



Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Centro de Tecnologia - CT

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Controlador desacoplado para manipulador robótico articulado com três graus de liberdade

Igor Cabral Machado Lopes

Natal-RN, Brasil

2020



Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Centro de Tecnologia - CT

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica

Controlador desacoplado para manipulador robótico articulado com três graus de liberdade

Igor Cabral Machado Lopes

Orientador: Samaherni Morais Dias

Coorientador: Kurios Iuri Pinheiro de Melo Queiroz

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica da UFRN como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecatrônica.

Natal-RN, Brasil

2020

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Lopes, Igor Cabral Machado.

Controlador desacoplado para manipulador robótico articulado com três graus de liberdade / Igor Cabral Machado Lopes. - 2020. 74f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica, Natal, 2020.

Orientador: Dr. Samaherni Morais Dias.

Coorientador: Dr. Kurios Iuri Pinheiro de Melo Queiroz.

1. Manipulador robótico - Dissertação. 2. Controle adaptativo - Dissertação. 3. VS-MRAC - Dissertação. 4. Controle PD - Dissertação. 5. Sistema não linear - Dissertação. I. Dias, Samaherni Morais. II. Queiroz, Kurios Iuri Pinheiro de Melo. III. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 04.896

Controlador desacoplado para manipulador robótico articulado com três graus de liberdade

Igor Cabral Machado Lopes

Dissertação de Mestrado aprovada em 23 de dezembro de 2020 pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Samaherni Moraes Dias (orientador) DEE/UFRN

Prof. Dr. Kurios Iuri Pinheiro de Melo Queiroz (co-orientador) .. DEE/UFRN

Prof. Dr. Pablo Javier Alsina DCA/UFRN

Prof. Dr. Aldayr Dantas de Araújo DEE/UFRN

Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira DEE/UERJ

Natal-RN, Brasil

2020

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser concluído sem a ajuda de diversas pessoas as quais presto minha homenagem:

Primeiramente a Deus que me deu força e saúde para superar todas as adversidades.

Ao meu orientador, professor Samaherni, por sua disponibilidade para tirar minhas dúvidas, pelas correções e incentivos.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo, apoio incondicional, ajuda nos momentos mais difíceis e por me consolarem nas decepções.

À Nathália, por me ajudar nas correções exigidas para esse trabalho, pelos momentos de descontração quando estava estressado e por todo o apoio psicológico.

Aos professores Aldayr Araújo, Kurios Queiroz, Tiago Roux e Pablo Alsina que se disponibilizaram a avaliar este trabalho e a participar da banca em uma data extremamente complicada.

E a todos que fizeram parte da minha formação direta ou indiretamente, amigos, professores, técnicos e funcionários, o meu muito obrigado.

*“A vida sem ciência é uma espécie de morte.
(Sócrates)*

Resumo

Este trabalho propõe o controle de um manipulador robótico articulado, classificado na literatura como Antropomórfico (RRR), o qual é formado por três juntas de revolução, três graus de liberdade e movimento espacial. Este tipo de manipulador possui grande liberdade de movimento dentro do seu espaço de trabalho e possui inúmeras aplicações. Para controlar o manipulador, duas estratégias de controle serão aplicadas, a primeira é um controlador adaptativo por modelo de referência e estrutura variável e a segunda um controlador linear proporcional derivativo. As duas estratégias serão associadas a uma técnica de inversão de sistemas não lineares que desacopla a dinâmica de cada junta do manipulador. Desta forma, cada junta possuirá um controlador independente. Resultados simulados serão apresentados para demonstrar o funcionamento dos controladores e um conjunto de métricas serão aplicadas para auxiliar na comparação entre as técnicas de controle.

Palavras-chave: manipulador robótico, controle adaptativo, VS-MRAC, controle PD, sistema não linear, sistema inverso.

Abstract

This work proposes a control technique applied to an articulated robotic manipulator, classified in the literature as anthropomorphic (RRR), which is formed by three rotary joints, three degrees of freedom, and spatial movement. Articulated manipulators (RRR) have a great freedom of movement inside their workspace and are a type of manipulator widely used. Two control strategies will be implemented, the first is the variable structure model reference adaptive control, and the second one is a linear proportional derivative controller. Both controllers proposed will use an inversion technique to decouple the dynamic of each joint of the RRR manipulator, resulting in an independent controller for each joint. In the end, simulated results will be presented, and some analyzes about them will be made.

Keywords: articulated manipulator, adaptive control, VS-MRAC, PD control, nonlinear system, left-inverse system.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação da posição e orientação de um referencial $\{B\}$ em relação a um referencial $\{A\}$	24
Figura 2 – Representação da posição e orientação de $\{B\}$ em relação a $\{A\}$, $\{C\}$ em relação a $\{B\}$ e $\{C\}$ em relação a $\{A\}$	25
Figura 3 – Representação dos parâmetros de Denavit-Hartenberg	26
Figura 4 – Diagrama elétrico de um motor DC	29
Figura 5 – Diagrama de blocos do controlador PD	36
Figura 6 – Representação do manipulador com os comprimentos dos respectivos elos	37
Figura 7 – Diagrama de blocos do manipulador robótico considerando a dinâmica dos motores DC	43
Figura 8 – Diagrama de blocos do sistema inverso com o vetor de torques como entrada	43
Figura 9 – Diagrama de blocos do sistema inverso com o vetor de tensões como saída	44
Figura 10 – Diagrama de blocos do controlador proposto	44
Figura 11 – Diagrama do controlador VS-MRAC para grau relativo igual a dois	45
Figura 12 – Dinâmica das juntas na simulação 01	51
Figura 13 – Dinâmica das juntas na simulação 02	52
Figura 14 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 03 (controle sem incertezas) no cenário 2	54
Figura 15 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 03 (controle sem incertezas) no cenário 3	55
Figura 16 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 04 (ruído na medição dos ângulos) no cenário 2	56
Figura 17 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 04 (ruído na medição dos ângulos) no cenário 3	57
Figura 18 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 05 (ruído na medição da carga na extremidade) no cenário 2	58
Figura 19 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 05 (ruído na medição da carga na extremidade) no cenário 3	59
Figura 20 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 06 (ruídos e saturação na tensão) no cenário 2	60
Figura 21 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 06 (ruídos e saturação na tensão) no cenário 3	61
Figura 22 – Dinâmica da posição da extremidade do manipulador e de amostras da posição do modelo para a extremidade na simulação 03.	62

Figura 23 – Velocidade do ponto Q em relação a {A} considerando um movimento rotacional do referencial {B}	70
Figura 24 – Velocidade do ponto Q em relação a {A} devido a velocidade angular do referencial {B}	70

Lista de tabelas

Tabela 1 – Algoritmo para implementação do controlador VS-MRAC	35
Tabela 2 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg para o manipulador RRR utilizado	38
Tabela 3 – Parâmetros associados a cada elo	41
Tabela 4 – Parâmetros do motor DC	42
Tabela 5 – Detalhamento das situações simuladas	50
Tabela 6 – Detalhamento dos cenários simulados	50
Tabela 7 – Métricas de erro para a simulação 03 no cenário 2	54
Tabela 8 – Métricas de erro para a simulação 03 no cenário 3	55
Tabela 9 – Métricas de erro para a simulação 04 no cenário 2	56
Tabela 10 – Métricas de erro para a simulação 04 no cenário 3	57
Tabela 11 – Métricas de erro para a simulação 05 no cenário 2	58
Tabela 12 – Métricas de erro para a simulação 05 no cenário 3	59
Tabela 13 – Métricas de erro para a simulação 06 no cenário 2	60
Tabela 14 – Métricas de erro para a simulação 06 no cenário 3	61

Lista de abreviaturas e siglas

RRR Representa três juntas rotacionais de um manipulador

VS-MRAC *Variable Structure Model Reference Adaptive Control*

PD Proporcional-Derivativo

DC *Direct Current*

Sumário

1	Introdução	19
2	Revisão Bibliográfica	23
2.1	Representação espacial e transformações	23
2.2	Modelo cinemático	25
2.3	Modelo dinâmico	27
2.4	Modelo dinâmico do motor DC	28
2.5	Técnica de desacoplamento	30
2.6	Técnica de controle	32
2.6.1	Controlador VS-MRAC	32
2.6.2	Controlador PD	36
3	Metodologia	37
3.1	Modelo cinemático do manipulador RRR	37
3.2	Modelo dinâmico do manipulador RRR	40
3.3	Modelo dinâmico do motor DC	42
3.4	Técnica de desacoplamento	43
3.5	Técnica de controle	44
3.5.1	Controlador VS-MRAC	45
3.5.2	Controlador PD	46
4	Resultados e discussões	49
4.1	Detalhamento das simulações	49
5	Conclusões	63
	Referências	65
	Apêndices	67
	APÊNDICE A – Provas das equações de velocidades lineares e angulares dos elos	69
	APÊNDICE B – Provas das equações de acelerações lineares e angulares dos elos	73

1 Introdução

Os braços robóticos são manipuladores programáveis e multifuncionais usados principalmente para mover peças e materiais ou para efetuar tarefas como pintura, soldagem, inspeção de produtos, entre outras. Por possuir uma grande liberdade de movimento em seu espaço de trabalho, esses robôs podem ser utilizados nas mais diversas áreas, desde a militar, passando por aplicações na medicina e, principalmente, aplicações industriais. Eles são compostos por partes rígidas chamadas de elos, acoplados por juntas, que permitem o movimento entre os elos, e por uma ferramenta, usada para efetuar a tarefa para a qual o manipulador foi projetado (pintura, solda, inspeção e etc).

Em [Murray et al. \(1994\)](#) e [Siciliano et al. \(2009\)](#) é possível encontrar um histórico sobre a robótica, desde o surgimento do termo robô, criado por Karel Capek em sua obra satírica *R. U. R. (Rossum's Universal Robots)* até as aplicações nos dias atuais. [Siciliano et al. \(2009\)](#) ainda apresenta uma definição detalhada de robôs manipuladores além de identificar algumas arquiteturas comumente utilizadas.

Para este trabalho foi implementado e simulado o controle de um manipulador articulado de três graus de liberdade, classificado na literatura como Articulado vertical ou antropomórfico (RRR). Esse manipulador é formado por três juntas rotacionais, elos cilíndricos e uma garra como ferramenta.

Devido a sua ampla versatilidade, a implementação de um controle preciso da posição e dinâmica de suas juntas se torna uma atividade complexa, pois o manipulador de três graus de liberdade possui características não lineares, incertezas paramétricas e forte acoplamento entre o movimento das juntas. Outra característica importante nesses manipuladores é a necessidade do controlador se adaptar às variações de carga, aos distúrbios externos e ao ambiente para realizar sua função adequadamente ([CRAIG, 2013](#)).

Antes do projeto do controlador é necessário se obter um modelo dinâmico preciso do processo, como os calculados por [Lan et al. \(2012\)](#), [Raj, Iyer e Dash \(2016\)](#), [Kalimullah, Desikan e Kalaichelvi \(2017\)](#) e [Kasera, Kumar e Prasad \(2017\)](#). Uma abordagem amplamente utilizada é conhecida como Algoritmo de Newton-Euler, a qual resulta em uma expressão analítica dos esforços nas juntas em função das variáveis de junta. Nos trabalhos de [Mills e Goldenberg \(1989\)](#), [Mozaryn e Kurek \(2002\)](#), [Alavandar e Nigam \(2009\)](#), [Sallam \(2010\)](#), mais recentemente, [Dias et al. \(2016\)](#) e [Kasera, Kumar e Prasad \(2017\)](#) pode-se comprovar a utilização e o funcionamento desse algoritmo.

[Craig \(2013\)](#) apresenta uma maneira para a obtenção do modelo dinâmico de um manipulador RRR com base no cálculo de um modelo cinemático, dos parâmetros de Denavit-Hartenberg, das matrizes de rotação, dos vetores de posição, dos valores

das velocidades e acelerações lineares e angulares dos elos do manipulador e esse foi procedimento utilizado neste trabalho para a obtenção do modelo dinâmico.

Além da dinâmica do manipulador, também é necessário se considerar um modelo para o atuador das juntas, como em [García-Rodríguez et al. \(2016\)](#) e [Hernández-Márquez et al. \(2017\)](#), o qual receberá um sinal elétrico como entrada. Para este trabalho foi considerado um motor DC como atuador das juntas, sendo sua dinâmica calculada com um sinal de tensão como entrada e um sinal de torque, indo para as juntas do manipulador, como saída.

Após se obter o modelo, deve-se projetar um controlador para o manipulador. Várias estratégias podem ser encontradas na literatura, em [Alassar, Abuhadrous e Elaydi \(2010\)](#), os autores fazem uma comparação entre um controlador PID e um FLC (*fuzzy logic controller*) aplicados a um manipulador de cinco graus de liberdade, obtendo baixos erros de regime e baixos tempos de subida com o FLC, porém apresentando um pequeno *overshoot* no sinal de saída.

Trabalhos aplicando controladores baseados em torque computado, como proposto por [Slotine e Li Weiping \(1988\)](#) e, posteriormente, utilizado em [Al Ashi, Elaydi e Abu Hadrous \(2018\)](#) e [Alhaddad, Shaukifeh e Joukhadar \(2019\)](#), aplicando um caso especial da linearização de sistemas por realimentação, para fazer a inversão do modelo dinâmico mediante a medição dos ângulos e velocidades angulares das juntas do manipulador. [Al Ashi, Elaydi e Abu Hadrous \(2018\)](#) utilizam uma linguagem orientada a objetos (*Modelica*) para simular um controlador PD associado à inversão por torque computado, aplicados a um manipulador de dois graus de liberdade, resultando em um controle de trajetória com erro zero, porém, este modelo necessita de medições precisas dos parâmetros do manipulador e dos atuadores. Já [Alhaddad, Shaukifeh e Joukhadar \(2019\)](#) fazem uso de um controlador adaptativo, baseado em um algoritmo linear quadrático, para estimar os valores das massas dos elos do manipulador (incerteza paramétrica) e fazer o controle de seus ângulos de junta, conseguindo estimar com precisão as massas e seguir as trajetórias desejadas com um baixo erro de regime.

Alguns trabalhos, como em [Alavandar e Nigam \(2009\)](#) e [Sallam \(2010\)](#), fazem uso de algoritmos *Fuzzy*. O primeiro trabalho propõe a utilização de controladores híbridos, associando um controlador adaptativo *neuro-fuzzy* a estratégias clássicas de controle (controle por torque computado, controle de dinâmica inversa *feed forward* e controle de dinâmica inversa criticamente amortecido) e apresentando resultados simulados de como essa associação reduz o erro de regime e a oscilação no controle do ângulo das juntas de um manipulador PUMA de seis graus de liberdade. Já o segundo propõe um controle da dinâmica de um manipulador planar de três graus de liberdade aplicando um controlador híbrido *fuzzy* mais PD autoajustável, possuindo resultados simulados superiores aos resultados obtidos aplicando um controlador PD clássico.

Dias et al. (2016) propõem um controle desacoplado a partir de uma técnica de inversão do sistema, proposta por Hirschorn (1979), que transforma o modelo dinâmico em um sistema SISO (*Single-Input Single-Output*) linear para cada junta, modelo este que, sem a utilização do sistema inverso, configura-se como MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*) não linear. A proposta dos autores foi simplificar o projeto dos controladores para qualquer manipulador, pois utiliza a mesma estrutura de sistema inverso o que sempre resulta em um conjunto de sistemas SISO linear, sendo um para cada junta.

O sistema inverso à esquerda proposto por Dias et al. (2016) é baseado no modelo dinâmico não linear, faz uso de uma entrada para cada junta e se difere da linearização por realimentação por não necessitar das medidas ou estimativas dos estados de realimentação e das medidas das derivadas dos ângulos das juntas, como pode ser visto em Kolhe et al. (2011), no entanto, é importante conhecer os parâmetros do manipulador. Este trabalho irá comparar o desempenho de dois controladores aplicados a uma modificação do sistema inverso, o primeiro é um controlador linear PD, muito popular e de simples implementação. O segundo será o controlador *Variable Structure Model Reference Adaptive Control* (VS-MRAC) proposto por Hsu (1990), o qual oferece robustez e estabilidade às incertezas paramétricas, dinâmicas não modeladas e perturbações externas.

Em resumo, o objetivo deste trabalho é expandir os resultados obtidos por Dias et al. (2016), que aplica o VS-MRAC para um manipulador de dois graus de liberdade, aplicando-se a técnica proposta a um manipulador de três graus de liberdade com movimentação espacial, adicionando uma compensação da dinâmica dos atuadores das juntas, fazendo simulações mais próximas de um manipulador real (adicionando perturbações e incertezas paramétricas), além de comparar o desempenho do controlador proposto com um controlador linear. Esta aplicação se difere dos trabalhos anteriores por não necessitar dos valores das derivadas dos ângulos de junta para a inversão do sistema e por apresentar uma boa resposta às incertezas paramétricas e perturbações externas.

2 Revisão Bibliográfica

Esta seção apresentará a fundamentação bibliográfica das técnicas aplicadas para a modelagem do manipulador e dos atuadores das juntas, para a implementação do sistema inverso à esquerda e para a implementação dos controladores propostos.

Observação: As variáveis definidas em cada uma das seções são somente válidas no interior da seção, ou seja, poderá existir reutilização e a redefinição de variáveis de uma seção para a outra.

2.1 Representação espacial e transformações

Para localizar cada elo do manipulador no espaço, é necessário o uso de uma representação para a posição e orientação destes. [Craig \(2013\)](#) utiliza uma notação na qual essas representações são feitas a partir da definição de sistemas de coordenadas associadas a um corpo rígido, sendo um deles o sistema universal (normalmente convencionado na base do robô), ou seja, qualquer outro sistema ou objeto pode ser representado nesse referencial.

Para representar a posição de um referencial $\{B\}$ associado a um elo do manipulador em relação a outro sistema $\{A\}$ (ver Figura 1) é utilizado um vetor ${}^A\mathbf{p}_B \in \mathfrak{R}^{3 \times 1}$, que liga a origem de $\{A\}$ à origem de $\{B\}$, expresso em coordenadas de $\{A\}$ e dado por

$${}^A\mathbf{p}_B = \begin{bmatrix} {}^A p_{Bx} \\ {}^A p_{By} \\ {}^A p_{Bz} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde ${}^A p_{Bx}$, ${}^A p_{By}$ e ${}^A p_{Bz}$ são as distâncias entre as origens de $\{B\}$ e $\{A\}$ expressos em relação aos eixos x , y e z de $\{A\}$, respectivamente.

Já a orientação de um sistema de coordenadas $\{B\}$ associado a um elo do robô em relação a outro sistema $\{A\}$ pode ser representada a partir de uma matriz chamada matriz de rotação ${}^A\mathbf{R}_B \in SO(3)$, ortogonal, cujos vetores colunas (${}^A\mathbf{x}_B, {}^A\mathbf{y}_B$ e ${}^A\mathbf{z}_B \in \mathfrak{R}^{3 \times 1}$) possuem módulos unitários e são eixos ortogonais de $\{B\}$ expressos em coordenadas de $\{A\}$ dado por

$${}^A\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{x}_B & {}^A\mathbf{y}_B & {}^A\mathbf{z}_B \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Algumas propriedades importantes para definir a orientação de cada parte do manipulador são:

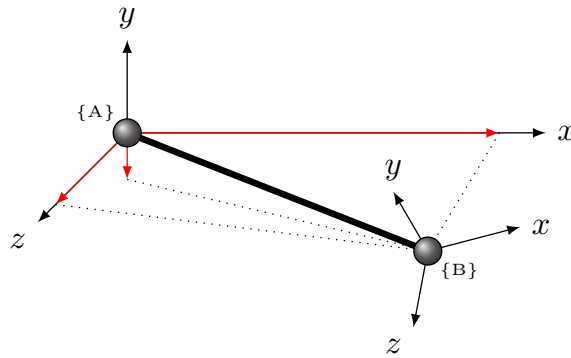


Figura 1 – Representação da posição e orientação de um referencial {B} em relação a um referencial {A}.

