



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
APLICADA E ESTATÍSTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA E ESTATÍSTICA



Modelos de regressão GJS longitudinais

Paulo César dos Santos

Natal/RN

março de 2024

Paulo César dos Santos

Modelos de regressão GJS longitudinais

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Probabilidade e Estatística.

Linha de Pesquisa: Modelos de Regressão.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA E ESTATÍSTICA

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA E ESTATÍSTICA

Orientador

Prof. Dr. Artur José Lemonte

Natal/RN

março de 2024

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Santos, Paulo César dos.
Modelos de regressão GJS longitudinais / Paulo César dos Santos. - 2024.
125 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada e Estatística. Natal, RN, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Artur José Lemonte.

1. Estatística matemática - Dissertação. 2. Dados proporcionais longitudinais - Dissertação. 3. Distribuição GJS - Dissertação. 4. Modelos de regressão GJS longitudinais - Dissertação. 5. Modelos para taxas e proporções - Dissertação. 6. Modelos lineares generalizados mistos - Dissertação. I. Lemonte, Artur José. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 519.2(043.3)

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Dissertação de Mestrado sob o título *Modelos de regressão GJS longitudinais* apresentada por **Paulo César dos Santos** e aceita pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof. Dr. Artur José Lemonte
Orientador
Departamento de Estatística
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Profa. Dra. Luz Milena Zea Fernandez
Departamento de Estatística
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Francisco Felipe de Queiroz
Departamento de Estatística
Universidade de São Paulo

Natal/RN
março de 2024

À minha filha, Sara, minha esposa, Sueleide e aos meus Pais e Irmãos.

Agradecimentos

À Deus por ter me mantido firme e me dado forças, saúde, determinação e muita força de vontade para que nunca desistisse de conseguir realizar este grande objetivo que tinha em minha vida.

À minha companheira, Sueleide, pelo apoio e incentivo e motivação para que concluísse este mestrado.

Aos meus irmãos e Pais por sempre acreditarem no meu potencial e terem me apoiado sempre para que nunca desistisse.

Ao Professor Artur Lemonte; primeiro, por ter aceitado me orientar antes mesmo de ingressar no Programa; segundo, por propor tema na área que tinha interesse; e, por último, por ter se mantido sempre disponível, pela paciência e pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas de trabalho: Reis Magna (farmácia), Marcelo Cunha (bibliotecário), Francisco Luciani (banco de dados), Danielle Dourado (enfermeira), Lyon Richardson (enfermeiro), Zaíne Dálete (secretária), Évilly (economista) e Mauro Wilson (físico) pelo incentivo e apoio moral para o desenvolvimento desta dissertação.

Aos Professores do Departamento de Estatística da UFRN pelo acolhimento e incentivo desde a Graduação. Agradeço aos Professores: Jeanete Alves, Iloneide Ramos, Carla Vivacqua, André Pinho, Paulo Roberto, Dione Valença, Ivone Salsa, Luz Fernandez e a todos os outros por todos os ensinamentos. Ao Professor Formiga, pelas lições e paciência durante os quatro anos de tutoria do PET e pelas excelentes aulas ministradas.

Ao Gerente de Ensino e Pesquisa do Hospital Universitário da Universidade Federal do Piauí, Dr. Carlos Eduardo (cardiologista), por ter me apoiado na realização deste Mestrado.

À Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) por oferecer ambiente e a equipe de Professores competentes, necessários para minha formação acadêmica.

À todos aqueles que me ajudaram de alguma forma, seja apoiando ou incentivando à realização desse trabalho.

*“All models are wrong,
but some are useful.”
(George E. P. Box)*

Resumo

Estendemos a classe de modelos de regressão GJS que modelam variáveis contínuas com suporte no intervalo $(0, 1)$ para o caso de dados correlacionados, como aquelas provenientes de estudos de medidas repetidas, longitudinais ou com dados agrupados. A extensão foi realizada através da metodologia de modelos lineares generalizados mistos e as estimativas dos parâmetros são obtidas com base no método da máxima verossimilhança (MV). A implementação computacional combina a quadratura de Gauss-Hermite para obter a densidade marginal da variável resposta e o algoritmo BFGS de otimização não-linear, implementada na função `optim` do software computacional R. Foram realizadas simulações de Monte Carlo para verificar o desempenho dos estimadores de MV dos parâmetros do modelo em amostras de tamanho finito. Os resultados das simulações sugerem que a abordagem da MV fornece estimadores com boas propriedades. Adicionalmente, propomos o resíduo quantílico aleatorizado para averiguar a qualidade do ajuste. Além disso, verificou-se a eficácia do resíduo proposto na detecção de algumas formas de inadequação do modelo. Por fim, ilustramos a metodologia desenvolvida por meio da aplicação a um conjunto de dados reais.

Palavras-chave: Dados proporcionais longitudinais. Distribuição GJS. Modelos de Regressão GJS longitudinais. Modelos para taxas e proporções. Modelos lineares generalizados mistos.

Abstract

We extend the class of GJS regression models that model continuous variables with support in the interval $(0, 1)$ to the case of correlated data, such as those coming from repeated measures, longitudinal or grouped data studies. The extension was carried out using the generalized linear mixed model methodology and parameter estimates are obtained based on the maximum likelihood (MV) method. The computational implementation combines the Gauss-Hermite quadrature to obtain the marginal density of the response variable and the BFGS non-linear optimization algorithm, implemented in the `optim` function of the computational software **R**. Monte Carlo simulations were performed to verify the performance of the MV estimators of the model parameters in samples of finite size. The simulation results suggest that the MV approach provides estimators with good properties. Additionally, we propose the randomized quantile residual to ascertain the quality of the fit. Furthermore, the effectiveness of the proposed residue in detecting some forms of model inadequacy was verified. Finally, we illustrate the methodology developed by applying it to a set of real data.

Keywords: Longitudinal proportional data. GJS Distribution. Longitudinal GJS Regression Models. Models for rates and proportions. Generalized linear mixed models.

Lista de Figuras

Figura 1 – Função densidade de probabilidade GJS obtida da distribuição: (A) normal (isto é, distribuição de Johnson S_B) e (B) distribuição Cauchy .	24
Figura 2 – Função densidade de probabilidade GJS obtida da distribuição: (A) logística tipo I e (B) distribuição t-Student $\nu = 2$	25
Figura 3 – Função densidade de probabilidade GJS obtida da distribuição: (A) exponencial potência $k = 0.5$ e (B) distribuição exponencial dupla (Laplace).	25
Figura 4 – Função densidade de probabilidade GJS obtida da distribuição: (A) exponencial potência $k = -0.2$ e (B) distribuição exponencial potência $k = 0.2$	26
Figura 5 – Número de vendas segundo o preço do produto. Ajuste de um modelo de regressão linear na Figura da esquerda e ajuste de um modelo de regressão de efeitos mistos na Figura da direita. Fonte: Extraído de Demidenko (2013, pag. 03)	34
Figura 6 – Histograma e <i>boxplot</i> para a proporção do volume de gás remanescente no olho.	61
Figura 7 – <i>boxplot</i> da proporção do volume de gás remanescente no olho segundo o nível de concentração do gás.	62
Figura 8 – Proporções longitudinais do volume de gás remanescente no olho segundo o nível de concentração do gás.	63
Figura 9 – Diagrama de dispersão entre o log do seguimento e a proporção do volume e gás remanescente no olho.	64
Figura 10 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade normal (Modelo 1).	68
Figura 11 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade normal (Modelo 2).	69
Figura 12 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade normal (Modelo 3).	69
Figura 13 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade t-Student (Modelo 1).	70

Figura 14 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade <i>t-Student</i> (Modelo 3).	70
Figura 15 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade <i>t-Student</i> (Modelo 2).	71
Figura 16 – QQ-plot: modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade normal.	113
Figura 17 – QQ-plot: modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 4$).	114
Figura 18 – QQ-plot: modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 6$).	115
Figura 19 – QQ-plot: modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 8$).	116
Figura 20 – Modelo GJS misto-normal: Gráfico de dispersão e QQ-plot do resíduo quantílico aleatorizado versus a covariável x para o modelo errado (a) e (c) e verdadeiro (b) e (d), respectivamente.	117
Figura 21 – Modelo GJS misto <i>t-Student</i> ($\nu = 4$): Gráfico de dispersão e QQ-plot do resíduo quantílico aleatorizado versus a covariável x para o modelo errado (a) e (c) e verdadeiro (b) e (d), respectivamente.	118
Figura 22 – Modelo GJS misto <i>t-Student</i> ($\nu = 6$): Gráfico de dispersão e QQ-plot do resíduo quantílico aleatorizado versus a covariável x para o modelo errado (a) e (c) e verdadeiro (b) e (d), respectivamente.	119
Figura 23 – Modelo GJS misto <i>t-Student</i> ($\nu = 8$): Gráfico de dispersão e QQ-plot do resíduo quantílico aleatorizado versus a covariável x para o modelo errado (a) e (c) e verdadeiro (b) e (d), respectivamente.	120
Figura 24 – Gráfico de resíduos e QQ-plot (com envelopes simulados) para o modelo GJS misto com gerador de densidade normal.	121
Figura 25 – Gráfico de resíduos e QQ-plot (com envelopes simulados) para o modelo GJS misto com gerador de densidade <i>t-Student</i> com $\nu = 4$	121
Figura 26 – Gráfico de resíduos e QQ-plot (com envelopes simulados) para o modelo GJS misto com gerador de densidade <i>t-Student</i> com $\nu = 6$	122
Figura 27 – Gráfico de resíduos e QQ-plot (com envelopes simulados) para o modelo GJS misto com gerador de densidade <i>t-Student</i> com $\nu = 8$	122
Figura 28 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade exponencial potência (Modelo 1).	125

Figura 29 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade exponencial potência (Modelo 2).	125
Figura 30 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade exponencial potência (Modelo 3).	126

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Função geradora de densidade para algumas distribuições da família simétrica	21
Tabela 2 – A função W_g para algumas distribuições	28
Tabela 3 – Funções de ligação para a mediana.	29
Tabela 4 – Funções de ligação para a precisão.	29
Tabela 5 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade normal para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.25$) . .	48
Tabela 6 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade normal para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.75$) . .	49
Tabela 7 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade normal para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 1.25$) . .	49
Tabela 8 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 4$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.25$)	50
Tabela 9 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 6$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.25$)	50
Tabela 10 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 8$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.25$)	51
Tabela 11 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade exponencial potência ($k = 0.4$) e ($\sigma^2 = 0.25$).	51
Tabela 12 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade exponencial potência ($k = 0.2$) e ($\sigma^2 = 0.25$).	52
Tabela 13 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade exponencial potência ($k = -0.4$) e ($\sigma^2 = 0.25$).	52
Tabela 14 – Medias descritivas	61
Tabela 15 – Estimativas dos ajustes dos modelos GJS longitudinal com gerador de densidade normal.	66
Tabela 16 – Estimativas dos ajustes dos modelos GJS longitudinal com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 2.877, 2.302$ e 5.004 para os modelos 1, 2 e 3, respectivamente).	67
Tabela 17 – Critérios AIC, BIC, CAIC e HQIC para os modelos com geradores de densidade normal.	71
Tabela 18 – Critérios AIC, BIC, CAIC e HQIC para os modelos com geradores de densidade <i>t-Student</i>	72

Tabela 19 – Estimativas dos parâmetros após a exclusão individual e conjunta das observações #155, #149 e #144 considerando o modelo de regressão GJS longitudinal com precisão variável e gerador de densidade <i>t-Student</i> (Modelo 2).	73
Tabela 20 – Estimativas dos parâmetros após a exclusão individual das observações #155, #146, #144 e #87 considerando o modelo de regressão GJS longitudinal com precisão variável e gerador de densidade normal (Modelo 2).	74
Tabela 21 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 4$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.75$)	87
Tabela 22 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 6$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.75$)	88
Tabela 23 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 8$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.75$)	88
Tabela 24 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 4$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 1.25$)	89
Tabela 25 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 6$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 1.25$)	89
Tabela 26 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 8$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 1.25$)	90
Tabela 27 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade normal, $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 20$	92
Tabela 28 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade normal, $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 20$	93
Tabela 29 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade normal, $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 20$	94
Tabela 30 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 4$), $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 20$	95
Tabela 31 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 4$), $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 20$	96
Tabela 32 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade <i>t-Student</i> ($\nu = 4$), $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 20$	97

Tabela 33 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 4$), $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 90$	98
Tabela 34 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 4$), $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 90$	99
Tabela 35 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 4$), $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 90$	100
Tabela 36 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 6$), $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 20$	101
Tabela 37 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 6$), $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 20$	102
Tabela 38 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 6$), $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 20$	103
Tabela 39 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 6$), $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 90$	104
Tabela 40 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 6$), $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 90$	105
Tabela 41 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 6$), $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 90$	106
Tabela 42 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 8$), $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 90$	107
Tabela 43 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 8$), $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 90$	108
Tabela 44 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 8$), $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 90$	109
Tabela 45 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 8$), $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 20$	110
Tabela 46 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 8$), $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 20$	111
Tabela 47 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t- <i>Student</i> ($\nu = 8$), $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 20$	112
Tabela 48 – Estimativas dos ajustes dos modelos GJS longitudinal com gerador de densidade exponencial potência.	124
Tabela 49 – Critérios AIC, BIC, CAIC e HQIC para os modelos com geradores de densidade exponencial potência.	124

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	19
1.2	PRELIMINARES	20
1.2.1	Classe simétrica de distribuições	20
1.2.2	A distribuição Johnson S_B	20
1.3	A DISTRIBUIÇÃO GJS	22
1.3.1	Estimação dos parâmetros	27
1.4	O MODELO DE REGRESSÃO GJS	28
1.4.1	Estimação	29
2	MODELOS DE REGRESSÃO GJS LONGITUDINAIS	32
2.1	DADOS LONGITUDINAIS	32
2.2	QUADRATURA DE GAUSS-HERMITE	35
2.2.1	Quadratura de Gauss-Hermite unidimensional	35
2.2.2	Quadratura de Gauss-Hermite multidimensional	35
2.3	MODELOS DE REGRESSÃO GJS LONGITUDINAIS	36
2.3.1	Estimação dos parâmetros	37
2.4	MODELOS GJS COM INTERCEPTOS ALEATÓRIOS	38
2.4.1	Estimação	39
2.4.2	Intervalos de confiança e testes de hipóteses	42
2.4.3	Predição dos efeitos aleatórios	42
2.4.4	Seleção de modelos e covariáveis	43
2.4.5	Teste para os componentes de variância	44
2.4.6	Resultados numéricos	46
3	DIAGNÓSTICO	53
3.1	ANÁLISE DOS RESÍDUOS	53
3.1.1	Resíduo quantílico aleatorizado	55
3.1.2	Resultados numéricos	55
3.1.3	Aplicação a dados simulados	58
4	APLICAÇÃO: Proporção de gás restante no olho	60
4.1	ANÁLISE DESCRITIVA DOS DADOS	61
4.2	MODELOS DE REGRESSÃO GJS LONGITUDINAIS	64
5	CONCLUSÕES	76
	Referências Bibliográficas	78
	APÊNDICE A Derivadas da função de log-verossimilhança	85

A.1	Função escore	85
APÊNDICE B Avaliação do desempenho dos EMV		87
B.1	Medidas descritivas para avaliar o desempenho dos EMV	87
APÊNDICE C Resultado das simulações de Monte Carlo		91
C.1	Medidas descritivas para r_{ij}^q	91
C.2	Gráficos quantil-quantil para r_{ij}^q	113
C.3	Gráficos para especificação incorreta de termo quadrático	117
C.4	Gráficos para especificação incorreta de dispersão não constante	121
APÊNDICE D AJUSTE DO MODELO GJS LONGITUDINAL COM GERADOR DE DENSIDADE EXPONENCIAL PO- TÊNCIA		123
D.1	Resultados do ajuste	123

1 INTRODUÇÃO

Os modelos de regressão são uma das ferramentas estatísticas mais utilizadas para se estabelecer relação entre uma variável resposta e um conjunto de variáveis explicativas.

Estudos nos quais a variável resposta de interesse é contínua e limitada estão se tornando cada vez mais frequentes nas pesquisas científicas. Esses dados surgem nas formas de taxas, índices, frações e proporções, ou seja, estão contidos no intervalo $(0, 1)$. Aplicações são encontradas na medicina, nas ciências políticas, na ecologia, economia, agricultura e vêm surgindo com frequência nas ciências biológicas e sociais. Por exemplo, a taxa de decaimento de um gás injetado por via intraocular, a proporção de redução de um tumor, taxa de mortalidade, proporção de votos em um candidato em particular nas eleições, proporção da renda gasta em serviços de saúde, etc.

Variáveis limitadas apresentam características próprias e são um desafio para modeladores. Isso decorre do fato delas apresentarem em geral assimetria, valores atípicos e heterocedasticidade ([VERKUILEN; SMITHSON, 2012](#)). Em particular, uma pequena diferença entre duas proporções, especialmente quando ambas estão próximas dos limites do intervalo, pode corresponder a uma diferença muito grande na escala da reta real ([ZHANG et al., 2009](#)). Vários autores, por exemplo: [Paolino \(2001\)](#), [Kieschnick e McCullough \(2003\)](#) e [Smithson e Verkuilen \(2006\)](#) alegam que métodos tradicionais de estabilização de variância baseados em transformações da variável resposta nem sempre são apropriados para modelar esse tipo de variável. A transformação da variável resposta y mais utilizada nesses casos é a logito, definida por: $g(y) = \log(y/(1 - y))$, $y \in (0, 1)$. Dessa forma, são necessários métodos adequados para estimação de parâmetros não-enviesados e consistentes na modelagem deste tipo de variáveis limitadas.

[Ferrari e Cribari-Neto \(2004\)](#) propuseram o modelo de regressão beta para modelar dados no intervalo $(0, 1)$ que em muito se assemelha aos modelos lineares generalizados (GLM) (para detalhes, consultar [Nelder e Wedderburn \(1972\)](#) e [McCullagh e Nelder \(1989\)](#)). Os autores denotaram o modelo como regressão beta por partir do pressuposto de que a variável resposta segue uma distribuição beta. Após o trabalho de [Ferrari e Cribari-Neto \(2004\)](#), a regressão beta recebeu contribuições de diversos autores ([VASCONCELLOS; CRIBARI-NETO, 2005](#); [CRIBARI-NETO; ZEILEIS, 2010a](#); [SMITHSON; VERKUILEN, 2006](#); [VERKUILEN; SMITHSON, 2012](#)) e nos dias atuais, encontra-se muito bem desenvolvida. O sucesso do seu uso deve-se principalmente ao desenvolvimento do pacote `betareg` ([CRIBARI-NETO; ZEILEIS, 2010b](#)) disponível no software R para computação estatística.

Recentemente, [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) partindo da distribuição Johnson S_B

(JOHNSON, 1949), apresentaram uma ampla classe de distribuições com suporte no intervalo $(0, 1)$, denominada classe GJS de distribuições. Além disso, com base nessa classe de distribuições, um novo modelo de regressão foi proposto. O modelo utiliza a estrutura dos modelos lineares generalizados e é, em vários aspectos, semelhante ao modelo de regressão beta proposto por Ferrari e Cribari-Neto (2004). Nesse modelo, a resposta mediana está relacionada a um preditor linear por meio de uma função de ligação e o preditor linear envolve covariáveis e parâmetros de regressão desconhecidos, permitindo, dessa forma, a interpretação do parâmetro em termos da resposta na escala original dos dados e a escolha de uma função de ligação apropriada. Os parâmetros da regressão são interpretados em termos da mediana da variável resposta, y . Além disso, o modelo acomoda facilmente assimetria e bimodalidade ao contrário do modelo de regressão beta.

Diversos modelos, baseados em outras distribuições de probabilidade, foram propostos para modelar dados limitados no intervalo $(0, 1)$. Um modelo muito utilizado é o modelo de regressão *Simplex* que utiliza a distribuição proposta por Barndorff-Nielsen e Jørgensen (1991). Para ajustar este modelo existe o pacote `simplexreg` no software R. O modelo proposto por Mitnik e Baek (2013) utiliza a distribuição *Kumaraswamy* introduzida por Kumaraswamy (1980), o modelo gama unitário proposto por Mousa, El-Sheikh e Abdel-Fattah (2016), o modelo *Weibull* unitário proposto por Mazucheli et al. (2020), o modelo de regressão beta retangular proposto por Bayes, Bazán e García (2012) baseado na distribuição introduzida por Hahn (2008), além de vários outros.

Em muitos estudos envolvendo taxas e proporções, a variável resposta de interesse é avaliada mais de uma vez na mesma unidade amostral ou no mesmo indivíduo. Por exemplo, a fração de redução de um tumor em relação a um valor inicial, a proporção de redução na taxa de filtração glomerular de um grupo de pacientes são avaliadas em várias ocasiões em um período de tempo determinado. Estes estudos são chamados de estudos longitudinais. A característica definidora dos estudos longitudinais é que as medidas dos mesmos indivíduos são feitas repetidamente ao longo do tempo, permitindo assim o estudo direto da mudança ao longo do tempo. O objetivo principal de um estudo longitudinal é caracterizar a mudança na resposta ao longo do tempo e os fatores que influenciam essa mudança. Com medidas repetidas em indivíduos, pode-se capturar a mudança dentro do indivíduo (ver, por exemplo: Fitzmaurice, Laird e Ware (2011) ou Fitzmaurice et al. (2009)).

Como exemplo motivacional, considere os dados de um estudo longitudinal relatado em Meyers et al. (1992). Neste estudo foi registrado o declínio do gás (C_3F_8) após injeção intraocular inicial em cirurgias complexas de retina. A variável resposta do estudo foi a proporção do volume de gás restante no olho. O gás possui três níveis de concentração e objetivou-se entender a velocidade com que o gás era absorvido pelos pacientes ao longo do período de seguimento, e se a taxa de absorção dependia do nível de concentração

utilizado.

No contexto de modelos para dados longitudinais contidos no intervalo $(0, 1)$, [Qiu, Song e Tan \(2008\)](#) propuseram um modelo linear generalizado misto (MLGM) baseado na distribuição *Simplex* de [Barndorff-Nielsen e Jørgensen \(1991\)](#), em que a média é modelada através de uma função *logit* de efeitos fixos e aleatórios; [Zhang et al. \(2009\)](#) propuseram um modelo de efeitos mistos de transformação robusta, no qual aplicaram a função *logit* na variável resposta e utilizaram combinações das distribuições normal e *t-Student* multivariada para os termos dos erros ou para os efeitos aleatórios; [Petterle et al. \(2021\)](#) propuseram um modelo de regressão misto com base na distribuição gama unitária introduzida por [Grassia \(1977\)](#). [Hunger, Döring e Holle \(2012\)](#) aplicaram o modelo de regressão beta misto a dados de qualidade de vida relacionados à saúde.

Diferente do modelo de regressão beta, até o presente momento, a classe de modelos de regressão GJS de [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) não foi estendida para modelar dados correlacionados, como os oriundos de estudos de medias repetidas, longitudinais ou com dados agrupados. Ainda, os dados no intervalo $(0, 1)$ geralmente são assimétricos, pois uma pequena diferença entre duas proporções, principalmente quando ambas estão próximas de 0 ou de 1, ou seja, próximas dos limites do intervalo ([ZHANG et al., 2009](#)) podem representar uma diferença muito grande na escala da reta real. Assim sendo, a mediana como uma medida robusta de tendência central seria mais apropriada para modelar esse tipo de dados.

Finalmente, o principal objetivo deste trabalho é estender a classe de modelos de regressão GJS para modelar dados de taxas e proporções correlacionadas. Adicionalmente, estimação dos parâmetros dos efeitos fixos e aleatórios associados ao modelo e diagnóstico do modelo por meio de análise de resíduos serão estudados. Por fim, aplicações a dados reais serão apresentadas. Vale ressaltar que os resultados apresentados nesse trabalho são novos e não existe na literatura nenhum trabalho desse tipo considerando o modelo de regressão GJS.

1.1 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho encontra-se dividido em 5 Capítulos. No Capítulo 1, introduzimos vários conceitos de grande relevância para o desenvolvimento desse trabalho. Começamos fazendo uma breve revisão da literatura sobre análise de dados de taxas e proporções. Apresentamos a classe simétrica de distribuições e descrevemos a distribuição de Johnson S_B . Além disso, é apresentada a classe distribuições GJS e o modelo de regressão associado.

No Capítulo 2, estendemos os modelos de regressão GJS proposto por [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) para o caso de dados longitudinais, ou seja, para o caso em que os dados são correlacionados. No modelo proposto, utilizamos o método da MV marginal para

fazer inferências sobre os parâmetros. Os efeitos aleatórios são preditos por meio do melhor preditor empírico de Bayes. Realizamos simulações de Monte Carlo para avaliar o desempenho dos estimadores de MV dos parâmetros do modelo, em que diferentes cenários são considerados.

No Capítulo 3, métodos de diagnóstico são propostos para avaliar a qualidade do ajuste do modelo aos dados e para identificar pontos atípicos, bem como são realizadas várias simulações de Monte Carlo considerando diferentes cenários.

No Capítulo 4 aplicamos a metodologia proposta a um conjunto de dados reais. Por fim, no Capítulo 5 apresentamos as conclusões e sugerimos pesquisas futuras.

1.2 PRELIMINARES

Inicialmente, apresentamos a metodologia que será utilizada para definirmos a classe simétrica de distribuições

1.2.1 Classe simétrica de distribuições

Definição 1 (Caso univariado). *Uma variável aleatória W tem distribuição simétrica univariada com parâmetro de posição μ , parâmetro de escala σ^2 e função geradora de densidade g , se sua função densidade de probabilidade puder ser escrita como*

$$h(w) = h(w; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{(w - \mu)^2}{\sigma^2}\right), \quad w \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sigma^2 > 0, \quad (1.1)$$

em que $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ é tal que $\int_0^\infty g(u) du < \infty$. A notação utilizada é $W \sim S(\mu, \sigma^2; g)$.

Quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, tem-se um caso particular da distribuição dada na equação (1.1) e, nesse caso, diz-se que $Z \sim S(0, 1; g)$ está na forma simétrica padrão para alguma função g e sua função densidade de probabilidade é dada por $h(z) = h(z; 0, 1) = g(z^2)$, $z \in \mathbb{R}$. Na Tabela 1, encontram-se os geradores de densidades para algumas funções pertencentes à classe simétrica padrão.

1.2.2 A distribuição Johnson S_B

Norman L. Johnson desenvolveu em 1949 uma classe de distribuições baseadas em um sistema de transformações a partir de uma variável aleatória com função densidade de probabilidade normal padrão. Essa classe ganhou popularidade na segunda metade do século XX. Dentre as distribuições pertencentes a esta classe encontra-se a distribuição Johnson S_B que possui suporte limitado (S_B vem do inglês: *bounded support*). Essa distri-

Tabela 1 – Função geradora de densidade para algumas distribuições da família simétrica

Distribuição	Função geradora de densidade $g(u), u > 0$
Normal	$(2\pi)^{-1/2} \exp(-u/2)$
<i>Cauchy</i>	$[\pi(1+u)]^{-1}$
t-Student	$\nu^{\nu/2} B(1/2, \nu/2)^{-1} (\nu+u)^{-(\nu+1)/2}$
t-Student generalizada	$s^{r/2} B(1/2, r/2)^{-1} (s+u)^{-(r+1)/2}$
Logística tipo I	$ce^{-u}(1+e^{-u})^{-2}$
Logística tipo II	$e^{-\sqrt{u}}(1+e^{-\sqrt{u}})^{-2}$
Logística generalizada	$cB(m, m)^{-1}[e^{-c\sqrt{u}}(1+e^{-c\sqrt{u}})^{-2}]^m$
Kotz	$r^{(2m-1)/2} \Gamma((2m-1)/2)^{-1} u^{m-1} e^{-ru}$
Kotz generalizada	$sr^{(2m-1)/2s} \Gamma((2m-1)/2s)^{-1} u^{m-1} e^{-ru^s}$
Exponencial dupla (Laplace)	$\exp(-\sqrt{u})/2$
Exponencial potência	$c(k) \exp(-0.5u^{1/(1+k)})$

$\nu > 0, s > 0, r > 0$ e $B(\cdot, \cdot)$ é a função beta;

$c \approx 1.484300029$ é a constante de normalização obtida de $\int_0^\infty u^{-1/2} g(u) du = 1$ (Logística tipo I);

$c > 0$ e $m > 0$ (Logística generalizada);

$r > 0, m \geq 1, s > 0$ e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama (Kotz e Kotz generalizada);

$-1 < k \leq 1$ e $c(k)^{-1} = \Gamma(1 + (k+1)/2) 2^{1+(1+k)/2}$.

buição é obtida da seguinte forma: seja X uma variável aleatória com distribuição normal padrão, que pode ser denotada como

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (1.2)$$

com função densidade de probabilidade dada por $\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$, para $x \in \mathbb{R}$. Considere a transformação $Y = t^{-1}((X - \gamma)/\delta)$ ou $X = \gamma + \delta t(Y)$ para alguma função invertível adequada $t(\cdot)$ com parâmetros $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Assim, a transformação de Y dada por $\gamma + \delta t(Y)$ possui distribuição normal padrão. Dessa forma, a função densidade de probabilidade de Y é dada por

$$f(y; \gamma, \delta) = \delta \phi(\gamma + \delta t(y)) |dt(y)/dy|,$$

em que $|\cdot|$ denota a função módulo. O suporte limitado da distribuição é determinado pela escolha da função $t(\cdot)$. Neste trabalho, estamos interessados em distribuições com suporte limitado. De [Johnson \(1949\)](#) consideramos a função

$$t(y) = \log\left(\frac{y}{1-y}\right), \quad (1.3)$$

dessa forma, obtemos a distribuição Johnson S_B com suporte limitado, cuja função densidade de probabilidade é

$$f(y; \gamma, \delta) = \frac{\delta \phi(\gamma + \delta t(y))}{y(1-y)}, \quad y \in (0, 1), \quad (1.4)$$

em que $t(y)$ é dada pela equação (1.3).

A função de distribuição acumulada (fda) da variável Y com distribuição Johnson S_B é dada por

$$F(y; \gamma, \delta) = \Phi(\gamma + \delta t(y)), \quad y \in (0, 1),$$

em que $\Phi(\cdot)$ denota a fda da distribuição normal padrão. A distribuição S_B vem sendo aplicada em diversas áreas como medicina, meteorologia, biologia, silvicultura, dentre outras. Além disso, por causa da sua flexibilidade pode ser uma interessante alternativa à distribuição Beta. Para maiores informações, ver [Johnson \(1949\)](#) e [Kotz e Dorp \(2004\)](#).

1.3 A DISTRIBUIÇÃO GJS

A distribuição GJS é uma extensão da distribuição Johnson S_B na qual a suposição para a variável aleatória X com distribuição normal padrão é modificada. Suponha que a variável aleatória X segue uma distribuição da família simétrica na sua forma padrão, isto é,

$$X \sim \mathcal{S}(0, 1; g). \quad (1.5)$$

O objetivo principal da suposição (1.5) é ter uma classe de distribuições com suporte limitado que possam acomodar melhor as observações atípicas, isto é, ter distribuições com caudas mais leves ou mais pesadas do que a distribuição Johnson S_B , além de outras propriedades. Vale destacar que a distribuição Johnson S_B introduzida na Seção 1.2.2 é um caso particular da distribuição GJS, ou seja, quando assumimos uma distribuição normal padrão para a função $g(\cdot)$ dada na Tabela 1. A seguir, apresentamos as propriedades da distribuição GJS que foram enunciadas e provadas por [Lemonte e Bazán \(2016\)](#).

Proposição 1. *Dizemos que Y segue a distribuição GJS com parâmetros $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, se sua função densidade de probabilidade é dada por*

$$f(y; \gamma, \delta) = \frac{\delta g([\gamma + \delta t(y)]^2)}{y(1-y)}, \quad y \in (0, 1), \quad (1.6)$$

em que $t(y)$ é dada na equação (1.3), $g(\cdot)$ é a função geradora de densidades (ver Tabela 1) e usaremos a notação $Y \sim GJS(\gamma, \delta; g)$.

Proposição 2. *Seja $Y \sim GJS(\gamma, \delta; g)$. Então, a sua função de distribuição acumulada é dada por*

$$F(y; \gamma, \delta) = \int_{-\infty}^{\gamma + \delta t(y)} g(u^2) du, \quad y \in (0, 1), \quad (1.7)$$

em que $t(y)$ é dada na equação (1.3), $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$.

A seguir, são apresentadas as expressões para algumas funções densidade de probabilidade pertencentes à classe de distribuições GJS obtidas a partir de diferentes funções geradoras de densidade, dentre elas: t-Student generalizada, logística do tipo I, logística generalizada e Kotz generalizada.

Corolário 1 (Distribuição t-Student generalizada). *Seja $Y \sim GJS(\gamma, \delta; g)$, em que $g(\cdot)$ corresponde ao gerador de densidade da distribuição t-Student generalizada, então*

$$f(y; \gamma, \delta) = \frac{\delta s^{r/2} B(1/2; r/2)^{-1}}{y(1-y)} \left\{ s + \left[\gamma + \delta \log \left(\frac{y}{1-y} \right) \right]^2 \right\}^{-(r+1)/2},$$

em que $y \in (0, 1)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $s > 0$ e $r > 0$.

Corolário 2 (Distribuição logística tipo I). *Seja $Y \sim GJS(\gamma, \delta; g)$, em que $g(\cdot)$ corresponde ao gerador de densidade da distribuição logística tipo I, então*

$$f(y; \gamma, \delta) = \frac{c\delta}{y(1-y)} \frac{\exp \{-[\gamma + \delta \log(y/(1-y))]^2\}}{[1 + \exp \{-[\gamma + \delta \log(y/(1-y))]^2\}]}, \quad y \in (0, 1),$$

em que $c \approx 1.484300029$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$.

Corolário 3 (Distribuição logística generalizada). *Seja $Y \sim GJS(\gamma, \delta; g)$, em que $g(\cdot)$ corresponde ao gerador de densidade da distribuição logística generalizada, então*

$$f(y; \gamma, \delta) = \frac{c\delta B(m, m)^{-1}}{y(1-y)} \left\{ \frac{\exp[-c|\gamma + \delta \log(y/(1-y))|]}{1 + \exp[-c|\gamma + \delta \log(y/(1-y))|]} \right\}^m, \quad y \in (0, 1),$$

em que $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $c > 0$ e $m > 0$.

Corolário 4 (Distribuição Kotz generalizada). *Seja $Y \sim GJS(\gamma, \delta; g)$, em que $g(\cdot)$ corresponde ao gerador de densidade da distribuição Kotz generalizada, então*

$$f(y; \gamma, \delta) = \frac{\delta s r^{(2m-1)/2s} [\gamma + \delta \log(y/(1-y))]^{2(m-1)}}{\Gamma[(2m-1)/2s][y(1-y)]} \exp \left\{ -r \left[\gamma + \delta \log \left(\frac{y}{1-y} \right) \right]^{2s} \right\},$$

em que $y \in (0, 1)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $m \geq 1$, $s > 0$ e $r > 0$.

Corolário 5 (Distribuição exponencial dupla). *Seja $Y \sim GJS(\gamma, \delta; g)$, em que $g(\cdot)$ corresponde ao gerador de densidade da distribuição exponencial dupla, então*

$$f(y; \gamma, \delta) = \frac{\delta}{2y(1-y)} \exp \left[- \left| \gamma + \delta \log \left(\frac{y}{1-y} \right) \right| \right], \quad y \in (0, 1),$$

em que $\delta > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$.

Corolário 6 (Distribuição poder estendida). *Seja $Y \sim GJS(\gamma, \delta; g)$, em que $g(\cdot)$ corresponde ao gerador de densidade da distribuição poder estendida, então*

$$f(y; \gamma, \delta) = \frac{\delta K(c, \lambda)}{y(1-y)} \exp \left\{ -\frac{c}{2} \rho_\lambda \left[1 + \frac{[\gamma + \lambda \log(y/(1-y))]^2}{c-1} \right] \right\}, \quad y \in (0, 1),$$

em que $K(c, \lambda)$ é a constante de normalização, $\delta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $\lambda \geq 0$ e

$$\rho_\lambda(v) = \begin{cases} \frac{v^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda > 0 \\ \log(v), & \lambda = 0. \end{cases}$$

As distribuições GJS geradas pelas distribuições Cauchy e t-Student são obtidas do Corolário 1 fazendo $r = s = 1$ e $r = s = \nu$, respectivamente, em que ν corresponde aos graus de liberdade da distribuição t-Student. A distribuição GJS gerada a partir da logística tipo II é obtida do Corolário 3 fazendo $m = c = 1$. Além disso, a distribuição GJS gerada da distribuição Kotz é obtida do Corolário 4 fazendo $s = 1$, enquanto a distribuição GJS gerada a partir da exponencial potência é obtida do Corolário 4 fazendo $m = 1$, $r = 1/2$ e $s = 1/(1+k)$.

As Figuras 1, 2, 3 e 4 apresentam as funções densidade de probabilidade para algumas distribuições GJS. Nota-se que podemos obter diversas formas diferentes ao variar os parâmetros γ e δ e, dessa forma, percebe-se que a distribuição GJS é muito flexível e que pode ser uma alternativa interessante para modelagem de dados que possuem suporte limitado.

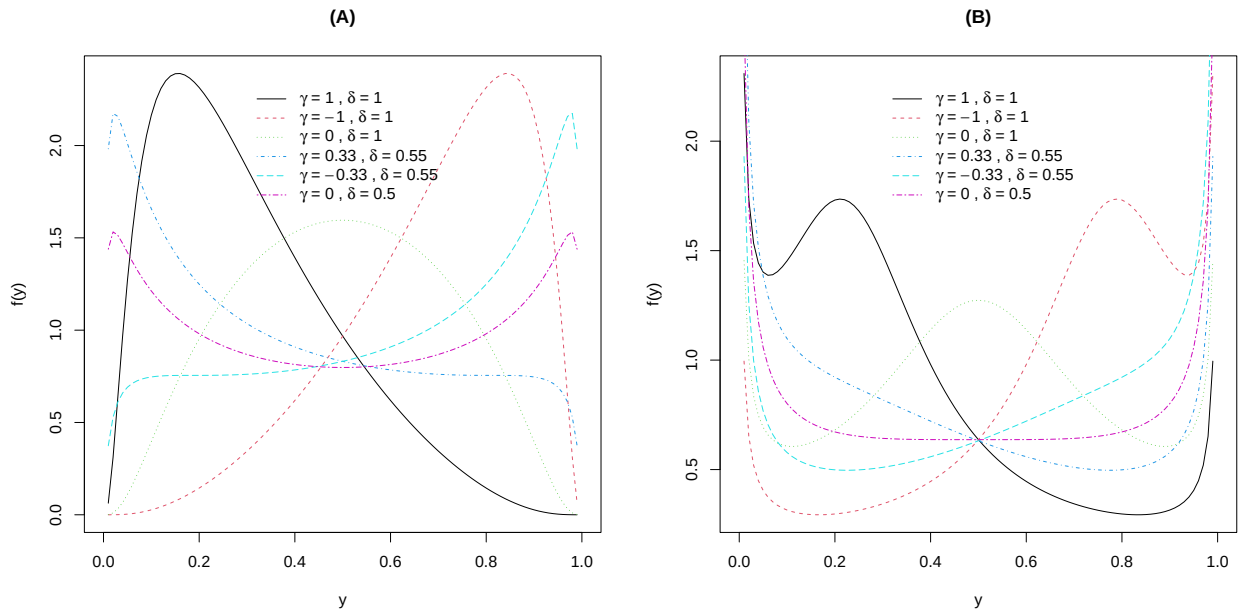


Figura 1 – Função densidade de probabilidade GJS obtida da distribuição: (A) normal (isto é, distribuição de Johnson S_B) e (B) distribuição Cauchy.

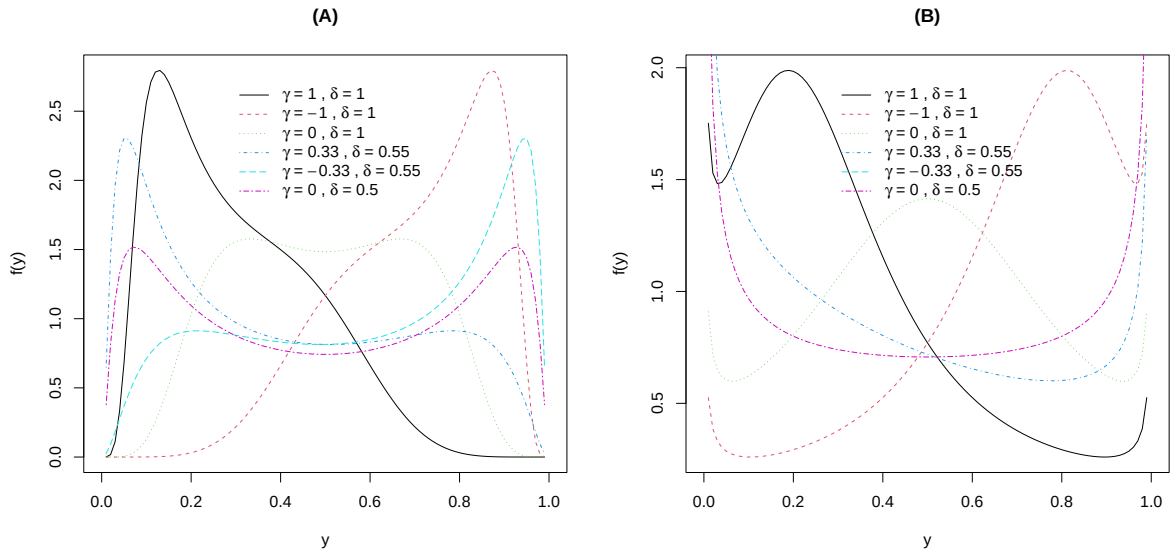


Figura 2 – Função densidade de probabilidade GJS obtida da distribuição: (A) logística tipo I e (B) distribuição t-Student $\nu = 2$.

