} \right). \quad (3.7)$$

Como discutido na seção 2.1 (onde concluímos que a ação da partícula livre era proporcional ao intervalo ds que por sua vez é um invariante e no referencial de repouso da partícula é $ds = cd\tau$) buscamos aqui também escrever (3.7) na forma $S \propto \int ds$ identificando ds através de:

$$\begin{aligned} ds_g^2 &= \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{\varphi}{c^2} \right)^2 c^2 dt^2 \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{4c^4} + \frac{2\varphi}{c^2} - \frac{\varphi v^2}{c^4} + \frac{\varphi^2}{c^4} \right) c^2 dt^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

ou ainda, no limite newtoniano em que temos baixas velocidades ($v \ll c$) e campo gravitacional fraco ($\varphi \ll c^2$),

$$ds^2 = c^2 dt^2 + \left(-v^2 + \frac{v^4}{4c^2} + 2\varphi - \frac{\varphi v^2}{c^2} + \frac{\varphi^2}{c^2} \right) dt^2 \approx c^2 dt^2 - (v^2 - 2\varphi) dt^2. \quad (3.9)$$

Usando $v^2 dt^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$, escrevemos finalmente:

$$ds^2 \approx \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.10)$$

Observe que a equação (3.10) é consistente com o princípio da equivalência e a interpretação da gravitação como uma propriedade do espaço-tempo. Aqui não há uma força atuando sobre uma partícula, em seu lugar, o potencial φ entra como parte da geometria do espaço-tempo fazendo com que uma partícula sujeita ao campo gravitacional seja uma partícula livre em um espaço-tempo curvo. A fonte modifica a geometria do espaço-tempo afetando a trajetória de todas as partículas na região de modo universal.

De um modo geral, o intervalo ds^2 é escrito na forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu \quad (3.11)$$

em que $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ é a métrica do espaço-tempo. A métrica (3.10) foi obtida considerando o limite de campo fraco e em baixas velocidades, o que é um caso bastante particular do campo gravitacional, em contrapartida, sua generalização em (3.11) descreve uma geometria arbitrária, acomodando as mais diversas configurações de campo gravitacional.

Para o caso particular das condições acima, temos $g_{\mu\nu} = \bar{\eta}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, com:

$$h_{tt} = \frac{2\varphi}{c^2} = -\frac{2G_N M}{c^2 r}, \quad h_{ti} = h_{ij} = 0 \quad (3.12)$$

e, no limite $\varphi \ll c$, podemos aproximar $g^{\mu\nu} = \bar{\eta}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ aproximação que será útil adiante.

Analisemos então a construção de uma cinemática para uma partícula que se move em um espaço-tempo descrito por uma métrica $g_{\mu\nu}$. Usando a equação (3.11) em (2.1) estenderemos o conceito de partícula livre em referenciais inerciais da relatividade especial para os referenciais localmente inerciais da relatividade geral, obtemos a ação de uma partícula livre no espaço-tempo curvo dada por:

$$\mathcal{S} = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds = -mc \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{g_{\mu\nu}(x^\lambda(\tau)) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (3.13)$$

esta ação descreve a trajetória da partícula livre em um espaço-tempo arbitrário.

A extremização dessa ação ($\delta\mathcal{S} = 0$) nos fornece a equação de movimento

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (3.14)$$

em que:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}). \quad (3.15)$$

Os $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ são chamados símbolos de Christoffel e não são tensores conforme veremos logo a seguir. Observe que, se $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{const} \Rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$ e recuperamos as leis da mecânica para a relatividade especial como caso particular, assim a equação da geodésica em (3.14) generaliza a mecânica em referenciais inerciais para referenciais localmente inerciais em relatividade geral.

3.2 Princípio da covariância geral

Em relatividade especial, o intervalo ds^2 representa a distância entre dois eventos no espaço pseudo-euclidiano quadridimensional de Minkowski, sendo ele definido como uma forma bilinear simétrica: $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ que é invariante por transformações da forma $\hat{\eta} = \hat{\Lambda}^T \hat{\eta} \hat{\Lambda}$ as transformações de Lorentz.

Para incluir a gravitação temos que o intervalo ds^2 é agora dado por (3.11), não sendo mais definido por uma métrica $\eta_{\mu\nu}$ constante e sim por uma métrica $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^{\lambda})$ que é função das coordenadas. Para que ds^2 seja invariante, é necessário uma transformação do tipo $\Lambda'_{\alpha}{}^{\mu} = \Lambda'_{\alpha}{}^{\mu}(x)$ de tal modo que

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = g'_{\alpha\beta}dx'^{\alpha}dx'^{\beta} \quad \text{com} \quad g'_{\alpha\beta} = \Lambda'_{\alpha}{}^{\mu}\Lambda'_{\beta}{}^{\nu}g_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad dx'^{\alpha} = \Lambda'_{\mu}{}^{\alpha}dx^{\mu} \quad (3.16)$$

se considerarmos as coordenadas \mathbf{x}' parametrizadas pelas coordenadas \mathbf{x} teremos:

$$dx'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}dx^{\beta} \quad \Rightarrow \quad \Lambda'_{\beta}{}^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Lambda'_{\beta}{}^{\alpha}(x) \quad (3.17)$$

assim exigimos a *invariância geral de coordenadas* como critério para generalização da relatividade.

Na geometria plana de Minkowski em coordenadas cartesianas, a métrica $\eta_{\mu\nu}$ e sua inversa $\eta^{\mu\nu}$ são constantes, o que significa que podemos ignorar o operador de derivação ∂_{μ} quando desejamos subir ou descer índices de tensores sendo derivados. Além disso, temos as transformações de Lorentz $\Lambda'_{\sigma}{}^{\rho}$ constantes, ou seja, também podem atuar sobre o argumento do operador ∂_{μ} , de modo que podemos fazer manipulações de índices e transformações de Lorentz em equações diferenciais de modo simples. O mesmo não acontece utilizando uma métrica $g_{\mu\nu}(x)$ e as transformações de coordenadas $\Lambda'_{\sigma}{}^{\rho}(x)$ que agora dependem das coordenadas x_{μ} . Para que possamos usar um algebrismo semelhante ao da relatividade especial, precisamos redefinir o operador de derivação $\partial_{\mu} \rightarrow \nabla_{\mu}(x)$ de tal forma que:

$$\nabla'_\mu A'_\nu = \Lambda'^\alpha_\mu \Lambda'^\beta_\nu \nabla_\alpha A_\beta \quad \forall A_\mu \quad (3.18a)$$

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad \forall g_{\mu\nu} \quad (3.18b)$$

(por simplicidade utilizamos apenas um vetor arbitrário A_μ , mas essas propriedades precisam ser satisfeitas para qualquer tensor de qualquer rank). A primeira equação pode ser satisfeita se definirmos:

$$\nabla_\mu A_\nu := \partial_\mu A_\nu - S^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda \quad (3.19)$$

$$\nabla_\mu A^\lambda := \partial_\mu A^\lambda + S^\lambda_{\mu\nu} A^\nu \quad (3.20)$$

com $S'^\lambda_{\mu\nu}$ se transformando segundo

$$S'^\lambda_{\mu\nu} = \Lambda'^\lambda_\sigma \Lambda'^\alpha_\mu \Lambda'^\beta_\nu S^\sigma_{\alpha\beta} - \Lambda'^\lambda_\sigma \Lambda'^\beta_\nu \partial_\beta \Lambda'^\sigma_\mu \quad (3.21)$$

conforme podemos notar o operador ∇_μ da forma que foi definido atende (3.18a). Chamamos o operador ∇ de *derivada covariante* e S de *conexão afim*. A equação (3.18b) corresponde a $\partial_\lambda \eta_{\mu\nu} = 0$ e é chamada de condição de metricidade. Se adicionalmente exigirmos simetria nos índices inferiores da conexão afim ($S^\lambda_{\mu\nu} = S^\lambda_{\nu\mu}$), a condição de metricidade (3.18b) nos leva a

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - S^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - S^\rho_{\nu\lambda} g_{\mu\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad S^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (3.22)$$

Nesse caso, vemos que $S^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, ou seja, os símbolos de Christoffel obtidos anteriormente são as conexões afim simétricas quando exigimos a condição de metricidade na geometria. Essa informação é bastante relevante para esse trabalho, pois ao modificar a teoria da relatividade precisamos abrir mão da condição de metricidade e isso implica que a conexão afim não será dada pela expressão (3.15).

3.3 Curvatura

Usando a regra da cadeia para escrever $\ddot{x}^\lambda = \dot{x}^\mu \partial_\mu \dot{x}^\lambda$ e colocando \dot{x}^μ em evidência em (3.14), podemos usar (3.19) para reescrever a equação da geodésica como:

$$\dot{x}^\mu \nabla_\mu \dot{x}^\lambda = D_\tau \dot{x}^\lambda = 0. \quad (3.23)$$

Portanto, uma vez que \dot{x}^μ é tangente à trajetória da partícula, então um dado vetor A_μ que satisfaça $D_\tau A_\mu = 0$ mantém um ângulo constante em relação a \dot{x}^μ , logo, nesse caso

dizemos que os vetores $A_\mu(\tau)$ e $A_\mu(\tau + \delta\tau)$ são paralelos². Assim definimos o *transporte paralelo* de um vetor qualquer A_μ ao longo de uma curva paramétrica \dot{x}_μ , mantendo a sua derivada $D_\tau = \dot{x}^\mu \nabla_\mu$ nula.

Agora levemos em consideração o transporte paralelo de um vetor arbitrário A_μ , ao longo de uma curva fechada. Intuitivamente, a imposição que estamos fazendo sobre a trajetória faz com que o caminho percorrido pelo vetor A_μ não seja uma geodésica, ou seja, $D_\tau \dot{x}^\lambda = a^\lambda \neq 0$. Além disso, uma vez que $\dot{x}^\lambda \dot{x}_\lambda = c^2$ temos que $a^\lambda \dot{x}_\lambda = 0$ e, portanto, o vetor a^λ é perpendicular à trajetória e a condição de que A_μ seja transportado paralelamente implica que $D_\tau(\dot{x}^\lambda A_\lambda) = a^\lambda A_\lambda$, o que nos diz que o ângulo entre o vetor A_μ e o vetor tangente \dot{x}^λ varia ao longo da curva e dessa forma não há garantias de que o vetor A_μ , ao voltar para o ponto de partida volte a sua direção original. De fato, a condição de que A_μ seja transportado paralelamente pode ser reescrita como $dA^\lambda = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^\nu dx^\mu$ e uma integração ao longo de uma curva fechada usando o teorema de Stokes nos dá:

$$\oint dA^\lambda = -\oint \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^\nu dx^\mu = \frac{1}{2} \int_\Sigma [\partial_\mu(\Gamma^\lambda_{\rho\nu} A^\nu) - \partial_\rho(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^\nu)] dx^\mu dx^\rho \quad (3.24)$$

expandindo as derivadas dos produtos na última integral em (3.24) e usando a condição de transporte paralelo ($\partial_\mu A^\lambda = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^\nu$) obtemos:

$$\oint dA^\lambda = \frac{1}{2} \int_\Sigma R^\lambda_{\rho\mu\nu} A^\nu dx^\mu dx^\rho \quad (3.25)$$

em que:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (3.26)$$

Observe que $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ é dado exclusivamente em função dos símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, que por sua vez são funções da métrica $g_{\mu\nu}$ (quando temos metricidade). O tensor $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ mede a *curvatura* do espaço-tempo e é denominado *tensor de curvatura de Riemann*. A condição necessária e suficiente para que o espaço seja plano é:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0, \quad (3.27)$$

afirmação que justifica o termo tensor de curvatura, e pode ser verificada na equação (3.25), já que fazendo $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$ teremos que a variação de A_μ ao longo de uma curva fechada qualquer será nula, o que significa que A_μ voltará a sua posição inicial quando voltar ao mesmo ponto de onde partiu. Se tomarmos o espaço-tempo de Minkowski, que afirmamos ser plano, e fizermos qualquer parametrização das coordenadas cartesianas (para esféricas, cilíndricas, toroidais, etc.) os $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ serão, em geral, diferentes de 0, mas para qualquer parametrização dessas teremos $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$ o que nos permite identificar o

² basta derivar o produto $\dot{x}^\lambda A_\lambda = \cos\theta$, onde θ é uma constante arbitrária, e usar a equação (3.23).

espaço-tempo plano, mesmo em coordenadas curvas. É interessante mencionar ainda que uma outra forma de obter o tensor de curvatura de Riemann é calcular o comutador das derivadas covariantes atuando sobre um vetor arbitrário B_σ :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]B_\sigma = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}B_\rho \quad \text{e} \quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu]B^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}B^\sigma \quad (3.28)$$

o cálculo explícito dos comutadores nos dará o mesmo resultado que a equação (3.26). Vale notar ainda que o tensor de Riemann satisfaz duas importantes identidades, denominadas *primeira e segunda identidades de Bianchi* respectivamente:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} + R^\rho{}_{\mu\nu\sigma} + R^\rho{}_{\nu\sigma\mu} = 0 \quad (3.29a)$$

$$\nabla_\lambda R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\rho{}_{\sigma\lambda\nu} + \nabla_\nu R^\rho{}_{\sigma\lambda\mu} = 0 \quad (3.29b)$$

observe em (3.26) que o tensor de Riemann é antissimétrico nos dois últimos índices $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho{}_{\sigma\nu\mu}$.

Para finalizar essa seção, vamos apresentar tensores importantes que podem ser obtidos através de contrações dos índices do tensor de Riemann.

A equação (3.29a) nos garante que a única contração não nula do índice contravariante com um dos seus índices covariantes é:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\rho\mu} + \Gamma^\rho{}_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \quad (3.30)$$

denominado *tensor de Ricci*, e fazendo uma segunda contração de modo a obter o traço do Ricci temos:

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu = R \quad (3.31)$$

conhecido como *escalar de Ricci*. Outro escalar de interesse é obtido a partir do tensor de Riemann (3.26) contraído com ele mesmo:

$$K = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} \quad \text{onde:} \quad R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\rho\alpha} R^\rho{}_{\beta\mu\nu} \quad (3.32)$$

a quantidade K é denominada *escalar de Kretschmann* (GKIGKITZIS, 2014). Escalares (como R e K) são especialmente importantes na análise de singularidades visto que são importantes para analisarmos a continuidade (ou descontinuidade) de equações envolvendo a métrica e/ou a curvatura. Uma vez que R e K não dependem das coordenadas escolhidas, eles servem para mensurar se um dado ponto é ou não uma singularidade real ou apenas um problema de escolha de coordenadas.

