



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE/SED**

**Coordenação do Curso de Especialização em  
Ensino da Matemática para o Ensino Médio**



**MARIA DO SOCORRO BRAZ FERREIRA**

**RAZÃO, PROPORÇÃO E REGRA DE TRÊS.**

**Orientador: Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire**

Currais Novos/RN

2016

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial  
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Ferreira, Maria do Socorro Braz.

Razão, proporção e regra de três / Maria do Socorro Braz Ferreira. – Currais  
Novos, RN, 2016.

40 f. : il.

Orientador: Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire.

Monografia (Especialização) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte.  
Secretaria de Educação à Distância. Coordenação do Curso de Especialização em  
Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

1. Razão – Monografia. 2. Proporção – Monografia. 3. Regra de três –  
Monografia. I. Freire, Benedito Tadeu Vasconcelos. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET

CDU: 511.13

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE / SEDIS  
ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

MARIA DO SOCORRO BRAZ FERREIRA

RAZÃO, PROPORÇÃO E REGRA DE TRÊS.

Monografia apresentada para a avaliação parcial do curso de Pós - Graduação em Matemática para o Ensino Médio da Universidade Federal do Rio Grande do Norte Campus de Currais Novos/RN. Orientador: Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire

Currais Novos/RN

2016

“A matemática do tempo é simples. Você tem menos do que pensa e precisa mais do que acha.

Kevin Ashton

MARIA DO SOCORRO BRAZ FERREIRA

Razão, Proporção e Regra de três.

Monografia apresentada para a avaliação parcial do curso de Pós - Graduação em Matemática para o Ensino Médio da Universidade Federal do Rio Grande do Norte Campus de Currais Novos/RN.

**Banca Examinadora**

---

1º Membro Titular: Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire

---

2º Membro Titular: Iesus Carvalho Diniz

---

3º Membro Titular: Odilon Júlio dos Santos

Currais Novos (RN), 23 de julho de 2016

## **DEDICATÓRIA**

Aos meus pais, irmãos, meu esposo e a  
minha amada filha Maria Laura.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou o meu caminho durante esta caminhada. Aos meus pais, irmãos, meu esposo e a minha amada filha Maria Laura, pois tudo que realizo é pensando em seu melhor, aos amigos e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida. A todos os professores do curso em especial prof. Benedito Freire por toda orientação e contribuição durante a elaboração dessa monografia.

## **RESUMO**

O presente Trabalho de Conclusão do Curso de pós-graduação em Ensino da Matemática, em nível de especialização, tem o objetivo de trabalhar a razão, proporção e regra de três aplicados em problemas matemáticos, de modo que os alunos possam aprender estes conteúdos de forma clara e objetiva. É relevante o seu aprendizado, pois, não foca somente no ensino médio, são problemas que podem e devem ser levado a diante pelos alunos como contribuição para o aprendizado, envolve o seu dia-a-dia e é pra vida toda.

**Palavras-chave:** Razão, proporção e regra de três.

## **ABSTRACT**

This Working graduate Course Completion in Mathematics Teaching , level of expertise, aims to work the reason , proportion and three rule applied to mathematical problems , so that students can learn these form content clear and objective . It is relevant to their learning , therefore, does not focus only in high school, are problems that can and should be taken on by the students as a contribution to learning, involves the day -to-day and is for life .

**Keywords :** Ratio , proportion and rule of three.

## SUMÁRIO

1	Introdução .....	11
2	Razão e proporções .....	12
	2.1 Entendendo a razão.....	12
3	Razões especiais aplicados em problemas .....	13
4	Razão entre segmentos e segmentos proporcionais .....	16
5	Teorema de Tales .....	18
6	Proporção .....	19
	6.1 Entendendo a proporção .....	19
	6.2 Propriedades fundamentais das proporções .....	19
	6.3 Semelhança de polígonos .....	21
	6.4 Semelhança de triângulos .....	23
7	Grandezas proporcionais.....	27
	7.1 Grandezas diretamente proporcionais .....	29
	7.2 Grandezas inversamente proporcionais .....	29
8	Regra de três simples.....	32
9	Regra de três compostas.....	32
10	Proporção áurea .....	37
11	Considerações finais .....	41
12	Referências .....	42

## 1 Introdução

O ensino da matemática no cotidiano é pouco aplicado pelos alunos, pois eles não conseguem visualizar este aprendizado na vida. O presente trabalho tenta retratar os conhecimentos de razão, proporção e regra de três vistos no Ensino Fundamental, mas de uma forma diferente, aplicando a problemática, um modo de trabalhar o dia-a-dia a matemática de forma fácil, pois o cotidiano envolve a matemática, tudo que você faz a matemática está presente, do momento que um aluno pega um ônibus para ir à escola, até na hora do sono se poder extrair algum conhecimento da matemática.

O seu objetivo é aplicar o conceito e exemplificação de razão, proporção e regra de três no ensino médio de forma simples, capaz de resolver qualquer questão no dia a dia. O problema abordado na presente monografia é buscar no aluno do ensino médio a vivência com assuntos que foram vistos nas series anterior de forma teórica e prática.

Quanto à metodologia empregada foram realizadas pesquisas bibliográficas em livros, arquivos da internet, com o objetivo de identificar utilizar a metodologia de cálculo do referido assunto para explorar situações e problemas do cotidiano, relacionando-a não somente com os conceitos, mas, principalmente, com os procedimentos de investigação e de análise, procedimentos estes importantes para o conhecimento matemático aos alunos do Ensino Médio.

O aprendizado destes conteúdos é fundamental, pois é levado para vida toda o seu conhecimento, não fica estagnado como mais uma “coisa desinteressante”, como afirmam alguns alunos, mas sim, com o seu aprendizado você consegue entender momentos simples como, por exemplo, a velocidade ao dirigir um automóvel, as semelhanças dos objetos, a proporção das medidas, entre outros.

## 2 Razão e proporção

### 2.1 Entendendo a razão

#### O Conceito de Razão:

Sendo a e b dois números, com  $b \neq 0$ , denomina-se razão de a e b ou razão de a para b o quociente  $\frac{a}{b}$  ou a: b.

**EXEMPLO 1-**(JÚNIOR, José Ruy Giovanni; CASTRUCCI, Benedito. A Conquista da matemática, 7º ano. ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009. pág. 234) Em um concurso, 240 candidatos disputam 80 vagas.

#### **Solução:**

Vamos comparar esses dois números.

Dividindo o número de candidatos pelos números de vagas.

Temos:

$$\frac{240}{80} = \frac{3}{1}$$

Dizemos que há três candidatos para cada vaga ou que a razão entre o número de candidatos e o número de vagas é de 3 para 1.

Ou

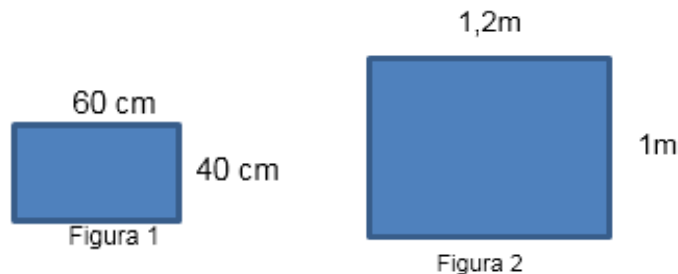
Dividimos o número de vaga pelo número de candidatos.

$$\frac{80}{240} = \frac{1}{3}$$

Dizemos que para cada vaga há 3 candidatos ou que a razão entre o número de vagas e o número de candidatos é de 1 para 3.

Portanto quando comparamos dois números, usando uma divisão, como na situação acima o resultado obtido chama-se razão entre esses dois números.

**EXEMPLO 2-**( JÚNIOR, José Ruy Giovanni; CASTRUCCI, Benedito. A Conquista da matemática, 7º ano. ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009. pag. 235, exemplo 2) Qual a razão entre a área da região retangular I e área da região retangular II?