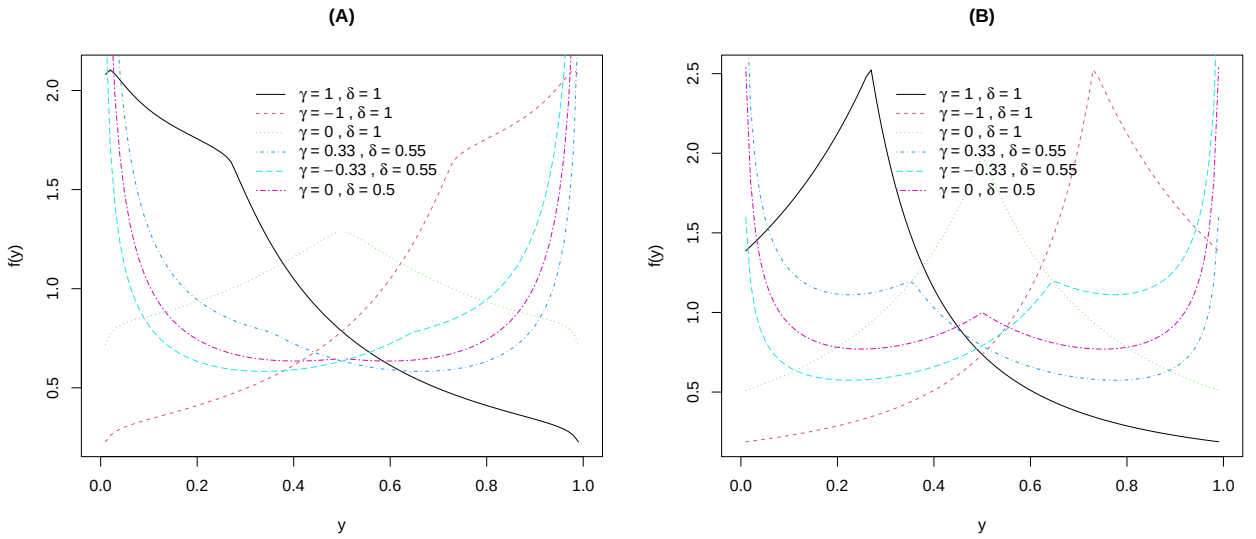


Figura 3 – Função densidade de probabilidade GJS obtida da distribuição: (A) exponencial potência $k = 0.5$ e (B) distribuição exponencial dupla (Laplace).

Proposição 3. *Os momentos da distribuição GJS existem mesmo que a distribuição simétrica que a gerou não possua.*

Proposição 4. *O n -ésimo momento ordinário da distribuição GJS é dado por*

$$\mu'_n = \int_{\mathbb{R}} \omega(u)^n g(u^2) du, \quad (1.8)$$

em que $\omega(u; \gamma, \delta) = e^{(u-\gamma)/\delta} / [1 + e^{(u-\gamma)/\delta}]$.

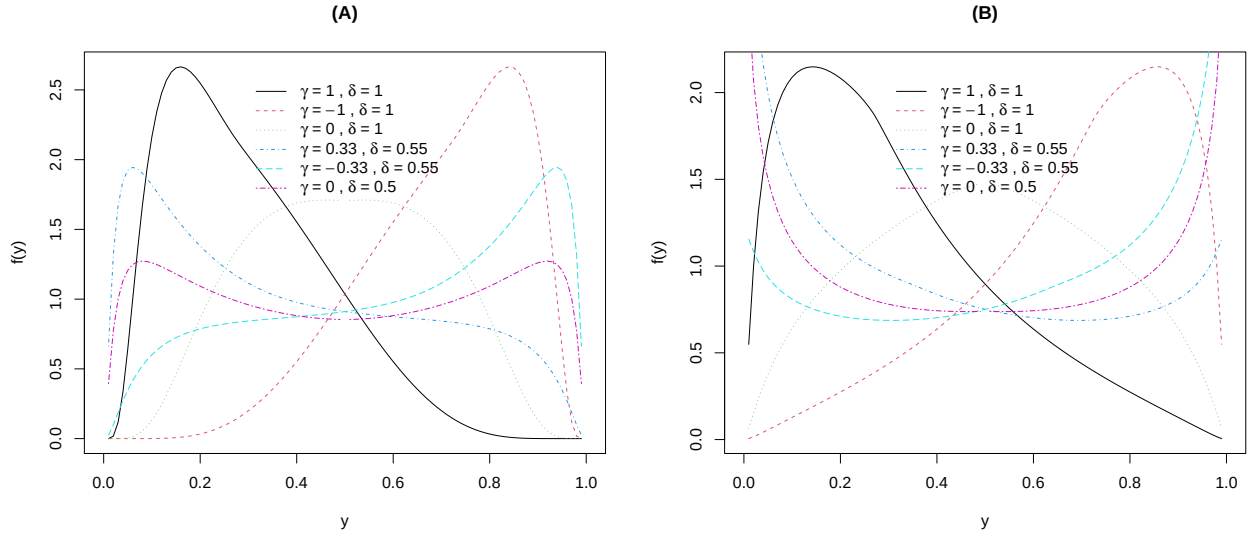


Figura 4 – Função densidade de probabilidade GJS obtida da distribuição: (A) exponencial potência $k = -0.2$ e (B) distribuição exponencial potência $k = 0.2$.

Não existe expressão de forma fechada para os momentos da distribuição GJS e, portanto, a integral da equação (1.8) deve ser calculada numericamente em softwares como o R, MATLAB, MAPLE etc.

Proposição 5. A função quantílica de $Y \sim GJS(\gamma, \delta; g)$ é dada por

$$y_u = \left[1 + \exp \left(- \frac{x_u - \gamma}{\delta} \right) \right]^{-1}, \quad u \in (0, 1), \quad (1.9)$$

em que x_u é o u -ésimo quantil de $X \sim \mathcal{S}(0, 1; g)$.

A partir da Proposição 5 segue que a mediana, ξ , de $Y \sim GJS(\gamma, \delta; g)$ é dada por $\xi = (1 + e^{\gamma/\delta})^{-1}$. Ainda, esta proposição facilita a geração de variáveis aleatórias com distribuição GJS, isto é, se $X \sim \mathcal{S}(0, 1; g)$, então

$$Y = \left[1 + \exp \left(- \frac{X - \gamma}{\delta} \right) \right]^{-1}$$

tem distribuição $GJS(\gamma, \delta; g)$.

Proposição 6. Seja $Y \sim GJS(\gamma, \delta; g)$. Se $\gamma = 0$, então:

- (i) a mediana de Y é $\xi = 1/2$;
- (ii) a média de Y é $\mu'_1 = 1/2$;
- (iii) a função densidade de probabilidade GJS é simétrica em torno de $\mu'_1 = \xi = 1/2$.

Proposição 7. Seja $Y \sim GJS(\gamma, \delta; g)$. Então, $1 - Y \sim GJS(-\gamma, \delta; g)$

Pela proposição 7, temos que a mediana de $1 - Y$, ξ_{1-Y} , é dada por $\xi_{1-Y} = (1 + e^{-\gamma/\delta})^{-1} = 1 - \xi$, em que ξ é a mediana de Y .

Por fim, [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) mostram que usando a transformação $Z = (b - a)Y + a$, obtemos a distribuição GJS com suporte em (a, b) . A função densidade de probabilidade, nesse caso, é dada por

$$f(z; a, b, \gamma, \delta) = \frac{\delta(b - a)}{(z - a)(b - z)} g\left(\left[\gamma + \delta \log\left(\frac{z - a}{b - z}\right)\right]^2\right),$$

em que $a < z < b$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$.

1.3.1 Estimação dos parâmetros

[Lemonte e Bazán \(2016\)](#) discutem de forma breve dois métodos de estimação dos parâmetros da distribuição GJS; o método da MV e método dos mínimos quadrados (MQ). Outros métodos poderiam ser considerados, mas estas abordagens foram preferíveis por terem sido utilizadas para estimar os parâmetros da distribuição Johnson S_B . Aqui, mostraremos apenas a estimação por MV.

Considere $y_1, \dots, y_n$ uma amostra de tamanho n obtida da distribuição $Y \sim \text{GJS}(\gamma, \delta; g)$ e $\boldsymbol{\theta} = (\gamma, \delta)^\top$ o vetor de parâmetros de interesse. Os autores mostram que a função de log-verossimilhança para uma determinada amostra, exceto por um termo constante, é dada por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = n \log(\delta) + \sum_{i=1}^n \log\left(g\left(\left[\gamma + \delta \log\left(\frac{y_i}{1 - y_i}\right)\right]^2\right)\right).$$

As estimativas de MV dos parâmetros são obtidas maximizando $\ell(\boldsymbol{\theta})$ em relação a $\boldsymbol{\theta}$. Seja $y_i^* = y_i^*(y_i; \gamma, \delta) = \gamma + \delta \log(y_i/(1 - y_i))$, para $i = 1, \dots, n$. Assumindo que $g(\cdot)$ é uma função contínua e duas vezes diferenciável, temos que as equações de verossimilhança são

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma} = 2 \sum_{i=1}^n y_i^* W_g(y_i^{*2}), \quad \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta} = \frac{n}{\delta} + \frac{2}{\delta} \sum_{i=1}^n y_i^* (y_i^* - \gamma) W_g(y_i^{*2}),$$

em que $W_g(u) = d \log(g(u))/du = g'(u)/g(u)$ e $g'(u) = dg(u)/du$. A Tabela 2 lista $W_g(u)$ para algumas distribuições. Observe que quando $\nu \rightarrow \infty$, a função $W_g(u)$ para o modelo t-Student tende a $-1/2$, ou seja, tende ao valor da função $W_g(u)$ do modelo normal, como esperado.

O estimador de MV $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\gamma}, \hat{\delta})^\top$ de $\boldsymbol{\theta} = (\gamma, \delta)^\top$ pode ser obtido resolvendo simultaneamente as equações de verossimilhança $\partial \ell(\boldsymbol{\theta})/\partial \gamma|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = 0$ e $\partial \ell(\boldsymbol{\theta})/\partial \delta|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = 0$. Não há expressão de forma fechada para os estimadores de MV $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e seu cálculo deve ser realizado numericamente por meio de algoritmos de otimização não linear. A técnica

Tabela 2 – A função W_g para algumas distribuições

Normal	t-Student	Logística I	Exponencial Dupla	Exponencial Potência
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\nu + 1}{2(\nu + \mu)}$	$-\frac{1 - e^{-\mu}}{1 + e^{-\mu}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{\mu}}$	$-\frac{\mu^{-\frac{k}{1+k}}}{2(1+k)}$

iterativa de Newton-Raphson pode ser aplicada para resolver as equações de verossimilhança e obter $\hat{\theta}$ numericamente. A função $W_g(\cdot)$ pode depender de parâmetros adicionais, que variam de acordo com a função geradora de densidade utilizada, como por exemplo, os graus de liberdade, ν , da função geradora de densidade da t-Student. Métodos de seleção de modelos como o critério de informação de Akaike ou MV perfilada podem ser utilizados na prática para escolher os valores mais adequados destes parâmetros.

1.4 O MODELO DE REGRESSÃO GJS

Os modelos de regressão geralmente são construídos para modelar a média de uma distribuição associada a um parâmetro de dispersão ou de precisão. Como pode-se observar na Proposição 4, a média da distribuição GJS não possui uma expressão simples, dificultando a construção de um modelo de regressão. Em contrapartida, a mediana da distribuição GJS possui uma forma muito simples. Dessa forma, [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) propuseram uma parametrização diferente para a função densidade de probabilidade GJS, para obter uma estrutura de regressão para a mediana da distribuição GJS junto com um parâmetro de precisão.

A mediana da distribuição GJS é dada por $\xi = (1 + e^{\gamma/\delta})^{-1}$. Assim, isolando γ , temos

$$\gamma = \delta \log \left(\frac{1 - \xi}{\xi} \right) = -\delta t(\xi),$$

em que $t(\cdot)$ é dada na Equação (1.3). Dessa forma, substituindo a expressão acima na função densidade de probabilidade GJS dada na Proposição 1, obtemos uma reparametrização para a função densidade GJS em função da mediana e de um parâmetro de precisão. Assim, a função densidade reparametrizada pela mediana e um parâmetro de precisão é dada pela equação

$$f(y; \xi, \delta) = \frac{\delta g(\{\delta[t(y) - t(\xi)]\}^2)}{y(1 - y)}, \quad y \in (0, 1), \quad (1.10)$$

em que $0 < \xi < 1$ e $\delta > 0$. A função densidade dada na Equação (1.10) pode apresentar várias formas diferentes dependendo dos valores dos parâmetros ξ e δ . Em particular, pode ser simétrica quando $\xi = 1/2$, assimétrica quando $\xi \neq 1/2$, pode ser bimodal, dentre várias

outras formas. Adicionalmente, [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) mostram que o parâmetro δ é um parâmetro de precisão, ou seja, a dispersão diminui quando ele aumenta.

Seja $Y_1, \dots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes, em que cada Y_i , $i = 1, \dots, n$ possui distribuição GJS com função densidade de probabilidade dada por [1.10](#), com mediana $\xi_i \in (0, 1)$ e parâmetro de precisão $\delta_i > 0$; isto é, $Y_i \sim \text{GJS}(\xi_i, \delta_i; g)$. Suponha que a mediana e o parâmetro de precisão de Y_i satisfaçam as seguintes relações funcionais:

$$d_1(\xi_i) = \eta_{1i} = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \quad d_2(\delta_i) = \eta_{2i} = \mathbf{s}_i^\top \boldsymbol{\tau},$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ e $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_q)^\top$ são vetores de coeficientes de regressão desconhecidos que são assumidos funcionalmente independentes, em que $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ e $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^q$ com $p + q < n$, η_{1i} e η_{2i} são os preditores lineares e $\mathbf{x}_i^\top = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ e $\mathbf{s}_i^\top = (s_{i1}, \dots, s_{iq})$ são observações em p e q covariáveis ou regressores ou variáveis independentes conhecidas. Assumimos que a função de ligação da mediana $d_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ e do parâmetro de precisão $d_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são estritamente monotônicas e duas vezes diferenciáveis, e as matrizes $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^\top$ e $\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n)^\top$ têm postos p e q , respectivamente. As covariáveis em $\mathbf{S}$ podem ou não ser um subconjunto de $\mathbf{X}$. O modelo de regressão proposto permite modelar conjuntamente os parâmetros dos submodelos da mediana e da precisão.

Existem várias opções para as funções de ligação $d_1(\cdot)$ e $d_2(\cdot)$ e as Tabelas [3](#) e [4](#) listam algumas possibilidades. Para maiores detalhes sobre funções de ligação, discussões podem ser encontradas em [McCullagh e Nelder \(1989\)](#).

Tabela 3 – Funções de ligação para a mediana.

logit	$d_1(\xi) = \log[\xi/(1 - \xi)]$
probit	$d_1(\xi) = \Phi^{-1}(\xi)$
log-log	$d_1(\xi) = -\log[-\log(\xi)]$
clog-log	$d_1(\xi) = \log[-\log(1 - \xi)]$
cauchy	$d_1(\xi) = \tan[\pi(\xi - 0.5)]$

Tabela 4 – Funções de ligação para a precisão.

log	$d_2(\delta) = \log(\delta)$
raíz quadrada	$d_2(\delta) = \sqrt{\delta}$
identidade	$d_2(\delta) = \delta$

1.4.1 Estimação

O interesse na modelagem reside em estimar simultaneamente os parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\tau}$ que representam os efeitos das variáveis independentes na resposta mediana e no parâmetro de precisão. A função de log-verossimilhança para esta classe de modelos de regressão, exceto por um termo constante sem importância, tem a forma

$$\ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\xi_i, \delta_i),$$

em que $\ell_i(\xi_i, \delta_i) = \log(\delta_i) + \log[g(\{\delta_i[t(y_i) - t(\xi_i)]\}^2)]$, com $\xi_i = d_1^{-1}(\eta_{1i})$ e $\delta_i = d_2^{-1}(\eta_{2i})$ que são funções de $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\tau}$, respectivamente. A função escore é dada pelo vetor $(p+q)$ -dimensional $\mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau})^\top, \mathbf{U}_\tau(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau})^\top)^\top$, com

$$\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{W} \mathbf{T}_1 \boldsymbol{\xi}^*, \quad \mathbf{U}_\tau(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{S}^\top \mathbf{T}_2 \boldsymbol{\delta}^*,$$

em que $\mathbf{T}_1 = \text{diag}\{1/\dot{d}_1(\xi_i)\}$, $\mathbf{T}_2 = \text{diag}\{1/\dot{d}_2(\delta_i)\}$, $\mathbf{W} = \text{diag}\{w_i W_g(w_i^2)\}$, $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}\{\delta_i\}$, $\boldsymbol{\xi}^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)^\top$, $\boldsymbol{\delta}^* = (\delta_1^*, \dots, \delta_n^*)^\top$, $\xi_i^* = -2/[\xi_i(1 - \xi_i)]$, $\delta_i^* = \delta_i^{-1} + 2\delta_i^{-1}w_i^2 W_g(w_i^2)$ e $w_i = \delta_i[t(y_i) - t(\xi_i)]$. Aqui, $\dot{d}_j(z) = dd_j(z)/dz$ para $j = 1, 2$.

As estimativas de MV $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ de $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\tau}$, podem ser obtidos resolvendo simultaneamente o sistema de equações não lineares $\mathbf{U}_\beta(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}) = \mathbf{0}_p$ e $\mathbf{U}_\tau(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}) = \mathbf{0}_q$, em que $\mathbf{0}_k$ denota um vetor k -dimensional de zeros. Esse sistema de equações não lineares não possui forma fechada para as soluções. Dessa forma, precisam ser obtidos de forma numérica através de algoritmos de otimização não linear.

Os algoritmos de otimização necessitam que sejam especificados valores iniciais para início do processo iterativo. [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) sugerem utilizar para $\boldsymbol{\beta}$ os vetores de estimativas de mínimos quadrados ordinários obtidos por uma regressão linear das respostas transformadas $d_1(y_1), \dots, d_1(y_n)$ em $\mathbf{X}$, ou seja, $(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{z}$ em que $\mathbf{z}_i = (d_1(y_1), \dots, d_1(y_n))^\top$ (O leitor interessado em detalhes, pode consultar [McCullagh e Nelder \(1989\)](#)). Já para o parâmetro $\boldsymbol{\tau}$, se a função de ligação para a precisão for a logarítmica, a sugestão é utilizar um vetor q -dimensional de zeros $\mathbf{0}_q$ como valor inicial; ou seja, o algoritmo de otimização inicia com o modelo de regressão GJS quando o parâmetro de precisão é constante para todas as observações. [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) constataram que essas suposições iniciais funcionaram muito bem nas aplicações práticas.

Seja $\mathbf{K}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau})$ a matriz de informação de Fisher esperada para $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau})$. Quando n é grande e sob algumas condições de regularidade, temos que

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \hat{\boldsymbol{\tau}} \end{pmatrix} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}_{p+q} \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix}, \mathbf{K}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau})^{-1} \right),$$

em que $\overset{a}{\sim}$ denota aproximadamente distribuído. Não há expressão de forma fechada para $\mathbf{K}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau})$. No entanto, o comportamento assintótico permanece válido se $\mathbf{K}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau})$ é aproximado pela matriz de dimensão $(p+q) \times (p+q)$ de informação observada $-\mathbf{J}_n(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}})$ avaliada em $(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}})$. [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) obtiveram uma expressão para $\mathbf{J}_n(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}})$ que pode ser utilizada para obter erros padrão assintóticos para as estimativas de MV. Foi mostrado que a matriz $\mathbf{J}_n(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}})$ é dada por

$$\mathbf{J}_n(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau})}{\partial(\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\tau}^\top)^\top \partial(\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\tau}^\top)} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\beta\beta} & \mathbf{J}_{\beta\tau} \\ \mathbf{J}_{\beta\tau}^\top & \mathbf{J}_{\tau\tau} \end{bmatrix},$$

cujos elementos são $\mathbf{J}_{\beta\beta} = \mathbf{X}\mathbf{W}_1\mathbf{T}_1\mathbf{X}$, $\mathbf{J}_{\beta\tau} = \mathbf{X}\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{S}$ e $\mathbf{J}_{\tau\tau} = \mathbf{S}^\top\mathbf{W}_3\mathbf{T}_2\mathbf{S}$, em que $\mathbf{W}_1 = \text{diag}\{w_i^{(1)}\}$, $\mathbf{W}_2 = \text{diag}\{w_i^{(2)}\}$ e $\mathbf{W}_3 = \text{diag}\{w_i^{(3)}\}$. Detalhes sobre as expressões de $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ e $\mathbf{W}_3$, avaliação da sensibilidade das estimativas de MV dos parâmetros, bem como análise dos resíduos propostos para o modelo de regressão GJS podem ser consultados em [Lemonte e Bazán \(2016\)](#).

2 MODELOS DE REGRESSÃO GJS LONGITUDINAIS

Neste Capítulo, estendemos os modelos de regressão GJS apresentados na Seção 1.4 para o caso dos dados serem correlacionados como os provenientes dos estudos longitudinais.

2.1 DADOS LONGITUDINAIS

Grande parte das técnicas estatísticas são fundamentadas tomando como base a hipótese de independência entre as observações. Essa hipótese é admissível em muitos estudos do tipo transversal, em que apenas uma observação é tomada para cada unidade amostral. Por outro lado, os estudos longitudinais são projetados para investigar mudanças ao longo do tempo em alguma característica que é medida repetidamente para cada participante do estudo.

Nos estudos longitudinais as unidades amostrais, geralmente chamadas de indivíduos ou sujeitos, são avaliadas em várias ocasiões, referidas como tempos. Dessa forma, os indivíduos acompanhados possuem pelo menos duas observações tomadas na variável resposta de interesse. As medidas tomadas do mesmo indivíduo apresentam uma estrutura de correlação que precisa ser incorporada ao modelo adotado, evitando assim, que conclusões errôneas sejam tomadas. Se a correlação existente entre as medidas tomadas nos mesmos indivíduos não for incluída na modelagem, os estimadores dos parâmetros do modelo poderão ser inconsistentes, ineficientes e com erros padrões incorretos, pois as distribuições dos estimadores sob a suposição de independência não se aplicam a dados correlacionados. Os principais objetivos de um estudo longitudinal são caracterizar a mudança na variável resposta ao longo do tempo e identificar os fatores que a influenciam. Com medidas repetidas, pode-se acomodar a mudança dentro (intra) e entre (inter) as unidades amostrais.

Os estudos longitudinais estão diretamente relacionados aos estudos de medidas repetidas, nos quais são feitas medidas repetidas ou múltiplas de uma ou mais variáveis em cada indivíduo do estudo, mas essas medidas repetidas não são necessariamente feitas ao longo do tempo. Por exemplo, a poluição atmosférica pode ser medida em diferentes locais de uma cidade, bem como múltiplas medições da poluição atmosférica podem ser feitas em diferentes cidades em uma determinada área geográfica.

De forma genérica, os dados longitudinais ou dados de medidas repetidas são exemplos de dados agrupados em que os dados se enquadram em agrupamentos diferentes. Para dados agrupados, os dados dentro de um mesmo cluster podem estar correlacionados, mas os dados entre diferentes clusters são frequentemente considerados independentes. Por

exemplo, em um estudo multicêntrico, cada centro pode ser visto como um cluster e os dados recolhidos no mesmo centro podem ser correlacionados, mas os dados de diferentes centros são geralmente considerados independentes. Em um estudo longitudinal, cada indivíduo pode ser visto como um cluster. Estes dados fazem parte da classe de dados correlacionados.

Com o objetivo de mostrar a importância de se levar em conta os agrupamentos na modelagem dos dados, mostramos o exemplo motivacional extraído de [Demidenko \(2013\)](#). Para ilustrar, considere a relação entre preço (x) e vendas (y) de diferentes mercadorias. Na Figura 5 são apresentados gráficos de dispersão entre x e y . Na Figura da esquerda, nota-se uma relação aparentemente linear entre x e y e uma reta de regressão linear estimada a partir dos dados apresenta uma inclinação negativa, ou seja, um aumento nos preços levaria a uma diminuição nas vendas. Entretanto, podemos argumentar que estamos diante de dados agrupados, em que cada tipo de mercadoria é um grupo. Na Figura da direita, as observações de cada tipo de mercadoria estão conectadas por uma linha e, agora, observa-se uma relação positiva entre x e y , ou seja, um aumento nos preços levaria a um aumento nas vendas. Na regressão linear, assume-se que as observações são independentes e identicamente distribuídas com reta de regressão, $\mathbb{E}(y|x) = \alpha + \beta x$, em que α é o intercepto e β é a inclinação. Ainda, a regressão linear assume o modelo $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, em que $i = 1, \dots, n$ e ε_i são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância constante, σ^2 . Por outras palavras, assume-se que os dados são colhidos a partir de mercadorias semelhantes e homogêneas. Em um modelo de regressão com efeitos mistos, assume-se que cada tipo de mercadoria representa um grupo e, portanto, que um aumento no preço de uma mercadoria específica leva a um aumento nas vendas (Figura da direita). Um modelo adequado para as vendas seria assumir que cada mercadoria possui suas próprias vendas específicas (interceptos específicos). A linha reta da Figura da direita mostra a reta média populacional do modelo linear de efeitos mistos estimado a partir dos dados. Para maiores detalhes consulte [Demidenko \(2013, Seção 1.1\)](#).

Os dados oriundos dos estudos longitudinais precisam de metodologias apropriadas para inferências adequadas. Isso ocorre porque as medidas de um mesmo indivíduo geralmente apresentam uma correlação positiva ([FITZMAURICE et al., 2009](#), pag. 03). Na análise de dados correlacionados, a correlação deve ser incorporada na análise para evitar que sejam tomadas conclusões errôneas sobre a relação entre as variáveis.

Na literatura, existem várias propostas para analisar dados oriundos de estudos longitudinais. Dentre elas, [Liang e Zeger \(1986\)](#) propuseram modelar a variabilidade entre as observações incluindo na análise uma matriz de correlação de “trabalho” utilizando equações de estimativas generalizadas (EEG). Por esse método, a média e o parâmetro de dispersão não precisam ser completamente especificados e as estimativas são interpretadas em termos da média populacional. [Laird e Ware \(1982\)](#) propuseram modelar essa estrutura

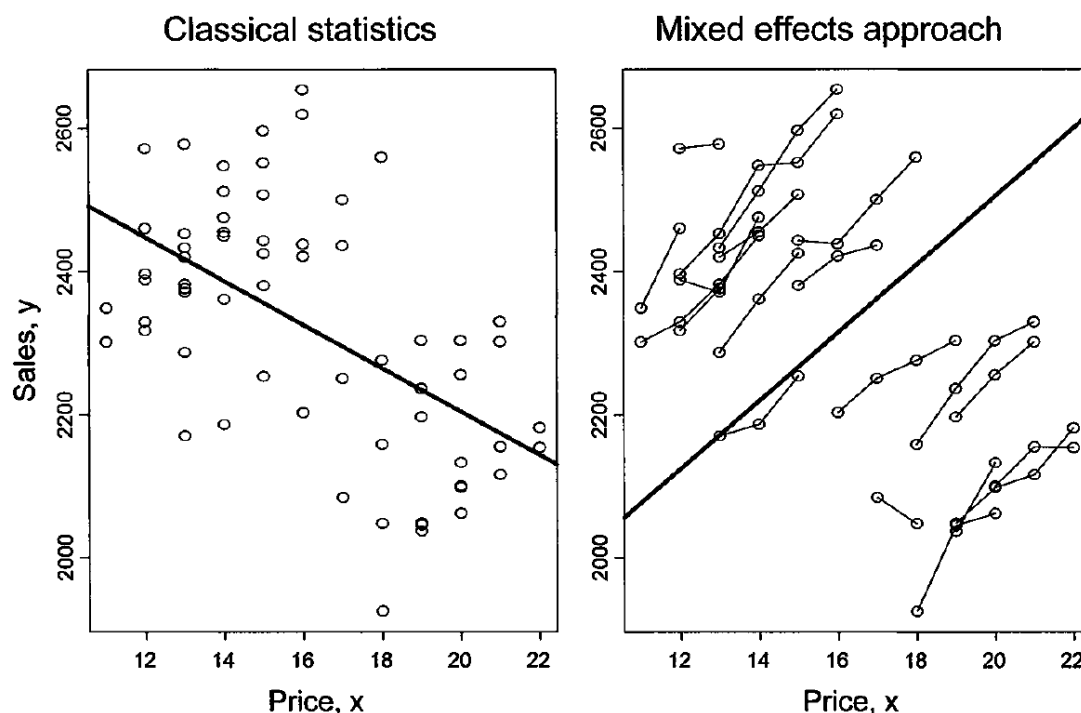


Figura 5 – Número de vendas segundo o preço do produto. Ajuste de um modelo de regressão linear na Figura da esquerda e ajuste de um modelo de regressão de efeitos mistos na Figura da direita.

Fonte: Extraído de [Demidenko \(2013, pag. 03\)](#)

por meio da inclusão de efeitos aleatórios específicos dos sujeitos. Estas são variáveis aleatórias, geralmente assumidas serem provenientes de uma distribuição normal com média zero e uma matriz de covariâncias que deve ser especificada. Os efeitos aleatórios englobam a variabilidade de covariáveis não incluídas ou de características biológicas, comportamentais e ambientais que possam explicar as diferenças de cada sujeito. Os modelos lineares mistos e os modelos lineares generalizados de efeitos mistos são muito utilizados para analisar dados longitudinais, dados agrupados, de medidas repetidas, entre outros, sendo aplicados em muitas pesquisas nas diversas áreas como climatologia, biologia, economia, ciências sociais e muitas outras (veja, por exemplo, [Fitzmaurice et al. \(2009\)](#), [Fitzmaurice, Laird e Ware \(2011\)](#) e [Diggle \(2013\)](#) para muitos exemplos de aplicações). O leitor interessado em detalhes sobre modelos mistos pode consultar [McCulloch, Searle e Neuhaus \(2008\)](#), [Jiang \(2021\)](#), [Stroup \(2016\)](#), entre vários outros.

2.2 QUADRATURA DE GAUSS-HERMITE

Nesta seção apresentamos o método da quadratura de Gauss-Hermite para aproximar integrais que não podem ser resolvidas analiticamente. Vale ressaltar que um dos métodos mais utilizados para aproximar integrais no contexto de modelos lineares generalizados mistos é a quadratura de Gauss-Hermite.

2.2.1 Quadratura de Gauss-Hermite unidimensional

O método da quadratura de Gauss-Hermite unidimensional aproxima integrais da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-x^2) dx,$$

por uma soma ponderada

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) g(x) dx \approx \sum_{k=1}^Q w_k g(x_k), \quad (2.1)$$

em que $g(x)$ com $x \in \mathbb{R}$ é uma função regular (contínua e diferenciável em todo seu domínio, além da sua derivada ser contínua em todo o seu domínio), e o nó x_k é o k -ésimo zero do polinômio de Hermite de ordem Q , $H_Q(x)$,

$$H_Q(x) = (-1)^Q \exp(x^2/2) \frac{d^Q \exp(-x^2/2)}{dx^Q},$$

e os pesos w_k dependem do número de nós Q e do polinômio de Hermite $H_{Q-1}(x)$ avaliado em x_k ,

$$w_k(x_k) = \frac{2^{Q-1} Q! \sqrt{\pi}}{Q^2 (H_{Q-1}(x_k))^2}.$$

2.2.2 Quadratura de Gauss-Hermite multidimensional

Considere agora o caso m -dimensional em que $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^\top$, uma função regular $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de pesos $w(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$ e outra função $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$. A expressão (2.1) pode ser usada para aproximar a integral m -dimensional

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} w(x_1, \dots, x_m) g(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m, \quad (2.2)$$

em que a função de peso é dada por

$$w(\mathbf{x}) = \exp(-\mathbf{x}^\top \mathbf{x}) = \exp(-x_1^2) \times \dots \times \exp(-x_m^2).$$

A quadratura de Gauss-Hermite unidimensional (2.1) pode ser aplicada a cada um dos componentes de $\mathbf{x}$. Usando Q_r nós na r -ésima dimensão, $r = 1, \dots, m$, obtemos a aproximação

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{k_1=1}^{Q_1} w_{k_1}^{(1)} \dots \sum_{k_m=1}^{Q_m} w_{k_m}^{(m)} g(x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_{k_m}^{(m)}), \quad (2.3)$$

em que $x_{k_r}^{(r)}$ é o k_r -ésimo zero do polinômio de Hermite de ordem Q_r e $w_{k_r}^{(r)}$ é o peso correspondente. Maiores detalhes podem ser consultados em [Fahrmeir e Tutz \(2001\)](#).

2.3 MODELOS DE REGRESSÃO GJS LONGITUDINAIS

Nós especificamos os modelos GJS longitudinais com uma estrutura similar aos modelos lineares generalizados mistos ([MCCULLOCH; SEARLE; NEUHAUS, 2008](#)). Para especificação do modelo GJS longitudinal, seja y_{ij} a resposta observada na j -ésima ocasião (tempo), $j = 1, \dots, n_i$ para o i -ésimo indivíduo (grupo) com $i = 1, \dots, N$ da variável aleatória Y_{ij} . O modelo GJS longitudinal segue a seguinte estrutura hierárquica:

$$Y_{ij} | (\mathbf{b}_i, \mathbf{d}_i) \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{GJS}(\xi_{ij}, \delta_{ij}; g), \quad (2.4)$$

em que

$$d_1(\xi_{ij}) = \eta_{1ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}_{ij}^\top \mathbf{b}_i \quad \text{e} \quad d_2(\delta_{ij}) = \eta_{2ij} = \mathbf{s}_{ij}^\top \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v}_{ij}^\top \mathbf{d}_i.$$

O modelo assume que as observações da variável aleatória Y_{ij} são condicionalmente independentes dado os vetores de efeitos aleatórios $\mathbf{b}_i$ e $\mathbf{d}_i$ de dimensões m e l , respectivamente. Assumimos independência entre os vetores $\mathbf{b}_i$ e $\mathbf{d}_i$. Ainda, assumimos que cada vetores de efeitos aleatórios $\mathbf{b}_i$ e $\mathbf{d}_i$ são independentes e identicamente distribuídos com função densidade de probabilidade normal multivariada com vetor de médias $\mathbf{0}$ e matriz de variância-covariância $\boldsymbol{\Sigma}_b$ e $\boldsymbol{\Sigma}_d$, respectivamente. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i &\stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_b), \\ \mathbf{d}_i &\stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}_l(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_d), \end{aligned}$$

em que $\stackrel{\text{iid}}{\sim}$ é uma abreviação para independente e identicamente distribuído. Os preditores lineares η_{1ij} e η_{2ij} estão ligados à mediana e à precisão pelas funções de ligação $d_1(\cdot)$ e $d_2(\cdot)$ e

consistem na soma de efeitos fixos e aleatórios, respectivamente. Algumas funções de ligação foram apresentadas nas Tabelas 3 e 4. Os vetores $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ e $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_q)^\top$ são de coeficientes de regressão desconhecidos (efeitos fixos) que são assumidos funcionalmente independentes, em que $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ e $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, \dots, b_{im})^\top$ e $\mathbf{d}_i = (d_{i1}, \dots, d_{il})^\top$ são vetores de efeitos aleatórios, onde $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^l$. Os vetores $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}, \dots, x_{ijp})^\top$, $\mathbf{z}_{ij} = (z_{ij1}, z_{ij2}, \dots, z_{ijm})^\top$, $\mathbf{s}_{ij} = (s_{ij1}, s_{ij2}, \dots, s_{ijq})^\top$ e $\mathbf{v}_{ij} = (v_{ij1}, v_{ij2}, \dots, v_{ijl})^\top$ são observações em p , q , m e l covariáveis, regressores ou variáveis independentes conhecidas. As covariáveis nas matrizes $\mathbf{X}_i = (\mathbf{x}_{i1}; \dots; \mathbf{x}_{in_i})^\top$ de dimensão $n_i \times p$, $\mathbf{Z}_i = (\mathbf{z}_{i1}; \dots; \mathbf{z}_{in_i})^\top$ de dimensão $n_i \times q$, $\mathbf{S}_i = (\mathbf{s}_{i1}; \dots; \mathbf{s}_{in_i})^\top$ de dimensão $n_i \times m$ e $\mathbf{V}_i = (\mathbf{v}_{i1}; \dots; \mathbf{v}_{in_i})^\top$ de dimensão $n_i \times l$ podem ou não serem subconjuntos uma das outras. O modelo de regressão proposto permite modelar conjuntamente os parâmetros de efeitos fixos e aleatórios da mediana e da precisão.

2.3.1 Estimação dos parâmetros

Seja $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\tau}^\top, \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_b)^\top, \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_d)^\top)^\top$ o vetor de parâmetros do modelo, em que $\text{vech}(\mathbf{A})$ é um vetor de dimensão $n(n+1)/2$ formado pelo empilhamento de todas as colunas da matriz triangular inferior de $\mathbf{A}_{n \times n}$ (para maiores detalhes, consulte o Capítulo 16 de Harville (1997)). A função de verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}$ para o modelo GJS longitudinal com valores observados $y_{ij}, \dots, y_{in_i}$, com $i = 1, \dots, N$, é obtida utilizando a distribuição marginal da variável aleatória Y_i .

A função densidade marginal de $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{in_i})^\top$ é dada por

$$f(\mathbf{y}_i; \boldsymbol{\theta}) = \int_{\mathbb{R}^{m+l}} \left\{ \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij} | (\mathbf{b}_i, \mathbf{d}_i); \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) \right\} \phi_m(\mathbf{b}_i; \boldsymbol{\Sigma}_b) \phi_l(\mathbf{d}_i; \boldsymbol{\Sigma}_d) d\mathbf{b}_i d\mathbf{d}_i, \quad (2.5)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\tau}^\top, \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_b)^\top, \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_d)^\top)^\top$ é o vetor de parâmetros que deseja-se estimar. A função de verossimilhança para o vetor $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \dots, \mathbf{Y}_N^\top)^\top$ tem a forma

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^{m+l}} \left\{ \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij} | (\mathbf{b}_i, \mathbf{d}_i); \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) \right\} \phi_m(\mathbf{b}_i; \boldsymbol{\Sigma}_b) \phi_l(\mathbf{d}_i; \boldsymbol{\Sigma}_d) d\mathbf{b}_i d\mathbf{d}_i, \quad (2.6)$$

com $f(y_{ij} | (\mathbf{b}_i, \mathbf{d}_i); \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau})$ sendo a função densidade de probabilidade do modelo GJS, $\phi_m(\mathbf{b}_i; \boldsymbol{\Sigma}_b)$ e $\phi_l(\mathbf{d}_i; \boldsymbol{\Sigma}_d)$ são as funções densidade de probabilidade normal multivariadas com vetor de médias $\mathbf{0}$ e matrizes de variância-covariância $\boldsymbol{\Sigma}_b$ e $\boldsymbol{\Sigma}_d$, respectivamente.

Finalmente, o logaritmo da função de verossimilhança pode ser expresso na forma

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \log \left(\int_{\mathbb{R}^{m+l}} \left\{ \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij} | (\mathbf{b}_i, \mathbf{d}_i); \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) \right\} \phi_m(\mathbf{b}_i; \boldsymbol{\Sigma}_b) \phi_l(\mathbf{d}_i; \boldsymbol{\Sigma}_d) d\mathbf{b}_i d\mathbf{d}_i \right). \quad (2.7)$$

Para estimar o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\tau}^\top, \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_b^\top), \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_d^\top))^\top$ nos modelos GJS longitudinais, utilizamos a quadratura de *Gauss-Hermite* para aproximar a função de log-verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta})$. O algoritmo de quase-*Newton* implementado no pacote **bbmle** (BOLKER; R Development Core Team, 2022) do R (R Core Team, 2021) é utilizado para obter as estimativas de máxima verossimilhança do modelo marginal e os respectivos erros padrão aproximados. O algoritmo utilizado no pacote é conhecido como **Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno** (BFGS) que fornece uma aproximação para a matriz de segundas derivadas. O método foi desenvolvido de forma aparentemente independente por Broyden (1970), Fletcher (1970), Goldfarb (1970) e Shanno (1970).

O modelo (2.4) possui alguns casos particulares. Quando $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0}$ temos o modelo GJS longitudinal com efeitos aleatórios apenas no preditor da mediana, quando $\mathbf{z}_{ij} = \mathbf{0}$ temos o modelo GJS longitudinal com efeitos aleatórios apenas no preditor da precisão, e quando ambos são iguais a um vetor de zeros, temos o modelo GJS tradicional.

2.4 MODELOS GJS COM INTERCEPTOS ALEATÓRIOS

Seja y_{ij} o valor da variável resposta observada para o i -ésimo indivíduo no tempo t_{ij} , com $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n_i$ e seja $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in_i})^\top$ o vetor com as n_i observações repetidas do i -ésimo indivíduo. Assumimos que, condicional aos interceptos b_{0i} e d_{0i} as variáveis aleatórias $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in_i}$ são independentes e cada uma segue uma distribuição GJS com função densidade de probabilidade dada em (1.10). Os interceptos aleatórios b_{0i} e d_{0i} são independentes e cada um segue uma distribuição normal com média zero e desvios padrão σ^2 e ς^2 , respectivamente. Ainda, assumimos que os interceptos aleatórios b_{0i} e d_{0i} são independentes entre si. O modelo GJS com interceptos aleatórios segue a seguinte estrutura hierárquica:

$$\begin{aligned} Y_{ij} | (b_{0i}, d_{0i}) &\stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{GJS}(\xi_{ij}, \delta_{ij}; g), \\ b_{0i} &\stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \\ d_{0i} &\stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \varsigma^2), \end{aligned} \tag{2.8}$$

para $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n_i$ em que ξ_{ij} e δ_{ij} são a mediana e a precisão condicional aos interceptos aleatórios b_{0i} e d_{0i} , respectivamente. Os parâmetros ξ_{ij} e δ_{ij} satisfazem as seguintes relações funcionais

$$d_1(\xi_{ij}) = \eta_{1ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + b_{0i} \quad \text{e} \quad d_2(\delta_{ij}) = \eta_{2ij} = \mathbf{s}_{ij}^\top \boldsymbol{\tau} + d_{0i}.$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ e $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_q)^\top$ são vetores de parâmetros desconhecidos fixos, que são assumidos funcionalmente independentes, b_{0i} e d_{0i} são os interceptos aleatórios

associados ao i -ésimo indivíduo e $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}, \dots, x_{ijp})^\top$ e $\mathbf{s}_{ij} = (s_{ij1}, s_{ij2}, \dots, s_{ijq})^\top$ são vetores conhecidos que contêm os valores das variáveis explicativas associadas aos efeitos fixos.