- A descrição de {A} em relação a {B} pode ser feita a partir da transposta de ${}^A\mathbf{R}_B$:

$${}^B\mathbf{R}_A = {}^A\mathbf{R}_B^T. \quad (2.3)$$

- A transposta da matriz de rotação é igual a sua inversa, ou seja, a matriz é ortogonal. Isso pode ser provado a partir da equação 2.4:

$${}^A\mathbf{R}_B^T \cdot {}^A\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{x}_B^T \\ {}^A\mathbf{y}_B^T \\ {}^A\mathbf{z}_B^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{x}_B & {}^A\mathbf{y}_B & {}^A\mathbf{z}_B \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{I}_{3 \times 3} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ é a matriz identidade. Então:

$${}^A\mathbf{R}_B = {}^B\mathbf{R}_A^{-1} = {}^B\mathbf{R}_A^T. \quad (2.5)$$

- Se existe um ponto \mathbf{p} expressado em um referencial {B}, ${}^B\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^{3 \times 1}$, e existe um referencial {A} na mesma origem é possível encontrar ${}^A\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^{3 \times 1}$ a partir de:

$${}^A\mathbf{p} = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{x}_A^T \cdot {}^B\mathbf{p} & {}^B\mathbf{y}_A^T \cdot {}^B\mathbf{p} & {}^B\mathbf{z}_A^T \cdot {}^B\mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{x}_A & {}^B\mathbf{y}_A & {}^B\mathbf{z}_A \end{bmatrix}^T \cdot {}^B\mathbf{p}, \quad (2.6)$$

resultando em

$${}^A\mathbf{p} = {}^B\mathbf{R}_A^T \cdot {}^B\mathbf{p} = {}^A\mathbf{R}_B \cdot {}^B\mathbf{p}. \quad (2.7)$$

Da mesma forma, ${}^B\mathbf{p} = {}^B\mathbf{R}_A \cdot {}^A\mathbf{p}$.

- Dados três referenciais {A}, {B} e {C} com origem no mesmo ponto ${}^A\mathbf{p} = {}^A\mathbf{R}_B \cdot {}^B\mathbf{p}$, ${}^B\mathbf{p} = {}^B\mathbf{R}_C \cdot {}^C\mathbf{p}$, ${}^A\mathbf{p} = {}^A\mathbf{R}_C \cdot {}^C\mathbf{p}$, então:

$${}^A\mathbf{p} = {}^A\mathbf{R}_B \cdot {}^B\mathbf{R}_C \cdot {}^C\mathbf{p} \longrightarrow {}^A\mathbf{R}_C = {}^A\mathbf{R}_B \cdot {}^B\mathbf{R}_C. \quad (2.8)$$

- Cada elemento da matriz é representado pelo produto interno entre um eixo unitário de {A} e um eixo unitário de {B}, ou seja, é igual ao cosseno do ângulo entre eles. Assim a matriz de rotação pode ser chamada de Matriz de Cossenos Diretores.

$${}^A\mathbf{R}_C = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{x}_B \cdot {}^B\mathbf{x}_C & {}^A\mathbf{y}_B \cdot {}^B\mathbf{x}_C & {}^A\mathbf{z}_B \cdot {}^B\mathbf{x}_C \\ {}^A\mathbf{x}_B \cdot {}^B\mathbf{y}_C & {}^A\mathbf{y}_B \cdot {}^B\mathbf{y}_C & {}^A\mathbf{z}_B \cdot {}^B\mathbf{y}_C \\ {}^A\mathbf{x}_B \cdot {}^B\mathbf{z}_C & {}^A\mathbf{y}_B \cdot {}^B\mathbf{z}_C & {}^A\mathbf{z}_B \cdot {}^B\mathbf{z}_C \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

A Figura 2 apresenta uma representação de posição e orientação de três referenciais $\{A\}$, $\{B\}$ e $\{C\}$.

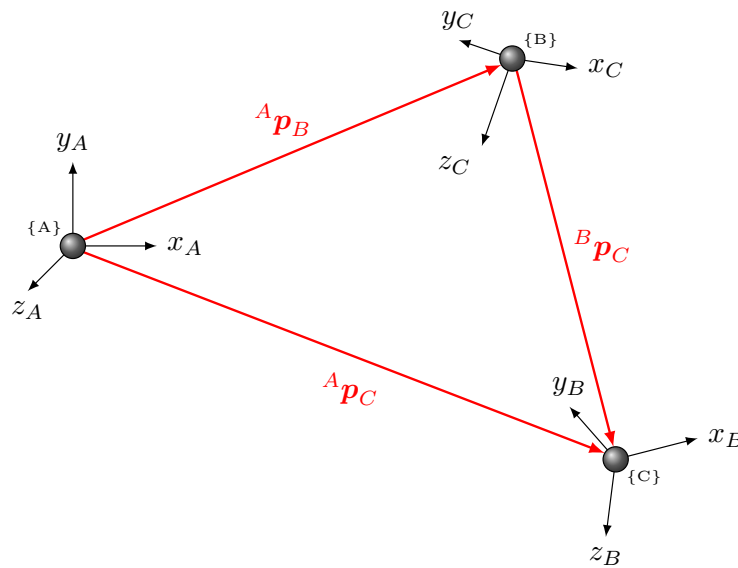


Figura 2 – Representação da posição e orientação de $\{B\}$ em relação a $\{A\}$, $\{C\}$ em relação a $\{B\}$ e $\{C\}$ em relação a $\{A\}$

2.2 Modelo cinemático

Para obter o modelo cinemático do manipulador, no qual se obtém as posições dos elos e ferramenta em função das variáveis de junta, foram utilizados os parâmetros de Denavit-Hartenberg, método no qual definem-se sistemas de coordenadas numerados de forma crescente fixados a partir da base, passando pelos elos, até a ferramenta do braço. Assim, o ângulo da junta i é representado por q_i , o eixo z_i é coincidente com o eixo de movimento da junta i , x_i é convencionado sobre a reta normal a z_i e z_{i+1} , apontando de z_i para z_{i+1} , o eixo y_i é definido de acordo com a regra da mão direita e a dimensão maior de cada elo será l_k .

Após a definição dos referenciais, é possível determinar os parâmetros de Denavit-Hartenberg. São eles: a_{i-1} comprimento do elo l_k (de z_{i-1} a z_i ao longo de x_{i-1}); α_{i-1} ângulo de torção do elo $i - 1$ (entre z_{i-1} e z_i , em torno de x_{i-1}); d_i deslocamento da junta i (distância entre x_{i-1} a x_i ao longo de z_i); e q_i ângulo da junta i (entre x_{i-1} e x_i , em torno de z_i). A Figura 3 apresenta os parâmetros calculados para um elo i em relação ao elo anterior.

Conhecendo os parâmetros de Denavit-Hartenberg, a localização dos elos em relação aos elos anteriores pode ser encontrada a partir de rotações e translações ao longo de x_{i-1} e z_i . A orientação do elo i em relação ao elo $i - 1$ é dada por uma rotação de α_{i-1} em torno de x_{i-1} e uma rotação de q_i em torno de z_i , já a posição de i em relação a $i - 1$ é

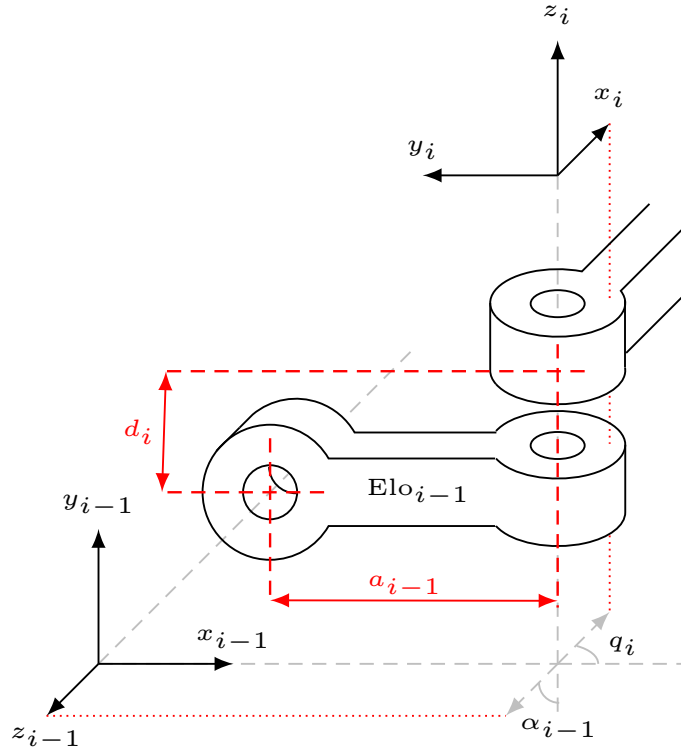


Figura 3 – Representação dos parâmetros de Denavit-Hartenberg

dada por uma translação de a_{i-1} ao longo de x_{i-1} , uma translação de $-\text{sen}(\alpha_{i-1})d_i$ ao longo de y_{i-1} e uma translação de $\text{cos}(\alpha_{i-1})d_i$ ao longo de z_{i-1} (ver Figura 3). Isto é, as matrizes de rotação (equação 2.2) e os vetores posição (equação 2.1) de um elo em relação ao elo anterior podem ser obtidas, respectivamente por:

$${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos(q_i) & -\text{sen}(q_i) & 0 \\ \text{sen}(q_i)\cos(\alpha_{i-1}) & \cos(q_i)\cos(\alpha_{i-1}) & -\text{sen}(\alpha_{i-1}) \\ \text{sen}(q_i)\text{sen}(\alpha_{i-1}) & \cos(q_i)\text{sen}(\alpha_{i-1}) & \cos(\alpha_{i-1}) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

e

$${}^{i-1}\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} a_{i-1} \\ -\text{sen}(\alpha_{i-1})d_i \\ \text{cos}(\alpha_{i-1})d_i \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Antes de calcular o modelo dinâmico, [Craig \(2013\)](#) define que é preciso obter-se os valores das velocidades angulares ($\boldsymbol{\omega}_i$), acelerações lineares ($\dot{\mathbf{v}}_i$) e angulares ($\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$), além da aceleração linear do centro de massa ($\dot{\mathbf{v}}_{G_i}$) para cada elo do manipulador. Como cada elo pode ser considerado um corpo rígido com vetores velocidade e aceleração descrevendo os seus movimentos, é conveniente expressar esses vetores como a soma do movimento do elo anterior mais o movimento gerado pelo próprio elo. Dessa forma, o cálculo destes parâmetros será de forma iterativa iniciando no primeiro elo e se propagando até o último elo.

A velocidade angular de cada elo será calculada por:

$$\boldsymbol{\omega}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{z}_i \cdot \dot{q}_i \quad (2.12)$$

em que \mathbf{z}_i é o vetor unitário na direção z do elo i . As acelerações angulares são obtidas por:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \mathbf{z}_i \cdot \ddot{q}_i + ({}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot \boldsymbol{\omega}_{i-1}) \times (\mathbf{z}_i \cdot \dot{q}_i), \quad (2.13)$$

sendo \times um produto vetorial, neste caso definindo o vetor de aceleração angular, normal ao vetor velocidade angular do elo $i - 1$ no referencial de i e à variação do ângulo da junta i em relação a z_i . A aceleração linear de cada elo na origem do seu referencial é dada por:

$$\dot{\mathbf{v}}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot [\dot{\mathbf{v}}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_i + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_i)], \quad (2.14)$$

onde o primeiro produto vetorial representa a parcela gerada pela aceleração angular do elo anterior calculada em relação ao elo i , normal à aceleração angular do elo $i - 1$ e ao vetor posição do elo i em relação ao referencial do elo $i - 1$, os outros dois produtos vetoriais representam a parcela gerada pela velocidade angular do elo $i - 1$ calculada em relação ao elo i .

A aceleração linear do centro de massa de cada elo será:

$$\dot{\mathbf{v}}_{Gi} = \dot{\mathbf{v}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{p}_{Gi} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_{Gi}), \quad (2.15)$$

onde ${}^i\mathbf{p}_{Gi}$ é o vetor posição do centro de massa do elo i . As provas das equações (2.12 - 2.15) se encontram nos apêndices A e B.

2.3 Modelo dinâmico

Depois de obter os valores das velocidades e acelerações, pode-se calcular as forças (\mathbf{f}_{Gi}) e torques (\mathbf{n}_{Gi}) atuando no centro de massa de cada elo por:

$$\mathbf{f}_{Gi} = m_i \dot{\mathbf{v}}_{Gi} \quad (2.16)$$

e

$$\mathbf{n}_{Gi} = \mathbf{I}_{Gi} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_{Gi} \cdot \boldsymbol{\omega}_i), \quad (2.17)$$

em que \mathbf{I}_{Gi} é o tensor de inércia do elo i em relação ao sistema de referências $\{Gi\}$ localizado no centro de massa do elo, paralelo a $\{i\}$ e m_i a massa do elo i .

Fazendo a equação do balanceamento de forças e torques de cada elo, os esforços resultantes são calculados pela adição da parcela calculada acima mais os esforços exercidos pelo elo $i + 1$ no elo i , resultando em:

$$\mathbf{f}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1} \cdot \mathbf{f}_{i+1} + m_i \dot{\mathbf{v}}_{Gi} \quad (2.18)$$

e

$$\mathbf{n}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1} \cdot \mathbf{n}_{i+1} + [{}^i\mathbf{p}_{i+1} \times] {}^i\mathbf{R}_{i+1} \cdot \mathbf{f}_{i+1} + \mathbf{I}_{G_i} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_{G_i} \cdot \boldsymbol{\omega}_i) + m_i [{}^i\mathbf{p}_{G_i} \times] \dot{\mathbf{v}}_{G_i}, \quad (2.19)$$

sendo \mathbf{f}_i a força aplicada no elo i e \mathbf{n}_i o torque aplicado no elo i , devendo ser calculados desde a ferramenta até a base.

Por fim, o esforço τ_i em torno do eixo z do referencial do elo i , já que todas as juntas são de revolução, é dado por:

$$\tau_i = \mathbf{n}_i^T \cdot \mathbf{z}_i. \quad (2.20)$$

É conveniente descrever a dinâmica do manipulador robótico através de um sistema não linear da forma compacta:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\psi}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.21)$$

onde $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T \in \mathfrak{R}^{3 \times 1}$ é o vetor de torques aplicados nas juntas (τ_i), expressado na equação (2.20), $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ é uma matriz no $\mathfrak{R}^{3 \times 3}$ que, multiplicada pelo vetor de acelerações angulares $\ddot{\mathbf{q}}$, representa as reações inerciais, $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é uma matriz no $\mathfrak{R}^{3 \times 3}$ que, multiplicada pelo vetor de velocidades angulares $\dot{\mathbf{q}}$, representa as reações centrífugas e coriolis, $\boldsymbol{\psi}(\dot{\mathbf{q}})$ é um vetor no $\mathfrak{R}^{3 \times 1}$ que computa as reações de atrito, $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ é um vetor no $\mathfrak{R}^{3 \times 1}$ representando as reações gravitacionais e \mathbf{q} é um vetor no $\mathfrak{R}^{3 \times 1}$ representando os ângulos das juntas do manipulador.

2.4 Modelo dinâmico do motor DC

Neste projeto, motores DC foram escolhidos como atuadores das juntas. Desta forma, será um motor DC para cada junta, o qual irá produzir o torque τ_i que será aplicado naquela junta. Cada motor DC produzirá um torque a partir de uma tensão $v_{s(i)}$ em seus terminais de entrada (ver Figura 4).

O diagrama esquemático de um motor DC é apresentado na Figura 4, onde $v_{s(i)}$ é a fonte de tensão de entrada, $R_{a(i)}$ é a resistência da armadura, $L_{a(i)}$ é a indutância gerada pelo enrolamento da armadura, $i_{a(i)}$ é a corrente de armadura, $v_{b(i)}$ é a força eletromotriz de retorno, $\dot{q}_{m(i)}$ é a velocidade angular do motor, $B_{m(i)}$ é o coeficiente de amortecimento, associado à rotação do sistema e $\tau_{m(i)}$ é o torque no eixo do motor. De acordo com a lei de Kirchhoff das tensões, a equação elétrica do motor DC será:

$$v_{s(i)} = R_{a(i)}i_{a(i)} + L_{a(i)}\frac{d i_{a(i)}}{dt} + v_{b(i)} \quad (2.22)$$

A força eletromotriz de retorno ($v_{b(i)}$) é proporcional à velocidade angular do motor, dada por:

$$v_{b(i)} = k_{b(i)}\dot{q}_{m(i)}, \quad (2.23)$$

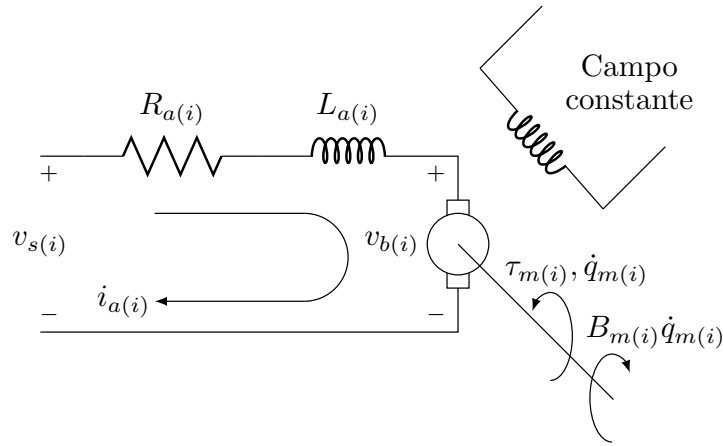


Figura 4 – Diagrama elétrico de um motor DC

onde $k_{b(i)}$ é a constante da força eletromotriz de retorno, determinada pela densidade do fluxo dos ímãs permanentes, pela relutância do núcleo de ferro da armadura e pelo número de voltas do enrolamento da armadura. Além disso, o motor gera um torque ($\tau_{m(i)}$) proporcional à corrente de armadura, calculado por:

$$\tau_{m(i)} = k_{t(i)} i_{a(i)} \quad (2.24)$$

sendo $k_{t(i)}$ a constante do torque, a qual é determinada pelos mesmos parâmetros de $k_{b(i)}$. Considerando $L_{a(i)} = 0$, aplicando as equações (2.23 - 2.24) na equação (2.22) e isolando $\tau_{m(i)}$, tem-se:

$$\tau_{m(i)} = \frac{k_{t(i)}}{R_{a(i)}} (v_{s(i)} - k_{b(i)} \dot{q}_{m(i)}). \quad (2.25)$$

Agora, considerando a existência de uma caixa de redução k_{gb} entre o motor DC e o elo do manipulador, a relação entre o torque de cada motor ($\tau_{m(i)}$) e o torque (τ_i) do manipulador será descrita por:

$$\tau_i = k_{gb} \tau_{m(i)}. \quad (2.26)$$

Aplicando a equação (2.25) na equação (2.26) o resultado é:

$$\tau_i = \frac{k_{gb} k_{t(i)}}{R_{a(i)}} (v_{s(i)} - k_{b(i)} \dot{q}_{m(i)}), \quad (2.27)$$

onde $\dot{q}_{m(i)} = k_{gb} \dot{q}_i$, resultando em

$$\tau_i = \frac{k_{t(i)}}{R_{a(i)}} (k_{gb} v_{s(i)} - k_{gb}^2 k_{b(i)} \dot{q}_i). \quad (2.28)$$

Considere que todos os motores DC das juntas possuem as mesmas características, ou seja, os mesmos parâmetros. Considere $\mathbf{v}_s = [v_{s(1)} \quad v_{s(2)} \quad v_{s(3)}]^T$ o vetor com a tensão de entrada de cada motor DC e $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]^T$ o vetor de velocidades angulares do

manipulador. Assim, o vetor de torques da equação (2.21) será obtido da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{k_t}{R_a} (k_{gb} \mathbf{v}_s - k_{gb}^2 k_b \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.29)$$

e aplicando a equação (2.29) na equação (2.21) tem-se:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\psi}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \frac{k_t}{R_a} (k_{gb} \mathbf{v}_s - k_{gb}^2 k_b \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.30)$$

2.5 Técnica de desacoplamento

Conhecendo os modelos dinâmicos do manipulador e do atuador das juntas é possível utilizar várias estratégias de controle, porém, como o manipulador dos modelos é um sistema MIMO não linear, sintonizar o controlador pode se tornar uma tarefa mais complexa. Para contornar este problema, [Dias et al. \(2016\)](#) utilizam um método de inversão à esquerda para converter o sistema MIMO não linear em um conjunto de sistemas SISO lineares, todos com a mesma dinâmica, os quais são controlados individualmente por um controlador adaptativo robusto. Considere o sistema não linear da forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m v_i \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \end{cases}, \quad (2.31)$$

em que $\mathbf{x} \in \Upsilon$ é uma variedade analítica real, $\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{b}_i$ são campos vetoriais analíticos reais em Υ , $\mathbf{C} : \Upsilon \rightarrow \mathfrak{R}^l$ é um mapeamento analítico real de Υ em \mathfrak{R}^l e v_i é a classe de funções analíticas reais de $[0, \infty)$ em \mathfrak{R} , números reais. Então:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{A}_c(\mathbf{x}) + \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad (2.32)$$

sendo $\mathbf{v} \in \mathfrak{R}^m$ um vetor cujos componentes são v_1, \dots, v_m , $\mathbf{A}_c(\mathbf{x})$ um vetor em \mathfrak{R}^l , composto pelos termos de $\mathbf{y}^{(1)}$ independentes de \mathbf{v} e $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = [b_1 \mathbf{C}(\mathbf{x}) \quad b_2 \mathbf{C}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad b_m \mathbf{C}(\mathbf{x})]$ é uma matriz $l \times m$ para cada $\mathbf{x} \in \Upsilon$.