Por fim, usando a já discutida condição de metricidade ($\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$) podemos permutar o tensor métrico com as derivadas covariantes na segunda identidade de Bianchi contraindo os $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$'s, com algumas manipulações de índice, o uso das simetrias do tensor de Riemann e as equações (3.30) e (3.31) pode-se mostrar que:

$$\nabla_\sigma \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0 \quad (3.33)$$

o tensor entre parenteses é denominado *tensor de Einstein* e denotado por $G_{\mu\nu}$.

3.4 A ação de Einstein-Hilbert

Queremos agora construir uma ação que seja invariante por transformações de coordenadas e, uma vez que já estabelecemos a conexão gravidade-geometria, sabemos que a ação que procuramos deve depender, em princípio, apenas da métrica e da curvatura. Além disso, da lei de transformação tensorial sabemos que

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \hat{g}' = \hat{\Lambda}^T \hat{g} \hat{\Lambda} \quad \Rightarrow \quad g' = \det \hat{g}' = \det^2 \hat{\Lambda} \det \hat{g} = J^{-2} g \quad (3.34)$$

e, em particular, como $\det \hat{\eta} < 0$ temos que $\det \hat{g} < 0$ para qualquer métrica $g_{\mu\nu}$ (uma vez que localmente sempre podemos achar um referencial inercial), devemos ter que

$$\sqrt{-g'} = J^{-1} \sqrt{-g} \quad (3.35)$$

em que J é o Jacobiano da transformação. De forma similar, para o elemento de volume,

$$dx'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta \quad \Rightarrow \quad d^4 x' = J d^4 x. \quad (3.36)$$

Assim, concluímos que a estrutura $d^4 x' \sqrt{-g'} = d^4 x \sqrt{-g}$ é um invariante geral de coordenadas e, portanto, qualquer ação relativística precisa ter a forma:

$$S_G = \int d^4 x \sqrt{-g} \mathcal{L}(g, R) \quad (3.37)$$

desde que $\mathcal{L}(g, R)$ seja um escalar. Fazendo a variação desta ação obtemos:

$$\delta S_G = \int d^4 x [\sqrt{-g} \delta \mathcal{L} + (\delta \sqrt{-g}) \mathcal{L}] \quad (3.38)$$

Para encontrar $\delta \sqrt{-g}$ observamos que, para uma matriz quadrada \hat{M} ,

$$\begin{aligned} \ln(\det \hat{M}) &= \text{tr}(\ln \hat{M}) \\ \delta(\det \hat{M}) &= \det \hat{M} \text{tr}(\hat{M}^{-1} \delta \hat{M}) \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (3.39)$$

Assim a variação de S toma a forma:

$$\delta S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\delta\mathcal{L} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\mathcal{L} \right). \quad (3.40)$$

Vamos nos concentrar agora na lagrangiana \mathcal{L} . Na equação (3.12), vimos que no limite newtoniano temos que as componentes $g_{\mu\nu}$ são funções lineares do campo φ , sabendo que, nesse limite, a equação que governa a dinâmica do campo é a equação de Poisson ($\nabla^2\varphi = 4\pi G_N\mu$) concluímos que no limite newtoniano a equação de movimento é obtida a partir das derivadas de segunda ordem da métrica. Usemos esse fato como ponto de partida para a construção da lagrangiana \mathcal{L} . Se desejamos que as equações de movimento não possuam derivadas de ordem mais altas que dois, devemos ter contrações entre os tensores de curvatura (Riemann e Ricci) apenas com a métrica, visto que os tensores de curvatura são dados por termos envolvendo derivadas de ordem dois da métrica, o produto entre tensores de curvatura (Riemann-Riemann, Ricci-Ricci ou Riemann-Ricci) resultariam em equações de movimento com termos de quarta ordem ou superior.

Assim, existem apenas duas formas de construir escalares como contração dos objetos g e R , que são: $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ e $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R$. Logo, a forma mais geral para \mathcal{L} tem a seguinte expressão:

$$\mathcal{L} = \alpha_1 g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + \alpha_2 g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 4\alpha_1 + \alpha_2 R \quad (3.41)$$

onde α_1 e α_2 são constantes a serem determinadas. Para a variação de \mathcal{L} , temos:

$$\delta\mathcal{L} = \alpha_2\delta R = \alpha_2(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}) \quad (3.42)$$

substituindo (3.42) em (3.40) e rearranjando os termos obtemos:

$$\delta S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\alpha_2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) - 2\alpha_1 g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \alpha_2 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (3.43)$$

Para encontrar $\delta R_{\mu\nu}$ variamos a equação (3.26) e notando que, embora $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ não seja um tensor a diferença $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^{\prime\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho$ entre duas conexões infinitesimalmente próximas é, isso porque $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ transforma-se segundo a equação (3.34), obtemos:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho) \quad (3.44)$$

essa expressão é conhecida com *identidade de Palatini* e é extremamente útil para simplificar o cálculo da variação da lagrangiana de Einstein-Hilbert. Substituindo (3.44) na ação (3.43) e integrando o último termo por partes obtemos:

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\alpha_2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - 2\alpha_1 g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad - \alpha_2 \int d^4x \left[\nabla_\rho (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \nabla_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\rho\mu}^\nu \right], \end{aligned} \quad (3.45)$$

podemos observar na primeira integral que o termo que está multiplicado por α_2 corresponde ao tensor $G_{\mu\nu}$ e na última integral usando o fato que a derivada covariante da métrica é nula ($\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$) temos que essa integral é nula. O integrando do termo remanescente fica $\sqrt{-g}(\alpha_2 G_{\mu\nu} - 2\alpha_1 g_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}$. Definindo $\alpha_1 := -\frac{1}{2}\Lambda\alpha_2$ temos que a equação de movimento obtida de $\delta S_G = 0$ é:

$$\delta S_G = \alpha_2 \int d^4x \sqrt{-g} (G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (3.46)$$

que é a equação de campo de Einstein com constante cosmológica Λ . Assim, substituindo α_1 em (3.41) e depois em (3.37), obtemos finalmente a ação de Einstein-Hilbert:

$$S_G = \alpha_2 \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (3.47)$$

cuja variação nos dá (3.46). Para o caso não homogêneo, a ação completa seria da forma $S = S_G + S_{mat}$ onde S_{mat} seria a ação da fonte, cuja variação resultaria em $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \neq 0$. De uma forma um tanto heurística, mas facilmente verificável, podemos concluir que as equações de movimento seriam proporcionais ao tensor energia-momento:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{2\alpha_2} T_{\mu\nu} \quad \text{com} \quad T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} S_{mat}). \quad (3.48)$$

Os argumentos que embasam essa afirmação são os seguintes: primeiro, observe que $\nabla_\lambda G_{\mu\nu} = \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ o que implicam em $\nabla_\lambda T_{\mu\nu} = 0$. Segundo, no limite newtoniano a equação de dispersão de Einstein para uma partícula em repouso ($E = mc^2$) implica em $\rho_E = \mu c^2$ onde ρ_E é a densidade volumétrica de energia e μ a densidade volumétrica de massa, por conseguinte $T_{tt} = \rho_E = c^{-2}\mu \propto \nabla^2\varphi$. Então, como G_{tt} deve reduzir-se a $\nabla^2\varphi$ no limite newtoniano, temos que $G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}$.

O valor da constante α_2 pode ser obtido considerando o limite newtoniano, usando a equação (3.12) temos:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} \approx 1 - \frac{\varphi}{c^2} \quad (3.49)$$

definindo $u := c^{-2}\varphi - 1$ e calculando os elementos da geometria dessa métrica:

$$\Gamma_{ti}^t = \Gamma_{it}^t \approx -\partial_i u \quad (3.50a)$$

$$\Gamma_{tt}^i \approx -\partial^i u \quad (3.50b)$$

$$R_{itj}^t = -R_{ijt}^t \approx \partial_i \partial_j u \quad (3.50c)$$

$$R_{tjt}^i = -R_{ttj}^i \approx -\partial^i \partial_j u \quad (3.50d)$$

$$R_{tt} \approx -\nabla^2 u \quad (3.50e)$$

$$R_{ij} \approx \partial_i \partial_j u \quad (3.50f)$$

$$R \approx -2\nabla^2 u \quad (3.50g)$$

podemos usar a equação (3.49) e a equação (3.50g) para escrever a ação (3.47):

$$S_G \approx 2\alpha_2 \int d^4x (2u\nabla^2 u - \Lambda u) \quad (3.51)$$

e obter a equação de movimento considerando que $\delta S_G = T_{tt} = c^2 \mu$, ou seja:

$$2\alpha_2(2\nabla^2 u + \Lambda) = c^2 \mu \quad (3.52)$$

voltando à variável φ :

$$\nabla^2 \varphi + \frac{1}{2}c^2 \Lambda = \frac{c^4 \mu}{4\alpha_2} = 4\pi G_N \mu \quad (3.53)$$

fazendo $\Lambda = 0$ chegamos a equação de Poisson e concluímos que:

$$\alpha_2 = \frac{c^4}{16\pi G_N} \quad (3.54)$$

$$S_G = \frac{c^4}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (3.55)$$

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.56)$$

É comum escrever estas constantes também em termos da massa de Planck reduzida $M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G_N}}$.

3.5 Solução de buracos negros e suas singularidades

Consideramos nessa seção soluções com simetria esférica cuja forma mais geral é

$$ds^2 = g_{tt}c^2 dt^2 - 2g_{tr}cdtdr - g_{rr}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.57)$$

ou seja, a parte angular permanece inalterada e o intervalo ds^2 varia apenas nas coordenadas temporal e radial. Também é possível mostrar que podemos fazer uma transformação de

coordenadas $\bar{t}(t, r)$ e $\bar{r}(t, r)$ transformando $g_{\mu\nu}$ em $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ de tal forma que os termos cruzados g_{tr} desapareçam:

$$ds^2 = g_{\bar{t}\bar{t}}c^2d\bar{t}^2 - g_{\bar{r}\bar{r}}d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.58)$$

onde:

$$\begin{aligned} g_{\bar{t}\bar{t}} &= g_{tt} \left(\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \right)^2 - 2g_{tr} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{t}} \right) - g_{rr} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial \bar{t}} \right)^2 \\ g_{\bar{r}\bar{r}} &= g_{tt} \left(\frac{\partial t}{\partial \bar{r}} \right)^2 - 2g_{tr} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial t}{\partial \bar{r}} \frac{\partial r}{\partial \bar{r}} \right) - g_{rr} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial \bar{r}} \right)^2 \\ &\left(g_{tt}c \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \frac{\partial t}{\partial \bar{r}} - g_{rr} \frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{r}} \right) - g_{tr} \left(\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial t}{\partial \bar{r}} \frac{\partial r}{\partial \bar{t}} \right) = 0 \end{aligned}$$

logo, propomos que o intervalo ds^2 para uma métrica com simetria esférica no espaço-tempo curvo tem a forma:

$$ds^2 = A(t, r)c^2dt^2 - B(t, r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.59)$$

Observe que não há dependência das coordenadas angulares nas funções $A(t, r)$ e $B(t, r)$ evidenciando o caráter de simetria esférica do problema. Na forma matricial, a métrica em (3.59) e sua inversa são, respectivamente,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (3.60a)$$

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} \quad (3.60b)$$

Usando (3.14) podemos calcular os símbolos de Christoffel não nulos para essa métrica:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= \frac{\dot{A}}{2A}, \quad \Gamma_{rr}^t = \frac{\dot{B}}{2A}, \quad \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{A'}{2A}, \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{A'}{2B}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{B'}{2B}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{B}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r}{B} \sin^2\theta, \quad \Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = \frac{\dot{B}}{2B}, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot\theta. \end{aligned} \quad (3.61)$$

e aplicando em (3.30):

$$R_{tt} = -\frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A''}{2B} + \frac{A'}{Br} - \frac{\ddot{B}}{2B} + \frac{\dot{B}}{4B} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \quad (3.62a)$$

$$R_{rr} = \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A''}{2A} + \frac{B'}{Br} - \frac{\ddot{B}}{2A} - \frac{\dot{B}}{4A} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \quad (3.62b)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{B} + 1 \quad (3.62c)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \quad (3.62d)$$

$$R_{tr} = R_{rt} = \frac{\dot{B}}{Br}. \quad (3.62e)$$

Até aqui, todos os cálculos são válidos para qualquer métrica com simetria esférica. Para dar continuidade a partir daqui é necessário definir o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, ou seja, a fonte que causa a curvatura local do espaço-tempo. Consideraremos duas, o caso homogêneo $T_{\mu\nu} = 0$, nesse caso, assim como a carga pontual no eletromagnetismo, a fonte do campo é uma massa pontual concentrada na origem do sistema de coordenadas, veremos que tal solução corresponde ao tipo mais simples de buracos negros, isso porque a partir dessa massa temos superfícies equipotenciais (dito de outra forma, ds^2 é o mesmo, para quaisquer partículas a mesma distância da origem). No segundo caso, consideraremos o tensor energia-momento para o eletromagnetismo adicionando carga ao caso da solução homogênea.

3.5.1 Solução de Schwarzschild

Nessa seção discutiremos a solução mais simples da equação de Einstein, a saber, a solução homogênea ($T_{\mu\nu} = 0$), inicialmente sem a constante cosmológica ($\Lambda = 0$). Nessas condições a equação de Einstein (3.56) se reduz a:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad (3.63)$$

tomando o traço dessa equação encontramos $R = 0$, substituindo esse resultado em (3.63) temos:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.64)$$

usando (3.62) vemos que:

$$\frac{R_{tt}}{A} + \frac{R_{rr}}{B} = \frac{1}{Br} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \ln(AB) = 0 \quad (3.65)$$

logo:

$$AB = f(t) \quad \Rightarrow \quad B(t, r) = \frac{f(t)}{A(t, r)} \quad (3.66)$$

com isso a métrica (3.59) fica:

$$ds^2 = A(t, r)c^2 dt^2 - \frac{f(t)}{A(t, r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.67)$$

substituindo $B(t, r)$ em (3.62) a equação para $R_{\theta\theta}$ assume a forma:

$$-\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial r}(rA) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A(t, r) = f(t) + \frac{C(t)}{r} \quad (3.68)$$

antes de chegarmos a forma final da métrica devemos analisar a equação $R_{tr} = R_{rt} = 0$ em (3.62) que implica em:

$$R_{tr} = R_{rt} = \frac{\dot{B}}{Br} = -\frac{\dot{A}}{Ar} = -\frac{1}{rc} \frac{\partial}{\partial t} \ln A = 0 \quad \Rightarrow \quad A(r, t) = A(r) \quad (3.69)$$

ou seja, A não depende explicitamente do tempo, logo, as funções $f(t)$ e $C(t)$ são necessariamente constantes, um resultado consistente com o chamado *teorema de Birkhoff* que afirma que toda métrica esfericamente simétrica no vácuo é estática.