De acordo com as dimensões das figuras, determine qual a razão entre a área da região retangular das Figuras 1 e 2?

### Solução

Nesse caso, para calcular a razão, devemos expressar as medidas na mesma unidade, ou seja:

$$1\text{m} = 100\text{ cm}$$

$$1,2\text{m} = 120\text{ cm}$$

Vamos agora, calcular a área de cada região retangular:

$$A_1 = 60\text{ cm} \times 40\text{ cm} = 2400\text{cm}^2$$

$$A_2 = 120\text{ cm} \times 100\text{ cm} = 12000\text{ cm}^2$$

Razão:  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{2400}{12000} = \frac{1}{5}$ , 1 para 5, ou seja, a área do retângulo da Figura 2 é cinco vezes a área do retângulo da Figura 1.

Observe então que a razão entre duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que exprimem as suas medidas, sempre tomadas na mesma unidade.

### 3 Razões especiais aplicados em problemas

**EXEMPLO 3 -** (MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: ideias e desafios, 6ºano. Ed. São Paulo: Saraiva 1998. pag.178, Exemplo 1) Um avião a jato fez um percurso

de 4200 km em 6 horas. Qual foi velocidade média desenvolvida por esse avião nessa viagem?

### Solução

Sabendo que a velocidade média de um objeto em movimento é razão entre a distância percorrida pelo objeto e o tempo gasto para percorrer essa distância. Então, temos:

$$\text{Velocidade média} = \frac{4200\text{Km}}{6h}$$

$$\text{Velocidade média} = 700 \text{ km/h}$$

A velocidade média foi de 700 quilômetros por hora.

**Escala** - Denomina-se escala de um desenho a razão entre o comprimento considerado no desenho e o correspondente comprimento real, medidos com a mesma unidade.

**EXEMPLO 4** -( JÚNIOR, José Ruy P P P P P P Giovanni; CASTRUCCI, Benedito. A Conquista da matemática, 7º ano. ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009. pag.241, exemplo 2) Ao desenhar a sala de sua casa, Paula traçou um segmento de 6 cm, que correspondia ao comprimento da sala. Sabendo-se que a escala utilizada foi de 1: 125; qual o comprimento real dessa sala?

### Solução

Sendo,

$$\text{Escala} = \frac{\text{comprimento do desenho}}{\text{comprimento real}}$$

Comprimento do desenho = 6 cm

Comprimento real = x

Logo temos,

$$\frac{1}{125} = \frac{6}{x} \rightarrow x = 125 \cdot 6 \rightarrow x = 750$$

O comprimento de 6 cm do desenho corresponde a um comprimento real de 750 cm ou 7,50 m. Assim, o comprimento real da sala de Paula é de 7,5 m.

**Exemplo 5** - (MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: ideias e desafios, 6ºano. Ed. São Paulo: Saraiva 1998. pag.177, exemplo 1) Na planta, o quarto de casal tem 40 cm de comprimento por 3,0 cm de largura. Quais são as dimensões reais desse quarto, em metros?

**Solução:**

$$\frac{1}{100} = \frac{4}{x} \rightarrow x = 400 \text{ cm ou } x = 4\text{m}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{3}{y} \rightarrow y = 300\text{cm ou } y = 3\text{m}$$

O quarto de casal tem 4 m de comprimento e 3 m de largura.

**Densidade de um corpo**- Para calcular a densidade de um corpo, também se aplica a ideia de razão entre duas grandezas. Assim, a densidade de um corpo é dada pela razão entre a massa e o volume desse corpo.

**EXEMPLO 6** -( JOSÉ RUY, Giovanni júnior, CASTRUCCI, Benedito. A Conquista da matemática, 7º ano. ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009. pag.244) Uma escultura de bronze tem 3,5 de massa e volume de  $400 \text{ cm}^3$  Qual é a densidade dessa escultura de bronze?

**Solução**

Sendo a densidade dada por:

$$\text{Densidade} = \frac{\text{massa do corpo}}{\text{volume do corpo}}$$

Logo temos que de acordo com os dados,

$$\text{Densidade} = \frac{\text{massa do corpo}}{\text{volume do corpo}} = \frac{3,5 \text{ Kg}}{400\text{cm}^3} = \frac{3500\text{g}}{400\text{cm}^3} = 8,75 \text{ g/cm}^3$$

Logo, a densidade dessa escultura de prata é  $8,75 \text{ g/cm}^3$ .

**Densidade demográfica** - O cálculo de densidade demográfica também é uma aplicação de razão entre duas grandezas. Ela expressa o número de habitantes por quilômetro quadrado de uma região. Assim, densidade demográfica é a razão entre o número de habitantes e a área da região ocupada.

**Exemplo 7-** (JÚNIOR, José Ruy Giovanni ; CASTRUCCI, Benedito. A Conquista da matemática, 7º ano. ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009. pag.245) Tocantins é o mais novo dos 26 países estados brasileiros e ocupa uma área aproximada de  $280000 \text{ km}^2$ . De acordo com o IBGE, em 2005, o estado de Tocantins tinha uma população aproximadamente de 1 300 000 habitantes. Qual era, então, a densidade demográfica aproximada desse estado nesse ano? Em qual região brasileira esta localizada?

De acordo com os dados do exemplo, temos:

**Solução:**

$$\text{Densidade demográfica} = \frac{1300000 \text{ hab.}}{280000 \text{ km}^2} \cong 4,6 \text{ hab./km}^2.$$

Logo, a densidade demográfica do estado de Tocantins era de  $4,6 \text{ hab./ km}^2$ , aproximadamente.

**Exemplo 8 -** (MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: ideias e desafios, 6ºano. Ed. São Paulo: Saraiva 1998. pag. 180) Um pedaço de cortiça com volume de  $18 \text{ cm}^3$  tem massa igual a 4,32g. Qual é a densidade da cortiça?

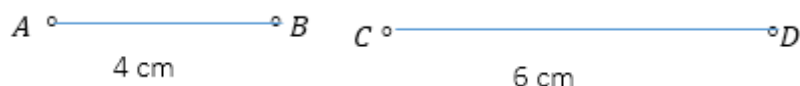
**Solução:**

$$\frac{\text{massa}}{\text{volume}} = \frac{4,32}{18} = 0,24 \text{ g/cm}^3$$

A densidade da cortiça é de 0,24 gramas por centímetro cúbico.

#### 4 Razão entre segmentos e segmentos proporcionais.

Observe os segmentos de reta e suas medidas:



A razão entre os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  é obtida calculando-se a razão entre suas medidas de comprimento em uma mesma unidade.

Veja como indicamos:

A razão entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ :  $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Imagine agora outros dois segmentos  $\overline{EF}$  de 10 cm e  $\overline{GH}$  de 15 cm. A razão entre eles é  $\frac{EF}{GH} = \frac{10}{15}$ , que também é igual a  $\frac{2}{3}$ .

Dizemos que  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{EF}$  e  $\overline{GH}$ , nessa ordem, são ditos segmentos proporcionais, pois  $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$ , e que  $\frac{2}{3}$  é o coeficiente de proporcionalidade.

**Exemplo 9** - ( DANTE, Luiz Roberto. Projeto Teláris: Matemática, 9º ano. 1. Ed.- São Paulo: Ática, 2012. pag.110) Analise a medida dos lados dos dois triângulos dadas na mesma unidade.