O algoritmo proposto por [Hirschorn \(1979\)](#) implementa uma sequência de sistemas, alterando o mapeamento da saída até que \mathbf{v} possa ser resolvido em termos de \mathbf{y} , suas derivadas e \mathbf{x} . Então, é possível se obter um sistema não linear, que atua como sistema inverso à esquerda do inicial. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m v_i \mathbf{b}_i(\mathbf{x}); & \mathbf{x} \in \Upsilon_1 \\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{C}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_1(\mathbf{x})\mathbf{v} \end{cases}, \quad (2.33)$$

onde Υ_1 é um subconjunto aberto denso de Υ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= \mathbf{R}_0(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{y}}{dt}, \\ \mathbf{C}_1 &= \mathbf{R}_0(\mathbf{x}) \mathbf{A}_c(\mathbf{x}), \\ \mathbf{D}_1 &= \mathbf{R}_0(\mathbf{x}) \mathbf{D}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.34)$$

em que $\mathbf{R}_0(\mathbf{x})$ é uma matriz que reordena as linhas de $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ e

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{x})\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{1,1}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}_{r_1} \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

sendo $r_1 = \max_{\mathbf{x} \in \Upsilon} \{\text{rank}(\mathbf{D}(\mathbf{x}))\}$ o índice de inversibilidade do sistema inicial, $\mathbf{0}_{r_1}$ uma matriz de zeros $(l - r_1) \times m$ e $\mathbf{D}_{1,1}(\mathbf{x})$ uma matriz $r_1 \times m$ de posto r_1 para todo $\mathbf{x} \in \Upsilon_1$.

Repetindo este processo J vezes, o sistema J resultante será:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m v_i \mathbf{b}_i(\mathbf{x}); & \mathbf{x} \in \Upsilon_J \\ \mathbf{z}_J = \mathbf{C}_J(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_J(\mathbf{x})\mathbf{v} \end{cases}, \quad (2.36)$$

onde Υ_J é um subconjunto aberto denso de Υ , $\mathbf{C}_J(\mathbf{x})$ e $\mathbf{D}_J(\mathbf{x})$ são matrizes $l \times 1$ e $l \times m$, respectivamente, cujas entradas são funções analíticas reais em Υ_J , e

$$\mathbf{D}_J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{J,1}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}_{r_J} \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

em que $\mathbf{D}_{J,1}(\mathbf{x})$ é uma matriz $r_J \times m$ com posto r_J para todo $x \in \Upsilon_J$ e $\mathbf{0}_{r_J}$ é uma matriz de zeros $(l - r_J) \times m$. A saída do sistema J será decomposta da seguinte forma:

$$\mathbf{z}_J = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{z}}_J \\ \hat{\mathbf{z}}_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_J(\mathbf{x}) \\ \hat{\mathbf{C}}_J(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{J,1}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}_{r_J} \end{bmatrix} \mathbf{v}. \quad (2.38)$$

Por construção

$$0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq m, \quad (2.39)$$

sendo m o número de entradas. Assim, existe pelo menos um número inteiro positivo J no qual r_J é máximo.

Segundo [Hirschorn \(1979\)](#), supondo um sistema da forma (2.31) com ordem relativa $\alpha < \infty$, então o α -ésimo sistema será da forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m v_i \mathbf{b}_i(\mathbf{x}); & \mathbf{x} \in \Upsilon_\alpha \\ \mathbf{z}_\alpha = \mathbf{C}_\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_\alpha(\mathbf{x})\mathbf{v} \end{cases}, \quad (2.40)$$

onde Υ_α é um subconjunto aberto denso de Υ e, de acordo com o algoritmo,

$$\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\alpha 1}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}_{r_\alpha} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

em que para todo $x \in \Upsilon_\alpha$, $\mathbf{0}_{r_\alpha}$ é uma matriz de zeros $(l - r_\alpha) \times m$, $\mathbf{D}_{\alpha 1}(\mathbf{x})$ é uma matriz $r_\alpha \times m$ de posto r_α e $\mathbf{C}_\alpha(\mathbf{x})$ é um vetor no \mathfrak{R}^l .

Desde que $\alpha < \infty$, $r_\alpha = m$ e $\mathbf{D}_{\alpha 1}(\mathbf{x})$ seja uma matriz $m \times m$ inversível. Sendo $\bar{\mathbf{z}}_\alpha$ e $\bar{\mathbf{C}}_\alpha$ os m primeiros componentes de \mathbf{z}_α e \mathbf{C}_α , respectivamente, então:

$$\bar{\mathbf{z}}_\alpha = \bar{\mathbf{C}}_\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_{\alpha 1}(\mathbf{x})\mathbf{v}. \quad (2.42)$$

Se $x_0 \in \Upsilon_\alpha$, então existe uma matriz $\mathbf{H}_\alpha(\mathbf{x})$ de dimensões $m \times \alpha l$ cujas entradas são funções analíticas reais em Υ_α tais que:

$$\bar{\mathbf{z}}_\alpha = \mathbf{H}_\alpha(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(\alpha)}(t) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

e o sistema

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \widehat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{x}}) + \widehat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{v}}; & \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 \in \Upsilon_\alpha, \\ \hat{\mathbf{y}} = \widehat{\mathbf{C}}(\hat{\mathbf{x}}) + \widehat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{v}} \end{cases} \quad (2.44)$$

com Υ_α um subconjunto aberto denso de Υ ,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}) - [\mathbf{b}_1(\hat{\mathbf{x}}) \cdots \mathbf{b}_m(\hat{\mathbf{x}})] \mathbf{D}_{\alpha 1}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{\mathbf{C}}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}) \\ \widehat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{x}}) &= [\mathbf{b}_1(\hat{\mathbf{x}}) \cdots \mathbf{b}_m(\hat{\mathbf{x}})] \mathbf{D}_{\alpha 1}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{H}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}) \\ \widehat{\mathbf{C}}(\hat{\mathbf{x}}) &= -\mathbf{D}_{\alpha 1}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{\mathbf{C}}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}) \\ \widehat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{D}_{\alpha 1}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{H}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

atua como sistema inverso à esquerda do sistema (2.31), como é comprovado por [Hirschorn \(1979\)](#).

2.6 Técnica de controle

Este trabalho utilizará duas técnicas de controle. A primeira será um controlador adaptativo chamado VS-MRAC (*Variable Structure Model Reference Adaptive Control*) o qual utiliza apenas as medidas das entradas e saídas da planta, é um controlador adaptativo robusto em relação às incertezas paramétricas, perturbações externas e dinâmicas não modeladas. A segunda estratégia aplicada será o controlador Proporcional-Derivativo (PD).

2.6.1 Controlador VS-MRAC

Considere

$$W_p(s) = \frac{y_p(s)}{u(s)} = k_p \frac{n_p(s)}{d_p(s)} \quad (2.45)$$

uma planta SISO linear, invariante no tempo, com função de transferência estritamente própria, completamente observável e controlável, fase mínima e incertezas nos parâmetros limitadas. Sendo $y_p(s)$ o sinal de saída da planta, $u(s)$ o sinal de entrada da planta e s o operador de Laplace. Ainda sobre a planta, os polinômios $d_p(s)$ e $n_p(s)$ são mônicos, onde o grau de $d_p(s)$ é n e o grau relativo de $W_p(s)$ é n^* .

O modelo de referência $W_m(s)$, cuja função de transferência deve ser estritamente própria, estável, de fase mínima e com mesmo grau relativo da planta, pode ser definido como:

$$W_m(s) = \frac{y_m(s)}{r(s)} = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)}, \quad (2.46)$$

em que $r(s)$ é a entrada do modelo de referência, $y_m(s)$ é a saída do modelo de referência, os polinômios $n_m(s)$ e $d_m(s)$ são mônicos e que o ganho do modelo de referência possui o mesmo sinal do ganho da planta, ou seja, $\text{sgn}(k_m) = \text{sgn}(k_p) > 0$ (por simplicidade), onde

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}. \quad (2.47)$$

O erro entre a saída da planta e a saída do modelo é:

$$e_0 = y_p - y_m, \quad (2.48)$$

o qual tende a zero assintoticamente para condições iniciais arbitrárias e para sinais de referência $r(t)$ contínuos uniformemente limitados.

Definindo os filtros de entrada e saída como:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = -\lambda\sigma_1 + \varsigma u \\ \dot{\sigma}_2 = -\lambda\sigma_2 + \varsigma y_p \end{cases}, \quad (2.49)$$

onde λ é escolhido de modo que $n_m(s)$ seja fator de $\det(sI - \lambda)$, $\varsigma > 0$ e $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{R}^{1 \times 1}$. O vetor regressor é definido por:

$$\boldsymbol{\mu}^T = [\sigma_1^T \quad y_p \quad \sigma_2^T \quad r]. \quad (2.50)$$

Usualmente, a lei de controle para controladores adaptativos é definida como:

$$u = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}, \quad (2.51)$$

sendo $\boldsymbol{\theta}^T = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_{2n}]^T$ o vetor de parâmetros adaptativos. Sabe-se que existe um vetor constante único $\boldsymbol{\theta}^{*T} = [\theta_1^* \quad \theta_2^* \quad \cdots \quad \theta_{2n}^*]^T$ que faz a função de transferência de malha fechada com $u = \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\mu}$ corresponder exatamente a $W_m(s)$, isto é, $y = W_p(s)u = W_p(s)\boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\mu} = W_m(s)r$.

Considerando $u^* = \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\mu}$, $\kappa^* = 1/\theta_{2n}^* = k_p/k_m$, e o erro de controle $\tilde{u} = u - u^*$, então, a equação do erro pode ser reescrita como:

$$e_0 = W_m(s)\kappa^* \tilde{u}. \quad (2.52)$$

Redefinindo a lei de controle, é possível se obter a generalização do VS-MRAC:

$$u = \boldsymbol{\theta}_{n^*-1}^T \boldsymbol{\mu} \quad (2.53)$$

e o erro de predição como:

$$\hat{e}_0 = W_m L[\kappa_0 L^{-1} u - \boldsymbol{\theta}_0^T \boldsymbol{\xi}_0], \quad (2.54)$$

em que κ_0 , $\boldsymbol{\theta}_{n^*-1}$ e $\boldsymbol{\theta}_0$ são parâmetros independentes que substituem κ , $\boldsymbol{\theta}$ e $\kappa\boldsymbol{\theta}$, respectivamente. A partir da Equação (2.54) observa-se que \hat{e}_0 representa o erro de predição quando κ_0 e $\boldsymbol{\theta}_0$ são estimativas de κ^* e $\kappa^*\boldsymbol{\theta}^*$, respectivamente. $\boldsymbol{\xi}_0 = L^{-1}\boldsymbol{\mu}$ e o polinômio $L(s)$ assume a forma:

$$L(s) = L_1(s)L_2(s)\cdots L_{n^*-1}(s) \quad (2.55)$$

com $L_i(s) = (s + \delta_i)$, $\delta_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n^* - 1$).

Um passo essencial para a generalização é a introdução dos parâmetros vetoriais $\boldsymbol{\theta}_{n^*-1}$ e $\boldsymbol{\theta}_0$, independentes. Assim, é possível definir:

$$e_0 = W_m L[\kappa^* L^{-1}u - \kappa^* \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\xi}_0]. \quad (2.56)$$

É necessário introduzir os seguintes sinais filtrados:

$$\begin{aligned} \chi_i &= [L_{i+1} \cdot s L_{n^*-1}]^{-1} u; \\ \xi_i &= [L_{i+1} \cdot s L_{n^*-1}]^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (i = 0, \dots, n^* - 2) \end{aligned} \quad (2.57)$$

por convenção, $\xi_{n^*-1} = \boldsymbol{\mu}$. Seja

$$\epsilon_0 = e_0 - \hat{e}_0, \quad (2.58)$$

substituindo a Equação (2.54) e a Equação (2.56) na Equação (2.58) se obtém:

$$\epsilon_0 = \kappa^* W_m L[\chi_0 - \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\xi}_0 - \kappa^{*-1}(\kappa_0 \chi_0 - \boldsymbol{\theta}_0^T \boldsymbol{\xi}_0)]. \quad (2.59)$$

Por $W_m L$ ser real e estritamente positivo, se torna simples determinar as leis chaveadas para κ_0 e $\boldsymbol{\theta}_0$ que fazem $\epsilon_0 \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, eventualmente através de um modo deslizante na superfície $\epsilon_0 \equiv 0$. Isso implica que:

$$(\kappa_0 \chi_0 - \boldsymbol{\theta}_0^T \boldsymbol{\xi}_0)_{eq} \rightarrow \kappa^* (\chi_0 - \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\xi}_0), \quad (2.60)$$

em que $(\cdot)_{eq}$ é o controle equivalente. O $(\cdot)_{eq}$ pode ser aproximado pelo valor médio um filtro passa baixa com frequência de corte suficientemente alta. Nesse ponto a lei chaveada para $\boldsymbol{\theta}_{n^*-1}$ é tal que $(\boldsymbol{\theta}_{n^*-1}^T \boldsymbol{\mu})_{eq} \rightarrow \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\mu}$, e, conseqüentemente, o rastreamento do modelo de referência é atingido.

O rastreamento do modelo pode ser obtido com a introdução de duas cadeias de parâmetros chaveados auxiliares

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \bar{\kappa} \operatorname{sgn}(\epsilon_i \chi_i) \quad (i = 0, \dots, n^* - 2) \\ \bar{\kappa} &> |\rho - 1| \end{aligned}, \quad (2.61)$$

sendo $\rho = \kappa^*/\kappa^{nom}$, idealmente $\rho = 1$, e

$$\begin{aligned} \theta_{ij} &= -\bar{\theta}_{ij} \operatorname{sgn}(\epsilon_i \xi_{ij}) \quad (i = 0, \dots, n^* - 1) \\ \bar{\theta}_{ij} &> \rho |\boldsymbol{\theta}_j^*| \quad (j = 1, \dots, 2n) \end{aligned} \quad (2.62)$$

com uma cadeia de funções de controle auxiliares u_i e uma cadeia de erros auxiliares $\epsilon_i (i = 0, \dots, n^* - 1)$, que também são funções de transferência estritamente positivas, assim como o erro de predição ϵ_0 , isto é, $L_i^{-1}(s)$ e, portanto, as leis de comutação para θ_i e κ_i , que definem as leis de controle auxiliares são determinadas fazendo $\epsilon_i \rightarrow 0$.

Aproveitando-se dos conhecimentos sobre o projeto, o parâmetro nominal u^{nom} é introduzido

$$u^{nom} = \theta^{nom} \xi_{n^*-1}, \quad (2.63)$$

em que $\theta^{nom} \in \mathfrak{R}^{2n}$ é um vetor de parâmetros nominais que pode ser calculado a partir do modelo nominal da planta, idealmente $\theta^{nom} = \theta^*$. Com κ^{nom} sendo o valor nominal de κ^* , os limites superiores são definidos como:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{(n^*-1)j} &= |\theta_j^* - \theta_j^{nom}| \quad (j = 1, \dots, 2n) \\ \bar{\theta}_{ij} &= \rho |\theta_j^* - \theta_j^{nom}| \quad (i = 0, \dots, n^* - 2) \end{aligned} \quad (2.64)$$

A Tabela 1 apresenta o algoritmo para a implementação do controlador VS-MRAC, construída a partir das definições feitas nesta seção.

Tabela 1 – Algoritmo para implementação do controlador VS-MRAC

Sinais filtrados	$\chi_i = [L_{i+1} \cdots L_{n^*-1}]^{-1} u; (i = 0, \dots, n^* - 2)$ $\xi_i = [L_{i+1} \cdots L_{n^*-1}]^{-1} \mu; (i = 0, \dots, n^* - 2)$ $\xi_{n^*-1} = \mu$
Erros auxiliares	$\hat{\epsilon}_0 = \kappa^{nom} W_m L [u_0 - L^{-1} u_{n^*-1}]$ $\epsilon_0 = e_0 - \hat{\epsilon}_0$ $\epsilon_i = (u_{i-1})_{eq}^* - L^{-1} u_i (i = 0, \dots, n^* - 2)$
Funções de modulação	$\hat{f}_i \geq f_i = \bar{\kappa} \chi_i + \bar{\theta}_i^T \xi_i (i = 0, \dots, n^* - 2)$ $\hat{f}_{n^*-1} \geq f_{n^*-1} = \bar{\theta}_{n^*-1}^T \xi_{n^*-1} $
Leis de controle	$u_i = \hat{f}_i \text{sgn}(\epsilon_i) (i = 0, \dots, n^* - 1)$ $u = -u_{n^*-1} + u^{nom}$

Então, fazendo alguns reajustes nas expressões das leis de controle da Tabela 1, os sinais auxiliares de controle podem ser mudados para

$$u_i = [\bar{\kappa} |\chi_i| + \bar{\theta}_i^T |\xi_i|] \text{sgn}(\epsilon_i) = f_i \text{sgn}(\epsilon_i) \quad (2.65)$$

e

$$u_{n^*-1} = |\bar{\theta}_{n^*-1}^T |\xi_{n^*-1}| \text{sgn}(\epsilon_{n^*-1}) = f_{n^*-1} \text{sgn}(\epsilon_{n^*-1}), \quad (2.66)$$

sendo $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ um vetor qualquer com n elementos e seus módulos $|\mathbf{x}| = [|x_1| |x_2| \cdots |x_n|]^T$. Por fim, ϵ_i irá convergir para zero ao substituir f_i por qualquer limite superior \hat{f}_i .

2.6.2 Controlador PD

O controlador PD é um controlador linear que se distingue pela capacidade de usar os dois termos de controle, termo proporcional e termo derivativo, para aplicar um controle preciso. Um controlador PD calcula continuamente um valor de erro como a diferença entre um valor de referência desejado e uma variável de processo medida, aplicando uma correção baseada nos termos proporcional e derivativo. O controlador tenta melhorar o desempenho transitório ao longo do tempo ajustando o valor de uma variável de controle para um novo valor determinado por uma soma ponderada dos termos de controle.

Considere a lei de controle do controlador linear PD utilizado neste trabalho:

$$q_u = k_p e + k_d \frac{de}{dt}, \quad (2.67)$$

onde q_u é a variável de controle, k_p é o ganho proporcional, k_d é o ganho derivativo e $e = q_d - q$ é o sinal de erro, com q_d sendo o valor de referência e q a variável de processo. Na Figura 5 pode-se observar o diagrama de blocos do controlador proposto.

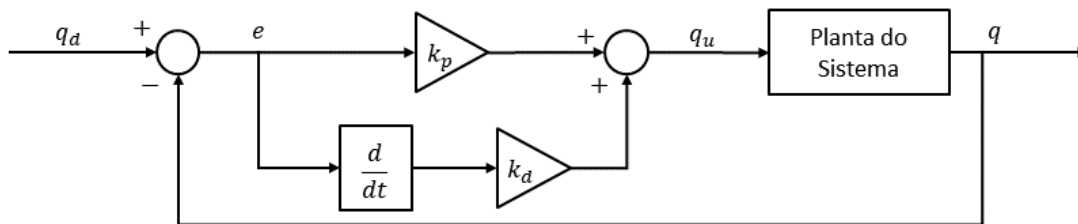


Figura 5 – Diagrama de blocos do controlador PD

3 Metodologia

Neste capítulo serão discutidas as metodologias e especificações utilizadas para a obtenção dos modelos dinâmicos do manipulador e dos atuadores de junta, no cálculo do sistema inverso à esquerda e no cálculo dos controladores propostos.

Este trabalho está levando em consideração um manipulador antropomórfico RRR (l_k para $k = 1, 2, 3$) com elos uniformes e cilíndricos, cinco referenciais (x_j, y_j, z_j para $j = 0, 1, 2, 3, 4$) e três juntas rotacionais (q_i para $i = 1, 2, 3$).

3.1 Modelo cinemático do manipulador RRR

Para calcular a posição do manipulador a partir dos ângulos de junta aplicou-se o método de Denavit-Hartenberg, definido na seção 2.2, para se obter os sistemas de coordenadas da base e dos elos. Na Figura 6 pode ser observada a representação do braço e seus respectivos comprimentos de elos, assim como os seus referenciais e ângulos de junta associados.

