



PROFMAT



Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Karlo Sérgio Medeiros Leopoldino

Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea

Aplicações no Ensino Básico

Natal, 2016

Karlo Sérgio Medeiros Leopoldino

Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea

Aplicações no Ensino Básico

**Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação
em Matemática em Rede Nacional da Universidade
Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com
as exigências legais para obtenção do título de Mestre.**

Área de Concentração: Teoria dos Números

Orientador:

Prof. Dr. Edgar Silva Pereira

Natal, 2016

Karlo Sérgio Medeiros Leopoldino

Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea

Aplicações no Ensino Básico

**Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação
em Matemática em Rede Nacional da Universidade
Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com
as exigências legais para obtenção do título de Mestre.**

Área de Concentração: Teoria dos números

Aprovado em: / /

Banca Examinadora

Prof. Dr. Edgar Silva Pereira

Departamento de Matemática - UFRN

Orientador

Prof. Dra. Maria Cecília Rosas de Costa

Departamento de Matemática - Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD)

Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira

Departamento de Matemática - UFRN

*Dedico este trabalho a minha família que tanto contribui
para conquista dos meus objetivos.*

Agradecimentos

Agradeço à SBM por ter criado o PROFMAT, à UFRN por disponibilizar as turmas, aos professores do curso e, em especial, ao meu orientador, Edgar Silva Pereira e à professora Maria Cecília Rosas da Costa, membro da banca examinadora, pelo carinho, dedicação e atenção aos detalhes da presente dissertação. Destaco ainda o apoio do colega de turma Jeferson, e aos professores que despertaram minha vocação na área de docência, Luzia Valadão e Júnior Jácome. Por fim, agradeço a minha família que suportou as horas de estudo e ausência, nesse ponto ninguém foi mais tolerante que minha amada esposa Geseane e os meus filhos Sanderson e Sâmella. A todos desejo tudo de melhor sempre em suas vidas.

Resumo

A presente dissertação tem por objetivo apresentar um estudo relativo à sequência de Fibonacci, iniciado a partir de um simples problema de reprodução de coelhos e da razão áurea, originada de uma construção geométrica, para aplicações no ensino básico. A ideia principal da dissertação é apresentar registros históricos da ocorrência destes conceitos na natureza e na ciência e suas influências nos meios sociais, culturais e científicos. Apresenta-se ainda a identificação e caracterização das propriedades básicas desses conceitos e de que forma ocorre a ligação entre os mesmos e, principalmente, as consequências intrigantes das mesmas. Mostram-se atividades enfatizando construções geométricas, ligações com outras áreas da matemática, curiosidades relativas a estes conceitos e análise de questões presentes em vestibulares e Enem (Exame nacional do ensino médio), de forma a mostrar a importância destes temas no ensino básico, constituindo-se uma excelente oportunidade de despertar nos alunos novos olhares no campo da ciência e da vida a partir do tema apresentado, bem como promover novas maneiras de pensar a matemática como ciência transformadora da sociedade.

PALAVRAS-CHAVE: Fibonacci, número de ouro, ensino básico, sequências.

Abstract

This thesis aims to present a study of the Fibonacci sequence, initiated from a simple problem of rabbits breeding and the Golden Ratio, which originated from a geometrical construction, for applications in basic education. The main idea of the thesis is to present historical records of the occurrence of these concepts in nature and science and their influence on social, cultural and scientific environments. Also, it will be presented the identification and the characterization of the basic properties of these concepts and how the connection between them occurs, and mainly, their intriguing consequences. It is also shown some activities emphasizing geometric constructions, links to other mathematics areas, curiosities related to these concepts and the analysis of questions present in vestibular (SAT-Scholastic Aptitude Test) and Enem (national high school Exam) in order to show the importance of these themes in basic education, constituting an excellent opportunity to awaken the students to new points of view in the field of science and life, from the presented subject and to promote new ways of thinking mathematics as a transformative science of society.

KEYWORDS: Fibonacci, golden ratio, basic education, sequences.

Tabela de símbolos matemáticos

Símbolo	Representação	Símbolo	Representação
$=$	igual	f_n	número de Fibonacci
$\neq$	diferente	l_n	número de Lucas
$\leq$	Menor ou igual que	AB	segmento
$\geq$	Maior ou igual que	$\overline{AB}$	medida do segmento AB
$<$	Menor que	ABC	triângulo com vértices A,B e C
$>$	Maior que	$\triangle ABC$	triângulo ABC
$\in$	pertence	$\hat{A}BC$	ângulo ou medida do ângulo
$\sim$	semelhante	$\cos x$	cosseno de x
$\approx$	aproximadamente	$\forall$	para qualquer valor
∞	infinito	$P \Rightarrow Q$	implica; se P então Q
$\exists$	existe	$P \Leftrightarrow Q$	equivalente; P, se, e somente se, Q
$\sqrt{x}$	raiz quadrada de x	φ	número de ouro
Σ	somatório	$\mathbb{R}$	Conjunto dos reais
$\lim_{x \rightarrow a}$	limite quando x tende a a	$\mathbb{Z}$	Conjunto dos inteiros
$a b$	a divide b	$\mathbb{N}$	Conjunto dos naturais

Lista de Figuras

1.1	Leonardo de Pisa	3
1.2	Segmento áureo	9
1.3	Retângulo áureo	11
1.4	Retângulos áureos	11
1.5	Espiral de ouro	12
1.6	Diagonais da espiral	12
1.7	Triângulo áureo	13
1.8	Espiral logarítmica	14
1.9	Papiro de Rhind	16
1.10	Tábua de Shamash	16
1.11	Triângulo de Pascal e a sequência de Fibonacci	17
1.12	Abelhas e números de Fibonacci	18
1.13	Falcão peregrino e a espiral áurea	19
1.14	Ângulo ótimo	19
1.15	Disposição das folhas	20
1.16	Girassol	20
1.17	Margarida com 34 pétalas	21
1.18	Espirais no girassol	21
1.19	Espirais em pinhas	21
1.20	Galhos da <i>Achillea ptarmica</i>	22
1.21	Ouvido humano	22
1.22	Divisão dos compassos	23
1.23	Violoncelo	23
1.24	Espiral do violino	23

1.25	Íliada	24
1.26	Os Lusíadas	24
1.27	Eneida	24
1.28	Ondas de Elliott 1	25
1.29	Ondas de Elliott 2	25
1.30	Elliott e Fibonacci 1	26
1.31	Retração da onda 1	27
1.32	Retração da onda 2	27
1.33	Pirâmide áurea	28
1.34	Pirâmide de Quéops	30
1.35	Templo de Dendera	30
1.36	Parthenon	30
1.37	O nascimento de Vênus	31
1.38	Mona Lisa	31
1.39	Homem Vitruviano	32
1.40	Radiografia de um dedo	32
1.41	Razão áurea nos dentes	33
1.42	Razão áurea na face	33
1.43	Análise 1 - Parthenon	34
1.44	Análise 2 - Parthenon	34
1.45	Análise 1 - Mona Lisa	34
1.46	Análise 2 - Mona Lisa	34
2.1	Édouard Lucas	44
2.2	Jacques Binet	46
3.1	Pentagrama e pentágono regular	63
3.2	Pentágono regular e triângulo áureo	64
3.3	Razão áurea das diagonais	65
3.4	Sequência infinita de pentágonos regulares e pentagramas	66
3.5	Triângulos no pentágono	67
3.6	Triângulos no pentágono interno ao pentagrama	69

4.1 Razão áurea e Geometria plana	75
4.2 Circunferência α	79
4.3 Circunferência β	79
4.4 Pontos de interseção	79
4.5 Determinação da mediatriz	80
4.6 Média e extrema razão	80
4.7 Construção geométrica do φ	82
4.8 Construção Geométrica do retângulo áureo	84
4.9 Retângulo áureo e os quadrados de Fibonacci	85
4.10 Segmento com razão áurea	88
4.11 Pentágono- razão y/x	88
4.12 Pentágono e triângulos semelhantes	89
4.13 Painéis solares e folhas	90
4.14 Proporções no rosto humano	92
4.15 Mona Lisa e proporções áureas	93
4.16 Retângulos na Mona Lisa	93
4.17 Padrão de Harmonia	95
4.18 Parthenon e o retângulo áureo	96

Lista de Tabelas

1.1	Crescimento dos casais de coelhos	6
2.1	Sequência de Fibonacci	41
2.2	Sequências de Fibonacci e de Lucas	51
3.1	Potências do número de ouro	57
3.2	Razão entre números de Fibonacci consecutivos	60
4.1	Razões entre medidas do corpo humano	78
4.2	Razões entre medidas do rosto	92

Sumário

Introdução	1
1 Origens, definições e ocorrências	3
1.1 Leonardo de Pisa	3
1.2 Origem e definição da sequência de Fibonacci	4
1.3 Origem e definição da Razão áurea	7
1.4 Retângulo áureo	10
1.5 Espiral áurea	12
1.6 Triângulo áureo	12
1.7 Espiral logarítmica	14
1.8 Sequência de Fibonacci e razão áurea - ocorrências na natureza e na ciência	14
1.8.1 Números binomiais	16
1.8.2 Zoologia	17
1.8.3 Botânica	19
1.8.4 Música	22
1.8.5 Literatura	24
1.8.6 Economia	24
1.8.7 Arquitetura	27
1.8.8 Arte	31
1.8.9 Corpo humano	32
1.9 Número de ouro - Unanimidade ou coincidências ?	33
2 Propriedades elementares da sequência de Fibonacci	36
2.1 Propriedades envolvendo termos da sequência	36

2.2	Propriedades envolvendo Máximo Divisor Comum	42
2.2.1	Termos consecutivos	42
2.2.2	Teorema de Lucas	43
2.3	A fórmula de Binet	46
2.4	Sequência de Lucas	49
3	Número de ouro e números de Fibonacci	52
3.1	Propriedades do número de ouro	52
3.2	Potências do número de ouro e números de Fibonacci	57
3.3	Número de ouro e suas representações	58
3.4	Conexão entre o número de ouro e sequência de Fibonacci	60
3.5	Pentagrama e número de ouro	62
4	Aplicações no ensino básico	71
4.1	Atividades	72
4.1.1	Análise combinatória e sequência de Fibonacci	72
4.1.2	Geometria plana e a razão áurea	74
4.1.3	A razão áurea no corpo humano	76
4.1.4	Construções geométricas	78
4.1.5	A sequência de Fibonacci e o retângulo áureo	85
4.2	Curiosidades	86
4.2.1	Periodicidade da sequência de Fibonacci	86
4.2.2	O décimo primeiro número de Fibonacci	87
4.3	Sequência de Fibonacci e razão áurea nos vestibulares e Enem	87
	Conclusão	98
	Bibliografia	100

Introdução

Na presente dissertação apresenta-se uma das mais interessantes sequências recursivas da matemática, as chamadas sequências de Fibonacci. Estas sequências têm conexão com a razão áurea, o chamado número de ouro, um número irracional que surge na natureza e nas mais variadas áreas da ciência. O objetivo principal da dissertação é apresentar a origem e a definição das sequências de Fibonacci e da razão áurea, bem como suas propriedades, oferecendo instrumentos necessários para introdução desses temas no ensino básico com sugestão de atividades, curiosidades e apresentação de questões de vestibulares e Enem, de modo a despertar nos alunos a curiosidade e a capacidade de observação de padrões matemáticos presentes na natureza e em vários campos das ciências.

O primeiro capítulo disserta sobre a origem e a definição da sequência de Fibonacci e da razão áurea, a qual foi muito apreciada pelos gregos, pois sugeria uma idéia de harmonia e "perfeição". Serão apresentadas ainda ocorrências da sequência de Fibonacci e do número de ouro em vários campos, desde números binomiais até o corpo humano. É um capítulo extremamente rico em informações históricas com muitas conexões entre as várias áreas do conhecimento.

O segundo capítulo apresenta propriedades elementares da sequência de Fibonacci, incluindo-se sua ligação com o máximo divisor comum. Será mostrada também um tipo particular de sequência de Fibonacci, a sequência de Lucas, e uma fórmula, denominada Fórmula de Binet, para determinar um termo qualquer de uma sequência de Fibonacci.

Já o terceiro capítulo trata das propriedades do número de ouro e sua relação com os números de Fibonacci. Será discutido um importante resultado que mostra que a razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci tende (converge) para a razão áurea, à medida que os termos crescem (teorema 3.1 da página 61).

O último capítulo trata de aplicações de atividades envolvendo a sequência de Fibonacci e a razão áurea no ensino básico, curiosidades da sequência de Fibonacci e, por fim, a análise e

resolução de questões de vestibulares e Enem sobre o tema proposto na presente dissertação.

Capítulo 1

Origens, definições e ocorrências

1.1 Leonardo de Pisa

Segundo Boyer[2](1974), *Leonardo de Pisa* também conhecido como *Fibonacci* (filho de Bonaccio), nasceu em 1170, em Pisa, centro comercial importante na Itália. Seu pai era comerciante e tinha negócios no norte da África. Desta forma, Leonardo teve a oportunidade de visitar países onde se destacam, o Egito, Síria e Grécia, tendo contato com procedimentos matemáticos orientais, tais como, os métodos algébricos árabes e os numerais indo-arábicos. Ao retornar a sua terra natal publicou, em 1202¹, sua obra mais famosa intitulada *Liber abaci* (ou livro do Abaco). Ainda segundo Boyer[2](1974), este não é um livro apenas sobre o ábaco, é um tratado muito completo sobre os métodos e problemas algébricos em que o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado.

Figura 1.1:
Leonardo de Pisa



Fonte: ZAHAN, 2011, p.9

Segundo Eves [6](2011), o *Liber abaci* interliga aritmética e geometria. No entanto, ele trata muito mais de números que de geometria, descrevendo primeiro as nove cifras indianas, juntamente com o símbolo 0, chamado zephirum em árabe.

Eves [6](2011) salienta ainda que no *Liber abaci* não são admitidas as raízes negativas e imaginárias. Ele explica variados métodos de cálculo envolvendo números inteiros e frações, cálculo de raízes quadradas e cúbicas, resolução de equações lineares e quadráticas, tanto pelo método de falsa posição (método numérico usado para resolver equações lineares definidas em um intervalo

¹"Conhecemos este trabalho em sua segunda versão de 1228". (Eves[6],2011, p.293)

[a, b]) como por processos algébricos. Há aplicações envolvendo permuta de mercadorias, sociedades e geometria mensurativa, além de uma diversificada coleção de problemas, dentre os quais, o que deu origem à importante sequência de Fibonacci.

Para Struick [29](1989, p.139):

O Liber Abaci foi um veículo que permitiu difundir na Europa ocidental o sistema de numeração indo-árabe que era usado, ocasionalmente, já há alguns séculos antes de Leonardo de Pisa e que fora trazido pelos mercadores, embaixadores, eruditos, peregrinos e soldados vindo da Espanha e do Oriente.

Segundo Eves [6](2011), Fibonacci publica seu segundo trabalho em 1220, *Practica geometriae*, uma coleção de material sobre geometria e trigonometria, numa abordagem hábil feita com rigor euclidiano contendo, entre outras coisas, uma prova de que as medianas de um triângulo se dividem na razão de dois para um e uma analogia tridimensional do Teorema de Pitágoras.

Ainda segundo Eves [6](2011), os talentos de Fibonacci despertaram a atenção do imperador Frederico II (1197-1250), que o convidou a participar de um torneio matemático na corte onde um dos problemas propostos era encontrar um número racional $x \in \mathbb{Q}$ tal que, se somarmos, ou subtrairmos, cinco do quadrado do número, ou seja $x^2 + 5$ e $x^2 - 5$, o resultado seja o quadrado de um número racional. Tanto o problema como a solução, $x = \frac{41}{12}$, são dados na obra *Liber quadratorum*, publicado em 1225, que consiste em um trabalho brilhante e original sobre análise indeterminada inteiramente dedicado à equações diofantinas do segundo grau, que o colocou na posição de matemático mais importante desse campo entre Diofanto e Fermat.

Conforme Zahn (2011, p.3):

Fibonacci provou que nenhuma raiz da equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ pode ser expressa irracionalmente na forma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, ou seja, nenhuma raiz pode ser construída com régua e compasso. Esta prova está no tratado intitulado *Flos* (Floração ou Flor), escrito em 1225. Fibonacci foi um matemático excepcional e sua exposição da numeração indo-arábico foi importante no processo de transmissão destes, mas somente no século dezesseis seu uso tornou-se comum. Ele faleceu no ano de 1250, em sua cidade natal.

1.2 Origem e definição da sequência de Fibonacci

Segundo Boyer [2](1974), no livro Liber Abaci de Leonardo, no capítulo 12, destaca-se um problema relativo à reprodução de coelhos, que consiste em um homem colocar um par de coelhos

em um cercado e se desejar saber a quantidade de pares de coelhos que podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês, cada par dar à luz um novo par, que é fértil somente a partir do segundo mês.

Considerando as condições do problema, vejamos o processo de reprodução a cada mês:

- No primeiro mês o casal inicial é filhote tendo, assim, um casal de coelhos.
- No segundo mês, tem-se ainda o mesmo casal de coelhos, mas já é adulto e, portanto, fértil.
- No terceiro mês, tem-se o casal do mês anterior e mais um casal de filhotes, que é gerado por eles. Portanto, serão dois casais de coelhos.
- No quarto mês, tem-se o casal adulto inicial, mais o casal jovem do mês anterior, que se tornou adulto e, portanto, fértil, e mais um novo casal de filhotes do primeiro casal de adultos. Portanto, serão três casais de coelhos.
- No quinto mês, tem-se o casal inicial de adultos, que produz um novo casal de filhotes, o segundo casal de adultos, que produz outro casal de filhotes e o casal de filhotes do mês anterior, que se torna adulto e fértil. Portanto, serão cinco casais de coelhos.
- No sexto mês, têm-se três casais de adultos que produzirão três casais de filhotes, mais os dois casais de filhotes do mês anterior que se tornaram adultos e férteis. Portanto, serão oito casais de coelhos (cinco adultos mais três de filhotes).
- No sétimo mês, têm-se treze casais de coelhos (8 adultos mais cinco de filhotes)
- No oitavo mês, têm-se 21 casais de coelhos (13 adultos mais 8 de filhotes)
- ...

A tabela a seguir resume o exposto:

Tabela 1.1: Crescimento dos casais de coelhos

Mês	Casais adultos	Filhotes	Total
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
...	...	...	...

Fonte: Elaborada pelo autor

Percebe-se que, a partir do terceiro mês, o número de casais de coelhos, num certo mês, é exatamente igual à soma do número de casais dos dois meses anteriores. Assim, será obtida uma sequência, onde cada elemento representa o número de casais de coelhos e sua posição na lista representa o mês: (1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,...)

Isto motivou Fibonacci a definir a seguinte sequência, conhecida como sequência de Fibonacci.

Segundo Zahn[33](2011, p.6):

Definição 1.1 *"Denomina-se sequência de Fibonacci a sequência definida por:*

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$$

onde os termos presentes na sequência denominam-se números de Fibonacci"

Denominando f_n o número de Fibonacci, ele será encontrado na posição n da sequência acima através de uma fórmula recursiva.

Ainda segundo Zahn[33](2011, p.7):

Definição 1.2 *"Chama-se sequência de Fibonacci a sequência definida recursivamente por:*

$$f_1 = f_2 = 1$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \forall n \geq 2" \quad (1.1)$$

A expressão acima é denominada de identidade fundamental na sequência de Fibonacci.

Segundo Ramos[25](2011, p.13):

Definição 1.3 "*Sequências de Fibonacci são sequências que obedecem à lei recursiva:*

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \forall n \geq 2" \quad (1.2)$$

ou seja, sequências onde cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores. Assim, as sequências $(0, 4, 4, 8, \dots)$ e $(-2, 2, 0, 2, \dots)$ são sequências de Fibonacci.

Ramos[25](2011, p.13) esclarece: "quando nos referirmos à sequência de Fibonacci (no singular), estaremos falando da sequência original $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$, onde o seu n -ésimo termo é denotado por f_n ".

Ramos[25](2013) salienta ainda que, genericamente, chamam-se sequências de Fibonacci quaisquer funções g tal que $g_{n+1} = g_n + g_{n-1}$. Essas funções são precisamente as de formato $g_n = a \cdot f_n + b \cdot f_{n+1}$ para alguns números a e b . Desta forma, as sequências de Fibonacci formam um espaço vetorial com as funções f_n e f_{n+1} como base.²

1.3 Origem e definição da Razão áurea

Nesta seção, será definida uma das mais intrigantes constantes da matemática, o número de ouro, que surge a partir da razão áurea.

²As propriedades relativas a combinações lineares de sequências de Fibonacci podem ser encontradas em Ramos [25](2011, p.13-17)

O misterioso número de ouro

Do número nasce a proporção
Da proporção se segue à consonância
A consonância causa deleitação
A nenhum sentido apraz a dissonância
Unidade, igualdade e semelhança
São princípios do contentamento
Em todos os sentidos o experimento
A alma na unidade glória alcança
Em todas as quantidades a igualdade
E a perfeição remota ou a mais chegada
Segundo a natural autoridade
E assim está nas qualidades assentada
Da mesma maneira a semelhança
Diva de ser sentida e contemplada
(Vasco Graça Moura, *Camões e a Divina Proporção*).

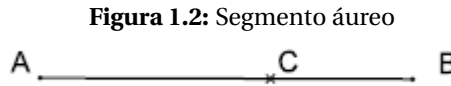
Segundo Ferraz[8], a matemática é uma das ferramentas mais importantes do homem, pois através dela buscamos compreender o mundo e a nós mesmos. Todas as leis da física só são possíveis graças ao entendimento do universo pela matemática. Nossa estrutura psicológica requer um conceito de ordenação e de harmonia: nós obtemos este conceito através da matemática, mais especificamente através dos sistemas de proporções matemáticas. Logo, podemos ter na matemática a linguagem humana mais abstrata e que utilizamos para entender tudo o que nos cerca.

O famoso físico britânico lorde Kelvin (William Thomson; 1824-1907), em cuja homenagem foram batizados os graus da escala de temperatura absoluta, disse certa vez em uma conferência: "*Quando não podemos expressar algo em números, nosso conhecimento é de um tipo escasso e insatisfatório.*"

Segundo Zahn[33](2011, p.6):

Definição 1.4 "Dizemos que um ponto C divide um segmento AB ³ na razão áurea se:"

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \quad (1.3)$$



Fonte: Elaborada pelo autor

"A razão da medida do segmento AB para a medida do segmento AC é denominada de razão extrema e a razão da medida do segmento AC para a medida do segmento CB é denominada razão média." (IDEM)

Assim, dividir um segmento AB em média e extrema razão consiste em dividi-lo em duas partes, de modo que, a medida de uma dessas partes (no caso, $\overline{AC}$), seja a média geométrica entre a medida do segmento e a medida da outra parte. Veja na equação 1.3 que $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{CB}$.

De acordo com a definição 1.4, chamando na figura 1.2, $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = x$, tem-se $\overline{CB} = a - x$ quer-se obter o número que corresponde à proporção

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \quad (1.4)$$

Resolvendo a equação do segundo grau na incógnita x , têm-se como raízes:

$$x_1 = -a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \quad e \quad x_2 = a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Como x é um valor positivo, o único valor possível para x será:

$$x = a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Observando, ainda que por definição, a razão áurea é $\frac{a}{x}$. Tem-se:

³ A notação para um segmento é dada por duas letras maiúsculas juntas e, sua medida, será representada pela colocação de um traço horizontal sobre este par de letras conforme cita [32] Viglioni e Santos (2011, p.31), "então o comprimento do segmento AB , denotado por $\overline{AB}$ "

$$\frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{1})^2} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

A este número obtido, que produz a razão áurea, dá-se o nome de *número de ouro*, representado pela letra grega fi (minúscula) φ ⁴. Portanto:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618033988\dots$$

Segundo argumenta Lívio [19](2011), embora a descoberta deste número seja atribuída aos pitagóricos, a definição acima, do que mais tarde se tornou conhecido como a razão áurea, foi dada por volta de 300 a.C. pelo fundador da geometria como sistema dedutivo formalizado, Euclides de Alexandria (330 a.c., -)

Ainda, conforme Lívio [19](2011), o primeiro espanto que a razão áurea gerou, na Grécia antiga, foi a de que φ é um número irracional. Isso foi um choque para a visão de mundo pitagórica, baseada na admiração extrema pelas propriedades intrínsecas dos números inteiros ou suas razões e os seus supostos papéis no Cosmo. Essa descoberta causou uma verdadeira crise filosófica, pois os pitagóricos basicamente acreditavam que a existência de tais números era tão horrível que devia (a existência) representar algum tipo de erro cósmico, algo que deveria ser suprimido e guardado em segredo.

Em seu livro, O Poder dos Limites, Gyorgy Doczi[5](1990) enfatiza que o poder da seção áurea em criar harmonia deriva de sua propriedade única de unir partes diferentes de um todo, de forma a que cada uma delas preserva sua identidade própria, mas amolda-se a um padrão maior de um todo.

1.4 Retângulo áureo

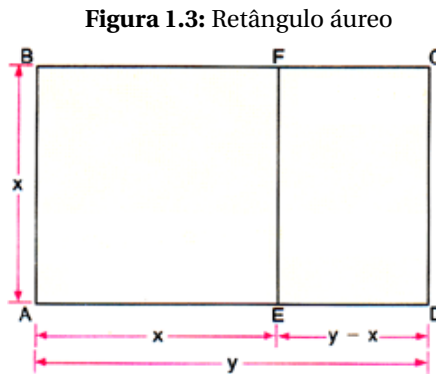
Segundo Zahn[33](2011, p.31-32):

Definição 1.5 *"Chama-se retângulo áureo qualquer retângulo no qual a razão de suas medidas obedece à razão áurea com a seguinte propriedade: se dele retirarmos um quadrado, o retângulo*

⁴Lívio [19](2011) argumenta que na literatura matemática profissional, o símbolo habitual para a Razão Áurea é a letra grega tau τ (que significa "o corte"ou "a seção"). Entretanto, no início do século XX, o matemático americano Mark Barr deu à razão o nome de φ , a primeira letra grega no nome de Fídias, o grande escultor grego que viveu entre 490 e 430 a.C.

restante será semelhante ao retângulo original."

Assim, ao retirar-se do retângulo ABCD (ver figura 1.3) um quadrado, como ABFE, o retângulo restante, CDEF, será semelhante ao retângulo original.