Voltando a $A(r)$, para determinar $f(t) = f = const$ devemos impor que a solução seja assintoticamente plana, logo $f = 1$, e, portanto,

$$ds^2 = \left(1 + \frac{C}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.70)$$

comparando as componentes dessa métrica com o resultado obtido para métrica do campo fraco em (3.12) podemos escolher $C = -2GMc^{-2} = -r_s$, a constante r_s é denominada *raio de Schwarzschild* pois a ele se deve essa solução, por fim, temos:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad \text{com: } r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.71)$$

Há dois valores de r que são notáveis nessa solução, tanto em $r = 0$ quanto em $r = r_s$ temos uma divergência em ds^2 , mas se analisarmos o escalar de Kretschmann (3.32) temos:

$$K(r) = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48G^2M^2}{c^4r^6} = \frac{12r_s^2}{r^6} \quad (3.72)$$

de onde vemos que $K(r_s) = 12r_s^{-4}$ é finito e portanto a hypersuperfície de raio r_s pode ser analisada em outro sistema de coordenadas para o qual ds^2 não divergirá, de fato se escolhermos:

$$dr_* = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr \quad \Rightarrow \quad r_* = r + r_s \ln \left(\frac{r}{r_s} - 1\right) \quad (3.73)$$

então a o intervalo ds^2 fica:

$$ds^2 = W \left(e^{\frac{r_*}{r_s} - 1}\right) (c^2 dt^2 - dr_*^2) - \left[1 + W \left(e^{\frac{r_*}{r_s} - 1}\right)\right]^2 r_s^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.74)$$

onde $W(xe^x) = x$ é a *função W de Lambert*. Quando $r \rightarrow r_s$, $r_* \rightarrow -\infty$ e $W \left(e^{\frac{r_*}{r_s} - 1}\right) \rightarrow W(0) = 0$ logo ds^2 converge para $ds^2 = r_s^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ de modo que $r = r_s$ é uma *singularidade removível* ou *singularidade de coordenadas*.

No entanto, a singularidade em $r = 0$ persiste nesse novo sistema de coordenadas. Como indicado pelo escalar de Kretschmann $K(r \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ a singularidade persistirá não importa o sistema de coordenadas escolhido, o ponto $r = 0$ constitui uma *singularidade essencial* ou *singularidade física* da métrica de Schwarzschild.

Por fim, vamos considerar brevemente o caso $\Lambda \neq 0$. Nesse caso, a equação para o vácuo é $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$, e a relação (3.65) permanece válida e ainda resulta na métrica com a forma (3.67). Entretanto, a equação para $R_{\theta\theta}$ muda a forma de $A(r)$. Usando (3.62):

$$-\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial r} (rA) + 1 = -r^2 \Lambda \quad \Rightarrow \quad A(t, r) = \left(1 + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) f(t) + \frac{C(t)}{r} \quad (3.75)$$

se fizermos $\Lambda = 0$ devemos obter a métrica de Schwarzschild, logo, temos que $f(t) = 1$ e $C(t) = -r_s$. Assim, a métrica para $\Lambda \neq 0$ é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad \text{com: } r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.76)$$

observemos que o horizonte de eventos nesse caso é a hipersuperfície de raio

$$r_h = \sqrt[3]{\frac{3r_s}{2\Lambda} + \sqrt{\left(\frac{3r_s}{2\Lambda}\right)^2 - \frac{1}{\Lambda^3}}} + \sqrt[3]{\frac{3r_s}{2\Lambda} - \sqrt{\left(\frac{3r_s}{2\Lambda}\right)^2 - \frac{1}{\Lambda^3}}} \quad (3.77)$$

3.5.2 Solução de Reissner-Nordstrom

Façamos agora a inclusão do termo de fonte ($T_{\mu\nu} \neq 0$), considerando o campo eletromagnético como fonte. O tensor energia-momento foi obtido no capítulo sobre eletromagnetismo, e é dado pela equação (2.37), ou seja,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} - g_{\nu\lambda} F_{\mu\rho} F^{\lambda\rho}\right) \quad T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0. \quad (3.78)$$

No regime eletrostático ($\vec{B} = \vec{0}$), livre de fontes ($\rho = 0$ e $\vec{J} = \vec{0}$) e com $\vec{E} = E_r \hat{r}$ radial, podemos escrever o tensor $F_{\mu\nu}$ em coordenadas esféricas em (2.15) como:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{c} E_r(t, r). \quad (3.79)$$

Agora, usando a expressão (3.78) para este campo obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} &= \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (F_{\rho t} F^{\rho t} + F_{\rho r} F^{\rho r}) \\ &= \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (F_{rt} F^{rt} + F_{tr} F^{tr}) \\ &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{rt} F^{rt} \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} g_{\nu\lambda} F_{\mu\rho} F^{\lambda\rho} &= g_{\nu\lambda} (F_{\mu t} F^{\lambda t} + F_{\mu r} F^{\lambda r}) \\ &= g_{\nu r} F_{\mu t} F^{rt} + g_{\nu t} F_{\mu r} F^{tr} \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{rt} F^{rt} - g_{\nu r} F_{\mu t} F^{rt} - g_{\nu t} F_{\mu r} F^{tr} \right) \quad (3.82)$$

cujas componentes não nulas, calculadas usando a métrica (3.60), são:

$$T_{tt} = -\frac{A}{2\mu_0} F_{rt} F^{rt} \quad (3.83a)$$

$$T_{rr} = \frac{B}{2\mu_0} F_{rt} F^{rt} \quad (3.83b)$$

$$T_{\theta\theta} = -\frac{r^2}{2\mu_0} F_{rt} F^{rt} \quad (3.83c)$$

$$T_{\phi\phi} = T_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \quad (3.83d)$$

Para resolver a equação de Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ podemos multiplicar ambos os lados por $g^{\mu\nu}$ para obter $R = -\frac{8\pi G}{c^4} T$ e assim reescrevê-la como

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.84)$$

já que $T = 0$ no caso eletromagnético.

De (3.83), podemos verificar que

$$\frac{T_{tt}}{A} + \frac{T_{rr}}{B} = 0$$

o que implica que a equação (3.65) permanece válida e conseqüentemente (3.66) e (3.67) também. Usando $F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}$ e a equação (3.66) temos:

$$F_{tr} = g_{tt}g_{rr}F^{tr} = -f(t)F^{tr} \quad \Rightarrow \quad F^{tr} = -\frac{1}{f(t)}F_{tr} = \frac{E_r}{f(t)c} \quad (3.85)$$

o que implica em:

$$R_{\theta\theta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\theta\theta} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial r}(rA) + 1 = \frac{8\pi G}{2\mu_0 c^4 f} \left(\frac{E_r}{c}\right)^2$$

$$A(t, r) = f(t) + \frac{C'(t)}{r} - \frac{8\pi G}{2\mu_0 c^6 r} \int dr E_r^2 \quad (3.86)$$

para finalizar e determinar $A(t, r)$ precisamos determinar E_r usando as equações de Maxwell, só que levando em conta a curvatura do espaço-tempo devemos usar derivadas covariantes em (2.22), ou seja

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (3.87)$$

$$\nabla_\lambda F_{\rho\sigma} + \nabla_\rho F_{\sigma\lambda} + \nabla_\sigma F_{\lambda\rho} = 0. \quad (3.88)$$

Para $\nu = r$, a equação $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$ nos dá:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu r} &= \partial_t F^{rt} + \Gamma_{\mu\beta}^r F^{\mu\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\beta F^{r\mu} \\ &= \partial_t F^{rt} + \Gamma_{tr}^r F^{tr} + \Gamma_{rt}^r F^{rt} \\ &= \partial_t F^{rt} + (\Gamma_{tr}^r - \Gamma_{rt}^r) F^{tr} \\ &= \partial_t F^{rt} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(E_r) = 0 \end{aligned} \quad (3.89)$$

ou seja, o campo elétrico $E_r = E_r(r)$ não depende explicitamente do tempo. Agora, $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$ para $\nu = t$ fica

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu t} &= \partial_r F^{tr} + \Gamma_{\mu\beta}^t F^{\mu\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\beta F^{t\mu} \\ &= \partial_r F^{tr} + \Gamma_{tr}^r F^{tr} + \Gamma_{rt}^t F^{rt} + (\Gamma_{rt}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\phi) F^{rt} \\ &= \partial_r F^{tr} + \left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}\right) F^{tr} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right) E_r \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) = 0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

que implica na lei de Coulomb:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (3.91)$$

substituindo na expressão obtida para $A(t, r)$ em (3.86), obtemos

$$A(t, r) = f(t) + \frac{C'(t)}{r} - \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r} \int \frac{dr}{r^2} \quad (3.92a)$$

$$= f(t) + \frac{C'(t)}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}, \quad \text{com } r_Q^2 := \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4} \quad (3.92b)$$

em que a constante da integração foi absorvida na função $C'(t)$. Devemos exigir que $A(t, r \rightarrow \infty) = 1$ pois muito longe da origem do sistema de coordenadas a métrica deve reduzir-se a métrica de Minkowski, o que implica: $f(t) = 1$ e usando o teorema de Birkhoff, argumentamos que, quando $Q = 0$, a solução deve reduzir-se a métrica de Schwarzschild, portanto $C'(t) = -\frac{2GM}{c^2} = -r_s$. Assim temos finalmente:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.93)$$

esse resultado é conhecido com *métrica de Reissner-Nordstrom*. Assim como na métrica de Schwarzschild, o ponto $r = 0$ é claramente singular, mas há outros que são aqueles para os quais $A = 0$ (visto que ele aparece no denominador multiplicando dr^2) e há dois valores de r que satisfazem essa condição:

$$r_+ = \frac{r_s + \sqrt{r_s^2 - 4r_Q^2}}{2} \quad \text{e} \quad r_- = \frac{r_s - \sqrt{r_s^2 - 4r_Q^2}}{2}. \quad (3.94)$$

Seguindo o mesmo procedimento que fizemos na métrica de Schwarzschild, calculemos o escalar de Kretschmann (3.32), cujo resultado nesse caso é:

$$K(r) = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{12r_s^2}{r^6} - \frac{48r_s r_Q^2}{r^7} + \frac{56r_Q^4}{r^8} \quad (3.95)$$

de onde vemos que $K(r_+)$ e $K(r_-)$ não divergem. Por outro lado, $K(r \rightarrow 0) \rightarrow \infty$, logo as superfícies definidas para r_+ e r_- são singularidades de coordenadas enquanto que o ponto $r = 0$ é uma singularidade essencial da métrica de Reissner-Nordstrom.

Nesse capítulo, assim como no seu antecessor para o eletromagnetismo, observamos que as soluções da equação de campo de Einstein possuem singularidades. No caso gravitacional, constatamos divergências na curvatura na origem do sistema de coordenadas (que é a localização da fonte pontual para o campo), e uma vez que a equação de campo de Einstein estabelece uma proporcionalidade entre a curvatura do espaço-tempo e a

distribuição de matéria-energia, então temos uma divergência na energia no centro do buraco negro.

A segunda parte desse trabalho se destina a apresentar a teoria de Born-Infeld (BORN; INFELD, 1934) para a eletrodinâmica e seu análogo para a gravitação, denominada de Eddington-inspired-Born-Infeld, e com isso mostrar como esses modelos removem esses problemas de divergência. Antes de finalizar essa nossa discussão das teorias não-modificadas, entretanto, vamos discutir uma importante abordagem alternativa para a teoria de Einstein.

3.6 Formalismo de Palatini

Considerando a ação de Einstein-Hilbert, podemos variá-la de duas formas, uma é considerar a equação de metricidade $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$, nesse caso vale a expressão para $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(g, \partial g)$ em (3.14) e a ação $S_{EH}(g, \partial g)$ depende apenas da métrica $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas, fazendo essa consideração a variação de S_{EH} nos dá uma equação que é a equação de campo de Einstein, a esse procedimento denominamos *formalismo métrico*.

A segunda forma consiste em flexibilizar a priori a condição de metricidade, nesse caso não podemos afirmar que os $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ dependem da métrica e suas derivadas, tratamos as conexões como campos independentes e esperamos obter uma expressão para elas ao variar a ação $S_{EH}(g, \Gamma)$, assim variamos a ação com respeito a $g_{\mu\nu}$ e a $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ separadamente e encontramos duas equações, uma para cada um dos campos, chamamos esse procedimento de *formalismo de Palatini*. Como veremos, a metricidade aparecerá aqui como consequência da equação de movimento para Γ e, portanto, os dois formalismos são classicamente equivalentes.

Consideremos a ação de Einstein-Hilbert tratando Γ como um campo independente:

$$S_{EH}(g, \Gamma) = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R(\Gamma) - 2\Lambda) \quad (3.96)$$

$$= \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) - 2\Lambda) \quad (3.97)$$

cuja variação nos dá:

$$\delta S_{EH} = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \quad (3.98)$$

usando a identidade de Palatini (3.44) no último termo para $\delta R_{\mu\nu}$ e integrando por partes obtemos:

$$\begin{aligned}\delta S_{EH} &= \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &- \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x (\nabla_\rho \sqrt{-g} g^{\mu\nu} - \delta_\rho^\nu \nabla_\nu \sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho\end{aligned}\quad (3.99)$$

de onde, igualando a zero, para $\delta g^{\mu\nu}$ e $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho$ arbitrários, tiramos as equações:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (3.100a)$$

$$\nabla_\rho \sqrt{-g} g^{\mu\nu} - \delta_\rho^\nu \nabla_\alpha \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} = 0 \quad (3.100b)$$

a primeira equação (3.100a) é a já conhecida equação de Einstein, a segunda (3.100b) ainda pode ser manipulada para se encontrar uma forma mais conveniente de escrevê-la:

$$\sqrt{-g} (\nabla_\rho g^{\mu\nu} - \delta_\rho^\nu \nabla_\alpha g^{\mu\alpha}) + g^{\mu\nu} (\partial_\rho \sqrt{-g} - \delta_\rho^\nu \partial_\nu \sqrt{-g}) = 0 \quad (3.101)$$

para o último termo:

$$\partial_\rho \sqrt{-g} - \delta_\rho^\nu \partial_\nu \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\alpha\beta} \partial_\rho g_{\alpha\beta} - \delta_\rho^\nu g^{\alpha\beta} \partial_\nu g_{\alpha\beta}) = 0$$

logo a equação se reduz a:

$$\nabla_\rho g^{\mu\nu} - \delta_\rho^\nu \nabla_\alpha g^{\mu\alpha} = 0 \quad (3.102)$$

fazendo $\rho = \nu$ temos $\nabla_\alpha g^{\mu\alpha} = 0$, substituindo esse resultado na equação (3.102) obtemos

$$\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\mu\lambda} \nabla_\rho g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \nabla_\rho g_{\mu\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_\rho g_{\mu\lambda} = 0 \quad (3.103)$$

que como já sabemos, $\nabla_\rho g_{\mu\lambda} = 0$ é a condição de metricidade. Expandindo a derivada covariante:

$$\begin{aligned}\nabla_\rho g_{\mu\lambda} &= \partial_\rho g_{\mu\lambda} - \Gamma_{\rho\lambda}^\alpha g_{\mu\alpha} - \Gamma_{\rho\mu}^\alpha g_{\lambda\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu g_{\rho\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha g_{\rho\alpha} + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha g_{\lambda\alpha} \\ \partial_\lambda g_{\mu\rho} &= \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha g_{\mu\alpha} + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha g_{\rho\alpha}\end{aligned}\quad (3.104)$$

$$\partial_\rho g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\rho\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\rho} = (\Gamma_{\rho\lambda}^\alpha - \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha) g_{\mu\alpha} + (\Gamma_{\rho\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha) g_{\lambda\alpha} + (\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha) g_{\rho\alpha}$$

se impusermos $\Gamma_{\rho\lambda}^\alpha = \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha$ então:

$$\Gamma_{\rho\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\partial_{\rho}g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}g_{\rho\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\rho}) \quad (3.105)$$

que é exatamente a expressão encontrada em (3.14).