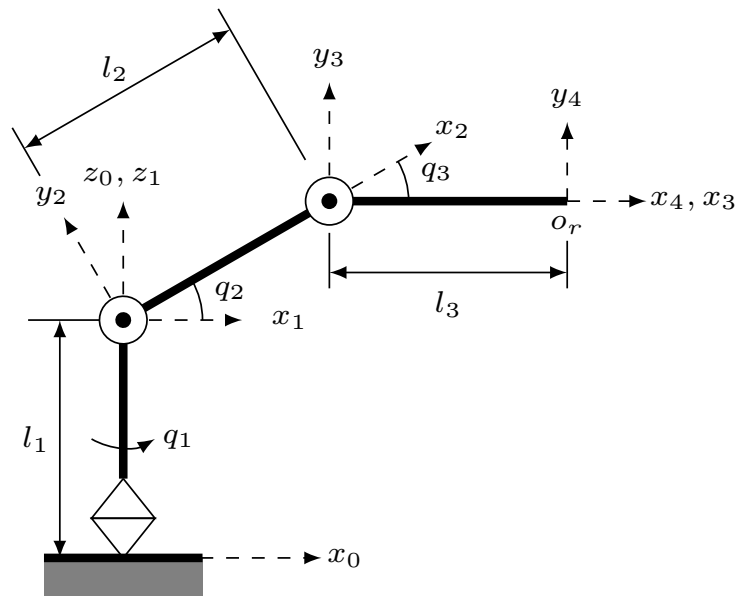


Figura 6 – Representação do manipulador com os comprimentos dos respectivos elos

Após a definição dos referenciais, é possível montar uma tabela com os parâmetros de Denavit-Hartenberg: comprimento do elo l_k (a_{i-1}), ângulo de torção do elo $i - 1$ (α_{i-1}), deslocamento da junta i (d_i) e ângulo da junta i (q_i). A Tabela 2 possui os parâmetros calculados para o manipulador robótico da Figura 6.

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	q_i
1	0	0°	l_1	q_1
2	0	90°	0	q_2
3	l_2	0°	0	q_3
4	l_3	0°	0	0°

Tabela 2 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg para o manipulador RRR utilizado

Com base nas equações (2.10 - 2.11) as matrizes de rotação e os vetores posições de cada elo em relação ao elo anterior serão:

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

$${}^2\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^3\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$${}^0\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^2\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Considerando a base parada com aceleração linear positiva ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$) no sentido de z_0 , tem-se:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = {}^0\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0\dot{\mathbf{v}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

A partir das definições realizadas em (3.1 - 3.3) é possível calcular, iterativamente, as velocidades angulares ${}^1\boldsymbol{\omega}_1, {}^2\boldsymbol{\omega}_2, {}^3\boldsymbol{\omega}_3, {}^4\boldsymbol{\omega}_4$, as acelerações angulares ${}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1, {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2, {}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3, {}^4\dot{\boldsymbol{\omega}}_4$ e as acelerações lineares ${}^1\dot{\mathbf{v}}_1, {}^2\dot{\mathbf{v}}_2, {}^3\dot{\mathbf{v}}_3, {}^4\dot{\mathbf{v}}_4$ de cada referencial, as quais são calculadas com base

nas equações (2.12 - 2.14), resultando em:

$$\begin{aligned}
 {}^1\boldsymbol{\omega}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \\
 {}^2\boldsymbol{\omega}_2 &= \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \sin(q_2) \\ \dot{q}_1 \cos(q_2) \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \\
 {}^3\boldsymbol{\omega}_3 &= \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) \\ \dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) \\ \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \\
 {}^4\boldsymbol{\omega}_4 &= \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) \\ \dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) \\ \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix}, \\
 {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 &= \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \sin(q_2) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2) \\ \ddot{q}_1 \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}, \\
 {}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 &= \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2 + q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) \\ \ddot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2 + q_3) - \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(q_2 + q_3) \\ \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 \end{bmatrix}, \\
 {}^4\dot{\boldsymbol{\omega}}_4 &= {}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3;
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
 {}^1\dot{\boldsymbol{v}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, \\
 {}^2\dot{\boldsymbol{v}}_2 &= \begin{bmatrix} g \sin(q_2) \\ g \cos(q_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 {}^3\dot{\boldsymbol{v}}_3 &= \begin{bmatrix} g \sin(q_2 + q_3) + \ddot{q}_2 l_2 \sin(q_3) - \dot{q}_1^2 l_2 \cos(q_2) \cos(q_2 + q_3) - \dot{q}_2^2 l_2 \cos(q_3) \\ g \cos(q_2 + q_3) + \ddot{q}_2 l_2 \cos(q_3) + \dot{q}_1^2 l_2 \cos(q_2) \sin(q_2 + q_3) + \dot{q}_2^2 l_2 \sin(q_3) \\ -\ddot{q}_1 l_2 \cos(q_2) + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 l_2 \sin(q_2) \end{bmatrix}, \\
 {}^4\dot{\boldsymbol{v}}_4 &= \begin{bmatrix} {}^4\dot{v}_{4x} \\ {}^4\dot{v}_{4y} \\ {}^4\dot{v}_{4z} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

em que

$$\begin{aligned}
{}^4\dot{v}_{4x} &= g \sin(q_2 + q_3) + \ddot{q}_2 l_2 \sin(q_3) - \dot{q}_1^2 \cos(q_2 + q_3)(l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)) + \\
&\quad \dot{q}_2^2 l_2 \cos(q_3) - (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 l_3; \\
{}^4\dot{v}_{4y} &= g \cos(q_2 + q_3) + \ddot{q}_2(l_2 \cos(q_3) + l_3) + \ddot{q}_3 l_3 - \dot{q}_2^2 l_2 \sin(q_3) + \\
&\quad \dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3)(l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)); \\
{}^4\dot{v}_{4z} &= -\ddot{q}_1(l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)) + 2l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2l_3 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3);
\end{aligned}$$

Considerando a posição do centro de massa de cada elo como ${}^i P_{Gi} = {}^{i-1} P_i / 2$, as acelerações lineares dos centros de massa de cada elo ${}^1 \dot{v}_{G1}$, ${}^2 \dot{v}_{G2}$, ${}^3 \dot{v}_{G3}$ são calculadas de acordo com a equação (2.15):

$$\begin{aligned}
{}^1 \dot{v}_{G1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, \\
{}^2 \dot{v}_{G2} &= \begin{bmatrix} g \sin(q_2) - \dot{q}_1^2 \cos(q_2)^2 l_2 / 2 - \dot{q}_2^2 l_2 / 2 \\ g \cos(q_2) + \ddot{q}_2 l_2 / 2 + \dot{q}_1^2 \sin(q_2) \cos(q_2) l_2 / 2 \\ -\ddot{q}_1 \cos(q_2) l_2 / 2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) l_2 \end{bmatrix}, \\
{}^3 \dot{v}_{G3} &= \begin{bmatrix} {}^3 \dot{v}_{G3x} \\ {}^3 \dot{v}_{G3y} \\ {}^3 \dot{v}_{G3z} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
{}^3 \dot{v}_{G3x} &= g \sin(q_2 + q_3) + \ddot{q}_2 \sin(q_3) l_2 - \dot{q}_2 \dot{q}_3 l_3 - \dot{q}_2^2 l_2 \cos(q_3) - (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 l_3 / 2 - \\
&\quad \dot{q}_1^2 (l_3 / 4 + l_3 \cos(2q_2 + 2q_3) / 4 + l_2 \cos(q_3) / 2 + l_2 \cos(2q_2 + q_3) / 2); \\
{}^3 \dot{v}_{G3y} &= g \cos(q_2 + q_3) + \ddot{q}_2 (l_3 / 2 + l_2 \cos(q_3)) + \ddot{q}_3 l_3 / 2 + \dot{q}_2^2 l_2 \sin(q_3) + \\
&\quad \dot{q}_1^2 (l_3 \sin(2q_2 + 2q_3) / 4 + l_2 \sin(q_3) / 2 + l_2 \sin(2q_2 + q_3) / 2); \\
{}^3 \dot{v}_{G3z} &= -\ddot{q}_1 (l_3 \cos(q_2 + q_3) / 2 + l_2 \cos(q_2)) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 (l_3 \sin(q_2 + q_3) + 2l_2 \sin(q_2)) + \\
&\quad l_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(q_2 + q_3);
\end{aligned}$$

3.2 Modelo dinâmico do manipulador RRR

Conhecendo-se o modelo cinemático do manipulador é possível se obter um modelo dinâmico levando em consideração os esforços nas juntas. Para encontrar a expressão do torque τ_i na junta q_i é preciso encontrar os valores dos esforços ${}^1 \mathbf{f}_1$, ${}^2 \mathbf{f}_2$, ${}^3 \mathbf{f}_3$, ${}^1 \mathbf{n}_1$, ${}^2 \mathbf{n}_2$, ${}^3 \mathbf{n}_3$ a partir das equações (2.18 - 2.19) e, então, τ_1 , τ_2 , τ_3 em torno de z_1 , z_2 , z_3 , respectivamente, de cada elo do manipulador.

Na Tabela 3 se encontram os valores de massa, comprimento e raio de cada elo do manipulador, considerando todos os elos cilíndricos.

Elo 1	Elo 2	Elo 3
$m_1 = 0,115 \text{ kg}$	$m_2 = 0,100 \text{ kg}$	$m_3 = 0,115 \text{ kg}$
$r_1 = 0,025 \text{ m}$	$r_2 = 0,025 \text{ m}$	$r_3 = 0,025 \text{ m}$
$l_1 = 0,080 \text{ m}$	$l_2 = 0,050 \text{ m}$	$l_3 = 0,090 \text{ m}$

Tabela 3 – Parâmetros associados a cada elo

O tensor de inércia de cada elo pode ser calculado por:

$${}^{G_i}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} m_i(3r_i^2 + l_i^2)/12 & 0 & 0 \\ 0 & m_i(3r_i^2 + l_i^2)/12 & 0 \\ 0 & 0 & m_i r_i^2/2 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Além disso, os esforços na extremidade do robô foram considerados nulos:

$${}^4\mathbf{n}_4 = {}^4\mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Descrevendo a dinâmica do manipulador robótico através de um sistema não linear em uma forma compacta, considerando os efeitos dos atritos nulos, tem-se:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \psi(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (3.10)$$

onde

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}, \quad \psi(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ 0 & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
M_{11} &= b_1 + b_2(\cos(2q_2 + q_3) + \cos(q_3)) + b_3 \cos(2q_2) + b_4 \cos(2q_2 + 2q_3) \\
M_{22} &= b_5 + b_6 \cos(q_3) \\
M_{23} &= b_7 + b_2 \cos(q_3) \\
M_{32} &= b_7 + b_2 \cos(q_3) \\
M_{33} &= b_7 \\
\Phi_{11} &= -b_8 \sin(2q_2)\dot{q}_2 - b_2 \sin(q_3)\dot{q}_3 \\
\Phi_{12} &= -(b_6 \sin(2q_2 + q_3) + b_4 \sin(2q_2 + 2q_3))\dot{q}_1 \\
\Phi_{13} &= -(b_2 \sin(2q_2 + q_3) + b_4 \sin(2q_2 + 2q_3))\dot{q}_1 \\
\Phi_{21} &= (b_2 \sin(2q_2 + q_3) + b_4 \sin(2q_2 + 2q_3) + b_3 \sin(2q_2))\dot{q}_1 \\
\Phi_{22} &= -b_6 \sin(q_3)\dot{q}_3 \\
\Phi_{23} &= -b_2 \sin(q_3)\dot{q}_3 \\
\Phi_{31} &= (b_8 \sin(2q_2 + q_3) + b_4 \sin(2q_2 + 2q_3) + b_8 \sin(q_3))\dot{q}_1 \\
\Phi_{32} &= b_2 \sin(q_3)\dot{q}_2 \\
G_2 &= (b_6 \cos(q_2 + q_3) + b_9 \cos(q_2))g \\
G_3 &= b_6 \cos(q_2 + q_3)g
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
b_1 &= 4,64 \cdot 10^{-4}, & b_4 &= 1,16 \cdot 10^{-4}, & b_7 &= 2,69 \cdot 10^{-4}, \\
b_2 &= 2,59 \cdot 10^{-4}, & b_5 &= 6,59 \cdot 10^{-4}, & b_8 &= 3,59 \cdot 10^{-4}, \\
b_3 &= 1,80 \cdot 10^{-4}, & b_6 &= 5,18 \cdot 10^{-4}, & b_9 &= 8,62 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

3.3 Modelo dinâmico do motor DC

Os valores dos parâmetros considerados para o motor DC utilizado neste projeto são apresentados na Tabela 4.

$ \begin{aligned} R_a &= 3,9 \Omega \\ L_a &= 0 \text{ H} \\ k_b &= 6,87 \cdot 10^{-4} \text{ V rad}^{-1} \text{ s}^{-1} \\ k_t &= 6,87 \cdot 10^{-4} \text{ N m A}^{-1} \\ k_{gb} &= 96 \end{aligned} $
--

Tabela 4 – Parâmetros do motor DC

Substituindo os valores da Tabela 4 na equação (2.29), obtém-se:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{6,87 \cdot 10^{-4}}{3,9} (96 \mathbf{v}_s - 96^2 \cdot 6,87 \cdot 10^{-4} \dot{\mathbf{q}}). \quad (3.11)$$

simplificando:

$$\boldsymbol{\tau} = 1,69 \cdot 10^{-2} \mathbf{v}_s - 1,12 \cdot 10^{-3} \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.12)$$

O valor do torque de cada um dos motores corresponde ao sinal de entrada a ser aplicado ao manipulador.

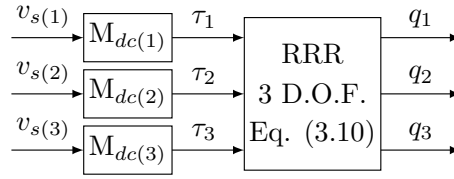


Figura 7 – Diagrama de blocos do manipulador robótico considerando a dinâmica dos motores DC

3.4 Técnica de desacoplamento

O sistema inverso proposto por [Dias et al. \(2016\)](#), baseando-se na seção 2.4 é dado por:

$$\begin{cases} \ddot{\hat{\mathbf{q}}} = \mathbf{q}_u \\ \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{q}}, \dot{\hat{\mathbf{q}}})\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\psi}(\dot{\hat{\mathbf{q}}}) + \mathbf{G}(\hat{\mathbf{q}}) + \mathbf{M}(\hat{\mathbf{q}})\mathbf{q}_u \end{cases}, \quad (3.13)$$

sendo \mathbf{q}_u a entrada do sistema e quando $\hat{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{q}(0)$, o sistema funciona como um sistema inverso à esquerda da equação (3.10), ou seja, utilizando o torque da equação (3.12) como entrada no sistema da equação (3.10), tem-se:

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}} = \mathbf{q}_u. \quad (3.14)$$

Assim, cada junta do manipulador terá sua dinâmica definida por um duplo integrador, como provado em [Dias et al. \(2016\)](#). Neste caso, cada uma das três juntas possui como planta:

$$W_{p(i)}(s) = \frac{q_i}{q_{u(i)}} = \frac{1}{s^2} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.15)$$

O diagrama de blocos da estrutura proposta por [Dias et al. \(2016\)](#) para o sistema inverso é detalhado na Figura 8.

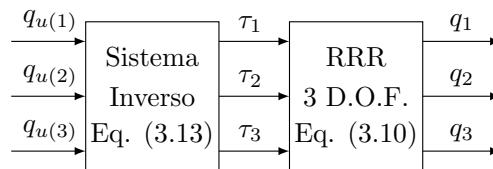


Figura 8 – Diagrama de blocos do sistema inverso com o vetor de torques como entrada

Porém, considerando a dinâmica do motor DC como atuador para as juntas, o sistema da equação (3.13) será modificado, sendo necessária uma compensação para os motores. Para isso, é possível introduzir um novo sistema inverso à esquerda, o qual possui um sinal de torque como entrada, saindo do sistema da equação (3.13), e um sinal de

tensão como saída indo para o motor DC. A partir da equação da equação (2.29), é possível fazer:

$$\mathbf{v}_s = \frac{R_a}{k_{gb}k_t} \boldsymbol{\tau}_u + k_b k_{gb} \dot{\hat{\mathbf{q}}} \quad (3.16)$$

então:

$$\begin{cases} \ddot{\hat{\mathbf{q}}} = \mathbf{q}_u \\ \boldsymbol{\tau}_u = \boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{q}}, \dot{\hat{\mathbf{q}}})\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\psi}(\dot{\hat{\mathbf{q}}}) + \mathbf{G}(\hat{\mathbf{q}}) + \mathbf{M}(\hat{\mathbf{q}})\mathbf{q}_u \\ \mathbf{v}_s = \frac{R_a}{k_{gb}k_t} \boldsymbol{\tau}_u + k_b k_{gb} \dot{\hat{\mathbf{q}}} \end{cases} \quad (3.17)$$

É possível calcular um sistema inverso completo, considerando a dinâmica do manipulador e dos motores DC em um único bloco, entretanto, como a técnica aplicada neste projeto apresenta bons resultados e, como a dinâmica dos motores é muito mais rápida do que a dinâmica do manipulador, os resultados obtidos calculando a inversão completa não possuem diferença relevante. Desta forma, o diagrama de blocos da estrutura proposta neste trabalho para o sistema inverso é detalhado na Figura 9.

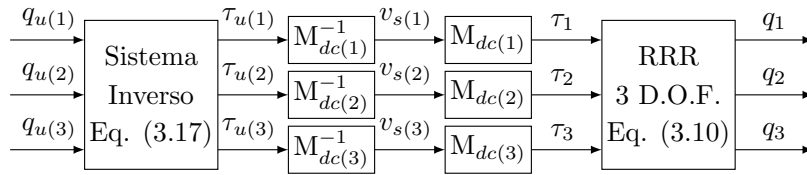


Figura 9 – Diagrama de blocos do sistema inverso com o vetor de tensões como saída

3.5 Técnica de controle

Após a introdução do sistema inverso à esquerda, deve-se aplicar o controlador para cada uma das juntas do manipulador (ver Figura 10). Cada controlador deverá utilizar como planta em seu projeto o duplo integrador conforme apresentado na equação (3.13).

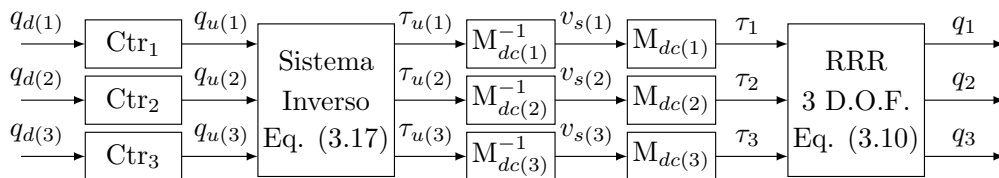


Figura 10 – Diagrama de blocos do controlador proposto

Neste trabalho serão projetados um controlador VS-MRAC e um controlador PD, com o objetivo de controlar as juntas do manipulador robótico RRR com motores DC como atuadores das juntas.

Afim de garantir os requisitos do projeto, os valores dos parâmetros do controlador foram definidos como:

$$W_{m(i)}(s) = \frac{16}{s^2 + 8s + 16}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.23)$$

$L(s) = s + 4$, $\lambda = \zeta = 8$ e o filtro passa baixa $(.)_{eq}$ igual a $(0,0086s + 1)^{-1}$. A partir desses parâmetros e da planta, representada na equação (3.15), foi definido o vetor de parâmetros nominais como:

$${}^n\boldsymbol{\theta} = [-2 \quad -192 \quad 128 \quad 64]^T.$$

Para finalizar o projeto do controlador, define-se $\bar{\kappa} = 1$ e os vetores:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\theta}}_0 &= [0,150 \quad 0,150 \quad 0,150 \quad 0,150]^T \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_1 &= [0,165 \quad 0,165 \quad 0,165 \quad 0,165]^T. \end{aligned}$$

Por fim, considerou-se os mesmos valores de parâmetros para os três controladores VS-MRAC.

3.5.2 Controlador PD

Foram implementados três controladores PD com os mesmos valores de k_p e k_d , um para cada junta i , contudo, para o caso real é necessário adicionar um filtro à parcela derivativa da função de controle, resultando na lei de controle:

$$Q_{u(i)}(s) = k_p E_{(i)}(s) + k_d \frac{N}{1 + N/s} E_{(i)}(s), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.24)$$

com $Q_{u(i)}(s)$ e $E_{(i)}(s)$ sendo as transformadas de Laplace dos sinais $q_{u(i)}$ e $e_{(i)}$, respectivamente, s é o operador de Laplace, $N = 10$ é o coeficiente do filtro e $e_{(i)} = q_i - q_{d(i)}$.