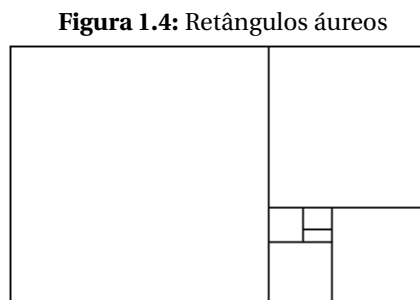


Fonte: LOPES, 2006

De acordo com a definição, estabelecendo a semelhança entre os retângulos ABCD e CDEF, teremos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{ED}} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y-x} \Leftrightarrow y^2 - yx = x^2 \Leftrightarrow x^2 + yx - y^2 = 0$$

Esta equação corresponde a equação 1.4 onde $y = a$, conduzindo então a razão $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{y}{x}$, ao número de ouro φ . Desta forma $\frac{\overline{EF}}{\overline{ED}} = \varphi$ e, então, o novo retângulo CDEF, interior ao primeiro, também é áureo. Novamente, construindo um quadrado no novo retângulo áureo interior ao primeiro, obteremos outro retângulo interior a este segundo, também nas proporções áureas, conforme definição 1.5, e este processo é infinito, sempre guardando o número de ouro, conforme indicado na figura 1.4.



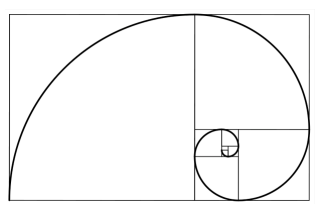
Fonte: RAMOS, 2013, p.42

1.5 Espiral áurea

Segundo salienta Zahn[33](2011) com um compasso e recorrendo aos quadrados construídos, traçam-se arcos que são quartos de circunferência contidos em cada um dos quadrados. Estes arcos dão origem a uma curva denominada espiral equiangular⁵ ou espiral áurea, conforme figura 1.5, a qual é possível encontrar a sua equação em coordenadas polares⁶. O retângulo áureo circunscreve, assim, a espiral.

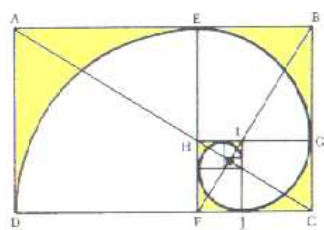
A intersecção das diagonais desenhadas na figura 1.6 é o pólo ou centro da espiral.

Figura 1.5: Espiral de ouro



Fonte: ZAHN, 2011, p.32

Figura 1.6: Diagonais da espiral



Fonte: RAMOS, 2013, p.45

1.6 Triângulo áureo

Segundo Rodrigues[26](2008, p.95-96):

Definição 1.6 "Um triângulo isósceles acutângulo é denominado de áureo se a razão entre a medida de um dos seus lados congruentes e a medida de sua base é o número de ouro."

Segundo Ramos [25](2013, p.43)

Proposição 1.1 "O triângulo isósceles de ângulos internos 36° , 72° e 72° é um triângulo áureo"

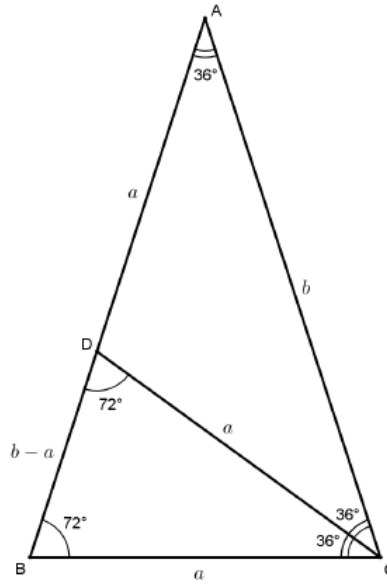
Demonstração: Considerando o triângulo isósceles ABC mostrado na figura 1.7 com medidas $\overline{AB} = \overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, onde traça-se a bissetriz relativa ao ângulo $\widehat{ACB}$ ⁷

⁵"Este nome foi dado por René Descartes (1596-1650), devido ao fato de que toda linha reta que parte do polo(centro) da espira cortará a mesma em ângulos congruentes."(Ramos[25], 2013,p.45)

⁶"A equação em coordenadas polares para espiral áurea contida em um retângulo áureo de lados 1 e φ é dada por $\rho(\theta) = \varphi^{\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)}$ "(Zahn[33](2011, p.32-37)

⁷Segundo Viglioni e Santos [32] (2011, p.40): "A medida de um ângulo $\widehat{AOB}$ será denotada pelo próprio ângulo. Assim, $\widehat{AOB}$ poderá indicar o ângulo ou a medida deste ângulo, mas sempre estará claro no contexto se estaremos nos referindo ao ângulo ou a sua medida."

Figura 1.7: Triângulo áureo



Fonte: RAMOS, 2011, p.43

O ângulo $\widehat{CDB}$ será calculado lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo corresponde a 180° . Portanto, tem-se para o triângulo BCD:

$$72^\circ + 36^\circ + \widehat{CDB} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{CDB} = 72^\circ$$

Desta forma, sendo $\widehat{CBD} = \widehat{BCD}$, o triângulo BCD é isósceles e, pela relação entre ângulos e lados de um triângulo, conclui-se que $\overline{CD} = \overline{BC} = a$.

Para o triângulo ACD tem-se, de forma análoga ao triângulo BCD, que $\overline{CD} = \overline{AD} = a$ e, consequentemente, $\overline{BD} = b - a$.

Por outro lado, os triângulos ABC e BCD são semelhantes, pois apresentam dois ângulos congruentes. Assim, têm lados correspondentes proporcionais. Daí, vem:

$$\Delta ABC \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \text{ Da primeira igualdade, tem-se:}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}, \quad \text{sendo } \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}, \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

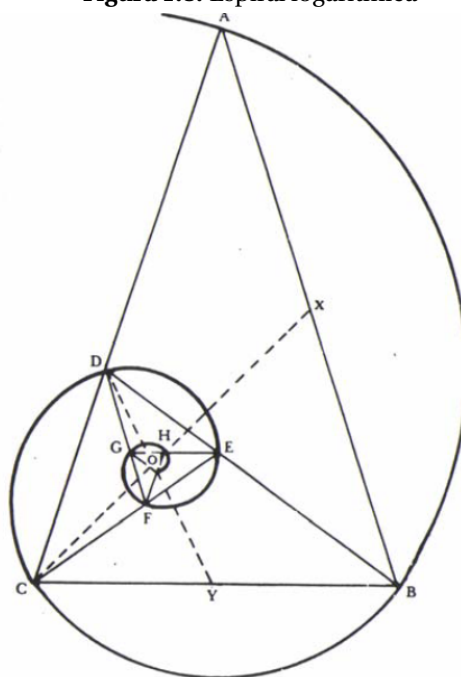
O que significa que o ponto D divide o lado AB na razão áurea. Sendo $\overline{AD} = \overline{BC}$, pode-se escrever ainda que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \varphi, \text{ mostrando assim que o triângulo BCD é áureo, conforme definição 1.6.}$$

1.7 Espiral logarítmica

Segundo argumenta Rodrigues [26](2008), é possível, a partir do triângulo áureo, desenhar uma espiral logarítmica. Para isto, traça-se a bissetriz do ângulo $\hat{A}BC$ da base do triângulo encontrando o segmento AC em D, sendo D o ponto que divide AC na razão áurea, e tem-se outro triângulo áureo BCD. Neste faz-se o mesmo processo, e assim será formado um número infinito de triângulos áureos. Este processo converge para um ponto chamado de pólo, que é o pólo de uma espiral logarítmica passando pelos vértices destes triângulos conforme figura 1.8.

Figura 1.8: Espiral logarítmica



Fonte: RAMOS, 2013, p.46

1.8 Sequência de Fibonacci e razão áurea - ocorrências na natureza e na ciência

Segundo comenta Ramos [25](2013), a sequência de Fibonacci ficou famosa não apenas porque está associada à reprodução de coelhos. Desde o século XIII, muitos matemáticos, além do próprio Fibonacci, dedicaram-se ao estudo da sequência que foi proposta e foram encontradas inúmeras aplicações para ela no desenvolvimento de modelos explicativos de fenômenos naturais e em modelos matemáticos. Ela está associada a diversas situações, tais como a árvore genealó-

gica de um zangão, o triângulo de Pascal, o crescimento das plantas, o formato de diversos seres vivos e a análise de mercados financeiros. Também aparece em configurações biológicas como, por exemplo, na disposição dos galhos das árvores ou das folhas em uma haste, no arranjo do cone da alcachofra, do abacaxi ou no desenrolar da samambaia, dentre outras.

Segundo Livio [19] (2011), algumas das maiores mentes matemáticas de todos os tempos, de Pitágoras e Euclides na Grécia antiga, passando pelo matemático italiano da Idade Média Leonardo de Pisa e o astrônomo renascentista Johannes Kepler, até figuras científicas do presente, como o físico de Oxford, Roger Penrose, passaram horas sem fim trabalhando com a razão áurea e suas propriedades, mas a fascinação pela razão áurea não se restringe aos matemáticos. Biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos têm examinado e debatido as bases de sua origem e seu apelo. Talvez a razão áurea tenha inspirado pensadores de todas as disciplinas mais do que qualquer outro número na história da matemática.

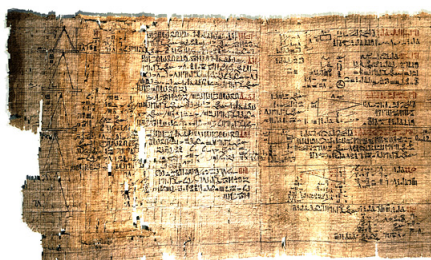
Ainda segundo Livio [19] (2011), pode ser difícil pensar de imediato o que pode ser comum a coisas tão diferentes. Contudo, a resposta para isso é um número: o φ . Conhecido desde a Antiguidade, o número de ouro recebeu títulos honoríficos no século XIX como “Número áureo”, “Razão áurea” e “Seção áurea”; no século XVI chegou a ser chamado de “Proporção divina”, tal o fascínio que essa proporção exercia sobre as pessoas. A palavra proporção possui dois possíveis significados, a do dia-a-dia, que é a relação comparativa entre partes de coisas com respeito a tamanho ou quantidade, ou quando se quer descrever uma relação harmoniosa entre diferentes partes; matematicamente, o termo “proporção” é utilizado para descrever uma igualdade. O curioso é que o número de ouro nos fornece uma intrigante mistura das duas acepções, já que, embora seja matematicamente definida, também revela às pessoas qualidades agradavelmente harmoniosas.

Segundo salienta Mendes[22](2007), o número de ouro (razão áurea) é um número irracional que se torna muito misterioso e enigmático, isso acontece porque ele surge em uma infinidade de elementos da natureza. A sua origem é muito remota, mesmo antes da definição de Euclides. Ele existe há tanto tempo quanto os registros históricos conseguem alcançar. Há diversos registros desde a antiguidade em que é possível mostrar a presença desse número.

Segundo Zahn [33](2011, p.25) "um dos primeiros registros que se tem conhecimento sobre a razão áurea data aproximadamente 1650 a.C, no *papiro de Rhind* (figura 1.9). Neste texto é citada uma “razão sagrada”, que acredita tratar-se da razão áurea."

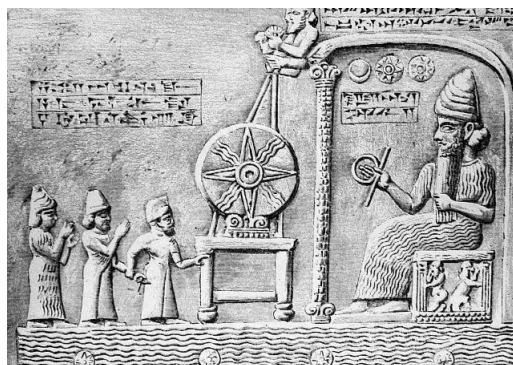
Os antigos babilônios sabiam como criar o retângulo áureo. Numa escavação feita em Sippar, no sul do Iraque, o arqueólogo Hormuzd Rassam (1826 – 1910) encontrou uma tábua com comprimento de 29,21 cm e largura de 17,78 cm, que ficou conhecida como a *Tábua de Shamash* (figura 1.10), com suas dimensões muito próximas da razão áurea. (IDEM).

Figura 1.9: Papiro de Rhind



Fonte: Zahn, 2011, p.25

Figura 1.10: Tábua de Shamash



Fonte: Zahn, 2011, p.26

Sobre o número de ouro, Contador[3](2011, p.18-19), afirma:

De qualquer forma ele foi descoberto, sua presença é marcante não só nos vegetais, mas nos seres vivos em geral, inclusive no homem, nos cristais, na natureza e no próprio cosmos. Depois de sua descoberta, de forma brilhante, o homem, através da álgebra, o equacionou e chegou numa proporção, à qual deu o nome de proporção áurea, e foi através, principalmente, da geometria, que pôde vislumbrar as formas perfeitas que a ele estão relacionadas. Foi através dele que buscou o entendimento não só da estrutura da natureza e do Universo mas, principalmente, do próprio homem.

Na sequência, serão apresentadas algumas ocorrências na natureza e em vários campos da ciência envolvendo a sequência de Fibonacci e a razão áurea.

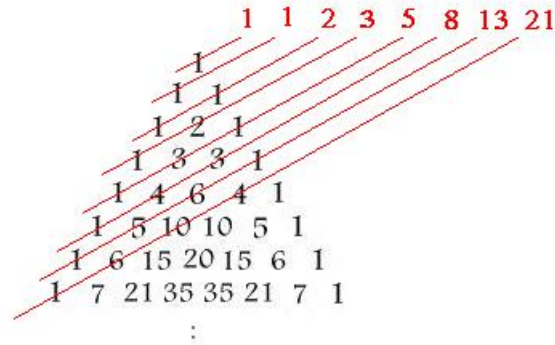
1.8.1 Números binomiais

Segundo Zahn [33](2011, p.10): "Observando o triângulo de Pascal, que se trata de uma disposição geométrica dos números binomiais, quando se estuda o binômio de Newton, percebe-se que a sequência de Fibonacci pode ser obtida somando-se os elementos das diagonais."

Segundo Ramos [33](2013, p.56):

Teorema 1.1 "A soma dos elementos da n -ésima "diagonal inversa" do triângulo de Pascal é o número de Fibonacci f_{n+1} "

Figura 1.11: Triângulo de Pascal e a sequência de Fibonacci



Fonte: ZAHN, 2011, p.11

Demonstração: Chama-se de F_n a soma dos elementos da n -ésima diagonal inversa. Observa-se que $F_0 = 1 = f_1$, $F_1 = 1 = f_2$ e $F_2 = 2 = f_3$. Assim, se for verificado que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \geq 2$ será finalizada a prova.

Inicialmente, percebe-se que na "diagonal inversa" o número binomial subsequente diminui sua linha em 1 unidade e sua coluna aumenta em 1 unidade. Portanto, tem-se para um n qualquer.

$$F_{n+1} + F_n = \left[\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots \right] + \left[\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots \right] = \binom{n+1}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \right] + \left[\binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{3} \right] + \dots$$

Da relação de Stifel:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}, \text{ e notando que: } \binom{n+1}{0} = \binom{n+2}{0} = 1, \text{ obtém-se:}$$

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \dots = F_{n+2}$$

Como se desejava demonstrar.

1.8.2 Zoologia

Segundo Ramos [25] (2013, p.54): "O macho da família de abelhas é chamado zângão, que é chocado de ovos não fertilizados. Em função disso, cada zângão não tem pai, mas têm um avô por parte materna, ao passo que a fêmea exige ambos os pais (pois provém de um ovo fertilizado)".

Pode-se determinar o número de abelhas em cada geração de um zângão da seguinte forma:

- f_n representa o número de antepassados fêmeas na geração n
- m_n representa o número de antepassados machos na geração n
- $f_{n+1} = f_n + m_n$ (cada macho ou fêmea tem uma mãe)
- $m_{n+1} = f_n$ (os machos não têm pai)

A cada geração n , o número de antepassados a_n é a soma das abelhas fêmeas e dos zângãos.

Assim, pode-se escrever:

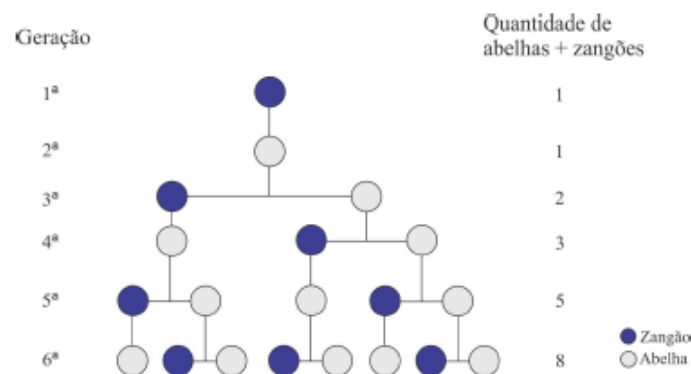
$$a_n = f_n + m_n \quad \text{e} \quad a_{n+1} = f_{n+1} + m_{n+1}$$

Portanto, tem-se:

$$a_{n+1} = f_{n+1} + m_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} = (f_n + m_n) + f_n \Leftrightarrow a_{n+1} = (f_n + m_n) + (f_{n-1} + m_{n-1}) \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Desta forma, cada termo é a soma dos dois anteriores, logo a sucessão do número de antepassados em cada geração é uma sucessão de Fibonacci. A árvore genealógica do zângão ilustra o descrito:

Figura 1.12: Abelhas e números de Fibonacci

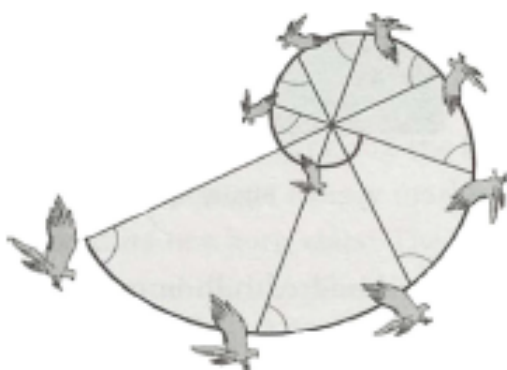


Fonte: RAMOS, 2013, p.55

Na seção 1.5, foi visto que a espiral áurea é também conhecida como espiral equiangular, pois ao se desenhar uma linha reta a partir do seu polo, esta linha cortará a curva em ângulos congruentes (ver figura 1.6 da página 12). Segundo salienta Ramos [25] (2013), esta é justamente a propriedade usada pelos falcões-peregrinos ao atacar suas presas. Curiosamente, este predador poderia seguir uma trajetória retilínea, a qual é mais curta, e não espiral, já que naquela o mesmo atingiria seu alvo em um menor intervalo de tempo. No entanto, segundo Livio [19](2011, p. 141):

O biólogo Vance A. Tucker, da Universidade de Duke, na Carolina do Norte (EUA), concluiu que como os olhos dos falcões-peregrinos ficam nas laterais de suas cabeças, eles precisariam inclinar a cabeça de 40° de um lado para o outro, o que os deixariam mais lentos, caso seguissem uma trajetória retilínea. Devido a propriedade equiangular da espiral áurea, esses falcões perseguem suas presas, através de uma trajetória espiralada, estando as mesmas no polo da espiral (ver figura 1.13), mantendo a visão fixa a elas.

Figura 1.13: Falcão peregrino e a espiral áurea



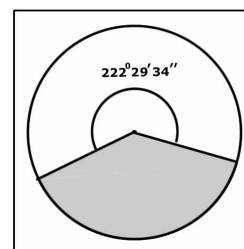
Fonte: RAMOS, 2013, p.63

1.8.3 Botânica

Segundo argumenta Rodrigues[26] (2008), a fitolaxia é um termo utilizado na botânica que estuda a disposição das folhas nos ramos das plantas. Quando as folhas brotam, elas não se dispõem de maneira regular, pois, desta forma, as folhas superiores fariam sombra nas inferiores. Assim, para que o crescimento da planta não fique prejudicado, há uma separação angular das bases de duas folhas sucessivas no talo, medida através de uma espiral traçada da raiz da planta para o ponto de crescimento. Em 1993, dois matemáticos franceses, Douady e Couder, demonstraram matematicamente que este ângulo é $222^\circ 29' 34''$ ⁸. Este ângulo foi denominado de "ângulo ótimo".

Ainda segundo Rodrigues[26] (2008), se, a cada geração sucessiva, uma folha brotar formando este ângulo com a que fica imediatamente abaixo dela, a probabilidade de que uma folha venha a assumir uma posição situada exatamente acima de outra é mínima e o aproveitamento de recursos

Figura 1.14: Ângulo ótimo

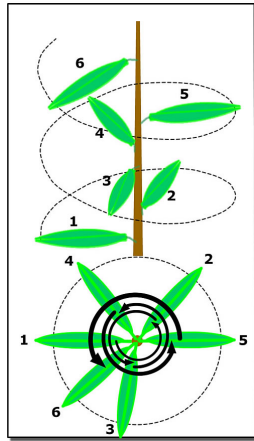


Fonte: RODRIGUES, 2008, p.131

⁸Para maiores detalhes ver Harris [13] (2002).

naturais é máximo. A figura 1.15 mostra o ramo, após o nascimento da sexta folha e a figura 1.16 mostra um exemplo, que é o Girassol.

Figura 1.15: Disposição das folhas



Fonte: MENDES, 2007, p.131

Figura 1.16: Girassol



Fonte: MENDES, 2007, p.131

Rodrigues[26](2008) comenta que o "ângulo ótimo", convertido para decimal, resulta em $222,492^\circ$ (na verdade, é um irracional do qual estão representadas apenas as primeiras três casas decimais). Curiosamente, a divisão de $\frac{360^\circ}{222,492^\circ} \approx 1,618 = \varphi$, que é um resultado surpreendente.

Segundo Contador [3](2011, p.206):

Mas não é apenas o zoólogo com seus coelhos ou o entomologista com suas abelhas que têm o prazer de ter contato com o número de ouro em seus estudos. O botânico também tem este privilégio, pois o encontra em suas diferentes áreas de estudo, no arranjo das folhas, na estrutura das pétalas, na composição das flores e na distribuição de folhas em torno de um ramo de algumas plantas.

Ramos [25](2013, p.57) salienta que:

Se considerarmos p o número de voltas da espiral e q , o número de bases de folhas pelas quais a espiral passou, excluindo a primeira, então $\frac{p}{q}$ é uma fração característica da planta, ou seja, a divergência das folhas. O numerador e o denominador desta fração tendem a ser números da sequência de Fibonacci, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \dots$. Várias plantas podem ser dispostas com este tipo de crescimento como as gramíneas comuns que têm a fração igual a $\frac{1}{2}$, as ciperáceas sendo $\frac{1}{3}$, as frutíferas, como as macieiras, que têm a fração igual a $\frac{2}{5}$, tanchagens igual a $\frac{3}{8}$, liliáceas com $\frac{5}{13}$.

Segundo referencia Zahn [33](2011), algumas plantas curiosamente possuem números de Fibonacci escondidos por trás de sua beleza. Geralmente, as margaridas têm 13, 21, 34, 55 ou 89

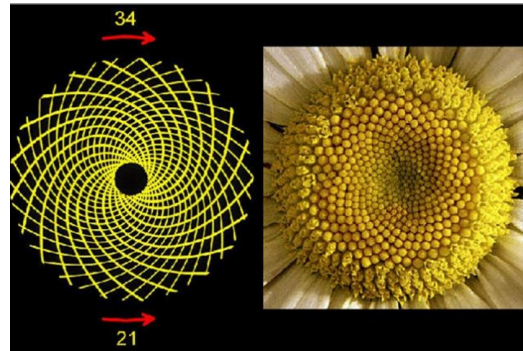
pétalas conforme figura 1.17 . Os crisântemos têm 34 pétalas. Os girassóis têm suas sementes distribuídas em espirais, normalmente 34 espirais no sentido horário e 21 no sentido anti-horário, conforme figura 1.18.

Figura 1.17: Margarida com 34 pétalas



Fonte: ZAHN, 2011, p.12

Figura 1.18: Espirais no girassol

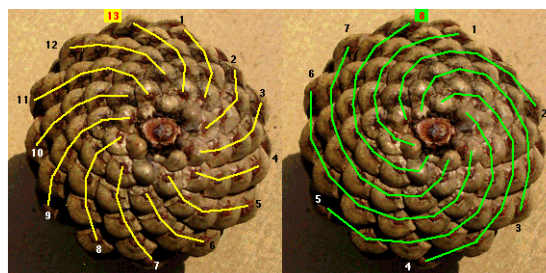


Fonte: RAMOS, 2013, p.60

Segundo Rodrigues [26] (2008, p.140):

Muitas flores possuem 5 pétalas, os trevos normais possuem 3 folhas. As espirais de Fibonacci são claramente visíveis nas pinhas. Observe a figura 1.19 de uma pinha comum, vista a partir da sua base, onde a haste conecta à árvore e verifique que existem dois conjuntos de espirais. Um dos conjuntos tem 8 espirais e o outro tem 13, o que nos leva, mais uma vez, aos números de Fibonacci.

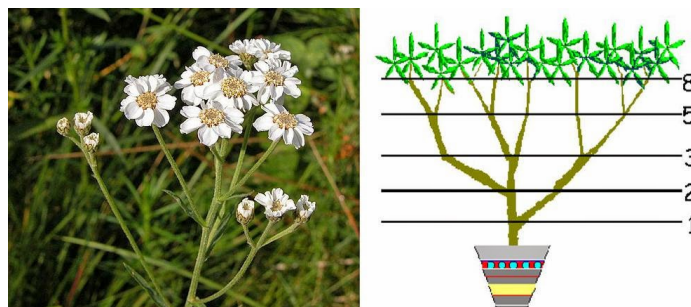
Figura 1.19: Espirais em pinhas



Fonte: RODRIGUES, 2008, p.140

Ainda cita Rodrigues [26] (2008, p.132): "As ramificações dos galhos de algumas plantas, como a *Achillea ptarmica* (figura 1.20), tem um padrão que remete à sequência de Fibonacci."