A conclusão que podemos tirar desse desenvolvimento é que, o formalismo métrico e o formalismo de Palatini são classicamente equivalentes e nos permitem obter o mesmo conjunto de equações para a gravitação de Einstein. No entanto uma vez que a metricidade apenas está presente *on-shell*, isso resulta em consequências quando quantizamos as teorias. Além disso, em teorias modificadas, o formalismo métrico se mostra problemático, pois das duas equações obtidas na variação da ação usando Palatini, uma já está determinada no formalismo métrico e serve com um vínculo sobre a equação de campo e tal vínculo pode gerar uma equação de campo que apresente instabilidades devido a presença de derivadas da métrica de ordem superior a dois (WOODARD, 2015). Enquanto que usando o formalismo de Palatini podemos relaxar a metricidade, de modo que a conexão Γ em teorias modificadas não será exatamente os símbolos de Christoffel dados por (3.14) uma vez que são consequências da condição de metricidade e da simetria de Γ com relação aos índices inferiores.

Parte II

TEORIAS MODIFICADAS

4 Eletrodinâmica de Born-Infeld

Como vimos, a teoria de Maxwell para o eletromagnetismo apresenta uma divergência no cálculo da auto-energia de uma carga pontual. Veremos nesse capítulo uma proposta para eliminar essa singularidade no contexto clássico. Essa proposta foi elaborada no início do século XX por Max Born e Leopold Infeld, e consiste em modificar a teoria eletromagnética no regime de campos fortes de tal forma que a teoria de Maxwell seja reobtida no limite de campos fracos.

4.1 A ação de Born-Infeld

Começamos buscando uma ação \mathcal{S} que seja invariante por transformações gerais de coordenadas, como fizemos para obter a ação de Einstein-Hilbert nos capítulos anteriores. Inspirados no fato de que a eletrodinâmica é descrita em termos de um tensor antissimétrico ($F_{\mu\nu}$) e a gravitação é descrita por um tensor simétrico ($g_{\mu\nu}$) buscamos aqui uma ação \mathcal{S} que seja descrita em função de um tensor arbitrário $A_{\mu\nu}$, e que seja invariante por transformações gerais de coordenadas, ou seja,

$$\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L}(A_{\mu\nu}) = \int d^4x' \mathcal{L}'(A'_{\mu\nu}) = \mathcal{S}'. \quad (4.1)$$

Como veremos, o tensor $A_{\mu\nu}$ tem em si codificado, além do campo eletromagnético ($F_{\mu\nu}$) a métrica do espaço-tempo ($g_{\mu\nu}$), que inicialmente consideraremos arbitrária. Da lei de transformação tensorial podemos escrever:

$$A'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} A_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \det(A'_{\alpha\beta}) = J^{-2} \det(A_{\mu\nu}) \quad (4.2)$$

e, de forma similar, para o elemento de volume,

$$dx'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta \quad \Rightarrow \quad d^4x' = J d^4x \quad (4.3)$$

em que J é o Jacobiano da transformação. Desse modo, concluímos que $d^4x \sqrt{\det(A_{\mu\nu})}$ é um invariante geral de coordenadas e, portanto,

$$\mathcal{L} = \sqrt{\det(A_{\mu\nu})} \quad (4.4)$$

é a forma mais simples para que \mathcal{L} em função de $A_{\mu\nu}$ mantenha \mathcal{S} invariante, com $A_{\mu\nu}$ arbitrário.

Qualquer tensor arbitrário $A_{\mu\nu}$ pode ser separado em uma parte simétrica $A_{(\mu\nu)}$ e outra antissimétrica $A_{[\mu\nu]}$:

$$A_{\mu\nu} = A_{(\mu\nu)} + A_{[\mu\nu]} \quad \text{com} \quad \begin{cases} A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) \\ A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) \end{cases} \quad (4.5)$$

Identificamos a parte simétrica de $A_{\mu\nu}$ com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e a parte antissimétrica como o campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$. Ou seja, escrevemos

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{1}{b}F_{\mu\nu}, \quad A_{(\mu\nu)} = g_{\mu\nu}, \quad A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{b}F_{\mu\nu} \quad (4.6)$$

em que a constante b foi inserida por razões de dimensionalidade. Sendo $A_{(\mu\nu)}$ e $A_{[\mu\nu]}$ eles próprios tensores de rank 2, propomos escrever a lagrangiana \mathcal{L} como combinação linear

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \frac{1}{b}F_{\mu\nu})} + A\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} + B\sqrt{\det(\frac{1}{b}F_{\mu\nu})} \quad (4.7)$$

em que o sinal negativo nos determinantes do primeiro e segundo termos foram adicionados de modo a obter os valores reais das raízes, uma vez que $\det(\eta_{\mu\nu}) = -1$ e, como podemos sempre encontrar um referencial localmente inercial, devemos ter $\det(g_{\mu\nu}) < 0$. O último termo pode ser omitido uma vez que, variando a ação, ele não contribui para as equações de campo, ou seja, podemos tomar $B = 0$.

Para determinar A , consideremos o caso limite onde o espaço-tempo é plano (métrica de Minkowski) e onde o campo é fraco. Calculando o determinante $-\det(A_{\mu\nu})$, encontramos:

$$-\det(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b}F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{b^2}\det \begin{pmatrix} b & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & -b & F_{12} & -F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & -b & F_{23} \\ -F_{03} & F_{13} & -F_{23} & -b \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$= 1 + \frac{1}{b^2}(F_{23}^2 + F_{31}^2 + F_{12}^2 - F_{01}^2 - F_{02}^2 - F_{03}^2) - \frac{1}{b^4}(F_{23}F_{01} + F_{31}F_{02} + F_{12}F_{03})^2 \quad (4.9)$$

$$= 1 + \frac{1}{2b^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{b^4}\det(F_{\mu\nu}). \quad (4.10)$$

Para campos fracos, temos pequenos valores de $F_{\mu\nu}$ e podemos considerar $\det(F_{\mu\nu}) = 0$. Como estamos considerando um espaço-tempo plano, então $\det(g_{\mu\nu}) = \det(\eta_{\mu\nu}) = -1$ de modo que nesse limite a lagrangiana (4.7) é

$$\mathcal{L} = \sqrt{1 + \frac{1}{2b^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}} + A \approx 1 + \frac{1}{4b^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A. \quad (4.11)$$

Assim, para recuperarmos a lagrangiana de Maxwell, proporcional a $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, devemos ter $A = -1$.

Finalmente, escrevemos a densidade lagrangiana do campo eletromagnético, covariante geral por transformações de coordenadas, na forma:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \frac{1}{b}F_{\mu\nu})} - \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}. \quad (4.12)$$

E, para o caso plano em coordenadas cartesianas:

$$L = \sqrt{1 + F - G^2} - 1, \quad \text{com} \quad \begin{cases} F = \frac{1}{2b^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ G^2 = \frac{1}{b^4}\det(F_{\mu\nu}) \end{cases}. \quad (4.13)$$

Da forma como a equação (4.13) está escrita, a expressão para G^2 não evidencia o caráter invariante por transformações de Lorentz desse termo, e por conseguinte da lagrangiana L . Se pudermos escrever o termo $\det(F_{\mu\nu})$ como contração de tensores, poderemos demonstrar que promovendo os escalares de Lorentz da lagrangiana L a escalares da relatividade geral, teremos como consequência que a lagrangiana (4.12) pode ser escrita na forma $\mathcal{L} = \sqrt{-g}L$. Para isso, definimos o dual de $F^{\mu\nu}$, denotado por $F^{*\mu\nu}$ como:

$$F^{*\mu\nu} := \frac{1}{2\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \quad (4.14)$$

em que denotamos $\det(g_{\mu\nu}) = g$ para simplificar a notação, e

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1, & \text{se } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ é permutação par de } (1, 2, 3, 4) \\ -1, & \text{se } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ é permutação ímpar de } (1, 2, 3, 4) \\ 0, & \text{se dois índices são iguais} \end{cases} \quad (4.15)$$

com essa definição, e o auxílio das equações (4.9) e (4.10) podemos escrever:

$$\frac{1}{b^4}\det(F_{\mu\nu}) = \left(\frac{1}{4b^2}\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}\right)^2 \quad (4.16)$$

Para o caso plano, $\sqrt{-g} = 1$, e portanto temos:

$$L = \sqrt{1 + F - G^2} - 1, \quad \text{com} \quad \begin{cases} F = \frac{1}{2b^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ G = \frac{1}{4b^2}F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} \end{cases}. \quad (4.17)$$

No intuito de escrever \mathcal{L} (em que temos uma métrica arbitrária g), dado pela equação (4.12), em função de L (em que usamos a métrica plana), dado pela equação (4.17), devemos desenvolver o cálculo do determinante:

$$\det(g_{\mu\nu} + \frac{1}{b}F_{\mu\nu}) = g + \Phi(g_{\mu\nu}, b^{-1}F_{\mu\nu}) + \frac{1}{b^4}\det(F_{\mu\nu}). \quad (4.18)$$

O termo Φ que aparece na equação (4.18) representa os termos cruzados entre as componentes $g_{\mu\nu}$ da métrica e as componentes $F_{\mu\nu}$ do tensor eletromagnético quando calculamos o determinante. Observe que, usando o resultado que obtivemos em (4.16) em conjunto com a equação (4.17) podemos reescrever a equação (4.18) da seguinte forma:

$$g + \Phi + \frac{1}{b^4}\det(F_{\mu\nu}) = g \left(1 + \frac{\Phi}{g} - G^2 \right) \quad (4.19)$$

para acharmos Φ precisaríamos calcular explicitamente o determinante, para isso poderíamos usar a expressão:

$$\det(A_{\mu\nu}) = \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} A_{\alpha 0} A_{\beta 1} A_{\rho 2} A_{\sigma 3} \quad (4.20)$$

uma vez que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, podemos calcular:

$$\det(g^{\mu\alpha} A_{\alpha\nu}) = g \det(A_{\alpha\nu}) = \det(\delta_\nu^\mu + \frac{1}{b}F_\nu^\mu) \quad (4.21)$$

como $\eta^{-1} = \eta$, o resultado para o cálculo desse determinante é o mesmo que (4.10), implicando em

$$\frac{\Phi}{g} = \frac{1}{b^2}(F_{23}^2 + F_{31}^2 + F_{12}^2 - F_{01}^2 - F_{02}^2 - F_{03}^2) = \frac{1}{2b^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F \quad (4.22)$$

assim, podemos escrever (4.18) como:

$$\det(g_{\mu\nu} + \frac{1}{b}F_{\mu\nu}) = g(1 + F - G^2) \quad (4.23)$$

e finalmente escrever:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(\sqrt{1 + F - G^2} - 1) \quad (4.24)$$

diferentemente de (4.17), aqui, F e G são escalares da relatividade geral, não de Lorentz. Explicitando \mathcal{L} em termos de $F_{\mu\nu}$ e $F^{*\mu\nu}$:

$$\mathcal{L} = b^2 \sqrt{-g} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2b^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{4b^2}F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}\right)^2} - 1 \right) \quad (4.25)$$

adicionando o termo de fonte $L_f = \mu_0 J^\mu A_\mu$ obtemos finalmente a forma final da ação:

$$\mathcal{S} = b^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2b^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{4b^2}F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}\right)^2} - 1 \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \mu_0 J^\mu A_\mu \quad (4.26)$$

observe que essa ação é dada em termos de $F^{\mu\nu}$ e $F^{*\mu\nu}$ que são invariantes por transformações de calibre, logo, o primeiro termo da ação é invariante por essas transformações, o segundo termo, proporcional ao potencial A_μ implica na conservação local da quadricorrente ($\nabla_\mu J^\mu = 0$) para que toda a ação \mathcal{S} seja invariante por transformações de calibre.

4.2 Equações de Campo e Lei de Conservação

Variando a ação (4.26) com relação a A_μ obtemos a equação de movimento:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[\sqrt{-g} \left(\frac{F^{\mu\nu} - G F^{*\mu\nu}}{\sqrt{1 + F - G^2}} \right) \right] = \mu_0 J^\nu \quad (4.27)$$

ou ainda, em termos da derivada covariante,

$$\nabla_\mu \left(\frac{F^{\mu\nu} - G F^{*\mu\nu}}{\sqrt{1 + F - G^2}} \right) = \mu_0 J^\nu. \quad (4.28)$$

A identidade de Bianchi continua válida, já que não mudamos a definição de $F_{\mu\nu}$, ou seja, na teoria de Born-Infeld também temos a equação:

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (4.29)$$

a qual, usando a definição do dual $F^{*\mu\nu}$ em (4.14) pode ser escrita como:

$$\nabla_\nu F^{*\mu\nu} = 0 \quad (4.30)$$

as equações (4.28) juntamente com (4.29), ou (4.30) determinam completamente a dinâmica do campo A_μ . Por fim, observe que se $b^2 \rightarrow \infty$ então $F = G = 0$ e a equação de campo se torna a de Maxwell $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$.

