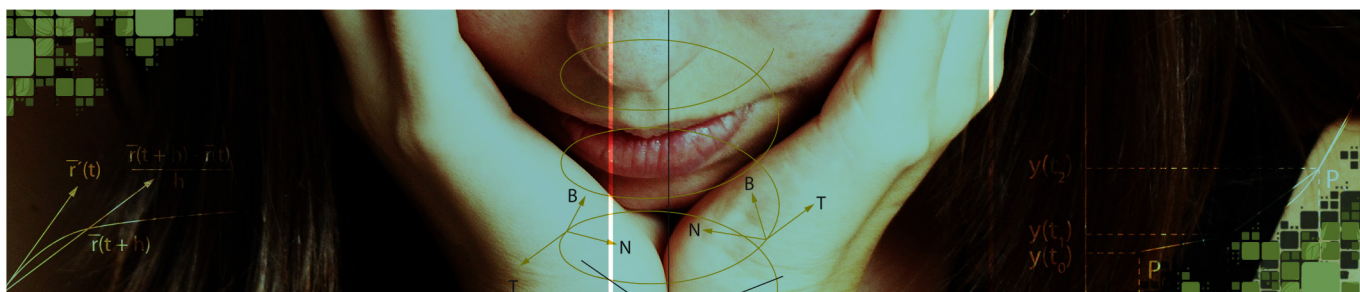


# Cálculo II

Benedito Tadeu Vasconcelos Freire  
Joaquim Elias de Freitas  
Roosevelt Fonseca Soares



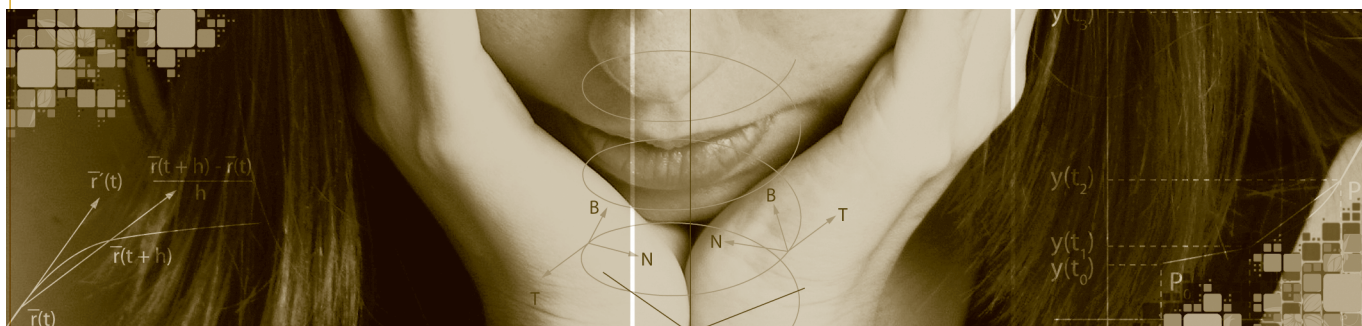
# Cálculo II

Benedito Tadeu Vasconcelos Freire  
Joaquim Elias de Freitas  
Roosewelt Fonseca Soares

Interdisciplinar

# Cálculo II

2ª Edição



  
**SEDISUFRN**

Natal – RN, 2014

## Governo Federal

### Presidenta da República

Dilma Vana Rousseff

### Vice-Presidente da República

Michel Miguel Elias Temer Lulia

### Ministro da Educação

Henrique Paim

## Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

### Reitora

Ângela Maria Paiva Cruz

### Vice-Reitora

Maria de Fátima Freire Melo Ximenes

## Secretaria de Educação a Distância (SEDIS)

### Secretária de Educação a Distância

Maria Carmem Freire Diógenes Rêgo

### Secretária Adjunta de Educação a Distância

Ione Rodrigues Diniz Morais

## FICHA TÉCNICA

### COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO DE MATERIAIS DIDÁTICOS

Marcos Aurélio Felipe

### COORDENAÇÃO DE REVISÃO

Maria da Penha Casado Alves

### COORDENAÇÃO DE DESIGN GRÁFICO

Ivana Lima

### GESTÃO DO PROCESSO DE REVISÃO

Rosilene Alves de Paiva

### GESTÃO DO PROCESSO DE DESIGN GRÁFICO

Dickson de Oliveira Tavares

### PROJETO GRÁFICO

Ivana Lima

### REVISÃO DE MATERIAIS

Ailson Alexandre Câmara de Medeiros

Andreia Maria Braz da Silva

Camila Maria Gomes

Cristiane Severo da Silva

Cristinara Ferreira dos Santos

Edneide da Silva Marques

Emanuelle Pereira de Lima Diniz

Eugenio Tavares Borges

Fabiola Barreto Gonçalves

Julianny de Lima Dantas Simião

Margareth Pereira Dias

Orlando Brandão Meza Ucella

Priscilla Xavier de Macedo

Rosilene Alves de Paiva

Verônica Pinheiro da Silva

### EDITORIAÇÃO DE MATERIAIS

Alessandro de Oliveira Paula

Amanda de Lima Cabral

Amanda Duarte

Anderson Gomes do Nascimento

Carolina Aires Mayer

Carolina Costa de Oliveira

Dickson de Oliveira Tavares

Heloisa Fernandes Ferreira Nunes

José Agripino de Oliveira Neto

Leticia Torres

Luciana Melo de Lacerda

Maurício da Silva Oliveira Junior

### Revisão de estrutura e linguagem

Eugenio Tavares Borges

Jânio Gustavo Barbosa

Thalyta Mabel Nobre Barbosa

### Revisão de língua portuguesa

Janaina Tomaz Capistrano

Sandra Cristinne Xavier da Câmara

### Revisão de normas da ABNT

Verônica Pinheiro da Silva

### Diagramação

Bruno de Souza Melo

Dimetrius de Carvalho Ferreira

Ivana Lima

Johann Jean Evangelista de Melo

### Criação e edição de imagens

Adauto Harley

Carolina Costa de Oliveira

### Módulo matemático

André Quintiliano Bezerra da Silva

Kalinne Rayana Cavalcanti Pereira

Thaísa Maria Simplício Lemos

### Revisão tipográfica

Leticia Torres

Nouraide Queiroz

### IMAGENS UTILIZADAS

Banco de Imagens Sedis - UFRN

Fotografias - Adauto Harley

Free Images- [www.freeimages.com](http://www.freeimages.com)

Flickr.com - [www.flickr.com](http://www.flickr.com)

Pixabay - [www.pixabay.com](http://www.pixabay.com)

Catologação da publicação na fonte. Elaborada por Edineide da Silva Marques CRB-15/488.

Freire, Benedito Tadeu Vasconcelos.

Cálculo II [recurso eletrônico] / Benedito Tadeu Vasconcelos Freire, Joaquim Elias de Freitas, Roosevelt Fonseca Soares – 2. ed. – Natal: SEDIS-UFRN, 2024.

38848 KB; 1 PDF

ISBN 978-65-5569-431-4

1. Matemática. 2. Cálculo. 3. Funções. I. Freitas, Joaquim Elias de. II. Soares, Roosevelt Fonseca. III. Título.

CDU 501

F866c

# Sumário

Apresentação institucional	6
<b>Aula 1</b> Funções Vetoriais	7
<b>Aula 2</b> Comprimento de curva, regra da cadeia e triedro de Frenet	28
<b>Aula 3</b> Funções reais de várias variáveis	52
<b>Aula 4</b> Diferenciabilidade de uma função de duas variáveis e regra de cadeia	72
<b>Aula 5</b> Derivada direcional	94
<b>Aula 6</b> Formula de Taylor, valores extremos e pontos de sela	115
<b>Aula 7</b> Multiplicadores de Lagrange e aplicações	131
<b>Aula 8</b> Sequências numéricas	148
<b>Aula 9</b> Séries numéricas	167
<b>Aula 10</b> Séries de Potências	186
<b>Aula 11</b> Equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem	201

# Apresentação Institucional

**A** Secretaria de Educação a Distância – SEDIS da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, desde 2005, vem atuando como fomentadora, no âmbito local, das Políticas Nacionais de Educação a Distância em parceria com a Secretaria de Educação a Distância – SEED, o Ministério da Educação – MEC e a Universidade Aberta do Brasil – UAB/CAPES. Duas linhas de atuação têm caracterizado o esforço em EaD desta instituição: a primeira está voltada para a Formação Continuada de Professores do Ensino Básico, sendo implementados cursos de licenciatura e pós-graduação lato e stricto sensu; a segunda volta-se para a Formação de Gestores Públicos, através da oferta de bacharelados e especializações em Administração Pública e Administração Pública Municipal.

Para dar suporte à oferta dos cursos de EaD, a SEDIS tem disponibilizado um conjunto de meios didáticos e pedagógicos, dentre os quais se destacam os materiais impressos que são elaborados por disciplinas, utilizando linguagem e projeto gráfico para atender às necessidades de um aluno que aprende a distância. O conteúdo é elaborado por profissionais qualificados e que têm experiência relevante na área, com o apoio de uma equipe multidisciplinar. O material impresso é a referência primária para o aluno, sendo indicadas outras mídias, como videoaulas, livros, textos, filmes, videoconferências, materiais digitais e interativos e webconferências, que possibilitam ampliar os conteúdos e a interação entre os sujeitos do processo de aprendizagem.

Assim, a UFRN através da SEDIS se integra ao grupo de instituições que assumiram o desafio de contribuir com a formação desse “capital” humano e incorporou a EaD como modalidade capaz de superar as barreiras espaciais e políticas que tornaram cada vez mais seletivo o acesso à graduação e à pós-graduação no Brasil. No Rio Grande do Norte, a UFRN está presente em polos presenciais de apoio localizados nas mais diferentes regiões, ofertando cursos de graduação, aperfeiçoamento, especialização e mestrado, interiorizando e tornando o Ensino Superior uma realidade que contribui para diminuir as diferenças regionais e transformar o conhecimento em uma possibilidade concreta para o desenvolvimento local.

Nesse sentido, este material que você recebe é resultado de um investimento intelectual e econômico assumido por diversas instituições que se comprometeram com a Educação e com a reversão da seletividade do espaço quanto ao acesso e ao consumo do saber. E REFLETE O COMPROMISSO DA SEDIS/UFRN COM A EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA como modalidade estratégica para a melhoria dos indicadores educacionais no RN e no Brasil.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA  
SEDIS/UFRN

# Funções vetoriais

Aula

1



# Apresentação

Iniciaremos nosso curso esperando que você consiga alcançar os objetivos básicos para um bom desempenho na disciplina. Em primeiro lugar, esperamos que você seja capaz de introduzir os resultados básicos do Cálculo de funções de mais de uma variável; segundo, que você seja capaz de calcular comprimento de curvas e também áreas e volumes. Após isso, você deve saber fornecer elementos que permitam analisar movimentos no plano e no espaço e expressar funções de mais de uma variável, como polinômios. Por fim, que você calcule integrais não elementares.

Já nesta aula, estudaremos as Funções Vetoriais: curvas no plano e no espaço, limite e continuidade, derivadas, vetor tangente, que são as ferramentas básicas para o estudo do movimento de partículas no plano e no espaço.

Tente entender tudo que está sendo explicado na aula. Estude com caneta e papel ao lado. Seja paciente e procure ter certeza que você entendeu o que (e por que) está fazendo. No final da aula, há uma autoavaliação, é importante que você faça, pois dessa forma irá perceber se atingiu os objetivos da aula.

## Objetivos

- 1 Estudar a trajetória, a velocidade e a aceleração de corpos em movimento no plano e no espaço tridimensional;
- 2 Estudar movimentos ao longo de superfícies;
- 3 Derivar e integrar funções vetoriais;
- 4 Aplicar os conceitos para resolver problemas práticos.

# Curvas planas

Um ponto  $P$  do plano fica perfeitamente determinado por suas duas coordenadas cartesianas  $(x, y)$ .

Imagine que você estuda o movimento de uma partícula no plano durante certo intervalo de tempo  $I$ . A cada instante, ao longo do movimento, a partícula ocupa um ponto do plano. Para estudar o movimento descrito pela partícula, identificamos cada ponto que ela ocupa no plano através das coordenadas cartesianas desse ponto, olhando para cada uma das coordenadas como se fosse uma função do tempo:  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ , onde  $t \in I$ .

Assim, a trajetória da partícula (ou a curva descrita pela partícula) durante o intervalo de tempo  $I$  é dada pela coleção de pontos da forma  $P(t) = (x(t), y(t))$ , onde  $t \in I$ .

Dizemos que as equações  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ , com  $t \in I$ , é uma **parametrização** da curva descrita pela partícula.

Para cada instante  $t$ , o vetor  $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP}$ , que vai da origem  $O$  até o ponto  $P = P(t) = (x(t), y(t))$  é o vetor posição da partícula:  $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP} = (x(t), y(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ , onde  $\mathbf{i} = (1, 0)$  e  $\mathbf{j} = (0, 1)$ . Essa equação define o vetor posição como sendo uma função vetorial da variável  $t \in I$ .

De um modo geral, definimos uma função vetorial num domínio  $G$  como uma correspondência que associa a cada elemento de  $G$  um vetor no plano (ou no espaço). Para diferenciar das funções vetoriais, chamamos de funções escalares aquelas que assumem valores reais. As funções  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  são escalares.

Duas funções vetoriais  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$  e  $\mathbf{r}_1(t) = x_1(t)\mathbf{i} + y_1(t)\mathbf{j}$  são iguais se, e só se,  $x(t) = x_1(t)$  e  $y(t) = y_1(t)$ . Para todo valor de  $t$  pertencente aos domínios das funções.

## Exemplo 1

A função vetorial dada por  $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ , com  $t > 0$ , representa o vetor posição  $\overrightarrow{OP}$  de uma partícula que descreve um movimento sobre o círculo unitário com centro na origem, no sentido anti-horário. De fato,  $x(t) = \cos t$  e  $y(t) = \sin t$  e temos que  $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 1$ .

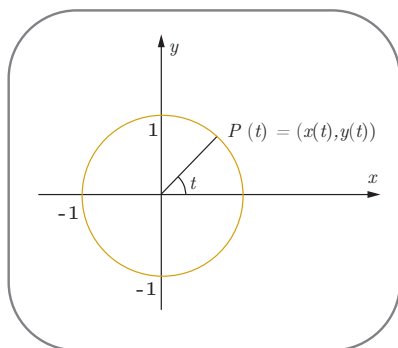


Figura 1 - Círculo de raio 1 e centro na origem.



## Atividade 1

O vetor posição de uma partícula que se desloca no plano é dado por:

$$r(t) = (t^2)i + (t^3)j, \text{ onde } -2 \leq t \leq 2.$$

- Escreva as equações que definem  $x(t)$  e  $y(t)$ .
- Descreva, geometricamente, a trajetória da curva no plano.

## Exemplo 2

A função vetorial  $r(t) = (2 \cos t)i + (\sin t)j$ , sendo  $t$  um número real maior do que ou igual a zero, representa o vetor posição  $\overrightarrow{OP}$  de uma partícula que descreve um movimento sobre a elipse  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

### Solução

De fato,  $x(t) = 2 \cos t$  e  $y(t) = \sin t$ . Por outro lado, temos que:  $\frac{x(t)}{2} = \cos t$ , que nos dá  $\left(\frac{x(t)}{2}\right)^2 = \cos^2 t$  e, como  $y(t)^2 = \sin^2 t$ , segue que  $\left(\frac{x(t)}{2}\right)^2 + y(t)^2 = 1$ .



## Atividade 2

A função vetorial  $r(t) = (\cos 2t)i + (\sin 2t)j$ , sendo  $t$  um número real maior do que ou igual a zero, representa o vetor posição  $\overrightarrow{OP}$  de uma partícula que descreve um movimento no plano. Que curva a partícula descreve?

## Exemplo 3

Um segmento de reta, que une dois pontos  $A = (a_1, a_2)$  e  $B = (b_1, b_2)$  do plano, pode ser descrito como a função vetorial

$$r(t) = tB + (1 - t)A = (tb_1 + (1 - t)a_1, tb_2 + (1 - t)a_2),$$

onde  $t$  é um número real satisfazendo  $0 \leq t \leq 1$ .

## Solução

Observe que se  $t = 0$ , então,  $r(0) = A$  e, se  $t = 1$ , então,  $r(1) = B$ .

Pode-se facilmente observar que a função vetorial que descreve um segmento de reta pode ser dada também como:

$$r(t) = A + (B - A)t,$$

onde  $t$  é um número real satisfazendo  $0 \leq t \leq 1$ .

De fato, basta verificar que:  $r(t) = tB + (1 - t)A = tB + A - tA = A + (B - A)t$ .



## Atividade 3

A função vetorial  $r(t) = (\cos 2t)i + (\sin 2t)j$ , com  $t$  um número real maior do que ou igual a zero, representa o vetor posição  $\overrightarrow{OP}$  de uma partícula que descreve um movimento no plano. Que curva a partícula descreve?

# Limite e continuidade

**N**a Aula 1 (Limites de função real em um ponto) da disciplina Cálculo I, você já conheceu as definições de limite e continuidade de funções reais de uma variável real. Uma questão natural que aparece quando se estuda função vetorial é: como definir limite e continuidade de funções vetoriais?

Se  $r(t) = x(t)i + y(t)j$  é uma função vetorial, para  $t \in I$ , dizemos que

$$\lim_{t \rightarrow c} r(t) = \lim_{t \rightarrow c} x(t)i + \lim_{t \rightarrow c} y(t)j,$$

se cada um dos limites  $\lim_{t \rightarrow c} x(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow c} y(t)$  existe.

## Exemplo 4

Se  $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j$ , com  $t \in I = [0, 2\pi]$ , então,  
 $\lim_{t \rightarrow \pi/2} r(t) = \left( \lim_{t \rightarrow \pi/2} \cos t \right)i + \left( \lim_{t \rightarrow \pi/2} \sin t \right)j = 0i + 1.j = j.$



## Atividade 4

Dado  $r(t) = (\cos 2t)i + (\sin 2t)j$ , calcule  $\lim_{t \rightarrow \pi/4} r(t).$

Na disciplina Cálculo I, Aula 1, você viu a noção de continuidade para uma função real de variável real (que é o mesmo que uma função escalar). Definimos continuidade para uma função vetorial da mesma maneira que definimos continuidade para uma função escalar, assim:

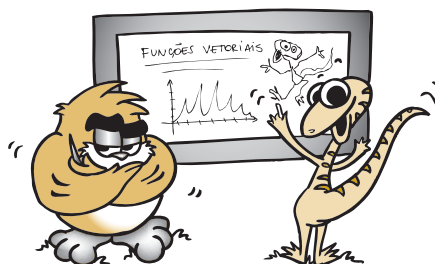
se  $r(t) = x(t)i + y(t)j$  é uma função vetorial, então,  $r(t)$  é **contínua** em  $t = c$  se, e só se,  $\lim_{t \rightarrow c} r(t) = r(c).$

A definição de limite de funções vetoriais garante que  $r(t) = x(t)i + y(t)j$  é contínua em  $t = c$  se, e só se, as funções escalares  $x(t)$  e  $y(t)$  forem contínuas em  $t = c$ . Desse modo, só tem sentido falar em continuidade da função vetorial  $r(t)$  em  $t = c$  se o número  $c$  é um elemento do domínio de  $r(t)$ .

Observe que a noção de continuidade é pontual. Quando a função vetorial  $r(t)$  é contínua para todo  $c$  do domínio, dizemos, simplesmente, que  $r(t)$  é contínua.

## Exemplo 5

As funções vetoriais  $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j$ , com  $t \in I = R$ , e  $r(t) = (2 \cos t)i + (\sin t)j$ , com  $t \in I = R$ , são contínuas em todos os pontos do domínio, pois as correspondentes funções escalares  $x(t)$  e  $y(t)$  são contínuas.





## Atividade 5

Diga, justificando, se as funções vetoriais dadas são contínuas no conjunto dos números reais:

a)  $r(t) = (\operatorname{sen} t)i + (\operatorname{sen} t \cdot \cos t)j$

b)  $r(t) = (\cos t)i + (tg t)j$

c)  $r(t) = (\sqrt{t^2 + 1})i + tj$

d)  $r(t) = [1/t^2 + 1]i + (\operatorname{sen} t)j$

## Derivada de uma função vetorial

Na disciplina Cálculo I, na Aula 4 (A derivada), você aprendeu o conceito de derivada de funções reais de variável real. Recordando, uma função real  $f(x)$ , com  $x \in I$ , tem derivada no ponto  $x = x_0$  se o quociente de Newton  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  tem limite quando  $h$  se aproxima de zero. Esse limite é chamado de derivada de  $f$  no ponto  $x = x_0$ :

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Seja  $r(t) = x(t)i + y(t)j$ , com  $t \in I$ , o vetor posição de uma partícula que descreve um movimento no plano. A diferença entre as posições da partícula no instante  $t = t_0$  e  $t = t_0 + h$  é dada por

$$\begin{aligned} r(t_0 + h) - r(t_0) &= [x(t_0 + h)i + y(t_0 + h)j] - [x(t_0)i + y(t_0)j] = \\ &= [x(t_0 + h) - x(t_0)]i + [y(t_0 + h) - y(t_0)]j. \end{aligned}$$

É fácil ver que, quando  $h$  se aproxima de zero, o ponto  $r(t_0 + h) = Q$  aproxima-se do ponto  $P = r(t_0)$ . Por outro lado, a secante  $PQ$  à curva descrita pela partícula aproxima-se da tangente à essa mesma curva no ponto  $P$ . Quando o ponto  $Q$  se aproxima de  $P$ , o quociente

$\frac{r(t_0 + h) - r(t_0)}{h}$  aproxima-se do limite:

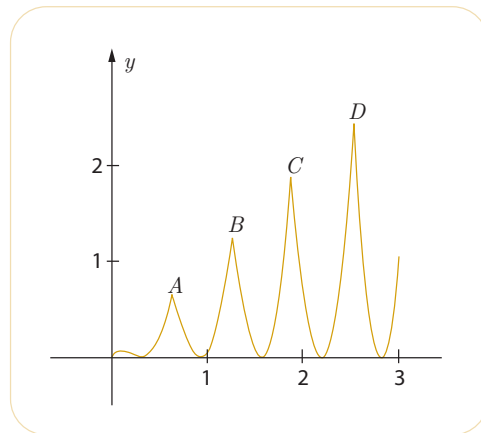
$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t_0 + h) - r(t_0)}{h} &= \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \right] i + \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} \right] j \\ &= \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j.\end{aligned}$$

Assim, dizemos que uma função vetorial  $r(t) = x(t)i + y(t)j$  tem derivada em  $t = t_0$  ou é derivável em  $t = t_0$  se as funções escalares  $x(t)$  e  $y(t)$  têm derivadas em  $t = t_0$ . Nesse caso, a derivada de  $r(t)$  em  $t = t_0$  é a função vetorial dada por:

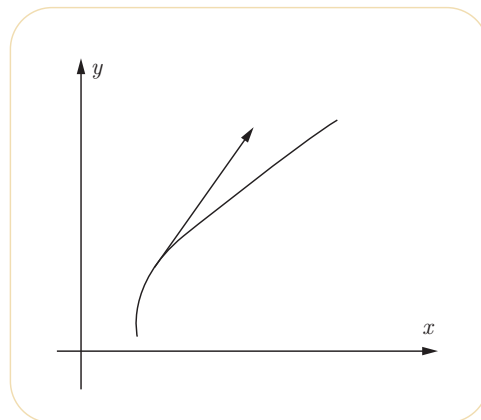
$$r'(t_0) = \frac{dr}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t_0 + h) - r(t_0)}{h} = \frac{dx(t_0)}{dt} i + \frac{dy(t_0)}{dt} j.$$

De maneira análoga ao que fizemos anteriormente para o item continuidade, dizemos que uma função vetorial  $r(t)$  **é derivável** se possui derivada para todo ponto do domínio.

Dizemos que uma curva, representada por  $r(t)$ , com  $t \in I$ , é **lisa** ou **suave** se a derivada  $\frac{dr}{dt}$  for contínua e nunca for zero. Isso significa dizer que as funções escalares  $x(t)$  e  $y(t)$  têm derivadas, suas derivadas são funções contínuas e elas nunca se anulam simultaneamente. Ou seja, uma **curva lisa não possui vértices (ou bicos)**, conforme as figuras 2 e 3 a seguir.



**Figura 2** - Curva com vértices (ou bicos).



**Figura 3** - Curva lisa.

## Exemplo 6

Considere a função vetorial  $r(t) = (\sen t)i + (2t)j$ . As funções escalares  $x(t) = \sen t$  e  $y(t) = 2t$  são deriváveis. Portanto,

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{d(\sen t)}{dt}i + \frac{d(2t)}{dt}j = (\cos t)i + 2j.$$



## Atividade 6

Dado  $r(t) = (\sqrt{2t})i + e^tj$ , calcule:

a)  $r'(t)$

b)  $r'(1)$

É fácil ver que as regras básicas para o cálculo das derivadas estudadas em Cálculo I se aplicam para o caso de funções vetoriais, fazendo as devidas adaptações.

### (I) Derivada de uma função vetorial constante

Se  $r(t) = ai + bj$ , com  $a, b$  constantes, então,  $\frac{dr}{dt} = 0$ .

### (II) Derivada do produto de uma constante por uma função vetorial

Se  $a$  é um número real e  $r(t)$  é uma função vetorial derivável, então, temos que

$$\frac{d}{dt}[a \cdot r(t)] = a \cdot \frac{dr(t)}{dt}.$$

### (III) Derivada do produto de uma função escalar por uma função vetorial

Se  $f(t)$  é uma função real de variável real derivável e  $r(t)$  é uma função vetorial derivável, então,

$$\frac{d}{dt}[f(t) \cdot r(t)] = f'(t) \cdot r(t) + f(t) \cdot \frac{dr(t)}{dt}.$$

### (IV) Derivada da soma de duas funções vetoriais

Se  $r_1(t)$  e  $r_2(t)$  são duas funções vetoriais deriváveis, então:

$$\frac{d(r_1+r_2)(t)}{dt} = \frac{dr_1(t)}{dt} + \frac{dr_2(t)}{dt}.$$

### (V) Derivada da diferença de duas funções vetoriais

Se  $r_1(t)$  e  $r_2(t)$  são duas funções vetoriais deriváveis, então:

$$\frac{d(r_1 - r_2)(t)}{dt} = \frac{dr_1(t)}{dt} - \frac{dr_2(t)}{dt}.$$

### (VI) Derivada do produto escalar de duas funções vetoriais

Se  $r_1(t)$  e  $r_2(t)$  são duas funções vetoriais deriváveis e  $\langle r_1(t), r_2(t) \rangle$  é o produto escalar delas, então:

$$\frac{d}{dt} \langle r_1(t), r_2(t) \rangle = \left\langle \frac{dr_1(t)}{dt}, r_2(t) \right\rangle + \left\langle r_1(t), \frac{dr_2(t)}{dt} \right\rangle.$$

### (VII) Regra da cadeia

Sejam  $f(t)$  uma função real de variável real, derivável, e  $r(t)$  uma função vetorial, temos que:

$$\frac{dr(f(t))}{dt} = f'(t) \cdot \frac{dr(t)}{dt}.$$



## Atividade 7

Esboce uma prova para cada uma das sete regras apresentadas anteriormente.

## Exemplo 7

Sejam  $f(t) = e^t$ ,  $r_1(t) = (t^2)i + (2t)j$  e  $r_2(t) = (\cos t)i + (t^3)j$ . Calcule:

a)  $\frac{d}{dt}[f(t) \cdot r_1(t)]$

b)  $\frac{d}{dt} \langle r_1(t), r_2(t) \rangle$

c)  $\frac{dr_1(f(t))}{dt}$

## Solução

a)  $\frac{d}{dt}[f(t) \cdot r_1(t)] = f'(t) \cdot r_1(t) + f(t) \cdot \frac{dr_1(t)}{dt} = e^t \cdot (t^2i + 2tj) + e^t \cdot (2ti + 2j) = e^t \cdot (t^2 + 2t)i + e^t(2t + 2)j.$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{d \langle r_1(t), r_2(t) \rangle}{dt} &= \frac{d}{dt} \langle r_1(t), r_2(t) \rangle = \left\langle \frac{dr_1(t)}{dt}, r_2(t) \right\rangle + \left\langle r_1(t), \frac{dr_2(t)}{dt} \right\rangle \\ &= \langle [2ti + 2j], [(cos t)i + t^3j] \rangle + \langle [t^2i + 2tj], [(-sen t)i + 3t^2j] \rangle = \\ &= 2t(cos t) + 2t^3 + -t^2sen t + 6t^3 \end{aligned}$$

c) Sabemos que  $\frac{dr_1(f(t))}{dt} = f'(t) \cdot \frac{dr_1(f(t))}{dt}$ . Por outro lado,  $f'(t) = e^t$ ,

$$r_1(f(t)) = r_1(e^t) = (e^t)^2i + 2e^tj = e^{2t}i + 2e^tj \text{ e } \frac{dr_1(f(t))}{dt} = 2e^{2t}i + 2e^tj. \text{ Logo,}$$

$$\frac{dr_1(f(t))}{dt} = e^t(2e^{2t}i + 2e^tj) = e^{2t}(2e^t i + 2j).$$



## Atividade 8

Sejam  $r_1(t)$  e  $r_2(t)$  duas funções vetoriais dadas por:  $r_1(t) = (12sen t)i + (12cos t)j$ , com  $t > 0$ , e  $r_2(t) = (5sen t)i + (tcos t - sen t)j$ , com  $t > 0$ .

Calcule:

a)  $\frac{d(r_1 + r_2)(t)}{dt}$

b)  $\frac{d(r_1 - r_2)(t)}{dt}$

c)  $\frac{d \langle r_1(t) + r_2(t) \rangle}{dt}$

Para concluir o estudo de movimentos de partículas no plano, definiremos a seguir os conceitos de velocidade e aceleração.

Se  $r(t)$  é o vetor posição de uma partícula que se move ao longo de uma curva lisa no plano, definimos, para cada instante  $t$ , o **vetor velocidade**,  $v(t)$ , como sendo a derivada do

vetor posição. Isto é,  $v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$ , que é um vetor tangente à curva.

## Exemplo 8

Se  $r_1(t) = (t^2)i + (2t)j$  é o vetor posição de uma partícula que se move no plano, a velocidade num instante  $t$  é  $v(t) = (2t)i + 2j$ .



## Atividade 9

Em cada um dos casos a seguir, encontre o vetor velocidade, num instante arbitrário  $t$ .

a)  $r(t) = (\operatorname{sen} t)i + (3 - 2\cos t)j$       c)  $r(t) = \left(\frac{t+1}{t-1}\right)i + \frac{2t-1}{t}j$

b)  $r(t) = (3-2t)i + (2t+1)j$

Se  $v(t) = v_1(t)i + v_2(t)j$  é o vetor velocidade, a norma do vetor velocidade,  $\|v(t)\|$ , é o número real maior ou igual a zero dado por:  $\|v(t)\| = \sqrt{[v_1(t)]^2 + [v_2(t)]^2}$ .

### Exemplo 9

Usando o vetor posição  $r_1(t) = (t^2)i + (2t)j$ , do exemplo 8, vimos que a velocidade  $v(t) = (2t)i + 2j$ . Logo, a norma do vetor velocidade é igual  $\|v(t)\| = \sqrt{4t^2 + 4} = 2\sqrt{t^2 + 1}$ .



## Atividade 10

Em cada um dos casos a seguir, encontre o vetor velocidade e sua norma.

a)  $r(t) = (\cos t)i + (\operatorname{sen} t)j$

b)  $r(t) = (\operatorname{sen} 2t)i + (\sec t)j$

c)  $r(t) = (\sqrt{2t-1})i + (2t+1^2)j$

Se  $r(t)$  é o vetor posição da partícula que se move ao longo de uma curva lisa no plano, definimos, para cada instante  $t$ , o **vetor aceleração**,  $a(t)$ , como sendo a derivada do vetor velocidade. Isto é,  $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt^2}$ . Portanto, o vetor aceleração é a derivada segunda do vetor posição.

## Exemplo 10

Seja  $k$  um número real positivo e  $r(t) = (k \cos t)i + (k \sin t)j$  o vetor posição de uma partícula que se move no plano, com  $t$  um número real positivo.

- a) Encontre os vetores velocidade e aceleração.
- b) Verifique que o vetor velocidade é perpendicular ao vetor aceleração.
- c) Calcule a norma do vetor velocidade e a norma do vetor aceleração.

### Solução

a) Sabemos que o vetor velocidade é igual a  $v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$ . Assim, derivando em relação a  $t$  as coordenadas do vetor  $r(t)$ , obtemos  $v(t) = (-k \sin t)i + (k \cos t)j$  e como o vetor aceleração é dado por  $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt^2}$ , temos que

$$a(t) = (-k \cos t)i + (-k \sin t)j.$$

b) Calculando o produto escalar  $\langle v(t), a(t) \rangle$ , temos que:

$$\begin{aligned} \langle v(t), a(t) \rangle &= \langle (-k \sin t)i + (k \cos t)j, (-k \cos t)i + (-k \sin t)j \rangle \\ &= k^2(\sin t)(\cos t) - k^2(\cos t)(\sin t) = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $v(t)$  é perpendicular ao vetor  $a(t)$ .

c) A norma do vetor velocidade é igual a:

$$\|v(t)\| = \sqrt{(-k \sin t)^2 + (k \cos t)^2} = \sqrt{k^2[(\sin t)^2 + (\cos t)^2]} = \sqrt{k^2} = |k| = k.$$

Portanto, a norma do vetor velocidade é constante. A norma do vetor aceleração é dada por

$$a(t) = \sqrt{(-k \cos t)^2 + (-k \sin t)^2} = \sqrt{k^2[(\cos t)^2 + (\sin t)^2]} = \sqrt{k^2} = |k| = k.$$

Portanto, a norma do vetor aceleração é constante.



## Atividade 11

Seja  $r(t) = (1 - t)i + (3t)j$  o vetor posição de uma partícula que se move no plano, com  $t$  um número real positivo.

- a) Encontre os vetores velocidade e aceleração.
- b) Verifique se o vetor velocidade é perpendicular ao vetor aceleração.
- c) Calcule a norma do vetor velocidade e a norma do vetor aceleração.

# Integral de uma função vetorial

Recordando: na disciplina Cálculo I, você viu que dada uma função escalar  $f(x)$ , contínua no intervalo  $I$ , chamamos de integral indefinida de  $f(x)$  uma função derivável  $F(x)$ , chamada **primitiva de  $f(x)$** , tal que a derivada de  $F(x)$  é igual a  $f(x)$ :

$$\int f(x)dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Por outro lado, dada uma função vetorial  $F(t)$ , derivável, calculamos a derivada de  $F(t)$  quando calculamos a derivada de cada uma de suas coordenadas.

Dizemos que uma função vetorial  $F(t)$  é uma primitiva de uma função vetorial  $r(t)$  se  $\frac{dF(t)}{dt} = r(t)$ .

É fácil mostrar que toda primitiva da função vetorial  $r(t)$  tem a forma  $F(t) + C$ , onde  $C$  é um ponto fixo. Definimos a integral indefinida da função vetorial  $r(t)$  em relação à variável  $t$  ao conjunto de todas as primitivas, denotado por  $\int r(t)dt$ .

Assim, se  $F(t)$  é uma primitiva de  $r(t)$ , então,  $\int r(t)dt = F(t) + C$ , onde  $C$  é um ponto fixo. É fácil ver, portanto, que as regras básicas para integrais indefinidas do Cálculo I se aplicam para o caso de funções vetoriais, fazendo as devidas adaptações.

## Exemplo 11

Seja  $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j$ . Calcule a integral indefinida  $\int r(t)dt$ .

### Solução

$$\begin{aligned} &= \int [(\cos t)i + (\sin t)j]dt = \left(\int \cos t dt\right)i + \left(\int \sin t dt\right)j \\ &= [(\sin t) + C_1]i + [(-\cos t) + C_2]j = \\ &= [(\sin t)i + (-\cos t)j] + (C_1i + C_2j) = [(\sin t)i + (-\cos t)j] + C, \\ &\text{onde } C = C_1i + C_2j. \end{aligned}$$



## Atividade 12

Seja  $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j$ . Calcule todas as primitivas de  $r(t)$ .

Seja  $r(t) = x(t)i + y(t)j$  uma função vetorial com as funções escalares  $x(t)$  e  $y(t)$  integráveis no intervalo  $I = [a, b]$ , então,  $r(t)$  também integrável em  $I = [a, b]$  é a **integral definida de  $r(t)$** :

$$\int_a^b r(t)dt = \left( \int_a^b x(t)dt \right)i + \left( \int_a^b y(t)dt \right)j.$$

## Exemplo 12

Seja  $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j$ . Calcule a integral definida  $\int_0^\pi r(t)dt$ .

### Solução

$$\int_0^\pi r(t)dt = \left( \int_0^\pi \cos t dt \right)i + \left( \int_0^\pi \sin t dt \right)j = (\sin \pi - \sin 0)i + (-\cos \pi + \cos 0)j = 2j$$



## Atividade 13

Seja  $r(t) = (6 - 6t)i + (t + 1)j$ . Calcule a integral definida  $\int_0^1 r(t)dt$ .

# Curvas e funções vetoriais no espaço tridimensional

De modo análogo ao que fizemos para as curvas planas, podemos estudar as curvas descritas por uma partícula no espaço tridimensional.

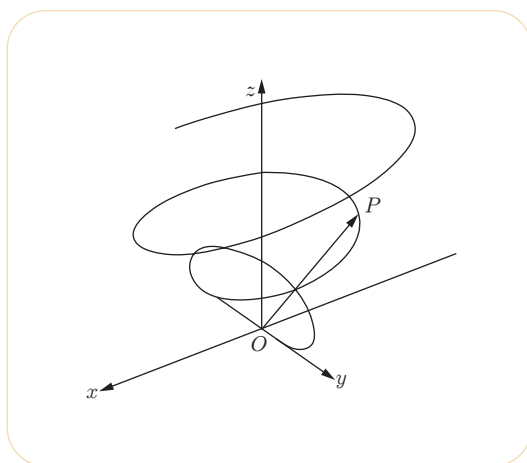
Um ponto  $P$  do espaço fica perfeitamente determinado por suas três coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ .

Do mesmo modo que fizemos para uma curva no plano, imagine que você estuda o movimento de uma partícula no espaço tridimensional durante certo intervalo de tempo  $I$ . A cada instante, ao longo do movimento, a partícula ocupa um ponto do espaço. Para estudar o

movimento descrito pela partícula, identificamos cada ponto que ela ocupa no espaço através das coordenadas cartesianas desse ponto, olhando para cada uma das coordenadas como se fosse uma função do tempo:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  e  $z = z(t)$ , onde  $t \in I$ .

Assim, a **trajetória** da partícula (ou a **curva** descrita pela partícula) no espaço durante o intervalo de tempo  $I$  é dada pela coleção de pontos da forma  $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , onde  $t \in I$ .

Dizemos que as equações  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  e  $z = z(t)$ , com  $t \in I$ , é uma **parametrização** da curva (no espaço) descrita pela partícula.



**Figura 4** - Curva no espaço tridimensional.

Para cada instante  $t$ , o vetor  $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP}$ , que vai da origem  $O$  até o ponto  $P = P(t) = (x(t), y(t), z(t))$  é o **vetor posição** da partícula:

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP} = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

onde  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$  e  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ . Essa equação define o vetor posição como sendo uma **função vetorial** da variável  $t \in I$ .

Os conceitos de limite, continuidade, derivada, integral, velocidade e aceleração podem ser feitos da mesma maneira que fizemos antes, adaptando-os ao caso tridimensional.

**a)** Se  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$  é uma função vetorial, para  $t \in I$ , dizemos que

$$\lim_{t \rightarrow c} \mathbf{r}(t) = \lim_{t \rightarrow c} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow c} y(t)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow c} z(t)\mathbf{k},$$

se cada um dos limites  $\lim_{t \rightarrow c} x(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow c} y(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow c} z(t)$  existe;

**b)** Se  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$  é uma função vetorial, então,  $\mathbf{r}(t)$  é **contínua** em  $t = c$  se, e só se,  $\lim_{t \rightarrow c} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(c)$ .

Procedendo do mesmo modo que no caso bidimensional, a definição de limite de funções vetoriais garante que  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$  é contínua em  $t = c$  se, e só se, as funções escalares  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  forem contínuas em  $t = c$ .

Desse modo, só tem sentido falar em continuidade da função vetorial  $r(t)$  em  $t = c$  se o número  $c$  for um elemento do domínio de  $r(t)$ .

Observe que a noção de continuidade é pontual. Quando a função vetorial  $r(t)$  é contínua para todo  $c$  do domínio, dizemos, simplesmente, que  $r(t)$  **é contínua**.

**c)** Dizemos que uma função vetorial  $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$  **tem derivada em  $t = t_0$**  ou **é derivável em  $t = t_0$**  se as funções escalares  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  têm derivadas em  $t = t_0$ . Nesse caso, a derivada de  $r(t)$  em  $t = t_0$  é a função vetorial dada por:

$$r'(t_0) = \frac{dr}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t_0 + h) - r(t_0)}{h} = \frac{dx(t_0)}{dt}i + \frac{dy(t_0)}{dt}j + \frac{dz(t_0)}{dt}k.$$

Uma função vetorial  $r(t)$  **é derivável** se possui derivada para todo ponto do domínio.

De modo análogo ao caso bidimensional, dizemos que uma curva no espaço tridimensional, representada por  $r(t)$ , com  $t \in I$ , é **lisa** ou **suave** se a derivada  $\frac{dr}{dt}$  for contínua e nunca for zero.

Isso significa dizer que as funções escalares  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  têm derivadas, suas derivadas são funções contínuas e elas nunca se anulam simultaneamente. Ou seja, uma **curva lisa não possui bicos**.

As regras básicas para integrais indefinidas vistas na disciplina Cálculo I também se aplicam para o caso de funções vetoriais no espaço tridimensional, fazendo as devidas adaptações. Além das propriedades já mencionadas no item **Derivada de uma função vetorial**, acrescentamos mais uma, a (viii), que diz respeito à derivada de um produto vetorial.

Recordando: se  $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$  são vetores do espaço tridimensional, o produto vetorial dos dois vetores é dado por:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

**(viii)** Se  $r_1(t)$  e  $r_2(t)$  são duas funções vetoriais no espaço, deriváveis, o produto vetorial  $r_1(t) \times r_2(t)$  é derivável e:

$$\frac{d}{dt}r_1(t) \times r_2(t) = \frac{dr_1(t)}{dt} \times r_2(t) + r_1(t) \times \frac{dr_2(t)}{dt}.$$

**d)** De modo análogo ao caso no plano, definimos a **integral indefinida da função vetorial  $r(t)$  no espaço tridimensional** em relação à variável  $t$  ao conjunto de todas as primitivas, denotado por  $\int r(t)dt$ .

Assim, se  $F(t)$  é uma primitiva de  $r(t)$ , então,  $\int r(t)dt = F(t) + C$ , onde  $C$  é um ponto do espaço fixado.

É fácil ver que aqui as regras básicas para integrais indefinidas do Cálculo I se aplicam para o caso de funções vetoriais no espaço tridimensional, fazendo as devidas adaptações.

A seguir, vamos dar exemplos de curvas no espaço tridimensional.

## Exemplo 13 (Hélice)

Na Figura 5, a seguir, vemos o gráfico da função vetorial (curva) dada  $r(t) = (2 \cos t)i + (2 \sin t)j + tk$ , com  $0 \leq t \leq 5\pi$ , onde destacamos os pontos:

$A, B, C, D, E, F, G$ , que coincidem respectivamente com:

$$r(0), r(\pi/2), r(2\pi), r(5\pi/2), r(4\pi), r(4\pi), r(9\pi/2), r(5\pi).$$

Fazendo os cálculos usando as funções componentes, concluímos que:

$$\begin{aligned} A &= \bar{r}(0) = (2, 0, 0), B = \bar{r}(\pi/2) = (0, 2, \pi/2), \\ C &= \bar{r}(2\pi) = (2, 0, 2\pi), D = \bar{r}(5\pi/2) = (0, 2, 5\pi/2), \\ E &= \bar{r}(4\pi) = (2, 0, 4\pi), F = \bar{r}(9\pi/2) = (0, 2, 9\pi/2), \\ G &= \bar{r}(5\pi) = (-2, 0, 5\pi). \end{aligned}$$

Podem ser difíceis para você esboçar esse gráfico, porém, é indispensável que você entenda os cálculos feitos anteriormente!