Figura 1.20: Galhos da *Achillea ptarmica*

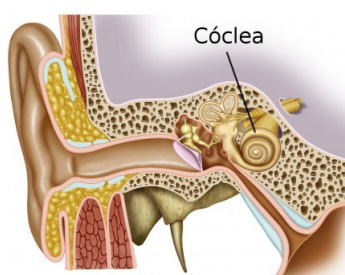


Fonte: MENDES, 2007, p.53

1.8.4 Música

Segundo comenta Rodrigues [26](2008), a música se constitui em uma combinação de sons executados em determinada sequência. Para que a música possa ser considerada agradável precisa de uma harmonia entre os acordes e isto é obtido nas razões entre os números obtidos, que constituem o que se chama de “escala musical”. Tudo que soa ou impressiona o sentido do ouvido é chamado genericamente de som. Para detectar os sons, o ouvido possui um mecanismo bastante complexo, e o interessante é que o elemento principal na detecção das oscilações dos sons é a *cóclea*, que lembra uma espiral logarítmica.

Figura 1.21: Ouvido humano

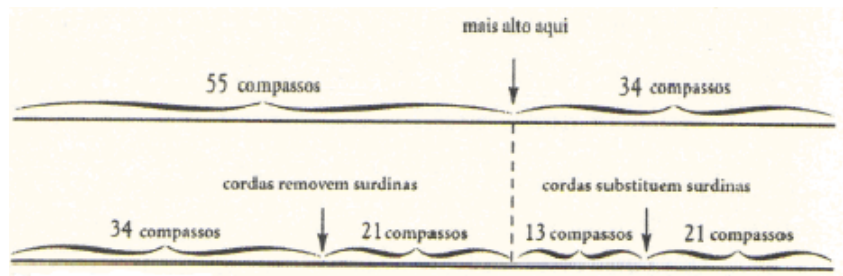


Fonte: RODRIGUES, 2008, p.170

Rodrigues [26](2008) salienta que a razão áurea aparece na quinta e na nona sinfonia de Beethoven. Outro fato interessante, ainda segundo Rodrigues [26](2008), é que o tempo de uma música pode ser analisado como uma proporção; por exemplo, a razão entre os tempos de batida de bumbo e a caixa de uma bateria. O compositor húngaro, pianista, e investigador da música popular da Europa, Béla Bartók, nascido por volta de 1880, utilizou por muitas vezes a razão áurea em suas obras. Exemplo disso é um trecho de uma das suas obras “Música para cordas, percus-

são e celesta” em que 89 compassos dos movimentos são divididos em duas partes, uma com 55 compassos e a outra com 34 compassos (dentro destas divisões foram feitas outras, uma marcada pela colocação ou retirada de surdinas, ou seja, a diminuição do som dos instrumentos, e outra na mudança de textura) conforme figura 1.22. Observa-se que todos os números dos compassos são números da sequência de Fibonacci.

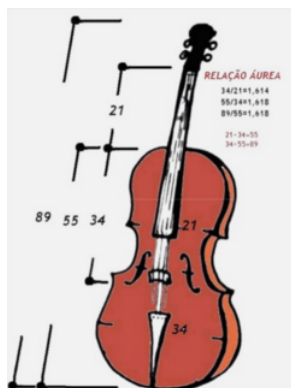
Figura 1.22: Divisão dos compassos



Fonte: RODRIGUES , 2008, p.178

Entre os instrumentos musicais, segundo argumenta Rodrigues [26](2008), destacam-se o violino e o violoncelo que foram criados tendo em vista a preocupação de vários artistas com a estética das proporções. Alguns violinos foram criados a partir da razão áurea, e, em suas linhas, pode-se observar essas relações, um instrumento musical que chama a atenção por sua beleza tanto no som que ele emite quanto na sua aparência, que apresenta ainda em suas curvas a estrutura da espiral logarítmica. As outras partes do violino(ou do violoncelo), assim como as aberturas acústicas, também estão nas proporções áureas, como a razão entre o tamanho do braço e o comprimento total do instrumento.

Figura 1.23: Violoncelo



Fonte: VEIGA , 2006, p.20

Figura 1.24: Espiral do violino

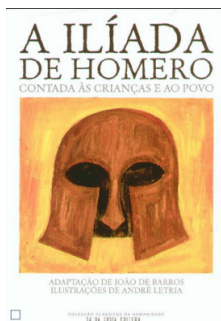


Fonte: RODRIGUES , 2008, p.24

1.8.5 Literatura

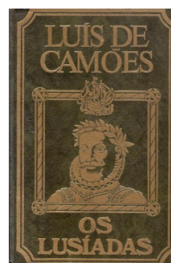
Segundo Lívio [19](2011), na literatura o número de ouro encontra sua aplicação mais notável no poema épico grego *Iliada*, de Homero, que narra os acontecimentos dos últimos dias da Guerra de Tróia. Quem o ler notará que a proporção entre as estrofes maiores e as menores dá um número próximo ao 1,618, o número de ouro. Luís de Camões, na sua obra *Os Lusíadas*, colocou a chegada à Índia no ponto que divide a obra na razão de ouro. Virgílio, em sua obra *Eneida*, que conta a saga de Eneias, um troiano que é salvo dos gregos em Troia, construiu a razão áurea com as estrofes maiores e menores.

Figura 1.25: *Iliada*



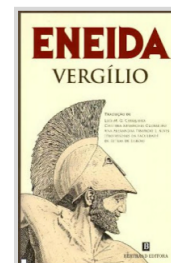
Fonte: WIKIPÉDIA

Figura 1.26: *Os Lusíadas*



Fonte: WIKIPÉDIA

Figura 1.27: *Eneida*



Fonte: WIKIPÉDIA

1.8.6 Economia

A teoria das ondas de Elliott, segundo Correio[4](2014), foi desenvolvida pelo contador Ralph Nelson Elliott por volta de 1930 e está inserida no contexto da ciência da teoria do caos e da teoria dos fractais. Essa teoria busca determinar o comportamento futuro dos preços no mercado financeiro através de um padrão repetitivo de ondas. Ele encontrou uma forma de medir o ciclo de repetição das ondas ao relacionar o comportamento do mercado e a sequência de números de Fibonacci, agregando à análise de mercados financeiros para identificar padrões de comportamento racional dos agentes investidores no mercado de ações.

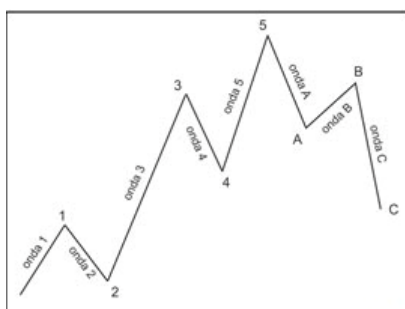
Correio[4](2014) salienta que, por meio de gráficos, pode-se observar que os mercados financeiros se movimentam de acordo com uma progressão estruturada em movimentos definidos. Elliott definiu oito tipos de movimentos ou ondas que costumam acontecer durante os “movimentos de subida e descida” de qualquer mercado acionário, como representado na Figura 1.28.

A base da teoria de Elliott, segundo comenta Ferreira [9](2006), consiste na oscilação dos mercados em movimentos no sentido da tendência, entremeados por movimentos no sentido contrá-

rio ao da tendência. A afirmação de Elliott está baseada em um pressuposto da psicologia social, o de que grupos de pessoas têm comportamentos que se tornam mais previsíveis à medida que aumenta o número de pessoas envolvidas. Segundo Elliott, todas as atividades humanas têm três aspectos: padrão, razão e tempo.

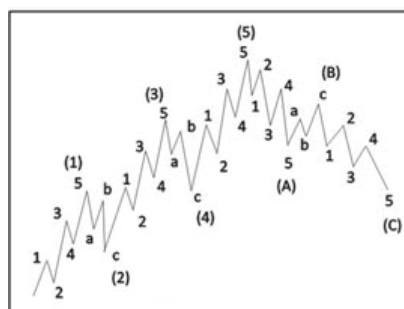
De acordo com Correio[4](2014), pode-se representar graficamente como grupos de pessoas se comportam, revelando as oscilações que ocorrem, criando padrões específicos e mensuráveis. Segundo a teoria de Elliott, um ciclo padrão de tendência do mercado é formado graficamente por grandes ondas bem definidas, onde cada uma delas é formada por grupos menores que reproduzem o mesmo padrão, conforme exibido na Figura 1.29

Figura 1.28: Ondas de Elliott 1



Fonte: CORREIO, 2014

Figura 1.29: Ondas de Elliott 2



Fonte: CORREIO, 2014

Segundo ainda comenta Correio[4](2014), a ideia básica subjacente ao princípio de Elliott é que essas ondas seguem um padrão de crescimento e queda que pode ser analisado segundo os números de Fibonacci. De forma geral, a teoria das ondas de Elliott diz que a razão entre um pico (alta de preços) e um vale (queda dos preços) do gráfico tende a ter um valor aproximadamente igual à razão entre dois números sucessivos da sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...). Elliott estudou a sequência de Fibonacci para tirar conclusões importantes e relacionou esse fato para cinco ondas, estabelecendo algumas razões (escritas com 3 casas decimais).

- $\frac{0}{1} = 0$
- $\frac{1}{1} = 1$
- $\frac{1}{2} = 0.5$
- $\frac{21}{34} = 0,618$

- $\frac{89}{34} = 2,618$
- $\frac{34}{89} = 0,382$

Essas razões, de acordo com Correio[4](2014), estabelecem os percentuais que constituem a base para expansão e retração das ondas de Elliott mostradas na figura 1.28.

Esses números levam às seguintes considerações:

- a) A onda 1 (primeira onda de uma sequência) é a base para se determinar as razões das demais ondas, conforme figura 1.30;
- b) A onda 2 (segunda onda da sequência) se relaciona com a onda 1, numa razão de 50% a 62% desta;
- c) A onda 3 está relacionada à onda 1, segundo a proporção 161,8%, 261,8% ou 423,6%;
- d) A onda 4 relaciona-se à onda 3 por uma das relações: 38% ou 50% desta;
- e) A onda 5 está relacionada à onda 1 segundo uma das proporções: 100%, 161,8% ou 261,8%.

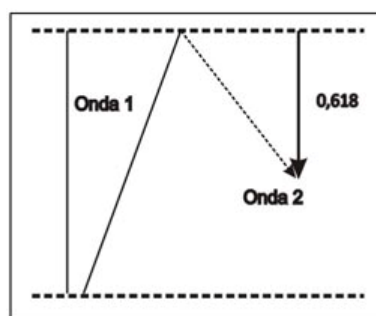
Figura 1.30: Elliott e Fibonacci 1



Fonte: FERREIRA, 2006, p.32

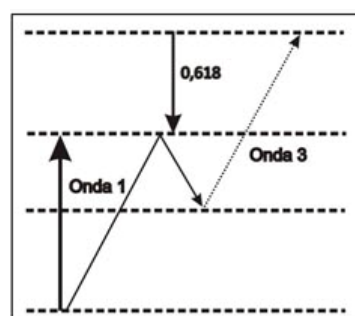
Normalmente, segundo argumenta Correio[4](2014), encontra-se uma onda que corrige a anterior em uma proporção de aproximadamente 0,62, ou seja, 62% (ver figuras 1.31 e 1.32), observa-se que a onda 2 corrige a onda 1 nessa proporção. Por outro lado, a onda 3 transpõe o pico da onda 1, também, em 62%, aproximadamente.

Figura 1.31: Retração da onda 1



Fonte: CORREIO, 2014

Figura 1.32: Retração da onda 2



Fonte: CORREIO, 2014

Além disso, ainda salienta Correio[4](2014), nota-se que na representação das ondas se vislumbram outras ocorrências da proporção áurea e de uma razão muito comumente encontrada, conforme Elliott, que é a de 38%: nesse caso, a onda 1 é superada em 62% pela onda 3, a qual é corrigida pela onda 4 em 38%. Assim, a onda 5 é corrigida pela "A" em 62%, aproximadamente.

1.8.7 Arquitetura

Segundo cita Veiga [30] (2006, p.7):

Os Egípcios consideravam o número de ouro sagrado tendo uma importância extrema na sua religião e chamavam-no não de número de ouro, mas sim de "número sagrado". Utilizavam-no para a construção de templos e sepulcros para os mortos, pois consideravam que, caso isto não acontecesse, o templo poderia não agradar aos deuses, ou a alma do falecido não conseguiria chegar ao além. Para além disso, os Egípcios consideravam-no muito agradável esteticamente, usando-o também no seu sistema de escrita e na decoração dos seus templos.

Saraiva [28] (1990, p.118) afirma:

A divisão de um segmento em média e extrema razão já aparece no Livro VI de Euclides (**ver definição 1.4 na página 8**) e retângulos áureos são encontrados com frequência nas esculturas e obras arquitetônicas da Grécia antiga. Por esse motivo, a razão áurea, é normalmente atribuída aos gregos. Ao que parece, ela já estava presente nas pirâmides do antigo Egito (grifo nosso).

Ainda segundo Saraiva [28] (1990), na construção da Pirâmide de Quéops (Pirâmide reta de base quadrada) foi utilizado na suas faces laterais o triângulo áureo.

Saraiva[28](1990, p.118) define:

Definição 1.7 "Um triângulo é denominado áureo quando ele é semelhante ao triângulo retângulo com hipotenusa $a = \varphi$ e catetos b e c de medidas respectivamente $\sqrt{\varphi}$ e 1."

Deste modo, tem-se : $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \varphi^2 = (\sqrt{\varphi})^2 + 1^2 \Leftrightarrow \varphi^2 = \varphi + 1 \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$
 que tem como solução positiva: $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618033988\dots$

Proposição 1.2 "Um triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c ($b \geq c$) é áureo se, e somente se,"(IDEM)

$$\frac{b}{c} = \sqrt{\varphi} = 1.272\dots \quad (1.5)$$

Demonstração: Supõe-se inicialmente que $\frac{b}{c} = \sqrt{\varphi} \Rightarrow b = c\sqrt{\varphi}$.

Utilizando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = (c\sqrt{\varphi})^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = c^2\varphi + c^2 \Leftrightarrow a^2 = c^2(1 + \varphi)$$

Sabendo que $\varphi^2 = 1 + \varphi$ (ver equação 3.1 da página 52), tem-se:

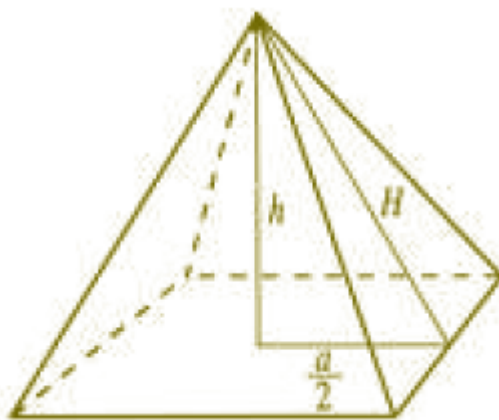
$$a^2 = c^2(1 + \varphi) \Leftrightarrow a^2 = c^2\varphi^2 \Leftrightarrow a = c\varphi$$

Assim, as medidas do triângulo serão $c\varphi$, $c\sqrt{\varphi}$ e c , apresentando, desta forma, lados proporcionais a φ , $\sqrt{\varphi}$ e 1 e, portanto, semelhante a este, estando de acordo com a definição 1.7.

Segundo Saraiva[28](1990, p.119):

Definição 1.8 "Seja P uma pirâmide reta de base quadrada, de lado a , apótema lateral H e altura h . Diz-se que P é uma pirâmide áurea quando o triângulo de lados H , $\frac{a}{2}$ e h for um triângulo áureo."

Figura 1.33: Pirâmide áurea



Fonte: SARAIVA, 1990, p.118

Propriedade 1.1 A área de cada face triangular de uma pirâmide áurea é igual à área de um quadrado cujo lado corresponde à altura da pirâmide (IDEM).

Assim, de acordo com as notações da definição 1.8, tem-se:

$$\frac{a \cdot H}{2} = h^2 \quad (1.6)$$

Proposição 1.3 Uma pirâmide reta com base quadrada satisfaz a propriedade 1.1 se, e somente se, ela for uma pirâmide áurea. (IDEM)

Demonstração: Supõe-se inicialmente que a pirâmide é áurea, ou seja, o triângulo retângulo da figura 1.33 de medidas H, h e $\frac{a}{2}$ é áureo. Assim, de acordo com a proposição 1.2, tem-se: $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\varphi}$ e $H = \frac{a}{2} \cdot \varphi$. Substituindo esses valores na equação 1.6, tem-se:

$$\frac{a \cdot H}{2} = h^2 \Leftrightarrow a \cdot H = 2h^2 \Leftrightarrow a \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \varphi\right) = 2 \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\varphi}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 \cdot \varphi}{2} = \frac{a^2 \cdot \varphi}{2}$$

Reciprocamente, supõe-se que a pirâmide satisfaz a propriedade 1.1.

Sabendo que:

$$H^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}, \quad \text{e da equação 1.6, } a = \frac{2 \cdot h^2}{H}, \text{ tem-se:}$$

$$H^2 = h^2 + \frac{h^4}{H^2} \quad \text{Multiplicando ambos os membros por } \frac{H^2}{h^4}, \text{ resulta: } \left(\frac{H}{h}\right)^4 = \left(\frac{H}{h}\right)^2 + 1$$

$$\text{mas, sendo: } \frac{H}{h} = \frac{\left(\frac{a \cdot \varphi}{2}\right)}{\left(\frac{a \cdot \sqrt{\varphi}}{2}\right)} = \sqrt{\varphi},$$

conclui-se, pela proposição 1.2, que o triângulo de lados H, h e $\frac{a}{2}$ é áureo.

A Pirâmide de Quéops tem altura $h = 146,59m$ e aresta da base $a = 230,33m \Rightarrow \frac{a}{2} = 115,165m$

$$\frac{146,59m}{115,165m} = 1.272\dots$$

Pela definição 1.8 e pela proposição 1.2, conclui-se que a pirâmide de Quéops é áurea.

Figura 1.34: Pirâmide de Quéops



Fonte: WIKIPÉDIA

Segundo cita Veiga [30](2006, p.10): "O Templo de Dendera foi conhecido como a morada de Hathor. As arcadas são proporcionais ao retângulo de ouro, e no interior do templo existe uma escadaria em espiral, com uma forma muito semelhante à da espiral de ouro."

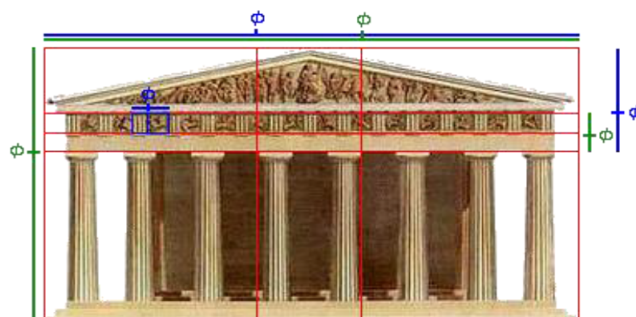
Figura 1.35: Templo de Dendera



Fonte: RAMOS, 2013, p.66

Ainda segundo Veiga [30](2006), nas ruínas do templo de Parthenon, que foi construído em Atenas entre 447 e 443 a.c, na Grécia, são notadas inúmeras presenças da razão áurea.

Figura 1.36: Parthenon



Fonte: VEIGA, 2006, p.11

1.8.8 Arte

O fascínio pela razão áurea continuou pelos séculos, tendo grande importância na Renascença. Na história da arte renascentista a perfeição da beleza em quadros foi bastante explorada com base nesta constante. Segundo Dozci [5](1990) e Huntley [15](1985), vários pintores e escultores lançaram mão das possibilidades que a proporção permitiam para retratar a realidade com mais perfeição. Em *O Nascimento de Vênus* (figura 1.37), de Sandro Botticelli, Afrodite está na proporção áurea de modo a representar a perfeição da beleza e no quadro *Mona Lisa* (figura 1.38), de Leonardo da Vinci, a razão áurea foi utilizada nas relações entre tronco e cabeça, bem como, entre os elementos do rosto.

Figura 1.37: O nascimento de Vênus



Fonte: RAMOS, 2013, p.66

Figura 1.38: Mona Lisa



Fonte: RAMOS, 2013, p.66

Segundo Veiga (2006,p.13):

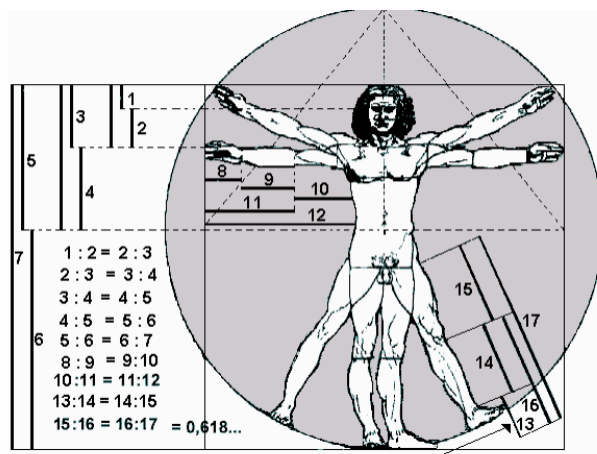
Leonardo da Vinci pensava que a Arte deve manifestar beleza e movimento. Assim, expressava movimento introduzindo retângulos de ouro nas suas obras, pois o fato destes poderem definir espirais que curvam até ao infinito dão uma sensação de movimento. Ao introduzir a secção de ouro nas suas pinturas, permitiam que estas se tornassem mais agradáveis à vista.

Segundo Lívio [19](2011), em termos gerais, a razão áurea foi usada em algumas dessas obras para que elas obtivessem o que pode-se chamar de "efetividade visual (ou auditiva)". Uma das propriedades que contribuem para essa efetividade é a proporção (a relação de tamanho das partes entre si e com o todo). A história da arte mostra que, na longa busca pelo elusivo cânone da proporção "perfeita", a que poderia de algum modo conferir automaticamente qualidades estéticas agradáveis a todas as obras artísticas, a razão áurea provou ser a mais duradoura, embora não se saiba exatamente porque.

1.8.9 Corpo humano

Segundo Veiga [30](2006), as ideias de proporção e simetria aplicadas à concepção da beleza humana foram exaustivamente estudadas por Leonardo Da Vinci. Na sua obra, *O homem Vitruviano* dividindo-se a distância dos pés até ao umbigo do homem pela distância do umbigo até ao topo da cabeça, obtém-se aproximadamente o valor 0.618 (o inverso do número de ouro). Segundo Leonardo da Vinci, o corpo humano para ter beleza e harmonia deve respeitar uma proporção. Outras proporções anatômicas (figura 1.39) foram bem representadas pelo *Homem Vitruviano*

Figura 1.39: Homem Vitruviano



Fonte: MENDES, 2003, p.38

Conforme salienta Ventura [31] (2015), o número ganhou ainda mais popularidade por causa de Adolf Zeising, um psicólogo alemão que via a razão áurea em “todas as estruturas, formas e proporções”. Ele dizia que a distância entre o umbigo e os pés sempre se encaixa na proporção áurea – ou seja, seria muito próximo a 1,6.

Veiga (2006, p.18) cita: "A ilustração 1.40 mostra a radiografia de um dedo indicador onde cada parte do dedo é maior que a parte anterior, de acordo com a razão áurea"

Figura 1.40: Radiografia de um dedo

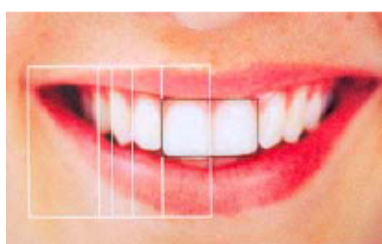


Fonte: VEIGA, 2006, p.17

Rodrigues [26](2008, p.150) afirma:

Os dentes vistos frontalmente na figura 1.41 estão na proporção áurea, um em relação ao outro. Por exemplo, a largura do incisivo central está proporcional à largura do incisivo lateral, assim como o incisivo lateral está proporcional ao canino, e o canino ao primeiro pré-molar. O segmento “incisivo central até o primeiro pré-molar” se encontra na proporção áurea em relação ao canto da boca. A altura do incisivo central está na proporção áurea em relação à largura dos dois dentes centrais (retângulo de ouro). Na face relaxada da figura 1.42 a linha dos lábios divide o terço inferior da face nos segmentos da proporção áurea da ponta do nariz à linha dos lábios e da linha dos lábios até o queixo.

Figura 1.41: Razão áurea nos dentes



Fonte: RODRIGUES, 2008, p.150

Figura 1.42: Razão áurea na face



Fonte: RODRIGUES, 2008, p.150

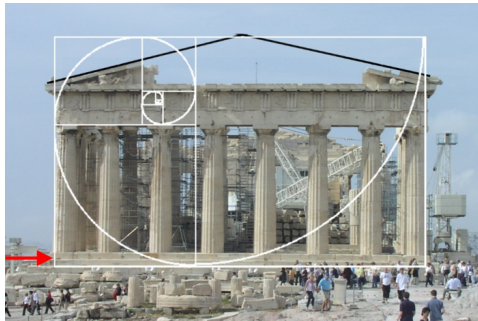
1.9 Número de ouro - Unanimidade ou coincidências ?

Nas mais variadas aplicações da seção anterior, observa-se que a natureza parece ter uma tendência a seguir a proporção áurea. Segundo enfatiza Ventura[31] (2015), o matemático Keith Devlin explica que, no caso do girassol (ver figura 1.18 da página 21), “a natureza quer colocar o máximo de sementes possível, e a maneira de fazer isso é adicionar novas sementes numa forma em espiral”. No entanto, vale notar que girassóis nem sempre obedecem à sequência de Fibonacci.

Ventura [31](2015) salienta que alguns estudiosos, além do matemático Keith Devlin, como o físico Donald E. Simanek e o astrofísico Mario Livio, vêm tentando, por muitos anos, desmistificar a proporção áurea. Devlin nota que diversos exemplos populares tais como, o Parthenon e a Mona Lisa, na verdade não se encaixam perfeitamente na proporção áurea.

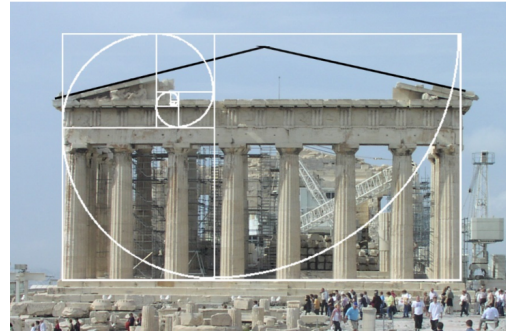
Ventura [31](2015) afirma: "No Parthenon as medidas da fachada não se encaixam na proporção áurea. Isso só funciona quando se inclui no retângulo parte dos degraus (figura 1.43). Não é possível também encaixar uma espiral áurea na fachada (figura 1.44)."