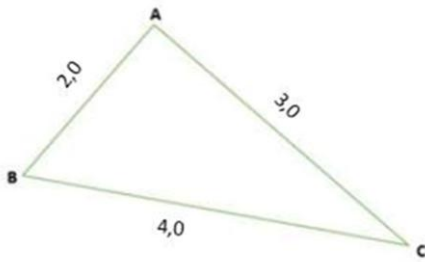


Figura 1

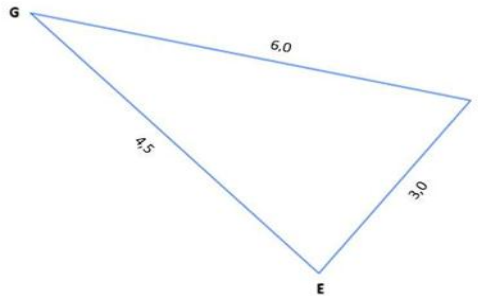


Figura 2

Calcule a razão entre:

a) o lado maior do  $\Delta ABC$  e o lado maior do  $\Delta EFG$

Solução:

$$\frac{4,0}{6,0} = \frac{2}{3}$$

b) o lado menor do  $\Delta ABC$  e o lado menor do  $\Delta EFG$

**Solução:**

$$\frac{2,0}{3,0}$$

c) o 3º lado do  $\Delta ABC$  e o 3º lado do  $\Delta EFG$ .

Solução:

$$\frac{3,0}{4,5} = \frac{2}{3}$$

As razões entre as medidas dos lados correspondentes são iguais:

$$\frac{4,0}{6,0} = \frac{2,0}{3,0} = \frac{3,0}{4,5}$$

Em casos como este, dizemos que os dois triângulos têm as dimensões proporcionais.

## 5 Teorema de Tales

Considere um feixe de três retas paralelas  $r$ ,  $s$  e  $v$  cortado por uma transversal  $t$ . Traçamos outra transversal qualquer  $u$ .

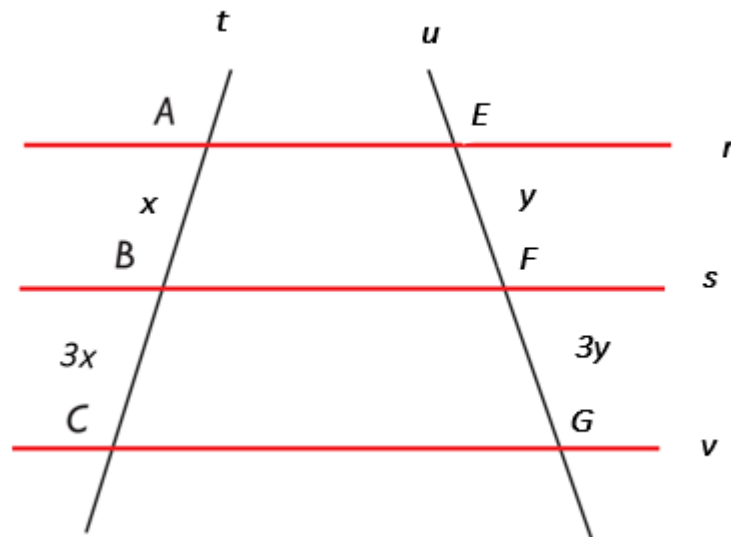


Figura 1

Sabe-se que  $AB = x$  cm,  $BC = 3x$  cm e  $\frac{AB}{BC} = \frac{1x}{3x} = \frac{1}{3}$ . (I)

Se você medir os segmentos  $\overline{EF}$  e  $\overline{FG}$ , poderá constatar (salvo pequenos erros de medição) que  $EF = y$  cm e  $FG = 3y$  cm, ou seja,  $\frac{EF}{FG} = \frac{1y}{3y} = \frac{1}{3}$ . (II)

De (I) e (II), é possível concluir que  $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$ , ou seja,  $AB$ ,  $BC$ ,  $EF$  e  $FG$  formam uma proporção.

## 6 Proporção

## 6.1 Entendendo a proporção

Quatro números  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , diferentes de zero, tomados nessa ordem, forma uma proporção quando:

$$A: b = c: d \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Na proporção  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , temos:

Os números  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são denominados termos da proporção.

O primeiro e o quarto termos são denominados extremos, enquanto o segundo e o terceiro são denominados meios.

De modo geral, em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios e vice versa.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

## 6.2 Propriedades fundamentais das proporções.

### 1° Propriedade

Dada a proporção  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , vamos somar 1 aos seus dois membros:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Invertendo as razões da proporção dada, temos  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ .

Somando 1 aos dois membros dessa proporção, obtemos:

$$1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

Então, se  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , temos:  $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ . Portanto,  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ . Isso nos leva á seguinte propriedade:

Numa proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo) assim como a soma dos dois últimos está para o terceiro (ou para o quarto).

## 2° propriedade

Dada a proporção  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , vamos subtrair 1 de seus dois membros:

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \quad \text{ou} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

Invertendo as razões da proporção dada, temos:  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Subtraindo 1 de seus dois membros, vem:

$$\frac{b}{a} - 1 = \frac{d}{c} - 1 \quad \text{ou} \quad \frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$$

Multiplicamos os dois membros por  $-1$ , temos:  $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

Então, se  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , temos:  $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ . Portanto,  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ . Isso nos leva á seguinte propriedade:

Numa proporção, a diferença entre os dois primeiros termos está para o primeiro ( ou para o segundo) assim como a diferença entre os dois últimos está para o terceiro ( ou quarto).

## 3° propriedade

Considere a proporção  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Permutando os meios:  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ .

Aplicando a 1° propriedade:  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{b+d}{d}$ . Permutando os meios:  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

Portanto,  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Isso nos leva á seguinte propriedade:

Numa proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como cada antecedente está para seu consequente.

## 6.3 Semelhança de polígonos

Dois polígonos são semelhantes se existe uma correspondência entre vértices de maneira que os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Observe os pentágonos I e II, podemos estabelecer uma correspondência entre os vértices, pois os ângulos correspondentes são congruentes;

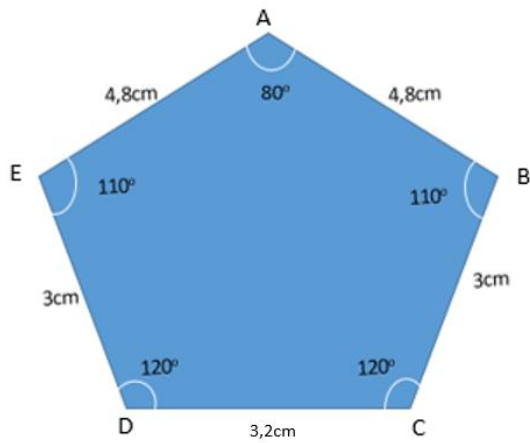


Figura I

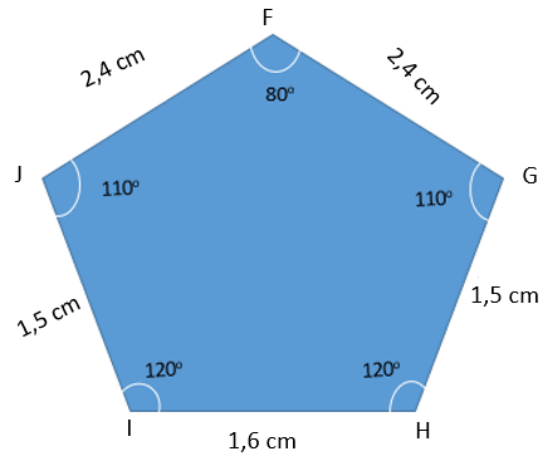


Figura II

$$\hat{A} \equiv \hat{F}$$

$$\hat{B} \equiv \hat{G}$$

$$\hat{C} \equiv \hat{H}$$

$$\hat{D} \equiv \hat{I}$$

$$\hat{E} \equiv \hat{J}$$

Os lados correspondentes são proporcionais.

$$\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{CD}{HI} = \frac{DE}{IJ} = \frac{EA}{JF}$$

$$\frac{AB}{FG} = \frac{4,8}{2,4} = 2$$

$$\frac{BC}{GH} = \frac{3}{1,5} = 2$$

$$\frac{CD}{HI} = \frac{3,2}{1,6} = 2$$

$$\frac{DE}{IJ} = \frac{3}{1,5} = 2$$

$$\frac{EA}{JF} = \frac{4,8}{2,4} = 2$$

As razões são todas iguais a 2.