2.4.1 Estimação

A inferência estatística proposta neste trabalho para o modelo de regressão GJS com interceptos aleatórios é baseado no método da máxima verossimilhança. Sejam $f(y_{ij}|(b_{0i}, d_{0i}); \xi, \delta)$, $\phi(b_{0i}; \sigma^2)$ e $\phi(d_{0i}; \varsigma^2)$ as funções densidade de probabilidade de $Y_{ij}|(b_{0i}, d_{0i})$, b_{0i} e d_{0i} , respectivamente.

Considerando $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\tau}^\top, \sigma^2, \varsigma^2)^\top$ o vetor de parâmetros a ser estimados no espaço paramétrico

$$\Theta = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m | \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^q, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+, \varsigma^2 \in \mathbb{R}^+\},$$

em que $m = p + q + 2$ e, temos que, a função densidade de probabilidade marginal de $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \dots, y_{in_i})$ é dada por

$$f(\mathbf{y}_i; \boldsymbol{\theta}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij}|(b_{0i}, d_{0i}); \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) \right\} \phi(b_{0i}; \sigma^2) \phi(d_{0i}; \varsigma^2) db_{0i} dd_{0i}, \quad (2.9)$$

e a função de verossimilhança para $\boldsymbol{\theta}$ do vetor $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N)^\top$ é da forma

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij}|(b_{0i}, d_{0i}); \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) \right\} \phi(b_{0i}; \sigma^2) \phi(d_{0i}; \varsigma^2) db_{0i} dd_{0i}. \quad (2.10)$$

Finalmente, o logaritmo da função de verossimilhança pode ser expresso na forma

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \log \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij}|(b_{0i}, d_{0i}); \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) \right\} \phi(b_{0i}; \sigma^2) \phi(d_{0i}; \varsigma^2) db_{0i} dd_{0i} \right). \quad (2.11)$$

Infelizmente, a função de verossimilhança dada na equação (2.10) e a função de log-verossimilhança na equação (2.11) não podem ser simplificadas porque elas possuem integral intratável analiticamente. O obstáculo na inferência baseada no método da MV é a avaliação das integrais da função de verossimilhança dada na equação (2.10). Na literatura, existem várias métodos que podem ser utilizados para resolver esse problema. Normalmente os métodos utilizados incluem métodos de integração de Monte Carlo, algoritmo EM e métodos aproximados (WU, 2010). Os métodos de Monte Carlo utilizam a quadratura

de Gauss-Hermite ou técnicas de integração de Monte Carlo para aproximar a integral da função de verossimilhança da equação (2.10). Em contrapartida, os algoritmos EM maximizam indiretamente a verossimilhança usando métodos numéricos estocásticos ou de Monte Carlo no passo E. Por fim, os métodos aproximados são assim chamados por usar expansões de Taylor ou aproximações de Laplace para aproximar diretamente a função de verossimilhança.

Neste trabalho, as integrais são aproximadas numericamente através do método da quadratura de Gauss-Hermite multidimensional apresentado na Seção 2.2.2. Na função de verossimilhança da equação (2.10), precisamos avaliar a seguinte integral

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{\mathbb{R}^2} \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij} | (b_{0i}, d_{0i}); \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) \phi(b_{0i}; \sigma^2) \phi(d_{0i}; \varsigma^2) db_{0i} dd_{0i} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij} | (b_{0i}, d_{0i}); \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) \frac{e^{-\frac{b_{0i}^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{e^{-\frac{d_{0i}^2}{2\varsigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\varsigma} db_{0i} dd_{0i}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Agora, fazendo as seguintes mudanças de variáveis

$$u_{1i} = \frac{b_{0i}}{\sqrt{2}\sigma} \quad \text{e} \quad u_{2i} = \frac{d_{0i}}{\sqrt{2}\varsigma},$$

obtemos a integral I_i dada por

$$I_i = \int_{\mathbb{R}^2} \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij} | (\sqrt{2}\sigma u_{1i}, \sqrt{2}\varsigma u_{2i}); \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) \frac{\exp(-u_{1i}^2) \exp(-u_{2i}^2)}{\pi} du_{1i} du_{2i}, \quad (2.13)$$

que tem a forma da equação (2.2). Usando o método da quadratura de Gauss-Hermite multidimensional, a integral I_i pode ser aproximada como

$$I_i \cong \sum_{k_1=1}^{Q_1} \sum_{k_2=1}^{Q_2} \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij} | (\sqrt{2}\sigma u_{k_1}, \sqrt{2}\varsigma u_{k_2}); \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) \frac{v_{k_1} v_{k_2}}{\pi},$$

em que u_{k_1} e u_{k_2} são os pontos de quadratura e v_{k_1} e v_{k_2} são os pesos correspondentes. Portanto, a função de verossimilhança aproximada é dada por

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) \cong \prod_{i=1}^N \left(\sum_{k_1=1}^{Q_1} \sum_{k_2=1}^{Q_2} \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij} | (\sqrt{2}\sigma u_{k_1}, \sqrt{2}\varsigma u_{k_2}); \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) \frac{v_{k_1} v_{k_2}}{\pi} \right), \quad (2.14)$$

e o logaritmo da função de verossimilhança pode ser escrito como

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) \cong \sum_{i=1}^N \log \left(\sum_{k_1=1}^{Q_1} \sum_{k_2=1}^{Q_2} \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij} | (\sqrt{2}\sigma u_{k_1}, \sqrt{2}\varsigma u_{k_2}); \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) \frac{v_{k_1} v_{k_2}}{\pi} \right). \quad (2.15)$$

A função escore é obtida diferenciando o logaritmo da função de verossimilhança dada na equação (2.15) em relação a cada um dos parâmetros em $\boldsymbol{\theta}$ e, é dado por

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta})^\top, \mathbf{U}_\tau(\boldsymbol{\theta})^\top, U_{\sigma^2}(\boldsymbol{\theta}), U_{\zeta^2}(\boldsymbol{\theta}))^\top.$$

Na Seção A.1 do Apêndice A são apresentadas as expressões para os componentes do vetor $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$. O estimador de MV $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\beta}}^\top, \hat{\boldsymbol{\tau}}^\top, \hat{\sigma}^2, \hat{\zeta}^2)^\top$ de $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\tau}^\top, \sigma^2, \zeta^2)^\top$ pode ser obtido resolvendo simultaneamente os sistemas de equações não lineares $\mathbf{U}_\beta(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0}_p$, $\mathbf{U}_\tau(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0}_q$, $U_{\sigma^2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0$ e $U_{\zeta^2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0$, em que $\mathbf{0}_k$ denota um vetor k -dimensional de zeros. Portanto, os estimadores dos componentes de $\boldsymbol{\theta}$ não possuem expressão de forma fechada e precisam ser obtidos através da maximização numérica do logaritmo da função de verossimilhança dada na equação (2.15) usando algoritmos de otimização não linear.

Seja $\mathbf{K}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \sigma^2, \zeta^2)$ a matriz da informação esperada de Fisher para o vetor de parâmetros $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \sigma^2, \zeta^2)$. Quando o tamanho da amostra é suficientemente grande e sob algumas condições de regularidade, temos que

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \hat{\boldsymbol{\tau}} \\ \hat{\sigma}^2 \\ \hat{\zeta}^2 \end{pmatrix} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}_{p+q+2} \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\tau} \\ \sigma^2 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}, \mathbf{K}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \sigma^2, \zeta^2)^{-1} \right),$$

em que $\stackrel{a}{\sim}$ denota aproximadamente distribuído. Infelizmente, não existe uma forma fechada para a matriz $\mathbf{K}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \sigma^2, \zeta^2)$. No entanto, resultados assintóticos garantem que $\mathbf{K}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \sigma^2, \zeta^2)$ pode ser aproximada por $-\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \sigma^2, \zeta^2)$, em que $-\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\sigma}^2, \hat{\zeta}^2)$ é a matriz da informação observada de dimensão $(p + q + 2) \times (p + q + 2)$ avaliada em $(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\sigma}^2, \hat{\zeta}^2)$. Podemos utilizar a matriz $\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \sigma^2, \zeta^2)$ para obter os erros padrão assintóticos dos estimadores de MV. Podemos escrever $\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \sigma^2, \zeta^2)$ como

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \sigma^2, \zeta^2) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\beta\beta} & \mathbf{J}_{\beta\tau} & \mathbf{J}_{\beta\sigma^2} & \mathbf{J}_{\beta\zeta^2} \\ \mathbf{J}_{\beta\tau}^\top & \mathbf{J}_{\tau\tau} & \mathbf{J}_{\tau\sigma^2} & \mathbf{J}_{\tau\zeta^2} \\ \mathbf{J}_{\beta\sigma^2}^\top & \mathbf{J}_{\tau\sigma^2}^\top & J_{\sigma^2\sigma^2} & J_{\sigma^2\zeta^2} \\ \mathbf{J}_{\beta\zeta^2}^\top & \mathbf{J}_{\tau\zeta^2}^\top & J_{\sigma^2\zeta^2}^\top & J_{\zeta^2\zeta^2} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

em que as estimativas dos elementos de $\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \sigma^2, \zeta^2)$ também precisam ser obtidos de forma numérica.

Os algoritmos de otimização necessitam da especificação de valores iniciais a serem utilizados no esquema iterativo. A sugestão de Lemonte e Bazán (2016) como estimativa inicial para o vetor $\boldsymbol{\beta}$ foi a estimativa de mínimos quadrados ordinários obtida a partir da regressão linear da variável resposta transformada $d_1(y_{i1}), \dots, d_1(y_{in_i})$ em $\mathbf{X}_i$, isto é, $(\mathbf{X}_i^\top \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^\top \mathbf{z}_i$, em que $\mathbf{z}_i = (d_1(y_{i1}), \dots, d_1(y_{in_i}))^\top$ para $i = 1, \dots, N$. Ainda, a dimensão

de $\mathbf{X}_i$ é $n_i \times p$ e de $\mathbf{z}_i$ é $n_i \times 1$. Também são necessários valores iniciais para os parâmetros $\boldsymbol{\tau}$, σ^2 e ς^2 . Contudo, para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\tau}$, [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) expressam que trata-se de um problema complicado de se lidar e não apresentam uma sugestão geral para este caso. Todavia, quando a função de ligação do parâmetro de dispersão é a logarítmica, a sugestão dos autores é iniciar o vetor $\boldsymbol{\tau}$ com um vetor de zeros q -dimensional; isto é, iniciar o algoritmo de otimização quando o parâmetro de dispersão do modelo de regressão GJS não varia com as observações. Por fim, como valores iniciais para estimar a variância dos efeitos aleatórios, uma vez que estes valores entram no algoritmo como logaritmo, sugerimos o uso de zero como valor inicial.

2.4.2 Intervalos de confiança e testes de hipóteses

Podemos utilizar a propriedade de normalidade assintótica do estimador de MV para construir intervalos de confiança aproximados para os parâmetros do modelo. Seja β_r ($r = 1, \dots, p$), τ_l ($l = 1, \dots, q$) o q -ésimo e l -ésimo componente dos vetores $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\tau}$, respectivamente. Para $0 < \vartheta < 1/2$, considerando um nível de confiança $100(1 - \vartheta\%)$, os intervalos de confiança assintóticos para β_r , τ_l , σ^2 e ς^2 são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_r &\pm z_{1-\vartheta/2}(\hat{J}_{rr}^{\beta\beta})^{1/2}, \\ \hat{\tau}_l &\pm z_{1-\vartheta/2}(\hat{J}_{ll}^{\tau\tau})^{1/2}, \\ \hat{\sigma}^2 &\pm z_{1-\vartheta/2}(\hat{J}^{\sigma^2\sigma^2})^{1/2}, \\ \hat{\varsigma}^2 &\pm z_{1-\vartheta/2}(\hat{J}^{\varsigma^2\varsigma^2})^{1/2},\end{aligned}$$

em que $\hat{J}_{rr}^{\beta\beta}$, $\hat{J}_{ll}^{\tau\tau}$, $\hat{J}^{\sigma^2\sigma^2}$ e $\hat{J}^{\varsigma^2\varsigma^2}$, são as variâncias assintóticas de $\hat{\beta}_r$, $\hat{\tau}_l$, $\hat{\sigma}^2$ e $\hat{\varsigma}^2$, sendo $\hat{J}_{rr}^{\beta\beta}$ o (r, r) -ésimo elemento da matriz $\mathbf{J}_{\beta\beta}$ avaliado em $(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\sigma}^2, \hat{\varsigma}^2)$ e $\hat{J}_{ll}^{\tau\tau}$ o (l, l) -ésimo elemento da matriz $\mathbf{J}_{\tau\tau}$ avaliado em $(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\sigma}^2, \hat{\varsigma}^2)$ e $\hat{J}^{\sigma^2\sigma^2}$ e $\hat{J}^{\varsigma^2\varsigma^2}$ são os elementos de $\mathbf{J}_{\sigma^2\sigma^2}$ e $\mathbf{J}_{\varsigma^2\varsigma^2}$, respectivamente. Além disso, para $0 < \vartheta < 1/2$, $z_{1-\vartheta/2}$ denota o quantil $(1 - \vartheta/2)$ da distribuição normal padrão.

Os testes de hipóteses para os parâmetros do modelo geralmente são realizados pela utilização de estatísticas de teste. As principais estatísticas de teste utilizadas na literatura são: razão de verossimilhanças ([WILKS, 1938](#)), Wald ([WALD, 1943](#)), escore de Rao ([RAO, 1948](#)) e Gradiente, proposta recentemente por [Terrell \(2002\)](#). Detalhes sobre a estatística Gradiente podem ser consultados em [Lemonte \(2016\)](#).

2.4.3 Predição dos efeitos aleatórios

Apesar de que na prática o interesse principal seja a estimação dos parâmetros da distribuição marginal de $\mathbf{Y}_i$, ou seja, estimar $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\tau}$, σ^2 e ς^2 , frequentemente é de interesse ou até mesmo necessário obter predições para os efeitos aleatórios, b_{0i} e d_{0i} . Essas predições

refletem a variabilidade entre os indivíduos e são úteis para detectar indivíduos atípicos ou grupos de indivíduos que evoluem de forma diferente no tempo (MOLENBERGHS; VERBEKE, 2005). Além disso, as predições dos efeitos aleatórios são necessárias sempre que o interesse recair em prever evoluções específicas dos indivíduos.

Atualmente, a abordagem mais utilizada para atribuir valores aos efeitos aleatórios é a metodologia do melhor preditor empírico de Bayes (EBP). Detalhes podem ser consultados em Fitzmaurice et al. (2009) e Molenberghs e Verbeke (2005). Aqui, para prever os valores dos efeitos aleatórios, recorreremos a abordagem que considera o EBP. Assim, para estimar os efeitos aleatórios do modelo dado na equação (2.8), utilizamos a distribuição a posteriori de b_{0i} e de d_{0i} . Temos que a distribuição a posteriori de b_{0i} é dada por

$$f_{pb_i}(b_{0i}|\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \sigma^2) = \frac{f(\mathbf{y}_i|b_{0i}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau})\phi(b_{0i}; \sigma^2)}{\int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{y}_i|b_{0i}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau})\phi(b_{0i}; \sigma^2)db_{0i}}. \quad (2.17)$$

Usualmente, b_{0i} é predito por meio da média da distribuição a posteriori, denominada de média a posteriori de b_{0i} . Este preditor recebe o nome de melhor preditor empírico de Bayes e é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{0i} &= \mathbb{E}[b_{0i}|\mathbf{Y}_i] \\ &= \int_{\mathbb{R}} b_{0i} f_{pb_i}(b_{0i}|\mathbf{y}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\sigma}^2)db_{0i}. \end{aligned}$$

Dessa forma, propomos a utilização dessa abordagem para obter o melhor preditor dos interceptos aleatórios nos modelos GJS longitudinais, como segue

$$\tilde{b}_{0i} = \mathbb{E}[b_{0i}|\mathbf{Y}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} b_{0i} \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij}|(b_{0i}, d_{0i}); \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}) f(b_{0i}; \hat{\sigma}^2) f(d_{0i}; \hat{\zeta}^2) db_{0i} dd_{0i}}{\int_{\mathbb{R}^2} \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij}|(b_{0i}, d_{0i}); \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}) f(b_{0i}; \hat{\sigma}^2) f(d_{0i}; \hat{\zeta}^2) db_{0i} dd_{0i}}, \quad (2.18)$$

$$\tilde{d}_{0i} = \mathbb{E}[d_{0i}|\mathbf{Y}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} d_{0i} \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij}|(b_{0i}, d_{0i}); \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}) f(b_{0i}; \hat{\sigma}^2) f(d_{0i}; \hat{\zeta}^2) db_{0i} dd_{0i}}{\int_{\mathbb{R}^2} \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij}|(b_{0i}, d_{0i}); \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}) f(b_{0i}; \hat{\sigma}^2) f(d_{0i}; \hat{\zeta}^2) db_{0i} dd_{0i}}, \quad (2.19)$$

em que $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, n_i$. Aproximações para as integrais no numerador e denominador das equações (2.18) e (2.19) são obtidas utilizando a quadratura de Gauss-Hermite. Note que o denominador é a integral dada na equação (2.12) e, portanto, a quadratura de Gauss-Hermite é aplicada da mesma forma.

2.4.4 Seleção de modelos e covariáveis

Um problema comum na modelagem estatística consiste em obter as covariáveis que melhor expliquem a variável resposta de interesse. De outro modo, obter o modelo

que oferece o melhor ajuste aos dados. Quando o interesse é na comparação de modelos encaixados o teste mais utilizado é o teste da razão de verossimilhanças (TRV). Outras testes também podem ser utilizadas: teste de Wald, o escore de Rao e o gradiente que foram mencionadas na Seção 2.4.2.

Quando os modelos não são encaixados, pode-se utilizar alguns critérios de informação que possuem fundamento na teoria da decisão. Os critérios de informação são ferramentas estatísticas que combinam o ajuste do modelo à qualidade da sua parsimônia, penalizando modelos com maior número de parâmetros. O objetivo é encontrar um equilíbrio entre a capacidade de explicar os dados (ajuste) e a simplicidade do modelo (parsimônia). Os mais conhecidos e utilizados são o critério de informação de Akaike (AIC) (AKAIKE, 1974), o critério de informação bayesiano de Schwarz (BIC) (SCHWARZ, 1978), o critério consistente de informação de Akaike (CAIC) (BOZDOGAN, 1987) e o critério de informação de Hannan-Quinn (HQIC) (HANNAN; QUINN, 1979) definidos como

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= -2\ell(\hat{\theta}) + 2d \\ \text{BIC} &= -2\ell(\hat{\theta}) + d \log(n), \\ \text{CAIC} &= -2\ell(\hat{\theta}) + d \log(n + 1), \\ \text{HQIC} &= -2\ell(\hat{\theta}) + d \log(\log(n)), \end{aligned}$$

em que $\ell(\hat{\theta})$ exprime o máximo da log-verossimilhança, d o número de parâmetros do modelo e n o número de observações. Quanto menor for o valor dessas estatísticas, maior a evidência a favor do modelo proposto, ou seja, melhor é o ajuste fornecido pelo modelo aos dados.

Detalhes sobre critérios de seleção de modelos lineares mistos podem ser encontrados em Bozdogan (1987), Stram e Lee (1994), Pinheiro e Bates (2000), Vaida e Blanchard (2005), Delattre, Lavielle e Poursat (2014), dentre outros.

2.4.5 Teste para os componentes de variância

Os efeitos aleatórios em um modelo linear misto representam a variabilidade nas interceptações e/ou inclinações específicas dos indivíduos, não explicadas pelas covariáveis incluídas no modelo. A suposição do uso de um modelo misto será frequentemente justificada para dados em que a variabilidade entre os indivíduos é grande em comparação com a variabilidade dentro dos indivíduos. Dessa forma, a utilização de um modelo com efeitos aleatórios em relação a um modelo linear tradicional, depende da existência de heterogeneidade entre os indivíduos. Por exemplo, no modelo dado na equação (2.8), pode-se testar se existe a necessidade de inclusão de efeitos aleatórios, b_{0i} , no preditor da mediana. Essa inclusão indicaria que os indivíduos possuem interceptos distintos no

início do acompanhamento, ou de outra forma, cada um possui um efeito de base diferente. Nesse caso, as hipóteses de interesse são:

$$\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = 0 \quad \text{contra} \quad \mathcal{H}_1 : \sigma^2 > 0, \quad (2.20)$$

em que, a hipótese nula está situada na fronteira do espaço paramétrico, uma vez que, a variância dos efeitos aleatórios, σ^2 , deve ser positiva. Assim sendo, a inferência clássica baseada na MV não deve ser utilizada (Detalhes em Verbeke e Molenberghs (2001) ou Wu (2010)).

Utilizando os resultados de Self e Liang (1987), Stram e Lee (1994) mostraram que a distribuição assintótica, sob a hipótese nula, da estatística da RV, quando a componente de variância encontra-se na fronteira do espaço paramétrico, para n grande, segue uma distribuição que é mistura de distribuições qui-quadrado ao invés de uma qui quadrado única.

A estatística de teste da RV é dada por

$$-2 \log(\Lambda) = -2(\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) - \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}})), \quad (2.21)$$

em que, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ são os estimadores de MV obtidas dos modelos ajustados sob $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_1$, respectivamente. De acordo com o enfoque clássico e sob algumas condições de regularidade, a estatística da RV segue, sob a hipótese nula, uma distribuição qui-quadrado com graus de liberdade igual a diferença entre o número de parâmetros dos modelos considerados que, para o caso da hipótese da equação (2.20) é uma qui-quadrado com 1 grau de liberdade, χ_1^2 .

Utilizando os resultados de Stram e Lee (1994) a estatística da RV na equação (2.21), para testar a hipótese (2.20) do modelo (2.8) com intercepto aleatório no preditor da mediana, segue uma distribuição que é uma mistura 50:50 de χ_0^2 e χ_1^2 . Em que χ_0^2 representa a variável aleatória degenerada em zero, isto é, $\mathbb{P}(\chi_0^2 = 0) = 1$. Portanto, o valor- p para testar a hipótese em (2.20) é calculado como $\frac{1}{2}\mathbb{P}(\chi_1^2 > -2 \log(\Lambda))$.

Por fim, outros trabalhos foram desenvolvidos para testar o componente de variância. Em particular, Silvapulle e Silvapulle (1995) propuseram um teste escore para um modelo paramétrico geral que requer a estimação somente sob a hipótese nula e possui a propriedade de ser assintoticamente equivalente à estatística da RV em testes unilaterais. Verbeke e Molenberghs (2003) estenderam o teste escore unilateral proposto por Silvapulle e Silvapulle (1995) para testar os componentes de variância em modelos lineares mistos. Por fim, Zhang e Lin (2008) apresentam uma revisão dos testes escore e da RV para testar componentes de variância em modelos lineares generalizados mistos. Para o leitor interessado, um resumo de outras situações específicas de testes para os componentes de variância discutidas por

Stram e Lee (1994, 1995) é apresentada em Verbeke e Molenberghs (2001) e para modelos lineares generalizados mistos em Zhang e Lin (2008).

2.4.6 Resultados numéricos

Por meio de simulações de Monte Carlo foi estudado o desempenho dos estimadores de MV dos parâmetros do modelo de regressão GJS longitudinal em amostras de tamanho finito, utilizando os geradores de densidade normal, *t-Student* e exponencial potência.

No estudo de simulação, consideramos o modelo de regressão GJS longitudinal com a seguinte estrutura hierárquica:

$$\begin{aligned} d_1(\xi_{ij}) &= \log\left(\frac{\xi_{ij}}{1 - \xi_{ij}}\right) = b_{0i} + \beta_0 + \beta_1 t_{ij}, \\ d_2(\delta_{ij}) &= \log(\delta_{ij}) = \tau_0 + \tau_1 t_{ij}, \\ b_{0i} &\stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \end{aligned}$$

em que $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, n_i$. Temos que $Y_{ij}|b_{0i} \sim \text{GJS}(\xi_{ij}, \delta_{ij}; g)$, e consideramos três funções geradoras de densidade: normal padrão, *t-Student* com $\nu = 4, 6$ e 8 graus de liberdade, e exponencial potência com $k = -0.4, 0.2$ e 0.4 . Os valores dos tempos t_{ij} foram gerados igualmente espaçados no intervalo $(0, 1)$. Esses valores foram mantidos fixos para cada réplica de Monte Carlo. Consideramos $\beta_0 = -1.5$, $\beta_1 = 1.5$, $\tau_0 = -1.2$ e $\tau_1 = 1$. Além disso, consideramos a variância do efeito aleatório igual a $\sigma^2 = 0.25, 0.75$ e 1.25 . Foram consideradas amostras com $N = 10, 20, 40$ e 100 indivíduos avaliados em 5 ($n_i = 5$) instantes distintos. Dessa forma, foram consideradas amostras com $n = 50, 100, 200$ e 500 observações. O número de réplicas de Monte Carlo foi de $M = 2000$. Todas as simulações foram elaboradas no *software* R (R Core Team, 2021). A função de log-verossimilhança conjunta de cada uma das distribuições foi integrada em relação ao efeito aleatório pelo método da quadratura de Gauss-Hermite e maximizada através do método BFGS implementado na função `optim` do R.

Com o objetivo de analisar os resultados da estimação pontual, foram calculados para os modelos GJS longitudinais com geradores de densidade normal, *t-Student* e exponencial potência e para 4 tamanhos de amostras: a média, o viés, o desvio padrão e a raiz quadrada do erro quadrático médio ($\sqrt{\text{EQM}}$), definidas, respectivamente, como

$$\begin{aligned}
\text{Média} = \hat{\psi}_{med} &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{\psi}_m, \\
\text{Viés} = b(\hat{\psi}_{med}) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{\psi}_m - \psi) = \hat{\psi} - \psi, \\
\text{sd} &= \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^M (\hat{\psi}_m - \hat{\psi}_{med})^2}, \\
\sqrt{\text{EQM}} &= \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{\psi}_m - \psi)^2}
\end{aligned}$$

em que ψ é o verdadeiro valor do parâmetro, $\hat{\psi}_m$ é a estimativa de máxima verossimilhança de ψ referente a m -ésima réplica e M é o número de réplicas.

Nas Tabelas 5, 6 e 7 são apresentados os resultados da simulação para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade normal com variância dos efeitos aleatórios iguais a $\sigma^2 = 0.25, 0.75$ e 1.25 . Nota-se que os estimadores apresentam, em módulo, vieses próximos a zero, sendo que os vieses diminuem à medida que o tamanho da amostra aumenta. Além disso, tanto o desvio padrão quanto a $\sqrt{\text{EQM}}$ diminuem quando o tamanho da amostra aumenta. Ainda, os vieses dos estimadores de β_0 e de β_1 são, na maioria dos cenários, menores que dos estimadores de τ_0 , τ_1 e de σ^2 ; por exemplo, na Tabela 7, para $n = 100$, os vieses dos estimadores de β_0 e de β_1 foram -0.0099 e -0.0020 , respectivamente, enquanto que os vieses dos estimadores de τ_0 , τ_1 e de σ^2 foram 0.0133 , 0.0120 e -0.0841 , respectivamente. Adicionalmente, é interessante notar que, o desvio padrão e a $\sqrt{\text{EQM}}$ diminuem de forma mais lenta com o aumento de σ^2 independentemente do tamanho da amostra.

Nas Tabelas 8, 9 e 10 são apresentados os resultados da simulação para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* com $\nu = 4, 6$ e 8 e $\sigma^2 = 0.25$. Nas Tabelas 21 a 26 do Apêndice B.1 são apresentados os resultados da simulação para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* com $\nu = 4, 6$ e 8 e $\sigma^2 = 0.75$ e 1.25 . Verifica-se que os estimadores apresentam, em módulo, vieses próximos a zero, sendo que os vieses diminuem à medida que o tamanho da amostra aumenta. Além disso, para ν fixo, a $\sqrt{\text{EQM}}$ aumenta com o aumento da variância do efeito aleatório, σ^2 . Por outro lado, para σ^2 fixo, a $\sqrt{\text{EQM}}$ diminui com o aumento de ν . Isso é esperado pois, quando $\nu \rightarrow \infty$ a distribuição *t-Student* se aproxima da distribuição normal.

Nas Tabelas 11, 12 e 13 são apresentados os resultados da simulação para o modelo GJS longitudinal com gerador de exponencial potência com $k = 0.4, 0.2$ e -0.4 e $\sigma^2 = 0.25$. Observa-se que os estimadores apresentam, em módulo, vieses próximos a zero, sendo que os vieses diminuem à medida que o tamanho da amostra aumenta. Ainda, a $\sqrt{\text{EQM}}$ diminui mais lentamente para k maiores e o módulo dos vieses, em geral, são menores

para k menores.

Em resumo, observa-se que em módulo, os vieses estão próximos a zero e tendem a diminuir com o aumento do tamanho da amostra. A $\sqrt{\text{EQM}}$ associada aos parâmetros β_0 e β_1 é mais alta que a dos demais parâmetros para todos os geradores de densidade considerados para qualquer n utilizado. Adicionalmente, os vieses do estimador β_1 é, para maioria dos casos, negativo, ou seja, a estimativa de MV, em geral, subestima o verdadeiro valor do parâmetro. Por outro lado, o viés do estimador τ_1 , para a maioria dos casos, é positivo, ou seja, a estimativa de MV, em geral, superestima o verdadeiro valor do parâmetro.

Tabela 5 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade normal para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.25$)

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.4796	0.0204	0.6826	0.6827
	β_1	1.4664	-0.0336	0.8395	0.8400
	τ_0	-1.1703	0.0297	0.1929	0.1951
	τ_1	1.0415	0.0415	0.3463	0.3487
	σ^2	0.2889	0.0389	0.3308	0.3330
100	β_0	-1.4966	0.0034	0.4753	0.4752
	β_1	1.4891	-0.0109	0.5893	0.5893
	τ_0	-1.1844	0.0156	0.1292	0.1301
	τ_1	1.0155	0.0155	0.2257	0.2262
	σ^2	0.2664	0.0164	0.2497	0.2502
200	β_0	-1.4987	0.0013	0.3341	0.3341
	β_1	1.5022	0.0022	0.4111	0.4110
	τ_0	-1.1891	0.0109	0.0920	0.0926
	τ_1	1.0060	0.0060	0.1614	0.1615
	σ^2	0.2526	0.0026	0.1945	0.1945
500	β_0	-1.4977	0.0023	0.2119	0.2118
	β_1	1.4921	-0.0079	0.2626	0.2627
	τ_0	-1.1957	0.0043	0.0571	0.0572
	τ_1	1.0011	0.0011	0.1008	0.1008
	σ^2	0.2495	-0.0005	0.1349	0.1348

Tabela 6 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade normal para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.75$)

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.5090	-0.0090	0.7311	0.7310
	β_1	1.5088	0.0088	0.8554	0.8552
	τ_0	-1.1653	0.0347	0.2060	0.2089
	τ_1	1.0126	0.0126	0.3662	0.3664
	σ^2	0.6499	-0.1001	0.5943	0.6025
100	β_0	-1.5112	-0.0112	0.4970	0.4970
	β_1	1.5243	0.0243	0.5845	0.5849
	τ_0	-1.1849	0.0151	0.1332	0.1341
	τ_1	1.0079	0.0079	0.2440	0.2440
	σ^2	0.6883	-0.0617	0.4507	0.4548
200	β_0	-1.5004	-0.0004	0.3530	0.3529
	β_1	1.4934	-0.0066	0.4119	0.4119
	τ_0	-1.1917	0.0083	0.0918	0.0922
	τ_1	1.0007	0.0007	0.1681	0.1681
	σ^2	0.7060	-0.0440	0.3197	0.3226
500	β_0	-1.4958	0.0042	0.2216	0.2215
	β_1	1.4934	-0.0066	0.2650	0.2650
	τ_0	-1.1964	0.0036	0.0572	0.0573
	τ_1	1.0009	0.0009	0.1029	0.1029
	σ^2	0.7341	-0.0159	0.1985	0.1991

Tabela 7 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade normal para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 1.25$)

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.5068	-0.0068	0.7387	0.7385
	β_1	1.5093	0.0093	0.8276	0.8275
	τ_0	-1.1672	0.0328	0.1992	0.2019
	τ_1	1.0215	0.0215	0.3618	0.3623
	σ^2	1.0675	-0.1825	0.7757	0.7967
100	β_0	-1.5099	-0.0099	0.5494	0.5493
	β_1	1.4980	-0.0020	0.6087	0.6085
	τ_0	-1.1867	0.0133	0.1340	0.1346
	τ_1	1.0120	0.0120	0.2460	0.2462
	σ^2	1.1659	-0.0841	0.6011	0.6068
200	β_0	-1.4951	0.0049	0.3769	0.3768
	β_1	1.5013	0.0013	0.4190	0.4189
	τ_0	-1.1934	0.0066	0.0943	0.0945
	τ_1	1.0099	0.0099	0.1732	0.1735
	σ^2	1.2116	-0.0384	0.4208	0.4224
500	β_0	-1.5001	-0.0001	0.2395	0.2394
	β_1	1.4991	-0.0009	0.2648	0.2647
	τ_0	-1.1951	0.0049	0.0606	0.0608
	τ_1	0.9978	-0.0022	0.1064	0.1064
	σ^2	1.2405	-0.0095	0.2696	0.2697

Tabela 8 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 4$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.25$)

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.4748	0.0252	0.7805	0.7808
	β_1	1.4646	-0.0354	0.9911	0.9915
	τ_0	-1.1592	0.0408	0.2430	0.2463
	τ_1	1.0247	0.0247	0.4226	0.4232
	σ^2	0.3220	0.0720	0.4272	0.4332
100	β_0	-1.4851	0.0149	0.5621	0.5622
	β_1	1.4869	-0.0131	0.6991	0.6991
	τ_0	-1.1786	0.0214	0.1710	0.1723
	τ_1	1.0129	0.0129	0.2993	0.2995
	σ^2	0.2903	0.0403	0.3107	0.3132
200	β_0	-1.5133	-0.0133	0.3996	0.3998
	β_1	1.5178	0.0178	0.5036	0.5038
	τ_0	-1.1915	0.0085	0.1187	0.1190
	τ_1	1.0136	0.0136	0.2005	0.2009
	σ^2	0.2723	0.0223	0.2378	0.2388
500	β_0	-1.5022	-0.0022	0.2545	0.2545
	β_1	1.5065	0.0065	0.3214	0.3214
	τ_0	-1.1992	0.0008	0.0738	0.0738
	τ_1	1.0034	0.0034	0.1291	0.1291
	σ^2	0.2485	-0.0015	0.1621	0.1621

Tabela 9 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 6$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.25$)

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.4851	0.0149	0.7999	0.7998
	β_1	1.4877	-0.0123	1.0027	1.0025
	τ_0	-1.1757	0.0243	0.2316	0.2328
	τ_1	1.0580	0.0580	0.4012	0.4052
	σ^2	0.3198	0.0698	0.4135	0.4193
100	β_0	-1.4875	0.0125	0.5551	0.5551
	β_1	1.4900	-0.0100	0.6887	0.6886
	τ_0	-1.1857	0.0143	0.1508	0.1514
	τ_1	1.0237	0.0237	0.2634	0.2644
	σ^2	0.2944	0.0444	0.3105	0.3136
200	β_0	-1.4899	0.0101	0.3943	0.3943
	β_1	1.4913	-0.0087	0.4956	0.4956
	τ_0	-1.1940	0.0060	0.1082	0.1083
	τ_1	1.0137	0.0137	0.1862	0.1866
	σ^2	0.2615	0.0115	0.2276	0.2278
500	β_0	-1.5112	-0.0112	0.2352	0.2354
	β_1	1.5173	0.0173	0.2976	0.2980
	τ_0	-1.1977	0.0023	0.0686	0.0686
	τ_1	1.0031	0.0031	0.1174	0.1174
	σ^2	0.2515	0.0015	0.1518	0.1518

Tabela 10 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 8$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.25$)

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.5192	-0.0192	0.7555	0.7555
	β_1	1.5211	0.0211	0.9554	0.9554
	τ_0	-1.1733	0.0267	0.2206	0.2221
	τ_1	1.0492	0.0492	0.3861	0.3891
	σ^2	0.3077	0.0577	0.3715	0.3758
100	β_0	-1.5300	-0.0300	0.5282	0.5289
	β_1	1.5363	0.0363	0.6539	0.6548
	τ_0	-1.1866	0.0134	0.1553	0.1559
	τ_1	1.0210	0.0210	0.2645	0.2653
	σ^2	0.2761	0.0261	0.2816	0.2827
200	β_0	-1.4874	0.0126	0.3683	0.3684
	β_1	1.4912	-0.0088	0.4552	0.4552
	τ_0	-1.1903	0.0097	0.1064	0.1068
	τ_1	1.0084	0.0084	0.1850	0.1852
	σ^2	0.2719	0.0219	0.2118	0.2129
500	β_0	-1.4959	0.0041	0.2334	0.2334
	β_1	1.4940	-0.0060	0.2919	0.2919
	τ_0	-1.1971	0.0029	0.0662	0.0663
	τ_1	1.0034	0.0034	0.1156	0.1156
	σ^2	0.2561	0.0061	0.1506	0.1507

Tabela 11 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade exponencial potência ($k = 0.4$) e ($\sigma^2 = 0.25$).

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.5150	-0.0150	0.9267	0.9266
	β_1	1.5256	0.0256	1.1503	1.1503
	τ_0	-1.1676	0.0324	0.2212	0.2235
	τ_1	1.0515	0.0515	0.3799	0.3833
	σ^2	0.3723	0.1223	0.5118	0.5261
100	β_0	-1.5194	-0.0194	0.6640	0.6641
	β_1	1.5180	0.0180	0.8336	0.8336
	τ_0	-1.1817	0.0183	0.1517	0.1528
	τ_1	1.0228	0.0228	0.2652	0.2661
	σ^2	0.3320	0.0820	0.3884	0.3968
200	β_0	-1.4987	0.0013	0.4603	0.4602
	β_1	1.4938	-0.0062	0.5848	0.5847
	τ_0	-1.1898	0.0102	0.1018	0.1023
	τ_1	1.0082	0.0082	0.1759	0.1761
	σ^2	0.2921	0.0421	0.2780	0.2811
500	β_0	-1.4927	0.0073	0.2929	0.2929
	β_1	1.4851	-0.0149	0.3685	0.3687
	τ_0	-1.1949	0.0051	0.0675	0.0677
	τ_1	1.0035	0.0035	0.1123	0.1124
	σ^2	0.2751	0.0251	0.1991	0.2007

Tabela 12 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade exponencial potência ($k = 0.2$) e ($\sigma^2 = 0.25$).

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.4998	0.0002	0.8029	0.8027
	β_1	1.5014	0.0014	0.9879	0.9877
	τ_0	-1.1597	0.0403	0.2154	0.2191
	τ_1	1.0308	0.0308	0.3707	0.3719
	σ^2	0.3218	0.0718	0.3894	0.3959
100	β_0	-1.4760	0.0240	0.5323	0.5327
	β_1	1.4746	-0.0254	0.6644	0.6647
	τ_0	-1.1780	0.0220	0.1436	0.1452
	τ_1	1.0138	0.0138	0.2498	0.2501
	σ^2	0.2874	0.0374	0.2964	0.2987
200	β_0	-1.5087	-0.0087	0.3960	0.3960
	β_1	1.5117	0.0117	0.4844	0.4844
	τ_0	-1.1879	0.0121	0.0985	0.0992
	τ_1	1.0032	0.0032	0.1660	0.1660
	σ^2	0.2714	0.0214	0.2346	0.2355
500	β_0	-1.5016	-0.0016	0.2540	0.2539
	β_1	1.5036	0.0036	0.3152	0.3151
	τ_0	-1.1964	0.0036	0.0621	0.0622
	τ_1	1.0014	0.0014	0.1081	0.1080
	σ^2	0.2501	0.0001	0.1629	0.1629

Tabela 13 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade exponencial potência ($k = -0.4$) e ($\sigma^2 = 0.25$).

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.5002	-0.0002	0.4846	0.4845
	β_1	1.4988	-0.0012	0.6025	0.6023
	τ_0	-1.1668	0.0332	0.1605	0.1638
	τ_1	1.0207	0.0207	0.2967	0.2974
	σ^2	0.2162	-0.0338	0.2154	0.2180
100	β_0	-1.4958	0.0042	0.3333	0.3332
	β_1	1.4885	-0.0115	0.4084	0.4085
	τ_0	-1.1868	0.0132	0.1079	0.1086
	τ_1	1.0150	0.0150	0.1962	0.1967
	σ^2	0.2327	-0.0173	0.1762	0.1770
200	β_0	-1.4980	0.0020	0.2376	0.2375
	β_1	1.4985	-0.0015	0.2862	0.2862
	τ_0	-1.1921	0.0079	0.0733	0.0737
	τ_1	1.0036	0.0036	0.1356	0.1356
	σ^2	0.2377	-0.0123	0.1310	0.1315
500	β_0	-1.5021	-0.0021	0.1543	0.1542
	β_1	1.5004	0.0004	0.1866	0.1866
	τ_0	-1.1973	0.0027	0.0466	0.0467
	τ_1	1.0019	0.0019	0.0861	0.0861
	σ^2	0.2471	-0.0029	0.0834	0.0835

3 DIAGNÓSTICO

Na prática, modelos de regressão são utilizados para modelar e investigar a relação existente entre variáveis. Espera-se que o modelo represente de forma adequada a relação entre as variáveis estudadas, para que seja possível obter os fatores que influenciam na variável resposta de interesse. No entanto, o modelo ajustado pode não ser o ideal, uma vez que podem existir afastamentos de suas suposições, como: a má especificação da distribuição da variável resposta, a presença de valores discrepantes, função de ligação não adequada, preditor linear com variáveis em escalas incorretas ou até mesmo a ausências de covariáveis relevantes. Por outro lado, também podem existir observações extremas que interferem desproporcionalmente nos valores ajustados ou nos parâmetros estimados.

A primeira etapa da análise do diagnóstico dos modelos é realizada por meio da análise dos resíduos. Os resíduos são utilizados principalmente para validar as suposições de modelos estatísticos e para identificar observações discrepantes. A segunda é a análise da sensibilidade que consiste em estudar o comportamento do modelo ajustado quando ele está sujeito a algum tipo de perturbação, seja sob alguma mudança nas hipóteses ou nos dados.

3.1 ANÁLISE DOS RESÍDUOS

A principal técnica de diagnóstico utilizada em modelagem é a análise de resíduos. Os resíduos quantificam a discrepância existente entre os valores ajustados sob o modelo proposto e os valores observados. Na literatura, existem muitas formas de resíduos, a maioria delas é baseada na diferença entre os valores observados e os ajustados. Uma boa referência nesse aspecto é o trabalho de [Cox e Snell \(1968\)](#), no qual é apresentada uma forma geral para definir resíduos. Ainda, a análise de resíduos é utilizada para detectar a presença de observações atípicas e avaliar as suposições do modelo.