Para sintonizar o controlador PD foi utilizado o método de Ziegler-Nichols de malha fechada, aplicado ao duplo integrador definido na equação (3.15). Este método se caracteriza, primeiramente, pela definição do controlador como uma ação apenas proporcional, depois deve-se encontrar um valor para o ganho proporcional (k_{cr}) que deixe o sistema oscilatório com amplitude constante e determinar o seu período de oscilação (P_{cr}). Para as simulações deste trabalho foram encontrados $k_{cr} = 0,2$ e $P_{cr} = 118,87$ s.

O algoritmo original de Ziegler-Nichols propõe apenas o projeto para controladores P, PI e PID, então foi feita uma adaptação do projeto de controladores PID para PD, ignorando a parcela integrativa. Conhecendo o valor do ganho crítico e do período crítico, é possível calcular os valores de k_p e k_d para controlar o sistema pelas expressões:

$$k_p = 0,6k_{cr} \quad (3.25)$$

e

$$k_d = (0,125P_{cr}) \cdot k_p, \quad (3.26)$$

resultando em $k_p = 0,12$ e $k_d = 1,783$.

Porém, o sistema ainda continuou com algumas oscilações e com o tempo de acomodação um pouco acima do esperado e, portanto, para se obter um ajuste fino, aumentou-se os valores dos ganhos k_p e k_d gradativamente para ajustar o tempo de acomodação e eliminar o *overshoot*, respectivamente. Os resultados obtidos foram: $k_p = 0,3$ e $k_d = 3$.

4 Resultados e discussões

As simulações realizadas neste capítulo consideram o manipulador (sistema 3.10) e os controladores apresentados no capítulo 3. Os requisitos para o projeto do controlador de cada uma das juntas são: garantir erro de regime permanente nulo, tempo de estabilização inferior a 1,5 s e sem *overshoot* no sinal de saída. Para todos os casos simulados, a duração da simulação foi de 10 s e o simulador utilizou o método de Euler para solucionar as equações diferenciais ordinárias com passo de integração de 0,001 s.

4.1 Detalhamento das simulações

A primeira simulação considera o sistema descrito pela equação 3.10, ou seja, manipulador mais motor DC como atuador (ver Figura 7), recebendo um sinal de tensão $\mathbf{v}_{s(i)} = [0 \ 0 \ 0]^T$, partindo de uma posição fora de sua posição de repouso. Esta simulação foi realizada para avaliar o comportamento das juntas do manipulador quando não estão sob a influência de nenhum tipo de controlador e os atritos de qualquer natureza foram considerados nulos.

A segunda situação irá considerar a aplicação do sistema inverso, dado pela equação (3.17), ao sistema descrito pela equação (3.10), sem a adição de um controlador (ver Figura 9). Isso é feito para analisar o desacoplamento das juntas e foram usados como entrada do sistema os valores de \mathbf{q}_u descritos na Tabela 6 para o cenário 1.

A terceira situação, será uma simulação de controladores associados ao sistema inverso (equação (3.17)) e aplicados ao sistema descrito pela equação (3.10) (ver Figura 10), considerando que não há nenhuma incerteza paramétrica.

A quarta situação simulada será feita, considerando a mesma estrutura da terceira simulação (ver Figura 10), porém, um ruído uniformemente distribuído $U(-0,5^\circ, 0,5^\circ)$ será adicionado na medição dos ângulos das juntas \mathbf{q} .

A quinta situação simulada irá considerar o sistema descrito na Figura 10, adicionando-se uma carga de 0,100 kg na extremidade do manipulador, medida pelo manipulador e considerado no sistema inverso, e adicionando um ruído uniformemente distribuído $U(-0,005 \text{ kg}, 0,005 \text{ kg})$ na medição dessa carga, considerado como incerteza paramétrica.

Por fim, uma simulação será feita, ainda considerando o sistema da Figura 10, com uma associação do ruído na medição do ângulo das juntas, adição da carga de 0,100 kg na extremidade do manipulador, considerada pelo sistema inverso, ruído na medição da carga e uma saturação de $\pm 15 \text{ V}$ no sinal de tensão. Na Tabela 5 é possível observar as situações simuladas, bem como os diagramas dos sistemas simulados e as observações de

cada situação.

Simulação	Diagrama	Observação
01 (Figura 12)	Figura 7	–
02 (Figura 13)	Figura 9	Sem incertezas
03 (Figuras 14 - 15)	Figura 10	Sem incertezas
04 (Figuras 16 - 17)	Figura 10	Incerteza na medida dos ângulos das juntas
05 (Figuras 18 - 19)	Figura 10	Incerteza paramétrica na medida de carga da extremidade do manipulador
06 (Figuras 20 - 21)	Figura 10	Incerteza na medida dos ângulos + incerteza na medida de carga + saturação do sinal de tensão

Tabela 5 – Detalhamento das situações simuladas

As simulações, a partir da simulação 03, serão executadas para os cenários 2 e 3 (ver Tabela 6), para dois controles diferentes em cada situação, são eles: controlador PD, descrito na seção (3.5.2), e controlador VS-MRAC, descrito na seção (3.5.1). No primeiro cenário, apenas uma junta será movida por vez, com o objetivo de comprovar a robustez dos controladores, ao garantir que nenhuma outra junta se mova. Já no segundo cenário, as juntas se movem ao mesmo tempo, com o intuito de comprovar que, mesmo se movendo simultaneamente, o movimento de cada uma é independente das outras.

	Cenário 1 (\mathbf{q}_u)	Cenário 2 (\mathbf{q}_d)	Cenário 3 (\mathbf{q}_d)
0,0	$[-0,00 \ 0,00 \ -0,00\pi]^T$	$[-1,10\pi \ -0,00\pi \ 0,00\pi]^T$	$[+1,00\pi \ +0,50\pi \ +0,70\pi]^T$
2,5 s	$[-0,20 \ 0,00 \ -0,00\pi]^T$	$[-1,10\pi \ -0,00\pi \ 0,50\pi]^T$	$[-1,10\pi \ -0,00\pi \ +0,20\pi]^T$
5,0 s	$[-0,00 \ 0,35 \ -0,00\pi]^T$	$[-1,10\pi \ -0,25\pi \ 0,50\pi]^T$	$[-0,30\pi \ -0,25\pi \ -0,50\pi]^T$
7,5 s	$[-0,00 \ 0,00 \ -0,50\pi]^T$	$[-0,50\pi \ -0,25\pi \ 0,50\pi]^T$	$[+0,10\pi \ +0,50\pi \ -0,20\pi]^T$

Tabela 6 – Detalhamento dos cenários simulados

A partir da simulação 03, além dos gráficos dos comportamentos do manipulador, também foram calculadas métricas para avaliar e facilitar a comparação do desempenho dos controladores, são elas:

- *Integral Square Error* (ISE): critério que computa a integral do quadrado do erro (equação 4.1). Este critério confere grande peso a erros de maior amplitude e pequeno peso a erros de pequena amplitude.

$$ISE = \int e^2 dt \quad (4.1)$$

- *Integral Absolute Error* (IAE): critério que computa a integral do módulo do erro (equação 4.2). Este critério confere um peso baixo a sistemas com baixo *overshoot* e oscilações mais amortecidas.

$$IAE = \int |e| dt \quad (4.2)$$

- *Integral Time Square Error* (ITSE): critério que computa a integral do quadrado do erro multiplicado pelo instante de tempo (equação 4.3). Este critério é semelhante ao ISE, porém penaliza bastante erros que ocorrem no final do processo e confere um peso pequeno a erros no início do processo.

$$ITSE = \int te^2 dt \quad (4.3)$$

- *Integral Time Absolute Error* (ITAE): critério que computa a integral do módulo do erro multiplicado pelo instante de tempo (equação 4.4). Este critério é semelhante ao IAE, porém, penaliza bastante erros que ocorrem no final do processo e confere um peso pequeno a erros no início do processo.

$$ITAE = \int t|e| dt \quad (4.4)$$

Os resultados da simulação 01, considerando o manipulador livre e a posição inicial dos ângulos como $\mathbf{q} = [0 \quad -0,45\pi \quad 0]^T$, podem ser observados na Figura 12. Nesta situação as juntas dois e três do manipulador apresentam comportamento oscilatório, e isso se deve ao fato de que a junta dois está fora da sua posição de repouso, ao fato dos atritos serem nulos e ao acoplamento das duas últimas juntas do manipulador.

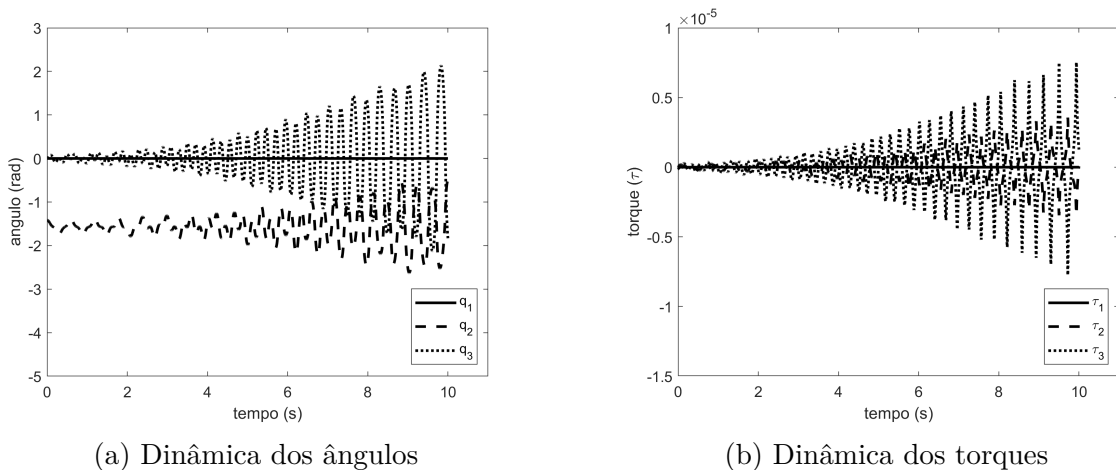


Figura 12 – Dinâmica das juntas na simulação 01

Na simulação 02, considerando o sistema inverso aplicado ao manipulador sem a adição de nenhum controlador, é possível observar o movimento desacoplado das juntas (ver Figura 13). Contudo, como não há nenhum tipo de controle, os ângulos das juntas tendem a crescer indefinidamente e não estabilizam nos valores desejados.

Os dois controladores apresentam um bom desempenho para o cenário 2 (ver Figuras (14a - 14f)) e para o cenário 3 (ver Figuras (15a - 15f)) na simulação 03. Tanto o controlador PD quanto o VS-MRAC apresentam baixos sinais de tensão, com o PD aumentando um pouco a amplitude desse sinal no segundo cenário e o VS-MRAC apresentando um sinal de

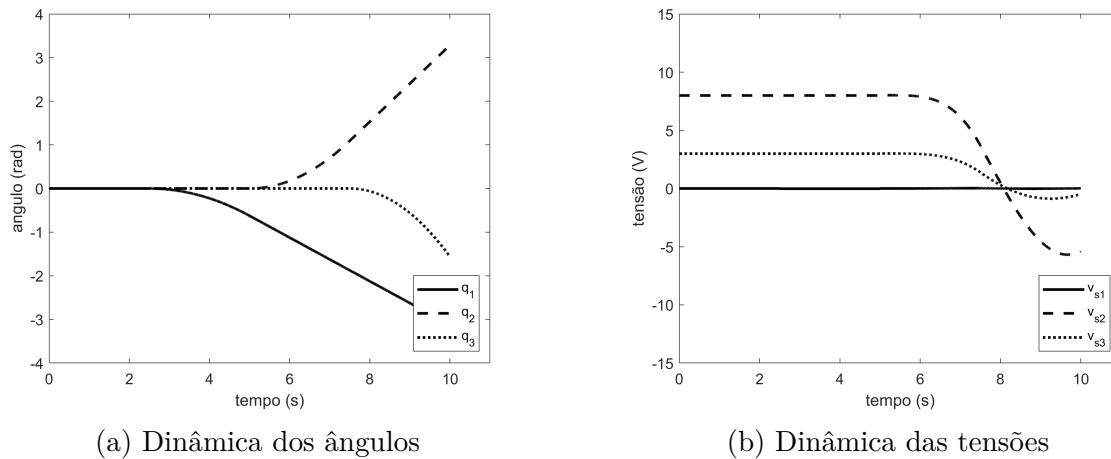


Figura 13 – Dinâmica das juntas na simulação 02

tensão um pouco mais chaveado e com maior amplitude nos dois cenários. Além disso, os controladores apresentam um comportamento desacoplado no movimento das juntas, sem *overshoot* e tempo de estabilização inferior a 1,5 s, porém, o controlador PD apresenta um pequeno erro de regime associado à junta 1. Analisando as Tabelas (7 - 8), observa-se que o VS-MRAC possui uma resposta um pouco mais rápida (ISE e ITSE), e com menor erro de regime (IAE e ITAE) do que o PD, sendo essa diferença aumentada no cenário 3.

Para a simulação 04, com ruído $U(-0, 5^\circ, 0, 5^\circ)$ na medição de \mathbf{q} , os dois controladores mantiveram a boa performance no cenário 2 (ver Figuras (16a - 16f)), conseguindo superar o ruído apenas aumentando o chaveamento no sinal de tensão. Já para o terceiro cenário (ver Figuras (17a - 17f)), o controlador PD apresentou um erro acentuado no final da simulação, não conseguindo manter o desacoplamento e a performance, enquanto o VS-MRAC manteve a boa performance que apresentou no cenário 2. O bom desempenho dos controladores no cenário 2 é evidenciado observando a Tabela 9, onde os valores das métricas se mantêm muito próximos aos valores obtidos na simulação 03, com o VS-MRAC obtendo uma performance um pouco melhor do que o PD. Já na Tabela 10, o erro no final da simulação do controlador PD é comprovado analisando o grande aumento nos valores de ITSE e ITAE, enquanto o VS-MRAC mantém índices muito próximos aos da simulação 03.

Na simulação 05, considerou-se a introdução de uma massa de 0,100 kg na extremidade do manipulador, prevista pelo sistema inverso, com um ruído de medição $U(-0,005 \text{ kg}, 0,005 \text{ kg})$ como incerteza paramétrica, no cenário 2 (ver Figuras (18a - 18f)), o controlador PD apresentou problemas para controlar as juntas, apresentando pequenas variações nos erro de regime, mesmo apresentando um chaveamento no sinal de tensão. A má performance do controlador PD é agravada no cenário 3 (ver Figuras (19a - 19f)) pois, além de apresentar pequenas variações no erro de regime no início da simulação, o controlador apresenta erros acentuados a partir de 8 s. Analisando as Tabelas (11 - 12), observa-se

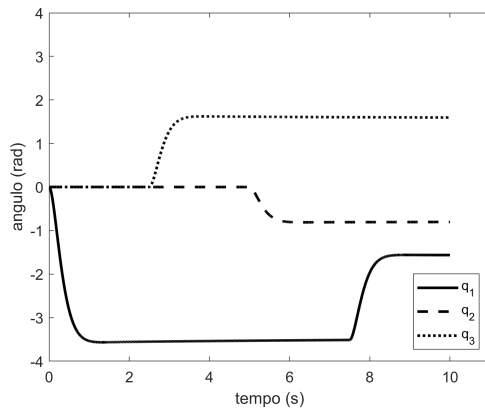
o aumento dos valores das métricas de erro para o controlador PD, principalmente no terceiro cenário, já para o controlador VS-MRAC os valores se mantêm próximos ao da simulação 03, o que representa um bom controle nos dois cenários apresentados.

A simulação 06 associa todas as incertezas das simulações 04 e 05, além de uma saturação no sinal de tensão. O controlador PD apresentou, para o cenário 2 (ver Figuras (20a - 20f)), pequenos erros associados à primeira junta e grandes erros associados às outras duas juntas, o que caracteriza um desempenho insatisfatório do controlador, já o VS-MRAC consegue manter um bom comportamento, apresentando erros muito pequenos no controle de todas as juntas (ver Tabela 13). Para o cenário 3 (ver Figuras (21a - 21f)), o controlador PD instabiliza completamente após 5s de simulação, apresentando grandes oscilações e graves erros, enquanto o VS-MRAC mantém o bom controle de todas as juntas, apenas com o chaveamento no sinal de tensão e erros muito pequenos nos ângulos das juntas (ver Tabela 14).

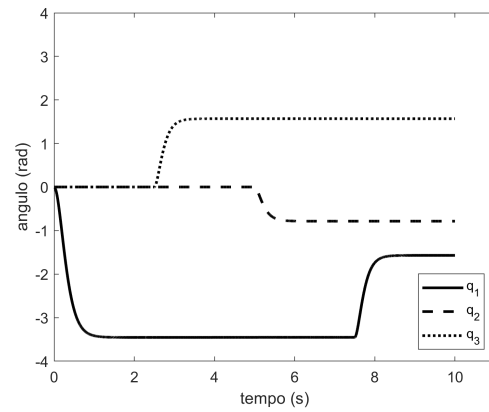
Por fim, foram criados dois gráficos tridimensionais representando a posição da extremidade do manipulador em relação ao referencial $\{0\}$, fixado em sua base, considerando a simulação 3 nos cenários 2 e 3. Nas Figuras (22a - 22b) é possível observar a posição da ferramenta (\mathbf{o}_r) seguindo o modelo de referência (${}^m\mathbf{o}_r$), movendo-se rapidamente quando está distante do valor desejado e com um movimento mais lento ao chegar próximo aos valores definidos na Tabela (6). Para calcular a posição da extremidade em relação a base, a partir da equação (2.8), tem-se:

$${}^0\mathbf{P}_4 = \mathbf{o}_r = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{P}_4 \quad (4.5)$$

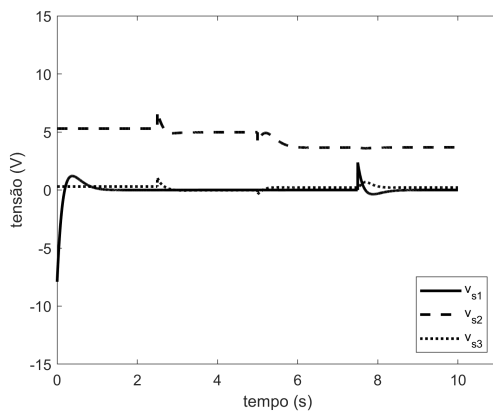
$$\mathbf{o}_r = \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1) \cos(q_2) + l_3 \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ l_2 \sin(q_1) \cos(q_2) + l_3 \sin(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ l_1 + l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$



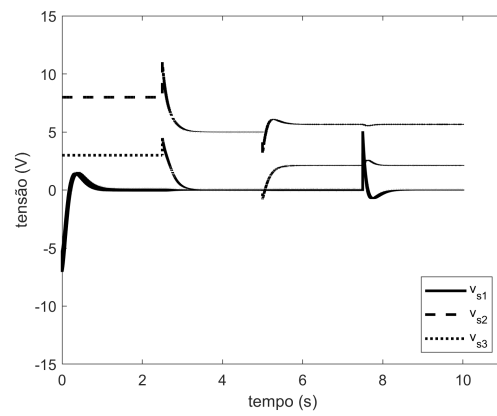
(a) Dinâmica dos ângulos (PD)



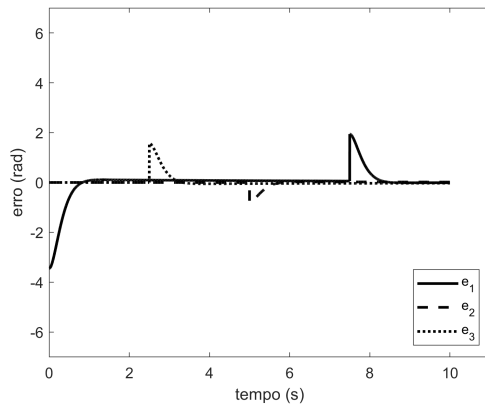
(b) Dinâmica dos ângulos (VS-MRAC)



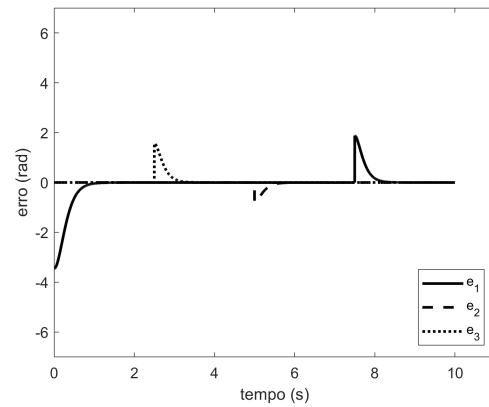
(c) Dinâmica das tensões (PD)



(d) Dinâmica das tensões (VS-MRAC)