Portanto, os pentágonos I e II são semelhantes. A razão constante é a **razão de semelhança**. Nesse caso a razão de semelhança é 2. O pentágono foi reduzido na razão de 2 para 1.

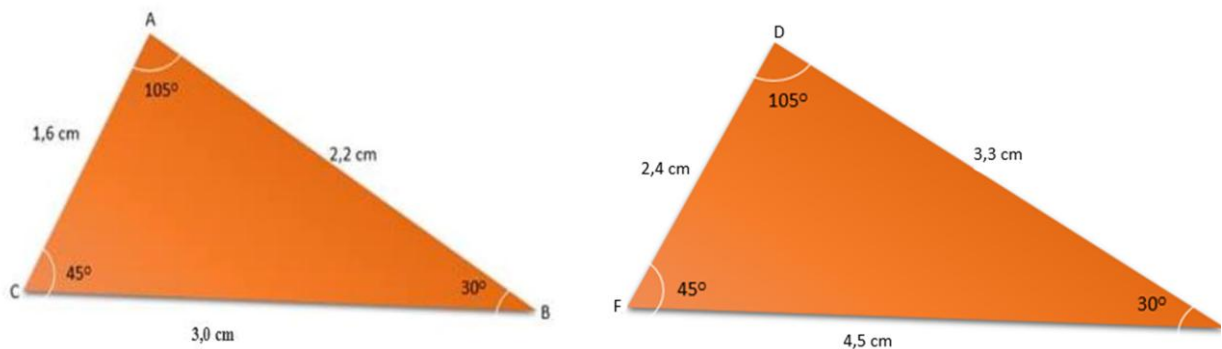
A definição de polígonos semelhantes é compatível com a definição de figuras semelhantes. Observe que os ângulos são mantidos e os comprimentos são todos multiplicados por um mesmo número constante. Nesse exemplo, todos os comprimentos foram divididos por 2, o que equivale a multiplicar por 0,5.

### Símbolo de semelhança

Há um símbolo para indicar semelhança: ~

No caso dos pentágonos I e II, escrevemos  $ABCDE \sim FGHIJ$  (o pentágono ABCDE é semelhante ao pentágono FGHIJ).

Veja mais um exemplo:



Os triângulos ABC e DEF são semelhantes, ou seja,  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ , pois os ângulos correspondentes são congruentes:

$$\hat{A} \equiv \hat{D} \qquad \hat{B} \equiv \hat{E} \qquad \hat{C} \equiv \hat{F}$$

E as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{2,2}{3,3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{3,0}{4,5} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{CA}{FD} = \frac{1,6}{2,4} = \frac{2}{3}$$

A razão entre as medidas dos lados correspondentes é constante.

A razão de semelhança é  $\frac{2}{3}$ .

Isso significa que o triângulo ABC foi ampliado na razão 2 para 3.

#### 6.4 Semelhanças de triângulos

Triângulos são polígonos; portanto, para que dois triângulos sejam semelhantes é preciso ter os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

No entanto, para os triângulos, dois pares de ângulos correspondentes congruentes já garantem as outras condições.

Vamos mostrar que isso é verdade.

No triângulo ABC e DEF abaixo, temos  $\hat{B} \equiv \hat{E}$  e  $\hat{C} \equiv \hat{F}$ . Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , temos que obrigatoriamente  $\hat{A} \equiv \hat{D}$ .

Por exemplo:

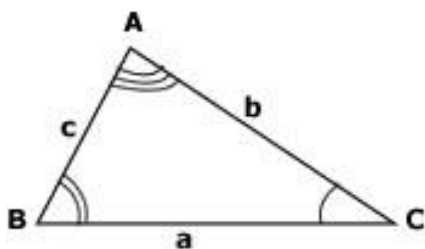


Figura I

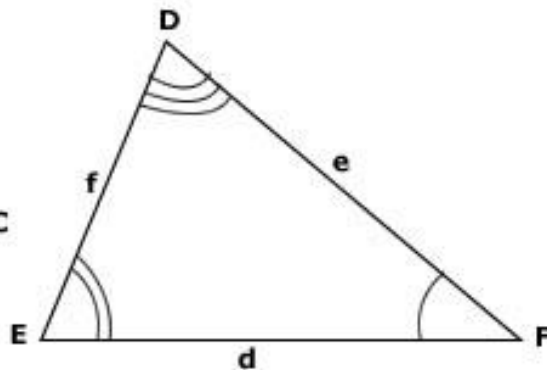


Figura II

Resta mostrar que os lados são proporcionais. Para isso, marcamos um ponto M em  $\overline{EF}$  de modo que  $EM = BC$  e traçamos por M uma paralela a  $\overline{DF}$ , determinando o ponto P.

Por exemplo:

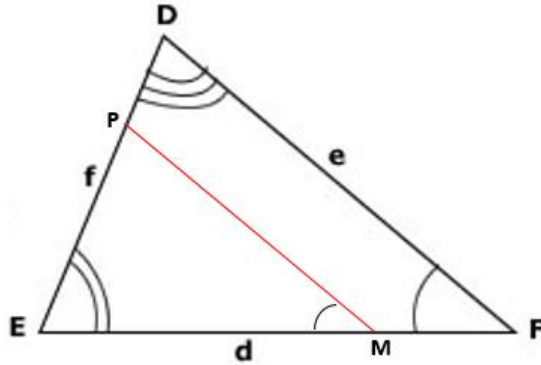


Figura III

$\widehat{M} = \widehat{F}$  (ângulos correspondentes)

Observe que  $\triangle ABC \cong \triangle PEM$  pelo caso ALA.

Pelo teorema de Tales, no triângulo DEF temos:  $\frac{ME}{FE} = \frac{PE}{DE}$

Da congruência entre os triângulos temos que  $AB = PE$  e  $BC = EM$ . Substituímos na proporção obtendo:  $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$

De modo análogo pode-se mostrar que  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$  e concluir que:

Dois triângulos que apresentam dois pares de ângulos correspondentes congruentes são semelhantes.

### TERCEIRA PROPORCIONAL

EM UMA PROPORÇÃO ONDE OS MEIOS SÃO IGUAIS, UM DOS EXTREMOS É A TERCEIRA PROPORCIONAL DO OUTRO EXTREMO:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Na proporção acima  $a$  é a terceira proporcional de  $c$  e vice-versa.

### QUARTA PROPORCIONAL

DADOS TRÊS NÚMEROS A, B, E C, CHAMAMOS DE QUARTA PROPORCIONAL O QUARTO NÚMERO X QUE JUNTO A ELES FORMAM A PROPORÇÃO:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Tendo o valor dos números a, b, e c, podemos obter o valor da quarta proporcional, o número x, recorrendo à propriedade fundamental das proporções. O mesmo procedimento utilizado na resolução de problemas de regra de três simples.

**EXEMPLO 10** - (JÚNIOR, José Ruy Giovanni ; CASTRUCI, Benedito. A Conquista da matemática, 7º ano. ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009. pág. 255) Determine o valor de x, sabendo que os quatros números a seguir, na ordem em que aparecem formam uma proporção:

$$5; 8; 3,5; x.$$

**Solução:**

$$\frac{5}{8} = \frac{3,5}{x}$$

Os números 5, 8, 3,5 e x, nessa ordem forma uma proporção.

$$5x = 8 \times 3,5$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções.

$$5x = 28$$

Resolvendo a equação em x.

$$x = \frac{28}{5} = 5,6$$

O valor de x é 5,6

O número 5,6, assim determinado, chama-se a quarta parte proporcional dos números 5,8 e 3,5.