Em modelos lineares mistos há um grande número de trabalhos realizados no desenvolvimento de resíduos. Como exemplo, podemos mencionar os trabalhos de [Hilden-Minton \(1995\)](#), [Verbeke e Lesaffre \(1996\)](#), [Pinheiro e Bates \(2000\)](#) e [Nobre e Singer \(2007\)](#) que ampliaram o desenvolvimento e definiram três tipos de resíduos para acomodar as fontes extras de variabilidade presentes nos modelos lineares mistos. Os resíduos encontrados nesses modelos são os resíduos marginais, os resíduos condicionais e os efeitos aleatórios. [Pinheiro e Bates \(2000, pg. 175\)](#) sugerem o uso de gráficos dos resíduos condicionais contra os valores ajustados e gráfico quantil-quantil para avaliar as suposições de homocedasticidade e normalidade do erro condicional. Este resíduo também pode ser

utilizado para identificar observações discrepantes.

Por outro lado, temos o gráfico de probabilidade normal, o qual é utilizado para verificar a suposição de normalidade dos resíduos. Este gráfico é elaborado com a comparação dos quantis da distribuição amostral dos resíduos e dos quantis teóricos da distribuição normal. Se o modelo se ajustar bem aos dados, espera-se que os pontos do gráfico se aproximem de uma reta diagonal. Quando a distribuição do resíduo postulado não é conhecida, [Atkinson \(1988\)](#) sugere o uso de envelopes simulados no gráfico de probabilidade normal. A ideia por trás desse método é melhorar o gráfico usual, adicionando um envelope simulado que, pode ser usado para decidir se os resíduos observados são consistentes com o modelo ajustado.

Os envelopes simulados são construídos através de simulações de Monte Carlo. Eles são utilizados como critério interpretativo visual no sentido de indicar se o modelo se ajusta bem aos dados. Estes envelopes possuem duas bandas de confiança construídas com os resíduos simulados por Monte Carlo. Se o modelo está bem ajustado, espera-se que os resíduos estejam dentro dos limites das bandas de confiança.

Abaixo, apresentamos um algoritmo para construir envelopes simulados para os resíduos quantílicos no modelo GJS longitudinal. Os passos são os seguintes:

1. Ajuste um modelo de regressão GJS longitudinal aos dados e obtenha as estimativas dos parâmetros, isto é, $\hat{\xi}_{ij}$ e $\hat{\delta}_{ij}$;
2. Gere uma amostra aleatória de tamanho n de $\tilde{\mathbf{y}}_i|(b_{0i}, d_{0i})$, onde $\tilde{\mathbf{y}}_i|(b_{0i}, d_{0i}) \sim \text{GJS}(\hat{\xi}_{ij}, \hat{\delta}_{ij}; g)$;
3. Calcule os coeficientes de regressão, $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\tau}$ da regressão de $\tilde{\mathbf{y}}_i|(b_{0i}, d_{0i})$ nas covariáveis das matrizes de delineamento;
4. Calcule o resíduo quantílico usando $\tilde{\mathbf{y}}_i|(b_{0i}, d_{0i})$, $\hat{\xi}_{ij}$ e $\hat{\delta}_{ij}$; denote os resíduos resultantes por $\tilde{r}_{ij}^q$;
5. Repita os passos anteriores K vezes, obtendo assim K resíduos $\tilde{r}_{ij}^q$; para $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n_i$ e $K = 1, \dots, M$.
6. Para cada $k = 1, \dots, K$ ordene os n resíduos $\tilde{r}_{ij}^q$ em ordem não decrescente, obtendo assim os resíduos ordenados $\tilde{r}_{(ij)k}^q$;
7. Para cada $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n_i$, obtenha os quantis amostrais $(\gamma/2)$ e $(1 - \gamma/2)$ dos resíduos $\tilde{r}_{(ij)k}^q$ ordenados sob k , como $\tilde{r}_{(ij)k}^{q[\gamma/2]}$ e $\tilde{r}_{(ij)k}^{q[1-\gamma/2]}$;
8. Os limites superior e inferior de cada resíduo $\tilde{r}_{ij}^q$ da regressão original são dados por $\tilde{r}_{(ij)k}^{q[\gamma/2]}$ e $\tilde{r}_{(ij)k}^{q[1-\gamma/2]}$, respectivamente.

O valor de γ representa a confiança desejada no intervalo gerado pelos envelopes simulados. Neste trabalho utilizou-se $\gamma = 1\%$, o que fornece um intervalo de 99% para os resíduos.

3.1.1 Resíduo quantílico aleatorizado

Neste trabalho, sugerimos o uso do resíduo quantílico para verificar a adequação do ajuste dos modelos GJS longitudinais aos dados. O resíduo quantílico é dado por

$$r_{ij}^q = \Phi^{-1}(F(y_{ij}; \hat{\xi}_{ij}, \hat{\delta}_{ij})), \quad (3.1)$$

em que $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n_i$, $\Phi^{-1}(\cdot)$ é a função inversa da função distribuição acumulada de uma variável aleatória normal padrão e $F(y_{ij}; \hat{\xi}_{ij}, \hat{\delta}_{ij})$ é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória com distribuição GJS avaliada em $\hat{\xi}_{ij} = d_1^{-1}(\mathbf{x}_{ij}^\top \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{z}_{ij}^\top \hat{\mathbf{b}}_i)$ e $\hat{\delta}_{ij} = d_2^{-1}(\mathbf{s}_{ij}^\top \hat{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{v}_{ij}^\top \hat{\mathbf{d}}_i)$.

Os resíduos quantílicos aleatorizados têm uma distribuição aproximada com função de densidade normal padrão se o modelo estiver correto (para detalhes, ver [Dunn e Smyth \(1996\)](#)).

Aplicações dos resíduos quantílicos em modelos mistos e para dados longitudinais para analisar a qualidade do ajuste do modelo e detectar pontos atípicos foram usados por [Lobos \(2010\)](#), [Manco \(2013\)](#), [Falon \(2018\)](#), dentre outros.

No contexto dos modelos GJS alguns resíduos foram propostos. [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) propuseram os resíduos do tipo deviance e deviance modificado para avaliar a qualidade do ajuste do modelo aos dados e para identificar pontos atípicos. Em seguida, [Lemonte e Moreno-Arenas \(2019\)](#) propuseram os resíduos quantílicos aleatorizados para a classe de modelos GJS e avaliaram numericamente o seu comportamento em relação ao resíduo deviance inicialmente proposto. A partir de simulações de Monte Carlo e aplicações empíricas e reais, constataram que o novo resíduo fornece resultados satisfatórios para avaliar a adequação do ajuste dos modelos. Ainda, [Queiroz e Lemonte \(2021\)](#) estenderam a classe de modelos GJS para dados inflacionados em zeros ou uns e sugeriram o uso dos resíduos quantílicos aleatorizados para avaliar a adequação do ajuste do modelos aos dados. O resultados obtidos por meio de simulações foram bem satisfatórios.

Neste trabalho, utilizaremos os resíduos quantílicos para verificar a adequação do ajuste do modelo aos dados e para identificar observações discrepantes.

3.1.2 Resultados numéricos

Ainda que o resíduo quantílico aleatorizado apresente distribuição assintótica normal se o modelo estiver correto (detalhes em [Dunn e Smyth \(1996\)](#)), é importante

avaliar sua distribuição empírica em amostras de tamanho finito. Posto isso, consideramos o modelo GJS longitudinal com as seguintes componentes sistemáticas:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\xi_{ij}}{1-\xi_{ij}}\right) &= b_{0i} + \beta_0 + \beta_1 t_{ij}, \\ \log(\delta_{ij}) &= \tau_0 + \tau_1 s_{ij}, \\ b_{0i} &\stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2),\end{aligned}$$

em que $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n_i$, a covariável tempo t_{ij} foi gerada igualmente espaçada no intervalo $(0, 1)$, de acordo com o número de momento considerados, a covariável s_{ij} foi obtida de sorteios independentes de variáveis aleatórias com distribuição $\mathcal{U}(0, 1)$ e foram mantidas constantes durante todas as simulações. Todas as simulações e gráficos foram obtidos utilizando o software R (R Core Team, 2021). Utilizou-se 10000 réplicas de Monte Carlo ($M = 10000$) e o tamanho da amostra foi $N = 10$ sujeitos avaliados em $n_i = 5$ momentos iguais, totalizando 50 observações. Ainda, consideramos as funções geradores de densidade normal e t-Student. Além disso, para a distribuição t-Student utilizamos os graus de liberdade, $\nu = 4, 6$ e 8 .

Ainda, seguindo a abordagem utilizada por Lemonte e Moreno-Arenas (2019) e por Espinheira, Santos e Cribari-Neto (2017), medimos a intensidade da dispersão não constante avaliada por meio de $\lambda = \delta_{\max}/\delta_{\min}$, em que $\delta_{\max}$ e $\delta_{\min}$ são os valores máximo e mínimo para o parâmetro de precisão δ . Apresentamos os resultados para $\lambda = 20$ ($\tau_0 = -0.5$ e $\tau_1 = 3.0$) e $\lambda = 90$ ($\tau_0 = -0.5$ e $\tau_1 = 4.5$). Adicionalmente, também consideramos os cenários em que os valores da variável resposta estão próximos de zero, próximo de um e dispersos no intervalo $(0, 1)$. Dessa forma, existem três cenários diferentes, a saber: (i) $\beta_0 = -1.8$, $\beta_1 = -4.0$ e $\sigma^2 = 0.01$ que resulta em valores medianos de respostas próximas a zero, $\xi \in (0.02, 0.20)$; (ii) $\beta_0 = 0.83$, $\beta_1 = -1.35$ e $\sigma^2 = 0.01$ que resulta em valores medianos de respostas dispersos no intervalo $(0, 1)$, $\xi \in (0.29, 0.77)$; e (iii) $\beta_0 = 1.77$, $\beta_1 = 1.33$ e $\sigma^2 = 0.01$ que resulta em valores medianos de respostas próximos a um, $\xi \in (0.80, 0.96)$. Por fim, consideramos os geradores de densidade da normal e da t-Student.

As Tabelas 27 a 47 da Seção C.1 do Apêndice C apresentam a média, o desvio padrão (sd), a assimetria e a curtose do resíduo r_{ij}^q por observação para os modelos GJS longitudinais com geradores de densidade normal e t-Student em todos os cenários descritos anteriormente. As medidas descritivas foram calculadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\text{Média}_{ij} = \hat{r}_{ij}^q &= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M r_{ij,k}^q, \\
\text{sd}_{ij} &= \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (r_{ij,k}^q - \hat{r}_{ij}^q)^2}, \\
\text{Assimetria}_{ij} &= \frac{\tilde{m}_{ij}^{(3)}}{\text{sd}_{ij}^3}, \\
\text{Curtose}_{ij} &= \frac{\tilde{m}_{ij}^{(4)}}{\text{sd}_{ij}^4},
\end{aligned}$$

em que $\tilde{m}_{ij}^{(k)} = (1/M) \sum_{l=1}^M (r_{ij,l}^q)^k$ é o k -ésimo momento amostral, $r_{ij,l}^q$ é o l -ésimo resíduo quantílico correspondente a ij -ésima observação ($j = 1, \dots, n_i$ e $l = 1, \dots, M$) do i -ésimo indivíduo ($i = 1, \dots, N$) e M é o número de réplicas de Monte Carlo, isto é, $M = 10000$.

Depreende-se das Tabelas 27 a 47 presentes na Seção C.1 do Apêndice C que, em geral, o resíduo quantílico proposto para a classe de modelos GJS longitudinais apresentam média próxima a zero, desvio padrão em torno de 1 (um). Além disso, o resíduo r_{ij}^q é aproximadamente simétrico (assimetria em torno de zero) e apresenta curtose próxima a três. Os resultados considerando os geradores de densidade normal e *t-Student* com diferentes graus de liberdade são todos similares.

Além disso, as Figuras 16 a 19 do Apêndice C.2 apresentam gráficos quantil-quantil (QQ-plots) para as estatísticas de ordem de r_{ij}^q . Como podemos observar, a distribuição empírica do resíduo r_{ij}^q proposto aparenta ser muito bem aproximada pela distribuição normal padrão para os modelos considerados.

A seguir, utilizou-se a abordagem sugerida por Feng, Sadeghpour e Li (2017) e aplicada por Lemonte e Moreno-Arenas (2019) na classe de modelos GJS. Assim, os próximos experimentos de simulação de Monte Carlo consistem em avaliar o desempenho do resíduo r_{ij}^q na detecção da não linearidade no efeito mediano da covariável nos modelos GJS longitudinais com geradores de densidade normal e *t-Student*. Para tanto, a covariável x_{ij} foi obtida de realizações independentes de variáveis aleatórias com distribuição $\mathcal{U}(-1.5, 1.5)$ de tamanho $n = 1000$ ($N = 100$ e $n_i = 10$), a covariável s_{ij} foi obtida de realizações independentes de uma distribuição $\mathcal{U}(0, 1)$ e os tempos t_{ij} foram gerados igualmente espaçados no intervalo $(0, 1)$. A variável resposta foi simulada com a estrutura hierárquica abaixo

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{\xi_{ij}}{1 - \xi_{ij}}\right) &= b_{0i} + \beta_0 + \beta_1 t_{ij} + \beta_2 x_{ij}^2, \\
\log(\delta_{ij}) &= \tau_0 + \tau_1 s_{ij}, \\
b_{0i} &\stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2).
\end{aligned}$$

Da estrutura anterior, consideramos ajustar um modelo errado, ou seja, ao invés de utilizar o termo x_{ij}^2 usamos x_{ij} . Para ambas as situações consideramos $\beta_0 = 1.5$, $\beta_1 = -3.0$, $\beta_2 = -1.5$, $\sigma^2 = 0.01$, $\tau_0 = -0.5$ e $\tau_1 = 2.3$.

Os resultados das simulações encontram-se nas Figuras 20 a 23 da Seção C.3 do Apêndice C. Nessas simulações são apresentados os gráficos de resíduos contra a covariável x e os respectivos QQ-plots (com envelopes simulados) para os modelos verdadeiro (Figuras (b) e (d)) e errado (Figuras (a) e (c)), considerando os geradores de densidade normal e *t-Student* ($\nu = 4, 6$ e 8). Observa-se que para o modelo verdadeiro, os resíduos estão espalhados aleatoriamente em torno de zero, comprovando que o modelo verdadeiro se ajusta bem aos dados. Além disso, o resíduo indica claramente que o modelo errado não se ajusta bem aos dados e o padrão da curva sugere a necessidade de se incluir a covariável x com um termo quadrático no preditor linear mediano. Ainda, podemos observar que para os modelos errados, os resíduos quantílicos não seguem normalidade, pois os resíduos se desviam de uma reta diagonal e vários pontos estão fora dos limites do envelope simulado. Já para os modelos corretos, os resíduos quantílicos encontram-se dentro do envelope simulado, além de estarem dispostos em uma reta diagonal, o que sugere a distribuição normal para o caso da especificação correta dos modelos.

3.1.3 Aplicação a dados simulados

O objetivo desta Seção consiste em verificar a eficácia do resíduo quantílico r_{ij}^q na identificação de dispersão não constante no modelo de regressão GJS longitudinal. Para tanto, geramos um modelo de regressão GJS longitudinal considerando os geradores de densidade normal e *t-Student* e dispersão não constante, no entanto, estimamos um modelo GJS longitudinal com dispersão constante. Consideramos a seguinte estrutura hierárquica:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\xi_{ij}}{1 - \xi_{ij}}\right) &= b_{0i} + \beta_0 + \beta_1 t_{ij} + \beta_2 x_{ij}, \\ \log(\delta_{ij}) &= \tau_0 + \tau_1 s_{ij}, \\ b_{0i} &\stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2),\end{aligned}$$

em que $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, n_i$. Consideramos uma amostra de $N = 50$ indivíduos avaliados em $n_i = 5$ momentos equidistantes, totalizando uma amostra de $n = 250$ observações. a covariável x_{ij} foi obtida de sorteios independentes de uma variável aleatória com distribuição $\mathcal{U}(0, 1)$, os momentos t_{ij} foram gerados igualmente espaçados no intervalo $(0, 1)$, enquanto que s_{ij} é uma variável indicadora que é igual a 0 para os 25 primeiros indivíduos (125 primeiras observações) e igual a 1 para os demais. Desse modo, a dispersão é não constante para o conjunto de dados. Utilizamos $\beta_0 = 0.7$, $\beta_1 = -0.9$, $\beta_2 = -0.5$, $\sigma^2 = 0.01$, $\tau_0 = 5.0$ e $\tau_1 = -3.4$. Dessa forma, geramos valores medianos em torno de $1/2$ e dispersão não constante $\lambda = 30$.

As Figuras 24 a 27 na Seção C.4 do Apêndice C apresentam os gráficos de resíduos e o respectivo QQ-plot (com envelopes simulados), considerando os geradores de densidade norma e *t-Student* ($\nu = 4, 6$ e 8). Analisando os gráficos, nota-se que a dispersão não é constante para todos os indivíduos. Além disso, percebe-se que a partir do 25º indivíduo há um aumento na dispersão dentro dos indivíduos, o que evidencia o comportamento do conjunto de dados simulados. Ainda, percebe-se que algumas observações encontram-se fora dos limites estabelecidos, provavelmente devido à suposição incorreta de dispersão constante. Adicionalmente, percebe-se alguns resíduos fora dos envelopes simulados nos gráficos QQ-plot, o que pode ser tomado como evidência da falta de ajuste, ou seja, dispersão não constante.

4 APLICAÇÃO: Proporção de gás restante no olho

Neste capítulo, ilustramos a metodologia desenvolvida nos capítulos anteriores aplicando-a a um conjunto de dados reais. O conjunto de dados é referente a estudo oftalmológico com o objetivo de verificar o declínio de um gás injetado por via intraocular em reparação cirúrgica de retina. Esses dados foram analisados previamente por [Song e Tan \(2000\)](#) e [Song, Qiu e Tan \(2004\)](#) que propuseram um modelo *simplex* utilizando EEG; no primeiro foi considerada dispersão constante e no segundo dispersão variável. Em seguida, [Qiu, Song e Tan \(2008\)](#) propuseram um modelo linear generalizado de efeitos mistos baseado na distribuição *simplex* de [Barndorff-Nielsen e Jørgensen \(1991\)](#), e [Zhang et al. \(2009\)](#) propuseram um modelo de transformação robusto utilizando a distribuição t-multivariada para analisar esse conjunto de dados.

Com a finalidade de motivar o uso do modelo proposto, consideramos o estudo prospectivo com dados oftalmológicos relatado em [Meyers et al. \(1992\)](#). Nesse estudo foi registrado o declínio do gás (C_3F_8) após a injeção intraocular inicial em cirurgias complexas de retina. A variável resposta observada foi a proporção do volume de gás restante no olho em relação ao volume injetado no momento da cirurgia. O gás possui três níveis de concentração diferentes, 15%, 20% e 25%, e foi injetado no olho de 31 pacientes antes da cirurgia. Eles foram acompanhados de três a quinze (média de cinco) vezes durante um período de três meses e o volume de gás remanescente no olho, nos tempos de acompanhamento, foi registrado como uma proporção do volume inicial do gás. O conjunto de dados encontra-se disponível na biblioteca `simplexreg` do *software* R. Para maiores detalhes consulte [Zhang, Qiu e Shi \(2016\)](#). A variável resposta (Y) é a proporção do volume de gás remanescente no olho (`Gas`), e as covariáveis foram o logaritmo do tempo de seguimento (dias) (`logT`), o nível de concentração do gás (`Level`) e o logaritmo do tempo de seguimento ao quadrado (`logT2`). O objetivo principal do estudo era entender a velocidade com que o gás é absorvido pelos pacientes ao longo do tempo, e se a taxa de absorção depende do nível de concentração do gás.

4.1 ANÁLISE DESCRITIVA DOS DADOS

Inicialmente, uma análise descritiva do conjunto de dados foi realizada. A Tabela 14 apresenta algumas medidas resumo para a variável resposta, dias de acompanhamento e para o número de observações por paciente (n_i). Com base na tabela, percebe-se que a variável resposta varia de 0,001 a 0,999, que sua média é 0,6398 e que sua mediana é 0,75, indicando que a distribuição da resposta é assimétrica. Com respeito a variável número de observações por paciente, em média, foi observada 5,8 medidas por paciente, sendo que 75% deles tiveram até 6,5 medidas.

Tabela 14 – Medias descritivas

Medida	resposta	n_i
Mínimo	0.0010	3
Q_1	0.4000	4
Mediana	0.7500	5
Média	0.6398	5.8
Q_3	0.9000	6.5
Máximo	0.9990	15
Desvio padrão	0.3110	2.7

A Figura 6 exibe o histograma de frequências e o gráfico de caixa (*boxplot*) para a variável resposta. Observa-se que a distribuição da resposta é assimétrica à esquerda, aparentemente bimodal e a maior concentração está entre 0,8 e 1.

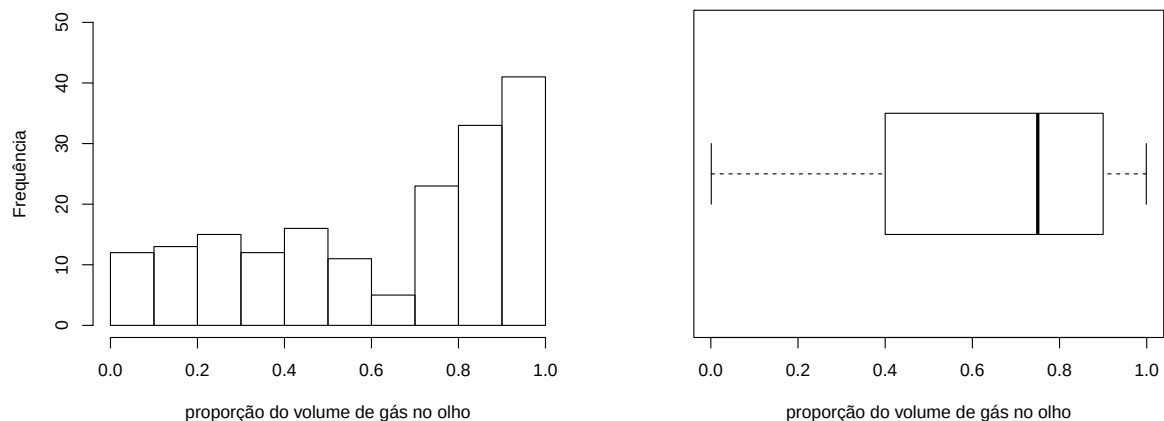


Figura 6 – Histograma e *boxplot* para a proporção do volume de gás remanescente no olho.

A Figura 7 mostra a distribuição da proporção do volume de gás remanescente no olho segundo os níveis de concentração, além de apresentar a média dessa proporção. Nota-se que a distribuição da proporção de gás remanescente nas concentrações de 20% e 25% são bem parecidas, com médias e medianas bem próximas, apresentam assimetria à

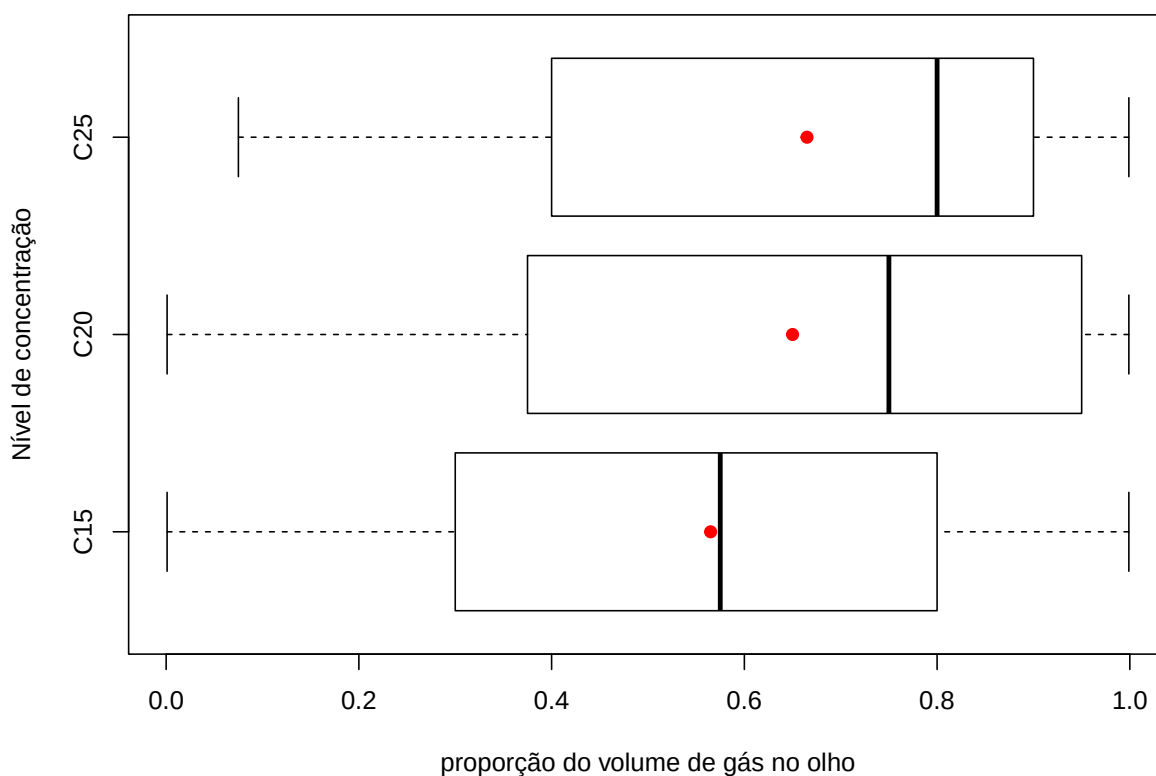


Figura 7 – *boxplot* da proporção do volume de gás remanescente no olho segundo o nível de concentração do gás.

esquerda e a concentração de 20% aparenta possuir variabilidade um pouco maior que a de 25%. Por outro lado, a proporção da concentração de 15% aparenta ter uma variabilidade menor e se distribuir de forma mais simétrica que as outras concentrações. Observa-se também que a média e a mediana da proporção da concentração de 15% são bem próximas.

A Figura 8 apresenta as trajetórias individuais longitudinais da variável resposta de acordo com os níveis de concentração do gás. Nota-se que, aparentemente, a variável resposta declinou de forma mais lenta e homogênea entre os pacientes que receberam gás na concentração de 25% e que, dentre os que receberam esta concentração de gás, há um possível paciente periférico. Os perfis de resposta para os indivíduos alocados para a concentração de 20% aparentam ser mais heterogêneos. Os indivíduos submetidos a concentração do gás de 15% aparentam possuir perfis de resposta declinando mais rápido que as demais concentrações, além de possuir um possível sujeito com perfil de resposta discrepante. Adicionalmente, observa-se que, cada indivíduo possui uma proporção de volume de gás distinta na primeira avaliação após a inserção do gás.

A Figura 9 apresenta o diagrama de dispersão entre a variável resposta e a variável

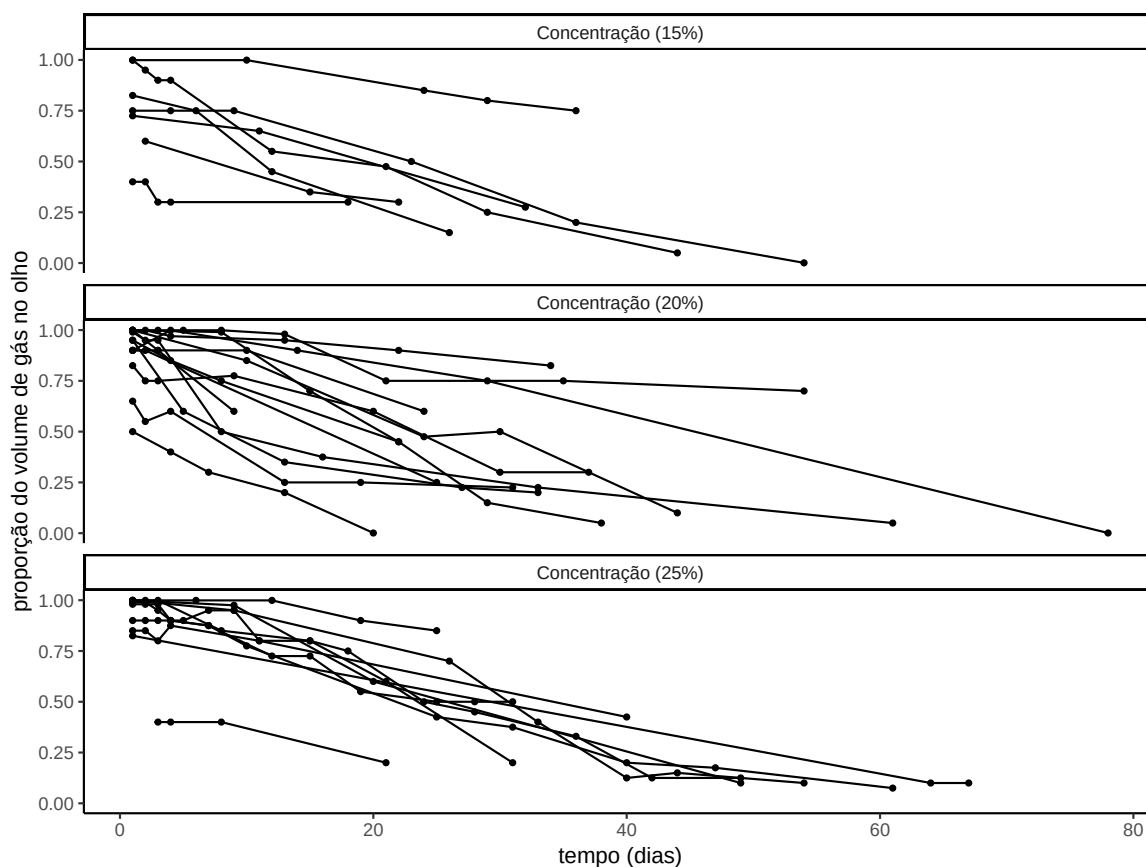


Figura 8 – Proporções longitudinais do volume de gás remanescente no olho segundo o nível de concentração do gás.

LogT. Nota-se que a variável resposta, como esperado, diminui com o tempo de seguimento. Esse comportamento é natural, pois o organismo com o passar do tempo absorve o gás. Vale destacar que um dos objetivos desse estudo é verificar se a velocidade da absorção depende do nível do gás. Outro detalhe interessante a ser notado é que, aparentemente, a dispersão da proporção do volume de gás restante no olho diminui com o tempo de seguimento. O indício dessa diminuição se dá pelo afunilamento dos pontos no gráfico, conforme observado nas retas.

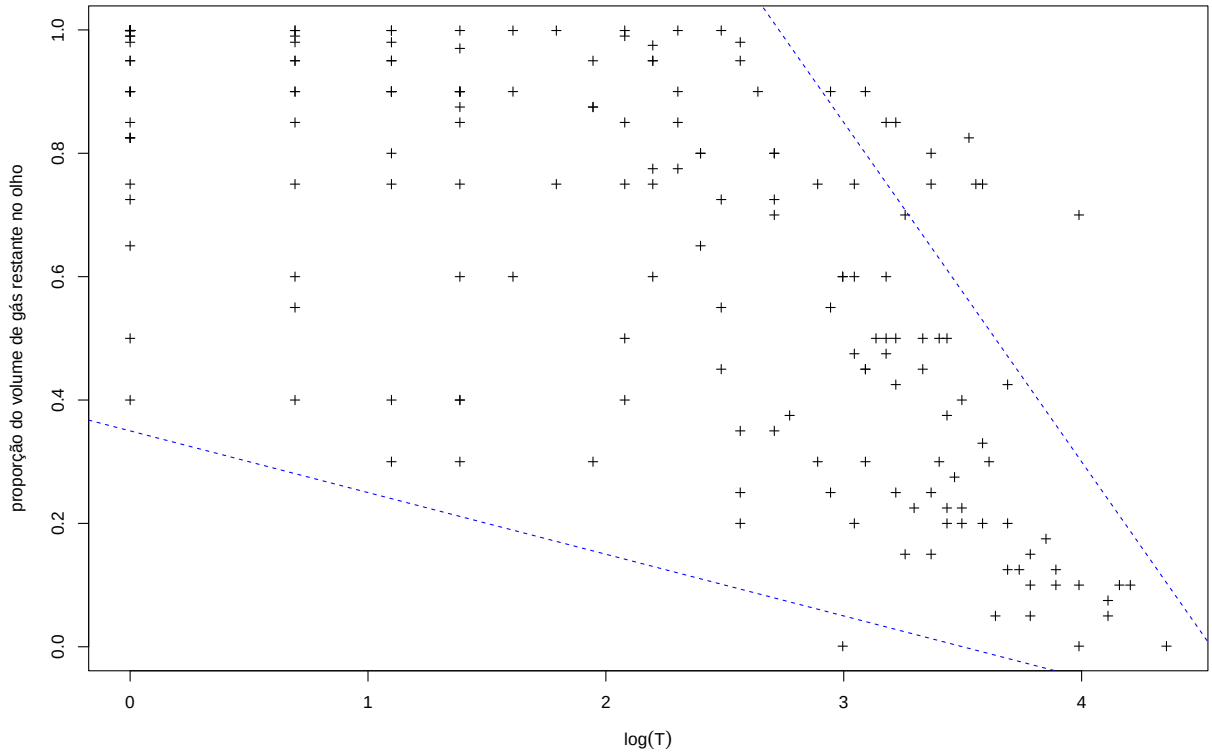


Figura 9 – Diagrama de dispersão entre o log do seguimento e a proporção do volume e gás remanescente no olho.

4.2 MODELOS DE REGRESSÃO GJS LONGITUDINAIS

Aqui, ajustamos o modelo de regressão GJS com interceptos aleatórios aos dados do estudo oftalmológico, considerando os geradores de densidade normal, *t-Student* e exponencial potência. Seja y_{ij} a porcentagem do volume de gás restante no olho para o i -ésimo indivíduo no dia de seguimento t_{ij} , com $i = 1, \dots, 31$ e $j = 1, \dots, n_i$. Consideramos o modelo de regressão GJS com interceptos aleatórios com a seguinte estrutura hierárquica:

$$\begin{aligned} Y_{ij} | (b_{0i}, d_{0i}) &\stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{GJS}(\xi_{ij}, \delta_{ij}; g), \\ b_{0i} &\stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \\ d_{0i} &\stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \varsigma^2), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\xi_{ij}}{1-\xi_{ij}}\right) &= (\beta_0 + b_{0i}) + \beta_1 \log(t_{ij}) + \beta_2 GAS20_i + \beta_3 GAS25_i \\ &\quad + \beta_4 GAS20_i \times \log(t_{ij}) + \beta_5 GAS25_i \times \log(t_{ij}), \\ \log(\delta_{ij}) &= \tau_0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\xi_{ij}}{1-\xi_{ij}}\right) &= (\beta_0 + b_{0i}) + \beta_1 \log(t_{ij}) + \beta_2 GAS20_i + \beta_3 GAS25_i \\ &\quad + \beta_4 GAS20_i \times \log(t_{ij}) + \beta_5 GAS25_i \times \log(t_{ij}), \\ \log(\delta_{ij}) &= \tau_0 + \tau_1 \log(t_{ij}),\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\xi_{ij}}{1-\xi_{ij}}\right) &= (\beta_0 + b_{0i}) + \beta_1 \log(t_{ij}) + \beta_2 GAS20_i + \beta_3 GAS25_i \\ &\quad + \beta_4 GAS20_i \times \log(t_{ij}) + \beta_5 GAS25_i \times \log(t_{ij}), \\ \log(\delta_{ij}) &= d_{0i} + \tau_0,\end{aligned}\tag{4.3}$$

em que $b_{0i} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ e $d_{0i} \sim \mathcal{N}(0, \varsigma^2)$.

Ainda, para cada gerador de densidade, utilizamos intercepto aleatório no preditor da mediana e utilizamos precisão constante (4.1), precisão sem intercepto aleatório com efeito constante e variando com o logaritmo do tempo de seguimento (4.2) e, por fim, precisão com intercepto aleatório mais um efeito constante (4.3).

As estimativas de MV dos parâmetros do modelo foram obtidas numericamente utilizando o algoritmo de otimização não-linear desenvolvido por Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno (BFGS) através da função `optim` do software *R*. Seguindo Qiu, Song e Tan (2008) e Zhang et al. (2009), utilizamos 50 pontos na quadratura de Gauss-Hermite para aproximar a integral da função de verossimilhança marginal. A função densidade de probabilidade *t-Student* apresenta os graus de liberdade, $\nu > 0$, e a distribuição exponencial potência apresenta a constante $-1 < k \leq 1$ como quantidades desconhecidas. Utilizamos a verossimilhança perfilada com o objetivo de encontrar o valor mais adequado para ν e k de acordo com as variáveis utilizadas na modelagem.

A Tabela 15 apresenta as estimativas de MV dos parâmetros dos Modelos 1, 2 e 3 considerando o gerador de densidade normal, bem como os respectivos erros padrão assintóticos (EP). O valor- p apresentados para os vetores de efeitos fixos β e τ são relativos a um teste de Wald cuja hipótese nula é $\mathcal{H}_0 : \psi = 0$ contra a hipótese alternativa $\mathcal{H}_1 : \psi \neq 0$, em que ψ é o parâmetro de interesse. Já, o valor- p para os componentes de variância σ^2 e ς^2 foram calculados utilizando o TRV apresentado na Seção 2.4.5.

Com base nas Tabelas 15 e 16 percebe-se que o TRV para necessidade de inclusão de efeitos aleatórios nos preditores da mediana ou da precisão são todos estatisticamente

significativas ao nível de significância de 5% para todos os modelos considerados. Esse resultado corrobora com o indício apontado na Figura 8, de que cada indivíduo possui uma proporção de volume de gás no olho distinta na primeira avaliação após a inserção do gás no olho.

De acordo com a Tabela 15, nota-se que, para o Modelo 1, apenas o efeito de LogT , β_1 , foi estatisticamente significativo ao nível de significância de $\alpha = 5\%$ para explicar a mediana condicional da variável resposta de interesse. Analisando o Modelo 2, observa-se que o efeito de LogT , β_1 , foi estatisticamente significativo ao nível de significância de 5% e que a precisão não varia com o LogT , pois τ_1 não foi estatisticamente significativo ao nível de significância de 5%. Adicionalmente, o Modelo 3 apresentou além de LogT , o efeito principal da variável GAS25 como estatisticamente significativo ao nível de significância de 5%.

Tabela 15 – Estimativas dos ajustes dos modelos GJS longitudinal com gerador de densidade normal.

Modelo	Parâmetros	Estimativa	EP	Valor- p
1	β_0	3.0663	0.7376	<0.0001
	β_1	-1.2732	0.1933	<0.0001
	β_2	1.2396	0.8944	0.1658
	β_3	1.7428	0.9456	0.0653
	β_4	-0.2656	0.2321	0.2524
	β_5	-0.2501	0.2347	0.2866
	τ_0	-0.3495	0.0577	<0.0001
	σ^2	2.2990	0.6826	<0.0001
2	β_0	3.1649	0.7566	<0.0001
	β_1	-1.3102	0.2041	<0.0001
	β_2	1.2147	0.9038	0.1789
	β_3	1.6993	0.9549	0.0752
	β_4	-0.2637	0.2380	0.2679
	β_5	-0.2359	0.2413	0.3281
	τ_0	-0.4415	0.1270	0.0005
	τ_1	0.0429	0.0519	0.4090
3	σ^2	2.1729	0.6659	<0.0001
	β_0	2.2495	0.9725	0.0207
	β_1	-0.9160	0.3109	0.0032
	β_2	1.6911	1.0842	0.1188
	β_3	2.4408	1.0150	0.0162
	β_4	-0.4397	0.3214	0.1713
	β_5	-0.5855	0.3256	0.0722
	τ_0	-0.2296	0.1108	0.0383
	σ^2	2.0145	0.6583	<0.0001
	ς^2	0.2218	0.1108	<0.0001

A Tabela 16 apresenta as estimativas de MV dos parâmetros do modelo considerando o gerador de densidade t -Student ($\nu = 2.877, 2.302$ e 5.004 para os modelos 1, 2 e 3,

respectivamente). Nota-se que, as covariáveis LogT , GAS25 e a interação $\text{GAS25} \times \text{LogT}$ foram estatisticamente significativas para explicar a mediana condicional da variável resposta de interesse em todos os três modelos considerados. Ainda, no Modelo 2, a covariável LogT foi estatisticamente significativa para explicar a precisão condicional da variável resposta, ou seja, a precisão da variável resposta variou com o LogT ao nível de significância de 5%.

Tabela 16 – Estimativas dos ajustes dos modelos GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 2.877, 2.302$ e 5.004 para os modelos 1, 2 e 3, respectivamente).

Modelo	Parâmetros	Estimativa	EP	Valor- p
1	β_0	2.4060	0.7166	0.0008
	β_1	-0.9715	0.2099	<0.0001
	β_2	1.5230	0.8690	0.0797
	β_3	2.4292	0.9107	0.0076
	β_4	-0.3657	0.2472	0.1389
	β_5	-0.5885	0.2473	0.0173
	τ_0	0.0684	0.1336	0.6086
	σ^2	1.7841	0.5371	<0.0001
2	β_0	2.9526	0.7621	0.0001
	β_1	-1.1427	0.2241	<0.0001
	β_2	1.1565	0.9063	0.2020
	β_3	2.2463	0.9173	0.0143
	β_4	-0.2370	0.2601	0.3623
	β_5	-0.5572	0.2562	0.0297
	τ_0	-0.4998	0.1654	0.0025
	τ_1	0.3535	0.0803	<0.0001
3	σ^2	1.3306	0.3929	<0.0001
	β_0	2.0729	0.7377	0.0050
	β_1	-0.8318	0.2552	0.0011
	β_2	1.6978	0.9013	0.0596
	β_3	2.8384	0.7690	0.0002
	β_4	-0.4515	0.2748	0.1004
	β_5	-0.6577	0.2637	0.0126
	τ_0	-0.0343	0.1153	0.7661
	σ^2	1.7906	0.5744	<0.0001
	ς^2	0.2046	0.1166	<0.0001

Com a finalidade de verificar possíveis afastamentos das suposições feitas para os modelos, realizamos uma análise de diagnóstico para os modelos considerados nas Tabelas 15 e 16. Utilizou-se as técnicas de diagnóstico desenvolvidas no Capítulo 3. As Figuras 10, 11 e 12 apresentam os gráficos dos resíduos quantílicos condicionais e o gráfico de probabilidade normal com envelopes simulados para os modelos com gerador de densidade normal. Verifica-se que o resíduo quantílico condicional para os modelos com gerador de densidade normal apresentam algumas observações com resíduo (em valor absoluto) relativamente alto, isto é, maior que o limiar de 2.5 (observações: #87, #144, #146 e

#155) e algumas observações estão fora das bandas de confiança, indicando uma possível falta de ajuste (ver Figuras 10, 11). Para o Modelo 3, as observações anteriores também são identificadas como possíveis pontos atípicos mas, em contrapartida, no gráfico de probabilidade normal todas elas encontram-se dentro dos envelopes simulados, sugerindo um possível ajuste satisfatório (12).