A curva definida anteriormente é denominada de **hélice**. A projeção dessa curva no plano  $XY$  é a circunferência  $r(t) = (2 \cos t)i + (2 \sin t)j$ , de raio 2. Por isso, dizemos que essa hélice tem raio 2.

Observe que pontos consecutivos em uma mesma vertical têm distância constante. Essa constante é denominada de **passo da hélice**. Nesse caso, o passo da hélice é  $2\pi$ , pois a distância  $d$  entre os pontos  $A$  e  $C$  é  $2\pi$ , como vemos nos cálculos a seguir:

$$d = \sqrt{(2 - 2)^2 + (0 - 0)^2 + (2\pi - 0)^2} = \sqrt{4\pi^2} = 2\pi.$$

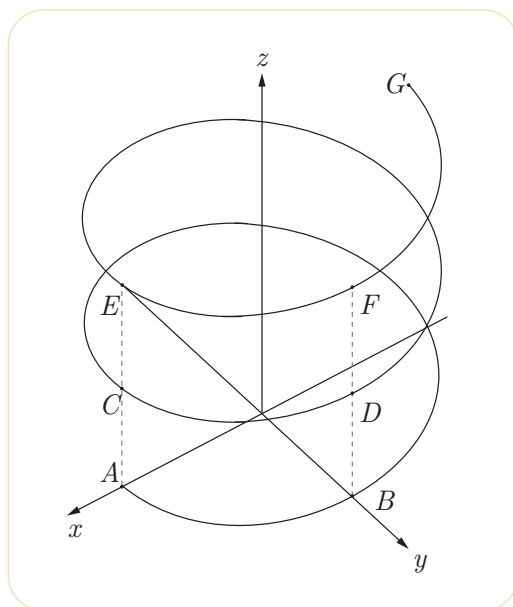


Figura 5 - A hélice.



## Atividade 14

Determine o maior subconjunto de  $R$  que serve como domínio para  $r(t) = (\cos \pi t)i - (\ln t)j + (\sqrt{t-2})k$  e encontre o valor de  $r(3)$ .

### Exemplo 14

Uma formiga caminha sobre uma esfera de raio 1, descrevendo uma curva lisa  $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ , derivável em função do tempo,  $t \in I$ .

(A equação da esfera de raio 1 e centro na origem é dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ).

Mostre que o vetor velocidade é perpendicular ao vetor posição  $r(t)$ .

### Solução

Como a curva  $r(t)$  está sobre a esfera, temos que  $x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1$ , para cada instante  $t$ . Mas, sabemos que o módulo do vetor  $r(t)$  é constante (igual a 1, pois  $r(t)$  está sobre a esfera de raio 1, com centro na origem). Assim,

$$\|r(t)\| = \sqrt{\langle r(t), r(t) \rangle} = 1, \text{ que é o mesmo que:}$$

$$\langle r(t), r(t) \rangle = 1.$$

Derivando em relação a  $t$  ambos os membros da igualdade anterior, obtemos

$$\frac{d}{dt} \langle r(t), r(t) \rangle = \left\langle \frac{dr(t)}{dt}, r(t) \right\rangle + \left\langle r(t), \frac{dr(t)}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle r(t), \frac{dr(t)}{dt} \right\rangle = 0.$$

Portanto,  $\left\langle r(t), \frac{dr(t)}{dt} \right\rangle = \left\langle r(t), v(t) \right\rangle = 0$ , o que significa dizer que o vetor posição é perpendicular ao vetor velocidade.



## Atividade 15

Esboce o segmento de reta representado pela equação vetorial:

$$r(t) = (1-t)i + (1-t)j + tk, 0 \leq t \leq 1.$$

# Resumo

Nesta aula, estudamos as **funções vetoriais**: curvas no plano e no espaço, limite e continuidade, derivadas, vetor tangente. Vimos muitos exemplos que permitiram o aprofundamento dessas funções, de modo que você consiga resolver problemas parecidos, envolvendo os assuntos aqui tratados.

## Autoavaliação

1

Esboce o segmento de reta representado pela equação vetorial:

$$r(t) = (1-t)i + (1-t)j + tk, 0 \leq t \leq 1.$$

2

Dado  $r(t) = (a \cos t)i + (a \sin t)j + 3k$ , com  $a > 0$  e  $0 \leq t \leq 2\pi$ , encontre

$$\frac{d\langle r_1(t) + r_2(t) \rangle}{dt}.$$

3

Seja  $r(t) = (t^2)i + (e^t)j - (2 \cos \pi t)k$ . Encontre,  $\lim_{t \rightarrow 0} r(t)$ ,  $r'(t)$  e  $\int_0^1 r(t) dt$ .

4

Considere um círculo de raio  $a$  e um ponto  $P$  desse círculo. Se esse círculo rola (sem deslizar) sobre uma reta, o ponto  $P$  do círculo descreve uma curva chamada **ciclóide**, conforme mostra a Figura 6. Observe que, quando o círculo rola sobre uma reta, esse ponto  $P$ , periodicamente, toca a reta. Um modo conveniente de representar uma ciclóide é por meio de equações paramétricas, supondo que o círculo rola sobre o eixo  $X$  e que o movimento começa quando o centro do círculo,  $C$ , está no semi-eixo positivo dos  $Y$ . Assim, a ciclóide é a curva descrita pelo ponto  $P$ , que, na posição inicial (isto é, quando o centro do círculo está no eixo positivo dos  $Y$ ), encontra-se na origem.

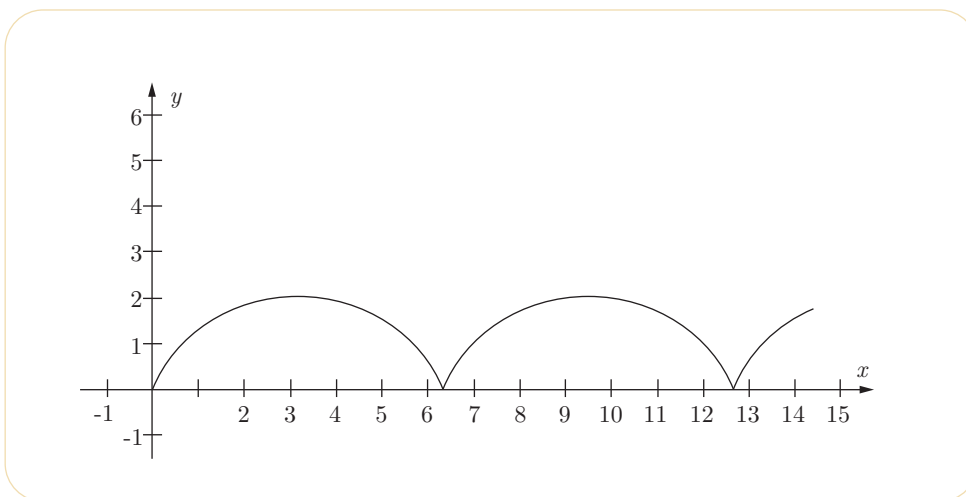
**a)** Deduza que as equações paramétricas da ciclóide são:

$$x(\theta) = a(\theta - \sin \theta) \text{ e } y(\theta) = a(1 - \cos \theta),$$

onde  $\theta$  é o ângulo varrido pelo raio  $CP$  quando o círculo rola para uma nova posição.

**b)** Se  $r(\theta) = [a(\theta - \text{sen } \theta)]i + [a(1 - \text{cos } \theta)]j$ , calcule  $r'(\theta)$ .

**c)** Verifique que a derivada  $\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$  não está definida para  $\theta = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi$ ; Esses pontos são aqueles em que a cicloide toca o eixo  $X$  e são chamados de **cúspides**. Observe que a tangente à cicloide nos cúspides é vertical.



**Figura 6** - A cicloide.

## Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000. v 2.

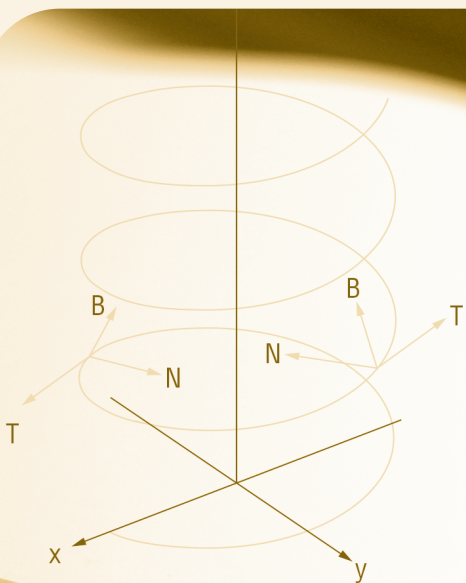
FINEY, Ross L.; GIORDANO, Frank R.; WEIR, Maurice D. **Cálculo de George B. Thomas**. São Paulo: Addison-Wesley, 2003. v 2.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: MacGraw- Hill, 1985. v 2.

# Comprimento de curva, regra da cadeia e triedro de Frenet

Aula

2



# Apresentação

**N**esta aula, estudaremos comprimento de curva, regra da cadeia, reparametrização e parametrização pelo comprimento de arco. Apresentaremos definições e técnicas que facilitam o estudo de movimentos de partículas no plano e no espaço, usando os conhecimentos de derivada de funções vetoriais e curvas, estudados na Aula 1 (Funções vetoriais) desta disciplina.

Tente entender tudo que está sendo explicado na aula; estude com caneta e papel ao lado; seja paciente e procure ter certeza de que você entendeu o que (e por que) está fazendo. Ao final da aula, é importante que você tente fazer a auto-avaliação proposta, como forma de saber se você atingiu os objetivos da aula.

## Objetivos

- 1 Calcular o comprimento de uma curva dada.
- 2 Entender o significado da regra da cadeia e usá-la para derivar funções vetoriais compostas.
- 3 Calcular as componentes da aceleração ao longo de uma curva no triedro móvel de Frenet.
- 4 Entender e aplicar os conceitos vistos anteriormente para resolver problemas práticos.



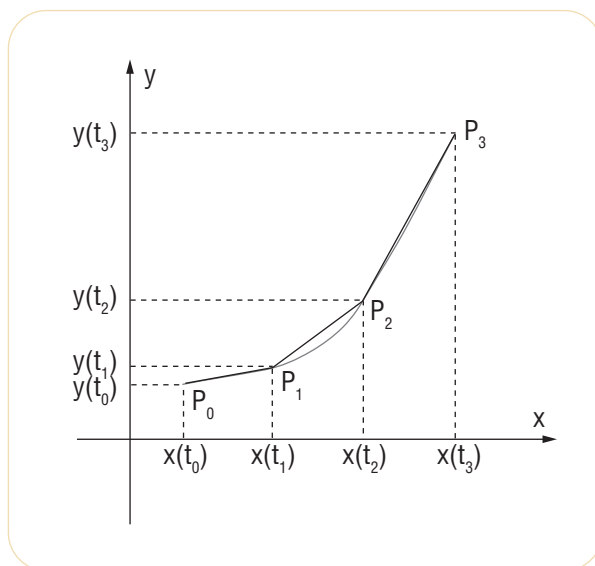
# Comprimento de curva

Nesta sessão, vamos definir o conceito de comprimento de curva e fazer algumas aplicações.

No estudo do movimento de uma partícula ao longo de uma curva lisa, é conveniente conhecer a localização de um ponto  $P$  sobre a curva. Essa localização pode ser dada pela exata distância desse ponto  $P$  a um ponto inicial  $P_0$ , calculando essa distância ao longo da curva.

Seja  $C(t) = (x(t), y(t))$ , com  $a \leq t \leq b$ , uma curva no espaço bidimensional. O que é o comprimento dessa curva de  $C(a)$  até  $C(b)$ ?

Na Figura 1, desenhamos uma curva lisa  $C(t)$ , com  $a \leq t \leq b$ . Intuitivamente, a figura nos sugere que podemos aproximar o comprimento,  $l$ , pelo comprimento da poligonal que liga  $C(a)$  a  $C(b)$ .



**Figura 1** - Curva lisa  $C(t)$ , com  $a \leq t \leq b$ .

Observe que a partição do intervalo  $[a, b]$ , na Figura 1, é dada apenas por  $\{t_0, t_1, t_2, t_3\}$ , onde  $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = b$ . Aproximamos o arco da função vetorial  $C(t) = (x(t), y(t))$  pelos segmentos de reta  $\overline{P_0, P_1}, \overline{P_1, P_2}, \overline{P_2, P_3}$ , que unem os pontos  $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$  a  $P_1 = (x(t_1), y(t_1))$ ,  $P_1 = (x(t_1), y(t_1))$  a  $P_2 = (x(t_2), y(t_2))$ ,  $P_2 = (x(t_2), y(t_2))$  a  $P_3 = (x(t_3), y(t_3))$ .

O **comprimento do arco**  $l$  de uma curva paramétrica com  $a \leq t \leq b$ , como sugerido pela Figura 1, pode ser aproximado pelo comprimento da poligonal, que é dado pela fórmula:

$$l = \overline{P_0, P_1} + \overline{P_1, P_2} + \overline{P_2, P_3}$$

$$l = \sqrt{(x(t_1) - x(t_0))^2 + (y(t_1) - y(t_0))^2} + \sqrt{(x(t_2) - x(t_1))^2 + (y(t_2) - y(t_1))^2} + \sqrt{(x(t_3) - x(t_2))^2 + (y(t_3) - y(t_2))^2}$$

Ou ainda:

$$l = \sqrt{\left(\frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t_1) - y(t_0)}{t_1 - t_0}\right)^2} (t_1 - t_0) + \sqrt{\left(\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\right)^2 + \left(\frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}\right)^2} (t_2 - t_1) + \sqrt{\left(\frac{x(t_3) - x(t_2)}{t_3 - t_2}\right)^2 + \left(\frac{y(t_3) - y(t_2)}{t_3 - t_2}\right)^2} (t_3 - t_2)$$

No caso geral, o comprimento total,  $l$ , de uma poligonal com  $n$  lados, que aproxime o comprimento de uma curva paramétrica  $C(t) = (x(t), y(t))$ , onde  $t_0 \leq t \leq t_n$ , no espaço bidimensional, é igual a:

$$l = L_1 + L_2 + \dots + L_k + \dots + L_{n-1} + L_n = \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right)^2} (t_k - t_{k-1})$$

Para tornar essa aproximação mais precisa, deveríamos tomar a poligonal cada vez mais próxima da curva, o que significa aumentar o número de lados da poligonal. Como você já viu em Cálculo I, isso nos leva à noção de limite. De modo que, para otimizar nosso cálculo, vamos tomar o limite dessas somas quando  $n$  tende ao infinito e, assim, o comprimento do maior subintervalo tende a zero.

Dessa maneira, o comprimento,  $l$ , da corda entre os pontos  $A = x(t_0)$  e  $B = x(t_n)$ , com  $t_0 = a$  e  $t_n = b$ , sobre a curva é dado por

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n L_k = \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right)^2} \Delta t_k = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Resumindo: o **comprimento do arco**,  $l$ , de uma curva paramétrica  $C(t) = (x(t), y(t))$  no espaço bidimensional, com  $a \leq t \leq b$ , é dado pela fórmula:

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

## Exemplo 1

Considere a curva  $C(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$  com  $0 \leq t \leq \pi/4$ . Determine o comprimento dela.

### Solução

Usaremos a fórmula que calcula comprimento de uma curva.

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{\pi/4} \sqrt{((2 \cos t)')^2 + ((2 \sin t)')^2} dt = \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} dt = \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^{\pi/4} 2 dt = 2[t]_0^{\pi/4} = 2(\pi/4 - 0) = \pi/2 \end{aligned}$$

O comprimento da curva é  $\pi/2$ .



## Atividade 1

Considere a curva  $C(t) = (t^3 - 3t, 3t^2)$  com  $1 \leq t \leq 2$ . Determine o comprimento dessa curva.

Podemos usar o mesmo raciocínio usado anteriormente para o caso de uma curva no espaço tridimensional. O **comprimento do arco**,  $l$ , de uma curva  $C(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , com  $a \leq t \leq b$  no espaço tridimensional desde  $C(a)$  até  $C(b)$  é dado pela fórmula:

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Para concluir essa seção, mostraremos, a seguir, uma outra maneira de apresentar a fórmula do cálculo do comprimento de arco de uma função vetorial.

Se  $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$  é o vetor posição de uma partícula, sabe-se que  $r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$ , logo,  $\|r'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ .

Com isso, concluímos que  $l = \int_a^b \|r'(t)\| dt$ .

## Teorema 1

Se  $C$  for o gráfico de uma função vetorial suave  $r(t)$  no espaço bi ou tridimensional, então, seu comprimento de arco,  $s(t)$ , de  $r(a)$  até  $r(t)$ , é dado por:

$$s(t) = \int_a^t \|r'(\tau)\| d\tau \text{ ou } s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2} d\tau.$$

Além disso, como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\frac{ds(t)}{dt} = s'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2},$$

isto é,  $s'(t) = \|r'(t)\|$ , onde  $s(t)$  é a função comprimento de arco.

## Prova

Da definição, temos que  $r'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$ . Como  $\frac{r(t+h) - r(t)}{h}$  é um vetor paralelo, ao vetor de origem em  $r(t)$  e extremidade em  $r(t+h)$ , quando  $h$  se aproxima de zero, o vetor  $\frac{r(t+h) - r(t)}{h}$  se aproxima da posição limite, que é tangente à curva no ponto  $r(t)$ . Portanto,  $r'(t)$  é tangente à curva no ponto  $r(t)$ . Essa justificativa pode ser melhor compreendida com o auxílio da Figura 2.

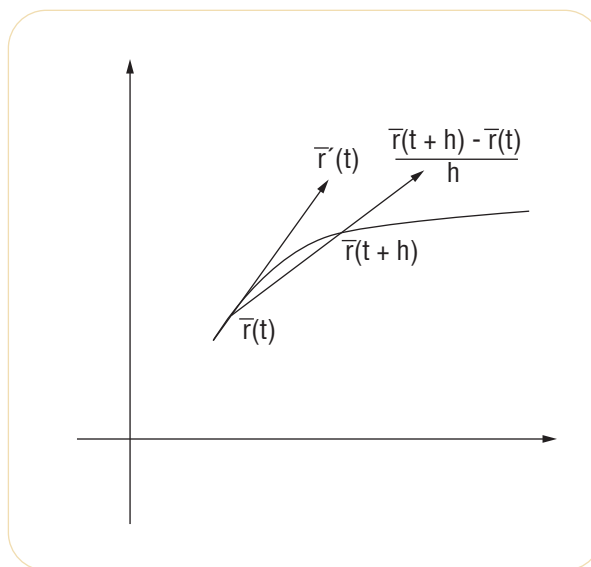


Figura 2 - Interpretação gráfica da derivada da função vetorial suave  $r(t)$ .

## Exemplo 2

Considere a reta no plano dada pelo vetor posição  $r(t) = (7t - 9)i - (5t + 4)j - 2t k$ .  
Determine o comprimento,  $l$ , do segmento de reta no intervalo  $0 \leq t \leq 2$ .

### Solução

Usaremos as fórmulas vetoriais.

Inicialmente calculemos a norma de  $r'(t)$ .

$$\|r'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{(7)^2 + (5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{78}$$

e

$$l = \int_a^b \|r'(t)\| dt = \int_0^2 \sqrt{78} dt = \sqrt{78}[t]_0^2 = \sqrt{78}(2 - 0) = 2\sqrt{78}.$$

O comprimento do segmento é  $2\sqrt{78}$ .



## Atividade 2

Considere a curva  $C$  no plano que tem vetor posição

$$r(t) = e^{2t}i + \left(\frac{e^{4t}}{4} - t\right)j.$$

Determine o comprimento de  $C$ ,  $l$ , no intervalo  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ .

# Mudança de parâmetro

No estudo de uma curva  $r(t)$ , o parâmetro  $t$  é interpretado como o tempo e o  $r'(t)$  o vetor tangente, entendido como a velocidade com que a partícula percorre a curva. Uma mesma curva pode ser percorrida com velocidades diferentes. Distinguímos duas dessas formas de percorrer a curva através do parâmetro  $t$ . Por exemplo, se um veículo desloca-se em linha reta num trecho de estrada com a velocidade de 60 km/h, em 1 hora percorrerá 60 km. Mas, se em vez de 60 km/h, a velocidade for de 120 km/h, ele percorrerá os 60 km em  $\frac{1}{2}$  hora. No primeiro caso, temos o vetor deslocamento dado por  $r(t) = (60t)i$ , onde  $0 \leq t \leq 1$ , e, no segundo caso, é dado por  $P(t) = (120t)i$ , com  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ . Observe que a mesma trajetória foi obtida por duas parametrizações diferentes, isto é, um exemplo de uma mudança de parâmetro, que de um modo geral definimos por:

## Definição 1

Uma “mudança de parâmetro” em uma função vetorial  $r(t)$  é uma substituição  $t = g(\tau)$  que produz uma nova função vetorial  $r(g(\tau))$  tendo o mesmo gráfico que  $r(t)$ , mas, possivelmente, com os domínios dos parâmetros  $t$  e  $\tau$  diferentes.

## Exemplo 3

Faça uma mudança de parâmetro  $t = 2\tau + 1$  para o círculo  $r(t) = \cos \hat{t}i + \sin \hat{t}j$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

## Solução

Devemos inicialmente determinar o domínio (isto é, onde  $t$  pode variar) de  $r(g(\tau))$ , que corresponde ao domínio de  $\vec{r}(t)$ , que é o intervalo  $0 \leq t \leq 2\pi$ : para  $t = 0$ , temos  $0 = 2\tau + 1$ , portanto,  $\tau = -\frac{1}{2}$ ; para  $t = 2\pi$ , temos  $2\pi = 2\tau + 1$  portanto  $\tau = \pi - \frac{1}{2}$ .

Logo, o domínio de  $r(g(\tau))$  é o intervalo  $-\frac{1}{2} \leq \tau \leq \pi - \frac{1}{2}$ .

Calculemos agora  $r(g(\tau))$ . Como  $r(g(\tau)) = \cos(2\tau + 1)i + \sin(2\tau + 1)j$ , a nova parametrização do círculo é  $r(g(\tau)) = \cos(2\tau + 1)i + \sin(2\tau + 1)j$  com  $-\frac{1}{2} \leq \tau \leq \pi - \frac{1}{2}$ .

Podemos evitar o uso da composição de funções e da letra grega, reescrevendo a nova parametrização na forma:  $p(t) = \cos(2t + 1)i + \text{sen}(2t + 1)j$ , com  $-1/2 \leq t \leq \pi - 1/2$ .

## Exemplo 4

Determine  $a$  e  $b$  de modo que  $\tau = a\tau + b$  seja uma mudança de parâmetro para o círculo  $r(t) = \cos t i + \text{sen } t j$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , de modo que o círculo seja traçado no sentido horário quando  $\tau$  cresce sobre o intervalo  $[0, 1]$ .

### Solução

Temos,  $t = g(\tau) = 2\pi(1 - \tau)$  e quando  $0 \leq \tau \leq 1$ , temos  $t = 2\pi$  para  $t = 0$ .

Ou seja,  $r(t) = (\cos t) i + (\text{sen } t) j$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Assim,  $r(g(\tau)) = \cos(2\pi(1 - \tau))i + \text{sen}(2\pi(1 - \tau))j$ , com  $0 \leq \tau \leq 1$ .



## Atividade 3

Determine  $a$  e  $b$  para que  $\tau = a\tau + b$  seja uma mudança de parâmetro para a curva  $r(t) = ti + t^2j$ , com  $0 \leq t \leq 2$ , de modo que:

- a curva seja percorrida de  $r(0)$  para  $r(2)$ , quando  $\tau$  varia de 0 até 1;
- a curva seja percorrida de  $r(2)$  a  $r(0)$ , quando  $\tau$  varia de 0 até 4.

Voltando ao exemplo 3, observe que:

$$r(\pi/6) = \cos(\pi/6) i + \text{sen}(\pi/6) j = 0,866 i + 0,5 j;$$

$$p(\pi/12 - 1/2) = \cos(2(\pi/12 - 1/2) + 1) i + \text{sen}(2(\pi/12 - 1/2) + 1) j = \cos(\pi/6) i + \text{sen}(\pi/6) j = 0,866 i + 0,5 j.$$

Volte ao exemplo 3 e observe que:

$$r'(t) = -\operatorname{sen}(t) \mathbf{i} + \cos(t) \mathbf{j};$$

$$p'(t) = -2 \operatorname{sen}(2t - 1/2) \mathbf{i} + 2 \cos(2t + 1) \mathbf{j};$$

$$r'(\pi/6) = -\operatorname{sen}(\pi/6) \mathbf{i} + \cos(\pi/6) \mathbf{j} = -0,5 \mathbf{i} + 0,866 \mathbf{j};$$

$$p'(\pi/12 - 1/2) = -2 \operatorname{sen}(2(\pi/12 - 1/2) + 1) \mathbf{i} + 2 \cos(2(\pi/12 - 1/2) + 1) \mathbf{j} = \\ -2 \operatorname{sen}(\pi/6) \mathbf{i} + 2 \cos(\pi/6) \mathbf{j} = -1,632 \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Nas observações anteriores, mostramos dois pontos  $r(\pi/6)$  e  $p(\pi/12 - 1/2)$  os quais representam o mesmo ponto nas duas parametrizações da mesma curva, mas as derivadas  $r'(\pi/6)$  e  $p'(\pi/12 - 1/2)$  são diferentes, indicando que uma reparametrização não altera o gráfico da curva, mas altera a velocidade, como pode ser visto aqui e justificado usando a **regra da cadeia**, dada a seguir.

### Teorema 3 (Regra da Cadeia)

Seja  $r(t)$  uma função vetorial no espaço bidimensional ou tridimensional que é diferenciável em relação a  $t$ . Se  $t = g(\tau)$  for uma mudança de parâmetro na qual  $g$  é diferenciável em relação a  $\tau$ , então,  $r(g(\tau))$  é diferenciável em relação a  $\tau$  e

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau}.$$

$\frac{dt}{d\tau} > 0 \Rightarrow$  Mudança positiva de parâmetro;

$\frac{dt}{d\tau} < 0 \Rightarrow$  Mudança negativa de parâmetro.

A prova será feita nas aulas seguintes.

Como  $\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau}$ , podemos concluir que:

**a)** uma mudança de parâmetro altera a velocidade  $\frac{dr}{dt}$  pelo fator  $\frac{dt}{d\tau}$  para obter a velocidade na nova parametrização, isto é,  
$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau},$$

**b)** uma mudança positiva de parâmetro preserva a orientação de uma curva e o sentido de sua velocidade, e uma mudança negativa de parâmetro inverte.

## Exemplo 5

Determine uma mudança de parâmetro  $t = g(\tau)$  para o círculo  $r(t) = (\cos t) i + (\sin t) j$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , de modo que o círculo seja traçado no sentido horário quando  $\tau$  cresce sobre o intervalo  $[0, 1]$ .

### Solução

Pelos exemplos anteriores,  $t = at + b$ . Como queremos que a circunferência seja traçada no sentido horário devemos ter:

quando  $0 \leq \tau \leq 1$ . Ou seja,  $r(t) = (\cos t) i + (\sin t) j$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Logo,  $r(g(\tau)) = \cos(2\pi(1 - \tau))i + \sin(2\pi(1 - \tau))j$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ .



## Atividade 4

Volte ao exemplo 4 para fazer o gráfico  $\tau \times \tau$ , onde  $t = g(\tau) = 2\pi(1 - \tau)$ , no intervalo  $0 \leq \tau \leq 1$ .

Mostre que, após a simplificação, ficamos com:  $r(g(\tau)) = \cos(2\pi\tau)i - \sin(2\pi\tau)j$  sendo  $0 \leq \tau \leq 1$ .

## Curvas parametrizadas pelo comprimento de arco

O comprimento de arco,  $s$ , pode ser usado para fazer reparametrização, procedendo-se da seguinte forma:

**Passo 1.** Estabeleça um ponto sobre a curva  $C$  para ser o **ponto inicial**.

**Passo 2.** A partir do ponto inicial, escolha um sentido para ser positivo e o outro para ser negativo.

**Passo 3.** Se  $P$  for um ponto sobre a curva, seja  $s$  o comprimento de arco ao longo de  $C$  “com sinal” a partir do ponto inicial até o ponto  $P$ .

Seendo  $s$  um parâmetro, temos que: quando  $s$  varia, o ponto correspondente a  $P(s)$  move-se ao longo de  $C$  e as coordenadas de  $P$  tornam-se funções de  $s$ . Nesse caso, temos  $\|P'(s)\| = 1$ .

Assim, no espaço tridimensional, temos  $P(s) = (x(s), y(s), z(s))$ .

## Exemplo 6

Determine a parametrização por comprimento de arco do círculo  $x^2 + y^2 = a^2$ , com orientação no sentido anti-horário e ponto inicial  $(a, 0)$ .

### Solução

Seja  $P = (x, y)$  um ponto sobre o círculo. Uma parametrização para esse círculo pode ser  $P(t) = (x(t), y(t)) = (a \cos t, a \sin t)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

As equações paramétricas são:  $x(t) = a \cos t, y(t) = a \sin t$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Então, aplicando-se a fórmula  $s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2} d\tau$  para o caso bidimensional, temos:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{[-a \sin(\tau)]^2 + [a \cos(\tau)]^2} d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2(\tau) + a^2 \cos^2(\tau)} d\tau =$$

$$\int_0^t a d\tau = [a \tau]_0^t = at$$

$s = at$  ou  $t = \frac{s}{a}$ . Logo,

$$x = x(t) = a \cos t \Rightarrow x = x(s) = a \cos(s/a)$$

$$y = y(t) = a \sin t \Rightarrow y = y(s) = a \sin(s/a)$$

Resumindo:  $P(s) = (x(s), y(s)) = (a \cos(s/a), a \sin(s/a))$ , com  $0 \leq s \leq 2\pi a$ , pois quando  $t = 2\pi$ , tem-se  $s = 2\pi a$ .



## Atividade 5

Dado a curva  $P(s) = (a \cos(s/a), a \sin(s/a))$ , parametrizada pelo comprimento de arco, calcule:  $P'(s)$  e  $\|P'(s)\|$ .

## Exemplo 7

Determine a parametrização por comprimento de arco da hélice circular:

$$r(t) = \cos t \, i + \sin t \, j + t \, k,$$

que tem o ponto inicial  $r(0) = (1, 0, 0)$  e a mesma orientação de percurso que a hélice dada.

### Solução

Tomando  $r(\tau) = (\cos \tau)\hat{i} + (\sin \tau)\hat{j} + \tau k$  e  $t_0 = 0$ , temos

$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{(-\sin \tau)^2 + (\cos \tau)^2 + 1} \, d\tau. \text{ Logo, } s = s(t) = \int_0^t \sqrt{2} \, d\tau.$$

Assim,  $s = \sqrt{2}t$  e  $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$ . Portanto,

$$r(t) = \cos t \, i + \sin t \, j + t \, k \Rightarrow r(s) = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) i + \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) j + \frac{s}{\sqrt{2}} k.$$

**Observação** - Essa mudança de parâmetro é positiva, pois  $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ .



## Atividade 6

Sendo  $r(s) = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) i + \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) j + \frac{s}{\sqrt{2}} k$ , calcule  $r'(s)$  e  $\|r'(s)\|$ .

## Exemplo 8

Seja  $r(t) = r_0 + t M$  a forma vetorial da reta que passa pelo ponto terminal de  $r_0$  e é paralela ao vetor não nulo  $M$ . Determine a parametrização por comprimento de arco da reta que tem como ponto inicial  $r_0$  e a mesma orientação que o vetor  $M$ .

### Solução

$$\text{Temos } r = r_0 + t M, \frac{dr}{dt} = M, \left\| \frac{dr}{d\tau} \right\| = \|M\|.$$

$$s = s(t) = \int_0^t \left\| \frac{dr}{d\tau} \right\| d\tau = \int_0^t \|M\| d\tau = \|M\|[\tau]_0^t = \|M\|t.$$

Assim,  $s = t \|M\| \Rightarrow t = \frac{s}{\|M\|}$ .

Portanto,  $r = r_0 + tM \Rightarrow r = r_0 + s \frac{M}{\|M\|}$ .

## Exemplo 9

Determine a parametrização por comprimento de arco da reta cujas equações paramétricas são  $x = 1 + 2t$  e  $y = -2 + 3t$  que tem a mesma orientação que a reta dada e usa  $(1, -2)$  como ponto inicial.

### Solução

Lembre-se que se  $r = r(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  são as equações paramétricas, então o vetor diretor da reta é  $r'(t)$

Assim,

Temos  $r_0 = i - 2j$ ,  $M = 2i + 3j$ ,  $\|M\| = \sqrt{13}$ . Portanto,  $x(s) = 1 + s \frac{2}{\sqrt{13}}$  e  $y(s) = -2 + s \frac{3}{\sqrt{13}}$ .



## Atividade 7

Determine a parametrização por comprimento de arco da reta cujas equações paramétricas são  $x = 2 - 2t$  e  $y = 5 - 7t$  que tem a mesma orientação que a reta dada e usa  $(2,5)$  como ponto inicial.

## Triedro de Frenet

Para facilitar a caracterização de uma curva no espaço bidimensional ou tridimensional, usamos um vetor tangente unitário e suas variações. Além dele, outros vetores unitários serão definidos nesta seção.

# Vetor tangente unitário a uma curva

Já vimos que, em uma curva suave  $r(t)$ , o vetor velocidade  $r'(t)$  é tangente à curva no ponto  $r(t)$ . A partir desse vetor, definimos um vetor unitário, que é igualmente tangente à curva, conforme Teorema 2, a seguir.

## Teorema 2

Se  $r(t)$  é uma parametrização de uma curva suave com  $r'(t) \neq 0$ , então, o vetor

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \text{ é um } \mathbf{\text{vetor tangente unitário}} \text{ à curva no ponto } .$$

**Demonstração** - Como o vetor  $r'(t)$  é tangente à curva no ponto  $r(t)$ , dividindo-o por  $\|r'(t)\|$ , o resultado é um vetor unitário múltiplo de  $r'(t)$ , portanto,  $T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$  é tangente à curva.

Foi visto que, em uma curva lisa  $s'(t) = \|\vec{r}'(t)\|$ , onde  $s(t)$  é a função comprimento de arco, portanto,  $s'(t) = > 0$  e, conseqüentemente, pelo Teorema da Função Inversa,  $s(t)$  é uma função injetiva que admite uma função inversa  $t(s)$  diferenciável com

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} .$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dr}{dt} \frac{1}{ds/dt} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = T(t) .$$

Podemos então reescrever o Teorema 2 na forma

## Teorema 2'

Se  $r(t)$  é uma parametrização de uma curva suave com  $r'(t) \neq \vec{0}$ , então:

- a)** o vetor  $T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$  é um vetor tangente unitário à curva  $C$  no ponto  $r(t)$ ;
- b)** o vetor  $T(s) = r'(s)$  é um vetor tangente unitário à curva  $C$  no ponto  $r(s)$ .

## Exemplo 10

Considere a hélice circular  $r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ , e:

- a) encontre vetor tangente unitário a  $r(t)$ ;
- b) encontre o comprimento de arco, a partir de  $r(0)$ , no sentido positivo;
- c) encontre  $T(s)$ .

### Solução

- a) Aplicaremos o item a) do Teorema 2'

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{(-2 \sin t, 2 \cos t, 1)}{\|(-2 \sin t, 2 \cos t, 1)\|} = \frac{(-2 \sin t, 2 \cos t, 1)}{\sqrt{((-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2 + 1)}} =$$
$$\frac{(-2 \sin t, 2 \cos t, 1)}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{(-2 \sin t, 2 \cos t, 1)}{3} = \left(-\frac{2}{3} \sin t, \frac{2}{3} \cos t, \frac{1}{3}\right).$$

Resumindo:  $T(t) = \left(-\frac{2}{3} \sin t, \frac{2}{3} \cos t, \frac{1}{3}\right)$ .

- b) Aplicaremos a fórmula  $s(t) = \int_a^t \|r'(\tau)\| d\tau$ .

Nos cálculos do item a), vimos que  $\|r'(\tau)\| = 3$ . Logo,

$$s(t) = \int_0^t 3 d\tau = [3\tau]_0^t = (3t - 0) = 3t,$$

O comprimento de arco da curva  $r(t)$  entre  $r(0)$  e  $r(t)$  é  $s(t) = 3t$ .

- c) Como  $s = 3t$ , a parametrização de  $r(t)$  pelo comprimento de arco é feita substituindo  $t$  por  $s/3$ . Assim, temos

$$r(t(s)) = (2 \cos t(s), 2 \sin t(s), t(s)) = \left(2 \cos \frac{s}{3}, 2 \sin \frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right)$$

Podemos escrever  $r(s) = \left(2 \cos \frac{s}{3}, 2 \sin \frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right)$ , e usando que  $T'(s) = r'(s)$ , temos

$$T(s) = r'(s) = \frac{d\left(2 \cos \frac{s}{3}, 2 \sin \frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right)}{ds} = \left(-2 \sin \frac{s}{3} \cdot \frac{1}{3}, 2 \cos \frac{s}{3} \cdot \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) =$$
$$= \left(-\frac{2}{3} \sin \frac{s}{3}, \frac{2}{3} \cos \frac{s}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Resumindo,  $T(s) = \left(-\frac{2}{3} \sin \frac{s}{3}, \frac{2}{3} \cos \frac{s}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

Observe a semelhança entre as respostas dos itens a) e c). Em um mesmo ponto da curva, temos que  $T(s) = T(t)$ .



## Atividade 8

Considere a curva  $r(t) = (t^2 - 3t, 4t\sqrt{t}, 4t\sqrt{3t})$  com  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

- d) Encontre vetor tangente unitário a  $r(t)$
- e) Encontre o comprimento de arco a partir de  $r(0)$  no sentido positivo;
- f) Usando a regra da cadeia, encontre  $T(s)$ .

### Vetor normal unitário a uma curva

No início desta seção, destacamos que é importante o estudo de  $T$  e suas variações para a caracterização da curva  $r(t)$ .

Para estudar as variações de  $T$ , consideramos que  $T$  é uma função derivável do comprimento de arco  $s$ . Como  $T$  é unitário, temos que:

$$\langle T, T \rangle = 1,$$

$$\frac{d}{ds}(\langle T, T \rangle) = 0,$$

$$2 \left\langle \frac{dT}{ds}, T \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \frac{dT}{ds}, T \right\rangle = 0.$$

Como  $\left\langle \frac{dT}{ds}, T \right\rangle = 0$ , temos que  $\frac{dT}{ds}$  é perpendicular a  $T$  ou  $\frac{dT}{ds} = 0$ .

O valor de  $\left\| \frac{dT}{ds} \right\|$  indica a velocidade com que vetor  $T$  está variando. Quando esse valor é próximo de zero, a curva é próxima de uma reta, e quanto maior esse valor mais “fechada” é a curva. Vendo essas propriedades, percebemos que o valor de  $\left\| \frac{dT}{ds} \right\|$  em cada ponto indica se curva é fechada ou mais aberta.

Chamamos  $\left\| \frac{dT}{ds} \right\|$  de **curvatura da curva no ponto**  $r(t)$ , e para facilitar o manuseio de fórmulas, representamos a curvatura pela letra grega  $\kappa$ . Portanto,  $\kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$ .

A curvatura  $k$  nunca é negativa, mas pode ser nula, é o caso dos movimentos em linha reta que tem um vetor  $T$  constante, consequentemente:

$\frac{dT}{ds} = 0$  e  $k = 0$ . Quando  $k \neq 0$ , definimos o vetor normal,  $N$ , à curva em  $r(t)$ .

## Definição 2

Representamos por  $N$  o vetor normal unitário à curva  $r(t)$ , dado por  $N = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds}$ .

Em decorrência dessa definição, temos que  $\frac{dT}{ds} = \kappa N$ .

Se  $r(t)$  é uma parametrização de uma curva suave, podemos calcular  $k$  e  $N$  sem reparametrizar pelo comprimento de arco, como veremos a seguir.

## Teorema 3

Se  $r(t)$  é uma curva suave com  $r'(t) \neq 0$ , então, temos  $N = \frac{dT/dt}{\|dT/dt\|}$ .

**Demonstração** - Como, usando a regra da cadeia e o fato de que  $\kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$ , obtemos:

$$N = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds} = \frac{1}{\left\| \frac{dT}{ds} \right\|} \frac{dT}{ds} = \frac{1}{\left\| \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} \right\|} \frac{dT}{dt} \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{\left\| \frac{dT}{dt} \right\| \cdot \left| \frac{dt}{ds} \right|} \frac{dT}{dt} \frac{1}{ds/dt} = \frac{dT/dt}{\|dT/dt\|}$$

Observe que já vimos que em uma curva lisa  $\frac{ds}{dt} = s'(t) = \|r'(t)\| > 0$ . Portanto,

$$\left| \frac{dt}{ds} \right| = \frac{1}{\left| \frac{ds}{dt} \right|} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dt}{ds}, \text{ que esclarece as simplificações anteriores.}$$

# Vetor binormal unitário a uma curva

O plano paralelo aos vetores  $T$  e  $N$ , que passa pelo vetor posição  $r(t)$ , é denominado de plano “osculador”. Tal nome decorre do fato de que o plano definido por três pontos distintos da curva, não alinhados, que tendem para  $r(t)$ , se aproxima de um plano fixo, que é o plano “osculador”.

O vetor normal ao plano osculador representado por  $B$  é definido pelo produto vetorial

$$B = T \times N.$$

A variação do vetor  $B$  indica como a curva se “contorce” no espaço.

Vamos estudar esta variação calculando  $\frac{dB}{ds}$ .

$$\frac{dB}{ds} = \frac{d(T \times N)}{ds} = \frac{dT}{ds} \times N + T \times \frac{dN}{ds} = kN \times N + T \times \frac{dN}{ds} = k0 + T \times \frac{dN}{ds} = T \times \frac{dN}{ds}.$$

Logo,

$$\frac{dB}{ds} = T \times \frac{dN}{ds}$$

Dessa última equação vetorial, concluímos que  $\frac{dB}{ds}$  é perpendicular a  $T$ . Como  $B$  é um vetor unitário,  $\frac{dB}{ds}$  é perpendicular a  $B$ . Logo,  $\frac{dB}{ds}$  é perpendicular ao plano de  $B$  e  $T$ .

Portanto,  $\frac{dB}{ds}$  é um múltiplo de  $N$ . A constante de proporcionalidade, que depende do parâmetro, é representada por  $-\tau$ . O uso dessa constante negativa é uma tradição, usada universalmente na literatura.

Podemos, então, escrever  $\frac{dB}{ds} = -\tau N$ . Fazendo o produto escalar de  $\frac{dB}{ds}$  por  $N$ , obtemos  $\tau$ , que chamamos de torção.

## Definição 3

Seja  $B = T \times N$ , chamamos o número  $\tau = -\left\langle \frac{dB}{ds}, N \right\rangle$  de torção de uma curva.

# Componentes da velocidade e da aceleração de uma curva no triedro de Frenet

Dada uma curva suave  $r(t)$ , o **triedro móvel** formado pelos vetores  $T$ ,  $N$  e  $B$  é chamado de **triedro de Frenet**. O vocábulo “móvel” decorre do fato que o triedro varia em cada ponto de  $r(t)$ .

A seguir, iremos calcular as componentes da velocidade  $v = \frac{dr}{dt}$  e da aceleração  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$  no triedro de Frenet.

## Componentes da Velocidade

Para obter a componente da velocidade, fazemos uso da regra da cadeia. Portanto,  $v = \frac{ds}{dt}T$ , isto é, a velocidade tem apenas componente tangencial, que é  $\frac{ds}{dt}$ .