Assim, dados três números  $a$ ,  $b$  e  $c$ , não nulos, denomina-se quarta proporcional desses números um número  $x$ , tal que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ .

**EXEMPLO 11-** (JÚNIOR, José Ruy Giovanni ; CASTRUCI, Benedito. A Conquista da matemática, 7º ano. ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009. pág. 254) Considerando, nesta ordem, os três números a seguir: 1,5; 0,8; 2,4. Calcule a quarta proporcional desses números.

**Solução:**

De acordo com o exposto temos:  $\frac{1,5}{0,8} = \frac{2,4}{x}$ . Logo, temos

$1,5 \cdot x = 0,8 \cdot 2,4 \rightarrow$  Aplicando a propriedade das proporções.

$1,5x = 1,92 \rightarrow$  Resolvendo a equação em  $x$

$$X = \frac{1,92}{1,5}$$

$$X = 1,28$$

## 7 Grandezas Proporcionais

**Exemplo 12-** (LIMA, Elon Lages; WAGNER, Eduardo; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; MORGADO, Augusto César. Temas e Problemas Elementares. 5. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. pag.2) Uma firma de engenharia asfaltou uma estrada de 36 km em 14 dias. Quantos dias seriam necessários para a mesma firma asfaltar uma estrada de 54 km?

Três métodos são geralmente usados para resolver este problema:

**1. Método direto.** (aplicável apenas quando os dados são números pequenos ou “fáceis”.) como 54 é igual a uma vez e meia 36, para asfaltar 54 km serão necessários 21 é igual a uma vez e meia 14.

**2. Redução á unidade.** (aplicável em geral.) Quantos dias serão necessários para asfaltar uma estrada de 1 km? Se 36 km requerem 14 dias, 1 km requer  $\frac{14}{36}$  dias. Então 54 km requererão  $54 \times \left(\frac{14}{36}\right) = 21$  dias.

Esquemáticamente:

Km	dias
$\div 36 \downarrow 36$	$14 \downarrow \div 36$
$\downarrow$	$\frac{14}{36}$
1	$\downarrow$
$\downarrow$	$\downarrow$
x 54	x 54
21	54

**3. Proporção.** Seja x o número de dias que se deseja saber. Então 36 km estão para 54 km assim como 14 estão para x. Ou seja:

$$\frac{36}{54} = \frac{14}{x}$$

Logo  $x = (54 \times 14) \div 36 = 21$ .

Para resolver um problema do tipo acima, seja qual for o método que se adote, é necessário fazer uso do fato de que o número de dias necessários para uma firma asfaltar uma estrada é proporcional ao comprimento dessa estrada. (Admitindo que a largura da mesma é fixada.)

### 7.1 Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra também aumenta na mesma proporção, ou, diminuindo uma delas, a outra também diminui na mesma proporção. Se duas grandezas X e Y são diretamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam na mesma razão, isto é, existe uma constante K tal que:

$$\frac{x}{y} = k$$

**Exemplo 13-** ( FONSECA, Rubens Vilhena; FRANÇA, Adriano Santos. Pré - Calculo. Belém: UEPA, Centro de Ciências Sociais da Educação, 2011. pág. 14). Uma torneira foi aberta para encher uma caixa com água. A cada 15 minutos é medida a altura do nível de água em centímetros por minutos.

Construímos uma tabela para mostrar a evolução da ocorrência:

<b>Tempo(min)</b>	<b>Altura(cm)</b>
<b>15</b>	50
<b>30</b>	100
<b>45</b>	150

Observamos que quando duplica o intervalo de tempo, a altura do nível da água também duplica e quando o intervalo de tempo é triplicado, a altura do nível da água também é triplicada.

Observações: Usando razões, podemos descrever essa situação de outro modo.

(a) Quando o intervalo de tempo passa de 15 min para 30 min, dizemos que o tempo varia na razão  $\frac{15}{30}$ , enquanto que a altura da água varia de 50 cm para 100 cm, ou seja, a altura varia na razão  $\frac{50}{100}$ . Observamos que estas duas razões são iguais:

$$\frac{15}{30} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

(b) Quando o intervalo de tempo varia de 15 min para 45 min, a altura varia de 50 cm para 150 cm. Nesse caso, o tempo varia na razão  $\frac{15}{45}$  e a altura na razão  $\frac{50}{150}$ . Então, notamos que essas razões são iguais:

$$\frac{15}{45} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$$

Concluimos que a razão entre o valor numérico do tempo que a torneira fica aberta e o valor numérico da altura atingida pela água é sempre igual, assim dizemos então que a altura do nível da água é diretamente proporcional ao tempo que a torneira ficou aberta.

**Exemplo14-** (MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: ideias e desafios, 6ºano-6.ed- São Paulo: Saraiva,1998.pág. 195) .Se um carro percorre, em média, 90 km com 10 litros de álcool, esse carro consumirá 30 litros de álcool, para percorrer 270 km. Relacione os espaços percorridos com a quantidade de álcool consumida para percorrê-los.

Espaço	Volume	
(Km )	(l)	
90	10	↓ aumenta
270	30	

$\frac{90}{270} = \frac{10}{30}$  razões iguais.

Nesta situação, se o espaço percorrido triplicar, por exemplo, o volume de álcool também triplicará. Se o espaço percorrido for a metade, o volume de álcool também será a metade.

Dizemos que as grandezas espaço e volume, nesta situação, são grandezas diretamente proporcionais.

## 7.2 Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra diminui na mesma proporção, ou, diminuindo uma delas, a outra aumenta na mesma proporção. Se duas grandezas X e Y são inversamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam na razão inversa, isto é, existe uma constante K tal

que:

$$X \cdot Y = K$$

**EXEMPLO 15-** (FONSECA, Rubens Vilhena; FRANÇA, Adriano Santos. Pré – Calculo. Belém: UEPA, Centro de Ciências Sociais da Educação, 2011. pág. 15 e 16)A professora de um colégio tem 24 livros para distribuir entre os seus melhores alunos, dando a mesma quantidade de livros para cada aluno.

Observe que escolhendo apenas o melhor aluno receberá 24 livros, os 2 melhores alunos receberão 12 livros, os 3 melhores alunos receberão 8 livros, os 4 melhores alunos receberão 6 livros e os 6 melhores alunos receberá 4 livros.

<b>Alunos escolhidos</b>	<b>Livros para cada aluno</b>
<b>1</b>	24
<b>2</b>	12
<b>3</b>	8
<b>4</b>	6
<b>6</b>	4

De acordo com a tabela, a quantidade de alunos escolhidos e a quantidade de livros que cada aluno receberá, são grandezas que variam sendo que uma depende da outra e se relacionam da seguinte forma:

Se o número de alunos dobra, o número de livros que cada um vai receber cai para a metade.

Se o número de alunos triplica, o número de livros que cada aluno vai receber cai para a terça parte.

Se o número de alunos quadruplica, o número de livros que cada aluno vai receber cai para a quarta parte.

Se o número de alunos sextuplica, o número de livros que cada aluno vai receber cai para a sexta parte. Sob estas condições, as duas grandezas envolvidas (número de alunos escolhidos e número de livros distribuídos) são grandezas inversamente proporcionais. Quando a quantidade de alunos varia na razão de 2 para 4, a quantidade de livros distribuídos varia de 12 para 6. Notemos que essas razões não são iguais, mas são inversas:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{12/6} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{12}{6} = \frac{1}{2/4} = 2$$

Se a quantidade de alunos varia na razão de 2 para 6, a quantidade de livros distribuídos varia de 12 para 4. Observemos que essas razões não são iguais, mas são inversas:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{12/4} \quad \text{e} \quad \frac{12}{4} = \frac{1}{2/6}$$

**EXEMPLO 16** - (FONSECA, Rubens Vilhena; FRANÇA, Adriano Santos. Pré – Calculo. Belém: UEPA, Centro de Ciências Sociais da Educação, 2011. Pag.16). Um automóvel se desloca de uma cidade até uma outra localizada a 120 Km da primeira. Se o percurso é realizado em:

1 hora, com velocidade média de 120 Km/h.