Figura 1.43: Análise 1 - Parthenon



Fonte: VENTURA, 2015

Figura 1.44: Análise 2 - Parthenon

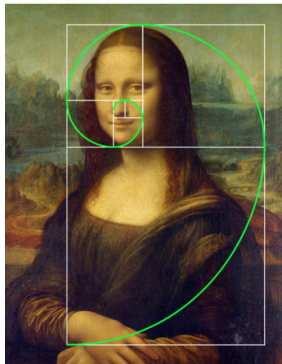


Fonte: VENTURA, 2015

Segundo ainda Ventura [31](2015):

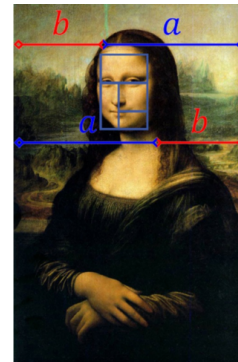
A Mona Lisa também é “vítima” das linhas áureas. Basicamente, podemos inserir um retângulo áureo arbitrário na cara da Gioconda, e ele vai se encaixar. Na figura 1.45, a espiral áurea começa, sem motivo, do espaço entre as mãos da Mona Lisa. Na figura 1.46, colocaram um retângulo iniciando na testa da mulher, só para ele ficar alinhado com os olhos e o lábio superior.

Figura 1.45: Análise 1 - Mona Lisa



Fonte: VENTURA, 2015

Figura 1.46: Análise 2 - Mona Lisa



Fonte: VENTURA, 2015

Com relação à Mona Lisa, Lívio[19] (2011, p. 186-187) afirma:

Ela foi tema de tantos livros de especulações contraditórias de estudiosos e populares que é praticamente impossível se chegar a qualquer conclusão inequívoca. Supõe-se que a razão áurea deveria ser encontrada nas dimensões de um retângulo em torno do rosto da Mona Lisa. Na falta de qualquer indicação clara (e documentada) do lugar exato onde esse retângulo deveria ser desenhado, essa ideia representa apenas outra oportunidade para malabarismos numéricos.

Ventura [31](2015) cita:

A razão áurea pode ser, sim, encontrada na natureza e na arte, embora para essa última, existam muitas dúvidas sobre o uso da razão áurea pelo próprio Leonardo da Vinci. A razão áurea, aparece constantemente na publicidade com a finalidade, de muitas vezes, direcionar as atenções do olho humano à beleza estética (que pode passar despercebida, admirada sem muitas explicações) [...]. No entanto, há quem faça um esforço tremendo para visualizá-la onde ela não existe e, talvez essas pessoas nem acreditem que a divina proporção é menos comum do que elas imaginam.

Por que isso acontece? De acordo com Ventura[31] (2015, apud Markowsky [21], 1992, p.5), o matemático George Markowsky, em seu artigo “Equívocos sobre a razão áurea”, explica:

Se você se dispõe a medir uma estrutura complicada, você terá rapidamente na mão uma grande abundância de comprimentos para mensurar. Se você tiver paciência suficiente para fazer malabarismos com esses números, você certamente obterá muitos valores que coincidem com importantes datas históricas ou números nas ciências. Como você não está limitado por nenhuma regra, seria estranho se a “verdade” da razão áurea não se encaixasse com sucesso considerável.

Ventura [31] (2015) continua: "ou seja, quando você se dispõe a analisar algo complexo como o rosto humano ou enormes obras de arquitetura, é muito fácil encontrar medidas e proporções que se encaixem com algo que você procura, como a razão áurea."

E por que as pessoas fazem isso? Há um motivo mais profundo, como explica Ventura[31] (2015, apud Markowsky[21], 1992, p.15):

Basicamente, quanto mais fácil for o entendimento de uma situação (por ser matematicamente simples, por termos visto muitas vezes antes, por ser simétrico, dentre outros fatores), mais provável é que pareça certo e, talvez, como a razão áurea tem se revelado interessante em certos aspectos e é fácil de entender, as pessoas saltam naturalmente a conclusão de que ela também deve ser usada em outros casos nos quais a proporção simplesmente não é encontrada.

Ventura [31] (2015) conclui:

Talvez seja muito gratificante descrever a natureza através de simetrias, razões e medidas unificadas. Isso nos dá uma sensação de controle, e faz parecer que o mundo a nossa volta pode ser melhor compreendido. Infelizmente, isso nem sempre é verdade, mesmo que nossa mente esteja determinada a encontrar padrões onde eles não existem. No fim, é uma diferença entre matemática e numerologia: algo que parece impressionante à primeira vista, mas que desmorona sob um olhar mais atento.

Capítulo 2

Propriedades elementares da sequência de Fibonacci

Neste capítulo apresentam-se propriedades elementares da sequência de Fibonacci e a fórmula do seu termo geral (Fórmula de Binet). Mostra-se ainda a relação entre a sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas (uma das sequências de Fibonacci).

2.1 Propriedades envolvendo termos da sequência

Conforme Zahn [33] (2011, p.7):

Proposição 2.1 *"Dada a sequência de Fibonacci (f_n) . Então, $\forall n$, são válidas as seguintes propriedades:"*

- (a) Soma dos números da sequência : $\sum_{i=1}^n f_i = f_{n+2} - 1$.
- (b) Soma dos números de ordem ímpar da sequência : $\sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_{2n}$.
- (c) Soma dos números de ordem par da sequência : $\sum_{i=1}^n f_{2i} = f_{2n+1} - 1$.
- (d) Soma dos quadrados dos números da sequência : $\sum_{i=1}^n f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$.

Demonstrações:

De acordo com Zahn [33,] (2011, p.8):

- (a) "Deseja-se mostrar que a soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é dada por:"

$$S_n = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$$

- (i) Para $n = 1$, tem-se $f_1 = 1$ e $f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$. Assim, $f_1 = f_{1+2} - 1 = 1$. Confirmada a base da indução.
- (ii) Supõe-se que a identidade sugerida seja válida para um certo índice n , ou seja, a hipótese de indução será:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$$

Será mostrado que ela também é verdadeira para $n + 1$, ou seja, deve-se mostrar que:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$$

Para isto, será somado f_{n+1} em ambos os membros da hipótese de indução e sabendo ainda que $f_{n+1} + f_{n+2} = f_{n+3}$, tem-se:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$$

O que completa a prova.

Ainda de acordo com Zahn [33,](2011, p.8):

- (b) "Deve-se mostrar que $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$, $\forall n \geq 1$, ou seja, deseja-se verificar que a soma dos termos ímpares de uma sequência de Fibonacci até a ordem $2n - 1$ é igual ao próximo número de Fibonacci, que corresponde ao próximo termo par da sequência."

- (i) A igualdade válida para $n = 1$, pois $f_1 = f_2 = 1$. Logo, é válida a base da indução.
- (ii) Supõe-se que a igualdade é verdadeira para um certo índice n , ou seja, que vale para $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$ que é a nossa hipótese de indução.

Mostra-se que também vale para $n + 1$. Para isso, basta somar o próximo termo ímpar em cada lado da igualdade relativa à hipótese de indução e, desta forma, obtém-se:

$$f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} + f_{2n+1} = f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+2}$$

Que consiste na prova desejada.

(c) Será mostrado que $f_2 + f_4 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1, \forall n \geq 1$, ou seja, que a soma dos termos pares de uma sequência de Fibonacci até a ordem $2n$ é igual ao próximo número de Fibonacci subtraído de uma unidade.

(i) A igualdade vale para $n = 1$. De fato, basta observar que $f_2 = f_{2+1} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$. Logo, vale a base da indução.

(ii) Supõe-se que a igualdade seja verdadeira para um certo índice n , ou seja, que vale para $f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$ (hipótese de indução). Mostra-se que também vale para $n + 1$. De fato, basta somar o próximo termo par em cada lado da igualdade da hipótese de indução e obtém-se:

$$f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} + f_{2n+2} = f_{2n+1} + f_{2n+2} - 1 = f_{2n+3} - 1$$

Isto completa a prova.

(d) Deseja-se mostrar que $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}, \forall n \geq 1$, ou seja, que a soma dos quadrados dos termos de uma sequência de Fibonacci até a ordem n é igual ao produto do termo de ordem n pelo próximo termo de Fibonacci.

(i) A igualdade vale para $n = 1$. De fato, basta observar que $f_1^2 = f_1 \cdot f_2$. Assim, $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$. Logo, vale a base da indução.

(ii) Supõe-se que a igualdade seja verdadeira para um certo índice n , ou seja, que vale para $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$ (hipótese de indução). Será mostrado que também vale para $n + 1$. Para isso, soma-se o quadrado do termo de Fibonacci de ordem $n + 1$ aos dois lados da equação. Tem-se:

$$\begin{aligned} f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 + f_{n+1}^2 &= f_n \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^2 \\ f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 + f_{n+1}^2 &= f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n+1}) \\ f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 + f_{n+1}^2 &= f_{n+1} \cdot f_{n+2} \end{aligned}$$

Isto completa a prova.

Conforme Ramos [25] (2013, p.10-11):

Proposição 2.2 "(Fórmula de Cassini) Os números de Fibonacci satisfazem:

$$f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n, n \in \mathbb{N}"$$

Demonstração: Será feita a prova por indução sobre n :

(i) Para $n = 1$:

$$f_{1-1} \cdot f_{1+1} - f_1^2 = (-1)^1 \Leftrightarrow f_0 \cdot f_2 - f_1^2 = (-1)^1 \Leftrightarrow 0 \cdot 1 - (1)^2 = -1 \Leftrightarrow -1 = -1$$

confirmando a base de indução.

(ii) Admite-se a validade para algum número positivo k , $n = k$, vem:

$$f_{k-1} \cdot f_{k+1} - f_k^2 = (-1)^k \text{ (hipótese de indução)}$$

Será mostrada a sua validade para $n = k + 1$. Portanto:

$$f_k \cdot f_{k+2} - f_{k+1}^2 = (-1)^{k+1} \quad (2.1)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade acima e utilizando a fórmula recursiva 1.1 da sequência de Fibonacci, tem-se:

$$f_k \cdot f_{k+2} - f_{k+1}^2$$

$$(f_{k+1} - f_{k-1}) \cdot (f_k + f_{k+1}) - f_{k+1}^2$$

$$f_{k+1} \cdot f_k + f_{k+1}^2 - f_k \cdot f_{k-1} - f_{k-1} \cdot f_{k+1} - f_{k+1}^2$$

$$f_{k+1} \cdot f_k - f_k \cdot f_{k-1} - f_{k-1} \cdot f_{k+1}$$

$$\text{Mas, da hipótese de indução: } f_{k-1} \cdot f_{k+1} - f_k^2 = (-1)^k \Leftrightarrow f_{k-1} \cdot f_{k+1} = (-1)^k + f_k^2$$

Substituindo, vem:

$$f_{k+1} \cdot f_k - f_k \cdot f_{k-1} - ((-1)^k + f_k^2)$$

$$f_{k+1} \cdot f_k - f_k \cdot f_{k-1} - f_k^2 - (-1)^k$$

$$f_{k+1} \cdot f_k - f_k \cdot (f_{k-1} + f_k) + (-1)^{k+1}$$

$$f_{k+1} \cdot f_k - f_k \cdot f_{k+1} + (-1)^{k+1}$$

$$(-1)^{k+1}$$

Assim, como o resultado coincide com o lado direito da igualdade 2.1, pelo princípio da indução, a proposição 2.2 se verifica.

Conforme Freire e Dias [10](2009, p.11):

Proposição 2.3 "Seja (f_n) a sequência de Fibonacci. Então, $\forall n$, vale a propriedade:

$$f_{m+n} = f_{m-1} \cdot f_n + f_m \cdot f_{n+1}, \forall m, n, m > 1"$$

Demonstração: Deseja-se mostrar que: $f_{m+n} = f_{m-1} \cdot f_n + f_m \cdot f_{n+1}, \forall m, n, m > 1$

(i) Fixando m , a igualdade se torna para $n = 1$.

$$f_{m+1} = f_{m-1} \cdot f_1 + f_m \cdot f_2$$

$$f_{m+1} = f_{m-1} \cdot 1 + f_m \cdot 1$$

$$f_{m+1} = f_{m-1} + f_m$$

que é verdadeira, por ser a relação fundamental da sequência de Fibonacci.

Logo, vale a base da indução.

(ii) Supõe-se que a identidade acima seja verdadeira quando n é um dos inteiros $(1, 2, \dots, k)$.

Assim, tem-se para $n = k$, que constitui a hipótese de indução.

$$f_{m+k} = f_{m-1} \cdot f_k + f_m \cdot f_{k+1} \tag{2.2}$$

Para $n = k - 1$, tem-se

$$f_{m+k-1} = f_{m-1} \cdot f_{k-1} + f_m \cdot f_{k-1+1}$$

$$f_{m+k-1} = f_{m-1} \cdot f_{k-1} + f_m \cdot f_k \tag{2.3}$$

Somando as equações 2.2 e 2.3, tem-se:

$$f_{m+k} + f_{m+k-1} = f_{m-1} \cdot f_k + f_{m-1} \cdot f_{k-1} + f_m \cdot f_{k+1} + f_m \cdot f_k$$

$$f_{m+(k+1)} = f_{m-1} \cdot (f_k + f_{k-1}) + f_m \cdot (f_{k+1} + f_k)$$

$$f_{m+(k+1)} = f_{m-1} \cdot f_{k+1} + f_m \cdot f_{k+2}$$

O que conclui a prova.

Apresenta-se a seguir um resumo das proposições apresentadas em forma de aplicações numéricas. Seja a sequência de Fibonacci mostrada na tabela

Tabela 2.1: Sequência de Fibonacci

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	...

Fonte: Elaborada pelo autor

Da proposição 2.1, foi visto que:

a) Soma dos números da sequência: $\sum_{i=1}^n f_i = f_{n+2} - 1$.

Exemplo: Para $n = 6$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20 = f_8 - 1 = 21 - 1 = 20$$

b) Soma dos números de ordem ímpar da sequência: $\sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_{2n}$.

Exemplo: Para $n = 5$

$$1 + 2 + 5 + 13 + 34 = 55 = f_{10} = 55$$

c) Soma dos números de ordem par da sequência: $\sum_{i=1}^n f_{2i} = f_{2n+1} - 1$.

Exemplo: Para $n = 4$

$$1 + 3 + 8 + 21 = 33 = f_9 - 1 = 34 - 1 = 33$$

d) Soma dos quadrados dos números da sequência: $\sum_{i=1}^n f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$.

Exemplo: Para $n = 4$

$$(1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 = 15 = f_4 \cdot f_5 = 3 \cdot 5 = 15$$

Da Proposição 2.2 (fórmula de Cassini), tem-se:

$$f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$$

Exemplo: Para $n = 7$

$$f_{7-1} \cdot f_{7+1} - f_7^2 = (-1)^7$$

$$f_6 \cdot f_8 - f_7^2 = (-1)^7$$

$$8 \cdot 21 - 13^2 = (-1)^7$$

$$168 - 169 = -1$$

Da Proposição 2.3, $f_{m+n} = f_{m-1}f_n + f_m f_{n+1}$, tem-se:

Exemplo: Para $m = 9$ e $n = 7$

$$f_{m+n} = f_{m-1} \cdot f_n + f_m \cdot f_{n+1}$$

$$f_{9+7} = f_{9-1} \cdot f_7 + f_9 \cdot f_{7+1}$$

$$f_{16} = f_8 \cdot f_7 + f_9 \cdot f_8$$

$$f_{16} = 21 \cdot 13 + 34 \cdot 21$$

$$f_{16} = 987$$

2.2 Propriedades envolvendo Máximo Divisor Comum

2.2.1 Termos consecutivos

De acordo com Freire [10] (2009, p.8):

Proposição 2.4 *"Dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si, ou seja $MDC(f_n, f_{n+1}) = 1, \forall n$ ".*

Antes de demonstrar a proposição, será provado o lema abaixo, de acordo com Hefez [14] (2013, p.48):

Lema 2.1 *"Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a|(b \pm c)$. Então:"*

$$a|b \Leftrightarrow a|c.$$

Demonstração: Supõe-se que $a|(b+c)$. Logo, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $b+c = t \cdot a$

Agora, se $a|b$, tem-se que existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $b = s \cdot a$. Das duas igualdades acima, resulta:

$$s \cdot a + c = t \cdot a$$

de onde segue-se que $c = (t-s) \cdot a$, logo $a|c$.

Reciprocamente, tem-se:

Se $a|b$, tem-se que existe $w \in \mathbb{Z}$ tal que $b = w \cdot a$ e

Se $a|c$, tem-se que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $c = k \cdot a$

Somando-se os dois resultados anteriores, tem-se : $(b+c) = (w+k) \cdot a$, logo $a|(b+c)$

Por outro lado, se $a|(b-c)$ e $a|b$, tem-se que $a|c$, o que implica que $a|c$.

Agora, será demonstrada a proposição 2.4:

Demonstração: Sejam f_n e f_{n+1} dois números de Fibonacci consecutivos. Será mostrado que $\text{MDC}(f_n, f_{n+1}) = 1, \forall n$. Por absurdo, se para um certo n_0 tivermos $\text{MDC}(f_{n_0}, f_{n_0+1}) = d \neq 1$, segue que $d|f_{n_0}$ e $d|f_{n_0+1}$. Como $f_{n_0+1} = f_{n_0} + f_{n_0-1}$, ou, $f_{n_0-1} = f_{n_0+1} - f_{n_0}$, onde, $d|f_{n_0}$ e $d|f_{n_0+1}$, segue pelo lema 2.1 que $d|f_{n_0-1}$. Então $d|f_{n_0}$ e $d|f_{n_0-1}$.

Mas, $f_{n_0} = f_{n_0-1} + f_{n_0-2}$ e, pelos mesmos argumentos acima, conclui-se que $d|f_{n_0-2}$.

Seguindo estes raciocínios, chega-se a $d|f_2$ e $d|f_1$, mas $f_1 = f_2 = 1$ e, então, tem-se que $d|1$, ou seja $d = 1$, mas isso contradiz a hipótese de que $d \neq 1$, o que conduz a um absurdo.

Portanto, $\text{MDC}(f_n, f_{n+1}) = 1, \forall n$.

2.2.2 Teorema de Lucas

Em 1876, o matemático Francês Édouard Lucas provou que o máximo divisor comum de dois números de Fibonacci era outro número de Fibonacci. Mais precisamente, o teorema a seguir:

Figura 2.1:
Édouard Lucas



Fonte: FERREIRA, 2006, p.15

Freire e Dias [10](2009, p.12) afirmam:

Teorema 2.1 "Se f_n é a sequência de Fibonacci, então $MDC(f_n, f_m) = f_{MDC(n,m)}$ "

Antes de demonstrar o Teorema de Lucas, serão provados 3 lemas:

Hefez [14](2013, p.135) afirma:

Lema 2.2 "Para m, n inteiros maiores do que ou iguais a 1, são tais que $m|n$, então, $f_m|f_n$ ".

Demonstração: Escreve-se $n = m \cdot k$. A prova será feita por indução sobre k .

Para $k = 1$, o resultado é verdadeiro, pois $f_m = f_{m \cdot 1} = f_n$.

Suponha agora, o resultado válido para algum valor de k ; isto é, $f_m|f_{m \cdot k}$. Para $k + 1$, utilizando a proposição 2.3, tem-se:

$$f_{m \cdot (k+1)} = f_{m \cdot k + m} = f_{m \cdot k - 1} \cdot f_m + f_{m \cdot k} \cdot f_{m+1}$$

Como $f_m|f_{m \cdot k - 1} \cdot f_m$ e, por hipótese de indução, $f_m|f_{m \cdot k} \cdot f_{m+1}$, segue-se, do lema 2.1, que $f_m|f_{m \cdot (k+1)}$, provando, assim, o resultado.

Hefez [14](2013, p.88) cita:

Lema 2.3 "Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se existe $MDC(a, b - n \cdot a)$, então, $MDC(a, b)$ existe e"

$$MDC(a, b) = MDC(a, b - n \cdot a)$$

Demonstração: Seja $d = MDC(a, b - n \cdot a)$. Como $d|a$ e $d|(b - n \cdot a)$, segue que d divide $b = b - n \cdot a + n \cdot a$. Logo, d é um divisor comum de a e b . Supondo agora que c seja um divisor comum de a e b . Logo, c é um divisor comum de a e $b - n \cdot a$ e, portanto, $c|d$. Isso prova que $d = MDC(a, b)$.

Freire e Dias[10](2009, p.13) afirmam:

Lema 2.4 "Se m e n são inteiros positivos ($m \geq n$) com $m = q \cdot n + r, 0 \leq r < n$, então, $MDC(f_m, f_n) = MDC(f_n, f_r)$ ".

Demonstração: Sendo $m = q \cdot n + r$; e, da proposição 2.3, tem-se:

$$f_m = f_{q \cdot n + r} = f_{q \cdot n - 1} \cdot f_r + f_{q \cdot n} \cdot f_{r+1}$$

Logo, como pelo lema 2.2, $f_n | f_{q \cdot n}$, segue-se do lema 2.3, que:

$$MDC(f_m, f_n) = MDC(f_{q \cdot n + r}, f_n) = MDC(f_{q \cdot n - 1} \cdot f_r + f_{q \cdot n} \cdot f_{r+1}, f_n) = MDC(f_{q \cdot n - 1} \cdot f_r, f_n) \quad (2.4)$$

Agora, mostra-se que $d = MDC(f_{q \cdot n - 1}, f_n) = 1$. As relações: $d | f_n$ e $f_n | f_{q \cdot n}$, implicam que $d | f_{q \cdot n}$. Portanto, d é um inteiro positivo que divide dois termos consecutivos, $f_{q \cdot n}$ e $f_{q \cdot n - 1}$, da sequência de Fibonacci. Dessa forma, pela proposição 2.4, $d = 1$. Por outro lado, da equação 2.4

$$MDC(f_m, f_n) = MDC(f_{q \cdot n - 1} \cdot f_r, f_n) = MDC(f_r, f_n)$$

A última igualdade acima decorre do fato: sempre que $MDC(a, b) = 1$, tem-se $MDC(a, b \cdot c) = MDC(a, c)$, o que finaliza a demonstração.

Agora, tem-se condições de demonstrar o Teorema de Lucas. Segundo Freire e Dias [10](2009, p.13):

Demonstração: "Supõe-se que $m \geq n$. Aplicando o algoritmo da divisão para m e n , obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$m = q_1 \cdot n + r_1, 0 \leq r_1 < n$$

$$n = q_2 \cdot r_1 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2$$

.....

$$r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n, 0 \leq r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n + 0, 0 \leq r_n < r_{n-1}$$

De acordo com o lema 2.4, tem-se:

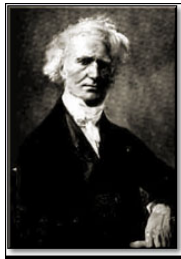
$$MDC(f_m, f_n) = MDC(f_m, f_{r_1}) = \dots = MDC(f_{r_n}, f_{r_{n-1}}).$$

Como r_n divide r_{n-1} , o lema 2.2 garante que f_n divide f_{n-1} . Portanto, tem-se que $MDC(f_n, f_{n-1}) = f_n$. Mas, r_n sendo o último resto não nulo no algoritmo de Euclides para m e n , ele é o $MDC(m, n)$, o que encerra a prova."

2.3 A fórmula de Binet

Segundo salienta Ferreira [9](2006), em meados do século XIX, o matemático francês Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856) redescobriu uma fórmula que, aparentemente, era conhecida no século XVIII pelo matemático Leonard Euler (1707 -1783) e pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754). A fórmula permite que se encontre o valor de qualquer número de Fibonacci, f_n , se seu lugar n na sequência for conhecido.

Figura 2.2:
Jacques Binet



Fonte: FERREIRA, 2006, p.19

Antes de se apresentar a fórmula de Binet, deve-se lembrar que existem outras sequências que obedecem a lei recursiva $g_{n+1} = g_n + g_{n-1}$ que serão chamadas genericamente de *sequências de Fibonacci*, conforme já visto na seção 1.2. As sequências de Fibonacci são recorrências lineares de segunda ordem, pois nesta um termo é dado em função de seus dois antecessores imediatos.

Segundo Ramos [25](2013, p.17):

Definição 2.1 "Uma progressão geométrica $(q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots)$ é uma sequência de Fibonacci se para todo $n \geq 3$, $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$ "

Assim, dividindo a expressão $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$ por $q^{n-2} \neq 0$, tem-se:

$$q^2 = q + 1 \tag{2.5}$$

que possui as raízes:

$$q_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

A proposição a seguir fornece uma expressão que relaciona um termo qualquer de uma sequência de Fibonacci com os números q_1 e q_2 acima obtidos:

Segundo Zahn [33] (2011, p.14):

Proposição 2.5 "Seja $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ uma sequência de Fibonacci qualquer. Então existem valores únicos de α e $\beta \in \mathbb{R}$, tais que para todo $n \geq 1$ "

$$u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n, \quad (2.6)$$

onde q_1 e q_2 são as raízes encontradas acima¹.

Demonstração: A prova será feita, utilizando o segundo princípio de indução sobre n .

(i) Para $n = 1$ e $n = 2$, forma-se o sistema:

$$\begin{cases} \alpha q_1 + \beta q_2 = u_1 \\ \alpha q_1^2 + \beta q_2^2 = u_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

O sistema 2.7 nas variáveis α e β possui solução única, pois o determinante das incógnitas do sistema é diferente de zero, conforme mostrado a seguir para $q_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ e $q_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ q_1^2 & q_2^2 \end{vmatrix} = q_1 q_2^2 - q_1^2 q_2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) =$$

$$\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \left(\frac{-2 - 2\sqrt{5}}{4} \right) - \left(\frac{-2 + 2\sqrt{5}}{4} \right) = -\sqrt{5} \neq 0.$$

Portanto, vale a base de indução, ou seja, α e β são unicamente determinados para $n = 1$ e $n = 2$.

¹As soluções de uma equação de recorrência linear de segunda ordem, homogênea, de coeficientes constantes, formam um subespaço vetorial de dimensão 2, logo a solução geral é obtida por uma combinação linear de soluções linearmente independentes

- (ii) Supõe-se que a afirmação seja verdadeira para todo $m \leq n$, mostra-se que também é verdadeiro para $n + 1$.

Seja

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} = \alpha q_1^n + \beta q_2^n + \alpha q_1^{n-1} + \beta q_2^{n-1} = \alpha q_1^{n-1}(q_1 + 1) + \beta q_2^{n-1}(q_2 + 1)$$

Da equação 2.5, as raízes q_1 e q_2 são tais que $q^2 = q + 1$. Assim, substituindo na expressão acima, tem-se:

$$\alpha q_1^{n-1} q_1^2 + \beta q_2^{n-1} q_2^2 = \alpha q_1^{n+1} + \beta q_2^{n+1}$$

Conforme se desejava demonstrar.