## Componentes da aceleração

Para obter a componente da aceleração, fazemos uso da regra da cadeia e do resultado anterior:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} T \right) = \frac{d^2s}{dt^2} T + \frac{ds}{dt} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} T + \frac{ds}{dt} \frac{dT}{dt} =$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} T + \frac{ds}{dt} \left( \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} T + \frac{ds}{dt} \left( kN \frac{ds}{dt} \right) =$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} T + k \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 N$$

Portanto,  $a = \frac{d^2s}{dt^2} T + k \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 N$ . A aceleração tem duas componentes no triedro de Frenet, a componente tangencial, que é  $\frac{d^2s}{dt^2}$ , e a componente normal, que é  $\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 k$ .

## Exemplo 11

Considere a hélice circular  $r(t) = (2 \cos 2t, 2 \sin 2t, 3t)$  com  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Determine:

- $s'(t)$ ;
- o vetor tangente unitário  $T$  em  $r(t)$ ;
- a curvatura  $k$  e o vetor normal  $N$ .

## Solução

**a)** Como  $s'(t) = \|r'(t)\|$  e  $r'(t) = \frac{d}{dt}(2 \cos 2t, 2 \sin 2t, 3t) = (-4 \sin 2t, 4 \cos 2t, 3)$ , temos  $s'(t) = \|(-4 \sin 2t, 4 \cos 2t, 3)\| = \sqrt{16(\sin 2t)^2 + 16(\cos 2t)^2 + 9} = 5$ .

**b)** Sabemos que

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{(-4 \sin 2t, 4 \cos 2t, 3)}{5} = \left(-\frac{4}{5} \sin 2t, \frac{4}{5} \cos 2t, \frac{3}{5}\right).$$

**c)** Para o cálculo de  $k$ , usamos a definição  $\kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$  e a regra da cadeia.

Inicialmente, observe que

$$\kappa = \left\| \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{dT}{dt} \right\| \cdot \left| \frac{dt}{ds} \right|.$$

De b), temos  $T(t) = \left(-\frac{4}{5} \sin 2t, \frac{4}{5} \cos 2t, \frac{3}{5}\right)$ . Logo,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{4}{5} \sin 2t, \frac{4}{5} \cos 2t, \frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{8}{5} \cos 2t, -\frac{8}{5} \sin 2t, 0\right), \text{ o que implica}$$

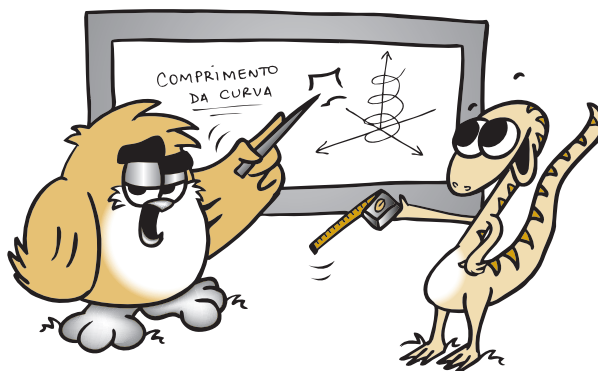
$$\left\| \frac{dT}{dt} \right\| = \left\| \left(-\frac{8}{5} \cos 2t, -\frac{8}{5} \sin 2t, 0\right) \right\| = \sqrt{\frac{64}{25}(\cos 2t)^2 + \frac{64}{25}(\sin 2t)^2 + 0} = \frac{8}{5}.$$

De a), temos que  $s'(t) = \frac{ds}{dt} = 5$ , assim,  $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{5}$ .

$$\text{Portanto, } \kappa = \left\| \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{dT}{dt} \right\| \cdot \left| \frac{dt}{ds} \right| = \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{25}.$$

Para o Cálculo de  $N$ , usamos a expressão de  $N$  dada por  $\frac{dT}{ds} = \kappa N$ . Usando os cálculos já feitos, temos

$$N = \frac{dT/dt}{\|dT/dt\|} = \frac{\left(-\frac{8}{5} \cos 2t, -\frac{8}{5} \sin 2t, 0\right)}{\frac{8}{5}} = (-\cos 2t, -\sin 2t, 0).$$

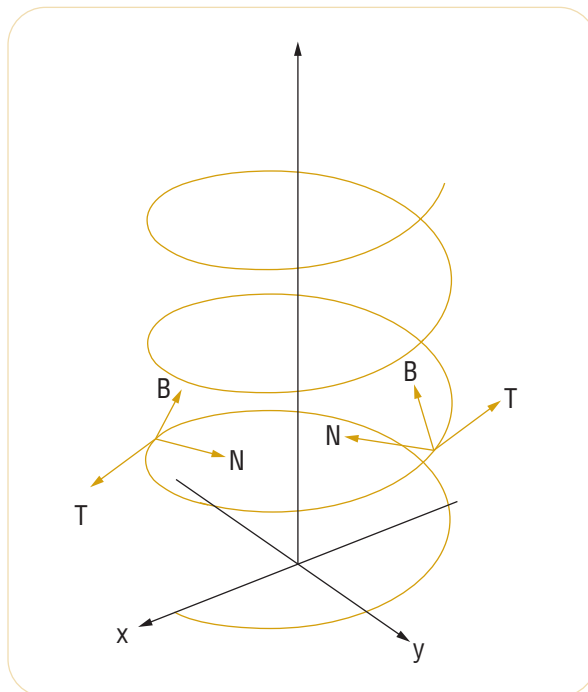




## Atividade 9

Considere a hélice circular  $r(t) = (a \cos bt, a \sin bt, ct)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ , e sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes. Determine:

- $s'(t)$ ;
- o vetor tangente unitário  $T$  em  $r(t)$ ;
- a curvatura  $k$  e o vetor normal  $N$ ;
- as componentes do vetor aceleração no triedro de Frenet.



**Figura 3** - O triedro em uma hélice.

# Resumo

Nesta aula, estudamos o comprimento de curvas parametrizadas, apresentamos a regra da cadeia, reparametrizações e o estudo de curvas através do triedro de Frenet.

## Autoavaliação

1

Considere a reta no plano dada pelo vetor posição  $r(t) = (7t - 9)\hat{i} - (5t + 4)\hat{j}$ . Determine o comprimento,  $l$ , do segmento de reta no intervalo  $0 \leq t \leq 2$ .

Resposta:  $l = 2\sqrt{74}$ .

2

Considere a curva  $C$  no plano que tem vetor posição  $r(t) = (3 \cos 2t)\hat{i} - (2 \sin 2t)\hat{j}$ . Determine o comprimento  $l$  de  $C$  no intervalo  $0 \leq t \leq \pi$ .

Resposta:  $l = 6\pi$ .

3

Considere a curva  $C$  no plano que tem vetor posição  $\vec{r}(t) = (e^{-t} \cos t)\hat{i} + (e^{-t} \sin t)\hat{j}$ . Determine o comprimento  $l$  de  $C$  no intervalo  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Resposta:  $l = \sqrt{2}(1 - e^{-2\pi})$ .

4

Ache o comprimento de arco  $l$  da curva  $C$  dada pelo vetor posição  $\vec{r}(t) = (e^{-t} \cos t)\hat{i} - (e^{-t} \sin t)\hat{j} + e^{-t}\hat{k}$  no intervalo  $0 \leq t \leq \pi$ .

Resposta:  $l = \sqrt{3}(1 - e^{-\pi})$ .

# Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000. v 2.

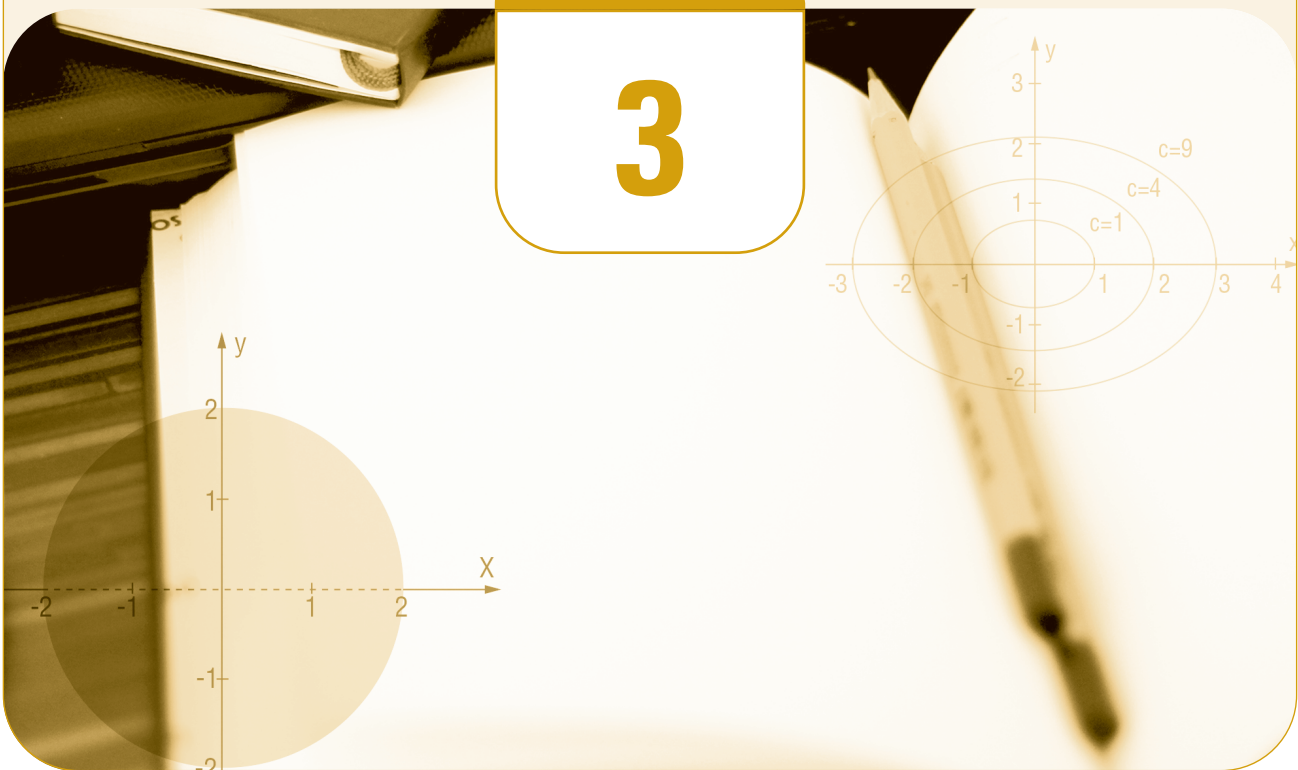
FINEY, Ross L.; GIORDANO, Frank R.; WEIR, Maurice, D. **Cálculo de George B Thomas**. São Paulo: Addison-Wesley, 2003. v 2.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: MacGraw-Hill, 1985. v 2.

# Funções reais de várias variáveis

Aula

3



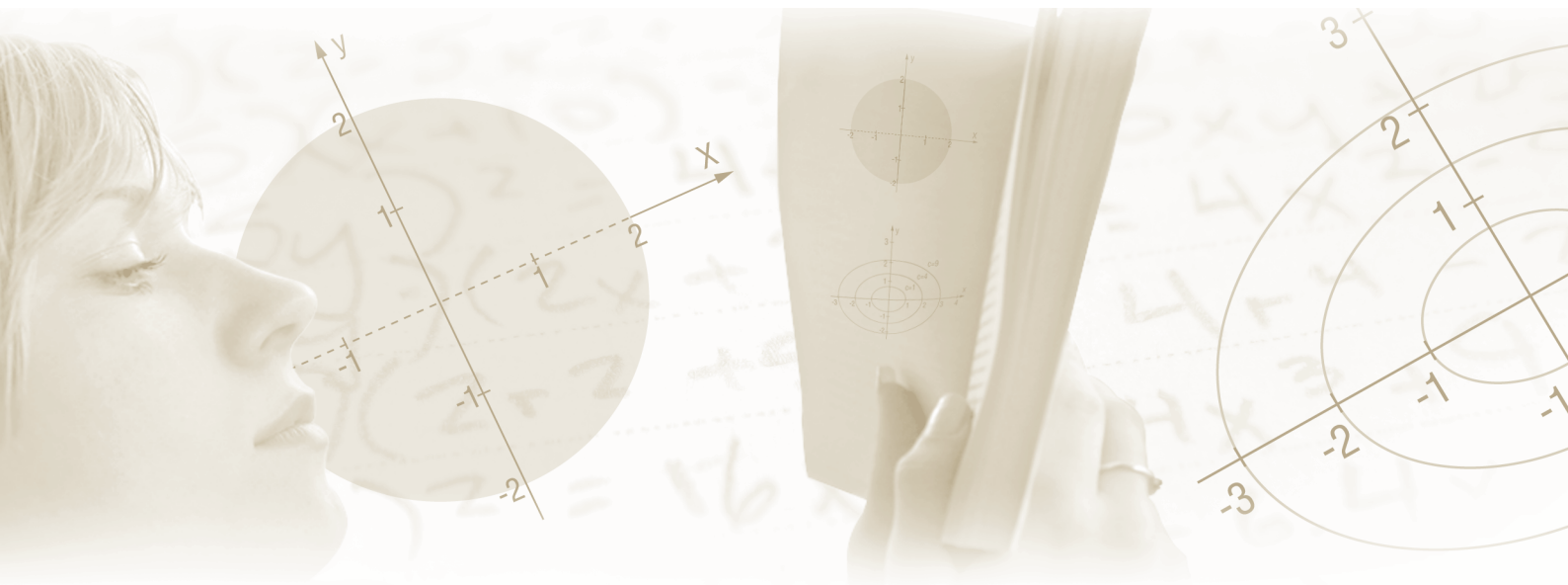
# Apresentação

Nesta aula, apresentaremos funções de várias variáveis: gráficos, curva de nível, superfície de nível, limite, continuidade, derivadas parciais, diferenciação implícita e derivadas parciais de ordens superiores.

Para obter sucesso a partir desta aula, você tem de ler e compreender o texto. Leia devagar, gastando alguns minutos numa única linha, se isso for necessário. Não se impaciente. Avance quando você se sentir preparado.

## Objetivos

- 1** Esboçar o gráfico de funções do tipo  $z = f(x, y)$ .
- 2** Determinar curvas de nível de funções do tipo  $z = f(x, y)$ .
- 3** Calcular derivadas parciais.
- 4** Calcular derivadas implícitas.



# Funções reais de mais de uma variável

**F**unções reais de mais de uma variável aparecem em aplicações práticas com mais frequência do que funções de uma variável. Por exemplo, a área de um retângulo de lados  $x$  e  $y$ ,  $A(x, y) = xy$  (função de duas variáveis); o volume de um prisma reto de arestas  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,  $V(x, y, z) = xyz$  (função de três variáveis); o volume de um cone circular de altura  $h$  e raio da base  $r$ ,  $V(r, h) = \pi r^2 h/3$  (função de duas variáveis).

A generalização para o cálculo de funções de duas ou mais variáveis é simples, havendo dificuldades apenas nas interpretações gráficas.

Vejamos alguns exemplos de funções de duas ou mais variáveis.

Inicialmente, vamos estudar as funções de duas variáveis. A derivação e a integração de funções de duas variáveis é uma extensão do caso de uma variável, mas, é necessária a inclusão de conceitos e teoremas novos não aplicados a uma variável.

Vamos definir, a seguir, o que entendemos por uma função real de duas variáveis reais.

## Definição 1

Uma função real de duas variáveis,  $x$  e  $y$ , é uma correspondência entre um subconjunto  $D$  do espaço bidimensional,  $R^2$ , e o conjunto de todos os números reais:

$$f : D \subseteq R \times R \rightarrow R,$$

tal que a cada par ordenado  $(x, y)$  de  $D$  esteja associado um único número real

$$z : f(x, y) = z.$$

O conjunto  $D \subseteq R \times R$  é chamado o **domínio** da função.

Geralmente, quando se considera uma função  $z = f(x, y)$  e seu domínio é omitido, admite-se como domínio o maior subconjunto de  $R \times R$ , onde a expressão  $f(x, y)$  pode ser calculada.

## Exemplo 1

Determine e esboce graficamente o domínio  $D$  da função  $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $z = f(x, y) = \frac{1}{x - y}$ .

### Solução

A expressão  $\frac{1}{x - y}$  pode ser calculada para todo ponto  $P = (x, y)$ , desde que  $x \neq y$ . Portanto, o domínio é o subconjunto  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \neq y\}$ . Geometricamente, interpretamos  $D$  como sendo o plano  $XY$  menos a reta  $y = x$ . Como vemos na Figura 1, a seguir.

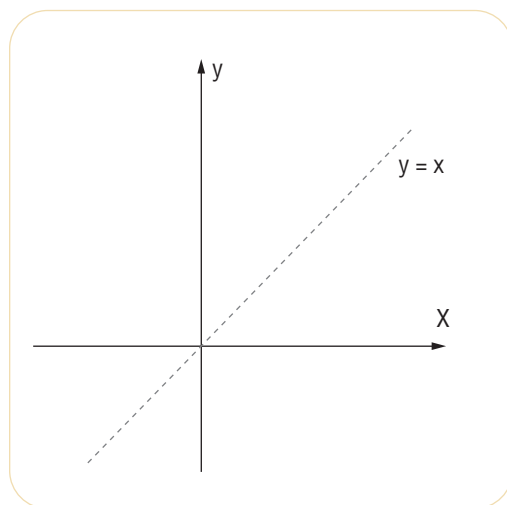


Figura 1 - Domínio da função  $z = \frac{1}{x - y}$ .

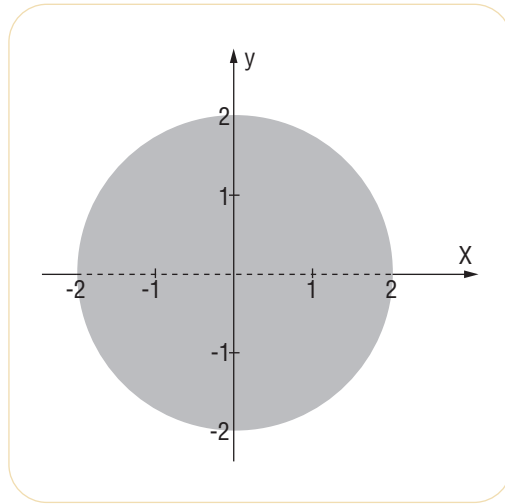
## Exemplo 2

Determine e esboce graficamente o domínio  $D$  da função dada por  $z = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x}$ .

### Solução

A expressão  $\frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x}$  pode ser calculada para todo ponto  $P = (x, y)$ , onde tenhamos  $x \neq 0$  e  $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ . Portanto, o domínio é a coleção de pontos do plano dada por:  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 2^2\}$ .

Como  $x^2 + y^2 = 2^2$  é a equação do círculo de centro na origem e raio 2, interpretamos  $x^2 + y^2 \leq 2^2$  como sendo o disco de centro na origem e raio 2. Logo, interpretamos, geometricamente,  $D$  como sendo o disco de raio 2, centrado na origem, menos o diâmetro sobre o eixo dos  $x$ , como vemos na Figura 2 seguinte.



**Figura 2** - Representação gráfica da função  $z = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x}$ .



## Atividade 1

Determine e esboce graficamente o domínio  $D$  de cada uma das funções  $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas abaixo.

(a)  $z = f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{y}$ .

(b)  $z = f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ .

(c)  $z = f(x, y) = \frac{x}{4 - x^2 - y^2}$ .

(d)  $z = f(x, y) = \sqrt{x + y - 4}$ .

(e)  $z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ .

Podemos estender facilmente a definição de função de duas variáveis para o caso de funções de três (ou mais) variáveis:

Uma função real de três variáveis,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , é uma correspondência entre um subconjunto  $D$  do espaço tridimensional,  $R^3$ , e o conjunto de todos os números reais:

$$f : D \subseteq R \times R \times R \rightarrow R$$

tal que a cada terno ordenado  $(x, y, z)$  de  $D$  esteja associado um único número real  $w : f(x, y, z) = w$ .

O conjunto  $D \subseteq R \times R \times R$  é chamado o domínio da função.

Geralmente, quando se considera uma função  $w = f(x, y, z)$  e seu domínio é omitido, admite-se como domínio o maior subconjunto de  $R \times R \times R$ , onde a expressão  $f(x, y, z)$  pode ser calculada.

## Gráficos, curvas de nível e superfícies de nível

Apresentaremos duas maneiras de visualizar funções de várias variáveis: uma através das curvas de nível e das superfícies de nível e a outra generalizando o conceito de gráfico de funções de uma variável.

### Gráficos

Na disciplina Cálculo I, você viu que o gráfico de uma função real de uma variável  $f : D \subseteq R \rightarrow R$  é o subconjunto

$$G_f = \{(x, y) \subset R \times R; \text{tais que } x \in D \text{ e } y = f(x)\}.$$

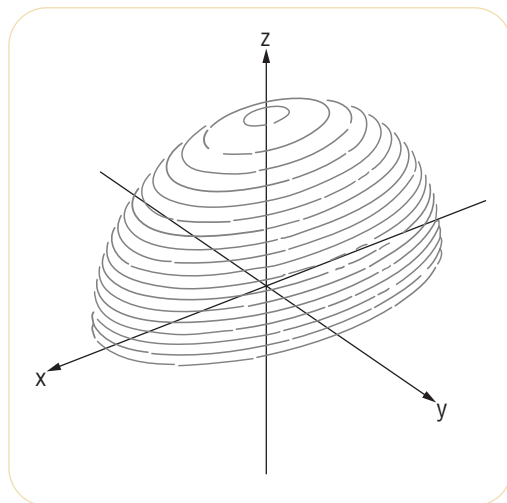
Quando a função é contínua, esse conjunto corresponde a uma curva suave.

Para funções de duas variáveis, definimos:

#### Definição 2

Seja  $f : D \subseteq R \times R \rightarrow R$  uma função real, o gráfico de  $f(x, y)$  é o subconjunto  $G_f = \{(x, y, z) \subset R \times R \times R \text{ tais que } (x, y) \in D \text{ e } z = f(x, y)\}$ .

O gráfico de função de duas variáveis é uma superfície, conforme a Figura 3.



**Figura 3** - Esboço do gráfico da função  $z = \sqrt{4 - x^2 - 3y^2}$ .

## Curvas de nível

As chamadas curvas de nível são usadas em mapas geográficos para facilitar a leitura destes, de modo que, no mapa, ao longo de uma curva de nível, a altura do terreno não se altera. Cada curva de nível tem uma cota que corresponde à altitude de onde ela se encontra.

Mas, o que é, de fato, uma curva de nível?

A resposta a essa pergunta está na definição seguinte.

### Definição 3

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de duas variáveis tal que  $z = f(x, y)$  e seja  $c$  uma constante. O conjunto de todos os pontos do domínio tais que  $f(x, y) = c$  é chamado de curva de nível da função  $f$ , que é a projeção de  $c = f(x, y)$  sobre o plano  $XY$ .

Facilmente, estendemos a definição 3 para o caso de funções de três variáveis.

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de duas variáveis tal que  $w = f(x, y, z)$  e seja  $c$  uma constante. O conjunto de todos os pontos do domínio tais que  $f(x, y, z) = c$  é chamado de superfície de nível da função  $f$ .

## Exemplo 3

Determine as curvas de nível  $c = 0$ ,  $c = 1$  e  $c = 4$  da função  $z = x^2 + y^2$ .

### Solução

Teremos três curvas de nível.

A primeira curva de nível é o conjunto dos pontos onde  $x^2 + y^2 = 0$ , que se reduz ao ponto  $(0,0)$ .

A segunda curva de nível é o conjunto dos pontos onde  $x^2 + y^2 = 1$ , que é o círculo de raio 1 centrado na origem.

A terceira curva de nível é o conjunto dos pontos onde  $x^2 + y^2 = 4$ , que é o círculo de raio 2 centrado na origem.



## Atividade 2

Determine as curvas de nível  $c = 0$ ,  $c = 2$  e  $c = 8$  da função  $z = x^2 + 2y^2$ .

# Superfícies de nível

As **superfícies de nível** são uma extensão do conceito de curvas de nível de funções de duas variáveis reais para as funções de três variáveis reais.

Embora as curvas de nível tenham muitas aplicações práticas, o mesmo não acontece com as superfícies de nível. A seguir, definimos superfícies de nível.

## Definição 4

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $w = f(x, y, z)$  e seja  $c$  uma constante. O conjunto de todos os pontos do domínio tais que  $f(x, y, z) = c$  é chamado de superfície de nível da função  $f$ .

## Exemplo 4

Determine as superfícies de nível  $c = 0$  e  $c = 4$  da função  $w = x^2 + y^2 + 2z^2$ .

## Solução

Teremos duas superfícies de nível.

A primeira superfície de nível é o conjunto dos pontos onde  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 0$ , que é o ponto  $(0, 0, 0)$ .

A segunda superfície de nível é o conjunto dos pontos onde  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ , que é um elipsóide centrado na origem.



## Atividade 3

Determine as superfícies de nível  $c = 0$ ,  $c = 1$  e  $c = 4$  da função  $w = x^2 + y^2 + z^2$ .

Uma mesma superfície pode ser uma superfície de nível de uma função de três variáveis ou o gráfico de uma função de duas variáveis. Por exemplo, o gráfico da função de duas variáveis  $z = \sqrt{4 - x^2 - 3y^2}$ , representado na Figura 3, é a superfície de nível  $c = 0$  da função de três variáveis  $w = \sqrt{4 - x^2 - 3y^2} - z$ .

# Limite, continuidade e derivada parcial

Nesta seção, generalizamos os conceitos de limite, continuidade e derivadas de funções reais de uma variável real para funções reais de várias variáveis reais.

## Limite

Na disciplina Cálculo I, você viu que o conceito de limite é básico para o estudo do Cálculo, sendo fundamental para definirmos continuidade e derivadas. O mesmo acontece para funções de mais de uma variável. A seguir, definimos limites de duas variáveis. Os casos de três ou mais variáveis são inteiramente análogos.

### Definição 5

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que  $f(x, y)$  **tem limite**  $L$  **quando**  $(x, y)$  **tende para**  $(a, b)$ , se, dado qualquer número positivo, digamos  $\varepsilon > 0$ , é possível encontrar um número positivo, digamos  $\delta > 0$ , tal que sempre que  $0 < |x - a| < \delta$  e  $0 < |y - b| < \delta$  temos, necessariamente,  $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ .

Simbolicamente, escrevemos:  $f(x, y) \rightarrow L$  quando  $(x, y) \rightarrow (a, b)$ , ou representamos por  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ .

Felizmente, os cálculos de limites para funções de várias variáveis têm as mesmas propriedades operacionais que os limites de uma variável.

## Exemplo 5

Calcule o limite:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-3)} \left( \frac{x^2 - 4}{x - 2} + \frac{y^2 - 9}{y + 3} \right) = -2$ .

### Solução

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-3)} \left( \frac{x^2 - 4}{x - 2} + \frac{y^2 - 9}{y + 3} \right) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-3)} \left( \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} + \frac{(y - 3)(y + 3)}{y + 3} \right) \\ &= (2+2) + (-3-2) = -2 \end{aligned}$$

# Continuidade

Definimos continuidade de funções de duas variáveis de modo semelhante ao caso de funções de uma variável.

### Definição 6

Dizemos que  $f$  é contínua em  $(a, b)$ , se

- (i)  $f(a, b)$  existe;
- (ii)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ ;
- (iii)  $f(a, b) = L$ .

Desse modo, se  $f$  é contínua, o gráfico de  $z = f(x, y)$  é uma superfície suave, sem quinas ou picos.

Observe que só tem sentido falar em continuidade de uma função  $f(x, y)$ , de duas variáveis, no ponto  $(a, b)$ , se o ponto  $(a, b)$  estiver no domínio da função.

Observe que a noção de continuidade é pontual. Quando a função  $f(x, y)$  é contínua para todo ponto do domínio, dizemos, simplesmente, que  $f(x, y)$  **é contínua**.

As definições de **limite** e **continuidade** para funções de mais de duas variáveis são inteiramente análogas ao que foi feito para o caso de duas variáveis.

## Exemplo 6

Verifique que a função dada é contínua no ponto  $(2, 3)$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} + \frac{y^2 - 9}{y + 3} & \text{se } (x, y) \neq (2, -3) \\ -2 & \text{se } (x, y) = (2, -3) \end{cases} .$$

### Solução

Observe que o ponto  $(2, 3)$  está no domínio de  $f(x, y)$  e que  $f(2, -3)$  existe e é igual a  $-2$ .

Já vimos, no exemplo 5, que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-3)} \left( \frac{x^2 - 4}{x - 2} + \frac{y^2 - 9}{y + 3} \right) = -2$ . Portanto, pela definição de continuidade,  $f(x, y)$  é contínua em  $(2, 3)$ .

Observe que, nos demais pontos,  $f$  é **contínua** pois, como em funções de uma variável, em polinômios racionais de duas ou mais variáveis, onde o denominador não se anula, a função é contínua.

## Derivadas parciais

Na disciplina Cálculo I, você viu o conceito de derivada de funções de uma variável.

Recordando, uma função real  $f(x)$  com  $x \in I$  onde  $I$  é um intervalo aberto da reta, tem derivada no ponto  $x = x_0$ , se o quociente de Newton,  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ , tem limite quando  $h$  se aproxima de zero. Esse limite é chamado de derivada de  $f$  no ponto  $x = x_0$ :

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

A extensão do conceito de derivada de funções de uma variável para as chamadas derivadas parciais de duas ou mais variáveis é simples, embora a generalização de alguns teoremas envolvendo derivadas não seja simples.

A definição é feita de tal modo que, quando calculamos a derivada parcial em relação a uma variável, consideramos as demais variáveis fixas, isto é, como constantes, e calculamos o limite como se fosse uma função de uma única variável, como veremos a seguir.

## Definição 7

**(a)** Se  $f$  é uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ , as derivadas parciais de  $f$  em relação a  $x$  e  $y$  são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h},$$

desde que cada um dos limites exista.

**(b)** Se  $f$  é uma função de três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ , as derivadas parciais de  $f$  em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$  são

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h},$$

desde que cada um dos limites exista.

A definição 7 nos assegura que, quando  $f$  é uma função de duas variáveis,  $f(x, y)$ , o cálculo de  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , da derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$ , é feito de modo usual, bastando para isso considerar  $y$  como constante.

De modo análogo, quando  $f$  é uma função de duas variáveis,  $f(x, y)$ , o cálculo de  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , da derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$ , é feito de modo usual, bastando para isso considerar  $x$  como constante.

Procedemos de modo análogo para o cálculo das derivadas de funções de três variáveis.

A seguir, vemos dois exemplos de como calcular essas derivadas parciais.

## Exemplo 7

Dado  $f(x, y) = x^3y^4$ , encontre  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

## Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^3y^4) = 3x^2y^4 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x^3y^4) = 4x^3y^3.$$

## Exemplo 8

Dado  $f(x, y) = x^3 + 7x^2y + 8y^3 + 3x - 2y + 7$ , encontre  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

## Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^3 + 7x^2y + 8y^3 + 3x - 2y + 7) = 3x^2 + 14xy + 3 \text{ e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x^3 + 7x^2y + 8y^3 + 3x - 2y + 7) = 7x^2 + 24y^2 - 2.$$



## Atividade 4

- 1 Dado  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ , encontre  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .
- 2 Dado  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{y^2 - x^2}}$ , encontre  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .
- 3 Dado  $f(x, y) = e^{xy} \cos x \sin y$ , encontre  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .
- 4 Dado  $f(x, y) = xye^{x^2+y^2}$ , encontre  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .
- 5 Dado  $f(x, y) = \cos(xe^y)$ , encontre  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .
- 6 Dado  $f(x, y, z) = \arctan(xyz)$ , encontre  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .
- 7 Dado  $f(\theta, \varphi) = \sin 3\theta \cos 2\varphi$ , encontre  $\frac{\partial f}{\partial \theta}$  e  $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ .

# Diferenciação implícita

Uma equação envolvendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  estabelece uma relação entre essas variáveis. Se pudermos explicitar o valor de  $z$  em termos de  $x$  e  $y$ , então, podemos ter uma ou mais funções determinadas pela relação.

Podemos considerar  $x$  e  $y$  como variáveis independentes e  $z$  como variável dependente de  $x$  e  $y$ . Nessa situação, podemos proceder ao cálculo das derivadas parciais de  $z$  como função de  $x$  e de  $y$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , diretamente da equação dada. Isto é o que chamamos diferenciação implícita. Fazemos os cálculos sem recorrer à expressão encontrada para  $z$ , como veremos no exemplo seguinte.

## Exemplo 9

A equação  $2x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$  pode ser resolvida para  $z$  obtendo

$$z = \sqrt{16 - 2x^2 - y^2} \text{ ou } z = -\sqrt{16 - 2x^2 - y^2}.$$

Nas duas funções anteriores,  $z$  como função de  $x$  e  $y$ , podemos calcular as derivadas parciais de  $z$  em relação a  $x$  e a  $y$ . Para a função  $z = \sqrt{16 - 2x^2 - y^2}$ , as derivadas parciais são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-4x}{2\sqrt{16 - 2x^2 - y^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{16 - 2x^2 - y^2}} \text{ e} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-4y}{2\sqrt{16 - 2x^2 - y^2}} = \frac{-2y}{\sqrt{16 - 2x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

Por outro lado, partindo da equação  $2x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$ , podemos calcular as derivadas parciais em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(2x^2 + y^2 + z^2 - 16)}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial(2x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2)}{\partial x} &= 0; \\ 4x + 0 + 2z \frac{\partial z}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{2x}{z} \end{aligned}$$

## Exemplo 10

Suponha que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são variáveis e que  $z$  é uma função de  $x$  e  $y$ , a qual satisfaz a equação seguinte:  $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 5$ .

Encontre  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

## Solução

Derivando a equação parcialmente em relação a  $x$ , obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x^3 + y^3 + z^3 + 3x y z)}{\partial x} &= \frac{\partial(5)}{\partial x}, \\ \frac{\partial(x^3)}{\partial x} + \frac{\partial(y^3)}{\partial x} + \frac{\partial(z^3)}{\partial x} + \frac{\partial(3x y z)}{\partial x} &= 0; \\ 3x^2 + 0 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 3 y z &= 0; \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{x^2}{z^2} - \frac{y}{z}.\end{aligned}$$

Derivando a equação parcialmente em relação a  $y$ , obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x^3 + y^3 + z^3 + 3x y z)}{\partial y} &= \frac{\partial(5)}{\partial y}, \\ \frac{\partial(x^3)}{\partial y} + \frac{\partial(y^3)}{\partial y} + \frac{\partial(z^3)}{\partial y} + \frac{\partial(3x y z)}{\partial y} &= 0; \\ 0 + 3y^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 3 x z &= 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{y^2}{z^2} - \frac{x}{z}.\end{aligned}$$



## Atividade 5

- 1 Suponha que  $r$ ,  $s$  e  $w$  são variáveis e que  $w$  é uma função de  $r$  e  $s$ , a qual satisfaz a equação:  $w - (r^2 + s^2) \cosh r w = 0$ .  
Encontre  $\frac{\partial w}{\partial r}$  e  $\frac{\partial w}{\partial s}$ .
- 2 Suponha que  $r$ ,  $s$ ,  $t$  e  $w$  são variáveis e que  $w$  é uma função de  $r$ ,  $s$  e  $t$ , a qual satisfaz a equação:  $e^{rt} - 2se^w + wt - 3w^2r = 5$ .  
Encontre  $\frac{\partial w}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial s}$  e  $\frac{\partial w}{\partial t}$ .
- 3 Suponha que  $r$ ,  $s$ ,  $t$  e  $w$  são variáveis e que  $w$  é uma função de  $r$ ,  $s$  e  $t$ , a qual satisfaz a equação:  $r^2 + 3s^2 - 2t^2 + 6tw - 8w^2 + 12sw^3 = 4$ .  
Encontre  $\frac{\partial w}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial s}$  e  $\frac{\partial w}{\partial t}$ .

# Derivadas parciais de ordem superior

Se  $f$  é uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ , então  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são também funções das mesmas duas variáveis. É natural procurar suas derivadas em relação a  $x$  ou a  $y$ . Quando diferenciamos  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  em relação a  $x$  ou a  $y$ , obtemos as segundas derivadas parciais. As segundas derivadas parciais de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  (ou  $f_x$ ) são definidas pelas fórmulas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{x,x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(x+h, y) - f_x(x, y)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{y,x}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(x, y+k) - f_x(x, y)}{k},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{x,y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_y(x, y+k) - f_y(x, y)}{k},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{y,y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_y(x, y+k) - f_y(x, y)}{k}.$$

Se fizermos  $z = f(x, y)$ , então os seguintes símbolos têm todos o mesmo significado:

$$f_{1,1}; \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right); \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; f_{xx}; z_{xx}$$

e

$$f_{1,2}; \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right); \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right); \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; z_{xy}.$$

## Exemplo 11

1) Verifique que a função  $u(x, t) = \text{sen}(x - ct)$  é uma solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde  $c$  é uma constante positiva. Essa equação diferencial parcial é chamada de equação da onda unidimensional.

## Solução

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x - ct) \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\text{sen}(x - ct) \text{ e}$$

Temos que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-c)\cos(x - ct) \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -c^2 \text{sen}(x - ct).$$

$$\text{Portanto, } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$



## Atividade 6

- 1 Mostre que a função  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + 2 \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$  satisfaz a equação de Laplace  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .
- 2 Mostre que a função  $u(x, t) = e^{-t} \text{sen}\left(\frac{x}{c}\right)$  satisfaz a equação do calor  $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , onde  $c > 0$  é uma constante.
- 3 Mostre que as funções  $u(x, y) = e^x \cos y$  e  $v(x, y) = e^x \text{sen } y$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ .

Concluimos nossa aula enunciando os teoremas seguintes e seus corolários, que poderão ser usados nos cálculos das derivadas parciais.

## Teorema

Seja  $f$  uma função de duas variáveis,  $f(x, y)$ . Suponha que  $f(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  são todas contínuas no ponto  $(x_0, y_0)$ .

Então, vale a seguinte igualdade:  $f_{x,y}(x_0, y_0) = f_{y,x}(x_0, y_0)$ .

(Isto é, a ordem da diferenciação parcial pode ser invertida sem alterar o resultado.)

## Prova

Não daremos aqui a prova. Mas, você pode consultar a demonstração em Anton (2000), no Apêndice 11.

**Observação:** Demonstra-se que nas hipóteses do teorema anterior, se  $f$  é uma função de qualquer número de variáveis e  $s$  e  $t$  são quaisquer duas delas, então  $f_{st} = f_{ts}$ .

## Resumo

Nesta aula, estudamos as funções de mais de uma variável: gráficos, curva de nível, superfície de nível, limite, continuidade, derivada parcial e diferenciação implícita, derivadas parciais superiores.

## Autoavaliação

1

Verifique qual é o maior subconjunto,  $D$ , do plano que é o domínio da função  $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  e esboce seu gráfico.

2

Verifique se a função dada é contínua em  $(0, 0)$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(xy)}{x} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3

Dado  $u = e^x \cos y + e^y \text{sen } z$ , encontre todas as primeiras derivadas parciais e verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}.$$

4

Verifique que  $u_{xy} = u_{yx}$  e  $u_{xz} = u_{zx}$ , se  $u = e^{xy} + e^{2xz} - e^{3yz}$ .

5

Dado que  $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , verifique que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ .

## Referências

ANTON, Howard. Cálculo: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000. v 2.

FINEY, Ross L.; GIORDANO, Frank R.; WEIR, Maurice D. Cálculo de George B. Thomas. São Paulo: Addison-Wesley, 2003. v 2.

SIMMONS, George F. Cálculo com geometria analítica. São Paulo: MacGraw-Hill, 1985. v 2.



# Diferenciabilidade de uma função de duas variáveis e regra da cadeia

Aula

4

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0, z_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0) \Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0) \Delta z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z$$

$$\Delta y = f'(x_0) (x'(t_0) \Delta t + \epsilon_2 \Delta t) + \epsilon_1 \Delta t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$$\Delta r = x_u(u_0, v_0) \Delta u + x_v(u_0, v_0) \Delta v + \epsilon_1 \Delta u + \epsilon_2 \Delta v$$

# Apresentação

Esta é a aula 4 da disciplina Cálculo II. Nesta aula, apresentaremos a noção de diferenciabilidade de uma função de duas variáveis e a Regra da Cadeia.

Para obter sucesso a partir desta aula, você terá que ler e compreender o texto. Leia devagar, gastando alguns minutos numa única linha, se isso for necessário. Não fique impaciente. Avance quando você achar que está preparado.

## Objetivos

- 1 Compreender o conceito de diferenciabilidade.
- 2 Usar corretamente a Regra da Cadeia.
- 3 Calcular taxa de variação de funções de mais de uma variável.

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta\tau} = \frac{dr}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} (r'(\tau_0)(\tau_0 + \varepsilon_1) + \varepsilon_2)$$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$$

# Derivadas de funções de mais de uma variável

**A**lgumas propriedades fundamentais das derivadas de funções de uma só variável não podem ser estendidas para duas ou mais variáveis. Para resolver esse problema, vamos introduzir o conceito de **diferenciabilidade**, que será definido para funções reais ou vetoriais, de uma, duas ou mais variáveis.

Embora não abordaremos nesta disciplina, o conceito de **diferenciabilidade** também é definido para funções vetoriais de uma, duas ou mais variáveis.

## Diferenciabilidade de uma função de uma variável

A seguir, definiremos o conceito de **diferenciabilidade** de uma função de uma variável com a intenção de facilitar o entendimento de **diferenciabilidade** e não o de chegar a propriedades importantes do cálculo de uma variável, as quais foram vistas no Cálculo I.

### Definição 1

Seja  $y = f(x)$  uma função de uma variável, dizemos que  $f$  é diferenciável em um ponto  $x_0$ , se  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  satisfaz a equação

$$\Delta y = A\Delta x + \varepsilon_1\Delta x,$$

com  $A$  uma constante,  $\Delta x = x - x_0$  e  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$ .

## Teorema 1

Seja  $y = f(x)$  uma função de uma variável, então,  $f$  é diferenciável em um ponto  $x_0$  se e somente se  $f$  é derivável em  $x_0$ .

### Demonstração

( $\Rightarrow$ ) Se  $f$  é diferenciável em um ponto  $x_0$ .

Segue que:  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  satisfaz a equação  $\Delta y = A\Delta x + \varepsilon_1\Delta x$ , com  $A$  uma constante e  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$ . Logo,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + \varepsilon_1\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \varepsilon_1) = A + 0 = A.$$

Portanto,  $f$  é derivável em  $x_0$ . E mais,  $f'(x_0) = A$ , ou seja,

$$\Delta z = A\Delta x + \varepsilon_1\Delta x = f'(x)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x.$$

( $\Leftarrow$ ) Recíproca. Se  $f$  é derivável em  $x_0$ .

Neste caso,  $f'(x_0)$  existe. Como  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ , podemos definir  $\varepsilon_1$  pela expressão  $\varepsilon_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ . Logo,  $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x$  e temos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0. \text{ Portanto, } f \text{ é diferenciável em ponto } x_0.$$

Em decorrência do Teorema 1, vamos redefinir a noção de diferenciabilidade (feita com a definição 1, anterior), incluindo a existência de  $f'(x_0)$ , o que torna mais objetiva a definição de diferenciabilidade.

Uma função de uma variável é dita **diferenciável** se é diferenciável em todo ponto do domínio (intervalo aberto).

### Definição 1' (Diferenciabilidade de uma função de uma variável)

Seja  $y = f(x)$  uma função de uma variável, dizemos que  $f$  é diferenciável em um ponto  $x_0$ , se  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  e existe  $f'(x_0)$  satisfazendo a equação

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x,$$

com  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$ .

Portanto, se  $y = f(x)$  é diferenciável em  $x_0$ , então,  $\Delta y \cong f'(x_0)\Delta x$ , que é uma propriedade importante das derivadas, pois nos dá o valor aproximado de  $\Delta y$ .

## Exemplo 1

Seja  $y = f(x) = x^2$ . Verifique que  $f$  é diferenciável em  $x_0$ .