2 horas, velocidade média de 60 Km/h.

3 horas, velocidade média de 40 Km/h.

A unidade é Km/h = quilômetro por hora e uma tabela da situação é:

<b>Velocidade (Km/h)</b>	<b>Tempo (h)</b>
<b>120</b>	<b>1</b>
<b>60</b>	<b>2</b>
<b>40</b>	<b>3</b>

De acordo com a tabela, o automóvel faz o percurso em 1 hora com velocidade média de 120 Km/h. Quando diminui a velocidade à metade, ou seja, 60 Km/h, o tempo gasto para realizar o mesmo percurso dobra e quando diminui a velocidade para a terça parte, 40 Km/h o tempo gasto para realizar o mesmo percurso triplica. Para percorrer uma mesma distância fixa, as grandezas velocidade e tempo gasto, são inversamente proporcionais. (pré – calculo pág. 16)

## **8 Regra de três simples**

Uma regra de três simples diretas é uma forma de relacionar grandezas diretamente proporcionais. Para resolver problemas, tomaremos duas grandezas diretamente proporcionais X e Y e outras duas grandezas W e Z também diretamente proporcionais, de forma que tenham a mesma constante de proporcionalidade K.

$$\frac{x}{y} = k \quad \text{e} \quad \frac{w}{z} = k$$

Assim,

$$\frac{x}{y} = \frac{w}{z}$$

**Exemplo 17-**(<https://rpm.org.br/cdrpm/8/1.rtm>. ) um litro de água do mar contém 25 g de sal. Quantos litros de água devem ser evaporados para obtermos 8 kg de sal?

### Solução

Se  $l$  designa a quantidade de litros de água,  $q$  a quantidade de sal por litro e  $s$  a quantidade de sal no  $l$  litros de água,  $S = ql$ . Com os dados do problema, esta equação passa a ser ( observe que  $q = 25 \text{ g} = 0,025\text{kg}$  ):  $8 = 0,025 \times l$  Donde, temos  $l = \frac{8}{0,025} = 320$  litros.

**Exemplo 18-** (<https://rpm.org.br/cdrpm/8/1.rtm>) Cinco torneiras idênticas juntas enchem um tanque em 144 minutos. Quantos dessas torneiras são necessários para encher o mesmo tanque em uma hora e meia?

### Solução

Seja  $C$  a capacidade do tanque,  $N$  o número de torneiras (esta grandeza representa uma taxa de variação, qual seja, a quantidade de água despejada por minuto) e  $T$  o tempo necessário para encher o tanque. Então,  $C = NT$ . Basta agora substituir os dados nesta equação, eliminar  $C$  e resolver a equação resultante para encontrar  $N$ . Como uma hora e meia é o mesmo que 90 minutos, temos:

$$C = 5 \times 144 \text{ e } C = N \times 90$$

Donde se segue que,

$$90 N = 5 \times 144 \leftrightarrow N = \frac{720}{90} = 8. \text{ Portanto, } N = 8 \text{ torneiras.}$$

## 9 Regra de três compostas

Regra de três compostas é um processo de relacionamento de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou uma mistura dessas situações.

O método funcional para resolver um problema dessa ordem é montar uma tabela com duas linhas, sendo que a primeira linha indica as grandezas relativas à primeira situação enquanto que a segunda linha indica os valores conhecidos da segunda situação.

*Definição 1.* Diz-se que duas variáveis (ou grandezas)  $x$  e  $y$  são proporcionais – mais especificamente, diretamente proporcionais – se estiverem assim relacionadas:  $y = k x$  ou  $y / x = k$  onde  $k$  é uma constante positiva, chamada constante de proporcionalidade.

*Definição 2.* Diz-se que as variáveis  $x$  e  $y$  são inversamente proporcionais se  $y = k / x$  ou  $xy = k$ , onde  $k$  é uma constante positiva ( constante de proporcionalidade).

Por exemplo, se  $p$  é o perímetro de um quadrado de lado  $l$ , então  $p = 4l$ , de sorte que o perímetro e o lado são diretamente proporcionais.

Imaginemos, como segundo exemplo, um retângulo de lados variáveis e área constante. Se  $x$  e  $y$  são dos lados e a área é, digamos  $12m^2$ , então  $xy = 12$  ou  $y = \frac{12}{x}$ , o que mostra serem  $x$  e  $y$  inversamente proporcionais.

*Definição 3.* Se várias variáveis, digamos,  $x, y, z, w, r, s$  estão relacionadas por uma equação do tipo  $z = k \frac{x y w}{r s}$  onde  $k$  é constante, então dizemos que  $z$  é diretamente proporcional a  $x, a y$  e a  $w$ ; e inversamente proporcional a  $r$  e a  $s$ .

**Exemplo 19-** ([https://rpm.org.br/cdrpm/8/1.rtm.](https://rpm.org.br/cdrpm/8/1.rtm)) Uma pessoa digitando a 60 toques por minuto e trabalhando 6 horas por dia, realiza certo trabalho em 10 dias. Outra pessoa, digitando a 50 toques por minuto e trabalhando 4 horas por dia, realizará o mesmo trabalho em quantos dias?

PESSOA	TOQUES	HORAS	DIAS
A	60	6	10
B	50	4	X

Agora, vamos fazer a relação entre a primeira coluna e a última.

Se uma pessoa digitando 60 toques faz um trabalho em 10 dias. Outra pessoa digitando apenas 50 toques fará em quantos dias? Claro que em mais dias, certo? Então,

é inversamente proporcional, porque houve diminuição nos toques, mas aumentaram os dias. Então, em vez de considerar a relação  $\frac{60}{50}$ ; eu vou considerar  $\frac{50}{60}$  (I).

Agora, vamos fazer a relação entre as horas. Uma pessoa trabalhando 6 horas por dia faz certo trabalho em 10 dias. Outra pessoa, trabalhando apenas 4 horas faz esse mesmo trabalho em quantos dias?

Claro que também ele vai fazer isso em mais dias. Como houve redução de horas e aumento de dias, a relação também é inversa. Em vez de considerar  $6/4$  ou vou considerar  $4/6$ . (II)

Pronto, já temos as relações. Agora vamos multiplicar (I) por (II) e igualar à relação dos dias que é  $\frac{10}{x}$ . Portanto, temos:

$$\frac{50}{60} \cdot \frac{4}{6} = \frac{10}{x} \rightarrow \frac{200}{360} = \frac{10}{x} \rightarrow x = \frac{3.600}{200} \rightarrow x = 18$$

Então, a resposta é 18 dias.

Ou

Seja  $k$  o número de toques necessários para realizar trabalho. Uma pessoa que faz  $T$  toque por minuto fará  $60t$  toques por hora e, trabalhando  $H$  horas por dia, durante  $D$  dias, fará  $60THD$  toques ao todo. Portanto,

$$60 TDH = k \quad (1)$$

Esta equação nos diz, segundo a Def. 3, que qualquer das grandezas  $H$ ,  $T$  e  $D$  é inversamente proporcional às outras duas. Substituindo em (1) as duas sequências de valores dados no problema, obtemos:

$$60 \times 60 \times 6 \times 10 = k \quad \text{e} \quad 60 \times 50 \times 4 \times x = k,$$

Donde segue-se que  $60 \times 50 \times 4 \times x = 60 \times 60 \times 6 \times 10$

Ora esta é uma equação simples, cuja solução é  $x = 18$  dias.