Segundo Ramos [25](2013, p.18-19):

Teorema 2.2 (A fórmula de Binet)

"O número de Fibonacci f_n pode ser obtido pela fórmula"

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (2.8)$$

Demonstração: Substituindo $u_1 = f_1 = 1$, $u_2 = f_2 = 1$, $q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ na equação 2.6 da proposição 2.5, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha q_1 + \beta q_2 &= u_1 \\ \alpha q_1^2 + \beta q_2^2 &= u_2 \end{cases} &= \begin{cases} \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) &= 1 \\ \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 &= 1 \end{cases} = \\ \begin{cases} \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) &= 1 \\ \alpha \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) &= 1 \end{cases} &= \begin{cases} \alpha(1-\sqrt{5}) + \beta(1+\sqrt{5}) &= 2 \\ \alpha(3-\sqrt{5}) + \beta(3+\sqrt{5}) &= 2 \end{cases} = \\ \begin{cases} \alpha(1-\sqrt{5}) \cdot (3-\sqrt{5}) + \beta(1+\sqrt{5}) \cdot (3-\sqrt{5}) &= 2 \cdot (3-\sqrt{5}) \\ \alpha(3-\sqrt{5}) \cdot (-1+\sqrt{5}) + \beta(3+\sqrt{5}) \cdot (-1+\sqrt{5}) &= 2 \cdot (-1+\sqrt{5}) \end{cases} = \\ \begin{cases} \alpha(8-4\sqrt{5}) + \beta(-2+2\sqrt{5}) &= 2 \cdot (3-\sqrt{5}) \\ \alpha(-8+4\sqrt{5}) + \beta(2+2\sqrt{5}) &= 2 \cdot (-1+\sqrt{5}) \end{cases} \end{aligned}$$

Somando as equações, resulta $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e, substituindo em qualquer um das equações acima, encontra-se $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Finalmente, conhecendo-se os valores de α, β, q_1 e q_2 , substitui-se na equação 2.6

$$\begin{aligned} f_n &= u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n \\ f_n &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] \end{aligned}$$

O que conclui a prova.

2.4 Sequência de Lucas

Segundo Zahn [33](2011, p.22):

Definição 2.2 "Chama-se sequência de Lucas a sequência definida recursivamente por:

$$l_1 = 1, l_2 = 3$$

$$l_{n+1} = l_n + l_{n-1}, \forall n \geq 2"$$

onde os termos dessa sequência chamam-se números de Lucas. Assim, tem-se

$$(l_n) = (1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots)$$

Conforme Ferreira [9](2006, p.22):

Proposição 2.6 "Os números de Lucas se relacionam com os de Fibonacci pela fórmula:

$$l_n = f_{n-1} + f_{n+1}"$$

Demonstração: Será feita a demonstração por indução sobre n

- [i] Seja a propriedade válida para $n = 2$: $l_2 = f_{2-1} + f_{2-1} = f_1 + f_3 = 1 + 2 = 3$. O que valida a proposição.
- [ii] Supõe-se a propriedade válida para um certo índice n , ou seja, que vale para

$$l_n = f_{n-1} + f_{n+1}.$$

Mostra-se que também vale para $n + 1$. Para isso, soma-se l_{n-1} em cada lado da equação:

$$l_n + l_{n-1} = f_{n-1} + f_{n+1} + l_{n-1}$$

Sabendo que $l_{n+1} = l_n + l_{n-1}$ e da hipótese de indução, tem-se:

$$l_{n+1} = f_{n-1} + f_{n+1} + (f_{n-2} + f_n)$$

$$l_{n+1} = (f_{n-1} + f_{n-2}) + (f_n + f_{n+1})$$

$$l_{n+1} = f_n + f_{n+2}$$

Conforme se desejava demonstrar.

Jesus [17](p.5) afirma:

Proposição 2.7 "Os números de Lucas e Fibonacci satisfazem a identidade:

$$l_n^2 = 5f_n^2 + 4 \cdot (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}"$$

Demonstração: Escrevendo :

$$l_n^2 = 5 \cdot f_n^2 + 4 \cdot (-1)^n$$

$$l_n^2 = f_n^2 + 4 \cdot f_n^2 + 4 \cdot (-1)^n$$

$$l_n^2 - 4 \cdot f_n^2 - 4 \cdot (-1)^n = f_n^2$$

$$l_n^2 - 4 \cdot [(-1)^n + f_n^2] = f_n^2$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade acima, e utilizando o resultado da proposição 2.2 que nos fornece $(-1)^n + f_n^2 = f_{n-1} \cdot f_{n+1}$, tem-se:

$$l_n^2 - 4 \cdot (f_{n-1} \cdot f_{n+1})$$

Mas, da proposição 2.6: $l_n = f_{n+1} + f_{n-1}$. Substituindo, tem-se:

$$(f_{n+1} + f_{n-1})^2 - 4 \cdot f_{n-1} \cdot f_{n+1}$$

$$f_{n+1}^2 + f_{n-1}^2 + 2 \cdot f_{n-1} \cdot f_{n+1} - 4f_{n-1} \cdot f_{n+1}$$

$$f_{n+1}^2 + f_{n-1}^2 - 2 \cdot f_{n-1} \cdot f_{n+1}$$

$$(f_{n+1} - f_{n-1})^2$$

que corresponde ao lado direito da igualdade, f_n^2 . Assim, prova-se a proposição.

A tabela mostra as sequências de Fibonacci e de Lucas, bem como, outras propriedades que são observadas (não serão feitas as demonstrações, por serem de fácil verificação) entre as mesmas:

Tabela 2.2: Sequências de Fibonacci e de Lucas

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	...
l_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364	2207	...

Fonte: Elaborada pelo autor

Propriedades:

a) $5f_n = l_{n-1} + l_{n+1}$

Exemplo: Para $n = 12$, vem: $5f_{12} = 5 \cdot 144 = 720 = l_{11} + l_{13} = 199 + 521 = 720$

b) $f_{2n} = f_n \cdot l_n$

Exemplo: Para $n = 5$, vem: $f_{10} = 55 = 550 = f_5 \cdot l_5 = 5 \cdot 11 = 55$

c) $f_{2^n} = l_2 \cdot l_{2^2} \cdot \dots \cdot l_{2^{n-1}}$

Exemplo: Para $n = 4$, vem: $f_{16} = 987 = l_2 \cdot l_4 \cdot l_8 = 3 \cdot 7 \cdot 47 = 987$

Capítulo 3

Número de ouro e números de Fibonacci

Apresentam-se neste capítulo, propriedades do número de ouro e sua relação com a sequência de Fibonacci. Mostram-se ainda aspectos geométricos do número de ouro e da sequência de Fibonacci.

3.1 Propriedades do número de ouro

Ramos [25](2013) salienta a relação entre os quadrados de φ com sua parte decimal.

Sabe-se que:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$$

$$\varphi - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,6180339887\dots$$

Segue que:

$$\varphi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2 + 1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \varphi + 1 = 2,6180339887\dots \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{(1)^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \varphi - 1 = 0,6180339887\dots \quad (3.2)$$

De acordo com os resultados, conclui-se que φ , φ^2 e $\frac{1}{\varphi}$ tem os mesmos dígitos na sua parte decimal. Assim φ tem a propriedade de produzir seu quadrado apenas adicionando 1 e seu inverso apenas subtraindo 1.

Propriedade 3.1 "Somando-se duas potências inteiras consecutivas de φ tem-se a potência de φ seguinte". (IDEM)

$$\varphi^n + \varphi^{n+1} = \varphi^{n+2}, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Demonstração: A prova será feita por indução sobre n .

considerando $n \geq 0$

(i) Fazendo $n = 0$, tem-se:

$$\varphi^0 + \varphi^1 = \varphi^2 \Leftrightarrow 1 + \varphi = \varphi^2$$

estando de acordo com a base de indução conforme equação 3.1

(ii) Considerando a expressão 3.3 válida para n (hipótese de indução). Será mostrado que é válida para $n + 1$.

Multiplicando a expressão 3.3 por φ , tem-se:

$$\varphi^n \cdot \varphi + \varphi^{n+1} \cdot \varphi = \varphi^{n+2} \cdot \varphi$$

$$\varphi^{n+1} + \varphi^{n+2} = \varphi^{n+3}$$

conforme se queria demonstrar.

(iii) Demonstra-se agora para $n \leq 0$. Para isso, fazendo $n = -k$, com $k > 0$

Dividindo $\varphi^2 = 1 + \varphi$ por φ^{k+2}

$$\frac{\varphi^2}{\varphi^{k+2}} = \frac{1}{\varphi^{k+2}} + \frac{\varphi}{\varphi^{k+2}} \Leftrightarrow \varphi^{-k} = \varphi^{-k-2} + \varphi^{-k-1} \Leftrightarrow \varphi^n = \varphi^{n-2} + \varphi^{n-1}$$

Verificando assim a propriedade 3.1 com demonstração análoga ao item (ii)

Fazendo $n = 0$, vem:

$$\varphi^0 = \varphi^{0-2} + \varphi^{0-1} \Leftrightarrow \varphi^0 = \varphi^{-2} + \varphi^{-1}$$

Multiplicando por φ^2 , tem-se:

$$\varphi^2 + = \varphi^0 + \varphi \Leftrightarrow \varphi^2 = 1 + \varphi$$

O que confirma a base de indução.

Dessa forma, a propriedade foi confirmada para $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Segundo Ramos [25] (2013, p.34):

Propriedade 3.2 "A soma das potências de φ com expoentes inteiros negativos corresponde a φ .

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{-n} = \varphi" \quad (3.4)$$

Deseja-se mostrar que :

$$\varphi^{-1} + \varphi^{-2} + \varphi^{-3} + \varphi^{-4} + \varphi^{-5} + \varphi^{-6} \dots = \varphi$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da equação, agrupando os termos dois a dois, tem-se:

$$(\varphi^{-1} + \varphi^{-2}) + (\varphi^{-3} + \varphi^{-4}) + (\varphi^{-5} + \varphi^{-6}) + \dots = \varphi$$

De acordo com a propriedade 3.1, obtém-se:

$$\begin{aligned} &\varphi^0 + \varphi^{-2} + \varphi^{-4} + \varphi^{-6} + \varphi^{-8} + \dots \\ &1 + \varphi^{-2} + \varphi^{-4} + \varphi^{-6} + \varphi^{-8} + \dots \\ &1 + \varphi^{-2} \cdot (\varphi^0 + \varphi^{-2} + \varphi^{-4} + \dots) \end{aligned} \quad (3.5)$$

A parcela $\varphi^0 + \varphi^{-2} + \varphi^{-4} + \dots$ na expressão 3.5 corresponde a soma S dos termos de uma progressão geométrica infinita onde $a_1 = \varphi^0 = 1$ e $q = \varphi^{-2} = \frac{1}{\varphi^2}$, com expressão dada por: $S = \frac{1}{a_1 - q}$

Portanto:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{\varphi^2}} = \frac{1}{\frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2}} = \frac{\varphi^2}{\varphi^2 - 1} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi$$

onde foi utilizado que: $\varphi^2 = \varphi + 1 \Leftrightarrow \varphi = \varphi^2 - 1$

Substituindo na equação 3.5, vem:

$$1 + \varphi^{-2}(\varphi^0 + \varphi^{-2} + \varphi^{-4} + \dots) = 1 + \varphi^{-2}(\varphi) = 1 + \varphi^{-1} = 1 + \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi + 1}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi$$

Obtendo o resultado desejado.

Segundo Ramos [25](2013, p.35):

Proposição 3.1 "A Fórmula de Binet pode ser escrita em função do número de ouro φ .

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\varphi^n - (-\varphi)^{-n}] \quad (3.6)$$

Demonstração : A Fórmula de Binet 2.8 da página 48 é dada por:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Sendo:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$1 - \varphi = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2 - 1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Substituindo, tem-se:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\varphi)^n - (1 - \varphi)^n] \quad (3.7)$$

Mas, lembrando de 3.2 que $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$. Podemos escrever ainda que : $1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi}$. Desta forma, tem-se:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n \right]$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\varphi^n - (-\varphi)^{-n}] \quad (3.8)$$

Proposição 3.2 "Se f_n é um número de Fibonacci, então vale a desigualdade:"(IDEM)

$$f_n \geq \varphi^{n-2}, \forall n \geq \mathbb{N}$$

Demonstração: Utiliza-se a segunda forma do princípio da indução sobre n

(i) A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois

$$\varphi^{1-2} = \varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 < 1, \text{ ou seja, } f_1 > \varphi^{-1}$$

Para $n = 2$

$$f_2 \geq \varphi^{2-2} = \varphi^0 = 1$$

Sendo verificada assim a base de indução:

(ii) Supondo que a afirmação é verdadeira para todo n tal que $1 \leq n \leq k$, com k inteiro, tem-se $f_k \geq \varphi^{k-2}$. Mostra-se que ela também é verdadeira para $n = k + 1$.

Utilizando a Fórmula recursiva dos números de Fibonacci 1.1 da página 6 com a propriedade 3.1, tem-se:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \geq \varphi^{k-2} + \varphi^{k-3} = \varphi^{k-1}$$

o que conclui a prova:

Corolário 3.1 "Se f_n é um número de Fibonacci, então vale:"(IDEM)

$$\varphi^{n-2} \leq f_n \leq \varphi^n, \forall n \geq \mathbb{N}$$

Demonstração: Já foi mostrado pela proposição 3.2 que $f_n \geq \varphi^{n-2}$

Será mostrado que $f_n \leq \varphi^n$ usando o segundo princípio da indução:

(i) Para $n = 1$ e $n = 2$, tem-se:

$$\text{Para } n = 1 : f_1 \leq \varphi^1 \Leftrightarrow f_1 = 1 \leq \varphi$$

$$\text{Para } n = 2 : f_2 \leq \varphi^2 \Leftrightarrow f_2 = 1 \leq \varphi^2 = \varphi + 1$$

(ii) Supondo que a afirmação é verdadeira para todo n tal que $1 \leq n \leq k$, com k inteiro, mostra-se que ela também é verdadeira para $n = k + 1$. Para isso, tem-se:

$$f_k \leq \varphi^k$$

$$f_{k-1} \leq \varphi^{k-1}$$

Somando as equações e utilizando a Fórmula recursiva dos números de Fibonacci 1.1 da página 6 com a propriedade 3.1, tem-se:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \leq \varphi^k + \varphi^{k-1} = \varphi^{k+1}$$

Obtendo, dessa forma, o resultado.

3.2 Potências do número de ouro e números de Fibonacci

Conforme Zahn[33] (2011, p.29):

"Vamos calcular as potências do número de ouro φ , lembrando de 3.1 que $\varphi^2 = 1 + \varphi$ "

$$\varphi = 0 + \varphi$$

$$\varphi^2 = 1 + \varphi$$

$$\varphi^3 = \varphi^2 \cdot \varphi = (1 + \varphi)\varphi = \varphi + \varphi^2 = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi;$$

$$\varphi^4 = \varphi^3 \cdot \varphi = (1 + 2\varphi)\varphi = \varphi + 2\varphi^2 = \varphi + 2(\varphi + 1) = 2 + 3\varphi;$$

$$\varphi^5 = \varphi^4 \cdot \varphi = (2 + 3\varphi)\varphi = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3(\varphi + 1) = 3 + 5\varphi;$$

$$\varphi^6 = \varphi^5 \cdot \varphi = (3 + 5\varphi)\varphi = 3\varphi + 5\varphi^2 = 3\varphi + 5(\varphi + 1) = 5 + 8\varphi;$$

$$\varphi^7 = \varphi^6 \cdot \varphi = (5 + 8\varphi)\varphi = 5\varphi + 8\varphi^2 = 5\varphi + 8(\varphi + 1) = 8 + 13\varphi;$$

$$\varphi^8 = \varphi^7 \cdot \varphi = (8 + 13\varphi)\varphi = 8\varphi + 13\varphi^2 = 8\varphi + 13(\varphi + 1) = 13 + 21\varphi;$$

$$\varphi^9 = \varphi^8 \cdot \varphi = (13 + 21\varphi)\varphi = 13\varphi + 21\varphi^2 = 13\varphi + 21(\varphi + 1) = 21 + 34\varphi;$$

...

A tabela mostra os valores das potências de φ e os números de Fibonacci.

Tabela 3.1: Potências do número de ouro

n	f_n	φ^n
1	1	$0 + \varphi$
2	1	$1 + \varphi$
3	2	$1 + 2\varphi$
4	3	$2 + 3\varphi$
5	5	$3 + 5\varphi$
6	8	$5 + 8\varphi$
7	13	$8 + 13\varphi$
8	21	$13 + 21\varphi$
9	34	$21 + 34\varphi$
...	...	...

Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela sugere uma relação entre os coeficientes das potências de φ e a sequência de Fibonacci. Isto conduz a proposição a seguir:

Segundo Zahn[33](2011, p.29-30):

Proposição 3.3 *"Para qualquer número natural $n \geq 1$, vale a igualdade:*

$$\varphi^n = f_{n-1} + f_n \cdot \varphi, \quad (3.9)$$

onde $f_n, n = 1, 2, 3, \dots$ são os números de Fibonacci e $f_0 = 0$

Demonstração: Prova-se por indução sobre n

(i) Para $n = 1$:

$$\varphi^1 = \varphi = f_{1-1} + f_1 \cdot \varphi = 0 + 1 \cdot \varphi = \varphi$$

(ii) Supõe-se que a identidade seja verdadeira para $n = k$ (hipótese de indução), ou seja, que vale: $\varphi^k = f_{k-1} + f_k \cdot \varphi$

Mostra-se que vale para $n = k + 1$, ou seja, $\varphi^{k+1} = f_k + f_{k+1} \cdot \varphi$

Utilizando a hipótese de indução e observando que:

$$\begin{aligned} \varphi^{k+1} &= \varphi^k \cdot \varphi = (f_{k-1} + f_k \cdot \varphi) \cdot \varphi = f_{k-1} \cdot \varphi + f_k \cdot \varphi^2 = f_{k-1} \cdot \varphi + f_k \cdot (1 + \varphi) = f_{k-1} \cdot \varphi + f_k \cdot \varphi + f_k = \\ &= (f_{k-1} + f_k) \cdot \varphi + f_k = f_k + f_{k+1} \cdot \varphi \end{aligned}$$

O que conclui a prova da proposição.

3.3 Número de ouro e suas representações

Segundo Ramos [25] (2013, p.37): "O número de ouro φ pode ser escrito como uma expansão infinita simples em radicais ou em forma de fração contínua infinita simples."

(a) Expansão infinita simples em radicais

Sabe-se que $\varphi^2 = \varphi + 1$, resultando que $\varphi = \sqrt{1 + \varphi}$. Substituindo-se o valor de φ na parte interna do radical por $\sqrt{1 + \varphi}$ e repetindo este processo indefinidamente, tem-se:

$$\varphi = \sqrt{1 + \varphi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

(b) Fração contínua infinita simples

Como $\varphi = \frac{\varphi^2}{\varphi}$ e sendo $\varphi^2 = \varphi + 1$, pode-se escrever $\varphi = \frac{\varphi + 1}{\varphi}$ ou $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$, substituindo nessa igualdade o φ do segundo membro por $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ e repetindo esse processo indefinidamente, tem-se:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Olhando para as frações contínuas parciais, nota-se que:

- $1 + \frac{1}{1} = 2$
- $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$
- $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3};$
- $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$
- $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = 1 + \frac{1}{\frac{8}{5}} = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$
- ...

Observa-se que os resultados correspondem à razões ente números de Fibonacci consecutivos indicados na tabela [3.2](#)

Tabela 3.2: Razão entre números de Fibonacci consecutivos

Razão	Resultado
1/1	1
2/1	2
3/2	1,5
5/3	1,6667
8/5	1,6
13/8	1,625
21/13	1,5
34/21	1,6154
55/34	1,6176
89/55	1,6182
144/89	1,6178
...	...

Fonte:RAMOS, 2013, p.39

Sendo $\varphi = 1,6180339887 \dots$ surge a pergunta:

O limite da razão de termos sucessivos da sequência de Fibonacci é igual a φ ?

3.4 Conexão entre o número de ouro e sequência de Fibonacci

Antes de apresentar o teorema que estabelece a conexão entre a sequência de Fibonacci e o número de ouro, precisa-se de dois resultados preliminares:

De acordo com Guidorizzi[12](2001, p.113):

Lema 3.1 "Se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$."

Demonstração: Seja $a = 1 + h, h \geq 0$

Pela fórmula do Binômio de Newton:

$$(1 + h)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot h + \binom{n}{2} \cdot h^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot h^n$$

Daí,

$$(1 + h)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot h, \text{ para } n \geq 1.$$

Ou seja,

$(1 + h)^n = 1 + n \cdot h$, para $n \geq 1$.

como $h \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + nh = +\infty$, logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty, a \geq 1$$

Conforme queria se mostrar.

Ainda de acordo com Guidorizzi[12](2001, p.114):

Lema 3.2 "Se $a \in \mathbb{R}$ e $|a| < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ "

Demonstração: Inicialmente, observa-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty, \quad \text{então} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n} = 0$$

De $|a| < 1$, segue que $\frac{1}{|a|} > 1$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)} = 0$$

pois, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = +\infty$, conforme lema 3.1.

Segundo Ramos [25] (2013, p.39):

Teorema 3.1 "A razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci converge para o número de ouro quando n tende para o infinito¹"

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi \quad (3.10)$$

Demonstração: Pela Fórmula de Binet 2.8, utilizando-a para $n + 1$ e n , tem-se:

$$f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \quad (3.11)$$

e

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (3.12)$$

¹ Segundo salienta Lívio [19](2011), esta conexão foi descoberta em 1611 (embora possivelmente um anônimo italiano o tenha feito antes) pelo famoso astrônomo alemão Johannes Kepler. Porém, mais de cem anos se passaram antes que esta conexão fosse provada (e, mesmo assim, não totalmente) pelo matemático escocês Robert Simson (1687–1768). Kepler, aliás, ao que tudo indica, topou com a sequência de Fibonacci por conta própria e não lendo o Liber Abaci.

Dividindo as equações 3.11 por 3.12, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+1}}{f_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}} \right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \right]} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n} \end{aligned}$$

Como $-1 \leq \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \leq 1$, tem-se do lema 3.2 que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} = 0$

Portanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n} \right] = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

que conclui a prova da proposição:

O resultado apresentado, na verdade é válido para todas as sequências de Fibonacci (a demonstração fica a cargo do leitor), como bem elucida Huntley[15](1985, p.55):

[...] o φ , em conformidade com sua característica de aparecer inesperadamente em locais estranhos, está relacionado com qualquer sequência de formada de acordo com a lei segundo a qual cada termo é soma dos dois termos anteriores, quaisquer que sejam os dois primeiros termos: $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. A razão de termos sucessivos, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, aproxima-se cada vez mais de φ , à medida que n aumenta.

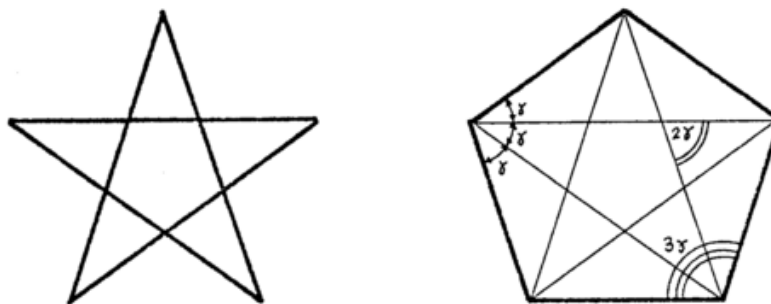
3.5 Pentagrama e número de ouro

De acordo com Pereira, Lopes e Andrade [24](2009), desde os primórdios da humanidade, o ser humano sempre se sentiu envolto por forças superiores e isso fez com que fosse em busca de

imagens e objetos, criando símbolos, de modo a se proteger. Dentre estes inúmeros símbolos criados pelo homem, se destaca o pentagrama. A geometria do pentagrama também ficou conhecida como a proporção divina, pois é rica em razões áureas.

Pereira, Lopes e Andrade[24](2009) salientam que o pentágono regular é uma das figuras mais interessantes de toda a história antiga da matemática. No século VI, em Crotona, sul da Itália, havia uma seita filosófico-religiosa, liderada por Pitágoras. Um dos pontos fundamentais de sua doutrina era o lema "Os números governam o mundo", sendo que, para eles, números eram apenas os números naturais sobre os quais se podia estabelecer relações, tomar razões e, consequentemente, formar frações. As diagonais do pentágono regular formam o pentagrama conforme figura 3.1, um símbolo bastante usado pelos seguidores de Pitágoras no século VI. Era o emblema sagrado da Irmandade Pitagórica que representava a harmonia entre o corpo e alma e a maneira como reconheciam os seus membros. A sociedade de Pitágoras era uma seita constituída de homens e mulheres que viviam em comunidade e se abstinham de todos os confortos, dedicando-se apenas a uma vida de moderação e à prática da cura.

Figura 3.1: Pentagrama e pentágono regular



Fonte: RAMOS, 2013, p.47-48

Conforme ainda relatam Pereira, Lopes e Andrade [24](2009), se medirmos os ângulos formados no pentágono indicado na figura 3.1 verifica-se que os ângulos que aparecem apresentam uma relação de múltiplos inteiros entre si. Para os pitagóricos, que eram grandes devotos das proporções exatas, essa idéia de tentar encontrar proporções geométricas exatas entre medidas levou-os, como suspeita pelos historiadores da matemática, através do pentágono regular, uma das descobertas mais importantes, a qual, não traria resultados tão "exatos" assim, pois algumas razões existentes no pentágono apresentariam um resultado surpreendente para os pitagóricos

que culminou com a descoberta da incomensurabilidade². de determinados segmentos.