4.2.1 Tensor Energia-Momento

Vamos aqui introduzir um segundo tensor antissimétrico, $P^{\mu\nu}$, para nos auxiliar na construção do tensor energia-momento. Desejamos que esse tensor tenha uma relação similar ao tensor $F_{\mu\nu}$, na teoria de Maxwell dos corpos macroscópicos. Definimos o tensor $P^{\mu\nu}$

$$P^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial F_{\mu\nu}} = \frac{F^{\mu\nu} - G F^{*\mu\nu}}{\sqrt{1 + F - G^2}}. \quad (4.31)$$

Esse tensor carrega a informação do deslocamento elétrico e do campo magnético. Substituindo essa definição em (4.27), temos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\sqrt{-g}P^{\mu\nu} = J^\nu \quad \text{ou ainda:} \quad \nabla_\nu P^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (4.32)$$

Agora, para achar o tensor energia-momento, multipliquemos a equação (4.29) por $\sqrt{-g}P^{\mu\nu}$

$$\sqrt{-g}P^{\mu\nu}(\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) = 0 \quad (4.33)$$

e, notando que

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}P^{\mu\nu}F_{\rho\mu}) = (\partial_\nu\sqrt{-g}P^{\mu\nu})F_{\rho\mu} + \sqrt{-g}P^{\mu\nu}(\partial_\nu F_{\rho\mu}) = \sqrt{-g}P^{\mu\nu}(\partial_\nu F_{\rho\mu}), \quad (4.34)$$

podemos usar a última expressão para substituir os dois últimos termos em (4.33) e obter:

$$\sqrt{-g}P^{\mu\nu}(\partial_\mu F_{\nu\rho}) + 2\partial_\nu(\sqrt{-g}P^{\mu\nu}F_{\rho\mu}) = 0. \quad (4.35)$$

Usando a equação (4.31) e a regra da cadeia na última expressão, ficamos com

$$\sqrt{-g}P^{\mu\nu}(\partial_\mu F_{\nu\rho}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\partial_\mu F_{\nu\rho} = 2\partial_\rho\sqrt{-g}L, \quad (4.36)$$

a partir da qual obtemos

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}P^{\mu\nu}F_{\rho\mu}) + \partial_\rho\sqrt{-g}L = \partial_\nu\sqrt{-g}(-P^{\nu\mu}F_{\rho\mu} + \delta_\rho^\nu L) = 0. \quad (4.37)$$

Com isso, observe que o tensor

$$T^\nu_\rho = \frac{1}{\mu_0}(P^{\nu\mu}F_{\rho\mu} - \delta_\rho^\nu L) \quad (4.38)$$

satisfaz a equação¹

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}T^\nu_\rho) = 0 \Rightarrow \nabla_\nu T^\nu_\rho = 0 \quad (4.39)$$

conforme podemos ver considerando a equação (4.37). Por fim, multiplicando T^ν_ρ por $g^{\rho\mu}$ e substituindo a expressão (4.31) em (4.38) obtemos a definição de tensor energia-momento para a eletrodinâmica de Born-Infeld:

$$T^{\mu\nu} = \frac{F^{\nu\lambda}F^\mu_\lambda - GF^{*\nu\lambda}F^\mu_\lambda}{\mu_0\sqrt{1+F-G^2}} - \frac{g^{\mu\nu}b^2}{\mu_0}(\sqrt{1+F-G^2} - 1). \quad (4.40)$$

Observe que $T^{\mu\nu}$ é simétrico e covariantemente conservado, como se espera de um tensor energia-momento.

¹ Em geral $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})$ apenas para tensores antissimétricos ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$), no entanto, $T_{\mu\nu}$ pode ser dividido em uma contração de dois tensores de rank 2 antissimétricos. Assim, uma vez que a derivada covariante obedece a regra do produto de Leibniz podemos fazer essa generalização, basta seguir o caminho reverso

4.2.2 Forma Vetorial das Equações de Campo

Vamos agora reescrever as equações em termos dos campos de vetores espaciais que caracterizam os campos elétricos e magnéticos em unidades convencionais (\vec{E} , \vec{B} , \vec{D} e \vec{H}). Fazemos isso através das seguintes identificações:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \Rightarrow (ct, x, y, z) \quad (4.41)$$

$$(A_0, A_1, A_2, A_3) \Rightarrow A_\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \quad (4.42)$$

$$(F_{23}, F_{31}, F_{12}) \Rightarrow \vec{B} \quad (4.43)$$

$$(F_{01}, F_{02}, F_{03}) \Rightarrow \frac{1}{c} \vec{E} \quad (4.44)$$

$$(P_{23}, P_{31}, P_{12}) \Rightarrow \mu_0 \vec{H} \quad (4.45)$$

$$(P_{01}, P_{02}, P_{03}) \Rightarrow \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \vec{D} \quad (4.46)$$

de modo que temos:

$$L = b^2 \sqrt{1 + F - G^2} \quad \text{com} \begin{cases} F = \frac{1}{b^2} \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) \\ G = \frac{1}{b^2 c} (\vec{B} \cdot \vec{E}) \end{cases} \quad (4.47)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial L}{\partial \vec{B}} = \frac{\vec{B} - G c^{-1} \vec{E}}{\mu_0 \sqrt{1 + F - G^2}} \quad (4.48)$$

$$\vec{D} = c^2 \epsilon_0 \frac{\partial L}{\partial \vec{E}} = \frac{\epsilon_0 \vec{E} - G \epsilon_0 c \vec{B}}{\sqrt{1 + F - G^2}} \quad (4.49)$$

e portanto, obtemos as equações

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (4.50)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.51)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0} \quad (4.52)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (4.53)$$

que são idênticas as equações de Maxwell, de modo que podemos pensar que as modificações introduzidas por Born e Infeld podem ser absorvidas em uma redefinição dos campos.

4.2.3 Solução Estática das Equações de Campo

Vamos considerar (no sistema cartesiano de coordenadas) o caso eletrostático, em que $\vec{B} = \vec{H} = \vec{0}$ e todas as outras componentes dos campos sendo independentes de t . As

equações de campo se reduzem a:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0. \quad (4.54)$$

Vamos agora resolver esta equação para um caso de simetria central:

$$\frac{d}{dr}(r^2 D_r) = 0. \quad (4.55)$$

a solução da equação (4.55) é naturalmente $r^2 D_r = \text{const} = (4\pi)^{-1}e$. Assim, temos então:

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{r^2} \hat{r}. \quad (4.56)$$

Sabendo que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ implica em $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, de (4.54) obtemos:

$$\vec{E}_r = -\frac{d\phi}{dr} \hat{r} = -\phi'(r) \hat{r} \quad (4.57)$$

e de (4.49) temos:

$$D_r = \frac{\epsilon_0 E_r}{\sqrt{1 - \frac{1}{b^2 c^2} \vec{E}_r^2}} = -\frac{\epsilon_0 \phi'(r)}{\sqrt{1 - \frac{1}{b^2 c^2} \phi'^2}} = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{r^2}. \quad (4.58)$$

Isolando $\phi'(r)$ nessa última expressão, concluímos que

$$\phi'(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{\sqrt{r^4 + r_0^4}} \quad \text{com:} \quad r_0 = \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_0 b c}} \quad (4.59)$$

logo,

$$\vec{E}_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{\sqrt{r^4 + r_0^4}} \hat{r}. \quad (4.60)$$

Voltando a $\phi'(r)$ e integrando:

$$\phi(r) = \frac{e}{4\pi r_0} f\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad \text{com:} \quad f(x) = \int_x^\infty \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}}. \quad (4.61)$$

Com o auxílio da função Beta,

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (4.62)$$

podemos fazer $\alpha = \beta = 1/4$, $t = y^4$ e encontrar um valor para $f(0)$:

$$f(0) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{4\sqrt{\pi}} \approx 1,85407 \quad (4.63)$$

logo $\phi(0)$ é finito, diferente do que ocorre na teoria de Maxwell em que $\phi(r) \propto r^{-1}$ divergindo quando $r \rightarrow 0$.

4.3 Auto-energia de uma carga pontual

Conforme discutido nos capítulos anteriores, a equação (2.40), ou seja,

$$W = \int d^3x T_{tt} \quad (4.64)$$

nos permite calcular a energia W armazenada no campo eletromagnético através da componente T_{tt} do tensor energia-momento. Usando a expressão (4.40) temos:

$$T^{tt} = -\frac{b^2}{\mu_0} \left(\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2c^2}} - 1 \right) - \frac{E^2}{\mu_0c^2 \sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2c^2}}} \quad (4.65)$$

e, aplicando esse resultado em² (2.40) e considerando que a energia W armazenada no campo é igual à energia de repouso da carga pontual $E = m_e c^2$, temos:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x T^{tt} = -\frac{b^2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\left(\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2c^2}} - 1 \right) + \frac{E^2}{b^2c^2 \sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2c^2}}} \right] \quad (4.66)$$

substituindo E por (4.60):

$$W = -\frac{4\pi b^2}{\mu_0} \int_0^{\infty} dr \left[\left(\frac{r^4}{\sqrt{r^4 + r_0^4}} - r^2 \right) + \frac{r_0^4}{\sqrt{r^4 + r_0^4}} \right] \quad (4.67)$$

fazendo $r = -r_0 u$:

$$W = \frac{4\pi b^2 r_0^3}{\mu_0} \int_0^{\infty} du \left[-u^2 \left(1 - \frac{u^2}{\sqrt{1 + u^4}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 + u^4}} \right]. \quad (4.68)$$

Para resolver essa integral primeiro devemos fazer uma substituição de variáveis: $u^2 = \tan \theta$ na integral acima, e substituir $t = \sin^2 \theta$ na função Beta (4.62) em seguida, basta igualar os expoentes das funções senos e cossenos dos dois integrandos e achar os argumentos das funções gama, depois de todo esse algebrismo chegamos ao valor da integral:

$$\frac{\mu_0 W}{4\pi b^2 r_0^3} = \int_0^{\infty} dr \left[-u^2 \left(1 - \frac{u^2}{\sqrt{1 + u^4}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 + u^4}} \right] = -\frac{\Gamma(-\frac{3}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{2\sqrt{\pi}} \approx 1,23605 \quad (4.69)$$

substituindo W por $m_e c^2$ obtemos os valores para r_0 e b que são:

² não fizemos distinção entre T_{tt} e T^{tt} pois essas duas quantidades são iguais quando utilizamos a métrica plana de Minkowski

$$\begin{aligned}
 r_0 &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \frac{\Gamma(-\frac{3}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{2\sqrt{\pi}} \\
 &\approx 1,23605 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 3,483 \times 10^{-15} \text{ m}
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_0^2 c} \\
 &\approx 3,959 \times 10^{11} \text{ T}
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

apenas como medida comparativa, o parâmetro b (que tem unidade de campo magnético³) é da ordem de 10^{15} vezes maior que o campo magnético terrestre, e o raio r_0 é da ordem dos comprimentos de onda dos raios gama (comprimentos de onda menores que 0,01 nm). O alto valor do parâmetro b nos mostra que as modificações introduzidas pelo modelo de Born-Infeld só poderiam ser observados experimentalmente em escalas de energia muito altas.

³ Ou em termos de campo elétrico, bastando multiplicar por c , nesse caso $bc \approx 1,2 \times 10^{20} \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

5 Gravitação de Eddington inspirada em Born-Infeld (EiBI)

Nesse capítulo, aplicaremos as ideias de Born-Infeld ao contexto da gravitação usando para isso a invariância geral de coordenadas, característica da relatividade geral, bem como as simetrias pertinentes aos objetos geométricos da teoria. Iniciaremos fazendo manipulações algébricas que nos permitam escrever a ação de Einstein-Hilbert na forma de Eddington e inspirados na construção de Born-Infeld aplicaremos as modificações. Por fim, encontraremos as equações de movimento utilizando o formalismo de Palatini e mostraremos em qual sentido a teoria apresentada resolve os problemas de singularidades presentes na teoria de Einstein.

5.1 A ação de Einstein-Hilbert na forma de Eddington

Com base no sucesso da teoria para a eletrodinâmica, aplicaremos as mesmas ideias a ação de Einstein-Hilbert (JIMÉNEZ et al., 2017), buscando para a lagrangiana a mesma forma de (4.12). Antes, entretanto, vamos escrever a ação na forma proposta por Eddington.

Como sabemos, a ação de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{2} M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (5.1)$$

(em que $M_{Pl} = \sqrt{\frac{c^4}{8\pi G_N}}$ é a massa de Planck reduzida) fornece a equação de movimento

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (5.2)$$

que é a Equação de Einstein livre de fontes. Tomando o traço dessa equação (ou seja multiplicando ambos os lados por $g^{\mu\nu}$), obtemos: $R = 4\Lambda$ e substituindo esse valor em (5.2) obtemos $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ o que implica que $\Lambda^2 \sqrt{-g} = \sqrt{-\det(R_{\mu\nu})}$ e, conseqüentemente, $\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) = 2\Lambda^{-1} \sqrt{-\det(R_{\mu\nu})}$. Desse modo, concluímos então que a ação

$$S_{EH} = \frac{M_{Pl}^2}{\Lambda} \int d^4x \sqrt{-\det(R_{\mu\nu})} \quad (5.3)$$

é classicamente equivalente à ação (5.1), desde que $\Lambda \neq 0$ e que as equações de movimento (5.2), sejam consideradas.

Tomemos agora a ação na forma (5.3) como ponto de partida para modificar a teoria. Se considerarmos uma geometria onde a conexão Γ é independente da métrica,

então a ação (5.3) não dependerá de $g_{\mu\nu}$ visto que, $R_{\mu\nu}$ é função da conexão afim Γ . Além disso, ao considerarmos conexões afins arbitrárias deixamos de ter $R_{\mu\nu}$ identicamente simétrico e, portanto, indicamos na notação que estamos usando a parte simétrica de $R_{\mu\nu}$. Assim, a chamada ação de Eddington é dada por

$$S_{EDD} = \frac{M_{P\ell}^2}{\Lambda} \int d^4x \sqrt{-\det(R_{(\mu\nu)}(\Gamma))}. \quad (5.4)$$

Observe que a ação de Eddington é puramente afim, uma vez que a conexão afim Γ é o campo fundamental da teoria. Uma importante consequência de uma ação que tem a conexão afim como campo fundamental é o fato de que a ação evita instabilidades (ghosts) associados a derivadas da métrica de ordens maiores que dois nas equações de movimento.