As Figuras 13 e 15 e 14 apresentam os gráficos dos resíduos quantílicos condicionais e o gráfico de probabilidade normal com envelopes simulados para os modelos com gerador de densidade *t-Student*. Observa-se que o resíduo quantílico condicional para os modelos com gerador de densidade *t-Student* apresentam algumas observações com resíduo (em valor absoluto) superiores ao limiar de 2.5 (observações: #144, #149 e #155). O gráfico de probabilidade normal para o Modelo 3 apresenta alguns resíduos foram dos envelopes simulados, sugerindo uma possível falta de ajuste aos dados. Por outro lado, os Modelos 1 e 2 apresentam ajustes satisfatórios, pois as bandas de confiança acomodam todas as observações. Além disso, a distribuição dos resíduos para estes modelos parece ser simétrica e os resíduos se distribuem de forma aleatória em torno do zero, isto é, não apresentam tendência sistemática.

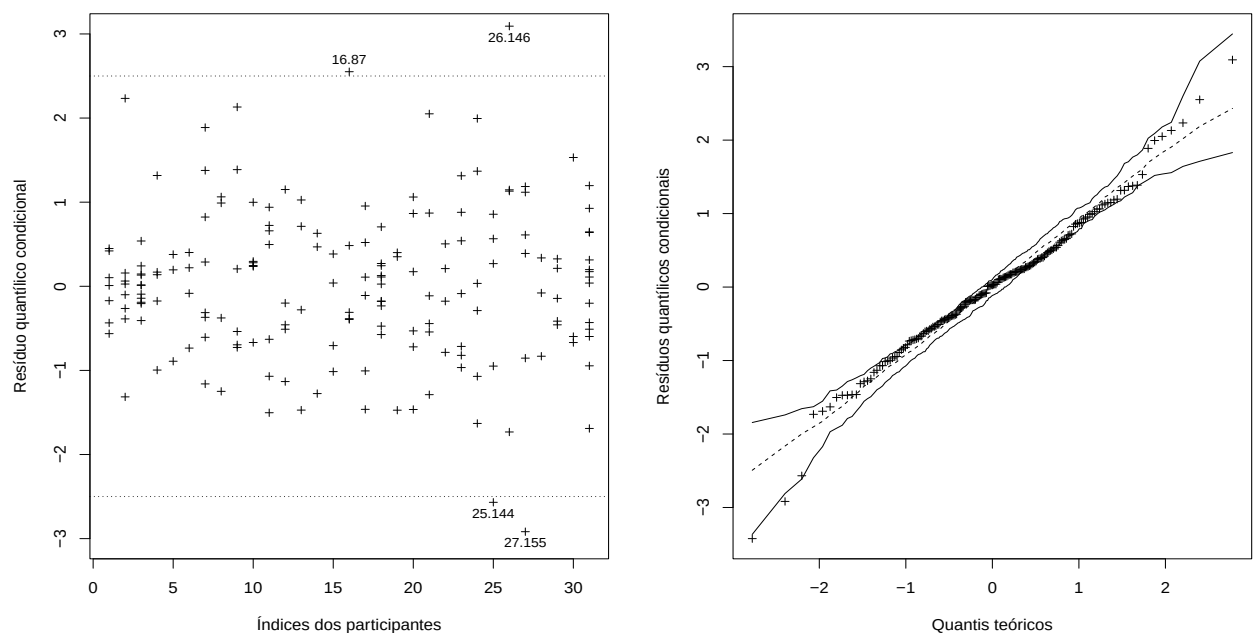


Figura 10 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade normal (Modelo 1).

Para comparar os modelos ajustados, consideramos os critérios de seleção AIC, BIC, CAIC e HQIC. Os valores dos critérios para os 6 (seis) modelos ajustados, encontram-se nas Tabelas 17 e 18. De acordo com os critérios, o modelo que melhor se ajusta aos

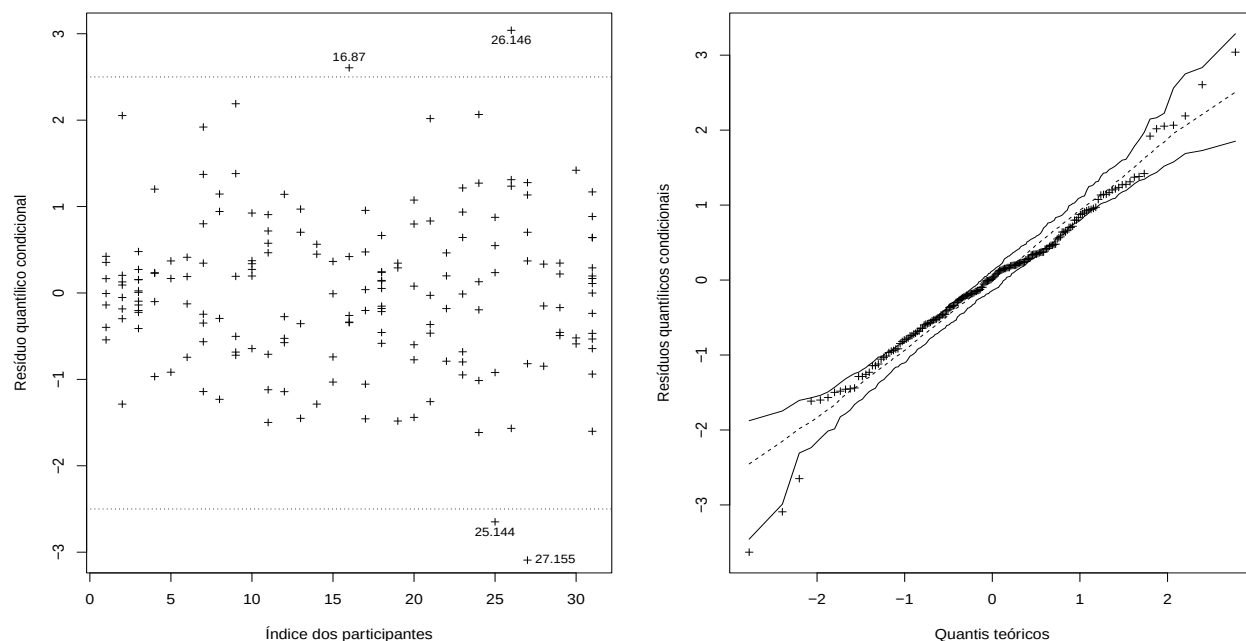


Figura 11 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade normal (Modelo 2).

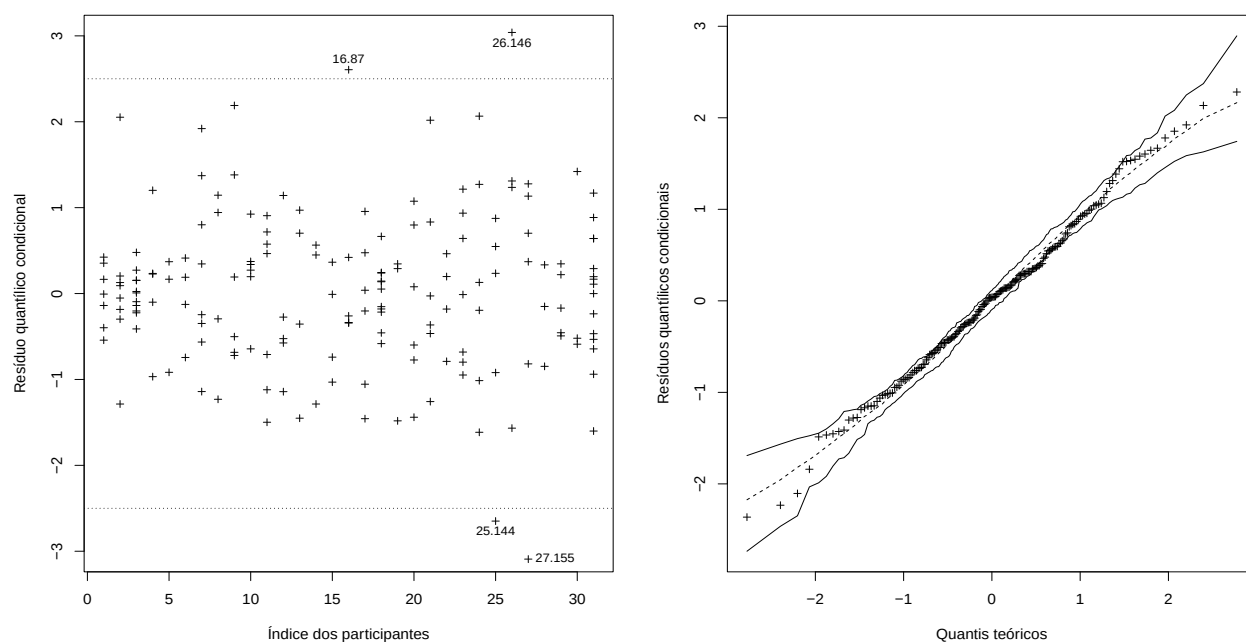


Figura 12 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade normal (Modelo 3).

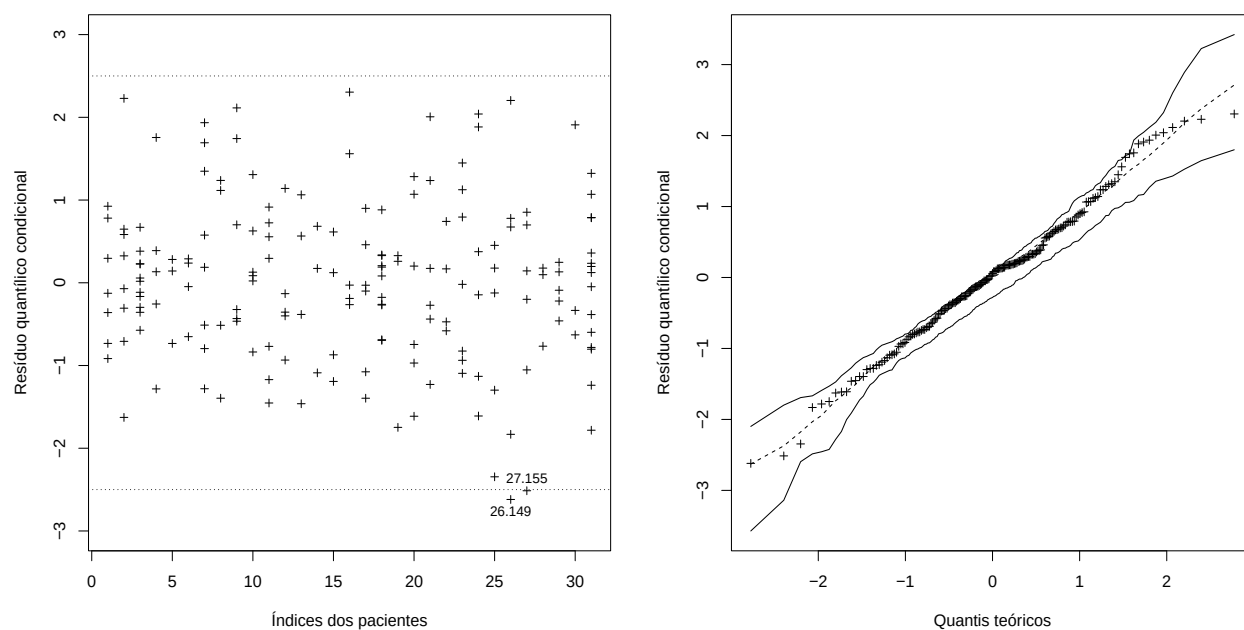


Figura 13 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade *t-Student* (Modelo 1).

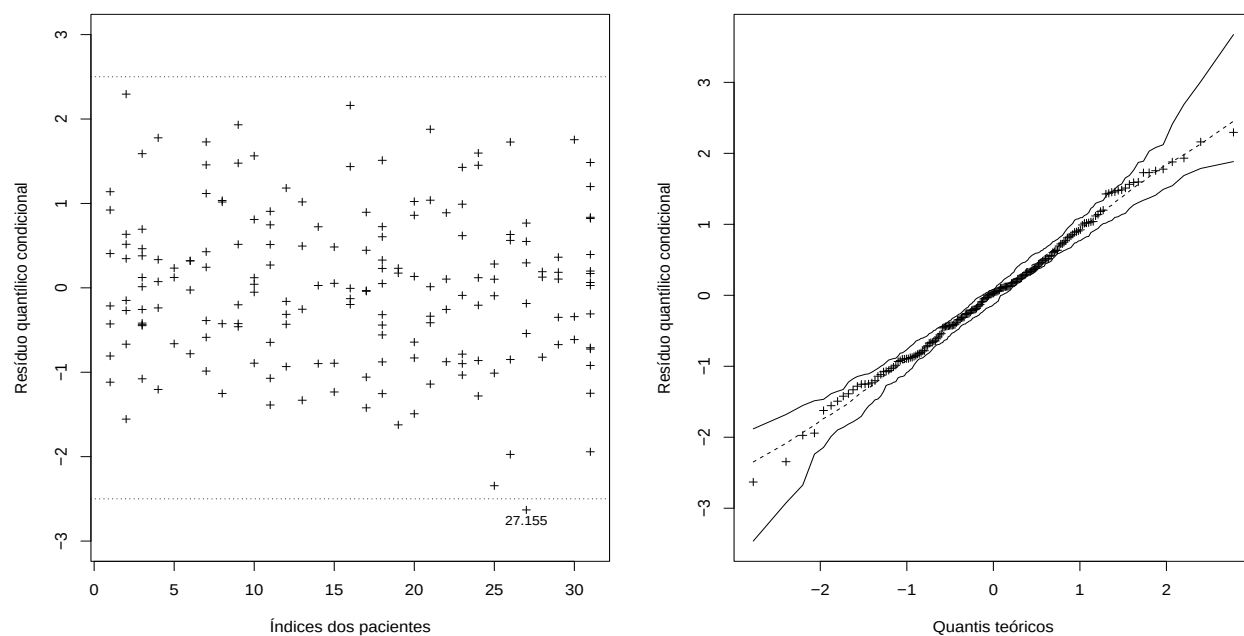


Figura 14 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade *t-Student* (Modelo 3).

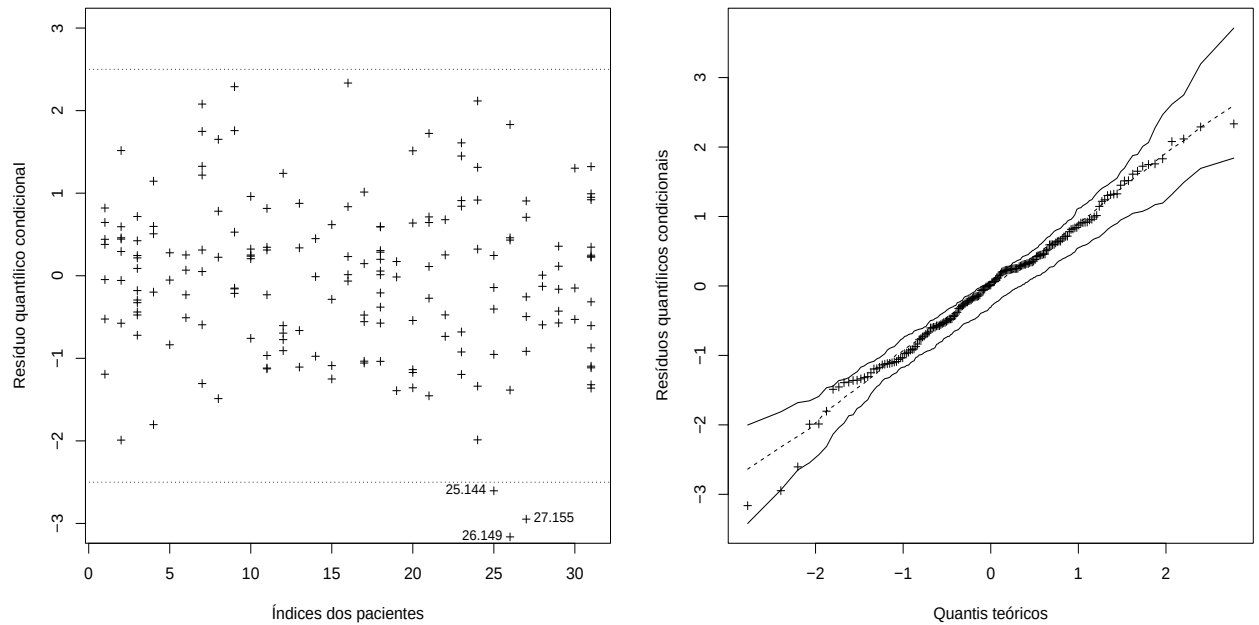


Figura 15 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade *t-Student* (Modelo 2).

dados é o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 2.302$) com precisão variável (Modelo 2). Além disso, a análise dos resíduos evidenciou que o Modelo 2 proporciona o melhor ajuste aos dados. É importante notar que, o grau de liberdade da distribuição *t-Student* é pequeno, indicando que a distribuição dos dados possui caudas pesadas.

Tabela 17 – Critérios AIC, BIC, CAIC e HQIC para os modelos com geradores de densidade normal.

Critério	Gerador de densidade		
	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
AIC	717.398	718.721	698.825
BIC	715.732	716.847	696.950
CAIC	750.986	756.508	736.611
HQIC	714.585	715.557	695.660

Aqui, realizamos a análise confirmatória do modelo que forneceu o melhor ajuste para modelar a proporção do volume de gás restante no olho. A Tabela 19 apresenta as estimativas dos parâmetros do modelo, o erro padrão assintótico (EP), o Valor- p , a mudança relativa na estimativa (Est. rel.)¹ e a mudança relativa na estimativa do erro

¹ Seja ψ a estimativa do parâmetro ou erro padrão com todas as observações e ψ_i a estimativa do parâmetro ou o erro padrão com a exclusão da i -ésima observação. A mudança relativa na estimativa ou no erro padrão é definida por $(\psi_i - \psi)/\psi$.

Tabela 18 – Critérios AIC, BIC, CAIC e HQIC para os modelos com geradores de densidade *t-Student*.

Critério	Gerador de densidade		
	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
AIC	702.371	685.373	696.503
BIC	700.705	683.499	694.629
CAIC	735.958	723.159	734.289
HQIC	699.557	682.208	693.338

padrão (EP rel.) após a exclusão individual e conjunta dos casos detectados como possíveis influentes. Observa-se que a exclusão individual e conjunta das observações #155, #149 e #144 causam pequenas variações nas estimativas dos parâmetros do modelo, sendo a maior variação causada pela exclusão conjunta de todas as observações. Por exemplo, essa exclusão causa uma variação relativa em τ_1 de 21.2% e uma variação relativa em β_4 de -15.28%. Nota-se que a inferência dos parâmetros estimados não sofre mudanças. Dessa forma, pode-se concluir que o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* com precisão variável induziu certa robustez na estimação dos parâmetros via MV, ou seja, a exclusão de potenciais observações atípicas não afeta a inferência estatística.

Adicionalmente, na Tabela 20, realizamos uma análise confirmatória por meio da exclusão de observações para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade normal (Modelo 2). Por meio da análise de resíduos foram identificadas as observações #155, #146, #144 e #87 como possíveis pontos discrepantes. Observa-se que a exclusão individual das observações causam variações substanciais nas estimativas de MV do modelo. As maiores variações (%) ocorreram nos efeitos de τ_1 , de β_5 e de β_4 com a remoção do ponto #155. Essas variações foram um aumento de 135.4%, de 77.58% e de 77.0%, respectivamente. Ainda, nota-se que as maiores variações ocorreram nos efeitos da precisão e que a remoção do ponto #155 foi o que causou as maiores variações. Também, ocorreram variações nos erros padrão estimados mas, essas variações foram pequenas. Além disso, a remoção do ponto #155 ou do #87 mudam a inferência estatística. A retirada de qualquer uma dessas observações impacta na significância de β_3 que passa a ser estatisticamente significativo ao nível de significância de 5%. Logo, o modelo de regressão GJS longitudinal com gerador de densidade normal não é robusto como ocorre com o modelo com gerador de densidade *t-Student*.

Por fim, o modelo que forneceu o melhor ajuste aos dados foi o modelo de regressão GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* com precisão variável e estrutura dada na equação (4.2). Quanto ao objetivo da análise que era entender a velocidade com que o gás é absorvido pelos pacientes ao longo do seguimento, e se a taxa de absorção depende do nível de concentração do gás. A partir do modelo selecionado, podemos concluir que a proporção mediana do volume do gás no olho dos indivíduos alocados para a concentração de 25% diminui mais lentamente do que a dos indivíduos que foram alocados para a

Tabela 19 – Estimativas dos parâmetros após a exclusão individual e conjunta das observações #155, #149 e #144 considerando o modelo de regressão GJS longitudinal com precisão variável e gerador de densidade *t-Student* (Modelo 2).

Observação	Parâmetros	Estimativa	EP	Valor- <i>p</i>	Est. rel.(%)	EP rel.(%)
155	β_0	2.9312	0.7690	0.0001	-0.7233	0.9157
	β_1	-1.1276	0.2278	0.0000	-1.3195	1.6265
	β_2	1.1855	0.9121	0.1937	2.5132	0.6331
	β_3	2.2911	0.9181	0.0126	1.9950	0.0896
	β_4	-0.2532	0.2632	0.3362	6.8297	1.1926
	β_5	-0.5821	0.2597	0.0250	4.4631	1.3504
	τ_0	-0.5304	0.1622	0.0011	6.1278	-0.2701
	τ_1	0.3796	0.0749	0.0000	7.3774	-0.3819
	σ^2	1.3116	0.3849	<0.0001	-1.4262	-2.0444
149	β_0	3.0142	0.7540	0.0001	2.0880	-1.0648
	β_1	-1.1628	0.2213	0.0000	1.7605	-1.2606
	β_2	1.0815	0.9008	0.2299	-6.4798	-0.6113
	β_3	2.2150	0.9053	0.0144	-1.3920	-1.3106
	β_4	-0.2072	0.2578	0.4216	-12.5560	-0.8747
	β_5	-0.5499	0.2544	0.0306	-1.3114	-0.7225
	τ_0	-0.5416	0.1620	0.0008	8.3726	-0.4193
	τ_1	0.3869	0.0747	0.0000	9.4467	-0.6607
	σ^2	1.3216	0.3870	<0.0001	-0.6760	-1.4999
144	β_0	2.9773	0.7608	0.0001	0.8383	-0.1621
	β_1	-1.1502	0.2247	0.0000	0.6584	0.2437
	β_2	1.1133	0.9048	0.2185	-3.7301	-0.1705
	β_3	2.2349	0.9118	0.0142	-0.5067	-0.6045
	β_4	-0.2181	0.2605	0.4026	-7.9867	0.1494
	β_5	-0.5553	0.2570	0.0307	-0.3454	0.2934
	τ_0	-0.5134	0.1621	0.0015	2.7232	-0.3298
	τ_1	0.3693	0.0749	0.0000	4.4805	-0.4412
	σ^2	1.2984	0.3819	<0.0001	-2.4218	-2.7994
{155, 149, 144}	β_0	3.0195	0.6614	0.0000	2.2678	-13.2092
	β_1	-1.1585	0.1862	0.0000	1.3816	-16.9283
	β_2	1.0613	0.8285	0.1790	-8.2266	-8.5876
	β_3	2.2437	0.8180	0.0063	-0.1138	-10.8235
	β_4	-0.2008	0.2296	0.3422	-15.2790	-11.7411
	β_5	-0.5699	0.2219	0.0123	2.2640	-13.4169
	τ_0	-0.5849	0.1609	0.0014	17.0415	-1.0385
	τ_1	0.4285	0.0743	0.0000	21.2126	-1.2476
	σ^2	1.2761	0.3696	<0.0001	-4.0997	-5.9491

concentração de 15% até um determinado momento do seguimento ($\beta_5 = -0.5572$; Valor-*p* = 0.0297). Explicando esse resultado de outra forma: a absorção do gás na concentração de 25% pelo organismo é mais lenta que a da concentração de 15%, mas em algum momento durante o seguimento, a proporção do volume do gás restante será igual para ambas as concentrações e, isso é o esperado porque o organismo tende a absorver todo o gás que

Tabela 20 – Estimativas dos parâmetros após a exclusão individual das observações #155, #146, #144 e #87 considerando o modelo de regressão GJS longitudinal com precisão variável e gerador de densidade normal (Modelo 2).

Observação	Parâmetros	Estimativa	EP	Valor- p	Est. rel.(%)	EP rel.(%)
155	β_0	3.0198	0.7520	0.0001	-4.5842	-0.6034
	β_1	-1.1608	0.2072	0.0000	-11.4017	1.5542
	β_2	1.4814	0.9033	0.1010	21.9495	-0.0533
	β_3	1.9301	0.9497	0.0421	13.5821	-0.5495
	β_4	-0.4668	0.2447	0.0564	76.9979	2.7966
	β_5	-0.4190	0.2459	0.0884	77.5828	1.9046
	τ_0	-0.5267	0.1294	0.0000	19.3000	1.8471
	τ_1	0.1009	0.0543	0.0633	135.4066	4.6594
	σ^2	1.9813	0.6072	0.0011	-11.8955	0.0062
146	β_0	3.1285	0.7444	0.0000	-1.1515	-1.6095
	β_1	-1.2979	0.1950	0.0000	-0.9387	-4.4426
	β_2	1.0580	0.8925	0.2359	-12.9049	-1.2486
	β_3	1.7103	0.9419	0.0694	0.6494	-1.3624
	β_4	-0.2183	0.2279	0.3382	-17.2224	-4.2431
	β_5	-0.2385	0.2304	0.3006	1.0813	-4.5113
	τ_0	-0.3677	0.1301	0.0047	-16.7244	2.4040
	τ_1	0.0254	0.0530	0.6321	-40.7851	2.1082
	σ^2	2.2526	0.6810	0.0009	4.6402	-1.3516
144	β_0	3.2129	0.7382	0.0000	1.5175	-2.4363
	β_1	-1.3270	0.2035	0.0000	1.2798	-0.2707
	β_2	1.1806	0.8792	0.1794	-2.8131	-2.7194
	β_3	1.6820	0.9277	0.0698	-1.0165	-2.8449
	β_4	-0.2169	0.2372	0.3606	-17.7569	-0.3376
	β_5	-0.2310	0.2400	0.3358	-2.0949	-0.5254
	τ_0	-0.4678	0.1265	0.0002	5.9570	-0.4180
	τ_1	0.0634	0.0515	0.2177	47.9954	-0.8686
	σ^2	1.9260	0.6057	0.0015	-15.5461	2.6201
87	β_0	3.0002	0.7336	0.0000	-5.2043	-3.0403
	β_1	-1.2910	0.1986	0.0000	-1.4648	-2.6796
	β_2	1.3925	0.8803	0.1799	14.6343	-2.5998
	β_3	1.8753	0.9285	0.0701	10.3606	-2.7672
	β_4	-0.2884	0.2354	0.3569	9.3422	-1.0925
	β_5	-0.2593	0.2376	0.3310	9.9215	-1.5041
	τ_0	-0.4403	0.1228	0.0001	-0.2777	-3.3207
	τ_1	0.0501	0.0497	0.2022	16.9482	-4.1915
	σ^2	1.9837	0.6148	0.0017	-11.7395	1.1328

foi injetado, ou seja, a proporção do volume do gás tende a ser completamente absorvida pelo organismo com o passar do tempo. Ademais, a proporção mediana do volume de gás no olho varia menos (precisão aumenta) à medida que o tempo de seguimento aumenta ($\tau_1 = 0.3535$; Valor- $p < 0.0001$). Esse resultado está de acordo com o observado na Figura 9 da análise descritiva inicial. Por fim, os resultados desse estudo corroboram com os

obtidos por (ZHANG et al., 2009) no modelo que considera a distribuição t-*Student* para os termos de erros e a distribuição normal para os efeitos aleatórios. Vale destacar que os modelos ajustados pelos autores consideraram apenas dispersão constante.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho estendemos a classe de modelos de regressão GJS proposta por [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) para o caso de dados correlacionados como os provenientes de estudos longitudinais. Esta nova classe de modelos foi denominada de *modelo de regressão GJS longitudinais*. Trata-se de uma extensão natural do modelo de regressão GJS. A extensão permite o uso de qualquer distribuição pertencente a família simétrica, permitindo a modelagem de dados com caudas mais leves ou mais pesadas que a distribuição normal. Além disso, o modelo utiliza a mediana que é ligada ao preditor linear por meio de uma função de ligação conhecida. Dessa forma, a mediana como medida robusta de tendência central é menos afetada do que a média por assimetria e bimodalidade, que são muito comuns em dados proporcionais.

A estimação dos parâmetros de efeitos fixos e aleatórios do modelo é realizada pelo método da máxima verossimilhança. O método da quadratura de Gauss-Hermite foi utilizado para aproximar as integrais envolvidas na função de log-verossimilhança. Os preditores dos efeitos aleatórios são obtidos por meio do melhor preditor empírico de Bayes. Além disso, avaliamos o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança em amostras de tamanho finito através de simulações de Monte Carlo. Observamos que, em geral, os estimadores de máxima verossimilhança dos modelos considerados apresentam boas propriedades em pequenas amostras.

Com a finalidade de avaliar as suposições feitas para o modelo, desenvolvemos métodos de diagnóstico. Assim sendo, introduzimos o resíduo quantílico aleatorizado para os modelos de regressão GJS longitudinais. A distribuição do resíduo quantílico aleatorizado em amostras de tamanho finito é estudada por meio de extensivos estudos de simulação. Adicionalmente, avaliamos a eficácia deste resíduo na detecção de várias formas de inadequação do modelo. Dessa forma, experimentos de simulações de Monte Carlo foram realizados para avaliar o desempenho desse resíduo na detecção da não linearidade no efeito mediano da covariável e de dispersão não constante, através de aplicação em dados simulados. Em todos os cenários considerados, o resíduo quantílico aleatorizado apresentou bons resultados. Desses experimentos, fica claro que além de serem simples de se calcular, os resíduos quantílicos aleatorizados aparentam ser uma excelente escolha para verificar a adequação do modelo de regressão GJS longitudinal em aplicações práticas, principalmente, porque sua distribuição empírica segue distribuição normal padrão para todos os modelos de regressão GJS longitudinais considerados.

Aplicamos a metodologia desenvolvida a um conjunto de dados reais de um estudo prospectivo de cirurgias de reparação de retina. Na aplicação, comparamos a qualidade do

ajuste dos modelos de regressão GJS longitudinais com geradores de densidade normal, *t-Student* e exponencial potência. A partir da metodologia desenvolvida para a comparação, o modelo que forneceu o melhor ajuste aos dados foi o GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* com precisão variável. Além do mais, finalizamos a análise com a interpretação das estimativas dos parâmetros de modo a responder aos objetivos da aplicação.

Por fim, recomenda-se que pesquisas futuras sejam realizadas para estudar outras aproximações para o logaritmo da função de verossimilhança, tais como, amostragem de importância e Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) e compará-los com a quadratura de Gauss-Hermite; utilizar influência local e alavanca generalizada como medidas de influência local e global; propor outros resíduos para avaliar o ajuste do modelo; usar outros algoritmos para estimar os parâmetros do modelo GJS longitudinal como o algoritmo EM; e implementar pacote computacional no software R para ajustar os modelos de regressão GJS longitudinais.

Referências Bibliográficas

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974. ISSN 1558-2523. Citado na página 44.

ATKINSON, A. C. *Plots, transformations, and regression: an introduction to graphical methods of diagnostic regression analysis*. Oxford: Clarendon press, 1988. (Oxford statistical science series, 1). ISBN 9780198533719. Citado na página 54.

BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; JØRGENSEN, B. Some parametric models on the simplex. *Journal of multivariate analysis*, Elsevier, v. 39, n. 1, p. 106–116, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 60.

BAYES, C. L.; BAZÁN, J. L.; GARCÍA, C. A new robust regression model for proportions. 2012. Citado na página 18.

BOLKER, B.; R Development Core Team. *bbmle: Tools for General Maximum Likelihood Estimation*. [S.l.], 2022. R package version 1.0.25. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=bbmle>>. Citado na página 38.

BOZDOGAN, H. Model selection and Akaike's Information Criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. *Psychometrika*, v. 52, n. 3, p. 345–370, 1987. ISSN 1860-0980. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02294361>>. Citado na página 44.

BROYDEN, C. G. The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms 1. General Considerations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 6, n. 1, p. 76–90, mar. 1970. ISSN 0272-4960. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/imamat/6.1.76>>. Citado na página 38.

COX, D. R.; SNELL, E. J. A General Definition of Residuals. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, v. 30, n. 2, p. 248–275, 1968. ISSN 0035-9246. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2984505>>. Citado na página 53.

CRIBARI-NETO, F.; ZEILEIS, A. Beta Regression in R. *Journal of Statistical Software*, v. 34, p. 1–24, abr. 2010. ISSN 1548-7660. Disponível em: <<https://doi.org/10.18637/jss.v034.i02>>. Citado na página 17.

CRIBARI-NETO, F.; ZEILEIS, A. Beta regression in R. *Journal of Statistical Software*, v. 34, n. 2, p. 1–24, 2010. Citado na página 17.

DELATTRE, M.; LAVIELLE, M.; POURSAT, M.-A. A note on BIC in mixed-effects models. *Electronic Journal of Statistics*, v. 8, n. 1, jan. 2014. ISSN 1935-7524. Disponível em: <<https://projecteuclid.org/journals/electronic-journal-of-statistics/volume-8/issue-1/A-note-on-BIC-in-mixed-effects-models/10.1214/14-EJS890.full>>. Citado na página 44.

DEMIDENKO, E. *Mixed models: theory and applications with R*. Second [edition]. Hoboken: Wiley, 2013. (Wiley series in probability and statistics, 893). ISBN 9781118592991 9781118593066 9781118593011. Citado 3 vezes nas páginas 9, 33 e 34.

DIGGLE, P. (Ed.). *Analysis of longitudinal data*. Second paperback edition. Oxford: Oxford University Press, 2013. (Oxford statistical science series, 25). ISBN 9780199676750. Citado na página 34.

DUNN, P. K.; SMYTH, G. K. Randomized Quantile Residuals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, v. 5, n. 3, p. 236–244, set. 1996. ISSN 1061-8600. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10618600.1996.10474708>>. Citado na página 55.

ESPINHEIRA, P. L.; SANTOS, E. G.; CRIBARI-NETO, F. On nonlinear beta regression residuals. *Biometrical Journal*, v. 59, n. 3, p. 445–461, 2017. ISSN 1521-4036. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/bimj.201600136>>. Citado na página 56.

FAHRMEIR, L.; TUTZ, G. *Multivariate Statistical Modelling Based on Generalized Linear Models*. New York, NY: Springer New York, 2001. (Springer Series in Statistics). ISBN 9781441929006 9781475734546. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-1-4757-3454-6>>. Citado na página 36.

FALON, R. J. T. *Modelos de regressão lineares mistos sob a classe de distribuições normal-potência*. Tese (Doutorado em Estatística) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45133/tde-15032018-132547/>>. Citado na página 55.

FENG, C.; SADEGHPOUR, A.; LI, L. Randomized quantile residuals: an omnibus model diagnostic tool with unified reference distribution. *arXiv preprint arXiv:1708.08527*, v. 7, 2017. Citado na página 57.

FERRARI, S.; CRIBARI-NETO, F. Beta Regression for Modelling Rates and Proportions. *Journal of Applied Statistics*, v. 31, n. 7, p. 799–815, ago. 2004. ISSN 0266-4763, 1360-0532. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0266476042000214501>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

FITZMAURICE, G. M. et al. (Ed.). *Longitudinal data analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2009. (Chapman & Hall/CRC handbooks of modern statistical methods). OCLC: 227328498. ISBN 9781584886587. Citado 4 vezes nas páginas 18, 33, 34 e 43.

FITZMAURICE, G. M.; LAIRD, N. M.; WARE, J. H. *Applied longitudinal analysis*. 2nd ed. ed. Hoboken, N.J.: Wiley, 2011. (Wiley series in probability and statistics). OCLC: ocn708358043. ISBN 9780470380277. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 34.

FLETCHER, R. A new approach to variable metric algorithms. *The Computer Journal*, v. 13, n. 3, p. 317–322, jan. 1970. ISSN 0010-4620. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/comjnl/13.3.317>>. Citado na página 38.

GOLDFARB, D. A family of variable-metric methods derived by variational means. *Mathematics of Computation*, v. 24, n. 109, p. 23–26, 1970. ISSN 0025-5718, 1088-6842. Disponível em: <<https://www.ams.org/mcom/1970-24-109/S0025-5718-1970-0258249-6/>>. Citado na página 38.

GRASSIA, A. On a family of distributions with argument between 0 and 1 obtained by transformation of the gamma and derived compound distributions. *Australian Journal of Statistics*, v. 19, n. 2, p. 108–114, 1977. ISSN 00049581. Disponível em:

<<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1467-842X.1977.tb01277.x>>. Citado na página 19.

HAHN, E. D. Mixture densities for project management activity times: A robust approach to pert. *European Journal of operational research*, Elsevier, v. 188, n. 2, p. 450–459, 2008. Citado na página 18.

HANNAN, E. J.; QUINN, B. G. The Determination of the Order of an Autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, v. 41, n. 2, p. 190–195, 1979. ISSN 0035-9246. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2985032>>. Citado na página 44.

HARVILLE, D. A. *Matrix algebra from a statistician's perspective*. New York: Springer, 1997. ISBN 9780387949789. Citado na página 37.

HILDEN-MINTON, J. A. *Multilevel diagnostics for mixed and hierarchical linear models*. Tese (Thesis) — University of California, 1995. Disponível em: <<https://cgspace.cgiar.org/handle/10568/81585>>. Citado na página 53.

HUNGER, M.; DÖRING, A.; HOLLE, R. Longitudinal beta regression models for analyzing health-related quality of life scores over time. *BMC Medical Research Methodology*, v. 12, n. 1, p. 144, set. 2012. ISSN 1471-2288. Disponível em: <<https://doi.org/10.1186/1471-2288-12-144>>. Citado na página 19.

JIANG, J. *Linear and generalized linear mixed models and their applications*. [S.l.: s.n.], 2021. OCLC: 1294713254. ISBN 9781071612811. Citado na página 34.

JOHNSON, N. L. Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation. *Biometrika*, v. 36, n. 1/2, p. 149–176, 1949. ISSN 0006-3444. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2332539>>. Citado 4 vezes nas páginas 18, 20, 21 e 22.

KIESCHNICK, R.; MCCULLOUGH, B. D. Regression analysis of variates observed on (0, 1): percentages, proportions and fractions. *Statistical Modelling*, v. 3, n. 3, p. 193–213, out. 2003. ISSN 1471-082X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1191/1471082X03st053oa>>. Citado na página 17.

KOTZ, S.; DORP, J. R. V. *Beyond beta: other continuous families of distributions with bounded support and applications*. Singapore ; Hackensack, NJ: World Scientific, 2004. OCLC: ocm58448978. ISBN 9789812561152. Citado na página 22.

KUMARASWAMY, P. A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of hydrology*, Elsevier, v. 46, n. 1-2, p. 79–88, 1980. Citado na página 18.

LAIRD, N. M.; WARE, J. H. Random-Effects Models for Longitudinal Data. *Biometrics*, v. 38, n. 4, p. 963–974, 1982. ISSN 0006-341X. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2529876>>. Citado na página 33.

LEMONTE, A. J. The Gradient Statistic. In: *The Gradient Test*. Elsevier, 2016. p. 1–32. ISBN 9780128035962. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9780128035962000016>>. Citado na página 42.

LEMONTE, A. J.; BAZÁN, J. L. New class of Johnson SB distributions and its associated regression model for rates and proportions: SB distributions and its associated regression model. *Biometrical Journal*, v. 58, n. 4, p. 727–746, jul. 2016. ISSN 03233847. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/bimj.201500030>>. Citado 12 vezes nas páginas 17, 19, 22, 27, 28, 29, 30, 31, 41, 42, 55 e 76.

LEMONTE, A. J.; MORENO-ARENAS, G. On residuals in generalized Johnson SB regressions. *Applied Mathematical Modelling*, v. 67, p. 62–73, mar. 2019. ISSN 0307-904X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X18305067>>. Citado 3 vezes nas páginas 55, 56 e 57.

LIANG, K.-Y.; ZEGER, S. L. Longitudinal data analysis using generalized linear models. *Biometrika*, v. 73, n. 1, p. 13–22, 1986. ISSN 0006-3444, 1464-3510. Disponível em: <<https://academic.oup.com/biomet/article-lookup/doi/10.1093/biomet/73.1.13>>. Citado na página 33.

LOBOS, C. M. V. *Modelos log-Birnbaum-Saunders mistos*. Tese (Doutorado em Estatística) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45133/tde-05112010-114755/>>. Citado na página 55.

MANCO, O. C. U. *Modelos de regressão beta com efeitos aleatórios normais e não normais para dados longitudinais*. Tese (Doutorado em Estatística) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45133/tde-10072013-234405/>>. Citado na página 55.

MAZUCHELI, J. et al. The unit-weibull distribution as an alternative to the kumaraswamy distribution for the modeling of quantiles conditional on covariates. *Journal of Applied Statistics*, Taylor & Francis, v. 47, n. 6, p. 954–974, 2020. Citado na página 18.

MCCULLAGH, P.; NELDER, J. A. *Generalized Linear Models*. Boston, MA: Springer US, 1989. ISBN 9780412317606 9781489932426. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-1-4899-3242-6>>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 29 e 30.

MCCULLOCH, C. E.; SEARLE, S. R.; NEUHAUS, J. M. *Generalized, linear, and mixed models*. 2nd ed. ed. Hoboken, N.J: Wiley, 2008. (Wiley series in probability and statistics). OCLC: ocn191024148. ISBN 9780470073711. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.