### Solução

Temos que:

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0(\Delta x) + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0(\Delta x) + (\Delta x)^2$  Assim,  $\Delta y = 2x_0(\Delta x) + (\Delta x)^2 = 2x_0(\Delta x) + (\Delta x_0)(\Delta x)$ . Tomando  $f'(x_0) = 2x_0$  e  $\varepsilon_1 = \Delta x$ , temos  $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x$  e  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$ .

Portanto,  $f$  é diferenciável em  $x_0$ .

## Exemplo 2

Seja  $y = f(x) = x^3$ . Verifique que  $f$  é diferenciável em  $x_0$ .

### Solução

Temos que:  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3$ . Assim,

$\Delta y = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x) \cdot (\Delta x)$ . Tomando  $f'(x_0) = 3x_0^2$  e  $\varepsilon_1 = 3x_0(\Delta x)$ , temos  $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x$  e  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$ . Portanto,  $f$  é diferenciável em  $x_0$ .



# Diferenciabilidade de uma função de várias variáveis

Vamos definir diferenciabilidade de uma função de duas variáveis, fundamental para a demonstração de propriedades importantes do cálculo de funções de duas variáveis.

## Definição 2 (Diferenciabilidade de uma função de duas variáveis em um ponto)

Seja  $z = f(x, y)$  uma função de duas variáveis. Dizemos que  $f$  é **diferenciável em um ponto**  $(x_0, y_0)$ , se  $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ , e existem  $f_x(x_0, y_0)$  e  $f_y(x_0, y_0)$  satisfazendo a equação

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

com  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1 = 0$  e  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2 = 0$ .

Portanto, se  $z = f(x, y)$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então,  $\Delta z \cong f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$ , que é uma propriedade importante das derivadas parciais, pois nos dá o valor aproximado de  $\Delta z$ .

Dizemos que  $f(x, y)$  é **diferenciável** se  $f(x, y)$  é diferenciável em todos os pontos de seu domínio.

## Exemplo 3

Seja  $z = f(x, y) = 3x - xy^2$ . Verifique que  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ .

### Solução

Temos que

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \text{ Ou seja,}$$

$$\Delta z = 3(x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta x) \cdot (y_0 + \Delta y)^2 - 3x_0 + x_0y_0^2. \text{ Que é o mesmo que:}$$

$$\Delta z = 3\Delta x - y_0^2 \Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y - 2y_0 \Delta x \Delta y - x_0 (\Delta y)^2 - (\Delta x)(\Delta y)^2. \text{ Ou ainda:}$$

$$\Delta z = (3 - y_0^2)\Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y + (-2y_0 \Delta y)\Delta x + [x_0(\Delta y) - (\Delta x)(\Delta y)]\Delta y$$

Tomando  $\varepsilon_1 = -2y_0 \Delta y$  e  $\varepsilon_2 = x_0(\Delta y) - (\Delta x)(\Delta y)$ , temos

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

com  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1 = 0$  e  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2 = 0$ . Portanto,  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ .

Os exemplos anteriores têm o intuito de tornar a definição de diferenciabilidade mais compreensível, não sendo muito exigido na solução de problemas práticos.



## Atividade 2

Seja  $z = f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$ . Verifique que  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

A seguir, apresentamos um teorema muito usado, que se aplica à maioria das funções relevantes no cálculo de funções de várias variáveis, mas não faremos aqui a demonstração.

## Teorema 2

Sejam  $f(x, y)$  uma função definida em um domínio que contenha  $(x_0, y_0)$  em seu interior, com derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  contínuas em  $(x_0, y_0)$ . Então,  $f(x, y)$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ .

Teoremas e definições de funções de duas variáveis se generalizam para três ou mais variáveis sem dificuldade.

A seguir, adaptamos a definição 2 para o caso de três variáveis.

## Definição 2'

### (Diferenciabilidade de uma função de três variáveis em um ponto)

Seja  $w = f(x, y, z)$  uma função de três variáveis, dizemos que  $f$  é diferenciável em um ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ , se  $\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$  e existem  $f_x(x_0, y_0, z_0)$ ,  $f_y(x_0, y_0, z_0)$  e  $f_z(x_0, y_0, z_0)$  satisfazendo a equação

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z,$$

com

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0,0,0)} \varepsilon_1 = 0, \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0,0,0)} \varepsilon_2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0,0,0)} \varepsilon_3 = 0.$$

Portanto, se  $w = f(x, y, z)$  é diferenciável em  $(x_0, y_0, z_0)$ , então,  $\Delta w \cong f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z$ , que é uma propriedade importante das derivadas parciais, pois serve para o cálculo aproximado de  $\Delta w$ .

# Diferenciabilidade de uma função vetorial de uma variável

Vamos definir diferenciabilidade de uma função vetorial de duas variáveis, que é fundamental para a demonstração de propriedades importantes do cálculo de funções de duas variáveis.

## Definição 3 (Diferenciabilidade de uma função vetorial de uma variável)

Seja  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$  uma função vetorial de uma variável. Dizemos que  $r(t)$  é diferenciável em um ponto  $t_0$ , se  $\Delta r = (x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t)) - (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$  e existe  $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$  satisfazendo a equação

$$\Delta r = x_u(u_0, v_0)\Delta u + x_v(u_0, v_0)\Delta v + \varepsilon_1$$

com  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$ .

Nesta definição  $\varepsilon_1$ , é uma função vetorial de mesma natureza que  $r(t)$ , cujo limite é o vetor nulo.

Na definição 3, usamos uma notação mista, na qual aparecem as funções componentes e vetoriais. A seguir, repetimos a definição 3, com uma notação vetorial.

## Definição 3' (Diferenciabilidade de uma função vetorial de uma variável)

Seja  $r(t)$  uma função vetorial de uma variável, dizemos que  $r$  é diferenciável em um ponto  $t_0$  se  $\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$  e existe  $r'(t_0)$  satisfazendo a equação

$$\Delta r = x_u(u_0, v_0)\Delta u + x_v(u_0, v_0)\Delta v + \varepsilon_1$$

com  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$ .

# Diferenciabilidade de uma função vetorial de duas variáveis

Vamos definir, a seguir, **diferenciabilidade de uma função vetorial de duas variáveis**. No que se segue, consideramos a função vetorial definida no plano, apenas para reduzir a notação.

## Definição 4 (Diferenciabilidade de uma função vetorial de duas variáveis)

Seja  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  uma função vetorial de duas variáveis, dizemos que  $r$  é diferenciável em um ponto  $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$  se  $\Delta r = r(x(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v), y(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)) - r(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$  e existem  $(x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0))$  satisfazendo a equação

$$\Delta r = x_u(u_0, v_0)\Delta u + x_v(u_0, v_0)\Delta v + \varepsilon_1\Delta u + \varepsilon_2\Delta v$$

$$\text{com } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1 = 0 \text{ e } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2 = 0$$

Observe que, na definição 4, usamos uma notação mista em que aparecem as funções componentes e funções vetoriais. A seguir, repetimos a definição 4 com uma notação vetorial.

## Definição 4'

### (Diferenciabilidade de uma função vetorial de uma variável)

Seja  $r(t)$  uma função vetorial de uma variável, dizemos que  $r$  é diferenciável em um ponto  $t_0$  se  $\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$  e existe  $r'(t_0)$  satisfazendo a equação

$$\Delta r = x_u(u_0, v_0)\Delta u + ,$$

$$\text{com } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0.$$

# Regras da cadeia

Existem diversas regras da cadeia, dependendo da função ser real ou vetorial e conforme o número de variáveis.

## Regra da cadeia de uma função real de uma variável

Para facilitar o entendimento do uso da diferenciabilidade, na prova de outros casos da regras da cadeia, refazemos a regra da cadeia para uma função real de uma variável real.

Observe que, para provar a regra da cadeia, consideramos duas funções diferenciáveis simultaneamente.

### Teorema 3 (Regra da cadeia)

Considere as funções  $x(t)$  diferenciáveis em  $t_0$  e  $y = f(x)$  diferenciável em  $x(t_0)$ , então,  $y(t) = f(x(t))$  é diferenciável  $t_0$  com

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

### Demonstração

Como as funções  $x(t)$  e  $y = f(x)$  são diferenciáveis em  $t_0$  e  $x(t_0)$ , sendo  $\Delta y = f(x(t_0) + \Delta x) - f(x(t_0))$  e  $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$ , existem  $f'(x(t_0))$  e  $x'(t_0)$  satisfazendo as equações

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x$$

$$\Delta x = x'(t_0)\Delta t + \varepsilon_2\Delta t$$

com  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$  e  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$ .

Logo, substituindo o valor de  $\Delta x$  em  $\Delta y$ , obtemos

$$\Delta y = f'(x_0)(x'(t_0)\Delta t + \varepsilon_2\Delta t) + \varepsilon_1\Delta x.$$

Dividindo ambos os membros por  $\Delta t$ , temos

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)(x'(t_0) + \varepsilon_2) + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Vamos calcular o limite quando  $\Delta t$  tende a zero,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( f'(x_0)(x'(t_0) + \varepsilon_2 \Delta t) + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} \right),$$

como  $f'(x(t_0))$  e  $x'(t_0)$  são constantes, temos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)(x'(t_0) + f'(x_0) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\varepsilon_2 \Delta t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} \right).$$

Observemos agora que quando  $\Delta t$  tende a zero,  $\Delta x$  também tende a zero, logo podemos reescrever o limite na forma:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)(x'(t_0) + f'(x_0) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} \right).$$

Calculando os limites já conhecidos, temos

$$\frac{dy}{dt} = f'(x_0)(x'(t_0) + f'(x_0) \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Portanto,

$$\frac{dy}{dt} = f'(x_0)(x'(t_0)).$$

Usando a notação de Newton, que é mais adequada para expressar a regra da cadeia, temos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Observe que usamos a notação de Leibnitz para expressar a diferenciabilidade, no entanto, na demonstração usamos as notações de Leibnitz e Newton.

A notação de Newton é muito boa porque é mnemônica, mas, a notação de Leibnitz tem a vantagem de apresentar os pontos em que as funções devem ser diferenciáveis para que possamos aplicar a regra da cadeia.



# Regra da cadeia para composição de funções de duas variáveis

No teorema seguinte, trabalharemos, simultaneamente, com a diferenciabilidade de três funções.

## Teorema 4 (Regra da cadeia)

Considere as funções  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  diferenciáveis em  $(x_0, y_0)$ ,  $z = f(u, v)$  diferenciável em  $(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ , então,  $z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$  é uma função de  $(x, y)$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$  com

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

## Demonstração

Como a função  $u(x, y)$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , sendo

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0),$$

existem  $u_x(x_0, y_0)$  e satisfazendo a equação

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

com  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1 = 0$  e  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2 = 0$ .

Como a função  $v(x, y)$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ ,

existem  $v_x(x_0, y_0)$  e  $v_y(x_0, y_0)$  satisfazendo a equação

$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y,$$

com  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_3 = 0$  e  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_4 = 0$ .

Como a função  $z = f(u, v)$  diferenciável em  $(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ , sendo  $\Delta z = f(u(x_0, y_0) + \Delta u, v(x_0, y_0) + \Delta v) - f(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ , existem  $f_u(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$  e  $f_v(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$  satisfazendo a equação

$$\Delta z = f_u(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))\Delta u + f_v(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))\Delta v + \varepsilon_4\Delta u + \varepsilon_5\Delta v,$$

$$\text{com } \lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_4 = 0 \text{ e } \lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_5 = 0.$$

Logo, substituindo o valor de  $\Delta u$  e  $\Delta v$  em  $\Delta z$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Delta z &= f_u(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))(u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y) \\ &+ f_v(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))(v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y) \\ &+ \varepsilon_4(u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y) \\ &+ \varepsilon_5(v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y) \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por  $\Delta x$ , fazendo  $\Delta y = 0$  e calculando o limite quando  $\Delta x$  tende a zero, obtemos  $\frac{\partial z}{\partial x}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} &= \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f_u(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))(u_x(x_0, y_0) + u_y(x_0, y_0)0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_20) \\ &+ f_v(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))(v_x(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)0 + \varepsilon_3 + \varepsilon_40) \\ &+ \varepsilon_4(u_x(x_0, y_0) + u_y(x_0, y_0)0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_20) \\ &+ \varepsilon_5(v_x(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)0 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)) \end{aligned}$$

Observe que  $\Delta y = 0$  e  $\Delta x$  tende a zero, logo, as expressões de  $\Delta u$  e  $\Delta v$  também tendem a zero e todos os limites  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$  e  $\varepsilon_6$  tendem a zero.

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= f_u(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))(u_x(x_0, y_0) + 0 + 0 + 0) \\ &+ f_v(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))(v_x(x_0, y_0) + 0 + 0 + 0) \\ &+ 0 + 0 + 0 \\ &+ 0 + 0 + 0 \end{aligned}$$

Temos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))u_x(x_0, y_0) + f_v(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))v_x(x_0, y_0).$$

Procedendo da mesma forma, na expressão de  $\Delta z$  divide-se ambos os membros por  $\Delta y$ , fazendo  $\Delta x = 0$  e calculando o limite quando  $\Delta y$  tende a zero, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_u(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))u_y(x_0, y_0) + f_v(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))v_y(x_0, y_0).$$

Resumindo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))u_x(x_0, y_0) + f_v(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))v_x(x_0, y_0)$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_u(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))u_y(x_0, y_0) + f_v(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))v_y(x_0, y_0),$$

que é a regra da cadeia na notação de Leibnitz.

Usando a notação de Newton, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Para concluir a diferenciabilidade, reagrupemos a expressão

$$\begin{aligned} \Delta z &= f_u(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))(u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y) \\ &\quad + f_v(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))(v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y) \\ &\quad + \varepsilon_4(u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y) \\ &\quad + \varepsilon_5(v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= (f_u(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))u_x(x_0, y_0) + f_v(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))v_x(x_0, y_0))\Delta x \\ &\quad + (f_u(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))u_y(x_0, y_0) + f_v(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))v_y(x_0, y_0))\Delta y \\ &\quad + \varepsilon_7\Delta x + \varepsilon_8\Delta y \end{aligned}$$

## Exemplo 4

Suponha que  $z = u^3 + v^3$  e que  $u = 2x + y$ ,  $v = 3x - 2y$ . Use a regra da cadeia para determinar  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

### Solução

Neste caso, as variáveis usadas nas fórmulas são as mesmas usadas no exemplo. Temos então:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(u^3 + v^3)}{\partial u} \frac{\partial(2x + y)}{\partial x} + \frac{\partial(u^3 + v^3)}{\partial v} \frac{\partial(3x - 2y)}{\partial x} = \\ &= (3u^2)(2) + (3v^2)(3) = 6(2x + y)^2 + 9(3x - 2y)^2 = \\ &= 6(4x^2 + 4xy + y^2) + 9(9x^2 - 12xy + 4y^2) = 105x^2 - 84xy + 42y^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(u^3 + v^3)}{\partial u} \frac{\partial(2x + y)}{\partial y} + \frac{\partial(u^3 + v^3)}{\partial v} \frac{\partial(3x - 2y)}{\partial y} = \\ &= (3u^2)(1) + (3v^2)(-2) = 3(2x + y)^2 - 6(3x - 2y)^2 = \\ &= 3(4x^2 + 4xy + y^2) - 6(9x^2 - 12xy + 4y^2) = -42x^2 + 84xy - 21y^2\end{aligned}$$

Resumindo, temos  $\frac{\partial z}{\partial x} = 105x^2 - 84xy + 42y^2$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = -42x^2$ .

## Exemplo 5

Suponha que  $f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2}$  e que  $x = x(s, t) = 2s - t$ ,  $y = y(s, t) = s + 2t$ .

Use a regra da cadeia para determinar  $\frac{\partial f}{\partial s}$  e  $\frac{\partial f}{\partial t}$ .

### Solução

Neste caso, as fórmulas são diferentes das usadas no exemplo anterior, portanto, inicialmente devemos adaptar as fórmulas da regra da cadeia às variáveis do exemplo, em seguida, proceder como no exemplo anterior, dessa forma, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x - y}{x^2 + y^2} \right) \frac{\partial(2s - t)}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x - y}{x^2 + y^2} \right) \frac{\partial(s + 2t)}{\partial s},$$

como as derivadas envolvidas tem expressões grandes calculemos separadamente.



# Regra da cadeia para uma função vetorial e uma mudança de parâmetro

Observe que, para provar a regra da cadeia, consideramos duas funções diferenciáveis simultaneamente.

## Teorema 5 (Regra da cadeia)

Considere as funções  $t(\tau)$  diferenciável em  $\tau_0$  e  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$  diferenciável em  $t(\tau_0)$ , então,  $r(\tau) = (x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau)))$  é uma função diferenciável em  $\tau_0$  com

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau}.$$

## Demonstração

Como a função  $t(\tau)$  é diferenciável em  $\tau_0$ , sendo  $\Delta\tau = t(\tau_0 + \Delta\tau) - t(\tau_0)$ , existem  $t'(\tau_0)$  satisfazendo a equação

$$\Delta\tau = t'(\tau_0)\Delta\tau + \varepsilon_1\Delta\tau,$$

com  $\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$ .

Como a função vetorial  $r(t)$  é diferenciável em  $t(\tau_0)$ , sendo  $\Delta r = r(t(\tau_0) + \Delta t) - r(t(\tau_0))$ , existem  $r'(t(\tau_0))$  satisfazendo a equação

$$\Delta r = r'(t(\tau_0))\Delta t + \varepsilon_2\Delta t,$$

com  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$ .

Logo, substituindo o valor de  $\Delta t$  em  $\Delta r$ , obtemos:

$$\Delta r = r'(t(\tau_0))(t'(\tau_0)\Delta\tau + \varepsilon_1\Delta\tau) + \varepsilon_2(t'(\tau_0)\Delta\tau + \varepsilon_1\Delta\tau).$$

Dividindo ambos os membros por  $\Delta\tau$ , e calculando o limite quando  $\Delta\tau$  tende a zero, temos

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta\tau} = \frac{dr}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} (r'(t(\tau_0))(t'(\tau_0) + \varepsilon_1) + \varepsilon_2(t'(\tau_0) + \varepsilon_1)),$$

logo

$$\frac{dr}{d\tau} = r'(t(\tau_0))t'(\tau_0).$$

Usando a notação de Newton, temos

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau}.$$

## Resumo

Nesta aula, vimos o conceito de diferenciabilidade para funções de várias variáveis e também a regra da cadeia.

## Autoavaliação

1

Dado que  $w = x^3y^2 - 2xy^4 + 3x^2y^3$  verifique que  $x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} = 5w$ .

2

Dado que  $w = (ax + by + cz)^n$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes, verifique que  $x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = nw$ .

3

Dado que  $w = t^2 + \tan(te^{1/s})$ , verifique que  $s^2 + \frac{\partial w}{\partial s} + t \frac{\partial w}{\partial t} = 2t^2$ .

4

Seja  $f$  uma função diferenciável e seja  $w = f\left(\frac{5}{2s^2} - \frac{7}{2t^2}\right)$ . Verifique que  $7t \frac{\partial w}{\partial s} + 5s \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ .

5

Dado que  $w = e^{x/y} + e^{y/z} + e^{z/x}$ , verifique que  $\frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ .

6

Dado que  $w = \ln(x^3 + 5x^2y + 6xy^2 + 7y^3)$ , verifique que  $\frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} = 3$ .

7

Suponha que  $f(x, y) = x^3 + y^3$ , e que  $x = x(r, s) = 2r + s$ ,  $y = y(r, s) = 3r - 2s$ .

Use a regra da cadeia para determinar  $\frac{\partial f}{\partial r}$  e  $\frac{\partial f}{\partial s}$ .

8

Suponha que  $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  e que  $x = x(s, t) = 2s - t$ ,  $y = y(s, t) = s + 2t$ .

Use a regra da cadeia para determinar  $\frac{\partial f}{\partial s}$  e  $\frac{\partial f}{\partial t}$ .

9

Suponha que  $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  e que  $x = x(r, \theta) = r \cos \theta$ ,  $y = y(r, \theta) = r \sin \theta$ .

Use a regra da cadeia para determinar  $\frac{\partial z}{\partial r}$  e  $\frac{\partial z}{\partial \theta}$  quando  $r = 3$ ,  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

10

Suponha que  $z = f(x, y)$  e  $x = x(r, \theta) = r \cos \theta$ ,  $y = y(r, \theta) = r \sin \theta$ .

a) Expresse  $\frac{\partial z}{\partial r}$  e  $\frac{\partial z}{\partial \theta}$  em termos de  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

b) Mostre que  $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ .

11

Em um certo instante, a altura de um cone circular reto é 30 *cm* e está aumentando a uma taxa de 2 *cm/seg*. Nesse mesmo instante, o raio da base é 20 *cm* e está aumentando a uma taxa de 1 *cm/seg*. A que taxa está aumentando o volume nesse instante?

12

A base  $B$  de um trapézio aumenta de tamanho a uma taxa de 2 *cm/seg* e a base  $b$  diminui de tamanho a uma taxa de 1 *cm/seg*. Se a altura  $h$  está aumentando à taxa de 3 *cm/seg*, quão rapidamente está variando a área  $A$  do trapézio quando  $B = 30$  *cm*,  $b = 50$  *cm* e  $h = 10$  *cm*?

13

Em um certo instante, o comprimento de um cateto de um triângulo retângulo é  $x = 10$  *cm* e cresce à taxa de 1 *cm/min* e o comprimento do outro cateto desse triângulo é  $y = 12$  *cm* e decresce à taxa de 2 *cm/min*. Encontre a taxa de variação da medida do ângulo oposto ao cateto de 12 *cm* de comprimento no instante dado.

14

Suponha que  $w = f(u, v)$  e que  $u = y - x - t$ ,  $v = z - y + t$ .

a) Encontre  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z}$  e  $\frac{\partial w}{\partial t}$  em termos de  $\frac{\partial f}{\partial u}$  e  $\frac{\partial f}{\partial v}$ .

b) Mostre que  $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ .

# Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000. v 2.

BURN, R. P. **Numbers and functions**: steps into analysis. Melbourn: Cambridge University Press, 1992.

FINEY, Ross L.; GIORDANO, Frank R.; WEIR, Maurice D. **Cálculo de George B. Thomas**. São Paulo: Addison-Wesley, 2003. v 2.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Harbra, 1982. v 2.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: MacGraw-Hill, 1985. v 2.

# Derivada direccional

Aula

5

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + uh, y_0 + vh, z_0 + wh) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

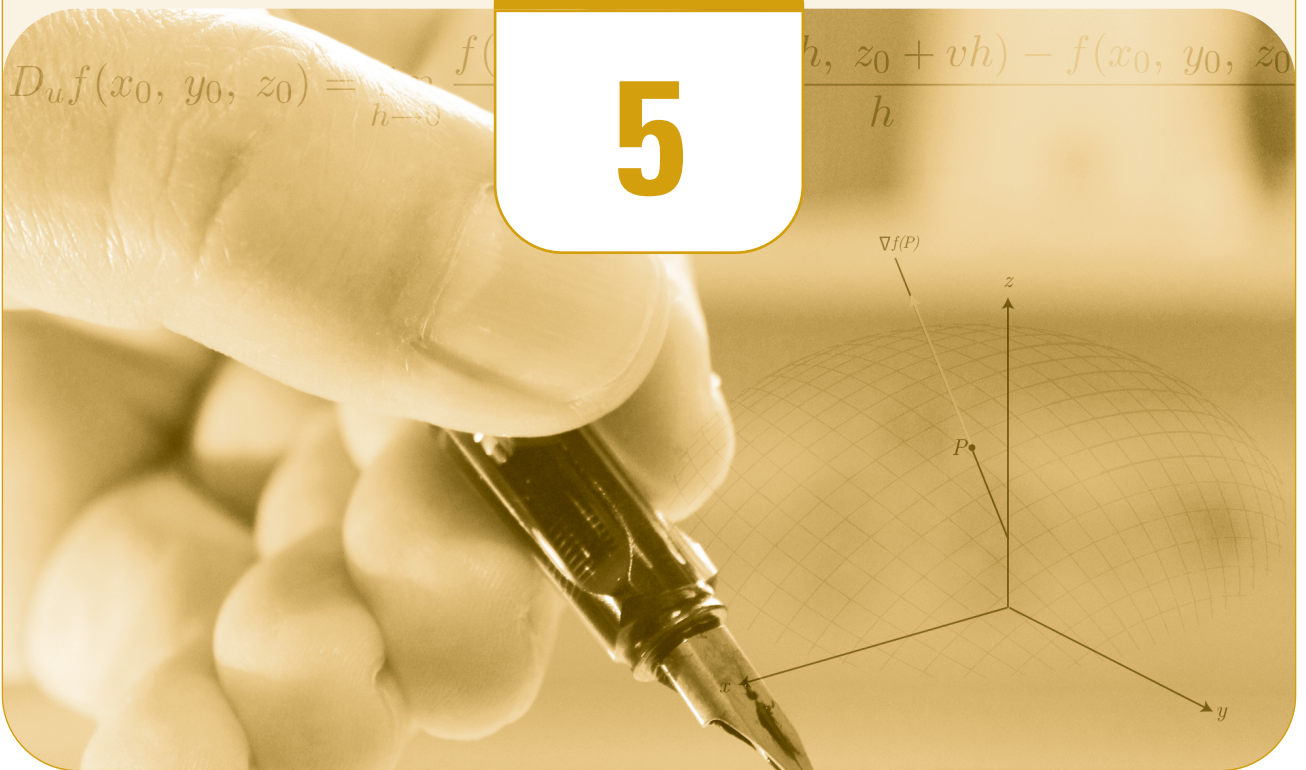
$\nabla f(P)$

$P$

$z$

$x$

$y$



# Apresentação

Nesta aula, apresentaremos a noção de **derivada direcional**, bem como os conceitos de **gradiente**, de **plano tangente** e de **reta normal**. Aplicaremos esses conceitos para estudar direções de variação máxima, mínima e zero de uma função de duas ou mais variáveis.

Para obter sucesso a partir desta aula, você tem de ler e compreender o texto. Leia devagar, gastando alguns minutos numa única linha, se isso for necessário. Não se impaciente. Avance quando se achar preparado.

## Objetivos

- 1 Compreender o conceito de derivada direcional.
- 2 Estimar a variação de valores de uma função de duas ou três variáveis.
- 3 Encontrar o plano tangente e a reta normal a uma superfície dada.





## Derivada direcional

**E**m muitas situações práticas, é conveniente encontrar a derivada numa dada direção. Por exemplo, se estamos observando a profundidade de um açude, é fácil perceber que a água se torna mais funda em algumas direções do que em outras. Poderíamos analisar a situação considerando uma função  $P(x, y)$  que seria a profundidade no ponto  $(x, y)$  e veríamos que o crescimento de  $P$  se dá mais rapidamente em algumas direções superficiais do que em outras. Ao aquecermos um corpo sólido, o aquecimento pode se dar mais rápido numa direção do que em outra. Se  $T(x, y, z)$  é a temperatura no ponto  $(x, y, z)$ , então  $T(x, y, z)$  pode ser maior em determinada direção do que em outra.

Por exemplo, se estamos observando a profundidade de um açude, é fácil perceber que a água se torna mais funda em algumas direções do que em outras. Poderíamos analisar a situação considerando uma função  $F(x, y, z)$  que seria a profundidade no ponto  $(x, y, z)$  e veríamos que o crescimento de  $F$  se dá mais rapidamente em algumas direções do que em outras.

Um outro exemplo pode ser visto quando aquecemos um corpo sólido. O aquecimento pode se dar mais rapidamente numa direção do que em outra. Se  $T(x, y, z)$  é a temperatura no ponto  $(x, y, z)$ , então  $T(x, y, z)$  pode ser maior em alguma direção do que em outra.

A **derivada direcional** estima o crescimento de uma função em alguma direção dada.

Nesse aspecto, a derivada direcional é uma generalização da derivada parcial, estudada na aula 4 (Diferenciabilidade de uma função de duas variáveis e regra da cadeia), que dá a variação da função na direção dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .

O que vem a ser a derivada direcional?

### Definição 1

Seja  $f$  uma função de duas variáveis. Definimos a **derivada direcional de  $f$  em  $P = (x_0, y_0)$  na direção do vetor unitário  $u = \lambda i + \mu j$ ,  $D_u f(x_0, y_0)$**  como sendo o número

$$D_u f(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + hu) - f(P)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h, y_0 + \mu h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

desde que o limite exista.

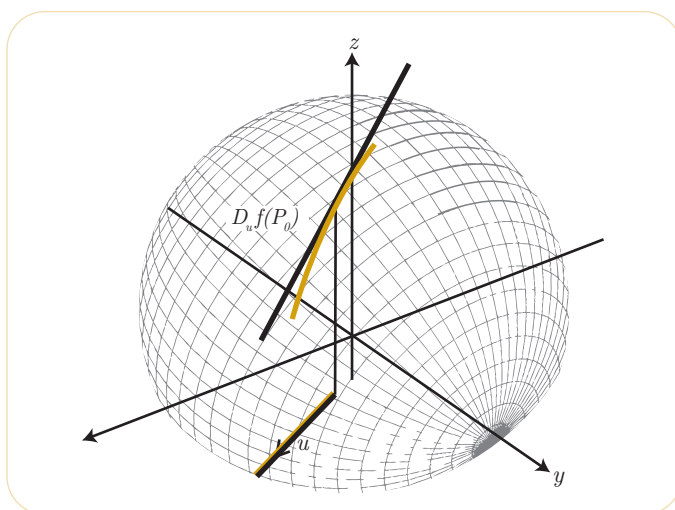


Figura 1 - A derivada direcional.

### Exemplo 1

Encontre a derivada direcional de  $f(x, y) = x + xy$  no ponto  $(2, 2)$  na direção do vetor  $a = (1, 1)$ .

### Solução

Observe que o vetor  $a$  dado não é unitário. Na definição da derivada direcional, o vetor  $u$  é unitário. Logo, antes de qualquer coisa, precisamos calcular o vetor unitário na direção de  $a$ . Ou seja, vamos usar a expressão de definição da derivada direcional tomando

$$u = \frac{a}{\|a\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j, \text{ que é o vetor unitário na direção de } a.$$

Assim,  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$  e, como  $f(x, y) = x + xy$ , temos que:  $f(2, 2) = 2 + 2 \cdot 2 = 6$ .

Como a derivada direcional de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é dada por:

$D_a f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h, y_0 + \mu h) - f(x_0, y_0)}{h}$  segue que no ponto  $(x_0, y_0)$  teremos:

$$D_a f(2, 2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}h, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}h\right) - f(2, 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}h\right) + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}h\right)\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}h\right) - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{2}}h + 4 + \frac{1}{2}h^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}h - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{\sqrt{2}}h + \frac{1}{2}h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}h\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$



## Atividade 1

Encontre a derivada direcional de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  no ponto  $(1, 1)$  na direção do vetor  $a = (1, 3)$ .

**Observação** - Como  $u$  é um vetor unitário do plano, podemos escrever  $u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$ . Neste caso, a derivada direcional de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  na direção de  $u$  é o número:

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h \cos \theta, y_0 + h \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{h},$$

desde que o limite exista.

É fácil ver que, em geral, não é cômodo calcular a derivada direcional em termos do limite quando  $h$  tende a zero. Ocorre o mesmo com as derivadas de funções,  $f$ , de uma variável, que em geral não calculamos usando o limite do quociente de Newton:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Na disciplina Cálculo I, você já viu que desenvolvemos uma série de fórmulas eficientes para efetuar o cálculo da derivada.

Como, então, procedemos para calcular a derivada direcional sem usar a definição?

Podemos calcular a derivada direcional desenvolvendo uma fórmula eficiente dada pelo teorema 1 a seguir.

### Teorema 1

Seja  $f(x, y)$  uma função de duas variáveis tendo suas derivadas parciais,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ , contínuas e  $a = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$  um vetor unitário.

A derivada direcional de  $f(x, y)$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é igual a:

$$D_{\vec{a}}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \sin \theta.$$

Antes de mostrar como se encontra essa fórmula, vamos fazer algumas aplicações dela.

## Exemplo 2

No exemplo 1, usamos a definição que envolve limite para encontrar a derivada direcional de  $f(x, y) = x + xy$  no ponto  $(2, 2)$  na direção do vetor  $a = (1, 1)$ . Usando o resultado anterior, temos que:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 1 + y, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x. \text{ No ponto } (2, 2), \text{ teremos os valores:}$$

$$\frac{\partial f(2, 2)}{\partial x} = 1 + 2 = 3, \quad \frac{\partial f(2, 2)}{\partial y} = 2. \text{ Por outro lado,}$$

$$u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j.$$

Assim, temos que a derivada direcional é dada por

$$D_{\vec{a}}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \sin \theta \text{ e}$$

$$D_{\vec{a}}f(2, 2) = \frac{\partial f(2, 2)}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f(2, 2)}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}, \text{ como já} \\ \text{havíamos encontrado.}$$



## Atividade 2

Seja  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2$ . Usando o teorema 1, encontre a derivada direcional de  $f(x, y)$  no ponto  $P_0 = (1, -2)$  na direção do vetor  $(3, 1)$ .

### Exemplo 3

Encontre a derivada direcional de  $f(x, y) = ye^x + \text{sen}(xy)$  no ponto  $(0, 1)$  na direção do vetor  $a = i + 2j$ .

### Solução

Como  $f(x, y) = ye^x + \text{sen}(xy)$ , temos que  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = ye^x$ ,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = e^x + x \cos(xy)$

Por outro lado, como  $a$  não é unitário, o vetor unitário na direção de  $a$  é:

$u = \frac{a}{\|a\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}i + \frac{2}{\sqrt{5}}j$ . Portanto, a derivada direcional é dada por:

$$D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \text{sen} \theta.$$

$$\text{Logo, } D_u f(0, 1) = \frac{\partial f(0, 1)}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\partial f(0, 1)}{\partial y} \frac{2}{\sqrt{5}} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$



## Atividade 3

Dada a função  $f(x, y) = \text{arctg}(y/x)$ , encontre a derivada direcional na direção do vetor  $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  no ponto  $P_0 = (4, 3)$ .

## Prova do teorema 1

Escrevemos a equação paramétrica da reta que passa por  $(x_0, y_0)$  na direção do vetor unitário  $u = u_1 i + u_2 j = (u_1, u_2)$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ :

$$r(s) = (x(s), y(s)) = (x_0, y_0) + su = (x_0, y_0) + s(u_1, u_2). \text{ Ou seja,}$$
$$x(s) = x_0 + su_1 \text{ e } y(s) = y_0 + su_2.$$

Se  $f(x_0, y_0)$  for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , usando a regra da cadeia, podemos escrever:

$$D_u f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right) \frac{dx}{ds} + \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right) \frac{dy}{ds}$$
$$= \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right) u_1 + \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right) u_2$$
$$= \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right) \frac{dx}{ds} + \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right) \frac{dy}{ds} = \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right) u_1 + \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right) u_2.$$

# O vetor gradiente

Seja  $f(x, y)$  uma função de duas variáveis, possuindo as derivadas parciais num ponto  $(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ , definimos o **gradiente de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$** , denotado por  $\nabla f(x_0, y_0)$ , como sendo o vetor:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} j = \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}; \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right).$$

Leia a notação  $\nabla f(x_0, y_0)$  como sendo “gradiente de  $f$  em  $(x_0, y_0)$ ”. A letra do alfabeto grego “ $\nabla$ ” isolada é lida como *nabla*.

Pela exposição anterior, a derivada direcional  $D_u f(x_0, y_0)$  pode ser vista como um produto escalar:

$$D_u f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle.$$

## Exemplo 4

Encontre o gradiente da função  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3x + 2y$  no ponto  $P_0 = (2, -1)$ .

## Solução

O vetor gradiente é dado por:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} j = \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}; \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)$$

Calculando as derivadas parciais da função dada, temos:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x - 3 \text{ e } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 4y + 2.$$

Aplicando cada uma das derivadas parciais no ponto  $P_0 = (2, -1)$  dado, temos:

$$\frac{\partial f(2, -1)}{\partial x} = 4 - 3 = 1 \text{ e } \frac{\partial f(2, -1)}{\partial y} = 4(-1) + 2 = -2.$$

Portanto, o vetor gradiente é igual a:  $\nabla f(x_0, y_0) = i + (-2)j$ .



## Atividade 4

Encontre o vetor gradiente da função  $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$  no ponto  $P_0 = (2, -3)$ .

## O vetor gradiente para funções com três variáveis

A definição de derivada direcional para funções de três variáveis pode facilmente ser adaptada a partir do que fizemos anteriormente para o caso de duas variáveis.

### Definição 2

Seja  $f$  uma função de três variáveis. Definimos a **derivada direcional de  $f$  em  $P = (x_0, y_0, z_0)$  na direção do vetor unitário**

$u = \lambda i + \mu j + \nu k$ ,  $D_u f(x_0, y_0, z_0)$ , como sendo o número

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h, y_0 + \mu h, z_0 + \nu h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

desde que o limite exista.

O teorema 2 pode ser facilmente adaptado para o caso de funções de três variáveis.

## Teorema 2

Seja  $f(x, y, z)$  uma função de três variáveis tendo suas derivadas parciais,

$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}$ , contínuas e  $u = u_1i + u_2j + u_3k$

um vetor unitário. A derivada direcional de  $f(x, y, z)$  no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  na direção de  $u$  é igual a:

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} u_2 + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} u_3.$$

## Exemplo 5

Encontre a derivada direcional da função

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 2xz - yz$  na direção do vetor  $v = (1, 1, 1)$  no ponto  $P_0 = (1, 2, -1)$ .

### Solução

A derivada direcional é igual a:

$$D_u f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} u_2 + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} u_3, \text{ onde}$$

$u = u_1i + u_2j + u_3k$  é o vetor unitário na direção do vetor  $v$  dado.

$$\text{Ou seja, } u = \frac{v}{\|v\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Como  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 2xz - yz$ , temos que as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 2x - 3y + 2z, \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = 2y - 3x - z \text{ e } \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = 2z + 2x - y.$$

Aplicando as derivadas parciais no ponto  $P_0 = (1, 2, -1)$  dado, temos:

$$\frac{\partial f(1, 2, -1)}{\partial x} = 2 - 6 - 2 = -6, \quad \frac{\partial f(1, 2, -1)}{\partial y} = 4 - 3 + 1 = 2 \text{ e } \frac{\partial f(1, 2, -1)}{\partial z} = -2 + 2 - 2 = -2.$$

$$\text{Assim, } D_u f(1, 2, -1) = (-6) \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \frac{1}{\sqrt{3}} - 2 \frac{1}{\sqrt{3}} = (-6) \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



## Atividade 5

Encontre a derivada direcional da função  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3x + 2y$  na direção do vetor  $v = (2, 2, \sqrt{5})$  no ponto  $P_0 = (1, 1, -1)$ .

**Observação** - Tanto para funções de duas quanto de três variáveis, podemos interpretar a derivada direcional de  $f$  no ponto  $P$  na direção de  $u$  como sendo um produto escalar de dois vetores. De fato, para o caso de três variáveis, o valor da derivada direcional obtida no teorema 2 é dado por:

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} u_2 + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} u_3,$$

que pode ser interpretado como o seguinte produto escalar:

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \left\langle \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \right\rangle; (u_1, u_2, u_3) \rangle.$$

Ou seja,

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), u \rangle.$$

Seja  $f(x, y, z)$  uma função de três variáveis, possuindo as derivadas parciais num ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}$  e  $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}$ . Definimos o **vetor gradiente de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$** , denotado por  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ , como sendo o vetor:

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} j + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} k = \\ &= \left( \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

## As direções de maior e menor crescimento de uma função de mais de uma variável

Na disciplina de Geometria Analítica e Números Complexos, você já viu que: se  $A$ ,  $B$  são vetores do plano (ou do espaço tridimensional), o produto escalar deles satisfaz:  $\langle A, B \rangle = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre os dois vetores.

Vamos usar essa propriedade para o caso em que  $A$  seja o vetor gradiente e  $B$ , um vetor unitário  $e$ , com isso, identificar as direções de maior e menor crescimento de uma função de mais de uma variável.

Seja  $P = (x, y, z)$  e  $u$  um vetor unitário, temos que:

$$D_u f(P) = \langle \nabla f(P), u \rangle = \|\nabla f(P)\| \cdot \|u\| \cdot \cos \theta = \|\nabla f(P)\| \cdot \cos \theta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o vetor gradiente,  $\nabla f(P)$ , e o vetor unitário  $u$ . Logo, o maior valor da derivada direcional,  $D_u f(P)$ , ocorre quando  $\cos \theta = 1$ , pois  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ . Isto é, quando o ângulo entre o vetor gradiente e o vetor unitário for zero.

Assim, a direção do gradiente é a do crescimento máximo da função e a norma do vetor gradiente é a razão de crescimento da função naquela direção.

## Exemplo 6

Dada a função  $f(x, y, z) = x^2 - xzy - z$ , encontre a derivada direcional de  $f$  no ponto  $P_0 = (2, 1, -3)$  na direção do maior crescimento.

### Solução

O vetor gradiente de  $f$  em  $(x, y, z)$  é igual a:

$$\begin{aligned} (\nabla f)(x, y, z) &= \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} j + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} k \\ &= (2x - zy)i + (xz)j - (xy + 2z)k. \end{aligned}$$

Logo, o vetor gradiente no ponto  $P_0 = (2, 1, -3)$  é igual a:

$(\nabla f)(2, 1, -3) = 7i - 6j + 4k$ . Como a direção do maior crescimento é a direção do vetor gradiente, então, a derivada direcional na direção do gradiente é igual à norma do vetor gradiente no ponto  $P_0 = (2, 1, -3)$ . Assim,

$$D_{\nabla f}(2, 1, -3) = \|(\nabla f)(2, 1, -3)\| = \sqrt{7^2 + (-6)^2 + (+4)^2} = \sqrt{101}.$$



## Atividade 6

Sejam  $f(x, y, z) = x^2 + 3xy + y^2 + z^2$ ,  $P_0 = (1, 0, 2)$  e  $P_1 = (-1, 3, 4)$ .  
Encontre:

- a derivada direcional  $D_u f$  no ponto  $P_0$ , onde  $u$  é um vetor unitário na direção do vetor  $\overrightarrow{P_0 P_1}$ ;
- o valor de  $D_v f$  no ponto  $P_0$ , onde  $v$  é um vetor unitário tal que  $D_v f$  é um máximo.

Depois de aprender em qual direção a função  $f$  aumenta mais rapidamente, é natural que você faça as duas perguntas seguintes:

- a) qual é a direção em que a função decresce mais rapidamente?
- b) qual é a direção em que a função tem variação nula?

As respostas às duas perguntas anteriores são:

- a) a função decresce mais rapidamente no sentido contrário à do maior crescimento, ou seja, a função decresce mais rapidamente na direção e no sentido do vetor:  $-(\nabla f)(P)$ . Observe que o ângulo entre o vetor unitário  $u$  e  $\nabla f(P)$  é  $180^\circ$ . Logo, a derivada direcional nessa direção é dada por:

$$\begin{aligned} D_u f(P) &= \langle \nabla f(P), u \rangle = \|\nabla f(P)\| \cdot \|u\| \cdot \cos \theta \\ &= \|\nabla f(P)\| \cdot \cos 180^\circ = \|\nabla f(P)\| \cdot (-1) = -\|\nabla f(P)\|; \end{aligned}$$

- b) a função tem variação nula em qualquer direção perpendicular ao vetor gradiente. De fato:

$$\begin{aligned} D_u f(P) &= \langle \nabla f(P), u \rangle = \|\nabla f(P)\| \cdot \|u\| \cdot \cos \theta = \\ &\|\nabla f(P)\| \cdot \cos(\pi/2) = \|\nabla f(P)\| \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

## Exemplo 7

Ache a direção em que a função  $f(x, y) = 4xy + 3y^2$  decresce mais rapidamente e a direção em que ela tem variação nula no ponto  $(3, 1)$ .