(e) Dinâmica dos erros (PD)

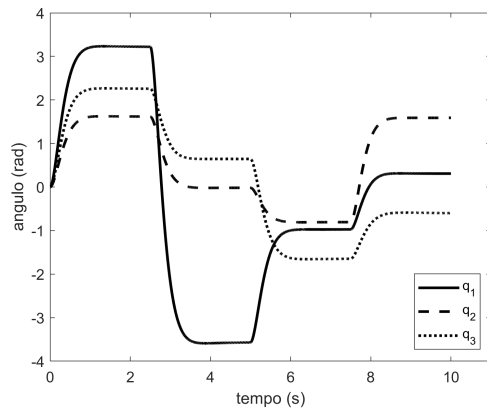


(f) Dinâmica dos erros (VS-MRAC)

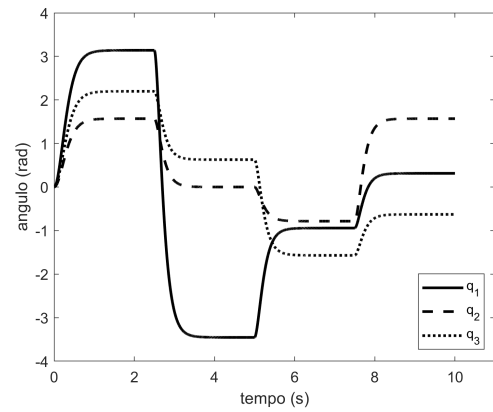
Figura 14 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 03 (controle sem incertezas) no cenário 2

Métricas de erro para simulação 03 no cenário 2								
	VS-MRAC				PD			
	ISE	IAE	ITSE	ITAE	ISE	IAE	ITSE	ITAE
q_1	3,1216	1,6232	4,5889	3,9468	3,4080	2,2986	6,8420	7,4485
q_2	0,0966	0,1988	0,4939	1,0366	0,1325	0,3356	0,6865	1,9726
q_3	0,3865	0,4013	1,0095	1,1114	0,5334	0,7421	1,4417	2,8908

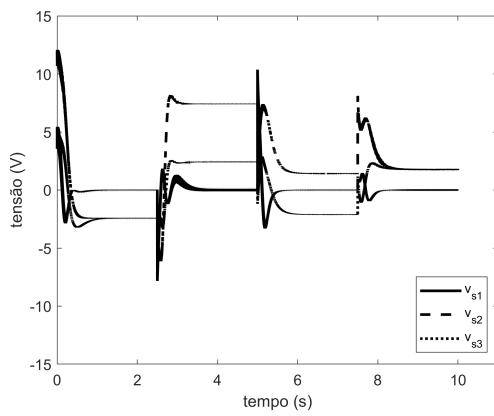
Tabela 7 – Métricas de erro para a simulação 03 no cenário 2



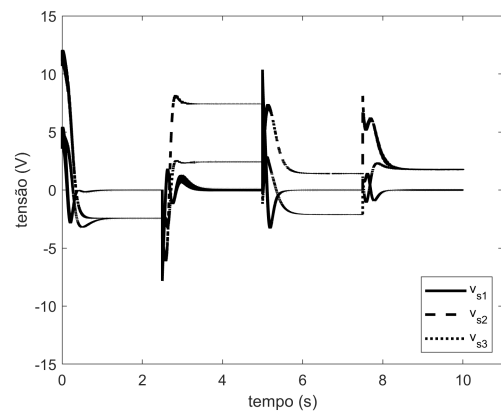
(a) Dinâmica dos ângulos (PD)



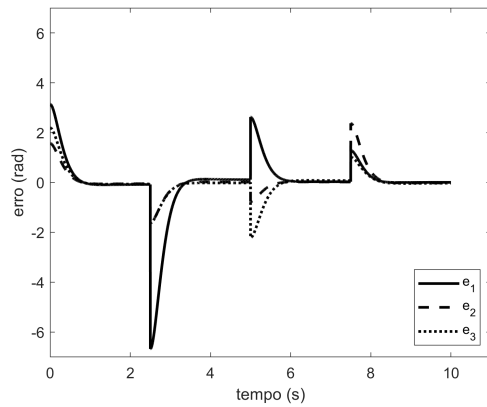
(b) Dinâmica dos ângulos (VS-MRAC)



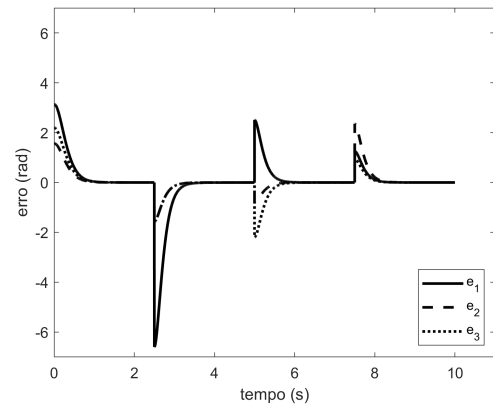
(c) Dinâmica das tensões (PD)



(d) Dinâmica das tensões (VS-MRAC)



(e) Dinâmica dos erros (PD)

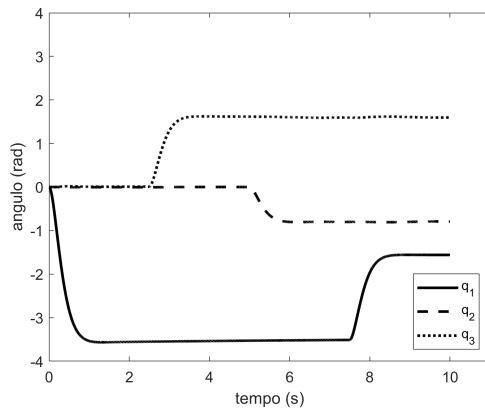


(f) Dinâmica dos erros (VS-MRAC)

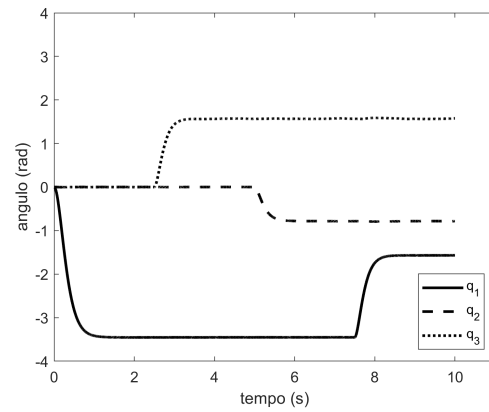
Figura 15 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 03 (controle sem incertezas) no cenário 3

Métricas de erro para a simulação 03 no cenário 3								
	VS-MRAC				PD			
	ISE	IAE	ITSE	ITAE	ISE	IAE	ITSE	ITAE
q_1	10,2521	3,6668	25,0578	10,4043	13,6074	4,8701	36,4421	15,5314
q_2	1,9027	1,7158	8,2006	6,7629	2,4319	2,2136	11,4787	9,5014
q_3	2,3623	1,9293	6,1000	5,9263	2,9231	2,6189	9,0306	9,6831

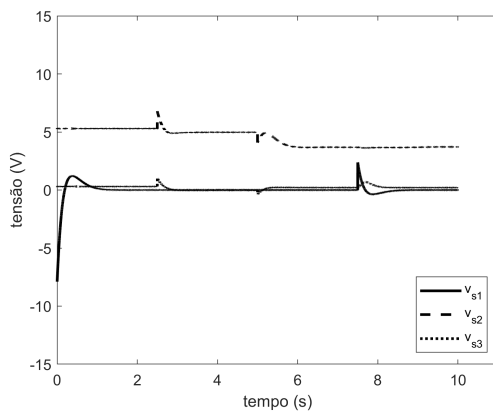
Tabela 8 – Métricas de erro para a simulação 03 no cenário 3



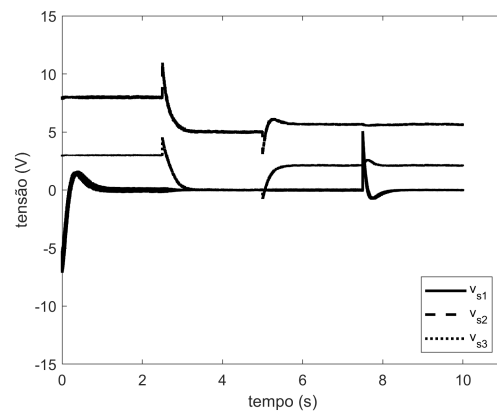
(a) Dinâmica dos ângulos (PD)



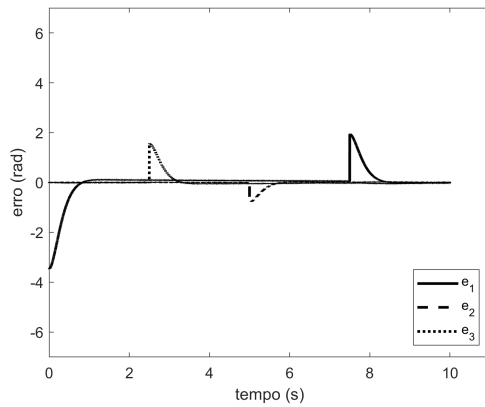
(b) Dinâmica dos ângulos (VS-MRAC)



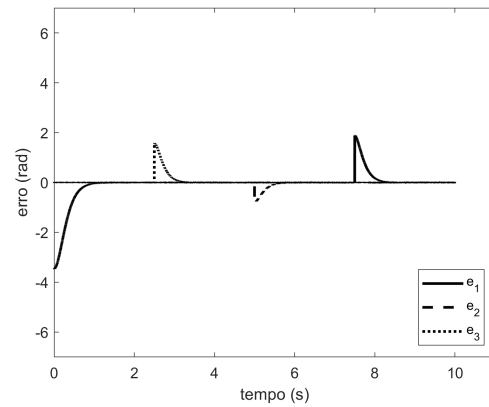
(c) Dinâmica das tensões (PD)



(d) Dinâmica das tensões (VS-MRAC)



(e) Dinâmica dos erros (PD)

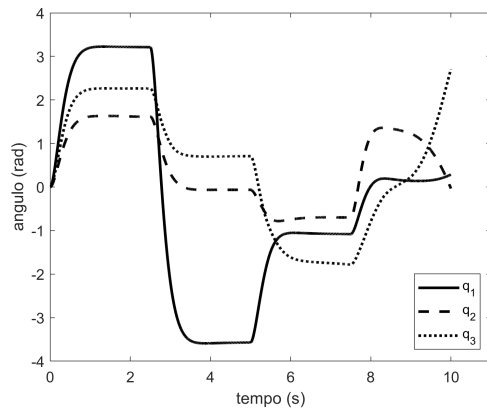


(f) Dinâmica dos erros (VS-MRAC)

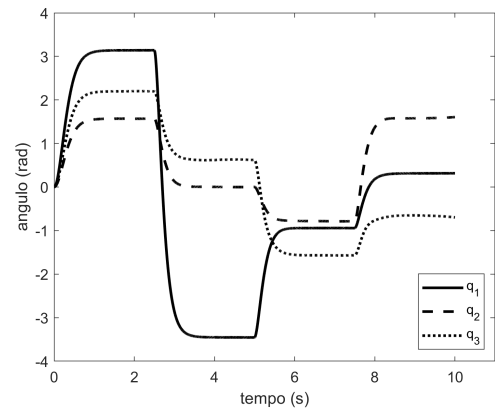
Figura 16 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 04 (ruído na medição dos ângulos) no cenário 2

Métricas de erro para a simulação 04 no cenário 2								
	VS-MRAC				PD			
	ISE	IAE	ITSE	ITAE	ISE	IAE	ITSE	ITAE
q_1	3,1205	1,6451	4,6154	4,0834	3,4090	2,3010	6,8493	7,4761
q_2	0,0971	0,2399	0,4966	1,2410	0,1317	0,3360	0,6801	1,8390
q_3	0,3856	0,4415	1,0084	1,3459	0,5256	0,7527	1,4223	2,8833

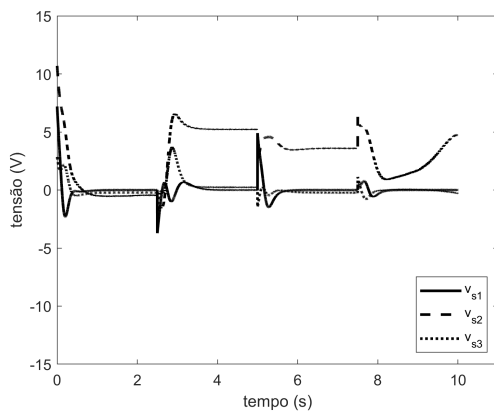
Tabela 9 – Métricas de erro para a simulação 04 no cenário 2



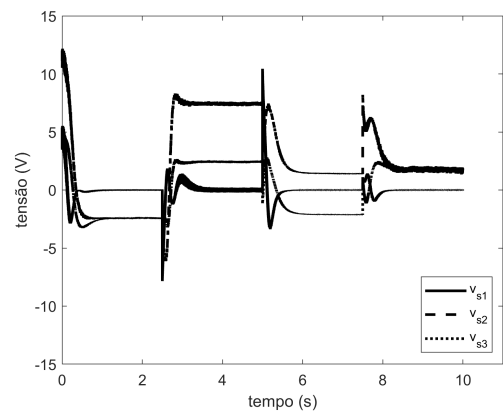
(a) Dinâmica dos ângulos (PD)



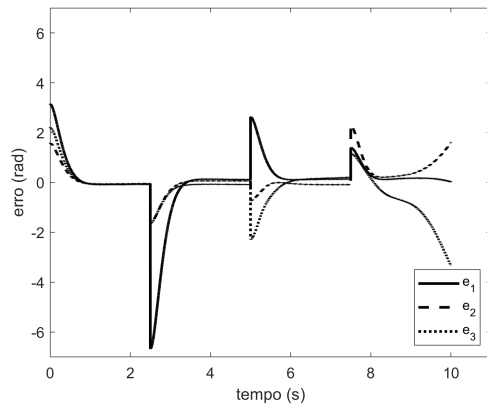
(b) Dinâmica dos ângulos (VS-MRAC)



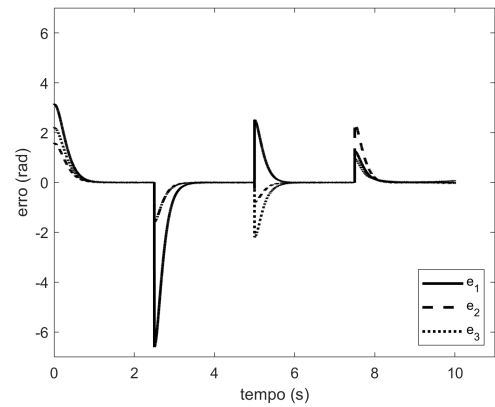
(c) Dinâmica das tensões (PD)



(d) Dinâmica das tensões (VS-MRAC)



(e) Dinâmica dos erros (PD)

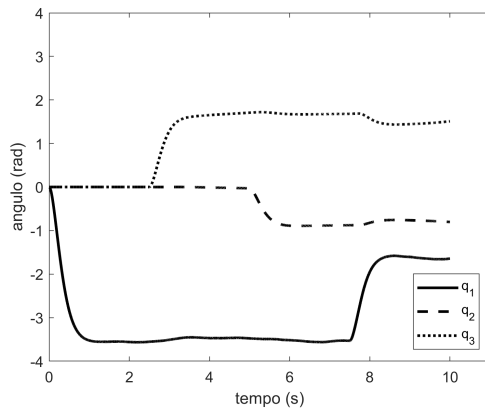


(f) Dinâmica dos erros (VS-MRAC)

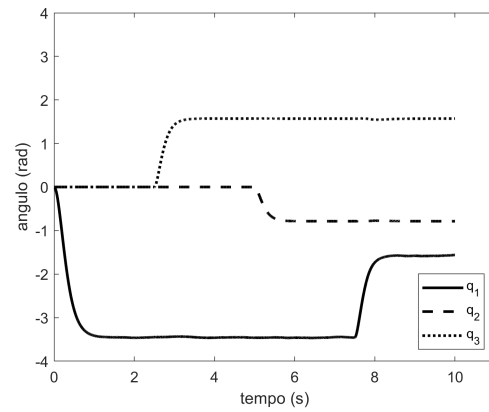
Figura 17 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 04 (ruído na medição dos ângulos) no cenário 3

Métricas de erro para a simulação 04 no cenário 3								
	VS-MRAC				PD			
	ISE	IAE	ITSE	ITAE	ISE	IAE	ITSE	ITAE
q_1	10,2677	3,6894	25,1153	10,5556	13,7231	5,2936	37,4499	19,0608
q_2	1,9131	1,7423	8,2603	6,9522	3,1132	3,2546	18,4032	18,9804
q_3	2,3636	2,0370	6,1066	6,7638	7,4483	5,2475	51,7450	33,1437

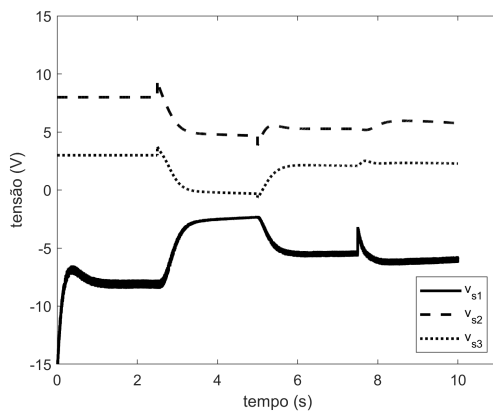
Tabela 10 – Métricas de erro para a simulação 04 no cenário 3



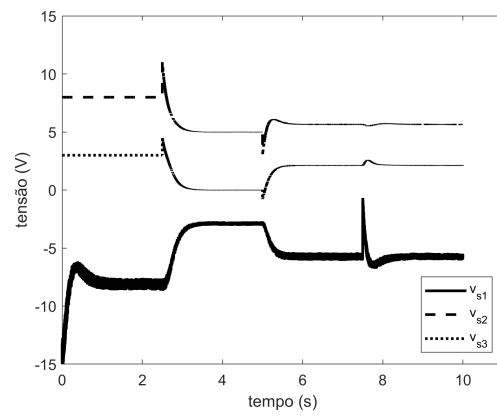
(a) Dinâmica dos ângulos (PD)



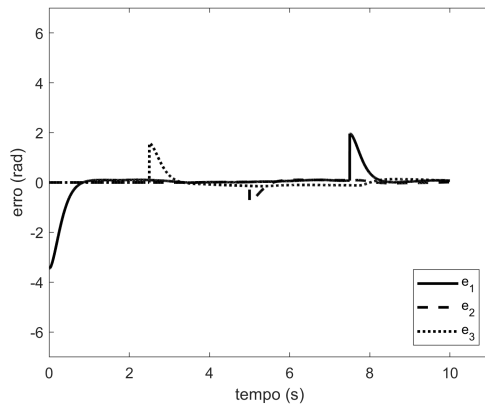
(b) Dinâmica dos ângulos (VS-MRAC)



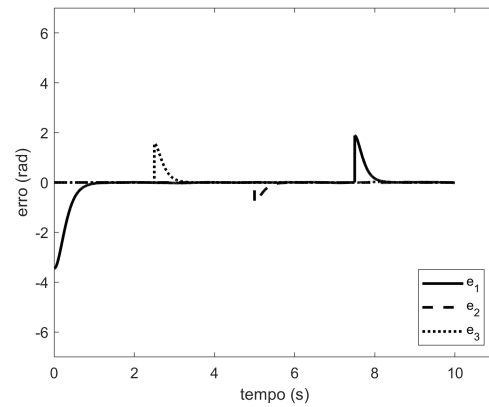
(c) Dinâmica das tensões (PD)



(d) Dinâmica das tensões (VS-MRAC)



(e) Dinâmica dos erros (PD)

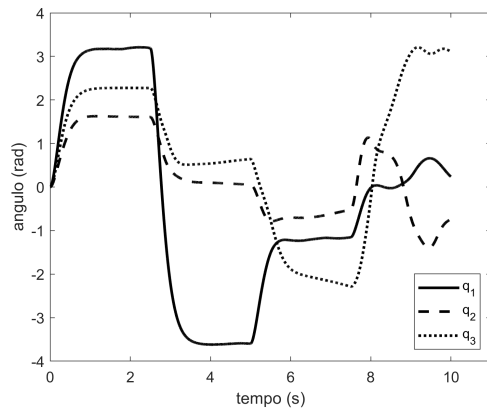


(f) Dinâmica dos erros (VS-MRAC)