MEYERS, S. M. et al. Variation of perfluoropropane disappearance after vitrectomy. *Retina (Philadelphia, Pa.)*, v. 12, n. 4, p. 359–363, 1992. ISSN 0275-004X. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 60.

MITNIK, P. A.; BAEK, S. The Kumaraswamy distribution: median-dispersion re-parameterizations for regression modeling and simulation-based estimation. *Statistical Papers*, v. 54, n. 1, p. 177–192, fev. 2013. ISSN 0932-5026, 1613-9798. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s00362-011-0417-y>>. Citado na página 18.

MOLENBERGHS, G.; VERBEKE, G. *Models for discrete longitudinal data*. New York ; London: Springer, 2005. (Springer series in statistics). ISBN 9780387251448. Citado na página 43.

MOUSA, A. M.; EL-SHEIKH, A. A.; ABDEL-FATTAH, M. A. A gamma regression for bounded continuous variables. *Advances and Applications in Statistics*, Pushpa Publishing House, v. 49, n. 4, p. 305, 2016. Citado na página 18.

NELDER, J. A.; WEDDERBURN, R. W. M. Generalized Linear Models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, v. 135, n. 3, p. 370, 1972. ISSN 00359238. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/10.2307/2344614?origin=crossref>>. Citado na página 17.

NOBRE, J. S.; SINGER, J. D. M. Residual Analysis for Linear Mixed Models. *Biometrical Journal*, v. 49, n. 6, p. 863–875, jun. 2007. ISSN 0323-3847, 1521-4036. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/bimj.200610341>>. Citado na página 53.

PAOLINO, P. Maximum Likelihood Estimation of Models with Beta-Distributed Dependent Variables. *Political Analysis*, v. 9, n. 4, p. 325–346, 2001. ISSN 1047-1987. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/25791654>>. Citado na página 17.

PETTERLE, R. R. et al. Unit gamma mixed regression models for continuous bounded data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 0, n. 0, p. 1–19, 2021. ISSN 0094-9655. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00949655.2021.1970164>>. Citado na página 19.

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. *Mixed-effects models in S and S-PLUS*. New York: Springer, 2000. (Statistics and computing). ISBN 9780387989570. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 53.

QIU, Z.; SONG, P. X.-K.; TAN, M. Simplex mixed-effects models for longitudinal proportional data. *Scandinavian Journal of Statistics*, [Board of the Foundation of the Scandinavian Journal of Statistics, Wiley], v. 35, n. 4, p. 577–596, 2008. ISSN 03036898, 14679469. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/41000290>>. Citado 3 vezes nas páginas 19, 60 e 65.

QUEIROZ, F. F.; LEMONTE, A. J. A broad class of zero-or-one inflated regression models for rates and proportions. *Canadian Journal of Statistics*, v. 49, n. 2, p. 566–590, 2021. ISSN 1708-945X. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cjs.11576>>. Citado na página 55.

R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2021. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>. Citado 3 vezes nas páginas 38, 46 e 56.

RAO, C. R. Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 44, n. 1, p. 50–57, jan. 1948. ISSN 0305-0041, 1469-8064. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0305004100023987/type/journal_article>. Citado na página 42.

SCHWARZ, G. Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978. ISSN 0090-5364. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2958889>>. Citado na página 44.

SELF, S. G.; LIANG, K.-Y. Asymptotic Properties of Maximum Likelihood Estimators and Likelihood Ratio Tests Under Nonstandard Conditions. *Journal of the American Statistical Association*, v. 82, n. 398, p. 605–610, 1987. ISSN 0162-1459. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2289471>>. Citado na página 45.

SHANNO, D. F. Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. *Mathematics of Computation*, v. 24, n. 111, p. 647–656, 1970. ISSN 0025-5718, 1088-6842. Disponível em: <<https://www.ams.org/mcom/1970-24-111/S0025-5718-1970-0274029-X/>>. Citado na página 38.

SILVAPULLE, M. J.; SILVAPULLE, P. A Score Test Against One-Sided Alternatives. *Journal of the American Statistical Association*, v. 90, n. 429, p. 342–349, 1995. ISSN 0162-1459. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2291159>>. Citado na página 45.

SMITHSON, M.; VERKUILEN, J. A better lemon squeezer? Maximum-likelihood regression with beta-distributed dependent variables. *Psychological Methods*, v. 11, n. 1, p. 54–71, mar. 2006. ISSN 1939-1463, 1082-989X. Disponível em: <<http://doi.apa.org/getdoi.cfm?doi=10.1037/1082-989X.11.1.54>>. Citado na página 17.

SONG, P. X.-K.; QIU, Z.; TAN, M. Modelling Heterogeneous Dispersion in Marginal Models for Longitudinal Proportional Data. *Biometrical Journal*, v. 46, n. 5, p. 540–553, 2004. ISSN 1521-4036. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/bimj.200110052>>. Citado na página 60.

SONG, P. X.-K.; TAN, M. Marginal Models for Longitudinal Continuous Proportional Data. *Biometrics*, v. 56, n. 2, p. 496–502, 2000. ISSN 1541-0420. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.0006-341X.2000.00496.x>>. Citado na página 60.

STRAM, D. O.; LEE, J. W. Variance Components Testing in the Longitudinal Mixed Effects Model. *Biometrics*, v. 50, n. 4, p. 1171–1177, 1994. ISSN 0006-341X. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2533455>>. Citado 3 vezes nas páginas 44, 45 e 46.

STROUP, W. W. *Generalized Linear Mixed Models: Modern Concepts, Methods and Applications*. [S.l.: s.n.], 2016. OCLC: 991276468. ISBN 9781439815137. Citado na página 34.

TERRELL, G. R. The gradient statistic. *Computing Science and Statistics*, v. 34, n. 34, p. 206–215, 2002. Citado na página 42.

VAIDA, F.; BLANCHARD, S. Conditional Akaike Information for Mixed-Effects Models. *Biometrika*, v. 92, n. 2, p. 351–370, 2005. ISSN 0006-3444. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/20441193>>. Citado na página 44.

VASCONCELLOS, K. L.; CRIBARI-NETO, F. Improved maximum likelihood estimation in a new class of beta regression models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, v. 19, n. 1, p. 13–31, 2005. ISSN 0103-0752. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/43601052>>. Citado na página 17.

VERBEKE, G.; LESAFFRE, E. A Linear Mixed-Effects Model With Heterogeneity in the Random-Effects Population. *Journal of the American Statistical Association*, v. 91, n. 433, p.

217–221, 1996. ISSN 0162-1459. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2291398>>. Citado na página 53.

VERBEKE, G.; MOLENBERGHS, G. *Linear mixed models for longitudinal data*. Corr. 2. print. New York Berlin Heidelberg: Springer, 2001. (Springer series in statistics). ISBN 9780387950273. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

VERBEKE, G.; MOLENBERGHS, G. The Use of Score Tests for Inference on Variance Components. *Biometrics*, v. 59, n. 2, p. 254–262, 2003. ISSN 0006-341X. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/3695503>>. Citado na página 45.

VERKUILEN, J.; SMITHSON, M. Mixed and Mixture Regression Models for Continuous Bounded Responses Using the Beta Distribution. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, v. 37, n. 1, p. 82–113, fev. 2012. ISSN 1076-9986, 1935-1054. Disponível em: <<http://journals.sagepub.com/doi/10.3102/1076998610396895>>. Citado na página 17.

WALD, A. Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 54, n. 3, p. 426–482, 1943. ISSN 0002-9947, 1088-6850. Disponível em: <<https://www.ams.org/tran/1943-054-03/S0002-9947-1943-0012401-3/>>. Citado na página 42.

WILKS, S. S. The Large-Sample Distribution of the Likelihood Ratio for Testing Composite Hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics*, v. 9, n. 1, p. 60–62, 1938. ISSN 0003-4851. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2957648>>. Citado na página 42.

WU, L. *Mixed effects models for complex data*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2010. (Monographs on statistics and applied probability, 113). OCLC: ocn178207568. ISBN 9781420074024. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 45.

ZHANG, D.; LIN, X. Variance Component Testing in Generalized Linear Mixed Models for Longitudinal/Clustered Data and other Related Topics. In: DUNSON, D. B. (Ed.). *Random Effect and Latent Variable Model Selection*. New York, NY: Springer, 2008, (Lecture Notes in Statistics). p. 19–36. ISBN 9780387767215. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-76721-5_2>. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

ZHANG, P. et al. Robust transformation mixed-effects models for longitudinal continuous proportional data. *The Canadian Journal of Statistics / La Revue Canadienne de Statistique*, v. 37, n. 2, p. 266–281, 2009. ISSN 0319-5724. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/25653475>>. Citado 5 vezes nas páginas 17, 19, 60, 65 e 75.

ZHANG, P.; QIU, Z.; SHI, C. simplexreg: An R package for regression analysis of proportional data using the simplex distribution. *Journal of Statistical Software*, v. 71, n. 11, p. 1–21, 2016. Citado na página 60.

APÊNDICE A – Derivadas da função de log-verossimilhança

A.1 Função escore

Considerando a função densidade de probabilidade da distribuição GJS com mediana ξ e precisão δ , denotada por $\text{GJS}(\xi, \delta; g)$, e definida como

$$f(y; \xi, \delta) = \frac{\delta g(\{\delta[t(y) - t(\xi)]\}^2)}{y(1 - y)}, \quad (\text{A.1})$$

em que $y \in (0, 1)$, $\xi \in (0, 1)$ e $\delta > 0$, e considerando o modelo de regressão GJS com intercepto aleatório normal dado em (2.8), o logaritmo da função de verossimilhança aproximada (2.15) pode ser apresentado como

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \log(B_i), \quad (\text{A.2})$$

em que

$$B_i = \left(\sum_{k_1=1}^{Q_1} \sum_{k_2=1}^{Q_2} A_i \frac{v_{k_1} v_{k_2}}{\pi} \right), \quad (\text{A.3})$$

e

$$A_i = \exp \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left[\log(\delta_{ij}) + \log \left[g(\{\delta_{ij}[t(y_{ij}) - t(\xi_{ij})]\}^2) \right] - \log(y_{ij}(1 - y_{ij})) \right] \right),$$

em que

$$\begin{aligned} \xi_{ij} &= d_1^{-1}(\eta_{1ij}) & \text{com} & & \eta_{1ij} &= \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \sqrt{2}\sigma u_{k_1}, \\ \delta_{ij} &= d_2^{-1}(\eta_{2ij}) & \text{com} & & \eta_{2ij} &= \mathbf{s}_{ij}^\top \boldsymbol{\tau} + \sqrt{2}\varsigma u_{k_2}, \end{aligned}$$

com v_{k_1} e v_{k_2} sendo os k_1 -ésimo e k_2 -ésimo pesos e u_{k_1} e u_{k_2} sendo o k_1 -ésimo e k_2 -ésimo pontos de quadratura.

A função escore é obtida diferenciando o logaritmo da função de verossimilhança dada na equação (A.2) em relação a cada um dos parâmetros em $\boldsymbol{\theta}$ e é dado por

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta})^\top, \mathbf{U}_\tau(\boldsymbol{\theta})^\top, U_{\sigma^2}(\boldsymbol{\theta}), U_{\varsigma^2}(\boldsymbol{\theta}))^\top,$$

em que

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{X}_i^\top \mathbf{D}_{i1}}{B_i}, \\ \mathbf{U}_\tau(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{S}_i^\top \mathbf{D}_{i2}}{B_i}, \\ U_\sigma(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^N \frac{D_{i3}}{B_i}, \\ U_\varsigma(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^N \frac{D_{i4}}{B_i},\end{aligned}$$

em que $\mathbf{X}_i$ e $\mathbf{S}_i$ são matrizes de design de ordem $(n_i \times p)$ e $(ni \times q)$, respectivamente. Os vetores $\mathbf{D}_{i1}$ e $\mathbf{D}_{i2}$ ambos de dimensão $n_i \times 1$ e as quantidades D_{i3} e D_{i4} são definidos a seguir.

O vetor $\mathbf{D}_{i1}$ de dimensão $n_i \times 1$ definido em $\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta})$ é dado por

$$\mathbf{D}_{i1} = \sum_{k_1=1}^{Q_1} \sum_{k_2=1}^{Q_2} A_i \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{W}_i \mathbf{T}_{1i} \boldsymbol{\xi}_i^* \frac{v_{k_1} v_{k_2}}{\pi},$$

em que $\mathbf{T}_{1i} = \text{diag}\{1/\dot{d}_1(\xi_{ij})\}$ com $\dot{d}_k(z) = dd_k(z)/dz$, para $k = 1, 2$; $\mathbf{W}_i = \text{diag}\{w_{ij} W_g(w_{ij}^2)\}$ com $w_{ij} = \delta_{ij}[t(y_{ij}) - t(\xi_{ij})]$, $W_g(\mu) = d \log(g(\mu))/d\mu = g'(\mu)/g(\mu)$ e $g'(\mu) = dg(\mu)/d\mu$; $\mathbf{\Lambda}_i = \text{diag}\{\delta_{ij}\}$, $\boldsymbol{\xi}_i^* = (\xi_{i1}^*, \dots, \xi_{in_i}^*)^\top$ com $\xi_{ij}^* = -2/[\xi_{ij}(1 - \xi_{ij})]$.

O vetor $\mathbf{D}_{i2}$ de dimensão $n_i \times 1$ definido em $\mathbf{U}_\tau(\boldsymbol{\theta})$ é escrito como

$$\mathbf{D}_{i2} = \sum_{k_1=1}^{Q_1} \sum_{k_2=1}^{Q_2} A_i \mathbf{T}_{2i} \boldsymbol{\delta}_i^* \frac{v_{k_1} v_{k_2}}{\pi},$$

em que $\mathbf{T}_{2i} = \text{diag}\{1/\dot{d}_2(\delta_{ij})\}$, $\boldsymbol{\delta}_i^* = (\delta_{i1}^*, \dots, \delta_{in_i}^*)^\top$ com $\delta_{ij}^* = \delta_{ij}^{-1} + 2\delta_{ij}^{-1} w_{ij}^2 W_g(w_{ij}^2)$.

A quantidade D_{i3} definida em $U_\sigma(\boldsymbol{\theta})$ é expressa como

$$\mathbf{D}_{i3} = \sum_{k_1=1}^{Q_1} \sum_{k_2=1}^{Q_2} A_i \mathbf{\Lambda}_i^* \mathbf{W}_i \mathbf{T}_{1i} \boldsymbol{\xi}_i^{**} \frac{\sqrt{2} u_{k_1} v_{k_1} v_{k_2}}{\pi},$$

em que $\mathbf{\Lambda}_i^* = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in_i})$ e $\boldsymbol{\xi}_i^{**} = (\xi_{in_i}^*, \dots, \xi_{in_i}^*)^\top$.

A quantidade D_{i4} definida em $U_\varsigma(\boldsymbol{\theta})$ é expressa como

$$\mathbf{D}_{i4} = \sum_{k_1=1}^{Q_1} \sum_{k_2=1}^{Q_2} A_i \mathbf{T}_{2i}^* \boldsymbol{\delta}_i^{**} \frac{\sqrt{2} u_{k_1} v_{k_1} v_{k_2}}{\pi},$$

em que $\mathbf{T}_{2i}^* = (1/\dot{d}_2(\delta_{i1}), \dots, 1/\dot{d}_2(\delta_{in_i}))$.

APÊNDICE B – Avaliação do desempenho dos EMV

B.1 Medidas descritivas para avaliar o desempenho dos EMV

Tabela 21 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 4$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.75$)

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.5222	-0.0222	0.8588	0.8589
	β_1	1.5158	0.0158	1.0484	1.0483
	τ_0	-1.1577	0.0423	0.2554	0.2588
	τ_1	1.0147	0.0147	0.4528	0.4529
	σ^2	0.6886	-0.0614	0.6757	0.6783
100	β_0	-1.4817	0.0183	0.5945	0.5947
	β_1	1.4882	-0.0118	0.7179	0.7178
	τ_0	-1.1926	0.0074	0.1707	0.1708
	τ_1	1.0242	0.0242	0.3011	0.3020
	σ^2	0.7042	-0.0458	0.5170	0.5189
200	β_0	-1.4897	0.0103	0.4165	0.4166
	β_1	1.4863	-0.0137	0.5012	0.5013
	τ_0	-1.1959	0.0041	0.1205	0.1206
	τ_1	1.0079	0.0079	0.2096	0.2097
	σ^2	0.7147	-0.0353	0.3808	0.3824
500	β_0	-1.5057	-0.0057	0.2597	0.2597
	β_1	1.4886	-0.0114	0.3104	0.3105
	τ_0	-1.1953	0.0047	0.0747	0.0748
	τ_1	0.9952	-0.0048	0.1344	0.1344
	σ^2	0.7242	-0.0258	0.2474	0.2487

Tabela 22 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 6$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.75$)

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.5101	-0.0101	0.8094	0.8093
	β_1	1.5141	0.0141	0.9874	0.9873
	τ_0	-1.1716	0.0284	0.2324	0.2340
	τ_1	1.0286	0.0286	0.4200	0.4209
	σ^2	0.7015	-0.0485	0.6806	0.6822
100	β_0	-1.4980	0.0020	0.5700	0.5698
	β_1	1.5116	0.0116	0.6809	0.6808
	τ_0	-1.1832	0.0168	0.1582	0.1591
	τ_1	1.0053	0.0053	0.2793	0.2793
	σ^2	0.6874	-0.0626	0.4929	0.4967
200	β_0	-1.5018	-0.0018	0.4059	0.4058
	β_1	1.5079	0.0079	0.4806	0.4805
	τ_0	-1.1909	0.0091	0.1144	0.1147
	τ_1	0.9976	-0.0024	0.2029	0.2029
	σ^2	0.7036	-0.0464	0.3664	0.3692
500	β_0	-1.5022	-0.0022	0.2520	0.2519
	β_1	1.5015	0.0015	0.3002	0.3001
	τ_0	-1.1987	0.0013	0.0721	0.0721
	τ_1	1.0016	0.0016	0.1260	0.1260
	σ^2	0.7496	-0.0004	0.2467	0.2467

Tabela 23 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 8$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 0.75$)

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.5215	-0.0215	0.7859	0.7860
	β_1	1.5334	0.0334	0.9408	0.9411
	τ_0	-1.1644	0.0356	0.2318	0.2345
	τ_1	1.0128	0.0128	0.4104	0.4105
	σ^2	0.6775	-0.0725	0.6420	0.6459
100	β_0	-1.4940	0.0060	0.5574	0.5573
	β_1	1.4973	-0.0027	0.6661	0.6659
	τ_0	-1.1832	0.0168	0.1489	0.1498
	τ_1	1.0027	0.0027	0.2682	0.2681
	σ^2	0.6973	-0.0527	0.4772	0.4800
200	β_0	-1.4957	0.0043	0.3874	0.3873
	β_1	1.5028	0.0028	0.4672	0.4671
	τ_0	-1.1923	0.0077	0.1080	0.1082
	τ_1	1.0017	0.0017	0.1878	0.1877
	σ^2	0.7062	-0.0438	0.3539	0.3566
500	β_0	-1.5147	-0.0147	0.2436	0.2440
	β_1	1.5182	0.0182	0.2910	0.2915
	τ_0	-1.1965	0.0035	0.0663	0.0663
	τ_1	0.9993	-0.0007	0.1172	0.1171
	σ^2	0.7387	-0.0113	0.2241	0.2243

Tabela 24 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 4$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 1.25$)

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.4821	0.0179	0.9030	0.9030
	β_1	1.4980	-0.0020	1.0344	1.0341
	τ_0	-1.1770	0.0230	0.2554	0.2564
	τ_1	1.0391	0.0391	0.4540	0.4556
	σ^2	1.1166	-0.1334	0.9500	0.9591
100	β_0	-1.4978	0.0022	0.6036	0.6035
	β_1	1.4943	-0.0057	0.7030	0.7028
	τ_0	-1.1890	0.0110	0.1731	0.1734
	τ_1	1.0111	0.0111	0.3160	0.3161
	σ^2	1.1376	-0.1124	0.6790	0.6881
200	β_0	-1.5005	-0.0005	0.4308	0.4307
	β_1	1.4957	-0.0043	0.4956	0.4955
	τ_0	-1.1873	0.0127	0.1253	0.1259
	τ_1	0.9960	-0.0040	0.2188	0.2188
	σ^2	1.2088	-0.0412	0.5026	0.5042
500	β_0	-1.4897	0.0103	0.2742	0.2743
	β_1	1.4889	-0.0111	0.3244	0.3245
	τ_0	-1.1974	0.0026	0.0744	0.0745
	τ_1	1.0006	0.0006	0.1321	0.1320
	σ^2	1.2250	-0.0250	0.3152	0.3161

Tabela 25 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 6$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 1.25$)

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.4558	0.0442	0.8515	0.8525
	β_1	1.4696	-0.0304	0.9767	0.9769
	τ_0	-1.1716	0.0284	0.2379	0.2396
	τ_1	1.0192	0.0192	0.4233	0.4236
	σ^2	1.0950	-0.1550	0.9140	0.9268
100	β_0	-1.5195	-0.0195	0.5851	0.5852
	β_1	1.5178	0.0178	0.6853	0.6854
	τ_0	-1.1802	0.0198	0.1638	0.1649
	σ^2	1.1428	-0.1072	0.6656	0.6740
200	β_0	-1.5106	-0.0106	0.4150	0.4151
	β_1	1.5109	0.0109	0.4790	0.4790
	τ_0	-1.1935	0.0065	0.1144	0.1145
	τ_1	1.0051	0.0051	0.2041	0.2041
	σ^2	1.2028	-0.0472	0.4913	0.4934
500	β_0	-1.4984	0.0016	0.2562	0.2561
	β_1	1.4982	-0.0018	0.2925	0.2924
	τ_0	-1.1965	0.0035	0.0707	0.0707
	τ_1	1.0008	0.0008	0.1257	0.1257
	σ^2	1.2367	-0.0133	0.3103	0.3106

Tabela 26 – Resultados numéricos para o modelo GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 8$) para diferentes tamanho de amostra. ($\sigma^2 = 1.25$)

n	Parâmetro	Média	Viés	sd	$\sqrt{\text{EQM}}$
50	β_0	-1.4986	0.0014	0.8315	0.8313
	β_1	1.5107	0.0107	0.9596	0.9594
	τ_0	-1.1645	0.0355	0.2355	0.2381
	τ_1	1.0059	0.0059	0.4260	0.4259
	σ^2	1.1027	-0.1473	0.9031	0.9148
100	β_0	-1.5024	-0.0024	0.5794	0.5793
	β_1	1.5137	0.0137	0.6712	0.6712
	τ_0	-1.1880	0.0120	0.1593	0.1597
	τ_1	1.0102	0.0102	0.2873	0.2874
	σ^2	1.1698	-0.0802	0.6407	0.6456
200	β_0	-1.4924	0.0076	0.4185	0.4184
	β_1	1.4873	-0.0127	0.4733	0.4734
	τ_0	-1.1929	0.0071	0.1120	0.1122
	τ_1	1.0017	0.0017	0.1958	0.1958
	σ^2	1.1994	-0.0506	0.4600	0.4626
500	β_0	-1.4991	0.0009	0.2528	0.2528
	β_1	1.4998	-0.0002	0.2916	0.2915
	τ_0	-1.1985	0.0015	0.0680	0.0680
	τ_1	1.0004	0.0004	0.1207	0.1207
	σ^2	1.2302	-0.0198	0.3045	0.3051

APÊNDICE C – Resultado das simulações de Monte Carlo

C.1 Medidas descritivas para r_{ij}^q

Tabela 27 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade normal, $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 20$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	0.030	1.020	0.057	2.865
1	2	0.019	1.016	0.053	2.887
1	3	0.033	1.024	0.113	2.859
1	4	0.044	1.027	0.148	2.863
1	5	0.097	0.882	0.374	2.637
2	1	-0.065	1.004	-0.197	2.887
2	2	-0.074	1.004	-0.219	2.865
2	3	0.009	0.951	0.011	2.566
2	4	-0.161	0.846	-0.662	3.101
2	5	-0.097	0.965	-0.307	2.914
3	1	0.085	0.966	0.250	2.941
3	2	0.067	0.967	0.230	2.883
3	3	0.009	0.964	0.028	2.570
3	4	0.136	0.788	0.625	3.050
3	5	0.032	1.009	0.085	2.846
4	1	0.014	1.014	0.044	2.881
4	2	0.004	1.013	0.066	2.833
4	3	0.030	1.035	0.065	2.815
4	4	0.051	0.989	0.199	2.679
4	5	0.039	0.959	0.182	2.697
5	1	0.013	0.944	0.043	2.766
5	2	0.015	0.920	0.008	2.673
5	3	-0.001	1.034	-0.005	2.821
5	4	0.003	1.000	-0.026	2.696
5	5	-0.001	0.980	-0.005	2.655
6	1	-0.007	0.977	-0.026	2.780
6	2	0.006	1.030	-0.020	2.786
6	3	-0.011	1.033	-0.028	2.756
6	4	-0.008	0.979	-0.031	2.638
6	5	-0.026	0.898	-0.124	2.643
7	1	0.012	0.926	0.015	2.750
7	2	-0.004	1.013	-0.034	2.777
7	3	0.007	0.979	-0.012	2.598
7	4	-0.008	1.022	-0.014	2.760
7	5	-0.014	0.880	-0.119	2.596
8	1	0.009	0.861	0.027	2.839
8	2	-0.001	0.961	-0.008	2.558
8	3	0.012	0.999	0.018	2.829
8	4	-0.026	0.991	-0.092	2.849
8	5	-0.019	0.845	-0.104	2.874
9	1	-0.030	0.977	-0.090	2.672
9	2	-0.081	0.864	-0.355	2.793
9	3	-0.043	0.986	-0.172	2.863
9	4	-0.010	1.006	-0.029	2.776
9	5	-0.072	1.000	-0.255	2.912
10	1	-0.012	0.994	-0.054	2.679
10	2	-0.007	0.984	-0.027	2.664
10	3	0.002	0.971	-0.012	2.635
10	4	-0.051	0.736	-0.428	2.853
10	5	-0.013	0.992	-0.063	2.866

Tabela 28 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade normal, $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 20$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	0.005	0.979	-0.013	2.704
1	2	0.003	1.014	0.021	2.898
1	3	0.055	1.009	0.175	2.707
1	4	0.021	1.028	0.045	2.689
1	5	0.024	0.901	0.106	2.599
2	1	0.073	0.605	0.571	3.184
2	2	-0.010	1.015	-0.025	2.878
2	3	0.013	1.020	0.065	2.860
2	4	-0.007	0.965	-0.008	2.695
2	5	0.005	0.953	0.012	2.744
3	1	0.015	1.011	0.055	2.845
3	2	0.004	0.984	-0.010	2.699
3	3	0.078	0.987	0.245	2.803
3	4	0.082	0.971	0.229	2.713
3	5	0.091	0.935	0.297	2.759
4	1	-0.054	0.969	-0.154	2.778
4	2	-0.033	0.976	-0.068	2.753
4	3	-0.079	0.943	-0.251	2.902
4	4	-0.042	0.959	-0.133	2.753
4	5	-0.057	0.972	-0.153	2.847
5	1	-0.102	0.780	-0.423	2.751
5	2	-0.057	1.004	-0.157	2.821
5	3	0.003	0.977	-0.001	2.686
5	4	-0.022	1.011	-0.055	2.858
5	5	-0.010	1.015	-0.007	2.860
6	1	0.043	0.929	0.135	2.643
6	2	0.012	1.047	0.025	2.870
6	3	0.009	0.990	0.064	2.612
6	4	0.018	1.021	0.072	2.678
6	5	-0.010	0.987	-0.014	2.703
7	1	-0.027	0.979	-0.073	2.756
7	2	-0.119	0.993	-0.312	2.915
7	3	-0.048	1.012	-0.128	2.887
7	4	-0.060	1.012	-0.161	2.875
7	5	-0.284	0.681	-1.533	4.147
8	1	0.020	1.013	0.068	2.905
8	2	0.018	0.993	0.054	2.793
8	3	0.045	1.036	0.120	2.905
8	4	0.061	1.038	0.146	2.744
8	5	0.126	0.840	0.459	2.765
9	1	-0.174	0.874	-0.612	2.986
9	2	-0.057	1.015	-0.171	2.897
9	3	-0.042	0.985	-0.118	2.682
9	4	-0.220	0.894	-0.753	3.054
9	5	-0.038	0.988	-0.138	2.804
10	1	0.134	0.763	0.612	2.920
10	2	0.061	0.999	0.218	2.846
10	3	0.025	0.985	0.075	2.688
10	4	0.017	1.000	0.059	2.784
10	5	0.027	1.007	0.091	2.846

Tabela 29 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade normal, $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 20$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	-0.058	0.963	-0.155	2.773
1	2	-0.092	0.913	-0.308	2.671
1	3	-0.019	1.029	-0.041	2.864
1	4	-0.013	0.961	-0.028	2.652
1	5	-0.003	1.025	-0.034	2.851
2	1	0.020	1.030	0.057	2.879
2	2	0.008	1.010	-0.004	2.777
2	3	0.045	1.040	0.123	2.736
2	4	0.039	1.035	0.145	2.846
2	5	0.122	0.797	0.445	2.677
3	1	0.045	0.988	0.177	2.829
3	2	0.090	0.917	0.284	2.892
3	3	0.017	0.953	0.020	2.613
3	4	0.089	0.950	0.314	2.955
3	5	0.078	0.956	0.247	2.958
4	1	-0.034	0.942	-0.135	2.801
4	2	0.003	0.949	0.009	2.613
4	3	-0.008	0.988	-0.017	2.742
4	4	-0.048	1.017	-0.164	2.884
4	5	-0.142	0.758	-0.695	3.099
5	1	0.162	0.949	0.534	2.948
5	2	0.236	0.843	0.906	3.338
5	3	0.093	1.018	0.244	2.944
5	4	0.133	0.977	0.383	2.938
5	5	0.017	0.981	0.034	2.694
6	1	0.025	0.855	0.126	2.660
6	2	0.005	1.016	-0.010	2.789
6	3	0.008	1.037	0.022	2.838
6	4	0.002	0.978	-0.014	2.784
6	5	0.003	1.044	0.010	2.895
7	1	-0.043	0.709	-0.278	2.936
7	2	-0.025	0.937	-0.090	2.880
7	3	-0.018	0.998	-0.032	2.805
7	4	-0.006	0.985	0.008	2.746
7	5	0.007	0.975	0.011	2.625
8	1	-0.004	1.024	-0.026	2.808
8	2	-0.019	0.938	-0.087	2.616
8	3	-0.011	1.034	-0.044	2.753
8	4	-0.006	1.005	0.014	2.826
8	5	-0.048	0.910	-0.134	2.614
9	1	-0.038	0.971	-0.098	2.624
9	2	-0.035	0.957	-0.088	2.627
9	3	-0.266	0.885	-0.926	3.408
9	4	-0.209	0.951	-0.678	3.306
9	5	-0.043	0.948	-0.110	2.748
10	1	-0.014	0.945	-0.042	2.731
10	2	-0.001	1.038	0.009	2.827
10	3	-0.001	0.992	-0.014	2.705
10	4	0.002	1.038	0.024	2.839
10	5	-0.021	0.988	-0.094	2.845

Tabela 30 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 4$), $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 20$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	-0.091	0.783	-0.109	3.245
1	2	-0.010	1.006	-0.062	2.981
1	3	-0.006	0.968	-0.021	2.969
1	4	0.000	1.015	0.006	2.827
1	5	-0.058	0.994	-0.123	2.936
2	1	-0.066	1.001	-0.108	2.996
2	2	-0.230	0.839	-0.962	3.408
2	3	-0.021	0.970	-0.070	2.861
2	4	-0.024	1.003	-0.040	2.835
2	5	-0.124	0.988	-0.362	3.085
3	1	-0.021	0.897	-0.001	3.272
3	2	-0.019	1.018	-0.074	2.891
3	3	-0.004	1.008	0.057	2.869
3	4	-0.022	1.020	-0.053	2.907
3	5	-0.006	1.012	0.008	2.900
4	1	0.049	1.021	0.141	2.937
4	2	0.008	0.956	0.031	2.877
4	3	0.030	0.976	0.204	2.878
4	4	0.026	0.975	0.178	3.025
4	5	0.016	0.988	0.055	2.776
5	1	0.006	0.987	0.035	2.809
5	2	0.001	0.993	0.050	3.074
5	3	0.007	0.992	0.074	3.061
5	4	0.002	0.958	-0.025	2.825
5	5	-0.045	0.818	0.037	3.350
6	1	0.022	1.013	0.080	2.882
6	2	0.012	1.016	0.094	2.852
6	3	-0.016	0.982	-0.075	2.925
6	4	0.021	0.796	0.197	3.401
6	5	-0.002	0.973	-0.031	2.906
7	1	0.095	0.991	0.239	3.113
7	2	0.194	0.901	0.677	3.538
7	3	0.070	0.990	0.175	2.977
7	4	0.011	0.960	-0.009	2.914
7	5	0.206	0.888	0.730	4.010
8	1	-0.008	0.975	-0.063	2.906
8	2	0.002	0.938	0.052	3.186
8	3	-0.027	0.908	-0.151	3.441
8	4	-0.016	0.961	0.017	3.228
8	5	-0.022	0.975	-0.085	2.834
9	1	0.041	0.972	0.112	2.873
9	2	0.250	0.772	1.043	4.988
9	3	0.148	0.968	0.390	3.186
9	4	0.019	0.978	0.062	2.791
9	5	0.103	0.988	0.231	3.131
10	1	0.239	0.787	1.115	4.351
10	2	0.036	0.970	0.097	2.870
10	3	0.035	1.007	0.025	2.906
10	4	0.104	0.971	0.332	3.109
10	5	0.019	0.994	0.068	2.850

Tabela 31 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t -Student ($\nu = 4$), $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 20$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	0.154	0.977	0.390	3.259
1	2	0.023	0.999	0.041	2.900
1	3	0.104	1.047	0.228	3.002
1	4	0.143	1.011	0.401	3.058
1	5	0.180	0.889	0.583	3.512
2	1	0.021	0.927	0.010	2.871
2	2	0.044	0.971	0.063	2.963
2	3	0.254	0.672	1.403	4.737
2	4	0.027	1.004	0.066	2.945
2	5	0.003	0.963	-0.011	3.004
3	1	-0.071	0.855	-0.345	3.807
3	2	-0.014	0.948	-0.057	2.948
3	3	-0.003	0.986	0.013	2.935
3	4	-0.058	1.033	-0.153	2.829
3	5	-0.145	0.872	-0.580	3.465
4	1	-0.167	0.922	-0.523	3.516
4	2	-0.088	0.971	-0.180	3.159
4	3	-0.034	0.953	-0.052	2.838
4	4	-0.070	0.968	-0.124	3.050
4	5	-0.142	0.962	-0.349	3.370
5	1	0.019	0.980	0.015	3.111
5	2	0.026	0.975	0.061	3.087
5	3	0.047	0.843	0.165	4.051
5	4	0.011	0.957	0.007	2.896
5	5	0.017	0.977	0.063	3.084
6	1	0.072	1.012	0.136	2.973
6	2	0.039	0.999	0.080	2.959
6	3	0.174	0.864	0.642	3.428
6	4	0.109	1.004	0.323	3.001
6	5	0.072	1.005	0.171	2.965
7	1	-0.031	0.615	-0.278	4.589
7	2	-0.006	0.971	-0.038	2.902
7	3	0.002	0.975	0.058	2.947
7	4	0.004	0.961	-0.008	2.965
7	5	-0.029	1.015	-0.055	3.049
8	1	-0.061	1.015	-0.160	3.046
8	2	-0.029	1.030	-0.045	2.899
8	3	-0.109	0.932	-0.393	3.121
8	4	-0.102	0.996	-0.260	3.021
8	5	-0.029	1.025	-0.014	2.875
9	1	-0.118	0.991	-0.260	3.298
9	2	-0.121	1.016	-0.289	3.104
9	3	-0.078	1.014	-0.216	3.053
9	4	-0.116	1.022	-0.261	3.068
9	5	-0.185	0.908	-0.652	3.624
10	1	-0.005	1.001	-0.018	2.968
10	2	-0.052	1.013	-0.149	3.038
10	3	-0.012	0.979	-0.056	2.942
10	4	-0.068	0.728	-0.401	4.340
10	5	-0.017	0.959	-0.008	2.885

Tabela 32 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 4$), $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 20$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	-0.130	0.975	-0.343	3.157
1	2	-0.018	0.959	-0.080	2.885
1	3	-0.134	1.011	-0.289	2.966
1	4	-0.240	0.913	-0.810	3.374
1	5	-0.084	1.007	-0.234	3.005
2	1	0.007	0.978	-0.068	3.001
2	2	0.009	0.978	0.038	2.898
2	3	0.009	0.972	-0.035	2.818
2	4	0.015	1.025	0.015	2.980
2	5	0.008	0.805	-0.142	3.033
3	1	0.048	0.691	0.415	3.669
3	2	0.013	1.000	0.039	2.846
3	3	0.020	1.008	0.087	2.877
3	4	0.003	1.007	0.023	2.995
3	5	-0.005	0.989	-0.004	2.952
4	1	0.092	0.982	0.256	3.210
4	2	0.089	0.983	0.262	3.041
4	3	0.133	0.954	0.332	3.271
4	4	0.144	0.882	0.423	3.769
4	5	0.028	0.951	0.095	2.903
5	1	0.014	0.969	-0.010	2.886
5	2	0.022	0.960	0.018	2.815
5	3	0.140	0.947	0.410	3.311
5	4	0.070	0.992	0.156	2.986
5	5	0.186	0.826	0.766	4.224
6	1	0.006	1.009	0.019	3.014
6	2	-0.013	0.935	0.068	3.150
6	3	-0.007	1.018	-0.038	2.935
6	4	-0.011	0.969	0.072	2.984
6	5	-0.007	1.006	-0.027	2.882
7	1	-0.005	0.966	-0.022	2.905
7	2	-0.018	1.023	-0.027	3.010
7	3	-0.046	0.941	0.061	2.857
7	4	-0.010	0.965	-0.002	2.822
7	5	-0.046	0.938	0.001	3.044
8	1	0.147	0.960	0.425	3.335
8	2	0.040	0.980	0.086	2.903
8	3	0.164	0.952	0.452	3.386
8	4	0.068	0.993	0.151	3.074
8	5	0.215	0.886	0.682	3.841
9	1	0.003	0.971	0.010	3.169
9	2	-0.005	0.997	-0.002	2.925
9	3	-0.014	0.999	-0.023	2.964
9	4	-0.055	0.876	0.022	3.043
9	5	-0.002	1.005	-0.022	2.968
10	1	0.184	0.952	0.451	3.498
10	2	0.118	0.972	0.281	3.143
10	3	0.087	0.972	0.178	2.962
10	4	0.080	0.980	0.191	3.064
10	5	0.147	0.970	0.370	3.175

Tabela 33 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t -Student ($\nu = 4$), $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 90$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	-0.054	0.839	-0.149	3.546
1	2	0.002	0.998	-0.035	2.980
1	3	-0.003	0.973	-0.015	2.967
1	4	0.025	1.006	0.058	2.850
1	5	0.019	0.994	0.003	2.921
2	1	0.009	0.999	0.073	2.942
2	2	0.009	0.927	0.021	2.586
2	3	0.003	0.969	-0.016	2.858
2	4	0.013	1.000	0.043	2.849
2	5	0.025	0.998	0.057	2.872
3	1	-0.044	0.903	-0.094	3.320
3	2	-0.015	1.010	-0.072	2.910
3	3	0.043	0.994	0.134	2.923
3	4	0.028	1.012	0.051	2.891
3	5	0.011	1.006	0.047	2.909
4	1	0.006	1.022	0.021	2.858
4	2	0.006	0.961	0.034	2.891
4	3	0.013	0.993	0.074	2.892
4	4	0.037	0.991	0.108	2.994
4	5	0.017	0.988	0.060	2.778
5	1	-0.029	0.986	-0.039	2.803
5	2	-0.181	1.011	-0.313	2.996
5	3	-0.138	0.994	-0.238	3.052
5	4	-0.009	0.962	-0.041	2.833
5	5	-0.334	0.933	-0.643	3.225
6	1	0.003	1.008	0.033	2.863
6	2	-0.008	1.013	0.002	2.855
6	3	-0.017	0.984	-0.080	2.923
6	4	0.070	0.833	0.239	3.610
6	5	-0.001	0.977	-0.024	2.900
7	1	0.064	0.990	0.139	3.046
7	2	0.162	0.920	0.492	3.079
7	3	0.056	0.986	0.140	2.975
7	4	0.007	0.964	-0.020	2.900
7	5	0.217	0.904	0.645	3.438
8	1	-0.003	0.977	-0.048	2.896
8	2	0.054	0.969	0.241	2.952
8	3	0.050	0.963	0.168	2.946
8	4	0.057	0.982	0.209	3.037
8	5	-0.012	0.977	-0.059	2.835
9	1	0.025	0.974	0.078	2.860
9	2	0.156	0.757	0.688	3.467
9	3	0.103	0.958	0.317	3.107
9	4	0.007	0.978	0.032	2.793
9	5	0.079	0.980	0.179	3.114
10	1	0.072	0.874	0.344	2.827
10	2	0.024	0.973	0.070	2.856
10	3	0.010	1.003	-0.029	2.908
10	4	0.052	0.985	0.195	2.895
10	5	0.006	0.993	0.043	2.840