5.2 A ação de Eddington com modificações

Inspirados na teoria de Born-Infeld, podemos agora generalizar a ação (5.4) para ficar da forma (4.12). Usando a ação de Eddington como ponto de partida, propomos que $R_{(\mu\nu)}$ na ação (5.4) seja substituído por $g_{\mu\nu} + M_{BI}^{-1}R_{(\mu\nu)}$ mantendo a ação como o determinante de um tensor simétrico. Após aplicarmos essas modificações obtemos:

$$S_{EBI} = M_{P\ell}^2 M_{BI}^2 \int d^4x \left(\sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \frac{1}{M_{BI}^2} R_{(\mu\nu)})} - \sqrt{-g} \right) \quad (5.5)$$

em que $M_{P\ell} = \sqrt{\frac{c^4}{8\pi G_N}}$ é a massa de Planck reduzida e M_{BI} é um parâmetro com a mesma dimensão da constante cosmológica Λ que fará um papel semelhante a b na teoria de Born-Infeld. A diferença entre a ação (5.5) e a ação que obtemos para o eletromagnetismo (4.12) no capítulo anterior, além das constantes, é a troca do campo $F_{\mu\nu}$ que é um tensor antissimétrico, pelo campo $R_{(\mu\nu)}$ que é um tensor simétrico. Além disso, no caso do eletromagnetismo $F_{\mu\nu}$ é um tensor que é invariante pela troca do potencial A_μ por um potencial $A_\mu + \partial_\mu \phi$, em que ϕ é uma função escalar qualquer. O tensor $R_{(\mu\nu)}$ tem uma propriedade semelhante que não é compartilhada por sua contraparte antissimétrica $R_{[\mu\nu]}$. $R_{(\mu\nu)}$ é invariante pela substituição de $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ por $\Gamma_{\mu\nu}^\rho + \delta_\mu^\rho \varepsilon_\nu$, sendo ε_ν um vetor arbitrário. Essa simetria é chamada de *invariância projetiva*. Além disso, vamos considerar que a conexão é simétrica em seus índices inferiores, o que significa que consideraremos torção nula no que segue.

Para que a ação (5.5) seja uma candidata aceitável para uma teoria de gravitação modificada, é necessário que no limite em que o campo gravitacional é fraco, a ação (5.5) se reduza à ação de Einstein-Hilbert, o que de fato ocorre quando $|R_{(\mu\nu)}| \ll M_{BI}^2$. Para ver como a ação se comporta nesse limite, usamos a expansão:

$$\det(I + \hat{M}) = 1 + \det(\hat{M}) + \frac{1}{2}[(\det(\hat{M}))^2 - \det(\hat{M}^2)] + \mathcal{O}(\hat{M}^3) \quad (5.6)$$

para obter:

$$\begin{aligned} \det\left(\hat{g} + \frac{1}{M_{BI}^2}\hat{R}\right) &= g \left[\det\left(I + \frac{1}{M_{BI}^2}\hat{g}^{-1}\hat{R}\right) \right] \\ &= g \left[1 + \frac{1}{M_{BI}^2}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{1}{M_{BI}^4}\mathcal{O}(R^2) \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

(uma vez que $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R_{(\mu\nu)}$, ou seja, o traço de \hat{R} é igual ao traço de sua parte simétrica, descartamos os parenteses que denotam a simetrização de $R_{\mu\nu}$ na última equação).

Assim,

$$S_{EBI} = M_{Pl}^2 M_{BI}^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{M_{BI}^2}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{1}{M_{BI}^4}\mathcal{O}(R^2)} - 1 \right) \quad (5.8)$$

e, uma vez que estamos considerando $|R_{(\mu\nu)}| \ll M_{BI}^2$, o que significa que

$$\sqrt{1 + \frac{1}{M_{BI}^2}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{1}{M_{BI}^4}\mathcal{O}(R^2)} \approx 1 + \frac{1}{2M_{BI}^2}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{1}{2M_{BI}^4}\mathcal{O}(R^2), \quad (5.9)$$

obtemos:

$$S_{EBI} \approx \frac{1}{2}M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{M_{Pl}^2}{2M_{BI}^2} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{O}(R^2). \quad (5.10)$$

Desprezando os termos de segunda ordem, devido a presença do parâmetro M_{BI}^2 no denominador desses termos, e levando em consideração o que foi discutido no capítulo 3, que o formalismo métrico é equivalente ao formalismo de Palatini para a ação de Einstein-Hilbert, identificamos que o primeiro termo da ação (5.10) descreve a teoria de Einstein sem constante cosmológica.

Uma modificação muito simples para a ação (5.5) pode ser feita para re-inserir a constante cosmológica na teoria. De fato, basta colocar um fator λ multiplicando o último termo na ação (5.5), ou seja,

$$S_{EiBI} = M_{Pl}^2 M_{BI}^2 \int d^4x \left(\sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \frac{1}{M_{BI}^2}R_{\mu\nu})} - \lambda \sqrt{-g} \right). \quad (5.11)$$

Aplicando os mesmos procedimentos anteriores à equação (5.11) obtemos uma equação análoga a (5.10), porém com a constante cosmológica inclusa

$$S_{EiBI} \approx \frac{1}{2} M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) - 2\Lambda) + \frac{M_{Pl}^2}{2M_{BI}^2} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{O}(R^2) \quad (5.12)$$

com a constante Λ dada por:

$$\Lambda = M_{BI}^2(\lambda - 1) \quad (5.13)$$

5.3 A métrica auxiliar e as equações de Movimento

O propósito dessa seção é introduzir um conceito importante para obtenção e solução das equações de movimento na teoria de Eddington inspirada em Born-Infeld (EiBI), a chamada métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$, que é definida via

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{1}{M_{BI}^2} R_{(\mu\nu)} \quad (5.14)$$

Com um termo de fonte $\mathcal{S}_M(\psi, g_{\mu\nu}, \Gamma)$, a ação (5.11) pode ser reescrita como

$$S_{EiBI} = M_{Pl}^2 M_{BI}^2 \int d^4x (\sqrt{-q} - \lambda\sqrt{-g}) + \mathcal{S}_M(\psi, g_{\mu\nu}, \Gamma), \quad q = \det(q_{\mu\nu}) \quad (5.15)$$

em que ψ designa de um modo genérico outros campos que interagem com a gravidade. Variando essa ação, usando o formalismo de Palatini, obtemos¹:

$$\delta S_{EiBI} = -\frac{M_{Pl}^2 M_{BI}^2}{2} \int d^4x (\sqrt{-q} (\hat{q}^{-1})^{\mu\nu} \delta q_{\mu\nu} - \lambda\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) + \delta \mathcal{S}_M(\psi, g_{\mu\nu}, \Gamma) \quad (5.16)$$

em que usamos (3.39) para calcular a variação dos determinantes. Agora, usando (5.14) podemos calcular $\delta q_{\mu\nu}$:

$$\delta q_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{M_{BI}^2} \delta R_{\mu\nu} \quad (5.17)$$

e substituir em (5.16) para obter:

$$\begin{aligned} \delta S_{EiBI} = & -\frac{1}{2} M_{Pl}^2 M_{BI}^2 \int d^4x (\sqrt{-q} (\hat{q}^{-1})^{\mu\nu} - \lambda\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} \\ & -\frac{1}{2} M_{Pl}^2 \int d^4x (\sqrt{-q} (\hat{q}^{-1})^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) + \delta \mathcal{S}_M(\psi, g_{\mu\nu}, \Gamma). \end{aligned}$$

Usando a identidade de Palatini (3.44) para calcular $\delta R_{\mu\nu}$ no último termo e integrando por partes, ficamos com

¹ Observe que utilizamos $(\hat{q}^{-1})^{\mu\nu}$ em vez de $q^{\mu\nu}$ para designar as componentes da inversa de $q_{\mu\nu}$. Isso porque podemos ver de (5.14) que $q^{\lambda\sigma} q_{\sigma\rho} = g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu} q_{\mu\nu} q_{\sigma\rho} \neq \delta^\lambda_\rho$.

$$\begin{aligned}\delta S_{EiBI} &= -\frac{1}{2}M_{P\ell}^2 M_{BI}^2 \int d^4x \left(\sqrt{-q}(\hat{q}^{-1})^{\mu\nu} - \lambda\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{S}_M}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{2}M_{P\ell}^2 \int d^4x \left[\nabla_\rho(\sqrt{-q}(\hat{q}^{-1})^{\mu\lambda}) - \delta_\rho^\lambda \nabla_\nu(\sqrt{-q}(\hat{q}^{-1})^{\mu\nu}) \right] \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + \frac{\delta \mathcal{S}_M}{\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho\end{aligned}$$

e assim obtemos o conjunto de equações quando fazemos $\delta S_{EiBI} = 0$:

$$\sqrt{-q}(\hat{q}^{-1})^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \left(\lambda g^{\mu\nu} - \frac{1}{M_{P\ell}^2 M_{BI}^2} T^{\mu\nu} \right) \quad (5.18a)$$

$$\nabla_\rho(\sqrt{-q}(\hat{q}^{-1})^{\mu\lambda}) - \delta_\rho^\lambda \nabla_\nu(\sqrt{-q}(\hat{q}^{-1})^{\mu\nu}) = \Delta_\rho^{\mu\lambda} \quad (5.18b)$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e $\Delta_\rho^{\mu\lambda}$ é chamado de *hyper-momento*, dados por:

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_M}{\delta g_{\mu\nu}} \quad \text{e} \quad \Delta_\rho^{\mu\lambda} \equiv \frac{2}{M_{P\ell}^2} \frac{\delta \mathcal{S}_M}{\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho} \quad (5.19)$$

Por simplicidade, consideraremos campos bosônicos acoplados minimamente, de modo que o acoplamento se dá com a métrica e não com a conexão de spin (como é o caso, por exemplo, de campos fermiônicos), então vamos aqui considerar $\Delta_\rho^{\mu\lambda} = 0$ de modo que a equação (5.18b) assuma a forma:

$$\nabla_\rho(\sqrt{-q}(\hat{q}^{-1})^{\mu\lambda}) - \delta_\rho^\lambda \nabla_\nu(\sqrt{-q}(\hat{q}^{-1})^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.20)$$

Tomando o traço dessa equação e fazendo $\rho = \mu$, a equação é identicamente nula, já que, uma vez que $q_{\mu\nu}$ é definido como a soma de $g_{\mu\nu}$ e $R_{(\mu\nu)}$ ambos tensores simétricos, então $q_{\mu\nu}$ é simétrico. Para $\rho = \lambda$, como $\delta_\lambda^\lambda = 4$ a equação (5.20) nos diz que

$$\nabla_\rho(\sqrt{-q}(\hat{q}^{-1})^{\mu\lambda}) = 0, \quad (5.21)$$

de modo que temos uma condição de metricidade para $q_{\mu\nu}$, o que implica em:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}(\hat{q}^{-1})^{\rho\sigma} (\partial_\mu q_{\sigma\nu} + \partial_\nu q_{\mu\sigma} - \partial_\sigma q_{\mu\nu}). \quad (5.22)$$

A equação (5.22) nos mostra como a definição de $q_{\mu\nu}$ (5.14) convenientemente nos ajuda a encontrar soluções para as equações de movimento na teoria gravitacional de Eddington inspirada em Born-Infeld. Observe que $R_{\mu\nu}$ é uma função das conexões $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, que são funções da métrica auxiliar q , logo $R_{(\mu\nu)} = R_{(\mu\nu)}(q)$ também o é. O *modus operandi* consiste então em definir um conjunto de funções para as componentes $q_{\mu\nu}$ da métrica auxiliar, em seguida calcular as conexões Γ usando a equação (5.22) e a partir delas calcular $R_{(\mu\nu)}$ e substituir na equação (5.14), o que nos permitirá determinar equações

diferenciais para as componentes $g_{\mu\nu}$ que serão finalmente solucionadas pela equação (5.18a). Aplicaremos essa metodologia adiante quando discutirmos as soluções de buracos negros.

As equações (5.18) nos mostram a relevância da fonte para as equações modificadas. Enquanto o hiper-momento $\Delta_\rho^{\mu\lambda}$ implica na presença, ou não, de metricidade na teoria, o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ é crucial para que as modificações na curvatura do espaço-tempo apareçam na teoria, já que S_{EiBI} e S_{EH} fornecem a mesma dinâmica para $g_{\mu\nu}$ caso não tenhamos fonte. De fato, observe que, se fizermos $T^{\mu\nu} = 0$ na equação (5.18a) teremos

$$\sqrt{-q}(\hat{q}^{-1})^{\mu\nu} = \lambda\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \quad (5.23)$$

ou ainda, na forma matricial,

$$\sqrt{-q} \hat{q}^{-1} = \lambda\sqrt{-g} \hat{g}^{-1}. \quad (5.24)$$

Agora tomando o determinante dos dois lados da equação temos

$$q^2 |\hat{q}^{-1}| = \lambda^4 g^2 |\hat{g}^{-1}| \quad \Rightarrow \quad q = \lambda^4 g \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-q} = \lambda^2 \sqrt{-g} \quad (5.25)$$

e, substituindo esse resultado em (5.24) encontramos

$$\lambda \hat{q}^{-1} = \hat{g}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \hat{q} = \lambda \hat{g} \quad \Rightarrow \quad q_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}. \quad (5.26)$$

Substituindo esse resultado em (5.14)

$$\lambda g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{1}{M_{BI}^2} R_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad g_{\mu\nu} = \frac{1}{(\lambda - 1)M_{BI}^2} R_{\mu\nu} = \frac{1}{\Lambda} R_{\mu\nu} \quad (5.27)$$

o que implica em $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$, conseqüentemente $R = 4\Lambda$ e $R - 2\Lambda = 2\Lambda$. De (5.15) vemos que

$$\begin{aligned} S_{EiBI} &= M_{Pl}^2 M_{BI}^2 \int d^4x (\sqrt{-q} - \lambda\sqrt{-g}) \\ &= \lambda M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda \\ &= \frac{1}{2} \lambda M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \\ &= 2\kappa \lambda M_{Pl}^2 S_{EH}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Ou seja, $S_{EiBI} \propto S_{EH}$, o que significa que as duas ações resultam nas mesmas equações de movimento, e portanto, as equações de Einstein não são modificadas.

Para finalizar essa seção, vamos explorar um pouco mais a relação entre a métrica física $g_{\mu\nu}$ e a métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$ introduzindo a *matriz de deformação* $\hat{\Omega}$ que nos permite transformar uma na outra:

$$q_{\mu\nu} := g_{\rho\nu}\Omega^\rho{}_\mu \quad (5.29)$$

em notação matricial, $\hat{q} = \hat{g}\hat{\Omega}$. Usando a equação (5.14) e a equação (5.18a) obtemos

$$\hat{\Omega} = \mathbf{1} + \frac{1}{M_{BI}^2}\hat{g}^{-1}\hat{R} \quad (5.30a)$$

$$\hat{\Omega}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\det \hat{\Omega}}} \left(\lambda \mathbf{1} - \frac{1}{M_{P\ell}^2 M_{BI}^2} \hat{T} \hat{g} \right). \quad (5.30b)$$

Fazendo uso da matriz $\hat{\Omega}$, podemos escrever

$$\hat{q}^{-1}\hat{R}(\hat{q}) = \frac{1}{M_{P\ell}^2 \sqrt{\det \hat{\Omega}}} \left[M_{P\ell}^2 M_{BI}^2 \left(\sqrt{\det \hat{\Omega}} - \lambda \right) \mathbf{1} + \hat{T} \hat{g} \right]. \quad (5.31)$$

Agora, usando a equação (5.15), definido $S_{EBI} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{BI}$ e restaurando a notação em termos das componentes podemos reescrever a equação (5.31) como:

$$R^\mu{}_\nu(\hat{q}) = \frac{1}{M_{P\ell}^2 \sqrt{\det \hat{\Omega}}} (\mathcal{L}_{BI} \delta^\mu{}_\nu + T^\mu{}_\nu). \quad (5.32)$$

em que $R^\mu{}_\nu := (\hat{q}^{-1})^{\mu\alpha} R_{\nu\alpha}$.