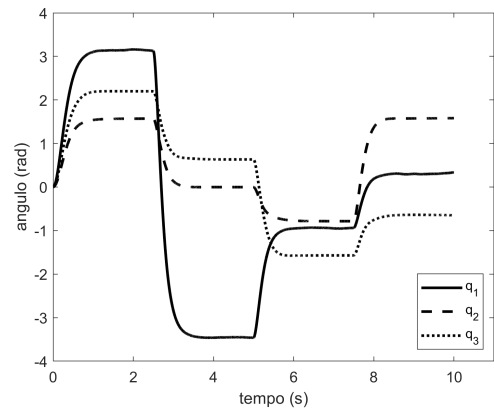
Figura 18 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 05 (ruído na medição da carga na extremidade) no cenário 2

Métricas de erro para a simulação 05 no cenário 2								
	VS-MRAC				PD			
	ISE	IAE	ITSE	ITAE	ISE	IAE	ITSE	ITAE
q_1	3,1225	1,6590	4,6073	4,1427	3,4090	2,2192	6,9580	7,6116
q_2	0,0955	0,2000	0,4881	1,0579	0,1339	0,4861	0,7236	2,9739
q_3	0,3867	0,4116	1,0112	1,1984	0,6002	1,1832	1,8995	5,9670

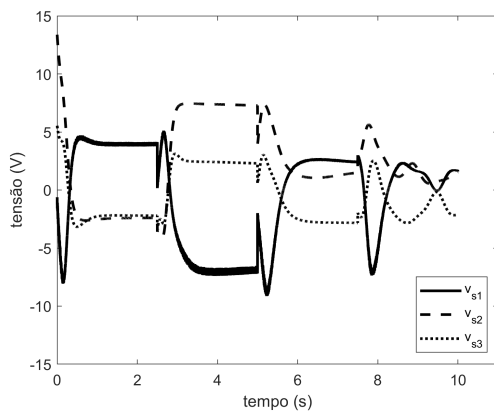
Tabela 11 – Métricas de erro para a simulação 05 no cenário 2



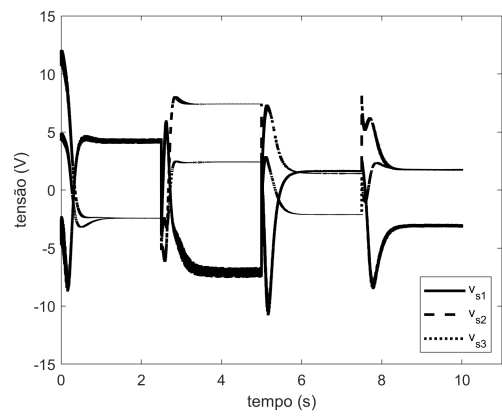
(a) Dinâmica dos ângulos (PD)



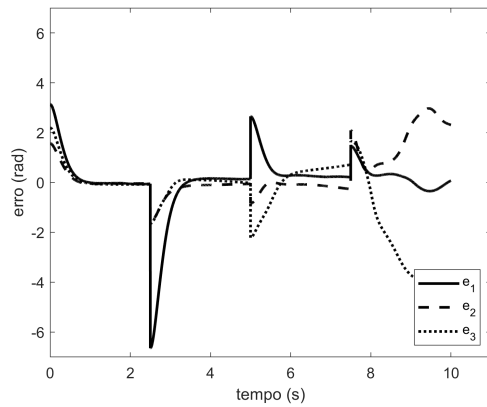
(b) Dinâmica dos ângulos (VS-MRAC)



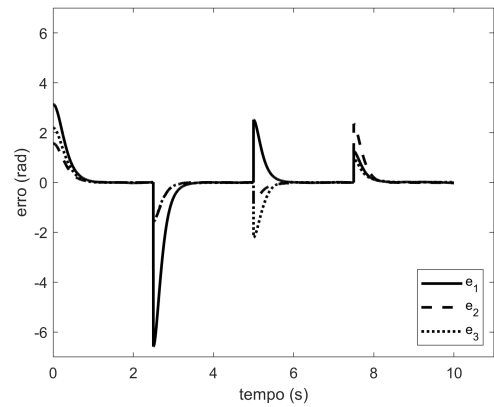
(c) Dinâmica das tensões (PD)



(d) Dinâmica das tensões (VS-MRAC)



(e) Dinâmica dos erros (PD)

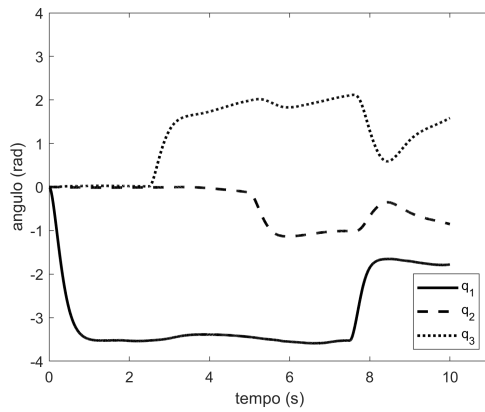


(f) Dinâmica dos erros (VS-MRAC)

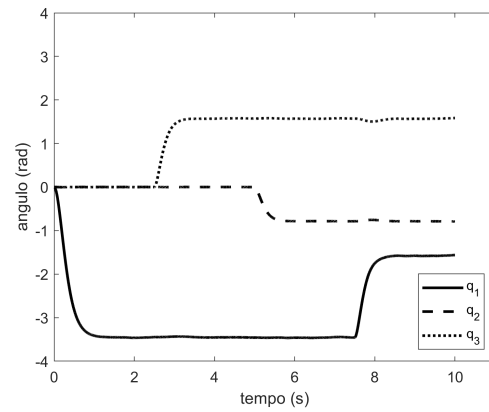
Figura 19 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 05 (ruído na medição da carga na extremidade) no cenário 3

Métricas de erro para a simulação 05 no cenário 3								
	VS-MRAC				PD			
	ISE	IAE	ITSE	ITAE	ISE	IAE	ITSE	ITAE
q_1	10,2251	3,7188	24,9791	10,7223	13,8626	5,7064	38,9950	22,3497
q_2	1,9161	1,7411	8,2750	6,8899	10,5406	6,0002	87,8503	43,6353
q_3	2,3743	1,9662	6,1721	6,2507	24,7519	9,8289	207,8533	72,7545

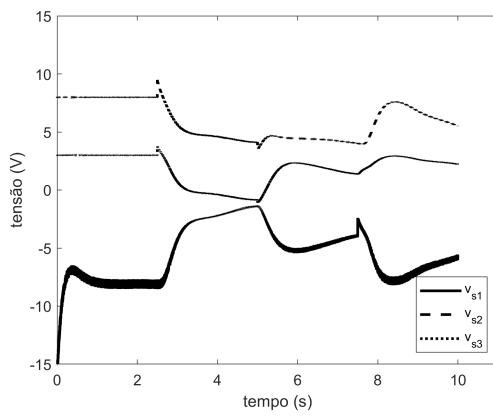
Tabela 12 – Métricas de erro para a simulação 05 no cenário 3



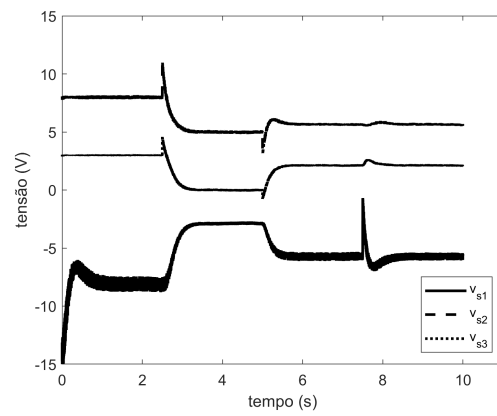
(a) Dinâmica dos ângulos (PD)



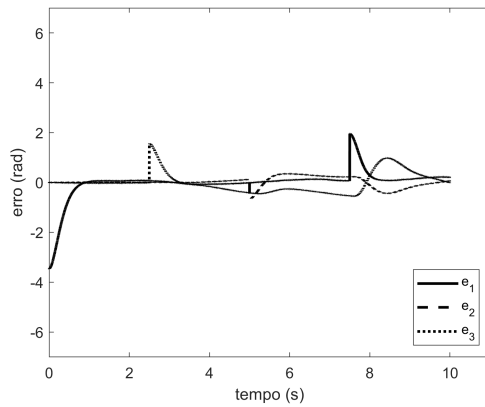
(b) Dinâmica dos ângulos (VS-MRAC)



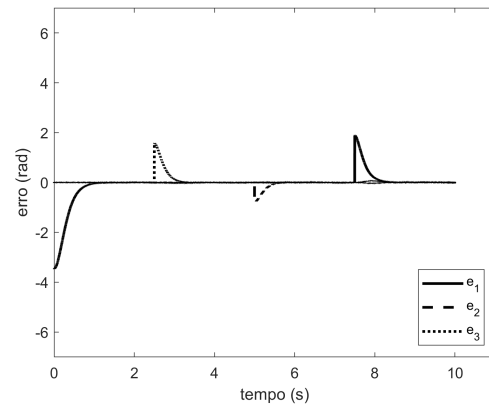
(c) Dinâmica das tensões (PD)



(d) Dinâmica das tensões (VS-MRAC)



(e) Dinâmica dos erros (PD)

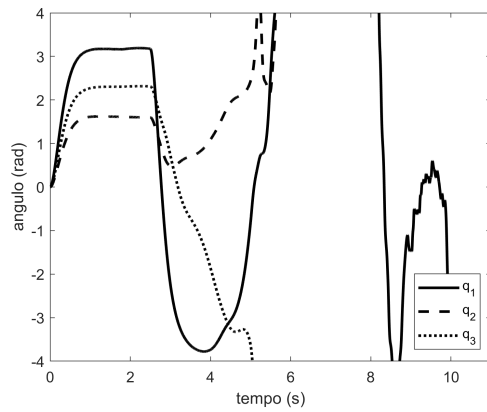


(f) Dinâmica dos erros (VS-MRAC)

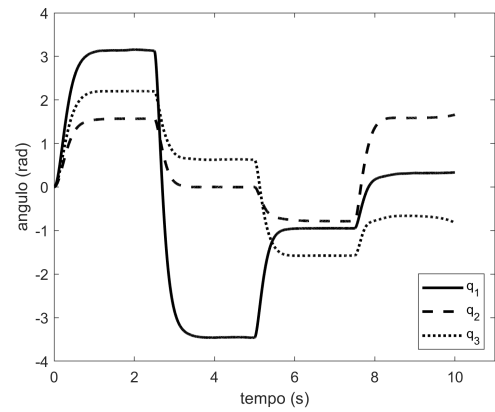
Figura 20 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 06 (ruídos e saturação na tensão) no cenário 2

Métricas de erro para a simulação 06 no cenário 2								
	VS-MRAC				PD			
	ISE	IAE	ITSE	ITAE	ISE	IAE	ITSE	ITAE
q_1	3,1232	1,6757	4,6246	4,2527	3,4116	2,4065	6,8282	9,2328
q_2	0,0947	0,2394	0,4845	1,2624	0,3789	1,3037	2,6059	8,8825
q_3	0,3869	0,4623	1,0195	1,5168	1,7464	2,9986	10,6237	18,7936

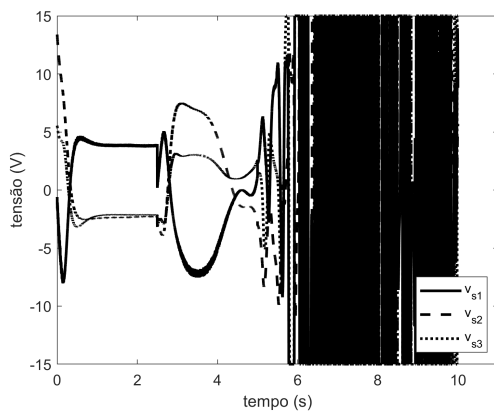
Tabela 13 – Métricas de erro para a simulação 06 no cenário 2



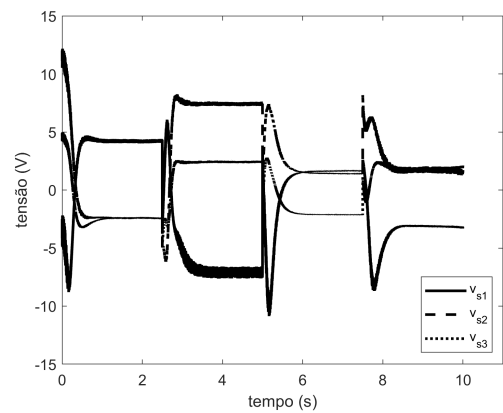
(a) Dinâmica dos ângulos (PD)



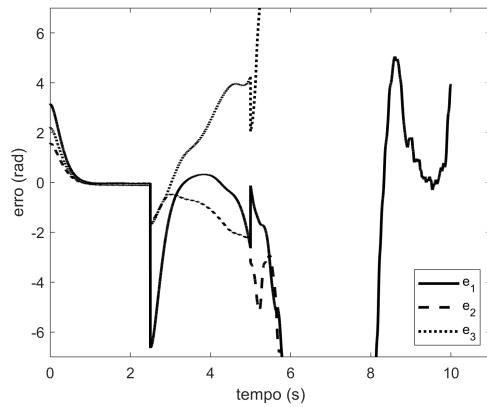
(b) Dinâmica dos ângulos (VS-MRAC)



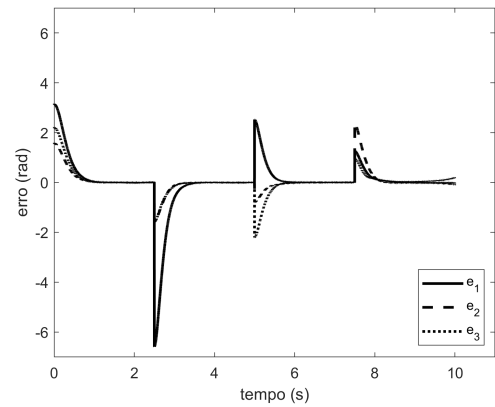
(c) Dinâmica das tensões (PD)



(d) Dinâmica das tensões (VS-MRAC)



(e) Dinâmica dos erros (PD)

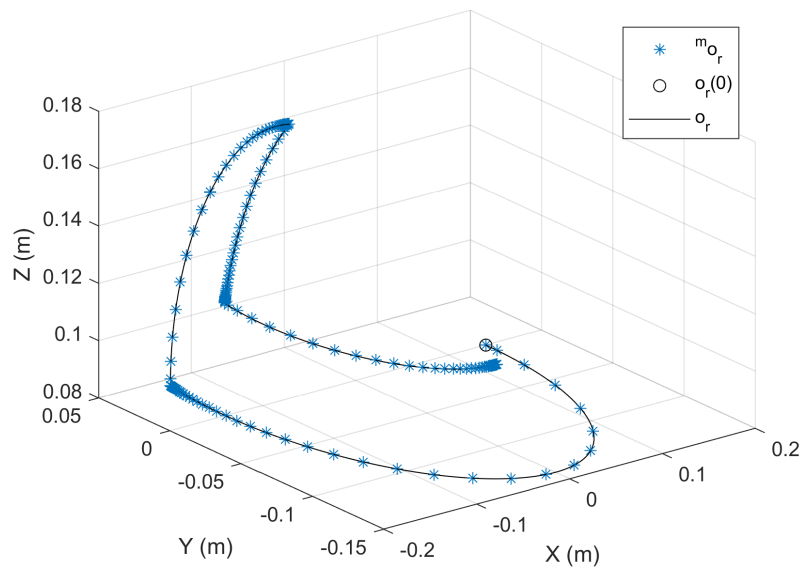


(f) Dinâmica dos erros (VS-MRAC)

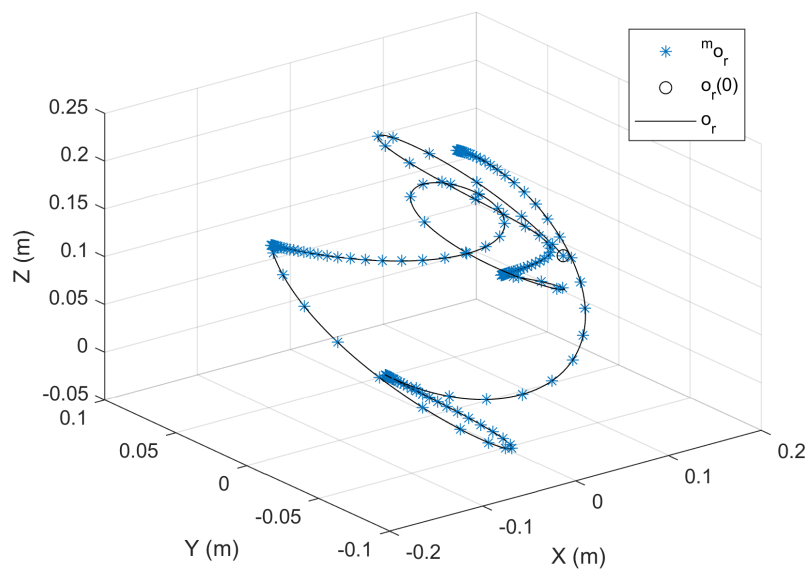
Figura 21 – Dinâmica das juntas com os controladores PD e VS-MRAC para a simulação 06 (ruídos e saturação na tensão) no cenário 3

Métricas de erro para a simulação 06 no cenário 3								
	VS-MRAC				PD			
	ISE	IAE	ITSE	ITAE	ISE	IAE	ITSE	ITAE
q_1	10,243	3,730	25,050	10,785	$0,337 \cdot 10^3$	$0,0356 \cdot 10^3$	$2,248 \cdot 10^3$	$0,231 \cdot 10^3$
q_2	1,937	1,801	8,413	7,370	$0,138 \cdot 10^5$	$0,0023 \cdot 10^5$	$1,169 \cdot 10^5$	$0,018 \cdot 10^5$
q_3	2,3643	2,061	6,138	7,100	$0,919 \cdot 10^5$	$0,0057 \cdot 10^5$	$7,564 \cdot 10^5$	$0,046 \cdot 10^5$

Tabela 14 – Métricas de erro para a simulação 06 no cenário 3



(a) Posição da extremidade do manipulador no cenário 2



(b) Posição da extremidade do manipulador no cenário 3

Figura 22 – Dinâmica da posição da extremidade do manipulador e de amostras da posição do modelo para a extremidade na simulação 03.

5 Conclusões

Neste trabalho foi calculado o modelo dinâmico de um manipulador RRR com movimento espacial e motores DC aplicados às suas juntas. Também foi calculado um sistema inverso à esquerda do modelo do manipulador considerando os atuadores das juntas, o qual não necessita das medidas das derivadas dos ângulos das juntas do manipulador, além da implementação de dois controladores, um controlador adaptativo por modelo de referência e estrutura variável (VS-MRAC) e um controlador linear proporcional derivativo (PD). Por fim, foram feitas simulações para comprovar o funcionamento dos controladores, analisando o comportamento das juntas do manipulador, tanto em situações ideais quanto em situações considerando incertezas, além de fazer o cálculo de métricas de desempenho dos controladores.

Assim como era esperado, o controlador VS-MRAC demonstrou um ótimo desempenho, sendo superior ao controlador PD em todas as situações simuladas, pois apesar de o manipulador projetado (RRR, 3 D.O.F) possuir uma grande liberdade de movimento, não linearidade e forte acoplamento, o controle de suas juntas se manteve sempre de acordo com os critérios projetados, mesmo com a adição de incertezas paramétricas, ruídos nas medições e saturação nos sinais de tensão.

O controlador PD, apesar de apresentar um bom controle na ausência de incertezas, apresentando sinais de tensão mais baixos e menos chaveados do que os do controlador VS-MRAC nessa situação, possui uma grande queda na performance à medida que incertezas e ruídos são adicionados ao sistema, podendo chegar até à instabilidade, como é possível observar na Figura 21.

Estes resultados mostram que, para um manipulador industrial real, utilizando uma modificação da técnica de inversão proposta por [Dias et al. \(2016\)](#), o controlador VS-MRAC é mais indicado do que o PD, pois, no ambiente de trabalho real o manipulador deverá lidar com vários tipos de incertezas, e o VS-MRAC pode contorná-las sem nenhum prejuízo no decorrer do processo, enquanto o PD não pode.

Uma boa opção para solucionar o problema do controle do manipulador RRR, seria a implementação de um controlador robusto com um projeto mais simplificado. Apresentando as características de simplicidade de projeto, como o controlador PD, e robustez às incertezas paramétricas e ruídos, como o controlador VS-MRAC.

Por fim, este trabalho gerou duas publicações, a primeira no 14° Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2019) e a segunda no *17th IEEE Latin American Robotics Symposium* (LARS 2020). As perspectivas futuras são a implementação do controlador VS-MRAC em um manipulador RRR real e a implementação de um controlador que apresente

a simplicidade de projetar do controlador PD com a boa performance do VSMRAC, também em um manipulador real.