Tabela 34 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t -Student ($\nu = 4$), $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 90$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	0.117	0.938	0.312	3.180
1	2	0.015	1.009	0.021	2.876
1	3	0.085	0.996	0.187	3.056
1	4	0.123	0.957	0.332	3.067
1	5	0.157	0.869	0.464	3.386
2	1	0.010	0.973	-0.005	2.782
2	2	0.030	0.989	0.028	2.939
2	3	0.228	0.846	0.473	2.333
2	4	0.012	0.995	0.020	2.966
2	5	-0.010	0.978	-0.046	2.978
3	1	0.074	0.856	0.157	3.337
3	2	0.005	0.980	-0.011	2.885
3	3	0.021	1.003	0.064	2.906
3	4	0.018	0.975	0.018	2.880
3	5	0.035	0.863	-0.051	3.164
4	1	-0.201	0.829	-0.780	3.936
4	2	-0.102	0.931	-0.239	3.273
4	3	-0.034	0.998	-0.046	2.767
4	4	-0.072	0.981	-0.128	3.021
4	5	-0.158	0.895	-0.451	3.582
5	1	-0.041	0.940	-0.167	3.190
5	2	-0.029	0.939	-0.102	3.166
5	3	-0.074	0.747	-0.446	3.848
5	4	-0.009	0.989	-0.041	2.834
5	5	-0.009	0.988	0.019	3.088
6	1	-0.033	0.976	-0.100	3.008
6	2	-0.012	1.004	-0.029	2.947
6	3	-0.141	0.950	-0.207	2.503
6	4	-0.076	0.959	-0.091	2.874
6	5	-0.012	0.979	-0.015	2.981
7	1	-0.005	0.694	-0.289	3.059
7	2	-0.002	0.990	-0.020	2.857
7	3	0.008	0.986	0.068	2.924
7	4	0.009	0.981	-0.001	2.925
7	5	-0.014	0.983	-0.042	3.099
8	1	0.002	0.959	-0.006	3.049
8	2	0.006	1.006	0.031	2.941
8	3	0.013	0.920	-0.079	2.821
8	4	-0.007	0.949	-0.055	2.926
8	5	0.022	0.988	0.106	2.915
9	1	-0.261	0.959	-0.710	3.380
9	2	-0.246	0.977	-0.652	3.231
9	3	-0.147	0.990	-0.380	3.141
9	4	-0.234	0.980	-0.616	3.207
9	5	-0.379	0.952	-1.219	3.589
10	1	0.003	1.007	0.004	2.940
10	2	-0.026	0.966	-0.127	3.042
10	3	0.000	0.977	-0.030	2.930
10	4	-0.002	0.785	-0.225	2.819
10	5	-0.007	0.982	0.011	2.839

Tabela 35 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t -Student ($\nu = 4$), $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 90$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	0.107	0.993	0.217	3.004
1	2	0.011	0.960	-0.010	2.890
1	3	0.102	1.020	0.206	2.887
1	4	0.177	0.979	0.301	2.989
1	5	0.084	1.008	0.152	2.970
2	1	-0.047	0.997	-0.052	2.988
2	2	0.006	0.979	0.033	2.904
2	3	0.005	0.972	-0.044	2.816
2	4	0.001	1.025	-0.004	2.951
2	5	-0.082	0.872	-0.102	3.262
3	1	-0.045	0.812	-0.042	3.398
3	2	0.000	1.001	0.016	2.833
3	3	-0.014	1.014	0.006	2.849
3	4	-0.011	1.006	-0.006	2.997
3	5	-0.015	0.989	-0.025	2.928
4	1	0.083	0.987	0.243	3.144
4	2	0.083	0.986	0.252	2.999
4	3	0.121	0.964	0.345	3.138
4	4	0.131	0.910	0.455	3.338
4	5	0.026	0.952	0.093	2.899
5	1	0.005	0.970	-0.030	2.892
5	2	0.014	0.964	-0.007	2.829
5	3	0.088	0.974	0.322	2.991
5	4	0.043	0.992	0.104	2.959
5	5	0.114	0.897	0.536	3.220
6	1	-0.017	1.010	-0.032	3.013
6	2	-0.079	0.976	-0.156	3.081
6	3	-0.036	1.019	-0.094	2.930
6	4	-0.064	1.002	-0.124	2.949
6	5	-0.017	1.004	-0.048	2.875
7	1	-0.008	0.968	-0.015	2.924
7	2	-0.045	1.028	-0.102	3.000
7	3	-0.108	0.996	-0.184	2.871
7	4	-0.014	0.966	-0.010	2.838
7	5	-0.093	0.966	-0.171	3.058
8	1	0.108	0.971	0.345	3.204
8	2	0.030	0.980	0.067	2.897
8	3	0.122	0.973	0.366	3.149
8	4	0.050	0.992	0.116	3.049
8	5	0.163	0.925	0.542	3.289
9	1	-0.020	0.992	-0.061	3.075
9	2	-0.011	0.998	-0.022	2.926
9	3	-0.032	1.009	-0.070	2.911
9	4	-0.093	0.965	-0.086	2.917
9	5	-0.012	1.009	-0.042	2.933
10	1	0.273	0.911	0.766	3.940
10	2	0.175	0.952	0.444	3.308
10	3	0.131	0.960	0.296	3.043
10	4	0.120	0.971	0.297	3.144
10	5	0.218	0.945	0.598	3.477

Tabela 36 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t -Student ($\nu = 6$), $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 20$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	-0.001	1.020	0.003	2.902
1	2	0.002	1.027	0.024	2.905
1	3	0.005	0.987	0.011	2.836
1	4	-0.028	0.933	-0.181	2.633
1	5	-0.011	0.974	-0.038	2.840
2	1	0.017	0.978	0.068	2.920
2	2	-0.016	1.008	-0.049	2.831
2	3	0.022	1.034	0.068	2.793
2	4	0.000	1.003	0.017	2.890
2	5	0.016	0.888	0.011	3.044
3	1	0.002	0.974	0.002	2.738
3	2	0.000	0.993	0.012	2.838
3	3	-0.043	1.018	-0.137	3.003
3	4	-0.016	0.992	-0.062	2.942
3	5	-0.086	0.833	-0.398	2.606
4	1	0.021	0.974	0.059	2.939
4	2	0.074	0.838	0.311	3.579
4	3	0.026	0.979	0.032	2.941
4	4	0.041	0.970	0.110	3.028
4	5	0.079	0.897	0.311	3.381
5	1	-0.036	1.012	-0.171	2.875
5	2	-0.037	1.041	-0.103	2.788
5	3	0.020	1.013	0.067	2.858
5	4	-0.018	0.977	-0.034	2.878
5	5	-0.060	0.953	-0.360	3.023
6	1	0.021	0.965	0.051	2.880
6	2	0.051	0.945	0.135	3.237
6	3	-0.006	0.951	-0.089	2.783
6	4	0.022	0.955	0.070	3.125
6	5	0.038	0.953	0.074	2.978
7	1	0.020	1.024	0.022	2.947
7	2	0.002	0.927	-0.026	2.777
7	3	0.022	1.027	0.060	2.930
7	4	0.001	1.029	0.012	2.967
7	5	0.004	1.004	-0.023	2.892
8	1	0.009	1.013	0.000	2.911
8	2	0.006	1.014	-0.037	2.904
8	3	0.014	0.987	0.038	2.827
8	4	-0.009	1.000	-0.027	2.915
8	5	0.027	0.887	-0.040	2.627
9	1	-0.035	0.992	-0.127	2.859
9	2	-0.066	0.943	-0.236	2.705
9	3	-0.038	1.012	-0.106	2.981
9	4	-0.028	0.998	-0.073	2.848
9	5	-0.034	1.012	-0.053	3.006
10	1	0.010	0.918	-0.020	3.075
10	2	-0.012	0.983	-0.010	2.870
10	3	0.010	1.024	0.001	2.858
10	4	0.015	0.998	0.005	2.734
10	5	-0.002	0.979	-0.019	2.858

Tabela 37 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 6$), $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 20$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	0.055	0.981	0.143	2.933
1	2	0.062	0.981	0.174	2.990
1	3	0.155	0.967	0.444	3.288
1	4	0.270	0.828	1.048	3.993
1	5	0.122	1.003	0.328	3.152
2	1	-0.020	0.991	-0.039	2.915
2	2	-0.045	1.015	-0.085	2.941
2	3	-0.190	0.714	-1.039	3.441
2	4	-0.014	0.991	-0.065	2.891
2	5	-0.016	0.987	-0.010	2.863
3	1	-0.108	0.950	-0.364	3.060
3	2	-0.021	1.001	-0.044	2.941
3	3	-0.146	0.889	-0.575	3.165
3	4	-0.027	0.992	-0.065	2.820
3	5	-0.108	0.964	-0.384	3.106
4	1	0.002	1.001	-0.007	2.975
4	2	0.046	0.554	0.425	4.336
4	3	-0.002	0.977	-0.014	2.877
4	4	0.001	0.984	0.004	2.977
4	5	0.014	0.959	0.034	2.878
5	1	-0.030	1.011	-0.009	2.970
5	2	-0.034	0.977	-0.063	2.962
5	3	-0.025	0.999	-0.027	2.976
5	4	-0.028	1.008	-0.057	2.906
5	5	-0.197	0.670	-1.160	3.766
6	1	-0.010	0.944	-0.032	3.179
6	2	-0.005	0.952	0.019	3.060
6	3	0.017	0.993	0.031	2.909
6	4	0.005	1.011	-0.004	2.893
6	5	0.012	0.904	-0.001	3.083
7	1	-0.020	1.009	-0.066	2.950
7	2	-0.028	1.007	-0.048	2.843
7	3	-0.014	0.983	-0.043	2.935
7	4	-0.018	0.978	-0.049	2.874
7	5	-0.144	0.721	-0.797	3.228
8	1	0.089	0.956	0.246	3.191
8	2	0.054	1.035	0.123	2.879
8	3	0.017	0.978	0.032	2.850
8	4	0.176	0.958	0.473	2.938
8	5	0.120	0.997	0.301	2.936
9	1	0.004	0.964	-0.031	2.838
9	2	-0.001	0.973	-0.026	2.900
9	3	0.009	1.019	0.023	2.930
9	4	0.072	0.907	0.344	2.715
9	5	0.061	0.991	0.236	2.772
10	1	-0.051	0.929	-0.168	3.168
10	2	0.000	0.978	-0.002	2.763
10	3	-0.006	0.963	-0.026	2.774
10	4	-0.017	1.034	-0.066	2.821
10	5	-0.064	0.891	-0.355	2.936

Tabela 38 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 6$), $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 20$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	0.061	1.002	0.169	2.932
1	2	0.235	0.666	1.336	4.394
1	3	0.005	0.985	-0.025	2.893
1	4	0.011	0.979	0.005	2.891
1	5	0.026	1.015	0.039	2.942
2	1	0.116	1.006	0.253	3.041
2	2	0.071	1.015	0.179	2.902
2	3	0.064	1.019	0.141	2.944
2	4	0.066	1.010	0.159	2.986
2	5	0.202	0.699	1.107	4.456
3	1	0.168	0.926	0.624	3.113
3	2	0.026	0.979	0.036	2.907
3	3	0.014	1.019	0.022	2.880
3	4	0.088	0.809	0.503	3.043
3	5	0.017	1.001	0.080	2.891
4	1	0.109	0.970	0.348	3.106
4	2	0.087	0.997	0.189	3.026
4	3	0.119	0.833	0.588	3.546
4	4	0.016	0.935	0.020	2.803
4	5	0.009	0.933	-0.015	2.802
5	1	-0.172	0.728	-0.879	3.380
5	2	-0.047	1.028	-0.139	2.926
5	3	0.008	0.938	0.019	2.833
5	4	-0.140	1.018	-0.377	3.065
5	5	-0.041	0.958	-0.103	2.844
6	1	-0.268	0.722	-1.289	4.541
6	2	-0.036	0.978	-0.061	2.813
6	3	-0.111	1.014	-0.226	3.015
6	4	-0.104	1.011	-0.249	3.007
6	5	-0.120	1.007	-0.276	3.041
7	1	-0.024	0.987	-0.031	2.912
7	2	-0.007	0.972	-0.073	3.012
7	3	-0.023	1.021	-0.062	2.928
7	4	0.000	0.951	-0.006	2.822
7	5	-0.121	0.770	-0.549	3.654
8	1	-0.140	0.986	-0.435	3.122
8	2	-0.121	1.020	-0.309	2.989
8	3	-0.268	0.871	-0.994	3.609
8	4	-0.028	0.990	-0.035	2.815
8	5	-0.089	1.002	-0.258	3.004
9	1	0.019	1.000	0.047	2.977
9	2	0.017	1.010	0.050	3.036
9	3	0.003	1.016	0.017	2.957
9	4	-0.005	0.996	-0.047	2.991
9	5	-0.014	0.692	0.006	4.034
10	1	0.118	0.899	0.463	3.162
10	2	0.062	1.002	0.210	2.849
10	3	0.018	1.024	0.090	2.949
10	4	-0.002	0.951	-0.026	2.897
10	5	-0.009	1.009	-0.029	2.910

Tabela 39 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t -Student ($\nu = 6$), $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 90$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	-0.001	0.999	-0.007	2.820
1	2	-0.017	0.908	-0.150	2.821
1	3	0.000	0.980	-0.057	2.831
1	4	-0.016	0.964	-0.045	2.854
1	5	-0.006	1.005	-0.007	2.953
2	1	0.050	0.925	0.180	2.991
2	2	-0.010	0.976	-0.045	2.735
2	3	0.056	0.957	0.226	2.924
2	4	0.026	0.978	0.100	3.021
2	5	0.002	0.977	-0.015	2.766
3	1	0.039	0.864	0.058	2.991
3	2	0.003	1.010	0.041	2.866
3	3	0.003	0.998	-0.003	2.885
3	4	-0.007	0.991	0.024	2.959
3	5	-0.006	0.930	-0.054	3.083
4	1	0.009	0.972	-0.019	3.035
4	2	0.000	1.003	-0.007	2.940
4	3	-0.001	0.924	-0.103	2.833
4	4	-0.001	0.989	0.063	2.897
4	5	0.006	0.972	0.008	2.753
5	1	-0.104	0.808	-0.578	2.861
5	2	-0.029	0.984	-0.118	2.941
5	3	-0.015	0.997	-0.001	2.846
5	4	-0.018	0.985	-0.026	2.843
5	5	-0.017	0.980	-0.055	2.819
6	1	-0.077	1.034	-0.131	2.453
6	2	-0.021	0.988	-0.079	2.979
6	3	-0.022	1.002	-0.033	2.893
6	4	-0.107	1.161	-0.137	1.949
6	5	-0.025	0.985	-0.097	2.968
7	1	0.021	0.953	0.026	3.004
7	2	0.012	0.970	0.042	2.765
7	3	0.002	0.993	0.018	2.897
7	4	0.027	0.883	-0.116	2.842
7	5	0.036	0.923	-0.056	3.048
8	1	0.017	0.918	-0.018	3.047
8	2	-0.019	1.001	-0.046	2.851
8	3	0.006	0.992	0.008	2.747
8	4	0.016	0.984	0.060	2.952
8	5	0.016	0.862	-0.025	3.253
9	1	-0.005	0.982	-0.066	3.019
9	2	-0.021	0.993	-0.077	2.776
9	3	0.000	0.936	-0.089	2.798
9	4	-0.005	0.959	-0.126	2.869
9	5	0.009	1.003	0.019	2.963
10	1	0.003	0.986	0.020	2.810
10	2	-0.017	0.911	-0.161	2.691
10	3	-0.021	1.004	-0.069	3.022
10	4	-0.022	0.986	-0.077	2.940
10	5	0.001	0.994	-0.018	2.908

Tabela 40 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t -Student ($\nu = 6$), $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 90$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	0.290	0.809	1.209	4.408
1	2	0.110	0.982	0.292	3.073
1	3	0.166	0.981	0.389	3.231
1	4	0.117	0.980	0.321	3.074
1	5	0.066	0.985	0.170	2.919
2	1	0.049	1.008	0.165	2.829
2	2	0.082	0.950	0.368	2.674
2	3	0.030	1.006	0.055	2.883
2	4	0.012	0.995	0.024	2.877
2	5	0.024	0.991	0.072	2.872
3	1	-0.105	0.819	-0.359	3.738
3	2	-0.010	0.957	-0.030	2.820
3	3	-0.045	0.973	-0.094	2.923
3	4	-0.042	0.976	-0.137	2.870
3	5	-0.107	0.909	-0.346	3.471
4	1	0.028	1.016	0.129	2.845
4	2	0.019	1.027	0.075	2.877
4	3	-0.012	0.954	-0.040	2.801
4	4	0.003	0.991	-0.012	2.881
4	5	0.064	1.008	0.182	2.771
5	1	-0.007	1.031	-0.018	2.859
5	2	-0.009	1.041	-0.017	2.860
5	3	-0.011	0.960	-0.028	2.822
5	4	-0.006	0.967	0.001	2.885
5	5	-0.018	0.840	-0.078	3.116
6	1	-0.014	0.758	-0.070	3.779
6	2	-0.017	1.015	-0.028	2.870
6	3	-0.005	1.012	-0.010	2.860
6	4	-0.012	1.039	-0.012	2.858
6	5	-0.022	0.925	-0.056	3.050
7	1	-0.132	0.933	-0.494	3.157
7	2	-0.061	0.982	-0.154	2.994
7	3	-0.022	0.976	-0.048	2.841
7	4	-0.005	0.976	-0.032	2.889
7	5	-0.082	0.959	-0.294	3.188
8	1	0.031	0.991	0.092	2.870
8	2	0.010	0.950	0.054	2.825
8	3	0.207	0.762	1.064	3.091
8	4	0.025	0.973	0.049	2.878
8	5	0.034	1.001	0.105	2.875
9	1	-0.080	0.834	0.084	2.546
9	2	-0.013	0.988	-0.032	2.902
9	3	-0.003	0.955	0.013	2.788
9	4	0.014	1.009	0.063	2.923
9	5	-0.034	0.985	-0.133	2.853
10	1	-0.002	1.030	0.022	2.840
10	2	-0.009	1.033	-0.026	2.840
10	3	0.012	1.039	0.053	2.691
10	4	0.019	1.029	0.034	2.858
10	5	-0.004	1.000	0.001	2.803

Tabela 41 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 6$), $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 90$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	-0.004	0.913	0.014	3.296
1	2	-0.027	0.930	-0.105	2.934
1	3	-0.015	1.033	0.022	2.787
1	4	-0.006	1.032	-0.004	2.865
1	5	-0.014	0.884	-0.074	3.241
2	1	-0.013	1.009	-0.052	2.944
2	2	-0.032	1.023	-0.096	2.886
2	3	-0.029	0.998	-0.082	2.776
2	4	0.000	1.033	0.039	2.895
2	5	-0.012	1.006	-0.060	3.001
3	1	-0.006	0.990	-0.064	2.901
3	2	0.015	1.019	0.116	2.848
3	3	0.016	1.006	0.039	2.860
3	4	0.012	0.935	0.087	2.993
3	5	-0.014	0.996	-0.024	3.031
4	1	0.007	0.971	-0.003	2.835
4	2	-0.001	1.034	-0.030	2.899
4	3	0.023	0.960	0.137	2.632
4	4	0.003	1.002	0.011	2.979
4	5	0.017	1.005	0.042	2.831
5	1	0.007	0.970	0.033	2.842
5	2	0.019	0.977	0.053	2.833
5	3	0.167	0.768	0.799	2.689
5	4	0.027	0.971	0.031	2.870
5	5	0.002	0.985	-0.025	2.863
6	1	0.010	0.993	0.036	2.952
6	2	0.016	0.773	0.217	3.316
6	3	-0.002	0.989	-0.036	2.902
6	4	0.021	0.894	0.091	3.206
6	5	0.016	0.986	0.087	3.004
7	1	-0.005	0.983	-0.022	2.872
7	2	-0.012	1.019	-0.012	2.760
7	3	-0.013	0.996	-0.012	2.627
7	4	-0.004	0.979	0.046	2.829
7	5	0.014	0.996	0.085	2.936
8	1	-0.001	0.994	-0.006	2.907
8	2	0.004	0.998	0.018	2.893
8	3	0.030	0.887	0.133	2.525
8	4	0.032	0.991	0.092	2.895
8	5	0.010	0.976	0.032	2.845
9	1	0.067	0.657	0.380	2.576
9	2	0.007	0.992	0.029	3.002
9	3	-0.001	0.963	0.027	2.758
9	4	-0.004	0.976	-0.053	2.912
9	5	0.017	0.979	0.070	2.911
10	1	0.010	0.982	0.047	2.908
10	2	-0.008	0.991	0.027	2.901
10	3	-0.003	0.990	-0.018	2.797
10	4	0.007	1.009	0.033	2.975
10	5	-0.017	1.018	-0.059	2.918

Tabela 42 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t -Student ($\nu = 8$), $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 90$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	-0.003	0.956	-0.031	2.738
1	2	-0.058	0.890	-0.322	2.501
1	3	0.008	0.945	0.028	2.725
1	4	-0.023	0.999	-0.045	2.962
1	5	-0.023	0.988	-0.076	2.929
2	1	0.093	0.952	0.404	2.894
2	2	0.020	0.966	0.013	2.781
2	3	0.108	0.928	0.508	2.768
2	4	0.019	0.970	0.069	2.748
2	5	0.020	0.962	0.072	2.799
3	1	-0.033	1.000	-0.121	2.835
3	2	0.003	0.995	0.008	2.884
3	3	-0.044	0.945	-0.243	2.664
3	4	-0.003	1.004	-0.007	2.789
3	5	-0.024	1.016	-0.049	2.951
4	1	-0.006	0.986	-0.016	2.874
4	2	0.002	0.982	-0.011	2.876
4	3	-0.074	0.926	-0.121	2.317
4	4	-0.054	0.960	-0.090	2.732
4	5	-0.012	0.988	-0.020	2.869
5	1	0.029	1.013	0.059	2.982
5	2	0.034	0.988	0.064	2.721
5	3	0.014	1.008	0.065	2.830
5	4	0.007	1.017	0.034	2.801
5	5	0.007	0.627	-0.003	3.324
6	1	0.080	0.935	0.342	3.240
6	2	0.038	0.972	0.100	2.920
6	3	0.081	0.950	0.325	3.070
6	4	0.017	0.940	0.017	2.717
6	5	0.118	0.850	0.573	3.260
7	1	0.020	0.782	0.015	3.046
7	2	-0.002	1.018	0.004	2.864
7	3	0.010	1.017	0.048	2.914
7	4	-0.003	0.996	-0.040	2.883
7	5	0.013	0.972	0.036	2.740
8	1	0.007	0.958	0.017	2.870
8	2	-0.008	0.960	-0.028	2.767
8	3	0.005	0.961	0.004	2.844
8	4	0.002	0.657	0.196	3.004
8	5	-0.001	0.976	-0.025	3.064
9	1	-0.036	0.881	0.126	2.814
9	2	-0.015	0.992	-0.003	2.961
9	3	-0.033	0.965	0.044	2.946
9	4	0.011	0.988	0.042	2.806
9	5	-0.008	0.990	0.008	2.926
10	1	-0.042	0.989	-0.127	3.070
10	2	-0.081	0.871	-0.463	2.984
10	3	-0.025	0.987	-0.086	2.966
10	4	-0.036	0.989	-0.105	2.903
10	5	-0.039	0.980	-0.148	2.986

Tabela 43 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t -Student ($\nu = 8$), $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 90$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	-0.020	1.003	-0.016	2.847
1	2	-0.024	1.001	-0.091	2.868
1	3	-0.027	1.003	-0.080	2.897
1	4	-0.012	0.977	-0.056	2.796
1	5	-0.061	0.884	-0.312	2.587
2	1	0.007	1.023	0.006	2.835
2	2	-0.001	1.016	0.005	2.974
2	3	-0.003	0.986	0.055	2.699
2	4	-0.008	0.969	-0.029	2.772
2	5	0.005	0.956	0.028	2.746
3	1	0.008	1.020	0.028	2.928
3	2	-0.011	0.957	-0.020	2.762
3	3	0.019	1.035	0.068	2.798
3	4	-0.003	1.029	0.010	2.810
3	5	-0.034	0.728	-0.127	3.438
4	1	0.110	0.832	0.466	2.622
4	2	0.008	0.989	0.013	2.882
4	3	0.023	1.009	0.108	2.930
4	4	0.009	0.976	0.017	2.869
4	5	0.013	1.002	0.025	2.930
5	1	0.025	0.762	0.099	3.298
5	2	-0.001	0.990	-0.037	2.915
5	3	-0.009	1.014	-0.002	2.772
5	4	-0.017	1.012	-0.072	2.891
5	5	0.009	0.985	0.040	2.895
6	1	0.000	0.939	0.022	2.726
6	2	0.033	0.988	0.065	2.903
6	3	0.079	0.960	0.259	2.996
6	4	0.076	0.957	0.257	3.051
6	5	0.120	0.881	0.529	3.168
7	1	0.009	0.992	0.074	2.843
7	2	0.043	1.005	0.165	2.860
7	3	0.075	0.948	0.255	2.730
7	4	0.015	1.007	0.056	2.867
7	5	0.055	0.976	0.191	2.886
8	1	-0.198	0.784	-0.364	2.562
8	2	-0.045	1.011	-0.063	2.938
8	3	-0.024	0.980	-0.076	2.892
8	4	-0.014	0.985	-0.005	2.792
8	5	-0.019	0.967	-0.082	2.724
9	1	0.012	1.017	0.050	2.842
9	2	0.002	0.963	0.005	2.832
9	3	-0.005	1.031	-0.024	2.826
9	4	-0.002	1.033	-0.018	2.979
9	5	0.003	0.947	0.009	2.731
10	1	-0.001	1.019	-0.006	2.802
10	2	0.029	1.034	0.077	2.806
10	3	-0.002	1.006	-0.003	2.836
10	4	0.003	1.022	0.032	2.902
10	5	0.002	1.023	0.044	2.886

Tabela 44 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 8$), $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 90$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	0.011	0.957	0.003	2.853
1	2	-0.031	0.953	-0.115	3.009
1	3	-0.039	0.971	-0.093	2.966
1	4	-0.040	0.857	-0.140	3.371
1	5	-0.054	0.828	-0.245	3.360
2	1	-0.102	0.937	-0.318	2.953
2	2	-0.122	0.942	-0.460	3.200
2	3	-0.025	0.973	-0.081	2.840
2	4	-0.038	1.000	-0.100	2.874
2	5	-0.129	0.915	-0.475	3.224
3	1	0.014	0.963	0.083	2.786
3	2	0.001	1.001	-0.003	2.802
3	3	0.011	1.022	0.046	2.881
3	4	0.014	1.024	0.026	2.832
3	5	0.012	0.925	0.011	3.050
4	1	-0.260	0.910	-0.848	3.658
4	2	-0.094	0.959	-0.231	2.913
4	3	-0.201	0.937	-0.600	3.290
4	4	-0.470	0.685	-2.592	7.035
4	5	-0.061	0.962	-0.170	2.889
5	1	0.027	1.018	0.090	2.859
5	2	0.123	0.956	0.259	2.660
5	3	0.001	0.961	-0.014	2.756
5	4	0.007	0.981	-0.010	2.907
5	5	0.014	0.985	0.016	2.919
6	1	0.000	0.971	-0.013	2.924
6	2	-0.025	1.024	-0.092	2.903
6	3	0.017	1.045	0.038	2.908
6	4	0.003	1.018	0.000	2.956
6	5	0.009	0.958	0.041	2.906
7	1	-0.008	0.747	-0.010	3.270
7	2	-0.023	1.032	-0.109	2.896
7	3	0.009	1.020	0.022	2.862
7	4	-0.003	0.983	0.002	2.790
7	5	0.004	1.037	0.033	2.876
8	1	-0.010	0.966	-0.016	2.783
8	2	-0.006	0.960	-0.010	2.739
8	3	0.017	0.984	-0.030	2.793
8	4	0.009	0.987	0.011	2.852
8	5	0.010	1.030	0.049	2.910
9	1	-0.011	1.025	-0.031	2.917
9	2	-0.007	0.969	-0.057	2.876
9	3	-0.035	1.022	-0.069	2.859
9	4	0.015	1.042	0.063	2.892
9	5	0.005	0.967	0.064	2.936
10	1	0.008	1.024	-0.001	2.872
10	2	0.008	0.968	0.012	2.745
10	3	0.010	1.022	0.013	2.753
10	4	0.016	1.001	0.050	2.826
10	5	0.001	1.016	-0.009	2.855

Tabela 45 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 8$), $\xi \in (0.02, 0.20)$ e $\lambda = 20$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	-0.019	0.952	-0.082	2.822
1	2	-0.073	0.937	-0.168	2.862
1	3	-0.025	1.049	-0.046	2.799
1	4	-0.020	1.045	-0.048	2.944
1	5	-0.072	0.863	-0.164	2.831
2	1	-0.023	0.967	-0.043	2.922
2	2	0.005	1.011	0.014	2.910
2	3	-0.044	0.970	-0.099	2.758
2	4	-0.009	1.011	-0.060	2.926
2	5	-0.029	0.951	-0.014	2.837
3	1	0.006	0.994	0.001	2.916
3	2	0.014	0.978	0.085	2.990
3	3	0.015	1.018	0.057	2.872
3	4	0.072	0.754	0.416	3.528
3	5	0.007	0.979	-0.019	2.749
4	1	0.200	0.958	0.630	3.368
4	2	0.065	0.987	0.164	2.903
4	3	0.190	0.997	0.534	3.188
4	4	0.328	0.869	1.193	3.990
4	5	0.063	0.976	0.168	2.841
5	1	-0.091	0.944	-0.232	2.996
5	2	-0.074	1.009	-0.200	2.847
5	3	-0.013	1.000	-0.006	2.923
5	4	-0.106	0.946	-0.230	2.732
5	5	-0.039	1.041	-0.061	2.882
6	1	0.014	0.991	0.099	2.942
6	2	0.008	0.997	0.017	2.850
6	3	-0.005	1.025	0.095	2.901
6	4	-0.003	0.964	-0.056	2.874
6	5	0.025	0.711	0.229	2.837
7	1	0.025	1.010	0.089	3.002
7	2	-0.001	0.958	-0.068	2.769
7	3	0.049	0.646	0.437	3.384
7	4	-0.004	0.973	0.020	2.765
7	5	-0.010	0.971	-0.023	2.813
8	1	0.066	0.981	0.199	2.937
8	2	0.119	0.812	0.459	3.817
8	3	0.017	0.974	0.036	2.841
8	4	0.065	0.997	0.203	3.069
8	5	0.038	0.979	0.129	2.786
9	1	0.054	0.949	0.262	3.097
9	2	0.013	1.005	0.002	2.873
9	3	0.029	1.013	0.107	2.954
9	4	0.022	0.976	0.049	2.813
9	5	0.076	0.758	0.424	2.983
10	1	0.001	0.954	0.036	2.814
10	2	-0.047	0.874	-0.144	3.371
10	3	-0.003	0.984	0.009	2.914
10	4	-0.007	0.971	-0.011	2.814
10	5	0.000	0.909	0.041	3.339

Tabela 46 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 8$), $\xi \in (0.29, 0.77)$ e $\lambda = 20$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	0.021	0.961	0.026	2.762
1	2	0.027	0.970	0.021	2.808
1	3	0.074	0.979	0.206	2.989
1	4	0.168	0.775	0.677	4.165
1	5	0.024	0.946	0.055	2.837
2	1	0.042	1.005	0.102	2.883
2	2	0.089	0.987	0.289	3.029
2	3	0.083	0.975	0.243	3.147
2	4	0.017	0.984	0.025	2.856
2	5	0.147	0.795	0.615	3.498
3	1	0.018	1.026	0.067	2.900
3	2	0.055	0.816	0.357	2.776
3	3	0.000	0.973	0.023	2.826
3	4	-0.001	0.978	-0.010	2.839
3	5	0.052	0.978	0.240	2.880
4	1	0.134	0.966	0.341	3.226
4	2	0.033	0.965	0.060	2.822
4	3	0.091	0.987	0.239	2.965
4	4	0.126	0.984	0.333	3.059
4	5	0.225	0.883	0.764	3.903
5	1	0.039	1.019	0.113	2.937
5	2	-0.001	1.016	0.004	2.868
5	3	0.063	1.027	0.179	2.873
5	4	0.090	0.883	0.416	2.847
5	5	0.049	0.987	0.186	2.894
6	1	0.006	0.984	-0.011	2.811
6	2	0.029	0.939	0.228	2.720
6	3	0.019	1.016	0.060	2.885
6	4	0.006	0.940	0.132	2.812
6	5	0.001	0.987	0.018	2.890
7	1	-0.243	0.850	-0.895	3.358
7	2	-0.126	1.023	-0.352	2.961
7	3	-0.039	0.967	-0.074	2.820
7	4	-0.078	1.032	-0.219	2.946
7	5	-0.112	0.992	-0.321	2.952
8	1	-0.011	0.979	-0.021	2.746
8	2	-0.049	1.033	-0.104	2.900
8	3	-0.205	0.973	-0.582	2.975
8	4	-0.012	0.988	-0.034	2.760
8	5	-0.210	0.795	-0.852	3.607
9	1	0.092	0.786	0.419	2.923
9	2	0.009	0.962	0.072	2.809
9	3	0.058	1.022	0.157	2.752
9	4	0.019	0.985	0.058	2.962
9	5	0.037	1.014	0.109	2.950
10	1	0.039	0.987	0.071	2.986
10	2	0.215	0.878	0.720	3.749
10	3	0.166	0.939	0.504	3.339
10	4	0.063	1.010	0.127	2.892
10	5	0.057	0.992	0.077	2.963

Tabela 47 – Medidas descritivas: Modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade t -Student ($\nu = 8$), $\xi \in (0.80, 0.96)$ e $\lambda = 20$

i	j	Média	sd	Assimetria	Curtose
1	1	0.065	0.968	0.154	3.026
1	2	0.118	0.974	0.330	3.133
1	3	0.027	0.928	0.037	2.790
1	4	0.145	0.945	0.432	3.318
1	5	0.052	0.978	0.100	3.003
2	1	0.054	0.966	0.154	2.915
2	2	0.049	1.010	0.146	2.927
2	3	0.377	0.684	1.813	4.432
2	4	0.015	0.984	0.030	2.808
2	5	0.041	1.012	0.146	2.917
3	1	0.001	1.013	0.011	2.932
3	2	-0.021	0.936	-0.183	2.782
3	3	-0.008	0.950	-0.033	2.813
3	4	-0.160	0.852	-0.638	2.857
3	5	-0.025	0.977	-0.061	2.734
4	1	-0.027	0.686	-0.257	3.304
4	2	-0.012	1.008	-0.021	2.825
4	3	-0.051	1.039	-0.148	2.908
4	4	-0.130	0.984	-0.409	3.010
4	5	-0.086	1.018	-0.253	2.993
5	1	-0.050	0.997	-0.109	2.963
5	2	-0.033	0.957	-0.077	2.817
5	3	-0.169	0.923	-0.513	3.428
5	4	-0.241	0.887	-0.820	3.677
5	5	-0.039	0.949	-0.083	2.837
6	1	-0.036	1.007	-0.100	2.957
6	2	-0.175	0.740	-0.826	3.752
6	3	-0.069	1.032	-0.191	2.992
6	4	-0.111	1.016	-0.295	2.962
6	5	-0.073	1.011	-0.167	3.040
7	1	0.031	0.948	0.093	2.870
7	2	0.019	1.013	0.076	2.857
7	3	0.011	0.999	0.067	2.823
7	4	0.161	0.952	0.526	2.757
7	5	0.075	0.866	0.318	2.849
8	1	0.025	1.006	0.080	2.888
8	2	0.064	1.047	0.139	2.938
8	3	0.139	0.913	0.330	2.734
8	4	0.019	1.061	0.065	2.742
8	5	-0.025	0.966	-0.086	2.877
9	1	-0.163	0.992	-0.427	3.173
9	2	-0.373	0.889	-1.271	4.193
9	3	-0.111	1.005	-0.281	3.002
9	4	-0.381	0.943	-1.191	3.978
9	5	-0.212	1.002	-0.530	3.255
10	1	0.020	0.961	0.065	2.790
10	2	0.142	0.710	0.650	4.261
10	3	0.038	0.998	0.080	2.951
10	4	0.009	0.984	-0.007	2.953
10	5	0.012	0.979	0.028	2.874

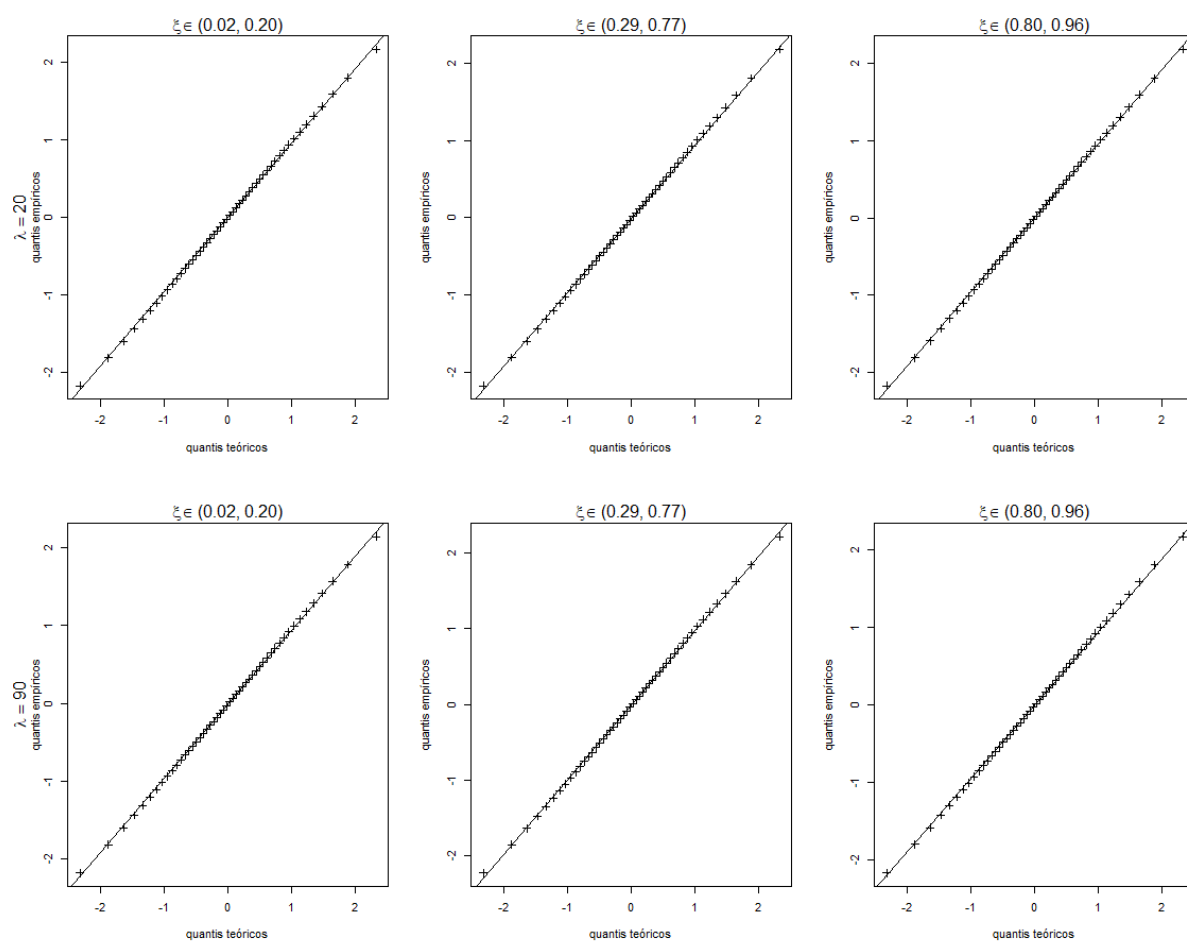
C.2 Gráficos quantil-quantil para r_{ij}^q 

Figura 16 – QQ-plot: modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade normal.

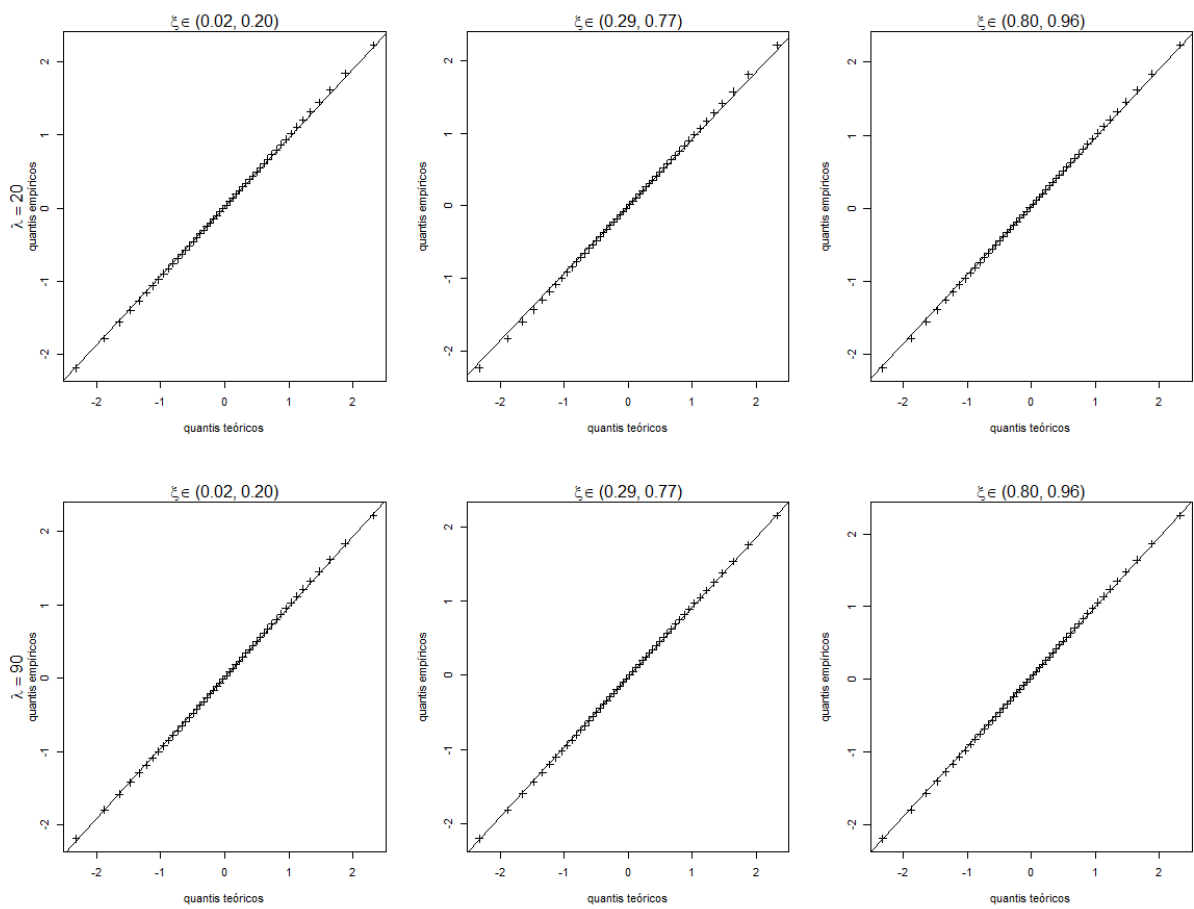


Figura 17 – QQ-plot: modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 4$).