### Solução

Temos que:  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 4y$  e  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 4x + 6y$ . Assim, o gradiente de  $f(x, y)$  no ponto  $(3, 1)$  é dado por:  $\nabla f(3, 1) = 4i + 8j$ . Logo,  $f(x, y)$  decresce mais rapidamente na direção do vetor  $u = -\nabla f(3, 1) = -4i - 8j$ .

A função  $f(x, y)$  tem variação nula na direção: do vetor  $v = -18i + 4j$  ou do vetor, pois é perpendicular ao vetor gradiente  $\nabla f(3, 1)$ .



## Atividade 7

Ache a direção em que a função  $f(x, y) = e^x \sin y$  decresce mais rapidamente e a direção em que ela tem variação nula no ponto  $P_0 = \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ .

# Propriedades algébricas do vetor gradiente

Conhecendo os gradientes de duas funções  $f$  e  $g$ , é fácil encontrar os gradientes da soma das duas funções, da diferença entre elas, do produto, do quociente e da multiplicação de qualquer uma delas por uma constante. De fato, valem as seguintes propriedades:

**a)** (Soma):  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

**b)** (Diferença):  $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$

**c)** (Produto):  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

**d)** (Quociente):  $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$ , com  $g(x) \neq 0$

**e)** (Multiplicação por uma constante):  $\nabla(cf) = c \cdot (\nabla f)$ .

## O plano tangente e a reta normal

Na disciplina Geometria Analítica e Números Complexos, você já viu a equação do plano que passa por um ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$  e é perpendicular ao vetor  $N = (a, b, c)$ .

Recordando, se  $(x, y, z)$  é um ponto qualquer do plano que passa pelo ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$  e é perpendicular ao vetor  $N = (a, b, c)$ , então, o vetor  $\overrightarrow{PX} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  do plano é perpendicular ao vetor normal  $N$ . Isso significa que o produto escalar  $\langle \overrightarrow{PX}, N \rangle$  é nulo. Assim,

$$\langle \overrightarrow{PX}, N \rangle = \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0); (a, b, c) \rangle = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Ou seja,  $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ , que é o mesmo que:

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

Como  $a, b, c, x_0, y_0, z_0$  são constantes, a expressão  $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$  é uma constante. Portanto, a equação do plano é:

$$ax + by + cz = d.$$

Dizemos que o plano que passa pelo ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  e é perpendicular ao vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}i + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}j + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}k$  é denominado plano tangente à superfície de nível  $f(x, y, z) = k$  no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ . A equação do plano tangente à superfície  $f(x, y, z) = k$  no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  é

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

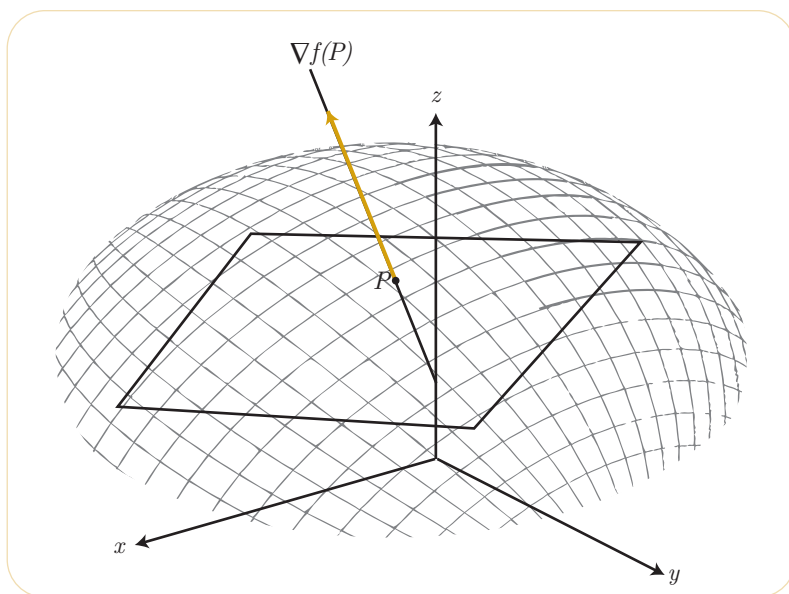


Figura 2 - Plano tangente à superfície.

## Exemplo 8

Encontre a equação do plano tangente para a superfície de nível dada por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$$

no ponto  $(1, 1, 1)$ .

## Solução

O plano tangente é o plano que passa por  $(1, 1, 1)$  e é perpendicular ao vetor gradiente de  $f$  em  $(1, 1, 1)$ . O vetor gradiente é dado por:

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}i + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}j + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}k \\ &= 2x_0i + 2y_0j + 2z_0k \end{aligned}$$

Como  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ , temos:  $\nabla f(1, 1, 1) = 2i + 2j + 2k$ .

A equação do plano é:

$$2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0, \text{ que é o mesmo que: } 2x + 2y + 2z = 6.$$



## Atividade 8

Encontre a equação do plano tangente à superfície de nível  $xy + yz + xz - 3 = 0$  no ponto  $P_0 = (1, 1, 1)$ .

Quando você estudou Geometria Analítica e Números Complexos, viu que a equação paramétrica da reta que passa por  $(x_0, y_0, z_0)$  e é paralela ao vetor  $v = ai + bj + ck$  é dada por:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = k.$$

Daí, escrevem-se as equações paramétricas da reta:

$x - x_0 = ak$ ,  $y - y_0 = bk$ ,  $z - z_0 = ck$  que é o mesmo que:  $x = x_0 + ak$ ,  $y = y_0 + bk$ ,  $z = z_0 + ck$ .

Vamos usar o que já aprendemos para definir reta normal a uma superfície de nível.

Sabemos que dada uma superfície de nível  $f(x, y, z) = k$ , o vetor gradiente é normal ao plano tangente à superfície no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ . Dizemos que a **reta normal à superfície em**  $(x_0, y_0, z_0)$  é a reta que passa por  $(x_0, y_0, z_0)$  e é paralela ao vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ .

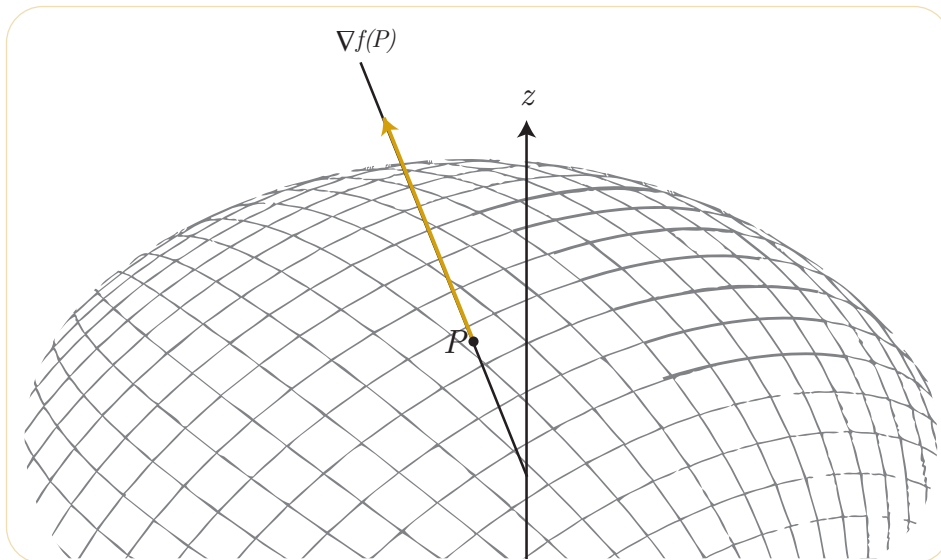


Figura 3 - Reta normal à superfície num ponto.

## Exemplo 9

Encontre a equação da reta normal à superfície de nível, do exemplo 8,  $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ , no ponto  $(1,1,1)$ .

### Solução

Do exemplo 8, temos que o vetor gradiente é  $\nabla f(1, 1, 1) = 2i + 2j + 2k$ . Assim, a equação da normal à superfície dada é a reta cujas equações paramétricas são:

$$x = 1 + 2k, y = 1 + 2k, z = 1 + 2k.$$



## Atividade 9

Encontre a equação da reta normal à superfície de nível dada por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y - z = -4, \text{ no ponto } (2,-3,18).$$

## Resumo

Nesta aula, estudamos a derivada direcional, o vetor gradiente, as direções de maior e menor crescimento de uma função de mais de uma variável, o plano tangente e a reta normal.

# Autoavaliação

1

A distribuição de temperatura numa chapa metálica é dada pela função  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 3y$ . Encontre:

- a) a derivada direcional  $D_u f(x, y)$  no ponto  $P_0 = (2, -1)$ ;
- b) ache as direções de maior e de menor crescimento da temperatura.

2

Seja  $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x + z)^2(y + z)^2$ :

- a) qual é a direção do maior crescimento da função no ponto  $(2, -1, 2)$ ?
- b) qual é a derivada direcional de  $f$  na direção e no ponto encontrados no item anterior?

3

Encontre a equação do plano tangente e as equações da reta normal à superfície  $z = x^2 + 2y^2$  no ponto  $P_0 = (2, -1, 6)$ .

## Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000. v 2.

FINEY, Ross L.; GIORDANO, Frank R.; WEIR, Maurice D. **Cálculo de George B. Thomas**. São Paulo: Addison-Wesley, 2003. v 2.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: MacGraw-Hill, 1985. v 2.



# Fórmula de Taylor, valores extremos e pontos de sela

Aula

6



# Apresentação

**E**sta é a Aula 6 da disciplina Cálculo II. Você já conhece, do Ensino Médio, que os polinômios são funções que apresentam propriedades algébricas básicas que os tornam cômodos para trabalhar. Por exemplo, você viu, na disciplina Cálculo I, que o cálculo de derivadas e integrais de polinômios é muito simples. Nesta aula, apresentaremos a série de Taylor e Maclaurin, que nos dão métodos para aproximar funções por polinômios. Também veremos critérios, generalizando os estudos no Cálculo I, que nos permitem decidir, sob certas condições, se uma função de mais de uma variável possui um máximo ou um mínimo.

Para obter sucesso a partir desta aula, você tem que ler e compreender o texto. Leia devagar, gastando alguns minutos numa única linha, se isso for necessário. Não fique impaciente. Avance quando você achar que está preparado.

## Objetivos

- 1** Aproximar funções por polinômios.
- 2** Determinar se um ponto  $(x_0, y_0)$  é um ponto de máximo ou de mínimo de uma função de duas variáveis que possui as derivadas parciais até terceira ordem.



# Fórmula de Taylor

Suponha que uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  converge em algum intervalo  $-R < x-a < R$  (com  $R > 0$ ). Então, a soma da série tem um valor para cada  $x$  neste intervalo definido, sendo assim uma função de  $x$ . Podemos, desse modo, escrever

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots \quad \text{Eq. (1)}$$

com  $a-R < x < a+R$ .

Uma pergunta é pertinente: qual é a relação entre os coeficientes  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  e a função  $f$ ? Para responder à essa pergunta, procederemos como se o lado direito da equação (1) fosse um polinômio. Fazendo  $x = a$ , encontramos que  $f(a) = a_0$ .

Diferenciando a equação (1), como se o lado direito fosse um polinômio, encontramos:

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \dots$  Para  $x = a$ , encontramos que  $f'(a) = a_1$ .

Continuamos ambos os procedimentos de diferenciar (derivar) e fazer  $x = a$  para obter

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + 4 \cdot 3a_4(x-a)^2 + 5 \cdot 4a_5(x-a)^3 + \dots,$$

$$f''(a) = 2a_2 \text{ ou } a_2 = \frac{f''(a)}{2!},$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3a_5(x-a)^2 + 6 \cdot 5 \cdot 4a_6(x-a)^3 + \dots,$$

$$f'''(a) = 3 \cdot 2a_3 \text{ ou } a_3 = \frac{f'''(a)}{3!},$$

e assim por diante. O modelo agora está claro. A fórmula geral para os coeficientes  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  é

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Substituindo as fórmulas para os coeficientes  $a_n$  na série de potências, obtemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \quad \text{Eq. (2)}$$

### Definição 1

A expressão  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$  é chamada **série de Taylor de  $f$  em torno do ponto  $a$**  ou a **expansão de  $f$  em uma série de potências de  $x-a$** .

Para o caso especial  $a=0$ , a série de Taylor é dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \quad \text{Eq. (3)}$$

Neste caso, a série é chamada **série de Maclaurin para  $f$** .

## Exemplo 1

Dado que  $f(x) = \text{sen } x$ , encontre sua série de Maclaurin.

### Solução

Temos que

$$f(x) = \text{sen } x, \quad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \text{cos } x, \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\text{sen } x, \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\text{cos } x, \quad f'''(0) = -1,$$

$$f^{(4)}(x) = \text{sen } x, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

Fica claro que  $f^{(5)} = f'$ ,  $f^{(6)} = f''$ , etc., de modo que a sequência  $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$  se repete indefinidamente. Portanto, da equação (3) obtemos

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

**Observação** - Pode ser verificado, pelo teste da razão, por exemplo, que a série anterior converge para todos os valores de  $x$ .



## Atividade 1

Obtenha o desenvolvimento de Taylor da função  $f(x) = \text{cos } x$  em torno de  $a = \pi/3$ .

## Exemplo 2

Obtenha a expansão em série de Taylor da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  em torno de  $x = 1$ .

### Solução

Temos que

$$\begin{aligned}f(x) &= x^{-1} & f(1) &= 1 \\f'(x) &= (-1)x^{-2} & f'(1) &= 1^{-1} \\f''(x) &= (-1)(-2)x^{-3} & f''(1) &= (-1)^2 \cdot 2! \\f'''(x) &= (-1)(-2)(-3)x^{-4} & f'''(1) &= (-1)^3 \cdot 3! \\f^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5} & f^{(4)}(1) &= (-1)^4 \cdot 4! \\f^{(n)}(x) &= (-1)(-2) \dots (-n)x^{-n-1} & f^{(n)}(1) &= (-1)^n \cdot n!\end{aligned}$$

Portanto, substituindo na equação (2) e observando que  $a = 1$ , obtemos

$$f(x) = \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n.$$

**Observação** - Podemos usar o teste da razão para verificar que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$  é convergente no intervalo  $0 < x < 2$ .



## Atividade 2

Obtenha o desenvolvimento de Maclaurin da função  $f(x) = \cos x$ .

## Exemplo 3

Obtenha a expansão em série de Maclaurin da função  $f(x) = e^x$ .

### Solução

Como sabemos, a série de Maclaurin é uma série de Taylor em torno de  $a = 1$ . Temos, então,

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = e^x & f(0) = e^0 = 1 \\
 f'(x) = e^x & f'(0) = e^0 = 1 \\
 f''(x) = e^x & f''(0) = e^0 = 1 \\
 f'''(x) = e^x & f'''(0) = e^0 = 1 \\
 f^{(4)}(x) = e^x & f^{(4)}(0) = e^0 = 1 \\
 f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = e^0 = 1
 \end{array}$$

Portanto, substituindo na equação (3), obtemos

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$



## Atividade 3

Obtenha o desenvolvimento de Taylor das funções:

- a)**  $f(x) = \ln x$  em torno de  $a = 3$ ;  
**b)**  $f(x) = \operatorname{sen} x$  em torno de  $a = \pi/4$ .

Obtenha o desenvolvimento de Maclaurin da função  $f(x) = \ln(1+x)$ .

## Teorema de Taylor com resto

Se a função  $f$  possui somente um número finito – digamos  $n$  – de derivadas,  $f', f'', f''', f^{(IV)}, \dots, f^n$ , então, fica claro que não é possível representá-la por uma série de Taylor, uma vez que os coeficientes  $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$  não podem ser computados além de  $a_n$ .

Nestes casos, ainda é possível obter uma versão finita da expansão de Taylor.

Suponhamos que  $f(x)$  possua  $n$  derivadas contínuas em algum intervalo em torno do valor  $a$ . Então, sempre é possível escrever

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

Eq. (4)

para  $x$  nesse intervalo.

O lado direito consiste em um polinômio em  $x$  de grau  $n$  e um resto  $R_n$  a respeito do qual, até agora, não temos nenhum conhecimento. O teorema de Taylor, logo a seguir, diz respeito ao caráter de  $R_n$ . Esse teorema não tem somente uma importância teórica, também pode ser usado em aproximações de cálculos numéricos.

### Teorema 1 (Teorema de Taylor com o resto na forma derivada)

Suponhamos que  $f, f', f^{(2)}, \dots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$  são todas contínuas em algum intervalo contendo  $a$  e  $b$ . Então, existe um número  $c$  entre  $a$  e  $b$ , tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Isto é, o resto  $R_n$  é dado pela fórmula:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \quad \text{Eq. (5)}$$

### Demonstração (Omitida)

Optamos pela omissão da demonstração do teorema por ela ser muito técnica. Para você ter acesso a ela, sugerimos que consulte as referências citadas ao final da aula.

**Observação 1** - Vemos que  $R_n$  depende de ambos  $b$  e  $a$ , e escreve-se, em geral,  $R_n = R_n(a, b)$ , como uma função de duas variáveis.

**Observação 2** - Se tomarmos o caso especial  $n = 0$ , obtemos  $f(b) = f(a) + f'(c) \cdot (b - a)$ , que reconhecemos como sendo o Teorema do Valor Médio.

## Exemplo 4

Calcule  $(1, 1)^{1/5}$  com uma precisão de quatro casas decimais.

### Solução

A chave para a solução, usando o teorema de Taylor, é o fato que podemos fazer

$f(x) = (1 + x)^{1/5}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 0, 1$ . Apresentamos os cálculos separando a quinta e a sexta casa decimal, para destacar as quatro casas decimais.

Então,

$$\begin{aligned}f(x) &= (1 + x)^{1/5}, & f(a) &= 1 & & = 1,0000 \quad 00 \\f'(x) &= \frac{1}{5}(1 + x)^{-4/5}, & f'(a) \cdot (b - a) &= \frac{1}{5}(0, 1)^1 & & = 0,0200 \quad 00 \\f''(x) &= -\frac{4}{25}(1 + x)^{-9/5}, & \frac{f''(a) \cdot (b - a)^2}{2!} &= -\frac{2}{25}(0, 1)^2 & & = -0,0008 \quad 00 \\f'''(x) &= \frac{36}{125}(1 + x)^{-14/5}, & \frac{f'''(a) \cdot (b - a)^3}{3!} &= \frac{6}{125}(0, 1)^3 & & = 0,0000 \quad 48\end{aligned}$$

Para todo  $x$  entre 0 e 1, temos  $0 < (1 + x)^{-14/5} < 1$ .

Portanto, podemos estimar  $R_n$  para  $n = 2$ :

$$0 < R_2 = \frac{36}{125}(1 + c)^{-14/5} \frac{(b - a)^3}{3!} < \frac{6}{125}(0, 1)^3 = 0,0000 \quad 48.$$

Adicionando os termos na expansão de Taylor para  $n = 2$ , obtemos

$(1, 1)^{1/5} = 1,0192$ , aproximadamente.

De fato, uma estimativa mais precisa é  $1,0192 < (1, 1)^{1/5} < 1,0192 \quad 48$ .

**Observação** - No exemplo 4, poderíamos ter selecionado  $f(x) = x^{1/5}$  com  $a = 1$  e  $b = 1,1$ . O resultado seria o mesmo.

## Exemplo 5

Calcule  $\sqrt[3]{7}$  com uma precisão de quatro casas decimais.

### Solução

Considere

$$f(x) = x^{1/3}, \quad a = 8, \quad b = 7.$$

Então,  $b - a = -1$ , e

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{1/3}, & f(a) &= 2 & & = 2,0000 \quad 00 \\ f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-2/3}, & f'(a) \cdot (b-a) &= -\frac{1}{12} & & = -0,0833 \quad 33 \\ f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-5/3}, & \frac{f''(a) \cdot (b-a)^2}{2!} &= -\frac{1}{9 \cdot 2^5} & & = -0,0034 \quad 72 \\ f'''(x) &= \frac{10}{27}x^{-8/3}, & \frac{f'''(a) \cdot (b-a)^3}{3!} &= -\frac{5}{81 \cdot 2^8} & & = -0,0002 \quad 41 \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{80}{81}x^{-11/3}, & \frac{f^{(4)}(a) \cdot (b-a)^4}{4!} &= -\frac{5}{243 \cdot 2^{10}} & & = -0,0000 \quad 20 \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{7} = 1,9129 \quad 34.$$

Portanto, considerando até a quarta casa decimal, temos que  $\sqrt[3]{7} = 1,9129$ .

### Teorema 2 (Teorema de Taylor com o resto na forma integral)

Suponhamos que  $f, f', f^{(2)}, \dots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$  são todas contínuas em algum intervalo contendo  $a$  e  $b$ . Então,  $f(x)$  pode ser escrita na forma

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n,$$

onde,

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt.$$

### Demonstração (Omitida)

Optamos pela omissão da demonstração do teorema por ela ser muito técnica. Para você ter acesso a ela, sugerimos que consulte as referências citadas ao final da aula.

## Exemplo 6

Escreva  $\ln(1+x)$  como um polinômio do terceiro grau e faça uma estimativa do resto  $R_n$  para  $0 < x < \frac{1}{2}$ .

### Solução

Selecionamos

$$f(x) = \ln(1+x), \quad a = 0, \quad b = x.$$

Então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x}, & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, & f'''(0) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4}. \end{aligned}$$

Por isso,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_3,$$

com

$$R_3 = -\frac{6}{6} \int_0^x \frac{1}{(1+t)^4} (x-t)^3 dt.$$

Uma estimativa pode ser feita substituindo  $(1+t)^{-4}$  pelo seu maior valor 1, onde encontramos

$$|R_3| < \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - t\right)^3 dt = 64.$$



## Atividade 4

1

Calcule  $e^{-0,2}$  com uma precisão de 5 casas decimais. Use o fato que  $2 < e < 4$ .

2

Calcule  $e^{0,2}$  com uma precisão de 5 casas decimais. Use o fato que  $2 < e < 4$ .

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

Uma das principais aplicações da diferenciação de funções de uma variável ocorre no estudo de máximos e mínimos. Os testes da primeira e segunda derivadas nos permitem determinar os pontos de máximo e mínimo relativos de funções de uma variável. Esses testes são úteis para fazer gráficos de funções, para resolver problemas envolvendo taxas relacionadas e também para resolver variados tipos de problemas geométricos e físicos.

Em funções de duas ou mais variáveis, existem procedimentos semelhantes. Funções contínuas de duas ou mais variáveis assumem máximos e mínimos em domínios fechados e limitados. Uma função de duas ou mais variáveis só pode assumir valores extremos nos pontos de fronteira, ou onde as derivadas parciais são nulas ou não existem.

Antes de prosseguir, precisamos entender o que é um **máximo relativo** e um **mínimo relativo** para uma função de duas variáveis.

## Definição 2

**a)** Uma função  $f(x, y)$  é dita ter um máximo relativo em  $(x_0, y_0)$  se existe um disco aberto centrado em  $(x_0, y_0)$ , em que, para todos os pontos  $(x, y)$  neste disco, tem-se

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

**b)** Uma função  $f(x, y)$  é dita ter um mínimo relativo em  $(x_0, y_0)$  se existe um disco aberto centrado em  $(x_0, y_0)$ , em que, para todos os pontos  $(x, y)$  neste disco, tem-se

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

## Exemplo 7

Considerando a superfície da terra como o gráfico da função altitude, com variáveis que indiquem a latitude e a longitude, os picos das montanhas correspondem aos máximos, e os mínimos correspondem aos vales.

Você pode facilmente adaptar a definição 2 para o caso de funções com mais de duas variáveis.

O estudo de máximos e mínimos de funções de duas, três ou mais variáveis tem suas bases no teorema a seguir.

### Teorema 3

Suponha que  $f(x, y)$  é definida em uma região  $D$  contendo  $(x_0, y_0)$  em seu interior. Suponha que  $f_x(x_0, y_0)$  e  $f_y(x_0, y_0)$  são definidos e que  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  para todo  $(x, y)$  em  $D$ ; isto é,  $f(x_0, y_0)$  é um máximo relativo. Então,  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

### Demonstração (Omitida)

Optamos pela omissão da demonstração do teorema por ela ser muito técnica. Para você ter acesso a ela, sugerimos que consulte as referências citadas ao final da aula.

Você pode, facilmente, adaptar o teorema 3 para o caso de mínimo relativo.

Como no caso de uma variável, quando as derivadas parciais são nulas em um ponto, não é suficiente para garantir que este é um ponto de máximo ou mínimo. Como em funções de uma variável há a necessidade de aplicarmos testes usando derivadas parciais de ordem superior, os dois teoremas seguintes são testes que nos permite decidir se os pontos são de máximo ou de mínimo.

### **Teorema 4**

Seja  $D$  um domínio fechado do plano  $XY$ , isto é, a curva fronteira de  $D$  é considerada como parte de  $D$ . Se  $f$  é uma função de duas variáveis definida e contínua em  $D$ , então, existe (pelo menos) um ponto em  $D$  onde  $f$  tem um valor máximo e existe (pelo menos) um ponto em  $D$  onde  $f$  tem um valor mínimo.

### **Demonstração (Omitida)**

Optamos pela omissão da demonstração do teorema por ela ser muito técnica. Para você ter acesso a ela, sugerimos que consulte as referências citadas ao final da aula.

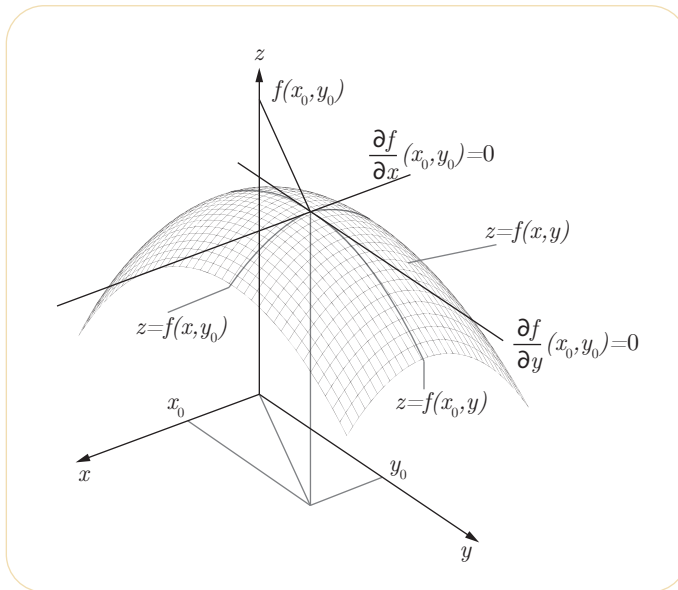
### **Teorema 5 (Teste da primeira derivada parcial)**

Se  $f(x, y)$  tiver um máximo ou mínimo relativo em um ponto interior  $(x_0, y_0)$  de seu domínio e as derivadas parciais em  $(x_0, y_0)$  existirem, então,  $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$

### **Demonstração**

Considere que a função  $z = f(x, y)$  tem um máximo relativo em  $(x_0, y_0)$  como na Figura 1 a seguir.

Neste caso, quando consideramos a função  $z = f(x, y)$  com  $x$  fixo em  $x_0$ , temos uma função  $z = f(x_0, y)$  da variável  $y$ , que terá um máximo quando igualamos  $y = y_0$ .



**Figura 1** - Função  $z = f(x, y)$  tem um máximo relativo em  $(x_0, y_0)$ .

### Definição 3

Um ponto  $(x_0, y_0)$  no qual  $f_x(x_0, y_0) = 0$  ou não existe e  $f_y(x_0, y_0) = 0$  ou não existe, chama-se **ponto crítico de  $f$** .

## Exemplo 8

Encontre os pontos críticos da função  $f(x, y) = 60xy - 2x^2y - 2xy^2$ , definida em todo o plano  $XY$ .

### Solução

Os pontos críticos da função  $f(x, y)$  são dados pelas raízes das equações

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 60y - 4xy - 2y^2 = 0 \text{ e } \frac{\partial V}{\partial y} = 60x - 2x^2 - 4xy = 0,$$

que é o mesmo que as raízes de:  $(60 - 4x - 2y)y = 0$  e  $(60 - 2x - 4y)x = 0$  cujas soluções são encontradas assim:

$$y = 0 \text{ ou } 60 = 4x + 2y \text{ e } x = 0 \text{ ou } 60 = 2x + 4y.$$

Assim, as raízes são:

i)  $x = 0$  e  $y = 0$ ;

ii)  $60 = 4x + 2y$  e  $x = 0 \Rightarrow y = 30$ ;

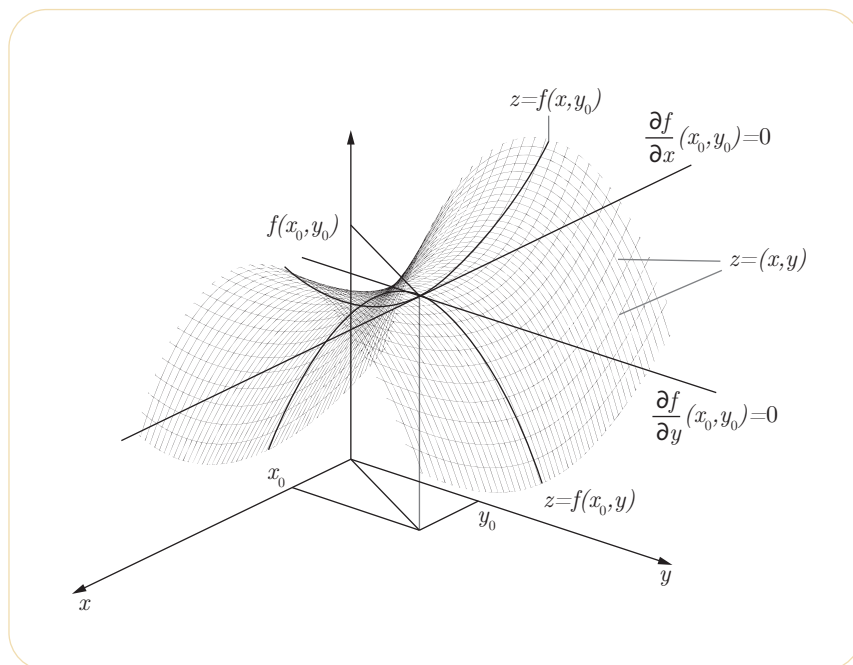
iii)  $y = 0$  e  $60 = 2x + 4y \Rightarrow x = 30$ ;

iv)  $60 = 4x + 2y$  e  $60 = 2x + 4y \Rightarrow 4x + 2y = 2x + 4y \Rightarrow x = y \Rightarrow 10$  .

Portanto, os pontos críticos são:  $(0, 0)$ ,  $(0, 30)$ ,  $(30, 0)$ ,  $(10, 10)$ .

## Definição ponto de sela

Uma função diferenciável  $z = f(x, y)$  tem um ponto de sela em  $(x_0, y_0)$ , se  $(x_0, y_0)$  for um ponto crítico e existirem duas curvas no gráfico de  $f(x, y)$  passando em  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ , sendo esse ponto um máximo em uma curva e um mínimo na outra.



**Figura 2** - Ilustração de um ponto de sela, onde  $(x_0, y_0)$  é um ponto crítico, a curva  $z = f(x, y_0)$ .

O nome ponto de sela, como o próprio nome e a Figura 2 sugerem, decorre do fato de que o centro de simetria de uma sela para cavalos, é um tal tipo de ponto que no sentido longitudinal passa por um mínimo em  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  e no sentido transversal passa por um máximo em  $z = f(x_0, y)$ .

O teorema 6, a seguir, é um teste muito útil para decidir se uma dada função de duas variáveis possui um mínimo ou um máximo.

### Teorema 6 (Teste da segunda derivada)

Suponha que  $f$  e suas derivadas parciais até a terceira ordem existam e sejam contínuas próximo ao ponto  $(x_0, y_0)$  e suponha que  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ , isto é,  $(x_0, y_0)$  é um ponto crítico. Seja ainda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2.$$

Então,

- i)** se  $\Delta > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) + f_{yy}(x_0, y_0) < 0$  tem máximo relativo em  $(x_0, y_0)$ ;
- ii)** se  $\Delta > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) + f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ ,  $f$  tem mínimo relativo em  $(x_0, y_0)$ ;
- iii)** se  $\Delta < 0$ ,  $f$  tem um ponto de sela em  $(x_0, y_0)$ ;
- iv)** se  $\Delta = 0$ , nada podemos afirmar e outros métodos precisam ser usados.

## Exemplo 9

Uma empresa de exportação quer remeter para o exterior seus produtos em caixas retangulares cujos comprimentos e perímetros da seção transversal não ultrapassem 60 cm.

Encontre as dimensões de uma caixa nessas condições e que tenha o maior volume possível.

### Solução

Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  as medidas da largura, altura e comprimento da caixa retangular, respectivamente.

O volume da caixa retangular é igual a  $V = xyz$ .

O perímetro da seção transversal é igual a  $2x + 2y$ .

No problema, para atingir o volume máximo, o comprimento e o perímetro da seção transversal têm que satisfazer:  $z + 2x + 2y = 60$ . Desse modo, a expressão do volume da caixa pode ser escrito como:

$$V(x, y) = (60 - 2x - 2y) \cdot xy = 60xy - 2x^2y - 2xy^2.$$

Os pontos críticos da função  $V(x, y)$  são dados pelas raízes das equações:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 60y - 4xy - 2y^2 = 0 \text{ e } \frac{\partial V}{\partial y} = 60x - 2x^2 - 4xy = 0,$$

que já foram encontradas no exemplo 8:  $(0, 0)$ ,  $(0, 30)$ ,  $(30, 0)$ ,  $(10, 10)$ . Agora, observe que o volume é zero nos pontos  $(0, 0)$ ,  $(0, 30)$ ,  $(30, 0)$ . Para o ponto  $(10, 10)$ , aplicamos o teorema 5. Ou seja, calculamos:

$$V_{xx} = -4y, \quad V_{yy} = -4x, \quad V_{xy} = 60 - 4x, \quad \Delta = V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2 = 16xy - (60 - 4x)^2$$

$$\Delta(10, 10) = 1600 - 400 = 1200 > 0 \text{ e } V_{x, x}(10, 10) + V_{y, y}(10, 10) =$$

$-4 \cdot 10 - 4 \cdot 10 = -80 < 0$  portanto, pelo teorema 6. i) temos um máximo relativo em  $(10, 10)$  e  $V(10, 10) = 1000$ .

## Resumo

Nesta aula, estudamos as séries de Taylor e de Maclaurin de uma função, e vimos que seus coeficientes têm forte ligação com as derivadas de ordem superior da própria função. Além disso, vimos critérios para decidir se uma função de mais de uma variável tem ponto de máximo, mínimo ou ponto de sela.



# Autoavaliação

1

Calcule, com uma precisão de 5 casas decimais, os seguintes valores.

**a)**  $\cos(0,5)$

**b)**  $\ln(0,8)$

**c)**  $(1,08)^{1/4}$

**d)**  $(30)^{1/5}$

2

Determine a expansão em série de Maclaurin de cada uma das seguintes funções:

**a)**  $g(x) = \text{sen } x$

**b)**  $g(x) = e^{x^2}$

**c)**  $g(x) = \text{cos } x$

3

Determine a expansão em série de Taylor de

**a)**  $P(x) = 3x^2 - 5x + 9$  em potências de  $x - 1$ ;

**b)**  $P(x) = x^3$  em potências de  $x + 2$ .

4

Determine a expansão em série de Taylor de cada uma das seguintes funções:

**a)**  $f(x) = xe^x$

**b)**  $f(x) = x \cos 5x$

**c)**  $f(x) = 1 + 3 \text{sen}^2 x$

5

Verifique que o polinômio  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ , com  $a_k \neq 0$ , é a sua própria série de Taylor.

6

Determine os pontos de máximo relativo, mínimo relativo e de sela que existirem na função  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$ .

7

Determine os pontos de máximo relativo, mínimo relativo e de sela que existirem na função  $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 10y + 9$ .

8

Determine os pontos de máximo relativo, mínimo relativo e de sela que existirem na função  $f(x, y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y - 7$ .

9

Use derivadas parciais para encontrar as dimensões da caixa retangular, sem tampa, que tem volume máximo se a área da superfície é  $12 \text{ u. a.}$

10

Uma caixa retangular tem um volume de  $20 \text{ m}^3$ . O material usado nos lados custa R\$  $1,00 \text{ m}^2$ , o material usado no fundo custa R\$  $2,00 \text{ m}^2$  e o usado na parte superior custa R\$  $3,00 \text{ m}^2$ . Quais as dimensões da caixa mais barata?

## Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000. v 2.

FINEY, Ross L.; GIORDANO, Frank R.; WEIR, Maurice D. **Cálculo de George B. Thomas**. São Paulo: Addison-Wesley, 2003. v 2.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: MacGraw-Hill, 1985. v 2.

# Multiplicadores de Lagrange e aplicações

Aula

7



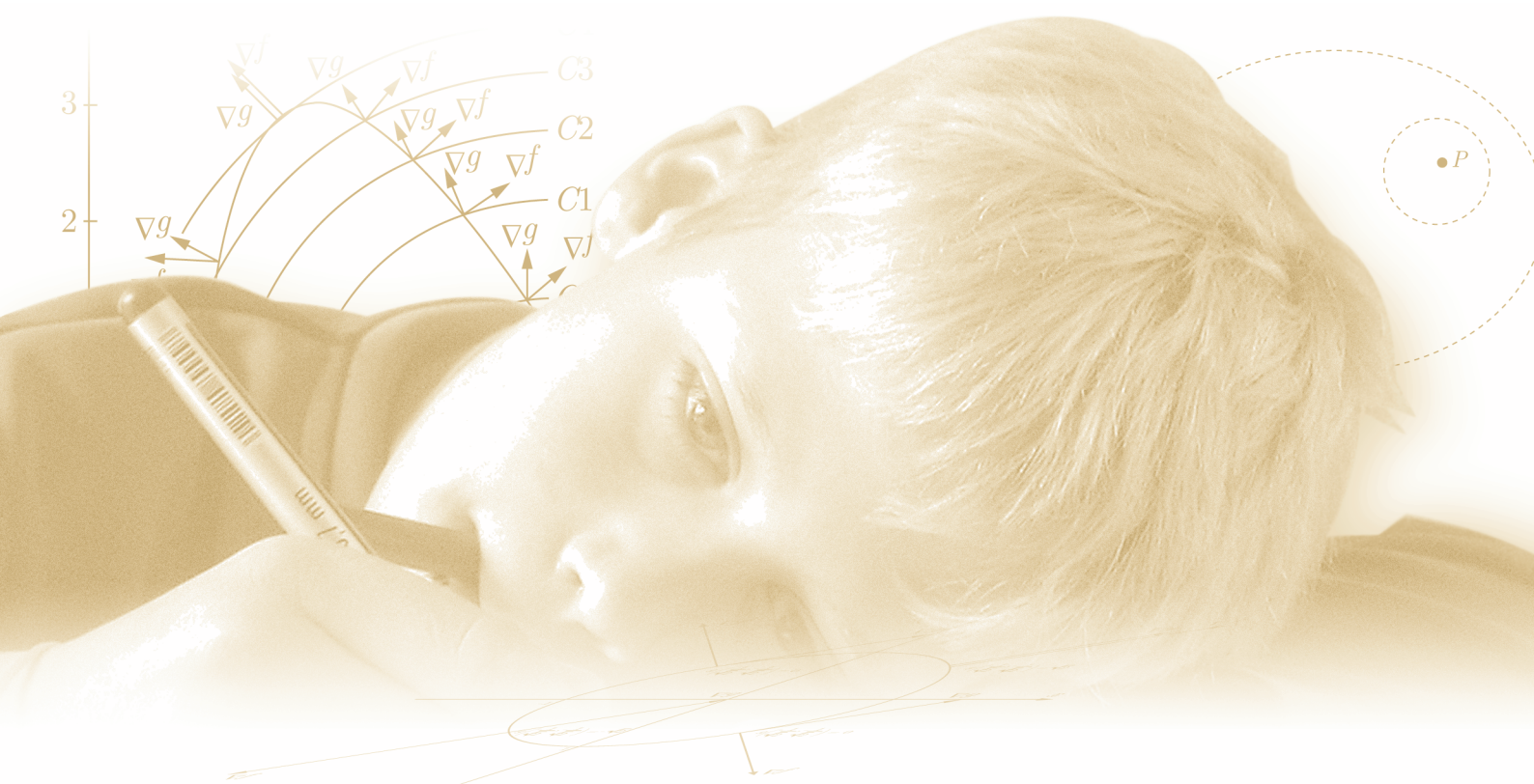
# Apresentação

**E**sta é a Aula 7 da disciplina Cálculo II. Nesta aula, apresentaremos um método para encontrar pontos de máximo ou de mínimo para funções de mais de uma variável, definidas num conjunto  $S$ . Você vai ver que este método é apropriado para o caso em que o conjunto de pontos  $S$  é definido por meio de uma equação.

Para obter sucesso a partir desta aula, você tem de ler e compreender o texto. Leia devagar, gastando alguns minutos numa única linha, se necessário. Não se impaciente. Avance quando se sentir preparado.

## Objetivo

Encontrar pontos de máximo ou de mínimo de funções sujeitas a determinados vínculos, através do método de multiplicadores de Lagrange.





## Pontos críticos

Você viu na disciplina Cálculo I, na qual só se trabalha com funções de uma variável, que, ao estudar os pontos onde o gráfico de uma função atinge um máximo ou um mínimo e, também, os intervalos onde o gráfico é crescente ou decrescente, fazemos uso da derivada, procurando os pontos onde ela se anula. Tais pontos são chamados de **pontos críticos**. E, a partir destes, determinamos quais são os pontos de máximo ou de mínimo. Para este estudo, então, trabalha-se com funções deriváveis.

Quando se estuda os pontos críticos com funções de mais de uma variável, ocorre a necessidade de identificar pontos de máximo ou de mínimo. Por exemplo, quando você aquece uma chapa de metal, pode ser que ela não tenha a mesma temperatura em todos os seus pontos. Às vezes, é conveniente saber qual a maior temperatura da chapa metálica e em que ponto dessa chapa ela ocorre. De um modo geral, problemas como esses podem ser respondidos a partir do exame das derivadas parciais de algumas funções de mais de uma variável. E tal como em Cálculo I, neste estudo, trabalharemos com funções diferenciáveis.

Quando a função possui mais de uma variável, é necessário identificar qual é o ponto crítico e, nele, quais os de máximo ou de mínimo.

Se  $f$  é uma função de mais de uma variável e diferenciável numa região  $S$ , dizemos que um ponto  $P_0$  é um ponto crítico, se todas as derivadas parciais existem e são nulas em  $P_0$ .

Ou seja, se  $f$  é uma função de duas variáveis definida numa região  $S$ :  $f = f(x, y)$ , dizemos que  $P_0 = (x_0, y_0)$  **em  $S$  é um ponto crítico de  $f$**  quando  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} = 0$ .

Se  $f$  é uma função de três variáveis definida numa região  $S$ :  $f = f(x, y, z)$ , dizemos que  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  **em  $S$  é um ponto crítico de  $f$**  quando  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial z} = 0$ .

## Exemplo 1

Determine os pontos críticos da função  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ , definida em  $S = \mathbb{R}^2$ .

### Solução

Temos que as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -2xe^{-x^2-y^2} \text{ e } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2}.$$

O único ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  para o qual:  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$

é  $P_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$ .

Portanto,  $(0, 0)$  é o único ponto crítico da função  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ .



## Atividade 1

Ache os pontos críticos da função  $f(x, y, z) = xy + xz$ , definida em  $S = \mathbb{R}^3$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

---

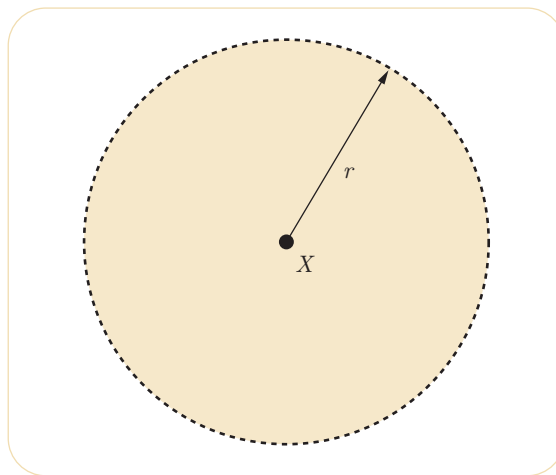
---

Você viu na disciplina Cálculo I que nem sempre um ponto crítico é um ponto de máximo ou de mínimo: pode ser um **ponto de inflexão**. Lembrando, um ponto de inflexão é aquele onde a curva muda de concavidade. Nesses pontos, se a derivada segunda  $f''(x)$  existe e é contínua, então ela se anula, isto é,  $f''(x) = 0$ .