**Exemplo 20-** (<https://rpm.org.br/cdrpm/8/1.rtm>) Se 10 máquinas, funcionando 6 horas por dia, durante 60 dias, produzem 90 000 peças, em quantos dias  $x$ , 12 dessas mesmas máquinas, funcionando 8 horas por dia, produzirão 192 000 peças?

**Solução**

Temos aqui quatro variáveis:

M = número de máquinas;

H = horas de funcionamento por dia;

D = dias de funcionamento;

P = número de peças produzidas.

Seja  $k$  o número de peças que cada máquina produz por hora.

Temos:

$$P = KMHD; \text{ ou} \quad (2)$$

Esta equação nos diz que a variável  $P$  é diretamente proporcional a  $M$ ,  $H$  e  $D$ . Substituindo nesta equação as duas sequências de valores dados no problema, obtemos.

$$\frac{90000}{10 \times 6 \times 60} = K = 12 \times 8 \times X \frac{192000}{12 \times 8 \times X}$$

Novamente temos aqui uma equação simples, cuja solução é.

$$X = \frac{10 \times 6 \times 60 \times 192000}{90000 \times 12 \times 8} = 80 \text{ dias.}$$

**EXEMPLO 21-** (FONSECA, Rubens Vilhena; FRANÇA, Adriano Santos. Pré - Calculo. Belém: UEPA, Centro de Ciências Sociais da Educação, 2011. ág. 18) Funcionando durante 6 dias, 5 máquinas produziram 400 peças de uma mercadoria. Quantas peças dessa mesma mercadoria serão produzidas por 7 máquinas iguais as primeiras, se essas máquinas funcionarem durante 9 dias?

**Solução:**

Vamos representar o número de peças pela letra  $X$ . De acordo com os dados do problema, vamos organizar a tabela:

Nº de máquinas (A)	Nº de dias (B)	Nº de peças (C)
--------------------	----------------	-----------------

5	6	400
7	9	x

A grandeza Número de peças (C) servirá de referência para as outras grandezas. Analisaremos se as grandezas Número de máquinas (A) e Número de dias (B) são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais à grandeza C que representa o Número de peças. Tal análise deve ser feita de uma forma independente para cada par de grandezas.

Vamos considerar as grandezas Número de peças e Número de máquinas. Devemos fazer uso de lógica para constatar que se tivermos mais máquinas operando produziremos mais peças e se tivermos menos máquinas operando produziremos menos peças. Assim temos que estas duas grandezas são diretamente proporcionais.

Vamos agora considerar as grandezas: Número de peças e Número de dias. Novamente devemos usar a lógica para constatar que se tivermos maior número de dias produziremos maior número de peças e se tivermos menor número de dias produziremos menor número de peças. Assim temos que estas duas grandezas também são diretamente proporcionais.

Concluimos que todas as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, logo, basta resolver a proporção:

$$\frac{400}{x} = \frac{(5 \times 6)}{(7 \times 9)} \leftrightarrow \frac{400}{x} = \frac{30}{63}$$

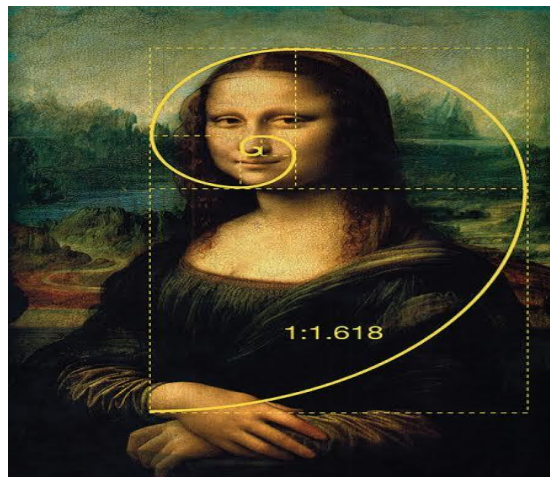
Resolvendo a proporção, obtemos  $X = 840$ , assim, se as 7 máquinas funcionarem durante 9 dias serão produzidas 840 peças.

## 10 Proporção Áurea

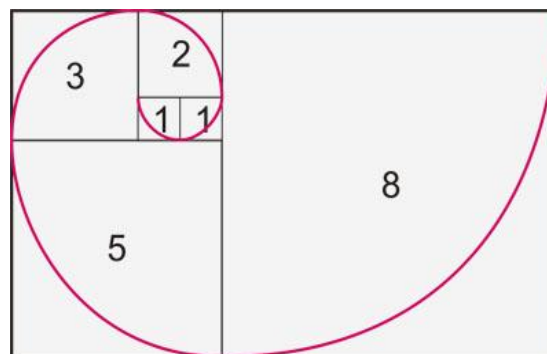
Também conhecida como “divina proporção”, trata-se de uma proporção entre duas medidas, em que a diferença entre elas seja de 1,618. É uma regra usada não só por fotógrafos, mas também por arquitetos. Por traz disso, há o conceito matemático, em que determinado número é sempre a soma de dois valores anteriores. Por exemplo:

- $0+1=1$
- $1+1=2$
- $1+2=3$
- $2+3=5$
- $3+5=8$
- $5+8=13$

Ao dividir um desses números pelo seu anterior (a partir do número 3), o resultado será sempre próximo a 1,618, caracterizado como número de ouro. Foi a partir desta técnica que muitos artistas acreditaram que obteriam um resultado satisfatório em suas obras e trabalhos. Há indícios que o próprio Leonardo Da Vinci tenha usado esta matemática em seu famoso quadro Mona Lisa.



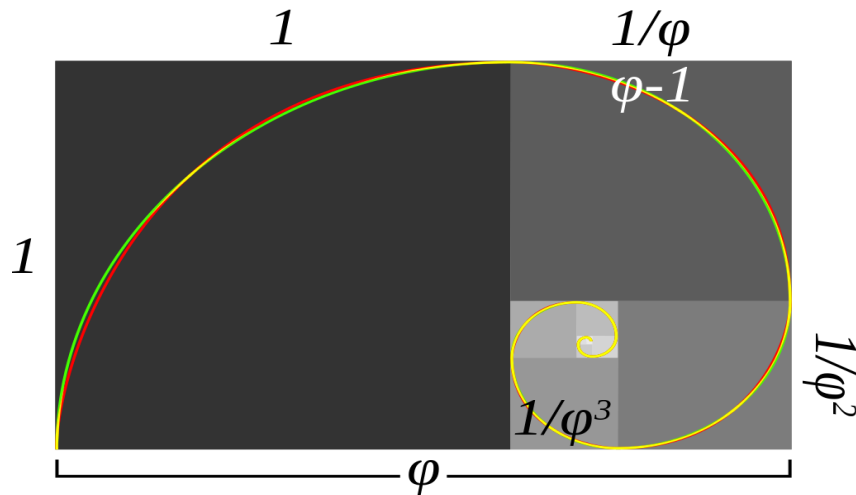
Ao passarmos esta técnica para o papel, teremos algo aproximado a isso:



### Onde existe a proporção áurea

A proporção áurea não é uma “mentira”. Ela aparece bastante na ciência e na natureza, em diferentes formas.

Uma delas é a espiral áurea, que cresce de acordo com a razão  $\varphi$ . É possível se aproximar dela dividindo-se os lados de um retângulo em proporções áureas e ligando os pontos com um compasso.