Referências

- Al Ashi, M. M.; Elaydi, H.; Abu Hadrour, I. Modelica based object-oriented modeling and pd-computed torque control of a 2-dof robotic arm. In: *2018 International Conference on Promising Electronic Technologies (ICPET)*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 13–18. ISSN null. Citado na página 20.
- Alassar, A. Z.; Abuhadrous, I. M.; Elaydi, H. A. Comparison between flc and pid controller for 5dof robot arm. In: *2010 2nd International Conference on Advanced Computer Control*. [S.l.: s.n.], 2010. v. 5, p. 277–281. ISSN null. Citado na página 20.
- ALAVANDAR, S.; NIGAM, M. New hybrid adaptive neuro-fuzzy algorithms for manipulator control with uncertainties–comparative study. *ISA Transactions*, v. 48, n. 4, p. 497 – 502, 2009. ISSN 0019-0578. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019057809000470>>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- Alhaddad, M.; Shaukifeh, B.; Joukhadar, A. Adaptive lq-based computed-torque controller for robotic manipulator. In: *2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIconRus)*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 2169–2173. ISSN 2376-6557. Citado na página 20.
- CRAIG, J. *Introduction to Robotics: Pearson New International Edition: Mechanics and Control*. Pearson Education Limited, 2013. ISBN 9781292052526. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ZTqpBwAAQBAJ>>. Citado 3 vezes nas páginas 19, 23 e 26.
- DIAS, S. et al. Robust control of robotic manipulators based on left inverse system and variable structure model reference adaptive control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 30, n. 8-10, p. 1389–1407, 2016. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/acs.2663>>. Citado 5 vezes nas páginas 19, 21, 30, 43 e 63.
- García-Rodríguez, V. H. et al. A dc motor driven by a dc/dc boost converter-inverter: Modeling and simulation. In: *2016 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 78–83. Citado na página 20.
- Hernández-Márquez, E. et al. Modeling and simulation of a dc motor fed by a full-bridge buck inverter. In: *2017 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 98–103. Citado na página 20.
- Hirschorn, R. Invertibility of multivariable nonlinear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 24, n. 6, p. 855–865, 1979. Citado 4 vezes nas páginas 21, 30, 31 e 32.
- Hsu, L. Variable structure model-reference adaptive control (vs-mrac) using only input and output measurements: the general case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 35, n. 11, p. 1238–1243, 1990. Citado na página 21.
- Kalimullah, I. Q.; Desikan, A.; Kalaichelvi, V. Analysis of a proposed algorithm for point to point control of a 3 dof robot manipulator. In: *2017 3rd International Conference*

on *Control, Automation and Robotics (ICCAR)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 289–292. ISSN null. Citado na página 19.

Kasera, S.; Kumar, A.; Prasad, L. B. Trajectory tracking of 3-dof industrial robot manipulator by sliding mode control. In: *2017 4th IEEE Uttar Pradesh Section International Conference on Electrical, Computer and Electronics (UPCON)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 364–369. ISSN null. Citado na página 19.

KOLHE, J. P. et al. Robust control of robot manipulators based on uncertainty and disturbance estimation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley, v. 23, n. 1, p. 104–122, out. 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/rnc.1823>>. Citado na página 21.

Lan, L. et al. Decoupling control of 2-link manipulator with model following control and proposed control gains design (iccas 2012). In: *2012 12th International Conference on Control, Automation and Systems*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1049–1054. ISSN null. Citado na página 19.

Mills, J. K.; Goldenberg, A. A. Force and position control of manipulators during constrained motion tasks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 5, n. 1, p. 30–46, Feb 1989. ISSN 2374-958X. Citado na página 19.

Mozaryn, J.; Kurek, J. E. Design of decoupled sliding mode control for the puma 560 robot manipulator. In: *Proceedings of the Third International Workshop on Robot Motion and Control, 2002. RoMoCo '02*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 45–50. ISSN null. Citado na página 19.

MURRAY, R. M. et al. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. [S.l.: s.n.], 1994. ISBN 9780849379819. Citado na página 19.

Raj, N. J.; Iyer, K.; Dash, A. K. Design, fabrication, kinematic analysis and control of a 3-dof serial manipulator. In: *2016 International Conference on Next Generation Intelligent Systems (ICNGIS)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 1–6. ISSN null. Citado na página 19.

Sallam, E. A. Fuzzy self-tuning inverse dynamics control of 3 dof planar robot manipulators. In: *The 10th IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 439–444. ISSN 2162-7843. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

SICILIANO, B. et al. *Robotics Modelling, Planning and Control*. Springer London, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-84628-642-1>>. Citado na página 19.

Slotine, J. . E.; Li Weiping. Adaptive manipulator control: A case study. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 33, n. 11, p. 995–1003, 1988. Citado na página 20.

Apêndices

APÊNDICE A – Provas das equações de velocidades lineares e angulares dos elos

Para deduzir as equações de velocidades apresentadas na seção 2.2 serão utilizadas as definições de vetor posição e matriz de rotação dadas na seção 2.1.

Primeiramente, define-se os referenciais $\{A\}$ e $\{B\}$ e, então, define-se um ponto Q com posição expressa no referencial de $\{B\}$ ${}^B\mathbf{p}_Q$. Considere que Q está se movendo em relação a $\{B\}$, então a velocidade de Q em relação a $\{B\}$ será:

$${}^B\mathbf{v}_Q = \frac{d}{dt} {}^B\mathbf{p}_Q. \quad (\text{A.1})$$

A velocidade de Q em relação a $\{A\}$ é calculada por:

$${}^A\mathbf{v}_Q = {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{v}_Q = {}^A\mathbf{R}_B \frac{d}{dt} {}^B\mathbf{p}_Q. \quad (\text{A.2})$$

Agora, considerando que a origem de $\{B\}$ também se movimenta em relação a $\{A\}$, tem-se:

$${}^A\mathbf{v}_Q = {}^A\mathbf{v}_B + {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{v}_Q. \quad (\text{A.3})$$

Fazendo uma análise do ponto Q parado em relação a $\{B\}$, mas com $\{B\}$ possuindo uma velocidade rotacional em relação a $\{A\}$ (${}^A\boldsymbol{\omega}_B$), como é possível observar na Figura 23, fica claro que Q possui uma velocidade em relação a $\{A\}$. Para calcular essa velocidade de Q em relação a $\{A\}$ é possível usar uma abordagem intuitiva. Na Figura 24 é possível se observar a posição de Q em dois instantes de tempo infinitesimais quando $\{B\}$ rotaciona em torno de ${}^A\boldsymbol{\omega}_B$ em um intervalo Δt .

Observando a Figura 24, é possível descobrir o módulo e a direção da mudança de Q em relação a $\{A\}$. Primeiramente, variação infinitesimal da posição de Q deve ser perpendicular a ${}^A\boldsymbol{\omega}_B$ e a ${}^A\mathbf{p}_Q$. Então, analisando a Figura 24, calcula-se o módulo da variação infinitesimal da posição de Q por:

$$|\Delta Q| = (|{}^A\mathbf{p}_Q| \text{sen}(\theta))(|{}^A\boldsymbol{\omega}_B| \Delta t) \quad (\text{A.4})$$

Estas condições de módulo e direção sugerem o uso de um produto vetorial \times , resultando na expressão:

$${}^A\mathbf{v}_Q = {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{p}_Q = {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p}_Q. \quad (\text{A.5})$$

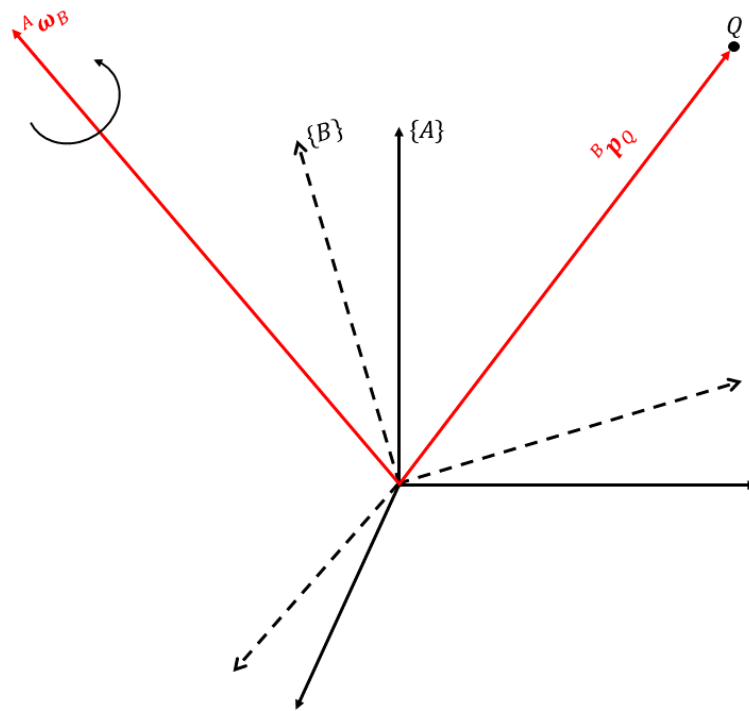


Figura 23 – Velocidade do ponto Q em relação a {A} considerando um movimento rotacional do referencial {B}

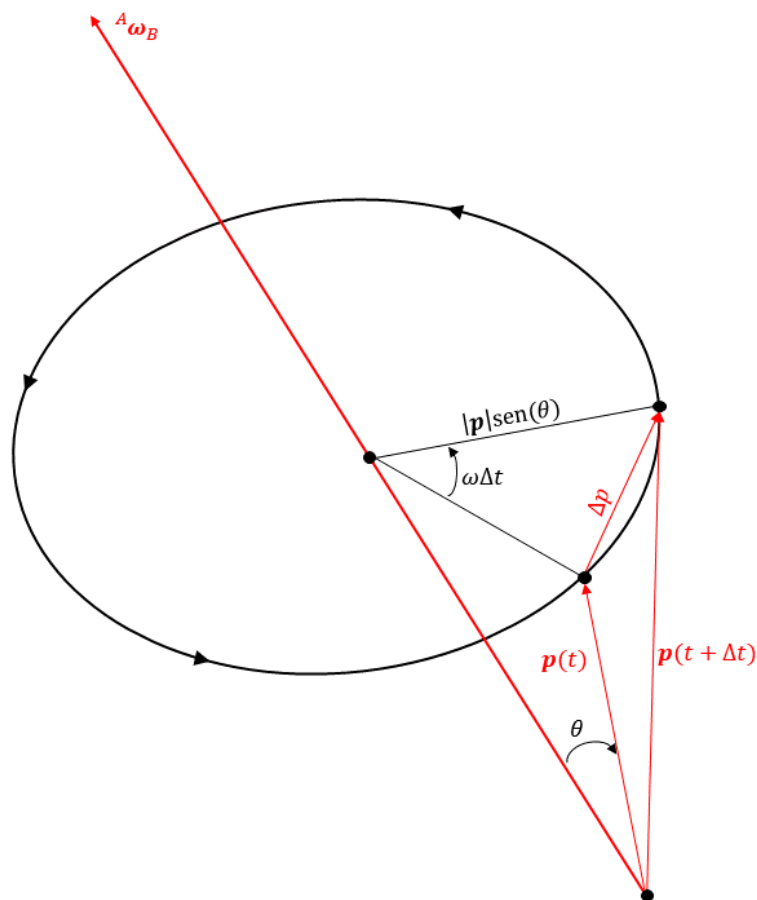


Figura 24 – Velocidade do ponto Q em relação a {A} devido a velocidade angular do referencial {B}

No caso geral, onde $\{B\}$ possui uma velocidade translacional em relação a $\{A\}$ e Q possui velocidade em relação a $\{B\}$, tem-se:

$${}^A\mathbf{v}_Q = {}^A\mathbf{v}_B + {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{v}_Q + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p}_Q. \quad (\text{A.6})$$

Para fazer uma análise da velocidade angular a derivada da matriz de rotação é levada em consideração:

$$\dot{\mathbf{R}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}. \quad (\text{A.7})$$

Escreve-se $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ como a multiplicação de duas matrizes:

$$\mathbf{R}(t + \Delta t) = \mathbf{R}_k(\Delta\theta)\mathbf{R}(t), \quad (\text{A.8})$$

sendo $\Delta\theta$ uma pequena rotação sobre um eixo arbitrário K no intervalo infinitesimal Δt . Substituindo a equação A.8 na equação A.7, tem-se:

$$\dot{\mathbf{R}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{R}_k(\Delta\theta) - \mathbf{I}_3}{\Delta t} \mathbf{R}(t) \right), \quad (\text{A.9})$$

onde \mathbf{I}_3 é a matriz identidade 3x3. Agora, considerando uma variação infinitesimal de ângulos, a equação 2.9 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{R}_k(\Delta\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -k_z\Delta\theta & k_y\Delta\theta \\ k_z\Delta\theta & 1 & -k_x\Delta\theta \\ -k_y\Delta\theta & k_x\Delta\theta & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Então, substituindo a equação A.10 na equação A.9, tem-se:

$$\dot{\mathbf{R}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} 0 & -k_z\Delta\theta & k_y\Delta\theta \\ k_z\Delta\theta & 0 & -k_x\Delta\theta \\ -k_y\Delta\theta & k_x\Delta\theta & 0 \end{bmatrix}}{\Delta t} \mathbf{R}(t). \quad (\text{A.11})$$

Dividindo a matriz por Δt e resolvendo o limite resulta em:

$$\dot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z\dot{\theta} & k_y\dot{\theta} \\ k_z\dot{\theta} & 0 & -k_x\dot{\theta} \\ -k_y\dot{\theta} & k_x\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}(t). \quad (\text{A.12})$$

Multiplicando os dois lados da equação A.12 à direita por \mathbf{R}^{-1} , obtém-se:

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z\dot{\theta} & k_y\dot{\theta} \\ k_z\dot{\theta} & 0 & -k_x\dot{\theta} \\ -k_y\dot{\theta} & k_x\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Considerando o produto $k_j\dot{\theta}$ como uma parcela de velocidade angular ω_j para $j = x, y, z$ tem-se a matriz de velocidades angulares:

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

A partir da matriz assimétrica da equação (A.14), é possível definir um vetor de velocidade angular $\boldsymbol{\omega} \in \Re^{3 \times 1}$ da forma:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x\dot{\theta} \\ k_y\dot{\theta} \\ k_z\dot{\theta} \end{bmatrix} = \dot{\theta} \cdot \mathbf{k}. \quad (\text{A.15})$$

O significado físico do vetor de velocidade angular é que, em qualquer instante, a mudança na orientação de um referencial pode ser considerada como uma rotação sobre um eixo instantâneo de rotação k .

Por fim, a propagação das velocidades entre elos de um manipulador com juntas rotacionais pode ser calculada por:

- A velocidade angular de um elo i é a mesma do elo $i - 1$ mais uma componente da velocidade angular da junta i :

$${}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}\mathbf{R}_i\dot{\theta}_i \cdot \mathbf{z}_i. \quad (\text{A.16})$$

Para expressar a velocidade angular de i no referencial de i , os dois lados da equação podem ser multiplicados por ${}^i\mathbf{R}_{i-1}$, resultando em:

$$\boldsymbol{\omega}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i \cdot \mathbf{z}_i. \quad (\text{A.17})$$

- A velocidade linear da origem do elo i é a mesma da origem do elo $i - 1$ expressada no referencial do elo i , mais uma componente gerada pela velocidade angular do elo $i - 1$. Essa é a mesma situação descrita pela equação (A.6), considerando que o ponto Q está parado em relação a $\{B\}$ (${}^B\mathbf{v}_Q = 0$), obtendo-se:

$${}^{i-1}\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_i. \quad (\text{A.18})$$

Multiplicando ambos os lados por ${}^i\mathbf{R}_{i-1}$, tem-se:

$$\mathbf{v}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1}(\mathbf{v}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_i). \quad (\text{A.19})$$

APÊNDICE B – Provas das equações de acelerações lineares e angulares dos elos

Considere os resultados obtidos no Apêndice A, os referenciais arbitrários $\{A\}$, $\{B\}$ e $\{C\}$ e o ponto Q . Para calcular a aceleração linear do ponto Q no referencial de $\{A\}$, sendo as origens de $\{A\}$ e $\{B\}$ coincidentes (${}^A\mathbf{v}_B = 0$), considere a equação (A.6) modificada:

$${}^A\mathbf{v}_Q = {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{v}_Q + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p}_Q. \quad (\text{B.1})$$

Derivando a equação (B.1), tem-se:

$${}^A\dot{\mathbf{v}}_Q = \frac{d}{dt}({}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{v}_Q) + {}^A\dot{\boldsymbol{\omega}}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p}_Q + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times \frac{d}{dt}({}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p}_Q). \quad (\text{B.2})$$

Levando em conta que ${}^A\mathbf{v}_Q = \frac{d}{dt}({}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p}_Q)$, que é igual à equação (B.1), é possível reescrever a equação (B.2) como:

$${}^A\dot{\mathbf{v}}_Q = {}^A\mathbf{R}_B {}^B\dot{\mathbf{v}}_Q + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{v}_Q + {}^A\dot{\boldsymbol{\omega}}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p}_Q + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{v}_Q + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p}_Q). \quad (\text{B.3})$$

Simplificando a equação (B.3) tem-se:

$${}^A\dot{\mathbf{v}}_Q = {}^A\mathbf{R}_B {}^B\dot{\mathbf{v}}_Q + 2{}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{v}_Q + {}^A\dot{\boldsymbol{\omega}}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p}_Q + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p}_Q). \quad (\text{B.4})$$

Generalizando para o caso das origens de $\{A\}$ e $\{B\}$ não serem coincidentes, adiciona-se um termo da aceleração da origem de $\{B\}$ em relação a $\{A\}$, resultando em:

$${}^A\dot{\mathbf{v}}_Q = {}^A\dot{\mathbf{v}}_B + {}^A\mathbf{R}_B {}^B\dot{\mathbf{v}}_Q + 2{}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{v}_Q + {}^A\dot{\boldsymbol{\omega}}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p}_Q + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p}_Q). \quad (\text{B.5})$$

Para o cálculo da aceleração angular considere o caso em que $\{B\}$ está rotacionando em relação a $\{A\}$ com velocidade angular ${}^A\boldsymbol{\omega}_B$ e $\{C\}$ está rotacionando em relação a $\{B\}$ com velocidade angular ${}^B\boldsymbol{\omega}_C$. Para calcular ${}^A\boldsymbol{\omega}_C$ tem-se:

$${}^A\boldsymbol{\omega}_C = {}^A\boldsymbol{\omega}_B + {}^A\mathbf{R}_B {}^B\boldsymbol{\omega}_C. \quad (\text{B.6})$$

Derivando a equação (B.6), resulta em:

$${}^A\dot{\boldsymbol{\omega}}_C = {}^A\dot{\boldsymbol{\omega}}_B + \frac{d}{dt}({}^A\mathbf{R}_B {}^B\boldsymbol{\omega}_C). \quad (\text{B.7})$$

Sabe-se que:

$$\frac{d}{dt}({}^A\mathbf{R}_B {}^B\boldsymbol{\omega}_C) = {}^A\mathbf{R}_B {}^B\dot{\boldsymbol{\omega}}_C + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\boldsymbol{\omega}_C. \quad (\text{B.8})$$

Substituindo a equação (B.8) na equação (B.7), tem-se:

$${}^A\dot{\boldsymbol{\omega}}_C = {}^A\dot{\boldsymbol{\omega}}_B + {}^A\mathbf{R}_B {}^B\dot{\boldsymbol{\omega}}_C + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{R}_B {}^B\boldsymbol{\omega}_C. \quad (\text{B.9})$$

Por fim, a propagação das acelerações entre elos de um manipulador com juntas rotacionais pode ser calculada por:

- A aceleração angular de um elo i pode ser obtida a partir da equação (B.9), resultando em:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + {}^i\mathbf{R}_{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times \dot{\theta}_i \cdot \mathbf{z}_i + \ddot{\theta}_i \cdot \mathbf{z}_i. \quad (\text{B.10})$$

- A aceleração linear de um elo i pode ser obtida aplicando a equação (B.5). Considerando Q parado com aceleração nula em relação a $\{B\}$ (${}^B\mathbf{v}_Q = {}^B\dot{\mathbf{v}}_Q = 0$), tem-se:

$$\dot{\mathbf{v}}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1}[\dot{\mathbf{v}}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_i + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_i)]. \quad (\text{B.11})$$

- A aceleração do centro de massa também pode ser encontrada aplicando a equação (B.5):

$$\dot{\mathbf{v}}_{Gi} = \dot{\mathbf{v}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{p}_{Gi} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_{Gi}). \quad (\text{B.12})$$