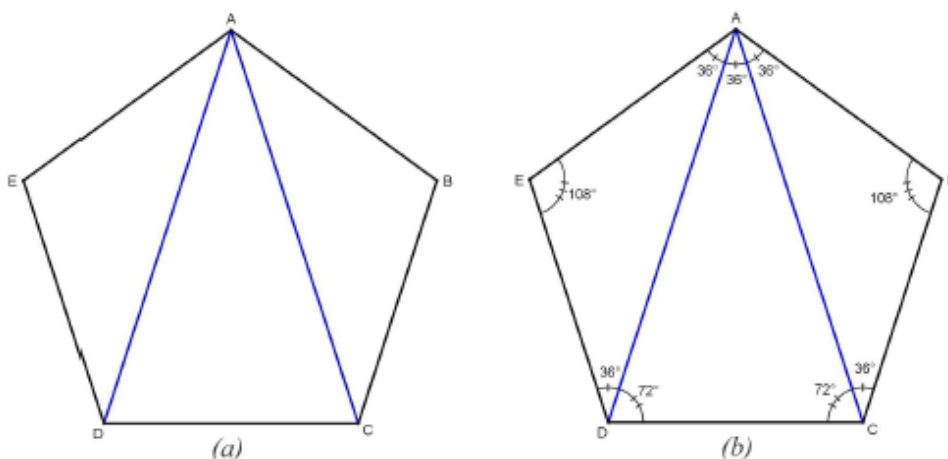
Segundo salienta Ramos [25] (2013) as proposições a seguir estabelecem várias relações entre o pentagrama, pentágono regular e o número de ouro.

Proposição 3.4 *O quociente entre a diagonal e o lado de um pentágono regular corresponde ao número de ouro (razão áurea).*

Demonstração: Da geometria plana, sabe-se que a soma S dos ângulos internos de um polígono é dada por $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$, onde n é o número de lados do polígono. Para o pentágono, tem-se $n = 5$ e, portanto, $S = (5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Como o pentágono é regular, cada um de seus ângulos tem a mesma medida, igual a $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$.

Seja o pentágono representado na figura 3.2 com os ângulos internos de 108° e as diagonais AC e AD.

Figura 3.2: Pentágono regular e triângulo áureo



Fonte: RAMOS, 2013, p.48

Considerando o triângulo ABC isósceles (as medidas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são os lados do pentágono regular e, portanto, são congruentes) no pentágono ABCDE, teremos que $\hat{B}CA = \hat{C}AB = x$ e, pela soma dos ângulos internos de um triângulo $\hat{A}BC + \hat{B}CA + \hat{C}AB = 180^\circ \Leftrightarrow 108^\circ + x + x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 36^\circ$. Assim, $\hat{B}CA = \hat{C}AB = 36^\circ$. De forma análoga, tem-se que o triângulo ADE é congruente ao triângulo ABC e, desta forma, $\overline{AC} = \overline{AD}$. Portanto, o triângulo ACD é isósceles.

²"A existência de segmentos incomensuráveis implica na insuficiência dos sistemas numéricos conhecidos – números naturais e racionais - para efetuar medidas dos objetos geométricos mais simples, como o quadrado e o círculo. A solução que se impôs, na época, e que levou séculos para ser adotada, foi a de ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados números irracionais" (GARCIA [11], p.13)

No vértice C do pentágono, observa-se que $36^\circ + \hat{ACD} = 108^\circ \Leftrightarrow \hat{ACD} = 72^\circ$ e, consequentemente $\hat{ADC} = 72^\circ$. Conforme proposição 1.1, o triângulo ACD é áureo. sendo AD um dos lados do triângulo (diagonal do pentágono regular ABCDE) e DC a base do triângulo (lado do pentágono regular ABCDE), tem-se:

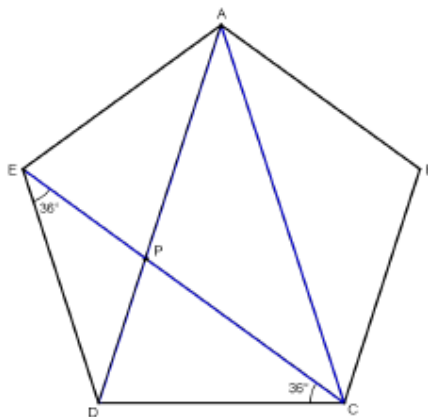
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \varphi$$

conforme se desejava provar.

Proposição 3.5 *O ponto de intersecção de duas diagonais quaisquer de um pentágono regular divide-as na razão áurea.*

Demonstração: Seja a diagonal EC que intercepta a diagonal AD do pentágono regular mostrado na figura 3.3.

Figura 3.3: Razão áurea das diagonais



Fonte: RAMOS, 2013, p.49

O triângulo CDE é isósceles (as medidas $\overline{DC}$ e $\overline{ED}$ são os lados do pentágono regular e, portanto, são congruentes) no pentágono ABCDE. Assim, teremos que $\hat{ECD} = \hat{DEC} = y$ e $\hat{CDE} = 108^\circ$ (medida do ângulo interno do pentágono regular) e, pela soma dos ângulos internos do triângulo CDE, tem-se: $\hat{ECD} + \hat{DEC} + \hat{CDE} = 180^\circ \Leftrightarrow y + y + 108^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow y = 36^\circ$. Portanto, $\hat{ECD} = \hat{DEC} = 36^\circ$. Da figura 3.2- b), sabe-se que $\hat{ACD} = 72^\circ$ e, consequentemente, CE é bissetriz do vértice C do triângulo ACD.

Novamente, de acordo com a proposição 1.1, sendo o triângulo ACD áureo onde AD é um dos lados do triângulo (diagonal do pentágono regular ABCDE) e DC a base do triângulo (lado do

pentágono regular ABCDE), tem-se:

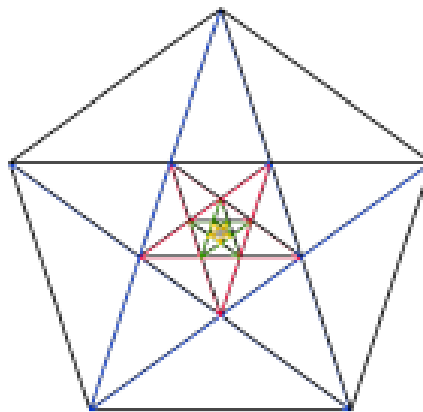
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}, \quad \text{sendo } \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \varphi, \text{ tem-se: } \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \varphi$$

Do triângulo ACE áureo, conclui-se também que $\frac{\overline{CP}}{\overline{EP}} = \varphi$

Assim, o ponto de intersecção de duas diagonais quaisquer, divide-as na razão áurea, conforme se desejava mostrar.

Proposição 3.6 *A sequência infinita de pentágonos e pentagramas a partir de um pentágono regular (figura 3.4), gera a sequência $(1, \frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi^2}, \frac{1}{\varphi^3}, \dots)$ onde os termos de ordem ímpar (termos $\frac{1}{\varphi^n}$, $n = 0, 2, 4$) formam a subsequência de lados da sequência de pentágonos regulares e, a subsequência dos termos de ordem par (termos $\frac{1}{\varphi^n}$, $n = 1, 3, 5$) formam a subsequência dos lados dos pentagramas construídos.*

Figura 3.4: Sequência infinita de pentágonos regulares e pentagramas

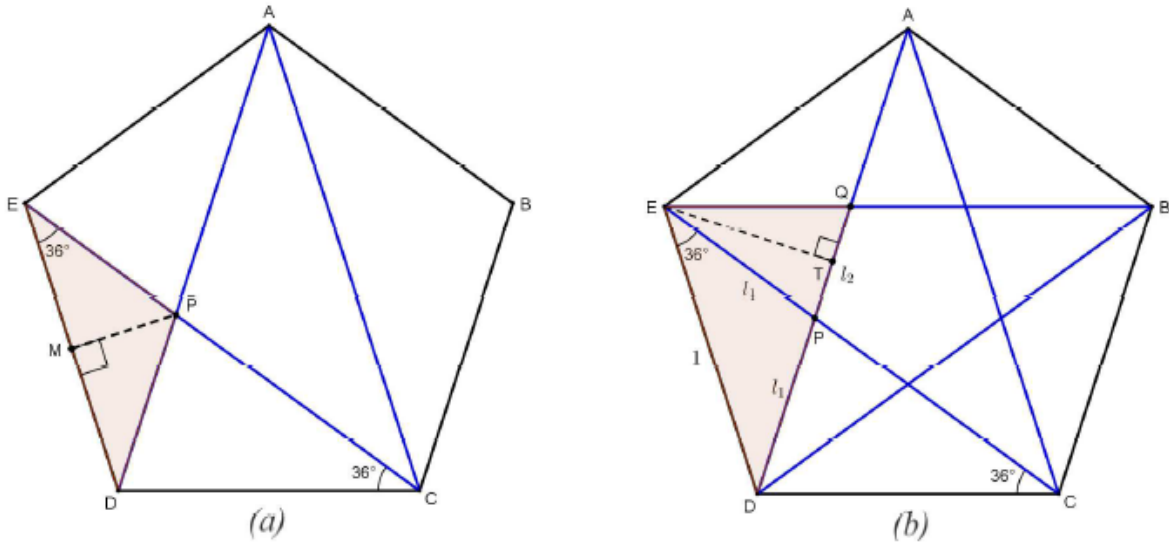


Fonte: RAMOS, 2013, p.48

Demonstração Antes de determinar os lados dos pentágonos e dos pentagramas, serão demonstrados os valores dos cossenos dos ângulos de 36° e 72° .

(a) Determinação de $\cos 36^\circ$ e $\cos 72^\circ$

Figura 3.5: Triângulos no pentágono



Fonte: RAMOS, 2013, p.50

Seja o triângulo DEP no pentágono ABCDE na figura 3.5-(a), onde foi traçada a altura relativa ao vértice P. Como o triângulo DEP é isósceles ($\overline{EP} = \overline{PD}$), a altura coincide com a mediana relativa a este vértice. Assim, $\overline{EM} = \overline{MD} = \frac{\overline{DE}}{2}$.

Utilizando relações trigonométricas no triângulo retângulo $\triangle EMP$, tem-se:

$$\cos 36^\circ = \frac{\overline{EM}}{\overline{EP}} = \frac{\frac{\overline{DE}}{2}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EP}} \cdot \frac{1}{2} \quad (3.13)$$

mas, da proposição 3.4, $\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} = \varphi$ e do conceito segmento áureo(aplicado ao segmento CE), vem: $\frac{\overline{CE}}{\overline{CP}} = \varphi$. De posse destes resultados, tem-se: $\overline{DE} = \overline{CP}$

Substituindo essa igualdade na equação 3.13, tem-se:

$$\cos 36^\circ = \frac{\overline{DE}}{\overline{EP}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\overline{CP}}{\overline{EP}} \cdot \frac{1}{2}$$

Mas, da proposição 3.5, $\frac{\overline{CP}}{\overline{EP}} = \varphi$. Portanto:

$$\cos 36^\circ = \varphi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\varphi}{2}$$

Utilizando a expressão do arco duplo para o cosseno de um ângulo e lembrando que $\varphi^2 = \varphi + 1$ e $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$ (ver item 3.1 na página 52), tem-se:

$$\cos 72^\circ = 2 \cdot (\cos 36^\circ)^2 - 1 = 2 \cdot \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 - 1 = \frac{\varphi^2}{2} - 1 = \frac{\varphi^2 - 2}{2} = \frac{(\varphi + 1) - 2}{2} = \frac{\varphi - 1}{2} = \frac{\frac{1}{\varphi}}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

b) Determinação dos lados dos pentágonos e dos pentagramas

- Lado do primeiro pentágono (l_0)

De acordo com a proposição 3.6, o primeiro termo da sequência corresponde ao lado do pentágono ABCDE. Assim, a medida do lado do pentágono ABCDE será $l_0 = 1$

- Lado do primeiro pentagrama (l_1)

De acordo com a figura 3.5-(b), o lado l_1 do primeiro pentagrama será determinado aplicando a lei dos cossenos ao $\triangle DEP$. Portanto, tem-se:

$$(l_1)^2 = (1)^2 + (l_1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot l_1 \cdot \cos 36^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot l_1 \cdot \frac{\varphi}{2} = 1 \Leftrightarrow l_1 = \frac{1}{\varphi}$$

- Lado do segundo pentágono l_2 (interior ao primeiro pentagrama).

Ainda de acordo com a figura 3.5-(b), o $\triangle EPQ$ é isósceles ($\overline{EP} = \overline{EQ}$) e os ângulos da base são congruentes $\hat{EPQ} = \hat{EQP} = 72^\circ$ ³. Assim, traçando a altura relativa ao vértice E, tem-se o triângulo retângulo EPT, onde, usando relações trigonométricas, determina-se $\overline{PT}$

$$\cos 72^\circ = \frac{\overline{PT}}{\overline{EP}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\varphi} = \frac{\overline{PT}}{l_1} \Leftrightarrow \frac{1}{2\varphi} = \frac{\overline{PT}}{\frac{1}{\varphi}} \Leftrightarrow \overline{PT} = \frac{1}{2\varphi^2}$$

No entanto,

$$\overline{PT} = \frac{l_2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\varphi^2} = \frac{l_2}{2} \Leftrightarrow l_2 = \frac{1}{\varphi^2}$$

- Lado do segundo pentagrama l_3 (interior ao segundo pentágono)

Mostra-se a figura 3.6 para determinação de l_3 :

³No triângulo EPQ, o ângulo $\hat{EPQ}$ é ângulo externo do triângulo CDE. Assim, pelo teorema do ângulo externo, tem-se: $\hat{EPQ} = \hat{ECD} + \hat{CED} = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$

O $\triangle OPQ$ é isósceles ($\overline{OP} = \overline{OQ}$) e os ângulos da base são congruentes $\hat{OP}Q = \hat{OQ}P = 36^\circ$.

$$(l_3)^2 = \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^2 + (l_3)^2 - 2 \cdot \frac{1}{\varphi^2} \cdot l_3 \cdot \cos 36^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{\varphi^2} \cdot l_3 \cdot \cos 36^\circ = \frac{1}{\varphi^4} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{\varphi^2} \cdot l_3 \cdot \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\varphi^4}$$
$$\cos 72^\circ = \frac{l_4}{l_3} \Leftrightarrow l_4 = l_3 \cdot 2 \cdot \cos 72^\circ \Leftrightarrow l_4 = \frac{1}{\varphi^3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\varphi} \Leftrightarrow l_4 = \frac{1}{\varphi^4}$$
$$l_n = \frac{1}{\varphi^n} \quad , \text{ para cada } n = (0, 2, 4, 6, \dots).$$

- $$l_5^2 = \left(\frac{1}{\varphi^4}\right)^2 + l_5^2 - 2 \cdot \frac{1}{\varphi^4} \cdot l_5 \cdot \cos 36^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{\varphi^4} \cdot l_5 \cdot \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\varphi^8} \Leftrightarrow l_5 = \frac{1}{\varphi^5}$$

69

Observa-se que, de uma forma geral, a cada passo n , com $n = (0, 2, 4, 6, \dots)$ da construção dos pentágonos regulares, obtém-se um triângulo isóscele de ângulos da base 36° e base de medida $\frac{1}{\varphi^n}$, conforme figura 3.6 b). Assim, tem-se:

$$l_{n+1}^2 = \left(\frac{1}{\varphi^n}\right)^2 + l_{n+1}^2 - 2 \cdot \frac{1}{\varphi^n} \cdot l_{n+1} \cdot \cos 36^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{\varphi^n} \cdot l_{n+1} \cdot \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\varphi^{2n}} \Leftrightarrow l_{n+1} = \frac{1}{\varphi^{n+1}}$$

Portanto, tem-se:

$$l_n = \frac{1}{\varphi^n} \quad \text{para cada } n = (1, 3, 5, 7, \dots).$$

Assim, de acordo com os resultados encontrados, tem-se a sequência:

$$\left(1, \frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi^2}, \frac{1}{\varphi^3}, \dots\right)$$

conforme se queria demonstrar.

Capítulo 4

Aplicações no ensino básico

Neste capítulo mostram-se aplicações no nono ano do ensino fundamental e no ensino médio, com o objetivo de apresentar aos alunos a sequência de Fibonacci e a razão áurea. Apresentam-se curiosidades sobre a sequência de Fibonacci e análise de questões de vestibulares e do Enem, sobre os temas propostos nesta dissertação.

Dentro do contexto do ensino da matemática, Biembengut [1] (2000, p. 88), afirma:

O número de ouro pode valer também como ponto de partida para introduzir os números irracionais e a equação do segundo grau, sendo assim, indicado para o nono ano do ensino fundamental, o que permite ao aluno perceber de onde e como a matemática é aplicada.

O ensino da matemática é pautado em discussões relacionadas às formas de transmissão do conteúdo, de maneira a oferecer aos alunos um embasamento teórico que apresenta o rigor científico necessário ao nível em que ele está inserido e, quando possível, integrando este conhecimento no contexto de vida do aluno, em situações do dia-a-dia para que, dentro dessa percepção, segundo salienta Santos, Andrade e Oliveira [27] (2010), a matemática possa ser valorizada e reconhecida sua importância.

De acordo com os PCN's [23] (1998, p.56): "[...], se esse trabalho for feito através da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a matemática e outras áreas do conhecimento."

A aprendizagem matemática está ligada à compreensão e à fixação do significado do objeto a ser ensinado. Para tornar as aulas mais significativas, pode-se mostrar os pontos altos da matemática de ontem, comparando com a sua aplicação hoje, e assim o aluno vai perceber como o mundo que o cerca está repleto desta ciência. Dentro da concepção da presente dissertação, a

teoria de Ausubel¹, segundo Fernandes [7](2011), leva em conta a história do sujeito e ressalta o papel dos docentes na proposição de situações que favoreçam a aprendizagem. De acordo com ele, há duas condições para que a aprendizagem significativa ocorra: o conteúdo a ser ensinado deve ser potencialmente revelador e o estudante precisa estar disposto a relacionar o material de maneira consistente e não arbitrária.

Como salienta Fernandes[7](2011), ensinar sem levar em conta o que o estudante já sabe é um esforço em vão, pois o novo conhecimento não tem onde se ancorar. É exatamente dentro deste contexto de “ancoragem” que se propõe mostrar os temas sugeridos na dissertação, desde a concepção recursiva da sequência de Fibonacci e sua incrível conexão com a razão áurea, a qual surge naturalmente em vários campos da ciência, como, por exemplo, botânica e zoologia e em outros de forma proposital como na música, na arquitetura e na arte, traduzindo uma ideia de beleza e perfeição, como retratada em obras de Leonardo da Vinci. Neste contexto, se evidencia a transdisciplinaridade (conceito que articula elementos que passam entre, além e através das disciplinas, numa busca de compreensão da complexidade do mundo real) de modo a tornar a aprendizagem significativa para o aluno.

4.1 Atividades

4.1.1 Análise combinatória e sequência de Fibonacci

Esta atividade, descrita em Freire e Dias [10](2009), direcionada a alunos da segunda série do ensino médio, consiste em inserir dentro do contexto de análise combinatória, mais especificamente o princípio fundamental da contagem, os fundamentos básicos da lógica presentes no estudo das sequências, particularmente, a de Fibonacci.

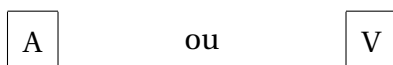
A atividade consiste em propor de quantas maneiras pode-se pintar a faixa abaixo, composta de 10 quadrados adjacentes, apenas com as cores azul ou vermelho, de modo que dois quadrados adjacentes não possam ser pintados de azul.



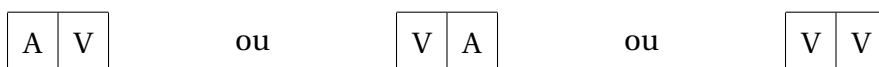
Solução:

¹ Conforme salienta Fernandes [7](2011), o pesquisador norte-americano David Paul Ausubel (1918-2008) dizia que, quanto mais sabemos, mais aprendemos.

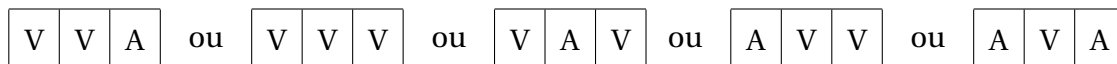
Inicia-se considerando que a faixa tem apenas um quadrado. Assim, ela terá duas maneiras de ser pintada, pinta-se de azul ou de vermelho.



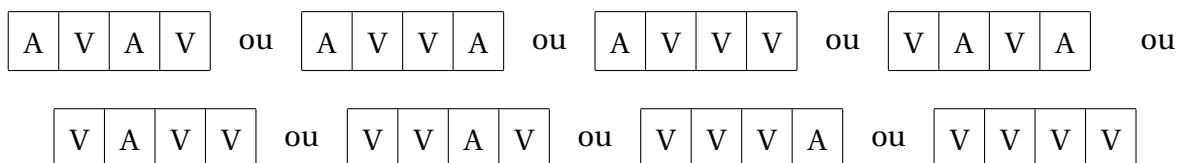
Considerando agora que a faixa tem dois quadrados. Se o primeiro quadrado foi azul, o segundo somente pode ser vermelho (não podem existir dois quadrados azuis adjacentes). Mas, se o primeiro quadrado foi vermelho, o segundo pode ser pintado de azul ou vermelho. Desta forma, existirão 3 maneiras de ser pintada a faixa:



Considerando agora que a faixa tem três quadrados. Neste caso, se o primeiro quadrado foi pintado de vermelho (V), têm-se 3 possibilidades para pintar os dois quadrados seguintes (VA,VV ou AV) e, se o primeiro quadrado for pintado de azul, o segundo não pode ser azul e, assim, têm-se duas possibilidades para os dois próximos quadrados (VV e VA). Portanto, existirão 5 maneiras de pintar a faixa:



Considerando agora que a faixa tem quatro quadrados. Se a pintura do primeiro quadrado for vermelha, observa-se que os três próximos quadrados equivalem às 5 maneiras descritas como se a faixa tivesse 3 quadrados e, se o primeiro quadrado for azul, o segundo quadrado terá que ser pintado de vermelho (V) e os dois quadrados restantes podem ser pintados de três maneiras diferentes, como se fosse o caso da faixa ter dois quadrados. Assim, o número de maneiras de pintar uma faixa com quatro quadrados será $5 + 3 = 8$ maneiras:



Neste momento, é importante perceber o que está ocorrendo, ou seja, porque o modelo recursivo de Fibonacci acontece. Para o caso da faixa ter 5 quadrados, consideremos que o primeiro quadrado foi pintado de vermelho, os 4 próximos quadrados terão 8 maneiras de serem pintados (como se a faixa tivesse quatro quadrados) e, se o primeiro quadrado for pintado de azul (A), o

segundo terá que ser pintado de vermelho e, assim, os 3 quadrados restantes poderão ser pintados de 5 maneiras diferentes (como se a faixa tivesse 3 quadrados). Desta forma, para uma faixa com 5 quadrados, tem-se $8 + 5 = 13$ maneiras. Observe que sempre somam-se os dois resultados anteriores, caracterizando assim, o modelo recursivo de Fibonacci. Seguindo esse raciocínio para 6, 7, 8, 9 e 10 quadrados obtém-se, respectivamente, 21, 34, 55, 89 e 144 maneiras diferentes de pintar a faixa. Como a faixa apresentada tem 10 quadrados, a resposta é 144 maneiras diferentes de pintar a faixa sem que dois quadrados adjacentes sejam pintados de azul.

Comentário da atividade:

Essa atividade constitui uma nova maneira de pensar a prática pedagógica que norteia o ensino de matemática, principalmente no tocante ao ensino da análise combinatória. No primeiro momento, a maioria dos alunos recorreriam ao princípio fundamental da contagem, enraizado pelo princípio multiplicativo que, evidentemente, não é o caminho a ser trilhado nesta atividade. A idéia central da atividade proposta é instigar no aluno a capacidade de buscar novas alternativas quando novos elementos são introduzidos no contexto da pergunta como, por exemplo, o fato de não ser permitido dois quadrados vizinhos serem pintados da mesma cor, no caso, azul. Observa-se que, se a pergunta fosse: De quantas maneiras diferentes a faixa com 10 quadrados poderia ser pintada utilizando as cores azul ou vermelha? A resposta seria simplesmente $2^{10} = 1024$, que é uma resposta bastante diferente. A solução da atividade, muito elegante por sinal, recaiu no estudo das sequências, particularmente, a de Fibonacci.

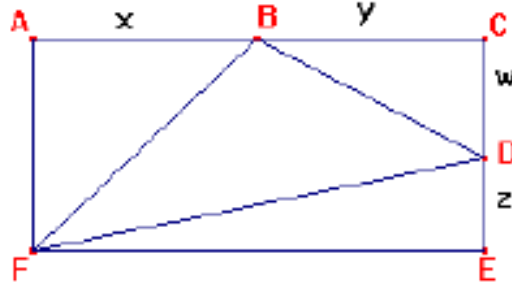
4.1.2 Geometria plana e a razão áurea

A atividade, sugerida por Veiga [30] (2006), contempla o aparecimento da razão áurea dentro do contexto do estudo das áreas e de semelhança de triângulos na geometria plana inserindo, ainda, a resolução de equações do segundo grau. A atividade será aplicada para alunos do nono ano do ensino fundamental ou da primeira série do ensino médio.

A questão que contempla a atividade é a seguinte:

Veiga [30] (2006, p.48) cita: “ Dados um retângulo e um triângulo inscrito neste retângulo conforme figura 4.1, de forma que quando removido deixa três triângulos todos com a mesma área. Mostre que os lados do retângulo estão divididos na mesma razão e determine o seu valor”.

Figura 4.1: Razão áurea e Geometria plana



Fonte: VEIGA, 2006, p.48

Solução:

Seja o retângulo ACEF mostrado na figura 4.1, onde $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$, $\overline{CD} = w$ e $\overline{DE} = z$.

As áreas A dos triângulos ABF, BCD e DEF são, respectivamente:

$$A_{\triangle ABF} = \frac{x \cdot (w + z)}{2} \quad A_{\triangle BCD} = \frac{y \cdot w}{2} \quad A_{\triangle DEF} = \frac{z \cdot (x + y)}{2}$$

De acordo com o enunciado, as áreas dos triângulos ABF, BCD e DEF são iguais. Portanto:

$$\frac{x \cdot (w + z)}{2} = \frac{y \cdot w}{2} = \frac{z \cdot (x + y)}{2} \Leftrightarrow x \cdot (w + z) = y \cdot w = z \cdot (x + y) \quad (4.1)$$

Da equação 4.1, tem-se:

$$x \cdot (w + z) = y \cdot w \Leftrightarrow x = \frac{y \cdot w}{w + z} \quad (4.2)$$

e

$$x \cdot (w + z) = z \cdot (x + y) \Leftrightarrow xw + xz = xz + yz \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{w}{z} \quad (4.3)$$

Assim, de acordo com a equação 4.3, conclui-se que os dois lados do retângulo são divididos na mesma razão.