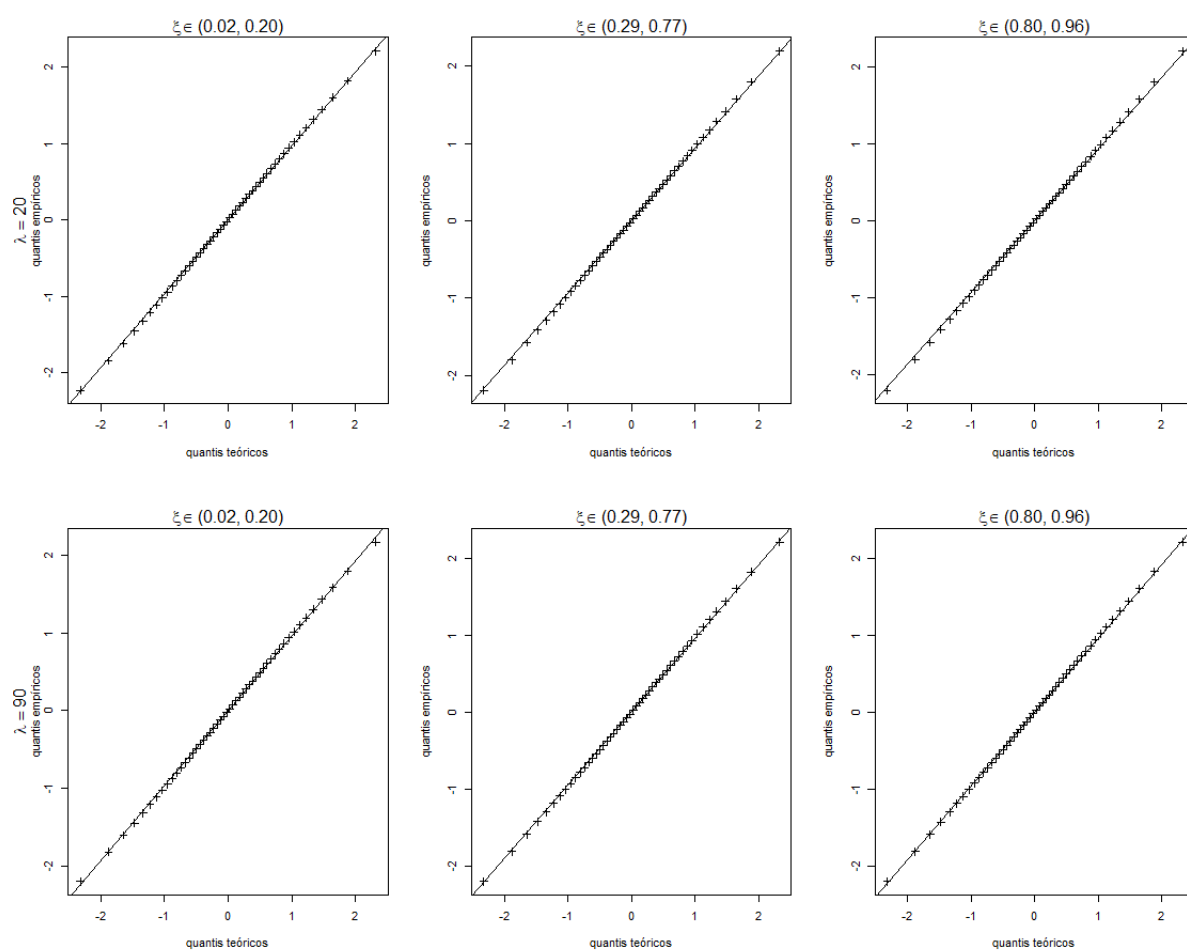


Figura 18 – QQ-plot: modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 6$).

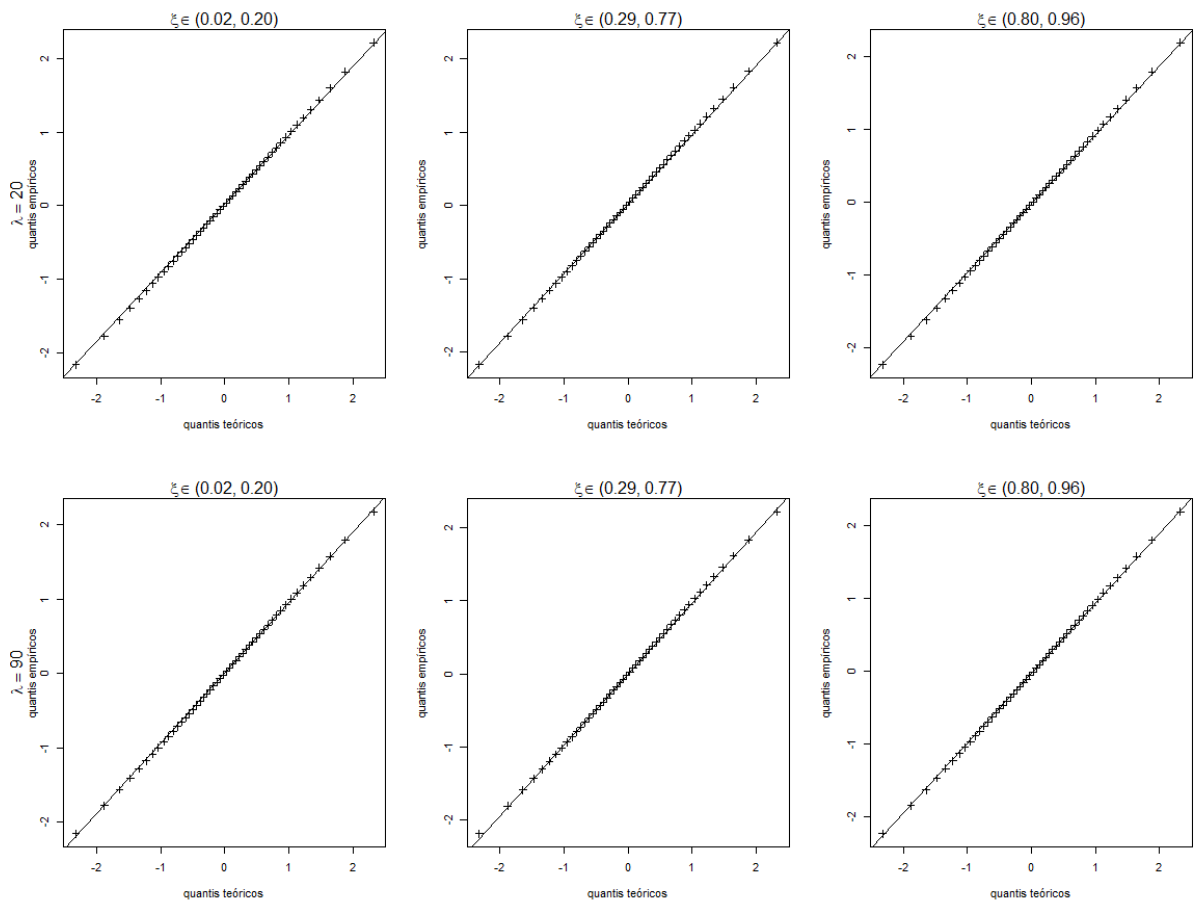


Figura 19 – QQ-plot: modelo de regressão GJS misto com gerador de densidade *t-Student* ($\nu = 8$).

C.3 Gráficos para especificação incorreta de termo quadrático

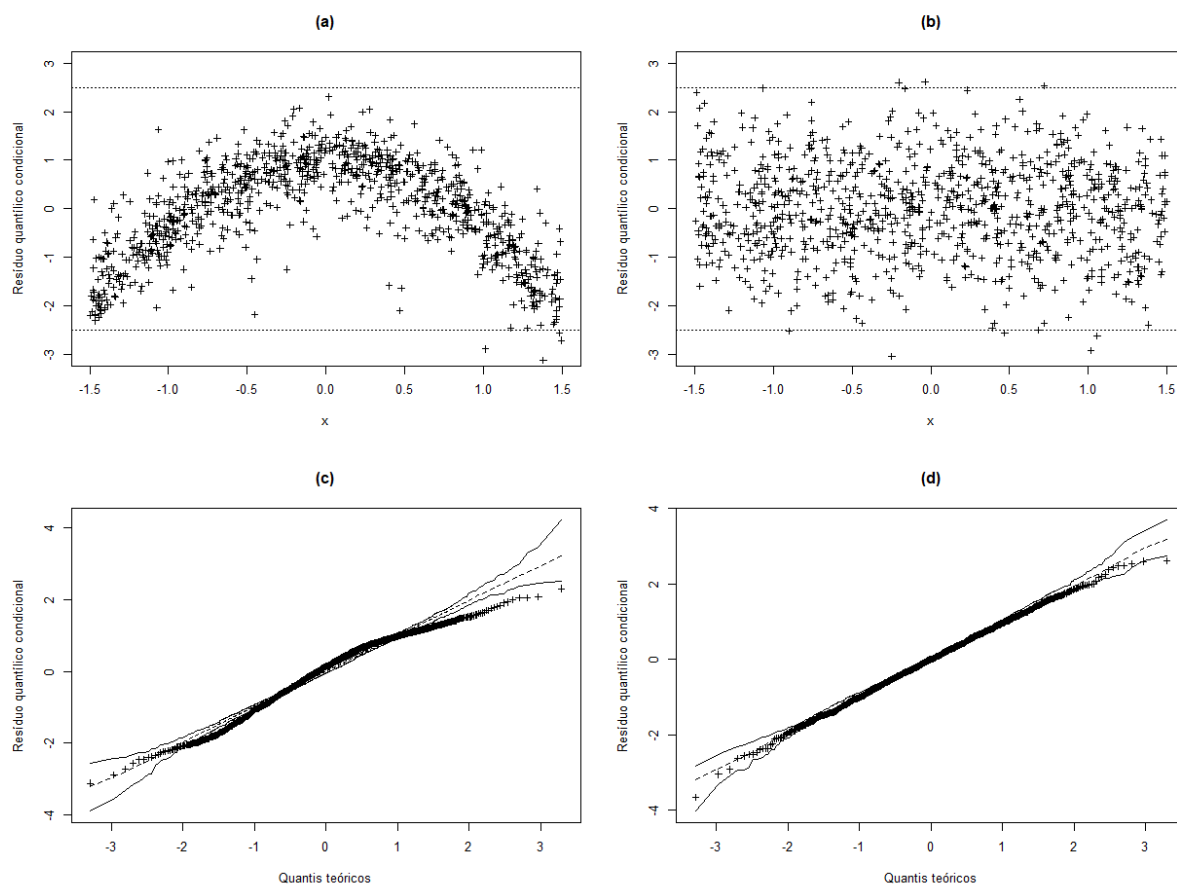


Figura 20 – Modelo GJS misto-normal: Gráfico de dispersão e QQ-plot do resíduo quantílico aleatorizado versus a covariável x para o modelo errado (a) e (c) e verdadeiro (b) e (d), respectivamente.

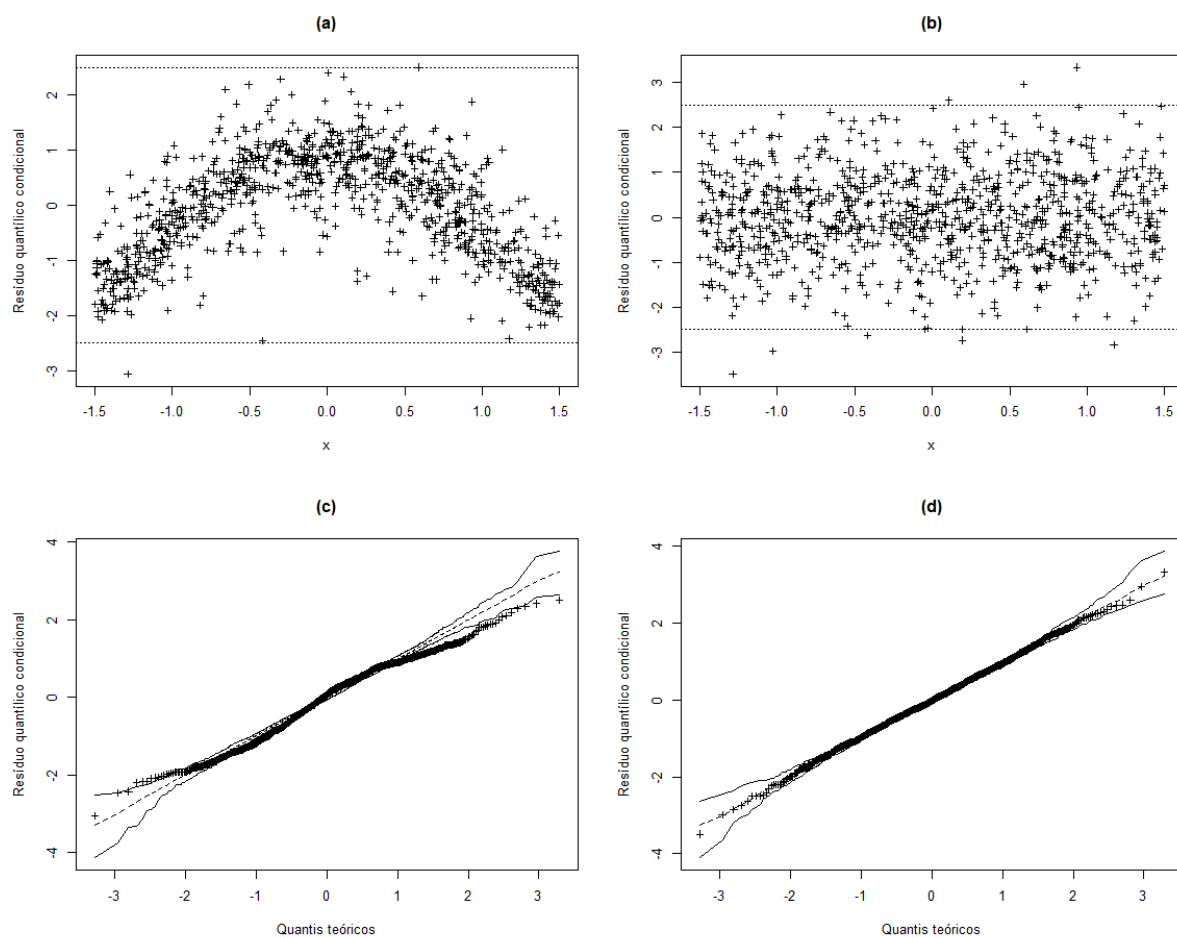


Figura 21 – Modelo GJS misto t -Student ($\nu = 4$): Gráfico de dispersão e QQ-plot do resíduo quantílico aleatorizado versus a covariável x para o modelo errado (a) e (c) e verdadeiro (b) e (d), respectivamente.

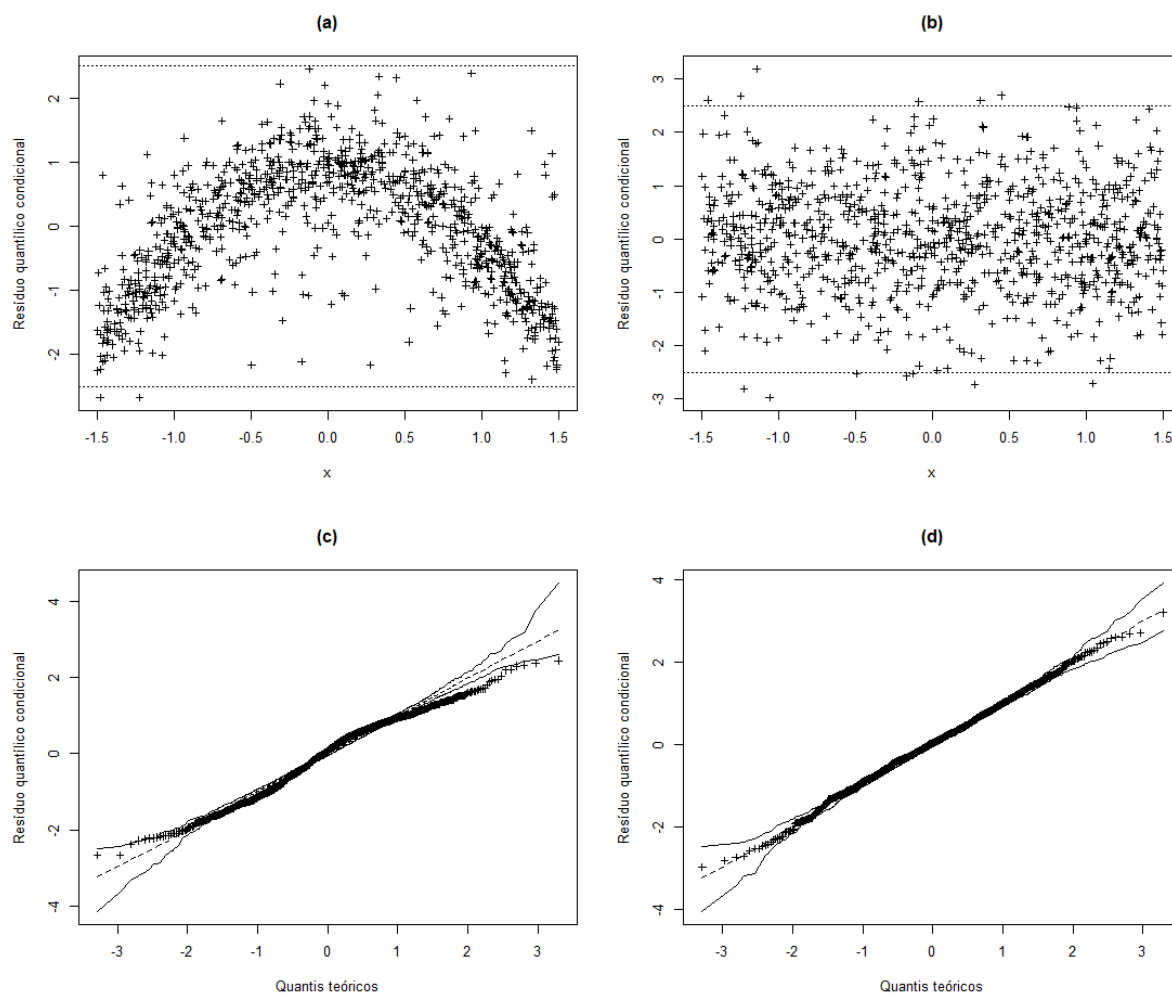


Figura 22 – Modelo GJS misto t -Student ($\nu = 6$): Gráfico de dispersão e QQ-plot do resíduo quantílico aleatorizado versus a covariável x para o modelo errado (a) e (c) e verdadeiro (b) e (d), respectivamente.

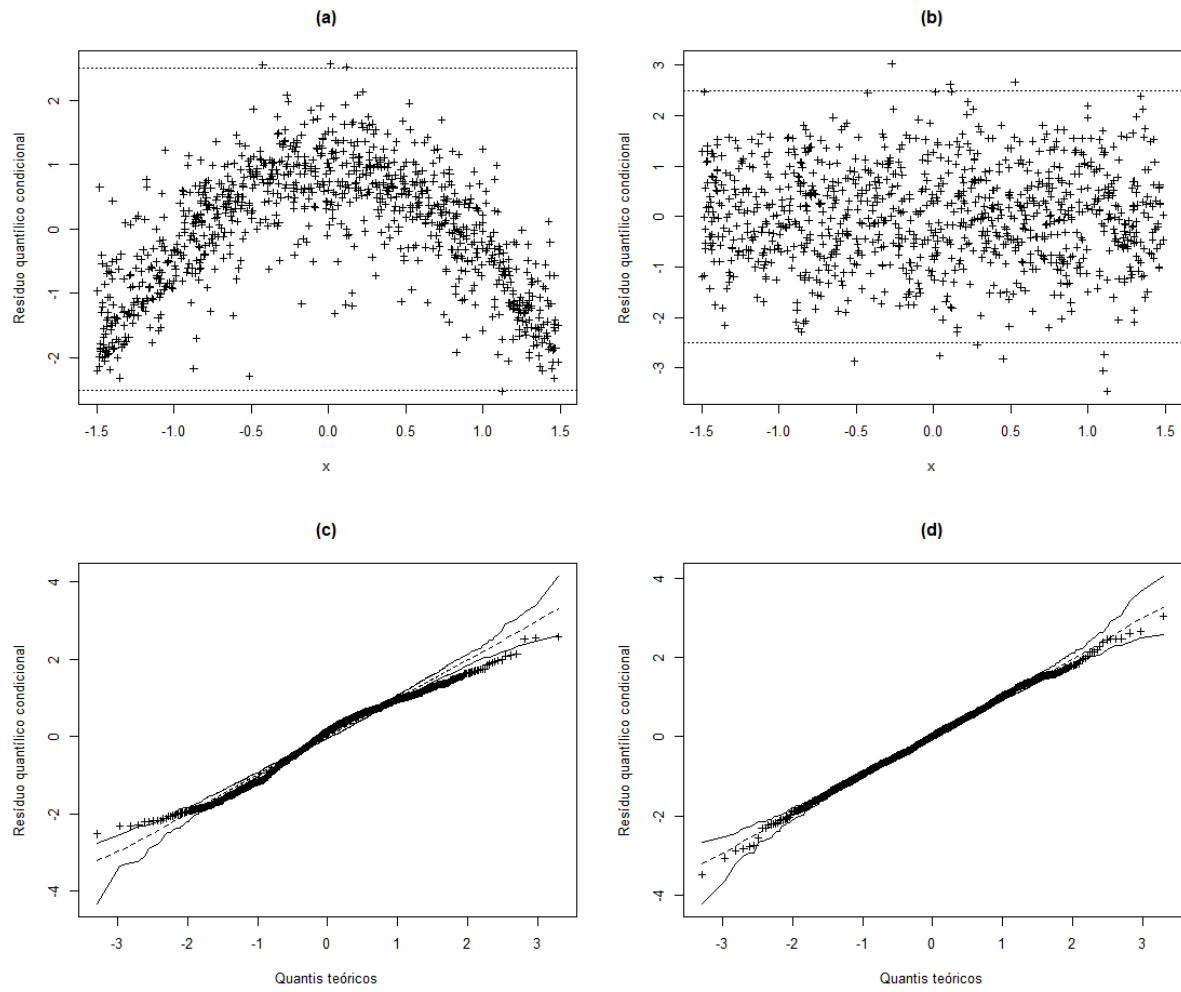


Figura 23 – Modelo GJS misto t -Student ($\nu = 8$): Gráfico de dispersão e QQ-plot do resíduo quantílico aleatorizado versus a covariável x para o modelo errado (a) e (c) e verdadeiro (b) e (d), respectivamente.

C.4 Gráficos para especificação incorreta de dispersão não constante

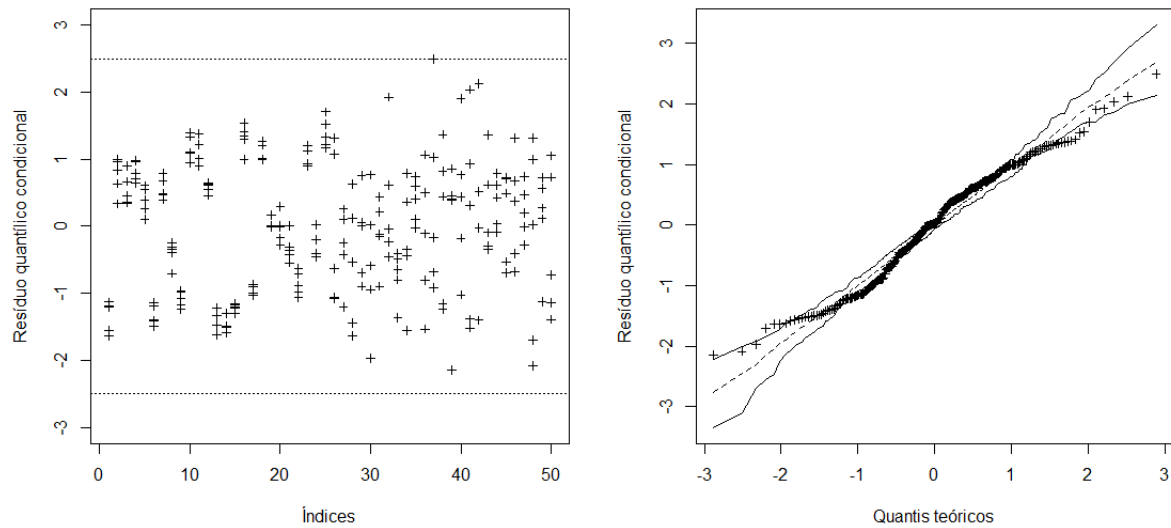


Figura 24 – Gráfico de resíduos e QQ-plot (com envelopes simulados) para o modelo GJS misto com gerador de densidade normal.

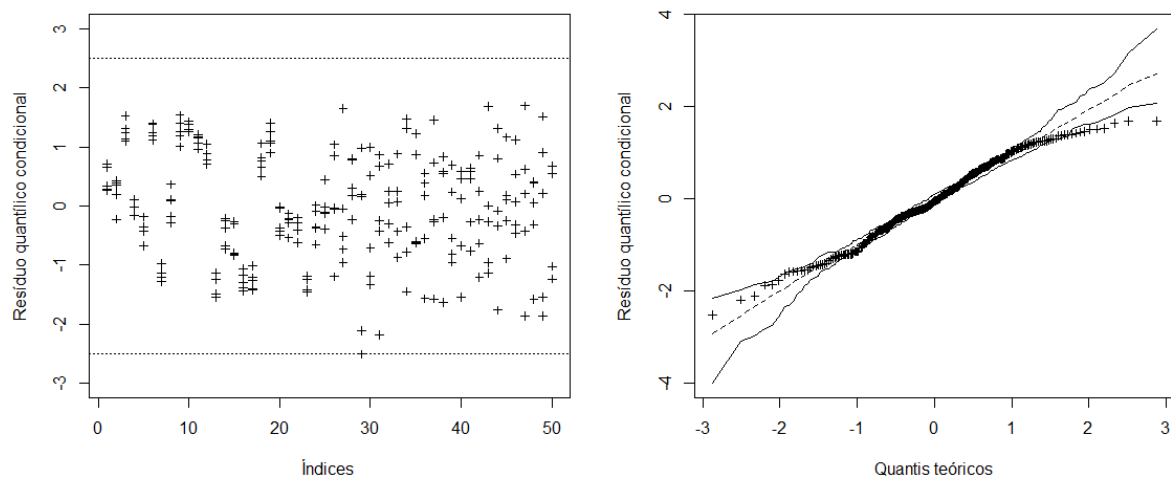


Figura 25 – Gráfico de resíduos e QQ-plot (com envelopes simulados) para o modelo GJS misto com gerador de densidade t -Student com $\nu = 4$.

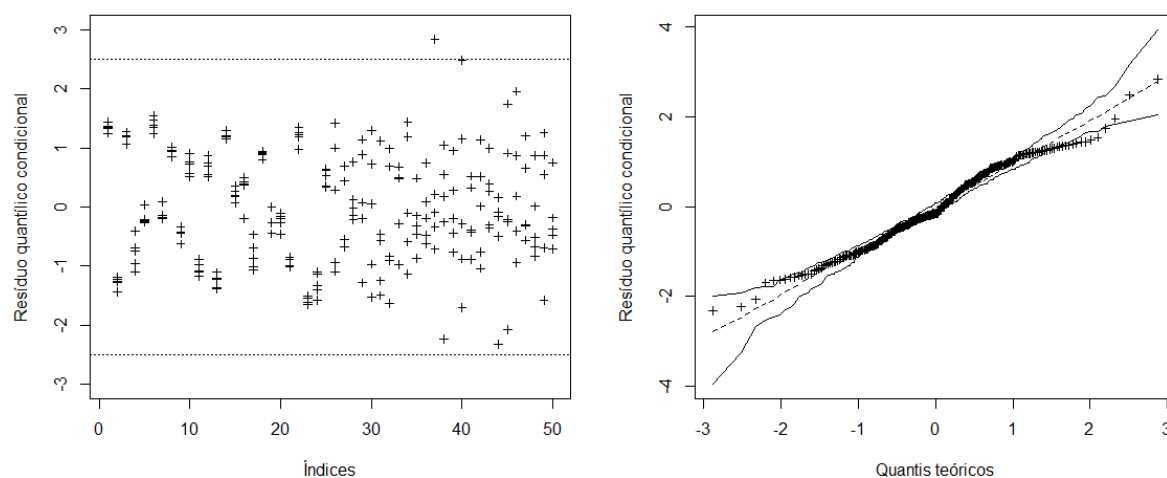


Figura 26 – Gráfico de resíduos e QQ-plot (com envelopes simulados) para o modelo GJS misto com gerador de densidade *t-Student* com $\nu = 6$.

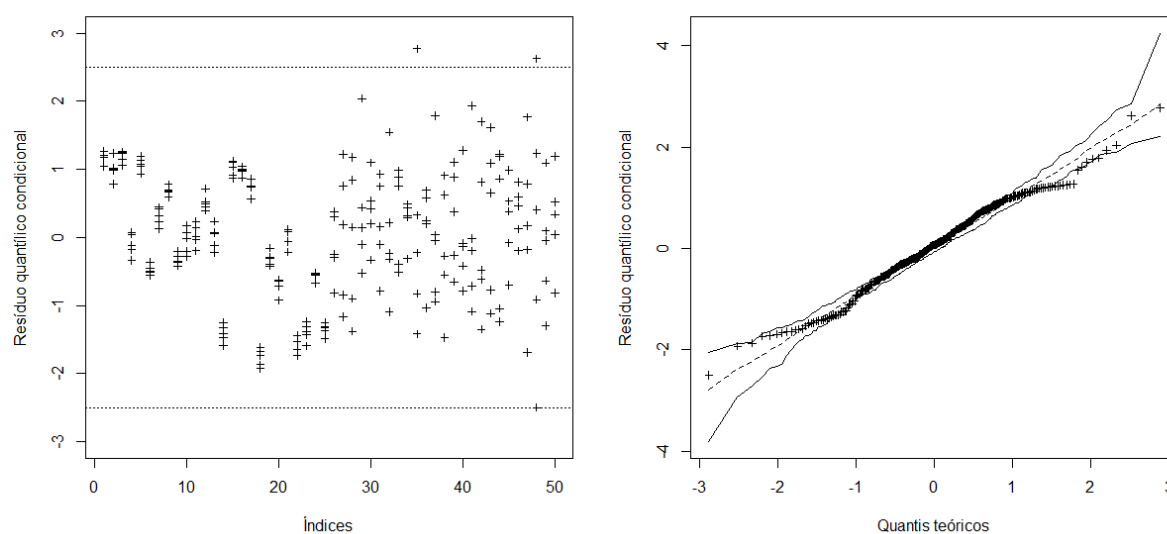


Figura 27 – Gráfico de resíduos e QQ-plot (com envelopes simulados) para o modelo GJS misto com gerador de densidade *t-Student* com $\nu = 8$.

APÊNDICE D – AJUSTE DO MODELO GJS LONGITUDINAL COM GERADOR DE DENSIDADE EXPONENCIAL POTÊNCIA

D.1 Resultados do ajuste

A Tabela 48 apresenta as estimativas de MV dos parâmetros do modelo considerando o gerador de densidade exponencial potência ($k = 0.99954, 0.99839$ e 0.72126 para os modelos 1, 2 e 3, respectivamente). Todos os parâmetros foram estatisticamente significativos para explicar a mediana condicional da variável resposta de interesse ao nível de significância de 5%, para todos os modelos considerados. Por fim, para o Modelo 2, a covariável LogT foi estatisticamente significativa para explicar a precisão condicional da variável resposta.

As Figuras 28, 29 e 30 apresentam os gráficos dos resíduos quantílicos condicionais e o gráfico de probabilidade normal com envelopes simulados para os modelos com gerador de densidade exponencial potência. Nota-se que o resíduo quantílico condicional para os modelos com gerador de densidade exponencial potência apresentam algumas observações com resíduo (em valor absoluto) relativamente alto, isto é, maior que o limiar de 2.5 (observações: #144, #149 e #155) e algumas observações estão fora das bandas de confiança, indicando uma possível falta de ajuste (ver Figuras 29, 30). Para o Modelo 1, as observações #149 e #155 são identificadas como possíveis pontos atípicos. Além disso, as bandas de confiança do gráfico de probabilidade normal acomoda todas as observações, sugerindo um possível ajuste satisfatório (28).

Para comparar os modelos ajustados, consideramos os critérios de seleção AIC, BIC, CAIC e HQIC. Os valores dos critérios para os 3 (três) modelos ajustados, encontram-se na Tabela 49. Conforme a análise realizada na Seção 4.2, o modelo de regressão GJS longitudinal com gerador de densidade *t-Student* com precisão variável proporcionou o melhor ajuste aos dados, segundo os critérios de informação e análise de resíduos realizados.

Tabela 48 – Estimativas dos ajustes dos modelos GJS longitudinal com gerador de densidade exponencial potência.

Modelo	Parâmetros	Estimativa	EP	Valor- p
1	β_0	2.7281	0.0704	<0.0001
	β_1	-1.1031	0.0328	<0.0001
	β_2	1.3129	0.0855	<0.0001
	β_3	2.0722	0.1087	<0.0001
	β_4	-0.2590	0.0303	<0.0001
	β_5	-0.4365	0.0453	<0.0001
	τ_0	-0.4029	0.0290	<0.0001
	σ^2	1.7856	0.5261	<0.0001
2	β_0	2.9639	0.0674	<0.0001
	β_1	-1.1721	0.0249	<0.0001
	β_2	1.2709	0.0879	<0.0001
	β_3	1.8974	0.1389	<0.0001
	β_4	-0.2593	0.0268	<0.0001
	β_5	-0.4259	0.0371	<0.0001
	τ_0	0.3591	0.1506	0.01710
	τ_1	0.1623	0.0615	0.0084
3	σ^2	1.5617	0.4658	<0.0001
	β_0	2.0196	0.0619	<0.0001
	β_1	-0.8166	0.0240	<0.0001
	β_2	1.7063	0.0915	<0.0001
	β_3	2.4476	0.0950	<0.0001
	β_4	-0.4494	0.0406	<0.0001
	β_5	-0.6197	0.0261	<0.0001
	τ_0	0.4391	0.4229	0.2992
	σ^2	1.6607	0.5197	<0.0001
	ς^2	0.2077	0.1049	<0.0001

Tabela 49 – Critérios AIC, BIC, CAIC e HQIC para os modelos com geradores de densidade exponencial potência.

Critério	Gerador de densidade		
	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
AIC	701.512	695.155	695.291
BIC	699.638	693.281	693.417
CAIC	739.298	732.941	733.078
HQIC	698.347	691.990	692.127

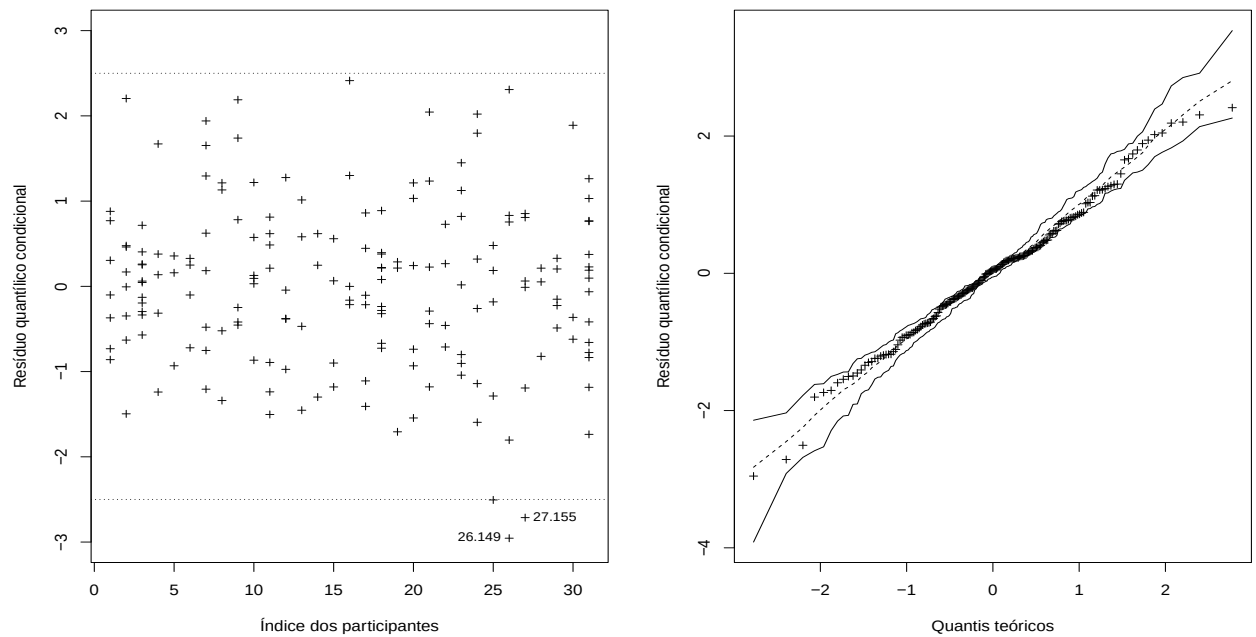


Figura 28 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade exponencial potência (Modelo 1).

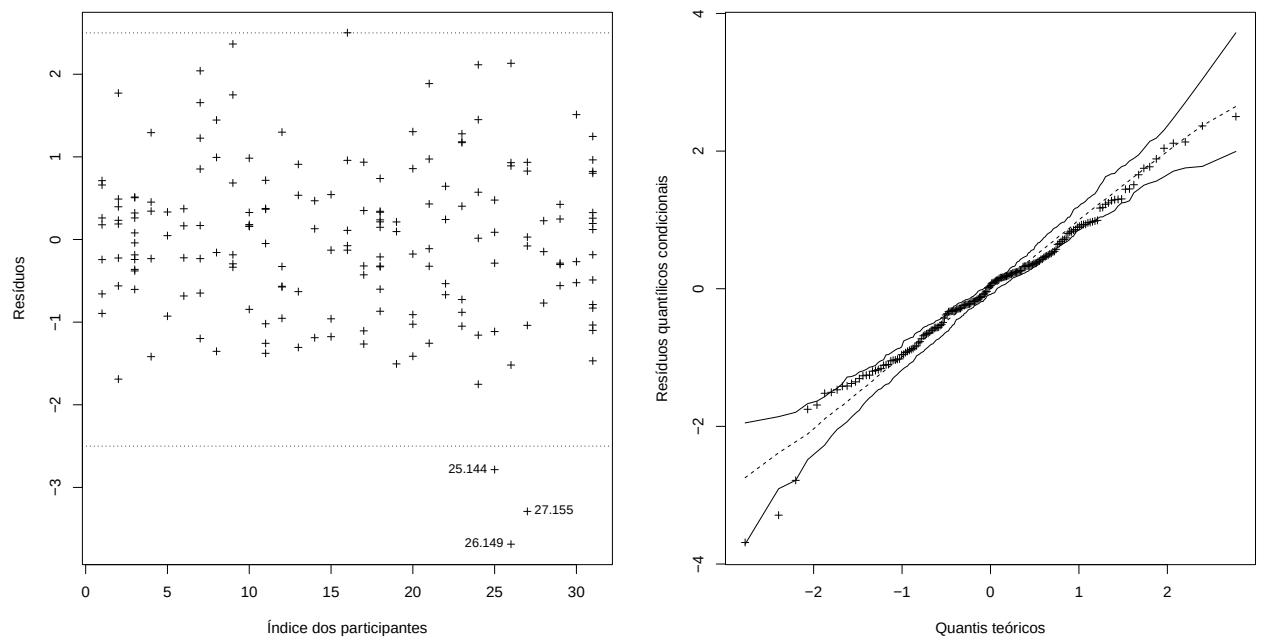


Figura 29 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade exponencial potência (Modelo 2).

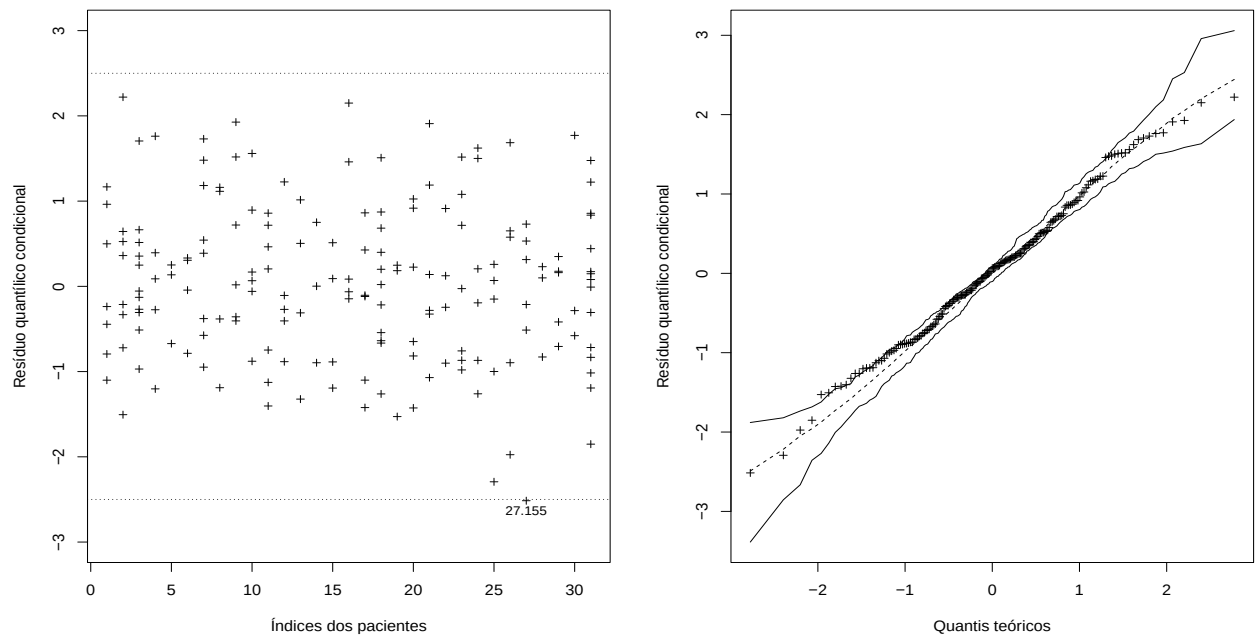


Figura 30 – Gráfico de resíduos (figura da esquerda) e QQ-plot com envelopes simulados (figura da direita) considerando o gerador de densidade exponencial potência (Modelo 3).