Algo análogo pode ocorrer para funções de mais de uma variável. Assim, para funções de mais de uma variável e para o caso de estudar pontos máximos ou mínimos, temos que identificar o que é exatamente um ponto de máximo ou um ponto de mínimo. Para isso, vamos recordar alguns fatos já vistos.

Para o estudo de máximo ou mínimo, no caso de funções de uma variável, tomamos um intervalo aberto contendo o ponto  $P$ . Para o caso de funções de mais de uma variável, tomamos um **conjunto aberto**, que será definido a seguir.

Ao estudar a noção de diferenciabilidade para funções de várias variáveis, você viu a noção de disco aberto e conjunto aberto. Recordando, no espaço (pense no espaço bi ou tridimensional), um disco aberto (ou bola aberta) de centro  $A$  e raio  $r > 0$  é a coleção de todos os pontos  $X$  para os quais  $\|X - A\| < r$ . De modo análogo, um **disco fechado** de centro  $A$  e raio  $r > 0$  é a coleção de todos os pontos  $X$  para os quais  $\|X - A\| \leq r$ .



**Figura 1** - Disco aberto – disco sem a fronteira.

Um subconjunto  $U$  do espaço (pense no espaço bi ou tridimensional) é um **conjunto aberto**, se satisfaz a propriedade seguinte: para cada ponto  $P$  de  $U$ , existe um disco aberto,  $D$ , de centro  $P$  e raio  $r > 0$ , tal que  $D$  está totalmente contido em  $U$ .

Outra maneira, equivalente, de definir conjunto aberto é a seguinte: dizemos que  $x_0$  é um **ponto interior de um conjunto**  $D$ , se existe uma bola aberta contida em  $D$ , com centro em  $x_0$ . Um conjunto é aberto, se todos os seus pontos são pontos interiores.

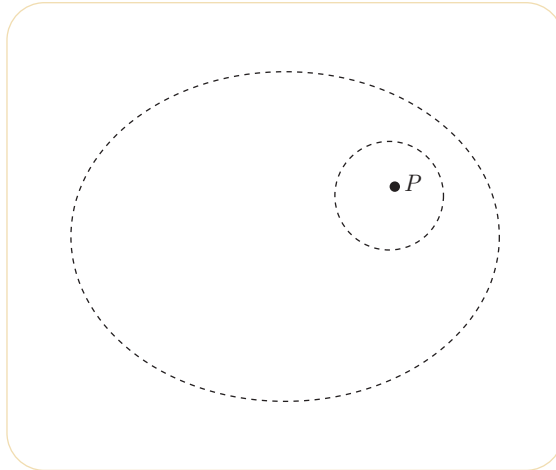


Figura 2 - Conjunto aberto – disco aberto totalmente contido no conjunto.

### Definição 1

Seja  $f$  uma função definida num subconjunto aberto  $U$ . Um ponto  $P$  de  $U$  é um **máximo local para**  $f$  se existe um disco aberto,  $D$ , tal que para todo  $X$  em  $D$  tem-se:

$$f(X) \leq f(P).$$

De modo análogo, dizemos que  $P$  é um **mínimo local para**  $f$  se existe um disco aberto,  $D$ , tal que para todo  $X$  em  $D$  tem-se:

$$f(X) \geq f(P).$$

## Exemplo 2

Considere a função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , definida na esfera aberta  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$ .

Encontre os pontos críticos de  $f$  em  $U$  e verifique se esses pontos são pontos de máximo ou de mínimo.

### Solução

As derivadas parciais de  $f$  são:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = 2y \text{ e } \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = 2z.$$

Logo, os pontos críticos são as soluções das equações:  $2x = 0$ ,  $2y = 0$  e  $2z = 0$ .

Portanto, o único ponto crítico é  $(0, 0, 0)$ . Como  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ , segue que o ponto  $(0, 0, 0)$  é um ponto de mínimo.



## Atividade 2

Considere a função  $f(x, y, z) = \cos(x^2 + y^2 + z^2)$ , definida no espaço  $\mathbb{R}^3$ .

Encontre os pontos críticos de  $f$  em  $\mathbb{R}^3$  e verifique se esses pontos são pontos de máximo ou de mínimo.

Vimos anteriormente que, se  $f$  possui um ponto crítico, esse ponto pode ser um ponto de máximo ou de mínimo ou um ponto que não é de máximo nem de mínimo. Agora, suponha que você sabe que um dado ponto  $P$  é um máximo local de  $f$ :  $P$  é um ponto crítico?

A resposta é dada pelo teorema 1 a seguir:

### Teorema 1

Seja  $f$  uma função que é definida e diferenciável num conjunto aberto  $U$ . Se  $P \in U$  é um **máximo local de  $f$** , então,  **$P$  é um ponto crítico de  $f$** .

### Demonstração

A idéia da prova é mostrar que a derivada direcional de  $f$  em todas as direções é nula. Com isso, concluiremos que o vetor gradiente é nulo, o que implica que  $P$  é um ponto crítico. Seja  $H$  um vetor unitário qualquer. Para valores de  $t$  pequeno, o vetor  $tH$  possui norma muito pequena. Como  $U$  é um conjunto aberto, para valores pequenos de  $t$ , o vetor  $P + tH$  está em  $U$ , isto é,  $P + tH$  está no domínio de  $f$  e, além disso,  $P + tH$  está dentro de uma bola de centro  $P$  e de raio pequeno. Como  $P$  é um máximo local de  $f$ , segue

$$f(P + tH) \leq f(P).$$

Assim, a função de uma variável  $g(t) = f(P + tH)$  possui um máximo local em  $t = 0$ . Logo, a derivada de  $g$  em  $t = 0$  é zero. Por outro lado, usando a regra da cadeia, temos:

$$g'(t) = \langle (\nabla f)(P + tH); H \rangle.$$

Para  $t = 0$ , temos  $g'(0) = \langle (\nabla f)(P); H \rangle = 0$ , para todo  $H$ . Portanto, tomando  $H = (\nabla f)(P)$ , tem-se  $\|(\nabla f)(P)\|^2 = 0$ . Logo,  $P$  é um ponto crítico.

Dada uma função  $f$ , sempre existe um ponto do domínio de  $f$  que seja um ponto de máximo ou de mínimo?

Você viu na disciplina Cálculo I que uma função  $f(x)$  contínua em um intervalo fechado e limitado  $J = [a, b]$  assume um máximo absoluto e um mínimo absoluto pelo menos uma vez no intervalo  $J = [a, b]$ .

Resultado análogo vale para o caso de funções de duas variáveis. Se  $f(x, y)$  é uma função contínua em um conjunto fechado e limitado  $S$  (pense num disco fechado ou numa região triangular), assume valores máximo ou mínimo absolutos em algum ponto de  $S$ .

O mesmo é verdade para funções de três variáveis.

Se  $f(x, y, z)$  é uma função contínua em um conjunto fechado e limitado  $S$  (pense num sólido retangular, esfera sólida ou cubo sólido, casca esférica), assume valores máximo ou mínimo absolutos em algum ponto de  $S$ .

## Exemplo 3

Considere a função  $f(x, y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$  definida na região  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ .

Encontre os pontos de máximo e mínimo de  $f$  na região  $S$ .

## Solução

As derivadas parciais da função são:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = x^2y^2(3 - 4x - 3y) \text{ e}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2x^3y - 2x^4 - 3x^3y^2 = x^3y(2 - x - 3y).$$

Os pontos críticos são soluções das equações:  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$ . Ou seja,

$$x^2y^2(3 - 4x - 3y) = 0;$$

$$x^2y^2(3 - 4x - 3y) = 0.$$

Logo, os pontos críticos ocorrem quando  $xy = 0$ , que nos dá os pontos da forma:  $(x, 0)$  ou  $(0, y)$ . Se  $x \cdot y \neq 0$ , teremos o sistema:  $(3 - 4x - 3y) = 0$  e  $(2 - x - 3y) = 0$ , que tem como solução o ponto  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ .

Como podemos escrever a função  $f(x, y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3 = x^3y^2(1 - x - y)$ , é fácil ver que: se  $x > 1$  ou  $y > 1$ , a função  $f(x, y)$  é menor do que zero.

Por outro lado, no quadrado  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $f(x, y)$  atinge um máximo. Como nos lados do quadrado  $Q$  tem-se  $f(x, y) \leq 0$  e  $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) > 0$ , segue que  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$  é o ponto de máximo.

Agora, observe que: se fixamos um  $x$  não nulo e fazemos  $y$  tender ao infinito, teremos que  $f(x, y)$  tende para menos infinito. Isso significa que  $f(x, y)$  não possui mínimo.



## Atividade 3

Considere a função  $f(x, y) = (x^2 + 2y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)}$  definida em todo o plano  $\mathbb{R}^2$ .

Encontre os pontos de máximo e mínimo de  $f$ .

---

---

---

---

---

---

# Multiplicadores de Lagrange

Nesta seção, você irá estudar outro método para encontrar o máximo e mínimo de uma função de mais de uma variável em algum conjunto descrito por uma equação.

O problema de encontrar máximos e mínimos de uma função de várias variáveis sem condições adicionais é chamado de problema de **máximos e mínimos livres**. Quando uma condição é imposta sobre uma função, o problema de determinar os máximos e mínimos daquela função é chamado de **problema de máximos e mínimos restritos**. A condição adicional é chamada de **condição de contorno**. Problemas de máximos e mínimos podem ter uma ou mais condições de contorno.

Por exemplo, suponha que você aquece uma chapa metálica, mas, antes de aquecê-la, traçou nela um sistema de eixo  $XY$ . Imagine que a temperatura em cada ponto da chapa seja dada pela expressão  $T(x, y) = x + y$ . Agora, você quer encontrar a temperatura em todos os pontos do círculo unitário de centro na origem. Isto é, você está interessado em encontrar a temperatura  $T(x, y)$ , máxima ou mínima, nos pontos sujeitos à condição  $x^2 + y^2 = 1$ . Este é um problema cuja solução (veja exemplo 4, a seguir) é facilmente encontrada pelo método dos **multiplicadores de Lagrange**, que veremos a seguir.

Em que consiste o método dos multiplicadores de Lagrange?

Para explicar, vamos supor que estamos trabalhando no espaço tridimensional.

Seja  $g(x, y, z)$  a função de três variáveis que nos dá a distância entre um ponto dado,  $P_0 = (a, b, c)$ , e um ponto genérico,  $P = (x, y, z)$ :  $g(x, y, z) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$ . Suponha que você queira encontrar a menor distância entre o ponto  $P_0 = (a, b, c)$  dado e a esfera de centro na origem e raio  $r$ , que tem a equação:  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . O que se deseja encontrar são os pontos  $(x_0, y_0, z_0)$  sobre a esfera para os quais a função  $g(x, y, z)$  é mínimo.

De uma maneira geral, são dadas a função  $g(x, y, z)$  diferenciável de três variáveis e a superfície consistindo de todos os pontos  $(x, y, z)$  que satisfazem a equação:  $f(x, y, z) = 0$ . Seja  $U$  um conjunto aberto do espaço tridimensional (pense numa esfera aberta, isto é, uma esfera sem a casca) que contém a superfície. Agora, suponha que o domínio de  $g$  contenha todos os pontos de  $U$ .

O que se deseja encontrar são todos os pontos  $P = (x_0, y_0, z_0)$  sobre a superfície  $f(x, y, z) = 0$  tais que  $g(P) = g(x_0, y_0, z_0)$  é um ponto de máximo ou de mínimo sobre a superfície.

Isto é, queremos encontrar todos os pontos  $P = (x_0, y_0, z_0)$  tais que:

$$f(P) = 0 \text{ e } \begin{cases} \text{ou } g(P) \geq g(X); \text{ para todo } X \text{ tal que } f(X) = 0 \text{ (} P \text{ é máximo)} \\ \text{ou } g(P) \leq g(X); \text{ para todo } X \text{ tal que } f(X) = 0 \text{ (} P \text{ é mínimo)} \end{cases}$$

Dizemos que um ponto  $P$  satisfazendo a uma dessas condições é **um extremo para a função  $g$  sujeito à condição  $f$** .

Observe que consideramos somente os pontos  $P$  para os quais  $f(P) = 0$  e  $(\nabla f) \neq 0$ .

Formalmente, enunciaremos o método dos multiplicadores de Lagrange da seguinte forma.

## Teorema 2

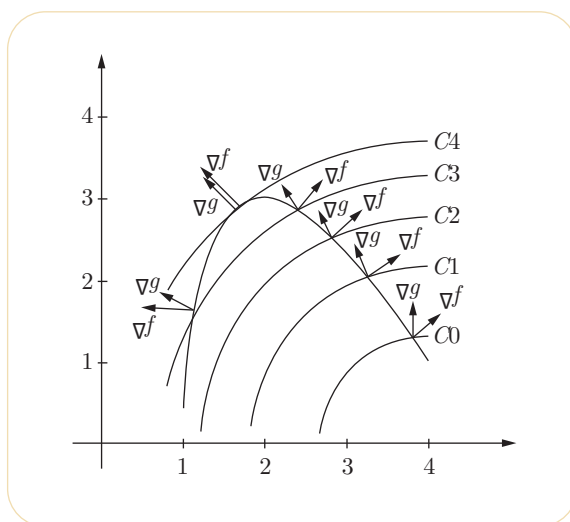
Seja  $f$  uma função diferenciável, com derivadas parciais contínuas, sobre um conjunto aberto  $U$ . Seja  $S$  a coleção de pontos  $X \in U$  tais que  $f(X) = 0$ , mas com  $(\nabla f) \neq 0$ .

Seja  $g$  uma função diferenciável, com derivadas parciais contínuas, sobre o conjunto  $U$ . Suponha que  $P$  é um ponto de  $S$  tal que  $P$  é um extremo (isto é, um ponto de máximo ou de mínimo) para  $g$  em  $S$ . Então, existe um número real  $\lambda$  tal que:

$$(\nabla g)(P) = \lambda \cdot (\nabla f)(P),$$

o que significa dizer que: se  $(\nabla g)(P) \neq 0$ , então, o vetor  $(\nabla g)(P)$  tem a mesma direção que o vetor  $(\nabla f)(P)$ .

A seguir, damos uma interpretação gráfica do problema de encontrar o máximo da função  $g(x, y)$  sujeito à condição  $f(x, y) = 0$ . As curvas de nível de  $g(x, y)$  de cotas 0, 1, 2, 3 e 4. No ponto onde  $g(x, y)$  é máximo, os gradientes de  $f$  e  $g$  são paralelos.



**Figura 3** - Interpretação gráfica do problema de encontrar o máximo da função  $g(x, y)$  sujeito à condição  $f(x, y) = 0$ .

## Demonstração

Seja  $C(t)$  uma curva sobre a superfície  $S$  passando por  $P$ . Suponha que  $C(t_0) = P$ . Assim, a função  $g(C(t))$  assume um máximo ou um mínimo em  $t_0$ . Logo, a derivada  $\frac{dg(C(t_0))}{dt} = 0$ . Por outro lado,

$$\frac{dg(C(t_0))}{dt} = \langle (\nabla g)(P); C'(t) \rangle = 0.$$

Logo,  $(\nabla g)(P)$  é perpendicular a toda curva sobre a superfície passando por  $P$ . Como, por hipótese, temos  $(\nabla f) \neq 0$ , existe um número real  $\lambda$  tal que:

$$(\nabla g)(P) = \lambda \cdot (\nabla f)(P),$$

o que significa dizer que: se  $(\nabla g)(P) \neq 0$ , então, o vetor  $(\nabla g)(P)$  tem a mesma direção que o vetor  $(\nabla f)(P)$ .

## Exemplo 4

Encontre o máximo da função  $g(x, y) = x + y$  sujeito à condição  $x^2 + y^2 = 1$ .

### Solução

Neste caso, a função  $f$  será definida como:  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . O conjunto  $S$  será a coleção dos pontos  $(x, y)$  tais que  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

Temos que:  $(\nabla g)(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}i + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}j = i + j$  e

$$(\nabla f)(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}i + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}j = 2xi + 2yj.$$

Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto para o qual exista um número real  $\lambda$  tal que:

$$(\nabla g)(x_0, y_0) = \lambda(\nabla f)(x_0, y_0).$$

Daí, temos que:  $1 = 2x_0\lambda$  e  $1 = 2y_0\lambda$ , com  $x_0 \neq 0$  ou  $y_0 \neq 0$ . Portanto,

$\lambda = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2y_0}$ . Ou seja,  $x_0 = y_0$ . Mas, como o ponto  $(x_0, y_0)$  satisfaz a equação

$f(x_0, y_0) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ , temos, obrigatoriamente, os valores  $x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = y_0$ .

Agora, como  $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} > 0$  e como temos:

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$ ,  $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$ ,  $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$ , segue que  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  é um ponto de máximo.

## Exemplo 5

Encontre o máximo e o mínimo da função  $g(x, y, z) = xyz$  sujeito à condição  $x + y + z = 1$ . Suponha  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  e  $z \geq 0$ .

### Solução

Neste caso, a função  $f$  será definida como:  $f(x, y, z) = x + y + z - 1$ . O conjunto  $S$  será a coleção dos pontos  $(x, y, z)$  tais que  $f(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$ .

Temos que:  $(\nabla g)(x, y, z) = \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial x}i + \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y}j + \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial z}k = yzi + xzj + xyk$  e

$$(\nabla f)(x, y, z) = \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial x}i + \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y}j + \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial z}k = i + j + k.$$

Seja  $(x_0, y_0, z_0)$  um ponto para o qual exista um número real  $\lambda$  tal que:

$$(\nabla g)(x_0, y_0, z_0) = \lambda \cdot (\nabla f)(x_0, y_0, z_0).$$

$$\text{Daí, temos que: (*) } \begin{cases} y_0 z_0 = \lambda \\ x_0 z_0 = \lambda \\ x_0 y_0 = \lambda \end{cases}$$

com  $x_0 \neq 0$ ,  $y_0 \neq 0$  ou  $z_0 \neq 0$  e  $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ .

De (\*), temos que:  $y_0 z_0 = x_0 z_0$ . Logo,  $(y_0 - x_0)z_0 = 0$ . Desse modo, temos duas possibilidades:

$$y_0 - x_0 = 0 \text{ ou } z_0 = 0.$$

Se  $x_0 - y_0 = 0$ . Inicialmente, analisemos a possibilidade  $x_0 = y_0 = 0$ .

Neste caso, teríamos  $z_0 = 1$ , pois  $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ . Assim, temos o ponto  $(0, 0, 1)$  como solução.

Examinemos agora o caso  $x_0 = y_0$ , com ambos não nulos. Neste caso, como  $x_0 z_0 = x_0 y_0$ , temos  $x_0(z_0 - y_0) = 0$ . Ou seja,  $x_0 = 0$  ou  $z_0 = y_0$ . Como, por hipótese,  $x_0 \neq 0$ , temos de (\*) que, necessariamente,  $x_0 = z_0 = y_0$ . Portanto,  $x_0 + x_0 + x_0 = 1$ .

Ou seja,  $x_0 = z_0 = y_0 = \frac{1}{3}$ . Assim, o ponto  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  é solução.

No caso em que  $z_0 = 0$ , temos, de (\*), que  $\lambda = 0$ . Portanto,  $x_0 y_0 = 0$ . Logo,  $x_0 = 0$  ou  $y_0 = 0$ , pois ambos não podem ser nulos, uma vez que já estamos assumindo  $z_0 = 0$ .

Assim, se  $z_0 = 0 = x_0$ , temos  $y_0 = 1$ . Se  $z_0 = 0 = y_0$ , temos  $x_0 = 1$ . Portanto, os pontos:

$(0, 1, 0)$  e  $(1, 0, 0)$  são soluções.

Observe que de (\*) falta analisar as condições:  $y_0 z_0 = x_0 y_0$  e  $x_0 z_0 = x_0 y_0$ . Mas, felizmente, tais condições são análogas às analisadas anteriormente e nos levam às mesmas soluções.

Para concluirmos, basta verificar que  $g(1, 0, 0) = g(0, 1, 0) = g(0, 0, 1) = 0$ , todos pontos de mínimo, e que  $g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$ , ponto de máximo.



## Atividade 4

Encontre o mínimo da função  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 3y$ , sujeita à condição

$$x^2 - y = 1.$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Exemplo 6

Dado o problema do exemplo 4, encontre o máximo da função  $g(x, y) = x + y$  sujeito à condição  $x^2 + y^2 = 1$ . Fazer o gráfico da restrição e dos gradientes nos pontos onde  $(\nabla g)(x_0, y_0) = \lambda(\nabla f)(x_0, y_0)$ , incluindo os valores de  $g(x, y) = x + y$  nesses pontos.

### Solução

Na solução do exemplo 4, temos que os pontos onde  $(\nabla g)(x_0, y_0) = \lambda(\nabla f)(x_0, y_0)$  são:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Faremos agora os cálculos solicitados no exemplo para cada ponto:

$$\mathbf{a)} \quad (\nabla g)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = i + j, \quad (\nabla f)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}i + \sqrt{2}j \text{ e } g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}.$$

$$\mathbf{b)} \quad (\nabla g)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = i + j, \quad (\nabla f)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}i - \sqrt{2}j \text{ e } g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

$$\mathbf{c)} \quad (\nabla g)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = i + j, \quad (\nabla f)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}i + \sqrt{2}j \text{ e } g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

$$\mathbf{d)} \quad (\nabla g)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = i + j, \quad (\nabla f)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}i - \sqrt{2}j \text{ e}$$

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}.$$

Agora, visualizemos o gráfico esboçado na figura a seguir.



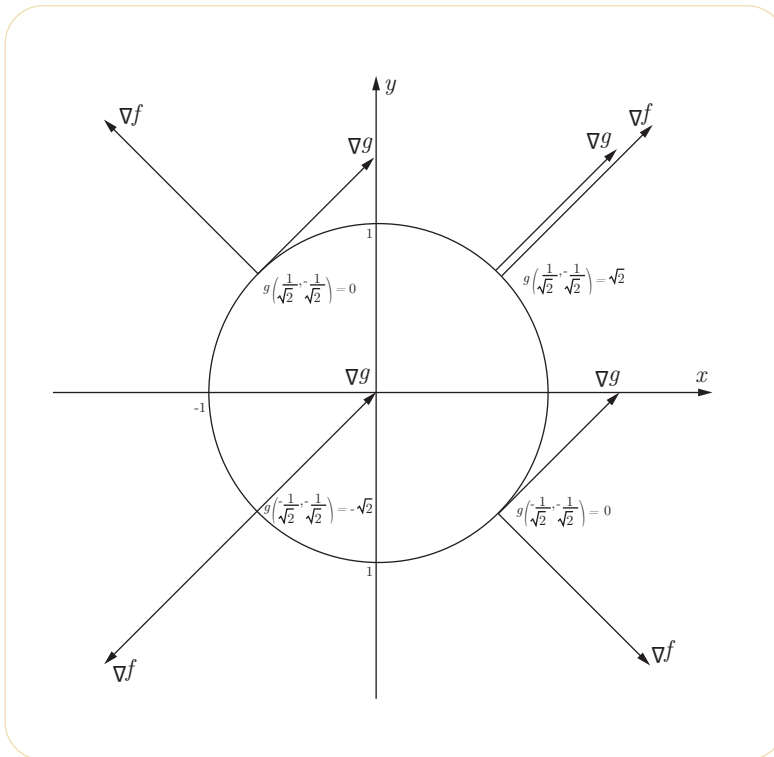


Figura 4 - Gradientes nos pontos onde  $(\nabla g)(x_0, y_0) = \lambda \cdot (\nabla f)(x_0, y_0)$ .

## Exemplo 7

Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar as dimensões do retângulo com perímetro  $p$  e área máxima.

### Solução

Sejam  $x$  = comprimento do retângulo;  
 $y$  = largura do retângulo; e  
 $A$  = área do retângulo.

Queremos maximizar a função  $A = A(x, y) = xy$ , com a restrição  $2x + 2y = p$ . Tomemos  $g(x, y) = xy$  e  $f(x, y) = 2x + 2y - p = 0$ . Assim, temos:

$$(\nabla g)(x, y) = yi + xj \text{ e } (\nabla f)(x, y) = 2i + 2j.$$

Como  $(\nabla f)(x, y) \neq 0$ , segue que:  $(\nabla g)(x, y) = \lambda(\nabla f)(x, y) \Leftrightarrow yi + xj = \lambda(2i + 2j)$ . Logo, temos:  $y = 2\lambda$  e  $x = 2\lambda$ . Portanto,  $y = x$ . Assim, o retângulo com perímetro  $p$  e área máxima é o quadrado de lado igual a  $x$ , onde  $2x + 2x = p$ . Portanto,  $x = p/4 = y$ .

# Resumo

Nesta aula, estudamos alguns fatos sobre máximos e mínimos de funções de mais de uma variável. Nela, você aprendeu o método para calcular os pontos de máximo ou mínimo para funções de mais de uma variável, definida num conjunto  $S$ . Viu também que esse método é particularmente apropriado para o caso no qual o conjunto de pontos  $S$  é definido por meio de uma equação.

## Autoavaliação

1

Encontre o mínimo da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , sujeita à condição  $x + 3y - 2z = 4$ .

2

Encontre o mínimo da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , se  $(x, y, z)$  está sobre a reta de interseção dos planos  $2x + y - 3z = 4$ ,  $x - y + 2z = 6$ .

3

Encontre as dimensões do paralelepípedo retangular de volume máximo com arestas paralelas aos eixos coordenados que pode ser inscrito no elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

4

Encontre o máximo e o mínimo da função  $g(x, y, z) = 4y - 2z$  sujeito à restrição  $2x - y - z = 2$ .

## Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000. v 2.

FINEY, Ross L.; GIORDANO, Frank R.; WEIR, Maurice D. **Cálculo de George B. Thomas**. São Paulo: Addison-Wesley, 2003. v 2.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: MacGraw-Hill, 1985. v 2.

# Sequências numéricas

Aula

8



# Apresentação

Esta é a Aula 8 da disciplina Cálculo II. Você já estudou no Ensino Médio as sequências aritméticas e geométricas e viu, por exemplo, que uma sequência geométrica infinita, de razão positiva e menor do que 1, tem a soma de seus termos finita. Nesta aula, apresentaremos sequências numéricas de uma maneira geral, estudaremos suas convergências, dando muitos exemplos que ilustrarão tais conceitos. Aqui, veremos técnicas que permitem passar dos números racionais para os números reais, que têm propriedades fundamentais para o estudo do Cálculo.

Para obter sucesso nesta aula, você tem que ler e compreender o texto. Leia devagar, gastando alguns minutos numa única linha, se for necessário. Não se impaciente. Avance quando se sentir preparado.

## Objetivos

- 1 Saber o que é uma sequência numérica convergente.
- 2 Calcular o limite de uma sequência convergente dada.
- 3 Decidir se uma dada sequência é convergente sem calcular seu limite.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{n^2}}{\frac{a_2 n^2 + b_2 n + c_2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_1 n^2}{n^2} + \frac{b_1 n}{n^2} + \frac{c_1}{n^2}}{\frac{a_2 n^2}{n^2} + \frac{b_2 n}{n^2} + \frac{c_2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \frac{b_1}{n} + \frac{c_1}{n^2}}{a_2 + \frac{b_2}{n} + \frac{c_2}{n^2}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_1 + \frac{b_1}{n} + \frac{c_1}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_2 + \frac{b_2}{n} + \frac{c_2}{n^2} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_2}{n^2}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2} &= \frac{a_1 + b_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{a_2 + b_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{a_1 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0}{a_2 + b_2 \cdot 0 + c_2 \cdot 0} = \frac{a_1}{a_2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{n^2}}{\frac{a_2 n^2 + b_2 n + c_2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \frac{b_1}{n} + \frac{c_1}{n^2}}{a_2 + \frac{b_2}{n} + \frac{c_2}{n^2}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_1 + \frac{b_1}{n} + \frac{c_1}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_2 + \frac{b_2}{n} + \frac{c_2}{n^2} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_2}{n^2}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2} &= \frac{a_1 + b_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{a_2 + b_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{a_1 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0}{a_2 + b_2 \cdot 0 + c_2 \cdot 0} = \frac{a_1}{a_2} \end{aligned}$$



## Definição de seqüência

A noção de **seqüência** é intuitiva e conhecida. Na linguagem do dia-a-dia, seqüência significa uma sucessão de coisas numa ordem determinada – que pode ser de tamanho ou ordem cronológica –, por exemplo, os dias da semana. Na linguagem matemática, o termo seqüência é usado comumente para denotar uma sucessão de números cuja ordem é determinada por uma função. Os exemplos seguintes ilustram essa noção, onde as reticências no final de cada exemplo indicam que os termos continuam indefinidamente.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, \dots$$

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots$$

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$$

Matematicamente, a maneira geral de se escrever uma **seqüência** é:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots,$$

onde cada  $a_n$  é um número real, de maneira tal que, para cada número inteiro positivo  $n$ , corresponda o elemento da seqüência chamado  $a_n$ .

Na seqüência  $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots$ , para cada número inteiro positivo  $n$ , corresponde o inteiro  $a_n = 2n - 1$ .

Na seqüência  $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ , para cada número inteiro positivo  $n$ , corresponde o inteiro  $a_n = (-1)^n$ .

Na seqüência  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$ , para cada número inteiro positivo  $n$ , corresponde o número racional  $a_n = \frac{n}{n+1}$ .

A seguir, apresentamos a definição formal de seqüência.

## Definição 1

Uma **sequência infinita** é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Se  $N$  representa o conjunto dos números naturais, então, a função  $f = \{(n, y) \mid y = f(n), n \in N\}$  é uma sequência infinita.

Por conveniência, nos referimos às **sequências infinitas** simplesmente pelo nome de **sequências**.

Se  $f$  é a sequência definida por  $f = \{(n, y) \mid y = f(n), n \in N\}$ , então, os elementos da imagem, isto é,  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$ , ... recebem o nome de termos da sequência;  $f(1)$  é o primeiro termo,  $f(2)$  é o segundo termo e  $f(n)$  é o  $n$ -ésimo termo ou termo geral da sequência.

Usualmente, escrevemos

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(k) = a_k, f(k+1) = a_{k+1}, \dots, f(n) = a_n, \dots$$

Assim, podemos escrever

$$f = \{(n, y) \mid y = a_n, n \in N\}.$$

Quando não há necessidade de especificar o domínio da sequência cujo termo geral é  $a_n$ , podemos representar a sequência apenas pela notação  $\{a_n\}$ . Em muitos casos, quando conhecemos os primeiros termos de uma sequência, temos condições de determinar uma lei de formação (função) para identificar o termo geral  $a_n$ , isto é, aquele que representa qualquer termo da sequência.

## Exemplo 1

Considere a sequência cujos termos são:  $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

Encontre o termo geral  $a_n$ .

## Solução

Podemos dizer que

$$a_n = \frac{1}{n}, \text{ para } n = 3, 4, 5, \dots, \text{ ou } a_n = \frac{1}{n+2} \text{ para } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Logo, a sequência é denotada por:

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}, \text{ para } n = 3, 4, 5, \dots, \text{ ou } \{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n+2} \right\} \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$



# Atividade 1

Seja a sequência cujos termos são:  $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{17}, \sqrt{26}, \dots$

Encontre o termo geral  $a_n$ .

Você viu na disciplina Cálculo I a noção de limite de funções de uma variável. Particularmente, você viu que:

se  $f(x)$  é uma função definida no intervalo  $I$  da reta,  $I = (0, \infty)$ , então:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existe e é igual a um número real  $L$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ,

se, e somente se,  $f(x)$  ficar bastante próximo de  $L$  para todo  $x$  suficientemente grande.

Como uma sequência é uma função, podemos perguntar sobre os limites de uma sequência. Mas, como uma sequência  $\{a_n\}$  está definida somente para valores inteiros positivos de  $n$ , é natural pensar no limite de uma sequência como sendo o limite quando  $n$  tende para o infinito:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

## Exemplo 2

Considere a sequência  $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ . Entendemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}$  como sendo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ . No exemplo 3, a seguir, mostraremos que esse limite é zero.

### Definição 2

Dizemos que uma sequência  $\{a_n\}$  **converge para**  $L$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .

Isso significa dizer que:  $\{a_n\}$  fica bastante próximo de  $L$  para todo  $n$  suficientemente grande.

Neste caso, dizemos que a sequência é **convergente** e converge para  $L$ .

Se a sequência **não converge** dizemos que é **divergente**. Ou seja, uma sequência  $\{a_n\}$  é **divergente** se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existe.

## Exemplo 3

Verifique, usando a definição de sequência convergente, que a sequência  $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$  converge para 0, isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

### Solução

Podemos ver que a medida que o  $n$  cresce o valor  $\frac{1}{n}$  vai diminuindo, tendendo à zero. Observe na tabela abaixo:

**Tabela 1** - Variação de  $1/n$ .

$n$	$1/n$
1	$1/1 = 1$
2	$1/2 = 0,5$
3	$1/3 = 0,33$
4	$1/4 = 0,25$
5	$1/5 = 0,2$
.....	.....
1000	$1/1000 = 0,001$

Portanto, podemos concluir que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

## Exemplo 4

A sequência  $\{a_n\}$ , com  $a_n = (-1)^{n+1}$ , para  $n \geq 1$ , é a sequência cujos termos são 1 e -1 alternadamente, ou seja,  $\{a_n\} = 1, -1, 1, -1, \dots$ . Assim, o limite da sequência só pode ser +1, quando  $n$  tende a infinito por valores pares; ou -1, quando  $n$  tende a infinito por valores ímpares. Agora, lembre-se, você já viu na disciplina Cálculo I que o limite, quando existe, é único. Portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existe.



## Atividade 2

Considere a sequência  $\{a_n\}$ , com  $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ , para todo inteiro positivo  $n$ .

Verifique que a sequência  $\{a_n\}$  é convergente.

O teorema a seguir nos permite concluir que os teoremas e as técnicas dos limites de funções quando  $x$  tende a infinito,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ , e limites de funções no infinito quando  $x$  tende a um número finito  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , e os teoremas básicos sobre limites podem ser usados ao analisar a convergência de sequências.

### Teorema 1

Se  $\{a_n\}$  é uma sequência e  $g(x)$  é uma função tal que  $g(n) = a_n$ , então,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

### Exemplo 5

Se  $g(x) = \frac{1}{x}$ , então,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , donde se conclui que, se  $a_n = \frac{1}{n}$ , então,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , como visto no exemplo 3.

## Propriedades dos limites de sequências

Sejam  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  duas sequências convergentes e  $c$  um número real qualquer, com  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ .

Então, temos as seguintes propriedades:

**P0** -  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ , onde  $\{c_n\}$  é a sequência constante:  $c_n = c$  para todo número natural  $n$ .

**P1** -  $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ca$

**P2** -  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$

**P3** -  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - b$

**P4** -  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$

**P5** - sendo  $b \neq 0$ , então,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$ .

Embora as três primeiras propriedades sejam simples de demonstrar usando a definição de convergência, não iremos fazer as demonstrações, podendo ficar como exercício para quem se interessar em fazê-las. Entretanto, usaremos a seguir essas propriedades para calcular alguns limites.

## Exemplo 6

Calcule o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$ , usando o fato de que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , demonstrado no exemplo 3, e as propriedades vistas anteriormente.

### Solução

Pela propriedade P4, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

$$\text{Resumindo, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

## Exemplo 7

Calcule o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}$ .

### Solução

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0. \text{ Ou seja, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

## Exemplo 8

Calcule o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} \right)$ .

### Solução

Usando as propriedades P2 e P1 temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 + 0 = 0.$$

$$\text{Portanto, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} \right) = 0.$$

## Exemplo 9

Calcule o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2}$  onde  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  são constantes reais, com  $a_2 \neq 0$ .

### Solução

Dividindo o numerador e o denominador por  $n^2$  e usando as propriedades 5, 2 e 1, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{n^2}}{\frac{a_2 n^2 + b_2 n + c_2}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_1 n^2}{n^2} + \frac{b_1 n}{n^2} + \frac{c_1}{n^2}}{\frac{a_2 n^2}{n^2} + \frac{b_2 n}{n^2} + \frac{c_2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \frac{b_1}{n} + \frac{c_1}{n^2}}{a_2 + \frac{b_2}{n} + \frac{c_2}{n^2}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_1 + \frac{b_1}{n} + \frac{c_1}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_2 + \frac{b_2}{n} + \frac{c_2}{n^2} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_2}{n^2}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2} &= \frac{a_1 + b_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{a_2 + b_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{a_1 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0}{a_2 + b_2 \cdot 0 + c_2 \cdot 0} = \frac{a_1}{a_2} \end{aligned}$$

Resumindo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Introduziremos, a seguir, alguns tipos usuais de seqüências.

### Definição 3

Uma seqüência  $\{a_n\}$  é crescente se  $a_n \leq a_{n+1}$  para todo  $n$ .

## Exemplo 10

A sequência na qual  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ , e  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  para  $n \geq 3$ , ou seja,

$$11, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

é chamada **sequência de Fibonacci**, que é crescente.

### Definição 4

Uma sequência  $\{a_n\}$  é **estritamente crescente** se  $a_n < a_{n+1}$  para todo inteiro positivo  $n$ .

## Exemplo 11

A sequência  $\{a_n\}$  na qual  $a_n = 1 - \frac{1}{n}$  para  $n \geq 1$ , é estritamente crescente.

### Solução

Como  $n + 1 > n$ , para todo número natural  $n$ , segue que  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ . Logo,  $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$ .

Assim, somando 1 de cada lado da desigualdade, temos:  $a_n = 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$

### Definição 5

Uma sequência  $\{a_n\}$  é **decrecente** se  $a_n \geq a_{n+1}$  para todo  $n$ .



## Atividade 3

Verifique que a sequência  $\{a_n\}$ , na qual  $a_n = \frac{1}{n-1}$ , para  $n \geq 3$ , é decrescente.

### Definição 6

Uma sequência  $\{a_n\}$  é **estritamente decrescente** se  $a_n > a_{n+1}$  para todo  $n$ .

## Exemplo 12

A sequência  $\{a_n\}$  na qual  $a_n = \frac{1}{n}$  para  $n \geq 1$ , é estritamente decrescente, pois  $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$ .

A seguir, definiremos alguns tipos de sequências que comumente aparecem nas aplicações.

### Definição 7

Se uma sequência  $\{a_n\}$  é decrescente, ou crescente, ou estritamente crescente ou estritamente decrescente, então, dizemos que  $\{a_n\}$  é uma **sequência monótona**.

### Definição 8

Uma sequência  $\{a_n\}$  para a qual existe um número  $B_1$  com a propriedade  $a_n < B_1$  para todo  $n$  chama-se sequência **limitada superiormente**.

### Definição 9

Uma sequência  $\{a_n\}$  para a qual existe um número  $B_2$  com a propriedade  $B_2 < a_n$  para todo  $n$ , se chama sequência **limitada inferiormente**.

## Exemplo 13

A sequência  $\{a_n\} = \left\{ \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \right\} = \left\{ 2, \left( \frac{3}{2} \right)^2, \left( \frac{4}{3} \right)^3, \dots, \left( \frac{n+1}{n} \right)^n, \dots \right\}$  é **estritamente** crescente e limitada inferiormente,  $a_{n-1} < a_n$ , pois  $\frac{(n-1)+1}{n-1} = \frac{n}{n-1} < \frac{n+1}{n}$  para todo  $n > 1$ . Como  $a_1 = 2$  qualquer valor  $B_2 < 2$  tem a propriedade  $B_2 < a_n$  para todo  $n$ .

### Definição 10

Uma sequência  $\{a_n\}$  é dita **limitada** se existe um número real positivo  $B$  tal que  $|a_n| < B$ , para todo  $n$ .

Observe que uma sequência é limitada se, e somente se, é limitada superiormente e inferiormente.

## Exemplo 14

A sequência de Fibonacci  $\{a_n\}$ , com  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ , e  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  para  $n \geq 3$  não é limitada superiormente e, portanto, não é limitada.



## Atividade 4

Verifique que a sequência:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$  é limitada superiormente e inferiormente e, portanto, é limitada.

A seguir, enunciaremos dois teoremas, os quais serão úteis porque permitem tirar conclusões a respeito de sequência que satisfazem suas hipóteses. Porém, não apresentaremos suas demonstrações, que devem ser feitas em um curso de Análise Matemática.

## Teorema 2

Uma sequência crescente e limitada superiormente é convergente. Uma sequência decrescente e limitada inferiormente é convergente. Uma sequência monótona e limitada é convergente.

## Teorema 3

Dada uma sequência  $\{a_n\}$  com  $n \geq k$ , uma condição necessária e suficiente para que  $\{a_n\}$  seja convergente é que dado qualquer número  $\varepsilon > 0$ , exista um inteiro  $M$  tal que  $|a_n - a_j| < \varepsilon$  para todos os inteiros  $n$  e  $j$  tais que  $n \geq M$  e  $j \geq M$ .

Observe que o teorema 3 afirma que se  $n$  e  $j$  são suficientemente grandes, os termos  $a_n$  e  $a_j$  estão muito próximos, de modo que a diferença  $a_n - a_j$  é próxima de zero. Esta é a característica das sequências convergentes que o teorema 3 ressalta.

O teorema 3 é conhecido como o **CrITÉRIO DE CAUCHY** para a convergência de uma sequência. Uma sequência que satisfaz às condições desse teorema se chama **Sequência de Cauchy**. Esse teorema é fundamental no cálculo infinitesimal. Embora Fermat, Newton e Leibniz sejam os criadores do cálculo diferencial e integral, o formalismo “seguro” apenas foi conseguido muito tempo depois no século XVIII, quando Cauchy definiu formalmente limites e convergência e, juntamente, com Dedekind construiu rigorosamente os números reais.

## Exemplo 15

Verifique que  $\{a_n\}$ , com  $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$ ,  $n \geq 1$ , é uma sequência convergente.

### Solução

Podemos observar que:  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$ . Logo,  $a_{n+1} \geq a_n$  para todo  $n \geq 1$ . Assim,  $\{a_n\}$  é uma sequência monótona crescente. Observe que: sendo  $3 > 2$ ,  $4 > 2$ ,  $5 > 2$ ,  $\dots$ , temos  $n! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n) > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 > 2^{n-1}$

Logo,  $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$  e  $a_n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ .

O segundo membro dessa última desigualdade é a soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é  $\frac{1}{2}$ . Portanto, podemos

escrever  $a_n < \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$ .

Finalmente, como  $\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ , podemos concluir que  $a_n < 2$ , para

todo  $n \geq 1$ . Logo, a sequência é limitada superiormente. Portanto, a sequência  $\{a_n\}$  na qual

$a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$ ,  $n \geq 1$ , é crescente e limitada superiormente. Pelo Teorema 2, é uma sequência convergente.

## Exemplo 16

Demonstre que a sequência  $\{a_n\}$  na qual  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_3 = \frac{3}{4}$ ,  $a_4$  e  $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$ , para  $n \geq 3$ , é uma sequência convergente.

### Solução

Demonstraremos que a sequência dada trata de uma sequência de Cauchy. Inicialmente, observamos que

$$|a_2 - a_1| = \frac{1}{2},$$

$$|a_3 - a_2| = \frac{1}{2}|a_2 - a_1| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

$$|a_4 - a_3| = \frac{1}{2}|a_3 - a_2| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

⋮

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|a_{n-1} - a_{n-2}| = \frac{1}{2^n}.$$

Além disso, para todo  $j \geq n + 1$ , o número  $a_j$  pertence ao intervalo cujos extremos são  $a_n$  e  $a_{n+1}$ , de maneira que

$$|a_n - a_j| \leq |a_{n+1} - a_n| \text{ para } j \geq n + 1.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , arbitrário, e como sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ , podemos escolher  $M$  tal que  $\frac{1}{2^M} < \varepsilon$ , então, para todo  $n$  e  $j$  para os quais  $n \geq M$  e  $j \geq M$  temos que  $|a_n - a_j| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ .

Portanto, a sequência é convergente.

Observe, provamos que se  $n$  e  $j$  são suficientemente grandes, os termos  $a_n$  e  $a_j$  estão muito próximos, de modo que a diferença  $a_n - a_j$  é próxima de zero.

## Exemplo 17

Seja  $p$  um número real positivo. Considere a sequência  $\{a_n\}$  na qual

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2^p}$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}$$

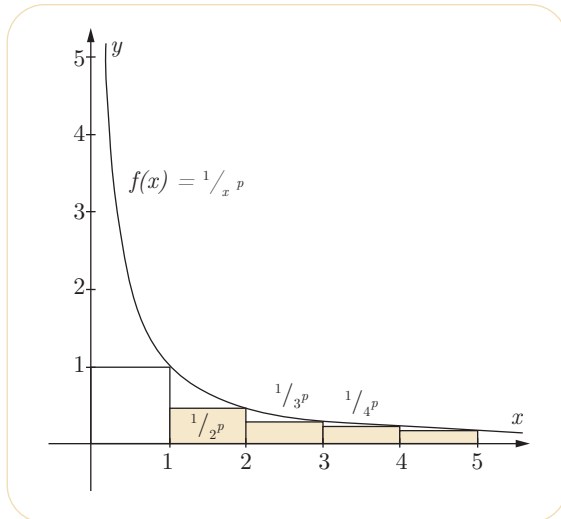
$\vdots$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$$

Verifique que  $\{a_n\}$  é convergente se, e somente se,  $p > 1$ .

### Solução

Primeiro, veremos que se  $p > 1$ , então,  $\{a_n\}$  é uma sequência monótona e limitada e, portanto, é convergente. Consideremos o gráfico da função  $y = \frac{1}{x^p}$  para  $p > 1$  e sobre ele construamos  $n$  retângulos cujas bases medem uma unidade de comprimento e cujas alturas são respectivamente  $1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots, \frac{1}{n^p}$  veja Figura 1 a seguir.



**Figura 1** - Gráfico da função  $y = \frac{1}{x^p}$ , com  $p > 1$ .

Podemos observar que a área do primeiro retângulo é 1, a área do segundo retângulo é  $\frac{1}{2^p}$ , e a área do  $n$ -ésimo retângulo é  $\frac{1}{n^p}$ . Portanto, o número  $a_n$  especificado por  $a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$  tem a propriedade de que  $a_n$  é a soma das áreas dos  $n$  retângulos. Uma vez que a área do primeiro retângulo é 1, o número  $a_n - 1$  é igual à soma

das áreas dos restantes  $n - 1$  retângulos. A soma das áreas desses  $n - 1$  retângulos é menor que a área da região limitada superiormente pelo gráfico de  $y = \frac{1}{x^p}$ , inferiormente pelo eixo dos  $x$ , à esquerda pelo gráfico da reta  $x = 1$  e à direita pelo gráfico de  $x = n$ . Portanto, para  $p > 1$  temos

$$a_n - 1 < \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \text{ e } a_n < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx.$$

Por outro lado, já que  $p > 1$ , e  $p - 1 > 0$ ,

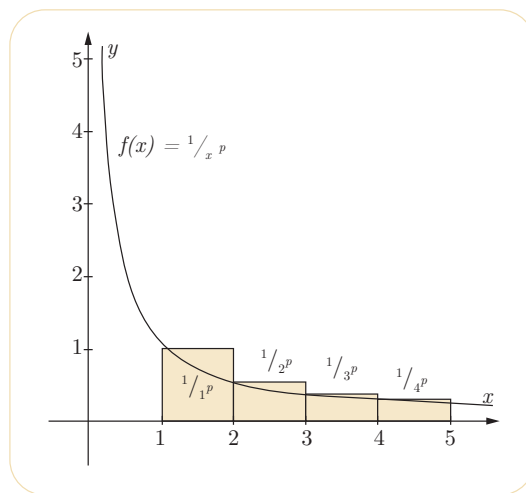
$$\int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \left[ \frac{-1}{p-1} \left( \frac{1}{n^{p-1}} \right) \right]_1^n = \frac{1}{p-1} \left( -\frac{1}{n^{p-1}} + 1 \right) < \frac{1}{p-1},$$

e podemos observar que  $1 \leq a_n < 1 + \frac{1}{p-1}$ , para todo  $n$ .

Portanto,  $\{a_n\}$  é uma sequência limitada. Além disso, vemos que  $\{a_n\}$  é uma sequência monótona e, então, como consequência do Teorema 2, a sequência é convergente.

Faremos agora a demonstração para o caso  $p \leq 1$ , ou seja, se  $p \leq 1$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ . Consideremos o gráfico de  $y = \frac{1}{x^p}$  para  $p \leq 1$  e sobre ele construímos  $n$  retângulos cujas bases medem uma unidade de comprimento e cujas alturas são respectivamente  $1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots, \frac{1}{n^p}$ , como mostra a Figura 2 a seguir.

Do mesmo modo que antes, observamos que o número  $a_n$  especificado por  $a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$  é a soma das áreas dos  $n$  retângulos. Nesse caso, a soma das áreas dos  $n$  retângulos é maior que a área da região limitada superiormente pelo gráfico de  $y = \frac{1}{x^p}$ , inferiormente pelo eixo dos  $x$ , à esquerda pelo gráfico da reta  $x = 1$ , e à direita pelo gráfico da reta  $x = n + 1$ . Portanto, para  $p \leq 1$ , na Figura 2, o número no interior de cada retângulo indica sua área ou altura, que são iguais.



**Figura 2** - Gráfico da função  $y = \frac{1}{x^p}$ , com  $0 < p < 1$ .

Do mesmo modo que antes, observamos que o número  $a_n$  especificado por  $a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$  é a soma das áreas dos  $n$  retângulos. Neste caso, a soma das áreas dos  $n$  retângulos é maior que a área da região limitada superiormente pelo gráfico de  $y = \frac{1}{x^p}$ , inferiormente pelo eixo dos  $x$ , à esquerda pelo gráfico da reta  $x = 1$  e à direita pelo gráfico da reta  $x = n + 1$ . Portanto, para  $p \leq 1$  temos

$$a_n > \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx.$$

Se  $p = 1$ , temos  $\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n + 1)$  e se  $p < 1$ , ou seja,  $1 - p > 0$  obtemos

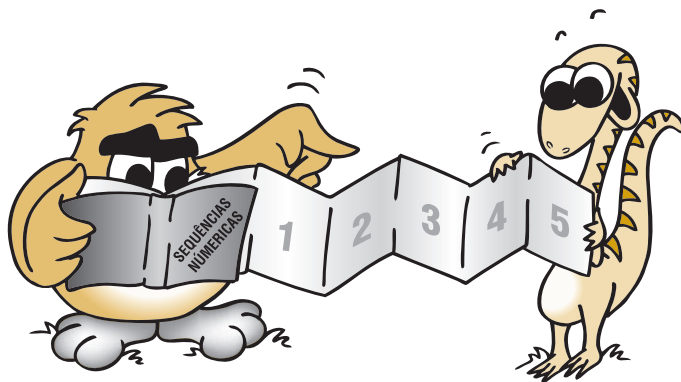
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} [(n+1)^{1-p} - 1].$$

Portanto, se  $p \leq 1$ , para um dado número  $K$  é possível encontrar um inteiro  $M$  tal que  $a_n > K$  para todo  $n > M$ .

Isto é, se  $p \leq 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,

o que significa que a sequência  $\{a_n\}$  é divergente se  $p \leq 1$ .

Fica demonstrado assim que  $\{a_n\}$  é convergente se, e somente se,  $p > 1$ .



## Resumo

Nesta aula, estudamos o conceito de sequência numérica, fundamental para o entendimento da próxima aula, na qual abordaremos as séries numéricas. Estudamos ainda a definição de sequência, sequência de Cauchy e convergência de sequências.

# Autoavaliação

1

Para cada uma das seqüências  $\{a_n\}$  a seguir, encontre o valor de  $a_3$ ,  $a_5$ ,  $a_9$  e  $a_{10}$ .

**a)**  $a_n = n^2$

**b)**  $a_n = 2n + 1$

**c)**  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$  e  $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ , para cada  $n > 2$ .

2

Em cada uma das seqüências  $\{a_n\}$  a seguir, escreva uma fórmula para  $a_n$ .

**a)** 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

**b)** 2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, ...

**c)** 1, -4, 9, -16, 25, -36, ...

**d)** 1, 3, 6, 10, 15, ...

3

Verifique que a seqüência  $\{a_n\}$ , onde  $a_n = \frac{2n}{n + 4\sqrt{n}}$ , para cada inteiro positivo  $n$ , converge para 2.

4

Considere as seqüências  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , onde  $a_n = \frac{10^7}{n}$  e  $b_n = \frac{n}{10^7}$ , para cada inteiro positivo  $n$ .

Verifique intuitivamente que:

**a)** A seqüência  $\{a_n\}$  converge para 0.

**b)** A seqüência  $\{b_n\}$  não converge.

**c)** Os primeiros  $10^7$  termos da seqüência  $\{a_n\}$  são maiores do que os correspondentes termos da seqüência  $\{b_n\}$ . (Comparando as duas seqüências dadas, vemos que a existência do limite de uma seqüência não depende de um número finito de termos).

**5**

Verifique que cada uma das seqüências  $\{a_n\}$  a seguir é de Cauchy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$  , para cada inteiro positivo  $n$ .

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$  , para cada inteiro positivo  $n$ .

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}$  , para cada inteiro positivo  $n$ .

## Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000. v 2.

FINEY, Ross L.; GIORDANO, Frank R.; WEIR, Maurice D. **Cálculo de George B. Thomas**. São Paulo: Addison-Wesley, 2003. v 2.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: MacGraw-Hill, 1985. v 2.

# Séries numéricas

Aula

9

The background of the lower half of the page is a dense, overlapping field of small, light-colored rectangular cards. Each card has a single digit printed on it in a dark, sans-serif font. The digits are scattered across the entire area, with some appearing more frequently than others, creating a textured, collage-like effect.

# Apresentação

**E**sta é a Aula 9 da disciplina Cálculo II. Nela, apresentaremos a noção de séries numéricas, que são ferramentas indispensáveis para estudar funções e estão presentes em quase todas as áreas da Matemática, desde a Geometria, passando pela Análise, até a Álgebra e a Teoria dos Números. Aqui, veremos somas parciais, convergência de séries numéricas, testes de convergência – teste do termo geral, critério de Cauchy, teste da série geométrica, teste da comparação, teste das séries alternadas, teste da integral, convergência absoluta.

Para obter sucesso nesta aula, você tem de ler e compreender o texto. Leia devagar, gastando alguns minutos numa única linha, se for necessário. Não se impaciente. Avance quando se sentir preparado.

## Objetivos

- 1 Compreender o conceito de série numérica.
- 2 Entender o que é uma série convergente.
- 3 Decidir se uma dada série converge ou diverge.
- 4 Aplicar os conceitos de séries para resolver problemas práticos.



# Definição de séries numéricas

As **séries** são instrumentos fundamentais para estudar funções e estão presentes em quase todas as áreas da Matemática, desde a Geometria, passando pela Análise, até a Álgebra e a Teoria dos Números. A seguir, vamos estudar as séries numéricas.

Mas, o que é uma série numéricas?

É uma expressão do tipo:  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ , com  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$  números reais e onde as reticências no final indicam que os termos continuam indefinidamente. Comumente, denominamos tais expressões de **série infinita** ou, simplesmente, série.

Usualmente, expressamos a série com a letra maiúscula sigma, do alfabeto grego, na forma  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ , que se lê “a soma de  $u_i$  de 1 até o infinito”:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i.$$

## Exemplo 1

As expressões a seguir são exemplos de séries numéricas:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{10^i};$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} x^i.$$

Observe que uma série envolve uma quantidade infinita de somas. Não seria razoável trabalhar com um objeto assim, uma vez que não poderíamos, numa existência normal, fazer todas as operações de soma. Por isso, interpretamos uma série infinita de maneira tal que se possa trabalhar com ela de modo análogo ao que se faz com uma soma de um número finito de parcelas. Essa interpretação permite, em muitos casos, encontrar o valor exato da série infinita.

Mas, qual será a maneira razoável e satisfatória para interpretar uma série infinita?

A resposta é dada pelo que segue.

Dada uma série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i,$$

olhamos para a sequência  $\{s_n\}$  de suas somas parciais:

$$s_1 = u_1$$

$$s_2 = u_1 + u_2$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

.....

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

e dizemos, o que é razoável, que a série é igual ao limite da sequência de suas somas parciais:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

desde que o limite exista. Assim, de agora por diante, vamos entender

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

sempre que o limite existir. Nesse caso, dizemos que a **série converge**.

Se o limite não existe, então a soma não está definida e, neste caso, dizemos que a **série diverge**.

## Exemplo 2

Seja  $a$  um número real e  $r$  um número real positivo. A sequência de termos

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}, ar^n, \dots$$

forma o que chamamos de uma **progressão geométrica**. Cada termo, exceto o primeiro, é obtido através da multiplicação do termo precedente pelo número  $r$ , chamado de **razão da progressão**. As somas parciais da **série geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n + \dots$$

são dadas por:

$$\begin{aligned} s_1 &= a, \\ s_2 &= a + ar, \\ s_3 &= a + ar + ar^2 \\ s_4 &= a + ar + ar^2 + ar^3 \end{aligned}$$

e, em geral, temos que a  $n$ -ésima soma parcial é dada por:

$$s_n = a(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}).$$

Se  $r$  for distinto de 1, a identidade:  $(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1})(1 - r) = (1 - r^n)$  nos permite escrever a  $n$ -ésima soma parcial na forma:

$$s_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r}, \text{ se } r \neq 1,$$

ou, ainda,  $s_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} r^n$ , se  $r \neq 1$ .

Agora, observe que: se  $0 < r < 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ . Logo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1 - r} r^n = 0$ . Portanto, podemos concluir que:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} ar^i = \frac{a}{1 - r}, \text{ para } 0 < r < 1.$$

Se  $r > 1$ , então,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ . Logo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1-r} r^n = \infty$  e, nesse caso, a série diverge.

Se  $r = 1$ , a série geométrica é “estacionária”:  $a + a + a + a + a + \dots$ , e é fácil ver que a série diverge para  $a \neq 0$ .



## Atividade 1

Expresse a dízima periódica  $A = 0,3333\dots$  como a razão entre dois inteiros.

**Sugestão** - Escreva  $A$  na forma de uma série geométrica

$A = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$  e calcule o valor da série.

As propriedades aritméticas das séries convergentes a seguir nos permitem construir séries convergentes a partir de séries que, a priori, sabemos serem convergentes. Ou seja, se você sabe que uma série converge, então, é fácil encontrar a partir dela uma outra série que converge. Se você conhece que duas séries convergem, então é fácil encontrar uma outra série que converge. O teorema 1, a seguir, nos garante esse fato.

### Teorema 1

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  são ambas séries convergentes e  $c$  é um número qualquer, então as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} (cu_n), \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n), \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$$

são todas convergentes, e valem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (cu_n) &= c \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \end{aligned}$$

**Demonstração** - A demonstração é decorrência imediata das propriedades de limites e das propriedades de sequências.

## Exemplo 3

Verifique que: se a série  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$  converge para  $S$ , então, a série  $u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ , converge para  $S - u_1$ .

### Solução

Dizer que a série  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$  converge para  $S$  é o mesmo que dizer que o limite da  $n$ -ésima soma parcial,  $s_n$ , é igual a  $S$ . Ou seja:  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ . Agora, observe que a  $n$ -ésima soma parcial,  $t_n$ , da série  $u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ , é igual a  $t_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1}$ , que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$t_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} = (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1}) - u_1, \text{ ou ainda:}$$

$$t_n = (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1}) - u_1 = s_{n+1} - u_1. \text{ Assim, temos que:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - u_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1}) - u_1 = S - u_1.$$

# Testes de convergência das séries infinitas

Em muitas situações, saber se uma série converge é muito importante. E uma das maneiras de saber se a série converge é conhecer uma expressão que nos dê a  $n$ -ésima soma parcial. Vimos no exemplo 2 que a série geométrica, no caso em que a razão  $r$  satisfaz:  $0 < r < 1$ , tem a  $n$ -ésima soma parcial igual a:

$$s_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} r^n,$$

o que nos permite encontrar o valor da série:  $\frac{a}{1 - r}$ .

No exemplo seguinte, veremos uma série que tem, também, uma maneira fácil de se calcular a  $n$ -ésima soma parcial.

## Exemplo 4

Considere a série  $\sum_{i+1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

Para calcular a  $n$ -ésima soma parcial dessa série, usamos um truque, um legado de Leibniz, que é facilmente observado a partir da igualdade:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Essa igualdade permite-nos escrever a  $n$ -ésima soma parcial da série como:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Você pode facilmente perceber que, nessa soma, há cancelamento de termos, sobrando somente a diferença:

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ o que nos permite obter o limite } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 \text{ Portanto,}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1.$$

Os dois últimos exemplos ilustram o seguinte fato: se conhecermos a expressão para o valor da  $n$ -ésima soma parcial de uma série, poderemos obter o valor da série, calculando o limite.

Em geral, acontece que raramente é possível obter a  $n$ -ésima soma parcial de uma série através de uma fórmula fechada. Neste caso, para o estudo de convergência ou divergência de uma série, lançamos mão de métodos indiretos para obter uma conclusão. São os chamados **testes de convergência**, que estudaremos a seguir.

## Teorema 2 (Teste do termo geral)

Se a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

converge, então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

**Demonstração** - Se a série  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  é convergente, então existe um número real  $L$  finito e único,

tal que  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = L$ . Ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$ . Escrevendo

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n,$$

$$s_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}.$$

Subtraindo membro a membro as duas igualdades anteriores, temos que

$$u_n = s_n - s_{n-1}.$$

Portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = L - L = 0.$

Resumindo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$

**Corolário** - Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  é divergente.

**Demonstração** - Se  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  fosse convergente, então, pelo teorema 2,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . Mas, por hipótese,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ . Logo,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  é divergente.

## Exemplo 5

Verifique se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$  converge.

### Solução

O termo geral da sequência é  $u_n = \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$  e como a função  $\cos x$  é uma função contínua, podemos escrever:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = \cos\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}\right) = \cos 0 = 1$

Assim,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ . Portanto, usando o corolário do teorema 2, podemos concluir que a série diverge.



## Atividade 2

Verifique se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$  converge.

**Observação** - A recíproca do teorema 2 **não** é verdadeira. Isto é, podemos ter  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  e a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  ser divergente. A série harmônica, como veremos adiante, nos dá um exemplo dessa situação.

Observe que a convergência de uma série infinita depende da convergência da sequência das somas parciais. Assim, o principal método indireto (**teste de convergência**) que nos permite concluir a respeito da convergência de séries é o que usa o fato de que uma sequência crescente converge se, e somente se, é limitada.

### Teorema 3

Considere a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . Suponha  $u_n \geq 0$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , e seja

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k \text{ a } n\text{-ésima soma parcial.}$$

Então, ocorre uma das duas situações:

- a)** existe um número real positivo  $M$ , tal que todas as somas parciais  $s_n$  satisfazem  $s_n \leq M$ . Neste caso, a série  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  converge para um valor  $s$ , satisfazendo a desigualdade  $s \leq M$ ; ou
- b)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ , e, neste caso, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  diverge.

**Demonstração - a)** Temos que:  $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$  e  $s_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}$ . Subtraindo membro a membro as duas igualdades, obtemos  $u_n = s_n - s_{n-1} \geq 0$ , de modo que as somas parciais  $s_n$  formam uma sequência crescente ou, pelo menos, não decrescente. Se todas as somas parciais  $s_n$  satisfazem  $s_n \leq M$ , então trata-se de uma sequência monótona limitada superiormente. Pelo teorema 2, da Aula 8 (Sequências numéricas), uma sequência monótona e limitada é convergente.

**b)** Se não existe esse número  $M$  tal que  $s_n \leq M$ , então para cada número  $B$ , não importa o tamanho de  $B$ , deve existir uma soma parcial  $s_m$  satisfazendo  $s_m > B$  e todas as somas parciais  $s_n$ , com  $m > n$ , são maiores ou iguais a  $s_m$ . Essa é outra maneira de dizer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ .

### Exemplo 6

Verique se a **série harmônica**,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , é divergente, embora se tenha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

## Solução 1

Vamos apresentar duas maneiras distintas de verificar que a série harmônica é divergente.

Escrevendo alguns termos da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , vemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots$$

que é o mesmo que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{17} + \dots \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right); \quad \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

O que nos permite concluir que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{32} + \dots \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

Portanto, aplicando o teorema 3, a série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  é divergente.

## Solução 2

Uma outra maneira de ver que a série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  é divergente é proceder por

contradição. Isto é, inicialmente, suponha que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  é convergente e que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = S.$$

Agora, observe que a soma de todas as frações do tipo  $\frac{1}{2n}$  é igual a  $S/2$ :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{1}{2}S.$$

Por outro lado, a soma das frações do tipo  $\frac{1}{2n+1}$  também é igual a  $S/2$ . Isto é:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{1}{2}S.$$

Mas,

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots > \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{1}{2}S.$$

Contradição.

Veremos, a seguir, mais alguns testes para determinar a convergência ou divergência de séries.

#### Teorema 4 (Teste da comparação)

Considere a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . Suponha que todos os termos da série não são negativos. Isto é,  $u_n \geq 0$ .

Então, vale o seguinte:

**a)** se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente e  $u_n \leq a_n$  para todo  $n$ , então,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

**b)** se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente e os termos dela satisfazem a relação  $u_n \geq a_n$  para todo  $n$ , então, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  diverge.

**Demonstração** - Consideremos as  $n$ -ésimas somas parciais

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \text{ e } S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

As somas parciais  $s_n$  e  $S_n$  são ambas sequências não decrescentes.

No caso (a), seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

e, uma vez que

$$s_n \leq S_n \leq S$$

para todo  $n$ , aplicamos o teorema 3 para concluir que  $s_n$  converge.

No caso (b), temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$  e  $s_n \geq S_n$  para todo  $n$ . Então,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ .

## Exemplo 7

Verifique se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente.

### Solução

Escrevendo alguns termos da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , vemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} \\ &\quad + \frac{1}{121} + \frac{1}{144} + \frac{1}{169} + \frac{1}{196} + \frac{1}{225} + \frac{1}{256} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} + \frac{1}{121} + \frac{1}{144} + \frac{1}{169} + \frac{1}{196} + \frac{1}{225}\right) + \frac{1}{256} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &< 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64}\right) + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} + \dots \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Portanto, podemos concluir que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente, pelo teste da comparação, uma vez que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$  é a série geométrica cujo primeiro é 1 e a razão é  $\frac{1}{2}$ , e já sabemos que a série geométrica de razão  $r$ , satisfazendo  $0 < r < 1$ , converge.



## Atividade 3

Verifique se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  é convergente ou divergente.

**Sugestão** - Mostre  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$  e use o teste da comparação.

**Observação** - Um número finito de termos no começo de uma série não afeta a sua convergência ou divergência. A comparação entre  $u_n$  e  $a_n$  no teorema 4 não precisa ser exigida para todo  $n$ . Pode ser exigida para todo  $n$ , exceto para um número finito de termos.

### Teorema 5 (Teste da integral)

Considere que  $f$  é uma função de uma variável real, definida para todo  $x \geq 1$ , contínua, não negativa e não crescente. Isto é, suponha que:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0, \text{ para todo } x \geq 1, \\ f(x_2) &\leq f(x_1), \text{ para } x_2 > x_1 \geq 1. \end{aligned}$$

Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  é uma série com  $u_n = f(n)$  para cada  $n \geq 1$ .

Então:

**a)**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  é uma série convergente se a integral imprópria  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  é convergente; e

**b)** a integral imprópria converge, se a série converge.

**Demonstração - a)** Suponha primeiro que a integral imprópria é convergente. Então, desde que  $f(x) \geq f(k)$  para  $x \leq k$ , temos que

$$\int_{k-1}^k f(x) dx \geq f(k),$$

(o que é fácil de verificar, bastando desenhar uma figura).

Agora, definimos  $a_k = \int_{k-1}^k f(x)dx$  e, então,  $a_1 + \int_1^n f(x)dx = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , onde temos  $a_1 = f(1) = u_1$ . Por hipótese,  $\int_1^\infty f(x)dx$  é finita e, desse modo, a série  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  é convergente. Como  $f(k) = u_k$ , a desigualdade  $a_k \geq u_k$  é um restabelecimento de  $\int_{k-1}^k f(x)dx \geq f(k)$  e, agora, podemos aplicar o teste da comparação.

**Observação** - A demonstração da parte (b) é feita de modo análogo e deixamos como atividade para você.



## Atividade 4

Esboce uma demonstração da parte (b) do teorema 5, seguindo as mesmas idéias do item (a), demonstrado anteriormente.

Apresentaremos os últimos três testes de convergência sem as respectivas demonstrações, as quais podem ser encontradas na primeira referência ao final da aula.

### Teorema 6 (Teste da série $p$ )

A série  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ , chamada de **série  $p$** , é convergente, se  $p > 1$ , e divergente, se  $p \leq 1$ .

### Exemplo 8

Verifique se a série  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)}$  converge ou diverge.

### Solução

Para cada inteiro positivo  $n$ , temos:  $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ .

Como a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é a série  $p$  com  $p = 2$ , do exemplo 7, portanto, convergente, podemos usar o teste da comparação, observando que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  para concluir que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  é convergente.

## Exemplo 9

Verifique se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+10}$  converge ou diverge.

### Solução

Escrevendo alguns termos desta série, temos:

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \dots,$$

é fácil ver que ela é a série harmônica,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , a menos dos dez primeiros termos. De acordo com a observação feita após o teste da comparação, podemos concluir que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+10}$  é divergente.

## Exemplo 10

Verifique se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$  converge ou diverge.

### Solução

Considere a função  $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ . Observe que todas as condições do teste da integral são satisfeitas. Assim,

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_2^{B+1} \frac{du}{u \ln u} \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln(B+1)} \frac{dv}{v} = \lim_{B \rightarrow \infty} \ln v \Big|_{\ln 2}^{\ln(B+1)} \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} [\ln(\ln(B+1)) - \ln(\ln 2)] = \infty. \end{aligned}$$

No cálculo da integral anterior, fizemos a mudança de variável de integração, de  $\ln u$  por  $v$  e seus respectivos limites de integração. Portanto, como a integral imprópria diverge, a série também diverge.

### Teorema 7 (Teste da raiz)

Considere a série de termos não negativos,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , cujos termos têm a propriedade que a partir de um determinado  $n$ , tem-se:

$$a_n \leq r^n, \text{ onde } 0 < r < 1., \text{ o que implica: } \sqrt[n]{a_n} \leq r \leq 1.$$

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ , podemos concluir:

- a)** se  $L < 1$ , a série converge;
- b)** se  $L > 1$ , a série diverge;
- c)** se  $L = 1$ , o teste nada afirma.

### Teorema 8 (Critério de Cauchy para séries)

A série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente se, e somente se, dado um número real positivo, digamos,  $\varepsilon > 0$ , é possível encontrar um número  $N$  (que depende de  $\varepsilon$ ) tal que para todo inteiro positivo  $n > N$ , tem-se:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon, \text{ para qualquer inteiro positivo } m = 1, 2, \dots$$

## Exemplo 11

Verifique, usando o teste de Cauchy, que a série harmônica,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , diverge.

### Solução

Dado  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , não existe  $N$ , de modo que se  $n > N$  tenha-se sempre

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+m} \right| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

para qualquer  $m$ .

Para ver isso, vamos usar o critério de Cauchy, ou seja, vamos escolher  $m = n$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Resumindo,  $\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+m} \right| > \frac{1}{2}$ , desde que seja escolhido  $m = n$ , o que

contraria o fato de que  $\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+m} \right| < \varepsilon = \frac{1}{2}$ .

Portanto, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge.

## Exemplo 12

Uma bola cai de uma altura de  $10m$ . Em cada instante que toca o chão, a bola sobe verticalmente a uma altura que é  $\frac{3}{4}$  da altura precedente. Encontre a distância vertical total percorrida pela bola até parar.

### Solução

No primeiro percurso até a bola cair no chão, é percorrida uma distância igual a  $10m$ . Após bater no chão, a bola sobe  $\left(\frac{3}{4}\right) 10m$  e cai dessa mesma altura para, em seguida, subir  $\left(\frac{3}{4}\right)^2 10m$  e, assim por diante. A distância total percorrida é igual ao valor da série:

$$10 + 2\left(\frac{3}{4}\right)10 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 10 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^3 10 + \dots = 10 + 20\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots\right)$$

Ou seja, o valor total percorrido será igual a

$$10 + 20\left(\frac{3}{4}\right) \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 10 + 20\left(\frac{3}{4}\right)4 = 70.$$

## Resumo

Nesta aula, estudamos as séries numéricas. Vimos a definição de série, série convergente, divergente, os testes de convergência e algumas aplicações.



# Autoavaliação

1

Verifique se cada uma das séries seguintes converge ou diverge.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3}$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot 2^n}$

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$

2

Use o teste da raiz para determinar se cada uma das séries seguintes converge ou diverge.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \left(\frac{2n-1}{n+13}\right)^n$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n} \cdot \frac{1}{3^n}$

3

Considere um número conveniente de círculos de tamanhos iguais agrupados em  $n$  fileiras dentro de um triângulo equilátero. Se  $c_n$  denota o número desses círculos, então, pela geometria da situação,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1 + 2$ ,  $c_3 = 1 + 2 + 3$  e assim por diante.

Se  $A$  é a área do triângulo,  $A_n$  é a soma das áreas dos círculos  $c_n$ , mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

4

A extremidade de um pêndulo percorre um arco de  $24\text{cm}$  de comprimento no seu primeiro movimento. Se cada movimento sucessivo é aproximadamente  $\frac{5}{6}$  do comprimento do anterior, use uma série geométrica infinita para obter uma aproximação da distância total percorrida até o repouso.

5

Considere uma sequência infinita de quadrados que se obtém do seguinte modo. O primeiro quadrado, que é o primeiro termo da sequência, tem área  $A = 4m^2$ . O segundo quadrado, interior ao primeiro, é o segundo termo da sequência e é obtido unindo-se os pontos médios dos lados do primeiro quadrado, o terceiro termo é obtido unindo-se os pontos médios dos lados do quadrado anterior e assim por diante. Encontre a soma da série infinita das áreas de todos os quadrados.

6

Construa uma figura para ilustrar a seguinte situação: duas circunferências de raio 1 tangentes entre si e uma reta tangente a ambas as circunferências. Uma sequência de circunferências menores, cada uma tendo o raio máximo, é inscrita na região entre as duas circunferências e a reta. Os comprimentos dos diâmetros dessas circunferências menores são os termos de uma série convergente. Encontre a soma desses termos e mostre que essa série é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

## Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000. v 2.

FINEY, Ross L.; GIORDANO, Frank R.; WEIR, Maurice D. **Cálculo de George B. Thomas**. São Paulo: Addison-Wesley, 2003. v 2.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: MacGraw-Hill, 1985. v 2.

# Séries de potências

Aula

**10**



# Apresentação

Na Aula 9 – Séries numéricas –, você estudou séries numéricas infinitas,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , que se caracterizavam por ter todos os seus termos,  $u_n$ , constituídos de números reais. Nesta aula, estudaremos séries cujos termos são funções de uma variável, dados por múltiplos reais de potências inteiras positivas da variável, chamadas de **séries de potências**.

As **séries de potências** são importantes de serem estudadas porque facilitam a realização de cálculos, sendo muito úteis em muitos problemas numéricos, e são usadas com êxito na solução de equações diferenciais.

Para obter sucesso nesta aula, você tem que ler e compreender o texto. Leia devagar, gastando alguns minutos numa única linha, se for necessário. Não se impaciente. Avance quando se sentir preparado.

## Objetivos

- 1 Compreender o conceito de convergência de série de potência.
- 2 Saber estimar os raios de convergência de séries de potências.
- 3 Entender como derivar e saber integrar as séries de potências.



# As séries de potência

Uma **série de potência** é definida da seguinte maneira:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ax^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

onde  $x$  é uma variável e  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  são constantes.

Vimos anteriormente, na Aula 9, um exemplo de série de potência simples, a **série geométrica**  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$ , a qual estudamos no caso em que  $0 < x < 1$ , onde ela converge para  $\frac{1}{1-x}$  e diverge se  $x \geq 1$ .

Observe que o valor das séries de potências convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

é um número que depende de  $x$ , ou seja, se a série de potência é convergente, seu valor é uma função,  $f$ , de  $x$ :  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ .

No caso da série geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$ , sabemos que ela converge e seu valor é  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ , para  $0 < x < 1$ .

Um dos interesses no estudo de séries de potências é conhecer os valores de  $x$  para os quais  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$  converge. Outras questões são igualmente pertinentes e são objetos desta aula.

**a)**  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$  é contínua?

**b)**  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$  é derivável?

**c)**  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$  é integrável?

**d)** Dada uma função  $f(x)$ , sob que condições  $f(x)$  pode ser escrita como uma série de potências:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ ?

# Convergência de uma série de potência

Iniciamos esta sessão com a definição a seguir.

## Definição 1

Uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  é **absolutamente convergente** se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  converge.

Os teoremas a seguir são úteis no estudo de convergência de séries de potência.

## Teorema 1

Se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  é convergente para  $x = x_0$ , com  $x_0 \neq 0$ , então, ela é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$ , para os quais  $|x| < |x_0|$ .

## Demonstração

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  é convergente, sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ . Pela definição de limite, dado o número inteiro positivo 1, é possível encontrar um número real positivo  $N$  tal que  $|a_n x_0^n| < 1$  sempre que  $n \geq N$ . Agora, se  $x$  é um número qualquer satisfazendo  $|x| < |x_0|$ , temos  $|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < 1 \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ , sempre que  $n > N$ . Por outro lado, a série  $\sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$  é uma série geométrica convergente, pois a razão  $r$  satisfaz:

$$0 < r = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1.$$

Portanto, comparando a série  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ , onde  $|x| < |x_0|$ , com a série geométrica  $\sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ , usando o **teste de comparação** (visto na Aula 9), podemos concluir que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$  converge para todo  $x$  satisfazendo  $|x| < |x_0|$ .

## Exemplo 1

A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$  é convergente quando  $x = 1$ , pois, neste caso,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$  é a série geométrica. Assim, na série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$  é absolutamente convergente quando  $|x| < 1$ .

### Teorema 2

Se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  é divergente para  $x = x_0$ , então ela é divergente para todos os valores de  $x$ , para os quais  $|x| > |x_0|$ .

### Demonstração

Suponha que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  dada seja convergente para um número  $x$ , para o qual  $|x| > |x_0|$ . Pelo teorema 1 então a série deve convergir quando  $x = x_0$ , pois  $|x| > |x_0|$ . Mas, isso é uma contradição, pois, pela hipótese,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  é divergente para  $x = x_0$ .

É fácil ver que toda série de potência,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ , converge se  $x = 0$ , pois, nesse caso,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = a_0$ .

Existem exemplos de séries de potências que convergem para todo valor de  $x$ . Por exemplo, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$  converge para todo valor de  $x$ , pois temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n} = 0.$$

Portanto, pelo **teste da razão** (visto na Aula 9) para séries numéricas, a série converge. Observe que aplicamos esse teste considerando a série dos valores absolutos, pois ele só se aplica para séries com termos positivos.

Existem exemplos de séries de potência que só convergem para um único valor de  $x$ . Por exemplo, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$  converge somente para  $x = 0$ . De fato, para qualquer que seja o valor de  $x$  distinto de zero, temos que, para  $n$  suficientemente grande, o valor  $|n \cdot x| > 1$ ,

o que implica que o  $n$ -ésimo termo da série,  $n^n \cdot x^n = (n \cdot x)^n > 1$  não tende a zero quando  $n$  tende para o infinito. Portanto, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$  diverge, sempre que  $x \neq 0$ .

Pelo que vimos anteriormente, nos exemplos apresentados, uma série de potência,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  ou converge para todo valor de  $x$ , ou converge somente se  $x = 0$ , ou existe  $R > 0$ , tal que a série é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$ , para os quais  $|x| < R$ . Em se tratando de convergência, estas são as únicas possibilidades para uma série de potências. O teorema a seguir sintetiza tal situação.

### Teorema 3

Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  uma série de potência dada. Exatamente uma das condições seguintes é válida:

- a)** série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  converge somente quando  $x = 0$ ;
- b)** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$ ;
- c)** existe um número real positivo  $R > 0$ , tal que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  seja absolutamente convergente para todos os valores de  $x$ , para os quais  $|x| < R$ , e seja divergente para todos os valores de  $x$ , para os quais  $|x| > R$ .

### Demonstração

- a)** Já comentamos anteriormente o caso em que  $x = 0$ .
- b)** Suponha que a série seja convergente para algum  $x_0 \neq 0$ . Agora, segue do teorema 1 que ela é absolutamente convergente para todo  $x$  para os quais  $|x| < |x_0|$ . Se, além disso, não existir qualquer valor de  $x$  para o qual a série diverge, concluímos que a série dada é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$ .
- c)** Se a série dada converge para o valor  $x_0 \neq 0$  e se ela diverge para  $x_1$ , com  $|x_1| > |x_0|$ , então, segue pelo teorema 2, que ela diverge para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| > |x_1|$ . Logo,  $|x_1|$  é um limite superior para o conjunto de todos os valores de  $x$  para os quais a série é absolutamente convergente. Basta tomar o menor desses limites superiores,  $R$ , satisfazendo o problema. (Observe que, embora não tenhamos falado aqui, o menor desses limites superiores sempre existe. Isso é uma propriedade da reta real).

# Continuidade de séries de potências

## Teorema 4 (Teorema da continuidade)

Se  $R > 0$  e  $f$  é definida por  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  para  $|x| < R$ , então,  $f$  é contínua para  $|x| < R$ .

## Demonstração

Seja  $x_0$  um número qualquer tal que  $|x_0| < R$ , isto é,  $-R < x_0 < R$ ; queremos mostrar que  $f$  é contínua em  $x_0$ . Em outras palavras, devemos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Para isso, observe que:  $|f(x) - f(x_0)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n - x_0^n) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x^n - x_0^n|.$

Agora, aplicamos o Teorema do Valor Médio para derivadas à função  $g(x) = x^n$ , que nos dá a relação

$$g(x) - g(x_0) = g'(c)(x - x_0),$$

com  $c$  um número entre  $x$  e  $x_0$ , que é o mesmo que

$$x^n - x_0^n = n c_n^{n-1} (x - x_0),$$

com  $c_n$  um número entre  $x$  e  $x_0$ .

O índice  $n$  foi colocado em  $c$  para identificar o expoente particular da função  $g(x) = x^n$ . Podemos, também, escrever que:  $|x^n - x_0^n| = n |c_n|^{n-1} |x - x_0|.$

Desse modo, encontramos que  $|f(x) - f(x_0)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n |c_n|^{n-1} |x - x_0|.$

Como  $x$  está no intervalo de convergência, existe um  $x_1$  tal que  $|c_n| < x_1$  para todo  $n$ . Deduzimos que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \sum_{n=0}^{\infty} n |a_n| x_1^{n-1}.$$

Pelo teorema 5 que veremos a seguir, podemos concluir que a série na expressão acima converge; chamemos sua soma de  $K$ . Então, temos:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \cdot K.$$

Quando  $x$  tende a  $x_0$ , o segundo membro da desigualdade anterior tende a zero, e, desse modo,  $f(x)$  tende a  $f(x_0)$ . Ou seja,  $f(x)$  é contínua em  $x_0$ .

## Diferenciação e integração de séries de potências

### Teorema 5

Seja  $R$  um número real positivo. Se a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge para todo  $x$  satisfazendo  $|x| < R$ , então a série obtida, a partir da série acima, pela diferenciação termo a termo, converge absolutamente para  $|x| < R$ .

### Demonstração

A série obtida a partir da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  pela diferenciação termo a termo é  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ .

Escolha qualquer valor de  $x$ , tal que  $|x| < R$ , e escolha  $x_1$  de modo que  $|x| < |x_1| < R$ . Como a série converge quando  $x = x_1$ , temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_1^n = 0$ , logo existe um número positivo  $M$  com a propriedade  $|a_n x_1^n| \leq M$  para todo  $n$ .

Temos a relação

$$|n a_n x^{n-1}| = \left| n a_n \frac{x^{n-1}}{x_1^n} \cdot x_1^n \right| = n |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1} \leq n \frac{M}{x_1} \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1}.$$

Agora, podemos aplicar o teste da comparação à série  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ . A série

$\frac{M}{x_1} \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1}$  converge pelo teste da razão, uma vez que  $\left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$ . Desse modo,

a série  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$  também converge. Desde que  $x$  é um número qualquer no intervalo  $(-R, R)$ , o intervalo de convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$  é o mesmo que o da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

## Exemplo 2

A relação  $\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \text{cos } x$  pode ser verificada diferenciando-se termo a termo a série

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\frac{d}{dx} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \text{cos } x.$$

A convergência em um ou em ambos os pontos extremos do intervalo de convergência de uma série de potências pode ser perdida no processo de diferenciação. Por isso, o Teorema 1 menciona apenas o intervalo aberto  $(-R, R)$ .

## Exemplo 3

Encontre os intervalos de convergência da série de potências  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ .

### Solução

Aplicando o teste da razão para convergência absoluta, temos

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{(x-2)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ |x-2| \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \right] = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^2, \end{aligned}$$

que é o mesmo que:

$$R = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 = |x-2| \cdot 1 = |x-2|.$$

Logo, a série converge absolutamente para  $|x-2| < 1$ , isto é,  $-1 < x-2 < 1$ , ou ainda  $1 < x < 3$ . A série diverge para  $x > 3$  ou  $x < 1$ .

Para concluir, falta examinar o que acontece se  $x = 3$  ou  $x = 1$ .

Se  $x = 3$ , a série dada é igual a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots < \infty,$$

pois a série é uma série convergente, conforme vimos na aula sobre séries numéricas.

Se  $x = 1$ , a série dada é igual a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots,$$

que é uma série que converge absolutamente.

Portanto, o intervalo de convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$  é  $I = [1, 3]$  e o raio de convergência é 1, pois o centro do intervalo é 2.



## Atividade 1

Encontre os intervalos de convergência das séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  e  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Teorema 6 (Teorema da integração termo a termo)

Seja  $R$  um número real positivo. Se a série  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge para  $|x| < R$ , definimos  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

Então, a série  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  converge se  $|x| < R$ .

### Demonstração

Seja  $x$  um número qualquer com  $|x| < R$ . Escolha  $x_1$  de modo que  $|x| < |x_1| < R$ . Observamos que, para qualquer  $n$ , a integral seguinte é facilmente calculada:

$$\int_0^x a_n t^n dt = \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Assim,  $F(x) - \sum_{n=0}^N a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \left[ f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right] dt$ . Mas, agora,

$$f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=0}^N a_n t^n = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n t^n.$$

Para todo  $t$  tal que  $-|x| < t < |x|$ , temos

$$\left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| |x|^n$$
$$\left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| |t|^n.$$

Uma vez que a série  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge absolutamente em  $x$ , o lado direito da desigualdade anterior tende a zero quando  $N \rightarrow \infty$ . Então, concluímos que

$$\left| F(x) - \sum_{n=0}^N a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| \leq \int_a^x \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| |t|^n \right) dt = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \frac{|x|^{n+1}}{n+1} = |x| \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \frac{|x|^n}{n+1}.$$

Se  $N \rightarrow \infty$ , o lado direito da desigualdade acima tende a zero o que resulta em

$$F(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0.$$

Portanto,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

## Teorema 7

Sejam  $R$  um número real positivo e  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , convergente para  $|x| < R$ . Então,  $f$  tem derivadas contínuas de todas as ordens para  $|x| < R$ , que são dadas por séries obtidas através de sucessivas derivações termo a termo de  $f(x)$ , isto é:  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ,  $f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ , ...