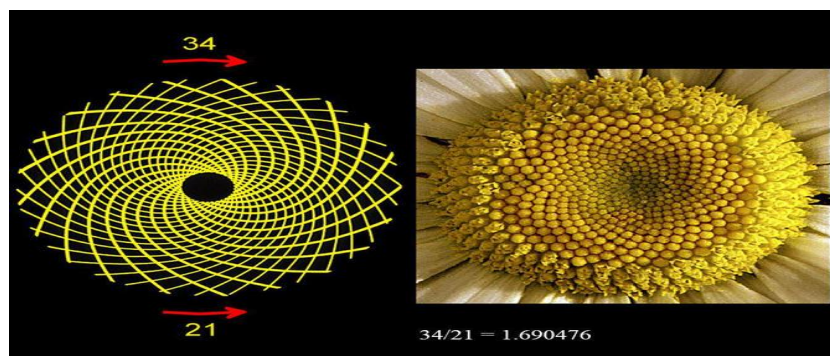


A linha vermelha é a espiral áurea; a linha verde é a aproximação feita com quartos de circunferência; a linha amarela é a sobreposição entre as duas. (Wikipedia)

Ela também está relacionada à importante sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233... Ela é formada pela soma dos dois números anteriores:  $1+1=2$ ,  $1+2=3$ ,  $2+3=5$ , e assim por diante. Ao dividir um número pelo outro, você se aproxima continuamente da proporção áurea.

É possível encontrar exemplos da espiral áurea e da sequência de Fibonacci na natureza. Como explica a revista Nautilus.

Por exemplo, indícios da proporção áurea foram detectados no nível quântico, onde átomos magnéticos ligados entre si parecem vibrar em frequências descritas por  $\varphi$ . Na escala macroscópica, a sequência de Fibonacci e a proporção áurea descrevem as disposições naturais de sementes e folhas em muitas plantas. Se você examinar a embalagem de sementes na cabeça de um girassol, há uma série de espirais no sentido horário e anti-horário, que geralmente aparecem em números de Fibonacci sucessivos.



Institute of Science in Society via CNET

O matemático Revlin explica que, no caso do girassol, “a natureza quer colocar o máximo de sementes possível, e a maneira de fazer isso é adicionar novas sementes numa forma em espiral”. Vale notar que girassóis nem sempre obedecem à sequência de Fibonacci.

Revlín também nota que a razão áurea também está relacionada ao pentagrama (estrela de cinco pontas), a certas estruturas cristalinas e a fractais.

A proporção áurea também era usada como um guia na obra de artistas como Salvador Dalí e de arquitetos como Le Corbusier.

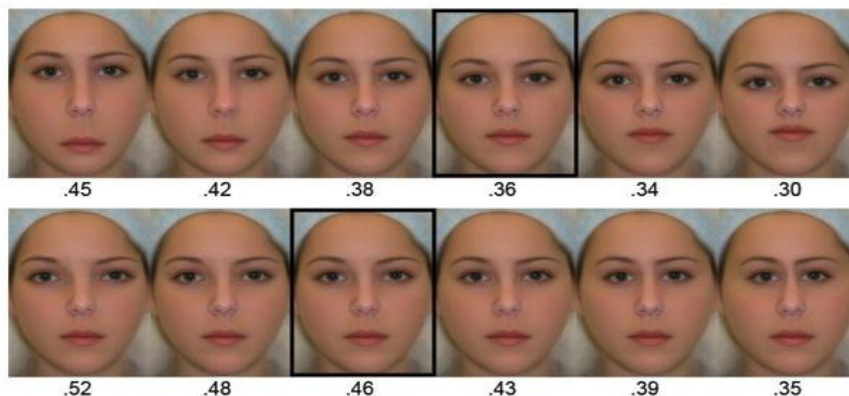


A Última Ceia (1955), por Salvador Dalí, com linhas inseridas pelo programa PhiMatrix

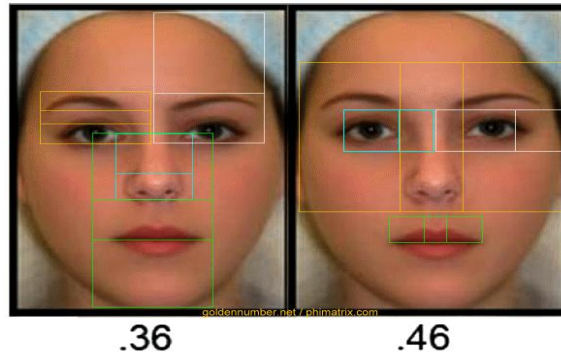
### Padrão de beleza

Ei, mas a razão áurea não era uma “proporção da beleza universal”? Bem, um estudo de 2009 fez quatro experimentos para testar a existência de um arranjo facial que fosse considerado bonito pela maioria das pessoas. Os cientistas descobriram que as proporções não se encaixam na razão áurea:

Faces femininas foram julgadas mais atraentes quando a distância vertical entre os olhos e a boca era aproximadamente 36% do comprimento do rosto, e a distância horizontal entre os olhos era de aproximadamente 46% da largura do rosto.



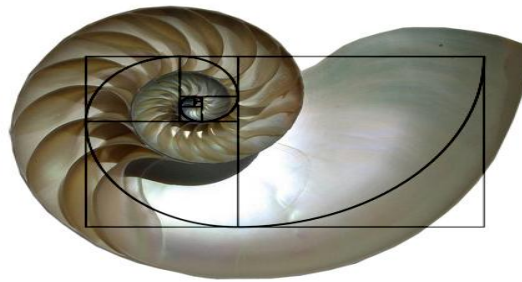
Mas se você está determinado a ver proporções áureas, você vai encontrá-las. Esta é uma imagem do site GoldenNumber.net:



Os retângulos não se encaixam muito bem nos cantos dos olhos, nem nos cantos da boca, e outros mal fazem sentido (o que o primeiro retângulo azul está medindo, exatamente?). Só que isso é o bastante para fazer muitas pessoas acreditarem na conexão entre proporção áurea e beleza.

### Na natureza

A concha do náutilo, um molusco que vive no Oceano Pacífico. Ela tem formato de espiral, mas não obedece nem de longe a proporção áurea:



Chris 73/Wikipedia modificada por Photoshop Tutoriais

Esse formato corresponde ao de uma espiral logarítmica, que permite à concha crescer sem mudar de forma. Para fazer isso, ela não precisa obedecer a razão áurea. Também é possível encontrar espirais logarítmicas em galáxias, só que elas geralmente não se encaixam na proporção áurea.

## **11 Considerações finais**

O importante é explorar o conceito de razão a partir de problemas; como informação, para a utilização da proporção e da regra de três. Saber reconhecer situações que envolvem proporcionalidade em diferente contexto, usar a competência para interpretar problemas de proporcionalidade, resolver problemas envolvendo a variação diretamente e inversamente proporcional entre grandezas.

Portanto é importante a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos no ensino médio a fim de relacionar a razão, proporção e a regra de três no dia-a-dia, pois, hoje em dia, não vale de nada resolver um problema matemático, e não saber interpretar, entender, assimilar no cotidiano, pois a matemática está ligada ao ser humano, à vida.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: ideias e desafios, 6ºano. Ed. São Paulo: Saraiva 1998.

JÚNIOR, José Ruy Giovanni; CASTRUCCI, Benedito. A Conquista da matemática, 7º ano. Ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. Projeto Teláris: Matemática, 9º ano. 1. Ed.- São Paulo: Ática, 2012.

LIMA, Elon Lages; WAGNER, Eduardo; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; MORGADO, Augusto César. Temas e Problemas Elementares. 5. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELOS, Maria José. Praticando matemática 9º ano. 3. Ed. Renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

FONSECA, Rubens Vilhena; FRANÇA, Adriano Santos. Pré – Calculo. Belém: UEPA, Centro de Ciências Sociais da Educação, 2011.

<https://http://rpm.org.br/cdrpm/8/1.rtm>, acessada em 20/05/2016.

[gizmodo.uol.com.br](http://gizmodo.uol.com.br); acessada em 25/07/2016