Para determinarmos o valor dessa razão substitui-se a equação 4.2 na equação 4.3. Assim, tem-se:

$$\frac{y}{x} = \frac{w}{z} \Leftrightarrow \frac{y}{\frac{y \cdot w}{w + z}} = \frac{w}{z} \Leftrightarrow \frac{w + z}{w} = \frac{w}{z} \Leftrightarrow w^2 = z^2 + zw \Leftrightarrow \frac{w^2}{z^2} = 1 + \frac{w}{z} \Leftrightarrow \left(\frac{w}{z}\right)^2 - \frac{w}{z} - 1 = 0$$

Observando que o valor da razão procurada é exatamente $\frac{w}{z}$, chamando essa razão de r , tem-se a equação do segundo grau $r^2 - r - 1$, que tem como solução positiva:

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Portanto, a razão entre os lados do retângulo corresponde ao número de ouro.

Comentário da atividade:

A presente atividade tem como objetivo enfatizar o desenvolvimento algébrico com dados literais que recaiam na resolução de uma equação do segundo grau para determinação da razão pedida. A importância da atividade descrita é a série de competências e habilidades envolvidas no seu contexto, inclusive com a surpreendente resposta da razão ser um número irracional (o resultado esperado talvez fosse um número racional) e, mais precisamente, a razão áurea (neste momento, pode-se tecer comentários sobre a descoberta dos números irracionais no contexto do mundo Pitagórico e até demonstrar como se obtém a razão áurea descrita na seção 1.3 da página 7). Uma outra curiosidade que pode ser abordada e aprofundada é que a razão entre a diagonal e o lado de um pentágono regular corresponde ao número de ouro conforme demonstrado na proposição 3.4 na página 64, bem como, sua associação com o pentagrama de acordo com a proposição 3.6 da página 66.

4.1.3 A razão áurea no corpo humano

Para se encontrar o número de ouro na natureza não é preciso ir muito longe, pois existe em nosso corpo uma tendência incrível dela se manifestar², tal tendência ocorre desde o formato espiralado da orelha até o umbigo dividindo todo o comprimento do corpo. Antes de iniciar a atividade, o professor poderá comentar o fato de que, desde a Grécia Antiga, já se sabia que a razão entre algumas medidas do corpo humano tendem a ser o número φ , geralmente associado a um padrão de beleza estética. Ainda se pode comentar a obra de Leonardo da Vinci, *o homem vitruviano*, vista na seção 1.8.9 da página 32.

A atividade que pode ser proposta, sugerida por Ramos [25](2013), para alunos do nono ano do ensino fundamental ou primeira série do ensino médio é estabelecer razões entre algumas medidas das mais variadas partes do corpo humano e descobrir qual dos alunos mais se aproxima do padrão de beleza estética que norteia essa razão. Hoje, se conhecem várias razões do corpo

²Não foi encontrado na bibliografia da presente dissertação nenhum estudo científico que possa comprovar que o corpo humano tende a ter "razões áureas".

humano que tendem a ser áureas. Seguem abaixo, algumas delas:

- Razão da altura total pela altura do umbigo;
- Razão entre a medida que vai do ombro até a ponta do dedo médio pela medida do cotovelo até a ponta do dedo médio;
- Razão da altura dos quadris pela altura dos joelhos;
- Razão da medida da cintura até a cabeça pela medida da cintura até o tórax;
- Razão do tamanho dos dedos pela medida da dobra central até a ponta.

Após essa breve introdução histórica, pode-se organizar os alunos em equipes, com iguais quantidades de homens e mulheres, e fornecer-lhes a tabela 4.1 para ser preenchida, contendo alguns dados relativos às medidas do corpo humano. Após feitas as medições, será procedido um estudo estatístico sobre as medidas, incluindo-se cálculo de média aritmética e desvio padrão, conforme as fórmulas 4.4 e 4.5, onde será eleito, dentro de cada grupo, e, posteriormente, em toda a sala, o casal de alunos denominado "casal vitruviano" (aquele casal cuja média mais se aproxima da razão áurea e com menor desvio padrão).

As fórmulas da média aritmética (x_m) e do desvio padrão (DP) são :

$$x_m = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad (4.4)$$

$$DP = \sqrt{\frac{(x_1 - x_m)^2 + (x_2 - x_m)^2 + (x_3 - x_m)^2}{3}} \quad (4.5)$$

Tabela 4.1: Razões entre medidas do corpo humano

Medidas	Alunos					
	1	2	3	4	5	6
Da altura (a)						
Do umbigo até o chão (b)						
Do ombro até a ponta do dedo médio (c)						
Do cotovelo até a ponta do dedo médio (d)						
Da linha dos lábios até o queixo com a face relaxada (e)						
Da ponta do nariz à linha dos lábios com a face relaxada (f)						
Razões	Resultados					
$x_1 = a/b$						
$x_2 = c/d$						
$x_3 = e/f$						
Média aritmética das 3 razões (x_m)						
Desvio padrão das 3 razões (DP)						

Fonte: Elaborada pelo autor

Comentário da atividade:

A presente atividade consiste em integrar os estudos sobre a razão áurea, com primórdios na Grécia antiga, ao cotidiano do aluno enfatizando que tal razão pode ser associada a um padrão estético de harmonia e beleza inerente a grande maioria das pessoas. Nesse momento, pode-se abrir discussões amplas no ponto de vista nas mais variadas áreas, incluindo-se a filosofia, teologia e a psicologia. Pode-se ainda propor pesquisas da origem do nome "Divina proporção" que fora atribuído à razão áurea. Um outro aspecto a ser destacado na atividade é o estudo estatístico das medidas realizadas, inclusive com o cálculo do desvio padrão que constitui uma das variáveis de dispersão mais significativas da Estatística.

4.1.4 Construções geométricas

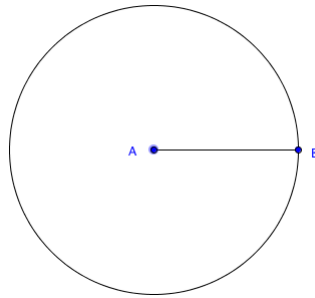
As construções geométricas, utilizando apenas régua e compasso, são de extrema importância para valorizar o lúdico e mostrar que é possível a construção de medidas que representem números irracionais. Apresenta-se a construção do ponto médio de um segmento, média e extrema razão (presente no segmento áureo), número de ouro e o retângulo áureo. A presente atividade é direcionada para alunos do nono ano do Ensino fundamental.

(i) Ponto médio de um segmento.

Inicialmente, determina-se o ponto médio de um segmento qualquer, utilizando-se apenas régua e compasso. Seja um segmento AB qualquer:

- 1) Com compasso em A e raio AB descreve-se uma circunferência α .

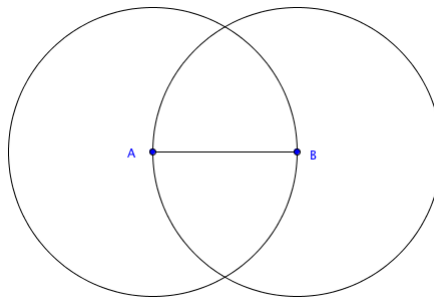
Figura 4.2: Circunferência α



Fonte: Elaborada pelo autor

- 2) Com compasso em B e raio AB descreve-se uma circunferência β .

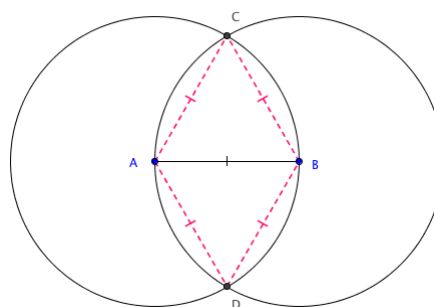
Figura 4.3: Circunferência β



Fonte: Elaborada pelo autor

- 3) α e β se intersectam em dois pontos C e D cujas distancias a A e a B são iguais a $\overline{AB}$.

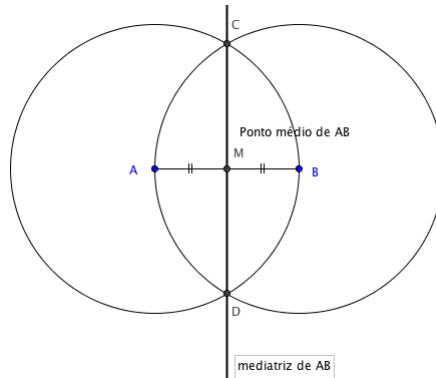
Figura 4.4: Pontos de interseção



Fonte: Elaborada pelo autor

- 4) Com uma régua traça-se a reta CD que será a mediatriz de AB. A interseção de CD com AB é o ponto médio de AB.

Figura 4.5: Determinação da mediatriz



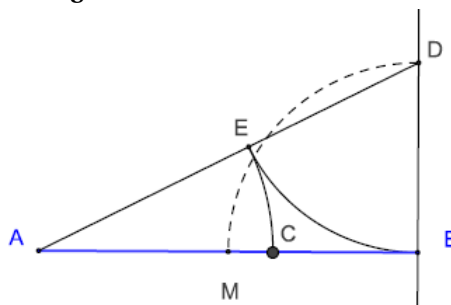
Fonte: Elaborada pelo autor

Rodrigues [26](2008, p.84-86) cita:

(ii) Média e extrema razão

"Será mostrado como determinar, com régua e compasso, um ponto C pertencente a um segmento AB, tal que C divida o segmento AB, de comprimento $\overline{AB} = a$ em média e extrema razão, conforme figura 4.6":

Figura 4.6: Média e extrema razão



Fonte: RODRIGUES, 2008, p.85

Passos da construção:

- 1) Determina-se o ponto médio M do segmento AB, conforme item i). Assim, $\overline{MB} = \frac{a}{2}$.
- 2) Determina-se uma reta perpendicular ao segmento AB, que passe pelo ponto B.

- 3) Marca-se um ponto D sobre a reta anterior, tal que $\overline{BD} = \overline{BM} = \frac{a}{2}$.

Para isso, centra-se o compasso em B e traça-se uma circunferência com raio de medida $\overline{BM}$.

- 4) Traça-se o segmento AD.

- 5) Marca-se o ponto E sobre o segmento AD, tal que $\overline{BD} = \overline{ED}$. Assim, $\overline{ED} = \frac{a}{2}$.

Para isso, centra-se o compasso em D e traça-se uma circunferência com raio de medida $\overline{BD}$.

- 6) Marca-se o ponto C sobre o segmento AB, tal que $\overline{AE} = \overline{AC}$.

Para isso, centra-se o compasso em A e traça-se uma circunferência com raio de medida $\overline{AE}$.

Denomina-se $\overline{AE} = \overline{AC} = x$.

Justificativa da construção:

Considera-se o triângulo retângulo ABD com as medidas:

$$\overline{AB} = a$$

$$\overline{BD} = \frac{a}{2}$$

$$\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED} = x + \frac{a}{2}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2$$

Esta equação coincide com a equação 1.4 da página 9, correspondendo, assim, ao resultado desejado.

Conforme Veiga [30] (2006, p.37-39):

(iii) Número de ouro

"A construção com régua e compasso do número de ouro φ pode ser determinada seguindo os passos descritos:"

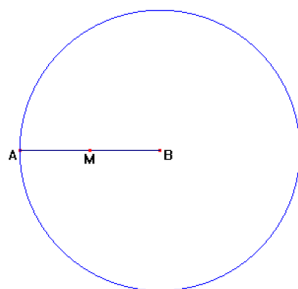
- 1) Considera-se o segmento de reta AB.



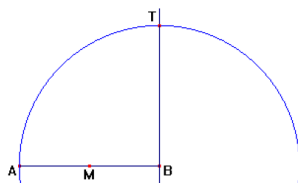
2) Determina-se o ponto médio M do segmento AB conforme item i).



3) Com o compasso em B e abertura igual ao comprimento do segmento AB, traça-se uma circunferência.

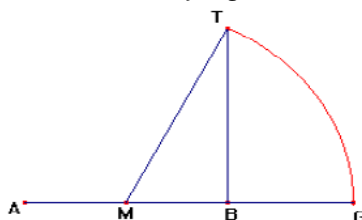


4) Traça-se uma reta perpendicular ao segmento de reta AB, que passe por B, e determina-se um ponto T de intersecção da reta com a circunferência. Nota-se que $\overline{AB} = \overline{BT}$.



5) Liga-se o ponto M ao ponto T. Com o compasso em M e abertura até T traça-se o arco e determina-se o ponto G, intersecção da reta que contém o segmento AB e a circunferência com centro no ponto M e raio de medida igual a $\overline{MT}$. Deste modo, $\overline{AG} = \varphi$.

Figura 4.7: Construção geométrica do φ



Fonte: VEIGA, 2006, p.39

Justificativa da construção: Mostra-se que a medida do segmento AG é igual ao número de ouro φ .

- Sendo $\overline{AB} = 1$, tem-se $\overline{MB} = \frac{1}{2}$.
- Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo BMT da figura 4.7, obtém-se:

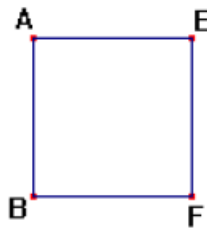
$$\overline{MT}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BT}^2 \Leftrightarrow \overline{MT}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2 \Leftrightarrow \overline{MT}^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \overline{MT} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
- Da figura 4.7, tem-se que $\overline{MG} = \overline{MT}$.
 Sendo $\overline{AG} = \overline{AM} + \overline{MG} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$

Conforme Veiga [30] (2006, p.44):

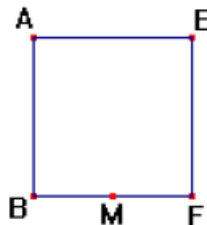
(iv) Retângulo áureo

A construção do retângulo áureo, com régua e compasso, apresenta os seguintes passos:

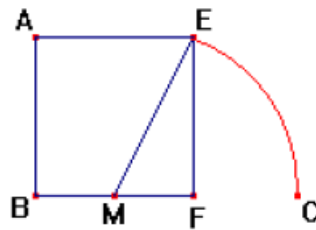
- 1) Desenha-se um quadrado ABEF cujo lado tem medida a .



- 2) Marca-se o ponto médio M de um dos lados conforme item (i), escolhe-se, por exemplo, o lado BF.

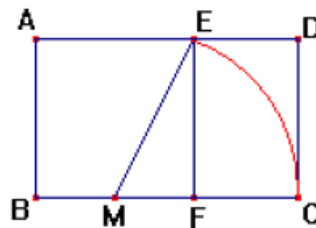


- 3) Do ponto médio M, traça-se um arco com o compasso centrado em M e raio igual ao comprimento do segmento ME.



- 4) Traça-se uma reta perpendicular ao segmento de reta BC, que passe por C determinando-se um ponto D, intersecção desta reta construída com o prolongamento do segmento AE e, a seguir, constrói-se o retângulo ABCD.

Figura 4.8: Construção Geométrica do retângulo áureo



Fonte: VEIGA, 2006, p.44

Justificativa da construção:

- Sendo $\overline{BF} = \overline{EF} = a$, então, $\overline{MF} = \frac{a}{2}$

Aplica-se o teorema de Pitágoras ao triângulo EFM:

$$\overline{ME}^2 = \overline{MF}^2 + \overline{EF}^2 \Leftrightarrow \overline{ME}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Leftrightarrow \overline{ME} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

- De acordo com a construção $\overline{ME} = \overline{MC}$, tem-se:

$$\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{MC} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{a(1 + \sqrt{5})}{2}$$

- Dividindo-se o comprimento $\overline{BC}$ pela largura $\overline{AB}$, tem-se que a razão de suas medidas corresponde à razão áurea:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2}$$

Comentário da atividade:

A presente atividade ilustra a importância da razão áurea como elemento geométrico, a qual serviu de inspiração para muitos artistas em vários campos da ciência. Um outro aspecto a ser ressaltado é o fato de ser possível obter medidas irracionais, utilizando-se apenas régua e compasso.

4.1.5 A sequência de Fibonacci e o retângulo áureo

A presente atividade, sugerida por Ferreira [9] (2006), mostra uma importante propriedade dos números de Fibonacci aplicada à construção do retângulo áureo, interligando álgebra e geometria, sendo direcionadas para alunos do nono ano do ensino fundamental.

Foi mostrado na página 36, item d), da proposição 2.1 que a soma dos quadrados dos números da sequência de Fibonacci é dada por :

$$f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}, \forall n \geq 1$$

Esta proposição pode ser observada geometricamente através do retângulo áureo mostrado na figura 4.9:

Figura 4.9: Retângulo áureo e os quadrados de Fibonacci



Fonte: FERREIRA, 2007, p.27

Na figura, cada lado dos quadrados apresentados tem medidas correspondentes à sequência de Fibonacci, onde se verifica que:

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + f_5^2 + f_6^2 + f_7^2 = f_7 \cdot f_8 \Leftarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 = 13 \cdot 21$$

É interessante observar que, para qualquer momento em que se pare a construção, tem sempre um retângulo associado, de modo que o quadrado seguinte tem sempre medida do lado associada ao atual retângulo, conforme mostra-se abaixo:

$$f_1^2 + f_2^2 = f_2 \cdot f_3 \Leftarrow 1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2$$

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = f_3 \cdot f_4 \Leftarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \cdot 3$$

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 = f_4 \cdot f_5 \Leftarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 5$$

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + f_5^2 = f_5 \cdot f_6 \Leftarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5 \cdot 8$$

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + f_5^2 + f_6^2 = f_6 \cdot f_7 \Leftarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 8 \cdot 13$$

Comentário da atividade:

Interligar áreas aparentemente distintas da matemática, como álgebra e geometria, introduzindo-se sutilmente a idéia de infinito, pela construção dos quadrados, torna-se uma excelente oportunidade de mostrar ao aluno do ensino básico uma visão intuitiva de limite.

4.2 Curiosidades

4.2.1 Periodicidade da sequência de Fibonacci

Segundo salienta Ferreira[9](2006), na sequência de Fibonacci, enquanto o 5º número de Fibonacci é 5, o 125º é 59.425.114.757.512.643.212.875.125, sendo interessante notar que o dígito da unidade aparece com uma periodicidade de 60 (isto é, a cada 60 números o dígito se repete). Por exemplo, o segundo número é 1 e o sexagésimo segundo é 4.052.739.537.881 (também terminado em 1), e o 122º número, 14.028.366.653.498.915.298.923.761, também termina em 1; o mesmo vale para o 182º, e assim por diante. Do mesmo modo, o 14º número é 377, e o 74º é 1.304.969.544.928.657, também termina com 7, e assim por diante³.

Os últimos dois dígitos (por exemplo, 01, 01, 02, 03, 05, 08, 13, 21, ...) se repetem na sequência com uma periodicidade de 300, e os três últimos dígitos com uma periodicidade de 1.500. Em 1963, Stephen P. Geller usou um computador IBM 1620 para mostrar que os últimos 4 dígitos se repetem a cada 15.000 vezes, e os últimos 5, a cada 150.000 vezes e, finalmente, após o computador rodar por quase 3 horas, uma repetição dos últimos 6 dígitos ocorreram no 1.500.000 número do Fibonacci. Sabendo que um teorema geral referente à periodicidade dos últimos dígitos poderia ser provado, Geller comentou: “Não parece existir ainda um modo de adivinhar o período seguinte, mas talvez um novo programa para a máquina que permita a inicialização em qualquer ponto da sequência para um teste, irá reduzir o tempo de computação suficiente para que mais dados possam ser coletados”. Mas pouco tempo depois, o matemático israelense Dov Jarden mostrou que se pode provar rigorosamente que, para qualquer número com últimos dígitos acima de

³Esta propriedade foi descoberta em 1774 pelo matemático francês nascido da Itália JosephLouis Lagrange (1736-1813), que é responsável por muitos trabalhos em Teoria dos Números e em Mecânica (RAMOS, 2013, p.28)

três, a periodicidade é, simplesmente: $15 \cdot 10^{n-1}$, onde n é o número de dígitos que são repetidos⁴.

4.2.2 O décimo primeiro número de Fibonacci

A Sequência de Fibonacci contém um número absolutamente notável – o décimo primeiro número, 89. O valor de $1/89$ na representação decimal é igual a 0,01123595 ... Suponha que se organize os números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... como frações decimais da seguinte maneira:

0,01

0,001

0,0002

0,00003

0,000005

0,0000008

0,00000013

0,000000021

...

Em outras palavras, o dígito das unidades do primeiro número de Fibonacci está na segunda casa decimal, e do segundo está na terceira casa decimal, e assim por diante (o dígito das unidades do n -ésimo número de Fibonacci está na $(n+1)$ -ésima casa decimal). Agora, ao somar-se todos os números, obtém-se 0,01123595 ... que é igual a $1/89$.

Segundo salienta Ferreira (2006, p.11) : "Essa curiosidade foi descoberta por Cody Birsner, um estudante na Universidade de Oklahoma, em 1994."

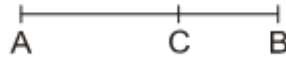
4.3 Sequência de Fibonacci e razão áurea nos vestibulares e Enem

A razão áurea e a sequência de Fibonacci têm sido temas recorrentes em alguns processos seletivos para ingresso no ensino técnico ou no ensino superior. Apresenta-se a seguir uma coletânea de questões extraídas desses exames que podem ser abordadas como exercícios de fixação da teoria desenvolvida sobre esses temas. Todas as questões estão resolvidas e comentadas.

⁴Detalhes adicionais podem ser obtidos em Jarden [16].

1. (Fuvest 2011) "Define-se geometricamente a razão áurea do seguinte modo: O ponto C da figura abaixo divide o segmento na razão áurea quando os valores AC/AB e CB/AC são iguais. Esse valor comum é chamado "razão áurea".

Figura 4.10: Segmento com razão áurea



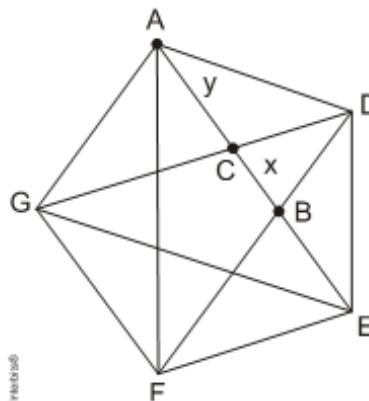
Fonte: VESTIBULAR FUVEST 2011

A razão áurea, também denominada proporção áurea, número de ouro ou divina proporção, conquistou a imaginação popular e é tema de vários livros e artigos. Em geral, suas propriedades matemáticas estão corretamente enunciadas, mas muitas afirmações feitas sobre ela na arte, na arquitetura, na literatura e na estética são falsas ou equivocadas. Infelizmente, essas afirmações sobre a razão áurea foram amplamente divulgadas e adquiriram status de senso comum. Mesmo livros de geometria utilizados no ensino médio trazem conceitos incorretos sobre ela.

Trecho traduzido e adaptado do artigo de G. Markowsky, Misconceptions about the golden ratio, The College Mathematics Journal, 23, 1, january, 1992, pp. 2-19.

Na figura 4.11 a seguir, o polígono ADEFG é um pentágono regular. Utilize semelhança de triângulos para demonstrar que o ponto C da figura divide o segmento AB na razão áurea."

Figura 4.11: Pentágono- razão y/x

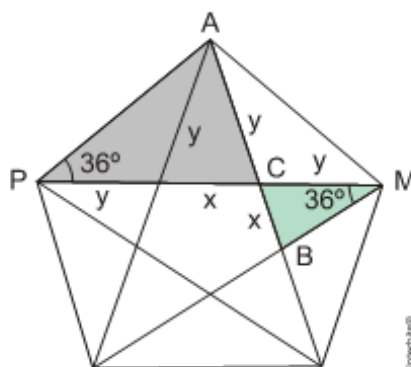


Fonte: VESTIBULAR FUVEST 2011

Solução:

Considerando os triângulos PAC e MBC destacados na figura 4.12.

Figura 4.12: Pentágono e triângulos semelhantes



Fonte: VESTIBULAR FUVEST 2011

Os triângulo PAC e MBC são semelhantes pois possuem ordenadamente dois ângulos congruentes $\hat{A}CP = \hat{M}CB$ e $\hat{A}PC = \hat{B}MC$. Assim, tem-se:

$$\Delta PAC \sim \Delta MBC \Rightarrow \frac{\overline{CP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

conforme queria se mostrar.

Comentário: Questão muito interessante ao mostrar a razão áurea no pentágono e no pentagrama (conforme discutido na seção 3.5 da página 62) através de semelhança de triângulos. Verifica-se um equívoco no elaborador da questão no trecho: "O ponto C da figura abaixo divide o segmento na razão áurea quando os valores AC/AB e CB/AC são iguais. Esse valor comum é chamado "razão áurea" pois, na realidade, a razão áurea é o inverso das razões apresentadas $AB/AC = AC/CB$, conforme mostrado na solução.

Um outro aspecto a destacar é o trecho do enunciado "Em geral, suas propriedades matemáticas estão corretamente enunciadas, mas muitas afirmações feitas sobre ela na arte, na arquitetura, na literatura e na estética são falsas ou equivocadas. Infelizmente, essas afirmações sobre a razão áurea foram amplamente divulgadas e adquiriram status de senso comum" que, de forma precisa, estabelece uma quebra de paradigma na visão massificada e popular da presença da razão áurea no cotidiano (discutiu-se isso na seção 1.9 da página 33).

2. (Unb 2012) "Considere o texto:

Aidan Dwyer, um jovem norte-americano de 13 anos de idade, após ter analisado o papel das folhas das plantas como coletores solares naturais para o processo de fotossíntese, desenvolveu uma inovadora maneira de dispor painéis solares de modo a otimizar a coleta de energia luminosa.

Durante uma caminhada, ao observar as árvores, ele percebeu que as folhas ao longo de um ramo e os galhos em torno do caule apresentavam um padrão de crescimento espiralado ascendente que obedecia à sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...), que é determinada pela seguinte fórmula de recorrência: $F_1 = 1; F_2 = 1$ e para $n \geq 3, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Essa distribuição das folhas, além de dar equilíbrio ao caule, propicia-lhe melhor aproveitamento de sua exposição ao Sol, à chuva e ao ar.

Em 1874, o matemático inglês Wiesner concluiu que, para que as folhas em um caule de uma árvore ficassem melhor expostas à luz do Sol, o ângulo entre as folhas deveria ser aproximadamente igual a $\left(\frac{360}{\varphi^2}\right)^\circ = 137,5^\circ$ ⁵, que é conhecido como ângulo áureo.