## Demonstração

O fato que  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  converge para  $|x| < R$  foi mostrado no Teorema 5. Devemos mostrar que  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  é a derivada de  $f$ . O Teorema 4 estabelece o fato que  $g$  é contínua. Então, integrando a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  termo a termo, temos

$$\begin{aligned}\int_0^x g(t) dt &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} dt, \\ \int_0^x g(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n a_n t^{n-1} dt, \\ \int_0^x g(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n t^n]_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0.\end{aligned}$$

Isto é,

$$f(x) = a_0 + \int_0^x g(t) dt.$$

O Teorema Fundamental do Cálculo assegura que

$$f'(x) = g(x),$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

que é o resultado que estávamos querendo estabelecer.



## Exemplo 4

A série  $f(t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$  converge no intervalo aberto  $-1 < t < 1$ . Portanto,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \left[ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \right]_0^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

para  $-1 < x < 1$ .

Como sabemos do Cálculo I (série de Taylor), essa série também converge em  $x = 1$  o que não foi garantido pelo teorema 3.



## Atividade 2

Use séries de potências para verificar que:

a)  $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

b)  $\int_0^x \cos t \, dt = \operatorname{sen} x$

a)

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

b)

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

# Resumo

Nesta aula, estudamos as **séries de potências**, seus intervalos de convergência, raios de convergência e, também, continuidade, diferenciação e integração de funções definidas por séries de potências.

## Autoavaliação

1

Suponha que a função  $f$  esteja representada pela série de potências

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{2^n} + \dots$$

Encontre o intervalo de convergência de  $f$  e encontre os valores de  $f(0)$  e  $f(1)$ .

2

Considere a função definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + \dots$$

Encontre o intervalo de convergência da função  $J_0(x)$ , isto é, encontre o domínio da função  $J_0(x)$ .



A função  $J_0(x)$  é chamada de função de Bessel de ordem zero e originalmente é definida como uma série de potências, não tendo outra representação, através de funções já conhecidas.

3

Considere a função definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1}(n!)(n+1)!} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3(1!)(2!)} + \frac{x^5}{2^5(2!)(3!)} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1}(n!)(n+1)!} + \dots$$

Ache o intervalo de convergência da função  $J_1(x)$ , isto é, encontre o domínio da função  $J_1(x)$ .



A função  $J_1(x)$  é chamada de função de Bessel de ordem um e originalmente é definida como uma série de potências, não tendo outra representação.

## Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000. v 2.

FINEY, Ross L.; GIORDANO, Frank R.; WEIR, Maurice D. **Cálculo de George B. Thomas**. São Paulo: Addison-Wesley, 2003. v 2.

LANG, Serge. **Calculus of several variables**. 3th ed. New York: Springer, 1987.

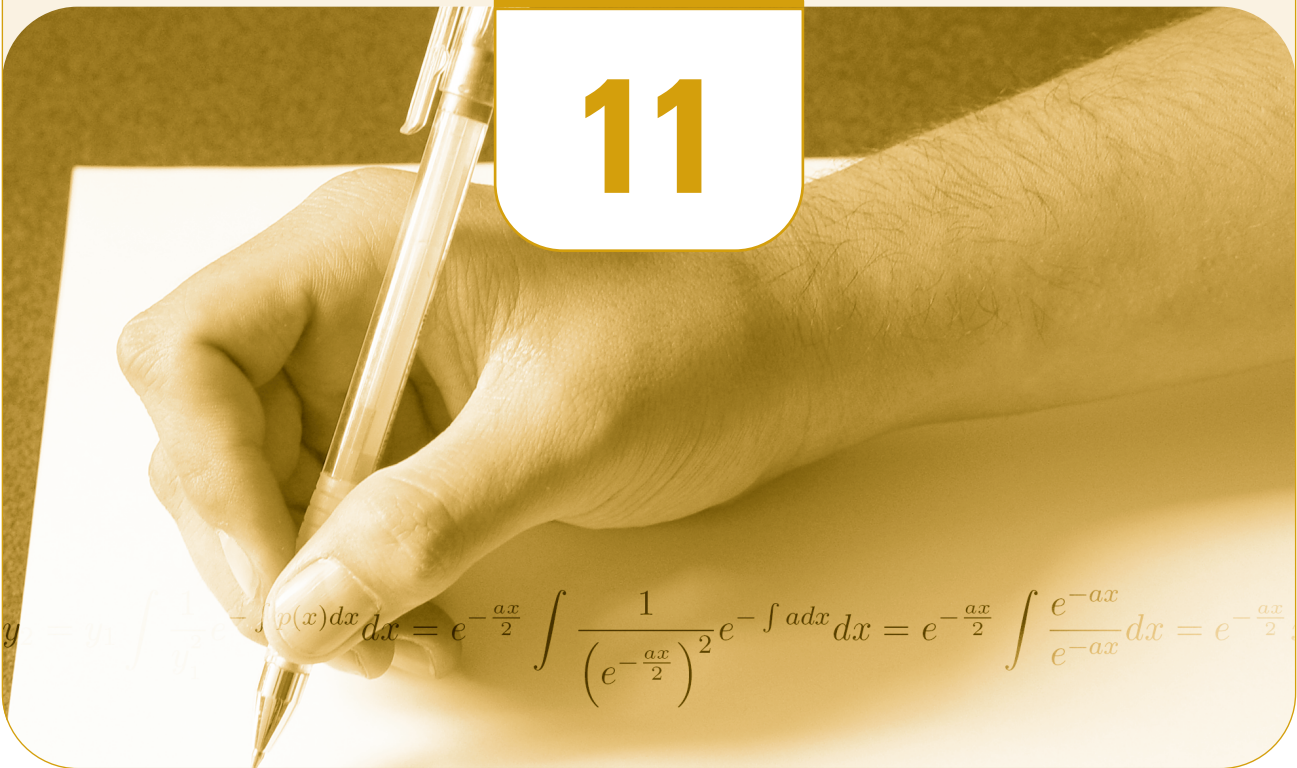
LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Harbra, 1982. v 2.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: MacGraw-Hill, 1985. v 2.

# Equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem

Aula

11



$y = u \int \frac{1}{x} e^{-\int p(x) dx} dx = e^{-\frac{ax}{2}} \int \frac{1}{\left(e^{-\frac{ax}{2}}\right)^2} e^{-\int a dx} dx = e^{-\frac{ax}{2}} \int \frac{e^{-ax}}{e^{-ax}} dx = e^{-\frac{ax}{2}}$

# Apresentação

As equações diferenciais ordinárias (EDO) são subdivididas em dois grandes grupos: as lineares e as não lineares. As equações diferenciais ordinárias de segunda ordem lineares destacam-se em importância devido às inúmeras aplicações práticas, como, por exemplo, em mecânica e eletricidade, e à facilidade de encontrar métodos de solução. As equações diferenciais ordinárias de ordem superior a dois não serão abordadas nesta aula, primeiro, porque tem poucas aplicações práticas e, segundo, porque facilmente os métodos de resolução das equações de segunda ordem se adaptam às de ordens superiores. As diferenciais ordinárias de segunda ordem lineares aplicam-se em modelagem de circuitos elétricos, vibração elétrica e mecânica.

Assim, nesta aula, estudaremos exclusivamente as equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem e, nesse contexto, caso homogêneo com coeficientes constantes, redução de ordem quando se conhece uma solução, caso não homogêneo, métodos dos coeficientes indeterminados e de variação dos parâmetros. Encontraremos as soluções gerais e particulares e resolveremos também o **Problema de Valor Inicial (PVI)**.

Tente entender tudo o que está sendo explicado na aula. Estude utilizando sempre caneta e papel para as anotações necessárias. Seja paciente e procure ter certeza de que entendeu o que (e por que) está desenvolvendo nas atividades. Ao final da aula, há uma auto-avaliação: é importante que você tente fazê-la, como forma de saber se você atingiu os objetivos da aula.

$$v_1 = - \int \frac{r(x)y_2}{y_1y_2 - y_1'y_2} dx,$$

$$v_2 = \int \frac{r(x)y_1}{y_1y_2 - y_1'y_2} dx.$$

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a + \sqrt{(4b - a^2)(-1)}}{2} = \frac{-a + i\sqrt{(4b - a^2)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a - i\sqrt{(4b - a^2)}}{2}$$

$$-1 = C_1 \cdot \text{sen}(\pi) + C_2 \cos(\pi) = C_1 \cdot 0 + C_2(-1)$$

$$1 = C_1 \cdot \cos(\pi) - C_2 \text{sen}(\pi) = C_1(-1) - C_2 \cdot 0$$

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(x) + g(x)) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) + \frac{d^n}{dx^n} g(x).$$

# Objetivos



- 1 Encontrar a solução geral de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes.
- 2 Resolver o Problema de Valor Inicial (PVI) de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem.
- 3 Reduzir a ordem de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem quando se conhece uma solução.
- 4 Encontrar uma solução particular de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem não homogênea.
- 5 Encontrar a solução geral de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem não homogênea.

## EDO linear de segunda ordem

Uma equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem é **linear**, se ela pode ser escrita na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

onde  $p(x)$ ,  $q(x)$  e  $r(x)$  podem ser quaisquer funções. As funções  $p(x)$  e  $q(x)$  são chamadas de coeficientes.

São ditas **não lineares** as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que não podem ser escritas na forma anterior.

Quando  $r(x) = 0$ , dizemos que a EDO  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  é **homogênea**.

Portanto, uma EDO de segunda ordem linear homogênea tem a forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Quando  $r(x) \neq 0$ , dizemos que a EDO é **não homogênea**.

A seguir, temos alguns exemplos de EDO de segunda ordem linear homogênea:

**a)**  $y'' + xy' = 0$ ;

**b)**  $\text{sen}(x)y'' + xy' + y = 0$ .

Veja, a seguir, exemplos de EDO de segunda ordem linear não homogênea:

**a)**  $y'' + xy' = 1$ ;

**b)**  $\text{sen}(x)y'' + xy' + y = x^2$ .

Como você já viu em Cálculo I, uma função  $f(x)$  é solução de uma EDO, se considerarmos  $y = f(x)$  e ao substituirmos as expressões de  $y$  e suas derivadas na EDO, obtivermos uma identidade.

## Exemplo 1

Verificar que  $\text{sen}(x)$  e  $\text{cos}(x)$  são soluções da EDO  $y'' + y = 0$ .

### Solução

**a)**  $y = \text{sen}(x)$ ,

$$y' = \text{cos}(x),$$

$$y'' = -\text{sen}(x).$$

Substituindo na EDO, obtemos  $-\text{sen}(x) + \text{sen}(x) = 0$ . Portanto,  $\text{sen}(x)$  é uma solução da EDO  $y'' + y = 0$ ;

**b)**  $y = \text{cos}(x)$ ,

$$y' = -\text{sen}(x),$$

$$y'' = -\text{cos}(x).$$

Substituindo na EDO, obtemos  $-\text{cos}(x) + \text{cos}(x) = 0$ . Portanto,  $\text{cos}(x)$  é uma solução da EDO  $y'' + y = 0$ .

# EDO linear de segunda ordem homogênea

Estas EDO's têm propriedades importantes que facilitam a determinação das soluções.

## Linearidade das soluções

Se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da EDO linear de segunda ordem homogênea, então, a combinação linear  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  também é solução.

Essa propriedade, denominada de **linearidade**, decorre do fato de que a derivada de qualquer ordem satisfaz as propriedades:

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x) + g(x)) = \frac{d^n}{dx^n}f(x) + \frac{d^n}{dx^n}g(x),$$
$$\frac{d^n}{dx^n}(cf(x)) = c\frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

onde  $c$  é número real.

Não é difícil provar essa propriedade de linearidade das soluções, no entanto, preferimos mostrar que ela é verdadeira a partir de alguns exemplos.

## Exemplo 2

Como foi visto no exemplo 1,  $\text{sen}(x)$  e  $\text{cos}(x)$  são soluções da EDO  $y'' + y = 0$ . Logo, pela propriedade de linearidade das soluções, temos que  $C_1 \text{sen}(x) + C_2 \text{cos}(x)$  também é solução.

## Solução

Tomando

$$y = C_1 \text{sen}(x) + C_2 \text{cos}(x),$$
$$y' = C_1 \text{cos}(x) - C_2 \text{sen}(x),$$
$$y'' = -C_1 \text{sen}(x) - C_2 \text{cos}(x),$$

e substituindo na EDO, obtemos

$$-C_1 \text{sen}(x) - C_2 \text{cos}(x) + C_1 \text{sen}(x) + C_2 \text{cos}(x) = 0,$$
$$-\text{sen}(x)(-C_1 + C_1) + \text{cos}(x)(-C_2 + C_2) = 0, \quad 0 = 0.$$

Portanto,  $C_1 \text{sen}(x) + C_2 \text{cos}(x)$  é uma solução da EDO  $y'' + y = 0$ .

# Solução geral de uma EDO linear de segunda ordem homogênea

Dizemos que duas funções  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente independentes, se  $C_1y_1 + C_2y_2 = 0$ , onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes reais, então  $C_1 = C_2 = 0$ .

Portanto, se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da EDO  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ , com  $y_1$  e  $y_2$  linearmente independentes, então, a combinação linear  $y = C_1y_1 + C_2y_2$  também é uma solução da EDO, denominada de **solução geral**.

Esse nome, solução geral, decorre do fato de que qualquer outra solução é obtida a partir da solução geral, dependendo da escolha adequada de  $C_1$  e  $C_2$ .

Usualmente, essas constantes são denominadas de **constantes arbitrárias**.

## Problema do valor inicial em uma EDO linear de segunda ordem

Na seção anterior, vimos que a solução geral de uma EDO de segunda ordem tem duas constantes arbitrárias. Quando procuramos resolver um problema prático, a função procurada, além de ser solução da EDO, deve satisfazer duas condições específicas.

Um problema de valor inicial em uma EDO linear de segunda ordem consiste de uma EDO

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

e de duas condições iniciais  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0$ .

Observe que o problema do valor inicial independe da EDO linear ser homogênea ou não. Resolver esse problema é encontrar uma solução da EDO que satisfaça as duas condições iniciais.

Conhecendo-se uma solução geral  $y$  da EDO, o método de resolver o problema do valor inicial consiste de:

- derivar a solução geral  $y$  para obter uma forma geral de  $y'$ ;
- substituir  $x_0$ ,  $y_0$  e  $y'_0$  em  $y$  e  $y'$ , obtendo um sistema de duas equações com duas incógnitas;
- resolver o sistema e determinar a solução particular do problema de valor inicial.

Para ilustrar, faremos o exemplo 3.

## Exemplo 3

Resolver o problema de valor inicial (PVI):  $y'' + y = 0$ ,  $y(\pi) = -1$ ,  $y'(\pi) = 1$ .

### Solução

Pelo que vimos no exemplo 2, podemos concluir que a solução geral dessa EDO é

$$y = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \operatorname{cos}(x).$$

Vamos calcular a derivada  $y'$ ,

$$y' = C_1 \operatorname{cos}(x) - C_2 \operatorname{sen}(x).$$

Aplicando as condições iniciais, temos

$$y(\pi) = C_1 \operatorname{sen}(\pi) + C_2 \operatorname{cos}(\pi)$$

$$y'(\pi) = C_1 \operatorname{cos}(\pi) - C_2 \operatorname{sen}(\pi)$$

Substituindo os valores  $x_0 = \pi$ ,  $y(\pi) = y_0 = -1$  e  $y'(\pi) = y'_0 = 1$  em  $y$  e  $y'$ , obtemos

$$-1 = C_1 \cdot \operatorname{sen}(\pi) + C_2 \operatorname{cos}(\pi) = C_1 \cdot 0 + C_2(-1)$$

$$1 = C_1 \cdot \operatorname{cos}(\pi) - C_2 \operatorname{sen}(\pi) = C_1(-1) - C_2 \cdot 0$$

Concluimos, então, que  $C_1 = -1$ ,  $C_2 = 1$ .

Substituindo tais valores em  $y = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \operatorname{cos}(x)$ , encontramos a solução do PVI  $y = -\operatorname{sen}(x) + \operatorname{cos}(x)$ .



## Atividade 1

1

Resolva o problema de valor inicial  $y'' + y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ .

2

Resolva o problema de valor inicial  $y'' + y = 0$ ,  $y(\pi/4) = -1$ ,  $y'(\pi/4) = 1$ .

# Redução da ordem de uma EDO linear homogênea quando se conhece uma solução

Dada uma EDO da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

e já se conhece uma solução  $y_1$ , isto é,

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0.$$

Procuremos uma outra solução da forma  $y_2 = uy_1$ , onde  $u$  é uma função a se determinar, substituindo  $y_2$  e suas derivadas na EDO.

Calculemos as derivadas

$$y_2 = uy_1$$

$$y_2' = u'y_1 + uy_1'$$

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

Substituindo na EDO dada, obtemos

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + p(x)(u'y_1 + uy_1') + q(x)uy_1 = 0$$

$$u''y_1 + u'(2y_1' + p(x)y_1) + u(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) = 0$$

$$u''y_1 + u'(2y_1' + p(x)y_1) + u \cdot 0 = 0$$

Dividindo por  $y_1$ , obtemos

$$u'' + u' \left( 2\frac{y_1'}{y_1} + p(x) \right) = 0,$$

que é uma EDO de segunda ordem, mas, como falta o termo em  $u$ , fazendo  $v = u'$  e derivando, obtemos  $v' = u''$ . Substituindo  $u'$  e  $u''$  nesta última EDO, temos

$$v' + v \left( 2\frac{y_1'}{y_1} + p(x) \right) = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = -v \left( 2\frac{y_1'}{y_1} + p(x) \right),$$

$$\frac{dv}{v} = - \left( 2\frac{y_1'}{y_1} + p(x) \right) dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \left( 2\frac{y_1'}{y_1} + p(x) \right) dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int \frac{y_1'}{y_1} dx - \int p(x) dx$$

$$\ln |v| = -2 \ln |y_1| - \int p(x) dx,$$

$$v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx}$$

e  $u = \int v dx$ , logo,

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx.$$

Portanto, a segunda solução é

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx.$$

## Exemplo 4

Verificar que  $y_1 = x$  é uma solução da EDO  $(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$  e encontrar uma segunda solução.

### Solução

Para verificar que  $y_1 = x$  é uma solução da EDO, inicialmente, calculamos as derivadas

$$y_1 = x,$$

$$y_1' = 1,$$

$$y_1'' = 0.$$

Substituindo na EDO, obtemos

$$(x^2 - x)0 - x1 + x = 0,$$

$$0 = 0.$$

Portanto,  $y_1 = x$  é uma solução da EDO.

Vamos agora determinar a segunda solução usando a fórmula

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx,$$

aplicável a uma EDO na forma  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ .

Vamos transformar a EDO  $(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$  dividindo pelo coeficiente de  $y''$  que é  $(x^2 - x)$ , obtendo, assim, a EDO na forma

$$y'' - \frac{x}{x^2 - x}y' + \frac{1}{x^2 - x}y = 0.$$

Agora, podemos aplicar a fórmula

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx,$$

onde

$$p(x) = -\frac{x}{x^2 - x},$$

$$\int p(x)dx = -\int \frac{x}{x^2 - x} dx.$$

Vamos, então, calcular

$$-\int p(x)dx = \int \frac{x}{x^2 - x} dx = \int \frac{1}{x - 1} dx = \ln|x - 1|.$$

Substituindo na fórmula para calcular  $y_2$ , temos

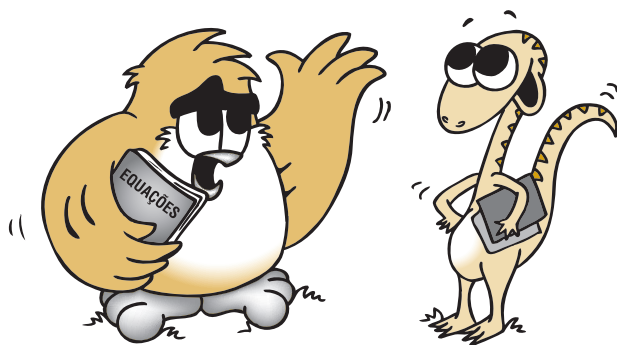
$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{\ln|x-1|} dx = x \int \frac{|x-1|}{x^2} dx.$$

Em um problema de valor inicial dependendo do  $x_0$ , se  $x_0 > 1$  o  $x$  de nossa solução também será maior que 1, de modo que  $|x - 1| = x - 1$ , e, neste caso, podemos concluir o cálculo de  $y_2$ :

$$y_2 = x \int \frac{|x-1|}{x^2} dx = x \int \frac{x-1}{x^2} dx = x \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right) = x \ln x + 1;$$

e a solução geral da EDO é

$$y = C_1 x + C_2 (x \ln x + 1).$$



# EDO linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes

Uma EDO de segunda ordem linear homogênea tem a forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Quando os coeficientes são constantes reais, reescrevemos na forma  $y'' + ay' + by = 0$ .

Já sabemos que a solução da EDO linear de primeira ordem  $y' + ay = 0$  é uma função exponencial da forma  $y = ce^{\lambda x}$ .

Esse fato nos sugere procurar soluções da forma  $y = e^{\lambda x}$  na EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes,  $y'' + ay' + by = 0$ .

Calculemos as derivadas de  $y$ :

$$\begin{aligned}y &= e^{\lambda x}, \\y' &= \lambda e^{\lambda x}, \\y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x}\end{aligned}$$

Substituindo na EDO, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} &= 0, \\(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} &= 0.\end{aligned}$$

Como  $e^{\lambda x} \neq 0$ , podemos dividir esta última por  $e^{\lambda x}$  e obtermos  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ .

Portanto,  $e^{\lambda x}$  será solução, se  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ .

A equação do segundo grau obtida, quando se substitui na EDO  $y$  por  $e^{\lambda x}$ , é denominada de **equação característica** da EDO.

Para resolver uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes, devemos encontrar as raízes da equação característica,  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ . Temos três tipos de raízes:

**1º Caso** – Duas raízes reais distintas se  $a^2 - 4b > 0$ ;

**2º Caso** – Uma raiz real dupla se  $a^2 - 4b = 0$ ;

**3º Caso** – Duas raízes complexas conjugadas se  $a^2 - 4b < 0$ .

A seguir, estudaremos esses três casos.

## Equação característica com duas raízes reais distintas

Este é o caso mais simples, quando  $a^2 - 4b > 0$ . Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos as duas raízes

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Assim, encontramos duas soluções  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$  e  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ . E a solução geral da EDO é  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ .

## Exemplo 5

Encontrar a solução geral da EDO  $y'' - 3y' + 2y = 0$ .

### Solução

A equação característica é  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$  e  $a^2 - 4b = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$  temos, então, duas raízes distintas, que são

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2} = 2$$
$$\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2} = 1$$

Portanto, a solução geral é  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$ .

## Equação característica com uma raiz real dupla

Neste caso, temos  $a^2 - 4b = 0$  e a raiz dupla é

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-a}{2}$$

Vamos procurar a outra solução usando a técnica de redução da ordem de uma EDO linear homogênea quando se conhece uma solução, já vista nesta aula.

A EDO  $y'' + ay' + by = 0$  já está na forma  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ , onde  $p(x) = a$  e  $q(x) = b$ . Portanto, a segunda solução é:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx = e^{-\frac{ax}{2}} \int \frac{1}{\left(e^{-\frac{ax}{2}}\right)^2} e^{-\int a dx} dx = e^{-\frac{ax}{2}} \int \frac{e^{-ax}}{e^{-ax}} dx = e^{-\frac{ax}{2}} x.$$

Resumindo, a outra solução é  $y_2 = xe^{-\frac{ax}{2}}$  ou, ainda,  $y_2 = xe^{\lambda x}$ ; e a solução geral é

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

## Exemplo 6

Encontrar a solução geral da EDO  $y'' - 6y' + 9y = 0$ .

### Solução

A equação característica é  $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$  e  $a^2 - 4b = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 0$ , temos, então, uma raiz dupla, que é

$$\lambda = \frac{-a}{2} = \frac{-(-6)}{2} = 3.$$

Assim,  $y_1 = e^{3x}$ ,  $y_2 = xe^{3x}$  e a solução geral é  $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ .

## Equação característica com duas raízes complexas conjugadas

Neste caso, temos  $a^2 - 4b < 0$ . Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos as duas raízes complexas

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a + \sqrt{(4b - a^2)(-1)}}{2} = \frac{-a + i\sqrt{(4b - a^2)}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a - i\sqrt{(4b - a^2)}}{2}\end{aligned}$$

Podemos escrever também que as raízes são

$$\lambda = \frac{-a \pm i\sqrt{(4b - a^2)}}{2}.$$

Encontramos, assim, duas soluções  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$  e  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ . E a solução geral da EDO é  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ .

Para simplificar a notação, podemos considerar as raízes na forma  $\lambda = p \pm qi$  e a solução geral é:

$$y = C_1 e^{(p+qi)x} + C_2 e^{(p-qi)x} = C_1 e^{px} e^{iqx} + C_2 e^{px} e^{-iqx} = e^{px} (C_1 e^{iqx} + C_2 e^{-iqx}).$$

Resumindo, a solução geral pode ser escrita na forma  $y = e^{px}(C_1 e^{iqx} + C_2 e^{-iqx})$ , a qual pode ser usada, mas, o inconveniente é que precisamos trabalhar com coeficientes complexos.

Utilizando a fórmula de Euler

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

escolhendo  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ , obtemos  $y_1 = e^{px} \cos(qx)$ ;

escolhendo  $C_1 = -\frac{i}{2}$  e  $C_2 = \frac{i}{2}$ , obtemos  $y_2 = e^{px} \sin(qx)$ .

Dando origem a uma forma de apresentar a solução geral com funções reais

$$y = e^{px}(C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx)).$$

## Exemplo 7

Encontrar a solução geral da EDO  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

### Solução

A equação característica é  $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$  e  $a^2 - 4b = (2)^2 - 4 \cdot 5 = -16 < 0$ , temos, então, duas raízes complexas, que são

$$\lambda = \frac{-a \pm i\sqrt{(4b - a^2)}}{2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{(4 \cdot 5 - 2^2)}}{2} = \frac{-2 \pm i4}{2} = -1 \pm 2i,$$

as soluções com funções reais são  $y_1 = e^{-x} \cos(2x)$ ,  $y_2 = e^{-x} \sin(2x)$ ; e a solução geral é  $y = e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$ .

O procedimento mais simples para resolver uma EDO linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes é: primeiro, achar as raízes da equação característica; em seguida, classificar em um dos três casos; e, por fim, concluir encontrando a solução geral.

A seguir, apresentamos esse modelo subdividido em quatro passos, os quais são dispensáveis, no seu passo a passo, quando o aluno tem um pouco de prática.

Dada uma EDO linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes, para encontrar a solução geral, executamos os seguintes passos:

- 1) encontrar a equação característica da EDO;
- 2) encontrar as raízes da equação característica;
- 3) de acordo com as raízes, classificar a EDO em um dos três casos;
- 4) encontrar a solução geral.

## Exemplo 8

Encontrar a solução geral da EDO  $4y'' + 4y' - 3y = 0$ .

### Solução

**Passo 1** – A equação característica é  $4\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0$ .

**Passo 2** – As raízes da equação característica são

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4(-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm 8}{8} = -\frac{1}{2} \pm 1.$$

**Passo 3** – Estamos no 1º caso com duas raízes reais distintas, onde  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  e  $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ .

**Passo 4** – Portanto, a solução geral é  $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{3x}{2}}$ .



## Atividade 2

Resolva os problemas de valor inicial:

- a)  $y'' + 2y' + y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -6$ .
- b)  $10y'' - 50y' + 65y = 0$ ,  $y(0) = 1,5$  e  $y'(0) = 1,5$ .
- c)  $y'' + 4y' + 5y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -5$ .

a) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

b) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

c) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Solução geral de uma EDO linear de segunda ordem não homogênea

Neste caso, temos uma EDO da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \text{ com } r(x) \neq 0.$$

Chamamos de EDO homogênea associada a EDO  $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$  a EDO homogênea obtida quando fazemos  $r(x) = 0$ . Assim, a EDO homogênea associada é

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Sejam  $y_p$  uma solução particular e  $y_g$  a solução geral da EDO

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

isto é,

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = r(x),$$

$$y_g'' + p(x)y_g' + q(x)y_g = r(x).$$

Verifiquemos agora que  $y = y_g - y_p$  é solução da EDO homogênea associada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Calculemos as derivadas de  $y$

$$y = y_g - y_p,$$

$$y' = y_g' - y_p',$$

$$y'' = y_g'' - y_p''.$$

Substituindo na EDO homogênea associada, obtemos

$$\begin{aligned} y_g'' - y_p'' + p(x)(y_g' - y_p') + q(x)(y_g - y_p) &= \\ y_g'' + p(x)y_g' + q(x)y_g - (y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p) &= \\ r(x) - r(x) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $y = y_g - y_p$  é uma solução da EDO homogênea associada, que é a solução geral da EDO homogênea associada. Devido a esse fato, vamos substituir  $y$  por  $y_{gh}$ , ficando, então:

$$y_{gh} = y_g - y_p,$$

e mais

$$y_g = y_{gh} + y_p.$$

Esta última fórmula define a solução geral da EDO linear de segunda ordem não homogênea.

Resumindo: se  $y_{gh}$  é a solução geral da EDO homogênea associada,  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ , e  $y_p$  é uma solução particular da EDO linear de segunda ordem não homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

Então, a solução geral de  $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$  é:

$$y_g = y_{gh} + y_p.$$

A seguir, veremos como encontrar uma solução particular da EDO.

## Solução particular de uma EDO linear de segunda ordem não homogênea

Para resolver a EDO linear de segunda ordem não homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

vimos, na seção “Solução geral de uma EDO linear de segunda ordem”, que precisamos determinar inicialmente  $y_{gh}$ , solução geral da EDO homogênea associada,  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  e  $y_p$ , uma solução particular da EDO  $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ .

Para determinar a solução geral de uma EDO homogênea, já estudamos alguns casos. Veremos agora dois métodos para encontrar uma solução particular da EDO: dos coeficientes a determinar e da variação dos parâmetros.

### Método dos coeficientes a determinar

Este método para determinar uma solução particular de uma EDO linear é o mais simples, mas, nem sempre podemos usá-lo. Primeiro, ele só se aplica a EDO linear com coeficientes constantes. Segundo, mesmo com coeficientes constantes, ele não se aplica a muitos casos.

Devido a sua simplicidade e a ter menos cálculos que os outros, este método é considerado muito importante.

Uma EDO de segunda ordem linear tem a forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Quando os coeficientes são constantes reais, reescrevemos na forma

$$ay'' + by' + cy = r(x).$$

O método consiste em, ao observarmos a forma de  $r(x)$ , a partir da nossa experiência ou do auxílio de uma tabela, identificarmos  $y_p$  candidato, a menos de uma ou mais constantes a determinar. Substituímos  $y_p$  e suas derivadas na EDO e determinamos as constantes.

Por exemplo, se temos a EDO com coeficientes constantes e  $r(x) = ke^{ax}$ , onde  $k$  e  $a$  são constantes da EDO, o  $y_p$  candidato é  $y_p = Ce^{ax}$ , onde  $C$  é uma constante a determinar.

## Exemplo 9

Encontrar a solução particular da EDO  $y'' + 2y' - 3y = 5e^{4x}$ .

### Solução

Temos um caso como o exposto anteriormente, onde  $r(x) = 5e^{4x}$  e o  $y_p$  candidato à solução é  $y_p = Ce^{4x}$ .

Calculemos agora suas derivadas,

$$\begin{aligned}y_p &= Ce^{4x}, \\y'_p &= 4Ce^{4x}, \\y''_p &= 16Ce^{4x}.\end{aligned}$$

Substituindo na EDO, obtemos

$$\begin{aligned}16Ce^{4x} + 2(4Ce^{4x}) - 3Ce^{4x} &= 5e^{4x}, \\(16 + 8 - 3)Ce^{4x} &= 5e^{4x}, \\C &= \frac{5}{21}.\end{aligned}$$

Substituindo esse valor em  $y_p = Ce^{4x}$ , encontramos a solução  $y_p = \frac{5}{21}e^{4x}$ .

Observe no exemplo 9 que, se  $y_p$  fosse solução da EDO homogênea associada, não poderíamos encontrar a solução, pois quando substituíssemos  $y_p$  e suas derivadas na EDO, obteríamos  $0 = 5e^{4x}$ , o que impossibilitaria determinar a solução. Este caso será tratado ainda nesta seção.

A seguir, vamos apresentar uma tabela que ajuda a identificar os  $y_p$  candidatos a partir do conhecimento de  $r(x)$ .

**Tabela 1** - Candidatos à solução da EDO, dado  $r(x)$ .

Para $r(x)$	$y_p(x)$ candidato
$ke^{ax}$	$Ce^{ax}$
$k_0+k_1x+\dots+k_nx^n$	$C_0+C_1x+\dots+C_nx^n$
$k_0+k_1x+k_2x^2+\dots$	$C_0+C_1x+C_2x^2+\dots$
$k_1\cos wx+k_2\sin wx$	$C_1\cos wx+C_2\sin wx$
$k_1e^{ax}\cos wx+k_2e^{ax}\sin wx$	$C_1e^{ax}\cos wx+C_2e^{ax}\sin wx$

Dada a EDO  $ay'' + by' + cy = r(x)$ , se  $r(x)$  é da forma de alguma célula da coluna à esquerda, toma-se como candidato à solução particular o  $y_p(x)$  na célula correspondente da coluna à direita e substitui-se ele e suas derivadas na EDO, para determinar os  $C$ 's que tornam a EDO uma identidade.

Se  $y_p$  for uma solução da EDO homogênea associada, não poderíamos encontrar a solução, pois quando substituíssemos  $y_p$  e suas derivadas na EDO, obteríamos  $0 = r(x)$ , o que impossibilitaria determinar a solução. Neste caso, substitui-se  $y_p(x)$  por  $x y_p(x)$  e substitui-se o novo  $y_p$  e suas derivadas na EDO.

## Exemplo 10

Encontrar a solução geral da EDO  $y'' + 2y' - 3y = 2\sin(3x) + 4\cos(3x)$ .

### Solução

Precisamos determinar  $y_{gh}$ , a solução geral da EDO homogênea associada,

$$y'' + 2y' - 3y = 0,$$

e  $y_p$  uma solução particular da EDO.

Inicialmente, vamos determinar  $y_{gh}$ .

**Passo 1** – A equação característica é  $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ .

**Passo 2** – As raízes da equação característica são

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2.$$

**Passo 3** – Estamos no 1º caso com duas raízes reais distintas, onde  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -3$ .

**Passo 4** – Portanto, a solução geral da EDO homogênea associada é  $y_{gh} = C_1e^x + C_2e^{-3x}$ .

Agora, vamos determinar  $y_p$ .

Olhando a tabela, vemos que  $r(x) = 2\text{sen}(3x) + 4\text{cos}(3x)$  se adapta na quinta linha com  $k_1 \cos wx + k_2 \text{sen} wx$ , onde  $k_1 = 2$ ,  $w = 3$  e  $k_2 = 4$ . Portanto, o  $y_p$  candidato é  $y_p = C_1 \cos(wx) + C_2 \text{sen}(wx) = C_1 \cos(3x) + C_2 \text{sen}(3x)$ .

Calculemos agora suas derivadas,

$$y_p = C_1 \cos(3x) + C_2 \text{sen}(3x),$$

$$y'_p = -C_1 3\text{sen}(3x) + C_2 3\text{cos}(3x),$$

$$y''_p = -C_1 9\text{cos}(3x) - C_2 9\text{sen}(3x).$$

Substituindo na EDO  $y'' + 2y' - 3y = 2\text{sen}(3x) + 4\text{cos}(3x)$ , obtemos

$$-C_1 9\text{cos}(3x) - C_2 9\text{sen}(3x) + 2(-C_1 3\text{sen}(3x) + C_2 3\text{cos}(3x))$$

$$-3(C_1 \cos(3x) + C_2 \text{sen}(3x)) = 2\text{sen}(3x) + 4\text{cos}(3x)$$

$$\text{sen}(3x)(-9C_2 - 6C_1 - 3C_2) + \text{cos}(3x)(-9C_1 + 6C_2 - 3C_1) = 2\text{sen}(3x) + 4\text{cos}(3x),$$

$$\text{sen}(3x)(-6C_1 - 12C_2) + \text{cos}(3x)(-12C_1 + 6C_2) = 2\text{sen}(3x) + 4\text{cos}(3x).$$

Para que o primeiro membro seja idêntico ao segundo, como em identidade de polinômios, é necessário que os coeficientes  $\text{sen}(3x)$  e  $\text{cos}(3x)$  sejam iguais, isto é,

$$-6C_1 - 12C_2 = 2,$$

$$-12C_1 + 6C_2 = 4.$$

Vamos resolver esse sistema. Multiplicando a segunda linha por 2 e somando com a primeira, obtemos

$$-30C_1 - 0 = 10,$$

$$C_1 = -\frac{10}{30} = -\frac{1}{3},$$

substituindo  $C_1$  em uma das equações do sistema, obtemos  $C_2 = 0$ .

Como a solução particular da EDO  $y'' + 2y' - 3y = 2\text{sen}(3x) + 4\text{cos}(3x)$  é

$$y_p = -\frac{1}{3}\text{cos}(3x),$$

e a solução geral da EDO homogênea associada  $y'' + 2y' - 3y = 0$  é

$$y_{gh} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x},$$

a solução geral da EDO  $y'' + 2y' - 3y = 2\text{sen}(3x) + 4\text{cos}(3x)$  é

$$y_g = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{3}\text{cos}(3x).$$

# Método da variação dos parâmetros

Este método de determinar uma solução particular de uma EDO linear é o mais geral, pois, sempre podemos usá-lo. Ele se aplica a qualquer EDO linear em que se conheça uma solução geral da EDO homogênea associada.

Devido a sua generalidade, embora muitas vezes tenha mais cálculos que os outros, esse método é considerado muito importante.

Consideremos uma EDO de segunda ordem linear escrita na forma geral

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Consideremos também que  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente independentes e soluções da EDO homogênea associada  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ , então, a combinação linear,

$$y_{gh} = C_1y_1 + C_2y_2,$$

é uma solução geral da EDO homogênea associada.

O método de variação dos parâmetros consiste em tomar como candidato à solução particular

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2,$$

onde substituímos as constantes arbitrárias por dois parâmetros a determinar.

Observe que, para determinar os dois parâmetros, substitui-se  $y_p$  e suas derivadas na EDO. Como temos dois parâmetros a determinar e uma só equação, podemos incluir uma equação a mais. Para que os parâmetros tenham um comportamento parecido com o das constantes, incluímos a equação

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0.$$

Calculamos as derivadas de  $y_p$ ,

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2,$$

$$y_p' = v_1y_1' + v_2y_2' + v_1'y_1 + v_2'y_2 = v_1y_1' + v_2y_2' + 0,$$

$$y_p'' = v_1y_1'' + v_2y_2'' + v_1'y_1' + v_2'y_2'.$$

Substituindo na EDO  $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ , obtemos

$$v_1y_1'' + v_2y_2'' + v_1'y_1' + v_2'y_2' + p(x)(v_1y_1' + v_2y_2') + q(x)(v_1y_1 + v_2y_2) = r(x),$$

$$v_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + v_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) + v_1'y_1' + v_2'y_2' = r(x),$$

$v_1(0) + v_2(0) + v_1'y_1' + v_2'y_2' = r(x)$ , pois  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da EDO homogênea,

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = r(x).$$

Esta última equação, mais a equação  $v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$ , dá origem ao sistema linear

$$\begin{aligned}v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0 \\v_1'y_1' + v_2'y_2' &= r(x).\end{aligned}$$

A solução desse sistema é

$$\begin{aligned}v_1' &= -\frac{r(x)y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}, \\v_2' &= \frac{r(x)y_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}.\end{aligned}$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned}v_1 &= -\int \frac{r(x)y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2} dx, \\v_2 &= \int \frac{r(x)y_1}{y_1y_2' - y_1'y_2} dx.\end{aligned}$$

## Exemplo 11

Use o método de variação dos parâmetros para encontrar a solução particular da EDO  $y'' + 2y' - 3y = 5e^{4x}$ .

### Solução

Precisamos determinar  $y_{gh}$  a solução geral da EDO homogênea associada,

$$y'' + 2y' - 3y = 0,$$

que é a mesma EDO do exemplo 9.

Agora, temos um caso como o exposto anteriormente, onde  $r(x) = 5e^{4x}$  e o  $y_p$  candidato é  $y_p = Ce^{4x}$ .

Calculemos agora suas derivadas,

$$\begin{aligned}y_p &= Ce^{4x}, \\y_p' &= 4Ce^{4x}, \\y_p'' &= 16Ce^{4x}.\end{aligned}$$

Substituindo na EDO, obtemos

$$\begin{aligned}16Ce^{4x} + 2(4Ce^{4x}) - 3Ce^{4x} &= 5e^{4x}, \\(16 + 8 - 3)Ce^{4x} &= 5e^{4x}, \\C &= \frac{5}{21}.\end{aligned}$$

Substituindo esse valor em  $y_p = Ce^{4x}$ , encontramos a solução  $y_p = \frac{5}{21}e^{4x}$ .

# Resumo

Nesta aula, estudamos as equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem, examinando vários de seus métodos de solução. Como vimos, as equações diferenciais ordinárias podem ser divididas em duas grandes classes: equações lineares e equações não lineares. As equações lineares são mais simples do que as não lineares, devido às suas propriedades, além disso, servem de modelo para a resolução de inúmeros problemas práticos. Inicialmente, consideramos a equação diferencial linear de segunda ordem homogênea e, em seguida, a não homogênea. Trabalhamos apenas as de segunda ordem, sem abordar os casos de ordem superior por dois motivos: primeiro, devido às inúmeras aplicações práticas, em mecânica e eletricidade, e à facilidade de encontrar métodos de solução. Segundo, porque facilmente se adaptam os métodos de segunda ordem para ordens superiores.

## Autoavaliação

1

Nos itens seguintes, resolva os problemas de valor inicial, verifique se sua solução satisfaz a EDO e verifique os valores iniciais.

**a)**  $y'' + y' - 6y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 10$

**b)**  $y'' + 4y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$

**c)**  $y'' - k^2y = 0$ , ( $k \neq 0$ )  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$

**d)**  $9y'' + 6y' + y = 0$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 13/3$

**e)**  $y'' - 25y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 20$

**f)**  $y'' + y' - 6y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 10$

2

Encontre as soluções gerais das EDO's não homogêneas.

**a)**  $y'' + 9y = 2\text{sen}(2x) + \text{cos}(2x)$

**b)**  $y'' + 9y = 2\text{sen}(2x)$

**c)**  $y'' - y = 6e^{2x}$

**d)**  $y'' - y = 2e^x$

**e)**  $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$

# Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000. v 2.

FINEY, Ross L.; GIORDANO, Frank R.; WEIR, Maurice D. **Cálculo de George B. Thomas**. São Paulo: Addison-Wesley, 2003. v 2.

LANG, Serge. **Calculus of several variables**. 3th ed. New York: Springer, 1987.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Harbra, 1982. v 2.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: MacGraw-Hill, 1985. v 2.

Esta edição foi produzida em **mês de 2012** no Rio Grande do Norte, pela Secretaria de Educação a Distância da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (SEDIS/UFRN). Utilizando-se Helvetica Lt Std Condensed para corpo do texto e Helvetica Lt Std Condensed Black títulos e subtítulos sobre papel offset 90 g/m<sup>2</sup>.

**Impresso na nome da gráfica**

Foram impressos **1.000** exemplares desta edição.

SEDIS Secretaria de Educação a Distância – UFRN | CampusUniversitário  
Praça Cívica | Natal/RN | CEP 59.078-970 | [sedis@sedis.ufrn.br](mailto:sedis@sedis.ufrn.br) | [www.sedis.ufrn.br](http://www.sedis.ufrn.br)



Ministério da  
Educação