O escalar de Ricci para a métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$ é obtido fazendo $\mu = \nu$, ou seja, tomando o traço da equação (5.32)

$$R(\hat{q}) = \frac{1}{M_{P\ell}^2 \sqrt{\det \hat{\Omega}}} (4\mathcal{L}_{BI} + T). \quad (5.33)$$

Por fim, usando a definição do tensor de Einstein $G^\mu{}_\nu(\hat{q}) = R^\mu{}_\nu(\hat{q}) - \frac{1}{2}R(\hat{q})\delta^\mu{}_\nu$ obtemos

$$G^\mu{}_\nu(\hat{q}) = \frac{1}{M_{P\ell}^2 \sqrt{\det \hat{\Omega}}} \left[T^\mu{}_\nu(\hat{q}\hat{\Omega}^{-1}) - \frac{1}{2}(T(\hat{q}\hat{\Omega}^{-1}) + 2\mathcal{L}_{BI})\delta^\mu{}_\nu \right]. \quad (5.34)$$

A equação (5.34) é exatamente a equação de Einstein a menos de uma redefinição do tensor energia-momento, uma vez que todos os elementos da geometria, $q_{\mu\nu}$, $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$, $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, R e $G_{\mu\nu}$ são definidos de forma idêntica as equações do capítulo 3. A conclusão que podemos tirar desse desenvolvimento é que a métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$ define um espaço-tempo governado pelas equações de Einstein e, portanto, pode ser obtido através do formalismo usual da relatividade geral. Conhecida a métrica $q_{\mu\nu}$ podemos obter a métrica modificada $g_{\mu\nu}$.

5.4 Solução para Buracos Negros carregados

Seguindo os passos de Wei, Yang e Liu (WEI; YANG; LIU, 2015), escrevemos a métrica com simetria esférica na forma

$$ds_g^2 = \psi^2(r)f(r)c^2 dt^2 - \frac{1}{f(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi). \quad (5.35)$$

Lembremos que, conforme observado na equação (5.23), na ausência de fontes ($T^{\mu\nu} = 0$), a teoria modificada coincide com a teoria de Einstein. Assim, se outros campos não estiverem presentes, a métrica acima deve reduzir-se à métrica de Schwarzschild de-Sitter, ou seja, nessa situação devemos ter:

$$\psi(r) = 1 \quad (5.36a)$$

$$f(r) = 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}. \quad (5.36b)$$

Estamos em busca de funções $\psi(r)$ e $f(r)$ para as quais $g_{\mu\nu}$ seja solução da teoria EiBI. Como vimos na seção anterior, para encontrar soluções na teoria modificada EiBI, podemos começar encontrando uma métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$, também esfericamente simétrica, que satisfaz as equações de Einstein. Escrevemos, portanto,

$$ds_q^2 = G^2(r)F(r)c^2 dt^2 - \frac{1}{F(r)} dr^2 - H^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi) \quad (5.37)$$

Na subseção 3.5.2, obtivemos o tensor energia-momento eletromagnético para o caso estático e livre de fontes e suas componentes não-nulas são dadas por:

$$T_{tt} = \frac{\epsilon_0 f}{2} E_r^2 \quad (5.38a)$$

$$T_{rr} = \frac{\epsilon_0}{2f\psi} E_r^2 \quad (5.38b)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{\epsilon_0 r^2}{2\psi} E_r^2 \quad (5.38c)$$

$$T_{\phi\phi} = T_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \quad (5.38d)$$

As equações de Maxwell² nos dizem que

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t(E_r) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_r \left(\frac{r^2 E_r}{\psi} \right) = 0 \quad (5.39)$$

² Aqui usamos $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0$ no lugar de $\partial_\mu(\sqrt{-q}F^{\mu\nu}) = 0$. A justificativa para podermos fazer isso é que $\sqrt{-q} = \frac{G(r)H^2(r)}{\psi(r)r^2}\sqrt{-g}$, como $F^{\mu\nu}$ é função de r e θ as funções de r podem ser incorporadas a $F^{\mu\nu}$ fazendo $\sqrt{-q}F^{\mu\nu} \rightarrow \sqrt{-g}F^{\mu\nu}$.

ou seja,

$$E_r(r) = \frac{C_0}{r^2} \psi(r). \quad (5.40)$$

Substituindo esse resultado em $T_{\mu\nu}$ e usando (5.18) obtemos equações que relacionam as funções incógnitas ψ , f , F , H e G :

$$\frac{H^2}{GF} = \frac{r^2}{\psi f} \left(\lambda + \frac{\kappa C_0^2}{r^4} \right) \quad (5.41a)$$

$$H^2 GF = r^2 \psi f \left(\lambda + \frac{\kappa C_0^2}{r^4} \right) \quad (5.41b)$$

$$G = \psi \left(\lambda - \frac{\kappa C_0^2}{r^4} \right) \quad (5.41c)$$

(por conveniência denotamos $\kappa = \epsilon_0/2M_{PI}^2 M_{BI}^2$) Resolvendo essas equações para F , H e G , temos

$$H = r \sqrt{\lambda + \frac{\kappa C_0^2}{r^4}}, \quad F = f \left(\lambda - \frac{\kappa C_0^2}{r^4} \right)^{-1}, \quad G = \psi \left(\lambda - \frac{\kappa C_0^2}{r^4} \right). \quad (5.42)$$

Utilizando esses resultados e a equação $R_{\mu\nu} = M_{BI}^2 (q_{\mu\nu} - g_{\mu\nu})$ introduzida em (5.14), é possível escrever as componentes não-nulas do tensor de Ricci em termos das funções F , H e G :

$$R_{tt} = M_{BI}^2 G^2 F \left(1 - \frac{1}{\lambda - \frac{\kappa C_0^2}{r^4}} \right), \quad (5.43a)$$

$$R_{rr} = -\frac{M_{BI}^2}{F} \left(1 - \frac{1}{\lambda - \frac{\kappa C_0^2}{r^4}} \right), \quad (5.43b)$$

$$R_{\theta\theta} = -M_{BI}^2 H^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda + \frac{\kappa C_0^2}{r^4}} \right) \quad (5.43c)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \quad (5.43d)$$

Por outro lado, como o tensor de Ricci se relaciona com a conexão do mesmo modo como na teoria de Einstein, essas componentes também podem ser calculadas via equação (3.30), ou no caso de métricas esfericamente simétricas, como é o caso, via equação (3.62).

As componentes da conexão podem ser determinadas em termos de F , H e G , já que $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(q)$ se relaciona com a métrica auxiliar via equação (5.22). Usando (3.61), temos:

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = -\left(\frac{F'}{2F} + \frac{G'}{G}\right), \quad (5.44a)$$

$$\Gamma_{tt}^r = GG'F^2 + \frac{1}{2}FF'G^2, \quad (5.44b)$$

$$\Gamma_{rr}^r = -\frac{F'}{2F}, \quad (5.44c)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = FHH', \quad (5.44d)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = FHH' \sin^2 \theta, \quad (5.44e)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{H'}{H}, \quad (5.44f)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \sin \theta \cos \theta, \quad (5.44g)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta. \quad (5.44h)$$

e, a partir delas, as componentes do tensor de Ricci não-nulas podem ser determinadas usando (3.62), resultando em

$$R_{tt} = \frac{G^2 F^2}{2} \left(4 \frac{G'}{G} \frac{H'}{H} + 2 \frac{F'}{F} \frac{H'}{H} + 3 \frac{G'}{G} \frac{F'}{F} + 2 \frac{G''}{G} + \frac{F''}{F} \right) \quad (5.45a)$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{2} \left(4 \frac{H''}{H} + 2 \frac{F'}{F} \frac{H'}{H} + 3 \frac{G'}{G} \frac{F'}{F} + 2 \frac{G''}{G} + \frac{F''}{F} \right) \quad (5.45b)$$

$$R_{\theta\theta} = -H^2 F \left[-\frac{1}{H^2 F} + \frac{F'}{F} \frac{H'}{H} + \frac{G'}{G} \frac{H'}{H} + \left(\frac{H'}{H} \right)^2 + \frac{H''}{H} \right] \quad (5.45c)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \quad (5.45d)$$

Assim, de (5.43) e (5.45), escrevemos:

$$4 \frac{G'}{G} \frac{H'}{H} + 2 \frac{F'}{F} \frac{H'}{H} + 3 \frac{G'}{G} \frac{F'}{F} + 2 \frac{G''}{G} + \frac{F''}{F} = \frac{2M_{BI}^2}{F} \left(1 - \frac{r^4}{\lambda r^4 - \kappa C_0^2} \right), \quad (5.46a)$$

$$4 \frac{H''}{H} + 2 \frac{F'}{F} \frac{H'}{H} + 3 \frac{G'}{G} \frac{F'}{F} + 2 \frac{G''}{G} + \frac{F''}{F} = \frac{2M_{BI}^2}{F} \left(1 - \frac{r^4}{\lambda r^4 - \kappa C_0^2} \right), \quad (5.46b)$$

$$-\frac{1}{H^2 F} + \frac{F'}{F} \frac{H'}{H} + \frac{G'}{G} \frac{H'}{H} + \left(\frac{H'}{H} \right)^2 + \frac{H''}{H} = \frac{M_{BI}^2}{F} \left(1 - \frac{r^4}{\lambda r^4 + \kappa C_0^2} \right). \quad (5.46c)$$

Das duas primeiras equações, concluímos:

$$4 \frac{G'}{G} \frac{H'}{H} - 4 \frac{H''}{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{G'}{G} = \frac{H''}{H'} \quad \Rightarrow \quad G = C_1 H'. \quad (5.47)$$

Com isso, usando as relações (5.42), encontramos uma equação para $\psi(r)$:

$$\psi \left(\lambda - \frac{\kappa C_0^2}{r^4} \right) = C_1 \frac{d}{dr} \left[r \sqrt{\lambda + \frac{\kappa C_0^2}{r^4}} \right] \quad (5.48)$$

com a qual concluímos que

$$\psi(r) = \frac{C_1 r^2}{\sqrt{\lambda r^4 + \kappa C_0^2}} \quad \text{e} \quad E_r(r) = \frac{C_1 C_0}{\sqrt{\lambda r^4 + \kappa C_0^2}} \quad (5.49)$$

em que utilizamos a equação (5.40). É interessante observar que

$$E_r(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (5.50)$$

$$\psi(r \rightarrow \infty) = \frac{C_1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (5.51)$$

Ou seja, longe da origem, o campo elétrico é nulo então nos encontramos na situação em que as equações (5.36) devem valer, de modo que devemos escolher $C_1 = \sqrt{\lambda}$. Observe que $E_r(r) = 0$ para $C_0 = 0$, assim identificamos C_0 com a carga elétrica. De fato, se considerarmos $\lambda r^4 \gg \kappa C_0^2$ temos:

$$E_r(\lambda r^4 \gg \kappa C_0^2) \approx \frac{C_0}{r^2} \quad (5.52)$$

e como, nesse limite, E_r deve reduzir-se ao campo de Coulomb, devemos escolher $C_0 = (4\pi\epsilon_0)^{-1}Q$. Dessa forma, temos para ψ e E_r , finalmente

$$\psi(r) = \frac{r^2}{\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}}, \quad E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}} \quad \text{em que} \quad r_\alpha^2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda\epsilon_0}} \frac{Q}{4\pi M_{Pl} M_{BI}}. \quad (5.53)$$

Por fim, resta determinar $f(r)$ para determinar a métrica $g_{\mu\nu}$, o que fazemos substituindo $G = C_1 H'$ em (5.46c) e fazendo algumas manipulações algébricas com as quais obtemos:

$$F' + \left(\frac{2H''}{H'} + \frac{H'}{H} \right) F = M_{BI}^2 \frac{H}{H'} \left(1 - \frac{r^4}{\lambda(r^4 + r_\alpha^4)} \right) - \frac{1}{H'H} \quad (5.54)$$

$$\frac{1}{H'^2 H} (H'^2 H F)' = M_{BI}^2 \frac{H}{H'} \left(1 - \frac{r^4}{\lambda(r^4 + r_\alpha^4)} \right) - \frac{1}{H'H} \quad (5.55)$$

assim, podemos multiplicar ambos os lados por $H'^2 H$ e integrar para achar F , que pode ser escrito como

$$F = \frac{1}{H'^2 H} \left[C_2 + \int dr \left(H' - M_{BI}^2 H' H^2 \left(1 - \frac{r^4}{\lambda(r^4 + r_\alpha^4)} \right) \right) \right] \quad (5.56)$$

em que C_2 é a constante de integração. Substituindo as funções H e F dadas por (5.42) e depois de uma exaustiva manipulação algébrica obtemos:

$$f(r) = \frac{r\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}}{r^4 - r_\alpha^4} \left[\frac{C_2}{\sqrt{\lambda}} - \int dr \left(\frac{(r^4 - r_\alpha^4)(\Lambda r^4 - r^2 + \lambda M_{BI}^2 r_\alpha^4)}{r^4 \sqrt{r^4 + r_\alpha^4}} \right) \right] \quad (5.57)$$

para encontrar o valor de C_2 , consideremos que, na ausência de fontes devemos obter a métrica de Schwarzschild de-Sitter e portanto devemos para $f(r)$ obter a forma dada em (5.36) quando zeramos a carga elétrica, ou seja, quando fazemos $Q = 0$ (i.e, $r_\alpha = 0$). Assim,

$$f(r)|_{Q=0} = 1 + \frac{C_2}{\sqrt{\lambda}r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \quad (5.58)$$

o que nos leva a concluir que $C_2 = -\sqrt{\lambda}r_s$. Outro caso particularmente interessante é fazer $\kappa \rightarrow 0$ ($r_\alpha \rightarrow 0$) em $f(r)$. Observe que

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} f(r) = 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{\lambda M_{BI}^2 r_\alpha^4}{r^2} \quad (5.59)$$

nos dá a solução de Reissner-Nordstrom se $\lambda M_{BI}^2 r_\alpha^4 = r_Q^2$ e $\Lambda = 0$.