Figura 4.13: Painéis solares e folhas



Fonte: VESTIBULAR UNB 2012

A figura 4.13 ilustra o trabalho de Aidan. Após medir as posições dos galhos em várias árvores, ele realizou, no quintal de sua casa, experimentos com pequenos coletores solares posicionados em uma armação metálica que imitava a configuração natural das folhas. Ele montou, ainda, uma quantidade igual de sensores e os dispôs em um painel, como é feito nos coletores comerciais. Com equipamentos simples, traçou gráficos comparativos da captação solar e observou que sua árvore solar captava 20% mais energia que o painel plano comum.

O Globo, 20/8/2011 (com adaptações).

⁵Na seção 1.8.3 da página 19 foi visto que o ângulo ótimo (ângulo áureo) era de $222^\circ 29' 34''$ (aproximadamente $222,5^\circ$) que é o ângulo replementar a 360° , ou seja, o ângulo que completa a volta, estando assim de acordo com o trecho do jornal O Globo.

Tendo como base as informações do texto acima, julgue os itens a seguir.

- a) Infere-se do texto, a partir da sequência de Fibonacci, que a distribuição das folhas em torno do caule facilita a exposição das folhas à luz e, conseqüentemente, o anabolismo de carboidratos.
- b) No cerrado, espécies de plantas com maior investimento em área foliar levam vantagem em relação às que investem mais em raízes."

Solução:

a) *Correto*. Os hidratos de carbono são moléculas orgânicas que contêm um grupo carbonilo (aldeído ou cetona) e mais grupos hidroxilo (OH-). Sua síntese ocorre através de diversas vias:

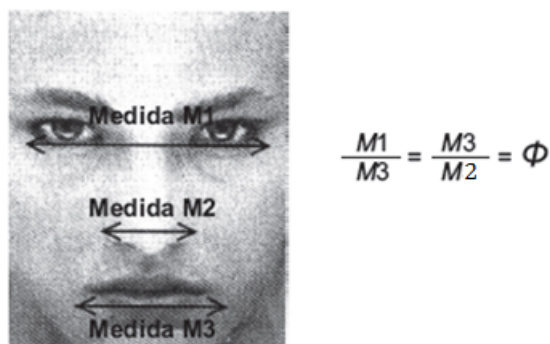
- A fotossíntese para criar glicose em organismos fotossintéticos.
- O glicogênese para a polimerização de glicogênio a partir da glicose.

b) *Incorreto*. No cerrado, as espécies de plantas com maior investimento em raízes conseguem mais água e “fogem” do fogo. Estas plantas são mais adaptadas do que aquelas que investem mais em área foliar.

Comentário: Uma questão onde se evidencia o conhecimento transdisciplinar (matemática, química e biologia) em temáticas do cotidiano. A disposição das folhas, discutida na seção 1.8.3 da pagina 19, segundo o ângulo ótimo (ou áureo) foi imprescindível para aumentar a captação da energia solar e maximizar a fotossíntese, conforme trecho do enunciado: "e observou que sua árvore solar captava 20% mais energia que o painel plano comum".

3. (Enem PPL 2013) "Estudos revelam que, independentemente de etnia, idade e condição social, as pessoas têm padrões estéticos comuns de beleza facial e que as faces consideradas bonitas apresentam-se em proporção áurea. A proporção áurea é a constante $\varphi = 1,618....$ Uma agência de modelos reconhece a informação citada e utiliza-a como critério de beleza facial de suas contratadas. Para entrevistar uma nova candidata a modelo, a referida agência pede uma fotografia de rosto no ato da inscrição e, com ela, determina as medidas mostradas na figura.

Figura 4.14: Proporções no rosto humano



Fonte: ENEM PPL 2013

Analizando a fotografia de cinco candidatas, I, II, III, IV e V, para a seleção de uma única garota, foram constatadas estas medidas:

- Candidata I: $M_1 = 11$ cm; $M_2 = 5,5$ cm e $M_3 = 7$ cm.
- Candidata II: $M_1 = 10,5$ cm; $M_2 = 4,5$ cm e $M_3 = 6,5$ cm.
- Candidata III: $M_1 = 11,5$ cm; $M_2 = 3,5$ cm e $M_3 = 6,5$ cm.
- Candidata IV: $M_1 = 10$ cm; $M_2 = 4$ cm e $M_3 = 6,5$ cm.
- Candidata V: $M_1 = 10,5$ cm; $M_2 = 4$ cm e $M_3 = 6,5$ cm.

CONTADOR, P. R. M. A matemática na arte e na vida. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

A candidata selecionada pela agência de modelos, segundo os critérios da proporção áurea, foi:

- a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

Solução:

Fazendo-se uma tabela com as medidas indicadas, calculando as razões $\frac{M_1}{M_3}$ e $\frac{M_3}{M_2}$.

Tabela 4.2: Razões entre medidas do rosto

candidata	M_1	M_3	M_2	M_1/M_3	M_3/M_2
I	11	7	5.5	1.571	1.273
II	10.5	6.5	4.5	1.615	1.444
III	11.5	6.5	3.5	1.769	1.857
IV	10	6.5	4	1.538	1.625
V	10.5	6.5	4	1.615	1.625

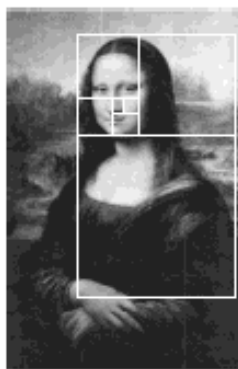
Fonte: ENEM PPL 2013

De posse dos resultados, a candidata V deve ser a selecionada, segundo os critérios da proporção áurea. Resposta: Letra e

Comentário: Nesta questão se evidencia o uso por agência de modelos da razão áurea como critério de padrão estético de beleza conforme discutido na seção 1.8.9 da página 32. A presente questão está relacionada com a atividade sugerida para o ensino básico na atividade 4.1.3 da página 76.

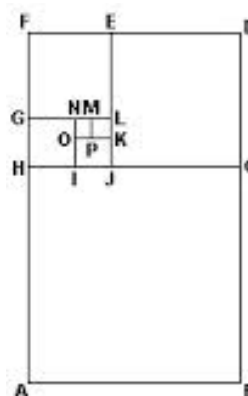
4. (Uff 2007) "A "Divina Proporção" também conhecida como proporção áurea foi usada por Leonardo da Vinci para pintar a Mona Lisa, uma de suas mais notáveis obras. Em vários pontos do quadro aparece o retângulo áureo, como ilustrado na figura 4.15. Na figura 4.16 os quadriláteros ABDE, CDFH, EFHJ, GHJL, IJLN, KLNO são retângulos áureos semelhantes e os quadriláteros ABCH, CDEJ, EFGL, GHIN, IJKO e KLMP são quadrados.

Figura 4.15: Mona Lisa e proporções áureas



Fonte: VESTIBULAR UFF 2007

Figura 4.16: Retângulos na Mona Lisa



Fonte: VESTIBULAR UFF 2007

Sabendo-se que a razão entre o maior lado e o menor lado do retângulo áureo é igual ao número de ouro φ , pode-se afirmar que a razão entre a área do quadrado KLMP e a área do quadrado ABCH é igual a:

- a) $\frac{1}{\varphi^6}$ b) $\frac{1}{\varphi^{10}}$ c) $\frac{1}{\varphi^8}$ d) $\frac{1}{\varphi^5}$ e) $\frac{1}{\varphi^{12}}$

Solução: Determina-se os lados dos quadrados ABCH, CDEJ, EFGL, GHIN, IJKO e KLMP

- Lado do quadrado ABCH:

Conforme enunciado, $\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \varphi$. Considerando-se que $\overline{AB} = 1$, tem-se: $\overline{BD} = \varphi$. Sendo ABCH um quadrado, $\overline{BC} = 1$

- Lado do quadrado CDEJ:

Sendo $\overline{BD} = \varphi$, o quadrado CDEJ terá lado $\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{CD} = \varphi - 1$

mas, sabe-se que $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$, conforme equação 3.2 da página 52. Assim, $\overline{CD} = \overline{DE} = \frac{1}{\varphi}$.

- Lado do quadrado EFGL:

Sendo $\overline{DE} = \frac{1}{\varphi}$, o quadrado EFGL terá lado $\overline{EF} = \overline{AB} - \overline{DE} \Leftrightarrow \overline{EF} = \overline{FG} = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}$

- Lado do quadrado GHIN:

Sendo $\overline{FG} = \frac{1}{\varphi^2}$, o quadrado GHIN terá lado $\overline{GH} = \overline{CD} - \overline{FG} \Leftrightarrow \overline{GH} = \overline{HI} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi^3}$

- Lado do quadrado IJKO:

Sendo $\overline{HI} = \frac{1}{\varphi^3}$, o quadrado IJKO terá lado $\overline{IJ} = \overline{EF} - \overline{HI} \Leftrightarrow \overline{IJ} = \overline{JK} = \frac{1}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi^3} = \frac{1}{\varphi^4}$

- Lado do quadrado KLMP:

Sendo $\overline{JK} = \frac{1}{\varphi^4}$, o quadrado KLMP terá lado $\overline{KL} = \overline{GH} - \overline{JK} \Leftrightarrow \overline{KL} = \frac{1}{\varphi^3} - \frac{1}{\varphi^4} = \frac{1}{\varphi^5}$

A razão entre as áreas A dos quadrados KLMP, de lado $\frac{1}{\varphi^5}$, e o quadrado ABCH, de lado unitário, será então:

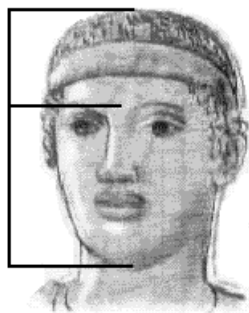
$$\frac{A_{KLMP}}{A_{ABCH}} = \frac{\left(\frac{1}{\varphi^5}\right)^2}{1^2} = \frac{1}{\varphi^{10}}$$

Resposta: Letra b

Comentário: Questão que envolve o conceito de retângulo áureo discutido na seção 1.4 da página 10 e propriedades referentes ao número de ouro vistas na seção 3.1 da página 52. Percebe-se uma dificuldade para os alunos do ensino médio principalmente, no fato de que $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$, muito provavelmente não sendo abordada nos conteúdos do ensino médio.

5. (Ufrj 2005) "Observe a figura a seguir que demonstra um padrão de harmonia, segundo os gregos

Figura 4.17: Padrão de Harmonia



Fonte: VESTIBULAR UFRRJ 2005

Há muito tempo os gregos já conheciam o número de ouro $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, que é aproximadamente 1,618. Tal número foi durante muito tempo "padrão de harmonia". Por exemplo, ao se tomar a medida de uma pessoa (altura) e dividi-la pela medida que vai da linha umbilical até o chão, vê-se que a razão é a mesma que a da medida do queixo até a testa, em relação à medida da linha dos olhos até o queixo, e é igual ao número de ouro. Considere a cantora Ivete Sangalo, harmoniosa, segundo os padrões gregos. Assumindo que a sua distância da linha umbilical até o chão é igual, em metros, a $\frac{22 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{25}$, determine a altura da mesma."

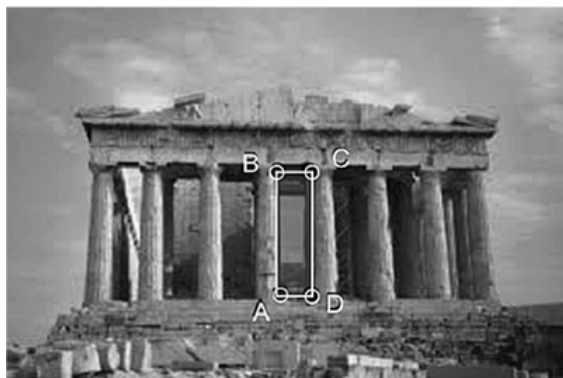
Solução: Chamando a altura da cantora de H e a distância da linha umbilical até o chão de h , tem-se, de acordo com o enunciado:

$$\frac{H}{h} = \varphi \Leftrightarrow H = h \cdot \varphi \Leftrightarrow H = \left[\frac{22 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{25} \right] \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{22}{50} \cdot [(\sqrt{5})^2 - 1^2] = \frac{22}{50} \cdot 4 = 1,76m$$

Comentário: Questão básica da UFRRJ que enfatiza o conceito de razão áurea no corpo humano já discutidos na seção 1.8.9 da página 32 e exige como competências e habilidades dos alunos propriedades de potenciação, radiciação e produtos notáveis. Um outro aspecto interessante é de como pode ter sido feita a medida da distância da linha umbilical até o chão (dada no enunciado), já que se trata de um número irracional.

6. (Ufsj 2013) "O Parthenon é uma obra arquitetônica grega, cujas aberturas entre suas colunas têm o formato de quadriláteros que são chamados de retângulos de ouro.

Figura 4.18: Parthenon e o retângulo áureo



Fonte: VESTIBULAR UFSJ 2013

Eles recebem esse nome porque a razão entre a altura $\overline{AB}$ e a base $\overline{AD}$ é igual ao número de ouro, que é igual a, aproximadamente, 1,618. Para que as portas de uma construção, que têm altura de 2,43 m também sejam retângulos de ouro, é CORRETO afirmar que elas terão suas larguras entre:

- a) 1,5 m e 1,51 m b) 1,61 m e 1,62 m c) 1,4 m e 1,41 m d) 1,31 m e 1,32 m"

Solução: De acordo com o enunciado, sendo H a medida da altura da porta e L a medida da largura da porta, é necessário que:

$$\frac{H}{L} = 1,618 \Leftrightarrow \frac{2,43}{L} = 1,618 \Leftrightarrow L = \frac{2,43}{1,618} \approx 1,501m$$

Resposta : letra a

Comentário: Questão de nível fácil envolvendo o conceito da razão áurea na arquitetura que discutiu-se na seção 1.8.7 da página 27 e na seção 1.9 da página 33 onde, inclusive, fez-se considerações sobre a razão áurea no Parthenon (figuras 1.43 e 1.44 da página 34).

7 (Puccamp 2005) "Considere o texto:

Com a intensificação dos estudos, a caatinga tem se revelado um ecossistema rico em espécies e processos especializados de polinização. Nas margens do rio São Francisco, por exemplo, ocorrem alguns pares de espécies de lagarto, onde uma é encontrada apenas na margem direita

e outra apenas na esquerda. De acordo com uma das hipóteses para explicar essa distribuição, o rio corria para um lago do interior do nordeste, e não para o mar. Já o estudo sobre a morfologia dos cactos revelou fatos interessantes. A cabeça arredondada dos cactos, por exemplo, é coberta por espinhos. Começando pelo centro e conectando os pontos de cada espinho até seu vizinho, chega-se a uma espiral com 2,5 ou 8 galhos - a sequência de Fibonacci- que é uma sucessão recursiva de números inteiros, $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \dots)$, chamados números de Fibonacci, tais que $a_1 = a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \forall \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$.

Considerando que a soma dos n primeiros termos dessa sequência é dada por $S_n = a_{n+2} - 1$, então, os números de Fibonacci que dividem $S_{11} - S_9$ são

- a) 1, 2, 3, 5 e 72 b) 1, 2, 3, 8 e 144 c) 1, 2, 4, 8 e 13 d) 1, 2, 3 e 21 e) 1, 3, 5 e 55"

Solução: Escrevendo a Sequência de Fibonacci segundo a lei recursiva, tem-se:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots)$$

De acordo com o enunciado, a soma dos n primeiros termos dessa sequência é dada por $S_n = a_{n+2} - 1$. Assim, tem-se:

$$S_{11} = a_{13} - 1 = 233 - 1 = 232 \quad \text{e} \quad S_9 = a_{11} - 1 = 89 - 1 = 88$$

$$\text{Assim, } S_{11} - S_9 = 232 - 88 = 144 .$$

Das alternativas, a única na qual os números apresentados dividem 144 é a alternativa b.

Resposta : Letra b

Comentário: Questão básica da Puccamp que mostra a aplicação da sequência de Fibonacci na botânica, conforme discutido na seção 1.8.3 da página 19, e ainda aborda uma das propriedades da sequência de Fibonacci $S_n = a_{n+2} - 1$, a qual demonstrou-se no item a) da proposição 2.1 da página 36. A presente questão ainda abordou critérios de divisibilidade.

Conclusão

Na presente dissertação foi apresentada a definição de sequência de Fibonacci como uma sequência recursiva em que um termo é obtido pela soma de dois termos anteriores conhecidos a partir do problema da reprodução de coelhos e a definição de razão áurea por Euclides de Alexandria, que acabou culminando em um número irracional com desdobramentos intrigantes na Grécia antiga, transcendendo em padrões inesperados em vários campos da ciência e na própria natureza.

Constatou-se, também, que a sequência de Fibonacci, aparentemente surgida como um problema elementar de reprodução animal, se manifesta como um processo de auto-organização em sistemas naturais e é igualmente dotada de tal característica, além de apresentar propriedades matemáticas curiosas e interessantes que são estudadas em teoria dos números.

Foi apresentada uma conexão surpreendente: o limite da razão entre dois termos sucessivos da sequência de Fibonacci converge para o número de ouro quando n tende para o infinito, sendo o resultado também válido para uma sequência de Fibonacci qualquer.

Mostrou-se ainda conexões entre várias medidas envolvendo pentágonos regulares e pentagramas em uma sequência infinita de construção dos mesmos com resultados extraordinários envolvendo a razão áurea, bem como, foram apresentadas definições de retângulo áureo, triângulo áureo, espiral áurea e espiral logarítmica, interligadas ao conceito de razão áurea.

Foi visto que, apesar do número de ouro ser considerado sinônimo de beleza e harmonia, foi desmistificada a ideia de que a razão áurea é uma “razão mágica” absoluta na natureza, em vários campos da ciência e na arte, principalmente no Renascimento.

No último capítulo, foi mostrado, através de algumas sugestões de atividades e curiosidades, como os conceitos de razão áurea e da sequência de Fibonacci podem ser utilizados no desenvolvimento de diversos conteúdos do ensino fundamental e do ensino médio como o de razões e proporções, números irracionais, equações quadráticas, sequências numéricas, noções de limites

e geometria plana. Destacou-se ainda a apresentação de questões envolvendo esses conceitos em exames seletivos de todo país comentadas e resolvidas propondo, ainda, uma temática transdisciplinar tão pertinente aos temas abordados.

Diante disso, de acordo com o objetivo principal do trabalho de apresentar a sequência de Fibonacci e a razão áurea no contexto do ensino básico, assim como suas impressionantes e misteriosas aplicações em vários campos da ciência e na natureza, espera-se também instigar a quebra de paradigmas em conceitos absolutos e imutáveis relativos a este tema, enfatizando que o conhecimento matemático, assim como a própria vida, continua em evolução contínua e sujeita a verificações e demonstrações, pois, afinal, a própria ciência se reinventa a cada nova descoberta.

Bibliografia

- [1] BIEMBENGUT, MARIA SALETT. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2000.
- [2] BOYER, CARL BENJAMIN. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgar Blucher Ltda, 1974.
- [3] CONTADOR, PAULO ROBERTO MARTINS. *A matemática na arte e na vida*. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- [4] CORREIO, WALTER R. V. *Ondas de Elliott: aspectos econômicos e matemáticos envolvidos*. Revista Científica On line. Fatec, Guaratinguetá, 2014. Disponível em: <www.fatecguaratingueta.edu.br/revista/index.php/RCO-TGH/article/view/21/61>. Acesso em 12 de Janeiro de 2016.
- [5] DOCZI, GYORGY. *O poder dos limites: harmonias e proporções na natureza, na arte e arquitetura*. São Paulo: Mercuryo, 1990.
- [6] EVES, HOWARD. *Introdução a História da Matemática*. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.
- [7] FERNANDES, E. *David Ausubel e a aprendizagem significativa*. Revista Nova Escola, Edição 248. São Paulo: Editora Abril, 2011. Disponível em: <revistaescola.abril.com.br/formacao/da-vid-ausubel-aprendizagem-significativa-662262.shtml>. Acesso em 27 de Janeiro de 2016.
- [8] FERRAZ, HENRIQUE. *Sistemas de proporções Matemáticas*. Disponível em: <www.cdcc.sc.usp.br/ciencia/artigos/art_26/proporcao.html>. Acesso em 25 de Fevereiro de 2016.

- [9] FERREIRA, ROGÉRIO A. *Seqüência de Fibonacci*. Trabalho apresentado à disciplina de Pesquisa em Matemática II do Curso de Matemática Bacharelado e Licenciatura do Centro UNIFIEO - Osasco, 2007. Disponível em: <incertezaemprincipio.files.wordpress.com/2012/07/tc-seq-3aanciadefibonacci.pdf>. Acesso em: 07 de Fevereiro de 2016.

- [10] FREIRE, BENEDITO T. VASCONCELOS; DIAS, CLÁUDIO CARLOS *Sequências de Fibonacci - Aula 10*. Natal-RN: EDUFRN, 2009.

- [11] GARCIA, VERA C. *O número de Ouro*. Instituto de Matemática, UFRGS. Disponível em: <http://mat.ufrgs.br/~disciplinas/html/realis-web/realis_texto_realis_medidas2.htm> Acesso em: 09 de Fevereiro de 2016.

- [12] GUIDORIZZI, HAMILTON L. *Um curso de Cálculo, Volume I*. São Paulo: LTC, 2001.

- [13] HARRIS, JOHN N. *Spira Solaris*. Archytas mirabilis, 2002. Disponível em: <<http://www.spira-solaris.ca/sbb4d2b.html>>. Acesso em 22 de Abril de 2016.

- [14] HEFEZ, ABRAMO *Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

- [15] HUMTLEY, H. E. *A divina proporção - Um ensaio sobre a beleza na matemática*. Brasília: Editora UNB, 1985.

- [16] JARDEN, DOV *On the periodicity of the last digits of the Fibonacci numbers*, 2 páginas. Jerusalem, Israel. Disponível em: <<http://www.fq.math.ca/Scanned/1-4/jarden.pdf>>. Acesso em 22 de Abril de 2016.

- [17] JESUS, MÁRCIO D. DO N. *A Sucessão de Fibonacci e sua generalização*, 26 páginas. Projeto Educacional I do Mestrado em Ensino de Matemática. Faculdade de Ciência e Tecnologia. Universidade de Coimbra: Disponível em: <[www.mat.uc.pt/~simnep/PagWebEscola/ProjetoEI\(Final\).pdf](http://www.mat.uc.pt/~simnep/PagWebEscola/ProjetoEI(Final).pdf)>. Acesso em: 09 de Fevereiro de 2016.

- [18] KLEINA, CLÁUDIO; RODRIGUES, KARIME SMAKA BARBOSA. *Metodologia da Pesquisa e do Trabalho Científico*. 1. ed. Curitiba, PR: Iesde Brasil S/A, 2014.
- [19] LÍVIO, M. *Razão áurea: a história de Φ , um número surpreendente*. Rio de Janeiro: Record, 2011.
- [20] LOPES, ANTÔNIO JOSÉ *Retângulo áureo: matemática hoje é feita assim*. São Paulo: FTD, 2006. Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/mat_hoje/livro/oitava.asp?aux=B>. Acesso em: 13 de Abril de 2016.
- [21] MARKOWSKY, GEORGE. *Misconceptions about the Golden Ratio*, 19 páginas. The College Mathematics Journal, Vol. 23, Número 1, Janeiro, 1992. Disponível em: <www.goldennumber.net/wp-content/uploads/George-Markowsky-Golden-Ratio-Misconceptions-MAA.pdf>. Acesso em 15 de Janeiro de 2016.
- [22] MENDES, FERNANDA M. P. *A Matemática na Natureza*, 218 páginas. Dissertação para obtenção do título de mestre em matemática e ciências da natureza. Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal, 2007. Disponível em: <<http://repositorio.utad.pt/handle/10348/74>>. Acesso em: 12 de Abril de 2016.
- [23] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio*.
- [24] PEREIRA, PATRÍCIA S.; LOPES, ANEMARI R.L.; ANDRADE, SUSIMEIRE V. R. *Pentagrama: Qual sua História?*, 9 páginas. X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, Ijuí/RS, 2009. Disponível em: <www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_21.pdf>. Acesso em 15 de Janeiro de 2016.
- [25] RAMOS, MARCOS G. OLIVEIRA *A sequência de Fibonacci e o número de Ouro*, 90 páginas. Trabalho de conclusão de curso - Ilhéus-BA, Universidade Estadual de Santa Cruz, 2013. Disponível em: <www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277d.pdf>. Acesso em 15 de Janeiro de 2016.

- [26] RODRIGUES, M. S.; CÂMARA, M. A.. *O número fi*, Páginas: 81-184. FAMAT em Revista, Uberlândia-MG, 2008. Disponível em: <www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_Revistas_11.pdf>. Acesso em 08 de Janeiro de 2016.
- [27] SANTOS, VANESSA A. ; ANDRADE, NAIARA A. ; OLIVEIRA, TIAGO S. *Número de Ouro*. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador-BA, Julho, 2010. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/MC/T12_MC2067.pdf>. Acesso em 26 de Janeiro de 2016.
- [28] SARAIVA, JOSÉ C. V. *As pirâmides do Egito e a razão áurea* Revista do Professor de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1990. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitaes_II/modulo_IV/piramides_razao_aurea.pdf>. Acesso em 17 de Janeiro de 2016.
- [29] STRUICK, DIRK J. *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.
- [30] VEIGA, LEILA E. M. *A volta do número de ouro*, 58 páginas. Instituto Superior de Educação, Salvador-BA, 2006. Disponível em: <www.portaldodoconhecimento.gov.br/bitstream/10961/2242/1/monog.actual.pdf>. Acesso em 07 de Fevereiro de 2016.
- [31] VENTURA, FELIPE *Mitos e verdades sobre a proporção áurea*. Gizmodo Brasil, 2015. Disponível em: <gizmodo.uol.com.br/mitos-proporcao-aurea/>. Acesso em 16 de Janeiro de 2016.
- [32] VIGLIONI, HUMBERTO H. DE B. ; SANTOS , ALMIR ROGÉRIO SILVA. *Geometria Euclidiana Plana*, 233 páginas. UFS, Aracaju-SE, 2011. Disponível em: <w3.impa.br/~arss/cursos/GEP/Geometria%20Euclidiana%20Plana.pdf>. Acesso em 19 de Abril de 2016.
- [33] ZAHN, MAURÍCIO *Sequência de Fibonacci e o número de ouro*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2011.