Tendo determinado todas as constantes, vamos agora resolver a integral em (5.57) e completar a expressão para $f(r)$. Começamos reescrevendo a integral da seguinte forma:

$$I(r) := \int dr \left(\frac{(r^4 - r_\alpha^4)(\Lambda r^4 - r^2 + r_Q^2)}{r^4 \sqrt{r^4 + r_\alpha^4}} \right) \quad (5.60a)$$

$$= \Lambda I_4 - I_2 + (r_Q^2 - \Lambda r_\alpha^4) I_0 - r_\alpha^4 [r_Q^2 I_{-4} - I_{-2}] \quad (5.60b)$$

em que definimos

$$I_n = \int \frac{r^n dr}{\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}}. \quad (5.61)$$

Observe que fazendo $\sqrt[4]{-1} \frac{r}{r_\alpha} = \sin(x) = i \sinh(ix)$ e $m = -1$, temos

$$\begin{aligned} I_0 &= \int \frac{dr}{\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}} \\ &= -\frac{\sqrt[4]{-1}}{r_\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}} \\ &= -\frac{\sqrt[4]{-1}}{r_\alpha} F\left(i \sinh^{-1} \sqrt[4]{-1} \frac{r}{r_\alpha} \middle| -1\right) + \text{constante} \end{aligned} \quad (5.62)$$

em que

$$F(\varphi|m) = \int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}. \quad (5.63)$$

é a função elíptica de primeira espécie (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014). Agora, observe que

$$\frac{d}{dr}(r^n \sqrt{r^4 + r_\alpha^4}) = nr^{n-1} \sqrt{r^4 + r_\alpha^4} + \frac{2r^{n+3}}{\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}} = \frac{(2+n)r^{n+3}}{\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}} + nr_\alpha^4 \frac{r^{n-1}}{\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}} \quad (5.64)$$

de modo que, reordenando os termos e integrando dos dois lados obtemos:

$$\int \frac{r^{n+3} dr}{\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}} = \frac{r^n}{n+2} \sqrt{r^4 + r_\alpha^4} - \frac{nr_\alpha^4}{n+2} \int \frac{r^{n-1} dr}{\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}} \quad (5.65)$$

$$I_{n+3} = \frac{r^n}{n+2} \sqrt{r^4 + r_\alpha^4} - \frac{nr_\alpha^4}{n+2} I_{n-1} \quad (5.66)$$

para $n = 1$, $n = -1$ e $n = -3$, respectivamente, temos

$$I_4 = \frac{r}{3} \sqrt{r^4 + r_\alpha^4} - \frac{r_\alpha^4}{3} I_0 \quad (5.67a)$$

$$I_2 = \frac{1}{r} \sqrt{r^4 + r_\alpha^4} + r_\alpha^4 I_{-2} \quad (5.67b)$$

$$I_0 = -\frac{1}{r^3} \sqrt{r^4 + r_\alpha^4} - 3r_\alpha^4 I_{-4} \quad (5.67c)$$

substituindo esses resultados em (5.60) obtemos a solução

$$I(r) = \left(\frac{\Lambda r^4 - 3r^2 - r_Q^2}{3r^3} \right) \sqrt{r^4 + r_\alpha^4} + \frac{4}{3} (r_Q^2 - \Lambda r_\alpha^4) I_0(r) \quad (5.68)$$

$$I_0(r) = -\frac{\sqrt[4]{-1}}{r_\alpha} F\left(i \sinh^{-1} \sqrt[4]{-1} \frac{r}{r_\alpha} \middle| -1\right) + \text{constante} \quad (5.69)$$

quando $r \gg r_\alpha$, ou seja no limite em que a métrica converge para (5.36), a função $F(\varphi | -1)$ atinge seu valor máximo, ou seja:

$$F\left(\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \middle| -1\right) = K(-1) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{4\sqrt{2\pi}} \quad (5.70)$$

para que a função $f(r)$ assuma a forma da já conhecida métrica de Reissner-Nordstrom de-Sitter, a constante de integração obtida em (5.69) deve anular o termo de $F(\pi/2 | -1)$ fazendo $I_0 = 0$ logo, as funções $\psi(r)$, $f(r)$ e $E_r(r)$, obtidos das equações EiBI são finalmente:

$$\psi(r) = \frac{r^2}{\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}} \quad (5.71a)$$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}} \quad (5.71b)$$

$$f(r) = \frac{r\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}}{r^4 - r_\alpha^4} \left\{ \frac{(r_Q^2 + 3r^2 - \Lambda r^4)\sqrt{r^4 + r_\alpha^4}}{3r^3} - \frac{2}{3} \sqrt[4]{-1} r_\alpha \left[F \left(i \sinh^{-1} \sqrt[4]{-1} \frac{r}{r_\alpha} \middle| -1 \right) - \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{4\sqrt{2\pi}} \right] - r_s \right\} \quad (5.71c)$$

$$\text{onde: } r_Q^2 = \frac{G_N Q^2}{4\pi\epsilon_0 c^4}, \quad r_s = \frac{2G_N M}{c^2} \quad \text{e} \quad r_\alpha = \left(\frac{r_Q^2}{\lambda M_{BI}^2} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (5.71d)$$

Observemos agora o comportamento dessa métrica em (5.35) quando $r \rightarrow 0$. Nesse caso temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi^2(r) f(r) = \lim_{r \rightarrow 0} -\frac{1}{f(r)} = 0 \quad \Rightarrow \quad ds_g^2 = 0 \quad (5.72)$$

ou seja, não há divergência (singularidade) na origem do sistema de coordenadas, diferente do que ocorre na métrica de Reissner–Nordström não modificada. Usando as expressões (5.43) podemos obter as curvaturas escalares:

$$R(g, q) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(q) = M_{BI}^2 g^{\mu\nu} (q_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}) = 4\Lambda \quad (5.73)$$

$$R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(g, q) = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta}(q) R_{\mu\nu}(q) = 4M_{BI}^4 \left[1 - \frac{r^8}{\lambda(r^8 - r_\alpha^8)} \right] \quad (5.74)$$

o que implica em: $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(r \rightarrow 0) = 4M_{BI}^4$ confirmando que o ponto $r = 0$ não é uma singularidade física da solução. No entanto, no ponto $r = r_\alpha$ tanto a métrica, quanto os escalares de curvatura (exceto o escalar de Ricci) apresentados divergem indicando que não há um sistema de coordenadas para o qual a métrica possa ser calculada nesse ponto, o que aparenta ser um problema sério, uma vez que em RG tínhamos apenas um ponto singular, mas aqui temos toda uma superfície aparentemente separando o espaço-tempo em duas partes distintas, contudo, há sutilezas com relação a análise de pontos singulares que precisam ser discutidas.

De fato, não podemos determinar a distancia entre dois pontos (evento) sobre a superfície $r = r_\alpha$. No entanto, em se tratando de um espaço-tempo físico o que realmente importa aqui é se uma partícula pode ou não se mover sobre e/ou através dos pontos singulares se deslocando para dentro ou para fora do interior da superfície, ou seja, se para todos os pontos do espaço-tempo podemos definir curvas geodésicas do tipo nula ou do tipo tempo (causais), o que chamamos de *(in)completude geodésica* (ASHLEY; SCOTT,

2003). Em se tratando da RG de Einstein, quando $r \rightarrow 0$ o tempo próprio de queda experimentado por uma partícula do tipo tempo diverge, ou seja, a medida em que cai em direção ao centro de um buraco negro com simetria esférica a partícula terá seu tempo de queda tendendo a infinito e nunca chegará na origem, logo o ponto $r = 0$ é inacessível e a métrica é *geodesicamente incompleta*. Isso não ocorre aqui, uma vez que se calcularmos as curvas geodésicas, veremos que todos os pontos do espaço-tempo podem ser acessados inclusive nos pontos para os quais $r = r_\alpha$.

Parte III

Considerações Finais

6 Considerações finais

No presente trabalho expomos as teorias eletromagnética de Maxwell e da relatividade geral de Einstein, usando a abordagem da teoria clássica de campos, elencando suas principais semelhanças e diferenças. Em seguida, mostramos uma forma particular de modificação, a saber a teoria de Born-Infeld, no intuito de eliminar as divergências de energia presentes nas duas teorias originais.

Na teoria de Born-Infeld para o eletromagnetismo, mostramos que as modificações ocorrem em altas energias e resolvem o problema da carga pontual. Uma vez que o valor da energia de repouso dessa carga é conhecido pelos experimentos que determinaram a razão carga/massa do elétron, obtivemos um valor numérico para o campo de corte da teoria.

Em sua versão gravitacional, as modificações inspiradas em Born-Infeld nos permitiu mostrar que o ponto singular na origem do sistema de coordenadas ($r = 0$), que existe na teoria de Einstein, em seu análogo modificado não está presente. No entanto, vimos, que toda uma superfície singular ($r = r_\alpha$) emerge na solução modificada. Entretanto, diferente da geometria da relatividade especial de Einstein, onde o ponto singular não pode ser acessado por nenhuma partícula tornando o espaço-tempo geodesicamente incompleto, a teoria de Eddington inspirada em Born-Infeld é geodesicamente completa e a hipersuperfície singular não representa um problema real.

Ainda persiste a pergunta: qual o significado das divergências nos escalares de curvaturas se elas não afetam a dinâmica da partícula? A resposta para isso não é trivial e necessita de uma análise mais profunda de geometria riemanniana que não abordamos nesse texto, a saber, os critérios de classificação de singularidades (ASHLEY; SCOTT, 2003). Em resumo, quando um corpo¹ se aproxima de pontos para os quais a curvatura diverge, seu volume sofre alteração, e, se o volume tende a zero quando o corpo tende a singularidade então ele é esmagado pelas forças de maré causadas pela curvatura.² Nesse caso, dizemos que temos uma *singularidade forte* (SAMANTA; GOEL; MYRZAKULOV, 2018). Se por outro lado o volume não for nulo, dizemos que se trata de uma *singularidade fraca*. Afirmamos sem demonstrar que no caso da RG de Einstein a singularidade no centro de um buraco negro ($r = 0$) é forte, enquanto que em EiBI a singularidade na superfície $r = r_\alpha$ é fraca.

¹ entenda-se corpo (não necessariamente rígido) como um conjunto de pontos, aos quais consideramos a dinâmica coletiva de todo o conjunto

² uma vez que a curvatura está relacionada com a densidade da matéria-energia pelas equações de movimento, é intuitivo que uma divergência na curvatura signifique uma divergência na densidade de energia/pressão no local analisado.

Conforme pôde ser visto, as modificações apresentadas solucionam os problemas de forma satisfatória possibilitando previsões teóricas da fenomenologia não cobertas por suas versões originais (não modificadas), entre essas possibilidades podemos aplicar a teoria de Eddington inspirada em Born-Infeld para, por exemplo, analisar a singularidade primordial do universo, propor um limite clássico para uma teoria de gravidade quântica, ou até mesmo calcular o valor da constante cosmológica que concorde com a teoria quântica de campos (escolha conveniente da constante de acoplamento) todas são perspectivas razoáveis de trabalhos futuros que levam em conta problemas atualmente em aberto na física.

Referências

- ASHLEY, M. J. S. L.; SCOTT, S. M. Curvature singularities and abstract boundary singularity theorems for space-time. 9 2003. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 85.
- BAÑADOS, M.; FERREIRA, P. G. Eddington's theory of gravity and its progeny. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 105, n. 1, jul 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.011101>>. Citado na página 18.
- BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. *Nature*, v. 133, n. 1, p. 425–451, 1934. Citado 3 vezes nas páginas 17, 31 e 51.
- DESER, S.; GIBBONS, G. W. Born - infeld - einstein actions? *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 15, n. 5, p. L35–L39, may 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/15/5/L03>>. Citado na página 18.
- EDDINGTON, A. S. *The Mathematical Theory of Relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1930. Citado na página 18.
- EINSTEIN, A. The Foundation of the General Theory of Relativity. *Annalen Phys.*, v. 49, n. 7, p. 769–822, 1916. [Annalen Phys.14,517(2005); ,65(1916); Annalen Phys.354,no.7,769(1916)]. Citado na página 17.
- FURRY, W. H.; OPPENHEIMER, J. R. On the theory of the electron and positive. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 45, p. 245–262, Feb 1934. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.45.245>>. Citado na página 17.
- GKIGKITZIS. KRETSCHMANN INVARIANT AND RELATIONS BETWEEN SPACETIME SINGULARITIES ENTROPY AND INFORMATION. *Physics International*, Science Publications, v. 5, n. 1, p. 103–111, jan 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.3844/PhysP.2014.103.111>>. Citado na página 39.
- GRADSHTEYN, I.; RYZHIK, I. *Table of Integrals, Series, and Products*. Elsevier Science, 2014. ISBN 9781483265643. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=F7jiBQAAQBAJ>>. Citado na página 79.
- HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1973. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Citado na página 17.
- JIMÉNEZ, J. B. et al. Born-infeld inspired modifications of gravity. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 727, p. 1–129, Jan 2017. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2017.11.001>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 67.
- LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. The classical theory of fields. In: _____. [S.l.]: The Whitefriars Press Ltd., London and Tonbridge, 1971. (Course of Theoretical Physics, v. 2), cap. Particle in a Gravitational Field, p. 225–254. Citado na página 34.

SALUCCI, P. The distribution of dark matter in galaxies. *The Astronomy and Astrophysics Review*, Springer Science and Business Media LLC, v. 27, n. 1, Feb 2019. ISSN 1432-0754. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00159-018-0113-1>>. Citado na página 17.

SAMANTA, G.; GOEL, M.; MYRZAKULOV, R. Strength of the singularities, equation of state and asymptotic expansion in kaluza–klein space time. *New Astronomy*, Elsevier BV, v. 60, p. 74–79, apr 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.newast.2017.10.007>>. Citado na página 85.

VOLLICK, D. N. Palatini approach to born-infeld-einstein theory and a geometric description of electrodynamics. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 69, n. 6, mar 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.064030>>. Citado na página 18.

WEI, S.-W.; YANG, K.; LIU, Y.-X. Black hole solution and strong gravitational lensing in eddington-inspired born-infeld gravity. *Eur. Phys. J. C*, p. 75–253, 2015. Disponível em: <<<https://arxiv.org/pdf/1405.2178.pdf>>>. Acesso em Janeiro 17, 2020. Citado na página 74.

WOODARD, R. P. *The Theorem of Ostrogradsky*. arXiv, 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1506.02210>>. Citado na página 53.